㎡ 第一章　事件与概率

1、解：

(1) P｛只订购 A 的｝=P{A(B∪C)}＝P(A)-{P(AB)+P(AC)-P(ABC)}=0.45-0.1.-0.08+0.03=0.30.

(2) P｛只订购 A 及 B 的｝=P{AB}-C｝=P(AB)-P(ABC)=0.10-0.03=0.07

(3) P｛只订购 A 的｝=0.30,

P｛只订购 B 的｝=P{B-(A∪C)}=0.35-(0.10+0.05-0.03)=0.23.

P｛只订购 C 的｝=P{C-(A∪B)}=0.30-(0.05+0.08-0.03)=0.20.

∴P｛只订购一种报纸的｝=P{只订购 A}＋P{只订购 B}＋P{只订购 C}=0.30+0.23+0.20=0.73.

(4) P{正好订购两种报纸的}

＝P{(AB-C) ∪(AC-B) ∪(BC-A)}=P(AB-ABC)+P(AC-ABC)+P(BC-ABC)

=(0.1-0.03)+(0.08-0.03)+.(0.05-0.03)=0.07+0.05+0.02=0.14.

(5) P｛至少订购一种报纸的｝= P｛只订一种的｝+ P｛恰订两种的｝+ P｛恰订三种的｝

=0.73+0.14+0.03=0.90.

(6) P｛不订任何报纸的｝=1-0.90=0.10.

2、解：（1）ABC$=A\Rightarrow BC\supset A(ABC\subset A\text{显然})\Rightarrow B\supset A\text{且}C\supset A$，若 A 发生，则 B 与 C 必同时发生。

（2）$A\cup B\cup C=A\Rightarrow B\cup C\subset A\Rightarrow B\subset A\text{且}C\subset A$，B 发生或 C 发生，均导致 A 发生。

（3）$AB\subset C\Rightarrow A$与 B 同时发生必导致 C 发生。

（4）$A\subset\overline{BC}\Rightarrow A\subset\overline{B}\cup\overline{C}$，A 发生，则 B 与 C 至少有一不发生。

3、解： $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=A_1+(A_2-A_1)+\cdots+(A_n-A_1-\cdots-A_{n-1})$

$$(\text{或})=A_1+A_2\overline{A_1}+\cdots+A_n\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{n-1}.$$

4、解：（1）$AB\overline{C}$={抽到的是男同学，又不爱唱歌，又不是运动员}；

$A\overline{B}C$={抽到的是男同学，又爱唱歌，又是运动员}。

（2）$ABC=A\Rightarrow BC\supset A$，当男同学都不爱唱歌且是运动员时成立。

（3）当不是运动员的学生必是不爱唱歌的时，$\overline{C}\subset B$成立。

（4）A=B 及$\overline{A}=C\Rightarrow A=B=\overline{C}$，当男学生的全体也就是不爱唱歌的学生全体，也就不是运动员的学生全体时成立。也可表述为：当男学生不爱唱歌且不爱唱歌的一定是男学生，并且男学生不是运动员且不是运动员的是男学生时成立。

5、解：设袋中有三个球，编号为 1，2，3，每次摸一个球。样本空间共有 3 个样本点（1），（2），（3）。设$A=\{1,2\},B=\{1,3\},C=\{3\}$，则$\overline{A}=\{3\}$，$A\cup B=\{1,2,3\}$，$A\cap B=\{1\}$，$A-B=\{2\}$，

$A+C=\{1,2,3\}$。

6、解：（1）{至少发生一个}= $A\cup B\cup C\cup D$.

（2）{恰发生两个}= $AB\overline{C}\,\overline{D}+AC\overline{B}\,\overline{D}+AD\overline{B}\,\overline{C}+BC\overline{A}\,\overline{D}+CD\overline{A}\,\overline{B}+BD\overline{A}\,\overline{C}$.

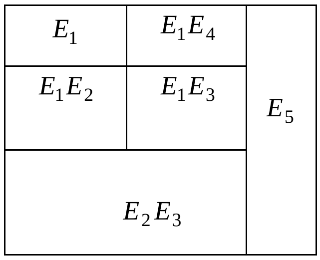
（3）{A，B 都发生而 C，D 都不发生}= $AB\overline{C}\,\overline{D}$.

（4）{都不发生}= $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}=\overline{A\cup B\cup C\cup D}$.

（5）{至多发生一个}= $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+B\overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D}+C\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D}+D\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

$$=\overline{AB\cup AC\cup AD\cup BC\cup BD\cup CD}.$$

7、解：分析一下 E_i 之间的关系。先依次设样本点 $\omega\in E_i$，再分析此 ω 是否属于 $E_j\,(j\neq i), E_jE_k\,(j\neq i,k\neq i)$ 等。（1） E_6 为不可能事件。



$E_6=\phi,\quad E_0=\Omega$

（2）若 $\omega\in E_5$，则 $\omega\,\overline{\in}\,E_i\,(i=1,2,3,4)$，即 $E_5E_i=\phi$。
（3）若 $\omega\in E_4$，则 $\omega\,\overline{\in}\,E_2,\omega\,\overline{\in}\,E_3$。
（4）若 $\omega\in E_3$，则必有 $\omega\in E_2$ 或 $\omega\in E_1$ 之一发生，但

$\omega\,\overline{\in}\,E_1E_2$。由此得 $E_3E_1\cup E_3E_2=E_{3,}$，$E_1E_2E_3=\phi$。

（5）若 $\omega\in E_2$，则必有 $\omega\in E_1$ 或 $\omega\in E_3$ 之一发生，由此得

$E_2E_1\cup E_2E_3=E_2$。

（6）E_1 中还有这样的点 ω：12345，它仅属于 E_1，而不再属于其它 $E_i\,(i\neq 1,0)$。诸 E_i 之间的关系用文图表示（如图）。

8、解：（1）因为 $(1+x)^n=1+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+nC_n^nx^n$，两边对 x 求导得

$n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2x+\cdots+nC_n^nx^{n-1}$，在其中令 x=1 即得所欲证。

（2）在上式中令 x=-1 即得所欲证。

（3）要原式有意义，必须 $0\le r\le a$。由于 $C_{a+b}^{a-r}=C_{a+b}^{b+r}$，$C_b^k=C_b^{b-k}$，此题即等于

要证 $\sum_{k=0}^{a}C_a^{k+r}C_b^{b-k}=C_{a+b}^{b+r}$，$0\le r\le a$.利用幂级数乘法可证明此式。因为

$(x+1)^a(x+1)^b=(x+1)^{a+b}$，比较等式两边 x^{b+r} 的系数即得证。

9、解： $P=A_6^1A_5^1A_5^1/A_{11}^3=\dfrac{5}{33}=0.15$

10、解：（1）第一卷出现在旁边，可能出现在左边或右边，剩下四卷可在剩下四个位置上任意排，所以 $p=2\times 4!/5!=2/5$

（2）可能有第一卷出现在左边而第五卷出现右边，或者第一卷出现在右边而第五卷出现在左边，剩下三卷可在中间三人上位置上任意排，所以 $p=2\times 3!/5!=1/10$

（3）p=P{第一卷出现在旁边}+P{第五卷出现旁边}-P{第一卷及第五卷出现在旁边}=$\frac{2}{5}+\frac{2}{5}-\frac{1}{10}=\frac{7}{10}$.

（4）这里事件是（3）中事件的对立事件，所以 $P=1-7/10=3/10$

（5）第三卷居中，其余四卷在剩下四个位置上可任意排，所以$P=1\times 4!/5!=1/5$

11、解：末位数吸可能是 2 或 4。当末位数是 2（或 4）时，前两位数字从剩下四个数字中选排，所以 $P=2\times A_4^2/A_5^3=2/5$

12、解：$P=C_n^{m_1}C_n^{m_2}C_n^{m_3}/3C_{3n}^m$

13、解：P{两球颜色相同}=P{两球均白}+P{两球均黑}+P{两球均红}

$$=\frac{3}{25}\times\frac{10}{25}+\frac{7}{25}\times\frac{6}{25}+\frac{15}{25}\times\frac{9}{25}=\frac{207}{625}=0.33.$$

14、解：若取出的号码是按严格上升次序排列，则 n 个号码必然全不相同，$n\le N$。N 个不同号码可产生$n!$种不同的排列，其中只有一个是按严格上升次序的排列，也就是说，一种组合对应一种严格上升排列，所以共有 C_N^n 种按严格上升次序的排列。总可能场合数为 N^n，故题中欲求的概率为$P=C_N^n/N^n$.

15、解法一：先引入重复组合的概念。从 n 个不同的元素里，每次取出 m 个元素，元素可以重复选取，不管怎样的顺序并成一组，叫做从 n 个元素里每次取 m 个元素的重复组合，其组合种数记为$\tilde{C}_n^m=C_{n+m-1}^m$. 这个公式的证明思路是，把 n 个不同的元素编号为$1,2,\cdots,$n，再把重复组合的每一组中数从小到大排列，每个数依次加上$0,1,\cdots,m-1$,则这一组数就变成了从$1,2,\cdots,n+m-1$共$n+m-1$个数中，取出 m 个数的不重复组合中的一组，这种运算构成两者之间一一对应。

若取出 n 个号码按上升（不一定严格）次序排列，与上题同理可得，一个重复组合对应一种按上升次序的排列，所以共有$\tilde{C}_N^n$种按上升次序的排列，总可能场合数为N^n，从而

$$P=\tilde{C}_N^n/N^n=C_{N+n-1}^n/N^n.$$

解法二：现按另一思路求解。取出的 n 个数中间可设 n-1 个间壁。当取出的 n 个数全部

相同时，可以看成中间没有间壁，故间壁有 C_{n-1}^0 种取法；这时只需取一个数字，有 C_N^1 种取法；这种场合的种数有 $C_{n-1}^0 C_N^1$ 种。当 n 个数由小大两个数填上，而间壁的位置有 C_{n-1}^1 种取法；数字有 C_N^2 种取法；这种场合的种数有 $C_{n-1}^1 C_N^2$ 种。当 n 个数由三样数构成时，可得场合种数为 $C_{n-1}^2 C_N^3$ 种，等等。最后，当 n 个数均为不同数字时，有 n-1 个间壁，有 C_{n-1}^{n-1} 种取法；数字有 C_N^n 种取法；这种场合种数的 $C_{n-1}^{n-1} C_N^n$ 种。所以共有有利场合数为：

$$m_1 = C_{n-1}^0 C_N^1 + C_{n-1}^1 C_N^2 + C_{n-1}^2 C_N^3 + \cdots + C_{n-1}^{n-1} C_N^n = C_{N+n-1}^n.$$

此式证明见本章第 8 题（3）。总可能场合数为 $n_1 = N^n$，故所还应的概率为

$$P = m_1 / n_1 = C_{N+n-1}^n / N^n.$$

16、解：因为不放回，所以 n 个数不重复。从 $\{1,2,\cdots,M-1\}$ 中取出 m-1 个数，从 $\{M+1,\cdots N\}$ 中取出 $n-m$ 个数，数 M 一定取出，把这 n 个数按大小次序重新排列，则必有 $x_m = M$。故 $P = C_{M-1}^{m-1}\, C_1^1\, C_{N-M}^{n-m} / C_N^n$。当 $M-1 < m-1$ 或 $N-M < n-m$ 时，概率 $P = 0$.

17、解：从 $1,2,\cdots,N$ 中有放回地取 n 个数，这 n 个数有三类：<M，=M，>M。如果我们固定 k_1 次是取到<M 的数，$k2$ 次是取到>M 的数，当然其余一定是取到 M 的。

当次数固定后，<M 的有 $(M-1)^{k_1}$ 种可能的取法（因为每一次都可以从 $M-1$ 个数中取一个），>M 的有 $(N-M)^{k_2}$ 种可能的取法，而=M 的只有一种取法（即全是 M），所以可能的取法有 $(M-1)^{k_1}\ (N-M)^{k_2}$ 种。对于确定的 k_1, k_2 来说，在 n 次取数中，固定哪 k_1 次取到<M 的数，哪 k_2 次取到>M 的数，这共有 $C_n^{k_1} \times_{n-k_1}^{k_2}$ 种不同的固定方式，因此 k_1 次取到<M 的数，k_2 次取到>M 的数的可能取法有 $C_n^{k_1} \times_{n-k_1}^{k_2} (M-1)^{k_1} (N-M)^{k_2}$ 种。

设 B 表示事件"把取出的 n 个数从小到大重新排列后第 m 个数等于 M"，则 B 出现就是 k_1 次取到<M 的数，k_2 次取到>M 的数的数，$0 \le k_1 \le m-1, 0 \le k_2 \le n-m$，因此 B 包含的所有可能的取法有 $\sum_{k_1=0}^{m-1} \sum_{k_2=0}^{n-m} C_n^{k_1}\ C_{n-k_1}^{k_2} (M-1)^{k_1} (N-M)^{k_2}$ 种。所以

$$P(B)=\frac{1}{N^n}\sum_{k_1=0}^{m-1}\sum_{k_2=0}^{n-m}C_n^{k_1}\ C_{n-k_1}^{k_2}\times(M-1)^{k_1}(N-M)^{k_2}\ .$$

18、解：有利场合是，先从 6 双中取出一双，其两只全取出；再从剩下的 5 双中取出两双，从其每双中取出一只。所以欲求的概率为 $P=C_6^1C_2^2C_5^2C_2^1C_2^1/C_{12}^4=\dfrac{16}{33}=0.48$

19、解：（1）有利场合是，先从 n 双中取出 2r 双，再从每双中取出一只。

$$P=C_n^{2r}(C_2^1)^{2r}/C_{2n}^{2r},\quad (2r<n)$$

（2）有利场合是，先从 n 双中取出一双，其两只全取出，再从剩下的 $n-1$ 双中取出 $2r-2$ 双，从鞭每双中取出一只。

$$P=C_n^1C_2^2C_{n-1}^{2r-2}(C_2^1)^{2r-2}/C_{2n}^{2r}=n2^{2r-2}C_{n-1}^{2r-2}/C_{2n}^{2r}\,.$$

（3）$P=2^{2r-4}C_n^2C_{n-2}^{2r-4}/C_{2n}^{2r}$.

（4）$P=C_n^r(C_2^2)^r/C_{2n}^{2r}=C_n^r/C_{2n}^{2r}$.

20、解：（1）P{任意取出两球，号码为 1，2}=$1/C_n^2$.

（2）任取 3 个球无号码 1，有利场合是从除去 1 号球外的 $n-1$ 个球中任取 3 个球的组合数，故　P{任取 3 球，无号码 1}$=C_{n-1}^3/C_n^3$.

（3）P{任取 5 球，号码 1,2,3 中至少出现 1 个}

=$1-P$ {任取 5 球，号码 1,2,3 不出现}$=1-C_{n-3}^5/C_n^5$.

其中任取 5 球无号码 1,2,3，有利场合是从除去 1,2,3 号球外的 $n-3$ 个球中任取 5 个球的组合数。

21、解：（1）有利场合是，前 $k-1$ 次从 $N-1$ 个号中（除 1 号外）抽了，第 k 次取到 1 号球，

$$P=(N-1)^{k-1}\cdot 1/N^k=(N-1)^{k-1}/N^k$$

（2）考虑前 k 次摸球的情况，$P=A_{N-1}^{k-1}\cdot 1/A_N^k=1/N$ 。

22、解法一：设 A={甲掷出正面数>乙掷出正面数}，B={甲掷出反面数>乙掷出反面数}。考虑 $\overline{A}$={={甲掷出正面数≤乙掷出正面数}。设 $\overline{A}$ 发生。若乙掷出 n 次正面，则甲至多掷出 n 次正面，也就是说乙掷出 0 次反面，甲至少掷出 1 次反面，从而甲掷出反面数>乙掷出反面数。若乙掷出 $n-1$ 次正面，则甲至多掷出 $n-1$ 次正面，也就是说乙掷出 1 次反面，甲至少掷出 2 次反面，从而也有甲掷出反面数>乙掷出反面数，等等。由此可得

$$\overline{A}=\{\text{甲掷出正面数}\le\text{乙掷出正面数}\}=\{\text{甲掷出反面数}\le\text{乙掷出反面数}\}=B\,.$$

$$\therefore P(A)+P(B)=P(A)+P(A)=1$$

显然 A 与 B 是等可能的，因为每人各自掷出正面与反面的可能性相同，所以 $P(A)=P(B)$，从而 $P(A)=\dfrac{1}{2}$。

解法二：甲掷出 $n+1$ 个硬币共有 2^{n+1} 个等可能场合，其中有 C_{n+1}^0 个出现 0 次正面，有 C_{n+1}^1 个出现 1 次正面，…，C_{n+1}^{n+1} 个出现 $n+1$ 次正面。乙掷 n 个硬币共有 2^n 个等可能场合，其中有 C_n^0 个出现 0 次正面，C_n^1 个出现 1 次正面，…，C_n^n 个出现 n 次正面。若甲掷 $n+1$ 个硬币，乙掷 n 个硬币，则共有 $n_1=2^{n+1}\cdot 2^n=2^{2n+1}$ 种等可能场合，其中甲掷出正面比乙掷出正面多的有利场合数有

$$m_1=C_{n+1}^1C_n^0+C_{n+1}^2(C_n^0+C_n^1)+C_{n+1}^3(C_n^0+C_n^1+C_n^2)+\cdots$$

$$=C_{n+1}^n(C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^{n-1})+C_{n+1}^{n+1}(C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n)$$

利用公式 $C_{n+1}^r=C_n^r+C_n^{r-1}$ 及 $C_{n+1}^{n+1}=C_n^n$ 得

$$m_1=(C_n^0+C_n^1)C_n^0+(C_n^1+C_n^2)(C_n^0+C_n^1)+(C_n^2+C_n^3)(C_n^0+C_n^1+C_n^2)+\cdots+$$
$$(C_n^{n-1}+C_n^n)(C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^{n-1})+C_n^n(C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n)$$

$$=\left[(C_n^0)^2+C^1C_n^0\right]+\left[(C_n^1)^2+C^1C_n^0+C_n^2\sum_{i<2}C_n^1\right]+\left[(C_n^2)^2+C_n^1C_n^0+C_n^2\sum_{i<3}C_n^1\right]+$$

$$+\cdots+\left[(C_n^{n-1})^2+C_n^{n-1}\sum_{1<n-1}C_n^1+C_n^n\sum_{i<n}C_n^1\right]+\left[(C_n^n)^2+C_n^n\sum_{i<n}C_n^1\right]+$$

$$=\sum_{i=0}^n(C_n^1)^2+2\sum_{n\ge j>i\ge 0}C_n^1C_n^1=\left(\sum_{i=0}^nC_n^1\right)^2$$

所以欲求的概率为 $P=m_1/n_1=2^{2n}/2^{2n+1}=\dfrac{1}{2}$.

应注意，甲掷出 $0,1,\cdots,n+1$ 个正面的 $n+2$ 个场合不是等可能的。

23、解：事件“一颗投 4 次至少得到一个六点”的对立事件为“一颗投 4 次没有一个六点”，后者有有利场合为，除去六点外的剩下五个点允许重复地排在四个位置上和排列数，故，

P{一颗投 4 次至少得到一个六点}=$1-${一颗投 4 次没有一个六点}=$1-5^4/6^4=0.5177$.

投两颗骰子共有 36 种可能结果，除双六（6，6）点外，还有 35 种结果，故

P{两颗投 24 次至少得到一个双六}

=$1-${两颗投 24 次没有一个双六}=$1-35^{24}/36^{24}=0.4914$.

比较知，前者机会较大。

24、解：$P=C_{13}^5C_{13}^3C_{13}^3C_{13}^2/C_{52}^{13}=0.0129$

25、解：$P=\dfrac{C_4^1C_4^4C_{43}^9C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}}{C_{52}^{13}C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}}=\dfrac{4\times C_{43}^9}{C_{52}^{13}}=0.0106$.

或解为，4 张 A 集中在特定一个手中的概率为 $C_4^4C_{48}^9/C_{52}^{13}$，所以 4 张 A 集中在一个人手中的概率为 $P=4\times C_{48}^9/C_{52}^{13}=0.0106$.

26、解：（1）$P=4/C_{52}^5=0.0000015$. 这里设 A 只打大头，若认为可打两头 AKQJ10 及 A2345，则答案有变，下同。

（2）取出的一张可民由 K，Q，…，6 八个数中之一打头，所以

$$P=C_4^1C_8^1\ /\ C_{52}^5=0.0000123.$$

（3）取出的四张同点牌为 13 个点中的某一点，再从剩下 48 张牌中取出 1 张，所以 $P=C_{13}^1C_4^4/C_{52}^5=0.00024.$

（4）取出的 3 张同点占有 13 个点中一个点，接着取出的两张同点占有其余 12 个点中的一个点，所以 $P=C_{13}^1C_4^3C_{12}^1C_4^2/C_{52}^5=0.00144.$

(5)5 张同花可以是四种花中任一种，在同一种花中，5 张牌占有 13 个点中 5 个点，所以 $P=C_4^1C_{13}^5/C_{52}^5=0.00198.$

(6){异花顺次五张牌}={顺次五张牌}－{同花顺次五张牌}。顺次五张牌分别以 A，K，…，6 九个数中之一打头，每张可以有四种不同的花；而同花顺次中花色只能是四种花中一种。所以

p = P{顺次五张牌}－{同花顺次五张牌}$=\left[C_9^1(C_4^1)^5-C_4^1C_9^1\right]\ /C_{52}^5=0.0000294.$

（7）三张同点牌占有 13 个点中一个占有剩下 12 个点中两个点，所以 $P=C_{13}^1C_4^3C_{12}^2(C_4^1)^2/C_{52}^5=0.0211.$

（8）P{五张中有两对}=P{五张中两对不同点}+P{五张中两对同点}

$$=C_{12}^2C_4^2C_4^2C_{11}^1C_4^1/C_{52}^5+C_{13}^1C_4^4C_{12}^1C_4^1/C_{52}^5=0.0475.$$

（9）$p=C_{13}^1C_4^2C_{12}^3(C_4^1)^3/C_{52}^5=0.423.$

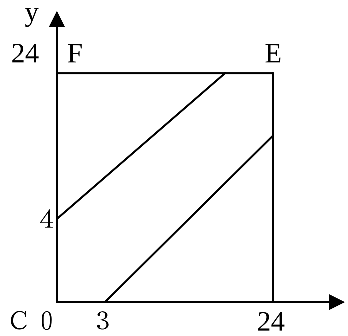
（10）若记（i）事件为 A_i，则 $A_1\subset A_5,A_2\subset A_5,A_3\subset A_8,A_4\subset A_9$ 而事件

$A_5,\cdots,A_9$ 两两不相容，所以 $p=1-P\left(\bigcup_{i=5}^{9}A_i\right)=1-\sum_{i=5}^{9}P(A_i)=0.506.$

27、**解**：设 x，y 分别为此二船到达码头的时间，则 $0\le x\le 24,\ 0\le y\le 24$. 两船到达码头的时间与由上述条件决定的正方形内的点是一一对应的（如图）

设 A 表事件“一船要等待空出码头”，则 A 发生意味着同时满足下列两不等式

$x-y\le 3$, $y-x\le 4$

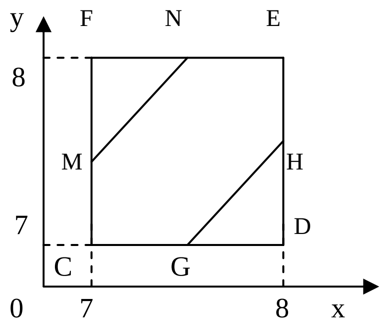


由几何概率得，事件 A 的概率，等于正方形ＣＤＥＦ中直线 $x-y\le 3$ 及 $y-x\le 4$ 之间的部分面积，与正方形 CDEF 的面积之比，即

$$PA=\left[24^2-\left(\frac{1}{2}\times 20^2+\frac{1}{2}\times 21^2\right)\right]/24^2=311/1152=0.27$$

28、**解**：设 x，y 分别为此二人到达时间，则 $7\le x\le 8, 7\le y\le 8$。显然，此二人到达时间 (x,y) 与由上述条件决定的正方形 CDEF 内和点是一一对应的(如图)。

设 A 表事件“其中一人必须等另外一人的时间 1/2 小时以上“，则 A 发生意味着满足如下不等式 $x-y>\frac{1}{2}$ 或 $y-x>\frac{1}{2}$。由几何概率得，



事件 A 的概率等于ΔGDH 及ΔFMN 的面积之和与正方形 CDEF 的面积之比，所以

$$P(A)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})/(1\times 1)=\frac{1}{4}$$

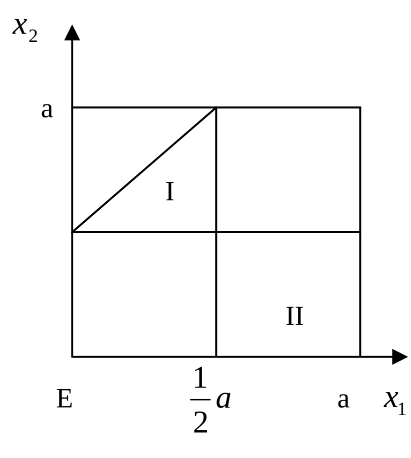
29、**解**：设 $AB=a, AX_1=x_1, AX_2=x_2$ 则

$0\le x_1\le a,\ 0\le x_2\le a$,

(x_1,x_2) 与由上述条件决定的正方形 EFGH 内的点是一一对应的（如图）。

（I）设 $x_2>x_1$。 $AX_1=x_1$， $X_1X_2=x_2-x_1$，

$X_2B=a-x_2$，则三线段构成三角形的充要条件是



$$\begin{cases} x_1+(x_2-x_1)>a-x_2 \Rightarrow x_2>\frac{1}{2}a \\ x_1+(a-x_2)>(x_2-x_1) \Rightarrow x_1+\frac{1}{2}a>x_2 \\ (x_2-x_1)+(a-x_2)>x_1 \Rightarrow x_1<\frac{1}{2}a, \end{cases}$$ 这决定三角形区域 I。

（II）设 $x_1>x_2$。 $AX_1=x_1$， $X_1X_2=x_1-x_2$，$X_2B=a-x_2$，则三线段构成三角形的充要条件是

$$\begin{cases} x_1+(x_1-x_2)>a-x_2 \Rightarrow x_1>\frac{1}{2}a \\ (x_1-x_2)+(a-x_2)>x_1 \Rightarrow x_2<\frac{1}{2}a \\ x_1+(a-x_2)>x_1-x_2 \Rightarrow a>0, \end{cases}$$ 这决定区域 II。

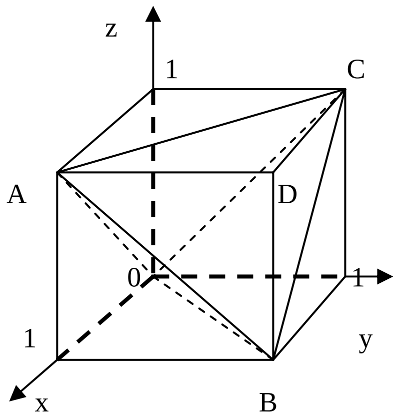
（III）当 $x_1=x_2$ 时，不能构成三角形。由几何概率知，

$$P\{\text{三线段构成三角形}\}=\frac{\Delta(I)\text{面积}+\text{矩形}(II)\text{面积}}{\text{正方形}EFGH\text{面积}}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}a\times\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a\times\frac{1}{2}a\right)/a^2=\frac{3}{8}$$

30、解：设 0 到三点的三线段长分别为 x,y,z，即相应的右端点坐标为 x,y,z，显然 $0\le x,y,z\le 1$。这三条线段构成三角形的充要条件是：
$x+y>z,\ x+z>y,\ y+z>x$。

在线段[0，1]上任意投三点 x,y,z。与立方体 $0\le x\le 1$，$0\le y\le 1$，$0\le z\le 1$ 中的点 (x,y,z) 一一对应，可见所求“构成三角形”的概率，等价于在边长为 1 的立方体 T 中均匀地掷点，而点落在 $x+y>z,x+z>y,y+z>x$ 区域中的概率；这也就是落在图中由ΔADC，ΔADB，ΔBDC，ΔAOC，ΔAOB，ΔBOC 所围成的区域 G 中的概率。由于 $V(T)=1$，

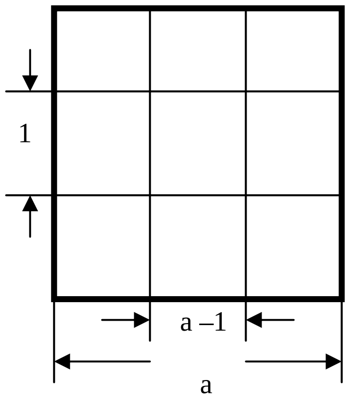


$$V(G)=1^3-3\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1^3=\frac{1}{2},$$

$$\therefore p=V(G)/V(T)=\frac{1}{2}$$

由此得，能与不能构成三角形两事件的概率一样大。

31、解：设方格边长为 a。当硬币圆心落于图中阴影部分才与边界不相交（图中只取一个方格）。由几何概率得



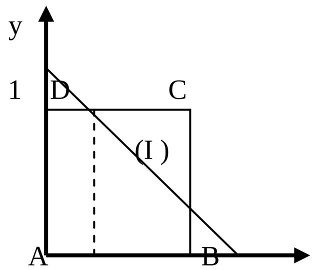
$$P\{硬币与线不相交\}=\frac{阴影部分面积}{方格面积}$$

$$=(a-1)^2/a^2.$$

令 $\quad (a-1)^2/a^2=0.01$

因为当$a\le 1$时，硬币必与线相交（必然事件），故只需考虑 a>1．当止式得 $\quad (a-1)/a=0.1, \qquad a=1\frac{1}{9}$。即当方格边长 $\;a<1\frac{1}{9}$时，才能使硬币与线不相交的概率小于 1%。

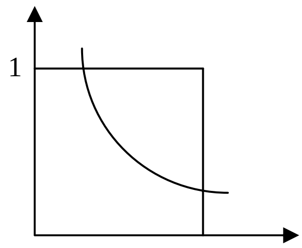
32、解：从（0，1）中取出的两数分别为 x,y，则(x,y)与正方形 ABCD 内的点一一对应。



（1） 直线$x+y=1.2$与 BC 交点坐标为（1，0.2），与 DC 点坐标为（0.2，1），所以由几何概率可得

$$P\{两数之和小于1.2\}=\frac{阴影区域(I)面积}{正方形面积}=\left(1-\frac{1}{2}\times 0.8\times 0.8\right)/1=0.68$$

（2）双曲线$xy=\frac{1}{4}$与 BC 交点坐标为$\left(1,\frac{1}{4}\right)$

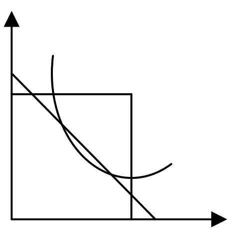


与 DC 交点坐标为$\left(\frac{1}{4},1\right)$，所以由几何概率得

$$P\left\{两数之积小于\frac{1}{4}\right\}=\frac{阴影区域(II)面积}{正方形面积}$$

$$=\frac{1}{4}\times 1+\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{4x}dx=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln x\Big|_{\frac{1}{4}}^{1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln 4=0.6$$

（3）直线$x+y=1.2$与曲线$xy=\frac{1}{4}$的交点坐标为（如图）



$$\begin{cases}x_1=0.6+0.1\sqrt{11}=0.932\\ y_1=0.6-0.1\sqrt{11}=0.268,\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2=0.268\\ y_2=0.932\end{cases}.$$

∴P{两数之和小于 1.2，两数之积小于$\frac{1}{4}$}

$$= \frac{\text{阴影区域}(III)\text{面积}}{\text{正方形面积}} = 0.2\times 1 + \int_{0.2}^{0.268}(-x+1.2)dx + \int_{0.268}^{0.932}\frac{1}{4x}dx + \int_{0.932}^{1}(-x+1.2)dx$$

$$= 0.2 + \left(-\frac{1}{2}x^2 + 1.2x\right)\Bigg|_{0.2}^{0.268} + \frac{1}{4}\ln x\Bigg|_{0.268}^{0.932} + \left(-\frac{1}{2}x^2 + 1.2x\right)\Bigg|_{0.932}^{1}$$

$$= 0.2 + 0.0657 + 0.3116 + 0.0160 = 0.593$$

33、证：当 $n=2$ 时，$A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 - A_1A_2)$，$A_1$ 与 $A_2 - A_1A_2$ 两者不相容，所以

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_2 - A_1A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2).$$

此即当 $n=2$ 时原式成立。

设对 $n-1$ 原式成立，现证对 n 原式也成立。

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1} \cup A_n) = P\{A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1} \cup A_n\}$$

$$= P(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) + P(A_n) - P\{A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1} \cup A_n\}$$

$$= P(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) + P(A_n) - P\{A_1A_n \cup A_2A_n \cup \cdots \cup A_{n-1}A_n\}$$

对前后两项分别应用归纳假设得

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1} \cup A_n)$$

$$= \left\{\sum_{n=1}^{n-1} P(A_i) - \sum_{n-1\ge j>i\ge 1} P(A_iA_j) + \cdots + (-1)^{n-2}P(A_1\cdots A_{n-1})\right\} + P(A_n)$$

$$- \left\{\sum_{i=1}^{n-1} P(A_iA_n) - \sum_{n-1\ge j>i\ge 1} P(A_iA_nA_jA_n) + \cdots + (-1)^{n-2}P(A_iA_nA_jA_n\cdots A_{n-1}A_n)\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{n\ge j>i\ge 1} P(A_iA_j) + \cdots + (-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

至此，原式得证。

34、解：设 $A_i = \{$第i 个战士拿到自己的枪$\}$，$i=1,2,\cdots,N$ 。A_i 之间相容，现用上题公式解。

$$P(A_i) = (N-1)!\times 1/N! = 1/N,$$

$$P(A_iA_j) = (N-2)!\times 1\times 1/N! = 1/N! = 1/A_N^2 \quad (i\ne j), \cdots\cdots, P(A_1A_2\cdots A_N) = 1/N!.$$

由公式得

P{至少有一个战士拿到自己的枪} $= P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N)$

$$=\sum_{i=1}^{N}P(A_i)-\sum_{N\ge j>i\ge 1}P(A_iA_j)+\cdots+(-1)^{N-1}P(A_1A_2\cdots A_N)$$

$$=C_N^1\frac{1}{N}-C_N^2\frac{1}{A_N^2}+\cdots+(-1)^{N-1}C_N^N\frac{1}{N!}$$

$$=1-\frac{1}{2\,!}+\cdots+(-1)^{N-1}\frac{1}{N!}=\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}$$

注：由此可求得，事件“至少有一个战士拿到自己的枪”的对立事件的概率为

P{N 个战士没有一个战士拿到自己的枪} $=1-\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}=\sum_{k=2}^{N}\frac{(-1)^{k}}{k!}=\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^{k}}{k!}$

35、**解**：某 k 个指定的战士拿到自己的枪的概率是$1=1/A_N^K$。利用上题注（视这里$N-k$个战士都没有拿到自己枪的概率为$P_2=\sum_{j=0}^{N-K}\frac{(-1)^j}{j\,!}$。恰有 k 个战士拿到自己的枪，则这 k 个战士可以是 N 个战士中任意的 k 个战士，从 N 个战士中选出一组 k 个战士共有C_N^k种选法，所以事件“恰有 k 个战士拿到自己枪“的概率，是事件”某 k 个指定战士拿到自己的枪，且其余$N-k$个战士没有拿到自己的枪“概率的C_N^k倍，可得

P{恰有 k 个战士拿到自己枪} $=C_N^k-\frac{1}{A_N^k}\sum_{j=0}^{N-k}\frac{(-1)^j}{j\,!}=\frac{1}{k\,!}\sum_{j=0}^{N-k}\frac{(-1)^j}{j\,!}$.

36、解：设考签编号为$1,2,\cdots,N$，记事件$A_i=\{第x号考签未被抽到\}$，则

$P(A_i)=(N-1)^n/N^n$，

$P(A_iA_j)=(N-2)^n/N^n(i\neq j),\cdots\cdots$，

$P(A_1A_2\cdots A_N)=(N-N)^n/N^n=0$；

诸A_i相容，利用第 33 题公式计算得

P={至少有一张考签未被抽到} $=P\{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_N\}$

$$=\sum_{i=1}^{N}P(A_i)-\sum_{N\ge j>i\ge 1}P(A_iA_j)+\cdots+(-1)^{N-1}P(A_1A_2\cdots A_N)$$

$$=C_N^1\frac{(N-1)^n}{N^n}-C_N^2\frac{(n-2)^n}{N^n}+\cdots+(-1)^{N-2}C_N^{N-1}\frac{1}{N^n}+0$$

$$=\sum_{i=1}^{N-1}(-1)^{i-1}C_N^1\ \frac{(N-i)^n}{N^n}.$$

37、**解**：这些比赛的可能结果，可以用下面方法表示：

aa，acc，acbb，acbaa，acbacc，acbacbb，…

bb，bcc，bcaa，bcabb，bcabcc，bcabcaa，…

其中 a 表甲胜，b 表乙胜，c 表丙胜。

在这些结果中，恰巧包含 k 个字母的事件发生的概率应为 $\frac{1}{2^k}$，如 aa 发生的概率为 1/4，acbb 发生的概率为 1/16 等等。则

$$p(c)=\left[P(acc)+P(bcc)\right]+\left[P(acbacc)+P(bcabcc)\right]+\cdots=2\times\frac{1}{2^3}+2\times\frac{1}{2^6}+2\times\frac{1}{2^9}+\cdots=\frac{2}{7}.$$

由于甲，乙两人所处的地位是对称的，所以 $p(a)=p(b)$，得

$$p(a)=p(b)=\frac{1}{2}(1-\frac{2}{7})=\frac{5}{14}.$$

38、证：设父胜子的概率为 p_1，子胜父的概率为 p_2，父胜母，母胜父，母胜子，子胜母的概率分别是 p_3,p_4,p_5,p_6。则诸 p_i 间有关系：$p_5+p_6=1,\ p_1<p_3$。仿上题，设首局为父对母，比赛的可能结果为： $a_3a_1,a_3c_2c_6,a_3c_2b_5b_4,a_3c_2b_5a_3$，

$b_4b_5,b_4c_6c_2,b_4c_6a_1a_3,b_{54}c_6a_1b_4$，

a 表父胜，但父胜母与父胜子的概率不同，为明确起见，比赛结果中字母附加下标，下标中 i 对应概率 p_i，故

$$p_1(a)=P(a_3a_1)+P(a_3c_2b_5a_3)+P(b_4c_6a_1a_3)=p_3p_1+p_3p_2p_5p_3+p_4p_6p_1p_3$$

类似地，第一局若父对子，则可得

$$p_2(a)=P(a_1a_3)+P(a_1c_4b_6a_1)+P(c_2b_5a_3a_1)=p_1p_3+p_1p_4p_6p_1+p_2p_5p_3p_1$$

第一局若子对母，则

$$p_3(a)=P(c_6a_1a_3)+P(b_5a_3a_1)=p_6p_1p_3+p_5p_3p_1=p_1p_3(p_6+p_5)=p_1p_3$$

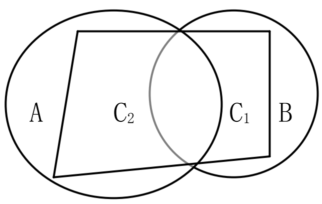
易见 $p_3(a)<p_2(a)$。由于 $p_1<p_3$，所以 $p_1p_4p_6p_1<p_4p_6p_1p_3$，$p_2p_5p_3p_1<p_3p_2p_5p_3$，因此 $p_2(a)<p_1(a)$。

从而 $p_1(a)>p_2(a)>p_3(a)$ 这说明父的决策最优。

39、**解**：$P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A\cup B-B)=P(A\cup B)-P(B)=r-q$

$$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-r.$$

40、证：设 $BC=C_1,C(A-B)=C_2$.由 $\overline{C}\supset\overline{A}\overline{B}$ 可得，$C\subset A\cup B$，



$\therefore C=C_1\cup C_2$， $C_1\cap C_2=\phi$ （1）

又 $C\supset AB\ \therefore AC_1=A(BC)=AB$

再由 $P(B)\geq P(C_1)$ 得

$P(AC_1)=P(AB)=P(A)P(B)\geq P(A)P(C_1)$ （2）

由 $C_2\subset A$ 并利用 $P(A)\leq 1$ 得

$P(AC_2)=P(C_2)\geq P(A)P(C_2)$ （3）

由（1），（2），（3）可得

$$\begin{aligned}P(AC)&=P\{A(C_1\cup C_2)\}=P(AC_1\cup AC_2)\\&=P(AC_1)+P(AC_2)\geq P(A)P(C_1)+P(A)P(C_2)\\&=P(A)[P(C_1)+P(C_2)]=P(A)P(C)\end{aligned}$$

41、证：（1） $A\supset A_1A_2$，由单调性及 $P(A_1\cup A_2)\leq 1$ 得

$$\begin{aligned}P(A)&\geq P(A_1A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cup A_2)\\&\geq P(A_1)+P(A_2)-1.\end{aligned}$$

（2） $A\supset A_1A_2A_3$，两次利用（1）的结果得

$$\begin{aligned}P(A)&\geq P((A_1A_2)A_3)\geq P(A_3)+P(A_1A_2)-1\\&\geq P(A_3)-1+P(A_1)+P(A_2)-1=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-2\end{aligned}$$

42、解：设 N 阶行列式中元素 a_{ij}，行列式展开式的每一项为不同行不同列元素的乘积。对于每一项中的各个元素，从第一列中取一个元素有 N 种取法，当从第一列中取的元素取定后，再从第二列中取一个元素有 $N-1$ 种取法，接着从第三列中取一个元素有 $N-2$ 种取法，等等。每种取法教都是等可能的，共有 $N!$ 种取法。

设 A_k 表事件{N 阶行列式的项含 a_{kk}}， $k=1,2,\cdots,N$， 则

$$P(A_k)=(N-1)!\cdot\frac{1}{N!}=\frac{1}{N}=\frac{1}{A_N^1},$$

$$P(A_1A_1)=(N-2)!\cdot 1\cdot\frac{1}{N!}=\frac{1}{A_N^2}\qquad (i\neq j),\cdots\cdots$$

$$P(A_1A_2\cdots A_N)=\frac{1}{N!}$$

至少含一个主对角线元素的项的概率为

$$\begin{aligned}P\left(\bigcup_{k=1}^{N}A_k\right)&=\sum_{k=1}^{N}P(A_k)-\sum_{N\geq j>i\geq 1}P(A_1A_1)+\cdots+(-1)^{N-1}P(A_1A_2\cdots A_N)\\&=C_N^1\frac{1}{A_N^1}-C_N^2\frac{1}{A_N^2}+\cdots+(-1)^{N-1}C_N^N\frac{1}{N!}\\&=1-\frac{1}{2!}+\cdots+(-1)^{N-1}\frac{1}{N!}.\end{aligned}$$

由此得包含主对角线元素的项数为 $$N!\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k-1}\frac{1}{k!}$$

注：不含主对角线元素项的概率为

$$P_N=1-P\left(\bigcup_{k=1}^{N}A_k\right)=\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\frac{1}{k!},\qquad \lim_{N\to\infty}P_N=\frac{1}{e}.$$

43、证：设袋中有 A 个球，其中 a 个是白球，不还原随机取出，第 k 次才首次取得白球的概率为 $$P_k=\frac{A_{A-a}^{k-1}A_a^1}{A_A^k}=\frac{a(A-a)(A-a-1)\cdots(A-a-k+2)}{A(A-1)(A-2)\cdots(A-k+1)}\qquad (k=1,2,\cdots,A-a+1).$$

因为袋中有 a 个白球， $A-a$ 个黑球，若一开始总是取到黑球，直到把黑球取完为止，则至迟到第 $A-a+1$ 次一定会取到白球；也就是说，第一次或第二次⋯或至迟到第 $A-a+1$ 次取得

白球事件是必然事件，其概率为 1。所以

$$1 = p_1 + p_2 + \cdots + p_{A-a+1} = \frac{a}{A} + \frac{a(A-a)}{A(A-1)} + \cdots + \frac{a(A-a)\cdots 2\cdot 1}{A(A-1)\cdots(a+1)a}$$

等式两边同乘以 $\frac{A}{a}$ 得

$$1 + \frac{A-a}{A-1} + \frac{(A-a)(A-a-1)}{(A-1)(A-2)} + \cdots + \frac{(A-a)\cdots 2\cdot 1}{(A-1)\cdots(a+1)a} = \frac{A}{a}.$$

44、解：有明显疗效的频率为 368/512=71.9%，所以，某胃溃疡病人若服此药，约有 71.9% 的可能有明显疗效。

45、解：此 $\sigma-$域首先包括 Ω, ϕ, A, B 诸元素，然后通过求逆，并交运算逐步产生新的元素，得共包含 16 个元素：

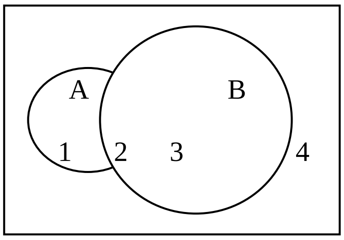
$$\left\{\Omega, \phi, A, B, A, B, AB, AB, AB, AB, AB\bigcup AB, AB\bigcup AB, A\bigcup B, \overline{AB} = \overline{A}\bigcup\overline{B}, AB = A\bigcup B, AB = A\bigcup\overline{B}\right\}$$

证一：现证明它是包含 A，B 的最小 $\sigma-$域。首先它包含 A，B；由于所有集均由 A，B 产生，故最小。集是有限个，故只需证它为代数，即按如下两条验证集系封闭即可：

① 若 $C \in F$，则 $\overline{C} \in F$；

② 若 $C, D \in F$，则 $C\bigcup D \in F$。能动验证知确为代数。

证二：由图知，两个集至多可产生四个部分，可称之为产生集的最小部分，从这四个部分中任取 0，1，2，3，4 个求并集，共同构成



$$C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 16$$

个集。故若能找到 16 个由 A，B 产生的不同的集，则它们一定是由 A，B 产生的 $\sigma-$域，为此只须验证如上 16 个集两两不同就够了。也可在一开始就根据这 16 个集的构成法依次构造出来，即得欲求的 $\sigma-$代数，而不需要再证明。

46、证：记 F={ Ω 的一切子集}

（i）Ω 是 Ω 的子集，所以 $\Omega \in F$。

(ii) 若 $A \in F$，则 A 是 Ω 的子集，$\Omega - A$ 也是 Ω 的子集，所以 $A = \Omega - A \in F$。

(iii) $A_i\,(i = 1,2,\cdots) \in F$，当然有 $\Omega \supset A_i, i = 1,2,\cdots$。任一 $\omega \in \bigcup_i A_i$。必有某一 A_i，使 $\omega \in A_i$，所以 $\omega \in \Omega$，从而 $\Omega \supset \bigcup_i iA_i$，即 $\bigcup_i iA_i$ 也是 Ω 的一个子集，故 $\bigcup_i iA_i \in F$。

∴F 是 $\sigma-$域。

47、证：设 $F_t\,(t \in T)$ 是 $\sigma-$域，记 $F = \bigcup_{t\in T} F_t$.

(i) $\Omega \in$ 每一 F_t，所以 $\Omega \in \bigcap_{t\in T} F_t$，即 $\Omega \in F$.

(ii) $A \in F$，则 $A \in$ 每一 F_t，由 F_t 是 $\sigma-$域得 $\overline{A} \in$ 每一 F_t，所以 $\overline{A} \underset{t\in T}{\in} \bigcup F_t$，从而 $\overline{A} \in F$.

(iii) $A_i(i=1,2,\cdots)\in F$，则诸 A_t 必属于每一 F_t，由于 F_t 是 $\sigma-$ 域，所以 $\bigcup_i A_i\in$ 每一 F_t，

即 $\bigcup_i A_i\in\bigcap_{t\in T}F_t=F$.

∴ f 是 $\sigma-$ 域。

48、证：一维波雷尔 $\sigma-$ 域 $B=m\{[a,b)\}$ 是由左闭右开区间灶产生的 $\sigma-$ 域，$\tilde{B}=M\{(-\infty,x)\}$ 是由形如 $(-\infty,x)$ 区间类产生的 $\sigma-$ 域。

因为 $$[a,b)=(-\infty,b)-(-\infty,a)$$

等式左边是 $\tilde{B}$ 中两个集的差，由此知 $\tilde{B}$ 包含一切形如 $[a,b)$ 的集，而 B 是由一切形如 $[a,b)$ 的集类产生的 $\sigma-$ 域，所以 $\tilde{B}\supset B$ 。

又由于 $$(-\infty,x)=\bigcup_{n=1}^{\infty}[x-n,x-n+1)\ ,$$

等式右边是 B 中集的可列并，由此知 B 包含一切形如 $(-\infty,x)$ 的集，与上段同理得 $B\supset\tilde{B}$.

∴ $\tilde{B}=B$.

49、解：算术中的计数：以 $s(E)$ 表集合 E 包含的元素的个数。（1） $s(E)$ 非负。（2）对 $E_i,i=1,2,\cdots,n$，若任意两个 E_i 与 $E_j(i\neq j)$ 都不包含相同的元素，则 $s\left(\bigcup_{i-1}^{n}E_i\right)=\sum_{i=1}^{n}s(E_i)$，即和集中包含元素的个数等于每个集所包含元素个数之和，集函数 $s(E)$ 具有有限可加性。（3）若 $E=\phi$ 是空集，它不包含任何元素，则有 $s(\phi)=0$ 。

几何度量中的长度：以 $m(E)$ 表区间的长度。（1） $m(E)$ 非负。（2）对区间 $E_i,i=1,2,\cdots$，若任两个 E_i 与 E_j 都不相交，则 $m\left(\bigcup_{i-1}^{\infty}E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}m(E_i)$，$m(E)$ 具有可列可加性。（3）空集 ϕ 的长度 $m(\phi)=0$ 。

当区间改成区域，长度改成面积或体积时，如上结论也成立。

把算数中计数、几何度量中的共同性质——非负，可列可加性，空集对应值为 0——抽象出来，并加以适当地推广，就得到测度的概念。以一维 L−测度为例，$L[a,b)=b-a$，区间 $[a,b)$ 的 L−测度就是区间的长度；利用有限可加性定义由集系 $\{[a,b),a,b\in R^1\}$ 产生的环上的测度，再利用测度延拓就得到了波雷尔域 B 上的 L−测度。

50、解：在概率论公理化结构中，定义在事件域 F 上的集合函数，若满足⑴非负性：$P(A)\geq 0,A\in F$；⑵规范性：$P(\Omega)=1$；⑶可列可加性：若 $A_i\in F$，$i=1,2,\cdots$，$A_iA_j=\phi$，$i\neq j$ 则 $P\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$；则称 P 为 F 上的概率。由这三条性质可推得 $P(\phi)=0$ 。与上题比较可知，定义在 F 上的概率 P 实质上就是定义在 F 上的规范性测度。

概率的古典定义：$\Omega=\{\omega_1,\cdots,\omega_n\}$；对 $A\subset\Omega$ 定义其概率为 $P(A)=\dfrac{A\text{包含的样本点数}}{\Omega\text{中样本点总数}}$。P 具有非负性，有限可加性，$P(\phi)=0$。这里的概率 P 相当于算术中的计数，所不同的是，P 还具有规范性，即 $P(\Omega)=1$。这里 P 实质上是定义在 F={Ω 的一切子集}上具有规范性的测度。

几何概率的定义：$G\subset\Omega$，Ω 与 G 都是波雷尔可测集，对 G 定义其概率为 $P(G)=L(G)/L(\Omega)$，其中 $L(G)$ 表示区域 G 的 L-测度。显然 P 具有非负性。由 L-测度具有可列可加性得 P 也具有可列可加性。另外，$P(\phi)=0,\ P(\Omega)=1$。所以 P 是定义在 $F=\Omega\cap B$ 上的具有规范性的测度。

第二章　条件概率与统计独立性

1、解：自左往右数，排第i个字母的事件为A_i，则

$$P(A_1)=\frac{2}{5},\ P(A_2|A_1)=\frac{2}{4},\ P(A_3|A_2A_1)=\frac{1}{3},\ P(A_4|A_3A_2A_1)=\frac{1}{2}$$

$$P(A_5|A_4A_3A_2A_1)=1。$$

所以题中欲求的概率为

$$P(A_1A_2A_3A_4A_5)=P(A_1)P\left(A_2|A_1\right)P\left(A_3|A_2A_1\right)P\left(A_4|A_3A_2A_1\right)P\left(A_5|A_4A_3A_2A_1\right)$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{30}$$

2、解：总场合数为 $2^3=8$。设A={三个孩子中有一女}，B={三个孩子中至少有一男}，A的有利场合数为 7，AB的有利场合为 6，所以题中欲求的概率P（B|A）为

$$P\left(B|A\right)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{6/8}{7/8}=\frac{6}{7}.$$

3、解:（1）M 件产品中有 m 件废品，$M-m$ 件正品。设 A={两件有一件是废品}，B={两件都是废品}，显然 $A\supset B$，则　$P(A)=\left(C_m^1C_{M-m}^1+C_m^2\right)/C_m^2$　$P(B)=C_m^2/C_M^2$，题中欲求的概率为

$$P(B\mid A)=P(AB)/P(A)=P(B)/P(A)=\frac{C_m^2/C_M^2}{(C_m^1C_{M-m}^1+C_m^2)/C_M^2}=\frac{m-1}{2M-m-1}.$$

（2）设 A={两件中有一件不是废品}，B={两件中恰有一件废品}，显然 $B\subset A$，则　$P(A)=\left(C_{M-m}^2+C_m^1C_{M-m}^1\right)/C_M^2$，　$P(B)=C_m^1C_{M-m}^1/C_M^2$.

题中欲求的概率为

$$P(B\mid A)=P(AB)/P(A)=P(B)/P(A)=\frac{C_m^1C_{M-m}^1/C_M^2}{(C_{M-m}^2+C_m^1C_{M-m}^1)/C_M^2}=\frac{2m}{M+m-1}.$$

（3）P{取出的两件中至少有一件废品}=$\left(C_m^1C_{M-m}^1+C_m^2\right)/C_M^2=\dfrac{m(2M-m-1)}{M(M-1)}$

4、解：A={甲取出一球为白球}，B={甲取出一球后，乙取出一球为白球}，C={甲，乙各取出一球后，丙取出一球为白球}。则　$P(A)=\dfrac{a}{(a+b)}$　甲取出的球可为白球或黑球，利用全概率公式得

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})$$

$$=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b-1}{a+b-1}+\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b-1}=\frac{b}{a+b}$$

甲，乙取球的情况共有四种，由全概率公式得

$$P(C)=P(AB)P(C\mid AB)+P(A\overline{B})P(C\mid A\overline{B})+P(\overline{A}B)P(C\mid\overline{A}B)+P(\overline{A}\overline{B})P(C\mid\overline{A}\overline{B})$$

$$=\frac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}\cdot\frac{b-2}{a+b-2}+\frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}\cdot\frac{b-1}{a+b-2}$$
$$+\frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}\cdot\frac{b-1}{a+b-2}+\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}\cdot\frac{b}{a+b-2}$$
$$=\frac{b(a+b-1)(a+b-2)}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)}=\frac{b}{a+b}.$$

5、解：设B={两数之和大于 10}，A_i={第一个数取到i}，$i=0,1,\cdots,9$。则$P(A_i)=\frac{1}{10}$，$P(B\mid A_0)=P(B\mid A_1)=0,\ P(B\mid A_i)=(i-1)/9,\ i=2,3,\cdots 5;\ P(B\mid A_j)=(j-2)/9,$ $j=6,7,8,9$。由全概率公式得欲求的概率为

$$P(B)=\sum_{i=0}^{9}P(A_i)P(B\mid A_i)=\frac{16}{45}=0.356.$$

6、解：设A_1={从甲袋中取出 2 只白球}，A_2={从甲袋中取出一只白球一只黑球}，A_3={从甲袋中取出 2 只黑球}，B={从乙袋中取出 2 只白球}。则由全概率公式得

$$P(B)=P(B\mid A_1)P(A_1)+P(B\mid A_2)P(A_2)+P(B\mid A_3)P(A_3)$$
$$=\frac{C_a^2C_{a+2}^2}{c_{A+B}^2c_{\alpha+\beta+2}^2}+\frac{c_a^1C_b^1C_{\alpha+1}^2}{C_{a+b}^2C_{\alpha+\beta+2}^2}+\frac{c_b^2C_a^2}{C_{a+b}^2C_{\alpha+\beta+2}^2}.$$

7、解：A_1={从第一袋中取出一球是黑球}，……，A_i={从第一袋中取一球放入第二袋中，…，再从第$i-1$袋中取一球放入第i袋中，最后从第i袋中取一球是黑球}，$i=1,\cdots,N$。则

$$P(A_1)=\frac{a}{a+b},\quad P(\overline{A}_1)=\frac{b}{(a+b)}.$$

一般设$P(A_k)=\frac{a}{(a+b)}$，则$P(\overline{A}_k)=\frac{b}{(a+b)}$，得

$$P(A_{k+1})=P(A_{k+1}\mid A_k)P(A_k)+P(A_{k+1}\mid\overline{A}_k)P(\overline{A}_k)=\frac{a}{(a+b)}.$$

由数学归纳法得 $$P(A_N)=\frac{a}{(a+b)}.$$

8、解：设A_1={飞机第一部分中两弹}，A_2={飞机第二部分中两弹}，A_3={飞机第一部分中一弹}，A_4={其它情况}，则

$$A_iA_j=\phi\ \ (i\neq j),\quad A_1+A_2+A_3+A_4=\Omega.$$
$$P(A_1)=0.1\times0.1=0.01,\ \ P(A_2)=0.2\times0.2=0.04.$$

A_3={第一弹中第一部分且第二弹中第二部分，或第一弹中第一部分且第二弹中第三部分，或第一弹中第二部分且第二弹中第一部分，或第一弹中第三部分且第二弹中第一部分}，

$$P(A_3)=0.1\times0.2+0.1\times0.7+0.2\times0.1+0.7\times0.1=0.18,$$

$$P(A_4)=1-[P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)]=0.77.$$

设 B={飞机被击落}，则 $\quad P(B\mid A_i)=1\ \ (I=1,2,3), \qquad P(B\mid A_4)=0.$

由全概率公式得 $P(B)=\sum_{i=1}^{4}P(B\mid A_i)P(A_i)=0.01+0.04+0.18=0.23.$

9、解：设A_i={第i回出正面}，记 $p_i=P(A_i)$，则由题意利用全概率公式得

$$\begin{aligned}P(A_{i+1})&=P(A_{i+1}\mid A_i)P(A_i)+P(A_{i+1}\mid \overline{A}_i)P(\overline{A}_i)\\&=pp_1+(1-p)(1-p_1)=(2p-1)p_1+(1-p)\text{。}\end{aligned}$$

已知 $p_i=c$，依次令 $i=n-1,n-2,\cdots,1$ 可得递推关系式

$$P_n=(2p-1)p_{n-1}+(1-p),\qquad P_{n-1}=(2p-1)p_{n-2}+(1-p),\cdots,$$
$$P_2=(2p-1)p_1+(1-p)=(2p-1)c+(1-p).$$

解得

$$P_n=(1-p)[1+(2p-1)+(2p-1)^2+\cdots+(2p-1)^{n-2}]+c(2p-1)^{n-1},$$

当 $p\neq 1$ 时利用等比数列求和公式得

$$p_n=(1-p)\frac{1-(2p-1)^{n-1}}{1-(2p-1)}+c(2p-1)^{n-1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^{n-1}+c\,(2p-1)^{n-1}. \qquad (*)$$

（1）若 $p=1$，则 $p_n\equiv C,\ \lim\limits_{n\to\infty}p_n=C$；

（2）若 $p=0$，则当 $n=2k-1$ 时，$p_n=c$；当 $n=2k$ 时，$p_n=1-c$。

若 $c=\frac{1}{2}$，则 $p_n\equiv\frac{1}{2},\ \lim\limits_{n\to\infty}p_n=\frac{1}{2}$

若 $c\neq\frac{1}{2}1$，则 $c\neq 1-c,\ \ \lim\limits_{n\to\infty}p_n$ 不存在。

（3）若 $0<p<1$，则由（*）式可得

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^{n-1}+c(2p-1)^{n-1}\right]=\frac{1}{2}.$$

10、解：令 A_i,B_i,C_i 分别表示第 i 次交换后，甲袋中有两只白球，一白一黑，两黑球的事件，则由全概率公式得

$$\begin{aligned}p_{n+1}&=P(A_{n+1})=P(A_n)P(A_{n+1}\mid A_n)+P(B_n)P(A_{n+1}\mid B_n)+P(C_n)P(A_{n+1}\mid C_n)\\&=0\cdot p_n+\frac{1}{4}q_n+0\cdot r_n=\frac{1}{4}q_n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q_{n+1}&=P(B_{n+1})=P(A_n)P(B_{n+1}\mid A_n)+P(B_n)P(B_{n+1}\mid B_n)+P(C_n)P(B_{n+1}\mid C_n)\\&=1\cdot p_n+\frac{1}{2}q_n+1\cdot r_n=p_n+\frac{1}{2}q_n+r_n,,\end{aligned}$$

$$r_{n+1}=P(C_{n+1})=P(A_n)P(C_{n+1}\mid A_n)+P(B_n)P(C_{n+1}\mid B_n)+P(C_n)P(C_{n+1}\mid C_n)$$

$$=0\cdot p_n+\frac{1}{4}q_n+0\cdot r_n=\frac{1}{4}q_n.$$

这里有 $p_{n+1}=r_{n+1}$，又 $p_{n+1}+q_{n+1}+r_{n+1}=1$，所以 $q_{n+1}=1-2p_{n+1}$，同理有 $q_n=1-2p_n$，再由 $p_{n+1}=\frac{1}{4}q_n$ 得 $p_{n+1}=\frac{1}{4}(1-2p_n)$。所以可得递推关系式为

$$\begin{cases} r_{n+1}=p_{n+1}=\frac{1}{4}(1-2p_n) \\ q_{n+1}=1-2p_{n+1} \end{cases},$$

初始条件是甲袋一白一黑，乙袋一白一黑，即 $p_0=r_0=0,\ q_0=1$，由递推关系式得

$$r_{n+1}=p_{n+1}=\frac{1}{4}(1-2p_n)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}p_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}p_{n-1})=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}p_{n-1}=\cdots$$

$$=\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{(-1)^{n+2}}{2^{n+2}}+\frac{(-1)^{n+1}p_0}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{4}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{6}\left[1-(-1)^{n+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]=\frac{1}{6}+(-1)^n\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2},$$

$$q_{n+1}=1-2p_{n+1}=\frac{2}{3}+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}r_n=\frac{1}{6},\quad \lim_{n\to\infty}q_n=\frac{2}{3}.$$

11、解：设A_n={家庭中有n个孩子}，n=0,1,2,⋯，B={家庭中有k个男孩}。注意到生男孩与生女孩是等可能的，由二项分布$(p=\frac{1}{2})$得

$$P(B\mid A_n)=C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

由全概率公式得

$$P(B)=\sum_{n=k}^{\infty}P(A_n)P(B\mid A_n)=\sum_{n=k}^{\infty}ap_nC_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^n=a\sum_{i=0}^{\infty}C_{k+1}^1\left(\frac{p}{2}\right)^{k+1}$$（其中$i=n-k$）

$$=a\left(\frac{p}{2}\right)^k\sum_{i=0}^{\infty}C_{k+1}^1\left(\frac{p}{2}\right)^1=a\left(\frac{p}{2}\right)^k\left(1-\frac{p}{2}\right)^{-k-1`}=\frac{2ap^k}{(2-p)^{k+1}}.$$

12、解：（1）设 A={至少有一男孩}，B={至少有 2 个男孩}。$A\supset B, AB=B$，由

$0<\frac{p}{(2-p)}<1$得

$$P(A)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2ap^{k}}{(2-p)^{k+1}}=\frac{2a}{2-p}\cdot\frac{\frac{p}{(2-p)}}{\frac{1-p}{(2-p)}}=\frac{ap}{(2-p)(1-p)},$$

$$P(B)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2ap^{k}}{(2-p)^{k+1}}=\frac{2a}{2-p}\cdot\frac{\frac{p^{2}}{(2-p)^{2}}}{\frac{1-p}{(2-p)}}=\frac{ap^{2}}{(2-p)^{2}(1-p)^{2}},$$

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{p}{2-p}.$$

（2）C={家中无女孩}={家中无小孩，或家中有 n 个小孩且都是男孩，n 是任意正整数}，则

$$P(C)=1-\frac{ap}{1-p}+\sum_{a=1}^{\infty}ap^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$=1-\frac{ap}{1-p}+\frac{\frac{ap}{2}}{1-\frac{p}{2}}=1-\frac{ap}{1-p}+\frac{ap}{2-p}=\frac{2-3p-ap+p^{2}}{(1-p)(2-p)}$$

A_1={家中正好有一个男孩}={家中只有一个小孩且是男孩}，则

$P(A_1)=ap\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}ap$，且 $A_1\subset C$，

所以在家中没有女孩的条件下，正好有一个男孩的条件概率为

$$P(A_1\mid C)=\frac{P(A_1C)}{P(C)}=\frac{P(A_1)}{P(C)}=\frac{1}{2}\frac{ap}{\frac{2-3p-ap+p^{2}}{(1-p)(2-p)}}=\frac{ap(1-p)(2-p)}{2(2-3p-ap+p^{2})}.$$

13、解：设 A={产品确为合格品}，B={检查后判为合格品}。已知 $P(B\mid A)=0.98$，$P(B\mid\overline{A})=0.05, P(A)=0.96$，求 $P(A\mid B)$。由贝叶斯公式得

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})}$$

$$=\frac{0.96\times0.98}{0.96\times0.98+0.04\times0.05}=\frac{0.9408}{0.9428}=0.9979.$$

14、解：设 A_1,A_2,A_3 分别为自 250 米，200 米，150 米处射击的事件，B 为“命中目标”事件，则 $P(A_1)=0.1, P(A_2)=0.7,\ P(A_3)=0.2,\ P(B\mid A_1)=0.05, P(B\mid A_2)=0.1$，

$P(B|A_3)=0.2$，求 $P(A_1|B)$。A_i 间互不相容，B 能且只能与 A_i 中之一同时发生，由贝叶斯公式得

$$P(A_1|B)=\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)}$$
$$=\frac{0.05\times0.1}{0.05\times0.1+0.1\times0.7+0.2\times0.2}=\frac{1}{23}=0.0435.$$

15、解：记事件“发AAAA”为A^4，事件“发BBBB”为B^4，事件“发CCCC”为C^4，事件“收ABCA”为D，则 $P(A^4)=0.3, P(B^4)=0.4, P(C^4)=0.3,$ 为求 $P(D|A^4)$，考虑到发AAAA，而收到ABCD，有两个字母被准确收到，另两个字母被误收，故 $P(D|A^4)=0.6^2\times0.2^2=0.0144$。同理可求得 $P(D|B^4)=P(D|A^4)=0.6\times0.2^3$ $=0.0048$，欲求的概率是 $P(A^4|D)$，而事件 A^4,B^4,C^4 间两两互不相容，又 D 能且只能与 A^4,B^4,C^4 之一同时发生，由贝叶斯公式得欲求的概率为

$$P(A^4|D)=\frac{P(A^4)P(D|A^4)}{P(A^4)P(D|A^4)+P(B^4)P(D|B^4)+P(C^4)P(D|C^4)}$$
$$=\frac{0.3\times0.0144}{0.3\times0.0144+0.4\times0.0048+0.3\times0.0048}=\frac{9}{16}=0.5625.$$

16、证：

（1）$P((A\cup B)\cap C)=P(AC\cup BC)=P(AC)+P(BC)-P(ABC)$
$$=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(A)P(B)P(C)$$
$$=P(C)[P(A)+P(B)-P(AB)]=P(C)P(A\cup B),$$

$\therefore A\cup B$ 与 C 独立。

（2）$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=P(AB)P(C)$

∴AB 与 C 独立。

（3）$P((A-B)C)=P(A\overline{B}C)=P(AC(\Omega-B))=P(AC)-P(ABC)$
$$=P(A)P(C)-P(A)P(B)P(C)$$
$$=P(C)[P(A)-P(AB)]=P(C)P(A-B),$$

$\therefore A-B$ 与 C 独立。

17、证：$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-PAB)]$
$$=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)=(1-P(A))(1-P(B))$$
$$=P(\overline{A})P(\overline{B}),$$

同理可证 $P(\overline{A}\overline{C})=P(\overline{A})P(\overline{C}),$
$$P(\overline{B}\overline{C})=P(\overline{B})P(\overline{C}).$$

又有

$$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)$$
$$=1-\left[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\right]$$

$$=1-P(A)-P(B)-P(C)+P(A)P(B)+P(A)P(C)+P(B)P(C)+$$
$$-P(A)P(B)P(C)$$
$$=(1-P(A))(1-P(B))(1-P(C))=P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}),$$

所以 $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 相互独立。

18、证：必要性。事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，用归纳法证。不失为一般性，假设总是前连续 m 个集 $\hat{A}_i$ 取 $\overline{A}_i$ 的形式。当 $m=1$ 时，

$$P(\overline{A}_1A_2\cdots A_n)=P(A_2\cdots A_n)-P(A_1\cdots A_n)-P(A_1\cdots A_n)$$
$$=P(A_2)\cdots P(A_n)-P(A_1)\cdots p(A_n)=P(\overline{A}_1)P(A_2)\cdots P(A_n)\text{。}$$

设当 $m=k$ 时有

$$P(\overline{A}_1\cdots A_kA_{k+1}\cdots A_n)=P(\overline{A}_1)\cdots P(\overline{A}_k)P(A_{k+1}\cdots A_n),$$

则当 $m=k+1$ 时

$$P(\overline{A}_1\cdots\overline{A}_{k+1}A_{k+2}\cdots A_n)=P(\overline{A}_1\cdots\overline{A}_kA_{k+2}\cdots A_n)-P(\overline{A}_1\cdots\overline{A}_kA_{k+1}\cdots A_n)$$
$$=P(\overline{A}_1)\cdots P(\overline{A}_k)P(A_{k+2})\cdots P(A_n)-P(\overline{A}_1)\cdots P(\overline{A}_k)P(A_{k+1})\cdots P(A_n)$$
$$=P(\overline{A}_1)\cdots P(\overline{A}_k)(1-P(A_{k+1}))P(A_{k+2})\cdots P(A_n)$$
$$=P(\overline{A}_1)\cdots P(\overline{A}_k)P(\overline{A}_{k+1})P(A_{k+2})\cdots P(A_n)$$

从而有下列 2^n 式成立：

$$P(\hat{A}_1\hat{A}_2\cdots\hat{A}_n)=P(\hat{A}_1)P(\hat{A}_2)\cdots P(\hat{A}_n),$$

其中 $\hat{A}_i$ 取 A_i 或 $\overline{A}_i$ 。

充分性。设题中条件成立，则

$$P(A_1\cdots A_n)=P(A_1)\cdots P(A_n), \qquad (1)$$
$$P(A_1\cdots A_{n-1}\overline{A}_n)=P(A_1)\cdots P(A_{n-1})P(\overline{A}_n). \qquad (2)$$

$\because \quad A_1\cdots A_{n-1}A_n\bigcap A_1\cdots A_{n-1}\overline{A}_n=\phi,$

$\therefore \quad P(A_1\cdots A_{n-1})=P(A_1\cdots A_{n-1}A_n\bigcup A_1\cdots A_{n-1}\overline{A}_n).$

(1)+(2)得 $\quad P(A_1\cdots A_{n-1})=P(A_1)\cdots P(A_{n-1})$ 。 (3)

同理有

$$P(A_1\cdots A_{n-2}\overline{A}_{n-1}A_n)=P(A_1)\cdots P(A_{n-2})P(\overline{A}_{n-1})P(A_n),$$
$$P(A_1\cdots A_{n-2}\overline{A}_{n-1}\overline{A}_n)=P(A_1)\cdots P(A_{n-2})P(\overline{A}_{n-1})P(\overline{A}_n)$$

两式相加得

$$P(A_1\cdots A_{n-2}\overline{A}_{n-1})=P(A_1)\cdots P(A_{n-2})P(\overline{A}_{n-1}). \qquad (4)$$

(3)+(4)得

$$P(A_1\cdots A_{n-2})=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_{n-2})\text{。}$$

同类似方法可证得独立性定义中 2^n-n+1 个式子，

$\therefore \quad A_1,\cdots,A_n$ 相互独立。

19、证： $P(\phi\phi)=P(\phi)=0\times 0=P(\phi)P(\phi),$

$$P(\Omega\phi)=0=P(\Omega)P(\phi),\quad P(\Omega\Omega)=1=P(\Omega)P(\Omega),$$

$$P(\Omega B)=P(B)=P(\Omega)P(B),$$

$$P(\Omega A)=P(A)=P(\Omega)P(A),$$

$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})$（见本章第 17 题），

$$P(A\overline{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)$$
$$=P(A)(1-P(B))=P(A)P(\overline{B})，$$

同理可得 $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)$。证毕。

20、解：P{三次射击恰击中目标一次}=

$$=0.4(1-0.5)(1-0.7)+(1-0.4)0.5(1-0.7)+(1-0.4)(1-0.5)0.7$$
$$=0.36$$

P{至少有一次命中}=1-P{未击中一次}

$$=1-(1-0.4)(1-0.5)(1-0.7)=0.91$$

21、解：（1）P{所有的事件全不发生} $=P\{\overline{A}_1\cdots\overline{A}_n\}$

$$=P(\overline{A}_1)\cdots P(\overline{A}_n)=\prod_{k=1}^{n}(1-p_k)。$$

（2）P{至少发生其一} $=P(A_1\cup\cdots\cup A_n)$

$$P(\overline{\overline{A}_1\cdots\overline{A}_n})=1-P(\overline{A}_1\cdots\overline{A}_n)=1-\prod_{k=1}^{n}(1-p_n)。$$

（3）P{恰好发生其一} $=p_1(1-p_2)\cdots(1-p_n)+(1-p_1)p_2(1-p_3)\cdots(1-p_n)+$

$$+\cdots+(1-p_1)\cdots(1-p_{n-1})p_n$$

$$=\sum_{i=1}^{n}p_i-2\sum_{n\ge j>i\ge 1}p_ip_j+\cdots+(-1)^{n-1}n\prod_{i=1}^{n}p_i。$$

22、解：本题中认为各元件发生故障是相互独立的。记 A_0={元件 k 发生故障}， A_1={元件 k_1 发生故障}， A_2={元件 k_2 发生故障}。则

P{电路断开} $=P(A_0\cup A_1A_2)=P(A_0)+P(A_1A_2)-P(A_0A_1A_2)$

$$=0.3+0.2\times 0.2-0.3\times 0.2\times 0.2=0.328。$$

23、解：以 A_k 表事件“A 于第 k 次试验中出现”，$P(A_k)=\varepsilon$，由试验的独立性得，前 n 次试验中 A 都不出现的概率为

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n)=(1-\varepsilon)^n。$$

于是前 n 次试验中，A 至少发生一次的概率为

$$1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n)=1-(1-\varepsilon)^n\to 1\quad(n\to\infty)。$$

这说明当重复试验的次数无限增加时，小概率事件 A 至少发生一次的概率可以无限地向 1 靠近，从而可看成是必然要发生的。

24、解：我们认为各车床或同一车床制造的各个零件的好坏是相互独立的，由此可得

$$P\{所有零件均为一级品\}=0.8^3\times 0.7^2=0.2509。$$

25、解：利用的二项分布可得

$$P\{\text{至少有一个甲类细菌}\}=1-P\{2n\text{个全是乙类细菌}\}$$

$$=1-C_{20}^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=1-2^{-2n}\text{。}$$

$$P\{\text{甲，乙两类细菌各占一半}\}=C_{2n}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=C_{2n}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\text{。}$$

26、解：利用二项分布得

$$P\{\text{至少出现一次正面}\}=1-P\{n\text{次全部出现反面}\}=1-(1-p)^{n}\text{。}$$

$$P\{\text{至少出现两次正面}\}=1-(1-p)^{n}-C_{n}^{1}p(1-p)^{n-1}=1-(1-p)^{n}-np(1-p)^{n-1}\text{。}$$

27、解：（1）设 A，B，C 分别表示每局比赛中甲，乙丙获胜的事件，这是一个 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$ 的多项分布。欲丙成为整场比赛的优胜者，则需在未来的三次中，丙获胜三次；或在前三次中，丙获胜两次乙胜一次，而第四次为丙获胜。故本题欲求的概率为

$$p=\frac{3!}{3!\,0!\,0!}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}+\frac{3!}{2!\,1!\,0!}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\text{。}$$

28、解：利用两个的二项分布，得欲副省长的概率为

$$p=\sum_{i=0}^{n}P\{\text{甲掷出}i\text{次正面，乙掷出}i\text{次正面}\}$$

$$=\sum_{i=0}^{n}C_{n}^{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot C_{n}^{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\sum_{i=0}^{n}(C_{n}^{i})^{2}=C_{2n}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\text{。}$$

29、解：事件 A 出现奇数次的概率记为 b，出现偶数次的概率记为 a，则

$$a=C_{n}^{0}p^{0}q^{n}+C_{n}^{2}p^{2}q^{n-2}+\cdots,$$

$$b=C_{n}^{1}p\,q^{n-1}+C_{n}^{3}p^{3}q^{n-3}+\cdots\text{。}$$

利用 $a+b=(p+q)^{n}=1,\ a-b=(q-p)^{n}$，可解得事件 A 出现奇数次的概率为

$$b=\frac{1}{2}\left[1-(p-q)^{n}\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-2p)^{n}\text{。}$$

顺便得到，事件 A 出现偶数次的概率为 $a=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-2p)^{n}$。

30、解：事件“在出现 m 次 $\overline{A}$ 之前出现 k 次 A”，相当于事件“在前 $k+m-1$ 次试验中出现 k 次 A，$m-1$ 次 $\overline{A}$，而第 $m+k$ 次出现 $\overline{A}$”，故所求的概率为

$$C_{k+m-1}^{k}p^{k}q^{m-1}\cdot q=C_{k+m-1}^{k}p^{k}q^{m}$$

注：对事件“在出现 m 次 $\overline{A}$ 之前出现 k 次 A”，若允许在出现 m 次 $\overline{A}$ 之前也可以出现 $k+1$ 次 A，$k+2$ 次 A 等，这就说不通。所以，事件“在出现 m 次 $\overline{A}$ 之前出现 k 次 A”的等价事件，是“在出现 m 次 $\overline{A}$ 之前恰出现 k 次 A”。而对事件“在出现 m 次 $\overline{A}$ 之前出现 k 次 A 之前”（记为 B）就不一样，即使在出现 m 次 $\overline{A}$ 之前出现了 $k+1$ 次 A，$k+2$ 次 A 等，也可以说事件 B 发生，所以事件 B 是如下诸事件的并事件：“在出现 m 次 $\overline{A}$ 之前恰出现 i 次 A”，$i=k,k+1,\cdots$。

31、解：设 $A_n=\{$经 n 次试验后，黑球出现在甲袋中$\}$，$\overline{A}_n=\{$经 n 次试验后，黑球出现在乙袋中$\}$，$C_n=\{$第 n 次从黑球所在的袋中取出一个白球$\}$。记 $p_n=P(A_n)$，$c_n=P(\overline{A}_n)=1-p_n$，$n=0,1,2,\cdots$。当 $n\geq 1$ 时，由全概率公式可得递推关系式：

$$\begin{aligned} p_n &= P(A_n\mid A_{n-1})P(A_{n-1}) \_ P(A_n\mid \overline{A}_{n-1})P(\overline{A}_{n-1}) \\ &= P(C_n\mid A_{n-1})P(A_{n-1})+P(\overline{C}_n\mid \overline{A}_{n-1})P(\overline{A}_{n-1}) \\ &= p_{n-1}\cdot\frac{N-1}{N}+q_{n-1}\cdot\frac{1}{N} \quad =\frac{N-1}{N}p_{n-1}+\frac{1}{N}(1-p_{n-1}), \end{aligned}$$

即 $$p_n=\frac{N-2}{N}p_{n-1}+\frac{1}{N}\quad (n\geq 1)。$$

初始条件 $p_0=1$，由递推关系式并利用等比级数求和公式得

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{N}+\frac{1}{N}\cdot\frac{N-2}{N}+\cdots+\frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{N}\right)^{n-1}+\left(\frac{N-2}{N}\right)^{n} \\ &= \frac{\frac{1}{N}\left[1-\left(\frac{N-2}{N}\right)^{n}\right]}{\left(1-\frac{N-2}{N}\right)+\left(\frac{N-2}{N}\right)^{n}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{N-2}{N}\right)^{n}。\end{aligned}$$

若 $N=1$，则 $n=2k+1$ 时 $p=0$，当 $n=2k$ 时 $p_n=1$。

若 $N=2$，则对任何 n 有 $p_n=\frac{1}{2}$。

若 $N>2$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=\frac{1}{2}$（N 越大，收敛速度越慢）。

32、解：利用普阿松逼近定理，$\lambda=1000\times 0.005=5$，查表计算得

$$P\{至少有两件废品\}=\sum_{i=2}^{1000}C_{1000}^{i}(0.005)^{i}(0.995)^{1000-1}\approx 1-e^{-5}-5e^{-5}=0.9596,$$

$$P\{不超过5件废品\}=\sum_{i=2}^{5}C_{1000}^{i}(0.005)^{i}(0.995)^{1000-1}\approx\sum_{i=0}^{5}\frac{5^{i}}{i\,!}e^{-5}=0.6160。$$

设以 90%的概率希望废品件数不超过 k，则

$$\sum_{i=2}^{k} C_{1000}^{i}(0.005)^{i}(0.995)^{1000-1} \approx \sum_{i=0}^{k} \frac{5^{i}}{i\,!} e^{-5} = 0.90\,,$$

解得 $k=8$。

33、解：P={有 10 个或更多个终端同时操作}=P{有 10 个或不足 10 个终端不在操作}

$$= \sum_{j=0}^{10} C_{20}^{j}(0.3)^{j}(0.7)^{20-j} = 0.9829\,。$$

34、解：利用普阿松逼近定理计算 $\lambda = 5000 \times 0.001 = 5$，则打中两弹或两终以上的概率为

$$p\ = 1-(0.999)^{5000} - 5000(0.999)^{4999} \times 0.001 \approx 1-e^{-5} - 5e^{-5} = 0.9596$$

35、解：设 A 表事件“某事实际上是可行的”，$\overline{A}$ 表事件“某事实际上是不可行的”，B 表“多数人说可行”，$\overline{B}$ 表“多数人说不可行“，利用二项分布得

$$P(B \mid A) = P(\overline{B} \mid \overline{A}) = \sum_{i=4}^{7} C_{7}^{i}(0.6)^{i}(0.4)^{7-i} = 0.7102$$

所以作出正确决策的概率为

$$p = P(A)P(B \mid A) + P(\overline{A})P(B \mid \overline{A})$$

$$= p)B \mid A)[P(A) + P(\overline{A})] = P(B \mid A) = 0.7102\,。$$

36、解：（1）由题意得，产生了 k 个细菌，且这 k 个细菌全部是甲类细菌的概率为 $\dfrac{\lambda^{k}}{k\,!} e^{-\lambda}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k}$，所以产生了甲类细菌而无乙类细菌的概率为

$$p = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k}}{k\,!} e^{-\lambda}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} = e^{-\lambda}\left(e^{\frac{\lambda}{2}} - 1\right)。$$

（2）产生乙类细菌而无甲类细菌的概率与（1）中概率相同，所以欲求的条件概率为

$$\text{P\{有 2 个乙类细菌|产生的细菌中无甲类\}} = \frac{\dfrac{1}{2\,!}\lambda^{2} e^{-\lambda}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2}}{\left[e^{-\lambda}\left(e^{\frac{1}{2}\lambda} - 1\right)\right]} = \frac{\dfrac{1}{8}\lambda^{2}}{\left(e^{\frac{1}{2}\lambda} - 1\right)}\,。$$

37、解：事件“有两个以上的人生于元旦”的对立事件是“生于元旦的人不多于两个”利用 $p - \dfrac{1}{365}$ 的二项分布得欲求的概率为

$$p = 1 - \sum^{2} C_{50}^{i}\left(\frac{1}{365}\right)^{i}\left(1 - \frac{1}{365}\right)^{50-1}$$

$$= \frac{1-(364^{2} + 50 \times 364 + 25 \times 49)364^{48}}{365^{50}} = 0.00037\,。$$

38、解： 每个错字出现在每页上的概率为 $p=\dfrac{1}{500}$，500 个错字可看成做 500 次努里试验，利用普阿松逼近定理计算，$\lambda=500\times\dfrac{1}{500}=1$，得

P{某页上至少有三个错字}=1−1-P{某页上至多有两个错字}

$$=1-\sum_{i=0}^{2}C_{500}^{1}\left(\frac{1}{500}\right)^{i}\left(1-\frac{1}{500}\right)^{500-1}$$

$$\approx 1-(e^{-1}+e^{-1}+\frac{1}{2}e^{-1})=0.0803.$$

39、解： 设月初库存 k 件，则应有

$$\sum_{i=0}^{k}\frac{7^i}{i\,!}e^{-7}\geq 0.999,\quad \text{即}\quad p=\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{7^i}{i\,!}e^{-7}\leq 0.001.$$

当 $k+1=17$ 时，$p=0.000958$；$k+1=16$ 时，$p=0.002407$。所以在月初进货时要库存 $k=16$ 件才行。

40、解: 设每盒装 100+k 只，为使每盒有 100 只以上的好钉，每盒次品数应当 $\leq k-1$，则应有

$$p=\sum_{i=0}^{k-1}C_{100+k}^{i}(0.015)^{i}(0.985)^{100+k-i}\geq 0.80.$$

由于 k 值不大，有

$$(100+k)0.015\approx 100\times 0.015=1.5$$

利用普阿松逼近定理计算，$\lambda=1.5$，上式可以写成

$$p=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(1.5)^i}{i\,!}e^{-1.5}\geq 0.80.$$

查表得当 $k-1=2$ 时，$p=0.808847$；当 $k-1=1$ 时，$p=0.557825$。取 $k-1=2, k=3$，。所以一盒应装 103 只，才能保证每盒中有 100 只以上好钉的概率小于 80%。

41、解： 每一毫升平均含一个细菌，每 2 毫升含 2 个，所以每只试管中含有细菌数服从 $\lambda=2$ 的普阿松分布。由此可得

P{5 个试管中都有细菌}$=(1-e^{-2})^5=0.4833$；

P{至少有三个试管中有细菌}$=\sum_{i=2}^{5}C_5^1(1-e^{-2})^i(e^{-2})^{5-i}=0.9800$.

计算时利用了 $p=1-e^{-2}$ 的二项分布。

42、解： 设一分钟内通过某交叉路口的汽车数服从 λ 的普阿松分布，则

P{1 分钟内无车}$=e^{-\lambda_1}=0.2,\quad \lambda_i=-ln0.2=1.61$

由此得，2 分钟内通过的汽车数服从 $\lambda=\lambda_i\times 2=3.22$ 的普阿松分布，从而 2 分钟内多于一车的概率为

$$p=1-e^{-3.22}-3.22\times e^{-3.22}=0.831.$$

43、解： 若蚕产 i 个卵，则这 i 个卵变为成虫数服从概率为 $p,n=i$ 的二项分布，所

以

$$P\{蚕养出 n 只小蚕\}=\sum_{i=k}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}C_i^k p^k(1-p)^{1-k} \quad (令 m=i-k)$$

$$=\frac{p^k e^{-\lambda}}{k!}\sum_{M=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+m}}{m!}(1-p)^m=\frac{1}{k!}(\lambda p)^k e^{-\lambda}$$

44、解：设 s={该分子在时刻 s 还没有再受到碰撞}，则

$$1-P(\Delta\tau)=\lambda(\Delta\tau)+o(\Delta\tau),$$

$$P(\tau+\Delta\tau)=P(\tau)P(\Delta\tau)=P(\tau)(1-\lambda\Delta\tau-o(\Delta\tau)),$$

$$\frac{P(\tau+\Delta\tau)-P(\tau)}{\Delta\tau}=-\lambda p(\tau)-\frac{P(\tau)o(\Delta\tau)}{\Delta\tau},$$

令 $\Delta\tau\to 0$ 得 $$\frac{dP(\tau)}{d\tau}=-\lambda P(\tau),\quad \frac{P'(\tau)}{P(\tau)}=-\lambda,$$

积分得 $$P(\tau)=ce^{-\lambda\tau}.$$

当 $\tau\to 0$ 时，$P(\tau)\to 1$，所以 $c=1$，从而

$$P(\tau)=e^{-\lambda\tau}.$$

45、证：可利用巴纳赫氏问题证明。某数学家带着两盒火柴，每次用时他在两盒中任意抓一盒，从中取出一根，因此连续地抽取构成了一串 $p=\frac{1}{2}$ 的贝努里试验。假定最初每盒火柴恰巧包含 N 根，我们考虑：数学家第一次发现空盒子地时刻。在这一时刻，另一盒火柴可能还有 r 为 0，1，…，N 根火柴。设从第一盒中选取为“成功”。“当发现第一盒火柴空时，第二盒中尚有 r 根火柴“这一事件，等价于”恰有 $N-r$ 次失败发生在第 N+1 次成功之前“，这个事件的概率为 $f(2N-r+1;N+1,\frac{1}{2})$（见巴斯卡分布）。考虑到两盒火柴所处的地位相同，可得事件”发现一盒空，另一盒中尚有 r 根火柴“（记为 A_r）的概率为

$$2f\left(2N-r+1;N+1,\frac{1}{2}\right)=2\binom{2N-r}{N}2^{-2N+r-1}=\binom{2N-r}{N}2^{-2N+r}.$$

r 取 0 到 N 的诸事件 A_r 之和显然是必然事件，由此可得

$$\sum_{r=0}^{N}\binom{2N-r}{N}2^{-2N+r}=1,$$

两边同乘以 2^N 并利用组合性质变形得

$$\sum_{r=0}^{N}\binom{2N-r}{N-r}2^{-(N-r)}=2^N,$$

令 $N-r=k$，并注意到对应 r 从 0 变到 N，而 k 是从 N 变到 0，即得要证的等式

$$\sum_{r=0}^{N}\binom{N+k}{k}2^{-k}=2^{N}.$$

46、证：任何一个非 1 的自然数，皆可唯一地（不计次序时）分解为素数的乘积，要证两数互素，只需验证这两数没有公共素因子就行了。为此，把素数排列为 $p_1<p_2<\cdots$，对任何 t,N（自然数）定义事件

$A_{N,t}=\{$在$1,2,\cdots,N$ 中独立地取两整数ξ,η，ξ与η不含公因子 $p_1,p_2,\cdots,p_t\}$。把所要求的“事件”的概率定义为

$$l\lim_{t\to\infty}\left(\lim_{N\to\infty}P(A_{N,t})\right)。$$

为计算 $P(A_{n,t})$，定义

$m_{i_1\cdots i_k}=P\{$ 自 1,2,⋯,N 中独立地取两整数ξ,η，它们有公因子 $p_{i_1},p_{i_2},\cdots,p_{i_k}\}$。

则由事件容许的和的概率公式得

$$P(A_{N,t})=1-\sum_{i=1}^{t}m_i+\sum_{t\ge j>i\ge1}m_{ij}-\cdots+(-1)^t m_{1\,2\cdots t} \qquad (1)$$

显然有 $m_{i_1\cdots i_k}=\left(\dfrac{1}{N}\left[\dfrac{N}{p_{i_1}\cdots p_{i_k}}\right]\right)^2$，

$$\left(\frac{1}{p_{i_1}\cdots p_{i_k}}-\frac{1}{N}\right)^2\le m_{i_1\cdots i_k}\le\left(\frac{1}{p_{i_1}\cdots p_{i_k}}\right)^2,$$

因而

$$\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le t}\frac{1}{p_{i_1}\cdots p_{i_k}}-\frac{2C_t^k}{N}\le\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le t}m_{i_1\cdots i_k}\le\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le t}\frac{1}{p_{i_1}\cdots p_{i_k}} \qquad (2)$$

（2）式左端的 $\dfrac{2C_t^k}{N}$ 的来由是，

$$\left(\frac{1}{p_{i_1}\cdots p_{i_k}}-\frac{1}{N}\right)^2\ge\frac{1}{p_{i_1}^2\cdots p_{i_k}^2}-\frac{1}{N}\cdot\frac{2}{p_{i_1}^2\cdots p_{i_k}^2}\ge\frac{1}{p_{i_1}^2\cdots p_{i_k}^2}-\frac{2}{N},$$

而和式中一共有 C_t^k 项。由（1），（2）得

$$1-\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{p_i^2}+\sum_{t\ge j>i\ge1}\frac{1}{p_i^2p_j^2}-\cdots-\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{t}C_t^k$$

$$\le P(A_{N,t})\le1-\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{p_i^2}+\sum_{t\ge j>i\ge1}\frac{1}{p_i^2p_j^2}-\cdots+\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{t}C_t^k \qquad (3)$$

在（3）中令 $N\to\infty$ 得

$$\lim_{N\to\infty} P(A_{N,t}) = 1 - \sum_{i=1}^{t}\frac{1}{p_i^2} + \sum_{t\ge j>i\ge 1}\frac{1}{p_i^2 p_j^2} - \cdots (-1)^t \frac{1}{p_1^2\cdots p_t^2} = \prod_{i=1}^{t}\left(1-\frac{1}{p_i^2}\right),$$

再令 $t\to\infty$，并利用黎曼函数 $\xi(2)=\frac{6}{\pi^2}$（参看华罗庚著“数论导引”P236，225）得，欲求的概率为

$$\lim_{t\to\infty}\left[\lim_{N\to\infty} P(A_{N,t})\right] = \prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_i^2}\right) = \xi(2) = \frac{6}{\pi^2}$$

47、解：假设产品合格率 $p\ge 0.99$，不妨设 $p=0.99$。现从 10000 件中抽 100 件，可视为放回抽样。而 100 件产品中次品件数服从二项分布，利用普阿松逼近定理得，次品件数不小于两件的概率为

$$p = 1-(0.99)^{100} - 100\times 0.01\times 0.99^{99} \approx 1-e^{-1}-e^{-1} = 0.2642$$

此非小概率事件，所以不能据此断定该车间谎报合格率。（注意，这并不代表可据此断定，该车间没有谎报合格率。）

m^2

第三章　随机变量与分布函数

1、 解：令ξ_n表在 n 次移动中向右移动的次数，则ξ_n服从二项分布，

$$P\{\xi_n = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}，k = 0,1,\cdots n$$

以S_n表时刻时质点的位置，则

$$S_n = \xi_n - (n-\xi_n) = 2\xi_n - n 。$$

ξ_n的分布列为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ (1-p)^n & C_n^1 p(1-p)^{n-1} & C_n^2 p^2 (1-p)^{n-2} & \cdots & p^n \end{pmatrix}。$$

S_n的分布列为

$$\begin{pmatrix} -n & -n+2 & -n+4 & \cdots & n \\ (1-p)^n & C_n^1 p(1-p)^{n-1} & C_n^2 p^2 (1-p)^{n-2} & \cdots & p^n \end{pmatrix}。$$

2、 解： $P\{\xi = 1\} = P\{失成\} + P\{成失\} = pq + qp$，

$$P\{\xi = 2\} = P\{失失成\} + P\{成成失\} = ppq + qqp = p^2 q + q^2 p,\cdots$$

所以ξ的概率分布为

$$p\{= k\} = p^k q + q^2 p,\ k = 1,2,\cdots 。$$

3、 解： （1）$1 = \sum_{k=1}^{N} f(k) = \frac{c}{N} \cdot N$，　　$\therefore c = 1$。

（2）$1 = c\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = c(e^{\lambda} - 1)$，　　$\therefore c = (e^{\lambda} - 1)^{-1}$。

4、 证： $f(x) \geq 0$，且

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx = -e^{-x}\Big|_0^{\infty}$$

$\therefore f(x)$是一个密度函数。

5、 解：（1）$P(6 < \xi < 9) = P\left\{\frac{1}{2}(6-10) < \frac{1}{2}(\xi - 10) < \frac{1}{2}(9-10)\right\}$

$$= P\left\{-1 < \frac{1}{2}(\xi - 10) < \frac{1}{2}\right\} = \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi(-2) = 0.285788$$

（2）$P(7 < \xi < 12) = P\left\{\frac{1}{2}(7-10) < \frac{1}{2}(\xi - 10) < \frac{1}{2}(12-10)\right\}$

$$= P\left\{-1\frac{1}{2} < \frac{1}{2}(\xi - 10) < 1\right\} = \Phi(1) - \Phi(-1\frac{1}{2}) = 0.774538$$

（3）$P(13<\xi<15)=P\left\{\frac{1}{2}(13-10)<\frac{1}{2}(\xi-10)<\frac{1}{2}(15-10)\right\}$

$$=P\left\{1\frac{1}{2}<\frac{1}{2}(\xi-10)<2\frac{1}{2}\right\}=\Phi\left(2\frac{1}{2}\right)-\Phi(1\frac{1}{2})=0.060597$$

6、解：7+24+38+24+7=100，$P\{\xi<x_4\}=(100-7)/100=0.93$，$P\{\xi<x_3\}=$

$P\{\xi<x_3\}=(7+24+38)/100=0.69$，查表得$\Phi(1.5)\approx 0.93,\ \Phi(0.5)\approx 0.69$。由题设得

$$\Phi(x)=P\left\{\frac{1}{3}(\xi-60)<\frac{1}{3}(y-60)=x\right\}=P\{\xi<y\}$$

令 $x=\frac{1}{3}(y-60)=1.5$，解得 $y=64.5$，即 $x_4=64.5$。由对称性得 $x_1=60-(64.5-60)=55.5$。再令$\frac{1}{3}(y-60)=0.5$，解得$y=61.5$，即$x_3=61.5$。由对称性得$x_2=60-(61.5-60)=58.5$。

7、**解**：（1）$\Phi(1.3)=0.90$，而$P\{\xi<a\}=P\left\{\frac{1}{2}(\xi-5)<\frac{1}{2}(a-5)\right\}=\Phi\left(\frac{1}{2}(a-5)\right)$，

令$\frac{1}{2}(a-5)=1.3$解得$a=7.6$。

（2）由 $P\{|\xi-5|>a\}=0.01$ 得 $P\{\xi-5>a\}=0.005$，从而 $P\left\{\frac{1}{2}(\xi-5)\le\frac{1}{2}a\right\}$ =0.995，而$\Phi(2.6)=0.995$所以$\frac{1}{2}a=2.6,\quad a=5.2$。

8、**证**：（1）设$x_2>x_1, F(x_2)-F(x_1)=P\{x_1<\xi\le x_2\}\ge 0$，所以$F(x_2)\ge F(x_1)$，$F(x)$非降。

（2）设$x<\cdots<x_n<x_{n-1}<\cdots<x_1<x_0$，$x_1\downarrow x$由概率的可加性得

$$P\left\{\prod_{i=0}^{\infty}(x_{i+1}<\xi\le x_i)\right\}=P\{x<\xi\le x_0\}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left[F(x_i)-F(x_{i+1})\right]=F(x_0)-F(x)。$$

由此得 $F(x_0)-F(x)=\lim_{n\to\infty}\left[F(x_0)-F(x)\right]$,

$\therefore\quad F(x)=\lim_{n\to\infty}F(x_n)=F(x+0),\quad F(x)$右连续。

（3）$1=P\{-\infty<\xi<\infty\}=\sum_{n\to\infty}^{\infty}P\{n<\xi\le n+1\}$

$$=\sum_{n\to\infty}^{\infty}\left[F(n+1)-F(n)\right]=\lim_{n\to\infty}F(n)=\lim_{m\to-\infty}F(m)。$$

由单调性得 $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)$ 均存在且有穷，由 $0\le F(x)\le 1$ 及上式得 $F(-\infty)=0,\ F(\infty)=1$。

9、证：$P\{x_1\le\xi\le x_2\}=P\{\xi\le x_2\}-P\{\xi<x_1\}=P\{\xi\le x_2\}-(1-P\{\xi\le x_2\})$

$=P\{\xi\le x_2\}+P\{\xi\ge x_1\}-1\ge(1-\beta)+(1-\alpha)-1=1-(\alpha+\beta)$.

∴不等式成立。

10、证法一：定义 $F(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,0]\\ P\{0\le\xi<x\}, & x\in(0,1]\\ 1, & x\in(1,\infty)\end{cases}$ 则 $F(x)$ 是 ξ 的分布函数。由题设得，对任意 $2x\in[0,1]$ 有 $P\{0\le\xi<x\}=P\{x\le\xi<2x\}$，即有

$P\{0\le\xi<2x\}=2P\{0\le\xi<x\}$。由此得 $F(2x)=2F(x)$。逐一类推可得，若 $nx\in[0,1]$，则 $F(nx)=nF(x)$，或者 $\frac{1}{n}F(x)=F(\frac{x}{n})$。从而对有理数 $\frac{m}{n}$，若 $\frac{m}{n}x$ 与 x 都属于[0,1]，则有 $F\left(\frac{m}{n}x\right)=\frac{m}{n}F(x)$。再由 $F(x)$ 的左连续性可得，对任意无理数 a，若 ax 与 x 都属于[0,1]，则 $F(ax)=aF(x)$。

因为区间 $[0,1)$ 与[0,1]的长度相等，由题设得

$$F(1)=P\{0\le\xi<1\}=P\{0\le\xi\le1\}=1.$$

由此及上段证明得，对任意 $x\in[0,1]$ 有 $F(x)=xF(1)=x$，即 $F(x)$ 为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le0\\ x, & 0<x\le1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

∴ ξ 服从[0,1]上均匀分布。

证法二：如同证法一中定义 ξ 的分布函数 $F(x)$，由 $F(x)$ 单调知它对[0,1]上的 L－测试几乎处处可微。设 $x_1,x_2\in(0,1)$，当 $x_1+\Delta x\in[0,1](i=1,2)$ 时，由题设得

$$F(x_1+\Delta x)-F(x_1)=P\{x_1\le\xi<x_1+\Delta x\}$$
$$=P\{x_2\le\xi<x_2+\Delta x\}=F(x_2+\Delta x\}-F(x2)$$

等式两端都除以 Δx，再令 $\Delta x\to0$ 可得，由 $F'(x_1)$ 存在可推得 $F'(x_2)$ 也存在，而且 $F'(x_2)=F'(x_1)$。从而对任意 $x\in(0,1)$ 有 $F'(x)\equiv c$。当 $x\,\overline{\in}\,[0,1]$ 时显然有 $F'(x)=0$。一点的长度为 0，由题设得 $P\{\xi=0\}=P\{\xi=1\}=0$。由上所述可知 ξ 是连续型随机变量，$F'(x)$ 是其密度函数，从而定出 $c=1$。至此得证 ξ 服从[0,1]均匀分布。

11、证：（1） $f_\sigma(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}$

$$=\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m_0)^2+\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right\}=exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}-ln\,\sigma-ln\sqrt{2\pi}\right\}$$

若令 $Q(\sigma)=\dfrac{-1}{(2^2)}$， $T(x)=(x-m_0)^2$， $D(\sigma\_=-\ln\sigma$， $S(x)=-\ln\sqrt{2\pi}$ ，则有

$$f_\sigma(x)=\exp\{Q(\sigma)T(x)+D(\sigma)+S(x)\}$$

这就证明了正态分布 $M(m_0,\sigma^2)$ 是单参数 $\sigma(\sigma>0)$ 的指数族。

（2） $f_m(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0}}\exp\left\{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma_0{}^2}\right\}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}_0}\exp\left\{-\frac{x^2-2mx+m^2}{2\sigma^2}\right\}=\exp\left\{\frac{mx}{\sigma_0{}^2}-\frac{m^2}{2\sigma_0{}^2}-\frac{x^2}{2\sigma_0{}^2}+\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\right\}$$

若令 $Q(m)=\dfrac{m}{\sigma_0{}^2}$， $T(x)=x, D(m)=\dfrac{-\frac{1}{2}m^2}{\sigma_0{}^2}$， $S(x)\equiv\dfrac{x^2}{2\sigma_0{}^2}+\ln\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0}}$ ，则

$$f_m(x)=\exp\{Q(m)T(x)+D(m)+S(x)\}$$

所以正态分布 $N(m,\sigma_0{}^2)$ 是单参数 $m(-\infty<m<\infty)$ 的指数族。

（3） $p(k;\lambda)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\exp\{k\ln\lambda-\lambda-\ln k!\}$ 。

若令 $Q(\lambda)=\ln\lambda, T(k)=k$， $D(\lambda)=-\lambda$， $S(k)=-\ln k!$，则

$p(k;\lambda)=\exp\{Q(\lambda)T(k)+D(\lambda)+S(k)\}$，所以 $p(k;\lambda)$ 是单参数 $\lambda(\lambda>0)$ 的指数族。

（4）关于 $[0,\theta]$ 上的均匀分布，其密度函数为 $f_\theta(x)=\begin{cases}1/\theta, & 0\le x\le\theta\\ 0, & x>\theta \text{ 或 } x>0\end{cases}$

$f_\theta(x)$ 是定义在 $-\infty<x<\infty$ 的函数，由于它是 x 的分段表示的函数，所以无法写成形式 $f_\theta(x)=\exp\{Q(\theta)T(x)+D(\theta)+S(x)\}$，故 $f_\theta(x)$ 关于 θ 不是一个单参数的指数族。

12、证：分别对固定的 x_0 和 y_0 有

$$F(x_0,y)=\begin{cases}1, & y>-x_0\\ 0, & y\le -x_0\end{cases},\quad F(x,y_0)=\begin{cases}1, & x>-x_0\\ 0, & x\le -y_0\end{cases}\quad 。$$

由上式显然可得 $F(x,y)$ 对每个变元非降，左连续，而且满足(2.6)及(2.7)，即 $F(-\infty,y)=0,$， $F(x,-\infty)=0$， $F(+\infty,+\infty)=1$ 但有

$$F(1,1)-F(1,0)-F(0,1)+F(0,0)=-1,$$

这说明当取 $a_1=a_2=0, b_1=b_2=1$ 时(2.5)式不成立。所以 $F(x,y)$ 不是分布函数。

13、证：必要性：

$$\iint f(x,y)dxdy = \iint ke^{-a(x+\frac{b}{a}y)^2} \cdot e^{-\frac{ac-b^2}{a}y} dxdy$$

令 $u = x + \dfrac{b}{a}y,\ v = y$，得 $y = v,\ x = u - \dfrac{b}{a}v,\ J = 1$。设

$$\iint f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} ke^{-au^2} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ac-b^2}{a}v^2} dv$$

要积分收敛，必须 $a > 0,\ (ac - b^2)/a > 0$，由此得应有 $ac - b^2 > 0$ 以及 $c > 0$。利用 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$ 可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} ke^{-au^2} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ac-b^2}{a}v^2} dv = k \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\pi} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{ac-b^2}} \sqrt{\pi} = 1$$

$\therefore \qquad k = \dfrac{\sqrt{ac-b^2}}{\pi}$

从而题中所列条件全部满足。

以上诸步可逆推，充分性显然。

14、解：设 $f(x,y) = f_1(x) f_2(y) + h(x,y)$ 是密度函数，则由 $f(x,y) \ge 0$ 得 $h(x,y) \ge -f_1(x) f2(y)$。又

$1 = \iint f(x,y)dxdy = \int f_1(x)dx \int f_2(y)dy + \iint h(x,y)dxdy = 1 + \iint h(x,y)dxdy$，所以应有 $\iint h(x,y)dxdy = 0$。

反之，若 $h(x,y) \ge -f_1(x) f2(y)$，$h(x,y)$ 可积且 $\iint h(x,y)dxdy = 0$，显然有 $f(x,y) \ge 0$ 且 $\iint f(x,y)dxdy = 1$，即 $f(x,y)$ 是密度函数。

所以为使 $f(x,y)$ 是密度函数，$h(x,y)$ 必须而且只需满足 $h(x,y) \ge -f_1(x) f2(y)$ 且 $\iint h(x,y)dxdy = 0$。

15、解：（1）$1 = \int_0^{\infty} Ae^{-2x}dx \int_0^{\infty} e^{-y}dy = A\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^{\infty} \cdot \left(-e^{-y}\ |_0^{\infty}\right) = \frac{A}{2},\ A = 2$

（2）$P\{\xi < 2, \eta < 1\} = \int_0^2 2e^{-2x}dx \int_0^1 e^{-y}dy = \left(-e^{-2x}\ |_0^2\right)\left(-e^{-y}\ |_0^1\right) = (1-e^{-4})(1-e^{-1})$。

（3）ξ 的边际分布，当 $x \le 0$ 时 $f\xi(x) = 0$，当 $x > 0$ 时有

$$f_\xi(x) = \int_0^{\infty} 2e^{-2x}e^{-y}dy = 2e^{-2x}.$$

（4）$P\{\xi + \eta < 2\} = \int_0^2 2e^{-2x}dx \int_0^{2-x} e^{-y}dy$

$$=\int_0^2 2e^{-2x}(1-e^{-(2-x)}dx\int_0^2(2e^{-2x}-2e^{-(2+x)}dx$$

$$=(1-e^{-4})+(2e^{-4}-2e^{-2})=1+e^{-4}-2e^{-2}=(1-e^{-2})^2.$$

（5）当 $x<0, y>0$ 时 $f(x\mid y)=0$；当 $x>0, y>0$ 时有

$$f(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_\eta(y)}=\frac{2e^{-(2x+y)}}{e^{-y}}=2e^{-2x}.$$

（6）$P\{\eta<1\}=\int_0^1 dy\int_0^\infty 2e^{-(2x+y)}dx=\int_0^1 e^{-y}dy\int_0^\infty 2e^{-(2x+y)}dx=-e^{-y}\Big|_0^1=1-e^{-1}$，

利用（2）的结果可得

$$P\{\xi<2,\eta<1\}=\frac{P\{\xi<2,\eta<1\}}{P\{\eta<1\}}=\frac{(1-e^{-4})(1-e^{-1})}{1-e^{-1}}=1-e^{-4}.$$

16、解：作变换，令 $x-a=\rho\cos\theta,\ y-b=\rho\sin\theta$，则 $|J|=\rho$ 椭圆区域为

$$\rho^2\left\{\frac{\cos^2\theta}{\sigma_1^2}-\frac{2r\sin\theta\cos\theta}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{\sin^2\theta}{\sigma_2^2}\right\}=\lambda^2$$

记 $\dfrac{\cos^2\theta}{\sigma_1^2}-\dfrac{2r\sin\theta\cos\theta}{\sigma_1\sigma_2}+\dfrac{\sin^2\theta}{\sigma_2^2}=s^2$

则 $\rho=\lambda/s$，且

$$P\{(\xi,\eta)\in D(\lambda)\}=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\times\int_0^{2x}d\theta\int_0^{\frac{\lambda}{s}}e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\rho^2S^2}\rho d\rho$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\times\int_0^{2x}-\frac{(1-r^2)}{S^2}e^{-\frac{S^2}{2(1-r^2)}\rho^2}\Bigg|_0^{\frac{\lambda}{S}}d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{1-r^2}}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\times\left(1-e^{-\frac{\lambda^2}{2(1-r^2)}}\right)\int_0^{2\pi}\frac{1}{S^2}d\theta$$

当 $\lambda\to\infty$ 时，$P\{(\xi,\eta)\in D(\lambda)\}\to 1$，由此得 $\int_0^{2\pi}\dfrac{1}{S^2}d\theta=\dfrac{2\pi\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{1-r^2}}$。

17、证：设多项分布为

$$P\{\xi_1=k_1,\cdots,\xi_r=k_r\}=\frac{n!}{k_1!\cdots k_r!}p_1^{k_1}\cdots p_1^{k_r},\qquad(1)$$

$$k_i\ge 0,\ \sum_{i=1}^r k_i=n,\ \sum_{i=1}^r p_i=1。\qquad(2)$$

利用（2）可以把（1）改写成

$P\{\xi_1=k_1,\cdots,\xi_{r-1}=k_{r-1}\}=$

$$=\frac{n!}{k_1!\cdots k_{r-1}!(n-k_1-\cdots-k_{r-1})!}p_1^{k_1}\cdots p_1^{k_r}\times(1-p_1-\cdots-p_{r-1})^{n-k_1-\cdots-k_{r-1}} \qquad (3)$$

由边际分布的定义并把（3）代入得

$$P\{\xi_1=k_1,\cdots,\xi_{r-2}=k_{r-2}\}=\sum_{\substack{k_{r-1}\\ k_1+\cdots+k_{r-1}\le n,k_{r-1}\ge 0}}P\{\xi_1=k_1,\cdots,\xi_{r-1}=k_{r-1}\}$$

$$=\frac{n!\,p_1^{k_1}\cdots p_{r-2}^{k_{r-2}}}{k_1!\cdots k_{r-2}!(n-k_1-\cdots-k_{r-2})!}\times\sum_{k_{r-1}=0}^{n-k_1-\cdots k_{r-2}}\frac{(n-k_1-\cdots-k_{r-2})!}{k_{r-1}!(n-k_1-\cdots-k_{r-1})!}p_{r-1}^{k_{r-1}}\times$$

$$\times(1-p_1-\cdots-p_{r-2}p_{r-1})^{n-k_1-\cdots-k_{r-1}}$$

由二项式定理得

$$P\{\xi_1=k_1,\cdots,\xi_{r-2}=k_{r-2}\}=$$

$$=\frac{n!}{k_1!\cdots k_{r-2}!(n-k_1-\cdots-k_{r-2})!}p_1^{k_1}\cdots p_{r-2}^{k_{r-2}}\times(1-p_1-\cdots-p_{r-2})^{n-k_1-\cdots-k_2} \qquad (4)$$

把（4）与（3）比较知，边际分布仍服从多项分布。多次类推可得

$$P\{\xi_1=k_1\}=\frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}p_1^{k_1}(1-p_1)^{n-k_1}$$

从而知任意边际分布均服从多项分布（包括二项分布）。

18、解：（1）ξ 的密度函数为，当 $x\le 0$ 时 $p_\xi(x)=0$；当 $x>0$ 时，注意积分取胜有选取，得

$$p_\xi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dy-\int_x^{\infty}\frac{1}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)}\times x^{k_1-1}(y-x)^{k_2-1}\sigma^{-y}dy \quad (令y-x=1)$$

$$=\frac{x^{k_1-1}}{\Gamma(k_1)\Gamma(_2)}\int_0^{\infty}t^{k_2-1}e^{-x}e^{-t}dt=\frac{x^{k_1-1}}{\Gamma(k_1)}e^{-x}.$$

（2）η 的密度函数为，当 $y\le 0$ 时 $p_\eta(y)=0$；当 $y>0$ 时，

$$p_\eta(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dx-\int_x^{y}\frac{1}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)}\times x^{k_1-1}(y-x)^{k_2-1}\sigma^{-y}dx$$

令 $x=yt$，当 $x=0$ 时 $t=0$，当 $x=y$ 时 $t=1$，所以

$$p_\eta(y)=\frac{e^{-y}}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)}y^{k_1-1}y^{k_2-1}\times\int_0^1 t^{k_1-1}(1-t)^{k_2-1}ydt$$

$$=\frac{y^{k_1+k_2-1}e^{-y}}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)}\cdot B(k_1,k_2)=\frac{y^{k_1+k_2-1}e^{-y}}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)}\cdot\frac{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)}{\Gamma(k_1+k_2)}$$

$$\frac{1}{\Gamma(k_1+k_2)}y^{k1+k_2-1}e^{-y}$$

其中用到$\beta-$函数与$\Gamma-$函数的关系式。

19、证：我们有

$$0 \le F_i(x_i) \le 1, \qquad 1 \le 2f_i(x_i)-1 \le 2-1=1,$$

$$-1 \le [2F_1(x_1)-1][2F_2(x_2)-1][2F_3(x_3)-1] \le 1,$$

代入$f_\alpha(x_1,x_2,x_3)$的表达式得 $\qquad f_\alpha(x_1,x_2,x_3) \ge 0 \qquad$ (1)

又有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[2F_i(x_i)-1\right]f_i(x_i)dx_i = \int_{-\infty}^{\infty}\left[2F_i(x_i)-1\right]dF_i(x_i) = \left[F_1^2(x_i)-F_i(x_i)\right]_{-\infty}^{\infty} = 0$$

$$\therefore \iiint f_\alpha(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2dx_3 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1)dx_1\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x_2)dx_2\int_{-\infty}^{\infty} f_3(x_3)dx_3 = 1 \quad (2)$$

由（1），（2）知$f_\alpha(x_1,x_2,x_3)$是密度函数。用与上面类似的方法计算可得边际密度函数为

$$\therefore \iiint f_\alpha(x_1,x_2,x_3)dx_2dx_3 = f_1(x_1), \qquad \iiint f_\alpha(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2 = f_3(x_3)$$

$$\iiint f_\alpha(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_3 = f_2(x_2).$$

20、解：

（1）为求(ζ,ξ)的联合概率分布，分别考虑下列三种情况：$(i,k\ge 1)$其中利用到独立性。

（a）$i=k$

$$P\{\zeta=k,\xi=k\} = P\left\{\bigcup_{j=1}^{k}(\xi=k,\eta=j)\right\} = \sum_{j=1}^{k}P\{\xi=k,\eta=j\}$$

$$=\sum_{j=1}^{k}p^2q^{k+j=2} = p^2q^{k-1}\cdot\frac{1-q^k}{1-q} = pq^{k-1}(1-q^k)\text{；}$$

(b) $i<k$

$$P\{\zeta=k,\xi=i\} = P\{\xi=i,\eta=k\} = p^2q^{1+k-2}\text{；}$$

(c) $i>k$

$$\{\zeta=k,\xi=i\}=\phi,\ P\{\zeta=k,\xi=i\}=0$$

(2)因为$=\max(\xi,\eta)$，所以

$$\{\zeta=k\} = \bigcup_{i=1}^{k-1}\{\xi=i,\eta=k\}\cup\bigcup_{j=1}^{k}\{\xi=k,\eta=j\}$$

$$P\{\zeta=k\} = \sum_{i=1}^{k-1}P\{\xi=i,\eta=k\} + \sum_{j=1}^{k}P\{\xi=k,\eta=j\} = \sum_{i=1}^{k-1}p^2q^{1+k-2} + \sum_{j=1}^{k}p^2q^{k+j-2}$$

$$= p^2q^{k-1}\left[\frac{1-q^{k-1}}{1-q}+\frac{1-q^k}{1-q}\right] = (2-q^{k-1}-q^k)pq^{k-1} \qquad (k=1,2,\cdots)$$

（3）$P\{\xi=i\,|\,\zeta=k\}=\dfrac{P\{\xi=i,\zeta=k\}}{P\{\zeta-k\}}$

$$=\begin{cases}\dfrac{pq^{k-1}(1-q^k)}{pq^{k-1}(2-q^{k-1}q^k)}=\dfrac{1-q^k}{2-q\kappa-1}q^k, & i=k\\ \dfrac{p^2q^{1+k-2}}{pq^{k-1}(2-q^{k-1}q^k)}=\dfrac{pq^{i-1}}{2-q\kappa-1}q^k, & i<k\end{cases} \qquad i>k,(i,k\geq 1)$$

21、解：（1）边际分布的密度函数为，当 $x\overline{\in}[0.1]$ 时 $f_\xi(x)=0$；当 $0\leq x\leq 1$ 时，

$$f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int_0^1 4xydy=2x$$

同理，当 $y\overline{\in}[0.1]$ 时 $f_\eta(y)=0$；当 $0\leq y\leq 1$ 时 $f_\eta(y)=2y$。$f(x,y)=f_\xi(x)f_\eta(y)$，所以 ξ 与 η 独立。

（2）边际密度函数为，当 $x\overline{\in}[0.1]$ 时 $f_\xi(x)=0$；当 $0<x<1$ 时

$$f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int_0^1 8xydy=4x(1-x^2)$$

当 $y\overline{\in}[0.1]$ 时 $f_\eta(y)=0$；当 $0\leq y\leq 1$ 时

$$f_\eta(y)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)dx=\int_0^1 8xydx=4y^2$$

在区域 $0<y<1$ 中均有 $g(x,y)\neq f_\xi(x)f_\eta(y)$，所以 ξ 与 η 不独立。

22、证：当 $0\leq x\leq 2\pi,\ 0\leq y\leq 2\pi$ 时，ξ 与 η 的联合分布密度为

$$p_{\xi\eta}(x,y)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{8\pi^3(1-\sin x\sin y\sin z)dz}=\left[\frac{z}{8\pi^3}-\sin x\sin y(-\cos z)\right]_0^{2\pi}=\frac{1}{4\pi^2};$$

其余 $p_{\xi\eta}(x,y)=0$。当 $0\leq x\leq 2\pi$ 时，

$$p_{\xi\eta}(x)=\int_0^{2\pi}dy\int_0^2\frac{1}{8\pi^3}(1-\sin x\sin y\sin z)dz=\frac{1}{2\pi};$$

其余 $p_\xi(x)=0$。由于 ξ,η,ζ 三者在密度函数的表达式中所处地位相同，故得当 $0\leq x\leq 2\pi,\ 0\leq z\leq 2\pi$ 时，$p_{\xi\zeta}(x,z)=1/4\pi^2$；当 $0\leq y\leq 2\pi,\ 0\leq z\leq 2\pi$ 时，$p_{\eta\zeta}(y,z)=1/4\pi^2$；当 $0\leq y\leq 2\pi$ 时，$p_\eta(z)=1/2\pi$；当 $0\leq z\leq 2\pi$ 时，$p_\zeta(z)=1/2\pi$；在其余区域内，诸边际密度函数均取 0 值。由于 $p_{\xi\eta}(x,y)=p_\xi(x)p_\eta(y),\quad p_{\xi\zeta}(x,z)=p_\xi(x)p_\zeta(z),\quad p_{\eta\zeta}(y,z)=p_\eta(y)p_\zeta(z),$ 故 ξ,η,ζ 两两独立；但当 $0<x<2\pi,\ 0<y<2\pi,0<z<2\pi$ 时有 $p(x,y,z)\neq p_\xi(x)p_\eta(y)p_\zeta(z)$，故 ξ,η,ζ 不相互独立。

23、证：当 $|x|<1$ 时，

$$p_\xi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dy=\int_{-1}^{1}\frac{1+xy}{4}dy=\frac{1}{2},$$

其余 $p_\xi(x)=0$ 。同理当 $|y|<1$ 时， $p_\eta(y)=1/2$ 其余 $p_\eta(x)=0$ 当 $0<|x|<1,$ $0<y<1$ 时有 $p(x,y)\neq p_\xi(x)p_\eta(y)$，所以 ξ 与 η 不独立。

现试能动分布函数来证 ξ^2 与 η^2 独立。ξ^2 的分布函数记为 $F_1(x)$，则当 $0<x\le 1$ 时，

$$F_1(x)=P\{\xi^2<x\}=P\{-\sqrt{x}<\xi<\sqrt{x}\}=\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\frac{1}{2}dx=\sqrt{x};$$

同理可求得 η^2 的分布函数 $F_2(y)$，得

$$F_1(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \sqrt{x}, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1,\end{cases}\qquad F_2(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \sqrt{y}, & 0<y\le 1\\ 1, & y>1,\end{cases}$$

(ξ^2,η^2) 联合分布函数记为 $F_3(x,y)$，则当 $0\le x\le 1,\ y\ge 1$ 时

$$F_3(x,y)=P\{\xi^2<x,\eta^2<y\}=P\{\xi^2<x\}=\sqrt{x}$$

同理得当 $0\le y\le 1,\ x\ge 1$ 时 $F_3(x,y)=\sqrt{y}$；当 $0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1$ 时

$$F_3(x,y)=P\{\xi^2<x,\eta^2<y\}=P\{-\sqrt{x}<\xi<\sqrt{x},-\sqrt{y}<\eta<\sqrt{y}\}$$

$$=\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}ds\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1+st}{4}dt=\sqrt{xy}$$

合起来写得

$$F_2(x,y)=\begin{cases}0, & x\le 0 \text{ 或 } y\le 0\\ \sqrt{x}, & 0\le x\le 1,\ y\ge 1\\ \sqrt{y}, & 0\le y\le 1, x\ge 1\\ \sqrt{xy}, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 1, & x\ge 1, y\ge 1\end{cases}$$

不难验证 $F_3(x,y)=F_1(x)F_2(y)$ 对所有 x,y 都成立，所以 ξ^2 与 η^2 独立。

24、证：（1）由褶积公式及独立性得

$$P\{\xi_1+\xi_2=k\}=\sum_{i=0}^{k}P\{\xi_1=i,\xi_2=k-i\}=\sum_{i=0}^{k}P\{\xi_1=i\}P\{\xi_2=k-i\}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i}{i\,!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{k-1}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2}=\frac{1}{k\,!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i\,!(k-1)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-1}$$

$$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\qquad k=0,1,2,\cdots$$

这就证明了 $\xi_1+\xi_2$ 具有普阿松分布，且参数为 $\lambda_1+\lambda_2$

（2）$P\{\xi_1=k\,|\,\xi_1+\xi_2=n\}=\dfrac{P\{\xi_1=k,\xi_1+\xi_2=n\}}{P\{\xi_1+\xi_2=n\}}$

$$=\frac{P\{\xi_1=k,\xi_2=n-k\}}{P\{\xi_1+\xi_2=n\}}=\frac{P\{\xi_1=k\}P\{\xi_2=n-k\}}{P\{\xi_1+\xi_2=n\}}$$

$$=\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}\div\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

$$=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$$ 证毕。

25、证：由题设得

$$P\{\xi=1\}=P(\{\xi=1,\eta=1\}\bigcup(\xi=-1,\eta=-1\})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

$$P\{\xi=-1\}=P(\{\xi=1,\eta=-1\}\bigcup(\xi=-1,\eta=1\})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}。$$

$$P\{\xi=1,\zeta=1\}=P(\{\xi=1\}\bigcap[\{\xi=1,\eta=1\}\bigcup(\xi=-1,\eta=-1\}])$$

$$=P\{\xi=1,\eta=1\}=P\{\xi=1\}P\{\eta=1\}=\frac{1}{4}=P\{\xi=1\}P\{\zeta=1\},$$

$$P\{\xi=1,\zeta=-1\}=P(\{\xi=1\}\bigcap[\{\xi=1,\eta=-1\}\bigcup(\xi=-1,\eta=1\}])$$

$$=P\{\xi=1,\eta=-1\}=P\{\xi=1\}P\{\eta=-1\}=\frac{1}{4}=P\{\xi=1\}P\{\zeta=-1\},$$

同理可证 $P\{\xi=-1,\zeta=1\}+P\{\xi=-1\}P\{\zeta=1\}$，

$P\{\xi=-1,\zeta=-1\}+P\{\xi=-1\}P\{\zeta=-1\}$.

所以ξ与ζ相互独立。用同样的方法可片η与ζ也相互独立。但

$$P\{\xi=1,\eta=1,\zeta=1\}=P(\{\xi=1,\eta=1\}\bigcap[\{\xi=1,\eta=1\}\bigcup\{\xi=-1,\eta=-1\}]),$$

$$P\{\xi=1\}P\{\eta=1\}P\{\zeta=1\}=\frac{1}{8},$$

所以ξ,η,ζ只两两独立而不相互独立。

26、解：$P\{\xi=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,2\cdots$，

由此得（1）$P\{\eta=ak+b\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,2\cdots$，

（2）$P\{\eta=k^2\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,2\cdots$。

27、解：（1）由$P\{\xi=0\}=0$知，η以概率 1 取有限值。当$y>0$时，

$$F_\eta(y)=P\left\{\frac{1}{\xi}<y\right\}=P\{\xi<0\}+P\left\{\xi>\frac{1}{y}\right\}=\int_{-\infty}^0p(x)dx+\int_{\frac{1}{y}}^\infty p(x)dx;$$

当$y<0$时，

$$F_\eta(y)=P\left\{\frac{1}{\xi}<y\right\}=P\left\{\frac{1}{y}<\xi<0\right\}=\int_{\frac{1}{y}}^0p(x)dx;$$

当 $y=0$ 时，

$$F_\eta(y)=\int_{-\infty}^{0}p(x)dx。$$

（2）$F_\eta(y)=P\{tg\xi<y\}=P\left(\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}\{k\pi-\frac{\pi}{2}<\xi<k\pi+arctg\ y\}\right)$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{\frac{k\pi-\pi}{2}}^{k\pi+arctg\ y}p(x)dx$$

（3）当 $y\le 0$ 时，$F_\eta(y)=0$；当 $y>0$ 时，

$$F_\eta(y)=P\{|\xi|<y\}=P\{-y<\xi<y\}=\int_{-y}^{y}p(x)dx。$$

28、解：设直径为随机变量 d，则

$$p_d(x)=\begin{cases}\frac{1}{(b-a)}, & a<x<b\\ 0, & 其它\end{cases}。$$

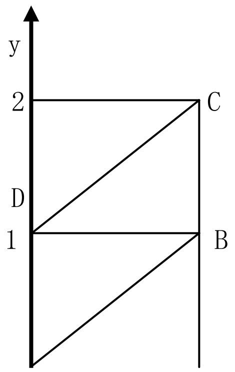
圆面积 $S=\frac{1}{4}\pi d^2$。当 $\frac{1}{4}\pi a^2<y\le\frac{1}{4}\pi b^2$ 时，

$$F_a(y)=P\{S<y\}+P\left\{\frac{1}{4}\pi d^2<y\right\}=P\left\{d<\sqrt{\frac{4y}{\pi}}\right\}=\int_a^{\sqrt{\frac{4y}{\pi}}}\frac{1}{b-a}dx；$$

当 $y\le\frac{1}{4}\pi a^2$ 时 $F_a(y)=0$；当 $y>\frac{1}{4}\pi b^2$ 时 $F_a(y)=1$。由此对 $F_a(y)$ 求导（利用对参数积分求导法则）得圆面积的分布密度为，当 $y\le\frac{1}{4}\pi a^2$ 或 $y>\frac{1}{4}\pi b^2$ 时 $p_a(y)=0$；当 $\frac{1}{4}\pi a^2<y\le\frac{1}{4}\pi b^2$ 时 $\qquad p_a(y)=F'a(y)=\frac{\sqrt{\pi y}}{(b-a)\pi y}$。

29、解：ξ 与 η 的密度函数为

$$p_\xi(x)=p_\eta(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases} \qquad (1)$$

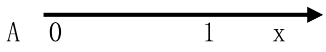


由卷积公式及独立性得 $\zeta=\xi+\eta$ 的分布密度函数为

$$p_\zeta(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p_\xi(x)p_\eta(y-x)dx \qquad (2)$$

把（2）与（1）比较知，在（2）中应有 $0\le x\le 1$，$0\le y-x\le 1$，满足此不等式组的解 (x,y) 构成图中平面区域平形四边形 ABCD，当 $0\le y\le 1$ 时 $0\le x\le y$，当 $1\le y\le 2$ 时 $y-1\le x\le 1$。所以当 $0\le y\le 1$ 时（2）中积分为

$$p_\zeta(y)=\int_0^y 1\times 1dx=y$$



当$1\le y\le 2$时，（2）中积分为

$$p_\zeta(y)=\int_{y-1}^{1} 1\times 1dx=2-y\text{；}$$

对其余的 y 有 $p_\zeta(y)=0$。

30、解：$p_\xi(x)=p_\eta(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$，　　$p_{\xi\eta}(x,y)=\dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$

由求商的密度函数的公式得

$$p_\zeta(y)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,p(xy,x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}|x|\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2y^2+x^2)}dx=\frac{2}{2\pi}\int_0^{\infty}xe^{-\frac{1}{2}x^2(1+y^2)}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+y^2}\left[-e^{-\frac{1}{2}x^2(1+y^2)}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{\pi(1+y^2)},\qquad -\infty<y<+\infty$$

$\zeta=\dfrac{\xi}{\eta}$服从柯西分布。

31、解：作变换，令$s=x+y,\ t=x-y$，得$x=\dfrac{1}{2}(s+t),y=\dfrac{1}{2}(s-t),|J|=\dfrac{1}{2}$。由$\xi$与$\eta$独立知，它们的联合密度应是它们单个密度的乘积，由此得 U，V 的联合密度函数为

$$p_{UV}(s,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}\cdot|J|=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{s+t}{2}\right)^2+\left(\frac{s-t}{2}\right)^2\right]}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{4\pi}e^{-\frac{1}{4}(s^2+t^2)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}=p_U(s)p_V(t)$$

所以 U,V 两随机变量也相互独立，且均服从 N（0，2）。

32、解：当$y>0$时由独立性得

$$1-F_\eta(y)=P\{\eta\ge y\}=P\{\xi_1\ge y,\xi_2\ge y,\cdots,\xi_n\ge y\}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}P\{\xi_1\ge y\}=\prod_{i=1}^{n}(1-F_{\xi_i}(y))=\prod_{i=1}^{n}(e^{-\lambda_i y})=\exp(-y\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)$$

$$\therefore F_\eta(y)=1-\exp\left(-y\sum^{n}\lambda_i\right)$$

当时。求导得的密度函数为，当时；当时

33、解：设$(0,a)$在内任意投两点ξ_1,ξ_2，其坐标分别为x,y，则ξ_1,ξ_2的联合分布密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\overline{\in}(0,a)\times(0,a)\\ \dfrac{1}{a^2}, & (x,y)\in(0,a)\times(0,a)\end{cases}。$$

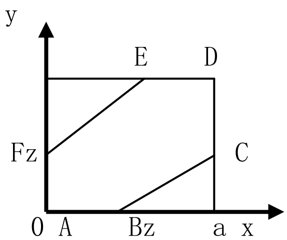
设$\eta=|\xi_1-\xi_2|$，则η的分布函数为，当$z\le 0$时$F_\eta(z)=0$；当$z>a$时$F_\eta(z)=1$；当$0<z\le a$时，

$$F_\eta(z)=P\{|\xi_1-\xi_2|<z\}=\iint\limits_{\substack{-z<x-y<z\\0<x,\,y<a}}p(x,y)dxdy=\frac{1}{a^2}\iint\limits_{\substack{-z<x-y<z\\0<x,\,y<a}}dxdy=\frac{1}{a^2}S,$$

积分 S 为平面区域 ABCDEF 的面积，其值为

$a^2-(a-z)^2=2az-z^2$，所以

$F_\eta(z)=(2az-z^2)/a^2$.



34、证：由独立性得，$V=(x,y,z)$的概率密度为

$$p(x,y,z)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3\sigma^3}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y^2+z^2)}$$

$S=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的分布函数为，当$s>0$时，

$$F(s)=P\left\{\sqrt{x^2+y^2+z^2}<s\right\}=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<S^2}\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3\sigma^3}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y+z^2)}dxdydz$$

作球面坐标变换，$x=\rho\cos\theta\sin\varphi,\ y=\sin\theta\sin\varphi,\ z=\rho\cos\varphi$，则$|J|=\rho^2\sin\varphi$，

$$F(s)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^a\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3\sigma^3}e^{-\frac{1}{2}\rho^2/\sigma^2}\times\rho^2d\rho$$

$$=2\pi\cdot 2\int_0^a\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3\sigma^3}e^{-\frac{1}{2}\rho^2/\sigma^2}\cdot\rho^2d\rho$$

由此式对 s 求导可得，当$s>0$时，S 的密度函数为

$$F'(s)=f(s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{s^2}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma^2}\right)$$

35、证：（3.14）式为

$$p(x)=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}n}\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}x^{\frac{1}{2}n-1}e^{-\frac{1}{2}x},\qquad x>0。$$

令$y=\sqrt{\dfrac{x}{n}}$，则$x=ny^2$，$x'_y=2ny$，由$p(y)=p[f^{-1}(y)]|[f^{-1}(y)]'|$得，$\sqrt{\dfrac{\eta}{n}}$的密度函数为，当$y>0$时

$$p_{\sqrt{\eta/n}}(y)=\frac{(ny^2)^{\frac{1n-1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}e^{-\frac{1}{2}ny^2}\cdot 2ny=\frac{2n^{\frac{1}{2}n}y^{n-1}}{2^{\frac{1}{2}n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}e^{-\frac{1}{2}ny^2}$$

ξ与$\sqrt{\frac{\eta}{n}}$仍独立。记$T=\xi/\sqrt{\eta/n}$，则由商的密度函数公式得 T 的密度函数为

$$p_T(t)=\int_{-\infty}^{\infty}|y|p_\xi(ty)p_{\sqrt{\eta/n}}(y)dy=\int_0^{\infty}y\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2y^2}\times\frac{2n^{\frac{1}{2}n}y^{n-1}e^{-\frac{1}{2}ny^2}}{2^{\frac{1}{2}n}\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}dy$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}n}}{\sqrt{2\pi}\,2^{\frac{1}{2}n}\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}\times(y^2)^{\frac{1}{2}(n+1)-1}e^{-\frac{1}{2}y^2(n+t^2)}dy^2\text{ ，}$$

令$u-y^2(n+t^2)$，则$dy^2=\dfrac{du}{(n+t^2)}$，得

$$p_T(t)=\frac{n^{\frac{1}{2}n}(n+t^2)^{-\frac{1}{2}(n+1)}}{\sqrt{2\pi}\,2^{\frac{1}{2}n}\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}\times\int_0^{\infty}u^{\frac{1}{2}(n+1)=1}e^{-\frac{1}{2}u}du$$

$$=\frac{n^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\,2^{\frac{1}{2}n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\times\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n+1)\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}(n+1)}}(n+t^2)^{-\frac{1}{2}(n+1)}$$

$$\therefore\ p_T(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n+1)\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{1}{2}(n+1)}\qquad -\infty<t<\infty$$

36、解：U 的分布函数为，当$t\le 0$时$F(t)=0$；当$t>0$时有

$$F(t)=\iiint\limits_{x+y+z<t}p(x,y,z)dxdydz=\int_0^t dx\int_0^{t-x}dy\int_0^{t-x-y}\frac{6}{(1+x+y)^4}dz$$

$$=\frac{-2}{(1+t)^3}\cdot\frac{t^2}{2}+\int_0^t dx\int_0^t\frac{2}{(1+x+y+z)^3}dy$$

$$=\frac{-t^2}{(1+t)^3}-\frac{t}{(1+t)^2}+\int_0^t dx\int_0^t \frac{1}{(1+x)^2}dx=1-\frac{1}{t+1}-\frac{t}{(1+t)^2}-\frac{t^2}{(1+t)^3}$$

对 $F(t)$ 求导可得 U 的密度函数为，当 $t\le 0$ 时 $p(t)=0$；当 $t>0$ 时 $p(t)=\frac{3t^2}{(1+t)^4}$。

37、证：（U，V）联合分布函数为

$$F(u,v)=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2<u\\ \frac{x}{y}<v}}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy$$

当 $s>0$ 时作变换，$s=x^2+y^2$，$t=\frac{x}{y}$，反函数有两支

$$\begin{cases} x=t\sqrt{\frac{s}{(1+t^2)}} \\ y=\sqrt{\frac{s}{(1+t^2)}} \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} x=-t\sqrt{\frac{s}{(1+t^2)}} \\ y=-s\sqrt{\frac{s}{(1+t^2)}} \end{cases}$$

$$J^{-1}=\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{vmatrix}=-\frac{2x^2}{y^2}-2=-2(t^2+1)，\ |J|=\frac{1}{2(1+t^2)}$$

考虑到反函数有两支，分别利用两组

$$F(u,v)=\left\{\iint\limits_{\substack{x^2+y^2<u\\ \frac{x}{y}<v,\ y>0}}+\iint\limits_{\substack{x^2+y^2<u\\ \frac{x}{y}<v,\ y>0}}\right\}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy=2\int_0^u\int_{-\infty}^v\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}s}\cdot\frac{1}{2(1+t^2)}dt$$

对 $F(u,v)$ 求导，得（U，V）的联合密度为（其余为 0）

$$p(u,v)=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}u}\cdot\frac{1}{\pi(1+v^2)},\qquad u>0,\ 0<v<\infty$$

若令 $p_U(u)=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}u}(u>0),\quad p_V(v)=\frac{1}{\pi(1+v^2)}\qquad(-\infty<v<\infty)$，

则 U 服从指数分布，V 服从柯西分布，且 $p(u,v)=p_U(u)\times p_V(v)$，所以 U，V 两随机变量独立。

38、证：当 $x>o$ 时，ξ 与 η 的密度函数分别为

$$p_\xi(x)=\frac{\lambda^{r_1}}{\Gamma(r_1)}x^{r_1-1}e^{-\lambda x},\quad p_\eta(x)=\frac{\lambda^{r_2}}{\Gamma(r_2)}x^{r_2-1}e^{-\lambda x};$$

当 $x \le 0$ 时， $p_\xi(x) = p_\eta(x) = 0$ 。设 $U = \xi + \eta,\ V = \dfrac{\xi}{\eta}$ 。当 $s \le 0$ 或 $t \le 0$ 时，（U，V）联合密度为 $p(s,t) = 0$ ；当 $s > 0, t > 0$ 时，作变换 $s = x + y,\ t = \dfrac{x}{y}$，得 $x = \dfrac{st}{(1+t)}$，$y = \dfrac{s}{(1+t)}$ 而 $|J| = \dfrac{s}{(1+t)^2}$，所以

$$
\begin{aligned}
p(s,t) &= \frac{\lambda^{r_1+r_2}}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} x^{r_1-1} y^{r_2-1} e^{-\lambda(x+y)} |J| \\
&= \frac{\lambda^{r_1+r_2}}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \left(\frac{st}{1+t}\right)^{r_1-1} \left(\frac{s}{1+t}\right)^{r_2-1} e^{-\lambda s} \frac{s}{(1+t)^2} \\
&= \left[\frac{\lambda^{r_1+r_2}}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} s^{r_1+r_2-1} e^{-\lambda s}\right] \times \left[\frac{\Gamma(r_1+r_2)}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \cdot \frac{t^{r_1-1}}{(1+t)^{r_1+r_2}}\right] = p_U(s) p_V(t)
\end{aligned}
$$

由此知 U 服从分布服从分布，且 U 与 V 相互独立。

39、解：令 $U = \xi + \eta,\ V = \dfrac{\xi}{(\xi + \eta)}$，当 $s \le 0$ 或 $t \overline{\in} (0,1)$ 时，U，V 联合密度 $p(s,t) = 0$ ；当 $s > 0$ 且 $t \in (0,1)$ 时作变换 $s = x + y,\ y = \dfrac{x}{(x+y)}$，则 $x = st,\ y = s - st,\ |J| = s$，

$$p(s,t) = e^{-x} e^{-y} |J| = s e^{-(x+y)} = s e^{-s} \cdot 1 = p_U(s) p_V(t)$$

由此得 U 服从 $\Gamma-$分布 $G(1,2)$，V 服从(0,1)分布，且 U 与 V 相互独立。

40、解:（2.22）式为

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-n)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

设 $U_i = \xi + \eta, V_i = \xi - \eta;\ U = U_1 - a - b,\ V = V_1 - a + b$ 。作变换 $s = x + y - a - b$，$t = x - y - a + b$ 则 $x - a = \dfrac{1}{2}(s+t)$，$y - b = \dfrac{1}{2}(s-t)$，$|J| = \dfrac{1}{2}$ 。U，V 的联合密度函数为

$$
\begin{aligned}
& f(s,t) = p(x,y)|J| \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(s+t)^2}{4\sigma_1^2} - \frac{2r(s+t)(s-t)}{4\sigma_1\sigma_2} + \frac{(s-t)^2}{4\sigma_2^2}\right]\right\}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{4\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{8(1-r^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[s^2\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\right) + t^2\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\right) + 2st(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)\right]\right\}$$

设 U，V 的边际分布密度函数分别为 $f_U(s), f_V(t)$，欲 U 与 V 独立，必须且只需

$f(s,t)=f_U(s)\cdot f_{V(t)}$，由 $f(s,t)$ 的表达式可知，这当且仅当 $\sigma_2^2-\sigma_1^2=0$ 时成立。U，V 相互独立与 U_i,V_i 相互独立显然是等价的，所以 $U_i=\xi+\eta, V_i=\xi-\eta$ 相互独立的充要条件是 $\sigma_1=\sigma_2$。当 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$ 时，得

$f_U(s)=\dfrac{1}{2\sigma\sqrt{\pi(1+r)}}\exp\left\{-\dfrac{s^2}{4(1+r)\sigma^2}\right\}$，$f_V(t)=\dfrac{1}{2\sigma\sqrt{\pi(1-r)}}\exp\left\{-\dfrac{s^2}{4(1+r)\sigma^2}\right\}$

$U\sim N(0,2(1+r)\sigma^2),\quad V\sim N(0,2(1-r)\sigma^2)$。

41、解：（1）因为指数中二次项 x^2,y^2,xy 的系数分别为 $-1,-\dfrac{1}{2},-1$，所以与(2.22)式（见上题解答）比较知，可设其配方后的形式为

$$-1\cdot(x+s)^2-\frac{1}{2}(y+t)^2-1\cdot(x+s)(y+t)。$$

比较系数得 $\begin{cases}-2s-t=11\\ -s-t=7\\ -s^2-\dfrac{1}{2}t^2-st=32\dfrac{1}{2}\end{cases}$

此方程组有唯一解 $s=-4,t=-3$，由此得

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\left[x-4)^2+\frac{1}{2}(y-3)^2+(x-4)(y-3)\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi\cdot1\cdot\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\frac{1}{2})}\left[(x-4)^2+\frac{(y-3)^2}{2}+2\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{(x-4)(y-3)}{1\cdot\sqrt{2}}\right]\right\}$$

（2）与（2.22）式比较得，$a=4,b=3,\sigma_1=1,\sigma_2=2,r=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$。

（3） $p_1(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\dfrac{(x-4)^2}{2}\right\}$， $p_2(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\dfrac{(y-3)^2}{4}\right\}$。

（4） $p(x\mid y)=\dfrac{p(x,y)}{p_2(y)}=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\left[x-\left(-\dfrac{1}{2}y+5\dfrac{1}{2}\right)\right]^2\right\}$，它服从

$N\left(-\dfrac{1}{2}y+5\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$。

42、解：$|B^{-1}|=27,\ |B|=\dfrac{1}{|B^{-1}|}=\dfrac{1}{27}$.

$$p(x,y,z)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}n}\ |B|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-a)B^{-1}(x-a)^{\tau}\right\}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}n}\ |B|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}r_{jk}(x_1-a_1)(x_k-a_k)\right\}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{1}{27}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(7x^2+4y^2+2z^2+6xy+4xz+2yz)\right\}.$$

(ξ_1,ξ_2)的边际密度函数为（积分时在指数中对 z 配方）

$$p(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y,z)dz=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{1}{27}}}e^{-\frac{1}{2}(5x^2+3\frac{1}{2}y^2+4xy)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(z+x+\frac{1}{2}y)^2}dz$$

令 $z+x+\frac{1}{2}y=t$，利用 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$ 得

$$p(x,y)=\frac{3\sqrt{6}}{4\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}(5x^2+4xy+3\frac{1}{2}y^2)\right\}。$$

43、证：以 f 记ξ的密度函数，则(ξ,η)的联合密度为 $f(x0f(y)$。作变换，令 $s=x+y$，$t=x-y$ 得 $x=\frac{1}{2}(s+t),\ \ y=\frac{1}{2}(s-t),\ |J|=\frac{1}{2}$。若改记 s 为 x，t 为 y，则由此可得$(\xi+\eta,\xi-\eta)$的联合密度为 $\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)f\left(\frac{1}{2}(x-y)\right)$。另一方面，由卷积公式得$\xi+\eta$和$\xi-\eta$的密度分别为

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-s)f(s)ds,\quad h(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y+t)f(t)dt.$$

故由$\xi+\eta$与$\xi-\eta$独立得

$$\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)f\left(\frac{1}{2}(x-y)\right)=g(x)h(y)。$$

令 $m(x)=\log f(x)$（此处用了 $f(x)>0$），则有

$$m\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)+m\left(\frac{1}{2}(x-y)\right)=\log g(x)+\log 2h(y)。$$

由假定知$m(x)$有二阶导数，上式对 x 求导得

$$m'\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right)_x'+m\left(\frac{x-y}{2}\right)\left(\frac{x-y}{2}\right)_x'=(\log g(x))_x'$$

再对 y 求一次导数得

$$\frac{1}{4}m''\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)-\frac{1}{4}m''\left(\frac{1}{2}(x-y)\right)=0.$$

对任意 u, v，选择 x, y 使 $u=\frac{1}{2}(x+y),\ v=\frac{1}{2}(x-y)$ 则由上式得 $m''(u)-m''(v)=0$.

由 u, v 的任意性得 $m'''\equiv$常数，因而 $m(x)=a+bx+cx^2$，即有

$f(x)=\exp(a+bx+cx^2)$.

所以ξ,η，从而$\xi+\eta$, $\xi-\eta$均匀正态分布。

44、解：（1）将弦的一端 A 固定，另一端 B 在圆周上等可能分布，记ξ_1表示沿逆时针方向$\overset{\frown}{AB}$弧长，则ξ_1在$(0,2\pi)$上服从均匀分布，

$$P\{弦长>\sqrt{3}\}=P\left\{\frac{2\pi}{3}<\xi_1<\frac{4\pi}{3}\right\}=\int_{2\pi/3}^{4\pi/3}\frac{1}{2\pi}dx=\frac{1}{3}$$

（2）假定弦垂直于某直径，取该直径为 x 轴，圆心为坐标原点，记ξ_2表示弦的中点坐标，则ξ_2在[-1, 1]上服从均匀分布，

$$P\{弦长>\sqrt{3}\}=P\left\{-\frac{1}{2}<\xi_2<\frac{1}{2}\right\}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}$$

（3）以圆心为原点建立直角坐标系 XOY，记弦中点的坐标为$\eta=(\eta_1,\eta_2)$，则η在圆内$\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}$2 服从均匀分布，记$D=\{(x,y):x^2+y^2\le\frac{1}{2}\}$，则

$$P\{弦长>\sqrt{3}\}=P\{\eta\in D\}=\iint\limits_{x^2+y^2<\frac{1}{2}}\frac{1}{\pi}dxdy=\frac{1}{4}$$

三种解法的随机变量虽都服从均匀分布，但由于随机变量不同，所以就得出了不同的结论。

45、证：（1）若$\omega\in f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)$，则 $f(\omega)\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$，必存在某个$\lambda_0\in\Lambda$使 $f(\omega)\in B_{\lambda 0}$，亦有$\omega\in f^{-1}(B_{\lambda 0})$，从而$\omega\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(B_\lambda)$，

$$\therefore\ \bigcup_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(B_\lambda)\supset f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)\qquad（1）$$

反之，若$\omega\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(B_\lambda)$，必存在某个$\lambda_0\in\Lambda$使$\omega\in f^{-1}(B_{\lambda 0})$亦有 $f(\omega)\in B_{\lambda 0}$，即

$f(\omega)\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$，从而$\omega\in f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)$,

$$\therefore\ f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)\supset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(B_\lambda)\text{。}\qquad(2)$$

由（1），（2）式即得（和集的逆像等于每个集逆像的和）

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(B_\lambda)\text{。}$$

（2）若 $\omega\in f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)$，则 $f(\omega)\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$，即 $f(\omega)$ 属于每个 $B_\lambda(\lambda\in\Lambda)$，得 $\omega\in f^{-1}(B_\lambda)$（对任一 $\lambda\in\Lambda$），从而 $\omega\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(B_\lambda)$，

$$\therefore\ \bigcap_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(B_\lambda)\supset f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)\text{。}\qquad(3)$$

反之，若 $\omega\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(B_\lambda)$，则 ω 属于每个 $f^{-1}(B_\lambda)\in(\lambda\in\Lambda)$，亦有 $f(\omega)$ 属于每个 $B_\lambda(\lambda\in\Lambda)$，即 $f(\omega)\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$，从而 $\omega\in f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)$，

$$\therefore f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)\supset\bigcap_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(B_\lambda)\text{。}\qquad(4)$$

由（3），（4）式即得（交集的逆像等于每个集逆像的交）

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(B_\lambda)\text{。}$$

（3）若 $\omega\in f^{-1}(\overline{B})$，则 $f(\omega)\,\overline{\in}\,B$，亦有 $\omega\,\overline{\in}\,f^{-1}(B)$，从而 $\omega\in\overline{f^{-1}(B)}$，所以 $\overline{f^{-1}(B)}\supset f^{-1}(\overline{B})$。反之，若 $\omega\in\overline{f^{-1}(B)}$，则 $\omega\,\overline{\in}\,f^{-1}(B)$，亦有 $f(\omega)\,\overline{\in}\,B$，即 $f(\omega)\,\overline{\in}\,B$，从而 $\omega\in f^{-1}(\overline{B})$，所以 $f^{-1}(\overline{B})\supset\overline{f^{-1}(B)}$。

由以上证明可得 $f^{-1}(\overline{B})=\overline{f^{-1}(B)}$，即互为对立事件的逆像也是互为对立的事件。

46、证：必要性。设 ξ 是随机变量，则对 $C\in B$ 有 $\{\omega:\xi(\omega)\in C\}\in F$，又 $(-\infty,x)\in B_1$，

$$\therefore\{\omega:\xi(\omega)<x\}=\{\omega:\xi(\omega)\in(-\infty,x)\in F\ .$$

充分性。记 $M=\{A:A\subset R^1,(\omega:\xi(\omega)\in A)\in F\}$，现证 M 是 R^1 中 $\sigma-$域。

（1）$\{\omega:\xi(\omega)\in R^1\}=\Omega\in F$，故 $R^1\in M$。

（2）若 $C\in M$，由上题 $f^{-1}(\overline{C})=\overline{f^{-1}(C)}$ 得

$(\omega:\xi(\omega)\in\overline{C})=\Omega-(\omega:\xi(\omega)\in C\}\in F$，故 $\overline{C}\in M$ 对余集运算封闭。

（3）设 $C_i\in M,\cdots$，由上题（1）中结论得 $\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i\in M$，$M$ 关于可列并集运算封闭。

由(1)－(3)知，M 是$\sigma-$域的集类。由条件知，$M\supset\{(-\infty,x):x\in R^1\}$，

$$\therefore M\supset S\{(-\infty,x):x\in R^1\}=B_1,$$

其中 S{A}表示由集类 A 产生的$\sigma-$域。由此得证ξ是一随机变量。

第四章　数字特征与特征函数

1、解：$E\xi=\sum_{k=0}^{\infty}k,\frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}=\frac{1}{1+a}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a}{1+a}\right)^k\right]$，令$\frac{a}{(1+a)}=p$，则$0<p<1$，

且$\sum_{k=1}^{\infty}kp^k=p\left(\sum_{k=1}^{\infty}p^k\right)'=p\left(\frac{a}{1+a}\right)'=\frac{p}{(1-p)^2}$，$\therefore E\xi=\frac{1}{1+a}\cdot\frac{\frac{a}{1+a}}{\left(1-\frac{a}{1+a}\right)^2}=a$。

采用同样的方法并利用$E\xi=a$得

$$E\xi^2=\frac{1}{1+a}\left[\sum_{k=1}^{\infty}k^2\left(\frac{a}{1+a}\right)^k\right]=\frac{1}{1+a}\sum_{k=1}^{\infty}k[(k-1)+1]p^k$$

$$=\frac{1}{1+a}\sum_{k=1}^{\infty}kp^k+\frac{1}{1+a}\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)p^k$$

$$=a+\frac{p^2}{1+a}\left(\sum_{k=1}^{\infty}p^k\right)''=a+\frac{p^2}{1+a}\left[\frac{p}{(1-p)}\right]''=a+\frac{p^2}{1+a}\cdot\frac{2}{(1-p)^3}=a+2a^2$$

$D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=(a+2a^2)-a^2=a(1+a)$。

2、解：设$\mu=\mu_1+\mu^2+\cdots+\mu_n$，其中$\mu_i=\begin{cases}1, & 若第i次试验A出现\\ 0, & 若第i次试验\overline{A}出现\end{cases}$，则

$E\mu=\sum_{i=1}^{n}E\mu_i=\sum_{i=1}^{n}p_i$，由试验独立得诸$\mu_i$相互独立，由此得

$$D\mu=\sum_{i=1}^{n}D\mu_i=\sum_{i=1}^{n}p_i(1-p_i)\text{。}$$

3、解：η服从两点分布，由第二章第 29 题得，$P\{\eta=1\}=P$ {事件 A 出现奇数次}=

$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-2p)^n,P\{\eta=0\}=$P{事件 A 出现偶数次}$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-2p)^n$，所以

$$E\eta=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-2p)^n,$$

$$D\eta=\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-2p)^n\right]\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-2p)^n\right]=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(1-2p)^{2n}.$$

4、解：设ξ表取一球的号码数。袋中球的总数为$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$，所以

$$P\{\xi=k\}=\frac{k}{\frac{1}{2}n(n+1)}=\frac{2k}{n(n+1)}, \qquad k=1,2,,\cdots,n.$$

$$E\xi=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n(n+1)}\cdot k=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{3}(2n+1).$$

5、解：由于 μ 是分布，所以应有 $\sum_{n=0}^{\infty}P\{\mu=n\}=\sum_{n=0}^{\infty}A\cdot\frac{B^n}{n!}=1$，即 $Ae^B=1, A=e^{-B}$。

又由已知 $E\mu=\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot\frac{AB^n}{n!}=a$，即 $AB\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B^{n-1}}{(n-1)!}=a$，$ABe^B=a$，$\therefore B=a,$ $A=e^{-B}=e^{-a}$。

6、解：μ 表示摸出 c 个球中白球个数，摸 c 个球可视为不放回地摸 c 次。记 $\xi_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{次摸到白球}\\ 0, & \text{第}i\text{次摸到黑球}\end{cases}$，则 $\mu=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_c$。由第二章第 7 题得 $P\{\xi_i=1\}=\frac{a}{(a+b)}$，$i=1,2,\cdots,c$。所以 $E\xi_i=\frac{a}{(a+b)}$，

$$E\mu=\sum_{i=1}^{c}E\xi_i=c\cdot\frac{a}{a+b}=\frac{ac}{a+b}.$$

7、解：设 μ 表示抽出 k 张卡片的号码和，ξ_i 表示第 i 次抽到卡片的号码，则 $\mu=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_k$，因为是放回抽取，所以诸 ξ_i 独立。由此得，对 $i=1,2,\cdots,k$。

$$E\xi_i=\sum_{j=1}^{n}j\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}j=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2},$$

$$E\mu=E\xi_1+E\xi_2+\cdots+E\xi_k=\frac{1}{2}k(n+1);$$

$$E\xi_i^{\ 2}=\sum_{j=1}^{n}j^2\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{6}(n+1)(2n+1),$$

$$D\xi_i=E\xi_i^{\ 2}-\left(E\xi_i\right)^2=\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)-\frac{1}{4}(n+1)^2=\frac{1}{12}(n^2-1),$$

$$D\mu=D\xi_1+D\xi_2+\cdots+D\xi_n=\frac{1}{12}k(n^2-1)。$$

8、解：设 μ 为所得 k 张卡片上号码之和。对 $1\le i_1<\cdots<i_k\le n$ 有 $P\{\mu=i_1+i_2+\cdots+i_k\}=\frac{1}{C_n^k}$，由定义得

$$E\mu=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}(i_1+i_2+\cdots+i_k)\frac{1}{C_n^k}=\frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_n^k}\sum_{m=1}^{n}m \qquad (*)$$

每次抽卡片 k 张称为一组，对于每个固定的卡片 m，在卡片 m 所在的组中，其余 $k-1$ 张

卡片可以从剩下$n-1$张卡片中任意抽取，所以 m 总共被抽到的次数（或所在的组数）为C_{n-1}^{k-1}，转换成对 m 求和就得到上式。由此得

$$E\mu=\frac{k}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{k(n+1)}{2}.$$

为求方差，先求$E\mu^2$，由定义得

$$E\mu^2=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}(i_1+i_2+\cdots+i_k)^2\cdot\frac{1}{C_n^k}=\frac{1}{C_n^k}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\left[(i_1^2+\cdots+i_k^2)+2\sum_{1\le t<j\le k}i_t i_j\right]$$

$$=\frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_n^k}\sum_{m=1}^{n}m^2=2\frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k}\sum_{1\le i<j\le n}ij$$

其中前一个和式得来的理由同（*）式。为获得后一和式，仍考虑每次抽得的一组 k 张卡片。在卡片 i 和 j 所在的组中，其余$k-2$张卡片可以从其余$n-2$张卡片中任意抽取，所以卡片 i 和 j 同时被抽到的次数为C_{n-2}^{k-2}，即得第二个和式的系数。继续运算得

$$E\mu^2=\frac{k}{n}\sum_{m=1}^{n}m^2+\frac{2C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k}\left[1(2+\cdots+n)+2(3+\cdots+n)+\cdots+(n-1)n\right]$$

$$=\frac{k}{n}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{2k(k-1)}{n(n-1)}\sum_{m=1}^{n-1}m\left[\frac{n(n+1)}{2}-\frac{m(m+1)}{2}\right]$$

$$=\frac{k(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{2k(k-1)}{n(n-1)}\left[\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n-1}m^3-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n-1}m^2\right]$$

$$=\frac{k(n+1)(2n+1)}{6}+k(k-1)\left[\frac{n(n+1)}{2}-\frac{(n-1)^2n^2}{4n(n-1)}-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n(n-1)}\right]$$

$$=\frac{1}{6}k(n+1)(2n+1)+k(k-1)\left[\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{1}{4}n(n-1)-\frac{1}{6}(2n-1)\right]$$

$$=\frac{1}{6}k(n+1)(2n+1)+\frac{1}{12}k(k-1)(n+1)(3n+2)$$

$$\therefore D\mu=E\mu^2-(E\mu)^2=\frac{1}{12}k(n+1)(n-k).$$

9、证：$\sum_{k=1}^{\infty}P\{\xi\ge k\}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}P\{\xi=j\}$

$$=\{\xi=1\}+P\{\xi=2\}+P\{\xi=3\}+\cdots+P\{\xi=2\}+P\{\xi=3+\cdots+P\{\xi=3\}+\cdots$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}kP\{\xi=k\}=E\xi.$$

10、解：此题属于有放回抽样的情形，利用允许重复的排列计算。若 n 辆车的车牌号中最大号码为 k，则其中应至少有一个牌号为 k，所以有利场合数应为，k^n与那些 n 个牌号中没有号码 k 的种数$(k-1)^n$之差，从而有

$$P\{\xi=k\}=\frac{\left[k^n-(k-1)^n\right]}{N^n},\qquad k=1,2,\cdots,N\,.$$

$$\therefore\qquad E\xi=\sum_{k=1}^{N}k\cdot\frac{k^n-(k-1)^n}{N^n}=N-\sum_{k=1}^{N-1}\frac{k^n}{N^n}\,.$$

11、解：$E\xi=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\lambda}xe^{\frac{-|x-\mu|}{\lambda}}dx\qquad(令t=\frac{(x-\mu)}{\lambda})$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda t+\mu}{2}e^{-|t|}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda t}{2}e^{-|t|}dt+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu}{2}e^{-|t|}dt=0+\mu=\mu\,.$$

$$D\xi=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\lambda}(x-\mu)^2e^{\frac{-|x-\mu|}{\lambda}}\qquad(令t=\frac{(x-\mu)}{\lambda})$$

$$=\lambda^2\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-t}dt=\lambda^2t^2(-e^{-t})\Big|_0^{\infty}+2\lambda^2\int_0^{\infty}te^{-t}dt$$

$$=2\lambda^2t(-e^{-t})\Big|_0^{\infty}+2\lambda^2\int_0^{\infty}te^{-t}dt=2\lambda^2(-e^{-t})\Big|_0^{\infty}=2\lambda^2\,.$$

12、解：分子平均速度为

$$E\xi=\int_0^{\infty}x\frac{4x^2}{a^3\sqrt{\pi}}e^{\frac{-x^2}{a^2}}dx\qquad(令t=\frac{x}{a})$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{4t^3}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}\cdot adt=\frac{2at^2}{\sqrt{\pi}}\left(-e^{-t^2}\right)\Big|_0^{\infty}+\frac{2a}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}2te^{-t^2}dt=\frac{2a}{\sqrt{\pi}}\text{。}$$

分子平均动能为

$$E\left(\frac{1}{2}m\xi^2\right)=\int_0^{\infty}\frac{1}{2}mx^2\frac{4x^2}{a^3\sqrt{\pi}}e^{\frac{-x^2}{a^2}}dx\qquad(令t=\frac{x}{a})$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{2ma^2}{\sqrt{\pi}}t^4e^{-t^2}dt=\frac{ma^2}{\sqrt{\pi}}t^3\left(-e^{-t^2}\right)\Big|_0^{\infty}+\frac{3ma^2}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt$$

$$=\frac{3ma^2}{2\sqrt{\pi}}\times\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{3ma^2}{4}\text{。}$$

13、证：$\xi_1\xi_2$ 的联合密度为 $p(x,y)=\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}\right\}$，

$$\therefore\quad E\max(\xi_1,\xi_2)=\iint\max(x,y)p(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{x}xp(x,y)dy+\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{x}^{\infty}yp(x,y)dy$$

（利用密度函数的积分值为 1，减 a 再加 a）

$$=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{x}(x-a)p(x,y)dy+\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{x}^{\infty}(y-a)p(x,y)dy+a$$

（在前一积分中交换积分次序，在后一积分中交换 x 与 y 的记号）

$$=\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{y}^{\infty}(x-a)p(x,y)dx+\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{y}^{\infty}(y-a)p(x,y)dx+a$$

$$=a+2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sigma^{2}}e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}}dy\int_{y}^{\infty}(x-a)e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$$

(令 $\frac{(y-a)}{\sigma}=t$)

$$=a+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma e^{-t^2}dt=a+\frac{\sigma}{\pi}\sqrt{\pi}=a+\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}.$$

14、证：$E\xi=\int_{-\infty}^{\infty}xdF(x)=\int_{-\infty}^{\infty}xdF(x)+\int_{0}^{\infty}xdF(x)=\int_{-\infty}^{0}xdF(x)-\int_{0}^{\infty}xd(1-F(x))$

$$=xF(x)\Big|_{-\infty}^{0}-\int_{-\infty}^{0}F(x)dx-x(1-F(x))\Big|_{0}^{\infty}+\int_{0}^{\infty}(1-F(x))dx$$

由均值存在得 $\int_{-\infty}^{\infty}|x|dF(x)<\infty$，

$\therefore\quad 0\le AF(-A)\le\int_{-\infty}^{-A}|x|dF(x)\to 0\quad$ (当 $A\to+\infty$)，

$0\le B(1-F(B))\le\int_{B}^{\infty}|x|dF(x)\to 0\quad$ (当 $B\to+\infty$)

以此代入 $E\xi$ 的计算式即得 $\quad E\xi=\int_{0}^{\infty}(1-F(x))dx-\int_{-\infty}^{0}F(x)dx$ 。