教材知识全解

教材习题详解

教材习题详解

第一章　绪　论

习题 1.2

1. 指出下面微分方程的阶数,并回答方程是否是线性的:

(1) $\frac{dy}{dx} = 4x^2 - y$;　(2) $\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 12xy = 0$;

(3) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} - 3y^2 = 0$;　(4) $x\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 3xy = \sin x$;

(5) $\frac{dy}{dx} + \cos y + 2x = 0$;　(6) $\sin\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + e^y = x$.

解:(1) 一阶,线性.　(2) 二阶,非线性.　(3) 一阶,非线性.

(4) 二阶,线性.　(5) 一阶,非线性.　(6) 二阶,非线性.

2. 试验证下面函数均为方程 $\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0$ 的解,这里 $\omega > 0$ 是常数:

(1) $y = \cos \omega x$;　(2) $y = c_1 \cos \omega x$(c_1 是任意常数);

(3) $y = \sin \omega x$;　(4) $y = c_2 \sin \omega x$(c_2 是任意常数);

(5) $y = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$($c_1, c_2$ 是任意常数);

(6) $y = A\sin(\omega x + B)$(A, B 是任意常数).

解:(1) 因为 $y = \cos \omega x$, $\frac{dy}{dx} = -\omega \sin \omega x$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = -\omega^2 \cos \omega x$,

所以 $\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = -\omega^2 \cos \omega x + \omega^2 \cos \omega x = 0$.

因此,$y = \cos \omega x$ 是方程 $\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0$ 的解.

(2) 因为 $y = c_1 \cos \omega x$, $\frac{dy}{dx} = -c_1 \omega \sin \omega x$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = -c_1 \omega^2 \cos \omega x$,

所以 $\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = -c_1 \omega^2 \cos \omega x + \omega^2 c_1 \cos \omega x = 0$.

因此,$y = c_1 \cos \omega x$ 是方程 $\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0$ 的解.

(3) 因为 $y = \sin \omega x$, $\frac{dy}{dx} = \omega \cos \omega x$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = -\omega^2 \sin \omega x$,

所以 $\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = -\omega^2 \sin \omega x + \omega^2 \sin \omega x = 0$,

因此,$y = \sin \omega x$ 是方程 $\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0$ 的解.

(4) 因为 $y = c_2\sin\omega x, \frac{dy}{dx} = c_2\omega\cos\omega x, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = -c_2\omega^2\sin\omega x$,

所以$\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = -c_2\omega^2\sin\omega x + \omega^2 c_2\sin\omega x = 0$,

因此,$y = c_2\sin\omega x$ 是方程$\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0$ 的解.

(5) 因为 $y = c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x, \frac{dy}{dx} = -c_1\omega\sin\omega x + c_2\omega\cos\omega x$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = -c_1\omega^2\cos\omega x - c_2\omega^2\sin\omega x,$$

所以$\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = -c_1\omega^2\cos\omega x - c_2\omega^2\sin\omega x + \omega^2(c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x) = 0$.

因此,$y = c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x$ 是方程$\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0$ 的解.

(6) 因为 $y = A\sin(\omega x + B), \frac{dy}{dx} = \omega A\cos(\omega x + B)$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = -\omega^2 A\sin(\omega x + B),$$

所以$\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = -\omega^2 A\sin(\omega x + B) + \omega^2 A\sin(\omega x + B) = 0$.

因此,$y = A\sin(\omega x + B)$ 是方程$\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0$ 的解.

3. 验证下列各函数是相应微分方程的解:

(1) $y = \frac{\sin x}{x}, xy' + y = \cos x$;

(2) $y = 2 + c\sqrt{1 - x^2}, (1 - x^2)y' + xy = 2x$($c$ 是任意常数);

(3) $y = ce^x, y'' - 2y' + y = 0$($c$ 是任意常数);

(4) $y = e^x, y'e^{-x} + y^2 - 2ye^x = 1 - e^{2x}$;

(5) $y = \sin x, y' + y^2 - 2y\sin x + \sin^2 x - \cos x = 0$;

(6) $y = -\frac{1}{x}, x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1$;

(7) $y = x^2 + 1, y' = y^2 - (x^2 + 1)y + 2x$;

(8) $y = -\frac{g(x)}{f(x)}, y' = \frac{f'(x)}{g(x)}y^2 - \frac{g'(x)}{f(x)}$.

解:(1) 因为 $y = \frac{\sin x}{x}, y' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$,

所以 $xy' + y = \frac{x\cos x - \sin x}{x} + \frac{\sin x}{x} = \cos x$.

因此,$y = \frac{\sin x}{x}$ 是方程 $xy' + y = \cos x$ 的解.

(2) 因为 $y=2+c\sqrt{1-x^2}$, $y'=\dfrac{-cx}{\sqrt{1-x^2}}$,

所以 $(1-x^2)y'+xy=(1-x^2)\cdot\dfrac{-cx}{\sqrt{1-x^2}}+x(2+c\sqrt{1-x^2})$

$$=-cx\sqrt{1-x^2}+2x+cx\sqrt{1-x^2}=2x.$$

因此,$y=2+c\sqrt{1-x^2}$ 是方程 $(1-x^2)y'+xy=2x$ 的解.

(3) 因为 $y=ce^x$, $y'=ce^x$, $y''=ce^x$,

所以 $y''-2y'+y=ce^x-2ce^x+ce^x=0$.

因此,$y=ce^x$ 是方程 $y''-2y'+y=0$ 的解.

(4) 因为 $y=e^x$, $y'=e^x$,

所以 $y'e^{-x}+y^2-2ye^x=e^xe^{-x}+e^{2x}-2e^xe^x=1-e^{2x}$,

因此,$y=e^x$ 是方程 $y'e^{-x}+y^2-2ye^x=1-e^{2x}$ 的解.

(5) 因为 $y=\sin x$, $y'=\cos x$,

所以 $y'+y^2-2y\sin x+\sin^2x-\cos x=\cos x+\sin^2x-2\sin x\sin x+\sin^2x-\cos x=0$,

因此,$y=\sin x$ 是方程 $y'+y^2-2y\sin x+\sin^2x-\cos x=0$ 的解.

(6) 因为 $y=-\dfrac{1}{x}$, $y'=\dfrac{1}{x^2}$,

所以 $x^2y'=x^2\dfrac{1}{x^2}=1$,又 $x^2y^2+xy+1=x^2\left(-\dfrac{1}{x}\right)^2+x\left(-\dfrac{1}{x}\right)+1=1$,

因此,$y=-\dfrac{1}{x}$ 是方程 $x^2y'=x^2y^2+xy+1$ 的解.

(7) 因为 $y=x^2+1$, $y'=2x$,

所以 $y^2-(x^2+1)y+2x=(x^2+1)^2-(x^2+1)(x^2+1)+2x=2x=y'$,

因此,$y=x^2+1$ 是方程 $y'=y^2-(x^2+1)y+2x$ 的解.

(8) 因为 $y=-\dfrac{g(x)}{f(x)}$,所以 $y'=-\dfrac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{f^2(x)}=\dfrac{g(x)f'(x)}{f^2(x)}-\dfrac{g'(x)}{f(x)}$.

又因为 $\dfrac{f'(x)}{g(x)}y^2-\dfrac{g'(x)}{f(x)}=\dfrac{f'(x)}{g(x)}\left(-\dfrac{g(x)}{f(x)}\right)^2-\dfrac{g'(x)}{f(x)}=\dfrac{g(x)f'(x)}{f^2(x)}-\dfrac{g'(x)}{f(x)}=y'$,

所以,$y=-\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 是方程 $y'=\dfrac{f'(x)}{g(x)}y^2-\dfrac{g'(x)}{f(x)}$ 的解.

4. 给定一阶微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=2x$.

(1) 求出它的通解;

(2) 求通过点(1,4)的特解;

(3) 求出与直线 $y=2x+3$ 相切的解;

(4) 求出满足条件 $\int_0^1 y\,dx=2$ 的解;

(5) 绘出(2),(3),(4)中的解的图形.

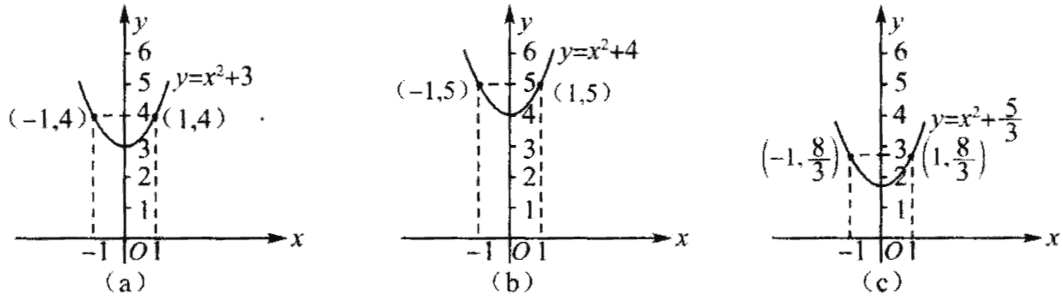
解:(1) 由 $\dfrac{dy}{dx}=2x$,得 $dy=2xdx$,方程两边积分,即得 $y=x^2+c$,其中 c 为任意常数.所以,方程 $\dfrac{dy}{dx}=2x$ 的通解为 $y=x^2+c$,c 为任意常数.

(2) 把$\begin{cases}x=1,\\y=4\end{cases}$代入 $y=x^2+c$ 得 $c=3$. 所以过点(1,4) 的特解为 $y=x^2+3$.

(3) 因为与直线相切,所以方程组$\begin{cases}y=x^2+c,\\y=2x+3\end{cases}$有且只有唯一一组解,即 $x^2+c=2x+3$ 有唯一解,故 $c=4$. 因此,与直线 $y=2x+3$ 相切的解是 $y=x^2+4$.

(4) 因为$\int_0^1 y\mathrm{d}x=\int_0^1(x^2+c)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^3}{3}+cx\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}+c=2$,所以 $c=\frac{5}{3}$,因此,满足条件$\int_0^1 y\mathrm{d}x=2$ 的解为 $y=x^2+\frac{5}{3}$.

(5) 满足(2),(3),(4) 的解的图形分别如图(1.1) 中的(a),(b),(c) 所示.



图(1.1)

5. 求下列两个微分方程的公共解:

$$y'=y^2+2x-x^4,\ y'=2x+x^2+x^4-y-y^2.$$

解:因为方程 $y'=y^2+2x-x^4$ 与方程 $y'=2x+x^2+x^4-y-y^2$ 的公共解满足

$$y^2+2x-x^4=2x+x^2+x^4-y-y^2,$$

化简得$(y-x^2)[2(y+x^2)+1]=0$,

所以 $y=x^2$ 和 $y=-\frac{1}{2}-x^2$ 可能是两个方程的公共解. 进一步代入验证,可以证明 $y=x^2$ 是两个方程的公共解,而 $y=-\frac{1}{2}-x^2$ 不是两个方程的解.

因此,两个方程的公共解是 $y=x^2$.

方法点击:本题是求解方程满足一定条件的解. 在求解过程中,由于令其导数相等时很容易产生增解,因而要将所求结果代回到原方程进行检验,舍去增解.

6. 求微分方程 $y'+xy'^2-y=0$ 的直线积分曲线.

解:设方程 $y'+xy'^2-y=0$ 的直线积分曲线为 $y=kx+b$,则 $y'=k, k+xk^2-kx-b=0$.

所以$\begin{cases}k=b,\\k^2=k,\end{cases}$即$\begin{cases}k=0,\\b=0,\end{cases}\begin{cases}k=1,\\b=1.\end{cases}$

因此,方程 $y'+xy'^2-y=0$ 的直线积分曲线为 $y=0$ 或 $y=x+1$.

方法点击:本题是求解方程的部分解,采用的是待定系数法. 待定系数法是求解常微分方程常用的方法之一,有待定系数法和待定函数法. 解决此类问题的关键在于正确地设出解具有的形式.

7. 证明:与微分方程 $4x^2y'^2-y^2=xy^3$ 的积分曲线关于坐标原点(0,0)成中心对称的曲线,也是此微分方程的积分曲线.

证明:设微分方程的积分曲线为 $y=f(x)$,则有 $4x^2f'^2(x)-f^2(x)=xf^3(x)$.

又若设与积分曲线 $y=f(x)$ 成中心对称的曲线为 $y=g(x)$,则有 $f(-x)=-g(x)$,从而 $f'(-x)=g'(x)$.

在方程 $4x^2f'^2(x)-f^2(x)=xf^3(x)$ 中用 $-x$ 代替 x 得

$$4(-x)^2f'^2(-x)-f^2(-x)=-xf^3(-x),$$

即 $4x^2[f'(-x)]^2-[-f(-x)]^2=x[-f(-x)]^3$,于是 $4x^2g'^2(x)-g^2(x)=xg^3(x)$.

这就证明了 $y=g(x)$ 也是微分方程的积分曲线.

8. 试建立分别具有下列性质的曲线所满足的微分方程:

(1) 曲线上任一点的切线与该点的径向夹角为 α;

(2) 曲线上任一点的切线介于两坐标轴之间的部分等于定长 l;

(3) 曲线上任一点的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积都等于常数 a^2;

(4) 曲线上任一点的切线介于两坐标轴间的部分被切点等分;

(5) 曲线上任一点的切线的纵截距等于切点横坐标的平方;

(6) 曲线上任一点的切线的纵截距是切点的横坐标和纵坐标的等差中项;

(7) 曲线上任一点的切线的斜率与切点的横坐标成正比.

解:(1) 设曲线为 $y=f(x)$,在点 (x,y) 处曲线的切线斜率为 $k=y'=f'(x)$,而点 (x,y) 处径向斜率为 $k_1=\frac{y}{x}$. 当曲线与切点的径向夹角为 α 时有关系式 $\tan\alpha=\frac{k-k_1}{1+kk_1}$,则所求的微分方程为

$$\tan\alpha=\frac{y'-\frac{y}{x}}{1+y'\frac{y}{x}},\text{即 } xy'-y=(x+yy')\tan\alpha,\text{从而有}, y'=\frac{y+x\tan\alpha}{x-y\tan\alpha}.$$

(2) 设曲线为 $y=f(x)$,在点 (x,y) 处曲线的切线斜率为 $k=y'$,切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$,其中 (X,Y) 为切线上的动点坐标.

切线在 x,y 坐标轴上的截距分别为 $\overline{X}=x-\frac{y}{y'}$ 和 $\overline{Y}=y-xy'$.

由题意知,$\overline{X}^2+\overline{Y}^2=l^2$,即 $\left(x-\frac{y}{y'}\right)^2+(y-xy')^2=l^2$,

整理得 $(1+y'^2)(xy'-y)^2=l^2y'^2$.

所以,所求的微分方程为 $(1+y'^2)(xy'-y)^2=l^2y'^2$.

(3) 设曲线为 $y=f(x)$,在点 (x,y) 处曲线的切线斜率为 $k=y'$,切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$,其中 (X,Y) 为切线上的动点坐标.

切线在 x,y 坐标轴上的截距分别为 $\overline{X}=x-\frac{y}{y'}$ 和 $\overline{Y}=y-xy'$.

由题意知,$\frac{1}{2}\mid\overline{X}\cdot\overline{Y}\mid=a^2$,即 $(y-xy')^2=2a^2\mid y'\mid$.

因此,所求的微分方程为 $(y-xy')^2=2a^2\mid y'\mid$.

(4) 设曲线为 $y=f(x)$,在点 (x,y) 处曲线的切线斜率为 $k=y'$,切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$,

其中(X,Y)为切线上的动点坐标.

切线与x轴,y轴的交点分别为$\left(x-\frac{y}{y'},0\right)$和$(0,y-xy')$. 由题意知,

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{y}{y'}\right)=x,\frac{1}{2}(y-xy')=y,$$

整理得,$xy'+y=0$,此即为所求的微分方程.

(5) 设曲线为$y=f(x)$,在点(x,y)处曲线的切线斜率为$k=y'$,切线方程为$Y-y=y'(X-x)$,其中(X,Y)为切线上的动点坐标.

切线的纵截距$\bar{Y}=y-xy'$,由题意知$y-xy'=x^2$,即$xy'=y-x^2$.

(6) 由(5)知,$\bar{Y}=\frac{1}{2}(x+y)$,从而有$2xy'=y-x$. 因此,所求的微分方程为$2xy'=y-x$.

(7) 设曲线为$y=f(x)$,在点(x,y)处曲线的切线斜率为$k=y'$,由题意得$y'=kx$($k>0$为比例常数).

第二章　一阶微分方程的初等解法

习题 2.1

1. 求下列方程的解:

(1) $\frac{dy}{dx}=2xy$,并求满足初值条件$x=0,y=1$的特解;

(2) $y^2dx+(x+1)dy=0$,并求满足初值条件$x=0,y=1$的特解;

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{xy+x^3y}$;

(4) $(1+x)ydx+(1-y)xdy=0$;

(5) $(y+x)dy+(x-y)dx=0$;

(6) $x\frac{dy}{dx}-y+\sqrt{x^2-y^2}=0$;

(7) $\tan ydx-\cot xdy=0$;

(8) $\frac{dy}{dx}+\frac{e^{y^2+3x}}{y}=0$;

(9) $x(\ln x-\ln y)dy-ydx=0$;

(10) $\frac{dy}{dx}=e^{x-y}$.

解:(1) 将变量分离,得到$\frac{dy}{y}=2xdx$.

两边积分,即得$\ln|y|=x^2+c_1$,因而通解为$y=\pm e^{x^2+c_1}=ce^{x^2}$.

又$y=0$也是方程的解,若取$c=0$,则$y=0$含在通解中,所以方程的通解为$y=ce^{x^2}$,c为任意常数.

把$x=0,y=1$代入通解,得满足条件的特解为$y=e^{x^2}$.

(2) 将变量分离,得到$-\frac{dy}{y^2}=\frac{dx}{x+1}$.

两边积分,即得$\frac{1}{y}=\ln|x+1|+c$,因而通解为$y=\frac{1}{\ln|x+1|+c}$,其中c为任意常数.

$y=0$是方程的一个特解. 将$x=0,y=1$代入通解,得$c=1$,故满足初值条件的特解为

$$y=\frac{1}{\ln|x+1|+1}.$$

(3) 将变量分离,得到$\frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}$,对两边积分,即得

$$\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(y^2)}{1+y^2}=\int\frac{-\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}+1},$$

即$\frac{1}{2}\ln|1+y^2|=-\frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{1}{x^2}\right|+c_1$,$c_1$ 为任意常数.

所以通解为$(1+y^2)(1+x^2)=cx^2$,其中 $c=e^{2c_1}$ 是任意正常数.

(4) 将变量分离,得到$-\frac{(1-y)}{y}\mathrm{d}y=\frac{(1+x)}{x}\mathrm{d}x(x\neq 0,y\neq 0$ 时).

两边积分,即得 $y-\ln|y|=x+\ln|x|+c_1$,c_1 为任意常数.

即 $x-y+\ln|xy|=c$,其中 $c=-c_1$ 为任意常数.

又易证 $y=0$ 也是方程的解. 所以方程的解为 $y=0$ 及 $x-y+\ln|xy|=c$.

(5) 原方程变形为 $y\mathrm{d}y+x\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0$,从而有

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2+y^2)+(x^2+y^2)\cdot\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=0.$$

两边同除以 x^2+y^2,即为$\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{2(x^2+y^2)}+\frac{\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=0$,

两边积分,得到$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\arctan\frac{y}{x}=c$,$c$ 为任意常数.

(6) 原方程变形为 $x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x+\sqrt{x^2-y^2}\,\mathrm{d}x=0$.

当 $y^2\neq x^2$ 时,两边同除以 $\sqrt{x^2-y^2}$ 得$\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-y^2}}+\mathrm{d}x=0$,即$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}+\frac{1}{x}\mathrm{d}x=0$,

两边积分得 $\arcsin\frac{y}{x}+\ln|x|=c$,其中 c 为任意常数.

另外,当 $y^2=x^2$ 时,易验证 $y^2=x^2$ 也是方程的解.

所以,原方程的解为 $y^2=x^2$ 及 $\arcsin\frac{y}{x}+\ln|x|=c$.

(7) 当 $\tan y\neq 0$ 时,即 $y\neq k\pi,k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$ 时,分离变量得 $\cot y\mathrm{d}y=\tan x\mathrm{d}x$.

两边同时积分,即得 $\ln|\sin y|=-\ln|\cos x|+c_1$,其中 c_1 为任意常数.

即 $\sin y\cos x=c$,其中 $c=\pm e^{c_1}$ 为非零常数.

另外,$y=k\pi,k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$ 也是方程的解.

所以,原方程的解为 $\sin y\cos x=c$ 及 $y=k\pi,k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$.

(8) 原方程可以变形为 $e^{-y^2}\cdot y\mathrm{d}y+e^{3x}\mathrm{d}x=0$.

两边积分,即得$\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{1}{2}e^{-y^2}=c_1$,$c_1$ 为任意常数.

化简得 $2e^{3x}-3e^{-y^2}=c$,其中 $c=6c_1$ 为任意常数.

(9) 方程可变形为$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x}{y}\ln\dfrac{x}{y}$,令 $u=\dfrac{x}{y}$,即 $x=yu$,则原方程变为 $u+y\cdot\dfrac{du}{dy}=u\ln u$,即

$\dfrac{du}{u(\ln u-1)}=\dfrac{dy}{y}$.

积分得 $\ln u-1=cy$,即 $\ln\dfrac{x}{y}-1=cy$ 或 $\ln\dfrac{y}{x}+1=-cy$,其中 c 为任意常数.

(10) 原方程可以变形为 $e^y dy=e^x dx$,两边积分,得到 $e^y=e^x+c$,其中 c 为任意常数.

2. 作适当的变量变换求解下列方程:

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{(x+y)^2}$;　　(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-y+1}{x-2y+1}$;

(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y+5}{x-y-2}$;　　(4) $\dfrac{dy}{dx}=(x+1)^2+(4y+1)^2+8xy+1$;

(5) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^6-2x^2}{2xy^5+x^2y^2}$;　　(6) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x^3+3xy^2+x}{3x^2y+2y^3-y}$.

解:(1) 令 $u=x+y$,则$\dfrac{du}{dx}=1+\dfrac{dy}{dx}$,故原方程变为$\dfrac{du}{dx}=\dfrac{u^2+1}{u^2}$,分离变量为$\dfrac{u^2du}{u^2+1}=dx$.

两边同时积分,即得 $u-\arctan u=x+c$,c 为任意常数.

所以,原方程的解为 $y=\arctan(x+y)+c$.

(2) 解方程组$\begin{cases}2x-y+1=0,\\x-2y+1=0,\end{cases}$得 $x=-\dfrac{1}{3}$,$y=\dfrac{1}{3}$.

令$\begin{cases}x=X-\dfrac{1}{3},\\y=Y+\dfrac{1}{3},\end{cases}$代入原方程,则有$\dfrac{dY}{dX}=\dfrac{2X-Y}{X-2Y}$.

再令 $u=\dfrac{Y}{X}$,即 $Y=uX$,则有$\dfrac{dY}{dX}=X\dfrac{du}{dX}+u$.

从而$\dfrac{(1-2u)}{2(1-u+u^2)}du=\dfrac{dX}{X}$,两边同时积分得 $\ln(u^2-u+1)+\ln X^2=c_1$,

即 $\ln(Y^2-XY+X^2)=c_1$,其中 c_1 为任意常数.

所以原方程的解为 $\ln\left[\left(y-\dfrac{1}{3}\right)^2-\left(x+\dfrac{1}{3}\right)\left(y-\dfrac{1}{3}\right)+\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2\right]=c_1$,

化简为 $x^2+y^2-xy+x-y=c$,其中 $c=e^{c_1}-\dfrac{1}{3}$,c_1 是任意常数.

(3) 令 $u=x-y$,即 $y=x-u$,则原方程变为$\dfrac{du}{dx}=\dfrac{-7}{u-2}$,分离变量,并且积分得 $u^2-4u+14x=c$,c 为任意常数.

代入 $u=x-y$,可得原方程的解为$(x-y)^2-4(x-y)+14x=c$,化简得

$$x^2+y^2-2xy+10x+4y=c.$$

(4) 令 $u=4y+1$,则原方程为$\dfrac{\frac{1}{4}du}{dx}=(x+1)^2+u^2+2x(u-1)+1$,即$\dfrac{du}{dx}=4(u+x)^2+8$.

再令 $v=u+x$,则上面的方程化为$\frac{dv}{dx}=4v^2+9$,分离变量并积分,得 $\arctan\left(\frac{2}{3}v\right)=6x+c$,其中 c 为任意常数.

代回原变量,故原方程的解为 $\tan(6x+c)=\frac{2}{3}(x+4y+1)$.

(5) 令 $u=y^3$,则方程可变形为$\frac{du}{dx}=\frac{3u^2-6x^2}{2xu+x^2}$.

再令 $v=\frac{u}{x}$,即 $u=vx$,则上面方程化为 $x\frac{dv}{dx}+v=\frac{3v^2-6}{2v+1}$,整理得,

$$\frac{7}{5}\cdot\frac{dv}{v-3}+\frac{3}{5}\cdot\frac{dv}{v+2}=\frac{dx}{x},$$

两边同时积分,得$(v-3)^7(v+2)^3=cx^5$,其中 c 为正常数.

代回原变量,并且化简原方程的解为$(y^3-3x)^7(y^3+2x)^3=cx^{15}$.

(6) 原方程可以变形为$\frac{ydy}{xdx}=\frac{2x^2+3y^2+1}{3x^2+2y^2-1}$.

令 $u=x^2-1,v=y^2+1$,则方程可化为$\frac{dv}{du}=\frac{2u+3v}{3u+2v}$.

再令 $w=\frac{v}{u}$,即 $v=uw$,则有$\frac{dv}{du}=w+u\frac{dw}{du}$. 从而 $u\frac{dw}{du}=\frac{2-2w^2}{3+2w}$.

分离变量并化简得$\frac{4}{u}du=\left(\frac{5}{1-w}+\frac{1}{1+w}\right)dw$,两边积分得 $u^4(1-w)^5=c(1+w)$.

代回原变量即得原方程的解为$(x^2-y^2-2)^5=c(x^2+y^2)$,其中 c 为任意常数.

3. 证明方程$\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}=f(xy)$ 经变换 $xy=u$ 可化为变量分离方程,并由此求解下列方程:

(1) $y(1+x^2y^2)dx=xdy$;　　(2) $\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{2+x^2y^2}{2-x^2y^2}$.

解:令 $u=xy$,即 $y=\frac{u}{x}$,则原方程变为$\frac{x^2}{u}\cdot\frac{x\frac{du}{dx}-u}{x^2}=f(u)$,即$\frac{du}{u(f(u)+1)}=\frac{dx}{x}$.

所以原方程可以化为变量分离方程.

(1) 原方程可以变形为$\frac{xdy}{ydx}=1+(xy)^2$,故相应的 $f(xy)=1+(xy)^2$,即 $f(u)=1+u^2$.

所以,令 $u=xy$ 时,所求解的方程变为$\frac{du}{u(u^2+2)}=\frac{dx}{x}$.

两边积分,得 $x^4\left(1+\frac{2}{u^2}\right)=c$,其中 c 为任意正常数.

因而,原方程的解为 $x^4+\frac{2x^2}{y^2}=c$. 另外,$y=0$ 也是方程的一个特解.

(2) 相应的 $f(xy)=\frac{2+x^2y^2}{2-x^2y^2}$,令 $u=xy$ 时,原方程可化为$\frac{du}{u\left(\frac{2+u^2}{2-u^2}+1\right)}=\frac{dx}{x}$.

两边同时积分,得 $\ln\left|\frac{u}{x^2}\right|=\frac{u^2}{4}+c$,其中 c 为任意常数.

代回原变量,得原方程的解为 $\ln\left|\frac{y}{x}\right| = \frac{x^2y^2}{4} + c$.

4. 已知 $f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 1(x \neq 0)$,试求函数 $f(x)$ 的一般表达式.

解:对方程 $f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 1$ 两边关于 x 求导得 $f'(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + f^2(x) = 0$.

由已知条件,知 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{f(x)}$,则 $f'(x)\frac{1}{f(x)} + f^2(x) = 0$,即 $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = -f^3(x)$.

分离变量,积分得 $f^2(x) = \frac{1}{2(x+c)}$,$c$ 为常数,且 $x+c > 0$,从而 $f(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{2(x+c)}}$.

令 $x = 1$ 时,有 $\pm\frac{1}{\sqrt{2(1+c)}}\int_0^1 \pm\frac{1}{\sqrt{2(t+c)}}\mathrm{d}t = 1$,解得 $c = 0$.

所以,$f(x)$ 的一般表达式为 $f(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{2x}}$.

5. 求具有性质 $x(t+s) = \frac{x(t)+x(s)}{1-x(t)x(s)}$ 的函数 $x(t)$,已知 $x'(0)$ 存在.

解:令 $t = s = 0$,则 $x(0) = \frac{2x(0)}{1-x^2(0)}$,化简为 $x(0)[1+x^2(0)] = 0$,所以 $x(0) = 0$.

又由导数的定义可得

$$x'(t) = \lim_{s\to0}\frac{x(t+s)-x(t)}{s} = \lim_{s\to0}\frac{x(s)+x^2(t)x(s)}{[1-x(t)x(s)]s} = \lim_{s\to0}\frac{1+x^2(t)}{1-x(t)x(s)}\cdot\frac{x(s)}{s},$$

由于 $x(0) = 0$,$x'(0)$ 存在,故

$$x'(t) = \frac{1+x^2(t)}{1-x(t)x(0)}\cdot\lim_{s\to0}\frac{x(s)-x(0)}{s} = x'(0)[1+x^2(t)],$$

分离变量,再积分可得 $x(t) = \tan[x'(0)t+c]$,再由 $x(0) = 0$,知 $c = 0$,从而 $x(t) = \tan[x'(0)t]$.

方法点击:本题是函数方程的求解问题,利用导数定义建立微分方程,转化为求解常微分方程的初值问题.

6. 求一曲线,使它的切线介于坐标轴间的部分被切点分成相等的两段.

解:设所求曲线为 $y = f(x)$,在点 (x,y) 处曲线的切线斜率为 $k = y'$,切线方程为 $Y-y = y'(X-x)$,其中 (X,Y) 为切线上的动点坐标.

切线与 x 轴,y 轴的交点分别为 $\left(x-\frac{y}{y'},0\right)$ 和 $(0,y-xy')$.

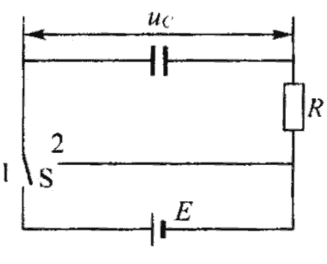
由题意知,$\frac{1}{2}\left(x-\frac{y}{y'}\right) = x$,$\frac{1}{2}(y-xy') = y$,整理得 $xy'+y = 0$,即 $x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = 0$.

积分得 $xy = c$,其中 c 为任意常数.所以满足条件的曲线为 $xy = c$.

7. 在图(2.1)所示的 RC 电路中,设 $E = 10$ V,$R = 100$ Ω,$C = 0.01$ F,而开始时电容 C 上没有电荷.

问:(1) 当开关 S 合上"1"后,经过多长时间电容 C 上的电压 $u_C = 5$ V?

(2) 当开关 S 合上"1"后,经过相当长的时间(如 1 分钟后)开关 S 从"1"突然转至"2",试求 u_C 的变化规律,并问经过多长时间 $u_C = 5$ V?



图(2.1)

解:(1) 教材 2.1.3 中例 9 告诉我们充电过程中电容 C 两端的电压变化规律

满足 $u_C = E(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$.

把 $E = 10$ V, $R = 100$ Ω, $C = 0.01$ F, $u_C = 5$ V代入上式得 $e^t = 2$, 即 $t = \ln 2$. 所以经过 $\ln 2$ 的时间电容 C 上的电压 $u_C = 5$ V.

(2) 对于放电过程, 由闭合回路的基尔霍夫第二定律, 有 $u_C = RI$, 对于电容器放电时, 电容器上的电量 Q 逐渐减少, 由初始电量 $Q = C \cdot u_C = C \cdot E$, 以后电量减少, 所以电流 I 满足

$$I = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d(C \cdot u_C)}{dt} = -C \cdot \frac{du_C}{dt},$$

代入 $u_C = RI$, 得到 u_C 满足的微分方程为

$$RC \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = 0,$$

并且刚开始放电时, 电容器两端的电压为 E, 即初值为 $t = 0, u_C(0) = E$. 对上面的微分方程, 分离变量并积分得到 $u_C = c_1 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$, 其中 c_1 为待定常数. 代入初值 $u_C(0) = E$, 得 $c_1 = E$. 所以, 在放电过程中 u_C 的变化规律为 $u_C = E \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$. 把 $E = 10$ V, $R = 100$ Ω, $C = 0.01$ F, $u_C = 5$ V代入上式得 $e^t = 2$, 即 $t = \ln 2$. 所以, 经过时间 $\ln 2$ 时, $u_C = 5$ V.

8. 求出习题 1.2 第 8 题(1) 所确定的曲线, 其中 $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

解: 曲线上任一点的切线与该点的径向夹角为 α 的曲线满足微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + x\tan\alpha}{x - y\tan\alpha}.$$

当 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 时, 对应方程为 $\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{x-y}$.

令 $u = \frac{y}{x}$, 即 $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$, 所以有 $x\frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{1-u}$.

分离变量并积分得 $\arctan u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln|x| + c$, 其中 c 为任意常数.

把 $u = \frac{y}{x}$ 代入上面的通解, 化简得

$$\arctan\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2} + c.$$

若用极坐标表示通解, 则由于 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, \theta = \arctan\frac{y}{x}, r^2 = x^2 + y^2$. 因此, 极坐标形式的通解为 $r = c_1 e^{\theta}$, c_1 为正常数.

9. 证明满足习题 1.2 第 8 题(7) 所给条件的曲线是抛物线族.

证明: 习题 1.2 第 8 题第(7) 小题的曲线满足微分方程 $\frac{dy}{dx} = kx$, k 为正常数.

分离变量并积分得 $y = \frac{1}{2}kx^2 + c$, 其中 c 为任意常数, 所以满足条件的曲线是抛物线族.

习题 2.2

1. 求下列方程的解:

(1) $\frac{dy}{dx} = y + \sin x$; (2) $\frac{dx}{dt} + 3x = e^{2t}$;

(3) $\frac{ds}{dt}=-s\cos t+\frac{1}{2}\sin 2t$;

(4) $\frac{dy}{dx}-\frac{n}{x}y=e^x x^n$($n$ 为常数);

(5) $\frac{dy}{dx}+\frac{1-2x}{x^2}y-1=0$;

(6) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^4+y^3}{xy^2}$;

(7) $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$;

(8) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+y^3}$;

(9) $\frac{dy}{dx}=\frac{ay}{x}+\frac{x+1}{x}$($a$ 为常数);

(10) $x\frac{dy}{dx}+y=x^3$;

(11) $\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$;

(12) $(y\ln x-2)y\mathrm{d}x=x\mathrm{d}y$;

(13) $2xy\mathrm{d}y=(2y^2-x)\mathrm{d}x$;

(14) $\frac{dy}{dx}=\frac{e^y+3x}{x^2}$;

(15) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{xy+x^3y^3}$;

(16) $y=e^x+\int_0^x y(t)\mathrm{d}t$.

解:(1) 首先求线性齐次微分方程$\frac{dy}{dx}=y$的通解.

分离变量,得$\frac{dy}{y}=\mathrm{d}x$,两边同时积分,得 $y=ce^x$.

设原方程的通解为 $y=c(x)e^x$,代入原方程得到

$$\frac{dc(x)}{dx}=\sin x\cdot e^{-x},$$

两边同时积分得 $c(x)=\frac{1}{2}e^{-x}(-\sin x-\cos x)+c_1$,

即方程的通解为 $y=c_1e^x-\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$,$c_1$ 为任意常数.

(2) 首先求线性齐次微分方程$\frac{dx}{dt}+3x=0$ 的通解.

分离变量并积分得 $x=ce^{-3t}$,设原方程的通解为 $x=c(t)e^{-3t}$,代入原方程得到$\frac{dc(t)}{dt}=e^{5t}$,

积分得 $c(t)=\frac{1}{5}e^{5t}+c_1$.

所以,原方程的通解为 $x=c_1e^{-3t}+\frac{1}{5}e^{2t}$,其中 c_1 为任意常数.

(3) 首先求线性齐次微分方程$\frac{ds}{dt}+s\cos t=0$ 的通解.

分离变量,得$\frac{ds}{s}=-\cos t\mathrm{d}t$,两边积分得 $s=ce^{-\sin t}$.

设所求通解为 $s=c(t)e^{-\sin t}$,代入原方程,化简后得$\frac{dc(t)}{dt}=\frac{1}{2}\sin(2t)e^{\sin t}$.

两边积分,得 $c(t)=(\sin t-1)e^{\sin t}+c_1$.

于是,原方程的通解为 $s=c_1e^{-\sin t}+\sin t-1$,$c_1$ 为任意常数.

(4) 首先求线性齐次微分方程$\frac{dy}{dx}-\frac{n}{x}y=0$ 的通解.

分离变量，得$\frac{dy}{y}=\frac{n}{x}dx$，两边积分得 $y=cx^n$.

设所求通解为 $y=c(x)x^n$，代入原方程，化简后得$\frac{dc(x)}{dx}=e^x$，积分得 $c(x)=e^x+c_1$.

于是，原方程的通解为 $y=c_1x^n+e^xx^n$，其中 c_1 为任意常数.

(5) 首先求线性齐次微分方程$\frac{dy}{dx}+\frac{1-2x}{x^2}y=0$ 的通解.

分离变量，得$\frac{dy}{y}=\frac{2x-1}{x^2}dx$，两边积分得 $y=cx^2e^{\frac{1}{x}}$.

设原方程的通解为 $y=c(x)x^2e^{\frac{1}{x}}$，代入原方程，得到$\frac{dc(x)}{dx}=e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}$，两边积分得

$$c(x)=e^{-\frac{1}{x}}+c_1.$$

于是，所求的通解为 $y=c_1x^2e^{\frac{1}{x}}+x^2$，其中 c_1 为任意常数.

(6) 原方程可化为$\frac{y^2dy}{dx}=\frac{x^4+y^3}{x}$.

于是，令 $z=y^3$，则方程变为非齐次线性微分方程$\frac{dz}{dx}=\frac{3z}{x}+3x^3$.

运用线性微分方程的求解公式，得

$$z=e^{\int\frac{3}{x}dx}\left(\int 3x^3e^{-3\ln|x|}dx+c\right)=x^3(3x+c).$$

所以，原方程的通解为 $y^3=x^3(3x+c)$，其中 c 为任意常数.

(7) 原方程可化为$\frac{dy}{d(x+1)}=\frac{2y}{x+1}+(x+1)^3$.

于是，令 $z=x+1$，则方程变为非齐次线性方程$\frac{dy}{dz}=\frac{2}{z}y+z^3$，运用线性方程的求解公式，得

$$y=e^{\int\frac{2}{z}dz}\left(\int z^3\cdot e^{-\int\frac{2}{z}dz}\cdot dz+c\right)=z^2\left(\frac{1}{2}z^2+c\right).$$

代回原变量，得原方程的解为 $y=\frac{1}{2}(x+1)^4+c(x+1)^2$，其中 c 为任意常数.

(8) 原方程可化为$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y}\cdot x+y^2(y\neq 0)$.

将 y 视为自变量，x 为因变量时，它是一个一阶非齐次线性微分方程，运用一阶线性微分方程的求解公式，得

$$x=e^{\int\frac{1}{y}dy}\left(\int y^2\cdot e^{-\int\frac{1}{y}dy}dy+c\right)=y\left(\frac{1}{2}y^2+c\right).$$

另外，$y=0$ 也是方程的解.

所以原方程的解为 $x=cy+\frac{1}{2}y^3$，c 为任意常数，还有 $y=0$ 也是方程的解.

(9) 当 $a=0$ 时，方程变为$\frac{dy}{dx}=\frac{x+1}{x}$，积分得 $y=x+\ln|x|+c$；

当 $a=1$ 时，方程变为$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{x+1}{x}$，运用一阶线性微分方程的求解公式，得

$$y=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(\int\frac{x+1}{x}\cdot e^{-\int\frac{1}{x}dx}\cdot dx+c\right)=x\left(\ln|x|-\frac{1}{x}+c\right)$$
$$=cx+x\ln|x|-1.$$

当 $a\neq 0,1$ 时,运用一阶线性微分方程的求解公式,得

$$y=e^{\int\frac{a}{x}dx}\left(\int\frac{x+1}{x}\cdot e^{-\int\frac{a}{x}dx}\cdot dx+c\right)=x^a\left(\frac{x^{1-a}}{1-a}+\frac{x^{-a}}{-a}+c\right)$$
$$=cx^a+\frac{x}{1-a}-\frac{1}{a}.$$

综上所述,原方程的解为 $y=\begin{cases}x+\ln|x|+c, & a=0,\\ cx+x\ln|x|-1, & a=1,\\ cx^a+\dfrac{x}{1-a}-\dfrac{1}{a}, & a\neq 0,1,\end{cases}$ 其中 c 为任意常数.

(10) 原方程可化为 $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x}\cdot y+x^2$. 这是一个一阶非齐次线性微分方程.

运用一阶线性方程的求解公式,得

$$y=e^{\int-\frac{1}{x}dx}\left(\int x^2\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+c\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{4}x^4+c\right)=\frac{c}{x}+\frac{1}{4}x^3.$$

所以,原方程的解为 $y=\frac{c}{x}+\frac{1}{4}x^3$,$c$ 为任意常数.

(11) 原方程是 $n=3$ 的伯努利方程. 令 $z=y^{-2}$,则方程可化为 $\frac{dz}{dx}=2xz-2x^3$,这是一阶非齐次线性微分方程,运用一阶线性微分方程的求解公式,得

$$z=e^{\int 2xdx}\left(\int-2x^3\cdot e^{-\int 2xdx}dx+c\right)=e^{x^2}\left[(x^2+1)e^{-x^2}+c\right]=ce^{x^2}+x^2+1.$$

所以,所求通解为 $y^2(ce^{x^2}+x^2+1)=1$. 此外,$y=0$ 也是方程的解.

(12) 原方程可化为伯努利方程 $\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{x}y+\frac{\ln x}{x}y^2$,令 $z=y^{-1}$,则原方程可化为 $\frac{dz}{dx}=\frac{2}{x}z-\frac{\ln x}{x}$,这是一阶线性微分方程,运用求解公式,得

$$z=e^{\int\frac{2}{x}dx}\left(\int-\frac{\ln x}{x}\cdot e^{-\int\frac{2}{x}dx}\cdot dx+c\right)=\frac{1}{4}(cx^2+2\ln x+1),$$

代回原变量,得到 $y(cx^2+2\ln x+1)=4$,这就是原方程的通解.
此外,$y=0$ 也是方程的解.

(13) 原方程可化为伯努利方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\frac{1}{2y}$,令 $z=y^2$,则原方程可化为 $\frac{dz}{dx}=\frac{2}{x}z-1$. 运用一阶线性微分方程的求解公式,得

$$z=e^{\int\frac{2}{x}dx}\left[\int(-1)\cdot e^{-\int\frac{2}{x}dx}\cdot dx+c\right]=cx^2+x.$$

代回原变量,得到原方程的解为 $y^2=cx^2+x$,这里 c 为任意常数.

(14) 令 $u=e^y$,则 $\frac{du}{dx}=e^y\frac{dy}{dx}$,代入原方程,得 $\frac{du}{dx}=\frac{u^2+3xu}{x^2}$,此为 $n=2$ 的伯努利方程.

令 $z=u^{-1}$,则上述方程可化为 $\frac{dz}{dx}=-\frac{3}{x}z-\frac{1}{x^2}$. 运用一阶线性微分方程的求解公式,得

$$z=\mathrm{e}^{\int-\frac{3}{x}\mathrm{d}x}\left(\int-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\int\frac{3}{x}\mathrm{d}x}\cdot\mathrm{d}x+c\right)=cx^{-3}-\frac{1}{2x}.$$

代回原变量，得到原方程的解为 $\mathrm{e}^y\left(cx^{-3}-\frac{1}{2x}\right)=1$，其中 c 为任意常数，整理得，$x^3\mathrm{e}^{-y}+\frac{1}{2}x^2=c$.

(15) 原方程可化为 $\frac{y\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x+x^3y^2}$，令 $u=y^2$，则有 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{x+x^3u}$.

当视 u 为自变量，x 为因变量时，上述方程为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}=\frac{x}{2}+\frac{u}{2}x^3$，这是 $n=3$ 的伯努利方程.

令 $z=x^{-2}$，则经整理得，$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}=-z-u$. 运用一阶线性微分方程的求解公式，得

$$z=\mathrm{e}^{\int-1\mathrm{d}u}\left(\int(-u)\mathrm{e}^{\int1\mathrm{d}u}\mathrm{d}u+c\right)=c\mathrm{e}^{-u}-u+1.$$

代回原变量，可得 $\frac{1}{x^2}=c\cdot\mathrm{e}^{-y^2}-y^2+1$，即 $(1-x^2+x^2y^2)\mathrm{e}^{y^2}=cx^2$，其中 c 为任意常数，这就是原方程的解.

(16) 对方程 $y=\mathrm{e}^x+\int_0^x y(t)\mathrm{d}t$ 两端关于 x 求导得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^x+y$.

运用一阶线性微分方程的求解公式，得 $y=\mathrm{e}^x\left(\int\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+c\right)=\mathrm{e}^x(x+c)$.

注意到当 $x=0$ 时，由原方程可得 $y=1$，所以可求出 $c=1$. 因此，原方程的解为 $y=\mathrm{e}^x(x+1)$.

2. 设函数 $\varphi(t)$ 于 $-\infty<t<+\infty$ 上连续，$\varphi'(0)$ 存在且满足关系式 $\varphi(t+s)=\varphi(t)\varphi(s)$，试求此函数.

解: 令 $s=0$，则 $\varphi(t)=\varphi(t)\varphi(0)$. 由于它对任意 $-\infty<t<+\infty$ 都成立，所以 $\varphi(0)=1$.

由函数导数的定义，得

$$\varphi'(t)=\lim_{s\to0}\frac{\varphi(t+s)-\varphi(t)}{s}=\lim_{s\to0}\frac{\varphi(t)(\varphi(s)-1)}{s}$$

$$=\varphi(t)\cdot\lim_{s\to0}\frac{\varphi(s)-\varphi(0)}{s}=\varphi(t)\cdot\varphi'(0),$$

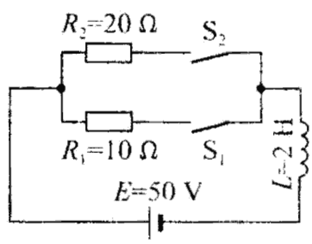
即 $\varphi(t)$ 满足微分方程 $\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}=\varphi(t)\varphi'(0)$. 积分得 $\varphi(t)=c\mathrm{e}^{\varphi'(0)t}$.

又 $\varphi(0)=1$，得出 $c=1$，所以，所求函数为 $\varphi(t)=\mathrm{e}^{\varphi'(0)t}$.

3. 如图(2.2) 所示的 RL 电路，试求：

(1) 当开关 S_1 合上 10 s 后，电感 L 上的电流；

(2) S_1 合上 10 s 后再将 S_2 合上，求 S_2 合上 20 s 后，电感 L 上的电流.



图(2.2)

解: (1) 电流 I 关于 t 的微分方程为 $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{R_1}{L}I=\frac{E}{L}$，

把 $R_1=10\ \Omega, L=2\ \mathrm{H}, E=50\ \mathrm{V}$ 代入得，

$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-5I+25$，

运用一阶线性微分方程的求解公式，得 $I=5-c\mathrm{e}^{-5t}$，其中 c 为常数.

当 $t=0$ 时 $I=0$，所以 $c=5$，因此，当 $t=10$ s 时，电流为 $I=(5-5\mathrm{e}^{-50})\mathrm{A}\approx5\ \mathrm{A}$.

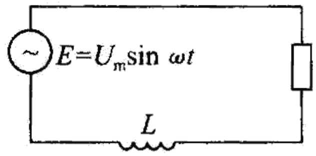
(2) 当 S_1 与 S_2 均合上时，此 RL 电路的电阻为 $R=\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)^{-1}=\frac{20}{3}\ \Omega$，电流 I 关于 t 的微分方程为 $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{R}{L}I=\frac{E}{L}$，即 $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-\frac{10}{3}I+25$.

运用一阶线性微分方程的求解公式，得 $I=7.5+ce^{-\frac{10}{3}t}$，其中 c 为常数.

将初值 $I(0)=5$ 代入，可解出 $c=-2.5$.

因此，当 $t=20$ s 时，电感 L 上的电流为 $I=(7.5-2.5e^{-\frac{200}{3}})\mathrm{A}\approx 7.5$ A.

4. 试求图(2.3)所示的 RL 电路电感上电流 $I(t)$ 的变化规律，并解释其物理意义，设 $t=0$ 时，$I=0$.



图(2.3)

解：此 RL 电路电感上电流 $I(t)$ 满足的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{R}{L}I=\frac{E}{L}.$$

即 $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-\frac{R}{L}I+\frac{U_m}{L}\sin\omega t$，此方程的通解为

$$I(t)=e^{-\frac{R}{L}t}\left(\int\frac{U_m}{L}\sin\omega t\cdot e^{\frac{R}{L}t}\mathrm{d}t+c\right)$$

$$=ce^{-\frac{R}{L}t}+\frac{U_m}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t).$$

由 $t=0$ 时 $I=0$ 得 $c=\frac{\omega LU_m}{R^2+\omega^2L^2}$. 于是

$$I(t)=\frac{U_m}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t+\omega Le^{-\frac{R}{L}t}).$$

若令 $\sin\varphi=\frac{-\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$，$\cos\varphi=\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$，则解可化为

$$I(t)=\frac{U_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}(\cos\varphi\sin\omega t+\sin\varphi\cos\omega t-e^{-\frac{R}{L}t}\sin\varphi),$$

即 $I(t)=\frac{U_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}[\sin(\omega t+\varphi)-e^{-\frac{R}{L}t}\sin\varphi]$.

此解的物理意义是电路中的电流分为两部分，一部分随时间逐渐衰减最后为零；另一部分则是发生与电动势变化周期相同但相位相差 φ 角的周期变化.

5. 试证：

(1) 一阶非齐次线性微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y+Q(x)$① 的任两个解之差必为相应的齐次线性微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y$② 的解；

(2) 若 $y=y(x)$ 是 ② 的非零解，而 $y=\bar{y}(x)$ 是 ① 的解，则方程 ① 的通解可表为 $y=cy(x)+\bar{y}(x)$，其中 c 为任意常数；

(3) 方程 ② 任一解的常数倍或任两个解之和(或差)仍是方程 ② 的解.

证明：(1) 设 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 是方程 ① 的任两个解，即有

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\equiv P(x)\varphi(x)+Q(x),\ \frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\equiv P(x)\psi(x)+Q(x).$$

两式相减，得到$\dfrac{\mathrm{d}[\varphi(x)-\psi(x)]}{\mathrm{d}x}\equiv P(x)[\varphi(x)-\psi(x)]$.

即 $\varphi(x)-\psi(x)$ 为齐次方程 ② 的解.

(2) 因为$\dfrac{\mathrm{d}[cy(x)+\bar{y}(x)]}{\mathrm{d}x}\equiv c\dfrac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}\bar{y}(x)}{\mathrm{d}x}\equiv cP(x)y(x)+P(x)\bar{y}(x)+Q(x)$

$$\equiv P(x)[cy(x)+\bar{y}(x)]+Q(x).$$

即 $y=cy(x)+\bar{y}(x)$ 是 ① 的解，且$\dfrac{\partial y}{\partial c}=y(x)\neq 0$，$c$ 为任意常数.

故 $y=cy(x)+\bar{y}(x)$ 是方程 ① 的通解.

(3) 设 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 是方程 ② 的任意两个解，则有

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\equiv P(x)f(x),\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\equiv P(x)g(x).$$

设 c 为任意常数，则

$$\frac{\mathrm{d}[cf(x)]}{\mathrm{d}x}\equiv P(x)[cf(x)],\frac{\mathrm{d}[f(x)\pm g(x)]}{\mathrm{d}x}\equiv P(x)[f(x)\pm g(x)].$$

即说明了 $cf(x)$ 和 $f(x)\pm g(x)$ 也都是方程 ② 的解.

6. 求解习题 1.2 第 8 题(5) 和(6).

解:(1) 其微分方程为 $xy'=y-x^2$，变形得$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}-x$，运用一阶线性微分方程的求解公式得

$$y=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int(-x)\cdot\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right],$$

即 $y=x(c-x)$，其中 c 为任意常数.

(2) 其微分方程为 $2xy'=y-x$，变形得$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{2x}-\dfrac{1}{2}$，运用一阶线性微分方程的求解公式得 $y=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{2x}\mathrm{d}x}\left[\int\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{2x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right]$，即 $y=c\sqrt{x}-x$，其中 c 为任意常数.

7. 求解下列方程：

(1) $(x^2-1)y'-xy+1=0$；　　(2) $x(x^2-1)y'-(2x^2-1)y+x^3=0$；

(3) $y'\sin x\cdot\cos x-y-\sin^3 x=0$.

解:(1) 此方程可以变形为$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x}{x^2-1}y-\dfrac{1}{x^2-1}(x\neq\pm 1)$，运用一阶线性微分方程的求解公式得

其通解为 $y=\mathrm{e}^{\int\frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x}\left(\int-\dfrac{1}{x^2-1}\mathrm{e}^{-\int\frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x}\cdot\mathrm{d}x+c\right)$.

即 $y=\sqrt{|x^2-1|}\left(\int-\dfrac{1}{x^2-1}\cdot|x^2-1|^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+c\right)$.

当 $x^2-1>0$ 时，则 $y=\sqrt{x^2-1}\left[\int-(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x+c\right]$.

利用换元法，令 $x=\sec t$，可得

$$\int(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\int(\tan t)^{-3}\sec t\cdot\tan t\mathrm{d}t=\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{\sin t}=-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}},$$

所以，$y=\sqrt{x^2-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}+c\right)=c\sqrt{x^2-1}+x$.

当 $x^2-1<0$ 时，则

$$y=\sqrt{1-x^2}\left[\int -\frac{1}{x^2-1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+c\right]$$
$$=\sqrt{1-x^2}\left[\int (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x+c\right],$$

利用换元法，令 $x=\sin t$，可得

$$\int(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\int(\cos t)^{-3}\cdot\cos t\mathrm{d}t=\int\sec^2 t\mathrm{d}t=\tan t=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

所以，$y=\sqrt{1-x^2}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+c\right)=c\sqrt{1-x^2}+x.$

当 $x^2-1=0$ 时，原方程变为 $xy=1$，解曲线退化为点 $(\pm1,\pm1)$.

综上所述，原方程的解为 $y=c\sqrt{|1-x^2|}+x.$

(2) 此方程可以变形为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2x^2-1}{x(x^2-1)}y+\frac{x^2}{1-x^2}(x\neq0,\pm1).$

运用一阶线性方程的求解公式得其通解为

$$y=\mathrm{e}^{\int\frac{2x^2-1}{x(x^2-1)}\mathrm{d}x}\left[\int\frac{x^2}{1-x^2}\mathrm{e}^{-\int\frac{2x^2-1}{x(x^2-1)}\mathrm{d}x}\cdot\mathrm{d}x+c\right],$$

即
$$y=|x^2(x^2-1)|^{\frac{1}{2}}\left[\int\frac{x^2}{1-x^2}\cdot|x^2(x^2-1)|^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+c\right].$$

当 $x^2-1>0$，且 $x>0$ 时，$y=x\sqrt{x^2-1}\left[\int -x(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x+c\right]$，

求积分并化简得

$$y=x(1+c\sqrt{x^2-1}).$$

当 $x^2-1<0$，且 $x>0$ 时，$y=x\sqrt{1-x^2}\left[\int x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x+c\right]$，

求积分并化简得

$$y=x(1+c\sqrt{1-x^2}).$$

当 $x^2-1>0$，且 $x<0$ 时，$y=-x\sqrt{x^2-1}\left[\int x(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x+c\right]$，

求积分并化简得

$$y=x(1-c\sqrt{x^2-1}).$$

当 $x^2-1<0$，且 $x<0$ 时，$y=-x\sqrt{1-x^2}\left[\int -x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x+c\right]$，

求积分并化简得

$$y=x(1-c\sqrt{1-x^2}).$$

当 $x^2-1=0$ 时，原方程化为 $y=x$，即曲线退化成两点 $(1,1)$ 和 $(-1,-1)$.

当 $x=0$ 时原方程化为 $y=0$，即曲线退化成坐标原点 $(0,0)$.

综上所述，得到原方程的解为 $y=x(1+c\sqrt{|x^2-1|})$，其中 c 为任意常数.

(3) 此方程可以变形为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\sin x\cdot\cos x}y+\frac{\sin^2 x}{\cos x}(\sin x\neq0,\cos x\neq0).$

运用一阶线性微分方程的求解公式得其通解为

$$y = e^{\int \frac{dx}{\sin x \cos x}} \left(\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} \cdot e^{-\int \frac{1}{\sin x \cos x} dx} \cdot dx + c \right),$$

即 $y = \tan x \left(\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} \cdot \cot x dx + c \right)$,

求积分并化简得 $y = \tan x(c - \cos x)$,即 $y = c\tan x - \sin x$,

当 $\sin x = 0$ 时,原方程化为 $y = 0$.

当 $\cos x = 0$ 时,原方程化为 $y = \pm 1$,即曲线退化成 $\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}, -1\right)$ 和 $\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 1\right)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

综上所述,原方程的解为 $y = c\tan x - \sin x \left(x \neq k\pi \pm \frac{\pi}{2} \right)$, c 为任意常数,或者点 $\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}, -1\right)$, $\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 1\right)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

习题 2.3

1. 验证下列方程是恰当微分方程,并求出方程的解:

(1) $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$;

(2) $(y - 3x^2)dx - (4y - x)dy = 0$;

(3) $\left[\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x}\right]dx + \left[\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}\right]dy = 0$;

(4) $2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2 y + y^2)dy = 0$;

(5) $\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + 1\right)dx + \left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y} + \frac{1}{y^2}\right)dy = 0$.

解:(1) 由于 $M = x^2 + y$, $N = x - 2y$,又 $\frac{\partial M}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 1$,因此方程是恰当微分方程.

现在求 u,使它同时满足如下两个方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 + y, \frac{\partial u}{\partial y} = x - 2y.$$

第一个方程对 x 积分,得到 $u = \frac{1}{3}x^3 + xy + \varphi(y)$,对此等式两端关于 y 求导,得 $\frac{\partial u}{\partial y} = x + \varphi'(y)$,与 $\frac{\partial u}{\partial y} = x - 2y$ 相比较得到 $\varphi'(y) = -2y$,积分后得到 $\varphi(y) = -y^2$,所以 $u = \frac{1}{3}x^3 + xy - y^2$.

即得到原方程的通解为 $\frac{1}{3}x^3 + xy - y^2 = c$,其中 c 是任意常数.

(2) 由于 $M = y - 3x^2$, $N = x - 4y$,又 $\frac{\partial M}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 1$,因此方程是恰当微分方程.

把方程重新分项组合,得到 $(ydx + xdy) - 3x^2dx - 4ydy = 0$,即 $d(xy - x^3 - 2y^2) = 0$.

于是,方程的通解为 $xy - x^3 - 2y^2 = c$,其中 c 为任意常数.

(3) 由于 $M = \frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x}$, $N = \frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}$,这时

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{2y(x-y)^2+y^2\cdot 2(x-y)}{(x-y)^4}=\frac{2xy}{(x-y)^3},$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{2x(x-y)^2-x^2\cdot 2(x-y)}{(x-y)^4}=\frac{2xy}{(x-y)^3},$$

因此方程是恰当微分方程. 现在求 u,使它同时满足如下两个方程:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y^2}{(x-y)^2}-\dfrac{1}{x}, & ①\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{y}-\dfrac{x^2}{(x-y)^2}. & ②\end{cases}$$

由 ① 式对 x 积分,得到

$$u=-\ln|x|-\frac{y^2}{x-y}+\varphi(y).$$

对上式关于 y 求导,并使它满足 ② 即得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y^2-2xy}{(x-y)^2}+\varphi'(y)=\frac{1}{y}-\frac{x^2}{(x-y)^2},$$

于是 $\varphi'(y)=\dfrac{1}{y}-1$,积分后可得 $\varphi(y)=\ln|y|-y$,所以

$$u=-\ln|x|-\frac{y^2}{x-y}+\ln|y|-y=\ln\left|\frac{y}{x}\right|-y-\frac{y^2}{x-y},$$

因此,方程的通解为 $\ln\left|\dfrac{y}{x}\right|-y-\dfrac{y^2}{x-y}=c$,其中 c 为任意常数.

(4) 由于 $M=2(3xy^2+2x^3)$,$N=3(2x^2y+y^2)$,这时,$\dfrac{\partial M}{\partial y}=12xy$,$\dfrac{\partial N}{\partial x}=12xy$,故方程是恰当微分方程,把方程重新分项组合,得到

$$(6xy^2\mathrm{d}x+6x^2y\mathrm{d}y)+4x^3\mathrm{d}x+3y^2\mathrm{d}y=0.$$

即 $\mathrm{d}(3x^2y^2+x^4+y^3)=0$,于是,方程的通解为 $3x^2y^2+x^4+y^3=c$,其中 c 为任意常数.

(5) 由于 $M=\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}+1$,$N=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{y^2}$. 因为

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}\sin\frac{x}{y}+\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cdot\frac{-x}{y^2}-\frac{1}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^2}\cdot\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{-1}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{1}{x}\cdot\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}-\frac{1}{y^2}\sin\frac{x}{y}-\frac{1}{y}\cdot\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y},$$

故方程是恰当微分方程,把方程重新分项组合得到

$$\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}\mathrm{d}x-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}\mathrm{d}y\right)+\left(-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}\mathrm{d}x+\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}\mathrm{d}y\right)+\mathrm{d}x+\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y=0.$$

即 $\mathrm{d}\left(-\cos\dfrac{x}{y}+\sin\dfrac{y}{x}+x-\dfrac{1}{y}\right)=0.$

于是,方程的通解为 $\sin\dfrac{y}{x}-\cos\dfrac{x}{y}+x-\dfrac{1}{y}=c$,其中 c 为任意常数.

2. 求下列方程的解:

(1) $2x(ye^{x^2}-1)\mathrm{d}x+e^{x^2}\mathrm{d}y=0$;　　(2) $(e^x+3y^2)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y=0$;

(3) $2xy\mathrm{d}x+(x^2+1)\mathrm{d}y=0$;　　(4) $y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=(x^2+y^2)\mathrm{d}x$;

(5) $y\mathrm{d}x-(x+y^3)\mathrm{d}y=0$;　　(6) $(y-1-xy)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0$;

(7) $(y-x^2)\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$;　　(8) $(x+2y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0$;

(9) $[x\cos(x+y)+\sin(x+y)]\mathrm{d}x+x\cos(x+y)\mathrm{d}y=0$;

(10) $(y\cos x-x\sin x)\mathrm{d}x+(y\sin x+x\cos x)\mathrm{d}y=0$;

(11) $x(4y\mathrm{d}x+2x\mathrm{d}y)+y^3(3y\mathrm{d}x+5x\mathrm{d}y)=0$.

解:(1) 因为$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=2xe^{x^2}$,重新分项组合得到

$$(2xye^{x^2}\mathrm{d}x+e^{x^2}\mathrm{d}y)-2x\mathrm{d}x=0,$$

即 $\mathrm{d}(e^{x^2}y-x^2)=0$.

于是,方程的通解为 $ye^{x^2}-x^2=c$,c 为任意常数.

(2) 方程两边同乘以 x^2 得 $x^2e^x\mathrm{d}x+3x^2y^2\mathrm{d}x+2x^3y\mathrm{d}y=0$.

即 $\mathrm{d}(e^x(x^2-2x+2))+\mathrm{d}(x^3y^2)=0$,于是方程的通解为 $e^x(x^2-2x+2)+x^3y^2=c$,其中 c 为任意常数.

(3) 因为$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=2x$,分项重新组合,得$(2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y)+\mathrm{d}y=0$,即 $\mathrm{d}(x^2y+y)=0$,于是方程的通解为 $x^2y+y=c$,c 为任意常数.

(4) 方程两边同除以(x^2+y^2),得$\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\mathrm{d}x$,即 $\mathrm{d}\left(\arctan\frac{x}{y}-x\right)=0$,于是方程的通解为 $\arctan\frac{x}{y}-x=c$,c 为任意常数.

(5) 方程两边同时乘以$\frac{1}{y^2}$,并且重新分项组合得$\left(\frac{1}{y}\mathrm{d}x-\frac{x}{y^2}\mathrm{d}y\right)-y\mathrm{d}y=0$,即 $\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}-\frac{y^2}{2}\right)=0$.

于是方程的通解为$\frac{x}{y}-\frac{y^2}{2}=c$,$c$ 为任意常数.此外,$y=0$ 也是方程的解.

(6) 这里 $M=y-1-xy$,$N=x$,$\frac{\partial M}{\partial y}=1-x$,$\frac{\partial N}{\partial x}=1$,方程不是恰当的.

因为$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=-1$,所以方程有积分因子 $\mu=e^{\int -1\mathrm{d}x}=e^{-x}$.

以 $\mu=e^{-x}$ 乘以方程两边,得到$(ye^{-x}-xye^{-x})\mathrm{d}x+x\cdot e^{-x}\mathrm{d}y-e^{-x}\mathrm{d}x=0$.

即 $\mathrm{d}(xye^{-x}+e^{-x})=0$,因而,通解为 $xy+1=ce^x$,其中 c 为任意常数.

(7) 由于 $M=y-x^2$,$N=-x$,$\frac{\partial M}{\partial y}=1$,$\frac{\partial N}{\partial x}=-1$,方程不是恰当的.

因为$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=-\frac{2}{x}$,所以,方程有积分因子 $\mu=e^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}=x^{-2}$.

以 $\mu=x^{-2}$ 乘以方程两边得到$\frac{y}{x^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{x}\mathrm{d}y-1\cdot\mathrm{d}x=0$,即 $\mathrm{d}\left(-\frac{y}{x}-x\right)=0$.

因而,方程的通解为 $y+x^2=cx$,其中 c 为任意常数.

(8) 由于 $M=x+2y$,$N=x$,$\frac{\partial M}{\partial y}=2$,$\frac{\partial N}{\partial x}=1$,方程不是恰当的.

因为$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\dfrac{1}{x}$，所以方程有积分因子 $\mu=e^{\int\frac{1}{x}dx}=x$.

以 $\mu=x$ 乘以方程两边得到 $2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}x=0$，即 $\mathrm{d}\left(x^2y+\frac{1}{3}x^3\right)=0$.

于是，方程的通解为 $x^3+3x^2y=c$，其中 c 为任意常数.

(9) 由于 $M=x\cos(x+y)+\sin(x+y)$，$N=x\cos(x+y)$，

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-x\sin(x+y)+\cos(x+y),\frac{\partial N}{\partial x}=-x\sin(x+y)+\cos(x+y),$$

所以方程是恰当的，且方程可以写为 $\mathrm{d}(x\sin(x+y))=0$.

于是方程的通解为 $x\sin(x+y)=c$，其中 c 为任意常数.

(10) 由于 $M=y\cos x-x\sin x$，$N=y\sin x+x\cos x$，

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\cos x,\frac{\partial N}{\partial x}=y\cos x+\cos x-x\sin x,$$

从而方程不是恰当的. 因为$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}=1$，所以方程有积分因子 $\mu=e^{\int 1\mathrm{d}y}=e^y$.

以 $\mu=e^y$ 乘以方程两边得

$$(ye^y\cos x\mathrm{d}x+ye^y\sin x\mathrm{d}y)+(e^yx\cos x\mathrm{d}y-e^yx\sin x\mathrm{d}x)=0,$$

即
$$\mathrm{d}[(y-1)e^y\sin x+e^yx\cos x]=0.$$

于是方程的通解为 $e^y(y-1)\sin x+e^yx\cos x=c$，$c$ 为任意常数.

(11) 由于 $M=4xy+3y^4$，$N=2x^2+5xy^3$，$\dfrac{\partial M}{\partial y}=4x+12y^3$，$\dfrac{\partial N}{\partial x}=4x+5y^3$. 此方程不是恰当的. 因为 M,N 为多项式，设积分因子的形式为 $\mu=x^my^n$，于是方程乘以积分因子 x^my^n 后变为

$$(4x^{m+1}y^{n+1}+3x^my^{n+4})\mathrm{d}x+(2x^{m+2}y^n+5x^{m+1}y^{n+3})\mathrm{d}y=0.$$

它是恰当方程的充要条件为

$$4(n+1)x^{m+1}y^n+3(n+4)x^my^{n+3}=2(m+2)x^{m+1}y^n+5(m+1)x^my^{n+3}.$$

对比系数项得$\begin{cases}4n-2m=0,\\3n-5m+7=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=2,\\n=1.\end{cases}$

即积分因子为 $\mu=x^2y$，方程乘以积分因子后为

$$4x^3y^2\mathrm{d}x+3x^2y^5\mathrm{d}x+2x^4y\mathrm{d}y+5x^3y^4\mathrm{d}y=\mathrm{d}(x^4y^2)+\mathrm{d}(x^3y^5)=0.$$

于是，方程的通解为 $x^4y^2+x^3y^5=c$，另外，$x=0$，$y=0$ 也是方程的解.

3. 试导出方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 分别具有形为 $\mu(x+y)$ 和 $\mu(xy)$ 的积分因子的充要条件.

解：方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 具有 $\mu(x+y)$ 的积分因子的充要条件是

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

即 $N\dfrac{\partial\mu}{\partial x}-M\dfrac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$.

令 $z=x+y$，则 $\mu(x+y)=\mu(z)$，$\dfrac{\partial\mu}{\partial x}=\dfrac{\partial\mu}{\partial y}=\dfrac{\partial\mu}{\partial z}$.

所以有$(N-M)\dfrac{d\mu}{dz}=\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)\mu(z)$，即$\dfrac{d\mu}{\mu(z)}=\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N-M}dz$.

当且仅当$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N-M}=f(z)$时，可以解出$\mu$，所以方程$Mdx+Ndy=0$具有形为$\mu(x+y)$的积分因子的充要条件为

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N-M}=f(x+y).$$

同理，若令$\omega=xy$，则

$$\mu(xy)=\mu(\omega),\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{d\mu}{d\omega}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x}=y\cdot\frac{d\mu}{d\omega},\frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{d\mu}{d\omega}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y}=x\cdot\frac{d\mu}{d\omega},$$

方程$Mdx+Ndy=0$具有形如$\mu(xy)$的积分因子的充要条件是

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu,$$

即$(yN-xM)\dfrac{d\mu}{d\omega}=\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)\mu(\omega)$.

当且仅当$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{yN-xM}=g(\omega)=g(xy)$时，可以求出$\mu$的表达式.

所以，方程$Mdx+Ndy=0$具有形为$\mu(xy)$的积分因子的充要条件为

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{yN-xM}=g(xy).$$

4. 设$f(x,y)$及$\dfrac{\partial f}{\partial y}$连续，试证方程$dy-f(x,y)dx=0$为线性微分方程的充要条件是它有仅依赖于$x$的积分因子.

证明：充分性：

设$dy-f(x,y)dx=0$有仅依赖于x的积分因子，下证该方程是线性的.

由于积分因子只依赖于x，所以存在某个$\varphi(x)$满足

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{-\dfrac{\partial f}{\partial y}-0}{1}=\varphi(x),$$

即$\dfrac{\partial f}{\partial y}=-\varphi(x)$.

积分得$f(x,y)=-\varphi(x)y+h(x)$，其中$h(x)$是关于x的任意可微函数.

这样，原方程便为$\dfrac{dy}{dx}=-\varphi(x)y+h(x)$，即证明了$dy-f(x,y)dx=0$是线性微分方程.

必要性：

设方程$dy-f(x,y)dx=0$是线性微分方程. 即存在$g(x)$，$h(x)$使得$f(x,y)=yg(x)+h(x)$.

此时，$M=-f(x,y)=-yg(x)-h(x)$，$N=1$，

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{-g(x)}{1}=-g(x),$$

所以方程具有积分因子 $\mu=e^{\int -g(x)dx}$,即方程有仅依赖于 x 的积分因子.

5. 试证齐次微分方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 当 $xM+yN\neq 0$ 时有积分因子 $\mu=\frac{1}{xM+yN}$.

证明:设 $M(x,y)$,$N(x,y)$ 是 m 次齐次函数,令 $y=ux$,则 $dy=xdu+udx$,

$$M(x,y)=M(x,ux)=x^m M(1,u),$$
$$N(x,y)=N(x,ux)=x^m N(1,u).$$

方程两边乘积分因子 $\mu=\frac{1}{xM+yN}(xM+yN\neq 0)$ 后变为

$$\frac{M}{xM+yN}dx+\frac{N}{xM+yN}dy=0.$$

即 $\frac{M(x,ux)+uN(x,ux)}{xM(x,ux)+yN(x,ux)}dx+\frac{xN(x,ux)}{xM(x,ux)+yN(x,ux)}du=0$,

即 $\frac{1}{x}dx+\frac{N(1,u)}{M(1,u)+uN(1,u)}du=0$.

此为恰当微分方程,有解 $x=ce^{-\int\frac{N(1,u)}{M(1,u)+uN(1,u)}du}$.

这就证明了 $\mu=\frac{1}{xM+yN}(xM+yN\neq 0)$ 是使方程变为恰当微分方程的积分因子.

6. 设函数 $f(u)$,$g(u)$ 连续、可微且 $f(u)\neq g(u)$,试证方程 $yf(xy)dx+xg(xy)dy=0$ 有积分因子

$$\mu=\{xy[f(xy)-g(xy)]\}^{-1}.$$

证明:因为 $M=yf(xy)$,$N=xg(xy)$,

$$\frac{\partial(M\cdot\mu)}{\partial y}-\frac{\partial(N\cdot\mu)}{\partial x}$$
$$=\frac{xf'\cdot x(f-g)-f\cdot x(f'x-g'x)}{x^2(f-g)^2}-\frac{g'y^2(f-g)-g\cdot y(f'y-g'y)}{y^2(f-g)^2}$$
$$=\frac{f'(f-g)-f(f'-g')}{(f-g)^2}-\frac{g'(f-g)-g(f'-g')}{(f-g)^2}=0,$$

所以该方程有积分因子 $\mu=\{xy[f(xy)-g(xy)]\}^{-1}$.

7. 假设方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 中的函数 $M(x,y)$,$N(x,y)$ 满足关系 $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=Nf(x)-Mg(y)$,其中 $f(x)$,$g(y)$ 分别为 x 和 y 的连续函数,试证该方程有积分因子

$$\mu=\exp\left[\int f(x)dx+\int g(y)dy\right].$$

证明:用 $\mu=\exp\left[\int f(x)dx+\int g(y)dy\right]$ 乘以方程两边得 $\mu Mdx+\mu Ndy=0$.

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}-\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}=\mu\frac{\partial M}{\partial y}+M\mu g(y)-\mu\frac{\partial N}{\partial x}-N\mu f(x)$$
$$=\mu\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}+Mg(y)-Nf(x)\right]$$
$$\equiv 0.$$

由于$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} \equiv \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$，由积分因子的定义知 $\mu = \exp\left[\int f(x)\mathrm{d}x + \int g(y)\mathrm{d}y\right]$ 为方程的积分因子.

8. 求出伯努利微分方程的积分因子.

解：伯努利方程为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P(x)y + Q(x)y^n (n \neq 0,1)$，改写为

$$\mathrm{d}y - P(x)y\mathrm{d}x - Q(x)y^n\mathrm{d}x = 0,$$

乘以 y^{-n} 得 $y^{-n}\mathrm{d}y - P(x)y^{1-n}\mathrm{d}x - Q(x)\mathrm{d}x = 0$，

即 $\mathrm{d}(y^{1-n}) - (1-n)P(x)y^{1-n}\mathrm{d}x - (1-n)Q(x)\mathrm{d}x = 0$.

再乘以 $\mathrm{e}^{-(1-n)\int P(x)\mathrm{d}x}$ 得

$$\mathrm{e}^{-(1-n)\int P(x)\mathrm{d}x}[\mathrm{d}(y^{1-n}) - (1-n)P(x)y^{1-n}\mathrm{d}x] - \mathrm{e}^{-(1-n)\int P(x)\mathrm{d}x}(1-n)Q(x)\mathrm{d}x = 0,$$

即 $\mathrm{d}[y^{1-n}\mathrm{e}^{-(1-n)\int P(x)\mathrm{d}x}] - \mathrm{d}\left[\int(1-n)Q(x)\mathrm{e}^{-(1-n)\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right] = 0$.

这是全微分方程，因此所求的积分因子是 $y^{-n}\mathrm{e}^{-(1-n)\int P(x)\mathrm{d}x}$.

9. 设 $\mu(x,y)$ 是方程 $M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0$ 的积分因子，从而求得可微函数 $U(x,y)$ 使得 $\mathrm{d}U = \mu(M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y)$. 试证 $\tilde{\mu}(x,y)$ 也是该方程的积分因子的充要条件是 $\tilde{\mu}(x,y) = \mu\varphi(U)$，其中 $\varphi(t)$ 是 t 的可微函数.

证明：充分性：

当有 $\mathrm{d}U = \mu(M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y)$ 及 $\tilde{\mu}(x,y) = \mu\varphi(U)$ 时，对方程有

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(\tilde{\mu}M)}{\partial y} - \frac{\partial(\tilde{\mu}N)}{\partial x} \\
&= \tilde{\mu}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) + \left(M\frac{\partial\tilde{\mu}}{\partial y} - N\frac{\partial\tilde{\mu}}{\partial x}\right) \\
&= \mu\varphi(U)\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) + M\frac{\partial\mu}{\partial y}\varphi(U) + M\mu^2\varphi'(U)N - N\frac{\partial\mu}{\partial x}\varphi(U) - N\mu^2\varphi'(U)M \\
&= \varphi(U)\left[\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} - \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}\right] + \mu^2\varphi'(U)(MN - NM).
\end{aligned}$$

因为 $\mu(x,y)$ 是方程的积分因子，所以$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$.

代入上式，得$\frac{\partial(\tilde{\mu}M)}{\partial y} - \frac{\partial(\tilde{\mu}N)}{\partial x} \equiv 0$，即 $\tilde{\mu}(x,y)$ 也是方程的积分因子.

必要性：

设 $\tilde{\mu}(x,y)$ 也是方程的积分因子，于是同时有

$$\mu(M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y) = \mathrm{d}U, \tilde{\mu}(M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y) = \mathrm{d}V,$$

即 $\mu M = \frac{\partial U}{\partial x}, \mu N = \frac{\partial U}{\partial y}, \tilde{\mu}M = \frac{\partial V}{\partial x}, \tilde{\mu}N = \frac{\partial V}{\partial y}$.

因此

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu M & \mu N \\ \tilde{\mu}M & \tilde{\mu}N \end{vmatrix} \equiv 0.$$

函数 $U(x,y), V(x,y)$ 的雅可比行列式恒等于零且$\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} = \mu^2 MN \neq 0$.

因此函数 $U(x,y)$,$V(x,y)$ 彼此相关,可表示为 $V(x,y)=\psi(U(x,y))$.

于是

$$\tilde{\mu}(M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y)=\mathrm{d}V=\mathrm{d}\psi(U)=\psi'(U)\mathrm{d}U=\psi'(U)\mu(M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y),$$

则有关系式 $\tilde{\mu}=\mu\psi'(U)$. 记 $\varphi(U)=\psi'(U)$,有 $\tilde{\mu}=\mu\varphi(U)$.

10. 设 $\mu_1(x,y)$,$\mu_2(x,y)$ 是方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 的两个积分因子,且 $\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\neq$ 常数,求证 $\dfrac{\mu_1}{\mu_2}=c$(c 为任意常数) 是方程的通解.

证明:按积分因子定义有 $\mu_2(M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y)=\mathrm{d}U=0$,得 $U(x,y)=c$,其中 c 为任意常数.

且由第 9 题知有 $\mu_1=\mu_2\varphi(U)$,可得 $\dfrac{\mu_1}{\mu_2}=\varphi(U)$,即 $\dfrac{\mu_1}{\mu_2}=c$(任意常数) 等价于 $\varphi(U)=c$(任意常数).

于是 $0\equiv\mathrm{d}\varphi(U)\equiv\varphi'(U)\mathrm{d}U\equiv\varphi'(U)\mu_2(M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y)$.

因为 $\mu_2\not\equiv0$,$\varphi(U)$ 不恒为常数,即 $\varphi'(U)\not\equiv0$. 所以 $M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y=0$.

即由 $\varphi(U)=c$(任意常数) 确定的解 $y=y(x)$ 是方程的解.

这说明了 $\dfrac{\mu_1}{\mu_2}=c$(任意常数) 是方程的通解.

11. 假设第 5 题中微分方程还是恰当的,试证明它的通解可表示为 $xM(x,y)+yN(x,y)=c$(c 为任意常数).

证明:由于方程 $M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y=0$ 是恰当的,所以 $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$,且由于方程是齐次的,我们不妨设 $M(x,y)$ 和 $N(x,y)$ 是 m 次齐次函数,则有

$$\frac{\partial M}{\partial x}\cdot x+\frac{\partial M}{\partial y}\cdot y=mM, \qquad ①$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}\cdot x+\frac{\partial N}{\partial y}\cdot y=mN. \qquad ②$$

另外,$\dfrac{\partial}{\partial x}[xM(x,y)+yN(x,y)]=M+x\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial x}+y\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$,

$$\frac{\partial}{\partial y}[xM(x,y)+yN(x,y)]=x\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}+N+y\frac{\partial N(x,y)}{\partial y},$$

利用 ①② 可得

$$\frac{\partial}{\partial x}[xM+yN]=(m+1)M,\frac{\partial}{\partial y}[xM+yN]=(m+1)N,$$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\frac{\partial}{\partial x}[xM+yN]}{\frac{\partial}{\partial y}[xM+yN]}=-\dfrac{M}{N}$,即 $M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y=0$.

所以 $xM+yN=c$ 是方程 $M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y=0$ 的通解.

习题 2.4

1. 求解下列方程:

(1) $xy'^3=1+y'$;　　(2) $y'^3-x^3(1-y')=0$;

(3) $y=y'^2\mathrm{e}^{y'}$;　　(4) $y(1+y'^2)=2a$(a 为常数);

(5) $x^2+y'^2=1$; (6) $y^2(y'-1)=(2-y')^2$.

解:(1) 方法一:方程不显含 y,解出 x 并令 $y'=p$,得 $x=\frac{1}{p^3}+\frac{1}{p^2}$,$p\neq 0$,关于 y 求导数,得

$$\frac{1}{p}=\left(-\frac{3}{p^4}-\frac{2}{p^3}\right)\cdot\frac{dp}{dy}\text{或}(3+2p)dp+p^3dy=0.$$

积分得,$y=\frac{3}{2p^2}+\frac{2}{p}+c$.

所以方程的通解为$\begin{cases}x=\frac{1}{p^3}+\frac{1}{p^2},\\ y=\frac{3}{2p^2}+\frac{2}{p}+c,\end{cases}$ 其中 $p\neq 0$ 为参数,c 为任意常数.

方法二:方程不显含 y,记 $y'=\frac{1}{t}$,则方程化为 $xt^{-3}=1+t^{-1}$,$x=t^3+t^2$,则

$$dy=\frac{dx}{t}=t^{-1}d(t^3+t^2)=(3t+2)dt,$$

所以 $y=\frac{3}{2}t^2+2t+c$.

因此,方程的通解为$\begin{cases}x=t^3+t^2,\\ y=\frac{3}{2}t^2+2t+c,\end{cases}$其中 t 为参数,c 为任意常数.

(2) 方程不显含 y,记 $y'=tx$,则方程化为$(t^3-(1-tx))x^3=0$.

解出 x 得 $x=\frac{1}{t}-t^2$,两边对 y 求导得$\frac{1}{1-t^3}=\left(-\frac{1}{t^2}-2t\right)\cdot\frac{dt}{dy}$,

即 $dy=\left[(1-t^3)\left(-\frac{1}{t^2}-2t\right)\right]dt$,积分得 $y=-\frac{1}{2}t^2+\frac{2}{5}t^5+\frac{1}{t}+c$.

所以,方程的通解为$\begin{cases}x=\frac{1}{t}-t^2,\\ y=-\frac{1}{2}t^2+\frac{2}{5}t^5+\frac{1}{t}+c,\end{cases}$其中 t 为参数,c 为任意常数.

(3) 已解出 y,方程不显含 x,令 $y'=p$,则原方程化为 $y=p^2e^p$.

对 x 求导数,即得 $p=(2p+p^2)e^p\frac{dp}{dx}$,即 $dx=(p+2)e^pdp$,积分得 $x=(p+1)e^p+c$.

所以,方程的通解为$\begin{cases}x=(p+1)e^p+c,\\ y=p^2e^p,\end{cases}$其中 p 为参数,c 为任意常数. 另外,$y=0$ 也是方程的解.

(4) 方程不显含 x,令 $y'=\tan t$,则原方程化为 $y=2a\cos^2 t$.

两端关于 x 求导,可得 $\tan t=-2a\sin 2t\cdot\frac{dt}{dx}$,即 $dx=-4a\cos^2 t dt$,积分得

$$x=-a(2t+\sin 2t)+c.$$

所以,方程的通解为$\begin{cases}x=-a(2t+\sin 2t)+c,\\ y=2a\cos^2 t,\end{cases}$其中 t 为参数,c 为任意常数.

另外,$y=2a$ 也是方程的解.

(5) 方程不显含 y,令 $y' = \cos t$,则方程可化为 $x = \sin t$,对 y 求导得 $dy = \cos^2 t dt$.

积分得 $y = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t + c$.

所以方程的通解为$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t + c, \end{cases}$其中 t 为参数,c 为任意常数.

(6) 方程不显含 x,令 $2 - y' = ty$,则原方程化为 $y^2(1 - yt) = y^2 t^2$.

由此得 $y = \frac{1}{t} - t$,且 $y' = 1 + t^2$.

因此 $dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\left(-\frac{1}{t^2} - 1\right)}{1 + t^2} dt = -\frac{1}{t^2} dt$,积分得 $x = \frac{1}{t} + c$.

于是,原方程的参数形式的通解为$\begin{cases} x = \frac{1}{t} + c, \\ y = \frac{1}{t} - t, \end{cases}$或者消去参数 t,得 $y = x - \frac{1}{x - c} - c$,其中 c 为任意常数.

总练习

1. 求下列方程的解:

(1) $y\sin x + \frac{dy}{dx}\cos x = 1$;

(2) $ydx - xdy = x^2 ydy$;

(3) $\frac{dy}{dx} = 4e^{-y}\sin x - 1$;

(4) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x - \sqrt{xy}}$;

(5) $(xye^{\frac{x}{y}} + y^2)dx - x^2 e^{\frac{x}{y}} dy = 0$;

(6) $(xy + 1)ydx - xdy = 0$;

(7) $(2x + 2y - 1)dx + (x + y - 2)dy = 0$;

(8) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3}$;

(9) $\frac{dy}{dx} = 3y + x - 2$;

(10) $x\frac{dy}{dx} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$;

(11) $\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{x + y^2 + 3}$;

(12) $e^{-y}\left(\frac{dy}{dx} + 1\right) = xe^x$;

(13) $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$;

(14) $\frac{dy}{dx} = x + y + 1$;

(15) $\frac{dy}{dx} = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$;

(16) $(x + 1)\frac{dy}{dx} + 1 = 2e^{-y}$;

(17) $(x - y^2)dx + y(1 + x)dy = 0$;

(18) $4x^2 y^2 dx + 2(x^3 y - 1)dy = 0$;

(19) $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2y\left(\frac{dy}{dx}\right) + 4x = 0$;

(20) $y^2\left[1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = 1$;

(21) $(1 + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$;

(22) $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$;

(23) $ydx - (1 + x + y^2)dy = 0$;

(24) $[y - x(x^2 + y^2)]dx - xdy = 0$;

(25) $\frac{dy}{dx} + e^{\frac{dy}{dx}} - x = 0$;

(26) $\left(2xy + x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$;

(27) $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+3y+4}{4x+6y+5}$；

(28) $x\frac{dy}{dx}-y=2x^2y(y^2-x^2)$（提示：令 $x^2y=u$）；

(29) $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=e^{xy}$；

(30) $\frac{dy}{dx}=\frac{4x^3-2xy^3+2x}{3x^2y^2-6y^5+3y^2}$；

(31) $y^2(xdx+ydy)+x(ydx-xdy)=0$（提示：令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$）；

(32) $\frac{dy}{dx}+\frac{1+xy^3}{1+x^3y}=0$（提示：令 $u=x+y, v=xy$）.

解：(1) 原方程可以变形为 $\frac{dy}{dx}=(-\tan x)y+\frac{1}{\cos x}(\cos x\neq 0)$.

运用一阶线性微分方程的求解公式得 $y=e^{\int -\tan x dx}\left(\int\frac{1}{\cos x}\cdot e^{\int \tan x dx}dx+c\right)$，

即 $y=|\cos x|\left(\int\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{|\cos x|}dx+c\right)$.

当 $\cos x>0$ 时，$y=\cos x\left(\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+c\right)$，即 $y=c\cos x+\sin x$.

当 $\cos x<0$ 时，$y=-\cos x\left(\int-\frac{1}{\cos^2 x}dx+c\right)$，即 $y=-c\cos x+\sin x$.

当 $\cos x=0$ 时，由原方程可知 $y\sin x=1$.

故得原方程此时的解为 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},1\right)$ 或 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},-1\right)$，其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

综上所述，原方程的解为 $y=c\cos x+\sin x$，其中 c 为任意常数.

(2) 在方程两边同乘 $\frac{1}{x^2}$，则有 $\frac{ydx-xdy}{x^2}=ydy$，即 $d\left(-\frac{y}{x}\right)=d\left(\frac{y^2}{2}\right)$.

所以通解为 $\frac{y^2}{2}+\frac{y}{x}=c$，其中 c 为任意常数.

(3) 令 $u=e^y$，则 $\frac{du}{dx}=e^y\cdot\frac{dy}{dx}$，代入原方程可得 $\frac{du}{dx}=4\sin x-u$.

运用一阶线性微分方程的求解公式可得

$$u=e^{\int(-1)dx}\left(\int 4\sin x\cdot e^{\int 1dx}dx+c\right)=e^{-x}\left(\int 4\sin x\cdot e^x dx+c\right),$$

化简整理，得 $u=e^{-x}[2(\sin x-\cos x)e^x+c]$，代回原变量，得到原方程的解为

$$e^y=ce^{-x}+2(\sin x-\cos x),$$

其中 c 为任意常数.

(4) 令 $u=\frac{y}{x}$，即 $y=ux$，则原方程化为

$$x\cdot\frac{du}{dx}+u=\frac{u}{1-\sqrt{u}},$$

即 $(u^{-\frac{3}{2}}-u^{-1})du=x^{-1}dx(u\neq 0)$.

两边积分，得 $-2u^{-\frac{1}{2}}-\ln|u|=\ln|x|+c_1$，代回原变量整理得

$$x=y\left(c-\frac{1}{2}\ln|y|\right)^2.$$

当 $u=0$ 时，$y=0$，易验证 $y=0$ 也是方程的解.

所以，原方程的解为 $y=0$ 和 $x=y\left(c-\frac{1}{2}\ln|y|\right)^2$，其中 c 为任意常数.

(5) 令 $u=\frac{x}{y}$,即 $x=uy$,则$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=u+y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$.

代入原方程得 $y\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\frac{-u}{1+u\mathrm{e}^u}$,即$\left(-\frac{1}{u}-\mathrm{e}^u\right)\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}y}{y}$.

积分得 $-\ln|u|-\mathrm{e}^u=\ln|y|+c_1$,即 $\mathrm{e}^u+\ln|yu|+c_1=0$.

代回原变量,得原方程的解为 $\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}+\ln|x|=c$,其中 c 为任意常数.

(6) 当 $y\neq 0$ 时,方程两边同乘$\frac{1}{y^2}$ 可得$\left(x+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}x-\frac{x}{y^2}\mathrm{d}y=0$,即 $\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{y}\right)=0$.

所以方程的通解为$\frac{x^2}{2}+\frac{x}{y}=c$,其中 c 为任意常数.

另外,$y=0$ 也是方程的一个解.

(7) 方程可以变形为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{2x+2y-1}{x+y-2}$.

令 $u=x+y$,则$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+\left(-\frac{2u-1}{u-2}\right)=-\frac{u+1}{u-2}$,

即$\left(\frac{3}{u+1}-1\right)\mathrm{d}u=\mathrm{d}x(u\neq-1)$. 积分得 $3\ln|u+1|-u=x+c_1$.

代回原变量并整理得$(x+y+1)^3=c\mathrm{e}^{2x+y}$,其中 c 为任意常数.

当 $u=-1$ 时,即 $x+y=-1$ 亦为解,它含于通解中.

(8) 此方程为 $n=2$ 的伯努利方程,令 $z=y^{-1}$,则$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-y^{-2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,代入原方程有$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{x}z-\frac{1}{x^3}$.

运用一阶线性微分方程的求解公式可得

$$z=\mathrm{e}^{\int-\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int-\frac{1}{x^3}\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\cdot\mathrm{d}x+c\right),$$

计算得 $z=\frac{c}{x}+\frac{1}{x^2}$.

代回原变量,得原方程的通解为$\frac{1}{y}=\frac{c}{x}+\frac{1}{x^2}$,其中 c 为任意常数.

另外,$y=0$ 也是原方程的一个解.

(9) 这是一阶线性微分方程,运用一阶线性微分方程的求解公式,可得该方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{\int 3\mathrm{d}x}\left[\int(x-2)\mathrm{e}^{-\int 3\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right]=c\mathrm{e}^{3x}-\frac{1}{3}x+\frac{5}{9},$$

即 $y=c\mathrm{e}^{3x}-\frac{1}{3}x+\frac{5}{9}$,其中 c 为任意常数.

(10) 令 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,则原方程化为 $x=\frac{1}{p}+p$,两端对 y 求导可得

$$\frac{1}{p}=\left(-\frac{1}{p^2}+1\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y},\text{即 }\mathrm{d}y=\left(p-\frac{1}{p}\right)\mathrm{d}p.$$

积分得 $y=\frac{1}{2}p^2-\ln|p|+c$.

所以原方程的通解为$\begin{cases}x=\frac{1}{p}+p,\\ y=\frac{1}{2}p^2-\ln|p|+c,\end{cases}$ 其中 p 为参数,c 为任意常数.

(11) 原方程可以变形为$(x-y+1)\mathrm{d}x=(x+y^2+3)\mathrm{d}y$,

即$(1+x)\mathrm{d}x-(y^2+3)\mathrm{d}y-(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=0$.

于是,$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}y^3-3y-xy+x\right)=0$,积分得原方程的通解为

$$\frac{1}{2}x^2-xy+x-\frac{1}{3}y^3-3y=c,$$

其中 c 为任意常数.

(12) 原方程可以变形为$\frac{\mathrm{d}(y+x)}{\mathrm{d}x}=xe^{x+y}$,即 $e^{-(x+y)}\mathrm{d}(x+y)=x\mathrm{d}x$.

积分得原方程的通解为$\frac{x^2}{2}+e^{-(x+y)}=c$,其中 c 为任意常数.

(13) 方程两边同乘$\frac{1}{x^2}$,则有 $\mathrm{d}x+\frac{y^2}{x^2}\mathrm{d}x-\frac{2y}{x}\mathrm{d}y=0$,即 $\mathrm{d}\left(x-\frac{y^2}{x}\right)=0$. 积分得 $x-\frac{y^2}{x}=c$,所以原方程的通解为 $x^2-y^2=cx$,其中 c 为任意常数.

(14) 令 $u=x+y$,则$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,代入原方程可得$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u+2$. 积分得 $u+2=ce^x$.

代回原变量,则得原方程的通解为 $x+y+2=ce^x$,其中 c 为任意常数.

(15) 令 $u=\frac{y}{x}$,即 $y=ux$,则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$.

代入原方程可得 $x\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=e^u+u$,即 $e^{-u}\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

积分得 $\ln|x|+e^{-u}=c$.

代回原变量,则得原方程的通解为 $\ln|x|+e^{-\frac{y}{x}}=c$,其中 c 为任意常数.

(16) 在方程的两边同乘 e^y 后,原方程可以变形为

$$(x+1)e^y\mathrm{d}y=(2-e^y)\mathrm{d}x,$$

即$\frac{e^y}{2-e^y}\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}x}{x+1}$.

积分得

$$-\ln|2-e^y|=\ln|x+1|+c_1,$$

即$(x+1)(2-e^y)=c$,c 为任意常数.

(17) 由于 $M=x-y^2$,$N=y(1+x)$,$\frac{\partial M}{\partial y}=-2y$,$\frac{\partial N}{\partial x}=y$.

因为$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{-3}{1+x}$,所以方程有积分因子 $\mu=e^{\int\frac{-3}{1+x}\mathrm{d}x}=(1+x)^{-3}$.

用 $\mu=(1+x)^{-3}$ 乘方程两边得到

$$\frac{x-y^2}{(1+x)^3}\mathrm{d}x+\frac{y}{(1+x)^2}\mathrm{d}y=0,$$

即 $\mathrm{d}\left(\frac{y^2}{2(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2(1+x)^2}\right)=0$. 故方程的通解为 $\frac{y^2}{2(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2(1+x)^2}=c_1$.

即 $y^2=c(1+x)^2+2x+1$,其中 c 为任意常数.

(18) 由于$M=4x^2y^2, N=2(x^3y-1), \dfrac{\partial M}{\partial y}=8x^2y, \dfrac{\partial N}{\partial x}=6x^2y$.

因为$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\dfrac{-1}{2y}$,所以方程有积分因子$\mu=e^{\int\frac{-1}{2y}dy}=y^{-\frac{1}{2}}$,用$y^{-\frac{1}{2}}$乘方程两边得到

$$4x^2y^{\frac{3}{2}}dx+2(x^3y^{\frac{1}{2}}-y^{-\frac{1}{2}})dy=0, \text{即 } d\left(\frac{4}{3}x^3y^{\frac{3}{2}}-4y^{\frac{1}{2}}\right)=0,$$

所以方程的通解为$\dfrac{4}{3}x^3y^{\frac{3}{2}}-4y^{\frac{1}{2}}=c_1$,即$(x^3y-3)y^{\frac{1}{2}}=c$,其中$c$为任意常数.

(19) 令$\dfrac{dy}{dx}=p$,得到$y=\dfrac{1}{2}xp+\dfrac{2x}{p}$,两边对$x$求导数,得到

$$p=\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}x\frac{dp}{dx}+\frac{2p-2x\frac{dp}{dx}}{p^2},$$

整理得$\dfrac{p^2-4}{p^2-4}\cdot\dfrac{1}{p}dp=\dfrac{1}{x}dx(p^2\neq 4)$,积分得$p=cx$.

把$p=cx$代入$y=\dfrac{1}{2}xp+\dfrac{2x}{p}$得$y=\dfrac{1}{2}cx^2+\dfrac{2}{c}$,即$2cy=c^2x^2+4$.

另外,当$p^2=4$时,可得$y=2x, y=-2x$也是方程的解.

所以原方程的解为$2cy=c^2x^2+4$,c为任意常数及$y=\pm 2x$.

(20) 令$\dfrac{dy}{dx}=p$,则方程化为$y^2(1-p^2)=1$,

解得$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-p^2}}$或$y=-\dfrac{1}{\sqrt{1-p^2}}$.

当$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-p^2}}$时,对$x$求导得$p=p(1-p^2)^{-\frac{3}{2}}\dfrac{dp}{dx}$.

若$p\neq 0$,则有$(1-p^2)^{-\frac{3}{2}}dp=dx$,积分得$c+x=p(1-p^2)^{-\frac{1}{2}}$.

此时方程的通解为$\begin{cases}c+x=p(1-p^2)^{-\frac{1}{2}},\\ y=(1-p^2)^{-\frac{1}{2}}.\end{cases}$

另外,若$p=0$,原方程化为$y^2=1$即$y=\pm 1$.

当$y=-\dfrac{1}{\sqrt{1-p^2}}$时,同理可以求得通解为$\begin{cases}c+x=-p(1-p^2)^{-\frac{1}{2}},\\ y=-(1-p^2)^{-\frac{1}{2}},\end{cases}$

且$p=0$时,$y=\pm 1$也是方程的解.

综上所述,消去p后,可以得到原方程的解为$y^2=(x+c)^2+1$,还有$y=\pm 1$,其中c为任意常数.

(21) 原方程可以化为$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{x}{y}-1\right)}{1+e^{\frac{x}{y}}}$.令$u=\dfrac{x}{y}$,即$x=yu$,则

$$\frac{dx}{dy}=u+y\frac{du}{dy}=\frac{e^u(u-1)}{1+e^u}, \text{即}\frac{(1+e^u)}{e^u+u}du=-\frac{dy}{y}.$$

两边积分得$\ln|e^u+u|+\ln|y|=c_1$,代回原变量,整理得原方程的通解为$x+ye^{\frac{x}{y}}=c$,c为非零常数.

(22) 由于 $M=\dfrac{2x}{y^3},N=\dfrac{y^2-3x^2}{y^4},\dfrac{\partial M}{\partial y}=-6\dfrac{x}{y^4},\dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{-6x}{y^4}$,

所以此方程是恰当微分方程. 原方程可以变为 $\mathrm{d}\left(\dfrac{x^2}{y^3}-\dfrac{1}{y}\right)=0$.

所以原方程的通解为 $\dfrac{x^2}{y^3}-\dfrac{1}{y}=c$,即 $x^2-y^2=cy^3$,其中 c 为任意常数.

(23) 由于 $M=y,N=-(1+x+y^2),\dfrac{\partial M}{\partial y}=1,\dfrac{\partial N}{\partial x}=-1$.

因为 $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}=-\dfrac{2}{y}$,所以方程有积分因子 $\mu=\mathrm{e}^{\int-\frac{2}{y}\mathrm{d}y}=y^{-2}$.

用 $\mu=y^{-2}$ 乘方程两边,得到

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}x-\left(\frac{1+x}{y^2}+1\right)\mathrm{d}y=0,\text{即 }\mathrm{d}\left(\frac{x+1}{y}-y\right)=0.$$

积分得 $\dfrac{x+1}{y}-y=c$,即 $x+1-y^2=cy$.

所以方程的通解为 $x+1-y^2=cy$,c 为任意常数. 另外 $y=0$ 也是方程的解.

(24) 方程两边乘 $(x^2+y^2)^{-1}$ 可得 $\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}-x\mathrm{d}x=0$,即

$$\mathrm{d}\left(\arctan\frac{x}{y}-\frac{x^2}{2}\right)=0.$$

所以方程的通解为 $\arctan\dfrac{x}{y}-\dfrac{x^2}{2}=c$,$c$ 为任意常数.

(25) 令 $p=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,则方程变为 $x=p+\mathrm{e}^p$.

两边对 y 求导可得 $\dfrac{1}{p}=(1+\mathrm{e}^p)\cdot\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$,即 $\mathrm{d}y=p(1+\mathrm{e}^p)\mathrm{d}p$.

积分得 $y=\dfrac{p^2}{2}+(p-1)\mathrm{e}^p+c$.

所以方程的通解为 $\begin{cases}x=p+\mathrm{e}^p,\\ y=\dfrac{p^2}{2}+(p-1)\mathrm{e}^p+c,\end{cases}$ 其中 p 为参数,c 为任意常数.

(26) 由于 $M=2xy+x^2y+\dfrac{y^3}{3},N=x^2+y^2,\dfrac{\partial M}{\partial y}=2x+x^2+y^2,\dfrac{\partial N}{\partial x}=2x$. 因为 $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=1$,

所以方程有积分因子 $\mu=\mathrm{e}^x$.

用 $\mu=\mathrm{e}^x$ 乘方程两边可得

$$\mathrm{e}^x\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{e}^x\mathrm{d}y=0,$$

即 $\mathrm{d}\left(x^2y\mathrm{e}^x+\dfrac{y^3}{3}\mathrm{e}^x\right)=0$.

所以方程的通解为 $\left(x^2+\dfrac{1}{3}y^2\right)y\mathrm{e}^x=c_1$,即 $(3x^2y+y^3)\mathrm{e}^x=c$,$c$ 为任意常数.

(27) 令 $u=2x+3y$,则$\frac{du}{dx}=2+3\frac{dy}{dx}$,且原方程可化为$\frac{du}{dx}=\frac{7u+22}{2u+5}$,

即$\frac{2u+5}{7u+22}du=dx(7u+22\neq 0)$.

积分得$\frac{2}{7}u-\frac{9}{49}\ln|7u+22|=x+c_1$,即 $14u-49x=9\ln|7u+22|+49c_1$.

把 $u=2x+3y$ 代入,化简得方程的通解为 $9\ln\left|2x+3y+\frac{22}{7}\right|=14\left(3y-\frac{3}{2}x\right)+c$,其中 c 为任意常数.

另外,当 $7u+22=0$ 时,即 $2x+3y+\frac{22}{7}=0$ 也是方程的解.

(28) 令 $x^2y=u$,则$\frac{du}{dx}=2xy+x^2\frac{dy}{dx}=\frac{2u}{x}+x^2\cdot\frac{dy}{dx}$,代入原方程,可得

$$\frac{du}{dx}=\left(\frac{3}{x}-2x^3\right)u+\frac{2}{x^3}u^3.$$

此方程为 $n=3$ 的伯努利方程,令 $z=u^{-2}$,则$\frac{dz}{dx}=-2u^{-3}\frac{du}{dx}$,代入上式得

$$\frac{dz}{dx}=-2\left(\frac{3}{x}-2x^3\right)z-\frac{4}{x^3},$$

运用一阶微分方程的求解公式,可得

$$z=e^{\int-2\left(\frac{3}{x}-2x^3\right)dx}\left[\int-\frac{4}{x^3}e^{\int 2\left(\frac{3}{x}-2x^3\right)dx}dx+c\right],$$

化简得 $z=x^{-6}(1+ce^{x^4})$,把 $z=u^{-2}=x^{-4}y^{-2}$ 代入,可得原方程的通解为 $x^2-y^2=cy^2e^{x^4}$,c 为任意常数.

(29) 令 $u=xy$,则$\frac{du}{dx}=y+x\frac{dy}{dx}=\frac{u}{x}+x\cdot\frac{dy}{dx}$,代入原方程,可得

$$\frac{du}{dx}=\frac{u}{x}+x\left(e^u-\frac{u}{x^2}\right),$$

即 $e^{-u}du=x\cdot dx$,积分得 $e^{-u}+\frac{x^2}{2}=c$.

代回原变量可得原方程的通解为 $e^{-xy}+\frac{x^2}{2}=c$,其中 c 为正常数.

(30) 原方程可以变为$\frac{3y^2dy}{2xdx}=\frac{2x^2-y^3+1}{-2y^3+x^2+1}$.

令 $u=y^3,v=x^2$,则得到$\frac{du}{dv}=\frac{2v-u+1}{v-2u+1}$,即 $d(uv+u-u^2)=d(v^2+v)$.

积分得 $u^2+v^2-uv-u+v=c$.

把 $u=y^3,v=x^2$ 代入,得原方程的通解为 $y^6+x^4+x^2-y^3x^2-y^3=c$,c 为任意常数.

(31) 令 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$,则 $dx=\cos\theta d\rho-\rho\sin\theta d\theta,dy=\sin\theta d\rho+\rho\cos\theta d\theta$,代入原方程,

化简得 $\rho^3\sin^2\theta d\rho-\rho^3\cos\theta d\theta=0$,即 $d\rho=\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta(\sin\theta\neq 0)$.

积分可得 $\rho=-\frac{1}{\sin\theta}+c_1$,代回原变量,得 $\sqrt{x^2+y^2}=c_1-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}$.

整理后得到$(x^2+y^2)(y+1)^2=cy^2$，其中 c 为任意非负常数.

另外，当 $\sin\theta=0$ 时，$y=0$ 也是方程的解.

(32) 令 $u=x+y, v=xy$，则 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y, \mathrm{d}v=y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$，且原方程可以变形为

$$(1+x^3y)\mathrm{d}y+(1+xy^3)\mathrm{d}x=0.$$

由于

$$1\cdot\mathrm{d}y+1\cdot\mathrm{d}x=\mathrm{d}(x+y)=\mathrm{d}u, x^3y\mathrm{d}y+xy^3\mathrm{d}x=v(u\mathrm{d}v-v\mathrm{d}u),$$

因此，原方程进一步变为$(1-v^2)\mathrm{d}u+uv\mathrm{d}v=0$，即$\dfrac{\mathrm{d}u}{u}=\dfrac{v\mathrm{d}v}{v^2-1}(u\neq0, v^2\neq1)$.

积分得 $\ln|u|=\dfrac{1}{2}\ln|v^2-1|+c_1$，即$\sqrt{v^2-1}=cu$，其中 c 为任意常数.

代回原变量，即得到原方程的通解为$\sqrt{x^2y^2-1}=c(x+y)$，c 为任意常数.

当 $u=0$ 时，$x+y=0$ 也是方程的解.

当 $v^2=1$ 时，$x^2y^2=1$ 也是方程的解，它包含在通解中.

2. 求一曲线，使其切线在纵轴上之截距等于切点的横坐标.

解: 满足条件的曲线的方程为 $y-xy'=x$，即 $y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=x\mathrm{d}x$.

两边同乘以$\dfrac{1}{x^2}$，则得到$\dfrac{y}{x^2}\mathrm{d}x-\dfrac{1}{x}\mathrm{d}y=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$，即 $\mathrm{d}\left(-\dfrac{y}{x}\right)=\mathrm{d}(\ln|x|)$.

积分得 $\ln|x|+\dfrac{y}{x}=c$，即 $y=cx-x\ln|x|$，c 为任意常数.

3. 摩托艇以 5 m/s 的速度在静水上运动，全速时停止了发动机，过了 20 s 后，艇的速度减至 $v_1=$ 3 m/s. 确定发动机停止 2 min 后艇的速度，假定水的阻力与艇的运动速度成正比.

解: 根据牛顿第二定律和题设条件得 $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=k_1v$($k_1$ 为比例系数)，即$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=kv\left(k=\dfrac{k_1}{m}\right)$.

积分得 $v=ce^{kt}$，将初始条件 $t=0$ s，$v=5$ m/s 代入得 $c=5$，解得 $v=5e^{kt}$.

将 $t=20$ s，$v=3$ m/s 代入 $v=5e^{kt}$，得 $k=\dfrac{1}{20}\ln\dfrac{3}{5}$，则 $v=5e^{\frac{t}{20}\ln\frac{3}{5}}$.

当 $t=120$ s 时，$v=5e^{6\ln\frac{3}{5}}\approx0.233$(m/s).

因此，发动机停止 2 min 后艇的速度约为 0.233 m/s.

4. 一质量为 m 的质点作直线运动，从速度等于零的时刻起，有一个和时间成正比(比例系数为 k_1)的力作用在它上面. 此外质点又受到介质的阻力，这阻力和速度成正比(比例系数为 k_2). 试求此质点的速度与时间的关系.

解: 根据牛顿第二定律，可以写出质点运动满足的方程为

$$m\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=k_1t-k_2v,$$

其中 v 表示质点的运动速度，t 表示时间.

方程可以变形为$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{k_2}{m}v+\dfrac{k_1}{m}t$.

运用一阶线性微分方程的求解公式，可得其解为

$$v=e^{\int-\frac{k_2}{m}\mathrm{d}t}\left(\int\frac{k_1}{m}t\cdot e^{\int\frac{k_2}{m}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+c\right),$$

化简得 $v=c\cdot e^{-\frac{k_2}{m}t}+\frac{k_1}{k_2}\left(t-\frac{m}{k_2}\right)$.

由于 $t=0$ 时,$v(0)=0$,代入可得 $c=\frac{mk_1}{k_2^2}$.

于是 $v=\frac{mk_1}{k_2^2}e^{-\frac{k_2}{m}t}+\frac{k_1}{k_2}\left(t-\frac{m}{k_2}\right)$,这就是质点的速度与时间的关系.

方法点击:本题与第 3 题的解法一样,先利用牛顿第二定律建立微分方程模型,然后根据微分方程的特点,选用合适的初等积分法求解.

5. 证明:如果已知里卡蒂微分方程的一个特解,则可用初等解法求得它的通解.并求解下列方程:

(1) $y'e^{-x}+y^2-2ye^x=1-e^{2x}$;　(2) $y'+y^2-2y\sin x=\cos x-\sin^2 x$;

(3) $x^2y'=x^2y^2+xy+1$;　(4) $4x^2(y'-y^2)=1$;

(5) $x^2(y'+y^2)=2$;　(6) $x^2y'+(xy-2)^2=0$;

(7) $y'=(x-1)y^2+(1-2x)y+x$.

证明:已知里卡蒂方程为$\frac{dy}{dx}=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$,若已知 $\bar{y}(x)$ 是它的一个特解,设 $z=y-\bar{y}$,

则$\frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dx}-\frac{d\bar{y}}{dx}$.

由于 $\bar{y}$ 是方程的一个解,所以$\frac{d\bar{y}}{dx}=P(x)\bar{y}^2+Q(x)\bar{y}+R(x)$,因此

$$\frac{dz}{dx}=[P(x)y^2+Q(x)y+R(x)]-[P(x)\bar{y}^2+Q(x)\bar{y}+R(x)],$$

即$\frac{dz}{dx}=P(x)(y^2-\bar{y}^2)+Q(x)(y-\bar{y})$,

变形为$\frac{dz}{dx}=P(x)z^2+(2P(x)\bar{y}+Q(x))z$.

此时为 $n=2$ 时的伯努利方程,从而可以用初等方法求解.

(1) 方程有特解 $y=e^x$. 令 $z=y-e^x$,则原方程变形为$\frac{dz}{dx}=-e^x\cdot z^2$,即$\frac{dz}{-z^2}=e^x dx$. 积分得

$\frac{1}{z}=e^x+c$.

把 $z=y-e^x$ 代入,即得方程的通解为$(e^x+c)(y-e^x)=1$,c 为任意常数.

(2) 方程有特解 $y=\sin x$,令 $z=y-\sin x$,则原方程变形为$\frac{dz}{dx}=-z^2$,积分得$\frac{1}{z}=x+c$.

把 $z=y-\sin x$ 代入,即得方程的通解为$(x+c)(y-\sin x)=1$,c 为任意常数.

(3) 方程有特解 $y=-\frac{1}{x}$,令 $z=y+\frac{1}{x}$,则原方程变形为$\frac{dz}{dx}=z^2-\frac{1}{x}z$.

这是一个 $n=2$ 的伯努利方程,令 $u=\frac{1}{z}$,则$\frac{du}{dx}=-\frac{1}{z^2}\cdot\frac{dz}{dx}=-1+\frac{u}{x}$,

积分得 $u=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left[\int(-1)\cdot e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+c\right]$,化简得 $u=x(c-\ln|x|)$.

把 $u=\dfrac{1}{z}=\left(y+\dfrac{1}{x}\right)^{-1}$ 代入整理即得原方程的通解为 $(xy+1)(c-\ln|x|)=1$,其中 c 为任意常数.

(4) 方程有特解 $y=-\dfrac{1}{2x}$,令 $z=y+\dfrac{1}{2x}$,则原方程可以化为 $\dfrac{dz}{dx}=z^2-\dfrac{z}{x}$.

这样,完全同第(3) 小题一样,可以得到通解为 $\dfrac{1}{z}=x(c-\ln|x|)$.

将 $z=y+\dfrac{1}{2x}$ 代入整理即得原方程的通解为 $\left(xy+\dfrac{1}{2}\right)(c-\ln|x|)=1$,其中 c 为任意常数.

(5) 方程有特解 $y=-\dfrac{1}{x}$,令 $z=y+\dfrac{1}{x}$,则原方程变形为 $\dfrac{dz}{dx}=-z^2+\dfrac{2}{x}z$.

这是 $n=2$ 的伯努利方程. 令 $u=z^{-1}$,则 $\dfrac{du}{dx}=1-\dfrac{2}{x}u$.

运用一阶线性微分方程的求解公式可得 $u=e^{\int-\frac{2}{x}dx}\left(\int 1\cdot e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+c\right)$,即 $u=\dfrac{c}{x^2}+\dfrac{x}{3}$.

把 $u=z^{-1}=\left(y+\dfrac{1}{x}\right)^{-1}$ 代入并整理得到原方程的通解为 $xy=\dfrac{2x^3-c}{x^3+c}$,c 为任意常数.

(6) 原方程变形为 $y'=-y^2+\dfrac{4}{x}y-\dfrac{4}{x^2}$. 易看出 $y=\dfrac{1}{x}$ 是一个特解.

令 $z=y-\dfrac{1}{x}$,则 $\dfrac{dz}{dx}=-z^2+\dfrac{2}{x}z$.

令 $u=z^{-1}$,则 $\dfrac{du}{dx}=-z^{-2}\dfrac{dz}{dx}$,从而 $\dfrac{du}{dx}=1-\dfrac{2}{x}u$.

类似于第(5) 小题可求得 $u=\dfrac{c}{x^2}+\dfrac{x}{3}$,把 $u=z^{-1}=\left(y-\dfrac{1}{x}\right)^{-1}$ 代入整理则得原方程的通解为 $xy=\dfrac{4x^3+c}{x^3+c}$,c 为任意常数.

(7) 易知 $y=1$ 是方程的一个特解. 令 $z=y-1$,则 $\dfrac{dz}{dx}=(x-1)z^2-z$.

令 $u=z^{-1}$,则 $\dfrac{du}{dx}=-z^{-2}\cdot\dfrac{dz}{dx}$,代入得 $\dfrac{du}{dx}=u+(1-x)$.

运用一阶线性微分方程的求解公式可得 $u=e^x\left[\int(1-x)e^{-x}dx+c\right]$,即 $u=ce^x+x$.

把 $u=z^{-1}=(y-1)^{-1}$ 代入,即得原方程的通解为 $(y-1)(ce^x+x)=1$,其中 c 为任意常数.

第三章　一阶微分方程的解的存在定理

习题 3.1

1. 求方程 $\dfrac{dy}{dx}=x+y^2$ 通过点 $(0,0)$ 的第三次近似解.

解:$\varphi_0(x)=0$,

$$\varphi_1(x)=\int_0^x[t+\varphi_0^2(t)]\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2},$$

$$\varphi_2(x)=\int_0^x[t+\varphi_1^2(t)]\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{20},$$

$$\varphi_3(x)=\int_0^x[t+\varphi_2^2(t)]\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{20}+\frac{x^8}{160}+\frac{x^{11}}{4\,400}.$$

所以方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x+y^2$ 通过点(0,0) 的第三次近似解为

$$y_3=\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{20}+\frac{x^8}{160}+\frac{x^{11}}{4\,400}.$$

2. 求方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x-y^2$ 通过点(1,0) 的第二次近似解.

解:$\varphi_0(x)=0,\varphi_1(x)=\int_1^x[t-\varphi_0^2(t)]\mathrm{d}t=\frac{x^2-1}{2}$,

$$\varphi_2(x)=\int_1^x[t-\varphi_1^2(t)]\mathrm{d}t=\int_1^x\left[t-\frac{(t^2-1)^2}{4}\right]\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{4}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{20}-\frac{11}{30}.$$

所以方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x-y^2$ 通过点(1,0) 的第二次近似解为

$$y_2=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{4}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{20}-\frac{11}{30}.$$

3. 求初值问题$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2-y^2, R: |x+1|\leqslant 1, |y|\leqslant 1,\\ y(-1)=0\end{cases}$的解的存在区间,并求第二次近似解,给出在解的存在区间的误差估计.

解:易知$M=\max\limits_{(x,y)\in R}|f(x,y)|=4, h=\min\left\{1,\frac{1}{4}\right\}=\frac{1}{4}$,在$R$上函数$f(x,y)=x^2-y^2$的利普希茨常数$L=2$. 因为$\frac{\partial f}{\partial y}=|-2y|\leqslant 2$,

$\varphi_0(x)=0$,

$$\varphi_1(x)=\int_{-1}^x[t^2-\varphi_0^2(t)]\mathrm{d}t=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3},$$

$$\varphi_2(x)=\int_{-1}^x[t^2-\varphi_1^2(t)]\mathrm{d}t=\int_{-1}^x\left[t^2-\frac{(t^3+1)^2}{9}\right]\mathrm{d}t=\frac{x^3}{3}-\frac{x}{9}-\frac{x^4}{18}-\frac{x^7}{63}+\frac{11}{42},$$

由误差估计公式得

$$|\varphi_2(x)-\varphi(x)|\leqslant\frac{4\cdot 2^2}{3!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{24},$$

所以已知初值问题的解的存在区间为$-\frac{5}{4}\leqslant x\leqslant-\frac{3}{4}$.

第二次近似解为$y_2=\frac{x^3}{3}-\frac{x}{9}-\frac{x^4}{18}-\frac{x^7}{63}+\frac{11}{42}$,在解的存在区间的误差估计为$|y-y_2|\leqslant\frac{1}{24}$.

4. 讨论方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$ 在怎样的区域中满足解的存在唯一性定理的条件,并求通过点(0,0) 的一切解.

解：显然 $f(x,y)=\frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$ 在整个平面上是连续函数，又$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2}y^{-\frac{2}{3}}$ 在 $y\neq 0$ 的区域上是连续的，所以在区域 $|y|\geqslant\sigma>0$ 上满足解的存在唯一性定理的条件，其中 σ 是任意正数.

从而，满足解的存在唯一性定理的条件的区域为 $|y|\geqslant\sigma>0$.

当 $y=0$ 时，易验证 $y=0$ 是方程过(0,0) 的解.

当 $y\neq 0$ 时，方程可以变形为 $y^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}y=\frac{3}{2}\mathrm{d}x$，积分得 $y^{\frac{2}{3}}=x-c$，或 $|y|=(x-c)^{\frac{3}{2}}$，其中 c 是任意常数.

由于 $y^{\frac{2}{3}}\geqslant 0$，故 $x\geqslant c$.

相应的，过(0,0) 的解可以表示为 $|y|=\begin{cases}0, & x\leqslant c,\\ (x-c)^{\frac{3}{2}}, & x>c,\end{cases}$ 其中 $c\geqslant 0$ 为任意正常数.

综上所述，可以得到过点(0,0) 的解为 $y=0$，以及 $|y|=\begin{cases}0, & x\leqslant c,\\ (x-c)^{\frac{3}{2}}, & x>c,\end{cases}$ 其中 $c\geqslant 0$ 为任意正常数.

5. 如果函数 $f(x,y)$ 于带域 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 上连续且关于 y 满足利普希茨条件，则方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$ 满足条件 $y(x_0)=y_0$ 的解于整个区间$[\alpha,\beta]$ 上存在且唯一. 试证明之.

（提示：用逐步逼近法，取 $M=\max\limits_{x\in[\alpha,\beta]}|f(x,y_0)|$.）

证明：设 $M=\max\limits_{x\in[\alpha,\beta]}|f(x,y_0)|$，$h=\beta-\alpha$，$b=Mh$，有某常数 L，使得在域 $R=\{(x,y)\mid\alpha\leqslant x\leqslant\beta,|y-y_0|\leqslant b\}$ 中有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|,(x,y_1),(x,y_2)\in R.$$

构造逐步逼近函数序列

$$\begin{cases}\varphi_0(x)=y_0,\\ \varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))\mathrm{d}\xi,\alpha\leqslant x\leqslant\beta,n=1,2,\cdots.\end{cases}$$

因 $|\varphi_1(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x}f(\xi,y_0)\mathrm{d}\xi\right|\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(\xi,y_0)|\mathrm{d}\xi\leqslant M(x-x_0)\leqslant Mh\leqslant b$.

可证

$$|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)|\leqslant\frac{M}{n!}L^{n-1}(\beta-\alpha)^n.$$

事实上，有

$$\begin{aligned}|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)|&\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f(\xi,\varphi_n(\xi))-f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))|\mathrm{d}\xi\right|\\&\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}|\varphi_n(\xi)-\varphi_{n-1}(\xi)|\mathrm{d}\xi\right|\\&\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}\frac{M}{n!}L^{n-1}|\xi-x_0|^n\mathrm{d}\xi\right|\\&\leqslant\frac{M}{(n+1)!}L^n|x-x_0|^{n+1}\\&\leqslant\frac{M}{(n+1)!}L^n(\beta-\alpha)^{n+1}.\end{aligned}$$

由于级数$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M}{k!}L^{k-1}(\beta-\alpha)^k$收敛,易知级数

$$\varphi_n(x)=\varphi_0(x)+\sum_{k=1}^{n}[\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)]$$

在区间$[\alpha,\beta]$上一致收敛,于是存在极限$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x)$,它在区间$[\alpha,\beta]$上连续,且

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=y_0+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))\mathrm{d}\xi$$

$$=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\lim_{n\to\infty}\varphi_{n-1}(\xi))\mathrm{d}\xi=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi(\xi))\mathrm{d}\xi.$$

故$\varphi(x)$是积分方程也就是微分方程的解.

设$\varphi(x),\psi(x)$均满足积分方程

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,y(\xi))\mathrm{d}\xi,\alpha\leqslant x_0\leqslant\beta,\alpha\leqslant x\leqslant\beta.$$

当$x\geqslant x_0$时,利用格朗沃尔不等式,由

$$|\varphi(x)-\psi(x)|\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(s,\varphi(s))-f(s,\psi(s))|\mathrm{d}s\leqslant L\int_{x_0}^{x}|\varphi(s)-\psi(s)|\mathrm{d}s,$$

有$|\varphi(x)-\psi(x)|\leqslant 0$,即$\varphi(x)\equiv\psi(x)(\alpha\leqslant x_0\leqslant x\leqslant\beta)$.

同理可证当$\alpha\leqslant x\leqslant x_0\leqslant\beta$时,有$\varphi(x)\equiv\psi(x)$.

即积分方程也就是微分方程的解是唯一的.

6. 证明格朗沃尔(Gronwall)不等式:

设K为非负常数,$f(t)$和$g(t)$为在区间$[\alpha,\beta]$上的连续非负函数,且满足不等式

$$f(t)\leqslant K+\int_{\alpha}^{t}f(s)g(s)\mathrm{d}s,\alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

则有

$$f(t)\leqslant K\exp\left[\int_{\alpha}^{t}g(s)\mathrm{d}s\right],\alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

并由此证明定理1的命题5.

证明:(1) $K>0$时,令$w(t)=K+\int_{\alpha}^{t}f(s)g(s)\mathrm{d}s$,则$w'(t)=f(t)g(t)\leqslant g(t)w(t)$.

由$w(t)>0$可得$\frac{w'(t)}{w(t)}\leqslant g(t)$,两边从$\alpha$到$t$积分得$\ln w(t)-\ln w(\alpha)\leqslant\int_{\alpha}^{t}g(s)\mathrm{d}s$,即有

$$\frac{w(t)}{w(\alpha)}\leqslant\exp\left[\int_{\alpha}^{t}g(s)\mathrm{d}s\right],w(\alpha)=K>0.$$

所以$w(t)\leqslant K\exp\left[\int_{\alpha}^{t}g(s)\mathrm{d}s\right]$,即有

$$f(t)\leqslant w(t)\leqslant K\exp\left[\int_{\alpha}^{t}g(s)\mathrm{d}s\right],\alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

(2) $K=0$时,对任意$\varepsilon>0$,因为$f(t)\leqslant\int_{\alpha}^{t}f(s)g(s)\mathrm{d}s$,所以$f(t)\leqslant\varepsilon+\int_{\alpha}^{t}f(s)g(s)\mathrm{d}s$.

由(1),可得$f(t)\leqslant\varepsilon\exp\left[\int_{\alpha}^{t}g(s)\mathrm{d}s\right]$,当$\varepsilon\to0^+$时,有$f(t)\leqslant0$.又因为$f(t)\geqslant0$,即得$f(t)\equiv0$,从而

$$f(t) \leqslant K\exp\left[\int_{\alpha}^{t} g(s)\mathrm{d}s\right], \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

由(1),(2)知,格朗沃尔不等式成立.

下面利用格朗沃尔不等式证明定理1的命题5:

设 $\psi(x)$ 是积分方程 $y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y)\mathrm{d}\xi, x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$ 的定义在 $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$ 上的另一连续解,则 $\varphi(x) = \psi(x)(x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h)$.

证明:设 $\varphi(t), \psi(t)$ 是初值问题 $x' = f(t,x), x(t_0) = x_0$ 的两个解,则有

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\xi, \varphi(\xi))\mathrm{d}\xi, \psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\xi, \psi(\xi))\mathrm{d}\xi.$$

于是

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leqslant \int_{t_0}^{t} |f(\xi, \varphi(\xi)) - f(\xi, \psi(\xi))| \mathrm{d}\xi \leqslant L\int_{t_0}^{t} |\varphi(\xi) - \psi(\xi)| \mathrm{d}\xi,$$

其中 L 为利普希茨常数,由格朗沃尔不等式知 $K = 0$ 且

$$0 \leqslant |\varphi(t) - \psi(t)| \leqslant K\exp\left(\int_{t_0}^{t} L\mathrm{d}\xi\right) = 0.$$

于是 $\varphi(t) = \psi(t)$. 即定理1的命题5得证.

7. 假设函数 $f(x,y)$ 于 (x_0, y_0) 的邻域内是 y 的不增函数,试证方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y)$ 满足条件 $y(x_0) = y_0$ 的解于 $x \geqslant x_0$ 一侧最多只有一个.

证明:设方程满足条件 $y(x_0) = y_0$ 的解有两个:$y = \varphi_1(x)$ 和 $y = \varphi_2(x)$,要证当 $x \geqslant x_0$ 时,

$$\varphi(x) \xlongequal{\Delta} \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \equiv 0.$$

用反证法,若 $\varphi(x) \not\equiv 0 (x > x_0)$,即存在 $x_1 > x_0$,使得 $\varphi(x_1) \neq 0$,不妨设 $\varphi(x_1) > 0$,由 $\varphi(x)$ 的连续性及 $\varphi(x_0) = 0$,知存在 $\bar{x}_0, x_0 \leqslant \bar{x}_0 < x_1$,使得 $\varphi(\bar{x}_0) = 0$ 及 $\varphi(x) > 0, \bar{x}_0 < x \leqslant x_1$,则有

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x) = \int_{\bar{x}_0}^{x} [f(\xi, \varphi_1(\xi)) - f(\xi, \varphi_2(\xi))]\mathrm{d}\xi,$$

其中 $\bar{x}_0 < x \leqslant x_1$.

由 $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x) > 0 (\bar{x}_0 < x \leqslant x_1)$ 及 $f(x,y)$ 对 y 的单调不增性,

$$\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = \int_{\bar{x}_0}^{x} [f(\xi, \varphi_1(\xi)) - f(\xi, \varphi_2(\xi))]\mathrm{d}\xi \leqslant 0, \bar{x}_0 < x \leqslant x_1.$$

这与 $\varphi(x_1) > 0$ 矛盾. 因此,对 $x \geqslant x_0$,有 $\varphi(x) \equiv 0$.

方法点击:本题结论并没有给出初值问题解的存在性,只说明了若初值问题有解,则解必唯一,从而假设方程有两个解,证明这两个解恒等即可.

8. 设 $f(x)$ 定义于 $-\infty < x < +\infty$,满足条件

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant N|x_1 - x_2|,$$

其中 $N < 1$,证明方程 $x = f(x)$ 存在唯一的一个解.

(提示:任取 x_0,作逐步逼近点列 $x_{n+1} = f(x_n)(n = 0,1,2,\cdots)$,然后证明 x_n 收敛于方程的唯

一解.）

证明:由条件知 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续,任取一点 $x_0\in(-\infty,+\infty)$,作逼近序列$\{x_n\}$:

$$x_{n+1}=f(x_n),n=0,1,2,\cdots.$$

且序列$\{x_n\}$的收敛性等价于级数 $x_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_k-x_{k-1})$ 的收敛性.

由于 $|x_1-x_0|=|f(x_0)-x_0|$,

$$|x_2-x_1|=|f(x_1)-f(x_0)|\leqslant N|x_1-x_0|=N|f(x_0)-x_0|,$$

由数学归纳法可知 $|x_k-x_{k-1}|\leqslant N^{k-1}|f(x_0)-x_0|$.

由假设得 $N<1$,所以级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}N^{k-1}|f(x_0)-x_0|$ 收敛.

由级数收敛的比较判别法知,级数 $x_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_k-x_{k-1})$ 绝对收敛,从而序列$\{x_n\}$收敛.不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$,由 $f(x)$ 的连续性知,$x_{n+1}=f(x_n),n=0,1,2,\cdots$ 的两端当 $n\to\infty$ 时取极限有 $x^*=f(x^*)$,即 x^* 是方程 $x=f(x)$ 的解.

下证唯一性.

设 $x=f(x)$ 有两个解 $x^*,\bar{x}^*$,则 $x^*=f(x^*),\bar{x}^*=f(\bar{x}^*)$,由已知条件

$$|x^*-\bar{x}^*|=|f(x^*)-f(\bar{x}^*)|\leqslant N|x^*-\bar{x}^*|,$$

由于 $N<1$,即有 $x^*=\bar{x}^*$,所以 $x=f(x)$ 存在唯一的一个解.

9. 给定积分方程

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi, \tag{*}$$

其中 $f(x)$ 是$[a,b]$上的已知连续函数,$K(x,\xi)$ 是 $a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant\xi\leqslant b$ 上的已知连续函数.证明当 $|\lambda|$ 足够小时(λ 是常数),(*)在$[a,b]$上存在唯一的连续解.

(提示:作逐步逼近函数序列

$$\varphi_0(x)=f(x),\varphi_{n+1}(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi_n(\xi)\mathrm{d}\xi\quad(n=0,1,2,\cdots).)$$

证明:作逐步逼近函数序列,取 $\varphi_0(x)=f(x)$,令

$$\varphi_1(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi_0(\xi)\mathrm{d}\xi,\cdots,$$

$$\varphi_{n+1}(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi_n(\xi)\mathrm{d}\xi,\cdots. \tag{①}$$

令 $M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|,L=\max\limits_{\substack{x\in[a,b]\\ \xi\in[a,b]}}|K(x,\xi)|>0$,则

$$\begin{aligned}|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)|&=\left|\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi_0(\xi)\mathrm{d}\xi\right|\leqslant|\lambda|\int_a^b|K(x,\xi)||f(\xi)|\mathrm{d}\xi\\&\leqslant|\lambda|ML(b-a),\end{aligned}$$

假设 $|\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)|\leqslant|\lambda|^kL^kM(b-a)^k$ 成立,则有

$$
\begin{aligned}
|\varphi_{k+1}(x)-\varphi_k(x)| &= \left|\lambda\int_a^b K(x,\xi)(\varphi_k(\xi)-\varphi_{k-1}(\xi))\mathrm{d}\xi\right| \\
&\leqslant |\lambda| \int_a^b |K(x,\xi)|\,|\varphi_k(\xi)-\varphi_{k-1}(\xi)|\,\mathrm{d}\xi \\
&\leqslant |\lambda| \int_a^b L^{k+1}|\lambda|^k M(b-a)^k \mathrm{d}\xi \\
&= |\lambda|^{k+1} L^{k+1} M(b-a)^{k+1},
\end{aligned}
$$

由数学归纳法知,对任意的 $n\in\mathbf{N}$,有

$$|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)|\leqslant ML^n|\lambda|^n(b-a)^n.$$

下证$\{\varphi_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛. 考虑级数 $\varphi_0(x)+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x))$,只需证该级数在$[a,b]$上一致收敛即可. 由于

$$|\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)|\leqslant ML^k|\lambda|^k(b-a)^k,$$

当 $|\lambda|<\dfrac{1}{(b-a)L}$ 时,级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}ML^k|\lambda|^k(b-a)^k$ 收敛,由此知当 $|\lambda|<\dfrac{1}{(b-a)L}$ 时,级数 $\varphi_0(x)+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x))$ 在$[a,b]$上一致收敛,即$\{\varphi_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛,不妨设其极限函数为 $\varphi^*(x)$,即当 $x\in[a,b]$ 时,$\varphi_n(x)$ 当 $n\to\infty$ 时一致收敛于 $\varphi^*(x)$,且由 $\varphi_n(x)$ 的连续性知 $\varphi^*(x)$ 在$[a,b]$上连续,对迭代函数列 ①,当 $n\to\infty$ 时两边取极限,得

$$\varphi^*(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi^*(\xi)\mathrm{d}\xi\quad\left(|\lambda|<\frac{1}{(b-a)L}\right),$$

即当 $|\lambda|<\dfrac{1}{(b-a)L}$ 时,积分方程必存在连续解.

下面用反证法证明当 $|\lambda|<\dfrac{1}{(b-a)L}$ 时,(*)方程的解的唯一性.

设另有解 $\bar\varphi(x)$ 且 $\bar\varphi(x)\neq\varphi^*(x)$,即 $\bar\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\bar\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi$.

记 $\overline{M}=\max\limits_{x\in[a,b]}|\varphi^*(x)-\bar\varphi(x)|>0$,

$$
\begin{aligned}
|\varphi^*(x)-\bar\varphi(x)| &= \left|\lambda\int_a^b K(x,\xi)(\varphi^*(\xi)-\bar\varphi(\xi))\mathrm{d}\xi\right| \\
&\leqslant |\lambda|\int_a^b L|\varphi^*(\xi)-\bar\varphi(\xi)|\,\mathrm{d}\xi = |\lambda|\overline{M}L(b-a),
\end{aligned}
$$

即有 $\overline{M}\leqslant|\lambda|\overline{M}L(b-a)$,由于 $\overline{M}>0$,所以 $|\lambda|\geqslant\dfrac{1}{(b-a)L}$,与 $|\lambda|<\dfrac{1}{(b-a)L}$ 矛盾. 唯一性得证.

习题 3.2

1. 假设函数 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 于区间$[\alpha,\beta]$上连续,$y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 是方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y+Q(x)$$

的解,$y_0=\varphi(x_0,x_0,y_0)$. 试求$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}$,$\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0}$及$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$,并从解的表达式出发,利用对参数求导数的方法,

检验所得结果.

解:因为 $f(x,y)=P(x)y+Q(x)$,所以$\dfrac{\partial f}{\partial y}=P(x)$.

由解对初值的可微性定理得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}=-f(x_0,y_0)\exp\left[\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(s,\varphi)}{\partial y}\mathrm{d}s\right]=-[P(x_0)y_0+Q(x_0)]\exp\left[\int_{x_0}^{x}P(s)\mathrm{d}s\right],$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}=\exp\left[\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(s,\varphi)}{\partial y}\mathrm{d}s\right]=\exp\left[\int_{x_0}^{x}P(s)\mathrm{d}s\right],$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=f(x,\varphi(x,x_0,y_0))=P(x)\varphi(x,x_0,y_0)+Q(x).$$

因为非齐次线性方程有解的表达式为

$$y=\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right],$$

于是 $\varphi(x,x_0,y_0)=y_0\cdot\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x}P(s)\mathrm{d}s}+\int_{x_0}^{x}Q(s)\mathrm{e}^{\int_s^x P(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s.$

直接对参数求导可得

$$\frac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}=-P(x_0)y_0\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x}P(s)\mathrm{d}s}-Q(x_0)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x}P(s)\mathrm{d}s}=-[P(x_0)y_0+Q(x_0)]\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x}P(s)\mathrm{d}s},$$

$$\frac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}=\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x}P(s)\mathrm{d}s},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial x}&=P(x)y_0\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x}P(s)\mathrm{d}s}+Q(x)+\int_{x_0}^{x}P(x)Q(s)\mathrm{e}^{\int_s^x P(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s\\&=P(x)\left[y_0\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x}P(s)\mathrm{d}s}+\int_{x_0}^{x}Q(s)\mathrm{e}^{\int_s^x P(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s\right]+Q(x)\\&=P(x)\varphi(x,x_0,y_0)+Q(x).\end{aligned}$$

经检验,与解对初值的可微性定理中的公式一致.

2. 给定方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$,试求$\dfrac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}$,$\dfrac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}$在 $x_0=1,y_0=0$ 时的表达式.

解:设 $f(x,y)=\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$,则$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{x}\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

由解对初值的可微性定理的证明可知,

$$\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}=-f(x_0,y_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(s,y)}{\partial y}\mathrm{d}s\right)=-\sin\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{1}{s}\cos\frac{y}{s}\mathrm{d}s\right),$$

$$\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}=\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(s,y)}{\partial y}\mathrm{d}s\right)=\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{1}{s}\cos\frac{y}{s}\mathrm{d}s\right).$$

当 $x_0=1,y_0=0$ 时,对应地得到$\left.\dfrac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}\right|_{x_0=1,y_0=0}=0$,

$$\left.\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}\right|_{x_0=1,y_0=0}=\exp\left(\int_1^x\frac{1}{s}\mathrm{d}s\right)=|x|.$$

所以在 $x_0=1,y_0=0$ 时,$\dfrac{\partial y}{\partial x_0}=0$,$\dfrac{\partial y}{\partial y_0}=|x|$.

3. 假设函数 $f(x,y)$ 及$\dfrac{\partial f}{\partial y}$都在区域$G$内连续，又 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 是方程$\dfrac{dy}{dx}=f(x,y,\lambda)$ 的满足初始条件 $\varphi(x_0,x_0,y_0)=y_0$ 的解，试证$\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0}$ 存在且连续，并写出其表达式.

解：记初值为$(x_0,y_0+\Delta y_0)$ 的解为 $y=\psi(x,x_0,y_0+\Delta y_0)$，其中 $|\Delta y_0|\leqslant\alpha,\alpha$ 足够小，则有

$$\varphi=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,\varphi(s))ds,\psi=y_0+\Delta y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,\psi(s))ds.$$

$$\psi-\varphi=\Delta y_0+\int_{x_0}^{x}[f(s,\psi(s))-f(s,\varphi(s))]ds$$

$$=\Delta y_0+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(s,\varphi+\theta(\psi-\varphi))}{\partial y}(\psi(s)-\varphi(s))ds,$$

其中 $\theta\in[0,1]$.

由$\dfrac{\partial f}{\partial y}$及$\varphi,\psi$的连续性，有$\dfrac{\partial f(s,\varphi+\theta(\psi-\varphi))}{\partial y}=\dfrac{\partial f(s,\varphi)}{\partial y}+r$，其中 r 满足：$\Delta y_0\to 0$ 时 $r\to 0$，$\Delta y_0=0$ 时 $r=0$. 即对 $\Delta y_0\neq 0$ 有

$$\frac{\psi-\varphi}{\Delta y_0}=1+\int_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial f(s,\varphi)}{\partial y}+r\right]\frac{\psi-\varphi}{\Delta y_0}ds,$$

即 $z=\dfrac{\psi-\varphi}{\Delta y_0}$ 是微分方程初值问题$\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=\left[\dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r\right]z,\\ z(x_0)=1\end{cases}$的解.

即$\dfrac{\psi-\varphi}{\Delta y_0}=z=\exp\left\{\int_{x_0}^{x}\left[\dfrac{\partial f(s,\varphi)}{\partial y}+r\right]ds\right\}$.

于是$\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0}=\lim\limits_{\Delta y_0\to 0}\dfrac{\psi-\varphi}{\Delta y_0}=\exp\left\{\int_{x_0}^{x}\left[\dfrac{\partial f(s,\varphi)}{\partial y}\right]ds\right\}$，它是 x,x_0,y_0 的连续函数.

4. 设 $y=\varphi(x,x_0,y_0,\lambda)$ 是初值问题

$$\frac{dy}{dx}=\sin(\lambda xy),\varphi(x_0,x_0,y_0,\lambda)=y_0$$

的饱和解，这里 λ 是参数，求$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0},\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0}$ 在$(x,0,0,1)$ 处的表达式.

解：这里 $f(x,y)=\sin(\lambda xy),\dfrac{\partial f}{\partial y}=\lambda x\cos(\lambda xy)$. 由解对初值的可微性定理得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}=-f(x_0,y_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(s,\varphi)}{\partial y}ds\right)=-\sin(\lambda x_0y_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x}\lambda s\cos(\lambda s\varphi)ds\right),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}=\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(s,\varphi)}{\partial y}ds\right)=\exp\left(\int_{x_0}^{x}\lambda s\cos(\lambda s\varphi)ds\right).$$

当 $x_0=0,y_0=0,\lambda=1$ 时，则有$\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right|_{(x,0,0,1)}=0$，

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\right|_{(x,0,0,1)}=\exp\left(\int_0^{x}s\cos 0ds\right)=\exp\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

习题 3.3

1. 解下列方程，并求奇解(如果存在的话)：

(1) $y=2x\dfrac{dy}{dx}+x^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4$；　　(2) $x=y-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$；

(3) $y=x\frac{dy}{dx}+\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$,并画出积分曲线图;

(4) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+x\frac{dy}{dx}-y=0$,并画出积分曲线图;

(5) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2x\frac{dy}{dx}-y=0$;　　(6) $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-1=0$;

(7) $y=x\left(1+\frac{dy}{dx}\right)+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$;　　(8) $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-(x-a)^2=0$($a$ 为常数);

(9) $y=2x+\frac{dy}{dx}-\frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$;　　(10) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(x+1)\frac{dy}{dx}-y=0$.

解:(1) 令 $p=\frac{dy}{dx}$,得 $y=2xp+x^2p^4$ 及 $\frac{dy}{dx}=p=2p+2xp^4+(2x+4x^2p^3)\frac{dp}{dx}$,

即 $(1+2xp^3)\left(p+2x\frac{dp}{dx}\right)=0$.

当 $1+2xp^3=0$ 时,有 $p^3=-\frac{1}{2x}$,即 $\frac{dy}{dx}=-(2x)^{-\frac{1}{3}}$.

分离变量积分得 $y+\frac{3}{4}(2x)^{\frac{2}{3}}=c$.

当 $p+2x\frac{dp}{dx}=0$ 时,有 $\frac{2dp}{p}=-\frac{dx}{x}$,积分得 $x=\frac{c}{p^2}$.

所以方程的通解为 $y+\frac{3}{4}(2x)^{\frac{2}{3}}=c$ 或 $\begin{cases}x=\frac{c}{p^2},\\ y=\frac{2c}{p}+c^2,\end{cases}$ 其中 c 为任意常数,$p\neq 0$ 为参数.

当 $p=0$ 时,还有解 $y=0$.

由上式消去 p,得 $\frac{c}{x}=p^2=\frac{4c^2}{(y-c^2)^2}$,即 $(y-c^2)^2=4cx$,这是通解的另一形式.

由于 p-判别曲线为 $\begin{cases}y=2xp+x^2p^4,\\ 2x+4x^2p^3=0,\end{cases}$ 即 $p\neq 0$ 时 $\begin{cases}x=-\frac{1}{2p^3},\\ y=-\frac{3}{4p^2},\end{cases}$ 可检验它是方程的解,且不包含在通解中.

对任一点 $P\left(-\frac{1}{2p^3},-\frac{3}{4p^2}\right)(p\neq 0)$,取 $c=-\frac{1}{2p}$,便得通解中的一个解

$$\begin{cases}x=-\frac{1}{2p}\cdot\frac{1}{p^2},\\ y=-\frac{1}{2p}\cdot\frac{2}{p}+\left(\frac{1}{2p}\right)^2,\end{cases}$$

且在 P 点与其相切,故它是奇解.

(2) 令 $p=\frac{dy}{dx}$,得 $x=y-p^2$ 及 $\frac{dy}{dx}=p=1+2p\frac{dp}{dx}$,

整理得 $dx=\left(2+\frac{2}{p-1}\right)dp$,

积分得 $x = 2p + \ln(p-1)^2 + c$.

通解为 $\begin{cases} x = 2p + \ln(p-1)^2 + c, \\ y = p^2 + 2p + \ln(p-1)^2 + c, \end{cases}$ 其中 c 为任意常数,p 为参数.

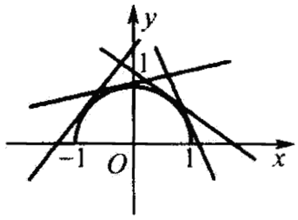
当 $p = 1$ 时,方程还有解 $y = x + 1$.

由于 p-判别曲线为 $\begin{cases} y = x + p^2, \\ 2p = 0, \end{cases}$ 即 $y = x$,因为 $y = x$ 不是方程的解,故方程不存在奇解.

(3) 令 $p = \dfrac{dy}{dx}$,则方程可以写成 $y = xp + \sqrt{1+p^2}$.

这是克莱罗方程,因而它的通解是 $y = xc + \sqrt{1+c^2}$.

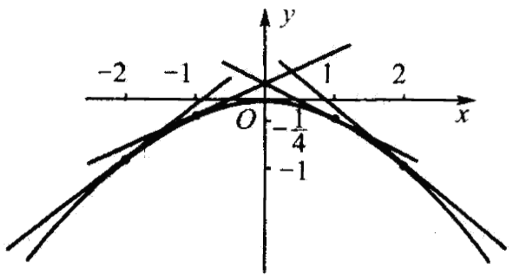
由于 c-判别曲线为 $\begin{cases} x + \dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}} = 0, \\ y = xc + \sqrt{1+c^2}, \end{cases}$ 消去 c,得到 $y = \sqrt{1-x^2}$,经检验 $y = \sqrt{1-x^2}$ 是方程的解,故是奇解. 积分曲线图如图(3.1)所示.



图(3.1)

(4) 令 $p = \dfrac{dy}{dx}$,则方程可以写为 $y = xp + p^2$. 这是克莱罗方程,因而它的通解为 $y = xc + c^2$.

由于 c-判别曲线为 $\begin{cases} x + 2c = 0, \\ y = xc + c^2, \end{cases}$ 消去 c,得到 $y = -\dfrac{x^2}{4}$,经检验 $y = -\dfrac{x^2}{4}$ 是方程的解,故为方程的奇解. 积分曲线图如图(3.2)所示.



图(3.2)

(5) 令 $p = \dfrac{dy}{dx}$,则方程可以写为 $y = 2xp + p^2$.

两边对 x 求导,则 $p = 2p + 2x\dfrac{dp}{dx} + 2p\dfrac{dp}{dx}$,即 $\dfrac{dx}{dp} = -\dfrac{2x}{p} - 2$.

这是一阶线性微分方程,积分可得

$$x = e^{\int -\frac{2}{p}dp}\left[\int (-2)e^{\int \frac{2}{p}dp}dp + c\right],$$

即 $x = \dfrac{c}{p^2} - \dfrac{2}{3}p$.

从而原方程的参数解为 $\begin{cases} x = -\dfrac{2}{3}p + \dfrac{c}{p^2}, \\ y = -\dfrac{1}{3}p^2 + \dfrac{2c}{p}. \end{cases}$

由于 p-判别曲线为 $\begin{cases} y = 2xp + p^2, \\ 2x + 2p = 0, \end{cases}$ 消去 p 得 $y = -x^2$.

经检验 $y = -x^2$ 不是方程的解,所以方程没有奇解.

(6) 令 $p = \dfrac{dy}{dx}$,则方程变为 $y = xp - \dfrac{1}{p^2}$.

这是克莱罗方程,因而它的通解为 $y = xc - \dfrac{1}{c^2}$.

由于 c- 判别曲线为$\begin{cases} x+\dfrac{2}{c^3}=0, \\ y=xc-\dfrac{1}{c^2}, \end{cases}$消去 c,得到 $4y^3+27x^2=0$.

经检验 $4y^3+27x^2=0$ 是方程的解,从而是方程的奇解.

(7) 设 $p=\dfrac{dy}{dx}$,则方程变形为 $y=x(1+p)+p^2$.

两边关于 x 求导,可得 $p=(1+p)+(x+2p)\dfrac{dp}{dx}$,即$\dfrac{dx}{dp}=-x-2p$.

这是一阶线性微分方程,积分可得 $x=ce^{-p}-2p+2$,代入 $y=x(1+p)+p^2$,则

$$y=c(p+1)e^{-p}-p^2+2.$$

所以方程的参数解为$\begin{cases} x=ce^{-p}-2p+2, \\ y=c(1+p)e^{-p}-p^2+2, \end{cases}$其中 p 是参数,c 是任意常数.

由于 p- 判别曲线为$\begin{cases} y=x(1+p)+p^2, \\ x+2p=0, \end{cases}$消去 p 得 $y=x-\dfrac{1}{4}x^2$.

经检验,$y=x-\dfrac{1}{4}x^2$ 不是方程的解,故方程没有奇解.

(8) 令 $p=\dfrac{dy}{dx}$,则方程变形为 $xp^2=(x-a)^2$,即 $p=\pm\dfrac{x-a}{\sqrt{x}}$,从而$\dfrac{dy}{dx}=\pm\dfrac{x-a}{\sqrt{x}}$.

积分得方程的通解为 $9(y+c)^2=4x(x-3a)^2$,c 为任意常数.

由于 p- 判别曲线为$\begin{cases} xp^2-(x-a)^2=0, \\ 2xp=0, \end{cases}$消去 p 得 $x=a$.

经检验,$x=a$ 不是方程的解,故方程没有奇解.

(9) 设 $p=\dfrac{dy}{dx}$,则方程变形为 $y=2x+p-\dfrac{1}{3}p^3$.

两边对 x 求导,得到 $p=2+(1-p^2)\dfrac{dp}{dx}$,即 $dx=\dfrac{1-p^2}{p-2}dp(p\neq 2)$.

积分,得到 $x=-\dfrac{(p+2)^2}{2}-3\ln|p-2|+c$.

代入 $y=2x+p-\dfrac{1}{3}p^3$,则得到 $y=-\dfrac{1}{3}p^3-p^2-3p-4-6\ln|p-2|+2c$.

所以方程的参数解为$\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}(p+2)^2-3\ln|p-2|+c, \\ y=-\dfrac{1}{3}p^3-p^2-3p-4-6\ln|p-2|+2c, \end{cases}$其中 p 为参数,c 为任意常数.

另外,当 $p=2$ 时,方程有解 $y=2x-\dfrac{2}{3}$.

由于 p- 判别曲线为$\begin{cases} y=2x+p-\dfrac{1}{3}p^3, \\ 1-p^2=0, \end{cases}$消去 p 得 $y=2x\pm\dfrac{2}{3}$.

经检验,$y=2x-\dfrac{2}{3}$ 是方程的解,从而方程有奇解 $y=2x-\dfrac{2}{3}$.

(10) 令 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,则方程变形为 $y=(x+1)p+p^2$,即 $y=xp+p(1+p)$.

此为克莱罗微分方程,所以它的通解为 $y=cx+c(1+c)$.

由于 c-判别曲线为 $\begin{cases}y=cx+c(1+c),\\x+1+2c=0,\end{cases}$ 消去 c 得 $(x+1)^2+4y=0$.

经检验,$(x+1)^2+4y=0$ 是方程的解,从而为方程的奇解.

2. 求下列曲线族的包络,并绘出图形:

(1) $y=cx+c^2$;　　(2) $c^2y+cx^2-1=0$;

(3) $(x-c)^2+(y-c)^2=4$;　　(4) $(x-c)^2+y^2=4c$.

解:(1) 由于 c-判别曲线为 $\begin{cases}y=cx+c^2,\\x+2c=0,\end{cases}$ 消去 c 得 $4y+x^2=0$.

由于 $4y+x^2=0$ 不含在曲线族 $y=cx+c^2$ 中,且对其上的任何一点 $P(x,y)$,取 $c=-\frac{x}{2}$,便得到通解中的一个解且在 P 点与其相切.

故 $4y+x^2=0$ 是曲线族 $y=cx+c^2$ 的包络. 其图形如图(3.3)所示.

(2) 由于 c-判别曲线为 $\begin{cases}c^2y+cx^2-1=0,\\2cy+x^2=0,\end{cases}$ 消去 c 得到 $x^4+4y=0$.

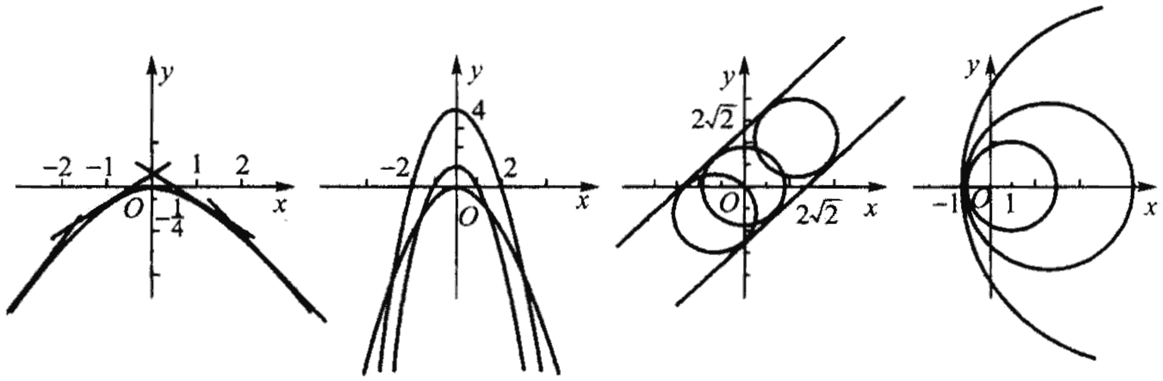
由于 $x^4+4y=0$ 不含在曲线族 $c^2y+cx^2-1=0$ 中,且对其上的任何一点 $P(x,y)$,取 $c=-\frac{x^2}{2}$,便得到通解中的一个解且在 P 点与其相切.

故 $x^4+4y=0$ 是曲线族 $c^2y+cx^2-1=0$ 的包络. 其图形如图(3.4)所示.

(3) 由于 c-判别曲线为 $\begin{cases}(x-c)^2+(y-c)^2=4,\\2c=x+y,\end{cases}$ 消去 c 得 $(x-y)^2=8$.

容易检验 $(x-y)^2=8$ 是曲线族 $(x-c)^2+(y-c)^2=4$ 的包络. 其图形如图(3.5)所示.

(4) 由于 c-判别曲线为 $\begin{cases}(x-c)^2+y^2=4c,\\c-x=2,\end{cases}$ 消去 c 得到 $y^2=4(x+1)$,容易验证 $y^2=4(x+1)$ 是曲线族 $(x-c)^2+y^2=4c$ 的包络. 其图形如图(3.6)所示.



图(3.3)　　图(3.4)　　图(3.5)　　图(3.6)

3. 求一曲线,使它上面的每一点的切线截割坐标轴使两截距之和等于常数 a.

解:易知过点 (x,y) 的切线的横截距和纵截距分别为 $x-\frac{y}{y'}$ 和 $y-xy'$,所以所求曲线满足方程

$$x-\frac{y}{y'}+y-xy'=a.$$

设 $y'=p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,则方程变形为 $y+xp^2=(x+y-a)p$,即 $y=xp+\frac{ap}{p-1}(p\neq 1)$.

此为克莱罗方程,有通解 $y=cx+\frac{ac}{c-1}$,其中 c 为不等于 0,1 的任意常数.

由于 $c-$判别曲线为$\begin{cases} y=cx+\frac{ac}{c-1}, \\ x-\frac{a}{(c-1)^2}=0. \end{cases}$ 消去 c 得 $(y-x-a)^2=4ax$.

经检验,$(y-x-a)^2=4ax$ 是方程的解,故它是方程的奇解,从而所求的曲线为 $(y-x-a)^2=4ax$ 及 $y=cx+\frac{ac}{c-1}$,其中 c 为不等于 0,1 的任意常数.

4. 试证:就克莱罗微分方程来说,$p-$判别曲线和方程通解的 $c-$判别曲线同样是方程通解的包络,从而为方程的奇解.

证明: 克莱罗微分方程为 $y=xp+f(p)$,$p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. 其 $p-$判别曲线为$\begin{cases} y=xp+f(p), \\ x+f'(p)=0. \end{cases}$ 而方程对 x 求导得 $p=p+[x+f'(p)]p'$,有 $p'=0$,故 $p=c$,所以通解为 $y=xc+f(c)$,其中 c 为任意常数. 由通解 $y=xc+f(c)$ 推导得其 $c-$判别曲线为$\begin{cases} y=xc+f(c), \\ x+f'(c)=0. \end{cases}$ 它是方程通解的包络,对任意值 $p=p_0$ 均有点 (x_0,y_0) 对应,两者一致,均为方程的奇解.

习题 3.4

1. 从例 1 的欧拉方法、改进的欧拉方法、2 阶龙格-库塔方法、4 阶龙格-库塔方法中选择一种方法每一步从精确解出发计算出下一步,并求出其相对误差,同时与表中的积累误差比较.

解: 我们选取欧拉方法来计算. 由公式 $y_{n+1}=y_n+h\cdot f(x_n,y_n)$,$x_n=x_0+nh$ 及教材中例 1 的图表可得如下结果:

	精确解	欧拉方法		从精确解出发的欧拉方法	
x_i	y_i	y_i	误差	y_i	相对误差
0	2	2	0	2	0
0.1	1.609 7	1.4	0.209 66	1.4	0.209 66
0.2	1.418 1	1.265 6	1.152 5	1.353 575	0.064 525
0.3	1.303 7	1.189 4	0.114 2	1.274 790	0.028 971
0.4	1.228 1	1.140 1	0.088 016	1.212 489	0.015 611
0.5	1.175 2	1.105 9	0.069 255	1.165 684	0.009 516
0.6	1.136 6	1.081 3	0.055 327	1.130 414	0.006 186
0.7	1.107 7	1.063 0	0.044 694	1.103 427	0.004 730
0.8	1.085 6	1.049 2	0.036 401	1.082 555	0.003 045
0.9	1.068 4	1.038 6	0.029 828	1.066 219	0.002 181
1	1.055	1.030 4	0.024 552	1.053 284 4	0.001 715 6

2. 计算线性微分方程 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -0.1 & -49.9 & 0 \\ 0 & -50 & 0 \\ 0 & 70 & -120 \end{bmatrix}$ 的刚性比.

解:易知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征根为 $\lambda_1 = -0.1, \lambda_2 = -50, \lambda_3 = -120$. 从而根据刚性比的定义知,所求刚性比为 $\dfrac{\max|\lambda_i|}{\min|\lambda_i|} = \dfrac{|\lambda_3|}{|\lambda_1|} = \dfrac{120}{0.1} = 1\ 200$.

因此,刚性比为 1 200.

3. 试用教材附录 C 中的数学语言求解例 1.

解:对应于例 1,公式(3.36)、(3.37)、(3.40)、(3.41) 用 Maple 语言来写就是

(1) $y := x + 0.1 * x * (1 - x\hat{}2)$.

(2) $y := x + \dfrac{0.1}{2}(x * (1 - x\hat{}2) + y * (1 - y\hat{}2))$.

(3) $k1 := x * (1 - x\hat{}2); k2 := (x + 0.05 * k1)(1 - (x + 0.05 * k1)\hat{}2)$;

$y := x + 0.1 * k2$.

(4) $k1 := x * (1 - x\hat{}2); k2 := (x + 0.05 * k1)(1 - (x + 0.05 * k1)\hat{}2)$;

$k3 := (x + 0.05 * k2)(1 - (x + 0.05 * k2)\hat{}2)$;

$k4 := (x + 0.1 * k3)(1 - (x + 0.1 * k3)\hat{}2)$;

$y := x + 0.1/6 * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)$.

然后,对 x 分别赋值,循环求解即可.

第四章　高阶微分方程

习题 4.1

1. 设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数,证明:如果在区间 $[a,b]$ 上有 $\dfrac{x(t)}{y(t)} \neq$ 常数或 $\dfrac{y(t)}{x(t)} \neq$ 常数,则 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上线性无关.(提示:用反证法.)

证明:假设 $x(t), y(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上线性相关,则存在不全为零的常数 α, β,使得 $\alpha x(t) + \beta y(t) \equiv 0$, $t \in [a,b]$.

那么不妨设 $x(t)$ 不为零,则有 $\dfrac{y(t)}{x(t)} = -\dfrac{\alpha}{\beta}$,显然 $-\dfrac{\alpha}{\beta}$ 为常数,与题设矛盾,所以假设不成立,即证明了 $x(t), y(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上线性无关.

2. 证明非齐次线性微分方程的叠加原理:设 $x_1(t), x_2(t)$ 分别是非齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} + a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_n(t)x = f_1(t), \quad ①$$

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} + a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_n(t)x = f_2(t) \quad ②$$

的解,则 $x_1(t) + x_2(t)$ 是方程

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} + a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_n(t)x = f_1(t) + f_2(t)$$

的解.

证明:由题设条件可知 $x_1(t),x_2(t)$ 分别是方程 ①,② 的解,则

$$\frac{d^n x_1(t)}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x_1(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x_1(t)=f_1(t), \tag{3}$$

$$\frac{d^n x_2(t)}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x_2(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x_2(t)=f_2(t), \tag{4}$$

那么由 ③ 和 ④ 相加,并利用导数的运算法则得

$$\frac{d^n(x_1(t)+x_2(t))}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}(x_1(t)+x_2(t))}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)(x_1(t)+x_2(t))=f_1(t)+f_2(t).$$

即说明 $x_1(t)+x_2(t)$ 是方程 $\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=f_1(t)+f_2(t)$ 的解.

3. 已知齐次线性微分方程的基本解组 x_1,x_2,求下列方程对应的非齐次线性微分方程的通解:

(1) $x''-x=\cos t,x_1=e^t,x_2=e^{-t}$;

(2) $x''+\frac{t}{1-t}x'-\frac{1}{1-t}x=t-1,x_1=t,x_2=e^t$;

(3) $x''+4x=t\sin 2t,x_1=\cos 2t,x_2=\sin 2t$;

(4) $t^2x''-4tx'+6x=36\frac{\ln t}{t},x_1=t^2,x_2=t^3$;

(5) $t^2x''-tx'+x=6t+34t^2,x_1=t,x_2=t\ln t$;

(6) $t^2x''-3tx'+8x=18t^2\sin(\ln t),x_1=t^2\cos(2\ln t),x_2=t^2\sin(2\ln t)$.

解:(1) 运用常数变易法,令 $x(t)=c_1(t)e^t+c_2(t)e^{-t}$,将它代入方程,则有

$$\begin{cases}c'_1(t)e^t+c'_2(t)e^{-t}=0,\\ c'_1(t)e^t-c'_2(t)e^{-t}=\cos t,\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}c'_1(t)=\frac{1}{2}e^{-t}\cos t,\\ c'_2(t)=-\frac{1}{2}e^t\cos t,\end{cases}$$

积分得 $c_1(t)=-\frac{1}{4}e^{-t}(\cos t-\sin t)+c_1;c_2(t)=-\frac{1}{4}e^t(\cos t+\sin t)+c_2$.

故所求通解为 $x(t)=c_1e^t+c_2e^{-t}-\frac{1}{2}\cos t$.

(2) 运用常数变易法,令 $x(t)=c_1(t)t+c_2(t)e^t$,将它代入方程,则有

$$\begin{cases}c'_1(t)t+c'_2(t)e^t=0,\\ c'_1(t)+c'_2(t)e^t=t-1,\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}c'_1(t)=-1,\\ c'_2(t)=te^{-t},\end{cases}$$

积分得 $c_1(t)=-t+c_1,c_2(t)=-e^{-t}(t+1)+c_2$.

于是原方程的通解为 $x(t)=c_1t+c_2e^t-(t^2+t+1)$.

(3) 令 $x=c_1(t)\cos 2t+c_2(t)\sin 2t$,将它代入方程,可得关于 $c'_1(t)$ 和 $c'_2(t)$ 的方程组

$$\begin{cases}c'_1(t)\cos 2t+c'_2(t)\sin 2t=0,\\ -2c'_1(t)\sin 2t+2c'_2(t)\cos 2t=t\sin 2t.\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} c'_1(t) = \dfrac{1}{4}t(\cos 4t - 1), \\ c'_2(t) = \dfrac{1}{4}t\sin 4t. \end{cases}$$

积分得
$$\begin{cases} c_1(t) = \dfrac{1}{64}\cos 4t + \dfrac{1}{16}t\sin 4t - \dfrac{1}{8}t^2 + \gamma_1, \\ c_2(t) = \dfrac{1}{64}\sin 4t - \dfrac{1}{16}t\cos 4t + \gamma_2. \end{cases}$$

于是方程的通解为 $x = c_1\cos 2t + c_2\sin 2t - \dfrac{1}{8}t^2\cos 2t + \dfrac{1}{16}t\sin 2t$,其中 c_1, c_2 为任意常数.

(4) 方程可以变形为 $x'' - \dfrac{4}{t}x' + \dfrac{6}{t^2}x = \dfrac{36}{t^3}\ln t$,由于 $x_1 = t^2, x_2 = t^3$ 是对应齐次方程的解,故可以令 $x = c_1(t)t^2 + c_2(t)t^3$.

将它代入方程,则可得关于 $c'_1(t)$ 和 $c'_2(t)$ 的方程组
$$\begin{cases} t^2c'_1(t) + t^3c'_2(t) = 0, \\ 2tc'_1(t) + 3t^2c'_2(t) = \dfrac{36}{t^3}\ln t, \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} c'_1(t) = \dfrac{-36}{t^4}\ln t, \\ c'_2(t) = \dfrac{36}{t^5}\ln t, \end{cases}$$

积分得
$$\begin{cases} c_1(t) = 4t^{-3}(1 + 3\ln t) + c_1, \\ c_2(t) = -9t^{-4}\left(\ln t + \dfrac{1}{4}\right) + c_2. \end{cases}$$

于是方程的通解为 $x = c_1t^2 + c_2t^3 + \dfrac{1}{t}\left(3\ln t + \dfrac{7}{4}\right)$,其中 c_1, c_2 为任意常数.

(5) 原方程可化为 $x'' - \dfrac{1}{t}x' + \dfrac{1}{t^2}x = \dfrac{6}{t} + 34$.

令方程的解为 $x = t \cdot c_1(t) + t\ln t \cdot c_2(t)$,将它代入方程,则可得关于 $c'_1(t)$ 和 $c'_2(t)$ 的方程组
$$\begin{cases} t \cdot c'_1(t) + t\ln t \cdot c'_2(t) = 0, \\ c'_1(t) + (\ln t + 1)c'_2(t) = \dfrac{6}{t} + 34, \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} c'_1(t) = -\left(\dfrac{6}{t} + 34\right)\ln t, \\ c'_2(t) = \dfrac{6}{t} + 34, \end{cases}$$

积分得
$$\begin{cases} c_1(t) = -34(t\ln t - t) - 3(\ln t)^2 + c_1, \\ c_2(t) = 34t + 6\ln t + c_2. \end{cases}$$

于是方程的通解为 $x = c_1t + c_2t\ln t + 34t^2 + 3t(\ln t)^2$,其中 c_1, c_2 为任意常数.

(6) 原方程可以变形为
$$x'' - \frac{3}{t}x' + \frac{8}{t^2}x = 18\sin(\ln t).$$

令 $x=c_1(t)t^2\cos(2\ln t)+c_2(t)t^2\sin(2\ln t)$，将它代入方程，则可得关于 $c'_1(t)$ 和 $c'_2(t)$ 的方程组

$$\begin{cases} t^2\cos(2\ln t)c'_1(t)+t^2\sin(2\ln t)c'_2(t)=0, \\ 2t(\cos(2\ln t)-\sin(2\ln t))c'_1(t)+2t(\sin(2\ln t)+\cos(2\ln t))c'_2(t)=18\sin(\ln t), \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} c'_1(t)=-9t^{-1}\sin(\ln t)\sin(2\ln t), \\ c'_2(t)=9t^{-1}\sin(\ln t)\cos(2\ln t), \end{cases}$$

积分得

$$\begin{cases} c_1(t)=\dfrac{3}{2}\sin(3\ln t)-\dfrac{9}{2}\sin(\ln t)+c_1, \\ c_2(t)=-\dfrac{3}{2}\cos(3\ln t)+\dfrac{9}{2}\cos(\ln t)+c_2. \end{cases}$$

于是，原方程的通解为

$$x=c_1t^2\cos(2\ln t)+c_2t^2\sin(2\ln t)+6t^2\sin(\ln t),$$

其中 c_1,c_2 为任意常数.

4. 已知方程 $\dfrac{d^2x}{dt^2}-x=0$ 有基本解组 e^t,e^{-t}，试求此方程适合初值条件 $x(0)=1,x'(0)=0$，及 $x(0)=0,x'(0)=1$ 的基本解组[称为标准基本解组，即有 $W(0)=1$]，并由此求出方程的适合初值条件 $x(0)=x_0,x'(0)=x'_0$ 的解.

解：由于 e^t,e^{-t} 是方程 $\dfrac{d^2x}{dt^2}-x=0$ 的基本解组，故存在常数 c_1,c_2 使得 $x(t)=c_1e^t+c_2e^{-t}$.

$x'(t)=c_1e^t-c_2e^{-t}$，令 $t=0$，则有方程适合初始条件 $x(0)=1,x'(0)=0$，于是有

$$\begin{cases} c_1e^0+c_2e^0=1, \\ c_1e^0-c_2e^0=0, \end{cases}$$

解得 $c_1=\dfrac{1}{2},c_2=\dfrac{1}{2}$，故 $x_1(t)=\dfrac{1}{2}e^t+\dfrac{1}{2}e^{-t}$.

又该方程适合初始条件 $x(0)=0,x'(0)=1$，因此

$$\begin{cases} c_3e^0+c_4e^0=0, \\ c_3e^0-c_4e^0=1, \end{cases}$$

解得 $c_3=\dfrac{1}{2},c_4=-\dfrac{1}{2}$，故 $x_2(t)=\dfrac{1}{2}e^t-\dfrac{1}{2}e^{-t}$.

显然 $x_1(t),x_2(t)$ 线性无关，所以此方程适合初始条件 $x(0)=1,x'(0)=0$ 及 $x(0)=0,x'(0)=1$ 的基本解组为

$$x_1(t)=\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{-t},x_2(t)=\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{-t}.$$

再令方程的适合初始条件 $x(0)=x_0,x'(0)=x'_0$ 的解为

$$x(t)=c_5\left(\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{-t}\right)+c_6\left(\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{-t}\right),$$

则得到

$$\begin{cases} c_6=x'(0)=x'_0, \\ c_5=x(0)=x_0, \end{cases}$$

故，适合初始条件 $x(0)=x_0, x'(0)=x'_0$ 的解为

$$x(t)=x_0\frac{e^t+e^{-t}}{2}+x'_0\frac{e^t-e^{-t}}{2}.$$

5. 设 $x_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 是齐次线性微分方程 $\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=0$ 的任意 n 个解，它们所构成的朗斯基行列式记为 $W(t)$. 试证明 $W(t)$ 满足一阶线性微分方程 $W'+a_1(t)W=0$，因而有

$$W(t)=W(t_0)e^{-\int_{t_0}^t a_1(s)ds},\quad t_0,t\in(a,b).$$

解: 由于 $x_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 是齐次线性微分方程的任意 n 个解，所以满足

$$\begin{cases} x_1^{(n)}+a_1(t)x_1^{(n-1)}+a_2(t)x_1^{(n-2)}+\cdots+a_n(t)x_1=0, \\ \cdots \\ x_n^{(n)}+a_1(t)x_n^{(n-1)}+a_2(t)x_n^{(n-2)}+\cdots+a_n(t)x_n=0. \end{cases}$$

由行列式求导法则知

$$W'(t)=\begin{vmatrix} x'_1 & \cdots & x'_n \\ x'_1 & \cdots & x'_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-2)} & \cdots & x_n^{(n-2)} \\ x_1^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x'_1 & \cdots & x'_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-2)} & \cdots & x_n^{(n-2)} \\ x_1^{(n)} & \cdots & x_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x'_1 & \cdots & x'_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-2)} & \cdots & x_n^{(n-2)} \\ x_1^{(n)} & \cdots & x_n^{(n)} \end{vmatrix},$$

将 $W'(t)$ 中第 k 行都乘以 $a_{n-k+1}(t)$，加到最后一行 $(k=1,2,\cdots,n-1)$，则

$$W'(t)=\begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x'_1 & \cdots & x'_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-2)} & \cdots & x_n^{(n-2)} \\ x_1^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}(-a_1(t))=-a_1(t)W(t),$$

即 $W'+a_1(t)W=0$，则有 $\frac{dW(t)}{W(t)}=-a_1(t)dt$.

两边从 t_0 到 t 积分 $\ln|W(t)|\Big|_{t_0}^{t}=-\int_{t_0}^t a_1(s)ds$，则

$$\ln|W(t)|-\ln|W(t_0)|=-\int_{t_0}^t a_1(s)ds,$$

即 $W(t)=W(t_0)e^{-\int_{t_0}^t a_1(s)ds}, t_0,t\in(a,b)$.

6. 假设 $x_1(t)\neq 0$ 是二阶齐次线性微分方程

$$x''+a_1(t)x'+a_2(t)x=0 \tag{*}$$

的解,这里 $a_1(t)$ 和 $a_2(t)$ 于区间 $[a,b]$ 上连续,试证:

(1) $x_2(t)$ 为方程的解的充要条件是

$$W'[x_1,x_2]+a_1W[x_1,x_2]=0;$$

(2) 方程的通解可表为

$$x=x_1\left[c_1\int\frac{1}{x_1^2}\exp\left(-\int_{t_0}^{t}a_1(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t+c_2\right],$$

其中 c_1,c_2 为任意常数,$t_0,t\in[a,b]$.

证明:(1) $W'[x_1,x_2]+a_1W[x_1,x_2]=0$

$\Leftrightarrow x_1x''_2-x''_1x_2+a_1x_1x'_2-a_1x'_1x_2=0$

$\Leftrightarrow x_1x''_2-x''_1x_2+a_1x_1x'_2-a_1x'_1x_2+a_2x_1x_2-a_2x_1x_2=0$

$\Leftrightarrow x_1(x''_2+a_1x'_2+a_2x_2)=0$

$\Leftrightarrow x''_2+a_1x'_2+a_2x_2=0(x_1\neq 0)$,

即 x_2 为(*)的解.

(2) 因为 x_1,x_2 为方程的解,所以由刘维尔公式得

$$\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ x'_1 & x'_2\end{vmatrix}=W(t_0)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)\mathrm{d}s},$$

即 $x_1x'_2-x'_1x_2=W(t_0)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)\mathrm{d}s}$.

两边都乘$\dfrac{1}{x_1^2}$,则有$\dfrac{\mathrm{d}\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{W(t_0)}{x_1^2}\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)\mathrm{d}s}$.

于是$\dfrac{x_2}{x_1}=c_1\displaystyle\int\frac{1}{x_1^2}\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t+c_2$,

即

$$x_2=\left[c_1\int\frac{1}{x_1^2}\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t+c_2\right]x_1.$$

取 $c_1=1,c_2=0$,得

$$x_2=x_1\int\frac{1}{x_1^2}\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t,$$

此时 $W(t)=\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ x'_1 & x'_2\end{vmatrix}=\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)\mathrm{d}s}\neq 0$,从而方程的通解可表示为

$$x=x_1\left[c_3\int\frac{1}{x_1^2}\exp\left(-\int_{t_0}^{t}a_1(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t+c_4\right],$$

其中 c_3,c_4 为常数,$t_0,t\in[a,b]$.

7. 试证 n 阶非齐次线性微分方程$\dfrac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)x=f(t)$ 存在且最多存在 $n+1$ 个线性无关解.

证明:设 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 为非齐次线性微分方程对应的齐次线性方程的一个基本解组,$\bar{x}(t)$ 是非齐次线性微分方程的一个解,则

$$x_1(t)+\bar{x}(t), x_2(t)+\bar{x}(t), \cdots, x_n(t)+\bar{x}(t), \bar{x}(t) \qquad ①$$

均为非齐次线性微分方程的解.

同时 ① 是线性无关的.

事实上,假设存在常数 $c_1, c_2, \cdots, c_{n+1}$,使得

$$c_1(x_1(t)+\bar{x}(t))+c_2(x_2(t)+\bar{x}(t))+\cdots+c_n(x_n(t)+\bar{x}(t))+c_{n+1}(\bar{x}(t))=0,$$

即
$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t)+\bar{x}(t)\sum_{i=1}^{n+1} c_i=0.$$

我们说 $\sum\limits_{i=1}^{n+1} c_i=0$. 否则,若 $\sum\limits_{i=1}^{n+1} c_i \neq 0$,则有

$$\bar{x}(t)=-\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{\sum\limits_{j=1}^{n+1} c_j} x_i(t). \qquad (*)$$

(*) 的左端为非齐次线性方程的解,而右端为齐次线性方程的解,两者矛盾.

从而有 $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i(t)=0$.

又 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 为非齐次线性微分方程对应的齐次线性方程的一个基本解组,故有 $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$,进而有 $c_{n+1}=0$.

即 ① 是线性无关的.

再证明非齐次线性微分方程最多存在 $n+1$ 个线性无关的解.

设 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_{n+2}(t)$ 为非齐次线性微分方程的任意 $n+2$ 个解,显然,$x_1(t)-x_{n+2}(t)$, $x_2(t)-x_{n+2}(t), \cdots, x_{n+1}(t)-x_{n+2}(t)$ 是齐次方程的 $n+1$ 个解.

由定理 5 及推论,这 $n+1$ 个解一定是线性相关的,即存在不全为零的数 $c_1, c_2, \cdots, c_{n+1}$,使得

$$c_1(x_1(t)-x_{n+2}(t))+c_2(x_2(t)-x_{n+2}(t))+\cdots+c_{n+1}(x_{n+1}(t)-x_{n+2}(t)) \equiv 0,$$

即 $c_1 x_1(t)+c_2 x_2(t)+\cdots+c_{n+1} x_{n+1}(t)-(c_1+c_2+\cdots+c_{n+1}) x_{n+2}(t) \equiv 0$.

所以这 $n+2$ 个解是线性相关的,即证明了最多有 $n+1$ 个线性无关的解.

习题 4.2

1. 证明命题 1 和命题 2.

证明: 命题 1 的证明如下:

已知 $x=z(t)=\varphi(t)+\mathrm{i}\psi(t)$ 是齐次线性微分方程的复值解,则有

$$z'(t)=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\varphi'(t)+\mathrm{i}\psi'(t), z''(t)=\varphi''(t)+\mathrm{i}\psi''(t), \cdots, z^{(n)}(t)=\varphi^{(n)}(t)+\mathrm{i}\psi^{(n)}(t).$$

因为 $z(t)=\varphi(t)+\mathrm{i}\psi(t)$ 是齐次方程的解,于是

$$z^{(n)}(t)+a_1(t)z^{(n-1)}(t)+\cdots+a_{n-1}z'(t)+a_n(t)z(t) \equiv 0,$$

即 $[\varphi^{(n)}(t)+a_1(t)\varphi^{(n-1)}(t)+\cdots+a_n(t)\varphi(t)]+\mathrm{i}[\psi^{(n)}(t)+a_1(t)\psi^{(n-1)}(t)+\cdots+a_n(t)\psi(t)] \equiv 0$.

所以
$$\varphi^{(n)}(t)+a_1(t)\varphi^{(n-1)}(t)+\cdots+a_n(t)\varphi(t) \equiv 0, \qquad ①$$

$$\psi^{(n)}(t)+a_1(t)\psi^{(n-1)}(t)+\cdots+a_n(t)\psi(t) \equiv 0, \qquad ②$$

从而有

$$(\varphi^{(n)}(t)-\mathrm{i}\psi^{(n)}(t))+a_1(t)(\varphi^{(n-1)}(t)-\mathrm{i}\psi^{(n-1)}(t))+\cdots+a_n(t)(\varphi(t)-\mathrm{i}\psi(t))\equiv 0. \quad ③$$

①,②,③ 式即证明了 $z(t)$ 的实部 $\varphi(t)$,虚部 $\psi(t)$ 和共轭复值函数 $\bar{z}(t)$ 均是齐次方程的解.

命题 2 的证明如下:

由于 $x=U(t)+\mathrm{i}V(t)$,则

$$x'=U'(t)+\mathrm{i}V'(t),x''=U''(t)+\mathrm{i}V''(t),\cdots,x^{(n)}=U^{(n)}(t)+\mathrm{i}V^{(n)}(t).$$

于是由 $x=U(t)+\mathrm{i}V(t)$ 是方程

$$\frac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)x=u(t)+\mathrm{i}v(t)$$

的复值解,得到

$$\left[\frac{\mathrm{d}^nU}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}U}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_n(t)U\right]+\mathrm{i}\left[\frac{\mathrm{d}^nV}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}V}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_n(t)V\right]\equiv u(t)+\mathrm{i}v(t).$$

由于两个复数相等的条件是实部与虚部分别相等,于是有

$$\frac{\mathrm{d}^nU}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}U}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_n(t)U=u(t),$$

$$\text{和}\frac{\mathrm{d}^nV}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}V}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_n(t)V=v(t),$$

这就证明了这个解的实部 $U(t)$ 和虚部 $V(t)$ 分别是方程

$$\frac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)x=u(t),$$

$$\text{和}\frac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)x=v(t)$$

的解.

2. 求解下列常系数线性微分方程:

(1) $x^{(4)}-5x''+4x=0$;
(2) $x'''-3ax''+3a^2x'-a^3x=0$;
(3) $x^{(5)}-4x'''=0$;
(4) $x''+x'+x=0$;
(5) $s''-a^2s=t+1$;
(6) $x'''-4x''+5x'-2x=2t+3$;
(7) $x^{(4)}-2x''+x=t^2-3$;
(8) $x'''-x=\cos t$;
(9) $x''+x'-2x=8\sin 2t$;
(10) $x'''-x=\mathrm{e}^t$;
(11) $s''+2as'+a^2s=\mathrm{e}^t$;
(12) $x''+6x'+5x=\mathrm{e}^{2t}$;
(13) $x''-2x'+3x=\mathrm{e}^{-t}\cos t$;
(14) $x''+x=\sin t-\cos 2t$;
(15) $x''-4x'+4x=\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{2t}+1$;
(16) $x''+9x=t\sin 3t$;
(17) $x''-2x'+2x=t\mathrm{e}^t\cos t$;
(18) $x''+2x'+5x=4\mathrm{e}^{-t}+17\sin 2t$;
(19) $x''+x=\dfrac{1}{\sin^3 t}$;
(20) $x''+x=1-\dfrac{1}{\sin t}$.

解:(1) 微分方程的特征方程为 $\lambda^4-5\lambda^2+4=0$,有根 $\lambda_1=2,\lambda_2=-2,\lambda_3=1,\lambda_4=-1$.

故方程的通解为 $x=c_1\mathrm{e}^{2t}+c_2\mathrm{e}^{-2t}+c_3\mathrm{e}^t+c_4\mathrm{e}^{-t}$,其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数.

(2) 微分方程的特征方程为 $\lambda^3-3a\lambda^2+3a^2\lambda-a^3=0$,它有三重根 $\lambda=a$,因此方程的通解为 $x=$

$c_1 e^{at} + c_2 t e^{at} + c_3 t^2 e^{at}$，其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数.

(3) 微分方程的特征方程为 $\lambda^5 - 4\lambda^3 = 0$，它有根 $\lambda_{1,2,3} = 0, \lambda_4 = 2, \lambda_5 = -2$.

因此方程的通解为 $x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + c_3 t^2 + c_4 t + c_5$，其中 c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 为任意常数.

(4) 微分方程的特征方程 $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ 有复根 $\lambda_1 = \dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}, \lambda_2 = \dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$.

故通解为 $x = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} \cos \dfrac{\sqrt{3}}{2} t + c_2 e^{-\frac{1}{2}t} \sin \dfrac{\sqrt{3}}{2} t$，其中 c_1, c_2 为任意常数.

(5) 对应齐次微分方程的特征方程 $\lambda^2 - a^2 = 0$ 有根 $\lambda_1 = a, \lambda_2 = -a$.

当 $a \neq 0$ 时，齐次线性微分方程的通解为 $s = c_1 e^{at} + c_2 e^{-at}$.

设方程有特解 $\bar{s} = A + Bt$，代入原方程解得 $A = B = -\dfrac{1}{a^2}$，故方程的通解为

$$s = c_1 e^{at} + c_2 e^{-at} - \frac{1}{a^2}(t+1).$$

当 $a = 0$ 时，原方程可化为 $s'' = t + 1$，对方程积分两次，即得 $s = c_1 + c_2 t + \dfrac{1}{6} t^2 (t+3)$，其中 c_1，c_2 为任意常数.

(6) 对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0.$$

解得特征根为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$. 故齐次线性微分方程的通解为

$$x = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{2t}.$$

又因为 $\lambda = 0$ 不是特征根，故可以取特解形如 $\bar{x} = A + Bt$，代入原方程解得 $A = -4, B = -1$，所以原方程的通解为 $x = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{2t} - t - 4$，其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数.

(7) 对应齐次线性微分方程的特征方程为 $\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0$，即得特征根为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \lambda_4 = -1$. 故齐次线性微分方程的通解为 $x = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-t} + c_4 t e^{-t}$.

取特解形如 $\bar{x} = At^2 + Bt + C$，代入原方程解得 $A = 1, B = 0, C = 1$.

于是原方程的通解为 $x = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-t} + c_4 t e^{-t} + t^2 + 1$，其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数.

(8) 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^3 - 1 = 0$，解得特征根为

$$\lambda_1 = \frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}, \lambda_2 = \frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}, \lambda_3 = 1.$$

故齐次线性微分方程的通解为 $x = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} \cos \dfrac{\sqrt{3}}{2} t + c_2 e^{-\frac{1}{2}t} \sin \dfrac{\sqrt{3}}{2} t + c_3 e^t$.

取特解形如 $\bar{x} = A\cos t + B\sin t$，代入原方程解得 $A = -\dfrac{1}{2}, B = -\dfrac{1}{2}$.

故原方程的通解为

$$x = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + c_2 e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t + c_3 e^t - \frac{1}{2}(\cos t + \sin t),$$

其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数.

(9) 对应齐次线性微分方程的特征方程为 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$，有根 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$.

故齐次线性微分方程的通解为 $x = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$.

因为 $\pm 2i$ 不是特征根，则取特解形如 $\bar{x} = A\cos 2t + B\sin 2t$，代入原方程解得 $A = -\frac{2}{5}$，$B = -\frac{6}{5}$.

故方程的通解为 $x = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} - \frac{2}{5}\cos 2t - \frac{6}{5}\sin 2t$，其中 c_1, c_2 为任意常数.

(10) 对应齐次线性微分方程的特征方程为 $\lambda^3 - 1 = 0$，它有根 $\lambda_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$\lambda_2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$，$\lambda_3 = 1$.

故齐次线性微分方程的通解为 $x = c_1 e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_2 e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_3 e^t$.

由于 $\lambda = 1$ 是特征方程的根，故方程有形如 $\bar{x} = Ate^t$ 的特解，代入原方程解得 $A = \frac{1}{3}$. 于是原方程的通解为

$$x = c_1 e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_2 e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_3 e^t + \frac{1}{3}te^t,$$

其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数.

(11) 对应齐次线性微分方程的特征方程为 $\lambda^2 + 2a\lambda + a^2 = 0$，有 2 重根 $\lambda = -a$.

当 $a = -1$ 时，齐次线性微分方程的通解为 $s = c_1 e^t + c_2 te^t$，$\lambda = 1$ 是特征方程的 2 重根，故方程有形如 $\bar{s} = At^2 e^t$ 的特解，代入原方程解得 $A = \frac{1}{2}$.

于是方程的通解为 $s = c_1 e^t + c_2 te^t + \frac{1}{2}t^2 e^t$.

当 $a \neq -1$ 时，齐次线性微分方程的通解为 $s = c_1 e^{-at} + c_2 te^{-at}$，$\lambda = 1$ 不是特征方程的根，故方程有形如 $\bar{s} = Ae^t$ 的特解，代入原方程解得 $A = \frac{1}{(a+1)^2}$. 故方程的通解为 $s = c_1 e^{-at} + c_2 te^{-at} + \frac{1}{(a+1)^2}e^t$，其中 c_1, c_2 为任意常数.

(12) 对应齐次线性微分方程的特征方程为 $\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$，它有根 $\lambda_1 = -1$，$\lambda_2 = -5$.

故齐次线性微分方程的通解为 $x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-5t}$.

由于 $\lambda = 2$ 不是特征方程的根，故方程有形如 $\bar{x} = Ae^{2t}$ 的特解，代入原方程解得 $A = \frac{1}{21}$. 于是方程的通解为 $x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-5t} + \frac{1}{21}e^{2t}$，其中 c_1, c_2 为任意常数.

(13) 对应齐次线性微分方程的特征方程为 $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$，即得特征根为 $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}i$，$\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}i$.

故齐次线性微分方程的通解为 $x = c_1 e^t \cos\sqrt{2}t + c_2 e^t \sin\sqrt{2}t$.

由于 $-1 \pm i$ 不是特征方程的根，取特解形如 $\bar{x} = (A\cos t + B\sin t)e^{-t}$，代入原方程解得 $A = \frac{5}{41}$，$B = -\frac{4}{41}$. 故原方程的通解为

$$x = c_1 e^t \cos \sqrt{2}t + c_2 e^t \sin \sqrt{2}t + \left(\frac{5}{41}\cos t - \frac{4}{41}\sin t\right)e^{-t},$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

(14) 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+1=0$,即特征根 $\lambda_1=i, \lambda_2=-i$,故齐次线性方程的通解为 $x=c_1\cos t+c_2\sin t$.

① 对于方程 $x''+x=\sin t$,取特解形如 $\bar{x}=t(A\cos t+B\sin t)$,代入原方程解得 $A=-\frac{1}{2}, B=0$,故 $\bar{x}=-\frac{1}{2}t\cos t$.

② 对于方程 $x''+x=-\cos 2t$,取特解形如 $\bar{x}=A\cos 2t+B\sin 2t$,代入原方程解得 $A=\frac{1}{3}, B=0$,故 $\bar{x}=\frac{1}{3}\cos 2t$.

故原方程的通解为 $x=c_1\cos t+c_2\sin t-\frac{1}{2}t\cos t+\frac{1}{3}\cos 2t$,其中 c_1, c_2 为任意常数.

(15) 对应的齐次方程的特征方程为 $\lambda^2-4\lambda+4=0$,即得特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=2$.

① 对于方程 $x''-4x'+4x=e^t$,可设其特解形如 $\bar{x}=Ae^t$,代入方程则得到 $A=1$,即方程 $x''-4x'+4x=e^t$ 的一个特解为 $\bar{x}=e^t$.

② 对于方程 $x''-4x'+4x=e^{2t}$,可设其特解形如 $\bar{x}=Bt^2e^{2t}$,代入方程则得到 $B=\frac{1}{2}$,即方程 $x''-4x'+4x=e^{2t}$ 有一特解为 $\bar{x}=\frac{1}{2}t^2e^{2t}$.

③ 对于方程 $x''-4x'+4x=1$,可设其特解形如 $\bar{x}=C$,代入方程则得到 $C=\frac{1}{4}$,即方程 $x''-4x'+4x=1$ 有一特解为 $\bar{x}=\frac{1}{4}$.

所以,原方程的通解为 $x=(c_1+c_2t)e^{2t}+e^t+\frac{1}{2}t^2e^{2t}+\frac{1}{4}$,其中 c_1, c_2 为任意常数.

(16) 对应线性齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+9=0$,即得特征根为 $\lambda_1=3i, \lambda_2=-3i$.

设方程的一个特解为 $\bar{x}=t[(At+B)\cos 3t+(Et+F)\sin 3t]$,代入方程,得到

$$A=-\frac{1}{12}, F=\frac{1}{36}, B=E=0.$$

即方程的一个特解为 $\bar{x}=-\frac{1}{12}t^2\cos 3t+\frac{1}{36}t\sin 3t$.

于是方程的通解为 $x=c_1\cos 3t+c_2\sin 3t-\frac{1}{12}t^2\cos 3t+\frac{1}{36}t\sin 3t$,其中 c_1, c_2 是任意常数.

(17) 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2-2\lambda+2=0$,即得特征根为 $\lambda_1=1+i, \lambda_2=1-i$,先求方程 $x''-2x'+2x=te^{(1+i)t}$ 的特解.

设其特解为 $\bar{x}=t(At+B)e^{(1+i)t}$,将它代入方程并消去因子 $e^{(1+i)t}$,得到 $A=-\frac{i}{4}, B=\frac{1}{4}$,

于是方程 $x''-2x'+2x=te^{(1+i)t}$ 的一个特解为 $\bar{x}=-\frac{i}{4}(t^2+ti)e^{(1+i)t}$.

分出它的实部 $\mathrm{Re}\{\overline{x}\} = \frac{1}{4}(t^2\sin t + t\cos t)e^t$，根据命题 2 可知其为原方程的一个特解.

于是，原方程的通解为 $x = (c_1\cos t + c_2\sin t)e^t + \frac{1}{4}te^t(\cos t + t\sin t)$，其中 c_1, c_2 为任意常数.

(18) 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$，即得特征根为 $\lambda_1 = -1 + 2i, \lambda_2 = -1 - 2i$.

① 首先求方程 $x'' + 2x' + 5x = 4e^{-t}$ 的一个特解.

设其特解为 $x_1 = Ae^{-t}$，代入方程则得 $A = 1$，即方程 $x'' + 2x' + 5x = 4e^{-t}$ 的一个特解为 $x_1 = e^{-t}$.

② 再求方程 $x'' + 2x' + 5x = 17\sin 2t$ 的一个特解.

设其特解为 $x_2 = B\cos 2t + D\sin 2t$，代入方程求得 $B = -4, D = 1$.

即方程 $x'' + 2x' + 5x = 17\sin 2t$ 的一个特解为 $x_2 = -4\cos 2t + \sin 2t$.

所以，原方程的通解为 $x = e^{-t}(c_1\cos 2t + c_2\sin 2t) + e^{-t} - 4\cos 2t + \sin 2t$，其中 c_1, c_2 为任意常数.

(19) 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2 + 1 = 0$，即得特征根为 $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$.

现用常数变易法求已知方程形如 $x_1 = c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t$ 的一个特解.

可得关于 $c'_1(t), c'_2(t)$ 的方程组

$$\begin{cases} \cos t \cdot c'_1(t) + \sin t \cdot c'_2(t) = 0, \\ -\sin t \cdot c'_1(t) + \cos t \cdot c'_2(t) = \dfrac{1}{\sin^3 t}. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} c'_1(t) = -\dfrac{1}{\sin^2 t}, \\ c'_2(t) = \dfrac{\cos t}{\sin^3 t}, \end{cases}$$

积分得

$$\begin{cases} c_1(t) = \cot t + \gamma_1 = \dfrac{\cos t}{\sin t} + \gamma_1, \\ c_2(t) = -\dfrac{1}{2\sin^2 t} + \gamma_2. \end{cases}$$

于是所求的通解为 $x = c_1\cos t + c_2\sin t + \frac{1}{2\sin t}$，其中 c_1, c_2 为任意常数.

(20) 由于 $x'' + x = 0$ 的通解为 $x = c_1\cos t + c_2\sin t$，现利用常数变易法，求已知方程形如 $x_1 = c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t$ 的一个特解，可得关于 $c'_1(t), c'_2(t)$ 的方程组

$$\begin{cases} \cos t \cdot c'_1(t) + \sin t \cdot c'_2(t) = 0, \\ -\sin t \cdot c'_1(t) + \cos t \cdot c'_2(t) = 1 - \dfrac{1}{\sin t}, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} c'_1(t) = 1 - \sin t, \\ c'_2(t) = \cos t - \cot t, \end{cases}$$

积分得

$$\begin{cases} c_1(t) = t + \cos t + c_1, \\ c_2(t) = \sin t - \ln|\sin t| + c_2. \end{cases}$$

故原方程的通解为

$$x = c_1\cos t + c_2\sin t + 1 + t\cos t - \sin t \cdot \ln|\sin t|,$$

这里 c_1, c_2 为任意常数.

3. 设 $\varphi(t)$ 是方程 $x'' + k^2 x = f(t)$ 的解,其中 k 为常数,函数 $f(t)$ 于 $0 \leqslant t < +\infty$ 上连续,试证:

(1) 当 $k \neq 0$ 时,能够选择常数 c_1, c_2 的值,使得

$$\varphi(t) = c_1\cos kt + \frac{c_2}{k}\sin kt + \frac{1}{k}\int_0^t \sin k(t-s) \cdot f(s)\mathrm{d}s \quad (0 \leqslant t < +\infty);$$

(2) 当 $k = 0$ 时,方程的通解可表为

$$x = c_1 + c_2 t + \int_0^t (t-s) f(s)\mathrm{d}s \quad (0 \leqslant t < +\infty),$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

证明:方程为二阶线性非齐次微分方程,特征方程为 $\lambda^2 + k^2 = 0$,当 $k \neq 0$ 时,特征根为 $\lambda = \pm k\mathrm{i}$,当 $k = 0$ 时特征根为二重根 $\lambda = 0$.

(1) 当 $k \neq 0$ 时,齐次方程有通解 $x(t) = c_1\cos kt + c_2\sin kt$.

运用常数变易法,设 $x(t) = c_1(t)\cos kt + c_2(t)\sin kt$. 可得

$$\begin{cases} c'_1(t)\cos kt + c'_2(t)\sin kt = 0, \\ -kc'_1(t)\sin kt + kc'_2(t)\cos kt = f(t). \end{cases}$$

解出 $c'_1(t), c'_2(t)$ 后积分得

$$\begin{cases} c_1(t) = -\dfrac{1}{k}\displaystyle\int_0^t \sin ks \cdot f(s)\mathrm{d}s + \gamma_1, \\ c_2(t) = \dfrac{1}{k}\displaystyle\int_0^t \cos ks \cdot f(s)\mathrm{d}s + \gamma_2. \end{cases}$$

即非齐次线性微分方程的通解为

$$\begin{aligned} x(t) &= \gamma_1\cos kt + \gamma_2\sin kt + \frac{1}{k}\int_0^t (-\cos kt \cdot \sin ks + \sin kt \cdot \cos ks) f(s)\mathrm{d}s \\ &= \gamma_1\cos kt + \gamma_2\sin kt + \frac{1}{k}\int_0^t \sin k(t-s) \cdot f(s)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

若令 $\gamma_1 = c_1, \gamma_2 = \dfrac{c_2}{k}$,则得

$$\varphi(t) = c_1\cos kt + \frac{c_2}{k}\sin kt + \frac{1}{k}\int_0^t \sin k(t-s) \cdot f(s)\mathrm{d}s (0 \leqslant t < +\infty).$$

(2) 当 $k = 0$ 时,齐次方程有通解 $x(t) = c_1 + c_2 t$.

同样运用常数变易法,设非齐次方程 $x'' = f(t)$ 的一个特解为

$$\overline{x} = c_1(t) + c_2(t) \cdot t,$$

代入方程,则得关于 $c'_1(t)$ 和 $c'_2(t)$ 的方程组

$$\begin{cases} c'_1(t) + tc'_2(t) = 0, \\ c'_2(t) = f(t), \end{cases}$$

解得

$$c'_1(t) = -tf(t), c_1(t) = -\int_0^t sf(s)\mathrm{d}s, c'_2(t) = f(t), c_2(t) = \int_0^t f(s)\mathrm{d}s,$$

所以原方程的通解为

$$x(t)=c_1+c_2t-\int_0^t sf(s)\mathrm{d}s+t\int_0^t f(s)\mathrm{d}s$$

$$=c_1+c_2t+\int_0^t (t-s)f(s)\mathrm{d}s(0\leqslant t<+\infty),$$

其中 c_1,c_2 为任意常数.

4. 给定方程 $x'''+5x''+6x'=f(t)$,其中 $f(t)$ 在 $-\infty<t<\infty$ 上连续,设 $\varphi_1(t),\varphi_2(t)$ 是上述方程的两个解,证明极限 $\lim\limits_{t\to\infty}[\varphi_1(t)-\varphi_2(t)]$ 存在.

证明:齐次方程 $x'''+5x''+6x'=0$ 的特征方程为 $\lambda^3+5\lambda^2+6\lambda=0$,解得特征根为 $\lambda_1=0,\lambda_2=-2$, $\lambda_3=-3$.

所以齐次方程的通解为 $x=c_1+c_2\mathrm{e}^{-2t}+c_3\mathrm{e}^{-3t}$.

因为 $\varphi_1(t),\varphi_2(t)$ 是非齐次方程的两个解,知 $\varphi_1(t)-\varphi_2(t)$ 是对应齐次方程的解,也就是说存在适当的常数 c_1,c_2,c_3,使得

$$\varphi_1(t)-\varphi_2(t)=c_1+c_2\mathrm{e}^{-2t}+c_3\mathrm{e}^{-3t}.$$

从而 $\lim\limits_{t\to\infty}[\varphi_1(t)-\varphi_2(t)]=\lim\limits_{t\to\infty}[c_1+c_2\mathrm{e}^{-2t}+c_3\mathrm{e}^{-3t}]=c_1$.

故 $\lim\limits_{t\to\infty}[\varphi_1(t)-\varphi_2(t)]$ 存在.

5. 形式为 $x^n\dfrac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}+a_1x^{n-1}\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_ny=0$ 的方程称为欧拉方程,这里 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为常数. 引进自变量的变换 $x=\mathrm{e}^t,t=\ln x$,可将之化为常系数线性方程,试证明之,并求解方程

(1) $t^2x''+tx'-x=0$; (2) $t^2x''-4tx'+6x=t$.

证明:对欧拉方程

$$x^n\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}+a_1x^{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_ny=0, \quad ①$$

引入自变量变换,令 $x=\mathrm{e}^t$,则 $t=\ln x$,则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)=\mathrm{e}^{-2t}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right),$$

假设对自然数 $k-1$,

$$\frac{\mathrm{d}^{k-1}y}{\mathrm{d}x^{k-1}}=\mathrm{e}^{-(k-1)t}\left(\frac{\mathrm{d}^{k-1}y}{\mathrm{d}t^{k-1}}+\alpha_1\frac{\mathrm{d}^{k-2}y}{\mathrm{d}t^{k-2}}+\cdots+\alpha_{k-2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right),$$

则有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^ky}{\mathrm{d}x^k}&=\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{-(k-1)t}\left(\frac{\mathrm{d}^{k-1}y}{\mathrm{d}t^{k-1}}+\alpha_1\frac{\mathrm{d}^{k-2}y}{\mathrm{d}t^{k-2}}+\cdots+\alpha_{k-2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\right]\\&=\mathrm{e}^{-kt}\left(\frac{\mathrm{d}^ky}{\mathrm{d}t^k}+\beta_1\frac{\mathrm{d}^{k-1}y}{\mathrm{d}t^{k-1}}+\cdots+\beta_{k-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right),\end{aligned} \quad ②$$

其中 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{k-1}$ 为常数.

由数学归纳法可知,② 式对任意自然数 k 成立.

于是对任意自然数 k 有

$$x^k \frac{d^k y}{dt^k} = \frac{d^k y}{dt^k} + \beta_1 \frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}} + \cdots + \beta_{k-1} \frac{dy}{dt}.$$

将上述关系式代入方程 ①，则得到常系数齐次线性微分方程

$$\frac{d^n y}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + b_{n-1} \frac{dy}{dt} + b_n y = 0.$$

其中 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为常数.

(1) 设 $x = t^k$，代入方程，得到关于 k 的方程 $k(k-1)+k-1=0$，即 $k^2-1=0$.

因此 $k_1 = 1, k_2 = -1$，从而方程的通解为 $x = c_1 t + c_2 \frac{1}{t}$，其中 c_1, c_2 为任意常数.

(2) 先求方程 $t^2 x'' - 4tx' + 6x = 0$ 的通解，设 $x = t^k$，代入方程则得到关于 k 的方程 $k(k-1) - 4k + 6 = 0$. 即 $(k-2)(k-3) = 0$，因此 $k_1 = 2, k_2 = 3$.

故方程 $t^2 x'' - 4tx' + 6x = 0$ 的通解为 $x = c_1 t^2 + c_2 t^3$.

故利用常数变易法，求已知方程形如 $x_1 = c_1(t) \cdot t^2 + c_2(t) \cdot t^3$ 的一个特解，可得关于 $c'_1(t)$，$c'_2(t)$ 的方程组

$$\begin{cases} t^2 c'_1(t) + t^3 c'_2(t) = 0, \\ 2tc'_1(t) + 3t^2 c'_2(t) = \dfrac{1}{t}, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} c'_1(t) = -\dfrac{1}{t^2}, \\ c'_2(t) = \dfrac{1}{t^3}, \end{cases}$$

积分得 $c_1(t) = \frac{1}{t} + c_1, c_2(t) = -\frac{1}{2t^2} + c_2$，故方程的通解为 $x = c_1 t^2 + c_2 t^3 + \frac{1}{2} t$.

方法点击：本题中两个方程所对应的齐次方程均为欧拉方程，先由欧拉方程的求解方法求出其对应的齐次方程的通解，再由常数变易法求其本身的一个特解，就可以得到所求方程的通解.

习题 4.3

1. 求解下列方程：

(1) $x'' = \frac{1}{2x'}$ $\left(这里\ x' = \frac{dx}{dt}, x'' = \frac{d^2 x}{dt^2}，以下同\right)$；

(2) $xx'' - (x')^2 + (x')^3 = 0$；

(3) $x'' + \frac{2}{1-x}(x')^2 = 0$；

(4) $x'' + \sqrt{1-(x')^2} = 0$；

(5) $ax''+[1+(x')^2]^{\frac{3}{2}}=0$(常数 $a\neq 0$);

(6) $x''-\frac{1}{t}x'+(x')^2=0$(提示:方程两端除以 x').

解:(1) 方程不显含 t,x,令 $y=x'$,则方程变形为 $y'=\frac{1}{2y}$,分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2y},2y\mathrm{d}y=\mathrm{d}t,y^2=t+c_1,y=\pm(t+c_1)^{\frac{1}{2}}.$$

于是 $x'=y=\pm(t+c_1)^{\frac{1}{2}}$,积分得

$$x+c_2=\pm\int_0^t(s+c_1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s=\pm\frac{2}{3}(t+c_1)^{\frac{3}{2}},$$

即 $9(x+c_2)^2=4(t+c_1)^3$.

从而方程的解为 $9(x+c_2)^2=4(t+c_1)^3$,其中 c_1,c_2 为任意常数.

(2) 方程不显含 t,令 $y=x'$,则方程变形为 $xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y^2+y^3=0$,得到 $y=0$ 或 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y-y^2}{x}$,

积分后得 $\frac{y}{1-y}=\bar{c}x(\bar{c}\neq 0)$,即 $y=\frac{\bar{c}x}{1+\bar{c}x}$,从而 $x'=\frac{\bar{c}x}{1+\bar{c}x}$.

积分得 $x+\frac{1}{\bar{c}}\ln|x|=t+c_2$.

即方程有解 $x+c_1\ln|x|=t+c_2$.

当 $y=0$ 时得 $x'=0$,故 $x=c$.

综上,方程的解为 $x+c_1\ln|x|=t+c_2$ 或 $x=c$,其中 c_1,c_2,c 是任意常数.

(3) 方程不显含 t,令 $y=x'$,则方程可化为 $y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{2}{1-x}y^2=0$.

解得 $y=0$ 或 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2y}{x-1}$.

① 当 $y=0$ 时,即 $x'=0$,得到 $x=c$,c 为任意常数.

② 当 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2y}{x-1}$ 且 $y\neq 0$ 时,积分可得 $y=\bar{c}_1(x-1)^2$,即 $x'=\bar{c}_1(x-1)^2$,再次积分得 $\frac{1}{x-1}=c_1t+c_2$,即 $(x-1)(c_1t+c_2)=1$.

注意到当取 $\bar{c}_1=0$ 时 $y=0$,所以第 ② 种情况包括第 ① 种情况. 因此,原方程的解为 $(x-1)(c_1t+c_2)=1$,其中 c_1,c_2 为任意常数.

(4) 方程不显含 t,x,令 $y=x'$,则方程化为 $y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\sqrt{1-y^2}=0$.

当 $y\neq\pm1$ 时,方程又可以变形为 $\frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=-\mathrm{d}x$,积分后得到 $\sqrt{1-y^2}=x+c$,

即 $\sqrt{1-x'^2}=x+c$,故 $x'=\pm\sqrt{1-(x+c)^2}$,再次积分得

① 当 $x'=\sqrt{1-(x+c)^2}$ 时,$x=\sin(t+c_1)+c_2$;

② 当 $x'=-\sqrt{1-(x+c)^2}$ 时,$x=\cos(t+c_1)+c_2$.

当 $y=\pm1$ 时,$x'=\pm1$,从而 $x=\pm t+c$.

综上所述,原方程的解为 $x=\sin(t+c_1)+c_2$ 或 $x=\cos(t+c_1)+c_2$,以及 $x=\pm t+c$,其中 c_1,

c_2, c 为任意常数.

(5) 方程不显含 t, x.

令 $y = x'$,则方程可化为 $ay\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (1+y^2)^{\frac{3}{2}} = 0$,即$\frac{ay\mathrm{d}y}{(1+y^2)^{3/2}} = -\mathrm{d}x$.

积分后得 $a(1+y^2)^{-\frac{1}{2}} = x + c_1$,从而有

$$x' = y = \pm\sqrt{\left(\frac{a}{x+c_1}\right)^2 - 1},$$

积分后可得

$$\sqrt{a^2 - (x+c_1)^2} = \pm(t+c_2),$$

即$(x+c_1)^2 + (t+c_2)^2 = a^2$,其中 c_1, c_2 为任意常数.

(6) 当 $x' \neq 0$ 时,方程两边同除以 x',则得到$\frac{x''}{x'} - \frac{1}{t} + x' = 0$,即

$$\mathrm{d}(\ln|x'| - \ln|t| + x) = 0,$$

积分可得 $\ln\left|\frac{x'}{t}\right| + x = c_1$,解出 x',则有 $x' = t(\mathrm{e}^{-x+c_1})$,再次积分可得 $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{c_1}\left(\frac{t^2}{2}\right) + c_2$.

由于 c_1, c_2 为任意常数,所以可以写为 $\mathrm{e}^x = c'_1(t^2 + c'_2)$.

当 $x' = 0$ 时,即得 $x = c$,显然它也是原方程的解.

综上,方程的解为 $\mathrm{e}^x = c'_1(t^2 + c'_2)$ 或 $x = c$.

2. 用幂级数解法求解下列方程:

(1) $x'' + tx' + x = 0, x(0) = 0, x'(0) = 1$;

(2) $(1-t)x'' + x = 0$;

(3) $x'' - tx' - x = 0$.

解:(1) 由于方程中 $p(t) = t, q(t) = 1$,故存在幂级数解.

设 $x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots$ 是方程的解,利用初值条件,可以得到$a_0 = 0, a_1 = 1$,因而

$$x = t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots + a_n t^n + \cdots,$$

$$x' = 1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \cdots + na_n t^{n-1} + \cdots,$$

$$x'' = 2a_2 + 3\cdot 2a_3 t + \cdots + n\cdot(n-1)a_n t^{n-2} + \cdots.$$

将 x, x', x'' 的表达式代入原方程,比较同次幂系数,可得

$$a_2 = 0, a_3 = -\frac{1}{3}, a_4 = 0, a_5 = \frac{1}{15}, \cdots, a_n = -\frac{a_{n-2}}{n}, \cdots,$$

因而,$a_6 = 0, a_7 = (-1)^3\cdot\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}, a_8 = 0, \cdots$,

最后得到 $a_{2k} = 0, a_{2k+1} = (-1)^k\cdot\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)}$ 对一切正整数 k 成立.

于是原方程有幂级数解

$$x = t - \frac{t^3}{1\cdot 3} + \frac{t^5}{1\cdot 3\cdot 5} - \frac{t^7}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \cdots + (-1)^n\cdot\frac{t^{2n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)} + \cdots.$$

(2) 方程可化为 $x''+\frac{x}{1-t}=0$,因 $tp(t)=0,t^2q(t)=\frac{t^2}{1-t}$,故存在幂级数解.

设 $x=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+\cdots+a_nt^n+\cdots$ 是方程的解,则

$$x'=a_1+2a_2t+3a_3t^2+\cdots+na_nt^{n-1}+\cdots,$$
$$x''=2a_2+3\cdot 2a_3t+\cdots+n(n-1)a_nt^{n-2}+\cdots.$$

将 x,x',x'' 的表达式代入原方程,比较同次幂系数,可得

$$2a_2+a_0=0,3\cdot 2a_3-2a_2+a_1=0,$$
$$k(k-1)a_k-(k-1)(k-2)a_{k-1}+a_{k-2}=0,k>3. \quad ①$$

本方程的解应该为通解,为此,需要找到两个线性无关的解.

设 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是满足初值条件 $x_1(0)=0,x'_1(0)=1,x_2(0)=1,x'_2(0)=0$ 的两个解.

对于 $x_1(t)$,显然有 $a_0=0,a_1=1$,代入 ① 式,可得

$$a_2=0,a_3=\frac{-1}{1\cdot 2\cdot 3},a_4=\frac{-1}{3\cdot 4}=\frac{-2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},a_5=\frac{-5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5},\cdots$$

$$a_n=\frac{(n-1)(n-2)a_{n-1}-a_{n-2}}{n(n-1)},$$

也就是 $x_1(t)=t-\frac{t^3}{3!}-\frac{2}{4!}t^4-\frac{5}{5!}t^5-\frac{18}{6!}t^6-\cdots,$

对于 $x_2(t)$,显然有 $a_0=1,a_1=0$,代入 ① 式可得

$$a_2=-\frac{1}{2},a_3=\frac{-1}{1\cdot 2\cdot 3},a_4=\frac{-1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},\cdots,$$

$$a_n=\frac{(n-1)(n-2)a_{n-1}-a_{n-2}}{n(n-1)},$$

也就是 $x_2(t)=1-\frac{1}{2!}t^2-\frac{1}{3!}t^3-\frac{1}{4!}t^4-\cdots$,所以方程的通解为

$$\begin{aligned}x&=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)\\&=c_1\left(t-\frac{1}{3!}t^3-\frac{2}{4!}t^4-\frac{5}{5!}t^5-\frac{18}{6!}t^6-\cdots\right)+c_2\left(1-\frac{1}{2!}t^2-\frac{1}{3!}t^3-\frac{1}{4!}t^4-\cdots\right).\end{aligned}$$

(3) 由于 $p(t)=-t,q(t)=-1$,故存在幂级数解.

设 $x=a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n+\cdots$ 是方程的幂级数解,将 x,x',x'' 的表达式代入方程,比较同次幂系数,可得

$$2a_2-a_0=0,6a_3-2a_1=0,k(k-1)a_k-(k-1)a_{k-2}=0,k>3.$$

即 $a_2=\frac{a_0}{2},a_3=\frac{a_1}{3},a_k=\frac{a_{k-2}}{k},k>3.$

设初值条件 $x(0)=a_0=c_1,x'(0)=a_1=c_2$,有

$$a_0=c_1,a_1=c_2,a_2=\frac{c_1}{2},a_3=\frac{c_2}{3},a_4=\frac{c_1}{2\cdot 4},a_5=\frac{c_2}{3\cdot 5},\cdots,$$

$$a_{2k}=\frac{c_1}{2\cdot 4\cdots(2k)},a_{2k+1}=\frac{c_2}{3\cdot 5\cdots(2k+1)},\cdots.$$

于是有幂级数解

$$x=c_1\left(1+\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{2\cdot 4}+\frac{t^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots\right)+c_2\left(t+\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{3\cdot 5}+\frac{t^7}{3\cdot 5\cdot 7}+\cdots\right).$$

3. 求解贝塞尔方程

$$t^2x''+tx'+\left(t^2-\frac{1}{4}\right)x=0.$$

$\left[\text{提示}:\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.\right]$

解:方程为 $n=\frac{1}{2}$ 的贝塞尔方程 $t^2x''+tx'+(t^2-n^2)x=0$,有通解

$$y=c_1J_{\frac{1}{2}}(t)+c_2J_{-\frac{1}{2}}(t).$$

由 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ 及 $\sin t=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}t^{2k+1}$ 可得

$$J_{\frac{1}{2}}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}+k+1\right)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 2^{-k}}{k!\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)}t^{2k+1}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\sin t.$$

同样,由 $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ 及 $\cos t=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}t^{2k}$ 可得

$$J_{-\frac{1}{2}}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma\left(1-\frac{1}{2}+k\right)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 2^{-k}}{k!1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}t^{2k}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos t.$$

所以此贝塞尔方程的通解为

$$x=c_1J_{\frac{1}{2}}(t)+c_2J_{-\frac{1}{2}}(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}(c_1\sin t+c_2\cos t),$$

其中 c_1,c_2 为任意常数.

4. 一个物体在大气中降落,初速度为零,空气阻力与速度的平方成正比例,求该物体的运动规律.

解:以 m,x 分别表示物体的质量和降落的距离,则物体的下降速度为 x',加速度为 x'',按牛顿第二定律,物体降落时的运动方程可写为

$$mx''=mg-k(x')^2,x(0)=0,x'(0)=0,$$

其中 g 为重力加速度,$k>0$ 为比例常数.

若令 $v=x'$,则方程可化为 $mv'=mg-kv^2$,记 $a=\sqrt{\frac{mg}{k}}$,$b=\sqrt{\frac{kg}{m}}$,积分求解

$$\frac{m\mathrm{d}v}{mg-kv^2}=\frac{m\mathrm{d}v}{k(a^2-v^2)}=\mathrm{d}t,\frac{m}{2ka}\ln\left|\frac{a+v}{a-v}\right|=\frac{1}{2b}\ln\left|\frac{a+v}{a-v}\right|=t+\tilde{c}.$$

即 $\frac{a+v}{a-v}=c\mathrm{e}^{2bt}$,$v=\frac{a(c\mathrm{e}^{2bt}-1)}{1+c\mathrm{e}^{2bt}}$.

利用初值条件 $v(0)=x'(0)=0$ 得 $c=1$,即有 $x'=v=\frac{a(\mathrm{e}^{2bt}-1)}{1+\mathrm{e}^{2bt}}$.

积分得 $x=\frac{a}{b}\ln\frac{1+\mathrm{e}^{2bt}}{2\mathrm{e}^{bt}}+\tilde{c}$.

再利用初值条件 $x(0)=0$ 得 $\tilde{c}=0$,从而该物体的运动规律为

$$x=\frac{m}{k}\ln\frac{1+e^{2bt}}{2e^{bt}}=\frac{m}{k}\ln\left[\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right)\right].$$

5. 试证:对于二阶齐次线性微分方程

$$x''+p(t)x'+q(t)x=0,$$

其中 $p(t),q(t)$ 为连续函数,

(1) 若 $p(t)\equiv -tq(t)$,则 $x=t$ 是方程的解;

(2) 若存在常数 m 使得 $m^2+mp(t)+q(t)\equiv 0$,则方程有解 $x=e^{mt}$;

(3) 若 $x_1(t),x_2(t)$ 是方程的两个线性无关的解,则方程的系数 $p(t),q(t)$ 由 $x_1(t),x_2(t)$ 唯一确定,且 $x_1(t),x_2(t)$ 没有共同的零点.

证明:(1) 当 $p(t)\equiv -tq(t)$ 时,方程可化为 $x''-tq(t)x'+q(t)x=0$,将 $x=t$ 代入方程得

$$x''-tq(t)x'+q(t)x=0-tq(t)+q(t)t\equiv 0,$$

即 $x=t$ 是方程的解.

(2) 将 $x=e^{mt}$ 代入方程得

$$x''+p(t)x'+q(t)x=m^2e^{mt}+mp(t)e^{mt}+q(t)e^{mt}=e^{mt}[m^2+mp(t)+q(t)]\equiv 0,$$

故 $x=e^{mt}$ 是方程的解.

(3) 由于 $x_1(t),x_2(t)$ 是方程的两个线性无关的解,故 $W[x_1,x_2]\neq 0$ 且

$$\begin{cases}x''_1(t)+p(t)x'_1(t)+q(t)x_1(t)=0,\\ x''_2(t)+p(t)x'_2(t)+q(t)x_2(t)=0.\end{cases}$$

上述方程组是关于 $p(t),q(t)$ 的二元一次代数方程组,由克莱姆法则得

$$p(t)=\frac{\begin{vmatrix}-x''_1 & x_1\\ -x''_2 & x_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x'_1 & x_1\\ x'_2 & x_2\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}x''_1 & x_1\\ x''_2 & x_2\end{vmatrix}}{W[x_1,x_2]},q(t)=\frac{\begin{vmatrix}x'_1 & -x''_1\\ x'_2 & -x''_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x'_1 & x_1\\ x'_2 & x_2\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}x'_1 & x''_1\\ x'_2 & x''_2\end{vmatrix}}{W[x_1,x_2]}.$$

即方程的系数 $p(t),q(t)$ 由 $x_1(t),x_2(t)$ 唯一确定.

若存在 x_1,x_2 的共同零点 $\tilde{t}$,即 $x_1(\tilde{t})=x_2(\tilde{t})=0$,则 $W[x_1(\tilde{t}),x_2(\tilde{t})]=0$. 这与 x_1,x_2 线性无关矛盾. 故 $x_1(t),x_2(t)$ 没有共同的零点.

6. 求解方程 $tx''-2(1+t)x'+(2+t)x=0(t\neq 0)$.

解:方程可化为 $x''-2\left(1+\frac{1}{t}\right)x'+\left(1+\frac{2}{t}\right)x=0$.

易知有特解 $x_1=e^t$. 由二阶齐次方程的通解公式可得

$$x=x_1\left(c_1+c\int\frac{1}{x_1^2}e^{-\int p(t)dt}dt\right)=e^t\left[c_1+c\int e^{-2t}e^{\int 2\left(1+\frac{1}{t}\right)dt}dt\right]$$

$$=e^t\left(c_1+c\int t^2dt\right)=e^t(c_1+c_2t^3).$$

所以所求的通解为 $x=e^t(c_1+c_2t^3)$,其中 c_1,c_2 为任意常数.

7. 假设 $\varphi(t,c_1,c_2,\cdots,c_{n-k})$ 是方程 $F(t,y,y',\cdots,y^{(n-k)})=0$ 的通解,而函数 $\psi(t,c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 是 $x^{(k)}=\varphi(t,c_1,c_2,\cdots,c_{n-k})$ 的通解,试证 $\psi(t,c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 就是方程 $F(t,x^{(k)},x^{(k+1)},\cdots,x^{(n)})=0(1\leqslant$

$k \leqslant n$) 的通解,这里 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-k}, \cdots, c_n$ 为任意常数.

证明: 因为 $\varphi(t, c_1, c_2, \cdots, c_{n-k})$ 是方程 $F(t, y, y', \cdots, y^{(n-k)}) = 0$ 的通解,所以有 $F(t, \varphi, \varphi', \cdots, \varphi^{(n-k)}) \equiv 0$,且 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-k}$ 是彼此独立的常数.

而函数 $\psi(t, c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是 $x^{(k)} = \varphi(t, c_1, c_2, \cdots, c_{n-k})$ 的通解,即

$$\psi^{(k)}(t, c_1, c_2, \cdots, c_n) \equiv \varphi(t, c_1, c_2, \cdots, c_{n-k}).$$

于是

$$\psi(t, c_1, c_2, \cdots, c_n) \equiv \int \cdots \int \varphi(t, c_1, c_2, \cdots, c_{n-k}) \mathrm{d}t \cdots \mathrm{d}t + c_{n-k+1} t^{k-1} + c_{n-k+2} t^{k-2} + \cdots + c_n,$$

其中 $c_{n-k+1}, c_{n-k+2}, \cdots, c_n$ 是彼此独立的常数.

将 $x = \psi(t, c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 代入 $F(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \cdots, x^{(n)}) = 0$ 中有

$$F(t, \psi^{(k)}, \psi^{(k+1)}, \cdots, \psi^{(n)}) \equiv F(t, \varphi, \varphi', \cdots, \varphi^{(n-k)}) \equiv 0,$$

即 $\psi(t, c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是该方程的解,且因 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-k}$ 彼此独立,即有

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \psi^{(k)}}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial \psi^{(k)}}{\partial c_{n-k}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \psi^{(n-1)}}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial \psi^{(n-1)}}{\partial c_{n-k}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi}{\partial c_{n-k}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi^{(n-k-1)}}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi^{(n-k-1)}}{\partial c_{n-k}} \end{vmatrix} \neq 0,$$

于是
$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \psi}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial \psi}{\partial c_{n-k}} & \dfrac{\partial \psi}{\partial c_{n-k+1}} & \cdots & \dfrac{\partial \psi}{\partial c_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \psi^{(k-1)}}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial \psi^{(k-1)}}{\partial c_{n-k}} & \dfrac{\partial \psi^{(k-1)}}{\partial c_{n-k+1}} & \cdots & \dfrac{\partial \psi^{(k-1)}}{\partial c_n} \\ \dfrac{\partial \psi^{(k)}}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial \psi^{(k)}}{\partial c_{n-k}} & \dfrac{\partial \psi^{(k)}}{\partial c_{n-k+1}} & \cdots & \dfrac{\partial \psi^{(k)}}{\partial c_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \psi^{(n-1)}}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial \psi^{(n-1)}}{\partial c_{n-k}} & \dfrac{\partial \psi^{(n-1)}}{\partial c_{n-k+1}} & \cdots & \dfrac{\partial \psi^{(n-1)}}{\partial c_n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \psi}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial \psi}{\partial c_{n-k}} & t^{k-1} & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \psi^{(k-1)}}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial \psi^{(k-1)}}{\partial c_{n-k}} & (k-1)! & \cdots & 0 \\ \dfrac{\partial \psi^{(k)}}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial \psi^{(k)}}{\partial c_{n-k}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \psi^{(n-1)}}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial \psi^{(n-1)}}{\partial c_{n-k}} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^m \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi}{\partial c_{n-k}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi^{(n-k-1)}}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi^{(n-k-1)}}{\partial c_{n-k}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} t^{k-1} & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ (k-1)! & \cdots & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

其中 $m = 1 + 2 + \cdots + k + (n-k+1) + \cdots + n$.

即常数 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-k}, \cdots, c_n$ 彼此独立，所以 $\psi(t, c_1, \cdots, c_n)$ 是方程 $F(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \cdots, x^{(n)}) = 0$ 的通解.

第五章　线性微分方程组

习题 5.1

1. 给定方程组

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \qquad (*)$$

(1) 试验证 $\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$ 分别是方程组(*)的满足初值条件 $\boldsymbol{u}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的解.

(2) 试验证 $\boldsymbol{w}(t) = c_1 \boldsymbol{u}(t) + c_2 \boldsymbol{v}(t)$ 是方程组(*)的满足初值条件 $\boldsymbol{w}(0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ 的解，其中 c_1, c_2 是任意常数.

解：(1)

$$\boldsymbol{u}(0) = \begin{bmatrix} \cos 0 \\ -\sin 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}'(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t).$$

又由

$$\boldsymbol{v}(0) = \begin{bmatrix} \sin 0 \\ \cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{v}'(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{v}(t),$$

因此，$\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$ 分别是方程组(*)的满足初值条件 $\boldsymbol{u}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的解.

(2) $\boldsymbol{w}(0) = c_1 \boldsymbol{u}(0) + c_2 \boldsymbol{v}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{w}'(t) = c_1 \boldsymbol{u}'(t) + c_2 \boldsymbol{v}'(t) = c_1 \begin{bmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -c_1 \sin t + c_2 \cos t \\ -c_1 \cos t - c_2 \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ -c_1 \sin t + c_2 \cos t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{w}(t).$$

因此 $\boldsymbol{w}(t)=c_1\boldsymbol{u}(t)+c_2\boldsymbol{v}(t)$ 是方程组(*)的满足初值条件 $\boldsymbol{w}(0)=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$ 的解,其中 c_1,c_2 是任意常数.

2. 将下面的初值问题化为与之等价的一阶方程组的初值问题:

(1) $x''+2x'+7tx=\mathrm{e}^{-t},x(1)=7,x'(1)=-2$;

(2) $x^{(4)}+x=te^t,x(0)=1,x'(0)=-1,x''(0)=2,x'''(0)=0$;

(3) $\begin{cases}x''+5y'-7x+6y=\mathrm{e}^t,\\y''-2y+13y'-15x=\cos t,\end{cases}$ $x(0)=1,x'(0)=0,y(0)=0,y'(0)=1.$

解: (1) 令 $x_1=x,x_2=x'$,得

$$\begin{cases}x_1'=x'=x_2,\\x_2'=x''=-7tx_1-2x_2+\mathrm{e}^{-t},\end{cases}$$

即 $\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-7t&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}$.

又由 $x_1(1)=x(1)=7,x_2(1)=x'(1)=-2$,于是把原来的初值问题化成了与之等价的一阶方程组的初值问题:

$$\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}0&1\\-7t&-2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix},\boldsymbol{x}(1)=\begin{bmatrix}7\\-2\end{bmatrix},\text{其中 }\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}.$$

(2) 令 $x_1=x,x_2=x',x_3=x'',x_4=x'''$,则原方程可化为

$$\begin{cases}x_1'=x'=x_2,\\x_2'=x''=x_3,\\x_3'=x'''=x_4,\\x_4'=-x+te^t=-x_1+te^t,\end{cases}$$

且 $x_1(0)=x(0)=1,x_2=x'(0)=-1,x_3(0)=x''(0)=2,x_4(0)=x'''(0)=0.$

于是把原来的初值问题化成了与之等价的一阶方程组的初值问题:

$$\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\te^t\end{bmatrix},\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\0\end{bmatrix},\text{其中 }\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}.$$

(3) 令 $w_1=x,w_2=x',w_3=y,w_4=y'$,则原来的初值问题可化为:

$$\begin{cases}w_1'=x'=w_2,\\w_2'=x''=-5w_4+7w_1-6w_3+\mathrm{e}^t,\\w_3'=y'=w_4,\\w_4'=y''=2w_3-13w_4+15w_1+\cos t,\end{cases}\quad\text{且}\begin{cases}w_1(0)=x(0)=1,\\w_2(0)=x'(0)=0,\\w_3(0)=y(0)=0,\\w_4(0)=y'(0)=1,\end{cases}$$

即 $$\boldsymbol{w}'=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\7&0&-6&-5\\0&0&0&1\\15&0&2&-13\end{bmatrix}\boldsymbol{w}+\begin{bmatrix}0\\\mathrm{e}^t\\0\\\cos t\end{bmatrix},\boldsymbol{w}(0)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\text{其中 }\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\\w_4\end{bmatrix}.$$

3. 试用逐步逼近法求方程组 $x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x$,满足初值条件 $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的第三次近似解.

解: $\psi_0(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$;

$$\psi_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\psi_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ -\frac{t^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 1-\frac{t^2}{2} \end{bmatrix};$$

$$\psi_3(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ 1-\frac{s^2}{2} \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t-\frac{t^3}{6} \\ -\frac{t^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t-\frac{t^3}{6} \\ 1-\frac{t^2}{2} \end{bmatrix}.$$

所以,满足初值条件 $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的第三次近似解为

$$\psi_3(t) = \begin{bmatrix} t-\frac{t^3}{6} \\ 1-\frac{t^2}{2} \end{bmatrix}.$$

4. 试验证 $\Phi(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{bmatrix}$ 是方程组 $x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{bmatrix} x$ 在任何不包含原点的区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上的基解矩阵.

解:令 $\Phi(t)$ 的第一列为 $\varphi_1(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ 2t \end{bmatrix}$,这时 $\varphi_1'(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{bmatrix} \varphi_1(t)$.

故 $\varphi_1(t)$ 是方程组的一个解. 同样地,如果以 $\varphi_2(t)$ 表示 $\Phi(t)$ 第二列,我们有

$$\varphi'_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{bmatrix} \varphi_2(t).$$

这样 $\varphi_2(t)$ 也是方程组的一个解. 因此 $\Phi(t)$ 是解矩阵. 又因为 $\det\Phi(t) = -t^2 \neq 0$,故 $\Phi(t)$ 是方程组 $x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{bmatrix} x, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 在任何不包含原点的区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上的基解矩阵.

5. 考虑方程组
$$x' = A(t)x \qquad (*)$$
其中 $A(t)$ 是区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上的连续 $n \times n$ 矩阵,它的元为 $a_{ij}(t)(i,j = 1,2,\cdots,n)$.

(1) 如果 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 是(*)的任意 n 个解,那么它们的朗斯基行列式 $W[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)] \equiv W(t)$ 满足下面的一阶线性微分方程 $W' = [a_{11}(t) + a_{22}(t) + \cdots + a_{nn}(t)]W$.

(2) 解上面的一阶线性微分方程,证明下页的公式:

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}[a_{11}(s)+a_{22}(s)+\cdots+a_{nn}(s)]ds}, t_0, t \in [a,b].$$

解:
$$W'(t) = \begin{vmatrix} x_{11}' & x_{12}' & \cdots & x_{1n}' \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21}' & x_{22}' & \cdots & x_{2n}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}' & x_{n2}' & \cdots & x_{nn}' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}x_{11}+a_{12}x_{21}+\cdots+a_{1n}x_{n1} & a_{11}x_{12}+a_{12}x_{22}+\cdots+a_{1n}x_{n2} & \cdots & a_{11}x_{1n}+a_{12}x_{2n}+\cdots+a_{1n}x_{nn} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+ \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_{11}+\cdots+a_{nn}x_{n1} & a_{n1}x_{12}+\cdots+a_{nn}x_{n2} & \cdots & a_{n1}x_{1n}+\cdots+a_{nn}x_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}x_{11} & a_{11}x_{12} & \cdots & a_{11}x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nn}x_{n1} & a_{nn}x_{n2} & \cdots & a_{nn}x_{nn} \end{vmatrix},$$

整理后变为

$$W'(t) = (a_{11}+\cdots+a_{nn})\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} = (a_{11}+\cdots+a_{nn})W(t)$$

$$= [a_{11}(t)+\cdots+a_{nn}(t)]W(t).$$

(2) 由于 $W'(t) = [a_{11}(t)+\cdots+a_{nn}(t)]W(t)$，即 $\dfrac{dW(t)}{W(t)} = [a_{11}(t)+\cdots+a_{nn}(t)]dt$. 两边从 t_0 到 t 积分则有

$$\ln|W(t)| - \ln|W(t_0)| = \int_{t_0}^{t}[a_{11}(s)+\cdots+a_{nn}(s)]ds,$$

即 $W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}[a_{11}(s)+\cdots+a_{nn}(s)]ds}, t_0, t \in [a,b]$.

6. 设 $\boldsymbol{A}(t)$ 为区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上的连续 $n \times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{\Phi}(t)$ 为方程 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵，而 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 为其一解，试证：

(1) 对于方程 $\boldsymbol{y}' = -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{y}$ 的任一解 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Psi}(t)$ 必有 $\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\varphi}(t) =$ 常数；

(2) $\boldsymbol{\Psi}(t)$ 为方程 $\boldsymbol{y}' = -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{y}$ 的基解矩阵的充要条件是存在非奇异的常数矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}(t) = \boldsymbol{C}$.

解: (1) $[\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)]' = (\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t))'\boldsymbol{\varphi}(t) + \boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\varphi}'(t) = (\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t))'\boldsymbol{\varphi}(t) + \boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)$,

因为 $\boldsymbol{\Psi}'(t) = -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Psi}(t)$，所以 $(\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t))' = -\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{A}(t)$.

从而$[\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)]' = -\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\varphi}(t) + \boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\varphi}(t) = 0$.

所以对于方程 $\boldsymbol{y}' = -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{y}$ 的任一解 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Psi}(t)$，必有 $\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\varphi}(t) =$ 常数.

(2) 必要性：

假设 $\boldsymbol{\Psi}(t)$ 为方程 $\boldsymbol{y}' = -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{y}$ 的基解矩阵，则

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)]' &= [\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)]'\boldsymbol{\Phi}(t) + \boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}'(t)\\ &= [-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Psi}(t)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}(t) + \boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\\ &= -\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t) + \boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\\ &= 0,\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}(t) = \boldsymbol{C}$.

由于 $\boldsymbol{\Phi}(t)$，$\boldsymbol{\Psi}(t)$ 分别是基解矩阵，从而 $\det(\boldsymbol{\Phi}(t)) \neq 0$，$\det(\boldsymbol{\Psi}(t)) \neq 0$，这样，$\det(\boldsymbol{C}) \neq 0$，即 $\boldsymbol{C}$ 是非奇异的.

充分性：

若存在非奇异常数矩阵 $\boldsymbol{C}$，$\det \boldsymbol{C} \neq 0$，使 $\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}(t) = \boldsymbol{C}$，由于 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 为方程 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵，故 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$ 存在，所以 $\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t) = \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$，并且 $\det(\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)) = \det(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)) \neq 0$，即 $\boldsymbol{\Psi}(t)$ 为方程 $\boldsymbol{y}' = -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{y}$ 的基解矩阵.

7. 设方程组 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 有一个非零解 $\boldsymbol{x}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t))^{\mathrm{T}}$，其中 $\varphi_n(t) \neq 0$，证明：$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 经变换 $y_i = x_i - \dfrac{\varphi_i(t)}{\varphi_n(t)}x_n (i = 1,2,\cdots,n-1)$，$y_n = \dfrac{1}{\varphi_n(t)}x_n$ 可化为关于 $n-1$ 个未知函数 $y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$ 的线性方程组，它只含 $n-1$ 个方程，且不含 y_n.

解：当 $i = 1,2,\cdots,n-1$ 时，由 $y_i = x_i - \dfrac{\varphi_i}{\varphi_n}x_n$，可得到

$$\begin{aligned}y'_i &= x'_i - \frac{\varphi'_i\varphi_n - \varphi_i\varphi'_n}{\varphi_n^2}x_n - \frac{\varphi_i}{\varphi_n}x'_n = x'_i - \frac{x_n}{\varphi_n}\varphi'_i + \frac{\varphi_i x_n}{\varphi_n^2}\varphi'_n - \frac{\varphi_i}{\varphi_n}x'_n\\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - \frac{x_n}{\varphi_n}\cdot\sum_{j=1}^n a_{ij}\varphi_j + \frac{\varphi_i x_n}{\varphi_n^2}\cdot\sum_{j=1}^n a_{nj}\varphi_j - \frac{\varphi_i}{\varphi_n}\sum_{j=1}^n a_{nj}x_j\\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij}\left(x_j - \frac{\varphi_j}{\varphi_n}x_n\right) + \sum_{j=1}^n a_{nj}\cdot\frac{-\varphi_i}{\varphi_n}\left(x_j - \frac{\varphi_j}{\varphi_n}x_n\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}\left(x_j - \frac{\varphi_j}{\varphi_n}x_n\right) + a_{in}\left(x_n - \frac{\varphi_n}{\varphi_n}x_n\right) + \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}\cdot\frac{-\varphi_i}{\varphi_n}\left(x_j - \frac{\varphi_j}{\varphi_n}x_n\right)\\ &\quad + a_{nn}\cdot\frac{-\varphi_i}{\varphi_n}\left(x_n - \frac{\varphi_n}{\varphi_n}x_n\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n-1}\left(a_{ij} - a_{nj}\frac{\varphi_i}{\varphi_n}\right)y_j.\end{aligned}$$

当 $i = n$ 时，由 $y_n = \dfrac{1}{\varphi_n}x_n$，可得到

$$\begin{aligned}y'_n &= \frac{x'_n\varphi_n - x_n\varphi'_n}{\varphi_n^2} = \frac{1}{\varphi_n}\sum_{j=1}^n a_{nj}x_j - \frac{x_n}{\varphi_n^2}\cdot\sum_{j=1}^n a_{nj}\varphi_j = \frac{1}{\varphi_n}\sum_{j=1}^n a_{nj}\left(x_j - \frac{\varphi_j}{\varphi_n}x_n\right)\\ &= \frac{1}{\varphi_n}\sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}\left(x_j - \frac{\varphi_j}{\varphi_n}x_n\right) + \frac{1}{\varphi_n}a_{nn}\left(x_n - \frac{\varphi_n}{\varphi_n}x_n\right) = \frac{1}{\varphi_n}\sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}y_j.\end{aligned}$$

由此可以看到，$y'_i(i=1,2,\cdots,n)$ 可以由 $y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}$ 线性表示，命题得证.

8. 设 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 为方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{Ax}$（$\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 常数矩阵）的标准基解矩阵（即 $\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{E}$），证明：$\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)=\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)$，其中 t_0 为某一值.

证明：由于 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 常数矩阵，所以方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{Ax}$ 的基解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 满足 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\Phi}(t)$，解得 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$，即 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是指数函数的，又根据指数函数的特点知道 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)=\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}$，从而 $\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\cdot\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t_0}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}=\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)$.

9. 设 $\boldsymbol{A}(t)$，$\boldsymbol{f}(t)$ 分别为在区间 $[a,b]$ 上连续的 $n\times n$ 矩阵和 n 维列向量，证明方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$ 存在且最多存在 $n+1$ 个线性无关解.

证明：对于齐次方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$，由定理 4，可知一定存在线性无关的 n 个解，并且这 n 个解可以作为方程的基解矩阵，由定理 9 知至少存在非齐次方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$ 的一个特解.

① 设 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 是齐次方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的 n 个线性无关解，而 $\boldsymbol{x}_0(t)$ 是非齐次方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$ 的一个特解，则

$$\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{x}_0(t),\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{x}_0(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)+\boldsymbol{x}_0(t),\boldsymbol{x}_0(t)$$

是非齐次方程的 $n+1$ 个线性无关解. 这是因为，若存在常数 $k_1,k_2,\cdots,k_n,k_0$，使得

$$k_1(\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{x}_0(t))+k_2(\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{x}_0(t))+\cdots+k_n(\boldsymbol{x}_n(t)+\boldsymbol{x}_0(t))+k_0\boldsymbol{x}_0(t)\equiv 0,$$

则一定有 $k_1+k_2+\cdots+k_n+k_0=0$. 否则，

$$\boldsymbol{x}_0(t)=\frac{-k_1}{k_1+k_2+\cdots+k_n+k_0}\boldsymbol{x}_1(t)+\cdots+\frac{-k_n}{k_1+k_2+\cdots+k_n+k_0}\boldsymbol{x}_n(t),$$

这与 $\boldsymbol{x}_0(t)$ 是非齐次方程的解矛盾. 所以

$$k_1\boldsymbol{x}_1(t)+k_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+k_n\boldsymbol{x}_n(t)\equiv 0.$$

由假设可知，$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，而且 $k_0=0$.

所以非齐次方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$ 存在 $n+1$ 个线性无关解.

② 假设方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$ 存在 $n+2$ 个线性无关解，分别为 $\boldsymbol{\varphi}_1(t),\boldsymbol{\varphi}_2(t),\cdots,\boldsymbol{\varphi}_{n+1}(t),\boldsymbol{\varphi}_{n+2}(t)$，则由性质 2 知 $\boldsymbol{\varphi}_2(t)-\boldsymbol{\varphi}_1(t),\boldsymbol{\varphi}_3(t)-\boldsymbol{\varphi}_1(t),\cdots,\boldsymbol{\varphi}_{n+1}(t)-\boldsymbol{\varphi}_1(t),\boldsymbol{\varphi}_{n+2}(t)-\boldsymbol{\varphi}_1(t)$ 是对应齐次方程的 $n+1$ 个线性无关解，这与推论 1 矛盾，故方程最多有 $n+1$ 个线性无关解.

综合以上 ①②，即证明了方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$ 存在且最多存在 $n+1$ 个线性无关解.

10. 试证非齐次线性微分方程组的叠加原理：

设 $\boldsymbol{x}_1(t)$，$\boldsymbol{x}_2(t)$ 分别是方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}_1(t),$$
$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}_2(t)$$

的解，则 $\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{x}_2(t)$ 是方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}_1(t)+\boldsymbol{f}_2(t)$$

的解.

证明：

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}_1(t), \quad ①$$
$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}_2(t) \quad ②$$

分别将 $\boldsymbol{x}_1(t)$，$\boldsymbol{x}_2(t)$ 代入 ① 和 ② 则

$$x_1' = A(t)x_1 + f_1(t), x_2' = A(t)x_2 + f_2(t),$$

则 $x_1' + x_2' = A(t)[x_1(t) + x_2(t)] + f_1(t) + f_2(t)$,

$$[x_1(t) + x_2(t)]' = A(t)[x_1(t) + x_2(t)] + f_1(t) + f_2(t).$$

令 $x = x_1(t) + x_2(t)$，即证 $x' = A(t)x + f_1(t) + f_2(t)$，从而 $x_1(t) + x_2(t)$ 是方程组

$$x' = A(t)x + f_1(t) + f_2(t)$$

的解.

11. 考虑方程组 $x' = Ax + f(t)$，其中

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, f(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix},$$

(1) 试验证 $\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$ 是 $x' = Ax$ 的基解矩阵;

(2) 试求 $x' = Ax + f(t)$ 的满足初始条件 $\varphi(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 的解 $\varphi(t)$.

证明:(1) 首先验证它是解矩阵.

用 $\varphi_1(t)$ 表示 $\Phi(t)$ 的第一列 $\varphi_1(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}$，则

$$\varphi_1'(t) = \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\varphi_1(t),$$

故 $\varphi_1(t)$ 是齐次方程组的解.

如果用 $\varphi_2(t)$ 表示 $\Phi(t)$ 的第二列 $\varphi_2(t) = \begin{bmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$，有

$$\varphi_2'(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} + 2te^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\varphi_2(t),$$

故 $\varphi_2(t)$ 也是齐次方程组的解.

从而 $\Phi(t)$ 是方程的解矩阵.

又 $\det \Phi(t) = \begin{vmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{vmatrix} = e^{4t} \neq 0$，故 $\Phi(t)$ 是 $x' = Ax$ 的基解矩阵.

(2) 由常数变易公式可知，方程满足初始条件 $\varphi(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 的解

$$\varphi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)\varphi(0) + \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds,$$

而 $\Phi^{-1}(t) = \dfrac{\begin{bmatrix} e^{2t} & -te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}}{e^{4t}} = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{-2t}$,

故 $\varphi(t) = \begin{bmatrix} (1-t)e^{2t} \\ -e^{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\int_0^t \begin{bmatrix} e^{-2s} & -se^{-2s} \\ 0 & e^{-2s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sin s \\ \cos s \end{bmatrix}ds$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{25}(-15t+27)e^{2t}-\frac{2}{25}\cos t-\frac{14}{25}\sin t\\ -\frac{3}{5}e^{2t}-\frac{2}{5}\cos t+\frac{1}{5}\sin t\end{bmatrix}.$$

12. 试求 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$,满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$. 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix},\boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix}0\\e^{2t}\end{bmatrix}.$$

解:由上述第 11 题可知 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}e^{2t}&te^{2t}\\0&e^{2t}\end{bmatrix}$,则

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)=\frac{\begin{bmatrix}e^{2s}&-se^{2s}\\0&e^{2s}\end{bmatrix}}{e^{4s}}=\begin{bmatrix}1&-s\\0&1\end{bmatrix}e^{-2s}.$$

若方程满足初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$,则有

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\int_0^t\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds=\begin{bmatrix}e^{2t}&te^{2t}\\0&e^{2t}\end{bmatrix}\int_0^t\begin{bmatrix}1&-s\\0&1\end{bmatrix}e^{-2s}\begin{bmatrix}0\\e^{2s}\end{bmatrix}ds=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}t^2e^{2t}\\te^{2t}\end{bmatrix}.$$

若 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$,则有

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_0^t\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds$$

$$=\begin{bmatrix}e^{2t}&te^{2t}\\0&e^{2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}t^2e^{2t}\\te^{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left(1-t+\frac{1}{2}t^2\right)e^{2t}\\(t-1)e^{2t}\end{bmatrix}.$$

13. 试求下列方程的通解:

(1) $x''+x=\sec t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$;

(2) $x'''-8x=e^{2t}$;

(3) $x''-6x'+9x=e^t$.

解:(1) 易知对应的齐次线性方程 $x''+x=0$ 的基本解组为 $x_1(t)=\cos t,x_2(t)=\sin t$.

这时,$W[x_1(t),x_2(t)]=\begin{vmatrix}\cos t&\sin t\\-\sin t&\cos t\end{vmatrix}=1$.

由公式得

$$\varphi(t)=\int_0^t\frac{\sin t\cos s-\cos t\sin s}{1}\sec s ds$$

$$=\int_0^t(\sin t-\cos t\tan s)ds=t\sin t+\cos t\ln|\cos t|.$$

所以原方程的通解为 $x=c_1\cos t+c_2\sin t+t\sin t+\cos t\ln|\cos t|$.

(2) 易知对应的齐次线性方程 $x''' - 8x = 0$ 的基本解组为

$$x_1(t) = e^{2t}, x_2(t) = e^{-t}\cos\sqrt{3}t, x_3(t) = e^{-t}\sin\sqrt{3}t.$$

因为 $\lambda = 2$ 是方程的特征根,所以方程有形如 $x = Ate^{2t}$ 的解,代入得 $A = \frac{1}{12}$.

于是原方程的通解为 $x = (c_1\cos\sqrt{3}t + c_2\sin\sqrt{3}t)e^{-t} + c_3e^{2t} + \frac{1}{12}te^{2t}$.

(3) 易知对应的齐次线性方程 $x'' - 6x' + 9x = 0$ 对应的特征方程为 $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$,解得 $\lambda_{1,2} = 3$,故方程的一个基本解组为

$$x_1(t) = e^{3t}, x_2(t) = te^{3t},$$

$$W[x_1(t), x_2(t)] = \begin{vmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 3e^{3t} & e^{3t} + 3te^{3t} \end{vmatrix} = e^{6t},$$

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{te^{3t}e^{3s} - e^{3t}\cdot se^{3s}}{e^{6s}}e^s ds = \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{2}te^{3t} - \frac{1}{4}e^{3t}.$$

因为 te^{3t}, e^{3t} 是对应的齐次线性方程的解,故 $\varphi_1(t) = \frac{1}{4}e^t$ 也是原方程的一个解. 因此原方程的通解为 $x = c_1e^{3t} + c_2te^{3t} + \frac{1}{4}e^t$.

14. 已知方程组 $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1\cos^2 t - x_2(1 - \sin t\cos t), \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1(1 + \sin t\cos t) + x_2\sin^2 t \end{cases}$ 有解 $x_1 = -\sin t, x_2 = \cos t$,求其通解.

解:设 $x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t)$ 是方程组的满足初值 $\varphi_1(0) = 1, \varphi_2(0) = 0$ 的一组解,则有

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(t) & -\sin t \\ \varphi_2(t) & \cos t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot e^{\int_0^t (\cos^2 t + \sin^2 t)dt} = e^t,$$

解得 $\varphi_2(t) = \frac{e^t - \varphi_1(t)\cos t}{\sin t}$,代入方程组第一个方程得

$$\varphi_1'(t) = \varphi_1(t)\cot t + e^t(\cos t - \csc t).$$

此为一阶线性微分方程,由通解公式可得

$$\varphi_1(t) = e^{\int_0^t \cot s ds}\left[\int_0^t e^s(\cos s - \csc s)\cdot e^{-\int_0^s \cot r dr}ds + 1\right],$$

化简得 $\varphi_1(t) = e^t\cos t$,从而 $\varphi_2(t) = e^t\sin t$.

所以,原方程的通解为 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} e^t\cos t \\ e^t\sin t \end{bmatrix}$, c_1, c_2 为任意常数.

15. 已知方程组 $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{t}x_1 - x_2 + t, \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{t^2}x_1 + \frac{2}{t}x_2 - t^2, \end{cases}$ $t > 0$ 的对应齐次方程组有解 $x_1 = t^2, x_2 = -t$,求其通解.

解:设 $x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t)$ 是对应的齐次方程组的满足初值条件 $\varphi_1(1) = c_1, \varphi_2(1) = c_2$ 的一组解, c_1, c_2 为任意常数. 由刘维尔公式可得

$$\begin{vmatrix} t^2 & \varphi_1(t) \\ -t & \varphi_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & c_1 \\ -1 & c_2 \end{vmatrix} \cdot e^{\int_1^t \frac{3}{s}ds} = (c_1+c_2)t^3,$$

解得 $\varphi_1(t)=(c_1+c_2)t^2-t\varphi_2(t)$，代入对应齐次方程组第二个方程得

$$\varphi_2'(t)=\frac{1}{t}\varphi_2(t)+(c_1+c_2),$$

此为一阶线性微分方程，由求解公式可得

$$\varphi_2(t)=e^{\int_1^t \frac{1}{s}ds}\left[\int_1^t (c_1+c_2)e^{-\int_1^s \frac{1}{\tau}d\tau}ds+c_2\right]=t[(c_1+c_2)\ln t+c_2],$$

从而 $\varphi_1(t)=(c_1+c_2)t^2-t^2[(c_1+c_2)\ln t+c_2]$.

特别地，令 $c_1=1, c_2=0$，则 $\begin{bmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t^2-t^2\ln t\\ t\ln t\end{bmatrix}$.

由于 $\begin{vmatrix} t^2 & t^2-t^2\ln t \\ -t & t\ln t \end{vmatrix}=t^3\neq 0$，所以矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} t^2 & t^2-t^2\ln t \\ -t & t\ln t \end{bmatrix}$ 可以作为齐次方程的基解矩阵，并且 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)=\frac{1}{t^3}\begin{bmatrix} t\ln t & t^2\ln t-t^2 \\ t & t^2 \end{bmatrix}$.

由定理 9，可得

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} &= \boldsymbol{\Phi}(t)\cdot\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_1^t \boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds \\
&= \begin{bmatrix} t^2 & t^2-t^2\ln t \\ -t & t\ln t \end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} t^2 & t^2-t^2\ln t \\ -t & t\ln t \end{bmatrix}\cdot\int_1^t \frac{1}{s^3}\begin{bmatrix} s\ln s & s^2\ln s-s^2 \\ s & s^2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} s\\ -s^2\end{bmatrix}ds \\
&= \begin{bmatrix} t^2 & t^2-t^2\ln t \\ -t & t\ln t \end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{t^2}{2}\ln t-\frac{t^2}{2}(\ln t)^2+\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{4} \\ \frac{t}{2}(\ln t)^2+\frac{t}{2}\ln t-\frac{3}{4}t^3+\frac{3}{4}t \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

这就是原方程的通解，其中 c_1, c_2 为任意常数.

16. 给定方程 $x''+8x'+7x=f(t)$，其中 $f(t)$ 在 $0\leqslant t<+\infty$ 上连续，试利用常数变易公式，证明：

(1) 如果 $f(t)$ 在 $0\leqslant t<+\infty$ 上有界，则方程的每一个解在 $0\leqslant t<+\infty$ 上有界；

(2) 如果当 $t\to\infty$ 时，$f(t)\to 0$，则方程的每一个解 $\varphi(t)$，满足 $\varphi(t)\to 0$（当 $t\to\infty$ 时）.

证明：(1) 因为 $f(t)$ 在 $0\leqslant t<+\infty$ 上有界，所以存在 $M>0$，使得 $|f(t)|\leqslant M, \forall t\in[0,+\infty)$.

又因为 $x=e^{-t}, x=e^{-7t}$ 是齐次线性方程的基本解组，

所以非齐次线性方程的解

$$\varphi(t)=\int_0^t \frac{e^{-7t}e^{-s}-e^{-t}e^{-7s}}{W[e^{-s},e^{-7s}]}f(s)ds=\int_0^t \frac{e^{-7t}e^{-s}-e^{-t}e^{-7s}}{-6e^{-8s}}f(s)ds$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^t e^{-(t-s)}f(s)ds-\frac{1}{6}\int_0^t e^{-7(t-s)}f(s)ds.$$

故 $|\varphi(t)|\leqslant\frac{M}{6}\left(|1-e^{-t}|+\frac{1}{7}|1-e^{-7t}|\right)\leqslant\frac{M}{6}\left(\frac{8}{7}-\frac{1}{7}e^{-7t}-e^{-t}\right)\leqslant\frac{4}{21}M.$

又对于非齐次线性方程组的满足初始条件的解 $x(t)$，都存在固定的常数 c_1, c_2，使得

$$x(t)=c_1e^{-7t}+c_2e^{-t}+\varphi(t).$$

从而 $|x(t)|\leqslant|c_1e^{-7t}|+|c_2e^{-t}|+|\varphi(t)|\leqslant|c_1|+|c_2|+\frac{4}{21}M.$

因此方程的每一个解在 $0\leqslant t<+\infty$ 上有界.

(2) 当 $t\to\infty$ 时,显然 $c_1e^{-7t}\to 0, c_2e^{-t}\to 0.$

$$\left|\int_0^t e^{-(t-s)}f(s)\mathrm{d}s\right|\leqslant|f(t)|\int_0^t e^{-(t-s)}f(s)\mathrm{d}s\leqslant|f(t)|,$$

$$\left|\int_0^t e^{-7(t-s)}f(s)\mathrm{d}s\right|\leqslant|f(t)|\int_0^t e^{-7(t-s)}f(s)\mathrm{d}s\leqslant|f(t)|,$$

因为 $t\to\infty$ 时, $f(t)\to 0$, 所以 $\int_0^t e^{-(t-s)}f(s)\mathrm{d}s\to 0, \int_0^t e^{-7(t-s)}f(s)\mathrm{d}s\to 0,$

所以从方程通解表达式容易得到方程的每一个解 $\varphi(t)$,满足 $\varphi(t)\to 0$(当 $t\to\infty$ 时).

17. 给定方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}, \tag{①}$$

这里 $\boldsymbol{A}(t)$ 是区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的连续 $n\times n$ 矩阵,设 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是 ① 的一个基解矩阵, n 维向量函数 $\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x})$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$, $\|\boldsymbol{x}\|<\infty$ 上连续, $t_0\in[a,b]$.

试证明初值问题:

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}),\\ \boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}\end{cases} \tag{$*$}$$

的唯一解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是积分方程组

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}+\int_{t_0}^t\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{F}(s,\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s \tag{$**$}$$

的连续解. 反之,($**$)的连续解也是初值问题($*$)的解.

证明:因为 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是 ① 的一个基解矩阵,令

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}(t), \tag{②}$$

这里 $\boldsymbol{C}(t)$ 是待定的 n 维列向量.

假设($*$)有形如 ② 的解,将 ② 代入($*$)中的方程组得

$$\boldsymbol{\Phi}'(t)\boldsymbol{C}(t)+\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}(t)+\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}),$$

又因为 $\boldsymbol{\Phi}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)$,所以

$$\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}'(t)=\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}). \tag{③}$$

因为在 $[a,b]$ 上 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是非奇异的,所以 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$ 存在,用 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$ 乘 ③ 式两边后再积分可得

$$\boldsymbol{C}(t)=\boldsymbol{C}+\int_{t_0}^t\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{F}(s,\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s, t_0,t\in[a,b], \boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}.$$

代回 ② 式即得 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}+\int_{t_0}^t\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{F}(s,\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s,$

即 $\boldsymbol{x}(t)$ 也是($**$)的解.

反之,设 $\boldsymbol{x}(t)$ 是($**$)的连续解,对($**$)式两端微分可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}&=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^t\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{F}(s,\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s+\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}(t))\\&=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^t\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{F}(s,\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s+\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}(t))\\&=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}(t)),\end{aligned}$$

而且 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$.

因而(* *)的连续解也是初值问题(*)的解.

习题 5.2

1. 假设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 矩阵,试证:

(1) 对任意常数 c_1,c_2 都有 $\exp(c_1\boldsymbol{A}+c_2\boldsymbol{A})=\exp c_1\boldsymbol{A}\cdot\exp c_2\boldsymbol{A}$;

(2) 对任意整数 k,都有 $(\exp\boldsymbol{A})^k=\exp k\boldsymbol{A}$.(当 k 是负整数时,规定 $(\exp\boldsymbol{A})^k=[(\exp\boldsymbol{A})^{-1}]^{-k}$.)

证明:(1) 由性质 1 可知,当矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可交换时,

$$\exp(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\exp\boldsymbol{A}\exp\boldsymbol{B},$$

因为 $(c_1\boldsymbol{A})\cdot(c_2\boldsymbol{A})=(c_2\boldsymbol{A})\cdot(c_1\boldsymbol{A})$,

所以 $\exp(c_1\boldsymbol{A}+c_2\boldsymbol{A})=\exp c_1\boldsymbol{A}\cdot\exp c_2\boldsymbol{A}$.

(2) $k>0$ 时,

$$(\exp\boldsymbol{A})^k=\exp\boldsymbol{A}\cdot\exp\boldsymbol{A}\cdot\cdots\cdot\exp\boldsymbol{A}=\exp(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}+\cdots+\boldsymbol{A})=\exp k\boldsymbol{A},$$

$k<0$ 时,$-k>0$,

$$\begin{aligned}(\exp\boldsymbol{A})^k&=[(\exp\boldsymbol{A})^{-1}]^{-k}=[\exp(-\boldsymbol{A})]^{-k}=\exp(-\boldsymbol{A})\cdot\exp(-\boldsymbol{A})\cdots\exp(-\boldsymbol{A})\\&=\exp[(-\boldsymbol{A})(-k)]=\exp k\boldsymbol{A}.\end{aligned}$$

故 $\forall k$,都有 $(\exp\boldsymbol{A})^k=\exp k\boldsymbol{A}$.

2. 试证:如果 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 满足初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解,那么 $\boldsymbol{\varphi}(t)=[\exp\boldsymbol{A}(t-t_0)]\boldsymbol{\eta}$.

证明:由定理 9 可知 $\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_0^t\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s$.

由于 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\exp\boldsymbol{A}t$,$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)=(\exp\boldsymbol{A}t_0)^{-1}=\exp(-\boldsymbol{A}t_0)$,$\boldsymbol{f}(s)=0$,又因为矩阵

$$(\boldsymbol{A}t)\cdot(-\boldsymbol{A}t_0)=(-\boldsymbol{A}t_0)\cdot(\boldsymbol{A}t),$$

所以 $\boldsymbol{\varphi}(t)=[\exp\boldsymbol{A}(t-t_0)]\boldsymbol{\eta}$.

3. 试计算下面矩阵的特征值及对应的特征向量:

(1) $\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix}$;　　(2) $\begin{bmatrix}2&-3&3\\4&-5&3\\4&-4&2\end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix}1&2&1\\1&-1&1\\2&0&1\end{bmatrix}$;　　(4) $\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix}$.

解:(1) 因为 $\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\-4&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda+1)=0$,所以 $\lambda_1=5,\lambda_2=-1$.

对应于 $\lambda_1=5$ 的特征向量 $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$ 必满足线性代数方程组

$$[\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}]\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}4&-2\\-4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

因此,对于任意常数 $\alpha\neq0$,$\boldsymbol{u}=\alpha\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ 是对应于 $\lambda_1=5$ 的特征向量.类似地,可求出对应于 $\lambda_2=-1$

的特征向量为$\boldsymbol{v}=\beta\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}(\beta\neq 0)$.

(2) 因为 $\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda-2)=0$,所以 $\lambda_1=-1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$.

对应于 $\lambda_1=-1$ 的特征向量 $\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}$ 必满足线性代数方程组

$$[\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}]\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}-3&3&-3\\-4&4&-3\\-4&4&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

因此,对于任意常数 $\alpha\neq 0,\boldsymbol{u}_1=\alpha\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ 是对应于 $\lambda_1=-1$ 的特征向量.

类似地,可以求出对应于 $\lambda_2=2$ 的特征向量 $\boldsymbol{u}_2=\beta\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}(\beta\neq 0)$,以及对应于 $\lambda_3=-2$ 的特征向量

$\boldsymbol{u}_3=\gamma\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}(\gamma\neq 0)$.

(3) 因为 $\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-1\\-1&\lambda+1&-1\\-2&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-3)=0$,所以 $\lambda_1=-1$(二重),$\lambda_2=3$.

对应于 $\lambda_1=-1$(二重) 的特征向量 $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}$ 必满足线性代数方程组

$$[\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}]\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}-2&-2&-1\\-1&0&-1\\-2&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

因此,对于任意常数 $\alpha\neq 0,\boldsymbol{u}=\alpha\begin{bmatrix}2\\-1\\-2\end{bmatrix}$ 是对应于 $\lambda_1=-1$(二重) 的特征向量.类似地,可以求出对应于 $\lambda_2=3$ 的特征向量$\boldsymbol{v}=\beta\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}(\beta\neq 0)$.

(4) 因为 $\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\0&\lambda&-1\\6&11&\lambda+6\end{vmatrix}=(\lambda+3)(\lambda+1)(\lambda+2)=0$.

所以 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2,\lambda_3=-3$.

对应于 $\lambda_1=-1$ 的特征向量 $\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}$ 必满足线性代数方程组

$$[\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}]\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}-1&-1&0\\0&-1&-1\\6&11&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

因此,对于任意常数 $\alpha\neq0,\boldsymbol{u}_1=\alpha\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$ 是对应于 $\lambda_1=-1$ 的特征向量.

类似地,可以求出对应于 $\lambda_2=-2$ 的特征向量 $\boldsymbol{u}_2=\beta\begin{bmatrix}1\\-2\\4\end{bmatrix}(\beta\neq0)$,以及对应于 $\lambda_3=-3$ 的特征向量 $\boldsymbol{u}_3=\gamma\begin{bmatrix}1\\-3\\9\end{bmatrix}(\gamma\neq0)$.

4. 试求方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的一个基解矩阵,并计算 $\exp\boldsymbol{A}t$,其中 $\boldsymbol{A}$ 为

(1) $\begin{bmatrix}-2&1\\-1&2\end{bmatrix}$;　　(2) $\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix}2&-3&3\\4&-5&3\\4&-4&2\end{bmatrix}$;　　(4) $\begin{bmatrix}1&0&3\\8&1&-1\\5&1&-1\end{bmatrix}$.

解:(1) $\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=0$,得 $\lambda_1=\sqrt{3},\lambda_2=-\sqrt{3}$.

对应于 λ_1 的特征向量为 $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$,必满足线性代数方程组

$$[\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}]\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}2+\sqrt{3}&-1\\1&\sqrt{3}-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

解得 $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}1\\2+\sqrt{3}\end{bmatrix}\alpha(\alpha\neq0)$.

类似地,可以求出对应于 $\lambda_2=-\sqrt{3}$ 的特征向量为 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\2-\sqrt{3}\end{bmatrix}\beta(\beta\neq0)$.

由于 $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}1\\2+\sqrt{3}\end{bmatrix},\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\2-\sqrt{3}\end{bmatrix}$ 是对应于 λ_1,λ_2 的两个线性无关的特征向量,

所以 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}e^{\sqrt{3}t}&e^{-\sqrt{3}t}\\(2+\sqrt{3})e^{\sqrt{3}t}&(2-\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}t}\end{bmatrix}$ 是所求方程组的一个基解矩阵,且

$$\exp \boldsymbol{A}t = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -(2-\sqrt{3})e^{\sqrt{3}t}+(2+\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}t} & e^{\sqrt{3}t}-e^{-\sqrt{3}t} \\ -e^{\sqrt{3}t}+e^{-\sqrt{3}t} & (2+\sqrt{3})e^{\sqrt{3}t}-(2-\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}t} \end{bmatrix}.$$

(2) 由 $\det(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=0$ 得 $\lambda_1=5,\lambda_2=-1$.

解得 $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$是对应于 λ_1,λ_2 的两个线性无关的特征向量，则基解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} e^{5t} & e^{-t} \\ 2e^{5t} & -e^{-t} \end{bmatrix},\boldsymbol{\Phi}(0)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

则 $\exp(\boldsymbol{A}t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} e^{5t}+2e^{-t} & e^{5t}-e^{-t} \\ 2e^{5t}-2e^{-t} & 2e^{5t}+e^{-t} \end{bmatrix}$.

(3) 由 $\det(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=0$ 得 $\lambda_1=2,\lambda_2=-2,\lambda_3=-1$.

解得基解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-2t} & e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-2t} & 0 \end{bmatrix},\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$,

则 $\exp \boldsymbol{A}t=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=\begin{bmatrix} e^{2t} & -e^{2t}+e^{-t} & e^{2t}-e^{-t} \\ e^{2t}-e^{-2t} & -e^{2t}+e^{-2t}+e^{-t} & e^{2t}-e^{-t} \\ e^{2t}-e^{-2t} & -e^{2t}+e^{-2t} & e^{2t} \end{bmatrix}$.

(4) 由 $\det(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=0$ 得 $\lambda_1=-3,\lambda_2=2+\sqrt{7},\lambda_3=2-\sqrt{7}$,

解得基解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} -3e^{-3t} & e^{(2+\sqrt{7})t} & e^{(2-\sqrt{7})t} \\ 7e^{-3t} & \frac{4\sqrt{7}-5}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} & \frac{-4\sqrt{7}-5}{3}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ 4e^{-3t} & \frac{1+\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} & \frac{1-\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t} \end{bmatrix}$.

则 $\exp \boldsymbol{A}t=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=\dfrac{1}{4\sqrt{7}}[\boldsymbol{A}_1\quad \boldsymbol{A}_2\quad \boldsymbol{A}_3]$，其中

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix} 2\sqrt{7}e^{-3t}+(3+\sqrt{7})e^{(2+\sqrt{7})t}+(-3+\sqrt{7})e^{(2-\sqrt{7})t} \\ \frac{-14\sqrt{7}}{3}e^{-3t}+\frac{13+7\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t}+\frac{-13+7\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ \frac{-8\sqrt{7}}{3}e^{-3t}+\frac{10+4\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t}+\frac{-10+4\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{7}}{3}e^{-3t}+\frac{5-\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t}+\frac{-5-\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ \frac{-14\sqrt{7}}{9}e^{-3t}+\frac{-53+25\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t}+\frac{53+25\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ \frac{-8\sqrt{7}}{9}e^{-3t}+\frac{-2+4\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t}+\frac{2+4\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t} \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} \frac{-8\sqrt{7}}{3}e^{-3t} + \frac{-2+4\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} + \frac{2+4\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ \frac{56\sqrt{7}}{9}e^{-3t} + \frac{122-28\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t} + \frac{-122-28\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ \frac{32\sqrt{7}}{9}e^{-3t} + \frac{26+2\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t} + \frac{-26+2\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t} \end{bmatrix}.$$

5. 试求方程组 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵,并求满足初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(0) = \boldsymbol{\eta}$ 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$:

(1) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 8 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

解:(1) 由本节习题第 4 题(2) 知,其基解矩阵为 $\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{5t} \\ -e^{-t} & 2e^{5t} \end{bmatrix}$.

而满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0) = \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$的解为

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{5t} \\ -e^{-t} & 2e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{5t} & e^{-t} \\ 2e^{5t} & -e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} + 2e^{5t} \\ -e^{-t} + 4e^{5t} \end{bmatrix}.$$

(2) 由本节习题第 4 题(4) 知,基解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} -3e^{-3t} & e^{(2+\sqrt{7})t} & e^{(2-\sqrt{7})t} \\ 7e^{-3t} & \frac{4\sqrt{7}-5}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} & \frac{-4\sqrt{7}-5}{3}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ 4e^{-3t} & \frac{1+\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} & \frac{1-\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t} \end{bmatrix},$$

而满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0) = \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}$ 的解为 $\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)\boldsymbol{\eta} = \exp \boldsymbol{A}t \cdot \boldsymbol{\eta}$,经计算得

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \frac{1}{4\sqrt{7}} \begin{bmatrix} \frac{52\sqrt{7}}{3}e^{-3t} + \frac{4-26\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} + \frac{-4-26\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ \frac{-364\sqrt{7}}{9}e^{-3t} + \frac{-748+146\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t} + \frac{748+146\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ \frac{-208\sqrt{7}}{9}e^{-3t} + \frac{-178-22\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t} + \frac{178-22\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t} \end{bmatrix}.$$

(3) 由本节习题第 3 题(3) 可知，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=3,\lambda_2=-1$(二重).

对应于 $\lambda_1=3,\lambda_2=-1$ 的特征向量分别为 $\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}2\alpha\\ \alpha\\ 2\alpha\end{bmatrix},\boldsymbol{u}_2=\begin{bmatrix}\beta\\ \gamma\\ -\dfrac{4\beta+2\gamma}{3}\end{bmatrix}$.

则 $\boldsymbol{\varphi}(t)=\mathrm{e}^{3t}\boldsymbol{E}\boldsymbol{u}_1+\mathrm{e}^{-t}[\boldsymbol{E}+t(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})]\boldsymbol{u}_2$,

为了得到基解矩阵，依次令 $\boldsymbol{\eta}$ 等于 $(1,0,0)^{\mathrm{T}},(0,1,0)^{\mathrm{T}},(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，代入 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\eta}$，解得

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} & \frac{1}{4}\mathrm{e}^{3t}+\mathrm{e}^{-t}\left(t-\frac{1}{4}\right) & \frac{3}{8}\mathrm{e}^{3t}+\mathrm{e}^{-t}\left(-\frac{3}{8}-\frac{1}{2}t\right)\\ \frac{1}{4}\mathrm{e}^{3t}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t} & \frac{1}{8}\mathrm{e}^{3t}+\mathrm{e}^{-t}\left(\frac{7}{8}-\frac{1}{2}t\right) & \frac{3}{16}\mathrm{e}^{3t}+\mathrm{e}^{-t}\left(-\frac{3}{16}+\frac{1}{4}t\right)\\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} & \frac{1}{4}\mathrm{e}^{3t}+\mathrm{e}^{-t}\left(-\frac{1}{4}-t\right) & \frac{3}{8}\mathrm{e}^{3t}+\mathrm{e}^{-t}\left(\frac{5}{8}+\frac{1}{2}t\right)\end{bmatrix}.$$

由于初值条件 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\alpha\\ \alpha\\ 2\alpha\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta\\ \gamma\\ -\dfrac{4\beta+2\gamma}{3}\end{bmatrix}$，解得 $\begin{cases}\alpha=\dfrac{1}{4},\\ \beta=\dfrac{1}{2},\\ \gamma=-\dfrac{1}{4},\end{cases}$ 所以 $\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix},\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\mathrm{e}^{3t}\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{v}_1+\mathrm{e}^{-t}[\boldsymbol{E}+t(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})]\,\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\\ \frac{1}{4}\mathrm{e}^{3t}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}\\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}.$$

6. 求方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$ 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$:

(1) $\boldsymbol{\varphi}(0)=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix},\boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^t\\1\end{bmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix},\boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix}0\\0\\ \mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{\varphi}(0)=\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&-3\\2&-1\end{bmatrix},\boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix}\sin t\\ -2\cos t\end{bmatrix}$.

解：(1) 令 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵为 $\boldsymbol{\Phi}(t)$，又因为

$$p(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=(\lambda-5)(\lambda+1)=0,$$

所以 $\lambda_1=5,\lambda_2=-1$.

解得 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{5t}&\mathrm{e}^{-t}\\2\mathrm{e}^{5t}&-\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)=\dfrac{1}{-3\mathrm{e}^{4t}}\begin{bmatrix}-\mathrm{e}^{-t}&-\mathrm{e}^{-t}\\-2\mathrm{e}^{5t}&\mathrm{e}^{5t}\end{bmatrix},\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=-\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}-1&-1\\-2&1\end{bmatrix}$，由

求解公式可得

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)\boldsymbol{\varphi}(0)+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_0^t\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{3}{20}\mathrm{e}^{5t}-\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{t}-\frac{2}{5}\\ \frac{3}{10}\mathrm{e}^{5t}+\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t}+\frac{1}{5}\end{bmatrix}.$$

故所求的解为 $\boldsymbol{\varphi}(t)=\begin{bmatrix}\frac{3}{20}\mathrm{e}^{5t}-\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{t}-\frac{2}{5}\\ \frac{3}{10}\mathrm{e}^{5t}+\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t}+\frac{1}{5}\end{bmatrix}$.

(2) 由 $\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=0$ 得 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2,\lambda_3=-3$.

设 λ_1 对应的特征向量为 $\boldsymbol{v}_1$，则 $(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{v}_1=0$，得 $\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}-\alpha\\ \alpha\\ -\alpha\end{bmatrix}$，$\alpha\neq0$.

取 $\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$，同理可得 $\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}1\\ -3\\ 9\end{bmatrix}$.

则 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-3t}\\ -\mathrm{e}^{-t} & -2\mathrm{e}^{-2t} & -3\mathrm{e}^{-3t}\\ \mathrm{e}^{-t} & 4\mathrm{e}^{-2t} & 9\mathrm{e}^{-3t}\end{bmatrix}$. 由求解公式可得

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)\boldsymbol{\varphi}(0)+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_0^t\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s$$

$$=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-3t}\\ -\mathrm{e}^{-t} & -2\mathrm{e}^{-2t} & -3\mathrm{e}^{-3t}\\ \mathrm{e}^{-t} & 4\mathrm{e}^{-2t} & 9\mathrm{e}^{-3t}\end{bmatrix}\cdot\int_0^t\begin{bmatrix}3\mathrm{e}^{s} & \frac{5}{2}\mathrm{e}^{s} & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{s}\\ -3\mathrm{e}^{2s} & -4\mathrm{e}^{2s} & -\mathrm{e}^{2s}\\ \mathrm{e}^{3s} & \frac{3}{2}\mathrm{e}^{3s} & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \mathrm{e}^{-s}\end{bmatrix}\mathrm{d}s$$

$$=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-2t}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-3t}-\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-t}\\ -2\mathrm{e}^{-2t}+\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{5}{4}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-t}\\ 4\mathrm{e}^{-2t}-\frac{9}{4}\mathrm{e}^{-3t}-\frac{7}{4}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}.$$

故所求的解为 $\boldsymbol{\varphi}(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-2t}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-3t}-\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-t}\\ -2\mathrm{e}^{-2t}+\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{5}{4}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-t}\\ 4\mathrm{e}^{-2t}-\frac{9}{4}\mathrm{e}^{-3t}-\frac{7}{4}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}$.

(3) 令 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵为 $\boldsymbol{\Phi}(t)$，由 $\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=0$ 得 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$.

解得对应的基解矩阵为 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}e^t & e^{2t}\\ e^t & \frac{2}{3}e^{2t}\end{bmatrix}$.

所以 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)=\begin{bmatrix}-2e^{-t} & 3e^{-t}\\ 3e^{-2t} & -3e^{-2t}\end{bmatrix}$,从而 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 3 & -3\end{bmatrix}$,由求解公式可得

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)\boldsymbol{\varphi}(0)+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_0^t\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s$$

$$=\begin{bmatrix}\cos t-2\sin t+e^t(-4-2\eta_1+3\eta_2)+3e^{2t}(1+\eta_1-\eta_2)\\ 2\cos t-2\sin t+e^t(-4-2\eta_1+3\eta_2)+2e^{2t}(1+\eta_1-\eta_2)\end{bmatrix}.$$

故所求的解为

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\begin{bmatrix}\cos t-2\sin t+e^t(-4-2\eta_1+3\eta_2)+3e^{2t}(1+\eta_1-\eta_2)\\ 2\cos t-2\sin t+e^t(-4-2\eta_1+3\eta_2)+2e^{2t}(1+\eta_1-\eta_2)\end{bmatrix}.$$

7. 假设 m 不是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.试证非齐次线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}e^{mt}$$

有一解形如

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{p}e^{mt},$$

其中 $\boldsymbol{c},\boldsymbol{p}$ 是常数向量.

证明:要证 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{p}e^{mt}$ 是否为解,就是能否确定常数向量 $\boldsymbol{p}$,使得

$$\boldsymbol{p}me^{mt}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}e^{mt}+\boldsymbol{c}e^{mt},$$

则 $\boldsymbol{p}(m\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{c}$.

由于 m 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,故 $|m\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|\neq 0$,从而 $m\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 存在逆矩阵.

那么 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{c}(m\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$,这样就证明了方程有形如 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{p}e^{mt}$ 的解.

8. 给定方程组

$$\begin{cases}x_1''-3x_1'+2x_1+x_2'-x_2=0,\\ x_1'-2x_1+x_2'+x_2=0,\end{cases}$$

(1) 试证上面方程组等价于方程组 $\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$,其中

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_1'\\x_2\end{bmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\-4&4&2\\2&-1&-1\end{bmatrix};$$

(2) 试求(1)中的方程组的基解矩阵;

(3) 试求原方程组满足初值条件 $x_1(0)=0,x_1'(0)=1,x_2(0)=0$ 的解.

证明:(1) 令 $u_1=x_1,u_2=x_1',u_3=x_2$ 则原方程组化为

$$\begin{cases}u_1'=x_1'=u_2,\\ u_2'=x_1''=-4u_1+4u_2+2u_3,\\ u_3'=x_2'=2u_1-u_2-u_3.\end{cases}$$

即 $\boldsymbol{u}'=\begin{bmatrix}u_1'\\u_2'\\u_3'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\-4&4&2\\2&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}$.

从而有 $\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$.

反之,设 $x_1=u_1,x_1'=u_2,x_2=u_3$ 则方程组 $\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$ 可化为

$$\begin{cases}x_1''=-4x_1+4x_1'+2x_2,\\x_2'=2x_1-x_1'-x_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1''=3x_1'-2x_1-x_2'+x_2,\\x_2'=2x_1-x_1'-x_2.\end{cases}$$

即证明了上面方程组等价于方程组 $\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$.

(2) 由 $\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=0$ 得 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=2$.

由 $\begin{cases}-u_2=0,\\4u_1-4u_2-2u_3=0,\\-2u_1+u_2+u_3=0\end{cases}$ 得 $\boldsymbol{u}_1=\alpha\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},\alpha\neq0$.

同理可求得 $\boldsymbol{u}_2=\beta\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix},\beta\neq0$ 和 $\boldsymbol{u}_3=\gamma\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\gamma\neq0$.

取 $\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\\frac{1}{2}\end{bmatrix},\boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$ 则 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}1&e^t&e^{2t}\\0&e^t&2e^{2t}\\2&\frac{1}{2}e^t&0\end{bmatrix}$ 是一个基解矩阵.

(3) 令 $u_1=x_1,u_2=x_1',u_3=x_2$,则原方程组化为等价的方程组 $\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$ 且初始条件变为 $u_1(0)=0,u_2(0)=1,u_3(0)=0$. 而 $\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$ 满足此初始条件的解为

$$e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{\eta}=e^{\boldsymbol{A}t}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-2e^t+\frac{3}{2}e^{2t}\\-2e^t+3e^{2t}\\1-e^t\end{bmatrix}.$$

于是根据等价性,原方程组满足初始条件的解为

$$x_1(t)=\frac{1}{2}-2e^t+\frac{3}{2}e^{2t},x_2(t)=1-e^t.$$

9. 假设 $y=\varphi(x)$ 是二阶常系数线性微分方程初值问题

$$\begin{cases}y''+ay'+by=0,\\y(0)=0,y'(0)=1\end{cases}$$

的解,试证 $y=\int_0^x\varphi(x-t)f(t)\mathrm{d}t$ 是方程 $y''+ay'+by=f(x)$ 的解,这里 $f(x)$ 为已知连续函数.

证明:$y=\int_0^x\varphi(x-t)f(t)\mathrm{d}t$,

因为 $y'=\varphi(0)f(x)+\int_0^x\varphi'(x-t)f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\varphi'(x-t)f(t)\mathrm{d}t$,

$$y'' = \int_0^x \varphi''(x-t)f(t)\mathrm{d}t + \varphi'(0)f(x) = \int_0^x \varphi''(x-t)f(t)\mathrm{d}t + f(x),$$

所以有

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= \int_0^x \varphi''(x-t)f(t)\mathrm{d}t + f(x) + a\int_0^x \varphi'(x-t)f(t)\mathrm{d}t + b\int_0^x \varphi(x-t)f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x [\varphi''(x-t) + a\varphi'(x-t) + b\varphi(x-t)]f(t)\mathrm{d}t + f(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

从而，$y = \int_0^x \varphi(x-t)f(t)\mathrm{d}t$ 是方程 $y'' + ay' + by = f(x)$ 的解，这里的 $f(x)$ 为已知连续函数.

习题 5.3

1. 求下列初值问题的解：

(1) $x'' + 9x = 6\mathrm{e}^{3t}, x(0) = x'(0) = 0$;

(2) $x^{(4)} + x = 2\mathrm{e}^t, x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 1$.

解：(1) 对方程两边施行拉普拉斯变换得

$$(s^2 + 9)X(s) = \frac{6}{s-3},$$

由此得 $X(s) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{s-3} - \frac{s}{s^2+9}\right] - \frac{1}{s^2+9}$.

施行拉普拉斯反变换，查表得解

$$x(t) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3t} - \frac{1}{3}\cos 3t - \frac{1}{3}\sin 3t.$$

此即为所求初值问题的解.

(2) 对方程两边施行拉普拉斯变换得

$$s^4X(s) - s^3 - s^2 - s - 1 + X(s) = \frac{2}{s-1},$$

由此得 $X(s) = \frac{1}{s-1}$.

施行拉普拉斯反变换，查表得解 $x(t) = \mathrm{e}^t$，此即为所要求的解.

方法点击：拉普拉斯变换法是高阶常系数线性方程求特解的方法，求解时需要给出初始条件. 当然，求初值问题的解也可以先求出微分方程的通解，然后用初值条件来确定通解中的任意常数，从而求出初值问题的解.

2. 火车沿水平的道路运动. 火车的质量是 m，机车的牵引力是 F，运动时的阻力 $W = a + bv$，其中 a，b 是常数，而 v 是火车的速度；s 是走过的路程. 试确定火车的运动规律，设 $t = 0$ 时 $s = 0, v = 0$.

解：根据牛顿第二定律 $ma = F - W$ 及 $W = a + bv$ 得

$$m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + a - F = 0,$$

即 $$\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{b}{m}\frac{ds}{dt}=\frac{F-a}{m}. \tag{①}$$

此为二阶常系数线性非齐次方程，它对应的齐次方程的特征方程和特征根为

$$\lambda^2+\frac{b}{m}\lambda=0, \lambda_1=0, \lambda_2=-\frac{b}{m},$$

所以齐次方程的通解为 $s=c_1+c_2e^{-\frac{b}{m}t}$.

由于 $\lambda=0$ 是单重特征根，取 $\bar{s}=At$，代入方程①得 $A=\frac{F-a}{b}$，故方程的一个特解为 $\bar{s}=\frac{F-a}{b}t$.

因而方程①的通解为 $s=c_1+c_2e^{-\frac{b}{m}t}+\frac{F-a}{b}t$.

由初始条件 $t=0$ 时 $s=0, v=s'=0$ 得

$$\begin{cases} c_1+c_2=0, \\ -\frac{b}{m}c_2+\frac{F-a}{b}=0, \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} c_2=\frac{m(F-a)}{b^2}, \\ c_1=-\frac{m(F-a)}{b^2}. \end{cases}$

因此，满足初始条件的解即运动规律为 $S(t)=\frac{F-a}{b}t-\frac{m(F-a)}{b^2}(1-e^{-\frac{b}{m}t})$.

3. 试用拉普拉斯变换法解习题 5.2 的第 5 题和第 6 题，也可以利用计算机软件求解.

解：5(1). 令 $X_1(s)=\mathscr{L}[\varphi_1(t)], X_2(s)=\mathscr{L}[\varphi_2(t)]$. 设 $x_1=\varphi_1(t), x_2=\varphi_2(t)$ 满足微分方程组，对方程组施行拉普拉斯变换，得

$$\begin{cases} sX_1(s)-\varphi_1(0)=X_1(s)+2X_2(s), \\ sX_2(s)-\varphi_2(0)=4X_1(s)+3X_2(s), \end{cases}$$

即 $\begin{cases} (s-1)X_1(s)-2X_2(s)=\varphi_1(0)=3, \\ -4X_1(s)+(s-3)X_2(s)=\varphi_2(0)=3, \end{cases}$

解得 $X_1(s)=\frac{3(s-1)}{(s-5)(s+1)}, X_2(s)=\frac{3(s+3)}{(s-5)(s+1)}$,

施行反变换即得

$$\varphi_1(t)=2e^{5t}+e^{-t}, \varphi_2(t)=4e^{5t}-e^{-t}.$$

5(2). 令 $X_1(s)=\mathscr{L}[\varphi_1(t)], X_2(s)=\mathscr{L}[\varphi_2(t)], X_3(s)=\mathscr{L}[\varphi_3(t)]$.

设 $x_1=\varphi_1(t), x_2=\varphi_2(t), x_3=\varphi_3(t)$ 满足微分方程组，对方程组施行拉普拉斯变换，得

$$\begin{cases} sX_1(s)-\varphi_1(0)=X_1(s)+3X_3(s), \\ sX_2(s)-\varphi_2(0)=8X_1(s)+X_2(s)-X_3(s), \\ sX_3(s)-\varphi_3(0)=5X_1(s)+X_2(s)-X_3(s), \end{cases}$$

即 $\begin{cases} (s-1)X_1(s)-3X_3(s)=\varphi_1(0)=0, \\ -8X_1(s)+(s-1)X_2(s)+X_3(s)=\varphi_2(0)=-2, \\ -5X_1(s)-X_2(s)+(s+1)X_3(s)=\varphi_3(0)=-7. \end{cases}$

解出 $X_1(s), X_2(s), X_3(s)$ 得到

$$X_1(s)=\frac{15-21s}{s^3-s^2-15s-9},X_2(s)=\frac{-2s^2+7s-143}{s^3-s^2-15s-9},X_3(s)=\frac{-7s^2+12s-5}{s^3-s^2-15s-9},$$

施行反变换得到满足初值条件的解

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{13}{3}e^{-3t}-\frac{91+2\sqrt{7}}{42}e^{(2-\sqrt{7})t}-\frac{91-2\sqrt{7}}{42}e^{(2+\sqrt{7})t}\\-\frac{91}{9}e^{-3t}+\frac{511+374\sqrt{7}}{126}e^{(2-\sqrt{7})t}+\frac{511-374\sqrt{7}}{126}e^{(2+\sqrt{7})t}\\-\frac{52}{9}e^{-3t}-\frac{77-89\sqrt{7}}{126}e^{(2-\sqrt{7})t}-\frac{77+89\sqrt{7}}{126}e^{(2+\sqrt{7})t}\end{bmatrix}.$$

5(3). 令 $X_1(s)=\mathscr{L}[\varphi_1(t)],X_2(s)=\mathscr{L}[\varphi_2(t)],X_3(s)=\mathscr{L}[\varphi_3(t)]$. 对方程施行拉普拉斯变换,得

$$\begin{cases}sX_1(s)-\varphi_1(0)=X_1(s)+2X_2(s)+X_3(s),\\sX_2(s)-\varphi_2(0)=X_1(s)-X_2(s)+X_3(s),\\sX_3(s)-\varphi_3(0)=2X_1(s)+X_3(s),\end{cases}$$

即$$\begin{cases}(s-1)X_1(s)-2X_2(s)-X_3(s)=\varphi_1(0)=1,\\-X_1(s)+(s+1)X_2(s)-X_3(s)=\varphi_2(0)=0,\\-2X_1(s)+(s-1)X_3(s)=\varphi_3(0)=0,\end{cases}$$

解得 $X_1(s)=\frac{s^2-1}{s^3-s^2-5s-3},X_2(s)=\frac{s+1}{s^3-s^2-5s-3},X_3(s)=\frac{2(s+1)}{s^3-s^2-5s-3}$.

施行反变换得到满足初值条件的解

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\begin{bmatrix}\varphi_1(t)\\\varphi_2(t)\\\varphi_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(e^{3t}+e^{-t})\\\frac{1}{4}(e^{3t}-e^{-t})\\\frac{1}{2}(e^{3t}-e^{-t})\end{bmatrix}.$$

6(1). 令 $X_1(s)=\mathscr{L}[\varphi_1(t)],X_2(s)=\mathscr{L}[\varphi_2(t)]$,对方程施行拉普拉斯变换得

$$\begin{cases}sX_1(s)-\varphi_1(0)=X_1(s)+2X_2(s)+\frac{1}{s-1},\\sX_2(s)-\varphi_2(0)=4X_1(s)+3X_2(s)+\frac{1}{s},\end{cases}$$

即$$\begin{cases}(s-1)X_1(s)-2X_2(s)=\varphi_1(0)+\frac{1}{s-1}=-1+\frac{1}{s-1},\\-4X_1(s)+(s-3)X_2(s)=\varphi_2(0)+\frac{1}{s}=1+\frac{1}{s}.\end{cases}$$

解得 $X_1(s)=\frac{-s^3+7s^2-6s-2}{s(s-1)(s+1)(s-5)},X_2(s)=\frac{s^3-5s^2+7s+1}{s(s-1)(s+1)(s-5)}$,

施行反变换得到满足初值条件的解为

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\begin{bmatrix}\varphi_1(t)\\\varphi_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{20}e^{5t}-e^{-t}-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{2}{5}\\\frac{3}{10}e^{5t}+e^{-t}-\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{5}\end{bmatrix}.$$

6(2). 令 $X_1(s)=\mathscr{L}[\varphi_1(t)],X_2(s)=\mathscr{L}[\varphi_2(t)],X_3(s)=\mathscr{L}[\varphi_3(t)]$,对方程施行拉普拉斯变换得

$$\begin{cases} sX_1(s)-\varphi_1(0)=X_2(s), \\ sX_2(s)-\varphi_2(0)=X_3(s), \\ sX_3(s)-\varphi_3(0)=-6X_1(s)-11X_2(s)-6X_3(s)+\dfrac{1}{s+1}, \end{cases}$$

即 $\begin{cases} sX_1(s)-X_2(s)=\varphi_1(0)=0, \\ sX_2(s)-X_3(s)=\varphi_2(0)=0, \\ 6X_1(s)+11X_2(s)+(s+6)X_3(s)=\varphi_3(0)+\dfrac{1}{s+1}=\dfrac{1}{s+1}. \end{cases}$

解出

$$X_1(s)=\frac{1}{(s^3+6s^2+11s+6)(s+1)},$$

$$X_2(s)=\frac{s}{(s+1)(s^3+6s^2+11s+6)},$$

$$X_3(s)=\frac{s^2}{(s+1)(s^3+6s^2+11s+6)},$$

施行反变换得到满足初值条件的解为

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\begin{bmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\\ \varphi_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{-2t}-\dfrac{1}{4}e^{-3t}-\dfrac{3}{4}e^{-t}+\dfrac{1}{2}te^{-t} \\ -2e^{-2t}+\dfrac{3}{4}e^{-3t}+\dfrac{5}{4}e^{-t}-\dfrac{1}{2}te^{-t} \\ 4e^{-2t}-\dfrac{9}{4}e^{-3t}-\dfrac{7}{4}e^{-t}+\dfrac{1}{2}te^{-t} \end{bmatrix}.$$

6(3). 令 $X_1(s)=\mathscr{L}[\varphi_1(t)]$，$X_2(s)=\mathscr{L}[\varphi_2(t)]$，对方程组施行拉普拉斯变换得

$$\begin{cases} sX_1(s)-\varphi_1(0)=4X_1(s)-3X_2(s)+\dfrac{1}{s^2+1}, \\ sX_2(s)-\varphi_2(0)=2X_1(s)-X_2(s)-\dfrac{2s}{s^2+1}, \end{cases}$$

即 $\begin{cases} (s-4)X_1(s)+3X_2(s)=\varphi_1(0)+\dfrac{1}{s^2+1}=\eta_1+\dfrac{1}{s^2+1}, \\ -2X_1(s)+(s+1)X_2(s)=\varphi_2(0)-\dfrac{2s}{s^2+1}=\eta_2-\dfrac{2s}{s^2+1}, \end{cases}$

解出 $X_1(s)=\dfrac{\eta_1 s^3+(\eta_1-3\eta_2)s^2+(\eta_1+7)s+\eta_1-3\eta_2+1}{(s-1)(s-2)(s^2+1)}$,

$$X_2(s)=\frac{\eta_2 s^3+(2\eta_1-4\eta_2-2)s^2+(\eta_2+8)s+2\eta_1-4\eta_2+2}{(s-1)(s-2)(s^2+1)},$$

施行反变换得到满足初值条件的解为

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\begin{bmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -(4+2\eta_1-3\eta_2)e^t+3(1+\eta_1-\eta_2)e^{2t}+\cos t-2\sin t \\ -(4+2\eta_1-3\eta_2)e^t+2(1+\eta_1-\eta_2)e^{2t}+2\cos t-2\sin t \end{bmatrix}.$$

4. 求下列初值问题的解：

(1) $\begin{cases} x_1'+x_2'=0, \\ x_1'-x_2'=1, \\ x_1(0)=1, x_2(0)=0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1''+3x_1'+2x_1+x_2'+x_2=0, \\ x_1'+2x_1+x_2'-x_2=0, \\ x_1(0)=1, x_1'(0)=-1, x_2(0)=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1''-m^2x_2=0, \\ x_2''+m^2x_1=0, \\ x_1(0)=\eta_1, x_1'(0)=\eta_2, x_2(0)=\eta_3, x_2'(0)=\eta_4. \end{cases}$

解:(1) 根据方程解得 $x_1'=\dfrac{1}{2}, x_2'=-\dfrac{1}{2}$.

故 $x_1=\dfrac{1}{2}t+c_1, x_2=-\dfrac{1}{2}t+c_2$.

因为 $x_1(0)=1$,所以$\dfrac{1}{2}\times 0+c_1=1$,解得 $c_1=1$,解得 $x_1=\dfrac{1}{2}t+1$.

因为 $x_2(0)=0$,所以 $-\dfrac{1}{2}\times 0+c_2=0$,解得 $c_2=0, x_2=-\dfrac{1}{2}t$.

综上所述,$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2}t+1 \\ -\dfrac{1}{2}t \end{bmatrix}$.

(2) 对方程两边施行拉普拉斯变换,得

$$\begin{cases} [s^2X_1(s)-s+1]+3(sX_1(s)-1)+2X_1(s)+sX_2(s)+X_2(s)=0, \\ sX_1(s)-1+2X_1(s)+sX_2(s)-X_2(s)=0, \end{cases}$$

解得

$$X_1(s)=\frac{s^2-3}{(s+1)(s+2)(s-2)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{s-2},$$

$$X_2(s)=\frac{-s-2}{(s+1)(s+2)(s-2)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s+1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s-2},$$

故 $\varphi_1(t)=\dfrac{2}{3}e^{-t}+\dfrac{1}{4}e^{-2t}+\dfrac{1}{12}e^{2t}, \varphi_2(t)=\dfrac{1}{3}(e^{-t}-e^{2t})$.

(3) 对方程两边施行拉普拉斯变换,得

$$\begin{cases} s^2X_1(s)-s\eta_1-\eta_2-m^2X_2(s)=0, \\ s^2X_2(s)-s\eta_3-\eta_4+m^2X_1(s)=0, \end{cases}$$

即 $\begin{cases} s^2X_1(s)-m^2X_2(s)=s\eta_1+\eta_2, \\ s^2X_2(s)+m^2X_1(s)=s\eta_3+\eta_4, \end{cases}$

解得

$$X_1(s)=\frac{\eta_1s^3+\eta_2s^2+m^2s\eta_3+\eta_4m^2}{s^4+m^4}, X_2(s)=\frac{\eta_3s^3+\eta_4s^2-m^2\eta_1s-m^2\eta_2}{s^4+m^4},$$

施行拉普拉斯反变换就得到解

$$\varphi_1(t)=\left[\left(\frac{1}{2}\eta_1-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4\right)\cos\frac{m}{\sqrt{2}}t+\left(\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2-\frac{1}{2}\eta_3+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4\right)\sin\frac{m}{\sqrt{2}}t\right]\cdot e^{\frac{m}{\sqrt{2}}t}+$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\eta_1+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4\right)\cos\frac{m}{\sqrt{2}}t+\left(\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{1}{2}\eta_3+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4\right)\sin\frac{m}{\sqrt{2}}t\right]\cdot e^{-\frac{m}{\sqrt{2}}t},$$

$$\varphi_2(t)=\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{1}{2}\eta_3-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4\right)\cos\frac{m}{\sqrt{2}}t+\left(\frac{1}{2}\eta_1-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4\right)\sin\frac{m}{\sqrt{2}}t\right]\cdot e^{-\frac{m}{\sqrt{2}}t}+$$
$$\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{1}{2}\eta_3+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4\right)\cos\frac{m}{\sqrt{2}}t+\left(-\frac{1}{2}\eta_1-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4\right)\sin\frac{m}{\sqrt{2}}t\right]\cdot e^{\frac{m}{\sqrt{2}}t}.$$

第六章　非线性微分方程

习题 6.1

1. 试求出下列方程组的所有驻定解,并讨论相应的驻定解的稳定性态:

(1) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(1-x-y),\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{4}y(2-3x-y);\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=9x-6y+4xy-5x^2,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=6x-6y-5xy+4y^2.\end{cases}$

解:(1) 令 $x(1-x-y)=0,\dfrac{1}{4}y(2-3x-y)=0$,则得到驻定解为

$$\begin{cases}x=0,\\ y=0,\end{cases}\begin{cases}x=0,\\ y=2,\end{cases}\begin{cases}x=1,\\ y=0,\end{cases}\begin{cases}x=\dfrac{1}{2},\\[2mm] y=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

① 在 $x=0,y=0$ 处的线性化方程为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{2}y.\end{cases}$$

显然可以看出驻定解 $x=0,y=0$ 是不稳定的.

② 在 $x=0,y=2$ 处的线性化方程为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}y.\end{cases}$$

容易看出其特征根为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-\dfrac{1}{2}$,故此解是渐近稳定的.

③ 在 $x=1,y=0$ 处的线性化方程为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x-y,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{1}{4}y.\end{cases}$$

显然其特征根为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-\dfrac{1}{4}$,故此解是渐近稳定的.

④ 在 $x=\dfrac{1}{2},y=\dfrac{1}{2}$ 处的线性化方程为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{1}{2}(x+y),\\ \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{1}{8}(3x+y),\end{cases}$$

经计算其特征方程为 $\lambda^2+\dfrac{5}{8}\lambda-\dfrac{1}{8}=0$,显然有特征根为正数,故此解是不稳定的.

(2) 令 $9x-6y+4xy-5x^2=0,6x-6y-5xy+4y^2=0$,则得到驻定解为

$$\begin{cases}x=0,\\ y=0,\end{cases}\begin{cases}x=1,\\ y=2,\end{cases}\begin{cases}x=2,\\ y=1.\end{cases}$$

① 在 $x=0,y=0$ 处的线性化方程为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=9x-6y,\\ \dfrac{dy}{dt}=6x-6y,\end{cases}$$

其特征方程为 $\lambda^2-15\lambda+90=0$,解得两特征根均有正实部,故此解是不稳定的.

② 在 $x=1,y=2$ 处的线性化方程为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=7x-2y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-4x-3y,\end{cases}$$

其特征方程为 $\lambda^2-4\lambda-29=0$,解得两特征根为实数且一正一负,故此解也是不稳定的.

③ 在 $x=2,y=1$ 处的线性化方程为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-7x+2y,\\ \dfrac{dy}{dt}=x-8y,\end{cases}$$

其特征方程为 $\lambda^2+15\lambda+54=0$,解得两特征根为 $\lambda_1=-6,\lambda_2=-9$,故此解是渐近稳定的.

2. 研究下列方程(组)零解的稳定性:

(1) $\dfrac{d^3x}{dt^3}+5\dfrac{d^2x}{dt^2}+6\dfrac{dx}{dt}+x=0$;

(2) $\dfrac{dx}{dt}=\mu x-y,\dfrac{dy}{dt}=\mu y-z,\dfrac{dz}{dt}=\mu z-x$($\mu$ 为常数).

解:(1) 由已知微分方程得其特征方程为

$$\lambda^3+5\lambda^2+6\lambda+1=0,$$

由此得赫尔维茨行列式

$$a_0=1,a_1=5,\Delta_2=\begin{vmatrix}5&1\\1&6\end{vmatrix}=29,a_3=1.$$

根据定理 3,特征方程所有根均有负实部,由教材的定理 2 知零解是渐近稳定的.

(2) 由已知微分方程组得其特征方程为

$$\begin{vmatrix}\mu-\lambda&-1&0\\0&\mu-\lambda&-1\\-1&0&\mu-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

即 $\lambda^3-3\mu\lambda^2+3\mu^2\lambda+1-\mu^3=0$，由此得赫尔维茨行列式

$$a_0=1,a_1=-3\mu,\Delta_2=\begin{vmatrix}-3\mu & 1\\ 1-\mu^3 & 3\mu^2\end{vmatrix}=-8\mu^3-1,a_3=1-\mu^3.$$

所以当 $\mu<-\frac{1}{2}$ 时，$a_1>0,\Delta_2>0,a_3>0$，此时由教材的定理 3 知特征方程所有根均有负实部，再由教材的定理 2 知零解是渐近稳定的.

当 $\mu=-\frac{1}{2}$ 时，容易验证 3 个特征根均为负实部，故是渐近稳定的.

当 $\mu>-\frac{1}{2}$ 时，存在特征根具有正实部，故零解是不稳定的.

3. 试判别下列函数的定号性：

(1) $V(x,y)=x^2$；

(2) $V(x,y)=x^2-2xy^2$；

(3) $V(x,y)=x^2-2xy^2+y^4+x^4$；

(4) $V(x,y)=x^2+2xy+y^2+x^2y^2$；

(5) $V(x,y)=x\cos x+y\sin y$.

解：(1) $V(x,y)=x^2\geqslant 0$，所以是常正的.

(2) $V(x,y)=x^2-2xy^2$ 是不定号的.

(3) $V(x,y)=x^2-2xy^2+y^4+x^4=(x-y^2)^2+x^2$ 是定正的.

(4) $V(x,y)=x^2+2xy+y^2+x^2y^2=(x+y)^2+x^2y^2$ 是定正的.

(5) $V(x,y)=x\cos x+y\sin y$ 是不定号的.

4. 试用形如 $V(x,y)=ax^2+by^2$ 的 V 函数确定下列方程组零解的稳定性：

(1) $\frac{dx}{dt}=-xy^2,\frac{dy}{dt}=-yx^2$；

(2) $\frac{dx}{dt}=-x+2y^3,\frac{dy}{dt}=-2xy^2$；

(3) $\frac{dx}{dt}=x^3-2y^3,\frac{dy}{dt}=xy^2+x^2y+\frac{1}{2}y^3$.

解：(1) 取 $V(x,y)=x^2+y^2$，则

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=2x(-xy^2)+2y(-yx^2)=-4x^2y^2,$$

因为 V 定正且 $\frac{dV}{dt}$ 常负，所以给定方程组的零解是稳定的.

(2) 取 $V(x,y)=x^2+2y^2$，则

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=2x(-x+2y^3)+4y(-2xy^2)=-2x^2-4xy^3,$$

因为 V 定正且 $\frac{dV}{dt}$ 定负，所以给定方程组的零解是渐近稳定的.

(3) 取 $V(x,y)=x^2+2y^2$，则

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=2x(x^3-2y^3)+4y\left(xy^2+x^2y+\frac{1}{2}y^3\right)$$

$$=2x^4+4x^2y^2+2y^4,$$

因为 V 定正且 $\frac{dV}{dt}$ 定正,所以给定方程组的零解是不稳定的.

5. 研究下列方程组零解的稳定性:

(1) $\frac{dx}{dt}=-y^2+x(x^2+y^2),\frac{dy}{dt}=-x^2-y^2(x^2-y^2)$;

(2) $\frac{dx}{dt}=ax-xy^2,\frac{dy}{dt}=2x^4y$($a$ 为参数);

(3) $\frac{dx}{dt}=ax-y^2,\frac{dy}{dt}=2x^3y$($a$ 为参数).

解:(1) 取 $V(x,y)=x^2+y^2$,则

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$=2x[-y^2+x(x^2+y^2)]+2y[-x^2-y^2(x^2-y^2)].$$

当 $x=0$ 时,$\frac{dV}{dt}=2y^5$,显然它是不定号的,所以给定方程组的零解是不稳定的.

(2) 取 $V(x,y)=x^4+y^2$,则

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=4x^3(ax-xy^2)+2y(2x^4y)=4ax^4,$$

所以给定方程组的零解,当 $a<0$ 时是渐近稳定的;当 $a=0$ 时是稳定的;当 $a>0$ 时是不稳定的.

(3) 取 $V(x,y)=x^4+y^2$,则

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=4x^3(ax-y^2)+2y(2x^3y)=4ax^4,$$

所以给定方程组的零解,当 $a<0$ 时是渐近稳定的;当 $a=0$ 时是稳定的;当 $a>0$ 时是不稳定的.

6. 给定微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)=0,$$

其中 $f(0)=0$,而当 $x\neq 0$ 时,$xf(x)>0(-k<x<k)$. 试将其化为平面方程组,并用形如

$$V(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x f(s)ds$$

的 V 函数讨论方程组零解的稳定性.

解:令 $y=\frac{dx}{dt}$,则原方程化为平面方程组

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y,\\ \frac{dy}{dt}=-f(x).\end{cases}$$

取 $V(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x f(s)ds$,则

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=f(x)\cdot y+y\cdot(-f(x))=0,$$

所以方程组的零解是稳定的.

习题 6.2

1. 试求下列线性方程组的奇点,并判断奇点的类型及稳定性:

(1) $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-x-y+1,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x-y-5$;

(2) $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2x-7y+19,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x-2y+5$.

解: (1) 令 $-x-y+1=0,x-y-5=0$,经计算得 $x=3,y=-2$,即奇点为$(3,-2)$.

再令 $z=x-3,\eta=y+2$,则原方程组变为

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-z-\eta,\\ \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}=z-\eta.\end{cases}$$

此时

$$a=-1,b=-1,c=1,d=-1,$$

$$p=-(a+d)=2,q=ad-bc=2,p^2-4q=4-8=-4<0,$$

所以由教材中图(6.10)可得该奇点是稳定焦点.

(2) 令 $2x-7y+19=0,x-2y+5=0$,经计算得 $x=1,y=3$,即奇点为$(1,3)$.

令 $z=x-1,\eta=y-3$,则原方程组变为

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=2z-7\eta,\\ \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}=z-2\eta,\end{cases}$$

此时

$$a=2,b=-7,c=1,d=-2,$$

$$p=-(a+d)=0,q=ad-bc=3,p^2-4q=0-12=-12<0,$$

所以由教材中图(6.10)可得该奇点是中心奇点.

2. 试讨论方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax+by,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=cy$$

的奇点类型,其中 a,b,c 为实常数且 $ac\neq 0$.

解: 显然方程组有唯一奇点$(0,0)$,由方程组知:

当 $ac<0$ 时,原点$(0,0)$为鞍点;

当 $ac>0,a\neq c,a>0$ 时,$(0,0)$为不稳定结点;

当 $ac>0,a\neq c,a<0$ 时,$(0,0)$为稳定结点;

当 $a=c,b\neq 0,a>0$ 时,$(0,0)$为不稳定退化结点;

当 $a=c,b\neq 0,a<0$ 时,$(0,0)$为稳定退化结点;

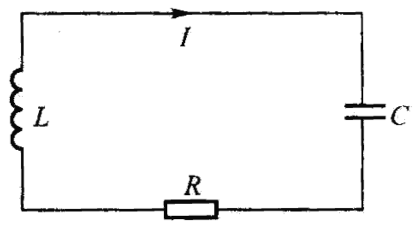
当 $a=c>0,b=0$ 时,$(0,0)$为不稳定临界结点;

当 $a=c<0,b=0$ 时,$(0,0)$为稳定临界结点.

3. RLC 振动回路(如图(6.1))中电流变化规律满足微分方程

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{I}{C}=0(L>0,R\geqslant 0,C>0),$$

试讨论这一系统的平衡状态(即方程的奇点)的可能类型.



图(6.1)

解:令 $x=I,y=\frac{dI}{dt}$,则原方程等价于方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{1}{LC}x-\dfrac{R}{L}y.\end{cases}$$

显然此方程组有唯一的奇点(0,0).

利用上述第 2 题的结论,这里 $p=\frac{R}{L},q=\frac{1}{LC}>0,p^2-4q=\frac{R^2C-4L}{L^2C}$,知

当 $R>0,R^2C-4L>0$ 时,(0,0) 为稳定结点;

当 $R>0,R^2C-4L=0$ 时,(0,0) 为稳定退化结点;

当 $R>0,R^2C-4L<0$ 时,(0,0) 为稳定焦点;

当 $R=0$ 时,(0,0) 为中心奇点.

4. 试确定下列方程组的周期解、极限环,并讨论极限环的稳定性:

(1) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y-x(x^2+y^2-1)^2,\\ \dfrac{dy}{dt}=x-y(x^2+y^2-1)^2;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9)-y(x^2+y^2-4),\\ \dfrac{dy}{dt}=y(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9)+x(x^2+y^2-4).\end{cases}$

解:(1) 作变换 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,原方程组可化为

$$\begin{cases}\dfrac{dr}{dt}=-r(r^2-1)^2,\\ \dfrac{d\theta}{dt}=1,\end{cases}$$

求解上述方程组,得到两个特解

$$\begin{cases}r=0,\\ \theta=t-t_0,\end{cases}\text{及}\begin{cases}r=1,\\ \theta=t-t_0.\end{cases}$$

故原方程组有一个奇点(0,0),一个周期解 $x^2+y^2=1$. 容易判断周期解 $x^2+y^2=1$ 是半稳定的极限环.

(2) 作变换 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,原方程组可化为

$$\begin{cases}\dfrac{dr}{dt}=r(r^2-1)(r^2-9),\\ \dfrac{d\theta}{dt}=r^2-4.\end{cases}$$

易见原方程组有一奇点(0,0),两个周期解 $x^2+y^2=1, x^2+y^2=9$.

先考虑 $r=1$ 内部的轨线,由 $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}<0$ 知轨线沿顺时针方向.

又由 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}>0$ 且 $r\leqslant 1$,易知 $\lim\limits_{t\to+\infty} r(t)=1$.

同样在 $r=1$ 外部的轨线,有 $\lim\limits_{t\to+\infty} r(t)=1$.

因而 $r=1$ 是稳定极限环.

再考虑 $r=3$ 内部的轨线,$2<r<3$,由 $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}>0$ 知轨线沿逆时针方向.

又由 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}<0$,且 $r\leqslant 3$,易知 $\lim\limits_{t\to+\infty} r(t)=3$.

同样在 $r=3$ 的外部轨线,有 $\lim\limits_{t\to+\infty} r(t)=3$.

因此 $r=3$ 是不稳定极限环.

5. 试判别下列方程组有无极限环存在:

(1) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x+y+\dfrac{1}{3}x^3-y^2x,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+y+yx^2+\dfrac{2}{3}y^3;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y-x+x^3,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x-y+y^3.\end{cases}$

解:(1) 设 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x+y+\dfrac{1}{3}x^3-y^2x=X(x,y),\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+y+yx^2+\dfrac{2}{3}y^3=Y(x,y),\end{cases}$ 则

$$\frac{\partial X(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial Y(x,y)}{\partial y}=1+x^2-y^2+1+x^2+2y^2=2+2x^2+y^2>0,$$

故由定理 8,知原方程组无极限环.

(2) 作变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,原方程组可化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=r[r^2(\sin^4\theta+\cos^4\theta)-1],\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-1+r^2\sin\theta\cdot\cos\theta(\sin^2\theta-\cos^2\theta).\end{cases}$$

由于

$$\sin^4\theta+\cos^4\theta=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta\in\left[\frac{1}{2},1\right],$$

所以当 $r<1$ 时,$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}<0$;当 $r^2>2$ 时,$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}>0$.

因此在环域 $1<r^2<2$ 内存在极限环,并且是不稳定的.

6. 证明下列方程(组)存在唯一的稳定极限环:

(1) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+y-x^5-3x^2y;\end{cases}$

(2) $\frac{d^2x}{dt^2}+\alpha(x^{2n}-\beta)\frac{dx}{dt}+\gamma x^{2m-1}=0$($\alpha,\beta,\gamma$ 为正常数，n,m 为正整数).

证明:(1) 原方程组等价于线性微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+(3x^2-1)\frac{dx}{dt}+(x^5+x)=0,$$

这里 $f(x)=3x^2-1, g(x)=x^5+x, F(x)=x^3-x$.

容易验证，它们满足定理 9 的条件，所以原方程组存在唯一的稳定极限环.

(2) 由 $\frac{d^2x}{dt^2}+\alpha(x^{2n}-\beta)\frac{dx}{dt}+\gamma x^{2m-1}=0$，知

$$f(x)=\alpha(x^{2n}-\beta), g(x)=\gamma x^{2m-1}, F(x)=\frac{\alpha}{2n+1}x^{2n+1}-\alpha\beta x.$$

容易验证，它们均满足定理 9 的条件，所以原方程存在唯一的稳定极限环.

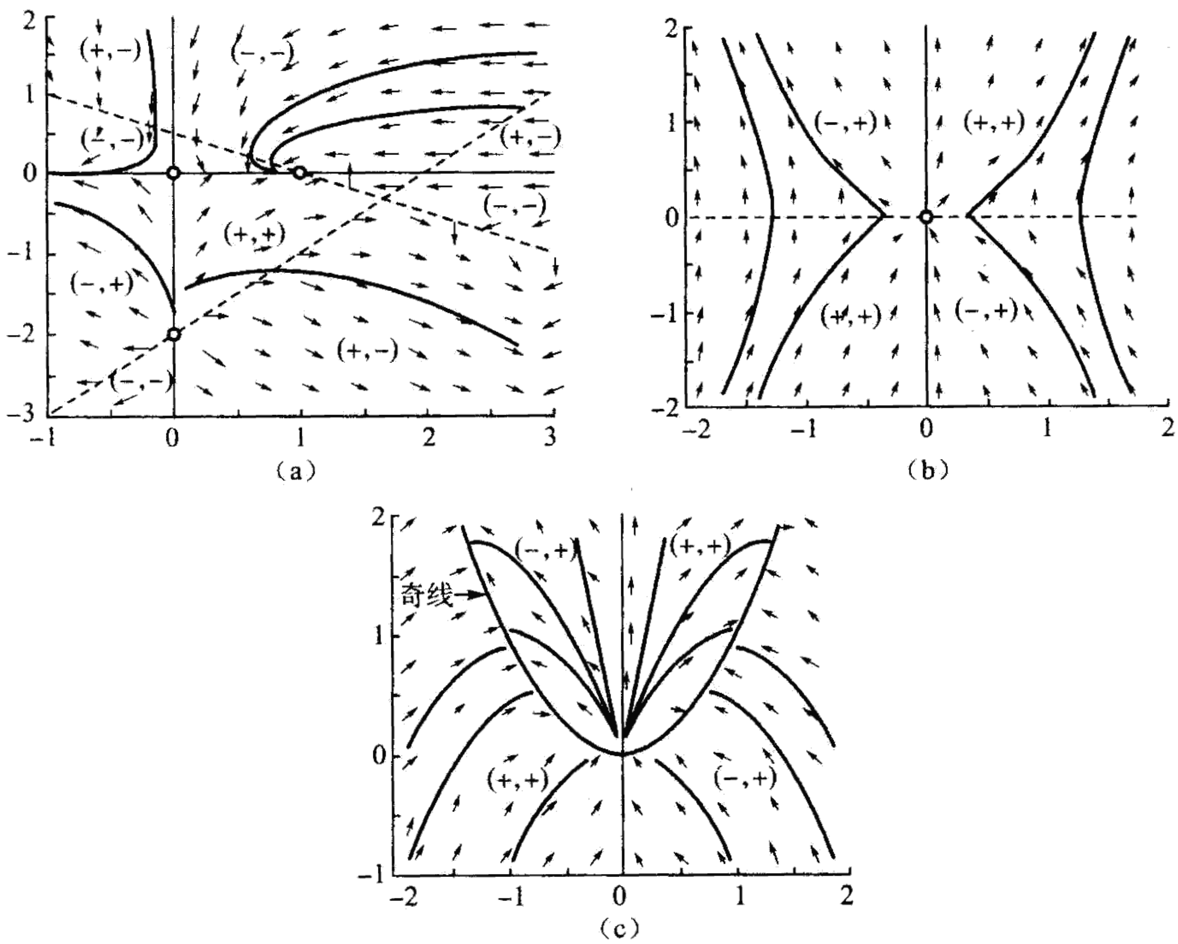
7. 试用等倾斜线法在相平面上画出下列方程的轨线图貌:

(1) $\dot{x}=x(1-x-2y), \dot{y}=y(x-y-2)$;

(2) $\dot{x}=xy, \dot{y}=y^2+x^4$;

(3) $\dot{x}=xy-x^3, \dot{y}=y^2-2x^2y+x^4$.

解:方程(1),(2),(3) 的轨线图貌分别如图(6.2) 的(a),(b),(c) 所示.



图(6.2)

习题 6.3

1. 将下列方程化为哈密顿方程(令 $\dot{x}=-y$)，并画出其相图：

(1) $\ddot{x}+x-x^2=0$；　　(2) $\ddot{x}+x-x^3=0$；

(3) $\ddot{x}-x-x^3=0$.

解：(1) 令 $\dot{x}=-y$，则原方程等价于方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=-y,\\ \dot{y}=-x^2+x,\end{cases}$$

此方程为哈密顿方程，其哈密顿函数为

$$H(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3.$$

相图如图(6.3)中(a).

(2) 令 $\dot{x}=-y$，则原方程等价于方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=-y,\\ \dot{y}=x-x^3,\end{cases}$$

此方程为哈密顿方程，相应的哈密顿函数为

$$H(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4.$$

相图如图(6.3)中(b).

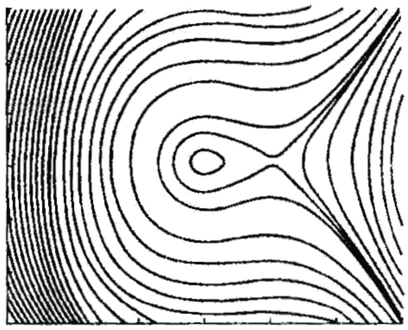
(3) 令 $\dot{x}=-y$，则原方程等价于方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=-y,\\ \dot{y}=-x^3-x,\end{cases}$$

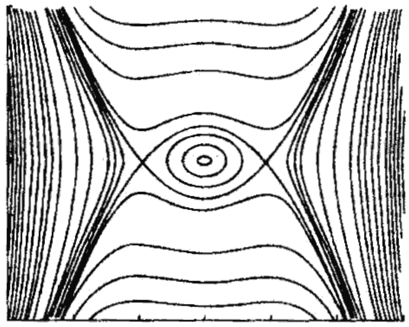
这是哈密顿方程，相应的哈密顿函数为

$$H(x,y)=\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4.$$

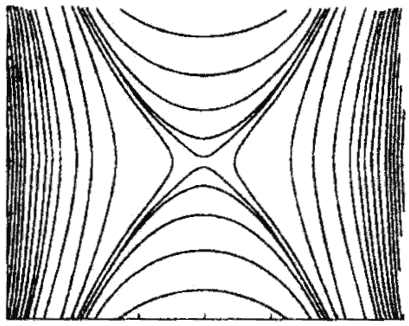
相图如图(6.3)中(c).



(a)



(b)



(c)

图(6.3)

2. 推导用双曲函数表示 $\varphi'^2=\varphi^2(a-2\varphi)$ 的精确解(6.33).

$\left\{\text{注：(6.33) 式为 } u=\varphi(x-at)=\frac{a}{2}\mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{a}(x-at-\xi_0)\right]\right\}$.

解：从 $\varphi'^2=\varphi^2(a-2\varphi)$ 两边开平方可得 $\varphi'=\pm\varphi\sqrt{(a-2\varphi)}$，不妨取正号(取负号时，同理可解). 即只需要求解 $\varphi'=\varphi\sqrt{(a-2\varphi)}$.

变形该方程，得到

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\varphi\sqrt{a-2\varphi}}=\mathrm{d}\xi. \qquad ①$$

下面求解不定积分 $\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\varphi\sqrt{a-2\varphi}}$. 令 $\sin^2 x=\frac{2}{a}\varphi$，即 $\varphi=\frac{a}{2}\sin^2 x$，则

$$\mathrm{d}\varphi=a\sin x\cos x\mathrm{d}x,$$

$$\varphi\sqrt{a-2\varphi}=\sqrt{a}\cdot\frac{a}{2}\cdot\sin^2 x\cos x,$$

从而

$$\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\varphi\sqrt{a-2\varphi}}=\int\frac{a\sin x\cos x}{\sqrt{a}\cdot\frac{a}{2}\cdot\sin^2 x\cos x}\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{a}}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}.$$

注意到

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}&=\int\frac{-\sin x\mathrm{d}x}{-\sin^2 x}=\int\frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos^2 x-1}\\&=\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos x-1}-\frac{1}{\cos x+1}\right)\mathrm{d}\cos x\\&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+c_1,\end{aligned}$$

故

$$\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\varphi\sqrt{a-2\varphi}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+c_2.$$

因此,由 ① 式两边同时积分可得

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+c_2=\xi-c_3,$$

即

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=e^{\sqrt{a}(\xi-\xi_0)},$$

这里 $\xi_0=c_3+c_2$ 是积分常数.解出 $\cos x$,则有

$$\cos x=\frac{1-e^{\sqrt{a}(\xi-\xi_0)}}{1+e^{\sqrt{a}(\xi-\xi_0)}},$$

两边平方得到

$$\cos^2 x=\frac{(1-e^{\sqrt{a}(\xi-\xi_0)})^2}{(1+e^{\sqrt{a}(\xi-\xi_0)})^2}.$$

注意到 $\cos^2 x=1-\sin^2 x=1-\frac{2}{a}\varphi$,则有

$$1-\frac{2}{a}\varphi=\frac{(1-e^{\sqrt{a}(\xi-\xi_0)})^2}{(1+e^{\sqrt{a}(\xi-\xi_0)})^2},$$

解得

$$\varphi=\frac{a}{2}\cdot\frac{4}{e^{\sqrt{a}(\xi-\xi_0)}+2+e^{-\sqrt{a}(\xi-\xi_0)}}=\frac{a}{2}\cdot\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{a}}{2}(\xi-\xi_0)\right).$$

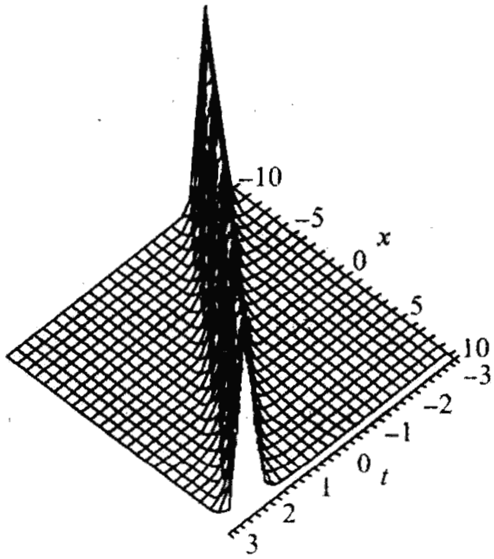
将 $\xi=x-at$ 代入上式,则得到公式(6.33).

3. 在空间 (x,t,u) 中画出 KdV 方程的单、双孤立子解(6.33),(6.37) 图.

$\Big\{$注:(6.33) 为 $u=\varphi(x-at)=\frac{a}{2}\operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{a}(x-at-\xi_0)\right]$,

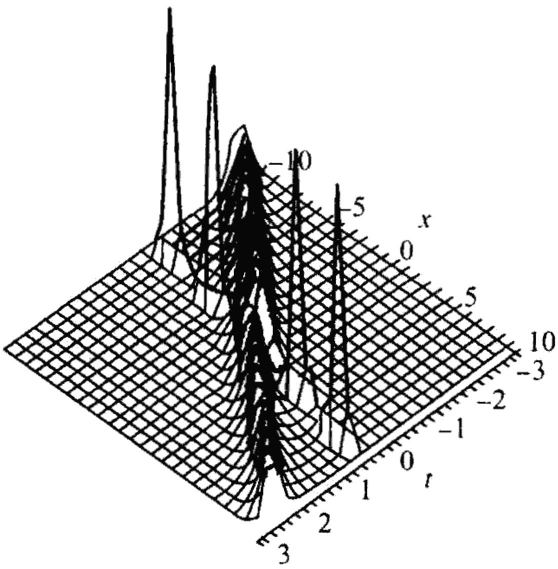
(6.37) 为$u(x,t)=-12\dfrac{3+4\cosh(8t-2x)+\cosh(64t-4x)}{[\cosh(36t-3x)+3\cosh(28t-x)]^2}\Big\}$

解:单独立子解(6.33)如图(6.4)所示.



图(6.4)

双孤立子解(6.37)如图(6.5)所示.



图(6.5)

4. 试证明 n 维空间中容积变化率公式 $\alpha \equiv \frac{1}{U}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \mathrm{div}\boldsymbol{f}$.

证明:在 n 维(相)空间 $(\boldsymbol{x}) \equiv (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 中由驻定微分方程 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 定义的向量场为 $(\boldsymbol{f})$,通过容积 U 的 $\mathrm{d}x_i$ 面的 x_i 方向沿方程的解的单位变化量为

$$\left(f_i \pm \frac{1}{2}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{i-1}\mathrm{d}x_{i+1}\cdots\mathrm{d}x_n,$$

其中 $\pm$ 表示 U 的 x_i 方向的两侧,其 x_i 方向的总单位变化量为

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{i-1}\mathrm{d}x_{i+1}\cdots\mathrm{d}x_n = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

于是容积 U 沿方程的解的总变化量为

$$\oint_{\partial U} \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}S = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \cdot U,$$

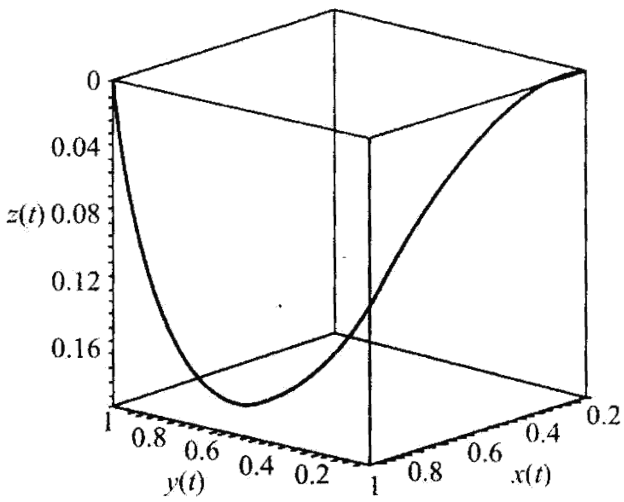
其中 $\boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}S$ 是任意面元沿向量场($\boldsymbol{f}$) 的变化量,∂U 表示容积 U 的闭合表面,U 容积为所有 U 中单位体积 $\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n$ 之和.

于是得容积 U 沿驻定微分方程的解的变化率

$$\alpha = \frac{1}{U} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{U} \oint_{\partial U} \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}S = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \mathrm{div}\boldsymbol{f}.$$

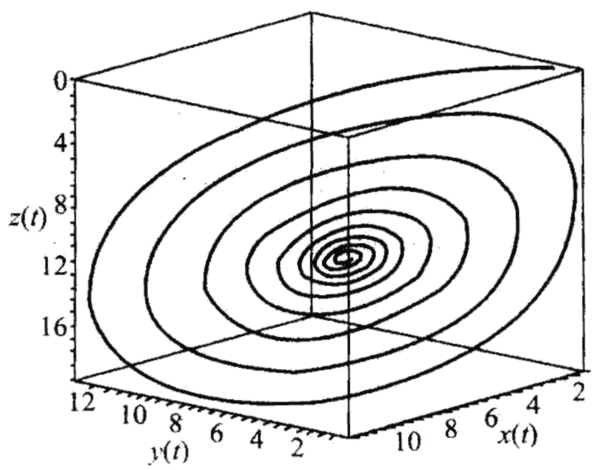
5. 试用计算机绘出洛伦茨方程(6.38)在参数 $a=10, b=\frac{8}{3}$ 和初值(1,1,0)下不同参数 $c=\frac{1}{3}$,13,20,120 的轨线图貌.

解:(1) 当参数 $a=10, b=\frac{8}{3}, c=\frac{1}{3}$,且初值为(1,1,0) 时,方程(6.38) 的轨线图形如图(6.6)所示.



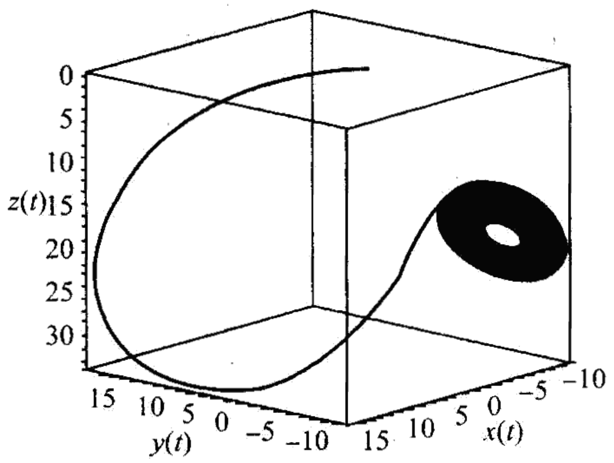
图(6.6)

(2) 当参数 $a=10, b=\frac{8}{3}, c=13$,且初值为(1,1,0)时,方程(6.38)的轨线图形如图(6.7)所示.



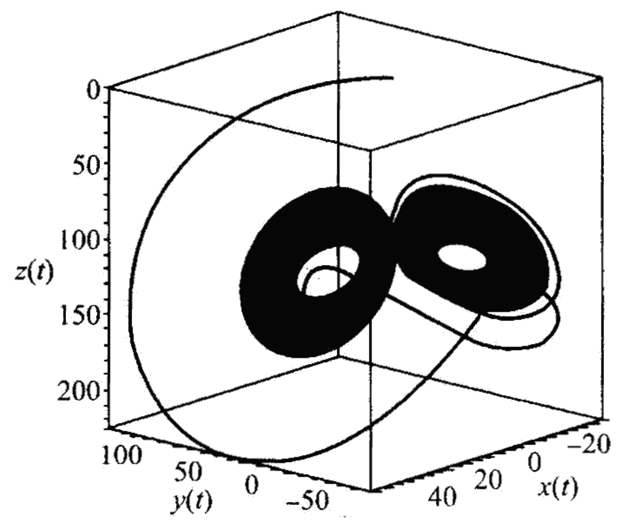
图(6.7)

(3) 当参数$a=10,b=\dfrac{8}{3},c=20$,且初值为(1,1,0)时,方程(6.38)的轨线图形如图(6.8)所示.



图(6.8)

(4) 当参数$a=10,b=\dfrac{8}{3},c=120$,且初值为(1,1,0)时,方程(6.38)的轨线图形如图(6.9)所示.



图(6.9)

第七章　一阶线性偏微分方程

习题 7.1

1. 试生成偏微分方程:

(1) 设$f(u)$是u的任意可微函数,试由$z=f(x^2-y^2)$中消去f,用偏微分方程表示该关系式;

(2) 试由关系式$(x-a)^2-(y-b)^2+z=1$中消去参数a,b化为偏微分方程.

解:(1)$z=f(x^2-y^2)$分别对x,y取偏导数,则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_u(x^2-y^2),\frac{\partial z}{\partial y}=-2yf_u(x^2-y^2).$$

消去f得一阶线性齐次偏微分方程

$$y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

(2) 对$(x-a)^2+(y-b)^2+z=1$分别取x,y的偏导数，则有

$$2(x-a)+z_x=0, 2(y-b)+z_y=0.$$

由上述方程解出a,b后代入原关系式，得一阶非线性偏微分方程

$$z_x^2+z_y^2+4z=4.$$

2. 试判断下列偏微分方程的类型，并写出其对应的特征方程：

(1) $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+xy\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$；　(2) $y\dfrac{\partial u}{\partial x}-x\dfrac{\partial u}{\partial y}=x-y$；

(3) $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+z\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{x}$；　(4) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}=x+y+2z$.

解：(1)1 个因变量、3 个自变量的一阶齐次线性偏微分方程，其对应的特征方程为$\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{\mathrm{d}z}{xy}$.

(2)1 个因变量、2 个自变量的一阶非齐次线性偏微分方程，其对应的特征方程为$\dfrac{\mathrm{d}x}{y}=\dfrac{\mathrm{d}y}{-x}$

$=\dfrac{\mathrm{d}u}{x-y}$.

(3)1 个因变量、2 个自变量的一阶非齐次拟线性偏微分方程，其对应的特征方程为$\dfrac{\mathrm{d}x}{y}=\dfrac{\mathrm{d}y}{z}$

$=\dfrac{x\mathrm{d}u}{y}$.

(4) 原方程可改写为$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+0\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+y+2z$. 其对应的特征方程为$\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{0}=\dfrac{\mathrm{d}z}{x+y+2z}$.

3. 试求解下列偏微分方程：

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=1+x^2y$；　(2) $z_{xt}=\sin t+x$；　(3) $z_{xx}=6xy+12x$.

解：(1) 原方程可变为$\dfrac{\partial z}{\partial x}+0\dfrac{\partial z}{\partial y}=1+x^2y$. 其特征方程为$\dfrac{\mathrm{d}x}{1}=\dfrac{\mathrm{d}y}{0}=\dfrac{\mathrm{d}z}{1+x^2y}$，则有$\mathrm{d}y=0$，解得首次积分$y=\tilde{c}$.

又由$\dfrac{\mathrm{d}x}{1}=\dfrac{\mathrm{d}z}{1+x^2y}$得$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=1+x^2y$，当视$y$为常数时，方程为常微分方程，有$\mathrm{d}z=(1+x^2\tilde{c})\mathrm{d}x$，

$z=x+\dfrac{1}{3}x^3\tilde{c}+c$. 将第一个首次积分代入，因上式积分时视$y$为常数，可视积分常数$c$为$y$的任意函数$c=C(y)$. 于是有$z=x+\dfrac{1}{3}x^3y+C(y)$，其积分常数$C(y)$为$y$的任意函数. 此为偏微分方程的解.

(2) 令$u=z_x$，则原方程变为$u_t=\sin t+x$.

可视x为常数，对t积分得$u=-\cos t+xt+C(x)$，即$z_x=-\cos t+xt+C(x)$.

再对x积分(视t为常数)，最后得

$$z=-x\cos t+\frac{1}{2}x^2t+f(x)+g(t),$$

式中 $f(x),g(t)$ 均为任意函数. 此即为偏微分方程的解.

(3) 若视 y 为常数方程,则可对 x 积分得 $z_x = 3x^2y+6x^2+\Phi(y)$.

再对 x 积分一次得 $z = x^3y+2x^3+x\Phi(y)+\Psi(y)$,其中 Φ,Ψ 为任意函数.

4. 试求下列一阶微分方程组的首次积分;

(1) $\dfrac{dx}{z}=\dfrac{dy}{xz}=\dfrac{dz}{y}$;　　　　(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{z}{x},\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{z(y+2z-1)}{x(y-1)}$.

解:(1) 由第一、二式得

$$\frac{xdx}{xz}=\frac{dy}{xz}=\frac{xdx-dy}{0},xdx-dy=0,x^2=2y+c_1.$$

代入第一、三式有

$$\frac{dx}{z}=\frac{dz}{y}=\frac{dz}{\frac{x^2}{2}-\frac{c_1}{2}},\left(\frac{x^2}{2}-\frac{c_1}{2}\right)dx=zdz,\frac{x^3}{6}-\frac{c_1x}{2}=\frac{z^2}{2}+\tilde{c}_2.$$

方程有两个独立的首次积分

$$x^2-2y=c_1,x^3-3x(x^2-2y)-3z^2=c_2,$$

其中 c_1,c_2 为积分常数.

(2) 将方程改写成对称形式 $\dfrac{dx}{x(y-1)}=\dfrac{dy}{z(y-1)}=\dfrac{dz}{z(y+2z-1)}$. 由后两式有 $\dfrac{dz}{dy}=\dfrac{2}{y-1}z+1$,

是线性微分方程,有解

$$z=e^{\ln|y-1|^2}\left(\int e^{-\ln|y-1|^2}dy+\tilde{c}\right)=(y-1)^2c_1-(y-1).$$

代入前两式有

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{z}=\frac{dy}{(y-1)^2c_1-(y-1)}=\left[\frac{c_1}{(y-1)c_1-1}-\frac{1}{y-1}\right]dy.$$

积分得

$$\frac{(y-1)c_1-1}{y-1}=x+c,-(y-1)^{-1}-x=c-c_1.$$

于是方程有两个独立的首次积分

$$z=(y-1)^2c_1-(y-1),-(y-1)^{-1}-x=c-c_1,$$

其中 c_1,c 为积分常数.

5. 试用可积组合法求解下列齐次微分方程组:

(1) $\begin{cases}x'=2x+4y,\\ y'=-x-2y;\end{cases}$　　　　(2) $\begin{cases}x_1'=x_2-x_3,\\ x_2'=x_1+x_2,\\ x_3'=x_1+x_3;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x_1'=3x_1+x_2-x_3,\\ x_2'=x_1+3x_2-x_3,\\ x_3'=3x_1+3x_2-x_3.\end{cases}$

解:(1) 原微分方程组可改写为对称形式$\frac{dx}{2x+4y}=\frac{dy}{-x-2y}=\frac{dt}{1}$,可组合积分为

$$xdx+2ydx+2xdy+4ydy=\frac{1}{2}d(x^2)+2d(xy)+2d(y^2)=0,$$

$$x^2+4xy+4y^2=(x+2y)^2=c_1^2,$$

从而 $x+2y=c_1$.

代入方程有$\frac{dy}{-c_1}=\frac{dt}{1}$,$y=-tc_1+c_2$ 及

$$x=c_1-2y=c_1-2(-tc_1+c_2)=(2t+1)c_1-2c_2.$$

求得方程的解为 $x=(2t+1)c_1-2c_2$,$y=-tc_1+c_2$.其中 c_1,c_2 为任意常数.

(2) 原微分方程组可改写为对称形式$\frac{dx_1}{x_2-x_3}=\frac{dx_2}{x_1+x_2}=\frac{dx_3}{x_1+x_3}=\frac{dt}{1}$.

有首次积分$\frac{d(x_2-x_3)}{x_2-x_3}=\frac{dt}{1}$,$x_2-x_3=c_1e^t$ 及$\frac{dx_1}{c_1e^t}=\frac{dt}{1}$,$dx_1=c_1e^tdt$,$x_1=c_1e^t+c_2$.

又有

$$\frac{dx_3}{c_1e^t+c_2+x_3}=\frac{dt}{1},\frac{dx_3}{dt}=x_3+c_1e^t+c_2,x_3=(c_1t+c_3)e^t-c_2.$$

得解 $x_1=c_1e^t+c_2$,$x_2=x_3+c_1e^t=(c_1t+c_1+c_3)e^t-c_2$,$x_3=(c_1t+c_3)e^t-c_2$.

(3) 原微分方程组可改写为对称形式$\frac{dx_1}{3x_1+x_2-x_3}=\frac{dx_2}{x_1+3x_2-x_3}=\frac{dx_3}{3x_1+3x_2-x_3}=\frac{dt}{1}$.

有首次积分

$$\frac{d(x_1+x_2-x_3)}{x_1+x_2-x_3}=\frac{dt}{1},x_1+x_2-x_3=c_1e^t,$$

用首次积分及线性方程公式得

$$\frac{dx_1}{2x_1+c_1e^t}=\frac{dt}{1},\frac{dx_1}{dt}=2x_1+c_1e^t,x_1=c_2e^{2t}-c_1e^t,$$

$$\frac{dx_2}{2x_2+c_1e^t}=\frac{dt}{1},\frac{dx_2}{dt}=2x_2+c_1e^t,x_2=c_3e^{2t}-c_1e^t.$$

从而 $x_3=x_1+x_2-c_1e^t=(c_2+c_3)e^{2t}-3c_1e^t$.

即方程的解为

$$x_1=c_2e^{2t}-c_1e^t,x_2=c_3e^{2t}-c_1e^t,x_3=(c_2+c_3)e^{2t}-3c_1e^t,$$

其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数.

习题 7.2

1. 具体求出习题 7.1 第 2 题的线性偏微分方程的解.

解:(1) 由习题 7.1 第 2 题知原微分方程对应的特征方程为$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{xy}$,有首次积分

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y},\frac{y}{x}=c_1,$$

$$\frac{y\mathrm{d}x}{xy}=\frac{x\mathrm{d}y}{xy}=\frac{y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{2xy}=\frac{\mathrm{d}(xy)}{2xy}=\frac{\mathrm{d}z}{xy},xy-2z=c_2.$$

由首次积分$\frac{y}{x}=c_1,xy-2z=c_2$ 知当 $z=0$ 时,$u=x^2+y^2=\frac{c_2}{c_1}+c_1c_2$,即解为

$$u=(xy-2z)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right).$$

(2) 由习题 7.1 第 2 题知原微分方程对应的特征方程为$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{-x}=\frac{\mathrm{d}u}{x-y}$,由$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{-x}$,$x\mathrm{d}x=-y\mathrm{d}y$,首次积分为 $x^2+y^2=c_1$. 又由$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{-x}=\frac{\mathrm{d}u}{x-y}=\frac{\mathrm{d}(x+y+u)}{0}$,得首次积分 $u+x+y=c_2$. 两个首次积分相互独立. 线性偏微分方程的通解为 $F(x^2+y^2,u+x+y)=0$,其中 F 为变元的任意连续可微函数.

(3) 由习题 7.1 第 2 题知原微分方程对应的特征方程为$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{z}=\frac{x\mathrm{d}z}{y}$,由首次积分$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{x\mathrm{d}z}{y}$,$z-\ln|x|=c_1$ 及

$$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{c_1+\ln|x|},y^2=2(c_1x+x\ln|x|-x)-c_2=2x(z-1)-c_2.$$

拟线性偏微分方程的通解为 $F(z-\ln|x|,2x(z-1)-y^2)=0$,其中 F 为变元的任意连续可微函数.

(4) 原方程可改写为 $x\frac{\partial z}{\partial x}+0\frac{\partial z}{\partial y}=x+y+2z$. 其对应的特征方程为$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{0}=\frac{\mathrm{d}z}{x+y+2z}$.

有首次积分 $\mathrm{d}y=0,y=\tilde{c}$,及$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}z}{x+y+2z}$,$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{2}{x}z=1+\frac{y}{x}$.

当 y 为常数时,方程为线性常微分方程,有解

$$z=\mathrm{e}^{2\ln|x|}\cdot\left[\int\left(1+\frac{y}{x}\right)x^{-2}\mathrm{d}x+C(y)\right]=-x-\frac{1}{2}y+x^2C(y),$$

它已包含解 $y=\tilde{c}$($\tilde{c}$ 为常数),此即为拟线性偏微分方程的解.

2. 求解下列线性偏微分方程:

(1) $(y-z)u_x+(z-x)u_y+(x-y)u_z=0$;

(2) $yzuu_x+zxuu_y+xyuu_z=xyz$;

(3) $xzz_x+yzz_y=x^2+y^2+z^2$.

解:(1) 由已知可得原微分方程对应的特征方程为$\frac{\mathrm{d}x}{y-z}=\frac{\mathrm{d}y}{z-x}=\frac{\mathrm{d}z}{x-y}$.

利用首次积分有

$$\mathrm{d}(x+y+z)=0,x+y+z=c_1,$$

$$\frac{2x\mathrm{d}x}{2x(y-z)}=\frac{2y\mathrm{d}y}{2y(z-x)}=\frac{2z\mathrm{d}z}{2z(x-y)}=\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2+z^2)}{0},$$

$$x^2+y^2+z^2=c_2.$$

两个首次积分相互独立,偏微分方程有通解 $u=\Phi(x+y+z,x^2+y^2+z^2)$,其中 Φ 为变元的任

意函数.

(2) 由已知可得原微分方程对应的特征方程为$\frac{\mathrm{d}x}{yzu}=\frac{\mathrm{d}y}{zxu}=\frac{\mathrm{d}z}{xyu}=\frac{\mathrm{d}u}{xyz}$.

利用首次积分有

$$\frac{\mathrm{d}x}{yzu}=\frac{\mathrm{d}y}{zxu},x\mathrm{d}x=y\mathrm{d}y,y^2-x^2=c_1;$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{yzu}=\frac{\mathrm{d}z}{xyu},z^2-x^2=c_2;$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{yzu}=\frac{\mathrm{d}u}{xyz},u^2-x^2=c_3.$$

这三个首次积分相互独立,偏微分方程的通解为$\Phi(y^2-x^2,z^2-x^2,u^2-x^2)=0$,其中$\Phi$为变元的任意函数.

(3) 由已知可得原微分方程对应的特征方程为$\frac{\mathrm{d}x}{xz}=\frac{\mathrm{d}y}{yz}=\frac{\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$.

利用首次积分有$\frac{\mathrm{d}x}{xz}=\frac{\mathrm{d}y}{yz},\frac{y}{x}=c_1$.又由于

$$\frac{x\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{y\mathrm{d}y}{y^2}=\frac{z\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}=\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2},$$

令$u=x^2+y^2,v=z^2$,上式化为$\frac{\mathrm{d}v}{u+v}=\frac{\mathrm{d}u}{u}$,即$u\mathrm{d}v-v\mathrm{d}u=u\mathrm{d}u$,可积分得

$$\frac{u\mathrm{d}v-v\mathrm{d}u}{u^2}=\frac{\mathrm{d}u}{u},\frac{v}{u}-\ln|u|=c_2.$$

故有首次积分$\frac{z^2}{x^2+y^2}-\ln(x^2+y^2)=c_2$.

两个首次积分相互独立,方程有通解$\Phi\left(\frac{y}{x},\frac{z^2}{x^2+y^2}-\ln(x^2+y^2)\right)=0$,其中$\Phi$为变元的任意函数.

习题 7.3

1. 求解下列满足给定条件的偏微分方程(柯西问题):

(1) $(2xy+xz)\frac{\partial z}{\partial x}+(yz+3x^3y)\frac{\partial z}{\partial y}=3x^2z-2y^2z,y^2=z,x=3$;

(2) $y^2\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}+z^2=0,x-y=0,x-yz=1$.

解:(1) 由已知得原微分方程对应的特征方程为$\frac{\mathrm{d}x}{2xy^2+xz}=\frac{\mathrm{d}y}{-yz-3x^3y}=\frac{\mathrm{d}z}{3x^3z-2y^2z}$.

于是

$$\frac{\mathrm{d}z}{3x^3z-2y^2z}=\frac{y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{xy(2y^2-3x^3)}=\frac{3x^3\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y-\mathrm{d}z}{0}.$$

由第一式求得首次积分

$$-\frac{\mathrm{d}z}{z}=\frac{y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{xy}=\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{\mathrm{d}y}{y},xyz=c_1.$$

而由第三式求得首次积分

$$3x^2\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y-\mathrm{d}z=0,x^3+y^2-z=c_2,$$

其中 c_1,c_2 为积分常数.

将方程条件 $y^2=z,x=3$ 代入可求得 $c_2=27,c_1$ 为任意常数,即得解为

$$x^3+y^2-z=27.$$

(2) 由已知得原微分方程对应的特征方程为$\frac{\mathrm{d}x}{y^2}=\frac{\mathrm{d}y}{yz}=-\frac{\mathrm{d}z}{z^2}$. 由后两式可求得首次积分

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{\mathrm{d}z}{z},yz=c_1.$$

将首次积分代入前两式得

$$\frac{\mathrm{d}x}{y^2}=\frac{\mathrm{d}y}{yz}=\frac{\mathrm{d}y}{c_1},c_1\mathrm{d}x=y^2\mathrm{d}y,$$

$$\frac{1}{3}y^3=c_1x+\tilde{c}_2,y^3-3xyz=c_2,$$

其中 c_1,c_2 为积分常数. 这两个首次积分相互独立(其比不为常数),由条件 $x-y=0,x-yz=1$ 消去 x,y,z,可求得

$$x=y=yz+1=1+c_1,y^3-3xyz=(1+c_1)^3-3(1+c_1)c_1=c_2.$$

于是原微分方程有解

$$(1+yz)^3=3(1-x+yz)yz+y^3.$$

2. 试求下列满足给定条件的偏微分方程(柯西问题) 的解:

(1) $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{z}{2}\frac{\partial u}{\partial z}=0,x=1,u=y+z^2$;

(2) $2yz\frac{\partial z}{\partial x}-xz\frac{\partial z}{\partial y}+xy=0,x^2+y^2=ay,z=0$;

(3) $z\frac{\partial z}{\partial x}+(z^2-x^2)\frac{\partial z}{\partial y}+x=0,y=x^2,z=2x$.

解:(1) 齐次线性偏微分方程对应的特征方程为$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{2\mathrm{d}z}{z}$,其有两个首次积分

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y},\frac{y}{x}=c_1 \text{ 及 } \frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{2\mathrm{d}z}{z},\frac{z^2}{x}=c_2,$$

且两个首次积分相互独立,解得方程的通解为

$$u=\Phi\left(\frac{y}{x},\frac{z^2}{x}\right).$$

由方程条件可得 $\Phi(y,z^2)=y+z^2,\Phi(c_1,c_2)=c_1+c_2$,即满足方程条件的解为

$$u=\frac{y}{x}+\frac{z^2}{x}.$$

(2) 非齐次拟线性偏微分方程对应的特征方程为$\frac{dx}{2yz}=\frac{dy}{-xz}=\frac{dz}{-xy}$,有两个首次积分

$$\frac{dx}{2yz}=\frac{dy}{-xz},2y^2+x^2=c_1 \text{ 及} \frac{dy}{-xz}=\frac{dz}{-xy},z^2-y^2=c_2.$$

且两个首次积分相互独立,方程的通积分可表为 $\Phi(2y^2+x^2,z^2-y^2)=0$.

为确定函数 Φ,由解的条件联立首次积分消去变量得$(c_1+c_2)^2=-a^2c_2$,即$(y^2+x^2+z^2)^2=a^2(y^2-z^2)$.

(3) 非齐次拟线性偏微分方程对应的特征方程为$\frac{dx}{z}=\frac{dy}{z^2-x^2}=\frac{dz}{-x}$.

由$\frac{dx}{z}=\frac{dz}{-x}$得首次积分为$z^2+x^2=c_1$.

又由

$$\frac{zdx}{z^2}=\frac{dy}{z^2-x^2}=\frac{xdz}{-x^2}=\frac{-dy+zdx+xdz}{0},$$

$$dy=zdx+xdz=d(zx)$$

得首次积分为 $y=zx+c_2$.

两个首次积分相互独立,方程的通积分可表为 $\Phi(z^2+x^2,y-zx)=0$.

为确定函数 Φ,由解的条件代入首次积分有 $5x^2=c_1,x^2=2x^2+c_2$,消去变量 x 得$c_1=-5c_2$,即

$$z^2+x^2=5(zx-y).$$

3. 求解下列线性偏微分方程的柯西问题:

(1) $x\frac{\partial z}{\partial x}+(xz+y)\frac{\partial z}{\partial y}=z,x+y=2z,xz=1$;

(2) $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2,x=5y=2z$;

(3) $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}+z^2=0,xy=x+y,z=1$.

解:(1) 拟线性偏微分方程对应的特征方程为$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{xz+y}=\frac{dz}{z}$.

由$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z}$得,首次积分 $z=c_1x$.

又有首次积分

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{c_1x^2+y},c_1x^2dx+ydx=xdy,c_1dx+\frac{ydx-xdy}{x^2}=0,$$

$$c_1x-\frac{y}{x}=c_2,z-\frac{y}{x}=c_2.$$

上述两个首次积分相互独立,方程的通积分可表为

$$\Phi(zx^{-1},z-yx^{-1})=0.$$

为确定函数 Φ,由解的条件联立首次积分消去变量. 先消去 y,有

$$z-c_2=\frac{y}{x}=\frac{2z-x}{x}=\frac{2z}{x}-1.$$

再消去 x 有

$$z=c_2+\frac{2z}{x}-1=c_2+2c_1-1 \text{ 及 } z=c_1x=\frac{c_1}{z},z^2=c_1.$$

即有关系式 $(c_2+2c_1-1)^2=c_1$，代回首次积分，最后得

$$(zx-y+2z-x)^2=zx.$$

(2) 由已知可得微分方程对应的特征方程为 $\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}=\frac{dz}{z^2}$.

有首次积分 $\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2},\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=c_1$ 及 $\frac{dx}{x^2}=\frac{dz}{z^2},\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=c_2$.

利用直线条件 $x=5y=2z$，则有 $y=\frac{x}{5},z=\frac{x}{2}$，将其代入首次积分得 $c_1=\frac{4}{x},c_2=\frac{1}{x}$. 从而有关系式 $c_1=4c_2$. 于是满足条件的解为 $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=4\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{x}\right)$，即 $\frac{1}{y}+\frac{3}{x}=\frac{4}{z}$.

(3) 由已知可得微分方程对应的特征方程为 $\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}=\frac{dz}{-z^2}$.

有首次积分 $\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2},\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=c_1$ 及 $\frac{dx}{x^2}=\frac{dz}{-z^2},\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=c_2$.

利用条件 $xy=x+y,z=1$ 得 $\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=1,c_1=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=1-\frac{2}{x}$ 及 $1+\frac{1}{x}=c_2$. 于是有关系式 $c_1=1-\frac{2}{x}=1-2(c_2-1),c_1+2c_2=3$.

于是方程满足条件的解为 $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}+\frac{2}{z}+\frac{2}{x}=3$，即 $\frac{1}{y}+\frac{2}{z}+\frac{1}{x}=3$.

习题 7.4

1. 求下列变换群的无穷小变换、生成元和李方程组：

(1) 仿射变换群 $\bar{x}=ax,\bar{y}=y,a\in(0,+\infty)$；(2) $\bar{x}=ax,\bar{y}=a^2y,a\in(0,+\infty)$；

(3) $\bar{x}=x+yt,\bar{y}=y,t\in(-\infty,+\infty)$；　　(4) $\bar{x}=\frac{x}{1-tx},\bar{y}=\frac{y}{1-tx}(-\infty<t<+\infty)$.

解: (1) 由已知变换 $\bar{x}=ax,\bar{y}=y,a\in(0,+\infty)$ 可得 $\varphi(x,y,a)=ax,\psi(x,y,a)=y$，则

$$\xi=\left.\frac{\partial\varphi(x,y,a)}{\partial a}\right|_{a=0}=x,\eta=\left.\frac{\partial\psi(x,y,a)}{\partial a}\right|_{a=0}=0.$$

故无穷小变换为 $\bar{x}\approx x+ax,\bar{y}\approx y$.

生成元为 $X=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}=x\frac{\partial}{\partial x}$.

李方程组为 $\begin{cases}\frac{d\bar{x}}{da}=\bar{x},\bar{x}\,|_{a=0}=x,\\ \frac{d\bar{y}}{da}=0,\bar{y}\,|_{a=0}=y.\end{cases}$

(2) 由已知 $\bar{x} = ax, \bar{y} = a^2 y, a \in (0, +\infty)$ 可得 $\varphi(x,y,a) = ax, \psi(x,y,a) = a^2 y$. 则有

$$\xi = \left.\frac{\partial \varphi(x,y,a)}{\partial a}\right|_{a=0} = x, \eta = \left.\frac{\partial \psi(x,y,a)}{\partial a}\right|_{a=0} = 0.$$

故无穷小变换为 $\bar{x} \approx x + ax, \bar{y} \approx y$, 生成元为 $X = x\frac{\partial}{\partial x}$.

李方程组为$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}a} = \bar{x}, \bar{x}\,|_{a=0} = x, \\ \dfrac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}a} = 0, \bar{y}\,|_{a=0} = y. \end{cases}$

(3) 由已知 $\bar{x} = x + yt, \bar{y} = y, t \in (-\infty, +\infty)$ 可得 $\varphi(x,y,t) = x + yt, \psi(x,y,t) = y$.

则 $\xi = \left.\frac{\partial \varphi(x,y,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = y, \eta = \left.\frac{\partial \psi(x,y,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$. 故无穷小变换为 $\bar{x} \approx x + yt, \bar{y} \approx y$.

生成元为 $X = y\frac{\partial}{\partial x}$, 李方程组为$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}t} = \bar{y}, \bar{x}\Big|_{t=0} = x, \\ \dfrac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}t} = 0, \bar{y}\Big|_{t=0} = y, \end{cases}$

(4) 由已知 $\bar{x} = \frac{x}{1-tx}, \bar{y} = \frac{y}{1-tx}$ 可知 $\varphi(x,y,t) = \frac{x}{1-tx}, \psi(x,y,t) = \frac{y}{1-tx}$. 则

$$\xi = \left.\frac{\partial \varphi(x,y,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = x^2, \eta = \left.\frac{\partial \psi(x,y,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = xy.$$

故无穷小变换为 $\bar{x} \approx x + ax^2, \bar{y} \approx y + axy$.

生成元为 $X = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}$.

李方程组为$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}a} = \bar{x}^2, \bar{x}\,|_{a=0} = x, \\ \dfrac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}a} = \bar{x}\,\bar{y}, \bar{y}\,|_{a=0} = y. \end{cases}$

2. 求下列生成元的不变函数:

(1) $X = \frac{\partial}{\partial y}$;　　(2) $X = y\frac{\partial}{\partial x}$;　　(3) $X = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}$.

解:(1) 已知 $X = \frac{\partial}{\partial y}$, 由定理 9 可知, 此生成元的不变函数由$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ 给出. 即 $f(x,y) = f(x)$, f 为任意可微函数, 即平行于 y 轴的直线.

(2) 已知 $X = y\frac{\partial}{\partial x}$, 由定理 9 可知, 此生成元的不变函数由 $y\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ 给出. 即 $y = 0$ 或$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. 则不动点为 $y = 0$ 或 $y = c(c \neq 0)$.

(3) 已知 $X = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}$, 由定理 9 可知, 此生成元的不变函数由 $x^2\frac{\partial f}{\partial x} + xy\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ 给出.

其特征方程为$\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{\mathrm{d}y}{xy}$, 即$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y}$, 解得其通解为 $F(x,y) = \Phi\left(\frac{x}{y}\right)$, Φ 为任意可微函数.

3. 计算生成元为 $X = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$ 的典型变量.

解:已知生成元为 $X = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$,则有 $\xi(x,y) = x,\eta(x,y) = y$,由教材公式(7.50)可知

$$\begin{cases} X(t) = \xi(x,y)\dfrac{\partial t}{\partial x} + \eta(x,y)\dfrac{\partial t}{\partial y} = 1, \\ X(u) = \xi(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial x} + \eta(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

即$\begin{cases} x\dfrac{\partial t}{\partial x} + y\dfrac{\partial t}{\partial y} = 1, \\ x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0. \end{cases}$ 解得$\begin{cases} t = \ln|x|, \\ u = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$

解得 $\bar{t} = \ln|\bar{x}| = \ln(|x|e^a) = \ln|x| + a = t + a, \bar{u} = \dfrac{\bar{y}}{\bar{x}} = \dfrac{ye^a}{xe^a} = \dfrac{y}{x} = u.$

所以该生成元的典型变量为 $\bar{t} = t + a, \bar{u} = u$.

4. 求下列方程的对称:

(1) $y' = F(y)$; (2) $y' = F\left(\dfrac{y}{x}\right)$; (3) $xy' = y + F(x)$.

解:(1) 因为 $y' = F(y)$ 在变换 $\bar{x} = x + a$ 下不变,此时$\dfrac{\partial}{\partial x} = 1, \dfrac{\partial}{\partial y} = 0$,所以其对称群的生成元为 $X = \dfrac{\partial}{\partial x}$.

(2) 因为 $y' = F\left(\dfrac{y}{x}\right)$在变换 $\bar{x} = xe^a, y = ye^a$ 下不变,此时$\dfrac{\partial}{\partial x} = x, \dfrac{\partial}{\partial y} = y$,所以其对称群的生成元为 $X = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$.

(3) 因为 $xy' = y + F(x)$ 在 $\bar{x} = x, \bar{y} = y + ax$ 下不变,此时$\dfrac{\partial}{\partial x} = 0, \dfrac{\partial}{\partial y} = x$,所以其对称群的生成元为 $X = x\dfrac{\partial}{\partial y}$.

5. 计算下列容许算子产生的一阶方程:

(1) $X = l\dfrac{\partial}{\partial x} - k\dfrac{\partial}{\partial y}$; (2) $X = y\dfrac{\partial}{\partial x}$;

(3) $X = x\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}$; (4) $X = xy\dfrac{\partial}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial}{\partial y}$.

解:(1) 已知容许算子为 $X = l\dfrac{\partial}{\partial x} - k\dfrac{\partial}{\partial y}$,则教材方程(7.60)变为 $l\dfrac{\partial f}{\partial x} - k\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

其特征方程为$\dfrac{dx}{l} = -\dfrac{dy}{k} = \dfrac{df}{0}$.

利用首次积分可得 $c_1 = kx + ly, f = c_2$. 则 $f = F(kx + ly)$.

故该容许算子的方程为 $y' = F(kx + ly)$.

(2) 已知容许算子为 $X = y\frac{\partial}{\partial x}$，则教材方程(7.60) 变为 $y\frac{\partial f}{\partial x} = -f^2$.

其特征方程为$\frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}f}{-f^2} = \frac{\mathrm{d}y}{0}$，即$\frac{\mathrm{d}(x+y)}{y} = \frac{\mathrm{d}f}{-f^2}$.

利用首次积分可得 $f = \frac{y}{x+F(y)}$，故该容许算子的方程为 $y' = \frac{y}{x+F(y)}$.

(3) 已知容许算子为 $X = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$，则教材方程(7.60) 变为

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = -f,$$

特征方程为$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{1} = \frac{\mathrm{d}f}{-f}$，利用首次积分可得 $x\mathrm{e}^{-y} = c_1, xf = c_2$.

故容许算子的方程为 $y' = \frac{1}{x}F(x\mathrm{e}^{-y})$.

(4) 已知容许算子为 $X = xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}$，则教材方程(7.60) 变为

$$xy\frac{\partial f}{\partial x} + y^2\frac{\partial f}{\partial y} = yf - xf^2.$$

其特征方程为$\frac{\mathrm{d}x}{xy} = \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \frac{\mathrm{d}f}{yf - xf^2}$.

利用首次积分可得$\frac{y}{x} = c_1, f = \frac{xc_1}{c+x}$.

故该容许算子的方程为 $y' = \frac{y}{x+F\left(\frac{y}{x}\right)}$.

第八章　边值问题

习题 8.1

1. 试讨论下列微分方程边值问题的可解性并求解.

(1) $y'' = 0, y(0) + y'(0) = y(1), y'(0) = y'(1)$;

(2) $y'' = x, y(0) - y(1) = 1, y'(0) + y'(1) = 0$.

解：(1) 由已知齐次微分方程易得其有基本解组 $y_1(x) = 1, y_2(x) = x$. 边值条件对应

$$U_1[y] \equiv y(0) - y(1) + y'(0) = 0, U_2[y] \equiv y'(0) - y'(1) = 0,$$

得

$$\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

其秩为 0. 即齐次边值问题是可解的，它有解 $y = c_1 + c_2 x$.

(2) 由已知易得非齐次方程有特解 $y_0(x) = \frac{1}{6}x^3$. 对应的齐次方程有基本解组 $y_1(x) = 1, y_2(x)$

$= x$. 边值条件对应

$$U_1[y] \equiv y(0) - y(1), U_2[y] \equiv y'(0) + y'(1),$$

于是

$$\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] & U_1[y_0] - \gamma_1 \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] & U_2[y_0] - \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{7}{6} \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

其秩为 2, 与矩阵

$$\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

的秩 1 不同. 边值问题不可解.

事实上, 非齐次方程有通解

$$y(x) = c_1 + c_2 x + \frac{1}{6} x^3.$$

由边值条件应有

$$-c_2 - \frac{1}{6} = 1, 2c_2 + \frac{1}{2} = 0.$$

得 $c_2 = -\frac{7}{6}, c_2 = -\frac{1}{4}$, 相互矛盾. 故无法求出满足边值条件的常数 c_1, c_2.

2. 试判断下面边值问题的可解性并求解.

$$y'' - y' = 0, y(0) = -1, y'(1) - y(1) = 2.$$

解: 微分方程 $y'' - y' = 0$ 有基本解组 $y_1 = 1, y_2 = e^x$, 边值条件对应

$$U_1[y] = y(0) = -1, U_2[y] = y'(1) - y(1) = 2.$$

易得

$$\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] & \gamma_1 \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] & \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

其秩为 2 与矩阵 $\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 的秩 2 相同, 故边值问题是可解的.

因为 $y'' - y' = 0$ 有通解 $y = c_1 + c_2 e^x$. 代入边值条件可得

$$c_1 + c_2 = -1, c_2 e - (c_1 + c_2 e) = 2,$$

解得 $c_1 = -2, c_2 = 1$, 故边值问题的解为 $y = e^x - 2$.

3. 试用待定系数法求解边值问题: $y'' - y' - 2y = 0, y(0) = 2, y(+\infty) = 0$.

解: 由已知易得齐次二阶线性方程有通解 $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$.

由边值条件 $y(+\infty) = 0$ 可知, 必有 $c_1 = 0$. 再由边值条件 $y(0) = 2$ 可得 $c_2 = 2$. 即方程边值问题的解为 $y(x) = 2e^{-x}$.

4. 求解边值问题：$y''+y=2x-\pi, y(0)=0, y(\pi)=0$.

解：由已知易得非齐次方程有特解 $y_0(x)=2x-\pi$，其初值为 $y_0(0)=-\pi, y'_0(0)=2$；边值为 $y_0(\pi)=\pi, y'_0(\pi)=2$.

二阶齐次微分方程 $y''+y=0$ 有通解 $y_1(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$，且解 $y=c\sin x$ 满足边值条件.

现取非齐次方程的解 $y=y_0+y_1$，确定 c_1, c_2，使其满足边值条件，即

$$y_0(0)+y_1(0)=-\pi+c_1=0,$$

$$y_0(\pi)+y_1(\pi)=2\pi-\pi-c_1=0,$$

得 $c_1=\pi$. 于是非齐次方程满足边值条件的解为

$$y(x)=2x-\pi+\pi\cos x+c\sin x.$$

*5. 对怎样的 a，边值问题 $y''+ay=1, y(0)=0, y(1)=0$ 没有解？

解：当 $a=0$ 时，微分方程变为 $y''=1$，其通解为 $y=\frac{1}{2}x^2+c_1x+c_2$.

代入边值条件 $y(0)=0, y(1)=0$ 可得 $c_1=-\frac{1}{2}, c_2=0$. 故此时边值问题有解.

当 $a<0$ 时，令 $a=-\lambda(\lambda>0)$，则微分方程可化为 $y''-\lambda y=1$，其通解为

$$y=c_1e^{\sqrt{\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{\lambda}x}-\frac{1}{\lambda}.$$

代入边值条件 $y(0)=0, y(1)=0$ 可得 $c_1=\frac{c_2(1-e^{-\sqrt{\lambda}})}{e^{\sqrt{\lambda}}-1}$. 故此时边值问题有解.

当 $a>0$ 时，微分方程 $y''+ay=1$ 的特解为 $y_0=\frac{1}{a}$，其对应齐次微分方程 $y''+ay=0$ 的基本解组为 $y_1=\cos\sqrt{a}x, y_2=\sin\sqrt{a}x$. 边值条件对应

$$U_1[y]=y(0)=0, U_2[y]=y(1)=0.$$

于是

$$\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] & U_1[y_0]-\gamma_1 \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] & U_2[y_0]-\gamma_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{a} \\ \cos\sqrt{a} & \sin\sqrt{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & \sin\sqrt{a} & \frac{1}{a}(1-\cos\sqrt{a}) \end{bmatrix},$$

当 $\sin\sqrt{a}=0$ 且 $1-\cos\sqrt{a}\neq 0$ 时，上述矩阵与 $\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] \end{bmatrix}$ 不同秩，则边值问题不可解，

即当 $\sqrt{a}=(2n-1)\pi$，即 $a=(2n-1)^2\pi^2(n=1,2,3,\cdots)$ 时，边值问题不可解.

习题 8.2

1. 求边值问题 $y''=f(x), y(0)=0$，当 $x\to+\infty$ 时有界的格林函数.

解：因为微分方程 $y''=0$ 的基本解组为 $y_1(x)=1, y_2(x)=x, y_1(x), y_2(x)$ 的朗斯基行列式 $W(x)$

$$=\begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0.$$

由格林函数的定义，

当 $0\leqslant x\leqslant t$ 时，$G(x,t)=a_1(t)+a_2(t)x$，

当 $t\leqslant x<+\infty$ 时，

$$G(x,t)=b_1(t)+b_2(t)x.$$

由于格林函数在 $x=t$ 处连续且满足 $\frac{\partial G(t+0,t)}{\partial x}-\frac{\partial G(t-0,t)}{\partial x}=1$，则有

$$a_1(t)+a_2(t)t-[b_1(t)+b_2(t)t]=0. \quad ①$$

$$b_2(t)-a_2(t)=1. \quad ②$$

又由边值条件 $y(0)=0$ 可得 $a_1(t)+a_2(t)\cdot 0=a_1(t)=0$.

由 $x\to+\infty$ 时 y 有界可得 $b_2(t)=0$.

将 $a_1(t),b_2(t)$ 分别代入 ①，② 可得 $a_2(t)=-1$.

又因为 $G(x,t)$ 在 $x=t$ 处连续，则 $b_1(t)=-t$.

所以该边值问题的格林函数为 $G(x,t)=\begin{cases}-x, 0\leqslant x\leqslant t,\\ -t, t\leqslant x.\end{cases}$

2. 求边值问题 $y''+y=f(x),y(0)=0,y'(1)=0$ 的格林函数.

解：因为微分方程 $y''+y=0$ 的基本解组为 $y_1(x)=\cos x,y_2(x)=\sin x,y_1(x),y_2(x)$ 的朗斯基行列式 $W(x)=\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}=1\neq 0.$

由格林函数的定义，当 $0\leqslant x\leqslant t$ 时，$G(x,t)=a_1(t)\cos x+a_2(t)\sin x$.

当 $t\leqslant x\leqslant 1$ 时，$G(x,t)=b_1(t)\cos x+b_2(t)\sin x$.

由于格林函数在 $x=t$ 处连续，则有

$$a_1(t)\cos t+a_2(t)\sin t-[b_1(t)\cos t+b_2(t)\sin t]=0. \quad ①$$

由于格林函数在 $x=t$ 处有跃度 $\frac{\partial G(t+0,t)}{\partial x}-\frac{\partial G(t-0,t)}{\partial x}=1$，则有

$$-b_1(t)\sin t+b_2(t)\cos t-[-a_1(t)\sin t+a_2(t)\cos t]=1. \quad ②$$

又因为格林函数关于 x 满足边值条件，所以有

$$G(0,t)=a_1(t)=0, \quad ③$$

$$G'(1,t)=-b_1(t)\sin 1+b_2(t)\cos 1=0, \quad ④$$

解由 ①，②，③，④ 组成的方程组可得

$$a_1(t)=0, a_2(t)=-\cos t-\sin t\tan 1, b_1=-\sin t, b_2=-\sin t\tan 1.$$

代入 $G(x,t)$ 可得

$$G(x,t)=\begin{cases}\dfrac{-\cos(t-1)\cdot\sin x}{\cos 1}, 0\leqslant x\leqslant t,\\[2ex] \dfrac{-\sin t\cdot\cos(x-1)}{\cos 1}, t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

3. 求边值问题 $x^2y''+2xy'=f(x),y(1)=0,y'(3)=0$ 的格林函数.

解:齐次方程是欧拉方程,可令 $y=x^k$,代入得关于 k 的方程 $k(k-1)+2k=k(k+1)=0$,解得 $k_1=0,k_2=-1$. 从而方程有通解 $y=c_1+c_2x^{-1}$.

运用常数变易法,令 $y=c_1(x)+c_2(x)x^{-1}$,则 $y'=c'_1+c'_2x^{-1}-c_2x^{-2}$.

设 $c'_1+c'_2x^{-1}=0$,于是 $y'=-c_2x^{-2},y''=-c'_2x^{-2}+2c_2x^{-3}$.

将其代入方程得

$$x^2y''+2xy'=-c'_2+2c_2x^{-1}-2c_2x^{-1}=-c'_2=f(x),$$

$$c_2=-\int_1^x f(t)\mathrm{d}t.$$

而由 $c'_1+c'_2x^{-1}=0$,即有 $c'_1=-c'_2x^{-1}=x^{-1}f(x)$,解得 $c_1=\int_1^x t^{-1}f(t)\mathrm{d}t$.

最后得非齐次方程的特解 $y=\int_1^x(t^{-1}-x^{-1})f(t)\mathrm{d}t$. 其通解为

$$y=c_1+c_2x^{-1}+\int_1^x(t^{-1}-x^{-1})f(t)\mathrm{d}t.$$

利用边值条件有 $c_2=-c_1=\int_1^3 f(t)\mathrm{d}t$. 于是有 $y=\int_x^3(x^{-1}-1)f(t)\mathrm{d}t+\int_1^x(t^{-1}-1)f(t)\mathrm{d}t$.

可定义格林函数

$$G(x,t)=\begin{cases}t^{-1}-1, & 1\leqslant t\leqslant x,\\ x^{-1}-1, & x\leqslant t\leqslant 3.\end{cases}$$

边值问题的解为

$$y(x)=\int_1^3 G(x,t)f(t)\mathrm{d}t\quad(1\leqslant x\leqslant 3).$$

4. 求边值问题 $y''+k^2y=f(x),y(0)=0,y'(1)=0$ 的格林函数.

解:由已知易得方程的基本解组为 $y_1=\sin kx,y_2=\cos kx$.

因为格林函数也满足此微分方程,由格林函数的定义,

当 $0\leqslant x\leqslant t$ 时有 $G(x,t)=a_1(t)\sin kx+a_2(t)\cos kx$;

而当 $t\leqslant x\leqslant 1$ 时有 $G(x,t)=b_1(t)\sin kx+b_2(t)\cos kx$.

当 $x=t$ 时 $G(x,t)$ 连续,即要求

$$b_1(t)\sin kt+b_2(t)\cos kt-a_1(t)\sin kt-a_2(t)\cos kt=0. \qquad ①$$

由格林函数的性质(2) 可得

$$k[b_1(t)\cos kt-b_2(t)\sin kt-a_1(t)\cos kt+a_2(t)\sin kt]=1. \qquad ②$$

利用格林函数的性质(3) 和边值条件有

$$a_2(t)=0,k[b_1(t)\cos k-b_2(t)\sin k]=0.$$

令 $c_1(t)=b_1(t)-a_1(t),c_2(t)=b_2(t)-a_2(t)$,上述 ①,② 两式可化为

$$c_1(t)\sin kt+c_2(t)\cos kt=0,c_1(t)\cos kt-c_2(t)\sin kt=\frac{1}{k}.$$

利用 $a_2(t)=0$，解上述方程有

$$c_1(t)=\frac{\cos kt}{k},c_2(t)=-\frac{\sin kt}{k}=b_2(t),$$

$$b_1(t)=-\frac{\sin k\cdot\sin kt}{k\cos k}.$$

于是

$$a_1(t)=b_1(t)-c_1(t)=-\frac{\cos k(t-1)}{k\cos k}.$$

最后求得格林函数为

$$G(x,t)=\begin{cases}-\dfrac{\cos k(t-1)\cdot\sin kx}{k\cos k}, & 0\leqslant x\leqslant t,\\[2ex] -\dfrac{\sin kt\cdot\cos k(x-1)}{k\cos k}, & t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

5. 对怎样的 a，存在边值问题 $y''+ay=f(x),y(0)=0,y(1)=0$ 的格林函数？

解：当 $a>0$ 时，易得边值问题 $y''=f(x),y(0)=0,y(1)=0$ 的格林函数为

$$G(x,t)=\begin{cases}\dfrac{(1-x)(-t)}{1-0},0\leqslant t\leqslant x,\\[2ex] \dfrac{(1-t)(-x)}{1-0},x\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-t(1-x),0\leqslant t\leqslant x,\\ -x(1-t),x\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

由 $a>0$ 时，由习题 8.1 第 5 题知当 $a=(2n-1)^2\pi^2(n=1,2,3\cdots)$ 时边值问题不可解，则不存在格林函数，现令 $a=\lambda^2(\lambda>0)$ 且 $a\neq(2n-1)^2\pi^2(n=1,2,3\cdots)$，则 $y''+ay=0$ 可变形为 $y''+\lambda^2y=0$，其基本解组为 $y_1(x)=\cos\lambda x,y_2(x)=\sin\lambda x$. 由格林函数的定义，当 $0\leqslant x\leqslant t$ 时，

$$G(x,t)=a_1(t)\cos\lambda x+a_2(t)\sin\lambda x,$$

当 $t\leqslant x\leqslant 1$ 时，$G(x,t)=b_1(t)\cos\lambda x+b_2(t)\sin\lambda x$.

因为当 $x=t$ 时 $G(x,t)$ 连续，所以有

$$a_1(t)\cos\lambda t+a_2(t)\sin\lambda t-[b_1(t)\cos\lambda t+b_2(t)\sin\lambda t]=0. \qquad ①$$

当 $x=t$ 时 $G(x,t)$ 有跃度

$$-\lambda b_1(t)\sin\lambda t+\lambda b_2(t)\cos\lambda t-[-\lambda a_1(t)\sin\lambda t+\lambda a_2(t)\cos\lambda t]=1. \qquad ②$$

又由 $G(x,t)$ 关于 x 满足边值条件，则有

$$G(0,t)=a_1(t)=0,G(1,t)=b_1(t)\cos\lambda+b_2(t)\sin\lambda=0. \qquad ③$$

由 ①,②,③ 可得，当 $\lambda=k\pi(k=1,2,3\cdots)$ 时，无解，当 $\lambda\neq k\pi$ 时

$$a_2=\frac{1}{\lambda}\cos\lambda t[\cos\lambda-1],b_1=-\frac{1}{\lambda}\sin\lambda t,b_2=\frac{1}{\lambda}\cos\lambda t\cdot\cos\lambda.$$

此时格林函数存在.

当 $a<0$ 时，令 $a=-\lambda^2(\lambda>0)$，则 $y''+ay=0$ 可变形为 $y''-\lambda^2y=0$，其基本解组为 $y_1(x)=$

$e^{\lambda x}, y_2(x) = e^{-\lambda x}$. 由格林函数的定义，当 $0 \leqslant x \leqslant t$ 时，$G(x,t) = a_1(t)e^{\lambda x} + a_2(t)e^{-\lambda x}$.

当 $t \leqslant x \leqslant 1$ 时，$G(x,t) = b_1(t)e^{\lambda x} + b_2(t)e^{-\lambda x}$.

因为 $G(x,t)$ 在 $x = t$ 处连续，所以

$$a_1(t)e^{\lambda t} + a_2(t)e^{-\lambda t} - [b_1(t)e^{\lambda t} + b_2(t)e^{-\lambda t}] = 0. \qquad ④$$

$G(x,t)$ 在 $x = t$ 处有跃度

$$\lambda b_1(t)e^{\lambda t} - \lambda b_2(t)e^{-\lambda t} - [\lambda a_1(t)e^{\lambda t} - \lambda a_2(t)e^{-\lambda t}] = 1. \qquad ⑤$$

$G(x,t)$ 关于 x 满足边值条件，则有

$$G(0,t) = a_1(t) + a_2(t) = 0, \qquad ⑥$$

$$G(1,t) = b_1(t)e^{\lambda} + b_2(t)e^{-\lambda} = 0. \qquad ⑦$$

解由 ④，⑤，⑥，⑦ 组成的方程组可得

$$a_1(t) = \frac{e^{\lambda t} - e^{2\lambda - \lambda t}}{2\lambda(e^{2\lambda} - 1)}, a_2 = \frac{e^{2\lambda - \lambda t} - e^{\lambda t}}{2\lambda(e^{2\lambda} - 1)},$$

$$b_1(t) = \frac{e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}}{2\lambda(e^{2\lambda} - 1)}, b_2 = \frac{e^{-\lambda t} - e^{\lambda t}}{2\lambda(1 - e^{-2\lambda})}.$$

此时格林函数存在.

综上所述，当 $a \neq k^2\pi^2 (k = 1,2,3,\cdots)$ 时，边值问题存在格林函数.

习题 8.3

1. 试证明例 4 中边值问题(8.49)，(8.50) 的解为 $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$.

证明：设 $y_0(x)$ 为边值问题

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = f(x), \\ y(0) = \alpha, y(\pi) = \beta \end{cases} \qquad (\text{I})$$

的任意一个解.

$y_1(x)$ 为边值问题

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = \alpha, y(\pi) = \beta \end{cases} \qquad (\text{II})$$

的任意一个解.

令 $y_2(x) = y_0(x) - y_1(x)$，则有

$$\begin{aligned} y''_2 + \lambda y_2 &= (y''_0 - y''_1) + \lambda(y_0 - y_1) \\ &= (y''_0 + \lambda y_0) - (y''_1 + \lambda y_1) \\ &= f(x) - 0 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

$$y_2(0) = y_0(0) - y_1(0) = \alpha - \alpha = 0,$$

$$y_2(\pi) = y_0(\pi) - y_1(\pi) = \beta - \beta = 0.$$

所以 $y_2(x)$ 是边值问题

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = f(x), \\ y(0) = 0, y(\pi) = 0 \end{cases} \tag{Ⅲ}$$

的解，且 $y_0(x) = y_1(x) + y_2(x)$.

即边值问题(Ⅰ)的任意解 $y(x)$ 可写为 $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$，其中 $y_1(x), y_2(x)$ 分别为边值问题(Ⅱ)，(Ⅲ)的解.

2. 求边值问题 $y'' - \lambda y = 0, y'(0) = 0, y'(l) = 0$ 的本征值和本征函数.

解：① 当 $\lambda > 0$ 时，$r^2 - \lambda = 0$，解得 $r_1 = \sqrt{\lambda}, r_2 = -\sqrt{\lambda}$，则通解为 $y = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$，

代入边值条件得 $\begin{cases} y'(0) = c_1\sqrt{\lambda} - c_2\sqrt{\lambda} = 0, \\ y'(l) = c_1\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}l} - c_2\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}l} = 0, \end{cases}$ 即 $c_1 = c_2 = 0$，故无非零解.

② 当 $\lambda = 0$ 时，通解为 $y(x) = (c_2 + c_1 x)e^{rx} = c_2 + c_1 x$，代入边值条件知 $c_1 = 0$，无非零解.

③ 当 $\lambda < 0$ 时，令 $\lambda = -\mu^2$，则方程变为 $y'' + \mu^2 y = 0$，特征方程为 $r^2 + \mu^2 = 0$，则通解为

$$y(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x,$$

代入边值条件则有

$$y'(0) = -\mu c_1 \sin 0 + \mu c_2 \cos 0 = \mu c_2 = 0,$$

即 $c_2 = 0$；

$$y'(l) = -\mu c_1 \sin \mu l + \mu c_2 \cos \mu l = -\mu c_1 \sin \mu l = 0,$$

即 $\sin \mu l = 0$ 或 $c_1 = 0$(舍去).

由 $\sin \mu l = 0$，知 $\mu = \frac{k\pi}{l}(k = 0,1,2,\cdots)$.

故当 $\mu = \frac{k\pi}{l}$ 时，$\lambda_k = -\mu^2 = -\frac{k^2\pi^2}{l^2}(k = 0,1,2,\cdots)$，有非零解 $y_k = c\cos\frac{k\pi}{l}x$，其中 c 为任意非零常数，$k = 0,1,2,\cdots$.

综上该边值问题的本征值为 $\lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{l^2}$，本征函数 $y_k = c\cos\frac{k\pi}{l}x$，其中 c 为任意非零常数，$k = 0, 1,2,\cdots$.

3. 求边值问题 $y'' - \lambda y = 0, y(0) = 0, y'(l) = 0$ 的本征值和本征函数.

解：① 当 $\lambda = 0$ 时，通解为 $y(x) = c_1 x + c_2$，代入边值条件得 $c_1 = c_2 = 0$，则无非零解.

② 当 $\lambda > 0$ 时，$r^2 - \lambda = 0, r_1 = \sqrt{\lambda}, r_2 = -\sqrt{\lambda}$，通解为 $y(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$，代入边值条件得

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 0, \\ y'(l) = c_1\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}l} - c_2\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}l} = 0, \end{cases}$$

解得 $c_1 = c_2 = 0$，无非零解.

③ 当 $\lambda < 0$ 时，令 $\lambda = -\mu^2$，则方程变为 $y'' + \mu^2 y = 0$，通解为 $y(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$，代入边值条件 $\begin{cases} y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1 = 0, \\ y'(l) = -c_1 \mu \sin \mu l + c_2 \mu \cos \mu l = c_2 \mu \cos \mu l = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} c_1 = 0, \\ \cos \mu l = 0, \end{cases}$

则 $\mu=\frac{(2k-1)}{2l}\pi=\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l}$,则 $\lambda_k=-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{l^2},k=1,2,3,\cdots$.

综上,该边值问题的本征值为 $\lambda_k=-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{l^2}$,本征函数 $y_k=c\sin\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right]$,其中 c 为任意非零常数,$k=1,2,3,\cdots$.

4. 求边值问题 $x^2y''-\lambda y=0,y(1)=0,y(a)=0(a>1)$ 的本征值和本征函数.

解:设 $x=e^t$,则有 $[D(D-1)-\lambda]Y=0$,即 $(D^2-D-\lambda)Y=0$,其中 $D=\frac{d}{dt}$.

其对应特征方程为 $r^2-r-\lambda=0$.

① 当 $\lambda=0$ 时,$r_1=0,r_2=1$,则通解为 $Y=c_1+c_2e^t$,即 $y(x)=c_1+c_2x$,代入边值条件

$$\begin{cases}y(1)=c_1+c_2=0,\\y(a)=c_1+ac_2=0,\end{cases}$$

即 $c_1=c_2=0$,故无非零解.

② 当 $\lambda\neq0$ 时,解特征方程得 $r=\frac{1\pm\sqrt{1+4\lambda}}{2}$.

当 $\lambda\geqslant-\frac{1}{4}$ 时,r 有实根为 r_1,r_2,则通解为 $Y=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}$,即 $y(x)=c_1x^{r_1}+c_2x^{r_2}$,代入边值条件得

$$\begin{cases}y(1)=c_1+c_2=0,\\y(a)=c_1a^{r_1}+c_2a^{r_2}=0,\end{cases}$$

解得 $c_1=c_2=0$,故无非零解.

当 $\lambda<-\frac{1}{4}$ 时,$r=\frac{1\pm\sqrt{1+4\lambda}}{2}$ 没有实根,设 $r_1=\alpha+\beta i,r_2=\alpha-\beta i$,则通解为 $Y=(c_1\cos\beta t+c_2\sin\beta t)e^{\alpha t}$,即 $y(x)=[c_1\cos(\beta\ln x)+c_2\sin(\beta\ln x)]x^{\alpha}$,代入边值条件得

$$\begin{cases}y(1)=c_1=0,\\y(a)=[c_1\cos(\beta\ln a)+c_2\sin(\beta\ln a)]a^{\alpha}=0,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}c_1=0,c_2\neq0,\\\sin(\beta\ln a)=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}c_1=0,\\c_2\neq0,\\\beta=\frac{k\pi}{\ln a},k=1,2,3,\cdots.\end{cases}$

又由于 $\alpha=\frac{1}{2}$,则 $(\beta i)^2=\left(\frac{\sqrt{1+4\lambda_k}}{2}\right)^2=\frac{1+4\lambda_k}{4}$,即 $\lambda_k=-\left(\frac{k\pi}{\ln a}\right)^2-\frac{1}{4},k=1,2,3,\cdots$.

综上,当 $\lambda<-\frac{1}{4}$ 时,该边值问题的本征值 $\lambda_k=-\left(\frac{k\pi}{\ln a}\right)^2-\frac{1}{4}$,本征函数为 $y_k=c\left[\sin\left(\frac{k\pi}{\ln a}\ln x\right)\right]x^{\frac{1}{2}},k=1,2,3,\cdots,c$ 为任意非零常数.

贰

教材知识全解

教材习题详解

教材习题详解

第一章　绪　论

习题 1.2

1. 指出下面微分方程的阶数,并回答方程是否是线性的:

(1) $\frac{dy}{dx}=4x^2-y$;　　(2) $\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+12xy=0$;

(3) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+x\frac{dy}{dx}-3y^2=0$;　　(4) $x\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+3xy=\sin x$;

(5) $\frac{dy}{dx}+\cos y+2x=0$;　　(6) $\sin\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+e^y=x$.

解:(1) 一阶,线性.　(2) 二阶,非线性.　(3) 一阶,非线性.

(4) 二阶,线性.　(5) 一阶,非线性.　(6) 二阶,非线性.

2. 试验证下面函数均为方程$\frac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=0$的解,这里$\omega>0$是常数:

(1) $y=\cos\omega x$;　　(2) $y=c_1\cos\omega x$(c_1 是任意常数);

(3) $y=\sin\omega x$;　　(4) $y=c_2\sin\omega x$(c_2 是任意常数);

(5) $y=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x$($c_1,c_2$ 是任意常数);

(6) $y=A\sin(\omega x+B)$(A,B 是任意常数).

解:(1) 因为 $y=\cos\omega x,\frac{dy}{dx}=-\omega\sin\omega x,\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=-\omega^2\cos\omega x$,

所以$\frac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=-\omega^2\cos\omega x+\omega^2\cos\omega x=0$.

因此,$y=\cos\omega x$ 是方程$\frac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=0$的解.

(2) 因为 $y=c_1\cos\omega x,\frac{dy}{dx}=-c_1\omega\sin\omega x,\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=-c_1\omega^2\cos\omega x$,

所以$\frac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=-c_1\omega^2\cos\omega x+\omega^2c_1\cos\omega x=0$.

因此,$y=c_1\cos\omega x$ 是方程$\frac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=0$的解.

(3) 因为 $y=\sin\omega x,\frac{dy}{dx}=\omega\cos\omega x,\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=-\omega^2\sin\omega x$,

所以$\frac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=-\omega^2\sin\omega x+\omega^2\sin\omega x=0$,

因此,$y=\sin\omega x$ 是方程$\frac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=0$的解.

(4) 因为 $y=c_2\sin\omega x,\dfrac{dy}{dx}=c_2\omega\cos\omega x,\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=-c_2\omega^2\sin\omega x$,

所以$\dfrac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=-c_2\omega^2\sin\omega x+\omega^2c_2\sin\omega x=0$,

因此,$y=c_2\sin\omega x$ 是方程$\dfrac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=0$ 的解.

(5) 因为 $y=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x,\dfrac{dy}{dx}=-c_1\omega\sin\omega x+c_2\omega\cos\omega x$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=-c_1\omega^2\cos\omega x-c_2\omega^2\sin\omega x,$$

所以$\dfrac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=-c_1\omega^2\cos\omega x-c_2\omega^2\sin\omega x+\omega^2(c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x)=0.$

因此,$y=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x$ 是方程$\dfrac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=0$ 的解.

(6) 因为 $y=A\sin(\omega x+B),\dfrac{dy}{dx}=\omega A\cos(\omega x+B)$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=-\omega^2A\sin(\omega x+B),$$

所以$\dfrac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=-\omega^2A\sin(\omega x+B)+\omega^2A\sin(\omega x+B)=0.$

因此,$y=A\sin(\omega x+B)$ 是方程$\dfrac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=0$ 的解.

3. 验证下列各函数是相应微分方程的解:

(1) $y=\dfrac{\sin x}{x},xy'+y=\cos x$;

(2) $y=2+c\sqrt{1-x^2},(1-x^2)y'+xy=2x$($c$ 是任意常数);

(3) $y=ce^x,y''-2y'+y=0$(c 是任意常数);

(4) $y=e^x,y'e^{-x}+y^2-2ye^x=1-e^{2x}$;

(5) $y=\sin x,y'+y^2-2y\sin x+\sin^2x-\cos x=0$;

(6) $y=-\dfrac{1}{x},x^2y'=x^2y^2+xy+1$;

(7) $y=x^2+1,y'=y^2-(x^2+1)y+2x$;

(8) $y=-\dfrac{g(x)}{f(x)},y'=\dfrac{f'(x)}{g(x)}y^2-\dfrac{g'(x)}{f(x)}$.

解:(1) 因为 $y=\dfrac{\sin x}{x},y'=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$,

所以 $xy'+y=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x}+\dfrac{\sin x}{x}=\cos x.$

因此,$y=\dfrac{\sin x}{x}$ 是方程 $xy'+y=\cos x$ 的解.

(2) 因为 $y = 2 + c\sqrt{1-x^2}$, $y' = \dfrac{-cx}{\sqrt{1-x^2}}$,

所以 $(1-x^2)y' + xy = (1-x^2)\cdot\dfrac{-cx}{\sqrt{1-x^2}} + x(2+c\sqrt{1-x^2})$

$$= -cx\sqrt{1-x^2} + 2x + cx\sqrt{1-x^2} = 2x.$$

因此, $y = 2 + c\sqrt{1-x^2}$ 是方程 $(1-x^2)y' + xy = 2x$ 的解.

(3) 因为 $y = ce^x$, $y' = ce^x$, $y'' = ce^x$,

所以 $y'' - 2y' + y = ce^x - 2ce^x + ce^x = 0$.

因此, $y = ce^x$ 是方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解.

(4) 因为 $y = \mathrm{e}^x$, $y' = \mathrm{e}^x$,

所以 $y'\mathrm{e}^{-x} + y^2 - 2y\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x\mathrm{e}^x = 1 - \mathrm{e}^{2x}$,

因此, $y = \mathrm{e}^x$ 是方程 $y'\mathrm{e}^{-x} + y^2 - 2y\mathrm{e}^x = 1 - \mathrm{e}^{2x}$ 的解.

(5) 因为 $y = \sin x$, $y' = \cos x$,

所以 $y' + y^2 - 2y\sin x + \sin^2 x - \cos x = \cos x + \sin^2 x - 2\sin x\sin x + \sin^2 x - \cos x = 0$,

因此, $y = \sin x$ 是方程 $y' + y^2 - 2y\sin x + \sin^2 x - \cos x = 0$ 的解.

(6) 因为 $y = -\dfrac{1}{x}$, $y' = \dfrac{1}{x^2}$,

所以 $x^2y' = x^2\dfrac{1}{x^2} = 1$, 又 $x^2y^2 + xy + 1 = x^2\left(-\dfrac{1}{x}\right)^2 + x\left(-\dfrac{1}{x}\right) + 1 = 1$,

因此, $y = -\dfrac{1}{x}$ 是方程 $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$ 的解.

(7) 因为 $y = x^2 + 1$, $y' = 2x$,

所以 $y^2 - (x^2+1)y + 2x = (x^2+1)^2 - (x^2+1)(x^2+1) + 2x = 2x = y'$,

因此, $y = x^2 + 1$ 是方程 $y' = y^2 - (x^2+1)y + 2x$ 的解.

(8) 因为 $y = -\dfrac{g(x)}{f(x)}$, 所以 $y' = -\dfrac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f^2(x)} = \dfrac{g(x)f'(x)}{f^2(x)} - \dfrac{g'(x)}{f(x)}$.

又因为 $\dfrac{f'(x)}{g(x)}y^2 - \dfrac{g'(x)}{f(x)} = \dfrac{f'(x)}{g(x)}\left(-\dfrac{g(x)}{f(x)}\right)^2 - \dfrac{g'(x)}{f(x)} = \dfrac{g(x)f'(x)}{f^2(x)} - \dfrac{g'(x)}{f(x)} = y'$,

所以, $y = -\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 是方程 $y' = \dfrac{f'(x)}{g(x)}y^2 - \dfrac{g'(x)}{f(x)}$ 的解.

4. 给定一阶微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$.

(1) 求出它的通解； (2) 求通过点 $(1,4)$ 的特解；

(3) 求出与直线 $y = 2x + 3$ 相切的解； (4) 求出满足条件 $\int_0^1 y\mathrm{d}x = 2$ 的解；

(5) 绘出(2),(3),(4) 中的解的图形.

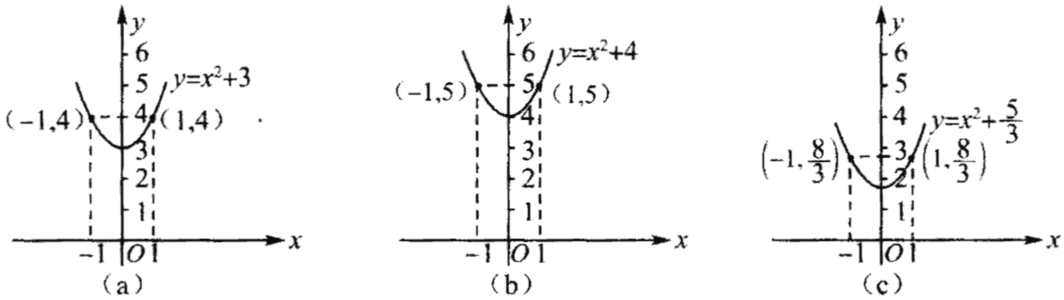
解:(1) 由 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$, 得 $\mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x$, 方程两边积分, 即得 $y = x^2 + c$, 其中 c 为任意常数. 所以, 方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$ 的通解为 $y = x^2 + c$, c 为任意常数.

(2) 把$\begin{cases}x=1,\\y=4\end{cases}$代入 $y=x^2+c$ 得 $c=3$. 所以过点(1,4) 的特解为 $y=x^2+3$.

(3) 因为与直线相切,所以方程组$\begin{cases}y=x^2+c,\\y=2x+3\end{cases}$有且只有唯一一组解,即 $x^2+c=2x+3$ 有唯一解,故 $c=4$. 因此,与直线 $y=2x+3$ 相切的解是 $y=x^2+4$.

(4) 因为$\int_0^1 y\mathrm{d}x=\int_0^1(x^2+c)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^3}{3}+cx\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}+c=2$,所以 $c=\frac{5}{3}$,因此,满足条件$\int_0^1 y\mathrm{d}x=2$ 的解为 $y=x^2+\frac{5}{3}$.

(5) 满足(2),(3),(4) 的解的图形分别如图(1.1) 中的(a),(b),(c) 所示.



图(1.1)

5. 求下列两个微分方程的公共解:

$$y'=y^2+2x-x^4,\ y'=2x+x^2+x^4-y-y^2.$$

解:因为方程 $y'=y^2+2x-x^4$ 与方程 $y'=2x+x^2+x^4-y-y^2$ 的公共解满足

$$y^2+2x-x^4=2x+x^2+x^4-y-y^2,$$

化简得$(y-x^2)[2(y+x^2)+1]=0$,

所以 $y=x^2$ 和 $y=-\frac{1}{2}-x^2$ 可能是两个方程的公共解. 进一步代入验证,可以证明 $y=x^2$ 是两个方程的公共解,而 $y=-\frac{1}{2}-x^2$ 不是两个方程的解.

因此,两个方程的公共解是 $y=x^2$.

方法点击:本题是求解方程满足一定条件的解. 在求解过程中,由于令其导数相等时很容易产生增解,因而要将所求结果代回到原方程进行检验,舍去增解.

6. 求微分方程 $y'+xy'^2-y=0$ 的直线积分曲线.

解:设方程 $y'+xy'^2-y=0$ 的直线积分曲线为 $y=kx+b$,则 $y'=k,k+xk^2-kx-b=0$.

所以$\begin{cases}k=b,\\k^2=k,\end{cases}$即$\begin{cases}k=0,\\b=0,\end{cases}\begin{cases}k=1,\\b=1.\end{cases}$

因此,方程 $y'+xy'^2-y=0$ 的直线积分曲线为 $y=0$ 或 $y=x+1$.

方法点击:本题是求解方程的部分解,采用的是待定系数法. 待定系数法是求解常微分方程常用的方法之一,有待定系数法和待定函数法. 解决此类问题的关键在于正确地设出解具有的形式.

7. 证明：与微分方程 $4x^2y'^2-y^2=xy^3$ 的积分曲线关于坐标原点$(0,0)$成中心对称的曲线，也是此微分方程的积分曲线.

证明：设微分方程的积分曲线为 $y=f(x)$，则有 $4x^2f'^2(x)-f^2(x)=xf^3(x)$.

又若设与积分曲线 $y=f(x)$ 成中心对称的曲线为 $y=g(x)$，则有 $f(-x)=-g(x)$，从而 $f'(-x)=g'(x)$.

在方程 $4x^2f'^2(x)-f^2(x)=xf^3(x)$ 中用 $-x$ 代替 x 得

$$4(-x)^2f'^2(-x)-f^2(-x)=-xf^3(-x),$$

即 $4x^2[f'(-x)]^2-[-f(-x)]^2=x[-f(-x)]^3$，于是 $4x^2g'^2(x)-g^2(x)=xg^3(x)$.

这就证明了 $y=g(x)$ 也是微分方程的积分曲线.

8. 试建立分别具有下列性质的曲线所满足的微分方程：

(1) 曲线上任一点的切线与该点的径向夹角为 α；

(2) 曲线上任一点的切线介于两坐标轴之间的部分等于定长 l；

(3) 曲线上任一点的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积都等于常数 a^2；

(4) 曲线上任一点的切线介于两坐标轴间的部分被切点等分；

(5) 曲线上任一点的切线的纵截距等于切点横坐标的平方；

(6) 曲线上任一点的切线的纵截距是切点的横坐标和纵坐标的等差中项；

(7) 曲线上任一点的切线的斜率与切点的横坐标成正比.

解：(1) 设曲线为 $y=f(x)$，在点(x,y)处曲线的切线斜率为 $k=y'=f'(x)$，而点(x,y)处径向斜率为 $k_1=\dfrac{y}{x}$. 当曲线与切点的径向夹角为 α 时有关系式 $\tan\alpha=\dfrac{k-k_1}{1+kk_1}$，则所求的微分方程为

$$\tan\alpha=\frac{y'-\dfrac{y}{x}}{1+y'\dfrac{y}{x}}，即\ xy'-y=(x+yy')\tan\alpha，从而有，y'=\frac{y+x\tan\alpha}{x-y\tan\alpha}.$$

(2) 设曲线为 $y=f(x)$，在点(x,y)处曲线的切线斜率为 $k=y'$，切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，其中(X,Y)为切线上的动点坐标.

切线在 x,y 坐标轴上的截距分别为 $\overline{X}=x-\dfrac{y}{y'}$ 和 $\overline{Y}=y-xy'$.

由题意知，$\overline{X}^2+\overline{Y}^2=l^2$，即 $\left(x-\dfrac{y}{y'}\right)^2+(y-xy')^2=l^2$，

整理得 $(1+y'^2)(xy'-y)^2=l^2y'^2$.

所以，所求的微分方程为 $(1+y'^2)(xy'-y)^2=l^2y'^2$.

(3) 设曲线为 $y=f(x)$，在点(x,y)处曲线的切线斜率为 $k=y'$，切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，其中(X,Y)为切线上的动点坐标.

切线在 x,y 坐标轴上的截距分别为 $\overline{X}=x-\dfrac{y}{y'}$ 和 $\overline{Y}=y-xy'$.

由题意知，$\dfrac{1}{2}\mid\overline{X}\cdot\overline{Y}\mid=a^2$，即 $(y-xy')^2=2a^2\mid y'\mid$.

因此，所求的微分方程为 $(y-xy')^2=2a^2\mid y'\mid$.

(4) 设曲线为 $y=f(x)$，在点(x,y)处曲线的切线斜率为 $k=y'$，切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，

其中(X,Y)为切线上的动点坐标.

切线与x轴,y轴的交点分别为$\left(x-\frac{y}{y'},0\right)$和$(0,y-xy')$. 由题意知,

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{y}{y'}\right)=x,\frac{1}{2}(y-xy')=y,$$

整理得,$xy'+y=0$,此即为所求的微分方程.

(5) 设曲线为$y=f(x)$,在点(x,y)处曲线的切线斜率为$k=y'$,切线方程为$Y-y=y'(X-x)$,其中(X,Y)为切线上的动点坐标.

切线的纵截距$\bar{Y}=y-xy'$,由题意知$y-xy'=x^2$,即$xy'=y-x^2$.

(6) 由(5)知,$\bar{Y}=\frac{1}{2}(x+y)$,从而有$2xy'=y-x$. 因此,所求的微分方程为$2xy'=y-x$.

(7) 设曲线为$y=f(x)$,在点(x,y)处曲线的切线斜率为$k=y'$,由题意得$y'=kx$($k>0$为比例常数).

第二章　一阶微分方程的初等解法

习题 2.1

1. 求下列方程的解:

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$,并求满足初值条件$x=0,y=1$的特解;

(2) $y^2\mathrm{d}x+(x+1)\mathrm{d}y=0$,并求满足初值条件$x=0,y=1$的特解;

(3) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1+y^2}{xy+x^3y}$;　　(4) $(1+x)y\mathrm{d}x+(1-y)x\mathrm{d}y=0$;

(5) $(y+x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}x=0$;　　(6) $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y+\sqrt{x^2-y^2}=0$;

(7) $\tan y\mathrm{d}x-\cot x\mathrm{d}y=0$;　　(8) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{e}^{y^2+3x}}{y}=0$;

(9) $x(\ln x-\ln y)\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0$;　　(10) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{x-y}$.

解:(1) 将变量分离,得到$\frac{\mathrm{d}y}{y}=2x\mathrm{d}x$.

两边积分,即得$\ln|y|=x^2+c_1$,因而通解为$y=\pm\mathrm{e}^{x^2+c_1}=c\mathrm{e}^{x^2}$.

又$y=0$也是方程的解,若取$c=0$,则$y=0$含在通解中,所以方程的通解为$y=c\mathrm{e}^{x^2}$,c为任意常数.

把$x=0,y=1$代入通解,得满足条件的特解为$y=\mathrm{e}^{x^2}$.

(2) 将变量分离,得到$-\frac{\mathrm{d}y}{y^2}=\frac{\mathrm{d}x}{x+1}$.

两边积分,即得$\frac{1}{y}=\ln|x+1|+c$,因而通解为$y=\frac{1}{\ln|x+1|+c}$,其中c为任意常数.

$y=0$是方程的一个特解. 将$x=0,y=1$代入通解,得$c=1$,故满足初值条件的特解为

$$y=\frac{1}{\ln|x+1|+1}.$$

(3) 将变量分离，得到$\frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}$，对两边积分，即得

$$\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(y^2)}{1+y^2}=\int\frac{-\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}+1},$$

即$\frac{1}{2}\ln|1+y^2|=-\frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{1}{x^2}\right|+c_1$，$c_1$ 为任意常数.

所以通解为$(1+y^2)(1+x^2)=cx^2$，其中 $c=\mathrm{e}^{2c_1}$ 是任意正常数.

(4) 将变量分离，得到$-\frac{(1-y)}{y}\mathrm{d}y=\frac{(1+x)}{x}\mathrm{d}x$($x\neq 0,y\neq 0$ 时).

两边积分，即得 $y-\ln|y|=x+\ln|x|+c_1$，c_1 为任意常数.

即 $x-y+\ln|xy|=c$，其中 $c=-c_1$ 为任意常数.

又易证 $y=0$ 也是方程的解. 所以方程的解为 $y=0$ 及 $x-y+\ln|xy|=c$.

(5) 原方程变形为 $y\mathrm{d}y+x\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0$，从而有

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2+y^2)+(x^2+y^2)\cdot\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=0.$$

两边同除以 x^2+y^2，即为$\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{2(x^2+y^2)}+\frac{\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=0$，

两边积分，得到$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\arctan\frac{y}{x}=c$，$c$ 为任意常数.

(6) 原方程变形为 $x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x+\sqrt{x^2-y^2}\,\mathrm{d}x=0$.

当 $y^2\neq x^2$ 时，两边同除以 $\sqrt{x^2-y^2}$ 得$\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-y^2}}+\mathrm{d}x=0$，即$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}+\frac{1}{x}\mathrm{d}x=0$，

两边积分得 $\arcsin\frac{y}{x}+\ln|x|=c$，其中 c 为任意常数.

另外，当 $y^2=x^2$ 时，易验证 $y^2=x^2$ 也是方程的解.

所以，原方程的解为 $y^2=x^2$ 及 $\arcsin\frac{y}{x}+\ln|x|=c$.

(7) 当 $\tan y\neq 0$ 时，即 $y\neq k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时，分离变量得 $\cot y\mathrm{d}y=\tan x\mathrm{d}x$.

两边同时积分，即得 $\ln|\sin y|=-\ln|\cos x|+c_1$，其中 c_1 为任意常数.

即 $\sin y\cos x=c$，其中 $c=\pm\mathrm{e}^{c_1}$ 为非零常数.

另外，$y=k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 也是方程的解.

所以，原方程的解为 $\sin y\cos x=c$ 及 $y=k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

(8) 原方程可以变形为 $\mathrm{e}^{-y^2}\cdot y\mathrm{d}y+\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x=0$.

两边积分，即得$\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y^2}=c_1$，$c_1$ 为任意常数.

化简得 $2e^{3x}-3e^{-y^2}=c$，其中 $c=6c_1$ 为任意常数.

(9) 方程可变形为 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x}{y}\ln\dfrac{x}{y}$，令 $u=\dfrac{x}{y}$，即 $x=yu$，则原方程变为 $u+y\cdot\dfrac{du}{dy}=u\ln u$，即

$\dfrac{du}{u(\ln u-1)}=\dfrac{dy}{y}$.

积分得 $\ln u-1=cy$，即 $\ln\dfrac{x}{y}-1=cy$ 或 $\ln\dfrac{y}{x}+1=-cy$，其中 c 为任意常数.

(10) 原方程可以变形为 $e^y dy=e^x dx$，两边积分，得到 $e^y=e^x+c$，其中 c 为任意常数.

2. 作适当的变量变换求解下列方程：

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{(x+y)^2}$； (2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-y+1}{x-2y+1}$；

(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y+5}{x-y-2}$； (4) $\dfrac{dy}{dx}=(x+1)^2+(4y+1)^2+8xy+1$；

(5) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^6-2x^2}{2xy^5+x^2y^2}$； (6) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x^3+3xy^2+x}{3x^2y+2y^3-y}$.

解：(1) 令 $u=x+y$，则 $\dfrac{du}{dx}=1+\dfrac{dy}{dx}$，故原方程变为 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{u^2+1}{u^2}$，分离变量为 $\dfrac{u^2du}{u^2+1}=dx$.

两边同时积分，即得 $u-\arctan u=x+c$，c 为任意常数.

所以，原方程的解为 $y=\arctan(x+y)+c$.

(2) 解方程组 $\begin{cases}2x-y+1=0,\\ x-2y+1=0,\end{cases}$ 得 $x=-\dfrac{1}{3}$，$y=\dfrac{1}{3}$.

令 $\begin{cases}x=X-\dfrac{1}{3},\\ y=Y+\dfrac{1}{3},\end{cases}$ 代入原方程，则有 $\dfrac{dY}{dX}=\dfrac{2X-Y}{X-2Y}$.

再令 $u=\dfrac{Y}{X}$，即 $Y=uX$，则有 $\dfrac{dY}{dX}=X\dfrac{du}{dX}+u$.

从而 $\dfrac{(1-2u)}{2(1-u+u^2)}du=\dfrac{dX}{X}$，两边同时积分得 $\ln(u^2-u+1)+\ln X^2=c_1$，

即 $\ln(Y^2-XY+X^2)=c_1$，其中 c_1 为任意常数.

所以原方程的解为 $\ln\left[\left(y-\dfrac{1}{3}\right)^2-\left(x+\dfrac{1}{3}\right)\left(y-\dfrac{1}{3}\right)+\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2\right]=c_1$，

化简为 $x^2+y^2-xy+x-y=c$，其中 $c=e^{c_1}-\dfrac{1}{3}$，c_1 是任意常数.

(3) 令 $u=x-y$，即 $y=x-u$，则原方程变为 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{-7}{u-2}$，分离变量，并且积分得 $u^2-4u+14x=c$，c 为任意常数.

代入 $u=x-y$，可得原方程的解为 $(x-y)^2-4(x-y)+14x=c$，化简得

$$x^2+y^2-2xy+10x+4y=c.$$

(4) 令 $u=4y+1$，则原方程为 $\dfrac{\frac{1}{4}du}{dx}=(x+1)^2+u^2+2x(u-1)+1$，即 $\dfrac{du}{dx}=4(u+x)^2+8$.

再令 $v=u+x$,则上面的方程化为$\frac{dv}{dx}=4v^2+9$,分离变量并积分,得 $\arctan\left(\frac{2}{3}v\right)=6x+c$,其中 c 为任意常数.

代回原变量,故原方程的解为 $\tan(6x+c)=\frac{2}{3}(x+4y+1)$.

(5) 令 $u=y^3$,则方程可变形为$\frac{du}{dx}=\frac{3u^2-6x^2}{2xu+x^2}$.

再令 $v=\frac{u}{x}$,即 $u=vx$,则上面方程化为 $x\frac{dv}{dx}+v=\frac{3v^2-6}{2v+1}$,整理得,

$$\frac{7}{5}\cdot\frac{dv}{v-3}+\frac{3}{5}\cdot\frac{dv}{v+2}=\frac{dx}{x},$$

两边同时积分,得$(v-3)^7(v+2)^3=cx^5$,其中 c 为正常数.

代回原变量,并且化简原方程的解为$(y^3-3x)^7(y^3+2x)^3=cx^{15}$.

(6) 原方程可以变形为$\frac{ydy}{xdx}=\frac{2x^2+3y^2+1}{3x^2+2y^2-1}$.

令 $u=x^2-1,v=y^2+1$,则方程可化为$\frac{dv}{du}=\frac{2u+3v}{3u+2v}$.

再令 $w=\frac{v}{u}$,即 $v=uw$,则有$\frac{dv}{du}=w+u\frac{dw}{du}$. 从而 $u\frac{dw}{du}=\frac{2-2w^2}{3+2w}$.

分离变量并化简得$\frac{4}{u}du=\left(\frac{5}{1-w}+\frac{1}{1+w}\right)dw$,两边积分得 $u^4(1-w)^5=c(1+w)$.

代回原变量即得原方程的解为$(x^2-y^2-2)^5=c(x^2+y^2)$,其中 c 为任意常数.

3. 证明方程$\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}=f(xy)$经变换 $xy=u$ 可化为变量分离方程,并由此求解下列方程:

(1) $y(1+x^2y^2)dx=xdy$;　　(2) $\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{2+x^2y^2}{2-x^2y^2}$.

解:令 $u=xy$,即 $y=\frac{u}{x}$,则原方程变为$\frac{x^2}{u}\cdot\frac{x\frac{du}{dx}-u}{x^2}=f(u)$,即$\frac{du}{u(f(u)+1)}=\frac{dx}{x}$.

所以原方程可以化为变量分离方程.

(1) 原方程可以变形为$\frac{xdy}{ydx}=1+(xy)^2$,故相应的 $f(xy)=1+(xy)^2$,即 $f(u)=1+u^2$.

所以,令 $u=xy$ 时,所求解的方程变为$\frac{du}{u(u^2+2)}=\frac{dx}{x}$.

两边积分,得 $x^4\left(1+\frac{2}{u^2}\right)=c$,其中 c 为任意正常数.

因而,原方程的解为 $x^4+\frac{2x^2}{y^2}=c$. 另外,$y=0$ 也是方程的一个特解.

(2) 相应的 $f(xy)=\frac{2+x^2y^2}{2-x^2y^2}$,令 $u=xy$ 时,原方程可化为$\frac{du}{u\left(\frac{2+u^2}{2-u^2}+1\right)}=\frac{dx}{x}$.

两边同时积分,得 $\ln\left|\frac{u}{x^2}\right|=\frac{u^2}{4}+c$,其中 c 为任意常数.

代回原变量,得原方程的解为 $\ln\left|\dfrac{y}{x}\right| = \dfrac{x^2y^2}{4}+c$.

4. 已知 $f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 1(x\neq 0)$,试求函数 $f(x)$ 的一般表达式.

解:对方程 $f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 1$ 两边关于 x 求导得 $f'(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + f^2(x) = 0$.

由已知条件,知 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{f(x)}$,则 $f'(x)\dfrac{1}{f(x)} + f^2(x) = 0$,即 $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = -f^3(x)$.

分离变量,积分得 $f^2(x) = \dfrac{1}{2(x+c)}$,$c$ 为常数,且 $x+c>0$,从而 $f(x) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2(x+c)}}$.

令 $x=1$ 时,有 $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2(1+c)}}\int_0^1 \pm\dfrac{1}{\sqrt{2(t+c)}}\mathrm{d}t = 1$,解得 $c=0$.

所以,$f(x)$ 的一般表达式为 $f(x) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$.

5. 求具有性质 $x(t+s) = \dfrac{x(t)+x(s)}{1-x(t)x(s)}$ 的函数 $x(t)$,已知 $x'(0)$ 存在.

解:令 $t=s=0$,则 $x(0) = \dfrac{2x(0)}{1-x^2(0)}$,化简为 $x(0)[1+x^2(0)] = 0$,所以 $x(0)=0$.

又由导数的定义可得

$$x'(t) = \lim_{s\to 0}\frac{x(t+s)-x(t)}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{x(s)+x^2(t)x(s)}{[1-x(t)x(s)]s} = \lim_{s\to 0}\frac{1+x^2(t)}{1-x(t)x(s)}\cdot\frac{x(s)}{s},$$

由于 $x(0)=0$,$x'(0)$ 存在,故

$$x'(t) = \frac{1+x^2(t)}{1-x(t)x(0)}\cdot\lim_{s\to 0}\frac{x(s)-x(0)}{s} = x'(0)[1+x^2(t)],$$

分离变量,再积分可得 $x(t) = \tan[x'(0)t+c]$,再由 $x(0)=0$,知 $c=0$,从而 $x(t) = \tan[x'(0)t]$.

方法点击:本题是函数方程的求解问题,利用导数定义建立微分方程,转化为求解常微分方程的初值问题.

6. 求一曲线,使它的切线介于坐标轴间的部分被切点分成相等的两段.

解:设所求曲线为 $y=f(x)$,在点 (x,y) 处曲线的切线斜率为 $k=y'$,切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$,其中 (X,Y) 为切线上的动点坐标.

切线与 x 轴,y 轴的交点分别为 $\left(x-\dfrac{y}{y'},0\right)$ 和 $(0,y-xy')$.

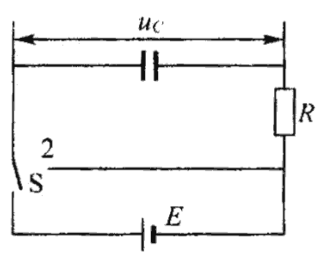
由题意知,$\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{y}{y'}\right) = x$,$\dfrac{1}{2}(y-xy') = y$,整理得 $xy'+y=0$,即 $x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x=0$.

积分得 $xy=c$,其中 c 为任意常数. 所以满足条件的曲线为 $xy=c$.

7. 在图(2.1)所示的 RC 电路中,设 $E=10$ V,$R=100$ Ω,$C=0.01$ F,而开始时电容 C 上没有电荷.

问:(1) 当开关 S 合上"1"后,经过多长时间电容 C 上的电压 $u_C=5$ V?

(2) 当开关 S 合上"1"后,经过相当长的时间(如 1 分钟后)开关 S 从"1"突然转至"2",试求 u_C 的变化规律,并问经过多长时间 $u_C=5$ V?



图(2.1)

解:(1) 教材 2.1.3 中例 9 告诉我们充电过程中电容 C 两端的电压变化规律

满足 $u_C = E(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$.

把 $E = 10$ V,$R = 100\ \Omega$,$C = 0.01$ F,$u_C = 5$ V代入上式得 $e^t = 2$,即 $t = \ln 2$. 所以经过 $\ln 2$ 的时间电容 C 上的电压 $u_C = 5$ V.

(2) 对于放电过程,由闭合回路的基尔霍夫第二定律,有 $u_C = RI$,对于电容器放电时,电容器上的电量 Q 逐渐减少,由初始电量 $Q = C \cdot u_C = C \cdot E$,以后电量减少,所以电流 I 满足

$$I = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d(C \cdot u_C)}{dt} = -C \cdot \frac{du_C}{dt},$$

代入 $u_C = RI$,得到 u_C 满足的微分方程为

$$RC \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = 0,$$

并且刚开始放电时,电容器两端的电压为 E,即初值为 $t = 0, u_C(0) = E$. 对上面的微分方程,分离变量并积分得到 $u_C = c_1 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$,其中 c_1 为待定常数. 代入初值 $u_C(0) = E$,得 $c_1 = E$. 所以,在放电过程中 u_C 的变化规律为 $u_C = E \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$. 把 $E = 10$ V,$R = 100\ \Omega$,$C = 0.01$ F,$u_C = 5$ V代入上式得 $e^t = 2$,即 $t = \ln 2$. 所以,经过时间 $\ln 2$ 时,$u_C = 5$ V.

8. 求出习题 1.2 第 8 题(1) 所确定的曲线,其中 $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

解: 曲线上任一点的切线与该点的径向夹角为 α 的曲线满足微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + x\tan\alpha}{x - y\tan\alpha}.$$

当 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 时,对应方程为 $\frac{dy}{dx} = \frac{y + x}{x - y}$.

令 $u = \frac{y}{x}$,即 $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$,所以有 $x\frac{du}{dx} = \frac{1 + u^2}{1 - u}$.

分离变量并积分得 $\arctan u - \frac{1}{2}\ln(1 + u^2) = \ln|x| + c$,其中 c 为任意常数.

把 $u = \frac{y}{x}$ 代入上面的通解,化简得

$$\arctan\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2} + c.$$

若用极坐标表示通解,则由于 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, \theta = \arctan\frac{y}{x}, r^2 = x^2 + y^2$. 因此,极坐标形式的通解为 $r = c_1 e^{\theta}$,c_1 为正常数.

9. 证明满足习题 1.2 第 8 题(7) 所给条件的曲线是抛物线族.

证明: 习题 1.2 第 8 题第(7) 小题的曲线满足微分方程 $\frac{dy}{dx} = kx$,k 为正常数.

分离变量并积分得 $y = \frac{1}{2}kx^2 + c$,其中 c 为任意常数,所以满足条件的曲线是抛物线族.

习题 2.2

1. 求下列方程的解:

(1) $\frac{dy}{dx} = y + \sin x$;　　(2) $\frac{dx}{dt} + 3x = e^{2t}$;

(3) $\frac{ds}{dt}=-s\cos t+\frac{1}{2}\sin 2t$;

(4) $\frac{dy}{dx}-\frac{n}{x}y=e^x x^n$($n$ 为常数);

(5) $\frac{dy}{dx}+\frac{1-2x}{x^2}y-1=0$;

(6) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^4+y^3}{xy^2}$;

(7) $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$;

(8) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+y^3}$;

(9) $\frac{dy}{dx}=\frac{ay}{x}+\frac{x+1}{x}$($a$ 为常数);

(10) $x\frac{dy}{dx}+y=x^3$;

(11) $\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$;

(12) $(y\ln x-2)y\,dx=x\,dy$;

(13) $2xy\,dy=(2y^2-x)dx$;

(14) $\frac{dy}{dx}=\frac{e^y+3x}{x^2}$;

(15) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{xy+x^3y^3}$;

(16) $y=e^x+\int_0^x y(t)dt$.

解:(1) 首先求线性齐次微分方程$\frac{dy}{dx}=y$的通解.

分离变量,得$\frac{dy}{y}=dx$,两边同时积分,得 $y=ce^x$.

设原方程的通解为 $y=c(x)e^x$,代入原方程得到

$$\frac{dc(x)}{dx}=\sin x\cdot e^{-x},$$

两边同时积分得 $c(x)=\frac{1}{2}e^{-x}(-\sin x-\cos x)+c_1$,

即方程的通解为 $y=c_1e^x-\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$,$c_1$ 为任意常数.

(2) 首先求线性齐次微分方程$\frac{dx}{dt}+3x=0$的通解.

分离变量并积分得 $x=ce^{-3t}$,设原方程的通解为 $x=c(t)e^{-3t}$,代入原方程得到$\frac{dc(t)}{dt}=e^{5t}$,

积分得 $c(t)=\frac{1}{5}e^{5t}+c_1$.

所以,原方程的通解为 $x=c_1e^{-3t}+\frac{1}{5}e^{2t}$,其中 c_1 为任意常数.

(3) 首先求线性齐次微分方程$\frac{ds}{dt}+s\cos t=0$的通解.

分离变量,得$\frac{ds}{s}=-\cos t\,dt$,两边积分得 $s=ce^{-\sin t}$.

设所求通解为 $s=c(t)e^{-\sin t}$,代入原方程,化简后得$\frac{dc(t)}{dt}=\frac{1}{2}\sin(2t)e^{\sin t}$.

两边积分,得 $c(t)=(\sin t-1)e^{\sin t}+c_1$.

于是,原方程的通解为 $s=c_1e^{-\sin t}+\sin t-1$,$c_1$ 为任意常数.

(4) 首先求线性齐次微分方程$\frac{dy}{dx}-\frac{n}{x}y=0$的通解.

分离变量,得$\frac{dy}{y}=\frac{n}{x}dx$,两边积分得 $y=cx^n$.

设所求通解为 $y=c(x)x^n$,代入原方程,化简后得$\frac{dc(x)}{dx}=e^x$,积分得 $c(x)=e^x+c_1$.

于是,原方程的通解为 $y=c_1x^n+e^x x^n$,其中 c_1 为任意常数.

(5) 首先求线性齐次微分方程$\frac{dy}{dx}+\frac{1-2x}{x^2}y=0$ 的通解.

分离变量,得$\frac{dy}{y}=\frac{2x-1}{x^2}dx$,两边积分得 $y=cx^2e^{\frac{1}{x}}$.

设原方程的通解为 $y=c(x)x^2e^{\frac{1}{x}}$,代入原方程,得到$\frac{dc(x)}{dx}=e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}$,两边积分得

$$c(x)=e^{-\frac{1}{x}}+c_1.$$

于是,所求的通解为 $y=c_1x^2e^{\frac{1}{x}}+x^2$,其中 c_1 为任意常数.

(6) 原方程可化为$\frac{y^2dy}{dx}=\frac{x^4+y^3}{x}$.

于是,令 $z=y^3$,则方程变为非齐次线性微分方程$\frac{dz}{dx}=\frac{3z}{x}+3x^3$.

运用线性微分方程的求解公式,得

$$z=e^{\int\frac{3}{x}dx}\left(\int 3x^3e^{-3\ln|x|}dx+c\right)=x^3(3x+c).$$

所以,原方程的通解为 $y^3=x^3(3x+c)$,其中 c 为任意常数.

(7) 原方程可化为$\frac{dy}{d(x+1)}=\frac{2y}{x+1}+(x+1)^3$.

于是,令 $z=x+1$,则方程变为非齐次线性方程$\frac{dy}{dz}=\frac{2}{z}y+z^3$,运用线性方程的求解公式,得

$$y=e^{\int\frac{2}{z}dz}\left(\int z^3\cdot e^{-\int\frac{2}{z}dz}\cdot dz+c\right)=z^2\left(\frac{1}{2}z^2+c\right).$$

代回原变量,得原方程的解为 $y=\frac{1}{2}(x+1)^4+c(x+1)^2$,其中 c 为任意常数.

(8) 原方程可化为$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y}\cdot x+y^2(y\neq 0)$.

将 y 视为自变量,x 为因变量时,它是一个一阶非齐次线性微分方程,运用一阶线性微分方程的求解公式,得

$$x=e^{\int\frac{1}{y}dy}\left(\int y^2\cdot e^{-\int\frac{1}{y}dy}dy+c\right)=y\left(\frac{1}{2}y^2+c\right).$$

另外,$y=0$ 也是方程的解.

所以原方程的解为 $x=cy+\frac{1}{2}y^3$,c 为任意常数,还有 $y=0$ 也是方程的解.

(9) 当 $a=0$ 时,方程变为$\frac{dy}{dx}=\frac{x+1}{x}$,积分得 $y=x+\ln|x|+c$;

当 $a=1$ 时,方程变为$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{x+1}{x}$,运用一阶线性微分方程的求解公式,得

$$y = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left(\int \frac{x+1}{x} \cdot e^{-\int \frac{1}{x}dx} \cdot dx + c\right) = x\left(\ln|x| - \frac{1}{x} + c\right)$$
$$= cx + x\ln|x| - 1.$$

当 $a \neq 0,1$ 时，运用一阶线性微分方程的求解公式，得

$$y = e^{\int \frac{a}{x}dx}\left(\int \frac{x+1}{x} \cdot e^{-\int \frac{a}{x}dx} \cdot dx + c\right) = x^a\left(\frac{x^{1-a}}{1-a} + \frac{x^{-a}}{-a} + c\right)$$
$$= cx^a + \frac{x}{1-a} - \frac{1}{a}.$$

综上所述，原方程的解为 $y = \begin{cases} x + \ln|x| + c, & a = 0, \\ cx + x\ln|x| - 1, & a = 1, \\ cx^a + \dfrac{x}{1-a} - \dfrac{1}{a}, & a \neq 0,1, \end{cases}$ 其中 c 为任意常数.

(10) 原方程可化为 $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x} \cdot y + x^2$. 这是一个一阶非齐次线性微分方程.

运用一阶线性方程的求解公式，得

$$y = e^{\int -\frac{1}{x}dx}\left(\int x^2 \cdot e^{\int \frac{1}{x}dx}dx + c\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{4}x^4 + c\right) = \frac{c}{x} + \frac{1}{4}x^3.$$

所以，原方程的解为 $y = \frac{c}{x} + \frac{1}{4}x^3$，$c$ 为任意常数.

(11) 原方程是 $n = 3$ 的伯努利方程. 令 $z = y^{-2}$，则方程可化为 $\frac{dz}{dx} = 2xz - 2x^3$，这是一阶非齐次线性微分方程，运用一阶线性微分方程的求解公式，得

$$z = e^{\int 2xdx}\left(\int -2x^3 \cdot e^{-\int 2xdx}dx + c\right) = e^{x^2}\left[(x^2+1)e^{-x^2} + c\right] = ce^{x^2} + x^2 + 1.$$

所以，所求通解为 $y^2(ce^{x^2} + x^2 + 1) = 1$. 此外，$y = 0$ 也是方程的解.

(12) 原方程可化为伯努利方程 $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x}y + \frac{\ln x}{x}y^2$，令 $z = y^{-1}$，则原方程可化为 $\frac{dz}{dx} = \frac{2}{x}z - \frac{\ln x}{x}$，这是一阶线性微分方程，运用求解公式，得

$$z = e^{\int \frac{2}{x}dx}\left(\int -\frac{\ln x}{x} \cdot e^{-\int \frac{2}{x}dx} \cdot dx + c\right) = \frac{1}{4}(cx^2 + 2\ln x + 1),$$

代回原变量，得到 $y(cx^2 + 2\ln x + 1) = 4$，这就是原方程的通解.
此外，$y = 0$ 也是方程的解.

(13) 原方程可化为伯努利方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{1}{2y}$，令 $z = y^2$，则原方程可化为 $\frac{dz}{dx} = \frac{2}{x}z - 1$. 运用一阶线性微分方程的求解公式，得

$$z = e^{\int \frac{2}{x}dx}\left[\int (-1) \cdot e^{-\int \frac{2}{x}dx} \cdot dx + c\right] = cx^2 + x.$$

代回原变量，得到原方程的解为 $y^2 = cx^2 + x$，这里 c 为任意常数.

(14) 令 $u = e^y$，则 $\frac{du}{dx} = e^y\frac{dy}{dx}$，代入原方程，得 $\frac{du}{dx} = \frac{u^2 + 3xu}{x^2}$，此为 $n = 2$ 的伯努利方程.

令 $z = u^{-1}$，则上述方程可化为 $\frac{dz}{dx} = -\frac{3}{x}z - \frac{1}{x^2}$. 运用一阶线性微分方程的求解公式，得

$$z=e^{\int -\frac{3}{x}dx}\left(\int -\frac{1}{x^2}e^{\int \frac{3}{x}dx}\cdot dx+c\right)=cx^{-3}-\frac{1}{2x}.$$

代回原变量,得到原方程的解为 $e^y\left(cx^{-3}-\dfrac{1}{2x}\right)=1$,其中 c 为任意常数,整理得,$x^3e^{-y}+\dfrac{1}{2}x^2=c$.

(15) 原方程可化为 $\dfrac{ydy}{dx}=\dfrac{1}{x+x^3y^2}$,令 $u=y^2$,则有 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{2}{x+x^3u}$.

当视 u 为自变量,x 为因变量时,上述方程为 $\dfrac{dx}{du}=\dfrac{x}{2}+\dfrac{u}{2}x^3$,这是 $n=3$ 的伯努利方程.

令 $z=x^{-2}$,则经整理得,$\dfrac{dz}{du}=-z-u$. 运用一阶线性微分方程的求解公式,得

$$z=e^{\int -1du}\left(\int(-u)e^{\int 1du}du+c\right)=ce^{-u}-u+1.$$

代回原变量,可得 $\dfrac{1}{x^2}=c\cdot e^{-y^2}-y^2+1$,即 $(1-x^2+x^2y^2)e^{y^2}=cx^2$,其中 c 为任意常数,这就是原方程的解.

(16) 对方程 $y=e^x+\int_0^x y(t)dt$ 两端关于 x 求导得 $\dfrac{dy}{dx}=e^x+y$.

运用一阶线性微分方程的求解公式,得 $y=e^x\left(\int e^x\cdot e^{-x}dx+c\right)=e^x(x+c)$.

注意到当 $x=0$ 时,由原方程可得 $y=1$,所以可求出 $c=1$. 因此,原方程的解为 $y=e^x(x+1)$.

2. 设函数 $\varphi(t)$ 于 $-\infty<t<+\infty$ 上连续,$\varphi'(0)$ 存在且满足关系式 $\varphi(t+s)=\varphi(t)\varphi(s)$,试求此函数.

解: 令 $s=0$,则 $\varphi(t)=\varphi(t)\varphi(0)$. 由于它对任意 $-\infty<t<+\infty$ 都成立,所以 $\varphi(0)=1$.

由函数导数的定义,得

$$\varphi'(t)=\lim_{s\to 0}\frac{\varphi(t+s)-\varphi(t)}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{\varphi(t)(\varphi(s)-1)}{s}$$

$$=\varphi(t)\cdot\lim_{s\to 0}\frac{\varphi(s)-\varphi(0)}{s}=\varphi(t)\cdot\varphi'(0),$$

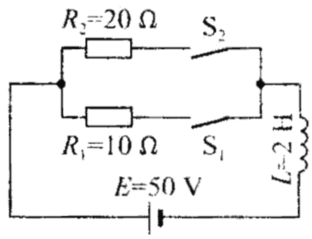
即 $\varphi(t)$ 满足微分方程 $\dfrac{d\varphi(t)}{dt}=\varphi(t)\varphi'(0)$. 积分得 $\varphi(t)=ce^{\varphi'(0)t}$.

又 $\varphi(0)=1$,得出 $c=1$,所以,所求函数为 $\varphi(t)=e^{\varphi'(0)t}$.

3. 如图(2.2)所示的 RL 电路,试求:

(1) 当开关 S_1 合上 10 s 后,电感 L 上的电流;

(2) S_1 合上 10 s 后再将 S_2 合上,求 S_2 合上 20 s 后,电感 L 上的电流.



图(2.2)

解:(1) 电流 I 关于 t 的微分方程为 $\dfrac{dI}{dt}+\dfrac{R_1}{L}I=\dfrac{E}{L}$,

把 $R_1=10\ \Omega,L=2\ H,E=50\ V$ 代入得,

$\dfrac{dI}{dt}=-5I+25$,

运用一阶线性微分方程的求解公式,得 $I=5-ce^{-5t}$,其中 c 为常数.

当 $t=0$ 时 $I=0$,所以 $c=5$,因此,当 $t=10$ s 时,电流为 $I=(5-5e^{-50})A\approx 5$ A.

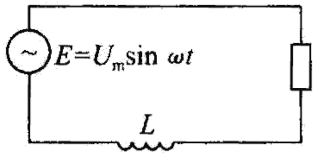
(2) 当 S_1 与 S_2 均合上时，此 RL 电路的电阻为$R=\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)^{-1}=\frac{20}{3}$ Ω，电流 I 关于 t 的微分方程为$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{R}{L}I=\frac{E}{L}$，即$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-\frac{10}{3}I+25$.

运用一阶线性微分方程的求解公式，得 $I=7.5+c\mathrm{e}^{-\frac{10}{3}t}$，其中 c 为常数.

将初值 $I(0)=5$ 代入，可解出 $c=-2.5$.

因此，当 $t=20$ s 时，电感 L 上的电流为 $I=(7.5-2.5\mathrm{e}^{-\frac{200}{3}})\,\mathrm{A}\approx 7.5$ A.

4. 试求图(2.3) 所示的 RL 电路电感上电流 $I(t)$ 的变化规律，并解释其物理意义，设 $t=0$ 时，$I=0$.



图(2.3)

解：此 RL 电路电感上电流 $I(t)$ 满足的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{R}{L}I=\frac{E}{L}.$$

即$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-\frac{R}{L}I+\frac{U_\mathrm{m}}{L}\sin\omega t$，此方程的通解为

$$I(t)=\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\left(\int\frac{U_\mathrm{m}}{L}\sin\omega t\cdot\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\,\mathrm{d}t+c\right)$$

$$=c\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}+\frac{U_\mathrm{m}}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t).$$

由 $t=0$ 时 $I=0$ 得 $c=\frac{\omega LU_\mathrm{m}}{R^2+\omega^2L^2}$. 于是

$$I(t)=\frac{U_\mathrm{m}}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t+\omega L\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}).$$

若令 $\sin\varphi=\frac{-\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$，$\cos\varphi=\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$，则解可化为

$$I(t)=\frac{U_\mathrm{m}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}(\cos\varphi\sin\omega t+\sin\varphi\cos\omega t-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\sin\varphi),$$

即 $I(t)=\frac{U_\mathrm{m}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}[\sin(\omega t+\varphi)-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\sin\varphi]$.

此解的物理意义是电路中的电流分为两部分，一部分随时间逐渐衰减最后为零；另一部分则是发生与电动势变化周期相同但相位相差 φ 角的周期变化.

5. 试证：

(1) 一阶非齐次线性微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y+Q(x)$① 的任两个解之差必为相应的齐次线性微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y$② 的解；

(2) 若 $y=y(x)$ 是 ② 的非零解，而 $y=\bar{y}(x)$ 是 ① 的解，则方程 ① 的通解可表为 $y=cy(x)+\bar{y}(x)$，其中 c 为任意常数；

(3) 方程 ② 任一解的常数倍或任两个解之和(或差) 仍是方程 ② 的解.

证明：(1) 设 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 是方程 ① 的任两个解，即有

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\equiv P(x)\varphi(x)+Q(x),\quad\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\equiv P(x)\psi(x)+Q(x).$$

两式相减,得到$\dfrac{\mathrm{d}[\varphi(x)-\psi(x)]}{\mathrm{d}x}\equiv P(x)[\varphi(x)-\psi(x)]$.

即 $\varphi(x)-\psi(x)$ 为齐次方程 ② 的解.

(2) 因为$\dfrac{\mathrm{d}[cy(x)+\tilde{y}(x)]}{\mathrm{d}x}\equiv c\dfrac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}\tilde{y}(x)}{\mathrm{d}x}\equiv cP(x)y(x)+P(x)\tilde{y}(x)+Q(x)$

$$\equiv P(x)[cy(x)+\tilde{y}(x)]+Q(x).$$

即 $y=cy(x)+\tilde{y}(x)$ 是 ① 的解,且$\dfrac{\partial y}{\partial c}=y(x)\neq 0$,$c$ 为任意常数.

故 $y=cy(x)+\tilde{y}(x)$ 是方程 ① 的通解.

(3) 设 $y=f(x)$,$y=g(x)$ 是方程 ② 的任意两个解,则有

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\equiv P(x)f(x),\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\equiv P(x)g(x).$$

设 c 为任意常数,则

$$\frac{\mathrm{d}[cf(x)]}{\mathrm{d}x}\equiv P(x)[cf(x)],\frac{\mathrm{d}[f(x)\pm g(x)]}{\mathrm{d}x}\equiv P(x)[f(x)\pm g(x)].$$

即说明了 $cf(x)$ 和 $f(x)\pm g(x)$ 也都是方程 ② 的解.

6. 求解习题 1.2 第 8 题(5) 和(6).

解:(1) 其微分方程为 $xy'=y-x^2$,变形得$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}-x$,运用一阶线性微分方程的求解公式得

$$y=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int(-x)\cdot\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right],$$

即 $y=x(c-x)$,其中 c 为任意常数.

(2) 其微分方程为 $2xy'=y-x$,变形得$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{2x}-\dfrac{1}{2}$,运用一阶线性微分方程的求解公式得 $y=$ $\mathrm{e}^{\int\frac{1}{2x}\mathrm{d}x}\left[\int\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{2x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right]$,即 $y=c\sqrt{x}-x$,其中 c 为任意常数.

7. 求解下列方程:

(1) $(x^2-1)y'-xy+1=0$;　　(2) $x(x^2-1)y'-(2x^2-1)y+x^3=0$;

(3) $y'\sin x\cdot\cos x-y-\sin^3 x=0$.

解:(1) 此方程可以变形为$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x}{x^2-1}y-\dfrac{1}{x^2-1}(x\neq\pm 1)$,运用一阶线性微分方程的求解公式得

其通解为 $y=\mathrm{e}^{\int\frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x}\left(\int-\dfrac{1}{x^2-1}\mathrm{e}^{-\int\frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x}\cdot\mathrm{d}x+c\right)$.

即 $y=\sqrt{|x^2-1|}\left(\int-\dfrac{1}{x^2-1}\cdot|x^2-1|^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+c\right)$.

当 $x^2-1>0$ 时,则 $y=\sqrt{x^2-1}\left[\int-(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x+c\right]$.

利用换元法,令 $x=\sec t$,可得

$$\int(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\int(\tan t)^{-3}\sec t\cdot\tan t\mathrm{d}t=\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{\sin t}=-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}},$$

所以,$y=\sqrt{x^2-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}+c\right)=c\sqrt{x^2-1}+x$.

当 $x^2-1<0$ 时，则

$$y=\sqrt{1-x^2}\left[\int-\frac{1}{x^2-1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+c\right]$$

$$=\sqrt{1-x^2}\left[\int(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x+c\right],$$

利用换元法，令 $x=\sin t$，可得

$$\int(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\int(\cos t)^{-3}\cdot\cos t\mathrm{d}t=\int\sec^2 t\mathrm{d}t=\tan t=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

所以，$y=\sqrt{1-x^2}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}+c\right)=c\sqrt{1-x^2}+x.$

当 $x^2-1=0$ 时，原方程变为 $xy=1$，解曲线退化为点$(\pm1,\pm1)$.

综上所述，原方程的解为 $y=c\sqrt{|1-x^2|}+x$.

(2) 此方程可以变形为$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2x^2-1}{x(x^2-1)}y+\dfrac{x^2}{1-x^2}(x\neq0,\pm1)$.

运用一阶线性方程的求解公式得其通解为

$$y=\mathrm{e}^{\int\frac{2x^2-1}{x(x^2-1)}\mathrm{d}x}\left[\int\frac{x^2}{1-x^2}\mathrm{e}^{-\int\frac{2x^2-1}{x(x^2-1)}\mathrm{d}x}\cdot\mathrm{d}x+c\right],$$

即 $$y=|x^2(x^2-1)|^{\frac{1}{2}}\left[\int\frac{x^2}{1-x^2}\cdot|x^2(x^2-1)|^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+c\right].$$

当 $x^2-1>0$，且 $x>0$ 时，$y=x\sqrt{x^2-1}\left[\int-x(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x+c\right]$,

求积分并化简得

$$y=x(1+c\sqrt{x^2-1}).$$

当 $x^2-1<0$，且 $x>0$ 时，$y=x\sqrt{1-x^2}\left[\int x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x+c\right]$,

求积分并化简得

$$y=x(1+c\sqrt{1-x^2}).$$

当 $x^2-1>0$，且 $x<0$ 时，$y=-x\sqrt{x^2-1}\left[\int x(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x+c\right]$,

求积分并化简得

$$y=x(1-c\sqrt{x^2-1}).$$

当 $x^2-1<0$，且 $x<0$ 时，$y=-x\sqrt{1-x^2}\left[\int-x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x+c\right]$,

求积分并化简得

$$y=x(1-c\sqrt{1-x^2}).$$

当 $x^2-1=0$ 时，原方程化为 $y=x$，即曲线退化成两点$(1,1)$ 和$(-1,-1)$.

当 $x=0$ 时原方程化为 $y=0$，即曲线退化成坐标原点$(0,0)$.

综上所述，得到原方程的解为 $y=x(1+c\sqrt{|x^2-1|})$，其中 c 为任意常数.

(3) 此方程可以变形为$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{\sin x\cdot\cos x}y+\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}(\sin x\neq0,\cos x\neq0)$.

运用一阶线性微分方程的求解公式得其通解为

$$y = e^{\int\frac{dx}{\sin x\cos x}}\left(\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\cdot e^{-\int\frac{1}{\sin x\cos x}dx}\cdot dx + c\right),$$

即 $y = \tan x\left(\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\cdot \cot x dx + c\right)$,

求积分并化简得 $y = \tan x(c - \cos x)$,即 $y = c\tan x - \sin x$,

当 $\sin x = 0$ 时,原方程化为 $y = 0$.

当 $\cos x = 0$ 时,原方程化为 $y = \pm 1$,即曲线退化成 $\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}, -1\right)$ 和 $\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 1\right)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

综上所述,原方程的解为 $y = c\tan x - \sin x\left(x \neq k\pi \pm \frac{\pi}{2}\right)$, c 为任意常数,或者点 $\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}, -1\right), \left(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 1\right), k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

习题 2.3

1. 验证下列方程是恰当微分方程,并求出方程的解:

(1) $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$;

(2) $(y - 3x^2)dx - (4y - x)dy = 0$;

(3) $\left[\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x}\right]dx + \left[\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}\right]dy = 0$;

(4) $2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2 y + y^2)dy = 0$;

(5) $\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + 1\right)dx + \left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y} + \frac{1}{y^2}\right)dy = 0$.

解:(1) 由于 $M = x^2 + y, N = x - 2y$,又 $\frac{\partial M}{\partial y} = 1, \frac{\partial N}{\partial x} = 1$,因此方程是恰当微分方程.

现在求 u,使它同时满足如下两个方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 + y, \frac{\partial u}{\partial y} = x - 2y.$$

第一个方程对 x 积分,得到 $u = \frac{1}{3}x^3 + xy + \varphi(y)$,对此等式两端关于 y 求导,得 $\frac{\partial u}{\partial y} = x + \varphi'(y)$,与 $\frac{\partial u}{\partial y} = x - 2y$ 相比较得到 $\varphi'(y) = -2y$,积分后得到 $\varphi(y) = -y^2$,所以 $u = \frac{1}{3}x^3 + xy - y^2$.

即得到原方程的通解为 $\frac{1}{3}x^3 + xy - y^2 = c$,其中 c 是任意常数.

(2) 由于 $M = y - 3x^2, N = x - 4y$,又 $\frac{\partial M}{\partial y} = 1, \frac{\partial N}{\partial x} = 1$,因此方程是恰当微分方程.

把方程重新分项组合,得到 $(ydx + xdy) - 3x^2 dx - 4ydy = 0$,即 $d(xy - x^3 - 2y^2) = 0$.

于是,方程的通解为 $xy - x^3 - 2y^2 = c$,其中 c 为任意常数.

(3) 由于 $M = \frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x}, N = \frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}$,这时

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{2y(x-y)^2+y^2\cdot 2(x-y)}{(x-y)^4}=\frac{2xy}{(x-y)^3},$$
$$\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{2x(x-y)^2-x^2\cdot 2(x-y)}{(x-y)^4}=\frac{2xy}{(x-y)^3},$$
因此方程是恰当微分方程. 现在求 u,使它同时满足如下两个方程：
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y^2}{(x-y)^2}-\dfrac{1}{x}, & ①\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{y}-\dfrac{x^2}{(x-y)^2}. & ②\end{cases}$$
由 ① 式对 x 积分,得到
$$u=-\ln|x|-\frac{y^2}{x-y}+\varphi(y).$$
对上式关于 y 求导,并使它满足 ② 即得
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y^2-2xy}{(x-y)^2}+\varphi'(y)=\frac{1}{y}-\frac{x^2}{(x-y)^2},$$
于是 $\varphi'(y)=\dfrac{1}{y}-1$,积分后可得 $\varphi(y)=\ln|y|-y$,所以
$$u=-\ln|x|-\frac{y^2}{x-y}+\ln|y|-y=\ln\left|\frac{y}{x}\right|-y-\frac{y^2}{x-y},$$
因此,方程的通解为 $\ln\left|\dfrac{y}{x}\right|-y-\dfrac{y^2}{x-y}=c$,其中 c 为任意常数.

(4) 由于 $M=2(3xy^2+2x^3)$,$N=3(2x^2y+y^2)$,这时,$\dfrac{\partial M}{\partial y}=12xy$,$\dfrac{\partial N}{\partial x}=12xy$,故方程是恰当微分方程,把方程重新分项组合,得到
$$(6xy^2\mathrm{d}x+6x^2y\mathrm{d}y)+4x^3\mathrm{d}x+3y^2\mathrm{d}y=0.$$
即 $\mathrm{d}(3x^2y^2+x^4+y^3)=0$,于是,方程的通解为 $3x^2y^2+x^4+y^3=c$,其中 c 为任意常数.

(5) 由于 $M=\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}+1$,$N=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{y^2}$. 因为
$$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}\sin\frac{x}{y}+\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cdot\frac{-x}{y^2}-\frac{1}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^2}\cdot\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x},$$
$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{-1}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{1}{x}\cdot\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}-\frac{1}{y^2}\sin\frac{x}{y}-\frac{1}{y}\cdot\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y},$$
故方程是恰当微分方程,把方程重新分项组合得到
$$\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}\mathrm{d}x-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}\mathrm{d}y\right)+\left(-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}\mathrm{d}x+\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}\mathrm{d}y\right)+\mathrm{d}x+\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y=0.$$
即 $\mathrm{d}\left(-\cos\dfrac{x}{y}+\sin\dfrac{y}{x}+x-\dfrac{1}{y}\right)=0.$

于是,方程的通解为 $\sin\dfrac{y}{x}-\cos\dfrac{x}{y}+x-\dfrac{1}{y}=c$,其中 c 为任意常数.

2. 求下列方程的解：

(1) $2x(ye^{x^2}-1)\mathrm{d}x+e^{x^2}\mathrm{d}y=0$;　　(2) $(e^x+3y^2)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y=0$;

(3) $2xy\mathrm{d}x+(x^2+1)\mathrm{d}y=0$;　　(4) $y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=(x^2+y^2)\mathrm{d}x$;

(5) $y\mathrm{d}x-(x+y^3)\mathrm{d}y=0$;　(6) $(y-1-xy)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0$;

(7) $(y-x^2)\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$;　(8) $(x+2y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0$;

(9) $[x\cos(x+y)+\sin(x+y)]\mathrm{d}x+x\cos(x+y)\mathrm{d}y=0$;

(10) $(y\cos x-x\sin x)\mathrm{d}x+(y\sin x+x\cos x)\mathrm{d}y=0$;

(11) $x(4y\mathrm{d}x+2x\mathrm{d}y)+y^3(3y\mathrm{d}x+5x\mathrm{d}y)=0$.

解:(1) 因为$\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}=2x\mathrm{e}^{x^2}$,重新分项组合得到

$$(2xy\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}y)-2x\mathrm{d}x=0,$$

即 $\mathrm{d}(\mathrm{e}^{x^2}y-x^2)=0$.

于是,方程的通解为 $y\mathrm{e}^{x^2}-x^2=c$,c 为任意常数.

(2) 方程两边同乘以 x^2 得 $x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+3x^2y^2\mathrm{d}x+2x^3y\mathrm{d}y=0$.

即 $\mathrm{d}(\mathrm{e}^x(x^2-2x+2))+\mathrm{d}(x^3y^2)=0$,于是方程的通解为 $\mathrm{e}^x(x^2-2x+2)+x^3y^2=c$,其中 c 为任意常数.

(3) 因为$\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}=2x$,分项重新组合,得$(2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y)+\mathrm{d}y=0$,即 $\mathrm{d}(x^2y+y)=0$,于是方程的通解为 $x^2y+y=c$,c 为任意常数.

(4) 方程两边同除以(x^2+y^2),得$\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\mathrm{d}x$,即 $\mathrm{d}\left(\arctan\dfrac{x}{y}-x\right)=0$,于是方程的通解为 $\arctan\dfrac{x}{y}-x=c$,c 为任意常数.

(5) 方程两边同时乘以$\dfrac{1}{y^2}$,并且重新分项组合得$\left(\dfrac{1}{y}\mathrm{d}x-\dfrac{x}{y^2}\mathrm{d}y\right)-y\mathrm{d}y=0$,即 $\mathrm{d}\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y^2}{2}\right)=0$.

于是方程的通解为$\dfrac{x}{y}-\dfrac{y^2}{2}=c$,$c$ 为任意常数.此外,$y=0$ 也是方程的解.

(6) 这里 $M=y-1-xy$,$N=x$,$\dfrac{\partial M}{\partial y}=1-x$,$\dfrac{\partial N}{\partial x}=1$,方程不是恰当的.

因为$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=-1$,所以方程有积分因子 $\mu=\mathrm{e}^{\int-1\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{-x}$.

以 $\mu=\mathrm{e}^{-x}$ 乘以方程两边,得到$(y\mathrm{e}^{-x}-xy\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x+x\cdot\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}y-\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=0$.

即 $\mathrm{d}(xy\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x})=0$,因而,通解为 $xy+1=c\mathrm{e}^x$,其中 c 为任意常数.

(7) 由于 $M=y-x^2$,$N=-x$,$\dfrac{\partial M}{\partial y}=1$,$\dfrac{\partial N}{\partial x}=-1$,方程不是恰当的.

因为$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=-\dfrac{2}{x}$,所以,方程有积分因子 $\mu=\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}=x^{-2}$.

以 $\mu=x^{-2}$ 乘以方程两边得到$\dfrac{y}{x^2}\mathrm{d}x-\dfrac{1}{x}\mathrm{d}y-1\cdot\mathrm{d}x=0$,即 $\mathrm{d}\left(-\dfrac{y}{x}-x\right)=0$.

因而,方程的通解为 $y+x^2=cx$,其中 c 为任意常数.

(8) 由于 $M=x+2y$,$N=x$,$\dfrac{\partial M}{\partial y}=2$,$\dfrac{\partial N}{\partial x}=1$,方程不是恰当的.

因为$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\dfrac{1}{x}$,所以方程有积分因子$\mu=e^{\int\frac{1}{x}dx}=x$.

以$\mu=x$乘以方程两边得到$2xydx+x^2dy+x^2dx=0$,即$d\left(x^2y+\dfrac{1}{3}x^3\right)=0$.

于是,方程的通解为$x^3+3x^2y=c$,其中c为任意常数.

(9) 由于$M=x\cos(x+y)+\sin(x+y)$,$N=x\cos(x+y)$,

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-x\sin(x+y)+\cos(x+y),\frac{\partial N}{\partial x}=-x\sin(x+y)+\cos(x+y),$$

所以方程是恰当的,且方程可以写为$d(x\sin(x+y))=0$.

于是方程的通解为$x\sin(x+y)=c$,其中c为任意常数.

(10) 由于$M=y\cos x-x\sin x$,$N=y\sin x+x\cos x$,

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\cos x,\frac{\partial N}{\partial x}=y\cos x+\cos x-x\sin x,$$

从而方程不是恰当的. 因为$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}=1$,所以方程有积分因子$\mu=e^{\int 1dy}=e^y$.

以$\mu=e^y$乘以方程两边得

$$(ye^y\cos xdx+ye^y\sin xdy)+(e^yx\cos xdy-e^yx\sin xdx)=0,$$

即
$$d[(y-1)e^y\sin x+e^yx\cos x]=0.$$

于是方程的通解为$e^y(y-1)\sin x+e^yx\cos x=c$,$c$为任意常数.

(11) 由于$M=4xy+3y^4$,$N=2x^2+5xy^3$,$\dfrac{\partial M}{\partial y}=4x+12y^3$,$\dfrac{\partial N}{\partial x}=4x+5y^3$. 此方程不是恰当的. 因为$M,N$为多项式,设积分因子的形式为$\mu=x^my^n$,于是方程乘以积分因子$x^my^n$后变为

$$(4x^{m+1}y^{n+1}+3x^my^{n+4})dx+(2x^{m+2}y^n+5x^{m+1}y^{n+3})dy=0.$$

它是恰当方程的充要条件为

$$4(n+1)x^{m+1}y^n+3(n+4)x^my^{n+3}=2(m+2)x^{m+1}y^n+5(m+1)x^my^{n+3}.$$

对比系数项得$\begin{cases}4n-2m=0,\\3n-5m+7=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=2,\\n=1.\end{cases}$

即积分因子为$\mu=x^2y$,方程乘以积分因子后为

$$4x^3y^2dx+3x^2y^5dx+2x^4ydy+5x^3y^4dy=d(x^4y^2)+d(x^3y^5)=0.$$

于是,方程的通解为$x^4y^2+x^3y^5=c$,另外,$x=0$,$y=0$也是方程的解.

3. 试导出方程$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$分别具有形为$\mu(x+y)$和$\mu(xy)$的积分因子的充要条件.

解:方程$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$具有$\mu(x+y)$的积分因子的充要条件是

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

即$N\dfrac{\partial\mu}{\partial x}-M\dfrac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$.

令$z=x+y$,则$\mu(x+y)=\mu(z)$,$\dfrac{\partial\mu}{\partial x}=\dfrac{\partial\mu}{\partial y}=\dfrac{\partial\mu}{\partial z}$.

所以有$(N-M)\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}=\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)\mu(z)$,即$\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mu(z)}=\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N-M}\mathrm{d}z$.

当且仅当$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N-M}=f(z)$时,可以解出$\mu$,所以方程$M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y=0$具有形为$\mu(x+y)$的积分因子的充要条件为

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N-M}=f(x+y).$$

同理,若令$\omega=xy$,则

$$\mu(xy)=\mu(\omega),\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x}=y\cdot\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega},\frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y}=x\cdot\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega},$$

方程$M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y=0$具有形如$\mu(xy)$的积分因子的充要条件是

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu,$$

即$(yN-xM)\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega}=\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)\mu(\omega)$.

当且仅当$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{yN-xM}=g(\omega)=g(xy)$时,可以求出$\mu$的表达式.

所以,方程$M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y=0$具有形为$\mu(xy)$的积分因子的充要条件为

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{yN-xM}=g(xy).$$

4. 设$f(x,y)$及$\dfrac{\partial f}{\partial y}$连续,试证方程$\mathrm{d}y-f(x,y)\mathrm{d}x=0$为线性微分方程的充要条件是它有仅依赖于$x$的积分因子.

证明:充分性:

设$\mathrm{d}y-f(x,y)\mathrm{d}x=0$有仅依赖于$x$的积分因子,下证该方程是线性的.

由于积分因子只依赖于x,所以存在某个$\varphi(x)$满足

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{-\dfrac{\partial f}{\partial y}-0}{1}=\varphi(x),$$

即$\dfrac{\partial f}{\partial y}=-\varphi(x)$.

积分得$f(x,y)=-\varphi(x)y+h(x)$,其中$h(x)$是关于x的任意可微函数.

这样,原方程便为$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\varphi(x)y+h(x)$,即证明了$\mathrm{d}y-f(x,y)\mathrm{d}x=0$是线性微分方程.

必要性:

设方程$\mathrm{d}y-f(x,y)\mathrm{d}x=0$是线性微分方程.即存在$g(x)$,$h(x)$使得$f(x,y)=yg(x)+h(x)$.

此时,$M=-f(x,y)=-yg(x)-h(x)$,$N=1$,

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{-g(x)}{1}=-g(x),$$

所以方程具有积分因子 $\mu=e^{\int -g(x)dx}$，即方程有仅依赖于 x 的积分因子.

5. 试证齐次微分方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 当 $xM+yN\neq 0$ 时有积分因子 $\mu=\frac{1}{xM+yN}$.

证明：设 $M(x,y)$，$N(x,y)$ 是 m 次齐次函数，令 $y=ux$，则 $dy=xdu+udx$，

$$M(x,y)=M(x,ux)=x^m M(1,u),$$

$$N(x,y)=N(x,ux)=x^m N(1,u).$$

方程两边乘积分因子 $\mu=\frac{1}{xM+yN}(xM+yN\neq 0)$ 后变为

$$\frac{M}{xM+yN}dx+\frac{N}{xM+yN}dy=0.$$

即 $\frac{M(x,ux)+uN(x,ux)}{xM(x,ux)+yN(x,ux)}dx+\frac{xN(x,ux)}{xM(x,ux)+yN(x,ux)}du=0$，

即 $\frac{1}{x}dx+\frac{N(1,u)}{M(1,u)+uN(1,u)}du=0$.

此为恰当微分方程，有解 $x=ce^{-\int\frac{N(1,u)}{M(1,u)+uN(1,u)}du}$.

这就证明了 $\mu=\frac{1}{xM+yN}(xM+yN\neq 0)$ 是使方程变为恰当微分方程的积分因子.

6. 设函数 $f(u)$，$g(u)$ 连续、可微且 $f(u)\neq g(u)$，试证方程 $yf(xy)dx+xg(xy)dy=0$ 有积分因子

$$\mu=\{xy[f(xy)-g(xy)]\}^{-1}.$$

证明：因为 $M=yf(xy)$，$N=xg(xy)$，

$$\frac{\partial(M\cdot\mu)}{\partial y}-\frac{\partial(N\cdot\mu)}{\partial x}$$

$$=\frac{xf'\cdot x(f-g)-f\cdot x(f'x-g'x)}{x^2(f-g)^2}-\frac{g'y^2(f-g)-g\cdot y(f'y-g'y)}{y^2(f-g)^2}$$

$$=\frac{f'(f-g)-f(f'-g')}{(f-g)^2}-\frac{g'(f-g)-g(f'-g')}{(f-g)^2}=0,$$

所以该方程有积分因子 $\mu=\{xy[f(xy)-g(xy)]\}^{-1}$.

7. 假设方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 中的函数 $M(x,y)$，$N(x,y)$ 满足关系 $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=Nf(x)-Mg(y)$，其中 $f(x)$，$g(y)$ 分别为 x 和 y 的连续函数，试证该方程有积分因子

$$\mu=\exp\left[\int f(x)dx+\int g(y)dy\right].$$

证明：用 $\mu=\exp\left[\int f(x)dx+\int g(y)dy\right]$ 乘以方程两边得 $\mu Mdx+\mu Ndy=0$.

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}-\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}=\mu\frac{\partial M}{\partial y}+M\mu g(y)-\mu\frac{\partial N}{\partial x}-N\mu f(x)$$

$$=\mu\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}+Mg(y)-Nf(x)\right]$$

$$\equiv 0.$$

由于$\dfrac{\partial(\mu M)}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial(\mu N)}{\partial x}$，由积分因子的定义知 $\mu=\exp\left[\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(y)\mathrm{d}y\right]$为方程的积分因子.

8. 求出伯努利微分方程的积分因子.

解:伯努利方程为$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y+Q(x)y^n(n\neq 0,1)$，改写为

$$\mathrm{d}y-P(x)y\mathrm{d}x-Q(x)y^n\mathrm{d}x=0,$$

乘以 y^{-n} 得 $y^{-n}\mathrm{d}y-P(x)y^{1-n}\mathrm{d}x-Q(x)\mathrm{d}x=0$,

即 $\mathrm{d}(y^{1-n})-(1-n)P(x)y^{1-n}\mathrm{d}x-(1-n)Q(x)\mathrm{d}x=0$.

再乘以 $\mathrm{e}^{-(1-n)\int P(x)\mathrm{d}x}$ 得

$$\mathrm{e}^{-(1-n)\int P(x)\mathrm{d}x}[\mathrm{d}(y^{1-n})-(1-n)P(x)y^{1-n}\mathrm{d}x]-\mathrm{e}^{-(1-n)\int P(x)\mathrm{d}x}(1-n)Q(x)\mathrm{d}x=0,$$

即 $\mathrm{d}[y^{1-n}\mathrm{e}^{-(1-n)\int P(x)\mathrm{d}x}]-\mathrm{d}\left[\int(1-n)Q(x)\mathrm{e}^{-(1-n)\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]=0$.

这是全微分方程，因此所求的积分因子是 $y^{-n}\mathrm{e}^{-(1-n)\int P(x)\mathrm{d}x}$.

9. 设 $\mu(x,y)$ 是方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 的积分因子，从而求得可微函数 $U(x,y)$ 使得 $\mathrm{d}U=\mu(M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y)$. 试证 $\tilde{\mu}(x,y)$ 也是该方程的积分因子的充要条件是 $\tilde{\mu}(x,y)=\mu\varphi(U)$，其中 $\varphi(t)$ 是 t 的可微函数.

证明:充分性:

当有 $\mathrm{d}U=\mu(M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y)$ 及 $\tilde{\mu}(x,y)=\mu\varphi(U)$ 时，对方程有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial(\tilde{\mu}M)}{\partial y}-\frac{\partial(\tilde{\mu}N)}{\partial x}\\&=\tilde{\mu}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)+\left(M\frac{\partial\tilde{\mu}}{\partial y}-N\frac{\partial\tilde{\mu}}{\partial x}\right)\\&=\mu\varphi(U)\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)+M\frac{\partial\mu}{\partial y}\varphi(U)+M\mu^2\varphi'(U)N-N\frac{\partial\mu}{\partial x}\varphi(U)-N\mu^2\varphi'(U)M\\&=\varphi(U)\left[\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}-\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}\right]+\mu^2\varphi'(U)(MN-NM).\end{aligned}$$

因为 $\mu(x,y)$ 是方程的积分因子，所以$\dfrac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\dfrac{\partial(\mu N)}{\partial x}$.

代入上式，得$\dfrac{\partial(\tilde{\mu}M)}{\partial y}-\dfrac{\partial(\tilde{\mu}N)}{\partial x}\equiv 0$，即 $\tilde{\mu}(x,y)$ 也是方程的积分因子.

必要性:

设 $\tilde{\mu}(x,y)$ 也是方程的积分因子，于是同时有

$$\mu(M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y)=\mathrm{d}U,\tilde{\mu}(M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y)=\mathrm{d}V,$$

即 $\mu M=\dfrac{\partial U}{\partial x},\mu N=\dfrac{\partial U}{\partial y},\tilde{\mu}M=\dfrac{\partial V}{\partial x},\tilde{\mu}N=\dfrac{\partial V}{\partial y}$.

因此
$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial U}{\partial x}&\dfrac{\partial U}{\partial y}\\[2mm]\dfrac{\partial V}{\partial x}&\dfrac{\partial V}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mu M&\mu N\\\tilde{\mu}M&\tilde{\mu}N\end{vmatrix}\equiv 0.$$

函数 $U(x,y),V(x,y)$ 的雅可比行列式恒等于零且$\dfrac{\partial U}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial y}=\mu^2MN\not\equiv 0$.

因此函数 $U(x,y),V(x,y)$ 彼此相关,可表示为 $V(x,y)=\psi(U(x,y))$.

于是

$$\tilde{\mu}(M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y)=\mathrm{d}V=\mathrm{d}\psi(U)=\psi'(U)\mathrm{d}U=\psi'(U)\mu(M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y),$$

则有关系式 $\tilde{\mu}=\mu\psi'(U)$. 记 $\varphi(U)=\psi'(U)$,有 $\tilde{\mu}=\mu\varphi(U)$.

10. 设 $\mu_1(x,y),\mu_2(x,y)$ 是方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 的两个积分因子,且 $\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\not\equiv$ 常数,求证 $\dfrac{\mu_1}{\mu_2}=c$(c 为任意常数)是方程的通解.

证明:按积分因子定义有 $\mu_2(M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y)=\mathrm{d}U=0$,得 $U(x,y)=c$,其中 c 为任意常数.

且由第 9 题知有 $\mu_1=\mu_2\varphi(U)$,可得 $\dfrac{\mu_1}{\mu_2}=\varphi(U)$,即 $\dfrac{\mu_1}{\mu_2}=c$(任意常数)等价于 $\varphi(U)=c$(任意常数).

于是 $0\equiv\mathrm{d}\varphi(U)\equiv\varphi'(U)\mathrm{d}U\equiv\varphi'(U)\mu_2(M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y)$.

因为 $\mu_2\not\equiv0$,$\varphi(U)$ 不恒为常数,即 $\varphi'(U)\not\equiv0$. 所以 $M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y=0$.

即由 $\varphi(U)=c$(任意常数)确定的解 $y=y(x)$ 是方程的解.

这说明了 $\dfrac{\mu_1}{\mu_2}=c$(任意常数)是方程的通解.

11. 假设第 5 题中微分方程还是恰当的,试证明它的通解可表示为 $xM(x,y)+yN(x,y)=c$(c 为任意常数).

证明:由于方程 $M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y=0$ 是恰当的,所以 $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$,且由于方程是齐次的,我们不妨设 $M(x,y)$ 和 $N(x,y)$ 是 m 次齐次函数,则有

$$\frac{\partial M}{\partial x}\cdot x+\frac{\partial M}{\partial y}\cdot y=mM, \tag{①}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}\cdot x+\frac{\partial N}{\partial y}\cdot y=mN. \tag{②}$$

另外,$\dfrac{\partial}{\partial x}[xM(x,y)+yN(x,y)]=M+x\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial x}+y\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$,

$$\frac{\partial}{\partial y}[xM(x,y)+yN(x,y)]=x\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}+N+y\frac{\partial N(x,y)}{\partial y},$$

利用 ①② 可得

$$\frac{\partial}{\partial x}[xM+yN]=(m+1)M,\ \frac{\partial}{\partial y}[xM+yN]=(m+1)N,$$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\frac{\partial}{\partial x}[xM+yN]}{\frac{\partial}{\partial y}[xM+yN]}=-\dfrac{M}{N}$,即 $M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y=0$.

所以 $xM+yN=c$ 是方程 $M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y=0$ 的通解.

习题 2.4

1. 求解下列方程:

(1) $xy'^3=1+y'$;　　(2) $y'^3-x^3(1-y')=0$;

(3) $y=y'^2e^{y'}$;　　(4) $y(1+y'^2)=2a$(a 为常数);

(5) $x^2+y'^2=1$；　　　　　　　　(6) $y^2(y'-1)=(2-y')^2$.

解：(1) 方法一：方程不显含 y，解出 x 并令 $y'=p$，得 $x=\dfrac{1}{p^3}+\dfrac{1}{p^2}$，$p\neq 0$，关于 y 求导数，得

$$\frac{1}{p}=\left(-\frac{3}{p^4}-\frac{2}{p^3}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\text{ 或}(3+2p)\mathrm{d}p+p^3\mathrm{d}y=0.$$

积分得，$y=\dfrac{3}{2p^2}+\dfrac{2}{p}+c$.

所以方程的通解为$\begin{cases}x=\dfrac{1}{p^3}+\dfrac{1}{p^2},\\ y=\dfrac{3}{2p^2}+\dfrac{2}{p}+c,\end{cases}$其中 $p\neq 0$ 为参数，c 为任意常数.

方法二：方程不显含 y，记 $y'=\dfrac{1}{t}$，则方程化为 $xt^{-3}=1+t^{-1}$，$x=t^3+t^2$，则

$$\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}x}{t}=t^{-1}\mathrm{d}(t^3+t^2)=(3t+2)\mathrm{d}t,$$

所以 $y=\dfrac{3}{2}t^2+2t+c$.

因此，方程的通解为$\begin{cases}x=t^3+t^2,\\ y=\dfrac{3}{2}t^2+2t+c,\end{cases}$其中 t 为参数，c 为任意常数.

(2) 方程不显含 y，记 $y'=tx$，则方程化为$(t^3-(1-tx))x^3=0$.

解出 x 得 $x=\dfrac{1}{t}-t^2$，两边对 y 求导得$\dfrac{1}{1-t^3}=\left(-\dfrac{1}{t^2}-2t\right)\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}$，

即 $\mathrm{d}y=\left[(1-t^3)\left(-\dfrac{1}{t^2}-2t\right)\right]\mathrm{d}t$，积分得 $y=-\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{2}{5}t^5+\dfrac{1}{t}+c$.

所以，方程的通解为$\begin{cases}x=\dfrac{1}{t}-t^2,\\ y=-\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{2}{5}t^5+\dfrac{1}{t}+c,\end{cases}$其中 t 为参数，c 为任意常数.

(3) 已解出 y，方程不显含 x，令 $y'=p$，则原方程化为 $y=p^2\mathrm{e}^p$.

对 x 求导数，即得 $p=(2p+p^2)\mathrm{e}^p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，即 $\mathrm{d}x=(p+2)\mathrm{e}^p\mathrm{d}p$，积分得 $x=(p+1)\mathrm{e}^p+c$.

所以，方程的通解为$\begin{cases}x=(p+1)\mathrm{e}^p+c,\\ y=p^2\mathrm{e}^p,\end{cases}$其中 p 为参数，c 为任意常数. 另外，$y=0$ 也是方程的解.

(4) 方程不显含 x，令 $y'=\tan t$，则原方程化为 $y=2a\cos^2 t$.

两端关于 x 求导，可得 $\tan t=-2a\sin 2t\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$，即 $\mathrm{d}x=-4a\cos^2 t\mathrm{d}t$，积分得

$$x=-a(2t+\sin 2t)+c.$$

所以，方程的通解为$\begin{cases}x=-a(2t+\sin 2t)+c,\\ y=2a\cos^2 t,\end{cases}$其中 t 为参数，c 为任意常数.

另外，$y=2a$ 也是方程的解.

(5) 方程不显含 y,令 $y'=\cos t$,则方程可化为 $x=\sin t$,对 y 求导得 $dy=\cos^2 t dt$.

积分得 $y=\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t+c$.

所以方程的通解为$\begin{cases}x=\sin t,\\ y=\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t+c,\end{cases}$其中 t 为参数,c 为任意常数.

(6) 方程不显含 x,令 $2-y'=ty$,则原方程化为 $y^2(1-yt)=y^2t^2$.

由此得 $y=\frac{1}{t}-t$,且 $y'=1+t^2$.

因此 $dx=\frac{dy}{y'}=\frac{\left(-\frac{1}{t^2}-1\right)}{1+t^2}dt=-\frac{1}{t^2}dt$,积分得 $x=\frac{1}{t}+c$.

于是,原方程的参数形式的通解为$\begin{cases}x=\frac{1}{t}+c,\\ y=\frac{1}{t}-t,\end{cases}$或者消去参数 t,得 $y=x-\frac{1}{x-c}-c$,其中 c 为任意常数.

总练习

1. 求下列方程的解:

(1) $y\sin x+\frac{dy}{dx}\cos x=1$;

(2) $ydx-xdy=x^2ydy$;

(3) $\frac{dy}{dx}=4e^{-y}\sin x-1$;

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x-\sqrt{xy}}$;

(5) $(xye^{\frac{x}{y}}+y^2)dx-x^2e^{\frac{x}{y}}dy=0$;

(6) $(xy+1)ydx-xdy=0$;

(7) $(2x+2y-1)dx+(x+y-2)dy=0$;

(8) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}$;

(9) $\frac{dy}{dx}=3y+x-2$;

(10) $x\frac{dy}{dx}=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$;

(11) $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+1}{x+y^2+3}$;

(12) $e^{-y}\left(\frac{dy}{dx}+1\right)=xe^x$;

(13) $(x^2+y^2)dx-2xydy=0$;

(14) $\frac{dy}{dx}=x+y+1$;

(15) $\frac{dy}{dx}=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$;

(16) $(x+1)\frac{dy}{dx}+1=2e^{-y}$;

(17) $(x-y^2)dx+y(1+x)dy=0$;

(18) $4x^2y^2dx+2(x^3y-1)dy=0$;

(19) $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2y\left(\frac{dy}{dx}\right)+4x=0$;

(20) $y^2\left[1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=1$;

(21) $(1+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$;

(22) $\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$;

(23) $ydx-(1+x+y^2)dy=0$;

(24) $[y-x(x^2+y^2)]dx-xdy=0$;

(25) $\frac{dy}{dx}+e^{\frac{dy}{dx}}-x=0$;

(26) $\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)dx+(x^2+y^2)dy=0$;

(27) $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+3y+4}{4x+6y+5}$;

(28) $x\frac{dy}{dx}-y=2x^2y(y^2-x^2)$(提示:令 $x^2y=u$);

(29) $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=e^{xy}$;

(30) $\frac{dy}{dx}=\frac{4x^3-2xy^3+2x}{3x^2y^2-6y^5+3y^2}$;

(31) $y^2(xdx+ydy)+x(ydx-xdy)=0$(提示:令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$);

(32) $\frac{dy}{dx}+\frac{1+xy^3}{1+x^3y}=0$(提示:令 $u=x+y, v=xy$).

解:(1) 原方程可以变形为$\frac{dy}{dx}=(-\tan x)y+\frac{1}{\cos x}(\cos x\neq 0)$.

运用一阶线性微分方程的求解公式得 $y=e^{\int -\tan x dx}\left(\int\frac{1}{\cos x}\cdot e^{\int \tan x dx}dx+c\right)$,

即 $y=|\cos x|\left(\int\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{|\cos x|}dx+c\right)$.

当 $\cos x>0$ 时,$y=\cos x\left(\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+c\right)$,即 $y=c\cos x+\sin x$.

当 $\cos x<0$ 时,$y=-\cos x\left(\int-\frac{1}{\cos^2 x}dx+c\right)$,即 $y=-c\cos x+\sin x$.

当 $\cos x=0$ 时,由原方程可知 $y\sin x=1$.

故得原方程此时的解为$\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},1\right)$或$\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},-1\right)$,其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

综上所述,原方程的解为 $y=c\cos x+\sin x$,其中 c 为任意常数.

(2) 在方程两边同乘$\frac{1}{x^2}$,则有$\frac{ydx-xdy}{x^2}=ydy$,即 $d\left(-\frac{y}{x}\right)=d\left(\frac{y^2}{2}\right)$.

所以通解为$\frac{y^2}{2}+\frac{y}{x}=c$,其中 c 为任意常数.

(3) 令 $u=e^y$,则$\frac{du}{dx}=e^y\cdot\frac{dy}{dx}$,代入原方程可得$\frac{du}{dx}=4\sin x-u$.

运用一阶线性微分方程的求解公式可得

$$u=e^{\int(-1)dx}\left(\int 4\sin x\cdot e^{\int 1dx}dx+c\right)=e^{-x}\left(\int 4\sin x\cdot e^x dx+c\right),$$

化简整理,得 $u=e^{-x}[2(\sin x-\cos x)e^x+c]$,代回原变量,得到原方程的解为

$$e^y=ce^{-x}+2(\sin x-\cos x),$$

其中 c 为任意常数.

(4) 令 $u=\frac{y}{x}$,即 $y=ux$,则原方程化为

$$x\cdot\frac{du}{dx}+u=\frac{u}{1-\sqrt{u}},$$

即 $(u^{-\frac{3}{2}}-u^{-1})du=x^{-1}dx(u\neq 0)$.

两边积分,得 $-2u^{-\frac{1}{2}}-\ln|u|=\ln|x|+c_1$,代回原变量整理得

$$x=y\left(c-\frac{1}{2}\ln|y|\right)^2.$$

当 $u=0$ 时,$y=0$,易验证 $y=0$ 也是方程的解.

所以,原方程的解为 $y=0$ 和 $x=y\left(c-\frac{1}{2}\ln|y|\right)^2$,其中 c 为任意常数.

(5) 令 $u=\dfrac{x}{y}$，即 $x=uy$，则$\dfrac{dx}{dy}=u+y\dfrac{du}{dy}$.

代入原方程得 $y\cdot\dfrac{du}{dy}=\dfrac{-u}{1+ue^u}$，即$\left(-\dfrac{1}{u}-e^u\right)du=\dfrac{dy}{y}$.

积分得 $-\ln|u|-e^u=\ln|y|+c_1$，即 $e^u+\ln|yu|+c_1=0$.

代回原变量，得原方程的解为 $e^{\frac{x}{y}}+\ln|x|=c$，其中 c 为任意常数.

(6) 当 $y\neq 0$ 时，方程两边同乘$\dfrac{1}{y^2}$ 可得$\left(x+\dfrac{1}{y}\right)dx-\dfrac{x}{y^2}dy=0$，即 $d\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{y}\right)=0$.

所以方程的通解为$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{y}=c$，其中 c 为任意常数.

另外，$y=0$ 也是方程的一个解.

(7) 方程可以变形为$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x+2y-1}{x+y-2}$.

令 $u=x+y$，则$\dfrac{du}{dx}=1+\dfrac{dy}{dx}=1+\left(-\dfrac{2u-1}{u-2}\right)=-\dfrac{u+1}{u-2}$，

即$\left(\dfrac{3}{u+1}-1\right)du=dx(u\neq-1)$. 积分得 $3\ln|u+1|-u=x+c_1$.

代回原变量并整理得$(x+y+1)^3=ce^{2x+y}$，其中 c 为任意常数.

当 $u=-1$ 时，即 $x+y=-1$ 亦为解，它含于通解中.

(8) 此方程为 $n=2$ 的伯努利方程，令 $z=y^{-1}$，则$\dfrac{dz}{dx}=-y^{-2}\dfrac{dy}{dx}$，代入原方程有$\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{1}{x}z-\dfrac{1}{x^3}$.

运用一阶线性微分方程的求解公式可得

$$z=e^{\int-\frac{1}{x}dx}\left(\int-\frac{1}{x^3}\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}\cdot dx+c\right),$$

计算得 $z=\dfrac{c}{x}+\dfrac{1}{x^2}$.

代回原变量，得原方程的通解为$\dfrac{1}{y}=\dfrac{c}{x}+\dfrac{1}{x^2}$，其中 c 为任意常数.

另外，$y=0$ 也是原方程的一个解.

(9) 这是一阶线性微分方程，运用一阶线性微分方程的求解公式，可得该方程的通解为

$$y=e^{\int 3dx}\left[\int(x-2)e^{-\int 3dx}dx+c\right]=ce^{3x}-\frac{1}{3}x+\frac{5}{9},$$

即 $y=ce^{3x}-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{9}$，其中 c 为任意常数.

(10) 令 $p=\dfrac{dy}{dx}$，则原方程化为 $x=\dfrac{1}{p}+p$，两端对 y 求导可得

$$\frac{1}{p}=\left(-\frac{1}{p^2}+1\right)\frac{dp}{dy}，即\ dy=\left(p-\frac{1}{p}\right)dp.$$

积分得 $y=\dfrac{1}{2}p^2-\ln|p|+c$.

所以原方程的通解为$\begin{cases}x=\dfrac{1}{p}+p,\\ y=\dfrac{1}{2}p^2-\ln|p|+c,\end{cases}$ 其中 p 为参数，c 为任意常数.

(11) 原方程可以变形为$(x-y+1)\mathrm{d}x=(x+y^2+3)\mathrm{d}y$，

即$(1+x)\mathrm{d}x-(y^2+3)\mathrm{d}y-(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=0$.

于是，$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}y^3-3y-xy+x\right)=0$，积分得原方程的通解为

$$\frac{1}{2}x^2-xy+x-\frac{1}{3}y^3-3y=c,$$

其中c为任意常数.

(12) 原方程可以变形为$\frac{\mathrm{d}(y+x)}{\mathrm{d}x}=x\mathrm{e}^{x+y}$，即$\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}(x+y)=x\mathrm{d}x$.

积分得原方程的通解为$\frac{x^2}{2}+\mathrm{e}^{-(x+y)}=c$，其中$c$为任意常数.

(13) 方程两边同乘$\frac{1}{x^2}$，则有$\mathrm{d}x+\frac{y^2}{x^2}\mathrm{d}x-\frac{2y}{x}\mathrm{d}y=0$，即$\mathrm{d}\left(x-\frac{y^2}{x}\right)=0$. 积分得$x-\frac{y^2}{x}=c$，所以原方程的通解为$x^2-y^2=cx$，其中$c$为任意常数.

(14) 令$u=x+y$，则$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，代入原方程可得$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u+2$. 积分得$u+2=c\mathrm{e}^x$.

代回原变量，则得原方程的通解为$x+y+2=c\mathrm{e}^x$，其中c为任意常数.

(15) 令$u=\frac{y}{x}$，即$y=ux$，则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$.

代入原方程可得$x\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=\mathrm{e}^u+u$，即$\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

积分得$\ln|x|+\mathrm{e}^{-u}=c$.

代回原变量，则得原方程的通解为$\ln|x|+\mathrm{e}^{-\frac{y}{x}}=c$，其中$c$为任意常数.

(16) 在方程的两边同乘e^y后，原方程可以变形为

$$(x+1)\mathrm{e}^y\mathrm{d}y=(2-\mathrm{e}^y)\mathrm{d}x,$$

即$\frac{\mathrm{e}^y}{2-\mathrm{e}^y}\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}x}{x+1}$.

积分得

$$-\ln|2-\mathrm{e}^y|=\ln|x+1|+c_1,$$

即$(x+1)(2-\mathrm{e}^y)=c$，c为任意常数.

(17) 由于$M=x-y^2$，$N=y(1+x)$，$\frac{\partial M}{\partial y}=-2y$，$\frac{\partial N}{\partial x}=y$.

因为$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{-3}{1+x}$，所以方程有积分因子$\mu=\mathrm{e}^{\int\frac{-3}{1+x}\mathrm{d}x}=(1+x)^{-3}$.

用$\mu=(1+x)^{-3}$乘方程两边得到

$$\frac{x-y^2}{(1+x)^3}\mathrm{d}x+\frac{y}{(1+x)^2}\mathrm{d}y=0,$$

即$\mathrm{d}\left(\frac{y^2}{2(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2(1+x)^2}\right)=0$. 故方程的通解为$\frac{y^2}{2(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2(1+x)^2}=c_1$.

即$y^2=c(1+x)^2+2x+1$，其中c为任意常数.

(18) 由于 $M=4x^2y^2, N=2(x^3y-1), \dfrac{\partial M}{\partial y}=8x^2y, \dfrac{\partial N}{\partial x}=6x^2y$.

因为$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\dfrac{-1}{2y}$,所以方程有积分因子 $\mu=e^{\int\frac{-1}{2y}dy}=y^{-\frac{1}{2}}$,用 $y^{-\frac{1}{2}}$ 乘方程两边得到

$$4x^2y^{\frac{3}{2}}dx+2(x^3y^{\frac{1}{2}}-y^{-\frac{1}{2}})dy=0,\text{即 } d\left(\frac{4}{3}x^3y^{\frac{3}{2}}-4y^{\frac{1}{2}}\right)=0,$$

所以方程的通解为$\dfrac{4}{3}x^3y^{\frac{3}{2}}-4y^{\frac{1}{2}}=c_1$,即$(x^3y-3)y^{\frac{1}{2}}=c$,其中 c 为任意常数.

(19) 令$\dfrac{dy}{dx}=p$,得到 $y=\dfrac{1}{2}xp+\dfrac{2x}{p}$,两边对 x 求导数,得到

$$p=\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}x\frac{dp}{dx}+\frac{2p-2x\dfrac{dp}{dx}}{p^2},$$

整理得$\dfrac{p^2-4}{p^2-4}\cdot\dfrac{1}{p}dp=\dfrac{1}{x}dx(p^2\neq4)$,积分得 $p=cx$.

把 $p=cx$ 代入 $y=\dfrac{1}{2}xp+\dfrac{2x}{p}$ 得 $y=\dfrac{1}{2}cx^2+\dfrac{2}{c}$,即 $2cy=c^2x^2+4$.

另外,当 $p^2=4$ 时,可得 $y=2x, y=-2x$ 也是方程的解.

所以原方程的解为 $2cy=c^2x^2+4$,c 为任意常数及 $y=\pm2x$.

(20) 令$\dfrac{dy}{dx}=p$,则方程化为 $y^2(1-p^2)=1$,

解得 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-p^2}}$ 或 $y=-\dfrac{1}{\sqrt{1-p^2}}$.

当 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-p^2}}$ 时,对 x 求导得 $p=p(1-p^2)^{-\frac{3}{2}}\dfrac{dp}{dx}$.

若 $p\neq0$,则有$(1-p^2)^{-\frac{3}{2}}dp=dx$,积分得 $c+x=p(1-p^2)^{-\frac{1}{2}}$.

此时方程的通解为$\begin{cases}c+x=p(1-p^2)^{-\frac{1}{2}},\\ y=(1-p^2)^{-\frac{1}{2}}.\end{cases}$

另外,若 $p=0$,原方程化为 $y^2=1$ 即 $y=\pm1$.

当 $y=-\dfrac{1}{\sqrt{1-p^2}}$ 时,同理可以求得通解为$\begin{cases}c+x=-p(1-p^2)^{-\frac{1}{2}},\\ y=-(1-p^2)^{-\frac{1}{2}},\end{cases}$

且 $p=0$ 时,$y=\pm1$ 也是方程的解.

综上所述,消去 p 后,可以得到原方程的解为 $y^2=(x+c)^2+1$,还有 $y=\pm1$,其中 c 为任意常数.

(21) 原方程可以化为$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{e^{\frac{x}{y}}\left(\dfrac{x}{y}-1\right)}{1+e^{\frac{x}{y}}}$. 令 $u=\dfrac{x}{y}$,即 $x=yu$,则

$$\frac{dx}{dy}=u+y\frac{du}{dy}=\frac{e^u(u-1)}{1+e^u},\text{即}\frac{(1+e^u)}{e^u+u}du=-\frac{dy}{y}.$$

两边积分得 $\ln|e^u+u|+\ln|y|=c_1$,代回原变量,整理得原方程的通解为 $x+ye^{\frac{x}{y}}=c$,c 为非零常数.

(22) 由于 $M=\frac{2x}{y^3}, N=\frac{y^2-3x^2}{y^4}, \frac{\partial M}{\partial y}=-6\frac{x}{y^4}, \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{-6x}{y^4}$,

所以此方程是恰当微分方程. 原方程可以变为 $\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}\right)=0$.

所以原方程的通解为$\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=c$,即 $x^2-y^2=cy^3$,其中 c 为任意常数.

(23) 由于 $M=y, N=-(1+x+y^2), \frac{\partial M}{\partial y}=1, \frac{\partial N}{\partial x}=-1$.

因为$\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=-\frac{2}{y}$,所以方程有积分因子 $\mu=\mathrm{e}^{\int -\frac{2}{y}\mathrm{d}y}=y^{-2}$.

用 $\mu=y^{-2}$ 乘方程两边,得到

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}x-\left(\frac{1+x}{y^2}+1\right)\mathrm{d}y=0, \text{即 } \mathrm{d}\left(\frac{x+1}{y}-y\right)=0.$$

积分得$\frac{x+1}{y}-y=c$,即 $x+1-y^2=cy$.

所以方程的通解为 $x+1-y^2=cy$,c 为任意常数. 另外 $y=0$ 也是方程的解.

(24) 方程两边乘$(x^2+y^2)^{-1}$ 可得$\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}-x\mathrm{d}x=0$,即

$$\mathrm{d}\left(\arctan\frac{x}{y}-\frac{x^2}{2}\right)=0.$$

所以方程的通解为 $\arctan\frac{x}{y}-\frac{x^2}{2}=c$,$c$ 为任意常数.

(25) 令 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,则方程变为 $x=p+\mathrm{e}^p$.

两边对 y 求导可得$\frac{1}{p}=(1+\mathrm{e}^p)\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$,即 $\mathrm{d}y=p(1+\mathrm{e}^p)\mathrm{d}p$.

积分得 $y=\frac{p^2}{2}+(p-1)\mathrm{e}^p+c$.

所以方程的通解为$\begin{cases} x=p+\mathrm{e}^p, \\ y=\frac{p^2}{2}+(p-1)\mathrm{e}^p+c, \end{cases}$其中 p 为参数,c 为任意常数.

(26) 由于 $M=2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}, N=x^2+y^2, \frac{\partial M}{\partial y}=2x+x^2+y^2, \frac{\partial N}{\partial x}=2x$. 因为$\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=1$,

所以方程有积分因子 $\mu=\mathrm{e}^x$.

用 $\mu=\mathrm{e}^x$ 乘方程两边可得

$$\mathrm{e}^x\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{e}^x\mathrm{d}y=0,$$

即 $\mathrm{d}\left(x^2y\mathrm{e}^x+\frac{y^3}{3}\mathrm{e}^x\right)=0$.

所以方程的通解为$\left(x^2+\frac{1}{3}y^2\right)y\mathrm{e}^x=c_1$,即$(3x^2y+y^3)\mathrm{e}^x=c$,$c$ 为任意常数.

(27) 令 $u=2x+3y$,则$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2+3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,且原方程可化为$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{7u+22}{2u+5}$,

即$\frac{2u+5}{7u+22}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x(7u+22\neq 0)$.

积分得$\frac{2}{7}u-\frac{9}{49}\ln|7u+22|=x+c_1$,即 $14u-49x=9\ln|7u+22|+49c_1$.

把 $u=2x+3y$ 代入,化简得方程的通解为 $9\ln\left|2x+3y+\frac{22}{7}\right|=14\left(3y-\frac{3}{2}x\right)+c$,其中 c 为任意常数.

另外,当 $7u+22=0$ 时,即 $2x+3y+\frac{22}{7}=0$ 也是方程的解.

(28) 令 $x^2y=u$,则$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2xy+x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2u}{x}+x^2\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,代入原方程,可得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\left(\frac{3}{x}-2x^3\right)u+\frac{2}{x^3}u^3.$$

此方程为 $n=3$ 的伯努利方程,令 $z=u^{-2}$,则$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-2u^{-3}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,代入上式得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-2\left(\frac{3}{x}-2x^3\right)z-\frac{4}{x^3},$$

运用一阶微分方程的求解公式,可得

$$z=\mathrm{e}^{\int-2\left(\frac{3}{x}-2x^3\right)\mathrm{d}x}\left[\int-\frac{4}{x^3}\mathrm{e}^{\int 2\left(\frac{3}{x}-2x^3\right)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right],$$

化简得 $z=x^{-6}(1+c\mathrm{e}^{x^4})$,把 $z=u^{-2}=x^{-4}y^{-2}$ 代入,可得原方程的通解为 $x^2-y^2=cy^2\mathrm{e}^{x^4}$,$c$ 为任意常数.

(29) 令 $u=xy$,则$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{u}{x}+x\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,代入原方程,可得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u}{x}+x\left(\mathrm{e}^u-\frac{u}{x^2}\right),$$

即 $\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=x\cdot\mathrm{d}x$,积分得 $\mathrm{e}^{-u}+\frac{x^2}{2}=c$.

代回原变量可得原方程的通解为 $\mathrm{e}^{-xy}+\frac{x^2}{2}=c$,其中 c 为正常数.

(30) 原方程可以变为$\frac{3y^2\mathrm{d}y}{2x\mathrm{d}x}=\frac{2x^2-y^3+1}{-2y^3+x^2+1}$.

令 $u=y^3,v=x^2$,则得到$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=\frac{2v-u+1}{v-2u+1}$,即 $\mathrm{d}(uv+u-u^2)=\mathrm{d}(v^2+v)$.

积分得 $u^2+v^2-uv-u+v=c$.

把 $u=y^3,v=x^2$ 代入,得原方程的通解为 $y^6+x^4+x^2-y^3x^2-y^3=c$,c 为任意常数.

(31) 令 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$,则 $\mathrm{d}x=\cos\theta\mathrm{d}\rho-\rho\sin\theta\mathrm{d}\theta$,$\mathrm{d}y=\sin\theta\mathrm{d}\rho+\rho\cos\theta\mathrm{d}\theta$,代入原方程,

化简得 $\rho^3\sin^2\theta\mathrm{d}\rho-\rho^3\cos\theta\mathrm{d}\theta=0$,即 $\mathrm{d}\rho=\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta(\sin\theta\neq 0)$.

积分可得 $\rho=-\frac{1}{\sin\theta}+c_1$,代回原变量,得 $\sqrt{x^2+y^2}=c_1-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}$.

整理后得到$(x^2+y^2)(y+1)^2=cy^2$，其中 c 为任意非负常数.

另外，当 $\sin\theta=0$ 时，$y=0$ 也是方程的解.

(32) 令 $u=x+y,v=xy$，则 $du=dx+dy,dv=ydx+xdy$，且原方程可以变形为

$$(1+x^3y)dy+(1+xy^3)dx=0.$$

由于

$$1\cdot dy+1\cdot dx=d(x+y)=du,x^3ydy+xy^3dx=v(udv-vdu),$$

因此，原方程进一步变为$(1-v^2)du+uvdv=0$，即$\dfrac{du}{u}=\dfrac{vdv}{v^2-1}(u\neq0,v^2\neq1)$.

积分得 $\ln|u|=\dfrac{1}{2}\ln|v^2-1|+c_1$，即 $\sqrt{v^2-1}=cu$，其中 c 为任意常数.

代回原变量，即得到原方程的通解为 $\sqrt{x^2y^2-1}=c(x+y)$，c 为任意常数.

当 $u=0$ 时，$x+y=0$ 也是方程的解.

当 $v^2=1$ 时，$x^2y^2=1$ 也是方程的解，它包含在通解中.

2. 求一曲线，使其切线在纵轴上之截距等于切点的横坐标.

解: 满足条件的曲线的方程为 $y-xy'=x$，即 $ydx-xdy=xdx$.

两边同乘以$\dfrac{1}{x^2}$，则得到$\dfrac{y}{x^2}dx-\dfrac{1}{x}dy=\dfrac{1}{x}dx$，即 $d\left(-\dfrac{y}{x}\right)=d(\ln|x|)$.

积分得 $\ln|x|+\dfrac{y}{x}=c$，即 $y=cx-x\ln|x|$，c 为任意常数.

3. 摩托艇以 5 m/s 的速度在静水上运动，全速时停止了发动机，过了 20 s 后，艇的速度减至 $v_1=3$ m/s. 确定发动机停止 2 min 后艇的速度，假定水的阻力与艇的运动速度成正比.

解: 根据牛顿第二定律和题设条件得 $m\dfrac{dv}{dt}=k_1v$(k_1 为比例系数)，即$\dfrac{dv}{dt}=kv\left(k=\dfrac{k_1}{m}\right)$.

积分得 $v=ce^{kt}$，将初始条件 $t=0$ s，$v=5$ m/s 代入得 $c=5$，解得 $v=5e^{kt}$.

将 $t=20$ s，$v=3$ m/s 代入 $v=5e^{kt}$，得 $k=\dfrac{1}{20}\ln\dfrac{3}{5}$，则 $v=5e^{\frac{t}{20}\ln\frac{3}{5}}$.

当 $t=120$ s 时，$v=5e^{6\ln\frac{3}{5}}\approx0.233$(m/s).

因此，发动机停止 2 min 后艇的速度约为 0.233 m/s.

4. 一质量为 m 的质点作直线运动，从速度等于零的时刻起，有一个和时间成正比(比例系数为 k_1)的力作用在它上面. 此外质点又受到介质的阻力，这阻力和速度成正比(比例系数为 k_2). 试求此质点的速度与时间的关系.

解: 根据牛顿第二定律，可以写出质点运动满足的方程为

$$m\cdot\frac{dv}{dt}=k_1t-k_2v,$$

其中 v 表示质点的运动速度，t 表示时间.

方程可以变形为$\dfrac{dv}{dt}=-\dfrac{k_2}{m}v+\dfrac{k_1}{m}t$.

运用一阶线性微分方程的求解公式，可得其解为

$$v=e^{\int-\frac{k_2}{m}dt}\left(\int\frac{k_1}{m}t\cdot e^{\int\frac{k_2}{m}dt}dt+c\right),$$

化简得 $v = c \cdot e^{-\frac{k_2}{m}t} + \frac{k_1}{k_2}\left(t - \frac{m}{k_2}\right)$.

由于 $t = 0$ 时，$v(0) = 0$，代入可得 $c = \frac{mk_1}{k_2^2}$.

于是 $v = \frac{mk_1}{k_2^2}e^{-\frac{k_2}{m}t} + \frac{k_1}{k_2}\left(t - \frac{m}{k_2}\right)$，这就是质点的速度与时间的关系.

方法点击：本题与第 3 题的解法一样，先利用牛顿第二定律建立微分方程模型，然后根据微分方程的特点，选用合适的初等积分法求解.

5. 证明：如果已知里卡蒂微分方程的一个特解，则可用初等解法求得它的通解. 并求解下列方程：

(1) $y'e^{-x} + y^2 - 2ye^x = 1 - e^{2x}$；　(2) $y' + y^2 - 2y\sin x = \cos x - \sin^2 x$；

(3) $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$；　(4) $4x^2(y' - y^2) = 1$；

(5) $x^2(y' + y^2) = 2$；　(6) $x^2y' + (xy - 2)^2 = 0$；

(7) $y' = (x-1)y^2 + (1-2x)y + x$.

证明：已知里卡蒂方程为 $\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$，若已知 $\bar{y}(x)$ 是它的一个特解，设 $z = y - \bar{y}$，

则 $\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} - \frac{d\bar{y}}{dx}$.

由于 $\bar{y}$ 是方程的一个解，所以 $\frac{d\bar{y}}{dx} = P(x)\bar{y}^2 + Q(x)\bar{y} + R(x)$，因此

$$\frac{dz}{dx} = [P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)] - [P(x)\bar{y}^2 + Q(x)\bar{y} + R(x)],$$

即 $\frac{dz}{dx} = P(x)(y^2 - \bar{y}^2) + Q(x)(y - \bar{y})$，

变形为 $\frac{dz}{dx} = P(x)z^2 + (2P(x)\bar{y} + Q(x))z$.

此时为 $n = 2$ 时的伯努利方程，从而可以用初等方法求解.

(1) 方程有特解 $y = e^x$. 令 $z = y - e^x$，则原方程变形为 $\frac{dz}{dx} = -e^x \cdot z^2$，即 $\frac{dz}{-z^2} = e^x dx$. 积分得

$\frac{1}{z} = e^x + c$.

把 $z = y - e^x$ 代入，即得方程的通解为 $(e^x + c)(y - e^x) = 1$，c 为任意常数.

(2) 方程有特解 $y = \sin x$，令 $z = y - \sin x$，则原方程变形为 $\frac{dz}{dx} = -z^2$，积分得 $\frac{1}{z} = x + c$.

把 $z = y - \sin x$ 代入，即得方程的通解为 $(x + c)(y - \sin x) = 1$，c 为任意常数.

(3) 方程有特解 $y = -\frac{1}{x}$，令 $z = y + \frac{1}{x}$，则原方程变形为 $\frac{dz}{dx} = z^2 - \frac{1}{x}z$.

这是一个 $n = 2$ 的伯努利方程，令 $u = \frac{1}{z}$，则 $\frac{du}{dx} = -\frac{1}{z^2} \cdot \frac{dz}{dx} = -1 + \frac{u}{x}$，

积分得 $u = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left[\int (-1) \cdot e^{-\int \frac{1}{x}dx}dx + c\right]$，化简得 $u = x(c - \ln|x|)$.

把 $u=\frac{1}{z}=\left(y+\frac{1}{x}\right)^{-1}$ 代入整理即得原方程的通解为 $(xy+1)(c-\ln|x|)=1$，其中 c 为任意常数.

(4) 方程有特解 $y=-\frac{1}{2x}$，令 $z=y+\frac{1}{2x}$，则原方程可以化为 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=z^2-\frac{z}{x}$.

这样，完全同第(3)小题一样，可以得到通解为 $\frac{1}{z}=x(c-\ln|x|)$.

将 $z=y+\frac{1}{2x}$ 代入整理即得原方程的通解为 $\left(xy+\frac{1}{2}\right)(c-\ln|x|)=1$，其中 c 为任意常数.

(5) 方程有特解 $y=-\frac{1}{x}$，令 $z=y+\frac{1}{x}$，则原方程变形为 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-z^2+\frac{2}{x}z$.

这是 $n=2$ 的伯努利方程. 令 $u=z^{-1}$，则 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1-\frac{2}{x}u$.

运用一阶线性微分方程的求解公式可得 $u=\mathrm{e}^{\int-\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left(\int 1\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right)$，即 $u=\frac{c}{x^2}+\frac{x}{3}$.

把 $u=z^{-1}=\left(y+\frac{1}{x}\right)^{-1}$ 代入并整理得到原方程的通解为 $xy=\frac{2x^3-c}{x^3+c}$，c 为任意常数.

(6) 原方程变形为 $y'=-y^2+\frac{4}{x}y-\frac{4}{x^2}$. 易看出 $y=\frac{1}{x}$ 是一个特解.

令 $z=y-\frac{1}{x}$，则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-z^2+\frac{2}{x}z$.

令 $u=z^{-1}$，则 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-z^{-2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$，从而 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1-\frac{2}{x}u$.

类似于第(5)小题可求得 $u=\frac{c}{x^2}+\frac{x}{3}$，把 $u=z^{-1}=\left(y-\frac{1}{x}\right)^{-1}$ 代入整理则得原方程的通解为 $xy=\frac{4x^3+c}{x^3+c}$，c 为任意常数.

(7) 易知 $y=1$ 是方程的一个特解. 令 $z=y-1$，则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(x-1)z^2-z$.

令 $u=z^{-1}$，则 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-z^{-2}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$，代入得 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u+(1-x)$.

运用一阶线性微分方程的求解公式可得 $u=\mathrm{e}^x\left[\int(1-x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+c\right]$，即 $u=c\mathrm{e}^x+x$.

把 $u=z^{-1}=(y-1)^{-1}$ 代入，即得原方程的通解为 $(y-1)(c\mathrm{e}^x+x)=1$，其中 c 为任意常数.

第三章　一阶微分方程的解的存在定理

习题 3.1

1. 求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x+y^2$ 通过点 $(0,0)$ 的第三次近似解.

解：$\varphi_0(x)=0$，

$$\varphi_1(x) = \int_0^x [t + \varphi_0^2(t)]\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2},$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x [t + \varphi_1^2(t)]\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20},$$

$$\varphi_3(x) = \int_0^x [t + \varphi_2^2(t)]\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} + \frac{x^{11}}{4\,400}.$$

所以方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + y^2$ 通过点(0,0) 的第三次近似解为

$$y_3 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} + \frac{x^{11}}{4\,400}.$$

2. 求方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x - y^2$ 通过点(1,0) 的第二次近似解.

解: $\varphi_0(x) = 0, \varphi_1(x) = \int_1^x [t - \varphi_0^2(t)]\mathrm{d}t = \frac{x^2 - 1}{2},$

$$\varphi_2(x) = \int_1^x [t - \varphi_1^2(t)]\mathrm{d}t = \int_1^x \left[t - \frac{(t^2-1)^2}{4}\right]\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{20} - \frac{11}{30}.$$

所以方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x - y^2$ 通过点(1,0) 的第二次近似解为

$$y_2 = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{20} - \frac{11}{30}.$$

3. 求初值问题$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 - y^2, R: |x+1| \leqslant 1, |y| \leqslant 1, \\ y(-1) = 0 \end{cases}$的解的存在区间,并求第二次近似解,给出在解的存在区间的误差估计.

解: 易知 $M = \max\limits_{(x,y)\in R} |f(x,y)| = 4, h = \min\left\{1, \frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{4}$,在 R 上函数 $f(x,y) = x^2 - y^2$ 的利普希茨常数 $L = 2$. 因为$\frac{\partial f}{\partial y} = |-2y| \leqslant 2$,

$\varphi_0(x) = 0,$

$$\varphi_1(x) = \int_{-1}^x [t^2 - \varphi_0^2(t)]\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3},$$

$$\varphi_2(x) = \int_{-1}^x [t^2 - \varphi_1^2(t)]\mathrm{d}t = \int_{-1}^x \left[t^2 - \frac{(t^3+1)^2}{9}\right]\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3} - \frac{x}{9} - \frac{x^4}{18} - \frac{x^7}{63} + \frac{11}{42},$$

由误差估计公式得

$$|\varphi_2(x) - \varphi(x)| \leqslant \frac{4 \cdot 2^2}{3!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{24},$$

所以已知初值问题的解的存在区间为 $-\frac{5}{4} \leqslant x \leqslant -\frac{3}{4}$.

第二次近似解为 $y_2 = \frac{x^3}{3} - \frac{x}{9} - \frac{x^4}{18} - \frac{x^7}{63} + \frac{11}{42}$,在解的存在区间的误差估计为 $|y - y_2| \leqslant \frac{1}{24}$.

4. 讨论方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$ 在怎样的区域中满足解的存在唯一性定理的条件,并求通过点(0,0) 的一切解.

解:显然 $f(x,y)=\frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$ 在整个平面上是连续函数,又 $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2}y^{-\frac{2}{3}}$ 在 $y\neq 0$ 的区域上是连续的,所以在区域 $|y|\geqslant\sigma>0$ 上满足解的存在唯一性定理的条件,其中 σ 是任意正数.

从而,满足解的存在唯一性定理的条件的区域为 $|y|\geqslant\sigma>0$.

当 $y=0$ 时,易验证 $y=0$ 是方程过$(0,0)$ 的解.

当 $y\neq 0$ 时,方程可以变形为 $y^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}y=\frac{3}{2}\mathrm{d}x$,积分得 $y^{\frac{2}{3}}=x-c$,或 $|y|=(x-c)^{\frac{3}{2}}$,其中 c 是任意常数.

由于 $y^{\frac{2}{3}}\geqslant 0$,故 $x\geqslant c$.

相应的,过$(0,0)$ 的解可以表示为 $|y|=\begin{cases}0, & x\leqslant c,\\(x-c)^{\frac{3}{2}}, & x>c,\end{cases}$ 其中 $c\geqslant 0$ 为任意正常数.

综上所述,可以得到过点$(0,0)$ 的解为 $y=0$,以及 $|y|=\begin{cases}0, & x\leqslant c,\\(x-c)^{\frac{3}{2}}, & x>c,\end{cases}$ 其中 $c\geqslant 0$ 为任意正常数.

5. 如果函数 $f(x,y)$ 于带域 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 上连续且关于 y 满足利普希茨条件,则方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$ 满足条件 $y(x_0)=y_0$ 的解于整个区间$[\alpha,\beta]$ 上存在且唯一. 试证明之.

(提示:用逐步逼近法,取 $M=\max\limits_{x\in[\alpha,\beta]}|f(x,y_0)|$.)

证明:设 $M=\max\limits_{x\in[\alpha,\beta]}|f(x,y_0)|$,$h=\beta-\alpha$,$b=Mh$,有某常数 L,使得在域 $R=\{(x,y)\mid\alpha\leqslant x\leqslant\beta,|y-y_0|\leqslant b\}$ 中有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|,(x,y_1),(x,y_2)\in R.$$

构造逐步逼近函数序列

$$\begin{cases}\varphi_0(x)=y_0,\\\varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))\mathrm{d}\xi,\alpha\leqslant x\leqslant\beta,n=1,2,\cdots.\end{cases}$$

因 $|\varphi_1(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x}f(\xi,y_0)\mathrm{d}\xi\right|\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(\xi,y_0)|\mathrm{d}\xi\leqslant M(x-x_0)\leqslant Mh\leqslant b.$

可证
$$|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)|\leqslant\frac{M}{n!}L^{n-1}(\beta-\alpha)^n.$$

事实上,有

$$\begin{aligned}|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)|&\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f(\xi,\varphi_n(\xi))-f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))|\mathrm{d}\xi\right|\\&\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}|\varphi_n(\xi)-\varphi_{n-1}(\xi)|\mathrm{d}\xi\right|\\&\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}\frac{M}{n!}L^{n-1}|\xi-x_0|^n\mathrm{d}\xi\right|\\&\leqslant\frac{M}{(n+1)!}L^n|x-x_0|^{n+1}\\&\leqslant\frac{M}{(n+1)!}L^n(\beta-\alpha)^{n+1}.\end{aligned}$$

由于级数$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M}{k!}L^{k-1}(\beta-\alpha)^k$ 收敛，易知级数

$$\varphi_n(x)=\varphi_0(x)+\sum_{k=1}^{n}[\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)]$$

在区间$[\alpha,\beta]$ 上一致收敛，于是存在极限$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x)$，它在区间$[\alpha,\beta]$ 上连续，且

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=y_0+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))\mathrm{d}\xi$$

$$=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\lim_{n\to\infty}\varphi_{n-1}(\xi))\mathrm{d}\xi=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi(\xi))\mathrm{d}\xi.$$

故 $\varphi(x)$ 是积分方程也就是微分方程的解.

设 $\varphi(x),\psi(x)$ 均满足积分方程

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,y(\xi))\mathrm{d}\xi,\alpha\leqslant x_0\leqslant\beta,\alpha\leqslant x\leqslant\beta.$$

当 $x\geqslant x_0$ 时，利用格朗沃尔不等式，由

$$|\varphi(x)-\psi(x)|\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(s,\varphi(s))-f(s,\psi(s))|\mathrm{d}s\leqslant L\int_{x_0}^{x}|\varphi(s)-\psi(s)|\mathrm{d}s,$$

有 $|\varphi(x)-\psi(x)|\leqslant 0$，即 $\varphi(x)\equiv\psi(x)(\alpha\leqslant x_0\leqslant x\leqslant\beta)$.

同理可证当 $\alpha\leqslant x\leqslant x_0\leqslant\beta$ 时，有 $\varphi(x)\equiv\psi(x)$.

即积分方程也就是微分方程的解是唯一的.

6. 证明格朗沃尔(Gronwall) 不等式：

设 K 为非负常数，$f(t)$ 和 $g(t)$ 为在区间$[\alpha,\beta]$ 上的连续非负函数，且满足不等式

$$f(t)\leqslant K+\int_{\alpha}^{t}f(s)g(s)\mathrm{d}s,\alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

则有

$$f(t)\leqslant K\exp\left[\int_{\alpha}^{t}g(s)\mathrm{d}s\right],\alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

并由此证明定理 1 的命题 5.

证明：(1) $K>0$ 时，令 $w(t)=K+\int_{\alpha}^{t}f(s)g(s)\mathrm{d}s$，则 $w'(t)=f(t)g(t)\leqslant g(t)w(t)$.

由 $w(t)>0$ 可得$\frac{w'(t)}{w(t)}\leqslant g(t)$，两边从 α 到 t 积分得 $\ln w(t)-\ln w(\alpha)\leqslant\int_{\alpha}^{t}g(s)\mathrm{d}s$，即有

$$\frac{w(t)}{w(\alpha)}\leqslant\exp\left[\int_{\alpha}^{t}g(s)\mathrm{d}s\right],w(\alpha)=K>0.$$

所以 $w(t)\leqslant K\exp\left[\int_{\alpha}^{t}g(s)\mathrm{d}s\right]$，即有

$$f(t)\leqslant w(t)\leqslant K\exp\left[\int_{\alpha}^{t}g(s)\mathrm{d}s\right],\alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

(2) $K=0$ 时，对任意 $\varepsilon>0$，因为 $f(t)\leqslant\int_{\alpha}^{t}f(s)g(s)\mathrm{d}s$，所以 $f(t)\leqslant\varepsilon+\int_{\alpha}^{t}f(s)g(s)\mathrm{d}s$.

由(1)，可得 $f(t)\leqslant\varepsilon\exp\left[\int_{\alpha}^{t}g(s)\mathrm{d}s\right]$，当 $\varepsilon\to0^+$ 时，有 $f(t)\leqslant0$. 又因为 $f(t)\geqslant0$，即得 $f(t)\equiv0$，从而

$$f(t)\leqslant K\exp\left[\int_{\alpha}^{t}g(s)\mathrm{d}s\right],\alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

由(1),(2)知,格朗沃尔不等式成立.

下面利用格朗沃尔不等式证明定理1的命题5:

设 $\psi(x)$ 是积分方程 $y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,y)\mathrm{d}\xi,x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 的定义在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上的另一连续解,则 $\varphi(x)=\psi(x)(x_0\leqslant x\leqslant x_0+h)$.

证明:设 $\varphi(t),\psi(t)$ 是初值问题 $x'=f(t,x),x(t_0)=x_0$ 的两个解,则有

$$\varphi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(\xi,\varphi(\xi))\mathrm{d}\xi,\psi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(\xi,\psi(\xi))\mathrm{d}\xi.$$

于是

$$|\varphi(t)-\psi(t)|\leqslant\int_{t_0}^{t}|f(\xi,\varphi(\xi))-f(\xi,\psi(\xi))|\mathrm{d}\xi\leqslant L\int_{t_0}^{t}|\varphi(\xi)-\psi(\xi)|\mathrm{d}\xi,$$

其中 L 为利普希茨常数,由格朗沃尔不等式知 $K=0$ 且

$$0\leqslant|\varphi(t)-\psi(t)|\leqslant K\exp\left(\int_{t_0}^{t}L\mathrm{d}\xi\right)=0.$$

于是 $\varphi(t)=\psi(t)$. 即定理1的命题5得证.

7. 假设函数 $f(x,y)$ 于 (x_0,y_0) 的邻域内是 y 的不增函数,试证方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$ 满足条件 $y(x_0)=y_0$ 的解于 $x\geqslant x_0$ 一侧最多只有一个.

证明: 设方程满足条件 $y(x_0)=y_0$ 的解有两个:$y=\varphi_1(x)$ 和 $y=\varphi_2(x)$,要证当 $x\geqslant x_0$ 时,

$$\varphi(x)\xlongequal{\Delta}\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\equiv0.$$

用反证法,若 $\varphi(x)\not\equiv0(x>x_0)$,即存在 $x_1>x_0$,使得 $\varphi(x_1)\neq0$,不妨设 $\varphi(x_1)>0$,由 $\varphi(x)$ 的连续性及 $\varphi(x_0)=0$,知存在 $\bar{x}_0,x_0\leqslant\bar{x}_0<x_1$,使得 $\varphi(\bar{x}_0)=0$ 及 $\varphi(x)>0,\bar{x}_0<x\leqslant x_1$,则有

$$\varphi(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)=\int_{\bar{x}_0}^{x}[f(\xi,\varphi_1(\xi))-f(\xi,\varphi_2(\xi))]\mathrm{d}\xi,$$

其中 $\bar{x}_0<x\leqslant x_1$.

由 $\varphi(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)>0(\bar{x}_0<x\leqslant x_1)$ 及 $f(x,y)$ 对 y 的单调不增性,

$$\varphi_1(x)-\varphi_2(x)=\int_{\bar{x}_0}^{x}[f(\xi,\varphi_1(\xi))-f(\xi,\varphi_2(\xi))]\mathrm{d}\xi\leqslant0,\bar{x}_0<x\leqslant x_1.$$

这与 $\varphi(x_1)>0$ 矛盾. 因此,对 $x\geqslant x_0$,有 $\varphi(x)\equiv0$.

方法点击:本题结论并没有给出初值问题解的存在性,只说明了若初值问题有解,则解必唯一,从而假设方程有两个解,证明这两个解恒等即可.

8. 设 $f(x)$ 定义于 $-\infty<x<+\infty$,满足条件

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant N|x_1-x_2|,$$

其中 $N<1$,证明方程 $x=f(x)$ 存在唯一的一个解.

(提示:任取 x_0,作逐步逼近点列 $x_{n+1}=f(x_n)(n=0,1,2,\cdots)$,然后证明 x_n 收敛于方程的唯

一解.)

证明:由条件知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,任取一点 $x_0\in(-\infty,+\infty)$,作逼近序列 $\{x_n\}$:

$$x_{n+1}=f(x_n),n=0,1,2,\cdots.$$

且序列 $\{x_n\}$ 的收敛性等价于级数 $x_0+\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-x_{k-1})$ 的收敛性.

由于 $|x_1-x_0|=|f(x_0)-x_0|$,

$$|x_2-x_1|=|f(x_1)-f(x_0)|\leqslant N|x_1-x_0|=N|f(x_0)-x_0|,$$

由数学归纳法可知 $|x_k-x_{k-1}|\leqslant N^{k-1}|f(x_0)-x_0|$.

由假设得 $N<1$,所以级数 $\sum_{k=1}^{\infty}N^{k-1}|f(x_0)-x_0|$ 收敛.

由级数收敛的比较判别法知,级数 $x_0+\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-x_{k-1})$ 绝对收敛,从而序列 $\{x_n\}$ 收敛.不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$,由 $f(x)$ 的连续性知,$x_{n+1}=f(x_n),n=0,1,2,\cdots$ 的两端当 $n\to\infty$ 时取极限有 $x^*=f(x^*)$,即 x^* 是方程 $x=f(x)$ 的解.

下证唯一性.

设 $x=f(x)$ 有两个解 $x^*,\bar{x}^*$,则 $x^*=f(x^*),\bar{x}^*=f(\bar{x}^*)$,由已知条件

$$|x^*-\bar{x}^*|=|f(x^*)-f(\bar{x}^*)|\leqslant N|x^*-\bar{x}^*|,$$

由于 $N<1$,即有 $x^*=\bar{x}^*$,所以 $x=f(x)$ 存在唯一的一个解.

9. 给定积分方程

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi, \qquad (*)$$

其中 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的已知连续函数,$K(x,\xi)$ 是 $a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant\xi\leqslant b$ 上的已知连续函数.证明当 $|\lambda|$ 足够小时(λ 是常数),$(*)$ 在 $[a,b]$ 上存在唯一的连续解.

(提示:作逐步逼近函数序列

$$\varphi_0(x)=f(x),\varphi_{n+1}(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi_n(\xi)\mathrm{d}\xi\quad(n=0,1,2,\cdots).)$$

证明:作逐步逼近函数序列,取 $\varphi_0(x)=f(x)$,令

$$\varphi_1(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi_0(\xi)\mathrm{d}\xi,\cdots,$$

$$\varphi_{n+1}(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi_n(\xi)\mathrm{d}\xi,\cdots. \qquad ①$$

令 $M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|,L=\max\limits_{\substack{x\in[a,b]\\ \xi\in[a,b]}}|K(x,\xi)|>0$,则

$$|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)|=\left|\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi_0(\xi)\mathrm{d}\xi\right|\leqslant|\lambda|\int_a^b|K(x,\xi)||f(\xi)|\mathrm{d}\xi$$

$$\leqslant|\lambda|ML(b-a),$$

假设 $|\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)|\leqslant|\lambda|^kL^kM(b-a)^k$ 成立,则有

$$|\varphi_{k+1}(x)-\varphi_k(x)| = \left|\lambda\int_a^b K(x,\xi)(\varphi_k(\xi)-\varphi_{k-1}(\xi))\mathrm{d}\xi\right|$$

$$\leqslant |\lambda|\int_a^b |K(x,\xi)||\varphi_k(\xi)-\varphi_{k-1}(\xi)|\mathrm{d}\xi$$

$$\leqslant |\lambda|\int_a^b L^{k+1}|\lambda|^k M(b-a)^k\mathrm{d}\xi$$

$$= |\lambda|^{k+1}L^{k+1}M(b-a)^{k+1},$$

由数学归纳法知，对任意的 $n\in\mathbf{N}$，有

$$|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)|\leqslant ML^n|\lambda|^n(b-a)^n.$$

下证 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. 考虑级数 $\varphi_0(x)+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x))$，只需证该级数在 $[a,b]$ 上一致收敛即可. 由于

$$|\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)|\leqslant ML^k|\lambda|^k(b-a)^k,$$

当 $|\lambda|<\dfrac{1}{(b-a)L}$ 时，级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}ML^k|\lambda|^k(b-a)^k$ 收敛，由此知当 $|\lambda|<\dfrac{1}{(b-a)L}$ 时，级数 $\varphi_0(x)+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x))$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，即 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，不妨设其极限函数为 $\varphi^*(x)$，即当 $x\in[a,b]$ 时，$\varphi_n(x)$ 当 $n\to\infty$ 时一致收敛于 $\varphi^*(x)$，且由 $\varphi_n(x)$ 的连续性知 $\varphi^*(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，对迭代函数列 ①，当 $n\to\infty$ 时两边取极限，得

$$\varphi^*(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi^*(\xi)\mathrm{d}\xi\quad\left(|\lambda|<\frac{1}{(b-a)L}\right),$$

即当 $|\lambda|<\dfrac{1}{(b-a)L}$ 时，积分方程必存在连续解.

下面用反证法证明当 $|\lambda|<\dfrac{1}{(b-a)L}$ 时，(*) 方程的解的唯一性.

设另有解 $\bar{\varphi}(x)$ 且 $\bar{\varphi}(x)\neq\varphi^*(x)$，即 $\bar{\varphi}(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\bar{\varphi}(\xi)\mathrm{d}\xi$.

记 $\overline{M}=\max\limits_{x\in[a,b]}|\varphi^*(x)-\bar{\varphi}(x)|>0$,

$$|\varphi^*(x)-\bar{\varphi}(x)|=\left|\lambda\int_a^b K(x,\xi)(\varphi^*(\xi)-\bar{\varphi}(\xi))\mathrm{d}\xi\right|$$

$$\leqslant|\lambda|\int_a^b L|\varphi^*(\xi)-\bar{\varphi}(\xi)|\mathrm{d}\xi=|\lambda|\overline{M}L(b-a),$$

即有 $\overline{M}\leqslant|\lambda|\overline{M}L(b-a)$，由于 $\overline{M}>0$，所以 $|\lambda|\geqslant\dfrac{1}{(b-a)L}$，与 $|\lambda|<\dfrac{1}{(b-a)L}$ 矛盾. 唯一性得证.

习题 3.2

1. 假设函数 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 于区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续，$y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 是方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y+Q(x)$$

的解，$y_0=\varphi(x_0,x_0,y_0)$. 试求 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}$，$\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0}$ 及 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$，并从解的表达式出发，利用对参数求导数的方法，

检验所得结果.

解:因为 $f(x,y)=P(x)y+Q(x)$,所以$\dfrac{\partial f}{\partial y}=P(x)$.

由解对初值的可微性定理得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}=-f(x_0,y_0)\exp\left[\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(s,\varphi)}{\partial y}\mathrm{d}s\right]=-[P(x_0)y_0+Q(x_0)]\exp\left[\int_{x_0}^{x}P(s)\mathrm{d}s\right],$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}=\exp\left[\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(s,\varphi)}{\partial y}\mathrm{d}s\right]=\exp\left[\int_{x_0}^{x}P(s)\mathrm{d}s\right],$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=f(x,\varphi(x,x_0,y_0))=P(x)\varphi(x,x_0,y_0)+Q(x).$$

因为非齐次线性方程有解的表达式为

$$y=\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right],$$

于是 $\varphi(x,x_0,y_0)=y_0\cdot\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x}P(s)\mathrm{d}s}+\int_{x_0}^{x}Q(s)\mathrm{e}^{\int_s^x P(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s$.

直接对参数求导可得

$$\frac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}=-P(x_0)y_0\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x}P(s)\mathrm{d}s}-Q(x_0)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x}P(s)\mathrm{d}s}=-[P(x_0)y_0+Q(x_0)]\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x}P(s)\mathrm{d}s},$$

$$\frac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}=\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x}P(s)\mathrm{d}s},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial x}&=P(x)y_0\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x}P(s)\mathrm{d}s}+Q(x)+\int_{x_0}^{x}P(x)Q(s)\mathrm{e}^{\int_s^x P(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s\\&=P(x)\left[y_0\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x}P(s)\mathrm{d}s}+\int_{x_0}^{x}Q(s)\mathrm{e}^{\int_s^x P(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s\right]+Q(x)\\&=P(x)\varphi(x,x_0,y_0)+Q(x).\end{aligned}$$

经检验,与解对初值的可微性定理中的公式一致.

2. 给定方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$,试求$\dfrac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}$,$\dfrac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}$在 $x_0=1,y_0=0$ 时的表达式.

解:设 $f(x,y)=\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$,则$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{x}\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

由解对初值的可微性定理的证明可知,

$$\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}=-f(x_0,y_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(s,y)}{\partial y}\mathrm{d}s\right)=-\sin\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{1}{s}\cos\frac{y}{s}\mathrm{d}s\right),$$

$$\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}=\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(s,y)}{\partial y}\mathrm{d}s\right)=\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{1}{s}\cos\frac{y}{s}\mathrm{d}s\right).$$

当 $x_0=1,y_0=0$ 时,对应地得到$\left.\dfrac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}\right|_{x_0=1,y_0=0}=0$,

$$\left.\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}\right|_{x_0=1,y_0=0}=\exp\left(\int_1^x\frac{1}{s}\mathrm{d}s\right)=|x|.$$

所以在 $x_0=1,y_0=0$ 时,$\dfrac{\partial y}{\partial x_0}=0$,$\dfrac{\partial y}{\partial y_0}=|x|$.

3. 假设函数 $f(x,y)$ 及$\frac{\partial f}{\partial y}$都在区域$G$内连续，又 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 是方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y,\lambda)$ 的满足初始条件 $\varphi(x_0,x_0,y_0)=y_0$ 的解，试证$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}$ 存在且连续，并写出其表达式.

解：记初值为$(x_0,y_0+\Delta y_0)$ 的解为 $y=\psi(x,x_0,y_0+\Delta y_0)$，其中 $|\Delta y_0|\leqslant\alpha$，$\alpha$ 足够小，则有

$$\varphi=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,\varphi(s))\mathrm{d}s,\psi=y_0+\Delta y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,\psi(s))\mathrm{d}s.$$

$$\begin{aligned}\psi-\varphi&=\Delta y_0+\int_{x_0}^{x}[f(s,\psi(s))-f(s,\varphi(s))]\mathrm{d}s\\&=\Delta y_0+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(s,\varphi+\theta(\psi-\varphi))}{\partial y}(\psi(s)-\varphi(s))\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中 $\theta\in[0,1]$.

由$\frac{\partial f}{\partial y}$及$\varphi,\psi$的连续性，有$\frac{\partial f(s,\varphi+\theta(\psi-\varphi))}{\partial y}=\frac{\partial f(s,\varphi)}{\partial y}+r$，其中 r 满足：$\Delta y_0\to0$ 时 $r\to0$，$\Delta y_0=0$ 时 $r=0$. 即对 $\Delta y_0\neq0$ 有

$$\frac{\psi-\varphi}{\Delta y_0}=1+\int_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial f(s,\varphi)}{\partial y}+r\right]\frac{\psi-\varphi}{\Delta y_0}\mathrm{d}s,$$

即 $z=\frac{\psi-\varphi}{\Delta y_0}$ 是微分方程初值问题$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\left[\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r\right]z,\\ z(x_0)=1\end{cases}$的解.

即$\frac{\psi-\varphi}{\Delta y_0}=z=\exp\left\{\int_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial f(s,\varphi)}{\partial y}+r\right]\mathrm{d}s\right\}$.

于是$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}=\lim\limits_{\Delta y_0\to0}\frac{\psi-\varphi}{\Delta y_0}=\exp\left\{\int_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial f(s,\varphi)}{\partial y}\right]\mathrm{d}s\right\}$，它是 x,x_0,y_0 的连续函数.

4. 设 $y=\varphi(x,x_0,y_0,\lambda)$ 是初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sin(\lambda xy),\varphi(x_0,x_0,y_0,\lambda)=y_0$$

的饱和解，这里 λ 是参数，求$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}$，$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}$ 在$(x,0,0,1)$ 处的表达式.

解：这里 $f(x,y)=\sin(\lambda xy)$，$\frac{\partial f}{\partial y}=\lambda x\cos(\lambda xy)$. 由解对初值的可微性定理得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}=-f(x_0,y_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(s,\varphi)}{\partial y}\mathrm{d}s\right)=-\sin(\lambda x_0y_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x}\lambda s\cos(\lambda s\varphi)\mathrm{d}s\right),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}=\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(s,\varphi)}{\partial y}\mathrm{d}s\right)=\exp\left(\int_{x_0}^{x}\lambda s\cos(\lambda s\varphi)\mathrm{d}s\right).$$

当 $x_0=0,y_0=0,\lambda=1$ 时，则有$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right|_{(x,0,0,1)}=0$，

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\right|_{(x,0,0,1)}=\exp\left(\int_{0}^{x}s\cos0\mathrm{d}s\right)=\exp\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

习题 3.3

1. 解下列方程，并求奇解（如果存在的话）：

(1) $y=2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x^2\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^4$；　　(2) $x=y-\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2$；

(3) $y=x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$，并画出积分曲线图；

(4) $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=0$，并画出积分曲线图；

(5) $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=0$；　　(6) $x\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3-y\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-1=0$；

(7) $y=x\left(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2$；　　(8) $x\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-(x-a)^2=0$（$a$ 为常数）；

(9) $y=2x+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{3}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3$；　　(10) $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+(x+1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=0$.

解：(1) 令 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，得 $y=2xp+x^2p^4$ 及 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p=2p+2xp^4+(2x+4x^2p^3)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，

即 $(1+2xp^3)\left(p+2x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)=0$.

当 $1+2xp^3=0$ 时，有 $p^3=-\frac{1}{2x}$，即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-(2x)^{-\frac{1}{3}}$.

分离变量积分得 $y+\frac{3}{4}(2x)^{\frac{2}{3}}=c$.

当 $p+2x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=0$ 时，有 $\frac{2\mathrm{d}p}{p}=-\frac{\mathrm{d}x}{x}$，积分得 $x=\frac{c}{p^2}$.

所以方程的通解为 $y+\frac{3}{4}(2x)^{\frac{2}{3}}=c$ 或 $\begin{cases}x=\frac{c}{p^2},\\ y=\frac{2c}{p}+c^2,\end{cases}$ 其中 c 为任意常数，$p\neq 0$ 为参数.

当 $p=0$ 时，还有解 $y=0$.

由上式消去 p，得 $\frac{c}{x}=p^2=\frac{4c^2}{(y-c^2)^2}$，即 $(y-c^2)^2=4cx$，这是通解的另一形式.

由于 p-判别曲线为 $\begin{cases}y=2xp+x^2p^4,\\ 2x+4x^2p^3=0,\end{cases}$ 即 $p\neq 0$ 时 $\begin{cases}x=-\frac{1}{2p^3},\\ y=-\frac{3}{4p^2},\end{cases}$ 可检验它是方程的解，且不包含在通解中.

对任一点 $P\left(-\frac{1}{2p^3},-\frac{3}{4p^2}\right)(p\neq 0)$，取 $c=-\frac{1}{2p}$，便得通解中的一个解

$$\begin{cases}x=-\frac{1}{2p}\cdot\frac{1}{p^2},\\ y=-\frac{1}{2p}\cdot\frac{2}{p}+\left(\frac{1}{2p}\right)^2,\end{cases}$$

且在 P 点与其相切，故它是奇解.

(2) 令 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，得 $x=y-p^2$ 及 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p=1+2p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，

整理得 $\mathrm{d}x=\left(2+\frac{2}{p-1}\right)\mathrm{d}p$，

积分得 $x = 2p + \ln(p-1)^2 + c$.

通解为$\begin{cases} x = 2p + \ln(p-1)^2 + c, \\ y = p^2 + 2p + \ln(p-1)^2 + c, \end{cases}$其中 c 为任意常数,p 为参数.

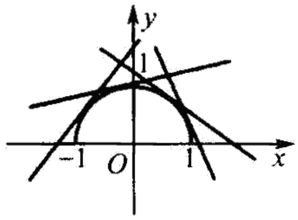
当 $p = 1$ 时,方程还有解 $y = x + 1$.

由于 p-判别曲线为$\begin{cases} y = x + p^2, \\ 2p = 0, \end{cases}$即 $y = x$,因为 $y = x$ 不是方程的解,故方程不存在奇解.

(3) 令 $p = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,则方程可以写成 $y = xp + \sqrt{1+p^2}$.

这是克莱罗方程,因而它的通解是 $y = xc + \sqrt{1+c^2}$.

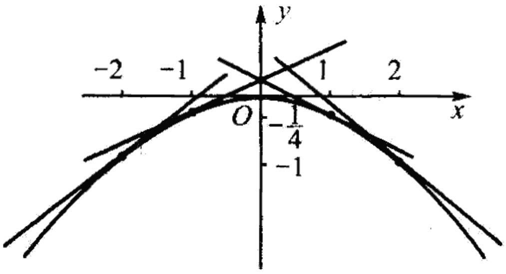
由于 c-判别曲线为$\begin{cases} x + \dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}} = 0, \\ y = xc + \sqrt{1+c^2}, \end{cases}$消去 c,得到 $y = \sqrt{1-x^2}$,经检验 $y = \sqrt{1-x^2}$ 是方程的解,故是奇解.积分曲线图如图(3.1)所示.



图(3.1)

(4) 令 $p = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,则方程可以写为 $y = xp + p^2$.这是克莱罗方程,因而它的通解为 $y = xc + c^2$.

由于 c-判别曲线为$\begin{cases} x + 2c = 0, \\ y = xc + c^2, \end{cases}$消去 c,得到 $y = -\dfrac{x^2}{4}$,经检验 $y = -\dfrac{x^2}{4}$ 是方程的解,故为方程的奇解.积分曲线图如图(3.2)所示.



图(3.2)

(5) 令 $p = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,则方程可以写为 $y = 2xp + p^2$.

两边对 x 求导,则 $p = 2p + 2x\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + 2p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$,即$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = -\dfrac{2x}{p} - 2$.

这是一阶线性微分方程,积分可得

$$x = \mathrm{e}^{\int -\frac{2}{p}\mathrm{d}p}\left[\int(-2)\mathrm{e}^{\int \frac{2}{p}\mathrm{d}p}\mathrm{d}p + c\right],$$

即 $x = \dfrac{c}{p^2} - \dfrac{2}{3}p$.

从而原方程的参数解为$\begin{cases} x = -\dfrac{2}{3}p + \dfrac{c}{p^2}, \\ y = -\dfrac{1}{3}p^2 + \dfrac{2c}{p}. \end{cases}$

由于 p-判别曲线为$\begin{cases} y = 2xp + p^2, \\ 2x + 2p = 0, \end{cases}$消去 p 得 $y = -x^2$.

经检验 $y = -x^2$ 不是方程的解,所以方程没有奇解.

(6) 令 $p = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,则方程变为 $y = xp - \dfrac{1}{p^2}$.

这是克莱罗方程,因而它的通解为 $y = xc - \dfrac{1}{c^2}$.

由于 c- 判别曲线为$\begin{cases} x+\dfrac{2}{c^3}=0, \\ y=xc-\dfrac{1}{c^2}, \end{cases}$ 消去 c，得到 $4y^3+27x^2=0$.

经检验 $4y^3+27x^2=0$ 是方程的解，从而是方程的奇解.

(7) 设 $p=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，则方程变形为 $y=x(1+p)+p^2$.

两边关于 x 求导，可得 $p=(1+p)+(x+2p)\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，即$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}=-x-2p$.

这是一阶线性微分方程，积分可得 $x=c\mathrm{e}^{-p}-2p+2$，代入 $y=x(1+p)+p^2$，则

$$y=c(p+1)\mathrm{e}^{-p}-p^2+2.$$

所以方程的参数解为$\begin{cases} x=c\mathrm{e}^{-p}-2p+2, \\ y=c(1+p)\mathrm{e}^{-p}-p^2+2, \end{cases}$ 其中 p 是参数，c 是任意常数.

由于 p- 判别曲线为$\begin{cases} y=x(1+p)+p^2, \\ x+2p=0, \end{cases}$ 消去 p 得 $y=x-\dfrac{1}{4}x^2$.

经检验，$y=x-\dfrac{1}{4}x^2$ 不是方程的解，故方程没有奇解.

(8) 令 $p=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，则方程变形为 $xp^2=(x-a)^2$，即 $p=\pm\dfrac{x-a}{\sqrt{x}}$，从而$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\pm\dfrac{x-a}{\sqrt{x}}$.

积分得方程的通解为 $9(y+c)^2=4x(x-3a)^2$，c 为任意常数.

由于 p- 判别曲线为$\begin{cases} xp^2-(x-a)^2=0, \\ 2xp=0, \end{cases}$ 消去 p 得 $x=a$.

经检验，$x=a$ 不是方程的解，故方程没有奇解.

(9) 设 $p=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，则方程变形为 $y=2x+p-\dfrac{1}{3}p^3$.

两边对 x 求导，得到 $p=2+(1-p^2)\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，即 $\mathrm{d}x=\dfrac{1-p^2}{p-2}\mathrm{d}p\,(p\neq 2)$.

积分，得到 $x=-\dfrac{(p+2)^2}{2}-3\ln|p-2|+c$.

代入 $y=2x+p-\dfrac{1}{3}p^3$，则得到 $y=-\dfrac{1}{3}p^3-p^2-3p-4-6\ln|p-2|+2c$.

所以方程的参数解为$\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}(p+2)^2-3\ln|p-2|+c, \\ y=-\dfrac{1}{3}p^3-p^2-3p-4-6\ln|p-2|+2c, \end{cases}$ 其中 p 为参数，c 为任意常数.

另外，当 $p=2$ 时，方程有解 $y=2x-\dfrac{2}{3}$.

由于 p- 判别曲线为$\begin{cases} y=2x+p-\dfrac{1}{3}p^3, \\ 1-p^2=0, \end{cases}$ 消去 p 得 $y=2x\pm\dfrac{2}{3}$.

经检验，$y=2x-\dfrac{2}{3}$ 是方程的解，从而方程有奇解 $y=2x-\dfrac{2}{3}$.

(10) 令 $p=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,则方程变形为 $y=(x+1)p+p^2$,即 $y=xp+p(1+p)$.

此为克莱罗微分方程,所以它的通解为 $y=cx+c(1+c)$.

由于 c- 判别曲线为 $\begin{cases} y=cx+c(1+c), \\ x+1+2c=0, \end{cases}$ 消去 c 得 $(x+1)^2+4y=0$.

经检验,$(x+1)^2+4y=0$ 是方程的解,从而为方程的奇解.

2. 求下列曲线族的包络,并绘出图形:

(1) $y=cx+c^2$; (2) $c^2y+cx^2-1=0$;

(3) $(x-c)^2+(y-c)^2=4$; (4) $(x-c)^2+y^2=4c$.

解:(1) 由于 c- 判别曲线为 $\begin{cases} y=cx+c^2, \\ x+2c=0, \end{cases}$ 消去 c 得 $4y+x^2=0$.

由于 $4y+x^2=0$ 不含在曲线族 $y=cx+c^2$ 中,且对其上的任何一点 $P(x,y)$,取 $c=-\dfrac{x}{2}$,便得到通解中的一个解且在 P 点与其相切.

故 $4y+x^2=0$ 是曲线族 $y=cx+c^2$ 的包络. 其图形如图(3.3) 所示.

(2) 由于 c- 判别曲线为 $\begin{cases} c^2y+cx^2-1=0, \\ 2cy+x^2=0, \end{cases}$ 消去 c 得到 $x^4+4y=0$.

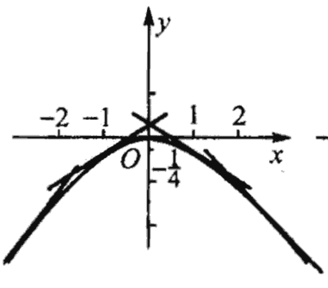
由于 $x^4+4y=0$ 不含在曲线族 $c^2y+cx^2-1=0$ 中,且对其上的任何一点 $P(x,y)$,取 $c=-\dfrac{x^2}{2}$,便得到通解中的一个解且在 P 点与其相切.

故 $x^4+4y=0$ 是曲线族 $c^2y+cx^2-1=0$ 的包络. 其图形如图(3.4) 所示.

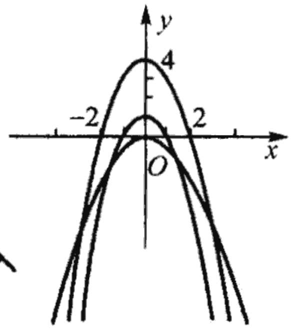
(3) 由于 c- 判别曲线为 $\begin{cases} (x-c)^2+(y-c)^2=4, \\ 2c=x+y, \end{cases}$ 消去 c 得 $(x-y)^2=8$.

容易检验 $(x-y)^2=8$ 是曲线族 $(x-c)^2+(y-c)^2=4$ 的包络. 其图形如图(3.5) 所示.

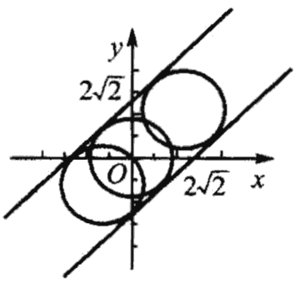
(4) 由于 c- 判别曲线为 $\begin{cases} (x-c)^2+y^2=4c, \\ c-x=2, \end{cases}$ 消去 c 得到 $y^2=4(x+1)$,容易验证 $y^2=4(x+1)$ 是曲线族 $(x-c)^2+y^2=4c$ 的包络. 其图形如图(3.6) 所示.



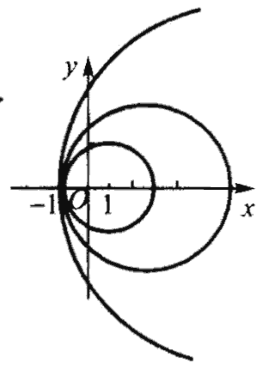
图(3.3)



图(3.4)



图(3.5)



图(3.6)

3. 求一曲线,使它上面的每一点的切线截割坐标轴使两截距之和等于常数 a.

解:易知过点 (x,y) 的切线的横截距和纵截距分别为 $x-\dfrac{y}{y'}$ 和 $y-xy'$,所以所求曲线满足方程

$$x-\frac{y}{y'}+y-xy'=a.$$

设 $y'=p=\frac{dy}{dx}$,则方程变形为 $y+xp^2=(x+y-a)p$,即 $y=xp+\frac{ap}{p-1}(p\neq 1)$.

此为克莱罗方程,有通解 $y=cx+\frac{ac}{c-1}$,其中 c 为不等于 0,1 的任意常数.

由于 c-判别曲线为$\begin{cases} y=cx+\frac{ac}{c-1}, \\ x-\frac{a}{(c-1)^2}=0. \end{cases}$ 消去 c 得 $(y-x-a)^2=4ax$.

经检验,$(y-x-a)^2=4ax$ 是方程的解,故它是方程的奇解,从而所求的曲线为 $(y-x-a)^2=4ax$ 及 $y=cx+\frac{ac}{c-1}$,其中 c 为不等于 0,1 的任意常数.

4. 试证:就克莱罗微分方程来说,p-判别曲线和方程通解的 c-判别曲线同样是方程通解的包络,从而为方程的奇解.

证明: 克莱罗微分方程为 $y=xp+f(p)$,$p=\frac{dy}{dx}$. 其 p-判别曲线为$\begin{cases} y=xp+f(p), \\ x+f'(p)=0. \end{cases}$ 而方程对 x 求导得 $p=p+[x+f'(p)]p'$,有 $p'=0$,故 $p=c$,所以通解为 $y=xc+f(c)$,其中 c 为任意常数. 由通解 $y=xc+f(c)$ 推导得其 c-判别曲线为$\begin{cases} y=xc+f(c), \\ x+f'(c)=0. \end{cases}$ 它是方程通解的包络,对任意值 $p=p_0$ 均有点 (x_0,y_0) 对应,两者一致,均为方程的奇解.

习题 3.4

1. 从例 1 的欧拉方法、改进的欧拉方法、2 阶龙格-库塔方法、4 阶龙格-库塔方法中选择一种方法每一步从精确解出发计算出下一步,并求出其相对误差,同时与表中的积累误差比较.

解: 我们选取欧拉方法来计算. 由公式 $y_{n+1}=y_n+h\cdot f(x_n,y_n)$,$x_n=x_0+nh$ 及教材中例 1 的图表可得如下结果:

	精确解	欧拉方法		从精确解出发的欧拉方法	
x_i	y_i	y_i	误差	y_i	相对误差
0	2	2	0	2	0
0.1	1.609 7	1.4	0.209 66	1.4	0.209 66
0.2	1.418 1	1.265 6	1.152 5	1.353 575	0.064 525
0.3	1.303 7	1.189 4	0.114 2	1.274 790	0.028 971
0.4	1.228 1	1.140 1	0.088 016	1.212 489	0.015 611
0.5	1.175 2	1.105 9	0.069 255	1.165 684	0.009 516
0.6	1.136 6	1.081 3	0.055 327	1.130 414	0.006 186
0.7	1.107 7	1.063 0	0.044 694	1.103 427	0.004 730
0.8	1.085 6	1.049 2	0.036 401	1.082 555	0.003 045
0.9	1.068 4	1.038 6	0.029 828	1.066 219	0.002 181
1	1.055	1.030 4	0.024 552	1.053 284 4	0.001 715 6

2. 计算线性微分方程 $y' = Ax, A = \begin{bmatrix} -0.1 & -49.9 & 0 \\ 0 & -50 & 0 \\ 0 & 70 & -120 \end{bmatrix}$ 的刚性比.

解:易知矩阵A的三个特征根为$\lambda_1=-0.1,\lambda_2=-50,\lambda_3=-120$.从而根据刚性比的定义知,所求刚性比为$\dfrac{\max|\lambda_i|}{\min|\lambda_i|}=\dfrac{|\lambda_3|}{|\lambda_1|}=\dfrac{120}{0.1}=1\ 200$.

因此,刚性比为 1 200.

3. 试用教材附录 C 中的数学语言求解例 1.

解:对应于例 1,公式(3.36)、(3.37)、(3.40)、(3.41) 用 Maple 语言来写就是

(1) $y:=x+0.1*x*(1-x\hat{}2)$.

(2) $y:=x+\dfrac{0.1}{2}(x*(1-x\hat{}2)+y*(1-y\hat{}2))$.

(3) $k1:=x*(1-x\hat{}2);k2:=(x+0.05*k1)(1-(x+0.05*k1)\hat{}2)$;

$y:=x+0.1*k2$.

(4) $k1:=x*(1-x\hat{}2);k2:=(x+0.05*k1)(1-(x+0.05*k1)\hat{}2)$;

$k3:=(x+0.05*k2)(1-(x+0.05*k2)\hat{}2)$;

$k4:=(x+0.1*k3)(1-(x+0.1*k3)\hat{}2)$;

$y:=x+0.1/6*(k1+2*k2+2*k3+k4)$.

然后,对 x 分别赋值,循环求解即可.

第四章 高阶微分方程

习题 4.1

1. 设$x(t)$和$y(t)$是区间$[a,b]$上的连续函数,证明:如果在区间$[a,b]$上有$\dfrac{x(t)}{y(t)}\neq$常数或$\dfrac{y(t)}{x(t)}\neq$常数,则 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在区间$[a,b]$上线性无关.(提示:用反证法.)

证明:假设$x(t),y(t)$在区间$[a,b]$上线性相关,则存在不全为零的常数α,β,使得$\alpha x(t)+\beta y(t)\equiv 0$,$t\in[a,b]$.

那么不妨设 $x(t)$ 不为零,则有$\dfrac{y(t)}{x(t)}=-\dfrac{\alpha}{\beta}$,显然 $-\dfrac{\alpha}{\beta}$ 为常数,与题设矛盾,所以假设不成立,即证明了 $x(t),y(t)$ 在区间$[a,b]$上线性无关.

2. 证明非齐次线性微分方程的叠加原理:设 $x_1(t),x_2(t)$ 分别是非齐次线性微分方程

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=f_1(t), \quad ①$$

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=f_2(t) \quad ②$$

的解,则 $x_1(t)+x_2(t)$ 是方程

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=f_1(t)+f_2(t)$$

的解.

证明:由题设条件可知 $x_1(t),x_2(t)$ 分别是方程 ①,② 的解,则

$$\frac{d^n x_1(t)}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x_1(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x_1(t)=f_1(t), \quad ③$$

$$\frac{d^n x_2(t)}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x_2(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x_2(t)=f_2(t), \quad ④$$

那么由 ③ 和 ④ 相加,并利用导数的运算法则得

$$\frac{d^n(x_1(t)+x_2(t))}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}(x_1(t)+x_2(t))}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)(x_1(t)+x_2(t))=f_1(t)+f_2(t).$$

即说明 $x_1(t)+x_2(t)$ 是方程 $\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=f_1(t)+f_2(t)$ 的解.

3. 已知齐次线性微分方程的基本解组 x_1,x_2,求下列方程对应的非齐次线性微分方程的通解:

(1) $x''-x=\cos t, x_1=e^t, x_2=e^{-t}$;

(2) $x''+\frac{t}{1-t}x'-\frac{1}{1-t}x=t-1, x_1=t, x_2=e^t$;

(3) $x''+4x=t\sin 2t, x_1=\cos 2t, x_2=\sin 2t$;

(4) $t^2x''-4tx'+6x=36\frac{\ln t}{t}, x_1=t^2, x_2=t^3$;

(5) $t^2x''-tx'+x=6t+34t^2, x_1=t, x_2=t\ln t$;

(6) $t^2x''-3tx'+8x=18t^2\sin(\ln t), x_1=t^2\cos(2\ln t), x_2=t^2\sin(2\ln t)$.

解:(1) 运用常数变易法,令 $x(t)=c_1(t)e^t+c_2(t)e^{-t}$,将它代入方程,则有

$$\begin{cases} c'_1(t)e^t+c'_2(t)e^{-t}=0, \\ c'_1(t)e^t-c'_2(t)e^{-t}=\cos t, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} c'_1(t)=\frac{1}{2}e^{-t}\cos t, \\ c'_2(t)=-\frac{1}{2}e^t\cos t, \end{cases}$$

积分得 $c_1(t)=-\frac{1}{4}e^{-t}(\cos t-\sin t)+c_1; c_2(t)=-\frac{1}{4}e^t(\cos t+\sin t)+c_2$.

故所求通解为 $x(t)=c_1e^t+c_2e^{-t}-\frac{1}{2}\cos t$.

(2) 运用常数变易法,令 $x(t)=c_1(t)t+c_2(t)e^t$,将它代入方程,则有

$$\begin{cases} c'_1(t)t+c'_2(t)e^t=0, \\ c'_1(t)+c'_2(t)e^t=t-1, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} c'_1(t)=-1, \\ c'_2(t)=te^{-t}, \end{cases}$$

积分得 $c_1(t)=-t+c_1, c_2(t)=-e^{-t}(t+1)+c_2$.

于是原方程的通解为 $x(t)=c_1t+c_2e^t-(t^2+t+1)$.

(3) 令 $x=c_1(t)\cos 2t+c_2(t)\sin 2t$,将它代入方程,可得关于 $c'_1(t)$ 和 $c'_2(t)$ 的方程组

$$\begin{cases} c'_1(t)\cos 2t+c'_2(t)\sin 2t=0, \\ -2c'_1(t)\sin 2t+2c'_2(t)\cos 2t=t\sin 2t. \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} c'_1(t) = \dfrac{1}{4}t(\cos 4t - 1), \\ c'_2(t) = \dfrac{1}{4}t\sin 4t. \end{cases}$$

积分得
$$\begin{cases} c_1(t) = \dfrac{1}{64}\cos 4t + \dfrac{1}{16}t\sin 4t - \dfrac{1}{8}t^2 + \gamma_1, \\ c_2(t) = \dfrac{1}{64}\sin 4t - \dfrac{1}{16}t\cos 4t + \gamma_2. \end{cases}$$

于是方程的通解为 $x = c_1\cos 2t + c_2\sin 2t - \dfrac{1}{8}t^2\cos 2t + \dfrac{1}{16}t\sin 2t$,其中 c_1, c_2 为任意常数.

(4) 方程可以变形为 $x'' - \dfrac{4}{t}x' + \dfrac{6}{t^2}x = \dfrac{36}{t^3}\ln t$,由于 $x_1 = t^2, x_2 = t^3$ 是对应齐次方程的解,故可以令 $x = c_1(t)t^2 + c_2(t)t^3$.

将它代入方程,则可得关于 $c'_1(t)$ 和 $c'_2(t)$ 的方程组
$$\begin{cases} t^2c'_1(t) + t^3c'_2(t) = 0, \\ 2tc'_1(t) + 3t^2c'_2(t) = \dfrac{36}{t^3}\ln t, \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} c'_1(t) = \dfrac{-36}{t^4}\ln t, \\ c'_2(t) = \dfrac{36}{t^5}\ln t, \end{cases}$$

积分得
$$\begin{cases} c_1(t) = 4t^{-3}(1 + 3\ln t) + c_1, \\ c_2(t) = -9t^{-4}\left(\ln t + \dfrac{1}{4}\right) + c_2. \end{cases}$$

于是方程的通解为 $x = c_1t^2 + c_2t^3 + \dfrac{1}{t}\left(3\ln t + \dfrac{7}{4}\right)$,其中 c_1, c_2 为任意常数.

(5) 原方程可化为 $x'' - \dfrac{1}{t}x' + \dfrac{1}{t^2}x = \dfrac{6}{t} + 34$.

令方程的解为 $x = t \cdot c_1(t) + t\ln t \cdot c_2(t)$,将它代入方程,则可得关于 $c'_1(t)$ 和 $c'_2(t)$ 的方程组
$$\begin{cases} t \cdot c'_1(t) + t\ln t \cdot c'_2(t) = 0, \\ c'_1(t) + (\ln t + 1)c'_2(t) = \dfrac{6}{t} + 34, \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} c'_1(t) = -\left(\dfrac{6}{t} + 34\right)\ln t, \\ c'_2(t) = \dfrac{6}{t} + 34, \end{cases}$$

积分得
$$\begin{cases} c_1(t) = -34(t\ln t - t) - 3(\ln t)^2 + c_1, \\ c_2(t) = 34t + 6\ln t + c_2. \end{cases}$$

于是方程的通解为 $x = c_1t + c_2t\ln t + 34t^2 + 3t(\ln t)^2$,其中 c_1, c_2 为任意常数.

(6) 原方程可以变形为
$$x'' - \frac{3}{t}x' + \frac{8}{t^2}x = 18\sin(\ln t).$$

令 $x=c_1(t)t^2\cos(2\ln t)+c_2(t)t^2\sin(2\ln t)$，将它代入方程，则可得关于 $c'_1(t)$ 和 $c'_2(t)$ 的方程组

$$\begin{cases} t^2\cos(2\ln t)c'_1(t)+t^2\sin(2\ln t)c'_2(t)=0, \\ 2t(\cos(2\ln t)-\sin(2\ln t))c'_1(t)+2t(\sin(2\ln t)+\cos(2\ln t))c'_2(t)=18\sin(\ln t), \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} c'_1(t)=-9t^{-1}\sin(\ln t)\sin(2\ln t), \\ c'_2(t)=9t^{-1}\sin(\ln t)\cos(2\ln t), \end{cases}$$

积分得

$$\begin{cases} c_1(t)=\dfrac{3}{2}\sin(3\ln t)-\dfrac{9}{2}\sin(\ln t)+c_1, \\ c_2(t)=-\dfrac{3}{2}\cos(3\ln t)+\dfrac{9}{2}\cos(\ln t)+c_2. \end{cases}$$

于是，原方程的通解为

$$x=c_1t^2\cos(2\ln t)+c_2t^2\sin(2\ln t)+6t^2\sin(\ln t),$$

其中 c_1,c_2 为任意常数.

4. 已知方程 $\dfrac{d^2x}{dt^2}-x=0$ 有基本解组 e^t,e^{-t}，试求此方程适合初值条件 $x(0)=1,x'(0)=0$，及 $x(0)=0,x'(0)=1$ 的基本解组[称为标准基本解组，即有 $W(0)=1$]，并由此求出方程的适合初值条件 $x(0)=x_0,x'(0)=x'_0$ 的解.

解：由于 e^t,e^{-t} 是方程 $\dfrac{d^2x}{dt^2}-x=0$ 的基本解组，故存在常数 c_1,c_2 使得 $x(t)=c_1e^t+c_2e^{-t}$.

$x'(t)=c_1e^t-c_2e^{-t}$，令 $t=0$，则有方程适合初始条件 $x(0)=1,x'(0)=0$，于是有

$$\begin{cases} c_1e^0+c_2e^0=1, \\ c_1e^0-c_2e^0=0, \end{cases}$$

解得 $c_1=\dfrac{1}{2},c_2=\dfrac{1}{2}$，故 $x_1(t)=\dfrac{1}{2}e^t+\dfrac{1}{2}e^{-t}$.

又该方程适合初始条件 $x(0)=0,x'(0)=1$，因此

$$\begin{cases} c_3e^0+c_4e^0=0, \\ c_3e^0-c_4e^0=1, \end{cases}$$

解得 $c_3=\dfrac{1}{2},c_4=-\dfrac{1}{2}$，故 $x_2(t)=\dfrac{1}{2}e^t-\dfrac{1}{2}e^{-t}$.

显然 $x_1(t),x_2(t)$ 线性无关，所以此方程适合初始条件 $x(0)=1,x'(0)=0$ 及 $x(0)=0,x'(0)=1$ 的基本解组为

$$x_1(t)=\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{-t},x_2(t)=\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{-t}.$$

再令方程的适合初始条件 $x(0)=x_0,x'(0)=x'_0$ 的解为

$$x(t)=c_5\left(\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{-t}\right)+c_6\left(\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{-t}\right),$$

则得到

$$\begin{cases} c_6=x'(0)=x'_0, \\ c_5=x(0)=x_0, \end{cases}$$

故，适合初始条件 $x(0)=x_0, x'(0)=x'_0$ 的解为

$$x(t)=x_0\,\frac{e^t+e^{-t}}{2}+x'_0\,\frac{e^t-e^{-t}}{2}.$$

5. 设 $x_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 是齐次线性微分方程 $\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=0$ 的任意 n 个解，它们所构成的朗斯基行列式记为 $W(t)$. 试证明 $W(t)$ 满足一阶线性微分方程 $W'+a_1(t)W=0$，因而有

$$W(t)=W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds},\quad t_0,t\in(a,b).$$

解：由于 $x_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 是齐次线性微分方程的任意 n 个解，所以满足

$$\begin{cases}x_1^{(n)}+a_1(t)x_1^{(n-1)}+a_2(t)x_1^{(n-2)}+\cdots+a_n(t)x_1=0,\\ \cdots\\ x_n^{(n)}+a_1(t)x_n^{(n-1)}+a_2(t)x_n^{(n-2)}+\cdots+a_n(t)x_n=0.\end{cases}$$

由行列式求导法则知

$$W'(t)=\begin{vmatrix}x'_1&\cdots&x'_n\\x'_1&\cdots&x'_n\\\vdots&&\vdots\\x_1^{(n-2)}&\cdots&x_n^{(n-2)}\\x_1^{(n-1)}&\cdots&x_n^{(n-1)}\end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix}x_1&\cdots&x_n\\x'_1&\cdots&x'_n\\\vdots&&\vdots\\x_1^{(n-2)}&\cdots&x_n^{(n-2)}\\x_1^{(n)}&\cdots&x_n^{(n)}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}x_1&\cdots&x_n\\x'_1&\cdots&x'_n\\\vdots&&\vdots\\x_1^{(n-2)}&\cdots&x_n^{(n-2)}\\x_1^{(n)}&\cdots&x_n^{(n)}\end{vmatrix},$$

将 $W'(t)$ 中第 k 行都乘以 $a_{n-k+1}(t)$，加到最后一行 $(k=1,2,\cdots,n-1)$，则

$$W'(t)=\begin{vmatrix}x_1&\cdots&x_n\\x'_1&\cdots&x'_n\\\vdots&&\vdots\\x_1^{(n-2)}&\cdots&x_n^{(n-2)}\\x_1^{(n-1)}&\cdots&x_n^{(n-1)}\end{vmatrix}(-a_1(t))=-a_1(t)W(t),$$

即 $W'+a_1(t)W=0$，则有 $\frac{dW(t)}{W(t)}=-a_1(t)dt$.

两边从 t_0 到 t 积分 $\ln|W(t)|\Big|_{t_0}^{t}=-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds$，则

$$\ln|W(t)|-\ln|W(t_0)|=-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds,$$

即 $W(t)=W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds}, t_0,t\in(a,b)$.

6. 假设 $x_1(t)\neq 0$ 是二阶齐次线性微分方程

$$x''+a_1(t)x'+a_2(t)x=0 \qquad (*)$$

的解，这里 $a_1(t)$ 和 $a_2(t)$ 于区间 $[a,b]$ 上连续，试证：

(1) $x_2(t)$ 为方程的解的充要条件是

$$W'[x_1,x_2]+a_1W[x_1,x_2]=0;$$

(2) 方程的通解可表为

$$x=x_1\left[c_1\int\frac{1}{x_1^2}\exp\left(-\int_{t_0}^{t}a_1(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t+c_2\right],$$

其中 c_1,c_2 为任意常数，$t_0,t\in[a,b]$.

证明：(1) $W'[x_1,x_2]+a_1W[x_1,x_2]=0$

$\Leftrightarrow x_1x''_2-x''_1x_2+a_1x_1x'_2-a_1x'_1x_2=0$

$\Leftrightarrow x_1x''_2-x''_1x_2+a_1x_1x'_2-a_1x'_1x_2+a_2x_1x_2-a_2x_1x_2=0$

$\Leftrightarrow x_1(x''_2+a_1x'_2+a_2x_2)=0$

$\Leftrightarrow x''_2+a_1x'_2+a_2x_2=0(x_1\neq 0)$,

即 x_2 为 $(*)$ 的解.

(2) 因为 x_1,x_2 为方程的解，所以由刘维尔公式得

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x'_1 & x'_2 \end{vmatrix}=W(t_0)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)\mathrm{d}s},$$

即 $x_1x'_2-x'_1x_2=W(t_0)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)\mathrm{d}s}$.

两边都乘 $\frac{1}{x_1^2}$，则有 $\dfrac{\mathrm{d}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{W(t_0)}{x_1^2}\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)\mathrm{d}s}$.

于是 $\dfrac{x_2}{x_1}=c_1\displaystyle\int\frac{1}{x_1^2}\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t+c_2$,

即

$$x_2=\left[c_1\int\frac{1}{x_1^2}\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t+c_2\right]x_1.$$

取 $c_1=1,c_2=0$，得

$$x_2=x_1\int\frac{1}{x_1^2}\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t,$$

此时 $W(t)=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x'_1 & x'_2 \end{vmatrix}=\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)\mathrm{d}s}\neq 0$，从而方程的通解可表示为

$$x=x_1\left[c_3\int\frac{1}{x_1^2}\exp\left(-\int_{t_0}^{t}a_1(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t+c_4\right],$$

其中 c_3,c_4 为常数，$t_0,t\in[a,b]$.

7. 试证 n 阶非齐次线性微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)x=f(t)$ 存在且最多存在 $n+1$ 个线性无关解.

证明：设 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 为非齐次线性微分方程对应的齐次线性方程的一个基本解组，$\bar{x}(t)$ 是非齐次线性微分方程的一个解，则

$$x_1(t)+\overline{x}(t), x_2(t)+\overline{x}(t), \cdots, x_n(t)+\overline{x}(t), \overline{x}(t) \quad ①$$

均为非齐次线性微分方程的解.

同时 ① 是线性无关的.

事实上,假设存在常数 $c_1, c_2, \cdots, c_{n+1}$,使得

$$c_1(x_1(t)+\overline{x}(t))+c_2(x_2(t)+\overline{x}(t))+\cdots+c_n(x_n(t)+\overline{x}(t))+c_{n+1}(\overline{x}(t))=0,$$

即
$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t)+\overline{x}(t)\sum_{i=1}^{n+1} c_i=0.$$

我们说 $\sum_{i=1}^{n+1} c_i=0$. 否则,若 $\sum_{i=1}^{n+1} c_i \neq 0$,则有

$$\overline{x}(t)=-\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{\sum_{j=1}^{n+1} c_j} x_i(t). \quad (*)$$

(*)的左端为非齐次线性方程的解,而右端为齐次线性方程的解,两者矛盾.

从而有 $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t)=0$.

又 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 为非齐次线性微分方程对应的齐次线性方程的一个基本解组,故有 $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$,进而有 $c_{n+1}=0$.

即 ① 是线性无关的.

再证明非齐次线性微分方程最多存在 $n+1$ 个线性无关的解.

设 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_{n+2}(t)$ 为非齐次线性微分方程的任意 $n+2$ 个解,显然,$x_1(t)-x_{n+2}(t)$, $x_2(t)-x_{n+2}(t), \cdots, x_{n+1}(t)-x_{n+2}(t)$ 是齐次方程的 $n+1$ 个解.

由定理 5 及推论,这 $n+1$ 个解一定是线性相关的,即存在不全为零的数 $c_1, c_2, \cdots, c_{n+1}$,使得

$$c_1(x_1(t)-x_{n+2}(t))+c_2(x_2(t)-x_{n+2}(t))+\cdots+c_{n+1}(x_{n+1}(t)-x_{n+2}(t)) \equiv 0,$$

即 $c_1 x_1(t)+c_2 x_2(t)+\cdots+c_{n+1} x_{n+1}(t)-(c_1+c_2+\cdots+c_{n+1}) x_{n+2}(t) \equiv 0$.

所以这 $n+2$ 个解是线性相关的,即证明了最多有 $n+1$ 个线性无关的解.

习题 4.2

1. 证明命题 1 和命题 2.

证明: 命题 1 的证明如下:

已知 $x=z(t)=\varphi(t)+\mathrm{i}\psi(t)$ 是齐次线性微分方程的复值解,则有

$$z'(t)=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\varphi'(t)+\mathrm{i}\psi'(t), z''(t)=\varphi''(t)+\mathrm{i}\psi''(t), \cdots, z^{(n)}(t)=\varphi^{(n)}(t)+\mathrm{i}\psi^{(n)}(t).$$

因为 $z(t)=\varphi(t)+\mathrm{i}\psi(t)$ 是齐次方程的解,于是

$$z^{(n)}(t)+a_1(t)z^{(n-1)}(t)+\cdots+a_{n-1}z'(t)+a_n(t)z(t) \equiv 0,$$

即 $[\varphi^{(n)}(t)+a_1(t)\varphi^{(n-1)}(t)+\cdots+a_n(t)\varphi(t)]+\mathrm{i}[\psi^{(n)}(t)+a_1(t)\psi^{(n-1)}(t)+\cdots+a_n(t)\psi(t)] \equiv 0$.

所以
$$\varphi^{(n)}(t)+a_1(t)\varphi^{(n-1)}(t)+\cdots+a_n(t)\varphi(t) \equiv 0, \quad ①$$

$$\psi^{(n)}(t)+a_1(t)\psi^{(n-1)}(t)+\cdots+a_n(t)\psi(t) \equiv 0, \quad ②$$

从而有

$$(\varphi^{(n)}(t)-\mathrm{i}\psi^{(n)}(t))+a_1(t)(\varphi^{(n-1)}(t)-\mathrm{i}\psi^{(n-1)}(t))+\cdots+a_n(t)(\varphi(t)-\mathrm{i}\psi(t))\equiv 0. \qquad ③$$

①,②,③ 式即证明了 $z(t)$ 的实部 $\varphi(t)$,虚部 $\psi(t)$ 和共轭复值函数 $\bar{z}(t)$ 均是齐次方程的解.

命题 2 的证明如下:

由于 $x=U(t)+\mathrm{i}V(t)$,则

$$x'=U'(t)+\mathrm{i}V'(t),x''=U''(t)+\mathrm{i}V''(t),\cdots,x^{(n)}=U^{(n)}(t)+\mathrm{i}V^{(n)}(t).$$

于是由 $x=U(t)+\mathrm{i}V(t)$ 是方程

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)x=u(t)+\mathrm{i}v(t)$$

的复值解,得到

$$\left[\frac{\mathrm{d}^n U}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}U}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_n(t)U\right]+\mathrm{i}\left[\frac{\mathrm{d}^n V}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}V}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_n(t)V\right]\equiv u(t)+\mathrm{i}v(t).$$

由于两个复数相等的条件是实部与虚部分别相等,于是有

$$\frac{\mathrm{d}^n U}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}U}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_n(t)U=u(t),$$

$$\text{和}\frac{\mathrm{d}^n V}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}V}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_n(t)V=v(t),$$

这就证明了这个解的实部 $U(t)$ 和虚部 $V(t)$ 分别是方程

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)x=u(t),$$

$$\text{和}\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)x=v(t)$$

的解.

2. 求解下列常系数线性微分方程:

(1) $x^{(4)}-5x''+4x=0$;

(2) $x'''-3ax''+3a^2x'-a^3x=0$;

(3) $x^{(5)}-4x'''=0$;

(4) $x''+x'+x=0$;

(5) $s''-a^2s=t+1$;

(6) $x'''-4x''+5x'-2x=2t+3$;

(7) $x^{(4)}-2x''+x=t^2-3$;

(8) $x'''-x=\cos t$;

(9) $x''+x'-2x=8\sin 2t$;

(10) $x'''-x=\mathrm{e}^t$;

(11) $s''+2as'+a^2s=\mathrm{e}^t$;

(12) $x''+6x'+5x=\mathrm{e}^{2t}$;

(13) $x''-2x'+3x=\mathrm{e}^{-t}\cos t$;

(14) $x''+x=\sin t-\cos 2t$;

(15) $x''-4x'+4x=\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{2t}+1$;

(16) $x''+9x=t\sin 3t$;

(17) $x''-2x'+2x=t\mathrm{e}^t\cos t$;

(18) $x''+2x'+5x=4\mathrm{e}^{-t}+17\sin 2t$;

(19) $x''+x=\dfrac{1}{\sin^3 t}$;

(20) $x''+x=1-\dfrac{1}{\sin t}$.

解:(1) 微分方程的特征方程为 $\lambda^4-5\lambda^2+4=0$,有根 $\lambda_1=2,\lambda_2=-2,\lambda_3=1,\lambda_4=-1$.

故方程的通解为 $x=c_1\mathrm{e}^{2t}+c_2\mathrm{e}^{-2t}+c_3\mathrm{e}^t+c_4\mathrm{e}^{-t}$,其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数.

(2) 微分方程的特征方程为 $\lambda^3-3a\lambda^2+3a^2\lambda-a^3=0$,它有三重根 $\lambda=a$,因此方程的通解为 $x=$

$c_1e^{at}+c_2te^{at}+c_3t^2e^{at}$,其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数.

(3) 微分方程的特征方程为 $\lambda^5-4\lambda^3=0$,它有根 $\lambda_{1,2,3}=0,\lambda_4=2,\lambda_5=-2$.

因此方程的通解为 $x=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}+c_3t^2+c_4t+c_5$,其中 c_1,c_2,c_3,c_4,c_5 为任意常数.

(4) 微分方程的特征方程 $\lambda^2+\lambda+1=0$ 有复根 $\lambda_1=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\lambda_2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$.

故通解为 $x=c_1e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_2e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$,其中 c_1,c_2 为任意常数.

(5) 对应齐次微分方程的特征方程 $\lambda^2-a^2=0$ 有根 $\lambda_1=a,\lambda_2=-a$.

当 $a\neq 0$ 时,齐次线性微分方程的通解为 $s=c_1e^{at}+c_2e^{-at}$.

设方程有特解 $\bar{s}=A+Bt$,代入原方程解得 $A=B=-\frac{1}{a^2}$,故方程的通解为

$$s=c_1e^{at}+c_2e^{-at}-\frac{1}{a^2}(t+1).$$

当 $a=0$ 时,原方程可化为 $s''=t+1$,对方程积分两次,即得 $s=c_1+c_2t+\frac{1}{6}t^2(t+3)$,其中 c_1,c_2 为任意常数.

(6) 对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=0.$$

解得特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2$. 故齐次线性微分方程的通解为

$$x=c_1e^t+c_2te^t+c_3e^{2t}.$$

又因为 $\lambda=0$ 不是特征根,故可以取特解形如 $\bar{x}=A+Bt$,代入原方程解得 $A=-4,B=-1$,所以原方程的通解为 $x=c_1e^t+c_2te^t+c_3e^{2t}-t-4$,其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数.

(7) 对应齐次线性微分方程的特征方程为 $\lambda^4-2\lambda^2+1=0$,即得特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=\lambda_4=-1$. 故齐次线性微分方程的通解为 $x=c_1e^t+c_2te^t+c_3e^{-t}+c_4te^{-t}$.

取特解形如 $\bar{x}=At^2+Bt+C$,代入原方程解得 $A=1,B=0,C=1$.

于是原方程的通解为 $x=c_1e^t+c_2te^t+c_3e^{-t}+c_4te^{-t}+t^2+1$,其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数.

(8) 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^3-1=0$,解得特征根为

$$\lambda_1=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\lambda_2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2},\lambda_3=1.$$

故齐次线性微分方程的通解为 $x=c_1e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_2e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_3e^t$.

取特解形如 $\bar{x}=A\cos t+B\sin t$,代入原方程解得 $A=-\frac{1}{2},B=-\frac{1}{2}$.

故原方程的通解为

$$x=c_1e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_2e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_3e^t-\frac{1}{2}(\cos t+\sin t),$$

其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数.

(9) 对应齐次线性微分方程的特征方程为 $\lambda^2+\lambda-2=0$,有根 $\lambda_1=-2,\lambda_2=1$.

故齐次线性微分方程的通解为 $x = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$.

因为 $\pm 2i$ 不是特征根，则取特征解形如 $\bar{x} = A\cos 2t + B\sin 2t$，代入原方程解得 $A = -\frac{2}{5}$，$B = -\frac{6}{5}$.

故方程的通解为 $x = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} - \frac{2}{5}\cos 2t - \frac{6}{5}\sin 2t$，其中 c_1, c_2 为任意常数.

(10) 对应齐次线性微分方程的特征方程为 $\lambda^3 - 1 = 0$，它有根 $\lambda_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$\lambda_2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$，$\lambda_3 = 1$.

故齐次线性微分方程的通解为 $x = c_1 e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_2 e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_3 e^t$.

由于 $\lambda = 1$ 是特征方程的根，故方程有形如 $\bar{x} = Ate^t$ 的特解，代入原方程解得 $A = \frac{1}{3}$. 于是原方程的通解为

$$x = c_1 e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_2 e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_3 e^t + \frac{1}{3}te^t,$$

其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数.

(11) 对应齐次线性微分方程的特征方程为 $\lambda^2 + 2a\lambda + a^2 = 0$，有 2 重根 $\lambda = -a$.

当 $a = -1$ 时，齐次线性微分方程的通解为 $s = c_1 e^t + c_2 te^t$，$\lambda = 1$ 是特征方程的 2 重根，故方程有形如 $\bar{s} = At^2 e^t$ 的特解，代入原方程解得 $A = \frac{1}{2}$.

于是方程的通解为 $s = c_1 e^t + c_2 te^t + \frac{1}{2}t^2 e^t$.

当 $a \neq -1$ 时，齐次线性微分方程的通解为 $s = c_1 e^{-at} + c_2 te^{-at}$，$\lambda = 1$ 不是特征方程的根，故方程有形如 $\bar{s} = Ae^t$ 的特解，代入原方程解得 $A = \frac{1}{(a+1)^2}$. 故方程的通解为 $s = c_1 e^{-at} + c_2 te^{-at} + \frac{1}{(a+1)^2}e^t$，其中 c_1, c_2 为任意常数.

(12) 对应齐次线性微分方程的特征方程为 $\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$，它有根 $\lambda_1 = -1$，$\lambda_2 = -5$.

故齐次线性微分方程的通解为 $x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-5t}$.

由于 $\lambda = 2$ 不是特征方程的根，故方程有形如 $\bar{x} = Ae^{2t}$ 的特解，代入原方程解得 $A = \frac{1}{21}$. 于是方程的通解为 $x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-5t} + \frac{1}{21}e^{2t}$，其中 c_1, c_2 为任意常数.

(13) 对应齐次线性微分方程的特征方程为 $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$，即得特征根为 $\lambda_1 = 1+\sqrt{2}i$，$\lambda_2 = 1-\sqrt{2}i$.

故齐次线性微分方程的通解为 $x = c_1 e^t\cos\sqrt{2}t + c_2 e^t\sin\sqrt{2}t$.

由于 $-1 \pm i$ 不是特征方程的根，取特解形如 $\bar{x} = (A\cos t + B\sin t)e^{-t}$，代入原方程解得 $A = \frac{5}{41}$，$B = -\frac{4}{41}$. 故原方程的通解为

$$x = c_1 e^t \cos \sqrt{2}t + c_2 e^t \sin \sqrt{2}t + \left(\frac{5}{41}\cos t - \frac{4}{41}\sin t\right)e^{-t},$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

(14) 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2 + 1 = 0$，即特征根 $\lambda_1 = \mathrm{i}, \lambda_2 = -\mathrm{i}$，故齐次线性方程的通解为 $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$.

① 对于方程 $x'' + x = \sin t$，取特解形如 $\bar{x} = t(A\cos t + B\sin t)$，代入原方程解得 $A = -\frac{1}{2}, B = 0$，故 $\bar{x} = -\frac{1}{2}t\cos t$.

② 对于方程 $x'' + x = -\cos 2t$，取特解形如 $\bar{x} = A\cos 2t + B\sin 2t$，代入原方程解得 $A = \frac{1}{3}, B = 0$，故 $\bar{x} = \frac{1}{3}\cos 2t$.

故原方程的通解为 $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \frac{1}{2}t\cos t + \frac{1}{3}\cos 2t$，其中 c_1, c_2 为任意常数.

(15) 对应的齐次方程的特征方程为 $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$，即得特征根为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

① 对于方程 $x'' - 4x' + 4x = e^t$，可设其特解形如 $\bar{x} = Ae^t$，代入方程则得到 $A = 1$，即方程 $x'' - 4x' + 4x = e^t$ 的一个特解为 $\bar{x} = e^t$.

② 对于方程 $x'' - 4x' + 4x = e^{2t}$，可设其特解形如 $\bar{x} = Bt^2 e^{2t}$，代入方程则得到 $B = \frac{1}{2}$，即方程 $x'' - 4x' + 4x = e^{2t}$ 有一特解为 $\bar{x} = \frac{1}{2}t^2 e^{2t}$.

③ 对于方程 $x'' - 4x' + 4x = 1$，可设其特解形如 $\bar{x} = C$，代入方程则得到 $C = \frac{1}{4}$，即方程 $x'' - 4x' + 4x = 1$ 有一特解为 $\bar{x} = \frac{1}{4}$.

所以，原方程的通解为 $x = (c_1 + c_2 t)e^{2t} + e^t + \frac{1}{2}t^2 e^{2t} + \frac{1}{4}$，其中 c_1, c_2 为任意常数.

(16) 对应线性齐次方程的特征方程为 $\lambda^2 + 9 = 0$，即得特征根为 $\lambda_1 = 3\mathrm{i}, \lambda_2 = -3\mathrm{i}$.

设方程的一个特解为 $\bar{x} = t[(At + B)\cos 3t + (Et + F)\sin 3t]$，代入方程，得到

$$A = -\frac{1}{12}, F = \frac{1}{36}, B = E = 0.$$

即方程的一个特解为 $\bar{x} = -\frac{1}{12}t^2 \cos 3t + \frac{1}{36}t\sin 3t$.

于是方程的通解为 $x = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t - \frac{1}{12}t^2 \cos 3t + \frac{1}{36}t\sin 3t$，其中 c_1, c_2 是任意常数.

(17) 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$，即得特征根为 $\lambda_1 = 1 + \mathrm{i}, \lambda_2 = 1 - \mathrm{i}$，先求方程 $x'' - 2x' + 2x = te^{(1+\mathrm{i})t}$ 的特解.

设其特解为 $\bar{x} = t(At + B)e^{(1+\mathrm{i})t}$，将它代入方程并消去因子 $e^{(1+\mathrm{i})t}$，得到 $A = -\frac{\mathrm{i}}{4}, B = \frac{1}{4}$，

于是方程 $x'' - 2x' + 2x = te^{(1+\mathrm{i})t}$ 的一个特解为 $\bar{x} = -\frac{\mathrm{i}}{4}(t^2 + t\mathrm{i})e^{(1+\mathrm{i})t}$.

分出它的实部 $\mathrm{Re}\{\bar{x}\}=\frac{1}{4}(t^2\sin t+t\cos t)e^t$,根据命题 2 可知其为原方程的一个特解.

于是,原方程的通解为 $x=(c_1\cos t+c_2\sin t)e^t+\frac{1}{4}te^t(\cos t+t\sin t)$,其中 c_1,c_2 为任意常数.

(18) 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+5=0$,即得特征根为 $\lambda_1=-1+2i,\lambda_2=-1-2i$.

① 首先求方程 $x''+2x'+5x=4e^{-t}$ 的一个特解.

设其特解为 $x_1=Ae^{-t}$,代入方程则得 $A=1$,即方程 $x''+2x'+5x=4e^{-t}$ 的一个特解为 $x_1=e^{-t}$.

② 再求方程 $x''+2x'+5x=17\sin 2t$ 的一个特解.

设其特解为 $x_2=B\cos 2t+D\sin 2t$,代入方程求得 $B=-4,D=1$.

即方程 $x''+2x'+5x=17\sin 2t$ 的一个特解为 $x_2=-4\cos 2t+\sin 2t$.

所以,原方程的通解为 $x=e^{-t}(c_1\cos 2t+c_2\sin 2t)+e^{-t}-4\cos 2t+\sin 2t$,其中 c_1,c_2 为任意常数.

(19) 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+1=0$,即得特征根为 $\lambda_1=i,\lambda_2=-i$.

现用常数变易法求已知方程形如 $x_1=c_1(t)\cos t+c_2(t)\sin t$ 的一个特解.

可得关于 $c'_1(t),c'_2(t)$ 的方程组

$$\begin{cases}\cos t\cdot c'_1(t)+\sin t\cdot c'_2(t)=0,\\-\sin t\cdot c'_1(t)+\cos t\cdot c'_2(t)=\dfrac{1}{\sin^3 t}.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}c'_1(t)=-\dfrac{1}{\sin^2 t},\\c'_2(t)=\dfrac{\cos t}{\sin^3 t},\end{cases}$$

积分得

$$\begin{cases}c_1(t)=\cot t+\gamma_1=\dfrac{\cos t}{\sin t}+\gamma_1,\\c_2(t)=-\dfrac{1}{2\sin^2 t}+\gamma_2.\end{cases}$$

于是所求的通解为 $x=c_1\cos t+c_2\sin t+\frac{1}{2\sin t}$,其中 c_1,c_2 为任意常数.

(20) 由于 $x''+x=0$ 的通解为 $x=c_1\cos t+c_2\sin t$,现利用常数变易法,求已知方程形如 $x_1=c_1(t)\cos t+c_2(t)\sin t$ 的一个特解,可得关于 $c'_1(t),c'_2(t)$ 的方程组

$$\begin{cases}\cos t\cdot c'_1(t)+\sin t\cdot c'_2(t)=0,\\-\sin t\cdot c'_1(t)+\cos t\cdot c'_2(t)=1-\dfrac{1}{\sin t},\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}c'_1(t)=1-\sin t,\\c'_2(t)=\cos t-\cot t,\end{cases}$$

积分得

$$\begin{cases}c_1(t)=t+\cos t+c_1,\\c_2(t)=\sin t-\ln|\sin t|+c_2.\end{cases}$$

故原方程的通解为

$$x = c_1\cos t + c_2\sin t + 1 + t\cos t - \sin t \cdot \ln|\sin t|,$$

这里 c_1, c_2 为任意常数.

3. 设 $\varphi(t)$ 是方程 $x'' + k^2 x = f(t)$ 的解,其中 k 为常数,函数 $f(t)$ 于 $0 \leqslant t < +\infty$ 上连续,试证:

(1) 当 $k \neq 0$ 时,能够选择常数 c_1, c_2 的值,使得

$$\varphi(t) = c_1\cos kt + \frac{c_2}{k}\sin kt + \frac{1}{k}\int_0^t \sin k(t-s) \cdot f(s)\mathrm{d}s \quad (0 \leqslant t < +\infty);$$

(2) 当 $k = 0$ 时,方程的通解可表为

$$x = c_1 + c_2 t + \int_0^t (t-s)f(s)\mathrm{d}s \quad (0 \leqslant t < +\infty),$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

证明: 方程为二阶线性非齐次微分方程,特征方程为 $\lambda^2 + k^2 = 0$,当 $k \neq 0$ 时,特征根为 $\lambda = \pm k\mathrm{i}$,当 $k = 0$ 时特征根为二重根 $\lambda = 0$.

(1) 当 $k \neq 0$ 时,齐次方程有通解 $x(t) = c_1\cos kt + c_2\sin kt$.

运用常数变易法,设 $x(t) = c_1(t)\cos kt + c_2(t)\sin kt$. 可得

$$\begin{cases} c'_1(t)\cos kt + c'_2(t)\sin kt = 0, \\ -kc'_1(t)\sin kt + kc'_2(t)\cos kt = f(t). \end{cases}$$

解出 $c'_1(t), c'_2(t)$ 后积分得

$$\begin{cases} c_1(t) = -\dfrac{1}{k}\displaystyle\int_0^t \sin ks \cdot f(s)\mathrm{d}s + \gamma_1, \\ c_2(t) = \dfrac{1}{k}\displaystyle\int_0^t \cos ks \cdot f(s)\mathrm{d}s + \gamma_2. \end{cases}$$

即非齐次线性微分方程的通解为

$$\begin{aligned} x(t) &= \gamma_1\cos kt + \gamma_2\sin kt + \frac{1}{k}\int_0^t (-\cos kt \cdot \sin ks + \sin kt \cdot \cos ks)f(s)\mathrm{d}s \\ &= \gamma_1\cos kt + \gamma_2\sin kt + \frac{1}{k}\int_0^t \sin k(t-s) \cdot f(s)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

若令 $\gamma_1 = c_1, \gamma_2 = \dfrac{c_2}{k}$,则得

$$\varphi(t) = c_1\cos kt + \frac{c_2}{k}\sin kt + \frac{1}{k}\int_0^t \sin k(t-s) \cdot f(s)\mathrm{d}s (0 \leqslant t < +\infty).$$

(2) 当 $k = 0$ 时,齐次方程有通解 $x(t) = c_1 + c_2 t$.

同样运用常数变易法,设非齐次方程 $x'' = f(t)$ 的一个特解为

$$\bar{x} = c_1(t) + c_2(t) \cdot t,$$

代入方程,则得关于 $c'_1(t)$ 和 $c'_2(t)$ 的方程组

$$\begin{cases} c'_1(t) + tc'_2(t) = 0, \\ c'_2(t) = f(t), \end{cases}$$

解得

$$c'_1(t) = -tf(t), c_1(t) = -\int_0^t sf(s)\mathrm{d}s, c'_2(t) = f(t), c_2(t) = \int_0^t f(s)\mathrm{d}s,$$

所以原方程的通解为

$$x(t)=c_1+c_2t-\int_0^t sf(s)\mathrm{d}s+t\int_0^t f(s)\mathrm{d}s$$

$$=c_1+c_2t+\int_0^t (t-s)f(s)\mathrm{d}s(0\leqslant t<+\infty),$$

其中 c_1,c_2 为任意常数.

4. 给定方程 $x'''+5x''+6x'=f(t)$，其中 $f(t)$ 在 $-\infty<t<\infty$ 上连续，设 $\varphi_1(t),\varphi_2(t)$ 是上述方程的两个解，证明极限 $\lim\limits_{t\to\infty}[\varphi_1(t)-\varphi_2(t)]$ 存在.

证明：齐次方程 $x'''+5x''+6x'=0$ 的特征方程为 $\lambda^3+5\lambda^2+6\lambda=0$，解得特征根为 $\lambda_1=0,\lambda_2=-2$，$\lambda_3=-3$.

所以齐次方程的通解为 $x=c_1+c_2\mathrm{e}^{-2t}+c_3\mathrm{e}^{-3t}$.

因为 $\varphi_1(t),\varphi_2(t)$ 是非齐次方程的两个解，知 $\varphi_1(t)-\varphi_2(t)$ 是对应齐次方程的解，也就是说存在适当的常数 c_1,c_2,c_3，使得

$$\varphi_1(t)-\varphi_2(t)=c_1+c_2\mathrm{e}^{-2t}+c_3\mathrm{e}^{-3t}.$$

从而 $\lim\limits_{t\to\infty}[\varphi_1(t)-\varphi_2(t)]=\lim\limits_{t\to\infty}[c_1+c_2\mathrm{e}^{-2t}+c_3\mathrm{e}^{-3t}]=c_1$.

故 $\lim\limits_{t\to\infty}[\varphi_1(t)-\varphi_2(t)]$ 存在.

5. 形式为 $x^n\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}+a_1x^{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_ny=0$ 的方程称为欧拉方程，这里 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为常数. 引进自变量的变换 $x=\mathrm{e}^t,t=\ln x$，可将之化为常系数线性方程，试证明之，并求解方程

(1) $t^2x''+tx'-x=0$； (2) $t^2x''-4tx'+6x=t$.

证明：对欧拉方程

$$x^n\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}+a_1x^{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_ny=0, \quad ①$$

引入自变量变换，令 $x=\mathrm{e}^t$，则 $t=\ln x$，则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)=\mathrm{e}^{-2t}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right),$$

假设对自然数 $k-1$，

$$\frac{\mathrm{d}^{k-1}y}{\mathrm{d}x^{k-1}}=\mathrm{e}^{-(k-1)t}\left(\frac{\mathrm{d}^{k-1}y}{\mathrm{d}t^{k-1}}+\alpha_1\frac{\mathrm{d}^{k-2}y}{\mathrm{d}t^{k-2}}+\cdots+\alpha_{k-2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right),$$

则有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^ky}{\mathrm{d}x^k}&=\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{-(k-1)t}\left(\frac{\mathrm{d}^{k-1}y}{\mathrm{d}t^{k-1}}+\alpha_1\frac{\mathrm{d}^{k-2}y}{\mathrm{d}t^{k-2}}+\cdots+\alpha_{k-2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\right]\\&=\mathrm{e}^{-kt}\left(\frac{\mathrm{d}^ky}{\mathrm{d}t^k}+\beta_1\frac{\mathrm{d}^{k-1}y}{\mathrm{d}t^{k-1}}+\cdots+\beta_{k-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right),\end{aligned} \quad ②$$

其中 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{k-1}$ 为常数.

由数学归纳法可知，② 式对任意自然数 k 成立.

于是对任意自然数 k 有

$$x^k \frac{d^k y}{dt^k} = \frac{d^k y}{dt^k} + \beta_1 \frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}} + \cdots + \beta_{k-1} \frac{dy}{dt}.$$

将上述关系式代入方程 ①,则得到常系数齐次线性微分方程

$$\frac{d^n y}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + b_{n-1} \frac{dy}{dt} + b_n y = 0.$$

其中 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为常数.

(1) 设 $x = t^k$,代入方程,得到关于 k 的方程 $k(k-1)+k-1=0$,即 $k^2-1=0$.

因此 $k_1 = 1, k_2 = -1$,从而方程的通解为 $x = c_1 t + c_2 \dfrac{1}{t}$,其中 c_1, c_2 为任意常数.

(2) 先求方程 $t^2 x'' - 4tx' + 6x = 0$ 的通解,设 $x = t^k$,代入方程则得到关于 k 的方程 $k(k-1) - 4k + 6 = 0$. 即 $(k-2)(k-3) = 0$,因此 $k_1 = 2, k_2 = 3$.

故方程 $t^2 x'' - 4tx' + 6x = 0$ 的通解为 $x = c_1 t^2 + c_2 t^3$.

故利用常数变易法,求已知方程形如 $x_1 = c_1(t) \cdot t^2 + c_2(t) \cdot t^3$ 的一个特解,可得关于 $c'_1(t)$, $c'_2(t)$ 的方程组

$$\begin{cases} t^2 c'_1(t) + t^3 c'_2(t) = 0, \\ 2tc'_1(t) + 3t^2 c'_2(t) = \dfrac{1}{t}, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} c'_1(t) = -\dfrac{1}{t^2}, \\ c'_2(t) = \dfrac{1}{t^3}, \end{cases}$$

积分得 $c_1(t) = \dfrac{1}{t} + c_1, c_2(t) = -\dfrac{1}{2t^2} + c_2$,故方程的通解为 $x = c_1 t^2 + c_2 t^3 + \dfrac{1}{2} t$.

方法点击:本题中两个方程所对应的齐次方程均为欧拉方程,先由欧拉方程的求解方法求出其对应的齐次方程的通解,再由常数变易法求其本身的一个特解,就可以得到所求方程的通解.

习题 4.3

1. 求解下列方程:

(1) $x'' = \dfrac{1}{2x'}\left(这里\ x' = \dfrac{dx}{dt}, x'' = \dfrac{d^2 x}{dt^2},以下同\right)$;

(2) $xx'' - (x')^2 + (x')^3 = 0$;

(3) $x'' + \dfrac{2}{1-x}(x')^2 = 0$;

(4) $x'' + \sqrt{1-(x')^2} = 0$;

(5) $ax''+[1+(x')^2]^{\frac{3}{2}}=0$(常数 $a\neq 0$);

(6) $x''-\frac{1}{t}x'+(x')^2=0$(提示:方程两端除以 x').

解:(1) 方程不显含 t,x,令 $y=x'$,则方程变形为 $y'=\frac{1}{2y}$,分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2y},2y\mathrm{d}y=\mathrm{d}t,y^2=t+c_1,y=\pm(t+c_1)^{\frac{1}{2}}.$$

于是 $x'=y=\pm(t+c_1)^{\frac{1}{2}}$,积分得

$$x+c_2=\pm\int_0^t(s+c_1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s=\pm\frac{2}{3}(t+c_1)^{\frac{3}{2}},$$

即 $9(x+c_2)^2=4(t+c_1)^3$.

从而方程的解为 $9(x+c_2)^2=4(t+c_1)^3$,其中 c_1,c_2 为任意常数.

(2) 方程不显含 t,令 $y=x'$,则方程变形为 $xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y^2+y^3=0$,得到 $y=0$ 或 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y-y^2}{x}$,

积分后得 $\frac{y}{1-y}=\bar{c}x(\bar{c}\neq 0)$,即 $y=\frac{\bar{c}x}{1+\bar{c}x}$,从而 $x'=\frac{\bar{c}x}{1+\bar{c}x}$.

积分得 $x+\frac{1}{\bar{c}}\ln|x|=t+c_2$.

即方程有解 $x+c_1\ln|x|=t+c_2$.

当 $y=0$ 时得 $x'=0$,故 $x=c$.

综上,方程的解为 $x+c_1\ln|x|=t+c_2$ 或 $x=c$,其中 c_1,c_2,c 是任意常数.

(3) 方程不显含 t,令 $y=x'$,则方程可化为 $y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{2}{1-x}y^2=0$.

解得 $y=0$ 或 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2y}{x-1}$.

① 当 $y=0$ 时,即 $x'=0$,得到 $x=c$,c 为任意常数.

② 当 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2y}{x-1}$ 且 $y\neq 0$ 时,积分可得 $y=\bar{c}_1(x-1)^2$,即 $x'=\bar{c}_1(x-1)^2$,再次积分得 $\frac{1}{x-1}=c_1t+c_2$,即 $(x-1)(c_1t+c_2)=1$.

注意到当取 $\bar{c}_1=0$ 时 $y=0$,所以第②种情况包括第①种情况.因此,原方程的解为 $(x-1)(c_1t+c_2)=1$,其中 c_1,c_2 为任意常数.

(4) 方程不显含 t,x,令 $y=x'$,则方程化为 $y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\sqrt{1-y^2}=0$.

当 $y\neq\pm 1$ 时,方程又可以变形为 $\frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=-\mathrm{d}x$,积分后得到 $\sqrt{1-y^2}=x+c$,

即 $\sqrt{1-x'^2}=x+c$,故 $x'=\pm\sqrt{1-(x+c)^2}$,再次积分得

① 当 $x'=\sqrt{1-(x+c)^2}$ 时,$x=\sin(t+c_1)+c_2$;

② 当 $x'=-\sqrt{1-(x+c)^2}$ 时,$x=\cos(t+c_1)+c_2$.

当 $y=\pm 1$ 时,$x'=\pm 1$,从而 $x=\pm t+c$.

综上所述,原方程的解为 $x=\sin(t+c_1)+c_2$ 或 $x=\cos(t+c_1)+c_2$,以及 $x=\pm t+c$,其中 c_1,

c_2, c 为任意常数.

(5) 方程不显含 t, x.

令 $y = x'$,则方程可化为 $ay\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (1+y^2)^{\frac{3}{2}} = 0$,即$\frac{ay\mathrm{d}y}{(1+y^2)^{3/2}} = -\mathrm{d}x$.

积分后得 $a(1+y^2)^{-\frac{1}{2}} = x + c_1$,从而有

$$x' = y = \pm\sqrt{\left(\frac{a}{x+c_1}\right)^2 - 1},$$

积分后可得

$$\sqrt{a^2 - (x+c_1)^2} = \pm(t+c_2),$$

即$(x+c_1)^2 + (t+c_2)^2 = a^2$,其中 c_1, c_2 为任意常数.

(6) 当 $x' \neq 0$ 时,方程两边同除以 x',则得到$\frac{x''}{x'} - \frac{1}{t} + x' = 0$,即

$$\mathrm{d}(\ln|x'| - \ln|t| + x) = 0,$$

积分可得 $\ln\left|\frac{x'}{t}\right| + x = c_1$,解出 x',则有 $x' = t(\mathrm{e}^{-x+c_1})$,再次积分可得 $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{c_1}\left(\frac{t^2}{2}\right) + c_2$.

由于 c_1, c_2 为任意常数,所以可以写为 $\mathrm{e}^x = c'_1(t^2 + c'_2)$.

当 $x' = 0$ 时,即得 $x = c$,显然它也是原方程的解.

综上,方程的解为 $\mathrm{e}^x = c'_1(t^2 + c'_2)$ 或 $x = c$.

2. 用幂级数解法求解下列方程:

(1) $x'' + tx' + x = 0, x(0) = 0, x'(0) = 1$;

(2) $(1-t)x'' + x = 0$;

(3) $x'' - tx' - x = 0$.

解:(1) 由于方程中 $p(t) = t, q(t) = 1$,故存在幂级数解.

设 $x = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n + \cdots$ 是方程的解,利用初值条件,可以得到$a_0 = 0, a_1 = 1$,因而

$$x = t + a_2t^2 + a_3t^3 + \cdots + a_nt^n + \cdots,$$
$$x' = 1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + \cdots + na_nt^{n-1} + \cdots,$$
$$x'' = 2a_2 + 3\cdot 2a_3t + \cdots + n\cdot(n-1)a_nt^{n-2} + \cdots.$$

将 x, x', x'' 的表达式代入原方程,比较同次幂系数,可得

$$a_2 = 0, a_3 = -\frac{1}{3}, a_4 = 0, a_5 = \frac{1}{15}, \cdots, a_n = -\frac{a_{n-2}}{n}, \cdots,$$

因而,$a_6 = 0, a_7 = (-1)^3\cdot\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}, a_8 = 0, \cdots,$

最后得到 $a_{2k} = 0, a_{2k+1} = (-1)^k\cdot\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)}$ 对一切正整数 k 成立.

于是原方程有幂级数解

$$x = t - \frac{t^3}{1\cdot 3} + \frac{t^5}{1\cdot 3\cdot 5} - \frac{t^7}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \cdots + (-1)^n\cdot\frac{t^{2n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)} + \cdots.$$

(2) 方程可化为 $x''+\frac{x}{1-t}=0$,因 $tp(t)=0,t^2q(t)=\frac{t^2}{1-t}$,故存在幂级数解.

设 $x=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+\cdots+a_nt^n+\cdots$ 是方程的解,则

$$x'=a_1+2a_2t+3a_3t^2+\cdots+na_nt^{n-1}+\cdots,$$

$$x''=2a_2+3\cdot 2a_3t+\cdots+n(n-1)a_nt^{n-2}+\cdots.$$

将 x,x',x'' 的表达式代入原方程,比较同次幂系数,可得

$$2a_2+a_0=0,3\cdot 2a_3-2a_2+a_1=0,$$

$$k(k-1)a_k-(k-1)(k-2)a_{k-1}+a_{k-2}=0,k>3. \quad ①$$

本方程的解应该为通解,为此,需要找到两个线性无关的解.

设 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是满足初值条件 $x_1(0)=0,x'_1(0)=1,x_2(0)=1,x'_2(0)=0$ 的两个解.

对于 $x_1(t)$,显然有 $a_0=0,a_1=1$,代入 ① 式,可得

$$a_2=0,a_3=\frac{-1}{1\cdot 2\cdot 3},a_4=\frac{-1}{3\cdot 4}=\frac{-2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},a_5=\frac{-5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5},\cdots$$

$$a_n=\frac{(n-1)(n-2)a_{n-1}-a_{n-2}}{n(n-1)},$$

也就是 $x_1(t)=t-\frac{t^3}{3!}-\frac{2}{4!}t^4-\frac{5}{5!}t^5-\frac{18}{6!}t^6-\cdots,$

对于 $x_2(t)$,显然有 $a_0=1,a_1=0$,代入 ① 式可得

$$a_2=-\frac{1}{2},a_3=\frac{-1}{1\cdot 2\cdot 3},a_4=\frac{-1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},\cdots,$$

$$a_n=\frac{(n-1)(n-2)a_{n-1}-a_{n-2}}{n(n-1)},$$

也就是 $x_2(t)=1-\frac{1}{2!}t^2-\frac{1}{3!}t^3-\frac{1}{4!}t^4-\cdots$,所以方程的通解为

$$\begin{aligned}x&=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)\\&=c_1\left(t-\frac{1}{3!}t^3-\frac{2}{4!}t^4-\frac{5}{5!}t^5-\frac{18}{6!}t^6-\cdots\right)+c_2\left(1-\frac{1}{2!}t^2-\frac{1}{3!}t^3-\frac{1}{4!}t^4-\cdots\right).\end{aligned}$$

(3) 由于 $p(t)=-t,q(t)=-1$,故存在幂级数解.

设 $x=a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n+\cdots$ 是方程的幂级数解,将 x,x',x'' 的表达式代入方程,比较同次幂系数,可得

$$2a_2-a_0=0,6a_3-2a_1=0,k(k-1)a_k-(k-1)a_{k-2}=0,k>3.$$

即 $a_2=\frac{a_0}{2},a_3=\frac{a_1}{3},a_k=\frac{a_{k-2}}{k},k>3.$

设初值条件 $x(0)=a_0=c_1,x'(0)=a_1=c_2$,有

$$a_0=c_1,a_1=c_2,a_2=\frac{c_1}{2},a_3=\frac{c_2}{3},a_4=\frac{c_1}{2\cdot 4},a_5=\frac{c_2}{3\cdot 5},\cdots,$$

$$a_{2k}=\frac{c_1}{2\cdot 4\cdots(2k)},a_{2k+1}=\frac{c_2}{3\cdot 5\cdots(2k+1)},\cdots.$$

于是有幂级数解

$$x=c_1\left(1+\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{2\cdot 4}+\frac{t^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots\right)+c_2\left(t+\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{3\cdot 5}+\frac{t^7}{3\cdot 5\cdot 7}+\cdots\right).$$

3. 求解贝塞尔方程

$$t^2x''+tx'+\left(t^2-\frac{1}{4}\right)x=0.$$

$\left[提示:\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.\right]$

解:方程为 $n=\frac{1}{2}$ 的贝塞尔方程 $t^2x''+tx'+(t^2-n^2)x=0$,有通解

$$y=c_1J_{\frac{1}{2}}(t)+c_2J_{-\frac{1}{2}}(t).$$

由 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ 及 $\sin t=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}t^{2k+1}$ 可得

$$J_{\frac{1}{2}}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}+k+1\right)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 2^{-k}}{k!\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)}t^{2k+1}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\sin t.$$

同样,由 $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ 及 $\cos t=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}t^{2k}$ 可得

$$J_{-\frac{1}{2}}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma\left(1-\frac{1}{2}+k\right)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 2^{-k}}{k!1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}t^{2k}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos t.$$

所以此贝塞尔方程的通解为

$$x=c_1J_{\frac{1}{2}}(t)+c_2J_{-\frac{1}{2}}(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}(c_1\sin t+c_2\cos t),$$

其中 c_1,c_2 为任意常数.

4. 一个物体在大气中降落,初速度为零,空气阻力与速度的平方成正比例,求该物体的运动规律.

解:以 m,x 分别表示物体的质量和降落的距离,则物体的下降速度为 x',加速度为 x'',按牛顿第二定律,物体降落时的运动方程可写为

$$mx''=mg-k(x')^2,x(0)=0,x'(0)=0,$$

其中 g 为重力加速度,$k>0$ 为比例常数.

若令 $v=x'$,则方程可化为 $mv'=mg-kv^2$,记 $a=\sqrt{\frac{mg}{k}},b=\sqrt{\frac{kg}{m}}$,积分求解

$$\frac{m\mathrm{d}v}{mg-kv^2}=\frac{m\mathrm{d}v}{k(a^2-v^2)}=\mathrm{d}t,\frac{m}{2ka}\ln\left|\frac{a+v}{a-v}\right|=\frac{1}{2b}\ln\left|\frac{a+v}{a-v}\right|=t+\tilde{c}.$$

即 $\frac{a+v}{a-v}=ce^{2bt},v=\frac{a(ce^{2bt}-1)}{1+ce^{2bt}}$.

利用初值条件 $v(0)=x'(0)=0$ 得 $c=1$,即有 $x'=v=\frac{a(\mathrm{e}^{2bt}-1)}{1+\mathrm{e}^{2bt}}$.

积分得 $x=\frac{a}{b}\ln\frac{1+\mathrm{e}^{2bt}}{2\mathrm{e}^{bt}}+\tilde{c}$.

再利用初值条件 $x(0)=0$ 得 $\tilde{c}=0$,从而该物体的运动规律为

$$x=\frac{m}{k}\ln\frac{1+e^{2bt}}{2e^{bt}}=\frac{m}{k}\ln\left[\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right)\right].$$

5. 试证:对于二阶齐次线性微分方程

$$x''+p(t)x'+q(t)x=0,$$

其中 $p(t),q(t)$ 为连续函数,

(1) 若 $p(t)\equiv -tq(t)$,则 $x=t$ 是方程的解;

(2) 若存在常数 m 使得 $m^2+mp(t)+q(t)\equiv 0$,则方程有解 $x=e^{mt}$;

(3) 若 $x_1(t),x_2(t)$ 是方程的两个线性无关的解,则方程的系数 $p(t),q(t)$ 由 $x_1(t),x_2(t)$ 唯一确定,且 $x_1(t),x_2(t)$ 没有共同的零点.

证明:(1) 当 $p(t)\equiv -tq(t)$ 时,方程可化为 $x''-tq(t)x'+q(t)x=0$,将 $x=t$ 代入方程得

$$x''-tq(t)x'+q(t)x=0-tq(t)+q(t)t\equiv 0,$$

即 $x=t$ 是方程的解.

(2) 将 $x=e^{mt}$ 代入方程得

$$x''+p(t)x'+q(t)x=m^2e^{mt}+mp(t)e^{mt}+q(t)e^{mt}=e^{mt}[m^2+mp(t)+q(t)]\equiv 0,$$

故 $x=e^{mt}$ 是方程的解.

(3) 由于 $x_1(t),x_2(t)$ 是方程的两个线性无关的解,故 $W[x_1,x_2]\neq 0$ 且

$$\begin{cases}x''_1(t)+p(t)x'_1(t)+q(t)x_1(t)=0,\\ x''_2(t)+p(t)x'_2(t)+q(t)x_2(t)=0.\end{cases}$$

上述方程组是关于 $p(t),q(t)$ 的二元一次代数方程组,由克莱姆法则得

$$p(t)=\frac{\begin{vmatrix}-x''_1 & x_1\\ -x''_2 & x_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x'_1 & x_1\\ x'_2 & x_2\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}x''_1 & x_1\\ x''_2 & x_2\end{vmatrix}}{W[x_1,x_2]},\quad q(t)=\frac{\begin{vmatrix}x'_1 & -x''_1\\ x'_2 & -x''_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x'_1 & x_1\\ x'_2 & x_2\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}x'_1 & x''_1\\ x'_2 & x''_2\end{vmatrix}}{W[x_1,x_2]}.$$

即方程的系数 $p(t),q(t)$ 由 $x_1(t),x_2(t)$ 唯一确定.

若存在 x_1,x_2 的共同零点 $\tilde{t}$,即 $x_1(\tilde{t})=x_2(\tilde{t})=0$,则 $W[x_1(\tilde{t}),x_2(\tilde{t})]=0$. 这与 x_1,x_2 线性无关矛盾. 故 $x_1(t),x_2(t)$ 没有共同的零点.

6. 求解方程 $tx''-2(1+t)x'+(2+t)x=0(t\neq 0)$.

解:方程可化为 $x''-2\left(1+\frac{1}{t}\right)x'+\left(1+\frac{2}{t}\right)x=0$.

易知有特解 $x_1=e^t$. 由二阶齐次方程的通解公式可得

$$x=x_1\left(c_1+c\int\frac{1}{x_1^2}e^{-\int p(t)dt}dt\right)=e^t\left[c_1+c\int e^{-2t}e^{\int 2\left(1+\frac{1}{t}\right)dt}dt\right]$$

$$=e^t\left(c_1+c\int t^2dt\right)=e^t(c_1+c_2t^3).$$

所以所求的通解为 $x=e^t(c_1+c_2t^3)$,其中 c_1,c_2 为任意常数.

7. 假设 $\varphi(t,c_1,c_2,\cdots,c_{n-k})$ 是方程 $F(t,y,y',\cdots,y^{(n-k)})=0$ 的通解,而函数 $\psi(t,c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 是 $x^{(k)}=\varphi(t,c_1,c_2,\cdots,c_{n-k})$ 的通解,试证 $\psi(t,c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 就是方程 $F(t,x^{(k)},x^{(k+1)},\cdots,x^{(n)})=0(1\leqslant$

$k \leqslant n$) 的通解,这里 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-k}, \cdots, c_n$ 为任意常数.

证明:因为 $\varphi(t, c_1, c_2, \cdots, c_{n-k})$ 是方程 $F(t, y, y', \cdots, y^{(n-k)}) = 0$ 的通解,所以有 $F(t, \varphi, \varphi', \cdots, \varphi^{(n-k)}) \equiv 0$,且 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-k}$ 是彼此独立的常数.

而函数 $\psi(t, c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是 $x^{(k)} = \varphi(t, c_1, c_2, \cdots, c_{n-k})$ 的通解,即

$$\psi^{(k)}(t, c_1, c_2, \cdots, c_n) \equiv \varphi(t, c_1, c_2, \cdots, c_{n-k}).$$

于是

$$\psi(t, c_1, c_2, \cdots, c_n) \equiv \int \cdots \int \varphi(t, c_1, c_2, \cdots, c_{n-k}) \mathrm{d}t \cdots \mathrm{d}t + c_{n-k+1} t^{k-1} + c_{n-k+2} t^{k-2} + \cdots + c_n,$$

其中 $c_{n-k+1}, c_{n-k+2}, \cdots, c_n$ 是彼此独立的常数.

将 $x = \psi(t, c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 代入 $F(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \cdots, x^{(n)}) = 0$ 中有

$$F(t, \psi^{(k)}, \psi^{(k+1)}, \cdots, \psi^{(n)}) \equiv F(t, \varphi, \varphi', \cdots, \varphi^{(n-k)}) \equiv 0,$$

即 $\psi(t, c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是该方程的解,且因 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-k}$ 彼此独立,即有

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \psi^{(k)}}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial \psi^{(k)}}{\partial c_{n-k}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \psi^{(n-1)}}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial \psi^{(n-1)}}{\partial c_{n-k}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi}{\partial c_{n-k}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi^{(n-k-1)}}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi^{(n-k-1)}}{\partial c_{n-k}} \end{vmatrix} \neq 0,$$

于是

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \psi}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial \psi}{\partial c_{n-k}} & \dfrac{\partial \psi}{\partial c_{n-k+1}} & \cdots & \dfrac{\partial \psi}{\partial c_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \psi^{(k-1)}}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial \psi^{(k-1)}}{\partial c_{n-k}} & \dfrac{\partial \psi^{(k-1)}}{\partial c_{n-k+1}} & \cdots & \dfrac{\partial \psi^{(k-1)}}{\partial c_n} \\ \dfrac{\partial \psi^{(k)}}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial \psi^{(k)}}{\partial c_{n-k}} & \dfrac{\partial \psi^{(k)}}{\partial c_{n-k+1}} & \cdots & \dfrac{\partial \psi^{(k)}}{\partial c_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \psi^{(n-1)}}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial \psi^{(n-1)}}{\partial c_{n-k}} & \dfrac{\partial \psi^{(n-1)}}{\partial c_{n-k+1}} & \cdots & \dfrac{\partial \psi^{(n-1)}}{\partial c_n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \psi}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial \psi}{\partial c_{n-k}} & t^{k-1} & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \psi^{(k-1)}}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial \psi^{(k-1)}}{\partial c_{n-k}} & (k-1)! & \cdots & 0 \\ \dfrac{\partial \psi^{(k)}}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial \psi^{(k)}}{\partial c_{n-k}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \psi^{(n-1)}}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial \psi^{(n-1)}}{\partial c_{n-k}} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^m \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi}{\partial c_{n-k}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi^{(n-k-1)}}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi^{(n-k-1)}}{\partial c_{n-k}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} t^{k-1} & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ (k-1)! & \cdots & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

其中 $m = 1 + 2 + \cdots + k + (n-k+1) + \cdots + n$.

即常数 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-k},\cdots,c_n$ 彼此独立,所以 $\psi(t,c_1,\cdots,c_n)$ 是方程 $F(t,x^{(k)},x^{(k+1)},\cdots,x^{(n)})=0$ 的通解.

第五章　线性微分方程组

习题 5.1

1. 给定方程组

$$\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}. \tag{$*$}$$

(1) 试验证 $\boldsymbol{u}(t)=\begin{bmatrix}\cos t\\-\sin t\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{v}(t)=\begin{bmatrix}\sin t\\\cos t\end{bmatrix}$分别是方程组($*$)的满足初值条件 $\boldsymbol{u}(0)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}(0)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$的解.

(2) 试验证 $\boldsymbol{w}(t)=c_1\boldsymbol{u}(t)+c_2\boldsymbol{v}(t)$ 是方程组($*$)的满足初值条件 $\boldsymbol{w}(0)=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$的解,其中 c_1,c_2 是任意常数.

解:(1)

$$\boldsymbol{u}(0)=\begin{bmatrix}\cos 0\\-\sin 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}'(t)=\begin{bmatrix}-\sin t\\-\cos t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos t\\-\sin t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t).$$

又由

$$\boldsymbol{v}(0)=\begin{bmatrix}\sin 0\\\cos 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{v}'(t)=\begin{bmatrix}\cos t\\-\sin t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin t\\\cos t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{v}(t),$$

因此,$\boldsymbol{u}(t)=\begin{bmatrix}\cos t\\-\sin t\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{v}(t)=\begin{bmatrix}\sin t\\\cos t\end{bmatrix}$分别是方程组($*$)的满足初值条件 $\boldsymbol{u}(0)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{v}(0)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$的解.

(2) $\boldsymbol{w}(0)=c_1\boldsymbol{u}(0)+c_2\boldsymbol{v}(0)=c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{w}'(t)=c_1\boldsymbol{u}'(t)+c_2\boldsymbol{v}'(t)=c_1\begin{bmatrix}-\sin t\\-\cos t\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}\cos t\\-\sin t\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-c_1\sin t+c_2\cos t\\-c_1\cos t-c_2\sin t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\cos t+c_2\sin t\\-c_1\sin t+c_2\cos t\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{w}(t).$$

因此 $w(t)=c_1u(t)+c_2v(t)$ 是方程组（*）的满足初值条件 $w(0)=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$ 的解，其中 c_1,c_2 是任意常数.

2. 将下面的初值问题化为与之等价的一阶方程组的初值问题：

(1) $x''+2x'+7tx=\mathrm{e}^{-t},x(1)=7,x'(1)=-2$；

(2) $x^{(4)}+x=te^t,x(0)=1,x'(0)=-1,x''(0)=2,x'''(0)=0$；

(3) $\begin{cases}x''+5y'-7x+6y=\mathrm{e}^t,\\y''-2y+13y'-15x=\cos t,\end{cases}$ $x(0)=1,x'(0)=0,y(0)=0,y'(0)=1.$

解：(1) 令 $x_1=x,x_2=x'$，得

$$\begin{cases}x_1'=x'=x_2,\\x_2'=x''=-7tx_1-2x_2+\mathrm{e}^{-t},\end{cases}$$

即 $\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-7t&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}$.

又由 $x_1(1)=x(1)=7,x_2(1)=x'(1)=-2$，于是把原来的初值问题化成了与之等价的一阶方程组的初值问题：

$$\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}0&1\\-7t&-2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix},\boldsymbol{x}(1)=\begin{bmatrix}7\\-2\end{bmatrix},\text{其中 }\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}.$$

(2) 令 $x_1=x,x_2=x',x_3=x'',x_4=x'''$，则原方程可化为

$$\begin{cases}x_1'=x'=x_2,\\x_2'=x''=x_3,\\x_3'=x'''=x_4,\\x_4'=-x+te^t=-x_1+te^t,\end{cases}$$

且 $x_1(0)=x(0)=1,x_2=x'(0)=-1,x_3(0)=x''(0)=2,x_4(0)=x'''(0)=0.$

于是把原来的初值问题化成了与之等价的一阶方程组的初值问题：

$$\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\te^t\end{bmatrix},\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\0\end{bmatrix},\text{其中 }\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}.$$

(3) 令 $w_1=x,w_2=x',w_3=y,w_4=y'$，则原来的初值问题可化为：

$$\begin{cases}w_1'=x'=w_2,\\w_2'=x''=-5w_4+7w_1-6w_3+\mathrm{e}^t,\\w_3'=y'=w_4,\\w_4'=y''=2w_3-13w_4+15w_1+\cos t,\end{cases}\text{且}\begin{cases}w_1(0)=x(0)=1,\\w_2(0)=x'(0)=0,\\w_3(0)=y(0)=0,\\w_4(0)=y'(0)=1,\end{cases}$$

即 $$\boldsymbol{w}'=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\7&0&-6&-5\\0&0&0&1\\15&0&2&-13\end{bmatrix}\boldsymbol{w}+\begin{bmatrix}0\\\mathrm{e}^t\\0\\\cos t\end{bmatrix},\boldsymbol{w}(0)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\text{其中 }\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\\w_4\end{bmatrix}.$$

3. 试用逐步逼近法求方程组 $\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$,满足初值条件 $\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$的第三次近似解.

解:$\boldsymbol{\psi}_0(t)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$;

$$\boldsymbol{\psi}_1(t)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\mathrm{d}s=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\1\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\psi}_2(t)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\1\end{bmatrix}\mathrm{d}s=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t\\ -\frac{t^2}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\ 1-\frac{t^2}{2}\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\psi}_3(t)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\ 1-\frac{s^2}{2}\end{bmatrix}\mathrm{d}s=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t-\frac{t^3}{6}\\ -\frac{t^2}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t-\frac{t^3}{6}\\ 1-\frac{t^2}{2}\end{bmatrix}.$$

所以,满足初值条件 $\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$的第三次近似解为

$$\boldsymbol{\psi}_3(t)=\begin{bmatrix}t-\frac{t^3}{6}\\ 1-\frac{t^2}{2}\end{bmatrix}.$$

4. 试验证 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}t^2 & t\\ 2t & 1\end{bmatrix}$是方程组 $\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ 在任何不包含原点的区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的基解矩阵.

解:令 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 的第一列为 $\boldsymbol{\varphi}_1(t)=\begin{bmatrix}t^2\\ 2t\end{bmatrix}$,这时 $\boldsymbol{\varphi}_1'(t)=\begin{bmatrix}2t\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t}\end{bmatrix}\boldsymbol{\varphi}_1(t)$.

故 $\boldsymbol{\varphi}_1(t)$ 是方程组的一个解. 同样地,如果以 $\boldsymbol{\varphi}_2(t)$ 表示 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 第二列,我们有

$$\boldsymbol{\varphi}'_2(t)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t}\end{bmatrix}\boldsymbol{\varphi}_2(t).$$

这样 $\boldsymbol{\varphi}_2(t)$ 也是方程组的一个解. 因此 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是解矩阵. 又因为 $\det\boldsymbol{\Phi}(t)=-t^2\neq 0$,故 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是方程组 $\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$在任何不包含原点的区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的基解矩阵.

5. 考虑方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}\qquad(*)$$

其中 $\boldsymbol{A}(t)$ 是区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续 $n\times n$ 矩阵,它的元为 $a_{ij}(t)(i,j=1,2,\cdots,n)$.

(1) 如果 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 是(*)的任意 n 个解,那么它们的朗斯基行列式 $W[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]\equiv W(t)$ 满足下面的一阶线性微分方程 $W'=[a_{11}(t)+a_{22}(t)+\cdots+a_{nn}(t)]W$.

(2) 解上面的一阶线性微分方程,证明下页的公式:

$$W(t)=W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}[a_{11}(s)+a_{22}(s)+\cdots+a_{nn}(s)]ds},t_0,t\in[a,b].$$

解: $W'(t)=\begin{vmatrix} x_{11}' & x_{12}' & \cdots & x_{1n}' \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21}' & x_{22}' & \cdots & x_{2n}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}' & x_{n2}' & \cdots & x_{nn}' \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}x_{11}+a_{12}x_{21}+\cdots+a_{1n}x_{n1} & a_{11}x_{12}+a_{12}x_{22}+\cdots+a_{1n}x_{n2} & \cdots & a_{11}x_{1n}+a_{12}x_{2n}+\cdots+a_{1n}x_{nn} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_{11}+\cdots+a_{nn}x_{n1} & a_{n1}x_{12}+\cdots+a_{nn}x_{n2} & \cdots & a_{n1}x_{1n}+\cdots+a_{nn}x_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}x_{11} & a_{11}x_{12} & \cdots & a_{11}x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nn}x_{n1} & a_{nn}x_{n2} & \cdots & a_{nn}x_{nn} \end{vmatrix},$$

整理后变为

$$W'(t)=(a_{11}+\cdots+a_{nn})\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}=(a_{11}+\cdots+a_{nn})W(t)$$

$$=[a_{11}(t)+\cdots+a_{nn}(t)]W(t).$$

(2) 由于 $W'(t)=[a_{11}(t)+\cdots+a_{nn}(t)]W(t)$，即$\dfrac{dW(t)}{W(t)}=[a_{11}(t)+\cdots+a_{nn}(t)]dt$. 两边从 t_0 到 t 积分则有

$$\ln|W(t)|-\ln|W(t_0)|=\int_{t_0}^{t}[a_{11}(s)+\cdots+a_{nn}(s)]ds,$$

即 $W(t)=W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}[a_{11}(s)+\cdots+a_{nn}(s)]ds},t_0,t\in[a,b]$.

6. 设 $\boldsymbol{A}(t)$ 为区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续 $n\times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{\Phi}(t)$ 为方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵，而 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 为其一解，试证：

(1) 对于方程 $\boldsymbol{y}'=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{y}$ 的任一解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\Psi}(t)$ 必有 $\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)=$ 常数；

(2) $\boldsymbol{\Psi}(t)$ 为方程 $\boldsymbol{y}'=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{y}$ 的基解矩阵的充要条件是存在非奇异的常数矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)=\boldsymbol{C}$.

解: (1) $[\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)]'=(\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t))'\boldsymbol{\varphi}(t)+\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\varphi}'(t)=(\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t))'\boldsymbol{\varphi}(t)+\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)$,

因为 $\boldsymbol{\Psi}'(t)=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Psi}(t)$，所以 $(\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t))'=-\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{A}(t)$.

从而$[\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)]' = -\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)+\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)=0$.

所以对于方程 $\boldsymbol{y}'=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{y}$ 的任一解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\Psi}(t)$,必有 $\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)=$ 常数.

(2) 必要性:

假设 $\boldsymbol{\Psi}(t)$ 为方程 $\boldsymbol{y}'=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{y}$ 的基解矩阵,则

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)]' &= [\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)]'\boldsymbol{\Phi}(t)+\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}'(t)\\ &=[-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Psi}(t)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}(t)+\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\\ &=-\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)+\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\\ &=0,\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)=\boldsymbol{C}$.

由于 $\boldsymbol{\Phi}(t),\boldsymbol{\Psi}(t)$ 分别是基解矩阵,从而 $\det(\boldsymbol{\Phi}(t))\neq 0,\det(\boldsymbol{\Psi}(t))\neq 0$,这样,$\det(\boldsymbol{C})\neq 0$,即 $\boldsymbol{C}$ 是非奇异的.

充分性:

若存在非奇异常数矩阵 $\boldsymbol{C},\det\boldsymbol{C}\neq 0$,使 $\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)=\boldsymbol{C}$,由于 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 为方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵,故 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$ 存在,所以 $\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)=\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$,并且 $\det(\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t))=\det(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t))\neq 0$,即 $\boldsymbol{\Psi}(t)$ 为方程 $y'=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{y}$ 的基解矩阵.

7. 设方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 有一个非零解 $\boldsymbol{x}(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t))^{\mathrm{T}}$,其中 $\varphi_n(t)\neq 0$,证明:$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 经变换 $y_i=x_i-\dfrac{\varphi_i(t)}{\varphi_n(t)}x_n(i=1,2,\cdots,n-1),y_n=\dfrac{1}{\varphi_n(t)}x_n$ 可化为关于 $n-1$ 个未知函数 $y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}$ 的线性方程组,它只含 $n-1$ 个方程,且不含 y_n.

解:当 $i=1,2,\cdots,n-1$ 时,由 $y_i=x_i-\dfrac{\varphi_i}{\varphi_n}x_n$,可得到

$$\begin{aligned}y'_i &= x'_i-\frac{\varphi'_i\varphi_n-\varphi_i\varphi'_n}{\varphi_n^2}x_n-\frac{\varphi_i}{\varphi_n}x'_n = x'_i-\frac{x_n}{\varphi_n}\varphi'_i+\frac{\varphi_i x_n}{\varphi_n^2}\varphi'_n-\frac{\varphi_i}{\varphi_n}x'_n\\ &=\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j-\frac{x_n}{\varphi_n}\cdot\sum_{j=1}^n a_{ij}\varphi_j+\frac{\varphi_i x_n}{\varphi_n^2}\cdot\sum_{j=1}^n a_{nj}\varphi_j-\frac{\varphi_i}{\varphi_n}\sum_{j=1}^n a_{nj}x_j\\ &=\sum_{j=1}^n a_{ij}\left(x_j-\frac{\varphi_j}{\varphi_n}x_n\right)+\sum_{j=1}^n a_{nj}\cdot\frac{-\varphi_i}{\varphi_n}\left(x_j-\frac{\varphi_j}{\varphi_n}x_n\right)\\ &=\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}\left(x_j-\frac{\varphi_j}{\varphi_n}x_n\right)+a_{in}\left(x_n-\frac{\varphi_n}{\varphi_n}x_n\right)+\sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}\cdot\frac{-\varphi_i}{\varphi_n}\left(x_j-\frac{\varphi_j}{\varphi_n}x_n\right)\\ &\quad+a_{nn}\cdot\frac{-\varphi_i}{\varphi_n}\left(x_n-\frac{\varphi_n}{\varphi_n}x_n\right)\\ &=\sum_{j=1}^{n-1}\left(a_{ij}-a_{nj}\frac{\varphi_i}{\varphi_n}\right)y_j.\end{aligned}$$

当 $i=n$ 时,由 $y_n=\dfrac{1}{\varphi_n}x_n$,可得到

$$\begin{aligned}y'_n &= \frac{x'_n\varphi_n-x_n\varphi'_n}{\varphi_n^2}=\frac{1}{\varphi_n}\sum_{j=1}^n a_{nj}x_j-\frac{x_n}{\varphi_n^2}\cdot\sum_{j=1}^n a_{nj}\varphi_j=\frac{1}{\varphi_n}\sum_{j=1}^n a_{nj}\left(x_j-\frac{\varphi_j}{\varphi_n}x_n\right)\\ &=\frac{1}{\varphi_n}\sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}\left(x_j-\frac{\varphi_j}{\varphi_n}x_n\right)+\frac{1}{\varphi_n}a_{nn}\left(x_n-\frac{\varphi_n}{\varphi_n}x_n\right)=\frac{1}{\varphi_n}\sum_{j=1}^{n-1}a_{nj}y_j.\end{aligned}$$

由此可以看到，$y'_i(i=1,2,\cdots,n)$ 可以由 $y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}$ 线性表示，命题得证.

8. 设 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 为方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$（$\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 常数矩阵）的标准基解矩阵（即 $\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{E}$），证明：$\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)=\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)$，其中 t_0 为某一值.

证明：由于 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 常数矩阵，所以方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 满足 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\Phi}(t)$，解得 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$，即 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是指数函数的，又根据指数函数的特点知道 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)=\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}$，从而 $\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\cdot\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t_0}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}=\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)$.

9. 设 $\boldsymbol{A}(t),\boldsymbol{f}(t)$ 分别为在区间 $[a,b]$ 上连续的 $n\times n$ 矩阵和 n 维列向量，证明方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$ 存在且最多存在 $n+1$ 个线性无关解.

证明：对于齐次方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$，由定理 4，可知一定存在线性无关的 n 个解，并且这 n 个解可以作为方程的基解矩阵，由定理 9 知至少存在非齐次方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$ 的一个特解.

① 设 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 是齐次方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的 n 个线性无关解，而 $\boldsymbol{x}_0(t)$ 是非齐次方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$ 的一个特解，则

$$\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{x}_0(t),\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{x}_0(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)+\boldsymbol{x}_0(t),\boldsymbol{x}_0(t)$$

是非齐次方程的 $n+1$ 个线性无关解. 这是因为，若存在常数 $k_1,k_2,\cdots,k_n,k_0$，使得

$$k_1(\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{x}_0(t))+k_2(\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{x}_0(t))+\cdots+k_n(\boldsymbol{x}_n(t)+\boldsymbol{x}_0(t))+k_0\boldsymbol{x}_0(t)\equiv 0,$$

则一定有 $k_1+k_2+\cdots+k_n+k_0=0$. 否则，

$$\boldsymbol{x}_0(t)=\frac{-k_1}{k_1+k_2+\cdots+k_n+k_0}\boldsymbol{x}_1(t)+\cdots+\frac{-k_n}{k_1+k_2+\cdots+k_n+k_0}\boldsymbol{x}_n(t),$$

这与 $\boldsymbol{x}_0(t)$ 是非齐次方程的解矛盾. 所以

$$k_1\boldsymbol{x}_1(t)+k_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+k_n\boldsymbol{x}_n(t)\equiv 0.$$

由假设可知，$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，而且 $k_0=0$.

所以非齐次方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$ 存在 $n+1$ 个线性无关解.

② 假设方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$ 存在 $n+2$ 个线性无关解，分别为 $\boldsymbol{\varphi}_1(t),\boldsymbol{\varphi}_2(t),\cdots,\boldsymbol{\varphi}_{n+1}(t),\boldsymbol{\varphi}_{n+2}(t)$，则由性质 2 知 $\boldsymbol{\varphi}_2(t)-\boldsymbol{\varphi}_1(t),\boldsymbol{\varphi}_3(t)-\boldsymbol{\varphi}_1(t),\cdots,\boldsymbol{\varphi}_{n+1}(t)-\boldsymbol{\varphi}_1(t),\boldsymbol{\varphi}_{n+2}(t)-\boldsymbol{\varphi}_1(t)$ 是对应齐次方程的 $n+1$ 个线性无关解，这与推论 1 矛盾，故方程最多有 $n+1$ 个线性无关解.

综合以上 ①②，即证明了方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$ 存在且最多存在 $n+1$ 个线性无关解.

10. 试证非齐次线性微分方程组的叠加原理：

设 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t)$ 分别是方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}_1(t),$$
$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}_2(t)$$

的解，则 $\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{x}_2(t)$ 是方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}_1(t)+\boldsymbol{f}_2(t)$$

的解.

证明：
$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}_1(t),\qquad ①$$
$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}_2(t)\qquad ②$$

分别将 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t)$ 代入 ① 和 ② 则

$$x_1' = A(t)x_1 + f_1(t), x_2' = A(t)x_2 + f_2(t),$$

则 $x_1' + x_2' = A(t)[x_1(t) + x_2(t)] + f_1(t) + f_2(t)$,

$$[x_1(t) + x_2(t)]' = A(t)[x_1(t) + x_2(t)] + f_1(t) + f_2(t).$$

令 $x = x_1(t) + x_2(t)$,即证 $x' = A(t)x + f_1(t) + f_2(t)$,从而 $x_1(t) + x_2(t)$ 是方程组

$$x' = A(t)x + f_1(t) + f_2(t)$$

的解.

11. 考虑方程组 $x' = Ax + f(t)$,其中

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, f(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix},$$

(1) 试验证 $\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$是 $x' = Ax$ 的基解矩阵;

(2) 试求 $x' = Ax + f(t)$ 的满足初始条件 $\varphi(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$的解 $\varphi(t)$.

证明:(1) 首先验证它是解矩阵.

用 $\varphi_1(t)$ 表示 $\Phi(t)$ 的第一列 $\varphi_1(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}$,则

$$\varphi_1'(t) = \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\varphi_1(t),$$

故 $\varphi_1(t)$ 是齐次方程组的解.

如果用 $\varphi_2(t)$ 表示 $\Phi(t)$ 的第二列 $\varphi_2(t) = \begin{bmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$,有

$$\varphi_2'(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} + 2te^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\varphi_2(t),$$

故 $\varphi_2(t)$ 也是齐次方程组的解.

从而 $\Phi(t)$ 是方程的解矩阵.

又 $\det \Phi(t) = \begin{vmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{vmatrix} = e^{4t} \neq 0$,故 $\Phi(t)$ 是 $x' = Ax$ 的基解矩阵.

(2) 由常数变易公式可知,方程满足初始条件 $\varphi(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$的解

$$\varphi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)\varphi(0) + \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds,$$

而 $\Phi^{-1}(t) = \dfrac{\begin{bmatrix} e^{2t} & -te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}}{e^{4t}} = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}e^{-2t}$,

故 $\varphi(t) = \begin{bmatrix} (1-t)e^{2t} \\ -e^{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\int_0^t \begin{bmatrix} e^{-2s} & -se^{-2s} \\ 0 & e^{-2s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sin s \\ \cos s \end{bmatrix}ds$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{25}(-15t+27)e^{2t}-\frac{2}{25}\cos t-\frac{14}{25}\sin t\\ -\frac{3}{5}e^{2t}-\frac{2}{5}\cos t+\frac{1}{5}\sin t\end{bmatrix}.$$

12. 试求 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$,满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$. 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix},\boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix}0\\e^{2t}\end{bmatrix}.$$

解:由上述第 11 题可知 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}e^{2t}&te^{2t}\\0&e^{2t}\end{bmatrix}$,则

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)=\frac{\begin{bmatrix}e^{2s}&-se^{2s}\\0&e^{2s}\end{bmatrix}}{e^{4s}}=\begin{bmatrix}1&-s\\0&1\end{bmatrix}e^{-2s}.$$

若方程满足初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$,则有

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\int_0^t\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds=\begin{bmatrix}e^{2t}&te^{2t}\\0&e^{2t}\end{bmatrix}\int_0^t\begin{bmatrix}1&-s\\0&1\end{bmatrix}e^{-2s}\begin{bmatrix}0\\e^{2s}\end{bmatrix}ds=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}t^2e^{2t}\\te^{2t}\end{bmatrix}.$$

若 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$,则有

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_0^t\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds$$

$$=\begin{bmatrix}e^{2t}&te^{2t}\\0&e^{2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}t^2e^{2t}\\te^{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left(1-t+\frac{1}{2}t^2\right)e^{2t}\\(t-1)e^{2t}\end{bmatrix}.$$

13. 试求下列方程的通解:

(1) $x''+x=\sec t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$;

(2) $x'''-8x=e^{2t}$;

(3) $x''-6x'+9x=e^t$.

解:(1) 易知对应的齐次线性方程 $x''+x=0$ 的基本解组为 $x_1(t)=\cos t,x_2(t)=\sin t$.

这时,$W[x_1(t),x_2(t)]=\begin{vmatrix}\cos t&\sin t\\-\sin t&\cos t\end{vmatrix}=1.$

由公式得

$$\varphi(t)=\int_0^t\frac{\sin t\cos s-\cos t\sin s}{1}\sec s ds$$

$$=\int_0^t(\sin t-\cos t\tan s)ds=t\sin t+\cos t\ln|\cos t|.$$

所以原方程的通解为 $x=c_1\cos t+c_2\sin t+t\sin t+\cos t\ln|\cos t|$.

(2) 易知对应的齐次线性方程 $x''' - 8x = 0$ 的基本解组为

$$x_1(t) = e^{2t}, x_2(t) = e^{-t}\cos\sqrt{3}t, x_3(t) = e^{-t}\sin\sqrt{3}t.$$

因为 $\lambda = 2$ 是方程的特征根,所以方程有形如 $x = Ate^{2t}$ 的解,代入得 $A = \frac{1}{12}$.

于是原方程的通解为 $x = (c_1\cos\sqrt{3}t + c_2\sin\sqrt{3}t)e^{-t} + c_3 e^{2t} + \frac{1}{12}te^{2t}$.

(3) 易知对应的齐次线性方程 $x'' - 6x' + 9x = 0$ 对应的特征方程为 $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$,解得 $\lambda_{1,2} = 3$,故方程的一个基本解组为

$$x_1(t) = e^{3t}, x_2(t) = te^{3t},$$

$$W[x_1(t), x_2(t)] = \begin{vmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 3e^{3t} & e^{3t} + 3te^{3t} \end{vmatrix} = e^{6t},$$

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{te^{3t}e^{3s} - e^{3t}\cdot se^{3s}}{e^{6s}} e^s ds = \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{2}te^{3t} - \frac{1}{4}e^{3t}.$$

因为 te^{3t}, e^{3t} 是对应的齐次线性方程的解,故 $\varphi_1(t) = \frac{1}{4}e^t$ 也是原方程的一个解. 因此原方程的通解为 $x = c_1 e^{3t} + c_2 te^{3t} + \frac{1}{4}e^t$.

14. 已知方程组 $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1\cos^2 t - x_2(1 - \sin t\cos t), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1(1 + \sin t\cos t) + x_2\sin^2 t \end{cases}$ 有解 $x_1 = -\sin t, x_2 = \cos t$,求其通解.

解:设 $x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t)$ 是方程组的满足初值 $\varphi_1(0) = 1, \varphi_2(0) = 0$ 的一组解,则有

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(t) & -\sin t \\ \varphi_2(t) & \cos t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot e^{\int_0^t (\cos^2 t + \sin^2 t)dt} = e^t,$$

解得 $\varphi_2(t) = \dfrac{e^t - \varphi_1(t)\cos t}{\sin t}$,代入方程组第一个方程得

$$\varphi_1'(t) = \varphi_1(t)\cot t + e^t(\cos t - \csc t).$$

此为一阶线性微分方程,由通解公式可得

$$\varphi_1(t) = e^{\int_0^t \cot s ds}\left[\int_0^t e^s(\cos s - \csc s)\cdot e^{-\int_0^s \cot \tau d\tau} ds + 1\right],$$

化简得 $\varphi_1(t) = e^t\cos t$,从而 $\varphi_2(t) = e^t\sin t$.

所以,原方程的通解为 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} e^t\cos t \\ e^t\sin t \end{bmatrix}$, c_1, c_2 为任意常数.

15. 已知方程组 $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{1}{t}x_1 - x_2 + t, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{1}{t^2}x_1 + \dfrac{2}{t}x_2 - t^2, \end{cases}$ $t > 0$ 的对应齐次方程组有解 $x_1 = t^2, x_2 = -t$,求其通解.

解:设 $x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t)$ 是对应的齐次方程组的满足初值条件 $\varphi_1(1) = c_1, \varphi_2(1) = c_2$ 的一组解, c_1, c_2 为任意常数. 由刘维尔公式可得

$$\begin{vmatrix} t^2 & \varphi_1(t) \\ -t & \varphi_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & c_1 \\ -1 & c_2 \end{vmatrix} \cdot e^{\int_1^t \frac{3}{s}ds} = (c_1+c_2)t^3,$$

解得 $\varphi_1(t)=(c_1+c_2)t^2-t\varphi_2(t)$，代入对应齐次方程组第二个方程得

$$\varphi_2'(t)=\frac{1}{t}\varphi_2(t)+(c_1+c_2),$$

此为一阶线性微分方程，由求解公式可得

$$\varphi_2(t)=e^{\int_1^t \frac{1}{s}ds}\left[\int_1^t (c_1+c_2)e^{-\int_1^s \frac{1}{\tau}d\tau}ds+c_2\right]=t[(c_1+c_2)\ln t+c_2],$$

从而 $\varphi_1(t)=(c_1+c_2)t^2-t^2[(c_1+c_2)\ln t+c_2]$.

特别地，令 $c_1=1, c_2=0$，则 $\begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t^2-t^2\ln t \\ t\ln t \end{bmatrix}$.

由于 $\begin{vmatrix} t^2 & t^2-t^2\ln t \\ -t & t\ln t \end{vmatrix}=t^3\neq 0$，所以矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} t^2 & t^2-t^2\ln t \\ -t & t\ln t \end{bmatrix}$ 可以作为齐次方程的基解矩阵，并且 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)=\frac{1}{t^3}\begin{bmatrix} t\ln t & t^2\ln t-t^2 \\ t & t^2 \end{bmatrix}$.

由定理 9，可得

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \boldsymbol{\Phi}(t)\cdot\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_1^t \boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds \\
&= \begin{bmatrix} t^2 & t^2-t^2\ln t \\ -t & t\ln t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} t^2 & t^2-t^2\ln t \\ -t & t\ln t \end{bmatrix}\cdot\int_1^t \frac{1}{s^3}\begin{bmatrix} s\ln s & s^2\ln s-s^2 \\ s & s^2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} s \\ -s^2 \end{bmatrix}ds \\
&= \begin{bmatrix} t^2 & t^2-t^2\ln t \\ -t & t\ln t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{t^2}{2}\ln t-\frac{t^2}{2}(\ln t)^2+\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{4} \\ \frac{t}{2}(\ln t)^2+\frac{t}{2}\ln t-\frac{3}{4}t^3+\frac{3}{4}t \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

这就是原方程的通解，其中 c_1, c_2 为任意常数.

16. 给定方程 $x''+8x'+7x=f(t)$，其中 $f(t)$ 在 $0\leqslant t<+\infty$ 上连续，试利用常数变易公式，证明：

(1) 如果 $f(t)$ 在 $0\leqslant t<+\infty$ 上有界，则方程的每一个解在 $0\leqslant t<+\infty$ 上有界；

(2) 如果当 $t\to\infty$ 时，$f(t)\to 0$，则方程的每一个解 $\varphi(t)$，满足 $\varphi(t)\to 0$（当 $t\to\infty$ 时）.

证明：(1) 因为 $f(t)$ 在 $0\leqslant t<+\infty$ 上有界，所以存在 $M>0$，使得 $|f(t)|\leqslant M, \forall t\in[0,+\infty)$.

又因为 $x=e^{-t}, x=e^{-7t}$ 是齐次线性方程的基本解组，

所以非齐次线性方程的解

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \int_0^t \frac{e^{-7t}e^{-s}-e^{-t}e^{-7s}}{W[e^{-s},e^{-7s}]}f(s)ds=\int_0^t \frac{e^{-7t}e^{-s}-e^{-t}e^{-7s}}{-6e^{-8s}}f(s)ds \\
&= \frac{1}{6}\int_0^t e^{-(t-s)}f(s)ds-\frac{1}{6}\int_0^t e^{-7(t-s)}f(s)ds.
\end{aligned}$$

故 $|\varphi(t)|\leqslant\frac{M}{6}\left(|1-e^{-t}|+\frac{1}{7}|1-e^{-7t}|\right)\leqslant\frac{M}{6}\left(\frac{8}{7}-\frac{1}{7}e^{-7t}-e^{-t}\right)\leqslant\frac{4}{21}M.$

又对于非齐次线性方程组的满足初始条件的解 $x(t)$，都存在固定的常数 c_1, c_2，使得

$$x(t)=c_1e^{-7t}+c_2e^{-t}+\varphi(t).$$

从而 $|x(t)|\leqslant|c_1e^{-7t}|+|c_2e^{-t}|+|\varphi(t)|\leqslant|c_1|+|c_2|+\frac{4}{21}M.$

因此方程的每一个解在 $0\leqslant t<+\infty$ 上有界.

(2) 当 $t\to\infty$ 时,显然 $c_1e^{-7t}\to 0, c_2e^{-t}\to 0.$

$$\left|\int_0^t e^{-(t-s)}f(s)\mathrm{d}s\right|\leqslant|f(t)|\int_0^t e^{-(t-s)}f(s)\mathrm{d}s\leqslant|f(t)|,$$

$$\left|\int_0^t e^{-7(t-s)}f(s)\mathrm{d}s\right|\leqslant|f(t)|\int_0^t e^{-7(t-s)}f(s)\mathrm{d}s\leqslant|f(t)|,$$

因为 $t\to\infty$ 时, $f(t)\to 0$, 所以 $\int_0^t e^{-(t-s)}f(s)\mathrm{d}s\to 0, \int_0^t e^{-7(t-s)}f(s)\mathrm{d}s\to 0,$

所以从方程通解表达式容易得到方程的每一个解 $\varphi(t)$, 满足 $\varphi(t)\to 0$(当 $t\to\infty$ 时).

17. 给定方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}, \tag{①}$$

这里 $\boldsymbol{A}(t)$ 是区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的连续 $n\times n$ 矩阵,设 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是 ① 的一个基解矩阵, n 维向量函数 $\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x})$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$, $\|\boldsymbol{x}\|<\infty$ 上连续, $t_0\in[a,b]$.

试证明初值问题:

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}),\\ \boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}\end{cases} \tag{$*$}$$

的唯一解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是积分方程组

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}+\int_{t_0}^t\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{F}(s,\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s \tag{$**$}$$

的连续解. 反之,($**$)的连续解也是初值问题($*$)的解.

证明:因为 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是 ① 的一个基解矩阵,令

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}(t), \tag{②}$$

这里 $\boldsymbol{C}(t)$ 是待定的 n 维列向量.

假设($*$)有形如 ② 的解,将 ② 代入($*$)中的方程组得

$$\boldsymbol{\Phi}'(t)\boldsymbol{C}(t)+\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}(t)+\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}),$$

又因为 $\boldsymbol{\Phi}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)$, 所以

$$\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}'(t)=\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}). \tag{③}$$

因为在$[a,b]$上 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是非奇异的,所以 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$ 存在,用 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$ 乘 ③ 式两边后再积分可得

$$\boldsymbol{C}(t)=\boldsymbol{C}+\int_{t_0}^t\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{F}(s,\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s, t_0,t\in[a,b], \boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}.$$

代回 ② 式即得 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}+\int_{t_0}^t\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{F}(s,\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s,$

即 $\boldsymbol{x}(t)$ 也是($**$)的解.

反之,设 $\boldsymbol{x}(t)$ 是($**$)的连续解,对($**$)式两端微分可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}&=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^t\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{F}(s,\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s+\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}(t))\\&=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^t\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{F}(s,\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s+\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}(t))\\&=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}(t)),\end{aligned}$$

而且 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$.

因而(**)的连续解也是初值问题(*)的解.

习题 5.2

1. 假设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 矩阵,试证:

(1) 对任意常数 c_1,c_2 都有 $\exp(c_1\boldsymbol{A}+c_2\boldsymbol{A})=\exp c_1\boldsymbol{A}\cdot\exp c_2\boldsymbol{A}$;

(2) 对任意整数 k,都有 $(\exp\boldsymbol{A})^k=\exp k\boldsymbol{A}$.(当 k 是负整数时,规定 $(\exp\boldsymbol{A})^k=[(\exp\boldsymbol{A})^{-1}]^{-k}$.)

证明:(1) 由性质 1 可知,当矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可交换时,

$$\exp(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\exp\boldsymbol{A}\exp\boldsymbol{B},$$

因为 $(c_1\boldsymbol{A})\cdot(c_2\boldsymbol{A})=(c_2\boldsymbol{A})\cdot(c_1\boldsymbol{A})$,

所以 $\exp(c_1\boldsymbol{A}+c_2\boldsymbol{A})=\exp c_1\boldsymbol{A}\cdot\exp c_2\boldsymbol{A}$.

(2) $k>0$ 时,

$$(\exp\boldsymbol{A})^k=\exp\boldsymbol{A}\cdot\exp\boldsymbol{A}\cdot\cdots\cdot\exp\boldsymbol{A}=\exp(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}+\cdots+\boldsymbol{A})=\exp k\boldsymbol{A},$$

$k<0$ 时,$-k>0$,

$$\begin{aligned}(\exp\boldsymbol{A})^k&=[(\exp\boldsymbol{A})^{-1}]^{-k}=[\exp(-\boldsymbol{A})]^{-k}=\exp(-\boldsymbol{A})\cdot\exp(-\boldsymbol{A})\cdots\exp(-\boldsymbol{A})\\&=\exp[(-\boldsymbol{A})(-k)]=\exp k\boldsymbol{A}.\end{aligned}$$

故 $\forall k$,都有 $(\exp\boldsymbol{A})^k=\exp k\boldsymbol{A}$.

2. 试证:如果 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 满足初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解,那么 $\boldsymbol{\varphi}(t)=[\exp\boldsymbol{A}(t-t_0)]\boldsymbol{\eta}$.

证明:由定理 9 可知 $\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_0^t\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s$.

由于 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\exp\boldsymbol{A}t,\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)=(\exp\boldsymbol{A}t_0)^{-1}=\exp(-\boldsymbol{A}t_0),\boldsymbol{f}(s)=0$,又因为矩阵

$$(\boldsymbol{A}t)\cdot(-\boldsymbol{A}t_0)=(-\boldsymbol{A}t_0)\cdot(\boldsymbol{A}t),$$

所以 $\boldsymbol{\varphi}(t)=[\exp\boldsymbol{A}(t-t_0)]\boldsymbol{\eta}$.

3. 试计算下面矩阵的特征值及对应的特征向量:

(1) $\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix}$;　　(2) $\begin{bmatrix}2&-3&3\\4&-5&3\\4&-4&2\end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix}1&2&1\\1&-1&1\\2&0&1\end{bmatrix}$;　　(4) $\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix}$.

解:(1) 因为 $\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\-4&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda+1)=0$,所以 $\lambda_1=5,\lambda_2=-1$.

对应于 $\lambda_1=5$ 的特征向量 $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$ 必满足线性代数方程组

$$[\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}]\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}4&-2\\-4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

因此,对于任意常数 $\alpha\neq0,\boldsymbol{u}=\alpha\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ 是对应于 $\lambda_1=5$ 的特征向量.类似地,可求出对应于 $\lambda_2=-1$

的特征向量为$\boldsymbol{v}=\beta\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}(\beta\neq 0)$.

(2) 因为 $\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda-2)=0$,所以 $\lambda_1=-1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$.

对应于 $\lambda_1=-1$ 的特征向量 $\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}$ 必满足线性代数方程组

$$[\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}]\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}-3&3&-3\\-4&4&-3\\-4&4&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

因此,对于任意常数 $\alpha\neq 0,\boldsymbol{u}_1=\alpha\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ 是对应于 $\lambda_1=-1$ 的特征向量.

类似地,可以求出对应于 $\lambda_2=2$ 的特征向量 $\boldsymbol{u}_2=\beta\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}(\beta\neq 0)$,以及对应于 $\lambda_3=-2$ 的特征向量

$\boldsymbol{u}_3=\gamma\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}(\gamma\neq 0)$.

(3) 因为 $\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-1\\-1&\lambda+1&-1\\-2&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-3)=0$,所以 $\lambda_1=-1$(二重),$\lambda_2=3$.

对应于 $\lambda_1=-1$(二重) 的特征向量 $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}$ 必满足线性代数方程组

$$[\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}]\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}-2&-2&-1\\-1&0&-1\\-2&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

因此,对于任意常数 $\alpha\neq 0,\boldsymbol{u}=\alpha\begin{bmatrix}2\\-1\\-2\end{bmatrix}$ 是对应于 $\lambda_1=-1$(二重) 的特征向量. 类似地,可以求出对应于 $\lambda_2=3$ 的特征向量$\boldsymbol{v}=\beta\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}(\beta\neq 0)$.

(4) 因为 $\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\0&\lambda&-1\\6&11&\lambda+6\end{vmatrix}=(\lambda+3)(\lambda+1)(\lambda+2)=0$.

所以 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2,\lambda_3=-3$.

对应于 $\lambda_1=-1$ 的特征向量 $\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}$ 必满足线性代数方程组

$$[\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}]\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}-1&-1&0\\0&-1&-1\\6&11&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

因此,对于任意常数 $\alpha\neq 0$,$\boldsymbol{u}_1=\alpha\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$ 是对应于 $\lambda_1=-1$ 的特征向量.

类似地,可以求出对应于 $\lambda_2=-2$ 的特征向量 $\boldsymbol{u}_2=\beta\begin{bmatrix}1\\-2\\4\end{bmatrix}(\beta\neq 0)$,以及对应于 $\lambda_3=-3$ 的特征向量 $\boldsymbol{u}_3=\gamma\begin{bmatrix}1\\-3\\9\end{bmatrix}(\gamma\neq 0)$.

4. 试求方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的一个基解矩阵,并计算 $\exp\boldsymbol{A}t$,其中 $\boldsymbol{A}$ 为

(1) $\begin{bmatrix}-2&1\\-1&2\end{bmatrix}$;　　(2) $\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix}2&-3&3\\4&-5&3\\4&-4&2\end{bmatrix}$;　　(4) $\begin{bmatrix}1&0&3\\8&1&-1\\5&1&-1\end{bmatrix}$.

解:(1) $\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=0$,得 $\lambda_1=\sqrt{3},\lambda_2=-\sqrt{3}$.

对应于 λ_1 的特征向量为 $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$,必满足线性代数方程组

$$[\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}]\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}2+\sqrt{3}&-1\\1&\sqrt{3}-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

解得 $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}1\\2+\sqrt{3}\end{bmatrix}\alpha(\alpha\neq 0)$.

类似地,可以求出对应于 $\lambda_2=-\sqrt{3}$ 的特征向量为 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\2-\sqrt{3}\end{bmatrix}\beta(\beta\neq 0)$.

由于 $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}1\\2+\sqrt{3}\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\2-\sqrt{3}\end{bmatrix}$ 是对应于 λ_1,λ_2 的两个线性无关的特征向量,

所以 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}e^{\sqrt{3}t}&e^{-\sqrt{3}t}\\(2+\sqrt{3})e^{\sqrt{3}t}&(2-\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}t}\end{bmatrix}$ 是所求方程组的一个基解矩阵,且

$$\exp \boldsymbol{A}t = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -(2-\sqrt{3})e^{\sqrt{3}t}+(2+\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}t} & e^{\sqrt{3}t}-e^{-\sqrt{3}t} \\ -e^{\sqrt{3}t}+e^{-\sqrt{3}t} & (2+\sqrt{3})e^{\sqrt{3}t}-(2-\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}t} \end{bmatrix}.$$

(2) 由 $\det(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=0$ 得 $\lambda_1=5,\lambda_2=-1$.

解得 $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$是对应于 λ_1,λ_2 的两个线性无关的特征向量,则基解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} e^{5t} & e^{-t} \\ 2e^{5t} & -e^{-t}\end{bmatrix},\boldsymbol{\Phi}(0)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix},\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

则 $\exp(\boldsymbol{A}t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} e^{5t}+2e^{-t} & e^{5t}-e^{-t} \\ 2e^{5t}-2e^{-t} & 2e^{5t}+e^{-t}\end{bmatrix}$.

(3) 由 $\det(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=0$ 得 $\lambda_1=2,\lambda_2=-2,\lambda_3=-1$.

解得基解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & e^{-t}\\ e^{2t} & e^{-2t} & e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-2t} & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$,

则 $\exp \boldsymbol{A}t=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=\begin{bmatrix} e^{2t} & -e^{2t}+e^{-t} & e^{2t}-e^{-t} \\ e^{2t}-e^{-2t} & -e^{2t}+e^{-2t}+e^{-t} & e^{2t}-e^{-t} \\ e^{2t}-e^{-2t} & -e^{2t}+e^{-2t} & e^{2t}\end{bmatrix}$.

(4) 由 $\det(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=0$ 得 $\lambda_1=-3,\lambda_2=2+\sqrt{7},\lambda_3=2-\sqrt{7}$,

$$\text{解得基解矩阵 } \boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} -3e^{-3t} & e^{(2+\sqrt{7})t} & e^{(2-\sqrt{7})t} \\ 7e^{-3t} & \frac{4\sqrt{7}-5}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} & \frac{-4\sqrt{7}-5}{3}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ 4e^{-3t} & \frac{1+\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} & \frac{1-\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t}\end{bmatrix}.$$

则 $\exp \boldsymbol{A}t=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=\dfrac{1}{4\sqrt{7}}[\boldsymbol{A}_1 \quad \boldsymbol{A}_2 \quad \boldsymbol{A}_3]$,其中

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix} 2\sqrt{7}e^{-3t}+(3+\sqrt{7})e^{(2+\sqrt{7})t}+(-3+\sqrt{7})e^{(2-\sqrt{7})t} \\ \frac{-14\sqrt{7}}{3}e^{-3t}+\frac{13+7\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t}+\frac{-13+7\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ \frac{-8\sqrt{7}}{3}e^{-3t}+\frac{10+4\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t}+\frac{-10+4\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{7}}{3}e^{-3t}+\frac{5-\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t}+\frac{-5-\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ \frac{-14\sqrt{7}}{9}e^{-3t}+\frac{-53+25\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t}+\frac{53+25\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ \frac{-8\sqrt{7}}{9}e^{-3t}+\frac{-2+4\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t}+\frac{2+4\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_3 = \begin{bmatrix} \dfrac{-8\sqrt{7}}{3}e^{-3t} + \dfrac{-2+4\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} + \dfrac{2+4\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ \dfrac{56\sqrt{7}}{9}e^{-3t} + \dfrac{122-28\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t} + \dfrac{-122-28\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ \dfrac{32\sqrt{7}}{9}e^{-3t} + \dfrac{26+2\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t} + \dfrac{-26+2\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t} \end{bmatrix}.$$

5. 试求方程组 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵,并求满足初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(0) = \boldsymbol{\eta}$ 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$:

(1) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $\quad \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 8 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\quad \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

解:(1) 由本节习题第 4 题(2) 知,其基解矩阵为 $\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{5t} \\ -e^{-t} & 2e^{5t} \end{bmatrix}$.

而满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0) = \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$的解为

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{5t} \\ -e^{-t} & 2e^{5t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{5t} & e^{-t} \\ 2e^{5t} & -e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} + 2e^{5t} \\ -e^{-t} + 4e^{5t} \end{bmatrix}.$$

(2) 由本节习题第 4 题(4) 知,基解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} -3e^{-3t} & e^{(2+\sqrt{7})t} & e^{(2-\sqrt{7})t} \\ 7e^{-3t} & \dfrac{4\sqrt{7}-5}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} & \dfrac{-4\sqrt{7}-5}{3}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ 4e^{-3t} & \dfrac{1+\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} & \dfrac{1-\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t} \end{bmatrix},$$

而满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0) = \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}$ 的解为 $\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)\boldsymbol{\eta} = \exp \boldsymbol{A}t \cdot \boldsymbol{\eta}$,经计算得

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \frac{1}{4\sqrt{7}}\begin{bmatrix} \dfrac{52\sqrt{7}}{3}e^{-3t} + \dfrac{4-26\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} + \dfrac{-4-26\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ \dfrac{-364\sqrt{7}}{9}e^{-3t} + \dfrac{-748+146\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t} + \dfrac{748+146\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ \dfrac{-208\sqrt{7}}{9}e^{-3t} + \dfrac{-178-22\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t} + \dfrac{178-22\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t} \end{bmatrix}.$$

(3) 由本节习题第 3 题(3) 可知,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=3,\lambda_2=-1$(二重).

对应于 $\lambda_1=3,\lambda_2=-1$ 的特征向量分别为 $\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}2\alpha\\ \alpha\\ 2\alpha\end{bmatrix},\boldsymbol{u}_2=\begin{bmatrix}\beta\\ \gamma\\ -\dfrac{4\beta+2\gamma}{3}\end{bmatrix}$.

则 $\boldsymbol{\varphi}(t)=e^{3t}\boldsymbol{E}\boldsymbol{u}_1+e^{-t}[\boldsymbol{E}+t(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})]\boldsymbol{u}_2$,

为了得到基解矩阵,依次令 $\boldsymbol{\eta}$ 等于$(1,0,0)^{\mathrm{T}},(0,1,0)^{\mathrm{T}},(0,0,1)^{\mathrm{T}}$,代入 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\eta}$,解得

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}e^{3t}+\frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{4}e^{3t}+e^{-t}\left(t-\frac{1}{4}\right) & \frac{3}{8}e^{3t}+e^{-t}\left(-\frac{3}{8}-\frac{1}{2}t\right)\\ \frac{1}{4}e^{3t}-\frac{1}{4}e^{-t} & \frac{1}{8}e^{3t}+e^{-t}\left(\frac{7}{8}-\frac{1}{2}t\right) & \frac{3}{16}e^{3t}+e^{-t}\left(-\frac{3}{16}+\frac{1}{4}t\right)\\ \frac{1}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{4}e^{3t}+e^{-t}\left(-\frac{1}{4}-t\right) & \frac{3}{8}e^{3t}+e^{-t}\left(\frac{5}{8}+\frac{1}{2}t\right)\end{bmatrix}.$$

由于初值条件 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\alpha\\ \alpha\\ 2\alpha\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta\\ \gamma\\ -\dfrac{4\beta+2\gamma}{3}\end{bmatrix}$,解得$\begin{cases}\alpha=\dfrac{1}{4},\\ \beta=\dfrac{1}{2},\\ \gamma=-\dfrac{1}{4},\end{cases}$ 所以$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix},\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=e^{3t}\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{v}_1+e^{-t}[\boldsymbol{E}+t(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})]\,\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}e^{3t}+\frac{1}{2}e^{-t}\\ \frac{1}{4}e^{3t}-\frac{1}{4}e^{-t}\\ \frac{1}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^{-t}\end{bmatrix}.$$

6. 求方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$ 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$:

(1) $\boldsymbol{\varphi}(0)=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix},\boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix}e^t\\1\end{bmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix},\boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix}0\\0\\e^{-t}\end{bmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{\varphi}(0)=\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&-3\\2&-1\end{bmatrix},\boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix}\sin t\\-2\cos t\end{bmatrix}$.

解:(1) 令 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵为 $\boldsymbol{\Phi}(t)$,又因为

$$p(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=(\lambda-5)(\lambda+1)=0,$$

所以 $\lambda_1=5,\lambda_2=-1$.

解得 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}e^{5t}&e^{-t}\\2e^{5t}&-e^{-t}\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)=\dfrac{1}{-3e^{4t}}\begin{bmatrix}-e^{-t}&-e^{-t}\\-2e^{5t}&e^{5t}\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=-\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}-1&-1\\-2&1\end{bmatrix}$,由

求解公式可得

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)\boldsymbol{\varphi}(0)+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_0^t\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{3}{20}\mathrm{e}^{5t}-\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{t}-\frac{2}{5}\\ \frac{3}{10}\mathrm{e}^{5t}+\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t}+\frac{1}{5}\end{bmatrix}.$$

故所求的解为 $\boldsymbol{\varphi}(t)=\begin{bmatrix}\frac{3}{20}\mathrm{e}^{5t}-\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{t}-\frac{2}{5}\\ \frac{3}{10}\mathrm{e}^{5t}+\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t}+\frac{1}{5}\end{bmatrix}$.

(2) 由 $\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=0$ 得 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2,\lambda_3=-3$.

设 λ_1 对应的特征向量为$\boldsymbol{v}_1$，则$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{v}_1=0$，得$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}-\alpha\\ \alpha\\ -\alpha\end{bmatrix}$，$\alpha\neq 0$.

取$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$，同理可得$\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}1\\ -3\\ 9\end{bmatrix}$.

则 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-3t}\\ -\mathrm{e}^{-t} & -2\mathrm{e}^{-2t} & -3\mathrm{e}^{-3t}\\ \mathrm{e}^{-t} & 4\mathrm{e}^{-2t} & 9\mathrm{e}^{-3t}\end{bmatrix}$. 由求解公式可得

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)\boldsymbol{\varphi}(0)+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_0^t\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s$$

$$=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-3t}\\ -\mathrm{e}^{-t} & -2\mathrm{e}^{-2t} & -3\mathrm{e}^{-3t}\\ \mathrm{e}^{-t} & 4\mathrm{e}^{-2t} & 9\mathrm{e}^{-3t}\end{bmatrix}\cdot\int_0^t\begin{bmatrix}3\mathrm{e}^{s} & \frac{5}{2}\mathrm{e}^{s} & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{s}\\ -3\mathrm{e}^{2s} & -4\mathrm{e}^{2s} & -\mathrm{e}^{2s}\\ \mathrm{e}^{3s} & \frac{3}{2}\mathrm{e}^{3s} & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \mathrm{e}^{-s}\end{bmatrix}\mathrm{d}s$$

$$=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-2t}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-3t}-\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-t}\\ -2\mathrm{e}^{-2t}+\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{5}{4}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-t}\\ 4\mathrm{e}^{-2t}-\frac{9}{4}\mathrm{e}^{-3t}-\frac{7}{4}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}.$$

故所求的解为 $\boldsymbol{\varphi}(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-2t}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-3t}-\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-t}\\ -2\mathrm{e}^{-2t}+\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{5}{4}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-t}\\ 4\mathrm{e}^{-2t}-\frac{9}{4}\mathrm{e}^{-3t}-\frac{7}{4}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}$.

(3) 令 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵为$\boldsymbol{\Phi}(t)$，由 $\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=0$ 得 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$.

解得对应的基解矩阵为 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}e^t & e^{2t}\\ e^t & \frac{2}{3}e^{2t}\end{bmatrix}$.

所以 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)=\begin{bmatrix}-2e^{-t} & 3e^{-t}\\ 3e^{-2t} & -3e^{-2t}\end{bmatrix}$，从而 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 3 & -3\end{bmatrix}$，由求解公式可得

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)\boldsymbol{\varphi}(0)+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_0^t\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s$$

$$=\begin{bmatrix}\cos t-2\sin t+e^t(-4-2\eta_1+3\eta_2)+3e^{2t}(1+\eta_1-\eta_2)\\ 2\cos t-2\sin t+e^t(-4-2\eta_1+3\eta_2)+2e^{2t}(1+\eta_1-\eta_2)\end{bmatrix}.$$

故所求的解为

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\begin{bmatrix}\cos t-2\sin t+e^t(-4-2\eta_1+3\eta_2)+3e^{2t}(1+\eta_1-\eta_2)\\ 2\cos t-2\sin t+e^t(-4-2\eta_1+3\eta_2)+2e^{2t}(1+\eta_1-\eta_2)\end{bmatrix}.$$

7. 假设 m 不是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 试证非齐次线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}e^{mt}$$

有一解形如

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{p}e^{mt},$$

其中 $\boldsymbol{c},\boldsymbol{p}$ 是常数向量.

证明:要证 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{p}e^{mt}$ 是否为解，就是能否确定常数向量 $\boldsymbol{p}$，使得

$$\boldsymbol{p}me^{mt}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}e^{mt}+\boldsymbol{c}e^{mt},$$

则 $\boldsymbol{p}(m\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{c}$.

由于 m 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，故 $|m\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|\neq 0$，从而 $m\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 存在逆矩阵.

那么 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{c}(m\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$，这样就证明了方程有形如 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{p}e^{mt}$ 的解.

8. 给定方程组

$$\begin{cases}x_1''-3x_1'+2x_1+x_2'-x_2=0,\\ x_1'-2x_1+x_2'+x_2=0,\end{cases}$$

(1) 试证上面方程组等价于方程组 $\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$，其中

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_1'\\x_2\end{bmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 2\\ 2 & -1 & -1\end{bmatrix};$$

(2) 试求(1)中的方程组的基解矩阵;

(3) 试求原方程组满足初值条件 $x_1(0)=0,x_1'(0)=1,x_2(0)=0$ 的解.

证明:(1) 令 $u_1=x_1,u_2=x_1',u_3=x_2$ 则原方程组化为

$$\begin{cases}u_1'=x_1'=u_2,\\ u_2'=x_1''=-4u_1+4u_2+2u_3,\\ u_3'=x_2'=2u_1-u_2-u_3.\end{cases}$$

即 $\boldsymbol{u}' = \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$.

从而有 $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$.

反之,设 $x_1 = u_1, x_1' = u_2, x_2 = u_3$ 则方程组 $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$ 可化为

$$\begin{cases} x_1'' = -4x_1 + 4x_1' + 2x_2, \\ x_2' = 2x_1 - x_1' - x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1'' = 3x_1' - 2x_1 - x_2' + x_2, \\ x_2' = 2x_1 - x_1' - x_2. \end{cases}$$

即证明了上面方程组等价于方程组 $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$.

(2) 由 $\det(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = 0$ 得 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$.

由 $\begin{cases} -u_2 = 0, \\ 4u_1 - 4u_2 - 2u_3 = 0, \\ -2u_1 + u_2 + u_3 = 0 \end{cases}$ 得 $\boldsymbol{u}_1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha \neq 0$.

同理可求得 $\boldsymbol{u}_2 = \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta \neq 0$ 和 $\boldsymbol{u}_3 = \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \gamma \neq 0$.

取 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ 则 $\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 1 & e^t & e^{2t} \\ 0 & e^t & 2e^{2t} \\ 2 & \frac{1}{2}e^t & 0 \end{bmatrix}$ 是一个基解矩阵.

(3) 令 $u_1 = x_1, u_2 = x_1', u_3 = x_2$,则原方程组化为等价的方程组 $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$ 且初始条件变为 $u_1(0) = 0, u_2(0) = 1, u_3(0) = 0$. 而 $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$ 满足此初始条件的解为

$$e^{At}\boldsymbol{\eta} = e^{At}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - 2e^t + \frac{3}{2}e^{2t} \\ -2e^t + 3e^{2t} \\ 1 - e^t \end{bmatrix}.$$

于是根据等价性,原方程组满足初始条件的解为

$$x_1(t) = \frac{1}{2} - 2e^t + \frac{3}{2}e^{2t}, x_2(t) = 1 - e^t.$$

9. 假设 $y = \varphi(x)$ 是二阶常系数线性微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0, \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

的解,试证 $y = \int_0^x \varphi(x-t) f(t) dt$ 是方程 $y'' + ay' + by = f(x)$ 的解,这里 $f(x)$ 为已知连续函数.

证明:$y = \int_0^x \varphi(x-t) f(t) dt$,

因为 $y' = \varphi(0) f(x) + \int_0^x \varphi'(x-t) f(t) dt = \int_0^x \varphi'(x-t) f(t) dt$,

$$y''=\int_0^x\varphi''(x-t)f(t)\mathrm{d}t+\varphi'(0)f(x)=\int_0^x\varphi''(x-t)f(t)\mathrm{d}t+f(x),$$

所以有

$$\begin{aligned}y''+ay'+by&=\int_0^x\varphi''(x-t)f(t)\mathrm{d}t+f(x)+a\int_0^x\varphi'(x-t)f(t)\mathrm{d}t+b\int_0^x\varphi(x-t)f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^x[\varphi''(x-t)+a\varphi'(x-t)+b\varphi(x-t)]f(t)\mathrm{d}t+f(x)\\&=f(x).\end{aligned}$$

从而，$y=\int_0^x\varphi(x-t)f(t)\mathrm{d}t$ 是方程 $y''+ay'+by=f(x)$ 的解，这里的 $f(x)$ 为已知连续函数.

习题 5.3

1. 求下列初值问题的解：

(1) $x''+9x=6\mathrm{e}^{3t}, x(0)=x'(0)=0$;

(2) $x^{(4)}+x=2\mathrm{e}^t, x(0)=x'(0)=x''(0)=x'''(0)=1$.

解：(1) 对方程两边施行拉普拉斯变换得

$$(s^2+9)X(s)=\frac{6}{s-3},$$

由此得 $X(s)=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{s-3}-\frac{s}{s^2+9}\right]-\frac{1}{s^2+9}$.

施行拉普拉斯反变换，查表得解

$$x(t)=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3t}-\frac{1}{3}\cos 3t-\frac{1}{3}\sin 3t.$$

此即为所求初值问题的解.

(2) 对方程两边施行拉普拉斯变换得

$$s^4X(s)-s^3-s^2-s-1+X(s)=\frac{2}{s-1},$$

由此得 $X(s)=\frac{1}{s-1}$.

施行拉普拉斯反变换，查表得解 $x(t)=\mathrm{e}^t$，此即为所要求的解.

方法点击： 拉普拉斯变换法是高阶常系数线性方程求特解的方法，求解时需要给出初始条件. 当然，求初值问题的解也可以先求出微分方程的通解，然后用初值条件来确定通解中的任意常数，从而求出初值问题的解.

2. 火车沿水平的道路运动. 火车的质量是 m，机车的牵引力是 F，运动时的阻力 $W=a+bv$，其中 a，b 是常数，而 v 是火车的速度；s 是走过的路程. 试确定火车的运动规律，设 $t=0$ 时 $s=0, v=0$.

解：根据牛顿第二定律 $ma=F-W$ 及 $W=a+bv$ 得

$$m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+a-F=0,$$

即
$$\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{b}{m}\frac{ds}{dt}=\frac{F-a}{m}. \qquad ①$$

此为二阶常系数线性非齐次方程,它对应的齐次方程的特征方程和特征根为

$$\lambda^2+\frac{b}{m}\lambda=0,\lambda_1=0,\lambda_2=-\frac{b}{m},$$

所以齐次方程的通解为 $s=c_1+c_2e^{-\frac{b}{m}t}$.

由于 $\lambda=0$ 是单重特征根,取 $\bar{s}=At$,代入方程①得 $A=\frac{F-a}{b}$,故方程的一个特解为 $\bar{s}=\frac{F-a}{b}t$.

因而方程①的通解为 $s=c_1+c_2e^{-\frac{b}{m}t}+\frac{F-a}{b}t$.

由初始条件 $t=0$ 时 $s=0,v=s'=0$ 得

$$\begin{cases}c_1+c_2=0,\\ -\frac{b}{m}c_2+\frac{F-a}{b}=0,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}c_2=\frac{m(F-a)}{b^2},\\ c_1=-\frac{m(F-a)}{b^2}.\end{cases}$

因此,满足初始条件的解即运动规律为 $S(t)=\frac{F-a}{b}t-\frac{m(F-a)}{b^2}(1-e^{-\frac{b}{m}t})$.

3. 试用拉普拉斯变换法解习题 5.2 的第 5 题和第 6 题,也可以利用计算机软件求解.

解:5(1). 令 $X_1(s)=\mathscr{L}[\varphi_1(t)],X_2(s)=\mathscr{L}[\varphi_2(t)]$. 设 $x_1=\varphi_1(t),x_2=\varphi_2(t)$ 满足微分方程组,对方程组施行拉普拉斯变换,得

$$\begin{cases}sX_1(s)-\varphi_1(0)=X_1(s)+2X_2(s),\\ sX_2(s)-\varphi_2(0)=4X_1(s)+3X_2(s),\end{cases}$$

即 $\begin{cases}(s-1)X_1(s)-2X_2(s)=\varphi_1(0)=3,\\ -4X_1(s)+(s-3)X_2(s)=\varphi_2(0)=3,\end{cases}$

解得 $X_1(s)=\frac{3(s-1)}{(s-5)(s+1)},X_2(s)=\frac{3(s+3)}{(s-5)(s+1)}$,

施行反变换即得

$$\varphi_1(t)=2e^{5t}+e^{-t},\varphi_2(t)=4e^{5t}-e^{-t}.$$

5(2). 令 $X_1(s)=\mathscr{L}[\varphi_1(t)],X_2(s)=\mathscr{L}[\varphi_2(t)],X_3(s)=\mathscr{L}[\varphi_3(t)]$.

设 $x_1=\varphi_1(t),x_2=\varphi_2(t),x_3=\varphi_3(t)$ 满足微分方程组,对方程组施行拉普拉斯变换,得

$$\begin{cases}sX_1(s)-\varphi_1(0)=X_1(s)+3X_3(s),\\ sX_2(s)-\varphi_2(0)=8X_1(s)+X_2(s)-X_3(s),\\ sX_3(s)-\varphi_3(0)=5X_1(s)+X_2(s)-X_3(s),\end{cases}$$

即 $\begin{cases}(s-1)X_1(s)-3X_3(s)=\varphi_1(0)=0,\\ -8X_1(s)+(s-1)X_2(s)+X_3(s)=\varphi_2(0)=-2,\\ -5X_1(s)-X_2(s)+(s+1)X_3(s)=\varphi_3(0)=-7.\end{cases}$

解出 $X_1(s),X_2(s),X_3(s)$ 得到

$$X_1(s)=\frac{15-21s}{s^3-s^2-15s-9},X_2(s)=\frac{-2s^2+7s-143}{s^3-s^2-15s-9},X_3(s)=\frac{-7s^2+12s-5}{s^3-s^2-15s-9},$$

施行反变换得到满足初值条件的解

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{13}{3}e^{-3t}-\frac{91+2\sqrt{7}}{42}e^{(2-\sqrt{7})t}-\frac{91-2\sqrt{7}}{42}e^{(2+\sqrt{7})t}\\-\frac{91}{9}e^{-3t}+\frac{511+374\sqrt{7}}{126}e^{(2-\sqrt{7})t}+\frac{511-374\sqrt{7}}{126}e^{(2+\sqrt{7})t}\\-\frac{52}{9}e^{-3t}-\frac{77-89\sqrt{7}}{126}e^{(2-\sqrt{7})t}-\frac{77+89\sqrt{7}}{126}e^{(2+\sqrt{7})t}\end{bmatrix}.$$

5(3). 令 $X_1(s)=\mathscr{L}[\varphi_1(t)],X_2(s)=\mathscr{L}[\varphi_2(t)],X_3(s)=\mathscr{L}[\varphi_3(t)]$. 对方程施行拉普拉斯变换,得

$$\begin{cases}sX_1(s)-\varphi_1(0)=X_1(s)+2X_2(s)+X_3(s),\\sX_2(s)-\varphi_2(0)=X_1(s)-X_2(s)+X_3(s),\\sX_3(s)-\varphi_3(0)=2X_1(s)+X_3(s),\end{cases}$$

即$\begin{cases}(s-1)X_1(s)-2X_2(s)-X_3(s)=\varphi_1(0)=1,\\-X_1(s)+(s+1)X_2(s)-X_3(s)=\varphi_2(0)=0,\\-2X_1(s)+(s-1)X_3(s)=\varphi_3(0)=0,\end{cases}$

解得 $X_1(s)=\frac{s^2-1}{s^3-s^2-5s-3},X_2(s)=\frac{s+1}{s^3-s^2-5s-3},X_3(s)=\frac{2(s+1)}{s^3-s^2-5s-3}$.

施行反变换得到满足初值条件的解

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\begin{bmatrix}\varphi_1(t)\\\varphi_2(t)\\\varphi_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(e^{3t}+e^{-t})\\\frac{1}{4}(e^{3t}-e^{-t})\\\frac{1}{2}(e^{3t}-e^{-t})\end{bmatrix}.$$

6(1). 令 $X_1(s)=\mathscr{L}[\varphi_1(t)],X_2(s)=\mathscr{L}[\varphi_2(t)]$,对方程施行拉普拉斯变换得

$$\begin{cases}sX_1(s)-\varphi_1(0)=X_1(s)+2X_2(s)+\frac{1}{s-1},\\sX_2(s)-\varphi_2(0)=4X_1(s)+3X_2(s)+\frac{1}{s},\end{cases}$$

即$\begin{cases}(s-1)X_1(s)-2X_2(s)=\varphi_1(0)+\frac{1}{s-1}=-1+\frac{1}{s-1},\\-4X_1(s)+(s-3)X_2(s)=\varphi_2(0)+\frac{1}{s}=1+\frac{1}{s}.\end{cases}$

解得 $X_1(s)=\frac{-s^3+7s^2-6s-2}{s(s-1)(s+1)(s-5)},X_2(s)=\frac{s^3-5s^2+7s+1}{s(s-1)(s+1)(s-5)},$

施行反变换得到满足初值条件的解为

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\begin{bmatrix}\varphi_1(t)\\\varphi_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{20}e^{5t}-e^{-t}-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{2}{5}\\\frac{3}{10}e^{5t}+e^{-t}-\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{5}\end{bmatrix}.$$

6(2). 令 $X_1(s)=\mathscr{L}[\varphi_1(t)],X_2(s)=\mathscr{L}[\varphi_2(t)],X_3(s)=\mathscr{L}[\varphi_3(t)]$,对方程施行拉普拉斯变换得

$$\begin{cases} sX_1(s)-\varphi_1(0)=X_2(s), \\ sX_2(s)-\varphi_2(0)=X_3(s), \\ sX_3(s)-\varphi_3(0)=-6X_1(s)-11X_2(s)-6X_3(s)+\dfrac{1}{s+1}, \end{cases}$$

即$\begin{cases} sX_1(s)-X_2(s)=\varphi_1(0)=0, \\ sX_2(s)-X_3(s)=\varphi_2(0)=0, \\ 6X_1(s)+11X_2(s)+(s+6)X_3(s)=\varphi_3(0)+\dfrac{1}{s+1}=\dfrac{1}{s+1}. \end{cases}$

解出

$$X_1(s)=\frac{1}{(s^3+6s^2+11s+6)(s+1)},$$

$$X_2(s)=\frac{s}{(s+1)(s^3+6s^2+11s+6)},$$

$$X_3(s)=\frac{s^2}{(s+1)(s^3+6s^2+11s+6)},$$

施行反变换得到满足初值条件的解为

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\begin{bmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\\ \varphi_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-3t}-\frac{3}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}te^{-t} \\ -2e^{-2t}+\frac{3}{4}e^{-3t}+\frac{5}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}te^{-t} \\ 4e^{-2t}-\frac{9}{4}e^{-3t}-\frac{7}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}te^{-t} \end{bmatrix}.$$

6(3). 令 $X_1(s)=\mathscr{L}[\varphi_1(t)]$, $X_2(s)=\mathscr{L}[\varphi_2(t)]$, 对方程组施行拉普拉斯变换得

$$\begin{cases} sX_1(s)-\varphi_1(0)=4X_1(s)-3X_2(s)+\dfrac{1}{s^2+1}, \\ sX_2(s)-\varphi_2(0)=2X_1(s)-X_2(s)-\dfrac{2s}{s^2+1}, \end{cases}$$

即$\begin{cases} (s-4)X_1(s)+3X_2(s)=\varphi_1(0)+\dfrac{1}{s^2+1}=\eta_1+\dfrac{1}{s^2+1}, \\ -2X_1(s)+(s+1)X_2(s)=\varphi_2(0)-\dfrac{2s}{s^2+1}=\eta_2-\dfrac{2s}{s^2+1}, \end{cases}$

解出 $X_1(s)=\dfrac{\eta_1 s^3+(\eta_1-3\eta_2)s^2+(\eta_1+7)s+\eta_1-3\eta_2+1}{(s-1)(s-2)(s^2+1)}$,

$$X_2(s)=\frac{\eta_2 s^3+(2\eta_1-4\eta_2-2)s^2+(\eta_2+8)s+2\eta_1-4\eta_2+2}{(s-1)(s-2)(s^2+1)},$$

施行反变换得到满足初值条件的解为

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\begin{bmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -(4+2\eta_1-3\eta_2)e^t+3(1+\eta_1-\eta_2)e^{2t}+\cos t-2\sin t \\ -(4+2\eta_1-3\eta_2)e^t+2(1+\eta_1-\eta_2)e^{2t}+2\cos t-2\sin t \end{bmatrix}.$$

4. 求下列初值问题的解：

(1) $\begin{cases} x_1'+x_2'=0, \\ x_1'-x_2'=1, \\ x_1(0)=1, x_2(0)=0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1''+3x_1'+2x_1+x_2'+x_2=0, \\ x_1'+2x_1+x_2'-x_2=0, \\ x_1(0)=1, x_1'(0)=-1, x_2(0)=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1''-m^2x_2=0, \\ x_2''+m^2x_1=0, \\ x_1(0)=\eta_1, x_1'(0)=\eta_2, x_2(0)=\eta_3, x_2'(0)=\eta_4. \end{cases}$

解:(1) 根据方程解得 $x_1'=\frac{1}{2}, x_2'=-\frac{1}{2}$.

故 $x_1=\frac{1}{2}t+c_1, x_2=-\frac{1}{2}t+c_2$.

因为 $x_1(0)=1$,所以$\frac{1}{2}\times 0+c_1=1$,解得 $c_1=1$,解得 $x_1=\frac{1}{2}t+1$.

因为 $x_2(0)=0$,所以 $-\frac{1}{2}\times 0+c_2=0$,解得 $c_2=0, x_2=-\frac{1}{2}t$.

综上所述,$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}t+1 \\ -\frac{1}{2}t \end{bmatrix}$.

(2) 对方程两边施行拉普拉斯变换,得

$$\begin{cases} [s^2X_1(s)-s+1]+3(sX_1(s)-1)+2X_1(s)+sX_2(s)+X_2(s)=0, \\ sX_1(s)-1+2X_1(s)+sX_2(s)-X_2(s)=0, \end{cases}$$

解得

$$X_1(s)=\frac{s^2-3}{(s+1)(s+2)(s-2)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{s-2},$$

$$X_2(s)=\frac{-s-2}{(s+1)(s+2)(s-2)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s+1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s-2},$$

故 $\varphi_1(t)=\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{12}e^{2t}, \varphi_2(t)=\frac{1}{3}(e^{-t}-e^{2t})$.

(3) 对方程两边施行拉普拉斯变换,得

$$\begin{cases} s^2X_1(s)-s\eta_1-\eta_2-m^2X_2(s)=0, \\ s^2X_2(s)-s\eta_3-\eta_4+m^2X_1(s)=0, \end{cases}$$

即 $\begin{cases} s^2X_1(s)-m^2X_2(s)=s\eta_1+\eta_2, \\ s^2X_2(s)+m^2X_1(s)=s\eta_3+\eta_4, \end{cases}$

解得

$$X_1(s)=\frac{\eta_1s^3+\eta_2s^2+m^2s\eta_3+\eta_4m^2}{s^4+m^4}, X_2(s)=\frac{\eta_3s^3+\eta_4s^2-m^2\eta_1s-m^2\eta_2}{s^4+m^4},$$

施行拉普拉斯反变换就得到解

$$\varphi_1(t)=\left[\left(\frac{1}{2}\eta_1-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4\right)\cos\frac{m}{\sqrt{2}}t+\left(\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2-\frac{1}{2}\eta_3+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4\right)\sin\frac{m}{\sqrt{2}}t\right]\cdot e^{\frac{m}{\sqrt{2}}t}+$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\eta_1+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4\right)\cos\frac{m}{\sqrt{2}}t+\left(\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{1}{2}\eta_3+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4\right)\sin\frac{m}{\sqrt{2}}t\right]\cdot e^{-\frac{m}{\sqrt{2}}t},$$

$$\varphi_2(t)=\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{1}{2}\eta_3-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4\right)\cos\frac{m}{\sqrt{2}}t+\left(\frac{1}{2}\eta_1-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4\right)\sin\frac{m}{\sqrt{2}}t\right]\cdot e^{-\frac{m}{\sqrt{2}}t}+$$

$$\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{1}{2}\eta_3+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4\right)\cos\frac{m}{\sqrt{2}}t+\left(-\frac{1}{2}\eta_1-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4\right)\sin\frac{m}{\sqrt{2}}t\right]\cdot e^{\frac{m}{\sqrt{2}}t}.$$

第六章　非线性微分方程

习题 6.1

1. 试求出下列方程组的所有驻定解，并讨论相应的驻定解的稳定性态：

(1) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(1-x-y),\\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{4}y(2-3x-y);\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=9x-6y+4xy-5x^2,\\ \dfrac{dy}{dt}=6x-6y-5xy+4y^2.\end{cases}$

解:(1) 令 $x(1-x-y)=0,\dfrac{1}{4}y(2-3x-y)=0$,则得到驻定解为

$$\begin{cases}x=0,\\y=0,\end{cases}\begin{cases}x=0,\\y=2,\end{cases}\begin{cases}x=1,\\y=0,\end{cases}\begin{cases}x=\dfrac{1}{2},\\y=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

① 在 $x=0,y=0$ 处的线性化方程为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x,\\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{2}y.\end{cases}$$

显然可以看出驻定解 $x=0,y=0$ 是不稳定的.

② 在 $x=0,y=2$ 处的线性化方程为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x,\\ \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}y.\end{cases}$$

容易看出其特征根为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-\dfrac{1}{2}$,故此解是渐近稳定的.

③ 在 $x=1,y=0$ 处的线性化方程为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x-y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{1}{4}y.\end{cases}$$

显然其特征根为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-\dfrac{1}{4}$,故此解是渐近稳定的.

④ 在 $x=\dfrac{1}{2},y=\dfrac{1}{2}$ 处的线性化方程为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{1}{2}(x+y),\\ \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{1}{8}(3x+y),\end{cases}$$

经计算其特征方程为 $\lambda^2+\dfrac{5}{8}\lambda-\dfrac{1}{8}=0$，显然有特征根为正数，故此解是不稳定的.

(2) 令 $9x-6y+4xy-5x^2=0, 6x-6y-5xy+4y^2=0$，则得到驻定解为

$$\begin{cases}x=0,\\ y=0,\end{cases}\begin{cases}x=1,\\ y=2,\end{cases}\begin{cases}x=2,\\ y=1.\end{cases}$$

① 在 $x=0, y=0$ 处的线性化方程为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=9x-6y,\\ \dfrac{dy}{dt}=6x-6y,\end{cases}$$

其特征方程为 $\lambda^2-15\lambda+90=0$，解得两特征根均有正实部，故此解是不稳定的.

② 在 $x=1, y=2$ 处的线性化方程为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=7x-2y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-4x-3y,\end{cases}$$

其特征方程为 $\lambda^2-4\lambda-29=0$，解得两特征根为实数且一正一负，故此解也是不稳定的.

③ 在 $x=2, y=1$ 处的线性化方程为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-7x+2y,\\ \dfrac{dy}{dt}=x-8y,\end{cases}$$

其特征方程为 $\lambda^2+15\lambda+54=0$，解得两特征根为 $\lambda_1=-6, \lambda_2=-9$，故此解是渐近稳定的.

2. 研究下列方程(组)零解的稳定性：

(1) $\dfrac{d^3x}{dt^3}+5\dfrac{d^2x}{dt^2}+6\dfrac{dx}{dt}+x=0$;

(2) $\dfrac{dx}{dt}=\mu x-y, \dfrac{dy}{dt}=\mu y-z, \dfrac{dz}{dt}=\mu z-x$ (μ 为常数).

解：(1) 由已知微分方程得其特征方程为

$$\lambda^3+5\lambda^2+6\lambda+1=0,$$

由此得赫尔维茨行列式

$$a_0=1, a_1=5, \Delta_2=\begin{vmatrix}5 & 1\\ 1 & 6\end{vmatrix}=29, a_3=1.$$

根据定理 3，特征方程所有根均有负实部，由教材的定理 2 知零解是渐近稳定的.

(2) 由已知微分方程组得其特征方程为

$$\begin{vmatrix}\mu-\lambda & -1 & 0\\ 0 & \mu-\lambda & -1\\ -1 & 0 & \mu-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

即 $\lambda^3-3\mu\lambda^2+3\mu^2\lambda+1-\mu^3=0$，由此得赫尔维茨行列式

$$a_0=1,a_1=-3\mu,\Delta_2=\begin{vmatrix}-3\mu & 1\\ 1-\mu^3 & 3\mu^2\end{vmatrix}=-8\mu^3-1,a_3=1-\mu^3.$$

所以当 $\mu<-\frac{1}{2}$ 时，$a_1>0,\Delta_2>0,a_3>0$，此时由教材的定理 3 知特征方程所有根均有负实部，再由教材的定理 2 知零解是渐近稳定的.

当 $\mu=-\frac{1}{2}$ 时，容易验证 3 个特征根均为负实部，故是渐近稳定的.

当 $\mu>-\frac{1}{2}$ 时，存在特征根具有正实部，故零解是不稳定的.

3. 试判别下列函数的定号性：

(1) $V(x,y)=x^2$；

(2) $V(x,y)=x^2-2xy^2$；

(3) $V(x,y)=x^2-2xy^2+y^4+x^4$；

(4) $V(x,y)=x^2+2xy+y^2+x^2y^2$；

(5) $V(x,y)=x\cos x+y\sin y$.

解：(1) $V(x,y)=x^2\geqslant 0$，所以是常正的.

(2) $V(x,y)=x^2-2xy^2$ 是不定号的.

(3) $V(x,y)=x^2-2xy^2+y^4+x^4=(x-y^2)^2+x^2$ 是定正的.

(4) $V(x,y)=x^2+2xy+y^2+x^2y^2=(x+y)^2+x^2y^2$ 是定正的.

(5) $V(x,y)=x\cos x+y\sin y$ 是不定号的.

4. 试用形如 $V(x,y)=ax^2+by^2$ 的 V 函数确定下列方程组零解的稳定性：

(1) $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-xy^2,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-yx^2$；

(2) $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-x+2y^3,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-2xy^2$；

(3) $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x^3-2y^3,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=xy^2+x^2y+\frac{1}{2}y^3$.

解：(1) 取 $V(x,y)=x^2+y^2$，则

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2x(-xy^2)+2y(-yx^2)=-4x^2y^2,$$

因为 V 定正且 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 常负，所以给定方程组的零解是稳定的.

(2) 取 $V(x,y)=x^2+2y^2$，则

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2x(-x+2y^3)+4y(-2xy^2)=-2x^2-4xy^3,$$

因为 V 定正且 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 定负，所以给定方程组的零解是渐近稳定的.

(3) 取 $V(x,y)=x^2+2y^2$，则

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2x(x^3-2y^3)+4y\left(xy^2+x^2y+\frac{1}{2}y^3\right)$$
$$=2x^4+4x^2y^2+2y^4,$$

因为 V 定正且 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 定正，所以给定方程组的零解是不稳定的.

5. 研究下列方程组零解的稳定性：

(1) $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y^2+x(x^2+y^2),\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x^2-y^2(x^2-y^2)$；

(2) $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax-xy^2,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2x^4y$（$a$ 为参数）；

(3) $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax-y^2,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2x^3y$（$a$ 为参数）.

解：(1) 取 $V(x,y)=x^2+y^2$，则

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$
$$=2x[-y^2+x(x^2+y^2)]+2y[-x^2-y^2(x^2-y^2)].$$

当 $x=0$ 时，$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=2y^5$，显然它是不定号的，所以给定方程组的零解是不稳定的.

(2) 取 $V(x,y)=x^4+y^2$，则

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=4x^3(ax-xy^2)+2y(2x^4y)=4ax^4,$$

所以给定方程组的零解，当 $a<0$ 时是渐近稳定的；当 $a=0$ 时是稳定的；当 $a>0$ 时是不稳定的.

(3) 取 $V(x,y)=x^4+y^2$，则

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=4x^3(ax-y^2)+2y(2x^3y)=4ax^4,$$

所以给定方程组的零解，当 $a<0$ 时是渐近稳定的；当 $a=0$ 时是稳定的；当 $a>0$ 时是不稳定的.

6. 给定微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+f(x)=0,$$

其中 $f(0)=0$，而当 $x\neq 0$ 时，$xf(x)>0(-k<x<k)$. 试将其化为平面方程组，并用形如

$$V(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x f(s)\mathrm{d}s$$

的 V 函数讨论方程组零解的稳定性.

解：令 $y=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，则原方程化为平面方程组

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-f(x).\end{cases}$$

取 $V(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x f(s)\mathrm{d}s$，则

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f(x)\cdot y+y\cdot(-f(x))=0,$$

所以方程组的零解是稳定的.

习题 6.2

1. 试求下列线性方程组的奇点,并判断奇点的类型及稳定性:

(1) $\dfrac{dx}{dt}=-x-y+1,\dfrac{dy}{dt}=x-y-5$;

(2) $\dfrac{dx}{dt}=2x-7y+19,\dfrac{dy}{dt}=x-2y+5$.

解:(1) 令 $-x-y+1=0,x-y-5=0$,经计算得 $x=3,y=-2$,即奇点为$(3,-2)$.

再令 $z=x-3,\eta=y+2$,则原方程组变为

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dt}=-z-\eta,\\[2mm]\dfrac{d\eta}{dt}=z-\eta.\end{cases}$$

此时

$$a=-1,b=-1,c=1,d=-1,$$

$$p=-(a+d)=2,q=ad-bc=2,p^2-4q=4-8=-4<0,$$

所以由教材中图(6.10)可得该奇点是稳定焦点.

(2) 令 $2x-7y+19=0,x-2y+5=0$,经计算得 $x=1,y=3$,即奇点为$(1,3)$.

令 $z=x-1,\eta=y-3$,则原方程组变为

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dt}=2z-7\eta,\\[2mm]\dfrac{d\eta}{dt}=z-2\eta,\end{cases}$$

此时

$$a=2,b=-7,c=1,d=-2,$$

$$p=-(a+d)=0,q=ad-bc=3,p^2-4q=0-12=-12<0,$$

所以由教材中图(6.10)可得该奇点是中心奇点.

2. 试讨论方程组

$$\frac{dx}{dt}=ax+by,\frac{dy}{dt}=cy$$

的奇点类型,其中 a,b,c 为实常数且 $ac\neq 0$.

解:显然方程组有唯一奇点(0,0),由方程组知:

当 $ac<0$ 时,原点(0,0)为鞍点;

当 $ac>0,a\neq c,a>0$ 时,(0,0)为不稳定结点;

当 $ac>0,a\neq c,a<0$ 时,(0,0)为稳定结点;

当 $a=c,b\neq 0,a>0$ 时,(0,0)为不稳定退化结点;

当 $a=c,b\neq 0,a<0$ 时,(0,0)为稳定退化结点;

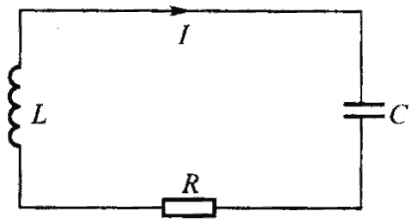
当 $a=c>0,b=0$ 时,(0,0)为不稳定临界结点;

当 $a=c<0,b=0$ 时,(0,0)为稳定临界结点.

3. RLC 振动回路(如图(6.1))中电流变化规律满足微分方程

$$L\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{I}{C}=0(L>0,R\geqslant 0,C>0),$$

试讨论这一系统的平衡状态(即方程的奇点)的可能类型.



图(6.1)

解:令 $x=I,y=\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$,则原方程等价于方程组

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{LC}x-\frac{R}{L}y.\end{cases}$$

显然此方程组有唯一的奇点(0,0).

利用上述第 2 题的结论,这里 $p=\frac{R}{L},q=\frac{1}{LC}>0,p^2-4q=\frac{R^2C-4L}{L^2C}$,知

当 $R>0,R^2C-4L>0$ 时,(0,0) 为稳定结点;

当 $R>0,R^2C-4L=0$ 时,(0,0) 为稳定退化结点;

当 $R>0,R^2C-4L<0$ 时,(0,0) 为稳定焦点;

当 $R=0$ 时,(0,0) 为中心奇点.

4. 试确定下列方程组的周期解、极限环,并讨论极限环的稳定性:

(1) $$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y-x(x^2+y^2-1)^2,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x-y(x^2+y^2-1)^2;\end{cases}$$

(2) $$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9)-y(x^2+y^2-4),\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9)+x(x^2+y^2-4).\end{cases}$$

解:(1) 作变换 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,原方程组可化为

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-r(r^2-1)^2,\\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=1,\end{cases}$$

求解上述方程组,得到两个特解

$$\begin{cases}r=0,\\ \theta=t-t_0,\end{cases}\text{及}\begin{cases}r=1,\\ \theta=t-t_0.\end{cases}$$

故原方程组有一个奇点(0,0),一个周期解 $x^2+y^2=1$. 容易判断周期解 $x^2+y^2=1$ 是半稳定的极限环.

(2) 作变换 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,原方程组可化为

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=r(r^2-1)(r^2-9),\\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=r^2-4.\end{cases}$$

易见原方程组有一奇点(0,0),两个周期解 $x^2+y^2=1, x^2+y^2=9$.

先考虑 $r=1$ 内部的轨线,由 $\frac{d\theta}{dt}<0$ 知轨线沿顺时针方向.

又由 $\frac{dr}{dt}>0$ 且 $r\leqslant 1$,易知 $\lim\limits_{t\to+\infty} r(t)=1$.

同样在 $r=1$ 外部的轨线,有 $\lim\limits_{t\to+\infty} r(t)=1$.

因而 $r=1$ 是稳定极限环.

再考虑 $r=3$ 内部的轨线,$2<r<3$,由 $\frac{d\theta}{dt}>0$ 知轨线沿逆时针方向.

又由 $\frac{dr}{dt}<0$,且 $r\leqslant 3$,易知 $\lim\limits_{t\to+\infty} r(t)=3$.

同样在 $r=3$ 的外部轨线,有 $\lim\limits_{t\to+\infty} r(t)=3$.

因此 $r=3$ 是不稳定极限环.

5. 试判别下列方程组有无极限环存在:

(1) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x+y+\frac{1}{3}x^3-y^2x,\\ \frac{dy}{dt}=-x+y+yx^2+\frac{2}{3}y^3;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y-x+x^3,\\ \frac{dy}{dt}=-x-y+y^3.\end{cases}$

解:(1) 设 $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x+y+\frac{1}{3}x^3-y^2x=X(x,y),\\ \frac{dy}{dt}=-x+y+yx^2+\frac{2}{3}y^3=Y(x,y),\end{cases}$ 则

$$\frac{\partial X(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial Y(x,y)}{\partial y}=1+x^2-y^2+1+x^2+2y^2=2+2x^2+y^2>0,$$

故由定理 8,知原方程组无极限环.

(2) 作变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,原方程组可化为

$$\begin{cases}\frac{dr}{dt}=r[r^2(\sin^4\theta+\cos^4\theta)-1],\\ \frac{d\theta}{dt}=-1+r^2\sin\theta\cdot\cos\theta(\sin^2\theta-\cos^2\theta).\end{cases}$$

由于

$$\sin^4\theta+\cos^4\theta=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta\in\left[\frac{1}{2},1\right],$$

所以当 $r<1$ 时,$\frac{dr}{dt}<0$;当 $r^2>2$ 时,$\frac{dr}{dt}>0$.

因此在环域 $1<r^2<2$ 内存在极限环,并且是不稳定的.

6. 证明下列方程(组)存在唯一的稳定极限环:

(1) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y,\\ \frac{dy}{dt}=-x+y-x^5-3x^2y;\end{cases}$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\alpha(x^{2n}-\beta)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\gamma x^{2m-1}=0$($\alpha,\beta,\gamma$ 为正常数,n,m 为正整数).

证明:(1) 原方程组等价于线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+(3x^2-1)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+(x^5+x)=0,$$

这里 $f(x)=3x^2-1,g(x)=x^5+x,F(x)=x^3-x.$

容易验证,它们满足定理 9 的条件,所以原方程组存在唯一的稳定极限环.

(2) 由$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\alpha(x^{2n}-\beta)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\gamma x^{2m-1}=0$,知

$$f(x)=\alpha(x^{2n}-\beta),g(x)=\gamma x^{2m-1},F(x)=\frac{\alpha}{2n+1}x^{2n+1}-\alpha\beta x.$$

容易验证,它们均满足定理 9 的条件,所以原方程存在唯一的稳定极限环.

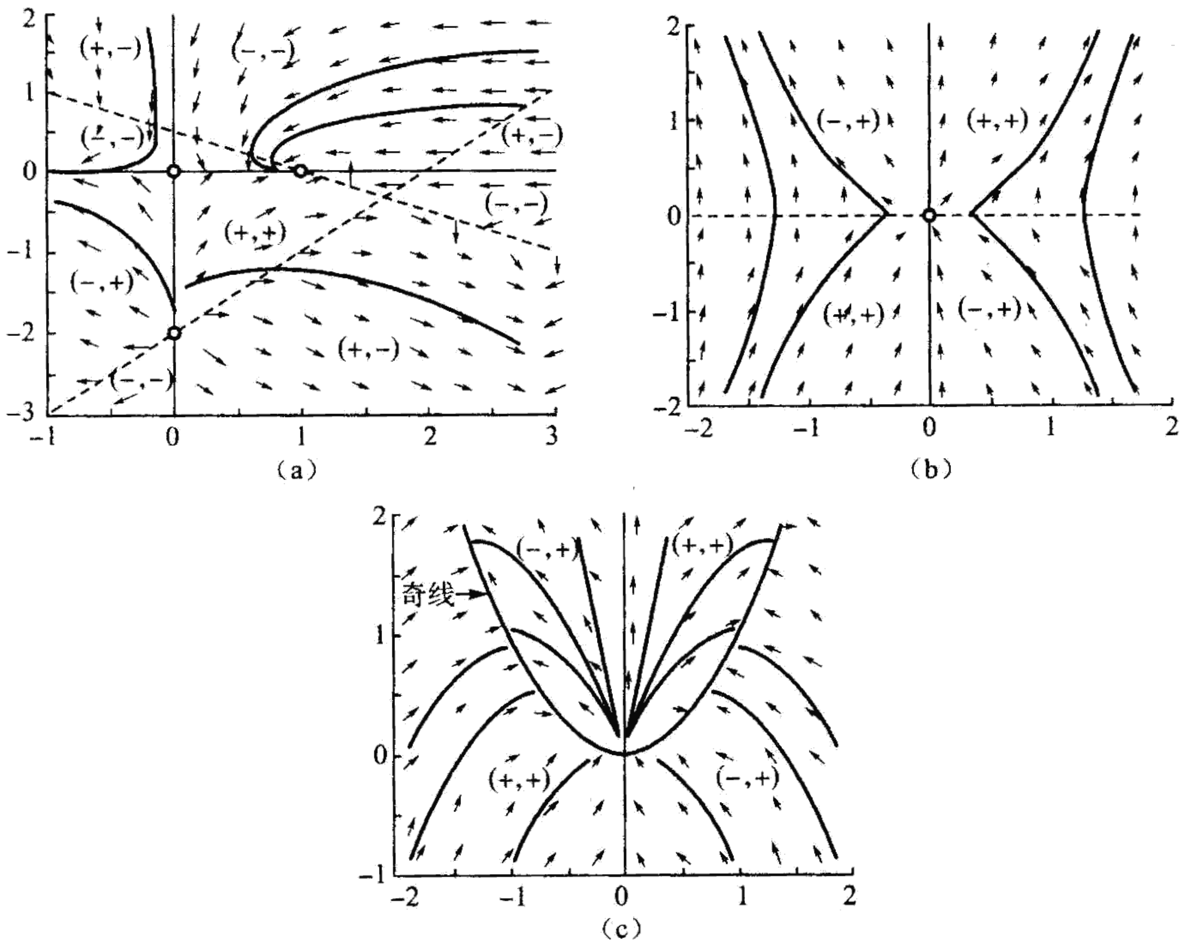
7. 试用等倾斜线法在相平面上画出下列方程的轨线图貌:

(1) $\dot{x}=x(1-x-2y),\dot{y}=y(x-y-2)$;

(2) $\dot{x}=xy,\dot{y}=y^2+x^4$;

(3) $\dot{x}=xy-x^3,\dot{y}=y^2-2x^2y+x^4$.

解:方程(1),(2),(3) 的轨线图貌分别如图(6.2) 的(a),(b),(c) 所示.



图(6.2)

习题 6.3

1. 将下列方程化为哈密顿方程(令 $\dot{x}=-y$),并画出其相图:

(1) $\ddot{x}+x-x^2=0$;　　(2) $\ddot{x}+x-x^3=0$;

(3) $\ddot{x}-x-x^3=0$.

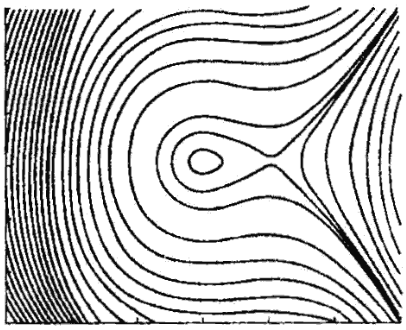
解:(1) 令 $\dot{x}=-y$,则原方程等价于方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=-y,\\ \dot{y}=-x^2+x,\end{cases}$$

此方程为哈密顿方程,其哈密顿函数为

$$H(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3.$$

相图如图(6.3)中(a).



(a)

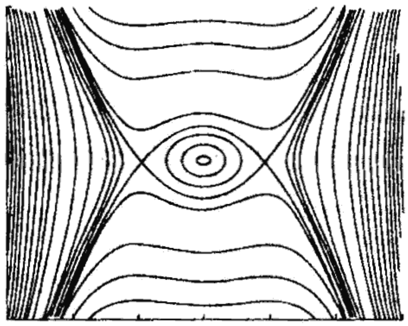
(2) 令 $\dot{x}=-y$,则原方程等价于方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=-y,\\ \dot{y}=x-x^3,\end{cases}$$

此方程为哈密顿方程,相应的哈密顿函数为

$$H(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4.$$

相图如图(6.3)中(b).



(b)

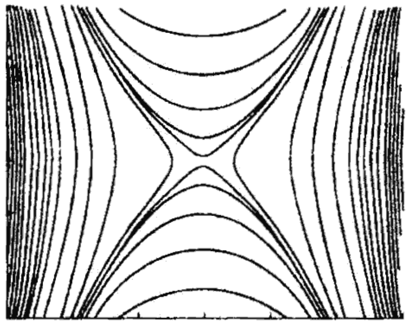
(3) 令 $\dot{x}=-y$,则原方程等价于方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=-y,\\ \dot{y}=-x^3-x,\end{cases}$$

这是哈密顿方程,相应的哈密顿函数为

$$H(x,y)=\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4.$$

相图如图(6.3)中(c).



(c)

图(6.3)

2. 推导用双曲函数表示 $\varphi'^2=\varphi^2(a-2\varphi)$ 的精确解(6.33).

$\left\{注:(6.33)式为 u=\varphi(x-at)=\frac{a}{2}\mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{a}(x-at-\xi_0)\right]\right\}$.

解:从 $\varphi'^2=\varphi^2(a-2\varphi)$ 两边开平方可得 $\varphi'=\pm\varphi\sqrt{(a-2\varphi)}$,不妨取正号(取负号时,同理可解).即只需要求解 $\varphi'=\varphi\sqrt{(a-2\varphi)}$.

变形该方程,得到

$$\frac{d\varphi}{\varphi\sqrt{a-2\varphi}}=d\xi. \quad ①$$

下面求解不定积分 $\int\frac{d\varphi}{\varphi\sqrt{a-2\varphi}}$. 令 $\sin^2 x=\frac{2}{a}\varphi$,即 $\varphi=\frac{a}{2}\sin^2 x$,则

$$d\varphi=a\sin x\cos x dx,$$

$$\varphi\sqrt{a-2\varphi}=\sqrt{a}\cdot\frac{a}{2}\cdot\sin^2 x\cos x,$$

从而

$$\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\varphi\sqrt{a-2\varphi}}=\int\frac{a\sin x\cos x}{\sqrt{a}\cdot\frac{a}{2}\cdot\sin^2 x\cos x}\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{a}}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}.$$

注意到

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}&=\int\frac{-\sin x\mathrm{d}x}{-\sin^2 x}=\int\frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos^2 x-1}\\&=\int\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\cos x-1}-\frac{1}{\cos x+1}\Big)\mathrm{d}\cos x\\&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+c_1,\end{aligned}$$

故

$$\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\varphi\sqrt{a-2\varphi}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+c_2.$$

因此，由 ① 式两边同时积分可得

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+c_2=\xi-c_3,$$

即

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\mathrm{e}^{\sqrt{a}(\xi-\xi_0)},$$

这里 $\xi_0=c_3+c_2$ 是积分常数. 解出 $\cos x$，则有

$$\cos x=\frac{1-\mathrm{e}^{\sqrt{a}(\xi-\xi_0)}}{1+\mathrm{e}^{\sqrt{a}(\xi-\xi_0)}},$$

两边平方得到

$$\cos^2 x=\frac{(1-\mathrm{e}^{\sqrt{a}(\xi-\xi_0)})^2}{(1+\mathrm{e}^{\sqrt{a}(\xi-\xi_0)})^2}.$$

注意到 $\cos^2 x=1-\sin^2 x=1-\frac{2}{a}\varphi$，则有

$$1-\frac{2}{a}\varphi=\frac{(1-\mathrm{e}^{\sqrt{a}(\xi-\xi_0)})^2}{(1+\mathrm{e}^{\sqrt{a}(\xi-\xi_0)})^2},$$

解得

$$\varphi=\frac{a}{2}\cdot\frac{4}{\mathrm{e}^{\sqrt{a}(\xi-\xi_0)}+2+\mathrm{e}^{-\sqrt{a}(\xi-\xi_0)}}=\frac{a}{2}\cdot\mathrm{sech}^2\Big(\frac{\sqrt{a}}{2}(\xi-\xi_0)\Big).$$

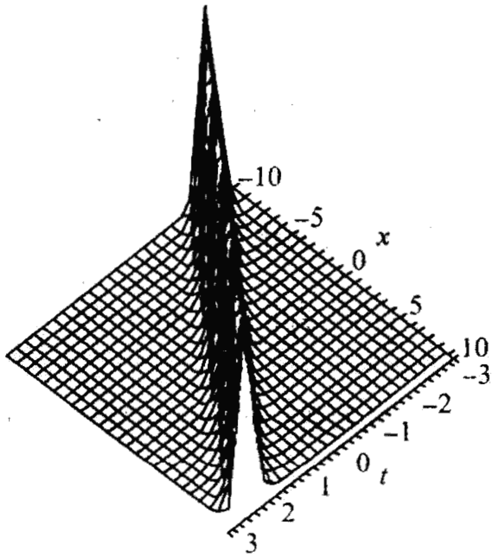
将 $\xi=x-at$ 代入上式，则得到公式(6.33).

3. 在空间(x,t,u) 中画出 KdV 方程的单、双孤立子解(6.33)，(6.37) 图.

$\Big\{$注：(6.33) 为 $u=\varphi(x-at)=\frac{a}{2}\mathrm{sech}^2\Big[\frac{1}{2}\sqrt{a}(x-at-\xi_0)\Big]$，

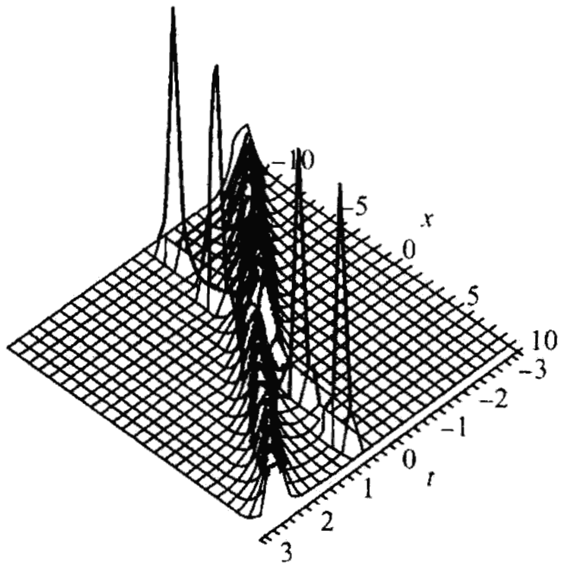
(6.37) 为$u(x,t)=-12\dfrac{3+4\cosh(8t-2x)+\cosh(64t-4x)}{[\cosh(36t-3x)+3\cosh(28t-x)]^2}\Big\}$

解:单独立子解(6.33)如图(6.4)所示.



图(6.4)

双孤立子解(6.37)如图(6.5)所示.



图(6.5)

4. 试证明 n 维空间中容积变化率公式 $\alpha \equiv \frac{1}{U}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \mathrm{div}\boldsymbol{f}$.

证明:在 n 维(相)空间 $(\boldsymbol{x}) \equiv (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 中由驻定微分方程 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 定义的向量场为 $(\boldsymbol{f})$,通过容积 U 的 $\mathrm{d}x_i$ 面的 x_i 方向沿方程的解的单位变化量为

$$\left(f_i \pm \frac{1}{2}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\right)\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{i-1}\mathrm{d}x_{i+1}\cdots \mathrm{d}x_n,$$

其中 $\pm$ 表示 U 的 x_i 方向的两侧,其 x_i 方向的总单位变化量为

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_1\cdots \mathrm{d}x_{i-1}\mathrm{d}x_{i+1}\cdots \mathrm{d}x_n = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots \mathrm{d}x_n.$$

于是容积 U 沿方程的解的总变化量为

$$\oint_{\partial U} \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}S = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \cdot U,$$

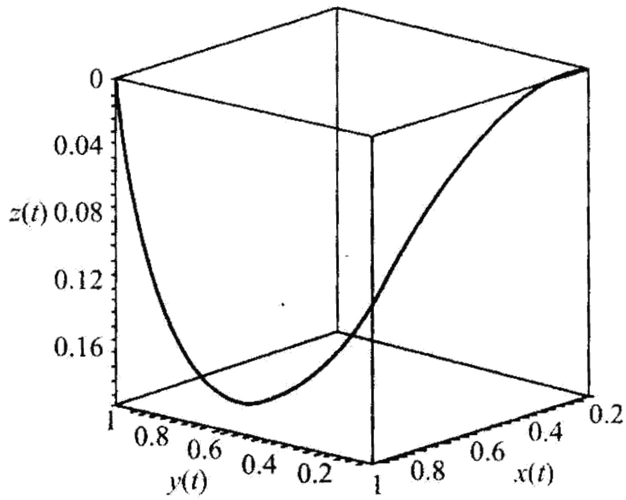
其中 $\boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}S$ 是任意面元沿向量场($\boldsymbol{f}$) 的变化量，∂U 表示容积 U 的闭合表面，U 容积为所有 U 中单位体积 $\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n$ 之和.

于是得容积 U 沿驻定微分方程的解的变化率

$$\alpha = \frac{1}{U} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{U} \oint_{\partial U} \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}S = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \mathrm{div} \boldsymbol{f}.$$

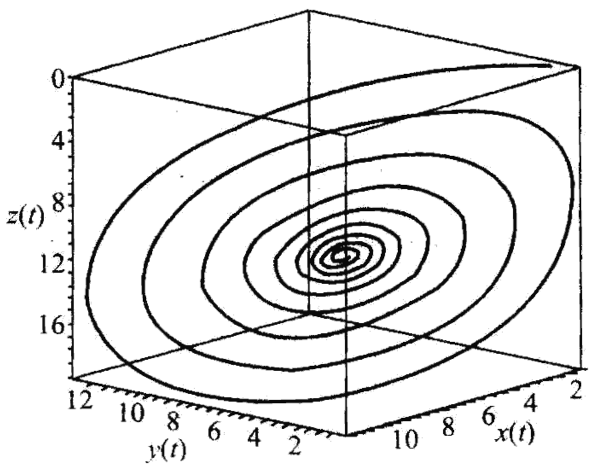
5. 试用计算机绘出洛伦茨方程(6.38)在参数 $a=10, b=\frac{8}{3}$ 和初值(1,1,0)下不同参数 $c=\frac{1}{3}$,13,20,120 的轨线图貌.

解:(1) 当参数 $a=10, b=\frac{8}{3}, c=\frac{1}{3}$，且初值为(1,1,0) 时，方程(6.38) 的轨线图形如图(6.6)所示.



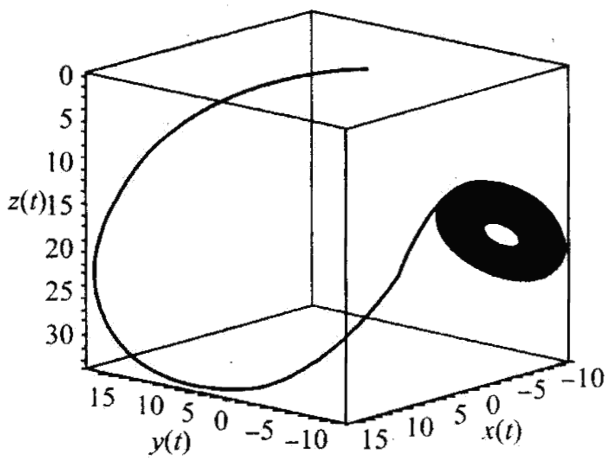
图(6.6)

(2) 当参数 $a=10, b=\frac{8}{3}, c=13$，且初值为(1,1,0)时，方程(6.38)的轨线图形如图(6.7)所示.



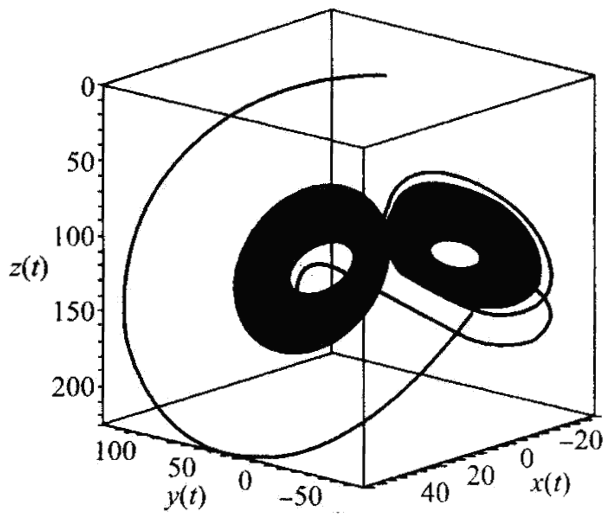
图(6.7)

(3) 当参数$a=10,b=\frac{8}{3},c=20$,且初值为(1,1,0)时,方程(6.38)的轨线图形如图(6.8)所示.



图(6.8)

(4) 当参数$a=10,b=\frac{8}{3},c=120$,且初值为(1,1,0)时,方程(6.38)的轨线图形如图(6.9)所示.



图(6.9)

第七章　一阶线性偏微分方程

习题 7.1

1. 试生成偏微分方程:

(1) 设$f(u)$是u的任意可微函数,试由$z=f(x^2-y^2)$中消去f,用偏微分方程表示该关系式;

(2) 试由关系式$(x-a)^2-(y-b)^2+z=1$中消去参数a,b化为偏微分方程.

解:(1)$z=f(x^2-y^2)$分别对x,y取偏导数,则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_u(x^2-y^2),\frac{\partial z}{\partial y}=-2yf_u(x^2-y^2).$$

消去f得一阶线性齐次偏微分方程

$$y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

(2) 对$(x-a)^2+(y-b)^2+z=1$分别取x,y的偏导数,则有

$$2(x-a)+z_x=0,2(y-b)+z_y=0.$$

由上述方程解出a,b后代入原关系式,得一阶非线性偏微分方程

$$z_x^2+z_y^2+4z=4.$$

2. 试判断下列偏微分方程的类型,并写出其对应的特征方程:

(1) $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+xy\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$;　　(2) $y\dfrac{\partial u}{\partial x}-x\dfrac{\partial u}{\partial y}=x-y$;

(3) $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+z\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{x}$;　　(4) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}=x+y+2z$.

解:(1)1个因变量、3个自变量的一阶齐次线性偏微分方程,其对应的特征方程为$\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dz}{xy}$.

(2)1个因变量、2个自变量的一阶非齐次线性偏微分方程,其对应的特征方程为$\dfrac{dx}{y}=\dfrac{dy}{-x}=\dfrac{du}{x-y}$.

(3)1个因变量、2个自变量的一阶非齐次拟线性偏微分方程,其对应的特征方程为$\dfrac{dx}{y}=\dfrac{dy}{z}=\dfrac{xdu}{y}$.

(4) 原方程可改写为$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+0\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+y+2z$. 其对应的特征方程为$\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{0}=\dfrac{dz}{x+y+2z}$.

3. 试求解下列偏微分方程:

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=1+x^2y$;　　(2) $z_{xt}=\sin t+x$;　　(3) $z_{xx}=6xy+12x$.

解:(1) 原方程可变为$\dfrac{\partial z}{\partial x}+0\dfrac{\partial z}{\partial y}=1+x^2y$. 其特征方程为$\dfrac{dx}{1}=\dfrac{dy}{0}=\dfrac{dz}{1+x^2y}$,则有$dy=0$,解得首次积分$y=\tilde{c}$.

又由$\dfrac{dx}{1}=\dfrac{dz}{1+x^2y}$得$\dfrac{dz}{dx}=1+x^2y$,当视$y$为常数时,方程为常微分方程,有$dz=(1+x^2\tilde{c})dx$,

$z=x+\dfrac{1}{3}x^3\tilde{c}+c$. 将第一个首次积分代入,因上式积分时视$y$为常数,可视积分常数$c$为$y$的任意函数$c=C(y)$. 于是有$z=x+\dfrac{1}{3}x^3y+C(y)$,其积分常数$C(y)$为$y$的任意函数. 此为偏微分方程的解.

(2) 令$u=z_x$,则原方程变为$u_t=\sin t+x$.

可视x为常数,对t积分得$u=-\cos t+xt+C(x)$,即$z_x=-\cos t+xt+C(x)$.

再对x积分(视t为常数),最后得

$$z=-x\cos t+\frac{1}{2}x^2t+f(x)+g(t),$$

式中 $f(x),g(t)$ 均为任意函数. 此即为偏微分方程的解.

(3) 若视 y 为常数方程,则可对 x 积分得 $z_x = 3x^2y + 6x^2 + \Phi(y)$.

再对 x 积分一次得 $z = x^3y + 2x^3 + x\Phi(y) + \Psi(y)$,其中 Φ,Ψ 为任意函数.

4. 试求下列一阶微分方程组的首次积分;

(1) $\dfrac{\mathrm{d}x}{z} = \dfrac{\mathrm{d}y}{xz} = \dfrac{\mathrm{d}z}{y}$;　　(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{z}{x},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \dfrac{z(y+2z-1)}{x(y-1)}$.

解:(1) 由第一、二式得

$$\frac{x\mathrm{d}x}{xz} = \frac{\mathrm{d}y}{xz} = \frac{x\mathrm{d}x - \mathrm{d}y}{0}, x\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0, x^2 = 2y + c_1.$$

代入第一、三式有

$$\frac{\mathrm{d}x}{z} = \frac{\mathrm{d}z}{y} = \frac{\mathrm{d}z}{\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{c_1}{2}}, \left(\frac{x^2}{2} - \frac{c_1}{2}\right)\mathrm{d}x = z\mathrm{d}z, \frac{x^3}{6} - \frac{c_1 x}{2} = \frac{z^2}{2} + \tilde{c}_2.$$

方程有两个独立的首次积分

$$x^2 - 2y = c_1, x^3 - 3x(x^2 - 2y) - 3z^2 = c_2,$$

其中 c_1,c_2 为积分常数.

(2) 将方程改写成对称形式 $\dfrac{\mathrm{d}x}{x(y-1)} = \dfrac{\mathrm{d}y}{z(y-1)} = \dfrac{\mathrm{d}z}{z(y+2z-1)}$. 由后两式有 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = \dfrac{2}{y-1}z + 1$,

是线性微分方程,有解

$$z = \mathrm{e}^{\ln|y-1|^2}\left(\int \mathrm{e}^{-\ln|y-1|^2}\mathrm{d}y + \tilde{c}\right) = (y-1)^2 c_1 - (y-1).$$

代入前两式有

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{z} = \frac{\mathrm{d}y}{(y-1)^2 c_1 - (y-1)} = \left[\frac{c_1}{(y-1)c_1 - 1} - \frac{1}{y-1}\right]\mathrm{d}y.$$

积分得

$$\frac{(y-1)c_1 - 1}{y-1} = x + c, -(y-1)^{-1} - x = c - c_1.$$

于是方程有两个独立的首次积分

$$z = (y-1)^2 c_1 - (y-1), -(y-1)^{-1} - x = c - c_1,$$

其中 c_1,c 为积分常数.

5. 试用可积组合法求解下列齐次微分方程组:

(1) $\begin{cases} x' = 2x + 4y, \\ y' = -x - 2y; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1' = x_2 - x_3, \\ x_2' = x_1 + x_2, \\ x_3' = x_1 + x_3; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + x_2 - x_3, \\ x_2' = x_1 + 3x_2 - x_3, \\ x_3' = 3x_1 + 3x_2 - x_3. \end{cases}$

解:(1) 原微分方程组可改写为对称形式$\frac{dx}{2x+4y}=\frac{dy}{-x-2y}=\frac{dt}{1}$,可组合积分为

$$xdx+2ydx+2xdy+4ydy=\frac{1}{2}d(x^2)+2d(xy)+2d(y^2)=0,$$

$$x^2+4xy+4y^2=(x+2y)^2=c_1^2,$$

从而 $x+2y=c_1$.

代入方程有$\frac{dy}{-c_1}=\frac{dt}{1}$,$y=-tc_1+c_2$ 及

$$x=c_1-2y=c_1-2(-tc_1+c_2)=(2t+1)c_1-2c_2.$$

求得方程的解为 $x=(2t+1)c_1-2c_2$,$y=-tc_1+c_2$.其中 c_1,c_2 为任意常数.

(2) 原微分方程组可改写为对称形式$\frac{dx_1}{x_2-x_3}=\frac{dx_2}{x_1+x_2}=\frac{dx_3}{x_1+x_3}=\frac{dt}{1}$.

有首次积分$\frac{d(x_2-x_3)}{x_2-x_3}=\frac{dt}{1}$,$x_2-x_3=c_1e^t$ 及$\frac{dx_1}{c_1e^t}=\frac{dt}{1}$,$dx_1=c_1e^tdt$,$x_1=c_1e^t+c_2$.

又有

$$\frac{dx_3}{c_1e^t+c_2+x_3}=\frac{dt}{1},\frac{dx_3}{dt}=x_3+c_1e^t+c_2,x_3=(c_1t+c_3)e^t-c_2.$$

得解 $x_1=c_1e^t+c_2$,$x_2=x_3+c_1e^t=(c_1t+c_1+c_3)e^t-c_2$,$x_3=(c_1t+c_3)e^t-c_2$.

(3) 原微分方程组可改写为对称形式$\frac{dx_1}{3x_1+x_2-x_3}=\frac{dx_2}{x_1+3x_2-x_3}=\frac{dx_3}{3x_1+3x_2-x_3}=\frac{dt}{1}$.

有首次积分

$$\frac{d(x_1+x_2-x_3)}{x_1+x_2-x_3}=\frac{dt}{1},x_1+x_2-x_3=c_1e^t,$$

用首次积分及线性方程公式得

$$\frac{dx_1}{2x_1+c_1e^t}=\frac{dt}{1},\frac{dx_1}{dt}=2x_1+c_1e^t,x_1=c_2e^{2t}-c_1e^t,$$

$$\frac{dx_2}{2x_2+c_1e^t}=\frac{dt}{1},\frac{dx_2}{dt}=2x_2+c_1e^t,x_2=c_3e^{2t}-c_1e^t.$$

从而 $x_3=x_1+x_2-c_1e^t=(c_2+c_3)e^{2t}-3c_1e^t$.

即方程的解为

$$x_1=c_2e^{2t}-c_1e^t,x_2=c_3e^{2t}-c_1e^t,x_3=(c_2+c_3)e^{2t}-3c_1e^t,$$

其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数.

习题 7.2

1. 具体求出习题 7.1 第 2 题的线性偏微分方程的解.

解:(1) 由习题 7.1 第 2 题知原微分方程对应的特征方程为$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{xy}$,有首次积分

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y},\frac{y}{x}=c_1,$$

$$\frac{y\mathrm{d}x}{xy}=\frac{x\mathrm{d}y}{xy}=\frac{y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{2xy}=\frac{\mathrm{d}(xy)}{2xy}=\frac{\mathrm{d}z}{xy},xy-2z=c_2.$$

由首次积分$\frac{y}{x}=c_1,xy-2z=c_2$知当$z=0$时,$u=x^2+y^2=\frac{c_2}{c_1}+c_1c_2$,即解为

$$u=(xy-2z)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right).$$

(2) 由习题 7.1 第 2 题知原微分方程对应的特征方程为$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{-x}=\frac{\mathrm{d}u}{x-y}$,由$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{-x}$,$x\mathrm{d}x=-y\mathrm{d}y$,首次积分为$x^2+y^2=c_1$.又由$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{-x}=\frac{\mathrm{d}u}{x-y}=\frac{\mathrm{d}(x+y+u)}{0}$,得首次积分$u+x+y=c_2$.两个首次积分相互独立.线性偏微分方程的通解为$F(x^2+y^2,u+x+y)=0$,其中$F$为变元的任意连续可微函数.

(3) 由习题 7.1 第 2 题知原微分方程对应的特征方程为$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{z}=\frac{x\mathrm{d}z}{y}$,由首次积分$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{x\mathrm{d}z}{y}$,$z-\ln|x|=c_1$及

$$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{c_1+\ln|x|},y^2=2(c_1x+x\ln|x|-x)-c_2=2x(z-1)-c_2.$$

拟线性偏微分方程的通解为$F(z-\ln|x|,2x(z-1)-y^2)=0$,其中$F$为变元的任意连续可微函数.

(4) 原方程可改写为$x\frac{\partial z}{\partial x}+0\frac{\partial z}{\partial y}=x+y+2z$.其对应的特征方程为$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{0}=\frac{\mathrm{d}z}{x+y+2z}$.

有首次积分$\mathrm{d}y=0,y=\tilde{c}$,及$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}z}{x+y+2z}$,$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{2}{x}z=1+\frac{y}{x}$.

当y为常数时,方程为线性常微分方程,有解

$$z=\mathrm{e}^{2\ln|x|}\cdot\left[\int\left(1+\frac{y}{x}\right)x^{-2}\mathrm{d}x+C(y)\right]=-x-\frac{1}{2}y+x^2C(y),$$

它已包含解$y=\tilde{c}$($\tilde{c}$为常数),此即为拟线性偏微分方程的解.

2. 求解下列线性偏微分方程:

(1) $(y-z)u_x+(z-x)u_y+(x-y)u_z=0$;

(2) $yzuu_x+zxuu_y+xyuu_z=xyz$;

(3) $xzz_x+yzz_y=x^2+y^2+z^2$.

解:(1) 由已知可得原微分方程对应的特征方程为$\frac{\mathrm{d}x}{y-z}=\frac{\mathrm{d}y}{z-x}=\frac{\mathrm{d}z}{x-y}$.

利用首次积分有

$$\mathrm{d}(x+y+z)=0,x+y+z=c_1,$$

$$\frac{2x\mathrm{d}x}{2x(y-z)}=\frac{2y\mathrm{d}y}{2y(z-x)}=\frac{2z\mathrm{d}z}{2z(x-y)}=\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2+z^2)}{0},$$

$$x^2+y^2+z^2=c_2.$$

两个首次积分相互独立,偏微分方程有通解$u=\Phi(x+y+z,x^2+y^2+z^2)$,其中$\Phi$为变元的任

意函数.

(2) 由已知可得原微分方程对应的特征方程为$\frac{\mathrm{d}x}{yzu}=\frac{\mathrm{d}y}{zxu}=\frac{\mathrm{d}z}{xyu}=\frac{\mathrm{d}u}{xyz}$.

利用首次积分有

$$\frac{\mathrm{d}x}{yzu}=\frac{\mathrm{d}y}{zxu},x\mathrm{d}x=y\mathrm{d}y,y^2-x^2=c_1;$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{yzu}=\frac{\mathrm{d}z}{xyu},z^2-x^2=c_2;$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{yzu}=\frac{\mathrm{d}u}{xyz},u^2-x^2=c_3.$$

这三个首次积分相互独立,偏微分方程的通解为$\Phi(y^2-x^2,z^2-x^2,u^2-x^2)=0$,其中$\Phi$为变元的任意函数.

(3) 由已知可得原微分方程对应的特征方程为$\frac{\mathrm{d}x}{xz}=\frac{\mathrm{d}y}{yz}=\frac{\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$.

利用首次积分有$\frac{\mathrm{d}x}{xz}=\frac{\mathrm{d}y}{yz},\frac{y}{x}=c_1$. 又由于

$$\frac{x\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{y\mathrm{d}y}{y^2}=\frac{z\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}=\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2},$$

令$u=x^2+y^2,v=z^2$,上式化为$\frac{\mathrm{d}v}{u+v}=\frac{\mathrm{d}u}{u}$,即$u\mathrm{d}v-v\mathrm{d}u=u\mathrm{d}u$,可积分得

$$\frac{u\mathrm{d}v-v\mathrm{d}u}{u^2}=\frac{\mathrm{d}u}{u},\frac{v}{u}-\ln|u|=c_2.$$

故有首次积分$\frac{z^2}{x^2+y^2}-\ln(x^2+y^2)=c_2$.

两个首次积分相互独立,方程有通解$\Phi\left(\frac{y}{x},\frac{z^2}{x^2+y^2}-\ln(x^2+y^2)\right)=0$,其中$\Phi$为变元的任意函数.

习题 7.3

1. 求解下列满足给定条件的偏微分方程(柯西问题):

(1) $(2xy+xz)\frac{\partial z}{\partial x}+(yz+3x^3y)\frac{\partial z}{\partial y}=3x^2z-2y^2z,y^2=z,x=3$;

(2) $y^2\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}+z^2=0,x-y=0,x-yz=1$.

解:(1) 由已知得原微分方程对应的特征方程为$\frac{\mathrm{d}x}{2xy^2+xz}=\frac{\mathrm{d}y}{-yz-3x^3y}=\frac{\mathrm{d}z}{3x^3z-2y^2z}$.

于是

$$\frac{\mathrm{d}z}{3x^3z-2y^2z}=\frac{y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{xy(2y^2-3x^3)}=\frac{3x^3\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y-\mathrm{d}z}{0}.$$

由第一式求得首次积分

$$-\frac{dz}{z}=\frac{ydx+xdy}{xy}=\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y},xyz=c_1.$$

而由第三式求得首次积分

$$3x^2dx+2ydy-dz=0,x^3+y^2-z=c_2,$$

其中 c_1,c_2 为积分常数.

将方程条件 $y^2=z,x=3$ 代入可求得 $c_2=27,c_1$ 为任意常数,即得解为

$$x^3+y^2-z=27.$$

(2) 由已知得原微分方程对应的特征方程为$\frac{dx}{y^2}=\frac{dy}{yz}=-\frac{dz}{z^2}$. 由后两式可求得首次积分

$$\frac{dy}{y}=-\frac{dz}{z},yz=c_1.$$

将首次积分代入前两式得

$$\frac{dx}{y^2}=\frac{dy}{yz}=\frac{dy}{c_1},c_1dx=y^2dy,$$

$$\frac{1}{3}y^3=c_1x+\tilde{c}_2,y^3-3xyz=c_2,$$

其中 c_1,c_2 为积分常数. 这两个首次积分相互独立(其比不为常数),由条件 $x-y=0,x-yz=1$ 消去 x,y,z,可求得

$$x=y=yz+1=1+c_1,y^3-3xyz=(1+c_1)^3-3(1+c_1)c_1=c_2.$$

于是原微分方程有解

$$(1+yz)^3=3(1-x+yz)yz+y^3.$$

2. 试求下列满足给定条件的偏微分方程(柯西问题)的解:

(1) $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{z}{2}\frac{\partial u}{\partial z}=0,x=1,u=y+z^2$;

(2) $2yz\frac{\partial z}{\partial x}-xz\frac{\partial z}{\partial y}+xy=0,x^2+y^2=ay,z=0$;

(3) $z\frac{\partial z}{\partial x}+(z^2-x^2)\frac{\partial z}{\partial y}+x=0,y=x^2,z=2x$.

解:(1) 齐次线性偏微分方程对应的特征方程为$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{2dz}{z}$,其有两个首次积分

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y},\frac{y}{x}=c_1 \text{ 及} \frac{dx}{x}=\frac{2dz}{z},\frac{z^2}{x}=c_2,$$

且两个首次积分相互独立,解得方程的通解为

$$u=\Phi\left(\frac{y}{x},\frac{z^2}{x}\right).$$

由方程条件可得 $\Phi(y,z^2)=y+z^2,\Phi(c_1,c_2)=c_1+c_2$,即满足方程条件的解为

$$u=\frac{y}{x}+\frac{z^2}{x}.$$

(2) 非齐次拟线性偏微分方程对应的特征方程为$\frac{dx}{2yz}=\frac{dy}{-xz}=\frac{dz}{-xy}$,有两个首次积分

$$\frac{dx}{2yz}=\frac{dy}{-xz},2y^2+x^2=c_1\ 及\frac{dy}{-xz}=\frac{dz}{-xy},z^2-y^2=c_2.$$

且两个首次积分相互独立,方程的通积分可表为$\Phi(2y^2+x^2,z^2-y^2)=0$.

为确定函数Φ,由解的条件联立首次积分消去变量得$(c_1+c_2)^2=-a^2c_2$,即$(y^2+x^2+z^2)^2=a^2(y^2-z^2)$.

(3) 非齐次拟线性偏微分方程对应的特征方程为$\frac{dx}{z}=\frac{dy}{z^2-x^2}=\frac{dz}{-x}$.

由$\frac{dx}{z}=\frac{dz}{-x}$得首次积分为$z^2+x^2=c_1$.

又由

$$\frac{zdx}{z^2}=\frac{dy}{z^2-x^2}=\frac{xdz}{-x^2}=\frac{-dy+zdx+xdz}{0},$$

$$dy=zdx+xdz=d(zx)$$

得首次积分为$y=zx+c_2$.

两个首次积分相互独立,方程的通积分可表为$\Phi(z^2+x^2,y-zx)=0$.

为确定函数Φ,由解的条件代入首次积分有$5x^2=c_1,x^2=2x^2+c_2$,消去变量x得$c_1=-5c_2$,即

$$z^2+x^2=5(zx-y).$$

3. 求解下列线性偏微分方程的柯西问题:

(1) $x\frac{\partial z}{\partial x}+(xz+y)\frac{\partial z}{\partial y}=z,x+y=2z,xz=1$;

(2) $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2,x=5y=2z$;

(3) $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}+z^2=0,xy=x+y,z=1$.

解:(1) 拟线性偏微分方程对应的特征方程为$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{xz+y}=\frac{dz}{z}$.

由$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z}$得,首次积分$z=c_1x$.

又有首次积分

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{c_1x^2+y},c_1x^2dx+ydx=xdy,c_1dx+\frac{ydx-xdy}{x^2}=0,$$

$$c_1x-\frac{y}{x}=c_2,z-\frac{y}{x}=c_2.$$

上述两个首次积分相互独立,方程的通积分可表为

$$\Phi(zx^{-1},z-yx^{-1})=0.$$

为确定函数Φ,由解的条件联立首次积分消去变量. 先消去y,有

$$z-c_2=\frac{y}{x}=\frac{2z-x}{x}=\frac{2z}{x}-1.$$

再消去 x 有

$$z=c_2+\frac{2z}{x}-1=c_2+2c_1-1 \text{ 及 } z=c_1x=\frac{c_1}{z},z^2=c_1.$$

即有关系式 $(c_2+2c_1-1)^2=c_1$，代回首次积分，最后得

$$(zx-y+2z-x)^2=zx.$$

(2) 由已知可得微分方程对应的特征方程为 $\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{\mathrm{d}y}{y^2}=\frac{\mathrm{d}z}{z^2}$.

有首次积分 $\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{\mathrm{d}y}{y^2}$，$\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=c_1$ 及 $\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{\mathrm{d}z}{z^2}$，$\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=c_2$.

利用直线条件 $x=5y=2z$，则有 $y=\frac{x}{5}$，$z=\frac{x}{2}$，将其代入首次积分得 $c_1=\frac{4}{x}$，$c_2=\frac{1}{x}$. 从而有关系式 $c_1=4c_2$. 于是满足条件的解为 $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=4\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{x}\right)$，即 $\frac{1}{y}+\frac{3}{x}=\frac{4}{z}$.

(3) 由已知可得微分方程对应的特征方程为 $\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{\mathrm{d}y}{y^2}=\frac{\mathrm{d}z}{-z^2}$.

有首次积分 $\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{\mathrm{d}y}{y^2}$，$\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=c_1$ 及 $\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{\mathrm{d}z}{-z^2}$，$\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=c_2$.

利用条件 $xy=x+y,z=1$ 得 $\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=1$，$c_1=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=1-\frac{2}{x}$ 及 $1+\frac{1}{x}=c_2$. 于是有关系式 $c_1=1-\frac{2}{x}=1-2(c_2-1)$，$c_1+2c_2=3$.

于是方程满足条件的解为 $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}+\frac{2}{z}+\frac{2}{x}=3$，即 $\frac{1}{y}+\frac{2}{z}+\frac{1}{x}=3$.

习题 7.4

1. 求下列变换群的无穷小变换、生成元和李方程组：

(1) 仿射变换群 $\bar{x}=ax,\bar{y}=y,a\in(0,+\infty)$；(2) $\bar{x}=ax,\bar{y}=a^2y,a\in(0,+\infty)$；

(3) $\bar{x}=x+yt,\bar{y}=y,t\in(-\infty,+\infty)$； (4) $\bar{x}=\frac{x}{1-tx},\bar{y}=\frac{y}{1-tx}(-\infty<t<+\infty)$.

解：(1) 由已知变换 $\bar{x}=ax,\bar{y}=y,a\in(0,+\infty)$ 可得 $\varphi(x,y,a)=ax,\psi(x,y,a)=y$，则

$$\xi=\left.\frac{\partial\varphi(x,y,a)}{\partial a}\right|_{a=0}=x,\eta=\left.\frac{\partial\psi(x,y,a)}{\partial a}\right|_{a=0}=0.$$

故无穷小变换为 $\bar{x}\approx x+ax,\bar{y}\approx y$.

生成元为 $X=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}=x\frac{\partial}{\partial x}$.

李方程组为 $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}a}=\bar{x},\bar{x}\,|_{a=0}=x,\\ \frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}a}=0,\bar{y}\,|_{a=0}=y.\end{cases}$

(2) 由已知 $\bar{x} = ax, \bar{y} = a^2 y, a \in (0, +\infty)$ 可得 $\varphi(x,y,a) = ax, \psi(x,y,a) = a^2 y$. 则有

$$\xi = \left.\frac{\partial \varphi(x,y,a)}{\partial a}\right|_{a=0} = x, \eta = \left.\frac{\partial \psi(x,y,a)}{\partial a}\right|_{a=0} = 0.$$

故无穷小变换为 $\bar{x} \approx x + ax, \bar{y} \approx y$, 生成元为 $X = x\dfrac{\partial}{\partial x}$.

李方程组为 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}a} = \bar{x}, \bar{x}\,|_{a=0} = x, \\ \dfrac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}a} = 0, \bar{y}\,|_{a=0} = y. \end{cases}$

(3) 由已知 $\bar{x} = x + yt, \bar{y} = y, t \in (-\infty, +\infty)$ 可得 $\varphi(x,y,t) = x + yt, \psi(x,y,t) = y$.

则 $\xi = \left.\dfrac{\partial \varphi(x,y,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = y, \eta = \left.\dfrac{\partial \psi(x,y,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$. 故无穷小变换为 $\bar{x} \approx x + yt, \bar{y} \approx y$.

生成元为 $X = y\dfrac{\partial}{\partial x}$, 李方程组为 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}t} = \bar{y}, \left.\bar{x}\right|_{t=0} = x, \\ \dfrac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}t} = 0, \left.\bar{y}\right|_{t=0} = y, \end{cases}$

(4) 由已知 $\bar{x} = \dfrac{x}{1-tx}, \bar{y} = \dfrac{y}{1-tx}$ 可知 $\varphi(x,y,t) = \dfrac{x}{1-tx}, \psi(x,y,t) = \dfrac{y}{1-tx}$. 则

$$\xi = \left.\frac{\partial \varphi(x,y,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = x^2, \eta = \left.\frac{\partial \psi(x,y,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = xy.$$

故无穷小变换为 $\bar{x} \approx x + ax^2, \bar{y} \approx y + axy$.

生成元为 $X = x^2\dfrac{\partial}{\partial x} + xy\dfrac{\partial}{\partial y}$.

李方程组为 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}a} = \bar{x}^2, \bar{x}\,|_{a=0} = x, \\ \dfrac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}a} = \bar{x}\,\bar{y}, \bar{y}\,|_{a=0} = y. \end{cases}$

2. 求下列生成元的不变函数:

(1) $X = \dfrac{\partial}{\partial y}$; (2) $X = y\dfrac{\partial}{\partial x}$; (3) $X = x^2\dfrac{\partial}{\partial x} + xy\dfrac{\partial}{\partial y}$.

解: (1) 已知 $X = \dfrac{\partial}{\partial y}$, 由定理 9 可知, 此生成元的不变函数由 $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ 给出. 即 $f(x,y) = f(x)$, f 为任意可微函数, 即平行于 y 轴的直线.

(2) 已知 $X = y\dfrac{\partial}{\partial x}$, 由定理 9 可知, 此生成元的不变函数由 $y\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ 给出. 即 $y = 0$ 或 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$. 则不动点为 $y = 0$ 或 $y = c(c \neq 0)$.

(3) 已知 $X = x^2\dfrac{\partial}{\partial x} + xy\dfrac{\partial}{\partial y}$, 由定理 9 可知, 此生成元的不变函数由 $x^2\dfrac{\partial f}{\partial x} + xy\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ 给出.

其特征方程为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2} = \dfrac{\mathrm{d}y}{xy}$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{y}$, 解得其通解为 $F(x,y) = \Phi\left(\dfrac{x}{y}\right)$, Φ 为任意可微函数.

3. 计算生成元为 $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ 的典型变量.

解:已知生成元为 $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$,则有 $\xi(x,y) = x,\eta(x,y) = y$,由教材公式(7.50)可知

$$\begin{cases} X(t) = \xi(x,y)\frac{\partial t}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial t}{\partial y} = 1, \\ X(u) = \xi(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

即$\begin{cases} x\frac{\partial t}{\partial x} + y\frac{\partial t}{\partial y} = 1, \\ x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \end{cases}$ 解得$\begin{cases} t = \ln|x|, \\ u = \frac{y}{x}. \end{cases}$

解得 $\bar{t} = \ln|\bar{x}| = \ln(|x|e^a) = \ln|x| + a = t + a,\bar{u} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \frac{ye^a}{xe^a} = \frac{y}{x} = u.$

所以该生成元的典型变量为 $\bar{t} = t + a,\bar{u} = u.$

4. 求下列方程的对称:

(1) $y' = F(y)$; (2) $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$; (3) $xy' = y + F(x)$.

解:(1) 因为 $y' = F(y)$ 在变换 $\bar{x} = x + a$ 下不变,此时$\frac{\partial}{\partial x} = 1,\frac{\partial}{\partial y} = 0$,所以其对称群的生成元为 $X = \frac{\partial}{\partial x}$.

(2) 因为 $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$在变换 $\bar{x} = xe^a, y = ye^a$ 下不变,此时$\frac{\partial}{\partial x} = x,\frac{\partial}{\partial y} = y$,所以其对称群的生成元为 $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$.

(3) 因为 $xy' = y + F(x)$ 在 $\bar{x} = x,\bar{y} = y + ax$ 下不变,此时$\frac{\partial}{\partial x} = 0,\frac{\partial}{\partial y} = x$,所以其对称群的生成元为 $X = x\frac{\partial}{\partial y}$.

5. 计算下列容许算子产生的一阶方程:

(1) $X = l\frac{\partial}{\partial x} - k\frac{\partial}{\partial y}$; (2) $X = y\frac{\partial}{\partial x}$;

(3) $X = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$; (4) $X = xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}$.

解:(1) 已知容许算子为 $X = l\frac{\partial}{\partial x} - k\frac{\partial}{\partial y}$,则教材方程(7.60)变为 $l\frac{\partial f}{\partial x} - k\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

其特征方程为$\frac{dx}{l} = -\frac{dy}{k} = \frac{df}{0}$.

利用首次积分可得 $c_1 = kx + ly, f = c_2$. 则 $f = F(kx + ly)$.

故该容许算子的方程为 $y' = F(kx + ly)$.

(2) 已知容许算子为 $X = y\frac{\partial}{\partial x}$,则教材方程(7.60) 变为 $y\frac{\partial f}{\partial x} = -f^2$.

其特征方程为$\frac{dx}{y} = \frac{df}{-f^2} = \frac{dy}{0}$,即$\frac{d(x+y)}{y} = \frac{df}{-f^2}$.

利用首次积分可得 $f = \frac{y}{x+F(y)}$,故该容许算子的方程为 $y' = \frac{y}{x+F(y)}$.

(3) 已知容许算子为 $X = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$,则教材方程(7.60) 变为

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = -f,$$

特征方程为$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{1} = \frac{df}{-f}$,利用首次积分可得 $xe^{-y} = c_1, xf = c_2$.

故容许算子的方程为 $y' = \frac{1}{x}F(xe^{-y})$.

(4) 已知容许算子为 $X = xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}$,则教材方程(7.60) 变为

$$xy\frac{\partial f}{\partial x} + y^2\frac{\partial f}{\partial y} = yf - xf^2.$$

其特征方程为$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{y^2} = \frac{df}{yf - xf^2}$.

利用首次积分可得$\frac{y}{x} = c_1, f = \frac{xc_1}{c+x}$.

故该容许算子的方程为 $y' = \frac{y}{x+F\left(\frac{y}{x}\right)}$.

第八章　边值问题

习题 8.1

1. 试讨论下列微分方程边值问题的可解性并求解.

(1) $y'' = 0, y(0) + y'(0) = y(1), y'(0) = y'(1)$;

(2) $y'' = x, y(0) - y(1) = 1, y'(0) + y'(1) = 0$.

解:(1) 由已知齐次微分方程易得其有基本解组 $y_1(x) = 1, y_2(x) = x$. 边值条件对应

$$U_1[y] \equiv y(0) - y(1) + y'(0) = 0, U_2[y] \equiv y'(0) - y'(1) = 0,$$

得

$$\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

其秩为 0. 即齐次边值问题是可解的,它有解 $y = c_1 + c_2 x$.

(2) 由已知易得非齐次方程有特解 $y_0(x) = \frac{1}{6}x^3$. 对应的齐次方程有基本解组 $y_1(x) = 1, y_2(x)$

$= x$. 边值条件对应

$$U_1[y] \equiv y(0) - y(1), U_2[y] \equiv y'(0) + y'(1),$$

于是

$$\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] & U_1[y_0] - \gamma_1 \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] & U_2[y_0] - \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{7}{6} \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

其秩为 2，与矩阵

$$\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

的秩 1 不同. 边值问题不可解.

事实上，非齐次方程有通解

$$y(x) = c_1 + c_2 x + \frac{1}{6}x^3.$$

由边值条件应有

$$-c_2 - \frac{1}{6} = 1, 2c_2 + \frac{1}{2} = 0.$$

得 $c_2 = -\frac{7}{6}$，$c_2 = -\frac{1}{4}$，相互矛盾. 故无法求出满足边值条件的常数 c_1, c_2.

2. 试判断下面边值问题的可解性并求解.

$$y'' - y' = 0, y(0) = -1, y'(1) - y(1) = 2.$$

解：微分方程 $y'' - y' = 0$ 有基本解组 $y_1 = 1, y_2 = e^x$，边值条件对应

$$U_1[y] = y(0) = -1, U_2[y] = y'(1) - y(1) = 2.$$

易得

$$\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] & \gamma_1 \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] & \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

其秩为 2 与矩阵 $\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 的秩 2 相同，故边值问题是可解的.

因为 $y'' - y' = 0$ 有通解 $y = c_1 + c_2 e^x$. 代入边值条件可得

$$c_1 + c_2 = -1, c_2 e - (c_1 + c_2 e) = 2,$$

解得 $c_1 = -2, c_2 = 1$，故边值问题的解为 $y = e^x - 2$.

3. 试用待定系数法求解边值问题：$y'' - y' - 2y = 0, y(0) = 2, y(+\infty) = 0$.

解：由已知易得齐次二阶线性方程有通解 $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$.

由边值条件 $y(+\infty) = 0$ 可知，必有 $c_1 = 0$. 再由边值条件 $y(0) = 2$ 可得 $c_2 = 2$. 即方程边值问题的解为 $y(x) = 2e^{-x}$.

4. 求解边值问题：$y''+y=2x-\pi, y(0)=0, y(\pi)=0$.

解：由已知易得非齐次方程有特解 $y_0(x)=2x-\pi$，其初值为 $y_0(0)=-\pi, y'_0(0)=2$；边值为 $y_0(\pi)=\pi, y'_0(\pi)=2$.

二阶齐次微分方程 $y''+y=0$ 有通解 $y_1(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$，且解 $y=c\sin x$ 满足边值条件.

现取非齐次方程的解 $y=y_0+y_1$，确定 c_1, c_2，使其满足边值条件，即

$$y_0(0)+y_1(0)=-\pi+c_1=0,$$

$$y_0(\pi)+y_1(\pi)=2\pi-\pi-c_1=0,$$

得 $c_1=\pi$. 于是非齐次方程满足边值条件的解为

$$y(x)=2x-\pi+\pi\cos x+c\sin x.$$

*5. 对怎样的 a，边值问题 $y''+ay=1, y(0)=0, y(1)=0$ 没有解？

解：当 $a=0$ 时，微分方程变为 $y''=1$，其通解为 $y=\frac{1}{2}x^2+c_1x+c_2$.

代入边值条件 $y(0)=0, y(1)=0$ 可得 $c_1=-\frac{1}{2}, c_2=0$. 故此时边值问题有解.

当 $a<0$ 时，令 $a=-\lambda(\lambda>0)$，则微分方程可化为 $y''-\lambda y=1$，其通解为

$$y=c_1e^{\sqrt{\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{\lambda}x}-\frac{1}{\lambda}.$$

代入边值条件 $y(0)=0, y(1)=0$ 可得 $c_1=\frac{c_2(1-e^{-\sqrt{\lambda}})}{e^{\sqrt{\lambda}}-1}$. 故此时边值问题有解.

当 $a>0$ 时，微分方程 $y''+ay=1$ 的特解为 $y_0=\frac{1}{a}$，其对应齐次微分方程 $y''+ay=0$ 的基本解组为 $y_1=\cos\sqrt{a}x, y_2=\sin\sqrt{a}x$. 边值条件对应

$$U_1[y]=y(0)=0, U_2[y]=y(1)=0.$$

于是

$$\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] & U_1[y_0]-\gamma_1 \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] & U_2[y_0]-\gamma_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{a} \\ \cos\sqrt{a} & \sin\sqrt{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & \sin\sqrt{a} & \frac{1}{a}(1-\cos\sqrt{a}) \end{bmatrix},$$

当 $\sin\sqrt{a}=0$ 且 $1-\cos\sqrt{a}\neq 0$ 时，上述矩阵与 $\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] \end{bmatrix}$ 不同秩，则边值问题不可解，

即当 $\sqrt{a}=(2n-1)\pi$，即 $a=(2n-1)^2\pi^2(n=1,2,3,\cdots)$ 时，边值问题不可解.

习题 8.2

1. 求边值问题 $y''=f(x), y(0)=0$，当 $x\to+\infty$ 时有界的格林函数.

解：因为微分方程 $y''=0$ 的基本解组为 $y_1(x)=1, y_2(x)=x, y_1(x), y_2(x)$ 的朗斯基行列式 $W(x)=\begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$.

由格林函数的定义，

当 $0 \leqslant x \leqslant t$ 时，$G(x,t) = a_1(t) + a_2(t)x$，

当 $t \leqslant x < +\infty$ 时，

$$G(x,t) = b_1(t) + b_2(t)x.$$

由于格林函数在 $x = t$ 处连续且满足$\frac{\partial G(t+0,t)}{\partial x} - \frac{\partial G(t-0,t)}{\partial x} = 1$，则有

$$a_1(t) + a_2(t)t - [b_1(t) + b_2(t)t] = 0. \quad ①$$

$$b_2(t) - a_2(t) = 1. \quad ②$$

又由边值条件 $y(0) = 0$ 可得 $a_1(t) + a_2(t) \cdot 0 = a_1(t) = 0$.

由 $x \to +\infty$ 时 y 有界可得 $b_2(t) = 0$.

将 $a_1(t), b_2(t)$ 分别代入 ①,② 可得 $a_2(t) = -1$.

又因为 $G(x,t)$ 在 $x = t$ 处连续，则 $b_1(t) = -t$.

所以该边值问题的格林函数为 $G(x,t) = \begin{cases} -x, 0 \leqslant x \leqslant t, \\ -t, t \leqslant x. \end{cases}$

2. 求边值问题 $y'' + y = f(x), y(0) = 0, y'(1) = 0$ 的格林函数.

解：因为微分方程 $y'' + y = 0$ 的基本解组为 $y_1(x) = \cos x, y_2(x) = \sin x, y_1(x), y_2(x)$ 的朗斯基行列式 $W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

由格林函数的定义，当 $0 \leqslant x \leqslant t$ 时，$G(x,t) = a_1(t)\cos x + a_2(t)\sin x$.

当 $t \leqslant x \leqslant 1$ 时，$G(x,t) = b_1(t)\cos x + b_2(t)\sin x$.

由于格林函数在 $x = t$ 处连续，则有

$$a_1(t)\cos t + a_2(t)\sin t - [b_1(t)\cos t + b_2(t)\sin t] = 0. \quad ①$$

由于格林函数在 $x = t$ 处有跃度$\frac{\partial G(t+0,t)}{\partial x} - \frac{\partial G(t-0,t)}{\partial x} = 1$，则有

$$-b_1(t)\sin t + b_2(t)\cos t - [-a_1(t)\sin t + a_2(t)\cos t] = 1. \quad ②$$

又因为格林函数关于 x 满足边值条件，所以有

$$G(0,t) = a_1(t) = 0, \quad ③$$

$$G'(1,t) = -b_1(t)\sin 1 + b_2(t)\cos 1 = 0, \quad ④$$

解由 ①,②,③,④ 组成的方程组可得

$$a_1(t) = 0, a_2(t) = -\cos t - \sin t\tan 1, b_1 = -\sin t, b_2 = -\sin t\tan 1.$$

代入 $G(x,t)$ 可得

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{-\cos(t-1) \cdot \sin x}{\cos 1}, 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \dfrac{-\sin t \cdot \cos(x-1)}{\cos 1}, t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

3. 求边值问题 $x^2y''+2xy'=f(x),y(1)=0,y'(3)=0$ 的格林函数.

解:齐次方程是欧拉方程,可令 $y=x^k$,代入得关于 k 的方程 $k(k-1)+2k=k(k+1)=0$,解得 $k_1=0,k_2=-1$. 从而方程有通解 $y=c_1+c_2x^{-1}$.

运用常数变易法,令 $y=c_1(x)+c_2(x)x^{-1}$,则 $y'=c'_1+c'_2x^{-1}-c_2x^{-2}$.

设 $c'_1+c'_2x^{-1}=0$,于是 $y'=-c_2x^{-2},y''=-c'_2x^{-2}+2c_2x^{-3}$.

将其代入方程得

$$x^2y''+2xy'=-c'_2+2c_2x^{-1}-2c_2x^{-1}=-c'_2=f(x),$$

$$c_2=-\int_1^x f(t)\mathrm{d}t.$$

而由 $c'_1+c'_2x^{-1}=0$,即有 $c'_1=-c'_2x^{-1}=x^{-1}f(x)$,解得 $c_1=\int_1^x t^{-1}f(t)\mathrm{d}t$.

最后得非齐次方程的特解 $y=\int_1^x(t^{-1}-x^{-1})f(t)\mathrm{d}t$. 其通解为

$$y=c_1+c_2x^{-1}+\int_1^x(t^{-1}-x^{-1})f(t)\mathrm{d}t.$$

利用边值条件有 $c_2=-c_1=\int_1^3 f(t)\mathrm{d}t$. 于是有 $y=\int_x^3(x^{-1}-1)f(t)\mathrm{d}t+\int_1^x(t^{-1}-1)f(t)\mathrm{d}t$.

可定义格林函数

$$G(x,t)=\begin{cases}t^{-1}-1, & 1\leqslant t\leqslant x,\\ x^{-1}-1, & x\leqslant t\leqslant 3.\end{cases}$$

边值问题的解为

$$y(x)=\int_1^3 G(x,t)f(t)\mathrm{d}t\quad(1\leqslant x\leqslant 3).$$

4. 求边值问题 $y''+k^2y=f(x),y(0)=0,y'(1)=0$ 的格林函数.

解:由已知易得方程的基本解组为 $y_1=\sin kx,y_2=\cos kx$.

因为格林函数也满足此微分方程,由格林函数的定义,

当 $0\leqslant x\leqslant t$ 时有 $G(x,t)=a_1(t)\sin kx+a_2(t)\cos kx$;

而当 $t\leqslant x\leqslant 1$ 时有 $G(x,t)=b_1(t)\sin kx+b_2(t)\cos kx$.

当 $x=t$ 时 $G(x,t)$ 连续,即要求

$$b_1(t)\sin kt+b_2(t)\cos kt-a_1(t)\sin kt-a_2(t)\cos kt=0. \qquad ①$$

由格林函数的性质(2) 可得

$$k[b_1(t)\cos kt-b_2(t)\sin kt-a_1(t)\cos kt+a_2(t)\sin kt]=1. \qquad ②$$

利用格林函数的性质(3) 和边值条件有

$$a_2(t)=0,k[b_1(t)\cos k-b_2(t)\sin k]=0.$$

令 $c_1(t)=b_1(t)-a_1(t),c_2(t)=b_2(t)-a_2(t)$,上述 ①,② 两式可化为

$$c_1(t)\sin kt+c_2(t)\cos kt=0,c_1(t)\cos kt-c_2(t)\sin kt=\frac{1}{k}.$$

利用 $a_2(t)=0$，解上述方程有

$$c_1(t)=\frac{\cos kt}{k},c_2(t)=-\frac{\sin kt}{k}=b_2(t),$$

$$b_1(t)=-\frac{\sin k\cdot\sin kt}{k\cos k}.$$

于是

$$a_1(t)=b_1(t)-c_1(t)=-\frac{\cos k(t-1)}{k\cos k}.$$

最后求得格林函数为

$$G(x,t)=\begin{cases}-\dfrac{\cos k(t-1)\cdot\sin kx}{k\cos k}, & 0\leqslant x\leqslant t,\\[2ex] -\dfrac{\sin kt\cdot\cos k(x-1)}{k\cos k}, & t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

5. 对怎样的 a，存在边值问题 $y''+ay=f(x),y(0)=0,y(1)=0$ 的格林函数？

解：当 $a>0$ 时，易得边值问题 $y''=f(x),y(0)=0,y(1)=0$ 的格林函数为

$$G(x,t)=\begin{cases}\dfrac{(1-x)(-t)}{1-0},0\leqslant t\leqslant x,\\[2ex] \dfrac{(1-t)(-x)}{1-0},x\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-t(1-x),0\leqslant t\leqslant x,\\ -x(1-t),x\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

由 $a>0$ 时，由习题 8.1 第 5 题知当 $a=(2n-1)^2\pi^2(n=1,2,3\cdots)$ 时边值问题不可解，则不存在格林函数，现令 $a=\lambda^2(\lambda>0)$ 且 $a\neq(2n-1)^2\pi^2(n=1,2,3\cdots)$，则 $y''+ay=0$ 可变形为 $y''+\lambda^2y=0$，其基本解组为 $y_1(x)=\cos\lambda x,y_2(x)=\sin\lambda x$. 由格林函数的定义，当 $0\leqslant x\leqslant t$ 时，

$$G(x,t)=a_1(t)\cos\lambda x+a_2(t)\sin\lambda x,$$

当 $t\leqslant x\leqslant 1$ 时，$G(x,t)=b_1(t)\cos\lambda x+b_2(t)\sin\lambda x$.

因为当 $x=t$ 时 $G(x,t)$ 连续，所以有

$$a_1(t)\cos\lambda t+a_2(t)\sin\lambda t-[b_1(t)\cos\lambda t+b_2(t)\sin\lambda t]=0. \qquad ①$$

当 $x=t$ 时 $G(x,t)$ 有跃度

$$-\lambda b_1(t)\sin\lambda t+\lambda b_2(t)\cos\lambda t-[-\lambda a_1(t)\sin\lambda t+\lambda a_2(t)\cos\lambda t]=1. \qquad ②$$

又由 $G(x,t)$ 关于 x 满足边值条件，则有

$$G(0,t)=a_1(t)=0,G(1,t)=b_1(t)\cos\lambda+b_2(t)\sin\lambda=0. \qquad ③$$

由 ①，②，③ 可得，当 $\lambda=k\pi(k=1,2,3\cdots)$ 时，无解，当 $\lambda\neq k\pi$ 时

$$a_2=\frac{1}{\lambda}\cos\lambda t[\cos\lambda-1],b_1=-\frac{1}{\lambda}\sin\lambda t,b_2=\frac{1}{\lambda}\cos\lambda t\cdot\cos\lambda.$$

此时格林函数存在.

当 $a<0$ 时，令 $a=-\lambda^2(\lambda>0)$，则 $y''+ay=0$ 可变形为 $y''-\lambda^2y=0$，其基本解组为 $y_1(x)=$

$e^{\lambda x}, y_2(x) = e^{-\lambda x}$. 由格林函数的定义，当 $0 \leqslant x \leqslant t$ 时，$G(x,t) = a_1(t)e^{\lambda x} + a_2(t)e^{-\lambda x}$.

当 $t \leqslant x \leqslant 1$ 时，$G(x,t) = b_1(t)e^{\lambda x} + b_2(t)e^{-\lambda x}$.

因为 $G(x,t)$ 在 $x = t$ 处连续，所以

$$a_1(t)e^{\lambda t} + a_2(t)e^{-\lambda t} - [b_1(t)e^{\lambda t} + b_2(t)e^{-\lambda t}] = 0. \qquad ④$$

$G(x,t)$ 在 $x = t$ 处有跃度

$$\lambda b_1(t)e^{\lambda t} - \lambda b_2(t)e^{-\lambda t} - [\lambda a_1(t)e^{\lambda t} - \lambda a_2(t)e^{-\lambda t}] = 1. \qquad ⑤$$

$G(x,t)$ 关于 x 满足边值条件，则有

$$G(0,t) = a_1(t) + a_2(t) = 0, \qquad ⑥$$

$$G(1,t) = b_1(t)e^{\lambda} + b_2(t)e^{-\lambda} = 0. \qquad ⑦$$

解由 ④，⑤，⑥，⑦ 组成的方程组可得

$$a_1(t) = \frac{e^{\lambda t} - e^{2\lambda - \lambda t}}{2\lambda(e^{2\lambda} - 1)}, a_2 = \frac{e^{2\lambda - \lambda t} - e^{\lambda t}}{2\lambda(e^{2\lambda} - 1)},$$

$$b_1(t) = \frac{e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}}{2\lambda(e^{2\lambda} - 1)}, b_2 = \frac{e^{-\lambda t} - e^{\lambda t}}{2\lambda(1 - e^{-2\lambda})}.$$

此时格林函数存在.

综上所述，当 $a \neq k^2\pi^2 (k = 1,2,3,\cdots)$ 时，边值问题存在格林函数.

习题 8.3

1. 试证明例 4 中边值问题(8.49)，(8.50) 的解为 $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$.

证明：设 $y_0(x)$ 为边值问题

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = f(x), \\ y(0) = \alpha, y(\pi) = \beta \end{cases} \qquad (\text{I})$$

的任意一个解.

$y_1(x)$ 为边值问题

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = \alpha, y(\pi) = \beta \end{cases} \qquad (\text{II})$$

的任意一个解.

令 $y_2(x) = y_0(x) - y_1(x)$，则有

$$\begin{aligned} y''_2 + \lambda y_2 &= (y''_0 - y''_1) + \lambda(y_0 - y_1) \\ &= (y''_0 + \lambda y_0) - (y''_1 + \lambda y_1) \\ &= f(x) - 0 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

$$y_2(0) = y_0(0) - y_1(0) = \alpha - \alpha = 0,$$

$$y_2(\pi) = y_0(\pi) - y_1(\pi) = \beta - \beta = 0.$$

所以 $y_2(x)$ 是边值问题

$$\begin{cases} y''+\lambda y=f(x), \\ y(0)=0, y(\pi)=0 \end{cases} \tag{Ⅲ}$$

的解，且 $y_0(x)=y_1(x)+y_2(x)$.

即边值问题(Ⅰ)的任意解 $y(x)$ 可写为 $y(x)=y_1(x)+y_2(x)$，其中 $y_1(x), y_2(x)$ 分别为边值问题(Ⅱ)，(Ⅲ)的解.

2. 求边值问题 $y''-\lambda y=0, y'(0)=0, y'(l)=0$ 的本征值和本征函数.

解：① 当 $\lambda>0$ 时，$r^2-\lambda=0$，解得 $r_1=\sqrt{\lambda}, r_2=-\sqrt{\lambda}$，则通解为 $y=c_1e^{\sqrt{\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{\lambda}x}$，

代入边值条件得 $\begin{cases} y'(0)=c_1\sqrt{\lambda}-c_2\sqrt{\lambda}=0, \\ y'(l)=c_1\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}l}-c_2\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}l}=0, \end{cases}$ 即 $c_1=c_2=0$，故无非零解.

② 当 $\lambda=0$ 时，通解为 $y(x)=(c_2+c_1x)e^{rx}=c_2+c_1x$，代入边值条件知 $c_1=0$，无非零解.

③ 当 $\lambda<0$ 时，令 $\lambda=-\mu^2$，则方程变为 $y''+\mu^2y=0$，特征方程为 $r^2+\mu^2=0$，则通解为

$$y(x)=c_1\cos\mu x+c_2\sin\mu x,$$

代入边值条件则有

$$y'(0)=-\mu c_1\sin 0+\mu c_2\cos 0=\mu c_2=0,$$

即 $c_2=0$；

$$y'(l)=-\mu c_1\sin\mu l+\mu c_2\cos\mu l=-\mu c_1\sin\mu l=0,$$

即 $\sin\mu l=0$ 或 $c_1=0$(舍去).

由 $\sin\mu l=0$，知 $\mu=\frac{k\pi}{l}(k=0,1,2,\cdots)$.

故当 $\mu=\frac{k\pi}{l}$ 时，$\lambda_k=-\mu^2=-\frac{k^2\pi^2}{l^2}(k=0,1,2,\cdots)$，有非零解 $y_k=c\cos\frac{k\pi}{l}x$，其中 c 为任意非零常数，$k=0,1,2,\cdots$.

综上该边值问题的本征值为 $\lambda_k=-\frac{k^2\pi^2}{l^2}$，本征函数 $y_k=c\cos\frac{k\pi}{l}x$，其中 c 为任意非零常数，$k=0,1,2,\cdots$.

3. 求边值问题 $y''-\lambda y=0, y(0)=0, y'(l)=0$ 的本征值和本征函数.

解：① 当 $\lambda=0$ 时，通解为 $y(x)=c_1x+c_2$，代入边值条件得 $c_1=c_2=0$，则无非零解.

② 当 $\lambda>0$ 时，$r^2-\lambda=0, r_1=\sqrt{\lambda}, r_2=-\sqrt{\lambda}$，通解为 $y(x)=c_1e^{\sqrt{\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{\lambda}x}$，代入边值条件得

$$\begin{cases} y(0)=c_1+c_2=0, \\ y'(l)=c_1\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}l}-c_2\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}l}=0, \end{cases}$$

解得 $c_1=c_2=0$，无非零解.

③ 当 $\lambda<0$ 时，令 $\lambda=-\mu^2$，则方程变为 $y''+\mu^2y=0$，通解为 $y(x)=c_1\cos\mu x+c_2\sin\mu x$，代入边值条件 $\begin{cases} y(0)=c_1\cos 0+c_2\sin 0=c_1=0, \\ y'(l)=-c_1\mu\sin\mu l+c_2\mu\cos\mu l=c_2\mu\cos\mu l=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} c_1=0, \\ \cos\mu l=0, \end{cases}$

则 $\mu = \frac{(2k-1)}{2l}\pi = \left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l}$，则 $\lambda_k = -\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{l^2}, k = 1,2,3,\cdots$.

综上，该边值问题的本征值为 $\lambda_k = -\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{l^2}$，本征函数 $y_k = c\sin\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right]$，其中 c 为任意非零常数，$k = 1,2,3,\cdots$.

4. 求边值问题 $x^2y'' - \lambda y = 0, y(1) = 0, y(a) = 0 (a > 1)$ 的本征值和本征函数.

解：设 $x = e^t$，则有 $[D(D-1)-\lambda]Y = 0$，即 $(D^2 - D - \lambda)Y = 0$，其中 $D = \frac{d}{dt}$.

其对应特征方程为 $r^2 - r - \lambda = 0$.

① 当 $\lambda = 0$ 时，$r_1 = 0, r_2 = 1$，则通解为 $Y = c_1 + c_2e^t$，即 $y(x) = c_1 + c_2x$，代入边值条件

$$\begin{cases} y(1) = c_1 + c_2 = 0, \\ y(a) = c_1 + ac_2 = 0, \end{cases}$$

即 $c_1 = c_2 = 0$，故无非零解.

② 当 $\lambda \neq 0$ 时，解特征方程得 $r = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\lambda}}{2}$.

当 $\lambda \geqslant -\frac{1}{4}$ 时，r 有实根为 r_1, r_2，则通解为 $Y = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}$，即 $y(x) = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2}$，代入边值条件得

$$\begin{cases} y(1) = c_1 + c_2 = 0, \\ y(a) = c_1a^{r_1} + c_2a^{r_2} = 0, \end{cases}$$

解得 $c_1 = c_2 = 0$，故无非零解.

当 $\lambda < -\frac{1}{4}$ 时，$r = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\lambda}}{2}$ 没有实根，设 $r_1 = \alpha + \beta i, r_2 = \alpha - \beta i$，则通解为 $Y = (c_1\cos\beta t + c_2\sin\beta t)e^{\alpha t}$，即 $y(x) = [c_1\cos(\beta\ln x) + c_2\sin(\beta\ln x)]x^\alpha$，代入边值条件得

$$\begin{cases} y(1) = c_1 = 0, \\ y(a) = [c_1\cos(\beta\ln a) + c_2\sin(\beta\ln a)]a^\alpha = 0, \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} c_1 = 0, c_2 \neq 0, \\ \sin(\beta\ln a) = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} c_1 = 0, \\ c_2 \neq 0, \\ \beta = \frac{k\pi}{\ln a}, k = 1,2,3,\cdots. \end{cases}$

又由于 $\alpha = \frac{1}{2}$，则 $(\beta i)^2 = \left(\frac{\sqrt{1+4\lambda_k}}{2}\right)^2 = \frac{1+4\lambda_k}{4}$，即 $\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{\ln a}\right)^2 - \frac{1}{4}, k = 1,2,3,\cdots$.

综上，当 $\lambda < -\frac{1}{4}$ 时，该边值问题的本征值 $\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{\ln a}\right)^2 - \frac{1}{4}$，本征函数为 $y_k = c\left[\sin\left(\frac{k\pi}{\ln a}\ln x\right)\right]x^{\frac{1}{2}}, k = 1,2,3,\cdots, c$ 为任意非零常数.