普通高等教育“十一五”国家级规划教材

信息光学（第二版）

INFORMATION OPTICS

苏显渝　主编
李继陶　曹益平　张启灿　编

科学出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

信 息 光 学

（第二版）

苏显渝　主编

李继陶　曹益平　张启灿　编

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材,在保持第一版特色的基础上,根据近年来信息光学领域的进展,结合长期的教学实践,对第一版内容进行了修订和补充.

全书共14章.第1～4章介绍了信息光学的基础理论;第5～12章介绍了光学全息、计算全息、莫尔现象及其应用、空间滤波、波前调制、光学相干和非相干处理等,是信息光学的重点应用领域;第13～14章介绍了最近发展起来的数字光计算机和三维面形测量.本书既阐述了信息光学的基本理论,也介绍了这一学科的最新进展,理论体系严谨,物理概念清晰,内容深入浅出,部分章节配有启发性的例题,每一章后附有适量的习题,以培养学生的创造性思维和解决实际问题的能力.书中部分内容包含了作者教学和科学研究的心得.

本书可作为高等院校光学、光学工程、光信息科学技术、电子科学与技术等有关专业本科生和硕士研究生教材,也可供相应专业的教师和科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

信息光学/苏显渝主编.—2版.—北京:科学出版社,2011
普通高等教育“十一五”国家级规划教材
ISBN 978-7-03-030737-8

Ⅰ.信… Ⅱ.苏… Ⅲ.信息光学-高等学校-教材 Ⅳ.O4-38

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第061440号

责任编辑:昌 盛 郁泽潇 / 责任校对:宋玲玲
责任印制:张克忠 / 封面设计:耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1999年9月第 一 版 开本:787×1092 1/16
2011年6月第 二 版 印张:23
2011年6月第十四次印刷 字数:590 000
印数:34 001—38 000

定价:46.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前　言

本书自 1999 年 9 月出版后，已历时 10 余年，其间 13 次重印，被国内数十所高等学校相关学科专业选作教材或参考书，受到众多好评．这次被列入普通高等教育“十一五”国家级规划教材．为了更好地发挥国家级规划教材的作用，反映近年来学科发展和技术进步，根据出版后教学实践的体会，我们对全书内容进行了修订和补充．

在第二版中，修改了一些错误以及不够准确和严谨的地方，删掉了一些已经由新的技术替代而过时的内容，补充和更新了有关信息光学理论与应用的一些新的发展．在第 1 章中增加了空间频率的局域化的概念与相关内容．在第 2 章中增加了历史引言、从矢量理论到标量理论以及复杂相干光学系统的分析．第 3 章增加了超越经典衍射极限的分辨率问题．第 4 章增加了部分相干成像和部分相干光场中透镜的傅里叶变换性质．第 5 章增加了数字全息和全息数据存储．第 6 章增加了计算全息在非球面检测中的应用实例．第 7 章增加了同心圆莫尔和螺旋莫尔的描述．由于空间光调制器的进展和在光学信息处理中的重要作用，第二版中增加了波前调制一章，并将原书中照相胶片和衍射光学元件的部分并入该章．第 10 章中删掉了半色调网屏技术，增加了几种不变的图像识别方法．第 12 章删掉了应用较少的哈达玛变换，增加了应用更多的 Hankel 变换、Radon 变换和 Hough 变换．第 13 章增加了数字光计算和离散模拟光学处理器．第 14 章除了增加调制度测量轮廓术和动态三维传感的内容外，还介绍了最新的三维电视摄像机的内容．书中部分内容包含了作者的研究成果和教学心得．

本书的第一版由苏显渝、李继陶编写．李继陶长期担任信息光学教学工作，现虽已退休多年，仍关心学科发展；苏显渝从事信息光学教学与科研 30 年，担任本书主编，期望为信息光学教材建设再尽微薄之力．曹益平和张启灿两位中青年骨干教师近年陆续加入教学团队，他们的加入为教学改革和发展增添了新的活力．本书第 1、4 章由李继陶编写，第 2、3、5 章由曹益平编写，第 10、12、13 章由张启灿编写，第 6、7、8、9、11、14 章由苏显渝编写．

本书坚持第一版的指导思想，既阐述了信息光学的基本理论，也介绍了这一学科的最新进展，理论体系严谨，物理概念清晰，内容深入浅出，部分章节配有启发性的例题，每一章后附有适量的习题，以培养学生的创造性思维和解决实际问题的能力．全书内容丰富，教学中为适应不同层次学生的要求，可以选择讲授不同内容．本书也可作为从事光学信息技术研究和工程应用技术人员的参考书．

希望读者对书中的不足给予指正．

编　者

2010 年 6 月

第一版前言

光学是一门较早发展的学科，它在科学与技术的发展史上占有重要地位，近 50 年来，由于光学自身的发展以及和其他科学技术的广泛结合与相互渗透，这门古老学科迸发出新的青春活力．随着新技术的出现，新的理论也不断发展，形成了许多新的分支学科或边缘学科．信息光学是近 40 年发展起来的一门新兴学科，它是在全息术、光学传递函数和激光的基础上，从传统的、经典的波动光学中脱颖而出的．

1948 年全息术的提出，1955 年作为像质评价的光学传递函数的建立，以及 1960 年激光的诞生，是现代光学发展中的几件大事．激光的应用使全息术获得了新的生命，全息术和光学传递函数的进一步发展，加上将数学中的傅里叶变换和通信中的线性系统理论引入光学，使光学和通信这两个不同的领域在信息学范畴内统一起来，从“空域”走向“频域”．光学工程师不再仅仅限于用光强、振幅或透过率的空间分布来描述光学图像，也像电气工程师那样用空间频率的分布和变化来描述光学图像，为光学信息处理开辟了广阔的应用前景．与其他形态的信号处理相比，光学信息处理具有高度并行、大容量的特点．近年来，这一学科发展很快，理论体系已日趋成熟，信息光学已渗透到科学技术的诸多领域，成为信息科学的重要分支，得到越来越广泛的应用．

本书是为高年级大学生和研究生的教学需要而编写的，也可供教师及科研人员参考，主要介绍信息光学的基础理论．全书共分 13 章，除包含传统的线性系统、标量衍射、传递函数、部分相干、全息和信息处理等内容外，还介绍了莫尔条纹、分数傅里叶变换、阿达玛变换、光学小波变换、光计算和三维面形测量等内容．在本书的基础部分还编写了习题，为便于教师讲授和学生自学，我们对习题给出了简单解答．

承蒙苗军、陆成强二同志为本书绘制插图，我们深表谢意．

虽然本书是在作者多年教学和科研工作的基础上完成的，但由于作者水平有限，缺点和错误实难避免，敬请专家和读者批评指正．

苏显渝　李继陶

1999 年 3 月于四川大学

目　录

前言

第一版前言

第 1 章　线性系统分析 …… 1

1.1　几个常用的非初等函数…… 1

1.1.1　矩形函数…… 1

1.1.2　sinc 函数 …… 1

1.1.3　三角形函数 …… 2

1.1.4　符号函数…… 2

1.1.5　阶跃函数…… 2

1.1.6　圆柱函数…… 2

1.2　δ函数 …… 3

1.2.1　δ函数的定义 …… 3

1.2.2　δ函数的性质 …… 4

1.2.3　梳状函数…… 4

1.3　二维傅里叶变换…… 5

1.3.1　傅里叶级数 …… 5

1.3.2　傅里叶变换 …… 5

1.3.3　广义傅里叶变换 …… 7

1.4　卷积和相关…… 9

1.4.1　卷积 …… 9

1.4.2　互相关 …… 12

1.4.3　自相关 …… 14

1.4.4　有限功率函数的相关 …… 14

1.5　傅里叶变换的基本性质和有关定理 …… 15

1.5.1　傅里叶变换的基本性质 …… 15

1.5.2　傅里叶变换的基本定理 …… 16

1.6　线性系统分析 …… 18

1.6.1　线性系统 …… 19

1.6.2　线性平移不变系统…… 20

1.6.3　线性平移不变系统的传递函数 … 21

1.6.4　线性平移不变系统的本征函数 … 22

1.7　二维光场分析 …… 23

1.7.1　单色光波场的复振幅表示 …… 23

1.7.2　平面波的空间频率…… 26

1.7.3　复振幅分布的空间频谱 …… 28

1.8　空间频率的局域化 …… 28

习题…… 31

第 2 章　标量衍射理论…… 32

2.1　历史引言 …… 32

2.2　从矢量理论到标量理论 …… 34

2.3　基尔霍夫衍射理论 …… 35

2.3.1　惠更斯-菲涅耳原理与基尔霍夫衍射公式 …… 35

2.3.2　惠更斯-菲涅耳原理与叠加积分 …… 37

2.3.3　相干光场在自由空间传播的平移不变性 …… 38

2.3.4　相干光场在自由空间传播的脉冲响应的近似表达式…… 39

2.4　衍射的角谱理论 …… 39

2.4.1　单色平面波与本征函数 …… 39

2.4.2　角谱的传播 …… 40

2.4.3　孔径对角谱的影响…… 41

2.5　菲涅耳衍射和夫琅禾费衍射 …… 42

2.5.1　菲涅耳衍射 …… 42

2.5.2　泰伯效应 …… 45

2.5.3　夫琅禾费衍射 …… 46

2.6　透镜的傅里叶变换性质 …… 46

2.6.1　透镜的相位变换作用 …… 47

2.6.2　透镜的傅里叶变换特性 …… 48

2.6.3　透镜的一般变换特性 …… 51

2.7　复杂相干光学系统的分析 …… 53

2.7.1　算符分析法的几个约束条件 … 54

2.7.2　算符分析法 …… 54

2.7.3　算符分析法的应用举例 …… 55

习题…… 56

第 3 章　光学成像系统的传递函数…… 58

3.1　相干照明衍射受限系统的点扩散函数 …… 58

3.1.1　透镜的点扩散函数…… 58

3.1.2　衍射受限系统的点扩散函数 … 60

3.2　相干照明下衍射受限系统的成像规律 …… 62

3.3 衍射受限系统的相干传递函数 … 63
3.3.1 相干传递函数 …… 63
3.3.2 相干线扩散函数和边缘扩散函数 …… 66
3.4 衍射受限非相干成像系统的传递函数 …… 69
3.4.1 非相干成像系统的光学传递函数(OTF) …… 69
3.4.2 OTF 与 CTF 的关系 …… 71
3.4.3 衍射受限的 OTF …… 72
3.4.4 非相干线扩散函数和边缘扩散函数 …… 74
3.5 有像差系统的传递函数 …… 75
3.6 相干与非相干成像系统的比较 … 76
3.6.1 截止频率 …… 76
3.6.2 像强度的频谱 …… 76
3.6.3 两点分辨 …… 78
3.7 超越经典衍射极限的分辨率问题 …… 79
3.7.1 超分辨率存在的理论依据 …… 79
3.7.2 常用超分辨率方法简介 …… 80
习题…… 81
第 4 章 部分相干理论…… 83
4.1 多色光场的解析信号表示 …… 83
4.1.1 单色信号的复表示…… 83
4.1.2 多色信号的复表示…… 84
4.2 互相干函数 …… 87
4.2.1 互相干函数 …… 87
4.2.2 互相干函数的谱表示 …… 90
4.3 时间相干性 …… 91
4.3.1 时间相干性 …… 91
4.3.2 相干时间 …… 95
4.3.3 傅里叶变换光谱术…… 95
4.4 空间相干性 …… 96
4.5 在准单色条件下的干涉 …… 96
4.6 准单色光的传播和衍射 …… 97
4.6.1 互相干的传播 …… 97
4.6.2 薄透明物体对互强度的影响 … 100
4.6.3 部分相干光的衍射 …… 100
4.7 范西泰特-策尼克定理 …… 102
4.7.1 范西泰特-策尼克定理 …… 102
4.7.2 相干面积…… 104
4.7.3 均匀圆形光源 …… 105
4.8 部分相干光场中透镜的傅里叶变换性质…… 108
4.9 部分相干成像…… 110
习题 …… 111
第 5 章 光学全息 …… 113
5.1 光学全息概述…… 113
5.2 波前记录与再现…… 114
5.2.1 波前记录…… 114
5.2.2 波前再现…… 115
5.2.3 全息图的基本类型 …… 117
5.3 同轴全息图和离轴全息图…… 118
5.3.1 同轴全息图 …… 118
5.3.2 离轴全息图 …… 119
5.4 基元全息图…… 120
5.5 菲涅耳全息图…… 123
5.5.1 点源全息图的记录和再现…… 123
5.5.2 几种特殊情况的讨论 …… 125
5.6 傅里叶变换全息图…… 128
5.6.1 傅里叶变换全息图 …… 128
5.6.2 准傅里叶变换全息图 …… 131
5.6.3 无透镜傅里叶变换全息图…… 131
5.7 像全息图…… 132
5.7.1 再现光源宽度的影响 …… 133
5.7.2 再现光源光谱宽度的影响…… 133
5.7.3 色模糊 …… 134
5.7.4 像全息的制作 …… 135
5.8 彩虹全息…… 136
5.8.1 二步彩虹全息 …… 137
5.8.2 一步彩虹全息 …… 138
5.8.3 彩虹全息的色模糊 …… 138
5.9 相位全息图…… 140
5.10 模压全息图 …… 142
5.10.1 白光再现浮雕全息图的制作 …… 142
5.10.2 电铸金属模板 …… 142
5.10.3 模压 …… 142
5.11 体积全息 …… 143
5.11.1 透射体积全息图…… 143
5.11.2 反射全息图 …… 144
5.12 平面全息图的衍射效率 …… 145
5.12.1 振幅全息图的衍射效率 …… 145

5.12.2　相位全息图的衍射效率 …… 146
5.13　全息干涉计量 …… 147
5.13.1　二次曝光法 …… 147
5.13.2　单次曝光法 …… 149
5.13.3　时间平均法 …… 149
5.14　数字全息 …… 150
5.14.1　数字全息的基本概念及其特点 …… 150
5.14.2　数字全息的基本原理 …… 151
5.15　全息数据存储 …… 153
习题 …… 155
第 6 章　计算全息 …… 158
6.1　计算全息的理论基础 …… 158
6.1.1　概述 …… 158
6.1.2　抽样定理 …… 159
6.1.3　计算全息的抽样与信息容量 … 162
6.1.4　时域信号和空域信号的调制与解调 …… 163
6.1.5　计算全息的分类 …… 164
6.2　计算全息的编码方法 …… 165
6.2.1　计算全息的编码 …… 165
6.2.2　迂回相位编码方法 …… 166
6.2.3　修正离轴参考光的编码方法 … 167
6.2.4　二元脉冲密度编码 …… 169
6.3　计算傅里叶变换全息 …… 170
6.3.1　抽样 …… 170
6.3.2　计算离散傅里叶变换 …… 171
6.3.3　编码 …… 171
6.3.4　绘制全息图 …… 171
6.3.5　再现 …… 171
6.3.6　几点讨论 …… 172
6.4　计算像面全息 …… 173
6.4.1　抽样 …… 173
6.4.2　编码 …… 174
6.4.3　全息图的绘制和再现 …… 174
6.4.4　四阶迂回相位编码的一个理论解释 …… 175
6.5　计算全息干涉图 …… 175
6.5.1　二元全息函数 …… 175
6.5.2　二元全息干涉图的制作 …… 176
6.5.3　载波频率的选择 …… 177
6.5.4　计算举例 …… 177
6.6　相息图 …… 178
6.7　计算全息的应用 …… 179
6.7.1　空间滤波器 …… 179
6.7.2　干涉计量 …… 180
6.7.3　再现三维像 …… 181
6.7.4　计算全息扫描器 …… 181
6.8　计算全息的几种物理解释 …… 182
习题 …… 183
第 7 章　莫尔现象及其应用 …… 184
7.1　莫尔现象的基本规律 …… 184
7.1.1　莫尔条纹的形成 …… 184
7.1.2　莫尔条纹的基本性质 …… 186
7.2　干涉、全息与莫尔现象 …… 187
7.2.1　干涉条纹的莫尔模拟 …… 187
7.2.2　全息与莫尔 …… 188
7.2.3　全息干涉条纹的莫尔模拟 …… 188
7.3　莫尔计量术 …… 188
7.3.1　长度和角度测量 …… 188
7.3.2　同心圆莫尔及其在二维位移测量中的应用 …… 189
7.3.3　用于应力变形测量 …… 191
7.3.4　螺旋莫尔及其在光束准直性测量中的应用 …… 192
7.4　莫尔轮廓术 …… 194
7.4.1　阴影莫尔法 …… 194
7.4.2　投影莫尔法 …… 195
7.4.3　扫描莫尔法 …… 196
第 8 章　空间滤波 …… 197
8.1　空间滤波的基本原理 …… 197
8.1.1　阿贝成像理论 …… 197
8.1.2　空间滤波的傅里叶分析 …… 198
8.2　系统与滤波器 …… 204
8.2.1　空间滤波系统 …… 204
8.2.2　空间滤波器 …… 206
8.3　空间滤波应用举例 …… 207
8.3.1　策尼克相衬显微镜 …… 207
8.3.2　补偿滤波器 …… 207
8.4　傅里叶变换透镜 …… 208
8.4.1　傅里叶透镜的截止频率、空间带宽积和视场 …… 209
8.4.2　傅里叶透镜对校正像差的要求 …… 211

8.4.3 傅里叶变换透镜的结构 …… 213
习题 …… 213
第 9 章 波前调制 …… 214
9.1 照相胶片…… 214
9.1.1 胶片处理的物理过程 …… 214
9.1.2 *H-D* 曲线 …… 215
9.1.3 胶片用于非相干光学系统中 … 216
9.1.4 胶片用于相干光学系统中…… 216
9.1.5 调制传递函数 …… 217
9.2 空间光调制器…… 219
9.2.1 概述 …… 219
9.2.2 液晶光阀…… 220
9.2.3 磁光空间光调制器 …… 223
9.2.4 可变形反射镜空间光调制器 … 224
9.2.5 LCOS 空间光调制器 …… 226
9.3 衍射光学元件…… 227
9.3.1 微光学与二元光学 …… 227
9.3.2 二元光学的产生和发展 …… 228
9.3.3 二元光学元件的设计 …… 230
9.3.4 二元光学元件的制作 …… 232
习题 …… 233
第 10 章 相干光学处理…… 235
10.1 图像相减 …… 235
10.1.1 空域编码频域解码相减方法 …… 235
10.1.2 正弦光栅滤波器相减方法 … 236
10.2 匹配滤波与图像识别 …… 237
10.2.1 匹配空间滤波器…… 237
10.2.2 用全息制作复数滤波器 …… 239
10.2.3 图像识别 …… 240
10.2.4 联合变换相关识别 …… 241
10.3 不变的图样识别光学方法 …… 243
10.3.1 梅林相关器 …… 243
10.3.2 圆谐波相关 …… 244
10.3.3 合成判别式函数…… 245
10.4 模糊图像的复原 …… 246
10.4.1 逆滤波器 …… 246
10.4.2 维纳滤波器 …… 247
10.5 合成孔径雷达 …… 249
10.5.1 合成孔径概念 …… 249
10.5.2 航向信息的记录…… 250
习题 …… 254
第 11 章 非相干光学处理…… 256
11.1 相干与非相干光学处理 …… 256
11.1.1 相干与非相干光学处理的比较 …… 256
11.1.2 非相干光学处理系统的噪声抑制 …… 257
11.2 基于几何光学的非相干处理系统 …… 258
11.2.1 成像 …… 258
11.2.2 无运动元件的卷积和相关运算 …… 259
11.2.3 用散焦系统得到脉冲响应的综合 …… 260
11.3 基于衍射的非相干处理——非相干频域综合 …… 261
11.3.1 切趾术 …… 262
11.3.2 沃耳特(Wolter)最小强度检出滤波器 …… 263
11.4 白光光学信息处理技术 …… 263
11.4.1 白光光学处理的基本原理 … 264
11.4.2 实时假彩色编码…… 265
11.5 相位调制假彩色编码 …… 267
11.5.1 光栅抽样 …… 268
11.5.2 漂白处理 …… 268
11.5.3 白光信息处理系统中的滤波解调 …… 269
习题 …… 270
第 12 章 几个变换在光学中的应用…… 271
12.1 分数傅里叶变换 …… 271
12.1.1 分数傅里叶变换的定义 …… 271
12.1.2 分数傅里叶变换的几个基本性质 …… 272
12.1.3 用透镜系统实现分数傅里叶变换 …… 274
12.2 几何变换 …… 278
12.2.1 几何变换定义和种类 …… 278
12.2.2 广义几何变换 …… 279
12.2.3 几何变换的光学实现 …… 279
12.3 Hankel 变换…… 280
12.3.1 Hankel 变换的数学定义 …… 280
12.3.2 极坐标下的傅里叶变换 …… 281
12.4 Radon 变换 …… 282

12.4.1 Radon 变换的定义 …… 282
12.4.2 像的重构 …… 282
12.5 Hough 变换 …… 283
12.5.1 Hough 变换定义 …… 283
12.5.2 Hough 变换的光学实现 …… 284
12.6 光学小波变换 …… 284
12.6.1 从短时傅里叶变换到小波变换 …… 285
12.6.2 小波变换 …… 287
12.6.3 小波函数 …… 289
12.6.4 光学小波变换 …… 291
12.6.5 光学 Morlet 小波变换的实例 …… 292
第 13 章 数字光计算 …… 294
13.1 光学逻辑运算 …… 294
13.2 离散模拟光学处理器 …… 296
13.2.1 信息和系统的离散表示 …… 296
13.2.2 串行矩阵-矢量乘法器 …… 297
13.2.3 并行的非相干光矩阵-矢量乘法器 …… 298
13.2.4 外积处理器 …… 299
13.3 光学互连 …… 300
13.3.1 自由空间光互连 …… 300
13.3.2 光纤和集成光波导光互连 … 301
13.4 光存储 …… 301
13.4.1 光盘存储器 …… 301
13.4.2 光全息存储 …… 301
13.5 光计算机 …… 302
第 14 章 光学三维传感 …… 304
14.1 主动三维传感的基本概念 …… 305
14.1.1 主动照明的三维传感方法 … 305
14.1.2 三种基本的结构照明方式 … 305
14.1.3 三维传感系统的基本组成 … 306
14.2 采用单光束的三维传感 …… 308
14.2.1 基本原理与计算公式 …… 308
14.2.2 散斑对激光三角法精度的影响 …… 310
14.2.3 测量实例(鞋楦三维面形测量) …… 311
14.2.4 基于激光同步扫描的三维面形测量 …… 312
14.3 采用激光片光的三维传感 …… 314
14.3.1 激光片光的产生 …… 314
14.3.2 测量原理 …… 314
14.3.3 测量实例 …… 315
14.4 相位测量剖面术 …… 316
14.4.1 相位测量剖面术的原理 …… 317
14.4.2 产生结构照明的方法 …… 320
14.4.3 相位测量剖面术应用举例 … 321
14.5 傅里叶变换剖面术 …… 324
14.5.1 基本原理 …… 325
14.5.2 FTP 方法的测量范围 …… 326
14.5.3 一种改进的方法 …… 327
14.5.4 动态过程三维面形测量 …… 327
14.6 调制度测量轮廓术 …… 329
14.6.1 基本原理 …… 329
14.6.2 信息处理方法 …… 330
14.6.3 测量实例 …… 331
14.7 三维轮廓测量其他光学方法 … 332
14.7.1 采用激光扫描的三维共焦成像 …… 332
14.7.2 飞行时间法 …… 333
14.7.3 三维电视摄像机 …… 334
习题 …… 335
本章参考文献 …… 336
参考书目 …… 339
部分习题参考答案 …… 340

第 1 章　线性系统分析

一般说来，一个光学系统可以用一个输入和输出的方框图来表示．光学系统对输入信号的作用可以是线性的，也可以是非线性的．对于非线性系统，除一些特例外，目前还没有通用的技术来求解．虽然任何一个光学系统都不是严格线性的，但许多光学系统都可以作为线性系统来处理．由于光学系统几乎都用二维空间变量来描述，所以，本书的开篇将简述有关二维线性系统的一些基本知识．

1.1　几个常用的非初等函数

1.1.1　矩形函数

一维矩形函数定义为

$$\mathrm{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=\begin{cases}1, & \left|\dfrac{x-x_0}{a}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{1.1.1}$$

函数图像如图 1.1.1 所示，表示函数以 x_0 为中心，宽度为 $a(a>0)$，高度为 1 的矩形．当 $x_0=0$，$a=1$ 时，矩形函数形式变成 $\mathrm{rect}(x)$，它是以 $x=0$ 为对称轴的，高度和宽度均为 1 的矩形．二维矩形函数可表为一维矩形函数的乘积 $\mathrm{rect}\left(\dfrac{x-x_0}{a}\right)\mathrm{rect}\left(\dfrac{y-y_0}{b}\right)$，其中 $a,b>0$．

1.1.2　sinc 函数

sinc 函数定义为

$$\mathrm{sinc}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=\frac{\sin\pi(x-x_0)/a}{\pi(x-x_0)/a} \tag{1.1.2}$$

式中 $a>0$，函数在 $x=x_0$ 处有最大值 1．零点位于 $x-x_0=\pm na(n=1,2,\cdots)$．对于 $x_0=0$，$a=1$ 的情况，(1.1.2)式变成 $\mathrm{sinc}(x)$，函数图像如图 1.1.2 所示．

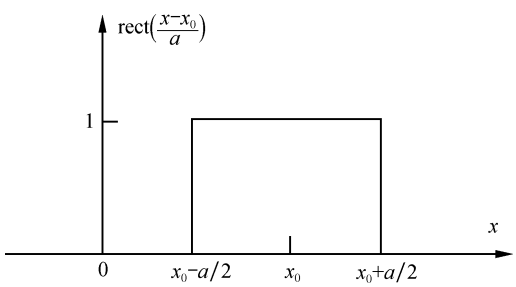


图 1.1.1　矩形函数

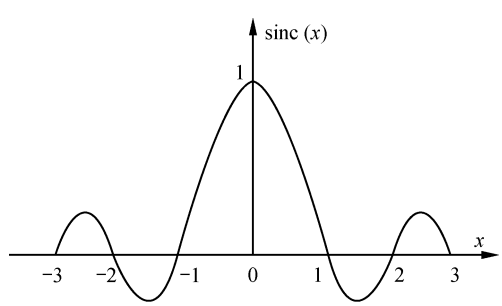


图 1.1.2　sinc 函数

1.1.3 三角形函数

$$\Lambda\left(\frac{x}{a}\right)=\begin{cases}1-\left|\dfrac{x}{a}\right|, & |x|\leqslant a\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{1.1.3}$$

其中 $a>0$,函数以原点为底边中心、底边长为 $2a$、高度为 1 的等腰三角形.图 1.1.3 给出了 $a=1$ 时 $\Lambda(x)$的图像.

1.1.4 符号函数

符号函数定义为

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases} \tag{1.1.4}$$

此函数图像如图 1.1.4 所示.

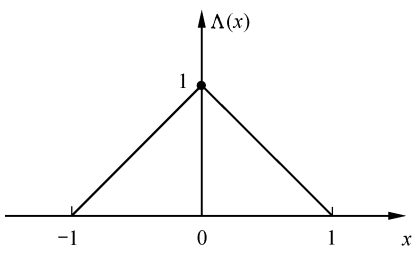


图 1.1.3 三角形函数

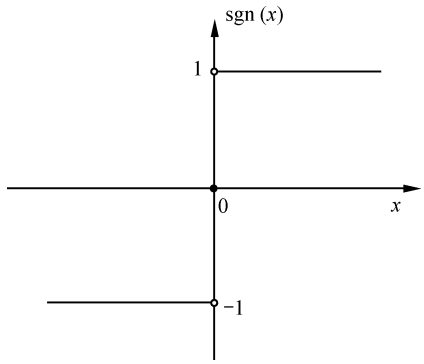


图 1.1.4 符号函数

1.1.5 阶跃函数

阶跃函数定义为

$$\operatorname{step}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\\ 0, & x<0\end{cases} \tag{1.1.5}$$

其图像如图 1.1.5 所示.

1.1.6 圆柱函数

在直角坐标系内圆柱函数的定义式为

$$\operatorname{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right)=\begin{cases}1, & \sqrt{x^2+y^2}\leqslant a\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{1.1.6}$$

极坐标内的定义式为

$$\operatorname{circ}\left(\frac{r}{a}\right)=\begin{cases}1, & r\leqslant a\\ 0, & r>a\end{cases} \tag{1.1.7}$$

圆柱函数的图像如图 1.1.6 所示.

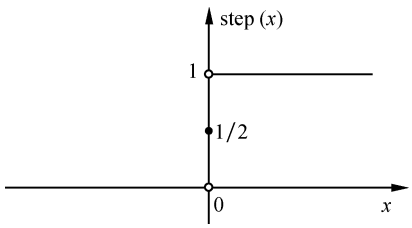


图 1.1.5 阶跃函数

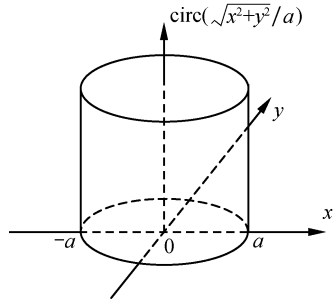


图 1.1.6 圆柱函数

1.2 δ 函 数

在物理学和工程技术中,人们常常要考察质量或能量在空间或时间上高度集中的各种现象.为此,人们设想了诸如质点、点电荷、点光源以及瞬时脉冲等物理模型.δ函数就是用来描述这类物理模型的数学工具.δ函数不是普通函数,它不像普通函数那样完全由数值对应关系确定.它是广义函数,其属性完全由它在积分中的作用表现出来.然而,从应用的角度看,也可以把δ函数与普通函数联系起来,用普通函数描述它的性质.这样既简单、直观,又能充分满足要求.

1.2.1 δ函数的定义

1. 类似普通函数形式的定义

$$\left.\begin{aligned}&\delta(x,y)=\begin{cases}0, & x\neq 0 \text{ 或 } y\neq 0\\ \infty, & x=y=0\end{cases}\\&\iint_{-\infty}^{\infty}\delta(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1\end{aligned}\right\} \tag{1.2.1}$$

在这个δ函数定义中,与普通函数类似之处,就是保留了数值对应关系的痕迹.

2. 普通函数序列极限形式的定义

$$\delta(x,y)=\lim_{n\to\infty}g_n(x,y) \tag{1.2.2}$$

并且对函数序列中的任一函数 $g_n(x,y)$来说,皆有

$$\left.\begin{aligned}&\iint_{-\infty}^{\infty}g_n(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1\\&\lim_{n\to\infty}g_n(x,y)=0, \quad x\neq 0 \text{ 或 } y\neq 0\end{aligned}\right\} \tag{1.2.3}$$

常用的表现形式有

$$\delta(x,y)=\lim_{n\to\infty}n^2\exp[-n^2\pi(x^2+y^2)] \tag{1.2.4}$$

$$\delta(x,y)=\lim_{n\to\infty}n^2\,\mathrm{rect}(nx)\mathrm{rect}(ny) \tag{1.2.5}$$

$$\delta(x,y)=\lim_{n\to\infty}n^2\,\mathrm{sinc}(nx)\mathrm{sinc}(ny) \tag{1.2.6}$$

3. 广义函数形式的定义

δ函数是一个广义函数,它赋予检验函数 $\phi(x,y)$以一个数 $\phi(0,0)$,即

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \delta(x,y)\phi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \phi(0,0) \tag{1.2.7}$$

其中 $\phi(x,y)$在原点处连续.上式表明,$\delta(x,y)$在该式左端积分中的作用,就是赋予 $\phi(x,y)$在 $x=y=0$ 处的数值 $\phi(0,0)$.不同形式的函数,只要它在积分中的作用和(1.2.7)式相同,就可认为它们与 $\delta(x,y)$相等.

1.2.2 δ函数的性质

δ函数的常用性质有

1. 筛选性质

设函数 $f(x,y)$在(x_0,y_0)点连续,则有

$$\iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x-x_0,y-y_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(x_0,y_0) \tag{1.2.8}$$

2. 坐标缩放性质

设 a,b 为实常数,则有

$$\delta(ax,by) = \frac{1}{|ab|}\delta(x,y) \tag{1.2.9}$$

3. 可分离变量性

$$\delta(x,y) = \delta(x)\delta(y) \tag{1.2.10}$$

4. 与普通函数乘积的性质

函数 $f(x,y)$在(x_0,y_0)点连续,则有

$$f(x,y)\delta(x-x_0,y-y_0) = f(x_0,y_0)\delta(x-x_0,y-y_0) \tag{1.2.11}$$

1.2.3 梳状函数

1. 一维梳状函数

一维梳状函数定义为

$$\mathrm{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n) \tag{1.2.12}$$

这是一个间隔为 1 的 δ 函数的无穷序列,其图像如图 1.2.1 所示.显然,梳状函数也是广义函数,其性质可由 δ 函数的性质推出.

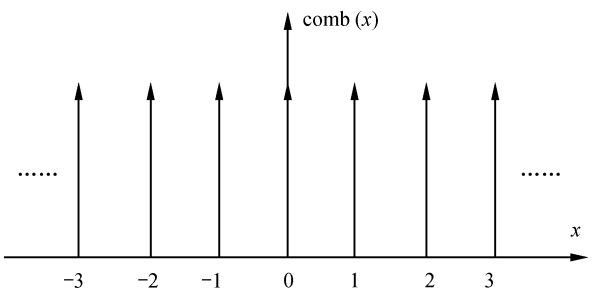


图 1.2.1 梳状函数

2. 二维梳状函数

通常总是在直角坐标系内考察二维梳状函数，并将它记为 $\mathrm{comb}(x,y)$，其定义式为

$$\mathrm{comb}(x,y)=\mathrm{comb}(x)\mathrm{comb}(y) \tag{1.2.13}$$

式中

$$\mathrm{comb}(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n) \tag{1.2.14}$$

$$\mathrm{comb}(y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(y-m) \tag{1.2.15}$$

1.3 二维傅里叶变换

1.3.1 傅里叶级数

一个周期函数 $f(t)$，周期 $\tau=\frac{1}{\nu}$，它满足狄利克雷条件，即函数在一个周期内有有限个极值点和第一类间断点(所谓第一类间断点是函数的不连续点，在该点附近函数的值有限，其左右极限存在)，则 $f(t)$可展开成三角级数

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos 2\pi n\nu t+b_n\sin 2\pi n\nu t) \tag{1.3.1}$$

其中傅里叶系数

$$\left.\begin{aligned}a_0&=\frac{2}{\tau}\int_0^{\tau}f(t)\mathrm{d}t\\ a_n&=\frac{2}{\tau}\int_0^{\tau}f(t)\cos 2\pi n\nu t\mathrm{d}t\\ b_n&=\frac{2}{\tau}\int_0^{\tau}f(t)\sin 2\pi n\nu t\mathrm{d}t\end{aligned}\right\} \tag{1.3.2}$$

也可以等效地把周期函数 $f(t)$展开成指数傅里叶级数形式

$$\boldsymbol{f}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{C}_n\exp(\mathrm{j}2\pi n\nu t) \tag{1.3.3}$$

其中

$$\boldsymbol{C}_n=\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\boldsymbol{f}(t)\exp(-\mathrm{j}2\pi n\nu t)\mathrm{d}t,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{1.3.4}$$

$\boldsymbol{C}_n$ 一般是频率 ν 的复函数，通常称为频谱函数.由于周期函数只包含 $0,\pm\nu,\pm2\nu,\cdots$频率分量，频率的取值是离散的，所以周期函数只有离散谱.

1.3.2 傅里叶变换

1. 直角坐标系内的二维傅里叶变换

非周期函数 $\boldsymbol{f}(x,y)$在整个无限 xy 平面上满足狄利克雷条件，且$\iint_{-\infty}^{\infty}|\boldsymbol{f}(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 存在，则二元函数 $\boldsymbol{f}(x,y)$的傅里叶变换定义为

$$\boldsymbol{F}(\xi,\eta)=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}(x,y)\exp\{-\mathrm{j}2\pi(\xi x+\eta y)\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.3.5}$$

其中(ξ,η)是与函数 $\boldsymbol{F}$ 对应的直角坐标系的两个坐标变量，(x,y,ξ,η)都是实变量.函数

$\boldsymbol{f}(x,y)$可以是实函数,亦可以是复函数,$\boldsymbol{F}(\xi,\eta)$或实或复由函数 $\boldsymbol{f}(x,y)$的性态决定.式中的 $\exp[-\mathrm{j}2\pi(\xi x+\eta y)]$称为二维傅里叶变换的核.类似地,定义

$$\boldsymbol{f}(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{F}(\xi,\eta)\exp[\mathrm{j}2\pi(\xi x+\eta y)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{1.3.6}$$

为二元函数 $\boldsymbol{F}(\xi,\eta)$的二维逆傅里叶变换.利用(1.3.6)式可以把非周期函数分解为连续频率的余弦分量的积分,$\boldsymbol{F}(\xi,\eta)$表示各连续频率成分的权重因子.

2. 存在条件

为了保证如上定义的二维傅里叶变换对的存在,函数 $\boldsymbol{f}(x,y)$要满足狄利克雷条件和绝对可积条件.从纯数学观点看,对这种条件的探讨自然是有意义的.这里不讨论这个理论问题,而是从应用的观点指出以下两点.

① 在应用傅里叶变换的各个领域中的大量事实表明,作为时间或空间函数而实际存在的物理量,总具备保证其傅里叶变换存在的基本条件.可以说,物理上的可能性是保证傅里叶变换存在的充分条件.因此,从应用的角度看,可以认为傅里叶变换实际上总是存在的.

② 在应用问题中,也会遇到一些理想化的函数,例如余弦函数、阶跃函数以至最简单的常数等.它们都是光学中常用的,但不满足保证其傅里叶变换存在的充分条件;同时它们在物理上也是不可能严格实现的.对这类函数难以讨论其经典意义下的傅里叶变换,然而借助函数序列极限概念或 δ 函数性质可以得到这类函数的广义傅里叶变换.这种广义傅里叶变换不仅在理论上自洽,而且在应用上也能给出符合实际的结果.

由此可以认为,今后涉及到的函数都存在着相应的傅里叶变换,只是有狭义和广义之分罢了.

3. 极坐标系内的二维傅里叶变换

(1) 定义式

设 xy 平面上的极坐标为 r,θ;$\xi\eta$ 平面上的极坐标为 ρ,φ.显然有以下关系:

$$\left.\begin{aligned} x&=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta\\ \xi&=\rho\cos\varphi,\quad \eta=\rho\sin\varphi\end{aligned}\right\} \tag{1.3.7}$$

按照以上关系式,(1.3.5)式可改写成

$$\boldsymbol{F}(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\boldsymbol{f}(r\cos\theta,r\sin\theta)\exp[-\mathrm{j}2\pi\rho r\cos(\theta-\varphi)]r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{1.3.8}$$

令

$$\boldsymbol{G}(\rho,\varphi)=\boldsymbol{F}(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi) \tag{1.3.9}$$

$$\boldsymbol{g}(r,\theta)=\boldsymbol{f}(r\cos\theta,r\sin\theta) \tag{1.3.10}$$

于是,极坐标系内二维傅里叶变换对的定义式可一般地表示为

$$\boldsymbol{G}(\rho,\varphi)=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}r\boldsymbol{g}(r,\theta)\exp[-\mathrm{j}2\pi\rho r\cos(\theta-\varphi)]\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{1.3.11}$$

$$\boldsymbol{g}(r,\theta)=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\rho\boldsymbol{G}(\rho,\varphi)\exp[\mathrm{j}2\pi\rho r\cos(\theta-\varphi)]\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi \tag{1.3.12}$$

与直角坐标系内的二维傅里叶变换对的定义式相比,极坐标形式显得很复杂.然而,当函数 $\boldsymbol{g}$ 具有圆对称性时,极坐标将显示其方便之处.

(2) 傅里叶-贝塞尔变换

设函数 $\boldsymbol{g}(r,\theta)$具有圆对称性,即 $\boldsymbol{g}$ 与 θ 无关,于是可以写成 $\boldsymbol{g}(r,\theta)=\boldsymbol{g}(r)$,将其代入

(1.3.11)式可得

$$\boldsymbol{G}(\rho,\varphi)=\int_0^{\infty} r\boldsymbol{g}(r)\left[\int_0^{2\pi}\exp[-\mathrm{j}2\pi\rho r\cos(\theta-\varphi)]\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}r$$

利用贝塞尔函数关系式

$$\int_0^{2\pi}\exp[-\mathrm{j}a\cos(\theta-\varphi)]\mathrm{d}\theta=2\pi\mathrm{J}_0(a)$$

式中 $\mathrm{J}_0(\cdot)$是第一类零阶贝塞尔函数.于是

$$\boldsymbol{G}(\rho)=2\pi\int_0^{\infty} r\boldsymbol{g}(r)\mathrm{J}_0(2\pi\rho r)\mathrm{d}r \tag{1.3.13}$$

由于上式右端与 φ 无关,故已将 $\boldsymbol{G}(\rho,\varphi)$写成 $\boldsymbol{G}(\rho)$,这表明圆对称函数的傅里叶变换仍为圆对称.

类似地,可写出 $\boldsymbol{G}(\rho)$的逆傅里叶变换

$$\boldsymbol{g}(r)=2\pi\int_0^{\infty}\rho\boldsymbol{G}(\rho)\mathrm{J}_0(2\pi\rho r)\mathrm{d}\rho \tag{1.3.14}$$

对比(1.3.13)式和(1.3.14)式可见,在极坐标系内,圆对称函数的傅里叶正变换与逆变换的运算相同.人们将这种特殊形式的傅里叶变换称为傅里叶-贝塞尔变换.

1.3.3 广义傅里叶变换

如果只考虑经典意义(或称狭义的)傅里叶变换,那么对一些很有用的函数,都无法确定其傅里叶变换,这给傅里叶变换带来很大的局限性.傅里叶变换之所以获得如此广泛的应用,在很大程度上与引入广义傅里叶变换有关.所谓广义傅里叶变换,是指极限意义下的傅里叶变换和 δ 函数的傅里叶变换.

1. 极限意义下的傅里叶变换

设 $\boldsymbol{f}(x)$是一个无法确定狭义傅里叶变换的函数.如 $\boldsymbol{f}(x)$和一个函数序列 $\boldsymbol{f}_n(x)$($n=1,2,\cdots,\infty$)具有以下关系:

$$\boldsymbol{f}(x)=\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{f}_n(x) \tag{1.3.15}$$

并且对函数序列中的每一个函数 $\boldsymbol{f}_n(x)$来说,它的狭义傅里叶变换

$$\boldsymbol{F}_n(\xi)=F\{\boldsymbol{f}_n(x)\}$$

都存在,而且当 $n\to\infty$时,函数序列 $\boldsymbol{F}(\xi)$也有确定的极限,则称该极限为函数在极限意义下的傅里叶变换.在应用中,无需对这种傅里叶变换与狭义傅里叶变换作区分.仍用 $F\{\cdot\}$表示极限意义下的傅里叶变换,即

$$F\{\boldsymbol{f}(x)\}=\lim_{n\to\infty}F\{\boldsymbol{f}_n(x)\} \tag{1.3.16}$$

作为例子,考察符号函数 $\mathrm{sgn}(x)$的傅里叶变换.由于 $\mathrm{sgn}(x)$不满足绝对可积条件,无法确定其狭义傅里叶变换.为此选取适当的函数序列

$$f_n(x)=\begin{cases}\exp(-x/n), & x>0\\ 0, & x=0\\ -\exp(x/n), & x<0\end{cases} \tag{1.3.17}$$

式中 $n=1,2,\cdots,\infty$.容易看出

$$\mathrm{sgn}(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_n(\xi) &= F\{f_n(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\exp(-\mathrm{j}2\pi\xi x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\infty}\exp\left(\frac{-x}{n}\right)\exp(-\mathrm{j}2\pi\xi x)\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{0}\exp\left(\frac{x}{n}\right)\exp(-\mathrm{j}2\pi\xi x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{-\mathrm{j}4\pi\xi}{\frac{1}{n^2}+(2\pi\xi)^2}\end{aligned} \tag{1.3.18}$$

根据广义傅里叶变换定义有

$$\boldsymbol{F}(\xi) = F\{\mathrm{sgn}(x)\} = \lim_{n\to\infty}\boldsymbol{F}_n(\xi) = \begin{cases} -\dfrac{\mathrm{j}}{\pi\xi}, & \xi \neq 0 \\ 0, & \xi = 0 \end{cases} \tag{1.3.19}$$

2. δ函数的傅里叶变换

δ函数是一个广义函数,狭义傅里叶变换的概念不适用.然而,根据 δ 函数的定义式,可直接求出它的傅里叶变换

$$F\{\delta(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\exp(-\mathrm{j}2\pi\xi x)\mathrm{d}x = 1 \tag{1.3.20}$$

即 $\delta(x)$的傅里叶变换是常数 1.那么常数 1 的逆傅里叶变换 $F^{-1}\{1\}$是否为 $\delta(x)$.为此我们考察 $F^{-1}\{1\}$在积分中的作用是否与 $\delta(x)$相同.于是考察积分,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F^{-1}\{1\}\boldsymbol{f}(x)\mathrm{d}x$$

其中 $\boldsymbol{f}(x)$是一个具有傅里叶变换的函数.设 $F\{f(x)\} = \boldsymbol{F}(\xi)$,可以写出

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} F^{-1}\{1\}\boldsymbol{f}(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} 1\cdot\exp(\mathrm{j}2\pi\xi x)\mathrm{d}\xi\right]\boldsymbol{f}(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}(x)\exp(\mathrm{j}2\pi\xi x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{F}(-\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{F}(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= \boldsymbol{f}(0)\end{aligned}$$

亦即

$$\int_{-\infty}^{\infty} F^{-1}\{1\}\boldsymbol{f}(x)\mathrm{d}x = \boldsymbol{f}(0)$$

这表明 $F^{-1}\{1\}$在积分中的作用与 $\delta(x)$相同,故有

$$F^{-1}\{1\} = \delta(x) \tag{1.3.21}$$

类似地有

$$F\{1\} = \delta(x) \tag{1.3.22}$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\mathrm{j}2\pi\xi x)\mathrm{d}x = \delta(\xi) \tag{1.3.23}$$

这是一个很重要的结果,解决了关于常数的傅里叶变换问题.

3. 广义傅里叶变换计算举例

(1) 阶跃函数 $\mathrm{step}(x)$的傅里叶变换

阶跃函数可借助符号函数表示为

$$\text{step}(x)=\frac{1}{2}[1+\text{sgn}(x)] \tag{1.3.24}$$

于是 step(x)的傅里叶变换可写成

$$F\{\text{step}(x)\}=\frac{1}{2}F\{1+\text{sgn}(x)\}=\frac{1}{2}\left\{\delta(\xi)-\frac{\text{j}}{\pi\xi}\right\} \tag{1.3.25}$$

(2) 梳状函数 $\text{comb}\left(\frac{x}{a}\right)$ (a 为正实数)的傅里叶变换

按梳状函数定义有

$$\text{comb}\left(\frac{x}{a}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\frac{x}{a}-n\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left[\frac{1}{a}(x-na)\right]=a\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-na) \tag{1.3.26}$$

所以 $\text{comb}\left(\frac{x}{a}\right)$ 是周期为 a 的周期函数,可将其展开成傅里叶级数,即

$$\text{comb}\left(\frac{x}{a}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\exp\left(\frac{\text{j}2\pi nx}{a}\right)$$

其中

$$c_0=\frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2}f(x)\text{d}x=\frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2}a\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-na)\text{d}x=\int_{-a/2}^{a/2}\delta(x)\text{d}x=1$$

$$c_n=\frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2}f(x)\exp\left(\frac{-\text{j}2\pi nx}{a}\right)\text{d}x=\frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2}a\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-na)\exp(-\text{j}2\pi nx)\text{d}x$$

$$=\int_{-a/2}^{a/2}\delta(x)\exp\left(\frac{-\text{j}2\pi nx}{a}\right)\text{d}x=1$$

于是

$$\text{comb}\left(\frac{x}{a}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{\text{j}2\pi nx}{a}\right) \tag{1.3.27}$$

所以,$\text{comb}\left(\frac{x}{a}\right)$ 的傅里叶变换为

$$F\left\{\text{comb}\left(\frac{x}{a}\right)\right\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F\left\{\exp\left(\frac{\text{j}2\pi nx}{a}\right)\right\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{\text{j}2\pi nx}{a}\right)\exp(-\text{j}2\pi\xi x)\text{d}x$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\xi-\frac{n}{a}\right)=a\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(a\xi-n)=a\text{comb}(a\xi) \tag{1.3.28}$$

若 $a=1$,则有

$$\text{comb}(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(\text{j}2\pi nx) \tag{1.3.29}$$

$$F\{\text{comb}(x)\}=\text{comb}\{\xi\} \tag{1.3.30}$$

1.4 卷积和相关

卷积和相关都是由含参变量的无穷积分定义的函数,与傅里叶变换有密切关系.

1.4.1 卷积

1. 卷积的定义

函数 $\boldsymbol{f}(x)$和函数 $\boldsymbol{h}(x)$的一维卷积,由含参变量的无穷积分定义,即

$$\boldsymbol{g}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}(\alpha)\boldsymbol{h}(x-\alpha)\mathrm{d}\alpha=\boldsymbol{f}(x)*\boldsymbol{h}(x) \tag{1.4.1}$$

这里参变量 x 和积分变量 α 皆为实数,函数 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{h}$ 可实可复.

卷积既然是无穷积分,当然也有存在条件问题.与傅里叶变换的情形类似,卷积在物理上实现的可能性,为其存在提供了充分条件.

由于光学图像大多是二维图像,故定义 $\boldsymbol{f}(x,y)$和 $\boldsymbol{h}(x,y)$的二维卷积如下:

$$\boldsymbol{g}(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}(\alpha,\beta)\boldsymbol{h}(x-\alpha,y-\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta=\boldsymbol{f}(x,y)*\boldsymbol{h}(x,y) \tag{1.4.2}$$

它是含两个参量的二重无穷积分,这里的参变量 x,y 和积分变量 α,β 皆为实数,函数 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{h}$ 可实可复.

2. 一维实函数卷积的几何说明

虽然卷积表示两个函数乘积的积分,但它和通常的两个函数乘积的积分不同,在积分式中出现了 $h(x-\alpha)$.现在说明 $h(x-\alpha)$的意义.首先,将 $h(\alpha)$曲线绕纵轴翻转 180°便得到 $h(-\alpha)$曲线.其次,对于一个 x 值,只要将 $h(-\alpha)$曲线沿 x 轴平移 x 便得到 $h(x-\alpha)$曲线.求(1.4.1)式的积分就是计算被积函数 $f(\alpha)h(x-\alpha)$所对应的曲线与横坐标所围成的面积.对于不同的参量 x 值,相应的面积就不相同,并且是 x 的函数,这个函数就是 $f(x)*h(x)$.

参与卷积运算的也可以是复数.然而复函数的卷积运算也可以归结为实函数的卷积运算(见后).因此,关于实函数卷积运算的说明,对于理解卷积运算,具有基本意义.

根据以上讨论,我们可以注意到卷积运算的两个效应:

(1) 展宽效应

假如函数只在一个有限区间内不为零,这个区间可称为函数的宽度.一般说来,卷积函数的宽度等于被卷函数宽度之和.

(2) 平滑效应

被卷函数经过卷积运算,其细微结构在一定程度上被消除,函数本身的起伏振荡变得平缓圆滑.在数学上有关卷积的一条定理说,在某些相当普遍的条件下,n 个函数的卷积,当 $n\to\infty$时(在实用上 $n=10$ 就可以了)趋于高斯函数形式.

3. 卷积的基本性质

(1) 线性性质

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为任意常数,可实可复,则有

$$[\boldsymbol{a}f_1(x)+\boldsymbol{b}f_2(x)]*\boldsymbol{h}(x)=\boldsymbol{a}f_1(x)*\boldsymbol{h}(x)+\boldsymbol{b}f_2(x)*\boldsymbol{h}(x) \tag{1.4.3}$$

显然,这是由积分运算的线性质决定的.下面利用这一性质考察复函数的卷积.

设 $\boldsymbol{f}(x)$与 $\boldsymbol{h}(x)$都是复函数,因而有

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{f}(x)&=f_{\mathrm{R}}(x)+\mathrm{j}f_{\mathrm{I}}(x)\\ \boldsymbol{h}(x)&=h_{\mathrm{R}}(x)+\mathrm{j}h_{\mathrm{I}}(x)\end{aligned}\right\} \tag{1.4.4}$$

于是,$\boldsymbol{f}(x)$与 $\boldsymbol{h}(x)$的卷积分

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}(x)&=[f_{\mathrm{R}}(x)+\mathrm{j}f_{\mathrm{I}}(x)]*[h_{\mathrm{R}}(x)+\mathrm{j}h_{\mathrm{I}}(x)]\\&=[f_{\mathrm{R}}(x)*h_{\mathrm{R}}(x)-f_{\mathrm{I}}(x)*h_{\mathrm{I}}(x)]+\mathrm{j}[f_{\mathrm{R}}(x)*h_{\mathrm{I}}(x)+f_{\mathrm{I}}(x)*h_{\mathrm{R}}(x)]\\&=g_{\mathrm{R}}(x)+\mathrm{j}g_{\mathrm{I}}(x)\end{aligned} \tag{1.4.5}$$

由此可见,复函数的卷积运算可归结为实函数的卷积运算.

(2) 交换律

给定卷积 $\boldsymbol{f}(x)*\boldsymbol{h}(x)$,则有

$$\boldsymbol{f}(x)*\boldsymbol{h}(x)=\boldsymbol{h}(x)*\boldsymbol{f}(x) \tag{1.4.6}$$

(3) 平移不变性

给定卷积 $\boldsymbol{f}(x)*\boldsymbol{h}(x)=\boldsymbol{g}(x)$,则有

$$\boldsymbol{f}(x-x_1)*\boldsymbol{h}(x-x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}(\alpha-x_1)\boldsymbol{h}(x-\alpha-x_2)\mathrm{d}\alpha=\boldsymbol{g}(x-x_1-x_2) \tag{1.4.7}$$

(4) 结合律

对于二重卷积 $\boldsymbol{f}(x)*\boldsymbol{h}_1(x)*\boldsymbol{h}_2(x)$恒有

$$[\boldsymbol{f}(x)*\boldsymbol{h}_1(x)]*\boldsymbol{h}_2(x)=\boldsymbol{f}(x)*[\boldsymbol{h}_1(x)*\boldsymbol{h}_2(x)] \tag{1.4.8}$$

(5) 坐标缩放性质

设 $\boldsymbol{f}(x)*\boldsymbol{h}(x)=\boldsymbol{g}(x)$,则

$$\boldsymbol{f}(ax)*\boldsymbol{h}(ax)=\frac{1}{|a|}\boldsymbol{g}(ax) \tag{1.4.9}$$

以上以一维卷积为例说明了卷积的性质,但一维卷积的性质可直接推广到二维.

4. 函数 $\boldsymbol{f}(x,y)$与 δ 函数的卷积

任意函数 $\boldsymbol{f}(x,y)$与 δ 函数的卷积

$$\boldsymbol{f}(x,y)*\delta(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}(\alpha,\beta)\delta(x-\alpha,y-\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta=\boldsymbol{f}(x,y) \tag{1.4.10}$$

即任意函数 $\boldsymbol{f}(x,y)$与 δ 函数的卷积,得出函数 $\boldsymbol{f}(x,y)$本身.而

$$\boldsymbol{f}(x,y)*\delta(x-x_0,y-y_0)=\boldsymbol{f}(x-x_0,y-y_0) \tag{1.4.11}$$

卷积的结果是把函数 $\boldsymbol{f}(x,y)$平移到脉冲所在的空间位置$(x-x_0,y-y_0)$处.

5. 卷积运算举例

考虑两个矩形函数的卷积运算 $\mathrm{rect}\left(\frac{x}{a}\right)*\mathrm{rect}\left(\frac{x}{a}\right)$.从几何图形上看,就是将其中一个矩形函数绕纵轴翻转,然后再对另一个作平移,并不断计算两矩形函数的重叠面积,从而得到卷积运算结果.显然,这个结果是平移距离 x 的函数.下面分 $x<0$ 和 $x>0$ 来考虑.

当 $-a\leqslant x\leqslant 0$ 时,如图 1.4.1(a)所示,

$$\mathrm{rect}\left(\frac{x}{a}\right)*\mathrm{rect}\left(\frac{x}{a}\right)=\int_{-a/2}^{x+a/2}\mathrm{d}\alpha=a+x=a\left(1-\frac{|x|}{a}\right)$$

当 $0\leqslant x\leqslant a$ 时,如图 1.4.2(b)所示,

$$\mathrm{rect}\left(\frac{x}{a}\right)*\mathrm{rect}\left(\frac{x}{a}\right)=\int_{x-a/2}^{a/2}\mathrm{d}\alpha=a-x=a\left(1-\frac{|x|}{a}\right)$$

将以上两式合并写成

$$\mathrm{rect}\left(\frac{x}{a}\right)*\mathrm{rect}\left(\frac{x}{a}\right)=a\begin{cases}1-\dfrac{|x|}{a}, & |x|\leqslant a\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=a\Lambda\left(\frac{x}{a}\right) \tag{1.4.12}$$

其图形如图 1.4.1(c)所示.当 $a=1$ 时,有

$$\mathrm{rect}(x)*\mathrm{rect}(x)=\Lambda(x) \tag{1.4.13}$$

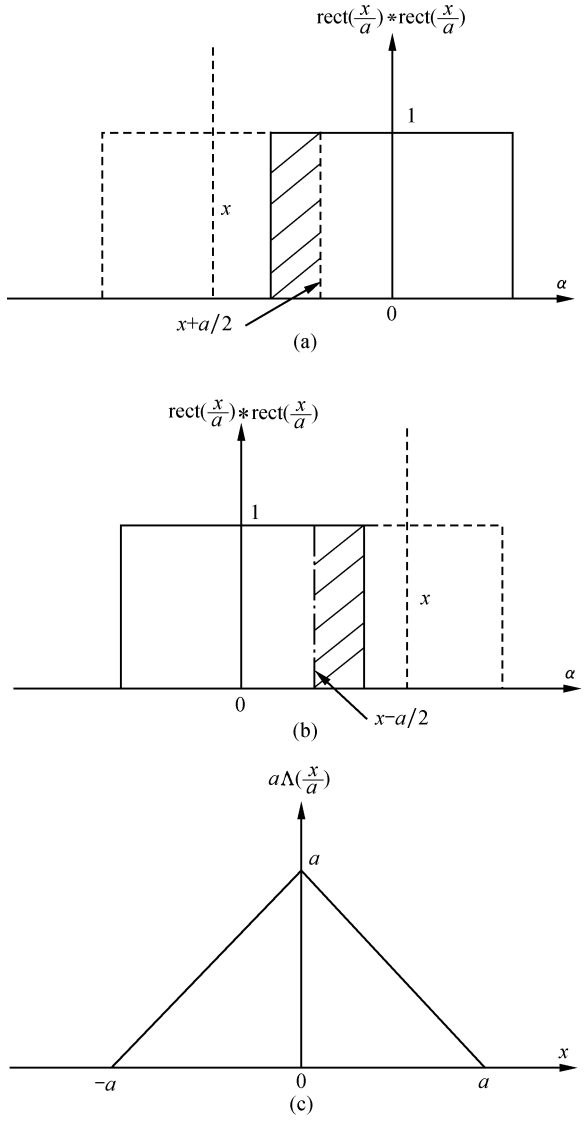


图 1.4.1　矩形函数卷积计算过程

1.4.2　互相关

1. 互相关的定义

两个函数 $\boldsymbol{f}(x,y)$和 $\boldsymbol{g}(x,y)$的互相关定义为含参变量的无穷积分，即

$$\boldsymbol{R}_{fg}(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}^{*}(\alpha-x,\beta-y)\boldsymbol{g}(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta=\boldsymbol{f}(x,y)\text{☆}\boldsymbol{g}(x,y)\qquad(1.4.14)$$

或

$$\boldsymbol{R}_{fg}(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}^{*}(\alpha,\beta)\boldsymbol{g}(x+\alpha,y+\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta=\boldsymbol{f}(x,y)\text{☆}\boldsymbol{g}(x,y)\qquad(1.4.15)$$

这里的参变量 x,y，积分变量 α,β均为实数，而函数 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 可实可复．当然，积分中的共轭符号 $*$，对复数才有意义．在多数应用问题中，这个无穷积分都是存在的．对于它不存在的一种特殊情形，后面将另作定义．

2. 互相关的卷积表达式

互相关与卷积是不同的两种运算.参与互相关运算的两个函数都不翻转,但可以把它表达成卷积形式.实际上由(1.4.14)式可写出

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{fg}(x,y)&=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}^{*}(\alpha-x,\beta-y)\boldsymbol{g}(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\\&=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}^{*}(-(x-\alpha),-(y-\beta))\boldsymbol{g}(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\\&=\boldsymbol{f}^{*}(-x,-y)*\boldsymbol{g}(x,y)\end{aligned}\tag{1.4.16}$$

或写成

$$\boldsymbol{f}(x,y)\☆\boldsymbol{g}(x,y)=\boldsymbol{f}^{*}(-x,-y)*\boldsymbol{g}(x,y)\tag{1.4.17}$$

3. 性质

① $\boldsymbol{R}_{gf}(x,y)\neq\boldsymbol{R}_{fg}(x,y)$,即互相运算不具有交换性,而有

$$\boldsymbol{R}_{gf}(x,y)=\boldsymbol{R}_{gf}^{*}(-x,-y)\tag{1.4.18}$$

证明 根据定义可写出

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{fg}(x,y)&=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{g}^{*}(\alpha-x,\beta-y)\boldsymbol{f}(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\\&=\left[\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}^{*}(\alpha,\beta)\boldsymbol{g}(\alpha-x,\beta-y)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\right]^{*}\end{aligned}$$

令 $\alpha'=\alpha-x$,$\beta'=\beta-y$,则上式可写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{gf}(x,y)&=\left[\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}^{*}(\alpha'+x,\beta'+y)\boldsymbol{g}(\alpha',\beta')\mathrm{d}\alpha'\mathrm{d}\beta'\right]^{*}\\&=\left[\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}^{*}[\alpha-(-x),\beta-(-y)]\boldsymbol{g}(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\right]^{*}\\&=\boldsymbol{R}_{fg}^{*}(-x,-y)\end{aligned}$$

当 f 和 g 皆为实数时,则有

$$\boldsymbol{R}_{gf}(x,y)=\boldsymbol{R}_{fg}(-x,-y)\tag{1.4.19}$$

② $$|\boldsymbol{R}_{fg}(x,y)|^{2}\leqslant R_{ff}(0,0)R_{gg}(0,0)\tag{1.4.20}$$

证明 引用施瓦兹不等式

$$\left|\iint_{-\infty}^{\infty}\varphi^{*}(\alpha,\beta)\psi(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\right|^{2}\leqslant\iint_{-\infty}^{\infty}|\varphi(\alpha,\beta)|^{2}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\iint_{-\infty}^{\infty}|\psi(\alpha,\beta)|^{2}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$

其中 φ 与 ψ 一般为复函数.其中等号当且仅当 $\varphi=\boldsymbol{k}\psi$ 时才成立,$\boldsymbol{k}$ 是复常数.若令 $\varphi(\alpha,\beta)=\boldsymbol{f}(\alpha-x,\beta-y)$,$\psi(\alpha,\beta)=\boldsymbol{g}(\alpha,\beta)$,则施瓦兹不等式具有下述形式:

$$\left|\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}^{*}(\alpha-x,\beta-y)\boldsymbol{g}(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\right|^{2}\leqslant\iint_{-\infty}^{\infty}|\boldsymbol{f}^{*}(\alpha-x,\beta-y)|^{2}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\iint_{-\infty}^{\infty}|\boldsymbol{g}(\alpha,\beta)|^{2}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$

即

$$|\boldsymbol{R}_{fg}(x,y)|^{2}\leqslant R_{ff}(0,0)R_{gg}(0,0)$$

借助施瓦兹不等式,可以进一步说明由(1.4.14)式定义的互相关函数的意义.根据该不等式,可以认为,以 x,y 为自变量的互相关函数 $\boldsymbol{R}_{fg}(x,y)$,描述了 $\boldsymbol{f}(\alpha-x,\beta-y)$和$\boldsymbol{g}(\alpha,\beta)$两者之间的相关性.对任一给定的 x,y 来说,$|\boldsymbol{R}_{fg}(x,y)|$的数值可以用来估计这种关联性的强弱.显然,当 $\boldsymbol{f}(\alpha-x,\beta-y)=\boldsymbol{k}\boldsymbol{g}(\alpha,\beta)$时,可以合理地认为此时的 $\boldsymbol{f}(\alpha-x,\beta-y)$与 $\boldsymbol{g}(\alpha,\beta)$之间完全相关.实际上,也正是这时 $|\boldsymbol{R}_{fg}(x,y)|$有最大值.

1.4.3 自相关

1. 定义

当 $\boldsymbol{f}(x,y)=\boldsymbol{g}(x,y)$时,即得到函数 $\boldsymbol{f}$ 的自相关的定义式

$$\boldsymbol{R}_{ff}(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}^{*}(\alpha-x,\beta-y)\boldsymbol{f}(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta=\boldsymbol{f}(x,y)\text{☆}\boldsymbol{f}(x,y) \tag{1.4.21}$$

和

$$\boldsymbol{R}_{ff}(x,y)=\boldsymbol{f}^{*}(-x,-y)*\boldsymbol{f}(x,y) \tag{1.4.22}$$

2. 性质

以下的两个性质均可由互相关函数直接推出.

① 自相关函数具有厄米对称性,即

$$\boldsymbol{R}_{ff}(x,y)=\boldsymbol{R}_{ff}^{*}(-x,-y) \tag{1.4.23}$$

当 $\boldsymbol{f}(x,y)$是实函数时,$\boldsymbol{R}_{ff}(x,y)$是偶函数,即

$$R_{ff}(x,y)=R_{ff}(-x,-y) \tag{1.4.24}$$

②

$$|\boldsymbol{R}_{ff}(x,y)|\leqslant R_{ff}(0,0) \tag{1.4.25}$$

3. 归一化互相关函数和自相关函数

在应用问题中,常用到归一化互相关函数和归一化自相关函数,它们的定义为

$$\begin{aligned}\gamma_{fg}(x,y)&=\frac{\boldsymbol{R}_{fg}(x,y)}{[R_{ff}(0,0)R_{gg}(0,0)]^{1/2}}\\&=\frac{\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}^{*}(\alpha-x,\beta-y)\boldsymbol{g}(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta}{\left[\iint_{-\infty}^{\infty}|\boldsymbol{f}(\alpha,\beta)|^{2}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\iint_{-\infty}^{\infty}|\boldsymbol{g}(\alpha,\beta)|^{2}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\right]^{1/2}}\end{aligned} \tag{1.4.26}$$

$$\gamma(x,y)=\frac{\boldsymbol{R}_{ff}(x,y)}{R_{ff}(0,0)}=\frac{\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}^{*}(\alpha-x,\beta-y)\boldsymbol{f}(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta}{\iint_{-\infty}^{\infty}|\boldsymbol{f}(\alpha,\beta)|^{2}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta} \tag{1.4.27}$$

这里假定$\iint_{-\infty}^{\infty}|\boldsymbol{f}(\alpha,\beta)|^{2}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$和$\iint_{-\infty}^{\infty}|\boldsymbol{g}(\alpha,\beta)|^{2}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$均存在.显然,对于归一化的互相关函数和自相关函数有

$$0\leqslant|\gamma_{fg}(x,y)|\leqslant 1 \tag{1.4.28}$$

$$0\leqslant|\gamma(x,y)|\leqslant 1 \tag{1.4.29}$$

4. 关于自相关函数意义的说明

$\boldsymbol{f}(x,y)$的自相关函数 $\boldsymbol{R}_{ff}(x,y)$可以用来描述函数 $\boldsymbol{f}(\alpha-x,\beta-y)$与 $\boldsymbol{f}(\alpha,\beta)$之间的相关性.由于 $\boldsymbol{f}(\alpha-x,\beta-y)$是由 $\boldsymbol{f}(\alpha,\beta)$通过平移$(x,y)$距离而形成的,它们之间的相关性,就反映了函数 $\boldsymbol{f}(\alpha,\beta)$变化的快慢.

1.4.4 有限功率函数的相关

(1.4.14)式中给出的互相关的定义,要求函数是绝对可积函数,有些周期函数,平稳随机函

数并不满足这一条件,但却满足下述极限:

$$\lim_{X,Y\to\infty}\frac{1}{4XY}\int_{-X}^{X}\int_{-Y}^{Y}|\boldsymbol{f}(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty$$

和

$$\lim_{X,Y\to\infty}\frac{1}{4XY}\int_{-X}^{X}\int_{-Y}^{Y}|\boldsymbol{g}(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty$$

当系统中能量传递的平均功率为有限时,常用这类函数,称它们为有限功率函数.于是人们把函数 $\boldsymbol{f}(x,y)$和 $\boldsymbol{g}(x,y)$的互相关定义为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{fg}(x,y)&=\lim_{X,Y\to\infty}\frac{1}{4XY}\int_{-X}^{X}\int_{-Y}^{Y}\boldsymbol{f}^*(\alpha-x,\beta-y)\boldsymbol{g}(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\\&=\langle\boldsymbol{f}^*(\alpha-x,\beta-y)\boldsymbol{g}(\alpha,\beta)\rangle\end{aligned}\tag{1.4.30}$$

式中尖括号表示求平均.

有限功率的自相关函数定义为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{ff}(x,y)&=\lim_{X,Y\to\infty}\frac{1}{4XY}\int_{-X}^{X}\int_{-Y}^{Y}\boldsymbol{f}^*(\alpha-x,\beta-y)\boldsymbol{f}(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\\&=\langle\boldsymbol{f}^*(\alpha-x,\beta-y)\boldsymbol{f}(\alpha,\beta)\rangle\end{aligned}\tag{1.4.31}$$

1.5 傅里叶变换的基本性质和有关定理

1.5.1 傅里叶变换的基本性质

1. 线性性质

设 $\boldsymbol{F}(\xi,\eta)=F\{\boldsymbol{f}(x,y)\}$,$\boldsymbol{G}(\xi,\eta)=F\{\boldsymbol{g}(x,y)\}$,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为常数,则

$$F\{\boldsymbol{af}(x,y)+\boldsymbol{bg}(x,y)\}=\boldsymbol{aF}(\xi,\eta)+\boldsymbol{gG}(\xi,\eta)\tag{1.5.1}$$

即函数线性组合的傅里叶变换等于各函数傅里叶变换的相应组合,这是由积分运算的线性性质所决定的.

2. 对称性

设 $\boldsymbol{F}(\xi,\eta)=F\{\boldsymbol{f}(x,y)\}$,则

$$F\{\boldsymbol{F}(x,y)\}=\boldsymbol{f}(-\xi,-\eta)\tag{1.5.2}$$

3. 迭次傅里叶变换

以两次连续傅里叶变换为例,则有

$$F\{F\{\boldsymbol{f}(x,y)\}\}=\boldsymbol{f}(-x,-y)\tag{1.5.3}$$

对二元函数 $\boldsymbol{f}(x,y)$连续作两次二维傅里叶变换,即得其倒立像.

4. 坐标缩放性质

设 a,b 为不等于零的实常数,若 $F\{\boldsymbol{f}(x,y)\}=\boldsymbol{F}(\xi,\eta)$,则

$$F\{\boldsymbol{f}(ax,by)\}=\frac{1}{|ab|}\boldsymbol{F}\left(\frac{\xi}{a},\frac{\eta}{b}\right)\tag{1.5.4}$$

这一性质表明,如果函数 $f(x,y)$的图像变窄,则其傅里叶变换 $\boldsymbol{F}(\xi,\eta)$的图像将变宽变矮;如果

$\boldsymbol{f}(x,y)$变宽,则 $\boldsymbol{F}(\xi,\eta)$将变窄变高.

5. 平移性

设 $F\{\boldsymbol{f}(x,y)\}=\boldsymbol{F}(\xi,\eta)$,且 x_0,y_0 为实常数,则有

$$F\{\boldsymbol{f}(x-x_0,y-y_0)\}=\exp\{-\mathrm{j}2\pi(\xi x_0+\eta y_0)\}\boldsymbol{F}(\xi,\eta) \tag{1.5.5}$$

6. 体积对应关系

设 $F\{\boldsymbol{f}(x,y)\}=\boldsymbol{F}(\xi,\eta)$,则有

$$\boldsymbol{F}(0,0)=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.5.6}$$

$$\boldsymbol{f}(0,0)=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{F}(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{1.5.7}$$

显然$\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$和$\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{F}(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$这两个积分分别表示曲面 $\boldsymbol{f}(x,y)$ 和 $\boldsymbol{F}(\xi,\eta)$ 覆盖的体积.

7. 复共轭函数的傅里叶变换

设 $F\{\boldsymbol{f}(x,y)\}=\boldsymbol{F}(\xi,\eta)$,则

$$F\{\boldsymbol{f}^*(x,y)\}=\boldsymbol{F}^*(-\xi,-\eta) \tag{1.5.8}$$

$$F\{\boldsymbol{f}^*(-x,-y)\}=\boldsymbol{F}^*(\xi,\eta) \tag{1.5.9}$$

若 $f(x,y)$为实函数,显然有

$$\boldsymbol{F}(\xi,\eta)=\boldsymbol{F}^*(-\xi,-\eta) \tag{1.5.10}$$

此时称 $\boldsymbol{F}(\xi,\eta)$具有厄米对称性.

1.5.2 傅里叶变换的基本定理

1. 卷积定理

设 $F\{\boldsymbol{f}(x,y)\}=\boldsymbol{F}(\xi,\eta)$,$F\{\boldsymbol{g}(x,y)\}=\boldsymbol{G}(\xi,\eta)$,则有

$$F\{\boldsymbol{f}(x,y)*\boldsymbol{g}(x,y)\}=\boldsymbol{F}(\xi,\eta)\boldsymbol{G}(\xi,\eta) \tag{1.5.11}$$

和

$$F\{\boldsymbol{f}(x,y)\boldsymbol{g}(x,y)\}=\boldsymbol{F}(\xi,\eta)*\boldsymbol{G}(\xi,\eta) \tag{1.5.12}$$

卷积定理表明,对于通过傅里叶变换联系起来的数域来说,一个数域中的卷积运算对应着另一个数域中的乘积运算.卷积定理对某些运算来说是至关重要的.例如,求三角形函数 $\Lambda(x)$傅里叶变换就可利用卷积定理.因为 $\Lambda(x)=\mathrm{rect}(x)*\mathrm{rect}(x)$,所以 $F\{\Lambda(x)\}=F\{\mathrm{rect}(x)\}F\{\mathrm{rect}(x)\}=\mathrm{sinc}^2(\xi)$.又如要求 $\mathrm{sinc}(x)*\mathrm{sinc}(x)$,我们可利用卷积定理先求其傅里叶变换 $F\{\mathrm{sinc}(x)*\mathrm{sinc}(x)\}=\mathrm{rect}(\xi)\mathrm{rect}(\xi)=\mathrm{rect}(\xi)$,最后可求得 $\mathrm{sinc}(x)*\mathrm{sinc}(x)=F^{-1}\{\mathrm{rect}(\xi)\}=\mathrm{sinc}(x)$.

2. 相关定理(维纳-辛钦定理)

(1) 互相关定理

设 $F\{\boldsymbol{f}(x,y)\}=\boldsymbol{F}(\xi,\eta)$,$F\{\boldsymbol{g}(x,y)\}=\boldsymbol{G}(\xi,\eta)$,则有

$$F\{\boldsymbol{f}(x,y)\star\boldsymbol{g}(x,y)\}=\boldsymbol{F}^*(\xi,\eta)\boldsymbol{G}(\xi,\eta) \tag{1.5.13}$$

根据有关的卷积表达式(1.4.17)式和(1.5.9)式即可得出上式.习惯上人们称 $\boldsymbol{F}^*(\xi,\eta)$和 $\boldsymbol{G}(\xi,\eta)$为函数 $\boldsymbol{f}(x,y)$和 $\boldsymbol{g}(x,y)$的互谱能量密度或简称互谱密度.因此,互相关定理表明,两个函数的互相关与其互谱密度构成傅里叶变换对.

(2) 自相关定理

设 $F\{\boldsymbol{f}(x,y)\}=\boldsymbol{F}(\xi,\eta)$,则有

$$F\{\boldsymbol{f}(x,y)\star\boldsymbol{f}(x,y)\}=|\boldsymbol{F}(\xi,\eta)|^2 \tag{1.5.14}$$

这只要在互相关定理中取 $\boldsymbol{g}(x,y)=\boldsymbol{f}(x,y)$即得本定理.习惯上,人们称 $|\boldsymbol{F}(\xi,\eta)|^2$ 为 $\boldsymbol{f}(x,y)$的能谱密度.因此,自相关定理表明,一个函数的自相关函数与其能谱密度构成傅里叶变换对.

3. 巴塞伐定理

设 $F\{\boldsymbol{f}(x,y)\}=\boldsymbol{F}(\xi,\eta)$,且积分 $\iint_{-\infty}^{\infty}|\boldsymbol{f}(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与 $\iint_{-\infty}^{\infty}|\boldsymbol{F}(\xi,\eta)|^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$ 都存在,则有

$$\iint_{-\infty}^{\infty}|\boldsymbol{f}(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{-\infty}^{\infty}|\boldsymbol{F}(\xi,\eta)|^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{1.5.15}$$

在应用问题中,积分 $\iint_{-\infty}^{\infty}|\boldsymbol{f}(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与积分 $\iint_{-\infty}^{\infty}|\boldsymbol{F}(\xi,\eta)|^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$ 都可以表示某种能量.本定理表明对能量计算既可在空域中进行也可在频域中进行,两者完全等价.从物理意义上看这是能量守恒的体现,故也称为能量积分定理.除此之外,此定理还可用来计算较复杂的积分.例如

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}^2(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}[\mathrm{rect}(\xi)]^2\mathrm{d}\xi=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{rect}(\xi)\mathrm{d}\xi=1$$

4. 广义巴塞伐定理

设 $F\{\boldsymbol{f}(x,y)\}=\boldsymbol{F}(\xi,\eta)$,$F\{\boldsymbol{g}(x,y)\}=\boldsymbol{G}(\xi,\eta)$,则有

$$\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}(x,y)\boldsymbol{g}^*(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{F}(\xi,\eta)\boldsymbol{G}^*(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{1.5.16}$$

5. 导数定理

设 $F\{\boldsymbol{f}(x,y)\}=\boldsymbol{F}(\xi,\eta)$,$\boldsymbol{f}^{(m,n)}(x,y)=\dfrac{\partial^{m+n}f(x,y)}{\partial x^m\partial y^n}$,$\boldsymbol{F}^{(m,n)}(\xi,\eta)=\dfrac{\partial^{m+n}\boldsymbol{F}(\xi,\eta)}{\partial\xi^m\partial\eta^n}$,则有

$$F\{\boldsymbol{f}^{(m,n)}(x,y)\}=(\mathrm{j}2\pi\xi)^m(\mathrm{j}2\pi\eta)^n\boldsymbol{F}(\xi,\eta) \tag{1.5.17}$$

$$F\{\boldsymbol{x}^m\boldsymbol{y}^n\boldsymbol{f}(x,y)\}=\left(\frac{\mathrm{j}}{2\pi}\right)^m\left(\frac{\mathrm{j}}{2\pi}\right)^n\boldsymbol{F}^{(m,n)}(\xi,\eta) \tag{1.5.18}$$

6. 积分定理(一维)

设 $F\{\boldsymbol{f}(x)\}=\boldsymbol{F}(\xi)$,则有

$$F\left\{\int_{-\infty}^{x}\boldsymbol{f}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right\}=\frac{1}{2}\boldsymbol{F}(0)\delta(\xi)-\frac{\mathrm{j}}{2\pi\xi}\boldsymbol{F}(\xi) \tag{1.5.19}$$

证明 首先将 $\int_{-\infty}^{x}\boldsymbol{f}(\alpha)\mathrm{d}\alpha$ 写成如下的卷积形式:

$$\int_{-\infty}^{x}\boldsymbol{f}(\alpha)\mathrm{d}\alpha=\boldsymbol{f}(x)*\mathrm{step}(x)$$

对上式两端取傅里叶变换,并注意到(1.3.25)式得

$$F\left\{\int_{-\infty}^{x}\boldsymbol{f}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right\}=\boldsymbol{F}(\xi)\frac{1}{2}\left\{\delta(\xi)-\frac{\mathrm{j}}{\pi\xi}\right\}=\frac{1}{2}\boldsymbol{F}(0)\delta(\xi)-\frac{\mathrm{j}}{2\pi\xi}\boldsymbol{F}(\xi)$$

7. 矩定理

函数 $\boldsymbol{f}(x,y)$的 $m+n$ 阶矩,即指积分

$$\iint_{-\infty}^{\infty} x^m y^n \boldsymbol{f}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad m,n=0,1,2,\cdots$$

下面的矩定理将表明,函数 $\boldsymbol{f}(x,y)$的 $m+n$ 阶矩完全由 $\boldsymbol{f}(x,y)$的傅里叶变换 $\boldsymbol{F}(0,0)$的性态决定;或者说 $\boldsymbol{F}(\xi,\eta)$在原点附近的性态包含了关于函数 $\boldsymbol{f}(x,y)$的各阶矩的信息.矩定理实际上是傅里叶变换导数定理的一种应用.

(1) 零阶距定理

此时 $m=n=0$,即有

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \boldsymbol{F}(0,0)$$

这实际上就是(1.5.6)式.

(2) 一阶矩定理

这时 $m=1,n=0$ 或 $m=0,n=1$,由(1.5.18)式得

$$\iint_{-\infty}^{\infty} x\boldsymbol{f}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{j}}{2\pi}\boldsymbol{F}^{(1,0)}(0,0) \tag{1.5.20}$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} y\boldsymbol{f}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{j}}{2\pi}\boldsymbol{F}^{(1,0)}(0,0) \tag{1.5.21}$$

(3) 二阶矩定理

这时有三种情况,$m=n=1$ 或 $m=2,n=0$ 或 $m=0,n=2$,即有

$$\iint_{-\infty}^{\infty} xy\boldsymbol{f}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\frac{\mathrm{j}}{2\pi}\right)\left(\frac{\mathrm{j}}{2\pi}\right)\boldsymbol{F}^{(1,1)}(0,0) \tag{1.5.22}$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} x^2\boldsymbol{f}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\frac{\mathrm{j}}{2\pi}\right)^2\boldsymbol{F}^{(2,0)}(0,0) \tag{1.5.23}$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} y^2\boldsymbol{f}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\frac{\mathrm{j}}{2\pi}\right)^2\boldsymbol{F}^{(0,2)}(0,0) \tag{1.5.24}$$

作为一个例子,计算$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\exp(-\pi x^2)\mathrm{d}x$.因 $\boldsymbol{F}(\xi)=\exp(-\pi\xi^2)$,从而有 $\boldsymbol{F}^{(2)}(0)=-2\pi$,故求出

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\exp(-\pi x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}$$

1.6 线性系统分析

从数学上着眼,很多现象都可抽象为使函数 $\boldsymbol{f}$ 通过一定的变换,形成函数 $\boldsymbol{g}$ 的运算过程.这种实现函数变换的运算过程称为系统.这种意义下的系统,既可以是特定功能的元器件组合,例如电子线路、光学透镜组等,也可以是与实际元件无关的物理现象,例如光波通过自由空间的传播过程等.这样定义的系统的作用可由算符 $L\{\cdots\}$来表征,从而前述的函数 $\boldsymbol{f}$ 变为 $\boldsymbol{g}$ 的过程即可表示为

$$\boldsymbol{g} = L\{\boldsymbol{f}\} \tag{1.6.1}$$

为方便起见,把 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 分别称为系统的输入函数和输出函数.在应用问题中,这两个函数宗量的意义和量纲可以不同.因此对于输入和输出都是二维的情形可表示为

$$\boldsymbol{g}(x_2,y_2) = L\{\boldsymbol{f}(x_1,y_1)\} \tag{1.6.2}$$

1.6.1 线性系统

一个系统对输入 $\boldsymbol{f}_1$ 和 $\boldsymbol{f}_2$ 的输出响应分别为 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$,即有

$$\boldsymbol{g}_1(x_2,y_2)=L\{\boldsymbol{f}_1(x_1,y_1)\},\quad \boldsymbol{g}_2(x_2,y_2)=L\{\boldsymbol{f}_2(x_1,y_1)\} \tag{1.6.3}$$

如果这两个输入之和 $\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{f}_2$ 作为系统的输入,且输出是 $\boldsymbol{g}_1+\boldsymbol{g}_2$,即

$$\begin{aligned}L\{\boldsymbol{f}_1(x_1,y_1)+\boldsymbol{f}_2(x_1,y_1)\}&=L\{\boldsymbol{f}_1(x_1,y_1)\}+L\{\boldsymbol{f}_2(x_1,y_1)\}\\&=\boldsymbol{g}_1(x_2,y_2)+\boldsymbol{g}_2(x_2,y_2)\end{aligned} \tag{1.6.4}$$

则称这样的系统具有叠加性.又若 $\boldsymbol{a}$ 为任意常数,若有

$$L\{\boldsymbol{a}\boldsymbol{f}_1(x_1,y_1)\}=\boldsymbol{a}L\{\boldsymbol{f}_1(x_1,y_1)\}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{g}_1(x_2,y_2) \tag{1.6.5}$$

则称此系统具有均匀性.若一个系统同时具有叠加性和均匀性时,则称此系统为线性系统.也就是说,一个系统具有线性,是指输入和输出之间应满足如下关系:

$$\begin{aligned}L\{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{f}_1(x_1,y_1)+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{f}_2(x_2,y_2)\}&=\boldsymbol{a}_1L\{\boldsymbol{f}_1(x_1,y_1)\}+\boldsymbol{a}_2L\{\boldsymbol{f}_2(x_1,y_1)\}\\&=\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{g}_1(x_2,y_2)+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{g}_2(x_2,y_2)\end{aligned} \tag{1.6.6}$$

上式表明,当输入函数是两个(或多个)函数的线性组合时,该系统的输出函数等于输入函数中各个函数单独输入时各对应输出函数的线性组合.

一个线性系统必须满足叠加性和均匀性.叠加性是一个系统作为线性系统的必要条件,所谓叠加性就是指系统中一个输入并不影响系统对其他输入的响应.线性系统要具有均匀性就是系统能够保持对输入信号的缩放因子不变.在一般情况下,均匀性并非都可以得到满足.例如一个成像系统,当像面用照相胶片记录时,由于乳剂感光的非线性,同一物点造成的响应(即冲洗后的光密度)与该物点之光强不成比例关系.也就是说当物点的光强为原光强的两倍时,其输出响应并不为原输出的两倍.但如果像面强度分布用某种光电转换器件来接收,这种器件的电压输出与光强成正比,这时系统的均匀性可以得到满足.

如果对任何输入函数都可以分解成某些基元函数的线性组合,这些基元函数通过线性系统后的输出可以通过对这些基元响应函数的线性组合来求得,这便是线性系统的最大好处.基元函数可以有不同的取法,但基元函数的选取必须考虑以下两个方面的因素:是否任何输入函数都可以比较方便地分解成这些基元函数的线性组合;系统的基元函数是否能比较方便地求得.在光学中,常用的基元函数基本上有两种,一种是点基元函数即 δ 函数,另一种是指数基元函数.下面以点基元函数为例说明线性系统的分解和综合的过程.

任何输入函数 $\boldsymbol{f}(x_1,y_1)$ 可以很方便地分解成 δ 函数的线性组合.应用 δ 函数的卷积性质,$\boldsymbol{f}(x_1,y_1)$ 可以用 δ 函数表达为

$$\boldsymbol{f}(x_1,y_1)=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}(\alpha,\beta)\delta(x_1-\alpha,y_1-\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta \tag{1.6.7}$$

这个积分式可以看作是一种特殊的线性叠加,当 α,β 在整个物平面上取值时,(1.6.7)式是无穷多个不同位置的 δ 函数 $\delta(x_1-\alpha,y_1-\beta)$ 以 $\boldsymbol{f}(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$ 为系数线性叠加,系数 $\boldsymbol{f}(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$ 可以看作是 $\delta(x_1-a,y-\beta)$ 在叠加时的权重.输入函数 $\boldsymbol{f}(x_1,y_1)$ 通过系统后的输出函数 $\boldsymbol{g}(x_2,y_2)$ 为

$$\boldsymbol{g}(x_2,y_2)=L\left\{\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}(\alpha,\beta)\delta(x_1-\alpha,y_1-\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\right\} \tag{1.6.8}$$

既然 $\boldsymbol{f}(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$ 只是作为 $\delta(x_1-\alpha,y_1-\beta)$ 的系数,根据线性系统所具有的均匀性,所以算符 L 只需作用到基元函数上就可以了,于是

$$\boldsymbol{g}(x_2,y_2)=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}(\alpha,\beta)\,L\{\delta(x_1-\alpha,y_1-\beta)\}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta \tag{1.6.9}$$

$L\{\delta(x_1-\alpha,y_1-\beta)\}$的意义是:当物平面上位于$(x_1=\alpha,y_1=\beta)$点的单位脉冲(点光源)通过系统以后在像平面上得到的分布是$L\{\delta(x_1-\alpha,y_1-\beta)\}$,所以它是脉冲响应函数或点扩散函数.对于给定的光学系统,点扩散函数既与输入点脉冲的位置(α,β)有关,也与像点的位置(x_2,y_2)有关,因此一般说来脉冲响应或点扩散函数应表示成

$$\boldsymbol{h}(x_2,y_2;\alpha,\beta)=L\{\delta(x_1-\alpha,y_1-\beta)\}$$

将上式代入(1.6.9)式,则输出函数$\boldsymbol{g}(x_2,y_2)$可表示为

$$\boldsymbol{g}(x_2,y_2)=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}(\alpha,\beta)\boldsymbol{h}(x_2,y_2;\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta \tag{1.6.10}$$

这个表达式称为叠加积分,它表明线性系统的性质完全由它的脉冲响应$\boldsymbol{h}(x_2,y_2;\alpha,\beta)$所表征.对于$\boldsymbol{h}(x_2,y_2;\alpha,\beta)$已知的线性系统,任何输入函数对应的输出函数可由叠加积分(1.6.10)式求得.

1.6.2 线性平移不变系统

设一个系统与输入函数$\boldsymbol{f}(x_1,y_1)$对应的输出函数为$\boldsymbol{g}(x_2,y_2)$.当系统输入函数发生一个平移,即$\boldsymbol{f}(x_1,y_1)$变成$\boldsymbol{f}(x_1-x_0,y_1-y_0)$时,若系统相应的输出函数也只是平移,亦即$\boldsymbol{g}(x_2,y_2)$变成$\boldsymbol{g}(x_2-Mx_0,y_2-My_0)$,式中$M$是光学系统的垂轴放大率,则说该系统具有平移不变性.这里是针对空间平移说的,故也称空间平移不变性.若系统既具有线性又具有空间平移不变性,则称这种系统是线性空间平移不变系统,简称线性平移不变系统或线性不变系统.这时的叠加积分(1.6.10)式取以下形式:

$$\boldsymbol{g}(x_2,y_2)=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}(\alpha,\beta)\boldsymbol{h}(x_2-M\alpha,y_2-M\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$

如果物平面和像平面的空间坐标取合适的标度,不难做到$M=1$,这样

$$\boldsymbol{g}(x_2,y_2)=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}(\alpha,\beta)\boldsymbol{h}(x_2-\alpha,y_2-\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta=\boldsymbol{f}(x_2,y_2)*\boldsymbol{h}(x_2,y_2) \tag{1.6.11}$$

对于线性不变系统,由于具有均匀性,物点的成像性质与其强度无关,又由于空不变的性质,物点的成像性质与其位置无关,故可由物面坐标原点的单位脉冲响应$\boldsymbol{h}(x_2,y_2)$来表征系统的性质.

线性不变系统处理起来比较容易,同时相当多的光学系统都接近于线性空不变系统.例如通常的光学成像镜头,如在一定的视场范围内,轴外像差消得很好,可视为与轴上点的像差一样,即等晕成像,则该系统就是空不变系统.如果输出端采用线性的光电转换装置,则此光学系统可作为线性空不变系统来处理.

物平面上一个点光源(δ函数),通过成像系统后得到一个弥散像点分布(函数$\boldsymbol{h}$),这种弥散作用很像日晕月晕现象.对于线性不变系统,由于像点的形状不随物点的空间位置而变,所以又把这种特性称为等晕性.对于实际成像系统,一般不可能是严格的空不变系统,这是由于像差的大小和物点位置有关.然而绝大多数光学系统像差大小随物点位置的变化是缓慢的,因此,即使是空间不变性不能在整个视场内成立,我们也可以把视场分成若干个区域,在每个区域中使空间不变性(等晕成像性)近似成立,这样划分的区域称为等晕区.对于每个等晕区都有各自的$\boldsymbol{h}$.因此,对线性空不变系统的讨论是具有一定普遍意义的.

至此已经从本质上说明了平移不变的意义,但为了在数学上为这种系统建立统一模型,对具有平移不变性的系统,还要求其输入函数与输出函数具有相同的宗量,即$x_1=x_2$,$y_1=y_2$,从而对它们无需区分,统一用(x,y)表示,对这种系统来说

$$L\{\boldsymbol{f}(x,y)\}=\boldsymbol{g}(x,y) \tag{1.6.12}$$

$$L\{\boldsymbol{f}(x-x_0,y-y_0)\}=\boldsymbol{g}(x-x_0,y-y_0) \tag{1.6.13}$$

于是(1.6.11)式写成

$$\boldsymbol{g}(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}(\alpha,\beta)\boldsymbol{h}(x-\alpha,y-\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta=\boldsymbol{f}(x,y)*\boldsymbol{h}(x,y) \tag{1.6.14}$$

1.6.3 线性平移不变系统的传递函数

在应用问题中,一个系统的输入是空间函数 $\boldsymbol{f}(x,y)$.若 $\boldsymbol{f}(x,y)$的傅里变换存在,且为

$$\boldsymbol{F}(\xi,\eta)=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}(x,y)\exp[-\mathrm{j}2\pi(\xi x+\eta y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.6.15}$$

这里的 ξ,η具有长度倒数的量纲,即具有空间频率的意义,即单位长度内变化的周数(周/mm).由此可见,上式的傅里叶变换将空间函数 $\boldsymbol{f}(x,y)$转换成空间频谱函数 $\boldsymbol{F}(\xi,\eta)$,或者说空域和频域通过傅里叶变换联系起来.

确定了 ξ,η的频率意义后,再考察(1.6.15)式的逆傅里叶变换

$$\boldsymbol{f}(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{F}(\xi,\eta)\exp[\mathrm{j}2\pi(\xi x+\eta y)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{1.6.16}$$

上式表明空间信号 $\boldsymbol{f}(x,y)$可以分解成具有不同空间频率 ξ,η的基元函数 $\exp[\mathrm{j}2\pi(\xi x+\eta y)]$的线性组合,$\boldsymbol{F}(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$就是这一线性组合中对应的基元函数的权重因子.这就是除 δ 函数之外的第二种基元函数.这里以 $\exp[\mathrm{j}2\pi(\xi x+\eta y)]$为基元函数则意味着把一个空间信号分解成具有不同空间频率的周期函数的线性组合,各周期信号的权重即为 $\boldsymbol{F}(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$.显然,函数 $\boldsymbol{F}(\xi,\eta)$描述了空间信号 $\boldsymbol{f}(x,y)$中不同频率的基元函数的组成情况.这里把频谱函数 $\boldsymbol{F}(\xi,\eta)$称为频谱密度或简称谱密度.

对 $\boldsymbol{f}(x,y),\boldsymbol{g}(x,y),\boldsymbol{h}(x,y)$作傅里叶变换,求出相应的频谱函数 $\boldsymbol{F}(\xi,\eta),\boldsymbol{G}(\xi,\eta),\boldsymbol{H}(\xi,\eta)$.利用傅里叶变换的卷积定理,根据(1.6.14)式得

$$\boldsymbol{G}(\xi,\eta)=\boldsymbol{H}(\xi,\eta)\boldsymbol{F}(\xi,\eta) \tag{1.6.17}$$

(1.6.17)式与(1.6.14)式一样,描写了系统对输入函数的变换作用,一个在频域,一个在空域.当然,频域中的这种描述,只有对线性空不变系统才成立.由此可见,对线性平移不变系统可采用两种方法研究.一是在空域通过输入函数与脉冲响应函数的卷积求得输出函数;二是在空间频率域求输入函数与脉冲响应函数两者各自频谱密度的乘积,再对该乘积取逆傅里叶变换求得输出函数.从表面上看,后一种方法包括正反两个变换和一个乘积运算,似乎比前一种方法复杂、烦琐.然而,情况并非如此,这是因为利用傅里叶变换性质和傅里叶变换对偶表,或利用快速傅里叶变换,常可以使傅里叶变换、求积、逆傅里叶变换这一运算过程远比卷积运算方便.因此,从频域来考察线性平移不变系统,不仅有重要的理论意义,而且有很高的实用价值.

对系统作频谱分析,就是考察系统对输入函数中不同频率的基元函数 $\exp[\mathrm{j}2\pi(\xi x+\eta y)]$的作用.这种作用应该表现为输出函数与输入函数中同一频率基元成分的权重的相对变化.因此,用输出函数与输入函数两者频谱密度的比例 $\boldsymbol{G}(\xi,\eta)/\boldsymbol{F}(\xi,\eta)$来表征系统的频率响应特性是合理的.由(1.6.17)式可知,该比值恰为系统的原点脉冲响应的频谱密度 $\boldsymbol{H}(\xi,\eta)$,即

$$\boldsymbol{H}(\xi,\eta)=\frac{\boldsymbol{G}(\xi,\eta)}{\boldsymbol{F}(\xi,\eta)} \tag{1.6.18}$$

这就是说,原点脉冲响应的频谱密度可以表征系统对输入函数中不同频率的基元成分的传递能力.因此,称 $\boldsymbol{H}(\xi,\eta)$为线性平移不变系统的传递函数.

线性平移不变系统的原点脉冲响应的频谱密度 $\boldsymbol{H}(\xi,\eta)$之所以能表征系统对输入函数中不同频率的基元函数的传递能力,还可以从另外一个角度来说明.既然从频域考察一个系统的性能也就是评价该系统对不同基元函数 $\exp[\mathrm{j}2\pi(\xi x+\eta y)]$的传递能力,如果能找到一个具有均匀频

谱密度的输入函数,则相应的输出函数中各种频率的基元成分的权重,作为频率的函数,即可直接用来量度这种传递能力或频率响应特性.什么样的函数具有均匀的频谱密度?显然,位于原点的脉冲信号 $\delta(x,y)$ 是这样的函数;而系统对应于输入函数 $\delta(x,y)$ 的输出函数就是系统的原点脉冲响应.因此,原点脉冲响应的频谱密度恰好能用来表示系统对不同频率的基元函数的传递能力,而将它定义为线性平移不变系统的传递函数自然是很直观、很合理的.

传递函数 $\boldsymbol{H}(\xi,\eta)$ 一般是复函数,其模的作用在于改变输入函数各种频率基元成分的模,其辐角的作用在于改变这些基元成分的初相位.输入函数中任一频率的基元成分就是通过模与初相位的上述变化,形成系统的输出函数中同一频率的基元成分,这些基元成分线性叠加即合成输出函数.

1.6.4 线性平移不变系统的本征函数

如果函数 $\boldsymbol{f}(x,y)$ 满足条件

$$L\{\boldsymbol{f}(x,y)\}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{f}(x,y) \tag{1.6.19}$$

式中 $\boldsymbol{a}$ 为一复常数,则称 $\boldsymbol{f}(x,y)$ 为算符 $L\{\cdots\}$ 所表征系统的本征函数.也就是说,系统的本征函数是一个特定的输入函数,相应的输出函数与输入函数之比是一个复常数.前面提到的指数函数是基元函数.把形如 $\exp[\mathrm{j}2\pi(\xi x+\eta y)]$ 的复指数函数选作基元函数并非偶然,正是由于它是线性空不变系统的本征函数.

现在把函数 $\exp[\mathrm{j}2\pi(\xi x+\eta y)]$ 输入到线性不变系统中去,即在(1.6.14)式中令

$$\boldsymbol{f}(x,y)=\exp[\mathrm{j}2\pi(\xi x+\eta y)] \tag{1.6.20}$$

从而得到

$$\boldsymbol{g}(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}\exp[\mathrm{j}2\pi(\xi\alpha+\eta\beta)]\boldsymbol{h}(x-\alpha,y-\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$

令 $x-\alpha=x'$,$y-\beta=y'$,上式可写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}(x,y)&=\exp[\mathrm{j}2\pi(\xi x+\eta y)]\iint_{-\infty}^{\infty}\exp[-\mathrm{j}2\pi(\xi x'+\eta y')]\boldsymbol{h}(x',y')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\\&=\boldsymbol{H}(\xi,\eta)\exp[\mathrm{j}2\pi(\xi x+\eta y)]\end{aligned} \tag{1.6.21}$$

对于给定的 ξ,η 来说,它是一复常数.对照(1.6.20)式和(1.6.21)式可知,此时输入函数与输出函数之比等于复常数 $\boldsymbol{H}(\xi,\eta)$.可见,函数 $\exp[\mathrm{j}2\pi(\xi x+\eta y)]$ 确为线性不变系统的本征函数.正因为如此,在分析线性不变系统时,取形如 $\exp[\mathrm{j}2\pi(\xi x+\eta y)]$ 的复指数函数作基元函数是非常简便的.

下面再讨论一类特殊的线性系统,其脉冲响应是实函数.这种系统可以把一个实值输入变换成一个实值输出,也是一种常见的系统,如非相干成像系统.这类系统的传递函数 $\boldsymbol{H}(\xi,\eta)$ 是厄米的,即有

$$\boldsymbol{H}(\xi,\eta)=\boldsymbol{H}^{*}(-\xi,-\eta) \tag{1.6.22}$$

若用 $A(\xi,\eta)$ 和 $\phi(\xi,\eta)$ 分别表示传递函数的模和辐角,分别称为振幅传递函数和相位传递函数.于是

$$\boldsymbol{H}(\xi,\eta)=A(\xi,\eta)\exp[-\mathrm{j}\phi(\xi,\eta)] \tag{1.6.23}$$

而

$$\boldsymbol{H}^{*}(-\xi,-\eta)=A(-\xi,-\eta)\exp[\mathrm{j}\phi(-\xi,-\eta)] \tag{1.6.24}$$

将(1.6.24)式、(1.6.23)式代入(1.6.22)式得到

$$A(\xi,\eta)\exp[-\mathrm{j}\phi(\xi,\eta)]=A(-\xi,-\eta)\exp[\mathrm{j}\phi(-\xi,-\eta)]$$

在上式中振幅和相位应分别相等,于是得到

$$A(\xi,\eta)=A(-\xi,-\eta) \tag{1.6.25}$$

$$\phi(\xi,\eta)=-\phi(-\xi,-\eta) \tag{1.6.26}$$

即振幅传递函数为偶函数,相位传递函数是奇函数.

下面我们来证明余弦或正弦函数是这类系统的本征函数.令系统的传递函数为 $\boldsymbol{H}(\xi,\eta)$,输入函数

$$f(x,y)=\cos 2\pi(\xi_0 x+\eta_0 y)$$

输入频谱为

$$\boldsymbol{F}(\xi,\eta)=\frac{1}{2}[\delta(\xi-\xi_0,\eta-\eta_0)+\delta(\xi+\xi_0,\eta+\eta_0)]$$

线性空不变系统的输出频谱为

$$\boldsymbol{G}(\xi,\eta)=\boldsymbol{H}(\xi,\eta)\boldsymbol{F}(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\boldsymbol{H}(\xi_0,\eta_0)\delta(\xi-\xi_0,\eta-\eta_0)+\frac{1}{2}\boldsymbol{H}(-\xi_0,-\eta_0)\delta(\xi+\xi_0,\eta+\eta_0)$$

系统的输出函数为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}(x,y)&=F^{-1}\{\boldsymbol{G}(\xi,\eta)\}\\&=\frac{1}{2}\boldsymbol{H}(\xi_0,\eta_0)\exp[\mathrm{j}2\pi(\xi_0 x+\eta_0 y)]+\frac{1}{2}\boldsymbol{H}(-\xi_0,-\eta_0)\exp[-\mathrm{j}2\pi(\xi_0 x+\eta_0 y)]\\&=\frac{1}{2}A(\xi_0,\eta_0)\exp[\mathrm{j}2\pi(\xi_0 x+\eta_0 y)-\mathrm{j}\phi(\xi_0,\eta_0)]\\&\quad+\frac{1}{2}A(\xi_0,\eta_0)\exp[-\mathrm{j}2\pi(\xi_0 x+\eta_0 y)+\mathrm{j}\phi(\xi_0,\eta_0)]\\&=A(\xi_0,\eta_0)\cos[2\pi(\xi_0 x+\eta_0 y)-\phi(\xi_0,\eta_0)]\end{aligned}$$

也就是说

$$L\{\cos 2\pi(\xi_0 x+\eta_0 y)\}=A(\xi_0,\eta_0)\cos[2\pi(\xi_0 x+\eta_0 y)-\phi(\xi_0,\eta_0)]$$

由于输入余弦函数的频率是任意的,上式可改写成一般形式

$$L\{\cos 2\pi(\xi x+\eta y)\}=A(\xi,\eta)\cos[2\pi(\xi x+\eta y)-\phi(\xi,\eta)] \tag{1.6.27}$$

上式表明,对于具有实值脉冲响应的线性不变系统,余弦输入将产生同频率的余弦输出.但可能产生与频率有关的衰减和相移,这种变化的大小分别决定于传递函数的模和辐角.

1.7 二维光场分析

球面波、平面波都是波动方程的基本解,由波动方程的线性性质,任何复杂的波都可以用球面波或平面波的线性组合来表示.因此有必要讨论这些光波的数学描述,以及如何用傅里叶分析方法对二维光场进行分析.

1.7.1 单色光波场的复振幅表示

单色光场中某点 P 在 t 时刻的光振动可表示成

$$u(P,t)=a(P)\cos[2\pi\nu t-\phi(P)] \tag{1.7.1}$$

式中 ν 是光波的时间频率,$a(P)$ 和 $\phi(P)$ 分别是 P 点光振动的振幅和初相位.从(1.7.1)式可以看出,一个理想的单色光波对于时间和空间都是无限的.考察实际发光过程,它总是发生在一定时间和一定空间范围内,所以理想单色光波是不存在的.但是在实际存在的光波中,有的光波仅仅包含以某一频率为中心很窄的频率范围,即窄带光.单色光的有关结论,可以推广到窄带光.对宽带的非单色光,可以将它们分解成单色光,然后再应用单色光的有关结论.所以对单色光的讨

论不仅有理论而且还有实际意义.

在运算中,指数函数比三角函数有许多方便之处,通常将 $u(P,t)$表示成

$$u(P,t)=\mathrm{Re}\{a(P)\exp(-\mathrm{j}[2\pi\nu t-\phi(P)])\}=\mathrm{Re}\{a(P)\exp[\mathrm{j}\phi(P)]\exp(-\mathrm{j}2\pi\nu t)\}$$

式中符号 Re{…}表示对括号内的复函数取实部.显然,利用复指数函数表示光振动,便于把相位中由空间位置确定的部分 $\phi(P)$和由时间变量决定的部分 $2\pi\nu t$ 分开来.

定义一个物理量

$$\boldsymbol{U}(P)=a(P)\exp[\mathrm{j}\phi(P)] \tag{1.7.2}$$

$\boldsymbol{U}(P)$称为单色光波场中 P 点的复振幅,它包含了 P 点光振动的振幅 $\boldsymbol{a}(P)$和初相位$\phi(P)$.它与时间 t 无关,而仅是空间位置的函数.对于单色光波,由于频率 ν 恒定,由时间变量确定的相位因子 $\exp(-\mathrm{j}2\pi\nu t)$对于光场中各点来说均是相同的.光场中光振动的空间分布完全由复振幅 $\boldsymbol{U}$ 随空间位置的变化所确定.

利用复振幅 $\boldsymbol{U}(P)$,光振动的表达式可改写为

$$u(P,t)=\mathrm{Re}\{\boldsymbol{U}(P)\exp(-\mathrm{j}2\pi\nu t)\} \tag{1.7.3}$$

在计算干涉、衍射和另一些光学问题时,涉及单色光波的线性运算(加、减、积分和微分等),可直接利用复振幅进行计算,导出所需结果的复振幅.由复振幅计算光强可按下式进行:

$$I=|\boldsymbol{U}|^2=\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^* \tag{1.7.4}$$

1. 球面波的复振幅

从点光源发出的光,其波面表现为球面,故称球面波.我们常把一个复杂的光源看做是许多点光源的集合,所以点光源是一个重要的基本光源,球面波是一种基本的波面形式.球面波的等相位面是一组同心球面,各点上的振幅与该点到球心的距离成反比.当直角坐标的原点与球面波中心重合时,单色球面波在场中任一点 P 所产生的复振幅可写成

$$\boldsymbol{U}(P)=\frac{a_0}{r}\exp(\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) \tag{1.7.5}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 是 $P(x,y,z)$点的矢径,$r=|\boldsymbol{r}|=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$,$a_0$ 是 $r=1$ 处的振幅值,它正比于点光源的振幅.$\boldsymbol{k}$ 是波矢量,其大小 $k=|\boldsymbol{k}|=2\pi/\lambda$ 称为空间角频率或波数,它表示单位长度上的相位变化.

对于发散球面波 $\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 的方向一致,(1.7.5)式可写做

$$\boldsymbol{U}(P)=\frac{a_0}{r}\exp(\mathrm{j}kr) \tag{1.7.6}$$

对于会聚球面波,$\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 的方向相反,(1.7.5)式可写做

$$\boldsymbol{U}(P)=\frac{a_0}{r}\exp(-\mathrm{j}kr) \tag{1.7.7}$$

当点光源或会聚点位于空间任一位置 $S(x_0,y_0,z_0)$时,$r=[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{1/2}$.

在许多问题中,我们所关心的往往是某个选定平面上的光场分布.例如衍射场中的孔径平面、观察平面、成像系统中的物平面和像平面等.因而有必要讨论光波在某一特定平面上产生的复振幅分布的数学描述.如图 1.7.1 所示,点光源 $S(x_0,y_0,0)$位于 x_0y_0 平面,考察与其相距为 z 的 xy 平面上的光场分布.r 可以写为

$$r=[z^2+(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{1/2}=z\left[1+\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{z^2}\right]^{1/2}$$

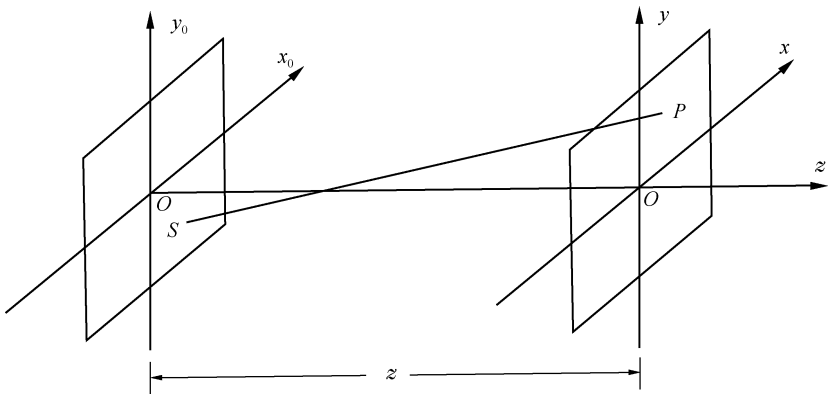


图 1.7.1 球面波在 xy 平面上的复振幅分布

当只考虑 xy 平面上一个对 S 点张角不大的范围,这时有

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \ll z^2$$

即满足所谓傍轴条件.作泰勒级数展开,并略去高阶项得

$$r \approx z+\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2z} \tag{1.7.8}$$

把(1.7.8)式代入(1.7.5)式,得到发散球面波在 xy 平面上产生的复振幅分布

$$\boldsymbol{U}(x,y)=\frac{a_0}{z}\exp(\mathrm{j}kz)\exp\left\{\mathrm{j}\frac{k}{2z}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\right\} \tag{1.7.9}$$

上式振幅中的 r 已用 z 近似,这是由于所考察的区域相对于 z 很小,可以认为各点的振幅近似相等.但在相位因子中,由于光波长 λ 极短,$k=2\pi/\lambda$ 数值很大,以致 r 的误差对相位值的影响较大,所以在 r 的近似中应多取一项.

在相位因子中包含两项:$\exp(\mathrm{j}kz)$为常相位因子,$\exp\left\{\mathrm{j}\frac{k}{2z}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\right\}$描述了相位随 xy 平面坐标的变化,我们称之为球面波的二次相位因子.当平面上复振幅分布的表达式中含有这样的因子,就可以认为距离平面 z 处发出的球面波经过这个平面.

xy 平面上相位相同点的轨迹,即等相位线方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=c \tag{1.7.10}$$

式中 c 为某一常量.不同 c 值所对应的等相位线构成一族同心圆.它们是球面波面与 xy 平面的交线.相位相距 2π 的同心圆之间的距离不相等,而是由中心向外愈来愈密.

以上我们讨论的是图 1.7.1 所示的情况,这时 $z>0$,表示观察平面位于点源右方,它表示一个发散球面波的复振幅,其特点是相位 $\phi(x,y)>0$.

若 $z<0$,表示观察平面位于点源左方,(1.7.9)式也可以用来表示一个会聚球面波,注意这时振幅因子中的 z 要用绝对值,或者写成

$$U(x,y)=\frac{a_0}{|z|}\exp(-\mathrm{j}k|z|)\exp\left\{-\mathrm{j}\frac{k}{2|z|}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\right\} \tag{1.7.11}$$

它表示经过 xy 平面向$(x_0,y_0,0)$处会聚的球面波在该平面上产生的复振分布.

2. 平面波的复振幅

平面波也是光波最简单的一种形式.平面波的特点是等相位面是平面.在各向同性介质中,

等相面与传播方向垂直,在平面波光场中,各点的振幅为常数.点光源发出的光波经透镜准直,或者把点光源移到无穷远,可以近似获得平面波.

在确定的直角坐标系中,若平面波传播方向 $\boldsymbol{k}$ 的方向余弦为$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$,则沿 $\boldsymbol{k}$ 方向传播的单色平波,在光场中 $P(x,y,z)$点处产生的复振幅可以表示为

$$\boldsymbol{U}(x,y,z)=a\exp(\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})=a\exp[\mathrm{j}k(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)] \tag{1.7.12}$$

式中 a 表示常数振幅.方向余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 之间存在着下述关系:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

(1.7.12)式可以改写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}(x,y,z)&=a\exp(\mathrm{j}kz\cos\gamma)\exp[\mathrm{j}k(x\cos\alpha+y\cos\beta)]\\&=a\exp(\mathrm{j}kz\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta})\exp[\mathrm{j}k(x\cos\alpha+y\cos\beta)]\end{aligned} \tag{1.7.13}$$

对于在确定方向传播的平面波,以及所选定的垂直 z 轴的 xy 平面,上式中的第一个相位因子是常数相位因子,与 x,y 坐标无关.因此引入一个复常数 $\boldsymbol{A}$,令

$$\boldsymbol{A}=a\exp(\mathrm{j}kz\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}) \tag{1.7.14}$$

于是 xy 平面上的复振幅分布可以表示为

$$\boldsymbol{U}(x,y)=\boldsymbol{A}\exp(\mathrm{j}k(x\cos\alpha+y\cos\beta)) \tag{1.7.15}$$

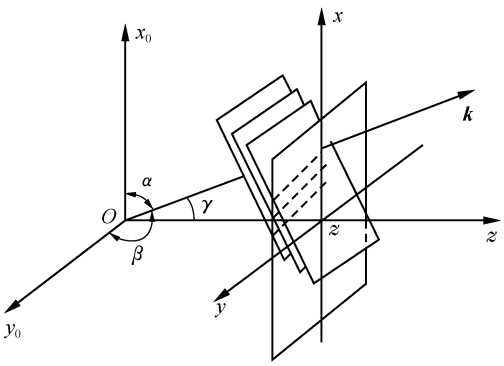


图 1.7.2 平面波在 xy 平面上的等相位线

通常称 $\exp[\mathrm{j}k(x\cos\alpha+y\cos\beta)]$为平面波的线性相位因子.若平面上复振幅分布的表达式中包含这一因子,便可知它代表一个方向余弦为$(\cos\alpha,\cos\beta)$的平面波经过该平面.

等相位线的方程是

$$x\cos\alpha+y\cos\beta=c \tag{1.7.16}$$

式中 c 为常量.不同的 c 值所对应的等相位线是一些平行直线.图 1.7.2 中用虚线表示出相位值相差 2π 的一组波面与 xy 平面的交线,即等相位线,它们是一组平行等距的平行斜线.由于相位值相差 2π 的各点的光振动实质上是相同的,所以平面上复振幅分布是以 2π 为周期的周期分布.

1.7.2 平面波的空间频率

平面波的空间频率是信息光学中常用的基本物理量.深入理解这个概念的物理含义是很重要的.

我们首先研究波矢量 $\boldsymbol{k}$ 位于 x_0z 平面内的简单情况.这时波面垂直于 x_0z 平面,如图 1.7.2 所示.由于 $\cos\beta=0$,xy 平面上的复振幅分布为

$$\boldsymbol{U}(x,y)=\boldsymbol{A}\exp(\mathrm{j}kx\cos\alpha) \tag{1.7.17}$$

等相位线方程为

$$kx\cos\alpha=c \tag{1.7.18}$$

与不同 c 值对应的等相位线是一些垂直于 x 轴的平行直线.图 1.7.3 画出了相位依次相差 2π 的几个波面与 xy 平面相交得出的等相位线.这些等相位线的距离相等.由于等相位线上的光振动相同(振幅相等,相位差为 2π 的整数倍),因此复振幅在 xy 面上周期分布的空间周期可以用相位差 2π 的两相邻等相位线的间距 X 表示.由(1.7.18)式可得

$$kX\cos\alpha = 2\pi$$

所以

$$X = \frac{\lambda}{\cos\alpha} \tag{1.7.19}$$

式中 λ 为光波波长.x 方向的空间频率用 ξ 表示,其单位为周/mm,于是有

$$\xi = \frac{1}{X} = \frac{\cos\alpha}{\lambda} \tag{1.7.20}$$

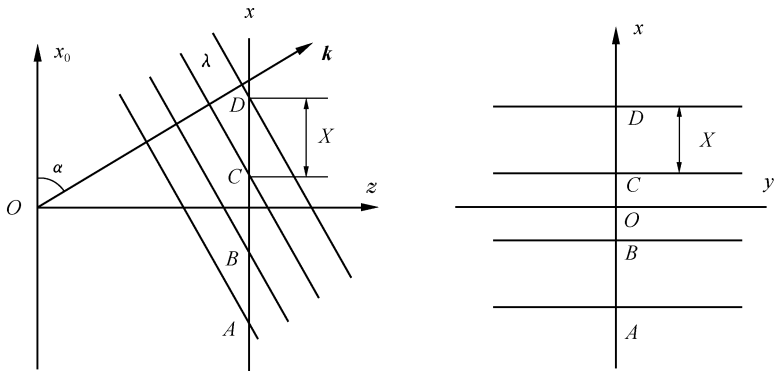


图 1.7.3 波矢量 $\boldsymbol{k}$ 位于 x_0z 平面的平面波在 xy 平面上的空间频率

因为等相位线平行于 y 轴,可以认为沿 y 方向的空间周期 $Y=\infty$,因此 y 方向的空间频率 $\eta=\frac{1}{Y}=0$,这样一来,传播方向余弦为$(\cos\alpha,0)$的单色平面波在 xy 平面上造成的复振幅分布就可用 x,y 方向的空间频率($\xi=\cos\alpha/\lambda$,$\eta=0$)来描述.因此(1.7.17)式可改写成

$$\boldsymbol{U}(x,y) = \boldsymbol{A}\exp(\mathrm{j}2\pi\xi x) \tag{1.7.21}$$

由空间频率与传播方向余弦之间的对应关系,也可以把(1.7.21)式看成传播方向余弦为 $\cos\alpha=\lambda\xi$,$\cos\beta=0$ 的单色平面波.

在图 1.7.3 中,α 为锐角,$\cos\alpha>0$,空间频率 $\xi=\cos\alpha/\lambda$ 为正值,这表示 xy 平面上的相位值沿 x 正向增加.如果传播矢量与 x_0 轴成钝角,$\cos\alpha<0$,空间频率 $\xi=\cos\alpha/\lambda$ 为负值,这表示 xy 平面上的相位沿 x 正向减小.因此,空间频率的正负仅表示平面波的不同传播方向.

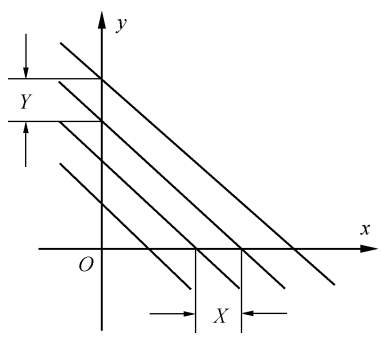


图 1.7.4 任意方向传播的平面波在 xy 平面上的空间频率

在传播方向余弦为 $\cos\alpha$,$\cos\beta$ 的一般情况下,xy 平面上的等相位线是一些斜率不为 0 的平行直线,如图 1.7.4 所示.图上表示相位依次相差 2π 的等相位线,这时 xy 平面上沿 x 方向和 y 方向的复振幅分布都是周期变化的,其空间周期 X 和 Y 分别为

$$X = \frac{\lambda}{\cos\alpha}, \quad Y = \frac{\lambda}{\cos\beta}$$

相应的空间频率分别为

$$\xi = \frac{1}{X} = \frac{\cos\alpha}{\lambda}, \quad \eta = \frac{1}{Y} = \frac{\cos\beta}{\lambda} \tag{1.7.22}$$

于是(1.7.15)式可写成

$$\boldsymbol{U}(x,y) = \boldsymbol{A}\exp[\mathrm{j}2\pi(\xi x + \eta y)] \tag{1.7.23}$$

上式直接通过空间频率(ξ,η)表示 xy 平面上的复振幅分布.(1.7.23)式代表了一个传播方向余弦为 $\cos\alpha=\lambda\xi$,$\cos\beta=\lambda\eta$ 的单色平面波.

假如我们的注意力不是集中在某一个平面上,而在于整个空间,可以类似地定义沿 z 方向的空间频率

$$\zeta=\frac{\cos\gamma}{\lambda} \tag{1.7.24}$$

于是(1.7.12)式可表示成

$$\boldsymbol{U}(x,y,z)=a\exp[\mathrm{j}2\pi(\xi x+\eta y+\zeta z)] \tag{1.7.25}$$

根据 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$,可得

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=\frac{1}{\lambda^2}$$

式中,$1/\lambda$ 表示平面波沿传播方向的空间频率.

注意,空间频率的概念同样可以描述其他物理量空间周期分布.但它们有不同的物理含义.例如,对于非相干照明的平面上的光强分布,也可以通过傅里叶分析利用空间频率来描述.但空间频率(ξ,η)不再和单色平面波有关,$\exp[\mathrm{j}2\pi(\xi x+\eta y)]$也就不再对应沿某一方向传播的平面波.

1.7.3 复振幅分布的空间频谱

我们用 $\boldsymbol{g}(x,y)$表示在 xy 平面上的物体分布,在相干照明下,$\boldsymbol{g}(x,y)$就是 xy 平面上的复振幅分布,其模代表每一点的振幅,辐角代表每一点的初相位.利用傅里叶变换这一数学工具,复振幅分布 $\boldsymbol{g}(x,y)$可表示成

$$\boldsymbol{g}(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{G}(\xi,\eta)\exp[\mathrm{j}2\pi(\xi x+\eta y)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{1.7.26}$$

式中 $\boldsymbol{G}(\xi,\eta)$是 $\boldsymbol{g}(x,y)$的频谱.上式表明,物函数 $\boldsymbol{g}(x,y)$可以看做无数指数基元 $\exp[\mathrm{j}2\pi\cdot(\xi x+\eta y)]$叠加而成的,叠加时任一确定频率$(\xi,\eta)$的指数基元权重是 $\boldsymbol{G}(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$,这些指数基元在物平面上的取向和周期随$(\xi,\eta)$不同而各不相同.也就是说,物函数 $\boldsymbol{g}(x,y)$可以分解为无穷多个不同频率(ξ,η),不同取向$(\mathrm{tg}\theta=\eta/\xi)$,不同权重$(\boldsymbol{G}(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta)$的指数基元.

前面已经指出,指数基元 $\exp[\mathrm{j}2\pi(\xi x+\eta y)]$代表一个传播方向余弦为$(\cos\alpha=\lambda\xi,\cos\beta=\lambda\eta)$的单位振幅的单色平面波.因此,公式(1.7.26)表示的物函数 $\boldsymbol{g}(x,y)$可以看做不同方向传播的单色平面波分量的线性叠加.这些平面波分量的传播方向和空间频率(ξ,η)相对应,其相应的振幅和常数相位取决于频谱 $\boldsymbol{G}(\xi,\eta)$,我们称 $\boldsymbol{G}(\xi,\eta)$为复振幅分布$\boldsymbol{g}(x,y)$的空间频谱.因为 $\xi=\frac{\cos\alpha}{\lambda}$,$\eta=\frac{\cos\beta}{\lambda}$,$\boldsymbol{G}(\xi,\eta)$也可用方向余弦表示,即

$$\boldsymbol{G}\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{g}(x,y)\exp\left[-\mathrm{j}2\pi\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}x+\frac{\cos\beta}{\lambda}y\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.7.27}$$

这里将平面波的空间频率(ξ,η)与特定的传播方向$(\cos\alpha,\cos\beta)$相对应,称 $\boldsymbol{G}\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$ 为平面波的角谱.引入角谱的概念有助于进一步理解复振幅分解的物理意义.

1.8 空间频率的局域化

任一物分布函数都可看作是许多个在各方向上传播的平面波叠加而成的,每一个傅里叶分量是一个单一空间频率的复指数函数,它代表一个充满整个空间的平面波.例如,一个在空间中沿 x 轴正方向传播的平面波,其波列是从$-\infty$一直延伸到∞的.因此,不能将一个空间位置与一

个特定的空间频率联系起来.虽然如此,我们知道在实际问题中,一幅图像的某一部分可以包含某一固定间距的平行网栅,也就是说由这些平行网栅代表的特定频率或频段是局限在图像的某一空间区域内的.这一节我们将引入局域空间频率的概念,并分析它们与傅里叶分量之间的关系.

为了便于理解,我们先考虑一个具有单一空间频率(ξ,η)的基元复指数函数

$$\boldsymbol{g}(x,y)=a\exp[\mathrm{j}2\pi(\xi x+\eta y)]$$

其中a为常数.显然,其空间频率可以这样来求得,即

$$\xi=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}[2\pi(\xi x+\eta y)],\quad \eta=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}[2\pi(\xi x+\eta y)]$$

现在我们考虑复值函数的一般情况,其表示式为

$$\boldsymbol{g}(x,y)=a(x,y)\exp[\mathrm{j}\phi(x,y)] \tag{1.8.1}$$

其中$a(x,y)$是非负的实值振幅分布,$\phi(x,y)$为实值相位分布.这里假定振幅分布$a(x,y)$是空间位置(x,y)的慢变化函数.因此,我们集中讨论相位函数$\phi(x,y)$的行为.

我们定义$\boldsymbol{g}(x,y)$的局域空间频率(ξ_l,η_l)为

$$\xi_l=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y),\quad \eta_l=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y) \tag{1.8.2}$$

而且在函数$\boldsymbol{g}(x,y)$值为零的区域,ξ_l和η_l之值也定义为零.

把这个定义用于基元复指数函数$\boldsymbol{g}(x,y)=a\exp[\mathrm{j}2\pi(\xi x+\eta y)]$得

$$\xi_l=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}[2\pi(\xi x+\eta y)]=\xi,\quad \eta_l=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}[2\pi(\xi x+\eta y)]=\eta$$

因此,我们看到对于单个傅里叶分量的情形,局域频率的确就是该分量的频率,这些频率在整个xy平面上均为常数.

接下来考虑一个在有限空域上的二次相位函数,这个函数称为"有限啁啾"函数,即

$$\boldsymbol{g}(x,y)=\exp[\mathrm{j}\pi\beta(x^2+y^2)]\mathrm{rect}\left(\frac{x}{2X}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y}{2Y}\right) \tag{1.8.3}$$

这个函数在矩形区域$D=\{(x,y)\mid -X\leqslant x\leqslant X,-Y\leqslant y\leqslant Y\}$内有值,而在这个矩形区域之外为零.在这个区域内对$x,y$求偏导数得到局域频率为

$$\xi_l=\beta x\,\mathrm{rect}\left(\frac{x}{2X}\right),\quad \eta_l=\beta y\,\mathrm{rect}\left(\frac{y}{2Y}\right) \tag{1.8.4}$$

我们看到,在这个情况下,局域空间频率依赖于xy平面上的位置.在一个大小为$2X\times 2Y$的矩形内,ξ_l随x坐标成线性变化,而η_l随y坐标线性变化.因此,对这个函数(以及更多的其他函数)局域空间频率与xy平面内所在的位置有关.

由于局域空间频率只局限在尺寸为$2X\times 2Y$的矩形内,我们也许会说,$\boldsymbol{g}(x,y)$的傅里叶谱也局限在同样的矩形内.实际上,这句话只是近似正确的,但并不精确成立.这种函数的傅里叶变换由下式给出:

$$\boldsymbol{G}(\xi,\eta)=\int_{-X}^{X}\int_{-Y}^{Y}\exp[\mathrm{j}\pi\beta(x^2+y^2)]\exp[-\mathrm{j}2\pi(\xi x+\eta y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这个表达式在直角坐标系中可分离变量,于是只要求出一维频谱就够了.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}(\xi)&=\int_{-X}^{X}\exp(\mathrm{j}\pi\beta x^2)\exp(-\mathrm{j}2\pi\xi x)\mathrm{d}x=\int_{-X}^{X}\exp\left[\mathrm{j}\pi\beta\left(x^2-\frac{2\xi}{\beta}x+\frac{\xi^2}{\beta^2}-\frac{\xi^2}{\beta^2}\right)\right]\mathrm{d}x\\&=\exp\left(-\mathrm{j}\pi\frac{\xi^2}{\beta}\right)\int_{-X}^{X}\exp\left[\mathrm{j}\pi\beta\left(x-\frac{\xi}{\beta}\right)^2\right]\mathrm{d}x\\&=\exp\left(-\mathrm{j}\pi\frac{\xi^2}{\beta}\right)\int_{-X}^{X}\exp\left\{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}\left[\sqrt{2\beta}\left(x-\frac{\xi}{\beta}\right)\right]^2\right\}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

令 $t=\sqrt{2\beta}\left(x-\frac{\xi}{\beta}\right)$，得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}(\xi)&=\frac{1}{\sqrt{2\beta}}\exp\left(-\mathrm{j}\pi\frac{\xi^2}{\beta}\right)\int_{-\sqrt{2\beta}\left(X+\frac{\xi}{\beta}\right)}^{\sqrt{2\beta}\left(X-\frac{\xi}{\beta}\right)}\exp\left(\mathrm{j}\frac{\pi}{2}t^2\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\sqrt{2\beta}}\exp\left(-\mathrm{j}\pi\frac{\xi^2}{\beta}\right)\left\{\int_0^{\sqrt{2\beta}\left(X-\frac{\xi}{\beta}\right)}\exp\left(\mathrm{j}\frac{\pi}{2}t^2\right)\mathrm{d}t-\int_0^{-\sqrt{2\beta}\left(X+\frac{\xi}{\beta}\right)}\exp\left(\mathrm{j}\frac{\pi}{2}t^2\right)\mathrm{d}t\right\}\\&=\frac{1}{\sqrt{2\beta}}\exp\left(-\mathrm{j}\pi\frac{\xi^2}{\beta}\right)\left\{\left[\int_0^{\sqrt{2\beta}\left(X-\frac{\xi}{\beta}\right)}\cos\frac{\pi}{2}t^2\mathrm{d}t-\int_0^{-\sqrt{2\beta}\left(X-\frac{\xi}{\beta}\right)}\cos\frac{\pi}{2}t^2\mathrm{d}t\right]\right.\\&\quad\left.+\mathrm{j}\left[\int_0^{\sqrt{2\beta}\left(X-\frac{\xi}{\beta}\right)}\sin\frac{\pi}{2}t^2\mathrm{d}t-\int_0^{-\sqrt{2\beta}\left(X+\frac{\xi}{\beta}\right)}\sin\frac{\pi}{2}t^2\mathrm{d}t\right]\right\}\end{aligned}$$

利用已制成数值表的菲涅耳积分公式

$$C(Z)=\int_0^Z\cos\frac{\pi}{2}t^2\mathrm{d}t,\quad S(Z)=\int_0^Z\sin\frac{\pi}{2}t^2\mathrm{d}t$$

可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\beta}}\exp\left(-\mathrm{j}\pi\frac{\xi^2}{\beta}\right)&\left\{C\left[\sqrt{2\beta}\left(X-\frac{\xi}{\beta}\right)\right]-C\left[-\sqrt{2\beta}\left(X+\frac{\xi}{\beta}\right)\right]\right.\\&\left.+\mathrm{j}S\left[\sqrt{2\beta}\left(X-\frac{\xi}{\beta}\right)\right]-\mathrm{j}S\left[-\sqrt{2\beta}\left(X+\frac{\xi}{\beta}\right)\right]\right\}\end{aligned}$$

频谱 $\boldsymbol{G}(\eta)$的表达式与 $\boldsymbol{G}(\xi)$的表达式完全相似，只要将 X 换成 Y，ξ 换成 η 即可．图 1.8.1 为 $\xi=10$，$\beta=1$ 时 $G(\xi)$与 ξ 的关系曲线．

由图可以看出，频谱在区域(−10，10)上几乎是平的，而在这个区域之外几乎为零．我们得出的结论是，局域空间频率为傅里叶频谱在何处取得较大值提供了一个良好的、但不是绝对精确的指示．但是，局域空间频率与傅里叶频谱的频率是不同的概念．可以找到局域空间频率与傅里叶频谱的频率并不像上例那样良好一致的例子．只有当 $\phi(x,y)$在 xy 面上的变化足够慢，即在任何一点(x,y)附近的相位 $\phi(x,y)$，只要用它的泰勒展开式中的前三项(即常数项和两个一阶偏导数项)就能很好近似，二者才会良好一致．

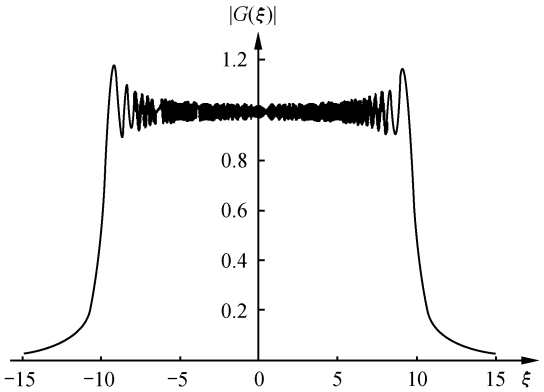


图 1.8.1　有限函数的频谱($\xi=10$，$\beta=1$)

局域空间频率在光学中有专门的物理意义．例如相干光波复振幅的局域空间频率相当于几何光学描述下的光线方向．下面解释一下这个结论．

考虑一个单色光波，它在 xyz 构成的三维空间中沿 z 轴正方向传播．在一个 z 恒定的平面上(即平行于 xy 面的平面上)的每一点，有一个完全确定的经过该点的光线方向，这个方向与该点的波矢方向 $\boldsymbol{k}$ 一致．

前面提到，一个平面上的任意复场分布可以通过傅里叶变换分解为许多沿不同方向传播的平面波的集合．每个这样的平面波有自己独立的波矢量，其方向余弦为$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，它可以看成是与这个波矢相联系的一个空间频率．

通过傅里叶分析确定的各个空间频率在空间到处都存在，不能认为是限制于局域的．但是对于一个相位变化不很快的复值函数，可以引进局域空间频率的概念．局域空间频率(ξ_l,η_l)的定义

也可看作是定义了该波前局域方向余弦($\cos\alpha$,$\cos\beta_l$,$\cos\gamma_l$),它们和局域空间频率的关系是

$$\cos\alpha = \lambda\xi_l,\quad \cos\beta_l = \lambda\eta_l,\quad \cos\gamma_l = \sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta_l} \tag{1.8.5}$$

这些局域方向余弦实际上是在每一条穿过 xy 平面的光线的方向余弦.

习　题

1.1　简要说明以下系统是否有线性和平移不变性.

(1) $\boldsymbol{g}(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{f}(x)$;　　(2) $\boldsymbol{g}(x)=\int \boldsymbol{f}(x)\mathrm{d}x$;

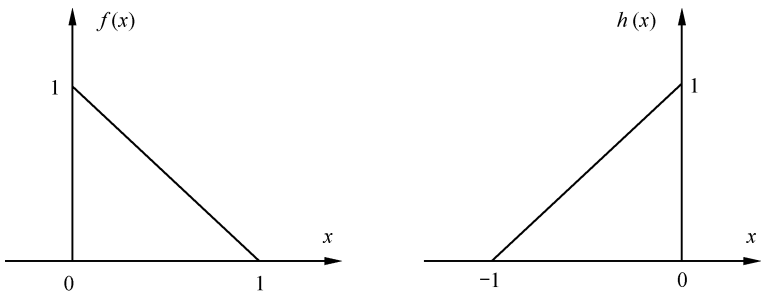
(3) $\boldsymbol{g}(x)=|\boldsymbol{f}(x)|$;　　(4) $\boldsymbol{g}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}(\alpha)[\boldsymbol{h}(x-\alpha)]^2\mathrm{d}\alpha$;

(5) $\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}(\alpha)\exp(-\mathrm{j}2\pi\xi\alpha)\mathrm{d}\alpha$.

1.2　证明 $\mathrm{comb}\left(\dfrac{x}{2}\right)=\mathrm{comb}(x)\exp(\mathrm{j}\pi x)+\mathrm{comb}(x)$.

1.3　证明 $\pi\delta(\sin\pi x)=\mathrm{comb}(x)$.

1.4　计算图题 1.4 所示的两函数的一维卷积.



图题 1.4

1.5　计算下列一维卷积.

(1) $\delta(2x-3)*\mathrm{rect}\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$;　　(2) $\mathrm{rect}\left(\dfrac{x+1}{2}\right)*\mathrm{rect}\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$;　　(3) $\mathrm{comb}(x)*\mathrm{rect}(x)$.

1.6　已知 $\exp(-\pi x^2)$ 的傅里叶变换为 $\exp(-\pi\xi^2)$,试求

(1) $\boldsymbol{F}\{\exp(-x^2)\}$;　　(2) $\boldsymbol{F}\{\exp(-x^2/2\sigma^2)\}$.

1.7　计算积分.

(1) $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}^4(x)\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}^2(x)\cos\pi x\mathrm{d}x$.

1.8　应用卷积定理求 $f(x)=\mathrm{sinc}(x)\mathrm{sinc}(2x)$ 的傅里叶变换.

1.9　设 $f(x)=\exp(-\beta|x|)$,$\beta>0$,求

(1) $\boldsymbol{F}\{f(x)\}$;　　(2) $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$.

1.10　设线性平移不变系统的原点响应为 $h(x)=\exp(-x)\mathrm{step}(x)$,试计算系统对阶跃函数 $\mathrm{step}(x)$ 的响应.

1.11　有两个线性平移不变系统,它们的原点脉冲响应分别为 $h_1(x)=\mathrm{sinc}(x)$ 和 $h_2(x)=\mathrm{sinc}(3x)$.试计算各自对输入函数 $f(x)=\cos2\pi x$ 的响应 $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$.

1.12　已知一平面波的复振幅表达式为 $\boldsymbol{U}(x,y,z)=A\exp[\mathrm{j}(2x-3y+4z)]$,试计算其波长 λ 以及沿 x,y,z 方向的空间频率.

1.13　单色平面波的复振幅表达式为 $\boldsymbol{U}(x,y,z)=A\exp\left[\mathrm{j}\left(\dfrac{1}{\sqrt{14}}x+\dfrac{2}{\sqrt{14}}y+\dfrac{3}{\sqrt{14}}z\right)\right]$,求此波在传播方向的空间频率以及在 x,y,z 方向的空间频率.

第 2 章　标量衍射理论

衍射现象是反映光波动说的经典光学现象之一，在现代光学发展中起着举足轻重的作用.本章中我们系统回顾衍射的历史沿革，详细介绍标量衍射理论的基本问题，分析讨论一些光学衍射的典型应用.通过本章的学习，有助于充分理解光学成像系统和光学信息处理系统的特性.考虑衍射现象及其对系统性能所施加的限制是非常重要的.

2.1　历史引言

众所周知，光的波动说在被发掘、证明之前，“光的直线传播”已长期被人们接受并被广泛应用，它是经典光学的基础.早在公元前 3 世纪中叶，欧几里得(Euclid，公元前约330～260)著书《反射光学》，研究了光的反射现象，他以“光的直线传播”认识为基础，综合当时几何数学的研究成果，发现了反射定律，即“光射到两种介质的界面发生反射时，反射光线在入射光线和法线决定的平面内，且与入射光线分别位于法线的两侧，反射角等于入射角”.反射定律可以很好地解释许多光反射现象，但对光透射中的相关现象却无能为力.直到 1621 年威里布里德·斯涅耳(Willebrord Snell Van Roijen，1591～1626)发现了折射定律，从而很好地解释了光学折射现象.折射被定义为“当光线穿过光波的局域传播速度存在梯度的区域时所发生的光线偏折现象”.设光在折射率为 n 的第一种介质中的传播速度为 $v_1=c/n$，在第二种介质中传播速度为 $v_2=c/n$(c 为真空中的光速)，入射光线在界面上会发生弯折，且入射角 θ 和折射角 θ_2 的关系遵从 $n\sin\theta=n\sin\theta_2$，这就是著名的折射定律——斯涅耳定律.

反射定律和折射定律的建立，奠定了几何光学的基础，使光学真正发展成为一门学科.结合反射定律和折射定律，可以解释几乎所有当时观察到的光学现象.但是，1655 年，意大利科学家格里马第(Grimaldi Francesco Maria，1618～1663)在观测放在光束中的小棍子的影子时，发现了一种不遵循折射定律的异常现象，为了确认所观察的现象，他设计了一个实验：在一个暗室里，让一束光穿过一个小孔投射到小孔后的一个屏幕上，发现光线通过小孔后的光影明显变宽了；后来，他让一束光同时穿过两个相邻的小孔后投射到小孔后的一个屏幕上，这时得到了有明暗相间条纹的图像.当时普遍接受的用来解释光学现象的理论是光线传播的微粒学说，这个学说预言，屏幕后的影子应该是轮廓分明的，具有截然分明的边界.但是格里马第的观察表明，从明到暗的过渡是渐变的而不是突变的，甚至出现明暗相间的条纹.这些现象用光的微粒学说无法解释，微粒学说要求光线在没有反射和折射时沿直线传播.正是基于这一点，后来，索末菲(Sommerfeld Arnold Johannes Wilhelm，1868～1951)最早把“衍射”一词定义为“不能用反射或折射来解释的光线对直线光路的任何偏离”.

格里马第经过进一步研究认为：光是一种能够作波浪式运动的流体，光的不同颜色是波动频率不同的结果.毋容置疑，格里马第是第一个提出“光的衍射”概念的科学家.

光的波动说的第一位倡导者克里斯蒂安·惠更斯(Christiaan Huygens，1629～1695)于 1678 年迈出了试图解释这种效应的理论发展过程中的第一步.他大胆地提出了一个光的波动说假设：如果把光扰动的波前上的每一点看成是一个“次级”球面扰动的新波源，那么随后任一时刻的波前可以由做出次级子波的“包络”而得到.惠更斯假设是近代光学的一个重要基本理论，它可

以很好地证明光的反射定律和折射定律,它虽然可以预料光衍射现象的存在,却不能对这些现象做出解释,也就是说,它可以确定光波的传播方向,却不能确定沿不同方向传播的光振动振幅.因此,惠更斯假设是人类对光学现象的一个近似的认识.

艾萨克·牛顿(Isaac Newton,1643～1727)在当时科学领域处于权威地位,他对整个物理学包括对光学作出诸多贡献,是一位具有崇高威望的科学家.他早在1704年就支持光的微粒说,摒弃了光的波动说,而他的追随者也毫不动摇地支持这种观点.这使得在整个18世纪,人们进一步理解衍射现象的进程受到了阻碍,光的波动说理论因此停滞了将近一个世纪.18世纪末,在德国自然哲学思潮的影响下,人们的思想逐渐解放.英国著名物理学家托马斯·杨(Thomas Young,1773～1829)开始对牛顿的光学理论产生了怀疑.根据一些实验事实,杨氏于1800年写成了论文《关于光和声的实验和问题》.在这篇论文中,杨氏把光和声进行类比,因为二者在重叠后都有相长或相消的现象,他认为光是在以太流中传播的弹性振动,并指出光是以纵波形式传播的.他同时指出光的不同颜色和声的不同频率是相似的.1801年,杨氏进行了著名的杨氏双缝干涉实验.实验所使用的白屏上明暗相间的黑白条纹证明了光的干涉现象,从而证明了光是一种波.同年,杨氏在英国皇家学会的《哲学会刊》上发表论文,分别对“牛顿环”实验和自己的实验进行解释,首次提出了光的干涉概念和光的干涉定律.

1803年,杨氏写成了论文《物理光学的实验和计算》.他根据光的干涉定律对光的衍射现象作了进一步的解释,认为衍射是由直射光束与反射光束干涉形成的.但由于他认为光是一种纵波,所以在理论上遇到了很多麻烦,也受到了众多的尖刻批评.尽管如此,杨氏引入的干涉这一重要概念,阐述了在适当条件下光与光叠加可以产生亮暗相间条纹的观点,并用实验加以了验证,从而巩固了光的波动说.1804年后,光的波动说开始获得重大进展,逐渐为人们所接受.

1818年,菲涅耳(Augustin Fean Fresne,1788～1827)在其著名论文中融合了惠更斯和杨氏的想法,对惠更斯的次级波源的振幅和相位做一些适当的假设,并允许各个子波相互干涉.该论文将杨氏关于光的纵波观点修正为光的横波观点,用非常严格的数学证明将惠更斯原理发展为惠更斯-菲涅耳原理,进一步考虑了各次波叠加时的相位关系,圆满地解释了光的反射、折射、干涉和衍射等现象.此外,论文中还用半波带法给出了各种实验结果的积分计算,能以相当高的精度计算出衍射图样中光强分布.当菲涅耳向法国科学院的一个评奖委员会宣读此文时,他的理论受到委员会成员之一、伟大的法国数学家泊松的强烈质疑.泊松指出,该理论预言在不透明圆盘的阴影中心存在一个亮斑,因此是荒谬的.委员会主席阿拉果亲自做实验发现了预言的亮斑,此后人们称这个亮斑为“泊松亮斑”.惠更斯-菲涅耳原理为光的波动学说确立了不可动摇的科学地位.

但是由于菲涅耳在建立惠更斯-菲涅耳原理数学模型中引入了一个倾斜因子,而当时尚未完全揭示出该倾斜因子的本质,仅能表征出其部分特定特征.因此,该理论仍待进一步完善.

1860年,詹姆斯·克拉克·麦克斯韦(James Clerk Maxwell,1831～1879)把光等同于一个电磁波,这为正确理解光的本性迈出了极其重要的一步.但是直到1882年古斯塔夫·罗伯特·基尔霍夫(Kirchhoff Gustav Robert,1824～1887)才把惠更斯和菲涅耳的概念放在一个更坚实的数学基础上,建立了比较完整的衍射理论模型,成功揭示出了惠更斯-菲涅耳原理中引入的倾斜因子本质.他利用自己的衍射理论成功地证明了“菲涅耳赋予次级波源的振幅和相位其实是光的波动本性”的逻辑结论.然而,基尔霍夫在他的衍射理论数学表述中用到了求解衍射屏边界条件的两个假设,亨利·庞加莱(Jules Henri Poincaré,1854～1912)和索末菲先后于1892年和1894年分别证明了这两个假设是互不相容的.后来索末菲通过取消两个假设之一,利用格林函数理论修正了基尔霍夫衍射理论,这就是人们称为的瑞利-索末菲衍射理论.

必须强调指出,无论是基尔霍夫衍射理论还是瑞利-索末菲衍射理论,都做了一定的简化和近似,其中最重要的是,把光当作标量来处理,而忽略了电磁场的矢量本性.这种方法忽略了这样一个事实:电场和磁场的各个分量是通过麦克斯韦方程组耦合起来的,不能对它们独立地进行处理.非常巧合的是,在微波波谱区域内所做的实验表明,标量理论若能满足两个基本条件,就能得出非常精确的结果.这两个基本条件即为:①衍射孔径必须比光波波长大得多;②不要在太靠近衍射孔径的地方观察衍射场.值得庆幸的是,我们所讨论的大量光学衍射问题均符合以上两个基本条件,因此,研究标量衍射理论具有广泛深远的意义.

2.2 从矢量理论到标量理论

麦克斯韦方程组是矢量理论的基础与出发点.当介质中没有自由电荷存在时,麦克斯韦方程组为

$$\begin{cases} \Delta \times \boldsymbol{E} = -\mu \dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \\ \Delta \times \boldsymbol{H} = \varepsilon \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \\ \Delta \cdot \varepsilon \boldsymbol{E} = 0 \\ \Delta \cdot \mu \boldsymbol{H} = 0 \end{cases} \tag{2.2.1}$$

其中,$\boldsymbol{E}$ 为电场强度,在直角坐标中的分量为(E_x,E_y,E_z);$\boldsymbol{H}$ 为磁场强度,在直角坐标中的分量为(H_x,H_y,H_z);μ 和 ε 分别为电磁波所在的传播介质的磁导率和介电常量.$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都是位置 Q 和时间 t 的函数.符号×和·分别代表矢量叉乘和点乘.而Δ 表示为

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{2.2.2}$$

其中 $\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{k}$ 分别是 x,y,z 方向上的单位矢量.

当电磁波在一介质中传播,如果介质符合线性性质,那么这种介质是线性的;如果介质的性质与电磁波的偏振方向(即 $\boldsymbol{E}$ 矢量和 $\boldsymbol{H}$ 矢量的方向)无关,那么此介质是各向同性的;若介质的介电常数在传播区域内不变,则此介质为均匀介质;若介质的介电常数与电磁波波长无关,那么此介质为无色散介质.通常,介质都是非磁性介质,这意味着这些介质的磁导率永远等于真空中的磁导率 μ_0.

根据矢量计算理论,恒有

$$\Delta \times (\Delta \times \boldsymbol{E}) = \Delta(\Delta \cdot \boldsymbol{E}) - \Delta^2 \boldsymbol{E} \tag{2.2.3}$$

将Δ ×运算作用于麦克斯韦方程组的第一个关于 $\boldsymbol{E}$ 的方程的两边,如果传播介质是线性、各向同性、均匀(ε 为常数)和无色散的,将麦克斯韦方程组中关于 $\boldsymbol{E}$ 的两个方程代入(2.2.3)式,得到

$$\Delta^2 \boldsymbol{E} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{2.2.4}$$

其中,n 为介质的折射率,定义为

$$n = (\varepsilon/\varepsilon_0)^{1/2} \tag{2.2.5}$$

其中,ε_0 为真空中的介电常数;而 c 为真空中的光速,可表示为

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \tag{2.2.6}$$

同理,也可推出关于磁场的方程

$$\Delta^2 \boldsymbol{H} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = 0 \tag{2.2.7}$$

由于 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都遵从矢量波动方程,于是这些矢量的所有分量也都遵从相同形式的标量波动方程.例如 E_X 就遵从方程

$$\Delta^2 E_X - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 E_X}{\partial t^2} = 0 \tag{2.2.8}$$

当然 E_Y,E_Z,H_X,H_Y,H_Z 也遵从类似的方程.所以用单一的一个标量波动方程就可以概括 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的所有各个分量的行为

$$\Delta^2 u(Q,t) - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 u(Q,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{2.2.9}$$

其中,$u(Q,t)$代表任何标量场分量,与空间位置 Q 和时间 t 有关.

由以上分析可以得出一个结论:在一种线性、各向同性、均匀且无色散的电介质中,电场和磁场的一切分量的行为完全相同,都可由单一的一个标量波动方程描述.表明如果存在这种介质,标量理论可以完全准确地表征矢量理论.

然而,上述结论是在介质同时具有线性性、各项同性性、均匀性和无色散性的前提下得出的,实际上这种介质仅仅只是一种假设,客观上很难实现.如果我们考虑的不是所假设的那种均匀介质,用标量理论来表征矢量理论就会引入误差,此时,标量理论就是矢量理论的一种近似表征了.

如果介质是非均匀的,其介电常量 $\varepsilon(Q)$与空间位置 Q 有关,那么很容易推导出 $\boldsymbol{E}$ 的波动方程为

$$\Delta^2 \boldsymbol{E} + 2\Delta(\boldsymbol{E}\cdot\Delta\ln n) - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{2.2.10}$$

此时波动方程中新增的项将不为零.更重要的是,这一项引入了各电场分量之间的耦合,结果使 E_X,E_Y 和 E_Z 不再满足同一标量波动方程.因此,如果还用(2.2.9)式的标量波动方程来表征,必将是一种近似了.

当对一个在均匀介质中传播的波加上边界条件时,会发生相似的效应.在边界上,引进了 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 之间的耦合、以及它们的各个标量分量之间的耦合,其结果为,即使传播介质是均匀的,使用标量理论也会带来某种程度的误差.这种误差只有当边界条件起作用的区域仅为光波通过区域的一小部分时,才会变得很小.在光波被一孔径衍射的情况下,$\boldsymbol{E}$ 场和 $\boldsymbol{H}$ 场仅在孔径边缘被改变,光波与组成边缘的材料在那里发生相互作用.这个效应只延伸到孔径内几个波长的范围.因此若孔径的尺度比一个波长大得多,边界条件加在 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 场上的耦合效应就将变得很小.

综上所述,在一定条件下,我们可以由衍射的复杂矢量理论转化为更简单的标量理论;用标量理论表征矢量理论是近似的,只要在实际应用中,合理处理近似条件,并用于恰当的场合,近似误差将会很小而处理过程将大为简化.

2.3 基尔霍夫衍射理论

2.3.1 惠更斯-菲涅耳原理与基尔霍夫衍射公式

惠更斯-菲涅耳原理是在惠更斯子波假设与杨氏干涉原理的基础上提出的,它是描述光传播过程的基本原理.该原理指出:光场中任一给定曲面上的诸面元可以看作是子波源,如果这些子波源是相干的,则在波继续传播的空间上任一点处的光振动,都可看作是这些子波源各自发出的子波在该点相干叠加的结果.当然,这里所说的光场中任一给定曲面无须是等相位面,即不是原

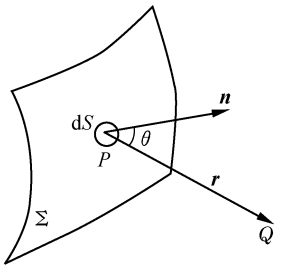


图 2.3.1　计算波面 Σ 在 Q 点产生的复振幅

始惠更斯-菲涅耳原理中所说的波面.经典理论证明,如图 2.3.1 所示,在真空或各向同性、均匀、透明、无源介质中自由传播的单色光波,空间 Q 点的惠更斯-菲涅耳原理的数学表达式是

$$\boldsymbol{U}(Q)=\boldsymbol{c}\iint_{\Sigma}\boldsymbol{U}_0(P)\boldsymbol{K}(\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}kr}}{r}\mathrm{d}S \tag{2.3.1}$$

其中,Σ 为光波的一个波面;$\boldsymbol{U}_0(P)$为波面上任一 P 的复振幅;$\boldsymbol{U}(Q)$为光场中任一观察点 Q 的复振幅;r 是从 P 到 Q 点的距离;θ 为$\overline{PQ}$与过 P 点的波面法线 $\boldsymbol{n}$ 的夹角,$\boldsymbol{K}(\theta)$是倾斜因子,表示子波 P 对 Q 的作用与角度 θ 有关;$\boldsymbol{c}$ 为常数.

利用惠更斯-菲涅耳原理计算一些简单孔径的衍射图样的强度分布,可以得到符合实际的结果.但是由于它是建立在子波源的假设之上的,缺乏严格的理论根据.为了符合实际,必须假设子波源的振动相位比实际光波在该点的相位超前,即常数 $\boldsymbol{c}$ 中应包含这一因子.仅由惠更斯-菲涅耳原理无法解释子波源这一特殊性质,$\boldsymbol{K}(\theta)$的具体函数形式也难以确定.

单色光场中任意一点 Q 的光振动 $\boldsymbol{u}$ 应满足标量波动方程

$$\Delta^2\boldsymbol{u}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}=0 \tag{2.3.2}$$

Δ^2 是拉普拉斯算符,在直角坐标系中为

$$\Delta^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

复振动 $\boldsymbol{u}$ 又可表示为

$$\boldsymbol{u}(Q,t)=\boldsymbol{U}(Q)\exp(-\mathrm{j}2\pi\nu t) \tag{2.3.3}$$

将(2.3.3)式代入(2.3.2)式可以得到不含时间的方程

$$(\Delta^2+k^2)\boldsymbol{U}(Q)=0 \tag{2.3.4}$$

式中 $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}=\dfrac{2\pi\nu}{c}$为波数,(2.3.4)式称为亥姆霍兹方程.可以把它看成是自由空间传播的单色光扰动的复振幅必须满足的波动方程.对于单色光场来说,(2.3.4)式和(2.3.2)式是等价的.(2.3.2)式同时存在时间和空间变量.而亥姆霍兹方程与时间变量无关,所以在解单色光场的空间分布时,亥姆霍兹方程更为方便.

衍射理论所要解决的问题:光场中任一点 Q 的复振幅能否用光场中其他各点的复振幅表示出来,例如由孔径平面上的场分布计算孔径后面任一点处的复振幅.显然,这是一个根据边界值求解波动方程的问题.

基尔霍夫利用格林定理这一数学工具,通过假定衍射屏的边界条件,求解波动方程,导出了更严格的衍射公式,从而把惠更斯-菲涅耳原理置于更为可靠的波动理论基础上.我们下面仅给出这一结果.

图 2.3.2 表示位于 P_0 点的单色点光源照明平面屏幕的情况.P 为孔径平面 Σ 上任一点,Q 为孔径后方的观察点.r 和 r_0 分别是 Q 和 P_0 到 P 的距离,二者均比波长大得多.$\boldsymbol{n}$ 表示 Σ 面上法线的正方向.在单色点源照明下,平面孔径后方光场中任一点 Q 的复振幅为

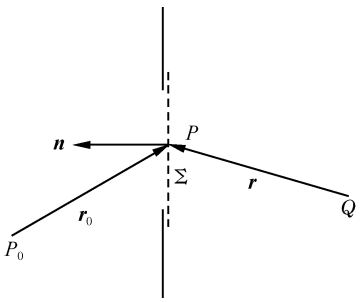


图 2.3.2　点光源照明平面屏幕

$$\boldsymbol{U}(Q)=\frac{1}{\mathrm{j}\lambda}\iint_{\Sigma}\frac{\boldsymbol{a}_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}kr_0}}{r_0}\left[\frac{\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})-\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_0)}{2}\right]\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}kr}}{r}\mathrm{d}S \tag{2.3.5}$$

上式称为基尔霍夫衍射公式.孔径平面上的复振幅分布是球面波产生的,因此可用

$$\boldsymbol{U}_0(P)=\frac{\boldsymbol{a}_0}{r_0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kr_0} \tag{2.3.6}$$

表示.将上式代入(2.3.5)式得

$$\boldsymbol{U}(Q)=\frac{1}{\mathrm{j}\lambda}\iint_{\Sigma}\boldsymbol{U}_0(P)\boldsymbol{K}(\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}kr}}{r}\mathrm{d}S \tag{2.3.7}$$

把上式与惠更斯-菲涅耳原理的数学表达式相比较,可以看出二者是一致的.在波动理论的基础上,它进一步得出了常数 $\boldsymbol{c}$ 和倾斜因子 $\boldsymbol{K}(\theta)$的具体值

$$\boldsymbol{c}=\frac{1}{\mathrm{j}\lambda} \tag{2.3.8}$$

$$\boldsymbol{K}(\theta)=\frac{\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})-\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_0)}{2} \tag{2.3.9}$$

虽然这里仅仅是就单个球面波照明孔径的情况做出的讨论,但衍射公式却适用于更普遍的任意单色光波照明孔径的情况.因为总可以把任意复杂的光波分解成简单的球面波的线性组合.波动方程的线性性质允许对每一单个球面波分别应用上述原理,再把它们在 Q 点的贡献叠加起来.因此,(2.3.7)式中的 $\boldsymbol{U}_0(P)$可以理解为在任意单色光照明下对孔径平面 Σ 产生的光场分布.

根据基尔霍夫对平面屏幕假设的边界条件,孔径外的阴影区内 $\boldsymbol{U}_0(P)=0$,因此(2.3.7)式的积分限可以扩展到无穷,从而有

$$\boldsymbol{U}(Q)=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{U}_0(P)\boldsymbol{K}(\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}kr}}{r}\mathrm{d}S \tag{2.3.10}$$

一般地说,不论以什么方式改变光波波面,或是以一定形式限制波面范围或使振幅以一定分布衰减,或是以一定的空间分布使相位延迟,或是两者兼而有之,都会引起衍射.所以障碍物的概念,除去不透明屏上有开孔这种情况以外,还包含具有一定复振幅的透明片.把能引起衍射的障碍物统称为衍射屏,描写衍射屏自身宏观光学性质的是它的复振幅透过率,用 $\boldsymbol{t}(x_0,y_0)$表示,它定义为

$$\boldsymbol{t}(P)=\frac{\boldsymbol{U}_t(P)}{\boldsymbol{U}_i(P)} \tag{2.3.11}$$

其中 $\boldsymbol{U}_i(P)$是衍射屏前表面的复振幅或照射到衍射屏上的光场的复振幅,$\boldsymbol{U}_t(P)$是衍射屏后表面的复振幅.若衍射屏是具有开孔 Σ 的不透明屏,则(2.3.10)式中的 $\boldsymbol{U}_0(P)$既可理解为衍射屏前表面的复振幅,也可理解为衍射屏后表面的复振幅,反正积分范围仅仅是 Σ.有时候也把衍射看作光振动由衍射屏后表面到观察面的自由传播,用(2.3.10)式来描写这一传播规律.此时公式中的 $\boldsymbol{U}_0(P)$则代表后表面的复振幅分布,衍射屏的透过率特性和照明光源的情况一起由 $\boldsymbol{U}_0(P)$反映.

2.3.2 惠更斯-菲涅耳原理与叠加积分

在基尔霍夫衍射公式(2.3.7)式中,令

$$\boldsymbol{h}(P,Q)=\frac{1}{\mathrm{j}\lambda}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}kr}}{r}\boldsymbol{K}(\theta) \tag{2.3.12}$$

则(2.3.7)式便可重新改写成

$$\boldsymbol{U}(Q)=\iint_{\Sigma}\boldsymbol{U}_0(p)\boldsymbol{h}(P,Q)\mathrm{d}S \tag{2.3.13}$$

为了理解 $\boldsymbol{h}(P,Q)$的物理意义,我们可以设想 Σ 面上任一点 P,其复振幅为 $\boldsymbol{U}_0(P)$,在 P 点处的小面元 $\mathrm{d}S$ 对观察点 Q 的贡献是 $\mathrm{d}\boldsymbol{U}(Q)=\boldsymbol{U}_0(P)\boldsymbol{h}(P,Q)\mathrm{d}S$,$\boldsymbol{h}(P,Q)$表示在 P 点有一个单

位脉冲(即 $\boldsymbol{U}_0(P)\mathrm{d}S=1$ 时),在观察点 Q 造成的复振幅分布,$\boldsymbol{h}(P,Q)$称为脉冲响应或点扩散函数.由(2.3.13)式可知,观察点 Q 的复振幅 $\boldsymbol{U}(Q)$,是 Σ 上所有面元的光振动在 Q 点引起的复振幅的相干叠加,(2.3.13)式称为叠加积分.如果把衍射过程看作是一种变换,(2.3.13)式便是将函数 $\boldsymbol{U}_0(P)$变换成 $\boldsymbol{U}(Q)$的变换式.按照系统的观点,衍射过程或传播过程也可以等效为一种线性系统的线性变换,$\boldsymbol{h}(P,Q)$代表了这个系统的全部特性.

光波传播的这一线性性质不仅存在于单色光波在自由空间中的传播,也同样存在于孔径和观察平面之间是非均匀介质的情况,如两者之间存在有光学系统.只是线性系统的脉冲响应函数 $\boldsymbol{h}$ 有不同的形式而已.

2.3.3 相干光场在自由空间传播的平移不变性

当点光源 P_0 足够远,而且入射光在孔径平面上各点的入射角都不大时,有 $\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_0)\approx-1$. 此外,如果观察平面与孔径平面的距离 z 远大于孔径,而且在观察平面上仅考虑一个对孔径上各点张角不大的范围,即在傍轴近似下,又有 $\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})\approx1$. 在这些条件下,可以认为倾斜因子 $\boldsymbol{K}(\theta)\approx1$.

其实这些近似式对夹角的要求并不苛刻,当夹角等于 18°时,$\cos18°\approx0.9511$,此时上面的近似式精度仍在 95% 以上.在此条件下(2.3.12)式中的分母上的 r 可以近似地用 z 代替.但是指数部分的 r 并不能简单地用 z 代替,其原因在于光波的波长很短,k 值很大,r 的不大误差可以导致相位差远大于 2π 的结果.所以脉冲响应(2.3.12)式可初步简化为

$$\boldsymbol{h}(P,Q)=\frac{1}{\mathrm{j}\lambda}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}kr}}{z} \tag{2.3.14}$$

如果孔径平面位于 x_0y_0 平面,观察点位于 xy 平面,如图 2.3.3 所示,(2.3.13)式可表示为

$$\boldsymbol{U}(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{U}_0(x_0,y_0)\boldsymbol{h}(x_0,y_0;x,y)\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0 \tag{2.3.15}$$

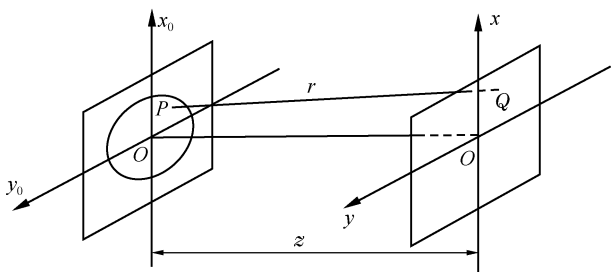


图 2.3.3 衍射孔径与观察平面

由图可见,观察点 Q 到孔径平面上任一点 P 的距离 $r=[z^2+(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{1/2}$,因而(2.3.14)式可以写为

$$\boldsymbol{h}(x_0,y_0;x,y)=\boldsymbol{h}(x-x_0,y-y_0)=\frac{1}{\mathrm{j}\lambda z}\exp\left[\mathrm{j}k\sqrt{z^2+(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right] \tag{2.3.16}$$

显然,脉冲响应具有空不变的形式.也就是说,无论孔径平面上子波源的位置如何,所产生的球面子波的形式都是一样的,叠加积分(2.3.15)式可以改写为

$$\boldsymbol{U}(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{U}_0(x_0,y_0)\boldsymbol{h}(x-x_0,y-y_0)\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0 \tag{2.3.17}$$

上式表明孔径平面上透射光场 $\boldsymbol{U}_0(x_0,y_0)$和观察平面上的光场 $\boldsymbol{U}(x,y)$之间存在着一个卷积积分所描述的关系.因此我们忽略倾斜因子的变化后,就可以把光波在衍射孔径后的传播过程看成

是光波通过一个线性不变系统.系统在空间域的特性唯一地由其空不变的脉冲响应(2.3.16)式所确定.这一结论很简单,但很重要,它是傅里叶变换与光学互相结合的纽带之一.

2.3.4 相干光场在自由空间传播的脉冲响应的近似表达式

(2.3.16)式给出的脉冲响应表达式相当复杂,不过,根据实际条件可使之适当简化,为此,首先将 r 表达为

$$r=z\left[1+\left(\frac{x-x_0}{z}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{z}\right)^2\right]^{1/2} \tag{2.3.18}$$

当 $\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})\approx 1$ 成立时,$\left(\frac{x-x_0}{z}\right)^2$ 和 $\left(\frac{y-y_0}{z}\right)^2$ 都是小量,将(2.1.18)式作二项式展开得

$$r=z\left[1+\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2z^2}-\frac{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]^2}{8z^4}+\cdots\right] \tag{2.3.19}$$

当衍射孔径和观察范围确定后,只要 z 取得足够大,对于相位因子而言,式(2.3.19)的展开式只取前两项而舍去全部高次项是允许的.也就是 r 取这样的近似值不会引起明显的相位误差,这种近似称为菲涅耳近似或傍轴近似.此时 r 近似表示为

$$r=z\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{z}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{y-y_0}{z}\right)^2\right] \tag{2.3.20}$$

在这种近似条件下,脉冲响应可近似表示为

$$\boldsymbol{h}(x-x_0,y-y_0)=\frac{\exp(\mathrm{j}kz)}{\mathrm{j}\lambda z}\exp\left\{\mathrm{j}\frac{k}{2z}\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]\right\} \tag{2.3.21}$$

将上式代入(2.3.17)式,得到如下叠加积分

$$\boldsymbol{U}(x,y)=\frac{\exp(\mathrm{j}kz)}{\mathrm{j}\lambda z}\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{U}_0(x_0,y_0)\exp\left[\mathrm{j}k\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2z}\right]\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0 \tag{2.3.22}$$

可以用(2.3.22)式来计算衍射场分布的衍射称为菲涅耳衍射.脉冲响应总是在叠加积分中起作用,为了保证(2.3.21)式给出的脉冲响应近似表达式在叠加积分中充分有效,只要使传播距离 z 充分大于 Σ 的线度和观察范围的线度即可,这一条件实际上容易得到满足.

如果在菲涅耳近似的基础上进一步限定 Σ 的线度远远小于传播距离 z,以至于 $(x_0^2+y_0^2)/2z$ 小到可以忽略不计;而观察范围的线度与 z 相比尽管很小,但还未小到可以略去 $(x^2+y^2)/2z$ 的程度,则由(2.3.20)式可进一步得出

$$r=z+\frac{x^2+y^2}{2z}-\frac{x_0x+y_0y}{z} \tag{2.3.23}$$

这一近似称为夫琅禾费近似或远场近似.在这一近似条件下,脉冲响应可进一步简化为

$$\boldsymbol{h}(x_0,y_0;x,y)=\frac{\exp(\mathrm{j}kz)}{\mathrm{j}\lambda z}\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right]\exp\left[-\mathrm{j}\frac{k}{z}(x_0x+y_0y)\right] \tag{2.3.24}$$

这时的脉冲响应分别与 (x_0,y_0) 和 (x,y) 有关,这表明在夫琅禾费近似意义下的光波传播过程不再具有空间平移不变性.本章最后对这句话还有进一步的说明.

2.4 衍射的角谱理论

2.4.1 单色平面波与本征函数

如上所述,如果不考虑夫琅禾费近似,则相干光场在给定两平面间的传播过程就是通过一个

二维线性空不变系统.由 1.6.4 小节可知,形如 $\exp[\mathrm{j}2\pi(\xi x+\eta y)]$的函数应该是这种系统的本征函数.另一方面,在 1.7.2 小节中我们指出,形如 $\exp[\mathrm{j}2\pi(\xi x+\eta y)]$的函数表示振幅为 1 的平面波在 xy 平面上形成的复振幅分布.空间频率分量 $\xi=\cos\alpha/\lambda,\eta=\cos\beta/\lambda$ 与平面波的传播方向相联系,空间频率表示了单色平面波的传播方向.

由以上分析可知,如果把相干光场在自由空间两平面间的传播看作是通过一个二维线性空间不变系统,则单色平面波在该输入平面上形成的分布即为该系统的本征函数.单色平面波与本征函数之间的这种联系不是偶然的.单色平面波在自由空间中传播一段距离后,只是相位改变一定数值,而无其他变化,即相当于乘上一个复常数,这恰好与本征函数的定义相符.由此可以看到单色平面波的复数表示所提供的方便.

2.4.2 角谱的传播

正如 1.7 节所述,孔径平面和观察平面上的光场分布都可以分别看成是许多不同方向传播的单色平面波分量的线性组合.每一平面波分量的相对振幅和相位取决于相应的角谱.设孔径平面(x_0,y_0)的场分布为 $\boldsymbol{U}_0(x_0,y_0)$,观察平面上的场分布为 $\boldsymbol{U}(x,y)$,则它们相应的角谱为 $\boldsymbol{A}_0\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$ 和 $\boldsymbol{A}\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$,于是有

$$\boldsymbol{U}_0(x_0,y_0)=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{A}_0\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)\exp\left[\mathrm{j}2\pi\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}x_0+\frac{\cos\beta}{\lambda}y_0\right)\right]\mathrm{d}\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}\right)\mathrm{d}\left(\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)\tag{2.4.1}$$

$$\boldsymbol{U}(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int\boldsymbol{A}\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)\exp\left[\mathrm{j}2\pi\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}x+\frac{\cos\beta}{\lambda}y\right)\right]\mathrm{d}\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}\right)\mathrm{d}\left(\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)\tag{2.4.2}$$

假如我们能够找到 $\boldsymbol{A}_0\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$ 和 $\boldsymbol{A}\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$ 之间的关系,就知道了每一平面波分量在传播过程中振幅和相位发生的变化,自然也就可以确定整个光场由孔径平面传播到观察平面所发生的变化.

讨论角谱传播规律的基础仍然是标量波动方程.对于单色光波场,若着眼点在复振幅这一物理量,可以把(2.4.2)式代入(2.3.4)式的亥姆霍兹方程.注意到 $\boldsymbol{A}$ 对空域坐标仅是 z 的函数,指数项仅是空域坐标 x,y 的函数,便可导出 $\boldsymbol{A}\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$ 所满足的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\boldsymbol{A}\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)+k^2(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta)\boldsymbol{A}\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)=0\tag{2.4.3}$$

解这个微分方程,得到方程的一个基本解是

$$\boldsymbol{A}\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)=\boldsymbol{c}\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)\exp\left(\mathrm{j}kz\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}\right)$$

式中 $\boldsymbol{c}\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$ 由边界条件决定.在 $z=0$ 处即为孔径平面,角谱是 $\boldsymbol{A}_0\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$.因此

$$\boldsymbol{c}\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)=\boldsymbol{A}_0\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$$

最后得到

$$\boldsymbol{A}\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)=\boldsymbol{A}_0\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)\exp\left(\mathrm{j}kz\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}\right)\tag{2.4.4}$$

上式表明,知道了 $z=0$ 平面上光场的角谱就可以求出观察面上的角谱.然后通过逆傅里叶变换

求出观察面上的复振幅分布.因而(2.4.4)式具有和基尔霍夫衍射公式同等的价值.

现对(2.4.4)式作进一步的讨论.当传播方向余弦($\cos\alpha$,$\cos\beta$)满足 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta<1$ 时,(2.4.4)式才真正对应于空间某一确定方向传播的平面波.这些平面波分量在空间传播一定距离 z 仅仅是引入了一定的相位移动,而振幅不发生变化.这与平面的性质相一致,平面在空间传播既不会改变方向,也不会改变振幅.

对于 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta>1$ 的情况,(2.4.4)式中的平方根是虚数,于是公式改写为

$$\boldsymbol{A}\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)=\boldsymbol{A}_0\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)\exp(-\mu z) \tag{2.4.5}$$

式中

$$\mu=k\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta-1} \tag{2.4.6}$$

由于 μ 是正实数,所以对一切满足 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta>1$ 的波动分量,将随 z 的增大而按指数 $\exp(-\mu z)$ 衰减.在几个波长的距离内几乎衰减为零.对应于这些传播方向波动分量称为倏逝波.在通常情况下均略而不计.

对于 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$,即 $\cos\gamma=0$ 的情况.该波动分量的传播方向垂直于 z 轴,它在 z 轴方向的净能量流为零.

把(2.4.4)式改写为

$$\boldsymbol{A}(\xi,\eta)=\boldsymbol{A}_0(\xi,\eta)\boldsymbol{H}(\xi,\eta) \tag{2.4.7}$$

把 $\boldsymbol{A}_0(\xi,\eta)$和 $\boldsymbol{A}(\xi,\eta)$分别看作系统的输入和输出频谱,由上式给出的输入和输出频谱关系再次说明系统是线性不变系统.系统在频域的效应由传递函数表征

$$\boldsymbol{H}(\xi,\eta)=\frac{\boldsymbol{A}(\xi,\eta)}{\boldsymbol{A}_0(\xi,\eta)}=\exp\left[\mathrm{j}kz\sqrt{1-(\lambda\varepsilon)^2-(\lambda\eta)^2}\right] \tag{2.4.8}$$

由于在所讨论的问题中,传播距离 z 总是极大于几个波长,所以可忽略倏逝波,于是传递函数可以写做

$$\boldsymbol{H}(\xi,\eta)=\begin{cases}\exp\left[\mathrm{j}kz\sqrt{1-(\lambda\xi)^2-(\lambda\eta)^2}\right], & \xi^2+\eta^2<\dfrac{1}{\lambda^2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{2.4.9}$$

当空间频率满足 $\xi^2+\eta^2<1/\lambda^2$ 时,其模为1,但引入了与频率有关的相移,其他为零.这表明该系统的传递函数相当于一个低通滤波器,截止频率为 $1/\lambda$,在频率平面上这个滤波器的半径为 $1/\lambda$ 的圆孔.这一结论告诉我们,对于孔径中比波还小的精细结构,或者说空间频率高于 $1/\lambda$ 的信息,在单色平面波照明下不能沿 z 方向向前传播.

基尔霍夫理论是描述球面子波相干叠加的衍射理论,角谱理论是衍射的平面波理论.基尔霍夫理论与角谱理论是统一的,它们证明了光的传播现象可以看作线性不变系统.基尔霍夫理论是在空域讨论光的传播,是把孔径平面上的光场看作点源的集合,观察平面上的场分布则等于它们所发出的带有不同权重因子的球面子波的相干叠加.球面子波在观察平面上的复振幅分布就是系统的脉冲响应.角谱理论是在频域讨论光的传播,是把孔径平面光场分布看作许多不同方向传播的平面波的线性组合.观察平面上的场分布仍然等于这些平面波分量的相干叠加,但每个平面波分量引入了相移,相移的大小决定了系统的传递函数,它是系统的脉冲响应的傅里叶变换.

2.4.3 孔径对角谱的影响

在前一节中,我们曾简单地分析了孔径平面的入射场、出射场以及孔径的复振幅透过率,并且指出:孔径平面上的场分布 $\boldsymbol{U}_0(x_0,y_0)$代表衍射平面的出射场分布,并把孔径的透过率特性和

照明光源的情况一起由 $\boldsymbol{U}_0(x_0,y_0)$来反映.于是到目前为止,我们仅讨论了光波在自由空间传播时光场及其角谱发生的变化.现在我们将进一步讨论照明孔径的入射光场和透射光场之间的关系,特别是角谱之间的关系.

假定入射到孔径平面上的场分布为 $\boldsymbol{U}_i(x_0,y_0)$,衍射屏的复振幅透过率为 $\boldsymbol{t}(x_0,y_0)$,衍射屏后表面即出射光场为 $\boldsymbol{U}_0(x_0,y_0)$.它们的关系为

$$\boldsymbol{U}_0(x_0,y_0)=\boldsymbol{U}_i(x_0,y_0)\boldsymbol{t}(x_0,y_0) \tag{2.4.10}$$

现在我们来研究在频域中衍射屏的透过率函数的作用.假设入射光场的角谱和透射光场的角谱分别为 $\boldsymbol{A}_i\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$ 和 $\boldsymbol{A}_0\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$ 由傅里叶变换的卷积定理可得

$$\boldsymbol{A}_0\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)=\boldsymbol{A}_i\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)*\boldsymbol{T}\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right) \tag{2.4.11}$$

式中 $\boldsymbol{T}\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$ 是衍射屏或孔径透过率函数的傅里叶变换,即

$$\boldsymbol{T}\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)=\iint_{-\infty}^{\infty}t(x_0,y_0)\exp\left[-\mathrm{j}2\pi\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}x_0+\frac{\cos\beta}{\lambda}y_0\right)\right]\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0 \tag{2.4.12}$$

对于用单位振幅的平面波垂直照射衍射屏这种特殊情况,此时

$$\boldsymbol{A}_i\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)=\delta\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$$

因而

$$\boldsymbol{A}_0\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)=\delta\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)*\boldsymbol{T}\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)=\boldsymbol{T}\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$$

通过衍射屏后,由 δ 函数所表征的入射光场的角谱变成了孔径函数的傅里叶变换,显然角谱分量大大增加了.因此,从空域看,孔径的作用限制了入射波面的大小;从频域看则是展宽了入射光场的角谱.

2.5 菲涅耳衍射和夫琅禾费衍射

基尔霍夫衍射公式是比较一般的,直接用它来计算比较困难.具有实用意义的是对这个普遍理论作某些近似,用所得到的近似公式计算一定范围内的衍射场分布,按照近似程度不同,分为菲涅耳衍射和夫琅禾费衍射.

2.5.1 菲涅耳衍射

在 2.3.4 小节中曾指出,可以用(2.3.22)式,即

$$\boldsymbol{U}(x,y)=\frac{\exp(\mathrm{j}kz)}{\mathrm{j}\lambda z}\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{U}_0(x_0,y_0)\exp\left[\mathrm{j}k\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2z}\right]\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0 \tag{2.5.1}$$

来计算的衍射场分布,称为菲涅耳衍射.下面进一步讨论一下菲涅耳衍射区的确定.从近似条件来看,应当是在 r 的展开式中被略去的高次项不致引起明显的相位差.这些高次项中起决定作用的是(2.3.19)式中右端第三项,由它引起的相位变化为

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]^2}{8z^3}$$

为了使菲涅耳近似成立,必须使$\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]^2$ 取最大值时,$\Delta\varphi$ 远小于 2π,即

$$\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]^2}{8z^3}\ll 2\pi$$

也就是要求

$$z^3\gg\frac{1}{8\lambda}\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]^2_{\max} \tag{2.5.2}$$

当 z 满足(2.5.2)式时,(2.5.1)式肯定成立,所以(2.5.2)式是菲涅耳衍射成立的充分条件,但不是必要条件.实际上当距离 z 较小时,(2.5.2)式的条件并不满足,但也能观察到菲涅耳衍射,这可用所谓的稳相原理来解释.因为取菲涅耳近似的目的是要能够用(2.5.1)式来等效积分(2.3.17)式,并不一定要求满足(2.5.2)式.也就是说,只要(2.3.19)式中的第三项不明显改变(2.3.17)式的值就可以了.也就是要求以下近似式成立即可

$$\begin{aligned}&\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{U}_0(x_0,y_0)\exp\left\{\mathrm{j}k\left[\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2z}-\frac{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]^2}{8z^3}\right]\right\}\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0\\ \approx&\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{U}_0(x_0,y_0)\exp\left\{\mathrm{j}k\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2z}\right\}\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0\end{aligned} \tag{2.5.3}$$

由于 $k/2z$ 值很大,只要(x_0,y_0)与(x,y)有一定差值,二次相位因子 $\exp\left[\mathrm{j}k\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2z}\right]$ 就会很快振荡起来,即随 x_0,y_0 的变化,相位变化很快.如果就相位变化的一个周期来看,x_0,y_0 的变化是很微弱的,故使

$$\boldsymbol{U}_0(x_0,y_0)\exp\left\{-\mathrm{j}k\frac{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]^2}{8z^3}\right\}$$

在相位变化的一个周期内基本保持不变.对于(2.5.3)式左边积分来说,只有 $\exp\left[\mathrm{j}k\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2z}\right]$ 呈周期变化,故等式左端在一个周期内的积分为零.所以当(x_0,y_0)偏离(x,y)一定大的值以后,这样每个周期的积分都为零,因而对总的积分没有贡献.这就是说,尽管孔径 Σ 有一定大小,而对观察点真正有贡献的只是孔径上 $x=x_0$,$y=y_0$ 点附近的小区域.在这个小区域内的各点相位的变化率最小.在这些稳相点的附近,高阶相位项的大小往往可以完全忽略.由这个小区域的范围决定$\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]^2_{\max}$值比由 Σ 决定的该值要小得多,因而满足(2.5.2)式的 z 值也就相应地小得多了.在一般问题中,菲涅耳衍射是很容易实现的.

下面我们从衍射的角谱理论出发,对描述光波传播的传递函数 $\boldsymbol{H}$ 作出近似,导出菲涅耳衍射公式.

由(2.4.4)式,观察面上光扰动的角谱与孔平面上的光扰动的角谱之间的关系为

$$\boldsymbol{A}\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)=\boldsymbol{A}_0\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)\boldsymbol{H}\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right) \tag{2.5.4}$$

式中 $\boldsymbol{H}$ 为描述传播现象频率效应的传递函数,其值为

$$\boldsymbol{H}\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)=\exp\left(\mathrm{j}kz\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}\right) \tag{2.5.5}$$

当 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta<1$ 时,可对相位因子中的根式作二项式展开,即

$$\left[1-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)\right]^{1/2}=1-\frac{1}{2}(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)-\frac{1}{8}(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)^2-\cdots \tag{2.5.6}$$

如果展开式中第三项所贡献的相位远小于 2π,则上式中从第三项起都可以忽略不计,即 z 应满足

$$\frac{z}{8\lambda}(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)^2_{\max}\ll 1 \tag{2.5.7}$$

平面波传播方向与孔径平面和观察平面坐标之间的关系为

$$\cos\alpha \approx \frac{x-x_0}{z}, \quad \cos\beta \approx \frac{y-y_0}{z}$$

把它们代入(2.5.7)式得出

$$z^3 \gg \frac{1}{8\lambda}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^2_{\max}$$

这与(2.5.2)式是一致的.

在菲涅耳衍射区内

$$\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta} \approx 1-\frac{1}{2}(\cos^2\alpha+\cos^2\beta) \tag{2.5.8}$$

把上式代入(2.5.5)式得

$$\boldsymbol{H}\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)=\exp(\mathrm{j}kz)\exp\left[-\mathrm{j}\frac{k}{2}z(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)\right] \tag{2.5.9}$$

由于 $\cos\alpha=\lambda\xi$,$\cos\beta=\lambda\eta$,传递函数也可表示为

$$\boldsymbol{H}(\xi,\eta)=\exp(\mathrm{j}kz)\exp[-\mathrm{j}\pi\lambda z(\xi^2+\eta^2)] \tag{2.5.10}$$

对(2.5.4)式两边作逆傅里叶变换可得

$$F^{-1}\{\boldsymbol{A}(\xi,\eta)\}=F^{-1}\{\boldsymbol{A}_0(\xi,\eta)\}*F^{-1}\{\boldsymbol{H}(\xi,\eta)\}$$

即

$$\boldsymbol{U}(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{U}_0(x_0,y_0)\boldsymbol{h}(x-x_0,y-y_0)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \tag{2.5.11}$$

式中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}(x-x_0,y-y_0)=&\iint_{-\infty}^{\infty}\exp(\mathrm{j}kz)\exp[-\mathrm{j}\pi\lambda z(\xi^2+\eta^2)]\exp\{\mathrm{j}2\pi[\xi(x-x_0)\\&+\eta(y-y_0)]\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\=&\frac{1}{\mathrm{j}\lambda z}\exp(\mathrm{j}kz)\exp\left\{\mathrm{j}\frac{k}{2z}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\right\}\end{aligned} \tag{2.5.12}$$

这一表达式恰好就是(2.3.21)式中的 $\boldsymbol{h}$.这说明根据角谱理论得到的一个近似传递函数,其逆傅里叶变换正好是基尔霍夫理论中给出的一个经过近似的脉冲响应函数.将(2.5.12)式代入(2.5.11)式得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}(x,y)=&\frac{1}{\mathrm{j}\lambda z}\exp(\mathrm{j}kz)\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{U}_0(x_0,y_0)\exp\left\{\mathrm{j}\frac{k}{2z}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\right\}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0\\=&\frac{1}{\mathrm{j}\lambda z}\exp(\mathrm{j}kz)\boldsymbol{U}_0(x,y)*\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right]\end{aligned} \tag{2.5.13}$$

这与基尔霍夫理论得出的叠加积分(2.3.22)式完全相同.

展开指数中的二次项则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}(x,y)=&\frac{1}{\mathrm{j}\lambda z}\exp(\mathrm{j}kz)\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right]\\&\times\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{U}_0(x_0,y_0)\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)\right]\exp\left[-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda z}(x_0x+y_0y)\right]\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0\end{aligned} \tag{2.5.14}$$

上式可以看作是傅里叶变换形式的菲涅耳衍射公式.菲涅耳衍射也可看作是 $\boldsymbol{U}_0(x_0,y_0)\times\exp\left(\mathrm{j}k\frac{x_0^2+y_0^2}{2z}\right)$ 的傅里叶变换.尤其是当照明衍射屏的光波是会聚球面波时,$\boldsymbol{U}_0(x_0,y_0)$中将

包含关于 x_0 ,y_0 的二次相位因子,在一定条件下可以与 $\exp\left(\mathrm{j}k\dfrac{x_0^2+y_0^2}{2z}\right)$ 相消,这时菲涅耳衍射的计算变得比较简单.而对于诸多光学仪器像面上的衍射,均属于这种情况.

2.5.2 泰伯效应

当用单色平面波垂直照明一个具有周期性透过率函数的图片时,发现在该透明片后的某些距离上出现该周期函数的像.这种不用透镜就可对周期物体成像的现象称为泰伯效应或称自成像,是一种衍射成像.这个现象是泰伯(Talbot)在 1836 年发现的,但直到近 20 年来才有人重新仔细研究它.并在光学和电子显微镜等方面得到广泛应用.

有一维周期物体,其复振幅透过率为

$$\boldsymbol{g}_0(x_0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{c}_n\exp\left(\mathrm{j}2\pi\frac{n}{\mathrm{d}}x_0\right),\quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{2.5.15}$$

式中 d 为周期.当采用单位振幅的平面波垂直照明,紧靠物体后的光场分布即为 $\boldsymbol{g}_0(x_0)$,它可以看作频率取离散值$(n/\mathrm{d},0)$的无穷多个平面波的叠加,$\boldsymbol{c}_n$ 表示各个平面波分量的相对振幅和相位分布.

现讨论与物平面相距为 z 的观察平面上的光场分布,这是一个菲涅耳衍射问题.对这个问题从频域研究比从空域研究更方便.将(2.5.15)式作傅里叶变换便得物分布的空间频率为

$$\boldsymbol{G}_0(\xi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{c}_n\delta\left(\xi-\frac{n}{\mathrm{d}}\right) \tag{2.5.16}$$

由菲涅耳衍射传递函数的表达式得

$$\boldsymbol{H}(\xi)=\exp(\mathrm{j}kz)\exp(-\mathrm{j}\pi\lambda z\xi^2)$$

观察平面上得到的场分布的频谱为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}(\xi)&=\boldsymbol{G}_0(\xi)\boldsymbol{H}(\xi)\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{c}_n\delta\left(\xi-\frac{n}{\mathrm{d}}\right)\exp(\mathrm{j}kz)\exp(-\mathrm{j}\pi\lambda z\xi^2)\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{c}_n\delta\left(\xi-\frac{n}{\mathrm{d}}\right)\exp(\mathrm{j}kz)\exp\left[-\mathrm{j}\pi\lambda z\left(\frac{n}{\mathrm{d}}\right)^2\right]\end{aligned} \tag{2.5.17}$$

当 z 满足条件

$$z=\frac{2m\mathrm{d}^2}{\lambda}\quad (m=1,2,3,\cdots) \tag{2.5.18}$$

则有

$$\exp\left[-\mathrm{j}\pi\lambda z\left(\frac{n}{\mathrm{d}}\right)^2\right]=1$$

在这种情况下

$$\boldsymbol{G}(\xi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{c}_n\delta\left(\xi-\frac{n}{\mathrm{d}}\right)\exp(\mathrm{j}kz)$$

对上式作逆傅里叶变换得到观察平面上的场分布为

$$\boldsymbol{g}(x_0)=\boldsymbol{g}_0(x_0)\exp(\mathrm{j}kz)$$

其强度分布与物体相同,即

$$I(x_0)=|\boldsymbol{g}(x_0)|^2=|\boldsymbol{g}_0(x_0)|^2$$

于是在 $z_T=2\mathrm{d}^2/\lambda$ 的整数倍距离上,可观察到物体的像.z_T 称为泰伯距离.

如果周期物体是一个光栅,在光栅所产生的泰伯自成像后面放一块周期相同的检测光栅,则可以观察到清晰的莫尔条纹.在两个光栅之间若存在相位物体,由莫尔条纹的改变就可测量物体

的相位变化.这就是泰伯干涉仪的简单原理.

2.5.3 夫琅禾费衍射

当观察平面离开孔径平面的距离 z 进一步增大,使其不仅满足菲涅耳衍射条件,而且要求在(2.5.14)式中的 $\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)\right]$ 可以略去,即要满足

$$\frac{2\pi}{\lambda}\frac{(x_0^2+y_0^2)_{\max}}{2z}\ll 2\pi$$

或

$$z\gg\frac{1}{2\lambda}(x_0^2+y_0^2)_{\max} \tag{2.5.19}$$

满足(2.5.19)式所规定的 z 值范围的衍射叫做夫琅禾费衍射.此 z 值所限定的区域称为夫琅禾费衍射区.显然,夫琅禾费衍射是在菲涅耳衍射的基础上进一步近似所得出的结果.其衍射公式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}(x,y)&=\frac{\exp(\mathrm{j}kz)}{\mathrm{j}\lambda z}\exp\left(\mathrm{j}k\frac{x^2+y^2}{2z}\right)\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{U}_0(x_0,y_0)\exp\left[-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda z}(x_0x+y_0y)\right]\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0\\&=\frac{\exp(\mathrm{j}kz)}{\mathrm{j}\lambda z}\exp\left(\mathrm{j}k\frac{x^2+y^2}{2z}\right)F\{\boldsymbol{U}_0(x_0,y_0)\}\end{aligned} \tag{2.5.20}$$

上式表明,观察平面的场分布正比于孔径平面上出射光场分布的傅里叶变换,频率取值与观察平面坐标的关系为 $\xi=x/\lambda z$,$\eta=y/\lambda z$.考虑到积分号前的相位因子,这一变换关系还是不准确的,但它并不影响观察面上的强度分布.

将(2.5.20)式与(2.5.14)式比较,可以看出菲涅耳衍射的复振幅分布正比于 $\boldsymbol{U}_0(x_0,y_0)\times\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)\right]$ 的傅里叶变换.因此随着距离 z 的增大,观察平面上衍射光场分布会发生变化,即衍射图样会发生变化.仅就轴上点而言,随着 z 的变化其亮暗是交替变化的.夫琅禾费衍射的复振幅分布正比于 $\boldsymbol{U}_0(x_0,y_0)$ 的傅里叶变换.当 z 变化时,衍射图样只是按比例放大或缩小,图样形状不会发生变化.

这里必须指出,用(2.5.2)式和(2.5.19)式来确定菲涅耳近似和夫琅禾费近似的 z 值范围,在其他条件相同的情况下,当问题要求的精度不同时,所确定的 z 值是不同的,一般常用 $\pi/10$ 来估计 z 值.由于光波长 λ 很小,夫琅禾费衍射区所要求的条件实际上相当苛刻.要在近距离上观察孔径的夫琅禾费衍射图样,关键是要消除菲涅耳衍射公式(2.5.14)中的相位因子 $\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)\right]$ 的影响,为此我们可利用会聚透镜的性质来实现这一要求.

从上面的讨论可知,在夫琅禾费近似满足的范围内,菲涅耳近似必须满足.所以凡能用来计算菲涅耳衍射的公式都能用来计算夫琅禾费衍射,而反过来就不行了.也就是说菲涅耳衍射的范围是包含夫琅禾费衍射范围的.所以必须指出,数学上采用夫琅禾费近似之后,脉冲响应的空间不变性已不复存在.似乎夫琅禾费衍射现象已不再是线性空不变系统,也没有了传递函数.但是,正如以上所分析的,菲涅耳衍射区包含夫琅禾费衍射区,传递函数表达式(2.5.10)式仍然有效.

2.6 透镜的傅里叶变换性质

前面提到,要在衍射屏后面的自由空间观察夫琅禾费衍射,其条件是相当苛刻的.要想在近距离观察夫琅禾费衍射,是借助会聚透镜来实现的.在单色平面波垂直照射衍射屏的情况下,夫

琅禾费衍射就是屏函数的傅里叶变换.对透射物体进行傅里叶变换运算的物理手段是实现它的夫琅禾费衍射.也就是说,透镜可以用来实现物体的傅里叶变换.透镜是光学系统最基本的元件,正是由于透镜在一定条件下能实现傅里叶变换,才使得傅里叶分析方法在光学中得到如此广泛的应用.

2.6.1 透镜的相位变换作用

研究一个无像差的正薄透镜对点光源的成像过程,如图 2.6.1 所示.取 z 轴为光轴,轴上单色点光源 S 到透镜顶点 O_1 的距离为 p,不计透镜的有限孔径所造成的衍射,透镜将物点 S 成完善像于 S' 点.S' 点到透镜顶点 O_2 的距离为 q.过透镜两顶点 O_1 和 O_2,分别垂直于光轴作两参考平面 P_1 和 P_2. 由于考虑的是薄透镜,光线通过透镜时入射和出射的高度相同.从几何光学的观点看,图 2.6.1 所示的成像过程是点物成点像;从波面变换的观点看,透镜将一个发散球面波变换成一个会聚球面波.

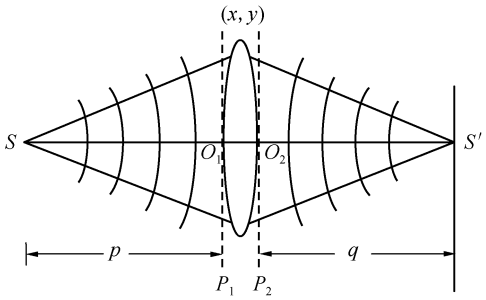


图 2.6.1 透镜的相位变换作用

为了研究透镜对入射波面的变换作用,引入透镜的复振幅透过率 $\boldsymbol{t}(x,y)$,它定义为

$$\boldsymbol{t}(x,y)=\frac{\boldsymbol{U}_1'(x,y)}{\boldsymbol{U}_1(x,y)} \tag{2.6.1}$$

式中,$\boldsymbol{U}_1(x,y)$和 $\boldsymbol{U}_1'(x,y)$分别是 P_1 和 P_2 平面上的光场分布.

在傍轴近似下,位于 S 点的单色点光源发出的发散球面波在 P_1 平面上造成的场分布为

$$\boldsymbol{U}_1(x,y)=\boldsymbol{A}\exp(\mathrm{j}kp)\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2p}(x^2+y^2)\right] \tag{2.6.2}$$

式中,$\boldsymbol{A}$ 为常数,表明在傍轴近似下,平面 P_1 上的振幅分布是均匀的,发生变化的只是相位.此球面波经透镜变换后向 S' 点会聚,忽略透镜的吸收,它在 P_2 平面上造成的复振幅分布为

$$\boldsymbol{U}_1'(x,y)=\boldsymbol{A}\exp(-\mathrm{j}kq)\exp\left[-\mathrm{j}\frac{k}{2q}(x^2+y^2)\right] \tag{2.6.3}$$

在(2.6.2)式和(2.6.3)式中的相位因子 $\exp(\mathrm{j}kp)$和 $\exp(-\mathrm{j}kq)$仅表示常数相位变化,它们并不影响 P_1 和 P_2 平面上相位的相对分布,分析时可略去.把(2.6.2)式和(2.6.3)式代入(2.6.1)式,得到透镜的复振幅透过率或相位变换因子为

$$\boldsymbol{t}(x,y)=\frac{\boldsymbol{U}_1'(x,y)}{\boldsymbol{U}_1(x,y)}=\exp\left[-\mathrm{j}\frac{k}{2}(x^2+y^2)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\right]$$

由透镜成像的高斯公式可知

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=\frac{1}{f} \tag{2.6.4}$$

式中,f 为透镜的像方焦距.于是透镜的相位变换因子可简单地表示为

$$\boldsymbol{t}(x,y)=\exp\left[-\mathrm{j}\frac{k}{2f}(x^2+y^2)\right] \tag{2.6.5}$$

以上结果表明,通过透镜的相位变换作用.把一个发散球面波变换成了会聚球面波.当一个单位振幅的平面波垂直于 P_1 面入射时,它在 P_1 面上造成的复振幅分布 $\boldsymbol{U}_1(x,y)=1$,在 P_2 平面上造成的复振幅分布为

$$\boldsymbol{U}_1'(x,y)=\boldsymbol{U}_1(x,y)\boldsymbol{t}(x,y)=\exp\left[-\mathrm{j}\frac{k}{2f}(x^2+y^2)\right]$$

在傍轴近似下,这是一个球面波的表达式.对于正透镜 $f>0$,上式所表示的是一个向透镜后方 f 处的焦点 F' 会聚的球面波.对于负透镜 $f<0$,这是一个由透镜前方 $-f$ 处的虚焦点 F' 发出的发散球面波.

如果考虑透镜孔径的有限大小,用 $\boldsymbol{P}(x,y)$ 表示孔径函数(或称光瞳函数),其定义为

$$\boldsymbol{P}(x,y)=\begin{cases}1, & \text{透镜孔径内}\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{2.6.6}$$

于是透镜的相位变换因子可写做

$$\boldsymbol{t}(x,y)=\boldsymbol{P}(x,y)\exp\left[-\mathrm{j}\frac{k}{2f}(x^2+y^2)\right] \tag{2.6.7}$$

透镜对光波的相位变换作用,是由透镜本身的性质决定的,与入射光波复振幅 $\boldsymbol{U}_1(x,y)$ 的具体形式无关.$\boldsymbol{U}_1(x,y)$ 可以是平面波的复振幅,也可以是球面波的复振幅,还可以是某种特定分布的复振幅,只要傍轴条件满足,薄透镜就会以(2.6.5)式或(2.6.7)式的形式对 $\boldsymbol{U}_1(x,y)$ 进行相位变换.

2.6.2 透镜的傅里叶变换特性

正透镜除了具有成像性质外,还能作傅里叶变换,正因如此,傅里叶分析方法在光学中得到了广泛而成功的应用.前面我们已经看到,单位振幅平面波垂直照明衍射屏的夫琅禾费衍射,恰好是衍射屏透过率函数 $\boldsymbol{t}(x,y)$ 的傅里叶变换(除一相位因子外).另外,在会聚光照明下的菲涅耳衍射,通过会聚中心的观察屏上的菲涅耳衍射场分布,也是衍射屏透过率函数 $\boldsymbol{t}(x,y)$ 的傅里叶变换(除一相位因子外).这两种途径都能用透镜比较方便地实现.第一种情况可在透镜的后焦面(无穷远照明光源的共轭面)上观察夫琅禾费衍射;第二种情况可在照明光源的共轭面上观察屏函数的夫琅禾费衍射图样.下面分别就透明片(物)放在透镜之前和之后两种情况进行讨论.

1. 物在透镜之前

如图 2.6.2 所示,要变换的透明片置于透镜前方 d_0 处,其复振幅透过率为 $\boldsymbol{t}(x_0,y_0)$,这个位置称为输入面.由于是薄透镜,这里把 P_1 和 P_2 平面画在一起了,位于光轴上的单色点光源 S 与透镜的距离为 p.点光源的共轭像面 (x,y) 与透镜的距离为 q,它是输出面.按信息光学中的习惯,与一般的应用光学中的符号规则不同,这里的 p,q 和 d_0 均用正值.假设薄透镜孔径很大,抽象为无穷大.

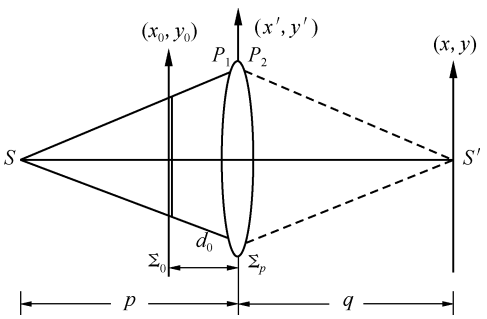


图 2.6.2 物在透镜之前的变换

在傍轴近似下,由单色点光源发出的球面波在物的前表面上造成的场分布为

$$\boldsymbol{A}_0\exp\left[\mathrm{j}k\frac{x_0^2+y_0^2}{2(p-d_0)}\right]$$

透过物体,从输入面上出射的光场为

$$\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{t}(x_0,y_0)\exp\left[\mathrm{j}k\frac{x_0^2+y_0^2}{2(p-d_0)}\right]$$

从输入平面出射的光场到达透镜平面,按菲涅耳衍射公式(2.5.1),其复振幅分布为

$$\boldsymbol{U}_1(x',y')=\frac{\boldsymbol{A}_0}{\mathrm{j}\lambda d_0}\iint_{\Sigma_0}\boldsymbol{t}(x_0,y_0)\exp\left[\mathrm{j}k\frac{x_0^2+y_0^2}{2(p-d_0)}\right]\exp\left[\mathrm{j}k\frac{(x'-x_0)+(y'-y_0)^2}{2d_0}\right]\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0$$

这里略去了常数相位因子，Σ_0 为物函数所在的范围.通过透镜后的场分布为

$$\boldsymbol{U}_1'(x',y')=\boldsymbol{U}_1(x',y')\boldsymbol{P}(x',y')\exp\left(-\mathrm{j}k\frac{x'^2+y'^2}{2f}\right)$$

式中 $\boldsymbol{P}(x',y')$为(2.6.6)式所定义的光瞳函数.这样一来，在输出面上，即光源 S 的共轭面上的光场分布为

$$\boldsymbol{U}(x,y)=\frac{1}{\mathrm{j}\lambda q}\iint_{\Sigma_p}\boldsymbol{U}_1(x',y')\exp\left(-\mathrm{j}k\frac{x'^2+y'^2}{2f}\right)\exp\left[\mathrm{j}k\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{2q}\right]\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$$

式中 Σ_p 为光瞳函数所确定的范围.现将 $\boldsymbol{U}_1(x',y')$的表达式代入上式得

$$\boldsymbol{U}'(x,y)=-\frac{\boldsymbol{A}_0}{\lambda^2 qd_0}\iint_{\Sigma_0}\iint_{\Sigma_p}\boldsymbol{t}(x_0,y_0)\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2}(\Delta_x+\Delta_y)\right]\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \tag{2.6.8}$$

式中

$$\begin{aligned}\Delta_x&=\frac{x_0^2}{p-d_0}+\frac{(x'-x_0)^2}{d_0}-\frac{x'^2}{f}+\frac{(x-x')^2}{q}\\&=x_0^2\left(\frac{1}{p-d_0}+\frac{1}{d_0}\right)+x'^2\left(\frac{1}{d_0}+\frac{1}{q}-\frac{1}{f}\right)+\frac{x^2}{q}-\frac{2x_0x'}{d_0}-\frac{2xx'}{q}\\&=\frac{fqx_0^2}{d_0[q(f-d_0)+fd_0]}+\frac{x'^2[q(f-d_0)+fd_0]}{d_0fq}+\frac{x^2}{q}-\frac{2x_0x'}{d_0}-\frac{2xx'}{q}\\&=\left\{x_0\sqrt{\frac{fq}{d_0[q(f-d_0)+fd_0]}}-x'\sqrt{\frac{q(f-d_0)+fd_0}{d_0fq}}+x\sqrt{\frac{fd_0}{q[q(f-d_0)+fd_0]}}\right\}^2\\&\quad+\frac{(f-d_0)x^2}{q(f-d_0)+fd_0}-\frac{2fx_0x}{q(f-d_0)+fd_0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_y&=\left\{y_0\sqrt{\frac{fq}{d_0[q(f-d_0)+fd_0]}}-y'\sqrt{\frac{q(f-d_0)+fd_0}{d_0fq}}+y\sqrt{\frac{fd_0}{q[q(f-d_0)+fd_0]}}\right\}^2\\&\quad+\frac{(f-d_0)y^2}{q(f-d_0)+fd_0}-\frac{2fy_0y}{q(f-d_0)+fd_0}\end{aligned}$$

在上面的化简中，应用了物像共轭关系的高斯公式 $1/p+1/q=1/f$.(2.6.8)式要分别对物平面和光瞳平面积分.我们首先完成对光瞳平面的积分

$$\boldsymbol{U}_P=\iint_{\Sigma_P}\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2}(\Delta_x+\Delta_y)\right]\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$$

由于不考虑透镜有限孔径的影响，对 Σ_P 的积分可扩展到无穷.做变量代换，令

$$\begin{aligned}\alpha&=q(f-d_0)+fd_0\\\bar{x}&=\left(\sqrt{\frac{fq}{d_0\alpha}}x_0-\sqrt{\frac{\alpha}{d_0fq}}x'+\sqrt{\frac{fd_0}{q\alpha}}x\right)\\\bar{y}&=\left(\sqrt{\frac{fq}{d_0\alpha}}y_0-\sqrt{\frac{\alpha}{d_0fq}}y'+\sqrt{\frac{fd_0}{q\alpha}}y\right)\\\mathrm{d}\bar{x}&=-\sqrt{\frac{\alpha}{d_0fq}}\mathrm{d}x,\mathrm{d}\bar{y}=-\sqrt{\frac{\alpha}{d_0fq}}\mathrm{d}y'\end{aligned}$$

于是 $\boldsymbol{U}_P$ 的积分简化成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_P&=\frac{d_0fq}{\alpha}\exp\left[\mathrm{j}k\frac{(f-d_0)}{2\alpha}(x^2+y^2)\right]\exp\left[-\mathrm{j}k\frac{f}{\alpha}(x_0x+y_0y)\right]\\&\quad\times\iint_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2}(\bar{x}^2+\bar{y}^2)\right]\mathrm{d}\bar{x}\mathrm{d}\bar{y}\end{aligned}$$

利用积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

可将 $\boldsymbol{U}_P$ 积出

$$\boldsymbol{U}_P = \frac{\mathrm{j}\lambda f q d_0}{\alpha}\exp\left[\mathrm{j}k\frac{f-d_0}{2\alpha}(x^2+y^2)\right]\exp\left[-\mathrm{j}k\frac{f}{\alpha}(x_0 x+y_0 y)\right]$$

将以上结果代入(2.6.8)式得

$$\boldsymbol{U}(x,y)=\boldsymbol{c}'\exp\left\{\mathrm{j}k\frac{(f-d_0)(x^2+y^2)}{2[q(f-d_0)+fd_0]}\right\}\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{t}(x_0,y_0)\exp\left[-\mathrm{j}k\frac{f(x_0 x+y_0 y)}{q(f-d_0)+fd_0}\right]\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0 \tag{2.6.9}$$

这就是输入平面位于透镜前,计算光源共轭面上场分布的一般公式.由于照明光源和观察平面的位置始终保持共轭关系,因此(2.6.9)式中的 q 由照明光源位置决定.当照明光源位于光轴上无穷远,即平面波垂直照明时,$q=f$,这时观察平面位于透镜后焦面上.另外,输入平面的位置决定了 d_0 的大小,下面讨论一下输入平面的两个特殊位置.

(1) 输入平面位于透镜前焦面

这时 $d_0=f$,由(2.6.9)式得到

$$\boldsymbol{U}(x,y)=\boldsymbol{c}'\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{t}(x_0,y_0)\exp\left(-\mathrm{j}k\frac{x_0 x+y_0 y}{f}\right)\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0 \tag{2.6.10}$$

在这种情况下,衍射物体的复振幅透过率与衍射场的复振幅分布存在准确的傅里叶变换关系,并且只要照明光源和观察平面满足共轭关系,与照明光源的具体位置无关.这也就是说,不管照明光源位于何处,均不影响观察面上空间频率与位置坐标的关系,始终为 $\xi=x/\lambda f$,$\eta=y/\lambda f$.在理论分析中这种情况是很有意义的.

(2) 输入面紧贴透镜

这时 $d_0=0$,由(2.6.9)式得

$$\boldsymbol{U}(x,y)=\boldsymbol{c}'\exp\left(\mathrm{j}k\frac{x^2+y^2}{2q}\right)\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{t}(x_0,y_0)\exp\left(-\mathrm{j}k\frac{x_0 x+y_0 y}{q}\right)\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0 \tag{2.6.11}$$

在这种情况下,衍射物体的复振幅透过率与观察面上的场分布,不是准确的傅里叶变换关系,有一个二次相位因子.观察面上的空间坐标与空间频率的关系为 $\xi=x/\lambda q$,$\eta=y/\lambda q$,随 q 的值而不同.也就是说,频谱在空间尺度上能按一定的比例缩放,这对光学信息处理的应用将带来一定的灵活性.并且也利于充分利用透镜孔径.

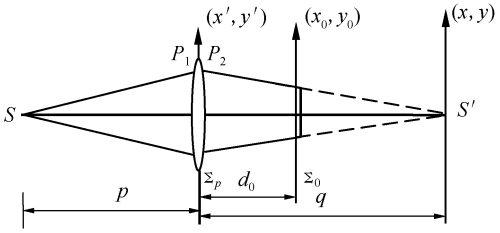


图 2.6.3 物在透镜之后的变换

2. 物在透镜后方

如图 2.6.3 所示,这时入射到透镜前表面的场为 $\boldsymbol{A}_0\exp\left(\mathrm{j}k\frac{x'^2+y'^2}{2p}\right)$,从透镜出射的场为

$$\boldsymbol{A}_0\exp\left(\mathrm{j}k\frac{x'^2+y'^2}{2p}\right)\exp\left(-\mathrm{j}k\frac{x'^2+y'^2}{2f}\right)$$

从透镜的后表面出射的场到达物的前表面造成的场分布为

$$\boldsymbol{U}_0(x_0,y_0)=\frac{\boldsymbol{A}}{\mathrm{j}\lambda d_0}\iint_{\Sigma_P}\exp\left[\mathrm{j}k\frac{x'^2+y'^2}{2p}\right]\exp\left(-\mathrm{j}k\frac{x'^2+y'^2}{2f}\right)$$
$$\times\exp\left[\mathrm{j}k\frac{(x_0-x')^2+(y_0-y')^2}{2d_0}\right]\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y' \tag{2.6.12}$$

通过物体后的出射光场为

$$\boldsymbol{U}_0'(x_0,y_0)=\boldsymbol{t}(x_0,y_0)\boldsymbol{U}_0(x_0,y_0)$$

这个光场传输到观察平面(x,y)上造成的场分布为

$$\boldsymbol{U}(x,y)=\frac{1}{\mathrm{j}\lambda(q-d_0)}\iint_{\Sigma_0}\boldsymbol{t}(x_0,y_0)\boldsymbol{U}_0(x_0,y_0)\exp\left[\mathrm{j}k\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2(q-d_0)}\right]\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \tag{2.6.13}$$

将(2.6.12)式代入(2.6.13)式得

$$\boldsymbol{U}(x,y)=-\frac{\boldsymbol{A}_0}{\lambda^2 d_0(q-d_0)}\iint_{\Sigma_P}\iint_{\Sigma_0}\boldsymbol{t}(x_0,y_0)\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2}(\Delta_x+\Delta_y)\right]\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \tag{2.6.14}$$

式中

$$\begin{aligned}\Delta_x&=\frac{x'^2}{p}-\frac{x'^2}{f}+\frac{(x_0-x')^2}{d_0}+\frac{(x-x_0)^2}{q-d_0}\\&=x'^2\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{d_0}-\frac{1}{f}\right)+x_0^2\left(\frac{1}{d_0}+\frac{1}{q-d_0}\right)+\frac{x^2}{q-d_0}-\frac{2x_0x'}{d_0}-\frac{2x_0x}{q-d_0}\\&=x'^2\frac{q-d_0}{d_0q}+x_0^2\frac{q}{d_0(q-d_0)}+\frac{x^2}{q-d_0}-\frac{2x_0x'}{d_0}-\frac{2x_0x}{q-d_0}\\&=\left\{x'\sqrt{\frac{q-d_0}{d_0q}}-x_0\sqrt{\frac{q}{d_0(q-d_0)}}\right\}^2+\frac{x^2}{q-d_0}-\frac{2x_0x}{q-d_0}\\\Delta_y&=\left\{y'\sqrt{\frac{q-d_0}{d_0q}}-y_0\sqrt{\frac{q}{d_0(q-d_0)}}\right\}^2+\frac{y^2}{q-d_0}-\frac{2y_0y}{q-d_0}\end{aligned}$$

用推导(2.6.9)式的方法可得出

$$\boldsymbol{U}(x,y)=\boldsymbol{c}'\exp\left[\mathrm{j}k\frac{x^2+y^2}{2(q-d_0)}\right]\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{t}(x_0,y_0)\exp\left(-\mathrm{j}k\frac{x_0x+y_0y}{q-d_0}\right)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \tag{2.6.15}$$

由(2.6.9)式和(2.6.15)式可以看出,不管衍射物体位于何种位置,只要观察面是照明光源的共轭面,则物面(输入面)和观察面(输出面)之间的关系都是傅里叶变换关系,即观察面上的衍射场都是夫琅禾费型.显然,当 $d_0=0$ 时,由(2.6.15)式也可得出(2.6.11)式,即物从两面紧贴透镜都是等价的.

3. *考虑孔径效应*

迄今为止,我们完全忽略了透镜的孔径效应.为了把孔径效应考虑进去,需要用几何光学近似.现在只就物在透镜前,且为相干平行光照明的特殊情况列出结果.作为初步估算,采用几何光学近似考虑,也就是考虑物面与透镜之间的距离 d_0 相对于透径直径 D 而言不是很大的情况.这时光波从物到透镜之间的传播可看作直线传播,并忽略透镜的孔径衍射.这样的条件,在实用中的绝大多数问题都是能得到满足的.于是有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}(x,y)=\boldsymbol{c}'\exp\left[\mathrm{j}k\frac{(f-d_0)(x^2+y^2)}{2f^2}\right]\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{t}(x_0,y_0)p\left(x_0+\frac{d_0}{f}x,y_0+\frac{d_0}{f}y\right)\\\times\exp\left[-\mathrm{j}k\frac{x_0x+y_0y}{f}\right]\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0\end{aligned} \tag{2.6.16}$$

2.6.3 透镜的一般变换特性

在上一小节讨论中,照明光源和观察面是一对成物像关系的共轭面.所以,物透明片无论是放在透镜前或透镜后,除一常相位因子外,观察面总是物的频谱面.下面我们讨论一种任意情况,

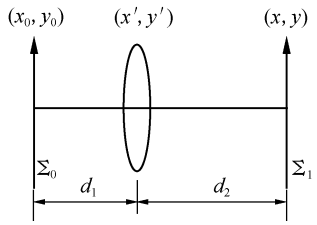


图 2.6.4 透镜的一般变换效应

物面(输入面)和观察面(输出面)的位置是任意的,我们将导出此时的输入输出关系式.如图 2.6.4 所示,正透镜焦距为 f,物面 Σ_0 位于透镜前 d_1 处,观察面 Σ_1 位于透镜后 d_2 处,d_1 和 d_2 是任意的.用振幅为 1 的单色平面波垂直照明物平面,设物面上的场分布为 $\boldsymbol{U}_0(x_0, y_0)$,观察面上的场分布为 $\boldsymbol{U}(x, y)$,并假设光场在 d_1 和 d_2 距离上的传播满足菲涅耳近似条件,则透镜前表面上的场 $\boldsymbol{U}_1(x', y')$可表示为

$$\boldsymbol{U}_1(x', y') = \frac{\exp(\mathrm{j}kd_1)}{\mathrm{j}\lambda d_1}\iint_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{U}_0(x_0, y_0)\exp\left\{\mathrm{j}k\frac{(x'-x_0)^2+(y'-y_0)^2}{2d_1}\right\}\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0 \tag{2.6.17}$$

考虑到透镜的相位变换因子,则透镜后表面上的场分布 $\boldsymbol{U}_1'(x', y')$为

$$\boldsymbol{U}_1'(x', y') = \exp\left[-\mathrm{j}\frac{k}{2f}(x'^2+y'^2)\right]\boldsymbol{U}_1(x', y') \tag{2.6.18}$$

于是观察平面上的场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}(x, y) &= \frac{\exp(\mathrm{j}kd_2)}{\mathrm{j}\lambda d_2}\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{U}_1'(x', y')\exp\left\{\mathrm{j}\frac{k}{2d_2}[(x-x')^2+(y-y')^2]\right\}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \\ &= -\frac{\exp[\mathrm{j}k(d_1+d_2)]}{\lambda^2 d_1 d_2}\iiint\!\!\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{U}_0(x_0, y_0)\exp\left[-\mathrm{j}k\frac{x'^2+y'^2}{2f}\right] \\ &\quad\times\exp\left[\mathrm{j}k\frac{(x'-x_0)^2+(y'-y_0)^2}{2d_1}\right]\exp\left[\mathrm{j}k\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{2d_2}\right]\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \\ &= -\frac{\exp[\mathrm{j}k(d_1+d_2)]}{\lambda^2 d_1 d_2}\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2d_2}(x^2+y^2)\right]\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{U}_0(x_0, y_0) \\ &\quad\times\exp\left[\mathrm{j}k\frac{x_0^2+y_0^2}{2d_1}\right]\boldsymbol{I}(x_0, y_0)\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0\end{aligned} \tag{2.6.19}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I}(x_0, y_0) &= \iint_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\mathrm{j}\frac{k}{2}\left[\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}-\frac{1}{f}\right)(x'^2+y'^2)\right.\right. \\ &\quad\left.\left.-2\left(\frac{x_0}{d_1}+\frac{x}{d_2}\right)x'-2\left(\frac{y_0}{d_1}+\frac{y}{d_2}\right)y'\right]\right\}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\mathrm{j}\frac{k}{2}\left[\varepsilon x'^2-2\left(\frac{x_0}{d_1}+\frac{x}{d_2}\right)x'\right]\right\}\mathrm{d}x' \\ &\quad\times\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\mathrm{j}\frac{k}{2}\left[\varepsilon y'^2-2\left(\frac{y_0}{d_1}+\frac{y}{d_2}\right)y'\right]\right\}\mathrm{d}y' \\ &= \boldsymbol{I}_1(x_0, y_0)\boldsymbol{I}_2(x_0, y_0)\end{aligned} \tag{2.6.20}$$

式中

$$\varepsilon = \frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}-\frac{1}{f} \tag{2.6.21}$$

利用积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-Ax^2\pm 2Bx-C]\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{A}}\exp[-C+B^2/A] \tag{2.6.22}$$

对于 $\varepsilon\neq 0$ 的情况可得

$$\boldsymbol{I}_1(x_0, y_0) = \sqrt{\frac{\mathrm{j}\lambda}{\varepsilon}}\exp\left[-\mathrm{j}\frac{k}{2\varepsilon}\left(\frac{x_0}{d_1}+\frac{x}{d_2}\right)^2\right] \tag{2.6.23}$$

$$\boldsymbol{I}_2(x_0, y_0) = \sqrt{\frac{\mathrm{j}\lambda}{\varepsilon}}\exp\left[-\mathrm{j}\frac{k}{2\varepsilon}\left(\frac{y_0}{d_1}+\frac{y}{d_2}\right)^2\right] \tag{2.6.24}$$

将(2.6.23)式和(2.6.24)式代入(2.6.20)式,再将(2.6.20)式代入(2.6.19)式得

$$\boldsymbol{U}(x,y)=\frac{\exp[\mathrm{j}k(d_1+d_2)]}{\mathrm{j}\lambda\varepsilon d_1 d_2}\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2\varepsilon d_1 d_2}\left(1-\frac{d_1}{f}\right)(x^2+y^2)\right]$$
$$\times\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{U}_0(x_0,y_0)\exp\left\{\mathrm{j}\frac{k}{2\varepsilon d_1 d_2}\left[\left(1-\frac{d_2}{f}\right)(x_0^2+y_0^2)-2(x_0x-y_0y)\right]\right\}\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0 \tag{2.6.25}$$

在上式的化简过程中应用了下面的恒等变换

$$\frac{1}{d_2}-\frac{1}{\varepsilon d_2^2}=\frac{1}{\varepsilon d_1 d_2}\left(\varepsilon d_1-\frac{d_1}{d_2}\right)=\frac{1}{\varepsilon d_1 d_2}\left(1-\frac{d_1}{f}\right)$$
$$\frac{1}{d_1}-\frac{1}{\varepsilon d_1^2}=\frac{1}{\varepsilon d_1 d_2}\left(\varepsilon d_2-\frac{d_2}{d_1}\right)=\frac{1}{\varepsilon d_1 d_2}\left(1-\frac{d_2}{f}\right)$$

当 $d_2=f$,即后焦面作为观察平面时,则(2.6.25)式简化成

$$\boldsymbol{U}(x,y)=\frac{\exp[\mathrm{j}k(d_1+f)]}{\mathrm{j}\lambda f}\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2f}\left(1-\frac{d_1}{f}\right)(x^2+y^2)\right]$$
$$\times\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{U}_0(x_0,y_0)\exp\left[-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda f}(x_0x+y_0y)\right]\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0 \tag{2.6.26}$$

可见,除一相位因子外,$\boldsymbol{U}(x,y)$是$\boldsymbol{U}_0(x_0,y_0)$的傅里叶变换.

当 $d_1=d_2=f$ 时,(2.6.26)式中的相位因子消去

$$\boldsymbol{U}(x,y)=\frac{\exp(\mathrm{j}2kf)}{\mathrm{j}\lambda f}\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{U}_0(x,y)\exp\left[-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda f}(x_0x+y_0y)\right]\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0 \tag{2.6.27}$$

这时 $\boldsymbol{U}(x,y)$是$\boldsymbol{U}_0(x,y)$的准确傅里叶变换(常数相位因子无关紧要).一般情况下,d_1 和 d_2 并不相等,有可能实现分数阶傅里叶变换.这个问题我们将在第12章中介绍.

当 $\varepsilon=0$ 时,即输入和输出满足物像共轭关系.由(2.6.20)式得

$$\boldsymbol{I}_1=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{x_0}{d_1}+\frac{x}{d_2}\right)x'\right\}\mathrm{d}x'=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda}\frac{1}{d_1}\left(x_0-\frac{x}{M}\right)x'\right\}\mathrm{d}x'$$
$$=\lambda d_1\,\delta(x_0-x/M) \tag{2.6.28}$$
$$\boldsymbol{I}_2=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{y_0}{d_1}+\frac{y}{d_2}\right)y'\right\}\mathrm{d}y'=\lambda d_1\,\delta(y_0-y/M) \tag{2.6.29}$$

将这两式代入(2.6.19)式得

$$\boldsymbol{U}(x,y)=\frac{\exp[\mathrm{j}k(d_1+d_2)]}{M}\exp\left[-\frac{\mathrm{j}\pi}{\lambda Mf}(x^2+y^2)\right]\boldsymbol{U}_0\left(\frac{x}{M},\frac{y}{M}\right) \tag{2.6.30}$$

在输出平面上得到放大 $M=-d_2/d_1$ 倍的像,回到了几何光学的结果.

2.7 复杂相干光学系统的分析

前几节分析了几种不同的光学系统.这几种系统包含的透镜至多一个,至多在两个自由空间区域传播.其实用上述方法也可以分析更复杂的系统.但是,随着自由空间区域数目的增加,积分的个数也增加;随着所包含的透镜数目的增加,计算的复杂性也增加.Nazarathy 等人于1980年提出了一种基于“算符”的复杂相干光学系统分析简化方法,以下简称“算符分析法”,通过引入几个算符,利用这些算符的运算法则和基本性质,在较大程度上简化计算过程,从而达到分析复杂

相干光学系统的目的.

2.7.1 算符分析法的几个约束条件

必须强调指出的是,算符分析法并不是对任意复杂光学系统分析都适用,它受以下几个条件的约束,才能真正起到简化计算的作用.

第一,算符分析法仅限于讨论单色光入射情况.这个约束表明,算符分析法只适用于分析所谓的"相干"光学系统,不适用于所有"非相干"光学系统.

第二,算符分析法仅限于考虑傍轴条件,因为该方法的简化运算主要采用了几何光学中的光线传播矩阵运算理论,而光线传播矩阵运算理论是建立在傍轴条件下的.

第三,为简单起见,本节将把问题作为一维问题而不是二维问题来处理.如果问题中的孔径在直角坐标系中可以分离变量,这并不是一个实质性的限制,因为二次相位指数函数可分离变量的性质是两个正交方向中的每一个都可以独立考虑.但是,如果光学系统包含的孔径在直角坐标系中不能分离变量,那么就必须将我们的讨论对二维进行推广.这种推广并不难,这里我们不再讨论.

2.7.2 算符分析法

算符分析法基于几种基本运算,每种运算用一个"算符"表示.大多数算符带有依赖于所分析的光学系统的几何条件参数,参数放在算符后面的方括号[]里.算符所作用的量则放在花括号{}里.

1. 四个基本算符的引入

(1)"乘一个二次相位因子"算符

该算符用Q表示,其定义为

$$Q[c]\{U(x)\}=\exp\left(\mathrm{j}\frac{k}{2}cx^2\right)U(x) \tag{2.7.1}$$

其中$k=2\pi/\lambda$,c的量纲是长度的倒数.$Q[c]$的逆算符是$Q[-c]$.

(2)"常数标量"算符

该算符用符号V表示,其实质类似于坐标变换运算,其定义为

$$V[b]\{U(x)\}=|b|^{1/2}U(bx) \tag{2.7.2}$$

其中b是无量纲量.$V[b]$的逆是$V[1/b]$.

(3)"傅里叶变换"算符

这个算符用通常的符号F表示,其定义为

$$F\{U(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty}U(x)\exp(-\mathrm{j}2\pi\xi x)\mathrm{d}x \tag{2.7.3}$$

逆傅里叶变换算符的定义如常,即改变指数的符号.

(4)"自由空间传播"算符

该算符用R表示,其定义为

$$R[d]\{U(x_1)\}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{j}\lambda d}}\int_{-\infty}^{\infty}U(x_1)\exp(\mathrm{j}(k/2d)(x_2-x_1)^2)\mathrm{d}x_1 \tag{2.7.4}$$

其中d是传播距离,x_2为传播后所在的坐标.$R[d]$的逆为$R[-d]$.

2. 算符的基本性质与相互关系

这四个算符已足以分析大多数光学系统.它们的用处来自它们的一些简单性质和它们之间的某些关系.很快就将看到,这些性质和关系使繁复的算符串实行简化.

(1)一些简单而有用的性质

$$V[t_2]V[t_1]=V[t_2t_1] \tag{2.7.5}$$

$$FV[t]=V\left[\frac{1}{t}\right]F \tag{2.7.6}$$

$$FF=V[-1] \tag{2.7.7}$$

$$Q[c_2]Q[c_1]=Q[c_2+c_1] \tag{2.7.8}$$

$$R[d]=F^{-1}Q[-\lambda^2 d]F \tag{2.7.9}$$

$$Q[c]V[t]=V[t]Q\left[\frac{c}{t^2}\right] \tag{2.7.10}$$

根据算符的定义,以上几个性质很容易得到证明.

(2)较复杂相互关系式一

$$R[d]=Q\left[\frac{1}{d}\right]V\left[\frac{1}{\lambda d}\right]FQ\left[\frac{1}{d}\right] \tag{2.7.11}$$

它陈述的是,菲涅耳衍射操作等价于先乘一个二次相位指数函数,再做一个适当标度的傅里叶变换,然后再乘一个二次相位指数函数.

(3)较复杂相互关系式二

$$V\left[\frac{1}{\lambda f}\right]F=R[f]Q\left[-\frac{1}{f}\right]R[f] \tag{2.7.12}$$

它陈述的是,一块正透明镜的前焦面上的光场和后焦面上的光场通过一个适当标度的傅里叶变换相联系,而不带二次相位指数函数的相乘因子.

表2.7.1中总结了算符之间的许多有用的关系式.有了这些关系式,下面就可以应用这些算符于一些简单的光学系统分析了.

表2.7.1 算符之间的关系

	V	F	Q	R
V	$V[t_2]V[t_1]=V[t_2t_1]$	$V[t]F=FV\left[\frac{1}{t}\right]$	$V[t]Q[c]=Q[t^2c]V[t]$	$V[t]R[d]=R[t^{-2}d]V[t]$
F	$FV[t]=V\left[\frac{1}{t}\right]F$	$FF=V[-1]$	$FQ[c]=R\left[-\frac{c}{\lambda^2}\right]F$	$FR[d]=Q[-\lambda^2 d]F$
Q	$Q[c]V[t]=V[t]Q\left[\frac{c}{t^2}\right]$	$Q[c]F=FR\left[-\frac{c}{\lambda^2}\right]$	$Q[c_1]Q[c_2]=Q[c_1+c_2]$	$Q[c]R[d]=R[(d^{-1}+c)^{-1}]\cdot V[1+cd]\cdot Q[(c^{-1}+d)^{-1}]$
R	$R[d]V[t]=V[t]R[t^2d]$	$R[d]F=FQ[-\lambda^2 d]$	$R[d]Q[c]=Q[(c^{-1}+d)^{-1}]\cdot V[(1+cd)^{-1}]\cdot R[(d^{-1}+c)^{-1}]$	$R[d_2]R[d_1]=R[d_2+d_1]$

2.7.3 算符分析法的应用举例

下面通过一个实例来加深算符分析方法的理解.

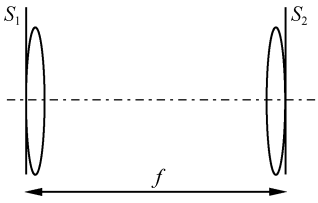


图 2.7.1 双透镜系统

例 2.7.1 如图 2.7.1 所示,是一个由两块焦距同为 f 的球面透镜组成的相干光学系统,试分析紧贴透镜 L_1 左方的平面 S_1 上的复场分布与紧贴透镜 L_2 右方的平面 S_2 上的复场分布的关系.

解:首先用一个系统算符 S 表示这一关系.对光波的第一次操作发生在光波穿过 L_1 时,此时完成了一次相位变换,这一变换即可用算符 $Q\left[-1/f\right]$ 表示.第二步操作是在空间传播一段距离 f 后到达透镜 L_2 左方,可由算符 $R\left[f\right]$ 表示.第三步操作是通过透镜 L_2 左方到达透镜 L_2 的右方平面 S_2,又完成了一次相位变换,可由算符 $Q\left[-1/f\right]$ 表示.于是整个一系列操作由下面的算符串表示:

$$S=Q\left[-\frac{1}{f}\right]R\left[f\right]Q\left[-\frac{1}{f}\right]$$

将(2.7.11)式应用到上式中 $R\left[f\right]$,这一组算符简化过程如下:

$$\begin{aligned}S&=Q\left[-\frac{1}{f}\right]R\left[f\right]Q\left[-\frac{1}{f}\right]=Q\left[-\frac{1}{f}\right]Q\left[\frac{1}{f}\right]V\left[\frac{1}{\lambda f}\right]FQ\left[\frac{1}{f}\right]Q\left[-\frac{1}{f}\right]\\&=V\left[\frac{1}{\lambda f}\right]F\end{aligned}$$

其中用了关系式

$$Q\left[-\frac{1}{f}\right]Q\left[\frac{1}{f}\right]=Q\left[\frac{1}{f}\right]Q\left[-\frac{1}{f}\right]=1 \tag{2.7.13}$$

简化结果表明,这个由两块透镜相隔它们共同的焦距 f 所组成的系统实质上完成了一次坐标变换的光学傅里叶变换,结果中不再带有二次相位指数函数.这个结果用输入场和输出场明显地表述就是

$$\boldsymbol{U}_f(\xi)=\frac{1}{\sqrt{\lambda f}}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{U}_0(x)\exp\left(-\mathrm{j}\frac{k}{f}x\xi\right)\mathrm{d}x$$

其中,$\boldsymbol{U}_0$ 是紧贴 L_1 左边的场,$\boldsymbol{U}_f$ 是紧贴 L_2 右边的场.

算符分析方法确实具有显著优点,它给了我们一种途径,以处理复杂相干系统的计算,这是其他方法无法比拟的.但这种方法也有它的缺点,算符分析法较抽象,并且要非常熟悉表 2.7.1 中的算符关系,需要有一个经验积累的过程.

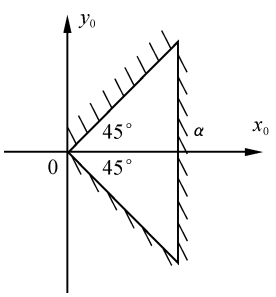
习 题

2.1 单位振幅的单色平面波垂直入射到一半径为 a 的圆形孔径上,试求菲涅耳衍射图样在轴上的强度分布.

2.2 焦距 $f=500\mathrm{mm}$,直径 $D=50\mathrm{mm}$ 的透镜将波长 $\lambda=632.8\mathrm{nm}$ 的激光束聚焦,激光束的截面直径 $D_1=20\mathrm{mm}$.试求透镜焦点处的光强是激光束光强的多少倍?

2.3 波长 λ 的单位振幅平面波垂直入射到一孔径平面上,在孔径平面上有一个足够大的模板,其振幅透过率为 $\boldsymbol{t}(x_0)=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{2\pi}{3\lambda}x_0\right)$.求透射场的角谱.

2.4 如图题 2.4 所示的等腰三角形孔径放在透镜的前焦面上,以单位振幅的单色平面波垂直照明,试求透镜后焦面上的夫琅禾费衍射图样的复振幅分布.



图题 2.4

2.5 在夫琅禾费衍射中,只要孔径上的场没有相位变化,则不论孔径形状如何,夫琅禾费衍射图样都有一个对称中心,试证明之.

2.6 在题 2.5 中,若孔径对于某一直线是对称的,试证明衍射图样将对于通过原点与该直线平行和垂直的两条直线对称.

2.7 在题 2.5 中,若开孔具有对称中心,试证明衍射图样将出现条纹花样.

2.8　证明阵列定理.设衍射屏上有 N 个形状和方位均相同的全等形开孔,在每个孔内取一个位置相应的点代表孔径位置,则其夫琅禾费衍射场是下述两个因子的乘积:(1)置于原点的一个孔径的夫琅禾费衍射(衍射屏的原点处不一定有开孔);(2)N 个点源在观察面上的干涉.

2.9　衍射屏是 $M\times N$ 个小圆孔构成的方形阵列,它们的半径都是 a,其中心在 x_0 方向间距为 p,在 y_0 方向间距为 q,把它放在焦距为 f 的凸透镜的前焦面上,采用单位振幅的平面波垂直照明衍射屏,求后焦面上夫琅禾费衍射的强度分布.

2.10　一个衍射屏具有下述圆对称振幅透过率函数

$$t(r)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\ ar^2\right)\operatorname{circ}\left(\frac{r}{a}\right)$$

(1)这个屏的作用在什么方面像一个透镜?

(2)给出此屏的焦距表达式.

(3)什么特性会严重地限制这种屏用做成像装置(特别对于彩色物体)?

第 3 章　光学成像系统的传递函数

光学成像系统是信息传递系统.从物面到像面,输出图像的质量完全取决于光学系统的传递特性.几何光学是在空域研究光学系统的成像规律.关于成像质量的评价,主要有星点法和分辨率法.星点法指检验点光源经过光学系统所产生的像斑,由于像差、玻璃材料不均匀以及加工和装配缺陷等使像斑不规则.很难对它做出定量计算和测量,检验者的主观判断将带入检验结果中.分辨率法虽然能定量评价系统分辨景物细节的能力,但并不能对可分辨范围内的像质好坏给予全面评价.

与空域分析相平行,还可以在频域中分析光学系统的成像质量.我们知道,光学系统是线性系统,而且在一定条件下还是线性空不变系统.因而可以用线性系统理论来研究它的性能.把输入信息分解成各种空间频率分量,然后考察这些空间频率分量在通过系统的传递过程中,丢失、衰减、相位移动等变化,也就是研究系统的空间频率传递特性即传递函数.这显然是一种全面评价光学系统成像质量的方法.传递函数可由光学系统的设计数据计算得出.虽然计算传递函数的步骤比较麻烦,检查传递函数的仪器也比较复杂.但是,大容量高速度电子计算机的出现以及高精度光电测试技术的发展,使光学传递函数的计算和测量日趋完善,并逐渐得到实际应用.

3.1　相干照明衍射受限系统的点扩散函数

任何平面物场分布都可以看作是无数小面元的组合,而每个小面元都可看作一个加权的 δ 函数.对于一个透镜或一个成像系统,如果能清楚地知道物平面上任一小面元的光振动通过成像系统后,在像平面上所造成的光振动分布情况,通过线性叠加,原则上便能求得任何物面光场分布通过系统后所形成的像面光场分布,进而求得像面强度分布.这就是相干照明下的成像过程,关键是求出任意小面元的光振动所对应的像场分布.当该面元的光振动为单位脉冲即 δ 函数时,这个像场分布函数叫做点扩散函数或脉冲响应.通常用 $h(x_o, y_o; x_i, y_i)$ 表示,它表示物平面上 (x_o, y_o) 点的单位脉冲通过成像系统后在像平面上 (x_i, y_i) 点产生的光场分布.一般说来,这既是 (x_o, y_o) 的函数也是 (x_i, y_i) 的函数.

3.1.1　透镜的点扩散函数

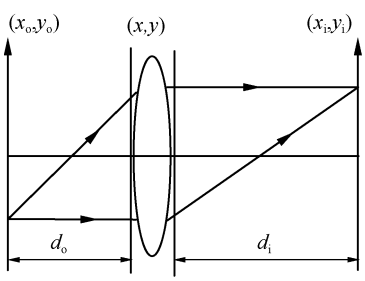


图 3.1.1　推导透镜点扩散函数简图

我们研究在相干照明下,一个消像差的正薄透镜对透明物成实像的情况.如图 3.1.1 所示,物体放在透镜前距离为 d_o 的输入平面 $x_o y_o$ 上,在透镜后距离在 d_i 的共轭面 $x_i y_i$ 上观察成像情况.假定紧靠物体后的复振幅分布为 $\boldsymbol{U}_o(x_o', y_o')$,$(x_o', y_o')$ 点处发出的单位脉冲为 $\delta(x_o - x_o', y_o - y_o')$,沿光波传播方向,逐面计算三个特定平面上的场分布:紧靠透镜前后的两个平面上的场分布 $\mathrm{d}\boldsymbol{U}_1$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{U}_1'$,观察平面上的场分布 $\boldsymbol{h}$,这样就可最终导出一个点源的输入输出关系.

利用菲涅耳公式(2.5.1)有

$$d\boldsymbol{U}_1(x_o',y_o';x,y)=\frac{\exp(jkd_o)}{j\lambda d_o}\iint_{-\infty}^{\infty}\delta(x_o-x_o',y_o-y_o')\exp\left[jk\frac{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}{2d_o}\right]dx_o\,dy_o$$

$$=\frac{\exp(jkd_o)}{j\lambda d_o}\exp\left[jk\frac{(x-x_o')^2+(y-y_o')^2}{2d_o}\right]$$

由于(x_o',y_o')点是任意的,为书写方便,略去常数相位因子后,上式可写成

$$d\boldsymbol{U}_1(x_o,y_o;x,y)=\frac{1}{j\lambda d_o}\exp\left[jk\frac{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}{2d_o}\right]$$

此波通过孔径函数为 $P(x,y)$,焦距为 f 的透镜后,复振幅 $d\boldsymbol{U}_1'(x_o,y_o;x,y)$为

$$d\boldsymbol{U}_1'(x_o,y_o;x,y)=P(x,y)\exp\left(-jk\frac{x^2+y^2}{2f}\right)d\boldsymbol{U}_1(x_o,y_o;x,y)$$

由于透镜后表面到观察面,光场的传播满足菲涅耳衍射,于是物平面上的单位脉冲在观察面上引起的复振幅分布即点扩散函数可写作

$$\boldsymbol{h}(x_o,y_o;x_i,y_i)=\frac{\exp(jkd_1)}{j\lambda d_i}\iint_{-\infty}^{\infty}d\boldsymbol{U}_1'(x_o,y_o;x,y)\exp\left[jk\frac{(x_i-x)^2+(y_i-y)^2}{2d_i}\right]dx\,dy$$

将 $d\boldsymbol{U}_1'$的表达式代入并略去包括-1在内的常数相位因子得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}(x_o,y_o;x_i,y_i)=&\frac{1}{\lambda^2 d_o d_i}\exp\left[jk\frac{x_i^2+y_i^2}{2d_i}\right]\exp\left[jk\frac{x_o^2+y_o^2}{2d_o}\right]\\&\times\iint_{-\infty}^{\infty}P(x,y)\exp\left[j\frac{k}{2}\left(\frac{1}{d_i}+\frac{1}{d_o}-\frac{1}{f}\right)(x^2+y^2)\right]\\&\times\exp\left\{-jk\left[\left(\frac{x_i}{d_i}+\frac{x_o}{d_o}\right)x+\left(\frac{y_i}{d_i}+\frac{y_o}{d_o}\right)y\right]\right\}dx\,dy\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

由于物像平面的共轭关系满足高斯公式,故 $1/d_i+1/d_o=1/f$.于是点扩散函数简化成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}(x_o,y_o;x_i,y_i)=&\frac{1}{\lambda^2 d_o d_i}\exp\left[jk\frac{x_o^2+y_o^2}{2d_o}\right]\exp\left[jk\frac{x_i^2+y_i^2}{2d_i}\right]\\&\times\iint_{-\infty}^{\infty}P(x,y)\exp\left\{-jk\left[\left(\frac{x_i}{d_i}+\frac{x_o}{d_o}\right)x+\left(\frac{y_i}{d_i}+\frac{y_o}{d_o}\right)y\right]\right\}dx\,dy\end{aligned}\tag{3.1.2}$$

点扩散函数的表达式(3.1.2)式比较复杂,现在我们来研究怎样将它简化.积分号前的相位因子 $\exp[jk(x_i^2+y_i^2)/2d_i]$不影响最终探测的强度分布,可以略去.但是对相位因子 $\exp[jk(x_o^2+y_o^2)/2d_o]$的处理就不那么简单,因为求物面上各点对像面光场的贡献时,这个因子要参与积分.

当透镜的孔径比较大时,物面上每一物点产生的脉冲响应是一个很小的像斑,那么能够对于像面上(x_i,y_i)点光场产生有意义贡献的,必定是物面上以几何成像所对应的以物点为中心的微小区域.在这个区域内可近似地认为 x_o,y_o 不变,其值与(x_i,y_i)点的共轭物坐标 $x_o=x_i/M$,$y_o=y_i/M$ 相同,即可作以下近似:

$$\exp\left[j\frac{k}{2d_o}(x_o^2+y_o^2)\right]\approx\exp\left[j\frac{k}{2d_o}\left(\frac{x_i^2+y_i^2}{M^2}\right)\right]\tag{3.1.3}$$

式中,$M=-d_i/d_o$ 是成像透镜的横向放大率,通过近似后的相位因子不再依赖于(x_o,y_o),因此不会影响 x_iy_i 平面上的强度分布,于是也可以略去.这样一来,点扩散函数的形式为

$$\boldsymbol{h}(x_o,y_o;x_i,y_i)=\frac{1}{\lambda^2 d_o d_i}\iint_{-\infty}^{\infty}P(x,y)\exp\left\{-jk\left[\left(\frac{x_i}{d_i}+\frac{x_o}{d_o}\right)x+\left(\frac{y_i}{d_i}+\frac{y_o}{d_o}\right)y\right]\right\}dx\,dy\tag{3.1.4}$$

将 $M=-d_i/d_o$ 代入,则

$$\boldsymbol{h}(x_o,y_o;x_i,y_i)=\frac{1}{\lambda^2 d_o d_i}\iint_{-\infty}^{\infty}P(x,y)\exp\left\{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda d_i}[(x_i-Mx_o)x+(y_i-My_o)y]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\lambda^2 d_o d_i}\iint_{-\infty}^{\infty}P(x,y)\exp\left\{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda d_i}[(x_i-\tilde{x}_o)x+(y_i-\tilde{y}_o)y]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3.1.5}$$

式中,$\tilde{x}_o=Mx_o$,$\tilde{y}_o=My_o$,于是 $\boldsymbol{h}(x_o,y_o;x_i,y_i)$可写成 $\boldsymbol{h}(x_i-\tilde{x}_o,y_i-\tilde{y}_o)$,即

$$\boldsymbol{h}(x_i-\tilde{x}_o,y_i-\tilde{y}_o)=\frac{1}{\lambda^2 d_o d_i}\iint_{-\infty}^{\infty}P(x,y)\exp\left\{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda d_i}[(x_i-\tilde{x}_o)x+(y_i-\tilde{y}_o)y]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3.1.6}$$

这说明,在近轴成像条件下,以(3.1.6)式所表征的透镜成像系统是空不变的.而且,透镜的脉冲响应就等于透镜孔径的夫琅禾费衍射图样,其中心位于理想像点$(\tilde{x}_o,\tilde{y}_o)$处,透镜孔径的衍射作用明显与否,是由孔径线度相对于波长 λ 和像距 d_i 的比例决定的,为此对孔径平面上的坐标 x,y 做如下变换,令

$$\tilde{x}=\frac{x}{\lambda d_i},\quad \tilde{y}=\frac{y}{\lambda d_i}$$

将 $\tilde{x}$,$\tilde{y}$ 代入(3.1.6)式得

$$\boldsymbol{h}(x_i-\tilde{x}_o,y_i-\tilde{y}_o)=|M|\iint_{-\infty}^{\infty}P(\lambda d_i\tilde{x},\lambda d_i\tilde{y})\exp\{-\mathrm{j}2\pi[(x_i-\tilde{x}_o)\tilde{x}+(y_i-\tilde{y}_o)\tilde{y}]\}\mathrm{d}\tilde{x}\mathrm{d}\tilde{y} \tag{3.1.7}$$

这就是透镜的点扩散函数表达式,式中 $|M|=d_i/d_o$.

当孔径大小比 λd_i 大得多时,在 $\tilde{x}$,$\tilde{y}$ 坐标中,在无限大的区域内 $P(\lambda d_i\tilde{x},\lambda d_i\tilde{y})$的值均为 1.这样一来,

$$\boldsymbol{h}(x_i-\tilde{x}_o,y_i-\tilde{y}_o)=|M|\iint_{-\infty}^{\infty}\exp\{-\mathrm{j}2\pi[(x_i-\tilde{x}_o)\tilde{x}+(y_i-\tilde{y}_o)\tilde{y}]\}\mathrm{d}\tilde{x}\mathrm{d}\tilde{y}$$

$$=|M|\delta(x_i-\tilde{x}_o,y_i-\tilde{y}_o) \tag{3.1.8}$$

这时物点成像为一个像点,即理想成像.

3.1.2 衍射受限系统的点扩散函数

所谓衍射受限系统,是指不考虑系统的几何像差,仅仅考虑系统的衍射限制.如果忽略衍射效应的话,点物通过系统后形成一个理想的点像.一般的衍射受限系统可由若干共轴球面透镜组成,这些透镜既可以是正透镜,也可以是负透镜,而且透镜也不一定是薄的.系统对光束大小的限制是由系统的孔径光阑决定的,也就是说在考察衍射受限系统时,实际上主要是考察孔径光阑的衍射作用.孔径光阑在物空间所成的像称为入射光瞳,简称入瞳;孔径光阑在像空间所成的像称为出射光瞳,简称出瞳.当轴上物点的位置确定后,孔径光阑、入瞳、出瞳由系统元件参数及相对位置决定.对整个光学系统而言,入瞳和出瞳保持物像共轭关系.由入射光瞳限制的物方光束必定能全部通过系统,成为被出射光瞳所限制的像方光束.下面我们为这样的系统建立一个普适模型.

如图 3.1.2 所示,任意成像系统都可以分成三部分:从物平面到入瞳平面为第一部分;从入瞳平面到出瞳平面为第二部分;从出瞳平面到像平面为第三部分.光波在一、三两部分空间的传播可按菲涅耳衍射处理.对于第二部分的透镜系统,在等晕条件下,可把它做一个“黑箱”来处理,这个黑箱的两个边端分别是入瞳和出瞳.只要能够确定这黑箱的两个边端的性质,整个透镜组的性质便可确定下来,而不必深究其内部结构.假定在入瞳和出瞳之间的光的传播可用几何光学来

描述,所谓边端性质是指成像光波在入瞳和出瞳平面上的物理性质.

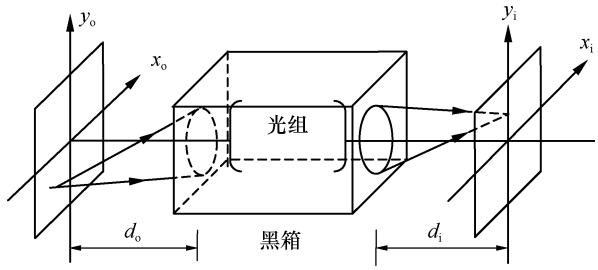


图 3.1.2　成像系统的普通模型

为了确定系统的脉冲响应,需要知道这个黑箱对点光源发出的球面波的变换作用,即当入瞳平面上输入发散球面波时,出瞳平面透射的波场特性.对于实际光组,这一边端性质千差万别,但总可以分成两类:衍射受限系统和有像差的系统.

当像差很小或者系统的孔径和视场都不大,实际光学系统就可近似看做衍射受限系统.这时的边端性质就比较简单,物面上任一点光源发出的发散球面波投射到入瞳上,被光组变换为出瞳上的会聚球面波.

有像差系统的边端条件是,点光源发出的发散球面波投射到入瞳上,出瞳处的透射波场明显偏离理想球面波,偏离程度由波像差决定.

阿贝认为衍射效应是由于有限的入瞳大小引起的,1896 年瑞利提出衍射效应来自有限大小的出瞳.由于一个光瞳只不过是另一个光瞳的几何像,这两种看法是等效的.衍射效应可以归结为入瞳或出瞳对于成像光波的限制.本书采用瑞利的说法.

由物点发出的球面波,在像方得到的将是一个被出射光瞳所限制的球面波,这个球面波是以理想像点为中心的.由于出射光瞳的限制作用,在像平面上将产生以理想像点为中心的出瞳孔径的夫琅禾费衍射图样.于是可以写出物面上以(x_o, y_o)点的单位脉冲通过衍射受限系统后在与物面共轭的像面上的复振幅分布,即点扩散函数为

$$\boldsymbol{h}(x_o, y_o; x_i, y_i) = \boldsymbol{K}\iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y)\exp\left\{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda d_i}[(x_i - Mx_o)x + (y_i - My_o)y]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3.1.9}$$

式中,$\boldsymbol{K}$是与 x_o, y_o 和 x_i, y_i 无关的复常数;$P(x, y)$是出瞳函数(常称光瞳函数),在光瞳内其值为 1,在光瞳外其值为零;d_i 是光瞳面到像面的距离,已不是通常意义下的像距.还要说明,在推导(3.1.9)式时,同样略去了关于 x_i, y_i 和 x_o, y_o 的二次相位因子,(3.1.9)式和(3.1.4)式一样是有条件的.(3.1.9)式表明,如果略去积分号前的系统,脉冲响应就是光瞳函数的傅里叶变换.即衍射受限系统的脉冲响应是光学系统出瞳的夫琅禾费衍射图样.其中心在几何光学的理想像点(Mx_o, My_o)处.

同样对物平面上的坐标 x_o, y_o 和光瞳平面上的坐标 x, y 做坐标变换,令

$$\tilde{x}_o = Mx_o, \tilde{y}_o = My_o; \qquad \tilde{x} = \frac{x}{\lambda d_i}, \tilde{y} = \frac{y}{\lambda d_i}$$

得到

$$\boldsymbol{h}(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o) = \boldsymbol{K}\lambda^2 d_i^2\iint_{-\infty}^{\infty} P(\lambda d_i\tilde{x}, \lambda d_i\tilde{y})\exp\{-\mathrm{j}2\pi[(x_i - \tilde{x}_o)\tilde{x} + (y_i - \tilde{y}_o)\tilde{y}]\}\mathrm{d}\tilde{x}\mathrm{d}\tilde{y} \tag{3.1.10}$$

如果光瞳相对 λd_i 足够大时,在 $\tilde{x}, \tilde{y}$ 坐标中,在无限大区域内 $p(\lambda d_i\tilde{x}, \lambda d_i\tilde{y})$都为 1,这样

(3.1.10)式变成

$$\boldsymbol{h}(x_i-\tilde{x}_o,y_i-\tilde{y}_o)=\boldsymbol{K}\lambda^2 d_i^2\,\delta(x_i-\tilde{x}_o,y_i-\tilde{y}_o) \tag{3.1.11}$$

上式表明,当可以忽略光瞳的衍射时,(x_o,y_o)点的脉冲通过衍射受限系统后在像面上得到的仍然是点脉冲,其位置为 $x_i=\tilde{x}_o=Mx_o$,$y_i=\tilde{y}_o=My_o$,这便是几何光学理想成像情况.

3.2 相干照明下衍射受限系统的成像规律

现在的任务是确定某一给定的物分布通过衍射受限系统后,在像平面上的像分布,包括复振幅分布和光强分布.一个确定的物分布总可以很方便地分解成无数 δ 函数的线性组合,而每个 δ 函数可按(3.1.10)式求出其响应.然而,在像平面上将这些无数个脉冲响应合成的结果是和物面照明情况有关的,如果物面上某两个脉冲是相干的,则这两个脉冲在像平面上的响应便是相干叠加;若这两个脉冲是非相干的,则这两个脉冲在像平面上的响应将是非相干叠加,即强度叠加.所以衍射受限系统的成像特性,对于相干照明和非相干照明是不同的.本节先讨论相干照明情况.非相干照明情况留在 3.4 节中去讨论.

设物的复振幅分布为 $\boldsymbol{U}_o(x_o,y_o)$,在相干光照明下,物面上各点是完全相干的.按(1.6.7)式,将物分布用 δ 函数表达为

$$\boldsymbol{U}_o(x_o,y_o)=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{U}_o(\alpha,\beta)\delta(x_o-\alpha,y_o-\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$

物面上每一个脉冲通过系统后都形成一个复振幅分布,所有这些分布的相干叠加,便是物通过系统后所得到的像的复振幅分布 $\boldsymbol{U}_i(x_i,y_i)$,即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_i(x_i,y_i)&=L\{U_o(x_o,y_o)\}\\&=L\left\{\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{U}_o(\alpha,\beta)\delta(x_o-\alpha,y_o-\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\right\}\\&=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{U}_o(\alpha,\beta)\,L\{\delta(x_o-\alpha,y_o-\beta)\}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\\&=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{U}_o(\alpha,\beta)\boldsymbol{h}(x_i-M\alpha,y_i-M\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\\&=\frac{1}{M^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{U}_o\left(\frac{\tilde{x}_o}{M},\frac{\tilde{y}_o}{M}\right)\boldsymbol{h}(x_i-\tilde{x}_o,y_i-\tilde{y}_o)\mathrm{d}\tilde{x}_o\mathrm{d}\tilde{y}_o\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

式中,$\tilde{x}_o=Mx_o$,$\tilde{y}_o=My_o$,$\boldsymbol{h}(x_i-\tilde{x}_o,y_i-\tilde{y}_o)$由(3.1.10)式给出.

为了说明(3.2.1)式的物理意义,先讨论 $\boldsymbol{U}_o(\tilde{x}_o/M,\tilde{y}_o/M)$在 $\tilde{x}_o,\tilde{y}_o$ 坐标中的意义.我们知道,(3.1.11)式代表理想成像的脉冲响应,如果将它代入(3.2.1)式中所得到的像$\boldsymbol{U}_i(x_i,y_i)$应该是理想成像的像分布,用 $\boldsymbol{U}_g(x_i,y_i)$表示即得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_g(x_i,y_i)&=\frac{1}{M^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{U}_o\left(\frac{\tilde{x}_o}{M},\frac{\tilde{y}_o}{M}\right)\boldsymbol{K}\lambda^2 d_i^2\,\delta(x_i-\tilde{x}_o,y_i-\tilde{y}_o)\mathrm{d}\tilde{x}_o\mathrm{d}\tilde{y}_o\\&=\frac{\boldsymbol{K}\lambda^2 d_i^2}{M^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{U}_o\left(\frac{\tilde{x}_o}{M},\frac{\tilde{y}_o}{M}\right)\delta(x_i-\tilde{x}_o,y_i-\tilde{y}_o)\mathrm{d}\tilde{x}_o\mathrm{d}\tilde{y}_o\\&=\frac{\boldsymbol{K}\lambda^2 d_i^2}{M^2}\boldsymbol{U}_o\left(\frac{x_i}{M},\frac{y_i}{M}\right)\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

理想像 $\boldsymbol{U}_g$ 的分布形式与物 $\boldsymbol{U}_o$ 的分布形式是一样的,只是在 x_i 和 y_i 方向放大了 M 倍.$U_o(x_o,y_o)$与 $\boldsymbol{U}_o\left(\frac{\tilde{x}_o}{M},\frac{\tilde{y}_o}{M}\right)$的图形是一样的,只是由于 $\tilde{x}_o=Mx_o$,$\tilde{y}_o=My_o$,所以该图在 $\tilde{x}_o,\tilde{y}_o$ 坐标系中的

读数比在 $x_o y_o$ 坐标中放大 M 倍.所以 $\boldsymbol{U}_o\left(\frac{\tilde{x}_o}{M},\frac{\tilde{y}_o}{M}\right)$ 在 $\tilde{x}_o,\tilde{y}_o$ 坐标中与 $\boldsymbol{U}_g(x_i,y_i)$是一样的,因此把 $\boldsymbol{U}_o\left(\frac{\tilde{x}_o}{M},\frac{\tilde{y}_o}{M}\right)$ 叫做 $\boldsymbol{U}_o(x_o,y_o)$的理想像,令

$$\tilde{\boldsymbol{h}}(x_i-\tilde{x}_o,y_i-\tilde{y}_o)=\frac{1}{\boldsymbol{K}\lambda^2 d_i^2}\boldsymbol{h}(x_i-\tilde{x}_o,y_i-\tilde{y}_o) \tag{3.2.3}$$

将上式代入(3.2.1)式得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_i(x_i,y_i)&=\frac{\boldsymbol{K}\lambda^2 d_i^2}{M^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{U}_o\left(\frac{\tilde{x}_o}{M},\frac{\tilde{y}_o}{M}\right)\tilde{\boldsymbol{h}}(x_i-\tilde{x}_o,y_i-\tilde{y}_o)\mathrm{d}\tilde{x}_o\mathrm{d}\tilde{y}_o\\&=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{U}_o(\tilde{x}_o,\tilde{y}_o)\tilde{\boldsymbol{h}}(x_i-\tilde{x}_o,y_i-\tilde{y}_o)\mathrm{d}\tilde{x}_o\mathrm{d}\tilde{y}_o\\&=\boldsymbol{U}_g(x_i,y_i)*\tilde{\boldsymbol{h}}(x_i,y_i)\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

由(3.2.4)式可以看出(3.2.1)式的物理意义是:物 $\boldsymbol{U}_o(x_o,y_o)$通过衍射受限系统后的像 $\boldsymbol{U}_i(x_i,y_i)$是 $\boldsymbol{U}_o(x_o,y_o)$的理想像 $\boldsymbol{U}_g(x_i,y_i)$和点扩散函数 $\tilde{\boldsymbol{h}}(x_i,y_i)$的卷积.这就表明,不仅对于薄的单透镜系统,而且对于更普遍的情形,衍射受限成像系统仍可看成线性空不变系统.由 $\boldsymbol{U}_i(x_i,y_i)$可以得到像的强度分布为

$$\boldsymbol{I}_i(x_i,y_i)=|\boldsymbol{U}_i(x_i,y_i)|^2 \tag{3.2.5}$$

如果将(3.1.10)式代入(3.2.3)式得

$$\begin{aligned}&\tilde{\boldsymbol{h}}(x_i-\tilde{x}_o,y_i-\tilde{y}_o)\\&=\frac{1}{\boldsymbol{K}\lambda^2 d_i^2}\boldsymbol{K}\lambda^2 d_i^2\iint_{-\infty}^{\infty}P(\lambda d_i\tilde{x},\lambda d_i\tilde{y})\exp\{-\mathrm{j}2\pi[(x_i-\tilde{x}_o)\tilde{x}+(y_i-\tilde{y}_o)\tilde{y}]\}\mathrm{d}\tilde{x}\mathrm{d}\tilde{y}\\&=\iint_{-\infty}^{\infty}P(\lambda d_i\tilde{x},\lambda d_i\tilde{y})\exp\{-\mathrm{j}2\pi[(x_i-\tilde{x}_o)\tilde{x}+(y_i-\tilde{y}_o)\tilde{y}]\}\mathrm{d}\tilde{x}\mathrm{d}\tilde{y}\\&=\boldsymbol{F}\{P(\lambda d_i\tilde{x},\lambda d_i\tilde{y})\}\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

这就是衍射受限成像系统的点扩散函数与光瞳函数的关系.由于是空不变的,我们可以用 $\tilde{x}_o=\tilde{y}_o=0$ 的脉冲响应表示成像系统的特性,即

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{h}}(x_i,y_i)&=\iint_{-\infty}^{\infty}P(\lambda d_i\tilde{x},\lambda d_i\tilde{y})\exp\{-\mathrm{j}2\pi[x_i\tilde{x}+y_i\tilde{y}]\}\mathrm{d}\tilde{x}\mathrm{d}\tilde{y}\\&=\boldsymbol{F}\{P(\lambda d_i\tilde{x},\lambda d_i\tilde{y})\}\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

由此可见,在相干照明条件下,对于衍射受限成像系统,表征成像系统特征的点扩散函数 $\tilde{\boldsymbol{h}}$,仅决定于系统的光瞳函数 P.可见,光瞳函数对于衍射受限系统成像的重要.

3.3 衍射受限系统的相干传递函数

在相干照明下的衍射受限系统,对复振幅的传递是线性空不变的,(3.2.4)式是物像关系在空域中的表达式.系统的成像特性在空域中由点扩散函数 $\tilde{\boldsymbol{h}}(x_i,y_i)$表征.空不变系统的变换特性在频域中来描写更方便.在频域中用 $\tilde{\boldsymbol{h}}(x_i,y_i)$的频谱函数 $\boldsymbol{H}(\xi,\eta)$来描述系统的成像特性.$\boldsymbol{H}(\xi,\eta)$称为衍射受限系统的相干传递函数(CTF).

3.3.1 相干传递函数

相干成像系统的物像关系由(3.2.4)式中的卷积积分描述,即

$$\boldsymbol{U}_i(x_i,y_i)=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{U}_g(\tilde{x}_o,\tilde{y}_o)\tilde{\boldsymbol{h}}(x_i-\tilde{x}_o,y_i-\tilde{y}_o)\mathrm{d}\tilde{x}_o\mathrm{d}\tilde{y}_o \tag{3.3.1}$$

式中，$\boldsymbol{U}_g(\widetilde{x}_o,\widetilde{y}_o)$是几何光学理想像的复振幅分布，$\tilde{\boldsymbol{h}}$是系统的脉冲响应.卷积积分是把物点看作基元，像点是物点产生的衍射图样的相干叠加.

也可以从频域来分析成像过程.选择复指数函数作为物的基元分布，考察系统对各种频率成分的传递特性.定义系统的输入频谱 $\boldsymbol{G}_{gc}(\xi,\eta)$和输出频谱 $\boldsymbol{G}_c(\xi,\eta)$分别为

$$\boldsymbol{G}_{gc}(\xi,\eta)=F\{\boldsymbol{U}_g(\widetilde{x}_o,\widetilde{y}_o)\} \tag{3.3.2}$$

$$\boldsymbol{G}_c(\xi,\eta)=F\{\boldsymbol{U}_i(x_i,y_i)\} \tag{3.3.3}$$

相干传递函数(CTF)为

$$\boldsymbol{H}(\xi,\eta)=F\{\tilde{\boldsymbol{h}}(x_i,y_i)\} \tag{3.3.4}$$

在衍射受限系统中，$\tilde{\boldsymbol{h}}$是由光瞳函数 $P(\lambda d_i\widetilde{x},\lambda d_i\widetilde{y})$按(3.2.7)式决定的，将(3.2.7)式代入(3.3.4)式得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(\xi,\eta)&=F\{\tilde{\boldsymbol{h}}(x_i,y_i)\}=F\{F[P(\lambda d_i\widetilde{x},\lambda d_i\widetilde{y})]\}\\&=P(-\lambda d_i\xi,-\lambda d_i\eta)\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

上式指出，相干传递函数 $\boldsymbol{H}(\xi,\eta)$等于光瞳函数，仅在空域坐标 x,y 和频域坐标 ξ,η之间存在着一定的坐标缩放关系.

实际上光瞳函数总是取 1 和 0 两个值，所以相干传递函数也是如此，只有 1 和 0 两个值.若由 ξ,η决定的 $x=-\lambda d_i\xi,y=-\lambda d_i\eta$的值在光瞳内，则这种频率的指数基元按原样在像分布中出现，既没有振幅衰减也没有相位变化，即传递函数对此频率的值为 1.若由 ξ,η决定的 x,y 的值在光瞳之外，则系统将完全不能让此种频率的指数基元通过，也就是传递函数对这频率的值为 0. 这就是说，在频域中存在一个有限的通频带，在此通带内的频率分量可以通过系统而没有振幅和相位畸变.而通带以外的频率分量完全被衰减掉.衍射受限系统是一个低通滤波器.低于某一频率的指数基元成分将按原样通过，高于该频率的指数基元成分将被截止，这个特征频率称为系统的截止频率，用 ρ_c 表示.

假如不考虑孔径的有限大小，认为恒有 $P=1$，则整个频谱面上有 $\boldsymbol{H}(\xi,\eta)=1$. 这时像是物的准确复现，没有任何信息丢失.这正是几何光学理想成像情况.

如果我们在一个反演坐标中来定义 P，则可以去掉负号的累赘，把(3.3.5)式改写为

$$H(\xi,\eta)=P(\lambda d_i\xi,\lambda d_i\eta) \tag{3.3.6}$$

尤其是一般光瞳函数都是对光轴呈中心对称的，这样处理的结果不会产生任何实质性的影响.

例如一个直径为 D 的圆形光瞳，其孔径函数 $P(x,y)$可表为

$$P(x,y)=\operatorname{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{D/2}\right)$$

由(3.3.6)式，其相干传递函数为

$$H(\xi,\eta)=P(\lambda d_i\xi,\lambda d_i\eta)=\operatorname{circ}\left(\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{D/2\lambda d_i}\right) \tag{3.3.7}$$

由圆柱函数的定义可知，在 $D/2\lambda d_i$ 区域内 $H(\xi,\eta)=1$，在 $D/2\lambda d_i$ 之外 $H(\xi,\eta)=0$.故截止频率为

$$\rho_c=\frac{D}{2\lambda d_i} \tag{3.3.8}$$

如果出瞳直径 $D=60\text{mm}$，出瞳与像面距离 $d_i=200\text{mm}$，照明光波 $\lambda=600\text{nm}$，则有

$$\rho_c=\frac{60}{2\times6\times10^{-4}\times200}=250\text{mm}^{-1}$$

由于是圆形光瞳，任何方向的截止频率均是相同的.注意，这里的 ρ_c 指的是像面上的截止频率，

而物面上的截止频率 $\rho_{oc}=|M|\rho_c$.

如果出瞳是边长为 a 的正方形,则光瞳函数为

$$P(x,y)=\mathrm{rect}\left(\frac{x}{a}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y}{a}\right)$$

相干传递函数为

$$H(\xi,\eta)=P(\lambda d_i\xi,\lambda d_i\eta)=\mathrm{rect}\left(\frac{\lambda d_i\xi}{a}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{\lambda d_i\eta}{a}\right)$$

$$=\mathrm{rect}\left(\frac{\xi}{a/\lambda d_i}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{\eta}{a/\lambda d_i}\right) \tag{3.3.9}$$

显然,不同方位上的截止频率不相同,当物的周期分布的等相位线平行于 y 轴时,$\eta=0$,系统的截止频率 $\rho_c=a/2\lambda d_i$.系统的最大截止频率是等相位线与 x 轴成 45°角时,此时 $\xi=\eta$,此方向的截止频率 $\rho_c=\sqrt{2}\,a/2\lambda d_i$.

例 3.3.1 用一直径为 D,焦距为 f 的理想单透镜对相干照明物体成像.若物方空间截止频率为 ρ_{oc},试问当系统的放大率 M 为何值时,ρ_{oc} 有最大值?

解:设物距为 d_o,像距为 d_i,放大率为 M,为使成实像时 M 为正,将像面坐标相对于物面坐标反演,使倒像的影响不反映在 M 上.于是 M 可表示成

$$M=\frac{d_i}{d_o}=\frac{d_i-f}{f}$$

即

$$d_i=(1+M)f$$

此系统的光瞳函数是直径为 D 的圆形孔径,其截止频率 $\rho_c=D/2\lambda d_i$,考虑到物像空间截止频率的关系,则有

$$\rho_c=\frac{D}{2\lambda d_i}=\frac{1}{M}\rho_{oc}$$

或

$$\rho_{oc}=\frac{MD}{2\lambda d_i}=\frac{MD}{2\lambda(1+M)f}$$

为求得当 ρ_{oc} 取最大值 ρ_{ocmax} 时的放大倍数 M,将 ρ_{oc} 对 M 求导并令其为零得

$$\frac{\mathrm{d}\rho_{oc}}{\mathrm{d}M}=\frac{D}{2\lambda f}\frac{1}{(1+M)^2}=0$$

因此,只有当放大倍数 M 为无穷大时,系统才有最大的空间截止频率,此截止频率为

$$\rho_{ocmax}=\lim_{M\to\infty}\frac{D}{2\lambda f}\frac{M}{1+M}=\frac{D}{2\lambda f}$$

此时,物置于透镜前焦面,像在像方无穷远,在物空间的通频带为

$$-\frac{D}{2\lambda f}<\rho<\frac{D}{2\lambda f}$$

例 3.3.2 图 3.3.1 表示两个相干成像系统.所用透镜的焦距都相同.单透镜系统中光阑直径为 D,双透镜系统为了获得相同的截止频率,光阑直径 a 应等于多大(相对于 D 写出关系式)?

解:这两个系统都是横向放大率为 1 的系统,故不必区分物方截止频率和像方截止频率.对于单透镜系统的截止频率为

$$\rho_c=\frac{D}{4\lambda f}$$

根据相干传递函数的意义可知,凡是物面上各面元发出低于此空间频率的平面波均能无阻挡地通过此成像系统.

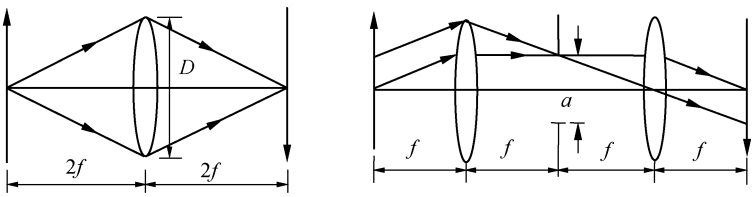


图 3.3.1 两个相干成像系统

对于双透镜成像系统,其孔径光阑置于频谱面上,故入瞳和出瞳分别在物方和像方无穷远处.入瞳与孔径光阑保持物像共轭关系,孔径光阑与出瞳也保持物像共轭关系.对于这种放大率为 1 的系统,能通过光阑的最高空间频率也必定能通过入瞳和出瞳.即系统的截止频率可通过光阑的尺寸来计算.

为保证 $4f$ 系统物面上每一面元发出的某一空间频率的平面波都毫无阻挡地通过此成像系统,则要求光阑直径 a 小于等于透镜直径与物面直径之差,在本题中我们假设光阑直径 a 等于二者之差.于是相应的截止频率为

$$\rho_c' = \frac{a}{2\lambda f}$$

按照题意要求二者相等,即 $\rho_c = \rho_c'$,于是得

$$a = \frac{D}{2}$$

3.3.2 相干线扩散函数和边缘扩散函数

测量传递函数的方法,一种是计算或测量出系统的点扩散函数,然后对它做傅里叶变换以确定传递函数.但在有些情况中,得不到点扩散函数的精确表达式,这种方法不好使用.另一种方法是把大量频率不同的本征函数逐个输入系统,并确定每个本征函数所受到的衰减及其相移,从而得到传递函数.这种方法较第一种方法直接,但测量数目大,有时实现起来相当困难.由线扩散函数确定传递函数是另一种方法.

1. 线扩散函数与边缘扩散函数的概念

对于相干照明成像系统,点物在像面上的响应即点扩散函数是一种复振幅分布,所有点物响应的叠加即得像面上的复振幅分布.这个分布的绝对值的平方即为像面强度分布.对于非相干照明成像系统,点物在像面上的响应即强度点扩散函数是一种强度分布,所有这些强度点扩散函数的叠加就得像面强度分布.但无论是复振幅点扩散函数或是强度点扩散函数,但就叠加成线扩散函数的方式都是一样的.为直观起见,下面以点物的强度响应为例讨论点扩散函数与线扩散函数的关系.但公式中的各函数表达式既可理解成强度也可理解成复振幅.

一个点物在像面上造成的强度分布即为点扩散函数 $h(x_i, y_i)$,x_i,y_i 是像面上的位置坐标.校正好中心的镜头,其轴上物点的像是圆对称的.图 3.3.2(a)就是这样的像点,图上画出的是点扩散函数的轮廓形状,强度变化没有表示出来,但强度分布对像斑中心 O 呈圆对称.因此过中心的一条狭缝,无论方向如何,例如图中的虚线所示,从缝中看到的强度分布,以离 O 点远近表示,分布状况都是一样的.通常以沿 x_i 轴的狭缝的强度分布曲线 $h(x_i)$作为点扩散函数,如图 3.3.2(b)所示.一个亮狭缝通过光学系统成像后,光强分布依然是往两侧散开的,散开的情况取决于光学系统的点扩散函数.因为一根亮直线或一个亮狭缝,可以看成是由许多亮点的集合组成的,这许多沿直线排列的点源的像点的叠加就构成亮直线的光强度分布.如果我们把直线像的长度

方向取为 y_i 方向，那么沿 x_i 方向上的光强分布 $L(x_i)$就叫做线扩散函数.图 3.3.2(b)同样可以代表亮直线的成像情况，这就是实际成像的强度分布，也就是线扩散函数.应该注意，这里只是说它们的表示方式相同，而点扩散函数的曲线形状和线扩散函数的曲线形状是不一样的.线扩散函数由点扩散函数叠加而成，这就是两者之间的关系.下面用数学式子将这个关系表达出来.

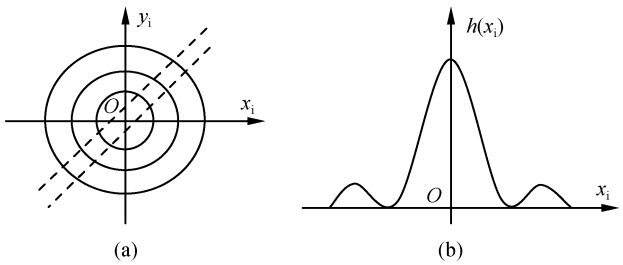


图 3.3.2 点扩散函数的分布

设系统输入一线脉冲，例如平行于 y_o 轴的线光源，即 $U_o(x_o,y_o)=\delta(x_o)$，线性空不变系统的线扩散函数为

$$L(x_i)=\delta(x_i)*h(x_i,y_i)=\iint_{-\infty}^{\infty}\delta(\alpha)h(x_i-\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(x_i,\beta)\mathrm{d}\beta \tag{3.3.10}$$

上式表明线扩散函数仅仅依赖于 x_i，它等于点扩散函数沿 y_i 方向的线积分.

物为一狭缝，它在像面上造成的分布就是线扩散函数.现用一个与狭缝方向平行的刀片放置在像面上.开始时刀片完全挡住狭缝像，刀片逐渐移动，也就逐渐放入狭缝像的光.在图 3.3.3 中画出了狭缝的线扩散函数 $L(x_i)$，刀片刃口移动到位置 x_i 时，放入的光通量与图中阴影面积成比例.这样一来，在刀片的整个移动过程中，进入探测器的光通量随刀口位置 x_i 的变化构成一个函数 $E(x_i)$，这个函数就叫做边缘扩散函数.由图 3.3.2 可知，边缘扩散函数 $E(x_i)$来源于线扩散函数 $L(x_i)$，它们的关系是

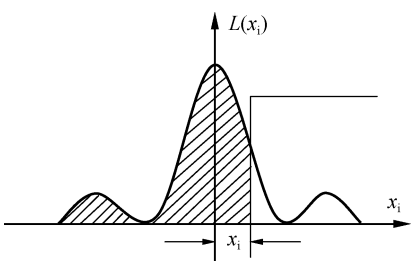


图 3.3.3 由线扩散函数产生边缘扩散函数

$$E(x_i)=\int_{-\infty}^{x_i}L(\alpha)\mathrm{d}\alpha \tag{3.3.11}$$

由上式又可得

$$L(x_i)=\frac{\mathrm{d}E(x_i)}{\mathrm{d}x_i} \tag{3.3.12}$$

边缘扩散函数也可用下面方式导出.对系统输入一个阶跃函数，例如均匀照明的直边或刀口形成的光分布.系统的输出叫阶跃响应或边缘扩散函数，即

$$E(x_i)=\mathrm{step}(x_i)*h(x_i,y_i)=\iint_{-\infty}^{\infty}h(\alpha,\beta)\mathrm{step}(x_i-\alpha)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}h(\alpha,\beta)\mathrm{d}\beta\right]\mathrm{step}(x_i-\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}L(\alpha)\mathrm{step}(x_i-\alpha)\mathrm{d}\alpha=\int_{-\infty}^{x_i}L(\alpha)\mathrm{d}\alpha \tag{3.3.13}$$

2. 相干线扩散函数和边缘扩散函数

相干照明下的狭缝在像面上产生的复振幅分布就是相干线扩散函数,它的一维傅里叶变换等于系统的传递函数沿 ξ 方向的截面分布,即

$$F\{L(x_i)\} = F\int_{-\infty}^{\infty}\{h(x_i,\beta)\mathrm{d}\beta\} = H(\xi,0) \tag{3.3.14}$$

于是改变相干照明的狭缝方向,分别对每一个方向测量线扩散函数,然后做一维傅里叶变换,就可确定相应各个方向的传递函数截面.对于点扩散函数是圆对称的情况,传递函数也是圆对称的,它只需一个截面就可完全确定.假如点扩散函数对 x_i,y_i 是可分离变量的,传递函数也是可以分离变量的.确定它只需要两个截面 $H(\xi,0)$和 $H(0,\eta)$.利用线扩散函数的一维傅里叶变换来确定传递函数,有时比由点扩散函数做二维傅里叶变换得到传递函数更为方便.

由(3.3.14)式可知,一个平行于 y_o 轴的狭缝在像面上产生的相干线扩散函数为

$$L(x_i) = F^{-1}\{H(\xi,0)\} \tag{3.3.15}$$

它是相干传递函数沿 ξ 轴截面的一维逆傅里叶变换.在衍射受限系统中的相干传递函数在通频带内为常数,无论孔径形状如何,相干传递函数的截面总是矩形函数,因而 $L(x_i)$将呈 sinc 函数变化.

对于衍射受限系统,$L(x_i)$可表示为

$$L(x_i) = F^{-1}\{P(\lambda d_i\xi,0)\} \tag{3.3.16}$$

例如直径为 D 的圆形光瞳,垂直于孔径的任意的截面,都是矩形函数,即

$$P(\lambda d_i\xi,0) = \mathrm{rect}\left(\frac{\lambda d_i\xi}{D}\right) \tag{3.3.17}$$

线扩散函数为

$$L(x_i) = F^{-1}\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{\lambda d_i\xi}{D}\right)\right\} = \frac{D}{\lambda d_i}\mathrm{sinc}\left(\frac{Dx_i}{\lambda d_i}\right) \tag{3.3.18}$$

由(3.3.13)式,物面上放置一个刀口或直边,相干光均匀照明,像面上得到的相干边缘扩散函数

$$E(x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} L(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

将(3.3.18)式给出的 $L(x_i)$代入上式得

$$E(x_i) = \int_{-\infty}^{x_i}\frac{D}{\lambda d_i}\mathrm{sinc}\left(\frac{D}{\lambda d_i}\alpha\right)\mathrm{d}\alpha$$

可以把它表示成展开式

$$E(x_i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi Dx_i}{\lambda d_i} - \frac{1}{18}\left(\frac{\pi Dx_i}{\lambda d_i}\right)^3 + \frac{1}{600}\left(\frac{\pi Dx_i}{\lambda d_i}\right)^5 - \cdots\right] \tag{3.3.19}$$

图 3.3.4 中给出衍射受限的相干线扩散函数与边缘扩散函数.注意边缘扩散函数的振荡性质.直边的像不再是亮暗严格分明的.

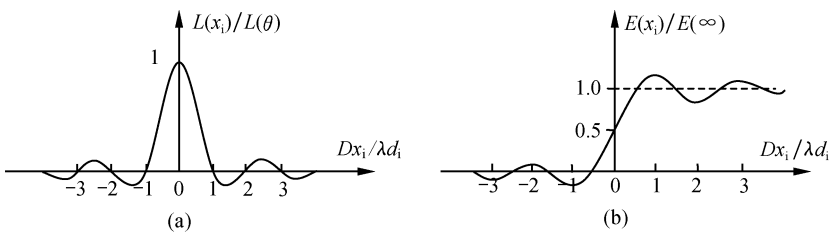


图 3.3.4 相干线扩散函数和边缘扩散函数

3.4 衍射受限非相干成像系统的传递函数

在非相干照明下,物面上各点的振幅和相位随时间变化的方式是彼此独立、统计无关的.这样一来,虽然物面上每一点通过系统后仍可得到一个对应的复振幅分布,但由于物面的照明是非相干的,故不能通过对这些复振幅分布的相干叠加得到像的复振幅分布,而应该由这些复振幅分布分别求出对应的强度分布,然后将这些强度分布叠加(非相干叠加)得到像面强度分布.非相干成像系统是强度的线性系统,若成像是空不变的,则非相干成像系统是强度的线性空不变系统.

3.4.1 非相干成像系统的光学传递函数(OTF)

非相干线性空不变成像系统,物像关系满足下述卷积积分

$$I_i(x_i,y_i)=k\iint_{-\infty}^{\infty}I_g(\tilde{x}_o,\tilde{y}_o)h_u(x_i-\tilde{x}_o,y_i-\tilde{y}_o)\mathrm{d}\tilde{x}_o\mathrm{d}\tilde{y}_o$$

$$=kI_g(x_i,y_i)*h_u(x_i,y_i) \tag{3.4.1}$$

式中,I_g 是几何光学理想像的强度分布,I_i 为像强度分布,k 是常数,由于它不影响 I_i 的分布形式,所以不用给出具体的表达式,h_u 为强度脉冲响应(或称非相干脉冲响应、强度点扩散函数).它是点物产生的像斑的强度分布,它应该是复振幅点扩散函数绝对值的平方,即

$$h_u(x_i,y_i)=|\tilde{\boldsymbol{h}}(x_i,y_i)|^2 \tag{3.4.2}$$

(3.4.1)式和(3.4.2)式表明,在非相干照明下,线性空不变成像系统的像强度分布是理想像的强度分布与强度点扩散函数的卷积.系统的成像特性由 $h_u(x_i,y_i)$ 表示,而 $h_u(x_i,y_i)$ 又由 $\tilde{\boldsymbol{h}}(x_i,y_i)$ 决定.

对于非相干照明下的强度线性空不变系统,在频域中来描写物像关系更加方便.将(3.4.1)式两边进行傅里叶变换并略去无关紧要的常数后得

$$\boldsymbol{G}_i(\xi,\eta)=\boldsymbol{G}_g(\xi,\eta)\boldsymbol{H}_I(\xi,\eta)$$

其中

$$\boldsymbol{G}_i(\xi,\eta)=F\{I_i(x_i,y_i)\}$$

$$\boldsymbol{G}_g(\xi,\eta)=F\{I_g(x_i,y_i)\}$$

$$\boldsymbol{H}_I(\xi,\eta)=F\{h_u(x_i,y_i)\}$$

由于 $I_i(x_i,y_i)$,$I_g(x_i,y_i)$ 和 $h_u(x_i,y_i)$ 都是强度分布,都是非负实函数,因而必有一个常数分量即零频分量,而且它的幅值大于任何非零分量的幅值,即 $G(0,0)\geqslant|\boldsymbol{G}_i(\xi,\eta)|$,$\boldsymbol{G}_g(0,0)\geqslant|\boldsymbol{G}_g(\xi,\eta)|$,$H_I(0,0)\geqslant|\boldsymbol{H}_I(\xi,\eta)|$,决定像的清晰与否,主要的不是包括零频分量在内的总光强有多大,而在于携带有信息那部分光强相对于零频分量的比值有多大,所以更有意义的是 $\boldsymbol{G}(\xi,\eta)$,$\boldsymbol{G}_g(\xi,\eta)$,$\boldsymbol{H}_I(\xi,\eta)$相对于各自零频分量的比值.这就是用零频分量对它们归一化,得归一化频谱,用$G_i(\xi,\eta)$,$G_g(\xi,\eta)$,$H_I(\xi,\eta)$表示,即

$$G_i(\xi,\eta)=\frac{\boldsymbol{G}_i(\xi,\eta)}{G_i(0,0)}=\frac{\iint_{-\infty}^{\infty}I_i(x_i,y_i)\exp[-\mathrm{j}2\pi(\xi x_i+\eta y_i)]\mathrm{d}x_i\mathrm{d}y_i}{\iint_{-\infty}^{\infty}I_i(x_i,y_i)\mathrm{d}x_i\mathrm{d}y_i} \tag{3.4.3}$$

$$G_g(\xi,\eta)=\frac{\boldsymbol{G}_g(\xi,\eta)}{G_g(0,0)}=\frac{\iint_{-\infty}^{\infty}I_g(x_i,y_i)\exp[-\mathrm{j}2\pi(\xi x_i+\eta y_i)]\mathrm{d}x_i\mathrm{d}y_i}{\iint_{-\infty}^{\infty}I_g(x_i,y_i)\mathrm{d}x_i\mathrm{d}y_i} \tag{3.4.4}$$

$$H_I(\xi,\eta)=\frac{\boldsymbol{H}_I(\xi,\eta)}{H_I(0,0)}=\frac{\iint_{-\infty}^{\infty}h_u(x_i,y_i)\exp[-\mathrm{j}2\pi(\xi x_i+\eta y_i)]\mathrm{d}x_i\mathrm{d}y_i}{\iint_{-\infty}^{\infty}h_u(x_i,y_i)\mathrm{d}x_i\mathrm{d}y_i} \tag{3.4.5}$$

由于 $\boldsymbol{G}_i(\xi,\eta)=\boldsymbol{G}_g(\xi,\eta)\boldsymbol{H}_I(\xi,\eta)$,并且 $G_i(0,0)=G_g(0,0)H_I(0,0)$,所以得到的归一化频谱满足公式

$$G_i(\xi,\eta)=G_g(\xi,\eta)H_I(\xi,\eta) \tag{3.4.6}$$

$H_I(\xi,\eta)$称为非相干成像系统的光学传递函数(OTF),它描述非相干成像系统在频域的效应.

由于G_i,G_g和H_I一般都是复函数,都可以用它的模和辐角表示,于是有

$$G_i(\xi,\eta)=|G_i(\xi,\eta)|\exp[\mathrm{j}\varphi_i(\xi,\eta)]$$

$$G_g(\xi,\eta)=|G_g(\xi,\eta)|\exp[\mathrm{j}\varphi_g(\xi,\eta)]$$

$$H_I(\xi,\eta)=\boldsymbol{M}(\xi,\eta)\exp[\mathrm{j}\varphi(\xi,\eta)]$$

注意到(3.4.5)式和(3.5.6)式的关系,可以得出

$$M(\xi,\eta)=\frac{|\boldsymbol{H}_I(\xi,\mu)|}{H_I(0,0)}=\frac{|G_i(\xi,\eta)|}{|G_g(\xi,\eta)|} \tag{3.4.7}$$

$$\varphi(\xi,\eta)=\varphi_i(\xi,\eta)-\varphi_g(\xi,\eta) \tag{3.4.8}$$

通常称 $M(\xi,\eta)$为调制传递函数(MTF),$\varphi(\xi,\eta)$为相位传递函数(PTF).$M(\xi,\eta)$描写了系统对各频率分量对比度的传递特性,$\varphi(\xi,\eta)$描述了系统对各频率分量施加的相移.

由于 I_i,I_g 和 h_I 都是非负实函数,它们的归一化频谱G_i,G_g,H_I都是厄米函数.余弦函数是这种系统的本征函数,即强度余弦分量在通过系统后仍为同频率的余弦输出,其对比度和相位的变化决定于系统传递函数的模和辐角.换句话说,如果把输入物看作强度透过率呈余弦变化的不同频率的光栅的线性组合,在成像过程中,OTF 唯一的影响是改变这些基元的对比度和相对相位.

例如,一个余弦输入的光强为

$$I_g(\tilde{x}_o,\tilde{y}_o)=a+b\cos[2\pi(\xi_o\tilde{x}_o+\eta_o\tilde{y}_o)+\varphi_g(\xi_o,\eta_o)]$$

则其频谱 $\boldsymbol{G}_g(\xi,\eta)$为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}_g(\xi,\eta)&=F\{I_g(\tilde{x}_o,\tilde{y}_o)\}\\&=a\delta(\xi,\eta)+\frac{b}{2}\{\delta(\xi-\xi_o,\eta-\eta_o)\exp[\mathrm{j}\varphi_g(\xi_o,\eta_o)]\\&\quad+\delta(\xi+\xi_o,\eta+\eta_o)\exp[-\mathrm{j}\varphi_g(\xi_o,\eta_o)]\}\end{aligned}$$

由于 $I_i(x_i,y_i)=I_g(x_i,y_i)*h_I(x_i,y_i)$,所以

$$F\{I_i(x_i,y_i)\}=F\{I_g(x_i,y_i)\}*F\{h_I(x_i,y_i)\} \tag{3.4.9}$$

根据$H(\xi,\eta)$的定义

$$F\{h_I(x_i,y_i)\}=H_I(\xi,\eta)=H_I(0,0)H(\xi,\eta)$$

于是

$$\begin{aligned}F\{I_i(x_i,y_i)\}&=H_I(0,0)a\delta(\xi,\eta)H(\xi,\eta)+\frac{b}{2}H_I(0,0)H(\xi,\eta)\\&\quad\times\{\delta(\xi-\xi_o,\eta-\eta_o)\exp[\mathrm{j}\varphi_g(\xi_o,\eta_o)]+\delta(\xi+\xi_o,\eta+\eta_o)\exp[-\mathrm{j}\varphi_g(\xi_o,\eta_o)]\}\end{aligned}$$

对于确定的系统,$H_I(0,0)$是一确定的常数,对像强度的相对分布没有影响,所以在下面取其逆变换得到 I_i 时可将其略去不写,即

$$\begin{aligned}I_i(x_i,y_i)&=a\iint_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi,\eta)H(\xi,\eta)\exp[\mathrm{j}2\pi(\xi x_i+\eta y_i)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\&\quad+\frac{b}{2}\Big\{\iint_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi-\xi_o,\eta-\eta_o)H(\xi,\eta)\exp[\mathrm{j}\varphi_g(\xi_o,\eta_o)]\exp[\mathrm{j}2\pi(\xi x_i+\eta y_i)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta]\\&\quad+\iint_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi+\xi_o,\eta+\eta_o)H(\xi,\eta)\exp[-\mathrm{j}\varphi_g(\xi_o,\eta_o)]\exp[\mathrm{j}2\pi(\xi x_i+\eta y_i)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta]\Big\}\\&=aH(0,0)+\frac{b}{2}\{H(\xi_o,\eta_o)\exp[\mathrm{j}\varphi_g(\xi_o,\eta_o)]\exp[\mathrm{j}2\pi(\xi_o x_i+\eta_o y_i)]\end{aligned}$$

$$+H(-\xi,-\eta)\exp[-\mathrm{j}\varphi_g(\xi,\eta)]\exp[-\mathrm{j}2\pi(\xi x_i+\eta y_i)]\}$$

因为

$$H(0,0)=1$$

$$H(\xi,\eta)=M(\xi,\eta)\exp[\mathrm{j}\varphi(\xi,\eta)]$$

$$H(-\xi,-\eta)=M(-\xi,-\eta)\exp[\mathrm{j}\varphi(-\xi,-\eta)]$$

$$=M(\xi,\eta)\exp[-\mathrm{j}\varphi(\xi,\eta)]$$

其中最后一步利用了$H(\xi,\eta)$的厄米性.将这些结果代入上式,得到像强度分布为

$$I_i(x_i,y_i)=a+bM(\xi,\eta)\cos[2\pi(\xi x_i+\eta y_i)+\varphi_g(\xi,\eta)+\varphi(\xi,\eta)]$$

由于(ξ,η)是任意的,故上式可以写成一般形式

$$I_i(x_i,y_i)=a+bM(\xi,\eta)\cos[2\pi(\xi x_i+\eta y_i)+\varphi_g(\xi,\eta)+\varphi(\xi,\eta)]$$

由此可见,余弦条纹通过线性空不变成像系统后,像仍然是同频率的余弦条纹,只是振幅减小了,相位变化了.振幅的减小和相位的变化都取决于系统的光学传递函数在该频率处的取值.

对于呈余弦变化的强度分布,很自然地要讨论其对比度或调制度,其定义为

$$V=\frac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}} \tag{3.4.10}$$

式中,I_{max}和I_{min}分别是光强度分布的极大值和极小值.物(或理想像)和像的调制度为

$$V_g=\frac{I_{gmax}-I_{gmin}}{I_{gmax}+I_{gmin}}=\frac{(a+b)-(a-b)}{(a+b)+(a-b)}=\frac{b}{a}$$

$$V_i=\frac{I_{imax}-I_{imin}}{I_{imax}+I_{imin}}=\frac{a+bM(\xi,\eta)-a+bM(\xi,\eta)}{a+bM(\xi,\eta)+a-bM(\xi,\eta)}=\frac{b}{a}M(\xi,\eta)$$

合并以上两式得

$$V_i=M(\xi,\eta)V_g \tag{3.4.11}$$

而$H(\xi,\eta)$的辐角$\varphi(\xi,\eta)$显然是余弦像和余弦物(或理想像)的相位差,即

$$\varphi_i(\xi,\eta)=\varphi_g(\xi,\eta)+\varphi(\xi,\eta) \tag{3.4.12}$$

即像的对比度等于物的对比度与相应频率的MTF的乘积,PTF给出了相应的相移,空间余弦分布的相位差$\varphi(\xi,\eta)$体现了余弦像分布$I_i(x_i,y_i)$相对于其物分布$I_g(\tilde{x}_o,\tilde{y}_o)$移动了多少.当$\varphi(\xi,\eta)$为$2\pi$时,表示错开一个条纹,当$\varphi(\xi,\eta)=\theta$弧度时,说明错开了$\theta/2\pi$个条纹.

由此可见,光学传递函数的模$M(\xi,\eta)$表示物分布中频率为ξ,η的余弦基元通过系统后振幅的衰减($M(\xi,\eta)\leqslant 1$),或者说$M(\xi,\eta)$表示频率为ξ,η的余弦物通过系统后调制度的降低,正是这个原因才把$M(\xi,\eta)$叫调制传递函数.而$H(\xi,\eta)$的辐角$\varphi(\xi,\eta)$则表示频率为ξ,η的余弦像分布相对于物(理想像)的横向位移量,所以也把$\varphi(\xi,\eta)$叫做相位传递函数.

3.4.2 OTF与CTF的关系

光学传递函数$H(\xi,\eta)$与相干传递函数$\boldsymbol{H}(\xi,\eta)$分别描述同一系统采用非相干和相干照明的传递函数,它们都决定于系统本身的物理性质,应当有联系.由(3.4.5)式,注意到根据自相关定理和巴塞伐定理得到

$$H(\xi,\eta)=\frac{\boldsymbol{H}_i(\xi,\eta)}{\boldsymbol{H}_i(0,0)}=\frac{F\{h_u(x_i,y_i)\}}{\iint_{-\infty}^{\infty}h_u(x_i,y_i)\mathrm{d}x_i\mathrm{d}y_i}$$

$$=\frac{F\{|\tilde{\boldsymbol{h}}(x_i,y_i)|^2\}}{\iint_{-\infty}^{\infty}|\tilde{\boldsymbol{h}}(x_i,y_i)|^2\mathrm{d}x_i\mathrm{d}y_i}=\frac{\boldsymbol{H}(\xi,\eta)\star\boldsymbol{H}(\xi,\eta)}{\iint_{-\infty}^{\infty}|\boldsymbol{H}(\alpha,\beta)|^2\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta}$$

$$=\frac{\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{H}^{*}(\alpha,\beta)\boldsymbol{H}(\xi+\alpha,\eta+\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta}{\iint_{-\infty}^{\infty}|\boldsymbol{H}(\alpha,\beta)|^{2}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta} \tag{3.4.13}$$

因此,对同一系统来说,光学传递函数等于相干传递函数 $\boldsymbol{H}$ 的自相关归一化函数.这一结论是在(3.4.2)式的基础上导出的,所以它对有像差的系统和没有像差的系统都完全成立.

3.4.3 衍射受限的 OTF

对于相干照明的衍射受限系统,已知 $\boldsymbol{H}(\xi,\eta)=P(\lambda d_i\xi,\lambda d_i\eta)$,把它代入(3.4.13)式得到

$$H(\xi,\eta)=\frac{\iint_{-\infty}^{\infty}P(\lambda d_i\alpha,\lambda d_i\beta)P[\lambda d_i(\xi+\alpha),\lambda d_i(\eta+\beta)]\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta}{\iint_{-\infty}^{\infty}P(\lambda d_i\alpha,\lambda d_i\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta}$$

令 $x=\lambda d_i\alpha$,$y=\lambda d_i\beta$,积分变量的替换不会影响积分结果,于是得 $H(\xi,\eta)$ 与 $P(x,y)$ 的如下关系:

$$H(\xi,\eta)=\frac{\iint_{-\infty}^{\infty}P(x,y)P[x+\lambda d_i\xi,y+\lambda d_i\eta]\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_{-\infty}^{\infty}P(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y} \tag{3.4.14}$$

由于光瞳函数只有 1 和 0 两个值,分母中的 P^2 可以写做 P.公式表明衍射受限系统的 OTF 是光瞳函数的自相关归一化函数.

研究(3.4.14)式可得到 OTF 的重要几何解释.式中分母是光瞳的总面积 S_0,分子代表中心位于$(-\lambda d_i\xi,-\lambda d_i\eta)$的经过平移的光瞳与原光瞳的重叠面积 $S(\xi,\eta)$,求衍射受限系统的 OTF 只不过是计算归一化重叠面积,即

$$H(\xi,\eta)=\frac{S(\xi,\eta)}{S_0} \tag{3.4.15}$$

如图 3.4.1 所示,重叠面积取决于两个错开的光瞳的相对位置,也就是和频率(ξ,η)有关.对于简单几何形状的光瞳不难求出归一化重叠面积的数学表达式.对于复杂的光瞳,可用计算机计算在一系列分立频率上的 OTF.

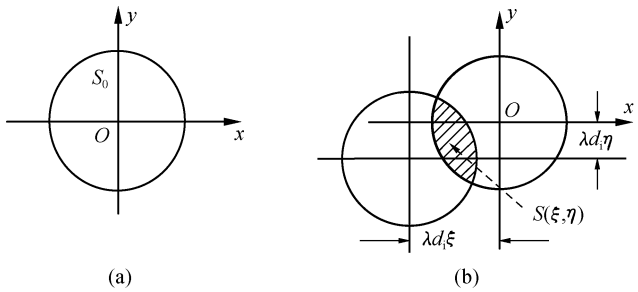


图 3.4.1 衍射受限系统 OTF 的几何解释

从上述的几何解释,不难了解衍射受限系统 OTF 的一些性质.

① $H(\xi,\eta)$是实的非负函数.因此衍射受限的非相干成像系统只改变各频率余弦分量的对比,而不改变它们的相位.即只需考虑 MTF 而不必考虑 PTF.

② $H(0,0)=1$. 当 $\xi=\eta=0$ 时,两个光瞳完全重叠,归一化重叠面积为 1,这正是 OTF 归一化的结果.这并不意味着物和像的背景光强相同.由于吸收、反射、散射及光阑挡光等原因,像面背景光强总要弱于物面光强.但从对比考虑,物像方零频分量的对比度都是零,无所谓衰减,所以

$H(0,0)=1$.

③ $H(\xi,\eta)\leqslant H(0,0)$.这一结论很容易从两个光瞳错开后重叠的面积小于完全重叠的面积得到.

④ 截止频率.当 ξ,η 足够大,两光瞳完全分离时,重叠面积为零.此时 $H(\xi,\eta)=0$,即在截止频率所规定的范围之外,光学传递函数为零,像面上不出现这些频率成分.

例 3.4.1 衍射受限非相干成像系统的光瞳为边长为 l 的正方形,求其光学传递函数.

解:此时的光瞳函数可表示为

$$P(x,y)=\operatorname{rect}\left(\frac{x}{l}\right)\operatorname{rect}\left(\frac{y}{l}\right)$$

显然光瞳总面积 $S_0=l^2$,当 $P(x,y)$ 在 x,y 方向分别位移 $-\lambda d_i\xi,-\lambda d_i\eta$ 以后,得 $P(x+\lambda d_i\xi,y+\lambda d_i\eta)$,从图 3.4.2 可以求出 $P(x,y)$ 和 $P(x+\lambda d_i\xi,y+\lambda d_i\eta)$ 的重叠面积 $S(\xi,\eta)$.由图可得

$$S(\xi,\eta)=\begin{cases}(l-\lambda d_i\xi)(l-\lambda d_i\eta), & \xi,\eta>0\\(l+\lambda d_i\xi)(l+\lambda d_i\eta), & \xi,\eta<0\\0, & \lambda d_i|\xi|>l,\lambda d_i|\eta|>l\end{cases}$$

即

$$S(\xi,\eta)=\begin{cases}(l-\lambda d_i|\xi|)(l-\lambda d_i|\eta|), & \lambda d_i|\xi|<l,\lambda d_i|\eta|<l\\0, & \text{其他}\end{cases}$$

光学传递函数为

$$H(\xi,\eta)=\frac{S(\xi,\eta)}{S_0}=\Lambda\left(\frac{\xi}{2\rho_c}\right)\Lambda\left(\frac{\eta}{2\rho_c}\right)\tag{3.4.16}$$

式中,$\rho_c=l/2\lambda d_i$ 是同一系统采用相干照明时的截止频率.非相干系统沿 ξ 和 η 轴方向上截止频率是 $2\rho_c=l/\lambda d_i$.图 3.4.2(b)表示这个结果.

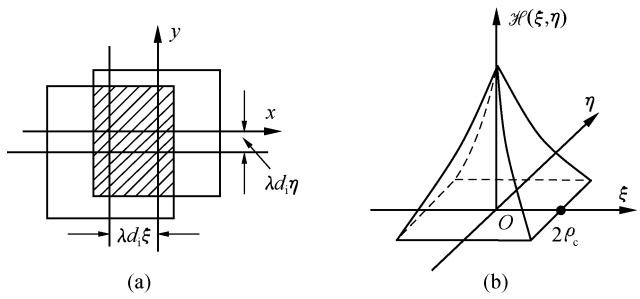


图 3.4.2 方形光瞳衍射受限 OTF 的计算

例 3.4.2 衍射受限系统的出瞳是直径为 D 的圆,求此系统的光学传递函数.

解:由于是圆形光瞳,OTF 应该是圆对称的.只要沿 ξ 轴计算 H 即可.参看图 3.4.3(a),在 x 轴方向移动 $\lambda d_i\xi$ 后,重叠面积被 AB 分成两个面积相等的弓形.根据几何公式,交叠面积

$$S(\xi,0)=\frac{D^2}{2}(\theta-\sin\theta\cos\theta)$$

其中 $\cos\theta$ 由下式定义:

$$\cos\theta=\frac{\lambda d_i\xi/2}{D/2}=\frac{\lambda d_i\xi}{D}$$

在截止频率内

$$H(\xi,0)=\frac{S(\xi,0)}{S_0}=\frac{S(\xi,0)}{\pi D^2/4}=\frac{2}{\pi}(\theta-\sin\theta\cos\theta)$$

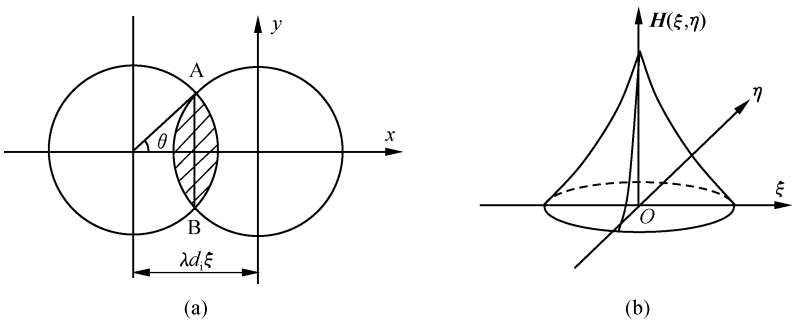


图 3.4.3　圆形光瞳衍射受限 OTF 的计算

截止频率满足 $\lambda d_i \xi = D$,也就是两个圆中心距离大于直径 D 时,重叠面积为零.此种系统的相干传递函数的截止频率 $\rho_c = D/2\lambda d_i$.显然光学传递函数的截止频率恰好又是 $2\rho_c$.图 3.4.3(b)画出了光瞳函数为圆域函数时 $H(\xi,\eta)$ 的示意图.$H(\xi,\eta)$ 在极坐标中的表达式为

$$H(\rho) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}(\theta - \sin\theta\cos\theta), & \rho \leqslant D/\lambda d_i \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{3.4.17}$$

式中

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \cos\theta = \frac{\lambda d_i \rho}{D}$$

3.4.4　非相干线扩散函数和边缘扩散函数

在非相干照明下,平行于 y_0 轴的狭缝光源的像面上产生的线响应称为线扩散函数.它与光学传递函数的关系是

$$L_I(x_i) = F^{-1}\{H(\xi,0)\} \tag{3.4.18}$$

它是 OTF 沿 ξ 轴截面分布的一维傅里叶变换.虽然线扩散函数与传递函数之间的关系,在相干与非相干照明时都是相同的,但由于 OTF 与 CTF 的明显不同,线扩散函数的性质也有很大差别.相干线扩散函数与孔径形状无关,总是 sinc 函数.而 OTF 是光瞳自相关的结果,非相干线扩散函数就与孔径的形状有关.

图 3.4.4(a)给出系统具有直径为 D 的圆形光瞳的线扩散函数.注意它与图 3.3.3(a)中相干线扩散函数的区别,它没有零点.

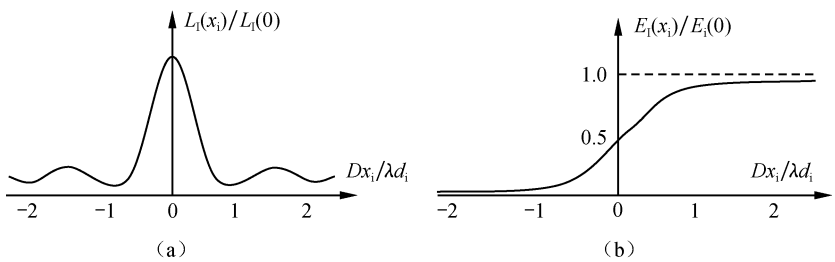


图 3.4.4　非相干线扩散函数与边缘扩散函数

非相干边缘扩散函数,由非相干线扩散函数的积分给出

$$E_I(x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} L_I(\alpha)\mathrm{d}\alpha \tag{3.4.19}$$

图 3.4.4(b)画出了非相干边缘扩散函数的曲线,可以看出它没有相干边缘扩散函数中的振荡现象.

3.5 有像差系统的传递函数

对于衍射受限系统,在相干照明下传递函数 H 只有 1 和 0 两个值,各种空间成分或者无畸变地通过系统,或者被完全挡掉.在非相干照明下的光学传递函数 H 是非负实函数,即系统只改变各频率成分的对比,不产生相移.以上结果是在没有像差的情况下得出的,当然是理想情况.任何一个实际系统总是有像差的.像差可能来自于构成系统的元件,也可能来自成像平面的位置误差,也可能来自理想球面透镜所固有的如球面像差等等.所有这些像差都会对传递函数产生影响,在相干或非相干照明下,往往都是复函数.系统将对各频率成分的相位产生影响.

在讨论衍射受限系统时,我们通过点扩散函数 $\tilde{h}(x_i,y_i)$ 与光瞳函数的傅里叶变换,最终用光瞳函数来描述传递函数.对于有像差的系统,仍然采用这种方法,只是对光瞳函数的概念加以推广,然后用广义光瞳函数来描述有像差系统的传递函数.

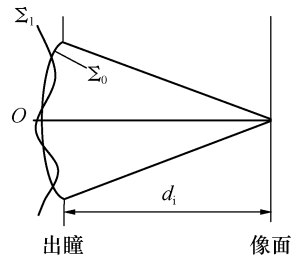


图 3.5.1 像差对出瞳平面波前的影响

在衍射受限系统中,单位脉冲 $\delta(\tilde{x}_o,\tilde{y}_o)$ 通过系统后投射到光瞳上的是以理想像点为中心的球面波.对于有像差的系统,不论产生像差的原因如何,其效果都是使光瞳上的出射波前偏离理想球面.如图 3.5.1 所示,由于系统有像差,使与 O 点等相位的各点形成波面 $\sum_1$,若系统没有像差,理想波面应该是 $\sum_0$.$\sum_1$ 和 $\sum_0$ 每一点的光程差用函数 $W(x,y)$ 表示,它的具体形式由系统像差决定,由它引起的相位变化是 $kW(x,y)$.若定义

$$P(x,y)=P(x,y)\exp[\mathrm{j}kW(x,y)] \tag{3.5.1}$$

则 $\tilde{\boldsymbol{h}}(x_i,y_i)$ 可以看作是复振幅透过率为 $P(x,y)$ 的光瞳被半径为 d_i 的球面波照明后所得的分布,式中 $P(x,y)$ 为系统没有像差时的光瞳函数,$P(x,y)$ 叫做广义光瞳函数.这样一来,$\tilde{\boldsymbol{h}}(x_i,y_i)$ 就是广义光瞳函数的傅里叶变换.我们在(3.2.7)式中用广义光瞳函数 P 代替 P 就可以得到有像差系统的相干点扩散函数,即

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{h}}(x_i,y_i)&=F\{P(\lambda d_i\tilde{x},\lambda d_i\tilde{y})\}\\&=F\{P(\lambda d_i\tilde{x},\lambda d_i\tilde{y})\exp[\mathrm{j}kW(\lambda d_i\tilde{x},\lambda d_i\tilde{y})]\}\end{aligned} \tag{3.5.2}$$

由此可见,相干脉冲响应不再单纯是孔径的夫琅禾费衍射图样,必须考虑波像差的影响.若像差是对称的,如球差和离焦,点物的像斑仍具有对称性.若像差是非对称的,如彗差、像散等,点物的像斑也不具有圆对称性.

相干传递函数定义为相干点扩散函数的傅里叶变换,利用(3.3.6)式可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(\xi,\eta)&=P(\lambda d_i\xi,\lambda d_i\eta)\\&=P(\lambda d_i\xi,\lambda d_i\eta)\exp[\mathrm{j}kW(\lambda d_i\xi,\lambda d_i\eta)]\end{aligned} \tag{3.5.3}$$

显然,系统的通频带的范围仍由光瞳的大小决定,截止频率和无像差的情况相同.像差的唯一影响是在通带内引入了与频率有关的相位畸变,像质变坏.

在非相干照明下,强度点扩散函数仍然是相干点扩散函数模的平方,$h_{\mathrm{I}}=|\tilde{\boldsymbol{h}}|^2$.对于圆形光瞳,$h_{\mathrm{I}}$ 不再是艾里斑图样的强度分布.由于像差的影响,点扩散函数的峰值明显小于没有像差时系统点扩散函数的峰值.可以把这两个峰值之比作为像差大小的指标,称为斯特列尔(Strehl)清晰度.

借助于(3.4.13)和(3.4.14)式,由 $\boldsymbol{H}$ 和 H 以及和孔径函数的关系可知,有像差系统的 OTF 应该是广义光瞳函数的归一化自相关函数

$$H(\xi,\eta)=\frac{\iint_{-\infty}^{\infty}P^{*}(x,y)\,P(x+\lambda d_i\xi,y+\lambda d_i\eta)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_{-\infty}^{\infty}P(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y} \tag{3.5.4}$$

在(3.5.4)式中,广义光瞳函数的相位因子不影响该式中分母的积分值,它仍然是光瞳的总面积 S_0.在(3.5.4)式中分子的积分区域仍然是 $P(x,y)$和 $P(x+\lambda d_i\xi,y+\lambda d_i\eta)$的重叠区 $S(\xi,\eta)$,于是(3.5.4)式可简写为

$$H(\xi,\eta)=\frac{\iint_{S(\xi,\eta)}\exp[-\mathrm{j}kW(x,y)]\exp[\mathrm{j}kW(x+\lambda d_i\xi,y+\lambda d_i\eta)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{S_0} \tag{3.5.5}$$

(3.5.5)式给出了像差引起的相位畸变与 OTF 的直接关系.当像差为零,所得结果与(3.4.15)式一致,是衍射受限的 OTF.对于像差不为零的情况,OTF 是复函数.像差不为零不仅影响输入各频率成分的对比度,而且也产生相移,利用许瓦兹不等式,不难证明

$$|H(\xi,\eta)|_{\text{有像差}}\leqslant|H(\xi,\eta)|_{\text{无像差}} \tag{3.5.6}$$

因此像差会进一步降低成像质量.

由于 h_{I} 是实函数,无论有无像差,H 都是厄米型的,即有 $H(\xi,\eta)=H^{*}(-\xi,-\eta)$.它的模和辐角分别为偶函数和奇函数,即

$$M(\xi,\eta)=M(-\xi,-\eta) \tag{3.5.7}$$

$$\varphi(\xi,\eta)=-\varphi(-\xi,-\eta) \tag{3.5.8}$$

了解这一点后,在画 MTF 或 PTF 截面曲线时可以只画出曲线的正频部分.

3.6 相干与非相干成像系统的比较

下面对相干与非相干成像做一些比较,通过这种比较虽然仍不能得出哪一种成像更好的全面性的结论,但对两者之间的联系和某些基本差异的理解会更深入一些,并能根据一些具体情况判断选用哪种照明会更好些.

3.6.1 截止频率

OTF 的截止频率是 CTF 截止频率的两倍.但这并不意味着非相干照明一定比相干照明好一些.这是因为不同系统的截止频率是对不同物理量传递而言的.对于非相干系统,它是指能够传递的强度呈余弦变化的最高频率;对于相干系统是指能够传递的复振幅呈周期变化的最高频率.显然,从数值上对二者做简单比较是不合适的.但对于二者的最后可观察量都是强度,因此直接对像强度进行比较是恰当的.下面将会看到,即使比较的物理量一致,要判断绝对好坏也是困难的.

3.6.2 像强度的频谱

对相干和非相干照明情况下像强度进行比较,最简单的方法是考察其频谱特性.在相干和非相干照明下,像强度可分别表示为

$$I_{\mathrm{c}}(x_{\mathrm{i}},y_{\mathrm{i}})=|\boldsymbol{U}_{\mathrm{g}}(x_{\mathrm{i}},y_{\mathrm{i}})*\tilde{\boldsymbol{h}}(x_{\mathrm{i}},y_{\mathrm{i}})|^{2} \tag{3.6.1}$$

$$I_{\mathrm{i}}(x_{\mathrm{i}},y_{\mathrm{i}})=I_{\mathrm{g}}(x_{\mathrm{i}},y_{\mathrm{i}})*h_{\mathrm{I}}(x_{\mathrm{i}},y_{\mathrm{i}}) \tag{3.6.2}$$

式中,I_{c} 和 I_{i} 分别是相干和非相干照明下像面上的强度分布.$\boldsymbol{U}_{\mathrm{g}}$ 和 I_{g} 分别在物(或理想像)的复

振幅分布和强度分布.为了求像的频谱,分别对(3.6.1)式和(3.6.2)式进行傅里叶变换,并利用卷积定理和自相关定理得到相干和非相干像强度频谱为

$$\boldsymbol{G}_{\mathrm{c}}(\xi,\eta)=[\boldsymbol{G}_{\mathrm{gc}}(\xi,\eta)\boldsymbol{H}(\xi,\eta)]\☆[\boldsymbol{G}_{\mathrm{gc}}(\xi,\eta)\boldsymbol{H}(\xi,\eta)] \tag{3.6.3}$$

$$\boldsymbol{G}_{\mathrm{i}}(\xi,\eta)=[\boldsymbol{G}_{\mathrm{gc}}(\xi,\eta)\☆\boldsymbol{G}_{\mathrm{gc}}(\xi,\eta)][\boldsymbol{H}(\xi,\eta)\☆\boldsymbol{H}(\xi,\eta)] \tag{3.6.4}$$

式中,$\boldsymbol{G}_{\mathrm{c}}$ 和 $\boldsymbol{G}_{\mathrm{i}}$ 分别是相干和非相干像强度的频谱,$\boldsymbol{G}_{\mathrm{gc}}$ 是物的复振幅分布的频谱,$\boldsymbol{H}$ 是相干传递函数.

由此可知,在两种情况下像强度的频谱可能很不相同,但仍不能就此得出结论哪种情况更好些.因为成像结果不仅依赖于系统的结构与照明光的相干性,而且也与物的空间结构有关.下面举两个例子来说明.

例 3.6.1 物体的复振幅透过率为

$$t_1(x)=\left|\cos 2\pi\frac{x}{b}\right|$$

将此物通过一横向放大率为 1 的光学系统成像.系统的出瞳是半径为 a 的圆形孔径,$\frac{\lambda d_{\mathrm{i}}}{b}<a<\frac{2\lambda d_{\mathrm{i}}}{b}$,并且 d_{i} 为出瞳到像面的距离,λ 为照明光波波长,试问对该物体成像,采用相干照明和非相干照明,哪一种方式为好?

解:当采用相干照明时,对于半径为 a 的圆形出瞳,其截止频率为

$$\rho_{\mathrm{c}}=\frac{a}{\lambda d_{\mathrm{i}}}$$

由于系统的横向放大率为 1,物和理想像等大,空间频谱结构相同.由题设条件 $\lambda d_{\mathrm{i}}/b<a<2\lambda d_{\mathrm{i}}/b$ 可得

$$\frac{1}{2}\rho_{\mathrm{c}}<\frac{1}{b}<\rho_{\mathrm{c}}$$

将物函数展开成傅里叶级数得

$$\begin{aligned}t_1(x)&=\left|\cos 2\pi\frac{x}{b}\right|\\&=\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{1\cdot 3}\cos\left(4\pi\frac{x}{b}\right)-\frac{1}{3\cdot 5}\cos\left(6\pi\frac{x}{b}\right)+\cdots\right]\end{aligned}$$

此物函数的基频 $2/b>\rho_{\mathrm{c}}$.所以在相干照明下,成像系统只允许零频分量通过,而其他频谱分量均被挡住,所以物不能成像,像面呈均匀强度分布.

在非相干照明条件下,系统的截止频率 $2\rho_{\mathrm{c}}$ 大于物的基频 $2/b$,所以零频和基频均能通过系统参与成像.于是在像面上仍有图像存在,尽管像的基频被衰减,高频被截断了.基于这种分析,显然非相干成像要比相干成像好.

例 3.6.2 在上题中,如果物体换为 $t_2(x)$,其复振幅透过率为

$$t_2(x)=\cos 2\pi\frac{x}{b}$$

结论又如何?

解:$t_1(x)$和 $t_2(x)$这两个物函数的振幅分布不同,但有相同的强度分布 $\cos^2 2\pi\frac{x}{b}$.下面我们将看到,它们通过系统的成像情况是不一样的.

对于相干照明,理想像的复振幅分布为 $\cos 2\pi\frac{x_{\mathrm{i}}}{b}$,其频率为 $1/b$.按题设系统的截止频率为 $\rho_{\mathrm{c}}=\frac{a}{\lambda d_{\mathrm{i}}}$,且 $1/b<\rho_{\mathrm{c}}$.因此这个呈余弦分布的复振幅能不受影响地通过此系统成像.

对于非相干照明,理想像的强度分布为 $\cos^2 2\pi \frac{x_i}{b}=\frac{1}{2}\left[1+\cos 2\pi \frac{2}{b}x_i\right]$,其频率为 $2/b$,按题设 $2/b<2\rho_c$,即频率小于非相干截止频率.故此物也能通过系统成像,但幅度要受到衰减.由此看来,在这种物结构下,相干照明好于非相干照明.

以上结论我们也可通过对像面强度的频谱进行分析得出.

在相干照明情况下,理想像的频谱分布为

$$\boldsymbol{G}_{ic}(\xi)=F\{t_2(x_i)\}=\frac{1}{2}\delta\left(\xi-\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{2}\delta\left(\xi+\frac{1}{b}\right)$$

而系统的相干传递函数在沿 ξ 的截面内,在范围 $-\rho_c<\xi<\rho_c$ 内为常数 1,故 $\boldsymbol{G}_{ic}(\xi)\times\boldsymbol{H}(\xi,0)=\boldsymbol{G}_{ic}(\xi)$.所以(3.6.3)式所表示的相干照明下的像面强度谱为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}_i(\xi)&=[\boldsymbol{G}_{ic}(\xi)\boldsymbol{H}(\xi,0)]\☆[\boldsymbol{G}_{ic}(\xi)\boldsymbol{H}(\xi,0)]=\boldsymbol{G}_{ic}(\xi)\☆\boldsymbol{G}_{ic}(\xi)\\&=\frac{1}{2}\left[\delta\left(\xi-\frac{1}{b}\right)+\delta\left(\xi+\frac{1}{b}\right)\right]\☆\frac{1}{2}\left[\delta\left(\xi-\frac{1}{b}\right)+\delta\left(\xi+\frac{1}{b}\right)\right]\\&=\frac{1}{4}\left[\delta\left(\xi-\frac{2}{b}\right)+\delta\left(\xi+\frac{2}{b}\right)\right]+\frac{1}{2}\delta(\xi)\end{aligned}$$

在非相干照明下,像面强度谱为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}_i(\xi)&=[\boldsymbol{G}_{ic}(\xi)\☆\boldsymbol{G}_{ic}(\xi)][\boldsymbol{H}(\xi,0)\☆\boldsymbol{H}(\xi,0)]\\&=\boldsymbol{G}_i(\xi)[\boldsymbol{H}(\xi,0)\☆\boldsymbol{H}(\xi,0)]\end{aligned}$$

当 $\xi=0$ 时,$\boldsymbol{H}\☆\boldsymbol{H}$ 的值 1,故 $\boldsymbol{G}_i(0)=\boldsymbol{G}_i(0)$,即像强度频谱的零频分量在两种情况下相等.但对频率为 $2/b$ 的分量,由于这时的 $\boldsymbol{H}\☆\boldsymbol{H}$ 值小于 1,故 $\boldsymbol{G}_i\left(\frac{2}{b}\right)>\boldsymbol{G}_i\left(\frac{2}{b}\right)$,即在这个频率上相干像强度的频谱幅度要比非相干像强度的频谱幅度大一些,所以相干像的对比度也大一些.从这个意义上说,相干照明优于非相干照明.

3.6.3 两点分辨

分辨率是评判系统成像质量的一个重要指标.非相干成像系统所使用的是瑞利分辨判据,用它来表示理想光学系统的分辨率.对于衍射受限的圆形光瞳情况,点光源在像面上产生的衍射斑的强度分布称为艾里斑.根据瑞利判据,对两个强度相等的非相干点源,若一个点源产生的艾里斑中心恰与第二个点源产生的艾里斑的第一个零点重合,则认为这两个点源刚好能够分辨.若把两个点源像中心取在 $x=\pm 1.92$ 处,则这一条件刚好满足,其强度分布为

$$I(x)=\left[\frac{2J_1(x-1.92)}{x-1.92}\right]^2+\left[\frac{2J_1(x+1.92)}{x+1.92}\right]^2 \tag{3.6.5}$$

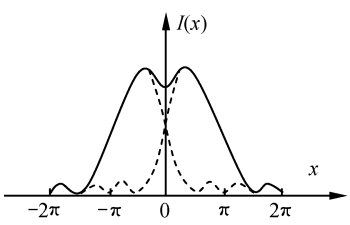


图 3.6.1 刚能分辨两个非相干点源的像强度分布

在图 3.6.1 中给出了刚能分辨的两个点源所产生的强度分布曲线,中心凹陷大小为 19%.这时在像面上得到的最小分辨率 σ 等于艾里斑图样的核半径,即

$$\sigma=1.22\frac{\lambda d_i}{D} \tag{3.6.6}$$

式中 D 为出瞳直径.

相干照明时,两点源产生的艾里斑按复振幅叠加,叠加的结果强烈依赖于两点源之间的相位关系.为了说明问题,我们仍取两个像点的距离为瑞利间隔,看相干照明时是否也能分辨.因为是相干成像,两点源的像强度分布应为其复振幅相加后模的平方,即

$$I(x)=\left|\frac{2J_1(x-1.92)}{x-1.92}+\frac{2J_1(x+1.92)}{x+1.92}\exp(\mathrm{j}\phi)\right|^2 \tag{3.6.7}$$

式中，ϕ为两个点源的相对相位差.图 3.6.2 对于 ϕ分别为 0，$\frac{\pi}{2}$和 π 三种情况画出了像强度分布.当 $\phi=0$ 时，两个点源的相位相同，$I(x)$不出现中心凹陷，因此两个点完全不能分辨.当 $\phi=\frac{\pi}{2}$时，$I(x)$与非相干照明完全相同，刚好能够分辨.当 $\phi=\pi$ 时，两个点源的相位相反，$I(x)$的中心凹陷为零，这两点比非相干照明时分辨得更为清楚.

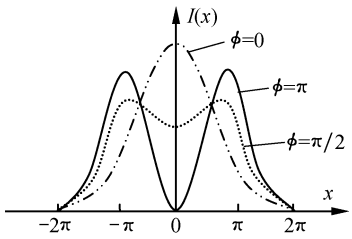


图 3.6.2　相距为瑞利间隔的两个相干点源的像强度分布

因此，瑞利分辨判据仅适用于非相干成像系统，对于相干成像系统能否分辨两个点源，要看它们的相位关系.

3.7　超越经典衍射极限的分辨率问题

早在 18 世纪 70 年代，德国物理学家恩斯特·阿贝(Ernst Karl Abbe，1840～1905)发现，可见光由于其波动特性会发生衍射，因而光束不能无限聚焦.他提出了著名的“阿贝极限”，即可见光能聚焦的最小直径是光波波长的三分之一.长期以来，“阿贝极限”一直被认为是光学显微镜理论上的分辨率极限.通常情况下，所有成像系统的分辨能力都受到衍射极限的约束.一般来讲，实际成像系统的分辨率不能超越其衍射极限.人们在设计或制造成像系统时，常常把理论计算的衍射极限作为提高分辨率的目标.然而，科学工作者在长期的科学探索中发现，对某些特定物体成像时能超越经典衍射极限的分辨率，从而使超越经典衍射极限的分辨率问题备受关注.超越经典衍射极限的分辨率常常叫做超分辨率或带宽外推，本节将对此做简要介绍.

3.7.1　超分辨率存在的理论依据

成像分辨率之所以可能超越经典极限，首先是有着很基本的数学原因.它们的理论基础是源于两条基本的数学定理：

定理 1　一个空间有界函数的二维傅里叶变换是(ξ,η)平面上的解析函数.

定理 2　(ξ,η)空间频谱平面上一个任意的解析函数，若在此平面上的一个任意小(但有限)的区域内精确知道这个函数的值，那么整个函数可通过解析延拓手段(唯一地)确定.

定理 1 的实质就是说空间有界函数总是存在二维傅里叶变换，这不难从第一章介绍的二维傅里叶变换定义中得到理解.对于任何成像系统，不论是相干的还是非相干的，像的信息都仅仅来自物的频谱的一个有限部分(在相干情形下是物振幅谱的一部分，在非相干情形下是物强度谱的一部分)，即成像系统的传递函数让通过的那一部分，满足“空间有界”条件，表明该物的傅里叶变换存在.

定理 2 告诉我们，如果已知某一频谱函数的某一局域频谱值，则该谱函数可以外推出来，对于一个有界物体，如果能够根据像来精确确定物的频谱的这一有限部分，那么，就能通过解析延拓求出整个物谱.而如果能够求得整个物谱，那么该物就可以无限精确地重建.

系统可得到的分辨能力所加的衍射极限，一般认为是实践中能够实际达到极限的一个准确的估值.但是，人们惊奇地发现，对于某一类物体，超经典衍射极限的分辨率在理论上是可能的.在本节中我们将看到，对于空间有界的物，在没有噪声时，原则上能够分辨无穷小的细节.超越经

典衍射极限的分辨率常常叫做超分辨率或带宽外推 .

对一个空间有限的物有可能实现超分辨,可以通过一个简单例子来得到较为直观的解释 .设照明是非相干的,并且为简单起见,我们考虑一维情况 .令物体是一个有限长度为 L 的余弦强度分布光栅,假设其空间频率 ξ_0 超出了非相干成像系统的截止频率 ξ_{max},其强度分布可表示为

$$I_g(x)=\frac{1}{2}[1+m\cos(2\pi\xi_0 x)]\mathrm{rect}\left(\frac{x}{L}\right) \tag{3.7.1}$$

在适当归一化后,可得这一强度分布的谱为

$$G_g(\xi)=\mathrm{sinc}(L\xi)+\frac{m}{2}\mathrm{sinc}[L(\xi-\xi_0)]+\frac{m}{2}\mathrm{sinc}[L(\xi+\xi_0)] \tag{3.7.2}$$

这个谱经成像系统成像,像面的空间频谱分布为:

$$G_i(\xi)=G_g(\xi)\cdot\mathrm{OTF}=\{\mathrm{sinc}(L\xi)+\frac{m}{2}\mathrm{sinc}[L(\xi-\xi_0)]+\frac{m}{2}\mathrm{sinc}[L(\xi+\xi_0)]\}\cdot\mathrm{OTF} \tag{3.7.3}$$

由于频率 ξ_0 已在 OTF 的截止频率之外,直观上从采集的图像中已看不到该有界余弦光栅特征了;但进一步分析可知,余弦函数的有限宽度使它的频谱分量展宽为 sinc 函数,频谱延伸到整个频域,虽然频率 ξ_0 是在 OTF 的界限之外,但是中心在 $\xi=\pm\xi_0$ 的 sinc 函数的尾巴部分却越过 OTF 的截止频率延伸到了可见谱带宽以内 .因此,在成像系统的通带内,的确存在着来自处于通带之外的余弦分量的信息 .如果从通带频谱中修整这些极微弱的频谱分量,利用一些必备的先念知识,可恢复原有界余弦光栅的特征信号,从而实现超分辨率成像 .

3.7.2 常用超分辨率方法简介

超分辨率方法有很多,这里介绍两种,即基于抽样定理的外推方法和基于迭代的外推方法 .

1. 基于抽样定理的外推方法

为了使分析尽可能简单,我们同样只讨论一维恢复问题 .设一维非相干物的强度分布为 $I_g(x)$,它被限制在 x 轴上的$(-L/2,L/2)$内 .根据抽样定理,物的频谱 $G_g(\xi)$可以用它在频域内以频率间隔为 $1/L$ 进行抽样的抽样值来表征,即:

$$G_g(\xi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}G_g\left(\frac{n}{L}\right)\mathrm{sinc}\left[L\left(\xi-\frac{n}{L}\right)\right] \tag{3.7.4}$$

理论上 n 取所有整数,但是,由于光学系统的通频带有限,只是对几个较小的整数值 n 才能得到 $G_g(n/L)$之值 .设 $-N\leqslant n\leqslant N$,上式可近似为

$$G_g(\xi)\approx\sum_{n=-N}^{N}G_g\left(\frac{n}{L}\right)\mathrm{sinc}\left[L\left(\xi-\frac{n}{L}\right)\right] \tag{3.7.5}$$

N 的大小决定了可能恢复出超出经典衍射极限的频率带宽,N 越大,表征超分辨率能力越强 .

为了确定在可观察的通带之外的抽样值,我们在通带之内的任何 $2N+1$ 个不同的频率 ξ_k 上测量 $G_g(\xi)$之值 $\boldsymbol{G}_g(\xi_k)$(ξ_k 一般不和抽样点 n/L 重合),可获得 $2N+1$ 个等式

$$\boldsymbol{G}_g(\xi_k)=\sum_{n=-N}^{N}G_g\left(\frac{n}{L}\right)\mathrm{sinc}\left[L\left(\xi_k-\frac{n}{L}\right)\right]\quad k=1,2,\cdots,2N+1 \tag{3.7.6}$$

它含有 $2N+1$ 个未知数 $G_g(n/L)$.实质上(3.7.6)式可写成矩阵形式 .定义一个列矢量 $\boldsymbol{g}$,它是由 $2N+1$ 个待求 $G_g(n/L)$值组成的;同样定义一个列矢量 $\hat{\boldsymbol{g}}$,它是由在同频带内直接测得的 $2N+1$ 个测量值 $\boldsymbol{G}_g(\xi_k)$构成的;再定义一个$(2N+1)\times(2N+1)$矩阵 D,其第 k 行 n 列元素为 $\mathrm{sinc}[L(\xi_k-n/L)]$.于是(3.7.6)式可以写成简单的矩阵方程

$$\hat{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{g} \tag{3.7.7}$$

我们的目标是求矢量 $\boldsymbol{g}$,由此可以重建出谱 G_g 在正常的截止频率之外的频谱成分.能够证明,只要各个测量频率 ξ_k 是不同的,D 的行列式便不为零,因此其逆矩阵存在.因此有:

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{D}^{-1}\hat{\boldsymbol{g}} \tag{3.7.8}$$

由此获得了物谱在通带内外的抽样值,借助于抽样定理的插值函数,就可以重构出物谱在截止频率之外频谱分布,对该频谱函数进行逆傅里叶变换即可恢复出令人满意的超分辨率图像.

2. 基于迭代的外推方法

基于迭代的外推法首先由 Gerchberg 提出,这种方法是纯数值方法,很容易在数字计算机上实现.

该方法的基本思想是:分别在空域和频域内施加约束条件,在物的空域和频域之间来回进行迭代,在空域和频域中都进行修正以加强预先就知道的知识或实际测量的数据,直至获得满意的超分辨率图像.主要步骤如下:

① 选取空域约束条件.我们知道原来的物强度在空域内是有限的和非负的,以此特征作为在空域要加强的约束.

② 选取频域的约束条件.通过事先测得成像系统的频域通带内的物谱,该物谱是实际测得的,具有不变性特征,这是我们在频域要加强的约束.

③ 实测物的像,并对这个像做一次傅里叶变换,可以发现处于成像系统的通带之内的那一部分物谱.掌握了这两组数据,就开始实行迭代算法的初始值.

④ 由于成像系统的通带宽度有限,而这个像不是空间有限的(或空间有界的).但我们知道物是空间有限的,因此我们简单地截断这个像,让它只存在于物的空间边界内(即乘以一个适当宽度的矩形函数).空间截断的效果是改变新像的频谱.特别是引进了成像系统通带外的频谱分量,此外通带内的频谱分量也变了.

⑤ 把通带内的新频谱分量变回老的值,因为老的值是测量得到的并且被当做原始数据,这样再次改变了像,使它伸展到空间边界之外.

⑥ 重复空间限界过程,再次做变换,重复对已知频谱分量的加强,这样,就引进了超出衍射极限的频谱分量,并使它们得到逐步改善.

⑦ 以相邻两次迭代结果的像及其谱改变量小于某一阈值,作为迭代评价目标,重复迭代直至结束.

值得一提的是,现有的超分辨率法,需要有丰富而精确的先验知识,且对噪声都很敏感,噪声较大或先验知识不精确都有可能无法获得超分辨率图像.正是鉴于这一点,人们还是普遍同意瑞利分辨率极限是用常规的成像系统能达到的一个实用的分辨率极限.

习　题

3.1　参看图 3.1.1,在推导相干成像系统点扩散函数(3.1.5)式时,对于积分号前的相位因子

$$\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2d_0}(x_0^2+y_0^2)\right] \approx \exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2d_0}\left(\frac{x_i^2+y_i^2}{M^2}\right)\right]$$

试问:

(1) 物平面上半径多大时,相位因子 $\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2d_0}(x_0^2+y_0^2)\right]$ 相对于它在原点之值正好改变 π 弧度?

(2) 设光瞳函数是一个半径为 a 的圆,那么在物平面上相应 h 的第一个零点的半径是多少?

(3) 由这些结果,设观察是在透镜光轴附近进行,那么 a,λ 和 d_0 之间存在什么关系时可以弃去相位因子

$\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2d_0}(x_0^2+y_0^2)\right]$.

3.2 一个余弦型振幅光栅,复振幅透过率为

$$t(x_0,y_0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\pi f_0 x_0$$

放到图 3.1.1 所示的成像系统的物面上,用单色平面波倾斜照明,平面波的传播方向在 x_0z 平面内,与 z 轴夹角为 θ.透镜焦距为 f,孔径为 D.

(1) 求物体透射光场的频谱;

(2) 使像平面出现条纹的最大 θ 角等于多少?求此时像面强度分布;

(3) 若 θ 采用上述极大值,使像面上出现条纹的最大光栅频率是多少?与 $\theta=0$ 时的截止频率比较,结论如何?

3.3 光学传递函数 $\xi=\eta=0$ 处都等于 1,这是为什么?光学传递函数的值可能大于 1 吗?如果光学系统真的实现了点物成点像,这时的光学传递函数怎样?

3.4 证明当非相干成像系统的点扩散函数 $h_i(x_i,y_i)$ 成点对称时,其光学传递函数是实函数.

3.5 非相干成像系统的出瞳是由大量随机分布的小圆孔组成.小圆孔的直径都为 $2a$,出瞳到像面的距离为 d_i,光波长为 λ,这种系统可用来实现非相干低通滤波.系统的截止频率近似为多大?

第 4 章　部分相干理论

在讨论光的干涉、衍射以及成像过程中，我们常常假定光波是完全相干的或完全非相干的，根本忽略了它们的中间状态即部分相干状态的存在．事实上，严格的相干光和非相干光都只是一种理想情况，实际并不存在，实际的光波总是部分相干的，在某些情况下近似当作相干光或非相干光来处理．

理想的相干光源是单色点光源．对于一个严格的单色光场，其振幅不随时间变化，而相位随时间作线性变化，光振动在时间上是无限延伸的，也就是说它的光谱是单一频率的谱线．而实际光源，即使是最锐的光谱线也具有一定的谱线宽度．这是由于在原子发射辐射时，每个原子在能级上有一定的寿命，各原子间的碰撞以及原子运动的多普勒效应等多种原因造成的．至于光源的大小，再小的光源也不可能是一个理想的点．实际光源总是由大量的基元辐射体（原子和分子）组成的，具有一定的广延性．这样一来，我们讨论光场的相干性问题，必然与光源的时间特性（光谱分布）和空间特性（光源的空间扩展）相联系．因此，存在两类相干性问题，即时间相干性和空间相干性，它们可以一并包含在互相干函数的概念中．

时间相干性是讨论空间某一点，两个不同时刻光场之间的相关性．而空间相干性是讨论同一时刻，空间两不同点上光场的相关性．对于一般情况，需要研究光场中不同时刻、不同地点的相关性，即时空相干性．对这种时空相干性的量度是从不同的时刻、不同空间引入的光相干涉形成干涉条纹的能力为依据的．若两光场完全相关时，则形成的干涉条纹最清晰，称为相干；当两光场完全不相关时，则不能形成干涉条纹，称为不相干．一般情况下，这两者都不会出现，而处于条纹具有一定可见度（或称对比度）的部分相干态．本章将讨论部分相干光的描述方法和传播规律，并用一些例子来说明其结果．

由于在自然界中存在的光场是由大量基元辐射体产生的，对每一辐射体来说，光辐射产生的时间、持续的时间间隔以及随时间变化的方式，都是随机的．光场中任一点的光振动的振幅和相位都随时间作随机变化，具有一定的统计特征，要用统计理论来处理．因此，在部分相干理论中要引进概率统计中的相关函数来描述部分相干系统．为此，我们先介绍一些有关知识，然后才进入部分相干理论的讨论．

4.1　多色光场的解析信号表示

在单色光波的讨论中我们知道，对于线性系统分析，把一个实函数表示成一个复函数常常是很方便的．对于单色光场，由已知的实函数构造一个相应的复函数比较容易，但对于多色光场就不那么简单了．本节将介绍多色光场的复表示，即解析信号表示法．

4.1.1　单色信号的复表示

一个单色信号 $u^{r}(t)$ 可表示成

$$u^{r}(t)=A\cos(2\pi\nu t-\phi) \tag{4.1.1}$$

式中，A，ν 和 ϕ 分别表示常数振幅、频率和初相位．而这个信号的复表示为

$$\boldsymbol{u}(t)=A\exp[+\mathrm{j}(2\pi\nu t-\phi)] \tag{4.1.2}$$

它的实部恰好等于原来的实信号 $u^{\mathrm{r}}(t)$.这个复信号的复振幅定义为

$$\boldsymbol{A}=A\exp(\mathrm{j}\phi) \tag{4.1.3}$$

它表示单色信号的振幅和相位.复表示的虚部不是任意的,它是与原来的实信号密切相关的.用何种适当的运算就可得到(4.1.2)式那样的复表示呢?这个问题在频域中看得更清楚.我们把实信号用复数表示成

$$u^{\mathrm{r}}(t)=\frac{1}{2}A\{\exp[\mathrm{j}(2\pi\nu_0 t-\phi)]+\exp[-\mathrm{j}(2\pi\nu_0 t-\phi)]\}$$

对上式两边作傅里叶变换得

$$U^{\mathrm{r}}(\nu)=\frac{1}{2}A[\exp(-\mathrm{j}\phi)\delta(\nu-\nu_0)+\exp(\mathrm{j}\phi)\delta(\nu+\nu_0)]$$

式中,$U^{\mathrm{r}}(\nu)$是单色实信号的傅里叶频谱.然而,对(4.1.2)式所表示的复信号 $\boldsymbol{u}(t)$,我们有

$$F\{\boldsymbol{u}(t)\}=A\exp(-\mathrm{j}\phi)\delta(\nu-\nu_0) \tag{4.1.4}$$

因此,从原来的实信号 $u^{\mathrm{r}}(t)$变到复信号 $\boldsymbol{u}(t)$,通过在频域中的比较可以得出结论:去掉实信号的负频成分,加倍实信号的正频成分.由此可见,单色复信号是只有正频分量的单边谱.

4.1.2 多色信号的复表示

设多色实信号 $u^{\mathrm{r}}(t)$具有傅里叶变换,其傅里叶频谱为$U^{\mathrm{r}}(\nu)$.如何用复信号 $\boldsymbol{u}(t)$来表示实信号 $u^{\mathrm{r}}(t)$呢?我们沿用在讨论单色信号时所用的程序,将多色实信号的负频分量去掉而将其正频分量加倍.于是我们定义一个多色复信号

$$\boldsymbol{u}(t)=\int_0^{\infty}2\,U^{\mathrm{r}}(\nu)\exp(\mathrm{j}2\pi\nu t)\mathrm{d}\nu \tag{4.1.5}$$

我们称复函数 $\boldsymbol{u}(t)$为实函数 $u^{\mathrm{r}}(t)$的解析信号.当然,这个定义也可以按实函数的傅里叶变换性质推导出来.对于实函数有

$$[U^{\mathrm{r}}(\nu)]^{*}=U^{\mathrm{r}}(-\nu) \tag{4.1.6}$$

上式说明,$U^{\mathrm{r}}(\nu)$的负频分量和正频分量载有相同的信息,因而只研究正频分量就可以了.$u^{\mathrm{r}}(t)$的傅里叶变换式为

$$\begin{aligned}u^{\mathrm{r}}(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}U^{\mathrm{r}}(\nu)\exp(\mathrm{j}2\pi\nu t)\mathrm{d}\nu\\&=\int_0^{\infty}U^{\mathrm{r}}(\nu)\exp(\mathrm{j}2\pi\nu t)\mathrm{d}\nu+\int_{-\infty}^{0}U^{\mathrm{r}}(\nu)\exp(\mathrm{j}2\pi\nu t)\mathrm{d}\nu\\&=\int_0^{\infty}U^{\mathrm{r}}(\nu)\exp(\mathrm{j}2\pi\nu t)\mathrm{d}\nu+\int_0^{\infty}U^{\mathrm{r}}(-\nu)\exp(-\mathrm{j}2\pi\nu t)\mathrm{d}\nu\\&=\int_0^{\infty}U^{\mathrm{r}}(\nu)\exp(\mathrm{j}2\pi\nu t)\mathrm{d}\nu+\left[\int_0^{\infty}U^{\mathrm{r}}(\nu)\exp(\mathrm{j}2\pi\nu t)\mathrm{d}\nu\right]^{*}\\&=\mathrm{Re}\left[\int_0^{\infty}2\,U^{\mathrm{r}}(\nu)\exp(\mathrm{j}2\pi\nu t)\mathrm{d}\nu\right]\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

引进一个复值函数 $\boldsymbol{u}(t)$,使它满足

$$\boldsymbol{u}(t)=\int_0^{\infty}2\,U^{\mathrm{r}}(\nu)\exp(\mathrm{j}2\pi\nu t)\mathrm{d}\nu \tag{4.1.8}$$

显然,它的实部就是原来的实信号 $u^{\mathrm{r}}(t)$,我们称 $\boldsymbol{u}(t)$为解析信号.设 $\boldsymbol{u}(t)$的频谱为$U(\nu)$,则由(4.1.8)式可得

$$U(\nu)=\begin{cases}2\,U^{\mathrm{r}}(\nu), & \nu>0\\0, & \nu<0\end{cases} \tag{4.1.9}$$

这样一来,我们就从 $u^{r}(t)$构造了一个解析信号 $\boldsymbol{u}(t)$.

在以上构造解析信号的讨论中,我们只考虑去掉 $u^{r}(t)$的负频分量而将其正频分量加倍.那么 $u^{r}(t)$的零频分量将如何处理呢?当 $u^{r}(t)$包含有常数项时就属于这种情况.这时在频域里对应于在 $\nu=0$ 处有一个 δ 函数,这在构造解析信号时应该保留,即要求

$$U(\nu)=\begin{cases}2U^{r}(\nu), & \nu>0\\ U^{r}(\nu), & \nu=0\\ 0, & \nu<0\end{cases} \tag{4.1.10}$$

若用符号函数

$$\operatorname{sgn}(\nu)=\begin{cases}1, & \nu>0\\ 0, & \nu=0\\ -1, & \nu<0\end{cases} \tag{4.1.11}$$

则(4.1.10)式可写成

$$U(\nu)=[1+\operatorname{sgn}(\nu)]U^{r}(\nu) \tag{4.1.12}$$

因此

$$\boldsymbol{u}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}[1+\operatorname{sgn}(\nu)]U^{r}(\nu)\exp(\mathrm{j}2\pi\nu t)\mathrm{d}\nu \tag{4.1.13}$$

由此可见,在构造解析信号时,我们应当去掉 $u^{r}(t)$的负频分量,保留零频分量,加倍正频分量.

现在我们从(4.1.12)式出发来讨论解析信号的另一种表示方法.将(4.1.12)式两边作逆傅里叶变换得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(t)&=F^{-1}\{U(\nu)\}=F^{-1}\{U^{r}(\nu)\}+F^{-1}\{\operatorname{sgn}(\nu)U^{r}(\nu)\}\\&=u^{r}(t)+F^{-1}\{\operatorname{sgn}(\nu)\}*F^{-1}\{U^{r}(\nu)\}\\&=u^{r}(t)+\frac{\mathrm{j}}{\pi t}*u^{r}(t)\\&=u^{r}(t)-\frac{\mathrm{j}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u^{r}(\alpha)}{\alpha-t}\mathrm{d}\alpha\end{aligned} \tag{4.1.14}$$

在上式的推导中利用了 $F^{-1}\{\operatorname{sgn}(\nu)\}=\frac{\mathrm{j}}{\pi t}$这一结果.因为(4.1.14)式被积函数在 $\alpha=t$ 时有一奇点,式中记号$\int_{-\infty}^{\infty}$ 表示取柯西积分主值,即

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u^{r}(\alpha)}{\alpha-t}\mathrm{d}\alpha=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to0}\left\{\int_{-\infty}^{t-\varepsilon}\frac{u^{r}(\alpha)}{\alpha-t}\mathrm{d}\alpha+\int_{t+\varepsilon}^{\infty}\frac{u^{r}(\alpha)}{\alpha-t}\mathrm{d}\alpha\right\} \tag{4.1.15}$$

(4.1.15)式所表示的积分称为希尔伯特(Hilbert)变换.函数 $u^{r}(t)$的希尔伯特变换用$H\{u^{r}(t)\}$来表示.由(4.1.14)式和(4.1.15)式看出,解析信号 $\boldsymbol{u}(t)$的虚部 $u^{i}(t)$不是任意的,而是实信号 $u^{r}(t)$的希尔伯特变换,即

$$u^{i}(t)=H\{u^{r}(t)\}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u^{r}(\alpha)}{\alpha-t}\mathrm{d}\alpha \tag{4.1.16}$$

根据解析信号的这一性质我们又得到了一个由实信号构造解析信号的方法:给定一个实信号 $u^{r}(t)$,对它实行希尔伯特变换而得出 $u^{i}(t)$,则所求的解析信号为 $\boldsymbol{u}(t)=u^{r}(t)-\mathrm{j}u^{i}(t)$.

由希尔伯特变换式(4.1.16)式可以看出,函数 $u^{r}(r)$的希尔伯特变换,可以看作是函数 $u^{r}(t)$与$-1/\pi t$的卷积,即

$$u^{i}(t)=H\{u^{r}(t)\}=u^{r}(t)*\left(-\frac{1}{\pi t}\right) \tag{4.1.17}$$

换言之,希尔伯变换可以看作是一个线性平移不变系统,该系统的脉冲响应为

$$h(t)=-\frac{1}{\pi t} \tag{4.1.18}$$

于是(4.1.14)式可以写成

$$\boldsymbol{u}(t)=\left[\delta(t)+\frac{\mathrm{j}}{\pi t}\right]* u^{\mathrm{r}}(t) \tag{4.1.19}$$

与脉响应 $h(t)$相应的传递函数为

$$\boldsymbol{H}(\nu)=F\left\{-\frac{1}{\pi t}\right\}=\mathrm{jsgn}(\nu) \tag{4.1.20}$$

若设解析信号的虚部 $u^{\mathrm{i}}(t)$的频谱为$U^{\mathrm{i}}(\nu)$,则

$$U^{\mathrm{i}}(\nu)=\mathrm{jsgn}(v)\,U^{\mathrm{r}}(\nu) \tag{4.1.21}$$

下面举几个希尔伯特变换的例子

例 4.1.1 求 $\delta(t)$的希尔伯特变换.

解:由(4.1.17)式有

$$H[\delta(t)]=\delta(t)*\left(-\frac{1}{\pi t}\right)=-\frac{1}{\pi t} \tag{4.1.22}$$

例 4.1.2 求 $\cos 2\pi\nu_0 t$ 的希尔伯特变换.

解:$\cos 2\pi\nu_0 t$ 的频谱$U^{\mathrm{r}}(\nu)=\frac{1}{2}[\delta(\nu-\nu_0)+\delta(\nu+\nu_0)]$,故

$$\begin{aligned}U^{\mathrm{i}}(\nu)&=H(\nu)\,U^{\mathrm{r}}(\nu)=\mathrm{jsgn}(\nu)\,\frac{1}{2}[\delta(\nu-\nu_0)+\delta(\nu+\nu_0)]\\&=\begin{cases}-\frac{1}{2\mathrm{j}}\delta(\nu-\nu_0), & \nu>0\\ 0, & \nu=0\\ \frac{1}{2\mathrm{j}}\delta(\nu+\nu_0), & \nu<0\end{cases}\\&=-\frac{1}{2\mathrm{j}}[\delta(\nu-\nu_0)-\delta(\nu+\nu_0)]\end{aligned}$$

由它的逆变换可求得

$$u^{\mathrm{i}}(t)=-\sin 2\pi\nu_0 t \tag{4.1.23}$$

用同样的方法可以证明 $\sin 2\pi\nu_0 t$ 的希尔伯特变换是 $\cos 2\pi\nu_0 t$.

例 4.1.3 设 $u^{\mathrm{r}}(t)=\exp(-\beta^2 t^2)\cos(2\pi\nu_0 t+\phi)$,其中 $\beta>0$,$\nu_0>3\sigma$,$\sigma=\frac{\beta}{\sqrt{2\pi}}$,$\phi$ 为常数.求 $u^{\mathrm{r}}(t)$的希尔伯特变换 $u^{\mathrm{i}}(t)$.

解:由高斯函数的傅里叶变换性质可知,$\exp(-\beta^2 t^2)$的傅里叶变换为$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\times\exp\left(-\frac{\nu^2}{2\sigma^2}\right)$,其中 $\sigma=\frac{\beta}{\sqrt{2\pi}}$.因此可直接求得实信号

$$u^{\mathrm{r}}(t)=\exp(-\beta^2 t^2)\,\frac{1}{2}\{\exp[\mathrm{j}(2\pi\nu_0 t+\phi)]+\exp[-\mathrm{j}(2\pi\nu_0 t+\phi)]\}$$

的频谱为

$$U^{\mathrm{r}}(\nu)=\frac{1}{2}\exp(\mathrm{j}\phi)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(\nu-\nu_0)^2}{2\sigma^2}\right]+\frac{1}{2}\exp(-\mathrm{j}\phi)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(\nu+\nu_0)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{4.1.24}$$

式中$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{\nu^2}{2\sigma^2}\right]$为高斯概率密度函数,在$3\sigma$之外的总概率为0.0027,所以在$\nu_0>3\sigma$时有近似式

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(\nu-\nu_0)^2}{2\sigma^2}\right]\approx 0,\qquad \nu<0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(\nu+\nu_0)^2}{2\sigma^2}\right]\approx 0,\qquad \nu>0$$

因此

$$\begin{aligned}U^{\mathrm{i}}(\nu)&=\boldsymbol{H}(\nu)U^{\mathrm{r}}(\nu)=\mathrm{j}\,\mathrm{sgn}(\nu)U^{\mathrm{r}}(\nu)\\&=\frac{\mathrm{j}}{2}\exp(\mathrm{j}\phi)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(\nu-\nu_0)^2}{2\sigma^2}\right]-\frac{\mathrm{j}}{2}\exp(-\mathrm{j}\phi)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(\nu+\nu_0)^2}{2\sigma^2}\right]\end{aligned}\tag{4.1.25}$$

与此对应的信号表达式可将(4.1.25)式与(4.1.24)式比较得出

$$\begin{aligned}u^{\mathrm{i}}(t)&=\exp(-\beta^2t^2)\frac{\mathrm{j}}{2}\{\exp[\mathrm{j}(2\pi\nu_0t+\phi)]-\exp[-\mathrm{j}(2\pi\nu_0t+\phi)]\}\\&=-\exp(-\beta^2t^2)\sin2\pi\nu_0t\end{aligned}$$

4.2 互相干函数

光场是由大量独立的基元(原子和分子)发出的辐射叠加而成的.一个光源包含有大量的微观辐射基元,我们对它们的状态和运动无法做出精确的描述,因此对它们所产生的光场也无法做确定的精确描述,只能作为随机过程来讨论其统计性质.要对这种随机过程做完备的讨论,并非不可能,但却极其困难.但是,在大多数实际情况下,也无需知道光波的完整统计模型,只要知道某些阶的矩即可.例如,为了研究光场的相干性只需讨论二阶矩就可以了.

为了讨论一个具有有限带宽和有限大小的光源发出的光场的相干性问题,就是要确定光场中两个不同点P_1和P_2,相对时间延迟为τ的相关性.我们可以把光场中的两点P_1和P_2看作次波源,考察它们发出的两束光波在空间另一点Q的干涉现象.时间变量τ可以通过光程差(P_2Q-P_1Q)的形式体现出来.在时空坐标系中研究两个时空点的相关性,转化为在空间坐标系中研究三个点的相关性问题.

4.2.1 互相干函数

如图4.2.1所示,假定有一个有限带宽的扩展光源S,由它发出的光照射不透明屏上的两个针孔P_1和P_2,在远离它的观察屏上的Q点附近观察两光波叠加的结果.设针孔P_1和P_2到观察点Q的距离分别为r_1和r_2,t时刻P_1和P_2点的光振动分别用解析信号$\boldsymbol{u}(P_1,t)$和$\boldsymbol{u}(P_2,t)$表示.t时刻Q点的光振动是两个光波叠加的结果,即

$$\boldsymbol{u}(Q,t)=\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{u}(P_1,t-t_1)+\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{u}(P_2,t-t_2)\tag{4.2.1}$$

式中,$t_1=r_1/c$,$t_2=r_2/c$,c是真空中的光速.$\boldsymbol{K}_1$和$\boldsymbol{K}_2$称为传播因子,它们分别与r_1和r_2成反比,与

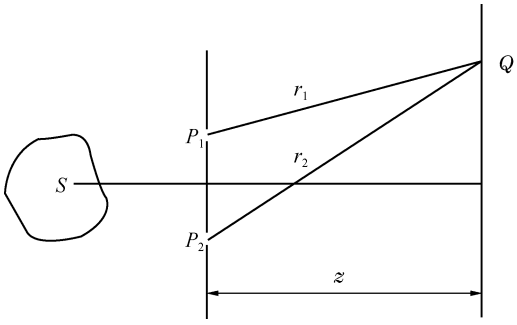


图4.2.1 扩展光源的杨氏干涉实验

针孔的大小及实验的几何布局（P_1 和 P_2 点处的入射角和衍射角）有关.对于窄带光,针孔足够小,根据惠更斯-菲涅耳原理的数学表达式(2.1.7)式可知 $\boldsymbol{K}_1$ 和 $\boldsymbol{K}_2$ 是一个纯虚数.

由于探测器的响应时间比相干时间长得多,在 Q 点探测到的光强是一个时间平均值

$$I(Q)=\langle \boldsymbol{u}(Q,t)\boldsymbol{u}^{*}(Q,t)\rangle \tag{4.2.2}$$

式中,角括号表示时间平均,即

$$\langle f(t)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(t)\mathrm{d}t$$

把(4.2.1)式代入(4.2.2)式,得到

$$\begin{aligned}I(Q)=&K_1^2\langle \boldsymbol{u}(P_1,t-t_1)\boldsymbol{u}^{*}(P_1,t-t_1)\rangle+K_2^2\langle \boldsymbol{u}(P_2,t-t_2)\boldsymbol{u}^{*}(P_2,t-t_2)\rangle\\&+K_1K_2\langle \boldsymbol{u}(P_1,t-t_1)\boldsymbol{u}^{*}(P_2,t-t_2)\rangle+K_1K_2\langle \boldsymbol{u}^{*}(P_1,t-t_1)\boldsymbol{u}(P_2,t-t_2)\rangle\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

假定光场是平稳的,其统计性质不随时间改变,互相关函数只与时间差 $\tau=t_2-t_1=(r_2-r_1)/c$ 有关.若光场还是各态历经的,则时间互相关函数等于统计互相关函数.因此得出

$$\langle \boldsymbol{u}(P_1,t-t_1)\boldsymbol{u}^{*}(P_2,t-t_2)\rangle=\langle \boldsymbol{u}(P_1,t+\tau)\boldsymbol{u}^{*}(P_2,t)\rangle=\Gamma_{12}(\tau) \tag{4.2.4}$$

式中 $\Gamma_{12}(\tau)$称为光场的互相干函数.显然

$$\langle \boldsymbol{u}^{*}(P_1,t-t_1)\boldsymbol{u}(P_2,t-t_2)\rangle=\langle \boldsymbol{u}(P_1,t+\tau)\boldsymbol{u}^{*}(P_2,t)\rangle^{*}=\Gamma_{12}^{*}(\tau) \tag{4.2.5}$$

当 P_1 与 P_2 点重合时,该点光振动的自相干函数为

$$\langle \boldsymbol{u}(P_1,t+\tau)\boldsymbol{u}^{*}(P_1,t\rangle=\Gamma_{11}(\tau) \tag{4.2.6}$$

或

$$\langle \boldsymbol{u}(P_2,t+\tau)\boldsymbol{u}^{*}(P_2,t\rangle=\Gamma_{22}(\tau) \tag{4.2.7}$$

这里把 $\Gamma_{11}(\tau)$或 $\Gamma_{22}(\tau)$称为光场的自相干函数.由于自相干函数只涉及一个空间点,仅仅是时间差 τ 的函数,在不致引起混淆的情况下,可以不再写下标而记为 $\Gamma(\tau)$.当 $\tau=0$ 时有

$$\langle \boldsymbol{u}(P_1,t-t_1)\boldsymbol{u}^{*}(P_1,t-t_1)\rangle=\langle \boldsymbol{u}(P_1,t)\boldsymbol{u}^{*}(P_1,t)\rangle=\Gamma_{11}(0) \tag{4.2.8}$$

$$\langle \boldsymbol{u}(P_2,t-t_2)\boldsymbol{u}^{*}(P_2,t-t_2)\rangle=\langle \boldsymbol{u}(P_2,t)\boldsymbol{u}^{*}(P_2,t)\rangle=\Gamma_{22}(0) \tag{4.2.9}$$

显然,$\Gamma_{11}(0)=I_1$ 和 $\Gamma_{22}(0)=I_2$ 分别是 P_1 点和 P_2 点的光强.单孔 P_1 和 P_2 分别在 Q 点产生的光强为

$$I_1(Q)=K_1^2\Gamma_{11}(0)=K_1^2I_1 \tag{4.2.10}$$

$$I_2(Q)=K_2^2\Gamma_{22}(0)=K_2^2I_2 \tag{4.2.11}$$

于是,(4.2.3)式可简化为

$$\begin{aligned}I(Q)&=I_1(Q)+I_2(Q)+K_1K_2[\Gamma_{12}(\tau)+\Gamma_{12}^{*}(\tau)]\\&=I_1(Q)+I_2(Q)+2K_1K_2\mathrm{Re}\{\Gamma_{12}(\tau)\}\end{aligned} \tag{4.2.12}$$

在许多情况下,用归一化互相干函数处理问题,比用互相干函数本身更为方便,于是有

$$\gamma_{12}(\tau)=\frac{\Gamma_{12}(\tau)}{[\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)]^{1/2}}=\frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{I_1I_2}} \tag{4.2.13}$$

我们称这个归一化互相干函数 $\gamma_{12}(\tau)$为复相干度.(4.2.12)式最终表示为

$$I(Q)=I_1(Q)+I_2(Q)+2\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)}\mathrm{Re}\{\gamma_{12}(\tau)\} \tag{4.2.14}$$

上式正是平稳光场的普遍干涉定律.利用许瓦兹不等式易于证明

$$|\Gamma_{12}(\tau)|\leqslant[\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)]^{1/2} \tag{4.2.15}$$

再由(4.2.13)式可得

$$0\leqslant|\gamma_{12}(\tau)|\leqslant1 \tag{4.2.16}$$

从(4.2.14)式出发可将 $\gamma_{12}(\tau)$与 Q 点的干涉条纹可见度联系起来.条纹可见度是针对正弦型条纹而言的,为此我们研究窄带光.对于平均频率为 $\bar{\nu}$ 的窄带光,可将互相干函数和复相干度分别表示为

$$\Gamma_{12}(\tau)=\Gamma_{12}(\tau)\exp\{j[2\pi\bar{\nu}\tau+\alpha_{12}(\tau)]\} \tag{4.2.17}$$

$$\gamma_{12}(\tau)=\gamma_{12}(\tau)\exp\{j[2\pi\bar{\nu}\tau+\alpha_{12}(\tau)]\} \tag{4.2.18}$$

式中 $\gamma_{12}(\tau)=|\gamma_{12}(\tau)|$为 $\gamma_{12}(\tau)$的模.于是(4.2.14)式可写为

$$I(Q)=I_1(Q)+I_2(Q)+2\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)}\gamma_{12}(\tau)\cos[\alpha_{12}(\tau)+2\pi\bar{\nu}\tau] \tag{4.2.19}$$

或者写成

$$I(Q)=I_1(Q)+I_2(Q)+2\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)}\gamma_{12}(\tau)\cos[\alpha_{12}(\tau)+\delta] \tag{4.2.20}$$

式中

$$\delta=2\pi\bar{\nu}\tau=\frac{2\pi}{\bar{\lambda}}(r_2-r_1)$$

为光波从两针孔 P_1 和 P_2 到达 Q 点的相位差,与光源性质无关.$\bar{\lambda}$ 为平均波长,$\alpha_{12}(\tau)$为两光波在 P_1 和 P_2 点的相位差,与光源性质有关.当 $\gamma_{12}(\tau)$取最大值 1 时,Q 点的光强与频率为 $\bar{\nu}$ 的单色光波在该点叠加所产生的干涉结果相同,P_1 和 P_2 点的光振动是相干的.当 $\gamma_{12}(\tau)$取最小值零时,Q 点的光强为两光束光波在 Q 点产生的光强的简单相加,因此 P_1 和 P_2 点的振动是不相干的.当 $0<\gamma_{12}(\tau)<1$ 时,P_1 和 P_2 点的光振动是部分相干的.

光场的相干性质,可通过实验测定干涉条纹的清晰度或可见度来确定.对于正弦型条纹,迈克尔逊定义的干涉条纹可见度为

$$V=\frac{I_{\max}-I_{\min}}{I_{\max}+I_{\min}} \tag{4.2.21}$$

式中,$I_{\max}$和 $I_{\min}$分别是 Q 点附近干涉条纹的极大和极小强度值.由(4.2.20)式可得

$$I_{\max}=I_1(Q)+I_2(Q)+2\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)}\gamma_{12}(\tau)$$

$$I_{\min}=I_1(Q)+I_2(Q)-2\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)}\gamma_{12}(\tau)$$

于是

$$V=\frac{2\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)}}{I_1(Q)+I_2(Q)}\gamma_{12}(\tau) \tag{4.2.22}$$

上式表明,只要测出两光束在 Q 点产生的光强及干涉条纹的可见度,就可得到复相干度的模 $\gamma_{12}(\tau)$.我们从普物光学中知道,由 P_1 和 P_2 发出的两单色光波在 Q 点形成的干涉条纹可见度的表达式为

$$V=\frac{2\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)}}{I_1(Q)+I_2(Q)} \tag{4.2.23}$$

所以 $\gamma_{12}(\tau)$的物理意义为:在 Q 点附近的干涉条纹的可见度达到了当 P_1 和 P_2 点完全相干时的多大程度.

$\gamma_{12}(\tau)$的辐角$[\alpha_{12}(\tau)+\delta]$也有明显的物理意义.其中第二项是光波从 P_1 和 P_2 点到达观察点 Q 所引进的相位延迟,与光源性质无关.而第一项 $\alpha_{12}(\tau)$是由光源面上各点发出的光场在 P_1 和 P_2 点造成的相位差,与光源性质有关,称为有效相位延迟.根据杨氏干涉实验,相位延迟 2π,相当于干涉图在平行于 P_1P_2 方向上移动 $\bar{\lambda}z/d$.因此,相对于 P_1 和 P_2 处单色及同相位照明所形成的干涉条纹,窄带光条纹在平行于双孔连线方向上有一位移量 Δ_1,它与 $\alpha_{12}(\tau)$有如下关系

$$\frac{\alpha_{12}(\tau)}{2\pi}=\frac{\Delta_1}{\bar{\lambda}z/d}$$

即

$$\alpha_{12}(\tau)=\frac{2\pi d}{\bar{\lambda}z}\Delta_1 \tag{4.2.24}$$

于是两束窄带光的复相干度的相位可通过测量干涉条纹的位置来确定.

当两束光波在 Q 点的强度相等,即 $I_1(Q)=I_2(Q)$,复相干度的模就等于干涉条纹的可见度

$$\gamma_{12}(\tau)=V \tag{4.2.25}$$

4.2.2 互相干函数的谱表示

为了保证能进行傅里叶变换,定义的截尾函数 $\boldsymbol{u}_T(P_1,t)$

$$\boldsymbol{u}_T(P_1,t)=\begin{cases}\boldsymbol{u}(P_1,t), & |t|\leqslant T\\ 0, & |t|>T\end{cases} \tag{4.2.26}$$

$\boldsymbol{u}_T(P_1,t)$是与 $u_T^{\mathrm{r}}(P_1,t)$相应的解析信号.由(4.1.8)式得

$$\boldsymbol{u}_T(P_1,t)=\int_0^{\infty} U_T(P_1,\nu)\exp(\mathrm{j}2\pi\nu t)\mathrm{d}\nu \tag{4.2.27}$$

式中,$U_T(P_1,\nu)=2U_T^{\mathrm{r}}(P_1,\nu)$.类似有

$$\boldsymbol{u}_T(P_2,t)=\int_0^{\infty} U_T(P_2,\nu)\exp(\mathrm{j}2\pi\nu t)\mathrm{d}\nu \tag{4.2.28}$$

于是互相干函数可以写为

$$\Gamma_{12}(\tau)=\langle\boldsymbol{u}(P_1,t+\tau)\boldsymbol{u}^{*}(P_2,t)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{u}_T(P_1,t+\tau)\boldsymbol{u}_T^{*}(P_2,t)\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}U_T(P_1,\nu)U_T^{*}(P_2,\nu')\cdot\exp[\mathrm{j}2\pi(\nu-\nu')t]\cdot\exp(\mathrm{j}2\pi\nu\tau)\mathrm{d}\nu\mathrm{d}\nu'$$

由于

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp[\mathrm{j}2\pi(\nu-\nu')t]\mathrm{d}t=\delta(\nu-\nu')$$

于是有

$$\Gamma_{12}(\tau)=\int_0^{\infty}G_{12}(\nu)\exp(\mathrm{j}2\pi\nu\tau)\mathrm{d}\nu \tag{4.2.29}$$

式中

$$G_{12}(v)=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{U_T(P_1,\nu)U_T^{*}(P_2,\nu)}{2T}\right] \tag{4.2.30}$$

称为互谱密度.对于自相干函数,类似有

$$\Gamma(\tau)=\int_0^{\infty}G(\nu)\exp(\mathrm{j}2\pi\nu\tau)\mathrm{d}\nu \tag{4.2.31}$$

式中,$G(\nu)$为辐射场的功率谱密度函数,也就是光源的光谱分布,其定义为

$$G(\nu)=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{U_T(P,\nu)U_T^{*}(P,\nu)}{2T}\right]=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{|U_T(P,\nu)|^2}{2T}\right] \tag{4.2.32}$$

(4.2.31)式所表示的自相关函数与功率谱密度之间的关系,正是大家所熟知的自相关定理.

对于复相干度也有类似的关系

$$\gamma_{12}(\tau)=\int_0^{\infty}\hat{G}_{12}(\nu)\exp(\mathrm{j}2\pi\nu\tau)\mathrm{d}\nu \tag{4.2.33}$$

式中,归一化互谱密度函数$\hat{G}_{12}(\nu)$为

$$\hat{G}_{12}(\nu)=\frac{G_{12}(\nu)}{[\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)]^{1/2}} \tag{4.2.34}$$

相应地有

$$\gamma(\tau)=\int_0^{\infty}\hat{G}(\nu)\exp(\mathrm{j}2\pi\nu\tau)\mathrm{d}\nu \tag{4.2.35}$$

式中

$$\hat{G}(\nu)=\frac{G(\nu)}{\Gamma(0)} \tag{4.2.36}$$

称为归一化功率谱密度函数,显然

$$\int_0^\infty \hat{G}(\nu)\mathrm{d}\nu = 1 \tag{4.2.37}$$

4.3 时间相干性

在杨氏干涉实验的一般讨论中,空间相干性和时间相干性都起作用.如果在图 4.2.1 中的初级光源 S 为一个位于轴上的、具有有限带宽的点光源,那么时间相干性将是主要的.这时 P_1 和 P_2 点处的光扰动将相同,两点间的互相干函数将变成自相干函数,即 $\Gamma_{12}(\tau)=\Gamma_{11}(\tau)=\Gamma(\tau)$,$\gamma_{12}(\tau)=\gamma_{11}(\tau)=\gamma(\tau)$.如果 S 是一个窄带扩展光源,那么空间相干性效应将是主要的.这时 P_1 和 P_2 点的光扰动是不相同的,干涉条纹将取决于 $\Gamma_{12}(\tau)$,通过考察中心条纹附近的区域($r_2-r_1=0$,$\tau=0$)可以决定 $\Gamma_{12}(0)$和 $\gamma_{12}(0)$.实际上 $\gamma_{12}(0)$是 P_1 和 P_2 两个点在同一时刻的复相干度,即空间相干度.下面将分别对时间相干性和空间相干性加以研究,本节先对时间相干性进行讨论.

4.3.1 时间相干性

在理想的单色光场中,空间任一点 P 的振动,振幅不变而相位随时间做线性变化.在实际光源所产生的光场中,情况就不是这样了,场中 P 点的振幅和相位都在随机地涨落,其涨落速度基本上取决于光源的有效频谱宽度 $\Delta\nu$,只有当时间间隔 τ 比 $1/\Delta\nu$ 小得多时,振幅才大体上保持不变.在这样一个时间间隔内,任何两个分量的相对相位变化都比 2π 小得多,并且这些分量的叠加所代表的扰动在这个时间间隔内的表现,就像平均频率为 $\bar{\nu}$ 的单色光波一样,由 $\tau_c=1/\Delta\nu$ 所决定的时间称为相干时间,而 $l_c=c\tau_c$ 称为相干长度.相干时间大体上就是我们可以预言光波在某一空间给定点 P 的相位的那段时间间隔,这就是时间相干性的意思.也就是说,如果 τ_c 大,光波就有高的时间相干性,反之则时间相干性小.

同一特性可用不同的观点来解释.为此我们设想在一窄带点光源的半径上有两个分开的点 P_1 和 P_2,若相干长度 l_c 比两点间距 r_{12} 大得多,那么单个波列可以伸展在这个区间上,于是 P_1 点的振动和 P_2 点的振动是高度相关的.反之若 r_{12} 比 l_c 大得多,那么在距离 r_{12} 内会排下许多个波列,每个波列的相位都是不相关的.在这种情况下,空间两点的振动在任何时刻都是彼此无关的.相关的程度有时换个说法叫做纵向相关性的大小.不论我们用相干时间 τ_c 或用相干长度 l_c 来思维,这个效应都是由光波的有效带宽引起的.

通过考察迈克耳孙干涉仪中光波的干涉可以更精确地描述和定义时间相干性.在图 4.3.1 所示的迈克耳孙干涉仪中,由点光源 S 发出的光束通过分束器 B 分成两支,一支反射到可动反射镜 M_1,经 M_1 反射后又折回而到达探测器 D 上.另一支透过 B 和补偿板 C 射到固定反射镜 M_2 上,再经 M_2 反射后折回也到达探测器 D.当然,实际系统可加入准直透镜和会聚透镜等光学元件以改善性能.探测器位于干涉场内,这样一来,入射到探测器上的光强取决于干涉仪两支光路中的光的干涉,补偿板 C 的作用是保证光在干涉仪的两支光路中通过玻璃的光程相同.

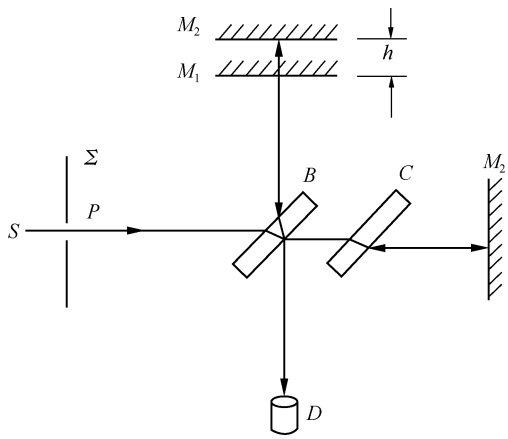


图 4.3.1 迈克耳孙干涉仪示意图

如果可动反射镜 M_1 从两支光路等光程的位置开始移动,其效果就是在两支光路中引入了一个相对时间延迟.反射镜每移动 $\lambda/2$(光程差为 λ),入射到探测器上的光强变化一个周期.由于光源具有一定的光谱宽度,而不是理想单色光,如两支光路的光程差超过一定范围,干涉条纹的可见度下降到零.对于某些特种光源,当继续移动 M_1 加大程差,又能产生干涉条纹,只不过可见度已很小了.下面把光信号用解析信号构成的随机过程表示,对迈克耳孙干涉实验做出理论解释.

在迈克耳孙干涉仪中,光源 S 发出波场,我们研究空间 P 点场的时间相干性.为此,用一屏 Σ 挡住光场只露出 P 点.从 P 点发出的光波分别经干涉仪的两臂而到达 D 点相互干涉,用探测器 D 读出光强.设两臂之差为 h,则两光路光程之差为 $2h$.这就相当于把 t 时刻 P 点的场与 $(t+2h/c)$ 时刻 P 点的场二者进行了叠加,即同一点不同时刻的场发生干涉.移动 M_1 就相当于改变 $\tau=2h/c$,于是可对任何 τ 进行测量.

我们把光源发出的光信号用解析信号构成的随机过程来表示.我们用 $\boldsymbol{u}(t)$ 表示由 P 点发出的解析信号,由于 P 点位置固定,故可将 P 点的场写成只含时间变量的函数.$\boldsymbol{u}(t)$ 经分束器后通过两支光路而到达探测器 D.在 D 处的两束光的解析信号为 $K_1\boldsymbol{u}(t)$ 和 $K_2\boldsymbol{u}(t+\tau)$.这里的 K_1 和 K_2 是两支光路的透过率所决定的实数,$\tau=2h/c$ 是时间延迟.探测器上的合成解析信号为

$$\boldsymbol{u}_D(t)=K_1\boldsymbol{u}(t)+K_2\boldsymbol{u}(t+\tau) \tag{4.3.1}$$

探测器 D 只对照射到它上面的光强产生响应,其响应时间是比较长的.我们仍用 $\langle\cdot\rangle$ 表示对时间求平均,则入射到探测器上的光强可表示为

$$\begin{aligned} I_D&=\langle \boldsymbol{u}_D(t)\boldsymbol{u}_D^*(t)\rangle=\langle|K_1\boldsymbol{u}(t)+K_2\boldsymbol{u}(t+\tau)|^2\rangle \\ &=K_1^2\langle|\boldsymbol{u}(t)|^2\rangle+K_2^2\langle|u(t+\tau)|^2\rangle+K_1K_2\langle\boldsymbol{u}(t+\tau)\boldsymbol{u}^*(t)\rangle+K_1K_2\langle\boldsymbol{u}^*(t+\tau)\boldsymbol{u}(t)\rangle \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

假设光场是平稳的和各态历经的,统计量的平均与时间原点无关,时间平均与统计平均相同.则由 P 点发出的光强 I_0 为

$$I_0=\langle|\boldsymbol{u}(t)|^2\rangle=\langle|\boldsymbol{u}(t+\tau)|^2\rangle \tag{4.3.3}$$

解析信号 $\boldsymbol{u}(t)$ 的自相关函数 $\Gamma(\tau)$ 称为光扰动的自相干函数,在各态历经条件假设下可用时间平均代替,即

$$\Gamma(\tau)=\langle\boldsymbol{u}(t+\tau)\boldsymbol{u}^*(t)\rangle \tag{4.3.4}$$

将(4.3.4)式和(4.3.3)式代入(4.3.2)式得

$$I_D=(K_1^2+K_2^2)I_0+K_1K_2[\Gamma(\tau)+\Gamma^*(\tau)]=(K_1^2+K_2^2)I_0+2K_1K_2\mathrm{Re}\{\Gamma(\tau)\} \tag{4.3.5}$$

注意到 $I_0=\Gamma(0)$,我们用它来规化,于是得复相干度

$$\gamma(\tau)=\frac{\Gamma(\tau)}{\Gamma(0)} \tag{4.3.6}$$

显然

$$\gamma(0)=1,\quad 0\leqslant|\gamma(\tau)|\leqslant 1 \tag{4.3.7}$$

这样一来,(4.3.5)式可写成

$$I_D(\tau)=(K_1^2+K_2^2)I_0+2K_1K_2I_0\mathrm{Re}\{\gamma(\tau)\} \tag{4.3.8}$$

若认为两路光的透过率相等,即 $K_1=K_2=K$,更进一步若不考虑吸收,则 $K=1$,于是(4.3.5)式和(4.3.8)式分别简化成

$$I_D(\tau)=2I_0+2\mathrm{Re}\{\Gamma(\tau)\} \tag{4.3.9}$$

$$I_D(\tau)=2I_0\{1+\mathrm{Re}[\gamma(\tau)]\} \tag{4.3.10}$$

由于 $\boldsymbol{u}(t)$是解析信号,于是它的自相关函数 $\Gamma(\tau)$也是具有单边频谱的信号.当然复相干度 $\gamma(\tau)$也是一个解析信号,也具有单边频谱.我们曾用$\hat{G}(\nu)$表示与其对应的归一化功率谱密度,它与 $\gamma(\tau)$构成一对傅里叶变换,即

$$\gamma(\tau)=\int_0^{\infty}\hat{G}(\nu)\exp(\mathrm{j}2\pi\nu\tau)\mathrm{d}\nu \tag{4.3.11}$$

对于窄带光,$\gamma(\tau)$可以写成

$$\gamma(\tau)=\gamma(\tau)\exp\{\mathrm{j}[2\pi\bar{\nu}\tau+\alpha(\tau)]\} \tag{4.3.12}$$

式中,$\bar{\nu}$是光波的中心频率.于是(4.3.10)式写成

$$I_D(\tau)=2I_0\{1+\gamma(\tau)\cos[2\pi\bar{\nu}\tau+\alpha(\tau)]\} \tag{4.3.13}$$

由(4.3.5)式所表示的干涉图的条纹可见度为

$$V=\frac{2K_1K_2}{K_1^2+K_2^2}\gamma(\tau) \tag{4.3.14}$$

当两支光路透射系数相等时,可见度为

$$V=\gamma(\tau) \tag{4.3.15}$$

例 4.3.1 对于一个低气压气体放电灯来说,单一谱线的功率谱形状主要是由多普勒加宽所确定的.在这种情况下谱线的轮廓接近于高斯型,即

$$\hat{G}(v)=\frac{2\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\pi}\Delta\nu}\exp\left[-\left(2\sqrt{\ln 2}\,\frac{\nu-\bar{\nu}}{\Delta\nu}\right)^2\right] \tag{4.3.16}$$

式中,$\Delta\nu$是半功率带宽,如图 4.3.2(a)所示.由(4.3.11)式可求得复相干度 $\gamma(\tau)$为

$$\gamma(\tau)=\int_0^{\infty}\frac{2\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\pi}\Delta\nu}\exp\left[-\left(2\sqrt{\ln 2}\,\frac{\nu-\bar{\nu}}{\Delta\nu}\right)^2\right]\exp(\mathrm{j}2\pi\nu\tau)\mathrm{d}\nu$$

令 $\nu'=\nu-\bar{\nu}$可将上式化为

$$\begin{aligned}\gamma(\tau)&=\int_{-\bar{\nu}}^{\infty}\frac{2\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\pi}\Delta\nu}\exp\left[-\left(2\sqrt{\ln 2}\,\frac{\nu'}{\Delta\nu}\right)^2\right]\exp[\mathrm{j}2\pi(\nu'+\bar{\nu})\tau]\mathrm{d}\nu'\\&\approx\exp(\mathrm{j}2\pi\bar{\nu}\tau)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\pi}\Delta\nu}\exp\left[-\left(2\sqrt{\ln 2}\,\frac{\nu'}{\Delta\nu}\right)^2+\mathrm{j}2\pi\nu'\tau\right]\mathrm{d}\nu'\\&=\exp\left[-\left(\frac{\pi\Delta\nu\tau}{2\sqrt{\ln 2}}\right)^2\right]\exp(\mathrm{j}2\pi\bar{\nu}\tau)\end{aligned} \tag{4.3.17}$$

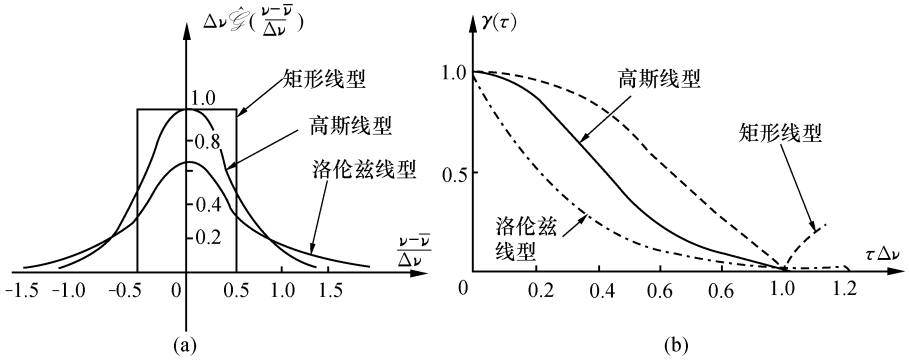


图 4.3.2 三种典型光源的$\hat{G}(\nu)$和 $\gamma(\tau)$

在上面的运算中，由于 $\bar{\nu}$ 很大，故下限用 $-\infty$ 代替．最后一步利用了积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-Ax^2\pm 2Bx-C)\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{A}}\exp\left(-\frac{AC-B^2}{A}\right) \tag{4.3.18}$$

将(4.3.17)式与(4.3.12)式比较可知

$$\gamma(\tau)=\exp\left[-\left(\frac{\pi\Delta\nu\tau}{2\sqrt{\ln 2}}\right)^2\right],\quad \alpha(\tau)=0 \tag{4.3.19}$$

$\gamma(\tau)$ 随 τ 变化的曲线如图 4.3.2(b)所示．

例 4.3.2 对于高气压气体放电灯，谱线形状主要是碰撞加宽，线形为洛伦兹线型，即

$$\hat{G}(\nu)=\frac{2\pi\Delta\nu}{[2\pi(\nu-\bar{\nu})]^2+(\pi\Delta\nu)^2} \tag{4.3.20}$$

其中，$\bar{\nu}$ 是谱线的中心频率，$\Delta\nu$ 是它的半功率带宽，如图 4.3.2(a)所示．相应的复相干度为

$$\gamma(\tau)=\int_0^{\infty}\frac{2\pi\Delta\nu}{[2\pi(\nu-\bar{\nu})]^2+(\pi\Delta\nu)^2}\exp(\mathrm{j}2\pi\nu\tau)\mathrm{d}\nu$$

令 $\nu'=\nu-\bar{\nu}$ 可将上式化为

$$\gamma(\tau)=\exp(\mathrm{j}2\pi\bar{\nu}\tau)\int_{-\bar{\nu}}^{\infty}\frac{2\pi\nu}{(\pi\Delta\nu)^2+(2\pi\nu')^2}\exp(\mathrm{j}2\pi\nu'\tau)\mathrm{d}\nu'$$

$$\approx\exp(\mathrm{j}2\pi\bar{\nu}\tau)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\pi\Delta\nu}{(\pi\Delta\nu)^2+(2\pi\nu')^2}\exp(\mathrm{j}2\pi\nu'\tau)\mathrm{d}\nu'$$

利用傅里叶变换对

$$F\{\exp(-\beta|t|)\}=\frac{2\beta}{\beta^2+(2\pi\nu)^2}$$

可由上式得出

$$\gamma(\tau)=\exp(-\pi\Delta\nu|\tau|)\exp(\mathrm{j}2\pi\bar{\nu}\tau) \tag{4.3.21}$$

由此可得

$$\gamma(\tau)=\exp(-\pi\Delta\nu|\tau|),\quad \alpha(\tau)=0 \tag{4.3.22}$$

$\gamma(\tau)$ 的图形如图 4.3.2(b)所示．

例 4.3.3 在理论分析中，假设一个矩形功率谱的密度是很方便的，即

$$\hat{G}(\nu)=\frac{1}{\Delta\nu}\mathrm{rect}\left(\frac{\nu-\bar{\nu}}{\Delta\nu}\right) \tag{4.3.23}$$

其相应的复相干度为

$$\gamma(\tau)=\mathrm{sinc}(\Delta\nu\tau)\exp(\mathrm{j}2\pi\bar{\nu}\tau) \tag{4.3.24}$$

在这种情况下

$$\gamma(\tau)=|\mathrm{sinc}(\Delta\nu\tau)| \tag{4.3.25}$$

而相位 $\alpha(\tau)$ 并不是对所有的 τ 都为零，更准确地说，当我们从 sinc 函数的一瓣到另一瓣时，$\alpha(\tau)$ 在 0 和 π 之间跳跃：

$$\alpha(\tau)=\left\{\begin{array}{ll}0, & 2n<|\Delta\nu\tau|<2n+1\\ \pi, & 2n+1<|\Delta\nu\tau|<2n+2\end{array}\right\} \tag{4.3.26}$$

它的归一化功率谱 $\hat{G}(\nu)$ 和相应的复相干度 $\gamma(\tau)$ 如图 4.3.2 所示．

在以上的三个例子中，复相干度均被表示成 $\exp(\mathrm{j}2\pi\bar{\nu}\tau)$ 与一个实数因子的乘积．这个性质是我们选择了谱线形状是 $(\nu-\bar{\nu})$ 的偶函数的结果(即对于 $\bar{\nu}$ 对称)．否则 $\gamma(\tau)$ 应是 $\exp(\mathrm{j}2\pi\bar{\nu}\tau)$ 与一个复函数的乘积．

4.3.2 相干时间

在许多应用中,希望对相干时间有一个精确定义.可以借用复相干度来定义相干时间,但是借助复相干度定义相干时间的方法很多.按照曼德尔(L.Mandel)的意见,将相干时间 τ_c 定义为

$$\tau_c=\int_{-\infty}^{\infty}|\gamma(\tau)|^2\mathrm{d}\tau \tag{4.3.27}$$

如果这个定义有意义,则要求 τ_c 具有与 $1/\Delta\nu$ 有相同的数量级.事实确是如此,只要将(4.3.17)式、(4.3.21)式和(4.3.24)式代入(4.3.27)式便会得出相应的结果.

高斯线型 $$\tau_c=\sqrt{\frac{2\ln 2}{\pi}}\frac{1}{\Delta\nu}\approx 0.664\frac{1}{\Delta\nu} \tag{4.3.28}$$

洛伦兹线型 $$\tau_c=\frac{1}{\pi\Delta\nu}\approx 0.318\frac{1}{\Delta\nu} \tag{4.3.29}$$

矩形线型 $$\tau_c=\frac{1}{\Delta\nu} \tag{4.3.30}$$

但是在一般的应用中常用(4.3.30)式的结果来估计相干时间.

4.3.3 傅里叶变换光谱术

如果光波的功率谱密度已知,由迈克耳孙干涉仪观察到的干涉图的特征就可完全确定.利用干涉图和功率谱密度之间的这一关系,通过测量干涉图来确定未知的入射光的功率谱密度.这个原理就是傅里叶变换光谱术的基础.

由傅里叶变换光谱术得到光谱,首先必须测量干涉图.通常是在干涉仪的控制下,可动反射镜从零程差的位置移到大程差的范围内,将光强作为这个过程的时间函数进行测量.同时,把所得到的干涉图数字化,这可利用快速傅里叶变换技术,由数字傅里叶变换得到光谱.

在迈克耳孙干涉实验中,D 点光强随反射镜 M_1 移动而发生变化,为简单起见,在(4.3.5)式中令 $K_1=K_2=K=1$,于是

$$I_D(\tau)=2I_0+\Gamma(\tau)+\Gamma^*(\tau) \tag{4.3.31}$$

即

$$\begin{aligned}I(\tau)&=I_D(\tau)-2I_0=\Gamma(\tau)+\Gamma^*(\tau)\\&=\int_0^{\infty}G(\nu)\exp(\mathrm{j}2\pi\nu\tau)\mathrm{d}\nu+\int_0^{\infty}G^*(\nu)\exp(-\mathrm{j}2\pi\nu\tau)\mathrm{d}\nu\\&=2\int_0^{\infty}G(\nu)\cos(2\pi\nu\tau)\mathrm{d}\nu\end{aligned} \tag{4.3.32}$$

其中利用了功率谱为实函数的性质,即 $G(\nu)=G^*(\nu)$.由于在迈克耳孙干涉仪中将 τ 换为 $-\tau$ 时,干涉强度不变,所以 $I_D(\tau)$ 是 τ 的偶函数,因而 $I(\tau)$ 也是 τ 的偶函数.实偶函数的傅里叶变换也是实偶函数,由实偶函数的余弦变换性质,由(4.3.32)式得出

$$G(\nu)=2\int_0^{\infty}I(\tau)\cos(2\pi\nu\tau)\mathrm{d}\tau \tag{4.3.33}$$

用迈克耳孙干涉仪记录下 $I(\tau)$,再借助于傅里叶余弦变换就可获得光源的光谱分布,这种方法称为傅里叶变换光谱术.当然,傅里叶光谱术不是一种直接的方法.根据色散原理,用一个普通的棱镜光谱仪或光栅光谱仪也可直接得到光源的光谱.但这种方法有一个缺点,即在每一波长位置上只能接收光源总能量的极小一部分(该波长所含的那部分).这一缺点对于微弱光源(比如某些红外信号测量)成为严重问题.而在傅里叶变换光谱术中,探测器在任何时刻接收的都是光源全波段所有波场联合作用的结果,因而充分利用了光源能量.另外,傅里叶变换光谱术有更高的分

辨率,它决定于可动反射镜的最大移动距离.正是由于这些优点,傅里叶变换光谱术已成为从近红外到远红外甚至毫米波区最有力的光谱分析方法,广泛用于物质结构、天体物理、工业检测、环境监护等许多领域.

4.4 空间相干性

我们曾指出,在杨氏干涉实验的一般性讨论中,时间相干性和空间相干性都起作用.如果在图 4.2.1 中,S 是一个窄带扩展光源,那么空间相干效应将是主要的.这时 P_1 和 P_2 点的光扰动是不相同的,干涉条纹将取决于 $\Gamma_{12}(\tau)$,通过考察中心条纹附近区域($r_2-r_1=0$,$\tau=0$)可以决定 $\Gamma_{12}(0)$和 $\gamma_{12}(0)$.实际上 $\gamma_{12}(0)$是 P_1 和 P_2 两个点在同一时刻的复相干度.因此在零程差位置形成干涉条纹的能力反映了空间相干效应.

当图 4.2.1 中的 Q 点移向 O 点时,在(4.2.4)式和(4.2.13)式中令 $\tau=0$ 得

$$\Gamma_{12}(0)=\langle \boldsymbol{u}(P_1,t)\boldsymbol{u}^{*}(P_2,t)\rangle \tag{4.4.1}$$

$$\gamma_{12}(0)=\frac{\Gamma_{12}(0)}{[\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)]^{1/2}}=\frac{\Gamma_{12}(0)}{\sqrt{I_1 I_2}} \tag{4.4.2}$$

$\Gamma_{12}(0)$称为空间互相干函数,$\gamma_{12}(0)$称为复(空间)相干度,它们描述在同一时刻 t,光场中两点的空间相干性,它一般是复数,可写成

$$\Gamma_{12}(0)=\Gamma_{12}(0)\exp[\mathrm{j}\alpha_{12}(0)] \tag{4.4.3}$$

$$\gamma_{12}(0)=\gamma_{12}(0)\exp[\mathrm{j}\alpha_{12}(0)] \tag{4.4.4}$$

这时 Q 点的光强可表达成

$$I(Q)=I_1(Q)+I_2(Q)+2\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)}\gamma_{12}(0)\cos[\alpha_{12}(0)] \tag{4.4.5}$$

4.5 在准单色条件下的干涉

为了在杨氏干涉实验中将入射到观察点 Q 的场用针孔上的场(适当延迟)的加权和来简单表示,必须假定光是窄带的.其次假定光的相干长度远大于所涉及范围内的最大光程差.用数学表示窄带和小程差的条件就是

$$\Delta\nu\ll\bar{\nu},\quad \frac{r_2-r_1}{c}\ll\tau_c \tag{4.5.1}$$

满足条件(4.5.1)式的光称为准单色光.其中第二个条件的实质,是认为在感兴趣的观察范围内,条纹的可见度是一个常数.利用这个事实,就可简化互相干函数和复相干度的形式.

我们知道,两解析信号的互相关函数仍为解析信号,具有单边频谱,这就是(4.2.29)式所表示的关系,即

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}(\tau)&=\int_0^{\infty}G_{12}(\nu)\exp(\mathrm{j}2\pi\nu\tau)\mathrm{d}\nu\\&=\exp(\mathrm{j}2\pi\bar{\nu}\tau)\int_0^{\infty}G_{12}(\nu)\exp[\mathrm{j}2\pi(\nu-\bar{\nu})\tau]\mathrm{d}\nu\end{aligned} \tag{4.5.2}$$

考虑到第一个条件,在满足 $|\nu-\bar{\nu}|\ll\bar{\nu}$ 的频率范围内,$G_{12}(\nu)$才有明显不为零的值,或者说上式中对积分的主要贡献来自很窄的范围 $\Delta\nu$ 内.这个很窄的范围 $\Delta\nu$ 决定了相干时间,即 $\tau_c=1/\Delta\nu$.准单色的第二个条件 $(r_2-r_1)/c\ll\tau_c$ 即 $\tau\ll1/\Delta\nu$,也即 $\Delta\nu\tau\ll1$. 因此在这两个条件下,(4.5.2)式积分中的指数函数近似等于 1.因而有

$$\Gamma_{12}(\tau)=\exp(\mathrm{j}2\pi\bar{\nu}\tau)\int_0^{\infty}G_{12}(v)\mathrm{d}\nu=\exp(\mathrm{j}2\pi\bar{\nu}\tau)\Gamma_{12}(0) \tag{4.5.3}$$

由(4.4.3)式可知

$$\Gamma_{12}(0)=\Gamma_{12}(0)\exp[\mathrm{j}\alpha_{12}(0)] \tag{4.5.4}$$

令

$$\boldsymbol{J}_{12}=\Gamma_{12}(0),\quad \beta_{12}=\alpha_{12}(0) \tag{4.5.5}$$

则(4.5.4)式可写成

$$\boldsymbol{J}_{12}=J_{12}\exp(\mathrm{j}\beta_{12}) \tag{4.5.6}$$

我们称 $\boldsymbol{J}_{12}$ 为 P_1 和 P_2 点的互强度,表示 P_1 和 P_2 两点在相对时间延迟 $\tau=0$ 的情况下的互相关.于是(4.5.3)式所表示的 $\Gamma_{12}(\tau)$可写成

$$\Gamma_{12}(\tau)=\boldsymbol{J}_{12}\exp(\mathrm{j}2\pi\bar{\nu}\tau)=J_{12}\exp[\mathrm{j}(2\pi\bar{\nu}\tau+\beta_{12})] \tag{4.5.7}$$

此外

$$\begin{aligned}\gamma_{12}(\tau)&=\frac{\Gamma_{12}(\tau)}{[\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)]^{1/2}}=\frac{\Gamma_{12}(0)}{\sqrt{I_1I_2}}\exp(\mathrm{j}2\pi\bar{\nu}\tau)\\&=\frac{\boldsymbol{J}_{12}}{\sqrt{I_1I_2}}\exp(\mathrm{j}2\pi\bar{\nu}\tau)=\gamma_{12}(0)\exp(\mathrm{j}2\pi\bar{\nu}\tau)\\&=\mu_{12}\exp(\mathrm{j}2\pi\bar{\nu}\tau)\end{aligned} \tag{4.5.8}$$

式中

$$\mu_{12}=\gamma_{12}(0)=\mu_{12}\exp(\mathrm{j}\beta_{12}) \tag{4.5.9}$$

称为复相干系数.于是(4.5.8)式最后写成

$$\gamma_{12}(\tau)=\mu_{12}\exp[\mathrm{j}(2\pi\bar{\nu}\tau+\beta_{12})] \tag{4.5.10}$$

显然 μ_{12} 满足

$$0\leqslant|\mu_{12}|\leqslant 1 \tag{4.5.11}$$

这就是说,在准单色条件下互相干函数 $\Gamma_{12}(\tau)$和复相干度 $\gamma_{12}(\tau)$可以用(4.5.7)式和(4.5.10)式来表示.辐射场的干涉定律(4.2.14)式变成

$$I(Q)=I_1(Q)+I_2(Q)+2\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)}\mu_{12}\cos(\beta_{12}+2\pi\bar{\nu}\tau) \tag{4.5.12}$$

式中 β_{12}是与 τ无关的量.如果 $I_1(Q)$和 $I_2(Q)$在观察区内近似不变,在该区域干涉图样具有几乎恒定的可见度和相位.条纹可见度为

$$V=\frac{2\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)}}{I_1(Q)+I_2(Q)}\mu_{12} \tag{4.5.13}$$

若两支光路的光强相等,$I_1(Q)=I_2(Q)$,则

$$V=\mu_{12} \tag{4.5.14}$$

由(4.5.12)式可以看出,准单色光场的特点似乎类似于频率为 $\bar{\nu}$的严格单色光场.区别在于准单色光场的干涉条纹的可见度和位置分别决定于复相干度的模和相位.

4.6 准单色光的传播和衍射

4.6.1 互相干的传播

当光波在空间传播时,其详细结构会发生变化,互相干函数的详细结构也以同样的方式在变化,在这个意义上说互相干函数在传播.在这两种情况下,传播的最基本物理原因是基于光波本身服从波动方程.我们这里只给出在惠更斯-菲涅耳原理基础上的解.在讨论互相干函数

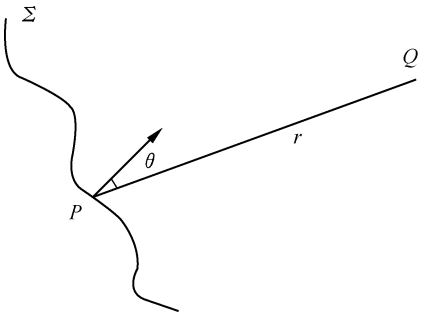


图 4.6.1 传播的空间几何关系

传播之前,引述一下非单色光场的衍射积分公式.

一个单色光波入射到一个无限大表面 Σ 上,如图 4.6.1 所示,我们希望借助于 Σ 上的光场表示出右边场中一点 Q 的复振幅.根据惠更斯-菲涅耳原理(2.1.7)式,可写出 Q 点的复振幅表达式

$$\boldsymbol{u}(Q)=\frac{1}{\mathrm{j}\lambda}\iint_{\Sigma}\boldsymbol{u}(P)K(\theta)\frac{\exp(\mathrm{j}2\pi r/\lambda)}{r}\mathrm{d}S \tag{4.6.1}$$

现在考虑入射到 Σ 面上的场是一个非单色光波,在 Σ 面上的光场分布为 $u(P,t)$,与其对应的解析信号为 $\boldsymbol{u}(P,t)$.Σ 面上的光场分布在其右边场中 Q 点处产生的光场用 $u(Q,t)$表示,其对应的解析信号为 $\boldsymbol{u}(Q,t)$,可以证明 $\boldsymbol{u}(Q,t)$可由 Σ 面上的场分布 $\boldsymbol{u}(P,t)$表示出来,即

$$\boldsymbol{u}(Q,t)=\iint_{\Sigma}\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}(P,t-r/c)}{2\pi cr}K(\theta)\mathrm{d}S \tag{4.6.2}$$

对于窄带光,这个表达式可以简化为

$$\boldsymbol{u}(Q,t)=\iint_{\Sigma}\frac{1}{\mathrm{j}\bar{\lambda}r}\boldsymbol{u}\left(P,t-\frac{r}{c}\right)K(\theta)\mathrm{d}S \tag{4.6.3}$$

式中 $\bar{\lambda}$ 是中心波长.

现在讨论互相干函数的传播问题.如图 4.6.2 所示,若有任意相干性的光波从左向右传播,已知在 Σ_1 面上的互相干函数为 $\Gamma(P_1,P_2;\tau)$,我们希望找到 Σ_2 面上的互相干函数 $\Gamma(Q_1,Q_2;\tau)$,也就是说,我们的目的是已知针孔 P_1 和 P_2 的杨氏干涉结果时,预测针孔 Q_1 和 Q_2 的杨氏干涉实验结果.

我们这里限于讨论窄带情形.Σ_2 面上的互相干函数定义为

$$\Gamma(Q_1,Q_2;\tau)=\langle\boldsymbol{u}(Q_1,t+\tau)\boldsymbol{u}^{*}(Q_2,t)\rangle \tag{4.6.4}$$

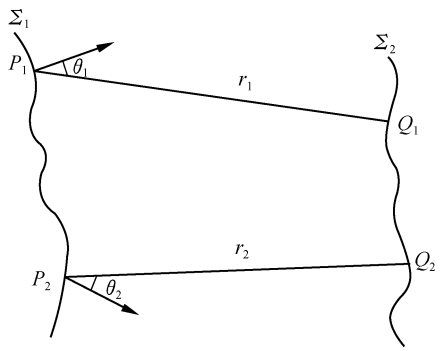


图 4.6.2 互相干传播的几何关系

通过窄带光传播规律的(4.6.3)式,可以把 Σ_2 面上的光场同 Σ_1 面上的光场联系起来,于是有

$$\boldsymbol{u}(Q_1,t+\tau)=\iint_{\Sigma_1}\frac{1}{\mathrm{j}\bar{\lambda}r_1}\boldsymbol{u}\left(P_1,t+\tau-\frac{r_1}{c}\right)K(\theta_1)\mathrm{d}S_1 \tag{4.6.5}$$

$$\boldsymbol{u}^{*}(Q_2,t)=\iint_{\Sigma_1}-\frac{1}{\mathrm{j}\bar{\lambda}r_2}\boldsymbol{u}^{*}\left(P_2,t-\frac{r_2}{c}\right)K(\theta_2)\mathrm{d}S_2 \tag{4.6.6}$$

式中,θ_1 和 θ_2 分别是 r_1 和 r_2 与该点处波面法线的夹角.将(4.6.5)式和(4.6.6)式代入(4.6.4)式,并交换积分和求平均的次序得

$$\Gamma(Q_1,Q_2;\tau)=\iint_{\Sigma_1}\iint_{\Sigma_1}\frac{\left\langle\boldsymbol{u}\left(P_1,t+\tau-\dfrac{r_1}{c}\right)\boldsymbol{u}^{*}\left(P_2,t-\dfrac{r_2}{c}\right)\right\rangle}{(\bar{\lambda})^2r_1r_2}K(\theta_1)K(\theta_2)\mathrm{d}S_1\mathrm{d}S_2 \tag{4.6.7}$$

被积函数中的时间平均可借助 Σ_1 面上的互相干函数来表示,这就得出了在窄带假设下互相干传播的基本定律

$$\Gamma(Q_1,Q_2;\tau)=\iint_{\Sigma_1}\iint_{\Sigma_1}\Gamma\left(P_1,P_2;\tau+\frac{r_2-r_1}{c}\right)\frac{K(\theta_1)}{\bar{\lambda}r_1}\frac{K(\theta_2)}{\bar{\lambda}r_2}\mathrm{d}S_1\,\mathrm{d}S_2 \tag{4.6.8}$$

(4.6.8)式适用于窄带条件,现在对它作进一步的限制以适用于准单色条件.为此我们要求最大光程差远小于相干长度.在这个假设下,我们会找到相应的互强度的传播规律.当准单色条件被满足时,按定义 Σ_2 面上的互强度为

$$\boldsymbol{J}(Q_1,Q_2)=\Gamma(Q_1,Q_2;0) \tag{4.6.9}$$

在(4.6.8)式中令 $\tau=0$,并注意到[参看(4.5.7)式]

$$\Gamma\left(P_1,P_2;\frac{r_2-r_1}{c}\right)=\boldsymbol{J}(P_1,P_2)\exp\left(\mathrm{j}2\pi\frac{r_2-r_1}{\bar{\lambda}}\right) \tag{4.6.10}$$

可得

$$\boldsymbol{J}(Q_1,Q_2)=\iint_{\Sigma_1}\iint_{\Sigma_1}\boldsymbol{J}(P_1,P_2)\exp\left[\mathrm{j}\frac{2\pi}{\bar{\lambda}}(r_2-r_1)\right]\frac{K(\theta_1)}{\bar{\lambda}r_1}\frac{K(\theta)}{\bar{\lambda}r_2}\mathrm{d}S_1\,\mathrm{d}S_2 \tag{4.6.11}$$

这就是准单色近似下互强度的传播规律.

让(4.6.11)式中的 $Q_1\to Q_2$,则很容易得到 Σ_2 面上的强度分布,即

$$I(Q)=\iint_{\Sigma_1}\iint_{\Sigma_1}\boldsymbol{J}(P_1,P_2)\exp\left[\mathrm{j}\frac{2\pi}{\bar{\lambda}}(r_2-r_1)\right]\frac{K(\theta_1)}{\bar{\lambda}r_1}\frac{K(\theta)}{\bar{\lambda}r_2}\mathrm{d}S_1\,\mathrm{d}S_2 \tag{4.6.12}$$

若令 $I(P_1)$和 $I(P_2)$分别表示 P_1 和 P_2 点的光强,则有

$$I(P_1)=\Gamma_{11}(0)=\langle\boldsymbol{u}(P_1,t)\boldsymbol{u}^*(P_1,t)\rangle$$

$$I(P_2)=\Gamma_{22}(0)=\langle\boldsymbol{u}(P_2,t)\boldsymbol{u}^*(P_2,t)\rangle$$

于是互强度 $\boldsymbol{J}(P_1,P_2)$可表示为

$$\boldsymbol{J}(P_1,P_2)=\sqrt{I(P_1)I(P_2)}\mu(P_1,P_2)$$

(4.6.12)式可改写为

$$I(Q)=\iint_{\Sigma_1}\iint_{\Sigma_2}\sqrt{I(P_1)I(P_2)}\mu(P_1,P_2)\exp\left[\mathrm{j}\frac{2\pi}{\bar{\lambda}}(r_2-r_1)\right]\frac{K(\theta_1)}{\bar{\lambda}r_1}\frac{K(\theta_2)}{\bar{\lambda}r_2}\mathrm{d}S_1\,\mathrm{d}S_2 \tag{4.6.13}$$

上式表明,Q 点的光强等于 Σ_1 面上每一对点所作的贡献之和,每一对点所产生的响应为 $\dfrac{\exp\left[\mathrm{j}\frac{2\pi}{\bar{\lambda}}(r_2-r_1)\right]}{\bar{\lambda}^2r_1r_2}K(\theta_1)K(\theta_2)$,每一对点的贡献依赖于这两点的强度以及相应的复相干系数 $\mu(P_1,P_2)$.(4.6.13)式可以看作是部分相干光场中强度传播的惠更斯-菲涅耳原理.它与描述单色光波场传播的较初等的惠更斯-菲涅耳公式的相似性并不奇怪,因为互强度的传播也遵循亥姆霍兹方程.

讨论自由空间中准单色光场互相干性传播的另一个重要结论是,当对于所有 $P_1\neq P_2$ 的点和所有时间延迟 τ 都有 $\Gamma(P_1,P_2)=0$ 时,(4.6.8)式的积分为零.这意味着按照这样的方式定义的非相干光是不能传播的,也就是说完全不相干的表面是不能辐射的,光波不可能由 Σ_1 面传播到 Σ_2 面.这并不是物理的真实.注意,这里说的非相干波场具有无穷小的精细结构.空间的精细度小于一个波长,就对应于不能传播的倏逝波.但对于实际的波场,仪器的分辨能力远大于一个波长,所以在物理上,我们所说的点均是有一定大小的,应具有大于一个波长的结构范围.对于一个传播的波,相干性至少在一个波长的范围内是存在的.对于一般的光学系统,波长相对于波面的尺度可以看做物理上的无穷小量,因此非相干光场的互强度通常近似地表示为

$$\Gamma(P_1,P_2)=KI(P_1)\delta(x_1-x_2,y_1-y_2) \tag{4.6.14}$$

式中(x_1,y_1)和(x_2,y_2)分别是点 P_1 和 P_2 的坐标,$\delta(*)$为二维 δ 函数,K 为一个适当的常数.

4.6.2 薄透明物体对互强度的影响

在很多光学系统中,物体用透射方式照明,像即由透射光形成,我们在这里研究薄透射物体对互强度的影响,设物体的折射率为 n,用实函数 B(P)描述物体的吸收作用,它使透光振幅衰减.为简单起见,认为 n 与 $B(P)$均与波长 λ 无关.用 δ(P)描述 P 点透过的光场所经受的时间延迟,它与 P 点的厚度 $d(P)$有关,如图 4.6.3 所示.

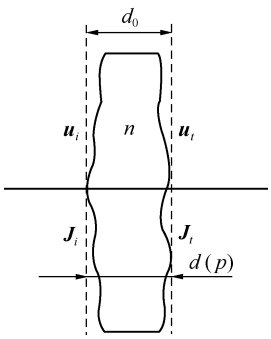


图 4.6.3 薄透明物体

$$\delta(P)=\frac{d(P)}{c/n}+\frac{d_0-d(P)}{c}=\frac{(n-1)d(P)}{c}+\frac{d_0}{c} \tag{4.6.15a}$$

透射光场 $\boldsymbol{u}_t$ 与入射光场 $\boldsymbol{u}_i$ 之间的关系为

$$\boldsymbol{u}_t(P;t)=B(P)\boldsymbol{u}_i[P;t-\delta(P)] \tag{4.6.15b}$$

互相干函数为

$$\begin{aligned}\Gamma_t(P_1,P_2;\tau)&=\langle\boldsymbol{u}_t(P_1;t+\tau)\boldsymbol{u}_t^*(P_2;t)\rangle\\&=B(P_1)B(P_2)\langle\boldsymbol{u}_i[P_1;t+\tau-\delta(P_1)]\boldsymbol{u}_i^*[P_2;t-\delta(P_2)]\rangle\\&=B(P_1)B(P_2)\Gamma_i[P_1,P_2;\tau-\delta(P_1)+\delta(P_2)]\end{aligned} \tag{4.6.16}$$

上式给出了入射和透射互相干函数之间的关系.

若光是准单色的,则方便的方法是用随时间变化的复振幅将入射场的解析信号写成

$$\boldsymbol{u}_i(P;t)=\boldsymbol{A}_i(P;t)\exp(\mathrm{j}2\pi\bar{\nu}t) \tag{4.6.17}$$

使用对场的这种表示方法,我们把入射场的互相干函数表示为

$$\Gamma_i(P_1,P_2;\tau)=\langle\boldsymbol{A}_i(P_1;t+\tau)\boldsymbol{A}_i^*(P_2;t)\rangle\exp(\mathrm{j}2\pi\bar{\nu}\tau) \tag{4.6.18}$$

在(4.6.16)式中,采用这一形式,我们得到

$$\begin{aligned}\Gamma_t(P_1,P_2;\tau)=&B(P_1)\exp[-\mathrm{j}2\pi\bar{\nu}\delta(P_1)]B(P_2)\exp[\mathrm{j}2\pi\bar{\nu}\delta(P_2)]\\&\times\langle\boldsymbol{A}_i[P_1;t+\tau-\delta(P_1)+\delta(P_2)]\boldsymbol{A}_i^*(P_2;t)\rangle\exp(\mathrm{j}2\pi\bar{\nu}\tau)\end{aligned} \tag{4.6.19}$$

若物体造成的时间延迟差 $|\delta(P_1)-\delta(P_2)|$远小于相干时间 τ_c,即

$$|\delta(P_1)-\delta(P_2)|\ll\tau_c \tag{4.6.20}$$

则时间平均与 δ(P₁)和 δ(P₂)无关.在这一条件下,我们得到

$$\Gamma_t(P_1,P_2;\tau)=\boldsymbol{t}(P_1)\boldsymbol{t}^*(P_2)\Gamma_i(P_1,P_2;\tau) \tag{4.6.21}$$

式中 $\boldsymbol{t}(P)$是物体在 P 点的振幅透过率,它由下式定义

$$\boldsymbol{t}(P)=B(P)\exp[-\mathrm{j}2\pi\bar{\nu}\delta(P)] \tag{4.6.22}$$

(4.6.22)式是入射互相干函数与透射互相干函数之间的关系式.如果在某一给定的物理实验中,有重要意义的时间延迟 τ 总是小于相干时间 τ_c,那么(4.6.21)式意味着入射互强度与透射互强度有如下关系

$$\boldsymbol{J}_t(P_1,P_2)=\boldsymbol{t}(P_1)\boldsymbol{t}^*(P_2)\boldsymbol{J}_i(P_1,P_2) \tag{4.6.23}$$

(4.6.23)式表明,P_1,P_2 两点的互强度在透过物体时,受到两点的振幅及相位透过率的影响.(4.6.23)式适用于孔径、薄透镜和薄的振幅型或相位型物体,它揭示出物体本身的信息是如何调制载波的互强度的.

4.6.3 部分相干光的衍射

在一般的衍射理论中,要求衍射孔径上的照明为相干照明,而实际的光源总是部分相干的,

因此现在讨论部分相干光照明孔径的衍射效应.如图 4.6.4 所示,孔径位于 α-β 平面上,观察平面为与之平行的 x-y 平面,它们之间的距离为 z,设孔径的复振幅透过率为 $\boldsymbol{t}(\alpha,\beta)$,若照明光波在孔径前的互强度为 $\boldsymbol{J}_1$,则孔径后的互强度 $\boldsymbol{J}_1'$ 为

$$\boldsymbol{J}_1'(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)=\boldsymbol{t}(\alpha_1,\beta_1)\boldsymbol{t}^*(\alpha_2,\beta_2)\boldsymbol{J}_1(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2) \tag{4.6.24}$$

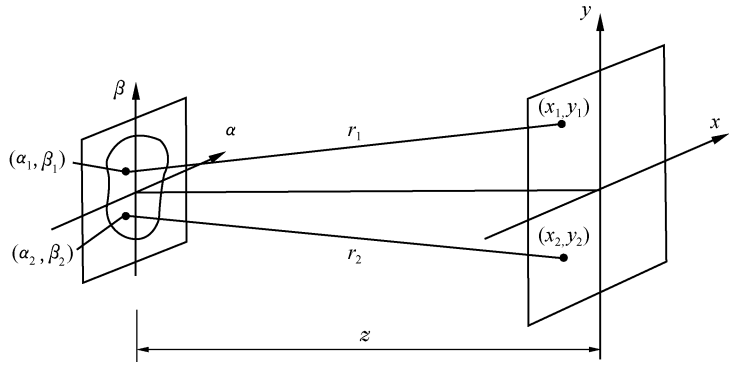


图 4.6.4 部分相干光衍射示意图

考虑在小角度近似下有 $K(\theta_1)K(\theta_2)\approx 1$,根据(4.6.11)式,观察平面上光场互强度 $\boldsymbol{J}_2$ 可用孔径后方透射互强度 $\boldsymbol{J}_1'$ 表示为

$$\boldsymbol{J}_2(x_1,y_1;x_2,y_2)=\iiiint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{J}_1'(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)\frac{\exp\left[\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)\right]}{\lambda^2 r_1 r_2}\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\beta_1\,\mathrm{d}\alpha_2\,\mathrm{d}\beta_2 \tag{4.6.25}$$

式中,积分区域已扩展到无穷,这是因为假设孔径平面上没有光传播到 x-y 上的点对,其 $\boldsymbol{J}_1'$ 为零.引入 2.1 节中的菲涅耳傍轴近似,(4.6.25)式可改写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}_2(x_1,y_1;x_2,y_2)=&\frac{\exp(\mathrm{j}\theta)}{\lambda^2 z^2}\iiiint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{J}_1'(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)\exp\left[\mathrm{j}\frac{\pi}{\lambda z}(\alpha_2^2+\beta_2^2)-(\alpha_1^2+\beta_1^2)\right]\\&\times\exp\left[-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda z}(\alpha_2 x_2+\beta_2 y_2-\alpha_1 x_1-\beta_1 y_1)\right]\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\beta_1\,\mathrm{d}\alpha_2\,\mathrm{d}\beta_2\end{aligned} \tag{4.6.26}$$

其中

$$\theta=\frac{\pi}{\lambda z}[(x_2^2+y_2^2)-(x_1^2+y_1^2)] \tag{4.6.27}$$

如果两平面之间的距离 z 增加到足够大,从而满足夫琅禾费条件,上式可进一步改写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}_2(x_1,y_1;x_2,y_2)=&\frac{\exp(\mathrm{j}\theta)}{\lambda^2 z^2}\iiiint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{J}_1'(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)\\&\times\exp\left[-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda z}(\alpha_2 x_2+\beta_2 y_2-\alpha_1 x_1-\beta_1 y_1)\right]\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\beta_1\,\mathrm{d}\alpha_2\,\mathrm{d}\beta_2\end{aligned} \tag{4.6.28}$$

上式表明,在远场条件下,$\boldsymbol{J}_2$ 正比于 $\boldsymbol{J}_1'$ 的四维傅里叶变换.当 Q_1 和 Q_2 点重合,即 $x_1=x_2=x$,$y_1=y_2=y$ 时,可以得到观察屏上的强度分布

$$I(x,y)=\frac{1}{\lambda^2 z^2}\iiiint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{J}_1'(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)\exp\left[-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda z}[x(\alpha_2-\alpha_1)+y(\beta_2-\beta_1)]\right]\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\beta_1\,\mathrm{d}\alpha_2\,\mathrm{d}\beta_2 \tag{4.6.29}$$

强度分布 $I(x,y)$和孔径平面互强度 $\boldsymbol{J}_1'$ 之间存在准确的傅里叶变换关系.

对于许多实际情况(参阅 4.7 节),准单色(空间)非相干光源发出的光波照明孔径时,$\boldsymbol{J}_1$ 可以简化,为了分析时简单些,我们假定互强度 $\boldsymbol{J}_1$ 可以表示为

$$\boldsymbol{J}_1(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)=I_0\mu_1(\Delta\alpha,\Delta\beta) \tag{4.6.30}$$

式中，$\Delta\alpha=\alpha_2-\alpha_1$，$\Delta\beta=\beta_2-\beta_1$，上式表明复相干系数仅依赖于孔径平面上两点的坐标差.例如，若来自非相干光源的光通过柯勒聚光系统到达孔径，上式就成立.于是透射互强度 J'_1 即(4.6.24)式可改写为

$$J'_1(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)=t(\alpha_1,\beta_1)t^*(\alpha_1+\Delta\alpha;\beta_1+\Delta\beta)I_0\mu_1(\Delta\alpha,\Delta\beta) \tag{4.6.31}$$

将(4.6.31)式代入(4.6.29)式得到

$$I(x,y)=\frac{I_0}{\lambda^2z^2}\iint_{-\infty}^{\infty}P(\Delta\alpha,\Delta\beta)\mu_1(\Delta\alpha,\Delta\beta)\exp\left\{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda z}[x\Delta\alpha+y\Delta\beta]\right\}\mathrm{d}\Delta\alpha\mathrm{d}\Delta\beta \tag{4.6.32a}$$

其中

$$P(\Delta\alpha,\Delta\beta)=\iint_{-\infty}^{\infty}t(\alpha_1,\beta_1)t^*(\alpha_1+\Delta\alpha,\beta_1+\Delta\beta)\mathrm{d}\alpha_1\mathrm{d}\beta_1 \tag{4.6.32b}$$

(4.6.32)式表明，衍射图样的强度分布是孔径自相关函数 P 与入射光波复相干系数乘积的二维傅里叶变换.(4.6.32)式可以看作远场条件下部分相干光的普遍衍射公式.这个公式是谢尔(Shell)在他的博士论文中解决的，称为谢尔定理.由这个定理出发，可以导出在相干和非相干照明这种极端情况下的衍射规律.

当采用完全(空间)相干的平面波照明孔径时，$\mu_1=1$，于是

$$I(x,y)=\frac{I_0}{\lambda^2z^2}\iint_{-\infty}^{\infty}P(\Delta\alpha,\Delta\beta)\exp\left[-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda z}(x\Delta\alpha+y\Delta\beta)\right]\mathrm{d}\Delta\alpha\mathrm{d}\Delta\beta \tag{4.6.33}$$

再利用傅里叶变换的自相关定理，得到

$$I(x,y)=\frac{I_0}{\lambda^2z^2}\left|\iint_{-\infty}^{\infty}t(\alpha,\beta)\exp\left[-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda z}(x\alpha+y\beta)\right]\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\right|^2 \tag{4.6.34}$$

这和以前讲的单色光波的夫琅禾费衍射的强度计算完全一致.

假定照明光波在孔径上产生的相干面积远比孔径尺寸小得多，孔径可看作非相干照明.这时对 μ_1 不为零的区域来说，自相关函数 $P(\Delta\alpha,\Delta\beta)$，即错位孔径的重叠面积，近似等于最大值 A(孔径面积)，所以

$$I(x,y)=\frac{I_0A}{\lambda^2z^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\mu_1(\Delta\alpha,\Delta\beta)\exp\left[-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda z}(x\Delta\alpha+y\Delta\beta)\right]\mathrm{d}\Delta\alpha\mathrm{d}\Delta\beta \tag{4.6.35}$$

可以看出，观察平面上的强度分布已和孔径的形状没有关系，仅决定于复相干系数.

在部分相干光照明孔径的一般情况下，衍射图样的强度 $I(x,y)$ 既然等于乘积 P μ_1 的傅里叶变换，由卷积定理可知，$I(x,y)$ 就应是 P 和 μ_1 各自变换式的卷积.卷积的效应是使衍射图样平滑化，照明光的相干面积越小，平滑化越明显.

4.7 范西泰特-策尼克定理

如图 4.7.1 所示，当光场由 Σ_1 面传播到 Σ_2 面时，Σ_2 面上任何一点 Q_1 或 Q_2 的光扰动都是由 Σ_1 面上各点贡献叠加而成的.因此，即使 Σ_1 面上的光场是非相干的，在 Σ_2 面上的各点对(Q_1，Q_2)的光扰动之间都存在一定的联系，也就是有一定的相干性.作为近代光学中最重要的定理之一的范西泰特-策尼克(Van Cittert-Zernike)定理，就是讨论一种由准单色(空间)非相干光源照明而产生的光场的互强度.

4.7.1 范西泰特-策尼克定理

如图 4.7.1 所示，Σ_1 和 Σ_2 平面相互平行，相距为 z.Σ_1 是一个准单色扩展光源，由它发出的非相干光照明 Σ_2 面，我们现在要求 Σ_2 面上任意两点 Q_1 和 Q_2 的互强度和复相干系数.

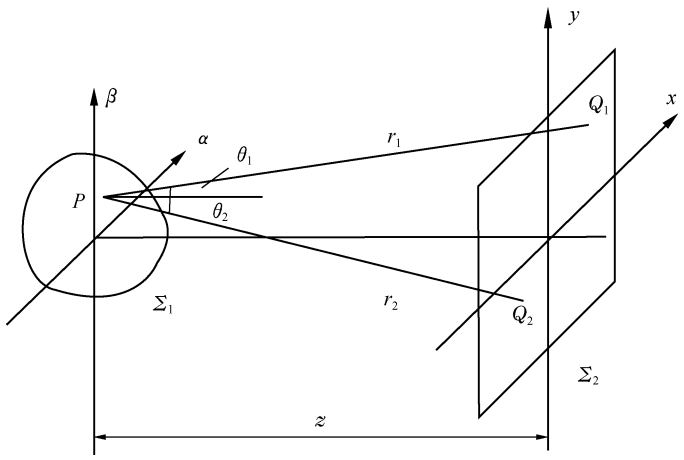


图 4.7.1 范西泰特-策尼克定理的几何关系

扩展光源 Σ_1 上的互强度 $\boldsymbol{J}(P_1,P_2)$和观察面 Σ_2 上的互强度 $\boldsymbol{J}(Q_1,Q_2)$由下式联系

$$\boldsymbol{J}(Q_1,Q_2)=\iint_{\Sigma_1}\iint_{\Sigma_1}\boldsymbol{J}(P_1,P_2)\exp\left[\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)\right]\frac{K(\theta_1)}{\lambda r_1}\frac{K(\theta_2)}{\lambda r_2}\mathrm{d}S_1\,\mathrm{d}S_2 \tag{4.7.1}$$

对于空间非相干光源这种特殊情况,两个不同点的光振动是统计无关的,因而有

$$\boldsymbol{J}(P_1,P_2)=I(P_1)\delta(P_1-P_2) \tag{4.7.2}$$

把它代入(4.7.1)式中,并利用 δ 函数的筛选性质,得到观察屏幕上的互强度为

$$\boldsymbol{J}(Q_1,Q_2)=\frac{1}{(\lambda)^2}\iint_{\Sigma_1}I(P_1)\exp\left[\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)\right]\frac{K(\theta_1)}{r_1}\frac{K(\theta_2)}{r_2}\mathrm{d}S \tag{4.7.3}$$

为了将(4.7.3)式进一步简化,特作如下假设和近似.(1)光源和观察区的线度与两者之间的距离 z 相比很小,因此 $1/r_1r_2\approx1/z^2$;(2)只涉及小角度,以致 $K(\theta_1)=K(\theta_2)\approx1$.于是在观察区的互强度取如下形式:

$$\boldsymbol{J}(Q_1,Q_2)=\frac{1}{(\lambda z)^2}\iint_{\Sigma_1}I(P_1)\exp\left[\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)\right]\mathrm{d}S \tag{4.7.4}$$

现在再对指数函数中的 r_1 和 r_2 引入傍轴近似

$$r_2=\left[z^2+(x_2-\alpha)^2+(y_2-\beta)^2\right]^{1/2}\approx z+\frac{(x_2-\alpha)^2+(y_2-\beta)^2}{2z}$$

$$r_1=\left[z^2+(x_1-\alpha)^2+(y_1-\beta)^2\right]^{1/2}\approx z+\frac{(x_1-\alpha)^2+(y_1-\beta)^2}{2z}$$

令 $\Delta x=x_2-x_1$,$\Delta y=y_2-y_1$,并注意到 α,β在有限的光源范围 Σ_1 之外时,$I(\alpha,\beta)=0$,于是范西泰特-策尼克定理的最后形式为

$$\boldsymbol{J}(x_1,y_1;x_2,y_2)=\frac{\exp(\mathrm{j}\psi)}{(\lambda z)^2}\iint_{-\infty}^{\infty}I(\alpha,\beta)\exp\left\{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda z}(\Delta x\alpha+\Delta y\beta)\right\}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta \tag{4.7.5}$$

式中的相位因子 ψ 由下式给出

$$\psi=\frac{\pi}{\lambda z}\left[(x_2^2+y_2^2)-(x_1^2+y_1^2)\right]=\frac{\pi}{\lambda z}(\rho_2^2-\rho_1^2) \tag{4.7.6}$$

其中 ρ_1 和 ρ_2 分别是点(x_1,y_1)和点(x_2,y_2)离光轴的距离.

把这一定理表示成归一化形式往往更方便,为此先计算 Q_1 和 Q_2 点的强度.在(4.7.5)式中令 $x_1=x_2$,$y_1=y_2$ 便可得出 Q_1 点或 Q_2 点的强度表达式,显然它们相等,即

$$I(x_1,y_1)=I(x_2,y_2)=\frac{1}{(\bar{\lambda}z)^2}\iint_{-\infty}^{\infty}I(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta \tag{4.7.7}$$

于是

$$\begin{aligned}\mu(x_1,y_1;x_2,y_2)&=\frac{\boldsymbol{J}(x_1,y_1;x_2,y_2)}{[I(x_1,y_1)I(x_2,y_2)]^{1/2}}\\&=\frac{\exp(\mathrm{j}\psi)\iint_{-\infty}^{\infty}I(\alpha,\beta)\exp\left[-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\bar{\lambda}z}(\Delta x\alpha+\Delta y\beta)\right]\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta}{\iint_{-\infty}^{\infty}I(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta}\end{aligned} \tag{4.7.8}$$

(4.7.8)式给出了一个十分重要的结论:即当光源本身的线度以及观察区域的线度都比二者间的距离小得多时,观察区域上的复相干系数正比于光源强度分布的归一化傅里叶变换 .

相位因子 $\exp(\mathrm{j}\psi)$并不影响复相干系数的模 $\mu(Q_1,Q_2)$,也就是说不影响我们判断 Q_1 和 Q_2 两点杨氏干涉实验中产生干涉条纹的可见度 .$\mu(Q_1,Q_2)$只和观察平面上选定的 Q_1 和 Q_2 两点的坐标差$(\Delta x,\Delta y)$有关 .此外,当两点到光轴的距离相等时,$\psi=0$;或者当 $z\gg\pi(\rho_2^2-\rho_1^2)/\bar{\lambda}$时,$\psi\ll\frac{\pi}{2}$.在这两种情况下,(4.7.8)式中的相位因子 $\exp(\mathrm{j}\psi)$便可略去 .

$\mu(Q_1,Q_2)$和 $I(\alpha,\beta)$之间存在着傅里叶变换关系 .这种运算关系类似于夫琅禾费衍射 .但是,范西泰特-策尼克定理在更宽的空间范围内成立,因为我们只涉及了傍轴近似,在衍射问题中对菲涅耳衍射和夫琅禾费衍射都适用 .

4.7.2 相干面积

从范西泰特-策尼克定理出发可以导出准单色扩展光源相干性的量度,即空间相干性 .注意到复相干系数的模 μ 只与 x,y 平面的坐标差 $\Delta x,\Delta y$ 有关,就有可能定义一个相干面积 A_c,它在性质上完全类似于(4.3.27)式所定义的相干时间 τ_c .相干面积定义为

$$A_c=\iint_{-\infty}^{\infty}|\mu(\Delta x,\Delta y)|^2\mathrm{d}\Delta x\mathrm{d}\Delta y \tag{4.7.9}$$

下面将要证明,对于形状任意,面积为 A_s 的均匀非相干准单色光源,在离光源 z 处的相干面积是

$$A_c=\frac{(\bar{\lambda}z)^2}{A_s}\approx\frac{(\bar{\lambda})^2}{\Omega_s} \tag{4.7.10}$$

式中 Ω_s 是光源对观察区原点所张的立体角 .

由范西泰特-策尼克定理有

$$\begin{aligned}|\mu(\Delta x,\Delta y)|^2&=\frac{\left|\exp(\mathrm{j}\psi)\iint_{-\infty}^{\infty}I(\alpha,\beta)\exp\left[-\mathrm{j}2\pi\left(\frac{\Delta x}{\bar{\lambda}z}\alpha+\frac{\Delta y}{\bar{\lambda}z}\beta\right)\right]\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\right|^2}{\left|\iint_{-\infty}^{\infty}I(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\right|^2}\\&=\frac{|F\{I(\alpha,\beta)\}|^2}{\left|\iint_{-\infty}^{\infty}I(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\right|^2}=\frac{\left|G\left(\frac{\Delta x}{\bar{\lambda}z},\frac{\Delta y}{\bar{\lambda}z}\right)\right|^2}{\left|\iint_{-\infty}^{\infty}I(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\right|^2}\end{aligned}$$

所以

$$A_c=\iint_{-\infty}^{\infty}|\mu(\Delta x,\Delta y)|^2\mathrm{d}\Delta x\mathrm{d}\Delta y=\frac{\iint_{-\infty}^{\infty}\left|G\left(\frac{\Delta x}{\bar{\lambda}z},\frac{\Delta y}{\bar{\lambda}z}\right)\right|^2\mathrm{d}\Delta x\mathrm{d}\Delta y}{\left|\iint_{-\infty}^{\infty}I(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\right|^2}$$

$$=\frac{(\bar{\lambda}z)^2\iint_{-\infty}^{\infty}\left|G\left(\frac{\Delta x}{\bar{\lambda}z},\frac{\Delta y}{\bar{\lambda}z}\right)\right|^2\mathrm{d}\left(\frac{\Delta x}{\bar{\lambda}z}\right)\mathrm{d}\left(\frac{\Delta y}{\bar{\lambda}z}\right)}{\left|\iint_{-\infty}^{\infty}I(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\right|^2}$$

根据巴塞伐定理,上式进一步化简成

$$A_c=\frac{(\bar{\lambda}z)^2\iint_{-\infty}^{\infty}I^2(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta}{\left[\iint_{-\infty}^{\infty}I(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\right]^2} \tag{4.7.11}$$

若光源是面积为 A_s 的均匀光源,设其强度为 I_0,则 A_c 可由下式计算

$$A_c=\frac{(\bar{\lambda}z)^2\iint_{\Sigma_1}I_0^2\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta}{\left[\iint_{\Sigma_1}I_0\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\right]^2}=\frac{(\bar{\lambda}z)^2A_sI_0^2}{(A_sI_0)^2}=\frac{(\bar{\lambda}z)^2}{A_s}\approx\frac{(\bar{\lambda})^2}{\Omega_s}$$

上式也可写成

$$A_s=\frac{(\bar{\lambda})^2}{\Omega_c} \tag{4.7.12}$$

式中,Ω_c 是相干面积对光源原点所张的立体角.(4.7.10)式和(4.7.12)式可以改写为

$$A_c\Omega_s=(\bar{\lambda})^2 \tag{4.7.13}$$

$$A_s\Omega_c=(\bar{\lambda})^2 \tag{4.7.14}$$

或者将(4.7.10)式写成

$$A_cA_s=(\bar{\lambda}z)^2 \tag{4.7.15}$$

4.7.3 均匀圆形光源

作为一个应用范西泰特-策尼克定理的例子,我们计算一个高度均匀、非相干准单色、半径为 a 的圆盘形光源所产生的光场复相干系数 μ_{12}.设光源的强度分布为

$$I(\alpha,\beta)=I_0\mathrm{circ}\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{a}\right)=I_0\mathrm{circ}\left(\frac{r}{a}\right) \tag{4.7.16}$$

为了求出 $\boldsymbol{J}(\Delta x,\Delta y)$,我们采用极坐标,对强度分布作傅里叶-贝塞尔变换

$$B\left\{I_0\mathrm{circ}\left(\frac{r}{a}\right)\right\}=2\pi I_0\int_0^a rJ_0(2\pi r\rho)\mathrm{d}r$$

式中,ρ 为频率中的极坐标半径.为完成上式的积分,令 $r'=2\pi r\rho$,并利用第一类零阶和一阶贝塞尔函数的积分关系 $\int_0^x\alpha\mathrm{J}_0(\alpha)\mathrm{d}\alpha=x\mathrm{J}_1(x)$.于是

$$B\left[\mathrm{J}_0\mathrm{circ}\left(\frac{r}{a}\right)\right]=\frac{I_0}{2\pi\rho^2}\int_0^{2\pi a\rho}r'\mathrm{J}_0(r')\mathrm{d}r'=\pi a^2\frac{2\mathrm{J}_1(2\pi a\rho)}{2\pi a\rho} \tag{4.7.17}$$

由(4.7.5)式我们得

$$\boldsymbol{J}(\Delta x,\Delta y)=\frac{\exp(\mathrm{j}\psi)}{(\bar{\lambda}z)^2}\iint_{-\infty}^{\infty}I(\alpha,\beta)\exp\left[-\mathrm{j}2\pi\left(\frac{\Delta x}{\bar{\lambda}z}\alpha+\frac{\Delta y}{\bar{\lambda}z}\beta\right)\right]\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$

$$=\frac{\exp(\mathrm{j}\psi)}{(\bar{\lambda}z)^2}B\left\{I_0\mathrm{circ}\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{a}\right)\right\}$$

$$= \frac{\pi a^2 I_0}{(\bar{\lambda}z)^2}\exp(\mathrm{j}\psi)\left\{\frac{2\mathrm{J}_1\left(2\pi a\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\bar{\lambda}z}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\bar{\lambda}z}\right)^2}\right)}{2\pi a\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\bar{\lambda}z}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\bar{\lambda}z}\right)^2}}\right\}$$

$$= \frac{\pi a^2 I_0}{(\bar{\lambda}z)^2}\exp(\mathrm{j}\psi)\left[\frac{2\mathrm{J}_1(2\pi a\rho)}{2\pi a\rho}\right] \tag{4.7.18}$$

式中

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\bar{\lambda}z}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\bar{\lambda}z}\right)^2} = \frac{1}{\bar{\lambda}z}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta x)^2} = \frac{s}{\bar{\lambda}z} \tag{4.7.19}$$

而 $s=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 是两点间的距离 .相应的复相干系数为

$$\mu(\Delta x,\Delta y) = \exp(\mathrm{j}\psi)\left[\frac{2\mathrm{J}_1(2\pi a\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}/\bar{\lambda}z)}{2\pi a\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}/\bar{\lambda}z}\right] \tag{4.7.20}$$

上式的第一个因子 $\exp(\mathrm{j}\psi)=\exp\{\mathrm{j}\pi[(x_2^2+y_2^2)-(x_1^2+y_1^2)]/\bar{\lambda}z\}$ 取决于 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2);而第二个因子仅仅取决于两点之间的距离 s .这样一来复相干系数的模 μ_{12} 仅取决于 Δx 和 Δy,如图 4.7.2 所示 .一阶贝塞尔函数的第一个零点为 3.38,即 $2\pi a\rho_0=2\pi as_0/\bar{\lambda}z=3.38$,因此 μ_{12} 的第一个零点发生在间距

$$s_0 = 0.61\frac{\bar{\lambda}z}{a} = 1.22\frac{\bar{\lambda}}{\theta} \tag{4.7.21}$$

的地方 .式中 $\theta=2a/z$ 是小角度近似下光源对观察面坐标原点的张角 .

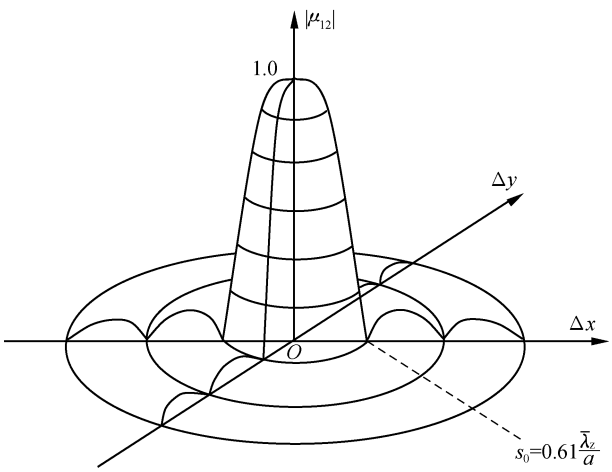


图 4.7.2 复相干系数的模 μ_{12} 与坐标差 Δx 和 Δy 的关系

对于一个半径为 a 的圆形非相干光源,在离光源距离为 z 的相干面积为

$$A_c = \frac{(\bar{\lambda}z)^2}{A_s} = \frac{(\bar{\lambda}z)^2}{\pi a^2} \tag{4.7.22}$$

在我们的分析中只包含小角度情况,在 x,y 平面的原点处对光源所张的立体角是 $\Omega_s=A_s/z^2$,于是相干面积可表示成

$$A_c \approx \frac{(\bar{\lambda})^2}{\Omega_s} \tag{4.7.23}$$

这与(4.7.10)式是一样的 .

假定点(x_1,y_1)和(x_2,y_2)相应于一个不透明屏上的针孔,且在屏后一定距离上观察干涉条纹.根据μ_{12}的特征可以预示在每种一个可能的针孔间距下得到的条纹特征.为简便起见,假定两点总是距离光轴等距,这样$\psi=0$. 于是

$$\mu_{12}=\mu_{12}\exp(\mathrm{j}\beta_{12})=\left|\frac{2\mathrm{J}_1(2\pi as/\bar{\lambda}z)}{2\pi as/\bar{\lambda}z}\right|\exp(\mathrm{j}\beta_{12}) \tag{4.7.24}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{2\mathrm{J}_1(2\pi as/\bar{\lambda}z)}{2\pi as/\bar{\lambda}z}>0,\quad \beta_{12}=0\\ \frac{2\mathrm{J}_1(2\pi as/\bar{\lambda}z)}{2\pi as/\bar{\lambda}z}<0,\quad \beta_{12}=\pi\end{aligned}\right\} \tag{4.7.25}$$

例 4.7.1 在图 4.7.3 所示的杨氏双缝干涉实验中,采用缝宽为 a 的准单色缝光源,辐射光强均匀分布为 I_0,中心波长 $\bar{\lambda}=600\mathrm{nm}$.

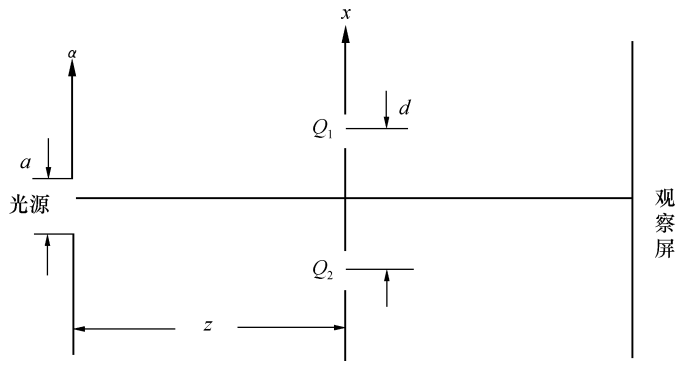


图 4.7.3

(1) 写出 Q_1 和 Q_2 点的复相干系数;

(2) 若 $a=0.1\mathrm{mm}$,$z=1\mathrm{m}$,$d=3\mathrm{mm}$,求观察屏上杨氏干涉条纹的可见度;

(3) 若 z 和 d 仍取上述值,要求观察屏上的可见度为 0.41,缝光源的宽度 a 应为多少?

解:(1) 应用范西泰特-策尼克定理可求出 Q_1 和 Q_2 点的复相干系数.注意到双缝到光轴等距($\psi=0$),光源是一维分布.于是

$$\mu(\Delta x)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}I_0\,\mathrm{rect}\left(\frac{\alpha}{a}\right)\exp\left(-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\bar{\lambda}z}\Delta x\alpha\right)\mathrm{d}\alpha}{\int_{-\infty}^{\infty}I_0\,\mathrm{rect}\left(\frac{\alpha}{a}\right)\mathrm{d}\alpha}=\frac{\sin\pi\frac{a\Delta x}{\bar{\lambda}a}}{\pi\frac{a\Delta x}{\bar{\lambda}z}}=\mathrm{sinc}\left(\frac{a\Delta x}{\bar{\lambda}z}\right)$$

所以 Q_1 和 Q_2 两点的复相干系数为

$$\mu(d)=\mathrm{sinc}\left(\frac{ad}{\bar{\lambda}z}\right)$$

(2) 在观察屏上观察到的干涉条纹的可见度由 Q_1 和 Q_2 点的复相干系数的模决定,即

$$V=\mu(d)=\left|\frac{\sin\left(\pi\frac{ad}{\bar{\lambda}z}\right)}{\pi\frac{ad}{\bar{\lambda}z}}\right|$$

由题设数据 $\pi ad/\bar{\lambda}z=\pi\times0.1\times3/(6\times10^{-4}\times10^{3})=\pi/2$,故

$$V=\mu(d)\frac{\sin\pi/2}{\pi/2}=\frac{2}{\pi}=0.64$$

(3) 若要求

$$V = \mu(d) = \frac{\sin\pi ad/\bar{\lambda}z}{\pi ad/\bar{\lambda}z} = 0.41$$

查表可知

$$\pi\frac{ad}{\bar{\lambda}z} = \frac{2\pi}{3}$$

即

$$a = \frac{2\bar{\lambda}z}{3d} = \frac{2\times 6\times 10^{-4}\times 10^{3}}{3\times 3} \approx 0.13\text{mm}$$

例 4.7.2 在图 4.7.3 所示的杨氏双缝干涉实验中,用一个很大的均匀发光光源与一个空间频率为 ξ_0 的正弦光栅相叠加来代替缝光源.正弦光栅的强度透过率为

$$T(\alpha) = \frac{1}{2}(1+\cos 2\pi\xi_0\alpha)$$

为了获得高的可见度,ξ_0 与两缝间距 d 应满足什么条件.

解:由于光源和正弦光栅很大,可近似视为无穷,先假设光栅宽度为 $2a$,然后让 $a\to\infty$,求极限.由范西泰特-策尼克定理可得双缝上的复相干系数为

$$\begin{aligned}
\mu_{12} &= \lim_{a\to\infty}\frac{\int_{-a}^{a}\frac{I_0}{2}(1+\cos 2\pi\xi_0 a)\exp\left(-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\bar{\lambda}z}d\alpha\right)\mathrm{d}\alpha}{\int_{-a}^{a}\frac{I_0}{2}(1+\cos 2\pi\xi_0\alpha)\mathrm{d}\alpha}\\
&= \lim_{a\to\infty}\frac{\frac{\bar{\lambda}z}{2\pi d}\sin\left(\frac{2\pi}{\bar{\lambda}z}da\right)+\frac{\sin 2\pi\left(\frac{d}{\bar{\lambda}z}+\xi_0\right)a}{4\pi\left(\frac{d}{\bar{\lambda}z}+\xi_0\right)}+\frac{\sin 2\pi\left(\frac{d}{\bar{\lambda}z}-\xi_0\right)a}{4\pi\left(\frac{d}{\bar{\lambda}z}-\xi_0\right)}}{a+\frac{\sin 2\pi\xi_0 a}{2\pi\xi_0}}\\
&= \lim_{a\to\infty}\left\{\frac{\bar{\lambda}z}{2\pi da}\sin\left(\frac{2\pi}{\bar{\lambda}z}da\right)+\frac{\sin 2\pi\left(\frac{d}{\bar{\lambda}z}+\xi_0\right)a}{4\pi\left(\frac{d}{\bar{\lambda}z}+\xi_0\right)a}+\frac{\sin 2\pi\left(\frac{d}{\bar{\lambda}z}-\xi_0\right)a}{4\pi\left(\frac{d}{\bar{\lambda}z}-\xi_0\right)a}\right\}\\
&= \lim_{a\to\infty}\frac{\sin 2\pi\left(\frac{d}{\bar{\lambda}z}-\xi_0\right)a}{4\pi\left(\frac{d}{\bar{\lambda}z}-\xi_0\right)a}
\end{aligned}$$

由此可见,只有当 $(d/\bar{\lambda}z-\xi_0)=0$ 时,即 $d=\bar{\lambda}z\xi_0$ 时,上式的极限值(即最大值)为 $\frac{1}{2}$.也就是说对于一个很大的非相干光源,在其上叠加一个正弦光栅,它的空间频率 ξ_0 与双缝间距 d 满足关系 $d=\bar{\lambda}z\xi_0$,也可得到较大的干涉条纹可见度.

4.8 部分相干光场中透镜的傅里叶变换性质

用范西泰特-策尼克定理解决了准单色非相干光照明产生的光场的互强度问题后,根据准单色光的衍射和互强度的传播规律,就可以研究部分相干光照明的光学系统的性质.和第三章类似,首先讨论单个透镜的傅里叶变换性质,讨论准单色光场中薄的凸透镜前后焦面上互强度的关系.

如图 4.8.1 所示,若已知前焦面上的互强度为 $\boldsymbol{J}_0(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)$,可沿光波传播方向逐面计算三个特定平面上的互强度,即紧靠透镜前后平面上的互强度 $\boldsymbol{J}(x_1,y_1;x_2,y_2)$和 $\boldsymbol{J}'(x_1,y_1;x_2,y_2)$以及

后焦面上的互强度 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}(u_1,v_1;u_2,v_2)$.

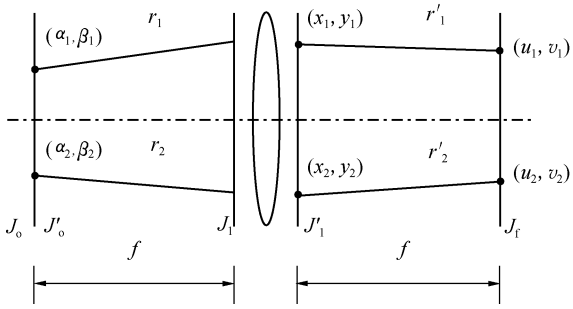


图 4.8.1 薄透镜前后焦面上互强度的关系

由互强度的传播公式(4.6.26)式可得

$$\boldsymbol{J}_1(x_1,y_1;x_2,y_2)=\frac{\exp(\mathrm{j}\theta)}{\bar{\lambda}^2 f^2}\iiiint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{J}_o(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)\exp\left\{\mathrm{j}\frac{\pi}{\bar{\lambda}f}[(\alpha_2^2+\beta_2^2)-(\alpha_1^2+\beta_1^2)]\right\}$$
$$\times\exp\left[-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\bar{\lambda}f}(\alpha_2 x_2+\beta_2 y_2-\alpha_1 x_1-\beta_1 y_1)\right]\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\beta_1\,\mathrm{d}\alpha_2\,\mathrm{d}\beta_2 \tag{4.8.1}$$

其中

$$\theta=\frac{\pi}{\bar{\lambda}f}[(x_2^2+y_2^2)-(x_1^2+y_1^2)] \tag{4.8.2}$$

根据(4.6.23)式,当场中的 P_1,P_2 两点互强度在透过物体时,受到透明物体上这两点的振幅及相位透过率的影响,不考虑透镜孔径的有限大小,代入透镜的二次相位因子,透镜前后平面上的互强度的关系可表示为

$$\boldsymbol{J}'_1(x_1,y_1;x_2,y_2)=\boldsymbol{t}(x_1,y_1)\boldsymbol{t}^*(x_2,y_2)\boldsymbol{J}_1(x_1,y_1;x_2,y_2)$$
$$=\exp\left\{\mathrm{j}\frac{\pi}{\bar{\lambda}f}[(x_2^2+y_2^2)-(x_1^2+y_1^2)]\right\}\boldsymbol{J}_1(x_1,y_1;x_2,y_2) \tag{4.8.3}$$

再次利用强度传播(4.6.26)式,将后焦面上的互强度 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}(u_1,v_1;u_2,v_2)$先用透镜后平面上的互强度表示,同时利用(4.8.3)式将之再用透镜前平面上的互强度表示,得到

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}(u_1,v_1;u_2,v_2)=\frac{1}{\bar{\lambda}^2 f^2}\exp\left\{\mathrm{j}\frac{\pi}{\bar{\lambda}f}(u_2^2+v_2^2)-(u_1^2+v_1^2)\right\}$$
$$\times\iiiint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{J}_1(x_1,y_1;x_2,y_2)\exp\left[-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\bar{\lambda}f}(x_2u_2+y_2v_2$$
$$-x_1u_1-y_1v_1)\right]\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}y_2 \tag{4.8.4}$$

将(4.8.1)式代入(4.8.4)式得到一个八重积分.可利用高斯函数的傅里叶变换,先对 x_1,y_1,x_2,y_2 积分,即

$$\iiiint_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\mathrm{j}\frac{2\pi}{\bar{\lambda}f}[(x_2^2+y_2^2)-(x_1^2+y_1^2)]\right\}\exp\left\{\mathrm{j}\frac{2\pi}{\bar{\lambda}f}[(\alpha_2+u_2)x_2+(\beta_2+v_2)y_2$$
$$-(\alpha_1+u_1)x_1-(\beta_1+v_1)y_1]\right\}\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}y_2$$
$$=(\bar{\lambda}f)^2\exp\left\{-\mathrm{j}\frac{\pi}{\bar{\lambda}f}[(\alpha_2+u_2)^2+(\beta_2+v_2)^2-(\alpha_1+u_1)^2-(\beta_1+v_1)^2]\right\} \tag{4.8.5}$$

(4.8.4)式最后变成

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}(u_1,v_1;u_2,v_2)=\frac{1}{\lambda^2 f^2}\iiiint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{J}_{\mathrm{o}}'(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)\times\exp\left\{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda f}(\alpha_2 u_2+\beta_2 v_2-\alpha_1 u_1-\beta_1 v_1)\right\}\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\beta_1\,\mathrm{d}\alpha_2\,\mathrm{d}\beta_2 \tag{4.8.6}$$

若令

$$\nu_1=-\frac{u_1}{\lambda f},\quad \nu_2=-\frac{v_1}{\lambda f},\quad \nu_3=\frac{u_2}{\lambda f},\quad \nu_4=\frac{v_2}{\lambda f} \tag{4.8.7}$$

则

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}(u_1,v_1;u_2,v_2)=\frac{1}{\lambda^2 f^2}\iiiint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{J}_{\mathrm{o}}'(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)\times\exp\{-\mathrm{j}2\pi(\alpha_1\nu_1+\beta_1\nu_2+\alpha_2\nu_3+\beta_2\nu_4)\}\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\beta_1\,\mathrm{d}\alpha_2\,\mathrm{d}\beta_2 \tag{4.8.8}$$

上式表明,薄凸透镜前后焦面上互强度之间构成一个四维傅里叶变换对.注意,这一重要结论是在准单色近似下才成立的.

在(4.8.6)式中,令 $u_1=u_2=u$,$v_1=v_2=v$,即两点全成一点,互强度变成光强,得到

$$I_{\mathrm{f}}(u,v)=\frac{1}{\lambda^2 f^2}\iiiint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{J}_{\mathrm{o}}'(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)\exp\left\{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda f}[u(\alpha_2-\alpha_1)+v(\beta_2-\beta_1)]\right\}\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\beta_1\,\mathrm{d}\alpha_2\,\mathrm{d}\beta_2 \tag{4.8.9}$$

如果透镜前焦面的互强度是由部分相干光照明一个薄透明物体产生的,则可用照明物体的光场互强度将透镜前后焦面的互强度表示出.

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{o}}'(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)=\boldsymbol{t}(\alpha_1,\beta_1)\boldsymbol{t}^{*}(\alpha_2,\beta_2)\boldsymbol{J}_{\mathrm{o}}(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2) \tag{4.8.10}$$

式中 $\boldsymbol{t}(\alpha,\beta)$表示薄透明物体的振幅和相位透过率,将(4.8.10)式代入(4.8.8)式,则有

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}(u_1,v_1;u_2,v_2)=\frac{1}{\lambda^2 f^2}\iiiint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{t}(\alpha_1,\beta_1)\boldsymbol{t}^{*}(\alpha_2,\beta_2)\boldsymbol{J}_{\mathrm{o}}(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)\times\exp[-\mathrm{j}2\pi(\alpha_1\nu_1+\beta_1\nu_2+\alpha_2\nu_3+\beta_2\nu_4)]\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\beta_1\,\mathrm{d}\alpha_2\,\mathrm{d}\beta_2 \tag{4.8.11}$$

这说明透镜后焦面上的互强度携带了物体本身及照明光场相干性的全部信息.

4.9 部分相干成像

对于部分相干光成像,讨论仍然限制在准单色光照明的范围内,也就是说,仍用窄带光照明,且系统的几何关系满足傍轴近似条件.在准单色光照明条件下,光学系统传递的基本物理量,即信息的载体是互强度,作为初步了解,我们只限于在空域讨论.

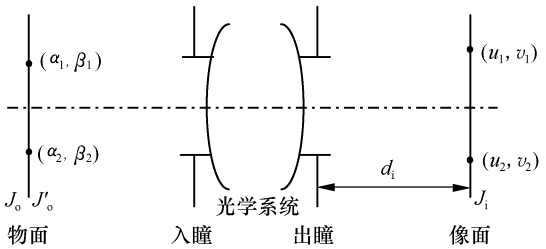


图 4.9.1 准单色光照明的光学成像系统

参看图 4.9.1,处于物平面上的物体发出的准单色光互强度分布为 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{o}}'(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)$,它可以是透射的,也可是反射的,不失一般性,假设透射照明的准单色光互强度为 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{o}}(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)$,透明物体的复振幅透过率为 $\boldsymbol{t}(\alpha,\beta)$,它们与 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{o}}'(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)$之间的关系可用(4.8.10)式表示,系统物

像面之间复振幅满足成像关系.当系统用波长为 $\bar{\lambda}$ 的准单色光照明时,点扩散函数为 $h(\alpha,\beta;u,v)$,也就是说,在准单色光条件下,复振幅成像过程可以用物面的振幅分布与点扩散函数的卷积来描述.但是,在准单色光照明下,物像的互强度分布和光强度分布之间的关系并不能够用准单色光复振幅点扩散函数来直接表达.根据互强度的定义,物像面的互强度分布可以用物像面的解析函数形式的复振幅 $\boldsymbol{u}_o(\alpha,\beta)$和 $\boldsymbol{u}_i(u,v)$表示为

$$\boldsymbol{J}_o(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)=\langle \boldsymbol{u}_o(\alpha_1,\beta_1)\boldsymbol{u}_o^*(\alpha_2,\beta_2)\rangle \tag{4.9.1a}$$

$$\boldsymbol{J}_i(u_1,v_1;u_2,v_2)=\langle \boldsymbol{u}_i(u_1,v_1)\boldsymbol{u}_i^*(u_2,v_2)\rangle \tag{4.9.1b}$$

在(4.9.1)式中将像面的复振幅分布用物面的复振幅分布与点扩散函数的卷积代替,得到

$$\boldsymbol{J}_i(u_1,v_1;u_2,v_2)=\left\langle\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{u}_o(\alpha_1,\beta_1)\boldsymbol{h}(u_1-\alpha_1,v_1-\beta_1)\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\beta_1\right.$$
$$\left.\times\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{u}_o^*(\alpha_2,\beta_2)\boldsymbol{h}^*(u_2-\alpha_2,v_2-\beta_2)\mathrm{d}\alpha_2\,\mathrm{d}\beta_2\right\rangle$$

再交换积分与求时间平均的次序,有

$$\boldsymbol{J}_i(u_1,v_1;u_2,v_2)=\iiiint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{J}_o(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)\boldsymbol{h}(u_1-\alpha_1,v_1-\beta_1)\boldsymbol{h}^*(u_2-\alpha_2,v_2-\beta_2)\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\beta_1\,\mathrm{d}\alpha_2\,\mathrm{d}\beta_2 \tag{4.9.2}$$

这是一个四维卷积积分,因而成像系统可以看作是互强度传递的空间不变线性系统,系统在空域对互强度传播的脉冲响应为 $\boldsymbol{h}(u_1,v_1)\boldsymbol{h}^*(u_2,v_2)$,它与输入互强度 $\boldsymbol{J}_o$ 的卷积可得出输出的互强度 $\boldsymbol{J}_i$.

当像面上考察互强度的两点合为一点时,得到像面的光强分布

$$I_i(u,v)=\iiiint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{J}_o(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)\boldsymbol{h}(u-\alpha_1,v-\beta_1)\boldsymbol{h}^*(u-\alpha_2,v-\beta_2)\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\beta_1\,\mathrm{d}\alpha_2\,\mathrm{d}\beta_2 \tag{4.9.3}$$

在透射照明情况下,对透过率为 $\boldsymbol{t}(\alpha,\beta)$的透明物体,输出与输入面互强度关系为

$$\boldsymbol{J}_i(u_1,v_1;u_2,v_2)=\iiiint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{t}(\alpha_1,\beta_1)\boldsymbol{t}^*(\alpha_2,\beta_2)\boldsymbol{J}_o(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)$$
$$\times\boldsymbol{h}(u_1-\alpha_1,v_1-\beta_1)\boldsymbol{h}^*(u_2-\alpha_2,v_2-\beta_2)\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\beta_1\,\mathrm{d}\alpha_2\,\mathrm{d}\beta_2 \tag{4.9.4}$$

这说明物体信息在传递过程中受到光学系统相干成像脉冲响应以及照明光场相干性的联合影响.

对于非相干光成像,物光场的互强度可以用(4.6.14)式代入(4.9.3)式得到

$$I_i(u,v)=\kappa\iint_{-\infty}^{\infty}I_o(\alpha,\beta)\,|\,\boldsymbol{h}(u-\alpha,v-\beta)\,|^2\,\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta \tag{4.9.5}$$

定义光强脉冲响应为

$$h_i(u-\alpha,v-\beta)=|\,\boldsymbol{h}(u-\alpha,v-\beta)\,|^2 \tag{4.9.6}$$

则有非相干成像时的物像光强分布之间的关系如下

$$I_i(u,v)=\kappa\iint_{-\infty}^{\infty}I_o(\alpha,\beta)\boldsymbol{h}_i(u-\alpha,v-\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta \tag{4.9.7}$$

因而非相干成像系统对强度传递是线性的,而且光强脉冲响应等于复振幅脉冲响应的模的平方.

习　题

4.1　若光波的波长宽度为 $\Delta\lambda$,频率宽度 $\Delta\nu$,试证明:$\left|\dfrac{\Delta\nu}{\nu}\right|=\left|\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda}\right|$.设光波波长为 $\bar{\lambda}=632.8\text{nm}$,$\Delta\lambda=2\times10^{-8}\text{nm}$,试计算它的频宽 $\Delta\nu=$? 若把光谱分布看成是矩形线型,则相干长度 $l_c=$?

4.2　设迈克耳孙干涉仪所用光源为 $\lambda_1=589\text{nm}$,$\lambda_2=589.6\text{nm}$ 的钠双线,每一谱线的宽度为 0.01nm.

(1) 试求光场的复相干度的模；

(2) 当移动一臂时，可见到条纹总数大约为多少？

(3) 可见度有几个变化周期？每个周期有多少条纹？

4.3 假定气体激光器以 N 个等强度的纵模振荡.其归一化功率谱密度可表示为

$$\hat{G}(\nu)=\frac{1}{N}\sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2}\delta(\nu-\bar{\nu}+n\Delta\nu)$$

式中，$\Delta\nu$ 是纵模间隔，$\bar{\nu}$ 为中心频率.为简便起见，假定 N 为奇数.

(1) 证明复相干度的模为

$$|\gamma(\tau)|=\left|\frac{\sin(N\pi\Delta\nu\tau)}{N\sin(\pi\Delta\nu\tau)}\right|$$

(2) 若 $N=3$，且 $0\leqslant\tau\leqslant1/\Delta\nu$，画出 $|\gamma(\tau)|$ 与 $\Delta\nu\tau$ 的关系曲线.

4.4 在例 4.7.1 所示的杨氏干涉实验中，若缝光源用两个相距为 a，强度相等的准单色点光源代替，试计算此时的复相干系数.

4.5 利用傍轴条件计算被一准单色点光源照明，距离光源为 z 的平面上任意两点 P_1 和 P_2 之间的复相干系数 $\mu(P_1,P_2)$.

第5章　光学全息

普通照相是根据几何光学成像原理，记录下光波的强度（即振幅），将空间物体成像在一个平面上，由于丢失了光波的相位，因而失去了物体的三维信息．如果能够记录物光波的振幅和相位，并在一定条件下再现，则可看到包含物体全部信息的三维像，即使物体已经移开，仍然可以看到原始物体本身具有的全部现象，包括三维感觉和视差．利用干涉原理，将物体发出的特定光波以干涉条纹的形式记录下来，使物光波前的全部信息都储存在记录介质中，故所记录的干涉条纹图样被称为“全息图”．当用光波照射全息图时，由于衍射原理能重现出原始物光波，从而形成与原物体逼真的三维像，这个波前记录和重现的过程称为全息术或全息照相．

本章重点讨论光学全息的基本原理，介绍一些重要类型的全息图，以及光学全息术的主要应用．

5.1　光学全息概述

全息照相术是英籍匈牙利科学家丹尼斯·盖伯（Dennis Gabor）发明的．1947年他从事电子显微镜研究，当时电子显微镜的理论分辨率极限是0.4nm，由于丢失了光波的相位，实际只能达到1.2nm，比分辨原子晶格所要求的分辨率0.2nm差得很多．这主要是由于电子透镜的像差比光学透镜要大得多，从而限制了分辨率的提高．

为此，盖伯设想：记录一张不经任何透镜的，用物体衍射的电子波制作曝光照片（即全息图），使它能保持物体的振幅和相位的全部信息，然后用可见光照明全息图来得到放大的物体像．由于光波波长比电子波长高5个数量级，这样，再现时物体的放大率 $M=\lambda_{光}/\lambda_{电子}$ 就可获得 10^5 倍而不会出现任何像差，所以这种无透镜两步成像的过程可期望获得更高的分辨率．根据这一设想，他在1948年提出了一种用光波记录物光波的振幅和相位的方法，并用实验证实了这一想法，从而开辟了光学中的一个崭新领域，他也因此而获得1971年的诺贝尔物理学奖．

从1948年盖伯提出全息照相的思想开始一直到50年代末期，全息照相都是采用汞灯作为光源，而且是所谓的同轴全息图，它的±1级衍射波是分不开的，即存在所谓的“孪生像”问题，不能获得好的全息像．这是第一代全息图，是全息术的萌芽时期．第一代全息图存在两个严重问题，一个是再现的原始像和共轭像分不开，另一个是光源的相干性太差．

1960年激光的出现，提供了一种高相干性光源．1962年美国科学家利思（Leith）和乌帕特尼克斯（Upatnieks）将通信理论中的载频概念推广到空域中，提出了离轴全息术．他用离轴的参考光与物光干涉形成全息图，再利用离轴的参考光照射全息图，使全息图产生三个在空间互相分离的衍射分量，其中一个复制出原始物光．这样，第一代全息图的两大难题宣告解决，产生了激光记录、激光再现的第二代全息图．从而使全息术在沉睡了十几年之后得到了新生，进入了迅速发展年代，相继出现了多种全息方法，并在信息处理、全息干涉计量、全息显示、全息光学元件等领域得到广泛应用．由此可见，高相干度激光的出现，是全息术发展的巨大动力．

由于激光再现的全息图失去了色调信息，人们开始致力于研究第三代全息图．第三代全息图是利用激光记录和白光再现的全息图，例如反射全息、像全息、彩虹全息及模压全息等，在一定的条件下赋予全息图以鲜艳的色彩．

激光的高度相干性,要求全息拍摄过程中各个元件、光源和记录介质的相对位置严格保持不变,并且相干噪声也很严重,这给全息术的实际使用带来了种种不便.于是,科学家们又回过头来继续探讨白光记录的可能性.第四代全息图可能是白光记录和白光再现的全息图,它将使全息术最终走出实验室,进入广泛的实用领域.目前已开始取得进展.

除了用光学干涉方法记录全息图,还可用计算机和绘图设备画出全息图,这就是计算全息(computer-generated hologram,简称 CGH).计算全息是利用数字计算机来综合的全息图,不需要物体的实际存在,只需要物光波的数学描述.因此,具有很大的灵活性.

全息术不仅可以用于光波波段,也可以用于电子波,X 射线、声波和微波波段.实际上,利思和乌帕特尼克斯的离轴全息概念就是来自于微波领域的旁视雷达—微波全息图.正如盖伯在他荣获诺贝尔奖时的演说中所指出的,利思在雷达中用的电磁波长比光波长 10 万倍,而盖伯本人在电子显微镜中所用的电子波长又比光波短 10 万倍.他们分别在相差 10^{10} 倍波长的两个方向上发展了全息照相术,这说明科学的发展总是互相渗透,互相影响的.

5.2 波前记录与再现

用干涉方法得到的像平面上光波的全部信息(振幅和相位),存在于物像之间光波经过的任一平面上.如果在这些平面上能记录携带物体全部信息的波前,并在一定条件下再现(亦称重现)物光波的波前,那么,从效果上看,相当于在记录时被"冻结"在记录介质上的波前从全息图上"释放"出来,然后继续向前传播,以产生一个可观察的三维像.如果不考虑记录过程和再现过程在时间上的间隔和空间上存在的差异,再现光波与原始光波毫无区别.因此,由光波传递信息而构成物体的过程被分解为两步:波前记录与波前再现.在全息术中通常使用的波是光波,一般把它称为光全息术.根据使用波的不同,又有微波全息术、声波全息术等.波前记录与波前再现是全息术的核心.

5.2.1 波前记录

1. 用干涉方法记录物光波波前

物光波波前信息包括光波的振幅和相位,然后现有的所有记录介质仅对光强产生响应,因此,必须设法把相位信息转换成强度的变化才能记录下来.干涉法是将空间相位调制转换为空间强度调制的标准方法.

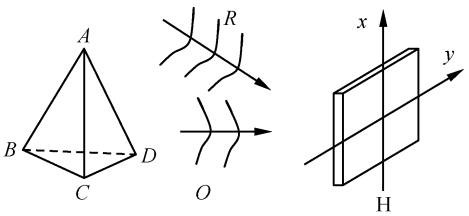


图 5.2.1 波前记录

波前记录过程如图 5.2.1 所示.设传播到记录介质上的物光波前为

$$\boldsymbol{O}(x,y)=O(x,y)\exp[-\mathrm{j}\phi(x,y)] \tag{5.2.1}$$

传播到记录介质上的参考光波波前为

$$\boldsymbol{R}(x,y)=R(x,y)\exp[-\mathrm{j}\psi(x,y)] \tag{5.2.2}$$

则被记录的总光强为

$$\begin{aligned} I(x,y)&=|\boldsymbol{R}(x,y)+\boldsymbol{O}(x,y)|^2 \\ &=|\boldsymbol{R}(x,y)|^2+|\boldsymbol{O}(x,y)|^2+\boldsymbol{R}(x,y)\boldsymbol{O}^*(x,y)+\boldsymbol{R}^*(x,y)\boldsymbol{O}(x,y) \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

或者

$$\boldsymbol{I}(x,y)=|\boldsymbol{R}(x,y)|^2+|\boldsymbol{O}(x,y)|^2+2R(x,y)O(x,y)\cos[\psi(x,y)-\varphi(x,y)] \tag{5.2.4}$$

常用的记录介质是银盐感光干板,对两个波前的干涉图样曝光后,经显影、定影处理得到全

息图.因此,全息图实际上就是一幅干涉图.(5.2.4)式中的前两项是物光和参考光的强度分布,其中参考光波一般都选用比较简单的平面波或球面波,因而 $|\boldsymbol{R}(x,y)|$ 是常数或近似于常数,而 $|\boldsymbol{O}(x,y)|$ 是物光波在底片上造成的强度分布,它是不均匀的,但实验上一般都让它比参考光波弱得多.前两项基本上是常数,作为偏置项,第三项是干涉项,包含有物光波的振幅和相位信息.参考光波作为一种高频载波,其振幅和相位都受到物光波的调制(调幅和调相).参考光波的作用正好完成将物波波前的相位分布转换成干涉条纹强度分布的任务.

2. 记录过程的线性条件

作为全息记录的感光材料很多,最常用的由细微粒卤化银乳胶涂敷的超微粒干板,简称全息干板.假定全息干板的作用相当于一个线性变换器,它把曝光期间内的入射光强线性地变换为显影后负片的振幅透过率,为此必须将曝光量变化范围控制在全息干板 t-E 曲线的线性段内.图5.2.2是负片的 t-E 曲线,横坐标 E 表示曝光量,纵坐标 t 表示振幅透过率.此外,我们还必须假定全息干板具有足够高的分辨率,以便能记录全部入射的空间结构.这样,全息图的振幅透过率就可记为

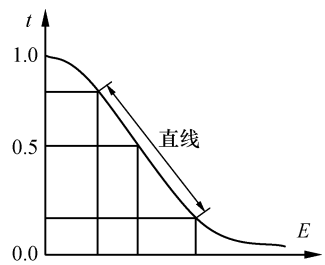


图 5.2.2 负片的 t-E 曲线

$$t(x,y)=t_0+\beta E=t_0+\beta[\tau I(x,y)]=t_0+\beta' I(x,y) \quad (5.2.5)$$

式中:t_0 和 β 均为常数,β 是 t-E 曲线直线部分的斜率,β' 为曝光时间 τ 和 β 之乘积.对于负片和正片,β' 分别为负值和正值.假定参考光的强度在整个记录表面是均匀的,则

$$t(x,y)=t_0+\beta'(|\boldsymbol{R}|^2+|\boldsymbol{O}|^2+\boldsymbol{R}^*\boldsymbol{O}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{O}^*)=t_b+\beta'(|\boldsymbol{O}|^2+\boldsymbol{R}^*\boldsymbol{O}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{O}^*) \quad (5.2.6)$$

式中:$t_b=t_0+\beta'|\boldsymbol{R}|^2$,表示均匀偏置透过率.如果全息图的记录未能满足上面指出的线性记录条件,将影响再现光波的质量.

5.2.2 波前再现

1. 衍射效应再现物波波前

用一束相干光波照射全息图,假定它在全息图平面上的复振幅分布为 $\boldsymbol{C}(x,y)$,则透过全息图的光场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}(x,y)&=\boldsymbol{C}(x,y)t(x,y)=t_b\boldsymbol{C}+\beta'\boldsymbol{O}\boldsymbol{O}^*\boldsymbol{C}+\beta'\boldsymbol{R}^*\boldsymbol{C}\boldsymbol{O}+\beta'\boldsymbol{R}\boldsymbol{C}\boldsymbol{O}^*\\&=\boldsymbol{U}_1+\boldsymbol{U}_2+\boldsymbol{U}_3+\boldsymbol{U}_4\end{aligned} \quad (5.2.7)$$

透射场(5.2.7)式的写法已经表明,我们应当将 $\boldsymbol{C},\boldsymbol{O},\boldsymbol{O}^*$ 看做波前函数,它们分别代表照明光波的直接透射波、物光波及其共轭波,而将它们各自的系数分别看做一种波前变换或一种运算操作.一般而言,如果它们各自的系数中含有二次相位因子,则说明被作用的波前相当于经过了一个透镜的聚散.如果系数中出现了线性因子,则说明被作用的波前经过了一个棱镜的偏转;如果系数中既含有二次相位因子又含有线性相位因子,则说明被作用的波前相继经过透镜的聚散和棱镜的偏转,究竟是哪一种情况,这要看全息记录时的参考波与再现时的再现波(照明波)之间的关系.先看 $\boldsymbol{U}_1$ 的系数 $t_b=t_0+\beta'R^2$,其中 t_0 为常数.由于参考波通常采用简单的球面波或平面波,故 R 近似为常数,于是 $\boldsymbol{U}_1$ 中两项系数的作用仅仅改变照明光波 $\boldsymbol{C}$ 的振幅,并不改变 $\boldsymbol{C}$ 的特性.$\boldsymbol{U}_2$ 的系数中含有 O^2,是物光波单独存在时在底片上造成的强度分布,它是不均匀的,故 $\boldsymbol{U}_2=\beta'O^2\boldsymbol{C}$ 代表振幅受到调制的照明波前,这实际上是 $\boldsymbol{C}$ 波经历 $O^2(x,y)$ 分布的一张底片的衍射,使照明波多少有些离散而出现杂光,是一种“噪声”信息.这是一个麻烦问题,但实验上可以想些办

法,例如适当调整照明度,使 O^2 与 R^2 相比而成为次要因素.总之,$\boldsymbol{U}_1$ 和 $\boldsymbol{U}_2$ 基本上保留了照明光波的特性.这一项称为全息图衍射场中的0级波.

再看 $\boldsymbol{U}_3$ 项,当照明光波是与参考光波完全相同的平面波或球面波时(即 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{R}$),透射光波中的第三项为

$$\boldsymbol{U}_3(x,y)=\beta'R^2\boldsymbol{O}(x,y) \tag{5.2.8}$$

因为 R^2 是均匀的参考光强度,所以除了相差一个常数因子外,$\boldsymbol{U}_3$ 是原来物波波前的准确再现,它与在波前记录时原始物体发出的光波的作用完全相同.当这一光波传播到观察者眼睛里时,可以看到原物的形象.由于原始物光波是发散的,所以观察到的是物体的虚像,如图5.2.3(a)所示.这一项称为全息图衍射场中的+1级波.

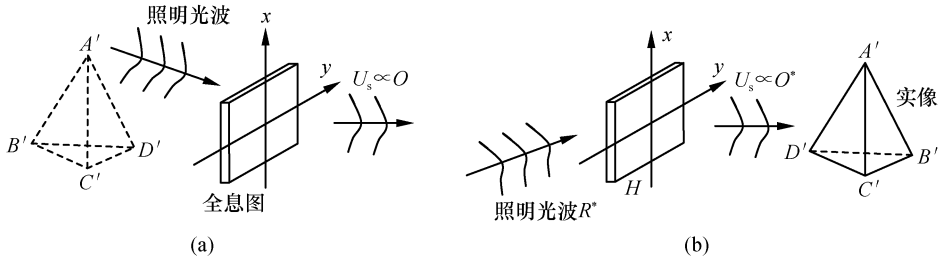


图5.2.3 波前再现

(a)用原始参考波照明;(b)用共轭参考波照明

透射光波中的第四项为

$$\boldsymbol{U}_4(x,y)=\beta'\boldsymbol{R}^2\boldsymbol{O}^*(x,y) \tag{5.2.9}$$

当照明光波与参考光波完全相同时,$\boldsymbol{R}^2$ 中的相位因子一般无法消除.如果两者都是平面波,则其相位因子是一个线性相位因子,使 $\boldsymbol{U}_4$ 波成为并不严格与原物镜像对称的会聚波,人们在偏离镜像对称位置的某处仍然可以接收到一个原物的实像.如果照明光波与参考光波是球面波,则 $\boldsymbol{R}^2$ 中有二次相位因子使 $\boldsymbol{O}^*$ 波发生聚散,随之发生位移和缩放,人们在偏离镜像对称位置的某处可能接收到一个与原物大小不同的实像.我们称 $\boldsymbol{U}_4$ 项为全息图衍射场中的−1级波.

只有当照明光波与参考光波均为正入射的平面波时,入射到全息上的相位可取为零.这时 $\boldsymbol{U}_3$ 和 $\boldsymbol{U}_4$ 中的系数均为实数,无附加相位因子,全息图衍射场中的±1级光波才严格地镜像对称.由共轭光波 $\boldsymbol{U}_4$ 所产生的实像,对观察者而言,该实像的凸凹与原物体正好相反,因而给人以某种特殊感觉,这种像称为赝像.

若照明光波 $\boldsymbol{C}(x,y)$ 恰好是参考光波的共轭波 $\boldsymbol{R}^*(x,y)$,则再现波场的第三项和第四项为

$$\boldsymbol{U}_3(x,y)=\beta'\boldsymbol{R}^*\boldsymbol{R}^*\boldsymbol{O}(x,y) \tag{5.2.10}$$

$$\boldsymbol{U}_4(x,y)=\beta'\boldsymbol{R}^2\boldsymbol{O}^*(x,y) \tag{5.2.11}$$

这时 $\boldsymbol{U}_4$ 再现了物光波前的共轭波,给出原始物体的一个实像,如图5.2.3(b)所示.$\boldsymbol{U}_3$ 再现的是物光波前,故给出原始物体的一个虚像,由于受 $\boldsymbol{R}^*\boldsymbol{R}^*$ 的调制,虚像会也产生变形.

波前记录是物波波前与参考波前的干涉记录,它使振幅和相位调制的信息变成干涉图的强度调制.这种全息图被再现光波照射时,它又起一个衍射光屏的作用,正是由于光波通过这种衍射光屏而产生的衍射效应,使全息图上的强度调制信息还原为波前的振幅和相位信息,再现了物光波前.因此,波前记录和波前再现的过程,实质上是光波的干涉和衍射的结果.

2. 波前再现过程的线性性质

无论选择哪一种再现方式,除了我们感兴趣的那个特定场分量(即当 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{R}$ 时的 $\boldsymbol{U}_3$ 项及

$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{R}^*$ 时的 $\boldsymbol{U}_4$ 项)外,总是伴随三项附加的场分量.因此,将波前记录和波前再现的过程看成一个系统变化,以记录的物波场为输入,以再现时的再现波场为输出,这个系统所实现的变换是高度非线性的.但是,若把记录时的光波前作为输入,以再现时的再现波场为输出,这个系统所实现的变换是高度非线性的.但是,若把记录时的物光波前作为输入,再现时的透射场的单项分量 $\boldsymbol{U}_3$[(5.2.10)式]或 $\boldsymbol{U}_4$[(5.2.11)式]作为输出,那么这样定义的系统就是一个线性系统.采用线性系统的概念将有助于简化对全息成像过程的分析.下面将要介绍的离轴全息,为透射场中满足线性变换关系的那个特定场分量的分离,提供了有效的手段.

5.2.3 全息图的基本类型

随着光学全息技术的发展,出现了多种类型的全息图,从不同的角度考虑,全息图可以有不同的分类方法.从物光与参考光的位置是否同轴考虑,可以分为同轴全息和离轴全息;从记录时物体与全息图片的相对位置分类,可以分为菲涅耳全息图、像面全息图和傅里叶变换全息图;从记录介质的厚度考虑,可以分为平面全息图和体积全息图.

例 5.2.1 设一列单色平面波的传播方向平行于 xz 平面并与 z 轴成 θ 角,如图 5.2.4(a)所示.

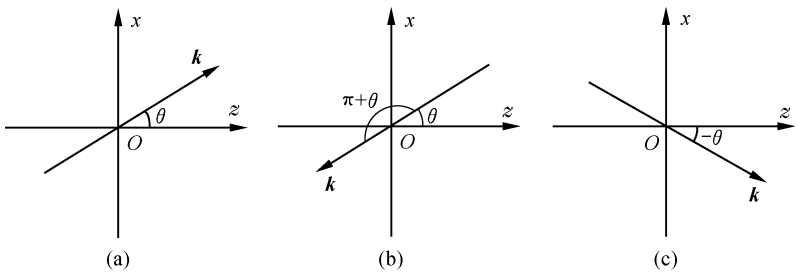


图 5.2.4

(1)写出原始光波和共轭光波的表达式,并说明其传播方向.

(2)写出原始光波和共轭光波在 $z=0$ 的平面上的表达式,并讨论它们的传播方向.

解:(1)一单色平面波和其共轭波的复表示为

$$\boldsymbol{U}(x,y,z;t)=A\exp[-\mathrm{j}(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]$$
$$\boldsymbol{U}_c(x,y,z;t)=A\exp[-\mathrm{j}(\omega t+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]$$

式中,ω 为光波的圆频率,$\boldsymbol{k}$ 为波矢,$\boldsymbol{r}$ 为空间位置矢量.由上式可以看出,共轭光波的传播方向与原光波相反,这是共轭光波的原本定义.对于单色光波.因子 $\exp(-\mathrm{j}\omega t)$ 总是相同,故略去不写,只写所谓复振幅,即

$$\boldsymbol{U}(x,y,z)=A\exp(\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})=A\exp[\mathrm{jk}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)]$$
$$\boldsymbol{U}_c(x,y,z)=A\exp(-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})=\boldsymbol{U}^*(x,y,z)$$

即共轭光波的数学表达式为原光波复振幅的共轭复数.

由题设条件知:$\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\theta$,$\beta=\dfrac{\pi}{2}$,$\gamma=\theta$,于是

$$\boldsymbol{U}(x,z)=A\exp[\mathrm{j}k(x\sin\theta+z\cos\theta)]$$
$$\boldsymbol{U}_c(x,z)=A\exp[-\mathrm{j}k(x\sin\theta+z\cos\theta)]$$
$$=A\exp\{\mathrm{j}k[x\sin(\theta+\pi)+z\cos(\theta+\pi)]\}$$

上式再次说明,共轭波的传播方向与原光波相反,如图 5.2.4(b)所示.

(2) 在 $z=0$ 平面上有

$$U(x)=A\exp[\mathrm{j}kx\sin\theta]$$

$$U_c(x)=A\exp[\mathrm{j}kx\sin(\theta+\pi)=A\exp[\mathrm{j}kx\sin(-\theta)]$$

由上式看出,若从在 $z=0$ 平面上造成的效果看,可将共轭波理解为沿$(-\theta)$方向传播的平面波,如图 5.2.4(c)所示.此外,我们习惯上总是让光波从左向右传播,因此人们常常偏爱这种解释.对于单色球面光波可作类似的讨论.

5.3 同轴全息图和离轴全息图

只有使全息图衍射光波中各项有效分离,才能得到可供利用的再现像,这和参考光的方向选取有着直接关系.根据物光波和参考光波的相对位置,全息图可以分为同轴全息图和离轴全息图.

5.3.1 同轴全息图

盖伯最初所提出和实现的全息图就是一种同轴全息图,记录盖伯全息图的光路如图 5.3.1(a)所示.

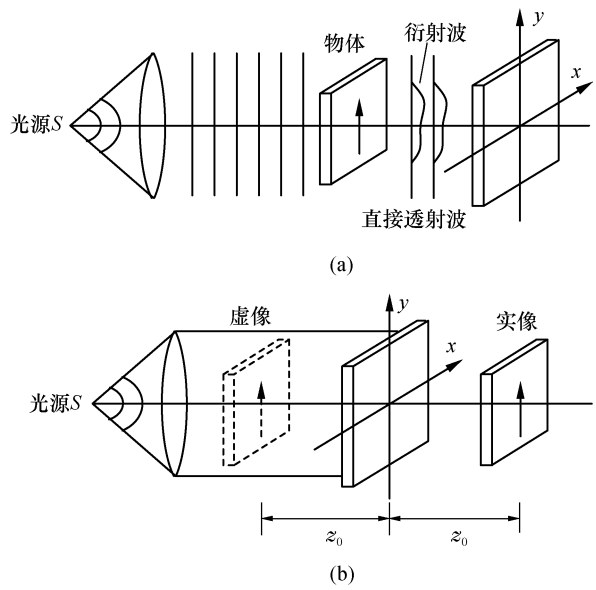


图 5.3.1 同轴全息图的记录与再现

(a) 记录;(b) 再现

设相干平面波照明一个高度透明的物体,透射光场可以表示为

$$t(x_0,y_0)=t_b+\Delta t(x_0,y_0) \tag{5.3.1}$$

式中,t_b 是一个很高的平均透射率,Δt 表示围绕平均值的变化,$|\Delta t|\ll|t_b|$.因此透射光场可以看成由两项组成:一项是由 t_b 表示的、强而均匀的平面波,它相当于波前记录时的参考波;另一项是 Δt 所代表的弱散射波,它相当于波前记录时的物光波.在距离物体 z_0 处放置全息图干板时的曝光光强为

$$I(x,y)=|\boldsymbol{R}+\boldsymbol{O}(x,y)|^2=R^2+|\boldsymbol{O}(x,y)|^2+\boldsymbol{R}^*\boldsymbol{O}(x,y)+\boldsymbol{R}\boldsymbol{O}^*(x,y) \tag{5.3.2}$$

在线性记录条件下,所得到的全息图的振幅透过率正比于曝光光强,即

$$t(x,y)=t_b+\beta'(|\boldsymbol{O}|^2+\boldsymbol{R}^*\boldsymbol{O}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{O}^*) \tag{5.3.3}$$

如果用振幅为 C 的平面波垂直照明全息图，则透射光场可用四项场分量之和表示为

$$\boldsymbol{U}(x,y)=Ct(x,y)=Ct_b+\beta'C\mid\boldsymbol{O}(x,y)\mid^2+\beta'\boldsymbol{R}^*C\boldsymbol{O}(x,y)+\beta\boldsymbol{R}C\boldsymbol{O}^*(x,y) \quad (5.3.4)$$

第一项是透过全息图的受到均匀衰减的平面波；第二项正比于弱的散射光的光强，可以忽略不计；第三项正比于 $\boldsymbol{O}(x,y)$，再现了原始物光波前，产生原始物体的一个虚像；第四项正比于 $\boldsymbol{O}^*(x,y)$，将在全息图另一侧与虚像对称位置产生物体的实像，如图 5.3.1(b)所示.

上述四项场分量都在同一方向上传播，其中直接透射光大大降低了像的衬度，且虚像和实像的相距为 $2z_0$，构成不可分离的孪生像.当对实像聚焦时，总是伴随一离焦的虚像，反之亦然.孪生像的存在也大大降低了全息像的质量.同轴全息的最大局限性还在于我们必须假定物体是高度透明的，否则第二项场分量将不能忽略.这一假定极大地限制了同轴全息图的应用范围.

5.3.2 离轴全息图

为了消除全息图中孪生像的干扰，1962 年美国密执安大学雷达实验室的利思和乌帕特立克斯提出了离轴全息图，也叫做偏斜参考光全息图.记录离轴全息图的光路如图 5.3.2 所示，准直光束一部分直接照射振幅透射率为 $t_b(x,y)$的物体，另一部分经物体之上的棱镜 P 偏折，以倾角 θ 投射到全息干板上.全息干板上的振幅分布应该是物体透射波和倾斜参考波叠加的结果，即

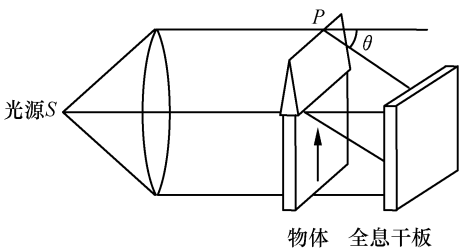


图 5.3.2 记录离轴全息图的光路

$$\boldsymbol{U}(x,y)=A\exp(-\mathrm{j}2\pi\alpha y)+\boldsymbol{O}(x,y) \quad (5.3.5)$$

其中参考波的空间频率 $\alpha=\sin\theta/\lambda$，底片上的强度分布为

$$I(x,y)=A^2+\mid\boldsymbol{O}(x,y)\mid^2+A\boldsymbol{O}(x,y)\exp(\mathrm{j}2\pi\alpha y)+A\boldsymbol{O}^*(x,y)\exp(-\mathrm{j}2\pi\alpha y) \quad (5.3.6)$$

把 $\boldsymbol{O}$ 表示为振幅和相位分布，即

$$\boldsymbol{O}(x,y)=O(x,y)\exp[-\mathrm{j}\phi(x,y)] \quad (5.3.7)$$

则(5.3.6)式可以改写为另一种形式

$$\boldsymbol{I}(x,y)=A^2+O^2(x,y)+2AO(x,y)\cos[2\pi\alpha y-\phi(x,y)] \quad (5.3.8)$$

此式表明，物光波波前的振幅信息 $O(x,y)$和相位信息 $\phi(x,y)$分别作为高频载波的调幅和调相而被记录下来.在满足线性记录的条件下，所得到的全息图的振幅透射率应正比于曝光期间的入射光强，即

$$t(x,y)=t_b+\beta'[\mid\boldsymbol{O}\mid^2+A\boldsymbol{O}\exp(\mathrm{j}2\pi\alpha y)+A\boldsymbol{O}^*\exp(-\mathrm{j}2\pi\alpha y)] \quad (5.3.9)$$

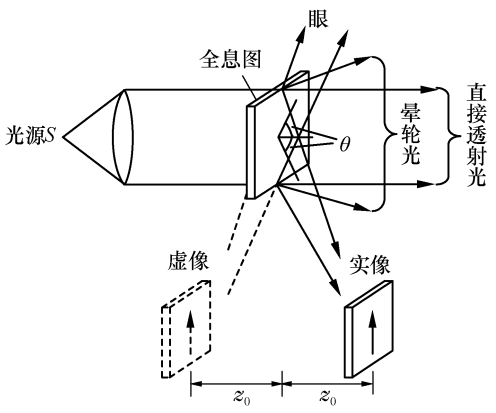


图 5.3.3 像的再现

假定再现光路如图 5.3.3 所示，全息图由一束垂直入射、振幅为 C 的均匀平面波照明，透射光场写成下列四个场分量之和：

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{U}_1&=t_bC\\ \boldsymbol{U}_2&=\beta'\mid\boldsymbol{O}(x,y)\mid^2\\ \boldsymbol{U}_3&=\beta'CA\boldsymbol{O}(x,y)\exp(\mathrm{j}2\pi\alpha y)\\ \boldsymbol{U}_4&=\beta'CA\boldsymbol{O}^*(x,y)\exp(-\mathrm{j}2\pi\alpha y)\end{aligned}\right\} \quad (5.3.10)$$

分量 $\boldsymbol{U}_1$ 是经过衰减的照明光波，代表沿底片轴线传播的平面波.分量 $\boldsymbol{U}_2$ 是一个透射光锥，主要能量方向靠近底片轴线，光锥的扩展程度取决于 $\boldsymbol{O}(x,y)$的带宽.分量 $\boldsymbol{U}_3$ 正比于原始物波波前 $\boldsymbol{O}$ 与一平面波相位因子 $\exp(\mathrm{j}2\pi\alpha y)$的乘积，表示原始物波将以向上倾斜的平面波为载波，在距底片 z_0 处形成物

体的一个虚像.分量 $\boldsymbol{U}_4$ 表示物波的共轭波前将以向下倾斜的平面波为载波,在底片的另一侧距离底片 z_0 处形成物体的一个实像.

从图 5.3.3 可以看到,再现的物波波前 $\boldsymbol{O}$ 和物波共轭波前 $\boldsymbol{O}^*$,二者具有不同的传播方向,并且还和分量波 $\boldsymbol{U}_1$ 和 $\boldsymbol{U}_2$ 分开.参考光和全息图之间的夹角 θ 越大,则分量波 $\boldsymbol{U}_3$ 和 $\boldsymbol{U}_4$ 与 $\boldsymbol{U}_1$ 和 $\boldsymbol{U}_2$ 分得越开.下面将从全息图所具有的空间频谱的分布来考察这四个场分量,以便对孪生像完全分离的条件给出一个定量的说明.

假定 $\boldsymbol{G}_1$,$\boldsymbol{G}_2$,$\boldsymbol{G}_3$,$\boldsymbol{G}_4$ 分别表示全息图被再现时透射光场四个分量波的空间频谱,又设再现光波 C 具有单位振幅,并忽略全息图底片的有限孔径,则这四项场分量分别为

$$\boldsymbol{G}_1(\xi,\eta) = F\{\boldsymbol{U}_1(x,y)\} = t_b\delta(\xi,\eta) \tag{5.3.11}$$

$$\boldsymbol{G}_2(\xi,\eta) = F\{\boldsymbol{U}_2(x,y)\} = \beta'\boldsymbol{G}_0(\xi,\eta)\text{☆}\boldsymbol{G}_0(\xi,\eta) \tag{5.3.12}$$

$$\boldsymbol{G}_3(\xi,\eta) = F\{\boldsymbol{U}_3(x,y)\} = \beta'\boldsymbol{G}_0(\xi,\eta-\alpha) \tag{5.3.13}$$

$$\boldsymbol{G}_4(\xi,\eta) = F\{\boldsymbol{U}_4(x,y)\} = \beta'\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}_0^*(-\xi,-\eta-\alpha) \tag{5.3.14}$$

式中,☆表示自相关,并且 $\boldsymbol{G}_0(\xi,\eta)=F\{O(x,y)\}$.

因为表征物体到全息图传播过程的传递函数是纯相位函数,所以 $\boldsymbol{G}_0$ 的带宽和物体带宽相同.假定物的最高空间频率为 B 周/mm,带宽为 $2B$,则物体的频谱和全息图四项场分量的频谱如图 5.3.4 所示.其中 $\boldsymbol{G}_1$ 是频域平面原点上的一个 δ 函数;$\boldsymbol{G}_2$ 正比于 $\boldsymbol{G}_0$ 的自相关,以原点为中心,带宽扩展到 $4B$;$|\boldsymbol{G}_3|$ 和 $|\boldsymbol{G}_4|$ 互成镜像,中心位于 $(0\pm\alpha)$,带宽为 $2B$.因此,为使 $|\boldsymbol{G}_3|$,$|\boldsymbol{G}_4|$ 和 $|\boldsymbol{G}_2|$ 互相不重叠,必须满足如下条件:

$$\alpha \geqslant \frac{2B+4B}{2} = 3B \tag{5.3.15}$$

若将 $\alpha=\sin\theta/\lambda$ 代入,则由(5.3.15)式可得 θ 的最小值为

$$\theta_{\min} = \arcsin(3B\lambda) \tag{5.3.16}$$

一旦 θ 超过 $\theta_{\min}$,实像和虚像即彼此分离,互不干扰,成像波也不会与背景光干涉叠加.这样,透明底片无论用正片或负片,都可以得到和原物衬度相同的像.

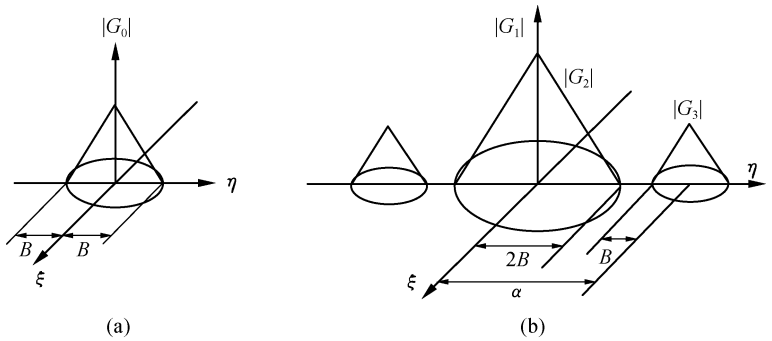


图 5.3.4 物体(a)和全息图(b)的频谱

最后应该指出,这里选用了垂直入射平面波作为再现光波,它既不是原始参考光波,也不是它的复正轭.也可以选用任意方向的平面波照明全息图,只有当记录介质的厚度与全息图上干涉图样的横向结构尺寸差不多时,对再现光波的性质才有严格要求.

5.4 基元全息图

本节我们对全息图所记录的干涉条纹进行分析.在拍摄全息图时,所用的参考光波总可以人

为地简化为平面波或球面波,而物体的形状却很复杂,所以全息图的干涉图样一般说来总是复杂的,但也是有规律的.它不外乎是平面波与平面波、平面波与球面波、球面波与球面波三种干涉中的一种.所谓基元全息图,是指由单一物点发出的光波与参考光波干涉所构成的全息图.于是,任何一种全息图均可以看做是许多基元全息图的线性组合.了解基元全息图的结构和作用,对于深入理解整个全息图的记录和再现机理,是十分有益的.

从空域的观点,可以把物体看作是一些相干点源的集合,物光波前是所有点源发出的球面波与参考光波相干涉,所形成的基元全息图称为基元波带片.从频域的观点,可以把物光波看作是许多不同方向传播的平面波(即角谱)的线性叠加,每一平面波分量与参考平面波干涉而形成的基元全息图是一些平行直条纹,称为基元光栅.当然,正是由于前一节中所指出的系统的线性性质,我们才能用叠加原理来进行讨论.

我们撇开实际光路,只考虑参考光波 $\boldsymbol{R}$ 与物光波 $\boldsymbol{O}$ 的干涉,在图 5.4.1(a)中,参考光波和物光波均为平面波,条纹的峰值强度面是平行的等间距平面,面间距 d 与光束的夹角有关.图 5.4.1(b)是参考光波为平面光波、物光波为发散球面波的情形,峰值强度面是一簇旋转抛物面.图 5.4.1(c)是参考光波和物光波均为发散球面波的情形,峰值强度面是旋转双曲面,转轴为两个点光源的连线.图 5.4.1(d)是一个发散的球面波和一个会聚的球面波相干涉,峰值强度面是一簇旋转椭圆面,两个点源的位置是旋转椭圆面的焦点.

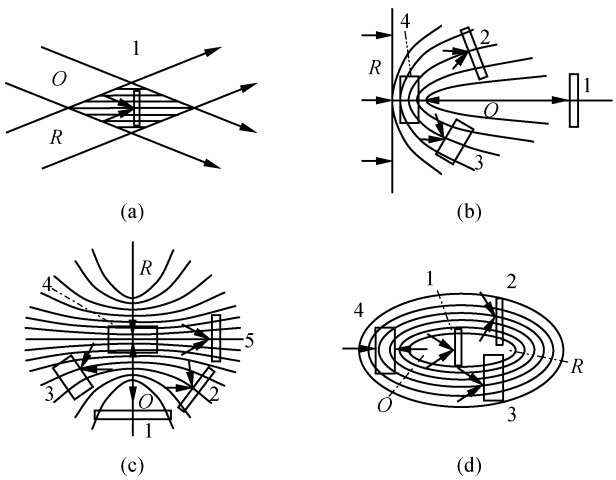


图 5.4.1 基元全息图

在图 5.4.1 中用实线表示记录物体位置,位置不同基元全息图的结构也不同.图 5.4.1(a)是傅里叶变换全息图结构.图 5.4.1(b)~(d)中,在位置 1 是同轴全息图,条纹是中心疏边缘密的同心圆环;在位置 2 是离轴全息图;在位置 3 是透射体积全息图;在位置 4 是反射体积全息图.参考光波与物光波自两边入射在记录介质上.在图 5.4.1(c)的位置 5 是无透镜傅里叶变换全息图.

例 5.4.1 研究基元光栅,如图 5.4.2(a)所示,参考光和物光均为平行光,对称入射到记录介质 Σ 上,即 $\theta_r=-\theta_o$,二者之间的夹角为 $\theta=2\theta_r$.

(1) 求出全息图上干涉条纹的形状和条纹间距公式.

(2) 当采用氦-氖激光记录时,试计算夹角为 $\theta=1°$ 和 $60°$ 时,条纹间距分别是多少?某感光胶片厂生产的全息记录干板,其分辨率为 3000 条/mm,试问当 $\theta=60°$ 时此干板能否记录下其干涉条纹?

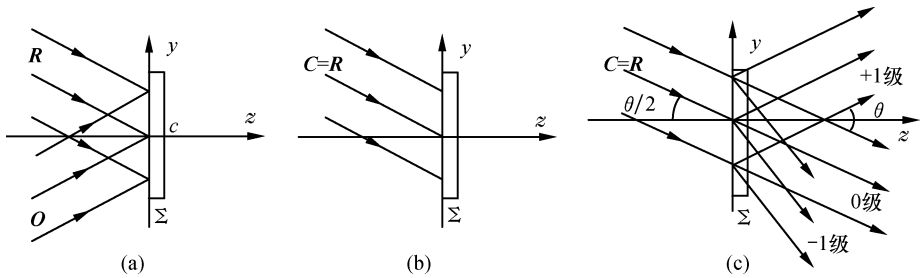


图 5.4.2

(3) 如图 5.4.2(b)所示,当采用的再现光波 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{R}$ 时,试分析 0,±1 级衍射的出射波方向,并作图表示.

解:(1) 设物光波和参考光波分别为

$$\boldsymbol{O}=O\exp[\mathrm{j}ky\sin\theta_0],\quad \boldsymbol{R}=R\exp[\mathrm{j}ky\sin\theta_r]$$

全息干板上的干涉场为

$$\boldsymbol{U}(y)=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{R}=O\exp[\mathrm{j}ky\sin\theta_0]+R\exp[\mathrm{j}ky\sin\theta_r]$$

全息干板上的光强分布为

$$\begin{aligned}I(y)&=|\boldsymbol{O}+\boldsymbol{R}|^2\\&=R^2+O^2+RO\exp[\mathrm{j}ky(\sin\theta_0-\sin\theta_r)]+RO\exp[-\mathrm{j}ky(\sin\theta_0-\sin\theta_r)]\\&=R^2+O^2+2RO\cos[ky(\sin\theta_0-\sin\theta_r)]\end{aligned}\tag{5.4.1}$$

显然干涉条纹的形式是正弦型的,条纹峰值由 $\frac{2\pi}{\lambda}y(\sin\theta_0-\sin\theta_r)=2m\pi$ 决定,它是一组与 y 轴垂直的平行直线.条纹间距 Δy 为

$$\Delta y=\frac{\lambda}{\sin\theta_0-\sin\theta_r}\tag{5.4.2}$$

若物光与参考光对称入射,即 $\theta_0=-\theta_r$,于是上式为

$$\Delta y=\frac{\lambda}{2\sin\theta_0}=\frac{\lambda}{2\sin(\theta/2)}\tag{5.4.3}$$

(2) 当 $\theta=1°$ 时　　$\Delta y=\dfrac{0.6328/2}{\sin 0.5°}=\dfrac{0.3164}{0.0087}=36.26\mu\mathrm{m}$

当 $\theta=60°$ 时　　$\Delta y=\dfrac{0.3164}{0.5000}=0.6328\mu\mathrm{m}$

干板的最小分辨距 d 为

$$d=\frac{1}{3000}\mathrm{mm}=\frac{1000}{3000}\mu\mathrm{m}=0.33\mu\mathrm{m}$$

这说明,当物光与参考光的夹角 $\theta=60°$ 时,所提供的全息干板可以记录下其干涉条纹.

(3) 全息记录干板经显影、定影等线性处理后,负片的复振幅透过率正比于曝光光强,即

$$t=t_b+\beta' O^2+\beta' RO\exp[\mathrm{j}ky(\sin\theta_0-\sin\theta_r)]+\beta' RO\exp[-\mathrm{j}ky(\sin\theta_0-\sin\theta_r)]$$

若再现波 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{R}=R\exp(\mathrm{j}ky\sin\theta_r)$,于是透射波场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}&=t\boldsymbol{R}\\&=(t_b+\beta' O^2)R\exp(\mathrm{j}ky\sin\theta_r)+\beta' R^2 O\exp(\mathrm{j}ky\sin\theta_0)\\&\quad+\beta' R^2 O\exp[-\mathrm{j}ky(\sin\theta_0-2\sin\theta_r)]\\&=\boldsymbol{U}_0+\boldsymbol{U}_{+1}+\boldsymbol{U}_{-1}\end{aligned}$$

其中：零级衍射波 $\boldsymbol{U}_0=(t_b+\beta' O^2)R\exp(\mathrm{j}ky\sin\theta_0)$ 是照明光波照直前进的透射平面波，当然，振幅有所下降．+1 级波 $\boldsymbol{U}_{+1}=\beta' R^2 O\exp(\mathrm{j}ky\sin\theta_0)$ 是物光波的再现波，但振幅有所变化．−1 级波 $\boldsymbol{U}_{-1}=\beta' R^2 O\exp[-\mathrm{j}ky3\sin\theta_0]=\beta' R^2 O\exp\left[-\mathrm{j}ky3\sin\dfrac{\theta}{2}\right]$ 是方向进一步向下偏转的物光波的共轭波，其偏转角度 θ_{-1} 满足 $\sin\theta_{-1}=3\sin\dfrac{\theta}{2}$．各波的传播情况如图 5.4.2(c)所示．

5.5 菲涅耳全息图

菲涅耳全息的特点是记录平面位于物体衍射光场的菲涅耳衍射区，物光由物体直接照到底片上．由于物体可以看成点源的线性组合，所以讨论点源全息图(即基元全息图)具有普遍意义．

5.5.1 点源全息图的记录和再现

两相干单色点光源所产生的干涉图实质上就是一个点源全息图，即波带片型基元全息图．假定参考波和物波是从点源 $O(x_o,y_o,z_o)$ 和点源 $R(x_r,y_r,z_r)$ 发出的球面波，波长为 λ，全息底片位于 $z=0$ 的平面上，与两个点源的距离满足菲涅耳近似条件．据此即可以用球面波的二次曲面近似描述这个球面波．记录光路如图 5.5.1(a)所示．

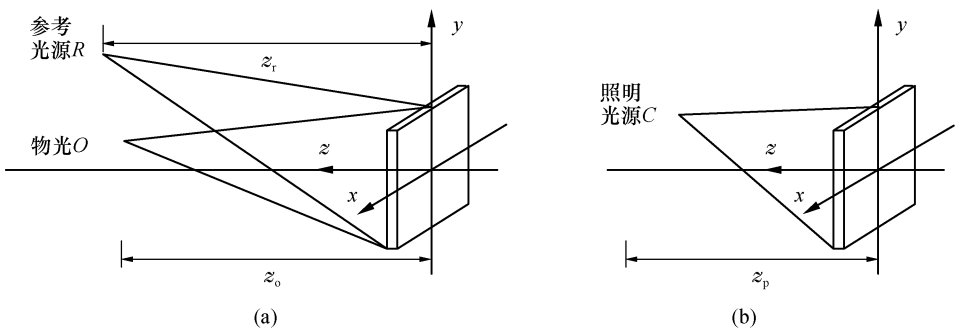


图 5.5.1 点源全息图的记录和再现

(a) 记录；(b) 再现

设投射到记录平面上的物光波的振幅为 O，考虑到一常数相位因子，写成 $\boldsymbol{O}$．到达记录平面的相位以坐标原点 O 为参考点来计算，并作傍轴近似，即假设 (x^2+y^2)，$(x_o^2+y_o^2)\ll z_o^2$，于是物光波的相位可简化成

$$\begin{aligned}\phi(x,y)&=\frac{2\pi}{\lambda}(OQ-OO)=\frac{2\pi}{\lambda}\{[(x-x_o)^2+(y-y_o)^2+z_o^2]^{1/2}-(x_o^2+y_o^2+z_o^2)\}\\&=\frac{2\pi}{\lambda}\left\{z_o\left[1+\frac{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}{z_o^2}\right]^{1/2}-z_o\left[1+\frac{x_o^2+y_o^2}{2z_o^2}\right]^{1/2}\right\}\\&\approx\frac{2\pi}{\lambda}\left\{z_o\left[1+\frac{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}{2z_o^2}\right]-z_o\left[1+\frac{x_o^2+y_o^2}{2z_o^2}\right]\right\}\\&=\frac{\pi}{\lambda z_o}(x^2+y^2-2xx_o-2yy_o)\end{aligned}\tag{5.5.1}$$

于是，记录平面上的物光波可写成

$$\boldsymbol{O}(x,y)=\boldsymbol{O}\exp\left\{\mathrm{j}\frac{\pi}{\lambda z_o}(x^2+y^2-2xx_o-2yy_o)\right\}\tag{5.5.2}$$

同理，记录平面上的参考光可写成

$$\boldsymbol{R}(x,y)=\boldsymbol{R}\exp\left\{\mathrm{j}\frac{\pi}{\lambda_1 z_r}(x^2+y^2-2xx_r-2yy_r)\right\} \tag{5.5.3}$$

以上两式中的 λ_1 为记录时所用的波长.记录平面上的复振幅分布为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}(x,y)=&\boldsymbol{O}\exp\left\{\mathrm{j}\frac{\pi}{\lambda_1 z_o}(x^2+y^2-2xx_o-2yy_o)\right\}\\&+\boldsymbol{R}\exp\left\{\mathrm{j}\frac{\pi}{\lambda_1 z_r}(x^2+y^2-2xx_r-2yy_r)\right\}\end{aligned} \tag{5.5.4}$$

记录平面上的光强分布为

$$\begin{aligned}I(x,y)=&|\boldsymbol{R}|^2+|\boldsymbol{O}|^2+\boldsymbol{R}\boldsymbol{O}^*\exp\left\{-\mathrm{j}\left[\frac{\pi}{\lambda_1 z_o}(x^2+y^2-2xx_o-2yy_o)\right.\right.\\&\left.\left.-\frac{\pi}{\lambda_1 z_r}(x^2+y^2-2xx_r-2yy_r)\right]\right\}\\&+\boldsymbol{R}^*\boldsymbol{O}\exp\left\{\mathrm{j}\left[\frac{\pi}{\lambda_1 z_o}(x^2+y^2-2xx_o-2yy_o)\right.\right.\\&\left.\left.-\frac{\pi}{\lambda_1 z_r}(x^2+y^2-2xx_r-2yy_r)\right]\right\}\end{aligned} \tag{5.5.5}$$

通常需保持记录过程的线性条件,即显影定影后底片的振幅透过率正比于曝光量,即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{t}(x,y)=&t_b+\beta'|\boldsymbol{O}|^2+\beta'\boldsymbol{R}\boldsymbol{O}^*\exp\left\{-\mathrm{j}\left[\frac{\pi}{\lambda_1 z_o}(x^2+y^2-2xx_o-2yy_o)\right.\right.\\&\left.\left.-\frac{\pi}{\lambda_1 z_r}(x^2+y^2-2xx_r-2yy_r)\right]\right\}\\&+\beta'\boldsymbol{R}^*\boldsymbol{O}\exp\left\{\mathrm{j}\left[\frac{\pi}{\lambda_1 z_o}(x^2+y^2-2xx_o-2yy_o)\right.\right.\\&\left.\left.-\frac{\pi}{\lambda_1 z_r}(x^2+y^2-2xx_r-2yy_r)\right]\right\}\\=&\boldsymbol{t}_1+\boldsymbol{t}_2+\boldsymbol{t}_3+\boldsymbol{t}_4\end{aligned} \tag{5.5.6}$$

在透过率中最重要的两项是

$$\boldsymbol{t}_3=\beta'\boldsymbol{R}\boldsymbol{O}^*\exp\left\{\mathrm{j}\left[\frac{\pi}{\lambda_1 z_r}(x^2+y^2-2xx_r-2yy_r)-\frac{\pi}{\lambda_1 z_o}(x^2+y^2-2xx_o-2yy_o)\right]\right\} \tag{5.5.7}$$

$$\boldsymbol{t}_4=\beta'\boldsymbol{R}^*\boldsymbol{O}\exp\left\{-\mathrm{j}\left[\frac{\pi}{\lambda_1 z_r}(x^2+y^2-2xx_r-2yy_r)-\frac{\pi}{\lambda_1 z_o}(x^2+y^2-2xx_o-2yy_o)\right]\right\} \tag{5.5.8}$$

在再现过程中,全息底片由位于(x_p,y_p,z_p)的点源发出的球面波照明,再现光波波长为 λ_2,如图 5.5.1(b)所示,可记为

$$\boldsymbol{C}(x,y)=\boldsymbol{C}\exp\left[\mathrm{j}\frac{\pi}{\lambda_2 z_p}(x^2+y^2-2xx_p-2yy_p)\right] \tag{5.5.9}$$

全息图透射项中,$\boldsymbol{U}_3=t_3\boldsymbol{C}(x,y)$和$\boldsymbol{U}_4=t_4\boldsymbol{C}(x,y)$是我们感兴趣的波前.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_3=&\beta'\boldsymbol{R}\boldsymbol{O}^*\boldsymbol{C}\exp\left\{\mathrm{j}\left[\frac{\pi}{\lambda_1 z_r}(x^2+y^2-2xx_r-2yy_r)-\frac{\pi}{\lambda_1 z_o}(x^2+y^2-2xx_o-2yy_o)\right.\right.\\&\left.\left.+\frac{\pi}{\lambda_2 z_p}(x^2+y^2-2xx_p-2yy_p)\right]\right\}\\=&\beta'\boldsymbol{R}\boldsymbol{O}^*\boldsymbol{C}\exp\left\{\mathrm{j}\pi\left(\frac{1}{\lambda_1 z_r}-\frac{1}{\lambda_1 z_o}+\frac{1}{\lambda_2 z_p}\right)(x^2+y^2)\right\}\\&\times\exp\left\{-\mathrm{j}2\pi\left[\left(\frac{x_r}{\lambda_1 z_r}-\frac{x_o}{\lambda_1 z_o}+\frac{x_p}{\lambda_2 z_p}\right)x+\left(\frac{y_r}{\lambda_1 z_r}-\frac{y_o}{\lambda_1 z_o}+\frac{y_p}{\lambda_2 z_p}\right)y\right]\right\}\end{aligned} \tag{5.5.10}$$

同理

$$\boldsymbol{U}_4 = \beta \boldsymbol{R}^* \boldsymbol{O}\boldsymbol{C}\exp\left\{ \mathrm{j}\pi\left(-\frac{1}{\lambda_1 z_r} + \frac{1}{\lambda_1 z_o} + \frac{1}{\lambda_2 z_p} \right)(x^2 + y^2) \right\}$$
$$\times \exp\left\{ -\mathrm{j}2\pi\left[-\left(\frac{x_r}{\lambda_1 z_r} - \frac{x_o}{\lambda_1 z_o} + \frac{x_p}{\lambda_2 z_p} \right) x + \left(-\frac{y_r}{\lambda_1 z_r} + \frac{y_o}{\lambda_1 z_o} - \frac{y_p}{\lambda_2 z_p} \right) y \right] \right\} \tag{5.5.11}$$

(5.5.10)式和(5.5.11)式的相位项中,x 和 y 的二次项是傍轴近似的球面波的相位因子,给出了再现像在 z 方向上的焦点.x 和 y 的一次项是倾斜传播的平面波的相位因子,给出了再现像离开 z 轴的距离.因此它们给出了再现光波的几何描述:一个向像点(x_i, y_i, z_i)会聚或由像点(x_i, y_i, z_i)发散的球面波.这些球面波在 xy 平面上的光场傍轴近似具有下列标准形式

$$\exp\left\{ \mathrm{j}\frac{\pi}{\lambda_2 z_i}(x^2 + y^2 - 2xx_i - 2yy_i) \right\} \tag{5.5.12}$$

z_i 为正表示由点(x_i, y_i, z_i)发出的发散球面波,z_i 为负表示向点(x_i, y_i, z_i)会聚的球面波.将它们含 x, y 的二次项和一次项系数与(5.5.10)式和(5.5.11)式比较,可以确定像点坐标

$$z_i = \left(\frac{1}{z_p} \pm \frac{\lambda_2}{\lambda_1 z_r} \mp \frac{\lambda_2}{\lambda_1 z_o} \right)^{-1} \tag{5.5.13}$$

$$x_i = \mp \frac{\lambda_2 z_i}{\lambda_1 z_o} x_o \pm \frac{\lambda_2 z_i}{\lambda_1 z_r} x_r + \frac{z_i}{z_p} x_p \tag{5.5.14}$$

$$y_i = \mp \frac{\lambda_2 z_i}{\lambda_1 z_o} y_o \pm \frac{\lambda_2 z_i}{\lambda_1 z_r} y_r + \frac{z_i}{z_p} y_p \tag{5.5.15}$$

式中,上面的一组符号适用于分量波 $\boldsymbol{U}_3$,下面的一组符号适用于分量 $\boldsymbol{U}_4$. 当 z_i 为正时,再现像是虚像,位于全息图的左侧;当 z_i 为负时,再现像是实像,位于全息图的右侧.

像的横向放大率可以用 $\left|\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}x_o}\right|$ 和 $\left|\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}y_o}\right|$ 表示,所以波前再现过程产生的横向放大率为

$$M = \left|\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}x_o}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}y_o}\right| = \left|\frac{\lambda_2 z_i}{\lambda_1 z_o}\right| = \left|1 - \frac{z_o}{z_r} \mp \frac{\lambda_1 z_o}{\lambda_2 z_p}\right|^{-1} \tag{5.5.16}$$

像的纵向放大率可以用 $\left|\frac{\mathrm{d}z_i}{\mathrm{d}z_o}\right|$ 表示,所以

$$M_z = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} M^2 \tag{5.5.17}$$

5.5.2 几种特殊情况的讨论

(1) 当再现光波与参考光波完全一样时,即 $x_p = x_r, y_p = y_r, z_p = z_r, \lambda_1 = \lambda_2$,由(5.5.13)~(5.5.15)式可得

$$\left.\begin{aligned} z_{i1} &= \frac{z_r z_o}{2z_o - z_r} \\ x_{i1} &= \frac{2z_o x_r - z_r x_o}{2z_o - z_r} \\ y_{i1} &= \frac{2z_o y_r - z_r y_o}{2z_o - z_r} \\ M &= \left|1 - \frac{2z_o}{z_r}\right|^{-1} \end{aligned}\right\} \quad \text{及} \quad \left\{\begin{aligned} z_{i2} &= z_o \\ x_{i2} &= x_o \\ y_{i2} &= y_o \\ M &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{5.5.18}$$

(5.5.18)式表明,分量波 $\boldsymbol{U}_4$ 产生物点的一个虚像,像点的空间位置与物点重合,横向放大率为1,它是原物点准确的再现.分量波 $\boldsymbol{U}_3$ 可以产生物点的实像或虚像,它取决于 z_{i1} 的正负.当 $z_r<2z_o$ 时,$z_{i1}>0$,产生虚像;当 $z_r>2z_o$ 时,$z_{i1}<0$,产生实像.在通常情况下,横向放大率不等于1.

(2) 再现光波与参考光波共轭时,即 $x_p=x_r$,$y_p=y_r$,$z_p=-z_r$,$\lambda_1=\lambda_2$,则由(5.5.13)~(5.5.15)式可得

$$\left.\begin{aligned} z_{i1} &= -z_o \\ x_{i1} &= x_o \\ y_{i1} &= y_o \\ M &= 1 \end{aligned}\right\} \quad 及 \quad \left.\begin{aligned} z_{i2} &= \frac{z_r z_o}{z_r-2z_o} \\ x_{i2} &= \frac{x_o z_r-2x_r z_o}{z_r-2z_o} \\ y_{i2} &= \frac{y_o z_r-2y_r z_o}{z_r-2z_o} \end{aligned}\right\} \tag{5.5.19}$$

(5.5.19)式表明,分量波 $\boldsymbol{U}_3$ 产生物点的一个实像,像点与物点的空间位置相对于全息图镜面对称,因此,观察者看到的是一个与原物形状相同,但凸凹互易的赝实像.分量波 $\boldsymbol{U}_4$ 可以产生物点的虚像,也可以产生物点的实像,这取决于 z_{i2} 的正负.

(3) 参考光波和再现光波都是沿 z 轴传播的完全一样的平面波,即 $x_r=x_p=0$,$y_r=y_p=0$,$z_r=z_p=\infty$,$\lambda_1=\lambda_2$,则由(5.5.13)~(5.5.15)式可得

$$z_i=\mp z_o \quad x_i=x_o \quad y_i=y_o, \quad M=1 \tag{5.5.20}$$

可见,此时得到的两个像点位于全息图两侧对称位置,一个实像,一个虚像.

(4) 如果物点和参考点位于 z 轴上,即 $x_o=x_r=y_o=y_r=0$,这时在线性记录的全息图中与(5.5.10)式和(5.5.11)式相对应的透过率中,重要的两项是

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{t}_3 &= \beta'\boldsymbol{R}\boldsymbol{O}^* \exp\left[\mathrm{j}\frac{\pi}{\lambda_1}(x^2+y^2)\left(\frac{1}{z_r}-\frac{1}{z_o}\right)\right] \\ \boldsymbol{t}_4 &= \beta'\boldsymbol{R}^*\boldsymbol{O}\exp\left[-\mathrm{j}\frac{\pi}{\lambda_1}(x^2+y^2)\left(\frac{1}{z_r}-\frac{1}{z_o}\right)\right] \end{aligned}\right\} \tag{5.5.21}$$

这时透过率的峰值出现在其相位为 2π 整数倍的地方,由(5.5.21)式得

$$\pm\frac{\pi}{\lambda_1}(x^2+y^2)\left(\frac{1}{z_r}-\frac{1}{z_o}\right)=2m\pi, \quad m=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

即

$$\rho^2=x^2+y^2=2m\lambda_1\frac{z_o z_r}{z_o-z_r}$$

可见,此时所形成的干涉条纹是一族同心圆,圆心位于原点,为同轴全息图,其半径

$$\rho=\sqrt{2m\lambda_1\frac{z_o z_r}{z_o-z_r}} \tag{5.5.22}$$

同轴全息图的再现可以分为两种情况:

其一,在轴上照明光源再现的情况下,$x_p=y_p=0$,这时像点的坐标是

$$z_i=\left(\frac{1}{z_p}\pm\frac{\lambda_2}{\lambda_1 z_r}\mp\frac{\lambda_2}{\lambda_1 z_o}\right)^{-1} \quad x_i=0, y_i=0 \tag{5.5.23}$$

这表明再现所得到的两个像均位于 z 轴上.当照明光源与参考光源完全相同时,即 $z_p=z_r$,$\lambda_2=\lambda_1$ 时,则有

$$z_{i1}=\frac{z_r z_o}{2z_o-z_r}, \quad z_{i2}=z_o \tag{5.5.24}$$

这说明分量波 $\boldsymbol{U}_4$ 产生的虚像与轴上原始物点完全重合,另一个像点的虚实由 z_{i1} 的符号决定.当

照明光源与参考光源为共轭时,有

$$z_{i1}=-z_o,\quad z_{i2}=\frac{z_r z_o}{z_r-2z_o} \tag{5.5.25}$$

这说明分量波 $\boldsymbol{U}_3$ 产生一个与原始物点位置对称的实像,另一个像点的虚实仍然由 z_{i2} 的符号决定.

其二,同轴全息图也可能用轴外照明光源再现.设照明光源坐标是(x_p,y_p,z_p),这时像点坐标是

$$z_i=\left(\frac{1}{z_p}\pm\frac{\lambda_2}{\lambda_1 z_r}\pm\frac{\lambda_2}{\lambda_1 z_o}\right)^{-1},\quad x_i=\frac{z_i}{z_p}x_p,\quad y_i=\frac{z_i}{z_p}y_p \tag{5.5.26}$$

注意到 $x_i/y_i=x_p/y_p$,说明再现的两个像点位于通过全息图原点的倾斜直线上.这表明,即使用轴外照明光源再现,同轴全息图产生的各分量衍射波仍然沿同一方向传播,观察时互相干扰.图5.5.2给出了点源同轴全息图再现的情况.

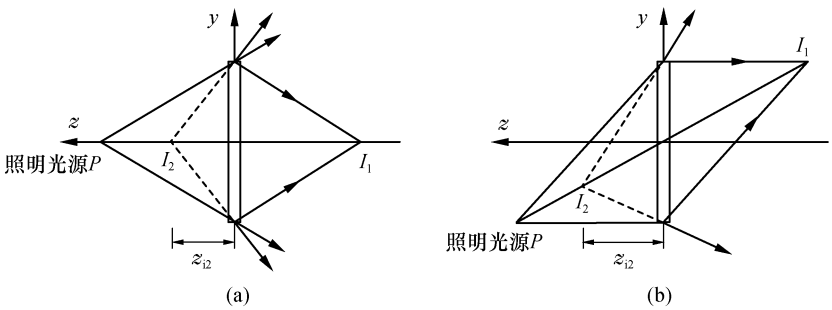


图 5.5.2 点源同轴全息的再现

(a) 轴上照明;(b) 轴外照明

例 5.5.1 用正入射的平面参考波记录轴外物点 $O(0,y_o,z_o)$发出的球面波,用轴上同波长点源 $C(0,0,z_p)$发出的球面波照射全息图以再现物光波前.试求:

(1) 两个像点的位置及横向放大率 M;

(2) 若 $y_o=5\text{cm}$,$z_o=50\text{cm}$,$z_p=100\text{cm}$,像点的位置和横向放大率以及像的虚实.

解:(1) 由题设知,参考光波、物光波和再现光波的位置坐标为:参考光波$(0,0,\infty)$;物光波$(0,y_o,z_o)$;再现光波$(0,0,z_p)$

利用(5.5.13)~(5.5.15)式得

$$z_i=\left(\frac{1}{z_p}\pm\frac{1}{z_r}\mp\frac{1}{z_o}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{z_p}\mp\frac{1}{z_o}\right)^{-1}=\frac{z_o z_p}{z_o\mp z_p}$$

$$x_i=\frac{z_i}{z_p}x_p\mp\frac{z_i}{z_o}x_o\pm\frac{z_i}{z_r}x_r=0$$

$$y_i=\frac{z_i}{z_p}y_p\mp\frac{z_i}{z_o}y_o\pm\frac{z_i}{z_r}y_r=\mp\frac{z_p y_o}{z_o\mp z_p}$$

由此可知,两个像点的坐标分别为

$$\text{像点 } I_1\left(0,-\frac{z_p y_o}{z_o-z_p},\frac{z_o z_p}{z_o-z_p}\right)$$

$$\text{像点 } I_2\left(0,+\frac{z_p y_o}{z_o+z_p},\frac{z_o z_p}{z_o+z_p}\right)$$

物上一点的横坐标为 y_o,现分别位移到$\mp\frac{z_p y_o}{z_o\mp z_p}$处,故像 I_1 和像 I_2 的横向放大率为

$$M_1 = -\frac{z_p}{z_o - z_p}, \quad M_2 = +\frac{z_p}{z_o + z_p}$$

这与用(5.5.16)式计算的结果是一致的.

(2) 将数据代入相应公式,得

$$I_1\left(0, -\frac{z_p y_o}{z_o - z_p}, \frac{z_o z_p}{z_o - z_p}\right) = I_1\left(0, -\frac{100\times 5}{50-100}, \frac{50\times 100}{50-100}\right)$$
$$= I_1(0, 10, -100) \quad \text{实像}$$
$$I_2\left(0, +\frac{z_p y_o}{z_o + z_p}, \frac{z_o z_p}{z_o + z_p}\right) = I_2\left(0, -\frac{100\times 5}{50+100}, \frac{50\times 100}{50+100}\right)$$
$$= I_2(0, 10/3, 100/3) \quad \text{虚像}$$

5.6 傅里叶变换全息图

物体的信息由物光波所携带,全息记录了物光波,也就记录下了物体所包含的信息.物体信号可以在空域中表示,也可以在频域中表示,也就是说,物体或图像的光信息既表现在它的物体光波中,也蕴含在它的空间频谱内.因此,用全息方法既可以在空域中记录物光波,也可以在频域中记录物频谱.物体或图像频谱的全息记录,称为傅里叶变换全息图.

5.6.1 傅里叶变换全息图

傅里叶变换全息图不是记录物体光波本身,而是记录物体光波的傅里叶频谱,利用透镜的傅里叶变换性质,将物体置于透镜的前焦面,在照明光源的共轭像面位置就得到物光波的傅里叶频谱,再引入参考光与之干涉,通过干涉条纹的振幅和相位调制,在干涉图样中就记录了物光波傅里叶变换光场的全部信息,包括傅里叶变换的振幅和相位.这种干涉图称为傅里叶变换全息图.

实现傅里叶变换可以采用平行光照明和点光源照明两种基本方式,这里我们以平行光照明方式为例进行分析,记录光路见图 5.6.1(a).设物光分布为 $g(x_o, y_o)$,则物光波的频谱公式为

$$\boldsymbol{G}(\xi,\eta) = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x_o, y_o)\exp[-\mathrm{j}2\pi(\xi x_o + \eta y_o)]\mathrm{d}x_o\,\mathrm{d}y_o \tag{5.6.1}$$

式中:$\xi = x/\lambda f$,$\eta = y/\lambda f$,ξ,η 是空间频率;f 是透镜焦距;x, y 是后焦面上的位置坐标.平面参考光是由位于物平面上点$(0, -b)$处的点源产生的.点源的复振幅可用 δ 函数表示为 $r(x_o, y_o) = r_o\delta(0, y_o + b)$,它在后焦面上形成的场分布为

$$F\{r(x_o, y_o)\} = r_o\exp[\mathrm{j}2\pi b\eta]$$

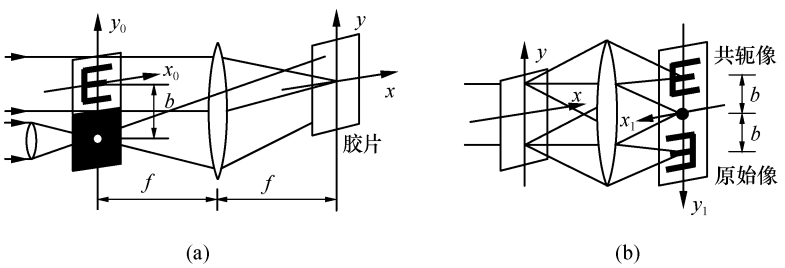


图 5.6.1 傅里叶变换全息图的记录与再现

后焦面上总的光场分布为

$$\boldsymbol{U}(\xi,\eta)=\boldsymbol{G}(\xi,\eta)+r_o\exp[\mathrm{j}2\pi b\eta]$$

这样,记录时的曝光强度为

$$I(\xi,\eta)=r_o^2+|\boldsymbol{G}|^2+r_o\boldsymbol{G}\exp(-\mathrm{j}2\pi b\eta)+r_o\boldsymbol{G}^*\exp(\mathrm{j}2\pi b\eta) \tag{5.6.2}$$

在线性记录条件下,全息图的复振幅透过率为

$$\boldsymbol{t}=t_b+\beta'|\boldsymbol{G}|^2+\beta' r_o\boldsymbol{G}\exp(-\mathrm{j}2\pi b\eta)+\beta' r_o\boldsymbol{G}^*\exp(\mathrm{j}2\pi b\eta) \tag{5.6.3}$$

假定用振幅为 C_o 的平面波垂直照射全息图,则透射光波的复振幅为

$$\boldsymbol{U}'(\xi,\eta)=t_bC_o+\beta'C_o|\boldsymbol{G}|^2+\beta'C_o r_o\boldsymbol{G}\exp(-\mathrm{j}2\pi b\eta)+\beta'C_o r_o\boldsymbol{G}^*\exp(\mathrm{j}2\pi b\eta) \tag{5.6.4}$$

式中,第三项是原始物的空间频谱,第四项是共轭频谱,这两个谱分布分别由两列平面波为载波向不同方向传播.这样,就以离轴全息的方式再现了物光波的傅里叶变换.为了得到物体的再现象,必须对全息图的透射光场做一次逆傅里叶变换.为此,在全息图后方放置透镜,使全息图位于透镜前焦面上,在透镜后焦面上将得到物体的再现像.再现光路如图 5.6.1(b)所示.由于透镜只能做正变换,所以这里取反演坐标,并假定再现和记录透镜的焦距相同,于是后焦面上的光场分布为

$$\boldsymbol{U}(x,y)=F\{\boldsymbol{U}'(\xi,\eta)\}=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{U}'(\xi,\eta)\exp[-\mathrm{j}2\pi(\xi x+\eta y)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{5.6.5}$$

$$\text{第一项}=\iint_{-\infty}^{\infty}t_bC_o\exp[-\mathrm{j}2\pi(\xi x+\eta y)]\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta=t_bC_o\delta(x,y)$$

$$\text{第二项}=\iint_{-\infty}^{\infty}\beta'C_o|\boldsymbol{G}(\xi,\eta)|^2\exp[-\mathrm{j}2\pi(\xi x+\eta y)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

$$=\beta'C_o\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{G}(\xi,\eta)\boldsymbol{G}^*(\xi,\eta)\exp[-\mathrm{j}2\pi(\xi x+\eta y)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

$$=\beta'C_o\iint_{-\infty}^{\infty}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{g}(x_o,y_o)\exp[-\mathrm{j}2\pi(\xi x_o+\eta y_o)]\mathrm{d}x_o\mathrm{d}y_o\right.$$

$$\times\left[\iint_{-\infty}^{\infty}g(x_o',y_o')\exp[-\mathrm{j}2\pi(\xi x_o'+\eta y_o')]\mathrm{d}x_o'\mathrm{d}y_o'\right]^*$$

$$\left.\times\exp[-\mathrm{j}2\pi(\xi x+\eta y)]\right\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

$$=\beta'C_o\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{g}(x_o,y_o)\mathrm{d}x_o\mathrm{d}y_o\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{g}^*(x_o',y_o')\mathrm{d}x_o'\mathrm{d}y_o'$$

$$\times\iint_{-\infty}^{\infty}\exp\{\mathrm{j}2\pi[x_o'-x-x_o)\xi+(y_o'-y-y_o)\eta]\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

$$=\beta'C_o\iint_{-\infty}^{\infty}\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{g}(x_o,y_o)\boldsymbol{g}^*(x_o',y_o')\delta(x_o'-x-x_o,y_o'-y_o-y)\mathrm{d}x_o\mathrm{d}y_o\mathrm{d}x_o'\mathrm{d}y_o'$$

$$=\beta'C_o\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{g}(x_o,y_o)g^*(x_o+x,y_o+y)\mathrm{d}x_o\mathrm{d}y_o$$

$$=\beta'C_o\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{g}(x_o,y_o)g^*[x_o-(-x),y_o-(-y)]\mathrm{d}x_o\mathrm{d}y$$

将坐标反演,令 $x_1=-x,y_1=-y$,于是

$$\text{第二项}=\beta'C_o\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{g}(x_o,y_o)\boldsymbol{g}^*(x_o-x_1,y_o-y_1)\mathrm{d}x_o\mathrm{d}y_o$$

$$=\beta'C_o\boldsymbol{g}(x_1,y_1)\star\boldsymbol{g}(x_1,y_1)$$

同理可证,第三项、第四项在反演坐标中的形式为

$$\text{第三项}=\beta' C_0 r_0 \iint_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{G}(\xi,\eta)\exp(-\mathrm{j}2\pi b\eta)\exp[-\mathrm{j}2\pi(\xi x+\eta y)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

$$=\beta' C_0 r_0 \boldsymbol{g}(x_1, y_1-b)$$

$$\text{第四项}=\beta' C_0 r_0 \iint_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{G}^*(\xi,\eta)\exp(\mathrm{j}2\pi b\mu)\exp[-\mathrm{j}2\pi(\xi x+\eta y)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

$$=\beta' C_0 r_0 \boldsymbol{g}^*(-x_1, -y-b)$$

所以

$$\boldsymbol{U}(x_1, y_1)=t_b C_0 \delta(x, y)+\beta' C_0 \boldsymbol{g}(x_1, y_1)\text{☆}\boldsymbol{g}(x_1, y_1)$$
$$+\beta' C_0 r_0 \boldsymbol{g}(x_1, y_1-b)+\beta' C_0 r_0 \boldsymbol{g}^*(-x_1-y-b) \tag{5.6.6}$$

式中:第一项是 δ 函数,表示直接透射光经透镜会聚在像面中心上的亮点;第二项是物分布的自相关函数,形成焦点附近的一种晕轮光;第三项是原始像的复振幅,中心位于反射坐标系的(0,b)处;第四项是共轭像的复振幅,中心位于反射坐标系的(0,$-b$)处,第三、四项都是实像.设物体在 y 方向上的宽度为 ω_y,则第二项自相关函数的宽度为 $2\omega_y$,原始像和共轭像的宽度均为 ω_y,因此欲使再现像不受晕轮光的影响,必须使 $b\geqslant\frac{3}{2}\omega_y$,在安排记录光路时应该保证这一条件.

实现傅里叶变换还可以采用球面波照明方式,使物体置于透镜的前焦面,在点源的共轭像面上得到物光分布的傅里叶变换.用倾斜入射的平面波作参考光,也能记录傅里叶变换全息图.根据完全同样的理由,也可以用球面波照射全息图,利用透镜进行逆傅里叶变换,在点源的共轭像面上实现傅里叶变换全息图的再现.图 5.6.2(a),(b)给出了采用这种方式的记录和再现光路.

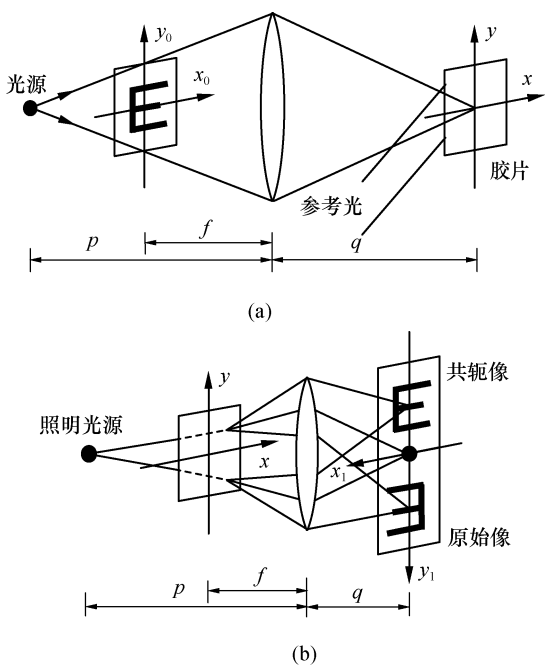


图 5.6.2 傅里叶变换全息的记录与再现(球面波照明方式)

(a) 记录;(b) 再现

应该说明的是,两种记录和再现的方法都是独立的,例如我们可以采用平行光入射记录,球面波照明再现;反过来也一样,采用球面波入射记录,平行光照明再现.

5.6.2 准傅里叶变换全息图

在图 5.6.3 所示的光路中,平行光垂直照射物体,透镜紧靠物体放置,参考点源与物体位于同一平面上,在透镜后焦面处放置记录介质.根据透镜的傅里叶变换性质,则在全息图平面上的物光分布为

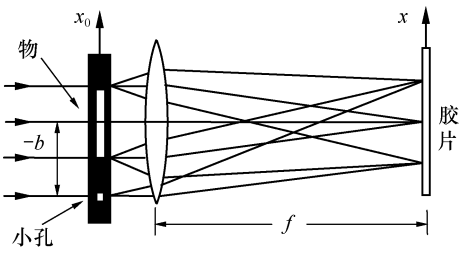


图 5.6.3 准傅里叶变换全息图的记录

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}(x,y)&=\boldsymbol{C}'\exp\left(\mathrm{j}k\frac{x^2+y^2}{2f}\right)\times\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{g}(x_0,y_0)\\&\quad\times\exp[-\mathrm{j}2\pi(\xi x_0+\eta y_0)]\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0\\&=\boldsymbol{C}'\exp\left(\mathrm{j}k\frac{x^2+y^2}{2f}\right)\boldsymbol{G}(\xi,\eta)\end{aligned}\tag{5.6.7}$$

式中,$\xi=x/\lambda f$,$\eta=y/\lambda f$,$\boldsymbol{G}(\xi,\eta)$是物函数 $\boldsymbol{g}(x_0,y_0)$的傅里叶变换.注意:由于该项前面出现的二次相位因子,使物体的频谱产生了一个相位弯曲,因而全息图平面上的物光波并不是物体准确的傅里叶变换.设参考点位于$(0,-b)$处,参考点源的表达式为 $r_0\delta(x_0,y_0+b)$,于是在全息图平面上的参考光场分布为

$$\begin{aligned}r(x,y)&=\exp\left(\mathrm{j}k\frac{x^2+y^2}{2f}\right)\iint_{-\infty}^{\infty}r_0\delta(x_0,y_0+b)\exp[-\mathrm{j}2\pi(\xi x_0+\eta y_0)]\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0\\&=r_0\exp\left[\frac{\mathrm{j}k}{2f}(x^2+y^2+2by)\right]\end{aligned}\tag{5.6.8}$$

这样,在线性记录条件下,全息图的复振幅透过率为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{t}&=\boldsymbol{t}_b+\beta'|\boldsymbol{G}|^2+\beta'r_0\boldsymbol{G}\exp\left[\frac{\mathrm{j}k}{2f}(x^2+y^2)\right]\exp\left[-\frac{\mathrm{j}k}{2f}(x^2+y^2+2by)\right]\\&\quad+\beta'r_0\boldsymbol{G}^*\exp\left[\frac{-\mathrm{j}k}{2f}(x^2+y^2)\right]\exp\left[\frac{\mathrm{j}k}{2f}(x^2+y^2+2by)\right]\\&=\boldsymbol{t}_b+\beta'|\boldsymbol{G}|^2+\beta'r_0\boldsymbol{G}\exp(-\mathrm{j}2\pi b\eta)+\beta'r_0\boldsymbol{G}^*\exp(\mathrm{j}2\pi b\eta)\end{aligned}\tag{5.6.9}$$

上式与(5.6.3)式所表示的傅里叶变换全息图的透过率完全相同,并且球面参考波的二次相位因子抵消了物体频谱的相位弯曲.因此,尽管到达全息图平面的物光场不是物体准确的傅里叶变换,但由于参考光波的相位被补偿,我们仍然能得到物体的傅里叶变换全息图,故称为准傅里叶变换全息图.若不考虑记录过程的光路安排,则准傅里叶变换全息图与傅里叶变换全息图具有相同的透过率函数,因此再现方式也完全相同,我们就不再另行讨论了.

从上面的结果中,我们得到一个启示,即参考光波的形式提供了一种额外的灵活性,我们甚至可以采用空间调制的参考光来记录一个全息图.全息术的某些应用,例如信息的保密存储、文字翻译,就是根据这一原理.

5.6.3 无透镜傅里叶变换全息图

下面我们讨论另一种记录光路,如图 5.6.4 所示,参考光束是从和物体共面的一个点发出的一个球面波.用这种特殊光路所记录的全息图可称为无透镜傅里叶变换全息图,其原理下面即将阐明.

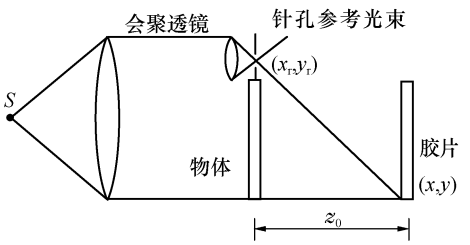


图 5.6.4 无透镜傅里叶变换全息图的记录

为研究这类全息图的性质,我们仍要用到成像过程的线性特性,但这次是考虑成像系统对单个物点的响应(即只考虑基元全息图),而不是对一个平面物光束的响应,用(x_r,y_r)和(x_0,y_0)各自代表参考光束和物光束的点光源的坐标,它们在乳胶上对应复振幅分布可写成

$$\boldsymbol{R}(x,y)=\boldsymbol{R}\exp\left[\mathrm{j}\frac{\pi}{\lambda z_{\mathrm{o}}}(x^2+y^2-2xx_{\mathrm{r}}-2yy_{\mathrm{r}})\right]$$

$$\boldsymbol{O}(x,y)=\boldsymbol{O}\exp\left[\mathrm{j}\frac{\pi}{\lambda z_{\mathrm{o}}}(x^2+y^2-2xx_{\mathrm{o}}-2yy_{\mathrm{o}})\right]$$

因此曝光时的入射光强为

$$\begin{aligned}I(x,y)=&R^2+|\boldsymbol{O}|^2+R\boldsymbol{O}\exp\left[-\mathrm{j}\frac{\pi}{\lambda z_0}(x^2+y^2-2xx_{\mathrm{r}}-2yy_{\mathrm{r}})\right]\\&\times\exp\left[\mathrm{j}\frac{\pi}{\lambda z_{\mathrm{o}}}(x^2+y^2-2xx_{\mathrm{o}}-2yy_{\mathrm{o}})\right]\\&+\boldsymbol{R}\boldsymbol{O}^*\exp\left[\mathrm{j}\frac{\pi}{\lambda z_{\mathrm{o}}}(x^2+y^2-2xx_{\mathrm{r}}-2yy_{\mathrm{r}})\right]\\&\times\exp\left[-\mathrm{j}\frac{\pi}{\lambda z_{\mathrm{o}}}(x^2+y^2-2xx_{\mathrm{o}}-2yy_{\mathrm{o}})\right]\\=&R^2+|\boldsymbol{O}|^2+2R|\boldsymbol{O}|\cos\left\{2\pi\left[\frac{x_{\mathrm{o}}-x_{\mathrm{r}}}{\lambda z_{\mathrm{o}}}x+\frac{y_{\mathrm{o}}-y_{\mathrm{r}}}{\lambda z_{\mathrm{o}}}y\right]\right\}\end{aligned}\tag{5.6.10}$$

现在,无透镜傅里叶变换全息图这个名称的来由就清楚了.由坐标为$(x_{\mathrm{o}},y_{\mathrm{o}})$的物点发出的光波与参考光波相干涉,形成一个正弦型条纹图样,其空间频率为

$$\xi=\frac{x_{\mathrm{o}}-x_{\mathrm{r}}}{\lambda z_{\mathrm{o}}},\qquad \eta=\frac{y_{\mathrm{o}}-y_{\mathrm{r}}}{\lambda z_{\mathrm{o}}}\tag{5.6.11}$$

因此,对于这种特殊记录光路,物点坐标和全息图上的空间频率之间具有一一对应关系.这样一种变换关系正是傅里叶变换运算的特征,但没有用变换透镜就完成了,所以称为无透镜傅里叶变换全息图.

由(5.6.11)式可见,物点离参考点越远,空间频率越高.粗略地说,若$\xi_{\max}$表示乳胶能分辨的最高空间频率,那么只有坐标满足条件

$$\sqrt{(x_{\mathrm{o}}-x_{\mathrm{r}})+(y_{\mathrm{o}}-y_{\mathrm{r}})^2}\leqslant\lambda z\xi_{\max}\tag{5.6.12}$$

的那些物点的像,才能在再现中出现.

为了从这个全息图得到像,我们用相干光照明底片并且在后面加一正透镜,如图5.6.5所示.在方程(5.5.13)中令$z_{\mathrm{p}}=\infty$及$z_{\mathrm{o}}=z_{\mathrm{r}}$,全息图本身形成的两个孪生像都位于离底片无究远处.正透镜使无穷远处的像成像在透镜的后焦面上.

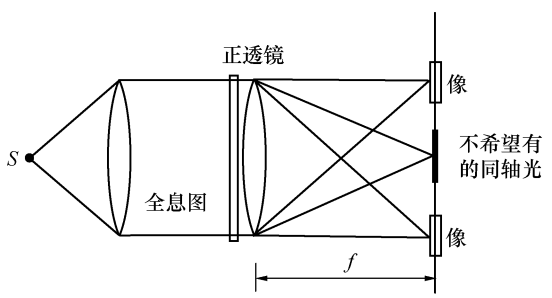


图5.6.5 无透镜傅里叶变换全息图的再现

5.7 像全息图

物体靠近记录介质,或利用成像系统使物成像在记录介质附近,或者使一个全息图再现的实

像靠近记录介质,都可以得到像全息图.像全息的主要特点是可以扩散的白光光源照明再现,因此,广泛用于全息显示.

下面,我们首先讨论光源宽度和光谱宽度对全息再现像的影响,然后介绍像全息的摄制.

5.7.1 再现光源宽度的影响

通常,用点光源照明全息图时,点物的再现像也是点像,若照明光源的线度增加,像的线度也会增加.理论研究表明,当物体接近全息记录介质时,再现光源的线度可以增大,再现像的线度不变.

若来自点光源的一个球面波与一个平面波干涉,所形成的条纹图样称之为波带片干涉图.它由亮暗相间的同心圆环组成,中心条纹间距大,边缘条纹间距小.全息图相当于被记录物体上每一点源发出的光波与参考光波之间的干涉所产生的诸多波带片的总和.当物(或像)移近记录介质平面时,波带片的横向尺寸逐渐变小,直到物体上的点位于全息记录介质平面上时,波带片即变为物体本身.因为通常的离轴全息图所形成的波带片的界限被减小,参考光束的空间变化不会使波带片的形状有本质上的变化,所以参考光波的相位变动就不重要了,再现光的线度将不受限制.因此,在再现过程中,相位的变动不是很重要的,可将扩展光源用于再现.

像全息可用扩展光源再现的特点,也可给予定量解释.若再现光源在 x 方向上增宽了 Δx_p,则像在 x 方向上也相应增宽了 Δx_i,由(5.5.14)式得

$$\Delta x_i = z_i \frac{\Delta x_p}{z_p} = z_i \Delta\theta \tag{5.7.1}$$

式中,$\Delta\theta$ 为再现光源的角宽度.又由(5.5.13)式可知,在一定条件下,当物距 z_o 很小时,像距 z_i 也很小,当物距 z_o 趋于零时,像距 z_i 也趋于零,于是 Δx_i 也趋于零.也就是说,这时光源的宽度不会影响再现像的质量.

5.7.2 再现光源光谱宽度的影响

上面说过,任一全息图都可以是许多具有波带片结构的基元全息图的叠加,当用白光照明再现时,再现光的方向因波长而异,再现像点的位置也随波长而变化,其变化量取决于物体到全息图平面的位置.这是因为,用白光再现一张普通的离轴全息图时,由于记录的波带片是离轴部分的,条纹间距很小,有高的色散,从而使像模糊.像全息记录的是波带片的中心部分,而波带片的这一部分条纹间距较大,色散大小减小.当物体严格位于全息图平面上时,再现像也位于全息图平面上,表现为消色差,它不随照明波长而改变.当照明光源方向改变时,像的位置也不变,只是像的颜色有所变化.而物体上远离全息图的那部分,其像也远离全息图,这些像点有色差并使像模糊.不过,如果物体到全息图的距离较小时,用白光再现仍能得到质量相当好的像.

下面从(5.5.13)~(5.5.15)式出发,定量讨论再现光的光谱宽度对再现像的影响.当参考光和再现光均为平行光时,这时 z_r 和 z_p 均为无穷大,而且 x_r,x_p,y_r,y_p 亦可能为无穷大(倾斜平行光).这样一来,使用(5.5.13)~(5.5.15)式便发生了困难.为了在这种情况下也能使用这三个公式,将 x_o/z_o,x_r/z_r,x_p/z_p,x_i/z_i 等均用三角函数表示,而将(5.5.13)~(5.5.15)式改写成三角函数形式.在图 5.7.1 中 I 为像点,其坐标为(x_i,y_i,z_i),OI 的射影为 OB,$\angle IBO=0$,OB 与 z 轴的夹角为 φ_i.在傍轴条件下有 $IO\approx z_i$.于是由图可得

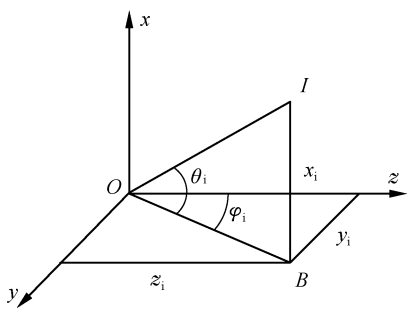


图 5.7.1 像点的三角关系

$$\frac{x_i}{OI} = \sin\theta_i \approx \frac{x_i}{z_i}, \quad \frac{y_i}{z_i} = \tan\varphi_i \approx \sin\varphi_i$$

同样,对物点、参考点源和再现点源均可写出类似的表达式.于是可以将(5.5.14)式和(5.5.15)式写成

$$\sin\theta_i = \mp\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\sin\theta_o \pm \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\sin\theta_r + \sin\theta_p \tag{5.7.2}$$

$$\sin\varphi_i = \mp\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\sin\varphi_o \pm \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\sin\varphi_r + \sin\varphi_p \tag{5.7.3}$$

下面从(5.7.2)式出发讨论再现光波长 λ_2 变化时,再现像在 x 方向的色散情况.y 方向和 z 方向的讨论类似,只是 z 方向色散必须由(5.5.13)式得出.设再现光波中含有 $\lambda_2 \sim \lambda_2 + \Delta\lambda$ 的所有波长的光波,由于全息图中波带片的色散,使得对应的 θ 变化了 $\Delta\theta = \Delta\lambda \frac{d\theta}{d\lambda_2}$,可以认为再现像由于色散在 x 方向的展宽线度 Δx_i 为

$$\Delta x_i = z_i \Delta\theta = z_i \Delta\lambda \frac{d\theta}{d\lambda_i}$$

由(5.7.2)式可求出 $d\theta_i/d\lambda_2$,并将它代入上式,注意到 $\cos\theta \approx 1$,于是得

$$\Delta x_i = \pm\frac{\Delta\lambda}{\lambda_i}(\sin\theta_o - \sin\theta_r)z_i \tag{5.7.4}$$

对于确定的物点,(5.7.4)式的($\sin\theta_o - \sin\theta_r$)是常量,再现像的展宽与 $\Delta\lambda$ 和 z_i 的乘积成正比.当 z_r 和 z_p 确定后,z_i 又可以根据(5.5.13)式由 z_o 决定.在一定条件下 $|z_o|$很小时 $|z_i|$也很小,即使 $\Delta\lambda$有较大值,Δx_i 仍然足够小.当 $|z_i| \to 0$ 时,可用白光再现.对于 y 方向和 z 方向的色散,可作类似讨论.

5.7.3 色模糊

对于像全息,再现光源的光谱宽度对像清晰程度仍然是有影响的,因为实际上总不能使物上所有点均能满足 $|z_o|$为很小.这时一个物点不是对应一个像点,而是对应一个线段.这种由于波长的不同而产生的像的扩展叫做像的色模糊.即使 z_o 足够小,当 $\Delta\lambda$ 相当大时,仍然会形成不可忽视的色模糊.当色模糊量大于观察系统(多数情况是人眼)的最小分辨距时,再现像变得完全模糊不清了.要想使再现像清楚,一方面要进一步减小 $|z_o|$,另一方面要限制再现光源的光谱带宽.下面以人眼直接观察的情况作一粗略估算,以便对以上分析建立比较直观的认识.

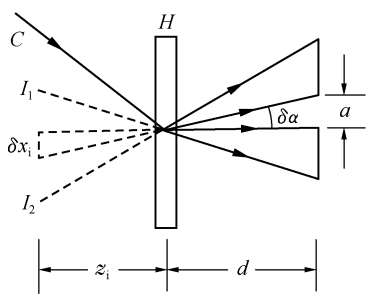


图 5.7.2 色模糊示意图

图 5.7.2 是产生色模糊的示意图,其中 H 是全息图,C 是再现光波,其波长范围是 $\lambda_1' \sim \lambda_2'$,物点 O 再现后 x 方向上的展宽为 I_1I_2,I_1 是 λ_1'的再现像,I_2 是 λ_2'的再现像.

按(5.7.4)式可以计算出 I_1I_2 的大小.在估算中令 $\sin\theta_o - \sin\theta_r = 1$,因为 $|\sin\theta_o - \sin\theta_r| < 2$,所以这样假设对估算结果一般不会造成数量上的差错.若 $z_i = 1\text{mm}$,$\Delta\lambda = \lambda_2' - \lambda_1' = 100\text{nm}$,$\lambda_1 = 632.8\text{nm}$,则 $\Delta x_i = 16\mu\text{m}$.也就是说,物上一点,由于色模糊的原因,在再现像中的 x 方向上是长为 $16\mu\text{m}$ 的线段.如果其长度小于人眼观察时的最小分辨距,则像仍然可以认为是清楚的.但是当用白光再现时 $\Delta\lambda = 4000\text{nm}$,即使 $z_i = 1\text{mm}$,$\lambda_i = 632.8\text{nm}$,则 $\Delta\lambda_i = 0.64\text{mm}$,在明视距上来看它比人眼的最小分辨距 0.07mm 大得多.如此小的像距,当用白光再现时,色模糊量都比人眼的最小分辨距大,那么像全息还有实用意义吗?实际上,因为上面讨论中用人眼观察时

并没有把眼瞳的光阑作用考虑进去.由于人眼瞳孔的孔径限制,可能减小色模糊的影响.图5.7.2中,人眼距 H 的距离为 d 的地方观察,瞳孔径为 a,则像上一点发出的光只有一个小光锥能进入人眼,在 xz 平面内其角距离为 δa,而 $\delta a=\frac{a}{d}$,这样就限制了进入人眼的波长范围.对于图5.7.2所示的情况,有

$$\delta x_i = z_i \delta a = z_i \frac{a}{d} \tag{5.7.5}$$

又由(5.7.4)式得 $\delta\lambda=\frac{\lambda_1}{\sin\theta_c-\sin\theta_r}\cdot\frac{\delta x_i}{z_i}$,将(5.7.5)式代入得

$$\delta\lambda = \frac{a}{d}\cdot\frac{\lambda_1}{\sin\theta_c-\sin\theta_r} \tag{5.7.6}$$

我们知道,人眼的最小分辨角 $\delta\varphi$ 约为 $1'\approx 0.00029$rad,白昼瞳孔直径 $a=2$mm,若在明视距离 250mm 处观察全息图,则由(5.7.5)式得

$$d\delta\varphi = \delta x_i = z_i \frac{a}{d}$$

即

$$z_i = \frac{d^2}{a}\delta\varphi = \frac{250^2}{2}\times 0.00029 \approx 9.1\text{mm}$$

也就是最大允许的像距为 9.1mm.

5.7.4 像全息的制作

在记录像全息图时,如果物体靠近记录介质,则不便于引入参考光,因此,通常采用成像方式产生像光波.一种方式是透镜成像,如图 5.7.3 所示;另一种方式是利用全息图的再现实像作为像光波.后者通常先对物体记录一张菲涅耳全息图,然后用参考光波的共轭光波照明全息图,再现物体的实像.实像的光波与制作像全息时参考光波叠加,得到像全息图.因此,这种方法包括二次全息记录和一次再现的过程,图 5.7.4 表示了这一制作过程.

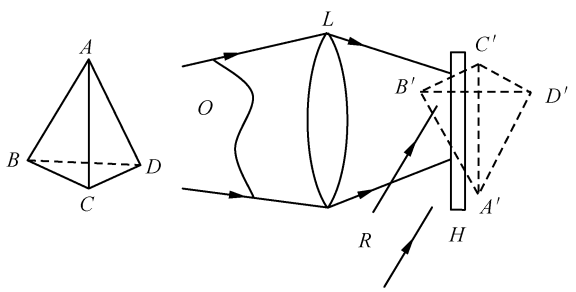


图 5.7.3 像全息图的记录方式之一

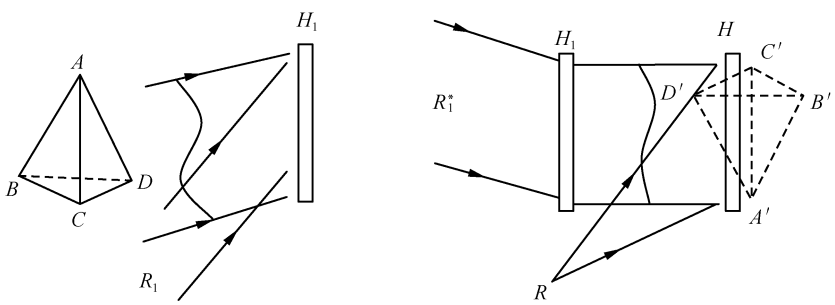


图 5.7.4 像全息图的记录方式之二

例 5.7.1 在图 5.7.5 的像全息记录光路中,如果改用与参考光相同的单色光波照明,试画图说明再现像的位置和特点.

解:由记录光路可知,参考光位于 yz 平面内,即参考点源的坐标为$(0,y_r,z_r)$.物也是一个位于 yz 面的平面物体,故其坐标应为$(0,y_o,z_o)$,再现光路如图 5.7.6 所示.因再现光波为原参考光源,故有

$$x_p = x_r = 0$$
$$y_p = y_r < 0$$
$$z_p = z_r < 0$$

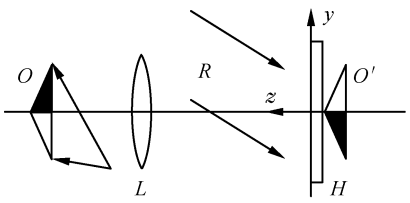


图 5.7.5

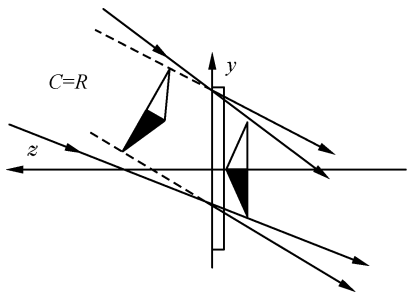


图 5.7.6

(1) 先研究原始像.用(5.5.13)~(5.5.15)式中第二组,并注意到放大率公式(5.5.16)式,将已知条件代入,得

$$x_i = x_o = 0$$
$$y_i = y_o$$
$$z_i = z_o < 0$$
$$M = \frac{z_i}{z_o} = 1$$

即再现的原始像是与原物具有同样的位置和大小的实像.

(2) 现在研究共轭像.用(5.5.13)~(5.5.15)式中的第一组,代入已知条件后得

$$x_i = 0$$
$$\frac{1}{z_i} = \frac{1}{z_r/2} - \frac{1}{z_o}$$
$$\frac{y_i}{z_i} = \frac{y_r}{z_r/2} - \frac{y_o}{z_o}$$

由第一式 $x_i=0$ 可知,共轭像仍位于 yz 面内.又因 $|z_r/2| > |z_o|$,故由第二式知 $z_i>0$,且 $|z_o|$很小,故 z_i 也很小,即共轭像是一个位于全息图左边的且很靠近全息图的虚像.对于第三式,我们分析 $y_o=0$ 的一个特殊点,于是得

$$\frac{y_i}{z_i} = \frac{y_r}{z_i/2} > 0$$

即 $y_i>0$,表明虚像位于 z 轴上方.

5.8 彩 虹 全 息

彩虹全息和像全息一样,也可以用白光照明再现.不同的是,像全息的记录要求成像光束的

像面与记录干板的距离非常小,而彩虹全息没有这种限制.彩虹全息是利用记录时在光路的适当位置加狭缝,再现时同时再现狭缝像,观察再现像时将受到狭缝再现像的限制.当用白光照明再现时,对不同颜色的光,狭缝和物体的再现像位置都不同,在不同位置将看到不同颜色的像,颜色的排列顺序与波长顺序相同,犹如彩虹一样,因此这种全息技术称为彩虹全息.彩虹全息分为二步彩虹全息和一步彩虹全息.

5.8.1 二步彩虹全息

1969年,本顿(Benton)受到全息图碎片可以再现完整的物体像的启发,提出二步彩虹全息.它包括二次全息记录过程:首先对要记录的物体摄制一张菲涅耳离轴全息图 H_1,称为主全息图,记录光路如图5.8.1所示;第二步是用参考光的共轭光照明 H_1,产生物体的赝实像,在 H_1 的后面置一水平狭缝,实像与狭缝面之间放置全息干板 H,用会聚的参考光 R 记录第二张全息图 H,这张全息图就叫做彩虹全息图.如果用共轭参考光 R^* 照射彩虹全息图 H,则产生第二次赝像,由于 H 记录的是原物的赝实像,所以再现的第二次赝像对于原物来说是一个正常的像,与原物的再现像一起出现的是狭缝的再现像,它起一个光阑的作用.彩虹全息的再现光路如图5.8.2所示,如果眼睛位于狭缝的位置,就可以看到物体的再现虚像.眼睛位于其他位置时,则由于受到光阑的限制,不能观察到完整的像.如果用白光来照明彩虹全息图,则每一种波长的光都形成一组狭缝像和物体像,其位置可按(5.5.13)~(5.5.15)式计算.一般地说,狭缝像和物体像的位置随波长连续变化.若观察者的眼睛在狭缝像附近沿垂直于狭缝方向移动时,将看到颜色按波长顺序变化的再现像.若观察者的眼睛位于狭缝后方适当位置时,由于狭缝对视场的限制,通过某一波长所对应狭缝只能看到再现像的某一条带,其色彩与该波长对应.同波长相对应的狭缝在空间是连续的,因此,所看到的物体像就具有连续变化的颜色,像雨后天空中的彩虹一样.

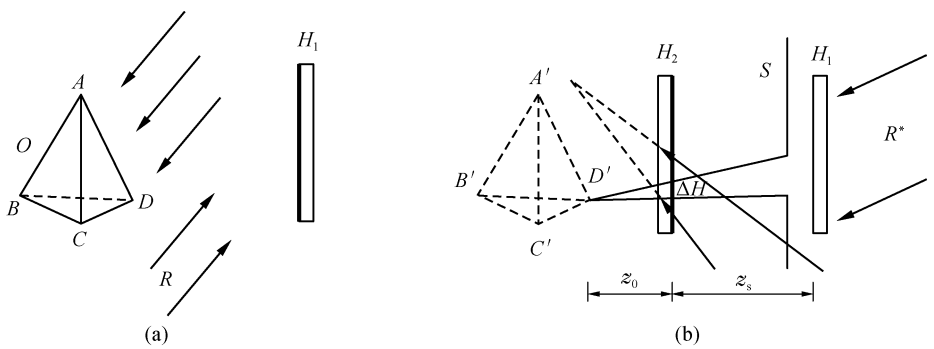


图 5.8.1 彩虹全息图的记录

(a) 第一步;(b) 第二步

在记录全息图 H 时,物光束受到狭缝 S 的限制,只是一束细光束投射在 H 上,因而对应物点 C' 的信息在全息图的 y 方向上只占了一小部分 ΔH.对于这一部分全息图,也可以叫做线全息图,如图5.8.1(b)所示.设狭缝宽为 a,狭缝与 H 的距离为 z_s,则线全息的宽度为

$$\Delta H = \frac{z_o a}{z_o + z_s} \tag{5.8.1}$$

由于物点的全息图的大小在铅直方向 y 上受到限制,在水平方向 x 上不受限制,因此,再现像在 y 方向失去了立体感,在

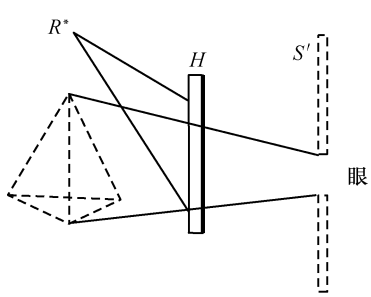


图 5.8.2 彩虹全息图的再现

x 方向仍有立体感.由于人眼是排在水平方向上的,所以并不影响立体感.

二步彩虹全息的优点是视场大,但由于在制作彩虹全息图时,需要经过两次采用激光光源的记录过程,斑纹噪声大,故直接应用有困难.1977 年杨振寰等研究成功一步彩虹全息术,简化了记录过程,在实用方面取得了进展.

5.8.2 一步彩虹全息

从二步彩虹的记录和再现过程可知,彩虹全息图的本质是要在观察者与物体再现像之间形成一个狭缝像,使观察者通过狭缝看物体,以实现白光再现.根据这一原理,我们可以用一个透镜使物体和狭缝分别成像,使全息干板位于两个像之间的适当位置.如图 5.8.3(a)所示,狭缝位于透镜的焦点以内,在狭缝同侧得到其放大正立虚像.若物体在焦点以外,则物体的像在透镜另一侧,这时的光路结构,本质上与二步彩虹全息中第二次记录时相同.再现时用参考光的共轭光照明,形成狭缝的实像和物体的虚像,眼睛位于狭缝像处可以观察到再现的物体虚像.再现光路如图 5.8.3(b)所示.

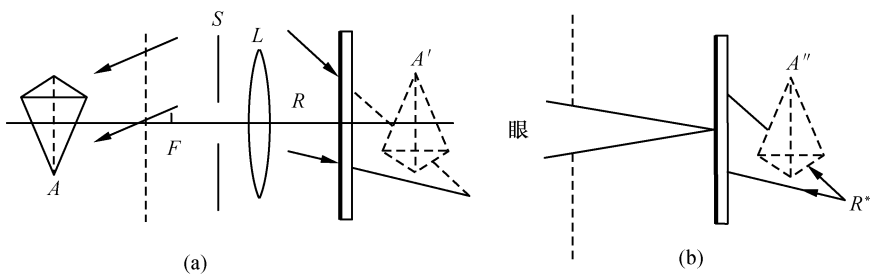


图 5.8.3 一步彩虹全息的记录与再现

在一步彩虹全息中,也可以把物体和狭缝放在透镜焦点以外,使它们在透镜另一侧成像,记录时仍将全息干板置于物体像和狭缝像之间,如图 5.8.4 所示.

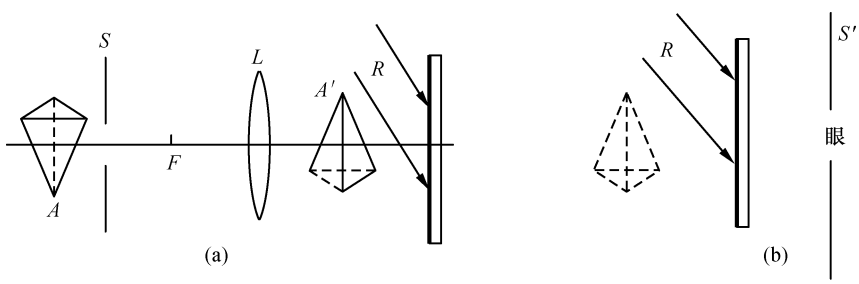


图 5.8.4 一步彩虹全息的记录
(物和狭缝在透镜焦点之外)

一步彩虹全息由于减少了一次记录过程,噪声较二步彩虹全息小,但视场受透镜大小的限制.

5.8.3 彩虹全息的色模糊

彩虹全息图可以用白光再现出单色像,这种单色像与激光的再现单色像是不同的,它包含了一个小的波长范围 $\Delta\lambda$.设在某一固定位置所观察到的单色像的波长是从 λ 到 $\lambda+\Delta\lambda$,则 $\Delta\lambda/\lambda$ 称为像的单色性.另外,根据点源全息图理论知道,像点的位置与波长有关,在 $\Delta\lambda$ 的波段内,一个物点不是对应一个像点,而是对应一个线段 ΔI.这种由波长不同而产生的像的扩展,叫做像的色模糊.

1. 像的单色性

前面已经指出,一个物点的全息图是一个线全息图,其宽度为 ΔH,如图 5.8.5 所示.这个线全息图在 y 方向的空间频率很高,在与狭缝平行的 x 方向空间频率却很低,所以只讨论在 y 方向的单色性.

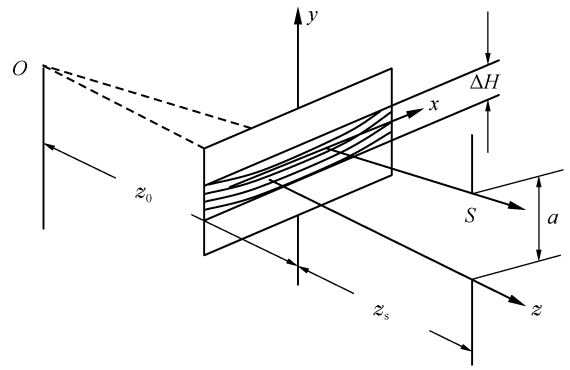


图 5.8.5 点物的线全息图

如图 5.8.6 所示,用白光照射全息图,经 ΔH 的衍射后,对不同波长的光形成的像点位置不同.假定人眼位于 E 处,与全息图的距离为 z_E,瞳孔直径为 D,这样人眼所能观察到的两个极端波长 λ 和 λ'所对应的像点位于 I_λ 和 $I_{\lambda'}$处.对于 λ 和 λ'这两种波长形成的狭缝像,位于 S_λ 和 $S_{\lambda'}$处.由此可见,波长为 λ 的光是从 ΔH 和 $S_{\lambda'}$开口的下端进入人眼瞳孔上端的;波长为 λ'的光是从 ΔH 和 $S_{\lambda'}$开口的上端进入人眼瞳孔上端的.由图 5.8.6 可知,ΔH 对这两种波长所产生的色散角为 $\Delta\theta$,并有

$$\Delta\theta = (D+a)/z_E \tag{5.8.2}$$

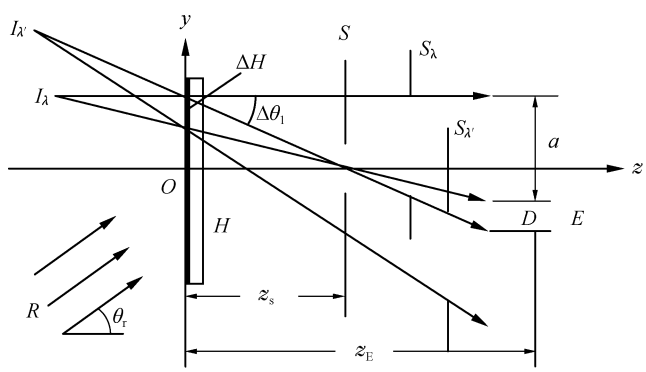


图 5.8.6 像的单色性示意图

设 ΔH 在 y 方向的空间频率为 η,则由光栅方程可知

$$\sin\theta - \sin\theta_r = \eta\lambda \tag{5.8.3}$$

$$\cos\theta \cdot \Delta\theta = \eta\Delta\lambda \tag{5.8.4}$$

两式相除得

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\cos\theta\Delta\theta}{\sin\theta - \sin\theta_r} \tag{5.8.5}$$

因为物点很靠近 z 轴,θ 很小,可令 $\cos\theta=1$,$\sin\theta=0$,于是上式简化为

$$\left|\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right| \approx \frac{\Delta\theta_r}{\sin\theta_r} = \frac{D+a}{z_E \sin\theta_r} \tag{5.8.6}$$

其中用到了(5.8.2)式的结果.

在彩虹全息中,当然是 $\Delta\lambda$ 越小越好.这就要求:狭缝窄(a 小),观察距离远(z_E 大),参考光束倾斜度大,或者说全息图的空间频率较高等等.

2. 像的色模糊

图 5.8.7 和图 5.8.6 相同,只是画出了两个极端波长的边缘光线.在这种情况下,一个物点在 $\Delta\lambda$ 波长范围内像点变成一段弧线 $I_\lambda I_{\lambda'}$,用眼睛观察时,这段弧线的视宽度为 ΔI.ΔI 称为色模糊.其在 y 和 z 方向的分量 Δy 和 Δz 分别称为 y 和 z 方向的色模糊分量.求 Δy 和 Δz 可根据点源全息图的物像关系式计算.此处,我们用近似方法来计算色模糊量 ΔI.由图 5.8.7 可知

$$\Delta I = (z_s + z_o)\Delta\alpha \approx (z_s + z_o)\frac{\Delta H}{z_s} = \frac{z_o a}{z_s} \tag{5.8.7}$$

在上式的简化过程中,利用了(5.8.1)式,并且这里的 z_o,z_s 表示绝对值.由上式可见,当 $z_o = 0$ 时,色模糊等于零,这就是像面全息的情况.当 $z_o \neq 0$ 时,则要求 z_o 小,狭缝窄和 z_s 大.z_o 小即景深小,z_s 大则要求记录时狭缝 s 靠近成像透镜的前焦点,这样就又限制了视场的大小.狭缝窄则记录时激光斑纹对其影响大,所以选择恰当的缝宽和缝到底片的距 z_s,对获得一张好的全息图是很重要的.实验中狭缝宽度一般选为 4mm 左右,z_s 选为 30mm 左右.

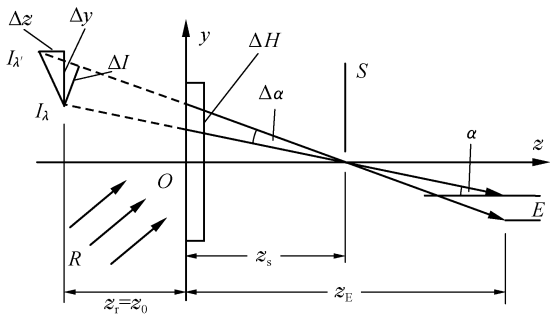


图 5.8.7 色模糊量示意图

5.9 相位全息图

平面全息图的复振幅透过率一般是复数,它描述光波通过全息图传播时振幅和相位所受到的调制,它可表示为

$$\boldsymbol{t}(x,y) = t_b(x,y)\exp\{j\varphi(x,y)\} \tag{5.9.1}$$

式中,$t_b(x,y)$为振幅透过率,$\varphi(x,y)$表示相位延迟.当相位延迟与(x,y)无关,即为常量时,有

$$\boldsymbol{t}(x,y) = t_b(x,y)\exp(j\varphi_0) \tag{5.9.2}$$

这表明照明光波通过全息图时,仅仅是振幅被调制,可称之为振幅全息图或吸收全息图.$\exp(j\varphi_0)$不影响透射波前的形状,分析时可以略去.例如用超微粒银盐干板拍摄全息图,经显影处理后就得到振幅全息图.

若全息图的透过率 t_b 与(x,y)无关,为常数,即

$$\boldsymbol{t}(x,y) = t_b\exp\{j\varphi(x,y)\} \tag{5.9.3}$$

照明光波通过全息图时,受到均匀吸收,仅仅是相位被调制,可称之为相位全息图.

相位全息图的制作可分为两种类型.一种是记录物质的厚度改变,折射率不变,称为表面浮雕型.制作这种表面浮雕型最简单的方法,是将银盐干板制成的振幅全息图经过漂白工艺而成.首先把它放在鞣化漂白槽中,除去曝光部分的金属银,并使银粒周围的明胶因鞣化而膨胀,膨胀的程度取决于银粒子数量,致使曝光强的那部分的明胶较曝光弱的那部分明胶为厚,记录介质的厚度随曝光量变化,这样就得到了浮雕型相位全息图.此外,光致抗蚀剂、光导热塑料等,都可以制作浮雕型相位全息图.另一种类型是物质厚度不变,折射率改变,称为折射率型.它是利用氧化剂(如铁氰化钾、氯化汞、氯化铁、重铬酸铵、溴化铜等)将金属银氧化为透明银盐,其折射率与明胶不同,记录介质内折射率随曝光量变化,这样就得到了折射型相位全息图.例如,用预硬的重铬酸盐明胶就可以制作这种全息图.

为了考察相位全息图的性质,我们分析物光波和参考光波都是平面波的情况.两束平面波相干涉产生基元光栅,我们在(5.4.1)式中得出其强度分布公式为

$$\begin{aligned} I(y) &= R^2 + O^2 + 2RO\cos[\mathrm{k}y(\cos\theta_r - \cos\theta_o)] \\ &= R^2 + O^2 + 2RO\cos[2\pi\xi y] \end{aligned} \tag{5.9.4}$$

式中,ξ 为光栅的空间频率,其值为

$$\xi = \left| \frac{\sin\theta_r}{\lambda} - \frac{\sin\theta_o}{\lambda} \right| = | \xi_r - \xi_o | \tag{5.9.5}$$

而 ξ_r 和 ξ_o 分别是两个平面波的空间频率.

在线性记录条件下,相位变化与曝光光强成正比,因此

$$\varphi(y) \propto R^2 + O^2 + 2RO\cos(2\pi\xi y) = \varphi_0 + \varphi_1\cos(2\pi\xi y) \tag{5.9.6}$$

式中 $\varphi_0 = R^2 + O^2$,$\varphi_1 = 2RO$.忽略吸收,并略去常数相位,相位全息图的复振幅透过率可表示为

$$\boldsymbol{t}(y) = \exp[\mathrm{j}\varphi_1\cos(2\pi\xi y)] \tag{5.9.7}$$

这是一个正弦型相位光栅.利用第一类贝塞尔函数的积分公式,上式可以表示为傅里叶级数形式

$$\boldsymbol{t}(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\mathrm{j})^n \mathrm{J}_n(\varphi_1)\exp(\mathrm{j}2\pi n\xi y) \tag{5.9.8}$$

式中,J_n 为第一类 n 阶贝塞尔函数.

用振幅为 C 的平面波垂直照明全息图,透射光场分布为

$$\boldsymbol{U}(y) = C\boldsymbol{t}(y) = C\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\mathrm{j})^n \mathrm{J}_n(\varphi_1)\exp(\mathrm{j}2\pi n\xi y) \tag{5.9.9}$$

显然,相位全息图不像正弦振幅光栅只有零级和正、负一级衍射,而是包含许多级衍射.每一级衍射的平面波的空间频率为 $n\xi$,相对振幅决定于 $\mathrm{J}_n(\varphi_1)$.当 $n=0$ 时,表示直接透射光;$n=\pm1$ 时,对应我们所需要成像光波,即

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U}_0 &= C\mathrm{J}_0(\varphi_1) \\ \boldsymbol{U}_{+1} &= \mathrm{j}C\mathrm{J}_1(\varphi_1)\exp(\mathrm{j}2\pi\xi y) \\ \boldsymbol{U}_{-1} &= C(\mathrm{j})^{-1}\mathrm{J}_{-1}(\varphi_1)\exp(-\mathrm{j}2\pi\xi y) \\ &= \mathrm{j}C\mathrm{J}_1(\varphi_1)\exp(-\mathrm{j}2\pi\xi y) \end{aligned}$$

上式中我们利用了关系 $\mathrm{J}_{-1}(\varphi_1) = -\mathrm{J}_1(\varphi_1)$.当用原参考光波照明相位全息图时,正、负一级衍射光波将分别再现原始物光波及其共轭光波.

5.10 模压全息图

模压全息术是70年代提出的用模压方法复制全息图的一项新技术.模压全息与凸版印刷术类似,所以又称之为全息印刷术.全息印刷术的发明,解决了全息图的复制问题,可以大规模生产,使全息图迅速商品化,使全息术走进社会,走进千家万户.模压全息图的制作,从技术上说可以分为三个阶段,即白光再现浮雕型全息图的制作、电铸金属模板和模压复制.现分述如下.

5.10.1 白光再现浮雕全息图的制作

模压全息图需要在白光下再现观察,所以用作母板的全息图多采用彩虹全息图,为了作电铸金属模的母板,彩虹全息图还必须记录成相位型浮雕全息图.记录介质有多种,通常采用光致抗蚀剂,相应的光源必须用氦-镉激光器的441.6nm波长或者氩离子激光器的547.9nm波长.

5.10.2 电铸金属模板

电铸金属模板,简称电铸.电铸也称电成型,目的是将光致抗蚀剂母板上的精细浮雕全息干涉条纹精确"转移"到金属镍板上,以便在模压机上作为"印压模板",对热塑性薄膜进行大批量复制.

第一步是铸前清洗.将拍摄的光致抗蚀剂母板固定于硬聚氯乙烯板上,用中性洗涤剂进行表面冲洗.这样作的目的是清除胶膜表面的油污和杂质,以确保像的保真度和镀层的牢固性.

第二步是进行敏化或活化处理.敏化的目的是使光致抗蚀胶板(亦称光刻胶板)表面离子化,形成均匀分布的离子颗粒(即反应中心).一般使用氯化铜溶液浮动缓慢喷射,让其充分反应后再用去离子水冲洗.

第三步是制作化学镀层.制作程序如下:先用化学方法在光刻表面生成一薄层银或镍的导电层(约3～5μm),作为电解镀镍的阴极;然后在浮雕表面上镀上一层颗粒极细的金属,使光致抗蚀剂胶板上的纹槽原封不动地"转移"到金属层上,化学镀层一般用镍溶液,其反应方程为

$$Ni^{2+} + 2e \rightarrow Ni$$

这样一来,在胶面上就生成一层Ni金属原子;最后用去离子水冲洗,并马上放入铸槽.

第四步是电铸.整个电铸过程在电铸槽中进行,槽中镀液主要成分是氨基硫酸镍和硼酸,呈酸性.置于镀液中的光致抗蚀剂板作为阴极,而装在耐酸尼龙或绦纶布袋中的氨基硫酸镍作为阳极,这是一种强电解质,在镀液中全部离解成镍离子

$$NiNH_3SO_3 \rightarrow Ni^{2+} + SO_3^{2-} + NH_3\uparrow$$

溶液中带正电的镍离子向阴极(即光致抗蚀剂板)移动,并在阴极接收电子变成镍原子.

电铸成型的金属板与光致抗蚀剂剥离并清洗干净,就得到了所需的镍原板.将镍原板纯化后翻铸成多个镍板,即可供模压使用.

5.10.3 模压

模压也称压印,即在一定压力和温度下,利用专用模压机将镍板上的全息干涉条纹印刷到聚氯乙烯等热塑料薄膜上以制成模压全息图.再将模压全息图表面镀铝(或直接将干涉条纹压印到镀铝塑料膜上),使之成为反射再现全息图,便于人们观察.

模压全息技术是建立在全息技术、计算机辅助成图技术、制版技术、表面物理、电化学、精密机械加工等多学科基础之上的一种精细加工技术.制作模压全息图需要昂贵的设备和高超的技

术,难以仿制,所以大量用作保安和防伪标记.

5.11 体积全息

物光波和参考光波发生干涉时,在全息图附近的空间形成三维条纹.在前面的讨论中,我们没有考虑记录材料厚度的影响,而把全息图的记录,完全作为一种二维图像来处理.这种类型的全息图称为平面全息图.但是,当记录材料的厚度是条纹间距的若干倍时,则在记录材料体积内将记录下干涉条纹的空间三维分布,这样就形成体积全息.

体积全息图对于照明光波的衍射作用如同三维光栅的衍射一样.按物光和参考光入射方向和再现方式的不同,体积全息可分为两种.一种是当物光和参考光在记录介质的同一侧入射,得到透射的全息图,再现时由照明光的透射光成像.另一种是物光和参考光从记录介质的两侧入射,得到反射体积全息图,再现时由照明光的反射光成像.

5.11.1 透射体积全息图

为简单起见,取物光波和参考光波均为平面波,传播矢量位于 xz 平面,如图 5.11.1 所示.

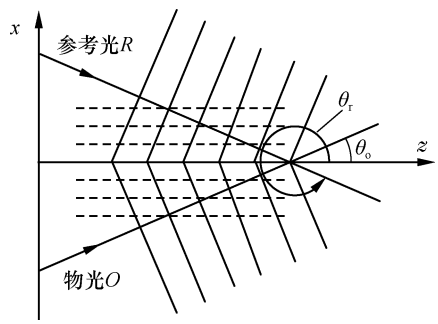


图 5.11.1 透射体积全息图的记录

合光场的复振幅分布为

$$\boldsymbol{U}(x,z)=O_0\exp[\mathrm{j}2\pi(x\xi_o+z\eta_o)]+r_0\exp[\mathrm{j}2\pi(x\xi_r+z\eta_r)] \tag{5.11.1}$$

式中:$\xi_o=\sin\theta_o/\lambda,\eta_o=\cos\theta_o/\lambda,\xi_r=\sin\theta_r/\lambda,\eta_r=\cos\theta_r/\lambda$.$\theta_o$ 和 θ_r 分别为物光和参考光在记录介质内的传播矢量与 z 轴的夹角,λ 为在记录介质内光波的波长.

合光场强度的空间分布为

$$\begin{aligned}I(x,z)&=r_0^2+O_0^2+O_0r_0\exp\{\mathrm{j}2\pi[x(\xi_o-\xi_r)+z(\eta_o-\eta_r)]\}\\&\quad+O_0r_0\exp\{-\mathrm{j}2\pi[x(\xi_o-\xi_r)+z(\eta_o-\eta_r)]\}\\&=r_0^2+O_0^2+2O_0r_0\cos\{2\pi[x(\xi_o-\xi_r)+z(\eta_o-\eta_r)]\}\end{aligned} \tag{5.11.2}$$

在线性记录条件下,记录介质内振幅透射率的空间分布为

$$t(x,y,z)=t_b+\beta' 2r_0O_0\cos\{2\pi[x(\xi_o-\xi_r)+z(\eta_o-\eta_r)]\} \tag{5.11.3}$$

$t(x,y,z)$取极大值和极小值的条件分别为

$$x(\xi_o-\xi_r)+z(\eta_o-\eta_r)=m \tag{5.11.4}$$

$$x(\xi_o-\xi_r)+z(\eta_o-\eta_r)=m+\frac{1}{2} \tag{5.11.5}$$

式中,$m=0,\pm1,\pm2,\cdots$上述两个方程各自确定一组与 xz 平面垂直的彼此平行等距的平面.对 $t(x,y,z)$取极大值的平面波,显影时乳胶析出的银原子数目也最多.这些平面相对于 z 轴的倾角 ϕ 满足

$$\tan\phi=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=-\frac{\eta_o-\eta_r}{\xi_o-\xi_r}=-\frac{\cos\theta_o-\cos\theta_r}{\sin\theta_o-\sin\theta_r}=\tan\left(\frac{\theta_o+\theta_r}{2}\right) \tag{5.11.6}$$

由上式可知,在乳胶层内,$t(x,y,z)$相等的平面平分物波和参考波传播方向所构成的夹角,形成一组垂直于 xz 平面的体积光栅.在特殊情况下,$\theta_r=-\theta_o$,即物光与参考光相对于 z 轴对称,

这时 $\xi=-\xi_0$，$\eta=\eta_0$，光栅平面方程变为

$$t(x,y,z)_{\max}:2\xi_0 x=m \tag{5.11.7}$$

$$t(x,y,z)_{\min}:2\xi_0 x=m+\frac{1}{2} \tag{5.11.8}$$

且光栅平面垂直于 x 轴.光栅间距 d 为

$$d=\frac{1}{2\xi_0}=\frac{\lambda}{2\sin\theta_0} \tag{5.11.9}$$

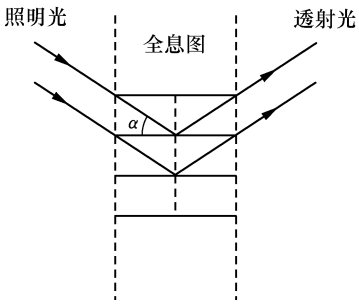


图 5.11.2 再现光路

再现时用平面光波照明全息图，将体积光栅中的每个银层看作是一面具有一定反射能力的平面反射镜，它按反射定律把一部分入射的光能量反射回去，如图 5.11.2 所示.

设照明光波的传播方向与银层平面的夹角为 α，相邻银层平面反射光波之间的光程差为 $\Delta L=2d\sin\alpha$.显然，只有当 ΔL 为再现光波长的整倍数时，反射光波才能相干叠加，从而产生一个明亮的再现像，其条件是

$$2d\sin\alpha=\pm\lambda \tag{5.11.10}$$

通常将(5.11.10)式称为布拉格条件.与(5.11.9)式对比可知，只有

$$\alpha=\pm\theta_0 \tag{5.11.11}$$

或

$$\alpha=\pm(\pi-\theta_0) \tag{5.11.12}$$

时才能得到明亮的再现像.

以上所述表明：当用与参考光相同的光波照明时，再现波的传播方向与物光波传播方向一致，这时给出物体的虚像.如果用一束与参考光传播方向相反的光波照射全息图，则再现波的传播方向与原始物波相反，这种共轭物光波将产生原来物体的一个实像.当然，若用原始物波或者共轭波照明全息图，则可分别再现参考波或共轭参考波.

由于记录时物光波与参考光波位于记录介质同侧，这种体积全息的银层结构近似垂直于乳胶表面，再现时反射光波位于全息图两侧，故形象地将这种全息图称为透射体积全息图.透射体积全息图具有对角度灵敏的特性，即当照明光波的方向偏离布拉格条件时，衍射像很快消失，所以体积全息可用于多重记录.

5.11.2 反射全息图

如果记录体积全息图时，物光和参考光来自记录材料两侧，近似相反方向，如图 5.11.3(a)所示，那么，这两束光的相干叠加问题，可以作为驻波问题来处理.这时条纹平面垂直于光波传播方向，相邻两平面的间距为 $\lambda/2$. 显影后与干涉条纹对应的是一系列彼此平行相距 $\lambda/2$ 的银层平面，这些银层平面对波长为 λ 的光具有很强的反射能力，相当于干涉滤波器.由于这种全息图对波长具有很高的选择性，因此可以用白光照明再现出单色像.再现时，若照明光与参考光方向相同，则反射光与物光传播方向相同，再现出原物体的一个虚像，如图 5.11.3(b)所示.若照明光与参考光共轭，即从反面照射全息图，则反射光与原始物光传播方向相反，再现出原物体的一个实像，如图 5.11.3(c)所示.再现像的光波波长与记录时一样，照明白光中其余波长的光不满足布拉格条件，只能透过乳胶或被部分吸收.在实际显影和定影过程中，乳胶会发生收缩，银层平面间距离要减小，因而再现像的色彩会向短波方向移动.

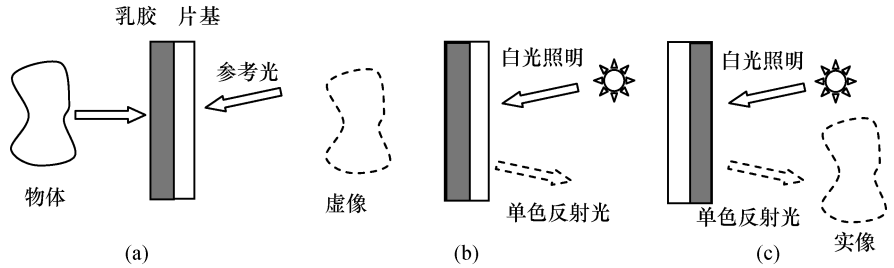


图 5.11.3 反射全息

(a) 记录全息图;(b) 获得虚像;(c) 获得实像

例 5.11.1 试求如图 5.11.4 所示对称记录反射全息图干涉条纹间距公式.

解:由(5.11.2)式

$$I(x,z)=R_0^2+O_0^2+2R_0O_0\cos\{2\pi[x(\xi_0-\xi_r)+z(\eta_0-\eta_r)]\}$$

若用对称式记录光路,即要求 $\theta_r=\pi-\theta_0$,由此得 $\psi_r=\pi-\psi_0$,于是有

$$\xi_0-\xi_r=\frac{\sin\psi_0-\sin\psi_0}{\lambda}=0$$

$$\eta_0-\eta_r=\frac{\cos\psi_0-\cos\psi_r}{\lambda}=\frac{2\cos\psi_0}{\lambda}$$

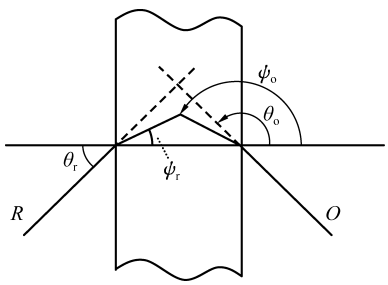


图 5.11.4

条纹极大值出现在 $z(\eta_0-\eta_r)=\dfrac{2z\cos\psi_0}{\lambda}=n$ 的地方,与 x 无关,即条纹垂直于 z 轴.条纹间距为

$$d=\frac{\lambda_0}{2\cos\psi_0}=\frac{\lambda_0/n}{2\sqrt{1-\sin^2\psi_0}}=\frac{\lambda_0}{2\sqrt{n^2-n^2\sin^2\psi_0}}$$

$$=\frac{\lambda_0}{2\sqrt{n^2-\sin^2\theta_0}}=\frac{\lambda_0}{2\sqrt{n^2-\sin^2\theta_r}} \tag{5.11.13}$$

式中,λ_0 为真空中的光波波长,n 为乳剂的折射率.若 $\theta_r\approx\theta_0\approx0$,则 $d=\lambda/2$.

5.12 平面全息图的衍射效率

全息图的衍射效率直接关系到全息再现像的亮度.通常把它定义为全息图的一级衍射成像光通量与照明全息图的总光通量之比.表示平面全息图和体积全息图衍射效率的公式是不相同的,我们在这里只限于讨论平面全息图的情况.对于平面全息图又有振幅调制和相位调制的区别.

5.12.1 振幅全息图的衍射效率

当物光波和参考光波都是平面波时,记录的是正弦型振幅全息图,其振幅透过率一般可表示为

$$t(x)=t_0+t_1\cos2\pi\xi x=t_0+\frac{1}{2}t_1[\exp(j2\pi\xi x)+\exp(-j2\pi\xi x)] \tag{5.12.1}$$

式中:ξ 为全息图上条纹的空间频率;t_0 为平均透射系数;为调制幅度,它与记录时参考光和物光光束之比以及记录介质的调制传递函数有关.在理想情况下 $t(x)$ 可在 0 到 1 之间变化.当 $t_0=1/2$,$t_1=1/2$ 时,能达到这一最大变化范围.此时

$$\boldsymbol{t}(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\pi\xi x=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\exp(\mathrm{j}2\pi\xi x)+\frac{1}{4}\exp(-\mathrm{j}2\pi\xi x) \tag{5.12.2}$$

假定用振幅为 C_0 的平面波垂直照明全息图,则透射光场为

$$\boldsymbol{U}_t(x)=C_0\boldsymbol{t}(x)=\frac{1}{2}C_0+\frac{C_0}{4}\exp(\mathrm{j}2\pi\xi x)+\frac{C_0}{4}\exp(-\mathrm{j}2\pi\xi x) \tag{5.12.3}$$

对于与再现像有关的正、负一级衍射光,它们的强度为$(C_0/4)^2$. 因此,衍射效率为

$$\eta=\frac{(C_0/4)^2 S_{\mathrm{H}}}{C_0^2 S_H}=\frac{1}{16}=6.25\% \tag{5.12.4}$$

式中,S_{H} 表示全息图上照明光的照明面积.事实上,并不存在一种记录介质能使 t 从 0 到 1 之间变化的整个曝光量范围都是线性的.因而,在线性记录条件下正弦型振幅全息图的衍射效率比 6.25% 还要小,所以 6.25% 是最大衍射效率.

如果全息图不是正弦型的,而透过率 $\boldsymbol{t}(x)$的变化作为 x 的矩形函数,透和不透各占一半,周期为 $x_0$$\left(\text{即空间频率 }\xi=\frac{1}{x_0}\right)$.若坐标原点选在不透明部分的中心处,则透过率函数的傅里叶级数展开为

$$\boldsymbol{t}(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos(6\pi\xi x)-\frac{2}{\pi}\cos(6\pi\xi x)+\cdots \tag{5.12.5}$$

矩形函数的零级和±1级为

$$\boldsymbol{t}(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos(2\pi\xi x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\{\exp(\mathrm{j}2\pi\xi x)+\exp(-\mathrm{j}2\pi\xi x)\} \tag{5.12.6}$$

当用振幅为 C_0 的平面波垂直照明全息图时,透射光场为

$$\boldsymbol{U}_t(x)=C_0\boldsymbol{t}(x)=\frac{C_0}{2}+\frac{C_0}{\pi}\exp(\mathrm{j}2\pi\xi x)+\frac{C_0}{\pi}\exp(-\mathrm{j}2\pi\xi x) \tag{5.12.7}$$

其正、负一级衍射效率

$$\eta=\frac{\left(\frac{C_0}{\pi}\right)^2 S_{\mathrm{H}}}{C_0^2 S_{\mathrm{H}}}=\frac{1}{\pi^2}=10.13\% \tag{5.12.8}$$

由此可见,矩形函数全息图一级像的衍射效率较正弦型全息图的为高.但矩形光栅具有较高级次的衍射波.计算机产生的全息图就可能是矩形光栅型全息图.这样,我们看到通过改变透射函数的波型,就可适当提高衍射效率.例如,用非线性显影就可以提高一级像的衍射效率.

5.12.2 相位全息图的衍射效率

如果相位全息图是两束平面波干涉而产生的正弦型相位光栅,其透过率可表示为

$$\boldsymbol{t}(x)=\exp[\mathrm{j}\varphi_1\cos(2\pi\xi x)] \tag{5.12.9}$$

式中,φ_1 为调制度,ξ为相位光栅的空间频率.根据贝塞尔函数的积分公式

$$\exp(\mathrm{j}x\cos\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{j}^n\mathrm{J}_n(x)\exp(-\mathrm{j}n\theta) \tag{5.12.10}$$

(5.12.9)式可以写成级数形式

$$\exp[\mathrm{j}\varphi_1\cos(2\pi\xi x)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{j}^n\mathrm{J}_n(\varphi_1)\exp(-\mathrm{j}2\pi n\xi x) \tag{5.12.11}$$

用振幅为 C_0 的平面波垂直照明全息图时,透射光场为

$$\boldsymbol{U}_t(x)=C_0\boldsymbol{t}(x)=C_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{j}^n\mathrm{J}_n(\varphi_1)\exp(\mathrm{j}2\pi n\xi x) \tag{5.12.12}$$

第 n 级的衍射效率为

$$\eta_n = \frac{C_0^2 \mid \mathrm{J}_n(\varphi_1) \mid^2 S_{\mathrm{H}}}{C_0^2 S_{\mathrm{H}}} = \mid \mathrm{J}_n(\varphi_1) \mid^2 \tag{5.12.13}$$

式中，S_{H} 表示全息图上照明光的照明面积．对于成像光束，我们通常感兴趣的是正、负一级衍射．注意，当 $\varphi_1 = 1.85$ 时 J_1 有最大值，$\mathrm{J}_1(1.85) = 0.582$．由此可计算出一级衍射像的最大衍射效率 $\eta_1 = |\mathrm{J}_1(1.85)|^2 = 0.582^2 = 33.9\%$，这时零级和其他衍射级的衍射效率均小于正、负一级．由于相位全息图的衍射效率比振幅全息图高得多，能够产生更明亮的全息再现像，从而使人们对相位全息图产生了浓厚的兴趣．

对于矩形光栅形式的相位全息图的衍射效率，计算表明其正、负一级的最大衍射效率为

$$\eta' = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 = 40.4\% \tag{5.12.14}$$

总之，不管振幅全息图还是相位全息图，矩形函数形式的都比正弦型的衍射效率高，用计算机制作的全息图大多是矩形波函数形式的．

表 5.12.1 中列出了正弦调制情况下全息图的最大衍射效率．表中同时列出了体积透射型全息图和体积反射型全息图的衍射效率，以供比较．由表 5.12.1 可以看出，体积相位型全息图的衍射效率最高．

表 5.12.1　各种全息图的最大理论衍射效率

全息图类型	平面透射全息图		体积透射全息图		体积反射全息图	
调制方式	振幅型	相位型	振幅型	相位型	振幅型	相位型
衍射效率	0.0625	0.339	0.037	1.000	0.072	1.000

5.13　全息干涉计量

全息术的原理已渗透到各个领域．全息术的许多独特性能，使它成为一种非常有价值的科学手段．全息术用途十分广泛，最重要的应用领域是：全息干涉量度、全息光学元件、全息显示、信息处理．其中全息术在信息处理中的应用将结合光学信息处理的有关章节介绍．

全息干涉计量是全息应用的一个重要领域，干涉计量的基础是波前比较．全息术是唯一能记录和再现波前的技术，这使我们有可能用一个标准波前与一个变形物体产生的波前相比较而实现干涉计量．由于标准波前和变形波前是通过同一光路来产生的，因而可以消除系统误差，这样对光学元件的精度要求可以降低，这是其他干涉计量方法不容易做到的．最常用的全息干涉方法是单次曝光法、二次曝光法和时间平均法．

5.13.1　二次曝光法

二次曝光法是通过二次曝光将标准物光波前和变形后的物光波前，按不同时刻记录在同一张全息图上，再现时，通过两个波面之间的干涉条纹了解波面的变化，从而分析两次曝光之间物体的变形．

记录光路如图 5.13.1(a)所示．在底片平面上，参考光波 $R(x,y) = r_0(x,y) \times \exp[\mathrm{j}\varphi_{\mathrm{r}}(x,y)]$，初始物光波 $O(x,y) = O_0(x,y)\exp[\mathrm{j}\varphi_{\mathrm{o}}(x,y)]$，变形后的物光波 $O'(x,y) = O_0(x,y)\exp[\mathrm{j}\varphi'_{\mathrm{o}}(x,y)]$．假定两次曝光时间相同，则总的曝光光强为

$$\begin{aligned} I(x,y) = \mid \boldsymbol{O} + \boldsymbol{R} \mid^2 + \mid \boldsymbol{O'} + \boldsymbol{R} \mid^2 &= 2(r_0^2 + O_0^2) + O_0 r_0 \exp[\mathrm{j}(\varphi_{\mathrm{o}} - \varphi_{\mathrm{r}})] \\ &+ O_0 r_0 \exp[-\mathrm{j}(\varphi_{\mathrm{o}} - \varphi_{\mathrm{r}})] + O_0 r_0 \exp[\mathrm{j}(\varphi'_{\mathrm{o}} - \varphi_{\mathrm{r}})] + O_0 r_0 \exp[-\mathrm{j}(\varphi'_{\mathrm{o}} - \varphi_{\mathrm{r}})] \end{aligned} \tag{5.13.1}$$

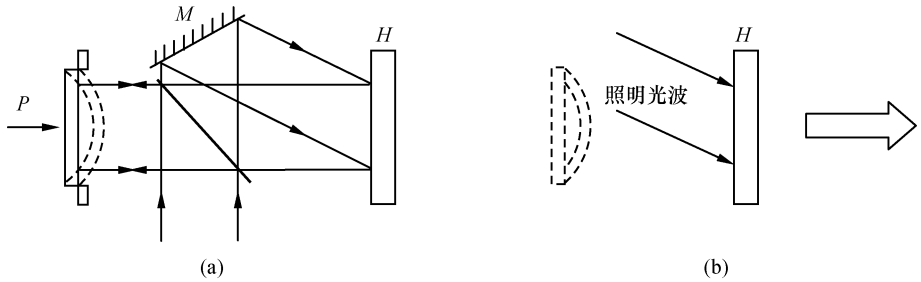


图 5.13.1 二次曝光全息图的记录与再现
(a) 记录;(b) 再现

在线性记录条件下,全息图的复振幅透过率正比于曝光光强

$$t(x,y) = t_0 + \beta' I(x,y) \tag{5.13.2}$$

假定用参考光波照明全息图[见图 5.13.1(b)],则在全息图的透射光波中,与原始物光波和变形物光波有关的分量波为

$$\boldsymbol{U}_t(x,y) = \beta' O_0 r_0^2 \exp(\mathrm{j}\varphi_0) + \beta' O_0 r_0^2 \exp(\mathrm{j}\varphi_0') \tag{5.13.3}$$

再现的原始物光波前和变形物光波前沿同一方向传播,产生干涉.这时干涉条纹的强度分布为

$$I_t = C\cos(\varphi_0 - \varphi_0') \tag{5.13.4}$$

因为变形前后的物光波前已经"冻结"在全息图中,在适当照明条件下就可以通过再现产生干涉条纹,从而给定量分析提供了很大方便.图 5.13.2(a)是用于透明物体的一种全息干涉光

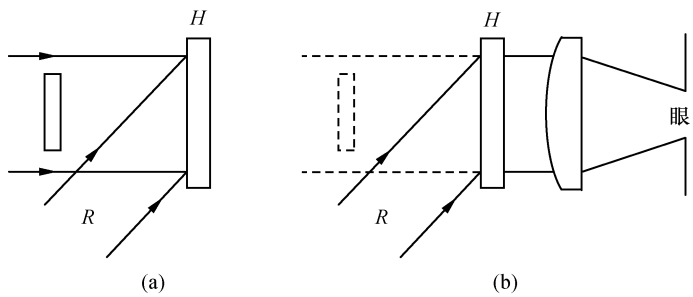


图 5.13.2 用于透明物体的全息干涉仪
(a) 记录;(b) 再现

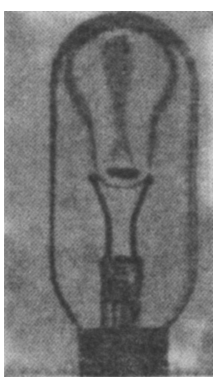


图 5.13.3 白炽灯通电前后两次曝光产生的干涉图

路.用平行光照射透明物体,透射光与参考光干涉产生全息图.第二次曝光时是初始状态的样品(或不放样品),第二次曝光时,样品已发生变化(或放入样品).参考光用平行光波或球面光波都可以,但用平面光波再现时,调整起来比较方便.图 5.13.2(b)是一种再现观察方式,用原来的参考光照明,并在全息图后置一会聚透镜,眼睛位于透镜焦点处的小孔光阑处,可以观察到整个物面上的条纹.

采用脉冲激光作光源,可以用二次曝光法对某些瞬态现象(如冲击波,流场等)进行分析.图 5.13.3 给出了白炽灯的干涉场照片,第一次曝光灯丝未通电,灯丝通电后进行第二次曝光,再现时干涉条纹显示了灯丝通电后气体受热产生的折射率变化.

二次曝光法有利于分析物体两种状态的差异,但要观察和分析物体变形的过程,则需要用一种实时显示变形的方法,即单次曝光法.

5.13.2 单次曝光法

单次曝光法是通过一次曝光把初始物光波面记录在全息图上,底片经处理后用变形后的物光波面和参考光同时照射全息图,参考光可以再现初始物光波面,这个初始物光波面与直接透过全息图的变形后的物光波面相干涉,产生干涉条纹,这样人们可以通过观察干涉条纹的连续变化,分析整个变形过程.为了使再现的标准波前与实际的波面重合,对全息图的复位有严格要求,通常采用就地显影、定影,或用精密复位装置.也可以采用干显影的记录介质,如光导热塑料、光致变色材料等.

设参考光波 $\boldsymbol{R}(x,y)=r_0(x,y)\exp[\mathrm{j}\varphi_r(x,y)]$,初始物光波 $\boldsymbol{O}(x,y)=O_0(x,y)\times\exp[\mathrm{j}\varphi_o(x,y)]$,则记录的光强分布为

$$I(x,y)=O_0^2+r_0^2+r_0O_0\exp[\mathrm{j}(\varphi_o-\varphi_r)]+r_0O_0\exp[-\mathrm{j}(\varphi_o-\varphi_r)] \tag{5.13.5}$$

在线性记录条件下,全息图的复振幅透过率为

$$\boldsymbol{t}(x,y)=t_b+\beta' O_0^2+\beta' r_0O_0\exp[\mathrm{j}(\varphi_o-\varphi_r)]+\beta' r_0O_0\exp[-\mathrm{j}(\varphi_o-\varphi_r)] \tag{5.13.6}$$

全息图精确复位后,用原参考光波和变形后的物光波 $\boldsymbol{O}'(x,y)=O_0'(x,y)\exp[\mathrm{j}\varphi_o'(x,y)]$同时照射全息图,于是在全息图的衍射光波中,与初始物光波和变形物光波有关的分量波为

$$\boldsymbol{U}_t(x,y)=\beta' r_0^2O_0\exp(\mathrm{j}\varphi_o)+(t_b+\beta' O_0^2)O_0\exp[\mathrm{j}\varphi_o'] \tag{5.13.7}$$

分量波中的两项均在同一方向传播,产生干涉,干涉条纹的强度分布为

$$\begin{aligned}I_t(x,y)=\boldsymbol{U}_t(x,y)\boldsymbol{U}_t^*(x,y)=O_0^2[&\beta'^2r_0^4+(t_b+\beta' O_0^2)^2\\&+2\beta' r_0^2(t_b+\beta' O_0^2)\cos(\varphi_o-\varphi_o')]\end{aligned} \tag{5.13.8}$$

上式表明:光强按余弦规律变化,不过由于再现的原始物光波和变形的物光波的振幅不大相同,干涉条纹的反衬度较差.适当选择参考光波与物光波的强度比例,可以改善条纹对比度.

只要记录时参考光波的入射角度选择适当,使全息图透射场中的其他分量衍射波具有不同的传播方向,就不会影响对于干涉场的观察.

5.13.3 时间平均法

全息干涉术还可用来进行振动分析.记录振动物体的全息图时,物体的位置每时每刻都在变化,我们记录的实际上是振动物体位于不同位置时物光波前与参考光波前干涉结果的时间平均,即得到时间平均全息图.它的再现像就是时间平均全息干涉条纹图样,由条纹的形状和强度分布可以确定振动的模式及振动物体表面各点的振幅.

以最简单的简谐振动为例为说明时间平均法的数学处理过程,见图 5.13.4.设振动角频率为 ω,膜片任一点 P 的振幅 $A(x)$,在时刻 t 沿 z 方向的位移量为

$$z(x,t)=A(x)\cos(\omega t) \tag{5.13.9}$$

与平衡位置相比较,在时刻 t,P 点的相位变化是

$$\varphi_0(x,t)=\frac{2\pi}{\lambda}A(x)\cos(\omega t)(\cos\theta_1+\cos\theta_2) \tag{5.13.10}$$

其中,λ 是照明光源的光波波长,θ_1 和 θ_2 是入射光和反射光传播方向与 z 轴的夹角.这时物光波前可以表示为空间坐标 x 和时间变量 t 的函数

$$\boldsymbol{O}(x,t)=\boldsymbol{O}_0(x)\exp[\mathrm{j}\varphi_o(x,y)] \tag{5.13.11}$$

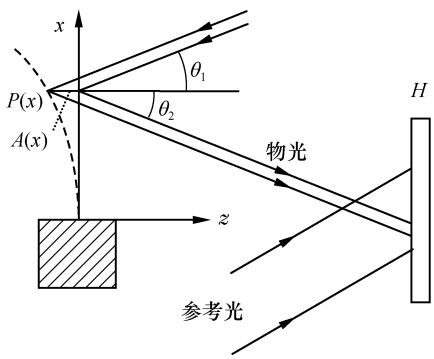


图 5.13.4 记录振动膜片的时间平均全息图

设参考光波为平面波,其波前记为

$$\boldsymbol{R}(x)=r_0\exp[\mathrm{j}\varphi_r(x)] \tag{5.13.12}$$

则在全息图上光强度为

$$I(x,t)=r_0^2+|\boldsymbol{O}_0(x)|^2+\boldsymbol{O}\boldsymbol{R}^*+\boldsymbol{O}^*\boldsymbol{R} \tag{5.13.13}$$

假定记录时间比物体振动的时间周期 T 长得多,则在全息图上的平均曝光量为

$$\langle I\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T I(x,t)\mathrm{d}t \tag{5.13.14}$$

在线性记录条件下,全息图的复振幅透过率与平均曝光量成正比.所以,若用原参考光照明全息图,并单独考虑透射场中与原始物波有关的场分量,有

$$\boldsymbol{U}_t(x)=\frac{\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^*}{T}\int_0^{2\pi}\boldsymbol{O}(x,t)\mathrm{d}t=\frac{r_0^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\boldsymbol{O}(x,t)\mathrm{d}(\omega t) \tag{5.13.15}$$

将(5.13.11)式和(5.13.10)式代入上式,有

$$\boldsymbol{U}_t(x)=\frac{r_0^2\boldsymbol{O}_0(x)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp[\mathrm{j}kA(x)\cos(\omega t)(\cos\theta_1+\cos\theta_2)]\mathrm{d}(\omega t) \tag{5.13.16}$$

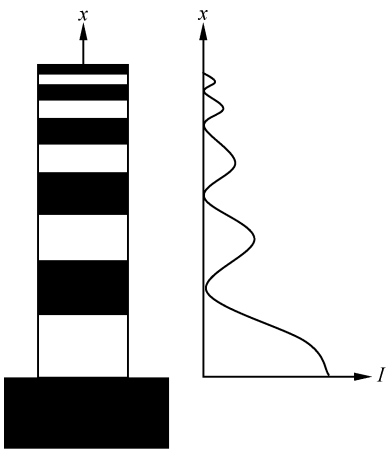


图 5.13.5 条纹强度及分布

考虑到贝塞尔函数关系式

$$\mathbf{J}_0(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp[\mathrm{j}a\cos\theta]\mathrm{d}\theta \tag{5.13.17}$$

有

$$\boldsymbol{U}_t(x)=r_0^2\boldsymbol{O}_0(x)\mathbf{J}_0[kA(x)(\cos\theta_1+\cos\theta_2)] \tag{5.13.18}$$

在振动物体上的强度分布为

$$I_t(x)=r_0^4|\boldsymbol{O}_0(x)|^2\mathbf{J}_0^2[kA(x)(\cos\theta_1+\cos\theta_2)] \tag{5.13.19}$$

上式表明:物体的原始像上光强按零阶贝塞尔函数的平方分布,其中干涉条纹表示等振幅线(见图 5.13.5),并且随振幅 $A(x)$ 的增大干涉条纹强度减小.通过对条纹强度分布的测量,可以计算出振动模式及物体表面的振幅.

5.14 数字全息

数字全息是上世纪 60 年代提出的,但当时由于电子成像硬件设备发展较慢的限制,直到上世纪 80 年代末才真正起步发展.随着 CCD 或 CMOS 等数字化光电成像器件的分辨率和解析度的不断提高,以及计算机技术的飞速发展,数字全息技术发展的瓶颈已经基本解决,近年来该技术发展迅速,其理论基础日趋完善,并广泛应用于三维形貌测量、振动测量、全息显微术、材料泊松比的测量、三维目标识别等多种领域,备受人们关注.本节将简要介绍数字全息的特点以及数字全息的记录和再现基本原理.

5.14.1 数字全息的基本概念及其特点

数字全息术是 Goodman 等人在 1967 年首次提出的,其记录光路实质上与传统光学全息基本相同,传统光学全息记录采用模拟全息干板来记录,而数字全息采用 CCD 或 CMOS 等数字化光电成像器件记录,由于 CCD 或 CMOS 在记录平面内以像元大小对全息图实行了抽样,同时对全息图透过率函数以灰度形式实行了数字化,最后以图像形式在计算机中保存下来,

因而顾名思义,称之为数字全息图;数字全息的再现方法则与光学全息的再现方法却有显著的不同,光学全息的再现需要专门的再现光学系统才能再现,而数字全息的再现是用计算机实现三维信息的重构过程,即对记录过程得到的数字全息图进行快速计算以得到被测物体的振幅信息和相位信息.

数字全息与光学全息的最大差别在于采用光电成像器件代替传统的全息干板拍摄全息图,重构过程在计算机中通过数字计算来实现.因此,数字全息术是一种利用光电成像器件即 CCD 或 CMOS 进行数字记录,并通过计算机的快速运算进行数字再现的全息术.

与传统的光学全息技术相比,数字全息技术具有以下主要特点:

(1) 采用光电成像器件直接记录全息图,并将数字化的全息图传入计算机内存储以备分析计算,实现了全息的快速、准确记录,避免了传统全息术的线性记录、显影、定影、漂白、烘干等复杂工艺过程;

(2) 与全息干板相比,用 CCD 记录只需很短的曝光时间,且准确自动控制,大大降低了传统光学全息对系统稳定性的要求,同时还可以实时记录运动物体瞬间变化的数字全息视频序列,以实现实时再现.

(3) 通过数字重构可以同时获取物体的强度分布和相位分布,便于进行进一步的处理,特别有利于对物体三维形貌的分析与测量.

(4) 由于记录和再现都借助了计算机,非常容易实现自动化、仪器化.

值得一提的是,不要把数字全息与下一章将要介绍的计算全息相混淆,数字全息的记录过程依赖光学全息记录装置,再现过程由计算机重构,而计算全息正好相反,其记录过程是由计算机来完成,而再现过程与光学全息再现一样完全依赖再现光路.

5.14.2 数字全息的基本原理

数字全息跟光学全息一样,也包括记录和再现两个过程.

1. 数字全息的记录

如图 5.14.1 所示,数字全息的记录光路与光学全息的记录光路基本相同,只是用 CCD 直接代替光学全息记录干板即可.假设 CCD 感光面 xy 到物平面 x_0y_0 的距离为 d_0,CCD 的线性度很好,可以认为是线性记录,因此,在感光面上的全息图透过率函数 $t(x,y)$可由(5.2.6)式来表征,设 CCD 的分辨率为 M 像素$\times N$ 像素,像素尺寸为 $\Delta_x\times\Delta_y$,则 CCD 采集的数字全息图可表示为

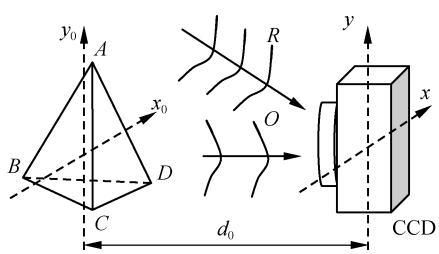


图 5.14.1 数学全息记录示意图

$$H(x,y)=\frac{1}{\Delta_x\Delta_y}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{\Delta_x}\right)\mathrm{comb}\left(\frac{y}{\Delta_y}\right)t(x,y) \tag{5.14.1}$$

2. 数字全息的重构

数字全息的再现是通过计算机计算重构出来的.我们知道,利用光学方法记录了一幅全息图,然后利用参考光波照射全息图时可以重构原物信息,这一过程是一个衍射过程,在建立重构数学模型之前,应建立如图 5.14.2 所示的数字全息重构模型,观察屏平面 x_1y_1 到数字全息图平面 xy 的距离为 d_i,落在菲涅耳衍射区,可用菲涅耳衍射积分表示为

$$\boldsymbol{U}(x_1,y_1)=\frac{\exp(\mathrm{j}kd_i)}{\mathrm{j}\lambda d_i}\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{R}(x,y)H(x,y)\exp\left[\mathrm{j}k\frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}{2d_i}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.14.2}$$

这就是数字全息的重构数学模型 .

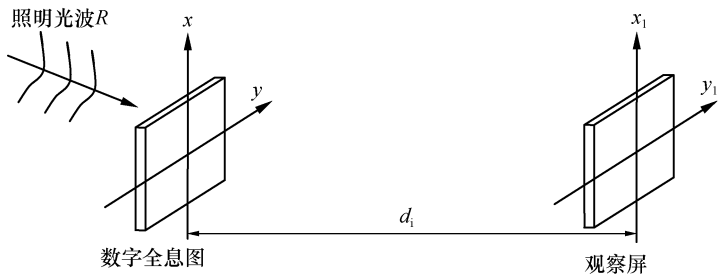


图 5.14.2 数字全息重构模型

然而,上式中除了 $H(x,y)$已数字化,其他部分仍然还是模拟函数,需要进一步数字化处理,以获得 $\boldsymbol{U}(x_1,y_1)$的数字解 .获得 $\boldsymbol{U}(x_1,y_1)$的数字解方法有很多,这里介绍三种常用方法 .

(1) 菲涅耳近似重构法

菲涅耳近似重构法是最直接的重构方法 .设(m,n)为 CCD 采集的数字全息像素坐标,其取值满足

$$\begin{cases} 0 \leqslant m \leqslant M-1 \\ 0 \leqslant n \leqslant N-1 \end{cases} \tag{5.14.3}$$

设 p,q 为两个整数,且满足

$$\begin{cases} 0 \leqslant p \leqslant M-1 \\ 0 \leqslant q \leqslant N-1 \end{cases} \tag{5.14.4}$$

在满足抽样定理的情况下,(5.14.2)式可直接离散化为

$$\boldsymbol{U}(m,n)=\frac{\exp(\mathrm{j}kd_i)}{\mathrm{j}\lambda d_i}\exp\left[\mathrm{j}\pi\lambda d_i\left(\frac{m^2}{M^2\Delta_x^2}+\frac{n^2}{N^2\Delta_y^2}\right)\right]\times\sum_{p=0}^{p=M-1}\sum_{q=0}^{q=N-1}\boldsymbol{R}(p,q)H(p,q)\exp\left[\mathrm{j}\frac{\pi}{\lambda d_i}(p^2\Delta_x^2+q^2\Delta_y^2)\right]\exp\left[\mathrm{j}2\pi\left(\frac{pm}{M}+\frac{qn}{N}\right)\right] \tag{5.14.5}$$

$U(m,n)$即为数字全息的菲涅耳近似重构像,进一步分析可以推导出重构像的水平和竖直方向的分辨率 Δ_{x_1}、Δ_{y_1} 为

$$\begin{cases} \Delta_{x_1}=\dfrac{\lambda d_i}{M\Delta_x} \\ \Delta_{y_1}=\dfrac{\lambda d_i}{N\Delta_y} \end{cases} \tag{5.14.6}$$

可见重构像的分辨率与观察屏的距离 d_i 成正比,与 CCD 的分辨率成反比,如果选用分辨率为 1024 × 1024 像素的 CCD,其像素大小为 7μm×7μm,激光波长为 0.6328μm,观察屏距离 d_i 选为 500mm,则有

$$\Delta_{x_1}=\Delta_{y_1}=\frac{0.6328\times500\times10^3}{1024\times7}=44.14\mu\mathrm{m}$$

表明此时已达到很高的重构分辨率.如果选用同样像元尺寸的分辨率为 2048×2048 像素的 CCD,则重构分辨率将倍增到 22.07μm,当然该分辨率与光学全息相比相差较大,但在许多实际应用中是可以满足实用性要求的 .

(2) 基于卷积定理的重构法

从(5.14.2)式分析可知,公式中的积分运算实质上是 $H(x,y)\boldsymbol{R}(x,y)$与二次相位因子 $\exp\left(\mathrm{j}k\frac{x^2+y^2}{2d_i}\right)$ 的卷积计算,因此,(5.14.2)式可写成

$$\boldsymbol{U}(x_1,y_1)=\frac{\exp(\mathrm{j}kd_i)}{\mathrm{j}\lambda d_i}\left[H(x,y)\boldsymbol{R}(x,y)\right]*\exp\left(\mathrm{j}k\frac{x^2+y^2}{2d_i}\right) \tag{5.14.7}$$

根据卷积定理,有

$$\boldsymbol{U}(m,n)=\frac{\exp(\mathrm{j}kd_i)}{\mathrm{j}\lambda d_i}F^{-1}\{F\{H(m,n)\boldsymbol{R}(m,n)\}\}\cdot F\left\{\exp\left(\mathrm{j}k\frac{m^2+n^2}{2d_i}\right)\right\} \tag{5.14.8}$$

(5.14.8)式就是基于卷积定理重构法重构的结果.

(3) 傅里叶变换重构法

傅里叶变换重构法是针对图 5.6.4 所示的无透镜傅里叶变换全息图提出的.由于此时参考光是一球面波,在菲涅耳近似条件下,可以表征为

$$\boldsymbol{R}(x,y)=\frac{1}{d_i}\exp(-\mathrm{j}kd_i)\exp\left[-\mathrm{j}\frac{\pi}{\lambda d_i}(x^2+y^2)\right] \tag{5.14.9}$$

代入(5.14.2)式中并简化得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}(x_1,y_1)&=\frac{\exp\left(\mathrm{j}k\frac{x_1^2+y_1^2}{d_i}\right)}{\mathrm{j}\lambda d_i^2}\iint_{-\infty}^{\infty}H(x,y)\exp\left[-\mathrm{j}2\pi\frac{xx_1+yy_1}{\lambda d_i}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{\exp\left(\mathrm{j}k\frac{x_1^2+y_1^2}{d_i}\right)}{\mathrm{j}\lambda d_i^2}F\{H(x,y)\}\Big|_{\eta=\frac{y_1}{\lambda d_i}}^{\xi=\frac{x_1}{\lambda d_i}}\end{aligned} \tag{5.14.10}$$

因此,将之简化成了一个简单的傅里叶变换运算关系,进一步数字离散化,可得

$$\boldsymbol{U}(m,n)=\frac{\exp\left(\mathrm{j}k\frac{m^2+n^2}{d_i}\right)}{\mathrm{j}\lambda d_i^2}F\{H(m,n)\} \tag{5.14.11}$$

即为傅里叶变换重构法重构的结果.虽然傅里叶变换重构法只针对无透镜傅里叶变换数字全息有效,不具备普适性,但该方法计算简单、速度快、操作简单,并且可以很方便地重构再现像,已成为一种最常用的典型数字全息方法.

总之,数字全息由于实现了数字化,可以将许多数字图像处理技术引入到数字全息图的处理过程中,从而非常方便地消除像差、噪声等的影响,改善数字全息图的质量.

5.15　全息数据存储

信息存储就是将信息有效地记录下来以便保存.文字、图片、视频流以及实物等都可作为信息保存下来.全息术之所以能作为一种有效的数据存储技术,首先是因为它具有巨大的信息存储密度,一般高达 $10^9\ \mathrm{bit/mm^2}$,是其他存储技术无法比拟的.

当然,全息术可以用于信息存储,还因它有许多诱人而独特的性质.最明显的特性是全息存储的高度分散性.根据惠更斯-菲涅耳原理,一幅模拟图像中的单个像素或者二进制数据阵列中的一位可以用分布方式存储在全息图的一个相当大的区域内,当然该分散性与光作用距离有关,

傅里叶变换全息图的分散性最多,像全息图的分散性最少,而菲涅耳全息图则介于两者之间.正是由于这种分散性特性,确保了信息存储的高可靠性和信息再现快速的优点,因为此时即使记录介质中的一个灰尘污点或缺陷会掩盖全息图上的一个小局部区域或损坏它,但在像上则不会造成局部缺陷,因而所存储的数据不会出现局部的损失.正是由于傅里叶变换全息图信息记录具有最大的分散性,因而被作为专用信息存储系统而得到重视.

第二个明显的特性是傅里叶变换记录光路所特有的.根据傅里叶变换的平移特性,全息图空间的位移只会导致傅里叶空间的线性相位倾斜,对像强度分布的位置没有影响.因此,傅里叶全息图对定位的容错能力很强.这个特点对高密度存储极其重要,尤其是对具有高放大率(意指一幅小全息图产生很大的像)的存储方式.

图 5.15.1 所示是一个具有图像放大功能且能再现实像的全息信息记录装置光路图.激光器出射一束细小的激光束,经分光镜 BS 分成两束光,其中一束经反射镜 M_1 和准直扩束镜产生宽光束平面波垂直照射到待记录物平面而形成物光波 O,另一束细小光束经过一可旋转角度的反射镜 M_2,直接作为平面参考光束,透镜 L 是普通成像透镜,d_o 与 d_i 分别为物距和像距,控制 d_o 使之在成像透镜 L 的一倍焦距和两倍焦距之间,表现为图像放大功能,根据阿贝两步成像原理(详见第八章 8.1.1 节),从波动性角度考虑,物光波成像是经过从物平面到成像透镜后焦平面,再由后焦平面到像平面的两次傅里叶变换过程,只不过每次变换增加了一个二次相位因子而已,可以理解为两次准傅里叶变换过程,这样,如果将待记录信息 File1 置于物平面,调节 M_2 使之产生参考细光束 R_1,当将全息干板置于透镜的后焦平面上,则在干板上参考细光束 R_1 照射到的区域内与物光波完成一次准傅里叶变换后的光波干涉,而记录下信息 File1;如果将待记录信息 File2 置于物平面,调节 M_2 使之产生参考细光束 R_2,则在干板上参考细光束 R_2 照射到的区域内与物光波完成一次准傅里叶变换后的光波干涉,而记录下信息 File2;依此类推,如果逐一放置 $M\times N$ 幅待记录信息,通过二维扫描系统控制 M_2,即可在一块全息干板上存储下 $M\times N$ 幅待记录信息.

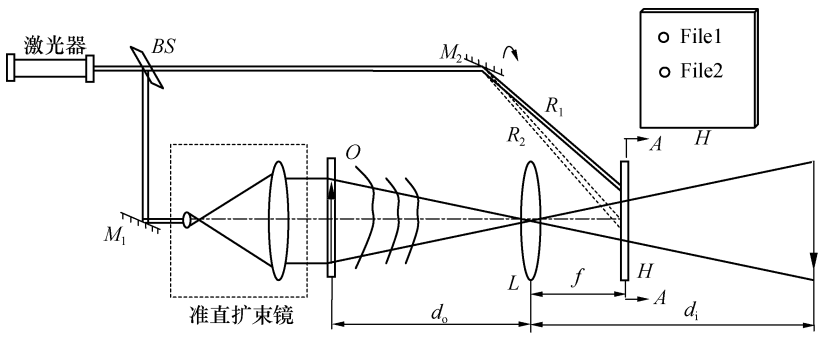


图 5.15.1 全息信息记录光路

对应的全息信息再现光路如图 5.15.2 所示.该光路实质上为阿贝成像第二步,通过这一步,即可在原记录成像透镜的真实像平面,即距全息干板 $z_i=d_i-f$ 处准确再现一个完整的、放大的实像.如果控制 M_2 实现二维扫描逐一照射全息干板上原记录的 $M\times N$ 个小全息图样,即可逐一再现 $M\times N$ 幅原记录信息.

上面记录和再现光路中 M_2 依赖于机械运动控制,扫描速度和定位控制精度有可能都较低,影响了信息记录效率,现在均采用了可电控的光束偏转器(如声光偏转器)来取代原机械控制部件,可以以视频速度(30 帧/秒)依次记录或读取一幅幅信息.

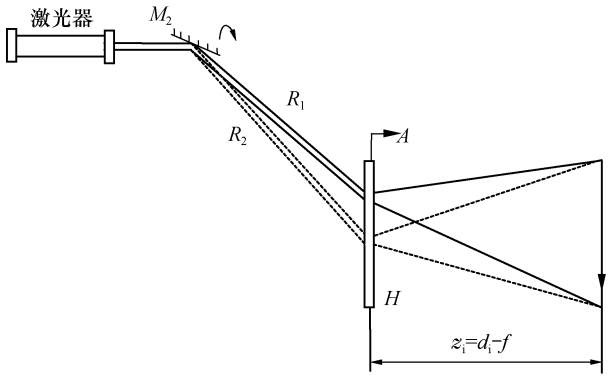


图 5.15.2　全息信息再现光路

那么到底一块全息干板能存储多少幅信息呢？直观上取决于参考细光束 R 的直径.是不是单一地尽可能减小参考光直径就能提高干板的存储信息呢？答案是否定的.

全息图的直径 D 与待记录信息的最小分辨距离 ε 有关,与记录激光波长 λ 有关,还与成像透镜的焦距 f 有关,根据信息论相关理论,可完整记录整幅信息的最小全息图直径 $D_{\min}$ 为

$$D_{\min}=\frac{2\lambda f}{\varepsilon} \tag{5.15.1}$$

例 5.15.1　设待记录信息的最小分辨距离 ε 为 0.05mm,记录激光波长为 0.6328μm,记录用成像透镜的焦距为 50mm,为避免信息混叠或干扰,要求相邻全息图边沿之间分开 1mm,试确定 10cm 见方的全息干板能存储多少幅相同大小的信息图样？

解:全息干板的长宽尺寸为 W,每行、每列分别能存储的全息图个数均为 N,相邻全息图边缘间距为 l,根据题意可知,能确保准确记录信息的全息图直径为

$$D_{\min}=\frac{2\lambda f}{\varepsilon}=\frac{2\times 0.6328\times 50\times 10^{-3}}{0.05}=1.27\text{mm}$$

为保证全息干板边沿的全息图有效性,全息干板边缘均留出 l,如图 5.15.3 所示,可得

$$(D_{\min}+l)(N-1)+D_{\min}+2l=W$$

所以

$$N=\frac{W-D_{\min}-2l}{D_{\min}+l}+1 \tag{5.15.2}$$

将已知参数代入得:$N=43.66$,取最接近且小于 43.66 的整数,即 $N=43$,表明该全息干板能存储 $43\times 43=1849$ 幅信息图样.

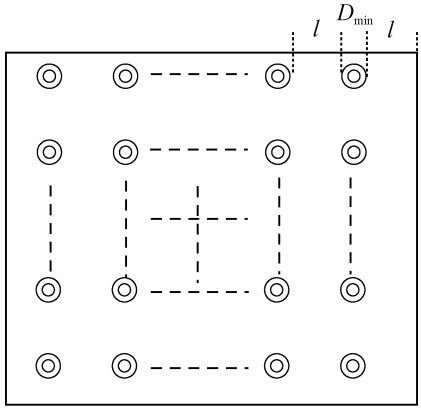


图 5.15.3　全息干板存储全息图阵列分布

另外,全息术用做信息存储还有一个其他方法难以实现的功能,能够利用三维记录材料(如厚的记录胶片或光折变晶体)的第三维空间进行存储.因而全息术提供了一种三维光存储方法,实现高密度体积存储.有关全息体信息存储可参看相关参考文献.

习　题

5.1　证明:若一平面物体的全息图记录在一个与物体相平行的平面内,则最后所得到的像将在一个与全息图平行的平面内(为简单起见,可设参考光为一平面波).

5.2 制作一全息图,记录时用的是氩离子激光器波长为 488.0nm 的光,而成像时则是用 He-Ne 激光器波长为 632.8nm 的光.

(1) 设 $z_p=\infty$,$z_r=\infty$,$z_0=10\text{cm}$,问像距 z_i 是多少?

(2) 设 $z_p=\infty$,$z_r=2z_0$,$z_0=10\text{cm}$,问 z_i 是多少? 放大率 M 是多少?

5.3 证明:若 $\lambda_2=\lambda_1$,及 $z_p=z_r$,则得到一个放大率为 1 的虚像;若 $\lambda_2=\lambda_1$,及 $z_p=-z_r$,则得到一个放大率为 1 的实像.

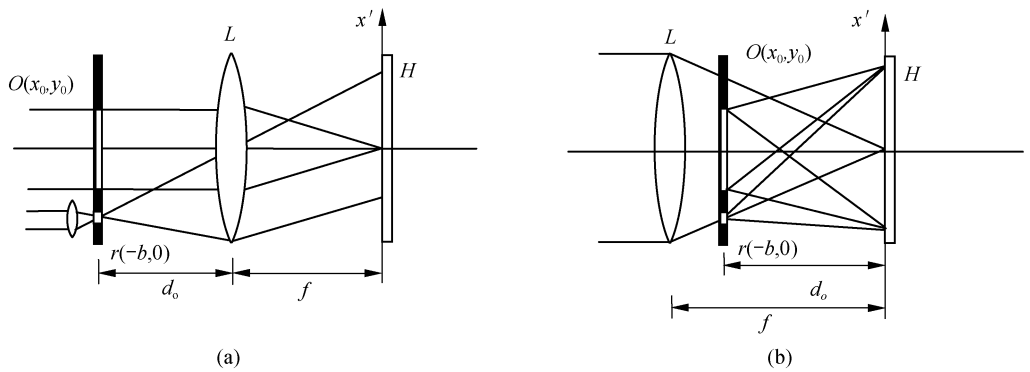
5.4 下表列举了几种底片的 MTF 的近似截止频率

表题 5.1 几种底片的 MTF 的近似截止频率

厂 商	型 号	线/mm
Kodak	Tri-x	50
Kodak	高反差片	60
Kodak	SO-243	300
Agfa	Agepam FF	600

设用 632.8nm 波长照明,采用无透镜傅里叶变换记录光路,参考点和物体离底片 10cm.若物点位于某一大小的圆(在参考点附近)之处,则不能产生对应的像点,试对每种底片估计这个圆的半径大小.

5.5 证明图题 5.5(a)和(b)的光路都可以记录物体的准傅里叶变换全息图.



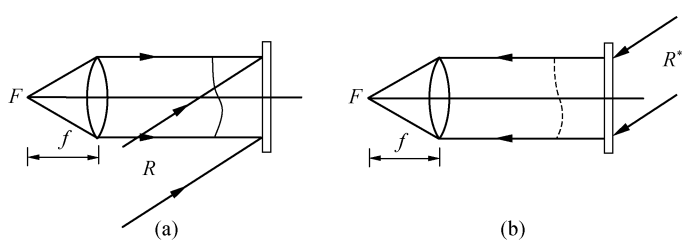
图题 5.5 准傅里叶变换全息图的两种光路

5.6 散射物体的菲涅耳全息图的一个有趣性质是,全息图上局部区域的划痕和脏迹并不影响像的再现,甚至取出全息图的一个碎片,仍能完整地再现原始物体的像,这一性质称为全息图的冗余性.

(1) 应用全息照相的基本原理,对这一性质加以说明.

(2) 碎片的尺寸对再现像的质量有哪些影响?

5.7 见图题 5.7(a),点源置于透镜前焦点,全息图可以记录透镜的像差.试证明:用共轭参考光照明[图题 5.7(b)]可以补偿透镜像差,在原点源处产生一个理想的衍射斑.



图题 5.7

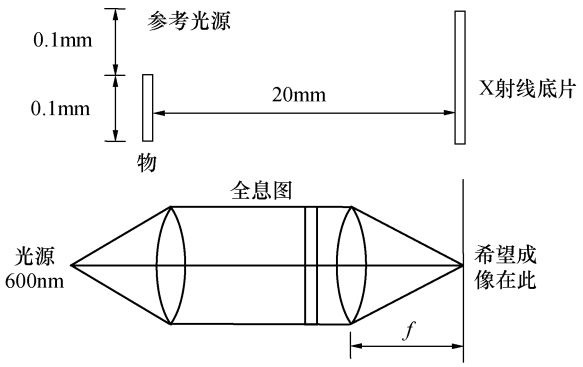
5.8　彩虹全息照相中使用狭缝的作用是什么？为什么彩虹全息图的色模糊主要发生在与狭缝垂直的方向上？

5.9　说明傅里叶变换全息图的记录和再现过程中，可以采用平行光入射和点源照明两种方式，并且这两种方式是独立的.

5.10　曾有人提出用波长为 0.1nm 的辐射来记录一张 X 射线全息图，然后用波长为 600.0nm 的可见光来再现像.选择如图题 5.10(上部)所示的无透镜傅里叶变换记录光路，物体的宽度为 0.1mm，物体和参考点源之间的最小距离选为 0.1mm，以确保孪生像和“同轴”干涉分离开.X 射线底片放在离物体 2cm 处.

(1) 投射到底片上的强度图案中的最大频率(周/mm)是多少？

(2) 假设底片分辨率足以记录所有的入射强度变化，有人提议用图 5.10(下部)所示通常方法来再现成像，为什么这个实验不会成功？



图题 5.10

第6章　计算全息

随着数字计算机与计算技术的迅速发展，人们广泛地使用计算机去模拟、运算、处理各种光学过程，在计算机科学和光学相互促进和结合的发展进程中，1965年在美国IBM公司工作的德国光学专家罗曼(A.W.Lohmann)使用计算机和计算机控制的绘图仪做出了世界上第一个计算全息图(computer-generated hologram，简称CGH)。计算全息图不仅可以全面地记录光波的振幅和相位，而且能综合复杂的、或者世间不存在物体的全息图，因而具有独特的优点和极大的灵活性。从光学发展的历史上看，计算全息首次将计算机引入光学处理领域。很多光学现象都可以用计算机来进行仿真，计算全息图成为数字信息和光学信息之间有效的联系环节，为光学和计算机科学的全面结合拉开了序幕。计算全息除了具有重要的科学意义和广阔的应用前景外，还是一个很好的教学工具。要做好一个计算全息图，必须了解全息学、干涉术、调制技术、傅里叶变换、数字计算方法和计算机程序设计。这些都是光学和应用光学的学生、研究生必须掌握的，也是有关领域的研究人员不可缺少的知识。

本章重点讨论计算全息的理论基础、基本原理及制作方法，介绍一些典型的计算全息图及其主要应用。

6.1　计算全息的理论基础

6.1.1　概述

光学全息图是直接用光学干涉法在记录介质上记录物光波和参考光波叠加后形成的干涉图样。假如物体并不存在，而只知道光波的数学描述，也可以利用电子计算机，并通过计算机控制绘图仪或其他记录装置(例如激光扫描器、电子束、离子束扫描器等)将模拟的干涉图样绘制和复制在全息干版或透明胶片上。这种计算机合成的全息图称为计算全息图。计算全息图和光学全息图一样，可以用光学方法再现出物光波，但两者有本质的差别。光学全息唯有实际物体存在时才能制作，而计算全息的合成中，只要在计算机中输入实际物体或虚构物体的数学模型就行了。计算全息再现的三维像是现有技术所能得到的唯一的三维虚构像，具有重要的科学意义。

计算全息的发展受到两个不同因素的刺激，一个是全息学的发展处于极盛时期，另一个是电子计算机控制绘图刚开始普及。罗曼在光学研究方面的成就，加上他在IBM公司工作，使他很容易地走上了计算全息研究的这条路。据罗曼说，他研究计算全息的动机开始于1965年，那年夏天他在密执安大学暑期班授课时，密执安大学研究所的柯兹马(A.Kozma)和他谈起用计算机绘制振幅滤波器的问题，同年罗曼在IBM工作时，由于激光器坏了，又要做全息图，在危急时刻，他用计算机代替激光器做出了全息图，这是第一个记录振幅和相位信息的计算全息图。虽然他的方法在准确性方面存在一些缺点，但因原理简单，到目前为止初学的人还常常采用他的方法。1967年巴里斯(Paris)把快速傅里叶变换算法应用到快速变换计算全息图中，并且与罗曼一起完成了几个用光学方法很难实现的空间滤波，显示了计算全息的优越性。1969年赖塞姆(Lesem)等人又提出相息图，1974年李威汉(Wai-Hon Lee)提出计算全息干涉图的制作技术。计算全息的主要应用范围是：①二维和三维物体像的显示；②在光学信息处理中用计算全息制作各种空间滤波器；③产生特定波面用于全息干涉计量；④激光扫描器；⑤数据存储。

计算全息图的制作和再现过程主要分为以下几个步骤：①抽样。得到物体或波面在离散样点

上的值.②计算.计算物光波在全息平面上的光场分布.③编码.把全息平面上的光波复振幅分布编码成全息图的透过率变化.④成图.在计算机控制下,将全息图的透过率变化在成图设备上成图.如果成图设备分辨率不够,再经光学缩版得到实用的全息图.⑤再现.这一步骤在本质上与光学全息图的再现没有区别.一张傅里叶变换计算全息图制作的典型流程如图 6.1.1 所示.

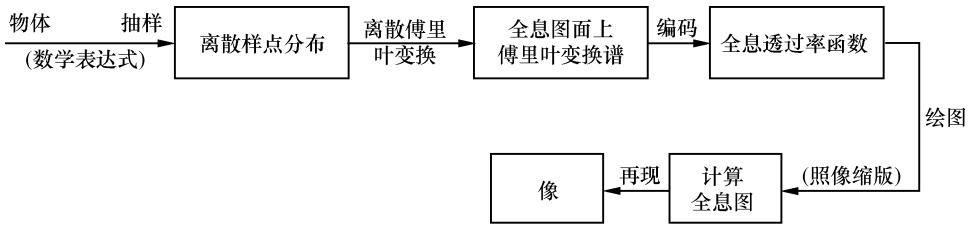


图 6.1.1 傅里叶变换计算全息图制作流程

计算全息的优点很多,最主要的是可以记录物理上不存在的实物的虚拟光波,只要知道该物体的数学表达式就可能用计算全息记录下这个物体的光波,并再现该物体的像.这种性质非常适宜于信息处理中空间滤波器的合成,干涉计量中产生特殊的参考波面,三维虚构物体的显示等.计算全息制作过程采用数字定量计算,精度高,特别是二元全息图,透过率函数只有两个取值,抗干扰能力强、噪声小、易于复制.要制作一张高空间带宽积的全息图,对计算机的存储容量、计算速度和成图设备的分辨率都有很高的要求.随着大容量、高速计算机的不断出现,激光扫描、电子束、离子束成图技术的发展,计算全息必将显示更大的优越性,扩展更多的应用领域.

6.1.2 抽样定理

光学图像信息往往具有连续分布的特点,而数字计算机所处理的信息却表现为序列的形式.在实现信息记录、存储、发送和处理时,由于物理器件有限的信息容量,一个连续函数也常常用它在一个离散点集上的函数值,即抽样值来表示.例如,连续函数 $f(t)$和序列 $f(n)$之间满足

$$f(n)=f(t_0+n\Delta t),\quad n=0,1,\cdots,N-1 \tag{6.1.1}$$

式中:t_0 为抽样起始点,n 为抽样点序号,Δt 是抽样间隔,$f(n)$是抽样值或抽样序列.直观上,抽样间隔越小,则抽样序列越准确地反映原来的连续函数.但是,抽样间隔越小,对于信息检测、传送、存储和处理都提出了更高的要求.如何选择一个合理的抽样间隔,以便做到既不丢失信息,又不对检测、处理等过程提出过分要求,并由这样的抽样值恢复一个连续函数呢?这些正是抽样定理所要回答的问题.

抽样是制作计算全息图的一个重要和必不可少的步骤,抽样定理是计算全息技术中的重要理论基础之一.下面我们将结合函数的抽样和复原来介绍抽样定理.

1. 函数的抽样

下面要用梳状函数 $\mathrm{comb}(x)$来表示一些运算.梳状函数具有下列性质

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{comb}(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(x-m)\\
&\mathrm{comb}\left(\frac{x}{\Delta x}\right)=\Delta x\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(x-m\Delta x)\\
&\mathrm{comb}(\Delta x x)=\frac{1}{\Delta x}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(x-\frac{m}{\Delta x}\right)\\
&\mathrm{comb}(x)\overset{F}{\longleftrightarrow}\mathrm{comb}(\xi)\\
&\mathrm{comb}\left(\frac{x}{\Delta x}\right)\overset{F}{\longleftrightarrow}\Delta x\,\mathrm{comb}(\Delta x\xi)
\end{aligned}\right\} \tag{6.1.2}$$

式中：F 表示傅里叶变换，Δx 是抽样间距，ξ 是与空间变量 x 相对应的空间频域变量．在推导二维抽样定理时，给出了一个一维的图解分析，以便更直观地了解函数抽样和复原的过程中，在空域和频域所产生的相应变化．图 6.1.2 是推导抽样定理的图解分析．

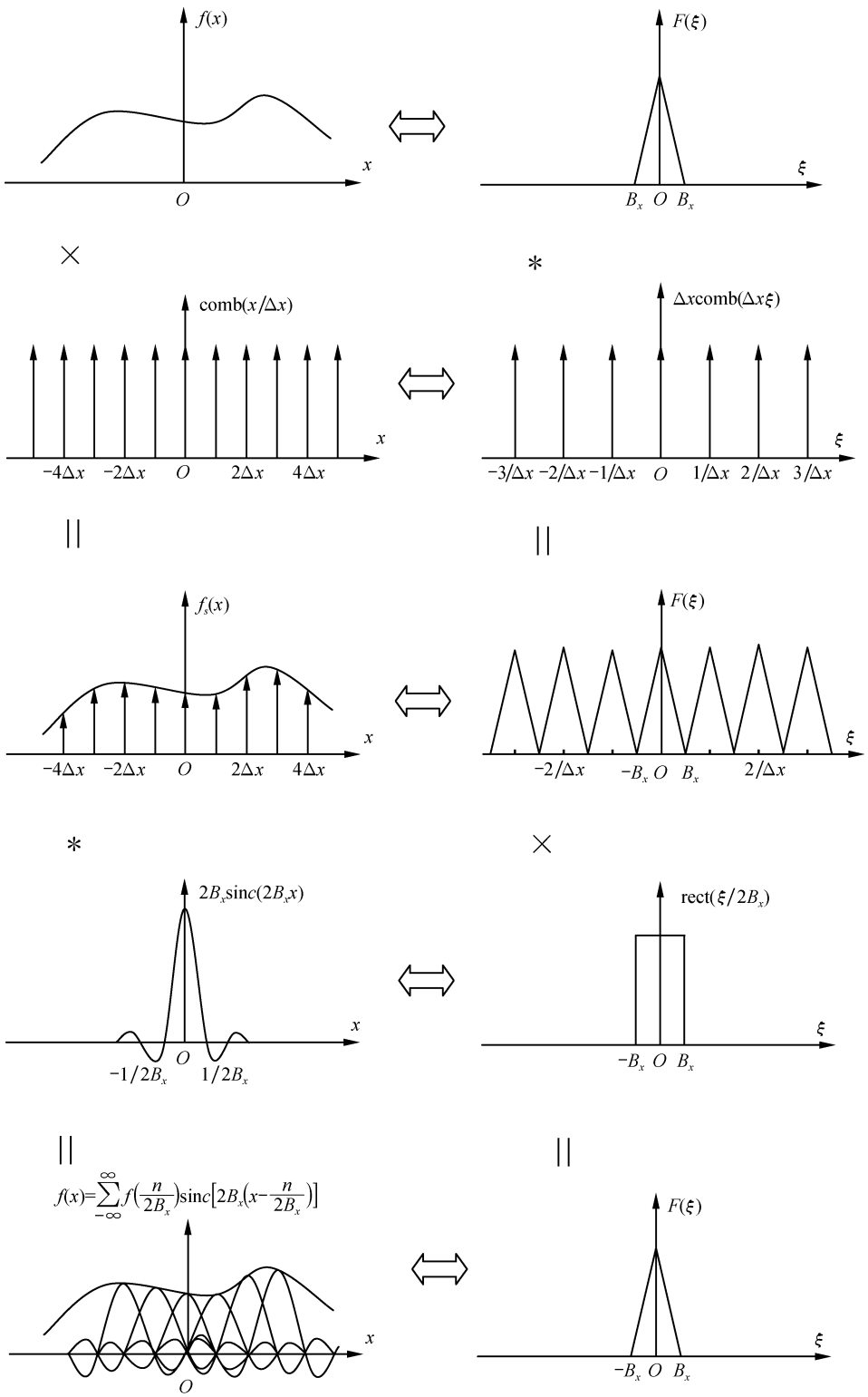


图 6.1.2 推导抽样定理的图解分析

利用梳状函数对连续函数 $f(x,y)$抽样,抽样函数 $f_s(x,y)$由 δ函数的阵列构成.

$$f_s(x,y)=\operatorname{comb}\left(\frac{x}{\Delta x}\right)\operatorname{comb}\left(\frac{y}{\Delta y}\right)f(x,y) \tag{6.1.3}$$

式中:Δx 和 Δy 是在 x 和 y 方向上的抽样间距,利用卷积定理,抽样函数的频谱为

$$\begin{aligned}F_s(\xi,\eta)&=F\left\{\operatorname{comb}\left(\frac{x}{\Delta x}\right)\operatorname{comb}\left(\frac{y}{\Delta y}\right)\right\}*F(\xi,\eta)\\&=\Delta x\Delta y\operatorname{comb}(\Delta x\xi)\operatorname{comb}(\Delta y\eta)*F(\xi,\eta)\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(\xi-\frac{n}{\Delta x},\eta-\frac{m}{\Delta y}\right)*F(\xi,\eta)\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}F\left(\xi-\frac{n}{\Delta x},\eta-\frac{m}{\Delta y}\right)\end{aligned} \tag{6.1.4}$$

函数在空间域被抽样,导致函数频谱 $F(\xi,\eta)$在空间频域的周期性重复.空间域抽样间隔是 Δx 和 Δy,空间频域被重复的频谱岛中心的间距为$\frac{1}{\Delta x}$和$\frac{1}{\Delta y}$.假定 $f(x,y)$是有限带宽函数,其频谱在空间频域的一个有限区域上不为零.记 $2B_x$ 和 $2B_y$ 是这个有限区域在 ξ,η方向上的宽度,即满足

$$F\{f(x,y)\}=\begin{cases}F(\xi,\eta), & -B_x\leqslant\xi\leqslant B_x,-B_y\leqslant\eta\leqslant B_y\\0, & \text{其他}\end{cases} \tag{6.1.5}$$

则只要$\frac{1}{\Delta x}\geqslant 2B_x$ 及$\frac{1}{\Delta y}\geqslant 2B_y$,或者抽样间隔

$$\Delta x\leqslant\frac{1}{2B_x},\quad \Delta y\leqslant\frac{1}{2B_y} \tag{6.1.6}$$

$F_s(\xi,\eta)$中的各个频谱岛就不会出现混叠现象,这样就可能用滤波的方法从 $F_s(\xi,\eta)$中分离出原函数的频谱 $F(\xi,\eta)$,再由 $F(\xi,\eta)$恢复原函数.因而,能由抽样值还原原函数的条件是

① $f(x,y)$是限带函数,带宽为 $2B_x$ 和 $2B_y$.

② 在 x 和 y 方向抽样点最大允许间隔为$\frac{1}{2B_x}$和$\frac{1}{2B_y}$.

通常$\frac{1}{2B_x}$和$\frac{1}{2B_y}$称为奈魁斯特(Nyquist)间隔.奈魁斯特抽样定理又可表述如下:一个有限带宽的函数,如其频率无 B_x和 B_y以上的频谱分量,则该函数可以由一系列间隔小于$\frac{1}{2B_x}$和$\frac{1}{2B_y}$的抽样值唯一地确定.

2. 函数的复原

将抽样函数作为输入,加到一个低通滤波器上,只要抽样函数的频谱不产生混叠,总可以选择一个适当的滤波函数,使 $F_s(\xi,\eta)$中 $n=0$,$m=0$ 的项无畸变通过,而滤除其他各项,这时滤波器的输出就是复原的原函数,这一过程可由图 6.1.3 所示的框图表示.

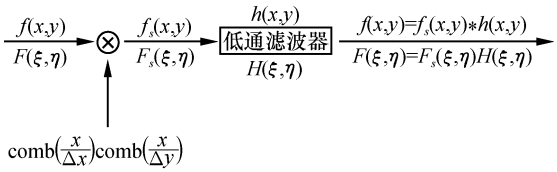


图 6.1.3 由抽样函数还原一个限带函数

如果选择矩形函数

$$H(\xi,\eta)=\operatorname{rect}\left(\frac{\xi}{2B_x}\right)\operatorname{rect}\left(\frac{\eta}{2B_y}\right) \tag{6.1.7}$$

作为滤波函数,将从 $F_s(\xi,\eta)$中分离出 $F(\xi,\eta)$,其表达式为

$$F(\xi,\eta)=F_s(\xi,\eta)\operatorname{rect}\left(\frac{\xi}{2B_x}\right)\operatorname{rect}\left(\frac{\eta}{2B_y}\right) \tag{6.1.8}$$

这一频域的滤波过程,可以等效于空域中的卷积运算,即

$$f_s(x,y)*h(x,y)=f(x,y) \tag{6.1.9}$$

式中

$$\begin{aligned}f_s(x,y)&=\operatorname{comb}\left(\frac{x}{\Delta x}\right)\operatorname{comb}\left(\frac{y}{\Delta y}\right)f(x,y)\\&=\Delta x\Delta y\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(n\Delta x,m\Delta y)\delta(x-n\Delta x,y-m\Delta y)\\h(x,y)&=F\left\{\operatorname{rect}\left(\frac{\xi}{2B_x}\right)\cdot\operatorname{rect}\left(\frac{\eta}{2B_y}\right)\right\}=4B_xB_y\operatorname{sinc}(2B_xx)\operatorname{sinc}(2B_yy)\end{aligned}$$

把它们代入(6.1.9)式,得

$$f(x,y)=4B_xB_y\Delta x\Delta y\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(n\Delta xm\Delta y)\times\operatorname{sinc}[2B_x(x-n\Delta x)]\operatorname{sinc}[2B_y(y-m\Delta y)]$$

若取最大允许的抽样间隔,即 $\Delta x=\frac{1}{2B_x}$,$\Delta y=\frac{1}{2B_y}$,则

$$f(x,y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{n}{2B_x},\frac{m}{2B_y}\right)\operatorname{sinc}\left[2B_x\left(x-\frac{n}{2B_x}\right)\right]\operatorname{sinc}\left[2B_y\left(y-\frac{m}{2B_y}\right)\right] \tag{6.1.10}$$

公式(6.1.10)称为惠特克-香农(Whittaker-Shannon)抽样定理,它表明了只要抽样间隔满足(6.1.6)式所给的条件,则在每一个抽样点上放置一个以抽样值为权重的 sinc 函数作为内插函数,由这些加权 sinc 函数的线性组合可复原原函数.图 6.1.2 的图解分析清楚地表明了在抽样和复原的过程中,在空域和频域所产生的相应变化.

(6.1.8)式和(6.1.10)式告诉我们,由抽样函数复原原函数有两条途径:频域滤波和空域内插.抽样定理回答了前面提出的问题,即一个连续的限带函数可由一个合理抽样间隔的序列代替,而不丢失任何信息,以及由抽样值序列恢复原函数的方法.

严格说来,频带有限的函数在物理上并不存在.一个有限宽度的函数,其频谱范围总是扩展到无穷.但表证大多数物理量的函数,其频谱在频率高到一定程度时总是大大减小,以致舍去高频分量所引人的误差是可以容许的.实际上,信号的检测、传递过程采用的仪器都是有限通频带宽的.所以,很多物理量函数都可视为有限带宽函数,从而可用离散的抽样序列代替.

6.1.3 计算全息的抽样与信息容量

当用计算机分析和处理一个光场的二维分布时,仍然是依据抽样理论,即必须用一个离散点集上的值来描述连续分布的函数.在对图像抽样时,若抽样过密会导致大的计算量和存储量,并给成图带来困难;若抽样过疏将无法保证足够的精度.因此,能否选择合理的抽样间隔,以便做到既不丢失信息,又不会对计算和成图设备提出过分的要求,同时又能由一个光波场的二维抽样值恢复一个连续的二维光场分布.这些都是计算全息技术的重要问题.

在计算全息中必须考虑两个问题:首先,物函数经过抽样输入计算机进行计算和编码时,抽样间隔应满足抽样定理的条件,以避免出现频谱混叠;其次,计算全息图的再现过程应选择合适的空间滤波器,这样才能恢复所需要的波前.

在计算全息中,空间信号(二维图像)的信息容量也是用空间带宽积来描述的.任何光学系统都具有有限大小的孔径光阑,因此光学系统都只有有限大小的通频带,超过极限频率的衍射波将被孔径光阑挡住,不能参与成像,原则上说光学系统是一个低通滤波器.我们希望光学系统的通带有足够的宽度,以容纳尽可能多的信息,获得较好的成像质量,从信息传递的角度讲,通频带宽度是越宽越好.

此外,通过一个光学系统一般来说我们只参看到外部世界的一部分,若物体相当大,则不可能看到它的全貌.例如:通过显微镜只能看到大规模集成电路的一部分;通过望远镜也许我们只能看到军舰的一部分.这是由于目视光学仪器中有一个视场光阑,视场越大,能够观察到的物体空间就越大,进入光学系统的信息量也就越大.

光学图像在光学仪器中的传递受到两方面的限制:一是孔径光阑挡掉了超过截止频率的高频信息;二是视场光阑限制了视场以外的物空间.由此可以得到通过光学信道的信息量公式

$$\text{信息量} = \text{频带宽度} \times \text{空间宽度}$$

等式右边称为空间带宽积,用 SW 表示.空间带宽积是空间信号 $f(x,y)$ 在空间域和频谱域中所占的空间量度,其一般表达式为

$$SW = \iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y \iint \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{6.1.11}$$

空间带宽积是通过光学信道信息量的量度.SW 越大,标志着通过光学系统我们能获得更多的信息.大孔径、大视场的高质量光学系统正是光学工作者追求的目标.

如果图像在空域和频域中所占据的面积都是矩形,其各边长为 Δx,Δy,$\Delta\xi$,$\Delta\eta$,则有

$$SW = \Delta x \Delta y \Delta\xi \Delta\eta$$

或

$$SW = \Delta x \Delta y 2B_x 2B_y \tag{6.1.12}$$

空间带宽积具有传递不变的特性,当图像发生空间位移、缩放、受到调制或变换等操作时,为了不丢失信息,应使空间带宽积保持不变.空间带宽积还确定了图像上可分辨的像元数,因此应用空间带宽积的概念,可以很方便地确定制作计算全息图时所需要的抽样点总数.例如图像的空间尺寸是 40mm×40mm,最高空间频率 $B_x = 10\text{mm}^{-1}$,$B_y = 10\text{mm}^{-1}$,则该图像的空间带宽积为 $SW = 40\times40\times20\times20 = 800^2$,对这样的图像制作计算全息图时,其抽样点总数也是 800^2.

在用普通的方法(微型计算机和绘图仪)制作计算全息图时,能够达到的空间带宽积是很有限的,例如在初期,常常取 SW 为 $64\times64=4096$ 或 $128\times128=16384$. 对一般的图像,这个数值比按抽样定理规定的抽样点数少很多,这主要是由于受到计算机存储量、运算速度及绘图仪分辨率的限制,从而不同程度地引入了混叠误差.只有采用高速、大容量计算机和电子束、离子束、激光扫描器等高分辨成图设备,才有可能制出高质量的计算全息图.

6.1.4 时域信号和空域信号的调制与解调

从光学全息的基本原理我们已经知道,由于记录介质只能记录光场强度分布,对波前(复振

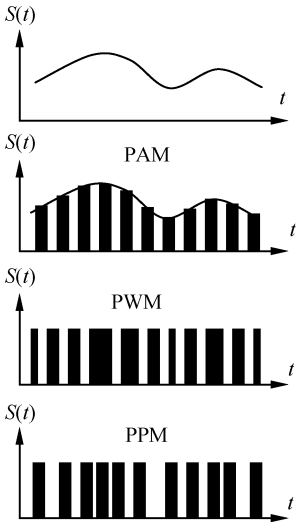


图 6.1.4　三种脉冲调制波形

幅分布)的记录必须通过与参考光干涉形成干涉花样(强度分布)才有可能.再现过程中,通过照明光照射全息图产生的衍射效应,又将干涉花样(强度分布)还原成所需要的波前(复振幅分布).这种对光场分布信号的处理方法,类似于通信理论中对时域信号的处理.例如,信号的远距离传送,在发送端将连续时间信号 $S(t)$变成脉冲序列,在接收端将脉冲序列还原成连续时间信号,前一过程称为调制(编码),后一过程称为解调(解码),由此可见,通信理论中的调制技术完全可以移植到光学中来,通信中对时间信号波形(电压或电流波形)进行调制,类似于光学中对空间信号波形(光波复振幅或强度的空间分布)进行调制,两者并无本质上的差别.计算全息中各种编码方法正是借鉴了通信中的相应的编码技术.

图 6.1.4 分别表示通信系统中的三种脉冲调制方式:脉冲幅度调制(PAM),脉冲宽度调制(PWM),脉冲位置调制(PPM).后两种调制方式使信号二值化,具有很强的抗干扰和抗噪声的能力.二元计算全息图就是空间信号脉冲宽度调制和脉冲位置调制的结果.图 6.1.5 画出了二元全息图上的抽样单元,每个单元中有一矩形开孔,其透过率为 1,未开孔部分的透过度率为 0,用开孔面积表示对应抽样点的物波幅值,用开孔中心偏离单元中心的距离表示抽样点物波的相位.因为光场分布一般是复值函数表示,所以对振幅和相位分别采用了空间脉冲宽度调制和空间脉冲位置调制两种方式.

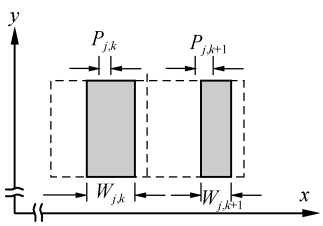


图 6.1.5　二元全息图上的脉冲面积调制和脉冲位置调制

6.1.5　计算全息的分类

1. 第一种分类法

计算全息的第一种分类方法与普通光学全息类似,可根据物体(指物体的坐标位置)和记录平面(指计算全息平面的坐标位置)的相对位置不同,分为计算傅里叶变换全息、计算像全息和计算菲涅耳全息.

(1) 计算傅里叶变换全息

被记录的复数波面是物波函数的傅里叶变换.在光学傅里叶变换全息中,由变换透镜实时地完成物波函数的傅里叶变换,而在这里是由计算机借助快速傅里叶变换算法来完成的.计算傅里叶变换全息直接再现的是物波的傅里叶谱,必须通过变换透镜进行一次逆变换才能再现物波本身.

(2) 计算像全息

被记录的复数波面是物波函数本身,或者是物波的像场分布.制作计算像全息,只需要物波函数的复振幅分布编码成全息图的透过率变化.

(3) 计算菲涅耳全息

被记录的复数波面是物体发出的菲涅耳衍射波.根据物波函数计算在某一特定距离平面上(全息图平面上)的菲涅耳衍射波的复振幅分布,再将该复振幅分布编码成全息图的透过率变化.

2. 第二种分类法

计算全息的第二种分类方法是根据全息透过率函数的性质,可分为振幅型和相位型两类.在这两类中还可根据透过率变化的特点,进一步分为二元计算全息和灰阶计算全息.振幅型灰阶计算全息图,要求成图设备具有灰阶输出能力,因而对胶片曝光、显影处理要求比较严格.振幅型二元计算全息图的振幅透过率只有两个值 0 或 1,利用普通的成图设备,例如大多数绘图仪就可以绘制,对照相底片的非线性效应不敏感,具有很强的抗干扰能力,这种全息图的应用十分广泛.相位型计算全息图不衰减光的能量,衍射效率一般都很高,特别是闪烁计算全息图,最大衍射效率可达 100%.但相位型全息图制作工艺比较复杂.

3. 第三种分类法

计算全息的第三种分类方法是根据全息图制作时所采用的编码技术,也就是待记录的光波复振幅分布到全息图透过率函数的转换方式,大致可分为迂回相位型计算全息图、修正型离轴参考光计算全息、相息图和计算全息干涉图等.

上述计算全息分类方法是从三个不同角度考虑的,例如制作一张傅里叶变换全息图,既可采用迂回相位编码方法,也可以采用修正型离轴参考光编码方法;而使用迂回相位编码方法,既可以制作计算傅里叶变换全息,又可以制作计算像全息.因此三种分类方法既有区别,又通过一个具体的计算全息图的制作过程而相互联系.

6.2 计算全息的编码方法

6.2.1 计算全息的编码

“编码”在通信中的意义,是指把输入信息变换为信道上传送的信号的过程.一般来说,把从信息变到信道信号的整个变换都叫做广义的编码.在计算全息中输入信息是待记录的光波复振幅,而中间的传递介质是全息图,其信息特征是全息图上透过率的变化,因此将二维光场复振幅分布变换为全息图的二维透过率函数分布的过程,称为计算全息的编码.

由于成图设备的输出大多只能是实值非负函数,因此编码问题归结为将二维离散的复值函数变换为二维离散的实值函数的问题.而且,这种转换能够在再现阶段完成其逆转换,从二维离散的实值函数恢复二维复值函数.

编码过程可以用数学公式表示为

$$h_i(x,y) = C_i[\boldsymbol{f}(x,y)] \tag{6.2.1}$$

式中:$h_i(x,y)$是计算全息图的透过函数,它是一个实值非负函数;$\boldsymbol{f}(x,y)$是待记录的光波复振幅分布;C_i 可看成编码算符,表示不同的编码技术.如果 $\boldsymbol{f}(x,y)$是像场分布或物光波本身,则这种全息图称为计算像全息;如果 $\boldsymbol{f}(x,y)$是物光波的傅里叶变换,这种全息图就称为计算傅里叶变换全息图.

将复值函数变换为实值非负函数的编码方法可以归纳为两大类.第一种方法是把一个复值函数表示为两个实值非负函数,例如用振幅和相位两个实参数表示一个复数,分别对振幅和相位编码.第二种方法是依照光学全息的办法,如加入离轴参考光波.通过光波和参考光波的干涉产生干涉条纹的强度分布,成为实值非负函数,因此每个样点都是实的非负值,可以直接用实参数

来表示 .由于没有相位编码问题,看起来比第一种方法简便 .但是,参考光波的加入增加了空间带宽积,因此全息图上的抽样点数必须增加 .

6.2.2 迂回相位编码方法

1. 罗曼型

对光波的振幅进行编码比较容易,它可以通过控制全息图上小单元的透过率或开孔面积来实现 .对于光波的相位编码比较困难,虽然原则上可以使光波通过一个具有二维分布的相位板,但这在技术上十分困难 .罗曼根据不规则光栅的衍射效应,成功地提出了迂回相位编码方法 .

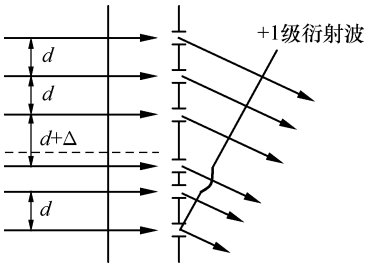


图 6.2.1 不规则光栅的衍射效应

如图 6.2.1 所示,当用平面波垂直照射线光栅时,假定栅距恒定,第一级衍射都是平面波,等相位面是垂直于这个方向的平面,并设栅距为 d,第 K 级的衍射角为 θ_K,则由光栅方程可知,在 θ_K 方向上相邻光线的光程差是 $L_K = d\sin\theta_K = K\lambda$.如果光栅的栅距有误差,例如在某一位置处栅距增大了 Δ,则该处沿 θ_K 方向相邻光线的光程差变为 $L'_K = (d+\Delta)\sin\theta_K$.θ_K 方向的衍射光波在该位置处引入的相应的相位延迟为

$$\phi_K = \frac{2\pi}{\lambda}(L'_K - L_K) = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta\sin\theta_K = 2\pi K\frac{\Delta}{d} \tag{6.2.2}$$

ϕ_K 被罗曼称之为迂回相位,迂回相位的值与栅距的偏移量和衍射级次成正比,而与入射光波波长无关 .迂回相位效应提示我们,通过局部改变光栅栅距的办法,可以在某个衍射方向上得到所需要的相位调制 .在迂回相位二元全息图中,罗曼等人利用这一效应对相位进行编码 .假定全息图平面共有 $M\times N$ 个抽样单元,抽样间距为 δx 和 δy,则在全息图上待记录的光波复振幅的样点值是

$$f_{mn} = A_{mn}\exp[j\phi_{mn}] \tag{6.2.3}$$

式中:$-\frac{M}{2}\leqslant m\leqslant\frac{M}{2}-1$,$-\frac{N}{2}\leqslant n\leqslant\frac{N}{2}-1$;$A_{mn}$ 中归一化振幅,并且 $0\leqslant A_{mn}\leqslant 1$. 在全息图每个抽样单元内放置一个矩形通光孔径,通过改变通光孔径的面积来编码复数波面的振幅,改变通光孔径中心与抽样单元中心的位置来编码相位,这种编码方式如图 6.2.2 所示 .图中矩形孔径的宽度为 $W\delta x$,W 是一个常数,矩形孔径的高度是 $L_{mn}\cdot\delta y$,与归一化振幅成正比 .$P_{mn}\delta x$ 是孔径中心与单元中心的距离,并与抽样点的相位成正比 .孔径参数与复值函数的关系如下

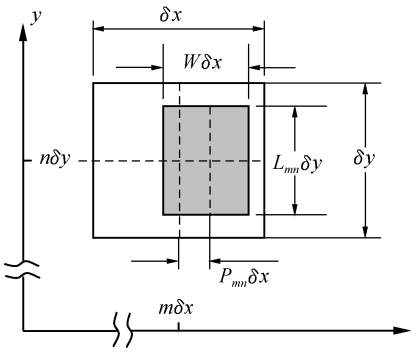


图 6.2.2 罗曼型编码抽样单元图

$$L_{mn} = A_{mn}, \quad P_{mn} = \frac{\varphi_{mn}}{2\pi K} \tag{6.2.4}$$

这种编码方式,在 y 方向采用了脉冲宽度调制,在 x 方向采用了脉冲位置调制 .在确定了每个抽样单元开孔尺寸和位置后,就可以用计算机控制绘图设备产生原图,再经光学缩版得到计算全息图 .由于在迂回相位编码方法中,全息图的透过率只有 0 和 1 两个值,故制作简单,噪声低,抗干扰能力强,对记录材料的非线性效应不敏感,并可多次复制而不失真,因而应用较为广泛 .

这种全息图的再现方法与光学全息图相似,观察范围应限于沿 x 方向的某个特定衍射级次

K,仅在这个衍射方向上,全息图才能再现我们所期望的波前 $\boldsymbol{f}(x,y)$.为了使所期望的波前与其他衍射级次上的波前有效地分离,可以通过频域滤波.对此,我们将在后面的内容中结合几种基本的计算全息图进行说明.

2. 四级迂回相位法

李威汉于1970年提出了一种延迟抽样全息图,这种方法从直观上可以理解为四阶迂回相位编码法.他将全息图的一个单元沿 x 方向分为四等份,各部分的相位分别是 $0,\frac{\pi}{2},\pi(-\pi),\frac{3}{2}\pi\left(-\frac{3}{2}\pi\right)$,与复数平面上实轴和虚轴所表示的四个方向相对应,如图6.2.3(a)所示.全息图上待记录的一个样点的复振幅可以沿图中四个相位方向分解为四个正交分量

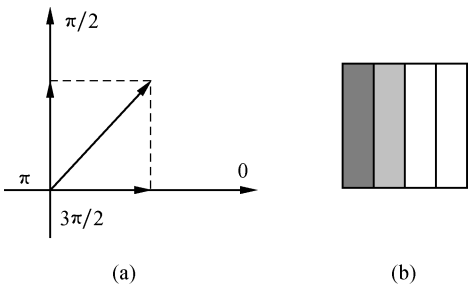


图 6.2.3 四阶迂回相位编码法

$$\boldsymbol{f}(m,n)=f_1(m,n)\boldsymbol{r}^{+}+f_2(m,n)\boldsymbol{j}^{+}+f_3(m,n)\boldsymbol{r}^{-}+f_4(m,n)\boldsymbol{j}^{-} \tag{6.2.5}$$

式中:$\boldsymbol{r}^{+},\boldsymbol{r}^{-},\boldsymbol{j}^{+},\boldsymbol{j}^{-}$ 是复平面上的四个基矢量,即

$$\boldsymbol{r}^{+}=\exp(\mathrm{j}0),\quad \boldsymbol{j}^{+}=\exp\left(\mathrm{j}\frac{\pi}{2}\right),\quad \boldsymbol{r}^{-}=\exp(\mathrm{j}\pi),\quad \boldsymbol{j}^{-}=\exp\left(\mathrm{j}\frac{3}{2}\pi\right)$$

f_1,f_2,f_3,f_4 是实的非负数.对于一个样点,$f_1\sim f_4$ 这四个分量中只有两个分量为非零值,因此要描述一个样点的复振幅,只需要在两个子单元中用开孔大小或灰度等级来表示就行了,图6.2.3(b)是用灰度等级表示的情况.

3. 三阶迂回相位法

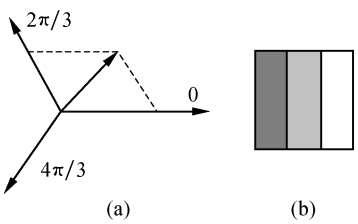


图 6.2.4 三阶迂回相位编码法

由于在复平面上用三个基矢就可以表征平面上任一复矢量,因此,全息图上的一个单元可以为三个子单元,分别表示复平面上相位差为 $\frac{2}{3}\pi$ 的三个基矢.这样一来,就可以在三个子单元中用开孔面积或灰度等级来表示振幅分量的大小.这种方法是伯克哈特(Burckhardt)提出的,图6.2.4是这种方法的示意图.

6.2.3 修正离轴参考光的编码方法

迂回相位编码方法是用抽样单元矩形开孔的两个结构参数,分别编码样点处光波复振幅的振幅和相位.如果模仿光学离轴全息的方法,在计算机中实现光波复振幅分布与一虚拟的离轴参考光叠加,使全息图平面上待记录的复振幅分布转换成强度分布,就避免了相位编码问题.这时,只需要在全息图单元上用开孔面积或灰度变化来编码这个实的非负函数,即可完成编码.

设待记录的物光波复振幅为 $\boldsymbol{f}(x,y)$,离轴的平面参考光波为 $\boldsymbol{R}(x,y)$,即

$$\boldsymbol{f}(x,y)=A(x,y)\exp[\mathrm{j}\phi(x,y)]$$
$$\boldsymbol{R}(x,y)=R(x,y)\exp[\mathrm{j}2\pi\alpha x]$$

在线性记录的条件下,并忽略一些不重要的常数因子,光学离轴全息的透过率函数为

$$h(x,y)=|\boldsymbol{f}(x,y)+\boldsymbol{R}(x,y)|^2$$
$$=R^2+A^2(x,y)+2RA(x,y)\cos[2\pi\alpha x-\phi(x,y)] \tag{6.2.6}$$

在透过率函数所包含的三项中,第三项通过对余弦型条纹的振幅和相位调制,记录了物波的全部信息.第一、二项是这种光学全息方法不可避免地伴生的,除了其中均匀的偏置分量使 $h(x,y)$ 为实的非负函数的目的外,它们只是占用了信息通道,而从物波信息传递的角度来说,完全是多余的.从光学全息形成的过程来看,第一、二项是不可避免地伴生的,但是计算机制作全息图的灵活性,使人们在做计算全息时,可以人为地将它们去掉而重新构造全息函数,即

$$h(x,y)=0.5\{1+A(x,y)\cos[2\pi\alpha x-\phi(x,y)]\} \tag{6.2.7}$$

式中:$A(x,y)$是归一化振幅.从频域更容易理解光学离轴全息函数(6.2.6)式和修正型离轴全息函数(6.2.7)式的差别.图 6.2.5(a)是物波的空间频谱范围,带宽为 $2B_x$ 和 $2B_y$.图 6.2.5(b)是光学离轴全息图的空间频谱,图中,中心为 $\xi=\pm\alpha$ 的两个矩形代表物波的频率成分;中间的圆点表示直流项 R^2 的频谱,即 δ 函数;中间的大矩形是 $A^2(x,y)$的自相关频率成分.为了避免这些分量在频域中的重叠,要求载频 $\alpha\geqslant 3B_x$.设想直接对(6.2.6)式所表示的全息函数抽样制作计算全息图,则根据抽样定理,其抽样间隔必须为 $\delta x\leqslant\frac{1}{8B_x}$,$\delta_y\leqslant\frac{1}{4B_y}$.这些计算全息图的空间频谱如图 6.2.5(c)所示,它是光学离轴全息空间频谱的周期性重复.由于修正后的全息函数已经去掉 $A^2(x,y)$项,故在频率域中自相关项的频率成分已不存在,只有代表物波频率成分的两个矩形和直流项的频率成分 δ 函数.如图 6.2.5(d)所示,为了在频域中避免这些量的重叠,只需要求载频 $\alpha\geqslant B_x$.因此由

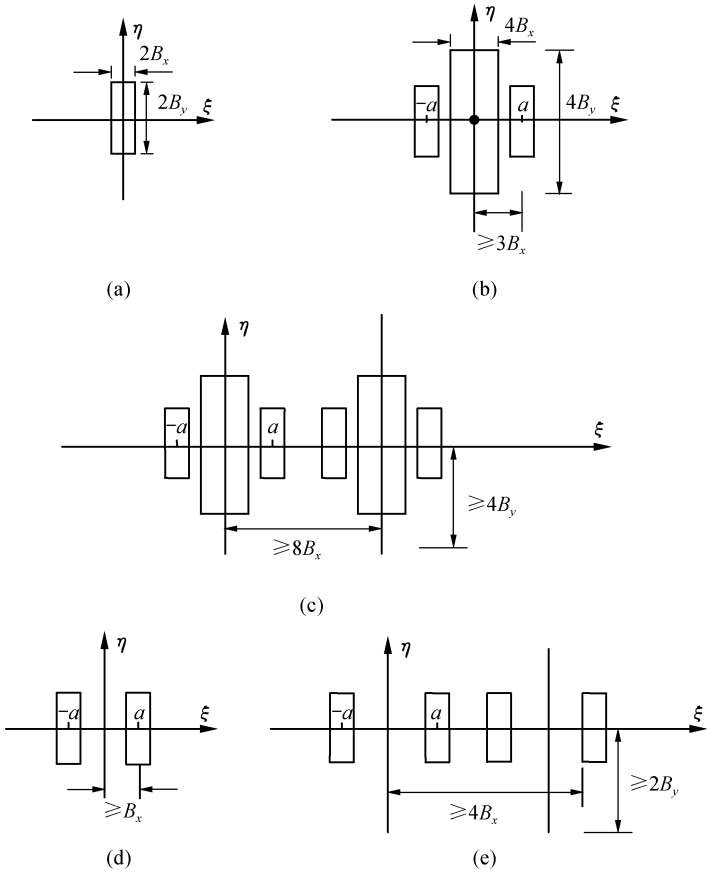


图 6.2.5 空间频率分布

(a) 物体;(b) 光学全息图;(c) 对(b) 抽样后的结果;(d) 修正离轴参考光全息图;(e)对(d)抽样的结果

(6.2.6)式所表示的全息函数抽样制作计算全息图时,根据抽样定理其抽样间隔 $\delta x \leqslant \frac{1}{4B_x}$,$\delta y \leqslant \frac{1}{2B_y}$.于是总的抽样点数就降低为原来的 1/4,这时计算全息图的频谱如图 6.2.5(e)所示.

应该指出,载频在全息图上的表现形式是余弦型条纹的间距,这与光学全息是相同的,但光学离轴全息函数与我们所构造的全息函数的频域结构不同,因此载频也不同.选取载频的目的是保证全息函数在频域中各结构分量不混叠.对全息函数进行抽样是制作计算全息的要求,抽样间隔必须保证全息函数的整体频谱(包含各个结构分量)不混叠,这两个概念不可混淆.

这种以常量为偏置项的全息图是博奇在 1966 年提出的,称为博奇全息图.由于计算机处理的灵活性,偏置项还可以采取其他形式.加进偏置项的目的是使全息函数变成实值非负函数,每个样点都是实的非负值,因此不存在相位编码问题,比同时对振幅和相位编码的方法简单.但是,由于加进了偏置分量,增加了要记录的全息图的空间带宽积,因而增加了抽样点数.一般来说,物波函数的信息容量越大,抽样点数就越多.对于任何一种编码方法都是不能违背抽样定理的,正如前面所述,避免了对相位的编码,但又以增加抽样点数为代价.

由于每个样点都是实的非负值,因此在制作全息图时,只需要在每个单元中用开孔大小或灰度等级来表示这个实的非负值就行了.

6.2.4 二元脉冲密度编码

二元脉冲密度编码是计算全息的另一种编码方法.与修正离轴参考光的方法相类似,对于要记录的物波函数 $\boldsymbol{f}(x,y)=A(x,y)\exp[\mathrm{j}\phi(x,y)]$,构造一个计算全息函数

$$h(x,y)=0.5\{1+A(x,y)\cos[2\pi\alpha x-\phi(x,y)]\}$$

式中:$A(x,y)$是归一化振幅,$0\leqslant h(x,y)\leqslant 1$. 然后对计算全息函数 $h(x,y)$高密度抽样,在对每一个像素的透过率二值化的同时,将误差向相邻像素扩散.这一过程可用图 6.2.6 加以说明.例如像素 1 的透过率小于 0.5,被二值化为 0,其剩余误差(+)加入第二个像素.由于第二个像素原有透过率加上第一个像素转移的误差之和仍小于阈值 0.5,因此仍被二值化为 0. 积累的误差(+)加上第三个像素,虽然第三个像素原有透过率小于 0.5,但合并前面转移的误差后,其和大于 0.5 因此被二值化为 1,余此类推.图(a)中圆点表示抽样点上的透过率,箭头表示误差是如何传递到相邻像素的.图(b)是二值化的抽样点上的透过率.图 6.2.6 以一维情况为例说明了误差扩散的基本过程.在制作计算全息图时,必须考虑二维图像的情况,图 6.2.7 表明了二维图像二值化后误差扩散和校正的原理.图中,"*"表示已处理过的像素,"·"表示未处理的像素.每一个像素二元化后的误差向它相邻的未处理邻域扩散,扩散区域的尺寸和误差分配系数将影响二元

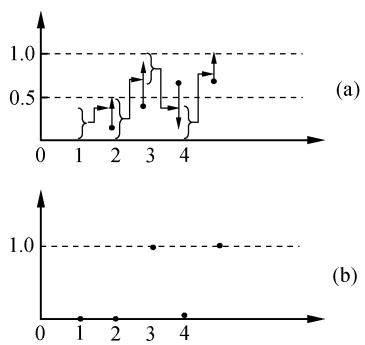


图 6.2.6 二元脉冲密度编码图

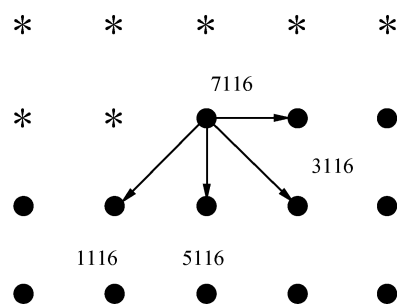


图 6.2.7 二维图像二值化后误差的扩散

化像素的微结构.图中采用的扩散矩阵称为 Flogd-Steinberg 矩阵.在得到二值化后的点阵图像后,就可以用高密度的点阵成图设备输出计算全息图.

6.3 计算傅里叶变换全息

在这种全息图中,被记录的复数波面是物波函数的傅里叶变换.由于这种全息图再现的是物波函数的傅里叶谱,所以要得到物波函数本身,必须通过变换透镜再进行一次逆变换,这与光学傅里叶变换全息图的基本原理是一致的.对复数波面进行编码可以采用上节介绍的两种方法.一种是迂回相位编码方法,直接对抽样点上复数波面的振幅和相位进行编码.另一种是修正离轴参考光编码方法,将全息函数造成实的非负函数,从而只对振幅进行编码.

现以迂回相位编码方法为例,说明计算傅里叶变换全息的制作过程.

6.3.1 抽样

抽样包括对物波函数和对全息图抽样,设物波函数为 $\boldsymbol{f}(x,y)$,其傅里叶频谱为 $\boldsymbol{F}(\xi,\mu)$,其中 x,y 和 ξ,η 分别是连续的空间变量和空间频域变量.假定物波函数在空域和频域都是有限的,空域宽度为 $\Delta x,\Delta y$,频域带宽为 $\Delta\xi,\Delta\eta$,或者 $2B_x,2B_y$.于是有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(x,y) &= a(x,y)\exp[\mathrm{j}\phi(x,y)]\\ \boldsymbol{F}(\xi,\eta) &= A(\xi,\eta)\exp[\mathrm{j}\phi(\xi,\eta)]\end{aligned}$$

并且

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{f}(x,y)=0 \quad &\text{当}\ |x|>\Delta x/2,\quad |y|>\Delta y/2\ \text{时}\\ \boldsymbol{F}(\xi,\eta)=0 \quad &\text{当}\ |\xi|>\Delta\xi/2,\quad |\eta|>\Delta\eta/2\ \text{时}\end{aligned}\right\} \tag{6.3.1}$$

根据抽样定理,对于物波函数,在 x 方向的抽样间隔 $\delta x\leqslant\frac{1}{\Delta\xi}$,在 y 方向的抽样间隔 $\delta y\leqslant\frac{1}{\Delta\eta}$.当取等号的条件时,有 $\delta x=\frac{1}{\Delta\xi},\delta y=\frac{1}{\Delta\eta}$,于是可以计算空域的抽样单元数 JK

$$JK=\frac{\Delta x}{\delta x}\frac{\Delta y}{\delta y}=\Delta x\Delta y\Delta\xi\Delta\eta \tag{6.3.2}$$

在谱平面上的抽样情况与物面类似,在 ξ 方向的抽样间隔 $\delta\xi=\frac{1}{\Delta x}$,在 η 方向的抽样间隔 $\delta\eta=\frac{1}{\Delta y}$,频域的抽样单元数为 MN

$$MN=\frac{\Delta\xi}{\delta\xi}\frac{\Delta\eta}{\delta\eta}=\Delta\xi\Delta\eta\Delta x\Delta y \tag{6.3.3}$$

由此可见,物面抽样单元数和全息图平面上抽样单元数相等,即物空间具有和谱空间同样的空间带宽积.确定了抽样点总数后,物波函数和物谱函数可以表示为如下离散形式

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{f}(j,y) &= a(j,k)\exp[\mathrm{j}\phi(j,k)]\\ \boldsymbol{F}(m,n) &= A(m,n)\exp[\mathrm{j}\phi(m,n)]\end{aligned}\right\}\quad\begin{aligned}-\frac{K}{2}\leqslant k\leqslant\frac{K}{2}-1\\ -\frac{J}{2}\leqslant j\leqslant\frac{J}{2}-1\\ -\frac{M}{2}\leqslant m\leqslant\frac{M}{2}-1\\ -\frac{N}{2}\leqslant n\leqslant\frac{N}{2}-1\end{aligned} \tag{6.3.4}$$

6.3.2 计算离散傅里叶变换

这一过程是采用计算机、并基于快速傅里叶变换算法(FFT)完成的.对于连续函数的傅里叶变换可表示为

$$\boldsymbol{F}\{\xi,\eta\}=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}(x,y)\exp[-\mathrm{j}2\pi(x\xi+y\eta)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6.3.5}$$

而计算机完成傅里叶变换必须采用离散傅里叶变换的形式,二维序列 $\boldsymbol{f}(j,k)$的离散傅里叶变换定义为

$$\boldsymbol{F}(m,n)=\sum_{j=-\frac{J}{2}}^{\frac{J}{2}-1}\sum_{k=-\frac{K}{2}}^{\frac{K}{2}-1}\boldsymbol{f}(j,k)\exp\left[-\mathrm{j}2\pi\left(\frac{mj}{J}+\frac{nk}{K}\right)\right] \tag{6.3.6}$$

直接用(6.3.6)式作二维离散傅里叶变换,涉及极大的计算量,1965 年库列-图基(Cooley-Tukey)提出矩阵分解的新算法,也就是快速傅里叶变换算法,大大缩短了计算时间,才使二维图形的离散傅里叶变换在实际上成为可能.快速傅里叶变换的程序可以在各种计算机语言版本的程序库中查到,使用时直接调用相应的库函数就可以了.

$\boldsymbol{F}(m,n)$通常是复数,记为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(m,n)&=R(m,n)+\mathrm{j}I(m,n)\\ \boldsymbol{F}(m,n)&=\mathrm{A}(m,n)\cdot\exp[\mathrm{j}\phi(m,n)]\end{aligned}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}A(m,n)&=\sqrt{R^2(m,n)+I^2(m,n)}\\ \phi(m,n)&=\arctan\left[\frac{I(m,n)}{R(m,n)}\right]\end{aligned}\right\} \tag{6.3.7}$$

由于光学模板的振幅透过率最大为 1,所以在编码前还应对 $A(m,n)$的值进行规一化,使其最大值为 1.

6.3.3 编码

编码的目的是将离散的复值函数 $\boldsymbol{F}(m,n)$转换成实的非负值函数(全息图透过率函数).以前面介绍的迂回相位编码方法为例,编码过程就是确定全息图每个抽样单元内矩形通光孔径的几何参数,通过改变通光孔径的面积来编码复值函数 $\boldsymbol{F}(m,n)$的振幅,改变孔径中心与单元中心的位置来编码 $\boldsymbol{F}(m,n)$的相位.这些几何参数的确定方法已在 6.2 节中作过详细讨论.

6.3.4 绘制全息图

计算机完成振幅和相位编码的计算后,按计算得到的全息图的几何参数来控制成图设备以输出原图.由于有些成图设备的分辨率有限(例如常规的绘图仪),所以原图是按放大的尺寸绘制的,还需经过光学缩版到合适的尺寸,才可以得到实际可用的计算全息片.图 6.3.1(a)是迂回相位编码的计算傅里叶变换全息图的原图.

6.3.5 再现

计算全息的再现方法与光学全息相似,仅在某个特定的衍射级次上才能再现我们所期望的波前.图 6.3.2 是计算傅里叶变换全息图的再现光路,当用平行光垂直照明全息图时,在透射光

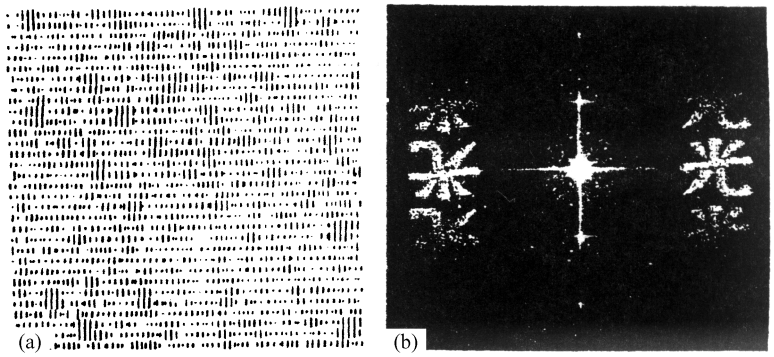


图 6.3.1 迂回相位编码计算傅里叶变换全息图及其再现像

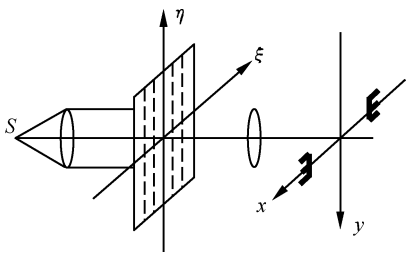


图 6.3.2 计算傅里叶变换全息图的再现

场中沿某一特定衍射方向的分量波将再现物光波的傅里叶变换,而直接透过分量具有平面波前,并且另一侧的衍射分量将再现物谱的共轭光波.于是经透镜 L 进行逆傅里叶变换后,输出平面中心是一个亮点,两边是正、负一级像和高级次的像,如图 6.3.1(b)所示.

尽管范德拉格特提出的全息滤波器的记录方法,在很大程度上克服了制作复滤波器的困难,但是当脉冲响应比较复杂,或者只有脉冲响应的数学表述时,光学全息的方法就显得无能为力了.由于计算傅里叶变换全息图提供了极大的灵活性,使得可以制作各种滤波器,从而能广泛用于各种光学信息处理工作.

6.3.6 几点讨论

1. 模式溢出校正

在对相位编码时,当 $\phi(m,n)>\frac{\pi}{2}$ 时,第 m 单元的矩孔将跨入邻近的 $(m+1)$ 单元,因而有可能与相邻单元矩孔发生重叠,这时重叠部分的振幅本应叠加,但对于这种二元模板就不可能做到,致使全息图再现时失真.解决的办法是将溢出部分移到本单元的另一侧,如图 6.3.3 所示.

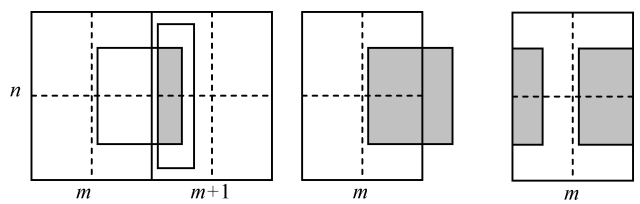


图 6.3.3 模式溢出校正

模式溢出校正依据的原理是光栅衍射理论.由于计算全息图可以看作是类光栅结构,各抽样单元中相应位置具有同样相位值,而 $\phi(m,n)$ 的计算是取主值范围,即对模数 2π 取的余数,所以把溢出至邻近单元的矩形孔移到本单元另一侧,对相位编码没有任何影响.

2. 相位误差的校正

在罗曼早期提出的迂回相位编码方法中,孔径处的相位是用单元中心处的相位来近似的,这

隐含了整个抽样单元内相位值的变化是相等的.如果在抽样单元内,相位 $\phi(\xi,\eta)$的变化很缓慢,则这个近似是大致成立的,但实际上单元内的相位总会有变化,因此早期的编码方法引入相位误差.校正的办法是孔径位移处的实际相位来确定孔径的位置,也就是说,矩形孔中心的偏移量要正比于矩孔中心处的实际相位值.孔径的位置函数为

$$\xi = m\delta\xi + \frac{\delta\xi}{2\pi}\mathrm{mod}_{2\pi}[\phi(\xi,\eta)] \tag{6.3.8}$$

校正前后的孔径位置变化如图 6.3.4 所示.用校正法编码相位值,不仅要求知道单元中心的相位,还要求知道单元内部连续的相位分布,在实际应用时,可以通过插值的办法来确定.

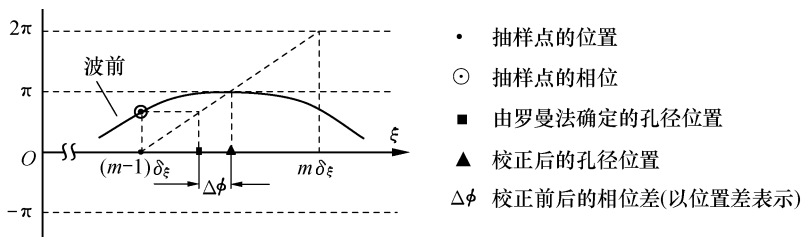


图 6.3.4　波前和孔径位置的变化

3. 降低振幅的动态范围

由离散傅里叶变换算出傅里叶频谱 $\boldsymbol{F}(m,n)$时,其振幅 $A(m,n)$往往具有很大的动态范围,这意味着编码孔径的几何参数 l_{mn}具有很大的变化范围,这给绘制计算全息图带来困难.为了降低动态范围,可以在作离散傅里叶变换前,对物函数的样点值乘以一个随机相位,用它来平滑傅里叶变换谱.这个随机相位因子对于再现像的观察是不重要的,因为在大多数应用中我们感兴趣的只是再现像的强度,而随机相位因子并不影响强度的变化.实质上,这种做法与光学全息中在物体前旋转毛玻璃产生漫射光线的效应相同.

6.4　计算像面全息

计算像面全息与计算傅里叶变换全息不同之处仅在于被记录的复数波面是物波函数本身,或者是物波的像场分布,因此只需要对物波函数进行抽样和编码.这表明,计算像面全息比傅里叶变换全息更为简单.计算像面全息也可以采用多种编码方法,下面以四阶迂回相位编码方法为例,说明计算全息的制作和再现过程.

6.4.1　抽样

设物波(或其像)的复振幅分布为

$$\boldsymbol{f}(x,y) = a(x,y)\exp[\mathrm{j}\phi(x,y)] \tag{6.4.1}$$

进一步假定物波函数在空域和频域都是有限的.因为物波面和全息图面重合,根据抽样定理的要求,可以确定在全息图上的抽样间距.抽样后的物波函数可以表示为下列离散形式

$$\boldsymbol{f}(j,k) = a(j,k)\exp[\mathrm{j}\phi(j,k)],\quad -\frac{J}{2} \leqslant j \leqslant \frac{J}{2}-1,-\frac{K}{2} \leqslant k \leqslant -\frac{K}{2}-1 \tag{6.4.2}$$

6.4.2 编码

对每一个样点的复数值,分解为复平面上实轴和虚轴正负方向上的四个分量,即

$$\boldsymbol{f}(j,k)=f_1(j,k)-f_3(j,k)+\mathrm{j}f_2(j,k)-\mathrm{j}f_4(j,k) \tag{6.4.3}$$

其中

$$f_1(j,k)=\begin{cases}|\boldsymbol{f}(j,k)|\cos[\phi(j,k)], & \cos\phi(j,k)\geqslant 0\\ 0, & \cos\phi(j,k)<0\end{cases}$$

$$f_1(j,k)=\begin{cases}|\boldsymbol{f}(j,k)|\sin[\phi(j,k)], & \sin\phi(j,k)\geqslant 0\\ 0, & \sin\phi(j,k)<0\end{cases}$$

$$f_1(j,k)=\begin{cases}-|\boldsymbol{f}(j,k)|\cos[\phi(j,k)], & \cos\phi(j,k)<0\\ 0, & \cos\phi(j,k)\geqslant 0\end{cases}$$

$$f_1(j,k)=\begin{cases}-|\boldsymbol{f}(j,k)|\sin[\phi(j,k)], & \sin\phi(j,k)<0\\ 0, & \sin\phi(j,k)\geqslant 0\end{cases}$$

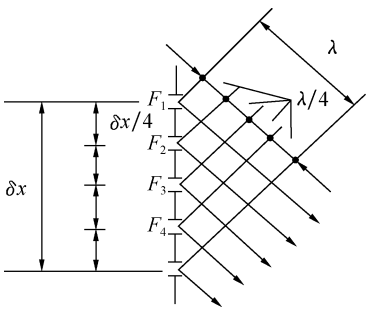


图 6.4.1 四阶迂回相位编码全息图子单元侧视

在上述四个分量中,对于一个确定复数的分解,最多只有两个分量非零.将每个抽样单元分成四个等距子单元,如图 6.4.1 所示.当一束平行光垂直照射全息图观察一级衍射波形时,可以看到从子样点 F_2,F_3,F_4 发出的光线与 F_1 发出的光线之间的光程差分别为 λ/4,λ/2,3λ/4,相应的相位差为 π/2,π,3π/2. 四个分量波组合起来就形成

$$F_1\exp(\mathrm{j}0)+F_2\exp\left(\mathrm{j}\frac{\pi}{2}\right)+F_3\exp(\mathrm{j}\pi)+F_4\exp\left(\mathrm{j}\frac{3}{2}\pi\right)$$

$$=F_1-F_3+\mathrm{j}F_2-\mathrm{j}F_4$$

即合成了样点处的复数波前.

6.4.3 全息图的绘制和再现

每个抽样单元所分解的四个分量,实际上最多只有两个分量为非零值.若作成灰阶计算全息图,则需要用成图设备控制每个子单元的灰度,以扫描出一张灰阶全息图.若作成具有二元透过率的全息图,则需要用绘图设备控制子单元的开孔面积.如果成图设备的空间分辨率不够高,所绘制的原图还需缩版到合适尺寸,才能得到实际可用的计算全息图.

再现光路如图 6.4.2 所示,用平行光垂直照射全息图,在透镜 L_1 的后焦面上产生全息图的频谱.若在该平面上放置空间滤波器,让所需的衍射级次通过,则在像面上得到所需的复数物波

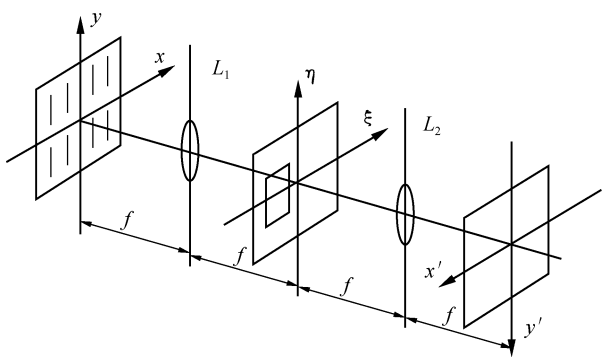


图 6.4.2 像面全息的再现

波面 $\boldsymbol{f}(x,y)$.如果制作全息图时对物波的抽样不满足抽样定理,则再现时谱面上将产生频谱混叠,因而不能准确地恢复原始物波.

6.4.4 四阶迂回相位编码的一个理论解释

在这一节中,以四阶迂回相位编码方法为例介绍了计算像全息.通过编码和再现的过程,我们从延迟抽样的概念出发,对于四阶迂回相位全息给出另一个理论解释.

设 $\boldsymbol{f}(x)$是一个有限带宽的函数,其抽样函数为 $\boldsymbol{f}_s(x)$,其抽样间隔为 $\mathrm{d}x$,则

$$\boldsymbol{f}_s(x)=\mathrm{comb}\left(\frac{x}{\mathrm{d}x}\right)\boldsymbol{f}(x)=\mathrm{d}x\sum_{m=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}(m\mathrm{d}x)\delta(x-m\mathrm{d}x) \tag{6.4.4}$$

如果对原函数抽样时,抽样点对原点有一个小的偏移量 ε,则抽样函数可改写为

$$\boldsymbol{f}_s(x)=\mathrm{d}x\sum_{m}\boldsymbol{f}(m\mathrm{d}x-\varepsilon)\delta(x-m\mathrm{d}x+\varepsilon) \tag{6.4.5}$$

然后将 $\boldsymbol{f}_s(x)$通过一个低通滤波器,就可以从 $\boldsymbol{f}_s(x)$中恢复 $\boldsymbol{f}(x)$.这一程已在前面讨论抽样定理时给予证明.但是,如果 $\boldsymbol{f}_s(x)$通过带通滤波器

$$H(\xi)=\mathrm{rect}\left[\left(\xi-\frac{1}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\frac{1}{\mathrm{d}x}\right] \tag{6.4.6}$$

则该滤波器的脉冲响应为

$$\boldsymbol{h}(x)=\frac{1}{\mathrm{d}x}\frac{\sin(\pi x/\mathrm{d}x)}{\pi x}\exp(\mathrm{j}2\pi x/\mathrm{d}x) \tag{6.4.7}$$

由此可以得到滤波后的输出,它是抽样函数 $\boldsymbol{f}_s(x)$与滤波器脉冲响应 $\boldsymbol{h}(x)$的卷积,即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}_h(x)&=\boldsymbol{f}_s(x)*\boldsymbol{h}(x)\\&=\sum\boldsymbol{f}(m\mathrm{d}x-\varepsilon)\frac{\sin[\pi(x-m\mathrm{d}x+\varepsilon)/\mathrm{d}x]}{\pi(x-m\mathrm{d}x+\varepsilon)}\exp[\mathrm{j}2\pi(x-m\mathrm{d}x+\varepsilon)/\mathrm{d}x]\\&=\exp(\mathrm{j}2\pi x/\mathrm{d}x)\exp(\mathrm{j}2\pi\varepsilon/\mathrm{d}x)\sum f(m\mathrm{d}x-\varepsilon)\frac{\sin[\pi(x-m\mathrm{d}x+\varepsilon)/\mathrm{d}x]}{\pi(x-m\mathrm{d}x+\varepsilon)/\mathrm{d}x}\end{aligned}$$

根据抽样定理,上式中最后一个求和项恰好是抽样定理所描述的原函数 $f(x)$,因此上式可简化为

$$\boldsymbol{f}_h(x)=\exp(\mathrm{j}2\pi x/\mathrm{d}x)\exp(\mathrm{j}2\pi\varepsilon/\mathrm{d}x)\boldsymbol{f}(x) \tag{6.4.8}$$

上式中第一项的线性相位表示再现像的传播方向与光轴之间有一夹角.第二项是由于延迟抽样加上带通滤波所产生的附加相位.因此这种延迟抽样的概念可用来对相位进行编码.

6.5 计算全息干涉图

6.5.1 二元全息函数

光学全息图本质上是物光和参考光干涉的记录,但是一般的光学干涉图的透过率是连续变化的函数,而计算机制作全息图的方法更适合于制作具有二元透过率的干涉条纹图,即计算全息干涉图.我们知道用高反差胶片记录干涉条纹时可以得到二元干涉图,与此相类似,一个非线性硬限幅器模型可以对干涉条纹函数作类似高反差胶片的非线性处理,从而得到二元干涉条纹函数.非线性硬限幅器的工作原理如图 6.5.1 所示,图中所表示的是一种最简单的情况,即输入函数是 $\cos(2\pi x/T)$,偏置函数是 $\cos(\pi q)$,而输出的二元函数是宽度为 qT 的矩形脉冲,它可以展开成傅里叶级数

$$\boldsymbol{h}(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\sin(m\pi q)}{m\pi}\exp\left(\mathrm{j}m\frac{2\pi x}{T}\right) \tag{6.5.1}$$

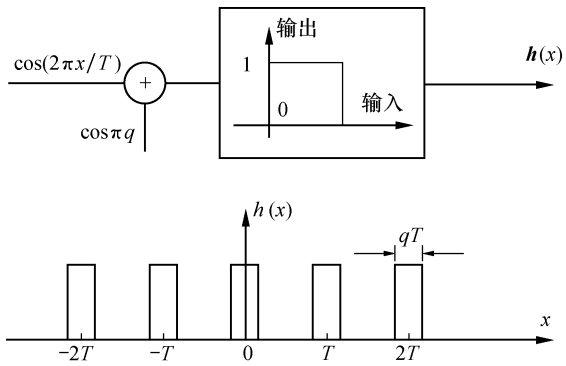


图 6.5.1 非线性硬限幅器

如果限幅器的输入为 $\cos[(2\pi x/T)-\phi(x,y)]$,偏置函数为 $\cos[\pi q(x,y)]$,则可以得到二元函数的普遍形式

$$\boldsymbol{h}(x,y)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\sin[\pi mq(x,y)]}{m\pi}\exp\{\mathrm{j}m[(2\pi x/T)-\phi(x,y)]\} \tag{6.5.2}$$

式中:$q(x,y)=\arcsin[A(x,y)]/\pi$,$A(x,y)$和 $\phi(x,y)$分别为物光波的振幅和相位函数,其输入输出波形如图 6.5.2 所示,输出脉冲的位置受到 $\phi(x,y)$的调制.

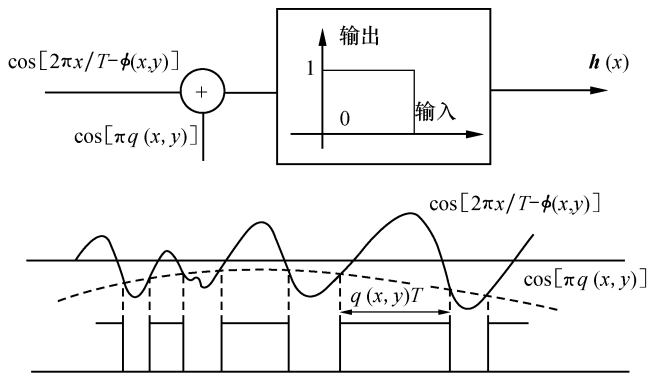


图 6.5.2 硬限幅产生的脉冲宽度工作原理和脉冲位置调制

当用单位振幅的平面波垂直照射全息图时,透过光波就是(6.5.2)式所述的二元全息函数.我们只对 $m=1$(或 -1)感兴趣,若在上式取中 $m=-1$,便可得到

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\frac{\sin[\pi q(x,y)]}{\pi}\exp\{-\mathrm{j}[(2\pi x/T)-\phi(x,y)]\}\\&=\frac{A(x,y)}{\pi}\exp[\mathrm{j}\phi(x,y)]\exp[-\mathrm{j}2\pi x/T]\end{aligned} \tag{6.5.3}$$

上式表明,透射光波的 -1 级衍射项完全再现了物光波 $A(x,y)\exp[\mathrm{j}\phi(x,y)]$,包括其振幅和相位.而线性相位项 $\exp[-\mathrm{j}2\pi x/T]$作为载波给出了再现物光波传播的方向.如果限幅器的输入为 $\cos[2\pi x/T)+\phi(x,y)]$,则透射光波的 $+1$ 级衍射项将再现原来的物光波.

6.5.2 二元全息干涉图的制作

二元全息函数的取值为 0 或 1. 为了利用计算机控制绘图仪制作全息干涉图,只需要确定二元全息函数 $h(x,y)$由 0→1 或由 1→0 的边界点的坐标位置,这样,满足方程

$$\cos[(2\pi x/T)-\phi(x,y)]-\cos[\pi q(x,y)]=0 \tag{6.5.4}$$

的点就构成了二元全息干涉图的画线边界,即

$$(2\pi x/T)-\phi(x,y)=2\pi n\mp\pi q(x,y)\quad n=0,\pm1,\pm2 \tag{6.5.5}$$

其中"－"表示全息函数 $h(x,y)$由 0→1 的前沿点,"＋"表示由 1→0 的后沿点.$h(x,y)$的值为 1 条纹的,其坐标应满足方程

$$\cos[(2\pi x/T)-\phi(x,y)]\geqslant\cos[\pi q(x,y)]$$

即

$$-\frac{q(x,y)}{2}\leqslant\frac{x}{T}-\frac{\phi(x,y)}{2\pi}+n\leqslant\frac{1}{2}q(x,y) \tag{6.5.6}$$

(6.5.5)式或(6.5.6)式就是我们要推导的基本方程式,它确定了计算全息干涉图上条纹的位置和形状.求解基本方程并确定画线边界后,就可以用计算机控制绘图设备画出干涉图.

当要再现的物波函数只有相位变化,即 $A(x,y)$等于常数时,基本方程可以简化为如下形式

$$(2\pi x/T)-\phi(x,y)=2\pi n\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{6.5.7}$$

(6.5.7)式表明,可以用细线条绘制全息图,因此,计算全息干涉图特别适合于再现纯相位的物波.

6.5.3 载波频率的选择

只有选择合理的载频 $1/T$,才能在再现时把一级衍射波和其他高级次衍射波分离.从(6.5.2)式的二元全息函数出发,在 x 方向,不同衍射级次的局部空间频率为

$$\nu_x=m\left[\frac{1}{T}-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\right] \tag{6.5.8}$$

类似地,在 y 方向有

$$\nu_x=-\frac{m}{2\pi}\cdot\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y} \tag{6.5.9}$$

由(6.5.8)式和(6.5.9)式可见,沿 x 和 y 方向空间频率带宽随衍射级次 m 而线性增长,高级次衍射项比低级次衍射项占据更大的带宽.而 y 方向的空间频率并不影响载频的选择.假定在 x 方向的局部空间频率限于 $-B_x$ 和 B_x 之间,则要避免在空间频域第一级衍射波和二级以上的衍射波不相互重叠,载频$\frac{1}{T}$应满足:$\frac{1}{T}+B_x<\frac{2}{T}-2B_x$,即

$$\frac{1}{T}>3B_x \tag{6.5.10}$$

在实际中,常取$\frac{1}{T}=4B_x$.

6.5.4 计算举例

以计算全息干涉图产生球面波为例,说明其制作方法.球面波的相位变化(傍轴近似)可以表示为

$$\phi(x,y)=\frac{k}{2f}(x^2+y^2) \tag{6.5.11}$$

式中:$k=2\pi/\lambda$,f 是球面波的曲率半径.其在 x 和 y 方向上的局部空间频率分别为

$$\begin{aligned}\nu_x&=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}=\frac{x}{\lambda f}\\ \nu_y&=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}=\frac{y}{\lambda f}\end{aligned} \tag{6.5.12}$$

上式表明,局部空间频率是随 x,y 线性变化的,而且与球面波曲率半径成反比,其最大的空间频率位于波面边沿.设球面波直径为 D,则 $\nu_{max}=\frac{D}{2}\frac{1}{\lambda f}$,所以带宽 $2B_x=\frac{D}{\lambda f}$.按前面的分析,选择载波频率 $\frac{1}{T}=4B_x$,即:$\frac{1}{T}=\frac{2D}{\lambda f}$.由此可以确定二元干涉条纹的周期和平均条纹数为

$$T=\frac{\lambda f}{2D} \tag{6.5.13}$$

$$N=\frac{D}{T}=\frac{2D^2}{\lambda f} \tag{6.5.14}$$

假定 $f=1000\text{mm}$,$D=20\text{mm}$,$\lambda=0.6328\times10^{-3}\text{mm}$,可以得到二元干涉图上平均的条纹周期 $T\approx0.016\text{mm}$,条纹总数 $N\approx1264$. 将 T 和 $\phi(x,y)$代入基本方程(6.5.7)式就可以用计算机算出每一条纹的空间位置.并控制绘图仪画出计算全息干涉图.由于干涉条纹很细,通常需要按一定比例放大绘图,然后用光学缩版办法得到可用的全息图.

球面波在光学中可以简单地用透镜或波带板获得,而另一些复杂的波面,如螺旋形波面、非球面等,用光学技术却难以得到.由于计算机仿真干涉图的灵活性很大,使得计算全息干涉图很适合产生用单纯光学方法难以实现的特殊相位型变化的波前.

6.6 相 息 图

相息图是另一种形式的计算全息图,它与一般计算全息图的区别有两点:其一是它只记录物光波的相位,而把物光波的振幅当作常数;其二是记录波面相位信息的方法不同,一般的计算全息将光波信息转化为全息图的透过率变化或干涉图形而记录在胶片上,而相息图却是将光波的相位信息以浮雕形式记录在胶片上.这里必须指出,由于未对振幅信息进行编码处理,所以相息图就不能保存物体的全部信息,因而它与全息图是有区别的.但是,当波场在全息图平面上的振幅分布近于常量(比如菲涅耳变换场,漫射照明场)时,仅作相位编码记录也就可以了.

制作相息图时,物光波的复振幅可写成

$$\boldsymbol{f}(x,y)=\exp[\mathrm{j}\phi(x,y)] \tag{6.6.1}$$

这是一个纯相位函数,制作相息图的方法应确保这种纯相位信息以浮雕形式记录在全息图上.因此,相息图可以看成是一块由计算机制作的复杂透镜,对同轴再现的相息图来说,其表面形状很像光学菲涅耳透镜,而对离轴像的再现来讲,相息图则像一块精密制作的闪耀光栅.

早期制作相息图的方法依赖于对胶片的显影和漂白处理.通过对相位函数抽样,以多级灰阶将相位函数进行编码,并用一种精密阴极射线示波器将相位的变化以光强的形式记录在感光胶片上,然后将曝光后的胶片进行显影和漂白处理,就可以得到相息图.由于相息图是依靠改变胶片的光学厚度来调制物波相位的,所以,在曝光量控制、显影和漂白过程均有严格要求,才能使处理后的胶片对入射光波的相位调制与要求的物波相位匹配.需要强调的是,由于复指数函数的周期性,因而对相位函数编码时,只需考虑 $0\sim2\pi$ 之间的相位变化.图 6.6.1 右端是一个球面波相息图的示意图,其作用与左端的平凸透镜相同.

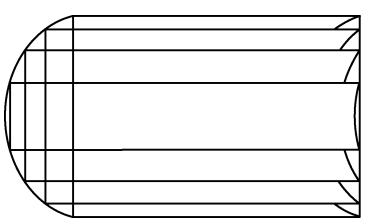


图 6.6.1 球面波的相息图

一些相位型记录材料,如光导热塑材料、重铬酸明胶等,也可用来制作相息图.另外,用计算机控制的电子束、离子束刻蚀技术,可以产生高质量的相息图.

相息图的最大优点是衍射效率特别高,它在原理上可以看成是由计算机控制制作的复杂透镜,照明相息图后仅产生单一的波面,没有共轭像或多余的衍射级次.特别值得指出的是,直到目前为止,相息图还只能由计算机控制产生,而不能直接就用光学方法来实现.

6.7 计算全息的应用

由于计算全息比一般的光学全息有很多独特的优点,例如,它能综合出世间不存在的物体的全息图,可以灵活地控制波面的振幅和相位.并且二元计算全息图可以直接拷贝复制,因此它在许多方面获得广泛的应用.

6.7.1 空间滤波器

大多数的光学信息处理工作,都依赖于在频率平面对波面进行所期望的变换,而计算全息提供了一种灵活地制作各种空间滤波器的方法,计算全息微分滤波器就是其中的一例.设输入图像为 $\boldsymbol{f}(x,y)$,其频谱为 $\boldsymbol{F}(\xi,\eta)$,因为

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}(x,y)}{\partial x} \underset{F^{-1}}{\overset{F}{\longleftrightarrow}} \mathrm{j}2\pi\xi \boldsymbol{F}(\xi,\eta) \tag{6.7.1}$$

如果希望经过滤波后在像面上得到微分的结果,则所需要的滤波器函数为

$$\boldsymbol{H}(\xi,\eta) = \mathrm{j}2\pi\xi \tag{6.7.2}$$

显然,滤波器的透过率与频率平面坐标 ξ 成正比,并且在 $\pm\xi$ 平面的相位相差 π,而 $\mathrm{j}2\pi$ 是与坐标无关的一个常量,满足这种条件的计算全息滤波器如图 6.7.1 所示.这种滤波器只能在一维方向对图像实现微分运算.

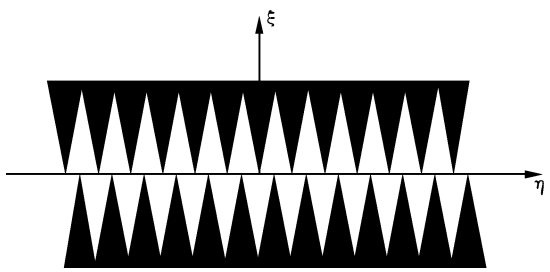


图 6.7.1 计算全息一维微分的滤波器

当要实现图像在二维方向的微分时,相应的计算全息滤波器可以采用如下的滤波函数

$$\boldsymbol{H}(\xi,\eta) = 2\pi(\mathrm{j}\xi - \eta) \tag{6.7.3}$$

可以证明

$$\iint_{-\infty}^{\infty} 2\pi(\mathrm{j}\xi-\eta)\boldsymbol{F}(\xi,\eta)\exp[\mathrm{j}2\pi(\xi x+\eta y)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \mathrm{j}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \tag{6.7.4}$$

而经滤波后,在输出面上得到的强度分布为

$$\begin{aligned} I(x,y) &= \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \mathrm{j}\frac{\partial f(x,y)}{\partial f}\right|^2 \\ &= \left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]^2 \end{aligned} \tag{6.7.5}$$

从而实现了图像的二维微分 .有了滤波函数 $\boldsymbol{H}(\xi,\eta)=2\pi(j\xi-\eta)$后 ,可能选择一种编码方法制作计算全息滤波器 .图 6.7.2 是用罗曼的迂回相位编码方法制作的二维微分滤波器 ,抽样单元为 32×32 ,图 6.7.3 是微分处理后的结果 .

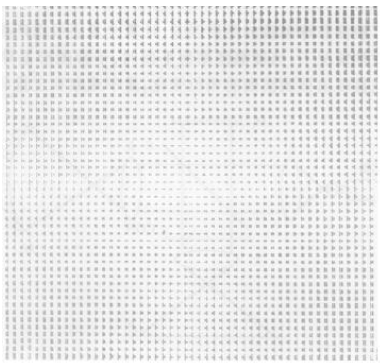


图 6.7.2 微分滤波器计算全息图

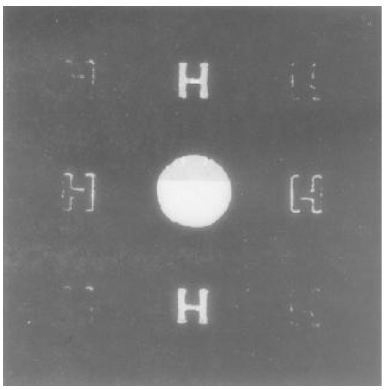


图 6.7.3 处理结果

6.7.2 干涉计量

由于计算全息可以产生特定的波面 ,因此在干涉计量中具有广泛应用的前景 .图 6.7.4 是一个用计算全息图检测非球面的装置示意图 .图 6.7.5 是一个典型的计算全息图 .图 6.7.6 是该计算全息图的频谱分布 .在图 6.7.4 中 ,计算全息图 CGH 插在光路中的适当位置上 ,它所产生的波面可以补偿被测非球面镜 M_1 与透镜 L 产生的标准球面之间的波像差 .空间滤波器 F 选择产生干涉的波前 ,零级通过参考光的波前 ,+1 级通过被测非球面镜返回并经计算全息图衍射的测试波前 ,两者相互干涉形成干涉条纹 .而被测非球面镜的面形偏差将引起干涉条纹弯曲 ,其弯曲量代表了被测非球面镜的面形误差 .实际测试中 ,CGH 与入射波前的对准精度将极大的影响测试结果 ,因此在制作计算全息图时 ,在图形外围同时精密制作了用于对准的多个图形 ,以控制计算全息图安装时的自由度 ,如图 6.7.7 所示 .

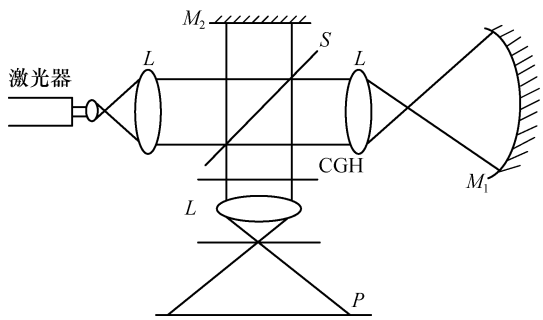


图 6.7.4 计算全息检测非球面

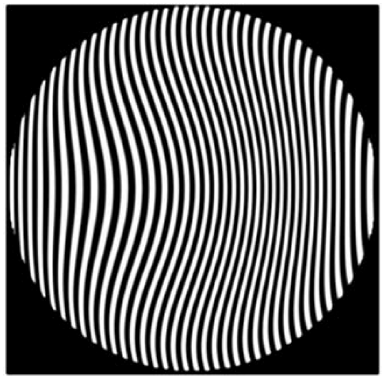


图 6.7.5 一个典型的用于非球面检测的计算全息图

计算全息还可以产生锥形波面或螺旋形波面作为参考波 .在这种情况下 ,当被测波面为平面时 ,干涉图形是等间距圆环或径向辐射状条纹 ,从而直观地显现出被测波面的相位变化 ,易于观察和定量研究 .

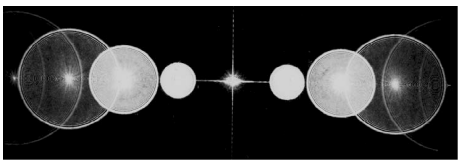


图 6.7.6　计算全息图的频谱图

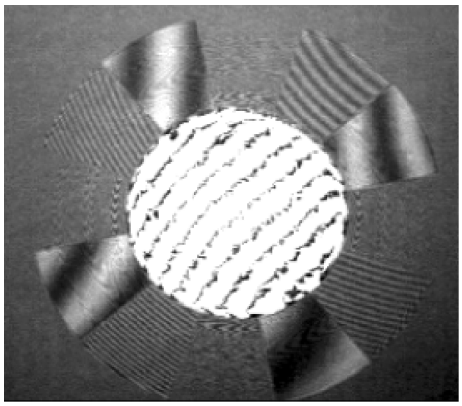


图 6.7.7　对准过程中的计算全息图及干涉图形

6.7.3　再现三维像

由于计算全息可以对实际不存在的物体制成全息图,并再现这种虚构物体的三维像,因此受到极大的重视.例如,可以用这种方法显示数学形式形体的三维形像,研究所设计的建筑物的造型等.从原理上讲,只要物体的数学模型存在,就可以制作计算全息图来显示.但实际上要制作具有一定视角范围的三维物体的计算全息图,要求计算全息图有很高的空间带宽积,这对计算和成图设备的分辨率提出了很高的要求.因此直到如今,应用计算全息图只能显示一些简单物体的三维图像.随着技术的发展,显示各种复杂形体的三维图像的目标最终是会实现的.

6.7.4　计算全息扫描器

使用计算全息图可以控制衍射光的出射方向,因此设计特殊的计算全息图,并使之相对于入射激光束运动,就可以使出射激光束按所需的轨迹进行扫描.计算全息扫描器可以作成筒状或盘状,以便于高速旋转实现快速扫描,图 6.7.8 是用计算全息制作的圆筒光栅扫描器示意图.

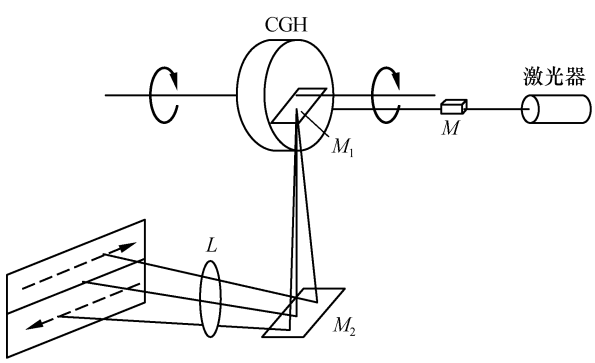


图 6.7.8　图筒型光栅扫描器

以上所举例子只是计算全息应用的一部分.随着计算技术(计算速度和存储容量)和成图技术(例如激光扫描器、电子束、离子束图形发生器)的进一步发展,有可能制作更高空间带宽积的计算全息图,使计算全息在三维显示、光学信息处理、干涉计量、数据存储、光计算等领域获得更多更好的应用.

6.8 计算全息的几种物理解释

当计算全息技术逐渐被人们理解、熟悉之后,人们才发现在其他学科领域,类似技术似曾相识,只是并非所有的人都能得到发现新技术的灵感.事过之后,让我们看看各行专家是怎样解释计算全息的,这也许能给我们一些有益的启示.这几种物理解释是前国际光学学会主席、德国学者罗曼教授介绍的.

1. 光谱学家的解释

光栅是一种重要的色散元件,具有很高的分辨率.与棱镜光谱仪不同,由于光栅制造误差,它会出现假线.1872年克温科发现了光谱图上的假线,后来称为罗兰鬼线,还有一些其他类别的假线,如赖曼鬼线.某些鬼线容易被误认为是真谱线,这在光谱学发展历史上曾闹过一些笑话.这些现象曾使光谱学家疑惑不解,后来瑞利建立了鬼线理论才解释了这些现象,鬼线是不完善光栅所产生的.

在计算全息中,要解决的问题正好与上述相反,这种不完善光栅引起的鬼线叫做像点.因此光谱学家认为,计算全息只不过是产生预期鬼线的光栅.

2. 物理学家的解释

从物理学家的角度看,计算全息实现一种复数波面变换.一张计算全息图就是一个复数波面变换器,可以使一个平面波前变换成其振幅和相位都受到调制的复数波前.采用常规光学元件可以实现简单的波面变换,例如一个透镜可以将平面波变换为球面波,其原理是基于光线在不同介质表面上的折射.在计算全息中,采用迂回相位编码,通过在类光栅结构上的衍射,实现了波面的变换.计算全息技术为复杂的波面变换提供了一种手段.

3. 天线工程师的解释

天线工程师将计算全息图看成是一种天线阵列.一个口径很大的天线往往不容易随意改变接收或发射波阵面的方向.而由小天线构成的天线阵列则比较容易控制波阵面的方向.当其中的一些小天线发射的子波的相位延迟或提前时,则合成天线的波阵面发生变化.计算全息图上的抽样单元,如同天线阵列上的小天线,当其中抽样单元开孔位置发生变化时,也会使子波的相位发生改变,从而引起整个波面的变化.

4. 通讯工程师的解释

通讯工程师是应用通讯中的调制理论来解释计算全息图的.通讯中对时间信号波形进行调制,计算全息中对空间信号(光波复振幅的二维分布)进行调制,从数学上看,两者并无本质的差别.计算全息在很多方面正是借鉴了通讯中的理论和方法.罗曼的迂回相位编码方法就是直接采用了脉冲宽度调制和脉冲位置调制.空间脉冲调制概念,不仅在计算全息图的分析和综合中很重要,而且对图像传输、存储、显示、处理及图像的印刷技术等也很重要.在光学数据处理领域,应用空间脉冲宽度调制和空间脉冲位置调制,在空间模拟信号转换成二元信号,再利用这种二元信号系统和数学计算机、脉冲调制通讯网络等的兼容,将会使得光学、数字计算机和电子学系统更易于实现联机混合处理.

习　题

6.1　一个二维物函数 $f(x,y)$,在空域尺寸为 $10\times10\text{mm}^2$,最高空间频率为 5 线/mm,为了制作一张傅里叶变换全息图:

(1) 确定物面抽样点总数.

(2) 若采用罗曼型迂回相位编码方法,计算全息图上抽样单元总数是多少?

(3) 若采用修正离轴参考光编码方法,计算全息图上抽样单元总数是多少?

(4) 两种编码方法在全息图上抽样单元总数有何不同?原因是什么?

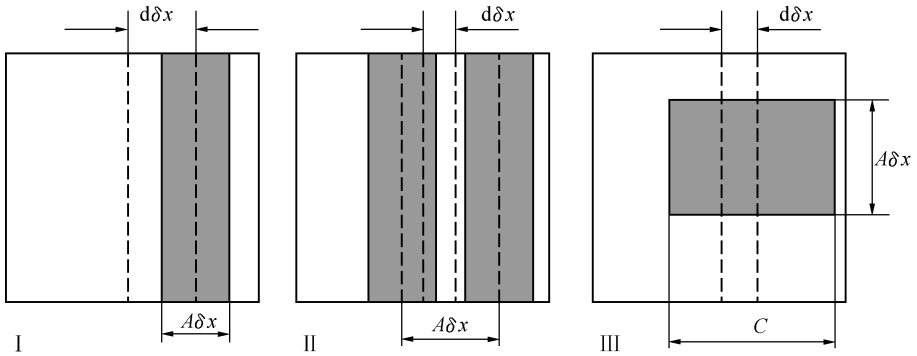
6.2　对比光学离轴全息函数和修正型离轴全息函数,说明如何选择载频和制作计算全息图的抽样频率.

6.3　一种类似博奇型计算全息图的方法,称为黄氏(Huang)法,这种方法在偏置项中加入物函数本身,所构成的全息函数为 $h(x,y)=\frac{1}{2}A(x,y)\{1+\cos[2\pi\alpha x-\phi(x,y)]\}$,

(1) 画出该全息函数的空间频率结构,说明如何选择载频.

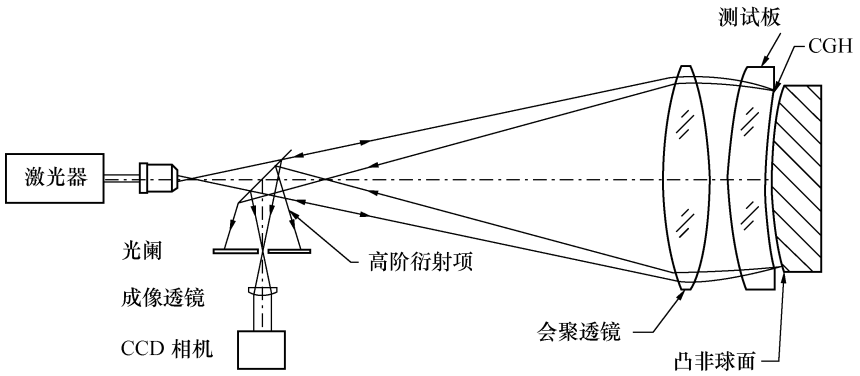
(2) 画出黄氏计算全息图的空间频率结构,说明如何选择抽样频率.

6.4　罗曼迂回相位编码方法有三种衍射孔径形式,如图题 6.4 所示.利用复平面上矢量合成的方法解释,在这三种孔径形式中,是如何对振幅和相位进行编码的.



图题 6.4

6.5　计算全息图也可用于测试大口径凸非球面,图题 6.5 是测试 1.8 米凸非球面镜装置示意图.图中,计算全息图(CGH)制作在测试板的凹球面上,由圆环形光栅组成.测试板的凹球面同时也是参考面,试分析这种计算全息图测试凸非球面的工作原理.



图题 6.5

第 7 章　莫尔现象及其应用

莫尔一词来自法文的“Moiré”,其原来的含义是波动的,或起波纹的.在古代,人们就已经发现当两块薄的丝绸织物叠在一起时,可以看到一种不规则的花纹.后来人们将两级条纹叠加在一起所产生的图形称为莫尔条纹.在日常生活中,两块窗纱叠在一起时可以看到这种莫尔条纹.现在,莫尔现象已广泛用于科学研究和工程技术之中,莫尔条纹作为精密计量手段可用于测角、测长、测振等领域.从 20 世纪 70 年代开始,莫尔条纹又广泛用于三维物体的表面轮廓测量.

本章将介绍莫尔现象的基本规律,讨论莫尔现象与干涉和全息现象之间的关系,并简要介绍莫尔现象在工程技术中的应用.

7.1　莫尔现象的基本规律

7.1.1　莫尔条纹的形成

为简明起见,先考虑两块一维的余弦光栅相叠合的情况.假设两块光栅在 x 方向上的周期分别为 d_1 和 d_2,或空间频率为 $\xi_1=1/d_1$ 和 $\xi_2=1/d_2$,其透射率可记为

$$T_1(x)=\frac{1}{2}[1+\cos(2\pi\xi_1 x)] \tag{7.1.1}$$

$$T_2(x)=\frac{1}{2}[1+\cos(2\pi\xi_2 x)] \tag{7.1.2}$$

当用单位强度的平面光波照射这样两块重叠的光栅时,其透射的强度为

$$\begin{aligned}T(x)&=T_1(x)T_2(x)\\&=\frac{1}{4}[1+\cos(2\pi\xi_1 x)+\cos(2\pi\xi_2 x)+\cos(2\pi\xi_1 x)\cos(2\pi\xi_2 x)]\\&=\frac{1}{4}\left\{1+\cos(2\pi\xi_1 x)+\cos(2\pi\xi_2 x)+\frac{1}{2}\cos[2\pi(\xi_1+\xi_2)x]+\frac{1}{2}\cos[2\pi(\xi_1-\xi_2)x]\right\}\end{aligned} \tag{7.1.3}$$

式中:第一项是均匀的透过率;第二、三项保持了原有的两块光栅的周期结构;第四项是和频项,其空间频率是相叠合的两块光栅空间频率之和;第五项是差频项,其空间频率是相叠合的两块光栅空间频率之差.在大多数应用中,相叠合的两块光栅具有较接近的空间频率,所以在上述各项中,第二、三、四项具有较高的频率,而第五项具有明显较低的空间频率.因此,采用空间频域滤波或空间域卷积的办法,很容易将差频从其他各项中分离出来.而差频项常常携带了我们所感兴趣的信息,这也是人们广泛应用莫尔现象的重要原因之一.

如果用 m_1 和 m_2 表示相叠合的两块光栅线条的序数,并有 $m_1=\xi_1 x$,$m_2=\xi_2 x$,则(7.1.1)~(7.1.3)式可以改写为

$$T_1(x)=\frac{1}{2}[1+\cos(2\pi m_1)] \tag{7.1.4}$$

$$T_2(x)=\frac{1}{2}[1+\cos(2\pi m_2)] \tag{7.1.5}$$

$$T(x)=T_1(x)T_2(x)$$
$$=\frac{1}{4}\left\{1+\cos(2\pi m_1)+\cos(2\pi m_2)+\frac{1}{2}\cos[2\pi(m_1+m_2)]+\frac{1}{2}\cos[2\pi(m_1-m_2)]\right\} \tag{7.1.6}$$

(7.1.6)式中,(m_1+m_2)项所对应的条纹又称等和条纹,(m_1-m_2)项所对应的条纹又称等差条纹.令

$$\left.\begin{aligned}p&=m_1+m_2\\q&=m_1-m_2\end{aligned}\right\} \tag{7.1.7}$$

虽然 m_1 和 m_2 各自变化,但只要 p 或 q 不变,则等和条纹或等差条纹就具有相同的序数.(7.1.7)式称为等和条纹和等差条纹的序数方程.

考虑图 7.1.1 的两块光栅的叠合,这两块光栅的周期相同,即 $d_1=d_2=d$ 或 $\xi_1=\xi_2=\xi$.

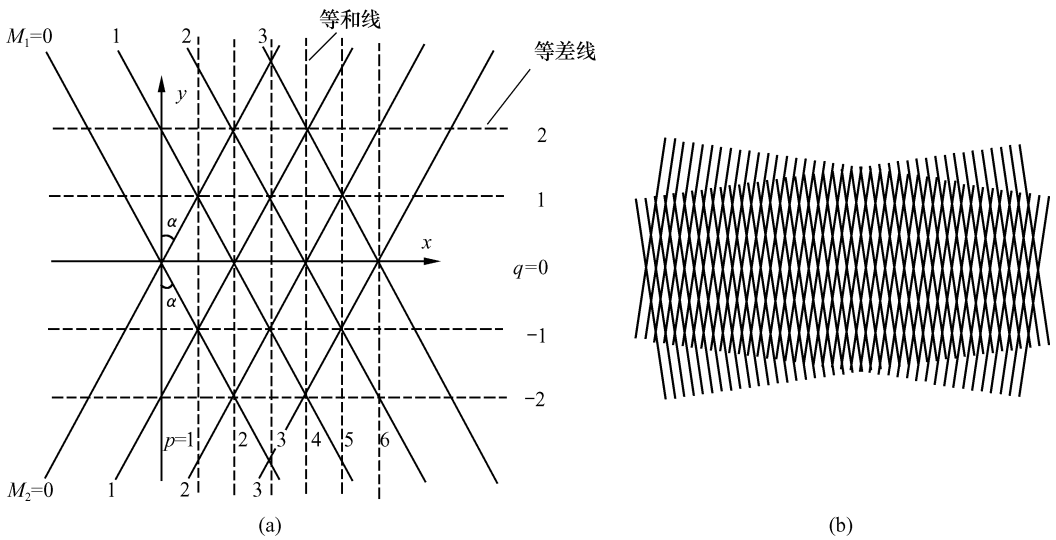


图 7.1.1 两光栅叠合产生的条纹

刻线方向以 y 轴对称放置,当 y 轴的夹角分别为 α 和 $-\alpha$ 时,这样两块光栅的透射率可记为

$$T_1(x,y)=\frac{1}{2}\left[1+\cos 2\pi\left(\frac{x\cos\alpha+y\sin\alpha}{d}\right)\right] \tag{7.1.8}$$

$$T_2(x,y)=\frac{1}{2}\left[1+\cos 2\pi\left(\frac{x\cos\alpha-y\sin\alpha}{d}\right)\right] \tag{7.1.9}$$

两块光栅的刻线方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{x\cos\alpha+y\sin\alpha}{d}&=m_1\\\frac{x\cos\alpha-y\sin\alpha}{d}&=m_2\end{aligned}\right\} \tag{7.1.10}$$

将两块光栅叠合,用单位强度的平面光波连续通过这两块光栅,其透射光场包含 5 项,如同(7.1.6)式所表示的那样.将(7.1.10)式代入序数方程(7.1.7)式,可以得到等和条纹方程

$$\frac{2x\cos\alpha}{d}=p \tag{7.1.11}$$

和等差条纹方程

$$\frac{2y\sin\alpha}{d}=q \tag{7.1.12}$$

(7.1.11)和(7.1.12)式表明,等和条纹是平行于 y 轴的一族直线,等差条纹是平行于 x 轴的一族直线.其周期分别为 $d/2\cos\alpha$ 和 $d/2\sin\alpha$.

对于一般的条纹图形,如果两组初级条纹的方程已知,就很容易求出次级条纹的方程.设初级条纹的方程为

$$\left.\begin{aligned}F_1(x,y,z)&=m_1\\F_2(x,y,z)&=m_2\end{aligned}\right\} \tag{7.1.13}$$

则次级等和条纹与等差条纹的方程为

$$\left.\begin{aligned}F_1(x,y,z)+F_2(x,y,z)&=p\\F_1(x,y,z)-F_2(x,y,z)&=q\end{aligned}\right\} \tag{7.1.14}$$

下面以两组等间距的同心圆为例,说明如何通过初级条纹方程求出次级条纹方程.设两组同心圆间距为 a,中心相距为 $2l$.则初级条纹的方程为

$$\left.\begin{aligned}(x-l)^2+y^2&=(m_1a)^2\\(x+l)^2+y^2&=(m_2a)^2\end{aligned}\right\}$$

代入序数方程,求得等和线方程为

$$\frac{x^2}{\left(\frac{ap}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{ap}{2}\right)^2-l^2}=1 \tag{7.1.15}$$

等差线方程为

$$\frac{x^2}{\left(\frac{ap}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{ap}{2}\right)^2-l^2}=1 \tag{7.1.16}$$

由以上两个方程可知,等和条纹是椭圆,等差条纹是双曲线.图 7.1.2 是以 A 和 B 为圆心的两组等间距同心圆叠加所形成的图形.为了突出等和条纹的椭圆与等差条纹的双曲线,图中的一个象限中(左下部)只画出了各一条条纹,以表明等和条纹是椭圆,等差条纹是双曲线.

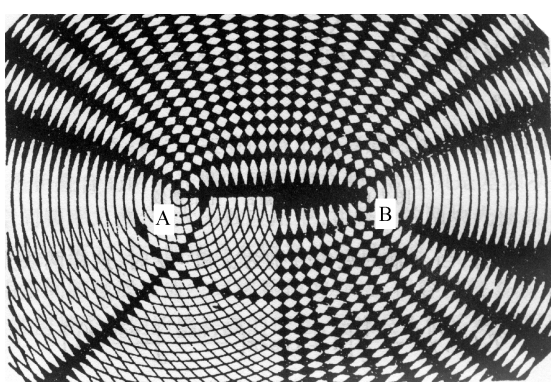


图 7.1.2 两组同心圆叠合所形成的莫尔条纹

7.1.2 莫尔条纹的基本性质

两块初级条纹光栅叠合后,其透射光场的分布已在前文中由(7.1.6)式和(7.1.14)式解析地

给出.在透射光场中最重要的两项是等和条纹和等差条纹,它们具有以下几个特点.

① 如果两块光栅同时移动,并且保持 m_1 和 m_2 的变化速度相同,即单位时间内移过的条纹数相同,则等和条纹将以二倍的速度运动,而等差条纹将保持不动.这里所说的速度是相对于条纹数而言的,而不是相对于空间坐标来说的.假定相对于空间坐标第一块光栅的移动速度为 v_1,第二块光栅的移动速度为 v_2,则条纹的移动速度分别是 v_1/d_1 和 v_2/d_2. 于是等和条纹和等差条纹的序数方程为

$$\left.\begin{aligned} p &= m_1 + \frac{v_1 t}{d_1} + m_2 + \frac{v_2 t}{d_2} \\ q &= m_1 + \frac{v_1 t}{d_1} - m_2 - \frac{v_2 t}{d_2} \end{aligned}\right\} \tag{7.1.17}$$

只有当 $\frac{v_1 t}{d_1} = \frac{v_2 t}{d_2}$,即条纹序数的变化速度相同时,才有

$$\left.\begin{aligned} p &= m_1 + m_2 + 2\frac{v_1 t}{d_1} \\ q &= m_1 - m_2 \end{aligned}\right\} \tag{7.1.18}$$

因此,同时移动两块光栅将使等和线由于对时间的平均作用而平滑,容易将等差线单独分离出来,所以等和线观察不出来,只看到等差线.一般说来,莫尔条纹都是指等差条纹.应该指出的是,在光栅移动过程中,透射光场中的另外二项((7.1.6)式中第二、三项)也将被平滑.这一性质可用于莫尔等高技术中消除高频项在等高线图上形成的假条纹,得到清晰的等高线.

② 如果两个光栅之一移动,则等和条纹和等差条纹均发生移动,而且这种移动是完全同步的.也就是说,当光栅移动一个条纹时,等和条纹和等差纹也各自移动一个条纹.由于光栅的条纹间距与等和或等差条纹的间距是完全不相同的,这一特点可以用于制作计量光栅.

例如图 7.1.1 的两块光栅的叠合,其等差条纹方程如(7.1.12)式所示,即

$$\frac{2y\sin\alpha}{d} = q$$

当两光栅刻线之间的夹角很小时,令 $2\sin\alpha \approx 2\alpha = \theta$,上式简化为

$$\theta y = dq \tag{7.1.19}$$

由于 θ 值很小,莫尔条纹的间距 $\frac{d}{\theta} \gg d$,因此对位移具有明显的放大作用.

7.2 干涉、全息与莫尔现象

7.2.1 干涉条纹的莫尔模拟

如果将一相干平面波分成两束,并使两光束以某一角度相交,这样就可以产生干涉条纹,图 7.2.1 示出了这种现象的莫尔模拟.两光束分别由 A 射向 D 和由 B 射向 C,直的波阵面由间距相等并与光束方向垂直的各直线表示,一条暗线加一条亮线代表一个波长.如果把间距为波长的等相位面看成一种线族,干涉条纹就是这种线族产生的莫尔条纹.因此,干涉现象可以用莫尔条纹来模拟,这时莫尔条纹就等价于干涉条纹.

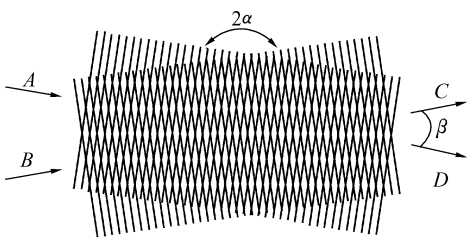


图 7.2.1 干涉条纹的莫尔模拟

如果考虑相距 l 的两个相干点源产生的两组球面波的干涉,其干涉条纹可用以相距 l 的 A,

B 两点为圆心的两组等间距圆产生的莫尔条纹来模拟 .这时 ,等和条纹是椭圆 ,等差条纹是双曲线 .在三维情况下 ,圆变成了球面 ,椭圆变成了椭球面 ,双曲线变成了双曲面 .如果用以 A ,B 为球心的球面来表示从两个相干光源向外移动的光波波阵面 ,则双曲面在空间保持静止 ,然而椭球面将以 Kc 的速度向外运动(c 是光速 ,K 是一个与该点空间位置有关的一个常量).如果用以 A 为球心的同心球面表示向外传播的球面波阵面 ,而用以 B 为球心的同心球面表示向内传播的球面波阵面 ,则椭球面是等差曲面 ,在空间保持静止 ,而双曲面是等和曲面 ,却以 Kc 的速度做横向运动 .最后 ,如果光束向 A ,B 会聚 ,则静止的干涉曲面又恢复成为一组双曲面 .

对于复杂波面的两列相干光波的叠加 ,光波的干涉条纹与两列光波的等相位面构成的线族所形成的莫尔条纹 ,具有同样的规律 .

7.2.2 全息与莫尔

全息图记录了物光波和参考光波的干涉图形 ,因此全息图就可以用全息记录平面上的莫尔条纹来模拟 .

由于全息现象和莫尔现象之间存在某些共同之处 ,所以它们也具有一些相似的规律 .例如 ,在莫尔现象中两个动态的光栅可以产生一组静态的莫尔条纹 ;一个动态的光栅和一个静态的光栅产生动态的莫尔条纹 .而在全息术中 ,两个行波产生一个驻波 ,驻波条纹就是全息图 .一个行波与一个驻波条纹相遇产生另一个行波 ,这就是全息图的再现 .

7.2.3 全息干涉条纹的莫尔模拟

任何两组条纹 ,把它们结合在一起若能产生一组新的条纹 ,则原有的两级条纹就称为初级条纹 ,新的一组条纹就称为二级条纹 .两组二级条纹结合在一起 ,又可能产生另一组新的条纹 ,称为三级条纹 ,等等 .较高级数的条纹表示两较低级数条纹图形之差 .

在全息干涉计量中 ,我们在同一张全息图上记录了两组干涉条纹 ,一组是原始波面与参考光干涉形成的条纹 ,另一组是第二次曝光时所记录的变形波面与参考光干涉形成的条纹 .这两组能再现原始波面和变形波面的条纹是初级条纹 ,而在双曝光全息干涉图中表示位移、变形、振动或折射率变化的粗条纹均是二级条纹 .由于莫尔图形和全息干涉图形都是二级条纹 ,可以有理由认为 ,这两种现象之间存在某些有用的相似性 .我们既可以将全息干涉图形看成再现的原始波面与变形波面干涉的结果 ,也可以理解为是再次曝光所形成的两级全息图形所产生的莫尔现象 .

7.3 莫尔计量术

将两块相近的光栅重叠时 ,能产生莫尔条纹 .由于莫尔条纹的特殊性质 ,莫尔计量方法在长度、角度、振动、变形等测量中得到广泛的应用 ,成为现代光学计量领域中的一种重要方法 .

7.3.1 长度和角度测量

在长度计量中 ,通常采用两块栅距相等 ,栅线夹角为 θ 的光栅重叠 ,其中一块是固定的 ,另一块是可移动的 .当一块光栅移动一个栅距时 ,莫尔条纹移动一个节距 .设两块光栅栅距为 d ,夹角 θ 很小时 ,莫尔条纹的节距

$$d_m = \frac{d}{2\sin(\theta/2)} \approx \frac{d}{\theta} \tag{7.3.1}$$

由于光栅的移动与莫尔条纹的移动是同步的 ,如果测出莫尔条纹移动的数量为 n ,被测长度 l 就

等于光栅的移动量,即

$$l = nd \tag{7.3.2}$$

计量光栅的栅距一般都很小,因此测量精度可以达到很高.在对莫尔条纹计数时,利用电子处理技术中对条纹的细分处理,可以准确到一个条纹的若干分之一,这又进一步提高了测量精度.

计量光栅在长度测量中主要是采用一种名叫光栅读数头的结构,如图 7.3.1 所示.这种读数头与信号处理和数字显示装置一起使用.可以安装在机床或仪器上,作为精密长度计量的一种手段.

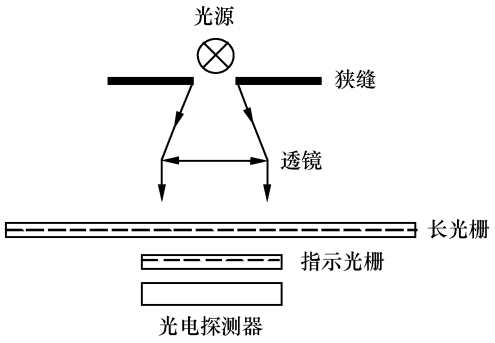


图 7.3.1 光栅读数头原理图

在角度测量中主要采用径向圆盘光栅或切向圆盘光栅.

所谓径向圆盘光栅,其刻线是以圆心为中心的辐射状光栅,刻线数通常为 360 的倍数.相邻两刻线之间的夹角称为栅角 γ.若两个径向光栅相互重叠,并保持一个不大的偏心量时,便形成莫尔条纹.在光栅的不同位置,局部的莫尔条纹的形状和节距并不相同,但是,当其中一个光栅转动一个栅角时,莫尔条纹同步地移动一个节距,因此可用于精密角度测量.

对于切向圆盘光栅,其刻线相切于一个小圆,小圆半径为 r,称为刻线偏心.切向圆盘光栅的栅线是切于一个小圆的等栅角的离心切线.莫尔条纹也产生位移,当光栅转动一个栅角时,莫尔条纹移动一个节距,因此可以用切向圆盘光栅测量角度.

7.3.2 同心圆莫尔及其在二维位移测量中的应用

1. 相同栅距的同心圆光栅莫尔

若将两组圆环光栅(栅线是等距同心圆)进行叠合,两组光栅的栅距相等,记为 d,两个同心圆圆心距为 $2c$,则形成以圆心连线中点为中心对称分布的放射状莫尔条纹.在转动其中一块光栅时,这种放射状莫尔条纹是不动的,但当沿两光栅圆心连线方向移动其中一块光栅时,莫尔条纹数将随 $2c$ 的增大而增多.莫尔条纹总数 k 与环形光栅栅距 d 与两环形光栅中心距 $2c$ 之间存在如下关系

$$2c = \frac{k}{4} d \tag{7.3.3}$$

如果已知光栅栅距和所观察到的莫尔条纹总数,就可以求出中心距 $2c$,从而达到测量偏心量或振动的目的.图 7.3.2 是三种不同偏心量(d,$2d$,$3d$)的同心圆光栅叠合形成的莫尔条纹.

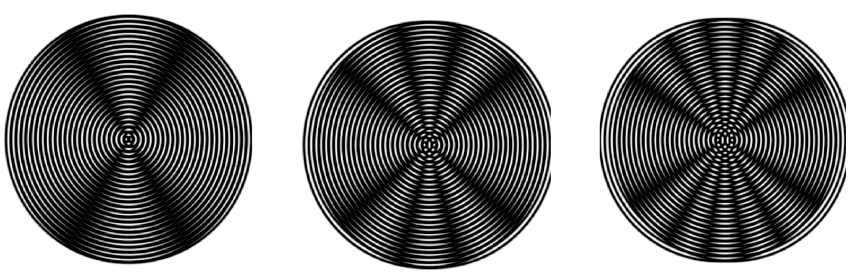


图 7.3.2 两块相同的同心圆光栅叠合的莫尔条纹图

2. 不同栅距的同心圆光栅莫尔

记圈数相差 1 的两同心圆光栅分别为 G_1 和 G_2，光栅 G_1 和 G_2 的最大半径均为 R，在 G_1 上有 $N-1$ 个同心圆，G_2 上有 N 个同心圆．设光栅 G_1 的振幅透过函数为正弦曲线，以极坐标的方式表示如下

$$S_1(r,\theta)=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{2\pi(N-1)}{R}r\right) \tag{7.3.4}$$

类似地，光栅 G_2 的振幅透过系数可以表示成

$$S_2(r_2,\theta)=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{2\pi N}{R}r_2\right) \tag{7.3.5}$$

从同心圆光栅的表达式中可以看出它们在各个 θ 方向上随半径变化的强度分布相同．一般情况下，当两个同心圆圆心不重合时，莫尔条纹发生变化．两同心圆光栅之间的具体参数如图 7.3.3 中所示，r_2 表示光栅 G_2 内各点到其中心的距离，偏心距 ε 表示两同心圆光栅中心点之间的距离，偏心角 ϕ 表示两同心圆中心点连线与水平面之间的夹角，光栅 G_2 中心点的位置可以通过偏心距 ε 和偏心角 ϕ 来确定．

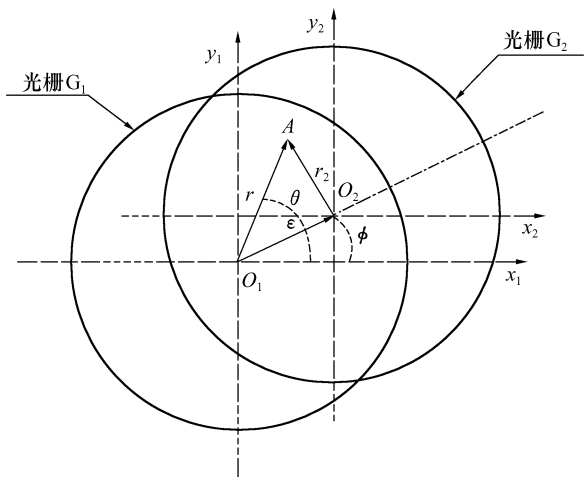


图 7.3.3 两同心圆光栅参数示意图

由余弦定理，我们可以看到 r_2 满足

$$r_2^2=r^2+\varepsilon^2-2\varepsilon r\cos(\theta-\phi) \tag{7.3.6}$$

即

$$r_2^2=[r-\varepsilon\cos(\theta-\phi)]^2+\varepsilon^2\sin^2(\theta-\phi) \tag{7.3.7}$$

通常，我们所要测量的偏心距 ε 非常小，这样在(7.3.7)式中 ε^2 可以被忽略不计．即

$$r_2\approx r-\varepsilon\cos(\theta-\phi) \tag{7.3.8}$$

这样两个圆心不重合的同心圆光栅叠加，用光强为 I_0 的平行光照明，则透过的光强为下式

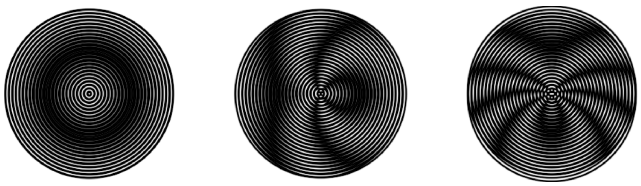
$$I(r,\theta)=I_0S_1S_2 \tag{7.3.9}$$

将(7.3.4)，(7.3.5)和(7.3.8)式代入(7.3.9)式，可以得到

$$\begin{aligned}I(r,\theta)=&\frac{I_0}{4}+\frac{I_0}{4}\cos\left\{\frac{2\pi N}{R}[r-\varepsilon\cos(\theta-\phi)]\right\}+\frac{I_0}{4}\cos\left[\frac{2\pi}{R}(N-1)r\right]\\&+\frac{I_0}{8}\cos\left\{\frac{2\pi}{R}[(2N-1)r-N\varepsilon\cos(\theta-\phi)]\right\}+\frac{I_0}{8}\cos\left\{\frac{2\pi}{R}[r-N\varepsilon\cos(\theta-\phi)]\right\}\end{aligned} \tag{7.3.10}$$

在方程(7.3.10)中,右面的第一项是均匀的透过率;第二项和第三项保持了原有的两块光栅的周期结构;第四项是和频项,其空间频率是相叠合的两光栅空间频率之和;第五项是差频项,其空间频率是相叠合的两块光栅空间频率之差,即莫尔条纹项.

两个半径相同,圈数相差为1的同心圆光栅重叠产生莫尔条纹,几种不同偏心距和偏心角情况下的莫尔条纹图如图7.3.4所示.偏心距ε和偏心角ϕ是影响莫尔条纹形态的特征参数.偏心距ε和偏心角ϕ的微小变化将导致莫尔条纹图形的剧烈变化.正是利用同心圆莫尔条纹对偏心距和偏心角的放大作用,进行二维平面的位移测量.



(a) $\varepsilon=0,\phi=0$ (b) $\varepsilon=R/N,\phi=0$ (c) $\varepsilon=2R/N,\phi=\pi/2$

图7.3.4 不同偏心角和偏心距下的莫尔条纹图

根据(7.3.10)式可以单独提取出差频项,即纯莫尔条纹项,计算机仿真出纯莫尔条纹图如图7.3.5所示.



图7.3.5 不同偏心角和偏心距下的纯莫尔条纹图

7.3.3 用于应力变形测量

在材料试件的表面制出一组栅线,称为“试件栅”,它与试件一起变形,在其上面重叠一块“基准栅”,就可以得到反应试件各点位移的莫尔条纹,从而计算出试件的应力变形.这种方法对模型材料没有光学性能要求,它可以在金属材料、有机玻璃、橡皮、塑料、木材、水泥等实物或模型上贴上有栅线的薄膜片就可以了.因此,莫尔条纹的分析方法是一种非常有效的实验力学研究方法.

图7.3.6给出了一个用莫尔条纹法进行应力分析的实例.图7.3.6(a)是吊钩试件,在试件A-A剖面处贴上50线/mm的试件光栅.在试件加载前,将基准光栅(50线/mm)重叠在试件光栅上,基准栅线与试件栅线之间有一小的夹角θ,则得到空载时的莫尔条纹图,如图7.3.6(b)所示.加载后,试件栅与试件一起变形,而基准栅保持不变(可适当调整基准栅的方向,使莫尔条纹便于计量),得到加载后的莫尔条纹,如图7.3.6(c)所示.由试件受力情况和莫尔条纹图形,就可以计算出应力分布.

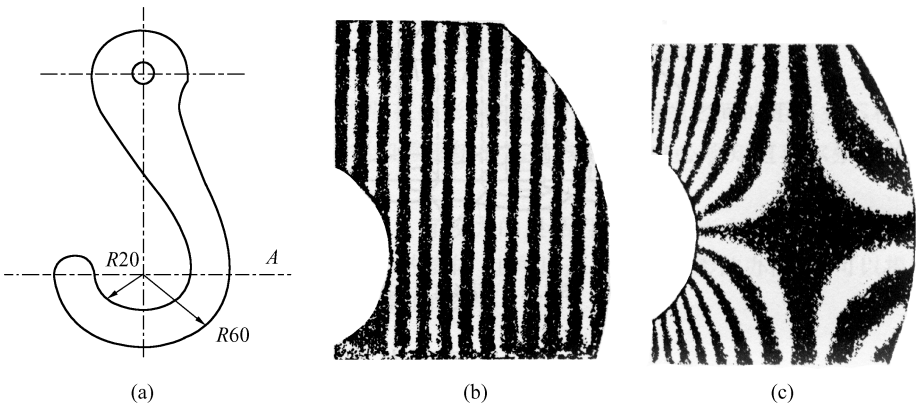


图 7.3.6 吊钩试件及其莫尔条纹图形

利用两束平行激光干涉可以生成每毫米 5000 线的全息光栅,粘贴或刻蚀到物体表面作为试件栅,同样利用两束平行激光照射到物体表面产生参考光栅,这时产生的莫尔条纹可以检测 0.2 微米的位移和变形.近年来在刻栅技术上有了新的进展,采用电子束、离子束刻蚀技术可以使试件栅密度达到每毫米 10000 线,使检测灵敏度进一步提高.

7.3.4 螺旋莫尔及其在光束准直性测量中的应用

1. 双螺旋莫尔条纹检测光束准直性的基本原理

检测光束准直性的实验光路如图 7.3.7 所示,S 为激光光源,CL 为准直透镜,OP 为观察屏.螺旋光栅 SG_2 放置于螺旋光栅 SG_1 的泰伯自成像 SG_1' 处.

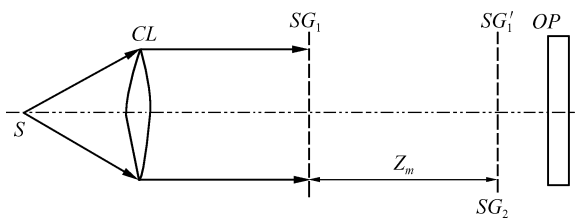


图 7.3.7 准直实验光路

在准直光束照明下,泰伯距离 Z_m 由下式(参见(2.5.18)式)给出

$$Z_m = \frac{2mp^2}{\lambda} \tag{7.3.11}$$

简洁起见,螺旋光栅 SG_1,SG_2 的振幅透过率函数分别写成

$$t_1(r,\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{p_1}r - N\theta\right) \tag{7.3.12}$$

$$t_2(r,\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{p_2}r - N\theta\right) \tag{7.3.13}$$

其中:p_1,p_2 分别为 SG_1,SG_2 的周期,并且为便于描述,我们人为地规定:$p_i>0$,螺旋线逆时针旋转;$p_i<0$,螺旋线顺时针旋转;N 为螺旋线的头数.

光栅 SG_1 的泰伯自成像 SG_1' 的光场可写成

$$t_1'(r,\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{p_1'}r - N\theta\right) \tag{7.3.14}$$

如表 7.3.1 所示,在不同的照明形式下,泰伯效应的泰伯距离和自成像周期不同,通过表中的计算公式,我们可以计算出不同照明形式下的泰伯距离和自成像周期.

表 7.3.1 不同照明形式下的泰伯效应($m=0,\pm1,\cdots$)

照明光波	泰伯距离 Z_m	自成像周期 p'
发散球面波 $R>0$ 汇聚球面波 $R<0$	$\frac{RZ_m}{R+Z_m}=\frac{2mp^2}{\lambda}$	$\left(1+\frac{Z_m}{R}\right)p$
平面波	$Z_m=\frac{2mp^2}{\lambda}$	p

于是,SG_1' 和 SG_2 所产生的莫尔条纹的等效振幅透过率为

$$\begin{aligned}t(r,\theta)&=t_1'(r,\theta)t_2(r,\theta)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos\left(\frac{2\pi}{p_1'}r-N\theta\right)+\frac{1}{4}\cos\left(\frac{2\pi}{p_2}r-N\theta\right)\\&\quad+\frac{1}{8}\cos\left[2\pi\left(\frac{1}{p_1'}+\frac{1}{p_2}\right)r-2N\theta\right]+\frac{1}{8}\cos\left[2\pi\left(\frac{1}{p_1'}-\frac{1}{p_2}\right)r\right]\end{aligned}\tag{7.3.15}$$

由于,$I_m(r,\theta)\propto|t(r,\theta)|^2$,且 $t(r,\theta)\in[0,1]$,所以有

$$\sqrt{I_m(r,\theta)}\propto\cos\left[2\pi\left(\frac{1}{p_1'}+\frac{1}{p_2}\right)r-2N\theta\right]\tag{7.3.16}$$

2. 莫尔条纹的初步分析

考虑到在光束准直性的检测我们总是期望莫尔条纹能实现对准直误差的放大,即微小的准直误差就能引起莫尔条纹的显著变化.因此,SG_1 和 SG_2 选用旋转方向相反且条纹间距相等的螺旋光栅,即 $p_1=-p_2$.

由(7.3.16)式知,当 θ 从 0 到 2π 变化时,共有 $2N$ 个条纹,其条纹方程为

$$2\pi\left(\frac{1}{p_1'}+\frac{1}{p_2}\right)r-2N\theta=2n\pi,\quad n=0,1,\cdots,2N-1\tag{7.3.17}$$

① 当光束准直时,即$\frac{1}{p_1'}+\frac{1}{p_2}=0$时,

$$\theta=-\frac{n}{N}\pi,\quad n=0,1,\cdots,2N-1\tag{7.3.18}$$

莫尔条纹为放射状直条纹.

② 当光束非准直时,

$$\frac{2\pi}{p}r-2N\theta=2n\pi\tag{7.3.19}$$

莫尔条纹为头数为 $2N$,旋转方向由

$$p=\frac{p_2p_1'}{p_2+p_1'}\tag{7.3.20}$$

的符号而定的螺旋状条纹.

进而,我们就以直观的莫尔现象实现了对光束准直性的检测,并可以根据莫尔条纹的旋转方向和旋转程度来调整光源 S 与准直透镜 CL 之间的距离.图 7.3.8 是双螺旋光栅以及它们在光束汇聚、准直和发散情况下形成的莫尔条纹图.提取莫尔条纹的特征参数可以进一步定量计算被测光束的汇聚(发散)角.

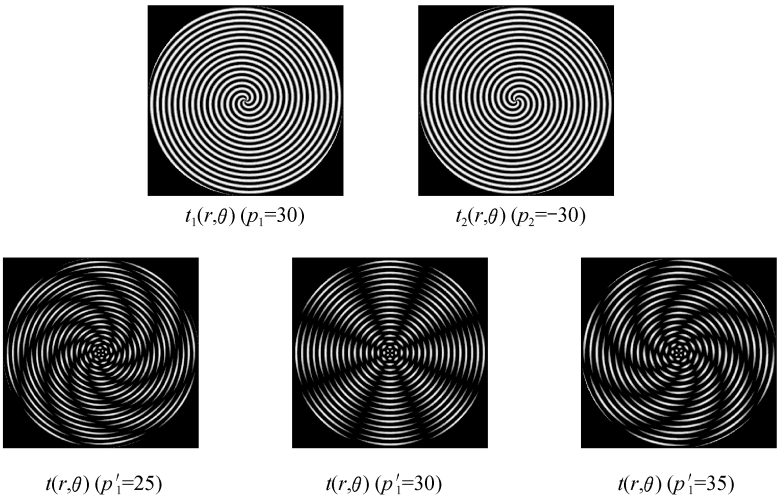


图 7.3.8 双螺旋莫尔条纹的计算机模拟

7.4 莫尔轮廓术

莫尔轮廓术(又称莫尔等高线法)是一种非接触的三维物体面形测量方法 .1970 年,H .Takasaki 首次提出这种三维面形测量方法 .现在,莫尔轮廓术已发展成为一种计量新技术 .莫尔轮廓术的基本原理,是利用一个基准光栅与投影到三维物体表面上并受表面高度调制的变形光栅叠合形成莫尔条纹 .莫尔条纹等高线计量是一种非接触的三维测量,特别适合于医学上的人体检测,以及汽车、造船、制鞋、服装工业等的立体曲面测量 .

7.4.1 阴影莫尔法

将基准光栅放置在物体的上面,用光源照明,在物体表面形成阴影光栅,阴影光栅受到物体表面高度的调制发生变形 .如果从另一方向透过基准光栅观察物体时,基准光栅与变形的阴影光栅重叠形成莫尔条纹 .图 7.4.1 给出了这种方法的原理 .图中 S 是照明点光源,P 是观察系统入瞳中心,基准光栅的周期为 d .透过基准光栅的照射光线用从 S 点发出的实线族表示,透过光栅的观察光线用会聚于 P 点的虚线族表示,两族线在物体表面相交的地方形成亮条纹 .设照明点和观察点相距 l,与基准光栅的距离为 h .根据图 7.4.1,由三角形 A_2BC 与三角形 A_2PS 的相似关系,可以得到

$$h_2 = \frac{2dh}{l-2d} \tag{7.4.1}$$

式中,h_2 是第二条等高线与光栅的距离 .类似地,可求出第 q 条等高线所代表的深度

$$h_q = \frac{qdh}{l-qd} \tag{7.4.2}$$

由等高线的位置就可以知道被测三维表面的形状,这和大地测量中用地形等高线来代表地形起伏的原理一样 .从(7.4.2)式可知,h_q 与 q 之间存在着非线性关系,说明各等高线之间的距离并不相等 .因此,在这种方法的应用中,除了必须知道系统的几何参数外,还必须知道莫尔条纹级次,才能从莫尔条纹图形上计算出物体表面的高度 .

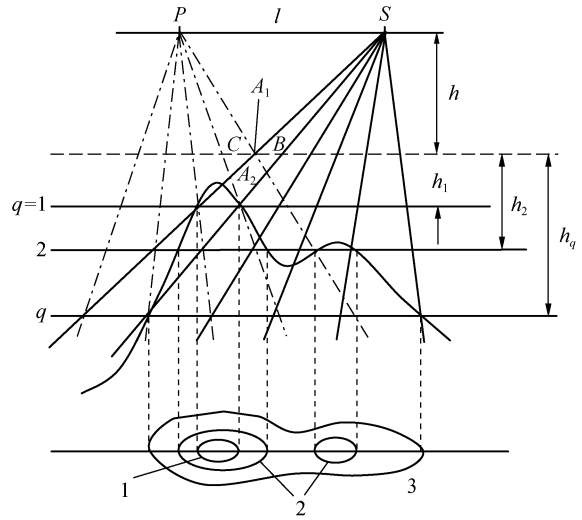


图 7.4.1　阴影莫尔等高原理

阴影莫尔法是一种非常简便的三维面形测量方法,能直接观察到物体表面的等高线分布,具有独特的优点.也应指出的是,这种方法也有一些局限性.被测物体前必须放置基准光栅,这在物体不大时是现实的,当物体很大时,制作大尺寸的基准光栅就比较困难.为了提高测量精度,必须减小栅距,而阴影光栅的形成是基于光线直线传播的假定而忽略了光栅的衍射,栅距越小衍射越大.因此,在使用小栅距光栅时,被测物面必须离光栅很近.这意味着不能同时兼顾测量精度和测量范围(可测深度).

7.4.2　投影莫尔法

对尺寸大、测量精度要求又高的物体,可用投影莫尔法.图 7.4.2 是投影莫尔法的光学系统.从光源 S 出射的光线,经聚光镜 C_1 而照射基准光栅 G_1.投影物镜 L_1 将基准光栅的像投影到物体表面,受物体表面高度调制而形成的变形光栅,经成像物镜 L_2 成像到另一块光栅 G_2 的平面上.一般情况下,L_1 与 L_2 相同,G_1 与 G_2 相同,于是变形光栅像与 G_2 之间形成莫尔等高条纹.可用相机 E 记录下莫尔等高条纹.

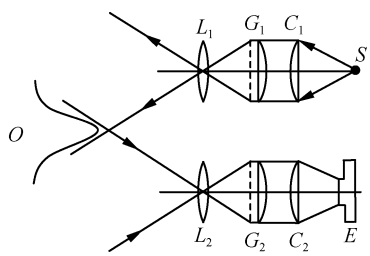


图 7.4.2　投影莫尔的光学系统

在这种情况下,等高线位置的计算与阴影莫尔略有不同.设在 $q=0$ 的平面上光栅像间距为 d',透镜焦距为 f,由物像关系有

$$d' = \frac{d(h-f)}{f} \tag{7.4.3}$$

将 d' 代替(7.4.2)式中的 d,可求出第 q 条等高线所对应的深度

$$h_q = \frac{h(h-f)qd}{fl(h-l)qd} \tag{7.4.4}$$

h_q 与 q 之间仍然保持非线性关系,说明在投影莫尔法中,各等高线之间的距离并不相等.因此,在这种方法的应用中,除了必须知道系统的几何参数外,也必须知道莫尔条纹的级次,才能计算出物体表面的实际高度.

与阴影莫尔法相比较,投影莫尔法具有较大的灵活性.改变投影和成像物镜的放大率,可以

适应较大物体的测量 .对于较小的物体 ,也可以采用缩小投影的办法 ,既可以提高测量灵敏度 ,又可以控制衍射现象对测量的影响 .

7.4.3 扫描莫尔法

在阴影莫尔法和投影莫尔法中 ,单从莫尔等高线上并不能判断表面的凹凸 ,这就增加了计量中的不确定性 .为了使莫尔法用于三维面形的自动测量 ,在投影莫尔法中可以让一块基准光栅 (投影系统中的光栅 G_1 或成像系统的光栅 G_2)沿垂直于栅线方向作微小移动 ,根据莫尔条纹同步移动的方向来确定表面的凹凸 .

如果类似于投影莫尔方法 ,但在成像系统中不用第二块基准光栅去观察 ,而像电视扫描一样用电子扫描的办法形成观察的基准光栅 .这种方法称为扫描莫尔 ,其基本原理如图 7.4.3所示 .实际上 ,代替第二块基准光栅的扫描线可以通过计算机图像处理系统加入 ,这意味着只要用图像系统(包括摄像输入)获取一幅变形光栅像 ,就可通过计算机产生光栅的办法来产生莫尔条纹 .由计算机产生的第二块基准光栅的周期和光栅的移动都容易改变 ,这种扫描莫尔的图像系统可以实现三维面形的自动测量 .

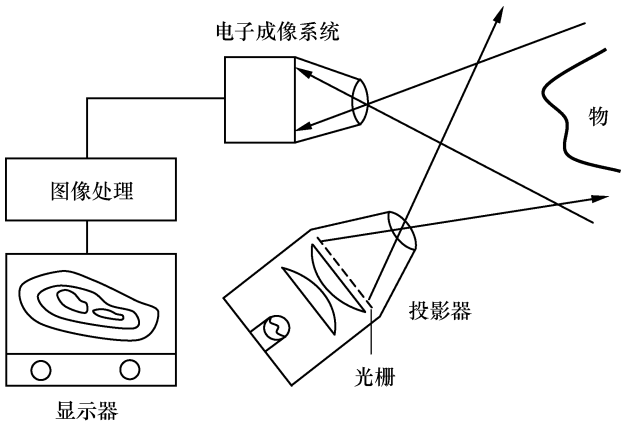


图 7.4.3 扫描莫尔基本原理

第 8 章　空 间 滤 波

空间滤波的目的是通过有意识地改变像的频谱，使像产生所希望的变换．光学信息处理是一个更为宽广的领域，它主要是用光学方法实现对输入信息的各种变换或处理．空间滤波和光学信息处理可以追溯到 1873 年阿贝（Abbe）提出二次成像理论．阿贝于 1893 年、波特（Porter）于 1906 年为验证这一理论所做的实验，科学地说明了成像质量与系统传递的空间频谱之间的关系，1953 年策尼克（Zernike）提出的相衬显微镜是空间滤波技术早期最成功的应用．1946 年杜费（Duffieux）把光学成像系统看作线性滤波器，成功地用傅里叶方法分析成像过程，发表了《傅里叶变换及其在光学中的应用》的著名论著．20 世纪 50 年代，艾里亚斯（Elias）及其同事的经典论文《光学和通信理论》和《光学处理的傅里叶方法》为光学信息处理提供了有力的数学工具．20 世纪 60 年代由于激光的出现和全息术的重大发展，光学信息处理进入了蓬勃发展的新时期．

8.1　空间滤波的基本原理

8.1.1　阿贝成像理论

阿贝研究显微镜成像问题时，提出了一种不同于几何光学的新观点，他将物看成是不同空间频率信息的集合，相干成像过程分两步完成，如图 8.1.1 所示，第一步是入射光场经物平面 P_1 发生夫琅禾费衍射，在透镜后焦面 P_2 上形成一系列衍射斑；第二步是各衍射斑作为新的次波源发出球面次波，在像面上互相叠加，形成物体的像．将显微镜成像过程看成是上述两步成像的过程，是波动光学的观点，后来人们称其为阿贝成像理论．阿贝成像理论不仅用傅里叶变换阐述了显微镜成像的机理，更重要的是首次引入频谱的概念，启发人们用改造频谱的手段来改造信息．

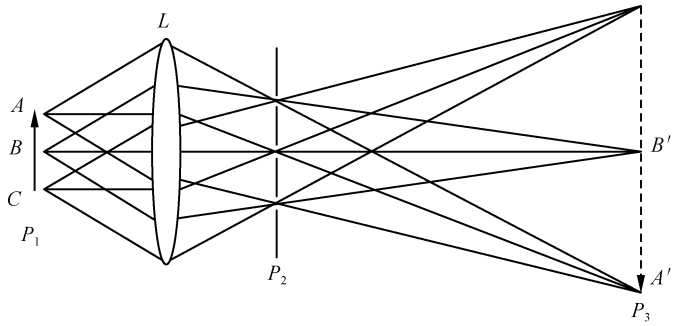


图 8.1.1　阿贝成像原理

阿贝-波特实验是对阿贝成像原理最好的验证和演示．这项实验的一般做法如图 8.1.2所示，用平行相干光束照明一张细丝网格，在成像透镜的后焦面上出现周期性网格的傅里叶频谱，由于这些傅里叶频谱分量的再组合，从而在像平面上再现网格的像．若把各种遮挡物（如光圈、狭缝、小光屏）放在频谱面上，就能以不同方式改变像的频谱，从而在像平面上得到由改变后的频谱分量重新组合得到的对应的像．图 8.1.2(a)是实验装置图，图 8.1.2(b)是使用一条水平狭缝时透过的频谱，对应的像如图 8.1.2(c)所示，它只包括网格的垂直结构．如果将狭缝旋转 90°，则透

过的频谱和对应的像如图 8.1.2(d)、图 8.1.2(e)所示 .若在焦面上放一个可变光圈 ,开始时光圈缩小 ,使得只通过轴上的傅里叶分量 ,然后逐渐加大光圈 ,就可以看到网格的像怎样由傅里叶分量一步步综合出来 .如果去掉光圈换上一个小光屏挡住零级频谱 ,则可以看到网格像的对比度反转 .这些实验以其简单的装置十分明确地演示了阿贝成像原理 ,对空间滤波的作用给出了直观的说明 ,为光学信息处理的概念奠定了基础 .

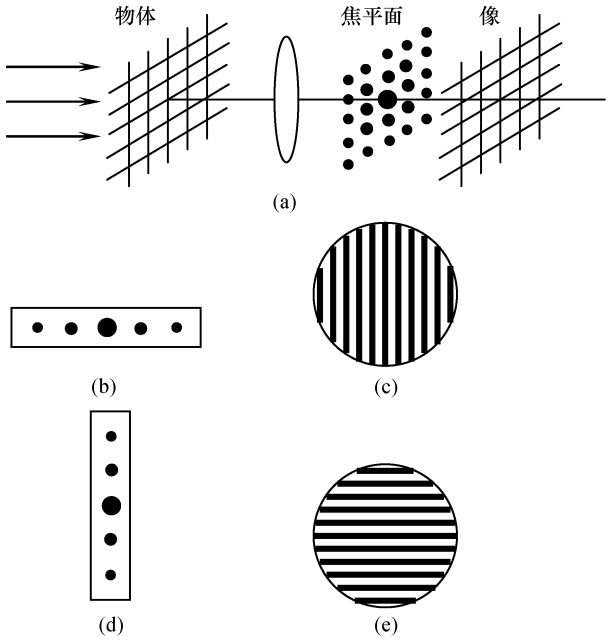


图 8.1.2 阿贝 -波特实验

8.1.2 空间滤波的傅里叶分析

现在我们以一维光栅为例 ,用傅里叶分析的手段讨论空间滤波过程 ,以便更透彻地了解改变系统透射频谱对像结构的影响 .为简明起见 ,采用最典型的相干滤波系统 ,通常称为 $4f$ 系统如图 8.1.3 所示 .图中 ;L_1 是准直透镜 ;L_2 和 L_3 为傅里叶变换透镜 ,焦距均为 f;P_1 ,P_2 和 P_3 分别是物面、频谱面和像面 ,并且 P_3 平面采用反演坐标系 .设光栅常数为 d,缝宽为 a,光栅沿 x_1 方向的宽度为 L,则它的透过率为

$$t(x_1)=\left[\operatorname{rect}\left(\frac{x_1}{a}\right)*\frac{1}{d}\operatorname{comb}\left(\frac{x_1}{d}\right)\right]\operatorname{rect}\left(\frac{x_1}{L}\right) \tag{8.1.1}$$

在 P_2 平面上的光场分布应正比于

$$\begin{aligned}T(\xi)&=\frac{aL}{d}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\operatorname{sinc}\left(\frac{am}{d}\right)\operatorname{sinc}\left[L\left(\xi-\frac{m}{d}\right)\right]\\&=\frac{aL}{d}\left\{\operatorname{sinc}(L\xi)+\operatorname{sinc}\left(u\frac{a}{d}\right)\operatorname{sinc}\left[L\left(\xi-\frac{1}{d}\right)\right]\right.\\&\quad\left.+\operatorname{sinc}\left(\frac{a}{d}\right)\operatorname{sinc}\left[L\left(\xi+\frac{1}{d}\right)\right]+\cdots\right\}\end{aligned} \tag{8.1.2}$$

式中 ,$\xi=x_2/\lambda f$,x_2 是频谱面上的位置坐标 ,ξ是同一平面上用空间频率表示的坐标 .为了避免各级频谱重叠 ,假定 $L\gg d$.下面我们将讨论在频谱面上放置不同的滤波器时 ,在输出面上像场的变化情况 .

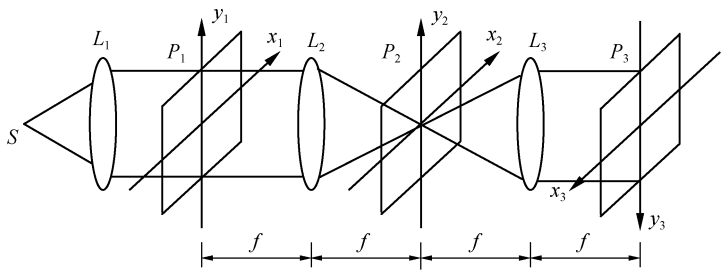


图 8.1.3 典型的相干滤波系统

① 滤波器是一个适当宽度的狭缝,只允许零级谱通过,也就是说只让(8.1.2)式中第一项$(aL/d)\mathrm{sinc}(L\xi)$通过,则狭缝后的透射光场为

$$\boldsymbol{T}(\xi)\boldsymbol{H}(\xi)=\frac{aL}{d}\mathrm{sinc}(L\xi) \tag{8.1.3}$$

式中,$\boldsymbol{H}(\xi)$是狭缝的透过函数.于是在输出平面上的场分布为

$$\boldsymbol{g}(x_3)=F^{-1}\{\boldsymbol{T}(\xi)\boldsymbol{H}(\xi)\}=\frac{a}{d}\mathrm{rect}\left(\frac{x_3}{L}\right) \tag{8.1.4}$$

空间滤波的全部过程如图 8.1.4 所示.

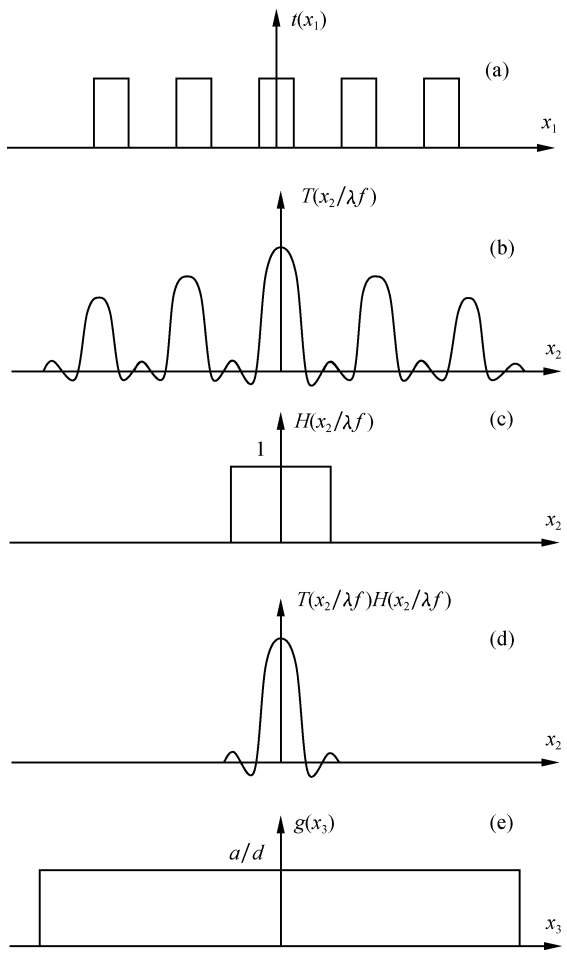


图 8.1.4 一维光栅经滤波的像(透过零级)

(a) 物体;(b) 物体频谱;(c) 滤波函数;(d) 滤波后的谱;(e) 输出像

② 狭缝加宽能允许零级和正、负一级频谱通过,这时透射的频谱包括(8.1.2)式中的前三项,即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}(\xi)\boldsymbol{H}(\xi)=\frac{aL}{d}\Big\{&\operatorname{sinc}(L\xi)+\operatorname{sinc}\left(\frac{a}{d}\right)\\&\times\operatorname{sinc}\left[L\left(\xi-\frac{1}{d}\right)\right]+\operatorname{sinc}\left(\frac{a}{d}\right)\\&\times\operatorname{sinc}\left[L\left(\xi+\frac{1}{d}\right)\right]\Big\}\end{aligned}\tag{8.1.5}$$

于是输出平面上的场分布为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}(x_3)&=F^{-1}\{\boldsymbol{T}(\xi)\boldsymbol{H}(\xi)\}\\&=\frac{a}{d}\operatorname{rect}\left(\frac{x_3}{L}\right)+\operatorname{sinc}\left(\frac{a}{d}\right)\operatorname{rect}\left(\frac{x_3}{L}\right)\times\exp\left(\mathrm{j}2\pi\frac{x_3}{d}\right)\\&\quad+\operatorname{sinc}\left(\frac{a}{d}\right)\operatorname{rect}\left(\frac{x_3}{L}\right)\times\exp\left(-\mathrm{j}2\pi\frac{x_3}{d}\right)\\&=\frac{a}{d}\operatorname{rect}\left(\frac{x_3}{L}\right)\left[1+2\operatorname{sinc}\left(\frac{a}{d}\right)\cos\left(\frac{2\pi x_3}{d}\right)\right]\end{aligned}\tag{8.1.6}$$

空间滤波的全过程如图 8.1.5 所示.在这种情况下,像与物的周期相同,但由于高频信息的丢失,像的结构变成余弦振幅光栅.

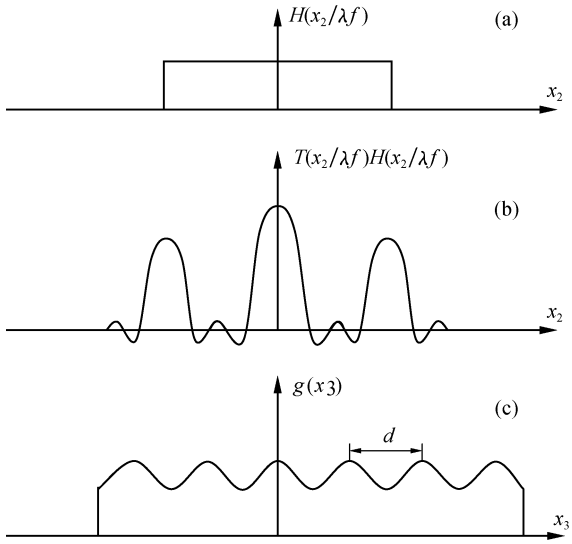


图 8.1.5 一维光栅经滤波的像(透过零级和正负一级频谱)
(a)滤波函数;(b)滤波后的谱;(c)输出像

③ 滤波面放置双缝,只允许正、负二级谱通过,这时系统透射的频谱为

$$\boldsymbol{T}(\xi)\boldsymbol{H}(\xi)=\frac{aL}{d}\operatorname{sinc}\left(\frac{2a}{d}\right)\left\{\operatorname{sinc}\left[L\left(\xi-\frac{2}{d}\right)\right]+\operatorname{sinc}\left[L\left(\xi+\frac{2}{d}\right)\right]\right\}\tag{8.1.7}$$

输出平面上的场分布

$$\boldsymbol{g}(x_3)=F^{-1}\{\boldsymbol{T}(\xi)\boldsymbol{H}(\xi)\}=\frac{2a}{d}\operatorname{sinc}\left(\frac{2a}{d}\right)\operatorname{rect}\left(\frac{x_3}{L}\right)\cos\left(\frac{4\pi x_3}{d}\right)\tag{8.1.8}$$

在这种情况下,像的周期是物的周期的一半,像的结构是余弦振幅光栅,如图 8.1.6 所示.

④ 在频谱面上放置不透光的小圆屏,挡住零级谱,而让其余频率成分通过,这时透射频谱可表示为

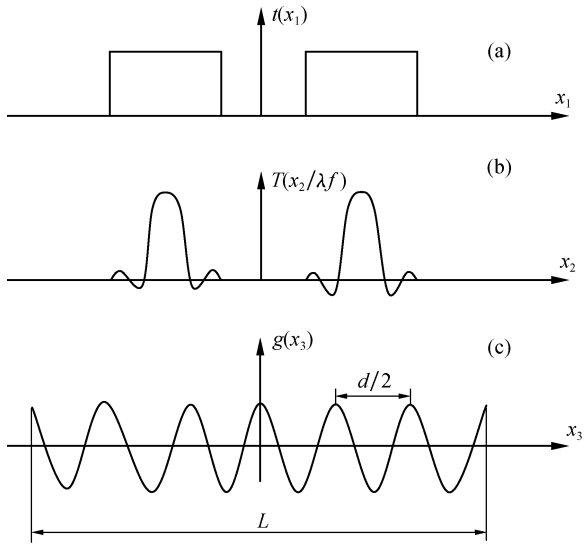


图 8.1.6 一维光栅经滤波的像(透过正负二级频谱)
(a)滤波函数;(b)滤波后的谱;(c)输出像

$$\boldsymbol{T}(\xi)\boldsymbol{H}(\xi)=\boldsymbol{T}(\xi)-\frac{aL}{d}\mathrm{sinc}(L\xi) \tag{8.1.9}$$

像面上的光场分布正比于

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}(x_3)&=F^{-1}\{\boldsymbol{T}(\xi)\}-F^{-1}\left\{\frac{aL}{d}\mathrm{sinc}(L\xi)\right\}=\boldsymbol{t}(x_3)-\frac{a}{d}\mathrm{rect}\left(\frac{x_3}{L}\right)\\&=\left[\mathrm{rect}\left(\frac{x_3}{a}\right)\frac{1}{d}\mathrm{comb}\left(\frac{x_3}{d}\right)\right]\mathrm{rect}\left(\frac{x_3}{L}\right)-\frac{a}{d}\mathrm{rect}\left(\frac{x_3}{L}\right)\end{aligned} \tag{8.1.10}$$

当 $a=d/2$,即缝宽等于缝的间隙时,直流分量为 1/2,像场的复振幅分布仍为光栅结构,并且周期与物相同,但强度分布是均匀的,即实际上看不见条纹,如图 8.1.7 所示.当 $a>d/2$,即缝宽

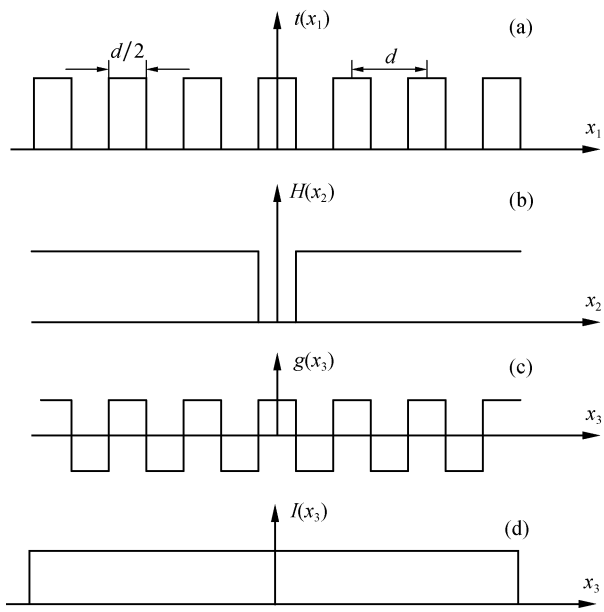


图 8.1.7 去掉零频后一维光栅的像($a=d/2$)
(a)物体;(b)滤波函数;(c)像的复振幅分布;(d)像的强度分布

大于缝的间隙时,直流分量大于 1/2. 去掉零级谱以后像场分布如图 8.1.8 所示,对应物体上亮的部分变暗,暗的部分变亮,实现了对比度反转.

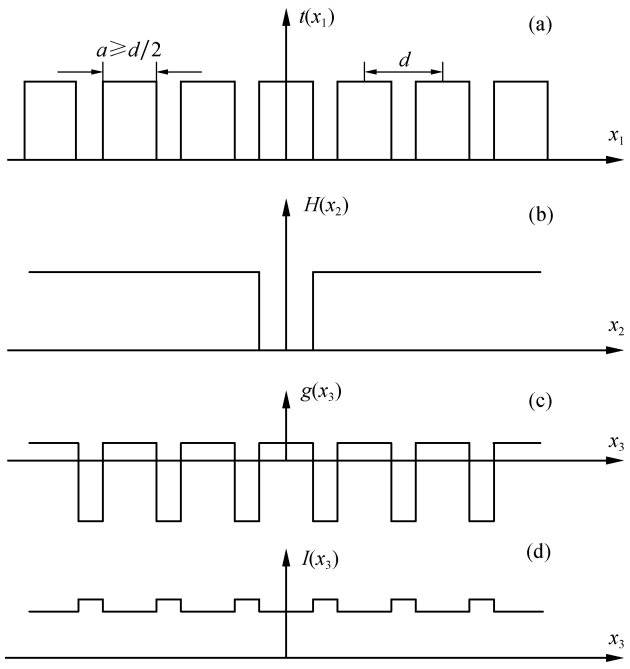


图 8.1.8 去掉零频后一维光栅的像($a > d/2$)

(a)物体;(b)滤波函数;(c)像的复振幅分布;(d)像的强度分布

上述讨论说明了利用空间滤波技术,可以改变成像系统中像场的光分布.

例 8.1.1 在图 8.1.3 所示的系统中,在 $x_1 y_1$ 平面上放置一正弦光栅,其振幅透过率为 $t(x_1) = t_0 + t_1 \cos(2\pi\xi_0 x_1)$.

(1) 在频谱面的中央设置一小圆屏挡住光栅的零级谱,求像的强度分布及可见度;

(2) 移动小圆屏,挡住光栅的+1 级谱,像面的强度分布和可见度又如何?

解:按一般程序应先求出 $t(x_1)$的频谱,然后求出滤波后的频谱,再作逆傅里叶变换(因像面坐标已反演)而求得像,但也可按如下方式考虑.

(1) 设用振幅为 1 的单色平面波垂直照明物平面,频谱面上的零级斑对应于物平面上与 t_0 项相联系的直流信息,所以挡住零级斑相当于完全通过系统的物信息为

$$\boldsymbol{u}_0(x_1, y_1) = t_1 \cos(2\pi\xi_0 x_1)$$

故输出的信息成为

$$\boldsymbol{u}_i(x_3, y_3) = \boldsymbol{u}_0(x_3, y_3) = t_1 \cos(2\pi\xi_0 x_3)$$

输出图像的强度

$$I_i(x_3, y_3) = |\boldsymbol{u}_i(x_3, y_3)|^2 = t_1^2 \cos^2(2\pi\xi_0 x_3) = \frac{1}{2} t_1^2 [1 + \cos(4\pi\xi_0 x_3)]$$

除直流成分外,其交流成分的空间频率 $\xi = 2\xi_0$,而条纹可见度

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{t_1^2/2}{t_1^2/2} = 1$$

(2) 如果挡住+1 级谱,输出强度又如何变化呢? 为此先展开输入图像的物信息

$$\boldsymbol{t}(x_1) = t_0 + \frac{1}{2} t_1 \exp(\mathrm{j}2\pi\xi_0 x_1) + \frac{1}{2} t_1 \exp(-\mathrm{j}2\pi\xi_0 x_1)$$

谱平面上的+1级谱与物信息中含有的$\frac{1}{2}t_1\exp(j2\pi\xi_0 x_1)$相对应,故挡住+1级谱相当于完全通过的物信息为

$$\boldsymbol{u}_0(x_1,y_1)=t_0+\frac{1}{2}t_1\exp(-j2\pi\xi_0 x_1)$$

此时的输出信息为

$$\boldsymbol{u}_4(x_3,y_3)=\boldsymbol{u}_0(x_3,y_3)=t_0+\frac{1}{2}t_1\exp(-j2\pi\xi_0 x_3)$$

输出图像的强度分布为

$$I_4(x_3,y_3)=|\boldsymbol{u}_4(x_3,y_3)|^2=t_0^2+\frac{1}{4}t_1^2+t_0t_1\cos(2\pi\xi_0 x_3)$$

除直流分量外,其交流成分的空间频率仍为ξ_0,但条纹可见度降为

$$V=\frac{t_0t_1}{t_0^2+t_1^2/4}$$

例8.1.2 在图8.1.3所示的系统中,在x_1y_1平面上有两个图像,它们的中心在x_1轴上,距离坐标原点分别为a和$-a$,今在频谱面上放置一正弦光栅,其振幅透过率为$\boldsymbol{T}(\xi,\eta)=1+\cos(2\pi a\xi)$,试证明在像面中心可得到两个图像相加.

解:用单位振幅的相干平面波垂直照射物平面,则x_1y_1平面上两个像的复振幅分布为

$$\boldsymbol{u}(x_1,y_1)=\boldsymbol{u}_1(x_1-a,y_1)+\boldsymbol{u}_2(x_1+a,y_1)$$

物的频谱为$\boldsymbol{U}(\xi,\eta)$,滤波函数$\boldsymbol{T}(\xi,\eta)=\boldsymbol{H}(\xi,\eta)$,可看成系统的传递函数.于是像的复振幅为

$$\boldsymbol{u}_4(x_3,y_3)=F\{\boldsymbol{U}(\xi,\eta)\boldsymbol{H}(\xi,\eta)\}=\boldsymbol{u}(x_3,y_3)*\boldsymbol{h}(x_3,y_3)$$

式中,$\boldsymbol{h}(x_3,y_3)$是$\boldsymbol{H}(\xi,\eta)$的点扩散函数,即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}(x_3,y_3)&=F\{1+\cos(2\pi a\xi)\}\\&=\delta(x_3,y_3)+\frac{1}{2}\delta(x_3-a,y_3)+\frac{1}{2}\delta(x_3+a,y_3)\end{aligned}$$

于是像的复振幅为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_4(x_3,y_3)&=[\boldsymbol{u}_1(x_3-a,y_3)+\boldsymbol{u}_2(x_3+a,y_3)]\\&\quad*\left[\delta(x_3,y_3)+\frac{1}{2}\delta(x_3-a,y_3)+\frac{1}{2}\delta(x_3+a,y_3)\right]\\&=\frac{1}{2}[\boldsymbol{u}_1(x_3,y_3)+\boldsymbol{u}_2(x_3,y_3)]+\boldsymbol{u}_1(x_3-a,y_3)+\boldsymbol{u}_2(x_3+a,y_3)\\&\quad+\frac{1}{2}[\boldsymbol{u}_1(x_3-2a,y_3)+\boldsymbol{u}_2(x_3+2a,y_3)]\end{aligned}$$

可见,在像面中心得到图像$\boldsymbol{u}_1$和$\boldsymbol{u}_2$的相加.

例8.1.3 在4f成像系统中,为了在像面上得到输入图像的微分图像,试问在频谱面上应该使用怎样的滤波器?

解:设输入图像的复振幅分布为$\boldsymbol{u}_0(x_1)$,其频谱为$\boldsymbol{U}_0(\xi)$,因此有

$$\boldsymbol{u}_0(x_1)=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{U}_0(\xi)\exp(j2\pi\xi x_1)d\xi$$

又设输出像的复振幅为$\boldsymbol{u}_4(x_3)$,在没有空间滤波器的情况下,像面上复振幅分布应为

$$\boldsymbol{u}_4(x_3)=\boldsymbol{u}_0(x_3)$$

若要使

$$u_{i3}(x_3)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_3}u_0(x_3)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_3}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{U}_0(\xi)\exp(\mathrm{j}2\pi\xi x_3)\mathrm{d}\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{j}2\pi\xi\boldsymbol{U}_0(\xi)\exp(\mathrm{j}2\pi\xi x_3)\mathrm{d}\xi$$

透过变换平面的频谱应为

$$\boldsymbol{U}_0'(\xi)=\boldsymbol{T}(\xi)\boldsymbol{U}_0(\xi)=\mathrm{j}2\pi\xi\boldsymbol{U}_0(\xi)$$

所以滤波器的透射函数为

$$\boldsymbol{T}(\xi)=\mathrm{j}2\pi\xi$$

ξ可取正、负两值.为实现负值,可将两块模片叠合,一块是振幅模片,其透过率为

$$\boldsymbol{T}_1(\xi)=|2\pi\xi|$$

另一块是相位模片,做成在 ξ的正的范围和负的范围中,其相位差为 π 的相位掩模,其透过率函数为

$$\boldsymbol{T}_2(\xi)=\begin{cases}j, & \xi>0\\ -j, & \xi<0\end{cases}$$

其组合情况如图 8.1.9 所示.

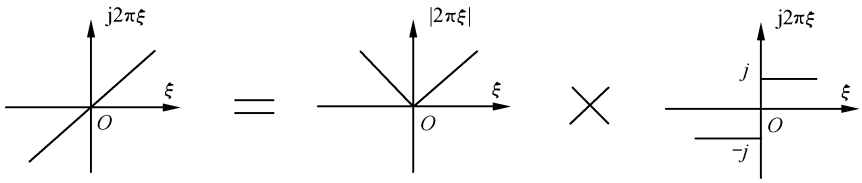


图 8.1.9 微分运算的滤波器

8.2 系统与滤波器

8.2.1 空间滤波系统

空间滤波系统需要完成从空域到频域,又从频域还原到空域的两次傅里叶变换,以及在频域的乘法运算.傅里叶变换的性质蕴含于光波的衍射中,借助透镜的作用可方便地利用存在于衍射中的傅里叶变换性质.因此,系统应包括实现傅里叶变换的物理实体,即光学透镜,以及具有与空域和频域相对应的输入、输出和频谱平面.频域上的乘法运算是通过在频谱面上放置所需要的滤波器来完成的.

典型的滤波系统是三透镜系统,即图 8.1.3 所示的系统.两次傅里叶变换的任务各由一个透镜承担,两透镜之间的距离是两透镜的焦距之和,系统的垂轴放大率等于两个透镜焦距之比.为简单起见,常取两者焦距相等,于是从输入平面到输出平面之间,各元件相距 f,这种系统简称为 $4f$ 系统.若输入透明片置于 P_1 平面上,其复振幅透过率为 $\boldsymbol{f}(x_1,y_1)$,用单位振幅的相干平面波垂直照射,则在 P_2 平面上得到物体的频谱 $\boldsymbol{F}\left(\frac{x_2}{\lambda f},\frac{y_2}{\lambda f}\right)$;若在这个平面上放置滤波器,令其振幅透过率 $\boldsymbol{t}(x_2,y_2)$正比于 $\boldsymbol{H}\left(\frac{x_2}{\lambda f},\frac{y_2}{\lambda f}\right)$,则滤波器后方的光场分布等于两个函数相乘,即 $\boldsymbol{F}\left(\frac{x_2}{\lambda f},\frac{y_2}{\lambda f}\right)\boldsymbol{H}\left(\frac{x_2}{\lambda f},\frac{y_2}{\lambda f}\right)$.这样,就在 L_3 的后焦面即输出平面上得到两个函数乘积的傅里叶变换.在我们采用

的反演坐标系下,输出平面光场的复振幅分布为

$$\boldsymbol{g}(x_3,y_3)=F^{-1}\left\{\boldsymbol{F}\left(\frac{x_2}{\lambda f},\frac{y_2}{\lambda f}\right)\cdot\boldsymbol{H}\left(\frac{x_2}{\lambda f},\frac{y_2}{\lambda f}\right)\right\}=\boldsymbol{f}(x_3,y_3)*\boldsymbol{h}(x_3,y_3) \tag{8.2.1}$$

式中:$\boldsymbol{f}(x_3,y_3)$是物体 $\boldsymbol{f}(x_1,y_1)$的几何像;$\boldsymbol{h}$是 $\boldsymbol{H}$ 的逆傅里叶变换,称为滤波器的脉冲响应.从频域来看,系统改变了输入信息的空间频谱结构,这就是空间滤波或频域综合的含义;从空域来看,系统实现了输入信息与滤波器脉冲响应的卷积,完成了所期望的一种变换.

图 8.2.1 是另外三种典型的系统.图 8.2.1(a)是一种双透镜系统,L_1 是准直透镜,透镜 L_2 同时起傅里叶变换和成像作用,频谱面在 L_2 的后焦面上,输出平面 P_3 位于 P_1 的共轭像面处.图 8.2.1(b)是另一种双透镜系统,L_1 既是照明镜又是傅里叶变换透镜,照明光源 S 与频谱面是物象共轭面,L_2 则起第二次傅里叶变换和成像作用.图 8.2.1(c)是单透镜系统,L 具有成像和变换双重功能,照明光源与频谱面共轭,物面和像面形成另一对共轭面.

在图 8.2.1(b)和图 8.2.1(c)两种系统中,前后移动物面 P_1 的位置,可以改变输入频谱的比例大小,这种灵活性方便了滤波操作.

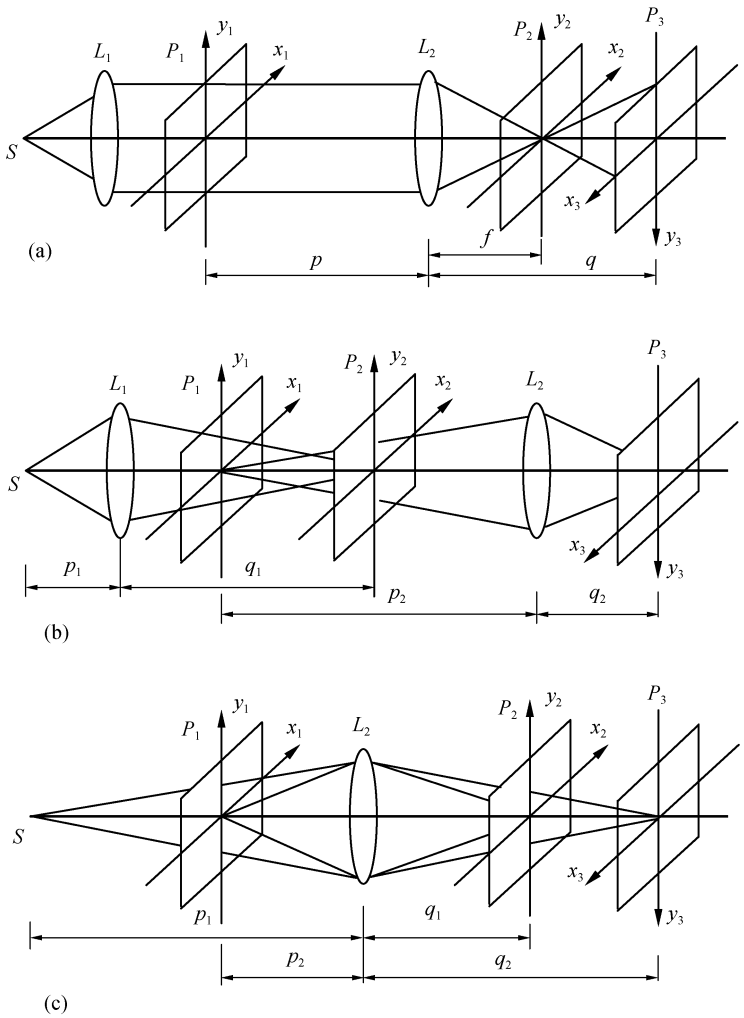


图 8.2.1 其他三种典型的滤波系统

这三种系统结构简单,但是这三种系统在 P_2 面上给出的物体频谱都不是物函数准确的傅里叶变换关系,而附带有球面相位因子,在某些运用中将对滤波操作带来影响.对于典型的 $4f$ 系统,由于变换透镜前后焦面上存在准确的傅里叶变换,分析起来十分方便,故后面介绍的多数例子都采用 $4f$ 系统.

8.2.2 空间滤波器

在光学信息处理系统中,空间滤波器是位于空间频率平面上的一种模片,它改变输入信息的空间频谱,从而实现对输入信息的某种变换.空间滤波器的透过率函数一般是复函数

$$\boldsymbol{H}(\xi,\eta) = A(\xi,\eta)\exp[\mathrm{j}\varphi(\xi,\eta)] \tag{8.2.2}$$

根据透过率函数的性质,空间滤波器可以分为以下几种:

1. 二元振幅滤波器

这种滤波器的复振幅透过率是 0 或 1. 由二元滤波所作用的频率区间又可细分为:①低通滤波器,它只允许位于频谱面中心及其附近的低频分量通过,可用来滤掉高频噪音.②高通滤波器,它阻挡低频分量而允许高频通过,可以实现图像的衬度反转或边缘增强.③带通滤波器,它只允许特定区间的空间频谱通过,可以去除随机噪音.④方向滤波器,它阻挡(或允许)特定方向上的频谱分量通过,可以突出某些方向性特征.上述四种二元振幅滤波器的形状如图 8.2.2 所示.

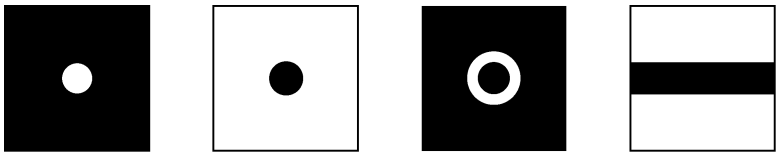


图 8.2.2 四种二元振幅滤波器

2. 振幅滤波器

这种滤波器仅改变各频率成分的相对振幅分布,而不改变其相位分布.通常是使感光胶片上的透过率变化正比于 $A(\xi,\eta)$,从而使透过光场的振幅得到改变.为了作到这一点,必须按一定的函数分布来控制底片的曝光量分布.

3. 相位滤波器

它只改变空间频谱的相位,不改变它的振幅分布.由于不衰减入射光场的能量,具有很高的光学效率.这种滤波器通常用真空镀膜的方法得到,但由于工艺方法的限制,要得到复杂的相位变化是很困难的.

4. 复数滤波器

这种滤波器对各种频率成分的振幅和相位都同时起调制作用,滤波函数是复函数.它的应用很广泛,但难于制造.1963 年范德拉格特用全息方法综合出复数空间滤波器,1965 年罗曼和布劳恩用计算全息技术制作成复数滤波器,从而克服了制作空间滤波器的重大障碍.

8.3 空间滤波应用举例

8.3.1 策尼克相衬显微镜

在一般情况下,用显微镜只能观察物体亮暗的变化,不能辨别物体相位的变化.最初,相位物体(如细菌标本)的观察必须采用染色法,但染色的同时会杀死细菌,改变标本的原始结构,从而不能在显微镜下如实研究标本的生命过程.1935 年策尼克提出的相衬显微镜,利用相位滤波器将物体的相位变化转换成可以观察到的光的强弱变化.这种转换通常又称为幅相变换.

为了阐述相衬显微镜的原理,采用图 8.2.1(a)所示的滤波系统,将透明相位物体置于 P_1 平面,其复振幅透过率为

$$\boldsymbol{t}(x_1,y_1)=\exp[\mathrm{j}\varphi(x_1,y_1)] \tag{8.3.1}$$

假定相移 $\varphi\ll 1$ 弧度,则可忽略 φ^2 及更高阶的项,于是复振幅透射率可以近似写成

$$\boldsymbol{t}(x_1,y_1)\approx 1+\mathrm{j}\varphi(x_1,y_1) \tag{8.3.2}$$

物光波实际上可看作两部分,强的直接透射光和由于相位起伏造成的弱衍射光.一个普通的显微镜对上述物体所成的像,其强度可以写成

$$\boldsymbol{I}\approx|1+\mathrm{j}\varphi|^2\approx 1$$

策尼克认识到,衍射光之所以观察不到,是由于它与很强的本底之间相差 90°,只有改变这两部分之间的相位正交关系,才能使两部分光叠加时产生干涉,从而产生可观察的像强度变化.直接透射光在谱面上将会聚成轴上的一个焦点,而衍射光由于包含较高的空间频率而在谱面上较为分散.由于这两部分信息在空间频域通道上的分离,因此可以简单地在谱面放置相位滤波器,使零频的相位相对于其他频率的相位改变 $\pm\pi/2$ 滤波函数为

$$\boldsymbol{H}(\xi,\eta)=\begin{cases}\pm\mathrm{j}, & \xi=\eta=0\\ 1, & \text{其他}\end{cases}$$

滤波后的频谱

$$\boldsymbol{F}(\xi,\eta)\boldsymbol{H}(\xi,\eta)=\pm\mathrm{j}\delta(\xi,\eta)+\mathrm{j}\varphi(\xi,\eta) \tag{8.3.3}$$

像面复振幅分布

$$\boldsymbol{g}(x_3,y_3)=\pm\mathrm{j}+\mathrm{j}\varphi(x_3,y_3) \tag{8.3.4}$$

像强度分布

$$\boldsymbol{I}(x_3,y_3)=|\mathrm{j}[\pm 1+\varphi(x_3,y_3)]|^2\approx 1\pm 2\varphi(x_3,y_3) \tag{8.3.5}$$

于是像的强度和相移成线性关系.在(8.3.5)式中,取正号时,相位值大的部位光强也强,叫做正相衬;取负号时,相位值大的部位光强弱,叫做负相衬.

由于直接透射光相对于衍射光太强,像的对比度很低.如果使零级衍射光产生相移的同时,受到部分衰减,可以提高像衬度,更有利于观察.这种方法还可以用于观察金相表面、抛光表面以及透明材料不均匀性检测等.相衬显微镜是空间滤波技术早期最成功的应用.

8.3.2 补偿滤波器

提高光学系统的成像质量始终是光学工作者所追求的目标.20 世纪 50 年代初期,麦尔查(Marécha)认为,照片中的缺陷,是由于成像系统的光学传递函数中存在相应缺陷引起的,因而如果能在频谱平面上放置适当的滤波器,使得滤波器的传递函数补偿原来系统传递函数的缺陷,则两者的乘积产生一个较为满意的频率响应,于是照片的质量将得到部分改善.假定成像缺陷是

由于成像系统严重离焦引起的，则在几何光学近似下，离焦系统的脉冲响应是一个均匀的圆形光斑，即点扩散函数为

$$h_1(r)=\frac{1}{\pi a^2}\mathrm{circ}\left(\frac{r}{a}\right) \tag{8.3.6}$$

式中，a 为圆形光斑半径，$1/\pi a^2$ 是归一化因子．为求相应的传递函数，可将(8.3.6)式作傅里叶-贝塞尔变换，即

$$H(\rho)=B\left\{\frac{1}{\pi a^2}\mathrm{circ}\left(\frac{r}{a}\right)\right\}=\frac{1}{\pi a^2}2\pi\int_0^a rJ_0(2\pi r\rho)\mathrm{d}r$$

式中，$\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$ 是极坐标下的空间频率变量．令 $r'=2\pi a\rho$，则上式可写成

$$H(\rho)=\frac{1}{\pi a^2}\frac{1}{2\pi\rho^2}\int_0^{2\pi a\rho} r'J_0(r')\mathrm{d}r'$$

利用积分公式

$$\int_0^x \xi J_0(\xi)\mathrm{d}\xi=xJ_1(x)$$

可将上式积出

$$H(\rho)=\frac{1}{\pi a^2}\frac{1}{2\pi\rho^2}2\pi a\rho J_1(2\pi a\rho)=\frac{2J_1(2\pi a\rho)}{2\pi a\rho}$$

即

$$H(\rho)=\frac{2J_1(2\pi a\rho)}{2\pi a\rho} \tag{8.3.7}$$

由(8.3.7)式所表达的传递函数的高频损失严重，而且在某一中间频率区域，传递函数的符号发生反转．20 世纪 50 年代初期，巴黎大学研究所麦尔查等人采用图 8.3.1(a)所示的组合滤波器，放在 $4f$ 系统的频谱面上补偿这个带缺陷的传递函数．其中吸收板用来衰减很强的低频峰值，以便提高像的对比，突出细节．相移板使 H 的第一个负瓣相移 π，以纠正对比反转．图 8.3.1(b)表示原来的以及补偿后的传递函数，输出图像的像质因而获得改善．

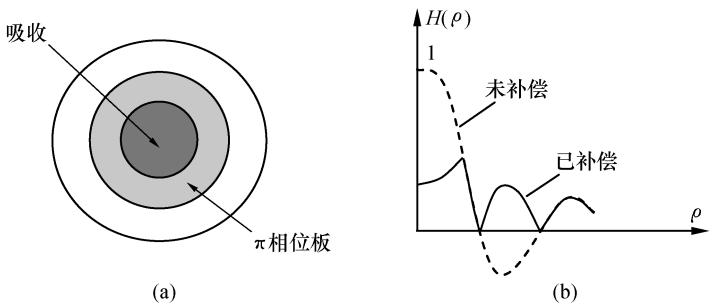


图 8.3.1 补偿滤波器

(a) 焦平面滤波器；(b) 传递函数

麦尔查和他的同事还研究了衰减物频谱的低频分量从而突出像中微小细节的方法，以及用简单的滤波器消除半色调图片上的周期性结构．他们的成就对人们研究光学信息处理的兴趣，是一种强有力的推动．

8.4 傅里叶变换透镜

在空间滤波和光学信息处理系统中，用于进行傅里叶变换的透镜是最常用的基本部件．下面对傅里叶透镜的有关知识作一介绍．

8.4.1 傅里叶透镜的截止频率、空间带宽积和视场

1. 截止频率

根据透镜前后两个焦面互为傅里叶变换关系的理论,为了获得严格的傅里叶变换,多把被处理面(输入面)置于透镜的前焦面,而频谱面(滤波面)置于相应的后焦面,如图 8.4.1所示.假设物函数被一个直径为 $D_1=2h$ 的孔径限制,傅里叶透镜的直径为 D,并且设 $D>D_1$.现在我们来研究傅里叶透镜后焦面上频谱的强度分布.

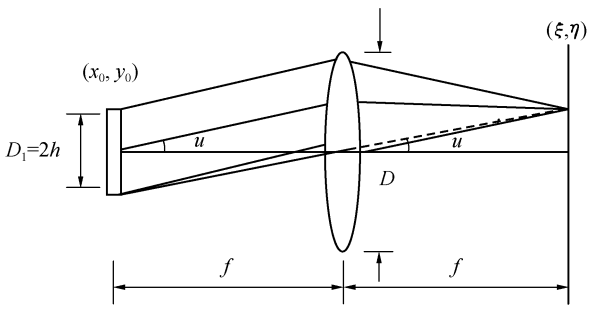


图 8.4.1 某些空间频率无拦阻通过的情况

傅里叶透镜的有限孔径对于物面空间频率成分传播的限制称为渐晕.仅当某一方向上的平面波分量不受拦阻地通过傅里叶透镜时,在透镜的后焦面上相应会聚点测得的强度才准确代表物相应空间频率的模的平方.参看图 8.4.1,在小角度情况下(即 D_1,$D\ll f$),满足这一要求的平面波分量的传播方向角 u 最大为

$$u\approx\frac{(D/2)-(D_1/2)}{f}=\frac{D-D_1}{2f} \tag{8.4.1}$$

因透镜是圆形孔径,在圆周方向上都有相应的最大空间频率,其值为

$$\xi=\frac{\sin u}{\lambda}\approx\frac{u}{\lambda}=\frac{D-D_1}{2\lambda f} \tag{8.4.2}$$

(8.4.2)式就是所测得的强度准确代表了物的傅里叶谱的模的平方的最大空间频率表达式,即截止频率表达式.

当某一方向传播的平面波分量完全被透镜孔径拦阻时,在后焦面上没有该频率成分,测得的频谱强度为零.参看图 8.4.2,当传播方向倾角超过 v 时,该平面波分量正是这种情况.在小角度情况下,有

$$v=\frac{(D/2)+(D_1/2)}{f}=\frac{D+D_1}{2f} \tag{8.4.3}$$

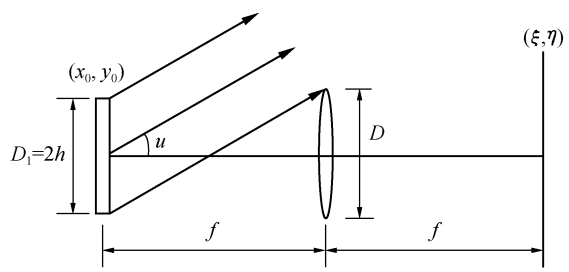


图 8.4.2 某些空间频率不能通过的情况

相应的空间频率为

$$\xi=\frac{\sin v}{\lambda}\approx\frac{v}{\lambda}=\frac{D+D_1}{2\lambda f} \tag{8.4.4}$$

综上所述,可以得到如下结论:当 $\xi\leqslant(D-D_1)/2\lambda f$ 时,透镜后焦面上可以得到相应的空间频率成分的物体准确的傅里叶谱;当 $(D-D_1)/2\lambda f<\xi<(D+D_1)/2\lambda f$ 时,透镜后焦面上得到的并非准确的傅里叶谱,各空间频率成分受到透镜孔径程度不同的阻拦;当 $\xi\geqslant(D+D_1)/2\lambda f$ 时,虽然物可能有更高的空间频率成分,但因这些分量全部被透镜的有限孔径所阻拦,在后焦面上完全得不到物的傅里叶谱中的这些高频成分,这是渐晕效应对物的频谱传播的影响.从公式可以看出,当傅里叶透镜的孔径增大时,可以减小这一效应的影响.

2. 傅里叶透镜的信息容量——空间带宽积

凡是与信息有关的系统,不论是信息的记录和存储系统,还是信息的传输和处理系统,都存在一个信息容量问题.一般地说,信息容量可由系统的频带宽度与单频线宽之比来估算,即

$$\text{信息容量 } N=\frac{\text{频带宽度 }\Delta\xi}{\text{单频线宽 }\delta\xi} \tag{8.4.5}$$

这里所谓单频线宽,是指由于各种原因(主动的或被动的)系统记录或传输的总不可能是理想的单频信息,而是有一定线宽的准单频信息.如有限长波列的准单色光、有限尺寸的正弦光栅等.对傅里叶透镜来说,它处理的是光学图像这类空间信息,由图 8.4.1 可知,截止频率的表达式为 $\xi=(D-D_1)/2\lambda f$,那么通带宽度

$$\Delta\xi=2\xi=\frac{D-D_1}{\lambda f} \tag{8.4.6}$$

另一方面,有限尺寸的正弦信息一定的衍射发散角

$$\delta u=\frac{\lambda}{D_1\cos u} \tag{8.4.7}$$

又由空间频率公式 $\sin u=\xi\lambda$,两边微分得 $\cos u\delta u=\lambda\delta\xi$,因此空域中的发散角 δu 对应频域中的单频线宽为

$$\delta\xi=\frac{\cos u}{\lambda}\delta u=\frac{\cos u}{\lambda}\frac{\lambda}{D_1\cos u}=\frac{1}{D_1} \tag{8.4.8}$$

由(8.4.6)式和(8.4.8)式可得傅里叶变换透镜的信息容量

$$N=\frac{\Delta\xi}{\delta\xi}=\Delta\xi D_1=\frac{D-D_1}{\lambda f}D_1=SW \tag{8.4.9}$$

信息容量 N 等于带宽 $\Delta\xi$ 与图像空间宽度 D_1 的乘积,这就是空间带宽积 SW,也即傅里叶透镜的信息容量也是用空间带宽积来表示的.

3. 视场

由 $\frac{\partial N}{\partial D_1}=0$ 可求得:当

$$D_1=\frac{D}{2} \tag{8.4.10}$$

时,信息容量为最大.这就是说,物有线度 D_1(也就是待处理的图片线度,即视场)不宜过大,也不宜过小,取为透镜的一半时最佳.这时

$$N_m=SW_m=\frac{f}{4\lambda}\left(\frac{D}{f}\right)^2 \tag{8.4.11}$$

式中，(D/f)为傅里叶透镜的相对孔径，一般不大，在 1/3～1/1.5 左右.例如，某傅里叶透镜的相对孔径为 1/3，焦距 $f=200\text{mm}$，光波长 $\lambda=6\times10^{-4}\text{mm}$，则图片线度 D_1 取为 35mm 为宜，空间带宽积 $SW\approx9\times10^3$.

(8.4.11)式所表示的空间带宽积，可以改写成另外的形式，只要注意$(D/2)=D_1=2h$便可得

$$SW=\frac{2}{\lambda}h\left(\frac{D/2}{f}\right) \tag{8.4.12}$$

(8.4.12)式中的 h 相当于几何光学中的物高，$(D/2)/f$ 相当于孔径角 u，并且这里的折射率为 1. 因此，空间带宽积等价于几何光学中的拉赫不变量 $J=nhu$.

SW 大，即 J 大，从信息系统的观点来看，表示传递的信息量大；从成像系统的观点来看，表示视场大或分辨率高；从光能系统的观点来看，表示传递的光能量大.SW 大的系统本身的设计、制造难度也高，故价格也高.

8.4.2 傅里叶透镜对校正像差的要求

1. 正弦条件

普通成像物镜都是对一对共轭面校正像差，经过严格校正像差的透镜可以近似看做理想光学系统.比如一个透镜对无限远物面校正了球差、彗差、像散、场曲和畸变等所有单色像差，那么在后焦面上一定形成无穷远物体的一个理想像.如图 8.4.3 所示，以方向余弦 $\cos\alpha=0$，$\cos\beta=\sin u$ 传播的平行光通过透镜，按几何光学成像理论，通过透镜在透镜后焦面上的理想像高为

$$h=f\tan u=f\eta\lambda/\cos u \tag{8.4.13}$$

式中 $\eta=\sin u/\lambda$ 为 y 方向的空间频率.由上式可见理想光学成像在非近轴区，像高与空间频率不能保持线性关系.若在近轴区，由于 $\cos u\approx1$，上式简化成

$$h=f\eta\lambda \tag{8.4.14}$$

即理想成像像点位置与空间频率成线性关系.

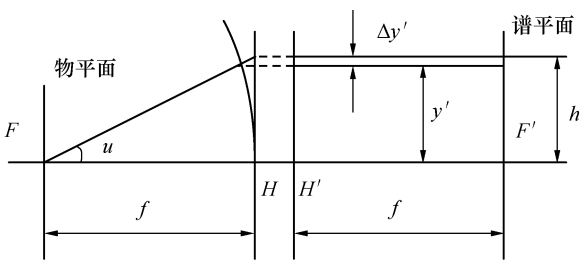


图 8.4.3 频谱的畸变

用成像物镜对物体进行傅里叶分析时，可将物透明片放在透镜的前焦面上，用相干平行光照明而发生衍射，与光轴成 u 角的衍射光，按夫琅禾费衍射理论和空间频率的概念有 $\eta=\sin u/\lambda=y'/\lambda f$，于是在后焦面上形成的衍射斑即谱点位置为

$$y'=f\sin u=f\eta\lambda \tag{8.4.15}$$

谱点位置与空间频率成线性关系.比较(8.4.14)和(8.4.15)两式可知，在近轴区理想成像位置和谱点位置是重合的.也就是说，尽管透镜具有理想成像性质，但要给出准确傅里叶谱必须在近轴区，即低频范围内.当超出近轴区时，空间频率与理想像高之间便失去了线性关系，傅里叶变换透镜的实际像高，不等于理想像高，存在误差

$$\Delta y'=f\tan u-f\sin u\approx\frac{1}{2}fu^3 \tag{8.4.16}$$

称为非线性误差或频谱畸变 .由像质评价标准可知 ,只要将 $\Delta y'$控制在瑞利分辨极限 $\sigma=1.22\lambda f/D$ 以内 ,就可以认为频谱是无畸变的 .令 $\Delta y'\leqslant\sigma$即可求得

$$u=\left(\frac{2.44\lambda}{D}\right)^{\frac{1}{3}}=\theta \tag{8.4.17}$$

由此可见 θ角是很小的 ,只有在此角度范围内的频谱才是无畸变的 .例如取 $\lambda=600\text{nm}$,光瞳直径 $D=30\text{mm}$,可求得 $\theta=0.0365\text{rad}$,即 $\theta\approx2^\circ$,这符合近轴条件 .所以 ,普通成像透镜(即使无像差) ,也只有在很小范围内才能得到准确的傅里叶谱 .但是对谱点性质没有要求的场合 ,像差得到校正的普通透镜也是适合于作傅里叶变换用的 .

为了克服普通成像透镜完成准确傅里叶变换所受到的限制 ,必须专门设计一种所谓傅里叶变换透镜 ,它具有完成准确傅里叶变换的功能 .为了保证频谱的准确分布 ,必须让傅里叶变换透镜能产生一个与谱点非线性误差大小相等符号相反的畸变值 .如果我们不按常规对透镜校正像差 ,而是保留适当畸变 ,但要消除透镜球差和彗差 ,即要求满足正弦条件 ,对于平行光轴出射的无限远正弦条件为

$$h=f\sin u=f\eta\lambda \tag{8.4.18}$$

上式表明 ,当出射光线满足正弦条件时 ,像点坐标与空间频率成线性关系 .由像差理论可知 ,当消除的球差和彗差时 ,必然剩余一定的畸变量 .这一点正是傅里叶变换透镜与普通成像透镜的区别 .

2. 傅里叶变换透镜的像差校正

傅里叶变换透镜必须对两对物像共轭位置校正像差 .如图 8.4.4 所示 ,平行光照射前焦面的透明物体(如光栅)时发生衍射 .不同方向的衍射光经傅里叶变换透镜后 ,在后焦面(频谱面)上形成夫琅和费衍射图样 .所以第一对物像共轭位置是以输入面衍射后的平行光作为物方(相当于物在无穷远) ,对应的像方是谱平面 .于是傅里叶变换透镜必须使无穷远来的平行光束在后焦面上完善地成像 ,如图 8.4.4 中的实线所示 .第二对必须控制的像差共轭平面是以输入面作为物面 ,对应的像在像方无穷远 ,如图 8.4.4 中的虚线所示 .

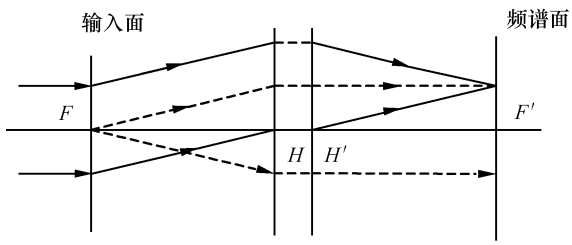


图 8.4.4 傅里叶变换透镜的设计原理

为了减小杂散光的影响 .宜在输入面和频谱面上放置光阑 .输入面和频谱面中的任何一个都可以视为孔径光阑 ,而另一个为视场光阑 ,与此对应有两种处理方法 .

① 设物在无穷远 ,孔径光阑(即人瞳)在前焦面 ,出瞳在像无穷远(像方远心光路) ,频谱面为视场光阑 .对单色像差来说 ,在频谱面要消球差、彗差、像散和场曲 .

② 设物在前焦面、孔径光阑(即出瞳)在后焦面 ,入瞳在物方无穷远(物方远心光路) ,输入面为视场光阑 ,对输入面要消光瞳球差和光瞳彗差 .

傅里叶变换透镜用于相干光学处理系统时采用单色激光 ,一般不需要考虑色差 .输入面与频谱面的直径决定了傅里叶变换透镜的相对孔径和视场 ,为把相对孔径和视场控制在一定范围内 ,以保证整个像面上优良像质 ,目前大多数傅里叶变换透镜的焦距都很长 ,通常 300～1000mm .

8.4.3　傅里叶变换透镜的结构

傅里叶变换透镜结构形式很多,图 8.4.5 给出两种典型结构.图 8.4.5(a)为单组形式,由正负两片透镜组成,这能使两对共轭面上的球差和正弦差得到很好的校正,因为视场和孔径都很小,轴外像差不严重,相对孔径一般小于 1/10. 图 8.4.5(b)为两组正负透镜所组成,所以可以校正场曲,其他像差也可以得到很好的校正,这种形式的最大优点是前后焦点之间距离可以小于焦距.因此,同样大小的工作台,采用此种结构的透镜时,其焦距可长一倍.焦距长的透镜,频谱面上的衍射图样尺寸大,便于进行滤波.

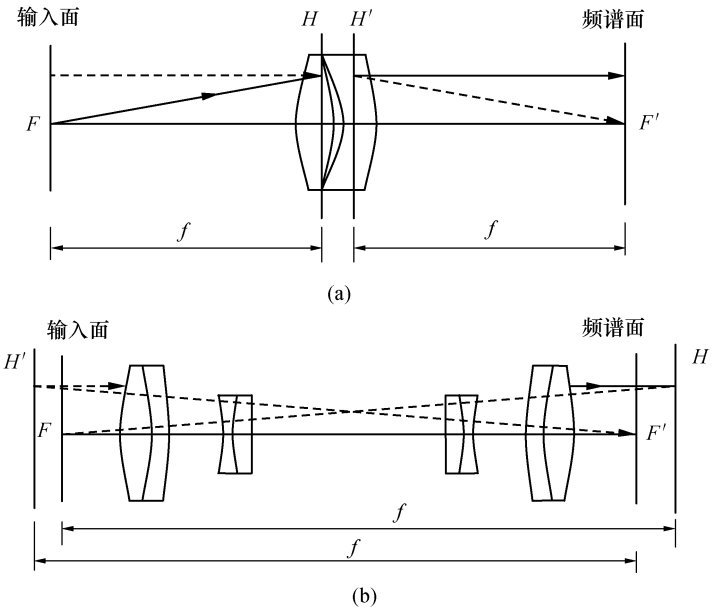


图 8.4.5　傅里叶变换透镜的两种典型结构

习　题

8.1　利用阿贝成像原理导出相干照明条件下显微镜的最小分辨距离公式,并同非相干照明下的最小分辨距离公式比较.

8.2　在 4f 系统输入平面放置 400mm^{-1}的光栅,入射光波长 632.8nm.为了使频谱面上至少能够获得±5级衍射斑,并且相邻衍射斑间距不小于 2mm,求透镜的焦距和直径.

8.3　观察相位型物体的所谓中心暗场方法,是在成像透镜的后焦面上放一个细小的不透明光阑以阻挡非衍射的光.假定通过物体的相位延迟≪1 弧度,求所观察到的像强度(用物体的相位延迟表示出来).

8.4　当策尼克相衬显微镜的相移点还有部分吸收,其强度透射率等于 $\alpha(0<\alpha<1)$时,求观察到的像强度表示式.

8.5　用 CRT(阴级射线管)记录一帧图像透明片,设扫描点之间的间隔为 0.2mm,图像最高空间频率为 10mm^{-1}.如欲完全去掉离散扫描点,得到一帧连续灰阶图像,空间滤波器的形状和尺寸应当如何设计?输出图像的分辨率如何(设傅里叶变换物镜的焦距 $f=1000$mm,$\lambda=632.8$nm).

8.6　某一相干处理系统的输入孔径为 30mm×30mm 的方形,头一个变换透镜的焦距为 100mm,波长是 632.8nm.假定频率平面模片结构的精细程度可与输入频谱相比较,问此模片在焦平面上的定位必须精确到何种程度?

第 9 章　波 前 调 制

在光学信息处理系统中,光波作为信息的载体,通过光学系统对信息进行运算和处理.例如空间滤波、傅里叶变换、卷积和相关等.人们需要有一种装置将信息导入光学系统中,也需要有一种装置修正和操纵系统中的光场分布.

由于上述原因,在本章我们集中讨论对光波场进行调制的方法和装置.传统的调制手段一直是用照相胶片,因此我们首先讨论这种材料的特性.但是,如果用能够响应光控制信号或电控制信号实时改变透射光的空间光调制器取代照相胶片,就可以实现更有力的光学信息处理系统.这些年来,已经研究了许多构建空间光调制器的方法.在第 9.2 节,我们将简要介绍这类器件中最重要的几种.

最后,在第 9.3 节,我们考虑构建所谓衍射光学元件的方法,这种元件用固定的,但是复杂的方式控制透射光的复振幅.如其名称所示,这种元件通过衍射而不是折射来控制透射光.这类元件通常要用计算机来设计和制造,它们的性质可以比折射元件复杂得多.我们将主要讨论一类最重要的衍射光学元件,二元光学元件.

9.1　照 相 胶 片

光学全息和光学信息处理中的常用记录介质是照相胶片,虽然我们已多次涉及到它,但并未讨论它的基本性质.胶片在光学中可以起两个作用.第一,它可以用作探测和记录装置,存储探测到的图像并将信息保存很长的时间;第二,它可以用来做透射或反射光的空间调制器.例如:全息记录中胶片记录了物光和参考光的干涉条纹,再现过程中胶片作为透过再现光的空间光调制器;又如,在匹配滤波过程中,胶片记录了频率平面模板,并且又作为匹配滤波器对输入信号的空间频谱进行波前调制.由于照相胶片在光学中和光学信息处理中的重要性,我们要在这里花一些时间讨论它的特性.

9.1.1　胶片处理的物理过程

1. 曝光

未曝光的照相胶片或底板通常由极大量的微小卤化银(通常是 AgBr)颗粒悬浮在一层明胶支座上构成,明胶支座又附着在一层坚实的“片基”上,胶片的片基由醋酸盐或聚酯构成,底板的片基则是玻璃.软乳胶的曝光面上还有一薄层保护膜,如图 9.1.1 的截面图中所示.此外,在明胶中还要加入一些敏化剂;这些敏化剂会对卤化银晶体中位错中心的产生有很强的影响.

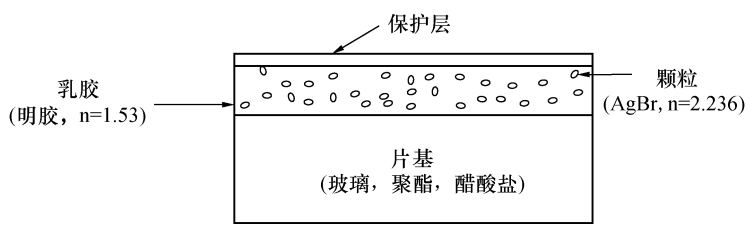


图 9.1.1　照相胶片或底板的结构

光射到乳胶上将引起复杂的物理过程.简单地说,吸收到一定能量的卤化银颗粒将形成银斑,叫做显影斑.在这个过程中存在一个阈值,要求有几个电子被捕获才能激活显影过程,这是尚未曝光的胶片有良好稳定性的原因.已曝光的乳胶中显影斑的集合叫做潜像.这时候的胶片就可以进入显影和定影过程了.

2. 显影

曝光的照相透明片浸入一种化学液即显影液中,在显影过程中,这些细小的显影中心会促使整个卤化银晶粒变成金属银沉积下来,而没有曝光或没有吸收足够能量的晶粒则保持不变.在显影后的颗粒中的银原子数和为了使这个颗粒进入可显影的状态而必须吸收的光子数之比的典型值是 10^9 的量级,它通常叫做照相过程的“增益”.

3. 定影

显影处理过的乳胶由两种颗粒组成,一种已转变成银,另一种没有吸收足够的光因而未形成显影中心.后一种晶体仍然是卤化银,若不进一步处理,最终会通过热过程自己转换成金属银.因此,为了保证影像的稳定性,必须除掉未显影的卤化银颗粒,这个过程叫做乳胶的定影.将透明片浸在第二种化学液中,它将剩余的卤化银晶体从乳胶中除去,只留下稳定的金属银.

图 9.1.2 描述了曝光、显影及定影的过程.

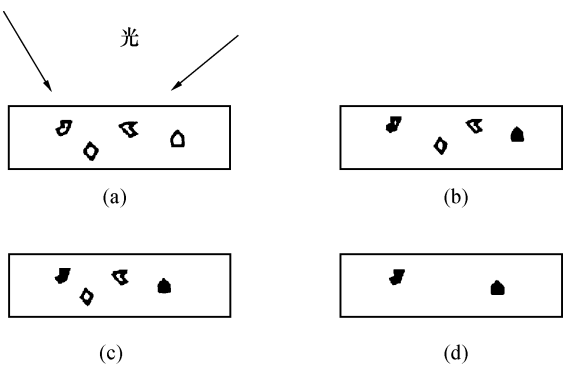


图 9.1.2 照相过程的图示(图中只示出乳胶)
(a) 曝光;(b) 潜像;(c) 显影后;(d) 定影后

9.1.2 *H-D* 曲线

定影时已除去未曝光的卤化银晶粒,而留下金属银.金属银粒在可见光范围内是不透明的,显影定影后的胶片或干板的透过率取决于明胶上银粒的密度分布.

设用 $I_i(x,y)$和 $I_t(x,y)$分别表示投射到胶片上某点(x,y)附近的一个小范围内和透过该小范围内的光强值,该点的阻光率可表示为

$$O(x,y)=\left\langle\frac{I_i(x,y)}{I_t(x,y)}\right\rangle \tag{9.1.1}$$

阻光率 $O(x,y)$也称黑度.当然,阻光率是在一定的面积上测得的,故它是一个局域平均值,用〈 〉表示.胶片上图像的阻光率和透过率 $\tau(x,y)$是对应的,可表示为

$$\tau(x,y)=\frac{1}{O(x,y)}=\left\langle\frac{I_t(x,y)}{I_i(x,y)}\right\rangle \tag{9.1.2}$$

阻光率与银粒在光波的传播方向上的密度有关,略去反射和吸收损失,可用阻光率描述银粒的密

度,称之为光密度,用 D 表示,定义为

$$D = \lg O = \lg \frac{1}{\tau} \tag{9.1.3}$$

实验表明,胶片的光密度 D 既与入射光强 I 有关,也与曝光时间 T 有关.I 和 T 的乘积称为曝光量,用 E 表示,即

$$E = IT \tag{9.1.4}$$

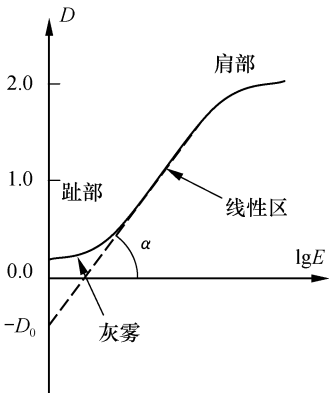


图 9.1.3 负片的 H-D 曲线

照相胶片的感光特性,通常用光密度 D 与曝光量 E 的常用对数表示,即 D-lg$E$ 曲线,称为 H-D 曲线,即赫特(Hurter)-德里菲耳德(Driffield)曲线.图 9.1.3 为一负片的典型 H-D 曲线.当曝光量低于一定水平时,光密度与曝光量无关,并且等于一个极小值,称为灰雾.在曲线的趾部,密度开始随曝光量的对数成线性关系,这一线性区域的斜率称为胶片的 γ 值.最后,曲线在肩部达到饱和,这时随着曝光量的增加光密度基本不变.

H-D 曲线的线性区段是照相术中常用的部分.γ 值大的胶片称为高反差胶片;γ 值小的胶片称为低反差胶片.γ 值的大小与乳剂类型,显影剂种类和显影时间有关.若胶片、显影剂和显影时间选择得当,可相当精确地得到预先指定的 γ 值.

9.1.3 胶片用于非相干光学系统中

在许多应用中,胶片可以看成是一个将曝光时的入射光强分布 I 变换为显影后的透射光强分布 I_t 的元件.这种观点特别适用于把胶片当作非相干光学系统的元件.

设胶片是在线性区段中使用,因而光密度 D 可写成

$$D = \gamma_1 \lg E - D_0 = \gamma_1 \lg(IT) - D_0 \tag{9.1.5}$$

式中,γ_1 是曲线线性区段的斜率,$-D_0$ 是曲线的直线部分的延长线与 D 轴交点的光密度值,下标 1 表示我们讨论的是负片.由(9.1.3)式得

$$\lg \tau_1 = -\gamma \lg(IT) + D_0$$

或

$$\tau_1 = 10^{D_0}(IT)^{-\gamma_1} = K_1 I^{-\gamma_1} \tag{9.1.6}$$

式中,$K_1 = 10^{D_0} T^{-\gamma_1}$ 是正常数.无论 γ_1 取何值,上式给出的负片的强度透过率与曝光光强之间的关系总是非线性的.为了得到线性关系,需要通过接触翻印,得到一张正片,办法是用第一张负片紧贴在另一张未曝光的胶片上,用强度为 I_0 的非相干光照射.第二张胶片上的曝光光强为 $\tau_1 I_0$,它的强度透过率

$$\tau_p = K_2(I_0 \tau_1)^{-\gamma_2} = K_2 K_1^{-\gamma_2} I_0^{-\gamma_2} I^{\gamma_1 \gamma_2} = K_p I^{\gamma_p} \tag{9.1.7}$$

式中,$K_p = K_2 K_1^{-\gamma_2} I_0^{-\gamma_2}$ 是常数.$\gamma_p = \gamma_1 \gamma_2$ 是两个过程的总 γ.显然,只有在 $\gamma_p = 1$ 的特殊情况下,正片的强度透过率与曝光光强才成正比,把它放入非相干系统,就实现了对强度的线性变换.

9.1.4 胶片用于相干光学系统中

在相干光学系统中,复振幅是系统传递的基本量.要求胶片能将曝光期间的入射光强变换成显影后透射光的复振幅,或者使胶片曝光的光波本身是相干光,则要求将曝光期间入射光的复振幅变换成显影后透射光的复振幅.因此,一张透明片必须用其复振幅透过率 t 来描写.当然,最好是把 t 简单地定义成 τ 的平方根值,但这个定义忽略了光波通过胶片时产生的相对相移.这种相

移是由胶片的厚度变化引起的,而厚度的变化,一方面是胶片片基厚度的随机变化,另一方面是厚度随着显影后透明片的银粒密度发生变化.因此,胶片的振幅透过率的完备描述应当写成

$$t(x,y)=\sqrt{\tau(x,y)}\exp[\mathrm{j}\phi(x,y)] \tag{9.1.8}$$

式中,$\phi(x,y)$是胶片引起的相位移动.为了消除相移的影响,利用一个叫液门的器件,该器件由两块光学平板组成,在两块平板之间夹入透明胶片和折射率匹配油,如图 9.1.4 所示.油的折射率必须折衷选择,这是因为,油的折射率不可能同时与片基、乳胶和玻璃的折射率相同.但作适当选择后,可以使通过液门的光程接近常数,这时 $t(x,y)$可以写成

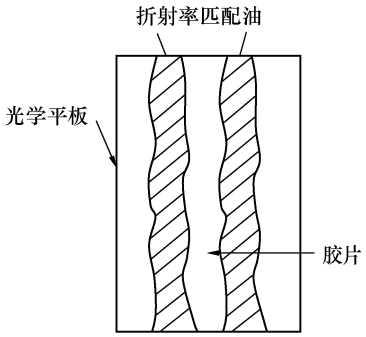


图 9.1.4 消除胶片厚度变化的液门

$$t(x,y)=\sqrt{\tau(x,y)} \tag{9.1.9}$$

对于负片和正片分别利用(9.1.6)和(9.1.7)式,得

$$t_{\mathrm{f}}=k_{\mathrm{f}}I^{-\gamma_{\mathrm{f}}/2}=k_{\mathrm{f}}\,|\,\boldsymbol{u}\,|^{-\gamma_{\mathrm{f}}} \tag{9.1.10}$$

$$t_{\mathrm{p}}=k_{\mathrm{p}}I^{\gamma_{\mathrm{p}}/2}=k_{\mathrm{p}}\,|\,\boldsymbol{u}\,|^{\gamma_{\mathrm{p}}} \tag{9.1.11}$$

式中,$\boldsymbol{u}$是曝光期间入射光的复振幅,$k_{\mathrm{f}}=\sqrt{K_{\mathrm{f}}}$,$k_{\mathrm{p}}=\sqrt{K_{\mathrm{p}}}$.

显然,在两步过程中只要让 $\gamma_{\mathrm{p}}=\gamma_{\mathrm{f}}\gamma_{2}=2$,胶片的复振幅透过率将与曝光光强 I 成线性关系,我们称之为平方律作用.在前面已经讨论过的全息照相和相干光处理以及应用中,我们总是希望胶片能按平方律对复振幅进行变换.

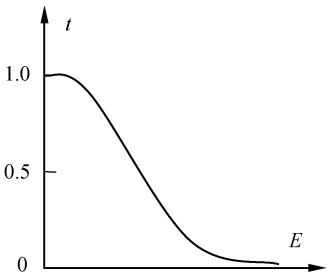


图 9.1.5 负片的 t-E 曲线

事实上,任意 γ 值的正片或负片都能在有限动态范围内得到平方律作用,也就是说,在相干系统中也可以不用 H-D 曲线,而直接用振幅透过率对曝光量的关系曲线(即 t-E 曲线).图 9.1.5 给出了负片的典型复振幅透过率与曝光量的关系曲线.在线性区,有

$$t(x,y)=t_{0}+\beta E(x,y)=t_{0}+\beta' I(x,y) \tag{9.1.12}$$

式中,t_{0} 为常数,β 是曲线的直线区段的斜率,$\beta'=\beta T$.对于负片,β 和 β' 均为负值.

通常情况下,记录时控制好平均曝光量,使胶片偏置到 t-E 曲线最大线性区内的一个工作点上,则在一定动态范围内,将给出入射光强对显影后的振幅透过率的线性变换,即

$$t(x,y)=t_{\mathrm{b}}+\beta(E-E_{\mathrm{b}})=t_{\mathrm{b}}+\beta'\Delta I(x,y) \tag{9.1.13}$$

式中,t_{b} 为偏置透过率,ΔI 表示光强变化量.应当指出,能够得到的最大动态的偏置点,一般都落在相应 H-D 曲线的趾部附近.

9.1.5 调制传递函数

迄今我们都暗中假定,曝光量的任何变化,不论其空间尺度多么精细,都会按照 H-D 曲线的规定转化为银密度的相应变化.但在实践中人们发现,H-D 曲线描述的只是一种理想的情况,若曝光量的变化发生在太小的空间尺度上,它所引起的密度变化可能会远小于 H-D 曲线所规定的.与一般的光学系统一样,胶片作为光场的输入和输出元件,只有一个有限的空间频率响应.

由于曝光时光在乳胶中的散射,以及显影过程中的化学扩散,使乳胶的空间频率响应受到限制.两种现象都是线性的,即光散射对曝光量变量是线性的,化学扩散对密度变量是线性的.人们

可能会希望,能够将限制空间频率响应的线性现象同 *H-D* 曲线固有的高度非线性行为分离开来.事实上这是可以做到的,方法如图 9.1.6 所示,将照相过程看成是由几个单独的变换串接而成,这个串接的第一步操作是一个线性不变滤波,代表的是光散射的效应,产生曝光量图样 E 的扩展或模糊.从这个滤波器出射的 E' 通过 *H-D* 曲线,它被认为具有零扩散的非线性性质,和分析通讯系统时常遇到的零记忆的非线性相似.*H-D* 曲线的输出是密度 D',它又受到化学扩散过程所引起的线性扩展和模糊作用,产生最后的密度 D.这个模型由 D. H. Kelley 首先提出,因而常常叫做"Kelley 模型".这个模型常常被简化为只有一个线性滤波器在 *H-D* 曲线之前,忽略了与扩散有关的线性滤波.

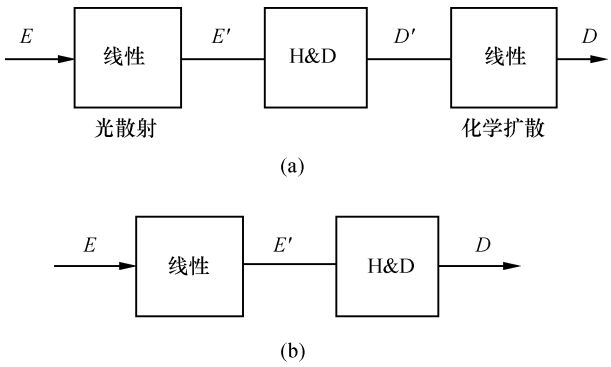


图 9.1.6 照相过程的 Kelley 模型
(a) 完整的模型;(b) 简化模型

线性滤波的效应当然是限制了乳胶的空间频率响应.如果将模型简化为只有一个线性滤波在非线性变换之前(图 9.1.6(b)),那么我们就有兴趣来求这步滤波操作的传递函数,常常将它叫做照相过程的调制传递函数(简称 MTF).可以用一个余弦曝光图样(例如由两个互相相干的平面波在乳胶上生成)

$$E = E_0 + E_1 \cos 2\pi f x \tag{9.1.14}$$

来测量这个线性滤波器的特征.和曝光量有关的"调制"定义为曝光量变化的峰值和背景曝光水平之比,即

$$M_i = \frac{E_1}{E_0} \tag{9.1.15}$$

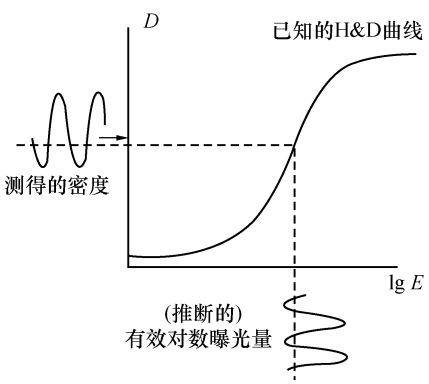


图 9.1.7 通过 *H-D* 曲线来反推有效的曝光量

如果在产生的透明片中测出密度的变化,可以通过 *H-D* 曲线(设为已知)将它们反推为曝光量,得出一个推断的或"有效"的余弦曝光图样,如图 9.1.7 所示.有效曝光量分布的调制 M_{eff} 总是小于真实的曝光量分布的调制 M_i,于是底片的调制传递函数定义如下:

$$M(f) = \frac{M_{\text{eff}}(f)}{M_i(f)}$$

式中强调了对曝光的空间频率的依赖关系.在实际遇到的大多数情况下,散射过程的点扩散函数的形式(近似为高斯型)是圆对称的,而且没有与传递函数相伴的相移.因此,加到底片变换的非线性部分的有效曝光分布可以写成

$$E' = E_0 + M(f)E_1 \cos 2\pi fx \tag{9.1.16}$$

不同乳胶能得到明显响应的频率范围变化很大,依赖于颗粒大小、乳胶厚度和其他因素.举例以明之,Plus-X 胶片有显著的响应大约到 50 线对(周)/毫米为止,而天津 CS-1 型和 Kodak 649F 干板的极限分辨率大于 3000 线对/毫米.一般用于普通照相的胶片,传递函数通常只具有较低的截止频率,而用于全息照相的干板则要求其传递函数具有较高的截止频率.

9.2 空间光调制器

9.2.1 概述

照相胶片技术有很悠久的历史,发展得很完善.然而,将它用于图像处理或信号处理时,照相材料有一个显著的缺点,那就是化学处理所需要的很长的时间滞后.当要处理的数据原本就是照相形式时,可能问题不大,但是,如果信息是在快速收集中(比如用电子手段),人们可能希望在电子信息和数据处理系统之间有一个更直接的界面.由于这个原因,在光学信息处理领域工作的人们开发了大量的器件,它们能将电子形式的数据(或者有时是非相干光形式的数据)转换为空间调制的相干光信号.这种器件叫做空间光调制器(spatial light modulator,简称 SLM).它是一种能对光波的空间分布进行调制的器件.空间光调制器能对光波的某种或某些特性(例如相位、振幅或强度、频率、偏振态等)的一维或二维分布进行空间和时间的变换或调制.换句话说,其输出光信号是随控制(电的或光的)信号变化的空间和时间的函数.

各种 SLM 可以粗分为两类:电写入的 SLM 和光写入的 SLM.在前一种情况,输进系统的信息是电信号,它直接驱动 SLM,方式是控制其吸收或相移的空间分布.在后一种情况,信息一开始可能是以光学图像的形式(例如从阴极射线示波管的显示器),而不是以电子形式输入到 SLM.在这种情况下,SLM 的功能可能是将非相干光图像转化成相干光图像,接着用相干光学系统做下一步处理.一种给定的 SLM 技术常常可能有两种不同的形式,一种适合于电子学寻址,另一种适合于光学寻址.

光学寻址的 SLM 除了快速的时间响应之外,还具有几个关键的性质,这些性质对光学处理系统十分有用.首先,如上所述,它们能够将非相干光图像转换成相干光图像.其次,它们能提供图像增强功能:一个输入到光学寻址的 SLM 的弱的非相干图像可以用一个强的相干光源读出.第三,它们能提供波长转换功能:例如,一幅红外的非相干图像可以用来控制一个可见光波段的器件的振幅透射率.

SLM 不仅用来输入待处理的数据,而且也用来生成可以实时修改的空间滤波器.这时,SLM 放在一个傅里叶变换透镜的后焦面上,按照所要求的复空间滤波来修正透射场的振幅,从而实现实时的光学相关运算.

习惯上,把控制像素的光电信号称为“写入光”,或“写入(电)信号”,把照明整个器件并被调制的输入光波称为“读出光”,经过空间光调制器后出射的光波称为“输出光”.显然,读出光应该能照明空间光调制器的所有像素,并能接收写入光或写入电信号传递给它的信息,经调制或变换转换成输出光.按写入信号工作方式分,可有电写入或光写入.按读出光工作方式分,可有透射式或反射式,如图 9.2.1 所示.

在光学信息处理的历史上,已开发了非常多的不同的 SLM 技术.这些 SLM 包括:(1)液晶 SLM,(2)磁-光 SLM,(3)可变形反射镜 SLM,(4)多重量子阱(MQW)SLM,(5)声-光布拉格调制单元.

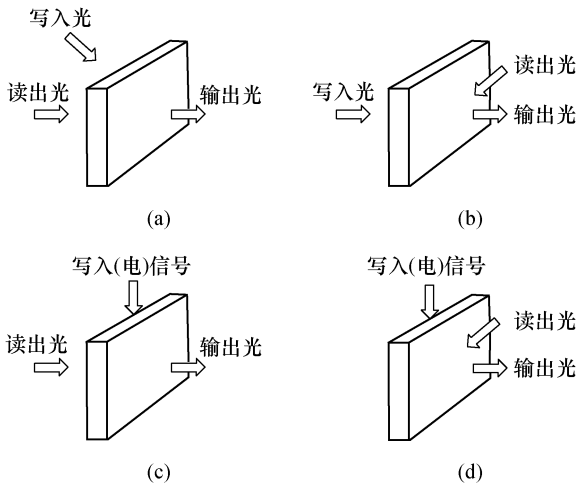


图 9.2.1 空间光调制器输入输出工作方式

(a) 透射式光寻址;(b) 反射式光寻址;(c) 透射式电寻址;(d) 反射式电寻址

9.2.2 液晶光阀

1. 液晶的光电特性

液晶是某些有机高分子物质在一定条件下呈现的一种特殊物质状态,其结构介于液体、固体之间.例如这些物质的分子没有固定的排列,可以自由移动,因而具有液体的流动性,但同时它的分子排列取向又存在一定的规律性,因而又具有晶体的各向异性的特点.把这种介于固相和液相之间的相态称为液晶相.把具有液晶相的物质称为液晶物质,常见的主要是一些有机化合物(例如芳香族化合物)及它们的混合物.这些物质处在液晶相时,就叫做液晶.

光学中普遍感兴趣的液晶有不同的三大类型(或晶相):(1)近晶型,(2)向列型;(3)胆甾型.如图 9.2.2 所示.这些类型的区别在于不同的分子排列次序或者组织约束.对于近晶型液晶,分子也倾向平行排列,但是分子的中心位于互相平行的层内,在层内是随机分布的.对于向列型液晶(NLC),它的整个体积中的所有分子都倾向于平行排列,分子中心在这个体积中随机分布.最后,胆甾型液晶是近晶型液晶的一种扭曲形式,在这种液晶内,分子在不同层内的排列方向绕一个轴作螺旋旋转.空间光调制器主要基于向列型液晶,和一类叫做铁电液晶(FLC)的特殊的近晶型液晶.

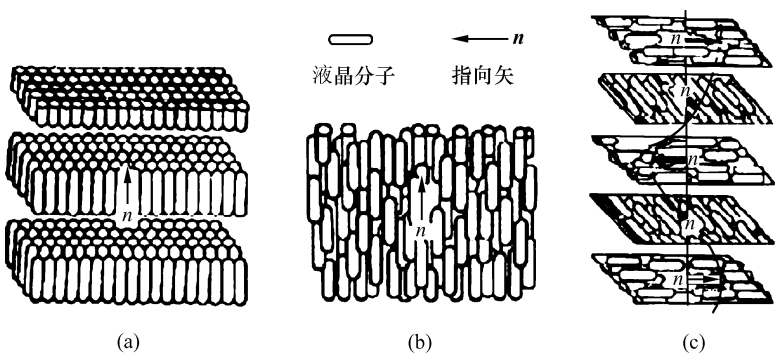


图 9.2.2 液晶分子排列的三种类型

(a) 近晶型;(b) 向列型;(c) 胆甾型

由于液晶分子之间的相互作用力远低于固体分子之间的相互作用力，所以液晶的各向异性在外场的作用下会发生显著的变化，其电、磁、光、力学各向异性远比普通晶体强烈．例如 KDP 晶体的半波电压 9.3kV，BSO 晶体的半波电压 3.9kV，而表征液晶电光效应的特征参数—开关电压略为 5V，比晶体半波电压低三个数量级，这是液晶流动性和各向异性双重特性的综合效果．这一特性，使我们可以把液晶作为调制介质，构成低能耗、低电压的空间光调制器．

2. 光学寻址液晶光阀

硫化镉液晶光阀(LCLV)，是利用液晶混合场效应制成的一种光学寻址空间光调制器，其结构如图 9.2.3 所示．它是一个由多层薄膜材料组成的夹层结构，在两片玻璃基片的里面是两层铟-锡氧化物制成的透明电极．电极里面是硫化镉(CdS)光电导层(厚度为 5～10μm)、锑化镉(CdTe)光阻挡层、介质反射膜和液晶盒．光阻挡层的作用是阻挡左侧的写入光与右侧的读出光相互串扰．液晶层厚度一般取 $d<10\mu m$，很多情况下 d 仅为 $2\mu m$．器件的面积可达 $50\times50mm^2$．

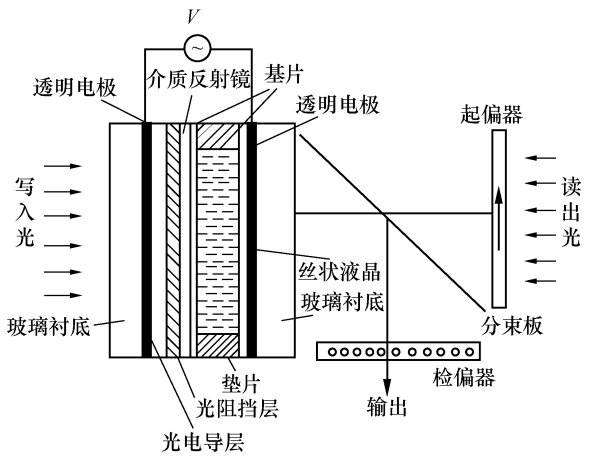


图 9.2.3　硫化镉 LCLV 结构示意图

工作时将待处理的非相干图像从左侧成像在光电导层上，把它作为写入光．读出光束从右侧入射，经起偏器使其偏振方向与液晶右侧分子指向矢方向一致．经透明电极、液晶盒之后，在左侧的介质反射膜处返回，再次穿过液晶层，经偏振分束板后，通过一个透光轴方向与起偏器偏振方向垂直的检偏器，成为输出光束．

加在两透明电极上的外电压，作用在液晶层、反射膜、光阻挡层和光电导层上．由于光阻挡层和反射膜都很薄，交流阻抗很小，外电压主要降落在液晶层和光电导层上．控制液晶电光效应的实际电压值，由光电导层与液晶层的实际阻抗之比来决定，这又取决于光电导层上光照的情况．对写入光图像上的暗区，光电导层上光照很少，电阻很大，外电压主要分配到光电导层上，而液晶层上电压较少，不足以产生有效的电光效应，仍保持 45°扭曲排列结构，则读出光在相应的暗区像素上基本没有受到调制作用，输出光束相应的仍保持较小输出．反之，对写入光图像上照度大的像素区，相应的光电导层阻抗较小，外电压大部分落在液晶层相应像区上，由于混合场效应，使在该区输出光达到最大输出．对于写入光图像上其他照度区域，输出光束中相应像素的输出光强也就介于最大值与最小值之间，这样输出光束的光强空间分布就按照写入光图像的空间分布所调制，显然它实现了非相干/相干光图像转换功能．此外，它还可用作波长转换，图像增强．

混合场效应液晶光阀是一种光学并行寻址器,其优点是输出图像反差高,功耗小,写入图像灵敏高,但这种液晶光阀的空间分辨率还不够高,仅适用于一般的图像处理.硅液晶光阀(Si-LCLV),也是一种光学寻址空间光调制器,它同样是利用液晶的混合场效应工作的,只是用半导体硅(Si)代替硫化镉作为光电导层,并把读出光工作方式改为反射式,这一改进使液晶盒具有更好的"关断状态",从而得到较好的反差;同时,改善了 LCLV 的响应时间.

3. 电寻址液晶光阀

电荷耦和器件寻址液晶光阀(CCD-LCLV)是一种电寻址的空间调制器,其结构如图 9.2.4 所示.它的特点是用 CCD 电路代替了前面介绍的 CdS-LCLV 中的光电导层和光阻挡层,而液晶仍用 45°扭曲液晶盒.

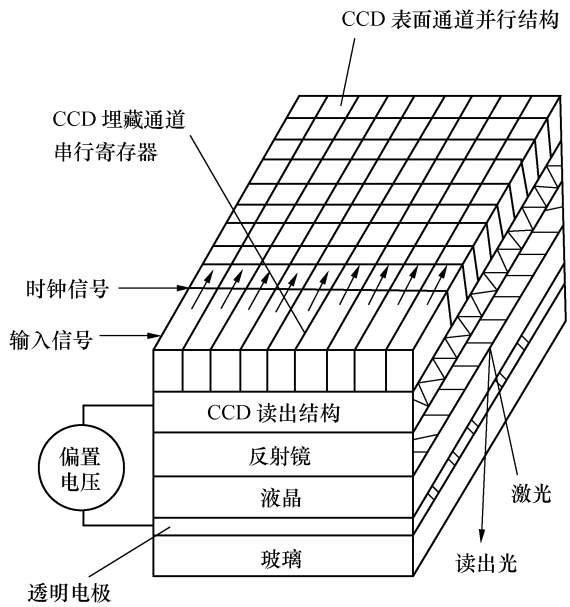


图 9.2.4 CCD-LCLD 结构示意图

CCD 是一种由 MOS 结构单元组成的阵列器件,基本功能是在每个 MOS 结构单元中,都可存储一定数量的电荷(即信息),每个单元中的电荷在时钟脉冲信号控制下,可以依次转移到相邻单元中去(即图中串行寄存器),然后,在时钟脉冲信号控制下,整行转移到相邻的一行中去,多次重复,形成电荷的并行结构(面阵).也就是说,CCD 电路的作用是把一个串行的输入电压信号转变成电荷的二维矩阵分布,从而改变电极上的电压,实现对读出光的二维空间调制.

目前 CCD-LCLV 的工作面积为 $5\times5mm^2$,像元素 512×512,分辨率为 50lp/mm,串行数据写入速率大于 6.5MHz,相当于每秒 100 帧二进制图像,反差为 50∶1.

另一种电学寻址的液晶光阀是矩阵寻址液晶光阀.它的特点是液晶盒基片上透明电极不是整个面上的片状电极,而是由一组平行条带组成的栅状电极,前、后两基片上的电极栅条互相垂直,从而把两组电极间的液晶分割成了按矩阵形式排列的像素.对两组电极上的每条栅条电极施加合适的电压信号,就可以控制液晶像素的透过率,实现空间调制.

铁电液晶(FLC)光阀和表面稳定铁电液晶(SSFLC)光阀,是又一种电学寻址空间光调制器,由于它采用了性能良好的近晶型铁电液晶,使器件的响应速度提高了几个数量级,室温下,上升和下降时间可达 180ns.反差也有很大改善,室温下达 1500∶1.

液晶光阀空间光调制器在光信息处理、光互连及光计算系统中具有多种用途.首先,它可用作输入变换器.例如前面提到的相干光与非相干光的变换、波长变换、串行电信号与并行光信号(或图像)的变换器,或用做输入寻址器.其次,LCLV 还可用于实时变化的光学互连、并行的光学逻辑运算、光学数字运算、光学矩阵运算,进而实现解方程组等有关数学运算.同时,它也可用于图像处理,如边缘增强、图像加减等.

9.2.3 磁光空间光调制器

前面所讨论的 SLM 都是通过电光效应来运作的,其偏振是通过改变跨过器件的电场来旋转的.我们现在来关注另外一种器件,它的运作是通过偏振在外加磁场下旋转,即法拉第效应.我们在这里用简称“MOSLM”,代表磁-光空间光调制器.

MOSLM 由二维阵列的磁-光元素以下述形式组成:它们是在一个透明非磁性背部基底上外延生长的磁性石榴石膜上的一个个孤立的台面.这些石榴石台面对于光线是十分透明的,但是当完全磁化时,由于法拉第效应的结果,它们转动入射光的偏振,转动的方向依赖于台面磁化的方向,当磁化的方向恰巧和光传播的方向一致,线偏振光会以右手螺旋法则转$+\theta_f$,取决于石榴石膜的厚度.而当磁化与传播方向相反,偏振转动$-\theta_f$.因此,和 FLCSLM 一样,MOSLM 是一个有记忆的二进制器件.

像素的磁化方向由两个磁场的组合所控制,一个是由偏置线圈所提供的外磁场,另一个是在每一个像素的角上由行与列的金属电极产生的磁场.图 9.2.5 表示了其结构.绕着像素化的石榴石膜有一个偏置线圈,可以用电流在两个方向(平行于光的传播方向,或者反平行于这个方向)的任一个驱动,从而在两个方向中任一个建立强磁场.此外,用光刻技术将金属导体的行-列矩阵恰当地沉积,以使得行电极和列电极在像素的角上彼此不接触地交叉,两者在垂直方向上用一个绝缘膜相隔开.

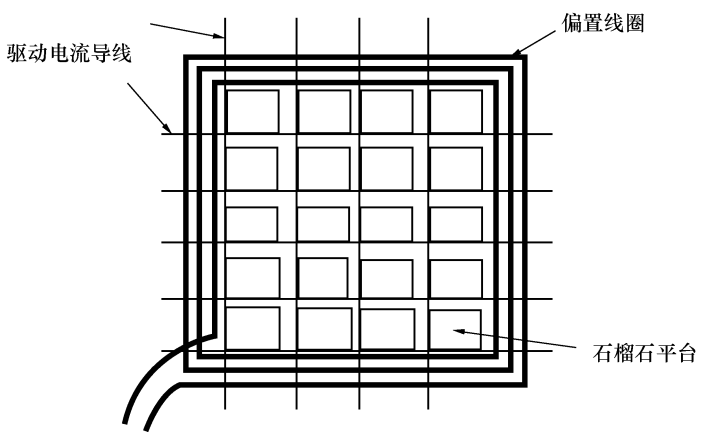


图 9.2.5 MOSLM 器件结构

为改变单独一个像素的状态,下述一系列的运作必须要发生.第一,一定要用电流来驱动偏置线圈以至在要求的磁化方向建立一个强磁场;第二,必须要将电流脉冲加到在所关注的像素相交的行和列电极上,电流的方向必须合适,因此可以建立一个小磁场,集结一个磁域,在像素角上沿所要求的方向磁化.尽管在所选择的行和列上的所有的像素由于电流脉冲而感受到一点磁场,只有在两个电极重叠的地方,才有足够强的磁场可以集结像状态的变化.随着集结场的出现,就引起了像素角上的磁化状态的变化.强偏置场的存在使得这个变化以高速传播跨过整个像素,因而改变了那个台面的磁化状态.

每次只能写入一个像素 .注意 :如果必须要改变两个像素的磁化状态使它们互相相反 ,就必须要用两次写入 ,在改变之间偏置线圈中的电流要反向 .

可以用琼斯(Jones)矩阵帮助定量分析 MOSLM .可以证明 ,法拉第旋转的原因在于被传播的波的左手 -螺旋及右手-螺旋圆偏振的分量感受了不同的折射率 .对于在一个方向的磁场 ,左旋圆偏振的分量感受了 n_1 ,而右旋圆偏振分量感受了 n_2 ,当磁场方向相反时 ,折射率也相反 .从这个事实出发 ,可以证明 ,除了两者共同具有的相位因子之外 ,两个磁场方向下的琼斯(Jones)矩阵就是旋转矩阵

$$L_+ = \begin{bmatrix} \cos\theta_f & -\sin\theta_f \\ \sin\theta_f & \cos\theta_f \end{bmatrix}$$

$$L_- = \begin{bmatrix} \cos\theta_f & \sin\theta_f \\ -\sin\theta_f & \cos\theta_f \end{bmatrix} \tag{9.2.1}$$

当膜的厚度是 d 时 ,旋转角由下式给出

$$\theta_f = \frac{\pi(n_2 - n_1)d}{\lambda_0} \tag{9.2.2}$$

一般情况 ,法拉第转交 θ_f 是很小的 ,因此在器件两个状态之间发生的偏振旋转的总数比 90°小得多 .结果 ,为了将器件用来作为强度调制器 ,输出检偏器方向应该正交于两个转动状态之一的光的偏振方向 .器件的一个状态因此全部关闭 ,而另一个状态部分开启 .当沿 y 轴偏振的光用来作为照明 ,检偏器和 x 轴夹角 $+\theta_f$ 时 ,在“关闭”状态的像素上强度透射率是零 ,而在“开启”状态的强度透射率可以证明是

$$\tau = \eta_0 e^{-\alpha d} \sin^2(2\beta d) \tag{9.2.3}$$

式中 η_0 是起偏 -检偏器组合的合成效率 ,d 是膜厚(微米) ,α 是每微米膜厚的损失 ,β 是每微米膜厚的旋转($\beta d = \theta_f$).因此 ,法拉第转角随着石榴石膜厚度而增加 ,但是与此同时 ,由于吸收的缘故 ,器件的衰减也随着厚度而增加 .因此 ,对于任何一个给定的膜 ,有一个使得在“开启”状态的强度透射率达到最大的优化厚度 .

9.2.4 可变形反射镜空间光调制器

已经报导有多种器件用静电导入的机械形变来调制反射波 .这种器件通常叫做“可形变反射镜器件” ,或 DMD(deformable mirror device) .早期的器件是用连续的薄膜 ,它通过像素化的驱动电极产生电场而变形 .这种 SLM 逐渐演化为可变形镜器件 ,在这种器件中 ,所有分立的悬臂镜通过设置在浮动 MOS(金属氧化物半导体)源上的电压 ,一个个被寻址 ,整个器件集成在硅上 .最近的版本已采用了两个支持点的反射镜 ,它们在外加场下扭转 .

图 9.2.6 表示了薄膜器件和悬臂梁器件 .制作薄膜器件 ,要将镀金属的聚合薄膜拉直覆盖在一个定位格架上 ,格架在膜和地址电极中间构成了一个空气层 .在镀金属的膜上施加负的偏置电

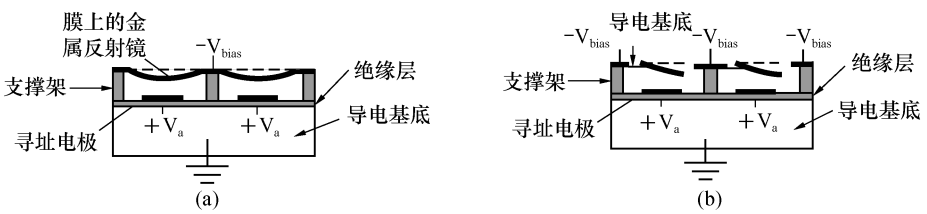


图 9.2.6 可形变镜的像素结构

(a)薄膜 SLM 和(b)悬臂梁 SLM

压.当将一个正电压加到在膜底下的地址电极时,膜在静电力的影响下往下弯.当地址电压移去时,薄膜又回到原来的位置.通过这个方式,引入了相位调制.

悬臂梁器件的结构很不一样.镀金属的梁偏置于一个负电压,通过一个薄的金属铰链连接在一个间隔杆上.当下面的地址电极以正电压激励时,悬臂往下转,尽管还没有远到能接触到地址电极.一束入射光束因此被倾斜的像素偏斜,不能被随后的光学系统收集.这样一来,在每一个像素都引入了强度调制.

最先进的 DMD 结构是以和悬臂梁有关的结构为基础的,但是它用的是一个扭力梁,通过两个点连接,而不是只通过单一的金属铰链.器件的基底是硅,采用大规模集成电路技术,在硅片上制出 RAM,每个存储器有两条寻址电极和两个搭接电极,两个支撑柱上,通过扭臂梁铰链安装一个微型反射镜,形成跷跷板式的结构.反射镜是镀金属的,工作时接负偏置电压.如图 9.2.7 所示.这种器件称为数字微反射镜器件(digital micro-mirror device),缩写也是 DMD,所以它与可形变反射镜器件都统称为 DMD 器件.

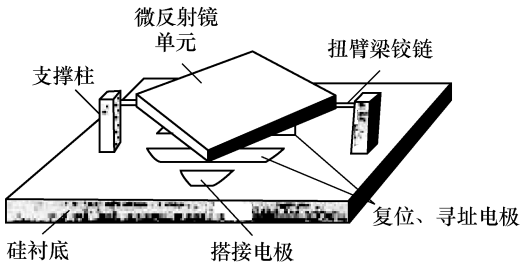


图 9.2.7 悬臂梁 DMD 结构示意图

器件工作时,当一个地址电极用一个正电压所激励时,镜子往一个方向扭转,而当另一个电极激励时,镜子往反方向扭转.在每一个镜元素下面有两个复位电极,设置在偏置电压,因此当反射镜末端扭转到与复位电极相碰时,就不放电.入射到每个像素上的光往反射镜被激励时的两个方向之一而偏转,而当镜子没有被激励时就不偏转.器件既可以在模拟方式工作,即扭转是外加的寻址电压的连续函数,也可以在数字方式工作,这时,器件有两个或三个稳定状态,取决于外加的偏置电压.

这类 SLM 技术的优势是它是以硅为基础,和用在 SLM 像素同样的基底上制作的 CMOS(互补金属氧化硅)驱动器是兼容的.线寻址及帧寻址 DMD 尺寸在 128×128 或更大都已有报导.像素多到 1152×2048 的这类器件已报导,可以用来做高清电视(HDTV)显示.另一个优势是这种器件能在各种波长中工作,在任何一个这种波长,可以用集合起来一起制作的方式做出质量完好的反射镜.

DMD 的所有机构都在硅基片上制备,结构微小,因此微镜的转速极快,光学开关时间为 2 微秒,机械开关时间,包括转动到位而且稳定住的时间约为 15 微秒,因此可用单位时间内的出光光脉冲的个数来显示某个像素的灰度,以实现对光场的真正数字式调制.美国德州仪器公司还研究开发了一套基于 DMD 的数字光处理技术(digital light processing,简称 DLP).数字光处理技术提供了一种基于 DMD 的全新的数字光调制技术,灰度调制的原理可以用图 9.2.8 表示.

对于一个 4 位灰度的图像(16 个灰度等级),相当于场频时间被分成四个单位:1/15、2/15、4/15 以及 8/15 帧长,由此四个单位时间的二进制组合构成 16 个等间隔灰阶.而实际的 DLP 系统均采用 24 位比特(8 位或者 256 灰度/每种颜色)或者 30 位比特(10 位或 1024 灰度/每种颜色).从时间平均的强度而言,DMD 器件的电光特性可以完全看成是线性的,亦即具有一个完全的数字特征的电光响应特性.应用 DMD 芯片可以构成多种投影显示系统,也可以用于非相干光信息处理.由于 DMD 芯片工作在脉冲记数模式,不仅在画面的组成—像素上是一个一个数字的,而且在图像的灰度表现上也是一个一个脉冲记数的,因此,它是完全数字式的空间光调制器.

从光学信息处理的观点来看,DMD 空间光调制器是一个时间变化的空间光调制器,只有在时间平均的意义上才能提供一个稳定的空间光场调制,虽然微镜的开关转速极快,可以作为显示器

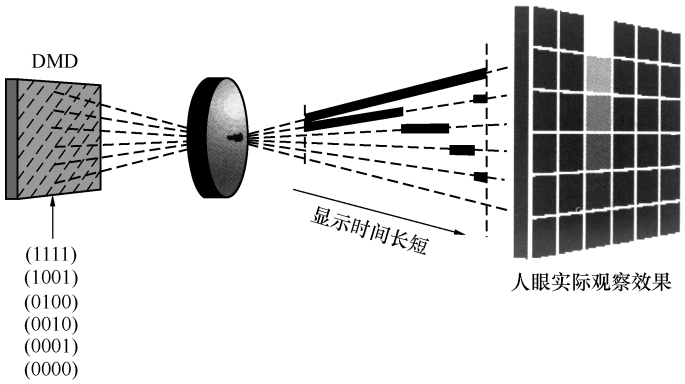


图 9.2.8 DMD 光脉冲产生灰度原理图(4 位灰度)
(注:图中仅中间列有灰度显示)

件和非相干光调制器,但用于相干光处理系统时,这种时间变化的空间光调制器在应用上将受到很大的限制.也就是说,如果将 DMD 用于相干光处理系统,仍有很多问题需要进一步分析和解决.

9.2.5 LCOS 空间光调制器

硅基液晶(liquid crystal on silicon,简称 LCOS)是一种新型的结合了半导体与 LCD 技术的新型空间光调制器.它具有高分辨率、高亮度的特性,加上其产品结构简单,亦具低成本潜力,将是数字投影技术和光学信息处理技术中的新的一类空间光调制器.

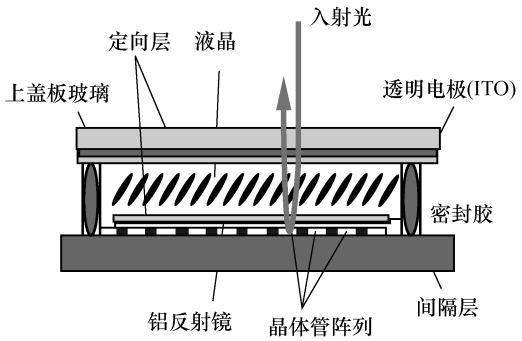


图 9.2.9 LCOS 芯片工作原理

LCOS 芯片是集成在硅基板上的图像芯片.由于硅基板对可见光不透明,所以 LCOS 一般做成反射式的,其工作原理如图 9.2.9 所示.芯片中像素寻址电路集成在硅基板上,上面覆盖镀有透明导电薄膜的玻璃基板,两者之间放置一定厚度的间隔层,并灌装液晶.光线从玻璃基板入射,透过液晶层,到达硅基板上的铝电极,经铝电极反射后再次通过液晶层,出射到芯片外.其中液晶层上的电压由玻璃基板上透明电极(ITO)和硅基板上的铝电极之间电压决定.当硅基板上铝电极电压发生变化时,液晶电压发生变化,由此调制反射光的偏振状态,产生图像.LCOS 芯片的寻址是由 CMOS 管来完成的,由于采用硅作为基板,采用集成电路的制作工艺,可以将 LCOS 驱动电路的部分或全部集成在硅基板上,以简化外驱动板的电路,减少引出电极的个数.

用于投影显示的反射型液晶器件都采用了扭曲向列液晶或电控双折射,因为这些液晶工作模式的光效率较高,对比度较大.它们的光强调制原理如图 9.2.10 所示,其中液晶器件前面放置了一个偏振分束镜(PBS).非偏振光进入 PBS 后,s 偏振光被反射进入液晶显示芯片.当液晶显示芯片上的像素点处于亮态时,s 偏振光通过液晶层以及反射镜的反射后,变成为 p 偏振光.光线沿原光路反射后,通过 PBS 棱镜进入镜头,产生图像.而对于处在暗态的像素点,液晶对入

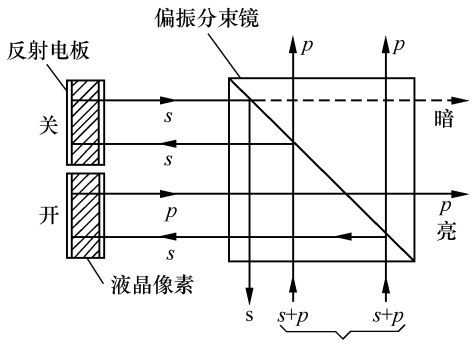


图 9.2.10 LCOS 芯片用于投影显示的原理

射 s 偏振光无调制,因此通过显示芯片反射的 s 光仍被 PBS 反射,无法进入镜头.这种工作模式主要利用了 LCOS 对光场的振幅调制,广泛用于投影显示.

选择适当的结构参数,可使 LCOS 处于相位调制工作模式.纯相位调制器是现代光信息处理的关键器件,例如,在图像识别中用于频谱滤波要比振幅调制器的灵敏度高,假如这种纯相位调制器有足够高的分辨率,则可在一些应用中代替二元光学元件,从而可以克服二元光学元件一次设计和制造只能针对一种特殊的应用,而相位空间光调制器的相位变化是非常灵活的,它可以根据使用场合的要求和变化而随时随地用程序控制的办法改变它的相位分布,进行信息的实时处理.这种 LCOS 面板还可以再现以纯相位编码方式产生的全息图.随着 LCOS 空间光调制器分辨率的提高和芯片尺寸的增大,LCOS 将会在全息和光学信息处理技术中得到越来越多的应用.

9.3 衍射光学元件

目前所用的绝大多数光学仪器使用了折射或反射的光学元件(如透镜、反射镜、棱镜等)来控制光的分布.在某些情况,有可能用衍射元件来替代折射和反射元件,这种改变可以在某些应用中带来相当大的好处.广义地说,基于光波的衍射理论,利用计算机辅助设计,并通过超大规模集成(VLSI)电路制造工艺,在基片上(或传统光学器件表面)刻蚀产生阶梯型或连续浮雕结构,形成同轴再现且具有极高衍射效率的一类光学元件称为衍射光学元件.可以用衍射元件去完成一些常规光学元件很难甚至是不可能实现的功能(比如,一个衍射光学元件可以同时有几个或许多焦点).一般而言,衍射光学元件比对应的折射或反射元件轻得多,占有的体积也小.它们也可能较便宜地制作,在某些情况,可能有优越的光学性能(如较广的视场).这种元件应用的例子包括激光视听盘、激光光束整形、光栅分束器以及在干涉计量测试时的参考元件.

与这些优势共同存在的是,衍射光学元件有一个显著的特点:因为它们以衍射为基础,它们是高度色散的(即波长敏感的).因为这个原因,它们最好用来处理高度单色光的问题.这正是多数相干光学系统的情形.然而,衍射光学可以和折射光学,或者和另外的衍射元件一起用,以至部分地去除它们的色散性质,从而允许它们用在非高度单色光的系统中.

我们在讨论这个主题时,只对一种叫做二元光学的衍射光学构建的方法进行详细的讨论.

9.3.1 微光学与二元光学

微光学(micro optics)这一术语是 1969 年在一家日本杂志上出现的.1981 年,日本微光学研究组织及刊物也应运而生,微光学的名称自此成立.微光学当时主要指梯度折射率光纤和微小物镜,但目前微光学的含义就远不止于此了.微光学是研究微米、纳米级尺寸的光学元器件的设计、制作工艺及利用这类元器件实现光波的发射、传输、变换及接收的理论和技术的新学科.微光学发展的两个主要分支是:(1)基于折射原理的梯度折射率光学;(2)基于衍射原理的二元光学.二者在器件性能、工艺制作等方面各具特色.

微光学是光学与微电子学相互渗透、交叉而形成的前沿学科.光学仪器的微型化及微系统工程的开发迫切要求系统结构及光学元件的微型化,从而诞生了微光学,而微电子技术又为微光学的发展创造了条件.微光学元件包括梯度折射率透镜、微透镜阵列、平板透镜、菲涅耳波带片、微棱镜、远红外带通滤波器、光耦合器、小型衍射光学元件、全息光学元件和二元光学元件等.

二元光学(Binary Optics)这一名称是美国林肯实验室于 1987 年正式提出的,它是在计算全息与相息图制作技术、微电子加工技术发展的基础上,运用光学衍射原理,集几种光学功能于一

体发展起来的一门新兴光学分支,属于微光学范畴,目前已形成独立学科,是 20 世纪 90 年代光学前沿研究领域之一.

二元光学是指基于光波的衍射理论,利用计算机辅助设计和超大规模集成(VLSI)电路制作工艺,在片基上(或传统光学器件表面)刻蚀产生两个或多个台阶深度的浮雕结构,形成纯相位、同轴再现、具有极高衍射效率的一类衍射光学元件.二元光学不仅在改变常规光学元件,变革传统光学技术上具有创新意义,而且能够实现传统光学许多难以达到的目的和功能,因而被誉为 20 世纪 90 年代的光学.二元光学元件除了具有体积小、重量轻、容易复制等明显优点外,还具有以下独特的功能和特点.

1.高衍射效率

二元光学元件是一种纯相位衍射光学元件,为得到高的衍射效率,可做成多相位阶数的浮雕结构.一般使用 N 块模版可得到 $L(=2^N)$ 个阶数,其衍射效率为:$\eta=|\sin(\pi/L)/(\pi/L)^2|$.当 $L=2,4,6,8$ 和 16 时,由此计算得 $\eta=40.5\%,81\%,94.9\%$ 和 98.6%.利用亚波长微结构及连续相位面形,可达到接近 100% 的衍射效率.

2.独特的色散性能

在一般情况下,二元光学元件多在单色光下使用,但正因为它是一个色散元件,具有不同于常规元件的色散特性,故可在折射光学系统中同时校正球差和色差,构成混合光学系统,以常规折射元件的曲面提供大部分的聚焦功能,再利用表面上的浮雕相位波带结构校正像差.这一方法已用于新的非球面设计和温度补偿等技术中.

3.更多的设计自由度

在传统的折射光学系统或镜头设计中只能通过改变曲面的曲率或使用不同的光学材料校正像差,而在二元光学元件中,则可通过波带片的位置、槽宽与槽深及槽形结构的改变产生任意波面,大大增加了设计变量,从而能设计出许多传统光学所不能的全新功能光学元件,这是对光学设计的一次新的变革.

4.宽广的材料可选性

二元光学元件是将二元浮雕面形转移至玻璃、电介质或金属基底上,可用材料范围大;此外,在光学材料的选取中,一些红外材料如 ZnSe 和 Si 等,由于它们有一些不理想的光学特性,故经常被限制使用,而二元光学技术则可利用它们并在相当宽广的波段做到消色差;另外,在远紫外应用中,可使有用的光学成像波段展宽 1000 倍.

5.特殊的光学功能

二元光学元件可产生一般光学元件所不能实现的光学波面,如非球面、环状面、锥面和镯面等,并可集成得到多功能元件;使用亚波长结构还可以得到宽带、大视场、消反射和偏振等特性;此外,二元光学在促进小型化、阵列化、集成化方面的作用更是不言而喻了.

9.3.2 二元光学的产生和发展

光学元件的作用从本质上讲可以说是为了实现所希望的波面转变.例如,不同焦距的球面透镜将平面波转换成不同半径的球面波.多少年来,传统的光学元件的设计都是以几何光学理论为

基础,以磨制和抛光为主要加工手段,无论是球面透镜还是非球面透镜,其表面形状都是连续变化的.元件制造工艺复杂、生产速度慢、效率低、成本高、尺寸大、重量大,制成阵列困难.在当前仪器走向光、机、电集成化趋势中显得极不匹配.

自从全息出现以后,以衍射理论为基础的光学元件得到迅速发展,特别是计算全息的出现,使衍射光学元件的设计有了突破性进展.采用计算全息手段,原则上可以设计产生任何形状的波面元件,这是以前用任何方法都不能做到的.但是计算全息和光学全息一样,一般都使用离轴一级衍射光,而且同时对振幅和相位进行调制,这不仅限制了视场,而且光能利用率也低.可以认为相息图就是早期的二元光学元件,它利用透明体表面浮雕直接改变光波相位,相息图是能实现光波相位作任意转变的纯相位光学元件,是同轴再现,光能利用率极高,但由于工艺长期未能解决,因此进展缓慢,实用受限.二元光学技术则同时解决了衍射元件的效率和加工问题,它以多阶相位结构近似相息图的连续浮雕结构.其浮雕结构从两个台阶发展到多个台阶,直至近似连续分布,但由于其主要制作方法仍基于表面分步成形,每次刻蚀可得到二倍的相位台阶数,故仍称其为二元光学,而且往往就称为衍射光学.

近几年来,随着超大规模集成电路和计算机辅助设计(CAD)以及光刻技术的发展,使制作诸如相息图这种二元光学元件跃上了一个新台阶.二元光学的内容包括对一种特定的衍射光学元件的制作.这种元件以光学衍射理论为基础,采用大规模集成电路的制作工艺,在片基(或传统光学元件)表面刻蚀产生 2 个或 2^N 个光学厚度差相等的台阶分布,它是纯相位型的.具有极高的衍射效率,特征尺寸为光波长数量级.

二元光学元件的相位值是二值或多值的不连续量,按照相位的分等情况,二元光学器件一般分成三种类型,即二值型、多值型与混合型,如图 9.3.1(a),(b),(c)所示.二值型器件的相位只有 0 和 π 两个值,表面起伏与空间周期与光波波长相当,并且在大多数情况下,相位 0 和 π 的占空比是不规则的,按照衍射波面的要求确定其空间分布情况,这种器件的衍射效率低.多值型器件的相位等级在 2π 范围内按 2^N 的形式分等,即多值器件的相位等级可以是 4,8,16,…这类器件的表面台阶深度小于光波波长,空间周期却大于光波波长,可在准单色光下使用,具有很高的同轴衍射效率,对偏振方向也不敏感,具有极高的应用价值.混合型器件是由多值型器件与传统的折射光学器件组合而成.即片基表面做成多值型器,而片基本身做成折射光学元件,如图 9.3.1(c)所示.这种器件的优点除了具有极高的同轴衍射效率和对偏振不敏感外,还可以在宽带

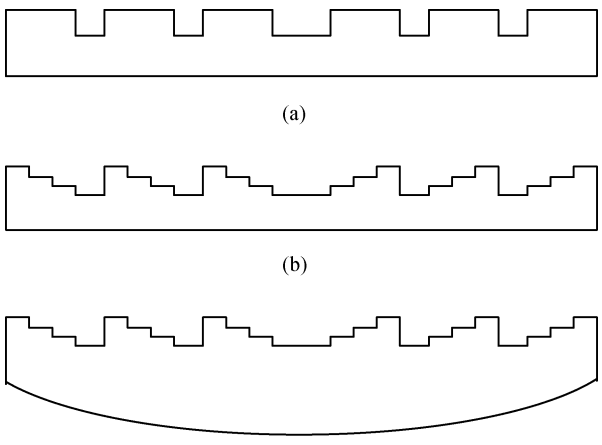


图 9.3.1 几种典型的二元光学器件

(a) 二值型;(b) 多值型;(c) 混合型

光下使用.因为衍射和折射二者的色散作用在一定程度上相互补偿,使得整个器件对波长的变化变得不敏感.因此这类器件应用性能更好,使用范围更广泛.

9.3.3 二元光学元件的设计

二元光学元件的设计理论通常归结为两大类,即标量衍射理论和矢量衍射理论.当二元光学元件上的精细结构的特征尺寸可以与光波长相比较时,标量衍射理论不适用了.此时光波的偏振性质和不同偏振光之间的相互作用对光波的衍射结果起重要作用,必须严格求解麦克斯韦方程组和适当的边界条件来进行二元光学元件的设计.相关的一系列理论已经提出.当衍射结构的横向空间特征尺寸大于光波波长时,光波的偏振特性就不那么重要了,传统的标量衍射理论就可以用来解决二元光学元件的设计问题.

二元光学元件的设计问题十分类似于光学变换系统中的相位恢复问题:已知成像系统中的入射场和输出平面上的光场分布,如何计算输入平面上相位调制元件的相位分布,制作工艺水平的发展和衍射元件应用领域扩大,二元光学元件特征尺寸进一步缩小,其设计理论已逐渐从标量衍射理论向矢量衍射发展.

通常情况下,当二元光学元件的衍射特征尺寸大于光波波长时,可以采用标量衍射理论进行设计.计算全息就是利用光的标量衍射理论和傅里叶光学进行分析的,关于二元光学的衍射效率与相位阶数之间的数学表达式也是标量衍射理论的结果.在此范围内,可将二元光学元件的设计看做是一个逆衍射问题,即由给定的入射光场和所要求的出射光场求衍射屏的透过率函数.基于这一思想的优化设计方法大致有盖师贝格-撒克斯通算法、直接二元算法、模拟退火法和遗传算法,在国内杨国桢和顾本源提出任意线性变换系统中振幅-相位恢复的一般理论和杨-顾算法,并且成功地应用于解决多种实际问题和变换系统中.

图 9.3.2 所示的是由一个折射透镜演变成 2π 模的连续浮雕及多阶浮雕结构表面的二元光学元件过程.由于透镜是大家熟悉的普通光学元件,我们以它为例来阐述二元光学元件设计的基本框架.

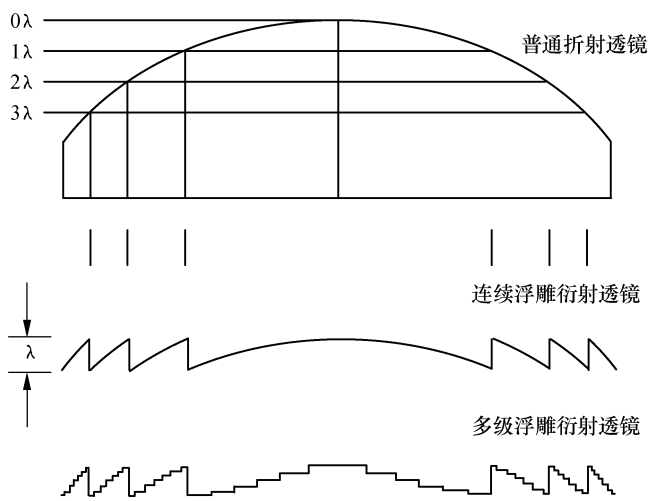


图 9.3.2 折射透镜到二元光学元件浮雕结构的演变

透镜的作用可以当作一个相位变换器,若要求它的焦距为 f,则透镜的相位变换因子

$$t(r)=\exp(\mathrm{j}kn\Delta_0)\exp\left(-\mathrm{j}k\frac{r^2}{2f}\right) \tag{9.3.1}$$

式中，n是折射率，Δ_0是透镜的最大厚度，与(2.6.5)式相比，这里保留了常数相位因子$\exp(jkn\Delta_0)$. 图 9.3.3(a)是普通平凸透镜的截面图，纵坐标 z 表示透镜厚度，横坐标 r 表示透镜口径的半径. 以 2π 为周期的函数 $f(x)$满足 $f(x)=f(x-2m\pi)$.对于(9.3.1)式所表示的透过率，相位函数 $\phi(r)=k\left(n\Delta_0-\frac{r^2}{2f}\right)$ 中，对每一点均把 2π 的整数倍减去，所得结果对光波的作用不变.将图 9.3.3(a)中各点减去 2π 整数倍后的相位分布画在图 9.3.3(b)中，它表示相位改变最大值为 2π 的、分段连续的透镜截面图.用相位差的多个台阶分布来逼近图 9.3.3(b)中的连续相位分布而得到图 9.3.3(c)的离散化相位分布图.它的功能与图 9.3.3(a)所表示的透镜是相同的.

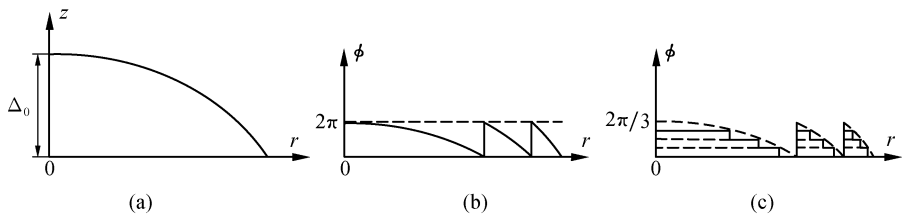


图 9.3.3 透镜二元化过程示意图

连续函数不能用于刻蚀二元光学元件，必须将它二元化变成离散的台阶形分布.如果套刻次数为 N，则 0 到 2π 之间可取的相位值只有 $L=2^N$ 个，相邻台阶之间的相位差为 $2\pi/L$，这个 L 个相位值为 $\phi=2\pi i/L(i=0,1,2,\cdots,L-1)$.例如 $N=3$，最小相位差为 $\pi/4$，能取的相位值为 $0,\pi/4,\pi/2,3\pi/4,5\pi/4,3\pi/2,7\pi/4$. 综上所述，二元光学件的设计，其主要内容是根据对元件功能的要求，给出能用于刻蚀的离散相位分布函数.通常用所谓的连续函数计算方法，根据光学系统的配置，求出需要的相位转换函数

$$H(x,y)=\exp[j\phi(x,y)] \tag{9.3.2}$$

其中，$\phi(x,y)$即为相位调制深度.然后对其二元化，具体作法是：先取出每一个像素单元的中心函数 $\phi(x,y)$，减去 2π 的整数倍，然后根据不同的套刻次数 N，把 L 量级中最接近的一级相位值赋予它即可.

对于二元光学器件来说，一个重要的参数是衍射效率.从连续函数的二元化过程可以看到，套刻次数 N 越大，每个周期中的相位除数 L 越大，二元化后离散相位分布与连续相位分布就越接近.

下面以连续闪耀光栅和量化为 2^N 级的光栅的量化模型为例说明二元光学元件的衍射效率.图 9.3.4 表示了一个具有完好的锯齿周期的理想相位光栅的剖面，也是一个量化为 2^N 级的光栅的量化模型.一个连续闪耀光栅有这样的性质，即如果它引入的峰-峰相位变化正好是 2π 弧度，100% 的入射光将被衍射到单一的第一衍射级.图中与这个光栅近似的二元光学元件是具有

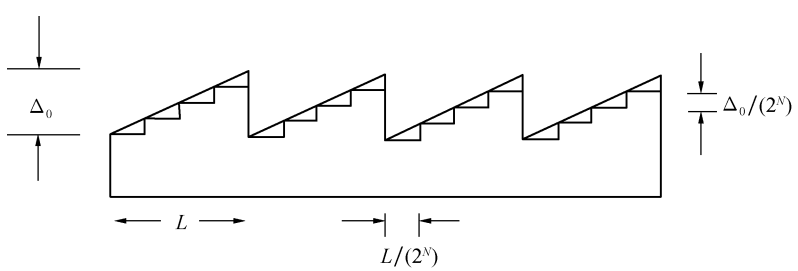


图 9.3.4 闪耀光栅的理想锯齿厚度的剖面以及剖面的二元光学近似($N=2$)

4 个离散级的量化形式 .更为一般的 2^N 量化级可以通过一系列的 N 次曝光以及微切削加工操作来实现 .量化元件的峰 -峰厚度变化是 $(2^N-1)/2^N$ 乘以未量化元件的峰-峰厚度 .

为得到锯齿光栅阶梯式近似的衍射效率可以将它的周期性的振幅透过率展开成傅里叶级数 .计算表明第 q 衍射级的衍射效率可以表达为

$$\eta_q = \operatorname{sinc}^2\left(\frac{q}{2^N}\right)\frac{\operatorname{sinc}^2\left(q-\frac{\phi_0}{2\pi}\right)}{\operatorname{sinc}^2\left(\frac{q-\frac{\phi_0}{2\pi}}{2^N}\right)} \tag{9.3.3}$$

其中 ϕ_0 是连续锯齿光栅的峰 -峰相位差 ,它是和峰 -峰厚度变化 (仍然是连续光栅的)的关系为

$$\phi_0 = 2\pi\frac{\Delta_0(n_2-n_1)}{\lambda_0} \tag{9.3.4}$$

其中 n_2 是基底的折射率 ,n_1 是周围介质的折射率 ,而 λ_0 是光的真空波长 .

引起特别兴趣的情况是当闪耀光栅的量化近似具有峰 -峰相位差为 $\phi_0=2\pi$,代入 (9.3.3) 式 ,得到

$$\eta_q = \operatorname{sinc}^2\left(\frac{q}{2^N}\right)\frac{\operatorname{sinc}^2(q-1)}{\operatorname{sinc}^2\left(\frac{q-1}{2^N}\right)} \tag{9.3.5}$$

此刻让我们只考虑由两个 sinc 函数之比构成的末项 .对于所有除了 1 之外的整数 q ,分子均为零 ,当 $q=1$ 时分子是 1. 分母当 $q=1$ 时也是 1 ,而且除了 $q-1=p2^N$,分母都不是零 (式中 p 是除零之外的任何整数).对于使得分子和分母同时为零的 q 值 ,可以用罗比达法则证明这两项的比率是 1. 因此只有当 $q=p2^N+1$ 时 ,我们所讨论的这一项是 1 ,其他情况是零 .因此 ,衍射效率由下式给出

$$\eta_{(p2^N+1)} = \operatorname{sinc}^2\left(p+\frac{1}{2^N}\right) \tag{9.3.6}$$

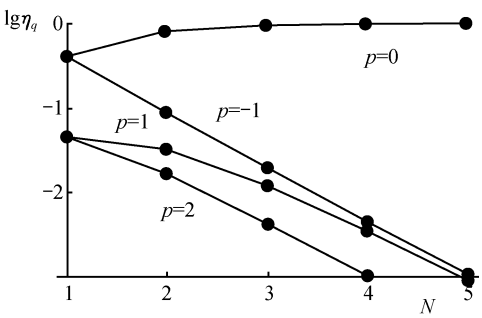


图 9.3.5 锯齿光栅阶梯式近似的不同级的衍射效率

参数 p 决定了特殊的衍射级 ,其级数由 $p2^N+1$ 给出 ,其离散级的数是 2^N

当所用的相位台阶 2^N 增加 ,非零衍射级之间的角间距也增大 ,因为它与 2^N 成比例 .我们感兴趣的级是 +1 级 ($p=0$),其衍射效率是

$$\eta_1 = \operatorname{sinc}^2\left(\frac{1}{2^N}\right) \tag{9.3.7}$$

图 9.3.5 表示了各个非零级衍射效率作为离散级值 (台数)的函数 .可以看到 ,当 N→∞ ,除了 +1 级之外的所有的衍射级均消失了 ,而没有消失的 +1 级的衍射效率趋于 100% ,这和有同样的峰 -峰相位移动的连续闪耀光栅的情况是一致的 .因此 ,连续闪耀光栅的阶梯式近似具有的性质 ,随着阶梯数的增加 ,它的确趋于连续光栅 .

9.3.4 二元光学元件的制作

二元光学元件是用大规模集成电路的光刻技术加工而成的二元化器件 ,其加工技术主要由掩膜制作技术 ,图形曝光技术和图形刻蚀技术组成 .

二元掩膜是通过对掩膜片基上的感光胶进行有控制的曝光和显影获得 .制作掩膜的常规方法是利用半导体微电子加工技术 .例如 ,用电子束扫描仪的电子束曝光技术或图样产生器的快速光学

曝光技术,可以制作出精细结构为 0.25μm 的高质量掩膜.也可以利用商业化的桌面制版技术,通过特殊软硬件、激光打印机以及可缩小的光学照相机,实现快捷而低谦的相当高精度的二元掩膜制作.

二元光学元件制作的第一步是按照计算出的相位分布,制作刻蚀用的二元振幅型掩膜,通常 L 级相位台阶需要设计 N 个掩膜,使 $L=2^N$.接下来是进行光刻,所谓光刻是指图形曝光和图形刻蚀.它先通过图形曝光将掩膜图形精确复制到表面涂有光刻胶的待刻片基上,如图 9.3.6(a)所示.通过显影,使掩膜上通光部分的光刻胶被清除,片基裸露,如图 9.3.6(b)所示.然后在光刻胶的保护下对片基进行刻蚀,当 $N=1$ 时,刻蚀深度 $\lambda/2(n-1)$,如图 9.3.6(c)所示.清除剩余的光刻胶,得到相位台阶为 0,π 的所需的浮雕图形,如图 9.3.6(d)所示.相位空间与掩膜相同.制作高性能的二元光学器件,通常要进行多次这样的刻蚀过程,即套刻.每次光刻掩膜的几何图形都不同,$N=2$ 的四台阶无件工艺流程第一步与图 9.3.6 相同,第二步如图 9.3.7 所示.经过两次套刻以后,得到相位深度为 0,π/2,3π/2 的浮雕结构,其空间分布由两块掩膜决定.经过多次刻蚀,得到锐而细的相位浮雕结构,即二元光学器件.

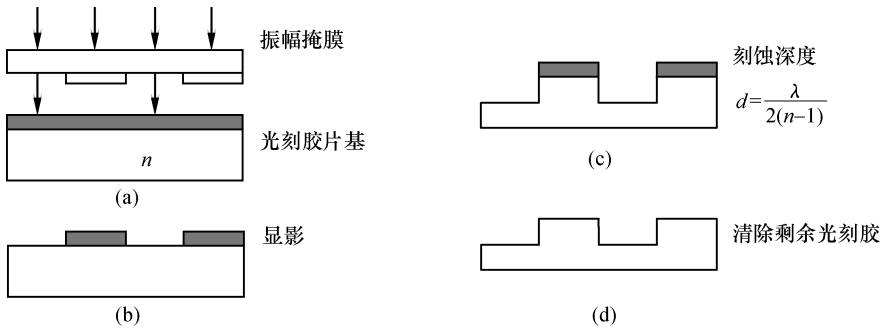


图 9.3.6　二值元件制作过程

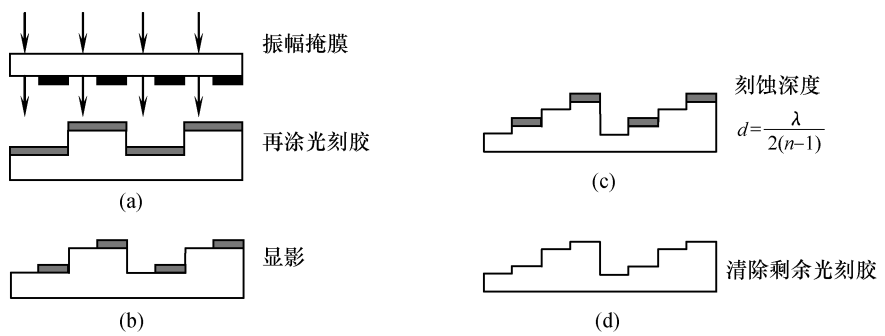


图 9.3.7　四值元件制作过程

习　题

9.1　一个低对比度的强度分布 $I(x,y)=I_0+\Delta I(x,y)$,$|\Delta I|\ll I_0$ 曝光一个照相底板,形成了一个负的透明片,假定 I_0 是固定的,是 H-D 曲线线性区的偏置.证明:当对比度 $\Delta I/I_0$ 是足够低时,通过透明片的对比度分布和曝光量的对比度分布成线性关系.

9.2　两个平面波

$$U_1(x,y)=A\exp(\mathrm{j}2\pi\beta_1 y)$$

$$U_2(x,y)=B\exp(\mathrm{j}2\pi\beta_2 y)$$

之间的干涉记录在一个照相底片上.底片的 MTF 已知,形式为 $M(f)$,它被处理后产生一个伽玛为 −2 的正的透

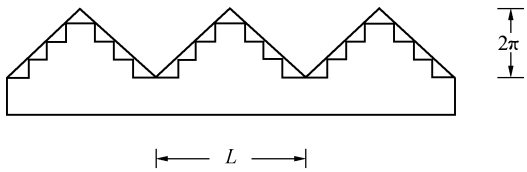
明片.该透明片(大小为 $L\times L$)于是放在一个焦距为 f 的正的透镜前,用一个垂直入射的平面波照明,后焦平面上的强度分布被测出,光波长是 λ.假设,在曝光量的全部区间中有同样的照相的伽马值,画出在后焦平面上光强度的分布,尤其是标出所出现的各种频率分量的相对强度和位置.

9.3 说明光寻址的液晶光阀和电寻址的液晶光阀在结构和工作原理上的区别.

9.4 一个理想的光栅有一个如图题 9.4 中的三角形的曲线所描述的剖面.这个理想的剖面为图示的四级量化光栅的剖面所近似.由连续光栅引入的峰-峰相位的差异正好是 2π 弧度.

(a)求连续光栅的±4、±3、±2、±1 和 0 级的衍射系数.

(b)求量化光栅在同样级的衍射效率.



图题 9.4 理想的和量化的光栅的剖面

第 10 章　相干光学处理

光学信息处理通常有两种分类方法:从物像关系或者输入和输出的关系来说,可分为线性处理与非线性处理,空间不变与空间变处理;从所使用光源的空间和时间相干性来说,可分为相干处理、非相干光处理和白光光学处理.本章按第二种分类方法进行论述,先介绍几种典型的相干光学处理方法.

10.1　图 像 相 减

图像相减可以用于检测两张近似图像之间的差异,使我们能研究事物的变化,例如不同时间拍摄的两张病理照片相减可以发现病情变化;用于军事上则有利于发现基地上新增添的军事设施.图像相减的方法很多,我们介绍光栅编码和光栅衍射两种方法.

10.1.1　空域编码频域解码相减方法

1. 编码

将间距为 x_0,透光部分与不透光部分相等的罗奇光栅贴放在照相底片上,对像进行编码,如图 10.1.1(a)所示.在第一次曝光时,我们记录下乘以光栅透射因子 $t(x)$的像 A.注意到周期函数的傅里叶级数展开公式

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{2n\pi x}{x_0}\right)+b_n\sin\left(\frac{2n\pi x}{x_0}\right)\right]$$

其中:

$$a_0=\frac{2}{x_0}\int_0^{x_0}f(x)\mathrm{d}t$$

$$a_n=\frac{2}{x_0}\int_0^{x_0}f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{x_0}\right)\mathrm{d}x$$

$$b_n=\frac{2}{x_0}\int_0^{x_0}f(x)\sin\left(\frac{2n\pi x}{x_0}\right)\mathrm{d}x$$

$t(x)$可由下式给出:

$$t(x)=\frac{1}{2}\left\{1+\frac{4}{\pi}\left[\sin\left(\frac{2\pi x}{x_0}\right)+\frac{1}{3}\sin\left(3\,\frac{2\pi x}{x_0}\right)+\cdots\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2}[1+R] \qquad (10.1.1)$$

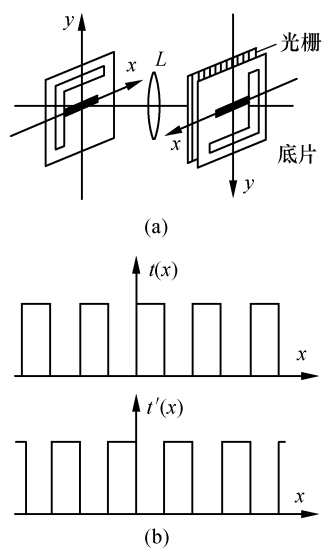


图 10.1.1　光栅编码图像相减

(a)编码光路;(b) 光栅透射因子

第二次曝光时,将光栅平行移动半个周期,这时光栅透射因子 $t'(x)$为

$$t'(x)=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{4}{\pi}\left[\sin\left(\frac{2\pi x}{x_0}\right)+\frac{1}{3}\sin\left(3\,\frac{2\pi x}{x_0}\right)+\cdots\right]\right\}=\frac{1}{2}[1-R] \qquad (10.1.2)$$

于是得到乘以光栅透射因子 $t'(x)$的第二个像 B.两次曝光时的光栅位置互补,如图 10.1.1(b)所示.设图像 A 和图像 B 的光强分别为 I_A 和 I_B,于是照相底片上的曝光量

$$H\propto I_A\left[\frac{1}{2}(1+R)\right]+I_B\left[\frac{1}{2}(1-R)\right]=\frac{1}{2}(I_A+I_B)+\frac{1}{2}(I_A-I_B)R$$

上式的物理意义明显,在图像 A 和图像 B 相同的部分得到一张普通的负片,在图像 A 和图像 B 不同的部分得到一张其差值受光栅调制的负片.

2. 解码

解码光路采用常规的 $4f$ 系统,将调制片置于输入平面上,假定图像的频率低于光栅频率,使用高通滤波器,阻止相应于 I_A+I_B 的谱的低频部分通过,而容许相应于 $(I_A-I_B)R$ 的谱高频成分通过.在输出平面上我们只得到 $(I_A-I_B)R$ 项,实现了图像相减.它显示出两个图像不同的区域,这些区域在暗背景上出现光亮.

采用这种空域编码的方法,使图像和与图像差的信息分别受到光栅零频和较高频率的调制,在空间频域上实现了和、差信息的信道分离,因此通过频域滤波,可以单独提取图像 A 和 B 的差异.空域编码和频域解码是相干光学信息处理中的一种基本技术,它不仅可以用于图像相减,还可以用于其他的图像运算.

10.1.2 正弦光栅滤波器相减方法

图 10.1.2 是用于图像相减的 $4f$ 系统.将正弦光栅置于频谱平面位置,并忽略光栅的有限尺寸,则滤波函数可以写为

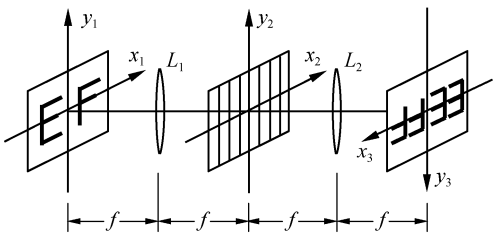


图 10.1.2 光栅滤波图像相减

$$\begin{aligned}H(\xi,\eta)&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\pi\xi_0 x_2+\phi_0)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\exp[\mathrm{j}(2\pi\xi_0 x_2+\phi_0)]\\&\quad+\frac{1}{4}\exp[-\mathrm{j}(2\pi\xi_0 x_2+\phi_0)]\end{aligned}\tag{10.1.3}$$

式中,$\xi=x_2/\lambda f$,$\eta=y_2/\lambda f$;f 是透镜焦距;ξ_0 是光栅频率;ϕ_0 表示初相位,它决定了光栅相对于坐标原点的位置.图像 A 和 B 在 $4f$ 系统物面上,沿 x_1 方向相对原点对称放置,其中心点与原点的距离为 $b=\lambda f\xi_0$,输入场分布可表示为

$$\boldsymbol{f}(x_1,y_1)=\boldsymbol{f}_A(x_1-b,y_1)+\boldsymbol{f}_B(x_1+b,y_1)\tag{10.1.4}$$

则入射到光栅上的光场复振幅是上式的傅里叶变换,即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(\xi,\eta)&=\boldsymbol{F}_A(\xi,\eta)\exp(-\mathrm{j}2\pi b\xi)+\boldsymbol{F}_B(\xi,\eta)\exp(\mathrm{j}2\pi b\xi)\\&=\boldsymbol{F}_A(\xi,\eta)\exp(-\mathrm{j}2\pi\xi_0 x_2)+\boldsymbol{F}_B(\xi,\eta)\exp(\mathrm{j}2\pi\xi_0 x_2)\end{aligned}\tag{10.1.5}$$

经光栅滤波后的频谱为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(\xi,\eta)\boldsymbol{H}(\xi,\eta)&=\frac{1}{4}[\boldsymbol{F}_A(\xi,\eta)\exp(\mathrm{j}\phi_0)+\boldsymbol{F}_B(\xi,\eta)\exp(-\mathrm{j}\phi_0)]\\&\quad+\frac{1}{2}[\boldsymbol{F}_A(\xi,\eta)\exp(-\mathrm{j}2\pi\xi_0 x_2)+\boldsymbol{F}_B(\xi,\eta)\exp(\mathrm{j}2\pi\xi_0 x_2)]\\&\quad+\frac{1}{4}\{\boldsymbol{F}_A(\xi,\eta)\exp[-\mathrm{j}(4\pi\xi_0 x_2+\phi_0)]+\boldsymbol{F}_B(\xi,\eta)\exp[\mathrm{j}(4\pi\xi_0 x_2+\phi_0)]\}\end{aligned}\tag{10.1.6}$$

P_3 平面上输出场的分布是上式的逆傅里叶变换

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}(x_3,y_3)&=\frac{1}{4}\exp(\mathrm{j}\phi_0)+[\boldsymbol{f}_A(x_3,y_3)]+[\boldsymbol{f}_B(x_3,y_3)\exp(-\mathrm{j}2\phi_0)]\\&\quad+\frac{1}{2}[\boldsymbol{f}_A(x_3-b,y_3)+\boldsymbol{f}_B(x_3+b,y_3)]\\&\quad+\frac{1}{4}[\boldsymbol{f}_A(x_3-2b,y_3)\exp(-\mathrm{j}\phi_0)+\boldsymbol{f}_B(x_3+2b,y_3)\exp(\mathrm{j}\phi_0)]\end{aligned}\tag{10.1.7}$$

当光栅的初相位 $\phi_0=\pi/2$,即光栅偏离光轴 1/4 周期时,因子 $\exp(-j2\phi_0)=-1$,上式中的第一项表明,在 P_3 平面中心部位实现了图像相减.

光栅滤波器的作用还可以通过系统的脉冲响应来理解.当 $\phi_0=\pi/2$ 时,滤波系统的脉冲响应为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}(x_3,y_3)&=F\{H(f_x,f_y)\}\\&=\frac{1}{2}\delta(x_3,y_3)+\frac{1}{4}j\delta(x_3+b,y_3)-\frac{1}{4}j\delta(x_3-b,y_3)\end{aligned}\tag{10.1.8}$$

当图像 A 和 B 按前述在物平面对称放置时,输出平面上的复振幅是输入图像的几何像与系统脉冲响应的卷积

$$\boldsymbol{g}(x_3,y_3)=\boldsymbol{f}(x_3,y_3)*\boldsymbol{h}(x_3,y_3)$$

图 10.1.3 表示了输入、输出与光栅滤波系统脉冲响应的关系.图中用 Re 和 Im 复平面来表示输入与输出脉冲响应的复振幅分布,以便对(10.1.8)式中后两项的方向相反有更深入的理解.

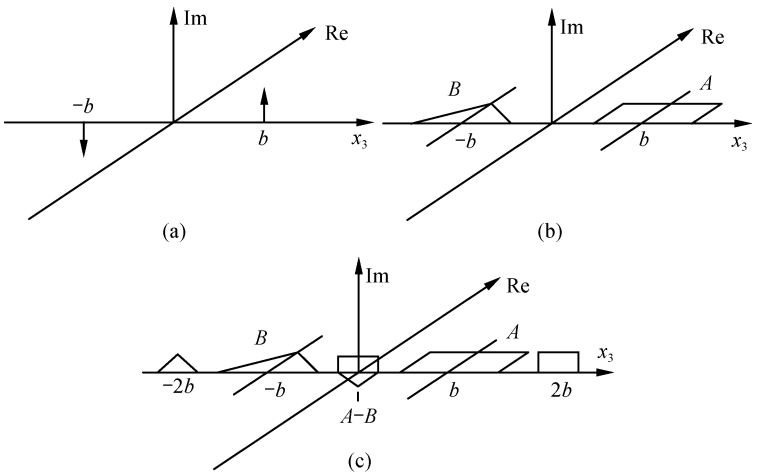


图 10.1.3　光栅滤波系统的输入、输出及脉冲响应

(a) 脉冲响应;(b) 输入;(c) 输出

通过以上分析,我们可以了解到光栅滤波器在图像相减过程中的作用.从频域看,它使通过频谱面的信息沿三个不同的方向传播,使沿+1 级衍射的图像 A 的信息与沿 −1 级衍射的图像 B 的信息在输出平面相干叠加.由于沿±1 级传播的衍射光相位差 π,因此在输出平面上实现了图像相减.从空域看,光栅滤波系统提供了一对大小相等、相位相反,但空间位置不同的两个脉冲响应,即(10.1.8)式中的后两项.当图像 A 相对于其中一个的卷积像与图像 B 相对于另一个卷积像重合时,在输出平面上实现了图像相减.A 与 B 在输入平面上放置的位置,正是为了保证两个卷积像的相干叠加.空域分析法和频域分析法是等价的.

10.2　匹配滤波与图像识别

10.2.1　匹配空间滤波器

相干光学处理还能作两个函数的卷积运算和相关运算.由于这两种方法极为相似,也由于相关运算能直接用于图像识别(特征识别),本节主要介绍匹配滤波器和相关图像识别.

函数 $\boldsymbol{s}(x,y)$和 $\boldsymbol{f}(x,y)$的卷积运算和相关运算分别定义为

$$\boldsymbol{s}(x,y)*\boldsymbol{f}(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{s}(\alpha,\beta)f(x-\alpha,y-\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$

$$\boldsymbol{s}(x,y)\star\boldsymbol{f}(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{s}^{*}(\alpha,\beta)f(x+\alpha,y+\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$

如果把相关运算用卷积表示,则有

$$\boldsymbol{s}(x,y)\star\boldsymbol{f}(x,y)=\boldsymbol{s}^{*}(-x,-y)*\boldsymbol{f}(x,y)$$

空域中两个函数的卷积运算在频域中对应于相乘运算,若要对 $\boldsymbol{s}(x,y)$和 $\boldsymbol{f}(x,y)$进行卷积运算,可先用全息方法制作 $\boldsymbol{s}(x,y)$的频谱函数 $\boldsymbol{S}(\xi,\eta)$,然后把 $\boldsymbol{f}(x,y)$作为 $4f$ 系统的输入函数,把 $\boldsymbol{S}(\xi,\eta)$作为滤波函数 $\boldsymbol{H}(\xi,\eta)$,在频谱面上的复振幅分布为 $\boldsymbol{H}(\xi,\eta)\boldsymbol{F}(\xi,\eta)=\boldsymbol{S}(\xi,\eta)\boldsymbol{F}(\xi,\eta)$,输出面上的分布则为 $\boldsymbol{s}(x,y)*\boldsymbol{f}(x,y)$.对于作相关运算,可根据相关运算和卷积运算的关系,只需制作具有如下透过率的滤波器

$$\boldsymbol{H}(\xi,\eta)=F[\boldsymbol{s}^{*}(-x,-y)]=\{F[\boldsymbol{s}(x,y)]\}^{*}=\boldsymbol{S}^{*}(\xi,\eta)$$

将 $\boldsymbol{f}(x,y)$放在 $4f$ 系统的输入面上,$\boldsymbol{H}(\xi,\eta)=\boldsymbol{S}^{*}(\xi,\eta)$放在频谱面上,则输出面上得到的分布为

$$\boldsymbol{S}^{*}(-x,-y)*\boldsymbol{f}(x,y)=\boldsymbol{s}(x,y)\star\boldsymbol{f}(x,y)$$

一般 $\boldsymbol{H}(\xi,\eta)=\boldsymbol{S}^{*}(\xi,\eta)$称为 $\boldsymbol{s}(x,y)$的匹配滤波器.

如果一个空间滤波器的复振幅透过率 $\boldsymbol{H}(\xi,\eta)$与输入信号 $\boldsymbol{s}(x,y)$的频谱 $\boldsymbol{S}(\xi,\eta)$共轭,即

$$\boldsymbol{H}(\xi,\eta)=\boldsymbol{S}^{*}(\xi,\eta)$$

则这种滤波器称为匹配空间滤波器,亦称匹配滤波器.当信号 $\boldsymbol{s}$ 在输入平面上出现时,则由匹配滤波器所透过的光场分布的特性,可以深入理解匹配滤波的本质.图 10.2.1 是匹配滤波操作的原理示意图.假定信号频谱可以表示为

$$\boldsymbol{S}(\xi,\eta)=|\boldsymbol{S}(\xi,\eta)|\exp[\mathrm{j}\phi(\xi,\eta)]$$

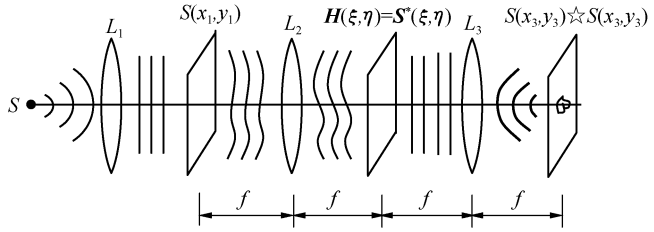


图 10.2.1 匹配滤波操作的光学解释

则根据定义,匹配滤波器函数可以表示成

$$\boldsymbol{H}(\xi,\eta)=|\boldsymbol{S}(\xi,\eta)|\exp[-\mathrm{j}\phi(\xi,\eta)]$$

信号频谱经过匹配滤波器后变为 $|\boldsymbol{S}(\xi,\eta)|^{2}$,这个量完全是实数,这意味着滤波器完全抵消了入射波前 $\boldsymbol{s}$ 的全部弯曲.于是透射场是一个振幅加权但相位均匀的平面波前,这一平面波前继续向前传播,在输出平面上产生信号的自相关光斑.显然,所谓“匹配”,实质上是在频域对输入信号频谱的相位补偿,形成平面相位分布.匹配空间滤波器在光学特征识别问题中起着重要作用,即可以根据输出平面是否出现自相关峰值以及它的位置,判断输入信号中是否存在待识别信号及其在输入平面上的位置.

匹配滤波器是复数滤波器,可以用光学全息或计算全息的方法制作.

10.2.2　用全息制作复数滤波器

复数滤波器的记录光路如图 10.2.2 所示，实际上就是制作一张傅里叶变换全息图.透镜 L_1 使点光源 S 发出的光准直，一部分光照射模片 P_1，其复振幅透过率等于所需要的脉冲响应 $\boldsymbol{h}$，透镜 L_2 对振幅分布 $\boldsymbol{h}$ 进行傅里叶变换，在胶片上产生一个分布 $\boldsymbol{H}(\xi,\eta)$.另一部分准直光从模片 P_1 之上通过，经过棱镜 P_2 后以角度 θ 入射到胶片上.这种用于相干光学处理的频率平面掩模新方法是 A. B. VanderLugt 在 1963 年提出的，因此这样的复数滤波器也称为 VanderLugt 滤波器.在线性记录条件下，胶片的复振幅透过率正比于曝光光强，即

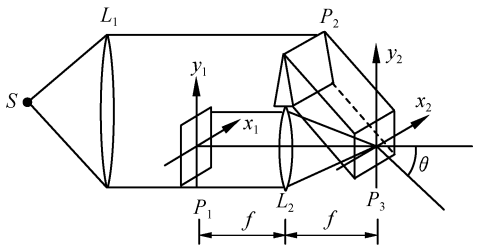


图 10.2.2　全息滤波器记录光路

$$\begin{aligned}\boldsymbol{t}(\xi,\eta)&\propto|\boldsymbol{H}(\xi,\eta)+A\exp(-\mathrm{j}2\pi b\eta)|^2\\&=A^2+|\boldsymbol{H}(\xi,\eta)|^2+A\boldsymbol{H}^*(\xi,\eta)\exp(-\mathrm{j}2\pi b\eta)+A\boldsymbol{H}(\xi,\eta)\exp(\mathrm{j}2\pi b\eta)\end{aligned}\tag{10.2.1}$$

式中：$\xi=x_2/\lambda f$，$\eta=y_2/\lambda f$，$b=f\sin\theta$.公式中的第三、第四项表明，这种全息图中包含了所需的滤波函数 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{H}^*$.在综合出频率平面模片之后，就可以将其插入 $4f$ 系统的频率平面.如果输入平面上的物函数是 $\boldsymbol{f}(x_1,y_1)$，那么 P_3 平面上的复振幅分布为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}(x_1,y_1)&=F^{-1}\{\boldsymbol{F}(\xi,\eta)\boldsymbol{t}(\xi,\eta)\}\\&\propto F^{-1}\{A^2\boldsymbol{F}(\xi,\eta)+\boldsymbol{F}(\xi,\eta)|\boldsymbol{H}|^2+A\boldsymbol{F}(\xi,\eta)\boldsymbol{H}^*(\xi,\eta)\exp(-\mathrm{j}2\pi b\eta)\\&\quad+A\boldsymbol{F}(\xi,\eta)\boldsymbol{H}(\xi,\eta)\exp(\mathrm{j}2\pi b\eta)\}\\&=A^2\boldsymbol{f}(x_3,y_3)+\boldsymbol{f}(x_3,y_3)*\boldsymbol{h}(x_3,y_3)\☆\boldsymbol{h}(x_3,y_3)+A\boldsymbol{f}(x_3,y_3)\☆\boldsymbol{h}(x_3,y_3)\\&\quad*\delta(x_3,y_3-b)+A\boldsymbol{f}(x_3,y_3)*\boldsymbol{h}(x_3,y_3)*\delta(x_3,y_3+b)\end{aligned}\tag{10.2.2}$$

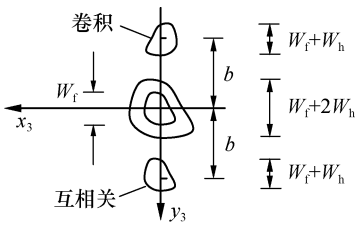


图 10.2.3　采用全息滤波器的系统的各项输出位置

上式中的第三和第四项在 P_3 平面上给出了 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{h}$ 的互相关和卷积，其中心坐标为 $(0,\pm b)$.式中的第一项和第二项在通常的滤波运算中没有什么特别的用途，其中心坐标在 (x_3,y_3) 平面原点上.显然，如果参考光倾角足够大，那么卷积项和互相关项将与中心项充分分离，从而避免相互影响.为了定量说明对参考光倾角的要求.考虑图 10.2.3 所示的各个输出项的宽度.假定 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{h}$ 沿 y_3 方向的最大宽度为 W_f 和 W_h，(10.2.2)式中前两项沿 y_3 方向宽度为 W_f 和 W_f+2W_h，相关项和卷积项的宽度都是 W_f+W_h.由图可以清楚地看出，若 $\alpha>\left(\frac{3}{2}W_h+W_f\right)/\lambda f$，即参考光倾角(取小角度近似，$\sin\theta\approx\theta$)

$$\theta>\left(\frac{3}{2}\frac{W_h}{f}+\frac{W_f}{f}\right)$$

则各项将会完全分离.

尽管滤波器模片是单个的吸收模片，但在其透过的光场中包含了可分离的复值滤波函数，从而解决了制作匹配空间滤波器的困难.另一方面，想要得到一个指定的脉冲响应时，不必去求所需的传递函数，而是通过综合频率平面模片的系统，用光学方法直接综合出所需的 $\boldsymbol{H}$ 或 $\boldsymbol{H}^*$.

10.2.3 图像识别

图像识别是指检测和判断图像中是否包含某一特定信息的图像.例如,从许多指纹中鉴别有无某人的指纹;从许多文字中找出所需的文字;在病理照片中识别出癌变细胞等等.采用匹配滤波器进行相关检测,是图像识别的一种重要手段.

假定基准图像为 $\boldsymbol{s}(x_1,y_1)$,制作匹配空间滤波器时要求滤波函数 $\boldsymbol{H}(\xi,\eta)\propto\boldsymbol{S}^*(\xi,\eta)$,将此匹配空间滤波器置于 $4f$ 系统的谱面,在输入平面放置待识别的图像 $\boldsymbol{f}(\xi,\eta)$,如果待识别图像中包含基准图像和相加性噪声,则

$$\boldsymbol{f}(x_1,y_1)=\boldsymbol{s}(x_1,y_1)+\boldsymbol{n}(x_1,y_1)$$

其频谱为

$$\boldsymbol{F}(\xi,\eta)=\boldsymbol{S}(\xi,\eta)+\boldsymbol{N}(\xi,\eta) \tag{10.2.3}$$

再经过滤波和逆傅里叶变换,则在输出平面上的复振幅分布

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}(x_3,y_3)&=\boldsymbol{f}(x_3,y_3)\text{☆}\boldsymbol{s}(x_3,y_3)\\&=\boldsymbol{s}(x_3,y_3)\text{☆}\boldsymbol{s}(x_3,y_3)+\boldsymbol{n}(x_3,y_3)\text{☆}\boldsymbol{s}(x_3,y_3)\end{aligned} \tag{10.2.4}$$

式中,第一项是较强的自相关输出,在输出平面上产生一个亮点,亮点的位置与待识别图中包含的基准图像的位置对应;第二项是噪声与信号的互相关,能量比较弥散.因此,可根据输出平面是否出现自相关亮点,判断输入图像中是否包含待识别的信号.

用全息制成的匹配滤波器,如公式(10.2.1)表示的那样,除了包含所需的滤波函数 $\boldsymbol{H}^*$ 外,还有其余三项,它们在输出平面上所对应的输出,在相关识别问题中没有什么特别的用途,又与我们感兴趣的相关输出在空间上是分离的,我们就不去讨论了.

现在考虑一个更一般的图像识别问题:一个处理系统的输入 $\boldsymbol{g}$ 可以是 N 个可能的字符 $\boldsymbol{s}_1$,$\boldsymbol{s}_2$,…,$\boldsymbol{s}_N$ 之一,要由相干光学识别机来确定到底出现哪个具体字符.图 10.2.4 是识别机的方框图,输入同时(或依次地)被加到传递函数分别为 $\boldsymbol{S}_1^*$,$\boldsymbol{S}_2^*$,…,$\boldsymbol{S}_N^*$ 的 N 个匹配滤波器上,考虑到各个字符的能量一般不相等,故每个滤波器的输出要用各自所匹配字符总能量的平方根值来规范化.最后对各个输出的模的平方 $|\boldsymbol{V}_1|^2$,$|\boldsymbol{V}_2|^2$,…,$|\boldsymbol{V}_N|^2$ 进行比较,如果输入平面上是第 k 个特定字符 $\boldsymbol{g}(x,y)=\boldsymbol{s}_k(x,y)$,可以证明,特定的输出 $|\boldsymbol{V}_k|^2$ 将是 N 响应中最大的.因此,这种相干光学识别机可以辨认一组可能的字符中究竟是哪一个字符实际输入到系统中.

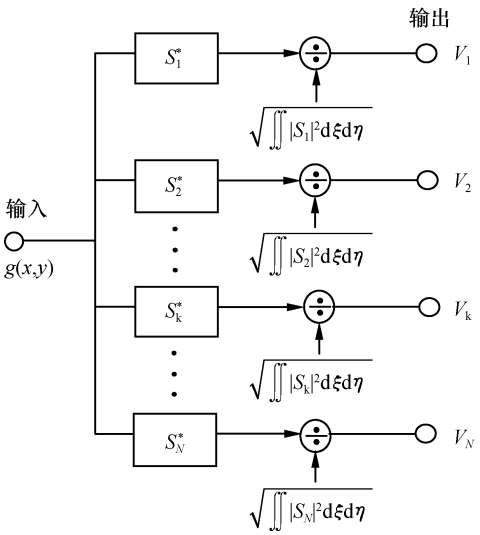


图 10.2.4 字符辨认系统的方框图

为了实现图 10.2.4 所示的匹配滤波器组,可以采用两种方法.一种方法是综合出 N 个分离的全息滤波器,而将输入依次加到滤波器上.另一种方法是把整个滤波器组综合在一个单独频率平面模片上,即用不同的载波频率将每个滤波器记录在同一张透明片上.由于胶片动态范围的限制,N 不能太大.图 10.2.5(a)是记录多路滤波器的一种方法,字母 Q,W 和 P 相对于参考光成不同角度,因此 Q,W 和 P 与输入字符的互相关出现在离原点不同的距离上,如图 10.2.5(b)所示.

从识别的目的来看,匹配滤波并不是唯一的,甚至也不是最好的方法,实际上在某些情况下,

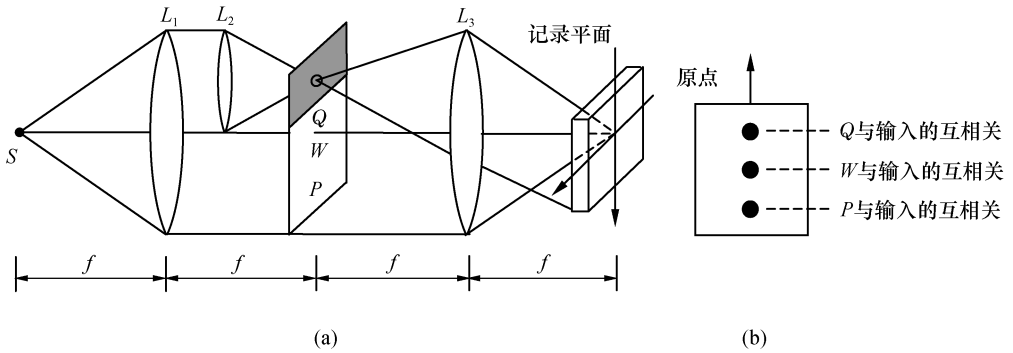


图 10.2.5　用单个频率平面模片综合出一组匹配滤波器

(a) 综合频率平面模片的光路图;(b) 输出平面响应(相关项部分)

我们能够修改全部滤波器,使得特征之间的甄别更加完善.最近已研究了多种相关识别方法,例如采用纯相位滤波器综合鉴别函数滤波器等.图 10.2.6 是采用纯相位组合滤波器的识别结果,图 10.2.6(a)是制作相位组合滤波器的四种机械零件;图 10.2.6(b)是以其中一种作为输入时,在相关输出平面上的响应(计算机模拟结果).

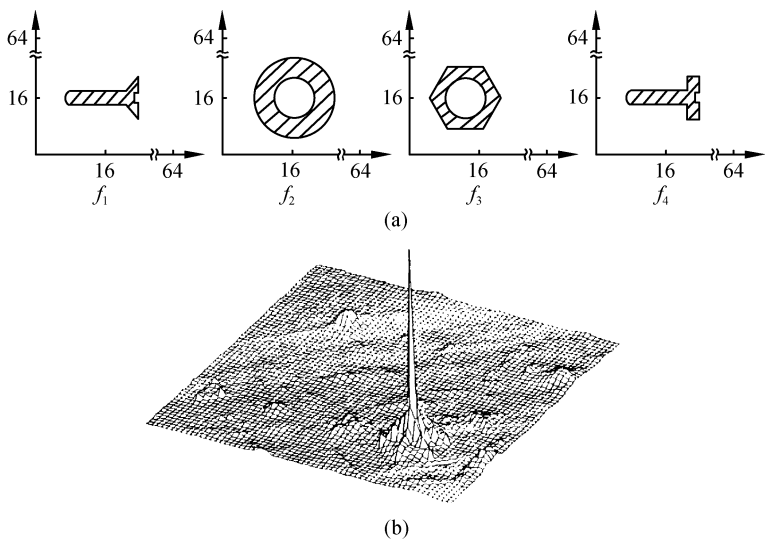


图 10.2.6　采用纯相位组合滤波器的识别结果

10.2.4　联合变换相关识别

联合变换相关方法由 C. S. Weaver 和 J. W. Goodman 于 1966 年提出.20 世纪 80 年代后期,由于实时光电转换器件的发展,给这种方法带来新的活力,近年来有关的研究日趋活跃,联合变换相关器(JTC)已成为模式识别的重要手段.

联合变换相关识别与匹配空间滤波相关识别在原理和方法上存在明显的差异.在这种方法中,参考图像和待识别图像同时置于输入平面上,对称地分放在光轴两侧,在傅里叶平面上可以记录下其干涉功率谱.如果对谱图像进行傅里叶变换,则在输出平面上可以得到自相关和互相关输出.图 10.2.7 是联合变换相关的原理图.

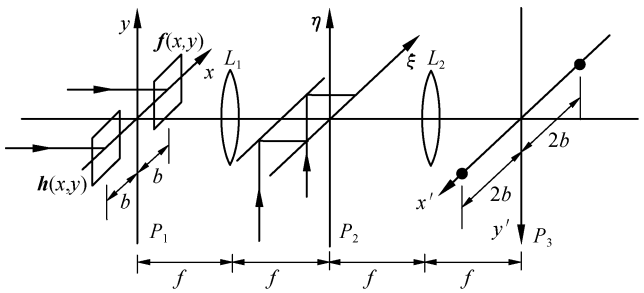


图 10.2.7　联合变换相关原理

设输入面 P_1 上并排放着目标图像和参考图像 $\boldsymbol{f}(x,y)$和 $\boldsymbol{h}(x,y)$,则输入函数可记为

$$\boldsymbol{g}(x,y)=\boldsymbol{f}(x+b,y)+\boldsymbol{h}(x-b,y) \tag{10.2.5}$$

经傅里叶变换透镜 L_1 变换后,其联合频谱为

$$\boldsymbol{G}(\xi,\eta)=\boldsymbol{F}(\xi,\eta)\exp[\mathrm{j}2\pi b\xi]+\boldsymbol{H}(\xi,\eta)\exp[-\mathrm{j}2\pi b\xi] \tag{10.2.6}$$

式中:$\boldsymbol{G}(\xi,\eta)$,$\boldsymbol{F}(\xi,\eta)$,$\boldsymbol{H}(\xi,\eta)$分别为 $\boldsymbol{g}(x,y)$,$\boldsymbol{f}(x,y)$和 $\boldsymbol{h}(x,y)$的傅里叶变换.在 P_2 平面上的记录介质,例如全息干板,仅对光强有响应,则

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{G}(\xi,\eta)|^2=&|\boldsymbol{F}(\xi,\eta)|^2+|\boldsymbol{H}(\xi,\eta)|^2+\boldsymbol{F}^*(\xi,\eta)\boldsymbol{H}(\xi,\eta)\exp[-\mathrm{j}4\pi b\xi]\\&+\boldsymbol{F}(\xi,\eta)\boldsymbol{H}^*(\xi,\eta)\exp[\mathrm{j}4\pi b\xi]\end{aligned} \tag{10.2.7}$$

在线性记录的条件下,并忽略透过率函数中的均匀偏置和比例常数,用单位振幅的平面波读出,则经 L_2 的逆傅里叶变换后,在输出平面 P_3 得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}'(x',y')=&\boldsymbol{f}(x',y')\☆\boldsymbol{f}(x',y')+\boldsymbol{h}(x',y')\☆\boldsymbol{h}(x',y')\\&+\boldsymbol{f}(x',y')\☆\boldsymbol{h}(x',y')*\delta(x'-2b,y')\\&+\boldsymbol{h}(x',y')\☆\boldsymbol{f}(x',y')*\delta(x'+2b,y')\end{aligned} \tag{10.2.8}$$

式中:符号☆表示相关运算,* 表示卷积运算.前两项 $f(x',y')$和 $h(x',y')$的自相关,位于输出平面中心;后两项表示 $f(x',y')$和 $h(x',y')$的互相关,其中心位于$(x'=\pm 2b,y'=0)$处,如果考虑透过率函数中的均匀偏置,则输出项中还应增加一个 $\delta(x',y')$项.

近年来发展了多种实时光电混合的联合变相关器,图 10.2.8 是一种采用两个液晶光阀(LCLV)的光电混合式实时联合变换相关器.一束 He-Ne 激光经针孔滤波和扩束后,由偏振分束镜 BS_2 将其分为两束,作为空间光调制器 $LCLV_1$ 和 $LCLV_2$ 的读出光.参考图像由 CCD 摄像机采集后预先存在主计算机内存,目标图像由 CCD 摄像机实时采集,在计算机控制下两个图像

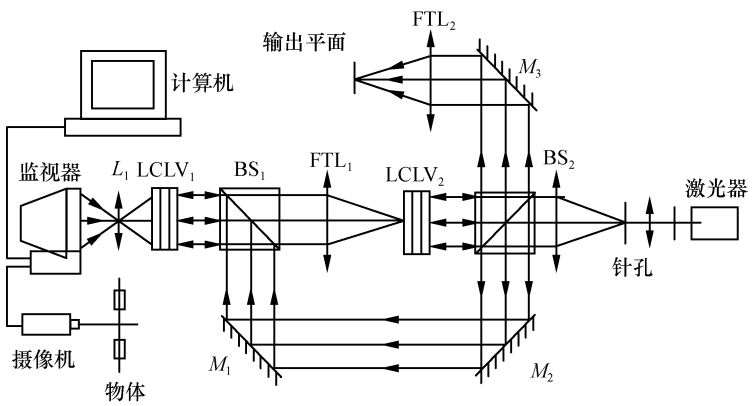


图 10.2.8　光电混合式实时联合变换相关器

显示在监视器左、右两侧，成像透镜 L_1 将其写入 $LCLV_1$.一束读出光将 $LCLV_1$ 上的图像读出，经 FTL_1 傅里叶变换后，得到联合功率谱，并写入 $LCLV_2$.另一束读出光将联合变换功率谱读出，经 FTL_2 傅里叶变换后在输出平面得到目标图像与参考图像的相关输出 .

类似的联合变换相关器还用于指纹和汉字手写体的实时识别 .一种实用铁电液晶(FLC)空间光调制器作为输入和联合谱记录的实时光学联合相关器，可对粒子的位移和速度进行测量 .另外还研究了采用二元空间光调制器的联合变换相关器，以及消色差白光联合换相关器 .

10.3 不变的图样识别光学方法

正如前一节描述的那样，光学图像的相关识别有两类基本方法：一类是运用复数滤波器进行的 Vander Lugt 相关识别(Vander Lugt correlator，VLC)，另一类是联合变换相关识别(joint transform correlator，JTC).它们都具有并行性、速度快和容量大等优点 .

用前一类方法(VLC)进行相关识别时需要将参考图像制作成复数匹配滤波器，制作较为复杂，并且在匹配识别时需要精确地复位 .同时，经典的匹配滤波方法对平移并不敏感，也就是说无论物体在输入场的什么地方，总会有一个亮斑出现在输出面内的相应位置，亮斑的强度不受物体平移的影响 .要处理对不同尺寸大小和旋转角度的图样识别，必须合成出用于具有固定大小和旋转角度的物体的匹配滤波器，并通过旋转、放大或缩小系统输入的机械方法进行搜索，这种方法不方便，并且费时 .

相比之下，后一类方法(JTC)具有原理简单、操作容易、不需要制作复数匹配滤波器等优点，更适合实时处理 .但是，联合变换相关器对输入目标特征的尺度和旋转变化十分敏感，识别目标特征的较小变化都会引起相关峰的较大改变，从而对识别结果的判读带来困难 .在实际应用中，待识别目标的这些放大率和角度变化是经常存在的，因此寻找一个不变的相关方法来识别这些变化目标，就成为模式识别领域中的重要研究课题 .为了使光学相关识别系统具有这样的“不变应万变”的鲁棒性，降低或消除对诸如尺寸大小和旋转等额外参数的敏感程度，常用的解决方法有梅林变换相关、圆谐波相关和合成判别式函数等 .本节将简单介绍用于不变图样识别的这三种不同方法 .

10.3.1 梅林相关器

梅林变换与傅里叶变换密切相关，而又有所不同，它对物体放大率具有某种不变性 .为简单起见，这里只讨论一维形式的梅林变换，它很容易推广到二维情形 .

函数 $g(\xi)$的梅林变换定义为

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{s})=\int_0^{\infty} g(\xi)\xi^{s-1}\mathrm{d}\xi \tag{10.3.1}$$

式中 $\boldsymbol{s}$ 一般情况下是复变量 .如果这个复变量 $\boldsymbol{s}$ 限定在虚轴上，即 $\boldsymbol{s}=\mathrm{j}2\pi f$，同时令 $\xi=\exp(-x)$，得到 g 的梅林变换的如下表达式

$$\boldsymbol{M}(\mathrm{j}2\pi f)=\int_{-\infty}^{\infty} g(\exp(-x))\exp(-\mathrm{j}2\pi fx)\mathrm{d}x \tag{10.3.2}$$

这是一个典型的傅里叶变换 .梅林变换正是函数 $g(\exp(-x))$的傅里叶变换 .这表明了傅里叶变换与梅林变换之间的一个简单关系 .由此可知，可以用光学傅里叶变换系统来实现梅林变换，只要把输入送到一个“缩放”坐标系中，在这个坐标系统中对空间变量做对数式的缩放($x=-\ln\xi$).例如，可以通过用一个对数放大器驱动阴极射线管的偏转电压，并将得到的缩放信号写入空间光调制器(SLM)来实现这种缩放 .

梅林变换的模值与输入的尺度大小变化无关.为了证明这一点,令 $\boldsymbol{M}_1$ 表示 $g(\xi)$的梅林变换,令 $\boldsymbol{M}_a$ 表示 $g(a\xi)$的梅林变换,这里 $0<a<\infty$.大于 1 的 a 值意味着 g 的尺寸缩小,而介于 0 与 1 之间的 a 值意味着 g 的尺寸放大.$g(a\xi)$的梅林变换可表示为

$$\boldsymbol{M}_a(\mathrm{j}2\pi f)=\int_0^\infty g(a\xi)\xi^{\mathrm{j}2\pi f-1}\,\mathrm{d}\xi=\int_0^\infty g(\xi')\left(\frac{\xi'}{a}\right)^{\mathrm{j}2\pi f-1}\frac{\mathrm{d}\xi'}{a}$$

$$=a^{-\mathrm{j}2\pi f}\int_0^\infty g(\xi')\xi'^{\mathrm{j}2\pi f-1}\,\mathrm{d}\xi' \tag{10.3.3}$$

其中,$\xi'=a\xi$.取 $\boldsymbol{M}_a$ 的模,并且注意到 $|a^{-\mathrm{j}2\pi f}|=1$,这就证明了 $|\boldsymbol{M}_a|$与尺度大小 a 无关.结合梅林变换可以作为缩放输入的傅里叶变换来实现这一事实,梅林变换模值与物体尺寸大小无关性给我们提供了一种与尺寸大小无关的相关识别方法.

接下来我们来考虑如何消除物体旋转的影响,物体旋转一定角度相当于该物体在极坐标系内的一维平移,只要使极坐标系中心与物体旋转中心重合即可.在 0 到 2π 弧度内,物体转动 θ 角的结果可能是部分物体移动 θ 而物体的其他部分则“卷绕”角坐标一圈,出现在 $2\pi-\theta$ 的位置上.如果允许角坐标覆盖两个或更多个 2π 周期,则这个问题可以得到解决,这时“卷绕”问题可以减小到最低程度或被消除掉.

Casasent 和 Psaltis 提出了同时获得尺度不变性和旋转不变性的方法.一个二维物体 $g(\xi,\eta)$被送入一个具有变形极坐标系的光学系统,这种变形是由径向坐标按对数变换缩放而成.随后的光学系统是一个匹配滤波系统,制作匹配滤波器时,它的输入也经过了相同的坐标变换.该方法的输出强度将随着输入物体的旋转而平移,但其大小不因输入的尺寸大小变化或旋转而减小.用上述方法实现尺寸大小和旋转不变性,会影响传统的匹配滤波器的平移不变性.为了同时得到对所有三个参数的不变性,可以用原来输入函数 g 的傅里叶变换模 $|G|$作为输入函数,它对 g 的平移是不变的.该模函数经过与上述相同的坐标变换,而滤波器经过同样的坐标变换后与感兴趣图样的傅里叶变换相匹配.此时,由于没有考虑输入的傅里叶变换和匹配滤波器的传递函数二者的相位,相关器性能会有所下降.

10.3.2 圆谐波相关

圆谐波分析能很好地解决物体的旋转不变性问题.考虑一个用极坐标表示的一般二维函数 $g(r,\theta)$,它是变量 θ 的周期函数,周期为 2π.因此可将函数 $g(r,\theta)$按 θ 角变量展成傅里叶级数

$$g(r,\theta)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}g_m(r)\exp(\mathrm{j}m\theta) \tag{10.3.4}$$

式中傅里叶系数是向径的函数,

$$g_m(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(r,\theta)\exp(-\mathrm{j}m\theta)\mathrm{d}\theta \tag{10.3.5}$$

(10.3.4)式中的每一项称为函数 g 的“圆谐波分量”.若函数 $g(r,\theta)$转动一个角度 α 后成为 $g(r,\theta-\alpha)$,则相应的圆谐波展开式变为

$$g(r,\theta-\alpha)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}g_m(r)\exp(-\mathrm{j}m\alpha)\exp(\mathrm{j}m\theta) \tag{10.3.6}$$

于是,第 m 个圆谐波分量发生了一个 $-m\alpha$ 弧度的相位变化.

现在考察两个函数 g 和 h 的互相关,在直角坐标系中它可写成

$$\boldsymbol{R}(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}g(\xi,\eta)h^*(\xi-x,\eta-y)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{10.3.7}$$

这个互相关在原点的值有特殊意义,在直角坐标系和极坐标系内它可写成

$$\boldsymbol{R}_0 = \boldsymbol{R}(0,0) = \iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi,\eta)h^*(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \int_0^{\infty} r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi} g(r,\theta)h^*(r,\theta)\mathrm{d}\theta \tag{10.3.8}$$

函数 $g(r,\theta)$与转过某一角度的同一函数 $g(r,\theta-\alpha)$的互相关是

$$\boldsymbol{R}_\alpha = \int_0^{\infty} r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi} g^*(r,\theta)g(r,\theta-\alpha)\mathrm{d}\theta \tag{10.3.9}$$

将函数 $g^*(r,\theta)$做圆谐波展开,则上式可等价地表示为

$$\boldsymbol{R}_\alpha = \int_0^{\infty} r\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m^*(r)\int_0^{2\pi} g(r,\theta-\alpha)\exp(-\mathrm{j}m\theta)\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}r \tag{10.3.10}$$

其中

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(r,\theta-\alpha)\exp(-\mathrm{j}m\theta)\mathrm{d}\theta = g_m(r)\exp(-\mathrm{j}m\alpha) \tag{10.3.11}$$

从而

$$\boldsymbol{R}_\alpha = 2\pi\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp(-\mathrm{j}m\alpha)\int_0^{\infty} r\mid g_m(r)\mid^2\mathrm{d}r \tag{10.3.12}$$

由这个结果我们看到互相关的每个圆谐波分量都有一个不同的相移 $-m\alpha$.

如果用数字方法求出了 R_α 的一个特定圆谐波分量,例如第 M 个,那么根据与这一分量相对应的相位,就能够确定物的一种形态所经历的角度变化.构建一个与特定物体的第 M 个圆谐波分量匹配的光学滤波器,并将它放在一个光学相关系统内,那么,同一物体转过任一角度后,再作为系统的输入,就将产生一个强度正比于$\int_0^{\infty} r\mid g_m(r)\mid^2\mathrm{d}r$的相关峰值,而与转动无关.这样构成的光学相关器,能识别该物体同时又与转动无关.

实现转动不变性是牺牲了相关峰值的强度为代价的,转动不变形的相关峰值强度要小于与未转动物体的互相关得到的峰值,未转动情况下的相关峰强度同时用到了所有的圆谐波分量.容易证明,只用第 M 个圆谐波分量所导致的峰值相关强度减小的程度,可以由下式给出

$$K_M = \frac{\int_0^{\infty} r\mid g_m(r)\mid^2\mathrm{d}r}{\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} r\mid g_m(r)\mid^2\mathrm{d}r} \tag{10.3.13}$$

10.3.3 合成判别式函数

合成判别式函数(SDF)的方法主要源自于 Braunecker 和 Lobmann 的工作以及 Caulfield 和 Haimes 的想法,D. Casasent 和他的学生们将之发展到现在的状况.

合成判别式函数方法可以用来制作单个的图样识别滤波器,这个滤波器的相关性质是用某一组“训练”图像预先制作的,这些图像与参考滤波器之间所需的相关性质事先已经知道.训练图像组的成员可以是单一物体经尺寸变化和转动的若干变形,也可以是该物体更一般的变形,甚至可以是别的物体样本,对这些成员我们要使滤波器有零输出.令 N 个图像的训练组由$\{g_n(x,y)\}$表示,其中 $n=1,2,\cdots,N$.对一个特定训练图像,可以要求它与滤波器的脉冲响应 $h(x,y)$的相关度为 1(也就是说,该特定训练图像是理想图像的一个变化版本),而在有些情况下,我们可以要求它是 0(也就是说该特定训练图像代表一个完全不同的理想图像的变化版本).把集合$\{g_n\}$分成两个子集,一个是$\{g_n^+\}$,我们要求其相关度为 1,另一个是$\{g_n^-\}$,我们要求其相关度为 0. 于是有约束条件

$$\iint_{-\infty}^{\infty} g_n^+(x,y)h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1,\quad \iint_{-\infty}^{\infty} g_n^-(x,y)h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \tag{10.3.14}$$

为了得到与训练组有理想相关性的滤波器脉冲响应 $h(x,y)$,先用训练图像作为基函数,把

此脉冲响应展成级数

$$h(x,y)=\sum_{n=1}^{N}a_n g_n(x,y) \tag{10.3.15}$$

式中的 a_n 目前还是未知的.现在考察训练组中的任一成员,例如 $g_k(x,y)$,与滤波器函数 $h(x,y)$ 相关性

$$c_k=\iint_{-\infty}^{\infty}g_k^*(x,y)h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{n=1}^{N}a_n\iint_{-\infty}^{\infty}g_k^*(x,y)g_n(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{10.3.16}$$

式中 c_k 为 0 还是为 1,取决于 g_k 是由哪一子集取出.令 p_{kn} 表示 g_k 和 g_n 之间的相关,有

$$c_k=\sum_{n=1}^{N}a_n p_{kn} \tag{10.3.17}$$

现在考虑训练图像组的全部 N 个成员,建立含 N 个未知数 a_n 的 N 个线性方程的方程组,其中每个方程都与(10.3.17)式相似,只是有不同的 k 值.这些方程的完整集合表示为一个矩阵方程

$$\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\cdots\\c_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_{11}&\cdots&p_{1N}\\p_{21}&\cdots&p_{2N}\\\cdots&\cdots&\cdots\\p_{N1}&\cdots&p_{NN}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\cdots\\a_N\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{a} \tag{10.3.18}$$

式中 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 是长度为 N 的列矢量,$\boldsymbol{P}$ 是由训练图像两两之间的相关组成的一个 $N\times N$ 矩阵.

在(10.3.18)式描述的关系中,矢量 $\boldsymbol{c}$ 是已知值的列矢量(在所考察的情况下,每个元素为 0 或 1,也可以有更一般的值),矩阵 $\boldsymbol{P}$ 包含的是事先算出的已知元素,矢量 $\boldsymbol{a}$ 未知,它可以让我们按照(10.3.15)式确定滤波器所需要的脉冲响应.这个未知矢量可通过求出 $\boldsymbol{P}$ 的逆矩阵并用矢量 $\boldsymbol{c}$ 与之相乘求出

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{c} \tag{10.3.19}$$

这为我们提供了一个用来制作滤波器的方法,这个滤波器在训练组内图像之间产生规定的相关.

10.4 模糊图像的复原

相干光学信息处理的一项有趣应用是模糊图像的复原.在成像过程中,由于成像系统的像差、目标和底片的相对运动、大气扰动等因素导致像的模糊,像模糊的原因可以归结为系统传递函数的缺陷.如果在相干光学滤波系统中,从频谱平面对系统传递函数作适当补偿,将在输出平面上得到清晰像,这一处理过程称为消模糊.本节将着重介绍用逆滤波器和维纳滤波器对模糊图像进行复原以及它们的光学实现方法.

10.4.1 逆滤波器

设物的光场分布为 $\boldsymbol{f}(x,y)$,造成模糊像的点扩散函数为 $h_{\mathrm{B}}(x,y)$,则像的光场分布可以表示为卷积的过程

$$\boldsymbol{g}(x,y)=\boldsymbol{f}(x,y)*h_{\mathrm{B}}(x,y)$$

消模糊实际上是解卷积的过程.在空域实现解卷积十分困难,但在相干光处理所提供的频域滤波能力却使这一过程变得十分简单.将模糊图像置于 $4f$ 系统的输入平面上,谱分布为

$$\boldsymbol{G}(\xi,\eta)=\boldsymbol{F}(\xi,\eta)\boldsymbol{H}_c(\xi,\eta) \tag{10.4.1}$$

式中:$\boldsymbol{F}(\xi,\eta)$是物的频谱;$\boldsymbol{G}(\xi,\eta)$是像的频谱;$\boldsymbol{H}_c(\xi,\eta)$是带有系统缺陷的相干传递函数,即 $h_h(x,y)$的傅里叶变换,在理想情况下,$\boldsymbol{H}_c(\xi,\eta)=1$. 由此可见,若在 $4f$ 系统的频谱面是用一个透射系统为 $\boldsymbol{H}(\xi,\eta)=1/\boldsymbol{H}_c(\xi,\eta)$的逆滤波器进行滤波,就可在输出面上得到消模糊的像,即

$$\boldsymbol{G}(\xi,\eta)\frac{1}{\boldsymbol{H}_c(\xi,\eta)}=\boldsymbol{F}(\xi,\eta)\boldsymbol{H}_c(\xi,\eta)\frac{1}{\boldsymbol{H}_c(\xi,\eta)}=\boldsymbol{F}(\xi,\eta)\cdot 1 \tag{10.4.2}$$

这时传递函数为 1,输出像与输入的理想像完全一样.

因为

$$\boldsymbol{H}(\xi,\eta)=\frac{1}{\boldsymbol{H}_c(\xi,\eta)}=\frac{\boldsymbol{H}_c^*(\xi,\eta)}{|\boldsymbol{H}_c(\xi,\eta)|^2} \tag{10.4.3}$$

所以逆滤波器的制作可分两步进行:第一步制作 $\boldsymbol{H}_c^*$ 滤波器,第二步制作 $1/|\boldsymbol{H}_c|^2$ 滤波器.使用时将二者叠合在一起便得到了逆滤波器.

制作 $\boldsymbol{H}_c^*$ 可用全息法,即范德拉格特(Vander Lugt)光路由 $h_h(x,y)$制作 $\boldsymbol{H}_c^*$,显然要预先知道 $h_h(x,y)$,这是问题的关键.

制作 $1/|\boldsymbol{H}_c|^2$ 滤波器可用普通照相方法,在 $h_h(x,y)$的频谱面上拍照它的频谱像,小心处理使照相干板的 $\gamma=2$. 这样,滤波器的光密度分布与 $|\boldsymbol{H}_c|^2$ 成比例,透过率则与 $1/|\boldsymbol{H}_c|^2$ 成比例.

将这两个滤波器对正紧贴在一起就到了逆滤波器.由于胶片动态范围的限制,使得只能得到近似的逆滤波函数.此外,逆滤波过程与成像过程一样,也受到系统空间带宽积的限制,因此期望用逆滤波的办法实现超越衍射极限的复原是不现实的.

例 10.4.1 摄影时由于不小心,在横向抖动了 $2a$,形成两个像的重影,设计一个改良此照片的逆滤波器.

解:在此情况下造成成像缺陷的点扩散函数为

$$h_h(x,y)=\delta(x+a)+\delta(x-a)$$

它的傅里叶变换(即有成像缺陷的系统)的传递函数 $\boldsymbol{H}_c$ 为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_c(\xi,\eta)&=\boldsymbol{F}\{h_h(x,y)\}=\boldsymbol{F}\{\delta(x+a)+\delta(x-a)\}\\&=\exp(\mathrm{j}2\pi a\xi)+\exp(-\mathrm{j}2\pi a\xi)\\&=2\cos(2\pi a\xi)\end{aligned}$$

逆滤波器 $\boldsymbol{H}(\xi,\eta)$的透过率函数为

$$\boldsymbol{H}(\xi,\eta)=\frac{1}{\boldsymbol{H}_c(\xi,\eta)}=\frac{1}{2\cos(2\pi a\xi)}$$

10.4.2 维纳滤波器

如果考虑到成像过程存在噪声干扰,我们应该建立一种新的成像模型.将像的光场分布表示成

$$\boldsymbol{g}(x,y)=\boldsymbol{f}(x,y)*h_h(x,y)+n(x,y) \tag{10.4.4}$$

式中 $n(x,y)$是成像过程中的噪声.在这个表达中,噪声和物函数 $\boldsymbol{f}(x,y)$均可以当成随机过程处理.假设物和噪声的功率谱密度(即平均功率在频率上的分布)是已知的,分别表示为 $\boldsymbol{F}(\xi,\eta)$和 $\boldsymbol{N}(\xi,\eta)$.我们通过制作一个线性复滤波器,它使真正的物 $\boldsymbol{f}(x,y)$与物的估计值 $\hat{\boldsymbol{f}}(x,y)$之间的均方差最小,以达到图像消模糊复原的目的,亦即使

$$e^2=\boldsymbol{E}\{|\boldsymbol{f}-\hat{\boldsymbol{f}}|^2\} \tag{10.4.5}$$

最小,其中 $\boldsymbol{E}\{\cdot\}$表示期望值.

最优复原滤波器的传递函数由下式给出

$$\boldsymbol{H}(\xi,\eta)=\frac{\boldsymbol{H}_c^*(\xi,\eta)}{|\boldsymbol{H}_c(\xi,\eta)|^2+\boldsymbol{N}(\xi,\eta)/\boldsymbol{F}(\xi,\eta)} \tag{10.4.6}$$

这种类型的滤波器称为维纳(Wiener)滤波器,也称最小均方误差滤波器.$\boldsymbol{H}_c(\xi,\eta)$是有噪声情况下的相干传递函数,即 $h_{\mathrm{I}}(x,y)$的傅里叶变换.

在信噪比高$\dfrac{\boldsymbol{N}(\xi,\eta)}{\boldsymbol{F}(\xi,\eta)}\ll 1$ 的频率范围内,最优滤波器转化为逆滤波器

$$\boldsymbol{H}(\xi,\eta)\approx\frac{\boldsymbol{H}_c^*(\xi,\eta)}{|\boldsymbol{H}_c(\xi,\eta)|^2}=\frac{1}{\boldsymbol{H}_c(\xi,\eta)} \tag{10.4.7}$$

而在信噪比低$\dfrac{\boldsymbol{N}(\xi,\eta)}{\boldsymbol{F}(\xi,\eta)}\gg 1$ 的频率范围内,它转化为一个强烈衰减的匹配滤波器

$$\boldsymbol{H}(\xi,\eta)\approx\frac{\boldsymbol{F}(\xi,\eta)}{\boldsymbol{N}(\xi,\eta)}\boldsymbol{H}_c^*(\xi,\eta) \tag{10.4.8}$$

值得注意的是,在成像系统衍射受限通带外的频率上,没有物信息出现,因此噪信比为无穷大.因而维纳滤波器并不会恢复那些不出现在像中的物的频率成分.

Ragnarsson 提出了实现维纳滤波器的光学方法,制作的滤波器的动态范围较大.这种滤波器是使用干涉法在一组特定的记录参数下生成滤波器来实现的,用衍射来衰减频率分量,生成的滤波器经过漂白,因此在透射光中只引入相移.

该滤波器的记录方法以三个重要的假设为基础:(1)假设滤波器引入的最大相移远小于 2π 弧度,振幅透射率为 $t_A=\exp(\mathrm{j}\phi)\approx 1+\mathrm{j}\phi$;(2)假设漂白后透明片的相移正比于漂白前呈现的银密度 D,即 $\phi\propto D$.若采用非鞣化漂白,这个假设在很好的近似程度上是正确的,因为这种漂白使金属银变回透明的银盐,而这种透明物质的密度决定了漂白后的透明片引入的相移;(3)假设滤波器的曝光和处理的操作是在 H-D 曲线的线性部分进行的,密度与曝光的对数成线性关系,即 $D=\gamma\lg E-D_0$.记录光路就是记录匹配滤波器的光路,正如前面图 10.2.5(a)所示,但是输入透明片上只出现函数 $h_{\mathrm{I}}(x,y)$.由这个干涉记录产生的曝光为

$$\boldsymbol{E}(x,y)=T\{A^2+a^2|\boldsymbol{H}_c(\xi,\eta)|^2+2Aa|\boldsymbol{H}_c(\xi,\eta)|\cos[2\pi\alpha x+\phi(\xi,\eta)]\} \tag{10.4.9}$$

式中 A 是胶片平面上参考波强度的平方根,a 是胶片平面原点物波强度的平方根.α 是由离轴参考波引入的载波频率,ϕ 是模糊传递函数 $\boldsymbol{H}_c$ 的相位分布,T 是曝光时间.

上面三个假设导致曝光量变化与所产生的振幅透射率变化之间成正比关系,对数曝光量的变化会导致振幅透射率成比例的变化,即有 $\Delta t_A\propto\Delta\phi\propto\Delta D\propto\Delta(\lg\boldsymbol{E})$.此外,如果曝光图样由一个强的平均曝光量 $\bar{\boldsymbol{E}}$ 和一个弱的变化曝光量 $\Delta\boldsymbol{E}$ 构成,那么 $\Delta(\lg\boldsymbol{E})\approx\Delta\boldsymbol{E}/\bar{\boldsymbol{E}}$,从而使得

$$\Delta t_A\propto\frac{\Delta\boldsymbol{E}}{\bar{\boldsymbol{E}}} \tag{10.4.10}$$

记录 Ragnarsson 滤波器时,所用的物波在胶片平面原点比参考波强得多,即 $A^2\ll a^2$. 因此,平均曝光量 $\bar{\boldsymbol{E}}$ 和曝光量的变化部分 $\Delta\boldsymbol{E}$ 可以写成

$$\begin{aligned}\bar{E}&=T[A^2+|\boldsymbol{H}_c(\xi,\eta)|]^2\\ \Delta E&=2AaT|\boldsymbol{H}_c(\xi,\eta)|\cos[2\pi\alpha x+\phi(\xi,\eta)]\end{aligned} \tag{10.4.11}$$

选取处理后透明片透射率中与 $\boldsymbol{H}_c^*$ 成正比的那一项,我们有

$$\Delta t_A\propto\frac{\Delta E}{\bar{E}}\propto\frac{\boldsymbol{H}_c^*}{A^2/a^2+|\boldsymbol{H}_c|^2} \tag{10.4.12}$$

Δt_A 正是当信号和噪声都具有平的频谱,而噪声功率与信号功率之比在所有频率上都是 A^2/a^2 时,维纳滤波器所需要的振幅透射率.

10.5　合成孔径雷达

合成孔径雷达(synthetic aperture radar,简称 SAR),是 20 世纪 50 年代出现的一种装载在飞机上的制图雷达.初期的合成孔径雷达是用电子学处理来获得图像的,后来利思(Leith)等人采用光学方法处理,从合成孔径雷达所收集到的数据绘制出高分辨率地形图,这是光学信息处理技术最成功的应用之一.

10.5.1　合成孔径概念

合成孔径雷达是通过回波信息处理,能够将分辨率提得很高的雷达.

参看图 10.5.1,我们来研究以匀速 v_a 沿 x 方向直线航行的飞机所携带的一具雷达系统.假定雷达的作用是要得到航线邻近地域的一幅高分辨率地形反射率地图.为绘制出正确的地形图,在飞机前进方向(x 方向)和与之垂直的地面方向上,都必须具有较高的清晰度.与前进方向相垂直的方向上的清晰度,能够以脉冲方法简单获得,即通过发射脉冲雷达信号并记录接收该信号作为时间函数的回波,可以分辨离开航线的距离.前进方向上的清晰度只有使用方位范围极窄的雷达波束才能得到.为了使雷达波束的方位范围变窄,一般说来,必须加大天线孔径尺寸.例如,一个线度大小为 D 的天线在距离 r_0 上所能得到的方位分辨率(对应前进方向的清晰度)大致为 $\lambda_r r_0 / D$.因为微波波长 λ_r 比光波波长要大几个数量级,因此要得到与光学测量系统相比拟的分辨率,天线就要数百米或数千米,那是不可能实现的.

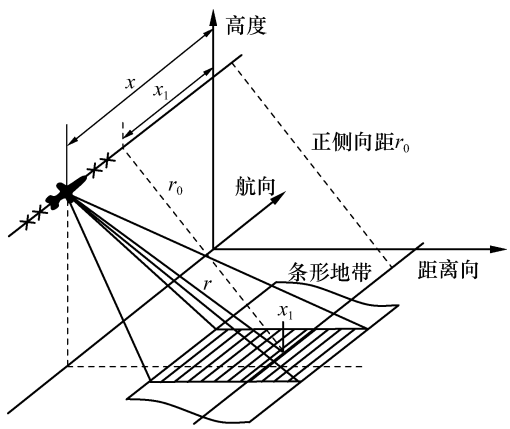


图 10.5.1　合成孔径雷达几何关系

合成孔径技术提供了解决这个问题的一种办法.合成孔径雷达的原理是机载一个小天线(如图 10.5.1 所示),飞行过程中,飞机在图中各“×”点所示位置处,向侧向发射一脉冲波束(故又称侧视雷达).波束随飞机扫过一条形地带,在各个位置处接收并记录(存储)被地面反射回来的回波振幅和相位.这样,用一个小的探测天线在孔径面上一边移动一边记录波面(即用机载小天线的运动来实现一个小天线阵列,最终合成一个大天线),这样用一个小天线合成一个大天线,取得等价于大孔径的信息,以达到高的分辨.

合成孔径雷达发射的波形最简单的是时间 τ 极短的矩形脉冲,用微波波段(例如频率 ν_r = 8000～9000MHz,波长 $\lambda_r \approx 3$cm)的连续正弦波载波发射,合成波形如图 10.5.2 所示.

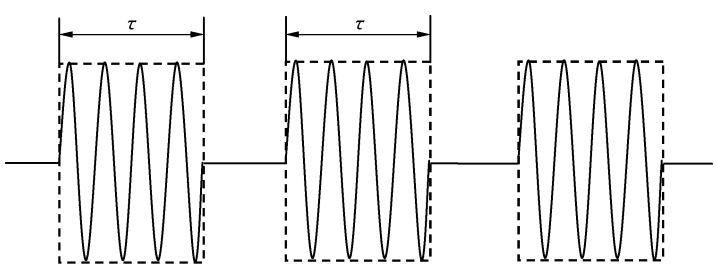


图 10.5.2　发射波形

合成孔径雷达在距离向上充分利用了发射波形的脉冲性质;在航向上利用了连续正弦波的性质.

10.5.2 航向信息的记录

1.信号发射与接收回波

要详细地考察信号收集过程,仍然考虑图 10.5.1 所示的几何关系.用坐标 x 代表沿航线的距离,为了简单起见,我们假定在坐标 x_1 处有单个的点散射体,它与航线的距离为 r_0.为了更进一步简化,假定雷达发射的波形是频率为 ν_r 的稳定正弦波,实际发射信号的脉冲特性导致最终的结果不过是对所假设的正弦信号进行周期性抽样.发射机发射连续的正弦波信号 $\cos(2\pi\nu_r t)$,从所设的点散射体返回飞机的回波信号是

$$S_1(t)=a_0\cos 2\pi\nu_r\left(t-\frac{2r}{c}\right) \tag{10.5.1}$$

式中,ν_r 为雷达的射频频率;r 是图 10.5.1 中某一点 x_1 到雷达的距离,亦称斜距;c 是光速;a_0 为常数,其值取决于 x_1 点的反射率和衰减因子等.设图 10.5.1 中飞机的航向坐标为 x;x_1 点的航向坐标为 x_1,x_1 点离飞机的正侧向距离为 r_0,则

$$r=\sqrt{r_0^2+(x-x_1)^2}\approx r_0+\frac{(x-x_1)^2}{2r_0} \tag{10.5.2}$$

于是,回波信号为

$$S_1(t)=a_0(x_1,r_0)\cos\left[2\pi\nu_r t-\frac{4\pi r_0}{\lambda_r}-\frac{2\pi(x-x_1)^2}{\lambda_r r_0}\right] \tag{10.5.3}$$

可见,回波信号经历了平方项的相位调制.又 $x=v_a t$,$x_1=v_a t_1$(v_a 是飞机的飞行速度),故上式还可写成

$$S_1(t)=a_0(x_1,r_0)\cos\left[2\pi\nu_r t-\frac{4\pi r_0}{\lambda_r}-\frac{2\pi v_a^2(t-t_1)^2}{\lambda_r r_0}\right] \tag{10.5.4}$$

(10.5.3)式所表示的回波信号正是在全息中遇到过的按平方律变化的相位函数,是中心在 $x=x_1$ 的一维波带片或圆柱形波带片的数学表达式.回波信号不仅是时间的函数,还是空间坐标 r_0,r_1 的函数.为了方便地用 r_0 和 x_1 表示地面不同目标点的位置,可将其下标换成变量,写为 r_m,x_{mn}.于是,r_m 表示地面上平行于飞机航线的第 m 条直线与航线的距离,x_{mn} 表示第 m 条直线上第 n 个目标物点的位置.将 r_m,x_{mn} 代入(10.5.3)式,即得不同目标点产生回波的线性叠加.如果仅对 n 求和,则表示地面上与航线相距为 r_m 的那条直线上不同目标物点回波场的叠加,即

$$S(t)=\sum_n S_n(t)=\sum_n a_{mn}\cos\left[2\pi\nu_r t-2k_r r_m-\frac{k_r}{r_m}(x-x_n)^2\right] \tag{10.5.5}$$

式中 $k_r=2\pi/\lambda_r$,x 是飞机的坐标.

2. 雷达信号的记录

由于雷达回波频率很高,不便于胶片分辨,因此在记录前先对回波信号作一些处理.如图 10.5.3 所示,由天线接收的回波信号,通过环形器馈至放大器,经放大器的回波信号与参考信号混频,通过检波后被同步解调而变成频率比载频低的视频信号,其典型值为 100MHz.设视频频率为 ν_v,现将解调的信号表示为

$$S'(t)=\sum_n a_{mn}\cos\left[2\pi\nu_v t-2k_r r_m-\frac{k_r}{r_m}(x-x_n)^2\right] \tag{10.5.6}$$

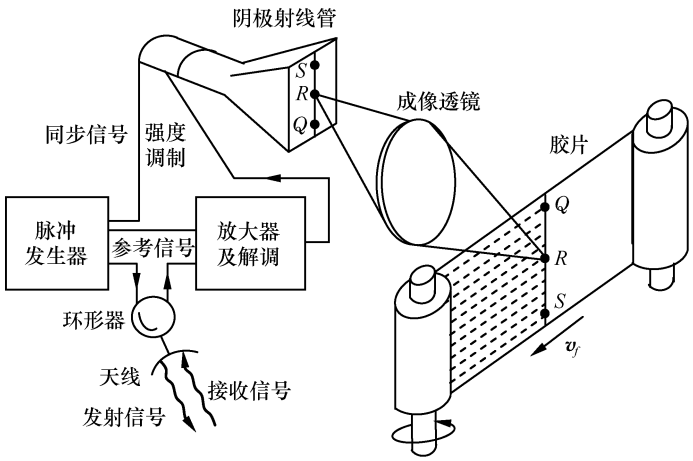


图 10.5.3　雷达信号记录

将解调的视频信号用于调制示波管的扫描栅,扫描栅只沿一条线扫描.用会聚透镜将视波管屏上的像投射到摄影胶片上,该胶片沿着垂直于扫描栅扫描方向移动.用发射脉冲的时间同步信号控制扫描栅开始扫描,由 S 点移向 Q 点.当回波信号到达时,扫描栅的强度增大,如此在屏幕上的 R 点处变亮,则 SR 表示从发射到目标一个来回所需的时间.r_m 越大,SR 就越长;目标物反射率越大,R 点就越亮.这样一来,回波脉冲信号以光强调制扫描线显示在阴极射线管上.这条扫描线上的每一个点代表一个距离 r_m 处收集到的一个数据抽样.这些点的轨迹在照相底片上被记录成一条竖直线,即记录下了距离信息,下一个脉冲记录在相邻位置上.如此继续下去,就可把携带地面物体信息的微波时变信号转换成编码的空间信号.例如在距离 r_0 处有一个目标物点,则在记录好的底片上对应于距离 r_0 处的振幅透过率将沿横向的 x 方向起伏,起伏的规律与一维波带片或柱形波带片的形式相同.

3. 透明编码胶片的聚焦性质

在讨论正题之前,对(10.5.6)式作一些改造.(10.5.6)式是一个方位信息表达式,式中的 r_m 是一个确定的参数,求和是针对某一距离上的各目标点,故可略去常数相位项 $2k_r r_m$,并利用 $t=x/v_a$ 消去 t,于是得

$$S'(x)=\sum_n a_{mn}\cos\left[2\pi\xi' x-\frac{k_r}{r_m}(x-x_n)^2\right] \tag{10.5.7}$$

式中空间频率 $\xi'=v_e/v_a$.此外还要注意,x 是飞机的空间位置,每秒变化上百米,每个信号所存在的实际范围很大.因此,我们必须引入一个比例系数 p,它等于飞机的飞行速度 v_a 与胶片运动速度 v_f 之比,即 $p=v_a/v_f$.将(10.5.6)式中的 x 用 px 代替得

$$S'(x)=\sum_n a_{mn}\cos\left[2\pi\xi x-\frac{k_r p^2}{r_m}\left(x-\frac{x_n}{p}\right)^2\right] \tag{10.5.8}$$

式中 $\xi=\xi'/p=v_e/v_f$ 为空间载频.现在这个记录长度的数量级为毫米或厘米,因此适合输入到光学系统中.

下面研究胶片的处理问题.我们仍然只注意一个固定的距离 r_0,因而只考虑沿水平直线 $y=y_1$(例如 SR)记录在胶片上的数据.只要曝光适当注意,接收信号随方位角的变化过程就形成一张照相记录,其振幅透过率为

$$t(x,y_1)=t_b+\sum_n a(x_n,y_1)\cos\left[2\pi\xi x-\frac{k_r p^2}{r_m}\left(x-\frac{x_n}{p}\right)^2\right] \tag{10.5.9}$$

式中，t_b 是为了便于记录双极性视频信号而引入的偏置透过率.

将(10.5.9)式中的余弦函数分解成两个复指数因子，那么透过率可以表示成偏置透过率 t_b 和另外两项之和，这另外两项是

$$t_\alpha(x,y_1)=\frac{1}{2}\sum_n a(x_n,y_1)\exp\left\{j\left[2\pi\xi x-\frac{k_r p^2}{r_m}\left(x-\frac{x_n}{p}\right)^2\right]\right\} \tag{10.5.10}$$

$$t_\beta(x,y_1)=\frac{1}{2}\sum_n a^*(x_n,y_1)\exp\left\{-j\left[2\pi\xi x-\frac{k_r p^2}{r_m}\left(x-\frac{x_n}{p}\right)^2\right]\right\} \tag{10.5.11}$$

若只注意各个散射点中的一个，比方说指标 $n=N$ 的那一个，则 t_α 的分量是

$$t_\alpha^{(N)}(x,y_1)=\frac{1}{2}\sum_n a(x_N,y_1)\exp(j2\pi\xi x)\exp\left[-j\frac{k_r p^2}{r_m}\left(x-\frac{x_N}{p}\right)^2\right] \tag{10.5.12}$$

第一个指数因子的相位与坐标 x 成线性关系，它只是使透射光中的一个波面发生简单的倾斜.对透明编码平面的倾角 θ 由

$$\sin\theta=\lambda_0\xi \tag{10.5.13}$$

确定，其中 λ_0 是照明胶片的再现光波的波长.

至于第二个指数因子，它是一个中心在 $x=x_N/p$ 的一维波带片或圆柱波带片的表达式.将这个式子与圆柱透镜的透过函数

$$t_p(x)=\exp\left[-j\frac{\pi}{\lambda_0 f}(x-x_0)^2\right] \tag{10.5.14}$$

相比，可得这个一维波带片的焦距为

$$f=\frac{\lambda_r r_m}{2\lambda_0 p^2} \tag{10.5.15}$$

类似地，t_β 的第 N 分量为

$$t_\beta^{(N)}(x,y_1)=\frac{1}{2}a^*(x_N,y_1)\exp(-j2\pi\xi x)\exp\left[j\frac{k_r p^2}{r_m}\left(x-\frac{x_N}{p}\right)^2\right] \tag{10.5.16}$$

第一个因子引起的往反方向的倾斜，即倾角为 $-\theta$，而第二个因子等同于一个焦距为负的一维波带片或负圆柱透镜的透过率，透镜中心仍在 $x=x_N/p$ 处，其焦距大小仍由(10.5.15)式给出.

图 10.5.4 画出了单个散射点情形下透射光的三个分量.t_b 为直透光；$t_\alpha^{(N)}$ 表示倾斜出射的

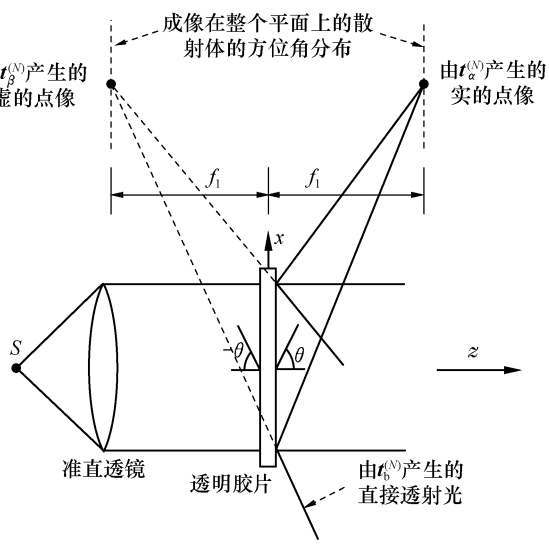


图 10.5.4 编码片上 $y=y_1$ 的一维再现像

会聚光，成一实像点；$\boldsymbol{t}_{\beta}^{(N)}$ 是与 $\boldsymbol{t}_{\alpha}^{(N)}$ 对称的方向上出射的发散光，呈现一虚像点．$\boldsymbol{t}_{\alpha}^{(N)}$ 和 $\boldsymbol{t}_{\beta}^{(N)}$ 是目标散射点方位角方向上的一对像点．

注意，由(10.5.15)式可知，x 方向的一维波带片的焦距与 r_m 成线性关系，又因 r_m 已转换成编码透明片上的 y 坐标，即波带片的焦距与 y 坐标成线性关系．整个编码透明片尤如一个锥面透镜．当用平行光照明这个透明胶片时，近距离信号的再现像距小，远距离信号的再现像距大，因此再现像位于一个倾斜平面上．

另外，在 x 为常量，即与 yz 平面平行的截面内，透明编码胶片的再现光是不聚焦的．因为圆柱透镜或圆锥透镜沿母线方向是没有聚焦能力的．

在距离飞机航向为 r_0 的地表直线上有许多目标散射点，在光学处理阶段中，每一个散射点都要产生自己的一对实像点和虚像点．目标散射点的相对方位决定了编码透明片上的一维波带片中心的相对位置，因此目标散射点的相对方位信息就贮存在相应像点的相应位置中．这样，距离 r_0 上散射点方位角分布的一个完整像便将在透明胶片后一个适当的平面上再现出来．

4．最后像的形成

我们最终的希望是构成一个像，它不仅显示目标散射点随方位角的分布，而且也显示它们随距离的分布．一个散射点的距离坐标在胶片上已变换成散射点在方位角变化过程中的 y 坐标，因此必须把胶片透过率在 y 方向的变化直接成像到方位角信号的像平面上．这个任务是相当复杂的，因为方位变化的焦距是距离 r_m 的函数，因此依赖于所考虑的具体 y 值．为了构成最后的雷达地图，显然必须把透过率在 y 方向的变化成像到方位角像点所在的一个倾斜平面上．为了完成这个任务，需要设计一个补偿畸变的系统，它能对焦距随距离的变化进行校正，并且使每个像点在每一个方向上都聚焦到一个位置上，或者等价地说，这个补偿系统使该倾斜平面不倾斜，使它与准确的距离成像面重合．

出现最早也是最容易理解的一种系统如图 10.5.5 所示．它由一个球面透镜，一个柱面透镜和一个锥面透镜组成．锥面透镜对着透明编码片紧贴放置．锥面透镜沿着 x 方向的任一截面都是一个圆柱透镜，这样的选择可使它的正焦距与对应距离的波带片负焦距大小相等符号相反．既然这些一维波带片的焦距与距离成正比，则补偿透镜的焦距必须与 y 成线性关系，所以用锥面透镜，在每一个距离上的虚像被锥面透镜再成像到无穷远处，这样尽管不便于定位，但倾斜平面却被摆正了．然后，用一个柱面透镜把准确的距离平面即编码透明胶片平面成像到无穷远，为此将编码胶片放在柱面透镜的前焦面上，柱面透镜的取向要使其聚焦沿着 y 方向．这样，柱面透镜

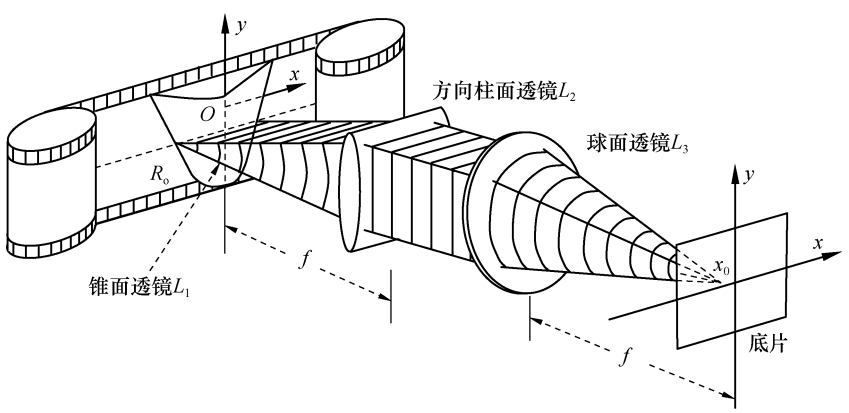


图 10.5.5　锥面透镜的光学处理机

就可以把距离信号平面成像到无穷远处 .然后用一块普通的球面透镜将已校正好的像从无穷远再次成像到球面透镜的后焦面上 .

图 10.5.6 是图 10.5.5 的俯视图和主视图 .

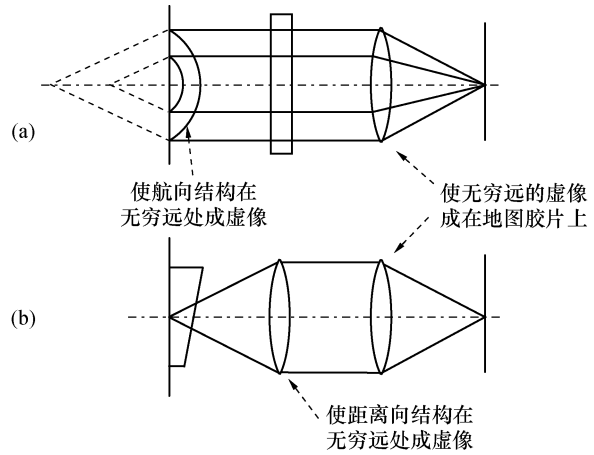


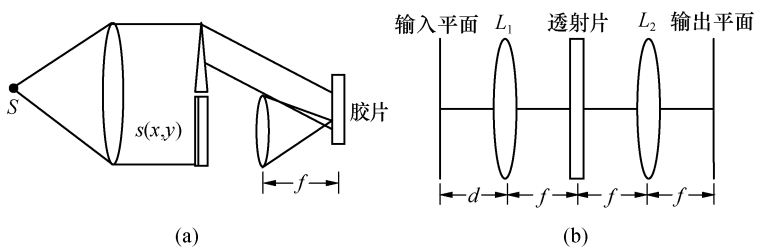
图 10.5.6 成像光学系统的俯视图和主视图

(a) 俯视图;(b) 主视图

习 题

10.1 参看图 10.1.1,在这种图像相减方法的编码过程中,如果所使用的光栅透光部分和不透光部分间距分别为 a 和 b,并且 $a \neq b$.试证明图像和的信息与图像差的信息分别受到光栅偶数倍频与光栅奇数倍频的调制 .

10.2 用 Vander Lugt 方法来综合一个频率平面滤波器,如图题 10.2(a)所示,一个振幅透射率为 $\boldsymbol{s}(x,y)$的"信号"底片紧贴着放在一个会聚透镜的前面,用照相底片记录后焦面上的强度,并使显影后底片的振幅透射率正比于曝光量 .这样制得的透明片放在图题 10.2(b)的系统中,假定在下述每种情况下考查输出平面的适当部位,问输入平面和第一个透镜之间的距离 d 应为多少,才能综合出:

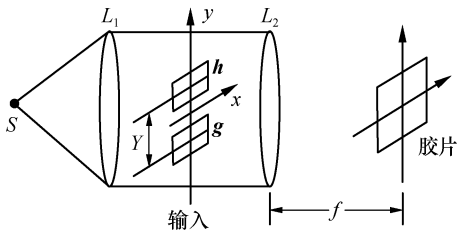


图题 10.2

(1) 脉冲响应为 $\boldsymbol{s}(x,y)$的滤波器?

(2) 脉冲响应为 $\boldsymbol{s}^*(-x,-y)$的"匹配"滤波器?

10.3 振幅透射率为 $\boldsymbol{h}(x,y)$和 $\boldsymbol{g}(x,y)$的两张输入透明片放在一个会聚透镜之前,其中心位于坐标($x=0$, $y=Y/2$)和($x=0$, $y=-Y/2$)上,如图题 10.3 所示,把透镜后焦面上的强度分布记录下来,由此制得一张 γ 为 2 的正透明片 .把显影后的透明片放在同一透镜之前,再次进行变换 .试证明透镜的后焦面上的光场振幅含有 $\boldsymbol{h}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 的互相关,并说明在什么条件下,互相关项可以从其他的输出分量中分离出来 .



图题 10.3

10.4　在照相时,若相片的模糊只是由于物体在曝光过程中的匀速直线运动,运动的结果使像点在底片上的位移为 0.5mm,试写出造成模糊的点扩展函数 $\boldsymbol{h}(x,y)$;如果要对该相片进行消模糊处理,写出逆滤波器的透过率函数.

第 11 章　非相干光学处理

非相干光学处理是指采用非相干光照明的信息处理方法，系统传递和处理的基本物理量是光场的强度分布．早期的光学处理多属于非相干光学处理，由于光场的非相干性质，输入函数和脉冲响应都只能是非负的实函数．对于大量双极性质的输入和脉冲响应，处理起来比较困难．激光出现后，相干系统具有一个物理上的频谱平面，可以实现傅里叶变换运算，大大增加了处理的灵活性．又由于全息术的推动，使相干光学处理的研究极为活跃，一度曾使非相干处理技术相形失色．但是多年的实践表明，相干处理系统的突出问题是相干噪声严重，导致对系统元件提出较高要求，而非相干处理系统由于其装置简单，又没有相干噪声，因而再度受到广泛的重视．

本章第 4 节介绍一类新的处理方法，它采用非相干光源照明，但采取了一些提高空间相干性和时间相干性的措施，从而在某种程度上既保留了相干处理系统对复振幅进行运算的能力，又增加了处理的灵活性，因而受到越来越多的重视．

11.1　相干与非相干光学处理

11.1.1　相干与非相干光学处理的比较

我们把一张透明图像片作为一个线性系统的输入，当用相干光照明它时，图片上每一点的复振幅均在其输出面上产生相应的复振幅输出．整个输出图像是这些复振幅的线性叠加，即

$$\boldsymbol{U}(x,y)=\sum_i \boldsymbol{U}_i(x,y) \tag{11.1.1}$$

也就是合成复振幅满足复振幅叠加原则．然而人眼、感光胶片或其他接收器可感知的是光强，即合成振幅绝对值的平方

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I}(x,y)&=|\boldsymbol{U}(x,y)|^2=\Big|\sum_i \boldsymbol{U}_i(x,y)^2\Big| \\ &=\sum_i |\boldsymbol{U}_i(x,y)|^2+\sum_{i\neq j}\boldsymbol{U}_i(x,y)\boldsymbol{U}_j^*(x,y) \\ &=\sum_i \boldsymbol{I}_i+\sum_{i\neq j}\boldsymbol{U}_i(x,y)\boldsymbol{U}_j^*(x,y) \end{aligned} \tag{11.1.2}$$

对于完全非相干系统，输入图像上各点的光振动是互不相关的，每个点源发出的光是完全独立的，或者说是完全随机的，其振幅和初相位均随时间作随机变化．而观察是对时间的平均效应．这样一来(11.1.2)式中的第二项，在非相干情况下其平均值为零，即有

$$\boldsymbol{I}(x,y)=\sum_i \boldsymbol{I}_i(x_i,y_i) \tag{11.1.3}$$

由此可知，非相干光处理系统是强度的线性系统，满足强度叠加原则．

因此，相干光处理与非相干光处理系统的基本区别在于，前者满足复振幅叠加原则，后者满足强度叠加原则．显然，复振幅可取正负或其他复数值．这样一来，相干光处理系统有可能完成加、减、乘、除、微分和卷积积分等多种运算．特别是能利用透镜的傅里叶变换性质，在特定的频谱面上提供输入信息的空间频谱，在这个频谱面上安放滤波器，可以方便而巧妙地进行频域综合，实现空间滤波，而在非相干光学处理系统中，光强只能取正值．故相干光学处理信息的能力比非

相干光学处理系统要丰富得多,这就是为什么一般采用相干光而不是非相干光进行信息处理的主要原因.

然而,相干光学处理也有几个固有缺点.

① 相干噪声和散斑噪声问题.在光学系统中(如透镜、反射镜和分束器等)不可避免地存在一些缺陷,如气泡、擦痕以及尘埃、指印或霉斑等.当用相干光照明时,这些缺陷将产生衍射,而这些衍射波之间又会互相干涉,从而形成一系列杂乱条纹与图像重叠在一起,无法分开.这就是所谓相干噪声.

另外,当用激光照明一个漫射体时,物体表面上各点反射的光在空间相遇而发生干涉.由于漫射物体表面的微观起伏与光波长相比是粗糙的,也是无规的,因而这种干涉也是无规的.当用相干光照明漫射物体时,这个物体看上去总是麻麻点点的,这就是散斑噪声.

由于以上两种噪声的存在,因此相干光处理的图像总是斑纹重叠,结果不令人满意,有时甚至把信号淹没.噪声问题成了相干光信息处理发展的严重障碍.

② 输入和输出上存在的问题.由于信息是以光场复振幅分布的形式在系统中传递和处理,这就要求把输入图像制成透明片,然后用激光照明.这就排除了直接使用阴极射线管(CRT)和发光二极管(LED)阵列作为输入信号的可能性.而在许多实际应用中的信号是以这种方式提供的,现在已广为使用的光学与电子学混合处理系统,可以直接使用这类非相干信号.

③ 激光是单色性极好的光源,因此,相干处理系统原则上只能处理单色图像,对彩色图像的处理几乎无能为力.

11.1.2 非相干光学处理系统的噪声抑制

非相干光学处理系统对噪声的抑制作用,是从通信理论中的多余通道的概念发展而来的.例如发送某个信号用了 N 个信息通道(如同同时用几路电话通道来传送一个电话),那么第 i 个通道的输出信号为

$$a_i = s + n_i \tag{11.1.4}$$

式中,n_i 为第 i 个通道上的噪声,不同通道上的噪声是不同的;s 为信号,它对所有的通道都是相同的.这样,总的输出信号为

$$I = E\left\{\left(\sum_{i=1}^{N} a_i\right)^2\right\} \tag{11.1.5}$$

这里的 $E\{\ \ \}$ 表示对集合求平均.把(11.1.4)式代入(11.1.5)式得

$$I = N^2 s^2 + 2Ns\sum_{i=1}^{N} E\{n_i\} + \sum_{i,j=1}^{N} E\{n_i n_j\} \tag{11.1.6}$$

由于噪声是完全随机的,其振幅的平均值为零,即 $E\{n_i\}=0$,而且不同噪声之间互不相关,因此

$$E\{n_i n_j\} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \sigma^2, & i = j \end{cases} \tag{11.1.7}$$

式中,σ^2 为噪声方差,σ 称为标准偏差,为平均噪声水平.于是

$$I = N^2 s^2 + N\sigma^2 \tag{11.1.8}$$

由以上分析可知,单一通道上的信噪比为 s^2/σ^2. 当引入 N 个通道后,信噪比为 $N^2 s^2/N\sigma^2$. 因此,多余通道的引用使输出信噪比可提高 N 倍.

关于这一点在光学系统中也容易理解.如图 11.1.1 所示,用三个互不相干的点光源代表单色空间非相干扩展光源.光源放在准直透镜 L_1 前焦面上.显然,不同点光源发出的光经准直透镜后,将通过不同的路径到达像面.由图可见,不同路径的光所成的像是相互重叠的,也就是不同通

道上的信号是相同的.这就使得光学元件上的尘埃或其表面缺陷对处理的影响微不足道.例如,在图中的第三通道中,由于透镜表面的尘埃挡掉了来自物体某一部分的信息,但它还可以从另外两个通道传到输出面.另外,即使系统内各处都有尘埃或缺陷,但由于不同的路径所通过的光学系统的区域是不相同的,也就是说不同通道上的噪声分布是不相同的,而这些通道上各光场之间互不相干,故输出平面上的噪声是不同通道上噪声的强度相加,最终的结果就是对噪声的平均.因此,用空间非相干扩展光源可提高输出图像的信噪比.

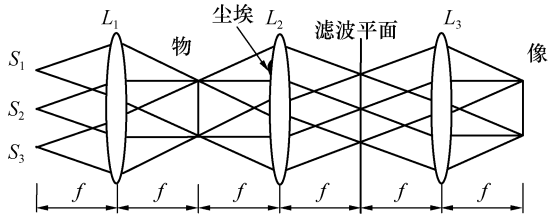


图 11.1.1 扩展光源引入的多余通道

同样也可降低光源的时间相干性(即用多色光)达到相同的目的.例如在白光系统中插入某种光栅结构,由于不同的照明波长,光栅的衍射角各不相同.不同波长的光从不同的通道通过光学系统,这与空间相非干光照明的情况相类似.因此白光处理系统同样有噪声抑制作用.

因此,现在发展的非相干光学处理系统实际上采用的不是完全非相干光,而是部分相干光.其主要思想在于,适当地降低光源的相干性,使该系统不失去相干光学处理的优点,即满足复振幅叠加而不是强度叠加的原则.但又由于非相干光源的应用,使系统获得了多余通道,从而降低了噪声.因此,这种系统兼有相干光学处理系统与非相干光学处理系统的优点,十分引人注目.

通常用的白光光源,由于灯丝或电弧总有一定大小,是扩展光源,它不具备所要求的空间相干性.如果将白光光源通过一个会聚透镜聚焦,焦点就是光源的像,也有一定大小.为获得足够的空间相干性,可以焦点处放一个针孔,这相当于把一个扩展光源变成了一个点光源,得到了适当的空间相干性,以满足系统进行振幅变换的需要,针孔大小应根据实际要求而定,一般是几十微米到二百微米范围.

11.2 基于几何光学的非相干处理系统

11.2.1 成像

实现两个函数的卷积和相关是光学信息处理中最基本的运算,在相干光学处理系统中,这些运算是通过两次傅里叶变换和频域乘法运算完成的.非相干处理系统由于没有物理上的频谱平面,故不能按照同样的方法处理.但是从空域来看,卷积和相关运算都包括位移、相乘、积分三个基本步骤,采用非相干成像系统也可以完成这些运算.

若把强度透射率为 t_1 的一张透明片在强度透过率为 t_2 的另一张透明片上成像,那么在第二张透明片后面每点的光强都正比于乘积 t_1t_2. 所以用光电探测器来测量透过两块透明片的总强度时,给出的光电流 I 为

$$I=\iint_{-\infty}^{\infty} t_1(x,y)t_2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{11.2.1}$$

图 11.2.1 是实现这一运算的系统,透镜 L_2 将 t_1 以相等大小成像在 t_2 上,而透镜 L_3 将透过 t_2 的一个缩小像投射到探测器上,若使其中一张透明片匀速运动,并把测量的光电流响应作为时

间的函数,就可以实现 t_1 和 t_2 的一维卷积.例如,让透明片 t_2 按反射的几何位置放入,使得(11.2.1)式变成

$$I=\iint_{-\infty}^{\infty} t_1(x,y)t_2(-x,-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

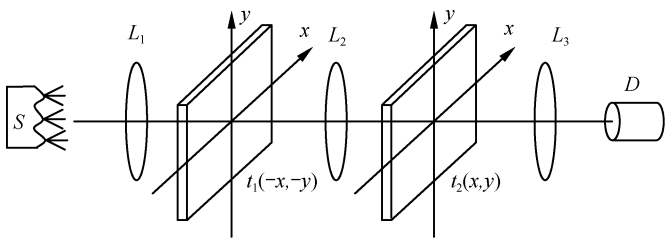


图 11.2.1 实现一个乘积的积分的系统

若使 t_2 在 x 和 y 的正方向分别移动 x_0 和 y_0,则 $t_2(-x,-y)$变成 $t_2[-(x-x_0),-(y-y_0)]=t_2(x_0-x,y_0-y)$,这时探测器的响应为

$$I(x_0,y_0)=\iint_{-\infty}^{\infty} t_1(x,y)t_2(x_0-x,y_0-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

显然光电探测器测得的 $I(x_0,y_0)$值是 t_1*t_2 在 $x=x_0$,$y=y_0$ 点的卷积值.若使 t_2 沿正 x 方向以速率 v 运动,则光电探测器测得的是随时间变化的 $I(t)$值

$$I(t)=\iint_{-\infty}^{\infty} t_1(x,y)t_2(vt-x,-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这表示一维卷积运算随 x_0 的变化关系,也就是说用光电探测器对卷积函数扫描,要是把 $t_2(x,y)$放在能作二维运动的装置上,便可实现对二维卷积函数的扫描.在 x 方向作每次扫描时,沿 y 的正方向有不同位移 y_m,那么光电探测器的响应为

$$I_m(t)=\iint_{-\infty}^{\infty} t_1(x,y)t_2(vt-x,y_m-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad m=1,2,3,\cdots \tag{11.2.2}$$

即得到完整的二维卷积(虽然在 y 方向是抽样的).

相关运算与卷积运算的区别在于,两个函数之一没有“折叠”的步骤,所以只要使 t_2 透明片按正向几何位置放入就可实现两者的相关运算.若使 t_2 沿 x 和 y 的负方向移动 x_0 和 y_0,则 $t_2(x,y)$变成 $t_2(x+x_0,y+y_0)$,于是光电探测器的响应为

$$I(x_0,y_0)=\iint_{-\infty}^{\infty} t_1(x,y)t_2(x+x_0,y+y_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这便是 t_1 和 t_2 在 $x=x_0$,$y=y_0$ 点的相关值.

利用这种系统可以使模糊图像复原,这时 $t_1(x,y)$是模糊图像,$t_2(x,y)$是用来消模糊的脉冲响应函数.这种系统也可以用来作目标识别,这时的 $t_2(x,y)$将设计成识别特定目标的掩模板.

11.2.2 无运动元件的卷积和相关运算

为了避免机械扫描的麻烦,可以采用图 11.2.2 所示的系统来实现卷积和相关运算.均匀漫射光源 S 放在透镜 L_1 的前焦面上,透射率为 $f(x,y)$的透明片紧贴着放在 L_1 之后,在离 $f(x,y)$的距离为 d 处,并且在透镜 L_2 的前面紧贴放置透明片 $h(x,y)$,然后在 L_2 的后焦面上用胶片或二维阵列检测器进行记录.

为了解释这个系统的工作原理,考虑由光源上特定一点$(-x_0,-y_0)$发出的光,经 L_1 后变成平行光,若把第一张透明片投影到第二张透明片上,则通过 L_2 把光束会聚到探测器的(x_0,y_0)

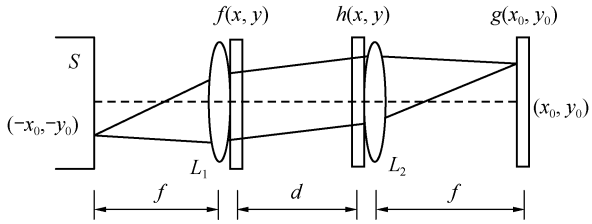


图 11.2.2 实现无运动卷积和相关运算的系统

点,如果假定两个透镜的焦距相同,那么在检测器上的强度分布为

$$g(x_0,y_0)=\iint_{-\infty}^{\infty} f\left(x-\frac{d}{f}x_0,y-\frac{d}{f}y_0\right)h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{11.2.3}$$

这正是所要求的相关.若第一张输入透明片按反射的几何位置放入,则检测器上的强度分布为

$$g(x_0,y_0)=\iint_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{d}{f}x_0-x,\frac{d}{f}y_0-y\right)h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{11.2.4}$$

这正是所要求的卷积.

这种系统的优点是简单易行,缺点是对 $f(x,y)$的空间结构越细,得到的相关值误差就越大.因为从 $f(x,y)$到 $h(x,y)$完全是按几何投影考虑,完全忽略了结构的衍射,结构越细,衍射越显著,所以用这个系统处理的图像的分辨率是受到限制的.

11.2.3 用散焦系统得到脉冲响应的综合

利用散焦系统可以直接综合出一个非负的脉冲响应,图 11.2.3 是实现这种综合的光路.均匀散射光源 S 经 L_1 在输入透明片 $f(x,y)$上成像,透镜 L_2 使 $f(x,y)$在平面 P'上1∶1地成像.具有非负脉冲响应形式的透明片 $h(x,y)$直接位于 L_2 的后面,在离像面 Δ 距离的离焦平面上,得到系统的输出.

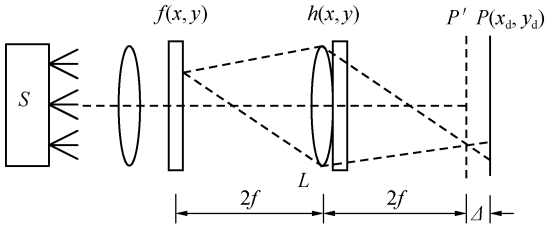


图 11.2.3 用散焦系统得到脉冲响应的综合

为了解释这个系统的工作原理,$f(x,y)$上一个单位强度的点光源在 P 平面上的脉冲响应,在几何光学近似条件下,就是 $h(x,y)$在 P 面上形成的缩小投影,投影中心的坐标为{$a=-[1+(\Delta/2f)]x$,$b=-[1+(\Delta/2f)y]$}.考虑到投影时 $h(x,y)$的方向将发生几何反射,于是对点光源的响应为

$$h\left\{-\frac{2f}{\Delta}\left[x_d+\left(1+\frac{2f}{\Delta}\right)x\right],\quad \frac{2f}{\Delta}\left[y_d+\left(1+\frac{\Delta}{2f}\right)y\right]\right\}$$

这样,输出点$(-x_d,-y_d)$的强度可以写成卷积积分

$$I(-x_d,-y_d)=\iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)h\left\{\frac{2f}{\Delta}\left[x_d-\left(1+\frac{\Delta}{2f}\right)x\right],\quad \frac{2f}{\Delta}\left[y_d-\left(1+\frac{\Delta}{2f}\right)y\right]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{11.2.5}$$

以几何光学为基础的非相干处理系统有两个明显的限制:一个是由于照明的非相干性质,系统传递和处理的物理量只能是非负的强度分布,给处理双极性信号和综合双极性脉冲响应造成困难;另一个限制是我们在所有分析过程中均忽略了衍射效应,这实际上是限制了系统处理的信息容量.因为信息容量的增大,意味着透明片上的空间结构变得越来越精细,通过透明片的光就越来越多地被衍射,只剩下越来越少的光遵从几何光学定律,所以输出将偏离按几何关系给出的结果.

11.3 基于衍射的非相干处理——非相干频域综合

在相干处理系统中,可以由直接改变变换透镜后焦面上的振幅透过率来综合所需要的滤波运算.当使用非相干光照明时,频域综合仍然是可能的,因为非相干系统的光瞳函数和光学传递函数之间存在着一个简单的自相关函数关系.

图 11.3.1 绘出了典型非相干空间滤波系统,类似于相干成像系统,输入与输出强度分布的关系可以表示为

$$i'(x,y) = i(x,y) * h_I(x,y) \tag{11.3.1}$$

h_I 为系统的强度点扩展函数(PSF),上式的归一化傅里叶变换为

$$I'(\xi,\eta) = I(\xi,\eta)H(\xi,\eta) \tag{11.3.2}$$

式中,I 和 I' 分别为输入和输出强度分布的归一化频谱,$H(\xi,\eta)$为系统的光学传递函数(OTF).非相干空间滤波是改变输入光强频谱中各频率余弦分量的对比和相位关系,只要根据所需的输入输出关系,在频域综合出所需的 OTF,就可实现各种形式的滤波.

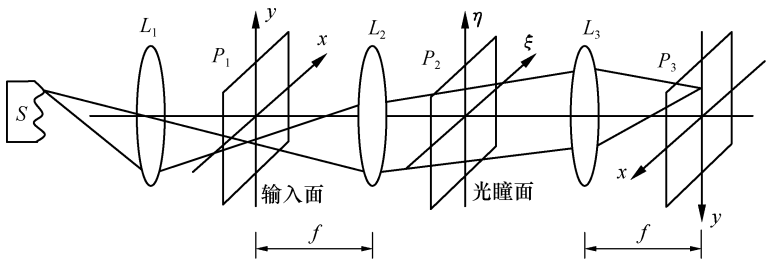


图 11.3.1 非相干空间滤波系统

衍射受限系统的 OTF 等于光瞳函数(即出射光瞳函数,简称光瞳函数)的归一化自相关函数,即

$$H(\xi,\eta) = \frac{P(\lambda d_i\xi,\lambda d_i\eta)\text{☆}P(\lambda d_i\xi,\lambda d_i\eta)}{\iint_{-\infty}^{\infty} |P(u,v)|^2 \mathrm{d}u\mathrm{d}v} \tag{11.3.3}$$

式中,☆表示相关,d_i 为系统的出瞳至像面的距离.对半径为 a 圆形光瞳,其光学传递函数如图 11.3.2 所示.ρ 为极坐标下的空间频率,曲线在 $\rho=0$ 处有最大值,随着空间频率上升,H 值单调下降,直至截止频率 $\rho_0=2a/\lambda d_i$.若透镜有像差,则根据像差形式及数值,OTF 曲线的形状发生变化,但通常在 $\rho=0$ 处取极大值这一点是不变的.因此,由这种光学系统得到的像能够用作通过 $0\sim\rho_0$ 频率的低通滤波器.由(11.3.3)式可知,根据系统所需的 OTF 设计光瞳函数,频域综合可在光瞳面着手.

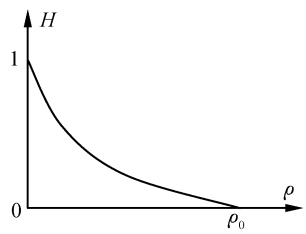


图 11.3.2 圆形光瞳的 OTF

相干系统中有一个物理上的实实在在的频谱面,通常光瞳面与

频谱面重合,非相干系统中关系没有这样直接,光瞳函数与传递函数之间通过自相关相联系.当光瞳面上仅是一个简单孔径,系统是非相干成像系统,也可看作低通滤波系统.若光瞳面上放置其他形式的滤波器,P 应该等于滤波器的透过率函数.对于滤波器的位置精度要求,不像相干系统那么苛刻.非相干系统的频域综合存在两个明显缺点.首先,由于 OTF 是自相关函数,频域综合只能实现非负的实值脉冲响应;其次,由所需的传递函数确定光瞳函数的解不是唯一的,如何由 OTF 确定最简单的光瞳函数的步骤现在还不知道.

下面给出非相干频域综合的两个实例.

11.3.1 切趾术

在非相干成像系统中,点物在像面上的响应称为点扩散函数.为说明概念,我们考虑一个单透镜成像系统,若孔径光阑紧贴透镜放置,则孔径光阑也是出瞳.我们知道,凡在照明点源(物点看作照明点源)的像面上接收的衍射场皆为夫琅禾费衍射,故其强度分布就是点扩散函数.若孔径是半径为 a 的圆形,则点扩散函数为

$$h(r)=\left[\frac{2J_1(2\pi ar/\lambda q)}{2\pi ar/\lambda q}\right]^2 \tag{11.3.4}$$

式中:r 为像面上距理想像点的距离;q 为光瞳(出瞳)面到像面的距离,但不是一般意义下的像距;λ 为照明光的波长.这就是艾里斑图样,它的中央是一个亮斑,并围绕以亮暗相间的圆环.艾里斑的中央亮斑占有绝大部分能量,根据瑞利判据,系统的分辨率完全决定于中央亮斑半径.次级亮环的峰值仅是中央峰值的 0.017,可以忽略它的影响.但是,这个分辨率判据仅适合于分辨两个等强度光点的情况.当两个光点强度的差别与艾里斑中央和次级大相当时,次级大的存在将干扰我们判断较弱光点的存在.例如观测天狼星附近很弱的伴星,在其光谱测量中观察弱的附属谱线时,就会遇到这种情况.切趾术就是为了使中央亮斑周围的亮环去掉而采取的一种非相干频域的综合技术.

由于光瞳边界透过率呈阶跃变化,导致次级衍射环的产生.要切去点扩展函数的趾部(次级亮环),应把光瞳的透过率分布改为缓变形式.例如采用高斯型透过率孔径函数(光瞳函数),由于高斯型孔径的夫琅禾费衍射图样仍是高斯型的(即高斯函数的傅里叶变换仍是高斯函数),故点扩散函数仍是高斯型分布,能够满意地消除次级环的影响.从 OTF 的观点看,这是增大低频的调制传递函数(MTF)值,削弱高频传递能力的结果.图 11.3.3 比较了切趾前后的光瞳函数、点扩散函数和调制传递函数(光学传递函数的模).

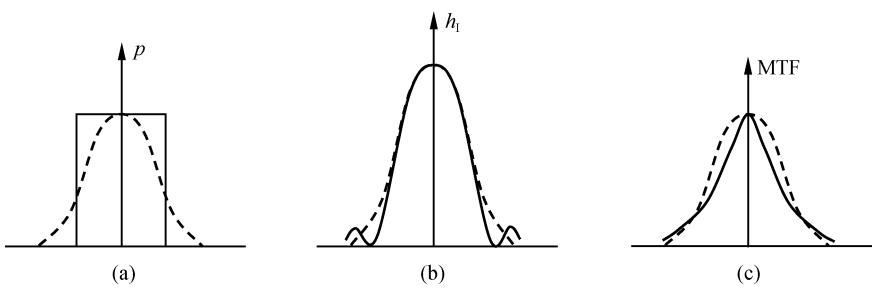


图 11.3.3 切趾术

——切趾前;——切趾后;(a) 光瞳函数;(b) 点扩散函数;(c) MTF

下面介绍一个具体的结构.图 11.3.4 表示一个望远物镜 L,孔径光阑 P 紧贴物镜放置.被观察的远方物体在其后焦面上产生的像乃是孔径函数的夫琅禾费衍射图样,其强度分布如图

11.3.3(b)中的实线所示.为了既不增加孔径 P,又使中央亮斑之外的次极大被切掉,可在孔径 P 上放入一块玻璃制成的很薄的平行平板 Q,在其上镀以非均匀的吸收膜层,使它的振幅透过率从中心到边缘逐渐减小,呈高斯分布曲线变化,如图 11.3.3(a)的虚线所示.这样,孔面上光场的分布就由原来的均匀分布变成了高斯分布,所以后焦面上的衍射斑也就是高斯函数的傅里叶变换了,它仍然是高斯分布,如图 11.3.3(b)中的虚线所示.中央亮斑的宽度虽然略有变宽,但它的边缘次级大被切掉了.

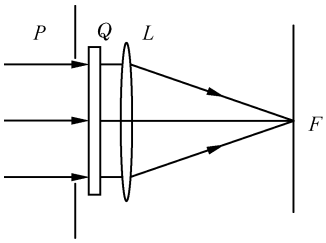


图 11.3.4　作切趾术的系统

11.3.2　沃耳特(Wolter)最小强度检出滤波器

这是个在光瞳面上建立适当的相位分布,从而改变系统成像性质的例子.矩形光瞳分成两半,其中一半蒸镀了产生 π 相位差的透明薄膜,如图 11.3.5(a)所示.这种情况下,光学系统的点扩散函数为

$$h(x)=\left|\int_{-u_0}^{0}(-1)\exp(-\mathrm{j}2\pi ux/\lambda f)\mathrm{d}u+\int_{0}^{u_0}(+1)\exp(-\mathrm{j}2\pi ux/\lambda f)\mathrm{d}u\right|^2$$
$$=4u_0^2\left[\frac{\sin^2(\pi u_0 x/\lambda f)}{\pi u_0 x/\lambda f}\right]^2 \tag{11.3.5}$$

图 11.3.5(b)画出了(11.3.5)式的函数图形,由图看出,在 $x=0$ 处产生极锐的暗线.图 11.3.5(c)是用(11.3.5)式算出的系统的 OTF 的形状,其特征是 ξ 的中间部分下降,而相位反转的高频区域却保持理想值.如果用这样的光学系统产生接近于点光源或线光源的物体像,则在像的中心将出现很窄的暗线,用它测定物体的位置特别有利.这种方法用于摄谱仪,可以求出光谱线的正确位置;而在测量显微镜中可用来测定狭缝和小孔的位置.

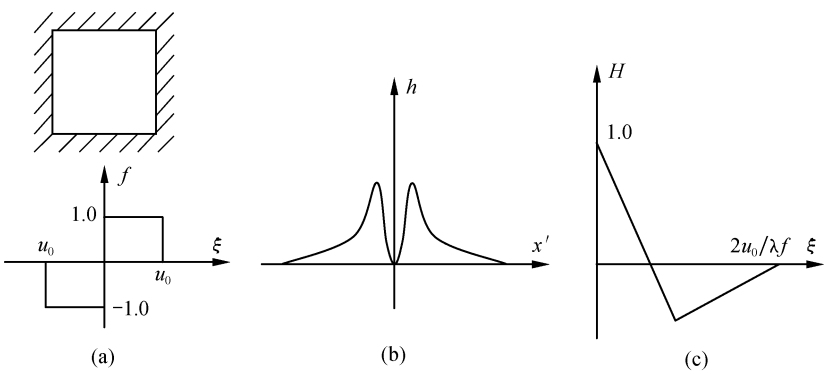


图 11.3.5　沃耳特(Wolter)最小强度检出滤波器

11.4　白光光学信息处理技术

采用相干光源能使光学系统实现许多复杂的信息处理运算,这主要是由于相干光学系统的复振幅处理能力很强.可是,正如盖伯所指出的,相干噪声是光学信息处理的头号敌人.此外,相干光源通常是昂贵的,并且对光学处理的环境要求非常严格.

非相干光学处理采用横向扩散的光源,没有空间相干性,若同时采用白光,则时间相干性也减少到很小的程度,因此这种处理方法具有噪声低、结构简单的优点.可是,非相干处理系统没有

物理上的频谱平面,因而频域综合就比较困难.由于系统的输入和脉冲响应都只能是非负的实函数,这又大大限制了系统所能完成的运算.于是,人们会提出这样一个问题:在光学处理中能否降低对光源相干性的要求,但又同时保持对复振幅的线性运算性质?

为了回答这个问题,人们研究了一类新的光学处理方法,称为白光光学处理.白光光学处理采用宽谱带白光光源,但采用微小的光源尺寸以提高空间相干性,另一方面在输入平面上引入光栅来提高时间相干性,这样既不存在相干噪声,又在某种程度上保留了相干光学处理系统对复振幅进行运算的能力,运算灵活性好.由于采用宽谱带光源,特别适合于处理彩色图像,近年来受到越来越多的重视.有时将白光光学处理归入非相干光学处理一类,仅仅是从它采用了非相干光源这一角度考虑,我们应该注意到,它与通常所说的非相干光学处理是明显不同的.

11.4.1 白光光学处理的基本原理

常用的白光光学处理系统如图 11.4.1 所示.其中 S 是白光点光源或者白光光源照明的小孔,L_1 为准直透镜,L_2 和 L_3 是消色差傅里叶变换透镜,P_1,P_2 和 P_3 分别是系统的输入平面、频谱平面和输出平面.这一系统类似于相干光学处理的 $4f$ 系统.但在白光处理中,通常物函数均用光栅抽样(调制)后才放入输入面上,通过对频谱面上色散的物频谱作处理,实现对物函数的处理.令输入透明片的复振幅透过率为 $\boldsymbol{t}(x_1,y_1)$,与输入透明片紧贴的正弦光栅为

$$t_g(x_1)=1+\cos(2\pi\xi_0 x_1) \tag{11.4.1}$$

式中,ξ_0 为光栅频率,并假定物透明片对照明光源中各种波长的光波的振幅透过率相同.则经光栅抽样后的复振幅分布为

$$\boldsymbol{f}(x_1,y_1)=\boldsymbol{t}(x_1,y_1)[1+\cos(2\pi\xi_0 x_1)] \tag{11.4.2}$$

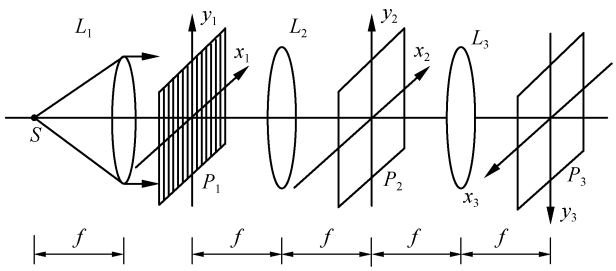


图 11.4.1 白光光学处理器

对某一确定的波长 λ,在消色差变换透镜 L_2 后焦面 P_2 的空间频谱为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(\xi,\eta)&=\boldsymbol{T}(\xi,\eta)*\left[\delta(\xi,\eta)+\frac{1}{2}\delta(\xi-\xi_0,\eta)+\frac{1}{2}\delta(\xi+\xi_0,\eta)\right]\\&=\boldsymbol{T}(\xi,\eta)+\frac{1}{2}\boldsymbol{T}(\xi-\xi_0,\eta)+\frac{1}{2}\boldsymbol{T}(\xi+\xi_0,\eta)\end{aligned} \tag{11.4.3}$$

利用 P_2 平面上频率坐标与空间坐标的关系:$\xi=x_2/\lambda f$,$\eta=y_2/\lambda f$,(11.4.3)式可写为

$$\boldsymbol{F}(x_2,y_2;\lambda)=\boldsymbol{T}\left(\frac{x_2}{\lambda f},\frac{y_2}{\lambda f}\right)+\frac{1}{2}\boldsymbol{T}\left(\frac{x_2}{\lambda f}-\xi_0,\frac{y_2}{\lambda f}\right)+\frac{1}{2}\boldsymbol{T}\left(\frac{x_2}{\lambda f}+\xi_0,\frac{y_2}{\lambda f}\right) \tag{11.4.4}$$

从(11.4.4)式看到:第一项为零级物谱,而且不同波长的零级物谱的中心位置是相同的;第二项和第三项是±1 级信号谱带,每个谱带中心在 $x_2=\pm\lambda f\xi_0$ 处,色散为彩虹颜色.对于波长间隔为 $\Delta\lambda$ 的两种色光,其一级谱中心在 x_2 轴上的偏移量是 $\Delta x_2=\Delta\lambda f\xi_0$. 假定信号的空间频带宽度为 W_t,则不同波长的物谱能够分离的条件是

$$\frac{\Delta\lambda}{\bar{\lambda}} \gg \frac{W_L}{\xi_0} \tag{11.4.5}$$

式中 $\bar{\lambda}$ 为两种色光的平均波长.

显然,只要光栅频率 ξ_0 远大于输入信号带宽,就可以忽略各波长频谱间的重叠,从而在+1级或−1级谱面,像相干处理那样,对一系列的波长进行滤波操作.对于某一确定波长 λ_n 来说,若设滤波函数为 $\boldsymbol{H}_n\left(\frac{x_2}{\lambda_n f}-\xi_0,\frac{y_2}{\lambda_n f}\right)$,则经过滤波和 L_3 的逆傅里叶变换后,如同相干处理那样,在输出平面上波长为 λ_n 的像场复振幅为

$$\boldsymbol{g}_n(x_3,y_3;\lambda_n)=F^{-1}\left\{\boldsymbol{T}\left(\frac{x_2}{\lambda_n f}-\xi_0,\frac{y_2}{\lambda_n f}\right)\boldsymbol{H}_n\left(\frac{x_2}{\lambda_n f}-\xi_0,\frac{y_2}{\lambda_n f}\right)\right\} \tag{11.4.6}$$

忽略与强度分布无关的量,输出平面上波长为 λ_n 的像强度分布为

$$I(x_3,y_3;\lambda_n)=|\boldsymbol{t}(x_3,y_3)*\boldsymbol{h}_n(x_3,y_3;\lambda_n)|^2$$

式中,$\boldsymbol{h}_n$ 是 $\boldsymbol{H}_n$ 的逆傅里叶变换.实际上滤波器 $\boldsymbol{H}_n$ 总不可能做到只让 λ_n 的光波通过,至少包含 λ_n 的某一波长间隔 $\Delta\lambda_n$ 的光波都能通过.当然,当 $\Delta\lambda_n$ 比 λ_n 小得多时,可以作为准单色处理.考虑到这一点,可以把通过 $\boldsymbol{H}_n$ 滤波后在像平面上的像强度分布写成

$$\Delta I_n=\Delta\lambda_n|\boldsymbol{t}(x_3,y_3)*\boldsymbol{h}_n(x_3,y_3;\lambda_n)|^2 \tag{11.4.7}$$

式中,$\boldsymbol{h}_n$ 是第 n 个滤波器的脉冲响应.当有 N 个离散的滤波器同时作用于频谱面时,由于不同波长的色光是不相干的,因而输出平面上得到的是不同波长输出的非相干叠加,即

$$I(x_3,y_3)=\sum_{n=1}^{N}\Delta\lambda_n|\boldsymbol{t}(x_3,y_3)*\boldsymbol{h}_n(x_3,y_3;\lambda_n)|^2 \tag{11.4.8}$$

从上述分析可以看出,白光处理技术的确能够处理复振幅信号,并且由于输出强度是互不相干的窄带光强度之和,因而又能抑制令人讨厌的相干噪声.应该指出,我们采用的分析方法是对确定波长的处理看作相干光处理,而对不同波长处理后像的叠加又看成是完全非相干的,这在理论上是不严格的,更严格的讨论涉及部分相干理论.尽管如此,在很多实际应用中,我们只涉及少数几个分离的波长(例如红、绿、蓝三原色),此时若在信号频谱后加滤色片,还可以进一步改善时间相干性.而且在采用矩形光栅时,由于光栅的多级衍射,在各个频谱上都可以进行滤波操作.对于这一类问题的处理,上述的近似分析已经足够了.实际上(11.4.5)式的条件对很多应用是过分严格了.

11.4.2 实时假彩色编码

白光信息处理系统对不同波长的单色光,提供了类似于相干光处理系统的运算能力,采用宽谱带光源使系统可以使用不同的色通道,有利于对图像进行彩色化处理.这里介绍两种图像假彩色编码的方法:等密度假彩色编码和等空间频率假彩色编码.这两种方法都不需要对输入的图像透明片进行预处理,而只需要在白光信息处理系统的频谱面上放置适当的滤波器,就可以在输出平面上直接得到彩色化的图像.由于具有实时处理的特点,因而又称为实时假彩色编码.

1. 等空间频率假彩色编码

将一复振幅透过率 $\boldsymbol{t}(x_1,y_1)$ 的黑白透明片与正交光栅一起放入图 11.4.1 所示的白光处理系统的输入平面 P_1 处,为分析简便起见,假定正交光栅在两个正交方向上是相加性的,其振幅透过率可以记为

$$t_g(x_1,y_1)=\left[1+\frac{1}{2}\cos(2\pi\xi_0 x_1)+\frac{1}{2}\cos(2\pi\eta_0 y_1)\right] \tag{11.4.9}$$

式中,ξ_0,η_0 分别是光栅在 x_1,y_1 方向上的空间频率.在频谱面 P_2 上,相应于波长 λ 的复振幅分

布正比于

$$\boldsymbol{F}(x_1,y_1;\lambda)=\boldsymbol{T}\left(\frac{x_2}{\lambda f},\frac{y_2}{\lambda f}\right)+\frac{1}{4}\left[\boldsymbol{T}\left(\frac{x_2}{\lambda f}-\xi_0,\frac{y_2}{\lambda f}\right)+\boldsymbol{T}\left(\frac{x_2}{\lambda f}+\xi_0,\frac{y_2}{\lambda f}\right)+\boldsymbol{T}\left(\frac{x_2}{\lambda f},\frac{y_2}{\lambda f}-\eta_0\right)+\boldsymbol{T}\left(\frac{x_2}{\lambda f},\frac{y_2}{\lambda f}+\eta_0\right)\right] \tag{11.4.10}$$

由上述方程可见,沿 x_2 和 y_2 轴共有四个彩虹色信号的一级衍射谱.由于空间滤波只有在沿着垂直于颜色弥散的方向上才有效,所以我们用图 11.4.2 所示的一维空间滤波器来进行假彩色化.图中,位于 x_2 轴上蓝色谱带处的是一维低通空间滤波器 $H_1(y_2/\lambda f)$,只让 y_2 方向的低频通过;位于 y_2 轴上蓝色谱带处的是一维低通空间滤波器 $H_1(x_2/\lambda f)$,只让 x_2 方向上的低频通过;位于 x_2 轴上红色谱带处的是一维高通空间滤波器 $H_2(y_2/\lambda f)$,只让 y_2 方向的高频通过;位于 y_2 轴上红色谱带处的是一维高通空间滤波器 $H_2(y_2/\lambda f)$,只让 x_2 方向的高频通过.于是,平面 P_2 上经过滤波后的谱函数可写为

$$\boldsymbol{G}\left(\frac{x_2}{\lambda f},\frac{y_2}{\lambda f};\lambda\right)=\boldsymbol{T}_b\left(\frac{x_2}{\lambda f}-\xi_0,\frac{y_2}{\lambda f}\right)\boldsymbol{H}_1\left(\frac{y_2}{\lambda f}\right)+\boldsymbol{T}_b\left(\frac{x_2}{\lambda f},\frac{y_2}{\lambda f}+\eta_0\right)\boldsymbol{H}_1\left(\frac{x_2}{\lambda f}\right)+\boldsymbol{T}_r\left(\frac{x_2}{\lambda f},\frac{y_2}{\lambda f}-\eta_0\right)\boldsymbol{H}_2\left(\frac{x_2}{\lambda f}\right)+\boldsymbol{T}_r\left(\frac{x_2}{\lambda f}+\xi_0,\frac{y_2}{\lambda f}\right)\boldsymbol{H}_2\left(\frac{y_2}{\lambda f}\right) \tag{11.4.11}$$

式中,$\boldsymbol{T}_b$ 和 $\boldsymbol{T}_r$ 分别是所选择的蓝色及红色彩色信号谱.在输出面 P_3 上,相应的复振幅分布为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}(x_1,y_1;\lambda)=&F\left[\boldsymbol{T}_b\left(\frac{x_2}{\lambda f}-\xi_0,\frac{y_2}{\lambda f}\right)\boldsymbol{H}_1\left(\frac{y_2}{\lambda f}\right)+\boldsymbol{T}_b\left(\frac{x_2}{\lambda f},\frac{y_2}{\lambda f}+\eta_0\right)\boldsymbol{H}_1\left(\frac{x_2}{\lambda f}\right)\right]\\&+F\left[\boldsymbol{T}_r\left(\frac{x_2}{\lambda f},\frac{y_2}{\lambda f}-\eta_0\right)\boldsymbol{H}_2\left(\frac{x_2}{\lambda f}\right)+\boldsymbol{T}_r\left(\frac{x_2}{\lambda f}+\xi_0,\frac{y_2}{\lambda f}\right)\boldsymbol{H}_2\left(\frac{y_2}{\lambda f}\right)\right]\\=&\exp(\mathrm{j}2\pi\xi_0x_3)\boldsymbol{t}_b(x_3,y_3)*\boldsymbol{h}_1(y_3)+\exp(-\mathrm{j}2\pi\eta_0y_3)\boldsymbol{t}_b(x_3,y_3)*\boldsymbol{h}_1(x_3)\\&+\exp(\mathrm{j}2\pi\eta_0y_3)\boldsymbol{t}_r(x_3,y_3)*\boldsymbol{h}_2(x_3)+\exp(-\mathrm{j}2\pi\xi_0x_3)\boldsymbol{t}_r(x_3,y_3)*\boldsymbol{h}_2(y_3)\end{aligned} \tag{11.4.12}$$

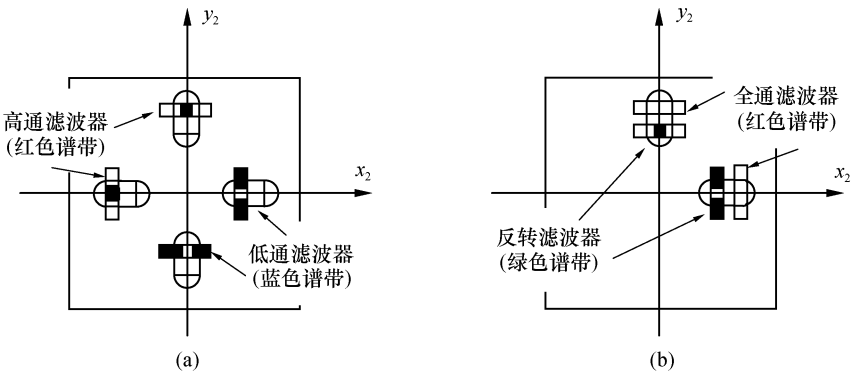


图 11.4.2 实时假彩色编码滤波器

(a) 等空间频率假彩色编码;(b) 等密度假彩色编码

如果光栅的空间频率 ξ_0 及 η_0 足够高,则(11.4.12)式可近似地表示为

$$\begin{aligned}I(x_3,y_3)\approx&\Delta\lambda_b\left|\exp(\mathrm{j}2\pi\xi_0x_3)\boldsymbol{t}_b(x_3,y_3)*\boldsymbol{h}_1(y_3)+\exp(-\mathrm{j}2\pi\eta_0y_3)\boldsymbol{t}_b(x_3,y_3)*\boldsymbol{h}_1(x_3)\right|^2\\&+\Delta\lambda_r\left|\exp(\mathrm{j}2\pi\eta_0y_3)\boldsymbol{t}_r(x_3,y_3)*\boldsymbol{h}_2(x_3)+\exp(-\mathrm{j}2\pi\xi_0x_3)\boldsymbol{t}_r(x_3,y_3)*\boldsymbol{h}_2(y_3)\right|^2\end{aligned} \tag{11.4.13}$$

式中，$\Delta\lambda_b$ 和 $\Delta\lambda_r$ 是信号的蓝色及红色的光谱宽度；$\boldsymbol{h}_r$ 及 $\boldsymbol{h}_g$ 分别是 $\boldsymbol{H}_1$ 和 $\boldsymbol{H}_2$ 的点扩散函数．上式表明，两个非相干像在输出平面 P_3 合成彩色编码像．像的低频结构呈蓝色，高频结构呈红色．相等的空间频率结构呈现同一颜色，故称为等空间频率假彩色编码．

2. 等密度假彩色编码

如果在上例中，在 P_2 平面上两个呈彩虹颜色的一级谱处安放如图 11.4.2(b)所示的滤波器，其中红色滤波器是一个简单的红滤色片，另一个绿色滤波器是由一个绿滤色片和绿色频带中心位置的 π 相位滤波器组成．于是，在输出平面上形成红色原像和绿色反转像叠加的结果，使得原图像不同密度的区域呈现不同的颜色．

下面作一些具体分析．谱平面上的红色谱带处是放置的一个全通滤波器，而在绿色谱带处是由一个绿色滤色片并在其中心加一个 π 相位滤波器组成，其数学表达式为

$$\boldsymbol{H}\left(\frac{x_2}{\lambda f}\right)=\begin{cases}-1, & x_2/\lambda f\approx 0\\ 1, & \text{其他}\end{cases}$$
$$\boldsymbol{H}\left(\frac{x_2}{\lambda f}\right)=\begin{cases}-1, & y_2/\lambda f\approx 0\\ 1, & \text{其他}\end{cases}\tag{11.4.14}$$

于是谱平面上滤波后的频谱分布为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}\left(\frac{x_2}{\lambda f},\frac{y_2}{\lambda f};\lambda\right)=&\boldsymbol{T}_r\left(\frac{x_2}{\lambda f}-\xi_0,\frac{y_2}{\lambda f}\right)+\boldsymbol{T}_r\left(\frac{x_2}{\lambda f},\frac{y_2}{\lambda f}-\eta_0\right)\\&+\boldsymbol{T}_g\left(\frac{x_2}{\lambda f}-\xi_0,\frac{y_2}{\lambda f}\right)\boldsymbol{H}\left(\frac{y_2}{\lambda f}\right)+\boldsymbol{T}_g\left(\frac{x_2}{\lambda f},\frac{y_2}{\lambda f}-\eta_0\right)\boldsymbol{H}\left(\frac{x_2}{\lambda f}\right)\end{aligned}\tag{11.4.15}$$

在白光处理的输出平面 P_3 上的复振幅分布为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}(x_3,y_3;\lambda)=&F\left\{\boldsymbol{T}_r\left(\frac{x_2}{\lambda f}-\xi_0,\frac{y_2}{\lambda f}\right)+\boldsymbol{T}_r\left(\frac{x_2}{\lambda f},\frac{y_2}{\lambda f}-\eta_0\right)\right\}\\&+F\left\{\boldsymbol{T}_g\left(\frac{x_2}{\lambda f}-\xi_0,\frac{y_2}{\lambda f}\right)\boldsymbol{H}\left(\frac{y_2}{\lambda f}\right)+\boldsymbol{T}_g\left(\frac{x_2}{\lambda f},\frac{y_2}{\lambda f}-\eta_0\right)\boldsymbol{H}\left(\frac{x_2}{\lambda f}\right)\right\}\end{aligned}\tag{11.4.16}$$

如果光栅频率足够高，则(11.4.16)式可近似地写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}(x_3,y_3;\lambda)=&[\exp(\mathrm{j}2\pi\xi_0 x_3)+\exp(\mathrm{j}2\pi\eta_0 y_3)]\boldsymbol{t}_r(x_3,y_3)\\&+[\exp(\mathrm{j}2\pi\xi_0 x_3)+\exp(\mathrm{j}2\pi\eta_0 y_3)]\boldsymbol{t}_g^n(x_3,y_3)\end{aligned}\tag{11.4.17}$$

式中，$\boldsymbol{t}_g^n(x_3,y_3)$是绿色的对比度反转像，即

$$\boldsymbol{t}_g^n(x_3,y_3)=\boldsymbol{t}_g(x_3,y_3)-2\langle\boldsymbol{t}_g(x_3,y_3)\rangle\tag{11.4.18}$$

这里的$\langle\boldsymbol{t}_g(x_3,y_3)\rangle$表示 $\boldsymbol{t}_g(x_3,y_3)$的集平均或系统平均．由于像 t_r 和 t_g^n 分别来自光源中不同颜色的光谱带，它们之间是非相干的，所以输出平面强度分布是

$$I(x_3,y_3)=\int|g(x_3,y_3;\lambda)|^2\mathrm{d}\lambda=\Delta\lambda_r I_r(x_3,y_3)+\Delta\lambda_g I_g^n(x_3,y_3)\tag{11.4.19}$$

$I_r(x_3,y_3)$是红色正像，$I_g^n(x_3,y_3)$是绿色负像，$\Delta\lambda_r$ 和 $\Delta\lambda_g$ 分别是红色和绿色的光谱宽度．当这两个像重合在一起时就得到了密度假彩色编码的像．原物中密度最小处呈红色，密度最大处呈绿色，中间部分分别对应粉红、黄、浅绿等颜色，密度相同处出现相同的颜色．

11.5 相位调制假彩色编码

将黑白图像彩色化，并使彩色图像特征鲜明，易于识别，一直是图像处理中的一个重要课题．

在已研究的实现图像彩色化的许多方法中,相位调制彩色编码方法由于其光强利用率高,色饱和度好,噪声低,操作简单,已在遥感、生物医学、气象等图像处理中得到应用.相位调制彩色编码方法经过对信息的调制和解调,实现了空间强度调制信息与空间波长调制信息的转换.这些技术对于理解光学信息处理的实质具有典型的意义,也是白光光学处理的原理性概念的一种具体应用.

密度假彩色编码可分为三个步骤:光栅抽样,漂白处理,白光信息处理系统中滤波解调.

11.5.1 光栅抽样

将周期为 a 的罗奇光栅与输入图像重叠在一张复制底片上均匀曝光.设输入图像的密度为 $D_i(x,y)$,罗奇光栅的透过率为

$$T_s(x,y)=\operatorname{rect}\left(\frac{2x}{a}\right)*\frac{1}{a}\operatorname{comb}\left(\frac{x}{a}\right) \tag{11.5.1}$$

则经光栅抽样后所得负片的密度分布 $D(x,y)$为

$$D(x,y)=\{[D_{10}-\gamma D_i(x,y)]-D_0\}\operatorname{rect}\left(\frac{2x}{a}\right)*\frac{1}{a}\operatorname{comb}\left(\frac{x}{a}\right)+D_0 \tag{11.5.2}$$

式中:D_0 是底片的灰雾密度,D_{10}是可通过改变曝光条件来控制的常数,γ是底片的反差系数.这样得到的一张矩形级数光栅,其底片光密度可以简记为

$$D(x,y)=\begin{cases}D_0, & T_s \text{ 为 } 0 \text{ 处}\\ D_{10}-\gamma D_i(x,y), & T_s \text{ 为 } 1 \text{ 处}\end{cases} \tag{11.5.3}$$

11.5.2 漂白处理

将经抽样所得到的负片进行漂白处理,并适当控制漂白工艺,可以得到近似满足光程差正比于底片密度的效果,即

$$L(x,y)=\begin{cases}L_0=CD_0, & T_s=0\\ L_1=C[D_{10}-\gamma D_i(x,y)], & T_s=1\end{cases} \tag{11.5.4}$$

其相位分布

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}\varphi_0=2\pi L_0/\lambda, & T_s=0\\ \varphi_1=2\pi L_1/\lambda, & T_s=1\end{cases} \tag{11.5.5}$$

复振幅透过率

$$\exp[\mathrm{j}\varphi(x,y)]=\begin{cases}\exp(\mathrm{j}\varphi_0)=\exp\left[\mathrm{j}\dfrac{2\pi}{\lambda}CD_0\right], & T_s=0\\ \exp\left\{\mathrm{j}\dfrac{2\pi}{\lambda}C[D_{10}-\gamma D_i(x,y)]\right\}, & T_s=1\end{cases} \tag{11.5.6}$$

或

$$T(x,y)=\begin{cases}T_0=\exp(\mathrm{j}\varphi_0)=\exp\left[\mathrm{j}\dfrac{2\pi}{\lambda}CD_0\right], & T_s=0\\ T_1=\exp(\mathrm{j}\varphi_1)=\exp\left\{\mathrm{j}\dfrac{2\pi}{\lambda}C[D_{10}-\gamma D_i(x,y)]\right\}, & T_s=1\end{cases} \tag{11.5.7}$$

最后得到编码的相位光栅的振幅透过率为

$$T(x,y)=[T_1-T_0]\operatorname{rect}\left(\frac{2x}{a}\right)*\frac{1}{a}\operatorname{comb}\left(\frac{x}{a}\right)+T_0 \tag{11.5.8}$$

式中:$\boldsymbol{T}_0=E^{\mathrm{j}\phi_0}$,$\boldsymbol{T}_1=e^{\mathrm{j}\phi_1}$,并记 $\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_0=\dfrac{2\pi}{\lambda}(L_1-L_0)$

11.5.3 白光信息处理系统中的滤波解调

将编码相位光栅放在白光信息处理系统的输入平面上,设入射单色光强度为 $A(\lambda)$,则频谱平面(x_2, y_2)上的复振幅为

$$\boldsymbol{F}(x_2, y_2; \lambda) = \sqrt{A(\lambda)}\, F\{\boldsymbol{T}(x_1, y_1)\} \tag{11.5.9}$$

式中:$x_2 = \lambda f \xi$,$y_2 = \lambda f \eta$,ξ 和 η 是空间频率坐标,用 f 表示傅里叶变换透镜的焦距.将(11.5.8)式代入(11.5.9)式,计算并化简后得

$$\boldsymbol{F}(x_2, y_2; \lambda) = \sqrt{A(\lambda)}(\boldsymbol{T}_1 - \boldsymbol{T}_0)\frac{1}{2}\mathrm{sinc}\left(\frac{\alpha x_2}{2\lambda f}\right) \times \sum_m \delta\left(x_2 - \frac{m\lambda f}{a}\right)\delta(y_2) + \boldsymbol{T}_0\,\delta(x_2)\delta(y_2) \tag{11.5.10}$$

当 $m=0$ 时,有

$$\boldsymbol{F}(x_2, y_2; \lambda) = \sqrt{A(\lambda)}\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{T}_1 - \boldsymbol{T}_0) + \boldsymbol{T}_0\right]\delta(x_2)\delta(y_2) \tag{11.5.11}$$

当 $m \neq 0$ 时,有

$$\boldsymbol{F}(x_2, y_2; \lambda) = \sqrt{A(\lambda)}\frac{1}{2}(\boldsymbol{T}_1 - \boldsymbol{T}_0)\mathrm{sinc}\left(\frac{m}{2}\right)\delta\left(x_2 - \frac{m\lambda f}{a}\right)\delta(y_2) \tag{11.5.12}$$

如滤波器分别让零级频谱和 m 级频谱通过,则在输出平面上的复振幅分布为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}_0(x_3, y_3; \lambda) &= \sqrt{A(\lambda)}\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{T}_1 - \boldsymbol{T}_0) + \boldsymbol{T}_0\right] \\ \boldsymbol{E}_m(x_3, y_3; \lambda) &= \sqrt{A(\lambda)}\frac{1}{2}(\boldsymbol{T}_1 - \boldsymbol{T}_0)\mathrm{sinc}\left(\frac{m}{2}\right)\exp\left(\mathrm{j}2\pi\frac{mx_3}{a}\right)\end{aligned}\right\} \tag{11.5.13}$$

其对应的强度只与相位差 $\Delta\phi$ 和 λ 有关,则

$$\left.\begin{aligned}I_0(x_3, y_3; \lambda) &= \frac{A(\lambda)}{2}(1 + \cos\Delta\phi) \\ I_m(x_3, y_3; \lambda) &= \frac{2A(\lambda)}{m^2\pi^2}(1 - \cos\Delta\phi)\end{aligned}\right\} \tag{11.5.14}$$

若用 Δd 表示与相位差 $\Delta\phi$ 相对应的光程差,则(11.5.14)式可改写为

$$\left.\begin{aligned}I_0(x_3, y_3; \lambda) &= \frac{A(\lambda)}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta d\right)\right] \\ I_m(x_3, y_3; \lambda) &= \frac{2A(\lambda)}{m^2\pi^2}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta d\right)\right]\end{aligned}\right\} \tag{11.5.15}$$

该式表明对于每一个衍射级次,输出图像的强度随波长和光程差而变化.

图 11.5.1(a)和(b)分别为零级和 1 级的输出强度随光程差 Δd 而变化的曲线,其中 $A(\lambda)=1$,λ 作为参变量.

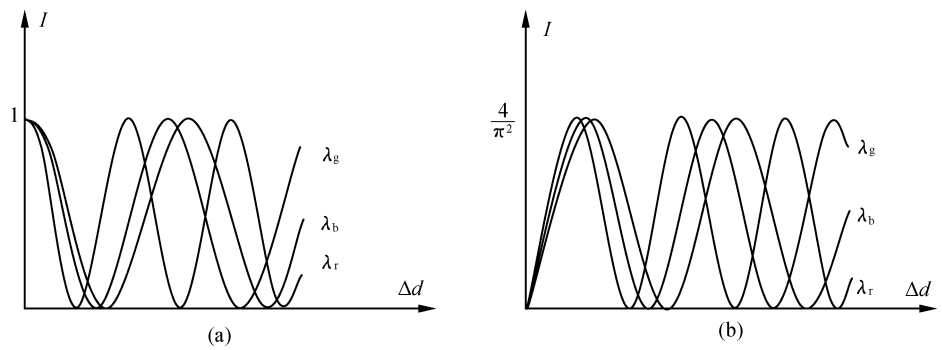


图 11.5.1 输出强度随光程差 Δd 而变化的曲线

(a) 零级滤波;(b) 一级滤波

假如用图中画出的红、绿、蓝三种色光 λ_r ,λ_g ,λ_b 作光源,则强度输出是三种色光输出的非相干叠加.

$$I(\Delta d)= I(\Delta d,\lambda_r)+ I(\Delta d,\lambda_g)+ I(\Delta d,\lambda_b) \tag{11.5.16}$$

即得到随 Δd 而变化的彩色输出.当采用白光光源时,各色光的非相干叠加变成下列积分

$$I(\Delta d)=\int I(\Delta d,\lambda)d\lambda$$

仍然是随 Δd 而变化的彩色输出.由于在编码和漂白处理中,已使光程差随输入密度而改变,因此得到按输入图像密度变化的假彩色编码.这种编码方法输出图像的色度丰富,饱和度也很好,在低衍射级次(包括零级)输出的情况下,也能得到彩色化效果很好的输出图像,因此光强度利用率高,图像亮度好.

习 题

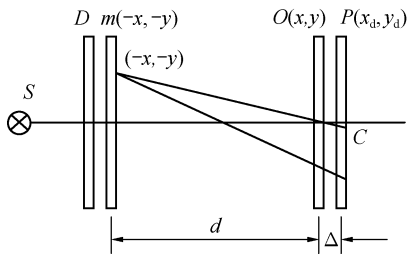
11.1 图题 11.1 为一投影式非相干光卷积运算装置,由光源 S 和散射板 D 产生均匀的非相干光照明,$m(x,y)$和 $O(x,y)$是两张透明片,在平面 P上可以探测到 $m(x,y)$和 $O(x,y)$的卷积.

(1)写出此装置的系统点扩散函数.

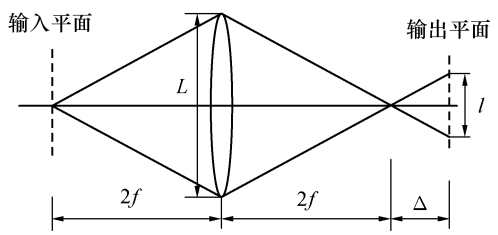
(2)写出 P平面上光强分布的表达式.

(3)若 $m(x,y)$的空间宽度为 l_1 ,$O(x,y)$的空间宽度为 l_2 ,求卷积的空间宽度.

11.2 参看图题 11.2,要设计一个“散焦”的(非相干)空间滤波系统,使得它的传递函数的第一零点落在 ξ_0 周/cm 的频率上,假定要进行滤波的数据放在一个直径为 L 的圆透镜前面 $2f$ 距离处.问所要求的“误聚焦距离”Δ 为多少(用 f,L 和 ξ_0 表示)?对于 $\xi_0=10$ 周/cm ,$f=10$cm 和 $L=2$cm ,Δ 的数值是多少?



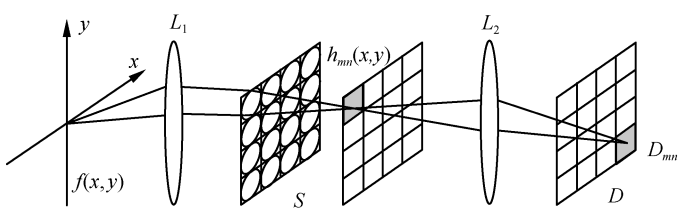
图题 11.1



图题 11.2

11.3 讨论相干光学处理、非相干光学处理和白光光学处理的特点和局限性.

11.4 图题 11.4 是非相干多通道二维相关器原理示意图,图中掩模板由子掩模 $h_{mn}(x,y)$的二维阵列组成,S 是由许多小透镜组成的“蝇眼”透镜组,输入函数 $\boldsymbol{f}(x,y)$经透镜 L_1 和蝇眼透镜组,在每个子掩模上产生一个 $\boldsymbol{f}(x,y)$的像,然后再经 L_2 成像在二维探测器阵列上.试说明这种系统为什么可以用于多种不同类型目标的识别.



图题 11.4

第 12 章　几个变换在光学中的应用

本章介绍几个变换在光学中的应用，如分数傅里叶变换、几何变换、Hankel 变换、Radon变换、Hough 变换和小波变换 .

12.1　分数傅里叶变换

分数傅里叶变换(fractional Fourier transform)的概念目前已经有了不少的应用 .1980 年，Namias 比较完整地提出了分数傅里叶变换的定义和性质 .1987 年 McBride 等人又从纯数学的角度作了一些补充，使其成为一个比较完整的理论 .1993 年 Mendlovic 和 Ozaktas 把分数傅里叶变换引入到光学领域，并采用渐变折射率介质(CRIN)光学理论给出了这一概念的光学定义，讨论了分数傅里叶变换的一些基本性质 .同时他们给出了实现二分之一次傅里叶变换的透镜结构 .随后，罗曼采用维格纳(Wigner)函数定义了光学分数傅里叶变换，并给出了任意分数值傅里叶变换的单透镜及双透镜光学实现装置 .此后，分数傅里叶变换成为信息光学的一个重要内容 .下面仅对分数傅里叶变换的基础知识作一个简单介绍 .

12.1.1　分数傅里叶变换的定义

我们在这里介绍分数傅里叶变换的数学定义 .为简单起见，仅讨论一维函数的分数傅里叶变换，有关的定义和性质可直接推广到二维情况 .

函数 $\boldsymbol{f}(x)$的分数傅里叶变换定义

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(\xi)&= F_\alpha\{\boldsymbol{f}(x)\}\\&=\left\{\frac{\exp\left[-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}{2\pi\sin\alpha}\right\}^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{\mathrm{j}(\xi^2+x^2)}{2\tan\alpha}-\frac{\mathrm{j}\xi x}{\sin\alpha}\right]\boldsymbol{f}(x)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{12.1.1}$$

式中 $\boldsymbol{F}(\xi)$称为 $\boldsymbol{f}(x)$的分数傅里叶谱，α称为分数傅里叶变换的阶，其值应满足 $|\alpha|\leqslant\pi$.以$-\alpha$代替上式中的 α 得到

$$F_{-\alpha}\{\boldsymbol{f}(x)\}=\left\{\frac{\exp\left[\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}{2\pi\sin\alpha}\right\}^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{-\mathrm{j}(\xi^2+x^2)}{2\tan\alpha}+\frac{\mathrm{j}\xi x}{\sin\alpha}\right]\boldsymbol{f}(x)\mathrm{d}x\tag{12.1.2}$$

在得出上式时用到了$-1=\exp(\mathrm{j}\pi)$. $F_{-\alpha}$其实是F_α的逆变换 .为此只需证明$F_{-\alpha}F_\alpha\{\boldsymbol{f}(x)\}=\boldsymbol{f}(x)$即可 .

$$\begin{aligned}F_{-\alpha}F_\alpha\{\boldsymbol{f}(x)\}&=F_{-\alpha}\{\boldsymbol{F}(\xi)\}\\&=\left\{\frac{\exp\left[\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}{2\pi\sin\alpha}\right\}^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{-\mathrm{j}(x'^2+\xi^2)}{2\tan\alpha}+\frac{\mathrm{j}x'\xi}{\sin\alpha}\right]\boldsymbol{F}(\xi)\mathrm{d}\xi\\&=\left\{\frac{\exp\left[\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}{2\pi\sin\alpha}\right\}^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{-\mathrm{j}(x'^2+\xi^2)}{2\tan\alpha}+\frac{\mathrm{j}x'\xi}{\sin\alpha}\right]\\&\quad\times\left[\left\{\frac{\exp\left[-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}{2\pi\sin\alpha}\right\}^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{\mathrm{j}(\xi^2+x^2)}{2\tan\alpha}-\frac{\mathrm{j}\xi x}{\sin\alpha}\right]\boldsymbol{f}(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2\pi\sin\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{\mathrm{j}(x^2-x'^2)}{2\tan\alpha}\right]\boldsymbol{f}(x)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{\mathrm{j}(x'-x)\xi}{\sin\alpha}\right]\mathrm{d}\xi\right\}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi\sin\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{\mathrm{j}(x^2-x'^2)}{2\tan\alpha}\right]\boldsymbol{f}(x)\delta\left[\frac{x'-x}{2\pi\sin\alpha}\right]\mathrm{d}x \tag{12.1.3}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{\mathrm{j}(x^2-x'^2)}{2\tan\alpha}\right]\boldsymbol{f}(x)\delta(x'-x)\mathrm{d}x=\boldsymbol{f}(x')$$

分数傅里叶变换是意义更广的傅里叶变换,常规傅里叶变换应是它的特例.当 $\alpha=\pi/2$ 和 $\alpha=-\pi/2$ 时的确转化成常规的傅里叶变换

$$F_{\pi/2}\{\boldsymbol{f}(x)\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}(x)\exp(-\mathrm{j}\xi x)\mathrm{d}x \tag{12.1.4}$$

$$F_{-\pi/2}\{\boldsymbol{f}(x)\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}(x)\exp(\mathrm{j}\xi x)\mathrm{d}x \tag{12.1.5}$$

这是常规傅里叶变换的另一种形式.

(12.1.1)式所定义的变换当 $\alpha=0$ 时没有意义,因而 F_0 必须另外定义.我们现在来计算 $\alpha\to0$ 时的分数傅里叶变换.由于 $\alpha\approx0$,所以有 $\sin\alpha\approx\alpha$,$\tan\alpha\approx\alpha$,于是

$$F_{\alpha\to0}\{\boldsymbol{f}(x)\}=\lim_{\alpha\to0}\left\{\frac{\exp\left[-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}{2\pi\alpha}\right\}^{1/2}\times\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{\mathrm{j}(\xi^2+x^2)}{2\alpha}-\frac{\mathrm{j}\xi x}{\alpha}\right]\boldsymbol{f}(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp[-(x-\xi)^2/\mathrm{j}2\alpha]}{\sqrt{\mathrm{j}2\pi\alpha}}\boldsymbol{f}(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}(x)\delta(x-\xi)\mathrm{d}x=\boldsymbol{f}(\xi) \tag{12.1.6}$$

其中用到极限意义下的 δ 函数的定义

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\exp[-x^2/\mathrm{j}\varepsilon]}{\sqrt{\mathrm{j}\pi\varepsilon}}=\delta(x) \tag{12.1.7}$$

因此我们可以通过极限过程来定义 F_0,即

$$F_0\{\boldsymbol{f}(x)\}=\boldsymbol{f}(\xi) \tag{12.1.8}$$

用类似方法可定义 F_π,即

$$F_\pi\{\boldsymbol{f}(x)\}=\boldsymbol{f}(-\xi) \tag{12.1.9}$$

以上两式表明,0 阶的分数傅里叶变换给出函数本身,π 阶的分数傅里叶变换则给出它的倒像.

分数傅里叶变换仍然是线性变换,即有

$$F_\alpha\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(x)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{h}(x)\}=\boldsymbol{A}F_\alpha\{\boldsymbol{f}(x)\}+\boldsymbol{B}F_\alpha\{\boldsymbol{h}(x)\} \tag{12.1.10}$$

式中 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 为常数.

12.1.2 分数傅里叶变换的几个基本性质

1. 位移性质

$$F_\alpha\{\boldsymbol{f}(x+\alpha)\}=\left\{\frac{\exp\left[-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}{2\pi\sin\alpha}\right\}^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{\mathrm{j}(\xi^2+x^2)}{2\tan\alpha}-\frac{\mathrm{j}\xi x}{\sin\alpha}\right]\boldsymbol{f}(x+\alpha)\mathrm{d}x$$

令 $x'=x+\alpha$ 则上式变成

$$F_\alpha\{\boldsymbol{f}(x+\alpha)\}=\left\{\frac{\exp\left[-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}{2\pi\sin\alpha}\right\}^{1/2}$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{\mathrm{j}(\xi^2+x'^2-2ax'+a^2)}{2\tan\alpha}-\frac{\mathrm{j}(x'-a)\xi}{\sin\alpha}\right]\boldsymbol{f}(x')\mathrm{d}x'$$

$$=\exp\left[\mathrm{j}a\sin\alpha\left(\xi+\frac{a\cos\alpha}{2}\right)\right]\left\{\frac{\exp\left[-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}{2\pi\sin\alpha}\right\}^{1/2}$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\mathrm{j}\frac{(\xi+a\cos\alpha)^2+x'^2}{2\tan\alpha}-\frac{\mathrm{j}(\xi+a\cos\alpha)}{\sin\alpha}\right]\boldsymbol{f}(x')\mathrm{d}x'$$

$$=\exp\left[\mathrm{j}a\sin\alpha\left(\xi+\frac{a\cos\alpha}{2}\right)\right]\boldsymbol{F}(\xi+a\cos\alpha) \tag{12.1.11}$$

2. 可加性性质

α阶和β阶变换依次作用的结果相当于(α+β)阶的一次变换.按定义有

$$\boldsymbol{F}_\alpha\{\boldsymbol{F}_\beta[\boldsymbol{f}(x)]\}=\boldsymbol{F}_\alpha\{\boldsymbol{F}(\xi)\}$$

$$=\left\{\frac{\exp\left[-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}{2\pi\sin\alpha}\right\}^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{\mathrm{j}(x'^2+\xi^2)}{2\tan\alpha}-\frac{\mathrm{j}x'\xi}{\sin\alpha}\right]\boldsymbol{F}(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=\left\{\frac{\exp\left[-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}{2\pi\sin\alpha}\right\}^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{\mathrm{j}(x'^2+\xi^2)}{2\tan\alpha}-\frac{\mathrm{j}x'\xi}{\sin\alpha}\right]$$

$$\times\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\exp\left[-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right]}{2\pi\sin\beta}\right\}^{1/2}\exp\left[\frac{\mathrm{j}(\xi^2+x^2)}{2\tan\beta}-\frac{\mathrm{j}\xi x}{\sin\beta}\right]\boldsymbol{f}(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\exp[-\mathrm{j}(\pi-\alpha-\beta)]}{\sin\alpha\sin\beta}\right\}^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}(x)\exp\left[\frac{\mathrm{j}}{2}(x'^2\cot\alpha+x^2\cot\beta)\right]\mathrm{d}x$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\mathrm{j}\frac{\xi^2}{2}(\cot\alpha+\cot\beta)-\mathrm{j}\xi\left(\frac{x'}{\sin\alpha}+\frac{x}{\sin\beta}\right)\right]\mathrm{d}\xi$$

利用积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-Ax^2\pm2Bx-C]\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{A}}\exp\left[-C+\frac{B^2}{A}\right]$$

可将后一个积分积出

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\mathrm{j}\frac{\xi^2}{2}(\cot\alpha+\cot\beta)-\mathrm{j}\xi\left(\frac{x'}{\sin\alpha}+\frac{x}{\sin\beta}\right)\right]\mathrm{d}\xi$$

$$=\left[\frac{\exp\left(\mathrm{j}\frac{\pi}{2}\right)2\pi\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\right]^{1/2}\exp\left\{-\frac{\mathrm{j}}{2}\left[\frac{x'^2\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}+\frac{x^2\sin\alpha}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}\right]\right\}$$

$$\times\exp\left[-\mathrm{j}\frac{x'x}{\sin(\alpha+\beta)}\right]$$

将此式代回上式得

$$\boldsymbol{F}_\alpha\boldsymbol{F}_\beta\{\boldsymbol{f}(x)\}=\left\{\frac{\exp\left[-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)\right]}{2\pi\sin(\alpha+\beta)}\right\}^{1/2}\exp\left[\mathrm{j}\frac{x'^2}{2}\left(\cot\alpha-\frac{\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}\right)\right]$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\mathrm{j}\frac{x^2}{2}\left[\cot\beta-\frac{\sin\alpha}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}\right]-\frac{\mathrm{j}x'x}{\sin(\alpha+\beta)}\right\}\boldsymbol{f}(x)\mathrm{d}x$$

$$=\left\{\frac{\exp\left[-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)\right]}{2\pi\sin(\alpha+\beta)}\right\}^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{\mathrm{j}\cot(\alpha+\beta)}{2}(x'^2+x^2)-\frac{\mathrm{j}x'x}{\sin(\alpha+\beta)}\right]\boldsymbol{f}(x)\mathrm{d}x$$

$$=\boldsymbol{F}_{\alpha+\beta}\{\boldsymbol{f}(x)\} \tag{12.1.12}$$

在上式的化简中,用到恒等式 $\cot\alpha-\sin\beta/\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)=\cot\beta-\sin\alpha/\sin\beta\sin(\alpha+\beta)=\cot(\alpha+\beta)$.

由于在(12.1.12)式中 α 和 β 是对称的,所以有

$$\boldsymbol{F}_{\alpha}\boldsymbol{F}_{\beta}\{\boldsymbol{f}\}=\boldsymbol{F}_{\beta}\boldsymbol{F}_{\alpha}\{\boldsymbol{f}\}=\boldsymbol{F}_{\alpha+\beta}\{\boldsymbol{f}\}$$

即分数傅里叶变换算符是可对易的.特别是当 $\beta=-\alpha$ 时有

$$\boldsymbol{F}_{\alpha}\boldsymbol{F}_{-\alpha}\{\boldsymbol{f}\}=\boldsymbol{F}_{-\alpha}\boldsymbol{F}_{\alpha}\{\boldsymbol{f}\}=\boldsymbol{F}_{0}\{\boldsymbol{f}\}=\boldsymbol{f} \tag{12.1.13}$$

3. 周期性性质

由于分数傅里叶变换的定义中出现 $\tan\alpha$ 和 $\sin\alpha$,所以变换关于 α 有周期性,周期为 2π,这样一来就有以下结果

$$\boldsymbol{F}_{2n\pi}\{\boldsymbol{f}(x)\}=\boldsymbol{f}(x) \tag{12.1.14}$$

$$\boldsymbol{F}_{(2n+1)\pi}\{\boldsymbol{f}(x)\}=\boldsymbol{f}(-x) \tag{12.1.15}$$

$$\boldsymbol{F}_{2n\pi+\alpha}\{\boldsymbol{f}(x)\}=\boldsymbol{F}_{\alpha}\{\boldsymbol{f}(x)\} \tag{12.1.16}$$

于是,当 $\alpha<-\pi$,$\alpha>\pi$ 时的变换 $\boldsymbol{F}_{\alpha}$ 均可化为主值区内的变换.设

$$\alpha=p\pi/2 \tag{12.1.17}$$

则 α 阶分数傅里叶变换还可表示为 $\boldsymbol{F}^{(p)}\{\boldsymbol{f}\}$,$p$ 的变化范围 $-2<p\leqslant 2$.

12.1.3 用透镜系统实现分数傅里叶变换

我们知道,当用单色平面光波照射位于透镜或透镜系统前焦面上的二维透明图像时,在后焦面上将出现它的傅里叶变换图样.下面我们将进一步研究当物透明片到透镜的距离 d_1 及输出图像到透镜的距离 d_2 不等于透镜的焦距 f 时,透镜或透镜系统对输入图像的变换.当 d_1 和 d_2 满足一定的条件时,输出平面上将出现输入图像的分数傅里叶变换.

1. 实现分数傅里叶变换的第一类基本光学单元

可加性是分数傅里叶变换的基本特征之一.连续执行 N 个阶数为 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,N)$ 的变换结果,相当于执行阶为 $\alpha=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i$ 的一次变换.例如,$\alpha=\pi/2$ 的常规傅里叶变换,既可由一个焦距为 $\tilde{f}$ 的透镜来实现,也可由两个焦距相同的透镜组成的透镜组来实现.它们的焦距为

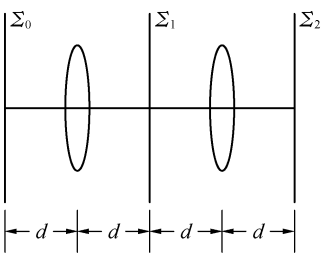


图 12.1.1 用两个透镜实现傅里叶变换

$$f_1=f_2=f=\tilde{f}/\sin(\pi/4) \tag{12.1.18}$$

两透镜之间的间隔为 $2d$,而

$$d=f[1-\cos(\pi/4)]=\tilde{f}\tan(\pi/8) \tag{12.1.19}$$

如图 12.1.1 所示,这一结果可用三次菲涅耳衍射和两次透镜的相位变换来加以证明.当然,用几何光学的办法更简单,当图中的 Σ_0 和 Σ_2 分别为组合系统的前后焦面时,组合系统的焦距恰为 $\tilde{f}$.由两光组组合系统焦距公式 $f_c=f_1f_2/(f_1+f_2-\bar{d})$,可求得组合系统的焦距,式中 $\bar{d}$ 是两光组的间隔.于是

$$f_c=\frac{\tilde{f}^2/\sin^2(\pi/4)}{2\tilde{f}/\sin(\pi/4)-2\tilde{f}\tan(\pi/8)}=\frac{\tilde{f}}{2[\sin(\pi/4)-\sin^2(\pi/4)\tan(\pi/8)]}$$

$$= \frac{\tilde{f}}{2\left[\sqrt{2}/2-(\sqrt{2}-1)/2\right]} = \tilde{f} \tag{12.1.20}$$

图 12.1.1 中的 Σ_0 面恰好是组合系统的前焦面,这可由两光组组合物方焦点位置公式算出.Σ_0 面相对于第一个透镜的距离为

$$l_F = -f_c\left(1-\frac{\bar{d}}{f_2}\right) = -\tilde{f}\left[1-\frac{2\tilde{f}\cdot\tan(\pi/8)}{2\tilde{f}/\sin(\pi/4)}\right]$$

$$= -\tilde{f}(\sqrt{2}-1) = -\tilde{f}\cdot\tan(\pi/8) = -d \tag{12.1.21}$$

这里的负号表示在第一个透镜之前.Σ_2 面恰好为组合系统的后焦面,这也可由两光组组合像方焦点位置公式算出.Σ_2 面相对于第二个透镜的位置为

$$l'_F = f_c\left(1-\frac{\bar{d}}{f_1}\right) = \tilde{f}\tan(\pi/8) = d \tag{12.1.22}$$

l'_F 值为正表示在第二透镜之后.组合系统物方主平面的位置可由下式算出

$$l_H = \tilde{f}\frac{\bar{d}}{f_2} = \tilde{f}\frac{2\tilde{f}\tan(\pi/8)}{\tilde{f}/\sin(\pi/4)} = 2\tilde{f}\sin(\pi/4)\tan(\pi/8) = (2-\sqrt{2})\tilde{f} \tag{12.1.23}$$

即组合系统的物方主平面在第一个透镜后 $(2-\sqrt{2})\tilde{f}$ 处.组合系统的像方主平面位置可由下式求出

$$l'_H = -\tilde{f}\frac{\bar{d}}{f_1} = -\tilde{f}\frac{2\tilde{f}\tan(\pi/8)}{\tilde{f}/\sin(\pi/4)} = -(2-\sqrt{2})\tilde{f} \tag{12.1.24}$$

即组合系统的像方主平面在第二个透镜之前 $(2-\sqrt{2})\tilde{f}$ 处.

几何光学的计算还可以证明,N 个焦距为

$$f = \tilde{f}/\sin(\pi/2N) \tag{12.1.25}$$

的透镜按图 12.1.1 的方式串联起来,间距参数

$$d = f\left[1-\cos(\pi/2N)\right] = \tilde{f}\tan(\pi/4N) \tag{12.1.26}$$

则该组合系统的合成焦距为 $\tilde{f}$,且前焦面位于第一个透镜前 d 处,后焦面位于第 N 个透镜后 d 处.

但到此为止我们还未能证明透镜系统能实现傅里叶变换,为此我们必须首先证明,当单色光波通过一个透镜单元即经过两次距离为 d 的菲涅耳衍射,并经过一次透镜的相位变换,其效果相当于 $\alpha=\pi/2N$ 阶分数傅里叶变换,才能通过变换的可加性得到系统实现傅里叶变换的普遍结论.下面我们来研究一下这样的一个光学单元.

我们在 2.6.3 中曾讨论过透镜的一般变换特性,在图 2.6.4 中,输入面 Σ_0 和输出面 Σ_2 到透镜的距离分别为 d_1 和 d_2,d_1 和 d_2 的值是任意的.用单色平面波垂直照射 Σ_0 面,若 Σ_0 面上的场分布为 $f_0(x_0,y_0)$,则输出面 Σ_2 上的场分布为 $f(x,y)$,可根据(2.6.25)式写成

$$f(x,y) = \frac{\exp\left[\mathrm{j}k(d_1+d_2)\right]}{\mathrm{j}\lambda\varepsilon d_1 d_2}\exp\left[\frac{\mathrm{j}\pi}{\lambda\varepsilon d_1 d_2}\left(1-\frac{d_1}{f}\right)(x^2+y^2)\right]$$

$$\times\iint_{-\infty}^{\infty} f_0(x_0,y_0)\exp\left\{\frac{\mathrm{j}\pi}{\lambda\varepsilon d_1 d_2}\left[\left(1-\frac{d_2}{f}\right)(x_0^2+y_0^2)-2(x_0x+y_0y)\right]\right\}\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0 \tag{12.1.27}$$

式中

$$\varepsilon = \frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}-\frac{1}{f} \tag{12.1.28}$$

若 $d_1=d_2=f$,则得

$$f(x,y) = \frac{\exp(\mathrm{j}2kf)}{\mathrm{j}\lambda f}\iint_{-\infty}^{\infty} f_0(x_0,y_0)\exp\left[-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda f}(x_0x+y_0y)\right]\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0 \tag{12.1.29}$$

变成常规的傅里叶变换,这是我们熟知的傅里叶变换的光学实现方法,也就是说薄透镜单元在特

殊的输入、输出距离的配置下产生了 $\alpha=\pi/2$ 的常规傅里叶变换效应.设想 d_1 和 d_2 不等于 f,看在此情况下能否产生分数傅里叶变换.我们将(12.1.29)式与(12.1.1)式比较,发现下面的条件必须成立:

$$d_1 = d_2 = d \tag{12.1.30}$$

再仿照(12.1.18)和(12.1.19)式,设

$$\tilde{f} = f\sin\alpha \tag{12.1.31}$$

$$d = f(1-\cos\alpha) = \tilde{f}\tan(\alpha/2) \tag{12.1.32}$$

把这三个式子代入(12.1.28)式得

$$\varepsilon d^2 = d^2\left(\frac{2}{d}-\frac{1}{f}\right) = \frac{d(2f-d)}{f} = \tilde{f}\sin\alpha \tag{12.1.33}$$

把上面的结果代入(12.1.27)式得到

$$\boldsymbol{f}(x,y) = \frac{\exp(\mathrm{j}2kd)}{\mathrm{j}\lambda\tilde{f}\sin\alpha}\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}_0(x_0,y_0)\exp\left[\frac{j\pi(x_0^2+x^2+y_0^2+y^2)}{\lambda\tilde{f}\tan\alpha}-\frac{j2\pi(x_0x+y_0y)}{\lambda\tilde{f}\sin\alpha}\right]\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0 \tag{12.1.34}$$

引入归一化坐标

$$\tilde{x}_0 = \mu x_0,\quad \tilde{y}_0 = \mu y_0,\quad \tilde{x} = \mu x,\quad \tilde{y} = \mu y \tag{12.1.35}$$

其中

$$\mu = \sqrt{2\pi/\lambda\tilde{f}} = \sqrt{2\pi/\lambda f\sin\alpha} \tag{12.1.36}$$

(12.1.34)式变成

$$\boldsymbol{f}(\tilde{x},\tilde{y}) = \boldsymbol{c}\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}_0(\tilde{x}_0,\tilde{y}_0)\exp\left[\frac{j(\tilde{x}_0^2+\tilde{x}^2+\tilde{y}_0^2+\tilde{y}^2)}{2\tan\alpha}-\frac{j(\tilde{x}_0\tilde{x}+\tilde{y}_0\tilde{y})}{\sin\alpha}\right]\mathrm{d}\tilde{x}_0\,\mathrm{d}\tilde{y}_0 \tag{12.1.37}$$

其中常数

$$\boldsymbol{c} = \exp[\mathrm{j}2kd]/\mathrm{j}\lambda\tilde{f}\sin\alpha \tag{12.1.38}$$

将(12.1.37)式与(12.1.1)式相比较,除一常数因子外,它就是二维 α 阶分数傅里叶变换,即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(\tilde{x},\tilde{y}) &= \boldsymbol{c}\ \mathcal{F}_\alpha\{\boldsymbol{f}_0(\tilde{x}_0,\tilde{y}_0)\}\\ &= \boldsymbol{c}\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}_0(\tilde{x}_0,\tilde{y}_0)\exp\left[\frac{\mathrm{j}(\tilde{x}_0^2+\tilde{x}^2+\tilde{y}_0^2+\tilde{y}^2)}{2\tan\alpha}-\frac{\mathrm{j}(\tilde{x}_0\tilde{x}+\tilde{y}_0\tilde{y})}{\sin\alpha}\right]\mathrm{d}\tilde{x}_0\,\mathrm{d}\tilde{y}_0\end{aligned} \tag{12.1.39}$$

以上讨论表明,在(12.1.31)和(12.1.32)式成立时,薄透镜在单色平面波照射下,可以实现二维分数傅里叶变换,它将透镜前面 d 处的输入图像 $\boldsymbol{f}_0$ 变成它的分数傅里叶谱,形成在透镜后 d 处,如图 12.1.2 所示.

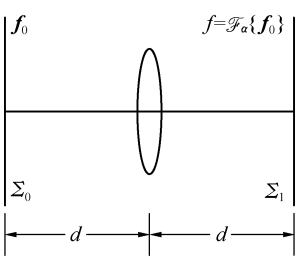


图 12.1.2 用正透镜实现分数傅里叶变换

由(12.1.31)式定义的 $\tilde{f}$ 称为族参数,由(12.1.32)式定义的 d 称间距参数.光学分数傅里叶变换表达式(12.1.34)与(12.1.1)式的最大差别在于光学系统中存在族参数.很明显,只有族参数相同的分数傅里叶变换才能组成群,不同族参数的变换不具备可加性.族参数仅取决于 α 及 f,然后在 α 确定后,透镜的焦距也就确定了.

在用透镜系统实现分数傅里叶变换时,一般不用归一化公式(12.1.39)式,而用(12.1.34)式,即定义

$$\mathcal{F}_\alpha\{\boldsymbol{f}_0(x_0,y_0)\} = \boldsymbol{c}_\alpha\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}_0(x_0,y_0)\exp\left[\frac{\mathrm{j}\pi(x_0^2+x^2+y_0^2+y^2)}{\lambda\tilde{f}\tan\alpha}-\frac{\mathrm{j}2\pi(x_0x+y_0y)}{\lambda\tilde{f}\sin\alpha}\right]\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0 \tag{12.1.40}$$

其中积分号前的系数

$$\boldsymbol{c}_\alpha = \frac{\exp(\mathrm{j}2kd)}{\mathrm{j}\lambda\tilde{f}\sin\alpha} = \frac{\exp[\mathrm{j}\pi k\tilde{f}\tan(\alpha/2)]}{\mathrm{j}\lambda\tilde{f}\sin\alpha} \tag{12.1.41}$$

这与数学定义中的归一化系数并不相同,但由于我们只能探测光强分布,因此这一差别并无实质性影响.

分数傅里叶变换的阶数还有另一种定义,在光学中常使用.令

$$p = 2\alpha/\pi \tag{12.1.42}$$

则(12.1.40)式变成

$$F^{(p)}\{\boldsymbol{f}_0(x_0,y_0)\} = \boldsymbol{c}_p\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}_0(x_0,y_0)\exp\left[\frac{\mathrm{j}\pi(x_0^2+x^2+y_0^2+y^2)}{\lambda\tilde{f}\tan(p\pi/2)} - \frac{\mathrm{j}2\pi(x_0x+y_0y)}{\lambda\tilde{f}\sin(p\pi/2)}\right]\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0 \tag{12.1.43}$$

(12.1.40)式和(12.1.43)式都是经常用到的.

显然,$F_{\pi/2}$ 或 $F^{(1)}$ 即常规的傅里叶变换,$F_{-\pi/2}$ 或 $F^{(1)}$ 即常规的逆傅里叶变换.常规傅里叶变换只能用正透镜实现,当我们把它推广到分数傅里叶变换,用负透镜同样能实现分数傅里叶变换.在(12.1.31)式中,当 $f<0$ 时,保持 $\tilde{f}>0$,则 $\alpha<0$,我们得到负阶数的分数傅里叶变换,它可由图 12.1.3 所示的负透镜单元实现.由(12.1.32)式,当 $\tilde{f}>0$,$\alpha<0$ 时,$d<0$,表示输入平面 Σ_0 在透镜右方,输出平面 Σ_1 在透镜左方.当在 Σ_0 上输入二维图像 $\boldsymbol{f}_0(x_0,y_0)$ 时,它的 α 阶分数傅里叶变换谱出现在 Σ_1 处,阶数 α 由下式确定:

$$\cos\alpha = 1 - d/f \tag{12.1.44}$$

这里的 d 和 f 都是负数.不过在这种情况下,$\boldsymbol{f}_0$ 和 $\boldsymbol{f}$ 分别是光学的虚物和虚像.

2. 实现分数傅里叶变换的第二类基本光学单元

可以实现分数傅里叶变换的第二类基本光学单元如图 12.1.4 所示,两个焦距均为 f 的正透镜,相距为 d,在紧贴第一个透镜之前的 Σ_0 面上观察输出图像 $\boldsymbol{f}_0$,在紧贴第二个透镜之后的 Σ_1 面上观察输出图像 $\boldsymbol{f}$.

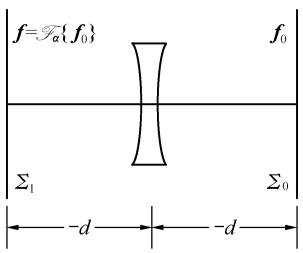


图 12.1.3 用负透镜实现分数傅里叶变换

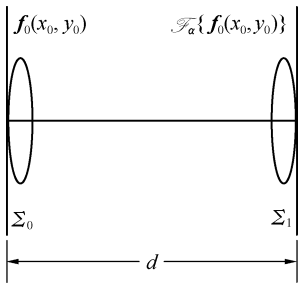


图 12.1.4 第二类基本光学单元

用单位振幅的单色平面光波垂直照射输入面 Σ_0,设 Σ_0 面上的场分布为 $\boldsymbol{f}_0(x_0,y_0)$,则第一个透镜后表面上的场为

$$\boldsymbol{f}_1(x_0,y_0) = \boldsymbol{f}_0(x_0,y_0)\exp\left[-\mathrm{j}\frac{k}{2f}(x_0^2+y_0^2)\right] \tag{12.1.45}$$

这个光场分布通过空间距离 d 传到第二个透镜的前表面,造成的场分布为

$$\boldsymbol{f}_2(x,y) = \frac{\exp(\mathrm{j}kd)}{\mathrm{j}\lambda d}\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}_0(x_0,y_0)\exp\left[-\mathrm{j}\frac{k}{2f}(x_0^2+y_0^2)\right]$$
$$\times\exp\left[\mathrm{j}k\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2d}\right]\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0$$

此场通过第二个透镜在 Σ_2 面上造成的场分布为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(x,y)&=\exp\left[-\mathrm{j}k\frac{x^2+y^2}{2f}\right]\boldsymbol{f}_2(x,y)\\&=\frac{\exp(\mathrm{j}kd)}{\mathrm{j}\lambda d}\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}_0(x_0,y_0)\exp\left[\frac{\mathrm{j}\pi(f-d)}{\lambda df}(x_0^2+x^2+y_0^2+y^2)-\frac{\mathrm{j}2\pi(x_0x+y_0y)}{\lambda d}\right]\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0\end{aligned}\tag{12.1.46}$$

按(12.1.32)式和(12.1.44)式设 α 和 d,并规定 d 的方向从 Σ_0 指向 Σ_2,向右为正,向左为负,则有

$$\boldsymbol{f}(x,y)=\boldsymbol{c}\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}_0(x_0,y_0)\exp\left[\frac{\mathrm{j}\pi\cos\alpha(x_0^2+x^2+y_0^2+y^2)}{\lambda f(1-\cos\alpha)}-\frac{\mathrm{j}2\pi(x_0x+y_0y)}{\lambda f(1-\cos\alpha)}\right]\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0\tag{12.1.47}$$

将上式与(12.1.34)式相比较,发现只要设

$$d=f(1-\cos\alpha)=\tilde{f}\sin\alpha\tag{12.1.48}$$

即

$$\tilde{f}=f\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=f\tan(\alpha/2)\tag{12.1.49}$$

则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(x,y)&=\boldsymbol{c}\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}_0(x_0,y_0)\exp\left[\frac{\mathrm{j}\pi(x_0^2+x^2+y_0^2+y^2)}{\lambda\tilde{f}\tan\alpha}-\frac{\mathrm{j}2\pi(x_0x+y_0y)}{\lambda\tilde{f}\tan\alpha}\right]\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0\\&=\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{F}_\alpha\{\boldsymbol{f}_0\}\end{aligned}\tag{12.1.50}$$

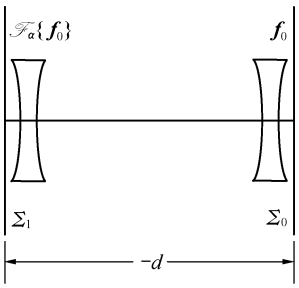


图 12.1.5 用负透镜的第二类基本光学单元

亦即第二类基本单元也能实现分数傅里叶变换,应注意两种基本单元的族参数的定义式(12.1.31)和(12.1.49)式不相同.

将图 12.1.4 中的两个正透镜改为负透镜,并设 f 和 α 均为负值,此时的 $\tilde{f}$ 仍为正值,而间距

$$d=f(1-\cos\alpha)=\tilde{f}\sin\alpha<0\tag{12.1.51}$$

上式表示 $\boldsymbol{f}_0$ 在 $\boldsymbol{f}$ 的右面,如图 12.1.5 所示,它能实现负阶数的分数傅里叶变换.由此可知,用两个透镜构成也能实现分数傅里叶变换.

12.2 几何变换

几何变换,也称坐标变换,早期主要用来简化方程或积分等数学运算形式,比如,将在直角坐标系中进行的球体体积分变换到球坐标系中进行,运算会变得更为容易.光学领域中,包含有相位全息片的光学系统可以实现几何变换.光学几何变换可用于照明光的重新分布、成像系统的像差矫正和畸变补偿、光束整形以及含不变量的模式识别等.另外,利用变形的麦克斯韦方程组,坐标变换近年来还被用来分析表面浮雕和多层光栅等问题.

12.2.1 几何变换定义和种类

几何变换是一个坐标变换,定义为

$$F(u)=\int f(x)\delta[x-\varphi^{-1}(u)]\mathrm{d}x\tag{12.2.1}$$

其中，$f(x)$为输入函数，$\varphi^{-1}(u)$被定义为一个坐标系的 x 到另一个坐标系的 u 的坐标变换，为 $u=\varphi(x)$，逆坐标变换为 $x=\varphi^{-1}(u)$.

使用几何变换恢复原始的输入可表示为

$$F(u)=f[\varphi^{-1}(u)]=f(x) \tag{12.2.2}$$

常用的几何变换有：

(1) 位移变换：

几何变换函数为 $F(u)=f(u-a)$，映射关系为 $u=\varphi(x)=x+a$ 和 $x=\varphi^{-1}(u)=u-a$.它是最简单的一种几何变换，变换后，输入函数沿 x 正方向移动了距离 a.

(2) 缩放变换：

当映射关系为 $u=\varphi(x)=ax$ 时，几何变换就成了缩放变换.输入函数由缩放比例因子 a 控制，同时缩放变换函数变为 $F(u)=f(u/a)$.

(3) 对数变换：

几何变换函数变为 $F(u)=f(\exp(u))$，因此坐标变换关系为 $u=\varphi(x)=\ln x$，逆变换为 $x=\varphi^{-1}(u)=\exp(u)$.这种变换用于比例不变的模式识别.

(4) 旋转变换：

用二维方程组描述旋转变换的两个映射关系分别定义为

$$\begin{aligned} u&=\varphi_1(x,y)=x\cos\theta+y\sin\theta \\ v&=\varphi_2(x,y)=-x\sin\theta+y\cos\theta \end{aligned} \tag{12.2.3}$$

在旋转变换中，输入光场 $f(x,y)$的几何变换为 $F(u,v)=f[(u\cos\theta-v\sin\theta),(u\sin\theta+v\cos\theta)]$，可以看出，变换后的光场是初始光场旋转了 $-\theta$ 角后的结果.

(5) 极坐标变换：

由笛卡尔坐标系变换到极坐标系的映射关系可表示为：

$$\begin{aligned} r&=\varphi_1(x,y)=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta&=\varphi_2(x,y)=\tan^{-1}(y/x) \end{aligned} \tag{12.2.4}$$

如果输入光场为 $f(x,y)$，经极坐标变换后为 $F(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$.这样的极坐标变换可用于旋转不变的模式识别.

12.2.2 广义几何变换

因为映射或逆映射不是唯一的，所以有一些几何变换没有可逆性.例如，对于坐标变换 $u=\varphi(x)=x^2$，因为其逆映射不唯一，有 $x=\varphi^{-1}(u)=\sqrt{u}$ 和 $x=\varphi^{-1}(u)=-\sqrt{u}$ 存在，在 x 平面中的两点均可以映射到 u 平面上的同一个点.所以该映射关系是不可逆的.

为了处理这种二到一的映射，我们将几何变换定义推广到

$$F(u)=f(\sqrt{u})+f(-\sqrt{u}) \tag{12.2.5}$$

通常，当映射关系为多点到一点时，例如 $\varphi(x)=u$，$x\in A$，其广义几何变换定义为

$$F(u)=\int_A f(x)\mathrm{d}x \tag{12.2.6}$$

12.2.3 几何变换的光学实现

目前，有多种技术可以用来光学实现几何变换.图 12.2.1 给出了一种典型的几何变换光学系统.准直的相干光照射幻灯片得到输出光场.在输入平面后放置一块相位掩膜板，该相位掩膜

板就可以用来实现几何变换 .

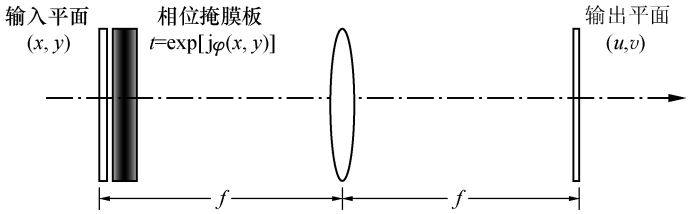


图 12.2.1 实现几何变换的光学系统

相位掩膜板的复振幅透过率为 $t=\exp[\mathrm{j}\phi(x,y)]$,是通过与其对应的坐标映射关系计算出来的,表示为

$$u=\varphi_1(x,y)=\frac{\lambda f}{2\pi}\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}$$
$$v=\varphi_2(x,y)=\frac{\lambda f}{2\pi}\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y} \tag{12.2.7}$$

在该光学系统中,输入光场 $\boldsymbol{f}(x,y)$与相位掩膜板乘积的傅里叶变换在输出面上可以表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}(u,v)&=\iint \boldsymbol{f}(x,y)\exp[\mathrm{j}\phi(x,y)]\exp\left[-\mathrm{j}2\pi\left(\frac{ux}{\lambda f}+\frac{vy}{\lambda f}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint \boldsymbol{f}(x,y)\exp\left[\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda}\boldsymbol{h}(x,y;u,v)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{12.2.8}$$

其中,$\boldsymbol{h}(x,y;u,v)=\frac{\lambda\phi(x,y)}{2\pi}-\frac{ux}{\lambda}-\frac{vy}{\lambda}$.

在这种类型的积分中,当波长 λ 比坐标 u,v 和 x,y 小几个数量级时,相位因子 h 就会在 x,y 上快速变化,这时积分就会变为零 .通过鞍点(x_0,y_0)附近的一些分区积分,可以准确地计算此积分 .鞍点处 h 的导数等于 0,相位因子是稳定的 .

$$\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\left.\frac{\partial h}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=0 \tag{12.2.9}$$

因为仅鞍点附近区域才对积分的值有贡献 .从(12.2.1)和(12.2.9)式可以看出,(12.2.7)式所要求的映射在鞍点附近时满足的 .

通常,鞍点都不止一个 .因此,可以将 x-y 平面分成一些子平面,每个子平面包含一个鞍点 .只考虑输出强度分布时,几何变换像为:$|\boldsymbol{G}(u,v)|\propto|\boldsymbol{f}[\varphi_1^{-1}(u),\varphi_2^{-1}(v)]|$,这项技术可以理解为相位掩膜板 $\exp\left[\mathrm{j}\pi\frac{\boldsymbol{h}(x,y;u,v)}{\lambda}\right]$ 起到一个局部光栅或局部棱镜的作用,在满足相位平稳条件的 x-y 平面上的一组子区域上实现了 $\boldsymbol{f}(x,y)$到 $\boldsymbol{G}(u,v)$的衍射 .

12.3 Hankel 变换

成像系统和激光器的谐振腔等大多数光学系统都是圆对称或轴对称的系统,在这类系统中使用极坐标,会给运算带来方便 .极坐标下的二维傅里叶变换可以推导出 Hankel 变换,它在光学系统的分析和设计中已得到了广泛应用 .

12.3.1 Hankel 变换的数学定义

在数学中,一个函数 $f(r)$的 Hankel 变换表示为

$$H_m(\rho)=\int_0^{\infty} f(r)J_m(2\pi r\rho)r\mathrm{d}r \tag{12.3.1}$$

如果 $m>-1/2$,可以证明输入函数 $f(r)$可以通过逆 Hankel 变换得到恢复

$$f(r)=\int_0^{\infty} H_m(\rho)J_m(2\pi r\rho)\rho\mathrm{d}\rho \tag{12.3.2}$$

12.3.2 极坐标下的傅里叶变换

用 $\boldsymbol{f}(x,y)$和 $\boldsymbol{F}(u,v)$分别表示的二维函数及其傅里叶变换,为

$$\boldsymbol{F}(u,v)=\iint \boldsymbol{f}(x,y)\exp[-\mathrm{j}2\pi(ux+vy)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{12.3.3}$$

在极坐标系下,像平面上以(r,θ)表示的傅里叶变换,可以用傅里叶平面上以(ρ,ϕ)表示的极坐标表示

$$\boldsymbol{F}(\rho,\phi)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \boldsymbol{f}(r,\theta)\exp[-\mathrm{j}2\pi r\rho\cos(\theta-\phi)]r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{12.3.4}$$

如果输入光场为圆对称的,同时 $f(r,\theta)$与 θ无关,这时可以得出

$$\boldsymbol{F}(\rho,\phi)=\int_0^{\infty} \boldsymbol{f}(r)r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\exp[-\mathrm{j}2\pi r\rho\cos(\theta-\phi)]\mathrm{d}\theta=\int_0^{\infty} \boldsymbol{f}(r)J_0(2\pi r\rho)r\mathrm{d}r \tag{12.3.5}$$

其中 $J_0(\quad)$为第一类零阶贝塞尔函数.傅里叶变换式 $\boldsymbol{F}(\rho,\phi)$为输入光场的零阶 Hankel 变换.由零阶 Hankel 变换可知,圆对称输入光场的傅里叶变换 $\boldsymbol{F}(\rho,\phi)$与 ϕ无关,它也是圆对称的.当光束通过一个圆孔时就属于这种情况,这时通过光阑的夫琅禾费衍射是一个爱里斑,可由圆孔的零阶 Hankel 变换计算出来.

通常 $\boldsymbol{f}(r,\theta)$都和 θ有关.这时,可以计算 $\boldsymbol{f}(r,\theta)$和 $\boldsymbol{F}(\rho,\phi)$的圆谐波展开式,它是对角向坐标的一维傅里叶变换,分别为

$$\begin{aligned} f_m(r)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{f}(r,\theta)\exp(-\mathrm{j}m\theta)\mathrm{d}\theta \\ F_m(\rho)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{F}(\rho,\phi)\exp(-\mathrm{j}m\phi)\mathrm{d}\phi \end{aligned} \tag{12.3.6}$$

其中,m是整数,$f_m(r)$和 $F_m(\rho)$也称为输入光场及其傅里叶变换的圆谐波函数.因为 $\boldsymbol{f}(r,\theta)$和 $\boldsymbol{F}(\rho,\phi)$都是周期为 2π 的周期函数,因此 $f_m(r)$和 $F_m(\rho)$实际上也就是傅里叶级数展开式中的系数.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}(r,\theta)&=\sum_{-\infty}^{\infty} f_m(r)\exp(\mathrm{j}m\theta) \\ \boldsymbol{F}(\rho,\phi)&=\sum_{-\infty}^{\infty} F_m(\rho)\exp(\mathrm{j}m\phi) \end{aligned} \tag{12.3.7}$$

因此,可以发现,输入光场的圆谐波函数及其傅里叶变换圆谐波函数之间的关系,可以在(12.3.4)式两边对 ϕ进行角向傅里叶变换得到,其中用输入光场的圆谐波展开式$\boldsymbol{f}_m(r)$代替输入光场 $\boldsymbol{f}(r,\theta)$

$$\begin{aligned} F_m(\rho)&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\exp(-\mathrm{j}m\phi)\mathrm{d}\phi\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(r)\exp(\mathrm{j}n\theta)\exp[\mathrm{j}2\pi r\rho\cos(\theta-\phi)]r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &=\int_0^{\infty} f_m(r)J_m(2\pi r\rho)r\mathrm{d}r \end{aligned} \tag{12.3.8}$$

其中,第一类 m 阶贝塞尔函数表示为 $J_m(x)=\frac{\mathrm{j}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(\mathrm{j}m\alpha)\exp(\mathrm{j}x\cos\alpha)\mathrm{d}\alpha$,其中 $\alpha=\theta-\phi$.(12.3.8)式中的第二个等式定义为 m阶 Hankel 变换.因此,Hankel 变换也称傅里叶 - 贝塞尔变换.

在光学中,所有能进行光学傅里叶变换的系统,都可以像(12.3.8)式那样进行 Hankel 变换.其中 $f_m(r)$为输入像的 m 阶圆谐波函数,$F_m(\rho)$为输入像傅里叶变换的 m 阶圆谐波函数.因此,一个二维输入函数,它圆谐波函数的 Hankel 变换为其傅里叶变换的圆谐波函数.

12.4 Radon 变换

Radon 变换描述的是用于计算机断层摄影术(CT)、射电天文学和核医学等的投影算子.

12.4.1 Radon 变换的定义

在断层摄影术中,待成像的三维物体可以由一系列投影平面描述.假定在某投影平面上,物体的切面用极坐标形式表示为 $f(r,\theta)$.如图 12.4.1 所示,当光场以某个入射角通过该物体时,一维光电探测器阵列所接受的信号是沿光程的线积分结果,用 $L(R,\phi)$表示,R 是从坐标原点到光线的距离,ϕ是光线的垂直方向与 $\theta=0$ 轴所成的夹角.辐射光场以一系列不同的入射角度 ϕ转动,光电探测器阵列随之转动,从而得到一系列的投影结果.

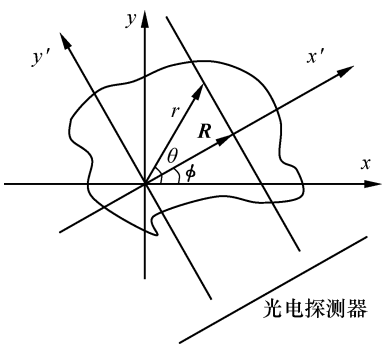


图 12.4.1 光学 Radon 变换

每一个投影可以看作是一个二维函数,在 Radon 变换中表示为

$$g(R,\phi)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f(r,\theta)\delta[r\cos(\phi-\theta)-R]r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{12.4.1}$$

其中,δ为狄拉克函数,它体现了受约束的平行投影,位置 r 应该保持在路径 $r\cdot\boldsymbol{R}/R=R$ 上,其中 $\boldsymbol{R}$的方向是路径的垂线方向,如图所示.

Radon 变换具有对称性,表示为 $g(-R,\phi)=g(R,\phi+\pi)$.

12.4.2 像的重构

扫描目标的像可以从 Radon 逆变换中重构恢复出来.常用的像恢复方法是基于中心切片理论提出的.$g(R,\phi)$的一维傅里叶变换是目标函数 $f(r,\theta)$的傅里叶变换,(12.4.1)式的一维傅里叶变换为

$$\begin{aligned}\int g(R,\phi)\exp(-\mathrm{j}2\pi\rho R)\mathrm{d}R&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f(r,\theta)\exp[-\mathrm{j}2\pi u\rho r\cos(\phi-\theta)]r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=\iint f(x,y)\exp[-\mathrm{j}2\pi(ux+vy)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=F(u,v)\end{aligned} \tag{12.4.2}$$

其中,$x=r\cos\theta$,$y=r\sin\theta$,$u=\rho\cos\phi$,$v=\rho\sin\phi$.通过逆傅里叶变换可以从 $F(u,v)$中恢复目标.

在像空间中的投影面,对于一个给定的投影方向,将笛卡尔坐标系(x,y)旋转一个角度 ϕ变为(x',y'),这样投影 $R=x'$,(12.4.1)式的积分变为一个一维积分,表示为

$$g(R,0)=\int f(x',y')\mathrm{d}y' \tag{12.4.3}$$

相应地,如果在频域空间中将傅里叶变换同样旋转一个角度 ϕ,使频域坐标(u,v)变为(u',v'),这样(12.4.2)式变成

$$\int g(R,0)\exp(-\mathrm{j}2\pi\rho R)\mathrm{d}R=\int f(x',y')\exp(-\mathrm{j}\pi u'x')\mathrm{d}y'=F(u',0) \tag{12.4.4}$$

从这个结果可以看出,对每一个给定投影角的二维目标切片,它的一维傅里叶变换可以通过目标函数的二维傅里叶变换将之变成一条直线.(12.4.4)式称为中心切片定理.当旋转角 ϕ 后,投影函数的一维傅里叶变换 $g(R,\phi)$ 就可以给出目标切片上的整个二维傅里叶变换.对于每个投影角,目标切片的傅里叶变换都可以被过原点的直线取样(又称中心切片).

(12.4.2)式的逆 Radon 变换给出了目标和目标本身的所有二维傅里叶变换.这种直接使用傅里叶变换方法的像恢复原理很简单,要运用坐标变换,同时还要求考虑上从极坐标到笛卡尔坐标的傅里叶频谱.另外,由投影变换或 Radon 变换中恢复像的方法还有很多,比如滤波反投影算法以及 Hankel 变换的圆谐波重构法等.

12.5 Hough 变换

Hough 变换是一种特殊的积分变换,是 Radon 变换的一种特殊情况.虽然 Hough 变换的定义可以从 Radon 变换推出,但两者是有根本区别的.Radon 变换用来处理图像投影在多维子空间中的情况,而 Hough 变换用来处理图像的坐标变换.Hough 变换在图像的曲面检测、移动目标的跟踪以及图像处理和模式识别中有很多应用.

12.5.1 Hough 变换定义

在笛卡尔坐标系中,直线的 Hough 变换定义为

$$\boldsymbol{H}(\theta,r)=\iint f(x,y)\delta(r-x\cos\theta-y\sin\theta)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}1, & (\theta_1,r_1)\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{12.5.1}$$

其中

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in r_1=x\cos\theta_1+y\sin\theta_1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

是 x-y 空间内的一条直线,在 θ-r 空间中,该直线变换为一个点(θ_1,r_1),如图 12.5.1 所示.

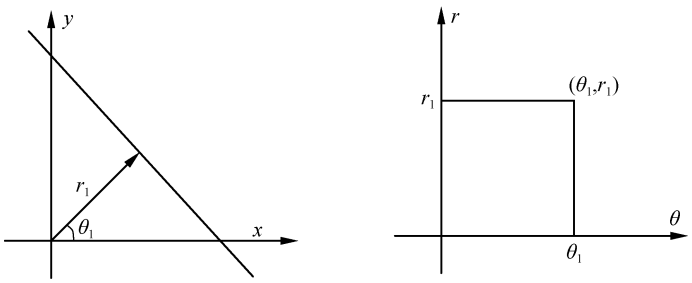


图 12.5.1 位于 x-y 平面内的一条直线经 Hough 变换后在 θ-r 空间内变成一个点

另外,在 x-y 坐标系中,任意点 $\delta(x-x_0,y-y_0)$ 的 Hough 变换表示为

$$\boldsymbol{H}(\theta,r)=\iint\delta(x-x_0,y-y_0)\delta(r-x\cos\theta-y\sin\theta)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\delta(r-x_0\cos\theta-y_0\sin\theta) \tag{12.5.2}$$

(12.5.2)式描述 θ-r 平面中的一个伪正弦函数,如图 12.5.2 所示.事实上,x-y 平面上的一个点可以表示为多条直线相交而成的交点.依据直线的方向及距 x-y 坐标系原点的距离,每条直线映射为 θ-r 空间内的一个点,所有这些点组成一个伪正弦曲线.

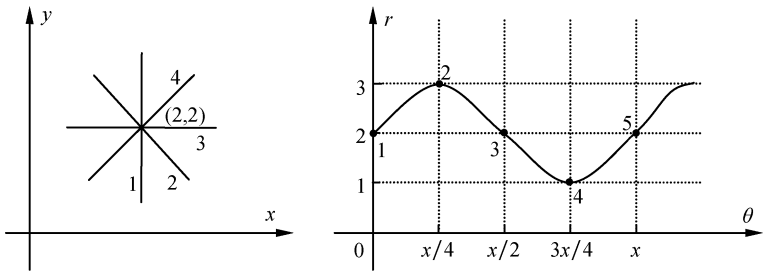


图 12.5.2 x-y 平面内一个点经 Hough 变换后变为 θ-r 空间内的一条近似正弦曲线
(θ-r 空间中用 1,2,3,4,5 标注的点对应于 x-y 平面内的直线)

12.5.2 Hough 变换的光学实现

光学系统的 Hough 变换是由 Gindi 和 Gmitro 提出的,如图 12.5.3 所示,光学系统对一个输入目标进行成像,由两个柱透镜分别在垂直和水平方向实现一维傅里叶变换.用 CCD 提取零阶傅里叶变换谱,就可得到给定的 θ 角的 Hough 变换线,旋转 Dove 棱镜可使 θ 角做角向扫描,线阵 CCD 探测器就以扫描速度记录下 Hough 变换的结果.

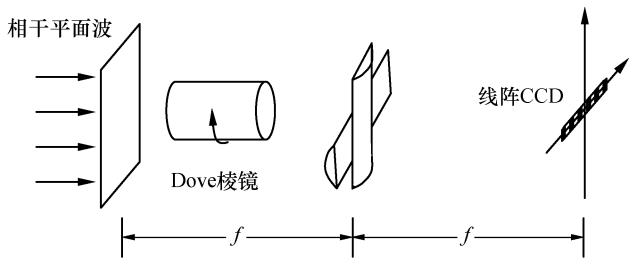


图 12.5.3 实现 Hough 变换的相干光学系统

虽然 Hough 变换直线映射的光学实现在一定范围内可行,但 Hough 变换的空间误差在广义变换时可能会产生严重的问题.另外,Hough 变换的有效性与映射的准确度有关,光学系统的性能与输入信号的信噪比以及杂散光有关;此外,还存在多目标问题.因此,Hough 变换大多用在数字图像处理中.

12.6 光学小波变换

傅里叶变换已经广泛并成功地用于信号处理和光学图像处理.一个信号通过傅里叶变换分解成两组正弦和余弦三角函数的线性组合,这些基函数在时间(t)轴上无限扩展,因此傅里叶变换比较适合于较长时间范围内的稳态信号处理.但是,在很多应用领域,人们常常需要处理有限范围内的瞬时信号,例如:语音信号、地震信号和心电图信号.傅里叶变换在任何有限频段上的信息并不足以确定在任意小范围内的函数,所以傅里叶分析将引起高频噪声.此外,傅里叶变换不能反映频谱随时间的变化.

小波变换(wavelet transform,简称 WT)是一种表达在时域(包括空域)和频域(包括空间频域)都有限的信号的新方法.这种变换对于小范围内的瞬态信号的频谱分析是非常有效的.小波变换可以用光学方法,采用一组光学子波滤波器来实现.这种新方法在 20 世纪 90 年代初提出后,立即引起广泛注意,在信号和图像处理领域得到迅速发展.

在这一节中,我们将首先从短时傅里叶变换入手,引入小波变换的概念,然后简要地介绍小

波变换的定义、基本性质、常用小波函数和小波变换的光学实现方法.

12.6.1 从短时傅里叶变换到小波变换

1. 短时傅里叶变换

为了有效地提取一个局部信号 $s(t)$的信息,我们必须引入一个局部化的变换.所谓局部化,就是被分析的区间要有一定的宽度 Δt,我们仅对 Δt 及其附近的信息进行处理;还有,被分析区间有一个中心坐标 t_c,当 t_c 改变时,就可提取不同的信息.

为了实现局部化,一个有效的办法是在傅里叶变换中加一个窗函数 $\boldsymbol{w}(t)$,即

$$\boldsymbol{S}_w(\nu,t_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{s}(t)\exp(-\mathrm{j}2\pi\nu t)\boldsymbol{w}(t-t_0)\mathrm{d}t \tag{12.6.1}$$

在频域中,上式可表为

$$\boldsymbol{S}_w(\nu,t_0)=[\boldsymbol{W}(\nu)\exp(-\mathrm{j}2\pi\nu t_0)]*\boldsymbol{s}(\nu) \tag{12.6.2}$$

式中 $\boldsymbol{W}(\nu)$和 $\boldsymbol{S}(\nu)$分别是 $\boldsymbol{w}(t)$和 $\boldsymbol{s}(t)$的傅里叶变换.

只要 $\boldsymbol{w}(t)$和 $\boldsymbol{W}(\nu)$有足够的衰减速度,窗函数就是一个局部化的函数.窗函数的中心 t_c 定义为

$$t_c=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}t\boldsymbol{w}^*(t)\boldsymbol{w}(t)\mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{w}^*(t)\boldsymbol{w}(t)\mathrm{d}t} \tag{12.6.3}$$

t_c 和 t_0 不一定相等.窗函数的宽度定义为

$$\Delta\boldsymbol{w}=2\left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty}(t-t_c)^2\boldsymbol{w}^*(t)\boldsymbol{w}(t)\mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{w}^*(t)\boldsymbol{w}(t)\mathrm{d}t}\right] \tag{12.6.4}$$

由于窗函数有局部处理的功能,因此(12.6.1)式所定义的变换称为短时傅里叶变换(short-time Fourier transform).在(12.6.1)式中,频率变量 ν和时间变量 t_0 同时出现在变换函数中,这是短时傅里叶变换和常规傅里叶变换的一个重要区别.在常规傅里叶变换中,时间变量和频率变量是分别出现在信号函数 $\boldsymbol{s}(t)$和它的频谱 $\boldsymbol{S}(\nu)$中.在短时傅里叶变换中,窗口宽度隐含于 $\boldsymbol{S}(\nu,t_0)$中.正是 t_0 和窗口宽度 $\Delta\boldsymbol{w}$,使这一变换具有局部处理功能.改变 t_0,窗口就在时域中移动,以获取不同区域的信息,t_0 通常称为位移因子;$\Delta\boldsymbol{w}$则限制被处理的时间范围.

与 t_c,$\Delta\boldsymbol{w}$对应,存在频率中心坐标

$$\nu_c=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\nu\boldsymbol{W}^*(\nu)\boldsymbol{W}(\nu)\mathrm{d}\nu}{\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{W}^*(\nu)\boldsymbol{W}(\nu)\mathrm{d}\nu} \tag{12.6.5}$$

和频率窗宽度

$$\Delta\boldsymbol{W}=2\left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty}(\nu-\nu_c)^2\boldsymbol{W}^*(\nu)\boldsymbol{W}(\nu)\mathrm{d}\nu}{\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{W}^*(\nu)\boldsymbol{W}(\nu)\mathrm{d}\nu}\right]^{1/2} \tag{12.6.6}$$

$\Delta\boldsymbol{w}\Delta\boldsymbol{W}$ 称为时间-频率窗,它限制了时域和频域中被处理区域的范围.根据光学中的测不准关系,应当有

$$\Delta\boldsymbol{w}\Delta\boldsymbol{W}\geqslant 1/\pi \tag{12.6.7}$$

当把高斯函数取为窗函数时,(12.6.7)式中的等式成立,这种情况下的短时傅里叶变换具有最小处理区域.

短时傅里叶变换具有局部性,表现在处理过程限制在时间-频率窗内进行.窗的位置是可变

的,但窗的大小不能改变,这使短时傅里叶变换在处理一些奇异性的信号时显得无能为力.小波变换的窗口宽度可变就克服了这一缺点.

下面举两个具体的变换来说明上面的分析.一个是盖伯(Gabor)变换,它的窗口宽度是不能改变的;另一个是 Morlet 变换,它的窗口宽度是可变的.

2. 盖伯变换

盖伯选择高斯函数为窗函数,在 1946 年提出下面的盖伯变换

$$G_{\sigma,\mu}\{\boldsymbol{s}\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{s}(t)\exp(-\mathrm{j}2\pi\nu t)\exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]\mathrm{d}t \tag{12.6.8}$$

式中,σ 和 μ 均为变换参数.上式又可表为

$$G_{\sigma,\mu}\{\boldsymbol{s}\}=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{s}(t)\exp(-\mathrm{j}2\pi\nu t)\boldsymbol{w}(t-\mu)\mathrm{d}t \tag{12.6.9}$$

式中

$$\boldsymbol{w}_\sigma(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \tag{12.6.10}$$

因此,盖伯变换就是高斯窗短时傅里叶变换.

(12.6.10)式所示的高斯函数,正是概率论中的高斯概率密度函数,因此由概率密度函数的定义有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}t=1 \tag{12.6.11}$$

由 n 阶矩公式有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}t^n\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & n\text{为奇}\\ 1\cdot3\cdot5\cdots(n-1)\sigma^2, & n\text{为偶}\end{cases} \tag{12.6.12}$$

利用窗函数的这两个性质,易于求出窗函数的中心坐标和窗口宽度.

窗函数的中心坐标

$$t_c=\frac{\dfrac{1}{2\pi\sigma^2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}t\exp\left(-\frac{t^2}{\sigma^2}\right)\mathrm{d}t}{\dfrac{1}{2\pi\sigma^2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{\sigma^2}\right)\mathrm{d}t}=0 \tag{12.6.13}$$

$$\Delta\boldsymbol{w}=2\left[\frac{\dfrac{1}{2\pi\sigma^2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}t^2\exp\left(-\frac{t^2}{\sigma^2}\right)\mathrm{d}t}{\dfrac{1}{2\pi\sigma^2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{\sigma^2}\right)\mathrm{d}t}\right]^{1/2}=2\left[\frac{\sigma/4\sqrt{\pi}}{1/2\sqrt{\pi}\sigma}\right]^{1/2}=\sqrt{2}\sigma \tag{12.6.14}$$

$\boldsymbol{w}_\sigma(t)$的傅里叶变换

$$\boldsymbol{W}_\sigma(\nu)=\exp(-2\pi^2\sigma^2\nu^2) \tag{12.6.15}$$

也是高斯函数,频率宽度

$$\Delta\boldsymbol{W}=1/\sqrt{2}\sigma\pi \tag{12.6.16}$$

因此有 $\Delta\boldsymbol{w}\Delta\boldsymbol{W}=1/\pi$.

盖伯变换在频域中的表达式为(12.6.2)式给出

$$\begin{aligned}G_{\sigma,\mu}\{s\}&=[\exp(-2\pi^2\sigma^2\nu^2)\exp(-\mathrm{j}2\pi\nu\mu)]*\boldsymbol{s}(\nu)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{s}(\nu')\exp[-2\pi^2\sigma^2(\nu-\nu')^2]\exp[-\mathrm{j}2\pi(\nu-\nu')\mu]\,\mathrm{d}\nu'\\&=\sqrt{2\pi}\sigma\exp(-\mathrm{j}2\pi\nu\mu)\,G_{\tau,\mu}\{\boldsymbol{s}\}\end{aligned} \tag{12.6.17}$$

式中

$$\tau = 1/2\pi\sigma \tag{12.6.18}$$

可见盖伯变换在频域和时域中的表达式具有相似的形式.

由以上分析可知,盖伯变换给出了一个中心位于 μ,宽度为$\sqrt{2}\sigma$的时间窗,从而实现了时域处理的局部化;与之相应,它又给出了一个中心位于 ν,宽度为 $1/\sqrt{2}\pi\sigma$的频率窗,从而实现了频域处理的局部化.用盖伯变换来处理信号时,处理过程限制在时-频窗内进行,窗的面积为 $1/\pi$,与参数 σ无关,不随 σ而变化,这正是所有短时傅里叶变换的缺点.

3. Morlet 小波变换

为了克服盖伯变换中窗口尺寸不能变动的缺点,只要对它略加改造就行.引入变换的母函数

$$\boldsymbol{h}(t) = \exp(\mathrm{j}2\pi\nu t)\boldsymbol{w}_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(\mathrm{j}2\pi\nu t)\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \tag{12.6.19}$$

再引入参数 a,b 生成子函数

$$\boldsymbol{h}_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\boldsymbol{h}\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}\sigma}\exp\left[\mathrm{j}2\pi\left(\frac{\nu}{a}\right)(t-b)\right]\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{t-b}{a}\right)^2\right] \tag{12.6.20}$$

现定义信号函数 $\boldsymbol{s}(t)$的 Morlet 小波变换为

$$\boldsymbol{W}_{a,b}(s) = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{h}^*\left(\frac{t-b}{a}\right)\boldsymbol{s}(t)\mathrm{d}t = \frac{\exp\left(\dfrac{\mathrm{j}2\pi b\nu}{a}\right)}{\sqrt{2\pi a}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{s}(t)\exp\left(\frac{-\mathrm{j}2\pi\nu t}{a}\right)\exp\left[\frac{-1}{2\sigma^2}\left(\frac{t-b}{a}\right)^2\right]\mathrm{d}t \tag{12.6.21}$$

将上式与(12.6.8)式比较,发现 Morlet 小波变换与盖伯变换的实质差别在于:小波变换的中心频率为(ν/a),随参数 a的增大而减小.而窗函数为

$$\boldsymbol{w}_{\sigma,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{t}{a}\right)^2\right] \tag{12.6.22}$$

显然,窗函数中心 $t_c=0$,时间窗宽度

$$\Delta\boldsymbol{W} = 2\left[\frac{\dfrac{1}{2\pi a\sigma^2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}t^2\exp\left(-\frac{t^2}{a^2\sigma^2}\right)\mathrm{d}t}{\dfrac{1}{2\pi a\sigma^2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{a^2\sigma^2}\right)\mathrm{d}t}\right]^{1/2} = 2\left[\frac{a^2\sigma/4\sqrt{\pi}}{1/2\sqrt{\pi}\sigma}\right] = \sqrt{2}a\sigma \tag{12.6.23}$$

频率窗函数为

$$\boldsymbol{W}_{\sigma,a}(\nu) = \sqrt{a}\exp(-2\pi^2a^2\sigma^2\nu^2) \tag{12.6.24}$$

频率窗宽度为

$$\Delta\boldsymbol{W}_{\sigma,a} = 1/\sqrt{2}\pi a\sigma \tag{12.6.25}$$

当中心频率增高时(a减小),时间窗宽度变小而频率窗宽度增大,可以处理更多的高频信息;当中心频率低时(a增大),频率窗变小而时间窗加宽,可容纳足够的时间周期,以保证处理精度.

12.6.2 小波变换

1. 定义

小波变换的基函数 $\boldsymbol{h}_{a,b}(t)$称为子波.它是由小波母函数 $\boldsymbol{h}(t)$以扩缩和位移的方式产生的.基函数由下式表示

$$\boldsymbol{h}_{a,b}(t)=\frac{1}{\sqrt{a}}\boldsymbol{h}\left(\frac{t-b}{a}\right) \tag{12.6.26}$$

式中,扩缩因子 $a>0$,信号 $\boldsymbol{s}(t)$的小波变换被定为希尔伯特空间的内积

$$\boldsymbol{W}_s(a,b)=\langle \boldsymbol{h}_{a,b}(t),\boldsymbol{s}(t)\rangle=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{h}^*\left(\frac{t-b}{a}\right)\boldsymbol{s}(t)\mathrm{d}t \tag{12.6.27}$$

上式亦为信号与扩缩子波之间的相关运算.$\boldsymbol{W}_s(a,b)$也可看成对某一固定的扩缩因子 a 下,时间位移 b 的函数.扩缩因子 a 体现了不同的分辨率.当扩缩因子 a 趋于 0 时,$\boldsymbol{h}_{a,b}(t)$向 $t=b$ 点集中或压缩,但由于 $1/\sqrt{a}$同时变大,因而不同尺度的子波具有相同的能量.当因子 a 减小时,$\boldsymbol{W}_s(a,b)$显示了信号 $\boldsymbol{s}(t)$的小尺度高频特征;而当因子 a 增大时,$\boldsymbol{W}(a,b)$显示了信号的粗的低频特征.

图 12.6.1 给出的是一种称为 Morlet 小波的基函数.其母函数是

$$\boldsymbol{h}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp(\mathrm{j}2\pi\nu_0 t)\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \tag{12.6.28}$$

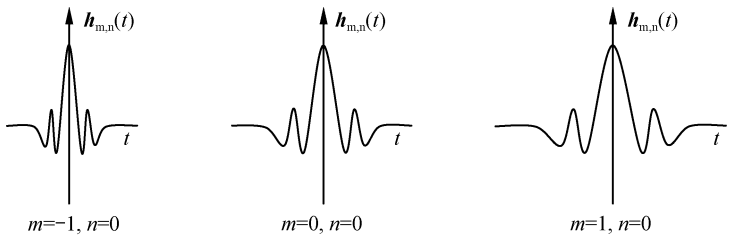


图 12.6.1 Morlet 小波的基函数

子函数是

$$\boldsymbol{h}_{m,n}(t)=\frac{1}{\sqrt{a}}\boldsymbol{h}\left(\frac{t-b}{a}\right) \tag{12.6.29}$$

式中:$m,n=0,1,2,\cdots$;$a=a_0^m$;$b=nb_0$. 当 $m=n=0$ 时,$a=1$,$b=0$,即为母函数;当 $m=1$,$n=0$ 时,$a=a_0$,$b=0$,对应的一阶小波函数为

$$\boldsymbol{h}_{1,0}(t)=\frac{1}{\sqrt{a_0}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left(\frac{\mathrm{j}2\pi\nu_0 t}{a_0}\right)\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2 a_0^2}\right)$$

当 $m=-1$,$n=0$ 时,$a=a_0^{-1}$,$b=0$,有负一阶小波函数

$$\boldsymbol{h}_{-1,0}(t)=\frac{1}{\sqrt{1/a_0}\sqrt{2\pi\sigma}}\exp(\mathrm{j}2\pi\nu_0 a_0 t)\exp\left(-\frac{a_0^2 t^2}{2\sigma^2}\right)$$

$h(t)$,$h_{1,0}(t)$和 $h_{-1,0}(t)$已分别在图 12.6.1 中画出.

2. 频域中的小波变换

在频域中,小波可表示为

$$\boldsymbol{H}_{a,b}(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\mathrm{j}2\pi\nu t)\boldsymbol{h}_{a,b}(t)\mathrm{d}t=\sqrt{a}\exp(-\mathrm{j}2\pi\nu b)\boldsymbol{H}(a\nu) \tag{12.6.30}$$

式中,$\boldsymbol{H}(\nu)$是小波母函数 $\boldsymbol{h}(t)$的傅里叶变换.在时间域的扩大 t/a 等价于频域的压缩 $a\nu$.时间域的位移 b 等价于频域的相位移动 $\exp(-\mathrm{j}2\pi\nu b)$.

在(12.6.27)式中,小波变换也可以在频域中表示为信号频谱 $\boldsymbol{S}(\nu)$和频域小波 $\boldsymbol{H}_{a,b}(a\nu)$的内积

$$\boldsymbol{W}_s(a,b)=\sqrt{a}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{H}^*(a\nu)\exp(\mathrm{j}2\pi\nu b)\boldsymbol{S}(\nu)\mathrm{d}\nu \tag{12.6.31}$$

上式表明,小波变换可以在一个光学相关器中实现,只要我们采用一组具有不同尺度因子 a 的光波滤波器 $\boldsymbol{H}(a\nu)$就可以了.

3. 存在条件

小波必须满足存在条件,才能将信号 $\boldsymbol{s}(t)$展开为小波函数的加权叠加积分,即

$$\boldsymbol{s}(t)=\frac{1}{C_h}\iint_{-\infty}^{\infty}\langle \boldsymbol{h}_{a,b},\boldsymbol{S}\rangle \boldsymbol{h}_{a,b}(t)\frac{1}{a^2}\mathrm{d}a\mathrm{d}b \tag{12.6.32}$$

式中,归一化函数 C_h 定义为

$$C_h\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\boldsymbol{H}(\nu)|^2}{|\nu|}\mathrm{d}\nu<\infty \tag{12.6.33}$$

小波逆变换要求 $C_h<\infty$.这个存在条件意味着在 $\nu=0$ 时,$|\boldsymbol{H}(\nu)|^2=0$,而且

$$\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{h}(t)\mathrm{d}t=0 \tag{12.6.34}$$

这意味着小波函数具有零均值,其傅里叶谱直流分量为零.

4. 离散小波变换(DWT)

正如傅里叶变换一样,小波变换也可以分为两种形式:连续的和离散的变换.对于离散小波变换,我们将假定信号 $\boldsymbol{s}(x)$也是离散的.离散小波变换的形式为

$$\boldsymbol{W}_{ij}=\sum_x \boldsymbol{s}(x)\boldsymbol{h}[(x-x_i)/a_j]/\sqrt{a_j} \tag{12.6.35}$$

对应于信号的重建过程,离散小波逆变换为

$$s(x)=\sum_i\sum_j \boldsymbol{W}_{ij}\boldsymbol{h}[(x-x_i)/a_j]/\sqrt{a_j} \tag{12.6.36}$$

12.6.3 小波函数

下面介绍几种常用的小波函数.

1. Haar 小波

Haar 小波是双极性阶跃函数

$$\boldsymbol{h}(t)=\mathrm{rect}\left[2\left(t-\frac{1}{4}\right)\right]-\mathrm{rect}\left[2\left(t-\frac{3}{4}\right)\right] \tag{12.6.37}$$

它是以 $t=1/2$ 为中心的奇对称实函数,满足小波存在条件的(12.6.34)式.Haar 小波的傅里叶变换是

$$\boldsymbol{H}(\nu)=2\mathrm{j}\exp(-\mathrm{j}\pi\nu)\frac{1-\cos(\pi\nu)}{\pi\nu} \tag{12.6.38}$$

它的模是正的偶函数,以 $\nu=0$ 为对称轴.相位因子 $\exp(-\mathrm{j}\pi\nu)$是由于 $\boldsymbol{h}(t)$是以 $t=1/2$ 为中心的奇对称性所引起的.Haar 小波及其傅里叶变换如图 12.6.2 所示.

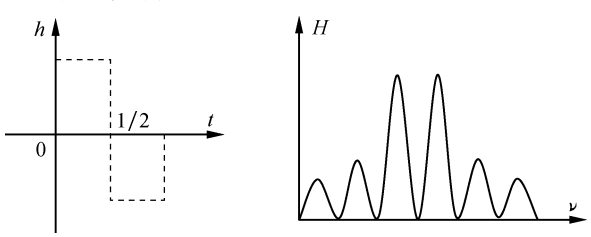


图 12.6.2 Haar 小波及其傅里叶变换

Haar 小波对于离散的缩放因子和位移量是正交的,其傅里叶谱的振幅 $|\boldsymbol{H}(\nu)|$ 随 $1/\nu$ 很慢地收敛到零.

2. Morlet 小波

Morlet 小波是由分析声像技术引入的,它可表示为

$$\boldsymbol{h}(t)=\exp(\mathrm{j}2\pi\nu_0 t)\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \tag{12.6.39}$$

其实部是余弦-高斯函数.Morlet 小波的傅里叶谱是平移到 ν_0 及 $-\nu_0$ 处的两个高斯函数,即

$$\boldsymbol{H}(\nu)=2\pi\{\exp[-2\pi^2(\nu-\nu_0)^2]+\exp[-2\pi^2(\nu+\nu_0)^2]\} \tag{12.6.40}$$

显然,$\boldsymbol{H}(\nu)$是正的实偶函数.图 12.6.3 是 $\boldsymbol{h}(t)$的实部和 $\boldsymbol{h}(t)$的傅里叶谱.由于 $\boldsymbol{H}(0)\geqslant 0$,所以小波变换的存在条件没有满足,但是对于较大的 ν_0,$\boldsymbol{H}(0)$十分接近于 0,在数值计算时可近似地看作为 0.

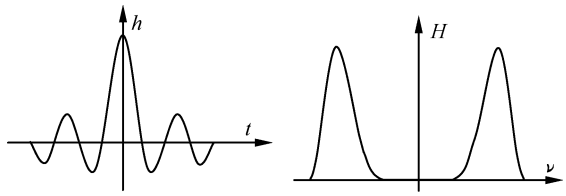


图 12.6.3 Morlet 小波及其傅里叶变换

3. Mexican-hat 小波

这种型如墨西哥帽的小波函数,被广泛用于零交叉多分辨边缘检测,其母函数实际上是高斯函数的二阶导数,即

$$\boldsymbol{h}(t)=(1-|t|^2)\exp\left(-\frac{|t|^2}{2}\right) \tag{12.6.41}$$

该函数是实偶函数,满足小波变换存在条件.Mexican-hat 小波的傅里叶变换是

$$\boldsymbol{H}(\nu)=4\pi^2\nu^2\exp(-2\pi\nu^2) \tag{12.6.42}$$

它也是实偶函数,如图 12.6.4 所示.

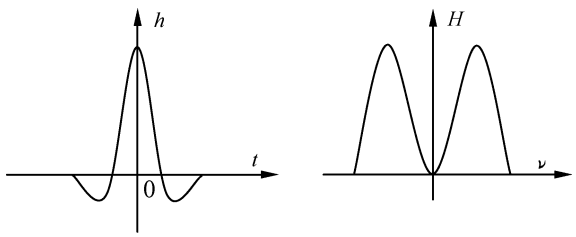


图 12.6.4 Mexican-hat 小波及其傅里叶变换

高斯函数的高阶导数也可以用来作为小波函数.高斯函数 n 阶导数的傅里叶谱 $\boldsymbol{H}(\nu)$将是乘以$(\mathrm{j}2\pi\nu)^n$ 的高斯函数,所以 $\boldsymbol{H}(0)=0$,满足子波变换的存在条件.Mexican-hat 小波变换收敛速度很快.

4. Meyer 小波

Meyer 小波是用其傅里叶变换来定义的,即

$$\boldsymbol{H}(\nu)=\exp(-\mathrm{j}\pi\nu)\sin[\omega(\nu)] \tag{12.6.43}$$

式中 $\omega(\nu)$是偶对称函数,如图 12.6.5 所示.图中,AB弧段有一个对称中心,在 $\nu=\frac{1}{2}$和$\omega\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$处,即

$$\omega(1-\nu)=\frac{\pi}{2}-\omega(\nu),\quad \frac{1}{3}\leqslant\nu\leqslant\frac{2}{3} \tag{12.6.44}$$

而AC弧段具有相同的形状,是AB弧段的翻转和展开,其对称中心在 $\nu=1$ 和 $\omega(1)=\frac{\pi}{4}$处,即

$$\omega(2\nu)=\frac{\pi}{2}-\omega(\nu),\quad \frac{1}{3}\leqslant\nu\leqslant\frac{2}{3} \tag{12.6.45}$$

如果(12.6.43)式中相移因子 $\exp(-\mathrm{j}\pi\nu)$被忽略,则 $\boldsymbol{H}(\nu)$为实偶函数.相移因子的作用,是使 $\boldsymbol{h}(t)$在时间轴上的位移为 $t=\frac{1}{2}$.

Meyer 小波可表示为

$$\boldsymbol{h}(t)=2\int_{-\infty}^{\infty}\sin[\omega(\nu)]\cos\left[2\pi\left(t-\frac{1}{2}\right)\nu\right]\mathrm{d}\nu \tag{12.6.46}$$

正如图 12.6.5 所示,它也是一个以 $t=\frac{1}{2}$为对称点的实函数,衰减较快.Meyer 已经证明,具有离散缩放和位移因子的这种小波,可以构成一组正交基底.

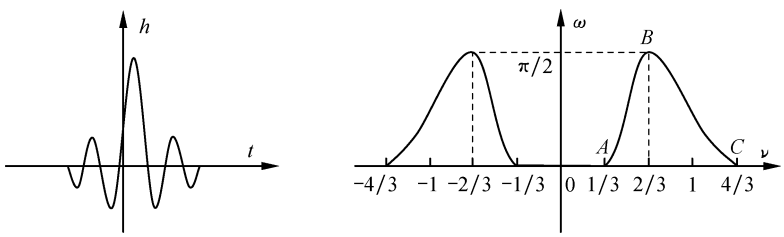


图 12.6.5 Meyer 小波和形成傅里叶谱的 $\omega(\nu)$函数

12.6.4 光学小波变换

信号分解为小波系数,以及由小波变换系数重建信号,可以利用计算机多分辨分析算法完成.对于离散和正交的小波变换,算法是完全递归的、简单的和快速的.用于小波变换的 VLSI 专用集成块已有报道制成.但是,光学所提供的实时小波变换的潜力,却引起人们极大的兴趣和关注.

根据(12.6.27)式的定义,小波变换是信号 $\boldsymbol{s}(t)$和由缩放因子 a 定标的小波 $\boldsymbol{h}(t)$之间的相关.光学小波变换在傅里叶平面采用 $\boldsymbol{H}(a\nu)$作为小波变换滤波器.小波变换滤波器是 $b=0$ 的扩缩小波 $\boldsymbol{h}\left(\frac{t}{a}\right)$的傅里叶变换.根据(12.6.31)式,相关输出中的坐标将是连续的相位因子 b.对于一个给定的小波变换滤波器,缩放因子 a是固定的.在多分辨小波变换分析中,我们需要一组具有离散的扩缩因子 a的小波变换滤波器.

一般说来,小波及其傅里叶变换是复值函数,因此小波滤波器 $\boldsymbol{H}(a\nu)$应该作成全息滤波器,它可以用光学方法记录或者用计算机产生.正如我们在前面所介绍的,大多数小波是实函数,光学相关器所具有的平移不变特点,使我们可以取消位移因子,在小波变换滤波器中,令 $b=0$.此

外,光学小波变换与时间原点的选择无关,因此我们可以移动原来相对于 $t=1/2$ 对称的小波,使得 $\boldsymbol{h}(t)$相对于 $t=0$ 对称.这样相应的相移因子 $\exp(\mathrm{j}\pi\nu)$就从小波变换滤波器中取消了,这一特点大大地简化了小波变换滤波器.实际上,很多小波变换滤波器是正的实函数,例如用于编码 Haar,Morlet,Mexian-hat,Meyer 小波的小波变换滤波器都是正的实函数.这些滤波器可以是非常简单的光学透过率模板,也可用液晶光阀等空间光调制器实时地实现.

一个二维的光学相关器可以实现一个一维的小波变换,图 12.6.6 是这种光学相关器的原理图.一维输入信号 $s(t)$被显示在空间光调制器上,例如可用声光电池作为这样的调制器,一个平行光速作为声光调制器的照明光源.信号 $s(t)$的傅里叶变换由一柱面透镜沿 x 方向实现、而 y 方向没有任何变换.在傅里叶平面 u-ν,一维信号谱 $\boldsymbol{S}(\nu)$沿 u 轴分布,同时沿 ν 轴扩展.一组滤波器 $\boldsymbol{H}(a\nu)$被引入傅里叶平面上,并被水平划分的几个条带上,分别代表一个具有不同缩放因子 a 沿一维小波滤波器 $\boldsymbol{H}(a\nu)$.因子 a 沿垂直轴变化.一个球面和柱面透镜组合沿水平轴实现逆傅里叶变换,并且沿垂直轴形成条带滤波器的像.所以光学相关器的输出平面与傅里叶平面一样,也被分成几个水平的条带,每一个条带代表输入信号的一维小波变换 $\boldsymbol{W}_s(a,b)$,参数 b 对应于水平轴,而参数 a 沿垂直轴变化,对应于条带滤波器的缩放因子 a.这种二维输出是信号的相空间或时间-频率联合表述,以水平轴为连续位移参数 b,以垂直轴为离散的扩缩参数 a.小波变换的输出用一个 CCD 相机检测,在(12.6.27)式中用$\dfrac{1}{\sqrt{a}}$进行的归一化运算由计算机完成.

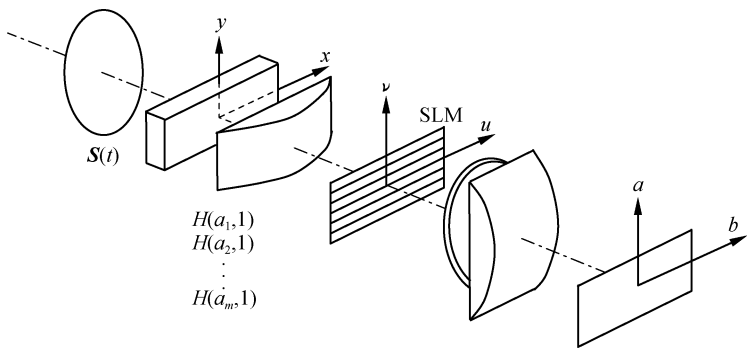


图 12.6.6 实现一维小波变换的二维光学相关器

12.6.5 光学 Morlet 小波变换的实例

在这一实例中,采用图 12.6.6 所示的光学多通道小波变换相关器.两个柱面透镜的焦距为 240mm,球面透镜焦距为 210mm.相关器用 He-Ne 激光作光源.小波函数是余弦-高斯 Morlet 函数

$$\boldsymbol{h}(t)=\cos(2\pi\nu_0 t)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \tag{12.6.47}$$

它的傅里叶变换是

$$\boldsymbol{H}(\nu)=\frac{1}{2}\{\exp[-2\pi^2\sigma^2(\nu-\nu_0)^2]+\exp[-2\pi^2\sigma^2(\nu+\nu_0)^2]\} \tag{12.6.48}$$

$\boldsymbol{H}(\nu)$是一个实函数,表达式 $\boldsymbol{H}(0)=\exp(-2\pi^2\sigma^2\nu_0^2)\neq 0$,但是随余弦函数频率 ν_0 的增加而迅速下降.例如,当 $2\pi\nu_0=5$,$\sigma=1$ 时,$\boldsymbol{H}(0)=3.7\times10^{-6}$,因此子波变换的存在条件在一个非常好的近似范围内被满足.

用计算要制作一组六个小波变换滤波器,扩缩因子是随意选择的,它们是 $a=1.0,1.56,$

2.42,3.75,7.5 和 21.43,如图 12.6.7(a)所示.图中小波变换滤波器的高斯剖面已用矩形函数数来近似.图 12.6.7(b)是对于如图 δ 函数的输入信号经小波变换后的输出.随因子 a 的减小,小波变换系数的强度集中于 b 轴上的 b_0 点,该点表示了输入 δ 函数的位置.图 12.6.7(c)是矩形函数作为输入时的输出,输入函数的边缘在小的因子 a 的小波变换输出项中明显地被检测到,而在大的 a 值的变换输出项中边缘是模糊的.在轴 b 上小波变换系数高强度的位置指示了物体(输入信号)边缘位置.图 12.6.7(d)显示了当输入是由不同频率的两段波形组成时,小波变换的输出.我们可以观察到在时间-频率联合表达的输出中沿因子 a 轴的跃变,相应于在输入信号频率的变化.而在空间-频率联合表达中变化的位置指示了在输入信号中频率变化的位置.

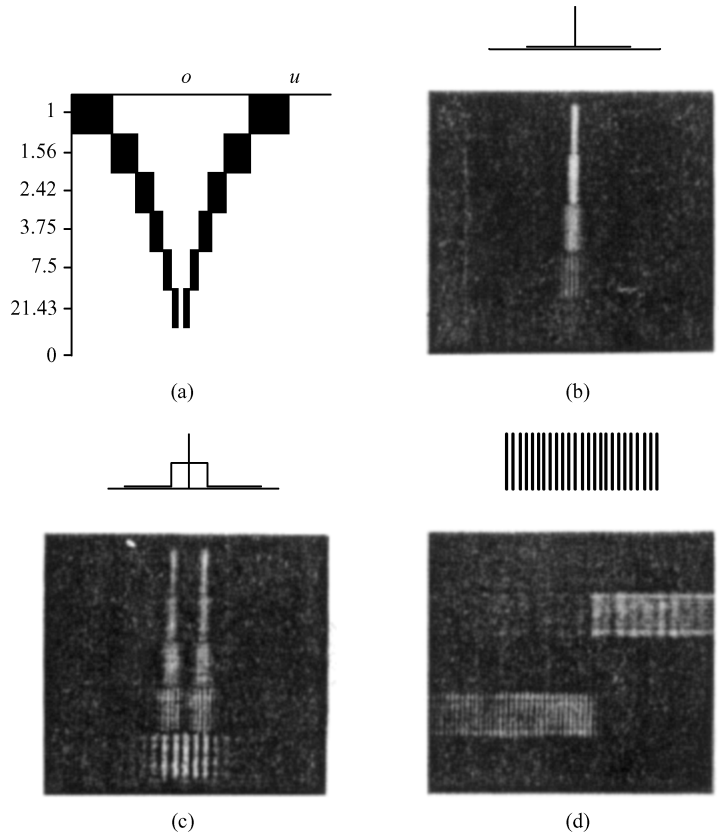


图 12.6.7　光学小波变换的实验结果

上述方法的局限仅仅在于只检测出小波变换系数的强度而损失了其相位,虽然对大多数小波,变换系数可以是简单的实的双极性函数.当时间信号在声光调制器中沿水平轴移动时,相关输出的小波系数也将在输出平面沿水平轴移动.因此,为了确定位移参数 b,必须要求在输出平面的检测器具有非常快的时间响应,或者使用短脉冲激光照明.

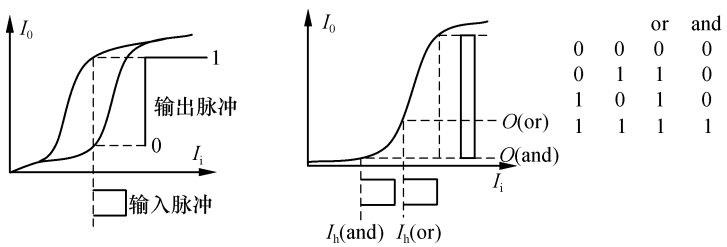
应该指出,图 12.6.6 所示的方案只是实现光学小波变换的方法之一.已经研究了很多实现一维信号和二维图像的小波变换的光学方法,例如,采用阴影投影的非相干光学相关器也可以用来实现二维的小波变换.有兴趣的读者可以从本书末所列的参考书目中查阅有关方法的详细报道.

第 13 章　数字光计算

数字光计算通常指以光学手段实现数字量运算的硬件和软件的统称.传统上的光学是用来处理两维成像以及光波的产生、传播、变换和探测等问题的.前面讨论的光学信息处理系统就可以进行模拟光计算,模拟光计算虽然能高速并行地处理模拟量数据,但是,模拟光计算也存在一些缺点,主要的缺点是精度不高和通用性差,所以人们自然提出数字光计算的设想.1990 年,美国贝尔(Bell)实验室报道了世界上第一台数字光学处理器,向数字光计算迈出了重要的一步.光子和电子不同,光子属于玻色子,它不带电荷,不容易发生相互作用,因此,光束可以相互交叉通过而不会相互影响,具有并行处理的能力;光子在真空中的速度为光速,不受 RC 时间常数的限制.光子的这些特点恰好为解决目前电子计算机的互连带宽、时钟歪斜和冯·诺依曼"瓶颈"等限制,提供了一条可以选择的途径.近年来,光学逻辑元件、光存储器件、光学互连、算法和体系结构都有很快的发展,不久的将来,数字光计算机一定能够在信息社会中发挥重要作用.光计算的领域十分广泛,本章将只局限于介绍数字光计算机的基本原理、离散模拟光学处理器、光学存储、光学互连和光计算机等基础内容.

13.1　光学逻辑运算

光学双值逻辑器件是数字光计算的最基本器件,图 13.1.1(a)是光双稳器件作存储器的原理,设输入初态和输出初态为"0",当输入光脉冲为"1"时,输出也为"1",输入光脉冲消失,输出仍保持"1"状态不变,即具有存储器的功能.图 13.1.1(b)是用光非线性阈值器件作逻辑门的原理,当作为与门时,取阈值为 $O(\text{and})$,当作为或门时,取阈值为 $O(\text{or})$,该器件所实现的逻辑运算关系已在图中列出.



		or	and
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

图 13.1.1　光学双值逻辑

下面以液晶光阀(LCLV)为例,说明具体的光学器件是怎样实现逻辑运算的.实现逻辑运算必须具有非线性阈值特性的元件,美国南加州大学的 A. A. Sawchuk 等采用休斯公司的一种液晶光阀构成一套组合逻辑系统.休斯 LCLV 是一种光学图像转换器,它接收低强度输入的空间图像后,通过来自另一光源的读出光将输入图像转变为输出图像.LCLV 的结构如图 13.1.2 所示,它由很多个薄层构成,有一个 CdS 光电导体层,一个CdFe光阻挡层,一个介质反射镜,和一个介于铟锡氧化物透明电极之间的双苯基液晶层.一个加在电极间的交流偏压使得这一元件处于工作状态.如图 13.1.3 所示,一个输入图像对光电导体的阻抗进行空间调制,这样就改变了降在

液晶物质上的电压分布,从而使其电光特性产生相应的分布,输入图像的信息就储进了液晶物质.当另一面射入的读出光穿过液晶又被介质反射镜反射出来后,就把液晶中的入射光信息带了出来.由于输入光的调制,各处液晶产生的对读出光(线偏振光)的偏振方向的改变不同,转过45°或0°,这就是非线性处理.这样通过第二块偏振片后输出图像是一明暗分明的图像.

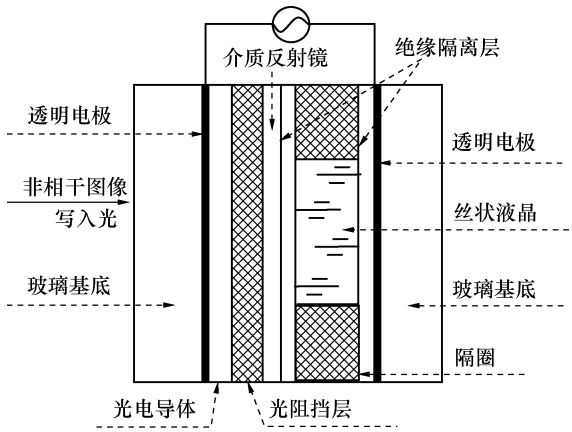


图13.1.2　LCLV的结构

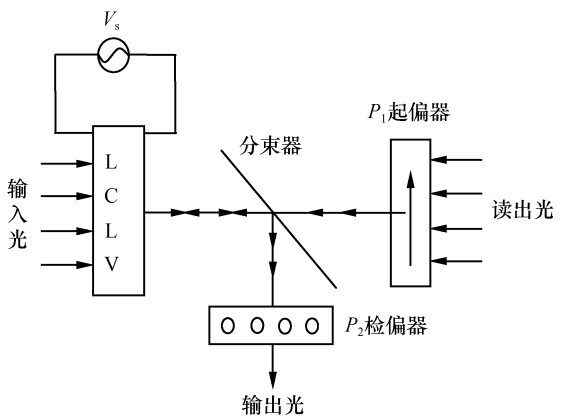


图13.1.3　LCLV输入/输出响应测量系统

图13.1.4是由图13.1.3所示系统测试出的实现“或非”运算的输入-输出特性曲线.其输出具有两种状态“0”和“1”,由输出光的两种强度级别表示,对应二进制逻辑门输出.逻辑运算过程如下:二输入光强度叠加后产生0、1或2三种强度状态,经LCLV非线性处理得到二进制输出0或1,通过调节LCLV的参数,就可以实现各种逻辑运算.

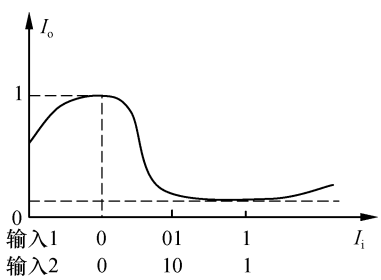
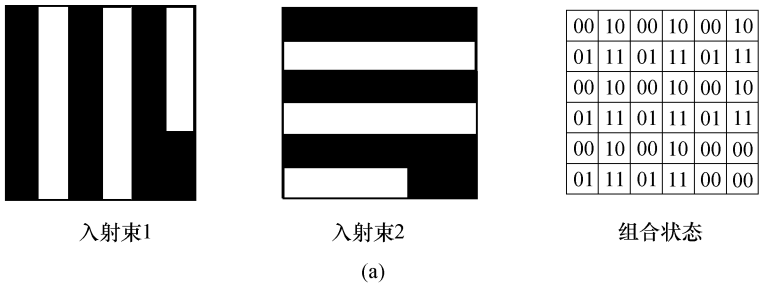


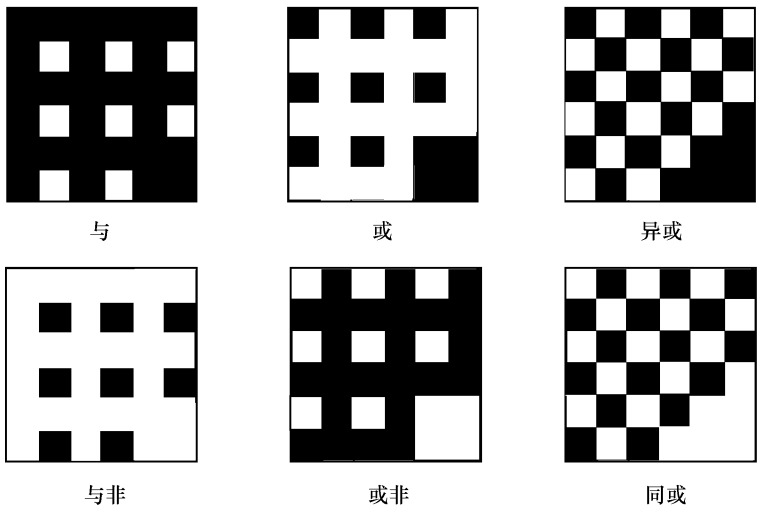
图13.1.4　LCLV输入-输出特性(实现或非运算)

如果输入1和输入2的图样如图13.1.5(a),就可以得到图13.1.5(b)所示的各种图样,它们代表六种不同的逻辑运算.实际上,只要实现了一种逻辑运算,如或非门,就可以由此组合出其他任何一种所需的逻辑门.一片LCLV的大小是厘米数量级,然而这样一块基片上却可以划分出10^5～10^6个逻辑门,而且所有运算是并行完成的.以上介绍的只是品种繁多的逻辑元件中的一种.另外还有另一种不同的液晶图像转换器,它是利

用输入光调制液晶使其成为空间频率随图像变化的相位光栅,读出光经其衍射后,再经不同的滤波得到不同的二进制逻辑输出,这种元件称为可变光栅模(Variable grating Mode)逻辑元件.



(a)



(b)

图 13.1.5 LCLV 实现各种逻辑运算

13.2 离散模拟光学处理器

在第 9 章和第 10 章中,我们讨论了处理连续模拟光学信号的光学系统,这里再讨论另外一个系统,用来处理离散模拟光学信号.

离散信号在许多不同应用中都会出现.例如,一个传感器阵列采集到的测量结果是一个离散集合.这些测量结果可以随时间连续变化,每一个离散的传感器阵列,在任一时刻所得到的只是一个离散的数据阵列.另外,为了处理数据,常常必须把连续数据离散化,因此离散数据会以多种不同的方式出现.离散并不意味着数据是数字式的,相反,这里讨论的数据是模拟值,并未被数字化,只是有一个这种数据的有限集合有待处理.下面将描述的所有光学处理系统都是这样的模拟处理系统.

13.2.1 信息和系统的离散表示

任何一个依赖于时间坐标 t 或空间坐标(x,y)的信号 $\boldsymbol{s}$,都可以抽样成一个离散的数据阵列,这个阵列可以用一个数值矢量

$$\boldsymbol{s}=\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \cdots \\ s_N \end{bmatrix} \tag{13.2.1}$$

表示.如果函数 $\boldsymbol{s}$ 是带限函数或接近带限函数,并且对它的离散采样足够充分,那么我们能精确(在带限情形下)或高精度(在接近带限的情形下)地重建 $\boldsymbol{s}$.此时,如果信号 $\boldsymbol{s}$ 来自于离散的传感器阵列,那么 $\boldsymbol{s}$ 的每个分量都是时间的函数.

对于离散信号,叠加积分演变为一个矩阵-矢量积.于是,一个以 $\boldsymbol{s}$ 为输入信号(N 个样本)的线性系统,对应的输出信号 $\boldsymbol{g}$(M 个样本)可表示为

$$\boldsymbol{g}=\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \cdots \\ g_M \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1N} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{M1} & h_{M2} & \cdots & h_{MN} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \cdots \\ s_N \end{bmatrix}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{s} \tag{13.2.2}$$

式中 $\boldsymbol{H}$ 为线性系统的系统矩阵,是一个 M 行 N 列的矩阵.进行上述运算需要 $M\times N$ 次模拟乘法运算和 $M\times N$ 次模拟加法运算.

于是,在离散信号处理中,矩阵-矢量积就像叠加积分那样具有根本性的意义.因此设计出能用光学方法进行这种运算,同时最好能充分发挥光学系统并行处理的优点成为了一个研究热点.

13.2.2 串行矩阵-矢量乘法器

针对处理离散数据问题,Bocher 提出了一个最为重要的光学处理器,即串行非相干矩阵-矢量处理器.这个处理器的目的是串行地处理数据样本,并利用光学系统的并行性以并行方式进行 M 次模拟乘法运算.下面对其运作做简单描述.

图 13.2.1 说明该系统的运作.为简单起见,先假设输入矢量 $\boldsymbol{s}$ 的所有元素和系统矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的所有元素都是非负的实数.推广的方法在相应参考文献中有讨论.离散的模拟数据以一系列先后施加于发光二极管(LED)的电流脉冲形式输入系统.每个电流脉冲的振幅正比于矢量 $\boldsymbol{s}$ 的一个元素振幅.则 LED 发出的每个光脉冲强度正比于信号矢量的一个元素.这些光脉冲被允许散开,照到一个二维矩阵掩膜上,矩阵每个元素的强度透过率正比于系统矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的一个元素.掩膜最终透射强度正比于所施加的信号脉冲 s_k 和系统矩阵所有元素的乘积,亦即掩膜透射的是一个正比于 $s_k\boldsymbol{H}$ 的光强度矩阵.从矩阵掩模透射出来的光投射到一个二维电荷耦合器件(CCD)探测器上,每个矩阵掩膜透射光脉冲转化成探测器上的一个电荷包,储存在探测器对应的离散势阱内.在下一个光脉冲到达之前,探测器每一行中的所有电荷并行地向右移动一个势阱.下一个信号脉冲接着照明矩阵掩模,CCD 探测器阵列检测到一组新的信号,这组信号又产生电荷,这些电荷将添加到已存在于势阱内的电荷包内.这些电荷再次向右移动,这一过程将重复到处理完最后一个信号脉冲为止.

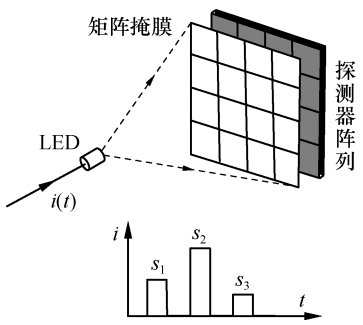


图 13.2.1 串联非相干矩阵-矢量乘法器

我们着重来分析其中的某一列电荷,这列电荷从探测器阵列最左部位开始启动,又在最后的信号脉冲达到后,在阵列最右边的部位终止.在检测到第一个脉冲后,第一列第 j 行的单元累积的电荷正比于 $g_{j1}=h_{j1}s_1$.此电荷右移一个单元,在检测到信号脉冲 s_2 后,累积的总电荷是第一

个电荷包与第二个电荷包之和，即 $g_{j2}=h_{j1}s_1+h_{j2}s_2$.这个过程继续下去，直到 N 次循环后，最右边的电荷列包含一组 M 个电荷，它们正比于矢量 $\boldsymbol{g}$ 的元素 .

于是，这个系统的并行性来自同时在 CCD 阵列上产生 M 个有用的模拟乘积 .每次循环还产生更多的电荷包，然而最终用到的只是其中的 M 个 .此外，每次循环中产生 M 次有用的模拟加法运算 .在 N 次循环后，就累积出完整的矢量 $\boldsymbol{g}$，它可从 CCD 先后顺次读出 .

这个系统的显著特点是，它串行地(顺序地)接收离散数据，串行地生成离散结果，而并行实施 M 个光学乘法运算和 M 个电学加法运算 .

13.2.3 并行的非相干光矩阵-矢量乘法器

图 13.2.2 是一个全并行非相干光矩阵 -矢量乘法器，图中忽略了所用光学元件的详情 .这个系统叫做“斯坦福矩阵 -矢量乘法器”，它在光学信号处理中的用途现在几乎与 VanderLugt 滤波器一样广泛 .这个系统从根本上说要比前面的串行系统快，这是由于信号矢量 $\boldsymbol{s}$ 的全部元素在一个同步脉冲周期内同时进入系统 .

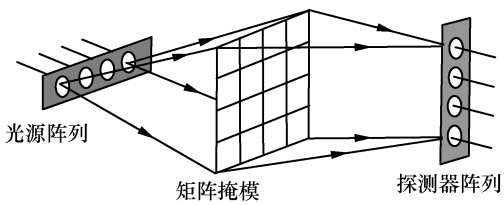


图 13.2.2 一个全并行非相干光矩阵 -矢量乘法器

掩模前面的光路排布使得来自任一输入光源(LED 或激光二极管)的光在竖直方向扩展而在水平方向成像，并使光布满掩模的单一竖列 .于是每个光源照明不同的一列 .掩模后面的光路使来自矩阵掩模每一行的光在水平方向上聚焦，而在竖直方向上成像，从而落在输出探测器阵列的单一探测单元上 .于是掩模每行透射的光在一个唯一的探测单元上按光学方式相加 .这里用的探测器不积累电荷，而是很快地产生响应，产生与接受光强度一致变化的输出信号 .

事实上，输入矢量 $\boldsymbol{s}$ 在竖直方向扩展，从而每个输出探测器能测量到输入矢量与存储在矩阵掩模中一个不同的行矢量的内积 .因此这样的处理器有时叫做“内积处理器” .

有几种不同的光学系统能实现图 13.2.2 所示的运算 .图 13.2.3 是其中的一种 .因为在矩阵掩模之前和之后在水平和竖直两个维度上都需要进行不同的运算，所以光学系统必须是由球面透镜和柱面透镜组合成的变形系统 .这一光学系统的运作如下：焦距均为 f 的球面透镜和柱面透镜紧密接触组成一个复合系统，柱面透镜在有聚焦能力的方向上，焦距为 $f/2$，在无聚焦能力的方向上为 f .于是，这样一对透镜将聚焦能力较弱方向上的发散光准直，而将聚焦能力较强方向上的发散光成像 .结果，这一透镜组合 L_1 和 L_2 将来自输入光源竖直方向上的发散光准直，而在水平方向上成像，从而照亮矩阵掩模的一列 .类似地，透镜组合 L_3 和 L_4 将掩模的一行成像到单个探测单元所在的竖直位置上，而将来自矩阵掩模一列的光进行准直或发散 .在理想的情况下，探测器在水平方向

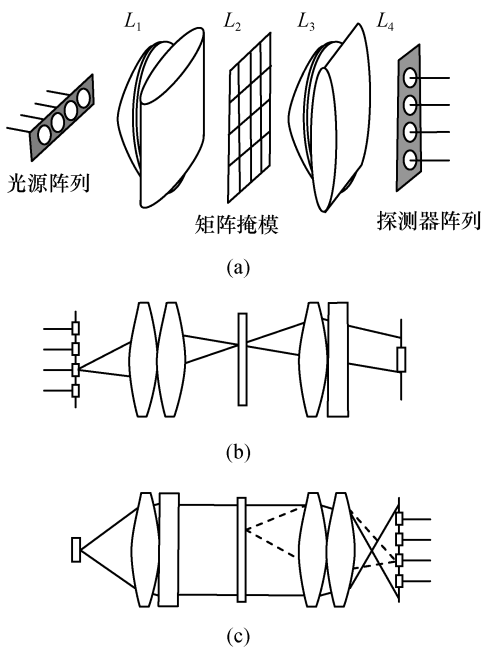


图 13.2.3 构成并行矩阵 -矢量乘法器的光学元件
(a) 透视图；(b) 俯视图；(c) 侧视图

上应该长,从而能检测到掩模的一行上大部分的光.但是长的探测器的电容大,会限制后面的电子通道带宽.

并行的矩阵-矢量乘法器在一个同步脉冲周期内实施全部 $N\times M$ 次乘法运算和加法运算.一个同步脉冲周期可以很短,例如 10ns,这取决于来自每个光源的可用光的多少.尽管这个系统用的是非相干叠加,还是可以用激光器作为光源,因为全部加法运算是用来自不同激光器的光实现的,对于大多数类型的半导体激光器,它们在一个同步脉冲周期的时间尺度上是互不相干的.

已经提出并验证了并行矩阵-矢量乘法器系统的许多应用,包括光学交叉开关矩阵的迭代形式、Hopfield 神经网络的构建等.这个系统是光学信息处理领域中的一个得力工具.

13.2.4 外积处理器

如果要完成矩阵-矩阵相乘的离散运算,可以运用 Athale 和 Collins 提出的外积处理器.

假设要使两个 3×3 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相乘,产生一个 3×3 乘积矩阵 $\boldsymbol{C}$,这里

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \tag{13.2.3}$$

此时,$\boldsymbol{C}$可以表示成 $\boldsymbol{A}$ 的列矢量和 $\boldsymbol{B}$ 的行矢量二者外积之和,即

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \tag{13.2.4}$$

外积之和可以在图 13.2.4 所示的系统中用光学方法得到.用两个二维的 SLM,它们每一个的运作就像是一个一维 SLM 的阵列.透镜 L_0 将来自光源 S 的光准直.这束光投射到一个 SLM 可独立编址的各行上,它的输出由球面透镜 L_1 成像到另一个 SLM 上,这个 SLM 由一组可独立编址的 SLM 列构成.最后,透镜 L_2 把第二个 SLM 透射的光成像到一个二维的时间积分探测器阵列上.

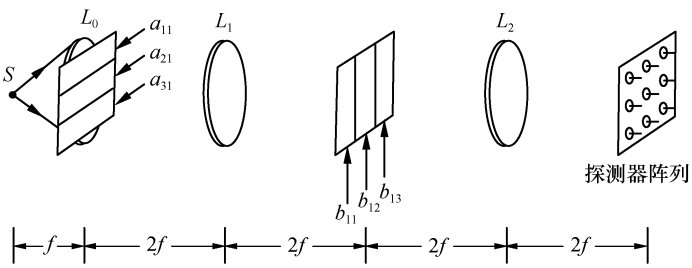


图 13.2.4 外积处理器

在这个系统中,先将 $\boldsymbol{A}$ 的第一个列矢量输入到第一个 SLM,$\boldsymbol{B}$ 的第一个行矢量输入到第二个 SLM.于是探测器阵列就存储了一定的电荷,该电荷正比于(13.2.4)式中第一个外积.现在第一个 SLM 被 $\boldsymbol{A}$ 的第二个列矢量所填充.而第二个 SLM 则被 $\boldsymbol{B}$ 的第二个行矢量所填充.投射到探测器阵列的光现在使电荷增加,增加的电荷正比于(13.2.4)式中的第二个外积.这一过程对 $\boldsymbol{A}$ 的第三个列矢量和 $\boldsymbol{B}$ 的第三个行矢量再重复一次.总的存储电荷正比于外积矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的元素,最终从探测器被读出.

忽略探测到的电荷转移时间,这个方法的运算速度是:对于一个 $N\times M$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和一个 $M\times$

N 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的一般乘积,每个 $N\times N$ 外积分量需要一个循环,而累积整个输出矩阵要 M 个这样的循环.在每个循环中发生 N^2 次乘法和加法运算.当 $N=M$ 时,并行程度与前面讨论的并行矩阵-矢量乘法器的相似.

13.3 光学互连

现行计算机中信息的载体是电子,逻辑门之间、芯片之间、芯片和插板之间的信息必须通过内部或外部引线作为电子载体传输的媒质,这就受到回路 RC 参数延迟效应的限制.在极大规模的门阵列芯片中,器件的尺寸已缩小到微米量级,内部引线的阻值相应提高,延迟时间增加,这就导致超快信息流传输中的瓶颈阻塞效应.用光子作为载体来传递逻辑运算的信息是突破瓶颈限制的最好途径,光学互连不仅对光计算有用,也是电子计算机进一步发展中必然的、现实的和近期的一种应用.光子互连的优越性主要表现在:(1)高的传播速度,不受 RC 参数延迟效应的限制.(2)光子和电子不同,光子属于玻色子,它不带电荷,不容易发生相互作用,因此,光束可以相互交叉通过而不会相互影响,具有并行处理的能力.(3)光子互连具有大的空间和时间带宽积,空间带宽由光学系统的空间带宽决定,对于时间带宽,因为光子载频约为 10^{14} Hz,所以能利用的带宽可达 10^{13} Hz,这意味着可能的传输数据速率比目前最快的电子通信数据速率大三个数量级.光互连按传播介质和传播规律的不同,可分为自由空间光互连,光纤和波导互连两类.也可以按信息载体的不同,分为纯光型互连和光电混合互连.

13.3.1 自由空间光互连

自由空间光互连是指光束不经过特殊传播介质,按自由空间传播的规律传播,通过光学元件时遵守折射、反射和衍射原理而进行互连的一种方法.利用普通的光学元件,可以实现比较有规则的互连网络,而利用计算全息图可以完成任意结构的互连网络.计算全息图实际上就是一个束控元件,它将多路输入光束按要求分成很多束,并控制其方向输出到不同的接收位置.这些联络光束可以是平行的,也可以是交叉的,它们交叉时几乎互不干扰,没有电子导线联络的局限性,因而可以纵横来往,自由自在.系统中的空间光调制器上写有可编程的计算全息图,该全息图可以按需要进行改变,从而改变联络关系,具有很大的灵活性.图 13.3.1 是用计算全息图作光学互连的示意图.

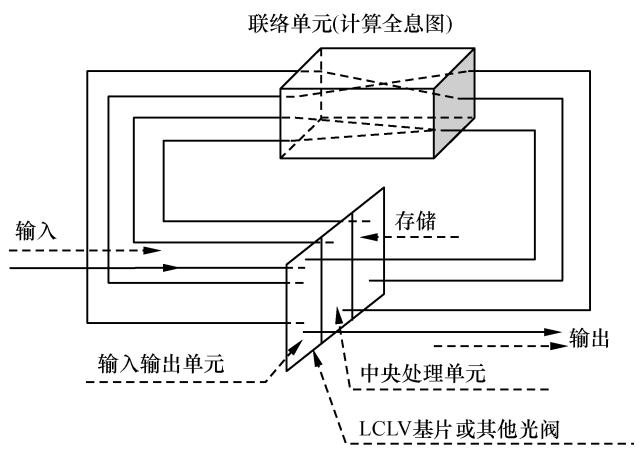


图 13.3.1 计算全息图作光学互连的示意图

13.3.2 光纤和集成光波导光互连

这种光互连是指光束通过光纤或集成光波导进行传播的互连.光纤互连采用多模或单模光纤作导光介质,它已经广泛用于长距离通信.在计算机中,由于光子互连具有的高速、大带宽等优点,它可适用于计算机与外部设备之间、电路板之间、模块之间、芯片上和芯片之间等各层次上的互连,同样也适用于光计算机中的互连.集成光波导器件是微光学器件,它将诸如透镜、棱镜、光栅、光调制器、光耦合器、光开关、双稳器件、模数转换器等基本元件集成到一起,构成集成光学的基本部件,这种部件具有体积小、重量轻、性能稳定、功能强等优点.

13.4 光 存 储

现代化的信息系统除了具有大容量的信息传输和超快的处理功能外,还包括超量的信息存取能力.磁盘存储技术已经相当成熟,在数字计算机中得到广泛应用,然而磁盘存储容量已难进一步提高.光存储技术的引入为提高存储容量的发展开辟了一个更为广阔的天地.

13.4.1 光盘存储器

光存储技术是20世纪70年代发展起来的一种新的信息存储手段,由于其存储量大,可靠性高,80年代以来得到了快速发展.光盘存储技术是用半导体激光器产生的相干和单色激光束,经透镜汇聚产生直径为1μm或更小的光斑,照射到光存储介质上,光斑上光存储介质发生物理或化学变化,从而使该照射点上介质的光学性质发生变化,这就是信息的写入过程.读出时用连续激光束扫描光存储介质,由于记录引起的介质上不同微区域光学性质的差异,解调从介质反射回的信号,就可以读出写入过程中记录的信息.

光盘存储器可分为只读式光盘和可擦式光盘.前者只能用来读出制造厂记录好的信息,如激光视盘和激光唱盘,后者才能作计算机的存储器.可擦式光盘的记录介质目前主要有两种:一种是相变型,利用激光热效应,使晶体材料在晶态与非晶态间转变,写入时用信号调制的高功率短脉冲聚焦到光盘上,介质薄膜吸热后温度迅速升至熔点,并在骤冷条件下形成非晶态.擦除时采用较长脉冲和较低功率的激光束作用于记录点,使该点的温度达到高于非晶态的转变温度而低于材料的熔点,从而恢复成晶态.读出时由于晶态和非晶态时材料的折射率和反射率不同,用小功率激光器可读出这种差异所反映的记录信息.另一种介质是热磁反转型,利用激光热效应,使磁光材料的磁性发生反转.写入前用强磁场对磁光介质进行初始化,使介质的磁畴具有相同方向.记录时激光束聚焦于介质上,当介质光斑上的温度上升至居里温度或补偿温度时,净磁化强度为零,此时通过外部磁场反向磁化,使记录区产生与周围相反的微区磁畴.读出时由于激光克尔效应,不同方向的磁畴反射的激光偏振方向不同,检测器可读出这种差异所反映的记录信息.

13.4.2 光全息存储

光盘存储器要求记录介质与读写头之间有机械运动,使记录的信息密度被限制在机械调节的精度以内,并使存取时间受到机械运动的限制,因此发展高密度的光全息存储技术有重要价值.

光全息存储系统按记录介质的厚度来分类,可分为使用面全息图的二维存储系统和使用体全息图的三维存储系统.体全息存储技术是一种复用技术,利用空间光调制器将被存储信息调制成“0”、“1”的明暗图像,而与同步的参考光束汇聚,形成全息干涉条纹,被记录在介质的某一层面上.当改变参考光束的入射角时,干涉图样将被记录在不同深度的介质层面上,如同书中的页片

一样,从而实现了信息的立体存储.有机高分子光折变材料和 $LiNbO_3$ 光折变晶体都可用作此类介质,有报道在 $LiNbO_3$ 晶体中可以存储 10000 页的重叠全息图像.

角度扫描是立体存储技术的重要部分,用机械扫描的方法,速度和精度都满足不了更高的要求,面发射激光器面阵的采用,可以实现快速切换不同位址的激光器元的激射状态,相当于切换不同的参考光束角度,实现高速大容量的信息存储.

全息存储的优点是有极高的存储容量和数据存取速度,潜在的数据传输速率和取数时间比现有的磁盘快 100～1000 倍.

13.5 光计算机

数字光计算技术中采用的基本器件包括纯光学器件和光电器件,由这些器件构成各种逻辑门和数字处理器,并进一步构成光计算机.光计算机具有与电子计算机不同的体系结构,以充分发挥光学并行处理和互连的能力.从光学角度研究体系结构,早期提出过基于双轨逻辑的函数块以及互连网络.以后又提出符号替代逻辑,重复使用这种技术并采用不同的替代规则可实现布尔逻辑、双值运算、细胞逻辑和图像自动机.由此又发展了单一替代规则的通用符号替代系统.

光电子混合处理可结合光学的并行特性和电子学的灵活性,是较为现实地发展光计算机的途径.一种是光电分列的混合处理系统,它利用光存储的特点构成超级计算机.这种处理体系可以是单一计算机使用光存储,多计算机采用光存储和光互连,也可以是光存储和光互连以及光处理相结合的数字计算机.第二种是光电交叉混合处理系统,可选择的基本体系有两种,一种以光子为传输介质,光电子列阵中的电子运算结果调制通过的光束,互连可采用光互连;另一种以电子作为传输介质,光检测列阵和发光器列阵作为输入和输出的转换器件,其间是并行布置的电子线路.第三种是光电子混合处理体系,采用光电混合图像处理,空间光调制器是关键性输入输出和运算器件.主要体系和已实现的结构有:(1)特征空间变换,如傅里叶变换、矩特征空间变换、弦分布特征空间变换、Hellin 变换、Chord 变换等.(2)数学形态学,这是一种循环式近域操作处理.(3)细胞逻辑列阵.

光计算机有全光学型和光电混合型两大类,相比之下,全光学型计算机可以达到更高的运算速度.全光数字计算机,以光子代替电子,光互连代替导线互连,光硬件代替计算机中的电子硬件,光运算代替电运算.光子同电子相比具有许多独特的优势:它的速度永远等于光速,具有电子所不具备的频率及偏振等特征,从而使传载信息的能力大得多.一块直径仅 2cm 的光棱镜,其通过的信息比特率可以超过全世界现有的全部电缆总和的 300 多倍;与电子计算机相比,光计算机的"无导线计算机"信息传递平行通道密度极大.光信号根本不需要导线,即使在光线交汇时也不会互相干扰造成影响.一枚直径 5 分硬币大小的棱镜,它的通过能力超过全世界现有电话电缆的许多倍;电子计算机的速率始终限制在电子学所能达到的范围,而光的并行、高速,天然地决定了光计算机的并行处理能力很强,具有超高速运算速度,光计算机的理论速率可达每秒 100 亿～1000 亿次,比目前最快的电子计算机速率高 100～1000 倍;光计算机的存储容量也比现在的电子计算机大百万倍;光计算机能识别和合成语言、图画和手势,能学习文字,连潦草的手写文字都能辨认,甚至在遇到错误的文字时,它还能"联想"出正确的字形;超高速电子计算机只能在低温下工作,而光计算机在室温下即可开展工作;另外,光计算机还具有与人脑相似的容错性.系统中某一元件损坏或出错时,并不影响最终的计算结果.科学家们预计,光计算机的进一步研制将成为 21 世纪高科技课题之一.

研制光计算机的设想早在 20 世纪 50 年代后期就已提出.1986 年,贝尔实验室的戴维·米

勒成功研制了小型光开关,为同实验室的艾伦·黄研制光处理器提供了必要的元件.1990 年 1 月底,贝尔实验室制成了第一台光计算机,尽管它的装置很粗糙,由激光器、透镜、棱镜等组成,只能用来计算.但是,它毕竟是光计算机领域中的一大突破.现在,全世界除了贝尔实验室外,日本和德国的其他公司都投入巨资研制光计算机,预计在本世纪,将出现更加先进的光计算机.

正像电子计算机的发展依赖于电子器件(尤其是集成电路)一样,光计算机的发展也主要取决于光逻辑元件和光存储元件(即集成光路)的突破.目前全光计算机技术尚未成熟,相关研究还处在初级阶段,但其中的光信息传输和光信息存储技术环节已经取得了巨大的成功.近二十年来 CD-ROM 光盘、VCD 光盘和 DVD 光盘的接踵出现,是光存储研究的巨大进展.网络技术中的光纤信道和光转接器技术已相当成熟.光计算机的关键技术,光存储技术、光互联技术、光集成器件等方面的研究都已取得突破性的进展,为光计算机的研制、开发和应用奠定了基础.以此同时,实用性商用光学阵列处理器和混合光/电计算机系统已相继问世.

研制光计算机,需要开发出可用一条光束控制另一条光束变化的光学“晶体管”.现有的光学“晶体管”庞大而笨拙,若用它们造成台式计算机将有辆汽车那么大.因此,要想短期内使光学计算机实用化还很困难.但是,光计算的前景已使各发达国家投入大量人力和经费进行深入研究,随着光计算机关键技术之一的集成光学正从实验研究走向开发应用阶段,光计算机的研制又将获得一块坚实的基石.预计在不久的将来,光学计算机将在各个领域获得广泛的应用.

第 14 章　光学三维传感

光学三维传感是指用光学的手段获得物体三维空间信息的方法和技术，目前主要是指获得物体表面三维空间信息的方法和技术．计算机技术、信息技术的迅速发展，极大地改变了传统的光学计量技术．光学计量初期所采用的感光胶片记录方式已为固态摄像机技术所取代，高性能的微型计算机和图像处理系统使光学图像的计算机辅助分析技术迅速发展，这些信息获取和处理技术上的进步又给光学传感和计量方法上的革新和发展以新的活力，使新的三维传感和计量方法不断涌现．因此，光学三维传感作为信息光学和光学计量领域的前沿方向之一，得到迅速发展[1~3]．

光学三维传感在机器视觉、实物仿形、工业检测、生物医学、影视特技、虚拟现实等领域，具有重要意义和广阔应用前景．相信看过电影《侏罗纪公园》的人一定会对影片中那活灵活现的大恐龙感到疑惑，对片中大恐龙穿墙过壁、以假乱真的场面记忆犹新，这种影视特技到底是怎么做出来的呢？这就是三维传感技术的魅力．在《侏罗纪公园》的特技制作中，技术人员先雕刻好一个恐龙的模型，然后用光学三维传感方法得到恐龙的三维彩色数字模型，再用三维动画软件使其做出各种动作，并完成与背景、人物的合成，最后才形成我们看到的惊心动魄场面．近年快速发展的三维电影和三维电视将光学三维传感的需求空间和应用领域进一步扩展．

获取三维面形信息的基本方法可以分为两大类：被动三维传感和主动三维传感．被动三维传感采用非结构照明方式，从一个或多个摄像系统获取的二维图像中确定距离信息，形成三维面形数据．从一个摄像系统获取的二维图像中确定距离信息时，人们必须依赖于物体形态、光照条件等的先验知识．如果这些知识不完整，对距离的计算可能产生错误．从两个或多个摄像系统获取的不同视觉方向的二维图像中，通过相关或匹配等运算可以重建物体的三维面形．双摄像机的传感系统如图 14.0.1 所示，它与人眼双目立体视觉的原理相似．从两个或多个摄像系统获取的不同视觉方向的二维图像中确定距离信息，常常要求大量的数据运算．当被测目标的结构信息过分简单或过分复杂，以及被测目标上各点反射率没有明显差异时，这种计算变得更加困难．因此，被动三维传感的方法常常用于对三维目标的识别、理解，以及用于位置、形态分析．应用这种方法的测量系统构成比较简单，在无法采用结构照明的时候更具有独特的优点．并且随着计算技术的发展，运算速度已不再是一个主要的限制因素．因此被动三维传感技术已广泛地应用于机器视觉领域．

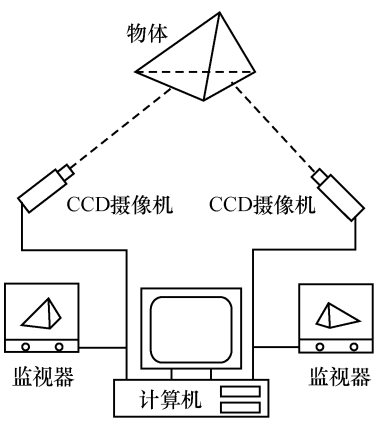


图 14.0.1　被动三维传感：双摄像机系统

主动三维传感采用结构照明方式．由于三维面形对结构光场的空间或时间进行调制，从而可以从携带有三维面形信息的观察光场中解调得到三维面形数据．这种方法具有较高的测量精度，因此大多数以三维面形测量为目的的三维传感系统都采用主动三维传感方式[4~7]．

作为结构照明所采用的光源，原则上可以采用激光光源和普通光源．激光具有亮度高、方向性和单色性好、易于实现强度调制等优点，所以在很多应用领域常常采用以激光为光源的三维传感系统．采用白光光源的结构照明方式具有噪声低、结构简单的优点，特别是在面结构照明的三维传感

系统中受到愈来愈多的重视 .本章将介绍三维传感的理论、方法和三维传感系统的应用实例 .

14.1　主动三维传感的基本概念

14.1.1　主动照明的三维传感方法

大多数实用的三维传感系统采用主动照明技术 .投影器发出结构照明光束 ,接收器接受由被测三维表面返回的光信号 ,由于三维面形对结构照明光束产生空间或时间调制 ,因此解调接收到的光信号就可以得到三维面形数据 .根据三维面形对结构照明光场调制方式的不同 ,人们将主动三维传感方法分为时间调制与空间调制两大类 .第一类方法称为飞行时间法(Time of flight ,简称 TOF),它基于三维面形对结构照明光束产生的时间调制 .该方法的原理如图 14.1.1 所示 .一个激光脉冲信号从发射器发出 ,经物体表面漫反射后 ,沿几乎相同的路径反向传回到接收器 ,利用检测光脉冲从发出到接收之间的时间延迟 ,就可以计算出距离 z .用附加的扫描装置使光束扫描整个物面可形成三维面形数据 .这种方法虽然原理简单 ,又可以避免阴影和遮挡等问题 ,但是要得到较高的距离测量精度 ,对信号处理系统的时间分辨率有极高的要求 .为了提高测量精度 ,实际的 TOF 系统往往采用时间调制光束 ,例如采用单一频率调制的激光束 ,然后比较发射光束和接收光束之间的相位 ,计算出距离[8] .同样采用飞行时间法原理 ,最近研制出一种三维电视摄像机 .这种摄像机采用红外 LED 光源 ,光源发出三角波调制的光照射被测物体 ,摄像机通过将上行的和下行的强度调制光与超快速快门照相机结合完成同步深度探测 ,并实时计算出深度信息 .与同一个摄像机同时获取的可见光图像相结合 ,形成包括深度信息的三维视频图像 .

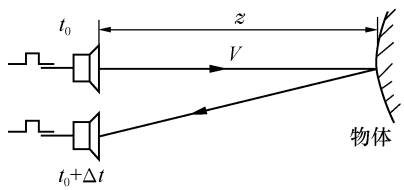


图 14.1.1　飞行时间法原理图

另一类更常用的方法 ,是基于三维面形对结构照明光束产生的空间调制 .例如三角法 ,它以传统的三角测量为基础 ,由于三维面形对结构照明光束产生的空间调制 ,改变了成像光束的角度 ,即改变了成像光点在检测器阵列上的位置 ,通过对成像光点位置的确定和系统光路的几何参数 ,计算出距离 .三角法的原理可用图 14.1.2 表示 .事实上 ,大多数三维面形测量仪器都源于三角测量原理 ,图中所示的只是一种采用单光束点结构照明的最简单的情况 .采用片状光束的线结构照明是三角测量法的扩展 .已经研究的另一些更复杂的三维面形测量技术 ,包括莫尔轮廓术、傅里叶变换轮廓术、相位测量轮廓术等也最终归结于三角测量法 ,只不过在不同的测量技术中采用不同的方式来从观察光场中提取三角计算中所需要的几何参数 .

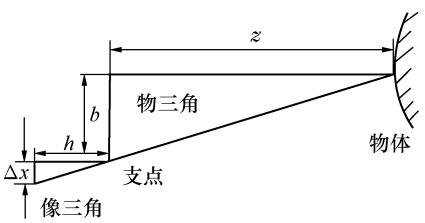


图 14.1.2　三角测量法原理

14.1.2　三种基本的结构照明方式[2]

结构照明根据照明系统投射光束的不同可分为三种方式 :点结构、线结构以及面结构照明 .对于采用单光束的点结构照明系统 ,所测量的只是该光束方向上的距离 .为了形成完整的三维面形数据 ,必须加上二维扫描机构 .如果采用片状光束的线结构照明系统 ,每次可完成被测物体上一个剖面的测量 ,这时只要附加一维扫描就可以形成三维面形数据 .如果采用空间编码的面结构照明系统 ,则可直接完成三维面形的测量 .下面分别对这三种方式进行介绍 .

第一种为点结构照明,是最简单的方式,是由结构照明系统投射一个光点到待测物体表面而形成,如图 14.1.3(a)所示.激光具有高亮度和良好的方向性,是理想的点结构照明光源.点结构照明将光能集中在一个点上,具有高的信噪比,可以测量较暗的和远距离的物体.由于每次只有一个点被测量,为了形成完整的三维面形,必须有附加的二维扫描.对于单点投影的三角测量系统,通常采用线阵探测器作为接收器件.

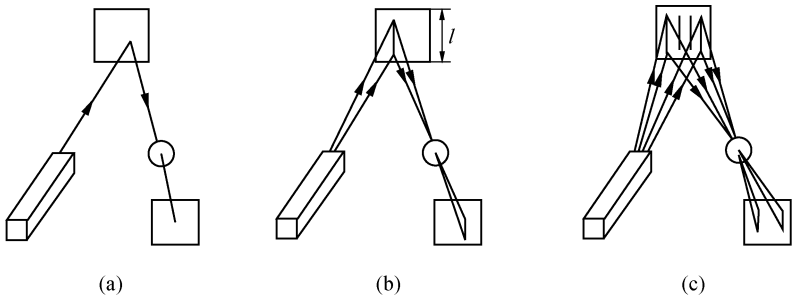


图 14.1.3 结构光三角法

(a) 单点投影;(b) 光片投形;(c) 多光片投影

第二种为线结构照明,由结构照明系统投射一个片状光束到待测物体表面而形成,如图 14.1.3(b)所示.采用这种照明的传感系统使用二维面阵探测器作为接收器件,只需要附加一维扫描就可以形成完整的三维面形数据.在某些实际应用中,被测物体本身沿一个方向移动通过视场,例如传送带上的工件,这时只需要一个固定的线结构照明传感系统就可以完成三维面形测量任务.

第三种为面结构照明,由结构照明系统投射一个二维图形到待测物体表面而形成.其中最简单的一种是多个片状光束构成的多线结构照明,如图 14.1.3(c)所示.与单线结构相比较,多线结构照明每次测量可以得到多个剖面的数据,设线数为 n,则附加的一维扫描移动距离相当于单线照明的 n 分之一.但是对于同样的光学系统和检测器件,多线照明所实现的深度测量范围下降到单线照明时的 n 分之一.或者说在同样的测量范围情况下,深度分辨率下降到 n 分之一.其他常用的面结构照明的二维图形还有罗奇光栅和正弦型光栅.这些面结构照明方式已在莫尔轮廓术[9]、相位测量轮廓术[10]、傅里叶变换轮廓术[11]及空间相位检测[12]等三维面形测量技术中应用,是使用最多的结构照明方式.本章将结合具体的应用背景,分析这些结构照明的特点和三维面形信息的调制与解调方案.广义上,很多种时间和(或)空间编码的二维图形都可以作为面结构照明光场,其编码保证每一测量点都唯一对应一个编码.时间编码需要多幅图像,每个测量点的光学特征,即明暗(二元编码)或者灰度(灰度编码)、颜色(颜色编码)以一个唯一确定的序列变化;空间编码则通过每个测量点及其周围点的光学特征的相互关系进行编码,或者由多个光学信息点组成一个测量点.在后续的信号处理过程中,从观察光场中解调恢复原来的空间位置关系.

14.1.3 三维传感系统的基本组成

三维传感系统涉及现代电子、光学、计算机图像处理、计算机视觉、计算机图形学、软件等技术,是多种先进技术集成的高技术装备.系统硬件主要包括光学机械装置、图像传感器、图像存储器、扫描装置、控制模块和其他附件.计算机、计算机图像系统已成为光学三维传感系统中不可分割的一部分.

图像传感器可将二维辐射(光学图像)信息转换为容易处理和传输的电信号.从所接收的辐射来区分,主要是可见光以及不可见辐射(红外、紫外及 X 射线);从读出方式来区分,有电子束

扫描摄像管和采用移位或电荷传输扫描的固态摄像器件.摄像管是在20世纪80年代广泛使用的一种电子束摄像器件.近年来,它已经被更轻便的固体摄像器件所替代.固态摄像器件是20世纪70年代在美国首先研制成的一种新型图像传感器.随着大规模集成电路工艺的不断完善和推广,许多高性能的固态摄像器件已在空间探测、光谱测量、高速传真、复印系统及各种成像技术领域得到广泛应用.由于它的基本工作原理为电荷通过半导体势阱发生转移,因此也称为电荷转移器件(CTD),它主要包含三种类型:电荷耦合器件(CCD)、CMOS器件和电荷注入器件(CID),其中尤以电荷耦合器件(CCD)的应用更为广泛.CCD器件是一种光电转换器件,有面阵和线阵之分,对于采用线或面结构照明的三维传感系统,主要采用面阵CCD.普通商用面阵CCD摄像机的扫描帧率为30帧/秒,可以满足一般三维传感的要求.高速面阵CCD摄像机的扫描帧率达到10000帧/秒,可以满足动态过程三维传感的要求.CMOS器件是一种用传统的芯片工艺方法将光敏元件、放大器、A/D转换器、存储器、数字信号处理器和计算机接口电路等集成在一块硅片上的图像传感器件.它的重要特点之一是可以直接访问任意像元,并能对任意像元进行操作运算,因此它具有开任意兴趣区域窗读出的能力.这使得CMOS相机具有体积更小、速度快、读出灵活、可以开窗、功耗低、总体成本也更低等优点,已经在很多场合成为固态摄像器件的首选.电荷注入器件CID具有快速窗口扫描和恢复功能,可用于动态过程的三维传感系统.固态摄像器件这种光电子器件,具有体积小、分辨率高、畸变小、重量轻、电压及功耗低、可靠性高、寿命长等一系列优点.

图像存储设备普遍采用可插入微型计算机扩展槽的各种不同性能和存储容量的图像卡来实现.由于集成电路的迅速发展,普通的单片图像卡可以完成1024×1024×8bit图像的存储.多片的已经可以满足存储32幅以上512×512×8bit的图像要求.在使用功能方面有单色(也称伪彩色)和彩色图像卡.目前不少图像卡还装有各种不同功能的图像处理芯片(如TMS 34010),具有硬件快速图像处理能力.它们通过图像卡上的算术逻辑单元(ALU)、乘法器、查找表(LUT)可以实现对图像的卷积、形态学、算术逻辑运算甚至高速傅里叶变换等功能.一些图像卡还具有窗口化功能,减少专用图像监视器,只要在微机上插上图像卡便可以实现各种图像处理功能,为图像处理的普及化提供条件.

数字相机将图像传感器和数字化转换功能集成在一起,直接输出数字图像信号.这种相机具有很好的感光像元与数字图像的像素点的几何对应性,避免了模拟视频信号数字化过程中因扫描同步误差引起的像素抖动问题,可以获得定位质量高的图像.数字相机的输出标准有RS-422、RS-644、Camera Link、IEEE火线(firewire)、USB和千兆网等数字输出接口标准.

用于三维传感系统的软件基本上可分为两大类,一类是通用的图像获取与处理软件和三维数据后处理软件,另一类是针对不同三维传感方法的系统应用软件.图像卡供应商一般提供通用的图像获取与处理软件,这些软件中包含有图像的采集、冻结、存取、直方图显示、图像的放大、缩小等基本功能和对图像的复杂运算甚至变换等功能.针对不同三维传感方法的应用软件通常由三维传感设备供应商提供.由于三维传感系统是一个光、机、电相结合的复杂的光电测量系统,三维面形重建与三维面形数据统计分析涉及数据量较大的计算,在设计和研制系统软件时,设计指导思想是注意光、机、电硬件功能与软件的整体协调,尽可能提高系统的运行效率,给用户提供一个由多层菜单驱动的比较容易掌握和使用的操作环境.例如,本章将要介绍的井底模式探测与分析系统以相位测量轮廓术方法为基础,系统软件包括光强自适应调整、相位计算、相位展开、系统参数自动校正、系统误差自动补偿等软件功能.系统还具有多种模式的图形和数据输出功能,提供任意方位三维形态显示、等高线假彩色显示、破碎坑面积和体积统计分析、井底灰度直方图与划痕显示等分析手段.

14.2 采用单光束的三维传感

14.2.1 基本原理与计算公式

最简单的结构光系统由光源投影一个单光点到被测物体表面，在另一个方向上通过成像观察光点的位置，从而计算出光源到物点的距离．投影光轴和成像光轴构成一个三角形，所以这种方法又称为三角测量法．三角测量法是一种传统的距离测量方法，具有悠久的历史．由于新的光电扫描技术与阵列型光电探测器件的发展，加之微机的控制与数据处理，使这种传统的方法有了很多新的进展及应用．

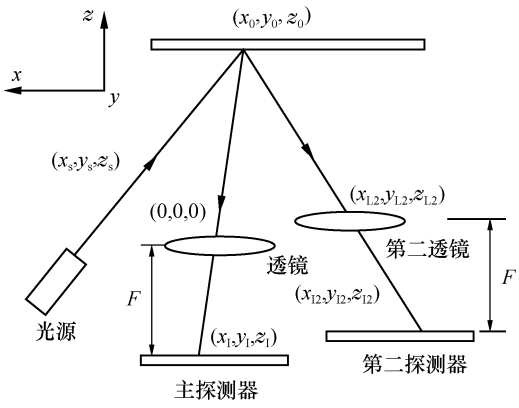


图 14.2.1 一般三角测量系统原理

图 14.2.1 是一般的三角测量系统[2]．图中给出了物体、光源、探测器和成像透镜孔径中心的坐标．坐标系统原点位于主探测器透镜孔径中心．像点的(x,y)坐标按相对于相应的成像透镜中心给出．照明光束在 x-z 和 y-z 平面上的投影线相对于 z 轴的夹角为 θ_x 和 θ_y．所以被照明的物点的坐标为

$$x_0 = x_s - (z_0 - z_s)\tan\theta_x \tag{14.2.1}$$

$$y_0 = x_s - (z_0 - z_s)\tan\theta_y \tag{14.2.2}$$

该点在主探测器上形成的像点坐标为

$$x_i = \frac{F}{z_0}x_0 = \frac{F}{z_0}(x_s + z_s\tan\theta_x) - F\tan\theta_x \tag{14.2.3}$$

$$y_i = \frac{F}{z_0}y_0 = \frac{F}{z_0}(y_s + z_s\tan\theta_y) - F\tan\theta_y \tag{14.2.4}$$

式中，F 是成像透镜和探测器之间的距离，对于较长的工作距离(大的 z_0)，该值近似等于透镜的焦距．如果比较物面上和参考平面上的光点在探测器上的像点位置，则像点位置的差异可以表示为

$$\Delta x_i = F(x_s + z_s\tan\theta_x)\left(\frac{1}{z_0} - \frac{1}{z_{ref}}\right) \tag{14.2.5}$$

$$\Delta y_i = F(y_s + z_s\tan\theta_y)\left(\frac{1}{z_0} - \frac{1}{z_{ref}}\right) \tag{14.2.6}$$

用 x 方向的位移量计算物体的距离，可以得到

$$z_0 = \frac{z_{ref}}{1 + \Delta x_i \cdot z_{ref}/F(x_s + z_s\tan\theta_x)} \tag{14.2.7}$$

上式表明，z_0 和 Δx_i 之间存在明显的非线性关系．通常，采用一维线阵探测器，使投影光轴、成像光轴和探测器阵列位于同一平面，这时像点的位置只在 x 方向上沿探测器阵列移动，有效光源位于 x 轴上，即 $\Delta y_i = 0$，$y_x = z_s = 0$，这时上式可以简化为

$$z_0 = \frac{z_{ref}}{1 + \Delta x_i \cdot z_{ref}/(Fx_s)} \tag{14.2.8}$$

这种由一个投影光轴和一个成像光轴构成的测量系统又称为单三角测量系统．这种测量方法要求投影光轴和成像光轴之间保持恒定的夹角．如果用这种系统完成一维或二维物面高度的测量，

必须在整个传感器(包括投影和成像)和被测物体之间附加一维或二维的相对扫描,如果引入第二个成像系统,则可以构成双三角测量系统[13].这时距离的测量可以通过比较在两个探测器上像点的差异而实现,而单三角法中距离的测量是通过比较一个相对于物面的像点和一个相对于基准面的像点而实现的.正如图 14.2.1 所示,在第二个探测器平面上像点的坐标为

$$x_{i2}=\frac{F(x_0-x_{L2})}{z_0-z_{L2}} \tag{14.2.9}$$

$$y_{i2}=\frac{F(y_0-y_{L2})}{z_0-z_{L2}} \tag{14.2.10}$$

(14.2.3)和(14.2.9)两式联立,可以得到

$$z_0=\frac{Fx_{L2}-z_{L2}x_{i2}}{x_i-x_{i2}} \tag{14.2.11}$$

上式表明,双三角测量方法并不依赖于投影光轴与成像光轴之间保持固定的夹角.这意味着简单地沿一个方向扫描投影光轴就可以完成一个剖面的距离测量.这两种三角测量方法的特点将在后面的应用实例中作进一步的说明.

应该指出,在三角测量法中坐标系统的建立也可以采用与图 14.2.1 不同的方法.例如,将投影光轴作为 z 轴,使基准平面与投影光轴垂直,如图 14.2.2 所示,图中(a)具有最简单的形式,投影光轴与成像光轴平行,所构成的物三角形和像三角形是相似的直角三角形.在这种测量系统中,物三角形的基线 b 和像三角形的高度 h 是已知量,物体的距离或高度 z 可以通过像三角形的基线 Δx 的测量确定.测量方程是

$$z=\frac{bh}{\Delta x} \tag{14.2.12}$$

上式表明,被测距离 z 和测量变量 Δx 之间存在单调关系,因此原理上这一技术可以适应于所有 z 值.其次,z 和 Δx 之间的非线性关系,意味着测量关系的精度将是不均匀的.

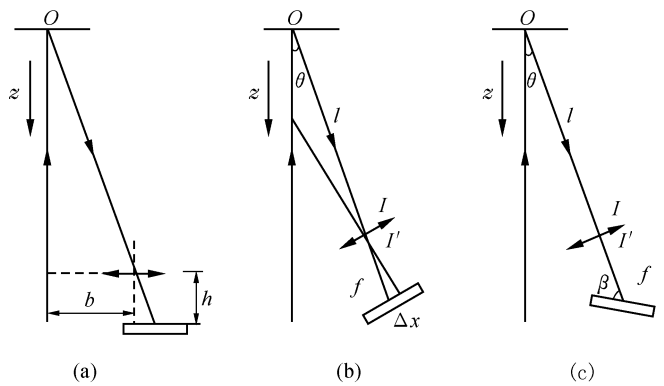


图 14.2.2 几种三角测量的坐标关系

(a) 投影光轴和成像光轴平行;(b) 投影光轴和成像光轴相交;(c) 满足 Scheimpflug 条件

图 14.2.2(b)中,成像光轴与观察方向一致,使成像镜头工作在近轴状态,具有较大的测量范围.在图中,θ 是投影光轴与成像光轴的夹角,O 是两光轴交点并作为物体高度计量的原点,I 和 I' 是成像系统的入瞳和出瞳.线阵探测器与成像光轴垂直,与 I' 点的距离为 f;当物距 l 较大时,f 近似地等于成像透镜的焦距.由图中所示的几何关系可以导出.

$$z=\frac{l\Delta x}{\sin\theta\cdot f+\cos\theta\cdot\Delta x} \tag{14.2.13}$$

上式表明,在待测距离 z 和可测变量 Δx 之间仍然存在单调的和非线性的关系.在上面两种三角测量光路中,当被测物体高度变化时,像点就沿线阵探测器方向移动.但是,由于探测器基线与光轴垂直,只有一个准确调焦的位置,其余位置的像点都处于不同程度的离焦状态.由于离焦引起的像点的弥散,降低了系统的测量精度.为了解决这一问题,可以使探测器基线与成像光轴成一倾角 β,当满足 Scheimpflug 条件,即满足关系

$$\tan\theta = k \cdot \tan\beta \tag{14.2.14}$$

时,在一定景深范围内的被测点都能正确地成像在探测器阵列上,从而保证了测量精度.上式中,k 是成像系统的放大倍率.按照 Scheimpflug 条件构成的三角测量系统如图 14.2.2(c)所示,这时待测距离 z 和可测变量 Δx 之间的关系式为

$$z = \frac{(l-f)\sin\beta \cdot \Delta x}{f\sin\theta + \cos\theta\sin\beta \cdot \Delta x} \tag{14.2.15}$$

上面介绍的三种三角测量系统光路都是针对单三角测量法进行讨论的.实际上,双三角测量法中也可以采用上述光路条件,例如使双三角测量关系中两个成像三角都满足 Scheimpflug 条件,从而得到较高的测量精度.

14.2.2 散斑对激光三角法精度的影响

激光光源的高亮度和方向性使之成为非常理想的投影光源.激光三角法成为很多距离传感技术和由这种技术派生的三维面形测量技术的基础.前面介绍的基本原理和计算公式已经表明,待测距离 z 和可测变量 Δx(像点在探测器上的位移量)之间存在单调的和非线性的关系.这样一种传感技术的精度直接受成像光点位置测量精度的影响,因此常常采用下面的技术措施来提高精度.(1)使用 CCD 线阵探测器或类似的阵列元件,这些器件具有高灵敏、大动态范围、无几何畸变等优点.(2)由于阵列元件有限的空间像元数目(例如线阵 CCD2048 具有 2048 个可分辨单元),安排光路参数使像点覆盖几个像素单元,通过计算光点中心位置,可以达到亚像素的精度,例如采用阈值法、重心法、曲线拟合法及同态滤波等.(3)待测距离 z 和光点位置之间的关系除了按相应的计算公式得到外,还可以通过校准过程确定.也就是说通过测量一组已知的距离,建立待测距离 z 和光点位置之间的直接映射(表)关系,可以消除系统几何参数和像差的影响[14].

人们曾试图相信,三角法距离测量精度的唯一限制来自技术方面而不是物理上的限制,例如取决于探测器有限的像素、电信号噪声等.如果这些困难能够克服,甚至成像系统的衍射限制也可以通过校准过程来考虑.后来的理论研究和实验工作表明,三角法距离测量精度的限制还来自物理上的原因,激光散斑对三角法测量精度具有重要影响[15~16].

如果物体表面是粗糙的(相对波长而言),在探测器上的像点将受散斑影响.G.Haüsler[17]通过理论分析,给出了由于散斑引起的光点中心的定位误差 δ_x(光点重心的标准差)为

$$\delta_x = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\lambda}{\sin u} \tag{14.2.16}$$

式中,$\sin u$ 是观察透镜的数值孔径,λ 是激光的波长.统计定位误差略小于横向分辨率的瑞利极限.(14.2.16)式是在通常的散斑理论的假定下导出的.应特别注意的是,在推导中假定了在观察孔径内存在着很多散斑.换句话说,在物体上光点的尺寸大于相应的成像透镜的衍射脉冲响应函数的尺寸.(14.2.16)式仅对于相干情况成立.如果考虑散斑的对比度 C,可以得到更一般的定位误差表达式为

$$\delta x = C \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\bar{\lambda}}{\sin u} \tag{14.2.17}$$

式中，$\bar{\lambda}$ 是加权平均波长，散斑的对比度可以通过减少时间和(或)空间相干性而减弱.上式提供了改进激光三角法测量精度的可能性，对于这一问题已经进行了大量的理论和实验研究，例如已研究了热空气扰动法、孔径扫描法等方法，有兴趣的读者可以参考有关的文献.提高测量精度的另一条途径是用信号处理的方法减弱散斑的影响.可以对成像光点的强度分布取对数运算，使相乘性的散斑转化为相加性的噪声，然后用数字滤波的方法加以滤除.

14.2.3 测量实例(鞋楦三维面形测量)[18]

在制鞋工业中，无论是新设计的样楦，还是大批生产的鞋楦，都必须对其楦身各特征部位的尺寸及外形进行测量检验.鞋楦测量是款式设计的基础.现代制鞋业采用的制鞋计算机辅助设计(CAD)系统和计算机辅助制造(CAM)系统更需要整个鞋楦的三维面形数据.

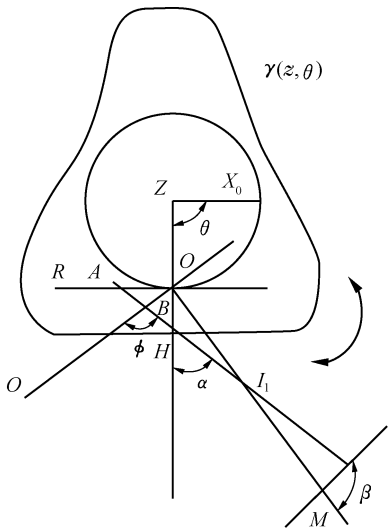


图 14.2.3 鞋楦三维测量系统原理图

1. 测量原理

测量仪采用激光三角测量原理，图 14.2.3 是该原理的光路图.图中 z 是旋转轴，被测鞋楦可以绕 z 轴转动和沿 z 轴移动，由氦-氖激光器投射的光线通过 z 轴并垂直 z 轴，成像光轴与投影光线夹角为 α.探测器采用 CCD 线阵，并与成像光轴成一倾角 β，以满足 Scheimpflug 条件.记被测表面一点到转轴中心的距离为 r，类似于(14.2.15)式，可以得到被测距离 r 的计算式为

$$r = r_0 + \frac{(L-f)\sin\beta \cdot \Delta x}{f\sin a + \cos a \cdot \sin\beta \cdot \Delta x} \qquad (14.2.18)$$

考虑到鞋楦绕 z 轴转动和沿 z 轴的移动，可以在柱坐标系统(z,θ,r)中建立鞋楦的全楦面面形表达式 $r=r(z,\theta)$.全楦面三维数据是制鞋计算机辅助设计和制鞋计算机辅助加工的基础.

2. 系统构成与特点

系统由仪器主体、微机、软件系统三部分构成.仪器主体由投影和成像光学系统、移动和转动工作台、CCD 线阵探测器和驱动电路、单片机等组成，如图 14.2.4 所示.系统根据三角测量原理和细光束相对扫描方式进行非接触光电测量.工作台带动鞋楦沿轴向移动和绕轴转动，以使投射光线能对鞋楦的整个面形进行相对扫描.驱动工作台的两路步进电机与单片机相连.由单片机控制工作台的移动和转动，完成 CCD 线阵的扫描驱动、输出信号的预处理、模数转换和数据处理.单片机还完成仪器主体与微机之间数据和控制信号的双向传递.测量结果由微机输出，以数据和图形方式实时显示.仪器主体与微机之间通过 RS-232 标准接口实现通讯.

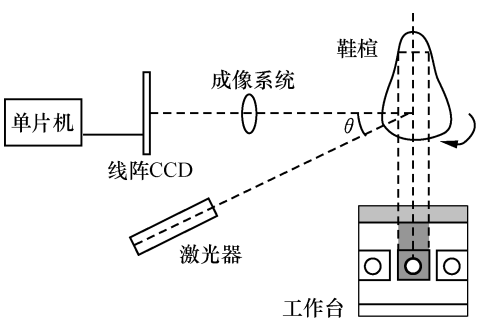


图 14.2.4 仪器主体结构示意图

系统采用了光强自适应调整技术和成像光点位置高精度算法等光电信息获取与处理技术.主要技术指标如下：分辨率轴向(z)为 0.1mm，圆周 1°；测量范围，轴向为 350mm，圆周为 360°，

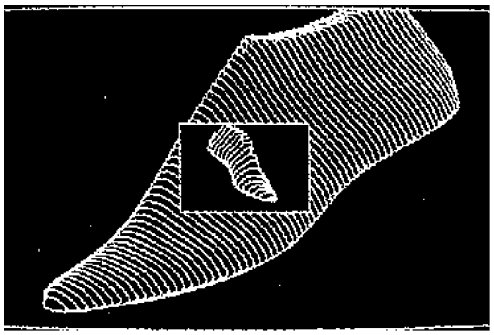


图 14.2.5 测量结果的立体图形显示

径向为 90mm,精度 0.1mm.测量速度为每分钟 2000 点.系统具有自校准功能,可以在运输或重新安装之后进行自动校准,也可以定期进行自动校准.系统具有多种工作方式,可以进行全楦面测量、特征部位点测量、坐标寻址测量,以满足鞋楦测量的各种要求.测量结果可用数据和图形方式实时显示.显示功能包括:多方位鞋楦立体图形显示,楦体轮廓和楦体断面显示等.图 14.2.5 是测量结果的立体图形显示.这种系统也适用于同类工业零件和实物模型的三维面形测量.

14.2.4 基于激光同步扫描的三维面形测量

在激光三角测量技术中,投影光线与成像光轴之间常常保持固定的夹角,通过计算成像光点在探测器上的位置来确定被测表面沿投影方向上的位置变化,也就是说只能测量物体一维的变化,例如在图 14.2.2 中的 z 坐标.这时为了测量物面上某一剖面或整个面形,就必须在传感器和被测物面之间引入一维或二维相对移动.另一种可选择的方案是,让投影光束沿物体一维方向扫描,只要在扫描过程中投影光线与成像光轴之间的夹角是已知的,就可以利用三角关系计算被扫描的物点的二维坐标(例如 z 和 x).但是,位置传感器空间带宽积中的一大部分将用于测量 x 坐标,从而导致距离维(z)方向测量精度的下降.

1. 基本概念

激光同步扫描的基本概念在于同步地扫描投影光线和成像光轴,从而在获得大的测量视场的同时,基本上不降低距离维的测量精度.为了说明激光同步扫描的几何关系,首先分析图 14.2.6 所示的光路.投影光束从激光器发出,经反射镜 M_1 投向基准点 P,成像光束经反射镜 M_2 和成像透镜到达位置传感器基准点上.当反射镜 M_1 和 M_2 同步旋转时,投影光束转向另一个位置 P_1,由于两个反射镜同步地转动,使在位置传感器上像点的位置靠近基准点.

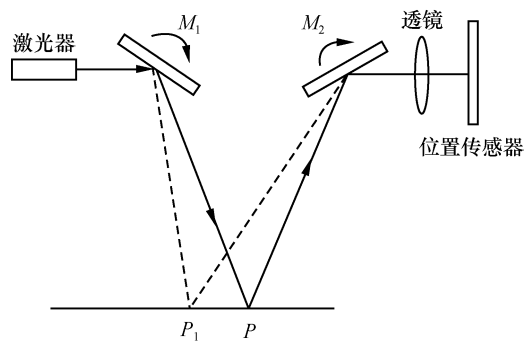


图 14.2.6 同步扫描原理图

从以上的分析和原理图上可以看出,在同步扫描情况下,像点在位置传感器上的移动主要用于测量距离,而在只采用投影光束扫描的情况下,位置传感器的大部分还被用于测量视场坐标.因此同步扫描可以在不降低视场的情况下增加距离维的分辨率.

如果在同步扫描的整个过程中,都要求像点在位置传感器上的位置不变,则交点轨迹的坐标应满足一个通过基准点和两个扫描器转轴的圆的方程.交点轨迹是圆这一结论说明了在同步扫描情况下,如果物面与该圆重合,则像点将定在位置传感器的同一位置.这种方法对于测量圆形或接近圆形的表面特别有利,可以用低分辨的位置传感器得到高分辨的剖面测量精度.

2. 同步扫描的三维面形测量系统

下面通过几个系统来介绍,激光同步扫描在不同情况下的应用实例[19].

(1) 双面镜扫描系统

图 14.2.7 是一个双面镜扫描系统.系统由激光光源、可旋转的双面扫描镜、两个固定反射镜、成像透镜和 CCD 线阵探测器构成.线阵与光轴的夹角满足 Scheimpflug 条件.由于扫描镜是一个双面镀膜的反射镜,保证了投影光线和成像光线的完全同步旋转.

(2) 多面棱锥镜扫描系统

图 14.2.8 所示的系统使用了一个由六个面组成的棱锥镜.由光源 S 投射的光线经过扫描器的一个面反射到固定反射镜 M_1,经 M_1 和 M_3 两次反射后投射到物面上,从物面上的散射光线经 M_3,M_2 和棱锥镜的另一面进入位置传感器 D.多面锥棱镜的旋转完成了 x 方向的同步扫描,而 M_3 反射镜的慢速旋转完成了 y 方向的扫描,从而构成三维面形测量功能.

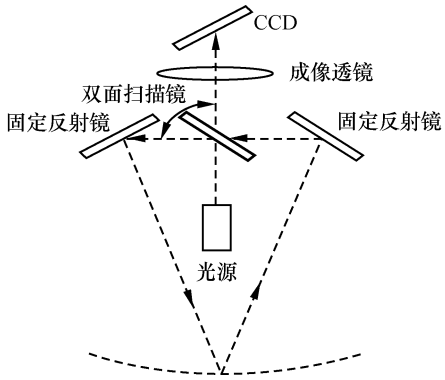


图 14.2.7 双面镜扫描系统

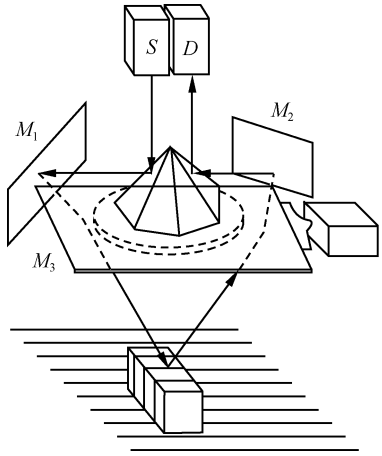


图 14.2.8 多面棱锥镜扫描

(3) 旋转体测量系统

对于旋转体的测量,常常采用图 14.2.9 的系统.这时基准点被设置在物体的转轴上.由于物体的旋转提供了附加的一维扫描,所以采用多面棱镜扫描器使整个系统非常简单和紧凑.

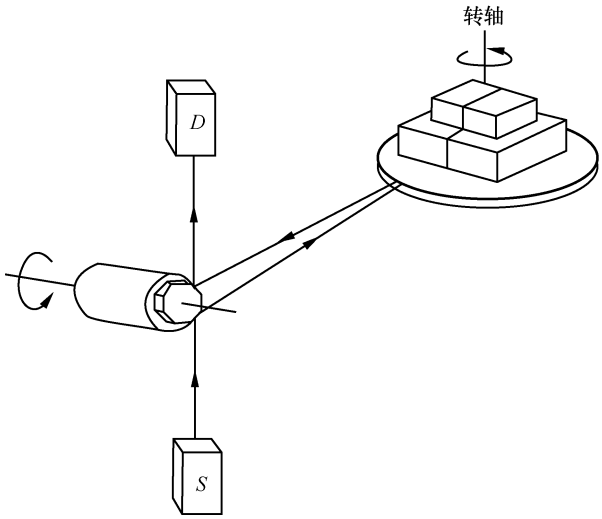


图 14.2.9 旋转体的测量

14.3　采用激光片光的三维传感

14.3.1　激光片光的产生

在采用线结构照明的三维传感系统中，投影器投射片状光束，这种光束又称片光或光刀．光刀与被测物体表面相交形成剖面线，探测器接收到的是一条受到三维面形空间调制的剖面线，解调接收到的信号就可以得到该剖面线上各点的深度数据．产生光刀的方法很多，比较典型的方法是柱透镜和球面透镜组合的方法．其他的方法包括衍射法和转镜扫描法[20]等．

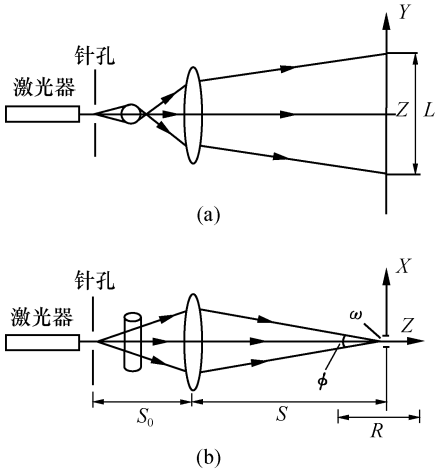


图 14.3.1　产生光刀模式的柱透镜和球面透镜组合

柱透镜和球面透镜组合法如图 14.3.1(a)，(b)所示．激光束剖面光强呈高斯分布，经柱透镜和球面透镜后在一维方向（y 轴）上发散，在另一维方向上（x 轴）会聚，于投影距离 s 处聚焦，形成一条沿 y 轴扩展、宽度为 W 的窄细光刀，其 x 和 y 方向光强仍保持高斯函数分布．对于商用的光刀投影器，最小可达到的线宽大约 0.1mm，投影距离大约为 100mm．随着投影距离的增加，最小可达到的线宽也近似地成比例增大．

14.3.2　测量原理

1. 测量原理

激光光刀被垂直投射到被测物体表面，CCD 面阵探测器从另一角度观察由于面形引起的光刀像中心的偏移，并按三角测量原理获得剖面数据．图 14.3.2 是光路原理图．θ 为成像光轴 QO 与投影光轴 PO 的夹角，α 为 CCD 阵列与成像光轴的夹角，两光轴交于 O 点．R 为参考平面，H 为面形上某一点，I 和 I' 分别是成像系统的入瞳和出瞳．H 点成像于 CCD 面阵上 N 点，N 点相对于中心像素 M 的偏移量 $\Delta = M - N$．

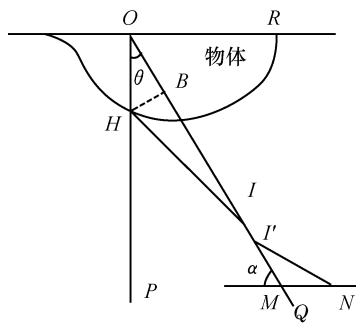


图 14.3.2　三角测量原理图

在测量中，为了使被测范围内的物点都能成像于 CCD 阵列上而不产生离焦，θ 和 α 必须满足 Scheimpflug 条件，即

$$\tan\theta = \beta \cdot \tan\alpha \tag{14.3.1}$$

式中，β 为横向放大率．

由简单的几何关系，可以得到面形高度 OH 与偏移量 Δ 间的关系为

$$OH = \frac{(OI - f) \cdot \Delta \cdot \sin\alpha}{f \cdot \sin\theta + \Delta \cdot \sin\alpha \cdot \cos\theta} \tag{14.3.2}$$

上式中，f 是成像系统的焦距．高度与偏移量成非线性关系．

2. 信息处理方案

为了得到被测面形的数据，就要测得光刀像点的偏移量 Δ，即必须精确地确定光带高斯分布

中心位置.确定高斯分布中心有多种算法,例如极值法、阈值法、重心法、曲线拟合法等.为了处理好精度与速度的矛盾,所选择的信息处理方案通常包括:(1)确定采样窗口,多帧平均;(2)确定光带峰值位置,以其为中心确定一个浮动小窗口作二维卷积滤波;(3)采用阈值法与重心法相结合确定高斯光束中心位置.

在图 14.3.3 中,设阈值 T 与曲线交于 P,Q 两点,由线性插值可求得 P,Q 对应的位置 p,q 值为

$$q = m + \frac{T - I(m)}{I(m+1) - I(m)}$$
$$p = n + \frac{T - I(n)}{I(n+1) - I(n)} \tag{14.3.3}$$

式中 m,n 为如图 14.3.3 所示的像素序号.再由重心确定中心为

$$c = p + \sum_{i=p}^{q} I(i) \cdot (i-p) \Big/ \sum_{i=p}^{q} (i-p) \tag{14.3.4}$$

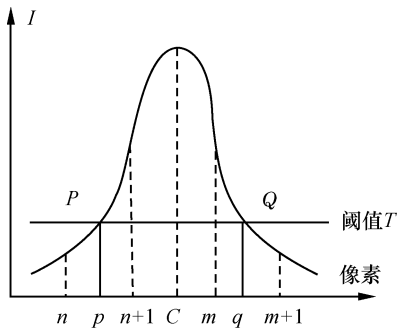


图 14.3.3 光刀中心的确定

式中求和是对在 $p<i<q$ 范围内的整数像素,包括 P,Q 两点在内.原则上计算出像点中心位置,并代入(14.3.2)式,就可以计算出高度值.

14.3.3 测量实例

1. 发动机叶片三维面形测量

发动机叶片面形测量是机械行业一个量大面广和技术复杂的问题,具有重要意义和广泛的应用前景.使用三维面形自动测量方法可以测出全面形三维坐标数据,显示叶片三维形态图、横断面线图,也可对坐标点、横断面和全面形误差进行单项和综合分析.下面介绍一种采用激光光刀的叶片三维面形测量方法[21].测量装置的框图如图 14.3.4 所示.光刀投影器由一个氦-氖激光管和一个薄等腰棱镜及一个球面透镜组合构成,其产生的光刀型空间光场投射到被测叶片的表面.CCD 面阵摄像机以视频速度获得观察光场信息,视频信号通过高速模数转换进入帧存储器,由微机进行后续的信号处理.微机通过接口同时控制工作台移动的驱动电机,使待测叶片移动.测量结果可以由 CRT 显示或绘图仪输出.

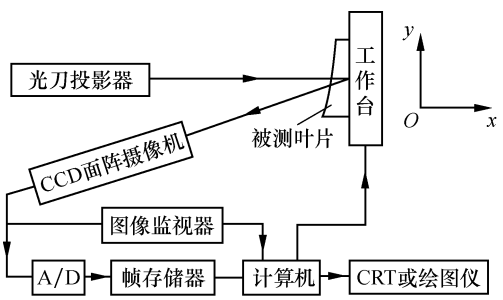
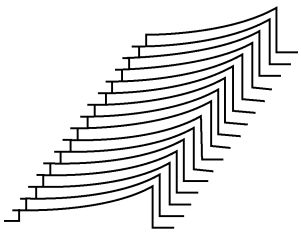


图 14.3.4 光刀测量系统框图

实验装置采用的主要系统参数如下:光刀投射距离为 400mm,$\theta = 26.5°$,CCD 面阵为 542×582 个像素,单元像素的尺寸约为 18μm,镜头焦距为 50mm,采用 PCVision 图像采集板,帧存储器为 1024×512.实验中深度测量范围确定为 65mm,测量值与拟合值之间的均方差 $\sigma = 0.03$mm.如果减少测量范围,测量精度可望进一步提高.图 14.3.5 是重建的叶片三维面形图.对测量结果的分析表明,测量精度主要受到 CCD 阵列的分辨率、激光散斑、系统参数和系统随机噪声等因素的影响.研究表明,激光散斑对测量精度的影响相当大,是误差的主要来源之一.降低散斑影响,提高采用激光光刀的三维传感系统的精度,一直是该领域国内外普遍关注的问题.为了减弱散斑的影响,人们已经研究了几种方法,包括热空气扰动法、孔


图 14.3.5 叶片的三维形态图

径内扫描法等,虽然深度分辨率有所提高,但都以牺牲横向分辨率为代价,具有一定的局限性.

最近提出的降低散斑影响的新方法,采用激光片光的面内扫描,可以在保持理想几何像不变的情况下,产生空间变化的动态散斑光场,其时间平均的效果降低了散斑对测量精度的影响[16].这种方法的突出优点是可以在保持三维传感系统横向分辨率不变的情况下明显提高系统的深度分辨率,在片光型三维传感领域具有重要的理论意义和实用价值,可广泛用于工业检测、机器视觉、实物仿形、生物医学等领域.

2. 旋转体的 360°面形测量

旋转体的 360°面形测量是另一类三维面形测量问题[25].在这一类问题中三维物体面形可以用极坐标表示为 $r=r(z,\theta)$,z 是旋转轴上的坐标,θ 为转角,r 是面形上的一点到转轴的距离.这种类型的三维面形测量很适合于采用激光光刀的三维传感技术,下面介绍的测量系统采用柱透镜和球面透镜组合的投影装置,测量系统的框图如图 14.3.6 所示.系统框图、测量原理和信息处理方案与前面介绍的发动机叶片面形测量系统类似.被测物体置于由步进电机驱动的旋转工作台上,计算机控制步进电机,使物体绕 z 轴作等角度间隔的转动,每次测量得到物体的一个剖面数据,物体旋转一周完成 360°面形测量.图 14.3.7 是对一女孩头部石膏模型的测量结果.图中(a)、(b)是重建的三维物体表面的两个视图,表明对旋转体 360°面形的完整测量.

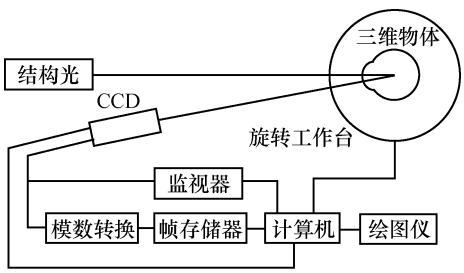
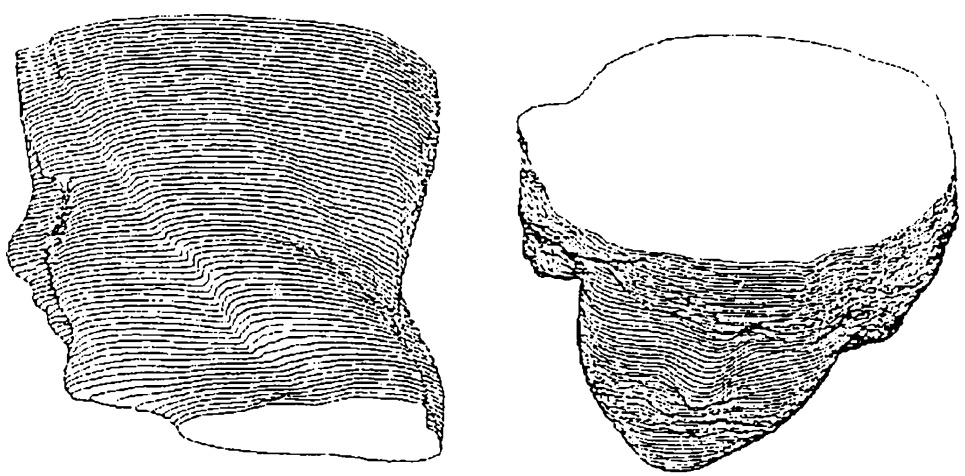


图 14.3.6 旋转体 360°面形测量系统框图



(a) (b)

图 14.3.7 头部石膏模型的测量结果

14.4 相位测量剖面术

相位测量剖面术(phase measuring profilometry,简称 PMP)是一种新的三维传感方法[10,23].这种方法采用正弦光栅投影和数字相移技术,能以较低廉的光学、电子和数字硬件设备为基础,以较高的速度和精度获取和处理大量的三维数据.作为一种重要的三维传感手段,这种方法已在工业检测、实物仿型、医学诊断等领域获得广泛应用.

14.4.1 相位测量剖面术的原理

相位测量剖面术系统的框图可用图 14.4.1 表示,系统由投影、成像、数据获取与处理三大部分组成.当一个正弦光栅图形被投影到三维漫反射物体表面时,从成像系统获取的变形光栅像可表示为

$$I(x,y)=R(x,y)[A(x,y)+B(x,y)\cos\phi(x,y)] \tag{14.4.1}$$

式中,$R(x,y)$是物体表面不均匀的反射率,$A(x,y)$表示背景强度,$B(x,y)/A(x,y)$是条纹的对比.相位函数 $\phi(x,y)$表示了条纹的变形,并且与物体的三维面形 $z=h(x,y)$有关.相位和三维形状之间的关系取决于系统结构参数.由于变形光栅像与传统的干涉条纹图相类似,因此变形光栅像有时又被称为"干涉图".在干涉计量中,光波长被作为度量微观起伏的尺度,而在 PMP 方法中与投影条纹间距有关的"等效波长"被作为度量三维宏观面形的尺度.人们注意到,干涉计量主要用于光学波面检测,结构光计量主要用于粗糙表面(相对于波长而言)检测,虽然这是两个完全不同的物理过程,光波长和等效波长在数量上存在巨大差异,但从广义的信息传递和变换观点来看又存在共性.这些共性主要体现在:(1)干涉条纹和结构光变形条纹具有相近的形态和数学表达式;(2)两种计量方法都采用相移测量技术和相移算法或者傅里叶分析方法计算相位,计算得到的相位被截断在反三角函数的主值范围内,因而是不连续的,为了从相位函数重建波面或重建三维面形,需要对截断相位进行相位展开;(3)两种方法测量精度和测量范围不同,但具有大致相同的相对测量精度.由于这种概念上和处理方法上的相似性,在数字相移干涉术中所使用的相移算法被成功地用于相位测量剖面术中.

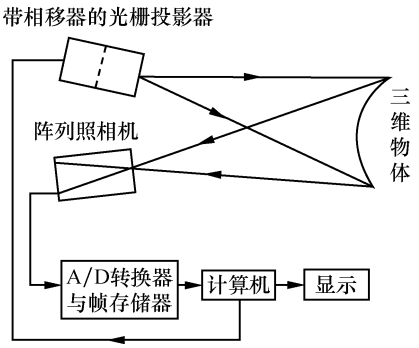


图 14.4.1 PMP 系统框图

1. 相位计算

直接分析(14.4.1)式所示的强度分布而确定相位 $\phi(x,y)$是困难的,而相移算法却提供了一种精确测定相位的手段.当投影的正弦光栅被移动其周期的 $1/N$ 时,条纹图的相位被移动 $2\pi/N$,产生一个新的强度函数 $I_n(x,y)$.使用三个或更多的对应不同相移值的条纹图,相位函数 $\phi(x,y)$就可以独立于(14.4.1)式中的其他参数而单独分离出.例如,在四步相位算法中,相位移动的增量是 $\pi/2$,所产生的四个干涉图可表示为

$$\begin{aligned}
I_1(x,y)&=R(x,y)\cdot[A(x,y)+B(x,y)\cos\phi(x,y)]\\
I_2(x,y)&=R(x,y)\cdot[A(x,y)-B(x,y)\sin\phi(x,y)]\\
I_3(x,y)&=R(x,y)\cdot[A(x,y)-B(x,y)\cos\phi(x,y)]\\
I_4(x,y)&=R(x,y)\cdot[A(x,y)+B(x,y)\sin\phi(x,y)]
\end{aligned} \tag{14.4.2}$$

从这四个方程中可以计算出相位函数

$$\phi(x,y)=\arctan\frac{I_4(x,y)-I_2(x,y)}{I_1(x,y)-I_3(x,y)} \tag{14.4.3}$$

对于更普遍的 N 相位算法,可以从 N 个相移条纹图中计算出相位函数.算法如下:

$$\phi(x,y)=\arctan\frac{\sum_{n=1}^{N}I_n(x,y)\sin(2\pi n/N)}{\sum_{n=1}^{N}I_n(x,y)\cos(2\pi n/N)} \tag{14.4.4}$$

与对条纹图的直接几何测量相比较，相移技术具有明显的优点：(1)这种方法对相位测量的精度可以达到几十分之一到几百分之一个条纹周期．(2)这种方法对背景、对比度和噪声的变化不敏感．(3)计算得到相位值是一个均匀分布的正交网格上的点的测值，测点与探测器阵列或图像处理板上的阵列一一对应，有利于进一步的信号处理．实现自动的三维面形测量．

2. 相位展开(phase unwrapping)

由(14.4.3)式或(14.4.4)式计算出的相位分布 $\phi(x,y)$，被截断在反三角函数的主值范围内，因而是不连续的．为了从相位函数计算被测物体的高度分布，必须将由于反三角运算引起的截断相位恢复成原有的相位分布，这一过程称为相位展开．相位展开方法可以分为空域和时域两大类．空域相位展开法是只利用一幅截断相位图来恢复连续相位分布的方法；而时域相位展开方法则借助于多幅不同灵敏度的相位图在时间轴上展开相位．对于空域相位展开方法，在一般情况下，可以沿着截断的相位数据矩阵的行或列方向展开．具体的作法如下：在展开的方向上比较截断处相临两个点的相位值，如果差值小于 π，则后一点的相位值应该加上 2π；如果差值大于 π，则后一点的相位应该减 2π．下面以一维相位函数为例说明上述相位展开过程的数学表达式．假定有一维的截断相位函数 $\phi_w(j)$，$0\leqslant j\leqslant N-1$，式中，$j$ 是采样点序号，N 是采样点总数．展开后的相位函数为 $\phi_u(j)$，则相位展开过程可表示为

$$\begin{aligned}&\phi_u(j)=\phi_w(j)+2\pi n_j\\&n_j=\mathrm{INT}[(\phi_w(j)-\phi_w(j-1))/2\pi+0.5]+n_{j-1}\\&n_0=0\end{aligned}\tag{14.4.5}$$

式中，INT 是取整算符．由于实际得到的相位数据是一个二维的采样点阵列，所以相位展开应针对二维进行．首先沿二维数据阵列中某一列(一般可取第一列)进行相位展开，然后以该列展开后的相位为基准，沿每一行进行相位展开，得到连续分布的二维相位函数．当然也可以先对某一行进行展开，然后再对每一列进行展开．在上述相位展开过程中，实际上已经假定任何两个相临抽样点之间的非截断相位变化小于 π，也就是说必须满足抽样定理的要求，每个条纹至少有二个抽样点，即抽样频率大于最高空间频率的二倍．只要满足这个条件，相位展开可以沿任意路径进行．

在一个复杂物体的三维传感问题中，由于物体的表面起伏较大，得到的相移条纹图形十分复杂．例如，条纹图形中存在局部阴影，条纹图形断裂，在条纹局部区域不满足抽样定理，即相临抽样点之间的相位变化大于 π．对于这种非完备条纹图形，相位展开是一个非常困难的问题，这一问题也同样出现在干涉型计量领域．最近已研究了多种复杂相位场展开的方法，包括网格自动算法(cellular automata)、基于调制度分析的方法、基于可靠性导向的展开方法、基于条纹密度分析的方法，二元模板法、条纹跟踪法、最小间距树等，使上述问题能够在一定程度上得到解决或部分解决[24~27]．另一类相位展开方法称为时间相位展开[28]，它借助于多幅不同灵敏度的相位图在时间轴上展开相位，每个像素的展开不受相邻像素相位是否连续的影响，可以解决不连续相位场和孤立区域的相位展开问题，比空间相位展开具有更高的可靠性．由于采用多幅不同灵敏度的相位图，这种方法需要更多的时间获取多幅相位图，所以在动态测量中受到限制．时间相位展开方法包括线性展开、指数展开、负指数展开、三频光栅展开、外差法展开等[29~30]．另外一些方法，包括将相移技术和二元编码光栅(格雷码)相结合的方法、双频光栅法、非线性小数重合法等，本质上也属于时间相位展开[31~33]．时间相位展开算法已在一些用于静态三维测量的商用仪器中广泛使用．

3. 高度计算

仍然用 $\phi(x,y)$表示展开后的相位分布,从相位到高度的计算取决于光学系统的结构.光学系统的结构有多种形式,本节只论及两种.图 14.4.2 是采用远心光路的 PMP 系统.这种系统适用于小物体的测量,采用高频率光栅照明可以达到很高的测量精度.这种结构照明的实现方法将在后面详细介绍.

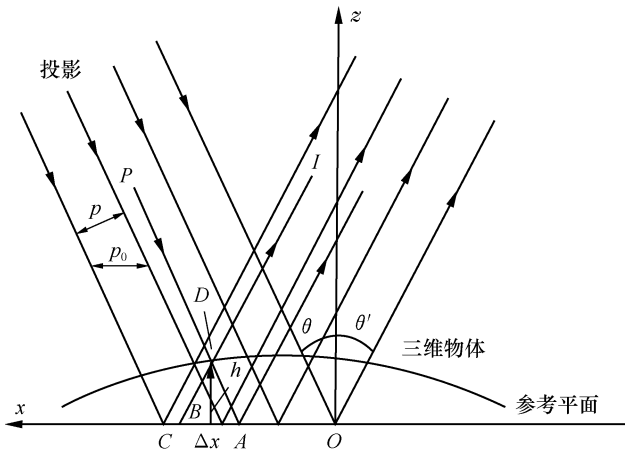


图 14.4.2 采用远心光路的 PMP

在参考平面上看到的投影正弦光栅是等周期分布的,其周期为 p_0.在参考平面上的相位分布 $\phi(x)$是坐标 x 的线性函数,记为

$$\phi(x) = Kx = \frac{2\pi}{p_0}x \tag{14.4.6}$$

探测器上一点 D_c 对应参考平面上 C 点的相位为

$$\phi_c = \frac{2\pi}{p_0} \cdot OC \tag{14.4.7}$$

该点测量的是三维表面 D 点的相位,该点相位等于参考平面 A 点的相位,为

$$\phi_D = \phi_A = \frac{2\pi}{p_0}OA \tag{14.4.8}$$

于是有

$$AC = (p_0/2\pi)\phi_{CD} = (p_0/2\pi) \cdot (\phi_C - \phi_D)$$

记该点物体高度 $DB = h$,可得

$$h = AC/(\tan\theta + \tan\theta') \tag{14.4.9a}$$

式中,θ 和 θ' 分别表示照明和观察方向,当观察方向垂直于参考平面时,上式简化为

$$h = AC/\tan\theta = (p_0/\tan\theta) \cdot (\phi_{CD}/2\pi) = \frac{\lambda_e \phi_{CD}}{2\pi} \tag{14.4.9b}$$

式中 λ_e 为等效波长,是一个系统参数,定义为

$$\lambda_e = p_0/\tan\theta \tag{14.4.10}$$

一个等效波长正好等于引起 2π 相位变化量的高度变化.结构照明型条纹图形可以等效为物体面形作为物波波面,而照明方向作为参考波面所产生的干涉条纹.与真实的光波干涉的区别之一在于波长的尺度存在巨大差异.以真实光波波长为尺度,人们可以计量微观的变形和不平度,

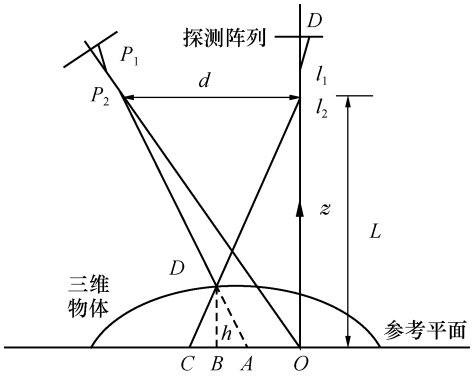


图 14.4.3　采用发散照明的 PMP

以这里定义的等效波长为尺度，人们可以计量宏观的三维面形．等效波长 λ_e 是 PMP 方法中的一个重要参数，它由系统结构参数 p_0 和 θ 决定，代表了系统检测精度．

另一种采用发散照明的 PMP 系统如图 14.4.3 所示．这是一种更一般的情况，适合于测量较大的物体面形．由于投影光线是发散的，在基准平面上的相位分布已不是线性分布，因此情况比前面介绍的更复杂，需要一种相位映射算法来处理从相位到高度的计算过程．在图 14.4.3 中，P_1 和 P_2 是投影系统的入瞳和出瞳，I_2 和 I_1 是成像系统的入瞳和出瞳．成像光轴垂直于参考平面，并与投影光轴相交于参考平面上的 O 点．当正弦光栅模板被投影到参考平面上时，在参考平面上沿 x 方向的强度分布如下式所示

$$I_R(x,y) = A(x,y) + B(x,y)\cos\phi(x,y) \tag{14.4.11}$$

式中，$A(x,y)$是物体表面不均匀的反射率，$B(x,y)$是条纹的调制度，$\phi(x,y)$是 x 的非线性函数，但是参考平面上每一点相对于参考点 O 的相位值是唯一的和单调变化的．根据系统结构参数，可以计算在参考平面上光场的相位分布，建立参考平面坐标(x,y)与相位分布 $\phi(x,y)$之间的映射关系．将这一映射关系以数据表的形式存储在计算机中备用．映射表的建立也可以通过对一基准平面的实测确定．在测量三维物体表面时，在探测器阵列上 D_c 点可以测量物点 D 的相位 ϕ_D，它对于应于参考平面上 A 点的相位 ϕ_A．另一方面由阵列上同一点 D_c 在参考平面上所对应的相位 ϕ_C 已经以映射表的形式存储在计算机中，这意味着距离 OC 是已知的．参考平面上位置 A 的确定可以先在映射表中查找与 ϕ_A 最接近的二个相位值 ϕ_i 和 ϕ_{i+1}，使 $\phi_i \leqslant \phi_A \leqslant \phi_{i+1}$，然后通过线性插值实现．因而 OA 可以通过对相位的测量和映射关系求出，进而可得 $CA = OC - OA$．由相似三角形 P_2DI_2 和 ADC 可以计算出物点的高度分布为

$$h = \frac{AC(L/d)}{1 + AC/d} \tag{14.4.12}$$

式中，d 和 L 是如图 14.4.3 中所示的系统结构的两个参数．在大多数实际应用中，$AC \ll d$，上式可进一步减化为

$$h = AC \cdot \frac{L}{d} = \frac{AC}{\tan\theta} \tag{14.4.13}$$

综上所述，在采用远心光路和发散照明两种情况下，都可以通过对相位的测量而计算出被测物体的高度．只是前者的相位差与高度之间存在简单的线性关系，而在后一种情况下相位差与高度差之间的映射关系是非线性的．

14.4.2　产生结构照明的方法

产生相位测量轮廓术所需的结构照明的典型方法有两种，一种是采用激光光源的干涉结构照明，另一种是采用白光光源的投影型结构照明．

1. 干涉型结构光场的产生[34]

产生干涉型结构照明光场的系统如图 14.4.4 所示．它是一个激光照明的剪切偏振干涉计．激光发出的线偏振光束通过透镜 L_1 和针孔 P_0 组成的空间滤波器后，被沃拉斯顿棱镜剪切．相位调制器由 1/4 波片 Q 和可旋转的偏振器 P 构成．通过旋转偏振器 P，干涉图形的正弦强度分

布被调制.偏振器旋转 180°对应于 2π 相位调制.用这种方法可以产生 N 步相位所需的精密相位移动.由于针孔位于透镜的前焦点上,所产生的正弦强度分布的条纹是一种远心照明方式,在干涉场中具有线性相位分布.改变沃拉斯顿棱镜与针孔的距离可以很方便地调整条纹的周期,以适应不同三维测量要求.

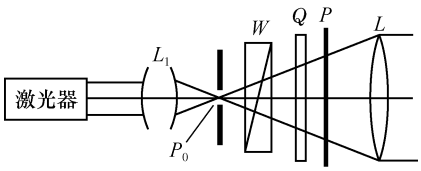


图 14.4.4 干涉型结构照明光路

2. 白光投影的结构照明[27,35,36]

白光投影的结构照明是由一个类似于幻灯机的投影器产生的.图 14.4.5 是一个采用这种结构照明的 PMP 工作系统.图中的投影单元由白光光源、聚光镜组、投影透镜、正弦光栅模板和相移器组成.相移器是一个由计算机控制,并由步进电机驱动的微位移工作台.正弦光栅模板置于工作台上,可沿与投影器光轴垂直的方向移动,通过投影在基准平面或被测物体表面产生相移条纹.由于这种投影器采用了发散照明方式,可以在很大范围内产生结构照明,很适宜测量较大的物体面形.另一类电子投影仪,采用 LCD 或者 DMD 芯片,也可作为结构光投影器.其主要优点是用数字图像代替幻灯片,用电子相移代替机械相移,减少了相移误差,又可灵活改变光栅周期,已被普遍采用.

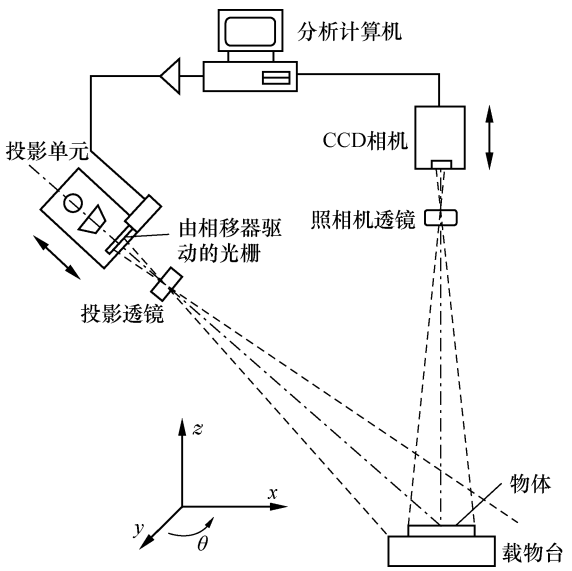


图 14.4.5 采用白光投影的 PMP 系统

14.4.3 相位测量剖面术应用举例

1. 井底模式探测与分析[35~37]

所谓井底模式(bottomhole pattern),就是石油钻井用的牙轮钻头在钻凿岩石的过程中,钻头上的许多牙齿在井底岩石上打出的凹坑的集合.国际上先进的钻头厂家和科研单位都十分重视井底模式的研究,把它作为评价钻头的优劣、提取进一步改善钻头设计参数的有力手段.四川大学和西南石油学院在原石油部支持下,以准正弦投影光场相位测量轮廓术为基础,研制成功了用于井底模式探测的三维面形自动测量系统.该系统能以很高的速度测量整个井底模式的三维面形数据,包括井底模式上各个破碎坑的大小、形状、深度、破碎面积、破碎体积等,并对整个三维

面形或指定区域进行统计分析,为钻头设计及钻井工艺研究开辟了一条新途径.采用这项技术可以把成百上千的数量化的井底模式保存在计算机的存储系统中,为各类钻头的井底模式进行统计分析、对比、择优及模式识别提供了十分有效手段.井底模式探测与分析系统是一个光、机、电相结合的计算机辅助测量系统.该系统以离焦投影的相位测量轮廓术为基础,采用全场调制和大数据量并行获取技术,使系统满足井底模式三维面形的高速度、高精度测量要求.系统设计有光强自适应调整模块,可以自动调整采样图像的增益和偏置,使之达到最佳对比度,从而大大提高了信噪比,使系统能适应不同岩石(灰岩、砂岩、花岗岩等)井底模式的测量要求.系统设置有系统参数自动校正、系统误差自动补偿等软件功能,保证了系统具有长期稳定的精度.系统还具有多种模式的图形和数据输出功能,能以图(图像和图形)文(数据与统计分析结果)相结合的方式给出三维面形数据,例如,任意方位三维形态显示、等高线假彩色显示、破碎坑面积和体积统计分析、井底灰度直方图与划痕显示和分析等.由于该系统具有这些特点,它能快速、精确地探测与分析整个井底模式,包括划痕与破碎坑大小,形状、深度、面积、体积等细节在内的井底模式三维形态的数据信息.该系统由仪器主体、图像子系统、控制电路、微机与外部设备、系统软件等五部分构成.硬件配置框图如图 14.4.6 所示.

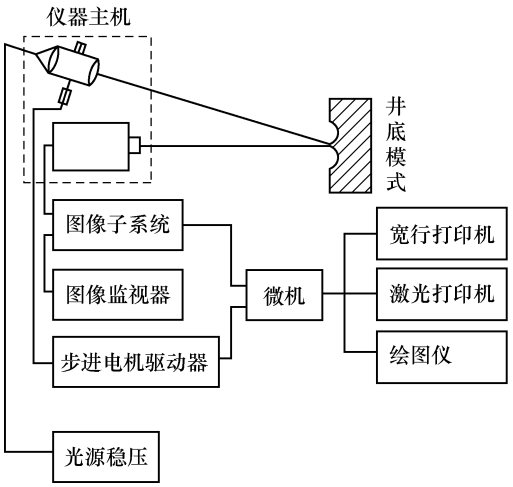


图 14.4.6 井底模式测量系统框图

图 14.4.7 是对成都石油总机石生产的 8.5×HP3 型钻头在钻压为 7.64×10^4 N、转速为 60 转/分的条件下,在嘉陵江灰岩上钻出的井底模式测量的结果.

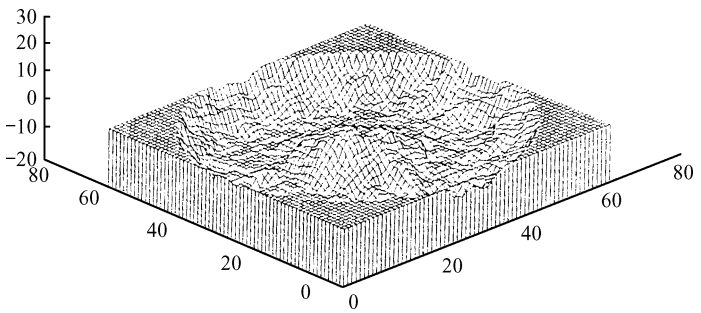


图 14.4.7 井底模式测量结果;井底三维形态图

2. 口腔全牙型三维面形测量[24,26~27]

采用结构光照明的相位测量轮廓术在定量的医学研究中也成为一种重要的诊断工具.在某些应用领域,例如口腔全牙型三维面形测量,由于复杂的表面形状特征,给测量造成困难.复杂的表面起伏、表面坡度的突然变化是复杂物体三维面形测量的明显特征.这些特征将导致局部的阴影,条纹图形不连续.按照常规的算法将无法得到正确展开的相位函数,因此不能重建三维面形.复杂物体轮廓测量是一个比较困难的问题,也是这种方法实用化必须解决的关键问题.

(1) 主要问题

首先,由于结构光照明,投影和观察方向之间存在一定角度,在获取的条纹图形中存在局部

阴影,在阴影区域相位具有不确定的值.其次,由于表面起伏较大,条纹图形中产生条纹裂断或周期的突变.当相邻两个采样点之间的相位差大于π时,对相位函数的空间抽样不满足抽样定理的条件,这时相位展开将导致错误.相位展开的过程是一个积分过程,在一个样点上的错误将沿着相位展开的路径扩散,从而导致更大范围内的错误.所以,必须确定相位展开的区域和相位展开的路径.另一个问题是如何将被测物体与背景分离.在结构光照明的情况下正确地确定物体与背景之间的边界也并不容易.

(2) 相移条纹图形分析方法

当正弦光栅图形被投影到三维漫反射物体表面时,变形光栅像可以表示为

$$I(x,y)=I_0B(x,y)\{1+C(x,y)\cos[\phi(x,y)]\} \tag{14.4.14}$$

式中,I_0 是偏置强度,$B(x,y)$表示表面不均匀的反射率,$C(x,y)$是投影条纹的对比.在获取 N 帧相位条纹图形并按(14.4.4)式计算离散相位的同时,考虑一个新的参数,即条纹图形的调制函数 $M(x,y)$是必要的,定义为

$$M(x,y)=\left\{\left[\sum_{n=1}^{N}I_n(x,y)\sin(2\pi n/N)\right]^2+\left[\sum_{n=1}^{N}I_n(x,y)\cos(2\pi n/N)\right]^2\right\}^{1/2} \tag{14.4.15}$$

在相位计算中,调制函数 $M(x,y)$具有明显的几何意义,采样点的调制深度越低,该样点处相位值计算的误差越大.将(14.4.14)式代入(14.4.15)式,可以得到

$$M(x,y)=\frac{1}{2}NI_0B(x,y)C(x,y) \tag{14.4.16}$$

上式表示,调制函数 $M(x,y)$与表面反射率和投影条纹的对比成正比.很明显,在局部阴影区域,调制度是很低的,这意味着相位有不确定的值.类似地,在表面起伏大的区域,由于照明方向角与观察方向角相对于表面法线存在很大差异,使得从成像系统看来,表面的定向反射率很低,这导致调制度下降.在物体与背景存在一定的距离时,由于有限的焦深,也使背景区域具有低的调制度.所以调制函数用来识别局部阴影、条纹不连续区域及区分被测物体和背景.基于这种认识的以调制度分析为基础的相移条纹图形分析方法成功的用于口腔全牙型测量,其分析过程如图 14.4.8 所示.

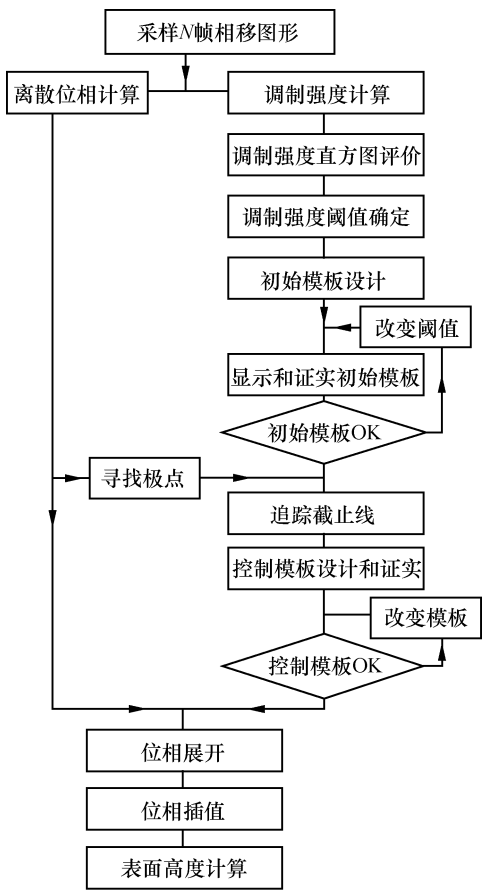


图 14.4.8 相移条纹分析流程框图

(3) 测试结果

口腔全牙型测量在口腔医学中具有重要意义.它可以用于诊断、治疗效果评价、几何参数以及对称性分析、假牙自动加工及建立口腔牙形数据档案等.下面介绍对口腔上牙托模型测试结果.图 14.4.9 是牙托模型实物,图 14.4.10 是在结构光照明条件下,N 帧相移条纹图形之一.可以看出,由于复杂表面形状所引起的明显阴影、条纹图形断裂、错位等情况,该图右下角给出了条纹图形上部某一剖面的光强分布.按前面介绍的方法对相移条纹图形进行分析和处理.被测物体的最后重建结果由图 14.4.11 所示.图中(a)

是被测物体的三维形态图，(b)是等高线图.测试结果表明，这种基于调制强度分析的相移条纹图形处理方法可以有效地解决复杂物体表面测量中的主要问题，即使在局部阴影和条纹断裂等情况下，也可以获得比较满意的测量结果.复杂物体三维面形自动测量系统不仅可用于口腔全牙型三维面形测量，其原理也适用于其他复杂面形的检测，只要进行适当的系统配置，即可用于不规则面形工业零件、叶轮、叶片、实物模型、生物体或人体的高速度、高精度、非接触的面形自动测量.在工业检测、机器视觉、产品质量监控、实物仿形、医学调查、人类工程学等众多领域具有广阔的应用前景.应该指出，上面介绍的相位展开方法除了可用于复杂物体面形测量外，还可以用于相移全息干涉计量术和光弹性应力分析中的非完备条纹图形处理[38~39].

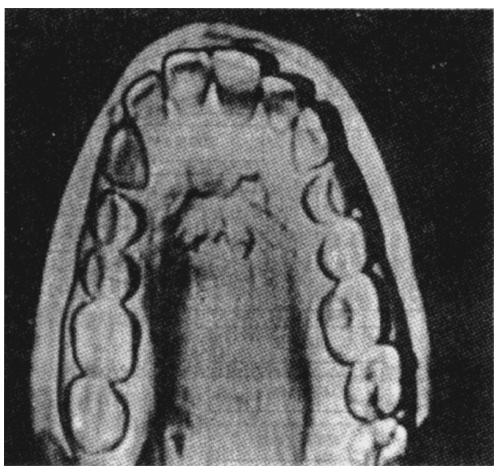


图 14.4.9　牙托模型实物

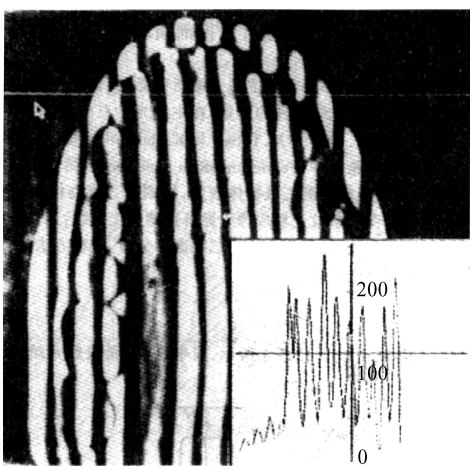


图 14.4.10　变形条纹图

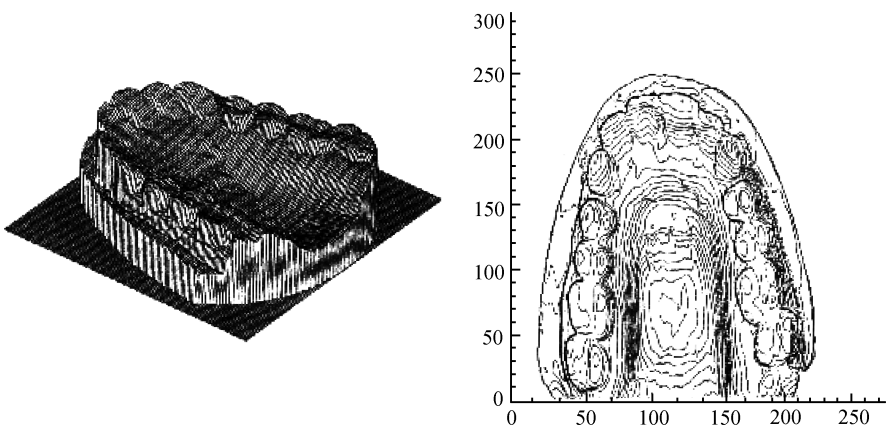


图 14.4.11　物体三维表面的重建
(a) 物体的三维形态；(b) 等高线图

14.5　傅里叶变换剖面术

傅里叶变换在信息光学中的作用和地位是大家熟知的.傅里叶变换方法还成功地用于干涉条纹的处理，用来检测光学元件的质量.1983 年 M .Takeda 和 K .Muloh 将傅里叶变换用于三维物体面形测量，提出了傅里叶变换轮廓术(Fourier transform profilometry，简称 FTP).这种方法

以罗奇光栅产生的结构光场投影到待测三维物体表面,得到被三维物体面形分布调制的变形条纹光场.成像系统将此变形条纹光场成像于面阵探测器上,然后用计算机对像的强度分布进行傅里叶分析、滤波和处理,得到物体的三维面形分布.这种方法数据获取速度快,具有较高精度,并适于计算机进行处理[11,40].

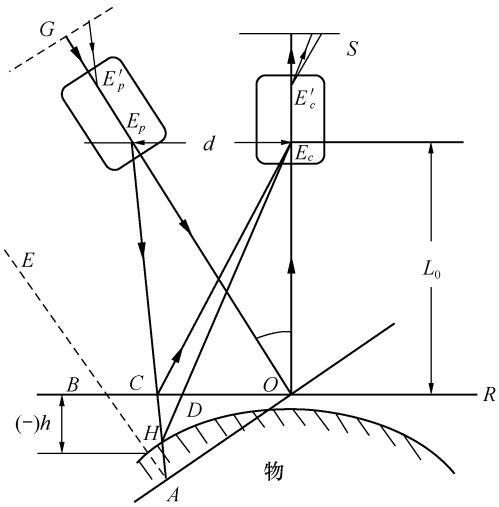


图 14.5.1 FTP 测量系统光路

14.5.1 基本原理

傅里叶变换轮廓术测量系统的光路原理如图 14.5.1 所示.图中 E'_pE_p 是投影系统的光轴,E'_cE_c 是成像系统光轴,两光轴相交于参考平面 R 上的 O 点.罗奇光栅 G 的栅线垂直于 E_pE_cO 平面,光栅像被投影系统投影在待测物体表面.由于物体面形的调制,观察系统得到变形的光栅像,S 是接收变形光栅像的面阵检测器.由成像系统得到的变形光栅像可以记为

$$g(x,y)=r(x,y)\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\exp\{\mathrm{j}[2\pi nf_0x+n\phi(x,y)]\} \tag{14.5.1}$$

式中,f_0 是光栅像的基频,$r(x,y)$是物体表面非均匀的反射率,$\phi(x,y)$是物体高度分布引起的相位调制,即

$$\phi(x,y)=2\pi f_0\overline{BD} \tag{14.5.2}$$

当 $h(x,y)=0$,即对参考平面 R 测量时,变形光栅像为

$$g_0(x,y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\exp\{\mathrm{j}[2\pi nf_0x+n\phi_0(x,y)]\} \tag{14.5.3}$$

式中 $\phi_0(x,y)=2\pi f_0\overline{BC}$.对(14.5.1)式的变形光栅像进行一维傅里叶变换,对于某一固定的 y 坐标,其傅里叶变换谱如图 14.5.2 所示.在对频谱滤波,取出图中阴影所示的基频分量,然后作逆傅里叶变换后光场分布变为

$$g(x,y)=A_1r(x,y)\exp\{\mathrm{j}[2\pi f_0x+\phi(x,y)]\} \tag{14.5.4}$$

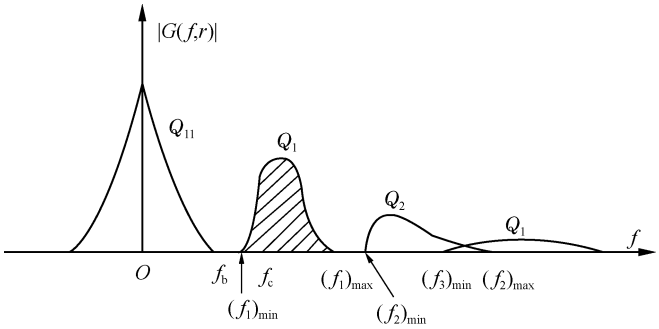


图 14.5.2 变形光栅像的空间频谱

对(14.5.3)式进行相同的运算得到

$$g_0(x,y)=A_1\exp\{\mathrm{j}[2\pi f_0x+\phi_0(x,y)]\} \tag{14.5.5}$$

$\phi_0(x,y)$是由于投影系统的出瞳 E_p 在有限远所引入的附加相位调制,这时结构光场的照明是发

散的.当投影系统的出瞳位于无穷远时,在参考平面上的相位分布是线性的,附加相位调制 $\phi_0(x,y)$等于零.在这种情况下,图 14.5.1 中入射线 E_pA 变为 EA,即与光轴 E_pO 平行.对于发散照明情况,单纯由高度引起的相位调制 $\Delta\phi(x,y)$为

$$\Delta\phi(x,y)=\phi(x,y)-\phi_0(x,y)=2\pi f_0\overline{CD} \tag{14.5.6}$$

这一相位调制可从(14.5.4)和(14.5.5)式通过下列运算得到:

$$\Delta\phi(x,y)=\mathrm{Im}\{\ln[g(x,y)g_0^*(x,y)]\} \tag{14.5.7}$$

式中,* 表示共轭运算,Im{ }表示取复数的虚部.利用三角形 HCD 和 HE_pE_c 的相似关系,可以得到所需的三维面形 $h(x,y)$为

$$h(x,y)=\frac{l_0\Delta\phi(x,y)}{\Delta\phi(x,y)-2\pi f_0 d} \tag{14.5.8}$$

14.5.2 FTP 方法的测量范围

由于 FTP 方法使用了傅里叶变换和在频域中的滤波运算,只有频谱中的基频分量对于重建三维面形是有效的,因此防止频谱混叠的要求限制了 FTP 可测量的最大范围.下面给出定量分析.

类似频率调制信号的瞬时频率概念,定义第 n 级频谱的局部空间频率为

$$f_n=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}[2\pi f_0 x+n\phi(x,y)]=nf_0+\frac{n}{2\pi}\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x} \tag{14.5.9}$$

从图 14.5.2 可以看出,为了防止一级频谱分量与其他各级频谱混叠,必须满足下列条件

$$\begin{aligned}&(f_1)_{\min}>f_b\\&(f_1)_{\max}<(f_n)_{\min}\qquad(n>1)\end{aligned} \tag{14.5.10}$$

将(14.5.9)式代入,得到

$$\begin{aligned}&nf_0-\frac{n}{2\pi}\left[\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}\right]_{\max}>f_0+\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}\right]_{\max}\quad(n>1)\\&f_0+\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}\right]_{\min}>f_b\end{aligned} \tag{14.5.11}$$

一个更安全更实用的条件为

$$\begin{aligned}&nf_0-\frac{n}{2\pi}\left|\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}\right|_{\max}>f_0+\frac{1}{2\pi}\left|\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}\right|_{\max}\quad(n>1)\\&f_0-\frac{1}{2\pi}\left|\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}\right|_{\min}>f_b\end{aligned} \tag{14.5.12}$$

式中,$\left|\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}\right|_{\max}$表示$\left|\left[\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}\right]\right|_{\max}$和$\left|\left[\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}\right]\right|_{\min}$中较大的一个值.上述条件可以进一步简化为

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}\right|_{\max}<\left(\frac{n-1}{n+1}\right)2\pi f_0\quad(n>1)\\&\left|\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}\right|_{\max}<2\pi(f_0-f_b)\end{aligned} \tag{14.5.13}$$

因为在大多数情况下,f_b 小于 $f_0/2$,而$(n-1)/(n+1)$随 n 单调增加,所以实际的限制条件是

$$\left|\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}\right|_{\max}<\frac{2\pi}{3}f_0 \tag{14.5.14}$$

在讨论最大测量范围时,可以假定 $\phi(x,y)$大于 $\phi_0(x,y)$,在一个实际系统中还可假定 $l_0\gg h(x,y)$,

于是有

$$\phi(x,y)\approx\Delta\phi(x,y)\approx-\frac{2\pi f_0 d}{l_0}h(x,y) \tag{14.5.15}$$

将(14.5.15)式代入(14.5.14)式,最后得到的限制条件是

$$\left|\frac{\partial h(x,y)}{\partial x}\right|_{\max}<\frac{1}{3}\frac{l_0}{d} \tag{14.5.16}$$

这个条件表明,最大的测量范围并不受高度分布 $h(x,y)$本身的限制,而是受到高度分布在与光栅垂直的方向上变化率限制.虽然增加 l_0/d 也可以增加测量范围,但这同时意味着降低了系统的灵敏度.所以在不降低系统的灵敏度的前提下增加测量范围才有实际意义.

14.5.3 一种改进的方法[41]

如果考虑一种理想的情况,在空间频域只存在基频分量,这时基频分量中的最低频率可以扩展到零,而较高的频率可以扩展到 $2f_0$ 而不产生频率混叠,因而可以在不改变系统其他参数的条件下明显地扩大测量范围.1990 年提出的一种改进的傅里叶变换轮廓术(improved Fourier transform profilometry,简称 IFTP),将 FTP 方法的测量范围扩大了 3 倍.

新的方法采用正弦光栅投影代替罗奇光栅投影,同时采用 π 相移技术获取另一个 π 相移的变形条纹图像.当使用正弦光栅投影时,由成像系统得到的在物体表面上的变形光栅像可以表示为

$$g(x,y)=a(x,y)+b(x,y)\cos[2\pi f_0 x+\phi(x,y)] \tag{14.5.17}$$

在变形光栅像中,只存在零级和一级频谱分量,这意味着基频分量在高端可以扩展到 $2f_0$ 而不发生频谱混叠.为了消除零级分量的影响,可以让投影光栅移动 1/2 个周期,即产生 π 相位移动.这就要求观察光场采样两次,两次采样之间光栅沿与栅线垂直方向移动半个周期,两次采样可以表示为

$$g_1(x,y)=a(x,y)+b(x,y)\cos[2\pi f_0 x+\phi(x,y)] \tag{14.5.18}$$

$$\begin{aligned}g_2(x,y)&=a(x,y)+b(x,y)\cos[2\pi f_0 x+\phi(x,y)+\pi]\\&=a(x,y)-b(x,y)\cos[2\pi f_0 x+\phi(x,y)]\end{aligned} \tag{14.5.19}$$

二式相减可以得到

$$g(x,y)=2b(x,y)\cos[2\pi f_0+\phi(x,y)] \tag{14.5.20}$$

由此可见,采用正弦投影光场和 π 相移技术后,只留下基频分量.由 $a(x,y)$引起的零级分量和其他高次分量已被抑制.所以基频分量的频带,在低端可以扩展到零,在高端可以扩展到至少 $2f_0$.于是可以得到一个新的条件

$$\left|\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}\right|_{\max}<2\pi f_0 \tag{14.5.21}$$

$$\left|\frac{\partial h(x,y)}{\partial x}\right|_{\max}<\frac{l_0}{d} \tag{14.5.22}$$

与(14.5.14)式和(14.5.16)式相比较,在系统其他参数保持不变的情况下,改进的方法比原有的方法测量范围扩大了 3 倍.

实际上正弦光栅投影的要求是过于严格了.实验和理论已经证明,采用离焦投影的罗奇光栅所形成的准正弦光场也可以在很大程度上抑制高阶分量,得到与正弦光栅投影类似的结果.

14.5.4 动态过程三维面形测量

在三维面形测量方法中,傅里叶变换轮廓术的主要优点是只需要采集一帧变形条纹图像,因

此特别适合于动态过程的三维面形测量.动态过程的三维面形是随时间变化的量,如果能够沿时间轴对它采样,那么单独对于每一个时刻来说,仍然可以用类似传统 FTP 方法来进行测量.

用于动态三维测量的系统光路结构与传统静态 FTP 一样,首先将一幅罗奇(或正弦)光栅投影到参考平面,通过 CCD 记录下参考平面上的光强分布;然后再将光栅投影到待测物体的表面,当物体处于动态变化过程中时,用 CCD 进行快速摄像,记录下一系列变形条纹的强度分布.

为了讨论和数据处理的方便,将成像系统拍摄获得的参考平面上的条纹定义为零时刻($t=0$)获得的无形变"变形"条纹,可以将(14.5.3)式改写为

$$g_0(x,y)=g(x,y,t=0)=g(x,y,0)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}A_n r(x,y,0)\exp\{i[2n\pi f_0 x+n\phi(x,y,0)]\} \tag{14.5.23}$$

这样一来,CCD 拍摄到的参考平面和处于动态变化过程中的物体表面上的一系列变形条纹的强度分布就可统一写成

$$g(x,y,t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}A_n r(x,y,t)\exp\{i[2n\pi f_0 x+n\phi(x,y,t)]\},\qquad t=0,1,2,\cdots,s \tag{14.5.24}$$

式中,A_n 是傅里叶级数的系数,$r(x,y,t)$是不同时刻拍摄对象表面上的非均匀反射率分布函数,$\phi(x,y,t)$是不同时刻由于拍摄对象表面高度变化所引起的相位调制,s 为拍摄到的变形条纹总帧数.对随时间变化的变形条纹的强度分布函数 $g(x,y,t)$进行傅里叶变换,在得到的频谱分布中,基频包含了所需的相位信息.通过频域滤波,将其中的基频分量滤出来,然后对滤波后的基频分量进行逆傅里叶变换,得到的复分布为:

$$\hat{g}(x,y,t)=A_1 r(x,y,t)\exp\{i[2\pi f_0 x+\phi(x,y,t)]\},\qquad t=0,1,2,\cdots,s \tag{14.5.25}$$

从投影光路的几何关系可以看出,物体每个时刻的高度信息被编码在三维相位分布 $\phi(x,y,t)$中,而 $\Delta\phi(x,y,t)=\phi(x,y,t)-\phi(x,y,0)$对应着待测物体各个时刻的真实高度分布 $h(x,y,t)$,因此只需要求出 $\Delta\phi(x,y,t)$后再利用相位和高度的对应关系式

$$h(x,y,t)=\frac{l_0\Delta\phi(x,y,t)}{\Delta\phi(x,y,t)-2\pi f_0 d}\approx-\frac{l_0\Delta\phi(x,y,t)}{2\pi f_0 d} \tag{14.5.26}$$

即可恢复出运动变化物体每个时刻的三维表面形态高度分布.

应该指出,计算得到的 $\phi(x,y,t)$同样被截断在反三角函数的主值范围内,因而是不连续的,需要进行三维相位展开,以确保三维相位场在二维平面(x,y)上的连续性和在时序上(t)的前后关联性.

动态过程三维面形测量在机器视觉、流体力学、高速旋转、材料变形、应力分析、振动分析、碰撞变形、爆轰过程、生物医学等领域具有重要意义和应用价值[42~44].例如:将频闪效应与动态三维面形测量技术相结合,形成频闪结构光动态三维面形测量系统,用来完成高速旋转与瞬态过程中三维面形测量工作[45].图 14.5.3 是旋转风扇叶片的动态面形测量结果,风扇转速每分钟 1080 转,图中显示了从风扇开始旋转到相对稳定的过程中,叶片某一剖面变形的情况.从这个结果可以清晰地看出随着旋转的加快,叶片面上离转轴中心越远的区域变形量越大;当风扇转动频率越接近相对稳定时,变形量也逐渐趋于稳定值.

动态三维面形测量技术也可用于流体力学中液面旋涡生成分析[46].图 14.5.4 是液面旋涡生成动态液面测量结果,图中显示了某一时刻液面旋涡的形态和每一时刻的旋涡剖面图.液面旋涡生成过程三维数字化的结果为流体力学分析提供了有利的手段.

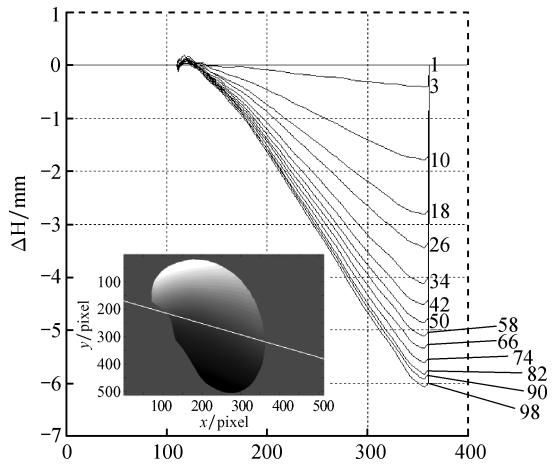


图 14.5.3 旋转风扇叶片的动态面形测量结果

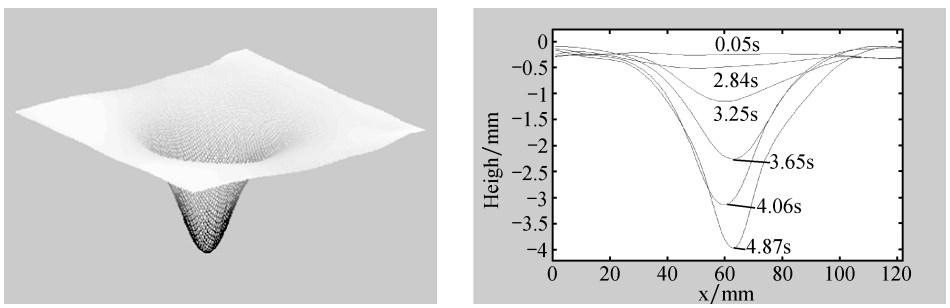


图 14.5.4 液面旋涡生成的动态面形测量结果

14.6 调制度测量轮廓术

前面介绍的相位测量轮廓术和傅里叶变换轮廓术是基于三角测量原理,即通过分析受物面调制的投影条纹的变形情况获取空间信息.由于条纹投影方向和观察方向之间存在一个角度,所以这种方法受到阴影、遮挡、相位截断的限制,不能测量剧烈的面形变化.飞行时间法虽然可以实现垂直测量,但因空间信息是靠光线的时间差得到的,对信号处理的时间分辨率有特别高的要求,所以一般用于大范围绝对距离测量.调制度测量轮廓术(modulation measurement profilometry,简称 MMP)是一种新的光学三维轮廓测量方法[47~48].它完全基于投影到待测物面上的正弦条纹的调制度分布,并且投影方向和探测方向一致,所以可以实现对物体的垂直测量,不用求解相位和相位展开,亦即可以测量物表面高度剧烈变化或不连续的区域.此方法对三维传感及机器视觉的应用具有重要的意义.

14.6.1 基本原理

将一正弦光栅投影到物体上,从与投影方向相同的方向上探测被测物体上的条纹图形,物体上的光强分布可表示为:

$$I(x,y)=I_0B(x,y)\{1+C(x,y)\cos(2\pi fx+\phi_0(x,y))\} \tag{14.6.1}$$

式中,I_0 是偏置强度,$B(x,y)$表示表面不均匀的反射率,$C(x,y)$是投影条纹的对比度,f 是投影

条纹空间频率，ϕ_0 是初相位 .在正弦光栅的成像面上，条纹对比度最大，而在成像面前后，即离焦像面上条纹对比度降低，在光轴方向就有一对比度分布，如图 14.6.1 所示 .

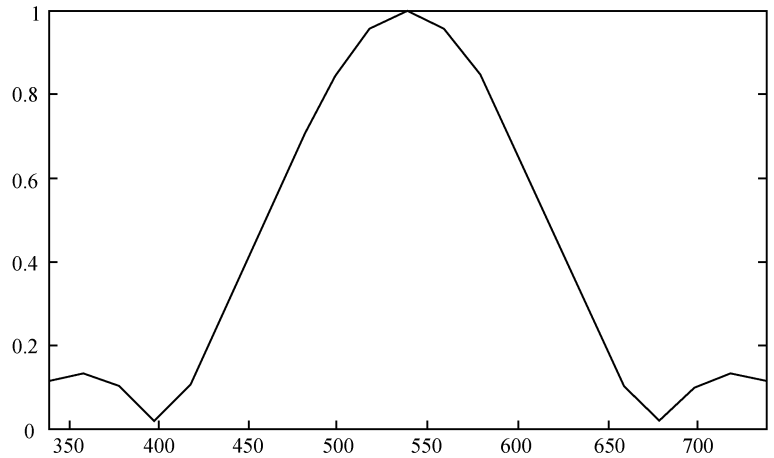


图 14.6.1 投影光栅像的调制度分布

为计算调制度，在与正弦光栅条纹垂直的方向上，以等间距移动光栅 $L(L\geqslant 3)$次，总移动量为一个光栅周期 .则可得 L 帧条纹图，由此就可计算对应点的调制度 .

考虑某一点的所有相移强度值，该点条纹的调制度函数 $M(x,y)$定义为：

$$M(x,y)=\sqrt{\left[\sum_{i=0}^{L-1} I_i(x,y)\sin(2i\pi/L)\right]^2+\left[\sum_{i=0}^{L-1} I_i(x,y)\cos(2i\pi/L)\right]^2} \tag{14.6.2}$$

此处 I_i 是第 i 次相移的强度值 .

将方程(14.6.1)代入方程(14.6.2)可得如下表达式：

$$M(x,y)=\frac{1}{2}LI_0B(x,y)C(x,y) \tag{14.6.3}$$

由此可知，调制度函数 $M(x,y)$与条纹对比度 $C(x,y)$成正比 .在 MMP 测量中的调制度实际相当于就是条纹对比度 .在光栅像平面上的像素点调制度最大，在光栅像平面前后的像素点调制度变小 .在实际测量中，通过前后移动投影系统，保持探测系统和物体的相对位置不动，则可由物体纵深范围内的调制度三维分布得到待测物体的空间信息 .

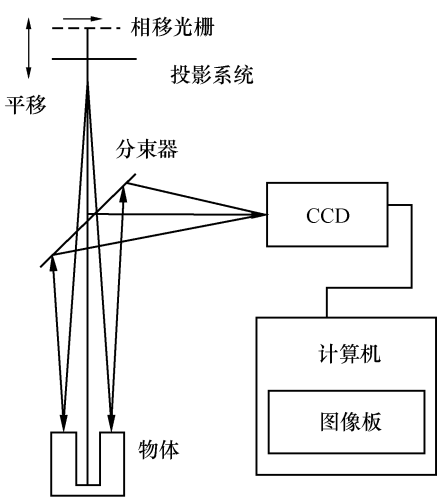


图 14.6.2 调制度测量轮廓术装置图

获取条纹调制度信息的另一种方法是利用傅里叶分析获取条纹调制度 .简单来说，是将获取的一帧条纹图进行傅里叶变换，然后滤出傅里叶频谱中的基频成分，并作逆傅里叶变换，最后得到物面的条纹调制度信息 .

14.6.2 信息处理方法

MMP 测量的装置如图 14.6.2 所示 .在测量过程中，保持待测物体、分束器、CCD 摄像机的位置不动，在投影光轴方向依次平移投影系统，使光栅的成像面扫描待测物体的纵深范围 .对于相移方法，每次平移后在同一扫描面上利用相移技术获得 L 帧条纹图，由此来计算这一扫描面上所有像素点的调制度 .对于傅里叶

变换方法,只需一帧条纹图就可计算得到物面的条纹调制度信息.如果总平移次数为 N,则在CCD面阵上,相对于时间轴,就有 N 幅调制度图,如图14.6.3所示.对于同一像素点,就有 N 个调制度值,如图14.6.4所示,图中平移次数为横坐标,调制度值为纵坐标,此即CCD面阵上这一像素点在平移过程中的调制度分布.因为平移次数是分立的整数,所以有可能调制度最大的真实位置处于两个整数之间,这就需要用一定的算法求出调制度最大的位置.因为在几何光学近似下像平面前后的调制度分布可看作是对称的,可以采用的方法之一是在测得最大调制度的位置,向两边取一定数目的调制度值,然后求出这些调制度值的重心位置作为调制度最大的真实位置.

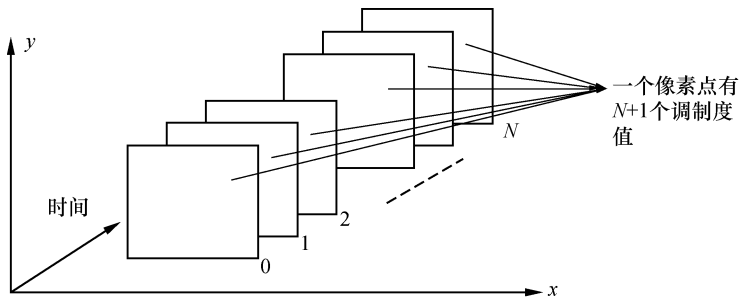


图14.6.3 相对于时间轴的 N 幅调制度图

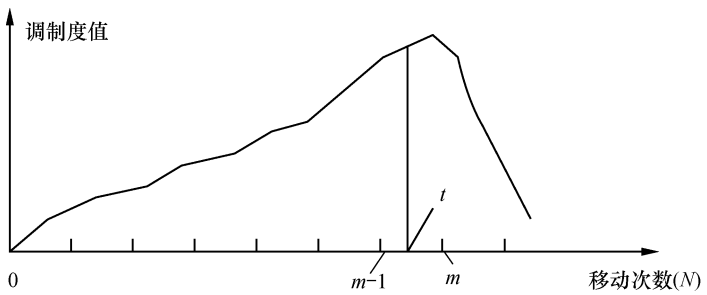


图14.6.4 在平移过程中一像素点上的调制度分布

如果求重心后,t 是最大调制度的真实位置且处于两个相邻的平移次数 $m-1$ 和 m 之间($m-1$、m 是整数且 $0\leqslant m-1$、$m\leqslant N$),则此像素点相对于参考平面的高度为

$$l_t = l_{m-1} + [t-(m-1)](l_m - l_{m-1}) - l_0 \tag{14.6.4}$$

在(14.6.4)式中 l_0、l_{m-1}、l_m 分别是投影系统移动前、移动到第 $m-1$ 次位置、移动到第 m 次位置时,与参考平面的距离.

14.6.3 测量实例

实验系统如图14.6.2所示,被测物体选用的是一中心带孔(圆孔直径为10mm)、外部有定位凹槽的圆台模型.圆台外周和圆孔均具有垂直边界,因此用三角测量的其他方法,例如相位测量轮廓术、傅里叶变换轮廓术等,由于阴影的影响,将无法得到完整的三维面形分布.

在实验中,光栅投影系统的平移次数 N 为37,采用傅里叶条纹分析方法计算得到每次平移后条纹图像的调制度分布图.平移间隔为2mm.采用重心算法可以找出调制度最大的确切位置,并最后得到物体的高度分布如图14.6.5所示.物体本身的总高度为57mm,测量结果的最大绝对误差为0.21mm.图中还给出物体的截面图.

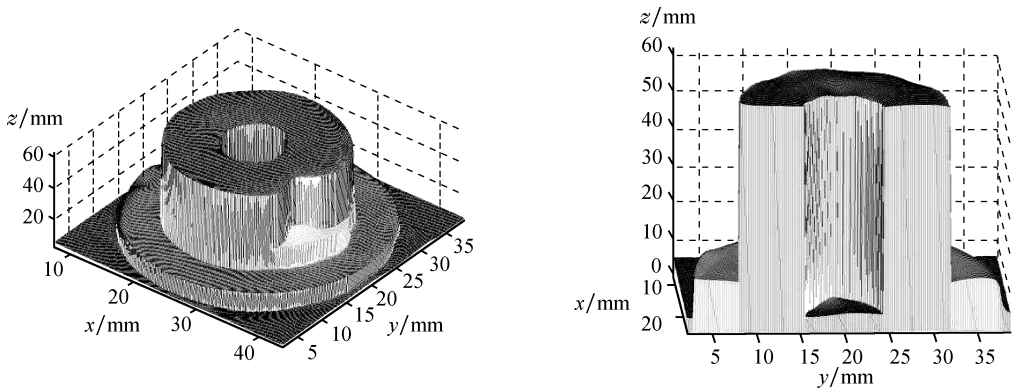


图 14.6.5　被测物体的高度分布

14.7　三维轮廓测量其他光学方法

14.7.1　采用激光扫描的三维共焦成像

采用激光扫描的三维共焦成像系统可以得到高分辨的三维像,已在材料科学和生物医学等领域应用.共焦激光扫描显微镜采用可见光或红外激光作为光源,被测试的物体由激光束顺序扫描,物体表面的散射光由检测器接收后通过计算机数据处理形成一个焦平面上的(x,y)坐标显示图像,焦平面是 z 方向对物体的扫描形成共焦像序列,从而产生高分辨的三维显示.

共焦扫描光学系统的原理如图 14.7.1(a)所示,三维共焦像的形成如图 14.7.1(b)所示.在共焦成像系统中,照明光源被聚焦在物体表面的一个点上,一个二维光束扫描器由两个扫描反射镜构成(图中未画出详细结构),使扫描点在物方共焦平面上作 xy 方向的二维扫描,从物体表面散射的光线经同一个二维光束扫描器和半透半反镜成像在带针孔的隔板上,由针孔后方的探测器接受形成共焦像.如果让系统沿 z 方向移动以改变共焦平面的位置,可以得到一系列的共焦像.对于一个固定的(x,y)坐标点,其共焦像序列的强度分布如图 14.7.2 所示.图中,横坐标代表 z 轴距离,纵坐标代表接受信号的强度,强度最大的位置对应物体上(x,y)点的 z 坐标.因此,

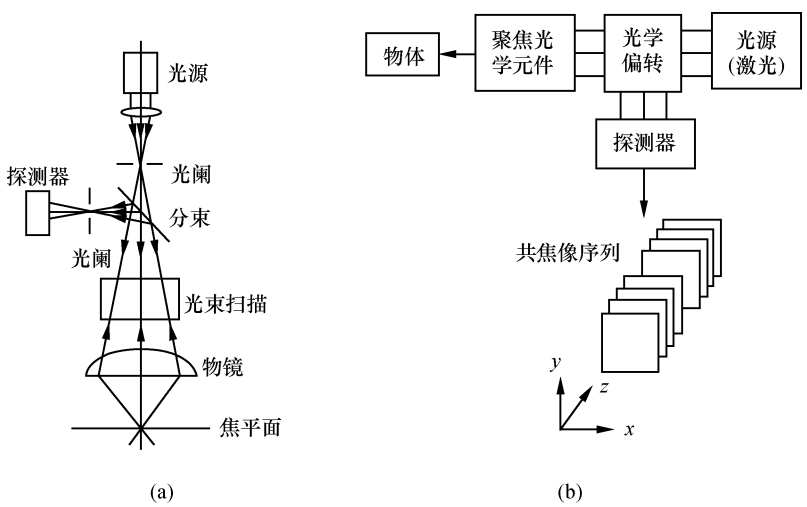


图 14.7.1　三维共焦成像系统

(a) 原理;(b) 共焦像序列

寻找每一个(x,y)点的共焦像序列的强度最大值,就可以计算出完整的三维图像.例如:一种用于眼底测量的共焦激光扫描显微镜,在测量过程中需要获取 32 个共焦像,共焦像对应的 z 方向深度为 0.50—4.0mm,也就是说,相邻的两个共焦平面的间距为 16～130μm.在图像系统中,每个共焦像由 256×256 个像素构成,数据精度为 8 比特.因此,每次测量所获取的数据量约为 2 兆,采用微机作数据处理,一幅三维图像的采样和计算时间大约为 1 秒.

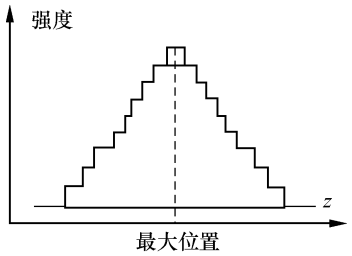


图 14.7.2　固定点共焦像序列强度分布

14.7.2　飞行时间法

飞行时间法(TOF)[7]是基于直接测量激光或其他光源脉冲的飞行时间来确定物体面形的方法.飞行时间法距离测量技术与三角法一样也有悠久历史.人们很早就知道从闪电和雷声之间的时间延迟来判断雷电区的距离,某些动物视觉系统就是很好的飞行时间测量系统,例如蝙蝠的视觉系统.飞行时间的原理是相当简单的,一个信号载波(例如声波或光波)以已知的速度从测量系统发出,再从物体表面反射回到观察系统,测量时间的延迟就可以确定距离.为了得到三维面形信息,信号束必须对整个景物扫描.TOF 系统原理如图 14.7.3 所示,已知传播速度 v 和被测物体的飞行时间 Δt,则距离 z 可以表示为

$$z = kv\Delta t \tag{14.7.1}$$

式中 k 是系统几何参数确定的常数.如果信号从被测系统传播到被测物面,然后原路返回接收器,则 $k=1/2$. 这时可以避免在三角测量法中所碰到的由于阴影产生的“盲点”问题.(14.6.5)式与三角法中的基本方程(如(14.2.12)式)的本质区别在于,距离是被测量物体飞行时间 Δt 的线性函数,而且重要的定标因子 v 并不受测量系统的控制,也就是说,TOF 方法不容易改变精度以适应不同的测量范围.另一个不同点是在于,在三角法中通过提高成像光点位置的空间分辨精度来获得距离的测量精度,而 TOF 是以对信号检测的时间分辨精度来换取距离测量精度.

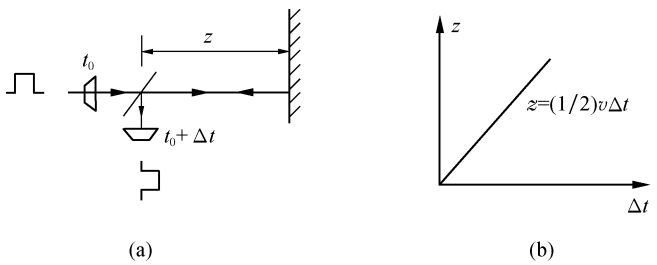


图 14.7.3　飞行时间法
(a) TOF 系统原理;(b) 距离 z 与 Δt 的线性关系

1. 单脉冲技术

最初的 TOF 系统是单脉冲系统,该系统使用发射短脉冲的固体激光器.由于定时精度的限制,这种系统只具有较低的测量精度.改进信噪比的一个方法是对一个测点重复多次测量,即以时间换取精度.

2. 线性调频技术

在单脉冲情况下,被传递的信号的时间带宽积为 1. 因此可以考虑用时间带宽积大于 1 的信号来提高信噪比和测量精度,通常采用的一种方法是发射线性调频信号,即频率线性变化的信号,这不仅提高了信噪比,而且提供了一种方便的获取距离信息的方法.

3. 相位检测技术

对时间的测量可以通过对调制光波的相位测量来实现.图 14.7.4 是采用相位检测技术的 TOF 系统框图.一个扫描镜系统将光束投射到被测物体一个点上,然后共轴返回,由光电倍增管接收.系统采用 15mW 的 He-He 激光作光源,光束经 9MHz 的调制器调制后投射到物面,接收的信号经 9MHz 的滤波器后与基准信号比较,然后从相位变化计算出距离的变化.

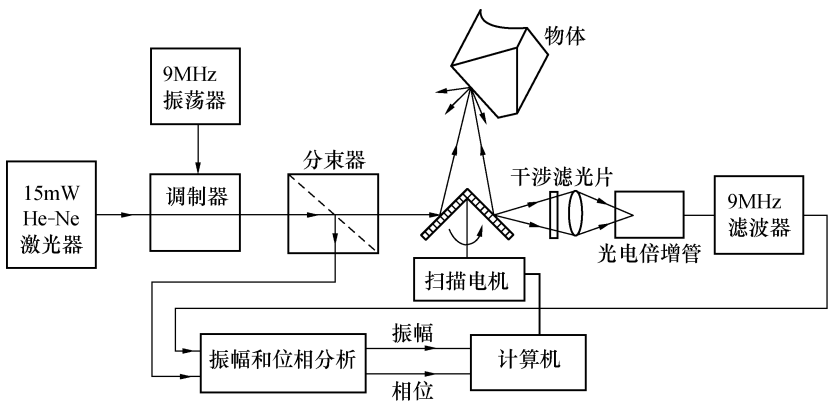


图 14.7.4 采用相位检测技术的 TOF 系统

4. 小结

飞行时间法可以避免三角法中“盲点”问题,是一种很有前景的方法.但是由于光波的速度为 3×10^8 m/s,为了达到较高的距离测量精度,对于定时系统的时间分辨率有特别高的要求,这给技术上的实现带来困难.近年来高分辨阵列型探测器和扫描技术的发展,使得基于位置检测的三角测量技术迅速发展,成为三维面形测量技术的一个主要发展方向.传统的飞行时间法的分辨率不高,约为 1mm.若采用亚皮秒脉冲,分辨率可以达到亚毫米.目前采用时间相干的单光子计数法(single photon counting method),测量 1 米的距离,深度分辨率可以达到 30μm.飞行时间法在本质上的一些特点,将随高速电子器件的发展和系统定时精度的提高而得以充分发挥.飞行时间法与三角测量法一样将在三维面形传感领域发挥重大作用.

14.7.3 三维电视摄像机

近年来研究了一种基于飞行时间法的三维电视摄像机[49],这种摄像机采用红外 LED 光源,光源发出三角波调制的光照射被测物体,摄像机通过将上行的和下行的强度调制光与超快速快门照相机结合完成同步深度探测,并实时计算出深度信息.与同轴的另一个摄像机同时获取的可见光图像相结合,形成包括深度信息的三维视频图像.深度探测基于这样一个原理:如果照明光的强度以与光速可比较的速度变化,对物体超快速拍摄图像的强度依赖于摄像机与物体之间的

距离.

结合图 14.7.5 进一步阐述这个原理.图中显示了系统中各主要部件的安排.可见光路为获取彩色图像的光路,物体反射的可见光经过摄像机透镜、分光棱镜和中继透镜,产生的彩色图像被一普通的电视摄像机捕获.红外光路表示的为获取深度图像的光路,近红外 LED 阵列用做强度调制光源,因为它们提供快速、直接的调制性能,且近红外光的波长为 850nm,在可见光的范围之外,因而不会和其他的可见光发生干扰.LED 照明光源发出三角调制光波,该光波从待测物体特定点反回,三角光波的周期和快门开启的周期是相同的,因此特定点 P 反射回的光强度在每次快门开启的瞬间都能近乎相同的捕获到.从待测物体特定点 P 反射回的三角波和 LED 照明光源发出的三角波相比延迟 $\Delta t=2d/v$,这是光传播一个回合所需要的时间,其中 d 表示从摄像机到点 P 的距离,v 表示光速.假定在 CCD 照相机前面的超快速快门开启的时间明显小于三角调制光波的周期.如果在三角调制波的上升沿开启快门,在曝光时间内入射到 CCD 照相机的光强随着与物体间距离 d 的增加而递减,因为随着距离的增加,延迟时间变大.在这个照明周期内,CCD 照相机的入射光强越小意味着与物体的距离越大.另一方面,如果在三角调制波的下降沿开启快门,在曝光时间内,入射到 CCD 照相机的光强随着与物体间的距离 d 递增,也是因为随着距离的增大,延迟时间变长,CCD 照相机的入射光强越大意味着距离越长.如上所述,对于任意的视频帧,不管是在三角调制波的上升沿还是下降沿开启快门,入射光强度都提供距离信息,即快门捕获的光强度都是待测物体的深度信息 d 的函数.因此,即使只使用上升沿或者下降沿时开启快门,捕获一种类型的光强,都可以反过来推导出深度信息.注意到反射回的光强还和待测物体表面的反射系数有关,物体表面反射率对深度分辨率的影响较大.将三角调制波的上升沿图像和下降沿图像结合起来就能消除反射系数的影响,从而隔离出距离信息.通过这个系统可同时得到深度图像和色彩图像,它直接由强度信息转化为深度信息,而没有相位信息量的直接参与,它的最大优点是能实时的捕获物体的深度信息和彩色信息,它的实时性和直接记录景深值,是它在虚拟演播室技术等领域中发挥巨大作用的重要原因.而其他三维测量方法大都只是实时获得某种间接的信息,例如变形条纹图像,然后进行处理,从这种信息中提取深度信息.

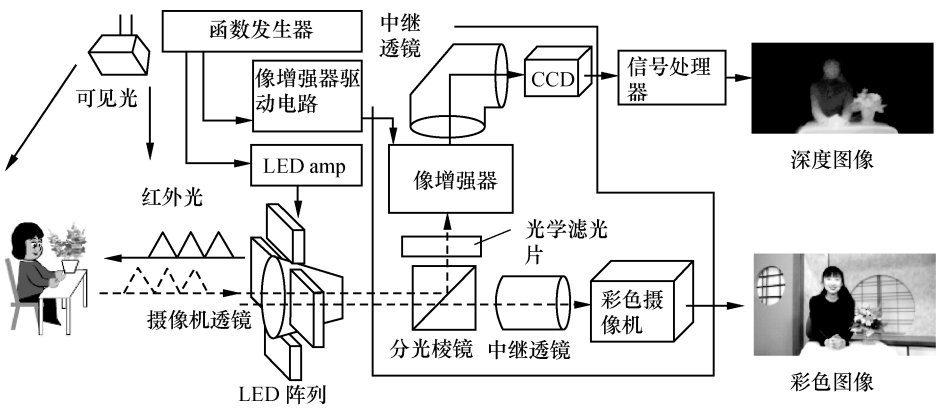


图 14.7.5　三维电视摄像机原理图

习　题

14.1　试比较被动三维传感和主动三维传感系统的原理、系统结构、适用范围和优缺点.

14.2　在三角测量法中通常采用的三种坐标系统如图 14.2.2 所示.试推导三种坐标关系中,物体的距离或高度 z 与测量变量 Δx 之间的关系式,即三角测量法中的测量方程.

14.3 为什么说激光散斑对三角法测量精度具有重要影响,试解释(14.2.16)和(14.2.17)式的物理含义,并说明如何提高激光三角法测量精度.

14.4 在相位测量剖面术中,由于变形光栅像与传统的干涉条纹图相类似,因此变形光栅像有时又被称为"干涉图".在干涉计量中,光波长被作为度量微观起伏的尺度,而在相位测量剖面术中与投影条纹间距有关的"等效波长"被作为度量三维宏观面形的尺度.试比较这两种方法在物理概念上和条纹处理方法上的异同性.

14.5 由于实际得到的相位数据是一个二维的采样点阵列,所以相位展开应针对二维进行.例如:首先沿二维数据阵列中某一列进行相位展开,然后以该列展开后的相位为基准,沿每一行进行相位展开,得到连续分布的二维相位函数.模仿一维相位函数的相位展开过程,推导二维截断相位函数 $\phi_w(i,j)$展开过程的数学表达式.

14.6 采用远心光路的 PMP 系统如图 14.4.2 所示.设图中 $\theta=30°$,$\theta'=0°$,在参考平面上看到的投影正弦光栅是等周期分布的,其周期 $p_0=5$mm,求该系统的等效波长.如果系统对条纹相位的测量精度为 $2\pi/100$,求系统的测量精度.试讨论提高系统的测量精度的方法.

14.7 相位测量轮廓术和傅里叶变换轮廓术是基于三角测量原理,试比较调制度测量轮廓术与上面两种方法在原理上的区别,并比较三种方法的测量精度.

14.8 飞行时间法(TOF)是基于直接测量激光或其他光源脉冲的飞行时间来确定物体面形的方法.图 14.7.4 是采用相位检测技术的 TOF 系统框图,对时间的测量可以通过对调制光波的相位测量来实现.光束经 9MHz 的调制器调制后投射到物接收的信号经 9MHz 的滤波器后与基准信号比较,然后从相位变化计算出距离的变化.假定相位的测量精度为 $2\pi/100$,求系统的测量精度.如果保持相位的测量精度不变,光束的调制频率提高到 90MHz,系统的测量精度是多少.

14.9 为什么在三维电视摄像机中必须将三角调制波的上升沿图像和下降沿图像结合起来才能消除物体表面反射系数的影响?

本章参考文献

1. T.C.Strand.Optical three-dimensional sensing for machine vision.Opt.Eng.,1985,24(1):33.
2. J.A.Jarikio,R.C.Kim,S.K.Case.Three-dimensional inspection using multi-stripe structured light.Opt.Eng.,1985,24(6):966
3. Frank Chen,G.M.Brown,Mumin Song.Overview of three-dimensional shape measurement using optical methods.Opt.Eng.,2000,39(1):10
4. 陈家璧,苏显渝.光学信息技术原理及应用.2 版.北京:高等教育出版社,2009
5. 金国藩,李景镇.激光测量学.北京:科学出版社,1998
6. 叶声华.激光在精密测量中的应用.北京:机械工业出版社,1980
7. 张广军.视觉测量.北京:科学出版社,2008
8. R.A.Jars.A laser time-of flight range scanner for robotic vision.IEEE on pattern analysis and machine intelligence,1983,PAML-S(3):505
9. H.Takasaki.Generation of surface contours by moiré patterns.Appl.Opt.,1970,9(6):1467.
10. V.Srinivasan,H.C.Liu,M.Halioua.Automated phase-measuring profilometry of 3-D diffuse objects.Appl.Opt.,1984,23(18):3105
11. M.Takeda,K.Muton.Fourier transform profilometry for automatic measurement of 3-D object shapes.Appl.Opt.,1983,22(24):3977
12. S.Toyooka,Y.Laws.Automatic profilometry of 3-D diffuse objects by spatial phase detection.Appl.Opt.,1986,25(10):1630
13. 唐朝伟,梁锡昌,施进展.人体曲面轮廓激光扫描三维视觉传感系统.重庆大学学报,1993,16(1):117-123
14. 周文胜,苏显渝.距离查找表的产生及其在三维传感中的应用.光电工程,1991,18(2):28
15. Jie-Lin Li,Xian-Yu Su.3-D sensing using laser sheet projection:influence of speckle.Optical Review,1995,2(2):144

16. 苏显渝,李杰林,李继陶.激光片光三维传感中降低散斑影响的新方法.光学学报,1997,17(2):211
17. R.G.Dorsch,G.Hausler,J.M.Herrman.Laser triangulation:fundamental uncertainty in distance measurement.Appl.Opt.,1994,33(7):1036
18. 苏显渝,张冠申,陈泽先.鞋楦三维面形光电自动测量系统.光电工程,1989,16(6):1
19. M.Rioux.Laser range finder based on synchronized scanners.Appl.Opt.,1984,23(21):3837
20. Xian-Yu Su,Bo Jia.A method for the generation of light knife and its application in 3-D sensing.Proc.SPLE.,1990,1319:362
21. 贾波,苏显渝,郭履容.用光刀投影的叶片三维面测量方法.中国激光,1992,19(4):27
22. Xiao-Xue Cheng,Xian-Yu Su,Lu-Rong Guo.Automated measurement method for 360° profilometry of 3-D diffuse objects.Appl.Opt.,1991,30(10):1274
23. Xian-Yu Su,Wen-Sen Zhou,G.von Bally,D.Vukicevic.Automated phase-measuring profilometry using defocused projection of the Ronchi grating.Opt.Commun.,1992,94:561
24. Xianyu Su,Wenjing Chen.Reliability-guided phase unwrapping algorithm:a review.Optics and Lasers in Engineering,2004,42(3):245—261
25. T.R.Judge,P.J.Bryanston-Cross.A review of phase unwrapping techniques in fringe analysis.Optics and Laser in Engineering,1994,21:199
26. Xianyu Su,Lian Xue.Phase unwrapping algorithm based on fringe frequency analysis in Fourier-transform profilometry.Optical Engineering,2001,40(4):637—643
27. Xian-Yu Su,G.Von Bally,D.Vukicevic.Phase-stepping grating profilometry:utilization of intensity modulation analysis in complete object evaluation.Opt.Commun.,1993,98:141
28. J.M.Huntley,H.O.Saldner.Temporal phase-unwrapping algorithm for automated interferogram analysis.App.Opt.,1993,32(17):3047—3052
29. 徐珍华,苏显渝.一种时间相位展开算法.四川大学学报(自然科学版),2008,45(3):537—540
30. C.Reich,R.Ritter,J.Thesing.White light heterodyne principle for 3D-measurement.Sensors,Sensor Systems,and Sensor Data Processing(1997)June 16—20;Munich,Germany
31. 孙学真,苏显渝,邹小平.基于互补型光栅编码的相位展开.光学学报,2008,28(10):1947—1951
32. Jielin Li,Hongjun Su.Xianyu Su.Two-frequency grating used in phase-measuring profilometry.Appl.Opt.1997,36(1):277
33. 郝煜东,赵洋,李达成.非线性小数重合法及其在轮廓测量中的应用.光学学报,1999,19(11):1518
34. M.Halioua,H-C.Liu.Optical three-dimensional sensing by phaes measuring profilometry,Optics and Laser in Engineering,1989,11:185
35. 陈泽先,苏显渝.采用准正弦投影光场的三维面形测量系统.仪器仪表学报,1989,10(4):409
36. 苏显渝,周文胜.采用罗奇光栅离焦投影的位相测量轮廓术.光电工程,1993,20(4):17
37. 苏万勇,苏显渝.井底模式光电三维面形测量系统.石油机械,1993,21(9):28-32
38. Xian-Yu Su,A.M.Zarubin,G.Von Bally.Modulation analysis of phase-shifted holographic interferograms.Opt.Commun.2004,105(5):379
39. 李继陶,苏显渝,李杰林.光弹性测量中的位相展开.光学学报,1997,17(11):1538
40. Xianyu Su,wenjing Chen.Fourier transform profilometry:a review.Optics and Lasers in Engineering,35(5),2001:263—284
41. Jian Li,Xian-Yu Su,Lu-Rong Guo.An improved Fourier transform profilometry for automatic measurement of 3-D object shapes.Opt.Eng.,1990,29(24):1439
42. Xianyu Su,Qican Zhang.Dynamic 3-D shape measurement method:A review.Optics and Lasers in Engineering,2010,48(2):191—204
43. Xianyu Su,Wenjing Chen,Qichan Zhang.Dynamic 3-D shape measurement method based on FTP.Optics and Lasers in Engineering,36(1),2001:49—64

44. Qican Zhang ,Xianyu Su .High-speed optical measurement for the drumhead vibration .Optics Express ,2005 ,13(8):3110—3316
45. Qican Zhang ,Xianyu Su ,Yiping Cao .Optical 3-D shape and deformation measurement of rotating blades using stroboscopic structured illumination .Optical Engineering ,2005 ,44(11):113601-1-7
46. 张启灿 ,苏显渝 .动态液面面形测量 .光学学报 ,2001 ,21(12):1506-1508
47. Likun Su ,Xianyu Su ,Wansong Li .Application of modulation measurement profilometry to objects with surface holes .Applied Optics ,1999 ,38(7):1153
48. 邵双运 ,苏显渝 ,张启灿 .调制度测量轮廓术在复杂面形测量中的应用 .光学学报 ,2004 ,24(12):1623—1628
49. Masahiro Kawakita ,Keigo Iizuka .High-definition real-time depth-mapping TV camera:HDTV Axi-Vision Camera .Optics Express ,2004 ,12(12):2781—2794

参 考 书 目

1. 陈家璧,苏显渝.光学信息技术原理及应用.2 版.北京:高等教育出版社,2009
2. 郭履容,陈祯培,王植恒.相位调制密度假彩色编码.光学学报,1984,4(2):145—147
3. 黄婉云.傅里叶光学教程.北京:北京师范大学出版社,1984
4. 金国藩,严瑛白,邬敏贤等.二元光学.北京:国防工业出版社,1998
5. 李俊昌,熊秉衡等.信息光学理论与计算.北京:科学出版社,2009
6. 梁铨廷.物理光学.修订本.北京:机械工业出版社,1987
7. 刘培森.应用傅里叶变换.北京:北京理工大学出版社,1990
8. 刘旭,李海峰.现代投影显示技术.杭州:浙江大学出版社,2009
9. 吕乃光,陈家璧,毛信强.傅里叶光学(基本概念和习题).北京:科学出版社,1985
10. 吕乃光.傅里叶光学.2 版.北京:机械工业出版社,2006
11. 母国光 战元龄.光学.2 版.北京:高等教育出版社,2009
12. 宋菲君,S.Jutamulia.近代光学信息处理.北京:北京大学出版社,1998
13. 苏显渝,郭履容.光学图象减法及其差异的假彩色显示.仪器仪表学报,1984,5(1):49—54
14. 陶世荃等.光全息存储.北京:北京工业大学出版社,1998
15. 王仕藩.信息光学理论与应用.北京:北京邮电大学出版社,2004
16. 谢建平,明海,王沛.近代光学基础.北京:高等教育出版社,2006
17. 杨振寰.光学信息处理.母国光等译.天津:南开大学出版社,1986
18. 于美文等.光学全息及信息处理.北京:国防工业出版社,1984
19. 虞祖良,金国藩.计算机制全息图.北京:清华大学出版社,1984
20. 郁道银,谈恒英.工程光学.2 版.北京:机械工业出版社,2006
21. 钟锡华.现代光学基础.北京:北京大学出版社,2003
22. 朱伟利,盛嘉茂.信息光学基础.北京:中央民族大学出版社,1997
23. Francis T.S.Yu 等.光信息技术及应用.冯国英等译.北京:电子工业出版社,2006
24. J,D.加斯基尔.线性系统·傅里叶变换·光学.封开印译.北京:人民教育出版社,1983
25. J.W.顾德门.傅里叶光学导论.3 版.秦克诚,刘培森,陈家璧,曹其智译.北京:电子工业出版社,2006
26. M.波恩,E.沃耳夫.光学原理(上册).7 版.杨葭荪等译.北京:电子工业出版社,2005
27. M.波恩,E.沃耳夫.光学原理(下册).7 版.杨葭荪等译.北京:电子工业出版社,2006
28. Xianyu Su,Guansen Zhang,Lurong Guo.Phase-only composite filter.Optical Engineering, 1987, 26(6): 520—523

部分习题参考答案

1.1 (1)线性,平移不变;(2)线性,平移不变;(3)非线性,平移不变;
(4)线性,平移不变;(5)线性,非平移不变.

1.2 左边 $=\operatorname{comb}\left(\frac{x}{2}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\frac{x}{2}-n\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left[\frac{1}{2}(x-2n)\right]=2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-2n)$

右边$=\operatorname{comb}(x)+\operatorname{comb}(x)\exp(\mathrm{j}\pi x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n)+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(\mathrm{j}\pi x)\delta(x-n)$

$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n)+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(\mathrm{j}n\pi)\delta(x-n)$

$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n)+\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\delta(x-n)$

当 $n=$ 奇数时,右边 $=0$,当 $n=$ 偶数时,右边 $=2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-2n)$.

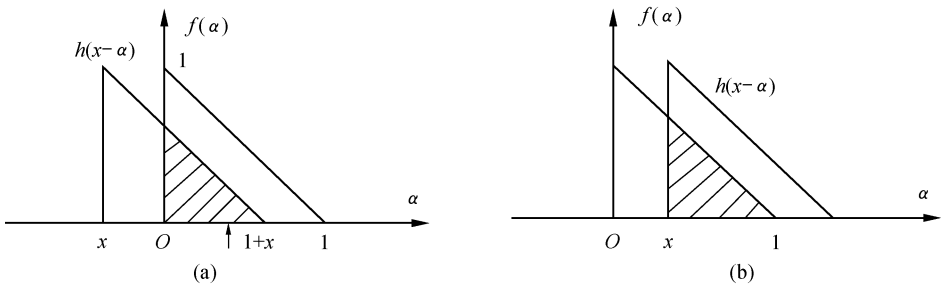
1.3 根据复合函数形式的 δ 函数公式

$$\delta[h(x)]=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\delta(x-x_i)}{|h'(x_i)|},\quad h'(x_i)\neq 0$$

式中 x_i 是 $h(x)=0$ 的根,$h'(x_i)$表示 $h(x)$在 $x=x_i$ 处的导数.于是

$$\pi\delta(\sin\pi x)=\pi\frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n)}{\pi}=\operatorname{comb}(x)$$

1.4 设卷积为 $g(x)$.当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时,如图参 1.4(a)所示,$g(x)=\int_0^{1+x}(1-\alpha)(1+x-\alpha)\mathrm{d}\alpha=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x^3$



图参 1.4

当 $0<x\leqslant 1$ 时,如图参 1.4(b)所示,$g(x)=\int_x^1(1-\alpha)(1+x-\alpha)\mathrm{d}\alpha=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^3$ 即

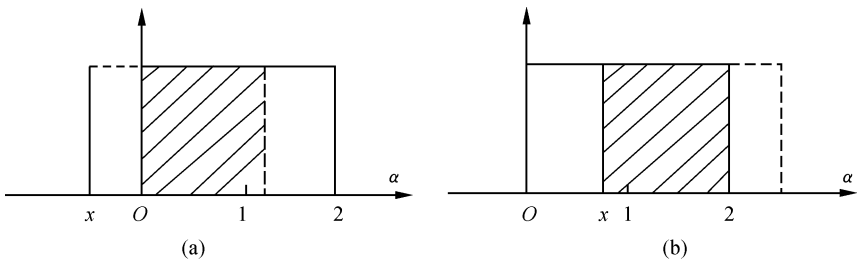
$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x^3, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ \frac{1}{3}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^3, & 0<x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

1.5 (1) $\delta(2x-3)*\operatorname{rect}\left(\frac{x-1}{2}\right)=\frac{1}{2}\delta\left(x-\frac{3}{2}\right)*\operatorname{rect}\left(\frac{x-1}{2}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{rect}\left(\frac{x-2.5}{2}\right)$

(2)设卷积为 $g(x)$,当 $x\leqslant 0$ 时,如图参 1.5(a)所示,$g(x)=\int_0^{x+2}\mathrm{d}\alpha=x+2$.当 $0<x$ 时,如图参 1.5(b)所示

$$g(x)=\int_x^2 \mathrm{d}\alpha = 2-x$$

$$g(x)=\begin{cases}1+\dfrac{x}{2}, & x<0\\ 1-\dfrac{x}{2}, & x>0\end{cases}$$



图参 1.5

即

$$g(x)=2\Lambda\left(\frac{x}{2}\right)$$

(3) $\mathrm{comb}(x)*\mathrm{rect}(x)=1$

1.6 (1) $\sqrt{\pi}\exp(-\pi^2\xi^2)$； (2) $\sqrt{2\pi}\sigma\exp(-2\pi^2\sigma^2\xi^2)$

1.7 应用广义巴塞伐定理可得

$$(1)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}^2(x)\mathrm{sinc}^2(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda(\xi)\Lambda(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_{-1}^{0}(1+\xi)^2\mathrm{d}\xi+\int_0^1(1-\xi)^2\mathrm{d}\xi=\frac{2}{3}$$

$$(2)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}^2(x)\cos\pi x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda(\xi)\delta\left(\xi+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\xi+\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda(\xi)\delta\left(\xi-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\xi\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\Lambda\left(-\frac{1}{2}\right)+\Lambda\left(\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{1}{2}$$

1.8 $F\{\mathrm{sinc}(x)\mathrm{sinc}(2x)\}=F\{\mathrm{sinc}(x)\}*F\{\mathrm{sinc}(2x)\}=\dfrac{1}{2}\mathrm{rect}(\xi)*\mathrm{rect}\left(\dfrac{\xi}{2}\right)$

当$-\frac{3}{2}\leqslant\xi<-\frac{1}{2}$时，如图参 1.8(a)所示，

$$G(\xi)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{\xi+\frac{1}{2}}\mathrm{d}u=\frac{3}{2}+\xi$$

当$-\frac{1}{2}\leqslant\xi<\frac{1}{2}$时，如图参 1.8(b)所示，

$$G(\xi)=\frac{1}{2}\int_{\xi-\frac{1}{2}}^{\xi+\frac{1}{2}}\mathrm{d}u=1$$

当$\frac{1}{2}\leqslant\xi<\frac{3}{2}$时，如图参 1.8(c)所示，

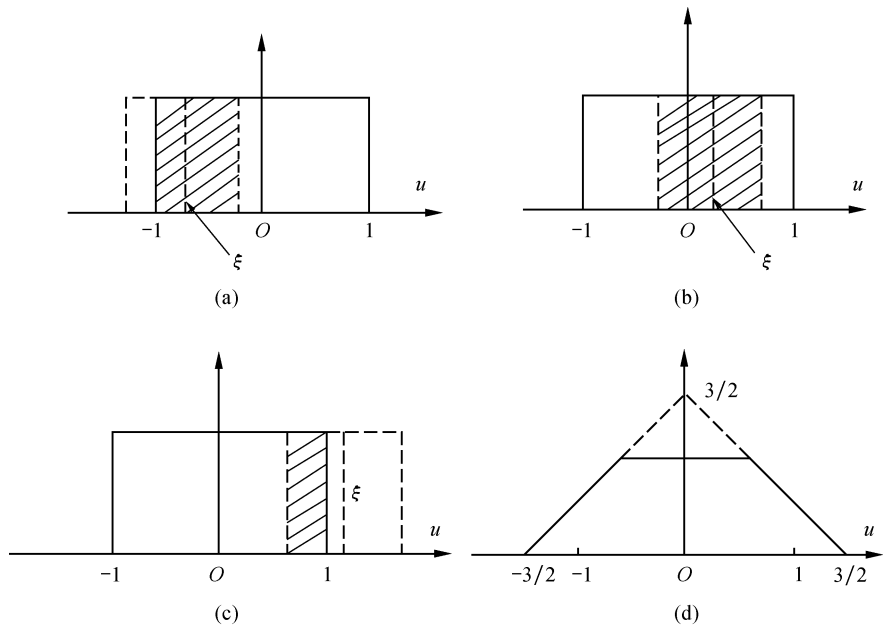
$$G(\xi)=\frac{1}{2}\int_{\xi-\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}u=\frac{3}{2}-\xi$$

$2G(\xi)$的图形如图参 1.8(d)所示，由图可知

$$G(\xi)=\frac{3}{4}\Lambda\left(\frac{\xi}{3/2}\right)-\frac{1}{4}\Lambda\left(\frac{\xi}{1/2}\right)$$

1.9 (1) $F\{\exp(-\beta|x|)\}=\int_{-\infty}^{0}\exp(\beta x)\exp(-\mathrm{j}2\pi\xi x)\mathrm{d}x+\int_0^{\infty}\exp(-\beta x)\exp(-\mathrm{j}2\pi\xi x)\mathrm{d}x$

$$=\frac{2\beta}{\beta^2+(2\pi\xi)^2}$$



图参 1.8

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\beta|x|)\mathrm{d}x=\dfrac{2\beta}{\beta^2+(2\pi\xi)^2}\Big|_{\xi=0}=\dfrac{2}{\beta}$

1.10 $h(x)=\exp(-x)\mathrm{step}(x)=\exp(-x),x>0$

$g(x)=\mathrm{step}(x)*h(x)=\int_0^{\infty}\exp[-(x-\alpha)]\mathrm{d}\alpha=1-\exp(-x),\quad x>0$

1.11 $H_1(\xi)=\mathrm{rect}(\xi),\quad H_2(\xi)=\dfrac{1}{3}\mathrm{rect}\left(\dfrac{\xi}{3}\right)$

$F(\xi)=\dfrac{1}{2}[\delta(\xi+1)+\delta(\xi-1)]$

$G_1(\xi)=H_1(\xi)F(\xi)=\dfrac{1}{2}[\delta(\xi+1)+\delta(\xi-1)]\mathrm{rect}(\xi)=0$

$G_2(\xi)=H_2(\xi)F(\xi)=\dfrac{1}{6}[\delta(\xi+1)+\delta(\xi-1)]\mathrm{rect}\left(\dfrac{\xi}{3}\right)=\dfrac{1}{6}[\delta(\xi+1)+\delta(\xi-1)]$

所以

$$g_1(x)=\mathcal{F}^{-1}\{G_1(\xi)\}=0$$

$$g_2(x)=\mathcal{F}^{-1}\{G_2(\xi)\}=\frac{1}{3}\cos 2\pi x$$

1.12 由题设知 $k\cos\alpha=2$，$k\cos\beta=-3$，$k\cos\gamma=4$

$k^2\cos^2\alpha=4$，$k^2\cos^2\beta=9$，$k^2\cos^2\gamma=16$

$k=\dfrac{2\pi}{\lambda}=\sqrt{29}$，$\lambda=\dfrac{2\pi}{\sqrt{29}}$.

$\xi=\dfrac{\cos\alpha}{\lambda}=\dfrac{1}{\pi}$，$\eta=\dfrac{\cos\beta}{\lambda}=-\dfrac{3}{2\pi}$，$\zeta=\dfrac{\cos\gamma}{\lambda}=\dfrac{2}{\pi}$

1.13 $f=\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{k}{2\pi}=\dfrac{1}{2\pi}(k_x^2+k_y^2+k_z^2)^{1/2}=\dfrac{1}{2\pi}$，

$\xi=\dfrac{\cos\alpha}{\lambda}=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{14}}$，$\eta=\dfrac{\cos\beta}{\lambda}=\dfrac{1}{\pi\sqrt{14}}$，$\zeta=\dfrac{\cos\gamma}{\lambda}=\dfrac{3}{2\pi\sqrt{14}}$

2.1 孔径平面上的透射场 $\boldsymbol{U}_0(x_0,y_0)=\mathrm{circ}\left(\dfrac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{a}\right)$，由菲涅耳衍射公式(2.5.14)知，当 $x=y=0$ 时，

得到轴上点的复振幅分布为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}(0,0;z)&=\frac{\exp(\mathrm{j}kz)}{\mathrm{j}\lambda z}\iint_{-\infty}^{\infty}\operatorname{circ}\left(\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{a}\right)\exp\left(\mathrm{j}k\frac{x_0^2+y_0^2}{2z}\right)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0\\&=\frac{\exp(\mathrm{j}kz)}{\mathrm{j}\lambda z}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\exp\left(\mathrm{j}k\frac{r^2}{2z}\right)r\mathrm{d}r\\&=-2\mathrm{j}\exp(\mathrm{j}kz)\exp\left(\mathrm{j}k\frac{a^2}{4z}\right)\sin\left(\frac{\pi a^2}{2\lambda z}\right)\\I(0,0;z)&=4\sin^2\left(\frac{\pi a^2}{2\lambda z}\right)\end{aligned}$$

2.2 设入射激光束的复振幅为 A_0,强度为 $I_0=A_0^2$. 通过透镜后的出射光场为$\boldsymbol{U}_0(x_0,y_0)=A_0P(x_0,y_0)\exp\left(-\mathrm{j}k\frac{x_0^2+y_0^2}{2f}\right)=A_0\operatorname{circ}\left(\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{D_1/2}\right)\exp\left(-\mathrm{j}k\frac{x_0^2+y_0^2}{2f}\right)$,将此式代入菲涅耳衍射公式(2.5.14),并令 $x=y=0$ 得焦点处的复振幅和光强为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}(0,0;f)&=A_0\frac{\exp(\mathrm{j}kf)}{\mathrm{j}\lambda f}\iint_{-\infty}^{\infty}\operatorname{circ}\left(\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{D_1/2}\right)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0=A_0\frac{\exp(\mathrm{j}kf)}{\mathrm{j}\lambda f}\frac{\pi D_1^2}{4}\\I(0,0;f)&=A_0^2\left(\frac{\pi D_1^2}{4\lambda f}\right)^2\approx I_0\times10^6\end{aligned}$$

2.3 模板后的透射场为 $U_t(x,y)=U_i(x,y)t(x,y)$,又因 $U_i(x,y)=1$,故 $A_i\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)=\delta\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$ 而 $T\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)=\frac{1}{2}\delta\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)+\frac{1}{4}\delta\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}-\frac{1}{3\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)+\frac{1}{4}\delta\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}+\frac{1}{3\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$ 于是模板后的角谱为

$$\begin{aligned}A_t\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)&=A_i\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)*T\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)\\&=\frac{1}{2}\delta\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)+\frac{1}{4}\delta\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}-\frac{1}{3\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)+\frac{1}{4}\delta\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}+\frac{1}{3\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)\end{aligned}$$

2.4 注意到等腰直角三角形三个边的方程分别为 $y_0=x_0$,$y_0=-x_0$,$x_0=a$.由(2.6.10)式得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}(x,y)&=\boldsymbol{c}'\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{t}(x_0,y_0)\exp[-\mathrm{j}2\pi(\xi x_0+\eta y_0)]\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0\\&=\boldsymbol{c}'\int_0^a\mathrm{d}x_0\int_{-x_0}^{x_0}\exp[-\mathrm{j}2\pi(\xi x_0+\eta y_0)]\mathrm{d}y_0\\&=\frac{\mathrm{j}\boldsymbol{c}'a}{2\pi\eta}\{\exp[-\mathrm{j}\pi(\xi+\eta)a]\operatorname{sinc}(\xi+\eta)a+\exp[-\mathrm{j}\pi(\xi-\eta)]\operatorname{sinc}(\xi-\eta)a\}\end{aligned}$$

其中 $\xi=\frac{x}{\lambda f}$,$\eta=\frac{y}{\lambda f}$.

2.5 由于孔径上的场没有相位变化,则孔径的透过率函数 $t(x,y)$为实函数,于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}(\xi,\eta)&=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{t}(x,y)\exp[-\mathrm{j}2\pi(\xi x+\eta y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\left[\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{t}(x,y)\exp[\mathrm{j}2\pi(\xi x+\eta y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^*\\&=\boldsymbol{T}^*(-\xi,-\eta)\end{aligned}$$

所以

$$I(\xi,\eta)=\boldsymbol{T}(\xi,\eta)\boldsymbol{T}^*(\xi,\eta)=\boldsymbol{T}^*(-\xi,-\eta)\boldsymbol{T}(-\xi,-\eta)=I(-\xi,-\eta)$$

2.6 设开孔的对称轴为 AB,直线 CD 是衍射图面上的过对称中心 O 并与开孔对称轴 AB 平行的直线.P,Q 是衍射图面上对称于 CD 的两点,由于对称性,P 和 Q 具有相同的强度.由 2.5 题可知,将它们以 O 点为中心旋转 π,P,Q 分别到达 P',Q',因它们与 P,Q 强度相同,所以 P,Q 和 P',Q' 四点的强度相同,最终强度分布对于过 O 点与 CD 垂直的 $C'D'$ 也是对称的.因此,若开孔相对于 m 条直线是对称的,那么衍射图样就对于通过对称中心的 $2m$ 条直线是对称的.

但在 m 为偶数的情况下,$2m$ 条直线中每两条互相重合变成一条直线,也就变成是对于 m 条直线是对称的了.

即使 m 比较大，m 为偶数的开孔的衍射图形比 m 为奇数的开孔的衍射图形简单．

2.7 我们把实孔径函数的夫琅禾费衍射图样的复振幅分布写成实部和虚部的形式，即

$$C+\mathrm{j}S=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{U}_0(x,y)\cos 2\pi(\xi x+\eta y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\mathrm{j}\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{U}_0(x,y)\sin 2\pi(\xi x+\eta y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

衍射图样的强度由 $I=C^2+S^2$ 来给出．为使它为零，必须使 C 和 S 都为零．因为 C 和 S 各自为零的轨迹是曲线，所以强度为零是它们的交点，即强度为零处是“点”的形式表现出来的．然而，若开孔对于原点对称，即 $\boldsymbol{U}_0(x,y)=\boldsymbol{U}_0(-x,-y)$，这时 $S=0$，强度为零的轨迹是用 $C=0$ 表示的曲线，在衍射图样中形成条纹花样．

2.8 假设某个小孔的透过率为 $t_0(x_0,y_0)$，它的频谱是 $T_0(\xi,\eta)$．若在每个孔径内取一个位置相应的点 $O_n(\alpha_n,\beta_n)$来代表该孔的位置，则整个衍射屏的透过率 $t(x_0,y_0)$可以表示成 N 个小孔透过率的组合，即

$$t(x_0,y_0)=\sum_{n=1}^{N}t_0(x_0-\alpha_n,y_0-\beta_n)=t_0(x_0,y_0)*\sum_{n=1}^{N}\delta(x_0-\alpha_n,y_0-\beta_n)$$

其衍射场分布为

$$\boldsymbol{T}(\xi,\eta)=F\{t(x_0,y_0)\}=\boldsymbol{T}_0(\xi,\eta)\sum_{n=1}^{N}\exp[-\mathrm{j}2\pi(\xi\alpha_n+\eta\beta_n)]$$

衍射图样的强度分布为

$$I(\xi,\eta)=|\boldsymbol{T}_0(\xi,\eta)|^2\left|\sum_{n=1}^{N}\exp[-\mathrm{j}2\pi(\xi\alpha_n+\eta\beta_n)]\right|^2=|\boldsymbol{T}_0(\xi,\eta)|^2A(\xi,\eta)$$

这就是所谓的阵列定理，第一个因子相当于把某一个小孔的相应点移到原点（$\alpha_n=\beta_n=0$）时的单孔夫琅禾费衍射图样；第二个因子相当于 N 个点源分别位于(α_n,β_n)时在观察面上形成的干涉图样．第一个因子称为形状因子，它取决于单个小孔的衍射；第二个称为阵列因子，只取决于小孔的相互排列情况，而与衍射小孔本身的形状无关．

如果各衍射小孔的位置 α_n,β_n 是随机分布的，则可用概率论中的随机行走问题来计算 $A(\xi,\eta)$，其主要特性是

$\xi=\eta=0$ 时，$A(0,0)=N^2$

$\xi\neq 0,\eta\neq 0$ 时，

$$\begin{aligned}A(\xi,\eta)&=\left|\sum_{n=1}^{N}\exp[-\mathrm{j}2\pi(\xi\alpha_n+\eta\beta_n)]\right|^2\\&=\sum_m\sum_n\exp\{-\mathrm{j}2\pi[\xi(\alpha_m-\alpha_n)+\eta(\beta_m-\beta_n)]\}\\&=\sum_{m=n}\sum+\sum_{m\neq n}\sum\end{aligned}$$

其中 $\sum_{m=n}\sum=N$，而第二个求和项取+1和−1之间的大量值，其和为零，所以 $A(\xi,\eta)=N$．

$$I(\xi,\eta)=N|\boldsymbol{T}_0(\xi,\eta)|^2$$

2.9 这里是小孔规则排列情况

$$t(x_0,y_0)=t_0(x_0,y_0)*\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\delta(x_0-mp,y_0-nq)$$

衍射图样的复振幅分布为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}(\xi,\eta)&=\boldsymbol{T}_0(\xi,\eta)\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\exp[-\mathrm{j}2\pi(m\xi p+n\eta q)]\\&=\boldsymbol{T}_0(\xi,\eta)\exp\{-\mathrm{j}\pi[(M+1)\xi p+(N+1)\eta q]\}\frac{\sin M\pi\xi p}{\sin\pi\xi p}\frac{\sin N\pi\eta q}{\sin\pi\eta q}\end{aligned}$$

衍射图样的强度分布为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I}(\xi,\eta)&=|T_0(\xi,\eta)|^2\left|\frac{\sin M\pi\xi p}{\sin\pi\xi p}\right|^2\left|\frac{\sin N\pi\eta q}{\sin\pi\eta q}\right|^2\\&=\left|\frac{2J_1\left(\dfrac{2\pi a\sqrt{x^2+y^2}}{\lambda f}\right)}{2\pi a\sqrt{x^2+y^2}/\lambda f}\right|^2\left|\frac{\sin M\pi\dfrac{x}{\lambda f}p}{\sin\pi\dfrac{x}{\lambda f}p}\right|^2\left|\frac{\sin N\pi\dfrac{y}{\lambda f}q}{\sin\pi\dfrac{y}{xf}q}\right|^2\end{aligned}$$

2.10 (1) 将圆对称的振幅透过率函数写成直角坐标形式

$$t(x,y)=\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\exp[-\mathrm{j}a(x^2+y^2)]+\frac{1}{4}\exp[\mathrm{j}a(x^2+y^2)]\right\}\mathrm{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right)$$

其中第一项仅仅是直接透射光的振幅衰减.将第二和第三两项和透镜的相位变换因子$\exp\left[-\mathrm{j}\frac{k}{2f}(x^2+y^2)\right]$相比较可知,当用平面波垂直照射衍射屏时会产生会聚球面波,发散球面波和平面波.因此在成像和傅里叶变换性质上类似于透镜.

(2) 会聚透镜焦距 $f_1=\frac{\pi}{\lambda a}$,发散透镜焦距 $f_2=-\frac{\pi}{\lambda a}$,无会聚或发散作用的平行平面玻璃板,可看做 $f_3=\infty$.

3.1 (1) 由于原点的相位为零,于是与原点相位差为π的条件是$\frac{k}{2d_0}(x_0^2+y_0^2)=\frac{kr_0^2}{2d_0}=\pi$,$r_0=\sqrt{\lambda d_0}$.

(2) 根据(3.1.5)式,相干成像系统的点扩散函数是透镜光瞳函数的夫琅禾费衍图样,其中心位于理想像点$(\tilde{x_0},\tilde{y_0})$

$$h(x_0,y_0;x_i,y_i)=\frac{1}{\lambda^2 d_0 d_i}\iint_{-\infty}^{\infty}P(x,y)\exp\left\{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda d_i}[(x_i-\tilde{x_0})^2+(y_i-\tilde{y_0})^2]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\lambda^2 d_0 d_i}B\left\{\mathrm{circ}\left(\frac{r}{a}\right)\right\}=\frac{1}{\lambda^2 d_0 d_i}\frac{aJ_1(2\pi a\rho)}{\rho}$$

式中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$,而

$$\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}=\sqrt{\left(\frac{x_i-\tilde{x_0}}{\lambda d_i}\right)^2+\left(\frac{y_i-\tilde{y_0}}{\lambda d_i}\right)^2} \tag{1}$$

在点扩散函数的第一个零点处,$J_1(2\pi a\rho_0)=0$,此时应有 $2\pi a\rho_0=3.83$,即

$$\rho_0=\frac{0.61}{a} \tag{2}$$

将(2)式代入(1)式,并注意观察点在原点($x_i=y_i=0$),于是得

$$r_0=\frac{0.61\lambda d_0}{a} \tag{3}$$

(3) 根据线性系统理论,像面上原点处的场分布,必须是物面上所有点在像面上的点扩散函数对于原点的贡献 $\boldsymbol{h}(x_0,y_0;0,0)$.按照上面的分析,如果略去 $\boldsymbol{h}$ 第一个零点以外的影响,即只考虑 $\boldsymbol{h}$ 的中央亮斑对原点的贡献,那么这个贡献仅仅来自于物平面原点附近 $r_0\leqslant 0.61\lambda d_0/a$ 范围内的小区域.当这个小区域内各点的相位因子 $\exp[\mathrm{j}kr_0^2/2d_0]$ 变化不大,就可认为(3.1.3)式的近似成立,而将它弃去.假设小区域内相位变化不大于几分之一弧度(例如π/16)就满足以上要求,则 $kr_0^2/2d_0\leqslant\pi/16$,$r_0^2\leqslant\lambda d_0/16$ 也即

$$a\geqslant 2.44\sqrt{\lambda d_0} \tag{4}$$

例如 $\lambda=600\mathrm{nm}$,$d_0=600\mathrm{mm}$,则光瞳半径 $a\geqslant 1.46\mathrm{mm}$,显然这一条件是极易满足的.

3.2 (1) 斜入射的单色平面波在物平面上产生的场为 $A\exp(\mathrm{j}kx_0\sin\theta)$,为确定起见设 $\theta>0$,则物平面上的透射光场为

$$\boldsymbol{U}_0(x_0,y_0)=A\exp(\mathrm{j}kx_0\sin\theta)t(x_0,y_0)=\frac{A}{2}\left\{\exp\left(\mathrm{j}2\pi x_0\frac{\sin\theta}{\lambda}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\exp\left[\mathrm{j}2\pi x_0\left(f_0+\frac{\sin\theta}{\lambda}\right)\right]+\frac{1}{2}\exp\left[-\mathrm{j}2\pi x_0\left(f_0-\frac{\sin\theta}{\lambda}\right)\right]\right\}$$

其频谱为

$$\boldsymbol{A}(\xi,\eta)=\mathcal{F}\{\boldsymbol{U}_0(x_0,y_0)\}$$

$$=\frac{A}{2}\left\{\delta\left(\xi-\frac{\sin\theta}{\lambda}\right)+\frac{1}{2}\delta\left[\xi-\left(f_0+\frac{\sin\theta}{\lambda}\right)\right]+\frac{1}{2}\delta\left[\xi-\left(-f_0+\frac{\sin\theta}{\lambda}\right)\right]\right\}$$

由此可见,相对于垂直入射照明,物频谱沿 ξ 轴整体平移了 $\sin\theta/\lambda$ 距离.

(2) 欲使像面有强度变化,至少要有两个频谱分量通过系统.系统的截止频率 $\rho_c=D/4\lambda f$,于是要求

$$\frac{\sin\theta}{\lambda}\leqslant\frac{D}{4\lambda f},\quad -\frac{D}{4\lambda f}\leqslant -f_0+\frac{\sin\theta}{\lambda}\leqslant\frac{D}{4\lambda f}$$

由此得

$$\lambda f_0 - \frac{D}{4f} \leqslant \sin\theta \leqslant \frac{D}{4f} \tag{1}$$

θ角的最大值为

$$\theta_{\max} = \arcsin\left(\frac{D}{4f}\right) \tag{2}$$

此时像面上的复振幅分布和强度分布为

$$\boldsymbol{U}_i(x_i, y_i) = \frac{A}{2}\exp\left(\mathrm{j}2\pi x_i \frac{D}{4\lambda f}\right)\left[1 + \frac{1}{2}\exp(-\mathrm{j}2\pi x_i f_0)\right]$$

$$I_i(x_i, y_i) = \frac{A^2}{4}\left[\frac{5}{4} + \cos 2\pi f_0 x\right]$$

(3) 照明光束的倾角取最大值时,由(1)式和(2)式可得

$$\lambda f_0 - \frac{D}{4f} \leqslant \frac{D}{4f}$$

即

$$f_0 \leqslant \frac{D}{2\lambda f} \quad \text{或} \quad f_{0\max} = \frac{D}{2\lambda f} \tag{3}$$

$\theta = 0$ 时,系统的截止频率为 $\rho_c = D/4\lambda f$,因此光栅的最大频率

$$f_{0\max} = \rho_c = \frac{D}{4\lambda f} \tag{4}$$

比较(3)和(4)式可知,当采用 $\theta = \theta_{\max}$ 倾角的平面波照明时系统截止频率提高了一倍,也就提高了系统的极限分辨率,但系统的通带宽度不变.

3.3 (1) 在(3.4.5)式中,令

$$h(x_i, y_i) = \frac{h_I(x_i, y_i)}{\iint_{-\infty}^{\infty} h_I(x_i, y_i)\mathrm{d}x_i\mathrm{d}y_i}$$

为归一化强度点扩散函数,因此(3.4.5)式可写成

$$H(\xi,\eta) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(x_i, y_i)\exp[-\mathrm{j}2\pi(\xi x_i + \eta y_i)]\mathrm{d}x_i\mathrm{d}y_i$$

而

$$H(0,0) = 1 = \iint_{-\infty}^{\infty} h(x_i, y_i)\mathrm{d}x_i\mathrm{d}y_i$$

即不考虑系统光能损失时,认定物面上单位强度点源的总光通量将全部弥漫在像面上,这便是归一化点扩散函数的意义.

(2) 不能大于 1.

(3) 对于理想成像,归一化点扩散函数是 δ 函数,其频谱为常数 1,即系统对任何频率的传递都是无损的.

3.4 由于 $h_I(x_i, y_i)$ 是实函数并且是中心对称的,即有 $h_I(x_i, y_i) = h_I^*(x_i, y_i)$,$h_I(x_i, y_i) = h_I(-x_i, -y_i)$,应用光学传递函数的定义(3.4.5)式易于证明 $H(\xi,\eta) = H^*(\xi,\eta)$,即 $H(\xi,\eta)$ 为实函数.

3.5 用(3.4.15)式来分析.首先,由于出瞳上的小圆孔是随机排列的,因此无论沿哪个方向移动出瞳计算重叠面积,其结果都一样,即系统的截止频率在任何方向上均相同.其次,作为近似估计,只考虑每个小孔自身的重叠情况,而不计和其他小孔的重叠.这时 N 个小孔的重叠面积除以 N 个小孔的总面积,其结果与单个小孔的重叠情况是一样的,即截止频为约为 $2a/\lambda d_i$,由于 $2a$ 很小,所以系统实现了低通滤波.

4.1 $\Delta\nu = \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}c = 1.5\times10^4$ 赫,$l_c = ct_c = \frac{c}{\Delta\nu} = 20\times10^3$ m.

4.2 假设每一根谱线的线型为矩形,光源的归一化功率谱为

$$\hat{G}(\nu) = \frac{1}{2\delta\nu}\left[\mathrm{rect}\left(\frac{\nu-\nu_1}{\delta\nu}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{\nu-\nu_2}{\delta\nu}\right)\right]$$

(1) 光场的复相干度为

$$\gamma(\tau) = \int_0^{\infty} \hat{G}(\nu)\exp(\mathrm{j}2\pi\nu\tau)\mathrm{d}\nu = \frac{1}{2}\mathrm{sinc}(\delta\nu\tau)\exp(\mathrm{j}2\pi\nu_1\tau)[1 + \exp(\mathrm{j}2\pi\Delta\nu\tau)]$$

式中 $\Delta\nu=\nu_2-\nu_1$,复相干度的模为

$$|\gamma(\tau)|=|\operatorname{sinc}(\delta\nu\tau)\|\cos\pi\Delta\nu\tau|$$

由于 $\Delta\nu\gg\delta\nu$,故第一个因子是 τ 的慢变化非周期函数,第二个因子是 τ 的快变化周期函数.相干时间由第一个因子决定,它的第一个零点出现在 $\tau_c=1/\delta\nu$ 的地方,τ_c 即为相干时间,故相干长度 $l_c=c\tau_c=\dfrac{c}{\delta\nu}=\dfrac{\bar{\lambda}^2}{\delta\lambda}\approx\dfrac{\bar{\lambda}^2}{\delta\lambda}$.

(2) 可见到的条纹总数 $N=\dfrac{l_c}{\lambda}=\dfrac{\bar{\lambda}}{\delta\lambda}=\dfrac{5893}{0.1}=58930$

(3) 复相干度的模中第二个因子的变化周期 $\tau=1/\Delta\nu$,故

$$\text{可见度的变化周期数 } n=\frac{\tau_c}{\tau}=\frac{\Delta\nu}{\delta\nu}=\frac{\Delta\lambda}{\delta\lambda}=\frac{6}{0.1}=60$$

$$\text{每个周期内的条纹数}=\frac{N}{n}=\frac{58930}{60}=982$$

4.3 (1) $\gamma(\tau)=\int_0^{\infty}\dfrac{1}{N}\sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2}\delta(\nu-\bar{\nu}+n\Delta\nu)\exp(\mathrm{j}2\pi\nu\tau)\mathrm{d}\nu$

$$=\frac{\exp(\mathrm{j}2\pi\bar{\nu}\tau)}{N}\sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2}\exp(-\mathrm{j}2\pi n\Delta\nu\tau)=\frac{\sin N\pi\Delta\nu\tau}{N\sin\pi\Delta\nu\tau}\exp(\mathrm{j}2\pi\bar{\nu}\tau)$$

$$|\gamma(\tau)|=\left|\frac{\sin(N\pi\Delta\nu\tau)}{N\sin(\pi\Delta\nu\tau)}\right|$$

(2) 当 $N=3$ 时

$$\gamma(\tau)=\left|\frac{\sin(3\pi\Delta\nu\tau)}{3\sin(\pi\Delta\nu\tau)}\right|$$

4.4 应用范西泰特-策尼克定理得

$$\mu(d)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}I_0\left[\delta\left(\alpha+\frac{a}{2}\right)+\delta\left(\alpha-\frac{a}{2}\right)\right]\exp\left(-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda z}d\alpha\right)\mathrm{d}\alpha}{\int_{-\infty}^{\infty}I_0\left[\delta\left(\alpha+\frac{a}{2}\right)+\delta\left(\alpha-\frac{a}{2}\right)\right]\mathrm{d}\alpha}=\cos\left(\pi a\frac{d}{\bar{\lambda}z}\right)$$

4.5 设光源所在平面的坐标为 α,β;孔平面的坐标为 x,y.点 P_1 和 P_2 的坐标为 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2).对于准单色点光源,其强度可表为

$$\boldsymbol{I}(\alpha,\beta)=\boldsymbol{I}_0\delta(\alpha-\alpha_1,\beta-\beta_1)$$

在傍轴近似下,由范西泰特-策尼克定理得

$$\mu(P_1,P_2)=\frac{\exp(\mathrm{j}\phi)\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{I}_0\delta(\alpha-\alpha_1,\beta-\beta_1)\exp\left[-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda z}(\Delta x\alpha+\Delta y\beta)\right]\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta}{\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{I}_0\delta(\alpha-\alpha_1,\beta-\beta_1)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta}$$

$$=\exp\left[\mathrm{j}\frac{\pi}{\lambda z}(x_2^2+y_2^2-x_1^2-y_1^2)\right]\exp\left[-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda z}(\Delta x\alpha_1+\Delta y\beta_1)\right]$$

因为 $|\mu(P_1,P_2)|=1$,由点光源发出的准单色是完全相干的,或者说 x,y 面上的相干面积趋于无限大.

5.1 利用点源全息图公式(5.5.13)~(5.5.15)式,取物平面上任一点来研究.为简单起见,设 $\lambda_1=\lambda_2$,参考光波和再现光波是波矢平行于 yz 平面的平面波,即 $z_p=z_r=\infty$,$x_p=x_r=0$.于是有

$$z_i=\mp z_0,\quad x_i=z_i\left(\mp\frac{x_0}{z_0}\right)$$

$$y_i=z_i\left(\frac{y_p}{z_p}\pm\frac{y_r}{z_r}\mp\frac{y_0}{z_0}\right)=z_i\left(\tan\theta_p\pm\tan\theta_r\mp\frac{y_0}{z_0}\right)$$

对于原始虚像(第二组符号)有

$$z_i=z_0,\quad x_i=x_0,\quad y_i=y_0+z_0(\tan\theta_p-\tan\theta_r)$$

对于共轭实像(第一组符号)有

$$z_i=-z_0,\quad x_i=x_0,\quad y_i=y_0-z_0(\tan\theta_p+\tan\theta_r)$$

不管是原始虚像或共轭实像,z_i 均与 x_0,y_0 无关,即不管物点在物面平上位于何处,其像点均在同一平面

内,但位置有变化,随参考光波和再现光波的不同而在像平面内发生平移.

5.2 由(5.5.13)式可得:(1) $z_i=\mp 7.7(\mathrm{cm})$;(2) $z_i=\mp 15.4(\mathrm{cm})$,$M=2$

5.3 由(5.5.13)式的第二组可得 $z_i=z_0$,$M=1$,左方,虚像.

由(5.5.13)式的第一组可得 $z_i=-z_0$,$M=1$,右方,实像.

5.4 由(5.6.12)式可得圆半径 $r_{\max}$ 的大小依次为(mm):3.16,3.8,19,38.

5.5 (1)物体位于透镜前 d_0 处,应用公式(2.6.9)注意 $q=f$,则物体 $\boldsymbol{g}(x_0,y_0)$ 在记录平面后焦面上造成的场分布为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_0(x,y)&=C'\exp\left[\mathrm{j}k\frac{f-d_0}{2f^2}(x^2+y^2)\right]\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{g}(x_0,y_0)\exp[-\mathrm{j}2\pi(\xi x_0+\eta y_0)]\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0\\&=C'\exp\left[\mathrm{j}k\frac{f-d_0}{2f^2}(x^2+y^2)\boldsymbol{G}(\xi,\eta)\right]\end{aligned}$$

式中,$\boldsymbol{G}(\xi,\eta)$ 是 $\boldsymbol{g}(x_0,y_0)$ 的频谱,$\xi=x/\lambda f$,$\eta=y/\lambda f$.参考光波在后焦面上形成的场分布为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_r(x,y)&=R\exp\left[\mathrm{j}k\frac{f-d_0}{2f^2}(x^2+y^2)\right]\iint_{-\infty}^{\infty}\delta(x_0+b,y_0)\exp[-\mathrm{j}2\pi(\xi x_0+\eta y_0)]\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0\\&=R\exp\left[\mathrm{j}k\frac{f-d_0}{2f^2}(x^2+y^2)\right]\exp(\mathrm{j}2\pi\xi b)\end{aligned}$$

这里记录平面并不是物和参考光的准确傅里叶变换平面,多了一个二次相位因子,因此说全息图平面是物光场分布的准傅里叶平面.全息图平面上的光强分布为

$$I(x,y)=R^2+C'^2+|\boldsymbol{G}(\xi,\eta)|^2+RC'\exp(-\mathrm{j}2\pi\xi b)\boldsymbol{G}(\xi,\eta)+RC'\exp(\mathrm{j}2\pi\xi b)\boldsymbol{G}^*(\xi,\eta)$$

由此可见,二次相位因子已互相抵消,只有倾斜因子和物频谱,故记录了物的傅里叶频谱,但记录面又不是物的准确傅里叶变换平面,所以称为准傅里叶变换全息图.

(2)物在透镜后 $f-d_0$ 处,应用(2.6.15)式得透镜后焦面上的物场分布为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_0(x,y)&=C'\exp\left(\mathrm{j}k\frac{x^2+y^2}{2d_0}\right)\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{g}(x_0,y_0)\exp\left(-\mathrm{j}k\frac{xx_0+yy_0}{d_0}\right)\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0\\&=C'\exp\left(\mathrm{j}k\frac{x^2+y^2}{2d_0}\right)\boldsymbol{G}(\xi,\eta)\end{aligned}$$

式中 $\xi=x/\lambda d_0$,$\eta=y/\lambda d_0$. 参考光源在后焦面上形成的光场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_r(x,y)&=R\exp\left(\mathrm{j}k\frac{x^2+y^2}{2d_0}\right)\iint_{-\infty}^{\infty}\delta(x_0+b,y_0)\exp\left(-\mathrm{j}k\frac{xx_0+yy_0}{d_0}\right)\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0\\&=R\exp\left(\mathrm{j}k\frac{x^2+y^2}{2d_0}\right)\exp(\mathrm{j}2\pi b\xi)\end{aligned}$$

记录面上的光强分布为

$$I(x,y)=R^2+C'^2+|\boldsymbol{G}(\xi,\eta)|^2+C'R\boldsymbol{G}(\xi,\eta)\exp(-\mathrm{j}2\pi b\xi)+C'R\boldsymbol{G}^*(\xi,\eta)\exp(\mathrm{j}2\pi b\xi)$$

由于物光波和参考光波有相同的相位因子,可相互抵消,从而得到物体的准傅里叶变换全息图.

5.6 (1)对于散射物体的菲涅耳全息图,物体与底片之间的关系是点面对应关系,即每一物点所发出的光波都直接照射到记录介质的整个平面上;反过来,菲涅耳全息图上的每一点都包含了物体各点的全部信息,称为全息图的"冗余"性.这意味着只要一小块全息图就可完整再现原始物的像.因此,局部区域的划痕和脏迹并不影响物的完整再现,甚至取出一小块仍能完整再现原始物体的像.

(2)虽然,冗余的各小块并不带来新的信息,但各小块再现像的叠加提高了像的信噪比,增加了像的亮度.

其次,一个物点再现为一个像点是在假定全息记录介质即全息图为无限大的情况下得出的.对于有限大小的全息图,物点的再现像是一个衍射斑,全息图越小衍射斑越大,分辨率越低,碎块的再现像分辨率越低.

最后,通过全息图来观察再现像,尤如通过橱窗看里面的陈列品一样,如橱窗的一部分被遮档,有些物品就可能看不到.因此,小块全息图再现时,视场较小.

5.7 将点源置于透镜前焦点,由于透镜有像差,通过透镜出射的波面 Σ_0 不为平面.参考光波用平面波,在全息图平面上物光和参考光波的复振幅分布为

$$\boldsymbol{U}_0(x,y)=A\exp[\mathrm{j}\varphi_0(x,y)],\quad \boldsymbol{U}_r(x,y)=R\exp(\mathrm{j}kx\sin\theta)$$

全息图上的光强分布为

$$I(x,y)=A^2+R^2+AR\exp\{\mathrm{j}[\varphi_0(x,y)-kx\sin\theta]\}+AR\exp\{-\mathrm{j}[\varphi_0(x,y)-kx\sin\theta]\}$$

全息图的振幅透过率为

$$\boldsymbol{t}=t_b+\beta' AR\exp\{\mathrm{j}[\varphi_0(x,y)-kx\sin\theta]\}+\beta' AR\exp\{-\mathrm{j}[\varphi_0(x,y)-kx\sin\theta]\}$$

再现时用参考光波的共轭波,即 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{R}^*$,再现光波场为

$$\boldsymbol{U}(x,y)=\boldsymbol{R}^*\boldsymbol{t}=Rt_b\exp(-\mathrm{j}kx\sin\theta)+\beta' AR\exp\{\mathrm{j}[\varphi_0(x,y)-2kx\sin\theta]\}$$
$$+\beta' AR\exp[-\mathrm{j}\varphi_0(x,y)]$$

如果使 $\exp[-\mathrm{j}\varphi_0(x,y)]$代表的光波 Σ_0^* 通过透镜,则与透镜所产生的有像差的波面 Σ_0 形状相同,方向相反,再经过透镜后可变成平面波.因此,在焦点平面上形成一个理想系统的衍射斑,如图题 5.7(b)所示.而其他两项不在轴线方向而发散了.

实验表明,采用全息图校正板后,在有限视场的情况下可以改善成像质量.但也有如下缺点:全息图的衍射效率低;由于全息图存在色散效应,必须采用单色光;全息图校正又引入了自身的像差.

5.8 在彩虹全息照相中使用狭缝的目的是为了能在白光照明下再现准单色像.在普通全息照相中,若用白光照明全息图再现时,不同波长的光同时进入人眼,我们将同时观察到相互错位的不同颜色的再现像,造成再现像的模糊,即色模糊.在彩虹全息照相中,由于狭缝起了分色作用,再现过程中不同波长的光对应不同的水平狭缝位置,通过某一狭缝位置只能看到某一准单色的像,从而避免了色模糊.

在彩虹全息照相中,为了便于双眼观察,参考平面波的选择总是使全息图的光栅结构主要沿水平方向,因而色散沿竖直方向.狭缝沿水平方向放置,这样的色散方向与狭缝垂直,即色模糊主要发生在与狭缝垂直的方向上.这样做的结果便于人眼上下移动选择不同颜色的准单色像.

5.9 傅里叶变换全息图的核心是:(1)通过一个傅里叶变换装置将频谱记录下来;(2)再通过一个傅里叶装置将物谱还原成物.因此,不管记录和再现装置有何具体差异,只要有傅里叶变换功能即可.

当把物体置于变换透镜的前焦面,若用平行光照明,则透镜的后焦面为物的标准频谱面;若用点光源照明,则点光源的物像共轭面即为物的标准频谱面.因此,记录时无论有平行光或点光源照明,均可在相应的共轭面处记录下标准的物谱.同样,再现时无论用平行光照明或点光源照明均可在共轭面处得到物像.平行光照明和点光源照明可任意配置,这两种方式是独立的.

5.10 (1)选择参考光源位于坐标的原点,且 y 轴方向向下,则在公式 $\eta=(y_o-y_r)/\lambda z$ 中

$$y_{o\max}=0.2\text{mm},\quad y_{o\min}=0.1\text{mm},\quad y_r=0,\quad z=20\text{mm}$$

$$\eta_{\max}=\frac{0.2}{10^{-7}\times 20}=10^5\,(\text{周}/\text{mm}),\quad \eta_{\min}=\frac{0.1}{10^{-7}\times 20}=0.5\times 10^5\,(\text{周}/\text{mm})$$

因此,这样一张全息图所记录的空间频率范围为

$$0.5\times 10^5\leqslant\eta\leqslant 10^5$$

(2)当用波长 600mm 的单色平面波垂直照射这张全息图时,设 $\boldsymbol{U}(x,y,0)$为透过全息图的光场复振幅分布,则它的角谱为

$$\boldsymbol{A}\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)=\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{U}(x,y,0)\exp\left[-\mathrm{j}2\pi\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}x+\frac{\cos\beta}{\lambda}y\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由于 $\xi=\cos\alpha/\lambda$,$\eta=\cos\beta/\lambda$,所以

$$\boldsymbol{A}\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)=\begin{cases}\text{不为零}, & 0.5\times 10^5\leqslant\cos\beta/\lambda\leqslant 10^5\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

根据角谱传播公式

$$\boldsymbol{A}\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda},z\right)=\boldsymbol{A}\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda},0\right)\exp\left[\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda}z\sqrt{1-(\lambda\xi)^2-(\lambda\eta)^2}\right]$$

因为

$$(\eta_{\min}\lambda)^2=(0.5\times 10^5\times 6\times 10^{-4})^2=(30)^2\gg 1$$

所以

$$1-(\lambda\xi)^2-(\lambda\eta)^2<0$$

这就表明,全息图所透过的波是倏逝波,在全息图后几个波长的距离内就衰减为零,没有波会通过透镜再现成像,故实验不会成功.

6.1 (1) 假定物的空间尺寸和频宽均是有限的.设物面的空间尺寸为 Δx,Δy;频宽为 $2B_x$,$2B_y$.根据抽样定理,抽样间距 δx 和 δy 必须满足 $\delta x \leqslant 1/2B_x$,$\delta y \leqslant 1/2B_y$ 才能使物复原.故抽样点总数 N(即空间带宽积 SW 为)

$$N = \frac{\Delta x}{\delta x} \cdot \frac{\Delta y}{\delta y} = \Delta x \Delta y (2B_x)(2B_y) = SW = 10 \times 10 \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) = 10^4$$

(2) 罗曼计算全息图的编码方法是在每一个抽样单元里用开孔的大小和开孔的位置来编码物光波在该点的振幅和相位.根据抽样定理,在物面上的抽样单元数应为物面的空间带宽积,即 $N = SW = 10^4$. 要制作傅里叶变换全息图,为了不丢失信息,空间带宽积应保持不变,故在谱面上的抽样点数仍应为 $N = 10^4$.

(3) 对于修正离轴参考的编码方法,为满足离轴的要求,载频 α 应满足:$\alpha \geqslant B_x$.

为满足制作全息图的要求,其抽样间隔必须满足 $\delta x \leqslant 1/4B_x$,$\delta y \leqslant 1/2B_y$.因此其抽样点数为

$$N = \frac{\Delta x}{\delta x} \cdot \frac{\Delta y}{\delta y} = \Delta x \Delta y (4B_x)(2B_y) = 10 \times 10 \times 20 \times 10 = 2 \times 10^4$$

(4) 两种编码方法的抽样点数为 2 倍关系,这是因为,在罗曼型编码中,每一抽样单元编码一复数;在修正离轴型编码中,每一抽样单元编码一实数.

修正离轴加偏置量的目的是使全息函数变成实值非负函数,每个抽样单元都是实的非负值,因此不存在位置编码问题,比同时对振幅和相位进行编码的方法简便.但由于加了偏置分量,增加了记录全息图的空间带宽积,因而增加了抽样点数.避免了相位编码是以增加抽样点数为代价的.

6.2 设物的频宽为 $(2B_x, 2B_y)$.

(1) 对于载频 α 的选择

光学离轴,由图 6.2.5(b)可知,$\alpha \geqslant 3B_x$.

修正离轴,由图 6.2.5(d)可知:$\alpha \geqslant B_x$.

载频的选择是为了保证全息函数在频域中各结构分量不混叠.

(2) 对于制作计算全息图时抽样频率的选择

光学离轴全息,由图 6.2.5(c)可知:

在 x 方向的抽样频率应 $\geqslant 8B_x$,即 x 方向的抽样间距 $\delta x \leqslant 1/8B_x$.

在 y 方向的抽样频率应 $\geqslant 4B_y$,即 y 方向的抽样间距 $\delta y \leqslant 1/4B_y$.

修正离轴全息,由图 6.2.5(e)可知:

在 x 方向的抽样频率应 $\geqslant 4B_x$,即 x 方向的抽样间距 $\delta x \leqslant 1/4B_x$.

在 y 方向的抽样频率应 $\geqslant 2B_y$,即 y 方向的抽样间距 $\delta y \leqslant 1/2B_y$.

抽样间距的选择必须保证整体频谱(包括各个结构分量)不混叠.

6.3 把全息函数重写为

$$h(x,y) = \frac{1}{2}A(x,y) + \frac{1}{4}A(x,y)\exp[\mathrm{j}\phi(x,y)]\exp(-\mathrm{j}2\pi\alpha x) + \frac{1}{4}A(x,y)\exp[-\mathrm{j}\phi(x,y)]\exp(\mathrm{j}2\pi\alpha x)$$

物函数为

$$\boldsymbol{f}(x,y) = A(x,y)\exp[\mathrm{j}\phi(x,y)]$$

并且是归一化的,即 $|A(x,y)|_{\max} = 1$,参考光波 $R = 1$. 经过处理后的振幅透过率为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{t}(x,y) &= t_0 + \frac{1}{2}\beta' A(x,y) + \frac{1}{4}\beta' A(x,y)\exp[\mathrm{j}\phi(x,y)]\exp(-\mathrm{j}2\pi\alpha x) \\ &\quad + \frac{1}{4}\beta' A(x,y)\exp[-\mathrm{j}\phi(x,y)]\exp(\mathrm{j}2\pi\alpha x) \\ &= t_0 + \frac{1}{2}\beta' A(x,y) + \frac{1}{4}\beta' \boldsymbol{f}(x,y)\exp(-\mathrm{j}2\pi\alpha x) + \frac{1}{4}\beta' \boldsymbol{f}^*(x,y)\exp(\mathrm{j}2\pi\alpha x)\end{aligned}$$

其频谱为

$$\boldsymbol{T}(\xi,\eta)=\text{tb}\,\delta(\xi,\eta)+\frac{1}{2}\beta\boldsymbol{F}'(\xi,\eta)+\frac{1}{4}\beta\boldsymbol{F}(\xi-\alpha,\eta)+\frac{1}{4}\beta\boldsymbol{F}(-\xi-\alpha,-\eta)$$

(1) 设物的带宽为 $2B_x$,$2B_y$ 如图参 6.3(a)所示 .

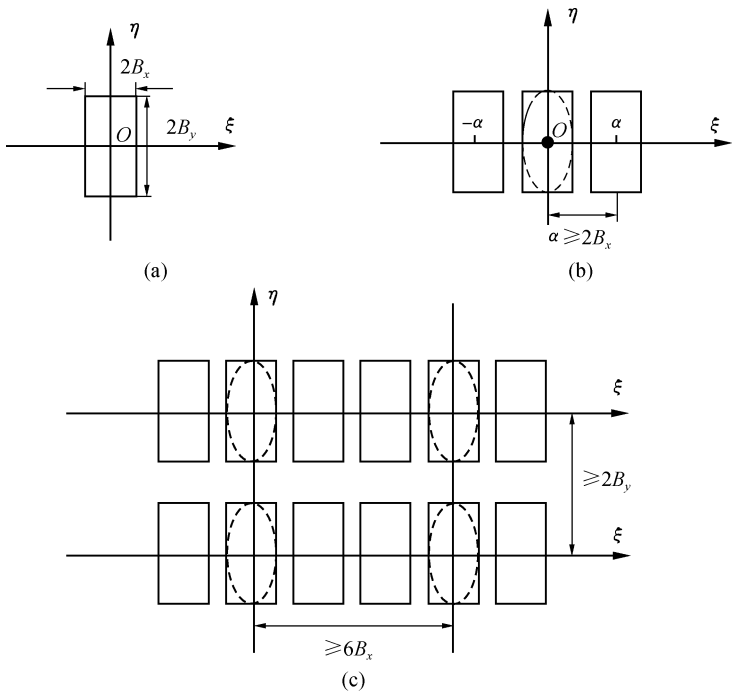
全息函数的空间频谱结构如图参 6.3(b)所示 ,载频 $\alpha\geqslant 2B_x$.

(2) 黄氏全息图的空间频率结构如图参 6.3(c)所示 ,由此可得出 :

在 x 方向的抽样频率应$\geqslant 6B_x$,即抽样间距 $\delta x\leqslant 1/6B_x$.

在 y 方向的抽样频率应$\geqslant 2B_y$,即抽样间距 $\delta y\leqslant 1/2B_y$.

抽样点数即空间带宽积为 $N=SW=\frac{x}{\delta x}\frac{y}{\delta y}=12xyB_xB_y$.



图参 6.3

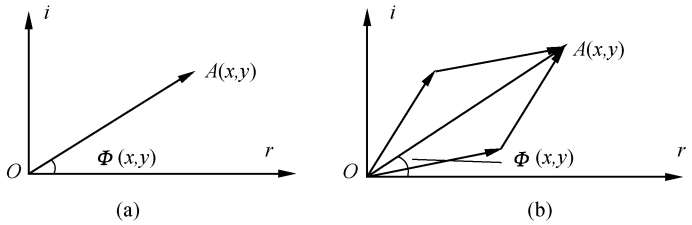
黄氏计算全息图的特点 :

(1) 占用了更大的空间带宽积(博奇全息图的空间带宽积 $SW=8xyB_xB_y$),不具有降低空间带宽积的优点 ;

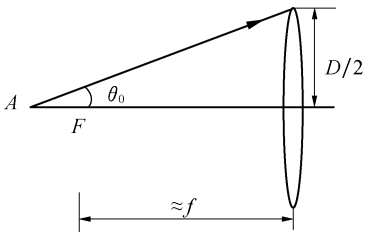
(2) 黄氏全息图具有更高的对比度 ,可以放宽对显示器和胶片曝光显影精度的要求 .

6.4　对于罗曼Ⅰ型和Ⅲ型 ,是用 $A\delta x$ 来编码振幅 $A(x,y)$,用 $\mathrm{d}\delta x$ 来编码相位 $\phi(x,y)$,在复平面上用一个相幅矢量来表示 ,如图参 6.4(a) .

对于罗曼Ⅱ型用两个相同宽度和高度的矩孔来代替Ⅰ ,Ⅲ型中的一个矩孔 .两矩孔之间的距离 $A\delta x$ 是变化的 ,用这个变化来编码振幅 $A(x,y)$.在复平面上反映为两个矢量夹角的变化 .两个矩孔中心距离抽样单元中心的位移量 $\mathrm{d}\delta x$ 用作相位 $\phi(x,y)$ 的编码 .在复平面上两矢量的合成方向即表示了 $\phi(x,y)$ 的大小 ,如图参 6.4(b)所示 .



图参 6.4



图参 8.1

8.1 显微镜是用于观察微小物体的,微小物体可近似看作一个点,物体近似位于物镜的前焦点上.设物镜直径为 D,焦距为 f,如图参 8.1 所示.对于相干照明,系统的截止频率由物镜孔径限制的最大孔径角 θ_0 决定,截止频率为 $\sin\theta_0/\lambda$.从几何上看,近似有 $\sin\theta_0 \approx D/2f$.截止频率的倒数即为分辨距,即

$$\delta_c = \frac{\lambda}{\sin\theta_0} = \frac{2\lambda f}{D}$$

对于非相干照明,由几何光学可知其分辨距为

$$\delta = 0.61\frac{\lambda}{\sin\theta_0}$$

非相干照明时显微镜的分辨率大约为相干照明时的两倍.

8.2 设光栅宽度比较大,可近似看成无穷,设周期为 d,透光部分为 a,则其透过率函数可表为

$$f(x_1) = \sum_m \mathrm{rect}\left(\frac{x_1 - md}{a}\right) = \mathrm{rect}\left(\frac{x}{a}\right) * \sum_m \delta(x_1 - md) = \mathrm{rect}\left(\frac{x}{a}\right) * \frac{1}{d}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{d}\right)$$

其频谱为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}(\xi) &= F\{f(x_1)\} = F\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{x_1}{a}\right)\right\}\frac{1}{d}F\left\{\mathrm{comb}\left(\frac{x_1}{d}\right)\right\} \\ &= a\mathrm{sinc}(a\xi)\mathrm{comb}(\mathrm{d}\xi) = \frac{a}{d}\sum_m \mathrm{sinc}(a\xi)\delta\left(\xi - \frac{m}{d}\right) \\ &= \frac{a}{d}\sum_m \mathrm{sinc}\left(\frac{ma}{d}\right)\delta\left(\xi - \frac{m}{d}\right) \end{aligned}$$

即谱点的位置由 $\xi = x_2/\lambda f = m/d$ 决定,即 m 级衍射在后焦面上的位置由下式确定:

$$x = m\lambda f/d$$

相邻衍射斑之间的间距

$$\Delta x = \lambda f/d$$

由此得焦距 f 为

$$f = \frac{\Delta x d}{\lambda} = \frac{2/40}{6328\times10^{-7}} = 79(\mathrm{mm})$$

物透明片位于透镜的前焦面,谱面为后焦面,谱面上的±5 级衍射斑对应于能通过透镜的最大空间频率应满足

$$\xi = \frac{\sin\theta}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\frac{D/2}{f} = \frac{5}{d}$$

于是求得透镜直径

$$D = 10\frac{\lambda f}{\mathrm{d}} = 10\Delta x = 20(\mathrm{mm})$$

8.3 相位物体的透过率为

$$\boldsymbol{t}(x_1, y_1) = \exp[\mathrm{j}\phi(x_1, y_1)] \approx 1 + \mathrm{j}\phi(x_1, y_1)$$

其频谱为

$$\boldsymbol{T}(\xi,\eta) = F\{1 + \mathrm{j}\phi(x_1, y_1)\} = \delta(\xi,\eta) + \mathrm{j}\Phi(\xi,\eta)$$

若在谱平面上放置细小的不透明光阑作为空间滤波器,滤掉零频背景分量,则透过的频谱为

$$\boldsymbol{T}^M(\xi,\eta) = \mathrm{j}\Phi(\xi,\eta)$$

再经过一次傅里叶变换(在反演坐标系)得

$$\boldsymbol{t}^M(x_3, y_3) = \mathrm{j}\phi(x_3, y_3)$$

强度分布为

$$I(x_3, y_3) = |\mathrm{j}\phi(x_3, y_3)|^2 = \phi^2(x_3, y_3)$$

因此在像面上得到了正比于物体相位平方分布的光强分布,实现了将相位转换为强度分布的目的.不过光强不是相位的线性函数,这给分析带来了困难.

8.4 相位物体的频谱为

$$\boldsymbol{T}(\xi,\eta) = \delta(\xi,\eta) + \mathrm{j}\Phi(\xi,\eta)$$

现在用一个滤波器使零频减弱,同时使高频产生一个$\pm\pi/2$的相移,即滤波器的透过率表达式为

$$\boldsymbol{H}(\xi,\eta)=\begin{cases}\pm \mathrm{j}\alpha, & \text{在 } \xi=\eta=0 \text{ 的小范围内}\\ 1, & \text{其他}\end{cases}$$

于是

$$\boldsymbol{T}^{M}(\xi,\eta)=\boldsymbol{H}(\xi,\eta)\boldsymbol{T}(\xi,\eta)=\pm \mathrm{j}\alpha\delta(\xi,\eta)+\mathrm{j}\Phi(\xi,\eta)$$

像的复振幅分布为

$$\boldsymbol{t}^{M}(x_3,y_3)=\pm \mathrm{j}\alpha+\mathrm{j}\phi(x_3,y_3)$$

像强度分布为

$$\begin{aligned}I(x_3,y_3)&=|\pm \mathrm{j}\alpha+\mathrm{j}\phi(x_3,y_3)|^2=|\alpha\pm\phi(x_3,y_3)|^2\\&=\alpha^2\pm 2\alpha\phi(x_3,y_3)+\phi^2(x_3,y_3)\\&\approx\alpha^2\pm 2\alpha\phi(x_3,y_3)\end{aligned}$$

像强度分布与相位分布成线性关系,易于分析.

8.5 扫描点的表达式为

$$f(x_1,y_1)=\sum_m\sum_n\delta(x_1-mx_0,y_1-ny_0)$$

其频谱为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(\xi,\eta)&=\sum_m\sum_n\exp[-\mathrm{j}2\pi(\xi mx_0+\eta ny_0)]\\&=\frac{1}{x_0y_0}\sum_m\sum_n\delta(\xi-m/x_0,\eta-n/y_0)\\&=\frac{1}{x_0y_0}\sum_m\sum_n\delta\left(\frac{x_2}{\lambda f}-\frac{m}{x_0},\frac{y_2}{\lambda f}-\frac{n}{y_0}\right)\end{aligned}$$

在上式的化简中应用了公式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(\pm \mathrm{j}2\pi nax)=\frac{1}{a}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(x-\frac{n}{a}\right)$$

由此可见,点状结构的频谱仍然是点状结构,但点与点之间的距离不同.扫描点频谱出现的位置为

$$\frac{x_2}{\lambda f}=\frac{m}{x_0},\quad \frac{y_2}{\lambda f}=\frac{n}{y_0}$$

点状结构是高频,所以采用低通滤波将其滤掉.低通滤波器圆孔半径为

$$r=x_2=\frac{\lambda f}{x_0}=\frac{6328\times10^{-7}\times100}{0.2}=3.164(\mathrm{mm})$$

能传递的最高空间频率为

$$\xi=\frac{\sin\theta}{\lambda}=\frac{r}{\lambda f}=\frac{1}{\lambda f}\cdot\frac{\lambda f}{x_0}=\frac{1}{x_0}=5\quad l/\mathrm{mm}$$

即高于5 l/mm的空间频率将被滤掉,故输出图像的分辨率为5 l/mm.

8.6 考虑到系统孔径有限,一般用几何光学近似,引入光瞳函数$P(x,y)$,根据题意其表达式为

$$P(x,y)=\mathrm{rect}\left(\frac{x}{30}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y}{30}\right)$$

设系统的输入面位于透镜的前焦面,物透明片的复振幅分布为$\boldsymbol{f}(x_1,y_1)$它的频谱分布为$\boldsymbol{F}(\xi,\eta)$,透镜后焦面上的场分布

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_f(\xi,\eta)&=\boldsymbol{C}'\ F\left\{\boldsymbol{f}(x_1,y_1)\mathrm{rect}\left(\frac{x_1}{30}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y_1}{30}\right)\right\}\\&=900\boldsymbol{C}'\boldsymbol{F}(\xi,\eta)*\mathrm{sinc}(30\xi)\mathrm{sinc}(30\eta)\exp[\mathrm{j}2\pi(\xi x_2+\eta y_2)]\end{aligned}$$

式中$\xi=x_2/\lambda f$,$\eta=y_2/\lambda f$.由$\boldsymbol{U}_f$的表达式可见,频谱面上能分辨的细节由$\mathrm{sinc}(30\xi)\mathrm{sinc}(30\eta)$决定.取一个方向来看,将sinc函数由最大降为零的宽度取为最小分辨单元,即要求满足$30\Delta\xi=1$或$30\Delta x_2/\lambda f=1$,于是有

$$\Delta x_2=\frac{\lambda f}{30}=\frac{6328\times10^{-7}\times7}{30}=2.1\times10^{-3}(\mathrm{mm})=2.1\mu\mathrm{m}$$

因为频谱平面模片也有同样细节，所以对准误差最大也不允许超过它的一半，约 1μm.

10.1 如图参 10.1 所示，先将 $t(x)$展开成傅里叶级数

$$t(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{a+b}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{a+b}\right)$$

式中

$$a_0=\frac{2a}{a+b}=2R_0$$

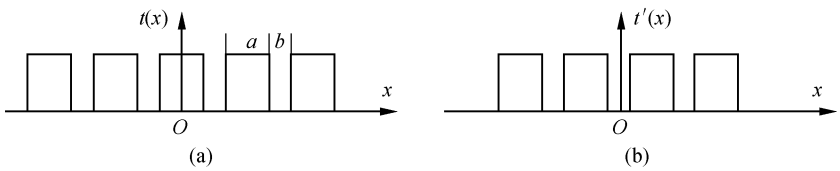
$$a_n=\begin{cases}\dfrac{2}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi}{2}\cos\dfrac{n\pi(a-b)}{2(a+b)}, & n=\text{奇}\\ \dfrac{2}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi(a-b)}{2(a+b)}\cos\dfrac{n\pi}{2}, & n=\text{偶}\end{cases}$$

$$b_n=0$$

所以

$$t(x)=R_0+\sum_{n=\text{奇}}\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi(a-b)}{2(a+b)}\cos\frac{2n\pi x}{a+b}+\sum_{n=\text{偶}}\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi(a-b)}{2(a+b)}\cos\frac{2n\pi x}{a+b}$$

$$=R_0+R_1+R_2$$



图参 10.1

第一次曝光得

$$I_A t(x)=I_A R_0+I_A R_1+I_A R_2$$

对于 $t'(x)$是将光栅向 x 的负方向移动半个周期即$(a+b)/2$，将它展开成傅里叶级数得

$$t'(x)=R_0-R_1+R_2$$

第二次曝光得

$$I_B t'(x)=I_B R_0-I_B R_1+I_B R_2$$

$$\text{总曝光量}=(I_A+I_B)(R_0+R_2)+(I_A-I_B)R_1$$

即图像和的信息受到光栅偶数倍频的调制，图像差的信息受到光栅奇数倍频的调制.

10.2 (1) 参看图题 10.2(a)，设物面坐标为 x_1，y_1；胶片坐标为 x_2，y_2. 则参考光波在记录胶片上造成的场分布为

$$\boldsymbol{U}_r(x_2,y_2)=A\exp(-\mathrm{j}2\pi\alpha y_2) \tag{1}$$

式中 A 为常数，$\alpha=\sin\theta/\lambda$ 为空间频率.物透明片在记录胶片上造成的场分布为

$$\boldsymbol{U}_r(x_2,y_2)=C\exp\left[\mathrm{j}\frac{\pi}{\lambda f}(x_2^2+y_2^2)\right]\boldsymbol{S}(\xi,\eta)$$

式中 $\boldsymbol{S}(\xi,\eta)$为 $\boldsymbol{s}(x_1,y_1)$的频谱，且 $\xi=x_2/\lambda f$，$\eta=y_2/\lambda f$.胶片上的光强分布为

$$I(x_2,y_2)=|\boldsymbol{U}_r(x_2,y_2)+\boldsymbol{U}_1(x_2,y_2)|^2$$

$$=A^2+C^2|\boldsymbol{S}(\xi,\eta)|^2+CA\boldsymbol{S}^*(\xi,\eta)\exp\left[-\mathrm{j}2\pi\left(\frac{x_2^2+y_2^2}{2\lambda f}+\alpha y_2\right)\right]$$

$$+CA\boldsymbol{S}(\xi,\eta)\exp\left[\mathrm{j}2\pi\left(\frac{x_2^2+y_2^2}{2\lambda f}+\alpha y_2\right)\right] \tag{2}$$

将曝过光的胶片显影后制成透明片，使它的复振幅透过率正比于照射光的强度，即

$$\boldsymbol{t}(x_2,y_2)\propto I(x_2,y_2) \tag{3}$$

将制得的透明片作为频率平面模片，放在图题 10.2(b)所示的滤波系统中.要综合出脉冲响应 $\boldsymbol{s}(x,y)$或 $s^*(-x,-y)$，只要考察当输入信号为单位脉冲 $\delta(x,y)$时，在什么条件下系统的脉冲响应为 $\boldsymbol{s}(x,y)$或 $s^*(-x,-y)$.

参看(b)图,当输入信号为 $\delta(x_1,y_1)$时,在 L_2 的后焦面上形成的光场复振幅分布,根据(2.6.9)式得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_2(x_2,y_2)&=\exp\left[\mathrm{j}2\pi\left(1-\frac{d}{f}\right)\frac{x_2^2+y_2^2}{2\lambda f}\right]\iint_{-\infty}^{\infty}\delta(x_1,y_1)\exp\left[-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda f}(x_2x_1+y_2y_1)\right]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1\\&=\exp\left[\mathrm{j}2\pi\left(1-\frac{d}{f}\right)\frac{x_2^2+y_2^2}{2\lambda f}\right]\end{aligned}\tag{4}$$

透过频率平面模片的光场分布,由(2),(3)和(4)式得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_2'(x_2,y_2)=\boldsymbol{U}_2(x_2,y_2)\boldsymbol{t}(x_2,y_2)\propto&\left[A^2+C^2\mid\boldsymbol{S}(\xi,\eta)\mid^2\right]\exp\left[\mathrm{j}2\pi\left(1-\frac{d}{f}\right)\frac{x_2^2+y_2^2}{2\lambda f}\right]\\&+CA\boldsymbol{S}^*(\xi,\eta)\exp\left[-\mathrm{j}2\pi\left(\frac{d}{f}\frac{x_2^2+y_2^2}{2\lambda f}+\alpha y_2\right)\right]\\&+CA\boldsymbol{S}(\xi,\eta)\exp\left\{\mathrm{j}2\pi\left[\left(2-\frac{d}{f}\right)\frac{x_2^2+y_2^2}{2\lambda f}+\alpha y_2\right]\right\}\end{aligned}\tag{5}$$

如果要使系统是脉冲响应为 $s(x,y)$的滤波器,应当利用(5)式中含有 $\boldsymbol{S}(\xi,\eta)$的第三项,应要求该项的二次相位因子为零,即有

$$d=2f\tag{6}$$

这时的输出为(在反演坐标系中)

$$\boldsymbol{U}_3(x_3,y_3)=\boldsymbol{S}(x_3,y_3+\alpha\lambda f)\tag{7}$$

(2)若要使系统的脉冲响应为 $\boldsymbol{s}^*(-x,-y)$的匹配滤波器,应当利用(5)式中的第二项,要求 $d=0$,则在输出面上形成的光场复振幅分布为(在反演坐标系中)

$$\boldsymbol{U}_4(x_3,y_3)=\boldsymbol{s}^*[-x_3,-(y_3-\alpha\lambda f)]\tag{8}$$

10.3 参见图题 10.3,设用单位振幅的平面波垂直照明两张振幅透过率为 $h(x_1,y_1)$和 $g(x_1,y_1)$输入透明片,则透过两张透明片的光场的复振幅分布在透镜 L_2 的后焦面上形成的强度分布为(略去了二次相位因子)

$$\begin{aligned}I(x_2,y_2)=&\left|F\left\{h\left(x_1,y_1-\frac{Y}{2}\right)+g\left(x_1,y_1+\frac{Y}{2}\right)\right\}\right|^2\\=&\mid\boldsymbol{H}(\xi,\eta)\mid^2+\mid\boldsymbol{G}(\xi,\eta)\mid^2+\boldsymbol{H}^*(\xi,\eta)\boldsymbol{G}(\xi,\eta)\exp(\mathrm{j}2\pi Y\eta)\\&+\boldsymbol{H}(\xi,\eta)\boldsymbol{G}^*(\xi,\eta)\exp(-\mathrm{j}2\pi Y\eta)\end{aligned}\tag{1}$$

式中 $\xi=x_2/\lambda f,\eta=y_2/\lambda f$.

用照相胶片记录(1)式所表达的强度分布,从而可制得 $\gamma=2$ 的正透明片,它的复振透过率为

$$\boldsymbol{t}(x_2,y_2)=\beta I(x_2,y_2)\tag{2}$$

将制得的正透明片置于透镜前再次进行傅里叶变换,若同样用单位振幅的单色平面波垂直照明,则透过透明片光场的复振幅分布在透镜后焦面形成的光场的复振幅分布,略去二次相位因子后,在反演坐标系中可表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}(x_3,y_3)=&F^{-1}\{\mid\boldsymbol{H}(\xi,\eta)\mid^2+\mid\boldsymbol{G}(\xi,\eta)\mid^2+\boldsymbol{H}^*(\xi,\eta)\boldsymbol{G}(\xi,\eta)\exp(\mathrm{j}2\pi Y\eta)\\&+\boldsymbol{G}^*(\xi,\eta)\boldsymbol{H}(\xi,\eta)\exp(-\mathrm{j}2\pi Y\eta)\}\\=&\boldsymbol{h}(x_3,y_3)\☆\boldsymbol{h}(x_3,y_3)+\boldsymbol{g}(x_3,y_3)\☆\boldsymbol{g}(x_3,y_3)\\&+\boldsymbol{h}(x_3,y_3)\☆\boldsymbol{g}(x_3,y_3)*\delta(x_3,y_3+Y)\\&+\boldsymbol{g}(x_3,y_3)\☆\boldsymbol{h}(x_3,y_3)*\delta(x_3,y_3-Y)\end{aligned}\tag{3}$$

第三项和第四项是 $\boldsymbol{h}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 的互相关,只是中心分别在$(0,-Y)$和$(0,Y)$.

设函数 $\boldsymbol{h}$ 在 y_3 方向的宽度为 W_h,函数 $\boldsymbol{g}$ 在 y_3 方向的宽度为 W_g,并且假定 $W_h\geqslant W_g$,则由(3)式所表达的 $\boldsymbol{U}$ 中各项在 x_3y_3 平面上所处的位置,要使自相关和互相关分开,显然应满足

$$Y\geqslant\frac{3}{2}W_h+\frac{1}{2}W_g$$

10.4 由于是匀速运动,一个点便模糊成了一条线段,并考虑到归一化,具有模糊缺陷的点扩散函数为

$$h_d(x)=\frac{1}{a}\mathrm{rect}\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{0.5}\mathrm{rect}\left(\frac{x}{0.5}\right)$$

带有模糊缺陷的传递函数为

$$\boldsymbol{H}_d(\xi)=F\left\{\frac{1}{a}\mathrm{rect}\left(\frac{x}{a}\right)\right\}=\mathrm{sinc}(a\xi)=\mathrm{sinc}(0.5\xi)$$

滤波函数的透过率为

$$\boldsymbol{H}(\xi)=1/\boldsymbol{H}_e(\xi)=1/\mathrm{sinc}(0.5\xi)$$

11.1 (1) 坐标为$(-x,-y)$点的单位强度点数,投射到 $O(x,y)$上面在 P平面上造成的分布即为系统的点扩散函数,其中心位置在$(\bar{x}_d,\bar{y}_d)$,由图参 11.1 得

$$\frac{\bar{x}_d}{\Delta}=\frac{-x}{d},\quad \text{即 } \bar{x}_d=-\frac{\Delta}{d}x$$

$$\frac{\bar{y}_d}{\Delta}=\frac{-y}{d},\quad \text{即 } \bar{y}_d=-\frac{\Delta}{d}y$$

以$(\bar{x}_d,\bar{y}_d)$为中心的函数 O 的形式为

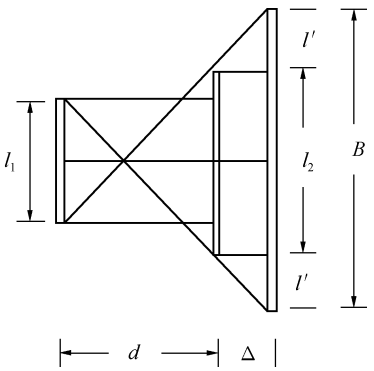
$$O(x_d-\bar{x}_d,y_d-\bar{y}_d)=O\left(x_d+\frac{\Delta}{d}x,y_d+\frac{\Delta}{d}y\right)$$

再考虑到投影面积每边的放大倍数$(d+\Delta)/d$,于是系统的点扩散函数

$$|\boldsymbol{h}(x_d,y_d;x,y)|^2=KO\left[\frac{d}{d+\Delta}\left(x_d+\frac{\Delta}{d}x\right),\frac{d}{d+\Delta}\left(y_d+\frac{\Delta}{d}y\right)\right]$$

(2) P平面上点(x_d,y_d)所接收到的强度响应为物函数 $m(x,y)$与以$(\bar{x}_d,\bar{y}_d)$为中心的点扩散函数乘积的积分,即

$$I_p(x_d,y_d)=K\iint_{-\infty}^{\infty}m(x,y)O\left[\frac{d}{d+\Delta}\left(x_d+\frac{\Delta}{d}x\right),\frac{d}{d+\Delta}\left(y_d+\frac{\Delta}{d}y\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



图参 11.1

(3) 由图参 11.1 可知

$$\frac{l'}{\Delta}=\left(\frac{l_1}{2}+\frac{l_2}{2}\right)\Big/d\quad \text{即}\quad l'=\frac{l_1+l_2}{2d}\Delta$$

而

$$B=2l'+l_2=l_2+\frac{\Delta}{d}(l_1+l_2)$$

11.4 输入 $f(x,y)$经透镜 L_1 和蝇眼透镜组,在每个电子掩膜上产生一个 $f(x,y)$的像,故在(m,n)那个探测器 D_{mn}处得到的光强输出为

$$I_{mn}=\iint f(x,y)h_{mn}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

式中 $m=1,2,\cdots,M;n=1,2,\cdots,N$.

这种相关器由于能使不同掩膜同时与输入 $f(x,y)$相关,因此大大增强了相关器的处理能力.若用做识别装置,它能识别各种不同类型的目标,故得到广泛应用.

14.4 提示:相同点:(1)从广义的信息传递和变换观点来看存在共性,干涉条纹和结构光变形条纹具有相近的形态和数学表达式;(2)两种计量方法都采用相移测量技术或者傅里叶分析方法计算相位,需要对截断相位进行相位展开;(3)虽然两种方法的测量精度和测量范围不同,但具有大致相同的相对测量精度。不同点:(1)完全不同的物理过程,一个是干涉测量,一个是结构光计量;(2)干涉计量主要用于光学波面检测,结构光计量主要用于漫反射表面检测;(3)干涉测量中光波长和结构光计量中的等效波长在数量上存在巨大差异,导致测量精度和测量范围不同.

14.6 等效波长 $\lambda_e=8.66\mathrm{mm}$,测量精度为 0.08mm.

14.9 提示:照明 LED 光源发出的强度被三角调制,如果照明光的强度变化能够与光速相比较,则通过超快速快门照相机获取到的强度依赖于摄像机与物体之间的距离。虽然不管是三角调制波在上升沿周期还是下降沿周期,入射光强度都提供距离信息,但物体反射率的影响正好相反,因此将二者结合起来,物体反射率的影响可以消除,从而隔离出距离信息.