《数值分析》课程实验报告

实验名称 实验七 线性方程组的迭代解法

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **班级** | 信息2202 | **姓名** | 徐梓乔 | **学号** | 220221100327 | **序号** |  |
| **教师** | 赵美玲 | **地点** | 数学实验中心 | | | **评分** |  |
| 1. 实验目的   1.了解并掌握雅可比迭代法和高斯-塞德尔迭代法在解线性方程组中的应用与实现。具体包括两种迭代算法的原理、算法步骤、收敛性分析及其优缺点以有效地求解线性方程组。  2.初步掌握设计和实现解线性方程组的迭代算法的方法，能够根据具体问题选择合适的迭代方法并进行程序实现。包括理解如何设计迭代算法的收敛性判定条件、如何优化算法效率、以及如何根据不同的矩阵特性（如对角占优等）调整迭代方法的细节，以提高求解效率。  二、实验过程和结果  1． 用雅可比迭代和高斯-塞德尔迭代算法解线性方程组    （1）用雅可比（Jacobi）迭代法的算法解上述方程组，并且选择不同的精度和迭代次数，观察输出结果  （2）写出高斯-塞德尔(Gauss-Seidel)迭代算法，并简述与雅可比（Jacobi）迭代算法的异同。  （3）将雅可比（Jacobi）迭代算法的程序改进为高斯-塞德尔(Gauss-Seidel)迭代算法，并在相同精度下，与雅可比（Jacobi）迭代算法的结果进行比较，写出结论并解释。  解：  （1）写出代码“雅各比迭代”，得到下列结果：    （2）考虑方程组，令，经过变换得：  写成方程组的形式就是：    即每次将迭代后新得到的数据马上使用到下一列的方程中。  相同点：两个算法都是两种方法都通过分解矩阵并逐步逼近解来求解方程组，都是在一定条件下才能收敛的算法，两者的结果都会受到初始值选择的影响，初始值的好坏可能影响收敛速度。  不同点：Jacobi迭代是同一轮次所有变量更新后才使用新的值，而Gauss-Seidel迭代是立即使用当前迭代中更新的值，因此前者每轮次需要两个存储向量，而后者只需一个存储向量，并且Gauss-Seidel的收敛速度快于Jacobi迭代。  （3）写出代码“G-S迭代”，运行得到：    很明显，根据迭代次数来看相同次数相同精度下，Gauss-Seidel迭代的收敛速度快于Jacobi迭代。  2.试用Jacobi迭代、Gauss-Seidel迭代和SOR迭代算法求解如下方程组    （1）用Jacobi迭代、Gauss-Seidel迭代求解上述方程组，并在相同精度要求下，比较收敛速度。  （2）试叙述SOR迭代算法和Gauss-Seidel迭代算法的异同；然后将Gauss-Seidel迭代算法的程序修改为SOR迭代算法，求解上述方程组（注意通过试算找到较优的松弛因子）。  在相同精度要求下，比较SOR迭代算法和Gauss-Seidel迭代算法的收敛速度。  解：  （1）带入相应的系数矩阵，分别运行文件夹2中的代码“雅各比迭代”，“G-S迭代”，得到：      可以看出在相同初值相同精度下，Gauss-Seidel迭代的收敛速度快于Jacobi迭代。  （2）相同点：两者均基于线性系统的分解思想，并逐步迭代逼近解；两者对矩阵的性质要求类似，通常要求系数矩阵是对称正定或严格对角占优矩阵(充分条件)。  不同点：SOR通过引入松弛因子能够调整迭代步长，在适当的值下，收敛速度比Gauss-Seidel更快，但需要选择适合的，否则也可能会导致发散。  由于SOR迭代涉及到松弛因子，且按照数值分析教材的介绍，松弛因子的选取一直是个未能解决的问题，为此苯人先粗略试验了一下松弛因子合适的取值：    因此我们大致的选取。    对比（1）中相同精度时的G-S迭代法，很明显的发现SOR迭代收敛快了许多。  三、思考题分析解答  1.判别两种迭代算法收敛的充分必要条件及充分条件是什么？  解：充要条件为迭代式中的矩阵谱半径小于1，  充分条件：如果系数矩阵严格对角占优或是不可约弱对角占优矩阵，则两迭代法均收敛；以及上述中的迭代式矩阵的任意矩阵范数值小于1。  2.如何由系数矩阵判别雅可比（Jacobi）迭代法和高斯-塞德尔(Gauss-Seidel)迭代法是否收敛？  解：正如（1）中充分条件所言，如果系数矩阵严格对角占优或是不可约弱对角占优矩阵，则两迭代法均收敛。  3.试总结雅各比（Jacobi）迭代法和高斯-塞德尔(Gauss-Seidel)迭代法在程序实现方面的异同。（从算法的结构和存储量上来比较）  算法结构上：雅各比迭代法每个变量的计算只使用前一次的数值，而高斯赛德尔迭代法将每个变量实时计算得出的新数值进行了使用。  存储量上：雅各比迭代由于每个变量的计算只使用前一组的数值，因此需要保存下来前一组的完整数据，有两组的存储量；而高斯赛德尔迭代法只需要一组的存储量，新的变量值直接覆盖旧值并使用。  4.试用前面程序计算如下方程组    写出你遇到的困难和解决办法。  解：将系数带入代码后发现发散报错，粗略观察后不满足严格对角占优，交换一下第一列和第三列即可，运行文件夹“练习思考”中文件夹“1”中的代码“雅各比迭代”，得到：    所以交换回第一列和第三列后，得解为  5.对于线性方程组，讨论雅可比（Jacobi）迭代法和高斯-塞德尔(Gauss-Seidel)迭代法的收敛性，分别取系数矩阵  ，  并由此说明两种迭代法在收敛性上有没包含关系。  解：  对于第一个矩阵，写出代码，运行文件夹“练习思考”中文件夹“2”中文件夹“J有G没有”中的代码：  雅各比：    G-S：    此时雅各比迭代收敛，而高斯-赛德尔迭代发散；  对于第二个矩阵，写出代码，运行文件夹“练习思考”中文件夹“2”中文件夹“J没有G有”中的代码：  雅各比：    G-S：    此时雅各比迭代发散，而高斯-赛德尔迭代收敛。  因此两者间的收敛毫无包含关系，两者迭代法的收敛性也如前文所述由迭代矩阵谱半径决定。  四、重点难点分析  1.本章的重点在于掌握好几种用来数值计算线性方程组的解法，用到了不少线性代数的知识，比如迭代式的推导，收敛条件的判断等等。  2.对于SOR方法，通过以上题目的完成可以明显发现松弛因子的选取对于收敛速度具有显著的影响，但是查阅书本发现合适的松弛因子的选取是个暂时open的问题，因此需要在运行代码的过程中先行找出合适的松弛因子。 | | | | | | | |