



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

国家理科基地教材

解析几何教程

(第三版)

廖华奎 王宝富 编著



科学出版社

(O-5977.01)

www.sciencep.com

ISBN 978-7-03-044584-1



9 787030 445841 >

高等教育出版中心 数理出版分社

联系电话: 010-64034725

E-mail: mph@mail.sciencep.com

定 价: 26.00 元

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材
国家理科基地教材

解析几何教程

(第三版)

廖华奎 王宝富 编著

2002 年全国普通高等学校优秀教材二等奖
国家理科基地创建名牌课程项目资助

科学出版社

北京

内 容 简 介

本教材作为“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材之一,是在“十一五”国家级规划教材和四川大学数学学院各专业多年讲授解析几何课程的基础上形成并修订的. 主要内容包括向量代数,直线与平面,常见曲面,二次曲线和二次曲面,正交变换和仿射变换,平面射影几何简介,球面几何与双曲几何初步的专题讨论以及各章小结等.

本教材各章节的主要数学思想显著、突出,脉络清晰分明. 丰富的历史背景介绍,感悟而得的各章小结,渴望一见的非欧几何的专题讨论,穿插在各章节的开放性的思考题、练习题使得教材更加充实和完善. 本教材强调几何的直观性,努力处理好几何与代数的关系,证明尽量简单明了,内容详略得当,注重与后续课程的衔接,尽力为学生建立一个整体的框架.

本教材可供综合性大学和师范类院校数学专业的学生和教师使用,也可作为科技工作者学习解析几何的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

解析几何教程/廖华奎,王宝富编著. —3版. —北京:科学出版社, 2015.6

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材·国家理科基地教材

ISBN 978-7-03-044584-1

I. 解… II. ①廖… ②王… III. 解析几何-高等学校-教材 IV. O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 124804 号

责任编辑:张中兴/责任校对:张凤琴

责任印制:霍 兵/封面设计:陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

保定市中画美凯印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2000 年 8 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2007 年 6 月第 二 版 印张: 13 3/4

2015 年 6 月第 三 版 字数: 277 000

2015 年 6 月第十七次印刷

定价:26.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

第三版前言

自第二版出版以来,受到许多兄弟院校的支持和关注,并提出了很好的建议,我们在此对兄弟院校的同仁表示衷心的感谢.

在教育教学改革中,教材的改革是一个重要的环节,也是广大教师在教学中经常思索的问题.四川大学在长期的办学实践中,始终坚持和确保本科教育教学的基础和中心地位,在教育教学中牢固确立“质量就是生命、质量就是岗位”的观念,确立了培养“具有深厚人文底蕴、扎实专业知识、强烈创新意识、宽广国际视野的国家栋梁和社会精英”的人才培养新目标.在这样的潮流中,将教材进一步改版成为必然.

根据我们长期积累的教学经验和许多同仁的建议,对第二版中不严密之处加以修改和补充.在第三版教材中,增加了以下内容:

1. 为加强学生在学习过程中对所学知识的重点和难点的掌握,将我们多年来的心得体会写成各章小结.希望有助于学生学会知识的总结,在其他课程学习中起到触类旁通的作用,以期提高学习效率,愉快地完成学业.

2. 为满足学生对知识的渴求,拓展知识范围,开拓视野,增加了非欧几何中的球面几何和双曲几何的内容.由于大学新生的基础知识所限,只能作初步知识的介绍.这部分内容可供学生作为课外阅读,老师可以以讲座的形式向学生介绍,以期增加对几何学的兴趣,为以后的课程学习做一些准备.

借本教材入选“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材的东风,使我们有信心将教学中的感悟和学生感兴趣的非欧几何的初步内容写入教材,在四川大学和科学出版社的大力支持下,顺利形成了第三版教材.在此,我们表示衷心的感谢.赵国松教授和郑泉副教授仔细地审阅了本教材,提出了许多宝贵的建议,作者所在的四川大学数学学院也给予了很多的支持,在此一并表示由衷的谢意.

由于我们的水平有限,错误在所难免.为了把该教材打造得更加完善,希望读者能一如既往地提出宝贵的意见,多多批评指正.

作 者

2015年1月于成都

第二版前言

本教材自出版以来已经多次印刷,得到许多高校教师的支持,被列为国家理科基地创建名牌课程项目.很多读者就教材内容给我们提出许多宝贵的意见.根据这些意见,结合我们的教学实践对本教材作了较全面的修订.

1. 调整了部分内容.比如:①在仿射坐标系下,平面方程的系数与平面法向量的表示法的关系作为一个注解,使读者对平面方程有更清晰的认识.②由于本教材对曲面的参数方程的阐述较少,将单叶双曲面和双曲抛物面的参数方程列为思考题,为读者提供一个用参数方程描述曲面的训练机会.

2. 修正了发现的印刷错误和其他错误.

3. 添加了习题的参考答案和提示,以便读者在解答问题时有一个参考和比较.

4. 增加了名词索引,以利于读者查阅基本概念.

我们衷心感谢所有读者的大力支持和宝贵意见.敬请读者一如既往地为本教材提出更多和更好的修改建议.

作 者

2006年2月

第一版前言

解析几何是高等院校各专业的重要基础课程,不仅数学、物理学等的许多后继课程要以此为基础,更为重要的是,它的思想方法和几何直观性可为许多抽象的、高维的数学物理问题提供模型和背景.

在面向 21 世纪教学内容和课程体系改革中,关于解析几何课程的改革已产生许多好的设想和教材. 在我校,解析几何也被作为省级重点课程建设项目进行教改尝试. 本教材的编写旨在对这几年的改革实践作一总结.

在该课程的教学过程中,常常能够感受到,现代的学生虽然有良好的素质,但受应试教育的影响,对数学的学习显得较为机械,对教师的依赖性较强,除了模仿例题做习题外,在怎样读书,特别是主动提出问题,思考问题,理解和掌握数学的思想方法,动手实践方面较为欠缺. 为此,我们在教学过程中作了一些有益的尝试,并试图通过教材的改革来弥补这一点.

首先,我们期盼通过教材改革来引导学生学会看书,我们在全书的每一个章节中穿插了许多的思考题,这些思考题直接与内容相关,但又是学生易忽视的问题,有些是开放性的,想以此来培养学生良好的读书习惯,学会主动思考,动手实践.

第二,按照人们的思维习惯,我们对教学内容进行调整,按照从点到线,到面,再讨论其关系的思路,从简单到复杂,循序渐进,使学生的思维有一个自然的升华过程,以培养学生探索未知的数学素养.

第三,我们试图突出各章节的主要教学思想,立足为学生建立一个整体框架,并努力阐述几何与代数的关系,用代数的手段解决几何的问题,而省略去许多繁琐的运算,其中部分留给学生动手解决.

第四,我们更多地注重与后继课程密切相关的二次曲面阐述,而对二次曲线的讨论则因为思想方法相同而简略.

实事求是地讲,新生刚进校后,有很多地方并不能适应本书思路的讲法,但我们还是坚持这样,只希望通过我们的努力,让学生在后继的课程学习中学得主动、愉快.

解析几何课程是省重点课程建设项目,得到学校及数学学院的大力支持. 李安民教授对几何学的许多深刻见解促进了本教材编写思想的形成,与彭联刚教授的多次讨论使编者获益匪浅. 赵国松教授仔细审阅了本教材,并提出了许多宝贵意

见,在此一并表示感谢.由于编者水平有限,仍会有许多不足之处,另外,本书的编写思想也只是一家之观念,难免有不当之处,还请读者多提宝贵意见.

作者

2000年3月

目 录

第三版前言	
第二版前言	
第一版前言	
第 1 章 向量代数	1
1.1 向量及其线性运算	1
1.2 标架与坐标	9
1.3 向量的内积	13
1.4 向量的外积	16
1.5 向量的混合积	21
近代科学的始祖——笛卡儿	23
第 1 章小结	24
第 2 章 直线与平面	26
2.1 直线、平面的方程	26
2.2 位置关系	31
2.3 度量关系	38
业余数学家之王——费马	42
第 2 章小结	43
第 3 章 常见曲面	45
3.1 空间曲面和空间曲线的方程	45
3.2 柱面和锥面	48
3.3 旋转面	53
3.4 二次曲面	56
3.5 直纹面	61
3.6 作简图	66
几何之父——欧几里得	69
第 3 章小结	70
第 4 章 二次曲线和二次曲面	73
4.1 坐标变换	73
4.2 二次曲面和二次曲线方程的化简	79
4.3 不变量	85

4.4 中心,渐近方向	91
4.5 二次曲面的直径面、对称面,二次曲线的直径、对称轴	95
4.6 切线、切平面	104
罗巴切夫斯基与非欧几何	106
第4章小结	107
第5章 正交变换和仿射变换	113
5.1 映射与变换	113
5.2 平面的正交变换	116
5.3 平面的仿射变换	120
5.4 二次曲线的度量分类与仿射分类	126
5.5 空间的正交变换与仿射变换	129
数学王子——高斯	134
第5章小结	135
第6章 平面射影几何简介	137
6.1 齐次坐标,射影平面	137
6.2 对偶原理	140
6.3 交比	141
6.4 射影变换与二次曲线的射影分类	145
6.5 极点和配极	148
几何学发展简史	153
第6章小结	160
专题讨论 球面几何与双曲几何初步	164
专题讨论一 球面几何	164
专题讨论二 双曲几何	173
问题探索	182
习题答案与提示	184
参考文献	199
附录 矩阵和线性方程组简介	200
名词索引	207

第 1 章 向量代数

解析几何是利用代数方法来研究几何图形性质的一门学科,它包括平面解析几何和空间解析几何两部分.通过在几何空间中建立坐标系,就可将空间中的点用坐标表出,从而图形的几何性质可以表为图形上点的坐标之间的关系,特别是代数关系.17 世纪初,法国数学家笛卡儿 (Descartes R) 和费马 (Fermat) 利用这种关系研究几何图形,创立了解析几何.从此变量被引进了数学,成为数学发展中的转折点,为微积分的出现创造了条件.

我们将从物理学中的力、速度及加速度等量中抽取出共性的东西而得到向量的概念及向量的加法的运算法则.进一步,研究数与向量的乘法运算;从力做功的现象中抽象出向量的内积;由力矩引出向量的外积;从平行六面体的体积计算引进向量的混合积.从而形成向量代数,使向量成为具有广泛应用的基本工具之一.

1.1 向量及其线性运算

1.1.1 向量的概念

我们从力学中知道,力、速度这些量既有大小,又有方向,它们可以用有向线段来表示.不仅如此,力(速度)的合成还可以通过有向线段来进行.这类既有大小,又有方向的量称为向量(或矢量).我们将代数运算引到向量中去,来研究图形性质.这种方法具有直观性,更容易理解图形性质的几何意义,并且它在物理学等学科中有重要的应用.此外向量的概念及其运算也为线性代数中深入理解向量空间提供了直观的几何背景.

既有大小,又有方向的量称为**向量**(或**矢量**).我们用符号 $a, b, c, \dots$ 表示.

一个向量 a 可以用一有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 来表示,有向线段的长度 $|\overrightarrow{AB}|$ 表示向量 a 的大小,从始点 A 到终点 B 的指向表示 a 的方向(图 1.1).

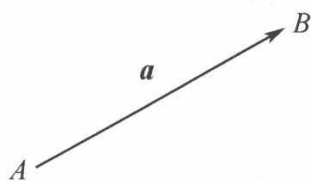


图 1.1

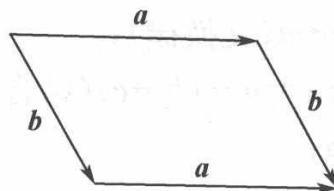


图 1.2

向量 a 的大小称为向量的**长度**(或**模**),记为 $|a|$.

长度为零的向量称为**零向量**,记为 0 .

长度为 1 的向量称为**单位向量**.

如果一个向量能够由另一个向量经平行移动得到,则称这两个向量**相等**(图 1.2).

如果从同一个始点 A 在同一条直线上作等于向量 a, b 的有向线段 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, 其终点 B, C 分布在点 A 的同一侧(两侧), 则称向量 a, b **同向(反向)**. 同向或反向的两向量 a, b 称为**平行的向量**, 记为 $a \parallel b$. 与非零向量 a 同向的单位向量记为 a^0 .

与 a 的长度相等但反向的向量称为 a 的**反向量**或**负向量**, 记为 $-a$.

思考题:平面(空间)中具有同一始点的所有单位向量的终点的几何轨迹是什么图形?

1.1.2 向量的加法

回忆物理学中力、速度、位移的合成法.

定义 1.1.1 对于向量 a, b , 作有向线段 $\overrightarrow{AB}=a, \overrightarrow{BC}=b$, 把 $\overrightarrow{AC}$ 表示的向量 c 称为向量 a 与 b 的**和**, 记为 $c=a+b$ (图 1.3), 即

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

由此公式表示的向量加法规则称为**三角形法则**.

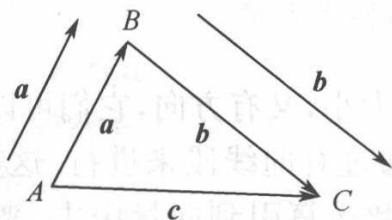


图 1.3

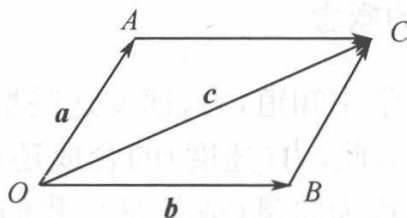


图 1.4

注:从同一始点 O 作 $\overrightarrow{OA}=a, \overrightarrow{OB}=b$, 再以 OA 和 OB 为边作平行四边形 $OACB$, 则对角线 $\overrightarrow{OC}$ 也表示向量 a 与 b 的和(图 1.4), 这称为向量的**平行四边形法则**.

向量的加法满足以下规律:

- (1) $a+b=b+a$ (交换律);
- (2) $(a+b)+c=a+(b+c)$ (结合律);
- (3) $a+0=a$;
- (4) $a+(-a)=0$.

其中, a, b, c 为任意向量. 这些规律可由加法运算的定义直接得出, 请读者自己证明.

作为加法的逆运算, 可定义减法如下.

定义 1.1.2 向量的减法 $a-b=a+(-b)$.

减法的几何意义如图 1.5, 即 $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$.

由向量加法的三角形法则容易得到三角不等式

$$|a+b| \leq |a|+|b|,$$

其中, a, b 为任意向量. 其几何意义是, 三角形两边之和大于第三边. 这个不等式可以推广到任意有限多个向量和的情形:

$$|a+b+\cdots+l| \leq |a|+|b|+\cdots+|l|.$$

思考题: 1. 三角不等式中等号成立的条件是什么?

2. $|a+b|=|a|-|b|$ 成立的条件是什么?

3. 证明平面上封闭折线所表示的向量和 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$ 一定为 $\mathbf{0}$. 将此结论推广至空间.

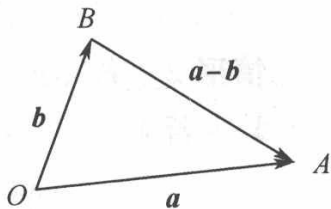


图 1.5

1.1.3 数量与向量的乘法

定义 1.1.3 实数 λ 与向量 a 的乘积 λa 是一个向量, 它的长度为 $|\lambda a| = |\lambda| \cdot |a|$, 它的方向当 $\lambda > 0$ 时与 a 相同, 当 $\lambda < 0$ 时与 a 相反. 当 $\lambda = 0$ 或 $a = \mathbf{0}$ 时, 则 $\lambda a = \mathbf{0}$.

设 $a \neq \mathbf{0}$, 因为 $|a|^{-1}a$ 与 a 同向, 且

$$||a|^{-1}a| = |a|^{-1}|a| = 1,$$

所以 $a^0 = |a|^{-1}a$. 这称为把 a 单位化.

思考题: 若 $a \parallel b$, 那么 a, b 之间的关系如何?

对于任意的向量 a, b 和任意实数 λ, μ , 数量与向量的乘法满足以下规律:

$$(1) \lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a;$$

$$(2) (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a;$$

$$(3) \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b.$$

规律(1)可以用定义 1.1.3 直接验证.

规律(2)的证明. 若 $a = \mathbf{0}$ 或 λ, μ 中有一个为零时, 则(2)显然成立. 下面设 $\lambda\mu \neq 0, a \neq \mathbf{0}$.

情形 1 若 $\lambda\mu > 0$, 则 λa 与 μa 同向, 且 $(\lambda + \mu)a$ 与 $\lambda a + \mu a$ 同向, 因此有

$$|\lambda a + \mu a| = |\lambda a| + |\mu a| = (|\lambda| + |\mu|)|a|,$$

又有

$$|(\lambda + \mu)a| = |\lambda + \mu||a| = (|\lambda| + |\mu|)|a|.$$

因此

$$|(\lambda + \mu)a| = |\lambda a + \mu a|,$$

故

$$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a.$$

情形 2 若 $\lambda\mu < 0$, 不妨设 $\lambda > 0, \mu < 0$.

1° 若 $\lambda + \mu = 0$, 则 $(\lambda + \mu)a = \mathbf{0}$, 而

$$\begin{aligned}\lambda a + \mu a &= \lambda a + (-\lambda)a = (\lambda a) + (-1)(\lambda a) \\ &= (\lambda a) - (\lambda a) = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

故(2)成立.

2° 若 $\lambda + \mu > 0$, 则由情形 1 知

$$[(\lambda + \mu) + (-\mu)]a = (\lambda + \mu)a + (-\mu)a,$$

即得

$$\lambda a = (\lambda + \mu)a + (-\mu a) = (\lambda + \mu)a - \mu a,$$

从而有

$$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a.$$

3° 若 $\lambda + \mu < 0$, 则由情形 1 知

$$\begin{aligned}[(\lambda + \mu) + (-\lambda)]a &= (\lambda + \mu)a + (-\lambda)a \\ &= (\lambda + \mu)a + (-\lambda a),\end{aligned}$$

类似于 2° 可得(2)式.

规律(3)的证明. 若 $\lambda = 0$ 或者 a, b 中有一个为 $\mathbf{0}$, 则(3)显然成立. 下面设 $\lambda \neq 0, a \neq \mathbf{0}, b \neq \mathbf{0}$.

情形 1 若 a 与 b 平行, 则由定义 1.1.3 后面的思考题结论知存在实数 μ 使 $b = \mu a$, 于是

$$\begin{aligned}\lambda(a + b) &= \lambda(a + \mu a) = \lambda[(1 + \mu)a] \\ &= [\lambda(1 + \mu)]a = [\lambda + \lambda\mu]a \\ &= \lambda a + (\lambda\mu)a = \lambda a + \lambda(\mu a) = \lambda a + \lambda b.\end{aligned}$$

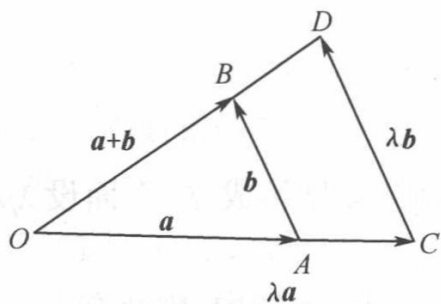


图 1.6

情形 2 若 a 与 b 不平行, 那么当 $\lambda > 0$ 时, 如图 1.6 作 $\overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{AB} = b$, 于是 $\overrightarrow{OB} = a + b$, 作 $\overrightarrow{OC} = \lambda a, \overrightarrow{CD} = \lambda b$, 则 $\triangle OAB \sim \triangle OCD$, 从而 D 必在直线 OB 上. 于是 $\overrightarrow{OD} = \lambda(a + b)$, 又 $\overrightarrow{OD} = \lambda a + \lambda b$. 故有

$$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b.$$

当 $\lambda < 0$ 时, 可作类似的讨论.

1.1.4 共线、共面的向量组

向量的加法和数量与向量乘法统称为向量的线性运算.

设 $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是一组向量, $k_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是一组实数, 则 $\sum_{i=1}^n k_i a_i$ 是一个向量, 称它为向量组 $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的一个线性组合.

定义 1.1.4 平行于同一直线(平面)的向量组称为**共线的(共面的)向量组**.

两个向量共线等价于它们平行. 因而共线向量组实质上是一组互相平行的向量.

零向量与任意向量共线; 共线的向量组一定共面; 若 $a = \lambda b$ 或 $b = \mu a$, 则 a 与 b 共线.

思考题: 两个向量是否一定共面?

定义 1.1.5 若对于向量组 $a_i (i=1, 2, \dots, n)$, 存在不全为 0 的实数 $k_i (i=1, 2, \dots, n)$, 使

$$\sum_{i=1}^n k_i a_i = 0,$$

则称向量组 $a_i (i=1, 2, \dots, n)$ **线性相关**, 否则称向量组**线性无关**.

思考题: 对照此定义, 采用陈述的方式, 写出向量组线性无关的定义.

命题 1.1.1 两个向量 a, b 共线的充要条件是 a, b 线性相关.

证明 必要性 若 a, b 中有一个为零向量, 不妨设 $a = 0$, 则对实数 $k_1 = 1, k_2 = 0$, 有

$$k_1 a + k_2 b = 1 \cdot 0 + 0 \cdot b = 0,$$

因而 a, b 线性相关.

若 a, b 都不为 0, 且同向, 则 $a^0 = b^0$, 从而有

$$b = |b| b^0 = |b| a^0 = |b| (|a|^{-1} a) = |b| (|a|^{-1}) a.$$

令 $k_1 = |b| |a|^{-1}, k_2 = -1$, 则有

$$k_1 a + k_2 b = 0.$$

故 a, b 线性相关. 若 a, b 反向, 可作类似的讨论.

充分性 设存在不全为 0 的实数 k_1, k_2 使 $k_1 a + k_2 b = 0$. 不妨设 $k_1 \neq 0$, 则有 $a = (-k_1^{-1} k_2) b$, 故 a, b 共线.

思考题: 请用几何方法证明命题 1.1.1.

思考题: 请考虑两向量线性无关的充要条件及其几何特征.

推论 1.1.1 若 a, b 共线且 $a \neq 0$, 则存在唯一的实数 λ 使得 $b = \lambda a$.

命题 1.1.2 三向量 a, b, c 共面(不共面)的充要条件是 a, b, c 线性相关(线性无关).

此命题的证明留作习题.

思考题: 在平面和空间中各画出一线性相关和线性无关的向量组.

定理 1.1.1 设 a, b 不共线, 则 c 与 a, b 共面的充要条件是存在唯一的一对实数 λ, μ 使得

$$c = \lambda a + \mu b.$$

证明 必要性 由 c 与 a, b 共面及命题 1.1.2 知, 存在不全为 0 的实数 k_1, k_2, k_3 使

$$k_1 \mathbf{a} + k_2 \mathbf{b} + k_3 \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

我们断定 $k_3 \neq 0$. 否则有不全为 0 的实数 k_1, k_2 , 使得

$$k_1 \mathbf{a} + k_2 \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

这与 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 不共线矛盾. 因而我们得到

$$\mathbf{c} = (-k_3^{-1}k_1)\mathbf{a} + (-k_3^{-1}k_2)\mathbf{b}.$$

令 $\lambda = -k_3^{-1}k_1, \mu = -k_3^{-1}k_2$, 那么

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}.$$

假如另有 λ', μ' 使 $\mathbf{c} = \lambda' \mathbf{a} + \mu' \mathbf{b}$, 则

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{c} - \mathbf{c} = (\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) - (\lambda' \mathbf{a} + \mu' \mathbf{b}) \\ &= (\lambda - \lambda') \mathbf{a} + (\mu - \mu') \mathbf{b}. \end{aligned}$$

因为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 不共线, 所以必有

$$\lambda - \lambda' = 0, \quad \mu - \mu' = 0,$$

于是 $\lambda = \lambda', \mu = \mu'$. 唯一性得证.

充分性是显然的.

定理 1.1.2 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 不共面, 则对空间中任一向量 $\mathbf{d}$ 均存在唯一的数组 (λ, μ, γ) , 使得

$$\mathbf{d} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}.$$

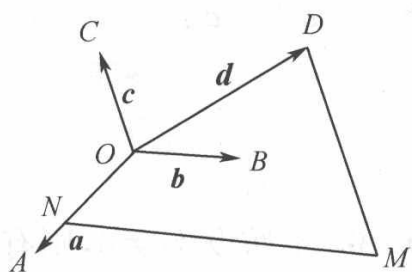


图 1.7

证明 如图 1.7, 取一点 O , 作 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}, \overrightarrow{OC} = \mathbf{c}, \overrightarrow{OD} = \mathbf{d}$. 过 D 作一直线与 OC 平行, 且与 OA 和 OB 决定的平面交于 M . 过 M 作一直线与 OB 平行, 且与 OA 交于 N . 因为

$$\overrightarrow{ON} \parallel \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{NM} \parallel \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{MD} \parallel \mathbf{c},$$

所以分别存在实数 λ, μ, γ 使得

$$\overrightarrow{ON} = \lambda \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{NM} = \mu \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{MD} = \gamma \mathbf{c}.$$

从而

$$\mathbf{d} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MD} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}.$$

唯一性 若

$$\overrightarrow{OD} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \lambda_1 \mathbf{a} + \mu_1 \mathbf{b} + \gamma_1 \mathbf{c},$$

则得

$$(\lambda - \lambda_1) \mathbf{a} + (\mu - \mu_1) \mathbf{b} + (\gamma - \gamma_1) \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

因为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 不共面, 所以

$$\lambda = \lambda_1, \quad \mu = \mu_1, \quad \gamma = \gamma_1.$$

思考题: 平面上的任意三个向量是否线性相关? 空间中的任意四个向量是否线性相关?

例 1.1.1 设 A, B 是不同的两点, 则点 P 在直线 AB 上的充要条件是存在唯

一的一对实数 λ, μ , 使得

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}, \\ \lambda + \mu = 1, \end{cases} \quad (*)$$

其中 O 是任意取定的一点. 而 P 在线段 AB 上的充要条件是 $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ 且 $(*)$ 成立.

证明 必要性 设 P 在直线 AB 上, 则 $\overrightarrow{AP}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 共线, 显然 $\overrightarrow{AB} \neq \mathbf{0}$. 由推论 1.1.1 得存在唯一的 k 使

$$\overrightarrow{AP} = k \overrightarrow{AB}.$$

任取一点 O (图 1.8), 由上式得

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}),$$

即有

$$\overrightarrow{OP} = (1-k) \overrightarrow{OA} + k \overrightarrow{OB}.$$

令 $\lambda = 1-k, \mu = k$, 因而 $\lambda + \mu = 1$, 且

$$\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}.$$

由 k 的唯一性知 λ, μ 是唯一的.

充分性 若对某一点 O , $(*)$ 式成立, 则

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB} - (\lambda + \mu) \overrightarrow{OA} \\ &= \mu \overrightarrow{OB} - \mu \overrightarrow{OA} = \mu(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \mu \overrightarrow{AB}, \end{aligned}$$

因而 $\overrightarrow{AP}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 共线, 所以 P 在直线 AB 上.

对于后半部分, 由于 P 在线段 AB 上, 所以 $\overrightarrow{AP}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 同向, 故 $(*)$ 成立且有 $0 \leq |\overrightarrow{AP}| \leq |\overrightarrow{AB}|$, 即 $0 \leq k \leq 1$, 从而 $(*)$ 中的 $\lambda = 1-k \geq 0, \mu = k \geq 0$. 反之, 若 $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$, 由 $\lambda + \mu = 1$, 知 $0 \leq \mu \leq 1$, 因而 $0 \leq |\overrightarrow{AP}| \leq |\overrightarrow{AB}|$, 即 P 在线段 AB 上.

例 1.1.2 如图 1.9, 已知 $\triangle ABC$ 及一点 O , 试证 O 是 $\triangle ABC$ 的重心的充要条件是 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$.

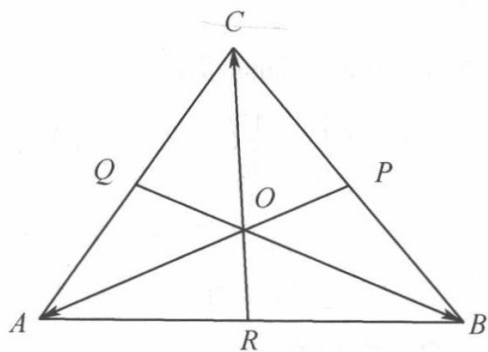


图 1.9

证明 必要性 设 O 是 $\triangle ABC$ 的重心, P, Q, R 分别是三边 BC, CA, AB 的中点, 则

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= \frac{2}{3} \overrightarrow{PA} = \frac{2}{3} (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BA}) \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} \right) \\ &= \frac{1}{3} \overrightarrow{CB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{BA}, \end{aligned}$$

同理得到

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3} \overrightarrow{CB},$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}.$$

于是

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}) + \frac{2}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CC} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

充分性 设 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$, 而 $\triangle ABC$ 的重心为 O^* , 则由必要性知 $\overrightarrow{O^*A} + \overrightarrow{O^*B} + \overrightarrow{O^*C} = \mathbf{0}$. 但是

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO^*} + \overrightarrow{O^*A}, \quad \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OO^*} + \overrightarrow{O^*B},$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OO^*} + \overrightarrow{O^*C}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OO^*} + \overrightarrow{O^*A} + \overrightarrow{O^*B} + \overrightarrow{O^*C} \\ &= 3\overrightarrow{OO^*}. \end{aligned}$$

故 $\overrightarrow{OO^*} = \mathbf{0}$, 即 $O^* = O$.

习题 1.1

1. 试证向量加法的结合律, 即对任意向量 a, b, c , 成立

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

2. 设 a, b, c 两两不共线, 试证顺次将它们的终点与始点相连而成一个三角形的充要条件是 $a + b + c = \mathbf{0}$.

3. 试证三角形的三中线可以构成一个三角形.

4. 用向量法证明梯形两腰中点连线平行于上、下底且等于它们长度和的一半.

5. 试证命题 1.1.2.

6. 设 A, B, C 是不共线的三点, 它们决定一平面 Π , 则点 P 在 Π 上的充要条件是存在唯一的数组 (λ, μ, γ) 使得

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{OC}, \\ \lambda + \mu + \gamma = 1, \end{cases} \quad (*)$$

其中, O 是任意一点. P 在 $\triangle ABC$ 内的充要条件是 $(*)$ 与 $\lambda \geq 0, \mu \geq 0, \gamma \geq 0$ 同时成立.

7. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D, E 分别在边 BC 与 CA 上, 且 $BD = \frac{1}{3}BC, CE = \frac{1}{3}CA$, AD 与 BE 交于 R , 试证

$$RD = \frac{1}{7}AD, \quad RE = \frac{4}{7}BE.$$

8. 用向量法证明 $\triangle ABC$ 的三条中线交于一点 P , 并且对任意一点 O 有

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

9. 用向量法证明四面体 $ABCD$ 的对棱中点连线交于一点 P , 且对任意一点 O 有

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

10. 设 $A_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是正 n 边形的顶点, O 是它的中心, 试证 $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i} = \mathbf{0}$.

11. 试证: 三点 A, B, C 共线的充要条件是存在不全为零的实数 λ, μ, γ , 使得

$$\lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{OC} = \mathbf{0} \quad \text{且} \quad \lambda + \mu + \gamma = 0,$$

其中, O 是任意取定的一点.

1.2 标架与坐标

向量法的优点在于比较直观, 但是向量的运算不如数的运算简洁, 为了取长补短, 我们给向量引进坐标, 同时也给点引进坐标, 把向量法与坐标法结合起来使用.

1.2.1 标架, 向量和点的坐标

空间中任意三个有次序的不共面的向量组 e_1, e_2, e_3 称为空间中的一个基. 根据定理 1.1.2, 对于空间中任一向量 a , 存在唯一的数组 (x, y, z) , 使

$$a = xe_1 + ye_2 + ze_3,$$

我们把有序三元实数组 (x, y, z) 称为 a 在基 e_1, e_2, e_3 下的坐标, 记为 $a = (x, y, z)$.

在空间中任意取定一点 O , 则任意一点 M 与向量 $\overrightarrow{OM}$ 一一对应, 我们把向量 $\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 的位置向量(或径矢).

定义 1.2.1 空间中一个点 O 和一个基 e_1, e_2, e_3 合在一起称为空间的一个仿射标架或仿射坐标系, 简称标架, 记为 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$, 其中 O 称为标架的原点, e_1, e_2, e_3 称为标架的坐标向量. 对于空间中任一点 M , 把它的位置向量 $\overrightarrow{OM}$ 在基 e_1, e_2, e_3 下的坐标称为点 M 在仿射标架 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 中的坐标. 若 $\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$, 则点 M 的坐标记为 $M(x, y, z)$.

由定义 1.2.1 知, 点 M 在标架 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 中的坐标为 (x, y, z) 当且仅当

$$\overrightarrow{OM} = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

以后我们把向量 a 在基 e_1, e_2, e_3 中的坐标也称为 a 在仿射标架 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 中的坐标.

空间中取定一个标架后, 由定理 1.1.2 知, 空间中全体向量的集合与全体有序三元实数组的集合之间就建立了一一对应; 通过位置向量, 空间中全体点的集合与全体有序三元实数组的集合之间也建立了一一对应的关系.

设 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 为空间的一个标架, 过原点 O , 且分别以 e_1, e_2, e_3 为方向的有向直线分别称为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 统称为坐标轴. 由每两条坐标轴决定的平面称为坐标平面, 它们分别是 xOy, yOz, zOx 平面. 坐标平面把空间分成八个部分, 称为八个卦限(图 1.10), 在每个卦限内, 点的坐标的符号不变.

将右手四指(拇指除外)从 x 轴方向弯向 y 轴方向(转角小于 π), 如果拇指所

指的方向与 z 轴方向在 xOy 平面同侧, 则称此坐标系为右手系, 否则称为左手系 (图 1.11).

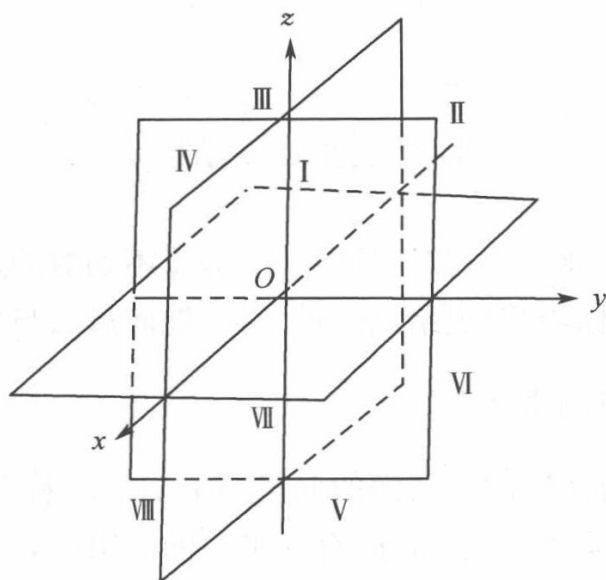


图 1.10

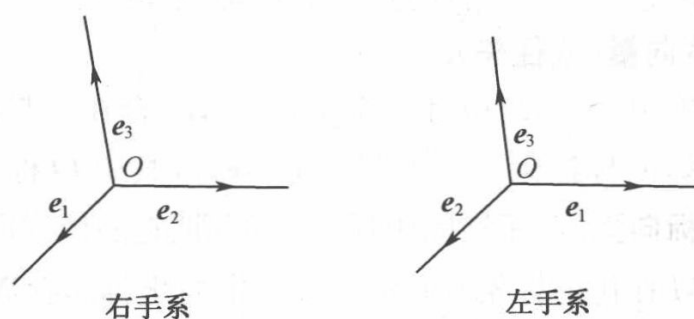


图 1.11

各卦限内点的坐标符号如下表(右手系).

卦限 坐标	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	-	-	+	+	-	-	+
y	+	+	-	-	+	+	-	-
z	+	+	+	+	-	-	-	-

思考题: 请确定坐标轴和坐标面上点的符号.

定义 1.2.2 如果 e_1, e_2, e_3 是两两垂直的单位向量, 则 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 称为直角标架或直角坐标系.

注:如果 e_1, e_2, e_3 仅是两两垂直的向量,则 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 称为笛卡儿标架.

直角标架是特殊的仿射标架.点(或向量)在直角标架中的坐标称为它的直角坐标,在仿射标架中的坐标称为它的仿射坐标.

思考题:如何定义平面上的仿射标架和直角标架?

1.2.2 用坐标作向量的线性运算

取定标架 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$, 设向量 $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3)$, 则容易证明下列命题.

命题 1.2.1 (1) $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$.

(2) $a - b = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$.

(3) 对于任意实数 λ , 有 $\lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$.

定理 1.2.1 向量的坐标等于其终点坐标减去其始点坐标.

证明 对于向量 $\overrightarrow{AB}$, 设 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1, z_1), \quad \overrightarrow{OB} = (x_2, y_2, z_2).$$

因为 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, 所以

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

定理 1.2.2 a 与 b 共线当且仅当对应坐标成比例.

思考题: 设 $P_i(x_i, y_i, z_i), i=1, 2, 3$, 推导三点 P_i 共线的充要条件.

对于线段 $P_1P_2 (P_1 \neq P_2)$, 如果点 P 满足 $\overrightarrow{P_1P} = \lambda \overrightarrow{PP_2}$, 则称点 P 分线段 P_1P_2 成定比 λ , 当 $\lambda > 0$ 时, $\overrightarrow{P_1P}$ 与 $\overrightarrow{PP_2}$ 同向, 点 P 在线段 P_1P_2 内, 称 P 为内分点; 当 $\lambda < 0$ 时, $\overrightarrow{P_1P}$ 与 $\overrightarrow{PP_2}$ 反向, 点 P 在线段 P_1P_2 外, 称 P 为外分点; 当 $\lambda = 0$ 时, P 与 P_1 重合. 假若 $\lambda = -1$, 则 $\overrightarrow{P_1P} = -\overrightarrow{PP_2}$, 即 $\overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{0}$, 这与 $P_1 \neq P_2$ 矛盾, 所以 $\lambda \neq -1$.

请读者自证下列命题.

命题 1.2.2 设 $P_i(x_i, y_i, z_i), i=1, 2$, 则分线段 P_1P_2 成定比 $\lambda (\lambda \neq -1)$ 的分点 P 的坐标是

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (1.2.1)$$

推论 1.2.1 线段 P_1P_2 的中点坐标为

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (1.2.2)$$

例 1.2.1 用坐标法证明四面体对棱中点的连线交于一点.

证明 设四面体 $ABCD$ (图 1.12) 的棱 AB, AC, AD, BC, CD, DB 的中点分别为 B', C', D', E, F, G .

取仿射标架 $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$, 则各点的坐标分别为

$$A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), C(0, 1, 0), D(0, 0, 1),$$

$$B'\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), C'\left(0, \frac{1}{2}, 0\right), D'\left(0, 0, \frac{1}{2}\right), \\ E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), F\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), G\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right).$$

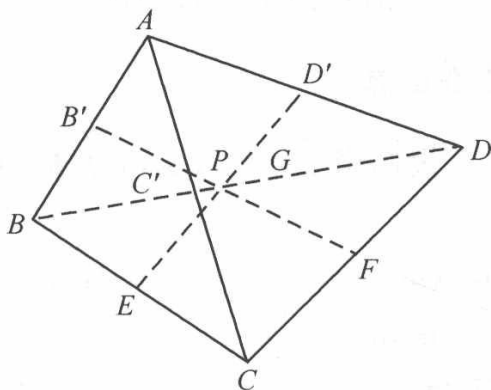


图 1.12

假设 $B'F$ 与 $D'E$ 交于点 $P(x, y, z)$, 设 $\overrightarrow{B'P} = k\overrightarrow{PF}$, $\overrightarrow{D'P} = l\overrightarrow{PE}$, 则 P 的坐标为

$$\begin{aligned} x &= \frac{\frac{1}{2} + k \cdot 0}{1+k}, & y &= \frac{0 + k \cdot \frac{1}{2}}{1+k}, & z &= \frac{0 + k \cdot \frac{1}{2}}{1+k}, \\ x &= \frac{0 + l \cdot \frac{1}{2}}{1+l}, & y &= \frac{0 + l \cdot \frac{1}{2}}{1+l}, & z &= \frac{\frac{1}{2} + l \cdot 0}{1+l}, \end{aligned}$$

解得 $k=l=1$, 从而交点 P 存在, 且 P 的坐标为 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

设 $B'F$ 与 $C'G$ 交于 P' , 同理可得 $P'\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, 所以 P 与 P' 重合, 即 $B'F$, $D'E$, $C'G$ 交于一点.

另法: 先后求出 $B'F$, $D'E$, $C'G$ 的中点坐标, 知道它们的坐标都相同, 因而三线交于一点.

习题 1.2

1. 给定直角坐标系, 设 $P(x, y, z)$, 求 P 分别关于 xOy 平面, x 轴与原点的对称点的坐标.
2. 设平行四边形 $ABCD$ 的对角线交于点 P , 设

$$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{5} \overrightarrow{DB}, \quad \overrightarrow{CN} = \frac{1}{6} \overrightarrow{CA}.$$

在仿射标架 $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$ 下, 求点 P, M, N 的坐标以及向量 $\overrightarrow{MN}$ 的坐标.

3. 设 $\mathbf{a} = (1, 5, 2)$, $\mathbf{b} = (0, -3, 4)$, $\mathbf{c} = (-2, 3, -1)$, 求下列向量的坐标:

$$(1) 2\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}; \quad (2) -3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 4\mathbf{c}.$$

4. 判断下列各组的三个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 是否共面? 能否将 $\mathbf{c}$ 表示成 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的线性组合? 若能表

示,则写出表示式.

$$(1) \mathbf{a}=(5,2,1), \mathbf{b}=(-1,4,2), \mathbf{c}=(-1,-1,5);$$

$$(2) \mathbf{a}=(6,4,2), \mathbf{b}=(-9,6,3), \mathbf{c}=(-3,6,3);$$

$$(3) \mathbf{a}=(1,2,-3), \mathbf{b}=(-2,-4,6), \mathbf{c}=(1,0,5).$$

5. 在 $\triangle ABC$ 中,设 D, E 是边 BC 的三等分点,试用 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 表出 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{AE}$.

6. 设在一平面 Π 上取一个仿射标架 $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, Π 上三点 $P_i(x_i, y_i), i=1, 2, 3$, 共线当且仅当

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

7. 在 $\triangle ABC$ 中,设 P, Q, R 分别是直线 AB, BC, CA 上的点,并且

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}, \quad \overrightarrow{BQ} = \mu \overrightarrow{QC}, \quad \overrightarrow{CR} = \nu \overrightarrow{RA}.$$

证明 P, Q, R 共线当且仅当 $\lambda\mu\nu = -1$.

8. 试证命题 1.2.1.

1.3 向量的内积

物理学中,一个质点在力 f 的作用下,经过位移 s ,图 1.13 中 f 所做的功为

$$W = |\mathbf{f}| |\mathbf{s}| \cos \alpha,$$

其中, α 是 f 与 s 的夹角.类似于功 W 这样的量,我们引进向量的内积.

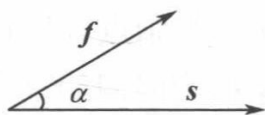


图 1.13

1.3.1 向量内积的定义和性质

定义 1.3.1 两向量 a, b 的内积,记为 $a \cdot b$,规定为一个实数:

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \angle(a, b),$$

其中 $\angle(a, b)$ 是 a 与 b 的夹角,且 $0 \leq \angle(a, b) \leq \pi$.

若 a, b 中有一个是零向量,则 $a \cdot b = 0$.

由定义 1.3.1 可得

$$|a| = \sqrt{a \cdot a}. \quad (1.3.1)$$

当 $a \neq 0, b \neq 0$ 时,

$$\cos \angle(a, b) = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}. \quad (1.3.2)$$

命题 1.3.1 a 与 b 互相垂直当且仅当 $a \cdot b = 0$.

(1.3.1)和(1.3.2)表明了向量的内积,向量的长度和向量的夹角之间的关系.对任意的向量 a, b, c 及任意实数 λ ,向量的内积满足以下规律:

- (1) $a \cdot b = b \cdot a$,
 (2) $(\lambda a) \cdot b = \lambda(a \cdot b)$,
 (3) $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$,
 (4) $a \cdot a \geq 0$, 等号当且仅当 $a=0$ 时成立.

证明 (1), (2), (4) 由定义容易证明, 请读者自证之.

对于(3), 若 a, b, c 中有零向量, 则等式成立. 以下设 a, b, c 皆为非零向量.

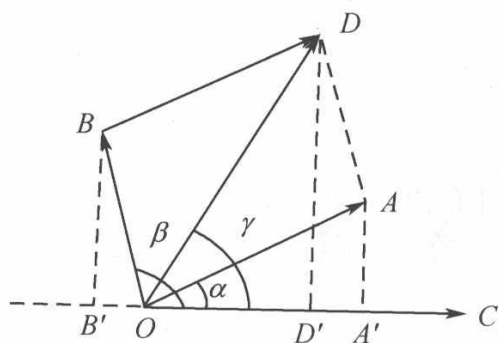


图 1.14

如图 1.14, 设 $\vec{OA} = a, \vec{OB} = b, \vec{OC} = c$,
 $\vec{OD} = a+b, \angle(\vec{OA}, \vec{OC}) = \alpha, \angle(\vec{OB}, \vec{OC}) = \beta$,
 $\angle(\vec{OD}, \vec{OC}) = \gamma$. 过 A, B, D 分别向 OC 所在
 直线作垂线, 垂足分别为 A', B', D' , 则

$$(a+b) \cdot c = |a+b| \cdot |c| \cdot \cos \gamma,$$

$$a \cdot c + b \cdot c = |c| (|a| \cos \alpha + |b| \cos \beta).$$

由平面几何知识易证 $|a+b| \cos \gamma =$

$$|a| \cos \alpha + |b| \cos \beta, \text{ 因而}$$

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

例 1.3.1 证明三角形的三条高交于一点.

证明 设 $\triangle ABC$ 边 AB, CA 上的高交于 O 点,
 以 O 为始点, 以 A, B, C 为终点的向量分别记为 a ,
 b, c (图 1.15).

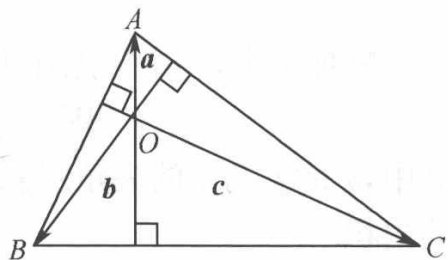


图 1.15

由 $CO \perp BA$, 得 $c \cdot (a-b) = 0$.

由 $BO \perp AC$, 得 $b \cdot (c-a) = 0$.

以上两式相加, 可得 $a \cdot (c-b) = 0$. 所以 $OA \perp BC$, 即
 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的高通过 O 点. 这就证明了三高相交于一点.

例 1.3.2 用向量法证明余弦定理

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

证明 如图 1.16 所示,

$$c = \vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB} = a - b,$$

$$c \cdot c = (a-b) \cdot (a-b)$$

$$= a \cdot a + b \cdot b - 2a \cdot b,$$

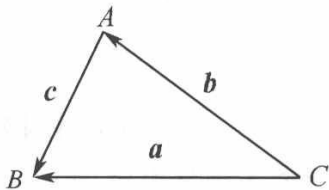


图 1.16

故

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

例 1.3.3 设密度为 ρ 的液体流过平面 Π 上面积为 S 的一个区域, 液体在此
 区域上各点处的流速均为 v , 设 n 为垂直于平面 Π 的单位向量 (图 1.17), 求单位时
 间内经过该区域流向 n 所指一侧的液体的质量 M .

解 单位时间内流过该区域的液体组成一个底面积为 S , 斜高为 $|v|$ 的斜柱

体. 该柱体的斜高与底面的垂线的夹角就是向量 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角 θ , 所以这柱体的高为 $|\boldsymbol{v}| \cos \theta$, 体积为 $S|\boldsymbol{v}| \cos \theta = S\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}$. 因而单位时间内经过该区域流向 $\boldsymbol{n}$ 所指一侧的液体的质量为 $M = \rho S\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}$.

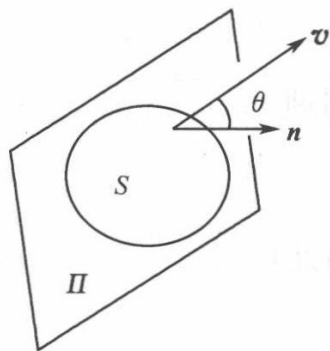


图 1.17

1.3.2 用坐标计算向量的内积

取仿射标架 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, 设向量 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 则

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \left(\sum_{i=1}^3 a_i \boldsymbol{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 b_j \boldsymbol{e}_j \right) = \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j. \quad (1.3.3)$$

可见只要知道坐标向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 之间的内积(9个数, 实质上只有6个数)就可以求出任意两个向量的内积. 这九个数称为仿射标架 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 的度量参数.

如果 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 是直角标架, 则有

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

于是由(1.3.3)式得到

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i. \quad (1.3.4)$$

定理 1.3.1 在直角坐标系中, 两向量的内积等于它们的对应坐标的乘积之和.

在直角坐标系中, 由定理 1.3.1 得到, 向量 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 的长度为

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \quad (1.3.5)$$

由此得空间两点 $P_i(x_i, y_i, z_i) (i=1, 2)$ 的距离公式为

$$|\overrightarrow{P_1 P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1.3.6)$$

思考题: (1.3.4), (1.3.5), (1.3.6) 三式成立的前提条件是什么? 现在你对距离这一概念有何新认识?

1.3.3 方向角和方向余弦

在直角坐标系 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 中, 向量 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 与坐标向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 的交角(大于等于 0, 小于等于 π)称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角, 分别用 α, β, γ 来表示, 它们的余弦 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

因为

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_1 = a_1 = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{e}_1| \cos \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_1) = |\boldsymbol{a}| \cos \alpha,$$

所以

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}.$$

同理

$$\cos\beta = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}.$$

由此可得

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \quad (1.3.7)$$

因而

$$\mathbf{a}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

与方向余弦成比例的任一个数组 (λ, μ, ν) , 都称为向量 $\mathbf{a}$ 的一组方向数. 即如

$$\lambda : \mu : \nu = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma,$$

则 (λ, μ, ν) 为 $\mathbf{a}$ 的一组方向数. 一个向量的方向余弦是唯一的, 但方向数有无数多组.

习题 1.3

1. 设 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 1$, $|\mathbf{c}| = 4$, 求 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$.
2. 已知 $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 2$, $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\pi}{6}$, 求 $(3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \cdot (2\mathbf{a} - 5\mathbf{b})$.
3. 已知 $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ 与 $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$ 垂直, $\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$ 与 $7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ 垂直, 求 $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.
4. 证明: 对任意向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 都有

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2|\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{b}|^2.$$

当 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不共线时, 说明此等式的几何意义.

5. 下列等式是否正确? 说明理由(习惯上把 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ 记为 a^2).

- (1) $|\mathbf{a}|\mathbf{a} = a^2$; (2) $\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) = a\mathbf{b}^2$;
- (3) $\mathbf{a}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = a^2\mathbf{b}$; (4) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = a^2b^2$;
- (5) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$; (6) $\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}, \mathbf{c} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b}$.

6. 证明: 三角形三边的垂直平分线交于一点, 且交点到三顶点的距离相等.

7. 证明: 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 不共面, 如果向量 $\mathbf{r}$ 满足

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{c} = 0,$$

则 $\mathbf{r} = \mathbf{0}$.

8. 用几何方法证明: 若 $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n; c_1, c_2, \dots, c_n$ 都是实数, 则有

$$\begin{aligned} & \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} + \dots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2 + c_n^2} \\ & \geq \sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2 + (c_1 + c_2 + \dots + c_n)^2}. \end{aligned}$$

等号成立的充分必要条件是向量 $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), \dots, (a_n, b_n, c_n)$ 同向.

1.4 向量的外积

在力学中, 我们遇见过这样的问题: 一个力 $\mathbf{f}$ 作用在棒的一端 P , 使棒绕其支

点 O 转动,这就产生了力矩 M ,其大小为

$$|M| = |f| |\overrightarrow{OP}| \sin \angle(f, \overrightarrow{OP}),$$

其方向为:让右手四指从 $\overrightarrow{OP}$ 弯向 f (转角小于 π),则拇指指向为 M 的方向(图 1.18). 类似于从 $\overrightarrow{OP}$ 和 f 求力矩 M 这样的向量运算,我们引进向量的外积运算.

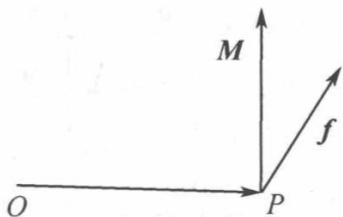


图 1.18

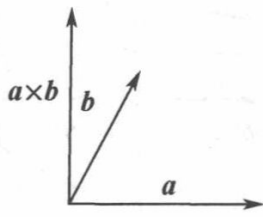


图 1.19

1.4.1 向量外积的定义及性质

定义 1.4.1 两个向量 a 与 b 的外积仍是一个向量,记作 $a \times b$,它的长度规定为

$$|a \times b| = |a| |b| \sin \angle(a, b), \quad (1.4.1)$$

它的方向规定为:与 a, b 均垂直,并且使 $\{a, b, a \times b\}$ 成右手系(图 1.19)的指向.

如果 a, b 中有一个为零向量,则规定 $a \times b = 0$.

两向量外积模的几何意义: $|a \times b|$ 是以 a, b 为邻边的平行四边形的面积.

思考题: $a \times b = 0$ 的充要条件是什么?

外积满足以下运算规律.

定理 1.4.1 对于任意向量 a, b, c 和任意实数 λ ,有

$$(1) a \times b = -b \times a, \quad (\text{反交换律})$$

$$(2) (\lambda a) \times b = \lambda(a \times b),$$

$$(3) a \times (b + c) = a \times b + a \times c, \quad (\text{左分配律})$$

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c. \quad (\text{右分配律})$$

证明 (1)由定义 1.4.1 立即得到.

(2)当 $a \parallel b$ 或 $\lambda = 0$ 时,显然成立.

因此,设 a, b 不共线, $\lambda \neq 0$.

$$\begin{aligned} |(\lambda a) \times b| &= |\lambda a| |b| \sin \angle(\lambda a, b) \\ &= |\lambda| |a| |b| \sin \angle(a, b) \\ &= |\lambda| |a \times b| = |\lambda(a \times b)|, \end{aligned}$$

当 $\lambda > 0$ 时, λa 与 a 同向,所以 $(\lambda a) \times b$ 与 $\lambda(a \times b)$ 同向;当 $\lambda < 0$ 时, $(\lambda a) \times b$ 与 $a \times b$ 反向,从而 $(\lambda a) \times b$ 与 $\lambda(a \times b)$ 同向,故有

$$(\lambda a) \times b = \lambda(a \times b).$$

为证明(3),我们引入向量在直线、平面上的投影的概念.

定义 1.4.2 设 $a = \overrightarrow{AB}$, b 所在直线为 l . 由 A, B 分别向 l 引垂线(图 1.20), 其垂足分别为 A', B' , 则向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 称为 a 在 b 上的射影. 如果 $\overrightarrow{A'B'} = x\mathbf{b}^0$, 那么实数 x 称为 a 在方向 b 上的分量, 记为 $\Pi_b(a)$.

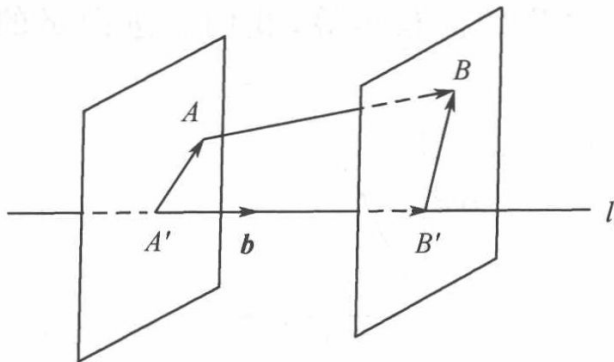


图 1.20

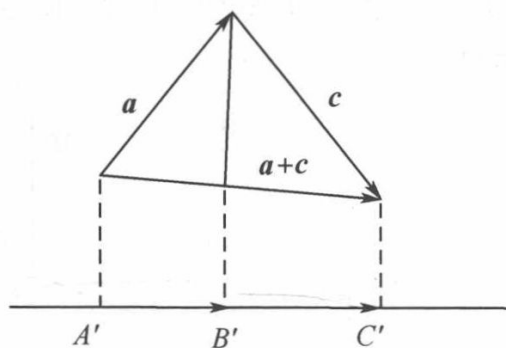


图 1.21

从图 1.20 和图 1.21 容易得出

$$\Pi_b a = |a| \cos \angle(a, b), \quad (1.4.2)$$

$$\Pi_b(a+c) = \Pi_b a + \Pi_b c. \quad (1.4.3)$$

另外对任意实数 λ 还有

$$\Pi_b(\lambda a) = \lambda \Pi_b a. \quad (1.4.4)$$

(1.4.4) 由 (1.4.2) 容易推得.

由向量的内积的定义和 (1.4.2) 得, 当 $a \neq 0, b \neq 0$ 时, 有

$$a \cdot b = |b| \Pi_b(a) = |a| \Pi_a(b). \quad (1.4.5)$$

类似地, 以向量 a 的始点在平面上的投影作为始点, 以 a 的终点在平面上的投影为终点的向量 a' 称为向量 a 在此平面上的投影. 显然, 相等的向量有相等的投影, 向量和的投影等于向量投影的和(图 1.22).

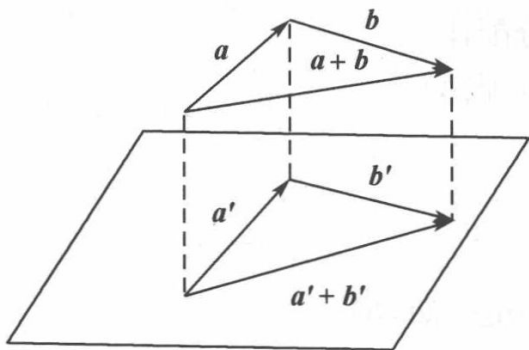


图 1.22

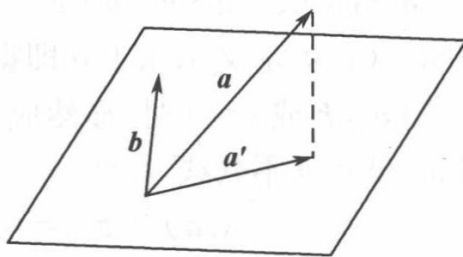


图 1.23

设有两个向量 a 和 b , 用 a' 表示向量 a 在与向量 b 垂直的平面上的投影(图 1.23), 这时有

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a}' \times \mathbf{b} \quad (\text{或 } \mathbf{b} \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}'),$$

其证明是容易的,留作习题.

(3)的证明 先证左分配律. 如果 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, 则结论是明显的. 其次只须证明当 $\mathbf{a}$ 为单位向量时(3)成立即可, 因为在一般情形下, 将由性质(2)得出. 因而设 $\mathbf{a}$ 为单位向量. 我们用 $\mathbf{b}'$ 和 $\mathbf{c}'$ 表示向量 $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 在与向量 $\mathbf{a}$ 垂直的平面上的投影(图 1.24). 这时向量 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}'$, $\mathbf{a} \times$

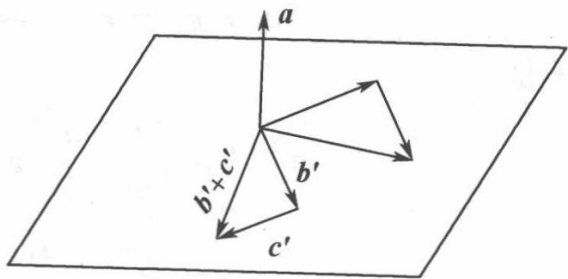


图 1.24

$\mathbf{c}'$ 和 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b}' + \mathbf{c}')$ 可以相应地由向量 $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$, $\mathbf{b}' + \mathbf{c}'$ 绕 $\mathbf{a}$ 右转 90° 而得到. 因此 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b}' + \mathbf{c}') = \mathbf{a} \times \mathbf{b}' + \mathbf{a} \times \mathbf{c}'$, 而由于 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}' = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{c}' = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, $\mathbf{a} \times (\mathbf{b}' + \mathbf{c}') = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})$, 因此 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$.

右分配律由性质(1)和左分配律立即得到.

例 1.4.1 设刚体以匀角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕 l 轴旋转, 求刚体上一点 M 的线速度 $\mathbf{v}$ (图 1.25).

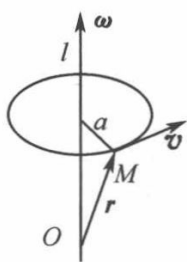


图 1.25

解 刚体绕 l 轴旋转时, 可以用 l 轴上的一个向量 $\boldsymbol{\omega}$ 表示角速度, 它的大小等于角速度的大小, 它的方向由右手法则决定: 右手握住 l 轴, 当右手的四个手指的指向与刚体的旋转方向一致时, 大拇指的指向就是 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向.

设点 M 到旋转轴 l 的距离为 a , 在 l 轴上任取一点 O , 作向量 $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$, θ 表示 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $\mathbf{r}$ 的夹角, 则 $a = |\mathbf{r}| \sin \theta$. 由物理学知道线速度 $\mathbf{v}$ 的大小为 $|\mathbf{v}| = |\boldsymbol{\omega}| a = |\boldsymbol{\omega}| |\mathbf{r}| \sin \theta$; $\mathbf{v}$ 的方向垂直于通过点 M 与 l 轴的平面, 且 $\mathbf{v}$ 的指向使 $\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, \mathbf{v}$ 符合右手规则, 因此有 $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$.

1.4.2 用坐标计算向量的外积

空间中取一个仿射标架 $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, 设向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 则

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \left(\sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^3 b_j \mathbf{e}_j \right) \\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 \\ &\quad + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 \\ &\quad + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1, \end{aligned} \tag{1.4.6}$$

由此可见, 只要知道坐标向量之间的外积, 就可求出 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

如果 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 是右手直角标架, 那么有

$$e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_2 \times e_3 = e_1, \quad e_3 \times e_1 = e_2,$$

于是

$$\begin{aligned} a \times b &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} e_3 \\ &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right). \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

作为一种记忆方式, (1.4.7) 可以写成

$$a \times b = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

此行列式按第一行展开后就可得 (1.4.7) 式.

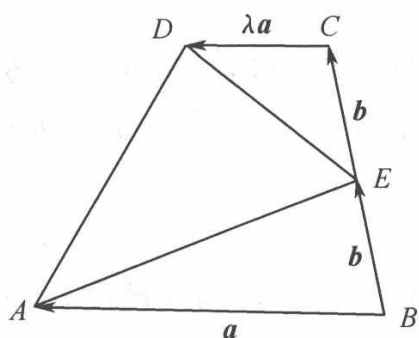


图 1.26

例 1.4.2 已知 BC 是梯形 $ABCD$ 的一腰 (图 1.26), E 是 BC 的中点. 证明 $\triangle AED$ 的面积是梯形面积的一半.

证明 设 $\overrightarrow{BA} = a, \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{EC} = b, \overrightarrow{CD} = \lambda a (\lambda > 0)$, 则

$$S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BE}| = \frac{1}{2} |a \times b|,$$

$$S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{CE}| = \frac{1}{2} |(\lambda a) \times (-b)|$$

$$= \frac{\lambda}{2} |a \times b|,$$

$$S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{EA} \times \overrightarrow{ED}| = \frac{1}{2} |(a - b) \times (b + \lambda a)|$$

$$= \frac{1}{2} (1 + \lambda) |a \times b|.$$

所以 $S_{\triangle AED} = S_{\triangle ABE} + S_{\triangle CDE}$, 即 $S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} S_{\text{梯形} ABCD}$.

思考题: 两向量外积后, 积向量仍可以与其他的向量作外积, 请证明:

对任意向量 a, b, c , 有

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c. \quad (1.4.8)$$

(1.4.8) 称为二重外积公式.

思考题: 一般情况下, 二重外积不满足结合律, 在什么条件下, $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$.

习题 1.4

1. 设 a' 表示向量 a 在与向量 $b \neq 0$ 垂直的平面上的投影, 则有 $a \times b = a' \times b$.

2. 证明: $(a \times b)^2 = a^2 b^2 - (a \cdot b)^2$.
3. 证明: 若 $a \times b = c \times d, a \times c = b \times d$, 则 $a - d$ 与 $b - c$ 共线.
4. 证明: $(a - b) \times (a + b) = 2(a \times b)$, 并说明其几何意义.
5. 在直角坐标系中, 已知 $a = (2, 3, -1), b = (1, -2, 3)$, 求与 a, b 都垂直, 且满足如下条件之一的向量 c :
 - (1) c 为单位向量;
 - (2) $c \cdot d = 10$, 其中 $d = (2, 1, -7)$.
6. 用向量法证明:
 - (1) 三角形的正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$;
 - (2) 三角形面积的海伦(Heron)公式 $\Delta^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$, 式中 $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, Δ 为三角形的面积. 其中, a, b, c 为三角形三边的长.
7. 证明 Jacobi 恒等式

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0.$$
8. 设 $a \neq 0, \vec{OP} = x$, 求满足方程 $a \times x = b$ 的点 P 的轨迹.

1.5 向量的混合积

1.5.1 向量的混合积及其性质

我们先来讨论平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$ (图 1.27) 的体积问题. 设 $\vec{AB} = a, \vec{AD} = b, \vec{AA'} = c$, 则底面积为 $|a \times b|$, 高为 $|\vec{AH}|$, 其中 $\vec{AH}$ 是 c 在 $a \times b$ 上的射影, 因此

$$|\vec{AH}| = |\Pi_{a \times b} c|.$$

从而平行六面体的体积为

$$\begin{aligned} V &= |a \times b| |\Pi_{a \times b} c| \\ &= ||a \times b| \Pi_{a \times b} c| = |(a \times b) \cdot c|. \end{aligned}$$

定义 1.5.1 $(a \times b) \cdot c$ 称为向量 a, b, c 的混合积, 记为 (a, b, c) .

由上述讨论知道下述定理.

定理 1.5.1 三个不共面向量 a, b, c 的混合积的绝对值等于以 a, b, c 为棱的平行六面体的体积.

思考题: $(a \times b) \cdot c$ 的符号与 $\{a, b, c\}$ 为右手系或左手系有什么关系?

混合积有以下两条常用的性质:

- (1) $(a \times b) \cdot c = (b \times c) \cdot a = (c \times a) \cdot b$;
- (2) $(a \times b) \cdot c = a \cdot (b \times c)$.

性质(1), (2)的证明较简单, 留作习题.

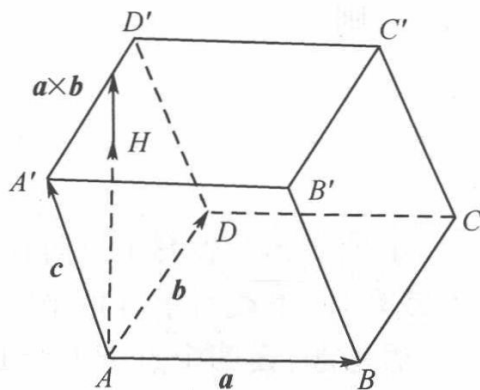


图 1.27

性质(2)表明三个有序向量的混合积中的外积与内积运算可以交换,因此混合积记作 (a, b, c) .

1.5.2 用坐标计算向量的混合积

取仿射标架 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$, 设 $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$, $c = (c_1, c_2, c_3)$, 则

$$\begin{aligned}
 (a \times b) \cdot c &= \left(\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} e_1 \times e_2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} e_2 \times e_3 \right. \\
 &\quad \left. + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} e_3 \times e_1 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^3 c_i e_i \right) \\
 &= \left(c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \right) \\
 &\quad \cdot (e_1, e_2, e_3) \\
 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} (e_1, e_2, e_3). \tag{1.5.1}
 \end{aligned}$$

于是,只要知道 (e_1, e_2, e_3) ,就可按(1.5.1)计算 (a, b, c) .

思考题:三个向量 a, b, c 共面的充要条件与其混合积 $(a \times b) \cdot c$ 的关系如何?

如果 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 是右手直角标架,则 $(e_1, e_2, e_3) = 1$,从而得到下面的定理.

定理 1.5.2 在右手直角坐标系中,设 $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$, $c = (c_1, c_2, c_3)$, 则

$$(a, b, c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{1.5.2}$$

定理 1.5.2 表明了三阶行列式的几何意义:三阶行列式的绝对值等于其三个行(或列)向量在右手直角坐标系中构成的平行六面体的体积.

思考题:设四个点 $P_i (i=1, 2, 3, 4)$ 的仿射坐标为 (x_i, y_i, z_i) , $i=1, 2, 3, 4$, 利用行列式性质推证 $P_i (i=1, 2, 3, 4)$ 共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

习题 1.5

1. 证明: $(a \times b) \cdot c = (b \times c) \cdot a = (c \times a) \cdot b$.
2. 证明: a, b, c 不共面当且仅当 $a \times b, b \times c, c \times a$ 不共面.

3. 在右手直角坐标系中,一个四面体的顶点为 $A(1,2,0), B(-1,3,4), C(-1,-2,-3), D(0,-1,3)$, 求它的体积.

4. 证明 Lagrange 恒等式

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = \begin{vmatrix} a \cdot c & a \cdot d \\ b \cdot c & b \cdot d \end{vmatrix}.$$

5. 证明: $(a+b, b+c, c+a) = 2(a, b, c)$.

6. 证明: $(a, b, c \times d) + (b, c, a \times d) + (c, a, b \times d) = 0$.

7. 证明: 对任意四个向量 a, b, c, d 有

$$(b, c, d)a + (c, a, d)b + (a, b, d)c + (b, a, c)d = 0.$$

8. 证明: 若 a 与 b 不共线, 则 $a \times (a \times b)$ 与 $b \times (a \times b)$ 不共线.

9. 已知 α, β 都是非零实数, 向量 a, b, c 的混合积 $(a, b, c) = \alpha\beta$, 如果向量 r 满足

$$r \cdot a = \alpha, \quad r \cdot b = \beta, \quad r \cdot c = 0,$$

求此向量 r .

10. 设 e_1, e_2, e_3 不共面, 证明: 任一向量 a 可以表示成

$$a = \frac{1}{(e_1, e_2, e_3)} ((a, e_2, e_3)e_1 + (a, e_3, e_1)e_2 + (a, e_1, e_2)e_3).$$

11. 设 a, b, c 不共面, 设向量 r 满足

$$a \cdot r = \alpha, \quad b \cdot r = \beta, \quad c \cdot r = \gamma,$$

那么有

$$r = \frac{1}{(a, b, c)} (\alpha b \times c + \beta c \times a + \gamma a \times b).$$

近代科学的始祖——笛卡儿^①

笛卡儿(Descartes R, 1596~1650), 法国数学家. 1637 年笛卡儿发表了著作《方法论》, 简要阐述了他的机械论的哲学观和基本研究方法, 以及他的经历. 《方法论》给出三个应用实例, 它们是《折光学》、《气象学》和《几何学》, 现一般称为三个附录, 它们是笛卡儿的最主要的科学论著. 其中《几何学》包括了解析几何的基本思想. 在笛卡儿所处的时代, 代数还是一门比较新的科学, 几何学的思维还在数学家的头脑中占有统治地位, 解析几何的思想确定了笛卡儿在数学史上的地位.



在《几何学》卷一中, 他用平面上的一点到两条固定直线的距离来确定点的距离, 用坐标来描述空间上的点. 进而他创立了解析几何学, 表明了几何问题不仅可以归结成为代数形式, 而且可以通过代数变换来发现几何性质, 证明几何性质.

^① 摘自 <http://www.ikepu.com>, 有删减

笛卡儿把几何问题化成代数问题,提出了几何问题的统一作图法.他引入了单位线段,以及线段的加、减、乘、除、开方等概念,从而把线段与数量联系起来.通过线段之间的关系,“找出两种方式表达同一个量,这将构成一个方程”,然后根据方程的解所表示的线段间的关系作图.

在卷二中,笛卡儿用这种新方法解决帕普斯问题时,在平面上以一条直线为基线,为它规定一个起点,又选定与之相交的另一条直线,它们分别相当于 x 轴、原点、 y 轴,构成一个斜坐标系.那么该平面上任一点的位置都可以用 (x, y) 唯一地确定,帕普斯问题就化成了一个含两个未知数的二次不定方程.笛卡儿指出,方程的次数与坐标系的选择无关,因此可以根据方程的次数将曲线分类.

《几何学》一书提出了解析几何学的主要思想和方法,标志着解析几何学的诞生.此后,人类进入变量数学阶段.

解析几何的出现,改变了自古希腊以来代数和几何分离的趋向,把相互对立的“数”与“形”统一了起来,使几何曲线与代数方程相结合.笛卡儿的这一天才创见,更为微积分的创立奠定了基础,从而开拓了变量数学的广阔领域.

正如恩格斯所说:“数学中的转折点是笛卡儿的变数.有了变数,运动进入了数学;有了变数,辩证法进入了数学;有了变数,微分和积分也就立刻成为必要了.”

第1章小结

向量是既有大小又有方向的量.平行移动过程中的向量是一样的.向量的线性运算是指向量间的加法及数与向量的乘法.

基本定理1 给定两个不共线的向量 a, b, c 是平面上的任何一个向量,则 c 由 a, b 唯一表示,即存在唯一的一对实数 λ, μ 使得 $c = \lambda a + \mu b$.

从几何意义上说:以平面上的任何一个向量 c 为对角线,沿向量 a, b 可作唯一的一个平行四边形.

基本定理2 给定三个不共面的向量 a, b, c, d 是空间中的任何一个向量,则 d 由 a, b, c 唯一表示,即存在唯一的三数组 λ, μ, ν ,使得 $d = \lambda a + \mu b + \nu c$.

从几何意义上说:以空间中的任何一个向量 d 为对角线,沿向量 a, b, c 可作唯一的一个平行六面体.

向量组的线性相关性从几何意义的角度讲, n 个向量的向量组能放到低于 n 维的空间中就是线性相关,否则就是线性无关.比如,向量个数超过其维数的向量组必定是线性相关的.两个空间向量线性无关就是不共线,三个空间向量线性无关就是不共面.

空间仿射标架由一个点和三个不共面的向量组成.平面仿射标架由一个点和两个不共线的向量组成.空间直角坐标系是一个特殊的仿射标架,要求三个不共面的向量是两两互相垂直(正交)的单位向量.2、3维的仿射标架的定向只有两个:左手系和右手系,应用中通常使用右手系.

向量间的运算有线性运算,内积(数量积),外积(向量积)和混合积.

外积的运算要注意它的反交换律,没有结合律,有二重外积公式: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$. 由于向量的性质与坐标系的选取无关,所以公式的证明可选一个特殊的坐标系,用坐标法,通过计算两边向量的坐标就知道成立.

利用向量的内积,外积和混合积可以判定向量间的一些基本关系:

两向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 垂直的充要条件是 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

两向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 共线的充要条件是 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$.

三向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面的充要条件是 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$.

用坐标计算向量间的运算:设在空间仿射标架 $\{\mathbf{O}; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 下,向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$. 实数 λ , 则

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3); \quad \lambda \mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3);$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j;$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1;$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3.$$

在右手直角标架下: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$;

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

第2章 直线与平面

通过空间中线性无关的向量建立仿射标架后,对空间中的点,我们可以用坐标将其表出.自然地,由点组成的集合——直线、平面也应与坐标有密切的关系,本章我们主要讨论直线、平面的方程及其性质.

2.1 直线、平面的方程

回顾一下构成直线和平面的基本要素:

- 两点确定一条直线;
- 过一点沿一方向确定一条直线;
- 不共线的三点确定一个平面;
- 一条直线和此直线外的一点确定一个平面;
- 两条相交直线确定一个平面;
- 两条平行直线确定一个平面.

为了便于用向量法,我们以“点和向量”作为讨论的出发点.

2.1.1 直线方程

一个点和一个非零向量确定一条直线.

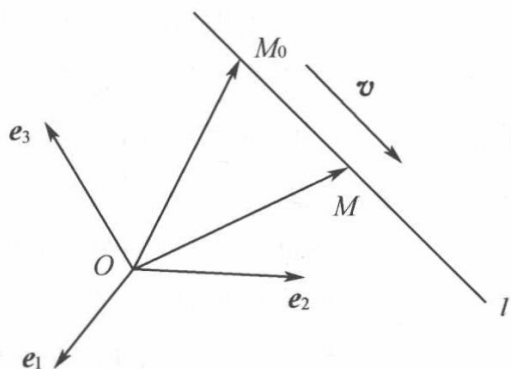


图 2.1

取仿射标架 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$, 设已知点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 非零向量 $v = (X, Y, Z)$, 称为直线 l 的方向向量. 现在来求过点 M_0 且方向向量为 v 的直线 l 的方程(图 2.1).

点 $M(x, y, z) \in l$ 的充要条件是 $\overrightarrow{M_0M} \parallel v$, 即存在唯一的实数 t 使

$$\overrightarrow{M_0M} = tv. \quad (2.1.1)$$

设 M_0, M 的位置向量由 r_0, r 表示, 则由 (2.1.1) 得

$$r = r_0 + tv. \quad (2.1.2)$$

(2.1.2) 称为直线 l 的向量式参数方程, t 为参数, 其几何意义是 t 为 M 在 l 上的标架 $\{M_0; v\}$ 下的坐标.

将(2.1.2)用坐标写出得

$$\begin{cases} x = x_0 + tX, \\ y = y_0 + tY, \\ z = z_0 + tZ, \end{cases} \quad (2.1.3)$$

(2.1.3)称为直线的**参数方程**.

从(2.1.3)消去参数 t ,可得到直线的**标准方程(或点向式方程)**

$$\frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y} = \frac{z-z_0}{Z}. \quad (2.1.4)$$

(2.1.4)中的 X, Y, Z 中有可能为零,于是出现了零在分母上的无意义的情况.为此我们约定:(2.1.4)中某分式的分母为零就意味着分子为零,比如, $Z=0$, (2.1.4)应理解为

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y}, \\ z-z_0 = 0. \end{cases}$$

如果 $Y=Z=0$, (2.1.4)就表示

$$\begin{cases} y-y_0 = 0, \\ z-z_0 = 0. \end{cases}$$

(2.1.4)中的 X, Y, Z 称为直线 l 的**方向数**,它们是 l 的方向向量 v 的坐标.由于 kv ($k \neq 0$)也是 l 的方向向量,所以 kX, kY, kZ 也是 l 的方向数.

思考题:推导通过两点确定一条直线的方程形式.

思考题:直线平行于坐标轴时的方程形式是什么? 直线过原点时其方程可变成怎样的形式?

2.1.2 平面方程

一点和两个不共线的向量确定一个平面.

取定仿射标架 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$. 已知一个点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 两个不共线的向量 $v_i = (X_i, Y_i, Z_i), i=1, 2$. 我们来求由点 M_0 和 v_1, v_2 确定的平面 Π 的方程.

点 $M(x, y, z) \in \Pi$ 的充要条件是 $\overrightarrow{M_0M}, v_1, v_2$ 共面(图 2.2). 因为 v_1, v_2 不共线,可构成 Π 上的一个基,所以 $\overrightarrow{M_0M}, v_1, v_2$ 共面的充要条件是存在唯一的一对实数 λ, μ ,使得

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda v_1 + \mu v_2. \quad (2.1.5)$$

若 M_0, M 的位置向量记为 r_0, r ,则(2.1.5)式可写成

$$r = r_0 + \lambda v_1 + \mu v_2. \quad (2.1.6)$$

(2.1.6)称为平面的**向量式参数方程**,其中

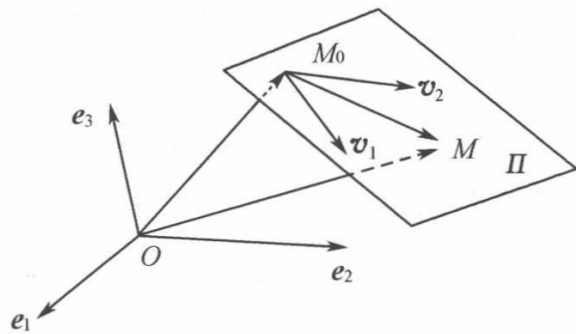


图 2.2

λ, μ 称为参数, v_1, v_2 称为平面 Π 的方向向量. 将坐标代入(2.1.6)中, (2.1.6)可写成

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda X_1 + \mu X_2, \\ y = y_0 + \lambda Y_1 + \mu Y_2, \\ z = z_0 + \lambda Z_1 + \mu Z_2, \end{cases} \quad (2.1.7)$$

(2.1.7)称为平面的坐标式参数方程.

思考题:在平面参数方程中, 参数的几何意义是什么?

根据三向量共面的充要条件是其混合积为零这一特点, 平面 Π 的方程还可表示为

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0,$$

或

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.1.8)$$

即

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (2.1.9)$$

其中 $A = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}$ 不全为零, $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$. (2.1.9)称为平面 Π 的一般方程, 它是三元一次方程.

思考题:(2.1.9)中的 A, B, C 为何能确保不全为零?

引理 2.1.1 设平面 Π 的方程为(2.1.9), 则向量 $\mathbf{v} = (X, Y, Z)$ 平行于平面 Π 的充要条件是

$$AX + BY + CZ = 0. \quad (2.1.10)$$

证明 $\mathbf{v} //$ 平面 Π 的充要条件是 $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 共面, 即

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0,$$

从而得

$$AX + BY + CZ = 0.$$

因为(2.1.9)中 A, B, C 不全为 0, 比如 $A \neq 0$, 所以从(2.1.10)中可解得两个不共线的向量

$$\mathbf{v}_1 = \left(-\frac{B}{A}, 1, 0\right), \quad \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{C}{A}, 0, 1\right),$$

它们是平面 Π 的两个方向向量.

思考题:平面平行于 x 轴、 y 轴或 z 轴的充要条件是什么? 平面通过原点的充

要条件是什么?

定理 2.1.1 在空间中取定一个仿射标架, 则平面的方程是三元一次方程, 反之, 任意一个三元一次方程表示一个平面.

证明 定理的前半部分在前面已经说明, 现证后半部分. 任给一个三元一次方程

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad (2.1.11)$$

其中, A_1, B_1, C_1 不全为零, 不妨设 $A_1 \neq 0$, 取点 $M_1\left(-\frac{D_1}{A_1}, 0, 0\right)$, 取不共线的两向量 $v_1 = \left(-\frac{B_1}{A_1}, 1, 0\right)$, $v_2 = \left(-\frac{C_1}{A_1}, 0, 1\right)$, 那么由点 M_1 和 v_1, v_2 决定的平面 Π_1 的方程就是

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0.$$

这说明方程(2.1.11)表示一个平面 Π_1 .

思考题: 利用三向量共面的充要条件推证: 经过不共线三点 $M_i(x_i, y_i, z_i) (i=1, 2, 3)$ 的平面方程可写为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.1.12)$$

或

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.1.13)$$

若 $M_1(a, 0, 0), M_2(0, b, 0), M_3(0, 0, c)$, 其中, $abc \neq 0$, 则(2.1.12)可化简为

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (2.1.14)$$

(2.1.14)称为平面的截距式方程, a, b, c 分别是平面在 x 轴, y 轴和 z 轴上的截距.

2.1.3 直角坐标系下的平面方程

在直角标架下, 经过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且垂直于向量 $n=(A, B, C)$ 的平面 Π 是唯一确定的. 如图 2.3, 设 $M(x, y, z) \in \Pi$, 由 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 n 垂直, 得

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot n = 0, \quad (2.1.15)$$

从而得

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0, \quad (2.1.16)$$

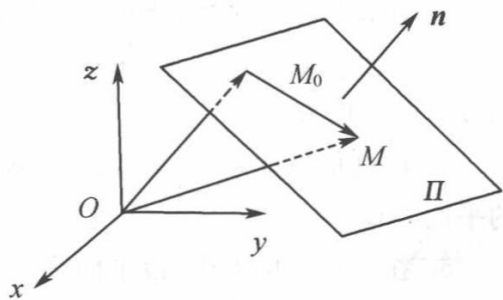


图 2.3

(2.1.15)或(2.1.16)均称为平面 Π 的**点法式方程**,与平面 Π 垂直的向量 $\boldsymbol{n}$ 称为平面 Π 的**法向量**.(2.1.16)也可写成 $Ax+By+Cz+D=0$,其中 $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$.由此可见,在直角坐标系下,平面方程的一次项系数就是这个平面的一个法向量的坐标.

例 2.1.1 在仿射坐标系中,求过点 $M_1(1,0,-2)$ 和 $M_2(-1,3,2)$,平行于 $\boldsymbol{v}=(1,-2,4)$ 的平面方程.

解 平面的方位向量为 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-2,3,4)$, $\boldsymbol{v}=(1,-2,4)$,因而平面的参数方程为

$$\begin{cases} x = 1 - 2\lambda + \mu, \\ y = 3\lambda - 2\mu, \\ z = -2 + 4\lambda + 4\mu, \end{cases}$$

一般方程为

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

化简得

$$20x + 12y + z - 18 = 0.$$

命题 2.1.1 在仿射标架 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 下,设 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 是平面 Π 的任何两个方位向量,则平面 Π 的法向量为 $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = A\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 + B\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 + C\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2$.平面 Π 的方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 中的系数 A, B, C 为法向量 $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ 在基底 $\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2$ 下的系数.

习题 2.1

1. 求通过两点 $A(2,3,4)$ 和 $B(5,2,-1)$ 的直线方程.
2. 在给定的仿射坐标系中,求下列平面的普通方程和参数方程.
 - (1) 过点 $(-1,2,0), (-2,-1,4), (3,1,-5)$;
 - (2) 过点 $(3,1,-2)$ 和 z 轴;
 - (3) 过点 $(2,0,-1)$ 和 $(-1,3,4)$,平行于 y 轴;
 - (4) 过点 $(-1,-5,4)$,平行于平面 $3x-2y+5=0$.

3. 在直角坐标系中,求通过点 $(1,0,-2)$ 并与平面

$$\Pi_1: 2x + y - z - 2 = 0 \quad \text{和} \quad \Pi_2: x - y - z - 3 = 0$$

均垂直的平面方程.

4. 在直角坐标系中,求经过点 $M_1(3,-1,4), M_2(1,0,-3)$,垂直于平面 $2x+5y+z+1=0$ 的平面方程.

5. 在直角坐标系中,设平面 Π 的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$,其中 $ABCD \neq 0$.设此平面与三坐标轴分别交于 M_1, M_2, M_3 ,求三角形 M_1, M_2, M_3 的面积和四面体 $OM_1M_2M_3$ 的体积.

6. 设平面 $\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$ 与连接两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的线段相交于点 M , 且 $\overrightarrow{M_1M} = k\overrightarrow{MM_2}$. 证明

$$k = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D}.$$

2.2 位置关系

点、直线、平面三者之间的位置关系如下.

- 点在直线(平面)上或之外;
- 直线含在平面内, 或与平面交于一点, 或与平面平行;
- 直线与直线平行、相交、重合、异面;
- 平面与平面平行、相交、重合.

注: 我们的平行关系不包含重合关系.

在仿射标架 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 下, 点对直线(平面)的关系容易确定, 只需将点的坐标代入直线(平面)方程验证即可判定.

2.2.1 直线与直线的位置关系

给定两直线 $l_i: \frac{x-x_i}{X_i} = \frac{y-y_i}{Y_i} = \frac{z-z_i}{Z_i}$, $M_i(x_i, y_i, z_i) \in l_i$, $v_i = (X_i, Y_i, Z_i)$ 为 $l_i (i=1, 2)$ 的方向向量.

我们有下列命题.

命题 2.2.1 (1) 当 $v_1 \parallel v_2$ 时,

1° $l_1 \parallel l_2$ 当且仅当 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 与 v_1 不共线;

2° l_1, l_2 重合当且仅当 $\overrightarrow{M_1M_2} \parallel v_1$.

(2) 当 v_1, v_2 不共线时,

1° l_1 与 l_2 交于一点当且仅当 $(\overrightarrow{M_1M_2}, v_1, v_2) = 0$;

2° l_1 与 l_2 异面当且仅当 $(\overrightarrow{M_1M_2}, v_1, v_2) \neq 0$.

2.2.2 直线与平面的位置关系

设直线 $l: \frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y} = \frac{z-z_0}{Z}$, 平面 $\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$. 根据引理

2.1.1, 易得下面的命题.

命题 2.2.2 (1) l 与 Π 交于一点当且仅当 $AX + BY + CZ \neq 0$;

(2) 当 $AX + BY + CZ = 0$ 时, 1° $l \subset \Pi$ 当且仅当 $M(x_0, y_0, z_0) \in \Pi$; 2° $l \parallel \Pi$ 当且仅当 $M(x_0, y_0, z_0) \notin \Pi$.

思考题:如何利用直线、平面的向量式方程确定直线与直线、直线与平面的关系?

2.2.3 两平面的相关位置

在仿射标架 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 下, 设两平面 $\Pi_i (i=1, 2)$ 的方程为

$$\Pi_i: A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0 \quad (i=1, 2). \quad (2.2.1)$$

定理 2.2.1 (1) Π_1 与 Π_2 相交于一直线的充要条件是 $A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$;

(2) Π_1 与 Π_2 平行的充要条件是 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$;

(3) Π_1 与 Π_2 重合的充要条件是 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$.

证明 由命题 2.1.1 及平面 Π_1, Π_2 的方程知道两平面的法向量 n_1, n_2 在基 $e_2 \times e_3, e_3 \times e_1, e_1 \times e_2$ 下的坐标分别为 (A_1, B_1, C_1) 和 (A_2, B_2, C_2) .

(1) Π_1 与 Π_2 相交于一条直线的充分必要条件为 n_1 与 n_2 不共线, 即它们的坐标不成比例, 因而 $A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$.

(2) Π_1 与 Π_2 平行的充分必要条件为 n_1 与 n_2 共线且 Π_1 与 Π_2 没有公共点, 则法向量 n_1, n_2 的坐标成比例, 即 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$. 另外, 不妨设点 $M(x, y, z) \in \Pi_1$,

$\frac{A_1}{A_2} = k \neq 0$, 则

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = k A_2 x + k B_2 y + k C_2 z + D_1 = 0,$$

且 $k(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) \neq 0$, 于是 $D_1 \neq k D_2$. 因而 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$.

(3) Π_1 与 Π_2 重合的充分必要条件为 n_1 与 n_2 共线且 Π_1 与 Π_2 有公共点. 类似于(2)的证明方法易得 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$.

代数的证明法 两平面的相关位置取决于线性方程组(2.2.1)的解的情况, 也就是取决于线性方程组(2.2.1)的系数矩阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$$

与增广矩阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{pmatrix}$$

的秩 r_1, r_2 . 由线性方程组的解的理论知道:

(1) (2.2.1)的解构成一直线(即 Π_1 与 Π_2 相交于一直线)的充要条件是 $r_1 = r_2 = 2$, 即

$$A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2;$$

(2) (2.2.1)无解, 即 Π_1 与 Π_2 平行的充要条件是 $r_1 = 1, r_2 = 2$, 即

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2};$$

(3) (2.2.1)的解构成一平面(即 Π_1 与 Π_2 重合)的充要条件为 $r_1=r_2=1$,即

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

由于相交的两平面相交于一直线,因而直线方程可由两平面方程构成的方程组表示出来,即由形式

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (2.2.2)$$

表示,(2.2.2)称为直线 l 的一般方程.

思考题:由一般方程(2.2.2)表示的直线的方向向量如何求得?

直线的标准方程和一般方程之间可以互相转化.由标准方程化为一般方程是很容易的;由一般方程化为标准方程,我们通过举例来说明这种方法.

例 2.2.1 化直线 l 的一般方程

$$\begin{cases} 2x + y + z - 5 = 0, \\ 2x + y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

为标准方程.

解法 1 先求直线 l 上的点,然后求 l 的一个方向向量.

因为已给方程组中 y, z 的系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$,可令 $x=0$,解方程组

$$\begin{cases} y + z - 5 = 0, \\ y - 3z - 1 = 0, \end{cases}$$

就得到 l 上一点 $(0, 4, 1)$.

设 l 的方向向量为 $v=(X, Y, Z)$,则 v 平行于交成 l 的两个平面,于是

$$\begin{cases} 2X + Y + Z = 0, \\ 2X + Y - 3Z = 0. \end{cases}$$

解得 $Z=0, 2X+Y=0$,即 $X:Y:Z=1:(-2):0$,故 v 可取为 $(1, -2, 0)$,因此 l 的标准方程为

$$\frac{x}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-1}{0}.$$

解法 2 由方程组分别消去 y, z ,则有

$$z = 1, \quad y = -2x + 4 = -2(x - 2).$$

所以 l 的标准方程为

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{0}.$$

例 2.2.2 在仿射坐标系中,求过点 $M_0(0, 0, -2)$ 与平面 $\Pi: 3x - y + 2z - 1 = 0$ 平行,且与直线 $l_1: \frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}$ 相交的直线 l 的方程.

解法 1 求出 l 的一个方向向量 $v=(X,Y,Z)$.

记 l_1 的方向向量为 $v_1=(4,-2,1)$, $M_1(1,3,0) \in l_1$. 因为 l 过点 M_0 , 且与 l_1 相交, 所以 $(\overrightarrow{M_0M_1}, v_1, v)=0$, 即

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$X+Y-2Z=0. \quad (2.2.3)$$

又因为 l 与 Π 平行, 所以

$$3X-Y+2Z=0. \quad (2.2.4)$$

由(2.2.3)和(2.2.4)解得 $X=0, Y=2Z$. 令 $Z=1$, 得 $Y=2$. 所以所求直线 l 的方程为

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{1}.$$

解法 2 l 在过点 M_0 与 Π 平行的平面 Π_1 上. 可设 Π_1 的方程为

$$3x-y+2z+D=0.$$

将 M_0 代入 Π_1 的方程中, 得 $D=4$, 故 Π_1 的方程为

$$3x-y+2z+4=0.$$

l 又在过点 M_0 及直线 l_1 的平面 Π_2 上, Π_2 的方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & z+2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

即 $x+y-2z-4=0$. 所以 l 的方程为

$$\begin{cases} 3x-y+2z+4=0, \\ x+y-2z-4=0. \end{cases}$$

解法 3 设 l 与 l_1 的交点为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, 因为 $M_1 \in l_1$, 又 $\overrightarrow{M_0M_1} // \Pi$, 所以

$$\begin{cases} \frac{x_1-1}{4} = \frac{y_1-3}{-2} = \frac{z_1}{1}, \\ 3(x_1-0) - (y_1-0) + 2(z_1+2) = 0, \end{cases}$$

解这方程组得 $M_1\left(0, \frac{7}{2}, -\frac{1}{4}\right)$. 因此 l 的方程为

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{\frac{7}{2}} = \frac{z+2}{-\frac{1}{4}+2},$$

即

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{1}.$$

2.2.4 平面束

空间中过同一直线 l 的一切平面的集合叫有轴平面束, l 叫平面束的轴. 空间中平行于同一平面的所有平面的集合叫平行平面束.

定理 2.2.2 设两平面 $\Pi_i: A_ix + B_iz + D_i = 0 (i=1, 2)$ 交于一直线 l , 那么以 l 为轴的有轴平面束的方程为

$$\sum_{i=1}^2 \lambda_i (A_ix + B_iz + D_i) = 0, \quad (2.2.5)$$

其中, $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$.

证明 首先, 当 $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ 时, (2.2.5) 表示一平面.

将(2.2.5)改写成

$$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)x + (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)y + (\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2)z + (\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2) = 0,$$

其中 $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2, \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2, \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$ 不能全为 0, 否则有 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, 这与 Π_1 和 Π_2 相交于一直线矛盾. 因此, (2.2.5) 表示一平面. 又因为 Π_1 与 Π_2 的交点的坐标都满足 $\Pi_i (i=1, 2)$ 的方程, 从而必满足(2.2.5)的方程, 故(2.2.5)总表示过 l 的平面.

其次, 过 l 的平面 Π 的方程一定是(2.2.5)的形式.

在仿射标架 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 下, 设相交于直线 l 的两个平面为

$$\Pi_i: A_ix + B_iz + D_i = 0 \quad (i=1, 2),$$

则 Π_i 的法向量 n_i 表示为 $n_i = A_ie_2 \times e_3 + B_ie_3 \times e_1 + C_ie_1 \times e_2 (i=1, 2)$, 且 n_1, n_2 不共线. 设过直线 l 的任一个平面 Π 的法向量为 $n = Ae_2 \times e_3 + Be_3 \times e_1 + Ce_1 \times e_2$. 因为三个法向量 n, n_1, n_2 均与直线 l 垂直, 所以它们共面. 由定理 1.1.1 知, 存在唯一的一对实数 λ_1, λ_2 使得 $n = \lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2$, 由于 n 是非零向量, 因此 λ_1, λ_2 不全为零.

由此可得平面 Π 的方程可写为 $\sum_{i=1}^2 (\lambda_i A_ix + \lambda_i B_iz + \lambda_i C_iz) + D = 0$. 因为平面 Π 过直线 l , 所以直线 l 上的任何一点 (x', y', z') 应满足 Π 的方程. 而 Π_1, Π_2 也过直线 l , 我们得 $\lambda_i A_ix' + \lambda_i B_iz' + \lambda_i C_iz' = -\lambda_i D_i (i=1, 2)$, 将它们代入 Π 的方程中, 得到 $D = \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2$. 故过直线 l 的任何一个平面 Π 的方程可写成(2.2.5)的形式.

类似地有以下定理.

定理 2.2.3 如果两个平行平面为 $\Pi_i: A_ix + B_iz + D_i = 0 (i=1, 2)$, 则平行于 $\Pi_1 (\Pi_2)$ 的平行平面束的方程也有(2.2.5)的形式, 其中 $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ 且满足 $\lambda_1 : \lambda_2 \neq -A_2 : A_1 = -B_2 : B_1 = -C_2 : C_1$.

推论 2.2.1 平行于平面 $\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$ 的平行平面束方程为

$$Ax + By + Cz + \lambda = 0, \quad (2.2.6)$$

其中, λ 为任意实数.

命题 2.2.3 三个平面 $\Pi_i: A_ix + B_iz + C_iz + D_i = 0 (i=1, 2, 3)$ 相交于一点的充要条件是

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.2.7)$$

证明 三平面相交于一点的充分必要条件是它们的法向量 n_1, n_2, n_3 不共面, 即它们的混合积 $(n_1, n_2, n_3) \neq 0$, 由此立刻得到该命题.

从代数的角度看, 三个平面交于一点等价于由其构成的线性方程组有唯一解. 根据 Cramer 法则立即得到此命题.

例 2.2.3 判断两平面 $\Pi_1: 2x + y - 3z - 1 = 0, \Pi_2: \frac{x}{3} + \frac{y}{6} - \frac{z}{2} + 2 = 0$ 的位置关系.

解 Π_2 的方程可写为 $2x + y - 3z + 12 = 0$.

因为 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = 1$, 但 $\frac{D_1}{D_2} = -\frac{1}{12} \neq 1$, 所以两平面平行.

例 2.2.4 求经过点 $M_0(1, -2, 0)$, 并且经过 $\Pi_1: 2x - y + z - 3 = 0$ 与 $\Pi_2: x + 2y - z + 1 = 0$ 的交线的平面 Π 的方程.

解 经过 Π_1 与 Π_2 的交线的平面方程可设为

$$\lambda_1(2x - y + z - 3) + \lambda_2(x + 2y - z + 1) = 0.$$

因为 $M_0 \in \Pi$, 所以将 M_0 的坐标代入以上方程得到

$$\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0.$$

即 $\lambda_1 : \lambda_2 = 2 : 1$. 因而所求平面方程为

$$\Pi: 5x + z - 5 = 0.$$

习题 2.2

1. 求经过点 $(-2, 1, 3)$, 并且通过两平面 $2x - 7y + 4z - 3 = 0$ 与 $3x - 5y + 4z + 11 = 0$ 的交线的平面方程.

2. 判断下列各对平面的相关位置.

(1) $x - 2y + z - 2 = 0$ 与 $3x + y - 2z - 1 = 0$;

(2) $3x + 9y - 6z + 2 = 0$ 与 $2x + 6y - 4z + \frac{4}{3} = 0$;

(3) $x + 2y - z - 1 = 0$ 与 $\frac{x}{2} + y - \frac{z}{2} + 2 = 0$.

3. 将下列直线的普通方程化成标准方程.

$$(1) \begin{cases} 3x-y+2=0, \\ 4y+3z+1=0; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} y-1=0, \\ z+2=0. \end{cases}$$

4. 求通过点 $N_0(1, 4, -2)$ 且与两平面

$$\Pi_1: 6x+2y+2z+3=0, \quad \Pi_2: 3x-5y-2z-1=0$$

均平行的直线方程.

5. 判断下列各对直线的位置.

$$(1) \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{1}, \quad \frac{x}{-1} = \frac{y-6}{2} = \frac{z+5}{3};$$

$$(2) \begin{cases} x+y+z=0, \\ y+z+1=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x+z+1=0, \\ x+y+1=0. \end{cases}$$

6. 求直线 $\begin{cases} x=z+2 \\ y=1-3z \end{cases}$ 与平面 $x-2y-7=0$ 的交点.

7. 求通过直线 $l_1: \begin{cases} 3x-4y+5z-10=0 \\ 2x+2y-3z-4=0 \end{cases}$ 且与直线 $l_2: x=2y=3z$ 平行的平面方程.

8. 在直角坐标系中, 求直线 $l: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{4}$ 在平面 $\Pi: x+2y-6=0$ 上的垂直投影直线的方程.

9. 在仿射坐标系中, 求过直线 $l_1: \begin{cases} 2x-y-2z+1=0 \\ x+y+4z-2=0 \end{cases}$ 且在 y 轴和 z 轴上有相同的非零截距的平面方程.

10. 在 $\triangle ABC$ 中, 设 P, Q, R 分别是直线 AB, BC, CA 上的点, 并且 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{BQ} = \mu \overrightarrow{QC}, \overrightarrow{CR} = \nu \overrightarrow{RA}$. 证明 AQ, BR, CP 三线共点的充要条件是 $\lambda\mu\nu=1$.

11. 用坐标法证明契维定理: 若三角形的三边依次被分割成 $\lambda: \mu, \nu: \lambda, \mu: \nu$, 其中, λ, μ, ν 均为正实数, 则此三角形的顶点与对边分点的连线交于一点.

12. 证明: 如果直线 $l_1: \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ 与直线 $l_2: \begin{cases} A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0, \\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0 \end{cases}$ 相交, 那么

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

13. 在直角坐标系中, 给定点 $M_1(1, 0, 3)$ 和 $M_2(0, 2, 5)$, 直线 $l: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{3}$, 设 M'_1, M'_2 各为 M_1, M_2 在 l 上的垂足, 求 $|M'_1M'_2|$ 以及 M'_1, M'_2 的坐标.

14. 求与三直线 $l_1: \begin{cases} y-x=0 \\ z-1=0 \end{cases}, l_2: \begin{cases} y+x=0 \\ z+1=0 \end{cases}, l_3: \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ 都相交的直线所产生的曲面的方程.

15. 证明: 包含直线 $l_1: \begin{cases} \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \\ x=0 \end{cases}$, 且平行于直线 $l_2: \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 1 \\ y=0 \end{cases}$ 的平面方程为 $\frac{x}{a} - \frac{y}{b}$

$-\frac{z}{c}+1=0$. 若 $2d$ 是 l_1, l_2 之间的距离, 证明

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

2.3 度量关系

本节我们将在右手直角坐标下, 进一步讨论点、直线、平面间的距离、角度等度量关系.

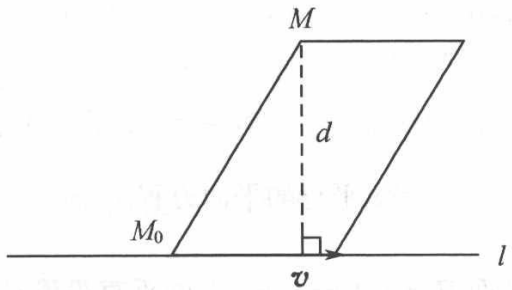


图 2.4

2.3.1 点到直线的距离

设直线 l 过点 M_0 , 方向向量为 v , 由图 2.4 看出, 点 M 到直线 l 的距离 d 是以 $\overrightarrow{M_0M}, v$ 为邻边的平行四边形的底边 v 上的高, 因此有

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M} \times v|}{|v|}.$$

2.3.2 点到平面的距离

命题 2.3.1 在直角坐标系中, 点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 到平面

$$\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

的距离为

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (2.3.1)$$

证明 作 P_1 到平面 Π 的垂线, 设垂足为 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 则 P_1 到平面 Π 的距离 $d = |\overrightarrow{P_0P_1}|$. 平面 Π 的一个法向量为 $n = (A, B, C)$, 因为 $\overrightarrow{P_0P_1} \parallel n$, 所以

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \delta n^0. \quad (2.3.2)$$

(2.3.2) 的两边用 n^0 作内积得

$$\begin{aligned} \delta &= \overrightarrow{P_0P_1} \cdot n^0 = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} [A(x_1 - x_0) \\ &\quad + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)] \\ &= \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

于是得

$$d = |\overrightarrow{P_0P_1}| = |\delta| = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

(2.3.2) 中的 δ 称为点 P_1 到平面 Π 的离差, (2.3.3) 给出了求离差的公式.

平面 Π 把空间中不在平面上的点分成两部分, Π 的法向量所指的那一部分称为 Π 的正侧, 另一部分叫做 Π 的负侧(图 2.5). 设平面 Π 的方程为(2.1.9), 由离差的定义易知点 $P(x, y, z)$ 在 Π 的正侧(或负侧)的充要条件是 $P(x, y, z)$ 满足不等式 $Ax + By + Cz + D > 0$ (或 $Ax + By + Cz + D < 0$). 换句话说, 如果 $P_i(x_i, y_i, z_i) (i=1, 2)$ 不在平面 Π 上, 那么 P_1, P_2 位于平面 Π 同侧的充要条件是 $F_i = Ax_i + By_i + Cz_i + D (i=1, 2)$ 同号. 这个结论在仿射坐标系中也成立.

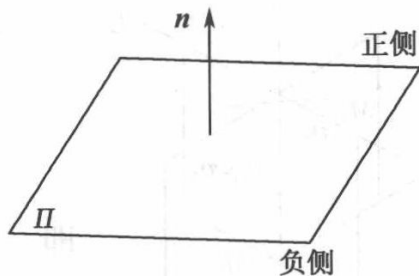


图 2.5

2.3.3 两条直线之间的距离

定义 2.3.1 两直线 l_1, l_2 上的点之间的最短距离叫这两直线间的距离, 记为 $d(l_1, l_2)$.

如果 $l_1 \parallel l_2$, 则 l_1 上的任一个点到 l_2 的距离就是 l_1 与 l_2 间的距离; 如果 l_1 与 l_2 相交或重合, 则 $d(l_1, l_2) = 0$.

下设 l_1 与 l_2 异面, l_i 过点 M_i , 方向向量为 $v_i (i=1, 2)$, v_1, v_2 不共线.

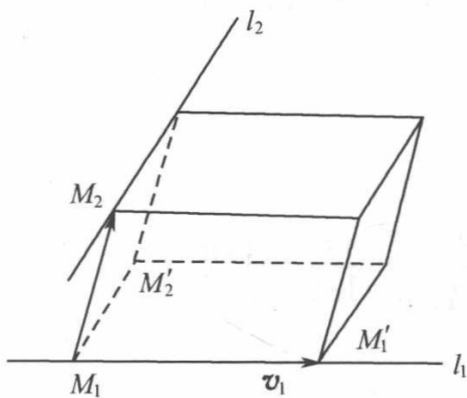


图 2.6

命题 2.3.2 两条异面直线 l_1, l_2 的距离为

$$d(l_1, l_2) = \frac{|(\overrightarrow{M_1M_2}, v_1, v_2)|}{|v_1 \times v_2|}. \quad (2.3.4)$$

证明 如图 2.6, 以 M_1 为始点作 $\overrightarrow{M_1M'_1} = v_1$, $\overrightarrow{M_1M'_2} = v_2$, 以 $\overrightarrow{M_1M'_1}, \overrightarrow{M_1M'_2}, \overrightarrow{M_1M_2}$ 为棱的平行六面体体积为

$$V = |(\overrightarrow{M_1M_2}, v_1, v_2)|,$$

以 $\overrightarrow{M_1M'_1}, \overrightarrow{M_1M'_2}$ 为边的平行四边形面积为

$$S = |v_1 \times v_2|.$$

于是平行六面体的高(即 l_1, l_2 间的距离)

$$d(l_1, l_2) = \frac{|(\overrightarrow{M_1M_2}, v_1, v_2)|}{|v_1 \times v_2|}.$$

思考题: 两异面直线的公垂线存在且唯一.

例 2.3.1 求直线 $l_1: x-1 = \frac{y}{-3} = \frac{z}{3}$ 与直线 $l_2: \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$ 的公垂线方程,

以及 l_1 与 l_2 的距离.

解 由题设条件知 l_1 过点 $M_1(1, 0, 0)$, 它的方向向量为 $v_1 = (1, -3, 3)$, l_2 过点 $M_2(0, 0, 0)$, 它的方向向量为 $v_2 = (2, 1, -2)$. 公垂线 l 的方向向量 $v = v_1 \times v_2 = (3, 8, 7)$.

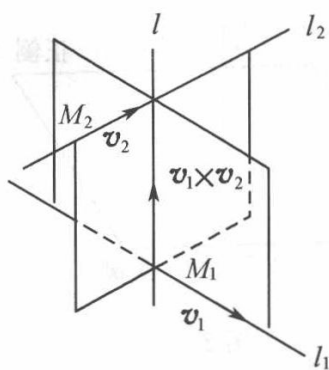


图 2.7

如图 2.7 所示,由 l 与 l_1 决定的平面 Π_1 的方程

$$\Pi_1: \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$45x - 2y - 17z - 45 = 0.$$

由 l 与 l_2 决定的平面 Π_2 的方程

$$\Pi_2: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$23x - 20y + 13z = 0.$$

因此公垂线 l 的一般方程为

$$l: \begin{cases} 45x - 2y - 17z - 45 = 0, \\ 23x - 20y + 13z = 0. \end{cases}$$

因为

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1M_2} &= (-1, 0, 0), (\overrightarrow{M_1M_2}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \\ &= \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \mathbf{v} = -3, \\ |\mathbf{v}| &= \sqrt{3^2 + 8^2 + 7^2} = \sqrt{122}, \end{aligned}$$

所以 l_1 与 l_2 的距离

$$d(l_1, l_2) = \frac{|(\overrightarrow{M_1M_2}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)|}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|} = \frac{3}{\sqrt{122}} = \frac{3}{122} \sqrt{122}.$$

2.3.4 角度

两直线相交或异面,直线与平面相交,两平面相交都涉及角度问题,我们可以利用向量的内积与其夹角的关系求得这些角度.

(1) 直线与直线的夹角. 若两直线 l_1, l_2 (相交或异面) 的方向向量为 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, 则 l_1 与 l_2 所夹角度 α 为 $\angle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ 或 $\pi - \angle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, 满足 $\cos \alpha = \pm \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1| |\mathbf{v}_2|}$.

(2) 直线与平面的夹角. 直线 l 与平面 Π (l 不垂直于 Π) 的夹角定义为 l 与它在 Π 上的垂直投影直线所夹的锐角 θ (图 2.8); 当 l 与 Π 垂直时, l 与 Π 的夹角规定为 $\frac{\pi}{2}$.

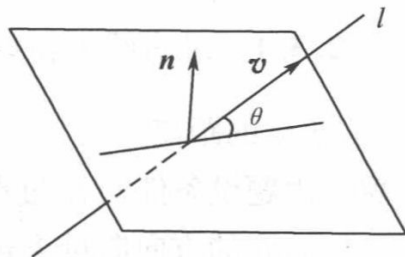


图 2.8

设 Π 的法向量为 $\mathbf{n}$, l 的方向向量为 $\mathbf{v}$, 则

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \angle(\mathbf{n}, \mathbf{v}),$$

或

$$\theta = \angle(\mathbf{n}, \mathbf{v}) - \frac{\pi}{2},$$

因此

$$\sin\theta = |\cos\angle(\mathbf{n}, \mathbf{v})|.$$

(3) 平面与平面的夹角. 设两平面的方程为 $\Pi_i: A_ix + B_iz + D_i = 0, i=1, 2$, 则 Π_i 的法向量为 $\mathbf{n}_i = (A_i, B_i, C_i)$.

设 $\theta = \angle(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$, Π_1 与 Π_2 之间的角(二面角)以 $\angle(\Pi_1, \Pi_2)$ 来表示, 则易知

$$\angle(\Pi_1, \Pi_2) = \theta \quad \text{或} \quad \pi - \theta.$$

因而

$$\cos\angle(\Pi_1, \Pi_2) = \pm \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|}.$$

由此得到两平面 Π_1 与 Π_2 垂直的充要条件是

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

思考题: 本节各种度量关系的计算公式是否在仿射标架中成立? 为什么?

习题 2.3

1. 在直角坐标系下, 求下列直线方程.

(1) 过点 $M_0(-1, 2, 9)$ 且垂直于平面 $3x + 2y - z - 5 = 0$;

(2) 过点 $M_0(2, 4, -1)$ 且与三坐标轴夹角相等.

2. 在直角坐标系中, 求平面 $ax + by - z + c = 0$ 与 xOy 面的夹角.

3. 求到两个给定平面的距离为定比的点的轨迹.

4. 证明: 空间中满足条件 $|x| + |y| + |z| < a (a > 0)$ 的点位于中心在原点, 顶点在坐标轴上, 且顶点与中心距离为 a 的八面体的内部.

5. 在仿射坐标系中, 设 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 都不在平面

$$\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

上, 且 $M_1 \neq M_2$. 证明: M_1 与 M_2 在平面 Π 的同侧的充分必要条件是

$$F_1 = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \quad \text{与} \quad F_2 = Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$$

同号.

6. 在直角坐标系中, 求与平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 平行且与它的距离为 d 的平面方程.

7. 求点 $M_1(3, -1, 2)$ 到直线 $\begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0, \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$ 的距离.

8. 求下列各对直线之间的距离.

$$(1) \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+5}{2}, \quad \frac{x}{3} = \frac{y-6}{-9} = \frac{z+5}{-6};$$

$$(2) \frac{x}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{-1}, \frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{-1};$$

$$(3) \begin{cases} x+y-z+1=0, \\ x+y=0, \end{cases} \begin{cases} x-2y+3z-6=0, \\ 2x-y+3z-6=0. \end{cases}$$

9. 求下列各对直线的公垂线的方程.

$$(1) x-1 = \frac{y}{-3} = \frac{z}{3} \text{ 与 } \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2};$$

$$(2) \begin{cases} x+y-1=0, \\ z=0 \end{cases} \text{ 与 } \begin{cases} x-z+1=0, \\ 2y+z-2=0. \end{cases}$$

10. 求下列各对直线的夹角.

$$(1) \frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+4}{2}, \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{-3};$$

$$(2) \begin{cases} x+y+z-1=0, \\ x+y+2z+1=0, \end{cases} \begin{cases} 3x+y+1=0, \\ y+3z+2=0. \end{cases}$$

11. 求下列直线与平面的夹角.

$$(1) l: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}, \quad \Pi: x-2y+4z-1=0;$$

$$(2) l: \begin{cases} x-y-z+2=0, \\ 2x-3y+3=0, \end{cases} \quad \Pi: 2x-z+1=0.$$

12. 已知两条异面直线 l_1 与 l_2 , 证明: 连接 l_1 上任一点和 l_2 上任一点的线段的中点轨迹是公垂线段的垂直平分面.

13. 设在直角坐标系中, 平面 Π_1 与 Π_2 的方程分别为

$$2x - y + 2z - 3 = 0 \text{ 和 } 3x + 2y - 6z - 1 = 0.$$

求由 Π_1 与 Π_2 构成的二面角的角平分面的方程, 在此二面角内有点 $P(1, 2, -3)$.

14. 证明: 两异面直线 l_1, l_2 的公垂线段的长度就是 l_1, l_2 之间的距离.

业余数学家之王——费马^①

费马(Fermat, 1601~1665), 法国数学家. 费马一生从未受过专门的数学教育, 数学研究不过是业余之爱好. 然而, 在 17 世纪的法国还找不到哪位数学家可以与之匹敌. 他是解析几何的发明者之一, 对于微积分诞生的贡献仅次于牛顿、莱布尼茨, 是概率论的主要创始人之一, 还是独承 17 世纪数论天地的人. 此外, 费马对物理学也有重要贡献. 一代数学天才费马堪称是 17 世纪法国最伟大的数学家.

费马独立于笛卡儿发现了解析几何的基本原理.

1629 年以前, 费马便着手重写公元前 3 世纪古希腊几何学家阿波罗尼奥斯失

^① 摘自 <http://www.ikepu.com>, 有删减

传的《平面轨迹》一书. 他用代数方法对阿波罗尼奥斯关于轨迹的一些失传的证明作了补充, 对古希腊几何学, 尤其是阿波罗尼奥斯圆锥曲线论进行了总结和整理, 对曲线作了一般研究. 1630 年用拉丁文撰写了仅有八页的论文《平面与立体轨迹引论》.



《平面与立体轨迹引论》中道出了费马的发现. 他指出: “两个未知量决定的一个方程式对应着一条轨迹, 可以描绘出一条直线或曲线.” 费马的发现比笛卡儿发现解析几何的基本原理还早七年. 费马在书中还对一般直线和圆的方程、以及关于双曲线、椭圆、抛物线进行了讨论.

笛卡儿是从一个轨迹来寻找它的方程的, 而费马则是从方程出发来研究轨迹的, 这正是解析几何基本原则的两个相反的方面.

费马建立了求切线、求极大值和极小值以及定积分的方法, 对微积分做出了重大贡献. 在概率论、数论领域内费马也做出了重要贡献.

第2章小结

在空间仿射标架下, 设直线 ℓ 经过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 其位置向量记为 $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$, 方向向量是 $\mathbf{v} = (X, Y, Z)$, $M(x, y, z)$ 是直线上的任意一点, 其位置向量记为 $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$, 则直线方程有向量式的参数方程: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbf{R}$ 为参数. 从线性代数的角度讲, 直线的向量式参数方程是直线一般方程的通解表达形式.

$$\text{用坐标写出来有参数方程: } \begin{cases} x = x_0 + tX, \\ y = y_0 + tY, \\ z = z_0 + tZ. \end{cases}$$

$$\text{点向(对称)式: } \frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y} = \frac{z - z_0}{Z}.$$

在空间仿射标架 $\{\mathbf{O}; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 下, 设平面经过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 其位置向量记为 $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$, 两个方位向量为 $\mathbf{v}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$, $\mathbf{v}_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$, $M(x, y, z)$ 是平面上的任意一点, 其位置向量记为 $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$, 则有向量式的参数方程: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2$, $t, s \in \mathbf{R}$ 为参数.

$$\text{用坐标写出来有参数方程: } \begin{cases} x = x_0 + sX_1 + tX_2, \\ y = y_0 + sY_1 + tY_2, \\ z = z_0 + sZ_1 + tZ_2. \end{cases}$$

利用三向量共面的条件, 可消去参数, 得平面的一般方程: $Ax + By + Cz + D = 0$,

$$\text{其中, } A = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}, D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0).$$

在空间直角坐标下,设平面经过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 其法向量是 $\mathbf{n}=(A, B, C)$, 则有点法式方程: $\overrightarrow{M_0M} \cdot \mathbf{n}=0$, 或 $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n}=0$, 展开得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

在一般仿射标架下,为什么不直接用法向量的坐标,而要用两个方位向量来描述呢? 这是因为法向量 $\mathbf{n}=\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = A\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 + B\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 + C\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$, 其系数 A, B, C 并不是法向量在标架 $\{\mathbf{O}; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 下的坐标, 而是在标架 $\{\mathbf{O}; \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2\}$ 下的坐标.

由于两个不重合的相交平面的交是直线,所以在直角坐标系下,直线有一般方程:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \text{ 其方向向量是 } \mathbf{v}=\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2.$$

经过直线 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$ 的平面束方程是

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

其中 λ, μ 不同时为 0.

平行于平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的平面束方程是 $Ax+By+Cz+\lambda=0$, 其中 λ 为任意实数.

为计算或描述的方便,在涉及到度量关系时均使用空间直角坐标系.

空间中的点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 到直线 $\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$ 的距离是 $d=\frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$, 即由 $\overrightarrow{M_0M_1}, \mathbf{v}$ 构成的平行四边形边 $\mathbf{v}$ 上的高.

空间中的点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离是 $d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

两条异面直线 $l_1:\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+t\mathbf{v}_1, l_2:\mathbf{r}=\mathbf{r}_2+tv_2$ 的距离是 $d=\frac{|(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)|}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|}$,

即由 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ 构成的平行六面体底面 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 上的高.

第3章 常见曲面

本章在直角标架下介绍一些具体的曲面:柱面、锥面、旋转曲面及二次曲面,研究其方程形式或几何特性.

3.1 空间曲面和空间曲线的方程

设空间中有曲面 S . 如果曲面 S 上每一点的坐标都满足方程

$$F(x, y, z) = 0, \quad (3.1.1)$$

反之,任何满足方程(3.1.1)的数组 (x, y, z) 一定是曲面 S 上的某个点的坐标,那么方程(3.1.1)就称为曲面 S 的一般方程,曲面 S 称为方程(3.1.1)对应的曲面.

如果曲面 S 上点的坐标表示成两个参数 (u, v) 的函数,由它们给出的方程组

$$\begin{cases} x = f_1(u, v), \\ y = f_2(u, v), \\ z = f_3(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in D \quad (3.1.2)$$

称为曲面 S 的参数方程. 其中 D 是 uv 平面上的区域,对于每一对 $(u, v) \in D$ 的值,由(3.1.2)确定的点 (x, y, z) 在 S 上;而 S 上任一点的坐标都可由 $(u, v) \in D$ 的某一对值通过(3.1.2)表示. 于是通过曲面的参数方程(3.1.2),曲面上的点(可能要除去个别点)便可由数对 $(u, v) \in D$ 来确定.

设空间中有一条曲线 Γ ,如果曲线 Γ 上每一个点的坐标都满足方程组

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases} \quad (3.1.3)$$

反之,任何满足(3.1.3)的数组 (x, y, z) 都是曲线 Γ 上某个点的坐标,那么称(3.1.3)为曲线 Γ 的一般方程,曲线 Γ 称为方程组(3.1.3)对应的曲线. 空间曲线可视为两曲面的交线.

如果曲线 Γ 上点的坐标是某个参数 t 的函数,由它们给出的方程组

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t), \\ y = \varphi_2(t), \\ z = \varphi_3(t), \end{cases} \quad t \in I \quad (3.1.4)$$

称为曲线 Γ 的参数方程. 其中 I 是区间,对于 $t \in I$ 的每一个值,由(3.1.4)确定的点 (x, y, z) 在 Γ 上,而 Γ 上任一点的坐标都可由 $t \in I$ 的某个值通过(3.1.4)表示.

例 3.1.1 求以 (x_0, y_0, z_0) 为球心, R 为半径的球面方程.

解 球面上任一点 (x, y, z) 到球心的距离为 R , 因此它满足方程

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2. \quad (3.1.5)$$

反之, 满足 (3.1.5) 的任何点 (x, y, z) 到 (x_0, y_0, z_0) 的距离为 R , 因此属于球面. 因而, (3.1.5) 是球面方程.

下面建立球面的参数方程.

设球心在原点, 半径为 R , 在球面上任取一点 $M(x, y, z)$, 从 M 作 xOy 面的垂线, 垂足为 N , 连 OM, ON (图 3.1). 设 x 轴到 $\overrightarrow{ON}$ 的角度 (逆时针方向) 为 φ , $\overrightarrow{ON}$ 到 $\overrightarrow{OM}$ 的角度为 θ (M 在 xOy 面上方时, θ 为正, 反之为负), 则有

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \cos \varphi, \\ y = R \cos \theta \sin \varphi, & 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ z = R \sin \theta, & -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (3.1.6)$$

(3.1.6) 就是球心在原点, 半径为 R 的球面的参数方程, φ 称为经度, θ 称为纬度.

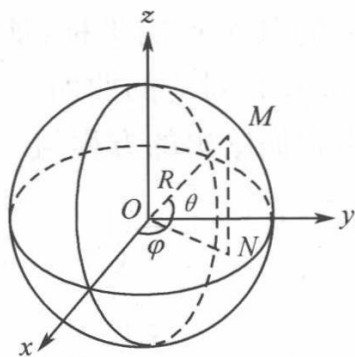


图 3.1

因为空间中任一点 $M(x, y, z)$ 必在以原点为球心, 以 $R = |\overrightarrow{OM}|$ 为半径的球面上, 而球面上的点 (除去它与 z 轴的交点外) 又由参数 (θ, φ) 唯一确定, 因此, 除去 z 轴外, 空间中的点 M 由有序三数组 (R, θ, φ) 唯一确定, 我们把 (R, θ, φ) 称为空间中点 M 的球面坐标, 其中, $R \geq 0, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \varphi \in [0, 2\pi)$. 点 M 的球面坐标 (R, θ, φ) 与 M 的直角坐标 (x, y, z) 的关系由 (3.1.6) 给出.

思考题: 请确定球心不在原点, 半径为 R 的球面参数方程.

例 3.1.2 求以 Oz 为对称轴, 到对称轴的距离为 R 的圆柱面方程, 其中, R 称为圆柱面的半径.

解 设点 (x, y, z) 为柱面上的点, 取参数 u, v , 其中, $z = v, u$ 为过 z 轴及点 (x, y, z) 的平面与 xOz 面所成的角, 于是得到

$$\begin{cases} x = R \cos u, \\ y = R \sin u, & 0 \leq u < 2\pi, \\ z = v, & -\infty < v < +\infty, \end{cases} \quad (3.1.7)$$

这是圆柱面的参数方程.

消去参数 u, v , 得到圆柱面的一般方程

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

空间中任一点 $M(x, y, z)$ 必在以 $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ 为半径, 以 z 轴为对称轴的圆柱面上 (图 3.2). 由圆柱面的参数方程 (3.1.7) 知, 圆柱面上的点被数偶 (u, v) 所确

定,从而点 M (z 轴上的点除外) 被有序三数组 (R, u, v) 唯一确定. (R, u, v) 称为点 M 的柱面坐标. 点 M 的柱面坐标与直角坐标的关系是

$$\begin{cases} x = R \cos u, & R \geq 0, \\ y = R \sin u, & u \in [0, 2\pi), \\ z = v, & v \in (-\infty, +\infty). \end{cases} \quad (3.1.8)$$

例 3.1.3 我们用平面 $x+y+z=0$ 去截球心在原点、半径为 R 的球面, 就可得空间中的一个圆, 其方程为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

用该平面去截柱面 $x^2 + y^2 = R^2$, 就可得空间中的一椭圆

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

思考题: 如何证明例 3.1.3 中的截线恰是圆和椭圆?

习题 3.1

1. 证明: 如果 $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$, 那么由方程

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$$

给出的曲面是一球面, 求出它的球心坐标和半径.

2. 求过三点 $(3, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 1)$ 的圆的方程.

3. 证明曲线

$$\begin{cases} x = \frac{t}{1+t^2+t^4}, \\ y = \frac{t^2}{1+t^2+t^4}, \\ z = \frac{t^3}{1+t^2+t^4}, \end{cases} \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

在一球面上, 并求此球面方程.

4. 适当选取坐标系, 求下列轨迹的方程

(1) 到两定点距离之比等于常数的点的轨迹;

(2) 到两定点距离之和等于常数的点的轨迹;

(3) 到定平面和定点等距离的点的轨迹.

5. 曲面 S 在柱面坐标系 (R, u, v) 下的方程为 $v = R^2 \cos 2u$, 求 S 的直角坐标方程.

6. 曲面 S 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 - z^2 = 25$, 试求其球面坐标方程.

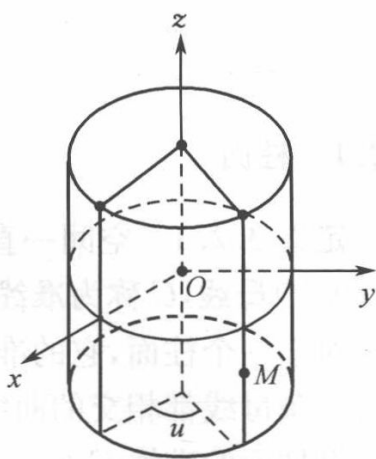


图 3.2

3.2 柱面和锥面

3.2.1 柱面

定义 3.2.1 空间一直线 l 沿着一条曲线 C 平行移动时所产生的曲面称为柱面. l 称为母线, C 称为准线.

对于一个柱面, 它的准线和母线都不唯一, 但母线方向是唯一的 (平面除外). 与每一条母线都相交的曲线均可作为准线.

设柱面的准线 C 为

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

母线方向为 $v = (l, m, n)$. 我们来求柱面的方程.

点 $M(x, y, z)$ 在此柱面上当且仅当 M 在某一条母线上, 即准线 C 上有一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 使 M 在过 M_0 且方向为 v 的直线上 (图 3.3). 因此, 有

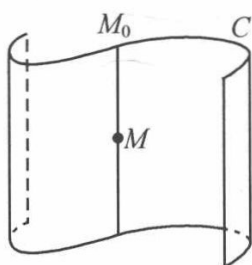


图 3.3

$$\begin{cases} F_1(x_0, y_0, z_0) = 0, \\ F_2(x_0, y_0, z_0) = 0, \\ x = x_0 + lu, \\ y = y_0 + mu, \\ z = z_0 + nu. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

消去 x_0, y_0, z_0 , 得

$$\begin{cases} F_1(x - lu, y - mu, z - nu) = 0, \\ F_2(x - lu, y - mu, z - nu) = 0. \end{cases}$$

再消去参数 u , 得到 x, y, z 的一个方程, 就是所求柱面的方程.

由例 3.1.2 知道, 母线平行于 z 轴的圆柱面方程中不含 z , 这个结论对于一般的柱面也成立.

定理 3.2.1 若一个柱面的母线平行于 z 轴, 则它的方程中不含 z . 反之, 一个三元方程如果不含 z , 则它一定表示一个母线平行于 z 轴的柱面.

证明 设一个柱面的母线平行于 z 轴, 则此柱面的每一条母线一定与 xOy 面相交, 从而柱面与 xOy 面的交线 C 可以作为准线, 设 C 的方程为

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

点 $M(x, y, z)$ 在此柱面上当且仅当 C 上有一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 使 M 在过 M_0 且方向为 $v = (0, 0, 1)$ 的母线上, 即有

$$\begin{cases} f(x_0, y_0) = 0, \\ z_0 = 0, \\ x = x_0, \\ y = y_0, \\ z = z_0 + u. \end{cases}$$

消去 x_0, y_0, z_0 , 得

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ z = u. \end{cases}$$

由于参数 u 可取任意值, 所以, 柱面方程为

$$f(x, y) = 0.$$

反之, 任给一个不含 z 的三元方程 $g(x, y) = 0$, 我们考虑以曲线 C' :

$$\begin{cases} g(x, y) = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

为准线, 以 $v = (0, 0, 1)$ 为母线方向的柱面, 由上述讨论知道, 这个柱面的方程为 $g(x, y) = 0$, 因此, 方程 $g(x, y) = 0$ 表示一个母线平行于 z 轴的柱面.

思考题: 一个不含 x (或 y) 的三元方程表示的曲面有何特征?

例 3.2.1 方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 表示母线平行于 z 轴的柱面, 它与 xOy 面的交线是椭圆

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

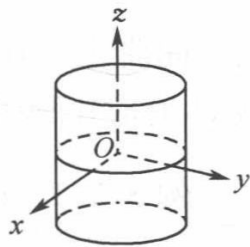


图 3.4

因而这个柱面称为**椭圆柱面**(图 3.4).

例 3.2.2 方程

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad x^2 = 2py$$

分别表示母线平行于 z 轴的**双曲柱面**、**抛物柱面**(图 3.5, 图 3.6($p > 0$)).

设空间曲线 C 的方程为

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (3.2.2)$$

如果我們可以在方程组(3.2.2)中分别消去坐标 y 和 z 后得到与之等价的方程组

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ G_1(x, z) = 0. \end{cases} \quad (3.2.3)$$

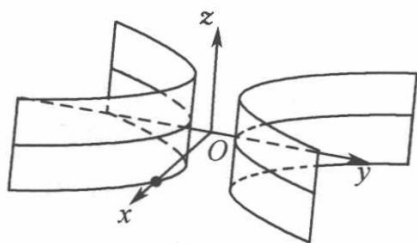


图 3.5

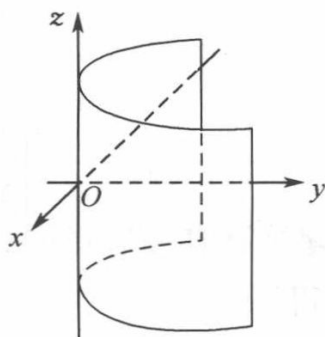


图 3.6

则由定理 3.2.1, 方程组(3.2.3)中 $F_1(x, y)=0$ 表示母线平行于 z 轴的柱面, 此柱面称为空间曲线 C 向 xOy 面投影的投影柱面, 而曲线

$$\begin{cases} F_1(x, y)=0, \\ z=0 \end{cases}$$

称为空间曲线 C 在 xOy 面上的投影曲线. 同理, $G_1(x, z)=0$ 表示母线平行于 y 轴的柱面, 它是空间曲线 C 向 xOz 面投影的投影柱面, 曲线

$$\begin{cases} G_1(x, z)=0, \\ y=0 \end{cases}$$

为空间曲线 C 在 xOz 面上的投影曲线. 利用(3.2.3)中的两个投影柱面来讨论曲线 C , 有时比利用(3.2.2)要容易且清楚些.

例 3.2.3 讨论曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ 的图形.

将方程化简为等价的方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

由此可知, 它是 xOy 面上以原点为圆心的单位圆.

例 3.2.4 讨论曲线 $\begin{cases} 2x^2 + z^2 + 4y = 4z, \\ 2x^2 + 3z^2 - 4y = 12z \end{cases}$ 的

图形.

解 消去 y 得 $x^2 + z^2 - 4z = 0$, 消去 z 得 $x^2 + 4y = 0$, 因此方程组等价于

$$\begin{cases} x^2 + (z-2)^2 = 4, \\ x^2 + 4y = 0. \end{cases}$$

第一个方程表示圆柱面, 第二个方程表示抛物柱面, 如图 3.7 所示.

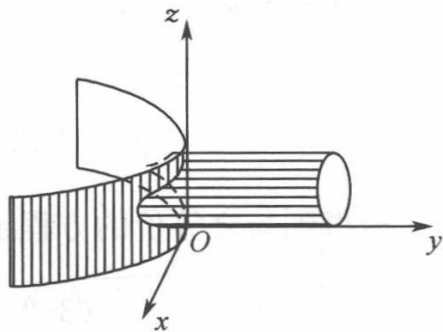


图 3.7

3.2.2 锥面

定义 3.2.2 空间中过一定点 M_0 且与定曲线 C 相交的动直线 l 所产生的曲面叫做锥面, 定点 M_0 称为锥面的顶点, 定曲线 C 叫准线, 动直线 l 称为母线.

设锥面的顶点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 准线 C 的方程为

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

我们来求这个锥面的方程.

点 $M(x, y, z)$ 在此锥面上当且仅当 M 在一条母线上, 即准线上有一点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 使得 M_1 在直线 M_0M 上(图 3.8). 因此有

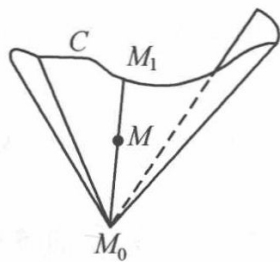


图 3.8

$$\begin{cases} F_1(x_1, y_1, z_1) = 0, \\ F_2(x_1, y_1, z_1) = 0, \\ x_1 = x_0 + (x - x_0)u, \\ y_1 = y_0 + (y - y_0)u, \\ z_1 = z_0 + (z - z_0)u. \end{cases}$$

消去 x_1, y_1, z_1 得

$$\begin{cases} F_1(x_0 + (x - x_0)u, y_0 + (y - y_0)u, z_0 + (z - z_0)u) = 0, \\ F_2(x_0 + (x - x_0)u, y_0 + (y - y_0)u, z_0 + (z - z_0)u) = 0. \end{cases}$$

再消去 u , 就得到 x, y, z 的一个方程, 它就是锥面的方程.

如果锥面有一对称轴, 它的每条母线与对称轴所夹的锐角都相等, 则此锥面称为圆锥面, 母线与对称轴夹的锐角称为圆锥面的半顶角. 我们来求圆锥面的方程.

选取圆锥面的顶点 O 为坐标原点, 圆锥面的对称轴为 z 轴建立右手直角坐标系. 点 $M(x, y, z)$ 在圆锥面上当且仅当 $\overrightarrow{OM}$ 与 z 轴的坐标向量 $e_3 = (0, 0, 1)$ 的夹角为半顶角 θ 或 $\pi - \theta$, 因此

$$|\cos \angle(\overrightarrow{OM}, e_3)| = \cos \theta,$$

于是得

$$x^2 + y^2 - \tan^2 \theta z^2 = 0. \quad (3.2.4)$$

一个函数 $F(x, y, z)$ 称为 k 次齐次函数, 如果以 tx, ty, tz 代替 x, y, z 时, 有

$$F(tx, ty, tz) = t^k F(x, y, z).$$

其中 t 是任意实数. 此时, 方程 $F(x, y, z) = 0$ 称为 x, y, z 的 k 次齐次方程.

由此定义, 圆锥面方程(3.2.4)是二次齐次方程.

思考题: x, y, z 的齐次方程是否表示以原点为顶点的锥面(可能除去原点)? 逆命题怎样? 请证明你的结论.

例 3.2.5 求以点 $M_0(1, 1, 1)$ 为顶点, 以曲线 C :

$$\begin{cases} y^2=4x, \\ z=0 \end{cases}$$

为准线的锥面方程.

解 设 $M(x, y, z)$ 为锥面上任一点, 母线 M_0M 与 C 交于点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, 则

$$\begin{cases} y_1^2=4x_1, \\ z_1=0, \\ x_1=1+(x-1)u, \\ y_1=1+(y-1)u, \\ z_1=1+(z-1)u, \end{cases}$$

于是 $u = \frac{1}{1-z}$,

$$\left(1 - \frac{y-1}{z-1}\right)^2 = 4\left(1 - \frac{x-1}{z-1}\right),$$

即 $(z-y)^2 = 4(z-x)(z-1)$, 它就是所求的锥面方程.

习题 3.2

1. 求半径为 1, 对称轴为 $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ 的圆柱面方程.

2. 已知圆柱面的三条母线为 $x=y=z$, $x+1=y=z-1$, $x-1=y+1=z$, 求这个圆柱面的方程.

3. 求母线方向为 $(2, -3, 4)$, 准线为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = 1 \end{cases}$$

的柱面方程.

4. 已知圆柱面的对称轴为 $2x=1-y=-z+1$, 点 $(1, -2, 1)$ 在此圆柱面上, 求此圆柱面的方程.

5. 求准线为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ z = 0 \end{cases}$$

的圆柱面方程.

6. 求以 z 轴为对称轴, 坐标原点为顶点, 半顶角为 $\frac{\pi}{6}$ 的圆锥面方程.

7. 求顶点在原点, 准线为

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ z = h, h \neq 0 \end{cases}$$

的锥面方程.

8. 求以原点为顶点, 包含三条坐标轴的圆锥面方程.

9. 求顶点为 $(0, 1, 0)$, 准线为 $\begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{4} = 1, \\ z = -5 \end{cases}$ 的锥面方程.

10. 证明: 母线方向为 (l, m, n) , 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 外切的柱面方程为 $(lx + my + nz)^2 - (l^2 + m^2 + n^2)(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0$.

11. 过 x 轴和 y 轴分别作动平面, 交角 θ 为常数, 求交线的轨迹方程, 并且证明它是一个锥面.

12. 证明: 以 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为顶点的锥面方程是关于 $(x - x_0), (y - y_0), (z - z_0)$ 的齐次方程.

13. 求下列曲线向各坐标面投影的投影柱面, 和在各坐标面上的投影曲线, 并作出曲线的简图:

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 4a^2, \\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 5a^2; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 4; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2, \\ x^2 + y^2 - 2ax = 0. \end{cases}$$

14. 设柱面的准线 C 的参数方程为 $x = f(t), y = g(t), z = h(t), t \in [a, b]$, 母线方向为 (l, m, n) , 求柱面的参数方程.

3.3 旋 转 面

定义 3.3.1 一条曲线 C 绕一条直线 l 旋转所产生的曲面称为**旋转面**, 曲线 C 称为**母线**, l 称为**轴**. 母线上的点旋转所得的圆称为**纬圆**, 过 l 的半平面与旋转面的交线称为**经线**.

思考题: 经线与母线的区别与联系是什么?

设轴 l 过点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, 方向向量 $v = (l, m, n)$, 母线 C 的方程为

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

我们来求以 l 为轴, C 为母线的旋转面 S 的方程.

点 $M(x, y, z)$ 在 S 上当且仅当 M 在过母线 C 上某一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的纬圆上(图 3.9). 因而 M_0 与 M 到轴 l 的距离相等(或到轴上一点 M_1 的距离相等), 且 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 l 垂直. 于是

$$\begin{cases} F_1(x_0, y_0, z_0) = 0, \\ F_2(x_0, y_0, z_0) = 0, \\ |\overrightarrow{MM_1} \times v| = |\overrightarrow{M_0M_1} \times v|, \\ l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0. \end{cases}$$

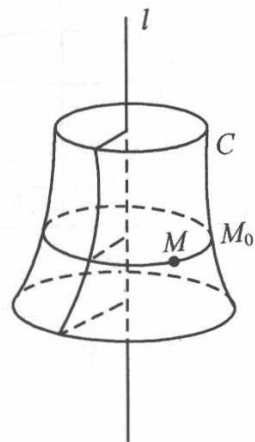


图 3.9

由以上方程组中消去 x_0, y_0, z_0 , 就得到 x, y, z 的方程, 它就是 S 的方程.

例 3.3.1 求以 z 轴为轴, 以

$$C: \begin{cases} f(y, z) = 0, \\ x = 0 \end{cases}$$

为母线的旋转面方程.

解 根据旋转面方程的推导过程, 点 $M(x, y, z)$ 在旋转面上当且仅当

$$\begin{cases} f(y_0, z_0) = 0, \\ x_0 = 0, \\ x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2, \\ z - z_0 = 0, \end{cases}$$

消去 x_0, y_0, z_0 得

$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \quad (3.3.1)$$

(3.3.1) 就是所求旋转面的方程.

类似地, C 绕 y 轴旋转的旋转面方程为

$$f(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0.$$

例 3.3.2 母线 C :

$$\begin{cases} y^2 = 2pz, \\ x = 0 \end{cases}$$

绕 z 轴旋转所得旋转面的方程为

$$x^2 + y^2 = 2pz,$$

此曲面称为旋转抛物面(图 3.10).

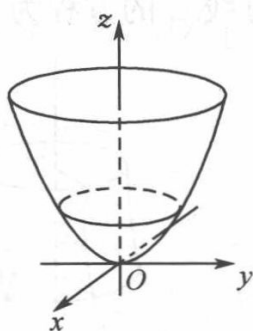


图 3.10

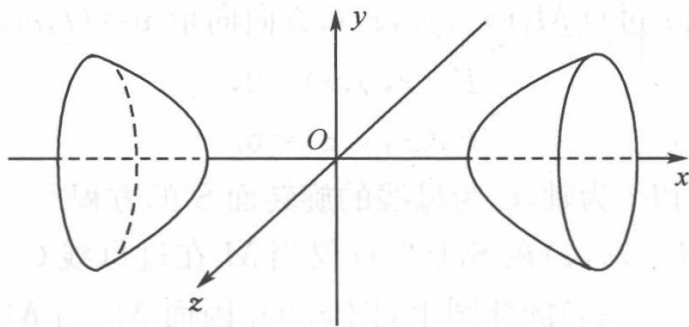


图 3.11

例 3.3.3 母线 C :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$$

绕 x 轴旋转所得曲面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1,$$

此曲面称为旋转双叶双曲面(图 3.11).

C 绕 y 轴旋转得方程

$$\frac{x^2 + z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

此曲面称为旋转单叶双曲面(图 3.12).

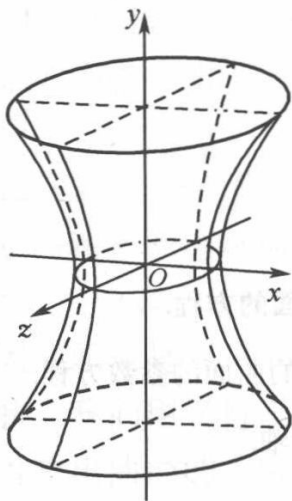


图 3.12

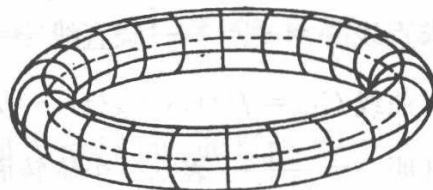


图 3.13

例 3.3.4 圆

$$\begin{cases} (x-a)^2 + z^2 = r^2, \\ y = 0, \end{cases}$$

其中, $0 < r < a$, 绕 z 轴旋转得方程

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2),$$

此曲面称为环面(图 3.13).

例 3.3.5 已知两直线 l_1 和 l_2 异面, 求 l_1 绕 l_2 旋转所得曲面的方程.

解 以 l_1, l_2 的公垂线为 x 轴, l_2 为 z 轴, 建立直角坐标系. l_1 的方程可写成

$$\frac{x-a}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{b},$$

或

$$\begin{cases} x=a, \\ y=t, \\ z=bt \end{cases} \quad (ab \neq 0).$$

其中 $a = d(l_1, l_2)$, $b = \pm \cot \varphi$, φ 为 l_1 与 l_2 之间的交角. 点 $M(x, y, z)$ 在旋转面上当且仅当

$$\begin{cases} x_0 = a, \\ y_0 = t, \\ z_0 = bt, \\ x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2, \\ z - z_0 = 0. \end{cases}$$

消去 x_0, y_0, z_0, t , 得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{a^2 b^2} = 1.$$

这是一个旋转单叶双曲面.

习题 3.3

1. 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = x^2 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转所得的曲面方程.
2. 求直线 $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0}$ 绕直线 $x=y=z$ 旋转所得的曲面的方程.
3. 求曲线 $C: x=f(t), y=g(t), z=h(t)$ 绕 z 轴旋转所得的曲面的参数方程.
4. 证明: $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$ 表示一个旋转面, 并求它的母线和转轴.

3.4 二次曲面

前面两节中, 我们建立了几何特性很明显的柱面、锥面和旋转面的方程. 本节则对于比较简单的二次方程, 从方程出发研究图形的性质.

方程

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \end{aligned}$$

表示的曲面称为二次曲面, 其中 $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ 不全为 0.

我们已经知道二次方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad x^2 - 2py = 0$$

分别表示椭圆柱面、双曲柱面和抛物柱面, 而二次方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

则表示二次锥面. 下面再研究几个二次方程表示的图形.

3.4.1 椭球面

方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (3.4.1)$$

其中, $a > 0, b > 0, c > 0$, 表示的图形称为椭球面(图 3.14).

(1) 有界性 由方程(3.4.1)立即得出

$$|x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq c.$$

(2) 对称性 如果点 (x, y, z) 在(3.4.1)表示的椭球面 S 上, 则它关于 xOy 面的对称点 $(x, y, -z)$ 也在 S 上, 即 S 关于 xOy 面对称. 同样, S 关于 yOz 面及 xOz 面也对称. 因此, 三个坐标面都是 S 的对称平面.

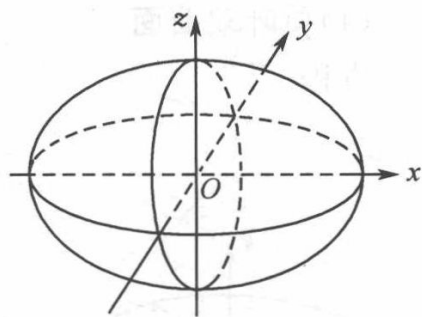


图 3.14

因为用 $-y, -z$ 分别代替 y, z , 方程(3.4.1)不变, 所以 S 关于 x 轴对称. 类似地, S 关于 y 轴和 z 轴也对称.

因为用 $-x, -y, -z$ 分别代替 x, y, z 而方程(3.4.1)不变, 所以 S 关于坐标原点对称, 因而原点是 S 的对称中心.

(3) 形状 我们用平行于坐标面的一族平面去截曲面, 通过这些平面截线(称为截口)就可看出曲面的大致形状.

曲面 S 与 xOy 面的交线为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

它是椭圆. 用平行于 xOy 面的平面 $z = h$ ($|h| < c$) 去截 S 得

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h, \end{cases}$$

它也是椭圆. 用 $z = \pm c$ 去截曲面, 得两点 $(0, 0, \pm c)$. 而平面 $z = h$, 当 $|h| > c$ 时, 与 S 无交点.

至于用平行于其他两个坐标面的平面去截 S , 可类似地讨论.

思考题: 请验证椭球面(3.4.1)有参数方程

$$\begin{cases} x = a \sin \theta \cos \varphi, \\ y = b \sin \theta \sin \varphi, \\ z = c \cos \theta, \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi), \theta \in [0, \pi].$$

并弄清参数 φ, θ 的几何意义.

3.4.2 双曲面

(1) 单叶双曲面

方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a, b, c > 0) \quad (3.4.2)$$

表示的曲面称为单叶双曲面(图 3.15).

类似于椭球面的讨论,它关于三个坐标面、三条坐标轴都对称,关于坐标原点也对称.

它与坐标面 yOz , xOz 的交线分别是

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0, \end{cases}$$

它们都是双曲线.

曲面与 xOy 面的平行平面的截口为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h, \end{cases}$$

它是椭圆,并且当 $|h|$ 增大时,椭圆的长、短半轴也增大.当 $h=0$ 时,此椭圆称为单叶双曲面的腰椭圆.

曲面与平面 $x=l$ 或 $y=m$ 的截口都是双曲线,而与平面 $x=\pm a$, 或 $y=\pm b$ 的截口都是两条相交的直线,它们可看成双曲线的退化情形.

思考题:单叶双曲面上可以有多少条直线? 找出它们.

(2) 双叶双曲面

方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (a, b, c > 0) \quad (3.4.3)$$

表示的曲面称为双叶双曲面(图 3.16).

双叶双曲面关于三个坐标面、三个坐标轴、坐标原点都对称.

由(3.4.3)知道,曲面上的点满足 $|z| \geq c$. 曲面与 xOz 面、 yOz 面的交线分别为

$$\begin{cases} -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

它们都是双曲线.

曲面与平面 $z=h(|h| \geq c)$ 的截口为

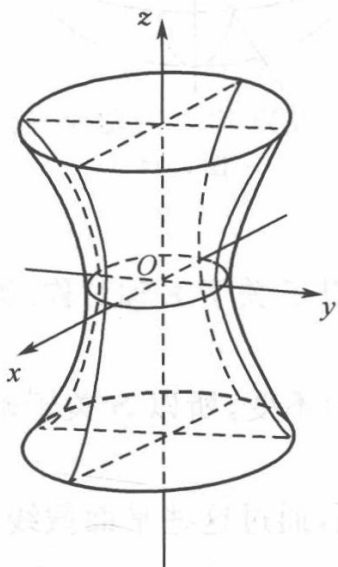


图 3.15

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h, \end{cases}$$

这是椭圆或一个点.

如果用平面 $z=h$ ($|h|>c$) 同时去截二次锥面和双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

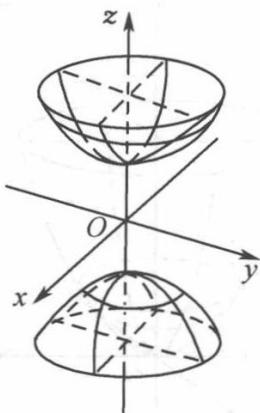


图 3.16

得到三个截面,它们都是椭圆

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h. \end{cases}$$

它们的半轴分别是

$$a_1 = \frac{a}{c} |h|, \quad b_1 = \frac{b}{c} |h|; \quad a_2 = a \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}},$$

$$b_2 = b \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}; \quad a_3 = a \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}, \quad b_3 = b \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}.$$

由于 $a_3 < a_1 < a_2, b_3 < b_1 < b_2$, 并且

$$\lim_{|h| \rightarrow \infty} (a_2 - a_3) = 0, \quad \lim_{|h| \rightarrow \infty} (b_2 - b_3) = 0,$$

所以我们称二次锥面是双曲面的渐近锥面.

思考题: 验证上面两个极限.

3.4.3 抛物面

(1) 椭圆抛物面

方程

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p > 0, q > 0) \quad (3.4.4)$$

表示的曲面称为椭圆抛物面.

如图 3.17, 它以 yOz 面和 xOz 面为对称平面, z 轴为对称轴. 因为 $z \geq 0$, 所以曲面全部位于 xOy 面上方. 曲面与 xOz 面、 yOz 面的交线分别是

$$\begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = 2qz, \\ x = 0, \end{cases}$$

这些都是抛物线. 用平面 $z=h$ ($h \geq 0$) 去截此曲面得截面

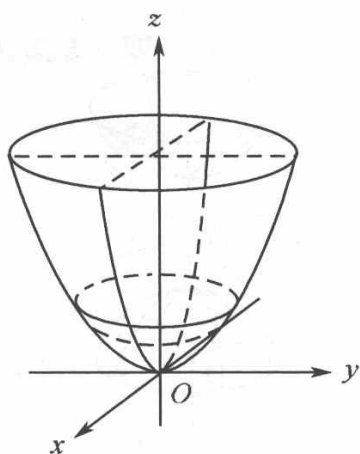


图 3.17

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h, \\ z = h, \end{cases}$$

它们是椭圆或一个点,这点称为椭圆抛物面的顶点.

思考题:用 $y=c$ 的平面去截该曲面,截口皆为抛物线,求所有这些抛物线焦点的轨迹.

(2) 双曲抛物面

方程

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p > 0, q > 0) \quad (3.4.5)$$

表示的曲面称为双曲抛物面(或马鞍面).

如图 3.18,它以 xOz 面和 yOz 面为对称平面, z 轴是它的对称轴,对称轴与曲面的交点称为鞍点.

曲面与 xOz 面和 yOz 面的交线分别为

$$\begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = -2qz, \\ x = 0, \end{cases}$$

它们是抛物线.用平面 $z=h$ 去截曲面,所得的截口为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2h, \\ z = h, \end{cases}$$

这是双曲线或一对相交直线.当 $h > 0$ 时,实轴平行于 x 轴,当 $h < 0$ 时,实轴平行于 y 轴.

曲面与 $x=l$ 的交线

$$\begin{cases} y^2 = -2q\left(z - \frac{l^2}{2p}\right), \\ x = l, \end{cases}$$

也是抛物线,它的形状与 $y^2 = -2qz, x=0$ 一样,且顶点 $\left(l, 0, \frac{l^2}{2p}\right)$ 在 $x^2 = 2pz, y=0$ 上.因而双曲抛物面可看成抛物线 $y^2 = -2qz, x=0$ 使其顶点在抛物线 $x^2 = 2pz, y=0$ 上平行移动所产生的曲面.

思考题:马鞍面上有没有直线?如果有,找出它们.

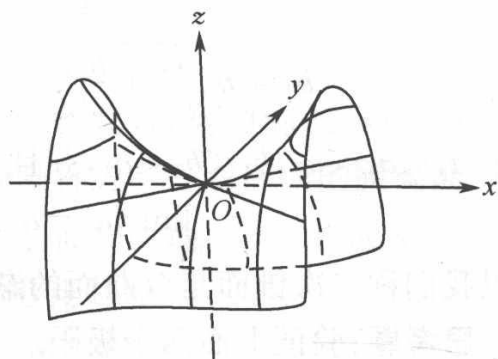


图 3.18

习题 3.4

1. 一个椭球面,以三个坐标面为对称平面,并且经过三点 $(2, 2, 4), (0, 0, 6), (2, 4, 2)$, 求其方程.

2. 求以原点为顶点, z 轴为对称轴, 并通过两点 $(3, 0, 1), (3, 2, 2)$ 的抛物面的方程.

3. 求经过两条抛物线

$$\begin{cases} x^2 - 6y = 0, \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} z^2 + 4y = 0, \\ x = 0 \end{cases}$$

的二次曲面方程.

4. 给定方程

$$\frac{x^2}{a^2 - k} + \frac{y^2}{b^2 - k} + \frac{z^2}{c^2 - k} = 1 \quad (a > b > c > 0),$$

问当 k 取异于 a^2, b^2, c^2 的各种实数值时, 它表示怎样的曲面?

5. 适当选取坐标系, 求下列轨迹的方程.

(1) 到两定点距离之差等于常数的点的轨迹;

(2) 到一定点和一个定平面(定点不在定平面上)距离之比等于常数的点的轨迹;

(3) 设有一个固定平面和垂直于它的一条定直线, 求到定平面与到定直线的距离相等的点的轨迹;

(4) 求与两给定直线等距离的点的轨迹, 已知两直线之间的距离为 a , 夹角为 α .

6. 设 P 是椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 上一点, 向量 $\overrightarrow{OP}$ 的方向余弦为 (λ, μ, γ) , 且 $|\overrightarrow{OP}| = r$,

试证:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{\mu^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}.$$

7. 由椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的中心 O 引三条互相垂直的射线, 与椭球面分别交于 P_1, P_2, P_3 , 设 $|\overrightarrow{OP_i}| = r_i (i=1, 2, 3)$, 试证:

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

8. 求与椭圆抛物面 $10x^2 + 2y^2 = z$ 的交线为圆的平面.

3.5 直纹面

柱面、锥面和旋转单叶双曲面有一个共同的特点, 它们都是由直线构成的, 或者说是一条直线沿一条曲线按一定的方式运动所产生的. 这一类由直线运动所生成的曲面称为直纹面, 直纹面上的直线叫直母线, 那条曲线叫准线. 在二次曲面中, 哪些是直纹面? 二次柱面、二次锥面都是直纹面. 因为椭球面是有界的, 所以椭球面不是直纹面. 而双叶双曲面(3.4.3)要求 $|z| \geq c$, 所以如果直线在此曲面上, 则直线必然与 xOy 面平行(为什么?), 然而这种直线要么相交于曲面两点; 要么与曲面不相交, 因而双叶双曲面不可能是直纹面. 我们将看到单叶双曲面和双曲抛物面都是直纹面.

直纹面的动直线的集合称为单参数直线族. 设直纹面的准线用向量表示为

$a(u), u \in I, I$ 为一区间, 动直线在时刻 u 的方向向量为 $b(u)$, 则直纹面的参数方程为

$$r(u, v) = a(u) + vb(u), \quad u \in I, \quad v \in (-\infty, +\infty).$$

定理 3.5.1 单叶双曲面和双曲抛物面是直纹面.

证明 因为直线一定是在某平面上, 因此曲面上的直母线一定是曲面与某平面的交线. 由于单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0 \quad (3.5.1)$$

与平行于 $z=0$ 的平面的交线都是椭圆, 因而直母线(如果有的话)一定与 xy 面相交, 且交于腰椭圆上一点.

设单叶双曲面是直纹面, 腰椭圆用向量表示为

$$(a \cos u, b \sin u, 0), \quad u \in [0, 2\pi).$$

假设在时刻 u 的直母线的方向向量为 (X, Y, Z) , 则直母线方程为

$$r(u, v) = (a \cos u, b \sin u, 0) + v(X, Y, Z), \quad u \in [0, 2\pi), \quad v \in (-\infty, +\infty).$$

直母线上的一切点都满足曲面的方程(3.5.1), 所以

$$\frac{(a \cos u + vX)^2}{a^2} + \frac{(b \sin u + vY)^2}{b^2} - \frac{(vZ)^2}{c^2} = 1,$$

整理得

$$\left(\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2}\right)v^2 + 2\left(\frac{X \cos u}{a} + \frac{Y \sin u}{b}\right)v = 0.$$

该方程对所有的 v 都成立, 因此

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0, \quad \frac{X \cos u}{a} + \frac{Y \sin u}{b} = 0.$$

由此, 得

$$X : Y : Z = a \sin u : (-b \cos u) : (\pm c).$$

于是过腰椭圆上的一点 $(a \cos u, b \sin u, 0), u \in [0, 2\pi)$ 有两条不同的直母线

$$(I) \begin{cases} x = a \cos u + av \sin u, \\ y = b \sin u - bv \cos u, \\ z = cv, \end{cases} \quad (II) \begin{cases} x = a \cos u + av \sin u, \\ y = b \sin u - bv \cos u, \\ z = -cv, \end{cases}$$

其中 $u \in [0, 2\pi), v \in (-\infty, +\infty)$.

在单叶双曲面上任取一点, 在上面的两族直线中分别可找到一条直线通过这一点. 而且这两族直线分别消去参数都得到同一个单叶双曲面的方程, 即两族直线都形成同一个单叶双曲面, 因此它们是单叶双曲面的两族不同的直母线.

所以单叶双曲面是直纹面. 同样的方法可以说明双曲抛物面也是直纹面.

设双曲抛物面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \quad a > 0, b > 0, \quad (3.5.2)$$

则有参数方程

$$\begin{cases} x = au + av, \\ y = bu - bv, \\ z = 2uv, \end{cases} \quad u, v \in (-\infty, +\infty). \quad (3.5.3)$$

它包含两族直线,一族是过点 $(au, bu, 0)$,方向向量为 $(a, -b, 2u)$ 的直线

$$(I) \begin{cases} x = au + av, \\ y = bu - bv, \\ z = 2uv, \end{cases} \quad v \in (-\infty, +\infty), \quad (3.5.4)$$

另一族是过点 $(av, -bv, 0)$,方向向量为 $(a, b, 2v)$ 的直线

$$(II) \begin{cases} x = av + au, \\ y = -bv + bu, \\ z = 2vu, \end{cases} \quad u \in (-\infty, +\infty). \quad (3.5.5)$$

因此,双曲抛物面也是直纹面,有两族不同的直母线族(I),(II).

代数的证明法 先考虑单叶双曲面.

设单叶双曲面 S 的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0). \quad (3.5.6)$$

点 $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$ 当且仅当 $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1$. 移项并且因式分解得

$$\left(\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c}\right) = \left(1 + \frac{y_0}{b}\right)\left(1 - \frac{y_0}{b}\right). \quad (3.5.7)$$

即

$$\begin{vmatrix} \frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c} & 1 + \frac{y_0}{b} \\ 1 - \frac{y_0}{b} & \frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c} \end{vmatrix} = 0,$$

或

$$\begin{vmatrix} \frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c} & 1 - \frac{y_0}{b} \\ 1 + \frac{y_0}{b} & \frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c} \end{vmatrix} = 0.$$

为了方便,我们记

$$A(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} & 1 + \frac{y}{b} \\ 1 - \frac{y}{b} & \frac{x}{a} - \frac{z}{c} \end{pmatrix},$$

$$B(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} & 1 - \frac{y}{b} \\ 1 + \frac{y}{b} & \frac{x}{a} - \frac{z}{c} \end{pmatrix},$$

$|A(x, y, z)|$ 表示 $A(x, y, z)$ 的行列式. 因此, 点 $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$ 当且仅当 $|A(x_0, y_0, z_0)| = 0$ 或 $|B(x_0, y_0, z_0)| = 0$.

因为 $1 + \frac{y_0}{b}, 1 - \frac{y_0}{b}$ 不全为 0, 所以方程组

$$A(x_0, y_0, z_0) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 0, \quad (3.5.8)$$

是 X, Y 的齐次线性方程组, 由 $|A(x_0, y_0, z_0)| = 0$ 知, (3.5.8) 有非零解, 即存在 $(\mu_0, \gamma_0) \neq (0, 0)$ 使

$$A(x_0, y_0, z_0) \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = 0.$$

这表明点 M_0 在直线

$$A(x, y, z) \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = 0$$

上. 现在考虑一族直线

$$A(x, y, z) \begin{pmatrix} \mu \\ \gamma \end{pmatrix} = 0, \quad (3.5.9)$$

其中, $(\mu, \gamma) \neq (0, 0)$, μ, γ 为参数. 若 (μ_1, γ_1) 与 (μ_2, γ_2) 成比例, 则它们确定 (3.5.9) 族中的同一条直线, 若它们不成比例, 则确定不同的直线. 所以 (3.5.9) 实际上只依赖于 μ 与 γ 的比值. 我们已经证明 S 上的任一点 M_0 在直线族 (3.5.9) 的某一直线上. 下证: 在 (3.5.9) 中任取一直线 l_1 , 对应于 (μ_1, γ_1) , l_1 全在 S 上.

任取 l_1 上的一点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, 则

$$A(x_1, y_1, z_1) \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = 0, \quad (3.5.10)$$

因为 $(\mu_1, \gamma_1) \neq (0, 0)$, 所以 (3.5.10) 说明齐次线性方程组

$$A(x_1, y_1, z_1) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 0 \quad (3.5.11)$$

有非零解, 从而 $|A(x_1, y_1, z_1)| = 0$, 于是 $M_1 \in S$.

故 S 是直纹面, 直线族 (3.5.9) 是 S 的一族直母线.

类似地, 直线族

$$B(x, y, z) \begin{pmatrix} \mu \\ \gamma \end{pmatrix} = 0 \quad (3.5.12)$$

也是 S 的一族直母线, 其中, $(\mu, \gamma) \neq (0, 0)$. 并且 (3.5.9) 和 (3.5.12) 是两族不同的直母线族, 即 (3.5.9) 中的任一直线不在直线族 (3.5.12) 中.

用类似的方法可以证明双曲抛物面也是直纹面.

设双曲抛物面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \quad (3.5.13)$$

则它有两族直母线

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + 2\lambda = 0, \\ \lambda \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) + z = 0 \end{cases} \quad (3.5.14)$$

和

$$\begin{cases} \lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) + z = 0, \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + 2\lambda = 0, \end{cases} \quad (3.5.15)$$

其中, λ 是任意实数.

由以上的代数证明法可以得出以下结论: 如果曲面的方程是二次的, 而且方程可进行因式分解, 那么就能得出该曲面是直纹面的论断, 并且从因式分解中直接写出直母线族的方程.

例如, 设单叶双曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0,$$

将方程变形, 因式分解得

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) = \left(1 + \frac{y}{b} \right) \left(1 - \frac{y}{b} \right),$$

由此可得两族直母线方程

$$(I) \begin{cases} u \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) + v \left(1 + \frac{y}{b} \right) = 0, \\ u \left(1 - \frac{y}{b} \right) + v \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) = 0, \end{cases} \quad (II) \begin{cases} u \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) + v \left(1 - \frac{y}{b} \right) = 0, \\ u \left(1 + \frac{y}{b} \right) + v \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) = 0, \end{cases}$$

其中参数 $(u, v) \neq (0, 0)$.

类似地可以得到双曲抛物面的两族直母线方程, 只是按此法得出的直母线方程中的某个参数可以确定是非零的, 因此直母线方程中的参数实质上就只有一个.

思考题: 考虑二次锥面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, a > 0, b > 0, c > 0$ 的直母线族, 试问有几族直母线?

习题 3.5

1. 求单叶双曲面 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ 上过点 $(2, 3, -4)$ 的直母线.

2. 求直线族

$$\frac{x-\lambda^2}{2} = \frac{y-\lambda}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

所形成的直纹面方程.

3. 求与以下三直线同时共面的直线所产生的曲面,

$$l_1: \begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases}, \quad l_2: \begin{cases} x=-1 \\ y=-z \end{cases}, \quad l_3: \frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+2}{5}.$$

4. 证明单叶双曲面的同族中的任意两条直母线异面;异族中的任意两条直母线共面.

5. 设 S 是马鞍面,证明:

(1)同族中的任意两条直母线异面;

(2)异族中的任意两条直母线相交;

(3)同族中的全体直母线平行于同一平面.

6. 证明马鞍面的正交直母线的交点在一条双曲线上.

7. 已知平面 $ax+by+cz=0$ ($abc \neq 0$) 与锥面 $xy+yz+zx=0$ 的交线是两条正交的直线,证明

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0.$$

3.6 作 简 图

3.6.1 曲面交线的画法

空间中任一点 M 以及它在三个坐标面上的投影点 M_1, M_2, M_3 这四个点中,只要知道其中两个点,就可以画出另外两个点.例如,若知道 M_1, M_2 两个点,则只要分别过 M_1, M_2 画出投影线(平行于相应坐标轴的直线),它们的交点就是 M 点,再过 M 点作投影线(平行于 y 轴),它与 xOz 面的交点就是 M_3 (图3.19).

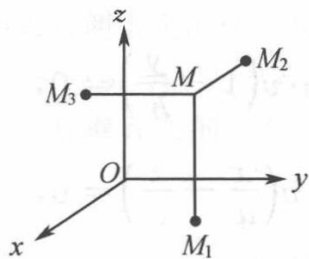


图 3.19

根据上述观点,要作曲面交线 C (即空间曲线),只要知道 C 在三个坐标面的投影曲线中的两条.而投影曲线是通过 C 的投影柱面与坐标面相交得到的.

例 3.6.1 求曲线 C :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

在各坐标面上的投影曲线方程,并且画出 C 及其在各坐标面上的投影曲线.曲线 C 称为维维安尼曲线.

解 C 向 xOy 面的投影柱面为 $x^2 + y^2 - 2x = 0$, 在 xOy 面上的投影曲线 C_1 为

$$C_1: \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

它是一个圆.

在 C 的方程中消去 y 得 C 向 xOz 面的投影柱面是

$$z^2 + 2x = 4,$$

在 xOz 面上的投影曲线为

$$C_2: \begin{cases} z^2 + 2x = 4, \\ y = 0. \end{cases}$$

由 C 的方程知 $|x| \leq 2, |y| \leq 2, |z| \leq 2$, 另外由第二个方程知 $0 \leq x \leq 2, |y| \leq 1$. 因而 C_2 的范围为 $0 \leq x \leq 2$.

类似地, C 的方程中消去 x 得 $4y^2 + (z^2 - 2)^2 = 4$, 在 yOz 面上的投影曲线为

$$C_3: \begin{cases} 4y^2 + (z^2 - 2)^2 = 4, \\ x = 0. \end{cases}$$

由于曲线关于 xOy 面对称, 所以我们只画出 xOy 面上方的部分(图 3.20).

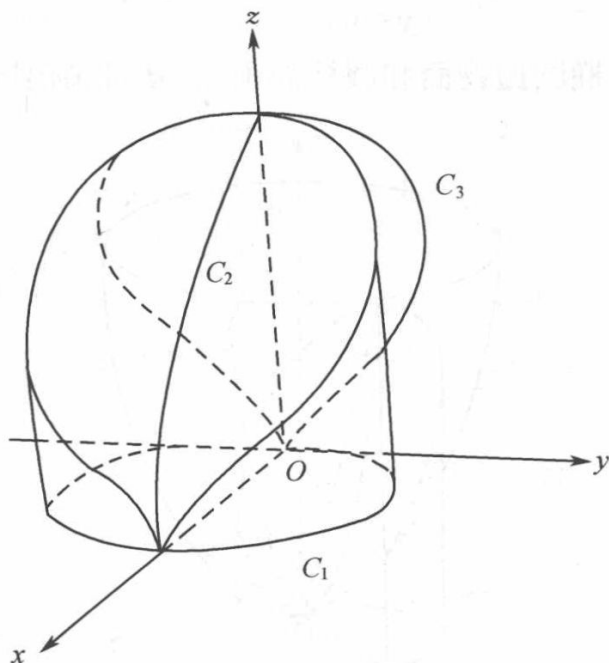


图 3.20

3.6.2 曲面所围区域的画法

几个曲面或平面所围成的空间的区域可用几个不等式联立起来表示. 只要画出相应曲面的交线, 就可将区域表示出来.

例 3.6.2 用不等式组表示出下列曲面或平面所围成的区域, 并作简图.

$$x^2 + y^2 = 2z, x^2 + y^2 = 4x, z = 0.$$

解 $x^2 + y^2 = 2z$ 是椭圆抛物面, $x^2 + y^2 = 4x$ 是圆柱面, $z = 0$ 是 xOy 面. 因此它们所围成的区域应当在 xOy 面上方, 在椭圆抛物面下方及圆柱面内. 于是这个区域可表示成

$$\begin{cases} z \geq 0, \\ x^2 + y^2 \geq 2z, \\ x^2 + y^2 \leq 4x. \end{cases}$$

为了画出这个区域,关键是椭圆抛物面与圆柱面的交线 C :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2z, \\ x^2 + y^2 = 4x. \end{cases}$$

C 在 xOy 面上的投影曲线

$$C_1: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4x, \\ z = 0. \end{cases}$$

C 在 xOz 面上的投影曲线

$$C_2: \begin{cases} z = 2x, \\ y = 0, \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 4.$$

由 C_1, C_2 可画出 C . 将椭圆抛物面和圆柱面画出,就可画出区域的简图(图 3.21).

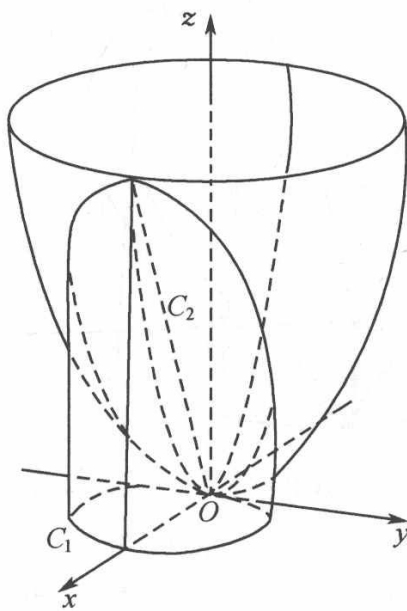


图 3.21

习题 3.6

- 用不等式组表达由下列平面或曲面所围成的空间区域,并作简图.
 - $x^2 + y^2 = 16, z = x + 4, z = 0$;
 - $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36, x^2 + y^2 + z^2 = 16$ (在第 I 卦限内).
- 作出由不等式组 $0 \leq z \leq \sqrt{8 - x^2 - y^2}, 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}, 0 \leq x \leq 2$ 所确定的空间区域简图.

几何之父——欧几里得^①

欧几里得(Euclid, 约公元前 330~公元前 275), 希腊数学家。欧几里得是古代希腊最负盛名、最有影响力的数学家之一, 他是亚历山大学派的成员。欧几里得以其所著的《几何原本》(简称《原本》)闻名于世。《几何原本》(Elements)共有 13 卷, 两千多年来都被看作学习几何的标准课本, 欧几里得由此而被称为几何之父。这一著作对于几何学、数学和科学的未来发展, 对于西方人的整个思维方法都有很大的影响。《几何原本》的主要对象是几何学, 但它还处理了数论、无理数理论等其他课题。欧几里得使用了公理化的方法。公理(axioms)就是确定的、不需证明的基本命题, 一切定理都由此演绎而出。在这种演绎推理中, 每个证明必须以公理为前提, 或者以被证明了的定理为前提。这一方法后来成为建立任何知识体系的典范, 在差不多两千年间, 被奉为必须遵守的严密思维的范例。《几何原本》是古希腊数学发展的顶峰。



关于欧几里得的生平, 现在知道得很少。大概早年就学于雅典, 深知柏拉图的说。公元前 300 年左右, 在托勒密王(公元前 364~公元前 283)的邀请下, 来到亚历山大, 长期在那里工作。

欧几里得将公元前 7 世纪以来希腊几何积累起来的丰富成果整理在严密的逻辑系统之中, 使几何学成为一门独立的、演绎的科学。除了《几何原本》之外, 还有不少著作, 可惜大都失传。

欧几里得善于用简单的方法解决复杂的问题。他在人的身影与身高正好相等的时刻, 测量了金字塔影的长度, 解决了当时无人能解的金字塔高度的大难题。他说: “此时塔影的长度就是金字塔的高度。”

他是一位温良敦厚的教育家, 对有志数学之士, 总是循循善诱。但反对不肯刻苦钻研、投机取巧的作风, 也反对狭隘的实用观点。据普罗克洛斯(约 410~485)记载, 尽管欧几里得简化了他的几何学, 国王(托勒密王)还是不理解, 希望找一条学习几何的捷径。欧几里得回答说: “几何无王者之道。”这句话后来成为传诵千古的学习箴言。斯托贝乌斯(约 500)记述了另一则故事, 说一个学生才开始学第一个命题, 就问欧几里得学了几何学之后将得到些什么。欧几里得幽默地对仆人说: “给他三个钱币, 因为他想在学习获取实利。”《几何原本》问世后, 它的手抄本流传了一千八百多年。1482 年印刷发行以后, 重版了大约一千版次, 还被译为世界各主要

^① 摘自 <http://baike.baidu.com>, 有删减

语种. 13 世纪时曾传入中国, 不久就失传了, 1607 年重新翻译了前六卷, 1857 年又翻译了后九卷.

第3章小结

球心为 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 半径为 R 的球面方程是: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$.

球面的一般方程是: $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$.

球心在原点, 半径为 R 的球面的参数方程是:

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \cos \varphi, \\ y = R \cos \theta \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \\ z = R \sin \theta. \end{cases}$$

θ 为纬度, φ 为经度. 如果要分东经和西经, 那么 $-\pi < \varphi \leq \pi$. 由参数 θ, φ 可确定球面上点的位置, 地球上的位置就是由纬度和经度来确定. 由此可延伸, 空间中的点可由数组 (R, θ, φ) , $R \geq 0$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ 确定, 这就是空间中点的球面坐标, 宇宙中星体的位置就是由球面坐标来确定的.

以 z 轴为对称轴, 半径为 R 的圆柱面方程是: $x^2 + y^2 = R^2$. 其参数方程是:

$$\begin{cases} x = R \cos u, \\ y = R \sin u, \quad 0 \leq u < 2\pi, \quad -\infty < v < +\infty. \\ z = v. \end{cases}$$

由参数 u, v 可确定圆柱面上点的位置. 由此延伸, 空间中的点可由数组 (R, u, v) , $R \geq 0$, $0 \leq u < 2\pi$, $-\infty < v < +\infty$ 确定, 这就是空间中点的柱面坐标.

球面坐标和柱面坐标在微积分的重积分计算中有重要的作用.

柱面、锥面和旋转面的方程, 不仅要掌握求方程的一般方法, 而且对于特殊情形的方程的特点要明确其形式.

母线平行于 z 轴 (x, y 轴) 的柱面的方程中不含坐标 $z(x, y)$, 反之亦然. 例如方程 $x^2 + y^2 = R^2$ 是母线平行于 z 轴的圆柱面.

顶点在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的锥面方程是关于 $x-x_0, y-y_0, z-z_0$ 的齐次方程. 例如方程 $x^2 + y^2 - \tan^2 \theta z^2 = 0$ 顶点在原点, 对称轴为 z 轴, 半顶角为 θ 的圆锥面.

坐标面 yOz 上的曲线 $f(y, z) = 0$ 绕 z 轴旋转的旋转面方程: $f(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$. 例如双曲线 $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 绕 z 轴旋转的旋转面方程是 $\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. 绕 y 轴旋转的旋转面方程是 $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2 + z^2}{c^2} = 1$.

两条相交(不垂直)直线,其中一条绕另一条旋转产生圆锥面;两条平行直线,其中一条绕另一条旋转产生圆柱面;两条异面(不垂直)直线,其中一条绕另一条旋转产生旋转单叶双曲面.

空间曲线可视为两个空间曲面的交线,因此空间曲线的一般方程表示为

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

如果空间曲面的方程比较复杂的话,那么它们的图形就难于画出,

曲线也就难以画出. 由于母线平行于坐标轴的柱面相对而言要比较容易画出,所以我们可以将曲线的方程作等价形式的化简,通过分别消去其中某坐标,得到由两个母线平行于不同坐标轴的柱面表示该曲线,这样空间曲线就相对容易画出了. 比如

原方程组可等价地化为 $\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ G_1(x, z) = 0. \end{cases}$ 那么柱面 $F_1(x, y) = 0$ 就是曲线沿 z 轴方向的

的投影柱面,柱面 $G_1(x, z) = 0$ 就是曲线沿 y 轴方向的投影柱面. 曲线在 xOy 面上的

的投影曲线方程就是 $\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ z = 0. \end{cases}$ 曲线在 xOz 面上的投影曲线方程就

是 $\begin{cases} G_1(x, z) = 0, \\ y = 0. \end{cases}$

利用投影柱面,我们可以求与一个曲面交线为圆的平面方程. 圆总是可视为平

面与一球面的交线,因此,设圆方程是 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases}$ 也可设该圆的方程

是 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases}$ 然后分别求出它们在相同坐标轴方向的

投影柱面方程,由于相同曲线的投影柱面也是相同的,因而得到的方程也应该相同,于是两个投影柱面方程的系数应该成比例,这样就可以确定所求平面的方程.

单叶双曲面和双曲抛物面是直纹面的几何证明法的思想是一样的,以单叶双曲面为例,先明确直母线一定与腰椭圆相交,其次过腰椭圆上一点的直线要在曲面上的话就可确定它的方向向量,从而得出直母线的方程有两族. 每一族直母线方程实际上也是曲面的一种参数方程.

设单叶双曲面的方程是 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, 则有两族直母线:

$$(I) \begin{cases} x = a \cos u + av \sin u, \\ y = b \sin u - bv \cos u, \\ z = cv, \end{cases} \quad (II) \begin{cases} x = a \cos u + av \sin u, \\ y = b \sin u - bv \cos u, \\ z = -cv, \end{cases} \quad u \in [0, 2\pi), v \in (-\infty, +\infty).$$

设双曲抛物面的方程是 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$, 则有参数方程 $\begin{cases} x = au + av, \\ y = bu - bv, \\ z = 2uv. \end{cases} u, v \in (-\infty, +\infty).$

它实际上包含两族直母线,一族是过点 $(au, bu, 0)$,方向向量是 $(a, -b, 2u)$ 的直线:

$$(I) \begin{cases} x = au + av, \\ y = bu - bv, \quad v \in (-\infty, +\infty). \\ z = 2uv. \end{cases}$$

另一族是过点 $(av, -bv, 0)$,方向向量是 $(a, b, 2v)$ 的直线.

$$(II) \begin{cases} x = av + av, \\ y = -bv + bu, \quad u \in (-\infty, +\infty). \\ z = 2vu. \end{cases}$$

代数的证明法是利用因式分解和齐次线性方程组有非零解的条件而得到.

设单叶双曲面的方程是 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$,则有两族直母线:

$$(I) \begin{cases} u(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}) + v(1 + \frac{y}{b}) = 0, \\ u(1 - \frac{y}{b}) + v(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}) = 0. \end{cases} \quad (u, v) \neq (0, 0),$$

$$(II) \begin{cases} u(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}) + v(1 - \frac{y}{b}) = 0, \\ u(1 + \frac{y}{b}) + v(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}) = 0. \end{cases} \quad (u, v) \neq (0, 0).$$

设双曲抛物面的方程是 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$,则有两族直母线:

$$(I) \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + 2\lambda = 0, \\ \lambda(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}) + z = 0. \end{cases} \quad \lambda \in \mathbf{R}, \quad (II) \begin{cases} \lambda(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) + z = 0, \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + 2\lambda = 0. \end{cases} \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

柱面和锥面只有一族直母线.

第4章 二次曲线和二次曲面

对常见的二次曲线(面)通过其特殊的二次方程,我们已经熟知各种性质,现在的问题是,除此之外还有多少种二次曲线(面). 对一个一般的二次方程(二元或三元),它所表示的曲线(面)是怎样的. 本章拟就这类问题展开讨论.

为了简洁,特别是为了让读者更注重本章的思想方法,本章利用了一些代数知识,请参见本书末附录.

4.1 坐标变换

4.1.1 平面的坐标变换

平面上给了两个仿射坐标系 $\sigma_1 = \{O; e_1, e_2\}$, $\sigma_2 = \{O'; e'_1, e'_2\}$. 我们研究同一个点(向量)在 σ_1 和 σ_2 下的坐标之间的关系. 设 O' 在 σ_1 下的坐标为 (x_0, y_0) , e'_1, e'_2 在 σ_1 下的坐标分别是 $(a_{11}, a_{21}), (a_{12}, a_{22})$, 点 M 在 σ_1 和 σ_2 下的坐标分别为 (x, y) 和 (x', y') .

如图 4.1, 因为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \\ &= (x_0 e_1 + y_0 e_2) + (x' e'_1 + y' e'_2) \\ &= x_0 e_1 + y_0 e_2 + x' (a_{11} e_1 + a_{21} e_2) \\ &\quad + y' (a_{12} e_1 + a_{22} e_2) \\ &= (x_0 + a_{11} x' + a_{12} y') e_1 \\ &\quad + (y_0 + a_{21} x' + a_{22} y') e_2 \\ &= x e_1 + y e_2,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} x = a_{11} x' + a_{12} y' + x_0, \\ y = a_{21} x' + a_{22} y' + y_0. \end{cases} \quad (4.1.1)$$

将(4.1.1)写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad (4.1.2)$$

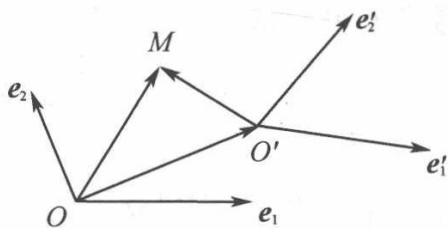


图 4.1

或

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \quad (4.1.2)'$$

(4.1.1)或(4.1.2)称为从 σ_1 到 σ_2 的点的仿射坐标变换公式.

设向量 $\mathbf{a}$ 在 σ_1 下的坐标为 (u, v) ,在 σ_2 下的坐标为 (u', v') ,则

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= u'\mathbf{e}_1' + v'\mathbf{e}_2' = u'(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2) + v'(a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2) \\ &= (u'a_{11} + v'a_{12})\mathbf{e}_1 + (u'a_{21} + v'a_{22})\mathbf{e}_2 \\ &= u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{cases} u = a_{11}u' + a_{12}v', \\ v = a_{21}u' + a_{22}v'. \end{cases} \quad (4.1.3)$$

将它写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}. \quad (4.1.3)'$$

(4.1.3)或(4.1.3)'称为从 σ_1 到 σ_2 的向量的仿射坐标变换公式.

σ_1 和 σ_2 的坐标向量之间的关系为

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_2' = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2, \end{cases}$$

形式上可写成

$$(\mathbf{e}_1' \ \mathbf{e}_2') = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 称为从坐标系 σ_1 到坐标系 σ_2 的过渡矩阵.

思考题:过渡矩阵 $\mathbf{A}$ 的行列式 $\det \mathbf{A} \neq 0$,即 $\mathbf{A}$ 是可逆的.

思考题:如果 σ_1 和 σ_2 都是直角坐标系,则从 σ_1 到 σ_2 的过渡矩阵 $\mathbf{A}$ 是正交矩阵,从 σ_2 到 σ_1 的过渡矩阵是 $\mathbf{A}^T$.

注: σ_1 与 σ_2 为同定向的直角坐标系的充要条件是 $\mathbf{A}$ 为正交矩阵且 $\det \mathbf{A} = 1$,此时 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$; σ_1 与 σ_2 为反定向的直角坐标系的充要条件是 $\mathbf{A}$ 为正交矩阵且 $\det \mathbf{A} = -1$,此时 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$,其中, $0 \leq \theta < 2\pi$.

设 σ_1 与 σ_2 均为右手直角坐标系, $O'(x_0, y_0)$, $\mathbf{e}_1$ 到 $\mathbf{e}_1'$ 的转角(逆时针方向)为 θ ,则

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

若 $\theta=0$, 则

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + x_0 \\ y' + y_0 \end{pmatrix}, \quad (4.1.4)$$

(4.1.4) 就是移轴公式.

若 O 与 O' 重合, 则

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad (4.1.5)$$

(4.1.5) 就是转角为 θ 的转轴公式.

平面上的任一右手直角坐标变换都可以经过移轴和转轴得到.

4.1.2 空间的坐标变换

设 $\sigma_1 = \{O; e_1, e_2, e_3\}$, $\sigma_2 = \{O'; e'_1, e'_2, e'_3\}$ 是空间的两个仿射坐标系, 在 σ_1 下, e'_i 的坐标为 (a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}) , $i=1, 2, 3$, 那么形式上有

$$(e'_1 \ e'_2 \ e'_3) = (e_1 \ e_2 \ e_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

其中矩阵 $A = (a_{ij})$ 称为从 σ_1 到 σ_2 的过渡矩阵, 且是可逆的.

设点 M 在 σ_1 和 σ_2 下的坐标分别为 (x, y, z) , (x', y', z') , O' 在 σ_1 下的坐标为 (x_0, y_0, z_0) , 向量 a 在 σ_1 和 σ_2 下的坐标分别为 (a_1, a_2, a_3) , (a'_1, a'_2, a'_3) , 那么使用平面的坐标变换公式的推导方法可以得到

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad (4.1.6)$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix}, \quad (4.1.7)$$

公式(4.1.6)称为从 σ_1 到 σ_2 的点的仿射坐标变换公式, 公式(4.1.7)称为从 σ_1 到 σ_2 的向量的仿射坐标变换公式.

如果 σ_1, σ_2 都是直角坐标系, 则可以证明 A 是正交矩阵. 进一步, 如果 σ_1, σ_2 是同定向的, 那么 $\det A = 1$; 如果 σ_1 与 σ_2 是反定向的, 那么 $\det A = -1$.

例 4.1.1 在平面上, 设 x' 轴, y' 轴在原坐标系中的方程分别为

$$3x - 4y + 1 = 0, \quad 4x + 3y - 7 = 0,$$

且新、旧坐标系都是右手直角坐标系. 求 σ_1 到 σ_2 的点的坐标变换公式; 直线 $l_1: 2x - y + 3 = 0$ 在新坐标系中的方程; 直线 $l_2: x' + 2y' - 1 = 0$ 在原坐标系中的方程.

解 设原坐标系为 $\sigma_1 = \{O; e_1, e_2\}$, 新坐标系为 $\sigma_2 = \{O'; e_1', e_2'\}$. 解方程组

$$\begin{cases} 3x - 4y + 1 = 0, \\ 4x + 3y - 7 = 0, \end{cases}$$

得 $x=1, y=1$. 因此 O' 在 σ_1 中的坐标为 $(1, 1)$.

因为 x' 轴的标准方程为

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{3},$$

所以 x' 轴的方向数为 $4:3$, 于是 e_1' 的 σ_1 坐标为 $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ 或 $(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ (注: x' 轴所在的方向向量平行于 e_1' , $|e_1'|=1$). 下面取 e_1' 的 σ_1 坐标为 $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$; 同样可得 e_2' 的 σ_1 坐标为 $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$. 因此从 σ_1 到 σ_2 的点的坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$l_1: 2x - y + 3 = 0$ 在新坐标系中的方程为

$$2\left(\frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y' + 1\right) - \left(\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y' + 1\right) + 3 = 0,$$

即

$$x' - 2y' + 4 = 0.$$

从 σ_2 到 σ_1 的点的坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}.$$

$l_2: x' + 2y' - 1 = 0$ 在原坐标系中的方程为

$$\left[\frac{4}{5}(x-1) + \frac{3}{5}(y-1)\right] + 2\left[-\frac{3}{5}(x-1) + \frac{4}{5}(y-1)\right] - 1 = 0,$$

即

$$2x - 11y + 14 = 0.$$

例 4.1.2 在右手直角坐标系中, 判断曲面 $S: (2x + y + z)^2 - (x - y - z)^2 = y - z$ 是什么曲面.

解 考虑三个平面

$$\Pi_1: 2x + y + z = 0,$$

$$\Pi_2: x - y - z = 0,$$

$$\Pi_3: y - z = 0,$$

它们的法向量分别是 $\mathbf{n}_1 = (2, 1, 1)$, $\mathbf{n}_2 = (1, -1, -1)$, $\mathbf{n}_3 = (0, 1, -1)$. 易知它们两两垂直, 因而可以作为新的坐标系的三个坐标轴的方向向量.

因为

$$(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6 > 0,$$

所以 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ 依次构成右手系. 因而取 $\mathbf{n}_1^0, \mathbf{n}_2^0, \mathbf{n}_3^0$ 分别是新右手直角坐标系的坐标向量 $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$, 即

$$\mathbf{e}_1' = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right),$$

$$\mathbf{e}_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right),$$

$$\mathbf{e}_3' = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

三个平面的交点 $(0, 0, 0)$ 作为新右手直角坐标系的原点, 因而从旧系到新系的点的坐标变换为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

由此可得

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

曲面 S 在新的右手直角坐标系下的方程为

$$(\sqrt{6}x')^2 - (\sqrt{3}y')^2 = \sqrt{2}z',$$

即

$$\frac{x'^2}{1} - \frac{y'^2}{2} = \frac{\sqrt{2}z'}{6}.$$

故 S 是双曲抛物面.

思考题: 本题为何不直接令
$$\begin{cases} x' = 2x + y + z, \\ y' = x - y - z, \\ z' = y - z, \end{cases}$$
 化简方程?

例 4.1.3 在右手直角坐标系中, 方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 表示椭圆, 作坐标变换

$\begin{cases} x = 2x', \\ y = 3y' \end{cases}$, 得方程 $x'^2 + y'^2 = 1$ 已不能完全表达原方程所表示曲线的几何性质.

习题 4.1

1. 在直角坐标系 xOy 中, 以直线 $l: 4x - 3y + 12 = 0$ 为新坐标系的 x' 轴, 取通过 $A(1, -3)$ 且垂直于 l 的直线为 y' 轴, 写出点的坐标变换公式, 并且求直线 $l_1: 3x - 2y + 5 = 0$ 在新坐标系中的方程.

2. 作直角坐标变换, 已知点 $A(6, -5), B(1, -4)$ 的新坐标分别为 $(1, -3), (0, 2)$, 求点的坐标变换公式.

3. 设新旧坐标系都是右手直角坐标系, 点的坐标变换公式为

$$(1) \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' + 5, \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' - 3; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x' = -y + 3, \\ y' = x - 2. \end{cases}$$

其中, (x, y) 与 (x', y') 分别表示同一点的旧坐标与新坐标, 求新坐标系的原点的旧坐标, 并且求坐标轴旋转的角 θ .

4. 在右手直角坐标系 σ_1 中, 设两直线 $l_i: A_i x + B_i y + C_i = 0 (i=1, 2)$ 互相垂直, 取 l_1, l_2 为右手直角坐标系 σ_2 的 $O'y'$ 轴、 $O'x'$ 轴, 试求 σ_2 到 σ_1 的点的坐标变换公式.

5. 设 $OABC$ 为四面体, L, M, N 依次是 $\triangle ABC$ 的三边 AB, BC, CA 的中点, 取 $\sigma_1 = \{O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}, \sigma_2 = \{O; \overrightarrow{OL}, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\}$.

(1) 求 σ_1 到 σ_2 点的坐标变换公式和向量的坐标变换公式, 再求 σ_2 到 σ_1 的点(向量)的坐标变换公式.

(2) 求 $A, B, C, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 的 σ_2 坐标.

6. 在右手直角坐标系 $\sigma_1 = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ 中, 已给三个互相垂直的平面 $\Pi_1: x + y + z - 1 = 0, \Pi_2: x - z + 1 = 0, \Pi_3: x - 2y + z + 2 = 0$. 确定新的坐标系 $\sigma_2 = \{O'; e_1', e_2', e_3'\}$, 使得 Π_1, Π_2, Π_3 分别为 $y'O'z', z'O'x', x'O'y'$ 坐标面, 且 O 在新坐标系的第一卦限内. 求 σ_1 到 σ_2 的点的坐标变换公式.

7. 在右手直角坐标系 $Oxyz$ 中, 方程

$$9x^2 - 25y^2 + 16z^2 - 24xz + 80x + 60z = 0$$

表示什么曲面?

8. 已知 $e \perp r, |e| = 1$, 将 r 绕 e 右旋角度 θ 得 r_1 , 试用 e, r, θ 表示 r_1 .

9. 将右手直角坐标系 $\sigma_1 = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ 绕方向 $v = (1, 1, 1)$ 右旋 $\frac{\pi}{3}$, 原点不动, 得坐标系

$\sigma_2 = \{O; e_1', e_2', e_3'\}$. 求 σ_1 到 σ_2 的点的坐标变换公式.

10. 设 l_1 与 l_2 是两条不垂直的异面直线, 分别通过 l_1 和 l_2 作两个互相垂直的平面, 证明交线的轨迹是单叶双曲面.

4.2 二次曲面和二次曲线方程的化简

上节的例 4.1.2 已经提醒我们, 对于一个较复杂的二次方程, 有望通过坐标变换将其化简, 从而可剖析其所对应的曲面.

从本节开始我们着重在右手直角坐标系下讨论一般的二次曲面方程. 平面上的二次曲线可作类似的讨论, 所以我们只是简略地写出相应的结论.

4.2.1 定义和记号

记空间中二次曲面的一般方程为

$$\begin{aligned} F(x, y, z) = & a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz \\ & + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} \\ = & 0, \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

其中, $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ 不全为 0.

记 $F(x, y, z)$ 的二次部分为

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) = & a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 \\ & + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

利用矩阵的乘法可以把 $F(x, y, z), \Phi(x, y, z)$ 写成下列形式

$$F(x, y, z) = (x \ y \ z \ 1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\Phi(x, y, z) = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

记

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$A, \bar{A}$ 分别称为二次曲面 $F(x, y, z) = 0$ 和 $\Phi(x, y, z)$ 的系数矩阵, 它们是实对称的.

记 $\delta^T = (a_{14} \ a_{24} \ a_{34})$, $\alpha^T = (x \ y \ z)$, 则 A 可以分块写成

$$A = \begin{bmatrix} \bar{A} & \delta \\ \delta^T & a_{44} \end{bmatrix}.$$

二次曲面的方程(4.2.1)可表示成

$$F(x, y, z) = (\alpha^T \ 1) \begin{bmatrix} \bar{A} & \delta \\ \delta^T & a_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (4.2.3)$$

$\Phi(x, y, z)$ 可以表示成

$$\Phi(x, y, z) = \alpha^T \bar{A} \alpha.$$

记

$$\Phi_1(x, y, z) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z,$$

$$\Phi_2(x, y, z) = a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z,$$

$$\Phi_3(x, y, z) = a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z,$$

$$\Phi_4(x, y, z) = a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z,$$

则有

$$\Phi(x, y, z) = x\Phi_1(x, y, z) + y\Phi_2(x, y, z) + z\Phi_3(x, y, z).$$

4.2.2 代数理论

由代数知识知道(参见附录), 实对称矩阵可用正交矩阵对角化. 即对实对称矩阵 $\bar{A}$, 存在正交矩阵 T , 使 $T^T \bar{A} T$ 为对角矩阵, 且对角线上的元素为 $\bar{A}$ 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 即方程

$$\det(\bar{A} - \lambda E) = 0$$

的根, 它们全为实数. 因而有

$$T^T \bar{A} T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} = \Lambda.$$

对二次曲面的方程(4.2.3), 我们作如下的右手直角坐标变换, 保持原点不动, 从旧坐标系 $\sigma_1 = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ 到新坐标系 $\sigma_2 = \{O; e'_1, e'_2, e'_3\}$ 的过渡矩阵为 T , 即

$$\alpha = T\alpha', \quad (4.2.4)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.2.5)$$

将(4.2.5)代入二次曲面的方程(4.2.3)中得

$$\begin{aligned}
& (\alpha^T \quad 1) \begin{pmatrix} \bar{A} & \delta \\ \delta^T & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= (\alpha'^T \quad 1) \begin{pmatrix} T^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A} & \delta \\ \delta^T & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= (\alpha'^T \quad 1) \begin{pmatrix} T^T \bar{A} T & T^T \delta \\ \delta^T T & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= (\alpha'^T \quad 1) \begin{pmatrix} \Lambda & T^T \delta \\ \delta^T T & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

记 $\delta^T T = (a_{14}' \ a_{24}' \ a_{34}')$. 因此经过直角坐标变换(4.2.4), 曲面方程变为

$$\begin{aligned}
F'(x', y', z') &= \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2a_{14}' x' \\
&\quad + 2a_{24}' y' + 2a_{34}' z' + a_{44} = 0.
\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

由以上知道, 我们总能找到适当的右手直角坐标系使二次曲面的方程具有(4.2.6)的形式. 因而为简洁起见不妨设二次曲面的方程就是(4.2.6)的形式, 并将方程中的符号“'”去掉.

4.2.3 二次曲面分类

在(4.2.6)的基础之上, 通过配方, 再作移轴, 就可将方程(4.2.6)进一步化简, 并了解其所对应的曲面.

情形 1 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 都不为 0. 作移轴

$$\begin{cases} x' = x + \frac{a_{14}}{\lambda_1}, \\ y' = y + \frac{a_{24}}{\lambda_2}, \\ z' = z + \frac{a_{34}}{\lambda_3}, \end{cases}$$

则有

$$\begin{aligned}
F(x, y, z) &= \lambda_1 \left(x + \frac{a_{14}}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y + \frac{a_{24}}{\lambda_2} \right)^2 \\
&\quad + \lambda_3 \left(z + \frac{a_{34}}{\lambda_3} \right)^2 - \frac{a_{14}^2}{\lambda_1} - \frac{a_{24}^2}{\lambda_2} - \frac{a_{34}^2}{\lambda_3} + a_{44} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

令常数项为 a_{44}' , 得

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + a_{44}' = 0. \tag{4.2.7}$$

(1) $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 a_{44}' > 0$

1° $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 同号, 则同于形式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$. 虚椭球面

2° $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 异号, 则同于形式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$. 单叶双曲面

(2) $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 a_{44}' < 0$

3° $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 同号, 则同于形式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$. 椭球面

4° $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 异号, 则同于形式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$. 双叶双曲面

(3) $a_{44}' = 0$

5° $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 同号, 则同于形式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$. 一点

6° $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 异号, 则同于形式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$. 二次锥面

情形2 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 中只有一个为0. 不妨设 $\lambda_3 = 0$, 作移轴

$$\begin{cases} x' = x + \frac{a_{14}}{\lambda_1}, \\ y' = y + \frac{a_{24}}{\lambda_2}, \\ z' = z, \end{cases}$$

则有

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a_{34}z' + a_{44}' = 0. \quad (4.2.8)$$

(1) $a_{34} \neq 0$, 再作移轴

$$\begin{cases} x'' = x', \\ y'' = y', \\ z'' = z' + \frac{a_{44}'}{2a_{34}}, \end{cases}$$

那么(4.2.8)化简为

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + 2a_{34}z'' = 0 \quad (4.2.9)$$

7° $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, 则同于形式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$. 椭圆抛物面

8° $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, 则同于形式 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$. 双曲抛物面

(2) $a_{34} = 0, a_{44}' \neq 0$, 则(4.2.8)变为

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + a_{44}' = 0 \quad (4.2.10)$$

9° λ_1, λ_2 同号但与 a_{44}' 异号, 则同于形式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. 椭圆柱面

10° $\lambda_1, \lambda_2, a_{44}'$ 同号, 则同于形式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$. 虚椭圆柱面

11° $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, 则同于形式 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. 双曲柱面

(3) $a_{34} = a_{44}' = 0$

12° $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, 则同于形式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$. 一对相交于一条实直线的虚平面

13° $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, 则同于形式 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$. 一对相交平面

情形 3 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 中有两个为 0. 不妨设 $\lambda_1 \neq 0$, 作移轴

$$\begin{cases} x' = x + \frac{a_{14}}{\lambda_1}, \\ y' = y, \\ z' = z, \end{cases}$$

则有

$$\lambda_1 x'^2 + 2a_{24}y' + 2a_{34}z' + a_{44}' = 0. \quad (4.2.11)$$

(1) a_{24}, a_{34} 中至少有一个不为 0, 作变换

$$\begin{cases} x'' = x', \\ y'' = \frac{2a_{24}y' + 2a_{34}z' + a_{44}'}{2\sqrt{a_{24}^2 + a_{34}^2}}, \\ z'' = \frac{-a_{34}y' + a_{24}z'}{\sqrt{a_{24}^2 + a_{34}^2}}. \end{cases}$$

思考题: 这样一个坐标变换是如何构造的? 为何要构造这样的变换?

通过此变换, (4.2.11) 可化简成如下形式:

14° $x^2 = 2py$. 抛物柱面

(2) $a_{24} = a_{34} = 0$

15° λ_1 与 a_{44}' 异号, 则同于形式 $x^2 - a^2 = 0$. 一对平行平面

16° λ_1 与 a_{44}' 同号, 则同于形式 $x^2 + a^2 = 0$. 一对虚的平行平面

17° $a_{44}' = 0$, 则同于形式 $x^2 = 0$. 一对重合平面

综合以上结论, 我们有下列定理.

定理 4.2.1 选取适当的坐标系, 二次曲面方程总可以化简为以下五个简化方程中的一个:

(1) $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0$, $a_{11}a_{22}a_{33} \neq 0$;

(2) $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{34}z = 0$, $a_{11}a_{22}a_{34} \neq 0$;

(3) $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{44} = 0$, $a_{11}a_{22} \neq 0$;

(4) $a_{11}x^2 + 2a_{24}y = 0$, $a_{11}a_{24} \neq 0$;

(5) $a_{11}x^2 + a_{44} = 0$, $a_{11} \neq 0$.

二次曲面总共有 17 种曲面.

类似于空间二次曲面的讨论,读者自行研究平面上的二次曲线方程有如下结论.

记平面上的二次曲线方程为

$$\begin{aligned} F(x, y) &= a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} \\ &= (x \ y \ 1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

记

$$\Phi(x, y) = (x \ y) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\Phi_1(x, y) = a_{11}x + a_{12}y,$$

$$\Phi_2(x, y) = a_{12}x + a_{22}y,$$

$$\Phi_3(x, y) = a_{13}x + a_{23}y.$$

经过类似于二次曲面方程的化简过程可以得到以下定理.

定理 4.2.1' 平面上的二次曲线方程可化简为以下三个简化方程之一:

$$(1) \ a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0, \quad a_{11}a_{22} \neq 0;$$

$$(2) \ a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0, \quad a_{22}a_{13} \neq 0;$$

$$(3) \ a_{22}y^2 + a_{33} = 0, \quad a_{22} \neq 0.$$

二次曲线共分为 9 种,它们的方程形式如下:

$$1^\circ \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad \text{椭圆}$$

$$2^\circ \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0, \quad \text{虚椭圆}$$

$$3^\circ \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad \text{交于一实点的二条虚直线}$$

$$4^\circ \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad \text{双曲线}$$

$$5^\circ \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad \text{两条相交直线}$$

$$6^\circ \ y^2 - 2px = 0, \quad \text{抛物线}$$

$$7^\circ \ y^2 - a^2 = 0, \quad \text{一对平行直线}$$

$$8^\circ \ y^2 + a^2 = 0, \quad \text{一对虚平行直线}$$

$$9^\circ \ y^2 = 0. \quad \text{一对重合直线}$$

如何来寻找化简过程中的正交矩阵放到最后来讨论.

4.3 不变量

在前面两节的讨论中,我们已经无意识地默认了这样的结论,即“在直角坐标系下二次曲面(线)经过直角坐标变换后并没有改变其几何性质”.从代数的角度看,经过直角坐标变换后,其方程的形式已可能变得面目全非,但决定曲面(线)几何特征的内蕴性一定不会改变,这就是曲面(曲线)的不变量.

4.3.1 不变量

定义 4.3.1 由曲面(曲线)方程的系数给出的函数,如果在经过任意一个直角坐标变换后,它的函数值不变,就称这个函数是该曲面(曲线)的一个正交不变量,简称不变量.

设二次曲面的方程为(4.2.1)或(4.2.3),记

$$\begin{aligned} I_1 &= a_{11} + a_{22} + a_{33}, \\ I_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \\ I_3 &= \det \bar{A}, \quad I_4 = \det A. \end{aligned}$$

定理 4.3.1 I_1, I_2, I_3, I_4 是二次曲面的不变量.

证明 作任意一个直角坐标变换

$$\alpha = T\alpha' + \alpha_0, \quad (4.3.1)$$

其中, $\alpha^T = (x \ y \ z)$, $\alpha'^T = (x' \ y' \ z')$, $\alpha_0^T = (x_0 \ y_0 \ z_0)$, T 是正交矩阵. 将(4.3.1)代入二次曲面方程(4.2.3)得到

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha'^T T^T + \alpha_0^T \ 1) \begin{bmatrix} \bar{A} & \delta \\ \delta^T & a_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T\alpha' + \alpha_0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (\alpha'^T \ 1) \begin{bmatrix} T^T & 0 \\ \alpha_0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A} & \delta \\ \delta^T & a_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T & \alpha_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (\alpha'^T \ 1) \begin{bmatrix} T^T \bar{A} & T^T \delta \\ \alpha_0^T \bar{A} + \delta^T & \alpha_0^T \delta + a_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T & \alpha_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (\alpha'^T \ 1) \begin{bmatrix} T^T \bar{A} T & T^T \bar{A} \alpha_0 + T^T \delta \\ \alpha_0^T \bar{A} T + \delta^T T & \alpha_0^T \bar{A} \alpha_0 + \delta^T \alpha_0 + \alpha_0^T \delta + a_{44} \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \alpha' \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

(4.3.2)就是在新坐标系下的二次曲面的方程,即

$$\bar{A}' = T^T \bar{A} T,$$

$$A' = \begin{bmatrix} T^T \bar{A} T & T^T \bar{A} \alpha_0 + T^T \delta \\ \alpha_0^T \bar{A} T + \delta^T T & F(x_0, y_0, z_0) \end{bmatrix}.$$

因为 T 为正交矩阵, 即 $T^T T = E$, 所以对任意实数 λ , 有

$$\det(T^T (\bar{A} - \lambda E) T) = \det(T^T \bar{A} T - \lambda E),$$

另外

$$\begin{aligned} \det(T^T (\bar{A} - \lambda E) T) &= \det(T^T) \det(\bar{A} - \lambda E) \det(T) \\ &= \det(T^T) \det(T) \det(\bar{A} - \lambda E) = \det(\bar{A} - \lambda E), \end{aligned}$$

因此得

$$\det(\bar{A} - \lambda E) = \det(\bar{A}' - \lambda E).$$

将上式两边展开得

$$-\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = -\lambda^3 + I_1' \lambda^2 - I_2' \lambda + I_3'.$$

由 λ 的任意性得

$$\begin{aligned} I_1' &= I_1, \quad I_2' = I_2, \quad I_3' = I_3, \\ I_4' &= \det A' = \left| \begin{pmatrix} T^T & 0 \\ \alpha_0^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A} & \delta \\ \delta^T & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & \alpha_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} T^T & 0 \\ \alpha_0^T & 1 \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} \bar{A} & \delta \\ \delta^T & a_{44} \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} T & \alpha_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \det T^T \det \bar{A} \det T = \det \bar{A} = I_4. \end{aligned}$$

于是 I_1, I_2, I_3, I_4 是二次曲面的不变量.

我们称方程

$$\det(\bar{A} - \lambda E) = -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0 \quad (4.3.3)$$

为二次曲面的特征方程, 它的根称为二次曲面的特征根. 由定理 4.2.1 知道特征方程和特征根在任意直角坐标变换下都是不变的. 设三个特征根为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 则由根与方程的系数关系有

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ I_2 &= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1, \\ I_3 &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \end{aligned}$$

除了以上不变量外, 我们还有以下半不变量的概念, 我们记

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{14} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}, \\ K_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} \\ a_{14} & a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{13} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

定理 4.3.2 在保持原点不动的直角坐标变换(即坐标旋转变换)下, K_1, K_2 是不变量, 称为半不变量.

证明 设直角坐标变换为 $\alpha = T\alpha'$, 其中, T 是正交矩阵.

我们考虑如下二次曲面

$$(x \ y \ z \ 1) \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad (4.3.4)$$

其中, λ 是任意实数. 经过坐标变换 $\alpha = T\alpha'$ 后, (4.3.4) 将变为

$$(x' \ y' \ z' \ 1) \begin{pmatrix} a'_{11} - \lambda & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ a'_{12} & a'_{22} - \lambda & a'_{23} & a'_{24} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} - \lambda & a'_{34} \\ a'_{14} & a'_{24} & a'_{34} & a'_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (4.3.5)$$

其中, $A' = (a'_{ij})$ 是二次曲面 $(\alpha'^T \ 1)A' \begin{pmatrix} \alpha' \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ 的矩阵 $A = (a_{ij})$ 经坐标变换 $\alpha = T\alpha'$ 后的二次曲面方程的矩阵. 由定理 4.3.1 知 I_4 是不变量, 因此

$$\begin{vmatrix} \bar{A} - \lambda E & \delta \\ \delta^T & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{A}' - \lambda E & \delta' \\ \delta'^T & a'_{44} \end{vmatrix}. \quad (4.3.6)$$

而

$$\begin{vmatrix} \bar{A} - \lambda E & \delta \\ \delta^T & a_{44} \end{vmatrix} = -a_{44}\lambda^3 + K_1\lambda^2 - K_2\lambda + |A|,$$

因此比较(4.3.6)两边的 λ 和 λ^2 项的系数知道

$$K_1' = K_1, \quad K_2' = K_2.$$

于是 K_1, K_2 在保持原点不动的直角坐标变换下是不变的.

思考题: 证明当 $I_3 = I_4 = 0$ 时, K_2 是不变量; 当 $I_2 = I_3 = I_4 = K_2 = 0$ 时, K_1 是不变量.

对于二次曲线的方程(4.2.12), 记

$$I_1 = a_{11} + a_{22},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$K_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

我们同样可以得到下列定理.

定理 4.3.1' I_1, I_2, I_3 是二次曲线的不变量.

定理 4.3.2' 当 $I_2 = I_3 = 0$ 时, K_1 是二次曲线的不变量.

4.3.2 利用不变量化简二次曲面与二次曲线方程

由定理 4.2.1 我们从五个简化方程出发, 用不变量来描述它们. 有下面的定理.

定理 4.3.3 二次曲面用不变量表示它的简化方程如下:

$$(1) \text{ 当 } I_3 \neq 0 \text{ 时, } \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{I_4}{I_3} = 0;$$

$$(2) \text{ 当 } I_3 = 0, I_4 \neq 0 \text{ 时, } \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 \pm 2 \sqrt{-\frac{I_4}{I_2}} z = 0;$$

$$(3) \text{ 当 } I_3 = I_4 = 0, I_2 \neq 0 \text{ 时, } \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{K_2}{I_2} = 0;$$

$$(4) \text{ 当 } I_2 = I_3 = I_4 = 0, K_2 \neq 0 \text{ 时, } I_1 x^2 \pm 2 \sqrt{-\frac{K_2}{I_1}} y = 0;$$

$$(5) \text{ 当 } I_2 = I_3 = I_4 = K_2 = 0 \text{ 时, } I_1 x^2 + \frac{K_1}{I_1} = 0.$$

其中, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 分别为二次曲面的非零特征根.

我们只给出(1)的证明. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是曲面的特征根. 对应于方程

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0, \quad a_{11}a_{22}a_{33} \neq 0.$$

此时有

$$I_3 = a_{11}a_{22}a_{33} \neq 0,$$

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$I_2 = a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11},$$

$$I_4 = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = I_3a_{44},$$

由特征方程的根与系数的关系立即知道

$$\lambda_1 = a_{11}, \quad \lambda_2 = a_{22}, \quad \lambda_3 = a_{33}, \quad a_{44} = \frac{I_4}{I_3}.$$

于是简化方程可写成

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{I_4}{I_3} = 0, \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0.$$

思考题: 对应着定理 4.2.1, 推证定理 4.3.3 中的(2)~(5).

同样, 对二次曲线也有以下定理.

定理 4.3.3' 二次曲线用不变量表示它的简化方程如下:

(1) 当 $I_2 \neq 0$ 时, $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0$;

(2) 当 $I_2 = 0, I_3 \neq 0$ 时, $I_1 y^2 \pm 2\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}x = 0$;

(3) 当 $I_2 = I_3 = 0$ 时, $I_1 y^2 + \frac{K_1}{I_1} = 0$.

其中, λ_1, λ_2 分别是二次曲线的非零特征根.

例 4.3.1 化简方程

$$3x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2yz + 2xz + 2xy - 4x - 8z + 5 = 0,$$

并指出它是什么曲面.

解 先写出它的系数矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

计算它的不变量

$$I_1 = 3 + 5 + 3 = 11,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 36,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 36,$$

$$I_4 = \det \mathbf{A} = -36.$$

其特征方程

$$-\lambda^3 + 11\lambda^2 - 36\lambda + 36 = 0,$$

解得

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 6.$$

于是, 简化方程为

$$2x'^2 + 3y'^2 + 6z'^2 - 1 = 0.$$

该二次曲面为椭球面.

例 4.3.2 化简方程

$$x^2 + 7y^2 + z^2 + 10yz + 10xy + 2xz + 8x + 4y + 8z - 6 = 0,$$

并指出它是什么曲面.

解 二次曲面的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & -6 \end{pmatrix},$$

计算不变量

$$I_1 = 9, \quad I_2 = -36, \quad I_3 = I_4 = 0,$$

$$K_2 = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & -6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 5 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 144.$$

特征方程为

$$-\lambda^3 + 9\lambda^2 + 36\lambda = 0,$$

特征根为

$$\lambda_1 = 12, \quad \lambda_2 = -3, \quad \lambda_3 = 0,$$

$$\frac{K_2}{I_2} = \frac{144}{-36} = -4,$$

于是, 简化方程为

$$12x'^2 - 3y'^2 - 4 = 0,$$

该曲面是双曲柱面.

习题 4.3

1. 利用不变量求下列曲面的简化方程:

(1) $11x^2 + 10y^2 + 6z^2 - 12xy - 8yz + 4xz + 72x - 72y + 36z + 150 = 0;$

(2) $x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz - 2x + 4y + 4z + 12 = 0;$

(3) $xy + yz + xz - a^2 = 0;$

(4) $9x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 12xy + 8yz + 12xz + 4x + y + 10z + 1 = 0;$

(5) $2y^2 + 4xz + 2x - 4y + 6z + 5 = 0.$

2. 证明: 二次曲面为圆柱面的条件为 $I_3 = 0, I_1^2 = 4I_2, I_4 = 0$.

3. 求 a, b 之值, 使二次曲面

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2axz + 2byz - 2x - 4y + 2z = 0$$

表示二次锥面.

4. 求出曲面方程

$$(ax + by + cz + d)(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) = 0$$

的简化方程.

5. 证明:在直角坐标系 $Oxyz$ 中,顶点在原点的二次锥面 $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz = 0$ 有三条互相垂直的直母线的充分必要条件是 $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$.

4.4 中心,渐近方向

通过化简后的二次方程,我们已经较清楚地弄清二次方程所表示的是何种曲面(线). 我们还希望了解其在空间中的若干其他几何特征,如对称中心,对称轴,对称面(如果有的话)等,另外诸如渐近线(面),切线(面)等也是我们关注的对象.

4.4.1 二次曲面与直线的相关位置

设二次曲面的方程为

$$S: F(x, y, z) = (\alpha^T \ 1) \begin{bmatrix} \bar{A} & \delta \\ \delta^T & a_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad (4.4.1)$$

其中, $\alpha^T = (x \ y \ z)$, $\bar{A} = (a_{ij})$ 是对称矩阵, $\delta^T = (a_{14} \ a_{24} \ a_{34})$.

记

$$F_1(x, y, z) = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14},$$

$$F_2(x, y, z) = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial y} = a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24},$$

$$F_3(x, y, z) = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial z} = a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34},$$

$$F_4(x, y, z) = a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44},$$

$$\nabla F(x, y, z) = 2(F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \right).$$

$\nabla F(x, y, z)$ 称为函数 $F(x, y, z)$ 的梯度向量.

设直线 l 过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 方向向量为 $v = (X, Y, Z)$, 则直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + tX, \\ y = y_0 + tY, \\ z = z_0 + tZ. \end{cases} \quad (4.4.2)$$

将(4.4.2)代入(4.4.1), 我们得

$$\begin{aligned} & \Phi(X, Y, Z)t^2 + 2[XF_1(x_0, y_0, z_0) + YF_2(x_0, y_0, z_0) \\ & + ZF_3(x_0, y_0, z_0)]t + F(x_0, y_0, z_0) = 0, \end{aligned}$$

即

$$\Phi(X, Y, Z)t^2 + v \cdot \nabla F(x_0, y_0, z_0)t + F(x_0, y_0, z_0) = 0. \quad (4.4.3)$$

我们来讨论方程(4.4.3).

(1) 当 $\Phi(X, Y, Z) \neq 0$ 时, (4.4.3) 的判别式

$$\Delta = [v \cdot \nabla F(x_0, y_0, z_0)]^2 - 4\Phi(X, Y, Z)F(x_0, y_0, z_0)$$

1° 当 $\Delta > 0$ 时, l 与 S 有两个不同的实交点;

2° 当 $\Delta = 0$ 时, l 与 S 有两个相同的实交点;

3° 当 $\Delta < 0$ 时, l 与 S 没有实交点, 有一对共轭的虚交点.

(2) 当 $\Phi(X, Y, Z) = 0$ 时

1° 当 $v \cdot \nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ 时, l 与 S 有唯一的实交点;

2° 当 $v \cdot \nabla F(x_0, y_0, z_0) = 0, F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ 时, l 与 S 没有交点;

3° 当 $v \cdot \nabla F(x_0, y_0, z_0) = F(x_0, y_0, z_0) = 0$ 时, l 在 S 上.

定义 4.4.1 满足 $\Phi(X, Y, Z) = 0$ 的方向 $X : Y : Z$ 叫做 S 的渐近方向. 否则称为 S 的非渐近方向.

由以上讨论知具有渐近方向的直线或与 S 没有交点, 或有唯一交点或整条直线在 S 上.

由曲面渐近方向的定义可得到经过一固定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 以二次曲面的渐近方向为方向的所有直线构成的曲面方程是

$$\Phi(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

它是关于 $x - x_0, y - y_0, z - z_0$ 的二次齐次方程, 因而是以 M_0 为顶点的锥面, 锥面上每一条母线的方向都是二次曲面的渐近方向. 此锥面称为二次曲面的渐近方向锥面.

4.4.2 曲面的中心

定义 4.4.2 点 C 称为二次曲面 S 的中心, 如果 S 上任一点 M_1 关于 C 的对称点 M_2 仍在 S 上.

定理 4.4.1 点 $C(x_0, y_0, z_0)$ 是二次曲面 S 的中心的充要条件是

$$\begin{aligned} F_1(x_0, y_0, z_0) &= F_2(x_0, y_0, z_0) \\ &= F_3(x_0, y_0, z_0) = 0. \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

即 $\nabla F(x_0, y_0, z_0) = 0$.

证明 必要性 设 $C(x_0, y_0, z_0)$ 是 S 的中心, 任取 S 的非渐近方向 $v = X : Y : Z$, 过 C 点且以 v 为方向的直线与 S 必有两个(实、重合、虚的)交点 $M_i(x_i, y_i, z_i) (i=1, 2)$. 由于 C 为 S 的中心, 所以 C 为线段 M_1M_2 的中点. M_1M_2 的方程为 $\alpha = \alpha_0 + tv$, 设 M_i 对应的参数为 $t_i (i=1, 2)$, 则 $t_1 + t_2 = 0$. 于是由方程(4.4.3)及韦达定理给出

$$-\frac{v \cdot \nabla F(x_0, y_0, z_0)}{\Phi(X, Y, Z)} = 0,$$

即

$$v \cdot \nabla F(x_0, y_0, z_0) = 0. \quad (4.4.5)$$

(4.4.5)对一切的非渐近方向都成立,故有 $\nabla F(x_0, y_0, z_0) = 0$.

充分性 若 $C(x_0, y_0, z_0)$ 满足(4.4.4),作移轴 $\alpha = \alpha' + \alpha_0$,使 C 为新坐标系的原点,得到 S 的新方程

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{23}y'z' + 2a_{13}x'z' + F(x_0, y_0, z_0) = 0. \quad (4.4.6)$$

(4.4.6)中用 $-x', -y', -z'$ 分别代替 x', y', z' ,方程不变,所以 C 是 S 的中心.

由定理4.4.1看出二次曲面的中心坐标是方程组

$$F_1(x, y, z) = F_2(x, y, z) = F_3(x, y, z) = 0$$

的解. 它的系数矩阵与增广矩阵分别为 $\bar{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$, $B = (\bar{A}, -\delta)$. 由线性方程组有解判别定理知道

(1)当 $r(\bar{A}) = r(B) = 3$ 时,即 $I_3 \neq 0$,方程组有唯一解,因而 S 有唯一中心,这种二次曲面称为**中心曲面**.

(2)当 $r(\bar{A}) = r(B) = 2$ 时,方程组的解构成一条直线,即这条直线上的点都是 S 的中心,这样的二次曲面称为**线心曲面**.

(3)当 $r(\bar{A}) = r(B) = 1$ 时,方程组的解构成一个平面,即此平面上的点均为 S 的中心,称此曲面为**面心曲面**.

(4)当 $r(\bar{A}) \neq r(B)$ 时,方程组无解,即曲面 S 没有中心,称此曲面为**无心曲面**.

线心曲面、面心曲面及无心曲面统称为**非中心曲面**.

命题 4.4.1 二次曲面为中心曲面的充要条件是 $I_3 \neq 0$;二次曲面为非中心曲面的充要条件是 $I_3 = 0$.

思考题:在17种二次曲面中,请区分出中心曲面、线心曲面、面心曲面及无心曲面.

例 4.4.1 椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 与单叶、双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$ 是中心曲面,中心均为原点 $O(0, 0, 0)$.

解 椭球面的不变量 $I_3 = \frac{1}{a^2 b^2 c^2} \neq 0$,单叶、双叶双曲面的不变量 $I_3 = -\frac{1}{a^2 b^2 c^2} \neq 0$,因而它们都是中心曲面. 中心都满足方程 $\frac{x}{a^2} = 0, \frac{y}{b^2} = 0, \frac{z}{c^2} = 0$,故中心均为原点 $O(0, 0, 0)$.

例 4.4.2 抛物面 $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 2z$ 是无心曲面.

解 易知 $I_3 = 0$,因而抛物面是非中心曲面. 因为

$$F_3(x, y, z) = -1 \neq 0,$$

所以抛物面没有中心.

例 4.4.3 曲面 $y^2 + z^2 - c^2 = 0$ 是线心曲面.

解

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = y = 0, \\ F_3(x, y, z) = z = 0, \end{cases}$$

此方程组的解为 $y=0, z=0$. 因此中心构成直线, 即 x 轴, 故曲面为线心曲面.

对二次曲线 Γ 而言, 渐近方向和中心的概念可以类似地定义, 有关的结论也是相仿的. 中心满足方程组

$$\begin{cases} F_1(x, y) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \\ F_2(x, y) = a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0, \end{cases} \quad (4.4.7)$$

(4.4.7) 的系数矩阵和增广矩阵分别为

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & -a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & -a_{23} \end{bmatrix}.$$

(1) 当 $r(\bar{A}) = r(B) = 2$ 时, 即 $I_2 = |\bar{A}| \neq 0$, (4.4.7) 有唯一解, 即 Γ 有唯一中心, 称 Γ 为中心曲线. 例如椭圆、双曲线.

(2) 当 $r(\bar{A}) = r(B) = 1$ 时, (4.4.7) 的解组成一直线, 称 Γ 为线心曲线. 例如两平行直线.

(3) 当 $r(\bar{A}) \neq r(B)$ 时, (4.4.7) 没有解, 即 Γ 没有中心, 称 Γ 为无心曲线. 例如抛物线.

定义 4.4.3 对中心曲面(中心曲线)而言, 通过中心并具有渐近方向的直线称为渐近线. 以二次曲面的中心为顶点的渐近方向锥面称为二次曲面的渐近锥面.

思考题: 试考虑二次锥面, 单叶双曲面和双叶双曲面的渐近方向锥面和渐近锥面.

习题 4.4

1. 求下列二次曲面的中心

(1) $14x^2 + 14y^2 + 8z^2 - 8xy - 4xz - 4yz + 18x - 18y + 5 = 0;$

(2) $5x^2 + 26y^2 + 10z^2 + 6xy + 14xz + 4yz - 8x - 18y - 10z + 4 = 0;$

(3) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz - 2x + 2y - 2z - 3 = 0.$

2. 判断下列各二次曲面, 何者是中心曲面, 何者是非中心曲面, 并进一步区分是线心曲面、面心曲面还是无心曲面.

(1) $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 4xy + 2xz - 2yz + 2x + 12y + 10z + 20 = 0;$

(2) $2x^2 + 18y^2 + 8z^2 - 12xy + 24yz - 8xz - 5x + 15y + 10z + 2 = 0;$

(3) $4x^2 - y^2 - z^2 + 2yz - 8x - 4y + 8z - 2 = 0.$

3. 求下列各二次曲面的渐近锥面:

(1) $2xz + y^2 - 2z^2 - 1 = 0;$

(2) $x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 4xz - 4yz - 3 = 0;$

$$(3) 5x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 12xy - 6xz + 12x - 36z = 0.$$

4.5 二次曲面的直径面、对称面, 二次曲线的直径、对称轴

4.5.1 二次曲面的直径面

定义 4.5.1 二次曲面上两个点的连线段称为二次曲面的一条弦.

定理 4.5.1 二次曲面的沿非渐近方向 $v=(X,Y,Z)$ 的所有平行弦的中点轨迹在一个平面上,且该平面方程为 $v \cdot \nabla F(x,y,z)=0$,即

$$XF_1(x,y,z) + YF_2(x,y,z) + ZF_3(x,y,z) = 0, \quad (4.5.1)$$

或

$$\begin{aligned} &\Phi_1(X,Y,Z)x + \Phi_2(X,Y,Z)y + \Phi_3(X,Y,Z)z \\ &+ \Phi_4(X,Y,Z) = 0. \end{aligned} \quad (4.5.1)'$$

证明 任取沿非渐近方向 $X:Y:Z$ 的一条弦 M_1M_2 ,由(4.4.5)知 M_1M_2 的中点坐标满足 $v \cdot \nabla F(x,y,z)=0$,即

$$XF_1(x,y,z) + YF_2(x,y,z) + ZF_3(x,y,z) = 0.$$

将上式展开整理,得

$$\begin{aligned} &\Phi_1(X,Y,Z)x + \Phi_2(X,Y,Z)y \\ &+ \Phi_3(X,Y,Z)z + \Phi_4(X,Y,Z) = 0. \end{aligned}$$

由于 $0 \neq \Phi(X,Y,Z) = X\Phi_1(X,Y,Z) + Y\Phi_2(X,Y,Z) + Z\Phi_3(X,Y,Z)$, 所以 $\Phi_i(X,Y,Z) (i=1,2,3)$ 不全为零,于是(4.5.1)表示一个平面.

定义 4.5.2 二次曲面沿非渐近方向 $X:Y:Z$ 的平行弦中点所在的平面称为二次曲面共轭于方向 $X:Y:Z$ 的直径面.

推论 4.5.1 假如二次曲面 S 的中心存在,那么 S 的任何直径面一定通过 S 的中心.进一步,线心曲面的任何直径面通过它的中心直线,面心曲面的直径面就是它的中心平面.

如果方向 $X:Y:Z$ 是二次曲面的渐近方向,那么平行于它的弦不存在.但是如果 $\Phi_i(X,Y,Z) (i=1,2,3)$ 不全为零,那么方程(4.5.1)'仍表示一平面,为了方便,把此平面叫做共轭于渐近方向 $X:Y:Z$ 的直径面.如果

$$\Phi_i(X,Y,Z) = 0 \quad (i=1,2,3), \quad (4.5.2)$$

那么(4.5.1)'不表示任何平面.

定义 4.5.3 满足(4.5.2)的渐近方向 $X:Y:Z$ 称为二次曲面的奇异方向,简称奇向.

定理 4.5.2 二次曲面有奇向当且仅当 $I_3=0$.

由(4.5.2)及齐次线性方程组有非零解的条件立即得到.

定理 4.5.3 二次曲面 S 的奇向平行于 S 的任何直径面.

证明 设 $X_0 : Y_0 : Z_0$ 是 S 的奇向. 任取 S 的一直径面

$$\Pi: \Phi_1(X, Y, Z)x + \Phi_2(X, Y, Z)y + \Phi_3(X, Y, Z)z + \Phi_4(X, Y, Z) = 0.$$

因为

$$\begin{aligned} & X_0\Phi_1(X, Y, Z) + Y_0\Phi_2(X, Y, Z) + Z_0\Phi_3(X, Y, Z) \\ &= X_0(a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z) + Y_0(a_{12}X + a_{22}Y + a_{23}Z) \\ & \quad + Z_0(a_{13}X + a_{23}Y + a_{33}Z) \\ &= X(a_{11}X_0 + a_{12}Y_0 + a_{13}Z_0) + Y(a_{12}X_0 + a_{22}Y_0 + a_{23}Z_0) \\ & \quad + Z(a_{13}X_0 + a_{23}Y_0 + a_{33}Z_0) \\ &= X\Phi_1(X_0, Y_0, Z_0) + Y\Phi_2(X_0, Y_0, Z_0) \\ & \quad + Z\Phi_3(X_0, Y_0, Z_0), \end{aligned}$$

又 $X_0 : Y_0 : Z_0$ 为 S 的奇向, 所以 $\Phi_i(X_0, Y_0, Z_0) = 0, i = 1, 2, 3$. 代入上式有

$$X_0\Phi_1(X, Y, Z) + Y_0\Phi_2(X, Y, Z) + Z_0\Phi_3(X, Y, Z) = 0.$$

故奇向平行于 S 的任何直径面.

例 4.5.1 求单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的直径面.

解 因为 $I_3 = -\frac{1}{a^2b^2c^2} \neq 0$, 所以它没有奇向. 任取一方向 $X : Y : Z$, 那么

$$\Phi_1(X, Y, Z) = \frac{X}{a^2}, \quad \Phi_2(X, Y, Z) = \frac{Y}{b^2},$$

$$\Phi_3(X, Y, Z) = -\frac{Z}{c^2},$$

$\Phi_4 \equiv 0$, 故共轭于 $X : Y : Z$ 的直径面方程是

$$\frac{X}{a^2}x + \frac{Y}{b^2}y - \frac{Z}{c^2}z = 0.$$

例 4.5.2 求椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ 的直径面.

解 因为 $I_3 = 0$, 所以有奇向. 因为 $\Phi_1(X, Y, Z) = \frac{X}{a^2}$, $\Phi_2(X, Y, Z) = \frac{Y}{b^2}$, $\Phi_3(X, Y, Z) \equiv 0$, 所以奇向为 $0 : 0 : 1$. 任取非奇方向 $X : Y : Z$, 那么又由

$$\Phi_4(X, Y, Z) = -Z,$$

故共轭于 $X : Y : Z$ 的直径面方程为

$$\frac{X}{a^2}x + \frac{Y}{b^2}y - Z = 0.$$

显然它平行于奇向 $0 : 0 : 1$.

定义 4.5.4 如果两方向 $X : Y : Z, X' : Y' : Z'$ 满足

$$X\Phi_1(X',Y',Z') + Y\Phi_2(X',Y',Z') + Z\Phi_3(X',Y',Z') = 0, \quad (4.5.3)$$

或

$$(X \ Y \ Z)\bar{A} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = 0.$$

那么这两个方向称为一对共轭方向.

由此定义我们立即得到以下命题.

命题 4.5.1 (1) 奇向与任何方向都共轭;

(2) 方向 $X' : Y' : Z'$ 与非奇向 $X : Y : Z$ 共轭当且仅当 $X' : Y' : Z'$ 与共轭于 $X : Y : Z$ 的直径面平行.

定义 4.5.5 二次曲面 S 的两直径面的交线称为 S 的一条直径, 两条沿共轭方向的直径称为 S 的一对共轭直径.

对中心曲面而言, 过中心的任何平面都是直径面(留作习题), 因而过中心的每一条直线都是 S 的直径.

4.5.2 二次曲面的对称面, 二次曲线的直径、对称轴

定义 4.5.6 平面 Π 称为二次曲面 S 的对称面, 如果对于任意点 $M_1 \in S$, 它关于 Π 的对称点 $M_2 \in S$.

定义 4.5.7 与共轭方向垂直的直径面称为二次曲面 S 的主径面.

由定义 4.5.7 知, 若 Π 是 S 的主径面, 则 S 的某一组平行弦的中点经过此平面 Π , 且这组平行弦与 Π 垂直, 因而主径面是一直径面, 且与它所共轭的方向 $X : Y : Z$ 垂直, 于是 Π 的方程为

$$XF_1(x,y,z) + YF_2(x,y,z) + ZF_3(x,y,z) = 0,$$

或

$$\begin{aligned} &\Phi_1(X,Y,Z)x + \Phi_2(X,Y,Z)y + \Phi_3(X,Y,Z)z \\ &\quad + \Phi_4(X,Y,Z) = 0. \end{aligned}$$

因为 $X : Y : Z$ 与 Π 垂直, 所以 $X : Y : Z$ 与 $\Phi_1(X,Y,Z) : \Phi_2(X,Y,Z) : \Phi_3(X,Y,Z)$ 共线, 即

$$\frac{\Phi_1(X,Y,Z)}{X} = \frac{\Phi_2(X,Y,Z)}{Y} = \frac{\Phi_3(X,Y,Z)}{Z}.$$

令比值为 λ , 故

$$\begin{cases} \Phi_1(X,Y,Z) = \lambda X, \\ \Phi_2(X,Y,Z) = \lambda Y, \\ \Phi_3(X,Y,Z) = \lambda Z. \end{cases} \quad (4.5.4)$$

写成矩阵形式有

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

或

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0. \quad (4.5.4)'$$

因为 X, Y, Z 不全为 0, 所以由齐次线性方程组有非零解的条件得

$$\det(\bar{\mathbf{A}} - \lambda \mathbf{E}) = -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0. \quad (4.5.5)$$

定义 4.5.8 二次曲面 S 的奇向及 S 的主径面的法向称为 S 的主方向.

由(4.5.4)和(4.5.5)知道, 二次曲面 S 的主方向为矩阵 $\bar{\mathbf{A}}$ 的特征方向. 由此给出了求 S 的主方向的方法:

(1) 先求出 $\bar{\mathbf{A}}$ 的特征根,

(2) 再将特征根代入(4.5.4)求出主方向.

由(4.5.4)知, $\lambda=0$ 对应的主方向是 S 的奇向, 非零特征根对应的主方向为 S 的非渐近方向, 因为

$$\begin{aligned} \Phi(X, Y, Z) &= X\Phi_1(X, Y, Z) + Y\Phi_2(X, Y, Z) \\ &\quad + Z\Phi_3(X, Y, Z) \\ &= \lambda(X^2 + Y^2 + Z^2) \neq 0. \end{aligned}$$

求出主方向 $X:Y:Z$ 后, 代入(4.5.1)' 得到与其共轭的主径面(与特征根 λ 对应的主径面):

$$\lambda(Xx + Yy + Zz) + \Phi_4(X, Y, Z) = 0. \quad (4.5.6)$$

由代数知识知道下列命题.

命题 4.5.2 二次曲面的不同特征根对应的主方向互相垂直.

对于二次曲线而言, 同样有弦的概念, 直径、对称轴、主轴的定义对应于二次曲面的直径面、对称面、主径面, 奇向、共轭方向、共轭直径与主方向可类似地定义(请读者写出). 相应有以下结论.

定理 4.5.1' 二次曲线的沿非渐近方向 $X:Y$ 的所有平行弦的中点轨迹在一条直线上, 直线方程为

$$XF_1(x, y) + YF_2(x, y) = 0,$$

或

$$\Phi_1(X, Y)x + \Phi_2(X, Y)y + \Phi_3(X, Y) = 0.$$

定理 4.5.2' 二次曲线有奇向当且仅当 $I_2=0$.

定理 4.5.3' 二次曲线 Γ 的奇向平行于 Γ 的任何直径.

它们的证明留作习题.

命题 4.5.1' (1) 奇向与任何方向共轭;

(2) 方向 $X' : Y'$ 与非奇向 $X : Y$ 共轭当且仅当 $X' : Y'$ 与共轭于 $X : Y$ 的直径平行.

命题 4.5.2' 二次曲线的不同特征根对应的主方向互相垂直.

求二次曲线的主方向和主轴的步骤是类似的.

例 4.5.3 求二次曲面

$$3x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz + 4x + 14y + 4z - 23 = 0$$

的主方向和主径面.

解 二次曲面的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 7 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & -23 \end{pmatrix},$$

$$I_1 = 7, I_2 = 12, I_3 = \det \bar{A} = 0, I_4 = -18 \times 36 \neq 0.$$

特征方程为

$$-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 12\lambda = 0,$$

特征根为 4, 3, 0.

(1) 将 $\lambda=4$ 代入 (4.5.4)' 得

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0,$$

解得主方向 $X : Y : Z = 1 : 0 : (-1)$, 计算 $\Phi_4(1, 0, -1) = 0$, 因而主径面为 $4(x - z) + 0 = 0$, 即 $x - z = 0$.

(2) 将 $\lambda=3$ 代入 (4.5.4)' 得

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0,$$

解得主方向 $X : Y : Z = 1 : (-1) : 1$, $\Phi_4(1, -1, 1) = -3$, 主径面为 $3(x - y + z) - 3 = 0$, 即 $x - y + z - 1 = 0$.

(3) 将 $\lambda=0$ 代入 (4.5.4)' 得

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0,$$

解得主方向 $X : Y : Z = 1 : 2 : 1$, 它是奇向, 与之共轭的直径面不存在.

例 4.5.4 求二次曲面 $2xy+2xz+2yz+9=0$ 的主方向和主径面.

解 二次曲面的矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

$$I_1=0, \quad I_2=-3, \quad I_3=2, \quad I_4=18.$$

特征方程

$$-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0,$$

特征根为 $-1, -1, 2$.

(1) 将 $\lambda = -1$ 代入 (4.5.4)', 得

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0,$$

即 $X+Y+Z=0$, 因而平行于平面 $x+y+z=0$ 的方向均为主方向. 于是过曲面中心 $(0,0,0)$, 且垂直于平面 $x+y+z=0$ 的一切平面均为主径面.

(2) 将 $\lambda = 2$ 代入 (4.5.4)' 得

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0,$$

解得主方向 $X:Y:Z=1:1:1, \Phi_4(1,1,1)=0$, 主径面

$$2(x+y+z)+0=0,$$

即

$$x+y+z=0.$$

下面我们来找出方程化简中的直角坐标变换.

由于二次曲面的每个特征根至少对应一个主方向. 因此二次曲面至少有三个主方向. 我们选取其中三个两两垂直的主方向并且将它们单位化, 设为 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, 这样它们就可作为三个坐标向量.

因为 $\bar{\mathbf{A}}\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$, 其中, λ_i 是特征根, $\mathbf{e}_i$ 是对应于 λ_i 的单位主方向, $\mathbf{e}_i$ 的坐标写成列向量的形式, 所以有

$$\delta_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_j.$$

作矩阵 $\mathbf{T} = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3)$, 即以单位主方向的坐标排成 $\mathbf{T}$ 的列, 则 $\mathbf{T}$ 为正交矩阵且 $\bar{\mathbf{A}}\mathbf{T} = \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3) = (\bar{\mathbf{A}}\mathbf{e}_1 \ \bar{\mathbf{A}}\mathbf{e}_2 \ \bar{\mathbf{A}}\mathbf{e}_3) = (\lambda_1 \mathbf{e}_1 \ \lambda_2 \mathbf{e}_2 \ \lambda_3 \mathbf{e}_3)$,

$$\mathbf{T}^T \bar{\mathbf{A}} \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \\ \mathbf{e}_3^T \end{pmatrix} (\lambda_1 \mathbf{e}_1 \ \lambda_2 \mathbf{e}_2 \ \lambda_3 \mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

故作直角坐标变换 $\alpha = T\alpha'$ 后,二次曲面的方程就化简为

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2a_{14}'x' + 2a_{24}'y' + 2a_{34}'z' + a_{44}' = 0.$$

再经过一个适当的移轴(即选取适当的点为新的坐标原点),就可得到用不变量表示的简化方程.

对于中心曲面,选取中心作为新的坐标原点,对于线心和面心曲面任取一中心作为新的坐标原点,对无心曲面选取曲面的顶点(对称轴与曲面的交点)为新的坐标原点.

比如例 4.5.4 中,它是中心曲面,其中心为 $(0,0,0)$, $\lambda = -1$ 对应的主方向平行于平面 $x+y+z=0$,选两个互相垂直的主方向 $1: (-1): 0, 1: 1: (-2)$, $\lambda = 2$ 对应的主方向为 $1: 1: 1$. 因为

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 > 0,$$

所以向量 $(1, -1, 0), (1, 1, -2), (1, 1, 1)$ 两两垂直且构成右手系,将它们单位化得

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \quad e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right), \quad e_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

因此作右手直角坐标变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

则方程化简为

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + \frac{I_4}{I_3} = 0.$$

即 $-x'^2 - y'^2 + 2z'^2 + 9 = 0$, 它是单叶双曲面.

寻找直角坐标变换的另一方法是找三个主径面作为新的坐标面.

在例 4.5.4 中, $\lambda_3 = 2$ 对应的主方向为 z' 轴方向,则对应的主径面为 $x'Oy'$ 面,即 $z' = 0$,其方程为 $x+y+z=0$.

在 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ 对应的主方向中任取两个互相垂直的,比如 $1: (-1): 0, 1: 1: (-2)$,它们分别作为 x' 轴和 y' 轴的方向,则对应的主径面为 $y'Oz'$ ($x' = 0$), $z'Ox'$ ($y' = 0$). 它们的方程为

$$x - y = 0, x + y - 2z = 0.$$

然后将它们的法向量单位化,就有右手直角坐标变换

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y), \\ y' = \frac{1}{\sqrt{6}}(x+y-2z), \\ z' = \frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z) \end{cases}$$

或

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

在此坐标变换下,简化方程就是用不变量来表示的方程.

例 4.5.3 中的简化方程为

$$4x'^2 + 3y'^2 \pm 6\sqrt{6}z' = 0.$$

三个主方向分别为 $1:0:(-1)$, $1:(-1):1$, $1:2:1$. 因为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 < 0,$$

所以, $(1,0,-1)$, $(1,-1,1)$, $(1,2,1)$ 构成左手系,那么 $(1,0,-1)$, $(-1,1,-1)$, $(1,2,1)$ 构成右手系. 取它们的单位向量

$$\mathbf{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\mathbf{e}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right),$$

$$\mathbf{e}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

分别为 x' 轴, y' 轴, z' 轴的方向. 因而对应的主径面

$$x-z=0, \quad -x+y-z+1=0$$

分别为 $y'O'z'$ 面, $z'O'x'$ 面. z' 轴的方程为

$$\begin{cases} x-z=0, \\ -x+y-z+1=0. \end{cases}$$

z' 轴与曲面的交点为 $(1,1,1)$, 以此点为新坐标系的原点, 因而作右手直角坐标变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

将它代入曲面方程中化简,由(4.3.2)有

$$(\alpha'^T \ 1) \begin{pmatrix} T^T \bar{A} T & T^T \bar{A} \alpha_0 + T^T \delta \\ \alpha_0^T \bar{A} T + \delta^T T & F(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{现在 } T^T \bar{A} T = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 3 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, F(x_0, y_0, z_0) = F(1, 1, 1) = 0,$$

$$\alpha_0^T \bar{A} T + \delta^T T = [(1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$+ (2 \ 7 \ 2)] \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$= (0 \ 0 \ 3 \ \sqrt{6}),$$

所以在以上坐标变换下,简化方程为

$$4x'^2 + 3y'^2 + 6\sqrt{6}z' = 0.$$

思考题:在例 4.5.3,例 4.5.4 中,如果作从右手直角坐标系到左手直角坐标系的坐标变换,结果如何? 对一般方程作这样的坐标变换,简化方程又会怎样?

习题 4.5

1. 求下列二次曲面的奇向

(1) $9x^2 - 4y^2 - 91z^2 + 18xy - 40yz - 36 = 0;$

(2) $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy - 4xz - 4yz - 4x - 4y + 8z = 0.$

2. 已知曲面 $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy - 2yz + 2xz - 4x - 1 = 0$, 求与方向 $1 : (-1) : 0$ 共轭的直径面方程.

3. 已知曲面 $4x^2 + y^2 + z^2 + 4xy - 4xz - 2yz + x - y + 1 = 0$, 求过原点的直径面.

4. 求曲面 $S_1: x^2 + y + z = 0, S_2: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0$ 的公共直径面.

5. 求下列二次曲面的主方向与主径面, 并且求出直角坐标变换, 写出简化方程.

- (1) $14x^2 + 14y^2 + 8z^2 - 4yz - 4xz - 8xy + 18x - 18y + 5 = 0$;
 (2) $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2yz + 2x + 12y + 10z + 20 = 0$.
 6. 证明:过中心曲面的中心的任何平面都是其直径面.
 7. 请写出二次曲线的弦、直径、奇向、共轭方向、共轭直径、对称轴、主轴与主方向的定义.
 8. 证明定理 4.5.2'.
 9. 证明定理 4.5.3'.
 10. 求二次曲线 $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 18x - 14y + 9 = 0$ 的中心、主方向与主轴.
 11. 已知曲线 $xy - y^2 - 2x + 3y - 1 = 0$ 的一条直径与 y 轴平行. 求这条直径的方程,并求出它的共轭直径.
 12. 通过两点 $(0,1)$ 和 $(1,0)$ 的二次曲线 Γ ,以两直线 $x - 2y - 1 = 0, 2x - y + 1 = 0$ 为其一对共轭直径,求 Γ 的方程.

4.6 切线、切平面

定义 4.6.1 如果直线 l 与二次曲面 S 有两个重合的交点或 l 在 S 上,则称 l 为 S 的切线,交点称为切点.

设直线 l 过点 $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$, 方向为 $X : Y : Z$, 则由 (4.4.3) 得 l 与 S 有两个重合的交点当且仅当

$$\begin{cases} \Phi(X, Y, Z) \neq 0, \\ XF_1(x_0, y_0, z_0) + YF_2(x_0, y_0, z_0) + ZF_3(x_0, y_0, z_0) = 0. \end{cases}$$

l 在 S 上当且仅当

$$\begin{cases} \Phi(X, Y, Z) = 0, \\ XF_1(x_0, y_0, z_0) + YF_2(x_0, y_0, z_0) + ZF_3(x_0, y_0, z_0) = 0. \end{cases}$$

故经过 $M_0 \in S$ 的直线 l 是 S 的切线当且仅当

$$XF_1(x_0, y_0, z_0) + YF_2(x_0, y_0, z_0) + ZF_3(x_0, y_0, z_0) = 0. \quad (4.6.1)$$

(1) $F_i(x_0, y_0, z_0) (i=1, 2, 3)$ 不全为零

由直线 l 的方程 (4.4.2) 有 $X : Y : Z = (x - x_0) : (y - y_0) : (z - z_0)$, 将此代入 (4.6.1) 得

$$\begin{aligned} (x - x_0)F_1(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)F_2(x_0, y_0, z_0) \\ + (z - z_0)F_3(x_0, y_0, z_0) = 0. \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

(4.6.2) 表示一个平面, 即过点 $M_0 \in S$ 的所有切线上的点构成一个平面.

定义 4.6.2 二次曲面 S 上一点处的所有切线上的点构成的平面称为 S 的切平面, 此点称为切点.

(2) $F_i(x_0, y_0, z_0) = 0 (i=1, 2, 3)$

此时 (4.6.1) 成为恒等式, 它对任何方向都满足, 故过点 M_0 的任何一条直线都是 S 的切线.

定义 4.6.3 若过点 $M_0 \in S$ 的每一条直线都是 S 的切线, 则称点 M_0 是 S 的奇异点. S 的非奇异点, 称为 S 的正常点.

由以上的讨论知道以下命题.

命题 4.6.1 (1) 正常点处有唯一的切平面, 方程为 (4.6.2).

(2) M_0 为奇异点当且仅当 $F_i(x_0, y_0, z_0) = 0, i=1, 2, 3, 4$.

如果 $M_0 \notin S$, 则过 M_0 的切线 l 不可能在 S 上, 故过 M_0 的直线 l 为 S 的切线当且仅当

$$\begin{cases} \Phi(X, Y, Z) \neq 0, \\ [XF_1(x_0, y_0, z_0) + YF_2(x_0, y_0, z_0) + ZF_3(x_0, y_0, z_0)]^2 \\ - \Phi(X, Y, Z)F(x_0, y_0, z_0) = 0. \end{cases} \quad (4.6.3)$$

对切线 l 上的任意点 (x, y, z) 都有

$$(x - x_0) : (y - y_0) : (z - z_0) = X : Y : Z,$$

将之代入 (4.6.3) 中得

$$\begin{aligned} & [(x - x_0)F_1(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)F_2(x_0, y_0, z_0) \\ & + (z - z_0)F_3(x_0, y_0, z_0)]^2 \\ & - \Phi(x - x_0, y - y_0, z - z_0)F(x_0, y_0, z_0) = 0, \end{aligned}$$

它是关于 $x - x_0, y - y_0, z - z_0$ 的二次齐次方程, 即表示以 M_0 为顶点的二次锥面, 称为 S 的切锥.

定义 4.6.4 若过 $M_0 \in S$ 的直线 l 与 M_0 处的切平面垂直, 则称直线 l 为 S 在 M_0 处的法线.

由此定义得法线方程

$$\frac{x - x_0}{F_1(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_2(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_3(x_0, y_0, z_0)}. \quad (4.6.4)$$

对二次曲线 Γ 而言, 切线、法线、正常点、奇异点同样地定义. 过点 $M_0(x_0, y_0) \in \Gamma$, 方向向量为 $X : Y$ 的直线为 Γ 的切线当且仅当

$$XF_1(x_0, y_0) + YF_2(x_0, y_0) = 0.$$

由此得切线方程为

$$(x - x_0)F_1(x_0, y_0) + (y - y_0)F_2(x_0, y_0) = 0.$$

法线方程为

$$\frac{x - x_0}{F_1(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{F_2(x_0, y_0)}.$$

过曲线 Γ 外的一点 M_0 的直线为 Γ 的切线当且仅当

$$\begin{cases} \Phi(X, Y) \neq 0, \\ [XF_1(x_0, y_0) + YF_2(x_0, y_0)]^2 - \Phi(X, Y)F(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

因而切线上的点 (x, y) 满足

$$[(x-x_0)F_1(x_0, y_0) + (y-y_0)F_2(x_0, y_0)]^2 - \Phi(x-x_0, y-y_0)F(x_0, y_0) = 0. \quad (4.6.5)$$

(4.6.5)的左端是 $x-x_0, y-y_0$ 的二次齐次多项式或零多项式. 若为前者, 当它可以分解为两个实系数一次因式的乘积时, 便得到过 M_0 的两条直线, 如果这两条直线的方向为非渐近方向, 则它们是过 M_0 的 Γ 的切线; 如果这两条直线的方向是渐近方向, 则过 M_0 的 Γ 的切线不存在. 当它在实数范围内不能分解时, 则过 M_0 没有 Γ 的实切线; 若为后者, 则过 M_0 的沿非渐近方向的任意直线均为 Γ 的切线.

习题 4.6

1. 写出下列二次曲面在已知点处的切平面和法线的方程:

(1) $x^2 + y^2 = z$, 点 $(1, 2, 5)$;

(2) $x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 4xz - 4yz + 2x + 2y + 18 = 0$, 点 $(1, 2, 3)$.

2. 在曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz - 8 = 0$ 上求一点, 使曲面在该点的切平面平行于某一坐标平面.

3. 求与两直线 $\begin{cases} y=0, \\ z=a \end{cases}$ 及 $\begin{cases} x=0, \\ z=-a \end{cases}$ 相切的诸球面的中心轨迹, 其中 a 为已知实数.

4. 给定球面 $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 4z - 40 = 0$, 求

(1) 过点 $(1, 5, 4)$ 的切平面方程;

(2) 以 $(2, 6, 10)$ 为顶点的切锥面方程.

5. 证明平面 $18x + 13y - 2z + 12 = 0$ 与二次曲面

$$x^2 + 2y^2 + 6xz + 4yz + 2y - 4z + 24 = 0$$

相切, 并求出切点坐标.

6. 求平面 $\alpha x + \beta y - z + \gamma = 0$ 与二次曲面 $Ax^2 + By^2 = 2Cz$ 相切的条件.

7. 求二次曲面 $x^2 - 3y^2 + z^2 - 2 = 0$ 上具有方向 $1:2:2$ 的切线的轨迹.

罗巴切夫斯基与非欧几何^①



1893年, 在喀山大学树立起了世界上第一个为数学家雕塑的塑像, 这位数学家就是俄国的伟大学者、非欧几何的重要创始人——罗巴切夫斯基(Лобачевский Н И, 1792~1856).

非欧几何是人类认识史上一个富有创造性的伟大成果, 它的创立, 不仅带来了近百年以来数学的巨大进步, 而且对现代物理学、天文学以及人类时空观念的变革都产生了深远

^① 摘自 <http://www.ikepu.com>, 有删减

的影响.

罗巴切夫斯基是在尝试解决欧氏第五公设问题的过程中,从失败走上他的发现之路的.欧氏第五公设问题是数学史上最古老的著名难题之一,它是由古希腊学者最先提出来的.

《几何原本》的第五公设是论及平行线的,它说的是:如果一直线和两直线相交,且所构成的两个同侧内角之和小于两直角,那么,把这两直线延长,它们一定在那两内角的一侧相交.数学家们并不怀疑这个命题的真实性,而是认为它无论在语句的长度,还是在内容上都不太像是个公设,而倒像是个可以证明的定理,只是由于欧几里得没能找到它的证明,才不得不把它放在公设之列.

罗巴切夫斯基是从1815年着手研究平行线理论的.开始他也是循着前人的思路,试图给出第五公设的证明.在保存下来的他的学生听课笔记中,就记有他在1816~1817学年度在几何教学中给出的一些证明.可是,他很快便意识到自己的证明是错误的.

前人和自己的失败从反面启迪了他,使他大胆思索问题的相反提法:可能根本就不存在第五公设的证明.罗巴切夫斯基正是沿着这个途径,在试证第五公设不可证的过程中发现了一个崭新的几何世界.

1826年2月23日,罗巴切夫斯基于喀山大学物理数学系学术会议上,宣读了他的第一篇关于非欧几何的论文《几何学原理及平行线定理严格证明的摘要》.这篇首创性论文的问世,标志着非欧几何的诞生.

罗巴切夫斯基开创了数学的一个新领域,但遗憾的是他的创造性工作在生前始终没能得到学术界的重视和承认.

历史是最公允的,因为它终将会对各种思想、观点和见解做出正确的评价.1868年,意大利数学家贝特拉米发表了一篇著名论文《非欧几何解释的尝试》,证明非欧几何可以在欧氏空间的曲面上实现.这就是说,非欧几何命题可以“翻译”成相应的欧氏几何命题,如果欧氏几何没有矛盾,非欧几何也就自然没有矛盾.直到这时,长期无人问津的非欧几何才开始获得学术界的普遍注意和深入研究,罗巴切夫斯基的独创性研究也由此得到学术界的高度评价和一致赞美,这时的罗巴切夫斯基则被人们赞誉为“几何学中的哥白尼”.

第4章小结

坐标变换的目的是为了将复杂的曲线和曲面方程化简为最简单的形式,以便更好地了解和研究所给曲线和曲面的性质.

平面上的仿射坐标变换如下:设平面上有两个仿射坐标系 $\sigma_1 = \{O; e_1, e_2\}$, $\sigma_2 = \{O'; e'_1, e'_2\}$, 并且 O', e'_1, e'_2 在坐标系 σ_1 下的坐标已知 $O'(x_0, y_0)$, $e'_1 = (a_{11},$

a_{21}), $e'_2 = (a_{12}, a_{22})$, 设点 M 在 σ_1, σ_2 下的坐标分别是 $(x, y), (x', y')$, 则有点的仿射坐标变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

向量的仿射坐标变换: 设向量 a 在 σ_1, σ_2 下的坐标分别是 $(u, v), (u', v')$, 则

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

其中, 矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 称为从 σ_1 到 σ_2 的过度矩阵, 它由 e'_1, e'_2 在 σ_1 下的坐标构成.

如果 σ_1, σ_2 是直角坐标系, 则过度矩阵 A 是正交矩阵. 由于通常使用右手直角坐标系, 因此过度矩阵 A 是行列式为 $+1$ 的正交矩阵, 即为 $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. 如果 $\theta=0$ 即 A 为单位矩阵, 则坐标变换就是坐标系的移轴. 如果坐标原点保持不动, 则坐标变换就是坐标系绕原点逆时针旋转 θ 角度.

例如双曲线 $x^2 - y^2 = 2$ 经过顺时针旋转 45° , 即坐标变换 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ 后, 方程变为 $x'y' = 1$.

空间的坐标变换公式同理可得, 设空间有两个仿射坐标系 $\sigma_1 = \{O; e_1, e_2, e_3\}$, $\sigma_2 = \{O'; e'_1, e'_2, e'_3\}$, 并且 O', e'_1, e'_2, e'_3 在坐标系 σ_1 下的坐标已知: $O'(x_0, y_0, z_0)$, $e'_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$, $e'_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$, $e'_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33})$, 设点 M 在 σ_1, σ_2 下的坐标分别是 $(x, y, z), (x', y', z')$, 则有点的仿射坐标变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

如果 σ_1, σ_2 是直角坐标系, 则过度矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ 是正交矩阵.

在右手直角坐标系下, 若已知三个互相垂直的平面方程 $\Pi_i: A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0, i=1, 2, 3$, 且以 Π_1, Π_2, Π_3 分别为新坐标系 $O'x'y'z'$ 的坐标面 $y'O'z', x'O'z', x'O'y'$, 则经过坐标变换或在新坐标系下, 将 Π_1, Π_2, Π_3 的方程分别变成 $x'=0, y'=0, z'=0$. 在新坐标系也是右手直角坐标系的要求下, 若三个平面的法向量依次是符合右手法则的, 即它们依次的混合积是正的, 那么坐标变换是

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}(A_1x + B_1y + C_1z + D_1), \\ y' = \frac{1}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}(A_2x + B_2y + C_2z + D_2), \\ z' = \frac{1}{\sqrt{A_3^2 + B_3^2 + C_3^2}}(A_3x + B_3y + C_3z + D_3). \end{cases}$$

若三个平面的法向量依次符合左手法则,即它们依次的混合积是负的,则只需将其中一个方程乘以负号,再如法炮制即可得到坐标变换,这样保证坐标系仍是右手的.比如第一个方程乘以负号,则有坐标变换

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}(A_1x + B_1y + C_1z + D_1), \\ y' = \frac{1}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}(A_2x + B_2y + C_2z + D_2), \\ z' = \frac{1}{\sqrt{A_3^2 + B_3^2 + C_3^2}}(A_3x + B_3y + C_3z + D_3). \end{cases}$$

利用矩阵工具,将二次曲面的方程写成矩阵形式.首先利用实对称矩阵一定可用正交矩阵对角化,找到坐标变换将二次曲面中的交叉项化为零.然后再根据非零特征值的个数,通过适当的(移轴)坐标变换将方程化为最简形式,从而得到17种二次曲面的分类结果.

设二次曲面方程为

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= (x \ y \ z \ 1) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (\alpha^T \ 1) \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} & \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\delta}^T & a_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha^T \bar{\mathbf{A}} \alpha + 2\alpha^T \boldsymbol{\delta} + a_{44} = 0, \end{aligned}$$

$\bar{\mathbf{A}}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 即为特征方程 $\det(\bar{\mathbf{A}} - \lambda \mathbf{E}) = 0$ 的解, 则二次曲面有以下不变量, 即在任何直角坐标变换下均不变的量:

$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{tr}(\bar{\mathbf{A}})$, 矩阵 $\bar{\mathbf{A}}$ 的迹, 即主对角线上的元素之和.

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 = \bar{A}_{11} + \bar{A}_{22} +$$

$\bar{A}_{33}$, 即矩阵 $\bar{\mathbf{A}}$ 的主对角线上三元素的代数余子式之和.

$$I_3 = \det(\bar{\mathbf{A}}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, I_4 = \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

半不变量即在保持原点不动的直角坐标变换下不变的量有

$$K_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{14} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{34} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} \\ a_{14} & a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{13} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = A_{11} + A_{22} + A_{33},$$

即 $\mathbf{A}$ 的元素 a_{11}, a_{22}, a_{33} 的代数余子式之和.

利用不变量和半不变量可表示二次曲面的 5 种简化方程,就可容易地确定曲面的类型:

$$(1) \text{ 当 } I_3 \neq 0 \text{ 时, } \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{I_4}{I_3} = 0;$$

$$(2) \text{ 当 } I_3 = 0, I_4 \neq 0 \text{ 时, } \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 \pm 2 \sqrt{-\frac{I_4}{I_2}} z = 0;$$

$$(3) \text{ 当 } I_3 = I_4 = 0, I_2 \neq 0 \text{ 时, } \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{K_2}{I_2} = 0;$$

$$(4) \text{ 当 } I_2 = I_3 = I_4 = 0, K_2 \neq 0 \text{ 时, } I_1 x^2 \pm 2 \sqrt{-\frac{K_2}{I_1}} y = 0;$$

$$(5) \text{ 当 } I_2 = I_3 = I_4 = K_2 = 0 \text{ 时, } I_1 x^2 + \frac{K_1}{I_1} = 0.$$

在不需指出确定的坐标变换,只需确定曲面的类型的条件下,特征值所放的位置和正负号的选取是无关紧要的.如果在确定的坐标变换下,那么特征值所放的位置和正负号就是确定的.

$$\text{设二次曲面的方程是 } F(x, y, z) = (\alpha^T \quad 1) \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} & \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\delta}^T & a_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha^T \bar{\mathbf{A}} \alpha + 2 \alpha^T \boldsymbol{\delta} + a_{44} = 0,$$

则一向量 α 是该二次曲面的非渐近方向向量,即满足 $\Phi(\alpha) = \alpha^T \bar{\mathbf{A}} \alpha \neq 0$, 否则就是该二次曲面的渐近方向向量,即满足 $\Phi(\alpha) = \alpha^T \bar{\mathbf{A}} \alpha = 0$.

二次曲面与直线相关位置有 6 种情形,当直线的方向向量是二次曲面的非渐近方向时,则直线与曲面有两个实交点,或两个虚交点,或一个二重交点;当直线的方向向量是二次曲面的渐近方向时,则直线与曲面只有一个实交点,或直线在曲面上,或没有交点.比如抛物面 $x^2 + y^2 = 2z$ 有渐近方向 $(0, 0, 1)$, 具有该方向的直线

与该抛物面只有一个交点. 经过同一点, 以二次曲面的渐近方向为方向向量的所有直线构成的锥面就是渐近方向锥面.

二次曲面的中心是方程组 $F_i(x, y, z) = a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z + a_{i4} = 0, i=1, 2, 3, a_{ij} = a_{ji}$, 的所有解. 根据方程组解的情形, 将二次曲面分为中心曲面和非中心曲面, 非中心曲面包括线心曲面、面心曲面和无心曲面, 中心曲面的中心是唯一的. 二次曲面是中心曲面的充要条件是不变量 $I_3 \neq 0$. 只有中心曲面才可能有渐近线, 渐近锥面. 经过中心曲面的中心具有渐近方向的直线就是渐近线, 以中心曲面的中心为顶点的渐近方向锥面就是曲面的渐近锥面.

二次曲面的沿非渐近方向 $X:Y:Z$ 的平行弦的中点在同一个平面上, 该平面称为共轭于方向 $X:Y:Z$ 的直径面. 直径面的方程是 $XF_1(x, y, z) + YF_2(x, y, z) + ZF_3(x, y, z) = 0$, 或 $\Phi_1(X, Y, Z)x + \Phi_2(X, Y, Z)y + \Phi_3(X, Y, Z)z + \Phi_4(X, Y, Z) = 0$. 方向 $X:Y:Z$ 也称为与该直径面共轭的方向. 直观上看, 直径面是二次曲面沿方向 $X:Y:Z$ 的对称平面.

直径面一定经过曲面的中心. 经过中心曲面的中心的平面是曲面的直径面; 经过线心曲面的中心组成的直线的平面是曲面的直径面; 面心曲面的直径面只能是由中心构成的平面.

二次曲面的奇向满足方程组: $\Phi_i(X, Y, Z) = 0, i=1, 2, 3$. 虽然具有渐近方向的二次曲面的平行弦不存在, 但是由于非奇向的渐近方向使得 $\Phi_i(X, Y, Z) (i=1, 2, 3)$ 不全为零, 因而方程 $\Phi_1(X, Y, Z)x + \Phi_2(X, Y, Z)y + \Phi_3(X, Y, Z)z + \Phi_4(X, Y, Z) = 0$ 仍然表示一个平面, 这平面也称为共轭于方向 $X:Y:Z$ 的直径面. 与共轭于方向 $X:Y:Z$ 的该直径面平行的任何一个方向都与方向 $X:Y:Z$ 共轭.

两个向量的 $\mathbf{v} = (X, Y, Z), \mathbf{v}' = (X', Y', Z')$ 方向是互为共轭的是指它们满足 $X\Phi_1(X', Y', Z') + Y\Phi_2(X', Y', Z') + Z\Phi_3(X', Y', Z') = 0$, 或 $\mathbf{v}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{v}'^T = 0$.

奇向与任何方向都共轭, 渐近方向与自身共轭.

二次曲面的直径是两个直径面的交线, 两条沿共轭方向的直径叫共轭直径.

如果直径面的法向量的方向就是直径面的共轭方向, 那么这样的直径面称为二次曲面的主径面. 主径面的法向和二次曲面的奇向叫二次曲面的主方向. 主方向 $\mathbf{v} = (X, Y, Z)$ 满足方程: $(\bar{\mathbf{A}} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v}^T = 0$, 其中 λ 是 $\bar{\mathbf{A}}$ 的特征值, 零特征值对应的主方向是奇向, 没有相应的主径面; 非零特征值 λ 对应的主方向 $\mathbf{v} = (X, Y, Z)$ 是非渐近方向, 对应的主径面的方程是 $\lambda(Xx + Yy + Zz) + \Phi_4(X, Y, Z) = 0$. 由此可知, 3 阶实对称矩阵 $\bar{\mathbf{A}}$ 的特征向量的几何意义是以 $\alpha\bar{\mathbf{A}}\alpha^T, \alpha = (x, y, z)$, 为二次齐次部分的二次曲面的主方向.

由于实对称矩阵一定可对角化, 且实对称矩阵的不同特征值对应的特征向量是正交的, 所以任何一个二次曲面一定有三个互相垂直的主方向. 如果这三个方向的向量依次的混合积为正, 则表明它们依次符合右手法则, 将它们单位化就得到

新坐标系的坐标向量. 如果混合积为负, 那么只需将其中之一的向量乘以负号, 那么它们就依次符合右手法则, 同样得到新坐标系的坐标向量.

设 e_1, e_2, e_3 是对应于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的符合右手法则的单位特征向量(主方向), 它们的坐标写成列的形式. 它们依次作为 x', y', z' 轴的坐标向量, 那么 $T = (e_1 e_2 e_3)$ 是正交矩阵, 经过直角坐标变换 $\alpha = T\alpha'$ 后(向量写成列的形式), 二次曲面的方程就化简为

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a'_{44} = 0,$$

要注意特征值对应的位置. 再经过一个适当的移轴(选取适当的点为新的坐标原点), 就可得到用不变量表示的简化方程. 对于中心曲面, 选中心为新的坐标原点; 线心曲面和面心曲面任取一中心作为新的坐标原点; 对无心曲面选取曲面的顶点(对称轴与曲面的交点)为新的坐标原点.

经过二次曲面上正常点的所有切线在一个平面上, 此平面就是该点的切平面. 经过二次曲面上奇异点的任何直线都是切线. 二次锥面的顶点是二次锥面的唯一奇异点. 奇异点满足方程组: $F_i(x, y, z) = a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z + a_{i4} = 0, i = 1, 2, 3, 4,$ $a_{ij} = a_{ji}$. 所以奇异点是在曲面上的中心.

在二次曲面的正常点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面方程是

$$(x - x_0)F_1(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)F_2(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)F_3(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

表示曲面 $F(x, y, z) = 0$ 的函数 $F(x, y, z)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的梯度向量 $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ 就是切平面的法向量. 对一般的曲面, 切平面的法向量就是由表示曲面的函数的梯度向量来得到.

对于二次曲面而言, 从曲面的方程中, 直接通过以下替换方式也同样得到切平面的方程:

平方项 $x^2 \rightarrow xx_0$, 交叉项 $xy \rightarrow \frac{xy_0 + x_0y}{2}$, 一次项 $x \rightarrow \frac{x + x_0}{2}$, 常数项及系数不变. 例如曲面 $x^2 + 2xz - 4y = 4$ 上点 $(0, -1, 1)$ 处的切平面是 $x_0x + xz_0 + x_0z - 2(y + y_0) = 4$, 即 $x - 2y - 2 = 0$.

二次曲线的切线也可由此法得到.

经过二次曲面外一点的所有切线构成切锥.

第5章 正交变换和仿射变换

迄今为止,我们把几何图形都看成是静止的、不变的,对几何图形的性质也是孤立地进行研究,没有联系图形位置的改变与形状的变化.然而万事万物总是在不停地运动和变化着,物体的位置和形状也是如此.对物体位置和形状的各种变化规律进行研究,并给以数学描述,很有必要.例如:一物体被搬动了,如果其形状不改变的话,这是一种刚体运动.又如长方形的窗格被阳光斜投影到地面上,得到一个平行四边形的影子,这是形状的变化.初步探讨图形在运动或变化下的性质是本章的任务.这里将介绍图形的两种简单形变:正交变换与仿射变换,讨论二次曲线和二次曲面在这两种变换下的性质.我们借助于坐标,用解析的方法(代数方法)来描述变换,并讨论图形在变换下的不变性质.在几何学中,研究图形在各种几何变换下的不变性质和不变量是极其重要的.

5.1 映射与变换

定义 5.1.1 设 S 与 S' 是两个集合,对 S 中任一元素 a ,按某一法则在 S' 中有唯一的元素 a' 与之对应,我们称此法则(即对应关系)为 S 到 S' 的一个映射.记作

$$\begin{aligned}\sigma: S &\rightarrow S', \\ a &\mapsto a' .\end{aligned}$$

或者记作 $a' = \sigma(a)$, $a \in S$. a' 称为 a 在映射 σ 下的像, a 称为 a' 在 σ 下的一个原像.

集合 S 到 S' 的两个映射 σ 和 τ 称为相等,如果对于任意 $a \in S$,都有 $\sigma(a) = \tau(a)$.

集合 S 到自身的一个映射叫做 S 的一个变换.

例 5.1.1 设 S 是全体自然数集, $S' = \{\pm n | n \in S\}$, 则 $\sigma(n) = 2n, n \in S$, 是 S 到 S' 中的一个映射. $\tau(n) = 4n, n \in S$, 也是 S 到 S' 中的一个映射.

例 5.1.2 设 S 是无数个点的集合, A 是 S 的子集, $S' = \{0, 1\}$, 则定义为

$$\sigma(a) = \begin{cases} 1, & a \in A, \\ 0, & a \notin A \end{cases}$$

的法则 σ 是 S 到 S' 上的一个映射.

例 5.1.3 设 $S = S'$, 法则 I 定义为 $a \mapsto a, a \in S$, 则 I 是 S 到自身的一个变换, 此映射称为恒等变换.

例 5.1.4 平面上的平移 设 S 是平面上所有点的集合, 取定一个直角坐标

系,给定一个向量 $v=(a,b)$. 令点 $P(x,y)$ 与 $P'(x',y')$ 的对应关系为 $\overrightarrow{PP'}=v$ (图 5.1), 则有

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b. \end{cases} \quad (5.1.1)$$

这是 S 到自身的一个变换,称为由 v 决定的平移. 公式(5.1.1)称为平面上的点的平移公式.

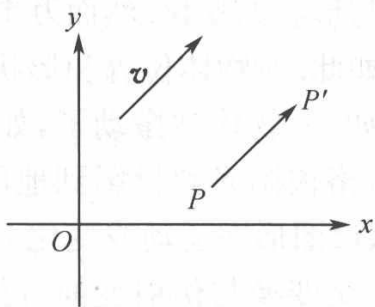


图 5.1

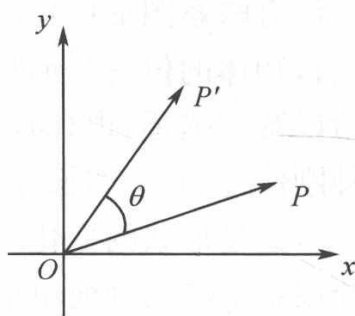


图 5.2

注:在形式上平移公式与点的坐标变换中的移轴公式类似,但是含意却完全不同:点的平移公式中, (x,y) 和 (x',y') 是不同的两个点在同一坐标系中的坐标;而移轴公式中, (x,y) 和 (x',y') 是同一个点在两个不同的坐标系中的坐标.

例 5.1.5 平面上的旋转 S 是平面上所有点的集合,在平面上取定一个直角坐标系 $\{O; e_1, e_2\}$, 令点 $P(x,y)$ 和 $P'(x',y')$ 的对应关系 τ 为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (5.1.2)$$

其中, θ 是一确定的实数,则 τ 是 S 上的一个变换,称为平面绕原点的旋转,转角为 θ (图 5.2). (5.1.2) 称为平面上转角为 θ 的旋转公式.

例 5.1.6 平面上的反射 设 l 是平面上一条定直线,平面上任一点 P 关于 l 的对称点为 P' . 这种从 P 点到 P' 点的映射,称为平面上以 l 为轴的反射. 若取 l 为 x 轴建立平面直角坐标系,设 $P(x,y), P'(x',y')$, 则此反射表示为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (5.1.3)$$

思考题:验证平移、旋转与反射是保持距离不变的.

设 $\sigma: S \rightarrow S'$, 我们用 $\sigma(S)$ 表示 S 中的点在 σ 下的像的全体,显然有

$$\sigma(S) \subset S'.$$

当 $\sigma(S) = S'$ 时,则称 σ 是满射或到上的. 如果在映射 σ 下, S 中不同元素的像也不同,则称 σ 是单射(或 1-1 的). 既是单射又是满射的映射称为双射(或 1-1 对应).

定义 5.1.2 设映射 $\sigma_1: S \rightarrow S', \sigma_2: S' \rightarrow S''$, 则定义乘积映射 $\sigma_2\sigma_1: S \rightarrow S''$ 为

$$(\sigma_2\sigma_1)(a) = \sigma_2(\sigma_1(a)), \quad a \in S.$$

思考题:请举例说明映射的乘法与次序有关,甚至可能 $\sigma_2\sigma_1$ 有意义,而 $\sigma_1\sigma_2$ 却无意义;即使 $\sigma_2\sigma_1$ 和 $\sigma_1\sigma_2$ 都有意义, $\sigma_2\sigma_1$ 与 $\sigma_1\sigma_2$ 也不一定相等.也就是说,映射的乘法不适合交换律.

对于 S 到 S' 的双射 σ ,我们可以定义它的逆映射 σ^{-1} :若 $\sigma(a)=a'\in S', a\in S$, 则定义 $\sigma^{-1}(a')=a$. 显然, $\sigma^{-1}\sigma=I_S:S\rightarrow S, \sigma\sigma^{-1}=I_{S'}:S'\rightarrow S'$.

易证,1-1 对应的逆映射也是 1-1 对应,1-1 对应的乘积也是 1-1 对应,映射的乘法满足结合律.

定义 5.1.3 设 $\sigma:S\rightarrow S$ 是一变换,若对 $a\in S$,满足 $\sigma(a)=a$,则称 a 是 σ 的不动点, $\{a\in S|\sigma(a)=a\}$ 称为 σ 的不动点集.

思考题:恒等变换,平移,旋转,反射的不动点集各是什么?

平面上的平移与旋转的乘积称为平面上的运动(即刚体运动),它是平面到自身的 1-1 变换.

例 5.1.7 设 σ 是平面上由 $v=(a,b)$ 决定的平移, τ 是平面上的转角为 θ 的绕原点的旋转, $\tau\sigma:P(x,y)|\xrightarrow{\sigma}P''(x'',y'')|\xrightarrow{\tau}P'(x',y')$, 则 $\tau\sigma$ 的公式为

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a\cos\theta - b\sin\theta \\ a\sin\theta + b\cos\theta \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

设 $\sigma\tau:P(x,y)|\xrightarrow{\tau}P''(x'',y'')|\xrightarrow{\sigma}P'(x',y')$, 则 $\sigma\tau$ 的公式为

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由此可见 $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.

平面上点变成点的变换也叫点变换.

一个线性点变换

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

当它的变换矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 的行列式 $\det A \neq 0$ 时,称为满秩线性变换或非退化

线性变换. 往后将看到,正交变换和仿射变换在代数上均表现为非退化的线性变换.

定义 5.1.4 设 $G = \{\sigma:S\rightarrow S|\sigma \text{ 是 } S \text{ 上的变换}\}$, 如果 G 满足:

- (1) 恒等变换 $I \in G$;
- (2) 若 $\sigma_1 \in G, \sigma_2 \in G$, 则 $\sigma_1\sigma_2 \in G$;

(3)若 $\sigma \in G$, 则它的逆变换 $\sigma^{-1} \in G$.

则称 G 为 S 的一个变换群.

习题 5.1

1. 证明变换的乘法适合结合律, 即

$$\sigma_1(\sigma_2\sigma_3) = (\sigma_1\sigma_2)\sigma_3.$$

2. 求出平面上对于直线 $y=x$ 的反射公式.

3. 设平面上直线 l 的方程为 $Ax + By + C = 0$, 求平面对于直线 l 的反射的公式.

4. 设 l_1, l_2 是平面上两条平行直线, 而 σ_1, σ_2 分别是平面对于直线 l_1, l_2 的反射, 证明: $\sigma_1\sigma_2$ 是一个平移.

5. 设 σ 是平面的点变换, σ 的公式为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

问点 $(1, 0), (-1, 1)$ 分别变成什么点, 直线 $x + y - 2 = 0$ 变成什么图形?

6. 求平面的点变换

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ -9 \end{pmatrix}$$

的逆变换.

7. 在直角坐标系中, 求出平面绕点 $M_0(x_0, y_0)$ 旋转 θ 角的变换公式.

8. 证明: 平面绕原点旋转的集合是平面的一个变换群.

9. 证明: 平面上运动的集合是平面的一个变换群.

5.2 平面的正交变换

5.2.1 平面的正交变换

在 5.1 节中我们介绍了平面上的三种点变换: 平移、旋转和反射. 它们有一个共同的特点: 保持点之间的距离不变.

定义 5.2.1 平面上的一个点变换, 如果保持点之间的距离不变, 则称它是正交(点)变换(或等距变换).

平面上的运动与反射都是正交变换.

从定义立即得到性质 1 和性质 2.

性质 1 恒等变换是正交变换.

性质 2 正交变换的乘积是正交变换.

性质 3 正交变换是双射.

证明 设 σ 是正交变换, 把不同的两点 P, Q 分别变为 P' 和 Q' . 由于 P, Q 不相同, 所以 $|\overrightarrow{PQ}| \neq 0$, 根据 σ 保持距离不变, 应有

$$|\overrightarrow{P'Q'}| = |\overrightarrow{PQ}| \neq 0,$$

因此, P', Q' 也是不同的两点, 即 σ 为单射.

下证 σ 是满射. 即对平面上任何一点 P' , 都存在 P , 使 $\sigma(P) = P'$.

为此, 在平面上任取不共线的三点 $P_i (i=1, 2, 3)$, 设 $\sigma(P_i) = P'_i (i=1, 2, 3)$. 由 σ 是单射并保持距离不变, 易知 P'_i 构成一个三角形, 且

$$\triangle P_1 P_2 P_3 \cong \triangle P'_1 P'_2 P'_3.$$

假定 P' 到 P'_i 的距离为 d_i , 那么必存在一点 P , 它到 P_i 的距离也是 d_i . 设 $\sigma(P) = P''$, 则 P'' 到 P'_i 的距离也是 d_i , 因此 P'' 与 P' 重合, 即 $\sigma(P) = P'$.

由性质 3 知道, 正交变换的逆变换存在, 且逆变换也是正交变换. 因此, 由以上三个性质知道平面上全体正交点变换构成平面上的一个变换群, 称为正交变换群.

思考题: 在正交变换下, 平面图形所围的面积如何变化?

性质 4 正交变换把直线变到直线, 并保持共线三点 P, Q, R 的简单比

$$(P, Q, R) = \frac{PR}{RQ} \quad (5.2.1)$$

不变. 其中 PR, RQ 表示有向线段 $\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{RQ}$ 的有向长度(或代数长), 即若在直线 PQ 上取一单位向量 e , 则 $\overrightarrow{PR} = (PR)e, \overrightarrow{RQ} = (RQ)e$.

证明 设 P, Q 是直线上不同的两点, 那么它们的像 P', Q' 也不相同, 于是决定一条直线 l' . 对于直线 l 上任一点 R , 若 P, Q, R 按此顺序共线, 则

$$|PQ| + |QR| = |PR|.$$

由正交变换的定义, R 的像 R' 与 P', Q' 有关系

$$|P'Q'| + |Q'R'| = |P'R'|.$$

因此 R' 与 P', Q' 共线, 即 R' 在 l' 上.

由以上两式看出, 正交变换保持直线上点的顺序不变, 将有向线段变成有向线段. 即若 $\overrightarrow{PR}$ 与 $\overrightarrow{RQ}$ 同向或反向时, 则 $\overrightarrow{P'R'}$ 与 $\overrightarrow{R'Q'}$ 也同向或反向. 由此得

$$(P, Q, R) = \frac{PR}{RQ} = \frac{P'R'}{R'Q'} = (P', Q', R').$$

性质 5 正交变换将平行直线变为平行直线, 并保持相交直线的交角不变.

请读者自证.

在平面上, 对任一向量 a , 以点 O 为始点, 作 $\overrightarrow{OA} = a$. 设正交变换 σ 把 O, A 分别变到 O', A' , 令 $a' = \overrightarrow{O'A'}$, 则向量 a' 只依赖于 a 而与 O 点的选取无关, 原因是 σ 保持平行性和保持距离不变. 这一事实说明, σ 诱导出平面上向量的一个变换, 使 a 变到 a' , 这个变换仍记为 σ , 称为正交向量变换.

设 a 与 b 是任意两个向量, $\sigma(a) = a', \sigma(b) = b'$. 显然

$$a \cdot b = a' \cdot b',$$

即 σ 保持向量的内积不变.

根据 σ 保持共线三点的简单比不变这一特征, 我们可从 $a = \lambda b$ 推出 $a' = \lambda b'$. 又若 $\sigma(c) = c'$, 并且 $c = a + b$, 由于 σ 把一个三角形变成一个与之全等的三角形, 又可得到 $c' = a' + b'$. 简短地说, 正交变换保持向量的线性关系

$$c = \lambda a + \mu b$$

不变.

性质 6 正交变换保持向量的内积不变, 保持向量的线性关系不变.

5.2.2 正交变换的坐标表示和基本定理

取平面直角坐标系 $\{O; e_1, e_2\}$, 设正交变换 σ 将点 $P(x, y)$ 变换到 $P'(x', y')$, 则

$$\overrightarrow{OP} = xe_1 + ye_2, \quad \overrightarrow{OP'} = x'e_1 + y'e_2.$$

下面来求 x', y' 与 x, y 之间的关系.

根据性质 6 可知 σ 把直角坐标系 $\{O; e_1, e_2\}$ 变到直角坐标系 $\{O'; e'_1, e'_2\}$, 并且 $\overrightarrow{OP'} = xe'_1 + ye'_2$, 即 P' 在直角坐标系 $\{O'; e'_1, e'_2\}$ 下的坐标与 P 在直角坐标系 $\{O; e_1, e_2\}$ 下的坐标一致.

设 $\overrightarrow{OO'} = ae_1 + be_2$, $e'_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2$, $e'_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2$. 因为 $\{O'; e'_1, e'_2\}$ 是直角坐标系, 所以过渡矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 是正交矩阵.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP'} &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P'} \\ &= (ae_1 + be_2) + xe'_1 + ye'_2 \\ &= ae_1 + be_2 + x(a_{11}e_1 + a_{21}e_2) + y(a_{12}e_1 + a_{22}e_2) \\ &= (a_{11}x + a_{12}y + a)e_1 + (a_{21}x + a_{22}y + b)e_2 \\ &= x'e_1 + y'e_2, \end{aligned}$$

于是得出正交变换的坐标表示

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + b, \end{cases} \quad (5.2.2)$$

其中, $A = (a_{ij})$ 是正交矩阵.

用矩阵形式表示, 则 (5.2.2) 可写成

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad (5.2.3)$$

设 $\sigma(a) = a'$, $a = ue_1 + ve_2$, $a' = u'e_1 + v'e_2$. 由性质 6 得

$$a' = ue'_1 + ve'_2.$$

我们容易得到 u', v' 与 u, v 之间的关系

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (5.2.4)$$

考虑正交矩阵 A 的条件

$$\begin{aligned}a_{11}^2 + a_{21}^2 &= 1, \\a_{12}^2 + a_{22}^2 &= 1, \\a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= 0.\end{aligned}$$

我们可设

$$\begin{aligned}a_{11} &= \cos\theta, & a_{21} &= \sin\theta, \\a_{12} &= \sin\varphi, & a_{22} &= \cos\varphi,\end{aligned}$$

将它们代入条件中的第三式得

$$0 = \cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi = \sin(\varphi + \theta),$$

因此

$$\varphi = k\pi - \theta, \quad a_{12} = \pm \sin\theta, \quad a_{22} = \mp \cos\theta,$$

即

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

即(5.2.3)可写为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad (5.2.5)$$

或

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad (5.2.6)$$

(5.2.5)表示平面上的运动, (5.2.6)表示平面上的反射

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

与运动

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

的乘积. 由此得到以下定理.

定理 5.2.1(正交变换第一基本定理) 正交变换或者是运动, 或者是一个反射与一运动的乘积. 有时前者称为第一类正交变换, 后者称为第二类正交变换.

定理 5.2.2(正交变换第二基本定理) 正交变换把直角坐标系变到新的直角坐标系, 并使每一点 P 在原系下的坐标与它的像 P' 关于新系下的坐标相同. 反之, 具有这种性质的变换是正交变换.

习题 5.2

1. 平面绕原点旋转 $\theta = \frac{3\pi}{2}$, 再平移 $v = (2, -1)$, 写出变换公式, 并求出点 $(0, 1)$ 经此变换后

的对应点的坐标.

2. 求把点(3,1)变成点(-1,3)的绕原点的旋转,并求出曲线 $y^2 - x + 8y + 18 = 0$ 经此旋转的对应曲线.

3. 设正交变换 σ 在直角坐标系 I 中的公式为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

若作直角坐标变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

求 σ 在新坐标系中的公式.

4. 平面上的点变换 σ 把直角坐标系 I 变到直角坐标系 II, 并且使每一点 P 在 I 下的坐标与它的像 P' 在 II 下的坐标相同, 则 σ 是正交变换.

5. 设平面上的点变换 σ 在直角坐标系下的公式为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

其中 $A = (a_{ij})$ 是正交矩阵, 证明 σ 是正交变换.

6. 设 τ_1 和 τ_2 分别是平面上对于直线 l_1 和 l_2 的反射, 设 l_1 与 l_2 交于 O 点, 且夹角为 θ , 证明: $\tau_2\tau_1$ 是绕 O 点的旋转, 转角为 2θ .

5.3 平面的仿射变换

比正交变换较为广泛的一种点变换就是本节将要讨论的仿射变换. 在这里为了简单起见, 不同于前节用几何特征来定义正交变换, 我们直接用变换公式给出仿射变换的定义, 并用这公式研究仿射变换的一些性质.

5.3.1 仿射变换的定义和例子

定义 5.3.1 平面的一个点变换 τ , 如果它在一个仿射坐标系中的公式为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad (5.3.1)$$

其中系数矩阵 $A = (a_{ij})$ 是可逆的, 即 $\det A \neq 0$, 则称 τ 是平面的仿射(点)变换.

此定义与仿射坐标系的选取无关.

例 5.3.1 5.2 节中用公式(5.2.5), (5.2.6)确定的正交变换是仿射变换.

例 5.3.2 伸长或压缩(简称伸缩)

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = ky \end{cases} \quad (k > 0)$$

是仿射变换. x 轴上的每一点是它的不动点, 平行于 y 轴的直线都是它的不动直线 (不动直线上的点不一定是不动点); 它是平行于 y 轴方向的伸长 ($k > 1$) 或压缩 ($k < 1$). 在直角坐标系下, 它把圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 变到椭圆 $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{k^2 r^2} = 1$.

例 5.3.3 由公式

$$\begin{cases} x' = kx, \\ y' = hy \end{cases} \quad (k > 0, h > 0)$$

所确定的变换是仿射变换, 它表示分别沿 x 轴、 y 轴方向的两个伸缩变换的乘积.

思考题: 就例 5.3.3 的仿射变换, 讨论圆 $x^2 + y^2 = 1$ 是如何变化的, 并作图.

5.3.2 仿射变换的性质

由于仿射变换的系数矩阵是可逆的, 因此由可逆矩阵的性质易知: 仿射变换的乘积是仿射变换, 恒等变换是仿射变换; 仿射变换是可逆的, 且它的逆变换也是仿射变换.

仿射变换还有以下性质.

性质 1 仿射变换把直线变成直线.

证明 在仿射坐标系中直线用一次方程表示, 而仿射变换是用坐标的一次式给出的, 所以它把直线的一次方程变为一次方程, 即为直线.

类似于正交点变换诱导平面的一个向量变换, 仿射点变换 τ 也诱导平面的一个向量变换, 仍记为 τ . 如果点变换 τ 的公式为 (5.3.1), 则向量变换 τ 的公式为

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (5.3.2)$$

其中, (u, v) 是平面上任一向量 a 的坐标, (u', v') 是 $\tau(a)$ 的坐标, 系数矩阵 $A = (a_{ij})$ 是可逆的, 这样的向量变换称为**仿射向量变换**.

今后我们谈到仿射(点)变换 τ 在向量上的作用时, 指的就是 τ 诱导的向量变换在该向量上的作用.

与正交变换类似, 我们有以下性质.

性质 2 仿射变换保持向量的线性关系不变.

证明 将向量 a 的坐标写成列矩阵的形式, 即

$$a = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

于是 (5.3.2) 可写成 $\tau(a) = Aa$.

现设有线性关系 $\lambda a + \mu b$, 则

$$\begin{aligned}
 \tau(\lambda a + \mu b) &= A(\lambda a + \mu b) = A(\lambda a) + A(\mu b) \\
 &= \lambda(Aa) + \mu(Ab) \\
 &= \lambda\tau(a) + \mu\tau(b).
 \end{aligned}$$

根据性质1和性质2,仿射变换把两条平行的直线变为两条平行的直线,而且仿射变换保持共线三点的简单比不变.

性质3 仿射变换将二次曲线变为二次曲线.

因为二次曲线的方程是关于坐标 x, y 的二次方程,而仿射变换是用坐标的一次式给出的,因此仿射变换将关于 x, y 的二次方程变为关于 x', y' 的二次方程,即仍为二次曲线.

由性质2还可得到以下定理.

定理 5.3.1 仿射变换 τ 把任意一个仿射标架 I 变成一个仿射标架 II,并且任一点 P 的 I 坐标等于 $\tau(P)$ 的 II 坐标.

定理 5.3.2 平面上任给两组不共线的三点 A_1, A_2, A_3 和 B_1, B_2, B_3 ,则存在唯一的仿射变换把 A_i 变到 $B_i, i=1, 2, 3$.

证明 将 $A_i(x_i, y_i)$ 和它的对应点 $B_i(x'_i, y'_i) (i=1, 2, 3)$ 的坐标分别代入(5.3.1),得到关于 a_{11}, a_{12}, a 以及 a_{21}, a_{22}, b 的方程组

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a, \\ x'_2 = a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + a, \\ x'_3 = a_{11}x_3 + a_{12}y_3 + a \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} y'_1 = a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + b, \\ y'_2 = a_{21}x_2 + a_{22}y_2 + b, \\ y'_3 = a_{21}x_3 + a_{22}y_3 + b. \end{cases}$$

由于 A_1, A_2, A_3 不共线,所以行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

因此,以上两个方程组有唯一解 a_{11}, a_{12}, a 和 a_{21}, a_{22}, b .

利用以上两个方程组容易验证

$$\begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a \\ a_{21} & a_{22} & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

两边取行列式并注意到不共线条件,得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

因而由以上得出的公式

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

是将 A_i 变到 $B_i (i=1, 2, 3)$ 的唯一的仿射变换.

思考题: 平面上任给两个仿射标架 I 和 II, 是否存在唯一的仿射变换把标架 I 变到标架 II?

定理 5.3.3 在一个仿射变换下, 平面图形的面积按同一比值改变.

证明 因为平面图形的面积可作为若干个三角形面积之和的极限, 所以我们只须对三角形来证明这一结论就行了.

设 τ 是一仿射变换, 在仿射标架 $I = \{O; e_1, e_2\}$ 下的公式为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

$\tau(e_1) = e_1', \tau(e_2) = e_2'$. 又设 τ 将三角形 ABC 变到三角形 $A'B'C'$,

$$\overrightarrow{AB} = a_1 e_1 + a_2 e_2, \quad \overrightarrow{AC} = b_1 e_1 + b_2 e_2,$$

则

$$\overrightarrow{A'B'} = a_1 e_1' + a_2 e_2', \quad \overrightarrow{A'C'} = b_1 e_1' + b_2 e_2'.$$

$$\begin{aligned} e_1' \times e_2' &= (a_{11} e_1 + a_{21} e_2) \times (a_{12} e_1 + a_{22} e_2) \\ &= (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) e_1 \times e_2 = |\mathbf{A}| e_1 \times e_2. \end{aligned}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} |e_1 \times e_2|,$$

$$S_{\triangle A'B'C'} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'}| = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} |e_1' \times e_2'|.$$

其中, 正负号与行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ 的符号相同.

所以, $\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}} = |\det \mathbf{A}|$. 即经过仿射变换 τ 后, 一个三角形在变换后的面积与变换前的面积之比是常数, 常数为 $\det \mathbf{A}$ 的绝对值, 称为仿射变换的变积系数.

仿射变换 τ 的公式中的系数矩阵的行列式与仿射标架的选取无关. 设 τ 在 I 中的公式的系数矩阵为 $\mathbf{A}$, 那么 τ 在仿射标架 II 中的公式的系数矩阵为 $\mathbf{H}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{H}$, 其中 $\mathbf{H}$ 是从 I 到 II 的过渡矩阵, 于是

$$\det(\mathbf{H}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{H}) = \det \mathbf{H}^{-1} \det \mathbf{A} \det \mathbf{H} = \det \mathbf{A}.$$

思考题: 正交变换的变积系数是多少? 变积系数为 1 的仿射变换是否一定为正交变换? 请举例说明.

定义 5.3.2 设仿射变换 τ 的系数矩阵为 $\mathbf{A}$, 若 $\det \mathbf{A} > 0$, 则称 τ 是第一类的; 若 $\det \mathbf{A} < 0$, 则称 τ 是第二类的.

命题 5.3.1 仿射变换保持二次曲线的直径的共轭性不变.

证明 首先在仿射变换 τ 下, 二次曲线 C 的弦变成二次曲线 C' 的弦, C 的平行弦变成 C' 的平行弦; C 的弦的中点变成 C' 的弦的中点, 所以如果 l 是 C 的直径,

则 $\tau(l) = l'$ 是 C' 的直径.

设二次曲线 C 的二次项 $\Phi(x, y)$ 的矩阵为 $A = (a_{ij})$, l_1, l_2 是 C 的一对共轭直径(此时假设 C 是中心曲线), l_i 的方向为 $v_i = (u_i, v_i)$. 由于 l_2 的方向共轭于 l_1 的方向, 所以有

$$(u_1 \ v_1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0.$$

设 $\tau(l_i) = l'_i, \tau(v_i) = v'_i = (u'_i, v'_i), i = 1, 2$, 则有

$$\begin{pmatrix} u'_i \\ v'_i \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix},$$

其中 B 是仿射变换 τ 的系数矩阵. 于是

$$\begin{aligned} 0 &= (u_1 \ v_1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = (u'_1 \ v'_1) (B^{-1})^T A B^{-1} \begin{pmatrix} u'_2 \\ v'_2 \end{pmatrix} \\ &= (u'_1 \ v'_1) A' \begin{pmatrix} u'_2 \\ v'_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

这里 $A' = (B^{-1})^T A B^{-1}$ 是 $\tau(C) = C'$ 的二次项 $\Phi'(x', y')$ 的矩阵, 即

$$\Phi'(x', y') = (x' \ y') (B^{-1})^T A B^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

故 l'_1 与 l'_2 是 C' 的一对共轭直径.

思考题: 试说明仿射变换将圆变成椭圆.

定理 5.3.4 平面上的任何一个仿射变换可分解为一个正交变换与一个沿两个互相垂直方向伸缩的乘积.

证明 从上面的思考题可知, 由 (5.3.1) 给出的仿射变换 τ 把单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 变为一个椭圆(图 5.3), 设它的中心为 O' , 而 $A_0 A'$ 与 $B_0 B'$ 是两条互相垂直的对称轴(或主轴), 记向量

$$f_1 = \overrightarrow{O'A'}, \quad f_2 = \overrightarrow{O'B'}.$$

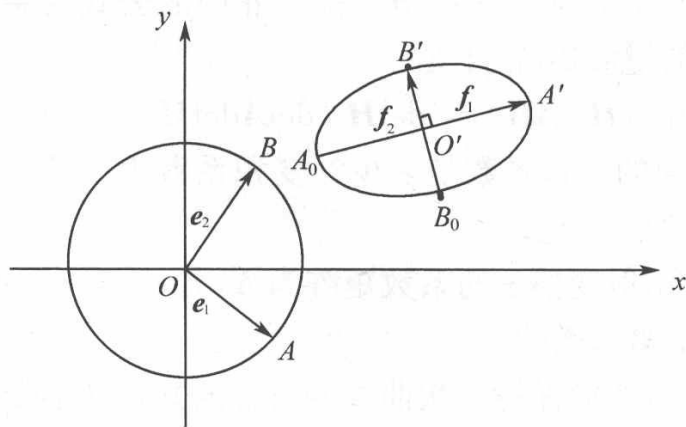


图 5.3

将它们单位化 $e_1' = f_1/|f_1|, e_2' = f_2/|f_2|$. 我们有仿射坐标系 $\{O'; f_1, f_2\}$ 与直角坐标系 $\{O'; e_1', e_2'\}$. 又设在 τ 下, f_1, f_2 的原像为 e_1, e_2 , 即 $\tau(e_i) = f_i (i=1, 2)$. 由于椭圆的两条对称轴是互相共轭的, 即每一条对称轴的平行弦中点轨迹沿着另一条的方向, 而仿射变换 τ 保持共轭性不变, 因此 e_1 与 e_2 也是单位圆上两个互相垂直的半径向量, 故 $\{O; e_1, e_2\}$ 为一直角坐标系. 利用定理 5.3.1, 有

正交变换 $\sigma: \{O; e_1, e_2\} \rightarrow \{O'; e_1', e_2'\}$,

伸缩变换 $\alpha: \{O'; e_1', e_2'\} \rightarrow \{O'; f_1, f_2\}$.

因此 $\alpha\sigma: \{O; e_1, e_2\} \rightarrow \{O'; f_1, f_2\}$. 故 $\tau = \alpha\sigma$, 即 τ 分解为正交变换 σ 与伸缩 α 的乘积.

习题 5.3

1. 求把三点 $(0, 0), (1, 1), (1, -1)$ 分别变到点 $(2, 3), (2, 5), (3, 7)$ 的仿射变换.
2. 证明: 在仿射变换下, 两个不动点的连线上每一点都是不动点.
3. 求把三条直线 $x=0, x-y=0, y-1=0$ 依次变到 $3x-2y-3=0, x-1=0, 4x-y-9=0$ 的仿射变换的公式.
4. 如果一条直线与它在仿射变换 τ 下的像重合, 则称这条直线为 τ 的不动直线. 求仿射变换

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

的不动直线.

5. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 经过仿射变换 τ :

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{a}, \\ y' = \frac{y}{b} \end{cases}$$

化为 $x'^2 + y'^2 = 1$, 由此证明: 椭圆的面积 $= \pi ab$.

6. 设 O 是平面上一个定点, 如果平面上一个点变换 τ 把 O 保持不变, 且使平面上任一点 M 变到 M' , 它们满足 $\overrightarrow{OM'} = k \overrightarrow{OM}$, 其中, 常数 $k > 0$, 则称 τ 是同位相似(或位似), 称 O 为位似中心, k 称为位似系数.

- (1) 适当选取标架, 求出位似 τ 的公式;
- (2) 证明位似是仿射变换;
- (3) 证明位似保持角度不变;
- (4) 证明位似可以分解成某两个伸缩的乘积.

7. 如果平面的一个点变换 τ , 使得对应线段的长度之比为一个正常数 k , 则称 τ 为相似, 称 k 为相似系数.

- (1) 证明相似是仿射变换;
- (2) 证明相似把一个三角形变到一个与之相似的三角形;

(3)证明相似可以分解成一个正交变换与一个位似的乘积.

8. 设平面的一个仿射变换 τ 使直线 l 上的每一点都不动, $\tau(A)=A'$, $\tau(B)=B'$. 证明:

(1)直线 AB 与 $A'B'$ 或者同时平行于 l , 或者相交于 l 上一点.

(2)直线 AA' 与 BB' 彼此平行.

9. 在题8中的 τ , 假如有一个点 M 和它的像点 M' 的连线 $MM' \parallel l$, 这时称 τ 为错切, l 称为错切轴. 证明: 在适当选取的仿射坐标系中, 错切的公式为

$$\begin{cases} x' = x + ay, \\ y' = y, \end{cases}$$

并且证明错切不改变图形的面积.

5.4 二次曲线的度量分类与仿射分类

在1872年, 德国数学家 F. Klein 提出了按变换群给各种几何学科进行分类的思想, 对几何学的研究有很大的影响. 对这一思想, 我们将作一简单的介绍. 以平面上二次曲线为研究对象, 说明它在度量几何学(欧几里得几何学)与仿射几何学中各是怎样分类的.

5.4.1 变换群与几何学科分类

由5.2和5.3节我们知道, 平面上所有正交变换的集合构成平面上的一个变换群, 称之为平面上的正交群; 平面上所有仿射变换的集合也构成平面上的一个变换群, 称之为仿射群.

如果变换群 G 中的一个子集 H 也构成一个变换群, 则称 H 为 G 的子变换群.

由于正交变换也是仿射变换, 所以正交群是仿射群的子变换群.

另外, 平面上绕原点的旋转变换的全体也构成群, 称为平面上的旋转群, 平面上的刚体运动的全体也构成群, 称为平面上的运动群. 以上变换群的关系为

$$\text{旋转群} \subset \text{运动群} \subset \text{正交群} \subset \text{仿射群}.$$

定义 5.4.1 几何图形在正交变换下的不变性质(或几何量)称为图形的度量性质(或正交不变量), 研究这些性质的几何学称为度量几何学(即欧几里得几何学); 几何图形在仿射变换下的不变性质(或几何量)称为图形的仿射性质(或仿射不变量), 研究仿射性质的几何学称为仿射几何学.

由于正交群是仿射群的子变换群, 所以仿射性质(仿射不变量)也是度量性质(正交不变量). 但是反之, 度量性质不一定是仿射性质.

仿射性质有共线、平行、相交、中心对称、二次曲线的直径的共轭性等. 度量性质有垂直、轴对称等.

仿射不变量有共线三点的简单比, 代数曲线的次数等. 正交不变量有两点间的距离、两向量的夹角、图形的面积以及二次曲线的 I_1, I_2, I_3 等.

一般而言,仿射变换可以改变两点之间的距离、两直线间的夹角,因此,关于距离、角度等的性质和不变量就不是仿射性质和仿射不变量.

5.4.2 二次曲线的度量分类

经过平面上的一个正交变换或仿射变换,平面上的一个图形变成另一图形,它们之间有什么样的关系呢?为此给出如下定义.

定义 5.4.2 如果有一个平面的正交变换把 C_1 变到 C_2 ,那么平面上的图形 C_1 和 C_2 称为正交等价的(或度量等价的),记为 $C_1 \sim C_2$.

如果有一个平面的仿射变换把 C_1 变到 C_2 ,那么平面上的图形 C_1 和 C_2 称为仿射等价的,也记为 $C_1 \sim C_2$.

在此,图形看作由点组成的集合,所谓一变换把图形 C_1 变到 C_2 ,就是指这个变换引起集合 C_1 到 C_2 的一个双射.

由于正交变换包含了刚体运动和反射,因此所谓两个图形是正交等价的的就是两个图形可以重合的意思.

不论是正交等价还是仿射等价都是图形间的一种“关系”.由于正交变换的全体构成一个变换群,所以作为一个“关系”来讲具有如下三个性质:

- (i) 反身性,即 $C_1 \sim C_1$;
- (ii) 对称性,若 $C_1 \sim C_2$,则 $C_2 \sim C_1$;
- (iii) 传递性,若 $C_1 \sim C_2, C_2 \sim C_3$,则 $C_1 \sim C_3$.

仿射等价这种“关系”也具有以上三个性质.具有以上三个性质的“关系”称为等价关系.于是正交等价和仿射等价的关系都是等价关系.

从每一图形 C 出发,考虑所有与 C 正交等价的图形,就得到图形的一个集合,称为 C 的正交等价类,记为 $[C]$. 由于 $[C]$ 中任意两个图形都与 C 正交等价,根据对称性和传递性,所以它们也正交等价.这样,由正交等价的关系我们就把平面上的图形分成了一些正交等价类,每一类中任意两个图形都正交等价,而不同类中的图形都不正交等价.同样,根据仿射等价的关系,把平面上的图形分成一些仿射等价类.由正交群 $\subset$ 仿射群,从而每个正交等价类都包含在某一个仿射等价类中作为它的一部分.

前一章中,我们用直角坐标变换,将二次曲线的方程化简为九类.由于直角坐标变换和正交点变换的公式在形式上是一致的,所以可以把直角坐标变换理解为正交变换,在一个正交等价类中找出方程最简单的曲线作为此正交等价类的代表.因此,可以将关于二次曲线分类定理改述为关于二次曲线度量分类的定理.

定理 5.4.1 在直角坐标系中任意二次曲线度量(正交)等价于下列曲线之一:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1, & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= -1, & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 0, \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1, & \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 0, & x^2 &= 2py, \\ x^2 - a^2 &= 0, & x^2 + a^2 &= 0, & x^2 &= 0, \end{aligned}$$

其中, a, b, p 均为正数.

这九种曲线彼此不度量等价, 且同一种方程表示的曲线当系数不同时, 它们也彼此不度量等价. 因此, 二次曲线共有无穷多个度量等价类.

5.4.3 二次曲线的仿射分类

定理 5.4.2 在仿射坐标系中, 任意二次曲线仿射等价于下列曲线之一:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, & x^2 + y^2 &= -1, & x^2 + y^2 &= 0, \\ x^2 - y^2 &= 1, & x^2 - y^2 &= 0, & x^2 &= y, \\ x^2 - 1 &= 0, & x^2 + 1 &= 0, & x^2 &= 0. \end{aligned}$$

将定理 5.4.1 中的九种方程用仿射变换进一步简化就得到定理 5.4.2.

前五种方程作变换

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{a}x, \\ y' = \frac{1}{b}y. \end{cases}$$

对 $x^2 = 2py$ 作变换

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = 2py. \end{cases}$$

对 $x^2 - a^2 = 0, x^2 + a^2 = 0$ 作变换

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{a}, \\ y' = y. \end{cases}$$

这九种曲线彼此不仿射等价, 但任一条二次曲线可以仿射等价于其中之一. 因此, 二次曲线的仿射等价类共有九个.

例 5.4.1 证明: 椭圆的任意一对共轭直径把椭圆的内部分成四块面积相等的部分.

证明 任给一个椭圆 C , 任取它的一对共轭直径 l_1 和 l_2 . 由定理 5.4.2 知, 椭圆 C 与单位圆 $C_1: x^2 + y^2 = 1$ 在同一个仿射类中, 所以存在仿射变换 τ 把 C 变到 C_1 . 由于直径的共轭性是仿射不变的, 因此, τ 把 l_1, l_2 变成 C_1 的一对共轭直径 l_1' 和 l_2' . 设 C 的内部被 l_1 和 l_2 分成的四块是 $C^{(i)} (i=1, 2, 3, 4)$, C_1 的内部被 l_1' 和 l_2' 分成的相应四块是 $C_1^{(i)} (i=1, 2, 3, 4)$, 则显然有 $\tau(C^{(i)}) = C_1^{(i)} (i=1, 2, 3, 4)$. 因

为圆 C_1 的共轭直径互相垂直, 所以 $C_1^{(i)} (i=1, 2, 3, 4)$ 的面积彼此相等. 由 $C_1^{(i)}$ 与 $C^{(i)}$ 的面积之比等于 τ 的变积系数 $(i=1, 2, 3, 4)$, 所以 $C^{(i)} (i=1, 2, 3, 4)$ 的面积也彼此相等.

习题 5.4

1. 证明: 椭圆的共轭直径与椭圆的交点处的切线构成的平行四边形的面积是一常数.
2. 证明: 椭圆的任一外切平行四边形的两条对角线所在的直线是椭圆的一对共轭直径.
3. 证明: 双曲线的切线与它的渐近线确定的三角形的面积是一个常数.
4. 证明: 双曲线的两条渐近线之间的切线段被切点等分.
5. 证明: 所有内接于椭圆的四边形中面积最大的是以一对共轭直径和椭圆的交点为顶点的平行四边形.
6. 下列概念中哪些是图形的度量性质, 哪些是仿射性质:
 - (1) 等边三角形, (2) 平行四边形, (3) 多边形,
 - (4) 三角形的中线, (5) 三角形的高线, (6) 圆的半径.
7. 证明: 如果平面的仿射变换 τ 将一个圆变成它自身, 则 τ 是正交变换.

5.5 空间的正交变换与仿射变换

与平面的情形一样, 可以讨论空间的刚体运动、正交变换与仿射变换. 由于证明的方法是类似的, 所以对于某些结论不加以证明.

5.5.1 空间的正交变换

定义 5.5.1 空间的一个点变换, 如果保持点之间的距离不变, 称之为正交(点)变换(或等距变换).

例 5.5.1 空间中取定一点 O , 取定一向量 v , 对于任意一点 P , 规定它在映射 σ 下的像 P' 满足——

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + v, \quad (5.5.1)$$

则称 σ 是沿方向 v 的平移. 易见平移保持点之间的距离不变, 因此, 平移是正交变换.

例 5.5.2 空间中所有点绕一定直线的旋转是正交变换.

例 5.5.3 取定一平面 Π , 设映射 σ 把空间中每一个点对应到它关于平面 Π 的对称点, 则 σ 称为关于平面 Π 的镜面反射, 简称反射, 镜面反射是正交变换.

空间的正交变换有如下性质.

性质 1 恒等变换是正交变换.

性质 2 正交变换的乘积是正交变换.

性质 3 正交变换是双射, 正交变换的逆变换是正交变换.

由以上三个性质得,空间的正交变换全体组成的集合是空间的一个变换群,称为空间的**正交变换群**,简称为**正交群**.

由正交点变换诱导的正交向量变换有如下性质.

性质 4 正交变换保持向量的内积不变,保持向量的线性关系不变.

由性质 4 很容易得到下列性质.

性质 5 正交变换将直线变成直线,并保持共线三点的简单比不变.

性质 6 正交变换将平面变成平面,将相交平面变成相交平面,将平行平面变成平行平面.

定理 5.5.1 正交变换 σ 将直角标架 I 变成直角标架 II,且使任一点 P 的 I 坐标等于 $\sigma(P)$ 的 II 坐标.反之,具有此性质的点变换一定是正交变换.

思考题:将直角标架变为直角标架的变换是否一定是正交变换? 举例说明.

定理 5.5.2 空间的正交(点)变换 σ 在一直角坐标系中的公式为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad (5.5.2)$$

其中, $A=(a_{ij})$ 是正交矩阵.

反之,如果空间的一个点变换 σ 在一个直角坐标系中的公式为(5.5.2),且系数矩阵 $A=(a_{ij})$ 是正交矩阵,则 σ 是正交(点)变换.

定义 5.5.2 空间的正交变换 σ ,若它在直角坐标系中的公式的系数矩阵 A 的行列式 $|A|=+1$,则称 σ 是**第一类**的;若 $|A|=-1$,则称 σ 是**第二类**的.

设 σ 是例 5.5.2 中转角为 θ 的旋转.以 l 为 z 轴建立直角坐标系 $I=\{O; e_1, e_2, e_3\}$, σ 把 I 变成直角坐标系 $II=\{O; e_1', e_2', e_3'\}$,则有

$$\begin{aligned} e_1' &= e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta, \\ e_2' &= -e_1 \sin \theta + e_2 \cos \theta, \\ e_3' &= e_3. \end{aligned}$$

因此从 I 到 II 的坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}. \quad (5.5.3)$$

空间中任取一点 P ,设 P 的 I 坐标为 (x, y, z) , $\sigma(P)=P'$ 的 I 坐标为 (x', y', z') . 由定理 5.5.1, P' 的 II 坐标为 $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$. 对 P' 应用公式(5.5.3)得

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (5.5.4)$$

现在把公式(5.5.4)的右端的 (x, y, z) 理解为 P 的 I 坐标,则(5.5.4)就是旋转 σ

在直角坐标系 I 中的公式. 易见 σ 是第一类的.

设 τ 是例 5.5.3 中的反射, 以 Π 为 xOy 面建立一直角坐标系, 则 τ 的公式为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (5.5.5)$$

易知反射是第二类的.

命题 5.5.1 若 σ 是第一类正交变换, 且保持原点不动, 则 σ 必定是绕过原点的某一条定直线的旋转.

命题 5.5.2 若 σ 是第二类正交变换, 且保持原点不动, 则 σ 必是一个镜面反射, 或是一个镜面反射与一个绕定直线的旋转的乘积.

以上证明略.

空间的(刚体)运动是平移, 或绕定直线的旋转, 或它们的乘积.

于是由以上两个命题得下面的定理.

定理 5.5.3 空间的正交变换或者是运动, 或者是一个运动与一个镜面反射的乘积.

5.5.2 空间的仿射变换

定义 5.5.3 空间的一个点变换 τ , 如果 τ 在一个仿射坐标系中的公式为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad (5.5.6)$$

其中, 系数矩阵 $\mathbf{A}$ 是可逆的, 则称 τ 是空间的仿射点变换.

此定义与仿射坐标系的选择无关.

空间的仿射变换的性质有:

- (1) 恒等变换是仿射变换;
- (2) 两个仿射变换的乘积仍然是仿射变换;
- (3) 仿射变换是双射, 它的逆变换是仿射变换;
- (4) 仿射点变换诱导的仿射向量变换保持向量的线性关系不变;
- (5) 仿射变换把直线变成直线, 且保持共线三点的简单比不变;
- (6) 仿射变换把平面变成平面, 相交平面变成相交平面, 平行平面变成平行平面.

由性质(1)、(2)、(3)知道, 空间的仿射变换的全体组成的集合是空间的一个变换群, 称为仿射变换群, 简称仿射群.

定理 5.5.4 仿射变换 τ 将一个仿射标架 I 变成仿射标架 II, 且任一点 P 的 I 坐标等于 $\tau(P)=P'$ 的 II 坐标. 反之, 具有此性质的空间的点变换是仿射变换.

定理 5.5.5 空间的任何一个仿射变换可分解为一个正交变换与一个沿三个互相垂直方向伸缩的乘积.

定理 5.5.6 设仿射变换 τ 由公式(5.5.6)给出, 则 τ 按同一比值($\det A$ 的绝对值)改变任意空间区域的体积.

其证明思路与定理 5.3.3 的证明一样, 只要将三角形的面积改成平行六面体的体积.

5.5.3 二次曲面的度量分类与仿射分类

在第4章中, 我们用直角坐标变换将二次曲面的一般方程化简, 得到17种曲面的结论. 由于直角坐标变换公式和正交变换公式的形式是一样的, 所以我们可以将二次曲面分类定理改述为二次曲面的度量分类定理.

定理 5.5.7 在直角坐标系中任意二次曲面度量等价于下列曲面之一:

- | | |
|--|--|
| (1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0;$ | (2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0;$ |
| (3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0;$ | (4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0;$ |
| (5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0;$ | (6) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0;$ |
| (7) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0;$ | (8) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0;$ |
| (9) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$ | (10) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0;$ |
| (11) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$ | (12) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0;$ |
| (13) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0;$ | (14) $x^2 - 2py = 0;$ |
| (15) $x^2 - a^2 = 0;$ | (16) $x^2 + a^2 = 0;$ |
| (17) $x^2 = 0.$ | |

其中, a, b, c, p 均为正数. 这17种二次曲面彼此不度量等价, 且同一种方程表示的曲面如果系数有不同时, 它们也不度量等价. 因此, 二次曲面共有无穷多个度量等价类.

在定理 5.5.7 的各方程中, 再进行一适当的仿射变换, 就可得到二次曲面的仿射分类定理.

定理 5.5.8 二次曲面仿射等价于下列曲面之一:

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| (1) $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0;$ | (2) $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0;$ |
| (3) $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0;$ | (4) $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0;$ |
| (5) $x^2 + y^2 - z^2 = 0;$ | (6) $x^2 + y^2 + z^2 = 0;$ |

- (7) $x^2 + y^2 - z = 0$; (8) $x^2 - y^2 - z = 0$;
 (9) $x^2 + y^2 - 1 = 0$; (10) $x^2 + y^2 + 1 = 0$;
 (11) $x^2 - y^2 - 1 = 0$; (12) $x^2 + y^2 = 0$;
 (13) $x^2 - y^2 = 0$; (14) $x^2 - y = 0$;
 (15) $x^2 - 1 = 0$; (16) $x^2 + 1 = 0$;
 (17) $x^2 = 0$.

证明 在定理 5.5.7 中的(1)~(6), (9)~(13)及(15)~(17)中, 作仿射变换

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{a}, \\ y' = \frac{y}{b}, \\ z' = \frac{z}{c}. \end{cases}$$

(7)、(8)两式作仿射变换

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{a}, \\ y' = \frac{y}{b}, \\ z' = 2z. \end{cases}$$

(14)中作仿射变换

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = 2py, \\ z' = z. \end{cases}$$

就可得到定理 5.5.8 中的各式.

于是二次曲面的仿射等价类共有 17 类.

习题 5.5

1. 证明下述空间的点变换是第一类正交变换, 并且求转轴.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

2. 在直角坐标系中, 求出把点 $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ 分别变成点 $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 0)$ 的正交变换公式.

3. 设 σ 是空间的第一类正交变换, 证明: 对于空间的任意两个向量 v_1, v_2 , 有

$$(1) \sigma(v_1) \cdot \sigma(v_2) = v_1 \cdot v_2;$$

$$(2) \sigma(v_1) \times \sigma(v_2) = \sigma(v_1 \times v_2).$$

4. 证明:空间中任给两组不共面的四点 A_1, A_2, A_3, A_4 和 B_1, B_2, B_3, B_4 , 则存在唯一的仿射变换, 把 A_i 变成 $B_i, i=1, 2, 3, 4$.
5. 在仿射变换下, 在不共线的 3 个不动点所在的平面上的每一点都是不动点.
6. 求椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 围成的区域的体积.
7. 证明: 分别对于两个平行平面的反射变换的乘积是一个平移.
8. 证明: 分别对于两个相交平面的反射变换的乘积是一个绕定直线的旋转.

数学王子——高斯^①



高斯 (Gauss, 1777~1855), 德国数学家、天文学家和物理学家, 被誉为历史上伟大的数学家之一, 和阿基米德、牛顿并列, 同享盛名. 高斯童年时就显示出很高的才能. 1792 年在费迪南德公爵的资助下进入不伦瑞克的卡罗琳学院学习. 1795 年进入格丁根大学, 曾在攻读古代语还是数学专业上产生犹豫, 但数学上的及时成功, 促使他致力于数学研究. 大学的第一年归纳发现数论中关于二次剩余定律, 即二次互反律; 第二年又得出正十七边形的尺规作图法, 并给出可用尺规作图的正多边形的条件, 解决了两千年来悬而未决的难题. 1798 年转入海尔姆斯台特大学, 翌年因证明代数基本定理而获博士学位. 从 1807 年到 1855 年逝世, 他一直担任格丁根大学教授, 兼格丁根天文台台长.

高斯的数学成就遍及各个领域, 在数论、代数学、非欧几里得几何、微分几何、超几何级数、复变函数论, 以及椭圆函数论等方面均有一系列开创性贡献. 他十分注重数学的应用, 并且在对天文学、大地测量学和磁学的研究中发明和发展了最小二乘法、曲面论、位势论等.

非欧几何是高斯的又一重大发现. 有关的思想最早可以追溯到 1792 年, 即高斯 15 岁那年. 那时他已经意识到除欧氏几何外还存在着一个无逻辑矛盾的几何, 其中欧氏几何的平行公设不成立. 1799 年他开始重视开发新几何学的内容, 并在 1813 年左右形成较完整的思想. 高斯深信非欧几何在逻辑上相容并确认其具有可应用性. 虽然高斯生前没有发表这一成果, 但是他的遗稿表明, 他是非欧几何的创立者之一.

高斯十分善于把数学成果有效地应用于其他科学领域. 他 1809 年发明的最小二乘法, 对天文学和其他许多需要处理观察数据的学科有重要意义. 另外, 像球面

^① 摘自 <http://baike.baidu.com>, 有删减

三角中高斯方程组和内插法计算中的高斯内插公式在天文学计算中也有广泛应用. 高斯致力于天文学研究前后约 20 年, 在这领域内的伟大著作之一是《天体运动理论》(1809).

1816 年起, 高斯把数学应用从天体转向大地. 他受汉诺威政府的委托进行大地测量. 在这项工作中他创造了两种彼此独立的方法, 推导旋转椭圆体上计算经纬度及方位角之差至四次项的公式.

在对大地测量的研究中, 高斯创立了关于曲面的新理论. 1827 年发表《关于曲面的一般研究》, 书中全面阐述了三维空间中的曲面的微分几何, 并提出了内蕴曲面理论, 在微分几何中获得扩展和系统化. 高斯的曲面理论后来被他的学生黎曼所发展, 成为爱因斯坦广义相对论的数学基础.

高斯在学术上十分谨慎, 他恪守的原则是: “问题在思想上没有弄通之前决不动笔”, 并且认为只有在证明的严密性、文字词句和叙述体裁都达到无懈可击时才发表自己的成果, 这使得他发表的作品比起他一生中所做的大量研究来说相对地要少得多.

第 5 章小结

我们所讲的变换是在平面和空间上的非退化的线性点变换, 将点变成点, 它可诱导出向量的变换, 线性代数中的变换就是向量的变换, 将向量变成向量. 这些变换当然可以推广到一般维数的欧氏空间和线性空间上.

平面的正交变换是保距的, 即变换前两点的距离与变换后两像点的距离不变. 平面的正交变换有三个基本的变换: 平移, 旋转和反射. 运动是平移和旋转的乘积.

在直角坐标系下, 设平面的正交变换将点 $P(x, y)$ 变为点 $P'(x', y')$, 则它表现为一种线性变换:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

其中 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 是正交矩阵. 它诱导的向量变换将向量 (u, v) 变为向量 (u', v') , 则有

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

从公式的形式上看, 点变换与坐标变换没什么区别. 实际上, 坐标变换变的是坐标系, 点没变, 表示同一个点在不同坐标系下的坐标间的关系. 点变换变的是点, 坐标系没变, 表示变换前后的点在同一个坐标系下的坐标间的关系.

平面的所有正交变换构成一个正交变换群. 正交变换将直线变为直线, 相交直

线变为相交直线,平行直线变为平行直线,保持代数曲线的次数不变,保持向量的内积和线性关系不变.

基本定理 1 平面的正交变换或是一个运动,或是一个反射与一个运动的乘积.

基本定理 2 平面的正交变换将直角坐标系变成新的直角坐标系,并使得每一点在原坐标系下的坐标与它的像在新坐标系下的坐标相同.反之,具有这种性质的变换是正交变换.

由基本定理 2,点变换的公式可理解为像点从原坐标系到新坐标系的坐标变换.

根据变换矩阵的行列式的符号将线性变换分为两类,正的叫第一类,负的叫第二类.运动属于第一类,反射与运动的乘积为第二类.

更深刻的一个结论是:任何一个正交变换都可表示为有限个反射的乘积.

平面的仿射变换,在几何上的特征是保持共线三点的简单比不变.在仿射坐标系下,表现为线性变换:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

其中 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 是可逆矩阵.

仿射变换不保持点间的距离不变,向量间的夹角也会改变.典型的例子是在一个方向上的伸缩.平面的所有仿射变换组成仿射变换群.

仿射变换将直线变为直线,相交直线变为相交直线,平行直线变为平行直线,保持代数曲线的次数不变.在一个仿射变换下,平面图形的面积按同一比值变化.由给定的两组不共线三点可确定唯一的一个仿射变换.仿射变换保持二次曲线的直径的共轭性不变.

基本定理 1 平面的仿射变换将仿射坐标系变为新的仿射坐标系,并使得每一点在原坐标系下的坐标与它的像在新坐标系下的坐标相同.

基本定理 2 平面的任何一个仿射变换可分解为一个正交变换与一个沿两个互相垂直方向伸缩的乘积.

研究几何图形在正交变换下的不变性质和不变几何量的几何学就是欧氏(度量)几何学.研究几何图形在仿射变换下的不变性质和不变几何量的几何学就是仿射几何学.由于仿射群包含正交群,所以仿射性质也是度量性质,反之不成立.

二次曲线的仿射等价分类共有 9 种,而度量等价分类有无限多种.比如半径不同的圆就不度量等价,但仿射等价.

空间的正交变换中的旋转是绕一直线的旋转,反射是关于一个平面的反射.空间的正交变换与仿射变换的概念和性质基本与平面的相仿.

第 6 章 平面射影几何简介

从第 5 章中知道平面的仿射变换的重要特性是把共线的三点变成共线的三点. 我们还会遇到更一般的从一平面到另一平面保持点的共线关系的映射. 例如, 给了两个相交平面 Π_0 与 Π_1 以及两平面外的一点 O , 将点 $P \in \Pi_0$ 变成 OP 与 Π_1 的交点 P' 的法则, 此法则称为 Π_0 到 Π_1 的以 O 为中心的**中心投影**(图 6.1). 在中心投影下, 点的共线关系是保持不变的. 但是, 对于 $OM \parallel \Pi_1$ 的点 $M \in \Pi_0$ 在 Π_1 上没有像, 因而中心投影不是映射; 同样对于 $ON \parallel \Pi_0$ 的点 $N \in \Pi_1$ 在 Π_0 上没有原像. 为了使中心投影成为一个映射并且是双射, 就需要在 Π_0 与 Π_1 上添加一些新的点, 使点 $M \in \Pi_0$ 都有像, 点 $N \in \Pi_1$ 都有原像. 这样的添加了点的平面就形成了射影平面的概念.

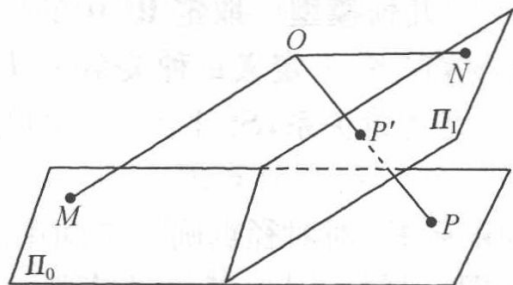


图 6.1

本章介绍射影平面, 射影平面到射影平面的射影映射及其性质, 射影平面上的二次曲线的射影分类.

6.1 齐次坐标, 射影平面

6.1.1 齐次坐标, 射影平面

在欧氏平面 Π 上给定一仿射标架 $\{O; e_1, e_2\}$, 那么任意点 $P \in \Pi$ 有仿射坐标 (x, y) . 我们把与 x, y 由关系

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3} \quad (6.1.1)$$

联系的任何三个不全为零的实数 x_1, x_2, x_3 称为点 P 关于仿射标架 $\{O; e_1, e_2\}$ 的**齐次(仿射)坐标**, 记为 $P[x_1, x_2, x_3]$. 若 $[x_1, x_2, x_3]$ 是点 P 的齐次坐标, 则对任意非零实数 λ , $[\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3]$ 也是点 P 的齐次坐标, 因而点 P 的齐次坐标不唯一. 对于 $P \in \Pi$, 显然有 $x_3 \neq 0$. 点 P 的仿射坐标 (x, y) 称为点 P 的**非齐次(仿射)坐标**. 对于齐次坐标 $[x_1, x_2, 0]$ 不表示 Π 上的任何点, 我们把齐次坐标为 $[x_1, x_2, 0]$ 的“点”称为**无穷远点**. Π 加进这些无穷远点后称为**扩大的欧氏平面**, 记为 $\bar{\Pi}$. 我们把扩大的欧氏平面称为**射影平面**. 平面 Π 上的点称为 $\bar{\Pi}$ 的**通常点**.

扩大的欧氏平面是射影平面的一种模型, 下面再介绍两种.

(1) **解析模型** 在去掉原点 O 的欧氏空间 $\mathbf{R}^3 - \{O\}$ 中定义一种关系 $\sim$: 点 $P(x_1, x_2, x_3) \sim$ 点 $P'(y_1, y_2, y_3)$ 当且仅当存在非零实数 λ , 使 $\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OP'}$, 即 $(x_1, x_2, x_3) = \lambda(y_1, y_2, y_3)$. 很明显关系 $\sim$ 是等价关系, $\mathbf{R}^3 - \{O\}$ 关于等价关系 $\sim$ 的等价类的集合构成射影平面的解析模型, 记为 P^2 或 RP^2 . 点 $P(x_1, x_2, x_3)$ 的等价类记为 $[x_1, x_2, x_3]$. 直观上, P^2 是把空间中过原点的直线视为一点, 即 $P^2 = \{\mathbf{R}^3 \text{ 中过原点的直线}\} = \{[x_1, x_2, x_3] | (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 - \{O\}\} = \mathbf{R}^3 - \{O\} / \sim$. 实际上, $[x_1, x_2, x_3]$ 是 $\bar{\Pi}$ 上的点关于某一仿射标架的齐次坐标. 因此, $\bar{\Pi}$ 上齐次坐标为 $[x_1, x_2, x_3]$ 的点可理解为坐标为 (x_1, x_2, x_3) 的向量, 共线的非零向量在 $\bar{\Pi}$ 上表示同一点.

(2) **几何模型** 取定 $\mathbf{R}^3$ 中的一个球面, 不妨取中心在原点, 半径为 1 的单位球面 S^2 , 在 S^2 上定义一种关系 $\sim: P \sim P'$ 当且仅当 $P = P'$ 或 P, P' 是一对对径点. 关系 $\sim$ 是等价关系, S^2 上关于 $\sim$ 的等价类的集合就组成射影平面的几何模型, 记为 $S^2 / \sim$.

由于每一对对径点确定空间中过原点的唯一一条直线, 因而本质上, $\bar{\Pi}, P^2, S^2 / \sim$ 是一样的. 因为 $\bar{\Pi}$ 更为直观, 因此我们用 $\bar{\Pi}$ 作为射影平面的模型. 其中解析模型 P^2 更容易推广到高维的情形, 即 n 维射影空间 $P^n = \{\mathbf{R}^{n+1} \text{ 中过原点的直线}\}$.

6.1.2 直线的齐次坐标方程

因为欧氏平面 Π 上的任何直线都由方程

$$a_1x + a_2y + a_3 = 0 \quad (a_1^2 + a_2^2 \neq 0) \quad (6.1.2)$$

给出, 并且任何这样的方程都是某一条直线的方程, 所以 Π 上的任何直线在齐次坐标下都由方程

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \quad (a_1^2 + a_2^2 \neq 0) \quad (6.1.3)$$

给出, 并且任何一个这样的方程都对应着 Π 上的一条直线.

我们把无穷远点的几何轨迹称为**无穷远直线**, 根据无穷远点的齐次坐标的特点, 无穷远直线可由方程

$$x_3 = 0 \quad (6.1.4)$$

来表示.

于是, 射影平面上, 任何方程

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0, \quad (6.1.5)$$

其中 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$, 都是某条直线的方程. 如果 $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$, 则称为**射影直线**. 如果 $a_1 = a_2 = 0$, 则(6.1.5)表示无穷远直线. 方程(6.1.5)称为直线的**普通方程**.

在射影平面上, 任何两条直线都相交, 这是因为线性方程组

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0, \end{cases} \quad (6.1.6)$$

总有非零解. 特别地, 两条平行直线交于无穷远点.

思考题:射影平面上的直线能否将射影平面分割? 直线是否封闭?

对于射影直线而言,如果其方程为(6.1.5),则无穷远点 $[-a_2, a_1, 0]$ 在此射影直线上,且是此射影直线上的唯一的无穷远点. 实际上, $(-a_2):a_1$ 表示仿射坐标中的直线 $a_1x+a_2y+a_3=0$ 的方向,因而直观上,射影直线就是欧氏平面上的直线添加上此直线的方向所得到的.

如果中心投影在两个射影平面 $\overline{\Pi_0}$ 和 $\overline{\Pi_1}$ 上进行,就能使中心投影成为一个双射 $\tau:\overline{\Pi_0}\rightarrow\overline{\Pi_1}$,其中投影中心 $O\notin\overline{\Pi_0}\cup\overline{\Pi_1}$. 如果点 $P\in\Pi_0$,使 OP 与 Π_1 交于点 P' ,则 $\tau(P)=P'$;如果点 $N\in\Pi_1$ 使 $ON\parallel\Pi_0$,则 N 的原像为 Π_0 中与 ON 平行的直线 l 上添加的无穷远点;如果点 $M\in\Pi_0$ 使 $OM\parallel\Pi_1$,则 M 的像为 Π_1 中与 OM 平行的直线 l' 上添加的无穷远点;直线 $\{M\in\Pi_0\mid OM\parallel\Pi_1\}$ 上添加的无穷远点的像为直线 $\{N\in\Pi_1\mid ON\parallel\Pi_0\}$ 上的无穷远点.

由于射影平面上的直线方程(6.1.5)是三元一次齐次方程,所以 $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$ 与 $b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0$ 表示同一直线当且仅当存在非零实数 λ ,使 $(a_1, a_2, a_3)=\lambda(b_1, b_2, b_3)$. 于是我们可以用直线方程的系数 (a_1, a_2, a_3) 来表示直线,把 (a_1, a_2, a_3) 称为直线的齐次坐标.

方程(6.1.5)表示直线 (a_1, a_2, a_3) 上的所有点,称为直线的点方程. 如果让 (a_1, a_2, a_3) 变动,(6.1.5)表示过固定点 $[x_1, x_2, x_3]$ 的所有直线,故又称为点的线方程. 经过定点的所有直线称为线束.

思考题:设三点 $A[a_1, a_2, a_3], B[b_1, b_2, b_3], C[c_1, c_2, c_3]$,则 A, B, C 共线的充要条件为

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

思考题:用齐次坐标写出直线的参数方程.

习题 6.1

1. 设扩大的欧氏平面 $\overline{\Pi}$ 上两点 $A[3, -1, 2], B[2, 0, 1]$,求

(1)直线 AB 在齐次坐标中的普通方程和参数方程;

(2)直线 AB 上的无穷远点的齐次坐标和它所对应的参数值.

2. 证明:扩大的欧氏平面 $\overline{\Pi}$ 上的三直线

$$x_1 + x_2 = 0, \quad 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \quad 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

共点,并求该点的齐次坐标.

3. 在扩大的欧氏平面 $\overline{\Pi}$ 上,给出了 Π 的欧氏直线在仿射坐标中的方程,求由它确定的射影直线在齐次坐标中的方程,并求出它上面的无穷远点:

(1) $x+2y-1=0$;

(2) $x=0$;

(3) $y=1$;

(4) $3x-2y=0$.

6.2 对偶原理

既然直线也有齐次坐标,因此从齐次坐标的观点来看, $\bar{\Pi}$ 上的点与直线的地位对等.为了方便,两点 A, B 确定的直线用 AB 表示,两直线 l_1, l_2 的交点用 $l_1 l_2$ 表示.如果点 P 在直线 l 上,就说点 P 与直线 l 关联;如果直线 l 经过点 P ,就说直线 l 与 P 关联.

设 $\varphi(\text{点}, \text{线})$ 是 $\bar{\Pi}$ 上一些点和一些直线的关联关系的一个命题,那么,把命题中的点都改写成直线,把直线都改写成点,并且保持关联关系不变及其他一切表述不变,则得到的命题 $\varphi(\text{线}, \text{点})$ 称为原命题 $\varphi(\text{点}, \text{线})$ 的**对偶命题**.

原命题

(1) $\bar{\Pi}$ 上三点共线当且仅当它们的齐次坐标组成的行列式为0.

(2) $\bar{\Pi}$ 上若三点 P_1, P_2, P_3 不共线,则三线 $P_1 P_2, P_2 P_3, P_3 P_1$ 不共点.

(3)Desargues 定理:在 $\bar{\Pi}$ 上,如果两个三角形的对应顶点的连线共点,则它们的对应边的交点共线.

对偶命题

(1)' $\bar{\Pi}$ 上三线共点当且仅当它们的齐次坐标组成的行列式为0.

(2)' $\bar{\Pi}$ 上若三线 l_1, l_2, l_3 不共点,则三点 $l_1 l_2, l_2 l_3, l_3 l_1$ 不共线.

(3)'Desargues 逆定理:在 $\bar{\Pi}$ 上,如果两个三角形的对应边的交点共线,则它们的对应顶点的连线共点.

射影平面上的**对偶原理**:在 $\bar{\Pi}$ 上,如果一个命题 $\varphi(\text{点}, \text{线})$ 可以证明是一条定理,则它的对偶命题 $\varphi(\text{线}, \text{点})$ 也可以证明是一条定理.

我们已经证明上述表中的命题(1)成立,根据对偶原理,可以肯定它的对偶命题(1)'也成立.

下面我们来证明 Desargues 定理,从而也就证明了它的逆定理.

Desargues 定理 在 $\bar{\Pi}$ 上,若两个三角形的对应顶点的连线共点,则它们的对应边的交点共线.

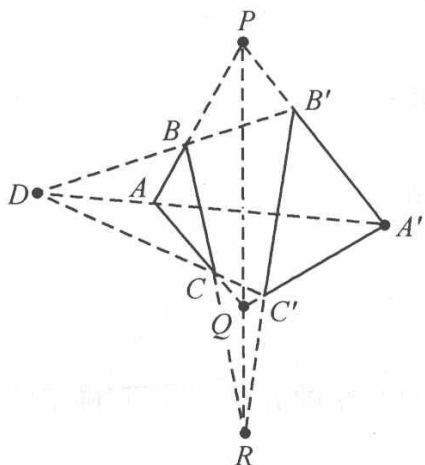


图 6.2

证明 如图6.2,设三角形 ABC 与三角形 $A'B'C'$ 的对应顶点的连线 AA', BB', CC' 相交于点 D .

(1)如果 A 与 A' 重合,则 AB 与 $A'B'$ 交于点 $A(A')$, AC 与 $A'C'$ 交于点 $A(A')$. 设 BC 与 $B'C'$ 交于点 R ,则显然 A, A, R 共线.

(2)设任何一组对应顶点不重合. 在 $\bar{\Pi}$ 上取定一标架,各点的齐次坐标分别为 $A[a_1, a_2, a_3]$, $B[b_1, b_2, b_3]$, $C[c_1, c_2, c_3]$, $A'[a'_1, a'_2, a'_3]$, $B'[b'_1, b'_2, b'_3]$, $C'[c'_1, c'_2, c'_3]$, $D[d_1, d_2, d_3]$. 设 AB 与 $A'B'$ 交于点 $P[p_1, p_2, p_3]$, AC 与 $A'C'$ 交于

点 $Q[q_1, q_2, q_3]$, BC 与 $B'C'$ 交于点 $R[r_1, r_2, r_3]$.

因为 AA', BB', CC' 三线共点于 D , 所以存在三组不全为 0 的实数 $\lambda, \lambda'; \mu, \mu'; \gamma, \gamma'$ 使

$$\begin{aligned}(d_1, d_2, d_3) &= \lambda(a_1, a_2, a_3) + \lambda'(a_1', a_2', a_3') \\ &= \mu(b_1, b_2, b_3) + \mu'(b_1', b_2', b_3') \\ &= \gamma(c_1, c_2, c_3) + \gamma'(c_1', c_2', c_3').\end{aligned}$$

因而有

$$\begin{aligned}& \lambda(a_1, a_2, a_3) - \mu(b_1, b_2, b_3) \\ &= -\lambda'(a_1', a_2', a_3') + \mu'(b_1', b_2', b_3') \\ &= \rho_1(p_1, p_2, p_3), \\ & \lambda(a_1, a_2, a_3) - \gamma(c_1, c_2, c_3) \\ &= -\lambda'(a_1', a_2', a_3') + \gamma'(c_1', c_2', c_3') \\ &= \rho_2(q_1, q_2, q_3), \\ & \mu(b_1, b_2, b_3) - \gamma(c_1, c_2, c_3) \\ &= -\mu'(b_1', b_2', b_3') + \gamma'(c_1', c_2', c_3') \\ &= \rho_3(r_1, r_2, r_3),\end{aligned}$$

其中, ρ_1, ρ_2, ρ_3 均为非零数. 由以上三等式得

$$\rho_1(p_1, p_2, p_3) - \rho_2(q_1, q_2, q_3) + \rho_3(r_1, r_2, r_3) = 0,$$

故 P, Q, R 三点共线.

思考题: 另举几个关于(线, 点)的对偶命题.

习题 6.2

1. 证明: 射影平面上若三点 P_1, P_2, P_3 不共线, 则三线 P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 不共点.
2. 三角形 ABC 的顶点 A, B, C 分别在共点的三直线 l_1, l_2, l_3 上移动, AB 和 BC 分别通过定点 P 和 Q 时, 则 CA 也通过 PQ 上的一个定点.
3. 三角形 ABC 的二顶点 A 与 B 分别在定直线 l_1, l_2 上移动, 三边 AB, BC, CA 分别通过共线的定点 P, Q, R , 试证顶点 C 的轨迹是一条直线.
4. 设射影平面上直线 l_i 的齐次坐标为 $(\eta_{i1}, \eta_{i2}, \eta_{i3})$, $i=1, 2, 3$, 并且 $l_1 \neq l_2$, 证明 l_1, l_2, l_3 共点当且仅当存在不全为零的实数 λ 和 μ 使得

$$\eta_{3j} = \lambda\eta_{1j} + \mu\eta_{2j}, \quad j = 1, 2, 3.$$

5. 写出第 4 题的对偶命题.

6.3 交 比

在中心投影下线段的分比是要改变的. 本节介绍射影平面上经过中心投影后

保持不变的共线四点的交比.

6.3.1 交比的定义和性质

设 $A, B, C, D \in \bar{l}$ 共线, A, B 为通常点, $C \neq B$. 先将共线三点的简单比值 (A, B, C) 推广到 C 可以为无穷远点: 当 C 为无穷远点时, 规定 $(A, B, C) = -1$.

定义 6.3.1 设在 $\bar{l}$ 上四点 A, B, C, D 共线, A, B 为两个不同的通常点, $C \neq B, D \neq A, B$. 称 (A, B, C) 与 (A, B, D) 的比值为 A, B, C, D 的交比, 记为 $(A, B; C, D)$, 即

$$(A, B; C, D) = \frac{(A, B, C)}{(A, B, D)} = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{DB}{AD}. \quad (6.3.1)$$

若 A, B, C 各不相同, 当 $D = B$ 时, 规定 $(A, B; C, D) = 0$. 利用共线四点的交比, 我们可以定义 $\bar{l}$ 上共点的四线的交比. 设 $l_i (i=1, 2, 3, 4)$ 是过点 O 的四直线, $l_1 \neq l_2$, 任取一条不过 O 点的直线 l , 设 $ll_i = A_i (i=1, 2, 3, 4)$. 如果 $(A_1, A_2; A_3, A_4)$ 有定义, 则定义共点四线 $l_i (i=1, 2, 3, 4)$ 的交比为

$$(l_1, l_2; l_3, l_4) = (A_1, A_2; A_3, A_4). \quad (6.3.2)$$

下面证明 (6.3.2) 与截线 l 的选取无关.

设 l_i 的齐次坐标为 $(\eta_{i1}, \eta_{i2}, \eta_{i3})$, $A_i [a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}]$, $i=1, 2, 3, 4$. 因为 $l_1 \neq l_2$, 所以由三线共点的条件知, 存在两组不全为零的实数 $\lambda_1, \mu_1; \lambda_2, \mu_2$ 使

$$\begin{cases} (\eta_{31}, \eta_{32}, \eta_{33}) = \lambda_1 (\eta_{11}, \eta_{12}, \eta_{13}) + \mu_1 (\eta_{21}, \eta_{22}, \eta_{23}), \\ (\eta_{41}, \eta_{42}, \eta_{43}) = \lambda_2 (\eta_{11}, \eta_{12}, \eta_{13}) + \mu_2 (\eta_{21}, \eta_{22}, \eta_{23}). \end{cases} \quad (6.3.3)$$

我们知道, 在仿射坐标系下, 若两点 $M_i (x_i, y_i) (i=1, 2)$ 的连线与直线 $Ax + By + C = 0$ 的交点为 M , 则有

$$\frac{M_1 M}{M M_2} = - \frac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C}.$$

由齐次坐标与仿射坐标的关系知: l_3 的仿射方程为 $\eta_{31}x + \eta_{32}y + \eta_{33} = 0$, A_1, A_2 的仿射坐标为 $(\frac{a_{11}}{a_{13}}, \frac{a_{12}}{a_{13}}), (\frac{a_{21}}{a_{23}}, \frac{a_{22}}{a_{23}})$. 于是

$$\begin{aligned} \frac{A_1 A_3}{A_3 A_2} &= - \frac{\eta_{31} \left(\frac{a_{11}}{a_{13}} \right) + \eta_{32} \left(\frac{a_{12}}{a_{13}} \right) + \eta_{33}}{\eta_{31} \left(\frac{a_{21}}{a_{23}} \right) + \eta_{32} \left(\frac{a_{22}}{a_{23}} \right) + \eta_{33}} \\ &= - \frac{\mu_1}{\lambda_1} \cdot \frac{\eta_{21} \left(\frac{a_{11}}{a_{13}} \right) + \eta_{22} \left(\frac{a_{12}}{a_{13}} \right) + \eta_{23}}{\eta_{11} \left(\frac{a_{21}}{a_{23}} \right) + \eta_{12} \left(\frac{a_{22}}{a_{23}} \right) + \eta_{13}}. \end{aligned}$$

同理,

$$\frac{A_1 A_4}{A_4 A_2} = -\frac{\mu_2}{\lambda_2} \cdot \frac{\eta_{21} \left(\frac{a_{11}}{a_{13}} \right) + \eta_{22} \left(\frac{a_{12}}{a_{13}} \right) + \eta_{23}}{\eta_{11} \left(\frac{a_{21}}{a_{23}} \right) + \eta_{12} \left(\frac{a_{22}}{a_{23}} \right) + \eta_{13}}.$$

故

$$(l_1, l_2; l_3, l_4) = (A_1, A_2; A_3, A_4) = \frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2}. \quad (6.3.4)$$

由此可见,共点四线的交比只与四线的相互位置有关,与截线 l 的选取无关. 因而,若 A_i 中有无穷远点,且 A_1, A_2, A_3 互不相同, $A_4 \neq A_1$, 选截线 l' 与 l_i 均不平行,则可以将它们转化为通常点的交比,这样就推广了共线四点的交比的定义,如图 6.3 所示, $(l_1, l_2; l_3, l_4) = (A_1, A_2; A_3, A_4) = (A_1', A_2'; A_3', A_4')$.

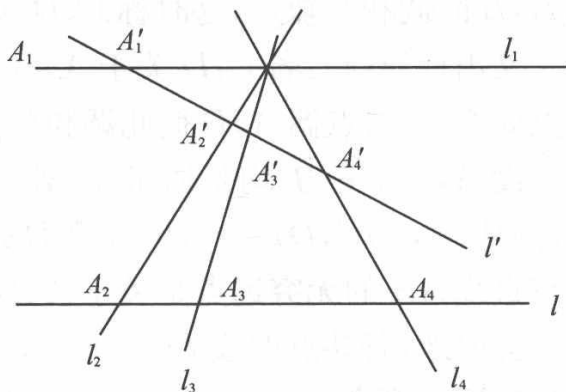


图 6.3

利用对偶原理,可以得到下面的定理.

定理 6.3.1 在 $\bar{\Pi}$ 上的共线四点 A, B, C, D , 其中 A, B, C 各不相同, 且 $D \neq A$, 设 $A[a_1, a_2, a_3], B[b_1, b_2, b_3], C[c_1, c_2, c_3], D[d_1, d_2, d_3]$, 且

$$(c_1, c_2, c_3) = \lambda_1 (a_1, a_2, a_3) + \mu_1 (b_1, b_2, b_3),$$

$$(d_1, d_2, d_3) = \lambda_2 (a_1, a_2, a_3) + \mu_2 (b_1, b_2, b_3),$$

则

$$(A, B; C, D) = \frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2}.$$

因为交比都可转化为通常点的交比, 因而不难证明如下性质.

$$(1) (A, B; C, D) = (C, D; A, B) = (B, A; D, C);$$

(2) 若 $D \neq B$, 则有

$$(B, A; C, D) = \frac{1}{(A, B; C, D)} = (A, B; D, C);$$

$$(3) (A, B; C, D) = 1 - (A, C; B, D);$$

(4) 设 O 是通常点, $l_i (i=1, 2, 3, 4)$ 是共点于 O 的四直线, 用 $\angle(l_i, l_j)$ 表示直线 l_i 绕 O 转到 l_j 的角度, 则

$$(l_1, l_2; l_3, l_4) = \frac{\sin \angle(l_1, l_3)}{\sin \angle(l_3, l_2)} : \frac{\sin \angle(l_1, l_4)}{\sin \angle(l_4, l_2)}. \quad (6.3.5)$$

思考题: $\bar{\Pi}$ 上直线 l 中的三个不同点 A, B, C , 则由交比 $(A, B; C, D)$ 是否唯一确定 l 上的一点 D ?

思考题: 证明性质(1)~(4).

6.3.2 调和点列与调和线束

定义 6.3.2 $\bar{\Pi}$ 上共线四点 A, B, C, D , 若 $(A, B; C, D) = -1$, 则称它们是调和点列, 其中, D 称为 A, B, C 的第四调和点, 且称 D 是点 C 关于点偶 A, B 的调和共轭点.

由交比的性质(2), 若 D 是 C 关于点偶 A, B 的调和共轭点, 则 C 是 D 关于点偶 A, B 的调和共轭点, 这时称 C, D 关于 A, B 调和共轭.

又由性质(1), 若 C, D 关于 A, B 调和共轭, 则 A, B 关于 C, D 调和共轭, 此时称点偶 C, D 与点偶 A, B 彼此调和分割.

设 $A, B, C \in \bar{\Pi}$ 均是通常点, 若 C 是线段 AB (指不含无穷远点的部分) 的中点, 则从 $(A, B; C, D) = -1$ 可推出 D 是直线 AB 上的无穷远点. 因而线段 AB 的中点与直线 AB 的无穷远点是关于 A, B 调和共轭.

类似地, 若共点四线 $l_i (i=1, 2, 3, 4)$ 满足 $(l_1, l_2; l_3, l_4) = -1$, 则称 $l_i (i=1, 2, 3, 4)$ 为调和线束, l_4 称为 l_1, l_2, l_3 的第四调和线.

设 $O \in \bar{\Pi}$ 是通常点, $l_i (i=1, 2, 3, 4)$ 是共点于 O 的四条不同直线, 若 l_3 是 l_1 与 l_2 所夹的一个角的角平分线, 且 $(l_1, l_2; l_3, l_4) = -1$, 则由公式(3.5)得到 l_4 是 l_1 与 l_2 所夹的另一个角的角平分线, 即 l_1, l_2 所夹的两个角的角平分线关于 l_1, l_2 调和共轭.

习题 6.3

1. 在射影平面 $\bar{\Pi}$ 上, 设共线三点 $A[1, 2, 5], B[1, 0, 3], C[-1, 2, -1]$, 在直线 AB 上求一点 D , 使 $(A, B; C, D) = 5$.
2. 在射影平面 $\bar{\Pi}$ 上, 给了共线的四个通常点的仿射坐标, $A(2, -4), B(-4, 5), C(4, -7), D(0, -1)$, 求它们的交比 $(A, B; C, D)$.
3. 在射影平面 $\bar{\Pi}$ 上, 设共点于 O 的三直线 l_1, l_2, l_3 的齐次坐标分别为 $(-1, 0, 3), (3, 1, -2), (1, 1, 2)$, 求通过 O 的一条直线 l_4 , 使得交比 $(l_1, l_2; l_3, l_4) = -3$.

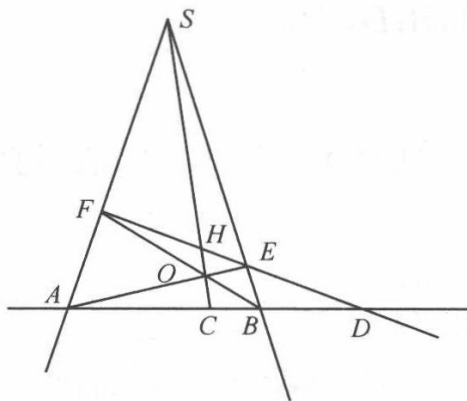


图 6.4

4. 设 A, B, C, D, E 是共线的五点, 且两两不同, 证明 $(A, B; C, D) \cdot (A, B; D, E) \cdot (A, B; C, E) = 1$.
5. 设 O 是 $\bar{\Pi}$ 上的通常点, l_1, l_2, l_3, l_4 是共点于 O 的四条不同直线, 证明(6.3.5)式.
6. 证明: 在欧氏平面上, 已给一个圆上任意四个不同的固定点 A_1, A_2, A_3, A_4 , 则它们到圆上任意第五点 P 的连线的交比 $(PA_1, PA_2; PA_3, PA_4)$ 是常数, 与 P 在圆上的位置无关. 如果 P 与 A_i 中某点重合, 比如 A_4 , 则用 A_4 处的切线替代 PA_4 .
7. 由四个点 S, F, O, E (其中任意三点不共线) 和由它

们两两相连的六条直线构成的图形叫做完备四边形(图 6.4). 证明: 两个点 C, D 调和分割两个点 A, B .

6.4 射影变换与二次曲线的射影分类

6.4.1 射影变换

首先, 我们给出欧氏平面上的射影变换的定义, 然后把它延续到扩大的欧氏平面上.

定义 6.4.1 在欧氏平面 Π 上由公式

$$\begin{cases} x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \\ y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} \end{cases} \quad (6.4.1)$$

给出的点变换称为欧氏平面 Π 上的**射影变换**, 其中, $A = (a_{ij})$ 是可逆的.

思考题: 证明射影变换的定义与坐标系的选取无关.

直接验证可得到: 先后完成两个射影变换的结果仍是一射影变换; 射影变换是可逆的, 且逆变换是射影变换; 恒等变换是射影变换. 因而射影变换的全体组成一个变换群, 称为**射影变换群**, 简称**射影群**.

思考题: 平面上的仿射变换是否为射影变换?

射影变换(6.4.1)在不与直线 $a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0$ 相交的图形上均可施行.

射影变换有仿射变换的许多性质, 特别是在射影变换下, 同一直线上的点仍变为同一直线上的点.

欧氏平面 Π 上的射影变换(6.4.1)可以延续到扩大的欧氏平面 $\bar{\Pi}$ 上, 即在齐次坐标下由公式

$$\begin{cases} \rho x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \rho x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \rho x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} \quad (6.4.2)$$

给出的点变换, 称为射影平面上的**射影变换**, 其中, $A = (a_{ij})$ 是可逆的, $\rho \neq 0$ 对于不同的点有不同的值.

很明显, 射影平面上的射影变换的全体组成一个变换群, 称为射影平面上的**射影变换群**.

变换(6.4.2)在 Π 上与(6.4.1)是一致的, 实际上, 在 Π 上, $x_3 \neq 0, x_3' \neq 0$, 因此用第三个公式逐个去除前两个就得到(6.4.1).

思考题: 在射影变换(6.4.2)下, 无穷远直线 $x_3 = 0$ 变成什么样的直线? 什么直线变成无穷远直线?

在射影变换下,共线四点的交比是保持不变的,即交比是射影不变量.

设 $\bar{\Pi}$ 上共线四点 $P[p_1, p_2, p_3], Q[q_1, q_2, q_3], C[c_1, c_2, c_3], D[d_1, d_2, d_3]$. P, Q, C 互不相同, $D \neq P$, 且

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}.$$

经过射影变换(6.4.2)后, P, Q, C, D 的像点 $P'[p_1', p_2', p_3'], Q'[q_1', q_2', q_3'], C'[c_1', c_2', c_3'], D'[d_1', d_2', d_3']$, 则

$$\begin{aligned} \rho_c \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 A \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \mu_1 A \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 \rho_P \begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \\ p_3' \end{pmatrix} + \mu_1 \rho_Q \begin{pmatrix} q_1' \\ q_2' \\ q_3' \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

同理

$$\rho_D \begin{pmatrix} d_1' \\ d_2' \\ d_3' \end{pmatrix} = \lambda_2 \rho_P \begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \\ p_3' \end{pmatrix} + \mu_2 \rho_Q \begin{pmatrix} q_1' \\ q_2' \\ q_3' \end{pmatrix},$$

由此可知, P', Q', C', D' 是共线的, 且

$$\begin{aligned} (P', Q'; C', D') &= \frac{\mu_1 \rho_Q}{\lambda_1 \rho_P} : \frac{\mu_2 \rho_Q}{\lambda_2 \rho_P} = \frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2} \\ &= (P, Q; C, D). \end{aligned}$$

6.4.2 二次曲线的射影分类

我们知道,在直角坐标系中,平面上的二次曲线由方程

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (6.4.3)$$

给出,用 $\frac{x_1}{x_3} = x, \frac{x_2}{x_3} = y$ 代入(6.4.3),就得到齐次坐标下的二次曲线的方程

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0. \quad (6.4.4)$$

在射影平面上,满足(6.4.4)的无穷远点 $[x_1, x_2, 0]$ 应适合

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0. \quad (6.4.5)$$

由此可见,满足(6.4.4)的无穷远点实际上是平面上的二次曲线(6.4.3)的渐近方

向. 因而, 射影平面上的二次曲线为平面上的二次曲线补上此曲线的所有渐近方向.

思考题: 射影平面上的二次曲线是否封闭? 请考虑双曲线、抛物线.

定理 6.4.1 射影平面上的二次曲线与下列的五种曲线之一射影等价

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 0, \\ x_1^2 - x_2^2 = 0, \\ x_1^2 = 0. \end{cases} \quad (6.4.6)$$

证明 二次曲线(6.4.4)用矩阵形式可写成

$$(x_1 \ x_2 \ x_3) \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0, \quad (6.4.7)$$

其中 $\mathbf{A}=(a_{ij})$ 是实对称的. 设 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 则 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 不全为零, 且存在正交矩阵 $\mathbf{T}$, 使得

$$\mathbf{TAT}^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

对(6.4.7)施行射影变换

$$\rho \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

那么(6.4.7)就变成

$$\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2 = 0.$$

根据 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的取值情况再施行一个简单的射影变换, 就可得到(6.4.6)中的五类方程.

比如 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 同号, 则施行射影变换

$$\rho \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{|\lambda_1|} & & \\ & \sqrt{|\lambda_2|} & \\ & & \sqrt{|\lambda_3|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

后就变成 $x_1''^2 + x_2''^2 + x_3''^2 = 0$.

由此定理知道, 射影平面上的二次曲线有五个射影类, 前两类是非退化的曲线, 后三类是退化的曲线. 第一类无图形, 第二类是欧氏平面上的椭圆、双曲线和抛物线并且补充了它们的渐近方向, 第三类是一点, 第四类是一对相交直线, 第五类

是一对重合直线.

习题 6.4

1. 证明:射影平面 $\bar{\Pi}$ 上的射影变换把直线变成直线.

2. 求出把曲线

$$(1) (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 \pm (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2 = 0,$$

$$(2) (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3) = 0$$

变成五个射影类之一的射影变换.

3. 在射影平面上, 求出把直线 $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ 分别变为直线 $a_ix_1 + b_ix_2 + c_ix_3 = 0$ ($i=1, 2, 3$) 的射影变换.

6.5 极点和配极

6.5.1 二次曲线的切线

定义 6.5.1 若直线 l 与二次曲线 $\bar{\Gamma}$ 有重合的两个交点, 或 l 整个在 $\bar{\Gamma}$ 上, 则称 l 是 $\bar{\Gamma}$ 的切线, 它们的交点称为切点.

设直线 l 为 $\bar{\Gamma}$ 的切线, 切点为 P , 在 l 上任取一点 $Q \neq P$, 它们的齐次坐标是 $P[p_1, p_2, p_3], Q[q_1, q_2, q_3]$, 则 l 的参数方程为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}. \quad (6.5.1)$$

设二次曲线 $\bar{\Gamma}$ 在齐次坐标下的方程为

$$\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_ix_j = 0, \quad (6.5.2)$$

其中, $a_{ij} = a_{ji}$. (6.5.2) 也可写成矩阵形式

$$(x_1 \ x_2 \ x_3)A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0, \quad (6.5.3)$$

其中, $A = (a_{ij})$ 是实对称矩阵.

将直线 l 的方程 (6.5.1) 代入 $\bar{\Gamma}$ 的方程中得

$$\lambda^2 \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}p_ip_j + \mu^2 \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}q_iq_j + 2\lambda\mu \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}p_iq_j = 0. \quad (6.5.4)$$

现在 l 与 $\bar{\Gamma}$ 有两个重合的交点 P , 则由 (6.5.4) 得

$$\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}p_iq_j = 0,$$

或矩阵形式

$$(p_1 \ p_2 \ p_3)A \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = 0.$$

因而切线上任一点 Q 均适合方程

$$\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} p_i x_j = 0, \quad (6.5.5)$$

或

$$(p_1 \ p_2 \ p_3)A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0. \quad (6.5.6)$$

若 $(p_1 \ p_2 \ p_3)A \neq 0$, 则 (6.5.5) 就是切线 l 的方程. 若 $(p_1, p_2, p_3)A = 0$, 则 x_1, x_2, x_3 可取任意不全为零的实数, 这意味着扩大欧氏平面上任一点与点 P 的连线都是 $\bar{\Gamma}$ 的切线.

使 $(p_1 \ p_2 \ p_3)A = 0$ 的二次曲线 $\bar{\Gamma}$ 上的点 $P[p_1, p_2, p_3]$ 称为 $\bar{\Gamma}$ 的奇点.

思考题: 什么样的二次曲线没有奇点?

若直线 l 整个在 $\bar{\Gamma}$ 上, 由于 λ, μ 可取任何值, 则由 (6.5.4) 仍可得到 (6.5.5) 或 (6.5.6).

6.5.2 极点和配极

假定二次曲线 $\bar{\Gamma}$ 在齐次坐标中的方程为 (6.5.2), 取不在 $\bar{\Gamma}$ 上的点 P , 过点 P 引任意直线 l , 使得 l 与 $\bar{\Gamma}$ 有两个不同的交点 A, B , 作点 P 关于 A, B 的调和共轭点 Q , 即使 $(A, B; P, Q) = -1$. 用这样的方法作出的点 Q 的几何轨迹称为点 P 关于二次曲线 $\bar{\Gamma}$ 的配极, 而点 P 对于配极而言称为极点 (图 6.5).

我们来建立配极的方程. 设 $Q[q_1, q_2, q_3]$ 是点 $P[p_1, p_2, p_3]$ 关于 $\bar{\Gamma}$ 的配极上的任一点, 则直线 PQ 的参数方程为 (6.5.1). 设 A, B 对应的参数值分别为 λ_1, μ_1 和 λ_2, μ_2 , 因此

$$(P, Q; A, B) = \frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2}.$$

因为 $(A, B; P, Q) = (P, Q; A, B)$, 所以

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} = 0. \quad (6.5.7)$$

将直线 PQ 的参数方程 (6.5.1) 代入二次曲线

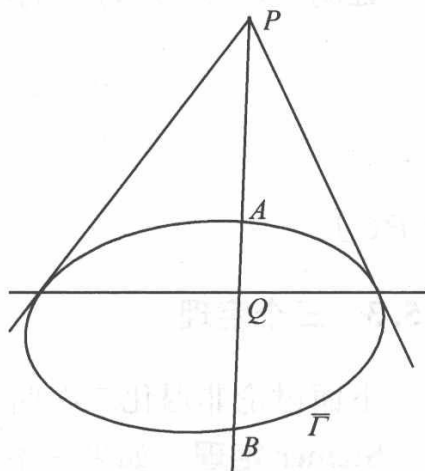


图 6.5

$\bar{\Gamma}$ 的方程中,得(6.5.4).由韦达定理和(6.5.7)同样得到

$$\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} p_i q_j = 0.$$

这说明点 P 关于 $\bar{\Gamma}$ 的配极上的任一点 $Q[q_1, q_2, q_3]$ 满足方程(6.5.5)或(6.5.6). 由于点 $P \notin \bar{\Gamma}$, 所以 $(p_1 \ p_2 \ p_3)A \neq 0$, 从而(6.5.5)表示一直线. 于是点 $P \notin \bar{\Gamma}$ 关于 $\bar{\Gamma}$ 的配极上的任一点 Q 都在直线(6.5.5)上, 为简便起见, 把直线(6.5.5)称为点 $P \notin \bar{\Gamma}$ 关于二次曲线 $\bar{\Gamma}$ 的配极, 因此配极也称为极线, 它的方程是(6.5.5)或(6.5.6).

若点 $P \in \bar{\Gamma}$, 且 P 不是 $\bar{\Gamma}$ 的奇点, 则以 P 为切点的切线方程也是(6.5.5). 因此, 我们把以 P 为切点的切线就称为点 $P \in \bar{\Gamma}$ 关于 $\bar{\Gamma}$ 的配极.

若点 $P \in \bar{\Gamma}$ 是 $\bar{\Gamma}$ 的奇点, 则 $\bar{\Gamma}$ 上任一点都满足(6.5.5). 这时, 我们把任一条直线都看作是奇点 P 的配极.

我们指出配极的两个重要性质.

(1) 点 P 的配极上的任何一点 Q 的配极通过点 P .

证明 在点 $P[p_1, p_2, p_3]$ 的配极上任取一点 $Q[q_1, q_2, q_3]$, 则

$$(p_1 \ p_2 \ p_3)A \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = 0,$$

两边取转置得

$$(q_1 \ q_2 \ q_3)A \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = 0,$$

这表明点 P 在 Q 的配极上.

(2) 点 P 的配极通过点 P 当且仅当 P 在二次曲线 $\bar{\Gamma}$ 上.

证明 $P[p_1, p_2, p_3]$ 的配极通过点 P 当且仅当

$$(p_1 \ p_2 \ p_3)A \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = 0,$$

故 $P \in \bar{\Gamma}$.

6.5.3 三个定理

下面讨论非退化二次曲线的三个定理, 这里的非退化曲线不包括无轨迹.

Steiner 定理 如果一条非退化二次曲线 $\bar{\Gamma}$ 上给定四个不同的点 A_1, A_2, A_3, A_4 , 则 $\bar{\Gamma}$ 上任意一点 P 与它们的连线的交比 $(PA_1, PA_2; PA_3, PA_4)$ 是一个常数, 而与点 P 在 $\bar{\Gamma}$ 上的位置无关. 当 P 点与 A_1, A_2, A_3, A_4 中的某一点重合, 比如 A_4 ,

则 PA_1, PA_2, PA_3 与 A_4 处的切线 A_4T 的交比 $(PA_1, PA_2; PA_3, PT)$ 仍等于上述常数.

证明 因为任意一条非退化二次曲线与方程为 $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ 的曲线射影等价, 而交比是射影不变量, 所以只须对圆有此定理成立即可. 习题 6.3 的第 6 题说明 Steiner 定理对圆成立, 故 Steiner 定理成立.

利用 Steiner 定理可以证明 Pascal 定理.

Pascal 定理 一条非退化二次曲线的内接六边形的三对对边的交点一定共线.

证明 设 A, B, C, A', B', C' 在一条非退化二次曲线 $\bar{\Gamma}$ 上, 设 AB' 与 $A'B$ 交于 P , AC' 与 $A'C$ 交于 Q , BC' 与 $B'C$ 交于 R (图 6.6), 要证明 P, Q, R 共线.

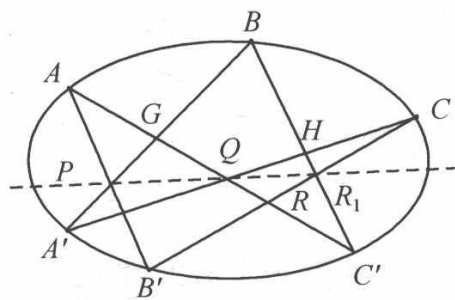


图 6.6

设 BC' 与 PQ 交于 R_1 , 若能证得 $R_1 = R$, 则 R 在 PQ 上.

设 BC' 与 $A'C$ 交于 H , 设 AC' 与 $A'B$ 交于 G , 从过点 Q 的线束与割线 BC' 来看, 有

$$(QB, QH; QC', QR_1) = (B, H; C', R_1).$$

从过 Q 的线束与割线 BA' 来看, 有

$$\begin{aligned} (QB, QH; QC', QR_1) &= (QB, QA'; QG, QP) \\ &= (B, A'; G, P). \end{aligned}$$

于是

$$(B, H; C', R_1) = (B, A'; G, P). \quad (6.5.8)$$

再从过点 A 的线束与割线 BA' 来看有

$$(B, A'; G, P) = (AB, AA'; AG, AP). \quad (6.5.9)$$

对于过点 A 的线束和过点 C 的线束, 用 Steiner 定理, 得

$$\begin{aligned} (AB, AA'; AG, AP) &= (AB, AA'; AC', AB') \\ &= (CB, CA'; CC', CB'). \end{aligned} \quad (6.5.10)$$

再从过点 C 的线束和割线 BC' 来看, 有

$$(CB, CA'; CC', CB') = (B, H; C', R), \quad (6.5.11)$$

由 (6.5.8) ~ (6.5.11) 得

$$(B, H; C', R_1) = (B, H; C', R),$$

从而 $R_1 = R$, 即 R 在直线 PQ 上.

Pascal 定理的对偶命题是 Brianchon 定理.

Brianchon 定理 连接非退化二次曲线的外切六边形的对顶点所成的三条直线相交于一点 (图 6.7).

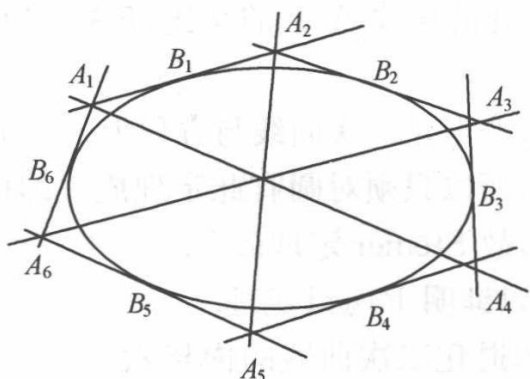


图 6.7

习题 6.5

1. 在射影平面上给了五个点 $A[1, -1, 0]$, $B[2, 0, -1]$, $C[0, 2, -1]$, $D[1, 4, -2]$, $E[2, 3, -2]$, 求由它们所确定的二次曲线.
2. 求点 $P[1, 2, 1]$ 关于二次曲线 $\bar{\Gamma}: x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 = 0$ 的配极.
3. 证明: 非退化二次曲线的中心(若有的话)的配极是无穷远直线.
4. 假定 $\bar{\Gamma}$ 是圆锥曲线. 任取一直线 l 及 l 上的一点 A , 作点 A 关于 $\bar{\Gamma}$ 的配极 l_A , 它交 l 于点 B , 点 B 的配极 l_B 交直线 l_A 于点 C 且通过 A . 这样, 我们作出三角形 ABC , 它的边是对顶点的配极. 这个三角形叫自配极三角形.

证明: 如果取直线 $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ 作自配极三角形的边, 那么圆锥曲线 $\bar{\Gamma}$ 的方程将有形式

$$\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2 = 0.$$

5. 证明: 圆锥曲线焦点的配极是准线.
6. 用下述方法由任意点 S 作圆锥曲线的切线(图 6.8): 直线 1 和 2 是任意作的, 其余的直线根据图中的编号顺序作出, 直线 8 和 9 就是切线. 说明这种作法的理由.

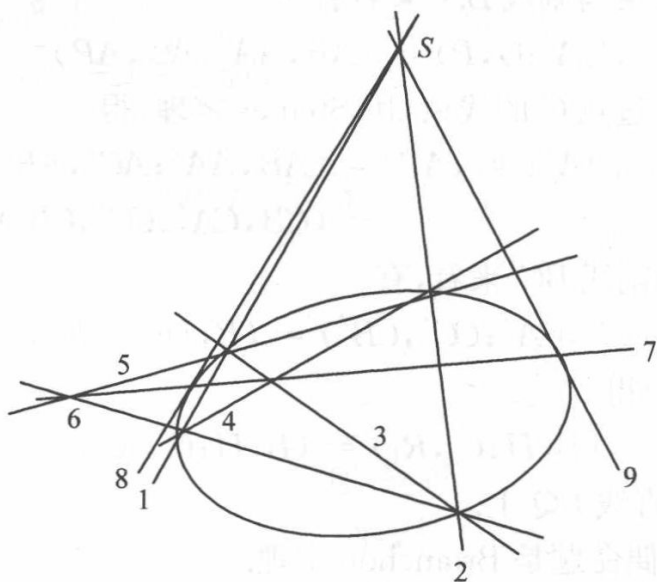


图 6.8

7. 证明:双曲线上的无穷远点的配极是它的渐近线,从而双曲线上无穷远点的切线是渐近线.

几何学发展简史

几何,英文为 Geometry,是由希腊文演变而来,其原意是土地测量.“依据很多的实证,几何是埃及人创造的,并且产生于土地测量.由于尼罗河泛滥,经常冲毁界限,这样测量变成了必要的工作.无可置疑的,这类科学和其他科学一样,都发生于人类的需要.”(Костин В И, 1956).明代徐光启(1562~1633)和天主教耶稣会传教士利玛窦(Matteo Ricci, 1552~1610)翻译欧几里得的《几何原本》时将 Geometry 一词译为几何学.

几何学是研究形的科学,以视觉思维为主导,培养人的观察能力、空间想象能力与空间洞察力.几何学最先发展起来的是欧几里得几何.到 17 世纪的文艺复兴时期,几何学上第一个重要成果是法国数学家笛卡尔(1596~1650)和费马(1601~1665)的解析几何.他们把代数方法应用于几何学,实现了数与形的相互结合与沟通.随着透视画的出现,又诞生了一门全新的几何学——射影几何学.到 19 世纪上半叶,非欧几何诞生了.人们的思想得到很大的解放,各种非欧几何、微分几何、拓扑学都相继诞生,几何学进入一个空前繁荣的时期.

1. 从欧几里得几何到非欧几何

欧几里得(Euclid, 约公元前 330~公元前 275)的《几何原本》是一部划时代的著作,其伟大的历史意义在于它是用公理方法建立起演绎体系的典范.公元 7 世纪以前的所谓几何学,都只限于一些具体问题的解答,并且是十分粗糙的、零碎的、片段的和单凭经验的.当积累起来的几何知识相当丰富时,把这一领域的材料系统地整理,并阐明它们的关系,就显得十分必要了.由于几何学本来的对象是图形,研究它必然要借助于空间的直观性.但是直观性也有不可靠的时候,因而在明确地规定了定义和公理的基础上,排除直观性,建立合乎逻辑的几何学体系的思想在古希腊时代就已经开始.欧几里得就是在这种思想的基础上,编著完成了他的《几何原本》.

《几何原本》的第一卷是全书逻辑推理的基础,给出全书最初出现的 23 个定义,5 条公设,5 条公理:

定义

(1)点没有部分;

(2)线有长度,而没有宽度;

(3)线的界限是点(注:《几何原本》中没有伸展到无穷的线);

- (4) 直线是同其中各点看齐的线;
- (5) 面只有长度和宽度;
- (6) 面的界限是线;
- (7) 平面是与其上的直线看齐的面;
- (8) 平面上的角是在一个平面上的两条相交直线的相互倾斜度;
- (9) 当形成一角的两线是一直线时, 这个角叫做平角;
- (10)~(22)(略)(是关于直角、锐角、钝角、圆、三角形、四边形等的定义);
- (23) 平行直线是在同一个平面内, 而且往两个方向无限延长后, 在这两个方向上都不会相交的直线.

关于几何的基本规定的 5 条公设:

- (1) 从每个点到每个其他的点必定可以引直线;
- (2) 每条直线都可以无限延伸;
- (3) 以任意点作中心, 通过任何给定的另一点, 可以作一个圆;
- (4) 所有的直角都相等;
- (5) 同平面内如有一条直线与另两条直线相交, 且在前一条直线的某一侧所交的两内角之和小于两直角, 则后两条直线无限延长后必在这一侧相交.

关于量的基本规定的 5 条公理:

- (1) 等于同量的量相等;
- (2) 等量加等量, 总量相等;
- (3) 等量减等量, 余量相等;
- (4) 彼此重合的量是全等的;
- (5) 整体大于部分.

欧几里得在此基础上运用逻辑推理, 导出了许许多多的命题(在《几何原本》中包含了 465 个命题), 从而构成了欧几里得几何学.

由前三个公设限定了用圆规和无刻度的直尺可以完成哪些作图, 因此这两件仪器被称为欧几里得工具, 使用它们可以完成的作图称为欧几里得作图, 即尺规作图. 这种作图增加了几何学的趣味性. 人们花费大量的精力去解决古希腊的几何三大难题:

- (1) 倍立方问题: 求作一个立方体, 使体积为已知立方体的二倍;
- (2) 三等分角问题: 三等分一个(任意的)已知角;
- (3) 化圆为方问题: 求作一个正方形, 使其面积为已知圆的面积.

尽管是徒劳的, 但从各方面推动了数学的发展.

将公设、公理分开是从亚里士多德开始的, 现代数学将公设、公理都叫做公理. 第五条公设与“在平面内过已知直线外一点, 只有一条直线与已知直线不相交(平行)”相等价. 现在把后一个命题叫做欧几里得平行公理.

自《几何原本》问世以来,直到 19 世纪大半段以前,数学家一般都把欧几里得的著作看成是严格性方面的典范,但也有少数数学家看出了其中的严重缺点,并设法纠正.首先,欧几里得的定义不能成为一种数学定义,完全不是在逻辑意义下的定义,有的不过是几何对象的直观描述(比如点,线,面等),有的含混不清.这些定义在后面的论证中根本是无用的.其次,欧几里得的公设和公理是远不够的.因而在《几何原本》中许多命题的证明不得不借助直观,或者无形中引用了欧几里得的 5 个公理之外的公设或公理的东西.

针对欧氏几何的上述缺陷,数学家们做了大量工作来弥补这些缺陷.到 19 世纪末,德国数学家希尔伯特(Hilbert, 1862~1943)于 1899 年发表了《几何基础》,书中成功地建立了欧几里得几何的一套完整的公理系统.首先他提出了 8 个基本概念,其中三个是基本对象:点、直线、面;5 个是基本关系:点属于(或关联)直线,点属于(或关联)平面,一点在两点之间,两线段合同,两角合同.这些基本概念应服从 5 组公理:关联公理;顺序公理;合同公理;连续公理;平行公理(郑崇友等, 2005; 沈纯理等, 2004).

另外,人们注意到欧几里得平行公理是否与其他公理独立的问题,即平行公理可否能用其他公理推导出来.虽然有很多学者(包括一些很有名的数学家)曾宣称已经证明平行公理能用其他公理推导出来,但最后发现这些论证都是不正确的.于是从意大利数学家 Saccheri(1733)开始,人们就转而猜平行公理与其他公理是独立的,即它不能从其他公理推导出来.罗巴切夫斯基(Лобачевский Н И, 1792~1856)和波尔约(Bolyai, 1802~1860)分别在 1829 年和 1832 年独立地用平行公理的反命题,即用“过给定直线外一点,存在着至少两条直线与给定的直线不相交”来代替欧几里得平行公理,并由这套新的体系演绎出一套与欧几里得几何迥然不同的命题,但并没有导致任何的矛盾,非欧几何就这样产生了.但是要人们真正信服这种纯理性的几何体系,还是应该将这种“虚”的几何学真正地构造出来,即提供这种“虚”几何的现实模型.19 世纪 70 年代,德国数学家克莱因(Klein, 1849~1925)提出了 Klein 模型,庞加莱(Poincaré, 1854~1912)提出了上半平面 Poincaré 模型.这些模型都能将非欧几何学在人们已经习惯的欧氏空间中实现出来.这样的非欧几何叫做双曲几何.

另一种非欧几何的发现者是德国数学家黎曼(Riemann, 1826~1866).那是他在 1854 年讨论无界和无限概念时得到的成果.欧几里得的第二条公设说:直线可以无限延长.但是,并不一定蕴涵着直线就长短而言是无限的,只不过是说它是无端的或无界的.例如,连接球面上两点的大圆的弧可被沿着该大圆无限延长,使得延长了的弧无端,但确实就长短而言它不是无限的.将欧几里得的公设(1),(2)和(5)作如下的修正:

(1)两个不同的点至少确定一条直线;

(2) 直线是无界的;

(3) 平面上任何两条都相交.

就可得到一种相容的几何学,称为黎曼的非欧几何(椭圆几何).这样的几何可以在球面上实现.

由于罗巴切夫斯基和黎曼的非欧几何的发现,几何学从传统的束缚中解放出来了,从而为大批新的、有趣的几何的发展开辟了广阔的道路,并有广泛的应用,如:在爱因斯坦发现的广义相对论中,用到黎曼几何;由1947年对视空间(从正常的有双目视觉的人心理上看到的空间)所作的研究得出结论:这样的空间最好用罗巴切夫斯基的双曲几何来描述.

如果实数系是相容的,则可以证明以上几种几何的公理系统都是各自相容的、独立的,但都不是完全的.然而奥地利数学家哥德尔(Gödel, 1906~1978)证明了“对于包含自然数系的任何相容的形式体系 F ,存在 F 中的不可判定命题.”及“对于包含自然数系的任何相容的形式体系 F , F 的相容性不能在 F 中被证明.”因而想证明数学的内部相容性问题也就无望了.

2. 解析几何的诞生

欧氏几何是一种度量几何,研究的是与长度和角度有关的量的学科.它的方法是综合的,没有代数的介入,为解析几何的发展留下了余地.

解析几何的诞生是数学史上的一个伟大的里程碑.它的创始人是17世纪的法国数学家笛卡儿和费马.他们都对欧氏几何的局限性表示不满:古代的几何过于抽象,过多地依赖于图形.他们对代数也提出了批评,因为代数过于受法则和公式的约束,缺乏直观,无益于发展思想的艺术.同时,他们认识到几何学提供了有关真实世界的知识和真理,而代数学能用来对抽象的未知量进行推理,是一门潜在的方法科学.因此,把代数学和几何学中的精华结合起来,取长补短,一门新的学科——解析几何诞生了.

解析几何的基本思想是用代数方法研究几何学,从而把空间的论证推进到可以进行计算的数量层面.对空间的几何结构代数化,用一个基本几何量和它的运算来描述空间的结构,这个基本几何量就是向量,基本运算是指向量的加、减、数乘、内积和外积.向量的运算就是基本几何性质的代数化.

将几何对象数量化需要一座桥,那就是“坐标”.在平面上引进所谓“坐标”的概念,并借助这座桥,在平面上的点和有序实数对 (x, y) 之间建立一一对应的关系.每一对实数 (x, y) 都对应于平面上的一个点;反之,每一个点都对应于它的坐标 (x, y) .以这种方式可以将一个代数方程 $f(x, y)=0$ 与平面上一条曲线对应起来,于是几何问题便可归结为代数问题,并反过来通过代数问题的研究发现新的几何结果.

借助坐标来确定点的位置的思想古来有之,古希腊的阿波罗尼奥斯(Apollo-nius,约公元前 262~公元前 190)关于圆锥曲线性质的推导;阿拉伯人通过圆锥曲线交点求解三次方程的研究,都蕴涵着这种思想.解析几何最重要的前驱是法国数学家奥雷斯姆(Oreseme,1323?~1382),他在《论形态幅度》这部著作中提出的形态幅度原理(或称图线原理),甚至接触到函数的图像表示,在此,他借用了“经度”、“纬度”这两个地理学术语来描述他的图线,相当于横坐标和纵坐标.

到了 16 世纪,对运动与变化的研究已变成自然科学的中心问题.这就迫切地需要一种新的数学工具,导致了变量数学即近代数学的诞生.笛卡儿 1637 年发表了著名的哲学著作《更好地指导推理与寻求科学真理的方法论》,该书有三个附录:《几何学》、《折光学》和《气象学》,解析几何的发明包含在《几何学》这篇附录中.

笛卡儿的出发点是一个著名的希腊数学问题——帕普斯问题:

设在平面上给定 3 条直线 l_1, l_2 和 l_3 ,过平面上的点 C 作三条直线分别与 l_1, l_2, l_3 交于点 P, Q, R ,交角分别等于已知角 α_1, α_2 和 α_3 ,求使 $CP \cdot CR = kCQ^2$ 的点 C 的轨迹;如果给定 4 条直线(图 6.9),则求使得 $CP \cdot CR = kCQ \cdot CS$ (k 为常数)点 C 的轨迹.

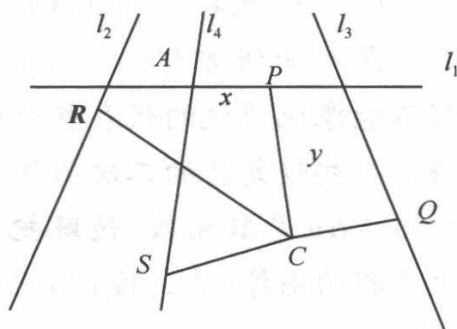


图 6.9

笛卡儿在《几何学》第二卷中,证明了帕普斯结论.他的做法是:记 AP 为 x , PC 为 y ,经简单的几何分析,他用已知量表出 CR, CQ 和 CS 的值,代入 $CP \times CR = CS \times CQ$ (设 $k=1$),得到一个关于 x 和 y 的二次方程

$$y^2 = Ax^2 + Bxy + Cx + Dy, \quad (*)$$

其中 A, B, C, D 是由已知量组成的简单代数式.于是他指出,任给 x 一个值,就得到一个关于 y 的二次方程,从而可以解出 y ,并根据他在《几何学》第一卷中所给的方法,用圆规直尺将 y 画出.如果我们取无穷多个 x 值,就得到无穷多个 y 值,从而得到无穷多个点 C ,所以这些点 C 的轨迹就是方程 $(*)$ 代表的曲线.

在此,笛卡儿选定一条直线 l_1 作为基线(相当于一根坐标轴),以 A 为原点, x 值是基线的长度,从 A 点量起; y 值是另一条线段的长度,该线段从基线出发,与基线交成定角.这样,笛卡儿建立了历史上第一个倾斜坐标系.在《几何学》第三卷中,笛卡儿也给出了直角坐标系的例子(李文林,2002).

费马对于曲线的探讨是从研究古希腊的几何学家阿波罗尼奥斯的成果开始的. 他力图把阿波罗尼奥斯关于轨迹的某些久已失传的证明补充起来, 为此他写了篇幅不大的《平面和立体的轨迹引论》一书. 从他的书和他在 1636 年与罗贝瓦尔等人的通信中, 可以看出他在笛卡儿发表《几何学》之前, 就已经发现了解析几何的基本原理, 发现了用代数方程表示曲线的方法: 他取一条水平的直线作为轴, 并在此直线上确定一点作为原点. 他考虑任意曲线和它上面的一般点 M . 点 M 的位置用两个字母 A, E 来确定, A 表示从原点 O 沿轴线到点 Z 的距离, E 表示从 Z 到 M 的距离 (ZM 与轴线成固定角) (图 6.10). 费马所用的坐标实际上是我们所说的倾斜坐标, 但是 y 轴没有明显地出现, 而且不用负数. 他的 A, E 就是我们的 x, y . 费马清楚地叙述了他的一般原理: “只要在最后的方程中出现了两个未知量, 我们就得到一条轨迹, 这两个量之一, 其末端就绘出一条直线或曲线.” 图中对于不同位置的 E , 其末端 $M, M_1, M_2, \dots$ 就把这条“线”描绘出来, 费马的未知量 A 和 E , 实际上是变数, 或者说, 联系 A 和 E 的方程是不确定的. 在此, 费马采用韦达的方法, 让一个字母代表一类的数, 然后写出联系 A 和 E 的各种方程, 并指明它们所描述的曲线. 例如, 他写出 “ D in A aequetur B in E ”, 用现代的记号就是 “ $Dx = By$ ”, 并指明这代表一条直线. 他还给出了 $d(a-x) = by$ 代表一条直线; $a^2 - x^2 = y^2$ 是圆的方程; $a^2 - x^2 = ky^2$ 是椭圆方程; $xy = a$ 是双曲线方程; $x^2 = ay$ 是抛物线方程. 应该指出, 因费马不用负坐标, 他的方程不能像他所说的代表整个曲线, 但他确实领会到坐标轴可以平移和旋转, 因为他给出一些较复杂的二次曲线方程, 并给出它们的简化形式. 例如, 他曾指出 $d^2 + xy = ax + by$ 是双曲线. 他既把圆锥曲线看成圆锥的平截线, 也看成为平面轨迹和二次方程的图像 (吴文俊, 2003).

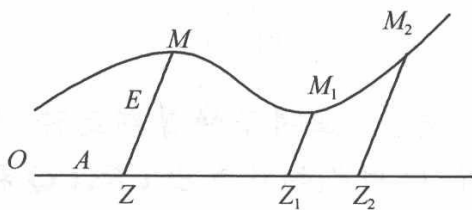


图 6.10

费马和笛卡儿研究解析几何的方法是大相径庭的, 表达形式也截然不同. 费马主要继承了希腊人的思想. 尽管他的工作比较全面系统, 正确地叙述了解析几何的基本思想, 但他的研究主要是完善了阿波罗尼奥斯的工作, 因此古典色彩很浓, 并且沿用了韦达以字母代表数类的思想, 这就要求读者对韦达的代数知识了解甚多. 而笛卡儿则是从批判希腊的传统出发, 决然同这种传统决裂, 走的是革新古代方法的道路. 他的方法更具一般性, 也适用于更广泛的超越曲线. 费马是从方程出发来研究它的轨迹; 而笛卡儿则从轨迹出发建立它的方程. 这正是解析几何中一个问题的正反两个方面的提法. 但各有侧重, 前者是从代数到几何, 而后者是从几何到代

数.从历史的发展来看,后者更具有突破性(吴文俊,2003).

解析几何解决的主要问题是(张顺燕,2004):

- (1)通过计算解决作图问题.例如,分线段成已知比例.
- (2)求具有某种几何性质的曲线或曲面的方程.
- (3)用代数方法证明新的几何定理.
- (4)用几何方法解代数方程.例如,用抛物线与圆的交点解三次和四次代数方程.

解析几何的诞生具有以下的伟大意义(张顺燕,2004):

- (1)数学的研究方向发生了一次重大转折:古代以几何为主导的数学转为以代数和解析为主导的数学.
- (2)以常量为主导的数学转变为以变量为主导的数学,为微积分的诞生奠定了基础.
- (3)使代数和几何融合为一体,实现了几何图形的数量化.
- (4)代数的几何化和几何的代数化,使人类摆脱了现实的束缚,带来了认识新空间的需要,帮助人类从现实世界进入虚拟世界:从3维空间进入到更高维的空间.

3.18、19 世纪的几何^①

对于几何学,18世纪数学家们着眼于分析方法的应用,及与此相联系的坐标几何的发展.虽然早先已有部分结果,但微分几何形成独立的学科主要是在18世纪.

伯努利兄弟以及欧拉、拉格朗日等在确定平面曲线曲率、拐点、渐伸线、渐屈线、测地线及曲线簇包络等方面做出许多贡献;蒙日自1771年起发表的一系列文章,则使微分几何在18世纪的发展臻于高峰.

解析几何的基本课题是对称的坐标轴概念、平面曲线的系统研究等.帕伦于1705年、1713年将解析几何推广至三维情形,该项工作被克莱罗所继续.解析几何突破了笛卡儿以来作为求解几何难题的代数技巧的界限.

对综合几何的兴趣直到18世纪末才被重新唤起,这主要归功于蒙日的《画法几何学》.蒙日指出画法几何只是投影几何的一个方面,这促进了更一般的投影几何学与几何变换理论的发展.投影几何在19世纪整整活跃了一个世纪,而几何变换则已成为现代几何学的基本概念.

19世纪是数学史上创造精神和严格精神高度发扬的时代.复变函数论的创立和数学分析的严格化,非欧几何的问世和射影几何的完善,群论和非交换代数的诞

^① 摘自 <http://www.ikepu.com>,有删减

生,是这一世纪典型的数学成就.它们所蕴含的新思想,深刻地影响着20世纪的数学.

19世纪最富革命性的创造当属非欧几何.自古希腊时代始,欧氏几何一直被认为是客观物质空间唯一正确的理想模型,是严格推理的典范.16世纪后的数学家在论证代数或分析结果的合理性时,都试图归之为欧氏几何问题.

但欧氏几何的平行公设曾引起数学家的持久的关注,以弄清它和其他公理、公设的关系.这个困扰了数学家千百年的问题,终于被高斯、罗巴切夫斯基和波尔约各自独立解决.高斯在1816年已认识到平行公设不可能在欧氏几何其他公理、公设的基础上证明,得到在逻辑上相容的非欧几何,其中平行公设不成立,但由于担心受人指责而未发表.

1825年左右,波尔约和罗巴切夫斯基分别得到同样的结果,并推演了这种新几何中的一些定理.罗巴切夫斯基1829年的文章《论几何基础》是最早发表的非欧几何著作,因此这种几何也称为罗巴切夫斯基几何.这项发现的技术细节是简单的,但观念的变革是深刻的,欧氏几何不再是神圣的,数学家步入了创造新几何的时代.

非欧几何对人们认识物质世界的空间形式提供了有力武器,但由于它背叛传统,创立之初未受到数学界的重视.只是当高斯有关非欧几何的通信和笔记在他1855年去世后出版时,才因高斯的名望而引起数学家们的关注.

19世纪前半叶最热门的几何课题是射影几何.1822年,彭赛列发表《论图形的射影性质》,这是他1813~1814年被俘关在俄国时开始研究的总结.他探讨几何图形在任一投影下所有截影共有的性质,他的方法具有像解析几何那样的普遍性.1827年左右,普吕克等人引进齐次坐标,用代数方法研究射影性质,丰富了射影几何的内容.

对纯几何问题兴趣的增长,并未减弱分析在几何中的应用.高斯从1816年起参与大地测量和地图绘制工作,引起他对微分几何的兴趣.1827年他发表的《关于曲面的一般研究》,为这一数学分支注入了全新的思想,开创了微分几何的现代研究.

第6章小结

由两个相交(欧氏)平面外一点引出的从一个平面到另一个平面的中心投影不是映射,为了使得中心投影成为一个双射,在欧氏平面上引入无穷远点,一条直线对应一个无穷远点,平行直线有相同的无穷远点.引入这样的无穷远点的欧氏平面是射影平面的一个模型,在射影平面中,欧氏平面上的点(通常点)与无穷远点没有任何区别.想要用坐标表示射影平面上的点,仅用仿射坐标已经不够了.为了简单

实用,紧密联系仿射坐标,我们使用齐次坐标.

先将欧氏平面上的点用齐次坐标表示:设在一个仿射坐标系 σ 下,点 P 的坐标是 (x, y) , 如果三个不全零的数 x_1, x_2, x_3 有关系 $x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3}$, 则 x_1, x_2, x_3 叫点 P 在 σ 下的齐次坐标, 记为 $[x_1, x_2, x_3]$. 明显, 通常点的 $x_3 \neq 0$. $[x_1, x_2, 0]$ 不能表示欧氏平面上的任何点, 实际上, 它就是表示无穷远点. 齐次坐标的表示不是唯一的, 可以差一个非零的倍数. 射影平面上点的齐次坐标不能都为 0.

射影平面还有两个模型.

几何模型 将单位球面的对径点粘贴在一起作为一个点, 球面上点的欧氏坐标(3 维)就是该点的齐次坐标;

解析模型 将欧氏空间中经过原点的直线作为一个点, 直线的方向向量就是该点的齐次坐标. 因此, 射影平面上的点的齐次坐标可以理解为欧氏空间中的非零向量.

欧氏平面上的直线方程只需将仿射坐标转化为齐次坐标, 就可得到相应的射影平面上的射影直线方程, 它是一个三元齐次方程: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$, 该欧氏直线的方向数表示其上的无穷远点, 坐标是 $[a_2, -a_1, 0]$. 所有无穷远点由方程 $x_3 = 0$ 表示, 由于它是一次方程, 因此叫做无穷远直线. 射影直线可以理解为欧氏空间中过原点的一个平面.

射影平面上的任何两条射影直线必定相交. 相交的欧氏直线转化来的射影直线当然相交; 平行欧氏直线的方向数一样, 所以有相同的无穷远点, 相应的射影直线相交于无穷远点; 任何一条射影直线的无穷远点都在无穷远直线上, 因此它们相交.

从线性代数的角度看, 两个三元一次齐次线性方程组成的方程组一定有非零解, 因此射影平面上的任何两条射影直线必定相交.

射影直线的方程 $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ 完全由方程的三个系数的比值 $a_1 : a_2 : a_3$ 决定, 因此可以定义直线的齐次坐标 (a_1, a_2, a_3) . 将系数视为变化, 它也可以理解为经过同一个点 $[x_1, x_2, x_3]$ 的直线束.

在射影平面上的对偶原理是一个重要的原理: 关于直线与点的一个命题, 将直线与点互换其他叙述不变就可得到另一个命题. 因而, 在射影平面上如果证明了一个关于直线与点的一个命题或定理, 那么也就证明了它的对偶命题或定理.

三点共线(相当于欧氏空间中的三向量共面)的充要条件是它们的齐次坐标组成的行列式(三向量的混合积)为 0. 对偶命题是三线共点的充要条件是它们的齐次坐标组成的行列式为 0.

著名的定理是 Desargues 定理: 在射影平面上, 如果两个三角形的对应顶点的连线共点, 则它们的对应边的交点共线.

Desargues 的对偶定理就是它的逆定理:在射影平面上,如果两个三角形的对应边的交点共线,则它们的对应顶点的连线共点.

在射影平面上,共线四点的交比是射影变换下的一个重要的不变量.由对偶原理,可以定义共点四线的交比.含有无穷远点的共线四点的交比可以转化为通常点的共线四点的交比来计算.固定直线的三个不同点 A, B, C ,由交比 $(A, B; C, D)$ 可决定直线上唯一的一个点 D .

共线四点的交比的计算有定理: A, B, C, D 是射影平面上的共线四点,其中 A, B, C 各不相同,且 $D \neq A$,设 $A[a_1, a_2, a_3], B[b_1, b_2, b_3], C[c_1, c_2, c_3], D[d_1, d_2, d_3]$,且

$$(c_1, c_2, c_3) = \lambda_1 (a_1, a_2, a_3) + \mu_1 (b_1, b_2, b_3),$$

$$(d_1, d_2, d_3) = \lambda_2 (a_1, a_2, a_3) + \mu_2 (b_1, b_2, b_3),$$

$$\text{则交比}(A, B; C, D) = \frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2}.$$

共点四线的交比计算有公式: $l_i (i=1, 2, 3, 4)$ 是共点于 O 的四线, $\angle(l_i, l_j)$ 表示直线 l_i 绕点 O 转到直线 l_j 的角度,则四线的交比

$$(l_1, l_2; l_3, l_4) = \frac{\sin \angle(l_1, l_3)}{\sin \angle(l_3, l_2)} : \frac{\sin \angle(l_1, l_4)}{\sin \angle(l_4, l_2)}.$$

如果共线四点 A, B, C, D 的交比 $(A, B; C, D) = -1$, 则 A, B, C, D 为调和点列.点 D 为点 C 关于点偶 A, B 的调和共轭点, C, D 是关于 A, B 调和共轭, 点偶 C, D 与点偶 A, B 互相调和分割.类似地,共点四线也有相应的概念.线段 AB (不含无穷远点的部分)的中点关于点偶 A, B 的调和共轭点是直线 AB 的无穷远点.两直线 l_1, l_2 的两个夹角的角平分线关于 l_1, l_2 调和共轭.

仿射变换比正交变换广泛,比仿射变换更广泛的是射影变换.欧氏平面上的射影变换是保持共线四点的交比不变的点变换,在仿射坐标下的公式是:

$$\begin{cases} x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \\ y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}. \end{cases}$$

其中矩阵 $A = (a_{ij})$ 是可逆的.

欧氏平面上的射影变换的全体组成射影变换群.将仿射坐标换成齐次坐标就可得到射影平面上的射影变换,即有

$$\begin{cases} \rho x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \rho x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \rho x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{cases}$$

其中矩阵 $A = (a_{ij})$ 是可逆的, $\rho \neq 0$ 对于不同的点有不同的值.射影平面上的射影

变换的全体组成射影变换群.

将欧氏平面上的二次曲线的仿射坐标方程换成齐次坐标的方程,就得到射影平面上的二次曲线方程,表现为三元二次齐次多项式,也就是三元二次型.从方程的角度分析,容易知道,射影平面上的二次曲线就是欧氏二次曲线添上其渐近方向.从而射影平面上的二次曲线是封闭的.

射影平面上的二次曲线的射影分类(射影等价类)只有5种:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0, x_1^2 + x_2^2 = 0, x_1^2 - x_2^2 = 0, x_1^2 = 0.$$

第一方程表示的是无实图形.第二个方程表示的是椭圆、双曲线和抛物线并补上各自的渐近方向,由此可知它们是彼此等价的,研究这类曲线的射影性质只需研究圆的射影性质即可.第三个方程表示的是只有一个实点的曲线.第四个方程表示的是一对相交直线.第五个方程表示的是一对重合的直线.

由二次曲线外的一点 P 引直线 l ,使得直线 l 与二次曲线相交两个不同的点 A, B , P 点关于 A, B 的调和共轭点 Q 的几何轨迹就是点 P 关于二次曲线的配极,它在一条直线上,因此也叫做极线.点 P 对于配极而言叫做极点.

点 P 的配极上的任何一点的配极通过点 P ;点 P 的配极通过点 P 当且仅当点 P 在二次曲线上.

三个重要定理是

Steiner 定理 非退化二次曲线上的任何一点到四个不同点的连线的交比是常数.

Pascal 定理 非退化二次曲线的内接六角形的三对对边的交点共线.

Brianchon 定理 非退化二次曲线的外切六边形的三对顶点的连线共点.

Brianchon 定理是 Pascal 定理的对偶命题.

专题讨论 球面几何与双曲几何初步

球面几何与双曲几何是非欧几何的两个典型的例子. 由于它们直观, 因而容易理解一些. 这部分内容主要参考了 Marcel Berger 著的书 *Geometry* 的第 18 章和第 19 章. 球面几何主要关注球面三角形的一些结论, 球面三角形的三内角和大于 π , 从而揭示了它与欧氏几何的不同. 双曲几何介绍双曲平面, 以及其上的直线、三角形. 过双曲平面上的直线外一点可以作无数条直线与它不相交, 三角形的三内角和小于 π , 这些性质也说明了双曲几何与欧氏几何是完全不同的几何. 双曲几何有两个常用的模型: 共形模型和庞卡莱(Poincaré)半平面模型. 由于所需基础知识的限制, 这些内容我们只能作入门性的介绍.

专题讨论一 球面几何

1. 球面坐标的应用

我们要确定地球上的某地的位置, 使用经度(东经、西经)和纬度(北纬、南纬)的术语, 这实际上是使用了空间的球面坐标系. 将地球看成一个球面, 经过格林威治的经线作为零度线, 零纬度线就是赤道.

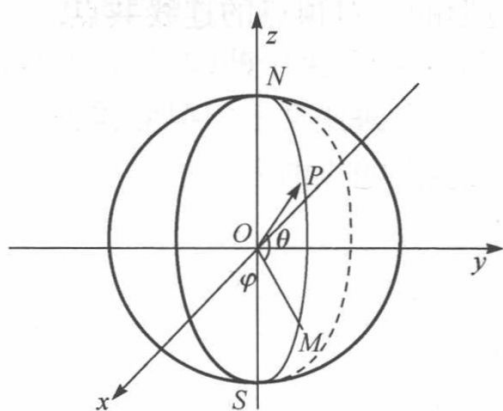


图 7.1

如图 7.1, 设 N 为北极点, 则 P 点位置的纬度 $\theta = \frac{\pi}{2} - \angle(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 经度为 Ox 轴与经过 P 点和 z 轴的半平面的夹角, $\varphi = \angle(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM}) \in (-\pi, \pi]$. P 点可表示为 $P(\varphi, \theta)$. $\varphi > 0$ 的经度称为东经, $\varphi < 0$ 的经度称为西经, $\varphi = \pi$ 的经线称为国际日期变更线, 它落在太平洋中间. $\theta > 0$ 的纬度称为北纬, $\theta < 0$ 的纬度称为南纬. 设地球半径是 R , 则 P 点的直角坐标是 $(R\cos\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\cos\theta, R\sin\theta)$, 用

它来表示位置明显不方便.

2. 球极投影

在研究球面上的一些问题时, 球极投影是非常重要的, 我们叙述如下. 在直角坐标系下, 考虑半径为 1 的球面 S^2 , 即单位球面, 球心在坐标原点. 如图 7.2, 在球

面上任取北极 N 外的一点 P , 连接 NP 并延长与 xOy 坐标面交于 Q 点, 将 P 对应于 Q 的映射就是球极投影, 记为 $f: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow R^2, P \mapsto Q = f(P)$.

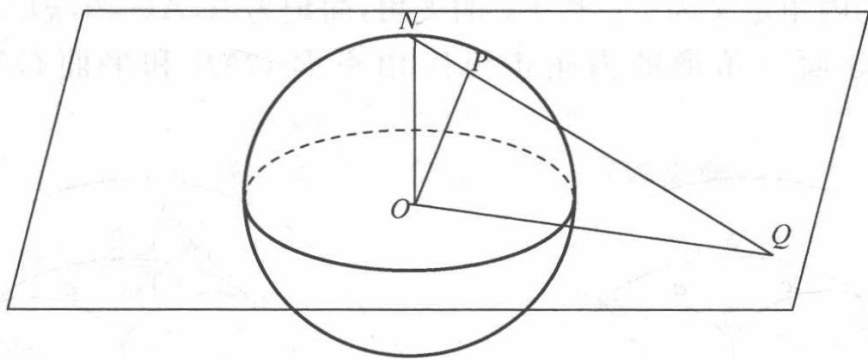


图 7.2

设 $P(x, y, z)$, 由于 N, P, Q 三点共线, 所以存在 λ , 使得 $\overrightarrow{OQ} = \lambda \overrightarrow{ON} + (1-\lambda) \overrightarrow{OP}$, 因而 $\overrightarrow{OQ} = ((1-\lambda)x, (1-\lambda)y, \lambda + (1-\lambda)z)$, 由于 Q 在 xOy 面上, 故 $\lambda + (1-\lambda)z = 0$, 得 $\lambda = \frac{z}{z-1}$. 所以 $\overrightarrow{OQ} = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0 \right)$, $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$.

现在考虑球极投影的逆映射, 设 $Q(x_0, y_0, 0), P(x, y, z)$, 则 $x_0 = \frac{x}{1-z}, y_0 = \frac{y}{1-z}$, 又 $P(x, y, z)$ 在球面上, 所以 $(1-z)^2 x_0^2 + (1-z)^2 y_0^2 + z^2 = 1$, 注意 $-1 \leq z < 1$, 解得 $z = \frac{x_0^2 + y_0^2 - 1}{x_0^2 + y_0^2 + 1}$, 故 $f^{-1}(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right)$.

如果球面半径为 R , 则球极投影 $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{R-z}, \frac{y}{R-z} \right)$.

逆映射 $f^{-1}(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + R^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + R^2}, \frac{x^2 + y^2 - R^2}{x^2 + y^2 + R^2} \right)$.

3. 球面三角形

通过球心的平面与球面的交线是圆, 称为球面上的一个大圆. 在球面上任取不同两点 (非对径点) A, B , 则由 OA, OB 确定的平面与球面的交线就是由 A, B 两点决定的唯一一个大圆. 大圆上弧长小于半周长的弧段称为劣弧, 否则称为优弧. 球面上任意两点间的最短路径就是这两点决定的劣弧. 一般地, 我们在单位球面上讨论问题, 相应的结论容易推广到任意半径的球面上, 请读者自己考虑.

设 $A, B, C \in S^2$, A, B, C 不在同一个大圆上, 则 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 不共面. 沿用欧几里得平面几何的语言, 用 3 条大圆劣弧 AB, BC, CA 形成的图形称为球面三角形. 3 条劣弧的弧长称为球面三角形的三边的边长, BC, CA, AB 的弧长记为 a, b, c , 如图 7.3.

球面 S^2 上点 A 处的切平面记为 T_A , 该平面上的向量称为球面 S^2 在点 A 处

的切向量. 劣弧 AB 在 A 处的单位切向量记为 T_{AB} , 方向由 A 指向 B 一侧, 由圆上的切向量性质知道, 它与向量 $\overrightarrow{OA}$ 垂直, 并且在平面 OAB 内, 见图 7.4. 球面三角形 ABC 在 A 处的内角定义为 T_{AB} 和 T_{AC} 的夹角, 简记为 A , $A \in (0, \pi)$. 其他点处的内角类似定义. 球面三角形的内角也可以由平面 OAB 和平面 OAC 的二面角来定义.

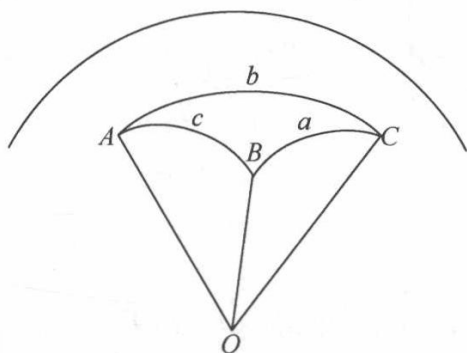


图 7.3

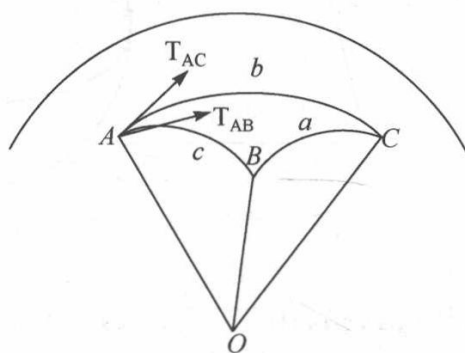


图 7.4

4. 球面三角形的面积

以对径点为端点的两个半大圆之间的部分称为球面弓形, 两个半大圆之间的夹角称为月形角, 记为 α . 见图 7.5.

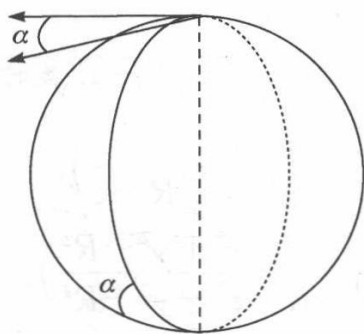


图 7.5

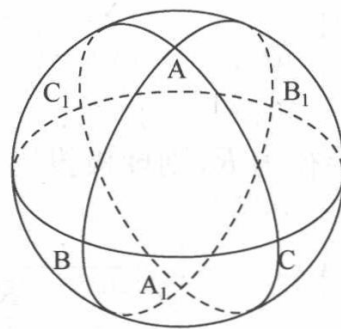


图 7.6

由于球面的面积是 4π , 所以球面弓形面积是 $4\pi \times \frac{\alpha}{2\pi} = 2\alpha$.

半径为 R 的球面上的弓形面积是 $2\alpha R^2$.

Girard 公式(1625 年) 球面三角形 ABC 的面积是 $S = A + B + C - \pi$.

证明 如图 7.6, 设点 A, B, C 的对径点分别是 A_1, B_1, C_1 , 则由半大圆 BAB_1 和 BCB_1 构成 B 角的球面弓形, 由半大圆 CAC_1 和 CBC_1 构成 C 角的球面弓形, 由半大圆 AC_1A_1 和 AB_1A_1 构成 A 角的球面弓形. 球面三角形 ABC 和球面三角形 $A_1B_1C_1$ 是关于球心对称的, 所以它们有相同的面积. 由图 7.6 观察到, 以通过 B, C 的大圆为边界, 球面三角形 ABC 所在半球面的面积, 与球面三角形 ABC 的面积

S 有以下关系:

$$2\pi = S + (2A - S) + (2B - S) + (2C - S),$$

故球面三角形 ABC 的面积是 $S = A + B + C - \pi$.

由此公式得出球面三角形的三内角和大于 π , 这与欧氏平面三角形三内角和等于 π 的性质完全不同. 因而球面几何与欧氏几何是完全不同的几何. $E = A + B + C - \pi$ 称为球面三角形的球面角楹, 或球面过剩, 或球面角超 (spherical excess).

5. 球面三角形的基本公式

在欧氏平面三角形中有余弦定理和正弦定理, 它们将 6 个数 A, B, C, a, b, c 可表示为其中仅仅 3 个数的函数. 在球面三角形中, 我们也希望有类似的结论. 一个具有启发性的理由是, 若给出 A, b, c , 则在不计等距差别的情况下, 点 B 和点 C 是确定的.

事实上, 若在球面上给出点 A, T_{AB}, T_{AC} , 满足

$$T_{AB}, T_{AC} \in T_A, \arccos(T_{AB} \cdot T_{AC}) = A,$$

则以点 A 为始点, 分别与 T_{AB} 和 T_{AC} 相切的大圆上取定长度为 b 的弧段 AC , 长度为 c 的弧段 AB 后, 点 B 和点 C 就完全确定了, 如图 7.4.

然而, 若在 A' 处重新这样做, 就可得到点 B' 和点 C' , 使得

$$T_{A'B'}, T_{A'C'} \in T_{A'}, \arccos(T_{A'B'} \cdot T_{A'C'}) = A,$$

则存在一个等距变换, 它将 A 映射 A' , 将 T_{AB}, T_{AC} 映射到 $T_{A'B'}, T_{A'C'}$. 因而它将点 B 和点 C 映射到点 B' 和点 C' . 由此可得弧段 BC 的长等于弧段 $B'C'$ 的长, 它确实可以表示为 A, b, c 的函数, 即为如下的球面三角形的基本公式, 也叫余弦公式.

命题 7.1 (球面三角形的基本公式): 对边长为 a, b, c 的任意球面三角形 ABC , 有公式

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

证明 如图 7.7, $\angle AOB = c, \angle AOC = b$, 容易知道

$$\overrightarrow{OB} = \cos c \overrightarrow{OA} + \sin c T_{AB}, \overrightarrow{OC} = \cos b \overrightarrow{OA} + \sin b T_{AC},$$

因为

$$\cos A = T_{AB} \cdot T_{AC}, \overrightarrow{OA} \cdot T_{AB} = \overrightarrow{OA} \cdot T_{AC} = 0,$$

所以,

$$\begin{aligned} \cos a &= \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = (\cos c \overrightarrow{OA} + \sin c T_{AB}) \cdot (\cos b \overrightarrow{OA} + \sin b T_{AC}) \\ &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \end{aligned}$$

注 对半径为 R 的球面上的三角形, 则有公式

$$\cos \frac{a}{R} = \cos \frac{b}{R} \cos \frac{c}{R} + \sin \frac{b}{R} \sin \frac{c}{R} \cos A.$$

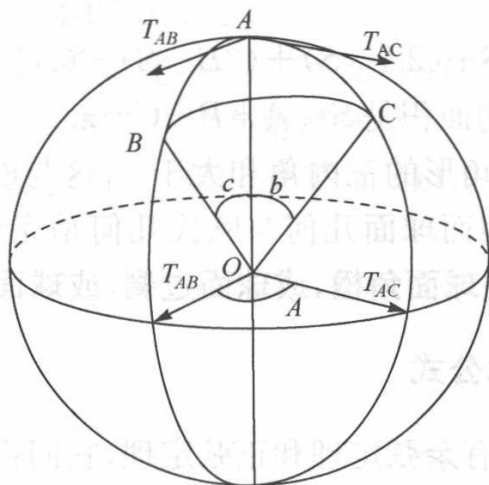


图 7.7

推论 7.1 对任意球面三角形都有不等式:

$$|b-c| < a < b+c, a+b+c < 2\pi.$$

反之,若 $a, b, c \in (0, \pi)$, 满足以上两个不等式, 则存在一个边长为 a, b, c 的球面三角形, 并且在不计等距差别的情况下这个三角形是唯一的.

证明 由命题 7.1 及球面三角形的定义, b, c 不取 0 和 π , 因而有

$$\left| \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \right| = |\cos A| < 1,$$

它等价于 $\cos(b+c) < \cos a < \cos(b-c)$. 对于 $a, b, c \in (0, \pi)$, 由此可得 $a < b+c < 2\pi-a$, 从而就有 $a+b+c < 2\pi$.

通过对 a, b, c 的置换, 有不等式 $b < a+c, c < a+b$, 因而又得 $|b-c| < a$.

反之, 若 $a, b, c \in (0, \pi)$ 满足推论中的条件, 则有

$$\left| \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \right| < 1.$$

因而, 存在 $A \in (0, \pi)$, 使得 $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$.

在球面上任取一点 A , 并取 $T_{AB}, T_{AC} \in T_A, A = \arccos(T_{AB} \cdot T_{AC})$, 则由前面的做法可得到 $B, C \in S^2$ 使得弧段 BC 的长度为 a .

6. 配极三角形

给定球面三角形 ABC , 在球面上可以确定一点 $A' \in S^2$, 使得 $\overrightarrow{OA'}$ 与 $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 都垂直, 且 $\overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{OA} > 0$, 即 A' 是 S^2 上关于由 B, C 确定的大圆的极点, 且 A, A' 在同一个半球面内, 如图 7.8. 同样的方法可确定 $B', C' \in S^2$, 使得 $\overrightarrow{OB'}$ 与 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}$ 都垂直, 且 $\overrightarrow{OB'} \cdot \overrightarrow{OB} > 0$; 使得 $\overrightarrow{OC'} \perp \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC'} \perp \overrightarrow{OB}$, 且 $\overrightarrow{OC'} \cdot \overrightarrow{OC} > 0$. 由 A', B', C' 可确定一个球面三角形, 否则, $\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OC'}$ 共面, 不妨设 $\overrightarrow{OC'}$ 可由 $\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}$ 线性表示, 则有 $\overrightarrow{OC'} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$, 这与 $\overrightarrow{OC'} \cdot \overrightarrow{OC} > 0$ 矛盾. 这个球面三角形 $A'B'C'$ 称为球面三角

形 ABC 的配极三角形, 见图 7.9.

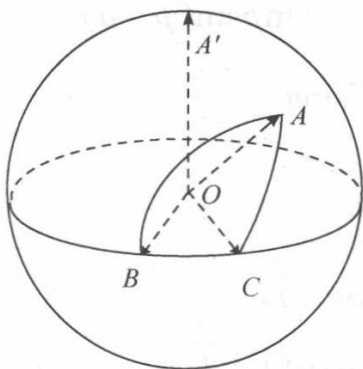


图 7.8

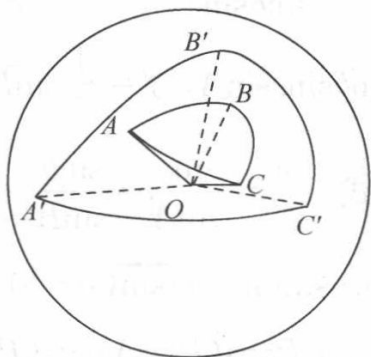


图 7.9

命题 7.2(配极三角形的对偶性) 对任意的球面三角形 ABC , 它的配极三角形 $A'B'C'$ 的配极三角形仍是球面三角形 ABC , 且有以下关系

$$a + A' = b + B' = c + C' = a' + A = b' + B = c' + C = \pi.$$

证明 由配极三角形的定义, 前一部分结论是平凡的.

后一部分仅需证明 $a' + A = \pi$ 即可, 其他的类似.

由于 $\vec{OC'} \perp \vec{OA}$, $\vec{OB'} \perp \vec{OA}$, 则 $\vec{OA}$ 与平面 $OB'C'$ 垂直. 如图 7.10, 在平面 $OB'C'$ 内以 O 为始点作向量 T_{AB} , T_{AC} , 因为 $\vec{OC'} \perp \vec{OA}$, $\vec{OC'} \perp \vec{OB}$, $\vec{OC} \cdot \vec{OC'} > 0$, T_{AB} 在平面 OAB 内, 所以 C, C' 及 T_{AC} 的终点在同一个半球内, 因此, $\vec{OC'} \perp T_{AB}$, $\vec{OC'} \cdot T_{AC} > 0$. 同理, $\vec{OB'} \perp T_{AC}$, $\vec{OB'} \cdot T_{AB} > 0$.

又因为 $a' = \angle B'OC'$, $A = \angle(T_{AB}, T_{AC})$, 所以 $a' + A = \pi$.

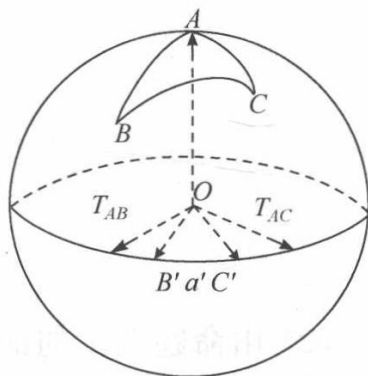


图 7.10

由此命题, 可以再一次得到球面三角形的三内角和大于 π 的结论.

推论 7.2 对任意球面三角形 ABC 总有

$$A + B + C > \pi, B + C < \pi + A, A + C < \pi + B, A + B < \pi + C.$$

证明 因为 $A + B + C = 3\pi - a' - b' - c'$, 及推论 7.1 $a' + b' + c' < 2\pi$, 所以 $A + B + C > \pi$.

又因为 $a' < b' + c'$, 则 $\pi - A < \pi - B + \pi - C$, 所以 $B + C < \pi + A$.

记 $p = \frac{a+b+c}{2}$, $P = \frac{A+B+C}{2}$, $\delta = \frac{1}{2} |(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})|$. 配极三角形对应的量

用带撇的表示: p', P', δ' . 我们有以下公式.

命题 7.3 对任意球面三角形 ABC , 有

$$(1) \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}, \tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}}.$$

$$(2) \delta = \frac{1}{2} \sin b \sin c \sin A, \delta' = \frac{1}{2} \sin B \sin C \sin a.$$

$$(3) \text{ 正弦公式 } \frac{\delta}{\delta'} = \frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$

$$(4) \delta = \sqrt{\sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)},$$

$$\delta' = \sqrt{-\cos P \cos(P-A) \cos(P-B) \cos(P-C)}.$$

注 在 Marcel Berger 的书 *Geometry* 中公式写为

$$\delta' = \sqrt{\sin P \sin(P-A) \sin(P-B) \sin(P-C)}.$$

证明 (1) 第一个公式是球面三角形的基本公式.

第二个是因为

$$\begin{aligned} \tan^2 \frac{A}{2} &= \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = \frac{\sin b \sin c + \cos b \cos c - \cos a}{\sin b \sin c - \cos b \cos c + \cos a} \\ &= \frac{\cos(b-c) - \cos a}{-\cos(b+c) + \cos a} = \frac{\sin \frac{a+b-c}{2} \sin \frac{b-c-a}{2}}{\sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{a-b-c}{2}} \\ &= \frac{\sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}. \end{aligned}$$

(2) 由命题 7.2 的证明过程易知 $\vec{OC}' = \vec{OA} \times T_{AB}$, 所以, 在 R^3 中取直角标架 $\{O; \vec{OA}, T_{AB}, \vec{OC}'\}$. 在此标架下, 参考图 7.10, 我们得到

$$\vec{OB} = \cos c \vec{OA} + \sin c T_{AB},$$

$$\begin{aligned} \vec{OC} &= \cos b \vec{OA} + \sin b T_{AC} = \cos b \vec{OA} + \sin b (\cos A T_{AB} + \sin A \vec{OC}') \\ &= \cos b \vec{OA} + \sin b \cos A T_{AB} + \sin b \sin A \vec{OC}'. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{2} |(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos c & \sin c & 0 \\ \cos b & \sin b \cos A & \sin b \sin A \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \sin b \sin c \sin A. \end{aligned}$$

$$\delta' = \frac{1}{2} \sin b' \sin c' \sin A' = \frac{1}{2} \sin(\pi-B) \sin(\pi-C) \sin(\pi-a)$$

$$= \frac{1}{2} \sin B \sin C \sin a.$$

(3) 置换公式(2)中的符号, 有 $\delta' = \frac{1}{2} \sin C \sin A \sin b$, 于是

$$\frac{\delta}{\delta'} = \frac{\frac{1}{2} \sin b \sin c \sin A}{\frac{1}{2} \sin C \sin A \sin b} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$

同理可得

$$\frac{\delta}{\delta'} = \frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$

(4) 利用行列式计算技巧以及三角函数的和差化积、积化和差, 可以得到该公式, 我们省去一些详细的过程, 读者自己补充.

$$\begin{aligned} 4\delta^2 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos c & \sin c & 0 \\ \cos b & \sin b \cos A & \sin b \sin A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos c & \sin c & 0 \\ \cos b & \sin b \cos A & \sin b \sin A \end{vmatrix}^T \\ &= \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos c & \sin c & 0 \\ \cos b & \sin b \cos A & \sin b \sin A \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos c & \sin c & 0 \\ \cos b & \sin b \cos A & \sin b \sin A \end{bmatrix}^T \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2\cos a \cos b \cos c - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c \\ &= \sin^2 a + \cos b (\cos a \cos c - \cos b) + \cos c (\cos a \cos b - \cos c) \\ &= \sin^2 a - \sin^2 p - \sin^2 (p-a) + 2\sin p \sin (p-a) \cos (b-c). \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \sin^2 a &= \sin^2 (p+a-p) = (\sin (p-a) \cos p - \sin p \cos (p-a))^2 \\ &= \sin^2 (p-a) \cos^2 p + \sin^2 p \cos^2 (p-a) - 2\sin p \cos p \sin (p-a) \cos (p-a), \end{aligned}$$

将它代入, 得到

$$\begin{aligned} 4\delta^2 &= -2 \sin^2 p \sin^2 (p-a) + 2\sin p \sin (p-a) [\cos (b-c) - \cos p \cos (p-a)] \\ &= 2\sin p \sin (p-a) [\cos (b-c) - \cos p \cos (p-a) - \sin p \sin (p-a)] \\ &= 4\sin p \sin (p-a) \sin (p-b) \sin (p-c). \end{aligned}$$

于是公式得证.

由命题 7.2 可知,

$$p' = \frac{1}{2} (a' + b' + c') = \frac{1}{2} (\pi - A + \pi - B + \pi - C) = \frac{3}{2} \pi - P,$$

$$p' - a' = \frac{3}{2}\pi - P - \pi + A = \frac{\pi}{2} - (P - A), p' - b' = \frac{\pi}{2} - (P - B),$$

$$p' - c' = \frac{\pi}{2} - (P - C), \text{因而}$$

$$\begin{aligned} \delta' &= \sqrt{\sin p' \sin(p' - a') \sin(p' - b') \sin(p' - c')} \\ &= \sqrt{\sin\left(\frac{3}{2}\pi - P\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - P + A\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - P + B\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - P + C\right)} \\ &= \sqrt{-\cos P \cos(P - A) \cos(P - B) \cos(P - C)}. \end{aligned}$$

推论 7.3 在球面三角形中, $b=c$ 当且仅当 $B=C$.

证明 必要性

由命题 7.3 的第一个公式有

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B, \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

由 $b=c$ 得 $\sin a \sin c \cos B = \sin a \sin b \cos C$, 于是 $\cos B = \cos C$, 即 $B=C$.

充分性

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c}, \cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b},$$

由 $B=C$, 得

$$\sin b \cos b - \cos a \cos c \sin b = \sin c \cos c - \cos a \cos b \sin c,$$

$$\frac{1}{2} \sin 2b - \frac{1}{2} \sin 2c = \cos a (\cos c \sin b - \cos b \sin c),$$

$$\sin(b-c) \cos(b+c) = \cos a \sin(b-c),$$

由于 $b+c > a$, 因而 $\sin(b-c) = 0$, 故可得 $b=c$.

推论 7.4 (球面三角形的全等) 设两个球面三角形 ABC 和 $A_1B_1C_1$, 边长用 a, b, c 和 a_1, b_1, c_1 , 则以下 5 个条件是等价的:

- (1) 存在球面上的等距 $f \in IS(S^2)$, 使得 $f(A) = A_1, f(B) = B_1, f(C) = C_1$;
- (2) $a = a_1, b = b_1, c = c_1$;
- (3) $A = A_1, b = b_1, c = c_1$;
- (4) $a = a_1, B = B_1, C = C_1$;
- (5) $A = A_1, B = B_1, C = C_1$.

证明 第一个条件显然推出其他 4 个条件. 由配极三角形的定义(2)与(5)等价, (3)与(4)等价. 由基本公式, (2)推出(3).

(3) 推出(1)采用第 5 部分的方法: 给出 A, b, c , 则在不计等距差别的情况下, 点 B 和点 C 是确定的.

给出 A, b, c 后, 在球面上就给出 A, T_{AB}, T_{AC} , 满足

$$T_{AB}, T_{AC} \in T_A, \arccos(T_{AB} \cdot T_{AC}) = A,$$

给出 A_1, b_1, c_1 后, 在球面上就给出 $A_1, T_{A_1B_1}, T_{A_1C_1}$, 满足

$$T_{A_1B_1}, T_{A_1C_1} \in T_{A_1}, \arccos(T_{A_1B_1} \cdot T_{A_1C_1}) = A_1,$$

由 $A=A_1$, 则存在一个等距变换, 它将点 A 映射点 A_1 , 将 T_{AB}, T_{AC} 映射到 $T_{A_1B_1}, T_{A_1C_1}$. 又由于 $b=b_1, c=c_1$, 因而它将点 B 和点 C 映射到点 B_1 和点 C_1 .

球面几何思考题

1. 在 S^2 上讨论下列问题: 寻找并作出一个小圆, 它分别满足如下条件:
 - (1) 通过三个点;
 - (2) 通过两个点且切于一已知小圆;
 - (3) 通过一点且切于两个已知小圆;
 - (4) 切于三个已知小圆.
2. 在 S^2 上讨论球面三角形的下列概念: 垂直平分线, 高线, 中线和角平分线, 并讨论它们的共点性.
3. 讨论球面三角形全等的“不定”情形, 例如两个球面三角形有两条边和一对角相等的情形.
4. 对任意半径 R 的球面, 求出正弦和余弦公式, 并观察当 R 变得很大时, 这些公式情况如何?
5. **Lexell 定理** 给定两点 $A, B \in S^2$ 后, 讨论使得球面三角形 ABC 的角满足 $A+B-C = \text{常数}$ 的点 $C \in S^2$ 的集合.
6. 球面上的三角不等式 $|a-b| < c < a+b$. 利用三点 A_1, A_2, A_3 的克莱姆(Cramer)行列式 $\det(\overrightarrow{OA_i} \cdot \overrightarrow{OA_j})$ 证明不等式.
7. 证明: 若四个点 $A_1, A_2, A_3, A_4 \in S^2$, $A_i A_j$ 是 $A_i, A_j (i, j=1, 2, 3, 4)$ 间劣弧的弧长, 则行列式 $\det(\cos(A_i A_j)) = 0$.

专题讨论二 双曲几何

1. 记号

为了方便, 将空间 $\mathbf{R}^3$ 恒同于乘积空间 $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$, 其元素记为 $\xi = (z, t), z \in \mathbf{R}^2, t \in \mathbf{R}$. ξ 既表示中 $\mathbf{R}^3$ 的点又表示该点的位置向量. 平面 $H = \{(z, t): t=1\}$. q 表示符号数为 $(2, 1)$ 的二次型: $-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$, 它的迷向锥 $Q = q^{-1}(0)$, 即 $\mathbf{R}^3$ 中的圆锥 $-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0$. $q(z, t) = -|z|^2 + t^2$, 其中 $z = (x, y) \in \mathbf{R}^2, |z|^2 = x^2 + y^2$.

如果 $\xi = (z, t), \xi' = (z', t') \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$, 则定义

$$P(\xi, \xi') = P((z, t), (z', t')) = -z \cdot z' + tt',$$

其中 $z = (x, y), z' = (x', y') \in \mathbf{R}^2, z \cdot z' = xx' + yy'$.

$\mathbf{R}^2$ 中的单位开圆盘记为 $B = \{(x, y): x^2 + y^2 < 1\}$.

2. 双曲平面的 Klein 模型

将实射影平面 $P^2\mathbf{R}$ 恒同于 $\{\mathbf{R}^3 \text{ 中过原点的直线}\}$, 则根据二次型 q 值的符号

将分 P^2R 为三部分: (1) 迷向直线集合, 即 $q(\xi)=0$. (2) 圆锥 $Q=q^{-1}(0)$ 内的过原点的直线的集合, 即 $q(\xi)>0$. (3) 圆锥 $Q=q^{-1}(0)$ 外的过原点的直线的集合, 即 $q(\xi)<0$.

我们要讨论的对象就是第 2 种情况, 该集合记为

$$K=\{l\in P^2R: q(\xi)>0, \xi\in l\setminus\{0\}\}.$$

由 $q(\xi)=q(z,t)=-|z|^2+t^2>0$, 可得 $t\neq 0$, 由 ξ 决定的直线 l 与平面 H 交于点 $(\frac{z}{t}, 1)$, 且 $|\frac{z}{t}|<1$. 由 ξ 决定的直线 l 用 P^2R 中的齐次坐标 $[x, y, t]$ 表示, 于是可定义一个从 K 到 B 双射 φ 如下: $\varphi: K\rightarrow B, \varphi(l)=\varphi([x, y, t])=\frac{1}{t}(x, y)=\frac{z}{t}$.

为方便作图, 将 B 等同于 H 的子集 $\{(z, 1): |z|<1\}$, 映射 φ 如图 7.11 示意:

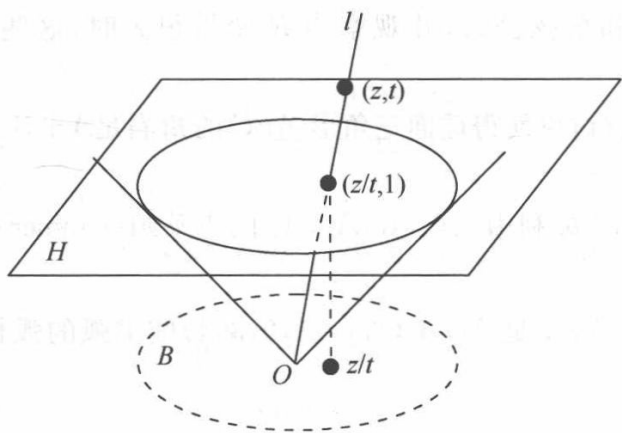


图 7.11

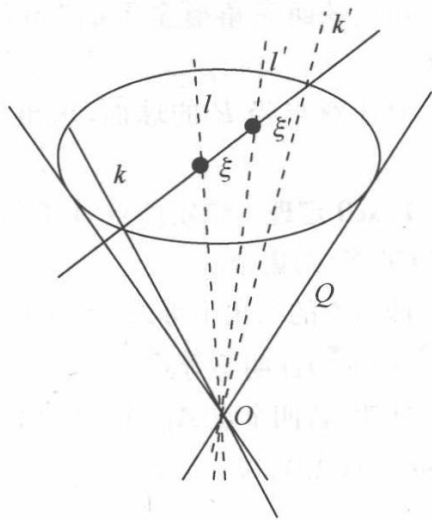


图 7.12

命题 7.4 如图 7.12, 设 $l, l'\in K$, 任一过 l 和 l' 的平面 ($l\neq l'$ 时是唯一的) 与 Q 交于两条不同的直线 k, k' , 对任意 $\xi\neq 0\in l, \xi'\neq 0\in l'$, 有

$$\frac{P(\xi, \xi')}{\sqrt{q(\xi)q(\xi')}} \geq 1, \quad (1)$$

$$\operatorname{arccosh} \frac{P(\xi, \xi')}{\sqrt{q(\xi)q(\xi')}} = \frac{1}{2} |\ln([l, l'; k, k'])|. \quad (2)$$

将 (2) 的数值记为 $d(l, l')$, 即有 $\cosh d(l, l') = \frac{P(\xi, \xi')}{\sqrt{q(\xi)q(\xi')}}$, 它定义为 K 中的 l

和 l' 的距离, 这样使得 K 成为一个度量空间. 该度量空间 (K, d) 称为 2 维双曲平面.

在 B 中定义距离 $d(z, z')=d(\varphi^{-1}(z), \varphi^{-1}(z'))$, 称 d 为 B 的双曲度量, (B, d) 就成为双曲平面的 Klein 模型.

例 1 设 $z \in B$, 若令 $r = d(0, z)$, 则

$$r = \operatorname{arccosh} \frac{1}{\sqrt{1 - |z|^2}}, |z|^2 = \tanh r.$$

由此可知, 当 $|z|^2$ 趋于 1 时, $d(0, z)$ 趋于无穷.

3. 切平面

设 ξ 使得 $q(\xi) > 0$, $\xi^\perp = \{u \in \mathbf{R}^3 : P(\xi, u) = 0\}$, $\xi^\perp$ 表示 $\mathbf{R}^3$ 中的过原点的一个平面. 我们可以把 $\xi^\perp$ 理解为在二次型 q 意义下 ξ 的正交补, 也可以称 ξ 与 u 正交, 但是它们在欧氏空间中并不正交.

满足 $q(\xi) = 1$ (即 ξ 在双叶双曲面 $-x^2 - y^2 + t^2 = 1$ 上) 和 $u \in \xi^\perp$ (此时 $\xi^\perp$ 是平行于双叶双曲面 $-x^2 - y^2 + t^2 = 1$ 在 ξ 处的切平面的过原点的平面) 的偶对 (ξ, u) 全体在等价关系 $(\xi, u) \sim (\xi', u') \Leftrightarrow \xi = \varepsilon \xi', u = \varepsilon u'$ (其中 $\varepsilon = \pm 1$) 下的商空间称为 K 的切丛, 记为 TK , 即 $TK = \{(\xi, u) : q(\xi) = 1, u \in \xi^\perp\} / \sim$. 实际上, 双叶双曲面 $-x^2 - y^2 + t^2 = 1$ 在 ξ 和 $-\xi$ 处的切平面是平行的, 而此等价关系就是将在 ξ 处的切向量 u 与在 $-\xi$ 处的切向量 $-u$ 等同.

K 在 l 处的切平面记为 $T_l K$, 它就是满足 $q(\xi) = 1$ 和 $\xi \in l$ 条件 (ξ, u) 的在 TK 中的象空间, 是一个 2 维向量空间, 等同于 $\mathbf{R}^2$.

$$T_l K = \{(\xi, u) : q(\xi) = 1, \xi \in l, u \in \xi^\perp\} / \sim.$$

如果将 ξ 限制在上半空间, $T_l K$ 可等同于 $\xi^\perp$, $\xi^\perp$ 上的向量就是 K 在 l 处的切向量.

对于 $q(\xi) > 0, u \in \xi^\perp$, 有 $q(u) < 0$. 这是因为如果 $\xi \in l$, 则有 $\xi_1 \in l$ 使得 $q(\xi_1) = 1$, 且 $\xi^\perp$ 与 $\xi_1^\perp$ 等同, $u \in \xi^\perp$ 是双叶双曲面 $-x^2 - y^2 + t^2 = 1$ 在 ξ_1 处的切向量, 很明显 $u \in \xi^\perp$ 在 q 的迷向锥外, 因而 $q(u) < 0$.

由于 $q(u) = q(-u)$, 因而可以定义 $T_l K$ 中两个向量的夹角. 如果两个向量是 (ξ, u) 和 (ξ, v) , 则夹角 $\alpha \in [0, \pi]$ 定义为

$$\cos \alpha = - \frac{P(u, v)}{\sqrt{q(u)q(v)}}. \quad (3)$$

如果 u, v 的第 3 个坐标为 0, 则这样的夹角与它们在欧氏意义下的夹角一样.

在 Klein 模型 B 中, $z \in B$ 的切平面 $T_z B$ 由 $\varphi^{-1}(z)$ 的切平面推衍而来, 也等同于 $\mathbf{R}^2$. 要特别注意的是, 在 $T_z B$ 中的夹角与欧几里得空间中的夹角是不一样的.

4. 直线, 射线

在 K 中, 把 K 与射影平面 $P^2 \mathbf{R}$ 的一条射影直线的非空交集称为直线, 在 $\mathbf{R}^3$ 中看就是在迷向锥 Q 内部过原点的平面部分. 在 B 中, 直线就是指 K 的直线在 φ 下的象集, 因而就是开线段, 其端点在 B 的边界 S^1 上不同的两点. 见图 7.13.

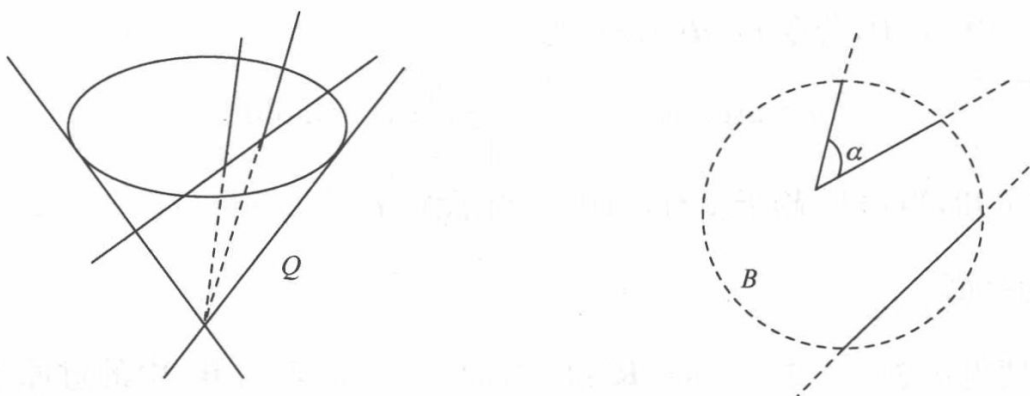


图 7.13

在 K 中, 设 $q(\xi)=1, \xi \in l, q(u)=-1, u \in \xi^\perp$, 当 $t>0$ 时, $q(\cos ht \cdot \xi + \sin ht \cdot u)=1$, 向量 $\cos ht \cdot \xi + \sin ht \cdot u$ 所确定直线的集合称为以 l 为始点的射线, 该射线的方向是伴随 (ξ, u) 的射线的切向量.

由 φ 可推得 B 中的射线概念, 这些射线就是半开线段, 其闭端点在 B 中, 开端点在 S^1 中.

在 K 或 B 中, 两条具有相同始点的射线的夹角就是它们的切向量在(3)意义下的夹角.

在 K 或 B 中不同两点决定唯一的一条包含该两点的直线, 决定唯一的一条以指定一点为始点的射线. 不在同一直线上的三点, 由任意两点间的直线段构成的图形称为双曲平面上的三角形, 见图 7.14.



图 7.14

5. 双曲平面上三角形的基本公式

命题 7.5 设 $z, z', z'' \in B$, 且 $z \neq z', z \neq z'',$ 令 $d(z', z'')=a, d(z'', z)=b, d(z, z')=c,$ 且设以 z 为起点, 经过 z' 和 z'' 的两条射线在 z 处的夹角为 α , 见图 7.14, 则

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos \alpha.$$

证明 设 $l = \varphi^{-1}(z), l' = \varphi^{-1}(z'), l'' = \varphi^{-1}(z''),$ 取 $\xi \in l, u, v \in \xi^\perp,$ 使得 $q(\xi)=1, q(u)=q(v)=-1.$

另取 $k>0, h>0,$ 使得 $\xi' = \xi + ku \in l', \xi'' = \xi + hv \in l''.$ 则

$$q(\xi') = q(\xi + ku) = q(\xi) + k^2 q(u) = 1 - k^2,$$

$$q(\xi'') = q(\xi + hu) = q(\xi) + h^2 q(u) = 1 - h^2.$$

$$\cosh c = \frac{P(\xi, \xi')}{\sqrt{q(\xi)q(\xi')}} = \frac{P(\xi, \xi + ku)}{\sqrt{1-k^2}} = \frac{P(\xi, \xi) + kP(\xi, u)}{\sqrt{1-k^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}},$$

$$\sinh c = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}, (\text{因为 } \cosh^2 c - \sinh^2 c = 1).$$

同理可得 $\cosh b = \frac{1}{\sqrt{1-h^2}}, \sinh b = \frac{h}{\sqrt{1-h^2}}.$

$$\cos \alpha = -\frac{P(u, v)}{\sqrt{q(u)q(v)}} = -P(u, v).$$

$$P(\xi', \xi'') = P(\xi + ku, \xi + hv) = P(\xi, \xi) + khP(u, v) = 1 - kh \cos \alpha,$$

$$\cosh a = \frac{P(\xi', \xi'')}{\sqrt{q(\xi')q(\xi'')}} = \frac{1 - kh \cos \alpha}{\sqrt{1-k^2} \sqrt{1-h^2}} = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos \alpha.$$

由此命题, 由于 $\cos \alpha \geq -1$, 双曲余弦在正实数中是严格递增的, 得到

$\cosh a \leq \cosh b \cosh c + \sinh b \sinh c = \cosh(b+c)$, 因而有三角不等式 $a \leq b+c$. 等式 $a=b+c$ 仅在 $\cos \alpha = -1$ 时成立, 即 $\alpha = \pi$, 这样就可说在 B 中点 z 属于端点为 z', z'' 的线段. 由此, 在 B 的任意两点 z, z' 之间存在唯一的一条最短道路, 即由 z, z' 生成的线段, 长为 $d(z, z')$. 特别是, B 的度量是优异的, 从而是内蕴的. 这样的结论, 说明 B 中直线就具有从一点到另一点的最短道路的欧氏性质. 但是, 现在对双曲平面来说, 过不在直线 L 上的一点 z , 就有无穷多条与直线 L 不相交的直线, 它们构成两端直线之间所有直线的集合, 见图 7.15.

6. 点到直线的距离

在命题 7.5 中, 假设 $\alpha = \frac{\pi}{2}$, 则 $\cosh a = \cosh b \cosh c$, 从而 $a \geq b$, 等式仅当 $z = z'$ (即 $c=0$) 时成立, 见图 7.16. 从而点 z'' 到直线 L 的距离就定义为过 z'' 与 L 正交的线段的长. 于是给定一条直线 L 和 $z'' \notin L$, 则存在一点 $z \in L$ 使得 $d(z, z'') = d(z'', L)$.

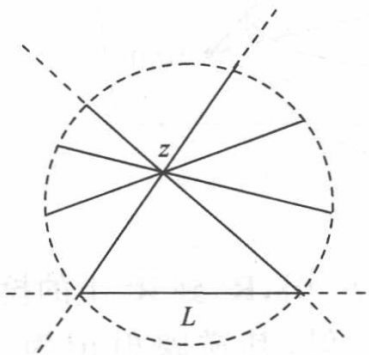


图 7.15

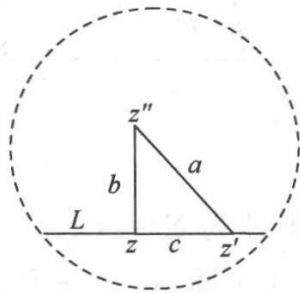


图 7.16

不相交的两直线 L, L' 间的距离定义为 $d(L, L') = \min\{d(z, z') : z \in L, z' \in L'\}$. 但是它并不等于 L 上的任意一点到 L' 的距离. 因为我们有: 若 $z \in L, z' \in L'$ 使得 $d(z, z') = d(L, L')$, 且 L, L' 与直线 zz' 在 z, z' 处的夹角正好都是 $\frac{\pi}{2}$, 则当 $w \in L, w \neq z$ 时, 有 $d(w, L') > d(L, L')$, (见思考题). 图中虚线是到直线 L 等距离的点的轨迹 (见图 7.17).

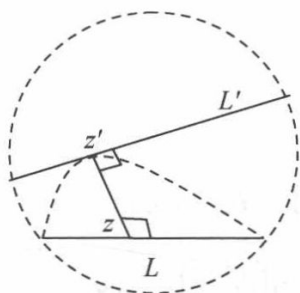


图 7.17

对双曲平面上边长为 a, b, c , 它们所对应的内角为 α, β, γ 的三角形, 有下列公式:

$$\frac{\sin \alpha}{\sinh a} = \frac{\sin \beta}{\sinh b} = \frac{\sin \gamma}{\sinh c}, \quad (4)$$

$$\cos \alpha = \sin \beta \sin \gamma \cosh a - \cos \beta \cos \gamma. \quad (5)$$

若将集合 $\{z \in B : d(z, z_0) = r\}$ 称为双曲平面上以 z_0 为圆心, 半径为 r 的圆, 则圆的周长是 $2\pi \sinh r$ (利用极坐标和积分计算). 欧氏平面上圆的周长是 $2\pi r$, 球面上圆的周长是 $2\pi \sin r$.

对 B 中内角为 α, β, γ 的三角形, 其面积为 $\pi - \alpha - \beta - \gamma$ (需要二重积分, 证明略). 因而 B 中三角形的三内角和小于 π .

7. 共形模型

考虑单位球面 S^2 关于其北极 n 的球极投影 $f: S^2 \setminus \{n\} \rightarrow \mathbf{R}^2, f(z, t) = \frac{z}{1-t}$, 如

图 7.18. 其逆映射 $f^{-1}: \mathbf{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{n\}, f^{-1}(z) = \left(\frac{2z}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$. 球极投影是一个保角 (共形) 的映射.

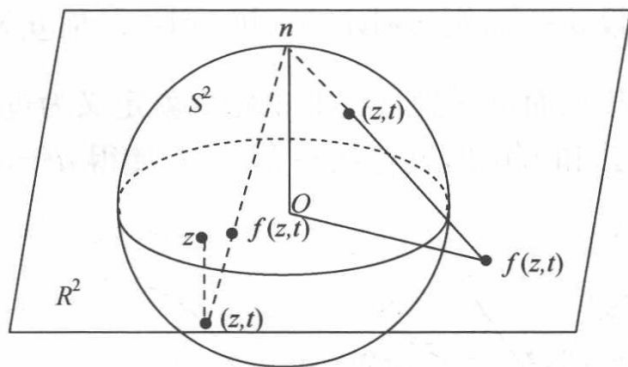


图 7.18

记 S^2 的开南半球为 $\Sigma = \{(z, t) \in S^2 : t < 0\}$, $\mathbf{R}^3$ 到 $\mathbf{R}^2$ 上的投影为 π , 即 $\pi(z, t) = z$. π 限制在 Σ 上 (即 $\pi: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^2$) 是双射, 其逆映射记为 g , 则有 $g(z) = (z, -\sqrt{1-|z|^2})$. 令

$$F=f \circ g: B \rightarrow B, F(z)=f(g(z))=\frac{z}{1+\sqrt{1-|z|^2}}.$$

$$G=F^{-1}=g^{-1} \circ f^{-1}: B \rightarrow B, G(z)=\pi \circ f^{-1}(z)=\frac{2z}{1+|z|^2}.$$

易知, F, G 都是双射.

将 B 赋予度量 $\delta(z, z')=d(G(z), G(z'))$, 其中 d 是 B 的双曲度量, 则称 (B, δ) 为双曲平面的共形模型, 记为 C .

C 中的直线、射线、切向量和夹角通过 F, G 的推衍得到. 例如, 见图 7.19, 若 L 是 B 的一条直线, 其载体直线 $\bar{L}$ 与 S^1 交于 u, v , 则 $g(\bar{L})$ 是 S^2 中一个与 S^1 在 u, v 处交成直角的圆, 因而 $F(\bar{L})=f(g(\bar{L}))$ 也是 R^2 中一个与 S^1 在 u, v 处交成直角的圆. 于是 C 的直线是正交于 S^1 的图形与 B 相交而得的开圆弧, 射线则是这些圆的半开弧, 见图 7.20.

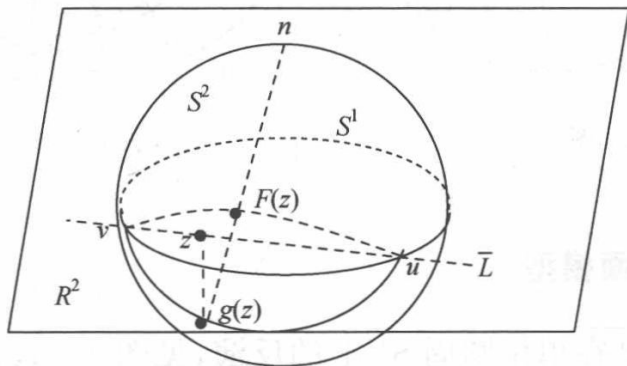


图 7.19

可以证明 C 中的角度与在 R^2 中的角度是一样的, 这是“共形”一词的来由.

如图 7.21, 在 C 中我们较易作出三个圆 L, L', L'' , 使得它们都与 S^1 正交, 且在 S^1 的交点处两两相切, 从而存在 C (或 B) 的三角形, 它们的内角要多小就有多小. 特别是, 由双曲平面中的三角形面积的计算公式, C 的三角形的面积的上界等于 π , 且能达到. 要注意的是, 这样的三角形的各边长度是无限的, 然而面积是有限的 π .

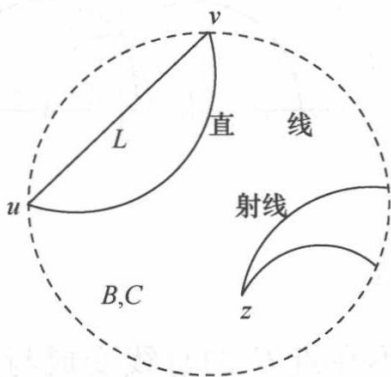


图 7.20

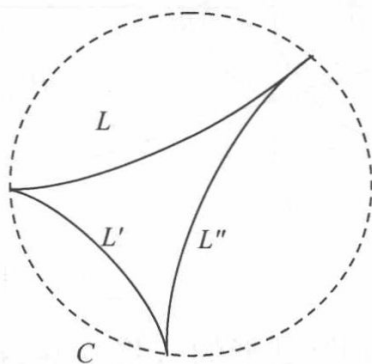


图 7.21

以 $z \in C$ 为圆心的圆必然与所有过 z 的直线正交, 因而这些圆就是在 C 内部的一个圆束, 其中一个圆是 S^1 , 一个极限点是 z , 于是 C 的圆也都是欧氏圆, 见图 7.22.

在 C 内, 但在 w 处与 S^1 相切的圆代表什么呢? 这样的圆 Γ 是与 C 中任一以 w 为无穷远点的直线正交的, 因而 Γ 是一个圆心在无穷远处的圆, 但它不是一条直线. 我们可以把 Γ 作为所有经过固定点 z , 圆心在直线 zw 上延伸至无穷远处的圆的极限, C 的这种曲线称为极限圆, 见图 7.23.

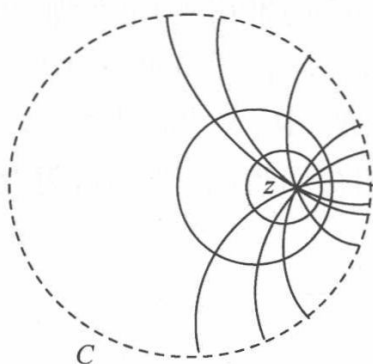


图 7.22

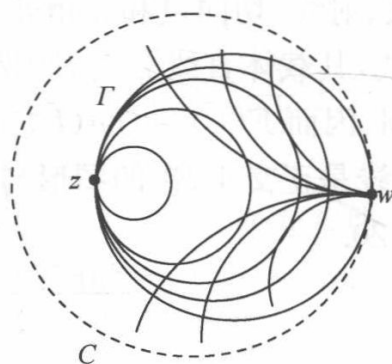


图 7.23

8. Poincaré 半平面模型

在 R^2 上作极点 P 在单位圆周 S^1 上的反演, 见图 7.24, 将 Q 变成 R , 将 Q' 变成 R' , 即满足 $PQ \cdot PR = 4$, 它将 S^1 的内部 C 变成一个半平面 H , 其边界为直线 L , L 是在上述反演下 S^1 的象, P 点自身的象是无穷远点. 称 H 为 Poincaré 半平面.

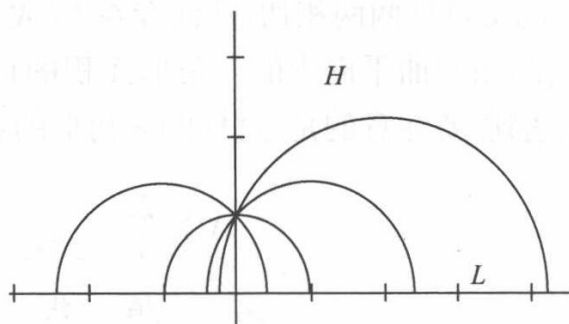
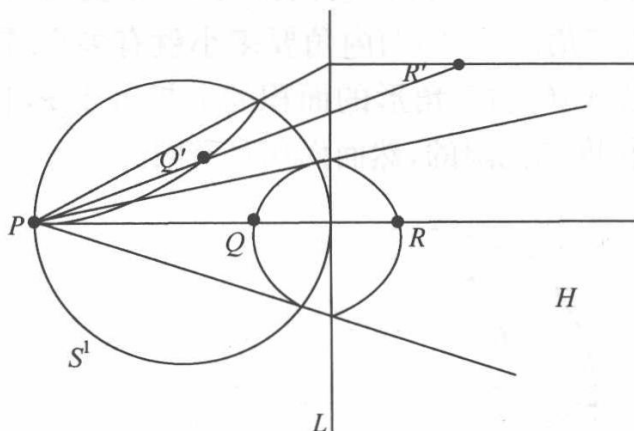


图 7.24

反演是保角的(共形的), 将 C 中端点不在点 P 的直线变成与 L 正交的半圆弧, P 为端点的直线变成与 L 正交的半直线. 因此, 这种模型有两种直线: 与 L 正交的半圆和半直线, 见图 7.24. 在这点上 H 比 C 稍微逊色一点, 但是这一模型又

有所有模型中计算最简便的优势. 做法是将 R^2 与复平面 $\mathbf{C}$ 等同, 则 $H = \{z \in \mathbf{C}: \operatorname{Im}(z) > 0\}$. H 的等距变换群的元素为

$$\sigma(z) = \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbf{R}, ad-bc \neq 0.$$

由于计算要用到微积分, 所以在此就只是简单介绍一下模型.

双曲几何思考题

1. 在 B 中有一个四边形, 其三内角都是直角, 且边 a, b 已知, 如图 7.25, 求第四个内角 α .
2. 证明: 如图 7.26, 在 B 中, 过 z 向直线 L 作的两条端点平行线的夹角 α 只依赖于 $d(z, L) = h$, 并写出 α 与 h 的函数关系.

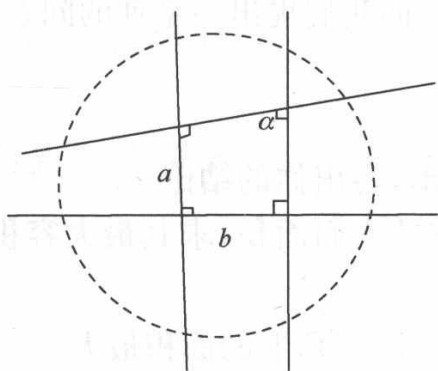


图 7.25

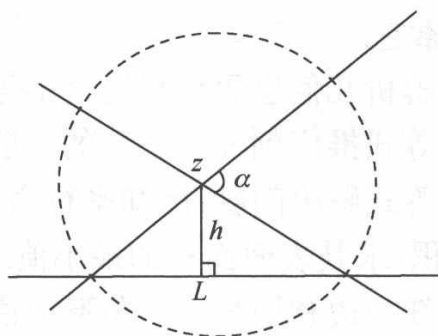


图 7.26

3. 如图 7.27, 先在模型 B 中, 然后在模型 C 中, 从几何上作出双曲平面的两条直线 L, L' 的公垂线.

4. 如图 7.28, 在双曲平面 B 上给定一条直线 L , 讨论集合 $\{z \in B: d(z, L) = h\}, h > 0$, 证明它们都是圆锥曲线的并集, 在 C 中进行同样的讨论.

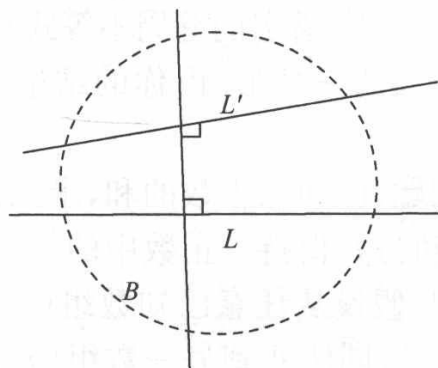


图 7.27

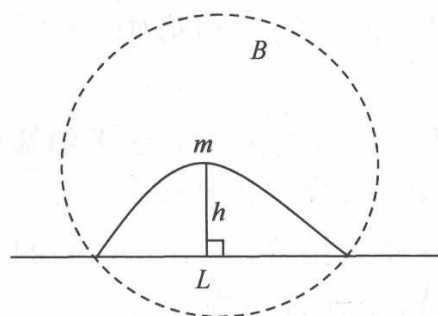


图 7.28

5. 在 B 中, 给定一点 m , 证明 $\{z \in B: d(z, m) = r\}$ 都是 R^2 的椭圆.
6. 证明在双曲平面 B 中任意 4 点 z_1, z_2, z_3, z_4 , 必满足 $\det(\cosh[d(z_i, z_j)]) = 0$.

问题探索

我们熟知一个简单且常用的不等式:对任意正数 a, b , 有 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$, 并且等号成立的条件是 $a=b$. 但是你有没有深入思考过这个不等式呢? 能从中得到什么样的体会和发现? 我们现在来做一个尝试, 当然你可以从其他的角度去做. 首先, 可以用几何来解释它:“在具有已知周长的矩形中正方形的面积最大.”或者“在具有已知面积的矩形中正方形的周长最小.”下面我们提出一系列的问题来引导大家去运用和思索它.

1. 请用解析几何思想解释这个不等式.
2. 将不等式推广到 n 个正数的一般情形, 写出你的结论.
3. 用不等式解决问题: 已知平行六面体的表面面积, 求其最大容积; 已知平行六面体的容积, 求其表面面积的最小值.
4. 在已知一边和周长的三角形中说明等腰三角形的面积最大.
5. 利用 4 的结论你能在已知周长的三角形中找出面积最大的三角形吗?
6. 在已知球内的所有内接四面体中, 求出体积最大的四面体.
7. 在已知面积的三角形中, 求周长最小的三角形. 立体空间中的类似问题是什么?
8. 在已知面积的四边形中, 求面积最大的四边形.
9. 从三角形、四边形的周长与面积之间的关系, 猜测平面上多边形的结论. 由此猜想平面上任意封闭曲线的周长与面积的关系(著名的等周不等式).
10. 在已知两边的三角形中, 求面积最大的三角形. 由你的结论猜想类似的问题.
11. 用数学分析的极限方法求熟知的问题: 已知三正数的和, 求三正数乘积的最大值. 做法提示: 设三正数为 (x, y, z) , 其和为 l . 保持三正数中的一个不变, 而变化另外两个并使其相等, 来增大它们的乘积. 假设从任意已知数组 (x, y, z) 开始, 履行上述手续, 变到另一数组 (x_1, y_1, z_1) , 然后同法变到另一数组 (x_2, y_2, z_2) , 如此等等. 我们依次保留不变的三项如下: 首先 x 项, 其次 y 项, 再次 z 项; 而后再 x , 其次 y , 再次 z , …… 因而可设

$$\begin{aligned}x_1 &= x, y_1 = z_1 = \frac{y+z}{2}; & y_2 &= y_1, x_2 = z_2 = \frac{x_1 + z_1}{2}; \\z_3 &= z_2, x_3 = y_3 = \frac{x_3 + y_3}{2}; & x_4 &= x_3, y_4 = z_4 = \frac{y_3 + z_3}{2} \dots\end{aligned}$$

以上每一步都保持三正数的和不变,而使乘积增大

$$x + y + z = x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_2 = \cdots, \\ xyz < x_1 y_1 z_1 < x_2 y_2 z_2 < \cdots.$$

如果能证明(请证明) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$, 就可以立刻推出

$$xyz \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n z_n = \left(\frac{l}{3}\right)^3 = \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3.$$

(1)你能将该方法推广到 n 个正数的情形吗?

(2)在一个正三角形中任取一点,设该点到三边的距离为 (x, y, z) , 则 $x + y + z$ 为正三角形的高.(为什么?)从该点出发试用点与线段作出上述极限过程的图示.

12. 问题 11 的有限过程: 设 $l = 3A$, 且有

$$(x - A) + (y - A) + (z - A) = 0.$$

若 x, y, z 不全等, 不妨设 $y < A < z$. 现在从数组 (x, y, z) 变到数组 (x', y', z') , 令

$$x' = x, \quad y' = A, \quad z' = y + (z - A),$$

于是

$$x + y + z = x' + y' + z',$$

以及

$$y'z' - yz = A(y + z - A) - yz = (A - y)(z - A) > 0,$$

因此

$$xyz < x'y'z'.$$

若 x', y', z' 仍不全等, 再从 (x', y', z') 变到 (x'', y'', z'') . 令

$$y'' = y', \quad x'' = z'' = \frac{x' + z'}{2},$$

便得到 $x'' = y'' = z'' = A$, 并且乘积再次增大. 于是

$$xyz < x'y'z' < x''y''z'' = A^3 = \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3.$$

(1)将以上方法作适当的修正, 用于证明 n 个正数的情形.

(2)用 11 问的图示法说明 12 问的过程.

该部分取材于文献波利亚 G, 2001.

习题答案与提示

习题 1.1

1. 将向量首尾相接,用加法的定义直接验证.
2. 同第 1 小题.
3. 利用第 2 小题.
4. 利用向量的数乘.
5. 必要性:由于 a, b, c 共面,在一平面内作 $\overrightarrow{OA}=a, \overrightarrow{AB}=b, \overrightarrow{BC}=c$,过点 B 作直线平行于 OA ,过点 C 作直线平行于 AB ,两直线交于点 D ,那么 $\overrightarrow{DC} \parallel \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DB} \parallel \overrightarrow{OA}$,得 $\overrightarrow{DC}=\lambda b, \overrightarrow{DB}=\mu a$,又 $c=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}=\lambda b-\mu a$,所以 a, b, c 线性相关.
6. 方法同例 1.1.1.
7. 利用同一向量用相同的线性无关向量的表示的唯一性.
10. 利用正 n 边形旋转一个中心角后重合的性质.

习题 1.2

1. 点 $P(x, y, z)$ 关于平面 xOy , x 轴与原点的对称点的坐标分别是 $(x, y, -z), (x, -y, -z), (-x, -y, -z)$.
2. $P(1/2, 1/2), M(1/5, 4/5), N(5/6, 5/6), \overrightarrow{MN}=(19/30, 1/30)$.
3. (1) $(0, 16, -1)$. (2) $(-11, -9, -2)$.
4. (1) 不共面. (2) 共面, $c=1/2a+2/3b$. (3) 共面, c 不能由 a, b 线性表示.
5. $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
7. 选一合适的仿射标架,利用第 6 小题的结论.

习题 1.3

1. -13 .
2. $14-33\sqrt{3}$.
3. $\frac{\pi}{3}$.
5. (1) 错误. 左边是向量,右边是数量. (2) 正确. (3) 错误. (4) 错误. (5) 错误. (6) 错误.
6. 设三角形 ABC 的 AB, BC 的垂直平分线交于点 O ,连接点 O 与第三边的中点 D ,设以点 O 为始点, A, B, C 为终点的向量为 a, b, c ,证明 OD 垂直于边 AC ,且 $|a|=|b|=|c|$.
7. 证明: $r^2=0$.

8. 利用向量的一般形式的三角不等式.

习题 1.4

1. 由外积的定义去验证.
2. 由外积的模和内积的定义直接验证.
3. 计算 $(a-d) \times (b-c) = 0$.
4. 几何意义: 以平行四边形的对角线为邻边的平行四边形的面积等于原平行四边形面积的两倍.

5. (1) $c = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$. (2) $c = \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4} \right)$.

6. 通过外积的模的几何意义去证明.
7. 用二重外积公式.
8. 平行于向量 a 的一条直线.

习题 1.5

1. 用混合积的定义.
2. 计算 $[(a \times b) \times (b \times c)](c \times a)$.
3. $59/6$.
4. 用二重外积公式.
5. 用混合积的性质.
6. 利用第 4 小题的结论.
7. 用二重外积公式.
8. 计算 $[a \times (a \times b)] \times [b \times (a \times b)]$.
9. 由条件得 $r \cdot (\alpha a - \beta b) = 0$, 可令 $r = k(\alpha a - \beta b) \times c$, 求出 k .
10. 令 $a = ke_1 + le_2 + me_3$, 两边分别与向量 $e_1 \times e_2, e_2 \times e_3, e_3 \times e_1$ 作内积, 求出 k, l, m .
11. 由第 2 小题的结论, 可令 $r = ka \times b + lb \times c + mc \times a$, 求出 k, l, m .

习题 2.1

1. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-5}$.

2. (1) 一般方程: $19x + 11y + 13z - 3 = 0$. 参数方程:
$$\begin{cases} x = -1 - \lambda + 4\mu, \\ y = 2 - 3\lambda - \mu, \\ z = 4\lambda - 5\mu. \end{cases}$$

(2) 一般方程: $x - 3y = 0$. 参数方程:
$$\begin{cases} x = 3 + 3\lambda + 3\mu, \\ y = 1 + \lambda + \mu, \\ z = -2 - 2\lambda - 3\mu. \end{cases}$$

(3) 一般方程: $5x + 3z - 7 = 0$. 参数方程:
$$\begin{cases} x = 2 - 3\lambda, \\ y = 3\lambda + \mu, \\ z = -1 + 5\lambda. \end{cases}$$

(4) 一般方程: $3x-2y-7=0$. 参数方程:
$$\begin{cases} x=-1+\frac{2}{3}\lambda, \\ y=-5+\lambda, \\ z=4+\mu. \end{cases}$$

3. $2x-y+3z+4=0$.

4. $3x-y-z-6=0$.

5. 将平面方程化为截距式, 求出截距.

6. 利用定比分点公式.

习题 2.2

1. $15x-47y+28z-7=0$.

2. (1) 相交. (2) 重合. (3) 平行.

3. (1) $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{-4}$. (2) $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+2}{0}$.

4. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+2}{-6}$.

5. (1) 异面. (2) 异面且垂直.

6. $(3, -2, 1)$.

7. $x-20y+27z-14=0$.

8. $\frac{x-\frac{12}{5}}{2}=\frac{y-\frac{9}{5}}{-1}=\frac{z-3}{4}$.

9. $7x-2y-2z+1=0$.

10. 在三角形 ABC 所在平面上取仿射标架 $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$, 写出直线 AQ, BR, CP 的方程. AQ, BR, CP 共点的充要条件是它们的方程组成的方程组有解.

11. 取仿射标架 $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$, 求出三角形的顶点与对边分点的连线的方程, 解方程组.

12. 由两直线相交得四元线性方程组 $A_ix + B_iy + C_iz + D_iw = 0 (i=1, 2, 3, 4)$ 有非零解 $(x_0, y_0, z_0, 1)$, 从而系数行列式等于零.

13. $|M'_1 M'_2| = \frac{6}{\sqrt{14}}, M'_1\left(\frac{17}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{15}{7}\right), M'_2\left(\frac{23}{7}, \frac{1}{7}, \frac{24}{7}\right)$.

14. 设直线 l 与 l_1, l_2, l_3 的交点分别是 $P_1(m, m, 1), P_2(n, -n, -1), P_3(k, 0, 0)$, 由于 P_1, P_2, P_3 共线, 得 $m=n=k$, 写出直线 l 的方程, 消去参数得 $y=xz$.

习题 2.3

1. (1) $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-9}{-1}$.

(2) 有 4 条:

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{1} &= \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{1}, & \frac{x-2}{1} &= \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-1}, \\ \frac{x-2}{1} &= \frac{y-4}{-1} = \frac{z+1}{1}, & \frac{x-2}{-1} &= \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{1}. \end{aligned}$$

2. $\theta = \arccos \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}$ 或 $\theta = \pi - \arccos \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}$.

3. 分两种情形考虑: 两平面相交与平行.

4. 位于 8 个平面: $\pm x \pm y \pm z = 1$ 所围的内部.

5. 利用习题 2.1 的第 6 小题的结论.

6. $Ax + By + Cz + D \pm d \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = 0$.

7. $\sqrt{11}$.

8. (1) $2\sqrt{3}$. (2) $\frac{15}{\sqrt{41}}$. (3) 0.

9. (1) $\begin{cases} 45x - 2y - 17z - 35 = 0, \\ 23x - 20y + 20z = 0. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x + y + 4z - 1 = 0, \\ x - 2y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$

10. (1) $\frac{\pi}{2}$. (2) $\arccos \frac{4}{\sqrt{22}}$ 或 $\pi - \arccos \frac{4}{\sqrt{22}}$.

11. (1) $\arcsin \frac{2\sqrt{14}}{21}$. (2) $\arcsin \frac{\sqrt{70}}{14}$.

12. 以公垂线为 z 轴, 过公垂线段的中点与公垂线垂直的平面为 xOy 面, 两异面直线在 xOy 面上的投影直线的角平分线为 x 轴和 y 轴建立空间直角坐标系, 求出中点轨迹方程为 $z=0$.

13. $23x - y - 4z - 24 = 0$.

14. 证明公垂线段的长度是两直线的任意两点之间距离的最小值.

习题 3.1

1. 球心 $(-a, -b, -c)$, 半径 $\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

2. $\begin{cases} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{2}, \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1. \end{cases}$

3. 消去参数 t , 曲线满足球面方程: $x^2 + y^2 + z^2 - y = 0$.

4. (1) 设两定点为 $(0, 0, \pm a)$, $a > 0$, 定比为 $k > 0$, 方程为

$$(1-k^2)x^2 + (1-k^2)y^2 + (1-k^2)z^2 - 2a(1+k^2)z + a^2(1-k^2) = 0.$$

(2) 设两定点为 $(0, 0, \pm a)$, $a > 0$, 常数为 $k > 0$, 方程为

$$4k^2x^2 + 4k^2y^2 + (4k^2 - 16a^2)z^2 + 4k^2a^2 - k^4 = 0.$$

(3) 设定点为 $(0, 0, a)$, $a > 0$, 定平面为 $z = -a$, 方程为 $x^2 + y^2 = 4az$.

5. $x^2 - y^2 = z$.

6. $R^2 \cos 2\theta = 25$.

习题 3.2

1. 圆柱面上的任意一点到对称轴的距离相等, 由点到直线的距离公式得

$$13x^2 + 10y^2 + 5z^2 - 4xy - 12yz - 6xz - 14 = 0.$$

2. 易得圆柱面的母线方向, 求出过原点与母线垂直的平面方程, 求该平面与三条母线的交点, 然后求出平面截圆柱面所得圆的圆心和半径, 用第 1 小题的方法得

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz + 3y - 3z = 0.$$

3. $16x^2 + 16y^2 + 13z^2 + 24yz - 16xz + 16x - 24y - 26z - 131 = 0.$

4. 求出圆柱面的半径, 用第 1 小题的方法得

$$8x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 8yz + 4xz - 8x - 2y - 2z - 39 = 0.$$

5. 设圆柱面的母线方向为 $(l, m, 1)$, 圆柱面半径为 r , 在准线上选取适当的三点, 它们到对称轴的距离都等于 r , 由此列出三个方程, 可求出 l, m, r . 从而得两个圆柱面, 它们的方程为

$$(x \pm \sqrt{3}z)^2 + 4y^2 = 4.$$

6. $3x^2 + 3y^2 - z^2 = 0.$

7. $f\left(\frac{hx}{z}, \frac{hy}{z}\right) = 0.$

8. $xy \pm yz \pm xz = 0.$

9. $20x^2 - 5y^2 - z^2 + 2yz + 10y - 5z - 5 = 0.$

10. 由条件得外切柱面的对称轴方程, 圆柱面的半径为 1, 再用第 1 小题的方法可求得圆柱面的方程.

11. 设过 x, y 轴的平面方程分别为: $B_1y + C_1z = 0, A_2x + C_2z = 0$, 由两平面的夹角为常数得系数 A_2, B_1, C_1, C_2 之间的关系, 然后在交线的方程中消去这些系数就得轨迹方程

$$x^2y^2 - \cos^2\theta(y^2 + z^2)(x^2 + z^2) = 0.$$

12. 作一个移轴坐标变换, 将坐标系的原点移到 M_0 , 利用顶点在原点的锥面方程是齐次方程的结论.

13. (1) 在 xOy, yOz, zOx 面的投影柱面分别为

$$x^2 + y^2 = 4a^2, \quad y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 - z^2 = 3a^2.$$

在 xOy, yOz, zOx 面的投影曲线分别为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4a^2, \\ z = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 + z^2 = a^2, \\ x = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - z^2 = 3a^2, \\ y = 0. \end{cases}$$

(2) 在 xOy, yOz, zOx 面的投影柱面分别为

$$2y - 3 = 0, \quad 2y - 3 = 0, \quad x^2 + z^2 = \frac{7}{4}.$$

在 xOy, yOz, zOx 面的投影曲线分别为

$$\begin{cases} 2y - 3 = 0, \\ z = 0 \end{cases} (|x| \leq 2), \quad \begin{cases} 2y - 3 = 0, \\ x = 0 \end{cases} (|z| \leq 2), \quad \begin{cases} x^2 + z^2 = \frac{7}{4}, \\ y = 0. \end{cases}$$

(3) 在 xOy, yOz, zOx 面的投影柱面分别为

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0, \quad z^4 - 4a^2z^2 + 4a^2y^2 = 0, \quad z^2 + 2ax - 4a^2 = 0.$$

在 xOy, yOz, zOx 面的投影曲线分别为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2ax = 0, \\ z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} z^4 - 4a^2z^2 + 4a^2y^2 = 0, \\ x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} z^2 + 2ax - 4a^2 = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x=f(t)+sl, \\ y=g(t)+sm, \\ z=h(t)+sn, \end{cases} \quad s, t \text{ 为参数.}$$

习题 3.3

$$1. x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1.$$

$$2. 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 5xy - 5xz - 5yz + 5x + 5y + 5z - 7 = 0.$$

$$3. \begin{cases} x = \sqrt{f^2(t) + g^2(t)} \cos \theta, \\ y = \sqrt{f^2(t) + g^2(t)} \sin \theta, \\ z = h(t). \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

$$4. \text{ 母线为 } \begin{cases} zy^2=1, \\ x=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} zx^2=1, \\ y=0. \end{cases} \text{ 转轴为 } z \text{ 轴.}$$

习题 3.4

$$1. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{36} = 1.$$

$$2. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 4z.$$

3. 设二次曲线的方程为一般方程, 由已知条件求出系数, 曲线方程为 $xz=0$ 或 $\frac{x^2}{3} - \frac{z^2}{2} + 2kxz - 2y=0, k$ 为参数.

4. 当 $k < c^2$ 时椭球面, 当 $c^2 < k < b^2$ 时单叶双曲面, 当 $b^2 < k < a^2$ 时双叶双曲面, 当 $k > a^2$ 时虚椭球面.

5. (1) 设两定点为 $(0, 0, \pm c)$, 距离之差为 $2b, c \geq b > 0$, 方程为 $b^2 x^2 + b^2 y^2 + (b^2 - c^2) z^2 = (b^2 - c^2)$.

(2) 设定点为 $(0, 0, c)$, 定平面为 $z = -c/k$, 定比为 $k > 0, c > 0$, 则方程为 $x^2 + y^2 + (1 - k^2) z^2 - 2(1 + k) cz = 0$.

(3) 以定平面为 xOy 面, 定直线为 z 轴建立直角坐标系. 轨迹方程为 $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

(4) 以两条直线的公垂线为 z 轴, 过公垂线段的中点与公垂线垂直的平面为 xOy 面, 建立直角坐标系使两条直线的方向向量为 $(\cos \frac{\alpha}{2}, \pm \sin \frac{\alpha}{2}, 0)$, 轨迹方程为 $xy \sin \alpha = az$.

6. P 点的坐标 $(r\lambda, r\mu, r\gamma)$ 代入椭球面的方程中.

7. 利用第 6 小题的结论, 以三个互相垂直的单位向量为列构成的矩阵为正交矩阵, 正交矩阵的行向量也构成互相垂直的单位向量.

8. 空间圆一定可视为某球面与一个平面的交线, 设球面 $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ 与平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的交线就是椭圆抛物面 $10x^2 + 2y^2 = z$ 与平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 所交的圆, 则它们向 xOy 面的投影柱面是相同的, 从而两个投影柱面的方程的系数成比例, 由此得出所求的平面方程: $\pm 2x + z = k, k > 1/10, k$ 为参数.

习题 3.5

$$1. \begin{cases} 2x+z=0, \\ y=3 \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} 6x+4y+3z=12, \\ 6x-4y-3z=12. \end{cases}$$

$$2. y^2+z^2+2yz-x-2y-4z+3=0.$$

3. 过 l_1 的平面束与过 l_2 的平面束的交线与直线 l_3 共面, 由此得曲面方程 $x^2+y^2-z^2=1$.

4. 写出单叶双曲面的两族直母线方程, 验证异面与共面的条件.

5. (1), (2) 写出双曲抛物面的两族直母线方程, 验证异面与共面的条件.

(3) 分别平行于平面: $bx+ay=0, bx-ay=0$.

6. 由第 5 小题知相交的直母线一定是异族的, 写出直母线方程, 由正交性得直母线的交点轨迹满足的方程.

7. 将锥面方程变形, 得锥面的直母线族方程, 由直母线在所给平面上得直母线族的参数满足的关系, 然后由两直母线正交, 得出所要的结论.

习题 3.6

$$1. (1) \text{ 不等式组: } \begin{cases} x^2+y^2 \leq 16, \\ 0 \leq z \leq x+4. \end{cases} \quad (2) \text{ 不等式组: } \begin{cases} x^2+4y^2+9z^2 \geq 36, \\ x^2+y^2+z^2 \leq 16, \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0. \end{cases}$$

习题 4.1

$$1. \text{ 坐标变换: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 直线在新坐标系下的方程: } x' - 18y' - 20 = 0.$$

$$2. \text{ 同定向的坐标变换: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{37}{13} \\ -\frac{62}{13} \end{pmatrix}, \text{ 反定向的坐标变换: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

3. (1) 新坐标系的原点的旧坐标: $(5, -3)$, 旋转角: $\frac{7\pi}{4}$.

(2) 新坐标系的原点的旧坐标: $(3, -2)$, 旋转角: $\frac{3\pi}{2}$.

4. 由于两个坐标系都是右手的, 所以过渡矩阵是行列式大于零的正交矩阵. l_1, l_2 分别是 y', x' 轴, 在 σ_2 下的方程分别为 $x'=0, y'=0$, 因此取 $x' = \frac{1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}(A_1x+B_1y+C_1)$.

如果 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} > 0$, 则取 $y' = \frac{1}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}(A_2x+B_2y+C_2)$.

如果 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} < 0$, 则取 $y' = -\frac{1}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}(A_2x + B_2y + C_2)$. 由此得 σ_2 到 σ_1 的坐标变换.

5. (1) 由于 $\overrightarrow{OL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$, 所以 σ_1 到 σ_2 的

过渡矩阵为 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, 故 σ_1 到 σ_2 点的坐标变换公式: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, 向量的坐标变换

公式一样. σ_2 到 σ_1 点的坐标变换公式: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, 向量的坐标变换公式一样

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 在 σ_2 下的坐标 $A(1, -1, 1)$, $B(1, 1, -1)$, $C(-1, 1, 1)$, $\overrightarrow{AB} = (0, 2, -2)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, 2, 0)$.

6. 求出新原点的坐标 $(-1/2, 1, 1/2)$, 由条件求出新的坐标向量, 得点的坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

7. 双曲抛物面.

8. $r_1 = r \cos \theta + e \times r \sin \theta$.

9. 先求出一个向量 r 绕另一个向量 v 右旋 θ 角得向量 r_1 的表达式: $r_1 = r \cos \theta + (1 - \cos \theta) \frac{r \cdot v}{|v|^2} v + \frac{v \times r}{|v|} \sin \theta$. 由此得 $e'_1 = \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3$, $e'_2 = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3$, $e'_3 = \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3$, 所以坐标变换为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

10. 异面直线的距离为 $2a$, 夹角为 2α , 建立直角坐标系使异面直线的方程分别为

$$\begin{cases} x + a = 0, \\ y - z \tan \alpha = 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} x - a = 0, \\ y + z \tan \alpha = 0. \end{cases}$$

轨迹方程为 $(\tan^2 \alpha - 1)x^2 - y^2 + z^2 \tan^2 \alpha = a^2(\tan^2 \alpha - 1)$.

习题 4.3

$$1. (1) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{\frac{2}{3}} = 1. \quad (2) 4x^2 + y^2 \pm 3\sqrt{2}z = 0. \quad (3) x^2 + y^2 - 2z^2 = -2a^2.$$

$$(4) 17x^2 \pm 7y = 0. \quad (5) x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

2. 用圆柱面的简化方程去证明.

3. 二次曲面为锥面的条件是 $I_3 \neq 0, I_4 = 0$, 所以 a, b 满足: $4a^2 + b^2 - 4ab - 2a - 4b + 4 = 0$.

4. 设平面: $f(x, y, z) = ax + by + cz + d = 0, f_1(x, y, z) = a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ 不平行, 则以它们的角平分面为新坐标面建立新坐标系, 两平面的法向量为 $\mathbf{n} = (a, b, c), \mathbf{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, 单位法向量为 $\mathbf{n}^0, \mathbf{n}_1^0$, 则角平分面方程为

$$f(x, y, z)/|\mathbf{n}| + f_1(x, y, z)/|\mathbf{n}_1| = 0, \quad f(x, y, z)/|\mathbf{n}| - f_1(x, y, z)/|\mathbf{n}_1| = 0.$$

则有

$$x' = \frac{1}{|\mathbf{n}^0 + \mathbf{n}_1^0|} \left(\frac{1}{|\mathbf{n}|} f(x, y, z) + \frac{1}{|\mathbf{n}_1|} f_1(x, y, z) \right),$$

$$y' = \frac{1}{|\mathbf{n}^0 - \mathbf{n}_1^0|} \left(\frac{1}{|\mathbf{n}|} f(x, y, z) - \frac{1}{|\mathbf{n}_1|} f_1(x, y, z) \right),$$

简化方程为 $|\mathbf{n}^0 + \mathbf{n}_1^0|^2 x'^2 - |\mathbf{n}^0 - \mathbf{n}_1^0|^2 y'^2 = 0$.

5. 所给二次锥面的方程可写成矩阵形式: $\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}$, 作直角坐标变换 $\mathbf{X} = \mathbf{T} \mathbf{X}'$, 其中 $\mathbf{T}$ 为正交矩阵, 方程变为 $\mathbf{X}'^T (\mathbf{T}^T \mathbf{A} \mathbf{T}) \mathbf{X}'$. 用 $\text{tr}(\mathbf{A})$ 表示矩阵的主对角线上元素的和, 则有: $\text{tr}(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{T}^T \mathbf{A} \mathbf{T})$.

充分性: 作直角坐标变换 $\mathbf{X} = \mathbf{T} \mathbf{X}'$, 把二次锥面化为标准方程, 先求出二次锥面上的一直母线, 然后求与它垂直的一直母线, 最后求与这两条直线均垂直的直线, 说明它在二次锥面上.

必要性: 以三条互相垂直的直母线为新坐标系的坐标轴进行坐标变换 $\mathbf{X} = \mathbf{T} \mathbf{X}'$, 设 $\mathbf{T}^T \mathbf{A} \mathbf{T} = (b_{ij})$, 因为新坐标为 $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ 的三个点在二次锥面上, 得 $b_{11} = b_{22} = b_{33} = 0$, 从而 $a_{11} + a_{22} + a_{33} = \text{tr}(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{T}^T \mathbf{A} \mathbf{T}) = 0$.

习题 4.4

$$1. (1) (-1/2, 1/2, 0). \quad (2) \text{中心满足: } \begin{cases} x - 6y + 2z + 1 = 0, \\ 11y - z - 3 = 0. \end{cases} \quad (3) \text{中心满足: } x - y + z = 1.$$

2. (1) 中心曲面. (2) 非中心曲面, 面心曲面. (3) 非中心曲面, 无心曲面.

3. (1) $y^2 - 2z^2 + 2xz = 0$. (2) $x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 4xz - 4yz = 0$. (3) 非中心曲面, 无渐近锥面.

习题 4.5

1. (1) 无奇向. (2) 平行于平面 $x + y - 2z = 0$ 的方向都是奇向.

$$2. 2x - 3y + 2z - 2 = 0.$$

$$3. 2x + y - z = 0.$$

4. 如果曲面有中心, 则直径面必过中心. 因此求出第 1 个曲面的直径面, 第 2 个曲面的中心

必在此直径面上. 公共直径面: $x=1$.

5. (1) 主方向: $1: (-1): 0$, 主径面: $x+y=0$; 主方向: $1: 1: (-1)$, 主径面: $x+y-z=0$, 主方向: $1: 1: 2$, 主径面: $x+y+2z=0$.

$$\text{坐标变换: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{简化方程: } 18x'^2 + 12y'^2 + 6z'^2 - 4 = 0.$$

(2) 主方向: $1: (-2): 1$, 主径面: $x-2y+z-1=0$; 主方向: $1: 1: 1$, 主径面: $x+y+z+4=0$, 主方向: $1: 0: (-1)$, 主径面: $x-z-2=0$.

$$\text{坐标变换: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{13}{6} \end{pmatrix}, \text{简化方程: } 6x'^2 + 3y'^2 + 2z'^2 - 1 = 0.$$

6. 设二次曲面的中心过原点, 过中心的任何一个平面为 $Ax + By + Cz = 0$, 找一个方向 $l: m: n$ 使得共轭于此方向的直径面就是该平面.

10. 中心 $(-9/2, 1/2)$, 主方向: $1: (-1)$, $1: 1$, 主轴: $x-y+2=0$, $x+y+1=0$.

11. 与 y 轴平行的直径为: $x=1$. 它的共轭直径为: $y=2$.

12. $5x^2 + 5y^2 - 8xy + 2x + 2y - 7 = 0$.

习题 4.6

1. (1) 切平面: $2x + 4y - z - 5 = 0$, 法线: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{-1}$.

(2) 切锥: $70x^2 + 31y^2 + 15z^2 + 56xy + 24xz + 6yz - 324x - 198y - 126z + 549 = 0$.

2. $(0, \pm 2\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2})$.

3. $x^2 - y^2 + 4az = 0$.

4. (1) $2x + 3y + 6z - 41 = 0$.

(2) $(3x + 6y + 10z - 142)^2 - 120[(x-2)^2 + (y-6)^2 + (z-10)^2] = 0$.

5. 求出切点 (x_0, y_0, z_0) 的切平面, 它与平面 $18x + 13y - 2z + 12 = 0$ 重合, 得出切点 $(0, 0, 6)$.

6. $\frac{\alpha^2}{A} + \frac{\beta^2}{B} + \frac{2\gamma}{C} = 0$.

7. $(8x - 6y + 2z)^2 - 3(2x - 5y + 4z)^2 + (2x - 12y + 11z)^2 - 98 = 0$.

习题 5.1

1. 按定义直接验证.

$$2. \begin{cases} x' = y, \\ y' = x. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x' = \frac{1}{A^2+B^2}[(B^2-A^2)x-2AB y-2AC], \\ y' = \frac{1}{A^2+B^2}[(A^2-B^2)y-2AB x-2BC]. \end{cases}$$

4. 以 l_1 为 x 轴, 建立直角坐标系, 设 l_2 的方程为 $y=b$, 则 $\sigma_1: \begin{cases} x'=x, \\ y'=-y, \end{cases} \sigma_2: \begin{cases} x'=x, \\ y'=2b-y, \end{cases}$ 然

后计算 $\sigma_1\sigma_2$.

5. $(1,0)$ 变成 $(1,4)$, $(-1,1)$ 变成 $(-2,1)$, 直线变成直线: $2x-y-1=0$.

$$6. \begin{cases} x' = 5x-3y+8, \\ y' = -3x+2y-3. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta + (1-\cos\theta)x_0 + y_0\sin\theta, \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta - x_0\sin\theta + (1-\cos\theta)y_0. \end{cases}$$

8. 验证旋转满足变换群的定义的三个条件.

9. 验证运动满足变换群的定义的三个条件.

习题 5.2

$$1. \begin{cases} x' = y+2, \\ y' = -x-1. \end{cases} \quad (0,1) \text{ 变成 } (2,-2).$$

$$2. \begin{cases} x' = -y, \\ y' = -x \end{cases} \text{ 或矩阵形式 } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ 曲线方程变成 } x^2 - y - 8x + 18 = 0.$$

$$3. \begin{pmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2-\sqrt{2}+6\sqrt{3}-3\sqrt{6} \\ 6-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

5. 验证保距离不变.

6. 以 l_1 为 x 轴, 点 O 为原点建直角坐标系, 设 $P \xrightarrow{\tau_1} P' \xrightarrow{\tau_2} P''$, 则 $|OP| = |OP''|$, $\angle POP'' = 2\theta$, 所以 $\tau_2\tau_1$ 是绕 O 点转角为 2θ 的旋转.

习题 5.3

$$1. \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 2, \\ y' = 3x - y + 3. \end{cases}$$

3. 先求出第一组三条直线的三个交点 A, B, C , 再求出第二组三条直线的三个交点 A_1, B_1, C_1 , 则所求的仿射变换把 A 变成 A_1, B 变成 B_1, C 变成 C_1 . 仿射变换为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. 不变直线有两条: $20x-5y-8=0, 2x-2y-5=0$.

5. 求出变积系数.
6. 利用仿射变换保向量的数乘.
7. 建一个直角坐标系,由条件可得变换将三角形变成一个与之相似的三角形从而变换是保角的,直角坐标系变成直角标架,利用保角性算出变换公式.
8. (1) 分两种情形考虑: AB 与 l 平行; AB 与 l 相交.
(2) 若 AB 与 l 平行,在 l 上取两点 C, D , 则 $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{CD}$, 利用仿射变换保向量的数乘,可证明 $AA' \parallel BB'$. 若 AB 与 l 相交,由第(1)小题的结论及仿射变换保向量的数乘,可证明 $AA' \parallel BB'$.
9. 以 τ 的不动直线 l 为 x 轴建立仿射坐标系,点 $M(0,1), M'(a,1)$, 求出变换公式.

习题 5.4

1. 以椭圆的中心为原点,长轴为轴,建立直角坐标系,作一个仿射变换把椭圆变成单位圆.
2. 作一个仿射变换把椭圆变成单位圆. 注意切线、平行线、共轭直径都是仿射概念,并且圆的外切平行四边形是正方形.
3. 取一个直角坐标系,设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 作一个仿射变换把这双曲线变成 $xy=1$.
4. 同第 3 题的方法.
5. 作一个仿射变换把椭圆变成单位圆.
6. 度量性质:等边三角形,圆的半径,三角形的高线. 仿射性质:平行四边形,多边形,三角形的中线.
7. 以圆的圆心为原点建立一个直角坐标系 I , 要证 τ 把 I 变成一个直角标架 II , 从而 τ 在 I 中的公式的系数矩阵是正交矩阵,故 τ 是正交变换.

习题 5.5

1. 证明变换矩阵是正交矩阵,且行列式 $= 1$. 求转轴的方法:只要求出变换的两个不动点,则它们的连线就是转轴. 原点是一个不动点,另一个不动点为 $(3-2\sqrt{2}, \sqrt{2}-1, 1)$.

$$2. \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

3. 取一个右手直角坐标系 $I: [O; e_1, e_2, e_3]$, σ 把 I 变成一个直角标架 $II: [O; \sigma(e_1), \sigma(e_2), \sigma(e_3)]$. 因为 I 是第一类的,所以 II 仍是右手系的. 设 v_i 的 I 坐标为 $(x_i, y_i, z_i), i=1, 2, 3$, 分别计算 (1) $\sigma(v_1) \cdot \sigma(v_2)$ 和 $v_1 \cdot v_2$, (2) $\sigma(v_1 \times v_2), \sigma(v_1) \times \sigma(v_2)$ 的 II 坐标.

4. 设 $A_i(x_i, y_i, z_i), B_i(x'_i, y'_i, z'_i), i=1, 2, 3, 4$, 设仿射变换 σ 将 A_i 变成 B_i , 则

$$\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad i=1, 2, 3, 4, \quad A=(a_{ij}),$$

利用矩阵的乘法得到

$$\begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 & y'_4 \\ z'_1 & z'_2 & z'_3 & z'_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

由四点不共面,可得仿射变换唯一.

6. 作一个仿射变换将椭球面变为单位球面.

7. 以其中的一个平面为 xOy 面建立空间直角坐标系,另一平面方程设为 $z=c$. 将两个反射变换公式写出,然后作乘.

8. 以两平面的交线为 x 轴,其中一平面为 xOy 面建立空间直角坐标系,则对于在两个平面的反射变换的乘积是以它们的交线为旋转轴的旋转.

习题 6.1

- (1) 直线方程为 $x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$, 参数方程为 $x_1 = 3\lambda + 2\mu, x_2 = -\lambda, x_3 = 2\lambda + \mu$.
(2) 无穷远点的坐标为 $[1, 1, 0]$, 对应的参数为 $\lambda = -1, \mu = 2$.
- 公共点为 $[-1, 1, 1]$.
- (1) $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$, 无穷远点为 $[2, -1, 0]$. (2) $x_1 = 0$, 无穷远点为 $[0, 1, 0]$.
(3) $3x_1 - 2x_2 = 0$, 无穷远点为 $[2, 3, 0]$.

习题 6.2

- 考虑三线的齐次坐标组成的行列式与三点的齐次坐标组成的行列式之间的关系.
- 作满足题设条件的两个三角形, 利用 Desargues 定理.
- 作满足题设条件的两个三角形, 利用 Desargues 定理的逆定理.
- 共点三线的齐次坐标对应的向量共面, 不同直线的齐次坐标对应的向量不共线. 问题转化为向量之间的问题.
- 对偶命题: 设射影平面上点 P_i 的齐次坐标为 $(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}), i=1, 2, 3$, 且 $P_1 \neq P_2$, 证明: P_1, P_2, P_3 共线当且仅当存在不全为零的实数 λ 和 μ , 使得 $a_{3j} = \lambda a_{1j} + \mu a_{2j}, j=1, 2, 3$.

习题 6.3

- $[3, 10, 19]$.
- $(A, B; C, D) = -1/2$.
- 利用 (6.3.4), 直线方程: $9x_1 + x_2 - 20x_3 = 0$.
- 利用定理 6.3.1.
- 利用 (6.3.2) 及共线四点的交比定义, 直接计算可得.
- 利用第 5 题的结果以及同弧上的圆周角相等.
- 先后考虑以 S 为中心的线束和以 O 为中心的线束, 最后得 $(A, B; C, D) = -1$.

习题 6.4

- 因为直线方程是一次的, 射影变换也是一次的, 所以直线方程经过射影变换后仍是一次

方程,即直线变成直线.

2. 分两种情形:(1) 如果 $(a_1, a_2, a_3) = k(b_1, b_2, b_3)$, $a_1 \neq 0$, 则令

$$\begin{cases} \rho x'_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3, \\ \rho x'_2 = x_2, \\ \rho x'_3 = x_3. \end{cases} \quad \text{方程化为 } x_1'^2 = 0. \text{ 如果 } (a_1, a_2, a_3) \neq k(b_1, b_2, b_3), \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ 则令}$$

$$\begin{cases} \rho x'_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3, \\ \rho x'_2 = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3, \text{ 方程化为 } x_1'^2 \pm x_2'^2 = 0. \\ \rho x'_3 = x_3. \end{cases}$$

$$(2) \text{ 如果 } (a_1, a_2, a_3) = k(b_1, b_2, b_3), a_1 \neq 0, \text{ 则令} \begin{cases} \rho x'_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3, \\ \rho x'_2 = x_2, \\ \rho x'_3 = x_3. \end{cases} \quad \text{方程化为 } x_1'^2 =$$

$$0. \text{ 如果 } (a_1, a_2, a_3) \neq k(b_1, b_2, b_3), \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ 则令} \begin{cases} \rho(x'_1 - x'_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3, \\ \rho(x'_1 + x'_2) = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3, \text{ 方程化} \\ \rho x'_3 = x_3. \end{cases}$$

为 $x_1'^2 - x_2'^2 = 0$.

3. 设所求的射影变换的公式为 $\rho \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, 设 $A^{-1} = (c_{ij})$, 由已知条件可得

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \rho_1 & & \\ & \rho_2 & \\ & & \rho_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},$$

$$\text{于是 } A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \rho_1^{-1} & & \\ & \rho_2^{-1} & \\ & & \rho_3^{-1} \end{pmatrix}.$$

习题 6.5

1. $2x_1^2 + 2x_2^2 + 10x_3^2 + 4x_1x_2 + 9x_1x_3 + 9x_2x_3 = 0$.

2. $3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$.

3. 过中心 O 作一直线与二次曲线交于两点 A, B , 点 O 关于 A, B 的调和共轭点是直线 AB 上的无穷远点.

4. BC, AC, AB 的方程为 $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$. 因为 BC 是点 A 的极线, 所以 BC 的方程又

$$\text{应为 } (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0, \text{ 即 } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \text{ 于是 } a_{12} = a_{13} = 0. \text{ 同理得}$$

$a_{23} = 0$, 于是曲线方程为 $\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2 = 0$.

5. 在欧氏平面上取一直角坐标系使圆锥曲线的方程为标准方程, 然后计算焦点的极线的方程.

6. 说明直线 7 是点 S 的极线. 因为直线 7 与圆锥曲线的交点在 S 的极线上, 所以 P 在这两

交点的极线上,而这两交点的极线是二次曲线的切线,因此,直线 8 和 9 是切线.

7. 因为双曲线的中心的极线是无穷远直线,所以无穷远点的极线通过中心. 又因为双曲线上的无穷远点的极线通过它自身,所以这极线的方向是渐近方向,从而是渐近线.

参 考 文 献

- 波格列诺夫 A B. 1982. 解析几何. 姚志亭译. 北京:人民教育出版社
- 波利亚 G. 2001. 数学与猜想. 第一卷. 李心灿,王日爽,李志尧译. 北京:科学出版社
- 李文林. 2002. 数学史概论. 第2版. 北京:高等教育出版社
- 吕林根,许子道. 1989. 解析几何. 北京:高等教育出版社
- 丘维声. 1996. 解析几何. 第2版. 北京:北京大学出版社
- 沈纯理等. 2004. 经典几何. 北京:科学出版社
- 汪国鑫. 1989. 解析几何. 成都:四川大学出版社
- 吴文俊. 2003. 世界著名数学家传记. 北京:科学出版社
- 杨文茂,李全英. 1997. 空间解析几何. 武汉:武汉大学出版社
- 张顺燕. 2004. 数学的美与理. 北京:北京大学出版社
- 郑崇友等. 2005. 几何学引论. 第2版. 北京:高等教育出版社
- Костин В И. 1956. 几何学基础. 苏步青译. 北京:商务印书馆
- Marcer Berger. 1987. Geometry II. Springer-Verlag World Publishing Corporation

附录 矩阵和线性方程组简介

1. 矩阵的概念

定义 1 由 $m \times n$ 个数 a_{ij} ($i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$) 排成 m 行 n 列的表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m \times n$ 型矩阵, 记为 A , a_{ij} 叫矩阵 A 的元素. 当 $m=n$ 时, A 称为 n 阶方阵.

一个 $m \times n$ 型矩阵 A 也可记为 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 或 $A = (a_{ij})$.

空间中一个(行)向量 $a = (a_1, a_2, a_3)$ 可看成是一个 1×3 型矩阵

$$A = (a_1 \ a_2 \ a_3),$$

一个列向量 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ 可看成 3×1 型矩阵.

一个 $m \times n$ 型矩阵 $A = (a_{ij})$ 可写成行向量, 其分量为列向量

$$A = (e_1 \ e_2 \ \cdots \ e_n),$$

其中

$$e_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

相应地, A 也可写成列向量, 其分量为行向量.

由方阵 A 的元素(位置不变)所构成的行列式记为 $\det A$ 或 $|A|$, 称为 A 的行列式.

定义 2 如果两个 $m \times n$ 型矩阵 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ 的相应元素相等, 即 $a_{ij} = b_{ij}$ ($i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$), 则称矩阵 A 与 B 相等, 记为 $A=B$.

元素全为 0 的矩阵, 叫做零矩阵.

如果一个 n 阶方阵主对角线上的元素都是 1, 其他元素是 0, 我们用 E 来表示, 称为 n 阶单位矩阵, 即

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

主对角线以外的元素全为 0 的 n 阶方阵称为对角矩阵, 即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

定义3 把 $m \times n$ 型矩阵 $A = (a_{ij})$ 的行与列互换得到的 $n \times m$ 型矩阵称为 A 的转置矩阵, 记为 A^T , 即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

根据定义显然有 $(A^T)^T = A$.

定义4 如果 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 满足

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n),$$

即 $A^T = A$, 则称方阵 A 为对称矩阵.

2. 矩阵的运算

定义5 两个 $m \times n$ 型矩阵 $A = (a_{ij})$ 与 $B = (b_{ij})$ 的和为

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}.$$

设 A, B, C 都是 $m \times n$ 型矩阵, 那么矩阵的加法满足:

$$A + B = B + A,$$

$$(A + B) + C = A + (B + C),$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T.$$

定义6 数 λ 与矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 的乘积为

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{m \times n}.$$

设 A, B 均为 $m \times n$ 型矩阵, λ, μ 为任意的数, 则有

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B,$$

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A,$$

$$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A),$$

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T.$$

定义7 设 $A = (a_{ik})_{m \times n}$, $B = (b_{kj})_{n \times s}$,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

那么, $C = (c_{ij})_{m \times s}$ 叫做 A 与 B 的乘积, 记为 $C = AB$.

当两个矩阵相乘时, 第一个矩阵的列数必须等于第二个矩阵的行数. 矩阵的乘法不满足交换律, 即一般地

$$AB \neq BA.$$

矩阵的乘法有以下性质

$$(AB)C = A(BC),$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC},$$

$$(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA},$$

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T,$$

$$\lambda(\mathbf{AB}) = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{B}).$$

如果 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 为同阶方阵, $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, 则

$$\det \mathbf{C} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}.$$

3. 矩阵的逆

定义 8 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 是 D 中划去 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列以后所剩下的 $n-1$ 阶行列式乘以 $(-1)^{i+j}$, 即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

定理 1 对于 n 阶行列式 D , 成立

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} D, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

及

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} D, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

即行列式 D 等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和, 而 D 的某一行(列)各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和为 0.

当 $n=3$ 时, 该定理有明显的几何意义. 设行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

在直角坐标系下, 显然三向量 $\mathbf{a} = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$, $\mathbf{b} = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$, $\mathbf{c} = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$ 的混合积为 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = D$. 因为

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \times \mathbf{c} &= \left(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \right) \\ &= (A_{11}, A_{12}, A_{13}), \end{aligned}$$

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = D,$$

所以

$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0,$$

$$a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0.$$

定义9 对于 n 阶方阵 $\mathbf{A}$, 如果存在 n 阶方阵 $\mathbf{B}$, 使

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E},$$

则称 $\mathbf{A}$ 是可逆的, $\mathbf{B}$ 是 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵, 用 $\mathbf{A}^{-1}$ 来表示, 即

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}.$$

由逆矩阵的定义可得

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}, \quad (\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}, \quad (\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

定理2 设 n 阶方阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 的行列式 $\det \mathbf{A} \neq 0$, 则 $\mathbf{A}$ 是可逆的, 逆矩阵为

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

其中, A_{ij} 是 $\det \mathbf{A}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

4. 正交矩阵

定义10 对 n 阶实矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})$, 如果

$$\mathbf{AA}^T = \mathbf{E} \quad \text{或} \quad \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1},$$

则称 $\mathbf{A}$ 是正交矩阵.

显然, $\mathbf{A}$ 为正交矩阵等价于

$$a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \cdots + a_{in}a_{jn} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

或

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n),$$

其中, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

换句话说, $\mathbf{A}$ 是正交矩阵的充要条件是: $\mathbf{A}$ 的每一行各元素的平方和为 1, 而任意不同两行的对应元素乘积之和为 0.

由于 $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$, 因此 $\mathbf{A}$ 为正交矩阵也等价于

$$\sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

5. 矩阵的秩

定义11 在 $m \times n$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 中任取 k 行和 k 列, 位于这些选定的行列交叉处的元素按原来的次序所组成的 k 阶行列式, 称为 $\mathbf{A}$ 的一个 k 阶子式.

在此定义中,当然有 $k \leq \min\{m, n\}$.

定义 12 如果 $m \times n$ 矩阵 A 中有一个 r 阶子式不为零,所有的 $r+1$ 阶子式全为零,则称 A 的秩为 r ,记为 $r(A)$.

换句话说,矩阵的秩是矩阵中的非零子式的最高阶数.零矩阵的秩规定为 0. 如果 $m \times n$ 矩阵 A 有 $\min\{m, n\}$ 阶子式不为零,那么 A 的秩 $r(A) = \min\{m, n\}$, A 称为满秩矩阵.

例如,矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 & 2 \\ 2 & 12 & -2 & 12 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, A 的二阶子式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} \neq 0,$$

而 A 的所有 3 阶子式全为 0,因此 $r(A) = 2$.

6. 线性方程组有解判别定理

设线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (1)$$

线性方程组的系数组成的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

称为线性方程组(1)的系数矩阵,把自由项添加到 A 中构成的矩阵

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

称为线性方程组的增广矩阵. 如果自由项 $b_i = 0 (i = 1, 2, \cdots, m)$, 则线性方程组称为齐次线性方程组. 齐次线性方程组一定有解, 因为 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 是其解, 此解称为零解; $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 不全为零的解称为非零解. 我们有以下的判别定理:

定理 3 线性方程组(1)有解的充要条件是 $r(A) = r(B)$. 进一步, 当 $r(A) = r(B) = n$ 时, 线性方程组(1)的解唯一; 当 $r(A) = r(B) < n$ 时, 线性方程组(1)的解有无穷多.

特别地当 $m = n$ 时, 有以下克莱姆法则:

定理 4 当 $m = n$ 时, (i) 如果 $r(A) = n$ (即 $\det A \neq 0$), 那么线性方程组(1)有唯一解; (ii) 齐次线性方程组有非零解当且仅当 $\det A = 0$.

当 $m = n = 3$ 时, 我们有以下的几何解释:

如果 $r(A) = r(B) = 3$, 那么线性方程组(1)有唯一解, 即三个方程所表示的三个平面交于

一点.

如果 $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{B})=2$, 那么线性方程组(1)有无穷多解, 此时, 所有解构成的集合是空间中的一条直线, 即三个平面相交于一条直线, 也就是说三个平面是经过同一条直线的平面束中的三个.

如果 $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{B})=1$, 那么线性方程组(1)有无穷多解, 此时, 所有解构成的集合是空间中的一个平面, 即三个平面相交于一平面, 也就是说三个方程表示同一平面.

如果 $r(\mathbf{A}) \neq r(\mathbf{B})$, 那么线性方程组(1)无解, 即三个方程所表示的三个平面没有公共的交点.

7. 实对称矩阵的对角化

设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶方阵, $\mathbf{X}$ 表示 n 维向量 $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, λ 为实数.

定义 13 如果有非零向量 $\mathbf{X}$ 满足方程

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}, \quad (2)$$

则称 λ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的一个特征值, $\mathbf{X}$ 是关于特征值 λ 的一个特征向量. 显然对于非零数 k , $k\mathbf{X}$ 也是关于特征值 λ 的一个特征向量.

将方程(2)写成

$$(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{0}, \quad (3)$$

由于方程组(2)或(3)有非零解, 那么由 Cramer 法则知道

$$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0. \quad (4)$$

方程(4)称为矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征方程, $\mathbf{A}$ 的所有特征值从特征方程中可解得.

定义 14 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 均为 n 阶方阵. 若有可逆矩阵 $\mathbf{P}$ 使

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B},$$

则称矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相似. 如果 $\mathbf{B}$ 是对角矩阵, $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相似, 则称 $\mathbf{A}$ 可以对角化. 此时 $\mathbf{B}$ 中对角线上的元素一定由 $\mathbf{A}$ 的特征值组成, 因为 $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{B}| = |\mathbf{P}^{-1}(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{P}| = |\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}|$, 而 $\mathbf{B}$ 的特征值就是对角线上的元素.

如果 $\mathbf{A}$ 是 n 阶实对称矩阵, 那么我们有以下定理.

定理 5 实对称矩阵的特征值为实数.

证明 设复数 λ 为实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值, 复向量 $\mathbf{X}$ 是对应的特征向量, 即 $\mathbf{A}\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}$, $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$.

用 $\bar{\lambda}$ 表示 λ 的共轭复数, $\bar{\mathbf{X}}$ 表示 $\mathbf{X}$ 的共轭复向量, 则

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{X}} = (\overline{\mathbf{A}\mathbf{X}}) = \overline{\lambda\mathbf{X}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{X}}.$$

于是有

$$\bar{\mathbf{X}}^T \mathbf{A} \mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}}^T (\mathbf{A} \mathbf{X}) = \bar{\mathbf{X}}^T \lambda \mathbf{X} = \lambda \bar{\mathbf{X}}^T \mathbf{X}$$

及

$$\bar{\mathbf{X}}^T \mathbf{A} \mathbf{X} = (\bar{\mathbf{X}}^T \mathbf{A}) \mathbf{X} = (\mathbf{A} \bar{\mathbf{X}})^T \mathbf{X} = (\bar{\lambda} \bar{\mathbf{X}})^T \mathbf{X} = \bar{\lambda} \bar{\mathbf{X}}^T \mathbf{X},$$

因此

$$\lambda \bar{\mathbf{X}}^T \mathbf{X} = \bar{\lambda} \bar{\mathbf{X}}^T \mathbf{X},$$

$$(\lambda - \bar{\lambda})\bar{\mathbf{X}}^T \mathbf{X} = 0.$$

因为 $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$, 所以 $\bar{\mathbf{X}}^T \mathbf{X} \neq 0$, 即有 $\lambda = \bar{\lambda}$.

由此可知实对称矩阵的特征向量也是实的.

定理 6 设 λ_1, λ_2 是实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的两个不同的特征值, $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ 分别是 λ_1, λ_2 的特征向量, 则 $\mathbf{X}_1$ 与 $\mathbf{X}_2$ 正交 (即 $\mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_2 = 0$).

证明 由条件知 $\mathbf{A}\mathbf{X}_i = \lambda_i \mathbf{X}_i (i=1, 2), \lambda_1 \neq \lambda_2$.

因为 $\mathbf{A}$ 对称, 所以 $\lambda_1 \mathbf{X}_1^T = (\lambda_1 \mathbf{X}_1)^T = (\mathbf{A}\mathbf{X}_1)^T = \mathbf{X}_1^T \mathbf{A}$. 于是

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_2 &= (\lambda_1 \mathbf{X}_1^T) \mathbf{X}_2 = (\mathbf{X}_1^T \mathbf{A}) \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1^T (\mathbf{A} \mathbf{X}_2) \\ &= \mathbf{X}_1^T (\lambda_2 \mathbf{X}_2) = \lambda_2 \mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_2. \end{aligned}$$

即

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_2 = 0.$$

因为 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 所以 $\mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_2 = 0$, 因而 $\mathbf{X}_1$ 与 $\mathbf{X}_2$ 正交.

定理 7 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, 则必有正交矩阵 $\mathbf{P}$, 使

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

其中, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 $\mathbf{A}$ 的特征值.

证明略.

此定理说明实对称矩阵一定可由正交矩阵对角化.

名词索引

二画

二次曲面 56
二次曲面的特征方程 86
二次曲面的特征根 86
几何模型 138

三画

三角不等式 3
三角形法则 2
马鞍面 60

四画

无心曲线 94
无心曲面 93
无穷远直线 138
无穷远点 137
不动直线 125
不动点集 115
不变量 85
切平面 104
切线 104, 148
切点 104, 148
切锥 105
中心曲线 94
中心曲面 93
中心投影 137
内分点 11
反向量 2
反射 114
方向余弦 15
方向角 15
方向数 16
方阵 200

双叶双曲面 58
双曲抛物面 60
双曲柱面 49
双射 114
月形角 166
双曲平面 174
双曲度量 174
双曲平面的 Klein 模型 173

五画

正交(点)变换 116, 129
正交不变量 85
正交向量变换 117
正交变换群 117, 130
正交矩阵 203
正交等价 127
正交群 126, 130
正侧 39
正常点 105
左手系 10
右手系 10
平行平面束 35
平行四边形法则 2
平面方程 27
平面的一般方程 28
平面的方位向量 28
平面的正交变换 116
平面的仿射(点)变换 120
平面的向量式参数方程 27
平面的坐标式参数方程 28
平面的坐标变换 69
平面的点法式方程 30

平面的截距式方程 29

平移公式 114

矢量 1

外分点 11

主方向 98

主径面 97

半不变量 87

对角化 205

对角矩阵 200

对称性 57

对称面 97

对称矩阵 201

对偶命题 140

对偶原理 140

母线 48, 51

六画

共轭方向 97

共轭直径 97

共线的向量组 4

共形模型 178

共面的向量组 4

有轴平面束 35

有界性 57

夹角 40

扩大的欧氏平面 137

过渡矩阵 74

曲线的一般方程 45

曲线的参数方程 45

曲面的一般方程 45

曲面的中心 92

曲面的参数方程 45

同位相似 125

刚体运动 115

仿射几何学 126

仿射不变量 126

仿射向量变换 121

仿射坐标系 9

仿射变换群 131

仿射性质 126

仿射标架 9

仿射点变换 120, 131

仿射等价 127

仿射群 126, 131

自配极三角形 152

向量 1

向量的内积 13

向量的长度 1

向量的外积 17

向量的加法 2

向量的减法 3

向量的仿射坐标变换公式 74, 75

向量的混合积 21

向量的模 1

负侧 39

齐次(仿射)坐标 137

齐次方程 51

齐次线性方程组 204

齐次函数 51

交比 142

运动 115

运动群 126

劣弧 165

优弧 165

七画

极线 150

极点 149

两直线间的距离 39

抛物柱面 49

投影曲线 50

投影柱面 49

位似中心 125

位似系数 125

位置向量 9

坐标平面 9

坐标向量 9

坐标轴 9

系数矩阵 204

纬度 46

纬圆 52

八画

环面 55

卦限 9

直母线 61

直角坐标系 10

直角标架 10

直纹面 61

直径 97

直径面 95

直线与平面的位置关系 31

直线与直线的位置关系 31

直线方程 26

直线的一般方程 33

直线的方向数 27

直线的向量式参数方程 26

直线的齐次坐标 139

直线的参数方程 27

直线的标准方程 27

直线的点方程 139

直线的点向式方程 27

奇向 95

奇异方向 95

奇异点 105

奇点 149

欧几里得几何学 126

转轴公式 75

转置矩阵 201

非中心曲面 93

非齐次(仿射)坐标 137

非退化线性变换 115

非渐近方向 92

非零解 204

径矢 9

变换 113

变换群 116

变积系数 123

单叶双曲面 58

单位化 3

单位向量 2

单位矩阵 200

单射 114

法向量 30

空间的坐标变换 75

线心曲线 94

线心曲面 93

线束 139

线性无关 5

线性运算 4

线性组合 4

线性相关 5

经线 53

经度 46

极限圆 180

九画

相似 125, 205

相似系数 125

柱面 48

柱面坐标 47

面心曲面 93

点到平面的距离 38

点到直线的距离 38

点的仿射坐标变换公式 74, 75

点的线方程 139

点变换 115

映射 113

矩阵 200

矩阵的逆 202

矩阵的秩 203

度量几何学 126

度量性质 126

度量参数 15

度量等价 127

恒等变换 113

十画

配极 149
 原点 9
 原像 113
 圆锥面 51
 特征方程 205
 特征向量 205
 特征值 205
 射影 18
 射影平面 137
 射影直线 138
 射影变换 145
 射影变换群 145
 射影群 145
 离差 38
 准线 48, 51, 61
 调和分割 144
 调和共轭 144
 调和共轭点 144
 调和线束 144
 调和点列 144
 通常点 137
 配极三角形 168

十一画

球面方程 46
 球面坐标 46
 基 9
 梯度向量 91
 移轴公式 75
 笛卡儿标架 11
 第一类正交变换 119
 第二类正交变换 119
 第四调和线 144
 第四调和点 144
 旋转公式 145
 旋转双叶双曲面 55
 旋转抛物面 54
 旋转单叶双曲面 55
 旋转面 53

旋转群 126
 渐近方向 92
 渐近方向锥面 92
 渐近线 94
 渐近锥面 59, 94
 维维安尼曲线 66
 球极投影 164
 球面三角形 165
 球面弓形 166
 球面角楹 167
 球面过剩 167
 球面角超 167

十二画

椭圆抛物面 59
 椭圆柱面 49
 椭球面 56
 等价关系 127
 等距变换 116, 129
 普通方程 138

十三画

零向量 2
 零矩阵 200
 零解 204
 错切 126
 错切轴 126
 锥面 51
 简单比 117
 像 113
 腰椭圆 58
 解析模型 138
 满秩线性变换 115
 满射 114

十四画

截口 57
 增广矩阵 204

十五画

鞍点 60

十六画

镜面反射 129

Images have been losslessly embedded. Information about the original file can be found in PDF attachments. Some stats (more in the PDF attachments):

```
{
  "filename": "MTM3ODgyNDkuemlw",
  "filename_decoded": "13788249.zip",
  "filesize": 63832419,
  "md5": "5aad5258a5c9b322e092fe3d176e099e",
  "header_md5": "ec7232c409402542d9783f8809450a0c",
  "sha1": "276ed695a6bc9562d21813b98d809948baf74fe2",
  "sha256": "7541e91a984fdb223aa8494702a824d9706493d0b78ceed8be274eb16b4810c",
  "crc32": 1394613775,
  "zip_password": "",
  "uncompressed_size": 72690156,
  "pdg_dir_name": "\u255c\u0393\u256c\u00f7\u255d\u2555\u2551\u256c\u255c\u2560\u2502\u2560\u2561\u250c\u255a\u00b2\u2591\u00b5_13788249",
  "pdg_main_pages_found": 210,
  "pdg_main_pages_max": 210,
  "total_pages": 220,
  "total_pixels": 1122412144,
  "pdf_generation_missing_pages": false
}
```