



面向21世纪课程教材

# 疲劳与断裂

**Fatigue and Fracture**

陈传尧 编著

■ 华中科技大学出版社

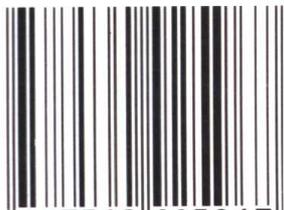
责任编辑：佟文珍  
封面设计：刘 卉

疲劳与断裂



陈传尧 编著

ISBN 7-5609-2596-0



9 787560 925967 >

定价：16.50元

0346.1

出版社

1306.1  
3

面向21世纪课程教材

# 疲劳与断裂

陈传尧 编著

华中科技大学出版社  
· 武汉 ·

图书在版编目(CIP)数据

疲劳与断裂/陈传尧 编著

武汉:华中科技大学出版社, 2002年1月

ISBN 7-5609-2596-0

I. 疲…

II. 陈…

III. 疲劳断裂

IV. O346.1

疲劳与断裂

陈传尧 编著

责任编辑:佟文珍  
责任校对:蔡晓瑚

封面设计:刘 卉  
责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012

经 销:新华书店湖北发行所

录 排:华中科技大学出版社照排室

印 刷:武汉市新华印刷有限责任公司

开本:787×1092 1/16

印张:13

字数:218 000

版次:2002年1月第1版

印次:2002年1月第1次印刷

印数:1-1 000

ISBN 7-5609-2596-0

定价:16.50元

凡有缺页,请向出版社发行部调换)

## 内 容 提 要

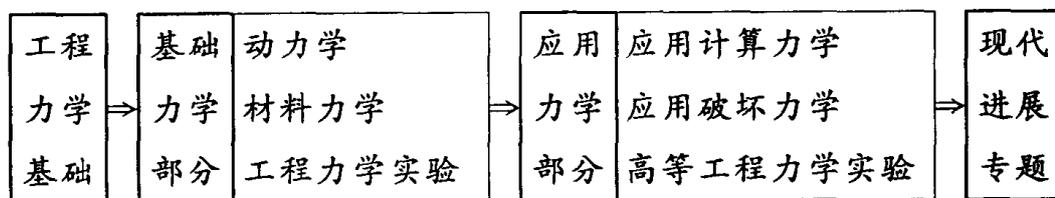
《疲劳与断裂》一书,系面向 21 世纪课程教材。全书共十章。重点讲授疲劳裂纹萌生机理与规律;应力疲劳与应变疲劳;断裂与断裂控制;疲劳裂纹扩展规律;现代抗疲劳设计方法等。书中并附有一定量思考题与习题,以及计算实例,加强了实用性。

全书结构体系合理,论述简明,有较强的科学性和实用性,有明显的教材特色,可以作为机械、材料、土木、能源、力学等专业本科学生的课程教材,也可供研究生选用或供工程技术人员参考。

# 前 言

1996年1月,国家教委“面向21世纪高等工程教育教学内容和课程体系改革计划”所属之“工科本科力学系列课程教学内容和课程体系改革的研究与实践”项目组,在北京召开了立项与开题研讨会。会议指出本项目主要研究内容和目标是:更新课程内容,重组课程结构,设计新型模块系列,实现课程优化配置;提高起点,减少重复,使相关课程融合贯通,形成力学总体概念;加强学生综合能力(包括课程之间,学科之间,理论、实验、计算与工程应用之间的综合能力)的培养和训练。

原华中理工大学力学系作为项目主持单位之一,于1996年初提出了一个分层次、小型、模块化工科本科力学系列课程设置方案。课程设置框架如下图所示。



在应用力学部分,我们将注意力集中在应用计算力学的现代成果,以增强学生处理实际工程问题的能力;应用破坏理论的成果,以增强学生对于不同失效模式下的设计控制能力;应用近、现代实验技术的进步,以增强学生通过实验探索未知问题的能力三个方面。

2000年,我们又承担了教育部“世行贷款21世纪初高等教育教学改革项目”——“理工科力学专业创新能力培养和系列课程综合改革的研究与实践”。对于本科力学专业系列课程的设置,提出了精炼理论分析类课群,加强计算类课群,开放实验类课群,探索贴近工程与学科交叉类课群的指导思想。

疲劳与断裂,是工程中最常见的、最重要的失效模式。20世纪后半期,断裂力学的迅速发展,不仅促进了断裂控制方法的进步,更使人们较深入地认识了材料与结构中疲劳裂纹的扩展规律,促进了抗疲劳设计技术的发展。在各工程领域应用疲劳与断裂的研究成果,发展工

程适用的抗疲劳、抗断裂实用设计技术,将是 21 世纪设计水平提高的重要标志之一。

20 世纪 80 年代初,美国众议院科技委员会委托国家标准局进行了一次关于断裂所造成的损失的大型综合调查,1983 年,在《国际断裂》杂志上发表了调查委员会给国会的报告。报告指出,断裂使美国一年损失 1190 亿美元,占 1982 年国家总产值的 4%。报告同时还指出,向工程技术人员普及关于断裂的基本概念和知识,可减少损失 29%;若应用现有成果,可再减少损失 24%。因此,向工程技术人员普及关于疲劳和断裂的基本概念,是十分必要的。

有鉴于此,为了适应 21 世纪技术进步的需求,使力学与非力学专业的工科本科学学生(未来的工程师、设计师)具有对于疲劳与断裂破坏这类工程中最常见失效模式的发生与发展机理、规律、设计控制方法等的基本认识,我们编写了这本教材。

这本《疲劳与断裂》教材,包括疲劳裂纹萌生机理与规律;应力疲劳与应变疲劳;断裂与断裂控制;疲劳裂纹扩展规律;现代抗疲劳设计方法等。希望能够突出对于疲劳裂纹萌生、扩展直至断裂的发生与发展机理、规律;突出抗疲劳、抗断裂设计技术的基本原理、基本方法及其应用;有助于工科学生在将来的工程实践中自觉地增强对于抗疲劳与断裂设计的考虑。

断裂是由于裂纹的存在而引发的。而引发断裂的裂纹,绝大多数都是在疲劳载荷作用下发生或发展而成的。因此,将断裂与疲劳放在一起讨论,有利于增强对于材料/结构中裂纹发生、发展直至引起断裂失效的全过程的认识,有利于综合控制设计,还有利于减少重复、减少学时。

本教材可以作为力学、机械、材料、土木、能源、交通等专业本科学生的课程教材,学时为 32~40 学时;也可供研究生选用或供工程技术人员参考。

衷心感谢为本教材的编写、试用、出版提供支持和方便的所有同志们。

陈传尧

2001 年 4 月于华中大喻园

# 目 录

---

<b>第一章 绪论</b> .....	(1)
1.1 什么是疲劳 .....	(1)
1.2 疲劳断裂破坏的严重性 .....	(4)
1.3 疲劳设计方法 .....	(5)
1.4 疲劳破坏机理与断口特征 .....	(7)
1.5 疲劳断裂研究方法 .....	(14)
小结 .....	(15)
思考题与习题 .....	(16)
<b>第二章 应力疲劳</b> .....	(17)
2.1 基本 S-N 曲线 .....	(17)
2.2 平均应力的影响 .....	(21)
2.3 影响疲劳性能的若干因素 .....	(25)
2.4 缺口疲劳 .....	(29)
2.5 变幅载荷谱下的疲劳寿命 .....	(32)
2.6 随机谱与循环计数法 .....	(37)
小结 .....	(43)
思考题与习题 .....	(43)
<b>第三章 疲劳应用统计学基础</b> .....	(46)
3.1 疲劳数据的分散性 .....	(46)
3.2 正态分布 .....	(47)

3.3	威布尔分布	(55)
3.4	二元线性回归分析	(59)
3.5	$S-N$ 曲线和 $p-S-N$ 曲线的拟合	(67)
	小结	(69)
	思考题与习题	(70)
<b>第四章</b>	<b>应变疲劳</b>	<b>(71)</b>
4.1	单调应力-应变响应	(71)
4.2	滞后环和循环应力-应变响应	(74)
4.3	材料的记忆特性与变幅循环响应计算	(76)
4.4	应变疲劳性能	(80)
4.5	缺口应变分析	(85)
	小结	(91)
	思考题与习题	(92)
<b>第五章</b>	<b>断裂失效与断裂控制设计</b>	<b>(95)</b>
5.1	结构中的裂纹	(95)
5.2	裂纹尖端的应力强度因子	(97)
5.3	控制断裂的三个基本因素	(103)
5.4	材料的断裂韧性 $K_{Ic}$	(104)
5.5	断裂判据与断裂控制设计的基本概念	(109)
	小结	(112)
	思考题与习题	(113)
<b>第六章</b>	<b>表面裂纹</b>	<b>(114)</b>
6.1	拉伸载荷作用下无限大体中的埋藏裂纹和表面裂纹	(115)
6.2	拉伸载荷作用下有限体中表面裂纹的应力强度因子	(119)
6.3	弯曲载荷作用下有限体中表面裂纹的应力强度因子	(127)
	小结	(131)
	思考题与习题	(132)

<b>第七章 弹塑性断裂力学简介</b> .....	(134)
7.1 裂纹尖端的小范围屈服 .....	(134)
7.2 裂纹尖端张开位移 .....	(139)
7.3 COD 测试与弹塑性断裂控制设计 .....	(141)
小结 .....	(145)
思考题与习题 .....	(146)
<b>第八章 疲劳裂纹扩展</b> .....	(147)
8.1 疲劳裂纹扩展速率 .....	(147)
8.2 疲劳裂纹扩展寿命预测 .....	(151)
8.3 影响疲劳裂纹扩展的若干因素 .....	(158)
小结 .....	(163)
思考题与习题 .....	(165)
<b>第九章 裂纹闭合理论与高载迟滞效应</b> .....	(167)
9.1 循环载荷下裂尖的弹塑性响应 .....	(167)
9.2 裂纹闭合理论 .....	(170)
9.3 高载迟滞效应 .....	(174)
小结 .....	(179)
思考题与习题 .....	(179)
<b>第十章 疲劳寿命预测和抗疲劳设计</b> .....	(180)
10.1 概述 .....	(180)
10.2 损伤容限设计 .....	(181)
10.3 耐久性设计 .....	(186)
小结 .....	(189)
思考题与习题 .....	(189)
<b>附录 A 二维裂纹问题的弹性解</b> .....	(190)

附录 B 相关试验标准 .....	(193)
部分习题参考答案 .....	(197)
参考文献 .....	(198)

# FATIGUE AND FRACTURE

## 疲劳与断裂

### 第一章 绪论

---

疲劳(Fatigue)与断裂(Fracture)是引起工程结构和构件失效的最主要的原因。在进入 21 世纪的今天,人们对传统强度(静载荷作用、无缺陷材料的强度)的认识已相当深刻,工程中强度设计的实践经验和积累也十分丰富,对于传统强度的控制能力也大大增强。因此,疲劳与断裂引起的失效在工程失效中越来越突出。

19 世纪中叶以来,人们为认识和控制疲劳破坏进行了不懈的努力,在疲劳现象的观察、疲劳机理的认识、疲劳规律的研究、疲劳寿命的预测和抗疲劳设计技术的发展等方面都积累了丰富的知识。20 世纪 50 年代中断裂力学的发展,进一步促进了疲劳裂纹扩展规律及失效控制的研究。疲劳断裂失效涉及到扰动使用载荷的多次作用,涉及到材料缺陷的形成与扩展,涉及到使用环境的影响,等等,问题的复杂性是显而易见的。因此,疲劳断裂许多问题的认识和根本解决,还有待进一步深入研究。尽管如此,了解现代研究成果,掌握疲劳与断裂的基本概念、规律和方法,对于广大工程技术人员在工程实践中成功地进行抗疲劳断裂设计无疑是十分有益的。

#### 1.1 什么是疲劳?

人们认识和研究疲劳问题,已经有 150 年的历史。在不懈地探究材料与结构疲劳奥秘的实践中,对疲劳的认识不断地得到修正和深化。

什么是疲劳?这里引述美国试验与材料协会(ASTM)在“疲劳试验及数据统计分析之有关术语的标准定义”(ASTM E206—72)中所作的定义:

在某点或某些点承受扰动应力,且在足够多的循环扰动作用之后形成裂纹或完全断裂的材料中所发生的局部的、永久结构变化的发展过程,称为疲劳。

上述定义清楚地指出疲劳问题具有下述特点：

1) 只有在承受扰动应力作用的条件下，疲劳才会发生。

所谓扰动应力，是指随时间变化的应力。更一般地，也可称之为扰动载荷，载荷可以是力、应力、应变、位移等。如图 1.1 所示，载荷随使用时间的变化可以有规则的，也可以是不规则的，甚至是随机的。如当弯矩不变时，旋转弯曲轴中某点的应力，是恒幅循环(或等幅循环)应力；起重行车吊钩分批吊起不同的重物，承受变幅循环的应力；车辆在不平的道路上行驶，弹簧等零、构件承受的载荷是随机的。

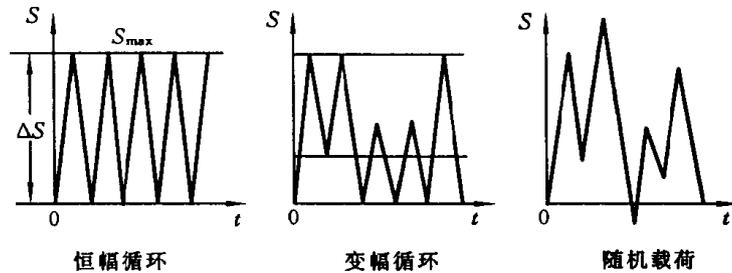


图 1.1 疲劳载荷形式分类

描述载荷-时间变化关系的图或表，称为载荷谱。图 1.1 给出了应力随时间的变化，由应力给出的载荷谱称为应力谱。类似地，还有应变谱、位移谱、加速度谱等等。显然，在研究疲劳问题时，首先要研究载荷谱的描述与简化。

最简单的循环载荷是恒幅应力循环载荷。图 1.2 所描述的是正弦型恒幅循环应力。显然，描述一个应力循环，至少需要两个量，如循环最大应力  $S_{max}$  和最小应力  $S_{min}$ 。这二者是描述循环之应力水平的基本量。

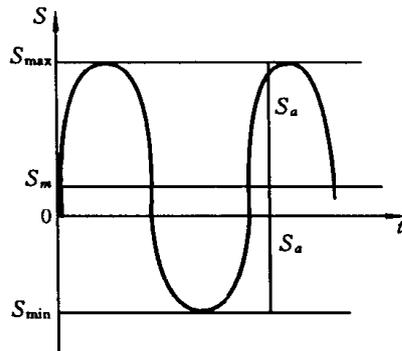


图 1.2 正弦型恒幅循环应力

疲劳分析中，还常常使用到下述参量，即应力变程(全幅) $\Delta S$  定义为

$$\Delta S = S_{max} - S_{min} \quad (1-1)$$

应力幅(半幅) $S_a$  定义为

$$S_a = \Delta S / 2 = (S_{max} - S_{min}) / 2 \quad (1-2)$$

平均应力  $S_m$  定义为

$$S_m = (S_{max} + S_{min}) / 2 \quad (1-3)$$

应力比  $R$  定义为

$$R = S_{min} / S_{max} \quad (1-4)$$

其中，应力比  $R$  反映了不同的循环特征，如当  $S_{max} = -S_{min}$  时， $R = -1$ ，是对称循环； $S_{min} = 0$  时， $R = 0$ ，是脉冲

循环;  $S_{\max} = S_{\min}$  时,  $R = 1$ ,  $S_a = 0$ , 是静载荷。如图 1.3 所示。

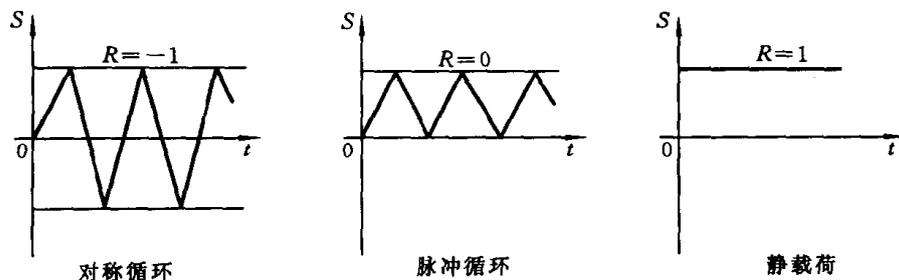


图 1.3 不同应力比下的应力循环

上述参量中,需且只需已知其中任意两个,即可确定循环应力水平。为使用方便,设计时,一般用最大应力  $S_{\max}$  和最小应力  $S_{\min}$ ,二者比较直观,便于设计控制;实验时,一般用平均应力  $S_m$  和应力幅  $S_a$ ,便于施加载荷;分析时,一般用  $S_a$  和应力比  $R$ ,便于按循环特性分类研究。

此外,还有循环频率和波形的不同,但其影响是次要的。

#### 2) 疲劳破坏起源于高应力或高应变的局部。

静载下的破坏,取决于结构整体;疲劳破坏则由应力或应变较高的局部开始,形成损伤并逐渐累积,导致破坏发生。可见,局部性是疲劳的明显特点。零、构件应力集中处,常常是疲劳破坏的起源。因此,要注意细节设计,尽可能减小应力集中。疲劳研究所关心的正是这些由几何形状变化或材料缺陷等引起应力集中的局部细节,要研究这些细节处的应力应变。

#### 3) 疲劳破坏是在足够多次的扰动载荷作用之后,形成裂纹或完全断裂。

足够多次的扰动载荷作用之后,从高应力或高应变的局部开始,形成裂纹,称为裂纹起始(或裂纹萌生)。此后,在扰动载荷作用下,裂纹进一步扩展,直至到达临界尺寸而发生完全断裂。裂纹萌生—扩展—断裂三个阶段是疲劳破坏的又一特点。研究疲劳裂纹萌生和扩展的机理及规律,是疲劳研究的主要任务。

#### 4) 疲劳是一个发展过程。

由于扰动应力的作用,零、构件或结构一开始使用,就进入了疲劳的“发展过程”。所谓裂纹萌生和扩展,是这一发展过程中不断形成的损伤累积的结果。最后的断裂,标志着疲劳过程的终结。这一发展过程所经历的时间或扰动载荷作用的次数,称为“寿命”。它不仅取决于载荷水平,还依赖于其作用次数或时间,取决于材料抵抗疲劳破坏的能力。疲劳研究的目的是要预测寿命,因此,要研究寿命预测的方法。

材料发生疲劳破坏,要经历裂纹起始或萌生、裂纹稳定扩展和裂纹失稳扩展

(断裂)三个阶段,疲劳总寿命也由相应的部分组成。因为裂纹失稳扩展是快速扩展,对寿命的影响很小,在估算寿命时通常不予考虑。故一般可将总寿命分为裂纹起始或萌生寿命与裂纹扩展寿命两部分,即

$$N_{\text{total}} = N_{\text{initiation}} + N_{\text{propagation}} \quad (1-5)$$

进行裂纹起始寿命分析时,一般按应力-寿命或应变-寿命关系进行,称为传统疲劳;疲劳裂纹扩展寿命分析则必须考虑裂纹的存在,需用断裂力学方法研究,故称为断裂疲劳。

完整的疲劳分析,既要研究裂纹的起始或萌生,也要研究裂纹的扩展,并应注意两部分寿命的衔接。但在某些情况下,也可能只需要考虑裂纹起始或扩展其中之一,并由此给出其寿命的估计。例如,高强脆性材料的断裂韧性低,一出现裂纹就会引起破坏,裂纹扩展寿命很短,故对于由高强度材料制造的零、构件,通常只需考虑其裂纹起始寿命,即  $N_t = N_i$ 。延性材料构件有相当长的裂纹扩展寿命,则一般不宜忽略。而对于一些焊接、铸造的构件或结构,因为在制造过程中已不可避免地引入了裂纹或类裂纹缺陷,故可以忽略其裂纹起始寿命,取  $N_t = N_p$ ,即只需考虑其裂纹扩展寿命即可。

## 1.2 疲劳断裂破坏的严重性

发生断裂是因为有裂纹存在,而裂纹萌生并扩展到足以引起断裂的原因则很少不是由于疲劳引起的。如二次世界大战期间美国制造的全焊接船舶,有近千艘出现开裂,200余艘发生严重断裂破坏。1952年,第一架喷气式客机(英国的彗星号)在试飞300多小时后投入使用。1954年1月一次检修后的第4天,客机在飞行中突然失事坠入地中海。打捞起残骸并进行研究后的结论认为,事故是由压力舱的疲劳破坏引起的,疲劳裂纹起源于机身开口的拐角处。1967年12月15日,美国西弗吉尼亚的Point Pleasant桥突然毁坏,造成46人死亡,事故原因是由一根带环拉杆中的缺陷在疲劳、腐蚀的作用下扩展到临界尺寸而引起的。1980年3月27日下午6时半,英国北海Ekofisk油田的Alexander L. Kielland号钻井平台倾覆,有127人落水,只救起89人。事故分析表明,裂纹由 $\phi 325\text{mm}$ 的撑管与支腿连接的焊缝处起始,在疲劳载荷(主要是波浪力)的作用下,扩展100多毫米后发生断裂,导致平台倾覆的事故。

20世纪80年代初,美国众议院科技委员会委托国家标准局进行了一次关于断裂所造成的损失的大型综合调查。1983年,在《国际断裂》杂志(Int. J. Fracture, Vol. 23, No. 3, 1983. 译文见《力学进展》,No. 2, 1985)上发表了调查委员会给国会的报告。报告指出,断裂使美国一年损失1190亿美元,占

1982年美国国家总产值的4%。遭受损失最严重的三个行业是：车辆业(125亿美元/年)，建筑业(100亿美元/年)，航空工业(67亿美元/年)。值得注意的是报告还指出，向工程技术人员普及关于断裂和疲劳的基本概念和知识，可减少损失29%(345亿美元/年)，应用现有成果，可再减少损失24%(285亿美元/年)。因此，向工程技术人员普及关于断裂和疲劳的基本概念和知识，是十分必要的。

1984年《国际疲劳》杂志(Int. J. Fatigue, Vol. 6, No. 1)发表的国际民航组织(ICAO)《涉及金属疲劳断裂的重大飞机失事调查》指出：“80年代以来，由金属疲劳断裂引起的机毁人亡重大事故，平均每年100次。”20世纪的最后10年，尽管安全水平有了进一步提高，但世界民航每年发生重大死亡的飞行事故次数仍在48~57次之间。1999年，发生飞行死亡事故次数为48起，事故死亡人数为730人。

1993年，美国政府报告(PB94—143336, 1993.)发表了1973—1990年期间的飞行使用故障统计结果，表1-1给出了四种常用机型的数据。可见疲劳开裂仍然是值得密切关注的。

表 1-1 美国 SDR 使用故障报告 (1973—1990 年)

机 型	SDR 报告总次数		涉及疲劳开裂的 SDR 次数	
	飞机数	报告数	飞机数	报告数
Boeing 727	2364	36315	774	3294
737	1097	15437	257	2069
747	381	6936	134	543
DC—9	1465	26128	493	1532

工程实际中发生的疲劳断裂破坏，占全部力学破坏的50%~90%，是机械、结构失效的最常见形式。因此，工程技术人员必须认真考虑可能的疲劳断裂问题。

## 1.3 疲劳设计方法

### 1. 无限寿命设计

人们第一次认识到的疲劳破坏，是19世纪40年代的铁路车辆轮轴在重复交变载荷作用下发生的破坏。德国工程师 August Wöhler(1819—1914年)进行了一系列的试验研究后指出：“对于疲劳，应力幅比构件承受的最大应力更重要。应力幅越大，疲劳寿命越短；应力幅小于某一极限值时，将不发生疲劳破坏。”他

最先引入了应力-寿命( $S-N$ )曲线和疲劳极限的概念,并于1867年在巴黎展出了其研究成果。

基于上述研究成果可知,对于无裂纹构件,控制其应力水平,使其小于疲劳持久极限( $S_f$ ),则不萌生疲劳裂纹。于是,无限寿命设计(Infinite-life design)条件为

$$S < S_f \quad (1-6)$$

材料的疲劳持久极限  $S_f$  由  $S-N$  曲线给出。

对于需要经历无限次循环( $> 10^7$ 次)的零、构件,如发动机气缸阀门、顶杆、弹簧、长期频繁运行的轮轴等,无限寿命设计至今仍是一种简单而合理的方法。

20世纪60年代研究裂纹扩展的结果指出,裂纹扩展的控制参量——应力强度因子幅度也存在着一个门槛值。对于已有裂纹存在的构件,控制其应力强度因子,使其小于门槛值,则虽有裂纹但不扩展,也可实现无限寿命设计。

## 2. 安全寿命设计

无限寿命设计要求将构件中的使用应力控制在很低的水平,材料的潜力得不到充分发挥,对于并不需要经受很多循环次数的构件,无限寿命设计就很不经济。

1945年,M. A. Miner 提出了变幅载荷作用下的疲劳损伤累积方法和判据,使变幅载荷作用下的疲劳寿命预测成为可能。

使构件在有限长设计寿命内,不发生疲劳破坏的设计,称为安全寿命设计(Safe-life design)或有限寿命设计。民用飞机、容器、管道、汽车等,大都采用安全寿命设计。

材料的  $S-N$  曲线和 Miner 累积损伤理论,是安全寿命设计的基础。当然,考虑到疲劳破坏的分散性等不确定因素,安全寿命设计应当具有足够的安全储备。

## 3. 损伤容限设计

由于裂纹的存在,安全寿命设计并不能完全确保安全。

1957年,G. R. Irwin 提出了裂纹尖端场控制参量——应力强度因子  $K$  的概念,为线弹性断裂力学和疲劳裂纹扩展规律的研究奠定了基础。1963年,P. C. Paris 提出疲劳裂纹扩展速率可以由应力强度因子幅度  $\Delta K$  来描述。这使疲劳裂纹扩展寿命预测研究得到快速发展。

损伤容限设计(Damage tolerance design),是为保证含裂纹或可能含裂纹的重要构件的安全,从20世纪70年代开始发展并逐步应用的一种现代疲劳断裂控制方法。这种方法的设计思路是:假定构件中存在着裂纹(依据无损探伤能力、使用经验等假定其初始尺寸),用断裂力学分析、疲劳裂纹扩展分析和试验验证,保证在定期检查肯定能发现裂纹之前,裂纹不会扩展到足以引起破坏。

断裂判据和裂纹扩展速率方程是损伤容限设计的基础。

损伤容限设计希望在裂纹到达临界尺寸  $a_c$  前检出裂纹。因此,要选用韧性较好、裂纹扩展缓慢的材料,以保证有足够大的临界裂纹尺寸  $a_c$  和充分的时间,安排检查并及时发现裂纹。

#### 4. 耐久性设计

20 世纪 80 年代起,以经济寿命控制为目标的耐久性设计(Durability design)概念形成。耐久性是指构件和结构在规定的使用条件下抗疲劳断裂性能的一种定量度量。这种方法首先要定义疲劳破坏严重细节(如孔、槽、圆弧、台阶等)处的初始疲劳质量,描绘与材料、设计、制造质量相关的初始疲劳损伤状态,再用疲劳或疲劳裂纹扩展分析预测在不同使用时刻损伤状态的变化,确定其经济寿命,制定使用、维修方案。

结构使用到某一寿命时,发生了不能经济修理的广布损伤,而不修理又可能引起结构的功能问题,这一寿命称为经济寿命。

耐久性设计由原来不考虑裂纹或仅考虑少数最严重的单个裂纹,发展到考虑全部可能出现的裂纹群;由仅考虑材料的疲劳抗力,发展到考虑细节设计及其制造质量对疲劳抗力的影响;由仅考虑安全,发展到综合考虑安全、功能及使用经济性;提供指导设计、制造、使用、维护的综合信息。耐久性设计已经开始应用于一些飞机结构及其它重要工程构件中,是 21 世纪疲劳断裂控制研究的一个主要发展方向。

上述各种疲劳设计方法,都反映了疲劳断裂研究的发展与进步。但是,由于疲劳问题复杂,影响因素多,使用条件和环境差别大,各种方法不是相互取代,而是相互补充的。不同构件,不同情况,应当采用不同方法。

正因为疲劳问题涉及因素多,情况复杂,对重要构件的抗疲劳设计必须进行充分的试验验证。若仅依据分析,则必须保证足够的安全裕度(其设计使用寿命往往仅为计算寿命的  $1/4 \sim 1/10$ )。采用损伤容限设计时,在安排检修时必须保证足够高的裂纹检出概率。

## 1.4 疲劳破坏机理与断口特征

### 1.4.1 疲劳断口的宏观特征

疲劳破坏的断口,大都有一些共同的特征。图 1.4 是某飞机机轮铸造镁合金轮毂的疲劳断口照片。

图 1.4 所示之飞机轮毂疲劳破坏断口,是典型的疲劳破坏断口,有如下明显

特征:

### 1. 有裂纹源、疲劳裂纹扩展区和最后断裂区三个部分

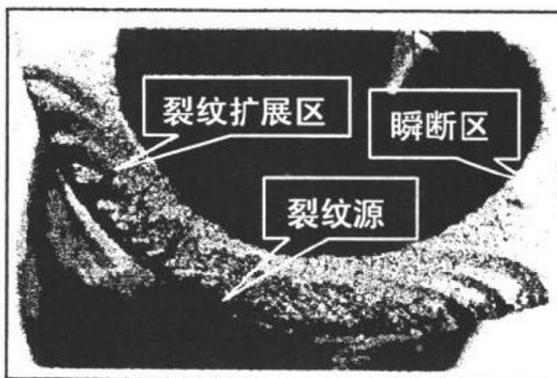


图 1.4 飞机轮毂疲劳破坏断口

图中上部较白的粗糙部分是最后断裂区,也称瞬断区,是裂纹扩展到足够尺寸后发生瞬间断裂形成的新鲜断面;下部是明显可见的裂纹扩展区,裂纹扩展区的大小与材料延性和所承受的载荷水平有关;进一步仔细观察(或借助于光学、电子显微镜)可以发现裂纹起源于下表面,该处是轮毂圆弧过渡引入应力集中的最大应力部位。裂纹起源处,称为裂纹源。

### 2. 裂纹扩展区断面较光滑、平整,通常可见“海滩条带”,有腐蚀痕迹

在与不同使用工况对应的变幅循环载荷作用下的裂纹扩展过程中,裂纹以不同的速率扩展,在断面上留下的不同使用时刻的裂纹形状痕迹,形成了明暗相间的条带。这些条带称为“海滩条带”(beach mark),就像海水退离沙滩后留下的痕迹一样,显示出了疲劳裂纹是不断扩展的过程。同时,裂纹的两个表面在扩展过程中不断地张开、闭合,相互摩擦,使得断口较为平整、光滑;有时也会使海滩条带变得不太明显。由于疲劳裂纹扩展有一个较长的时间过程,则在环境的作用下,裂纹扩展区还常常留有腐蚀的痕迹。

裂纹扩展区的大小,海滩条带的形状和尺寸及断口微观形貌等,可为失效分析提供十分丰富的信息。

### 3. 裂纹源通常在高应力局部或材料缺陷处

裂纹源一般是一个,也可以有多个。裂纹的起源位置在高应力区,高应力区通常在材料表面附近。如果材料含有夹杂、空隙等缺陷,局部应力也将升高,使缺陷处成为可能的裂纹源。

### 4. 与静载破坏相比,即使是延性材料,也没有明显的塑性变形

若将疲劳断裂破坏后的断口对合在一起,一般都能吻合得很好。这表明疲劳

破坏之前构件并未发生大的塑性变形；即使延性很好的材料，也是如此。这是与单调载荷下的破坏不同的显著特点。

### 5. 工程实际中的表面裂纹，一般呈半椭圆形

如图 1.4 所示，起源于表面的裂纹，在循环载荷的作用下扩展，通常沿表面扩展较快，沿深度方向扩展较慢，呈半椭圆形。且宏观裂纹一般在最大拉应力平面内扩展。

疲劳破坏与静载破坏相比较，有着不同的特点。如表 1-2 所示：静载破坏是在高应力作用下构件整体强度不足时瞬间发生的；疲劳破坏则是在满足静强度条件的较低应力多次作用下，构件局部损伤累积的结果。静载破坏断口粗糙、新鲜、无表面磨蚀或腐蚀痕迹；疲劳破坏断口则比较光滑，有裂纹源、裂纹扩展区、瞬断区，有海滩条带或腐蚀痕迹。延性材料静载破坏时塑性变形明显；疲劳断口则无明显塑性变形。局部应力集中对结构极限承载能力影响不大，但对疲劳寿命影响很大。

表 1-2 疲劳破坏与静载破坏的比较

疲劳破坏	静载破坏
$S < S_u$	$S > S_u$
破坏是局部损伤累积的结果	破坏是瞬间发生的
断口光滑，有海滩条带或腐蚀痕迹 有裂纹源、裂纹扩展区、瞬断区	断口粗糙，新鲜，无表面磨蚀及腐蚀痕迹
无明显塑性变形	韧性材料塑性变形明显
应力集中对寿命影响大	应力集中对极限承载能力影响不大

## 1.4.2 疲劳破坏机理

### 一、疲劳裂纹萌生机理

材料中疲劳裂纹的起始或萌生，也称为疲劳裂纹成核。疲劳裂纹形成后，将在使用载荷的作用下继续扩展，直至断裂发生。疲劳裂纹成核处，称为“裂纹源”。裂纹起源于何处？起源于高应力处。一般来说，有两种部位将会出现高应力：

1) 应力集中处。材料中含有缺陷、夹杂，或构件中有孔、切口、台阶等，则这类几何不连续处将引起应力集中，成为“裂纹源”；

2) 构件表面。在大多数情况下，构件中高应力区域总是在表面（或近表面）处，如承受弯曲或扭转的圆轴，其最大正应力或最大剪应力在截面半径最大的表

面处。表面还难免有加工痕迹(如切削刀痕)的影响,环境腐蚀的影响。同时,表面处于平面应力状态,有利于塑性滑移的进行,而滑移是材料中裂纹成核的重要过程。

金属大多是多晶体,各晶粒有各自不同的排列方位。在高应力作用下,材料晶粒中易滑移平面的方位若与最大作用剪应力一致,则将发生滑移。

滑移可以在单调载荷下发生,也可以在循环载荷下发生。图 1.5 中示出了在较大载荷作用下发生的粗滑移和在较小的循环载荷作用下发生的细滑移。

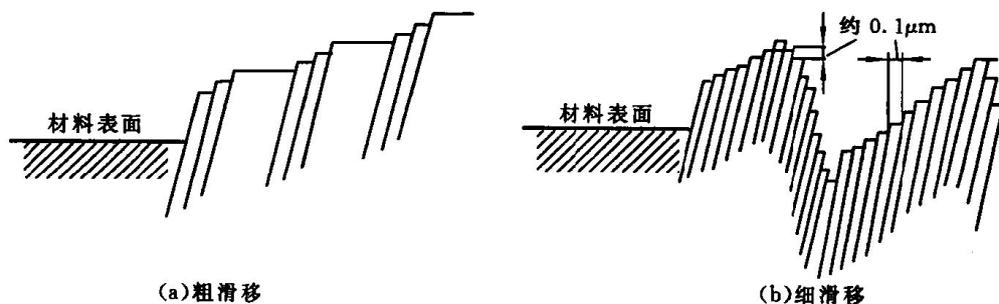


图 1.5 延性金属中的滑移

在循环载荷作用下,材料表面发生滑移带“挤出”和“凹入”,进一步形成应力集中,导致微裂纹产生。滑移的发展过程与施加的载荷及循环次数有关,图1.6所示是多晶体镍中同一位置在不同循环次数时的金相照片,其中的黑色围线是晶粒边界。由图 1.6 可见,经历了  $10^4$  次循环后,只有少数几处出现滑移,滑移线细,表示其深度较浅,用电解抛光将表面去除几个微米,这些浅滑移线可以消除。随着循环次数的增加,滑移线(或滑移带)越来越密集,越来越粗(深),如图(c)中到  $27 \times 10^4$  次循环时所示。

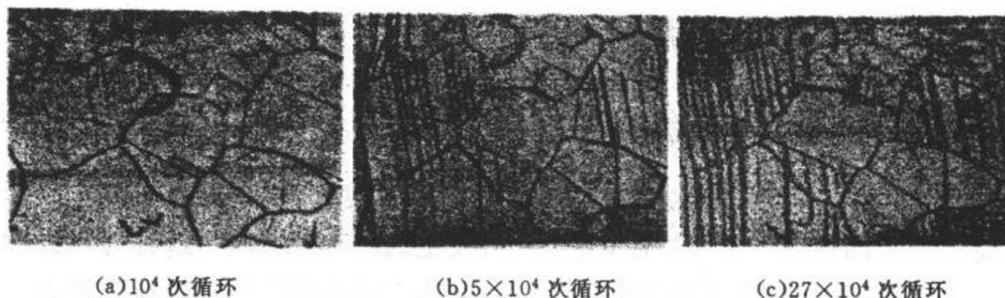


图 1.6 循环载荷作用下多晶体镍中滑移的发展

应当注意,滑移主要是在晶粒内进行的。深度大于几个微米的少数几条滑移带穿过晶粒,成为“持久滑移带”或称“驻留滑移带”,微裂纹正是由这些持久滑

移带发展而成的。滑移只在局部高应力区发生,在其余大部分材料处,甚至直至断裂都没有什么滑移。表面光洁可延缓滑移,延长裂纹萌生寿命。

## 二、疲劳裂纹扩展机理

疲劳裂纹在高应力处由持久滑移带成核,是由最大剪应力控制的。形成的微裂纹与最大剪应力方向一致,如图 1.7 所示。

在循环载荷作用下,由持久滑移带形成的微裂纹沿  $45^\circ$  最大剪应力作用面继续扩展或相互连接。此后,有少数几条微裂纹达到几十微米的长度,逐步汇聚成一条主裂纹,并由沿最大剪应力面扩展逐步转向沿垂直于载荷作用线的最大拉应力面扩展。裂纹沿  $45^\circ$  最大剪应力面的扩展是第 1 阶段的扩展,在最大拉应力面内的扩展是第 2 阶段的扩展。从第 1 阶段向第 2 阶段转变所对应的裂纹尺寸主要取决于材料和作用应力的水平,但通常都在  $0.05\text{mm}$  内,只有几个晶粒的尺寸。第 1 阶段裂纹扩展的尺寸虽小,对寿命的贡献却很大,对于高强度材料,尤其如此。

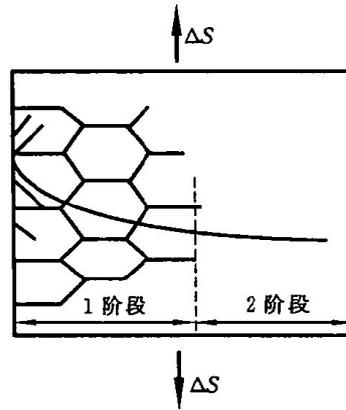


图 1.7 裂纹扩展二阶段

与第 1 阶段相比,第 2 阶段的裂纹扩展较便于观察。C. Laird(1967) 直接观察了循环应力作用下延性材料中裂纹尖端几何形状的改变,提出了描述疲劳裂纹扩展的“塑性钝化模型”,如图 1.8 所示。图 1.8(a) 示出了循环开始时的裂纹

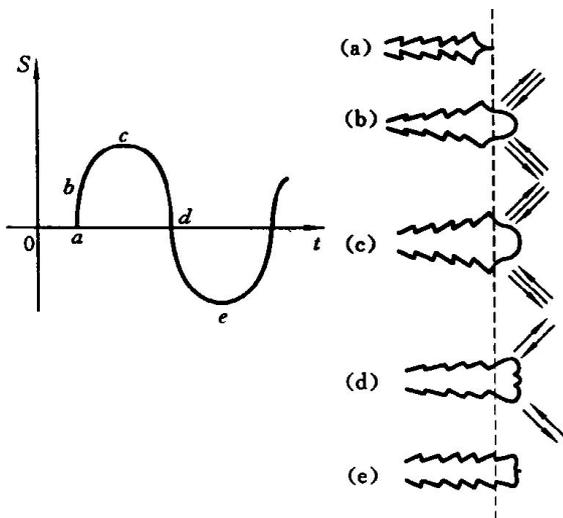


图 1.8 塑性钝化过程

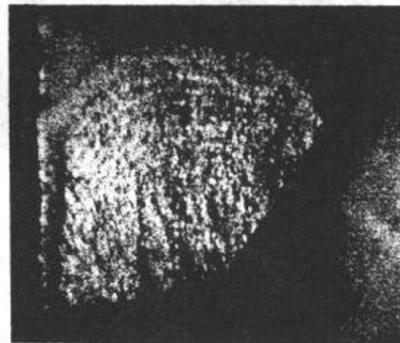


图 1.9 孔边疲劳断口的海滩条带

尖端形状；随着循环应力的增加，裂纹逐步张开，裂尖材料由于高度的应力集中而沿最大剪应力方向滑移(图(b))；应力进一步增大，裂纹充分张开，裂尖锐化成半圆形，开创出新的表面(图(c))；卸载时已张开的裂纹要收缩，但新开创的裂纹面却不能消失，它将在卸载引入的压应力作用下失稳而在裂尖形成凹槽形；最后，在最大循环压应力作用下，又成为尖裂纹，但其长度已增加了一个  $\Delta a$ 。下一循环，裂纹又张开、钝化、扩展、锐化，重复上述过程。这样，每一个应力循环，将在裂纹面上留下一条痕迹，称之为疲劳条纹(striation)。

疲劳条纹不同于前述之海滩条带，断口上的海滩条带一般是肉眼(或用低倍放大镜)可见的；疲劳条纹在晶粒级出现，必须借助于高倍电子显微镜才能观察到；故一条海滩条带可以包含几千条甚至上万条疲劳条纹。图 1.9、1.10 示出了若干典型疲劳断口的观察照片。图 1.9 所示为铝合金板中埋头铆钉孔边裂纹的海滩条带(放大 10 倍)，图 1.10 所示为 Cr12Ni2WMoV 钢的疲劳条纹照片(放大 2~3 万倍)。

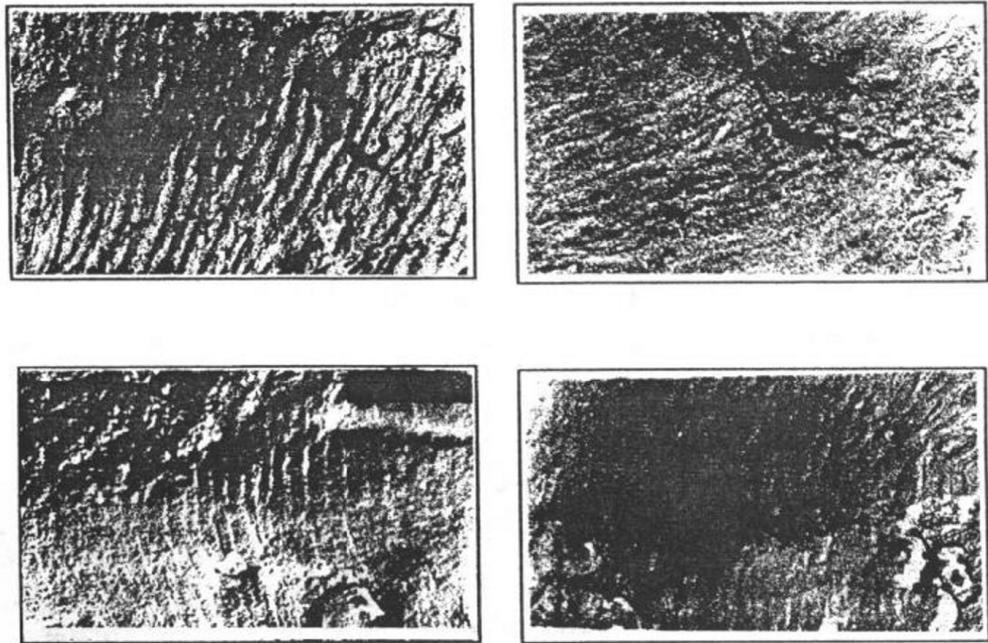


图 1.10 Cr12Ni2WMoV 钢疲劳条纹

### 1.4.3 疲劳断口的微观特征

1976 年, Crooker 指出, 利用高倍电子显微镜可以观察到三种不同的疲劳裂纹扩展的微观破坏形式。即微解理型(microcleavage)、条纹型(striation)和微孔

聚合型(microvoid coalescence)。

图 1.11 是我们在 1984 年获得的 Cr12Ni2WMoV 钢疲劳裂纹扩展微观观察照片。其中图 1.11(a)是微解理型,它对应于比较低的裂纹扩展速率( $10^{-5} \sim 10^{-7}$  mm/c);图 1.11(b)是条纹型,它对应的裂纹扩展速率约为  $10^{-6} \sim 10^{-3}$  mm/c;图 1.11(c)是微孔聚合型,它对应于较高的疲劳裂纹扩展速率( $10^{-4} \sim 10^{-1}$  mm/c)。其中,最值得注意的是微观疲劳条纹。疲劳条纹的形成与载荷循环有关,由条纹间距可以估计裂纹扩展速率。微观“疲劳条纹”不同于前述之断口宏观疲劳“海滩条带”,海滩条带的形成与周期载荷循环块对应,肉眼可见;疲劳条纹与单个循环载荷对应,需要利用高倍电子显微镜( $10^3 \sim 10^4$  倍)才能观察到,一条海滩条带可能含有成千上万条条纹。

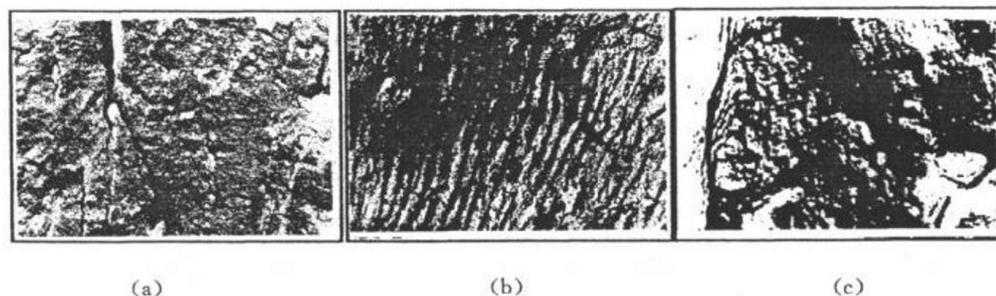


图 1.11 Cr12Ni2WMoV 钢疲劳断口的微观观察照片

不同观察工具与疲劳断口观察内容的关系如表 1-3 所示。

表 1-3 观察工具与疲劳断口观察内容的关系

观察工具	肉眼,放大镜	金相显微镜	电子显微镜
放大倍数	1~10 倍	10~1000 倍	1000 倍以上
观察对象	宏观断口,海滩条带	裂纹源,夹杂,缺陷	条纹,微解理,微孔聚合

#### 1.4.4 由疲劳断口进行初步失效分析

由疲劳破坏断口提供的大量信息,可以对构件或结构的失效原因进行分析。

例如,首先观察断口的宏观形貌,由是否存在着裂纹源、裂纹扩展区及瞬断区等三个特征区域,判断是否为疲劳破坏;若为疲劳破坏,则可由裂纹扩展区的大小,判断破坏时的裂纹最大尺寸;进而可利用断裂力学方法,由构件的几何及最大裂纹尺寸估计破坏载荷,判断破坏是否在正常工作载荷状态下发生;还可以观察裂纹起源的位置。

再利用金相显微镜或低倍电子显微镜,可对裂纹源进行进一步观察和确认,并且判断是否因为材料缺陷所引起,缺陷的类型和大小如何?

利用高倍电子显微镜进行的微观观察,可以研究疲劳裂纹扩展的机理。

由宏观“海滩条带”和微观“疲劳条纹”数据,结合构件使用载荷谱分析,还可能估计裂纹扩展速率。

疲劳断口分析,不仅有助于判断构件的失效原因,也可为改进疲劳研究和抗疲劳设计提供参考。因此,发生疲劳破坏后,应当尽量保护好断口,避免损失了宝贵的信息。

## 1.5 疲劳断裂研究方法

如同 1.1 节所述,疲劳断裂问题,需要研究载荷谱、裂纹萌生及扩展规律、构件细节应力分析、疲劳寿命预测和抗疲劳设计方法,等等。一方面,由于涉及因素多,问题复杂,难以找到解析的、普遍的寿命预测方法;另一方面,工程应用的需求迫切。因此,研究问题时必须抓住主要因素,建立简化模型,逐步深化认识。

例如,对于载荷谱,先研究恒幅循环载荷的最简单情况,再考虑变幅载荷下的损伤累积,最后考虑随机载荷。对于裂纹萌生及扩展规律,则先研究不含缺陷的光滑材料在恒幅循环载荷作用下的裂纹萌生规律,给出应力-寿命、应变-寿命以及不引发裂纹的疲劳极限等的基本关系,再讨论应用于构件时所需进行的必要的修正,建立裂纹萌生寿命估算方法,满足无限寿命设计、安全寿命设计的需求。再讨论含裂纹材料的断裂和疲劳裂纹扩展规律,研究断裂判据,研究在不同载荷谱作用下裂纹扩展寿命的预测,建立损伤容限设计方法。关于寿命预测和抗疲劳设计方法,是依赖于对问题的认识水平,从不考虑裂纹向考虑裂纹;从确定性分析向可靠性分析;从控制构件和结构的安全向综合控制设计—制造—使用—维修,以安全和经济为目标,逐步发展、丰富的。

此外,还应研究疲劳破坏的基本机理,不断积累、深化对于疲劳断裂破坏的更本质的认识,不断提高抗疲劳设计能力。疲劳断裂研究的基本思路如图 1.12 所示。

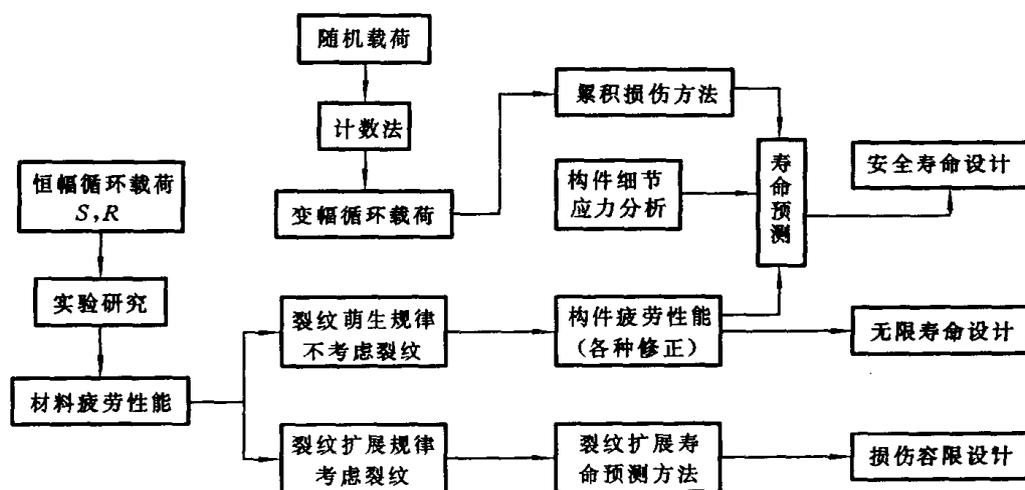


图 1.12 疲劳断裂研究基本框图

## 小 结

1. 疲劳的定义是：在某点或某些点承受扰动应力，且在足够多的循环扰动作用之后形成裂纹或完全断裂的材料中所发生的局部的、永久结构变化的发展过程。
2. 疲劳的特点是：有扰动应力作用；破坏起源于高应力或高应变的局部；有裂纹萌生—扩展—断裂三个阶段；是一个发展过程。
3. 描述循环之应力水平的基本量是  $S_{\max}$  和  $S_{\min}$ 。导出量有

$$\text{应力变程: } \Delta S = S_{\max} - S_{\min}$$

$$\text{应力幅: } S_a = \Delta S / 2 = (S_{\max} - S_{\min}) / 2$$

$$\text{平均应力: } S_m = (S_{\max} + S_{\min}) / 2$$

$$\text{应力比: } R = S_{\min} / S_{\max}$$

上述参量中，需且只需已知其中任意两个，即可确定循环应力水平。

4. 疲劳研究的任务包括：疲劳载荷谱；疲劳裂纹萌生和扩展的机理及规律，寿命预测与抗疲劳设计的方法。
5. 典型疲劳破坏断口的特征是：有裂纹源、疲劳裂纹扩展区和最后断裂区三个部分；裂纹扩展区断面较光滑，通常有“海滩条带”和 / 或腐蚀痕迹；裂纹源通常在高应力局部或材料缺陷处；无明显的塑性变形。

6. 疲劳破坏与静载破坏有显著的不同。
7. 疲劳断口的宏、微观信息,是进行失效分析的重要依据。
8. 由于疲劳问题的复杂性,实验研究尤为重要。

### 思考题与习题

- 1-1 什么是疲劳?疲劳有哪些特征?
- 1-2 试述疲劳断口与静载破坏断口有何不同。
- 1-3 在失效分析中,疲劳断口可能提供哪些信息?
- 1-4 提高表面光洁度,引入残余压应力可以提高疲劳寿命,为什么?
- 1-5 已知循环最大应力  $S_{\max} = 200\text{MPa}$ , 最小应力  $S_{\min} = 50\text{MPa}$ , 计算循环应力变程  $\Delta S$ 、应力幅  $S_a$ 、平均应力  $S_m$  和应力比  $R$ 。
- 1-6 已知循环应力幅  $S_a = 100\text{MPa}$ ,  $R = 0.2$ , 计算  $S_{\max}$ 、 $S_{\min}$ 、 $S_m$  和  $\Delta S$ 。

## 第二章 应力疲劳

按照作用的循环应力的的大小,疲劳可分成为应力疲劳和应变疲劳。若最大循环应力  $S_{\max}$  小于屈服应力  $S_y$ , 则称为应力疲劳;因为作用的循环应力水平较低,寿命循环次数较高(疲劳寿命  $N_f$  一般大于  $10^4$  次),故也称为高周疲劳。若最大循环应力  $S_{\max}$  大于屈服应力  $S_y$ , 则由于材料屈服后应变变化较大,应力变化相对较小,用应变作为疲劳控制参量更为恰当,故称之为应变疲劳;因为应变疲劳作用的循环应力水平较高,故寿命较低, $N_f$  一般小于  $10^4$ 。应变疲劳也称为低周疲劳。

本章研究应力疲劳。

### 2.1 基本 $S-N$ 曲线

现在先研究材料的疲劳性能。材料的疲劳性能,用作用应力  $S$  与到破坏时的寿命  $N$  之间的关系描述。在疲劳载荷作用下,最简单的载荷谱是恒幅循环应力。描述循环应力水平需要两个量,为了分析的方便,使用应力比  $R$  和应力幅  $S_a$ 。如前所述,应力比给定了循环特性,应力幅是疲劳破坏的控制参量。

$R = -1$  时,对称恒幅循环载荷控制下,实验给出的应力 - 寿命关系,用  $S_a-N$  曲线表达,是材料的基本疲劳性能曲线。

应力水平  $R = -1$  时,有  $S_a = S_{\max}$ , 故基本应力 - 寿命曲线称  $S-N$  曲线。应力  $S$  可以是  $S_a$ , 也可以是  $S_{\max}$ , 因为二者数值相等。

寿命  $N_f$  定义为在对称恒幅载荷作用下循环到破坏的循环次数。

疲劳破坏有裂纹萌生、稳定扩展和失稳扩展至断裂三个阶段,这里研究的是裂纹萌生寿命。因此,“破坏”可定义为:

1) 标准小尺寸试件断裂。对于高、中强钢等脆性材料,从裂纹萌生到扩展至小尺寸圆截面试件断裂的时间很短,对整个寿命的影响很小,考虑到裂纹萌生时尺度小,观察困难,故这样定义是合理的。

2) 出现可见小裂纹(如 1mm),或有 5% ~ 15% 应变降。对于延性较好的材料,裂纹萌生后有相当长的一段扩展阶段,不应当计入裂纹萌生寿命。小尺寸裂纹观察困难时,可以监测恒幅循环应力作用下的应变变化。当试件出现裂纹后,刚度改变,应变也随之变化,故可用应变变化量来确定是否萌生了裂纹。

### 2.1.1 S-N 曲线的一般形状及若干特性值

材料疲劳性能试验所用标准试件,一般是小尺寸(3~10mm)光滑圆柱试件。材料的基本 S-N 曲线,给出的是光滑材料在恒幅对称循环应力作用下的裂纹萌生寿命。

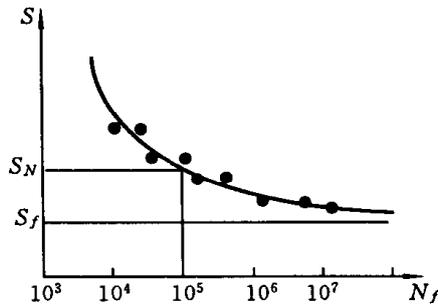


图 2.1 S-N 曲线

用一组标准试件(通常为 7~10 件),在给定的应力比  $R$  下,施加不同的应力幅  $S_a$ ,进行疲劳试验,记录相应的寿命  $N$ ,即可得到图 2.1 所示的 S-N 曲线。

由图可知,在给定的应力比下,应力  $S$  ( $S_a$  或  $S_{max}$ ) 越小,寿命越长。当应力  $S$  小于某极限值时,试件不发生破坏,寿命趋于无限长。

由 S-N 曲线确定的,对应于寿命  $N$  的应力,称为寿命为  $N$  循环的疲劳强度(fatigue strength),记作  $S_N$ 。

寿命  $N$  趋于无穷大时所对应的应力  $S$  的极限值  $S_f$ ,称为材料的疲劳极限(endurance limit)。特别地, $R = -1$  的对称循环下的疲劳极限,记作  $S_{f(R=-1)}$ ,简记为  $S_{-1}$ 。

由于疲劳极限是由试验确定的,试验又不可能一直做下去,故在许多试验研究的基础上,所谓的“无穷大”一般被定义为:

钢材,  $10^7$  次循环; 焊接件,  $2 \times 10^6$  次循环; 有色金属,  $10^8$  次循环。

满足  $S < S_f$  的设计,即无限寿命设计。

### 2.1.2 S-N 曲线的数学表达

#### 1. 幂函数式

描述材料 S-N 曲线的最常用形式是幂函数式,即

$$S^m \cdot N = C \quad (2-1)$$

$m$  与  $C$  是与材料、应力比、加载方式等有关的参数。两边取对数,有

$$\lg S = A + B \lg N \quad (2-2)$$

式中,材料参数  $A = \lg C/m$ ,  $B = -1/m$ 。(2-2) 式表示应力  $S$  与寿命  $N$  间有对数线性关系,这一点,可由观察实验数据  $S$ 、 $N$  在双对数图上是否线性而确定。

#### 2. 指数式

指数形式的 S-N 曲线表达式为

$$e^{mS} \cdot N = C \quad (2-3)$$

两边取对数后成为

$$S = A + B \lg N \quad (2-4)$$

式中,材料参数为: $A = \lg C / m \lg e$ ,  $B = 1 / m \lg e$ 。表示在寿命取对数,应力不取对数的图中, $S$ 与 $N$ 间有线性关系,通常称为半对数线性关系。

### 3. 三参数式

有时也希望在 $S-N$ 曲线中考虑疲劳极限 $S_f$ ,写成

$$(S - S_f)^m \cdot N = C \quad (2-5)$$

与(2-3)、式(2-4)式相比,此式中多了一个参数,即疲劳极限 $S_f$ ,且当 $S$ 趋近于 $S_f$ 时, $N$ 趋于无穷大。

以上三种形式中,最常用的是幂函数式表达的 $S$ 与 $N$ 间的双对数线性关系。注意到 $S-N$ 曲线描述的是高周应力疲劳,故其使用下限为 $10^3 \sim 10^4$ 。上限则由疲劳极限定义。

## 2.1.3 $S-N$ 曲线的近似估计

描绘材料疲劳性能的基本 $S-N$ 曲线,应当由 $R = -1$ 的对称循环疲劳实验给出,或查有关手册得到。在缺乏实验结果时,可依据材料强度 $S_u$ 作如下简单估计,供初步设计参考。

### 1. 疲劳极限 $S_f$ 与极限强度 $S_u$ 的关系

将已知金属材料的疲劳极限 $S_f$ 与极限强度 $S_u$ 的数据绘于图2.2中,发现可用斜线 $OA$ 和水平线 $AB$ 描述其关系。故对于一般常用金属材料,有下述经验关系。

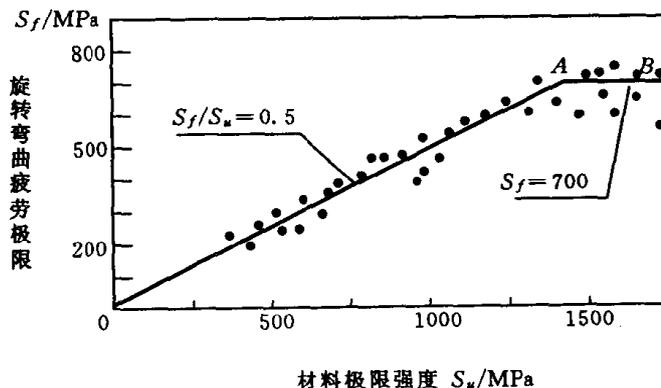


图 2.2 旋转弯曲疲劳极限与极限强度的关系

$R = -1$  时, 旋转变曲载荷作用下的疲劳极限可估计为

$$\begin{aligned} S_{f(\text{bending})} &= 0.5S_u & S_u < 1400\text{MPa} \\ &= 700\text{MPa} & S_u > 1400\text{MPa} \end{aligned} \quad (2-6)$$

不同材料旋转变曲疲劳实验的结果表明,  $S_{f(\text{bending})}$  在  $(0.3 \sim 0.6)S_u$  之间。

轴向拉压载荷作用下的疲劳极限可估计为

$$S_{f(\text{tension})} = 0.7S_{f(\text{bending})} = 0.35S_u \quad (2-7)$$

不同材料的实验结果表明,  $S_{f(\text{tension})}$  在  $(0.3 \sim 0.45)S_u$  之间。

承受对称扭转时有

$$S_{f(\text{torsion})} = 0.577S_{f(\text{bending})} = 0.29S_u \quad (2-8)$$

实验结果表明,  $S_{f(\text{torsion})}$  大多在  $(0.25 \sim 0.3)S_u$  之间。

对于高强脆性材料, 极限强度  $S_u$  取为极限抗拉强度; 对于延性材料,  $S_u$  取为屈服强度。

注意, 不同载荷作用形式下的疲劳极限和  $S-N$  曲线是不相同的。稍后将讨论其原因。

## 2. 无实验数据时 $S-N$ 曲线的估计

若疲劳极限  $S_f$  和材料极限强度  $S_u$  为已知,  $S-N$  曲线可用下述方法作偏于保守的估计。

$S-N$  曲线用双对数线性关系的幂函数形式(2-1)式表达, 即

$$S^m \cdot N = C$$

寿命  $N = 1$  时,  $S_1 = S_u$ , 即单调载荷作用下, 试件在极限强度下破坏或屈服。考虑到  $S-N$  曲线描述的是长寿命疲劳, 不宜用于  $N < 10^3$  以下, 故通常假定寿命  $N = 10^3$  时, 有

$$S_{10^3} = 0.9S_u \quad (2-9)$$

对于金属材料, 疲劳极限  $S_f$  所对应的循环次数一般为  $N = 10^7$  次, 考虑到估计  $S_f$  时的误差, 作如下偏于保守的假定:

$$N = 10^6 \text{ 时, } S_{10^6} = S_f = kS_u \quad (2-10)$$

式中, 反映不同载荷作用形式的系数  $k$ , 按照前述各式选取。即弯曲时,  $k$  取 0.5; 拉压时,  $k$  取 0.35; 扭转时,  $k$  取 0.29。

由  $S-N$  曲线可写出

$$C = (0.9S_u)^m \times 10^3 = (kS_u)^m \times 10^6$$

依据上述二式可求得参数如下:

$$m = 3/\lg(0.9/k); \quad C = (0.9S_u)^m \times 10^6 \quad (2-11)$$

如此估计的  $S-N$  曲线,只用于寿命为  $10^3 \sim 10^6$  之间的疲劳强度估计,不宜外推。

需要再次强调的是,  $S-N$  曲线应由疲劳实验给出,任何形式的近似估计都只能供初步设计参考。

## 2.2 平均应力的影响

反映材料疲劳性能的  $S-N$  曲线,是在给定应力比  $R$  下得到的。 $R = -1$ , 对称循环时的  $S-N$  曲线,是基本  $S-N$  曲线。本节讨论应力比  $R$  的变化对疲劳性能的影响。

如图 2.3 所示,应力比  $R$  增大,表示循环平均应力  $S_m$  增大。且应力幅  $S_a$  给定时,有

$$S_m = (1 + R)S_a / (1 - R) \quad (2-12)$$

上式给出了  $R$  与  $S_m$  间的一一对应关系,故讨论应力比  $R$  的影响,实际上是讨论平均应力  $S_m$  的影响。

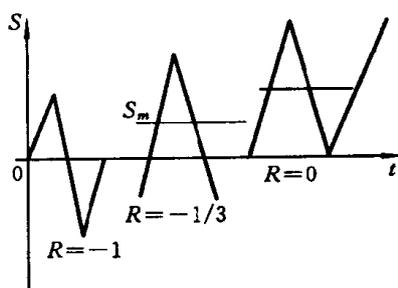


图 2.3 应力比与平均应力

### 2.2.1 一般趋势

当  $S_a$  给定时,  $R$  增大,平均应力  $S_m$  也增大。由图 2.3 可见,循环载荷中的拉伸部分增大,这对于疲劳裂纹的萌生和扩展都是不利的,将使得疲劳寿命  $N_f$  降低。平均应力对  $S-N$  曲线影响的一般趋势如图 2.4 所示。平均应力  $S_m = 0$  ( $R = -1$ ) 时的  $S-N$  曲线,是基本  $S-N$  曲线;当  $S_m > 0$ , 即拉伸平均应力作用时,  $S-N$  曲线下移,表示同样应力幅作用下的寿命下降,或者说在同样寿命下的疲劳强度降低,对疲劳有不利的影响;  $S_m < 0$ , 即压缩平均应力作用时,  $S-N$  曲线上移,表示同样应力幅作用下的寿命增大,或者说在同样寿命下的疲劳强度提高,压缩平均应力对疲劳的影响是有利的。因此,在实践中用喷丸、冷挤压和预应变等方法,在高应力细节处引入残余压应力,是提高疲劳寿命的有效措施。

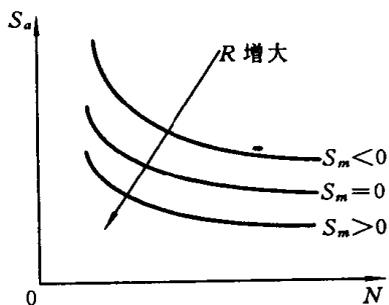


图 2.4 平均应力的影响

### 2.2.2 $S_a-S_m$ 关系

在给定寿命  $N$  下,研究循环应力幅  $S_a$  与平均应力  $S_m$  之关系,可得到如图 2.5 所示的结果。图中的曲线称为等寿命线,当寿命给定时,平均应力  $S_m$  越大,相应的应力幅  $S_a$  就越小;但无论如何,平均应力  $S_m$  都不可能大于材料的极限强度  $S_u$ 。极限强度  $S_u$  为高强脆性材料的极限抗拉强度或延性材料的屈服强度。

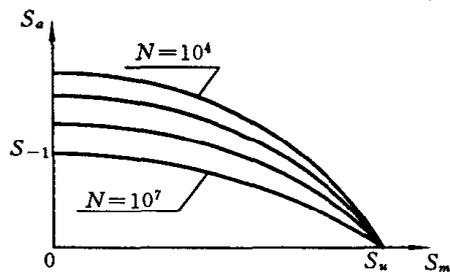


图 2.5  $S_a-S_m$  关系

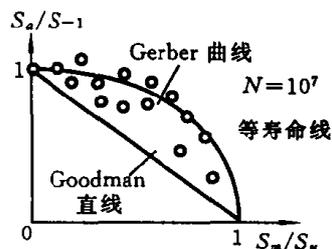


图 2.6 Haigh 图

对于任一给定寿命  $N$ , 其  $S_a-S_m$  关系曲线还可以画成如图 2.6 所示的无量纲形式,这种图称为 Haigh 图。图中给出了金属材料  $N=10^7$  时的  $S_a-S_m$  关系,分别用疲劳极限  $S_{-1}$  和  $S_u$  进行了归一化。显然,当  $S_m=0$  时,  $S_a$  就是  $R=-1$  时的疲劳极限  $S_{-1}$ ,  $S_a/S_{-1}=1$ ; 当  $S_a=0$  时,载荷成为静载,在极限强度  $S_u$  下破坏,有  $S_m=S_u$  或  $S_m/S_u=1$ 。

因此,等寿命条件下的  $S_a-S_m$  关系可以表达为

$$(S_a/S_{-1}) + (S_m/S_u)^2 = 1 \quad (2-13)$$

这是图中的抛物线,称为 Gerber 曲线,数据点基本上在此抛物线附近。

另一表达形式,是图中的直线,即

$$(S_a/S_{-1}) + (S_m/S_u) = 1 \quad (2-14)$$

上式称为 Goodman 直线,所有的实验点基本都在这一直线的上方。直线形式简单,且在给定寿命下,由此作出的  $S_a-S_m$  关系估计是偏于保守,故在工程实际中常用。

对于其它给定的  $N$ , 只需将上述  $S_{-1}$  换成  $S_{a(R=-1)}$  即可。 $S_{a(R=-1)} = S_{N(R=-1)}$ , 后者即是由基本  $S-N$  曲线给出的、 $N$  循环寿命所对应的疲劳强度。

利用上述关系,已知材料的极限强度  $S_u$  和基本  $S-N$  曲线,即可估计出在不同应力比或平均应力下的疲劳性能。

例 2.1 构件受拉压循环应力作用,  $S_{\max} = 800\text{MPa}$ ,  $S_{\min} = 80\text{MPa}$ 。若已知

材料的极限强度为  $S_u = 1200\text{MPa}$ ，试估算其疲劳寿命。

解 1) 确定工作循环应力幅和平均应力。

$$S_a = (S_{\max} - S_{\min})/2 = 360 \text{ MPa}$$

$$S_m = (S_{\max} + S_{\min})/2 = 440 \text{ MPa}$$

2) 估计对称循环下的基本  $S-N$  曲线。

由(2-7)式,拉压循环应力作用时,可估计材料的疲劳极限为

$$S_{f(\text{tension})} = 0.35S_u = 420 \text{ MPa}$$

若基本  $S-N$  曲线用幂函数式  $S^m \cdot N = C$  表达,利用(2-9)式、(2-10)式之假设,则由(2-11)式有

$$m = 3/\lg(0.9/k) = 7.314$$

$$C = (0.9S_u)^m \times 10^3 = 1.536 \times 10^{25}$$

3) 循环应力水平等寿命转换。

为了利用基本  $S-N$  曲线估计疲劳寿命,需要将实际工作循环应力水平等寿命地转换为对称循环( $R = -1, S_m = 0$ )下的应力水平  $S_{a(R=-1)}$ 。由 Goodman 方程,有

$$(S_a/S_{a(R=-1)}) + (S_m/S_u) = 1$$

将已知的工作循环应力幅和平均应力代入上式可解出:

$$S_{a(R=-1)} = 568.4 \text{ MPa}$$

4) 估计构件寿命。

对称循环( $S_a = 568.4\text{MPa}, S_m = 0$ )条件下的寿命,可由基本  $S-N$  曲线得到,即

$$N = C/S^m = 1.536 \times 10^{25}/568.4^{7.314} = 1.09 \times 10^5 \text{ 次}$$

由于工作循环应力水平( $S_a = 350\text{MPa}, S_m = 420\text{MPa}$ )与转换后的对称循环( $S_a = 583\text{MPa}, S_m = 0$ )是等寿命的,故可估计构件寿命为  $N = 1.09 \times 10^5$  次循环。

### 2.2.3 等寿命疲劳图

现在对图 2.5 之坐标系作进一步的讨论。将由 Goodman 直线表达的  $S_a-S_m$  关系图重画于图 2.7。

设任一过原点的射线  $OB$ ,斜率为  $k$ ,由图可知,

$$k = S_a/S_m$$

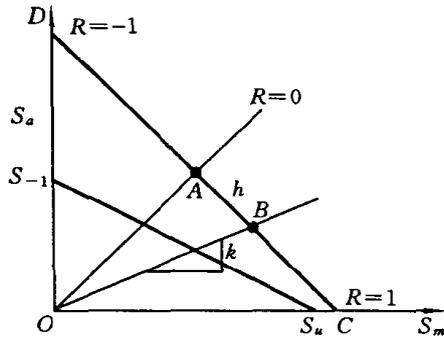


图 2.7  $S_a$ - $S_m$ - $R$  关系

且有

$$R = S_{\min}/S_{\max} = (S_m - S_a)/(S_m + S_a) = (1 - k)/(1 + k)$$

每一条过原点的射线都有一个确定的  $k$  值,由上式可知, $k$  与应力比  $R$  有一一对应的关系,故射线上各点有相同的  $R$ ,且有

$$k = 1 \quad (45^\circ \text{ 线}) \text{ 时, } S_m = S_a, \quad R = 0$$

$$k = \infty \quad (90^\circ \text{ 线}) \text{ 时, } S_m = 0, \quad R = -1$$

$$k = 0 \quad (0^\circ \text{ 线}) \text{ 时, } S_a = 0, \quad R = 1$$

过任意一点  $B$  作  $45^\circ$  射线  $OA$  的垂线  $CD$ , 如图所示有

$$k = S_a/S_m = (OA \sin 45^\circ - h \sin 45^\circ)/(OA \cos 45^\circ + h \cos 45^\circ) = (OA - h)/(OA + h)$$

故可知:

$$R = (1 - k)/(1 + k) = h/OA = h/AC$$

上式说明,  $CD$  线可作为应力比  $R$  的坐标线,  $A$  点处  $R = 0$ ,  $C$  点处  $R = 1$ ,  $D$  点处  $R = -1$ ; 其它的  $R$  值在  $CD$  上线性标定即可。

再将图 2.7 旋转  $45^\circ$ , 画成图 2.8, 考查一下水平和铅垂坐标  $S_1$  和  $S_2$  各代表什么?

对于图上任一点  $A$ , 有

$$\sin \alpha = S_a/OA, \quad \cos \alpha = S_m/OA$$

由  $\triangle AOC$  可知

$$\begin{aligned} S_1 &= OC = OA \sin(45^\circ - \alpha) \\ &= OA(\sin 45^\circ \cos \alpha - \cos 45^\circ \sin \alpha) \\ &= (\sqrt{2}/2)OA((S_m - S_a)/OA) \\ &= (\sqrt{2}/2)S_{\min} \end{aligned}$$

可见, 坐标轴  $S_1$  表示  $S_{\min}$ , 只是其

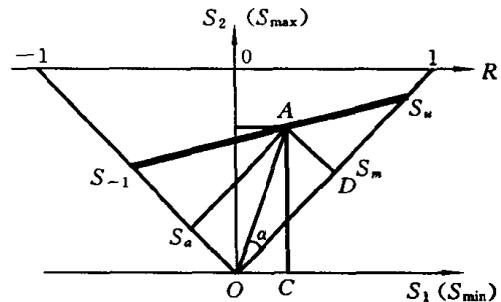


图 2.8 等寿命疲劳图坐标

坐标应按  $\sqrt{2}/2$  标定; 类似地, 可证明坐标轴  $S_2$  表示  $S_{\max}$ , 同样应按  $\sqrt{2}/2$  标定。

如此得到的图, 称为等寿命疲劳图。

作为一例, 图 2.9 示出了 7075-T6 铝合金材料的等寿命疲劳图。利用等寿命疲劳图, 可直接读出给定寿命  $N$  下的  $S_a$ 、 $S_m$ 、 $S_{\max}$ 、 $S_{\min}$ 、 $R$  等各种循环应力参数, 便于工程设计使用。在给定的应力比  $R$  下, 由图中相应射线与等寿命线交点

读取数据,即可得到不同  $R$  下的  $S-N$  曲线。此外,还可利用此图进行载荷间的等寿命转换。

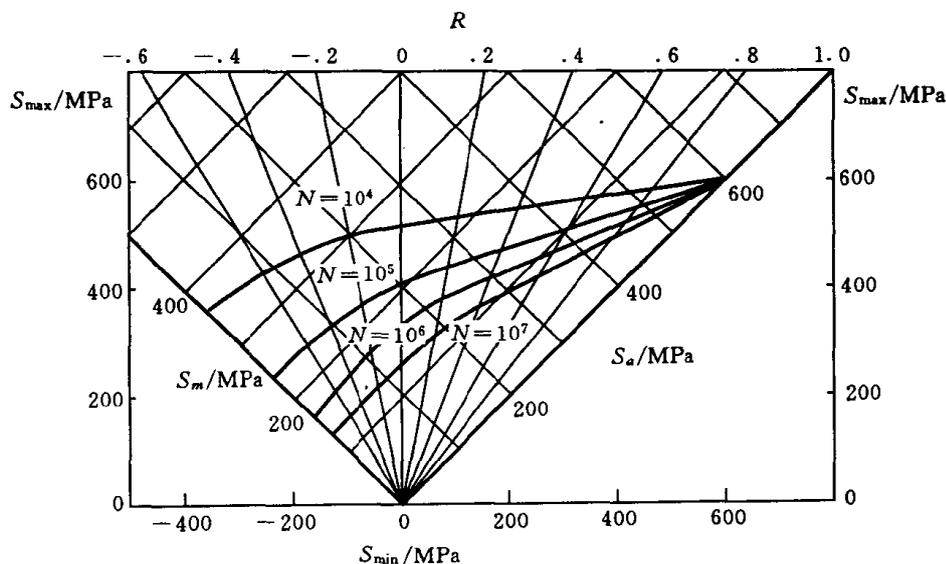


图 2.9 7075—T6 铝合金等寿命疲劳图

## 2.3 影响疲劳性能的若干因素

大多数描述材料疲劳性能的基本  $S-N$  曲线,是小尺寸试件在旋转弯曲对称循环载荷作用下得到的。试件的试验段加工精细,光洁度高。除上节讨论的平均应力的影响外,还有许多因素对于疲劳寿命有着不可忽视的影响。如载荷形式、构件尺寸、表面光洁度、表面处理、使用温度及环境,等等。故在构件疲劳设计时,应当对材料的疲劳性能进行适当的修正。

### 2.3.1 载荷形式的影响

2.1.3 节中讨论  $S-N$  曲线的近似估计时已经指出,材料的疲劳极限随加载形式的不同有下述变化趋势:

$$S_f(\text{弯}) > S_f(\text{拉}) > S_f(\text{扭})$$

假定作用应力水平相同,拉压时高应力区体积等于试件整个试验段的体积,如图 2.10 所示;弯曲情形下的高应力区体积则要小得多。疲劳破坏主要取决于作用应力的水平(外因)和材料抵抗疲劳破坏的能力(内因)二者,故疲劳破坏通常发生在高应力区或材料缺陷处。假如图中作用的循环最大应力  $S_{\max}$  相等,因为拉压循环时高应力区域的材料体积较大,存在缺陷并由此引发裂纹萌生的可

能性也大。所以,同样的应力水平作用下,拉压循环载荷作用时的寿命比弯曲时短;或者说,同样寿命下,拉压循环时的疲劳强度比弯曲时低。

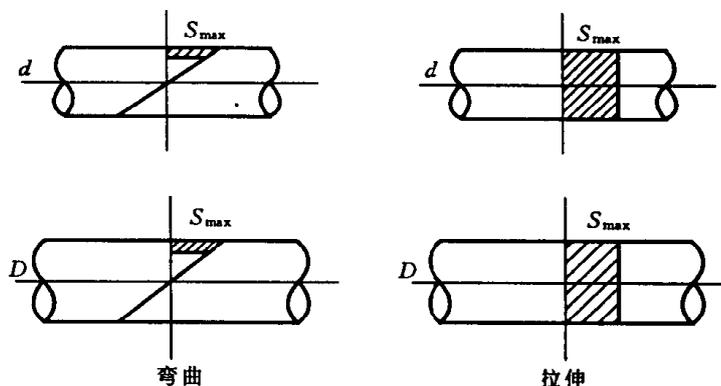


图 2.10 载荷、尺寸不同时的高应力区域体积

至于扭转时疲劳寿命降低,体积的影响不大,需由不同应力状态下的破坏判据解释,在此不作进一步讨论。

### 2.3.2 尺寸效应

不同试件尺寸对疲劳性能的影响,也可以用高应力区体积的不同来解释。由图 2.10 可见,应力水平相同时,试件尺寸越大,高应力区域材料体积就越大。疲劳发生在高应力区材料最薄弱处,体积越大,存在缺陷或薄弱处的可能就越大,故大尺寸构件的疲劳抗力低于小尺寸试件。或者说,在给定寿命  $N$  下,大尺寸构件的疲劳强度下降;在给定的应力水平下,大尺寸构件的疲劳寿命降低。

尺寸效应可以用一个修正因子  $C_{size}$  表达,修正因子是一个小于 1 的系数,通常可由设计手册查得。对于常用金属材料,在大量实验研究的基础上,也有一些经验公式给出修正因子的估计。如 Shigley 和 Mitchell 于 1983 年给出:

$$C_{size} = 1.189d^{-0.097} \quad 8\text{mm} \leq d \leq 250\text{mm} \quad (2-15)$$

当直径  $d < 8\text{mm}$  时,  $C_{size} = 1$ 。此式一般只用作疲劳极限修正。尺寸修正后的疲劳极限为

$$S_f = C_{size} S_f$$

尺寸效应对长寿命疲劳影响较大。应力水平高,寿命短时,材料分散性影响相对减小。因此,若用上述尺寸因子来修正整条  $S-N$  曲线,则将过于保守。

### 2.3.3 表面光洁度的影响

由疲劳的局部性显然可知,若试件表面粗糙,将使局部应力集中的程度加

大,裂纹萌生寿命缩短。材料的基本  $S-N$  曲线是由精磨后光洁度良好的标准试件测得的,类似于尺寸修正,光洁度的影响也可以用小于 1 的修正因子来描述。描述光洁度影响的修正因子称为表面光洁度系数,图 2.11 示出了不同表面加工、不同材料强度下表面光洁度系数变化的一般趋势。

由图可见,材料强度越高,光洁度的影响越大。另外,应力水平越低,寿命越长,光洁度的影响越大。表面加工时的划痕、碰伤,可能就是潜在的裂纹源,应当注意防止碰划。

### 2.3.4 表面处理的影响

一般来说,疲劳裂纹总是起源于表面。为了提高疲劳性能,除前述改善光洁度外,常常采用各种方法在构件的高应力表面引入压缩残余应力(residual stress),以达到提高疲劳寿命的目的。其机理如图 2.12 所示。

若循环应力如图 2.12 中 1—2—3—4 所示,平均应力为  $S_m$ ,则当引入压缩残余应力  $S_{res}$  后,实际循环应力水平是原 1—2—3—4 各应力与  $-S_{res}$  的叠加,成为 1'—2'—3'—4', 平均应力降为  $S'_m$ ,由 2.2 节可知,疲劳性能将得到改善。

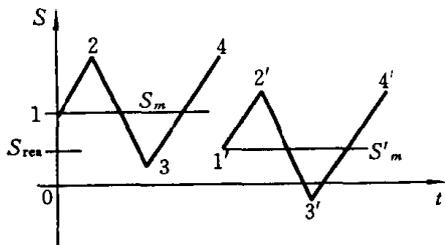


图 2.12 残余压应力使循环平均应力下降

表面喷丸处理;销、轴、螺栓类零件冷挤压加工;紧固件干涉配合等;在零构件表面引入残余压应力,都是提高疲劳寿命的常用方法。材料强度越高,循环应力水平越低,寿命越长,延寿效果越好。在有应力梯度或缺口应力集中处采用喷丸,效果更好。

在构件高应力表面引入压缩残余应力,可以提高其疲劳寿命。但在温度、载荷、使用时间等因素的作用下,应力松弛有抵消这种作用的可能。例如,钢在  $350^{\circ}\text{C}$  以上,铝在  $150^{\circ}\text{C}$  以上,就可能出现应力松弛。

反之,残余拉应力则是有害的。焊接、气割、磨削等都会引入残余拉应力,使疲劳强度降低或寿命减小。

镀铬或镀镍,将在钢材表面层引起残余拉应力,使材料的疲劳极限下降,有时可下降达 50% 以上。镀铬、镀镍对疲劳性能影响的一般趋势是:材料强度越

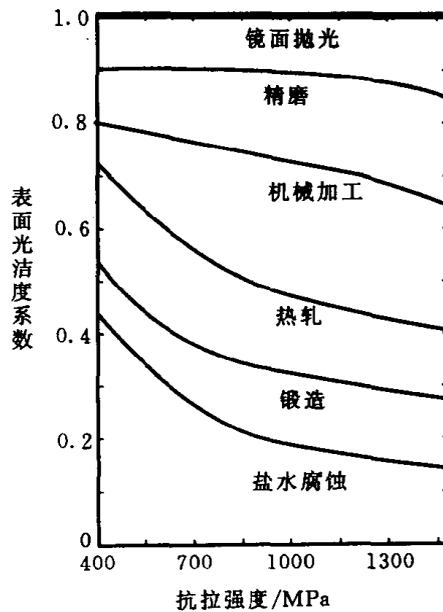


图 2.11 表面光洁度系数

高,寿命越长,镀层厚度越大,镀后疲劳强度下降就越大。必要时,可采取镀前渗氮,镀后喷丸等措施,以减小其不利影响。图 2.13 示出了某普通钢材镀镍及喷丸处理对其  $S-N$  曲线的影响。

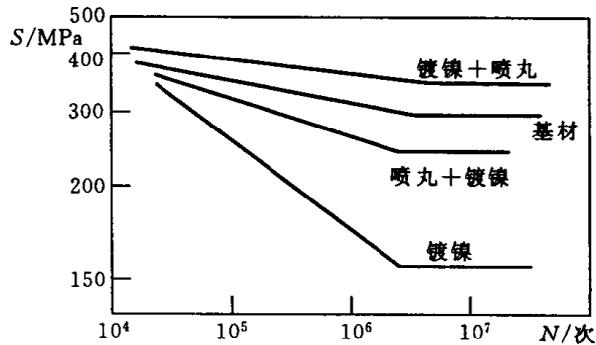


图 2.13 镀镍、喷丸对疲劳性能的影响

镀锌或镀镉,对疲劳性能的影响要小一些,但对腐蚀的防护效果比镀铬差。

表面渗碳或渗氮处理,可以提高表面材料的强度并在材料表面引入压缩残余应力,这两种作用对于提高材料疲劳性能都是有利的。实验表明,渗碳或渗氮处理可使钢材疲劳极限提高一倍。对于缺口件,效果更好。

反之,热轧或锻造,会使材料表面脱碳,强度下降并在材料表面引入拉伸残余应力。这两种不利的作用,可能使材料疲劳极限降低 50%,甚至更多。材料强度越高,影响就越大。

### 2.3.5 温度和环境的影响

材料的  $S-N$  曲线一般是在室温、空气环境下得到的。

在诸如海水、水蒸气、酸、碱溶液等腐蚀介质环境下的疲劳,称为腐蚀疲劳。腐蚀介质的作用对疲劳是不利的。腐蚀疲劳过程是力学作用与化学作用的综合过程,其破坏机理十分复杂。

腐蚀环境通常会使材料表面氧化。在一般的情况下,氧化膜层可起保护作用,以免金属材料进一步受到腐蚀。但在疲劳载荷作用下,将使氧化膜层局部开裂,新的表面再次暴露于腐蚀环境中,造成再次腐蚀并在材料表面逐步形成腐蚀坑。腐蚀使表面粗糙,腐蚀坑形成应力集中,加快了裂纹的萌生,使寿命缩短。这是对裂纹萌生阶段腐蚀疲劳的最一般的解释。

影响腐蚀疲劳的因素很多,一般有如下趋势:

1) 载荷循环频率的影响显著。

无腐蚀环境作用时,在相当宽的频率范围内(如 200Hz 以内),频率对材料

$S-N$  曲线的影响不大。但在腐蚀环境中,随着频率的降低,同样循环次数经历的时间增长,腐蚀的不利作用有较充分的时间显示,使疲劳性能下降的影响明显。

2) 在腐蚀介质(如海水)中,半浸入状态(或海水飞溅区)比完全浸入更不利。

3) 耐腐蚀钢材(如高铬钢),抗腐蚀疲劳的性能较好;许多普通碳钢的疲劳极限则下降较多,甚至因腐蚀环境而消失。

4) 电镀层对于材料腐蚀有保护作用。尽管镀铬在空气环境下会使疲劳强度下降,但却可改善腐蚀环境下的疲劳性能。

金属材料的疲劳极限一般是随温度的降低而增加的。但随着温度的下降,材料的断裂韧性也下降,表现出低温脆性。一旦出现裂纹,则易于发生失稳断裂。对此,应当十分注意。高温将降低材料的强度,可能引起蠕变,对疲劳也是不利的。同时还应注意,为改善疲劳性能而引入的残余压应力,也会因温度升高而消失。

## 2.4 缺口疲劳

前面讨论的是光滑材料的  $S-N$  曲线。然而,实际零构件常常存在着不同形式的缺口(如孔、圆角、槽、台阶等),缺口应力集中将使疲劳性能严重下降。

### 2.4.1 疲劳缺口系数

缺口产生的应力集中程度,可以用弹性应力集中系数来描述。弹性应力集中系数  $K_t$  是缺口处最大实际应力  $\sigma$  与该处名义应力  $S$  之比,即

$$K_t = \sigma/S \quad (\sigma < \sigma_{ys})$$

名义应力  $S$  是不考虑缺口引入的应力集中,按净面积计算的。图 2.14 是带中心圆孔板的应力集中系数。弹性应力集中系数  $K_t$  可以由弹性理论分析、有限元计算或实验应力测量得到,也可查阅有关手册。

定义疲劳缺口系数  $K_f$  为

$$K_f = S_f/S_f \quad (2-16)$$

式中,  $S_f$  为光滑件疲劳极限;  $S_f$  为缺口件疲劳极限。缺口应力集中,将使得疲劳强度下降,故  $K_f$  是反映缺口影响的、大于 1 的系数。

显然,疲劳缺口系数  $K_f$  是与弹性应力集中系数  $K_t$  有关的。 $K_t$  越大,应力集

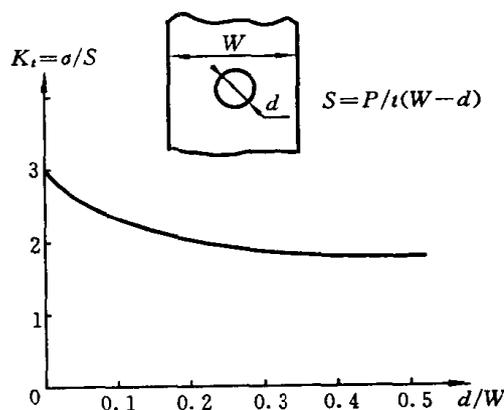


图 2.14 有限宽圆孔板的应力集中系数

中越严重,疲劳寿命越短, $K_f$ 也就越大。但实验研究的结果表明, $K_f$ 并不等于 $K_t$ 。因为弹性应力集中系数 $K_t$ 只依赖于构件的几何,疲劳缺口系数 $K_f$ 却与材料有关。

一般来说, $K_f$ 小于 $K_t$ 。二者之关系可写为

$$q = (K_f - 1)/(K_t - 1) \quad (2-17)$$

当 $q = 0$ 时, $K_f = 1$ , $S_f = S_f$ ,缺口对疲劳性能无影响;当 $q = 1$ 时, $K_f = K_t$ , $S_f = S_f/K_t$ ,缺口对疲劳性能影响严重;故 $q$ 称为缺口敏感系数,其取值范围为 $0 \leq q \leq 1$ 。

缺口敏感系数 $q$ 与缺口几何及材料有关,可以从有关设计手册中查得。此外,在缺口最大实际应力不超过屈服应力时,疲劳缺口敏感系数也可用下述经验公式估计:

$$\text{Peterson 公式: } q = \frac{1}{1 + p/r} \quad \text{或} \quad K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + p/r} \quad (2-18)$$

$$\text{Neuber 公式: } q = \frac{1}{1 + \sqrt{a/r}} \quad \text{或} \quad K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \sqrt{a/r}} \quad (2-19)$$

式中, $r$ 为缺口根部半径, $p$ 、 $a$ 是与材料有关的特征长度。表2-1中列出了若干材料的特征长度值。由表中 $p$ 、 $a$ 值可见,材料强度越高, $p$ 、 $a$ 值越小,疲劳缺口敏感系数 $q$ 越大,缺口对疲劳性能影响越大。

表 2-1 估计疲劳缺口敏感系数用特征长度值

材 料	钢 材					铝 合 金		
$S_u/\text{MPa}$	345	500	1000	1725	2000	150	300	600
$a/\text{mm}$		0.25	0.08		0.002	2	0.6	0.4
$p/\text{mm}$	10			0.03				

### 2.4.2 缺口 $S-N$ 曲线的近似估计

对于两个材料相同( $p$ 或 $a$ 值相同)、几何相似( $K_t$ 相同)的缺口,缺口根部半径 $r$ 越大,疲劳强度下降越大。图2.15用高应力区材料体积效应解释了缺口根部半径 $r$ 的影响。 $K_t$ 相等时,用缺口半径名义化后的应力分布的梯度是相同的。所以,缺口半径大,高应力区域(如 $0.9-1\sigma_{\max}$ )体积大,疲劳破坏的可能性也就愈大。

由疲劳缺口系数 $K_f$ (或疲劳缺口敏感系数 $q$ )可以估计缺口件疲劳极限 $S'_f$ 。但若用 $K_f$ 对整条 $S-N$ 曲线进行修正,则将过于保守。例如,当寿命 $N = 10^3$ 时,

定义系数  $K'_f$  为

$$K'_f = S_{10^3} / S'_{10^3} \quad (2-20)$$

式中,  $K'_f$  为  $N = 10^3$  时, 光滑件疲劳强度与缺口件疲劳强度之比。图 2.16 所示, 为不同材料的缺口疲劳实验结果。由图可见在寿命短 ( $N = 10^3$ ) 时, 对于高强度、硬材料,  $(K'_f - 1)/(K_f - 1)$  约为 0.7 左右,  $K'_f$  比  $K_f$  略小; 对于低强度、软材料,  $(K'_f - 1)/(K_f - 1)$  仅为 0.2 左右, 表示缺口影响的系数  $K'_f$  比疲劳极限对应的疲劳缺口系数  $K_f$  小得多。可见, 不宜用  $K_f$  对整条  $S-N$  曲线进行修正。

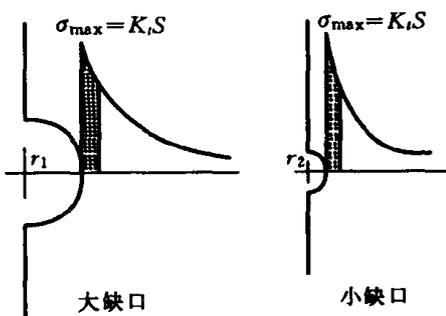


图 2.15 几何相似缺口高应力区体积

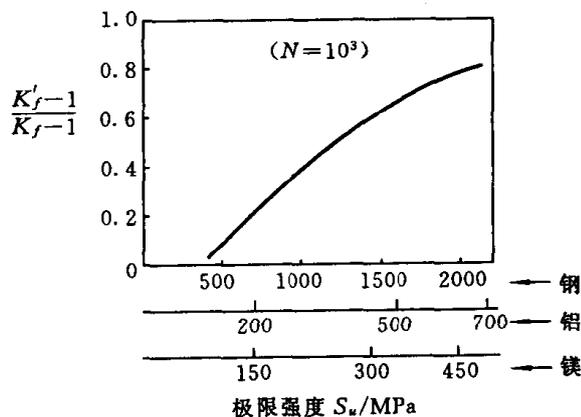


图 2.16 不同材料下的  $K'_f-K_f$  关系

需要估计缺口件  $S-N$  曲线时, 可采用类似于 2.1.3 节的方法, 即假定寿命  $N = 10^3$  时, 有

$$S'_{10^3} = S_{10^3} / K'_f \quad (2-21)$$

假定寿命  $N = 10^6$  时, 有

$$S'_f = S_f / K_f \quad (2-22)$$

由此二点在双对数坐标上确定的直线, 即缺口  $S-N$  曲线, 如图 2.17 所示。

若缺乏对于  $K'_f$  的估计, 将 (2-21) 式的假定换为  $N = 1$  时, 有

$$S'_1 = S_u \quad (2-23)$$

由此得到的缺口  $S-N$  曲线, 如图 2.18 所示。  $S_u$  是材料的极限拉伸强度。需要注意的是, 缺口件与光滑件的强度并不相同, 且  $S-N$  曲线反映的是低应力、长寿命疲劳性能。因此, 所估计的  $S-N$  曲线 (无论光滑或缺口件), 只能用于估计长寿命疲劳性能 ( $N > 10^3$ )。

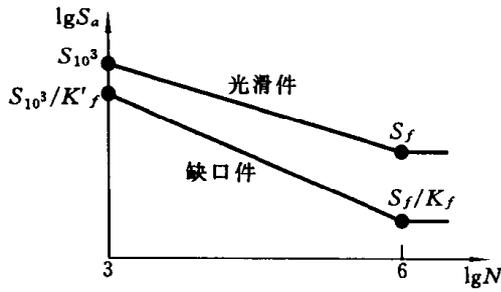


图 2.17 缺口  $S-N$  曲线的近似估计

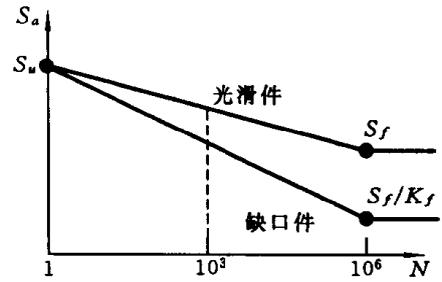


图 2.18 利用  $S_a$  估计缺口  $S-N$  曲线

## 2.5 变幅载荷谱下的疲劳寿命

前面已经讨论了恒幅载荷下疲劳裂纹萌生的情况。利用  $S-N$  曲线,在已知应力水平(如工作应力幅  $S_a$  和应力比  $R$ ) 时,可以估计寿命;若给定了设计寿命,则可估计可以使用的应力水平。

然而,大部分构件的实际工作载荷是变幅载荷。本节研究变幅循环载荷作用下的疲劳裂纹萌生寿命估计。

### 2.5.1 变幅载荷谱

进行疲劳分析时,首先必须确定零构件或结构工作状态下所承受的扰动载荷谱。载荷谱的确定,通常有两种方法。其一是,借助于已有的类似构件、结构或其模型,在使用或模拟使用条件下进行应变测量,得到各典型工况下的载荷谱,再将各工况组合起来得到的载荷谱,称为实测载荷谱;其二是,在没有适当的类似结构或模型可用时,依据设计目标分析工作状态,结合经验估计载荷谱,这样给出的是设计载荷谱。

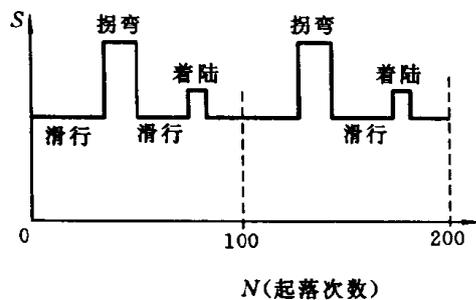


图 2.19 变幅载荷块谱

图 2.19 所示为某飞机主轮毂的载荷谱示意图。此构件的工况分为滑行、拐弯、着陆等,分别对应不同的载荷水平。载荷循环次数可以按起落数计算,一个起落包含各种工况下的许多变幅载荷循环。起落数与载荷循环数间可以换算,如由滑行距离和机轮直径,即可计算一段滑行所对应的循环数。图中将 100 个起落合并作为一个典型载荷循环块,整个

变幅载荷谱便是该载荷块谱的重复作用。

类似地,汽车在不同的路面上行驶,可以由“万公里”形成一个典型载荷循环块;飞机在起降、巡航、格斗等不同状态下飞行,可以由“百飞行小时”形成一个典型载荷循环块;海洋结构、水坝等受水位变化、潮汐作用,可以由“年”形成一个典型载荷循环块;等等。

## 2.5.2 Miner 线性累积损伤理论

由载荷谱,可以通过计数得到如图 2.20 所示的载荷( $S$ )-循环次数( $n$ )图。

若构件在某恒幅应力水平  $S$  作用下,循环至破坏的寿命为  $N$ ,则可定义其在经受  $n$  次循环时的损伤为

$$D = n/N \quad (2-24)$$

显然,在恒幅应力水平  $S$  作用下,若  $n = 0$ ,则  $D = 0$ ,构件未受疲劳损伤;若  $n = N$ ,则  $D = 1$ ,构件发生疲劳破坏。

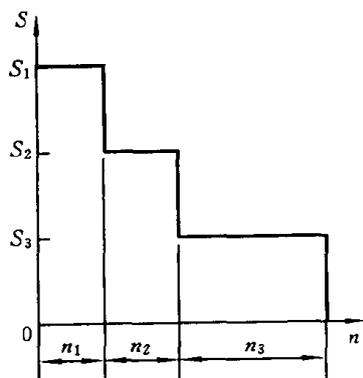


图 2.20 变幅载荷谱

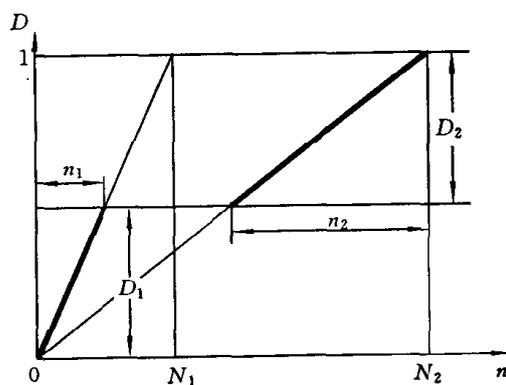


图 2.21 线性累积损伤

构件在应力水平  $S_i$  作用下,经受  $n_i$  次循环的损伤为  $D_i = n_i/N_i$ 。若在  $k$  个应力水平  $S_i$  作用下,各经受  $n_i$  次循环,则可定义其总损伤为

$$D = \sum_1^k D_i = \sum_1^k n_i/N_i \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (2-25)$$

破坏准则为

$$D = \sum_1^k n_i/N_i = 1 \quad (2-26)$$

这就是最简单、最著名、使用最广泛的 Miner 线性累积损伤理论。其中,  $n_i$  是在  $S_i$  作用下的循环次数,由载荷谱给出;  $N_i$  是在  $S_i$  作用下循环到破坏的寿命,由  $S-N$  曲线确定。

图 2.21 中示出了构件在最简单的变幅载荷(二水平载荷)下的累积损伤。从

图中坐标原点出发的射线,是给定应力水平  $S_i$  下的损伤线。注意到  $N_i$  是由  $S-N$  曲线确定的常数,则损伤  $D$  与载荷作用次数  $n$  的关系,由(2-24)式的线性关系来描述。因此,上述 Miner 累积损伤理论是线性理论。图中,构件在应力水平  $S_1$  下经受  $n_1$  次循环后的损伤为  $D_1$ ,再在应力水平  $S_2$  下经受  $n_2$  次循环,损伤为  $D_2$ ,若总损伤  $D = D_1 + D_2 = 1$ ,则构件发生疲劳破坏。

由(2-25)式还可看出,Miner 累积损伤,是与载荷  $S_i$  作用的先后次序无关的。

### 2.5.3 Miner 理论的应用

利用 Miner 理论进行疲劳分析的一般步骤为:

- 1) 确定构件在设计寿命期的载荷谱,选取拟用的设计载荷或应力水平。
- 2) 选用适合构件使用的  $S-N$  曲线(通常需要考虑构件的具体情况,对材料  $S-N$  曲线进行修正而获得)。
- 3) 再由  $S-N$  曲线计算其损伤,  $D_i = n_i/N_i$ ,按(2-25)式计算总损伤  $D$ 。
- 4) 判断是否满足疲劳设计要求。若在设计寿命内的总损伤  $D < 1$ ,构件是安全的;若  $D > 1$ ,则构件将发生疲劳破坏,应降低应力水平或缩短使用寿命。

**例 2.2** 已知构件可用的  $S-N$  曲线为  $S^2N = 2.5 \times 10^{10}$ ;设计寿命期间的载荷谱如表中前二栏所列。试估计其可承受的最大应力水平。

**解** 假定对应于 100% 载荷  $P$  时的应力  $S = 200\text{MPa}$ ,其余各级载荷对应的应力水平  $S_i$  列于表中第三栏。

构件设计载荷谱

设计载荷 $P_i$	循环数 $n_i/10^6$	$S_i/\text{MPa}$	$N_i/10^6$	$D_i = n_i/N_i$
$P$	0.05	200	0.625	0.080
$0.8P$	0.1	160	0.976	0.102
$0.6P$	0.5	120	1.736	0.288
$0.4P$	5.0	80	3.306	1.280

$$\text{总损伤} \quad D = \sum D_i = \sum n_i/N_i = 1.75$$

再由  $S-N$  曲线得到在各恒幅应力循环下的寿命  $N_i$ ,如表中第四栏所列。计算各级应力下的损伤,列于表中第五栏。求得的总损伤为  $\sum D_i = \sum n_i/N_i = 1.75$ 。

由上述计算结果可知,若选取应力  $S = 200\text{MPa}$ , 则在设计寿命内总损伤  $D = 1.75 > 1$ , 构件将发生疲劳破坏。因此,需要降低所选取的应力水平,重新计算。

再取应力  $S = 150\text{MPa}$ , 计算结果为:  $D = \sum D_i = \sum n_i/N_i = 0.985 < 1$ , 构件能够达到设计寿命。故  $S = 150\text{MPa}$ , 基本上是构件可承受的最大应力水平。

**例 2.3** 某构件的  $S-N$  曲线为  $S^2N = 2.5 \times 10^{10}$ ; 若其一年内所承受的典型应力谱如表中前二栏所列, 试估计其寿命。

典型块谱及其损伤计算

$S_i/\text{MPa}$	$n_i/10^6$	$N_i/10^6$	$n_i/N_i$
150	0.01	1.111	0.009
120	0.05	1.736	0.029
90	0.10	3.086	0.033
60	0.35	6.944	0.050

$$\sum n_i/N_i = 0.121$$

**解** 如前所述,如果构件的使用可以以年为周期,则可由此形成构件的典型应力谱,其后各年所承受的循环载荷,是该典型应力谱的重复。若将典型应力谱作为一个循环块,损伤为  $\sum n_i/N_i$ ; 整个寿命有  $\lambda$  个循环块,则总损伤应当为

$$D = \lambda \sum n_i/N_i$$

因此,按照 Miner 理论,疲劳破坏的判据应为

$$D = \lambda \sum n_i/N_i = 1 \quad (2-27)$$

此式与(2-26)式形式上相差一个  $\lambda$ 。注意到在此式中,  $n_i$  是一个循环块中应力水平  $S_i$  的作用次数,寿命期内共有  $\lambda$  个循环块;而(2-26)式中的  $n_i$  是整个寿命期内应力水平  $S_i$  的作用次数,则二者反映的都是寿命期间内的总损伤。

由表中计算结果可知,该构件一年内形成的损伤为  $\sum n_i/N_i = 0.121$ , 故由(2-27)式有

$$\lambda = 1 / \left( \sum n_i/N_i \right) = (1/0.121) \text{ 年} = 8.27 \text{ 年}$$

通过上述二例可见,对于承受变幅疲劳载荷的构件,应用 Miner 累积损伤

理论,可解决下述两类问题,即

1) 已知设计寿命期间的应力谱型,确定应力水平。

一般分析步骤为:

a) 选取一假定应力水平  $S$  (一般可由  $n_i$  最大一级载荷估计,使  $n_i/N_i = 0.8 \sim 0.9$ )。

b) 由  $S-N$  曲线查得或算出各  $S_i$  下的  $N_i$ 。

c) 计算各  $n_i/N_i$ , 求损伤和  $D = \sum n_i/N_i$ 。

d) 若  $D > 1$ , 选取较小的  $S$ , 重新按 a) 到 c) 的步骤计算;

$D < 1$ , 选取较大的  $S$ , 重新按 a) 到 c) 的步骤计算;  
直到  $D = 1$  为止, 求得所能允许的最大应力水平  $S$ 。

2) 已知一典型周期内的应力块谱,估算使用寿命。

一般分析步骤为:

a) 列表计算典型应力块(如一年)内的损伤和  $\sum n_i/N_i$ 。

b) 假定使用寿命为  $\lambda$  个典型周期(年,万公里,起落),由 Miner 理论有

$$D = \lambda \sum n_i/N_i = 1, \quad \lambda = 1/(\sum n_i/N_i)$$

应当指出,Miner 理论只是一种近似的、经验的累积损伤理论。如果将其写为

$$D = \sum n_i/N_i = Q$$

则  $Q$  之值可能大于 1,也可能小于 1,其分散性是很大的。大量试验研究的结果表明, $Q$  的取值范围为  $0.3 \sim 3.0$ 。这种分散性除受材料疲劳性能本身分散性的影响外,主要是来自载荷的次序效应。载荷谱中,高、低载荷的作用次序和排列形式,对疲劳寿命是有影响的。

因此,在实际应用时,必须考虑到足够的安全储备。设计时,视构件的重要程度及其疲劳分析的可靠性,一般取  $Q$  为  $0.1 \sim 0.5$ 。

#### 2.5.4 相对 Miner 理论

如前所述,总损伤  $D = 1$  是 Miner 线性累积损伤的经验破坏准则。考虑谱序影响,实际上应为

$$D = \sum n_i/N_i = Q \tag{2-28}$$

$Q$  与载荷谱型、作用次序及材料的分散性有关。

实际上,对某具体构件, $Q$  的取值可以借鉴过去的、类似构件的使用经验或试验数据而确定,这样估计的  $Q$  值,可以反映实际载荷次序等的影响。

若由过去的经验或试验,已知某构件在其使用载荷谱下的寿命;在要预测另一类似构件在相似谱作用下的疲劳寿命时,只须将 Miner 累积损伤式作为一种传递函数,而不必假定其损伤和为 1。这就是相对 Miner 理论,是 Walter Schutz 于 1972 年提出的。

相对 Miner 理论的实质是:取消损伤和  $D = 1$  的假定,由实验或过去的经验确定  $Q$ ,并由此估算寿命。其使用条件:一是构件相似,主要是疲劳破坏发生的高应力区几何相似;二是载荷谱相似,主要是载荷谱型(次序)相似,载荷大小可以不同。对于许多改进设计,借鉴过去的原型,这二点常常是可以满足的。

如由过去的经验或试验知,构件在  $B$  谱下的寿命为  $N_B$ , 则有

$$N_B \sum (n_i/N_i)_B = Q_B$$

求另一新的、相似构件在  $A$  谱下的寿命  $N_A$ , 同样有

$$N_A \sum (n_i/N_i)_A = Q_A$$

若  $A$  谱相似于  $B$  谱,则假定  $Q_A = Q_B$ , 可得

$$N_A = Q_A / \sum (n/N)_A = N_B \sum (n/N)_B / \sum (n/N)_A \quad (2-29)$$

式中,  $N_A$  是要预测的、构件在  $A$  谱下的寿命;  $\sum (n/N)_A$  和  $\sum (n/N)_B$  分别是新、老构件在  $A$ 、 $B$  典型载荷谱下的损伤和;  $N_B$  是类似构件在  $B$  谱下的寿命。正因为相对 Miner 理论利用了来源于实验的  $N_B$ , 取消了损伤和  $D = 1$  的人为假定,所以可以得到比 Miner 理论更好的预测寿命。

**例 2.4** 若已知某构件使用一年的损伤和为  $\sum (n/N)_B = 0.121$ , 实际使用寿命为 6 年, 现改型设计后构件材料不变, 载荷谱应力水平减轻后, 一年的损伤和为  $\sum (n/N)_A = 0.08$ , 试用 Miner 理论和相对 Miner 理论估计其寿命。

**解** 由 Miner 理论有

$$N_A \sum (n/N)_A = 1$$

得到  $N_A = (1/0.08) \text{ 年} = 12.5 \text{ 年}$

利用已知原构件的数据:  $N_B = 6 \text{ 年}$ ,  $\sum (n/N)_B = 0.121$

由相对 Miner 理论有

$$N_A = N_B \sum (n/N)_B / \sum (n/N)_A = (6 \times 0.121/0.08) \text{ 年} = 9.1 \text{ 年}$$

## 2.6 随机谱与循环计数法

恒幅载荷作用下的疲劳寿命估算,可直接利用  $S-N$  曲线。变幅载荷谱下的

寿命预测,如前所述,借助于 Miner 理论也可以解决。现在进一步研究随机载荷的处理。如果能够将随机载荷谱等效转换为变幅或恒幅载荷谱,则可利用以前的方法分析疲劳问题。

### 2.6.1 随机载荷谱及若干定义

随机载荷谱如图 2.22 所示。它给出了载荷随时间任意变化的情况,也称为“载荷-时间历程”。这种载荷谱,一般都是通过典型工况实测得到的。在讨论用计数法将随机谱转换为变幅载荷谱之前,先按照“疲劳分析循环计数标准方法”(ASTM E1049—85),介绍有关定义。

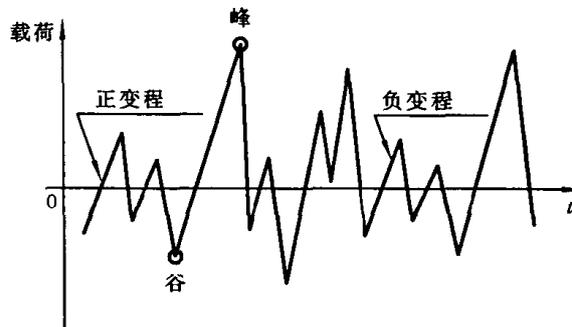


图 2.22 随机载荷谱若干定义

- 1) 载荷——表示力、应力、应变、位移、扭矩、加速度或其它有关的参数等。
- 2) 反向点——载荷-时间历程线斜率改变符号之处。斜率由正变负之点,称为“峰”;斜率由负变正之点称为“谷”;峰和谷点均为反向点。恒幅循环中,一个循环有 2 次反向。
- 3) 变程——相邻峰、谷点载荷值之差。从谷到后续峰值载荷间的变程,斜率为正,称为正变程;从峰到后续谷值载荷间的变程,斜率为负,称为负变程。

### 2.6.2 简化雨流计数法

将不规则的、随机的载荷-时间历程,转化成为一系列循环的方法,称为“循环计数法”(cycle counting method)。计数法有很多种,本节只讨论简单、适用且与变幅循环载荷下的应力-应变响应一致的简化雨流计数法(rain-flow counting)。

简化雨流计数法,适用于以典型载荷谱段为基础的重复历程。既然载荷是某典型段的重复,则取最大峰或谷处的起止段作为典型段,将不失其一般性,如图 2.23 所示。

简化雨流计数方法如下:

1) 由随机载荷谱中选取适合雨流计数的、最大峰或谷处起止的典型段, 作为计数典型段。如图 2.23 中之 1-1' (最大峰起止) 或 2-2' 段 (最大谷起止)。

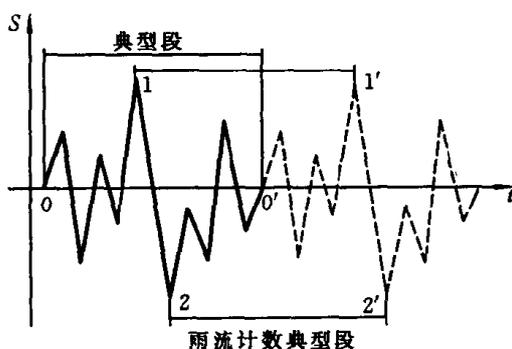


图 2.23 雨流计数典型段的选取

2) 将谱历程曲线旋转  $90^\circ$  放置, 如图 2.24 所示。将载荷历程看做多层屋顶, 假想有雨滴沿最大峰或谷处开始往下流。若无屋顶阻挡, 则雨滴反向, 继续流至端点。图中雨滴从 A 处开始, 沿 AB 流动, 至 B 点后落至 CD 屋面, 继续流至 D 处; 因再无屋顶阻挡, 雨滴反向沿 DE 流动至 E 处, 下落至屋面 JA', 至 A' 处流动结束。所示的雨流路径为 ABDEA'。

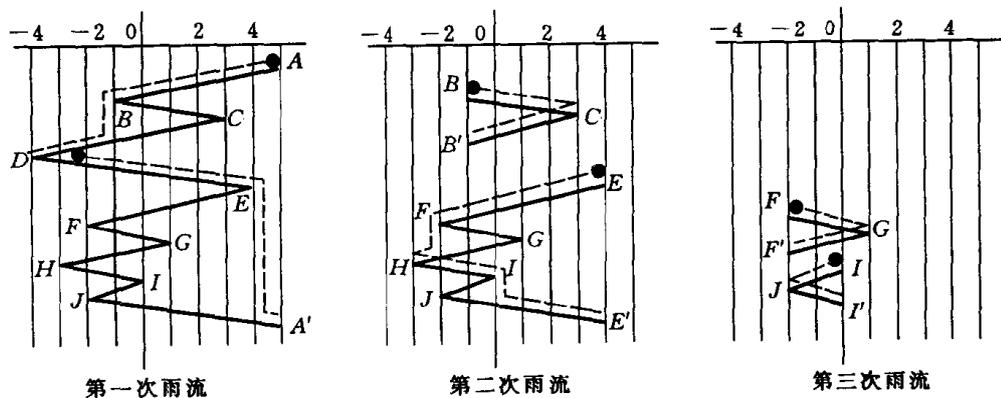


图 2.24 雨流计数过程

3) 记下雨滴流过的最大峰、谷值, 作为一个循环。图中第一次流经的路径, 给出的循环为 ADA'。循环的参量 (载荷变程和平均载荷), 可由图中读出, 如 ADA' 循环的载荷变程  $\Delta S = 5 - (-4) = 9$ 、平均载荷  $S_m = [5 + (-4)]/2 = 0.5$ 。

4) 从载荷历程中删除雨滴流过的部分, 对各剩余历程段, 重复上述雨流计数。直至再无剩余历程为止。如图所示, 第二次雨流得到 BCB' 和 EHE' 循环; 第三次雨流得到 FGF' 和 IJI' 循环; 计数完毕。

上述雨流计数的结果列入右表。表中给出了循环及循环参数。载荷如果是应力,则表中所给出的变程是  $\Delta S$ , 应力幅则为  $S_a = \Delta S/2$ , 平均应力  $S_m$  即表中的均值。所以,雨流计数是二参数计数。有了上述两个参数,循环就完全确定了。与其它计数法相比,简化雨流计数法的另一优点是,计数的结果均为全循环。

雨流法计数结果

循环	变程	均值
ADA'	9	0.5
BCB'	4	1
EHE'	7	0.5
FGF'	3	-0.5
IJI'	2	-1

典型段计数后,其后的重复,只需考虑重复次数即可。

### 2.6.3 简化雨流法计算规则

实际载荷谱,即使是其典型段,也常常包括大量的数据。因此,利用微机处理随机谱的计数,是需要的。

简化雨流计数法的计算规则如下,可供编制程序参考。

1) 选取由最大峰或谷处起止的典型段,按载荷谱顺序输入各峰、谷值,直至数据完毕。

2) 读入下一峰、谷值。若数据完毕,则停止。

3) 若数据点数少于3,则返回2);若数据点数大于等于3,则由最后读入的3个峰、谷值,计算变程  $X$  和  $Y$ 。这三点中,第一点与第二点之差的绝对值为  $Y$ ;第二点与第三点之差的绝对值为  $X$ 。

4) 比较  $X$  和  $Y$  的大小。若  $X < Y$ , 则返回2);若  $X \geq Y$ , 则进行5)。

5) 将变程  $Y$  记作一个循环,删除与  $Y$  相应的峰、谷值,返回3)。

如图 2.24 所示之谱段,峰、谷点与相应的峰、谷值列于下表:

峰谷点	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	A'
峰谷值	5	-1	3	-4	4	-2	1	-3	0	-2	5

对于表中之谱段,读入 A、B、C 三点后,有:  $Y = |A - B| = 6$ ;  $X = |B - C| = 4$ 。因为  $X < Y$ , 返回2),再读入数据 D。

由 B、C、D 三点,有:  $Y = |B - C| = 4$ ;  $X = |C - D| = 7$ 。因为  $X > Y$ , 将 BC 记为一循环,参数为  $\Delta S = 4$ ,  $S_m = 1$ 。删除 B、C 点,剩余数据为 A、D 二点,返回2),再读入数据 E。

由 A、D、E 三点,有  $Y = |A - D| = 9$ ;  $X = |D - E| = 8$ 。  $X < Y$ , 返回2),读入数据 F。

由  $D$ 、 $E$ 、 $F$  三点,有  $Y = |D - E| = 8$ ;  $X = |E - F| = 6$ 。 $X < Y$ , 返回 2), 读入数据  $G$ 。

由  $E$ 、 $F$ 、 $G$  三点,有  $Y = |E - F| = 6$ ;  $X = |F - G| = 3$ 。 $X < Y$ , 返回 2), 读入数据  $H$ 。

由  $F$ 、 $G$ 、 $H$  三点,有  $Y = |F - G| = 3$ ;  $X = |G - H| = 4$ 。因为  $X > Y$ , 将  $FG$  记为一循环,有:  $\Delta S = 3$ ,  $S_m = -0.5$ 。删除  $F$ 、 $G$  点,返回 3), 剩余数据为  $A$ 、 $D$ 、 $E$ 、 $H$  四点。

由  $D$ 、 $E$ 、 $H$  三点,有  $Y = |D - E| = 8$ ;  $X = |E - H| = 7$ 。 $X < Y$ , 返回 2), 再读数据  $I$ 。

由  $E$ 、 $H$ 、 $I$  三点,有  $Y = |E - H| = 7$ ;  $X = |H - I| = 3$ 。 $X < Y$ , 返回 2), 再读数据  $J$ 。

由  $H$ 、 $I$ 、 $J$  三点,有  $Y = |H - I| = 3$ ;  $X = |I - J| = 2$ 。 $X < Y$ , 返回 2), 再读数据  $A'$ 。

由  $I$ 、 $J$ 、 $A'$  三点,有  $Y = |I - J| = 2$ ;  $X = |J - A'| = 7$ 。有  $X > Y$ , 将  $IJ$  记为一循环,  $\Delta S = 2$ ,  $S_m = -1$ 。删除  $I$ 、 $J$  点,返回 3), 剩余数据为  $A$ 、 $D$ 、 $E$ 、 $H$ 、 $A'$  五点。

由  $E$ 、 $H$ 、 $A'$  三点,有  $Y = |E - H| = 7$ ;  $X = |H - A'| = 8$ 。有  $X > Y$ , 将  $EH$  记为一循环,  $\Delta S = 7$ ,  $S_m = 0.5$ 。删除  $E$ 、 $H$  点,返回 3), 剩余数据为  $A$ 、 $D$ 、 $A'$  三点。

由  $A$ 、 $D$ 、 $A'$  三点,有  $Y = |A - D| = 9$ ;  $X = |D - A'| = 9$ 。有  $X = Y$ , 将  $AD$  记为一循环,  $\Delta S = 9$ ,  $S_m = 0.5$ 。删除  $A$ 、 $D$  点,返回 3), 剩余数据为  $A'$  点。返回 2), 再无数据可读入, 计数结束。

可见, 所得的结果与前一一致。

简化雨流计数法程序框图如图 2.25 所示。

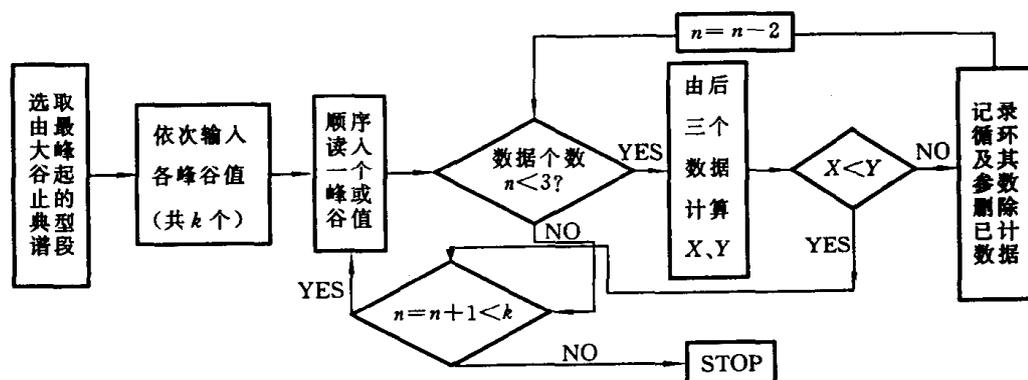


图 2.25 简化雨流计数法程序框图

随机载荷谱经过计数后,给出了若干不同的循环。将这些循环归并为若干载荷级后,即可编制相应的变幅载荷块谱,进行试验或寿命预测。

### 2.6.4 不同载荷间的转换

计数后的许多级载荷,如果需要进一步简化为有限的载荷级,则涉及到已知载荷如何转换、归并到选定的若干级载荷上的问题。

进行不同载荷间的转换,应遵守损伤等效的原则。

若需将在  $S_1$  下循环  $n_1$  次的载荷,转换成在  $S_2$  下循环  $n_2$  次的载荷,则需要使转换后的疲劳损伤  $n_2/N_2$  与原来在  $S_1$  下循环  $n_1$  次的损伤  $n_1/N_1$  相等,即

$$n_1/N_1 = n_2/N_2$$

$$\text{由此得} \quad n_2 = n_1(N_2/N_1) \quad (2-30)$$

式中,  $N_1$ 、 $N_2$  分别为在应力水平  $(S_1, R_1)$  和  $(S_2, R_2)$  下循环至破坏的寿命。

若转换时应力比  $R$  不变,则  $N_1$ 、 $N_2$  可由同一条  $S$ - $N$  曲线计算,当  $S$ - $N$  曲线可用  $S^m N = C$  表示时,由(2-30)式有

$$n_2 = n_1(N_2/N_1) = n_1(S_1/S_2)^m \quad (2-31)$$

**例 2.5** 某焊接结构钢  $R = -1$  时的基本  $S$ - $N$  曲线为  $S^2 N = 2.5 \times 10^{10}$ ,  $S_u = 300\text{MPa}$ 。结构承受  $R = -1$ ,  $S_{a1} = 90\text{MPa}$  的载荷  $n_1 = 10^6$  次,试估计转换成  $R = 0$ ,  $S_{a2} = 100\text{MPa}$  的载荷时的循环数  $n_2$ 。

**解** 已知结构的工作载荷为

$$S_{a1} = 90\text{MPa}, \quad R = -1, \quad S_{m1} = 0, \quad n_1 = 10^6$$

转换后的载荷为

$$S_{a2} = 100\text{MPa}, \quad R = 0, \quad S_{m2} = 100\text{MPa}, \quad n_2 \text{ 待定。}$$

载荷间的等损伤转换,需要用到  $S$ - $N$  曲线。本问题中,  $R = 0$  的  $S$ - $N$  曲线未知。

因此,需要先将疲劳载荷循环  $S_{a2} = 100$ ,  $S_{m2} = 100$ ,  $n_2$  待定,等寿命地转换为  $R = -1$  时的载荷循环  $S_m = 0$ ,  $S_a$ (待求),  $n_2$ 。

由(2-14)式的 Goodman 方程有

$$(S_{a2}/S_a) + (S_{m2}/S_u) = 1$$

求得

$$S_a = 150\text{MPa}$$

因为上述转换是等寿命的,故若二者作用次数同为  $n_2$ ,则也是等损伤的。

所以,工作载荷条件  $S_{a1} = 90$ ,  $S_{m1} = 0$ ,  $n_1 = 10^6$  与希望转换后的载荷  $S_{a2} =$

100,  $S_{m2} = 100$ ,  $n_2$  间的等损伤转换, 可以转变为工作载荷条件  $S_{a1} = 90$ ,  $S_{m1} = 0$ ,  $n_1 = 10^6$  与  $S_a = 150$ ,  $S_m = 0$ ,  $n_2$  间的等损伤转换。后一转换是在相同的应力比  $R = -1$  下进行的。

由(2-31)式有

$$n_2 = n_1 (S_1/S_2)^m = 10^6 \times (90/150)^2 = 0.36 \times 10^6$$

故转换后的载荷条件为

$$S_{a2} = 100\text{MPa}, R = 0, S_{m2} = 100\text{MPa}, n_2 = 0.36 \times 10^6。$$

应当指出的是, 载荷间的转换, 总会造成与真实情况的差别, 故载荷转换应越少越好。

## 小 结

1. 应力疲劳是弹性应力控制下的长寿命疲劳过程 ( $S_{\max} < S_y$ ,  $N_f > 10^4$  次)。
2.  $S-N$  曲线是描述材料疲劳性能的, 基本  $S-N$  曲线是  $R = -1$  时的  $S-N$  曲线。
3. 疲劳极限是无限寿命设计的基础, 即  $S_a < S_f$  或  $S_{\max} < S_f$ 。
4. 拉伸平均应力是有害的, 用挤压, 喷丸等引入残余压应力可改善疲劳性能。
5. 缺口应力集中使疲劳强度降低, 构件寿命缩短。高强材料, 尖缺口, 影响更大。
6. Goodman 或 Gerber 方程在等寿命条件下反映平均应力的影响。
7. Miner 理论可用于变幅载荷下的寿命估算, 相对 Miner 理论估算精度更好。
8. 随机谱可通过计数法计数, 编排成变幅块谱。简化雨流计数法是一种好方法。

**重要公式:**

$S-N$  曲线  $S^m N = C$

Goodman 直线  $(S_a/S_{a(R=-1)}) + (S_m/S_u) = 1$

Miner 理论  $D = \sum D_i = \sum (n_i/N_i) = 1$

相对 Miner 理论  $N_A = N_B \sum (n/N)_B / \sum (n/N)_A$

## 思考题与习题

2-1 若疲劳试验频率选取为  $f = 20\text{Hz}$ , 试估算施加  $10^6$  循环需要多少小时。

2-2 7075-T6 铝合金等寿命图如本章图 2.9 所示, 若

$$\text{a) } R = 0.2, N = 10^6; \quad \text{b) } R = -0.4, N = 10^5$$

试估计各相应的应力水平 ( $S_{max}$ ,  $S_{min}$ ,  $S_a$ ,  $S_m$ )。

- 2-3 依据等寿命疲劳图,试作 7075—T6 铝合金在  $R = -1$  和  $R = 0$  时的  $S_a$ - $N$  曲线。
- 2-4 表中列出了三种材料的旋转弯曲疲劳试验结果,试将数据绘于双对数坐标纸上,并与由  $S_{10^3} = 0.9S_u$ ,  $S_{10^6} = 0.5S_u$  估计的  $S$ - $N$  曲线相比较。

A $S_u = 430\text{MPa}$		B $S_u = 715\text{MPa}$		C $S_u = 1260\text{MPa}$	
$S_a/\text{MPa}$	$N_f/10^5$	$S_a/\text{MPa}$	$N_f/10^5$	$S_a/\text{MPa}$	$N_f/10^5$
225	0.45	570	0.44	770	0.24
212	2.40	523	0.85	735	0.31
195	8.00	501	1.40	700	0.45
181	15.00	453	6.30	686	0.87
178	27.00	435	19.00	665	1.50
171	78.00	417	29.00	644	1000.00 *
168	260.00	412	74.00		

注: \* 未破坏

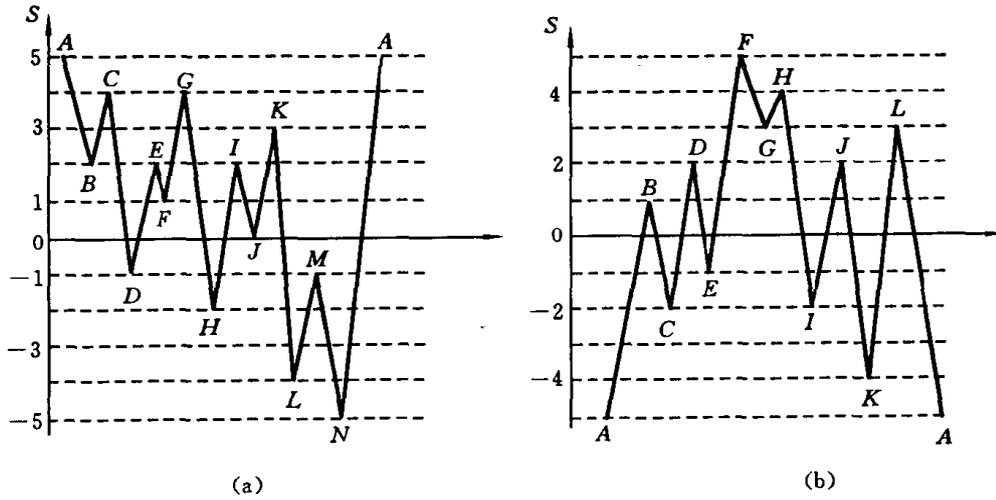
- 2-5 某极限强度  $S_u = 860\text{MPa}$  之镍钢,在寿命  $N_f = 10^7$  时的试验应力值如下表,试作其 Goodman 图,并将数据点与 Goodman 直线相比较。

$S_{max}/\text{MPa}$	420	476	482	581	672	700	707
$S_{min}/\text{MPa}$	-420	-378	-308	-231	0	203	357

- 2-6 什么是 Miner 理论?什么是相对 Miner 理论?试说明其应用。
- 2-7 试述简化雨流计数法及其合理性。
- 2-8 某构件承受循环应力  $S_{max} = 525\text{MPa}$ ,  $S_{min} = -35\text{MPa}$  作用,材料极限强度  $S_u = 700\text{MPa}$ ,假定在对称循环条件下有  $S_{10^3} = 0.9S_u$ ,  $S_{10^6} = 0.5S_u$ ,试估算构件的寿命。
- 2-9 某起重杆承受脉冲循环 ( $R = 0$ ) 载荷作用,每年作用载荷谱统计如下表所示, $S$ - $N$  曲线可用  $S_{max}^3 N = 2.9 \times 10^{13}$ ,
- a) 试估算拉杆的寿命为多少年?
- b) 若要求使用寿命为 5 年,试确定可允许的  $S_{max}$ 。

$S_{max}/\text{MPa}$	500	400	300	200
每年工作循环 $n_i/10^6$ 次	0.01	0.03	0.1	0.5

2-10 试用简化雨流计数法为下述载荷谱计数,并指出各循环的应力变程和均值。



题 2-10 图

## 第三章 疲劳应用统计学基础

在疲劳分析中,需要利用由各种试验获得的疲劳性能数据。由于疲劳试验数据常常有很大的分散性,因此,只有用统计分析的方法处理这些数据才能够对材料或构件的疲劳性能有比较清楚的了解。

### 3.1 疲劳数据的分散性

图 3.1 所示,为 7075—T6 铝合金光滑试件恒幅对称循环疲劳的试验研究结果,是 Sinclair 和 Dolan 于 1953 年得到的。在五种不同应力水平下,有效试件共有 174 件。其中,在应力水平 $\pm 207\text{MPa}$  下试验 57 件,寿命分布在 $2 \times 10^6 \sim 10^8$  次循环,如图 3.1 中曲线(5)或图 3.2(a)所示;在应力水平 $\pm 240\text{MPa}$  下试验 29 件,寿命分布在 $7 \times 10^5 \sim 4 \times 10^6$  次循环,如图 3.1 中曲线(4)所示;在应力水平 $\pm 275\text{MPa}$  下试验 34 件,寿命分布为 $1 \times 10^5 \sim 8 \times 10^5$  次,如图 3.1 中曲线(3)所示;在应力水平 $\pm 310\text{MPa}$  下试验 29 件,寿命分布为 $4 \times 10^4 \sim 1 \times 10^5$  次,如图 3.1 中曲线(2)所示;在应力水平 $\pm 430\text{MPa}$  下试验 25 件,寿命分布为 $1.5 \times 10^4 \sim 2 \times 10^8$  次,如图 3.1 中曲线(1)所示。

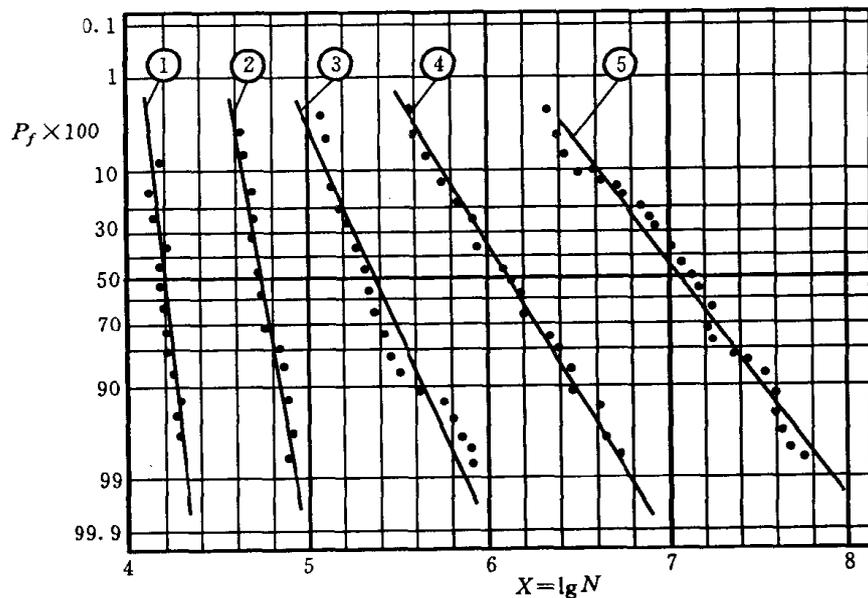


图 3.1 对数疲劳寿命分布

图 3.2(b) 示出了不同循环应力水平下疲劳寿命的分散性。由图可见, 应力水平越低, 寿命越长, 分散性就越大。在同样的应力水平下, 疲劳寿命可以相差几倍, 甚至几十倍。因此, 必须进行统计分析。

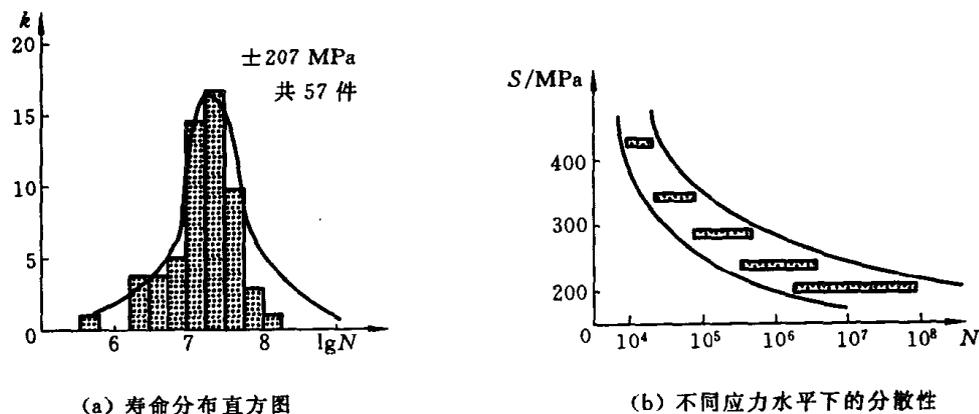


图 3.2 某铝合金试验疲劳寿命的分散性

对于给定了循环应力水平的一组试件, 可以得到一组分散的疲劳寿命。以对数寿命  $\lg N$  为横坐标, 以在给定寿命区间内破坏的试件数  $k$  为纵坐标, 绘出如图 3.2(a) 所示之寿命分布直方图。如图所示, 可以用正态分布描述对数寿命  $\lg N$  的分布, 或者说, 可以用对数正态分布来描述寿命  $N$  的分布。

大量疲劳试验的结果还表明, 缺口件的寿命分散比光滑件小, 裂纹扩展寿命的分散则更小一些。

疲劳寿命数据分散的原因很多。材质本身的不均匀性, 试件加工质量及尺寸的差异, 试验载荷误差, 试验环境(温度、湿度等)及其它因素的变化等, 都会引起寿命的分散。裂纹件或缺口件的疲劳破坏局限在裂纹或缺口高应力局部, 材质本身的不均匀性及试件加工质量等因素对其寿命的影响相应地比较小一些。所以, 寿命分散性比光滑件小。

### 3.2 正态分布

正态分布也称高斯(Gaussian)分布。如上所述, 对数疲劳寿命  $\lg N$  常常是服从正态分布的。令  $X = \lg N$ , 即可利用正态分布理论进行对数疲劳寿命  $X$  的统计分析。

## 一、正态分布的密度函数和分布函数

若随机变量  $X$  服从正态分析, 则密度函数(或称频率函数)为

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (-\infty < x < \infty) \quad (3-1)$$

式中,  $\mu$  为母体均值;  $\sigma$  为母体标准差, 是非负的。

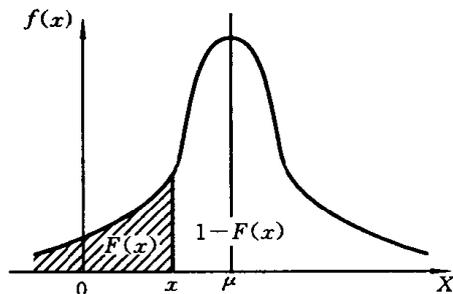


图 3.3 正态概率密度曲线

如图 3.3 所示, 正态概率密度函数曲线是关于  $x = \mu$  对称的, 二端伸向无穷。 $f(x)$  在  $x = \mu$  处取最大值, 且  $f(\mu) = 1/\sigma \sqrt{2\pi}$ 。可见,  $\sigma$  越小, 在  $x = \mu$  附近取值的可能越大; 密度函数曲线越“瘦”, 随机变量  $X$  的分散性越小, 故标准差  $\sigma$  反映了  $X$  的分散性。

一般来说, 无论分布形式如何, 概率密度函数均具有以下性质:

1)  $f(x) \geq 0$ 。

$f(x)$  表示随机变量  $X$  取值为  $x$  的频繁程度, 故对于所有的可能取值,  $f(x)$  显然是非负的。

2)  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ , 即曲线  $f(x)$  下方的总面积为 1。

正态概率分布函数为

$$F(x) = Pr(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx \quad (3-2)$$

分布函数  $F(x)$  给出了随机变量  $X$  取值小于等于  $x$  的概率。如图 3.3 所示, 是图形在  $X = x$  以左的面积。显然可见, 随机变量  $X$  取值大于  $x$  的概率则为  $1 - F(x)$ 。

## 二、标准正态分布

令  $u = (x - \mu)/\sigma$ , 即有

$$x = \mu + u\sigma \quad (3-3)$$

注意到  $dx = \sigma du$ , 由密度函数变换公式可得到  $u$  的密度函数为

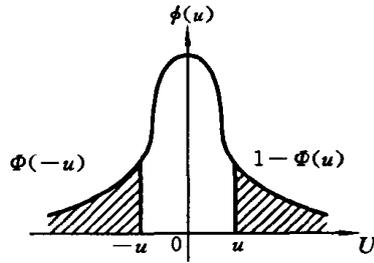
$$\phi(u) = f(x) \frac{dx}{du} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) \quad (-\infty < u < \infty) \quad (3-4)$$

可见,  $u$  服从均值  $\mu = 0$ 、标准差  $\sigma = 1$  的正态分布, 它是关于纵轴对称的。 $\phi(u)$

称为标准正态分布密度函数,如图 3.4 所示。

标准正态分布函数则为

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du \\ &= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned} \quad (3-5)$$



由图 3.4,并注意其对称性,有

$$\Phi(0) = 0.5; \quad \Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$$

$$Pr(a < u < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

图 3.4 标准正态分布密度函数

注意到(3-3)式的变换是一一对应的,随机变量  $X \leq x$  的概率等于随机变量  $U \leq u$  的概率,故有

$$F(x) = Pr(X \leq x) = Pr(U \leq u) = \Phi(u) \quad (3-6)$$

可见,欲求正态分布函数  $F(x)$ , 只需求得标准正态分布函数  $\Phi(u)$  即可。标准正态分布函数  $\Phi(u)$  之值,可由正态分布函数表查得。表 3-1 列出了其若干常用值。

表 3-1 若干常用正态分布函数值

$u$	$\Phi(u) \times 100$	$u$	$\Phi(u) \times 100$	$u$	$\Phi(u) \times 100$	$u$	$\Phi(u) \times 100$
-3.719	0.01	-1.282	10.00	0.253	60.00	2.000	97.72
-3.090	0.10	-1.000	15.87	0.524	70.00	2.326	99.00
-3.000	0.13	-0.842	20.00	0.842	80.00	3.000	99.87
-2.326	1.00	-0.524	30.00	1.000	84.13	3.090	99.90
-2.000	2.28	-0.253	40.00	1.282	90.00	3.719	99.99
-1.645	5.00	0	50.00	1.645	95.00		

$u \sim \Phi(u)$  间的关系,还可以用一些数值拟合的近似表达式表达,如:

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= 1 - \exp\left[-(0.86534 - 0.41263u)^{2.534}\right] \quad u \geq 0 \\ u &= \{\ln[1 - \Phi(u)]\}^{0.394633} - 0.86534 / 0.41263 \quad \Phi(u) \geq 0.5 \end{aligned} \quad (3-7)$$

若  $u < 0$  或  $\Phi(u) < 0.5$ ,可利用  $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$  的关系求解。

### 三、给定疲劳寿命下的破坏概率估计

疲劳统计分析的任务是要回答:在给定的应力水平下,寿命为  $N$  时的破坏

(或存活)概率是多少?或者说在给定的破坏(或存活)概率下的寿命是多少?

现在,在对数疲劳寿命服从正态分布的假设下,来讨论如何回答上述问题。

首先,应确定分布参数,即均值  $\mu$  和标准差  $\sigma$ 。 $\mu$ 、 $\sigma$  是母体分布参数,其真值常常是得不到的。一般只能由取自该母体的若干试件组成的“子样”(或称样本)试验数据来估计。

子样均值  $\bar{x}$  为

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3-8)$$

式中,  $x_i$  为第  $i$  个观测数据,对于疲劳分析,则是第  $i$  个试件的对数寿命,即  $x_i = \lg N_i$ ;  $n$  为子样中  $x_i$  的个数,称为样本大小(或样本容量)。

子样方差  $s^2$  为

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \left( \sum x_i^2 - n\bar{x}^2 \right) \quad (3-9)$$

方差  $s^2$  的平方根  $s$ , 即子样标准差,是偏差  $(x_i - \bar{x})$  的度量,反映了分散性的大小。注意到(3-8)式,所有  $n$  个偏差的总和为零,故只有  $(n-1)$  个偏差是独立的。

子样大小  $n$  越大,子样均值  $\bar{x}$  和标准差  $s$  就越接近于母体均值  $\mu$  和标准差  $\sigma$ 。

因此,假定对数疲劳寿命  $X = \lg N$  是服从正态分布的,则只要由一组子样观测数据计算出子样均值  $\bar{x}$  和标准差  $s$ ,并将它们分别作为母体均值  $\mu$  和标准差  $\sigma$  的估计量,即可得到具有某给定破坏(或存活)概率下的寿命或某给定寿命所对应的破坏(或存活)概率。

由(3-3)式可知,破坏概率为  $p$  的对数疲劳寿命  $x_p$  为

$$x_p = \mu + u_p \sigma \Rightarrow x_p = \bar{x} + u_p s \quad (3-10)$$

式中,  $\mu + u_p \sigma$  为  $x_p$  的真值,  $\bar{x} + u_p s$  为其估计量;  $u_p$  为与破坏概率  $p$  对应的标准正态偏量; 又由(3-6)式知,破坏概率  $p = Pr(X \leq x) = \Phi(u_p)$ , 则  $u_p$  可由  $p$  确定。存活概率则为  $p_s = 1 - p$ 。

**例 3.1** 在某一给定应力水平下,测得一组(10件)试件的疲劳寿命  $N_i$  分别为:124, 134, 135, 138, 140, 147, 154, 160, 166, 181 千周,试确定存活率为 99.9% 的安全寿命  $N$ 。

**解** 将试验所得寿命数据  $N_i$  从小到大排列于表中,计算  $x_i$  及  $x_i^2$ , 并求和。

序号 $i$	$N_i/10^3$	$x_i = \lg N_i$	$x_i^2$	$\frac{i}{n+1}$
1	124	2.0934	4.3823	0.0909
2	134	2.1271	4.5246	0.1818
3	135	2.1303	4.5382	0.2727
4	138	2.1399	4.5792	0.3636
5	140	2.1461	4.6057	0.4545
6	147	2.1673	4.6972	0.5455
7	154	2.1875	4.7852	0.6364
8	160	2.2041	4.8581	0.7273
9	166	2.2201	4.9288	0.8182
10	181	2.2577	5.0972	0.9091
$\Sigma$		21.6735	46.9965	

1) 计算子样均值  $\bar{x}$  和标准差  $s$ , ( $n = 10$ )。

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 2.1674$$

$$s = \left[ \frac{(\sum x_i^2 - n\bar{x}^2)}{n-1} \right]^{1/2} = 0.05$$

2) 确定标准正态偏量  $u_p$ 。

破坏概率  $p = 1 - R = 0.001 = 0.1\%$

由表 3-1 查得:  $u_p = -3.09$ 。

3) 估计在给定应力水平下,破坏率为 0.1%(或存活率为 99.9%) 的寿命:

由(3-10) 式有

$$x_p = \bar{x} + u_p s = 2.1674 - 3.09 \times 0.05 = 2.013$$

所以,破坏率为 0.1%,或存活率为 99.9% 的安全寿命为

$$N_p = \lg^{-1} x_p = 103(\text{千周})$$

#### 四、置信水平

以上讨论的估计给定破坏(或存活) 概率下的寿命,或某给定寿命所对应的

破坏(或存活)概率的方法,是建立在可以由子样参数( $\bar{x}, s$ )估计母体参数( $\mu, \sigma$ )的基础上的。

事实上,这样估计的对数寿命  $N_p = \bar{x} + u_p s$ , 可能比母体对数寿命的真值  $\mu + u_p \sigma$  小,也可能比母体真值大。显然,若估计量  $\bar{x} + u_p s$  大于真值,则意味着对寿命作出了偏于危险的估计。因此,需要研究估计量是否小于真值?或估计量小于真值的概率有多大?

如果由  $\bar{x} + u_p s$  估计的破坏概率为  $p$  的对数寿命小于真值的概率为  $\gamma$ , 则称  $\gamma$  为这一估计的置信度。置信度  $\gamma$  通常取为 90% 或 95%。将破坏概率为  $p$ , 置信度为  $\gamma$  的对数寿命写为

$$x_{p(\gamma)} = \bar{x} + ks \quad (3-11)$$

式中,  $k$  称为单侧容限系数。

若取  $\gamma = 95\%$ , 则意味着在由 100 次抽样而获得的 100 个样本中,所估计的 100 个  $\bar{x} + u_p s$ , 有 95 个小于  $\bar{x} + ks$ 。因此,有 95% 的把握认为,估计量  $\bar{x} + ks$  小于母体对数寿命真值  $\mu + u_p \sigma$ 。可见,安全寿命的破坏概率  $p$  是对一个子样中的个体而言,置信度  $\gamma$  却是对于子样本本身来说的。

单侧容限系数  $k$  为

$$k = \frac{u_p - u_\gamma \left\{ \frac{1}{n} \left[ 1 - \frac{u_\gamma^2}{2(n-1)} \right] + \frac{u_p^2}{2(n-1)} \right\}}{1 - \frac{u_\gamma^2}{2(n-1)}} \quad (3-12)$$

式中,  $u_p$  为与破坏概率  $p$  相关的标准正态偏量,  $u_\gamma$  为与置信度  $\gamma$  相关的标准正态偏量,可分别由正态分布函数表查得;  $n$  是样本大小,通常为已知。为使用方便,表 3-2 给出了若干常用单侧容限系数  $k$  值。

由(3-12)式可见,若  $u_\gamma = 0$ , 对应的置信度  $\gamma = 50\%$ , 则有  $k = u_p$ 。这说明按(3-10)式估计的安全寿命  $x_p = \bar{x} + u_p s$ , 其置信度只有 50%。或者说,在例 3.1 中作出存活率为 99.9% 的安全寿命  $N_p = 103$  千周的估计,只有 50% 的把握。若要估计置信度  $\gamma = 95\%$ , 存活率  $R = 99.9\%$  的安全寿命,可先由  $n = 10$ ,  $p = 1 - R = 0.001$ ,  $\gamma = 95\%$ , 查表 3-2 得到  $k = -5.156$ ,再由(3-11)式求得

$$x_p(\gamma) = 2.1674 - 5.156 \times 0.05 = 1.9096$$

$$N_p(\gamma) = \lg^{-1} 1.9096 = 81.2 \text{ 千周}$$

据此,才可以有 95% 的把握说,在该应力水平下,至少有 99.9% 的疲劳寿命大于 81.2 千周。

表 3-2 若干常用单侧容限系数  $k$  值

子样大小 $n$	破坏率 $p$ (或存活率 $p_s = 1 - p$ )					
	$p = 0.1$		$p = 0.01$		$p = 0.001$	
	置信度 $\gamma$		置信度 $\gamma$		置信度 $\gamma$	
	90%	95%	90%	95%	90%	95%
5	- 2.585	- 3.382	- 4.400	- 5.750	- 5.763	- 7.532
6	- 2.379	- 2.964	- 4.048	- 5.025	- 5.301	- 6.579
7	- 2.244	- 2.712	- 3.822	- 4.595	- 5.005	- 6.012
8	- 2.145	- 2.542	- 3.658	- 4.307	- 4.793	- 5.635
9	- 2.071	- 2.417	- 3.537	- 4.098	- 4.635	- 5.363
10	- 2.012	- 2.322	- 3.422	- 3.940	- 4.511	- 5.156
12	- 1.925	- 2.183	- 3.301	- 3.712	- 4.330	- 4.859
14	- 1.862	- 2.086	- 3.201	- 3.554	- 4.200	- 4.655
16	- 1.814	- 2.013	- 3.124	- 3.437	- 4.102	- 4.504
18	- 1.776	- 1.957	- 3.064	- 3.347	- 4.025	- 4.387
20	- 1.754	- 1.911	- 3.035	- 3.274	- 3.990	- 4.293

### 五、正态概率纸

上述分析结果,只有在随机变量(如此处讨论的对数疲劳寿命  $\lg N$ ) 服从正态分布时,才是正确的。那么,如何检验随机变量是否服从正态分布呢?正态概率坐标纸可以帮助我们作出判断。

正态概率纸是这样一种坐标纸:若随机变量  $X$  服从正态分布,则其分布函数  $F(x)$  与  $x$  之间的关系在正态概率纸上呈线性。

由(3-2)式显然可见,  $x-F(x)$  关系是非线性的,要使二者在概率坐标纸上呈线性关系,必须调整坐标标度。首先,取二坐标轴为  $x$  和  $u$ ,如图 3.5 所示,由(3-3)式可知,二者有线性关系。又因为  $F(x) = \Phi(u)$ ,  $F(x)$  或  $\Phi(u)$  与  $u$  有一一对应关系,故若按  $u-\Phi(u)$  关系依据  $u$  标定  $F(x)$ ,则在  $x-u$  坐标系中的线性关系将不会发生变化。所以,如果某随机变量  $X$  服从正态分布,则  $x-F(x)$  关系在这样的坐标纸上必然是线性的。

利用正态概率纸检验随机变量是否服从正态分布,需要依据  $x_i-F(x_i)$  数据在概率纸上描点,以作出其间是否有线性关系的判断。由疲劳试验样本数据  $N_i$ ,

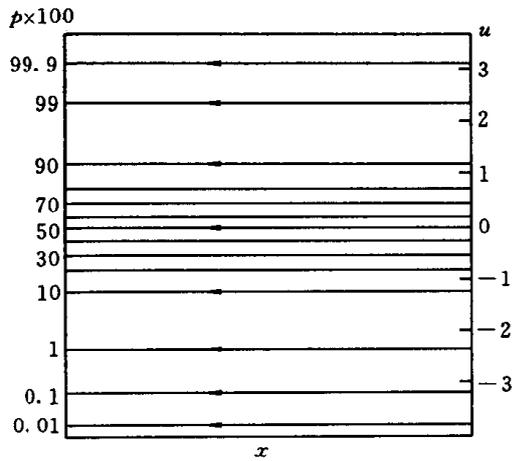


图 3.5 正态概率纸的制作

可知  $x_i = \lg N_i$ , 无论随机变量  $X$  服从何种分布, 与  $x_i$  对应的破坏率均可由下式估计:

$$p = i / (n + 1) \quad (3-13)$$

式中,  $n$  为样本数据的个数,  $i$  为样本数据  $x_i$  从小到大排列的序号。由此估计的破坏率  $p$ , 称为母体破坏率的均秩估计量。

例 3.1 中疲劳数据所对应的破坏率的均秩估计量, 列于例 3.1 表中最后一栏。由表中  $x_i \sim F(x_i)$  的数据, 在正态概率纸上描点的结果示于图 3.6

中。图中各数据点基本呈线性, 故可认为对数疲劳寿命  $X$  服从正态分布。

利用图 3.6, 也可以获得样本参数的估计值。均值  $\bar{x}$  可由图中 50% 破坏率所对应的值得到, 即有  $\bar{x} = 2.167$ 。由于  $x-u$  坐标通常并非等距离标定, 故往往不能直接由图中直线确定其斜率  $s$ 。但已知破坏率  $p = 15.87$  时,  $u_p = -1$ ; 又可由图查得对应的  $x_p = 2.114$ ; 利用(3-10)式, 即可得到子样标准差  $s$  为

$$s = (\bar{x} - x_p) / -u_p = \bar{x} - x_p = 2.167 - 2.114 = 0.053$$

此结果与该例中计算结果基本一致, 其精度取决于作图的精度。由图还可直接查得给定破坏(或存活) 概率下的寿命。

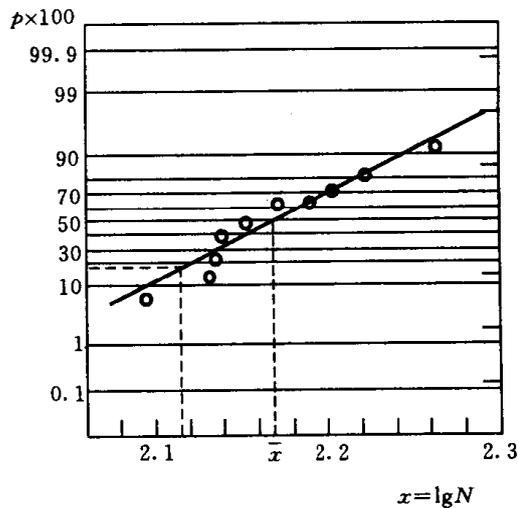


图 3.6 正态概率纸应用举例

最后,应当指出,用容量较小的样本疲劳数据结果外推低破坏概率下的疲劳寿命时,由于低应力水平下的寿命分散大,正态概率纸上的斜率小,可能会出现比高应力水平时更低的疲劳寿命,这显然是不合理的。因此,外推必须十分谨慎。

### 3.3 威布尔分布

正态分布有较完善的数学理论。但用于描述疲劳寿命的分布时,不能反映构件疲劳寿命有一个大于等于零的下限这一物理事实。威布尔分布是 Waloddi Weibull 于 1951 年在研究滚珠轴承的疲劳寿命分布时提出的,现已得到广泛的应用。

#### 一、密度函数和分布函数

威布尔分布的密度函数定义为

$$f(N) = \frac{b}{N_a - N_0} \left[ \frac{N - N_0}{N_a - N_0} \right]^{b-1} \exp \left\{ - \left( \frac{N - N_0}{N_a - N_0} \right)^b \right\} \quad (N \geq N_0) \quad (3-14)$$

式中,  $N_0$ 、 $N_a$  和  $b$  为描述威布尔分布的三个参数。 $N_0$  是下限,也称为最小寿命参数;  $N_a$  控制着横坐标的尺度大小,反映了数据  $N$  的分散性,称为尺度参数;  $b$  描述分布密度函数曲线的形状,如图 3.7 所示,称为形状参数。当  $b = 1$  时,(3-14) 式为指数分布;当  $b = 2$  时,即为 Reyleigh 分布;当  $b = 3.5 \sim 4$  时,则可以作为正态分布的很好的近似。

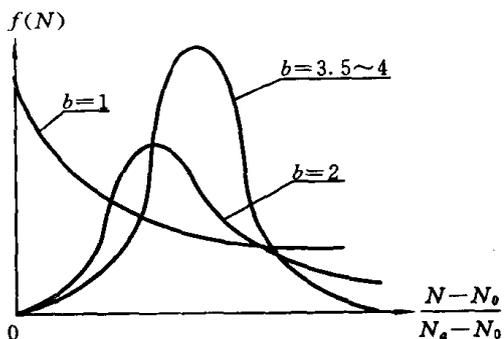


图 3.7 威布尔分布密度函数曲线

如同前面讨论正态分布一样,我们关心的是在疲劳寿命  $N$  之前破坏的概率,或寿命小于等于  $N$  的概率  $F(N)$ 。由定义有

$$F(N) = \int_{N_0}^N f(N) dN = \int_{N_0}^N \frac{b}{N_a - N_0} \left[ \frac{N - N_0}{N_a - N_0} \right]^{b-1} \exp \left[ - \left( \frac{N - N_0}{N_a - N_0} \right)^b \right] dN$$

令  $x = (N - N_0) / (N_a - N_0)$ , 则有  $dN = (N_a - N_0) dx$ , 由上式可得

$$F(x) = \int_0^x \frac{b}{N_a - N_0} x^{b-1} e^{-x^b} (N_a - N_0) dx = \int_0^x e^{-x^b} d(-x^b) = 1 - e^{-x^b}$$

注意到  $F(N) = F(x)$ , 即得三参数威布尔分布函数  $F(N)$  为

$$F(N) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{N - N_0}{N_a - N_0}\right)^b\right] \quad (3-15)$$

由上式显然可知, 当  $N = N_0$  时,  $F(N_0) = 0$ , 即疲劳寿命小于  $N_0$  的破坏概率为零, 故  $N_0$  是最小寿命参数; 当  $N = N_a$  时,  $F(N_a) = 1 - 1/e = 0.632$ , 即疲劳寿命小于  $N_a$  的破坏概率恒为 63.2% 而与其它参数无关, 所以  $N_a$  也称为特征寿命参数。

将(3-15)式改写为

$$\frac{1}{1 - F(N)} = e^{\left(\frac{N - N_0}{N_a - N_0}\right)^b}$$

取二次对数后得到

$$\lg \lg[1 - F(N)]^{-1} = b \lg(N - N_0) + \lg \lg e - b \lg(N_a - N_0) \quad (3-16)$$

上式表明, 变量  $\lg \lg[1 - F(N)]^{-1} \sim \lg(N - N_0)$  间有线性关系; 或者说, 在双对数图中,  $\lg[1 - F(N)]^{-1} \sim (N - N_0)$  间有线性关系。式中,  $b$  是直线的斜率, 故也称为斜率参数。

若令  $N_0 = 0$ , 则有

$$F(N) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{N}{N_a}\right)^b\right] \quad (3-17)$$

此即二参数威布尔分布函数。

## 二、分布参数的图解估计

这里, 将讨论两个问题: ① 如何判断随机变量(如疲劳寿命  $N$ ) 是否服从威布尔分布? ② 若服从威布尔分布, 如何确定其分布参数? 只有解决了这两个问题, 才能利用威布尔分布来进行疲劳寿命的统计估计。

前节已讨论了利用正态概率纸判断随机变量是否服从正态分布的做法。这里, 用类似的思路同样可以作出威布尔概率纸。

随机变量  $N$  与寿命小于  $N$  的概率  $F(N)$  的关系, 可由(3-15)式给出, 显然是非线性关系。但取二次对数后的(3-16)式, 却表明  $\lg \lg[1 - F(N)]^{-1}$  和  $\lg(N - N_0)$  之间有线性关系。

因此, 若  $N$  服从威布尔分布, 则在以  $\lg \lg[1 - F(N)]^{-1}$  和  $\lg(N - N_0)$  为纵、横坐标的图中, 应有线性关系存在, 如图 3.8 所示。图中横坐标为  $\lg(N - N_0)$ ,  $\lg \lg[1 - F(N)]^{-1}$  为右纵坐标。  $\lg \lg[1 - F(N)]^{-1}$  与  $F(N)$  是一一对应的, 按照表 3-3 给出的对应关系, 由  $\lg \lg[1 - F(N)]^{-1}$  坐标去标定左纵坐标

$F(N)$ , 即可得到表示  $N-F(N)$  关系的威布尔概率纸。在威布尔概率纸上, 若  $N$  服从威布尔分布, 则  $N-F(N)$  关系是线性的。

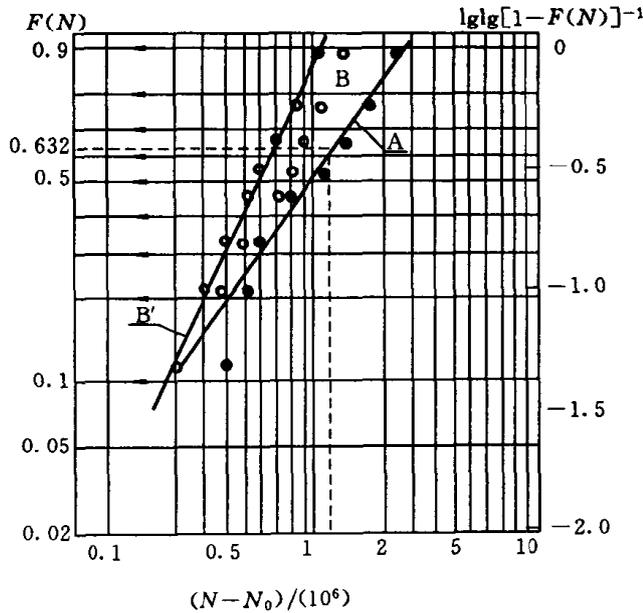


图 3.8 威布尔概率纸及其应用

• — 例 A; ○ — 例 B

表 3-3  $F(N)-\lg \lg [1-F(N)]^{-1}$  对应值

$F(N)$	$\lg \lg [1-F(N)]^{-1}$	$F(N)$	$\lg \lg [1-F(N)]^{-1}$
0.9	0	0.4	-0.654
0.8	-0.156	0.3	-0.810
0.7	-0.282	0.2	-1.014
0.632	-0.362	0.1	-1.339
0.6	-0.400	0.05	-1.652
0.5	-0.521	0.01	-2.360

利用威布尔概率纸, 对于给定应力水平的一组寿命数据  $N_i$ , 仍可按(3-13)式估计  $N_i$  所对应的破坏概率  $F(N_i)$ , 按  $[N_i, F(N_i)]$  数据在威布尔概率纸上描点, 即可判断其是否服从威布尔分布, 并估计分布参数。

**例 3.2** 表中列出了二组疲劳寿命数据。试判断其是否服从威布尔分布并估计其分布参数。

$i$	例 A $N(10^5)$	例 B $N(10^5)$	$F(N) = \frac{1}{n+1}$
1	2.0	4.0	0.111
2	3.7	5.0	0.222
3	5.0	6.0	0.333
4	8.0	7.3	0.444
5	11.5	8.0	0.556
6	13.0	9.0	0.667
7	20.0	10.6	0.778
8	23.5	13.0	0.889

解 1) 将数据  $N_i$  排序, 并估计相应的破坏率  $F(N_i)$ , 如表中所列。

2) 注意到威布尔概率纸的纵坐标为  $\lg(N - N_0)$ , 或按对数标度时为  $N - N_0$ , 故在概率纸上描点之前, 必须先估计  $N_0$ 。  $N_0$  是下限, 其取值范围为  $0 \leq N_0 \leq N_1$ ,  $N_1$  是样本数据的最小值。设  $N_0 = 0$ , 由表中数据描点于图 3.8 中。可见, 例 A 之数据基本上在一直线上; 例 B 之数据线性较差, 重新调整  $N_0$ , 取  $N_0 = N_1/2 = 2 \times 10^5$ , 得到图中 B' 所示的直线。

可见, 二组数据均服从威布尔分布。

3) 分布参数估计。威布尔分布有三个参数, 其中下限  $N_0$  已经给出, 只需由图估计特征寿命参数  $N_a$  和斜率参数  $b$ 。

特征寿命参数  $N_a$  对应的破坏概率为 63.2%, 可由图直接查得与该破坏率对应的  $\lg(N_a - N_0)$  或  $N_a - N_0$ , 进而得到特征寿命参数  $N_a$ 。如由图 3.8 中 A 组数据有  $N_a - N_0 = 11.5 \times 10^5$ , 因为  $N_0 = 0$ , 故  $N_a = 11.5 \times 10^5$ ; 由图中直线 B' 有  $N_a - N_0 = 6.8 \times 10^5$ , 因为  $N_0 = 2 \times 10^5$ , 故  $N_a = 8.8 \times 10^5$ 。

在非等距标定的坐标系中, 不能直接由直线倾角的正切确定其斜率。注意到  $F(N) = 90\%$  时, 有  $\lg \lg[1 - F(N_{90})]^{-1} = 0$ , 故由(3-16)式知, 斜率参数  $b$  为

$$\begin{aligned}
 b &= [\lg \lg(1 - 0.9)^{-1} - \lg \lg e] / [\lg(N_{90} - N_0) - \lg(N_a - N_0)] \\
 &= 0.3622 / [\lg(N_{90} - N_0) - \lg(N_a - N_0)] \quad (3-18)
 \end{aligned}$$

如由图中直线 A 可查得:  $N_{90} - N_0 = 23.5 \times 10^5$ ,  $N_a - N_0 = 11.5 \times 10^5$ 。代

入上式则有

$$b = 0.3622/\lg(23.5/11.5) = 1.17 \quad (\text{A组})$$

类似地,由图中直线  $B'$  有  $b = 1.73$ 。

威布尔分布参数确定后,利用(3-15)式,即可估计给定寿命下的破坏概率或给定破坏概率下的寿命了。

### 3.4 二元线性回归分析

在前面利用概率纸判断数据点是否为线性分布时,依赖的是人为判断。即使是线性分布的,不同的人所画出的直线也会有所不同。于是,就希望能定量地回答两个问题:一是如何用一条直线拟合一组数据点;二是如何判断这些数据点是否可以用拟合给出的直线描述。本节主要讨论这两个问题。

#### 一、相关关系和回归方程

事物间的联系,在数学上通常以变量之间的关系来描述。这种关系一般可分为二类,即

**确定性关系**——对于变量  $X$  的每一确定的值,变量  $Y$  都有可以预测的一个或几个确定的值与之对应,则称变量  $Y$  与  $X$  间有确定性关系。这类关系常常可用确定性函数关系来表达。例如,若以  $D$  表示圆的直径, $L$  表示圆的周长,则  $L = \pi D$  就表达了变量  $D$  和  $L$  间的确定性关系。

**相关关系**——变量  $X$  取某定值时,变量  $Y$  并无确定的值与之对应,与之对应的是某唯一确定的概率分布及其特征数,则称变量  $Y$  与  $X$  之间有相关关系。例如,图 3.1 中给出了应力水平与疲劳寿命间的关系。对于给定的应力幅,并无确定的疲劳寿命  $N$  与之对应,与之对应的是某唯一确定的疲劳寿命的概率分布。或者说,变量  $N$  是随机的,但服从某一确定的、与应力水平相关的概率分布。如前节所述,这一分布通常可用对数正态分布或威布尔分布来描述,其特征数(均值、标准差)也可以估计。

设随机变量  $X$ 、 $Y$  间存在着相关关系。当  $X$  取某值  $x$  时, $Y$  的数学期望记作  $E(Y/X = x)$ ,它是  $x$  的函数,即

$$E(Y/X = x) = f(x) \quad (3-19)$$

$E(Y/X = x)$  是变量  $Y$  的母体在  $X = x$  时的期望值,而母体分布参数通常是未知的,一般只能通过样本数据求其估计量  $\tilde{y}$ ,故有

$$\tilde{y} = f(x)$$

上式描述了随机变量  $Y$  的数学期望的估计量  $\hat{y}$  与  $X$  的取值  $x$  间的关系,称为  $Y$  对  $X$  的回归方程。回归方程若是线性的,则有

$$\hat{y} = A + Bx \quad (3-20)$$

(3-20) 式是最简单的二元线性回归方程,常数  $A, B$  是待定的回归系数。

所谓“回归分析”,就是进行随机变量间相关关系的分析。其主要任务是:寻找可以描述随机变量间相关关系的近似定量表达式,即确定回归方程的形式及回归系数;考查随机变量间相关关系的密切程度,检验回归方程的可用性;利用回归方程进行随机变量取值的预测和统计推断。

## 二、用最小二乘法拟合回归方程

设由实验结果获得了  $n$  对数据  $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$ , 称为一个数据样本。为了正确反映随机变量  $X, Y$  间的关系,在获取样本数据时,应当使除  $X, Y$  外的

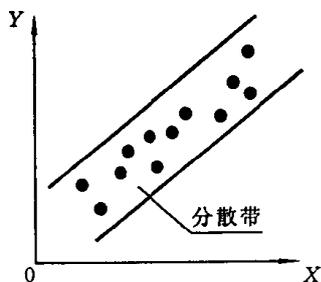


图 3.9 散点图

其它变量(其它因素)尽量不变。依据样本数据,在  $X-Y$  直角坐标系中描点,作出如图 3.9 所示之散点图。散点图直观地反映了随机变量  $X-Y$  间是否存在着相关关系及其可能的函数形式。图 3.9 中的数据分散带呈线性,故可假定  $X-Y$  间有线性相关关系,且其回归方程可用(3-20)式来表达。

回归方程中的待定回归系数,可由最小二乘法确定。

令由回归方程给出的估计量  $\hat{y}_i$  与样本实际观测值  $y_i$  之偏差平方和

$$Q = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2 = \sum (A + Bx_i - y_i)^2 \quad (3-21)$$

为最小,由此确定回归系数的方法,称为最小二乘法。偏差平方和  $Q$  是回归系数  $A, B$  的函数, $Q$  最小的条件为

$$\frac{\partial Q}{\partial A} = 0; \quad \frac{\partial Q}{\partial B} = 0 \quad (3-22)$$

对于二元线性回归方程(3-20)式,上述两个条件给出确定回归系数的正规方程组为

$$\left. \begin{aligned} nA + B \sum x_i &= \sum y_i \\ A \sum x_i + B \sum x_i^2 &= \sum x_i y_i \end{aligned} \right\} \quad (3-23)$$

求解上述线性方程组,得到

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{\sum (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})}{\sum (x_i - \bar{X})^2} \\ A &= \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \bar{Y} - B\bar{X} \end{aligned} \right\} \quad (3-24)$$

式中,  $n$  为样本数据点数,  $\bar{X}$ 、 $\bar{Y}$  分别为变量  $X$ 、 $Y$  的样本均值, 且

$$\bar{X} = \sum x_i / n; \quad \bar{Y} = \sum y_i / n \quad (3-25)$$

(3-24) 式给出了确定回归系数  $A$ 、 $B$  的表达式, 且指出均值点  $(\bar{X}, \bar{Y})$  落在回归直线上。

### 三、相关系数及相关关系的检验

相关系数  $r$  定义为

$$r = B \left[ \sum (x_i - \bar{X})^2 / \sum (y_i - \bar{Y})^2 \right]^{1/2} \quad (3-26)$$

$$\text{若令 } L_{xx} = \sum (x - \bar{X})^2 = \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 / n \quad (3-27)$$

$$L_{yy} = \sum (y - \bar{Y})^2 = \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2 / n$$

$$L_{xy} = \sum (x - \bar{X})(y - \bar{Y}) = \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i / n$$

由(3-24)式、(3-26)式有

$$B = L_{xy} / L_{xx} \quad (3-28)$$

$$r = L_{xy} / \sqrt{L_{xx} L_{yy}} = B [L_{xx} / L_{yy}]^{1/2} \quad (3-29)$$

且可将偏差平方和写为

$$\begin{aligned} Q &= \sum (A + Bx_i - y_i)^2 = \sum [(\bar{Y} - B\bar{X}) + Bx_i - y_i]^2 \\ &= \sum [(\bar{Y} - y_i) - B(\bar{X} - x_i)]^2 \\ &= \sum [(\bar{Y} - y_i)^2 - 2B(\bar{X} - x_i)(\bar{Y} - y_i) + B^2(\bar{X} - x_i)^2] \\ &= \sum (\bar{Y} - y_i)^2 - 2B^2 \sum (\bar{X} - x_i)^2 + B^2 \sum (\bar{X} - x_i)^2 \\ &= \sum (\bar{Y} - y_i)^2 - B^2 \sum (\bar{X} - x_i)^2 = L_{yy} - B^2 L_{xx} \end{aligned}$$

上式两端除以  $L_{yy}$ , 即得

$$r^2 = 1 - Q / L_{yy} \quad (3-30)$$

注意到  $Q$ 、 $L_{yy}$  均为正数, 且  $Q \leq L_{yy}$ , 故相关系数  $|r| \leq 1$ 。当  $|r| \rightarrow 1$  时, 应有  $Q \rightarrow 0$ , 表示数据点基本上都在回归直线上, 变量  $X$ 、 $Y$  相关密切;  $|r|$  越小, 表示偏差平方和  $Q$  越大, 相关性越差; 若  $|r|$  很小, 甚至趋近于零, 则变量  $X$ 、 $Y$  间不具有

所假定形式的相关关系,或者二者是完全不相关的。由(3-29)式还可知,相关系数  $r$  与  $B$  同号,  $r > 0$ , 则  $B > 0$ , 回归直线斜率为正,称为正相关;  $r < 0$ ,  $B < 0$ , 回归直线斜率为负,称为负相关。如图 3.10 所示。

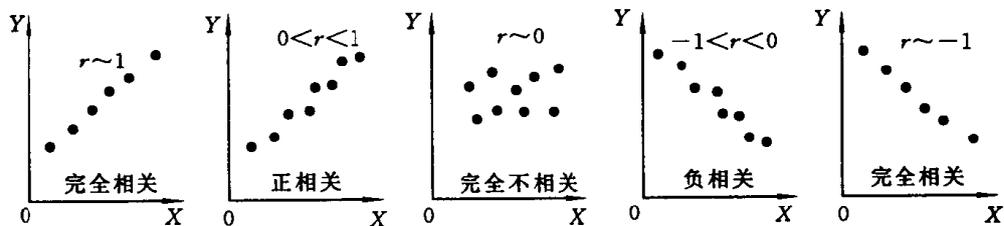


图 3.10 相关系数的几何意义

如前所述,相关系数  $r$  之绝对值的大小,反映了变量  $X$ 、 $Y$  间相关关系的密切程度。换言之,只有  $|r|$  足够大,才能用回归方程来描述变量间的相关关系;若  $|r|$  很小,变量间完全不相关,则回归方程就毫无意义了。

为了保证回归方程能够反映随机变量间的相关关系,相关系数应当满足:

$$|r| \geq r_0 \quad (3-31)$$

$r_0$  称为相关系数的起码值。即若回归方程能够用来描述随机变量间的相关关系,则其相关系数的绝对值应当不小于  $r_0$ 。 $r_0$  与样本容量  $n$  的大小有关, $n$  越大,则可信程度越高,相关系数的起码值  $r_0$  就可以小一些。 $r_0$  还与显著性水平  $\alpha$  (这里可以理解为接受回归方程而出现错误的概率)有关,  $\alpha$  越小,置信水平  $\gamma = 1 - \alpha$  越大,所要求的相关系数的起码值  $r_0$  就越大。表 3-4 列出了若干相关系数的起码值。

表 3-4 相关系数的起码值  $r_0$

$n - 2$	$\alpha$										
	0.05	0.01		0.05	0.01		0.05	0.01		0.05	0.01
1	0.997	1.000	11	0.553	0.684	21	0.413	0.526	35	0.325	0.418
2	0.950	0.990	12	0.532	0.661	22	0.404	0.515	40	0.304	0.393
3	0.878	0.959	13	0.514	0.641	23	0.396	0.505	45	0.288	0.372
4	0.811	0.917	14	0.497	0.623	24	0.388	0.496	50	0.273	0.354
5	0.754	0.874	15	0.482	0.606	25	0.381	0.487	60	0.250	0.325
6	0.707	0.834	16	0.468	0.590	26	0.374	0.478	70	0.232	0.302
7	0.666	0.798	17	0.456	0.575	27	0.367	0.470	80	0.217	0.283
8	0.632	0.765	18	0.444	0.561	28	0.361	0.463	90	0.205	0.267
9	0.602	0.735	19	0.433	0.549	29	0.355	0.456	100	0.195	0.254
10	0.576	0.708	20	0.423	0.537	30	0.349	0.449	200	0.138	0.181

### 四、利用回归方程进行统计推断

回归方程经过统计检验(如相关系数检验)后,即可用来描述随机变量间的相关关系。当  $X$  取某定值  $x_0$  时,随机变量  $Y$  虽然没有一个确定值  $y_0$  与之对应,但可由回归方程求出  $y_0$  的数学期望  $\tilde{y}_0$ ,  $\tilde{y}_0$  是  $y_0$  的估计量。真实的  $y_0$  总是在  $\tilde{y}_0$  上下波动的,这种波动可以用正态分布表示,如图 3.11 所示。

对应于任一  $x_0$ ,  $y_0$  的分布是正态的,且当样本容量较大时,正态分布参数可估计为

$$\begin{aligned} \mu &= \tilde{y} = A + Bx \\ \sigma &= s = [Q/(n - 2)]^{1/2} \\ &= [(L_{yy} - B^2L_{xx})/(n - 2)]^{1/2} \end{aligned} \quad (3-32)$$

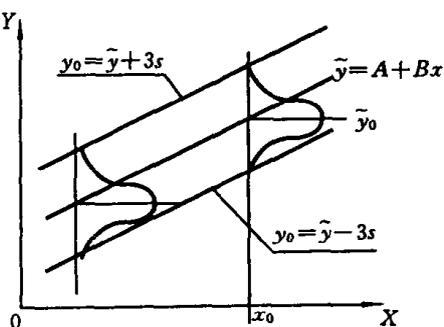


图 3.11 利用回归方程进行统计推断

于是,可以按正态分布对  $Y$  的取值进行统计推断。

图 3.11 中,  $\tilde{y} = A + Bx$  是回归直线,直线  $y = \tilde{y} + u_p s$  所对应的概率  $p = \Pr(Y \leq y)$ , 可由  $u_p$  之值查正态分布函数表(如表 3-1)得到。当  $u_p = 3$  时,  $p = 99.87\%$ , 故  $y = \tilde{y} + 3s$  是概率为 99.87% 的数据分散带的上限;或说  $y$  之值落在直线  $y = \tilde{y} + 3s$  之下的概率为 99.87%。当  $u_p = -3$  时,  $p = 0.13\%$ , 即  $y$  之值落在直线  $y = \tilde{y} - 3s$  之下的概率为 0.13%, 故  $y = \tilde{y} - 3s$  也是概率为 99.87% 的数据分散带的下限。 $y$  之值落在直线  $y = \tilde{y} + 3s$  和  $y = \tilde{y} - 3s$  之间的区间概率则为  $p = 99.87\% - 0.13\% = 99.74\%$ 。

当  $u_p = 0$  时,  $p = 50\%$ , 故回归直线  $y = \tilde{y} = A + Bx$  所对应的概率为 50%。综上所述,二元线性回归分析的基本方法可用图 3.12 所示的框图加以归纳。

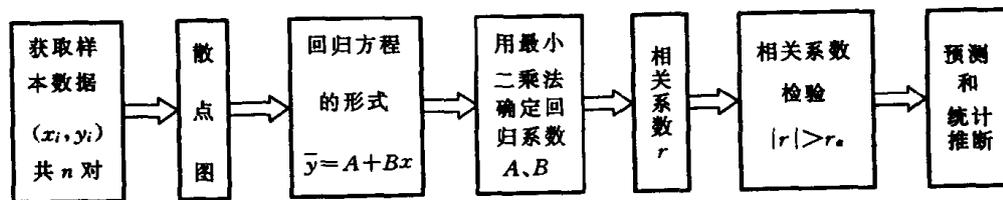


图 3.12 二元线性回归分析框图

下面通过一简单例题,进一步了解其分析步骤。

**例 3.3** 某材料在应力比  $R = 0.1$  下的疲劳试验结果如下表所示,试求其

S-N 曲线。

试验数据		计 算				
$S_i/\text{MPa}$	$N$	$x_i = \lg N_i$	$y_i = \lg S_{ai}$	$x_i^2$	$y_i^2$	$x_i y_i$
199	94124	4.9737	2.2989	24.7377	5.2849	11.4340
166	146656	5.1663	2.2201	26.6907	4.9288	11.4697
141.2	298263	5.4746	2.1498	29.9712	4.6216	11.7693
120.2	981070	5.9917	2.0799	35.9005	4.3260	12.4621
$\Sigma$		21.6063	8.7478	117.3001	19.1613	47.1351

解 S-N 曲线为  $S^m N = C$ ; 取对数后有  $\lg S = \lg C/m - (1/m)\lg N$ 。

令  $y = \lg S$ ,  $x = \lg N$ , 回归方程可写为

$$y = A + Bx$$

其中

$$A = \lg C/m, \quad B = -(1/m)$$

列表计算后, 由(3-24)式得到

$$\bar{X} = \sum x_i/n = 21.6063/4 = 5.40158$$

及

$$\bar{Y} = 2.18718$$

再由(3-27)式有

$$L_{xx} = \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2/n = 117.3001 - 21.6063^2/4 = 0.59205$$

$$L_{yy} = 0.02636; \quad L_{xy} = -0.12166$$

回归系数由(3-25)式给出

$$B = L_{xy}/L_{xx} = -0.2054$$

故有

$$m = -1/B = 4.87$$

$$A = \bar{Y} - B\bar{X} = 3.2974$$

且

$$C = \lg^{-1}(Am) = 1.12 \times 10^{16}$$

相关系数由(3-29)式给出, 有  $r = -0.975$ (负相关); 当显著性水平取为  $\alpha = 0.05$  时, 注意此例中有  $n - 2 = 2$ , 查表 3-4, 得  $r_\alpha = 0.950$ , 故有  $|r| \geq r_\alpha$ 。

即在  $\alpha = 0.05$  时, 回归方程是可用的。且 S-N 曲线为

$$S_i^{4.87} N = 1.12 \times 10^{16} \quad (p = 0.50)$$

应当指出, 由于数据点少 ( $n = 4$ ), 若取  $\alpha = 0.01$ , 则回归方程是不可接受的。

若要估计破坏率为 1% 的  $S-N$  曲线,则需先按(3-32) 式计算样本剩余标准差  $s$ 。此处有

$$s = [(L_{yy} - B^2 L_{xx}) / (n - 2)]^{1/2} = 0.0263$$

破坏率为 1% 时,  $u_p = -2.326$ , 即有

$$y = A + Bx - 2.326s = 3.2362 - 0.2054x$$

破坏率为 1% 的  $S-N$  曲线为

$$S_2^{4.87} N = 5.758 \times 10^{15} \quad (p = 0.01)$$

在用概率纸判断随机变量是否服从某种分布或估计分布参数的时候,也可以利用回归分析的方法使判断定量化,如下例所述。

例 3.4 试用最小二乘法进行回归分析,估计例 3.2 中  $B$  组数据的分布参数。

$i$	$N(10^5)$	$F(N) = \frac{1}{n+1}$	正态分布		Weibull 分布	
			$Y$	$X$	$Y$	$X$
1	4.0	0.111	0.6021	-1.220	-1.2912	0.3010
2	5.0	0.222	0.6990	-0.765	-0.9620	0.4771
3	6.0	0.333	0.7782	-0.431	-0.7543	0.6021
4	7.3	0.444	0.8633	-0.140	-0.5931	0.7243
5	8.0	0.556	0.9031	0.140	-0.4532	0.7782
6	9.0	0.667	0.9542	0.431	-0.3213	0.8451
7	10.6	0.778	1.0253	0.765	-0.1849	0.9345
8	13.0	0.889	1.1139	1.220	-0.0203	1.0414

解 1) 设寿命  $N$  服从对数正态分布,  $x = \lg N$ , 由(3-10) 式有

$$x = \bar{x} + us$$

回归方程为

$$Y = A + BX$$

与  $x = \bar{x} + us$  对照, 回归方程中的变量为

$$Y = x = \lg N; \quad X = u = \Phi^{-1}[F(N)]$$

且回归系数为

$$A = \bar{x}; \quad B = s$$

列表计算后得到  $\bar{X} = 0; \quad \bar{Y} = 0.8674$

$$L_{xx} = 4.5580; \quad L_{yy} = 0.2012; \quad L_{xy} = 0.9554$$

回归系数为

$$B = L_{xy}/L_{xx} = 0.2096$$

故有

$$s = B = 0.2096$$

$$A = \bar{Y} - B\bar{X} = 0.8674; \quad \bar{x} = A = 0.8674$$

相关系数为

$$r = -0.9976 \geq r_{\alpha} = 0.834 \quad (\alpha = 0.01, n = 8)$$

可见,此组寿命数据在正态概率纸上的线性很好,回归方程可以接受。

若要估计寿命为  $N = 3 \times 10^5$  时的破坏概率,则有

$$p_{n=3} = \Phi(u_p) = \Phi\left(\frac{\lg N - \bar{x}}{s}\right) = \Phi(-1.862) = 3.1\%$$

2) 设寿命  $N$  服从威布尔分布,由(3-16)式有

$$\lg \lg[1 - F(N)]^{-1} = b \lg(N - N_0) + \lg \lg e - b \lg(N_a - N_0)$$

回归方程写为  $Y = A + BX$  时,有

$$Y = \lg \lg[1 - F(N)]^{-1}; \quad X = \lg(N - N_0)$$

$$A = \lg \lg e - b \lg(N_a - N_0); \quad B = b$$

设  $N_0 = 2 \times 10^5$ ,列表计算后得到

$$\bar{X} = 0.7130, \quad \bar{Y} = 0.5725$$

$$L_{xx} = 0.4164, \quad L_{yy} = 1.2342, \quad L_{xy} = 0.7161$$

回归系数为

$$B = L_{xy}/L_{xx} = 1.7196, \quad A = \bar{Y} - B\bar{X} = -1.7985$$

故有

$$b = B = 1.7196$$

$$N_a = \lg^{-1}[(\lg \lg e - A)/b] + N_0 = 8.84 \times 10^5$$

相关系数为

$$r = -0.9988 \geq r_{\alpha} = 0.834 \quad (\alpha = 0.01, n = 8)$$

故用威布尔分布也可以很好地描述此组寿命分布,且与用对数正态分布相比,用威布尔分布描述此组寿命分布的相关性更好。

若要估计寿命为  $N = 3 \times 10^5$  时的破坏概率,则有

$$F(N = 3) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{3 - 2}{8.84}\right)^{1.7196}\right] = 3.6\%$$

类似地,也可估计给定破坏或存活概率下的寿命。

### 3.5 S-N 曲线和 p-S-N 曲线的拟合

本节通过一个计算实例,说明如何利用最小二乘法拟合 S-N 曲线和 p-S-N 曲线。

表 3-5 给出了 Ly12 铝合金板材在四种应力水平下的疲劳试验结果,循环应力比  $R = 0.1$ 。

表 3-5 Ly12 铝合金板材的对数疲劳寿命  $x = \lg N$  试验数据 ( $R = 0.1$ )

序号 <i>i</i>	$S_{\max}/\text{MPa}$				破坏率	存活率
	199	166	141.2	120.2	$p_i = i/(n + 1)$	$R_i = 1 - p_i$
1	4.914	5.093	5.325	5.721	0.0909	0.9091
2	4.914	5.127	5.360	5.851	0.1818	0.8182
3	4.929	5.130	5.435	5.859	0.2727	0.7273
4	4.964	5.140	5.441	5.938	0.3636	0.6364
5	4.964	5.146	5.470	6.012	0.4545	0.5455
6	4.982	5.167	5.471	6.015	0.5455	0.4545
7	4.982	5.188	5.501	6.082	0.6364	0.3636
8	4.996	5.204	5.549	6.136	0.7273	0.2727
9	5.029	5.220	5.582	6.138	0.8182	0.1818
10	5.063	5.248	5.612	6.165	0.9091	0.0909

表中数据在正态概率纸上描点的结果如图 3.13 所示。由图可见,不同应力水平下得到的对数疲劳寿命的  $x \sim p_i$  数据,在正态概率纸上均呈直线分布,即  $x = \lg N$ ,服从正态分布。用最小二乘法确定各自的回归直线,其结果列于表 3-6 中。表中同时列出了由各种不同应力水平下的回归方程估计的、存活率  $p_i$  分别为 50% 和 99.9% 时的对数疲劳寿命。

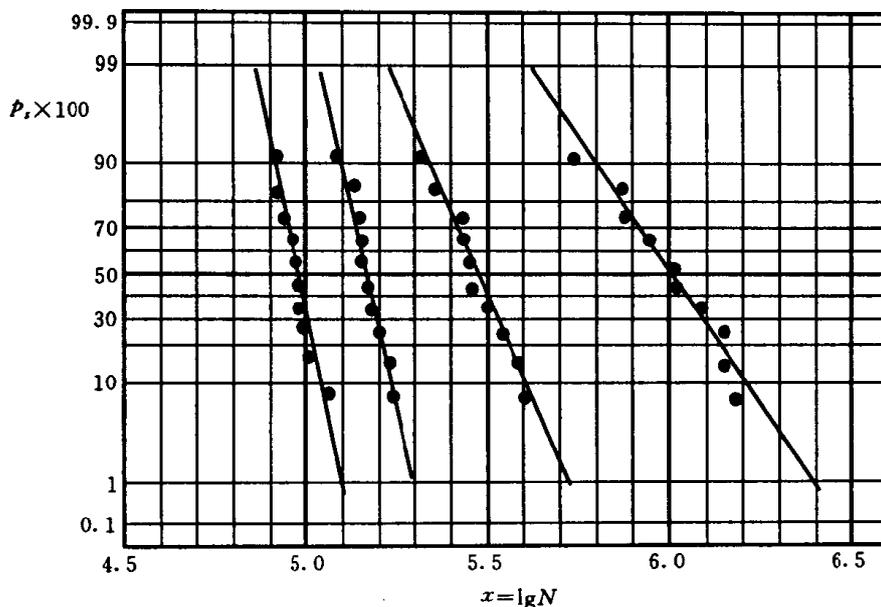


图 3.13 对数疲劳寿命分布

表 3-6 各应力水平下的  $x \sim u_p$  拟合结果

$i$	$S_1 / \text{MPa}$	$A$	$B$	$r$	$\lg S$	$x = A + Bu_p = \lg N$	
						$p_i = 50\%$ $u_p = 0$	$p_i = 99.9\%$ $u_p = -3.09$
1	199.0	4.7937	0.0566	0.975	2.2989	4.9737	4.7988
2	166.0	5.1663	0.0571	0.988	2.2201	5.1663	4.9899
3	141.2	5.4746	0.1084	0.989	2.1498	5.4746	5.1396
4	120.2	5.9917	0.1722	0.973	2.0799	5.9917	5.4596

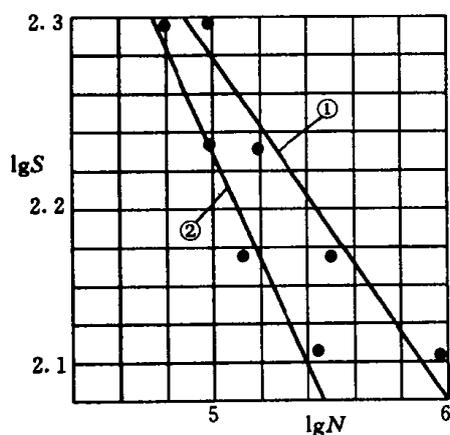


图 3.14 双对数坐标下的  $S-N$  图

表 3-6 中所列  $p_i$  为 50% 和 99.9% 时的二组  $\lg S \sim \lg N$  数据, 给出了给定存活率  $p_i$  下的  $S-N$  关系。这二组  $S-N$  数据, 在双对数坐标图上呈线性关系, 如图 3.14 所示。

图 3.14 中, 曲线 1 是存活率为 50% 的  $S-N$  曲线, 称为中值  $S-N$  曲线。实际上, 通常所说的  $S-N$  曲线, 一般均是中值  $S-N$  曲线。曲线 2 是存活率为 99.9% 的  $S-N$  曲线, 即  $p-S-N$  曲线。

对于图 3.14 中的二组数据, 令  $Y = \lg S$ ,

$X = \lg N$ , 用最小二乘法作线性回归分析, 得到的结果列于表 3-7 中。

表 3-7 S-N 曲线参数拟合结果

$p_i \times 100$	$LgS = a + b \lg N$		$r$	$S^m N = C$	
	$a$	$b$		$M$	$C$
50	3.2965	-0.2054	-0.971	4.869	$1.124 \times 10^{16}$
99.9	3.8739	-0.3309	-0.983	3.022	$5.092 \times 10^{11}$

由上述结果可知, 对于本例, 中值 S-N 曲线和存活率为 99.9% 的  $p$ -S-N 曲线为

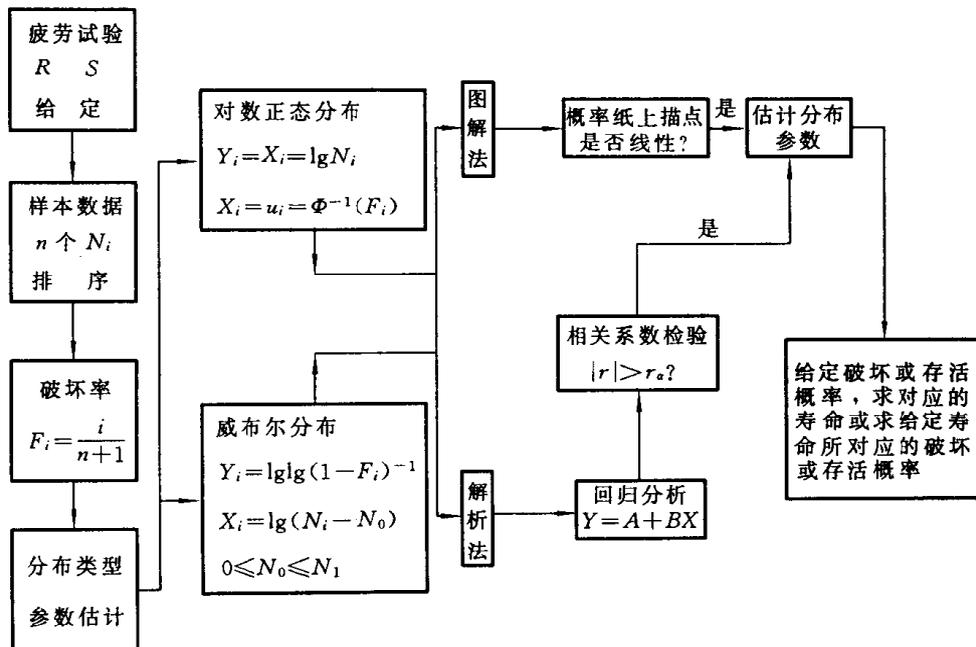
$$S_{\max}^{4.869} N = 1.124 \times 10^{16}$$

$$S_{\max}^{3.022} N = 5.092 \times 10^{11} \quad (p_i = 99.9\%)$$

式中, 应力  $S$  的单位为 MPa;  $N$  为直到破坏的循环次数。S-N 曲线中的应力也可以用应力幅  $S_a$  表示, 当应力比  $R$  给定时, 有  $S_a = (1 - R)S_{\max}/2$ 。

### 小 结

1. 疲劳寿命分散性显著。应力水平越低, 寿命越长, 分散性就越大。疲劳寿命  $N$  通常可以用对数正态分布或威布尔分布来描述。
2. 破坏概率为  $p$  的对数疲劳寿命  $x_p$  为  $x_p = \bar{x} + u_p s$ 。样本均值  $\bar{x}$  和标准差  $s$ , 分别是母体参数  $\mu, \sigma$  的估计量; 存活率  $p_i = 1 - p$ 。
3. 威布尔分布的三个参数是: 下限  $N_0$ , 特征寿命参数  $N_a$  和形状参数  $b$ 。
4. 无论随机变量服从何种分布, 破坏概率的均秩估计量为  $p = i/(n + 1)$ 。
5. 借助于概率纸, 可以判断随机变量是否服从给定的概率分布形式, 并估计其分布参数。
6. 回归分析的主要任务是: 寻找随机变量间相关关系的近似定量表达式, 考查变量间的相关性并利用回归方程进行预测和统计推断。
7. 疲劳寿命统计估计的分析计算框图为



### 思考题与习题

- 3-1 制作正态概率纸。
- 3-2 制作威布尔概率纸。
- 3-3 什么是相关关系? 相关关系如何描述和检验?
- 3-4 什么是最小二乘法? 相关系数  $r$  有什么意义?  $r$  的取值范围如何?
- 3-5 30CrMnSiNi2A 钢在应力水平  $S_{max} = 660\text{MPa}$ ,  $R = 0.5$  下的疲劳试验寿命为 64, 67, 68, 92, 93, 103, 121, 135 千周。
  - a) 利用正态概率纸确定对数寿命正态分布参数及存活概率为 95% 的寿命  $N_{95}$ 。
  - b) 利用威布尔概率纸确定其寿命威布尔分布参数及存活概率为 95% 的寿命  $N_{95}$ 。
- 3-6 已知某给定应力比下的一组疲劳试验寿命结果如下表, 试用最小二乘法拟合  $\lg S_a - \lg N$  直线, 求出相关系数, 并写出其  $S-N$  曲线表达式。

$S_a/\text{MPa}$	60	50	40	30	25
$N(10^3 \text{ 次})$	12.3	20.0	39.6	146.1	340.6

## 第四章 应变疲劳

对于循环应力水平较低 ( $S_{\max} < S_y$ ), 寿命长的情况, 用应力 - 寿命曲线 ( $S-N$  曲线) 来描述其疲劳性能是恰当的。然而, 有许多工程构件, 在其整个使用寿命期间, 所经历的载荷循环次数却并不多。例如, 压力容器若一天经受二次载荷循环, 则在 30 年的使用期限内, 载荷的总循环次数还不到  $2.5 \times 10^4$  次。在寿命较短的情况下, 设计应力或应变水平当然可以高一些, 以充分发挥材料的潜力。这样, 就可能使构件中某些高应力处 (尤其是缺口根部) 进入塑性屈服。

众所周知, 对于延性较好的材料, 屈服后应变的变化大, 应力的变化小。因此, 用应变作为疲劳性能的控制参量显然更好一些。

载荷水平高 (超过屈服应力), 寿命短 ( $N < 10^4$ ), 即是本章研究的应变疲劳或低周应变疲劳。

### 4.1 单调应力 - 应变响应

在讨论应变疲劳性能之前, 有必要研究在循环载荷作用下材料的应力 - 应变响应, 希望对于疲劳问题有较深入的了解。为此, 先讨论材料的单调应力 - 应变响应 (monotonic stress-strain response), 便于以后进一步对循环应力 - 应变响应 (cyclic stress-strain response) 进行研究。

#### 4.1.1 工程应力、应变与真应力、真应变

在由标准试件单轴拉伸试验确定材料的应力 - 应变曲线时, 应力和应变都是以变形前的几何尺寸 (标距长度  $l_0$ 、截面积  $A_0$ ) 定义的, 称为工程应力  $S$ 、工程应变  $e$ , 且

$$S = \frac{P}{A_0} \quad (4-1)$$

$$e = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} \quad (4-2)$$

式中,  $P$  为所施加的载荷;  $A_0$  为试件的初始横截面积;  $l_0$  为试件的初始标距长度。  $\Delta l$  为  $l_0$  的改变量, 等于试件的当时长度  $l$  与其原长  $l_0$  之差。

实际上, 一旦作用有载荷, 材料在发生纵向伸长的同时, 由于泊松效应而使截面尺寸缩小, 真实应力应当等于轴力除以当时的截面面积  $A$  (而不是原面积

$A_0$ )。故真应力  $\sigma$  应定义为

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (4-3)$$

式中,  $A$  为试件变形后的横截面积。

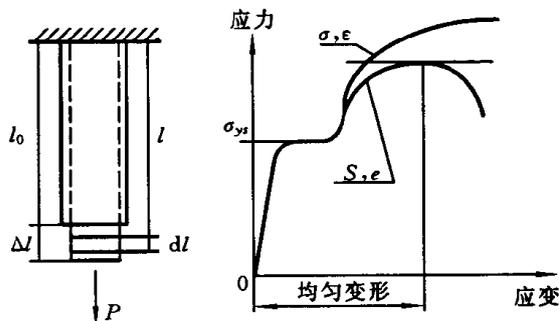


图 4.1 单调加载时的应力与应变

在载荷从 0 加到  $P$  的过程中, 杆的伸长是逐步发生的。对于任一载荷增量  $dP$ , 应变增量  $de$  等于长度增量  $dl$  与当时长度  $l$  (不是原长  $l_0$ ) 之比。故真应变  $\epsilon$  应定义为

$$\epsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln(l/l_0) = \ln\left(\frac{l_0 + \Delta l}{l_0}\right) = \ln(1 + e) \quad (4-4)$$

式中,  $l$  为加载到  $P$  时变形后的长度。

随着载荷的增加, 材料进入屈服, 经过强化、颈缩直至最后断裂。在颈缩之前, 试件发生伸长的同时, 其横截面均匀缩小, 称为均匀变形阶段, 如图 4.1 所示。

忽略弹性体积变化, 假定发生变形后体积不变, 则在颈缩之前的均匀变形阶段, 可以假设有

$$A_0 l_0 = Al$$

则由前述各式即有

$$\sigma = P/A = Pl/A_0 l_0 = (P/A_0) [(l_0 + \Delta l)/l_0] = S(1 + e) \quad (4-5)$$

$$\epsilon = \ln(1 + e) = \ln(l/l_0) = \ln(A_0/A) = \ln[100/(100 - RA)] \quad (4-6)$$

式中,  $RA = (A_0 - A) \times 100/A_0$ , 为截面收缩率。

上述二式, 给出了均匀变形阶段工程应力、应变与真应力、真应变间的关系。

由(4-5)式可见,  $\sigma = S(1 + e) > S$ , 即真应力  $\sigma$  大于工程应力  $S$ 。二者之间的相对误差为

$$(\sigma - S)/S = e \quad (4-7)$$

故  $e$  越大,  $(\sigma - S)$  越大。 $e = 0.2\%$  时,  $\sigma$  比  $S$  大  $0.2\%$ 。

由(4-6)式可见,  $\epsilon = \ln(1 + e)$ , 因为  $e$  是一个小量, 可展开得

$$\epsilon = e - e^2/2 + e^3/3 - \dots < e$$

即真应变  $\epsilon$  小于工程应变  $e$ 。略去三阶小量, 可知二者的相对误差为

$$(e - \epsilon)/e = e/2 \quad (4-8)$$

由上式可见,  $e$  越大,  $(e - \epsilon)$  越大。 $e = 0.2\%$  时,  $\epsilon$  比  $e$  小  $0.1\%$ 。

对于一般的工程问题, 有  $\epsilon \approx e < 0.01$ 。因为此时  $\sigma$  与  $S$ ,  $\epsilon$  与  $e$  相差均不超过  $1\%$ , 二者可不加区别。本书此后均用  $\sigma$  与  $\epsilon$  表示应力与应变。

图 4.1 示出了工程应力 - 应变曲线与真应力 - 真应变曲线。随着应变的增大, 二者差别增大, 颈缩后的差别更大。破坏时的真应力, 称为**断裂真应力**, 记作  $\sigma_f$ ; 破坏时的真应变, 称为**断裂真应变**, 记作  $\epsilon_f$ 。

注意到颈缩后变形不再均匀, 故只能定义颈缩后的名义值。

名义断裂真应变为

$$\epsilon_f = \ln[100/(100 - RA)] \quad (4-9)$$

式中,  $RA = (A_0 - A_{\min}) \times 100/A_0$ , 为断裂时的面缩率;  $A_{\min}$  是颈缩处的最小截面面积。 $RA$  即材料的延性指标  $\Psi$ 。 $RA$  大,  $\epsilon_f$  大, 材料延性好。故  $\epsilon_f$  也是反映材料延性的指标。

名义断裂真应力为

$$\sigma_f = P/A_{\min}$$

考虑到颈缩局部非均匀变形引入的三向应力状态, 修正后的断裂真应力为

$$\bar{\sigma}_f = \sigma_f / \left(1 + \frac{a}{4b}\right) \quad (4-10)$$

式中,  $a$  为颈缩部分的最小横截面半径;  $b$  为颈缩部分轮廓线的曲率半径;  $1/[1 + (a/4b)]$  称为 Bridgmen 颈缩修正系数。

### 4.1.2 应力 - 应变曲线

在颈缩前的均匀变形阶段, 由  $\sigma$ - $\epsilon$  曲线上任一点  $A$  处卸载, 弹性应变  $\epsilon_e$  即恢复; 塑性应变  $\epsilon_p$ , 将作为残余应变留下, 如图 4.2 所示。所以,  $\sigma$ - $\epsilon$  曲线上任一点的应变  $\epsilon$  均可表示为弹性  $\epsilon_e$  与塑性应变  $\epsilon_p$  之和, 即

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p \quad (4-11)$$

应力与弹性应变的关系用 Hooke 定理表达为

$$\sigma = E\epsilon_e$$

应力与塑性应变的关系可用 Holomon 关系表达为

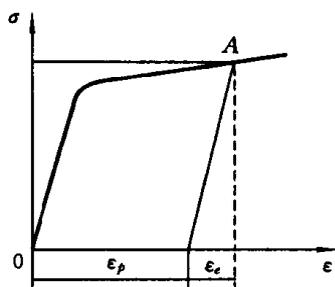


图 4.2 应力-应变关系

$$\sigma = K(\epsilon_p)^n$$

式中,  $K$  为强度系数, 具有应力量纲 (MPa);  $n$  为应变硬化指数, 是无量纲量。对于常用结构金属材料, 应变硬化指数  $n$  之值一般在  $0 \sim 0.6$  之间。  $n = 0$  表示无应变硬化, 应力与塑性应变无关, 是理想塑性材料。

利用上述各式, 可将应力 - 应变关系写为

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{K}\right)^{1/n} \quad (4-12)$$

这就是著名的 Remberg-Osgood 弹塑性应力-应变关系。

## 4.2 滞后环和循环应力-应变响应

在循环载荷作用下, 材料的应力-应变响应与单调加载时相比, 有很大的不同。

### 4.2.1 滞后环

在恒幅对称应变循环试验中, 连续监测  $\sigma$ - $\epsilon$  响应, 可以得到一系列的应力应变环, 如图 4.3 所示。

这些环, 反映了循环载荷作用下, 应力、应变的连续变化情况, 通常称为滞后环 (hysteresis loops)。由此可以发现:

#### 1. $\sigma$ - $\epsilon$ 响应随循环次数而改变

图 4.3 中所示低碳钢的  $\sigma$ - $\epsilon$  响应是在恒幅对称应变循环下得到的。随着循环次数的增加, 同样的应变幅下, 应力幅不断地增大。

#### 2. 一定周次后有稳态滞后环

大多数金属材料, 在循环数增加到一定次数后,  $\sigma$ - $\epsilon$  响应逐渐趋于稳定, 形成稳态滞后环。图 4.3 中所示的低碳钢, 在  $N$  约 100 次左右, 即可形成稳态滞后环。当然, 也有些材料需要较长的循环次数后才能形成稳态环; 甚至还有些材料的滞后环一直都不会稳定。对于这些材料, 往往用在该应变幅下,  $1/2$  寿命处对应的滞后环, 作为名义稳态滞后环。

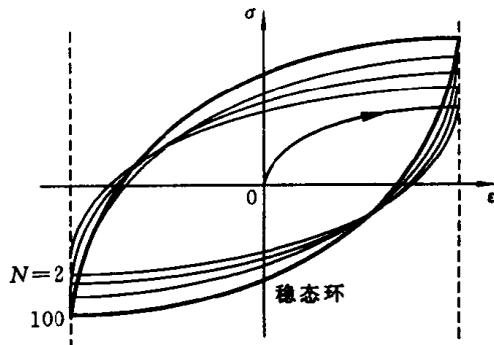


图 4.3 低碳钢的循环应力、应变响应

### 3. 有循环硬化和软化现象

在  $\epsilon_a$  不变的对称循环下, 随着循环次数  $N$  的增加, 应力幅  $\sigma_a$  不断增大的现象, 称为循环硬化。图 4.3 中所示的低碳钢是循环硬化的。反之, 若随着循环次数  $N$  的增加, 应力幅  $\sigma_a$  不断减小, 则称为循环软化。

循环硬化和软化现象与材料及其热处理状态有关。一般说来, 低强度、软材料趋于循环硬化; 高强度、硬材料趋于循环软化。如完全退火铜是循环硬化的; 冷拉铜是循环软化的; 不完全退火铜在循环应变幅小时, 是循环硬化的; 应变幅大时, 却是循环软化的。

### 4.2.2 循环应力 - 应变曲线 ( $\sigma_a - \epsilon_a$ 曲线)

由不同应变恒幅对称循环控制下的疲劳试验, 可得到一族稳态滞后环。将这些稳态环置于同一坐标内, 如图 4.4 所示。各稳态滞后环顶点的连线反映了不同应变幅  $\epsilon_a$  循环下的应力幅  $\sigma_a$  响应, 由此所给出的  $\sigma_a - \epsilon_a$  关系, 称为循环  $\sigma_a - \epsilon_a$  曲线。

值得注意的是, 与单调  $\sigma - \epsilon$  曲线不同, 循环载荷作用下的  $\sigma_a - \epsilon_a$  曲线, 并不反映加载路径。反映加载路径的是滞后环。

循环  $\sigma_a - \epsilon_a$  曲线, 可以仿照 (4-12) 式进行数学描述, 即

$$\epsilon_a = \epsilon_e + \epsilon_p = \frac{\sigma_a}{E} + \left( \frac{\sigma_a}{K'} \right)^{1/n'} \quad (4-13)$$

式中,  $K'$  为循环强度系数, 具有应力量纲 (MPa);  $n'$  为循环应变硬化指数, 是无量纲量。对于大多数金属材料, 循环应变硬化指数  $n'$  之值一般在 0.1 ~ 0.2 之间。

将应变幅  $\epsilon_a$  写为弹性应变幅  $\epsilon_{ea}$  与塑性应变幅  $\epsilon_{pa}$  二部分, 分别表达它们与应力幅的关系, 同样有

$$\begin{aligned} \sigma_a &= E\epsilon_{ea} \\ \sigma_a &= K'(\epsilon_{pa})^{n'} \end{aligned}$$

由此, 已知应变幅  $\epsilon_a$ , 则可知  $\epsilon_{ea} = \sigma_a/E$ , 与其相应的塑性应变幅则为  $\epsilon_{pa} = \epsilon_a - \epsilon_{ea}$ 。

### 4.2.3 滞后环曲线 ( $\Delta\sigma - \Delta\epsilon$ 曲线)

如前所述, 循环应力 - 应变曲线给出的是在不同应变幅  $\epsilon_a$  控制下, 循环稳定状态时的应力幅  $\sigma_a$ , 它不反映实际的  $\sigma - \epsilon$  加载路径。反映加载路径的是滞后环曲

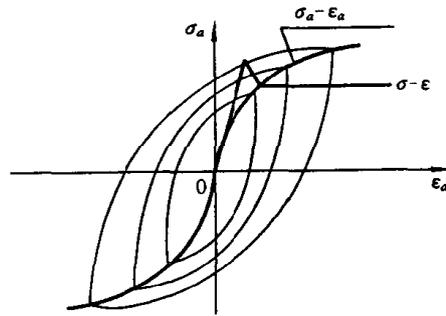


图 4.4 循环应力 - 应变曲线

线。

对于拉压性能对称的材料,其滞后环曲线的上升与下降二个半支是关于原点对称的,如图 4.5 所示,故只需考虑半支即可。

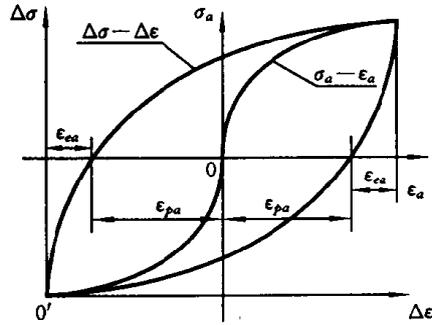


图 4.5 滞后环曲线

以滞后环曲线下顶点  $O'$  为坐标原点,考虑滞后环曲线的上升半支。注意此时的坐标轴分别为应力变程  $\Delta\sigma$  和应变变程  $\Delta\epsilon$ 。

在试验观察的基础上,假设滞后环曲线与循环应力-应变曲线几何相似,即在  $\sigma_a-\epsilon_a$  坐标系中的  $\sigma_a, \epsilon_a$  分别是  $\Delta\sigma-\Delta\epsilon$  坐标系中的  $\Delta\sigma/2$  和  $\Delta\epsilon/2$ ,由二者的相似性,并仿照(4-13)式可写出滞后环曲线为

$$\frac{\Delta\epsilon}{2} = \frac{\Delta\epsilon_{ea}}{2} + \frac{\Delta\epsilon_{pa}}{2} = \frac{\Delta\sigma}{2E} + \left(\frac{\Delta\sigma}{2K'}\right)^{1/n'}$$

或

$$\Delta\epsilon = \Delta\epsilon_e + \Delta\epsilon_p = \frac{\Delta\sigma}{E} + 2\left(\frac{\Delta\sigma}{2K'}\right)^{1/n'} \quad (4-14)$$

上述假设称为 Massing 假设。满足这一假设的材料,称为 Massing 材料。(4-14)式是反映加载路径的滞后环曲线。

同样,若用应变表示应力,则有

$$\Delta\sigma = E\Delta\epsilon_e$$

和

$$\Delta\sigma = 2K'(\Delta\epsilon_p/2)^{n'}$$

### 4.3 材料的记忆特性与变幅循环响应计算

材料的循环应力-应变曲线和滞后环曲线,反映了材料的循环性能。在了解材料循环性能的基础上,本节讨论在变幅循环载荷作用下材料的应力-应变响应。

#### 4.3.1 材料的记忆特性

图 4.6 所示是典型的加载—卸载—加载曲线图。如果一直不间断地加载,  $\sigma-\epsilon$  响应曲线将由  $A$  经  $B$  到  $D$ , 即应力-应变路径为  $ABD$ 。如果加载到  $B$  处后卸载,  $\sigma-\epsilon$  响应曲线沿路径  $BC$  变化;若到  $C$  处后又重新加载,当  $\sigma-\epsilon$  响应曲线恢复到  $B'$  点后继续加载时,材料并不沿  $CB'$  继续上升到  $D'$ , 而是好像“记得”原来的路径,仍沿  $ABD$  路径向  $D$  点走。

可见,“材料记得曾为反向加载所中断的应力-应变路径”。描述材料这一特性的记忆规则为:

1. 应变第二次到达某处,该处曾发生过应变反向,则形成封闭环。

图 4.6 中,  $B$  处由加载转变为卸载,发生了应变反向。到  $C$  处再加载,应变第二次到达  $B'$  处时,因为该处( $B$  处)曾发生应变反向,故形成封闭环  $B-C-B'$ 。

2. 过封闭环顶点后,  $\sigma-\epsilon$  路径不受封闭环的影响,仍记得原来的路径。

图 4.6 中,从  $C$  处加载,过封闭环顶点  $B$  后,由于封闭环  $B-C-B'$  不再影响其后的  $\sigma-\epsilon$  响应,故应力-应变好像在  $B$  处未发生反向一样,仍记得原来的路径  $A-B-D$ 。

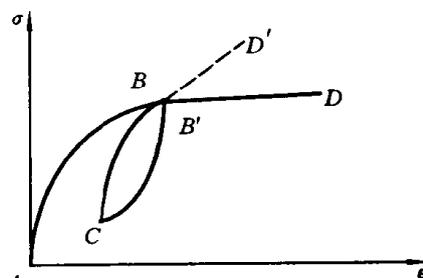


图 4.6 材料的记忆特性

### 4.3.2 变幅循环下的 $\sigma-\epsilon$ 响应计算

利用材料的循环性能和记忆特性,现在开始讨论变幅循环下的  $\sigma-\epsilon$  响应计算。

先看一例。

若已知某构件承受的变应变循环历程如图 4.7(a) 所示,下面研究如何分析其应力响应,并作出相应的  $\sigma-\epsilon$  响应曲线。

如前所述,对于随机载荷历程,总可以用其典型谱段来描述。考虑到循环载荷作用下的材料性能需经历一定次数之后才能稳定,这里讨论的是稳态循环下的应力-应变响应。

因此,不失一般性,仍取最大峰或谷起止的谱段  $1-1'$  作为典型谱,如图 4.7 所示。

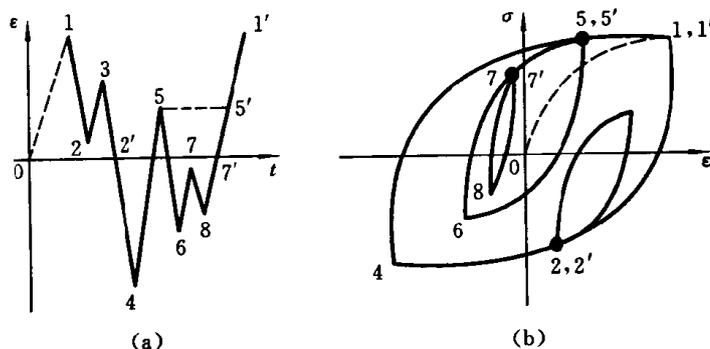


图 4.7 变应变循环下的应力响应

下面依据给出的应变历程,逐一讨论其应力响应。

0—1 是第一次加载,由于是循环稳定状态,前面已经历了许多循环,应力-应变响应由循环应力-应变曲线来描述。问题便成为:已知  $\epsilon_1$ , 由循环  $\sigma_a$ - $\epsilon_a$  曲线求  $\sigma_1$ , 即有

$$\epsilon_1 = (\sigma_1/E) + (\sigma_1/K')^{1/n'}$$

由此可解出  $\sigma_1$ 。

1—2 是在 1 处载荷反向后的变程。注意到反映应力-应变路径的是滞后环曲线,故问题成为:已知从 1 到 2 的应变变程  $\Delta\epsilon_{1-2}$ , 利用滞后环曲线,求相应的应力变程  $\Delta\sigma_{1-2}$ 。故有

$$\Delta\epsilon_{1-2} = \frac{\Delta\sigma_{1-2}}{E} + 2\left(\frac{\Delta\sigma_{1-2}}{2K'}\right)^{1/n'}$$

式中,  $\Delta\epsilon_{1-2} = |\epsilon_1 - \epsilon_2|$ 。求出  $\Delta\sigma_{1-2}$  后,考虑到从 1 到 2 是卸载,则 2 处的应力、应变为

$$\epsilon_2 = \epsilon_1 - \Delta\epsilon_{1-2}; \quad \sigma_2 = \sigma_1 - \Delta\sigma_{1-2}$$

2—3 是在 2 处载荷反向的变程。同上,已知  $\Delta\epsilon_{2-3}$ , 由滞后环曲线可求出  $\Delta\sigma_{2-3}$ 。从 2 到 3 是加载,故有

$$\epsilon_3 = \epsilon_2 + \Delta\epsilon_{2-3}; \quad \sigma_3 = \sigma_2 + \Delta\sigma_{2-3}$$

3—4 应变由 3 到 4 是卸载。经过 2' 处时,注意应变曾在该处(2 处)发生过反向,由材料记忆特性知 2—3—2' 形成封闭环,且不影响其后的  $\sigma$ - $\epsilon$  响应。故应当按原来的路径 1—2—4 计算第 4 点的  $\sigma$ - $\epsilon$  响应,即有

$$\Delta\epsilon_{1-4} = \frac{\Delta\sigma_{1-4}}{E} + 2\left(\frac{\Delta\sigma_{1-4}}{2K'}\right)^{1/n'}$$

且可得  $\epsilon_4 = \epsilon_1 - \Delta\epsilon_{1-4}; \quad \sigma_4 = \sigma_1 - \Delta\sigma_{1-4}$

4—5 加载。已知  $\Delta\epsilon_{4-5}$ , 由滞后环曲线求出  $\Delta\sigma_{4-5}$ , 则有

$$\epsilon_5 = \epsilon_4 + \Delta\epsilon_{4-5}; \quad \sigma_5 = \sigma_4 + \Delta\sigma_{4-5}$$

5—6 卸载。已知  $\Delta\epsilon_{5-6}$ , 由滞后环曲线求  $\Delta\sigma_{5-6}$ , 则有

$$\epsilon_6 = \epsilon_5 - \Delta\epsilon_{5-6}; \quad \sigma_6 = \sigma_5 - \Delta\sigma_{5-6}$$

6—7 加载。已知  $\Delta\epsilon_{6-7}$ , 由滞后环曲线求  $\Delta\sigma_{6-7}$ , 则有

$$\epsilon_7 = \epsilon_6 + \Delta\epsilon_{6-7}; \quad \sigma_7 = \sigma_6 + \Delta\sigma_{6-7}$$

7—8 卸载。已知  $\Delta\epsilon_{7-8}$ , 由滞后环曲线求  $\Delta\sigma_{7-8}$ , 有

$$\epsilon_8 = \epsilon_7 - \Delta\epsilon_{7-8}; \quad \sigma_8 = \sigma_7 - \Delta\sigma_{7-8}$$

8—1' 加载。注意经过 7' 处时,应变曾在 7 处反向,形成封闭环 7—8—7', 不考虑封闭环的影响,应按 6—7—1' 路径计算;又有经过 5' 处时,形成封闭环 5—6—5', 则应按 4—5—1' 路径计算;到 1' 时,应变曾在 1 处反向,形成封闭环 1—4—1'; 故有

$$\epsilon_{1'} = \epsilon_1; \quad \sigma_{1'} = \sigma_1$$

至此,已知变应变谱下的  $\sigma$ - $\epsilon$  响应计算完毕。依据各点的应力-应变数据  $(\epsilon_i, \sigma_i)$ , 在  $\sigma$ - $\epsilon$  坐标中描点,再将各点依次连接,即可得到  $\sigma$ - $\epsilon$  响应曲线,如图 4.7(b) 所示。由图可见,例中典型应变谱下的  $\sigma$ - $\epsilon$  响应形成了 1—4—1'、2—3—2'、5—6—5' 及 7—8—7' 四个循环。

将雨流计数法与以上分析相比较可知,雨流计数法的结果与变应变循环应力-应变响应计算的结果是一致的,由此可见雨流计数法的合理性。

综上所述,可将变幅循环下的应力-应变响应计算方法归纳为:

1) 第一次加载,用循环应力-应变曲线  $(\sigma_a - \epsilon_a)$  来描述,由谱中已知的  $\epsilon_a$  计算出  $\sigma_a$ 。

2) 对于后续反向,用滞后环来描述,由谱中已知的  $\Delta\epsilon$  算出相应的  $\Delta\sigma$ , 且有

$$\epsilon_{i+1} = \epsilon_i \pm \Delta\epsilon_{i-i+1}$$

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i \pm \Delta\sigma_{i-i+1}$$

式中,加载变程用“+”,卸载用“-”。

3) 注意材料记忆特性,应变第二次到达反向点时,形成封闭环。由于封闭环不影响其后的响应,故应按不考虑该封闭环的路径计算后续响应。

4) 依据应力-应变数据  $(\epsilon_i, \sigma_i)$ , 可在  $\sigma$ - $\epsilon$  坐标中画出  $\sigma$ - $\epsilon$  响应曲线。

在由  $\epsilon_a$  计算  $\sigma_a$  或由  $\Delta\epsilon$  计算  $\Delta\sigma$  时,需要用数值方法(试凑法)求解。

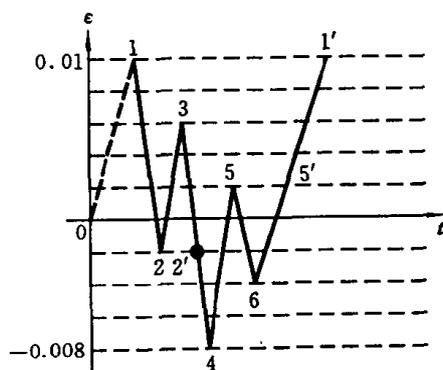
**例 4.1** 变幅载荷(应变)谱如例 4.1 图所示。已知  $E = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}$ ,  $K' = 1220 \text{MPa}$ ,  $n' = 0.2$ , 试计算其循环响应。

**解** 0—1 先由循环  $\sigma_a$ - $\epsilon_a$  曲线计算应变(幅)  $\epsilon_1$  对应的应力(幅)  $\sigma_1$ 。有

$$\epsilon_1 = 0.01 = \sigma_1/E + (\sigma_1/K')^{1/n'}$$

$$\therefore \sigma_1 = 462 \text{MPa}$$

1—2 卸载。按滞后环  $(\Delta\epsilon - \Delta\sigma)$  曲线计



例 4.1 图(a) 典型应变谱

算后续响应。有

$$\Delta\epsilon_{1-2} = \Delta\sigma_{1-2}/E + 2(\Delta\sigma_{1-2}/2K')^{1/n'} = 0.012$$

求得

$$\Delta\sigma_{1-2} = 812\text{MPa}$$

故有

$$\epsilon_2 = \epsilon_1 - \Delta\epsilon_{1-2} = -0.02$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 - \Delta\sigma_{1-2} = -350\text{MPa}$$

2—3 加载。由载荷谱知,  $\Delta\epsilon_{2-3} = 0.008$ , 可求得  $\Delta\sigma_{2-3} = 722\text{MPa}$ 。故有

$$\epsilon_3 = 0.006, \quad \sigma_3 = 372\text{MPa}$$

3—4 卸载到达 2' 之应变时, 该处(2)曾发生应变反向, 故 2—3—2' 形成封闭环。不考虑封闭环影响, 此次卸载应按 1—4 的路径计算。

1—4 卸载。由  $\Delta\epsilon_{1-4} = 0.018$ , 算得  $\Delta\sigma_{1-4} = 900\text{MPa}$ , 有

$$\epsilon_4 = -0.008, \quad \sigma_4 = -438\text{MPa}$$

4—5 加载。 $\Delta\epsilon_{4-5} = 0.01$ , 算得  $\Delta\sigma_{4-5} = 772\text{MPa}$ 。有

$$\epsilon_5 = 0.002, \quad \sigma_5 = 334\text{MPa}$$

5—6 卸载。 $\Delta\epsilon_{5-6} = 0.006$ , 算得  $\Delta\sigma_{5-6} = 658\text{MPa}$ 。有

$$\epsilon_6 = -0.004, \quad \sigma_6 = -324\text{MPa}$$

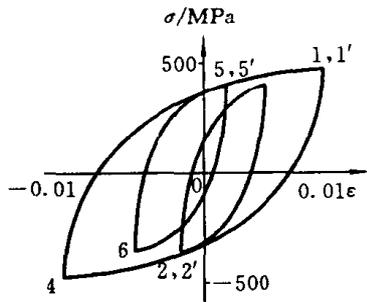
6—1' 加载到达 5' 之应变时, 5—6—5' 形成了封闭环。考虑路径 4—1'。

4—1' 加载到达 1' 之应变时, 1—4—1' 形成了封闭环。故有

$$\sigma_{1'} = \sigma_1$$

绘出  $\sigma$ - $\epsilon$  响应曲线如例 4.2 图所示。

也可先用雨流法找出封闭环, 有 1—4—1', 2—3—2', 5—6—5' 三个环, 各环形成之后, 不影响其后的  $\sigma$ - $\epsilon$  响应。



例 4.1 图(b)  $\sigma$ - $\epsilon$  响应

## 4.4 应变疲劳性能

前面所讨论的循环应力-应变曲线和滞后环曲线, 描述的是材料的循环性能。由此, 我们可以进行循环应力-应变响应分析。

应变疲劳性能, 讨论的是应变与寿命之间的关系, 用  $\epsilon$ - $N$  曲线来描述。因为

应变疲劳研究的是载荷大(超过屈服应力)、寿命短(一般小于  $10^4$ ) 的情况,故试验时加载频率通常较低( $0.1 \sim 1\text{Hz}$ )。

#### 4.4.1 应变 - 寿命曲线

按照标准试验方法,在  $R = -1$  的对称循环下,进行给定应变幅下的对称恒幅循环疲劳试验,可得到图 4.8 所示的一般规律。图中,载荷用应变幅  $\epsilon_a$  表示,寿命用载荷反向次数  $2N$  表示。注意到一个循环有二次反向, $N$  即为循环次数。应变幅  $\epsilon_a$  越小,寿命  $N$  就越长;低于某一载荷水平(应力或应变幅),寿命可以趋于无穷大。

由实验记录可知应变幅  $\epsilon_a$ 、应力幅  $\sigma_a$  和破坏循环数  $2N_f$ 。将总应变幅  $\epsilon_a$  写成弹性应变幅  $\epsilon_{ea}$  和塑性应变幅  $\epsilon_{pa}$  两部分,有

$$\epsilon_{ea} = \sigma_a/E \quad \text{和} \quad \epsilon_{pa} = \epsilon_a - \epsilon_{ea}$$

分别画出  $\lg \epsilon_{ea} - \lg(2N_f)$ ,  $\lg \epsilon_{pa} - \lg(2N_f)$  之关系,如图中直线所示,呈对数线性关系。由此,可分别有

$$\epsilon_{ea} = \frac{\sigma'_f}{E}(2N)^b \quad (4-15)$$

$$\epsilon_{pa} = \epsilon'_f(2N)^c \quad (4-16)$$

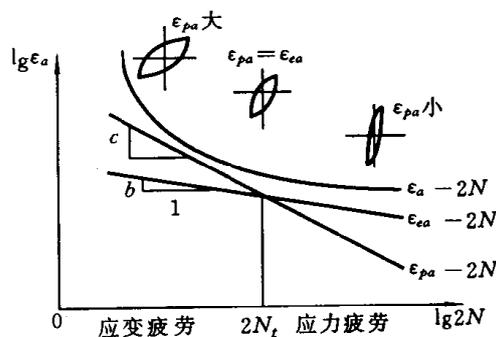


图 4.8 典型的应变 - 寿命曲线

(4-15) 式反映了弹性应变幅  $\epsilon_{ea}$  与寿命  $2N$  间的关系,  $\sigma'_f$  称为疲劳强度系数,具有应力量纲;  $E$  为弹性模量,  $b$  为疲劳强度指数。(4-16) 式,反映塑性应变幅  $\epsilon_{pa}$  与寿命  $2N$  间的关系,  $\epsilon'_f$  称为疲劳延性系数,与应变一样,无量纲;  $c$  为疲劳延性指数。  $b$ 、 $c$  分别为图中二直线的斜率。对于大多数金属材料,疲劳强度指数  $b$  一般为  $-0.06 \sim -0.14$ , 估计时可取  $-0.1$ 。疲劳延性指数  $c$  一般为  $-0.5 \sim -0.7$ , 常取  $-0.6$  作为其典型值。

因此,  $\epsilon$ - $N$  曲线可写为

$$\epsilon_a = \epsilon_{ea} + \epsilon_{pa} = \frac{\sigma'_f}{E}(2N)^b + \epsilon'_f(2N)^c \quad (4-17)$$

在长寿命阶段,以弹性应变幅  $\epsilon_{ea}$  为主,塑性应变幅  $\epsilon_{pa}$  的影响可忽略,  $\epsilon_a \approx \epsilon_{ea}$ , 且有

$$\epsilon_{ea} = \frac{\sigma'_f}{E}(2N)^b \quad \text{或写为} \quad \epsilon_{ea}^{m_1} N = C_1$$

此即反映应力疲劳性能的  $S-N$  曲线。

在短寿命阶段,以塑性应变幅  $\epsilon_{pa}$  为主,弹性应变幅  $\epsilon_{ea}$  影响可忽略,  $\epsilon_a \approx \epsilon_{pa}$ , 且有

$$\epsilon_{pa} = \epsilon'_f (2N)^c \quad \text{或写为} \quad \epsilon_{pa}^{m_2} N = C_2$$

这就是著名的 Manson-Coffin 低周应变疲劳公式(1963年)。

当  $\epsilon_{ea} = \epsilon_{pa}$  时,有

$$\frac{\sigma'_f}{E} (2N_t)^b = \epsilon'_f (2N_t)^c$$

由此可求得

$$2N_t = (\epsilon'_f E / \sigma'_f)^{1/(b-c)} \quad (4-18)$$

若寿命大于  $2N_t$ , 弹性应变为主,是应力疲劳;寿命小于  $2N_t$ , 塑性应变为主,是低周应变疲劳(如图 4.8 所示)。因此,  $2N_t$  被称为转变寿命。

讨论:材料循环性能和疲劳性能诸参数之关系

描述材料循环性能的是循环应力-应变曲线(4-13)式,有

$$\sigma_a = E\epsilon_{ea} \quad \text{和} \quad \sigma_a = K'(\epsilon_{pa})^{n'}$$

描述材料疲劳性能的是应变-寿命曲线(4-17)式,且有

$$\epsilon_{ea} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N)^b \quad \text{和} \quad \epsilon_{pa} = \epsilon'_f (2N)^c$$

由上述四个方程,可得到关于  $\epsilon_{ea}$ 、 $\epsilon_{pa}$  的两个方程为

$$\begin{aligned} E\epsilon_{ea} - K'(\epsilon_{pa})^{n'} &= 0 \\ E\epsilon_{ea} - (\sigma'_f/\epsilon_f^{b/c})(\epsilon_{pa})^{b/c} &= 0 \end{aligned}$$

显然,二式中  $\epsilon_{pa}$  项的系数和指数应分别相等,故六个系数间有下列关系:

$$K' = \sigma'_f / (\epsilon'_f)^{b/c}; \quad n' = b/c$$

注意到各系数是由实验结果经曲线拟合而得的,故数值上往往并不能严格满足上述关系。但若相差显著,则应引起注意。

#### 4.4.2 $\epsilon-N$ 曲线的近似估计及平均应力的影响

在应变控制下,一般金属材料的  $\epsilon-N$  曲线有如图 4.9 所示的特征。即当应变

幅  $\epsilon_a = 0.01$  时,许多材料都有大致相同的寿命。在高应变范围内,寿命的增加主要取决于材料的延性;而在低应变、长寿命阶段,强度高的材料,寿命长一些。

1965年, Manson 在研究了钢、钛、铝合金材料的大量实验结果基础上,提出了一个由材料单调拉伸性能估计  $\epsilon-N$  曲线的经验公式:

$$\Delta\epsilon = 3.5 \frac{S_u}{E} (N)^{-0.12} + \epsilon_f^0.6 (N)^{-0.6} \quad (4-19)$$

式中,  $S_u$  为材料的极限强度;  $\epsilon_f$  为由(4-9)式给出的断裂真应变;二者均可由单调拉伸试验得到。

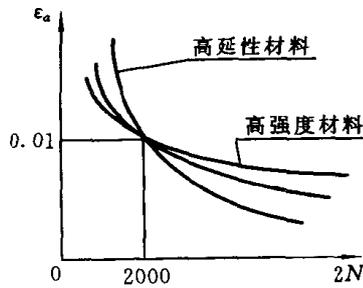


图 4.9 不同金属的应变-寿命曲线

(4-19) 式给出的关于  $\epsilon-N$  关系的估计,仅可用于恒幅对称应变循环性能。平均应力或平均应变的影响是非常复杂的。美国汽车工程师协会(SAE)的疲劳设计手册中用下述经验公式考虑平均应力的影响:

$$\epsilon_a = \frac{\sigma'_f - \sigma_m}{E} (2N)^b + \epsilon'_f (2N)^c \quad (4-20)$$

式中,  $\sigma_m$  为平均应力。在对称循环时,  $\sigma_m = 0$ , 即得(4-17)式。

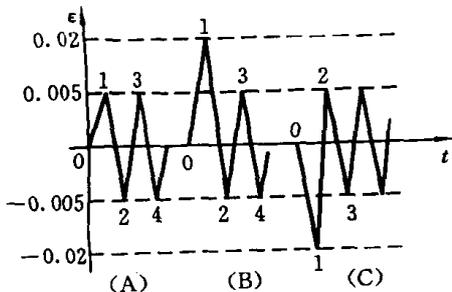
注意到  $b < 0$ 、 $c < 0$ , 故当寿命  $N$  相同时,平均应力越大,可承受的应变幅  $\epsilon_a$  越小;或应变幅不变,平均应力越大,则寿命  $N$  越短。可见,拉伸平均应力是有害的,压缩平均应力则可提高疲劳寿命。

### 4.4.3 应变疲劳寿命估算

现在讨论利用  $\epsilon-N$  曲线进行疲劳寿命估算的方法。

假定已知应变或应力历程,首先要进行循环响应计算,寻找出应力-应变响应的稳态环,并由稳态环确定循环应变幅  $\epsilon_a$  和平均应力  $\sigma_m$ , 然后利用(4-20)式估算寿命。

作为特例,若构件承受的是恒幅对称应变循环( $\sigma_m = 0$ ),则可利用(4-17)式,直接由已知的应变幅  $\epsilon_a$  估算疲劳寿命。



例 4.2 图(a)

**例 4.2** 已知某材料有  $E = 210 \times 10^3 \text{MPa}$ ,  $n' = 0.2$ ,  $K' = 1220 \text{MPa}$ ,  $\sigma'_f = 930 \text{MPa}$ ,  $b = -0.095$ ,  $c = -0.47$ ,  $\epsilon'_f = 0.26$ , 试估计在例 4.2 图(a) 所示三种应变历程下的寿命。

**解** 情况(A)为恒幅应变对称循环,

且

$$\epsilon_a = 0.005; \quad \sigma_m = 0$$

直接由  $\epsilon-N$  曲线(4-17) 式估算寿命, 有

$$\epsilon_a = \frac{\sigma'_f - \sigma_m}{E} (2N)^b + \epsilon'_f (2N)^c = 0.005$$

求得  $2N = 11716$ ,  $N = 5858$  次循环。

情况(B):

1) 计算  $\sigma-\epsilon$  响应如下:

$$0-1 \quad \epsilon_1 = 0.02 = \sigma_1/E + (\sigma_1/K')^{1/n'}, \quad \therefore \sigma_1 = 542\text{MPa}$$

$$1-2 \quad \Delta\epsilon_{1-2} = 0.025 = \Delta\sigma_{1-2}/E + 2(\Delta\sigma_{1-2}/2K')^{1/n'}$$

$$\text{求得} \quad \Delta\sigma_{1-2} = 972\text{MPa}$$

$$\text{有} \quad \epsilon_2 = \epsilon_1 - \Delta\epsilon_{1-2} = -0.005$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 - \Delta\sigma_{1-2} = -430\text{MPa}$$

$$2-3 \quad \Delta\epsilon_{2-3} = 0.01, \quad \therefore \Delta\sigma_{2-3} = 772\text{MPa}$$

$$\text{有} \quad \epsilon_3 = 0.005, \quad \sigma_3 = 342\text{MPa}$$

3-4 注意到 2-3-4 形成封闭环。有

$$\epsilon_4 = \epsilon_2 = -0.005, \quad \sigma_4 = \sigma_2 = -430\text{MPa}$$

2) 画  $\sigma-\epsilon$  响应曲线, 如例 4.2 图(b) 所示, 由图中稳态环求得

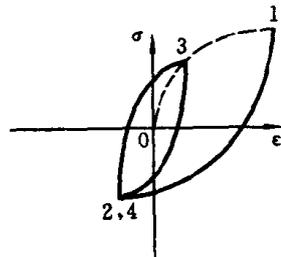
$$\epsilon_a = (\epsilon_3 - \epsilon_4)/2 = 0.005$$

$$\sigma_m = (\sigma_3 + \sigma_4)/2 = -44\text{MPa}$$

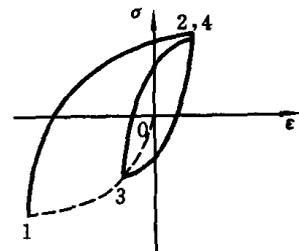
3) 估算寿命, 有

$$\epsilon_a = \frac{\sigma'_f - \sigma_m}{E} (2N)^b + \epsilon'_f (2N)^c$$

代入数值后解得  $2N = 12340$ , 所以,  $N = 6170$  次循环。



例 4.2 图(b)



例 4.2 图(c)

可见,拉伸高载后引入了残余压应力( $\sigma_m < 0$ ), 疲劳寿命延长,是有利的。

情况(C):

1) 循环响应计算:

$$0-1 \quad \epsilon_1 = 0.02 = \sigma_1/E + (\sigma_1/K')^{1/n'}, \quad \therefore \sigma_1 = 542\text{MPa}$$

注意到拉压对称性且此处是压缩,故  $\epsilon_1 = -0.02$  时,

$$\sigma_1 = -542\text{MPa}$$

由滞后环曲线计算后续响应得

$$1-2 \quad \epsilon_2 = 0.005, \quad \sigma_2 = 430\text{MPa}$$

$$2-3 \quad \epsilon_3 = -0.005, \quad \sigma_3 = -342\text{MPa}$$

2) 画  $\sigma$ - $\epsilon$  响应曲线,如例 4.2 图(c) 所示,求得

$$\epsilon_a = 0.005; \quad \sigma_m = (\sigma_3 + \sigma_4)/2 = 44\text{MPa}$$

3) 由(4-20)式求寿命得到

$$2N = 11130, \quad N = 5565 \text{ 次循环。}$$

可见,压缩高载后引入了残余拉应力( $\sigma_m > 0$ ), 使疲劳寿命缩短,是有害的。

## 4.5 缺口应变分析

对于缺口件,其高应力区或裂纹起始位置,在缺口根部。

分析缺口疲劳问题的基本假设是:“若缺口根部承受与光滑件相同的应力应变历程,则将发生与光滑件相同的疲劳损伤”。由此,就可以借助于前面关于材料应变疲劳性能的研究,讨论缺口件的疲劳问题。

如图 4.10 所示,将缺口根部材料元看做一个小试件,它在缺口局部应力  $\sigma$  或应变  $\epsilon$  循环作用下的裂纹萌生寿命,应当由承受同样载荷历程的光滑件预测。对于缺口件,若已知其净截面名义应力  $S$ , 名义应变  $e$ , 则问题就成为如何确定缺口局部的应力  $\sigma$  和局部应变  $\epsilon$  了。

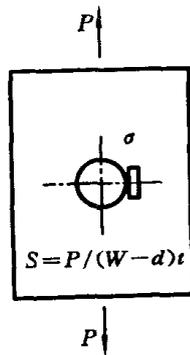


图 4.10 缺口应力集中

### 4.5.1 缺口局部应力应变

本节先讨论单调加载情况下的缺口局部应力应变分析方法。



## 3. 用于平面应力的 Neuber 理论

对于平面应力情况,如带缺口薄板拉伸,Neuber 假定:

$$K_t K_e = K_t^2 \quad (4-22)$$

两端同乘  $eS$ , 有  $(K_t e)(K_e S) = (K_t S)(K_e e)$ , 注意到  $K_t e$  为缺口局部应变  $\epsilon$ ,  $K_e S$  为缺口局部应力  $\sigma$ , 则有

$$\sigma \epsilon = K_t^2 e S \quad (4-23)$$

上式称为 Neuber 双曲线。由此补充方程与应力 - 应变关系式一起,即可联立求解缺口局部应力  $\sigma$  和局部应变  $\epsilon$ 。图 4.11 中,Neuber 双曲线与材料  $\sigma$ - $\epsilon$  曲线的交点  $D$ , 即为 Neuber 理论的解答值。

例 4.3 已知材料弹性模量  $E = 60\text{GPa}$ , 单调强度系数  $K = 2000\text{MPa}$ , 单调硬化指数  $n = 0.125$ 。若缺口名义应力  $S = 600\text{MPa}$ , 弹性应力集中系数  $K_t = 3$ , 求缺口局部应力、应变。

解 已知  $S = 600\text{MPa}$ , 材料应力 - 应变曲线为

$$e = S/60000 + (S/2000)^8$$

求得名义应变为  $e = 0.01 + (0.3)^8 \approx 0.01$

1) 线性理论:有  $\epsilon = K_t e = 3 \times 0.01 = 0.03$

由材料应力 - 应变曲线;有

$$\epsilon = 0.03 = \sigma/60000 + (\sigma/2000)^8$$

可解出  $\sigma = 1138\text{MPa}$

2) Neuber 理论:有 Neuber 双曲线

$$\sigma \epsilon = K_t^2 e S = 9 \times 0.01 \times 600 = 54$$

和材料应力-应变曲线

$$\epsilon = \sigma/60000 + (\sigma/2000)^8$$

联立后得到  $\sigma/60000 + (\sigma/2000)^8 = 54/\sigma$

可解出  $\sigma = 1245\text{MPa}$ ,

且有  $\epsilon = 54/\sigma = 0.043$

由此可见,用 Neuber 理论估计的  $\sigma, \epsilon$  大于线性理论,是偏于保守的。故工程中常用 Neuber 理论进行缺口应力应变估计。

## 4.5.2 循环载荷下的缺口应力应变分析和寿命估算

在循环载荷作用下,缺口局部应力 - 应变也是随时间变化的。如前所述,进行缺口局部应力 - 应变分析时,第一次加载,应当用反映材料循环性能的循环应力 - 应变曲线代替单调应力 - 应变曲线;其后的各次载荷反向,应力 - 应变响应路

径应当由滞后环来描述。同时,还要考虑缺口应力集中的影响。

循环载荷作用下缺口局部应力 - 应变分析的问题是:已知名义应力  $S$  或应变  $e$  的历程,已知缺口局部的弹性应力集中系数  $K_t$ ,分析计算缺口局部应力  $\sigma$ 、局部应变  $\epsilon$  的响应,找出稳态环及其应变幅  $\epsilon_a$  和平均应力  $\sigma_m$ ,进而利用  $\epsilon$ - $N$  曲线估算寿命。

分析计算步骤可归纳为

1) 第一次加载,已知名义应力  $S_1$  或名义应变  $e_1$ ,由循环应力 - 应变曲线和 Neuber 双曲线

$$\epsilon_1 = (\sigma_1/E) + (\sigma_1/K')^{1/n'}$$

$$\sigma_1 \epsilon_1 = K_t^2 S_1 e_1$$

联立求解缺口局部应力  $\sigma_1$  和局部应变  $\epsilon_1$ 。

2) 其后反向,已知变程  $\Delta S$  或  $\Delta e$ ,用滞后环曲线和 Neuber 双曲线计算缺口局部的应力、应变变程  $\Delta\sigma$ 、 $\Delta\epsilon$ ,注意在写 Neuber 曲线方程时,应力、应变应当用变程代替。即由

$$\Delta\sigma\Delta\epsilon = K_t^2 \Delta S \Delta e$$

$$\Delta\epsilon = (\Delta\sigma/E) + 2(\Delta\sigma/2K')^{1/n'}$$

联立求解  $\Delta\sigma$ 、 $\Delta\epsilon$ 。

3) 第  $i$  点对应的缺口局部应力  $\sigma_i$ 、局部应变  $\epsilon_i$  分别为

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i \pm \Delta\sigma_{i \sim i+1}; \quad \epsilon_{i+1} = \epsilon_i \pm \Delta\epsilon_{i \sim i+1}$$

式中,加载时用“+”,卸载时用“-”。

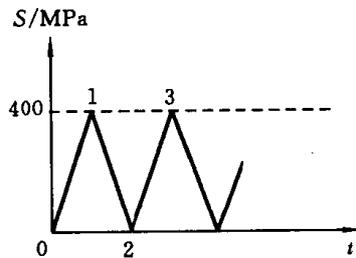
4) 确定稳态环的应变幅  $\epsilon_a$  和平均应力  $\sigma_m$ 。

$$\epsilon_a = (\epsilon_{\max} - \epsilon_{\min})/2; \quad \sigma_m = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/2$$

5) 利用  $\epsilon$ - $N$  曲线

$$\epsilon_a = \frac{\sigma'_f - \sigma_m}{E} (2N)^b + \epsilon'_f (2N)^c$$

估算寿命。



例 4.4 图(a)

例 4.4 某压力容器承受恒幅循环载荷作用,名义应力谱如例 4.4 图(a)所示,焊缝  $K_t = 3$ ,材料参数  $E = 2 \times 10^5 \text{MPa}$ ,  $\sigma'_f = 1700 \text{MPa}$ ,  $\epsilon'_f = 0.6$ ,  $b = -0.1$ ,  $c = -0.7$ ,  $K' = 1600 \text{MPa}$ ,  $n' = 1/8$ ,试估算其寿命。

解 1) 缺口应力 - 应变响应计算。

0—1 已知  $S_1 = 400\text{MPa}$ , 由循环应力 - 应变曲线计算  $e_1$ , 有

$$e_1 = S_1/E + (S_1/K')^{1/n'} = 0.00202$$

由 Neuber 双曲线, 有

$$\sigma_1 e_1 = K_t^2 S_1 e_1 = 7.272$$

和循环应力-应变曲线

$$e_1 = (\sigma_1/E) + (\sigma_1/K')^{1/n'} = 7.272/\sigma_1$$

联立求解后得

$$\sigma_1 = 820\text{MPa}; \quad \epsilon_1 = 0.0089$$

1—2 卸载。已知  $\Delta S_{1-2} = 400$ , 由滞后环曲线有

$$\Delta e_{1-2} = \Delta S/E + 2(\Delta S/2K')^{1/n'} = 0.002$$

Neuber 双曲线为

$$\Delta \sigma \Delta \epsilon = K_t^2 \Delta S \Delta e = 7.2$$

且有滞后环曲线

$$\Delta \epsilon = (\Delta \sigma/E) + 2(\Delta \sigma/2K')^{1/n'} = 7.2/\Delta \sigma$$

解得

$$\Delta \sigma_{1-2} = 1146; \quad \Delta \epsilon_{1-2} = 0.006283$$

故有

$$\sigma_2 = (820 - 1146)\text{MPa} = -326\text{MPa}$$

$$\epsilon_2 = 0.0089 - 0.006283 = 0.002617$$

2—3 加载。已知  $\Delta S_{2-3} = 400$ , 可求得

$$\Delta e_{2-3} = \Delta S/E + 2(\Delta S/2K')^{1/n'} = 0.002$$

同样可由 Neuber 双曲线和滞后环曲线求得

$$\Delta \sigma_{2-3} = 1146; \quad \Delta \epsilon_{2-3} = 0.006283$$

故有

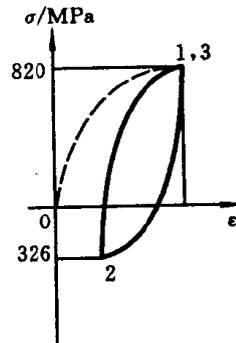
$$\sigma_3 = 820\text{MPa}; \quad \epsilon_3 = 0.0089$$

2) 缺口局部应力 - 应变响应如例 4.4 图(b) 所示, 由稳态环知

$$\epsilon_a = (\epsilon_1 - \epsilon_2)/2 = 0.003141$$

$$\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2)/2 = 247\text{MPa}$$

3) 将  $\epsilon_a = 0.003141$ ,  $\sigma_m = 247\text{MPa}$  代入  $\epsilon-N$  曲线方程, 求寿命。



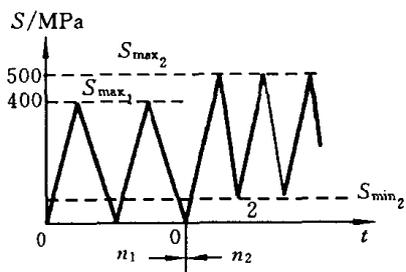
例 4.4 图(b)

$$\epsilon_a = \frac{\sigma'_f - \sigma_m}{E} (2N)^b + \epsilon'_f (2N)^c$$

得到寿命为  $N = 12470$  次循环。

在变幅载荷作用下,仍然可用Miner理论进行损伤累积和寿命估算。下面通过一例说明其分析方法。

**例 4.5** 若上例中构件在  $S_{\max_1} = 400\text{MPa}$ ,  $R = 0$  下循环  $n_1 = 5000$  次,再继续在  $S_{\max_2} = 500\text{MPa}$ ,  $R = 0.2$  下工作,如例 4.5 图(a)所示,求构件还能工作的



例 4.5 图(a)

的次数  $n_2$ 。

**解** 由 Miner 理论有

$$\sum n_i/N_i = n_1/N_1 + n_2/N_2 = 1$$

由例 4.4 知,在  $R = 0, S_{\max_1} = 400\text{MPa}$  下寿命为  $N_1 = 12470$ , 且知  $n_1 = 5000$ 。故只要再求得在  $R = 0.2, S_{\max_2} = 500\text{MPa}$  的寿命  $N_2$ , 即可估算构件的剩余寿命  $n_2$ 。

1)  $R = 0.2, S_{\max_2} = 500\text{MPa}$  时的缺口应力 - 应变响应计算。

0—1  $S_1 = 500$ , 求得名义应变为

$$e_1 = 0.00259$$

由 Neuber 曲线和循环应力-应变曲线联立后求得

$$\sigma_1 = 885\text{MPa}, \quad \epsilon_1 = 0.01317$$

1—2  $\Delta S_{1-2} = 400$ , 有  $\Delta e_{1-2} = 0.002$

由 Neuber 双曲线和滞后环曲线求得

$$\Delta \sigma_{1-2} = 1146, \quad \Delta \epsilon_{1-2} = 0.006283$$

有

$$\sigma_2 = -261\text{MPa}, \quad \epsilon_2 = 0.006887$$

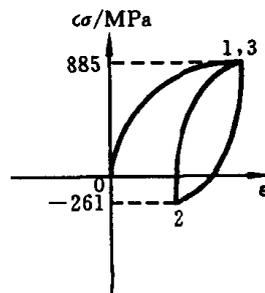
2—3 有  $\sigma_3 = \sigma_1, \epsilon_3 = \epsilon_1$ 。应力 - 应变响应如例 4.5 图(b)所示。

2) 由稳态环求出:

$$\epsilon_a = 0.003141, \quad \sigma_m = 312\text{MPa}$$

3) 求得在此恒幅载荷作用下的寿命为

$$N_2 = 10341$$



例 4.5 图(b)

4) 由  $n_1/N_1 + n_2/N_2 = 1$  可知

$$n_2 = 6195 \text{ 次循环。}$$

## 小 结

1. 材料的循环性能,是循环载荷作用下的应力-应变关系,由循环应力-应变曲线与滞后环曲线来描述。

循环应力-应变曲线:

$$\epsilon_a = \epsilon_{ea} + \epsilon_{pa} = \frac{\sigma_a}{E} + \left( \frac{\sigma_a}{K'} \right)^{1/n'}$$

滞后环曲线:

$$\Delta\epsilon = \Delta\epsilon_e + \Delta\epsilon_p = \frac{\Delta\sigma}{E} + 2 \left( \frac{\Delta\sigma}{2K'} \right)^{1/n'}$$

2. 材料的疲劳性能,是循环载荷作用下的应变(或应力)-寿命关系,由  $\epsilon-N$  曲线(或  $S-N$  曲线)来描述。

$\epsilon-N$  曲线(对称循环):

$$\epsilon_a = \epsilon_{ea} + \epsilon_{pa} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N)^b + \epsilon'_f (2N)^c$$

考虑平均应力的影响时,有

$$\epsilon_a = \frac{\sigma'_f - \sigma_m}{E} (2N)^b + \epsilon'_f (2N)^c$$

3.  $2N_t$  是以塑性应变为主的低周应变疲劳与以弹性应变为主的高周应力疲劳间的转变寿命。

$$\epsilon_{ea} = \epsilon_{pa} \text{ 时, 有 } 2N_t = (\epsilon'_f E / \sigma'_f)^{1/(b-c)}$$

$N < N_t$ , 为低周应变疲劳;  $N > N_t$ , 为高周应力疲劳。

4. 应变疲劳寿命估算方法:

已知应力或应变历程  $\rightarrow$  计算循环  $\sigma-\epsilon$  响应  $\rightarrow$  由稳态环求  $\epsilon_a, \sigma_m \rightarrow$  计算寿命  $2N$ 。

特例:若为恒幅应变对称循环,则已知  $\epsilon_a, \sigma_m = 0$ ;可直接由  $\epsilon-N$  曲线求寿命  $2N$ 。

5. 变幅循环响应计算方法:

a) 第一次加载,用循环应力-应变曲线( $\sigma_a-\epsilon_a$ )描述,由谱中已知的  $\epsilon_a$  算出  $\sigma_a$ 。

b) 后续反向,用滞后环描述,由谱中已知的  $\Delta\epsilon$  算出相应的  $\Delta\sigma$ ,且

$$\epsilon_{i+1} = \epsilon_i \pm \Delta\epsilon_{i-i+1}, \quad \sigma_{i+1} = \sigma_i \pm \Delta\sigma_{i-i+1}$$

加载时用“+”，卸载时用“-”。

c) 注意材料记忆特性，应变第二次到达反向点时，形成封闭环，封闭环不影响其后的响应。

d) 注意这种响应算法与雨流计数法结果的一致性，也说明雨流法的合理性。

6. 缺口应变分析和寿命预测方法。

缺口局部应力-应变响应分析计算：

第一次加载：已知  $S_1$  或  $e_1 \rightarrow$  由循环应力-应变曲线求  $e_1$  或  $S_1$ 。

由 Neuber 曲线和  $\sigma_a-\epsilon_a$  曲线

$$\epsilon_1 = (\sigma_1/E) + (\sigma_1/K')^{1/n'}$$

$$\sigma_1 \epsilon_1 = K_i^2 S_1 e_1$$

求缺口局部应力  $\sigma_1$  和局部应变  $\epsilon_1$ 。

后续反向：已知  $\Delta S$  或  $\Delta e \rightarrow$  由滞后环曲线求  $\Delta e$  或  $\Delta S$ 。

由 Neuber 曲线 + 滞后环 ( $\Delta\sigma-\Delta\epsilon$ ) 曲线：

$$\Delta\sigma\Delta\epsilon = K_i^2 \Delta S \Delta e$$

$$\Delta\epsilon = (\Delta\sigma/E) + 2(\Delta\sigma/K')^{1/n'}$$

求  $\Delta\sigma, \Delta\epsilon$ 。

第  $i$  点对应的缺口局部应力  $\sigma_i$ 、局部应变  $\epsilon_i$  为

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i \pm \Delta\sigma_{i-i+1}, \quad \epsilon_{i+1} = \epsilon_i \pm \Delta\epsilon_{i-i+1}$$

加载时用“+”，卸载时用“-”。

稳态环的应变幅  $\epsilon_a$  和平均应力  $\sigma_m$ ：

$$\epsilon_a = (\epsilon_{\max} - \epsilon_{\min})/2, \quad \sigma_m = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/2$$

寿命估算：利用  $\epsilon-N$  曲线

$$\epsilon_a = \frac{\sigma'_f - \sigma_m}{E} (2N)^b + \epsilon'_f (2N)^c$$

估算寿命。

7. 变幅载荷下，Miner 累积损伤理论仍然可用。

## 思考题与习题

4-1 什么是应力疲劳？什么是应变疲劳？试述其联系与差别。

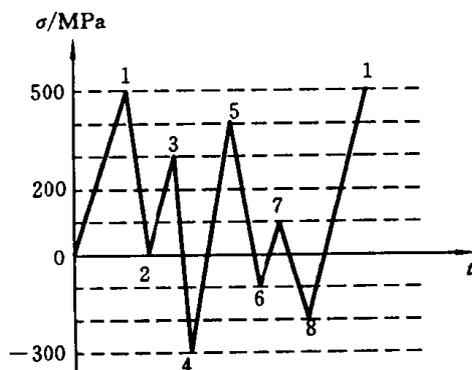
- 4-2 什么是材料的循环性能？什么是材料的疲劳性能？如何描述？
- 4-3 如果工程应变  $e = 0.2\%, 0.5\%, 1\%, 2\%, 5\%$ ，试估算工程应力  $S$  与真实应力  $\sigma$ ，工程应变  $e$  与真实应变  $\epsilon$  之间的差别有多大？
- 4-4 若真应力 - 真应变服从幂律关系  $\sigma = K(\epsilon_p)^n$ ，试证明应变硬化指数  $n$  等于颈缩开始处的真塑性应变。(提示：颈缩开始处，工程应力 - 应变曲线的斜率为 0，即  $dS/de = 0$ )
- 4-5 下表给出了一组恒幅应变对称循环的试验结果， $E = 200\text{GPa}$ 。试确定
- 循环应力 - 应变曲线。
  - 应变 - 寿命曲线。
  - $\Delta\epsilon/2 = 0.0075$  时的疲劳寿命。

$\Delta\epsilon/2$	0.002	0.005	0.010	0.015
$(\Delta\sigma/2)/\text{MPa}$	260	370	420	440
$2N_f/\text{次}$	416700	15900	2670	990

- 4-6 试导出过渡寿命  $2N_t = (\epsilon'_f E / \sigma'_f)^{1/(b-c)}$  的表达式。算出下列材料的过渡寿命  $2N_t$ ，并确定此时的总应变幅  $\Delta\epsilon/2$ 。

参数	$\sigma'_f/\text{MPa}$	$\epsilon'_f$	$b$	$c$	$E/\text{GPa}$
低强钢	800	1.0	-0.1	-0.5	200
高强钢	2700	0.1	-0.08	-0.7	210
RQC-100 钢	1240	0.66	-0.07	-0.69	200
2024-T3 铝	1100	0.22	-0.124	-0.59	70

- 4-7 材料的循环性能为： $E = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}$ ， $K' = 1220 \text{MPa}$ ， $n' = 0.2$ 。试计算图示应力谱下的循环响应，并画出  $\sigma-\epsilon$  图。



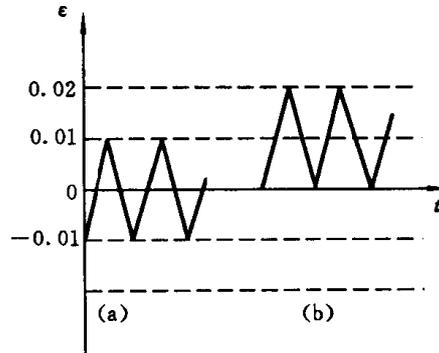
题 4-7 图

- 4-8 某镍合金钢性能为： $E = 200\text{GPa}$ ， $K' = 1530\text{MPa}$ ， $n' = 0.07$ ， $\sigma'_f = 1640\text{MPa}$ ，

$\epsilon'_f = 2.6$ ,  $b = -0.06$ ,  $c = -0.82$ 。试估算下述载荷条件下的寿命。

a)  $\Delta\epsilon/2 = 0.01$ ,  $\epsilon_m = 0$

b)  $\Delta\epsilon/2 = 0.01$ ,  $\epsilon_m = 0.01$



题 4-8 图

- 4-9 某压力容器构件有一个  $K_t = 3$  的缺口, 承受名义应力  $S_{\max} = 500\text{MPa}$ ,  $S_{\min} = 50\text{MPa}$  的循环载荷作用。已知材料参数  $E = 200\text{GPa}$ ,  $K' = 1600\text{MPa}$ ,  $\sigma'_f = 1700\text{MPa}$ ,  $n' = 0.125$ ,  $b = -0.1$ ,  $c = -0.7$ ,  $\epsilon'_f = 0.6$ 。试估算其寿命。

## 第五章 断裂失效与断裂控制设计

材料或结构中的缺陷(最严重的形式是裂纹),是不可避免的。由缺陷引起断裂所发生的机械、结构的失效,是工程中最重要、最常见的失效模式。在人们还不能深刻认识由材料缺陷引起断裂破坏的机理、规律的情况下,若发现零、构件出现了裂纹,大都只能按报废处理,用裂纹萌生寿命控制疲劳破坏,也是对断裂认识不足影响的结果。20世纪起(尤其是20世纪50年代后),人们对于裂纹体的广泛研究,深化了认识,逐步形成了“断裂力学”。以此为基础,人们控制断裂、控制裂纹扩展的能力不断增强。

断裂控制设计是对传统的基于强度设计概念的重要发展,了解断裂力学的基本概念、理论和断裂控制设计基本方法,对于21世纪的工程师们是十分必要的。

### 5.1 结构中的裂纹

按照静强度设计,控制工作应力 $\sigma$ 小于材料的许用应力 $[\sigma]$ ,人们完成了许多成功的设计。但是,即使在 $\sigma \leq [\sigma]$ 时,结构发生破坏的事例也并不鲜见。

例如,20世纪50年代,美国北极星导弹固体燃料发动机壳体在发射时发生断裂。壳体材料为高强度钢,屈服强度 $\sigma_s = 1400\text{MPa}$ ,计算工作应力 $\sigma \approx 900\text{MPa}$ 。按传统强度设计,强度是足够的。然而,该材料的断裂韧性 $K_{Ic}$ (含缺陷材料抵抗断裂破坏能力的指标)仅为 $60\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ ,按断裂力学分析,1mm左右的裂纹即可引起断裂。

1965年12月,英国John Thompson公司制造的大型氨合成塔在水压试验时断裂成两段,飞出的碎块中最重的达2t。断裂起源于焊缝裂纹,发生断裂破坏时试验应力仅为材料屈服应力的48%。

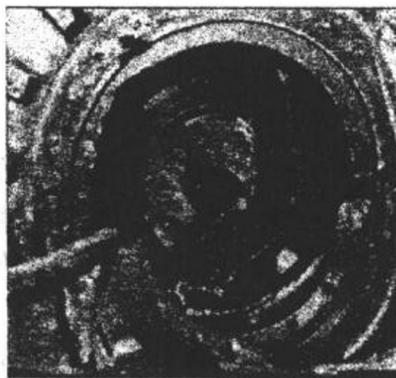


图 5.1 大型汽轮机转子轴断裂

在我国,汽轮机叶轮叶片、压力容器与管道、车辆轮轴等断裂事故也并不鲜见,图 5.1 所示为某大型汽轮机转子轴的断裂照片。

这类在静强度足够的情况下发生的断裂,称为低应力断裂。

低应力断裂是由各种形式的缺陷引起的,缺陷的最严重形式是裂纹,因为裂纹尖端的应力集中最严重。材料或结构中的裂纹,来源于材料本身的冶金缺陷或加工、制造、装配及使用等过程的损伤。有的直接以裂纹的形式出现,有的是在疲劳载荷作用下逐渐形成的裂纹。

图 5.2 所示是工程中最常见的几种裂纹。图中所示之“中心裂纹”和“边裂纹”是穿透整个厚度的,称为穿透厚度裂纹,尺寸用裂纹长度表示即可,其扩展是沿长度方向的。为了数学上的方便,将中心穿透裂纹总长记作  $2a$ ,边裂纹长度记作  $a$ 。表面裂纹是起源于构件表面、未穿透厚度的裂纹,形状通常为半椭圆形,裂纹表面方向尺寸用  $2c$  表示,裂纹深度方向尺寸为  $a$ 。表面裂纹可以在构件表面和深度两个方向扩展。

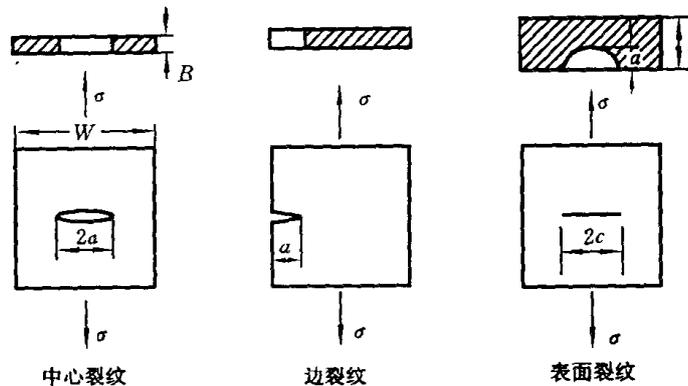


图 5.2 常见裂纹

由于裂纹的存在,将引起严重的应力集中,结构或构件的强度则不可避免地要受到削弱。与原有强度相比,受裂纹影响降低后的强度通常称为剩余强度。在使用载荷(或腐蚀环境、或此二者)的作用下,裂纹一般还将扩展,裂纹尺寸也将随使用时间而增长。因此,随着使用时间的增长,裂纹尺寸增大,剩余强度随之下降,如图 5.3 所示。

若工作中出现较大的偶然载荷,剩余强度不足以承受此载荷,则将发生破坏。若在正常使用载荷下工作,不出现意外高载,则裂纹继续扩展,剩余强度继续降低,直至最后在正常使用载荷下断裂。

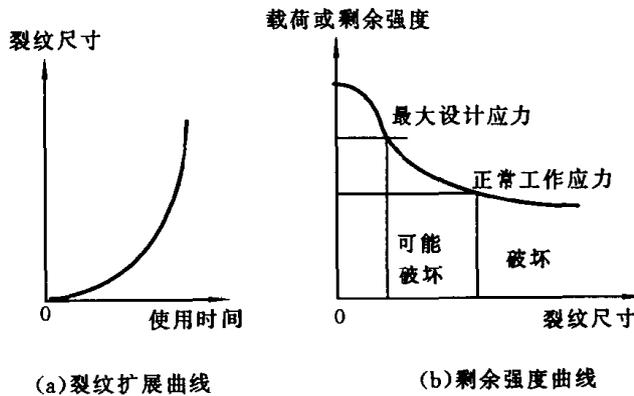


图 5.3 含裂纹结构的剩余强度

因此,需要回答下述问题:

- 1) 裂纹是如何扩展的?
- 2) 剩余强度与裂纹尺寸的关系如何?
- 3) 控制含裂纹结构破坏与否的参量是什么? 如何建立破坏(断裂)判据?
- 4) 裂纹从某初始尺寸扩展到发生破坏时的临界裂纹尺寸,还有多少剩余寿命? 结构中可以允许多大的初始裂纹? 临界裂纹尺寸如何确定? 为保证结构安全,在使用中如何安排检修? 等等。

这些问题都必须借助于断裂力学的知识才有可能解决。

## 5.2 裂纹尖端的应力强度因子

构件中的裂纹,可能受到各种不同形式载荷的作用。为了便于讨论问题,通常将作用于裂纹的载荷简化为图 5.4 所示的三种类型。

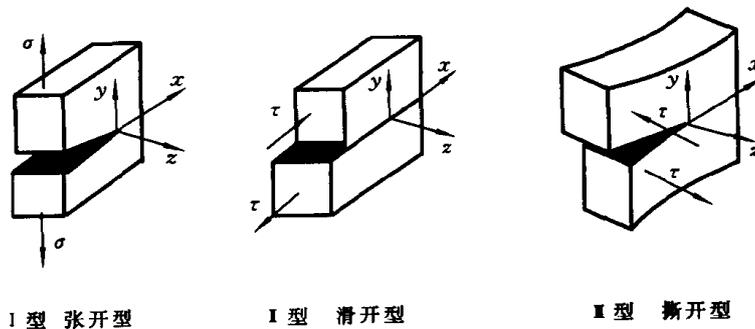


图 5.4 裂纹的三种受载形式

I 型裂纹,称为张开型。承受的是与裂纹面垂直的正应力  $\sigma$ ,裂纹面的位移是沿  $y$  方向的。即在正应力  $\sigma$  的作用下,裂纹上下表面的位移使裂纹张开。张开型裂纹是工程中最常见的、最易于引起断裂破坏发生的裂纹。

II 型裂纹,称为滑开型。如图 5.4 所示,承受的是在  $xy$  平面内的剪应力  $\tau$ ,裂纹面的位移是沿  $x$  方向,并垂直于裂纹前缘的。即在面内剪应力  $\tau$  的作用下,裂纹二表面的位移使裂纹沿  $x$  方向滑开。

III 型裂纹,称为撕开型。如图 5.4 所示,承受的是在  $yz$  平面内的剪应力  $\tau$ ,裂纹面的位移是沿  $z$  方向,并平行于裂纹前缘的。即在面外剪应力  $\tau$  的作用下,裂纹二表面的位移使裂纹沿  $z$  方向撕开。

更一般的情况,可以由上述三种基本形式的组合来描述。本书只限于讨论工程中最常见的张开型 (I 型) 裂纹。

显然可见,要使裂纹扩展,必须  $\sigma > 0$ 。即只有拉应力才能引起裂纹的张开型扩展。应力  $\sigma$  一般用假定无裂纹存在时裂纹处的应力来描述,称为名义应力或远场应力,以便于应用一般结构分析的方法来确定该作用应力的大小。

现在,讨论含有长为  $2a$  的穿透裂纹的无限大平板,在两端无穷远处承受垂直于裂纹面的拉应力  $\sigma$  作用的情况,如图 5.5 所示。

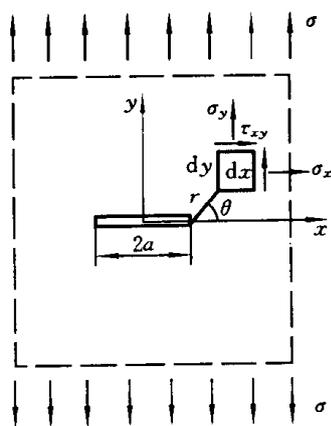


图 5.5 无限大平板中的 I 型裂纹

在距裂纹尖端为  $r$ ,与裂纹面 ( $x$  轴) 夹角为  $\theta$  处,取一尺寸为  $dx$ 、 $dy$  的微面元,如图所示。利用弹性力学方法,可以得到裂纹尖端附近任一点  $(r, \theta)$  处的正应力  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$  和剪应力  $\tau_{xy}$  分别为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_y &= \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \tau_{xy} &= \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (5-1)$$

因为所讨论的是平面问题,故有  $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ ; 对于平面应力状态,还有  $\sigma_z = 0$ ; 若为平面应变状态,则有  $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$ 。

应当指出,(5-1)式只是裂尖应力场的主项,其后还有  $r^0$  阶项等。(5-1)式给出的主项,在  $r \rightarrow 0$  时,应力以  $r^{-1/2}$  的阶次趋于无穷大;相比较而言,其后  $r^0$  阶项

等成为次要的,可以不计。因此,对于裂纹尖端附近的应力场,(5-1)式可以给出令人满意的描述。反之,若 $r \rightarrow \infty$ ,由(5-1)式给出的应力趋于零;但显然可知,当 $\theta=0$ 时,在 $x$ 轴上远离裂纹处,应有 $\sigma_y = \sigma$ ,且不受 $r$ 的影响,故此时应以其后的 $r^0$ 阶项为主项。断裂力学关心的是裂纹尖端附近的应力场。

因此,(5-1)式给出了裂纹尖端附近的应力场,且可写为

$$\sigma_{ij} = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \phi_{ij}(\theta) \quad (5-2)$$

且有

$$K_1 = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (5-3)$$

式中, $\sigma_{ij}$ 是应力张量;游标 $i, j$ 可从1到3变化,1、2、3分别代表 $x, y, z$ 坐标轴,如 $\sigma_{11}$ 为 $\sigma_x$ , $\sigma_{22}$ 为 $\sigma_y$ , $\sigma_{12}$ 为 $\tau_{xy}$ 。 $\phi_{ij}$ 是 $\theta$ 的函数。 $K$ 反映了裂纹尖端弹性应力场的强弱, $K$ 越大, $\sigma_{ij}$ 就越大,故 $K$ 称为应力强度因子;下标1表示是I型,即张开型裂纹。应力强度因子的量纲为[应力][长度]<sup>1/2</sup>,常用MPa $\sqrt{m}$ 。

由(5-3)式可知,裂尖应力强度因子随远场作用应力 $\sigma$ 增大而增大, $K$ 与 $\sigma$ 成正比;同时 $K$ 随裂纹长度 $a$ 的增大而增大, $K$ 与 $\sqrt{a}$ 成正比。

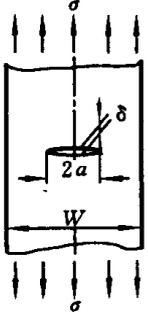
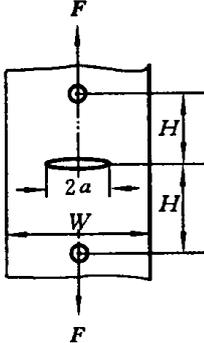
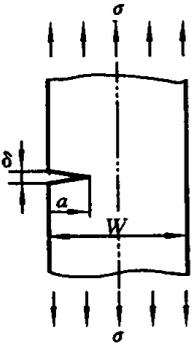
(5-3)式是由含中心穿透裂纹的无穷大板得到的。断裂力学研究表明,对于有限尺寸的构件,应力强度因子 $K_1$ 可以更一般地写为

$$K_1 = \sigma \sqrt{\pi a} f(a, W, \dots) \quad (5-4)$$

式中, $f(a, W, \dots)$ 称为几何修正系数,反映构件和裂纹几何尺寸对裂尖应力场的影响。I型和III型裂纹尖端应力场也可写成类似的形式,只是式中的正应力 $\sigma$ 应换成为剪应力 $\tau$ 。对于不同的裂纹和载荷情况,几何修正系数 $f(a, W, \dots)$ 可以由应力强度因子手册查得。特别地,当 $a \ll W$ 或 $a/W \rightarrow 0$ 时,即对于承受拉伸的无限宽中心裂纹板, $f=1$ ;对于无限宽单边裂纹板, $f=1.12$ 。表5-1给出了若干常用的应力强度因子。

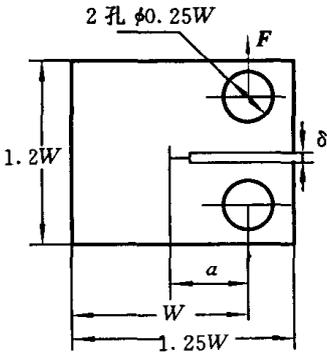
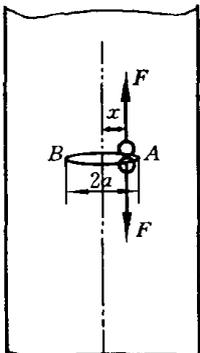
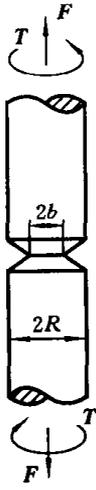
表中,平面应力情况下, $E' = E$ ;平面应变情况下, $E' = E/(1-\nu^2)$ 。

表 5-1 几种常用的应力强度因子

序号	试件形状及载荷	应力强度因子
1. 均匀拉伸中心裂纹板		<p>应力强度因子:</p> $K_1 = \sigma \sqrt{\pi a} g(\xi); \quad \xi = 2a/W$ $g(\xi) = (1 - 0.25\xi^2 + 0.06\xi^4) \sqrt{\sec(\pi\xi/2)} \quad (0.1\%)$ $g(\xi) = (1 - 0.5\xi + 0.37\xi^2 - 0.044\xi^3) / \sqrt{1 - \xi} \quad (0.3\% \text{以下})$ <p>无限大板: <math>\xi = a/W \rightarrow 0, \quad g(\xi) = 1</math></p> <p>裂纹张开位移:</p> $\delta = (4\sigma a/E')V(\xi)$ $V(\xi) = -0.071 - 0.535\xi + 0.169\xi^2 + 0.02\xi^3$ $- 1.071(1/\xi)\lg(1 - \xi)$ <p>(0.6%以下)</p>
2. 受集中力拉伸的中心裂纹板		<p>应力强度因子:</p> $K_1 = \frac{F}{\sqrt{W}} g(\xi, \eta); \quad \xi = 2a/W, \quad \eta = 2H/W$ $g(\xi, \eta) = f_1(\xi, \eta) f_2(\xi, \eta) f_3(\xi, \eta) \quad (1\% \text{以下})$ $f_1(\xi, \eta) = 1 + [0.297 + 0.115(1 - \operatorname{sech}\beta)\sin(\alpha/2)](1 - \cos\alpha)$ $f_2(\xi, \eta) = 1 + \nu \beta \tanh\beta / (\cosh^2\beta / \cos^2\alpha - 1)$ $f_3(\xi, \eta) = \sqrt{\tan\alpha} / [1 - \cos^2\alpha / \cosh^2\beta]^{1/2}$ <p>式中:</p> $\alpha = \pi\xi/2; \quad \beta = \pi\eta/2; \quad \nu = \begin{cases} (1+\nu)/2 \\ 1/2(1-\nu) \end{cases}$ <p>F 是每单位厚度的力。</p>
3. 均匀拉伸的边裂纹板		<p>应力强度因子:</p> $K_1 = \sigma \sqrt{\pi a} g(\xi); \quad \xi = a/W$ $g(\xi) = 1.12 - 0.231\xi + 10.55\xi^2 - 21.72\xi^3 + 30.39\xi^4$ <p>(<math>\xi \leq 0.6, 0.5\%</math>)</p> $g(\xi) = 0.265(1 - \xi)^4 + (0.857 + 0.265\xi) / (1 - \xi)^{3/2}$ <p>(<math>\xi &lt; 0.2, 1\% \text{以下}; \quad \xi \geq 0.2, 0.5\%</math>)</p> <p>无限大板: <math>\xi = a/W \rightarrow 0, \quad g(0) = 1.1215 = \beta</math></p> <p>裂纹张开位移:</p> $\delta = (4\sigma a/E')V(\xi) \quad (1\%)$ $V(\xi) = \{1.46 + 3.42[1 - \cos(\pi\xi/2)]\} / \cos^2(\pi\xi/2)$ <p>且 <math>V(0) = 1.1458 = \beta, \quad \lim_{\xi \rightarrow 1} V(\xi) = \beta^2 \pi/2(1 - \xi)^2</math></p>

续表

序号	试件形状及载荷	应力强度因子																		
4. 纯弯曲下的边裂纹板		<p>应力强度因子:</p> $K_1 = \sigma_0 \sqrt{\pi a} g(\xi); \quad \xi = a/W$ $g(\xi) = 1.122 - 1.40\xi + 7.33\xi^2 - 13.08\xi^3 + 14.0\xi^4$ <p style="text-align: right;">(<math>\xi \leq 0.6</math>, 0.2% 以下)</p> $g(\xi) = \left(\frac{1}{\alpha} \tan \beta\right)^{1/2} \frac{0.923 + 0.199(1 - \sin \alpha)^4}{\cos \alpha}; \quad \alpha = \pi\xi/2$ <p style="text-align: right;">(<math>0 &lt; \xi &lt; 1</math>, 0.5% 以下)</p> <p>且 <math>g(0) = 1.1215 = \beta</math>, <math>\lim_{\xi \rightarrow 1} g(\xi) = \beta/3(1 - \xi)^{3/2}</math></p> <p>裂纹张开位移:</p> $\delta = (4\sigma a/E')V(\xi) \quad (0.2 < \xi < 0.7, 0.5\% \text{ 以下})$ $V(\xi) = 0.8 - 1.7\xi + 2.4\xi^2 + 0.66/(1 - \xi)^2$ <p>且 <math>V(0) = 1.1458 = \beta</math>,</p> $\lim_{\xi \rightarrow 1} V(\xi) = \beta^2\pi/6(1 - \xi)^2 = 0.66/(1 - \xi)^2$																		
5. 均匀拉伸的双边裂纹板		<p>应力强度因子:</p> $K_1 = \sigma \sqrt{\pi a} g(\xi); \quad \xi = 2a/W, \quad \alpha = \pi\xi/2$ $g(\xi) = (1.122 - 0.561\xi - 0.205\xi^2 + 0.471\xi^3 - 0.19\xi^4) / (1 - \xi)^{1/2}$ <p style="text-align: right;">(0.5% 以下)</p> $g(\xi) = (1 + 0.122\cos^4\alpha) \left(\frac{1}{\alpha} \tan \alpha\right)^{1/2} \quad (0.5\% \text{ 以下})$ <p>且 <math>g(0) = 1.1215</math>, <math>\lim_{\xi \rightarrow 1} g(\xi) = 2/\pi(1 - \xi)^{1/2}</math></p> <p>裂纹张开位移:</p> $\delta = (4\sigma a/E')V(\xi)$ $V(\xi) = \frac{1}{\alpha} [0.459\sin\alpha - 0.065\sin^3\alpha - 0.0075\sin^5\alpha + \operatorname{arccosh}(\sec\alpha)]$																		
6. 三点弯曲试样		<p>应力强度因子:</p> $K_1 = \frac{3FL}{2BW^2} \sqrt{\pi a} g(\xi); \quad \xi = 2a/W;$ $g(\xi) = A_0 + A_1\xi + A_2\xi^2 + A_3\xi^3 + A_4\xi^4$ <p style="text-align: right;">(<math>\xi \leq 0.6</math>, 0.2% 以下)</p> <table border="1" data-bbox="646 1381 1125 1538"> <thead> <tr> <th>L/W</th> <th>A<sub>0</sub></th> <th>A<sub>1</sub></th> <th>A<sub>2</sub></th> <th>A<sub>3</sub></th> <th>A<sub>4</sub></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>4</td> <td>1.090</td> <td>-1.735</td> <td>8.20</td> <td>-14.18</td> <td>14.57</td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>1.107</td> <td>-2.120</td> <td>7.71</td> <td>-13.55</td> <td>14.00</td> </tr> </tbody> </table> <p>且 <math>g(0) = 1.1215 = \beta</math>, <math>\lim_{\xi \rightarrow 1} g(\xi) = \beta/3(1 - \xi)^{3/2}</math></p> <p>裂纹张开位移:</p> $\delta = (4\sigma a/E')V(\xi)$ $V(\xi) = 0.76 - 2.28\xi + 3.87\xi^2 - 2.04\xi^3 + 0.66\xi^4$ <p style="text-align: right;">(<math>L/W \geq 4</math>, 1% 以下)</p>	L/W	A <sub>0</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	4	1.090	-1.735	8.20	-14.18	14.57	8	1.107	-2.120	7.71	-13.55	14.00
L/W	A <sub>0</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>															
4	1.090	-1.735	8.20	-14.18	14.57															
8	1.107	-2.120	7.71	-13.55	14.00															

序号	试件形状及载荷	应力强度因子
7. 紧凑拉伸试样		<p>应力强度因子:</p> $K_1 = \frac{F}{BW^{1/2}} \left[ 29.6 \left( \frac{a}{W} \right)^{1/2} - 185.5 \left( \frac{a}{W} \right)^{3/2} + 655.7 \left( \frac{a}{W} \right)^{5/2} - 1017 \left( \frac{a}{W} \right)^{7/2} + 639 \left( \frac{a}{W} \right)^{9/2} \right]$
8. 受楔力作用的裂纹		<p>应力强度因子:</p> $K_{1A} = \frac{F}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ $K_{1B} = \frac{F}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$
9. 环形裂纹圆棒拉伸与扭转		<p>应力强度因子:</p> $K_1 = \frac{F}{\pi b^2} \sqrt{\pi b} g_1(\xi); \quad \xi = b/R$ $g_1(\xi) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2}\xi + \frac{3}{8}\xi^2 - 0.363\xi^3 + 0.731\xi^4 \right) \sqrt{1-\xi}$ <p>且 <math>g_1(0) = \frac{1}{2}; \quad \lim_{\xi \rightarrow 1} g_1(\xi) = 1.1215 \sqrt{1-\xi}</math></p> $K_2 = 0$ $K_3 = \frac{2T}{\pi b^3} \sqrt{\pi b} g_3(\xi); \quad \xi = b/R$ $g_3(\xi) = \frac{3}{8} \left( 1 + \frac{1}{2}\xi + \frac{3}{8}\xi^2 + \frac{5}{16}\xi^3 + \frac{35}{128}\xi^4 + 0.208\xi^5 \right) \sqrt{1-\xi}$ <p>且 <math>g_3(0) = \frac{3}{8}; \quad \lim_{\xi \rightarrow 1} g_3(\xi) = \sqrt{1-\xi}</math></p>

### 5.3 控制断裂的三个基本因素

控制材料或结构断裂的,有下述三个主要因素:

1) 裂纹尺寸和形状; 2) 作用应力; 3) 材料的断裂韧性。

裂纹尺寸越大,作用应力越高,发生断裂的可能性就越大;材料的断裂韧性越高,抵抗断裂破坏的能力越强,发生断裂的可能性就越小。

控制断裂是否发生的上述三个因素中,前二者是作用,为断裂的发生提供条件;后者(材料的断裂韧性)是抗力,阻止断裂的发生。

材料的断裂韧性是含裂纹材料抵抗断裂破坏能力的度量。它与材料、使用温度、环境介质等因素有关,由试验确定。

裂纹几何、作用应力、断裂韧性三个因素,是控制断裂是否发生的最基本的因素。

提供断裂条件的作用是裂纹尺寸  $a$  和应力  $\sigma$  二者,在线弹性断裂力学中用参量  $K$  来描述,如(5-4)式所示,裂纹尖端的应力强度因子  $K$  可用弹性力学方法导出为

$$K = f\left(\frac{a}{W}, \dots\right) \sigma \sqrt{\pi a} \quad (5-5)$$

可见,应力强度因子  $K$  正比于应力  $\sigma$  和裂纹长度  $a^{1/2}$ ;  $K$  越大,发生断裂的可能性就越大。

形状修正系数  $f$  是裂纹尺寸  $a$  和构件几何尺寸(如板宽  $W$  等)的函数。如当  $a \ll W$  时,对于图 5.2 所示的中心穿透裂纹,  $f=1.0$ ; 在边裂纹情况下,  $f=1.12$ , 如表 5-1 所示。

注意到  $f$  是无量纲的,应力单位一般用 MPa,长度单位用 m,则裂纹尖端的应力强度因子  $K$  的量纲为 MPa  $\sqrt{\text{m}}$ 。

(5-5)式是由线弹性分析得到的结果,其适用条件可写为

$$a \geq 2.5(K_1/\sigma_s)^2 \quad (5-6)$$

此即脆性高强度材料或大尺寸裂纹的情况。否则还须进行弹塑性断裂分析。

显然,应力强度因子  $K$  是低应力脆性断裂(线弹性断裂)发生与否的控制参量,断裂判据可写为

$$K = f\left(\frac{a}{W}, \dots\right) \sigma \sqrt{\pi a} \leq K_{1c} \quad (5-7)$$

## 5.4 材料的断裂韧性 $K_{1C}$

为了便于材料性能试验数据之间的比较,按照标准(如国标 GB4161—84)规定,断裂韧性测试常用图 5.6 所示的标准三点弯曲或紧凑拉伸试样。

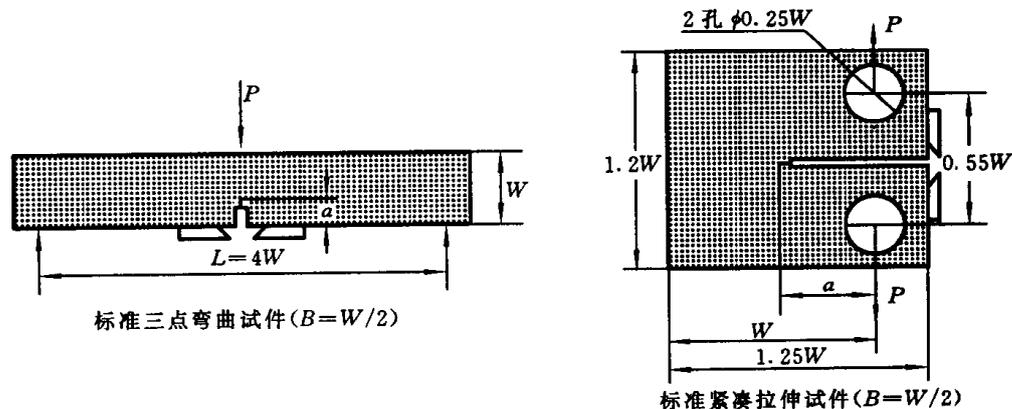


图 5.6 断裂韧性测试标准试样

这二种标准试样的应力强度因子为  
三点弯曲:

$$K_1 = \frac{3PL}{2BW^2} \sqrt{\pi a} [1.090 - 1.735\left(\frac{a}{W}\right) + 8.20\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 14.18\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 14.57\left(\frac{a}{W}\right)^4] \quad (5-8)$$

紧凑拉伸:

$$K_1 = \frac{P\sqrt{a}}{BW} [29.6 - 185.5\left(\frac{a}{W}\right) + 655.7\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 1017.0\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 638.9\left(\frac{a}{W}\right)^4] \quad (5-9)$$

加工好的试样,应当预先制出裂纹。裂纹预制的办法,一般是先在试件的相应位置用线切割机床切一切口,线切割使用的钼丝直径约 0.1mm 左右,太粗的切口将不利于裂纹的预制。切口的尺寸应小于预定裂纹尺寸,以留出用于疲劳预制裂纹的余地。为避免切口的影响,预制疲劳裂纹的长度应不小于 1.5mm。此外,施加疲劳载荷预制裂纹时,使用的载荷越小,裂纹尖端越尖锐,预制裂纹所需时间就越长。故试验者往往希望增大预制裂纹时使用的疲劳载荷,以减少预裂时间。为保证裂纹尖端具有足够的锐度,一般要求循环载荷中  $K_{\max} < (2/3)K_{1C}$ 。

预制裂纹后的试件,可用于进行断裂韧性测试。基本试验装置如图 5.7 所示。

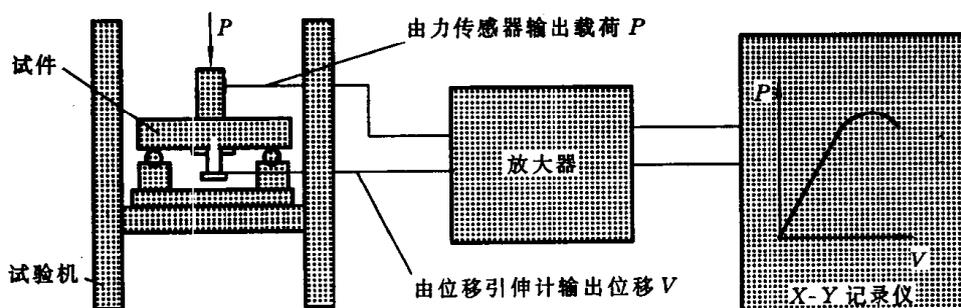


图 5.7 断裂韧性测试装置

将由力传感器输出的荷载  $P$ 、由引伸计输出的裂纹张开位移  $V$  的信息经放大后输入 X-Y 记录仪,监测试验  $P-V$  曲线,确定裂纹开始扩展时的荷载  $P_Q$ ,即可代入相应的应力强度因子表达式((5-8)式或(5-9)式),确定材料发生断裂时的应力强度因子  $K$  的临界值  $K_c$ 。

$P_Q$  是裂纹开始扩展时的荷载,裂纹是否扩展,以裂纹扩展增量  $\Delta a/a=2\%$  判别。对于标准试样, $\Delta a/a=2\%$  时,大致相当于张开位移的增量  $\Delta V/V=5\%$ 。据此,标准建议,由比  $P-V$  曲线线性段斜率低 5% 的直线与  $P-V$  纪录曲线的交点确定  $P_S$ 。若在此交点前, $P-V$  曲线上无大于  $P_S$  的荷载,则取  $P_Q=P_S$ ;若在此交点前有大于  $P_S$  的荷载,则取该荷载为  $P_S$ ,如图 5.8 所示。

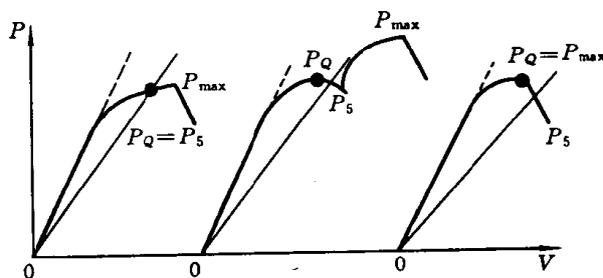


图 5.8  $P_Q$  的确定

预制裂纹的前缘一般呈弧形,故实际裂纹尺寸应由打开试件断口后的测量值确定。将断面沿厚度分为四等分,用工具显微镜分别测量五处的裂纹长度,如图 5.9 所示。则定义裂纹长度  $a$  为

$$a = (a_2 + a_3 + a_4)/3 \quad (5-10)$$

为保证裂纹的平直度,还要求满足:

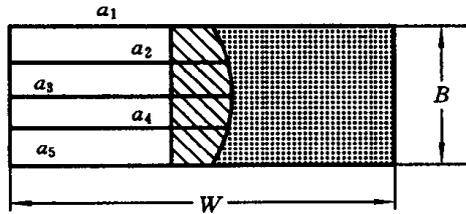


图 5.9 裂纹尺寸的确定

$$[a - (a_1 + a_5)/2] \leq 0.1a \quad (5-11)$$

将按上述方法确定的  $P_Q$  和满足平直度要求的裂纹长度  $a$ , 代入相应的应力强度因子表达式((5-8)式或(5-9)式), 即可计算相应的应力强度因子  $K_Q$ 。国家标准(GB4161—84)规定, 若  $K_Q$  满足下述试验

有效性条件:

$$P_{\max}/P_Q \leq 1.1 \quad (5-12)$$

$$B \geq 2.5(K_Q/\sigma_{ys})^{1/2} \quad (5-13)$$

则所测得的  $K_Q$  即为材料的平面应变断裂韧性  $K_{Ic}$ 。

(5-12)式是要求材料为脆性的; (5-13)式是要求试件满足平面应变条件的。所谓平面应变, 是指厚度足够大时, 沿厚度方向的变形可以不计, 变形被约束在垂直于厚度方向的平面内。

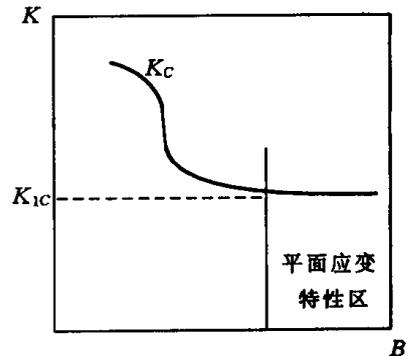


图 5.10 厚度对  $K_c$  的影响

实验表明, 材料断裂时的应力强度因子  $K_c$  是与试件的厚度  $B$  有关的, 如图 5.10 所示。一般说来,  $K_c$  随着厚度  $B$  的增大而减小。只有当厚度  $B$  足够大, 满足平面应变状态后,  $K_c$  才会取得不随厚度继续改变的最小值。此时的材料厚度一般满足:

$$B \geq 2.5 \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_{ys}} \right)^2$$

此即(5-13)式。满足这一条件的  $K_c$  就可以认为是与厚度无关的、反映材料最低抗断能力的材料常数, 称为材料的平面应变断裂韧性, 记作  $K_{Ic}$ 。

$K_{Ic}$  越大, 材料的抗断能力越强。而不满足平面应变条件的  $K_c$  是与厚度有关的, 并非材料常数, 它只能反映在给定厚度下材料的抗断能力。

另一方面,  $K_{Ic}$  还与温度有关。温度越低,  $K_{Ic}$  越小, 材料越易发生断裂, 故应当特别注意低温脆断的发生。

**例 5.1** 用尺寸为  $B=30\text{mm}$ ,  $W=60\text{mm}$ ,  $L=240\text{mm}$  的三点弯曲试件(见图 5.6)测试断裂韧性, 线切割尺寸为  $a'=30\text{mm}$ 。由试验记录的  $P-V$  曲线得到

$P_Q = 56\text{kN}$ ,  $P_{\max} = 60.5\text{kN}$ ; 断口疲劳裂纹尺寸测量结果为  $a_1 = 31.8\text{mm}$ ,  $a_2 = 31.9\text{mm}$ ,  $a_3 = 32.15\text{mm}$ ,  $a_4 = 31.95\text{mm}$ ,  $a_5 = 31.9\text{mm}$ ; 若已知材料的  $\sigma_{0.2} = 905\text{MPa}$ , 试计算其  $K_{1C}$  值并检查其是否有效。

解 裂纹长度为  $a = (a_2 + a_3 + a_4) / 3 = 32\text{mm}$

预制疲劳裂纹长度  $= a - a' = 2\text{mm} > 1.5\text{mm}$ , 满足标准规定。

因为  $a/W = 32/60 = 0.533$ , 且  $P_Q = 56\text{kN}$ , 由(5-8)式可算得

$$K_Q = 90.5\text{MPa} \sqrt{\text{m}}$$

有效性检验:

$$(1) P_{\max}/P_Q = 60.5/56 = 1.08 \leq 1.1$$

$$(2) B = 30\text{mm} \geq 2.5(K_Q/\sigma_{0.2})^2 = (2.5(90.5/905)^2)\text{m} = 0.025\text{m} = 25\text{mm}$$

可见满足有效性条件, 所得  $K_Q$  即为材料的  $K_{1C}$ , 故有

$$K_{1C} = K_Q = 90.5\text{MPa} \sqrt{\text{m}}$$

例 5.2 铝合金厚板,  $W = 200\text{mm}$ , 含有  $2a = 80\text{mm}$  的中心裂纹, 若实验测得此含中心裂纹板在  $\sigma = 100\text{MPa}$  时发生断裂, 试求该材料的断裂韧性。

解 由表 5-1 可知, 对于中心裂纹板有

$$\xi = 2a/W = 0.4; \quad K_1 = \sigma \sqrt{\pi a} F(\xi)$$

用表中公式  $F(\xi) = \sqrt{\sec(\pi\xi/2)}$ , 有  $F(\xi) = \sqrt{\sec(0.2\pi)}$

得到断裂时的应力强度因子为

$$\begin{aligned} K_1 &= \sigma \sqrt{\pi a} F(\xi) = (100(0.04\pi)^{1/2} [\sec(0.2\pi)]^{1/2}) \text{MPa} \sqrt{\text{m}} \\ &= 39.4\text{MPa} \sqrt{\text{m}} \end{aligned}$$

若厚度  $B$  尺寸足够, 则上述值即为材料的断裂韧性  $K_{1C}$ 。

例 5.3 用上例中的铝合金材料制作标准三点弯曲试样, 其厚度  $B = 50\text{mm}$ ,  $W = 100\text{mm}$ , 加载跨距  $L = 4W = 400\text{mm}$ 。若试件裂纹长度为  $a = 53\text{mm}$ , 试估计试件发生断裂时的载荷。

解 由表 5-1 或(5-8)式可知,  $L = 4W$  的标准三点弯曲试样的应力强度因子为

$$K_1 = \frac{3PL}{2BW^2} \sqrt{\pi a} f\left(\frac{a}{W}\right)$$

$$f\left(\frac{a}{W}\right) = [1.090 - 1.735\left(\frac{a}{W}\right) + 8.20\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 14.18\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 14.57\left(\frac{a}{W}\right)^4]$$

对于本题,  $(a/W)=0.53$ ,  $f(a/W)=1.5124$

发生断裂时应有:  $K_1=K_{1c}$ , 故得

$$K_1 = \frac{3PL}{2BW^2} \sqrt{\pi a} f\left(\frac{a}{W}\right) = K_{1c}$$

由上例知  $K_{1c}=39.4\text{MPa} \sqrt{\text{m}}$

即

$$P = \frac{2BW^2 K_{1c}}{3L \sqrt{\pi a} f\left(\frac{a}{W}\right)} = \left( \frac{2 \times 0.05 \times 0.1^2 \times 39.4 \times 10^6}{3 \times 0.4 (0.053\pi)^{1/2} \times 1.5124} \right) \text{N}$$

$$= 53200\text{N} = 53.2\text{kN}$$

讨论:

若用紧凑拉伸试样, 同样取  $B=50\text{mm}$ ,  $W=100\text{mm}$ , 裂纹长度为  $a=53\text{mm}$ , 则  $K$  表达为

$$K_1 = \frac{P \sqrt{a}}{BW} f\left(\frac{a}{W}\right)$$

$$f\left(\frac{a}{W}\right) = [29.6 - 185.5\left(\frac{a}{W}\right) + 655.7\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 1017.0\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 638.9\left(\frac{a}{W}\right)^4]$$

已知  $(a/W)=0.53$ ,  $K_{1c}=39.4\text{MPa} \sqrt{\text{m}}$ ; 可算得  $P=59(\text{kN})$ , 与三点弯曲试样比较, 所需的载荷要大一些。

**例 5.4** 某钢材的屈服应力  $\sigma_{ys}=800\text{MPa}$ , 估计断裂韧性约为  $K_{1c}=120\text{MPa} \sqrt{\text{m}}$ 。

- 1) 试估计能测得  $K_{1c}$  并保证试验有效性的标准试件的最小尺寸。
- 2) 估计满足尺寸要求的三点弯曲试样与紧凑拉伸试样的重量比。

解 1) 试件尺寸要求:

厚度:  $B \geq 2.5(K_{1c}/\sigma_{ys})^2 = 2.5(120/800)^2 \text{m} = 0.05625\text{m} = 56.25\text{mm}$

标准试件有:  $W=2B=112.5\text{mm}$

由图 5.6 可知, 标准试件的设计尺寸为

对于三点弯曲试样:

$$B = 56.25\text{mm}, \quad W = 112.5\text{mm}, \quad L = 4W = 460\text{mm}$$

对于紧凑拉伸试样:

$$B = 56.25\text{mm}, \quad \text{高 } H = 1.2W = 135\text{mm}$$

$$\text{宽 } S = 1.25W = 140.6\text{mm}$$

$$\text{孔径 } D = 0.25W = 28.125\text{mm}$$

2) 重量比:

三点弯曲试样的重量  $G_b$  与紧凑拉伸试样的重量  $G_t$  之比为

$$G_b/G_t = V_b/V_t = BWL/[BHS - 2B(\pi D^2/4)] = 0.0029/0.001 = 2.9$$

由此可见,测试断裂韧性时,所用三点弯曲试样的重量约为紧凑拉伸试样重量的 3 倍。但由前例知,用三点弯曲试样测试断裂韧性所需的载荷较紧凑拉伸试样小,且加工简单。

## 5.5 断裂判据与断裂控制设计的基本概念

在线弹性条件下,低应力脆性断裂的判据为(5-7)式,即

$$K = f\left(\frac{a}{W}, \dots\right) \sigma \sqrt{\pi a} \leq K_{1c}$$

利用上述判据,可以类似于强度设计那样,进行抗断设计。

抗断裂设计包括:

1) 已知工作应力  $\sigma$ 、裂纹尺寸  $a$ , 计算  $K$ , 选择材料使其  $K_{1c}$  值满足断裂判据, 保证不发生断裂。

2) 已知裂纹尺寸  $a$ 、材料的  $K_{1c}$  值, 确定允许使用的工作应力  $\sigma$  或载荷。

3) 已知工作应力  $\sigma$ 、材料的  $K_{1c}$  值, 确定允许存在的最大裂纹尺寸  $a$ 。

注意, 裂纹尺寸  $a$  与应力强度因子  $K$  的平方成正比, 故断裂韧性  $K_{1c}$  增大 1 倍, 断裂时的临界裂纹尺寸将增至 4 倍。

**例 5.5** 某超高强钢构件, 有一长  $a = 1\text{mm}$  的单边穿透裂纹, 承受  $\sigma = 1000\text{MPa}$  的拉伸应力作用。现有两种材料可供设计选择, 材料 1:  $\sigma_{y1} = 1800\text{MPa}$ ,  $K_{1c1} = 50\text{MPa} \sqrt{\text{m}}$ ; 材料 2:  $\sigma_{y2} = 1400\text{MPa}$ ,  $K_{1c2} = 75\text{MPa} \sqrt{\text{m}}$ ; 试问选用哪种材料较好?

**解** 1) 不考虑缺陷, 按传统强度设计考虑, 选用两种材料时的安全系数分别为

材料 1:  $n_{\sigma 1} = \sigma_{y1} / \sigma = 1800 / 1000 = 1.8$

材料 2:  $n_{\sigma 2} = \sigma_{y2} / \sigma = 1400 / 1000 = 1.4$

选用材料 1 安全系数大一些。

2) 考虑缺陷,按断裂设计考虑,由于  $a$  很小,对于单边穿透裂纹应有

$$K_1 = 1.12\sigma \sqrt{\pi a} \leq K_{1c} \quad \text{或} \quad \sigma \leq K_{1c} / (1.12 \sqrt{\pi a})$$

选用上述两种材料时,其断裂时的应力分别为

材料 1:  $\sigma_{1c} = (50 / 1.12(3.14 \times 0.001)^{1/2}) \text{MPa} = 796 \text{MPa} < \sigma$  (发生断裂)

材料 2:  $\sigma_{2c} = (75 / 1.12(3.14 \times 0.001)^{1/2}) \text{MPa} = 1195 \text{MPa} > \sigma$  (不发生断裂)

由此可见,在设计应力  $\sigma = 1000 \text{MPa}$  作用下,由于  $\sigma > \sigma_{1c}$ ,选用材料 1,将发生低应力脆性断裂;选用材料 2,则在满足强度条件的同时,也满足抗断要求。

注意,初始裂纹尺寸越小,材料的断裂韧性  $K_{1c}$  越大,发生断裂时的临界应力就越大。因此,提高材料的断裂韧性,控制初始裂纹尺寸对于防止低应力断裂是十分重要的。

例 5.6 直径  $d = 5 \text{m}$  的球形压力容器,厚度  $t = 10 \text{mm}$ ,有一长  $2a$  的穿透裂纹。已知材料的断裂韧性  $K_{1c} = 80 \text{MPa} \sqrt{\text{m}}$ 。若容器承受内压  $p = 4 \text{MPa}$ ,试估计发生断裂时的临界裂纹尺寸  $a_c$ 。

解 由球形压力容器膜应力计算公式有

$$\sigma = pd / (4t) = [5 \times 4 / (4 \times 0.01)] \text{MPa} = 500 \text{MPa}$$

当压力容器直径大,曲率小时,可视为承受拉伸应力的无限大中心裂纹板,此时有

$$K_1 = \sigma \sqrt{\pi a} \leq K_{1c} \quad \text{或} \quad a \leq \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_{1c}}{\sigma} \right)^2$$

在发生断裂的临界状态下有

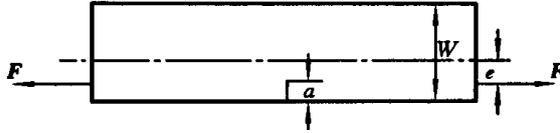
$$a_c = ((1/3.14)(80/500)^2) \text{m} = 0.0081 \text{m} = 8.1 \text{mm}$$

讨论:

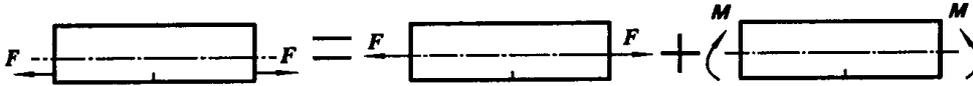
由本题分析可知,材料的断裂韧性  $K_{1c}$  越大,临界裂纹尺寸  $a_c$  就越大;内压  $p$  越大,作用的膜应力  $\sigma$  越大,临界裂纹尺寸就越小;若内压不变,压力容器直径  $d$  越大,作用的膜应力  $\sigma$  越大,临界裂纹尺寸越小,抗断裂能力就越差。

例 5.7 边裂纹有限宽板条受力作用如例 5.7 图(a)所示, $F$  为单位厚度上作用的力。已知  $W = 25 \text{mm}$ ,  $a = 5 \text{mm}$ ,  $e = 10 \text{mm}$ ,材料屈服应力  $\sigma_{ys} = 600 \text{MPa}$ ,

断裂韧性  $K_{1c} = 60 \text{MPa} \sqrt{\text{m}}$ 。试估计板条断裂时临界载荷  $F_c$ 。



例 5.7 图(a)



例 5.7 图(b)

解 考虑线弹性情况, 图示载荷的作用等于拉伸与纯弯曲两种情况的叠加 (图 5.7(b)), 故裂纹尖端的应力强度因子  $K$  可表达为

$$K = K' + K''$$

$K'$ 、 $K''$ 分别为拉伸、弯曲载荷 ( $M = Fe$ )作用下的应力强度因子。

对于边裂纹有限宽板, 由表 5-1 可知, 其在拉伸、弯曲载荷作用下的应力强度因子分别为

拉伸:  $K' = \sigma \sqrt{\pi a} F(\xi), \quad \sigma = F/W; \quad \xi = a/W = 0.2$

$$g(\xi) = 1.12 - 0.231\xi + 10.55\xi^2 - 21.72\xi^3 + 30.39\xi^4 = 1.37$$

即有  $K' = 1.37F \sqrt{\pi a}/W$

弯曲:  $K'' = \sigma_0 \sqrt{\pi a} g(\xi); \quad \sigma_0 = Fe/(6W^2); \quad \xi = a/W = 0.2$

$$g(\xi) = 1.122 - 1.40\xi + 7.33\xi^2 - 13.08\xi^3 + 14.0\xi^4 = 1.05$$

即有  $K'' = 1.05Fe \sqrt{\pi a}/(6W^2)$

发生断裂时的临界状态下应有  $K = K' + K'' = K_{1c}$ , 即

$$(F_c \sqrt{\pi a}/W)(1.37 + 1.05e/(6W)) = K_{1c}$$

代入已知数据并注意统一单位, 得到

$$F_c = \frac{K_{1c}W}{\sqrt{\pi a}(1.37 + 1.05e/(6W))}$$

$$= \left( \frac{60 \times 0.025}{\sqrt{3.14 \times 0.005(1.37 + 1.05 \times 0.4/6)}} \right) \text{MN}$$

$$= 8.33 \text{MN}$$

注意,上述结果是在线弹性情况下得到的,是否能满足这一假设,就需要考查在所得到的断裂载荷下的应力的的大小。本解答给出的拉伸应力为  $\sigma = F/W = 332 \text{MPa}$ ,远小于材料的屈服应力;弯曲应力  $\sigma_0 = Fe/6W^2 = \sigma(0.4/6)$ ,比拉伸应力还小得多;二者叠加后的应力值也不到材料屈服应力的一半,故上述结果是可信的。

由上述讨论可知,对于含缺陷的材料,抗断裂设计计算是十分重要的。

为了避免断裂破坏的发生,需要注意:

1) 控制材料的缺陷和加工、制造过程中的损伤。注意加强材质的检验,提高加工质量,杜绝零、构件碰摔。

2) 当缺陷的存在不可避免时,应当依据检验能力和实际经验估计可能存在的缺陷尺寸  $a$ ,进行抗断设计。

3) 选用断裂韧性较好的材料,使得发生断裂前可允许的临界裂纹尺寸较大,以便在使用检查中发现并排除裂纹。

4) 随着温度的降低,材料的断裂韧性开始下降,必须注意这种低温脆性对于断裂的影响。

此外,腐蚀环境也会加速裂纹的扩展和断裂的发生,其影响也值得注意。

## 小 结

1. 在静强度足够的情况下发生的断裂,称为低应力断裂。
2. 控制材料或结构断裂的三个主要因素是:裂纹几何、作用应力和材料的断裂韧性。
3. 应力强度因子  $K$  是断裂控制参量,断裂判据为

$$K = f\left(\frac{a}{W}, \dots\right) \sigma \sqrt{\pi a} \leq K_{1c}$$

4. 平面应变断裂韧性  $K_{1c}$  是与厚度无关的、反映材料抗断能力的材料常数。应按国家标准测定并满足其有效性条件。
5. 对于含缺陷的材料或构件,应进行抗断裂设计。
6. 为避免断裂发生,最重要的是控制初始缺陷和损伤。当缺陷的存在不可避免时,应选用断裂韧性较好的材料,使得临界裂纹尺寸较大,以便于检查发现并排除裂纹。

## 思考题与习题

- 5-1 三点弯曲试样  $B=30\text{mm}$ ,  $W=60\text{mm}$ ,  $L=240\text{mm}$ , 裂纹尺寸  $a=32\text{mm}$ 。若施加载荷  $P=50\text{kN}$ , 求  $K_{I1}$ 。
- 5-2 已知某一含中心裂纹  $2a=100\text{mm}$  的大尺寸钢板, 受拉应力  $\sigma_{c1}=304\text{MPa}$  作用时发生断裂, 若在另一相同的钢板中有一中心裂纹  $2a=40\text{mm}$ , 试估计其断裂应力  $\sigma_{c2}$ 。
- 5-3 某材料  $\sigma_{ys}=350\text{MPa}$ , 用  $B=50\text{mm}$ ,  $W=100\text{mm}$ ,  $L=4W$  的标准三点弯曲试样测试断裂韧性, 预制裂纹尺寸  $a=53\text{mm}$ 。由试验得到的  $P-V$  曲线知, 断裂载荷  $P_Q=54\text{kN}$ , 试计算该材料的断裂韧性  $K_{Ic}$  并校核其有效性。
- 5-4 材料同上题, 若采用  $B=50\text{mm}$ ,  $W=100\text{mm}$  的标准紧凑拉伸试样测试其断裂韧性, 预制裂纹尺寸仍为  $a=53\text{mm}$ 。试估算试验所需施加的断裂载荷  $P$ 。
- 5-5 欲测试某材料的断裂韧性, 已知其屈服应力  $\sigma_{ys}=800\text{MPa}$ , 预计断裂韧性  $K_{Ic}=100\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ , 试设计能保证试验有效的试件尺寸。
- 5-6 某材料  $\sigma_{0.2}=1050\text{MPa}$ , 标准紧凑拉伸试样尺寸为  $B=50\text{mm}$ ,  $W=100\text{mm}$ , 预制裂纹尺寸  $a=52\text{mm}$ 。由试验得到的  $P-V$  曲线知, 断裂载荷  $P_{\max}=261\text{kN}$ ,  $P_Q=241\text{kN}$ , 试计算该材料的断裂韧性  $K_Q$  并校核其有效性。
- 5-7 某合金钢在不同热处理状态下的性能为
- 1)  $275^\circ\text{C}$  回火:  $\sigma_{ys}=1780\text{MPa}$ ,  $K_{Ic}=52\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$
  - 2)  $600^\circ\text{C}$  回火:  $\sigma_{ys}=1500\text{MPa}$ ,  $K_{Ic}=100\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$
- 设工作应力  $\sigma=750\text{MPa}$ , 应力强度因子表达式为  $K=1.1\sigma\sqrt{\pi a}$ , 试问两种情况下的临界裂纹长度  $a_c$  各为多少?

## 第六章 表面裂纹

裂纹将引起低应力下的断裂。工程结构中的裂纹,通常是在疲劳载荷作用下发生或发展的。除材料自身缺陷形成的裂纹外,疲劳载荷作用下萌生的裂纹大都起源于应力水平高的表面。故表面裂纹引起的断裂破坏,是工程实际中最常见的。

表面裂纹问题是三维问题,表面裂纹的形状一般用半椭圆描述,如图 6.1 所示。各种半椭圆表面裂纹之应力强度因子的计算,对于实际工程构件的断裂分析、疲劳裂纹扩展寿命的估计等,都是十分重要的。

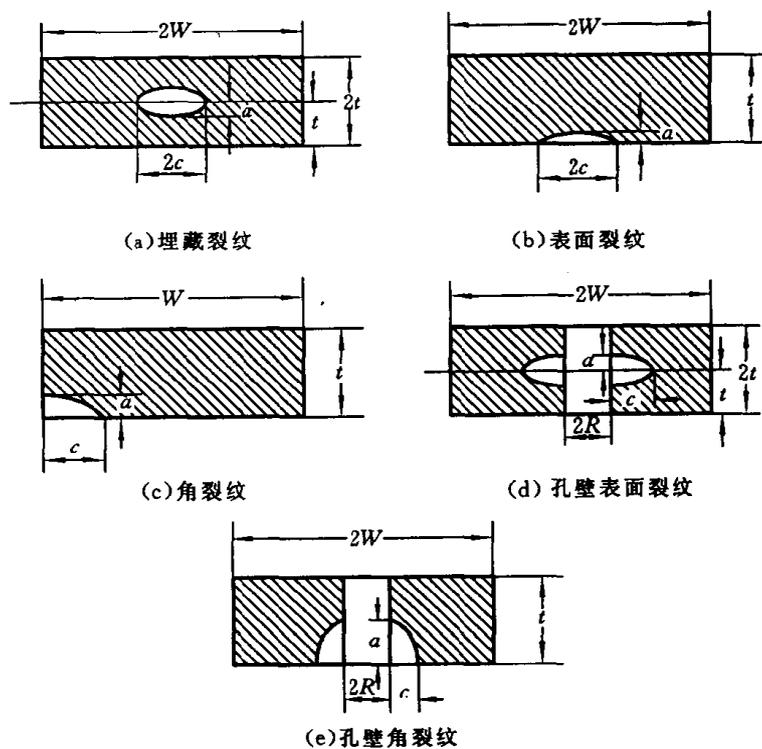


图 6.1 有限体中的三维裂纹

由于问题的复杂性,三维表面裂纹问题的解析解目前仍难以得到。为满足解决工程实际问题的需要,许多力学工作者利用各种近似分析法、数值法、实验方法及工程估计方法,努力寻求尽可能精确的应力强度因子解。

如 Smith、Kobayashi 等用交替法, Newman 和 Raju 等用有限元法, Heliot 等用边界积分方程法, Aboutorabi 等用实验方法, Letunov 等用工程估计方法, 都得到了一个可用的解。本章将主要介绍有关表面裂纹的若干可用应力强度因子解及其应用, 不讨论应力强度因子的求解方法。

## 6.1 拉伸载荷作用下无限大体中的埋藏裂纹和表面裂纹

### 一、无限大体中埋藏椭圆裂纹的应力强度因子

如图 6.2 所示, 在垂直于裂纹面的拉伸载荷作用下, 无限大体中埋藏椭圆裂纹周边的应力强度因子的精确解, 是 Irwin 于 1962 年给出的。

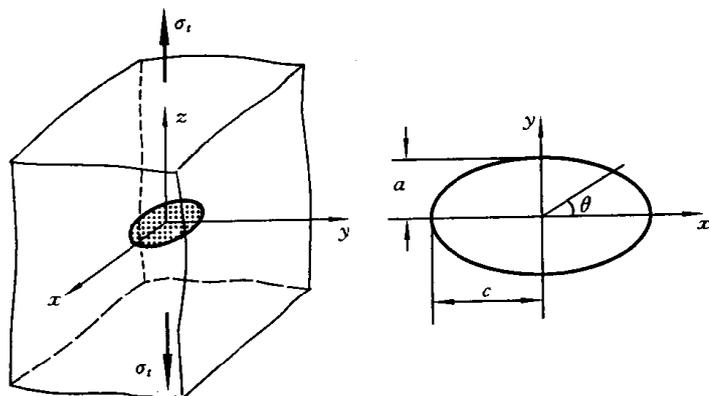


图 6.2 无限大体中的埋藏椭圆裂纹

在图示坐标下, 无限大体中埋藏椭圆裂纹周边的应力强度因子为

$$K = \frac{\sigma_t \sqrt{\pi a}}{E(k)} \left( \sin^2 \theta + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta \right)^{1/4} \quad (6-1)$$

式中,  $K$  为张开型 (I 型) 应力强度因子  $K_I$ , 本章讨论的均为 I 型裂纹, 为简单起见, 一律不加下标;  $\sigma_t$  为在远场作用的拉伸正应力;  $a$ 、 $c$  为椭圆裂纹的短、长半轴;  $\theta$  为过裂纹周线上任一点的径向线与长轴间的夹角;  $E(k)$  为第二类完全椭圆积分, 即

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \left( 1 - \frac{c^2 - a^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{1/2} d\theta \quad (6-2)$$

对于给定短、长半轴  $a$ 、 $c$  的椭圆, 积分  $E(k)$  为常数。

可见, 椭圆裂纹周边的应力强度因子是不同的,  $K$  随  $\theta$  而变化。工程问题的处理中, 最关心的是沿短、长半轴处裂纹尖端的应力强度因子。

当  $\theta = \pi/2$  时, 即在短轴方向的裂纹尖端, 应力强度因子最大, 且由(6-1)式知

$$K_{(\pi/2)} = \frac{\sigma_t \sqrt{\pi a}}{E(k)}$$

当  $\theta = 0$  时, 即在长轴方向的裂纹尖端, 应力强度因子最小, 且有

$$K_{(0)} = \frac{\sigma_t \sqrt{\pi a}}{E(k)} \sqrt{\frac{a}{c}}$$

注意,  $a < c$ 。

当  $a/c = 1$  时, 即为圆盘形裂纹。此时有  $E(k) = \pi/2$ , 故由(6-1)式显然可知

$$K = \frac{2}{\pi} \sigma_t \sqrt{\pi a}$$

即: 在拉伸应力场内, 无限大体中圆盘形埋藏裂纹的应力强度因子在裂纹周边各处是相同的。

当  $c \rightarrow \infty$  时, 即成为长  $2a$  的穿透裂纹。此时有  $(c^2 - a^2)/c^2 \rightarrow 1$ ,  $E(k) = 1$ , 故可知短轴方向(裂纹深度方向)裂纹尖端的应力强度因子

$$K = \sigma_t \sqrt{\pi a}$$

这正是无限大体中长  $2a$  的穿透裂纹尖端的应力强度因子解。

## 二、半无限大体中半椭圆表面裂纹的应力强度因子

将图 6.2 所示之无限大体沿  $y=0$  的平面切开, 即成为具有半椭圆表面裂纹的半无限大体, 如图 6.3 所示。

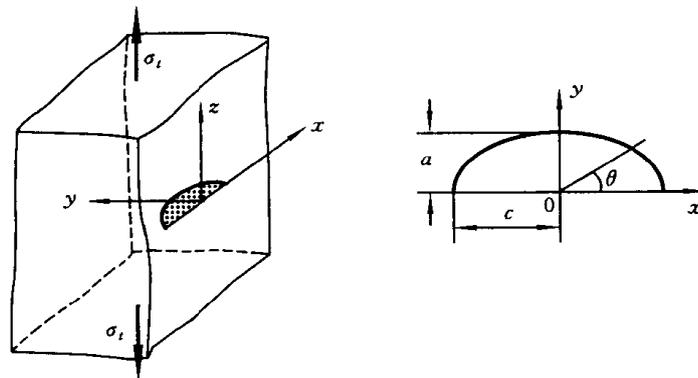


图 6.3 半无限大体中的半椭圆表面裂纹

被切除部分对半无限大体中半椭圆表面裂纹的影响,用系数  $M_f$  进行修正。引用(6-1)式,可将半无限大体中半椭圆表面裂纹的应力强度因子写为

$$K = M_f \frac{\sigma_t \sqrt{\pi a}}{E(k)} \left( \sin^2 \theta + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta \right)^{1/4} \quad (6-3)$$

式中,  $M_f$  称为前自由表面修正系数。只要确定了  $M_f$ , (6-3) 式就可给出半无限大体中表面裂纹的应力强度因子。

为估计前表面修正系数  $M_f$ , 先讨论下面两种极端情况。

**情况 1:** 在图 6.3 中, 当  $c \rightarrow \infty$ ,  $a/c \rightarrow 0$  时, 半无限大体中的表面裂纹成为长度为  $a$  的单边穿透裂纹。由表 5-1 可知, 无限大体中的长度为  $a$  的单边穿透裂纹的应力强度因子

$$K = 1.1215 \sigma_t \sqrt{\pi a}$$

上述结果是 R. J. Hartranft 和 G. C. Sih 于 1973 年给出的。

注意到此时有  $(c^2 - a^2)/c^2 \rightarrow 1$ ,  $E(k) = 1$ , 故由(6-3)式可知, 裂尖 ( $\theta = \pi/2$ ) 的应力强度因子为:

$$K = M_f \sigma_t \sqrt{\pi a}$$

与前式相比较, 应有

$$M_{f(\pi/2)} = 1.1215 \quad (a/c \rightarrow 0 \text{ 时})$$

**情况 2:** 若图 6.3 中的表面裂纹短、长半轴相等, 即当  $a/c = 1$  时, 半无限大体中的表面裂纹成为半径为  $a$  的半圆形表面裂纹。F. W. Smith 得到拉伸载荷作用下半空间中表面半圆形裂纹最深处 ( $\theta = \pi/2$ ) 的应力强度因子为

$$K = 1.03 \frac{2}{\pi} \sigma_t \sqrt{\pi a}$$

又由(6-3)式可知, 半无限大体中表面裂纹的应力强度因子, 等于无限大体中埋藏裂纹的应力强度因子与前表面修正系数  $M_f$  的乘积, 后者已在前面给出为  $K = (2/\pi) \sigma_t \sqrt{\pi a}$ , 二者相比较, 对于半无限大体中的半圆形表面裂纹, 应有

$$M_{f(\pi/2)} = 1.03 \quad (a/c = 1 \text{ 时})$$

由上述讨论可得出如下结论: 前表面修正系数  $M_f$  之值, 与表面半椭圆裂纹的形状比  $a/c$  有关。在裂纹最深处 ( $\theta = \pi/2$ ), 当  $a/c = 1$  时,  $M_{f(\pi/2)} = 1.03$ ; 当  $a/c \rightarrow 0$  时,  $M_{f(\pi/2)} = 1.1215$ ; 故当裂纹的形状比  $a/c$  从 0 到 1 连续变化时,  $M_f$  之值应在 1.03~1.1215 之间。

基于上述讨论, 许多学者在进一步用各种方法进行数值计算研究后, 给出了计算半无限大体中半椭圆裂纹深度方向 ( $\theta = \pi/2$ ) 应力强度因子的前表面修正系

数  $M_f$  的表达式:

$$\left. \begin{aligned} M_{f(\pi/2)} &= 1 + 0.12 \left( 1 - 0.75 \frac{a}{c} \right) \\ M_{f(\pi/2)} &= 1 + 0.12 \left( 1 - \frac{a}{2c} \right)^2 \\ M_{f(\pi/2)} &= 1.13 - 0.07 \left( \frac{a}{c} \right)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (6-4)$$

上述第一式是 Maddox 给出的, 具有简单的线性形式; 第二式是 Kobayashi 给出的, 使用较广泛; 二者相差不到 1%, 如图 6.4 所示。

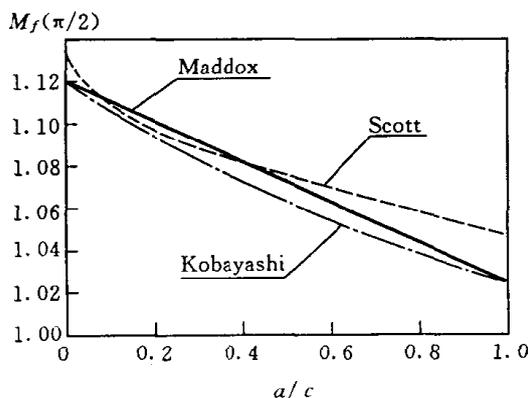


图 6.4 前表面修正系数  $M_{f(\pi/2)}$

上述第三式是 Scott (1981) 给出的, 此式给出的前表面修正系数  $M_f$  对形状比  $a/c$  的依赖更弱一些, 在预测半椭圆裂纹疲劳扩展的形状改变时, 可以得到更好的结果, 这一表达式与前二者最大相差 3%。

至此, 半无限大体中半椭圆表面裂纹最深处的应力强度因子可写为

$$K_{(\pi/2)} = M_{f(\pi/2)} \frac{\sigma_i \sqrt{\pi a}}{E(k)} \quad (6-5)$$

若半椭圆表面裂纹尺寸  $a$ 、 $c$  已知, 则  $E(k)$ 、 $M_{f(\pi/2)}$  可按 (6-2)、(6-4) 式计算。

将  $\theta=0$  代入 (6-3) 式, 半椭圆裂纹表面 ( $\theta=0$ ) 处的应力强度因子可写为

$$K_{(0)} = M_f \frac{\sigma_i \sqrt{\pi a}}{E(k)} \sqrt{\frac{a}{c}} = M_{f(0)} \frac{\sigma_i \sqrt{\pi a}}{E(k)} \quad (6-6)$$

综合若干数值分析结果, Scott 给出计算半椭圆裂纹表面处的应力强度因子的前表面修正系数为

$$M_{f(0)} = \left[ 1.21 - 0.1 \left( \frac{a}{c} \right) + 0.1 \left( \frac{a}{c} \right)^4 \right] \sqrt{\frac{a}{c}} \quad (6-7)$$

当  $a/c=1$  时,  $M_{f(0)}=1.21$ ; 注意此时有  $E(k)=\pi/2$ , 由 (6-6)、(6-7) 式可得到半无限大体中半圆形表面裂纹表面处的应力强度因子为

$$K_{(0)} = 1.21 \frac{2}{\pi} \sigma_t \sqrt{\pi a} \quad (6-8)$$

## 6.2 拉伸载荷作用下有限体中表面裂纹的应力强度因子

若几何体(零、构件)的尺寸与裂纹尺寸相差不是很大, 则用上述无限大体中裂纹的解, 将有较大的误差。因此, 需要研究有限尺寸对裂纹尖端应力强度因子的影响。

Newman 和 Raju(1983)用三维有限元计算, 系统地研究了如图 6.1 所示之有限体中三维裂纹在拉伸载荷作用下的应力强度因子。依据计算结果, 通过数值拟合, 他们给出了下述经验表达式。

### 一、埋藏椭圆裂纹(图 6.5)

对于图 6.5 所示之有限体中的埋藏椭圆裂纹, 应力强度因子可表达为

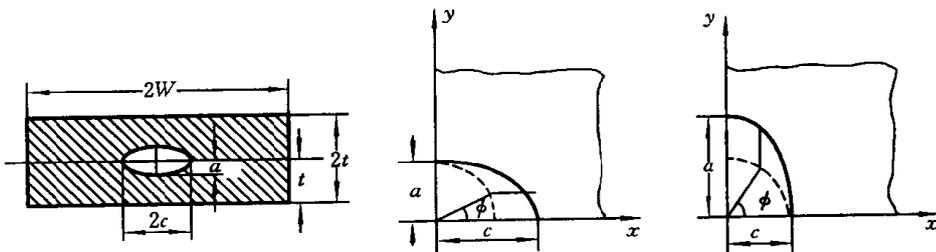


图 6.5 埋藏裂纹及其裂纹角

$$K = F_c \left( \frac{a}{c}, \frac{a}{t}, \frac{c}{W}, \phi \right) \frac{\sigma_t \sqrt{\pi a}}{E(k)} \quad (6-9)$$

上式适用于

$$0 \leq a/c < \infty, \quad c/W < 0.5, \quad -\pi \leq \phi \leq \pi$$

且满足

$$\text{当 } 0 \leq a/c \leq 0.2 \text{ 时, } \quad a/t < 1.25(0.6 + a/c)$$

$$\text{当 } 0.2 \leq a/c \leq \infty \text{ 时, } \quad a/t < 1$$

的条件。

式中,  $F_c$  为几何修正函数, 考虑到裂纹形状比  $a/c$ , 有限厚度  $a/t$ , 有限宽度

$a/W$  及裂纹角  $\phi$  等无量纲几何参数的影响。故  $F_c$  可进一步写为

$$F_c = \left[ M_1 + M_2 \left( \frac{a}{t} \right)^2 + M_3 \left( \frac{a}{t} \right)^4 \right] g_1 f_\phi f_w \quad (6-10)$$

式中

$$M_1 = \begin{cases} 1 & (a/c \leq 1) \\ \sqrt{c/a} & (a/c > 1) \end{cases}$$

$$M_2 = \frac{0.05}{0.11 + (a/c)^{3/2}}; \quad M_3 = \frac{0.29}{0.23 + (a/c)^{3/2}}$$

$$g_1 = 1 - \frac{(a/t)^4 |\cos \phi|}{1 + 4(a/c)}$$

$$f_\phi = \begin{cases} [(a/c)^2 \cos^2 \phi + \sin^2 \phi]^{1/4} & (a/c \leq 1) \\ [(a/c)^2 \sin^2 \phi + \cos^2 \phi]^{1/4} & (a/c > 1) \end{cases} \quad (6-11)$$

$$f_w = \left[ \sec \left( \frac{\pi c}{2W} \sqrt{\frac{a}{t}} \right) \right]^{1/2} \quad (6-12)$$

注意, 裂纹尺寸  $a, c$  一般不大, 故若  $W$  很大, 则有限宽修正系数  $f_w$  趋近于 1。

为便于计算, 椭圆积分  $E(k)$  可用数值拟合法近似表达为

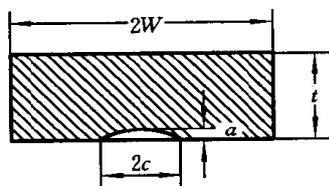
$$E(k) = \begin{cases} [1 + 1.464(a/c)^{1.65}]^{1/2} & (a/c \leq 1) \\ [1 + 1.464(c/a)^{1.65}]^{1/2} & (a/c > 1) \end{cases} \quad (6-13)$$

上述近似表达式的误差小于 0.13%。

当  $t \rightarrow \infty, W \rightarrow \infty$  时,  $a/t \rightarrow 0, f_w = 1, g_1 = 1$ , 故  $F_c = M_1 f_\phi$ , (6-9) 式给出的恰好就是无限大体中埋藏椭圆裂纹的应力强度因子解。

## 二、半椭圆表面裂纹(图 6.6)

在拉伸载荷作用下, 图 6.6 所示之半椭圆表面裂纹的应力强度因子可表达为



$$K = F_s \left( \frac{a}{c}, \frac{a}{t}, \frac{c}{W}, \phi \right) \frac{\sigma_t \sqrt{\pi a}}{E(k)} \quad (6-14)$$

上式的适用范围为

$$0 \leq a/c < 2, \quad c/W < 0.5, \quad 0 \leq \phi \leq \pi$$

且  $a/t$  同样应满足下述条件:

$$\text{当 } 0 \leq a/c \leq 0.2 \text{ 时, } a/t < 1.25(0.6 + a/c)$$

$$\text{当 } 0.2 \leq a/c \leq \infty \text{ 时, } a/t < 1$$

表面裂纹的几何修正函数记作  $F_s$ , 且有

$$F_s = \left[ M_1 + M_2 \left( \frac{a}{t} \right)^2 + M_3 \left( \frac{a}{t} \right)^4 \right] g_1 f_t f_w$$

式中各系数分  $a/c \leq 1$ 、 $a/c > 1$  两种情况给出。

当  $a/c \leq 1$  时,有

$$M_1 = 1.13 - 0.09(a/c)$$

$$M_2 = -0.54 + 0.89/[0.2 + (a/c)]$$

$$M_3 = 0.5 - \frac{1}{0.65 + (a/c)} + 14 \left( 1 - \frac{a}{c} \right)^{24}$$

$$g_1 = 1 + [0.1 + 0.35(a/t)^2](1 - \sin\phi)^2$$

当  $a/c > 1$  时,有

$$M_1 = [1 + 0.04(c/a)] \sqrt{c/a}$$

$$M_2 = 0.2(c/a)^4$$

$$M_3 = -0.11(c/a)^4$$

$$g_1 = 1 + [0.1 + 0.35(c/a)(a/t)^2](1 - \sin\phi)^2$$

其余各函数,即  $f_t$ 、 $f_w$  和  $E(k)$  仍分别由(6-11)、(6-12)、(6-13)式给出。

**例 6.1**  $W=100\text{mm}$ ,  $t=12\text{mm}$  的板中有  $a=1\text{mm}$ ,  $c=5\text{mm}$  的半椭圆表面裂纹,受拉伸载荷  $\sigma=600\text{MPa}$  作用,试求裂纹最深处( $\phi=\pi/2$ )的应力强度因子  $K_{\pi/2}$ 。

**解** 半椭圆表面裂纹的应力强度因子由(6-14)式表达为

$$K = F_s \left( \frac{a}{c}, \frac{a}{t}, \frac{c}{W}, \phi \right) \frac{\sigma_t \sqrt{\pi a}}{E(k)}$$

且

$$0 \leq a/c = 0.2 < 2, \quad c/W = 0.05 < 0.5, \quad a/t = 1/12 < 1$$

满足上式的适用范围。

表面裂纹的几何修正函数记作  $F_s$ , 且有

$$F_s = \left[ M_1 + M_2 \left( \frac{a}{t} \right)^2 + M_3 \left( \frac{a}{t} \right)^4 \right] g_1 f_t f_w$$

注意到本题  $a/c \leq 1$ , 故有

$$M_1 = 1.13 - 0.09(a/c) = 1.112$$

$$M_2 = -0.54 + 0.89/[0.2 + (a/c)] = 1.685$$

$$M_3 = 0.5 - \frac{1}{0.65 + (a/c)} + 14 \left( 1 - \frac{a}{c} \right)^{24} = -0.61$$

$$g_1 = 1 + [0.1 + 0.35(a/t)^2](1 - \sin\phi)^2 = 1.102$$

且有  $f_\phi = [(a/c)^2 \cos^2\phi + \sin^2\phi]^{1/4} = 1$

$$f_w = \left[ \sec \left( \frac{\pi c}{2W} \sqrt{\frac{a}{t}} \right) \right]^{1/2} = \left[ \sec \left( \frac{5\pi}{200} \sqrt{\frac{1}{12}} \right) \right]^{1/2} = 1.0001 \approx 1$$

故修正系数为

$$F_s = \left[ 1.112 + 1.685 \left( \frac{1}{12} \right)^2 - 0.61 \left( \frac{1}{12} \right)^4 \right] \times 1.102 = 1.2395$$

且由(6-13)式可知,当  $a/c=0.2 < 1$  时,有

$$E(k) = [1 + 1.464(a/c)^{1.65}]^{1/2} = 1.05$$

故可得到

$$K_{\pi/2} = 1.2395 \frac{600 \sqrt{0.001\pi}}{1.05} \text{MPa} \sqrt{\text{m}} = 39.7 \text{MPa} \sqrt{\text{m}}$$

讨论:

在表面处( $\phi=0$ ),有

$$f_\phi = [(a/c)^2 \cos^2\phi + \sin^2\phi]^{1/4} = 0.4472$$

其余各量不变,可知修正系数为

$$f_s = 1.2395 \times 0.4472 = 0.5543$$

裂纹表面处的应力强度因子为

$$K_0 = 39.7 \times 0.5543 \text{MPa} \sqrt{\text{m}} = 22 \text{MPa} \sqrt{\text{m}}$$

### 三、1/4 椭圆角裂纹(图 6.7)

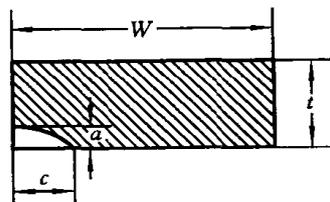


图 6.7 角裂纹

图 6.7 所示之 1/4 椭圆角裂纹的应力强度因子为

$$K = F_c \left( \frac{a}{c}, \frac{a}{t}, \phi \right) \frac{\sigma_t \sqrt{\pi a}}{E(k)} \quad (6-15)$$

适用范围为

$$0.2 \leq a/c < 2, \quad a/t < 1 \\ c/W < 0.2, \quad 0 \leq \phi \leq \pi/2$$

角裂纹的几何修正函数记作  $F_c$ ,且有

$$F_c = \left[ M_1 + M_2 \left( \frac{a}{t} \right)^2 + M_3 \left( \frac{a}{t} \right)^4 \right] g_1 g_2 f_\phi$$

当  $a/c \leq 1$  时,有

$$M_1 = 1.08 - 0.03(a/c)$$

$$M_2 = -0.44 + 1.06/[0.3 + (a/c)]$$

$$M_3 = -0.5 + 0.25(a/c) + 14.8(1 - a/c)^{15}$$

$$g_1 = 1 + [0.08 + 0.4(a/t)^2](1 - \sin\phi)^3$$

$$g_2 = 1 + [0.08 + 0.15(a/t)^2](1 - \cos\phi)^3$$

当  $a/c > 1$  时,有

$$M_1 = [1.08 - 0.03(c/a)] \sqrt{c/a}$$

$$M_2 = 0.375(c/a)^2$$

$$M_3 = -0.25(c/a)^2$$

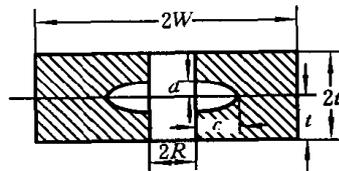
$$g_1 = 1 + [0.08 + 0.4(c/t)^2](1 - \sin\phi)^3$$

$$g_2 = 1 + [0.08 + 0.15(c/t)^2](1 - \cos\phi)^3$$

$f_\phi$ 和  $E(k)$ 仍由(6-11)、(6-13)式给出。

#### 四、孔壁半椭圆表面裂纹(图 6.8)

工程中的孔壁裂纹是十分常见的。对于如图 6.8 所示在孔壁有两个对称半椭圆表面裂纹的情况,应力强度因子



$$K = F_{sh} \left( \frac{a}{c}, \frac{a}{t}, \frac{R}{t}, \frac{R}{W}, \frac{c}{W}, \phi \right) \frac{\sigma_t \sqrt{\pi a}}{E(k)}$$

(6-16) 图 6.8 孔壁表面裂纹

上式的适用范围为

$$0.2 \leq a/c \leq 2, \quad a/t < 1, \quad 0.5 \leq R/t \leq 2$$

$$(R + c)/W < 0.5, \quad -\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$$

孔壁表面裂纹的几何修正函数记作  $F_{sh}$ ,且有

$$F_{sh} = \left[ M_1 + M_2 \left( \frac{a}{t} \right)^2 + M_3 \left( \frac{a}{t} \right)^4 \right] g_1 g_2 g_3 f_\phi f_w$$

各修正函数分别为

$$M_1 = \begin{cases} 1 & (a/c \leq 1) \\ \sqrt{c/a} & (a/c > 1) \end{cases}$$

$$M_2 = \frac{0.05}{0.11 + (a/c)^{3/2}}$$

$$M_3 = \frac{0.29}{0.23 + (a/c)^{3/2}}$$

$$g_1 = 1 - \frac{(a/t)^4 |\cos\phi|}{1 + 4(a/c)}$$

$$g_2 = (1 + 0.358\lambda + 1.425\lambda^2 - 1.578\lambda^3 + 2.156\lambda^4)/(1 + 0.08\lambda^2)$$

$$g_3 = 1 + 0.1(1 - \cos\phi)^2(1 + a/t)^{10}$$

式中,  $M_1$ 、 $M_2$ 、 $M_3$  及  $g_1$  采用了与埋藏椭圆裂纹情况相同的表达式,  $g_2$  式中的  $\lambda$  为

$$\lambda = [1 + (c/R)\cos(0.9\phi)]^{-1}$$

$f_1$  仍由(6-11)式给出, 孔壁表面裂纹的有限宽度修正函数  $f_w$  为

$$f_w = \left[ \sec\left(\frac{\pi R}{2W}\right) \sec\left(\frac{\pi(2R + nc)}{4(W - c) + 2nc} \sqrt{\frac{a}{t}}\right) \right]^{1/2} \quad (6-17)$$

式中,  $n$  为裂纹数, 对于二对称孔壁表面裂纹,  $n=2$ ; 若为单侧孔壁裂纹, 则  $n=1$ 。

单侧孔壁半椭圆表面裂纹的应力强度因子, 可利用二对称孔壁表面裂纹的解, 按下式估算:

$$K_{n=1} = \left[ \left( \frac{4}{\pi} + \frac{ac}{2tR} \right) / \left( \frac{4}{\pi} + \frac{ac}{tR} \right) \right]^{1/2} K_{n=2} \quad (6-18)$$

式中,  $K_{n=2}$  为二对称孔壁表面裂纹的解, 由(6-16)式给出。但应注意此时的有限宽度修正, 应按单侧孔壁表面裂纹情况( $n=1$ )计算; 由(6-18)式得到的  $K_{n=1}$  即单侧孔壁表面裂纹的解。

### 五、孔边 1/4 椭圆角裂纹(图 6.9)

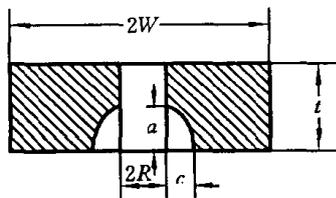


图 6.9 孔边角裂纹

在如图 6.9 所示孔边有两个对称 1/4 椭圆角裂纹存在的情况下, 应力强度因子可以表达为

$$K = F_{ch} \left( \frac{a}{c}, \frac{a}{t}, \frac{R}{t}, \frac{R}{W}, \frac{c}{W}, \phi \right) \frac{\sigma_t \sqrt{\pi a}}{E(k)} \quad (6-19)$$

上式的适用范围为

$$0.2 \leq a/c \leq 2, \quad a/t < 1, \quad 0.5 \leq R/t \leq 1$$

$$(R + c)/W < 0.5, \quad 0 \leq \phi \leq \pi/2$$

孔边角裂纹的几何修正函数记作  $F_{ch}$ , 同样有

$$F_{ch} = \left[ M_1 + M_2 \left( \frac{a}{t} \right)^2 + M_3 \left( \frac{a}{t} \right)^4 \right] g_1 g_2 g_3 f_\phi f_w$$

当  $a/c \leq 1$  时,有

$$M_1 = 1.13 - 0.09(a/c)$$

$$M_2 = -0.54 + 0.89/[0.2 + (a/c)]$$

$$M_3 = 0.5 - \frac{1}{0.65 + (a/c)} + 14 \left( 1 - \frac{a}{c} \right)^{24}$$

$$g_1 = 1 + [0.1 + 0.35(a/t)^2](1 - \sin\phi)^2$$

当  $a/c > 1$  时,有

$$M_1 = [1 + 0.04(c/a)] \sqrt{c/a}$$

$$M_2 = 0.2(c/a)^4$$

$$M_3 = -0.11(c/a)^4$$

$$g_1 = 1 + [0.1 + 0.35(c/a)(a/t)^2](1 - \sin\phi)^2$$

注意,上述各函数与半椭圆表面裂纹相同;修正函数  $f_\phi$ 、 $f_w$  则由(6-11)式和(6-17)式给出;还有

$$g_2 = (1 + 0.358\lambda + 1.425\lambda^2 - 1.578\lambda^3 + 2.156\lambda^4)/(1 + 0.13\lambda^2)$$

$$\lambda = [1 + (c/R)\cos(0.85\phi)]^{-1} \quad (0.2 \leq a/c \leq 2)$$

和

$$g_3 = \begin{cases} (1 + 0.04a/c)[1 + 0.1(1 - \cos\phi)^2][0.85 + 0.15(a/t)^{1/4}] & (a/c \leq 1) \\ (1.13 - 0.09c/a)[1 + 0.1(1 - \cos\phi)^2][0.85 + 0.15(a/t)^{1/4}] & (a/c > 1) \end{cases}$$

单侧孔边角裂纹的应力强度因子,同样可以利用双侧对称孔边角裂纹的解,按(6-18)式估算。计算和实验结果都表明,上述估算在工程中是可接受的。

**例 6.2** 某高强度钢拉杆承受拉应力作用,接头处有一单侧孔边角裂纹  $a=c=1\text{mm}$ ,孔径  $2R=12\text{mm}$ ,  $W=20\text{mm}$ ,接头耳片厚为  $t=10\text{mm}$ 。若材料屈服强度  $\sigma_s=1400\text{MPa}$ ,断裂韧性  $K_{IC}=120\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ ,试计算发生断裂时的工作应力  $\sigma_c$ 。

**解** 拉伸载荷作用下,孔边二对称角裂纹情况的应力强度因子由(6-19)式知,有

$$K = F_{ch} \left( \frac{a}{c}, \frac{a}{t}, \frac{R}{t}, \frac{R}{W}, \frac{c}{W}, \phi \right) \frac{\sigma_c \sqrt{\pi a}}{E(k)}$$

注意,对于本题,上式的适用条件是满足的。且有

$$F_{ch} = \left[ M_1 + M_2 \left( \frac{a}{t} \right)^2 + M_3 \left( \frac{a}{t} \right)^4 \right] g_1 g_2 g_3 f_\phi f_w$$

由于  $a/c=1$ , 故有

$$M_1 = 1.13 - 0.09(a/c) = 1.04$$

$$M_2 = -0.54 + 0.89/[0.2 + (a/c)] = 0.2$$

$$M_3 = 0.5 - \frac{1}{0.65 + (a/c)} + 14 \left( 1 - \frac{a}{c} \right)^{24} = -0.1$$

角  $\phi$  按图 6.5 定义,  $\phi=0$  处的应力强度因子最大, 有

$$g_1 = 1 + [0.1 + 0.35(a/t)^2](1 - \sin\phi)^2 = 1.45$$

$$\lambda = [1 + (c/R)\cos(0.85\phi)]^{-1} = [1 + (1/6)\cos 0^\circ]^{-1} \\ = 6/7 = 0.857$$

$$g_2 = (1 + 0.358\lambda + 1.425\lambda^2 - 1.578\lambda^3 + 2.156\lambda^4)/(1 + 0.13\lambda^2) \\ = 2.303$$

$$g_3 = (1 + 0.04a/c)[1 + 0.1(1 - \cos\phi)^2][0.85 + 0.15(a/t)^{1/4}] \\ = 1.113$$

修正函数  $f_\phi$ 、 $f_w$  由(6-11)式和(6-17)式给出

$$f_\phi = [(a/c)^2 \cos^2\phi + \sin^2\phi]^{1/4} = 1$$

由于是单侧裂纹,  $n=1$ , 故有

$$f_w = \left[ \sec\left(\frac{\pi R}{2W}\right) \sec\left(\frac{\pi(2R + nc)}{4(W - c) + 2nc} \sqrt{\frac{a}{t}}\right) \right]^{1/2} \\ = \left[ \sec\left(\frac{3}{20}\pi\right) \sec\left(\frac{\pi(12 + 1)}{4 \times 19 + 2} \sqrt{\frac{1}{10}}\right) \right]^{1/2} = 1.0667$$

所以,修正系数  $F_{ch}$  为

$$F_{ch} = [1.04 + 0.2(0.1)^2 - 0.1(0.1)^4] \times 1.45 \times 2.303 \\ \times 1.113 \times 1 \times 1.0667 = 4.131$$

注意到  $a/c=1$  时,由(6-2)式有  $E(k)=\pi/2$ , 且  $a=0.001\text{m}$ , 故得

$$K_{n=2} = 4.131 \frac{2}{\pi} \sigma_c \sqrt{\pi a} = 0.1474\sigma_c$$

进一步由(6-18)式给出

$$K_{n=1} = \left[ \left( \frac{4}{\pi} + \frac{ac}{2tR} \right) / \left( \frac{4}{\pi} + \frac{ac}{tR} \right) \right]^{1/2} K_{n=2} = 0.9968 K_{n=2} = 0.1469\sigma_c$$

由断裂判据有

$$K_{n=1} = 0.1469\sigma_c \leq K_{1c}$$

得到断裂应力为

$$\sigma_c \leq K_{1c}/0.1469 = (120/0.1469)\text{MPa} = 816.88\text{MPa}$$

由此可见,构件中有 1mm 的裂纹存在时,只要应力  $\sigma > 816.88\text{MPa}$ ,拉杆将发生断裂。而若无裂纹存在,该应力远低于屈服强度  $\sigma_s = 1400\text{MPa}$ ,强度显然是足够的。

### 6.3 弯曲载荷作用下有限体中表面裂纹的应力强度因子

在弯曲载荷作用下,构件内的弯曲正应力也会引起裂纹的张开型扩展而导致构件破坏。因此,研究弯曲载荷作用下裂纹(尤其是表面裂纹)的应力强度因子,具有重要的工程实际意义。

#### 一、弯曲载荷下表面裂纹的应力强度因子

Kobayashi 等首先研究了在弯曲载荷作用下无限大体中埋藏椭圆裂纹的应力强度因子,进而讨论了纯弯曲情况下有限厚度板中的半椭圆表面裂纹。

对于图 6.10 所示有限厚度板中的半椭圆表面裂纹,纯弯曲情况下的应力强度因子可表达为

$$K = M_b \frac{\sigma_b \sqrt{\pi a}}{E(k)} \left( \sin^2 \theta + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta \right)^{1/4} \quad (6-20)$$

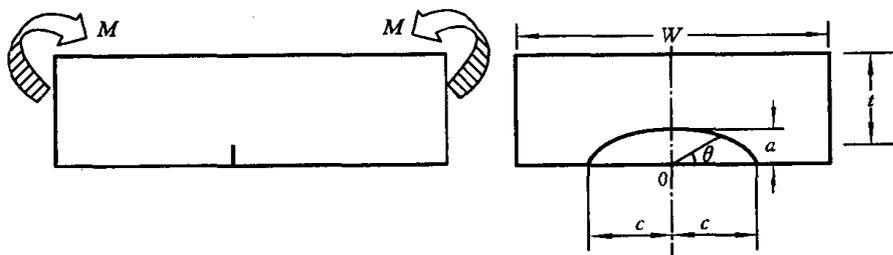


图 6.10 弯曲载荷下有限厚度板中的表面裂纹

式中,  $\sigma_b$  为名义弯曲正应力,即假设裂纹不存在时,弯矩  $M$  作用下有限厚度裂纹所在外层纤维处(0 处)的应力;  $M_b$  为有限厚度修正函数。

注意,上式与拉伸载荷作用下半无限体中表面裂纹应力强度因子的表达式

(6-3)式具有相同的形式,只是将作用的拉伸正应力  $\sigma_t$  换成弯曲正应力  $\sigma_b$ ,将前表面修正函数  $M_f$  换成考虑有限厚度(包括前、后表面)的修正函数  $M_{tb}$ 。

我们关心的仍然是裂纹最深处( $\theta=\pi/2$ )和裂纹表面处( $\theta=0$ )的应力强度因子。在裂纹最深处,  $\theta=\pi/2$ , (6-20)式给出应力强度因子

$$K_{(\pi/2)} = M_{tb(\pi/2)} \frac{\sigma_t \sqrt{\pi a}}{E(k)}$$

Kobayashi 给出了计算裂纹最深处( $\theta=\pi/2$ )之应力强度因子  $K_{(\pi/2)}$  时,有限厚度修正函数  $M_{tb(\pi/2)}$  的数值结果,如图 6.11 所示。

查图表寻找有限厚度修正函数  $M_{tb(\pi/2)}$ ,对于利用计算机分析是很不方便的。为此,下面给出了二组可用于计算的近似表达式。

Scott 等 (Fatigue of Engineering Materials and Structures, Vol14, No. 4, 1981) 拟合数值计算结果后给出:

$$K_{(\pi/2)} = M_{f(\pi/2)} \left[ 1 - 1.36 \left( \frac{a}{t} \right) \left( \frac{a}{c} \right)^{0.1} \right] \frac{\sigma_b \sqrt{\pi a}}{E(k)}$$

$$K_{(0)} = \left\{ M_{f(0)} \left( 1 - 0.3 \frac{a}{t} \right) \left[ 1 - \left( \frac{a}{t} \right)^{12} \right] \right.$$

$$\left. + 0.394 E(k) \left( \frac{a}{t} \right)^{12} \left( \frac{a}{c} \right)^{-1/2} \right\} \frac{\sigma_b \sqrt{\pi a}}{E(k)} \quad (6-21)$$

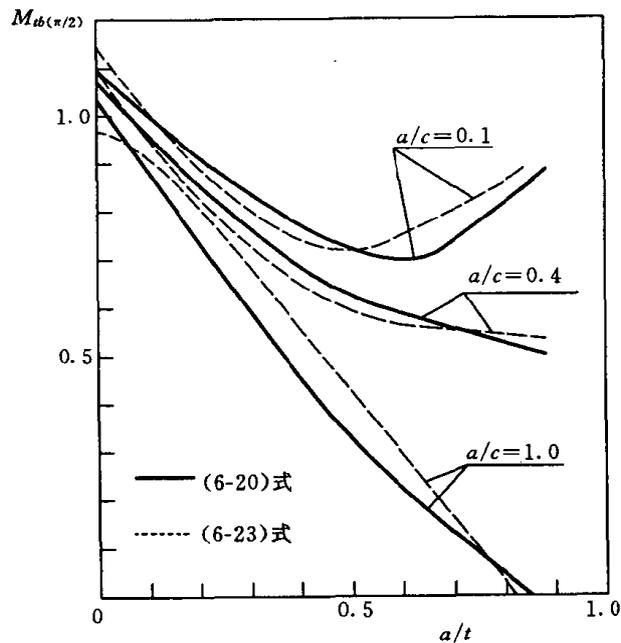


图 6.11 纯弯曲时的有限厚度修正函数  $M_{tb}$

式中,  $K_{(\pi/2)}$ 、 $K_{(0)}$ 分别为有限厚板中半椭圆表面裂纹最深处( $\theta=\pi/2$ )与表面处( $\theta=0$ )的应力强度因子;  $M_{f(\pi/2)}$ 、 $M_{f(0)}$ 为相应的前表面修正系数,分别由(6-4)式的第三式和(6-7)式给出,即

$$M_{f(\pi/2)} = 1.13 - 0.07 \left( \frac{a}{c} \right)^{1/2}$$

$$M_{f(0)} = \left[ 1.21 - 0.1 \frac{a}{c} + 0.1 \left( \frac{a}{c} \right)^4 \right] \sqrt{\frac{a}{c}}$$

当  $a/t \rightarrow 1$  时,上述第二式给出裂纹长半轴端的应力强度因子为

$$K_{(0)} = 0.394 \sigma_b \sqrt{\pi c}$$

Wilson 和 Thompson 用有限元计算给出的具有长  $2c$  的穿透裂纹板承受弯曲载荷的解为

$$K_{(0)} = \frac{1 + \mu}{3 + \mu} \sigma_b \sqrt{\pi c}$$

当泊松比  $\mu=0.3$  时,上述二者是一致的。

Letunov 考虑有限宽度的影响(Strength of Materials, 1985),给出:

$$K_{(\pi/2)} = \left( 1.12 - 0.07 \frac{a}{c} \right) \left\{ 1 - 2 \frac{a}{t} \left[ 0.72 - 0.2 \left( \frac{\pi}{2} - E(k) \right) \right] \right\}$$

$$\times \left\{ 0.998 + \left[ 0.603 \left( \frac{a}{c} \right)^2 - 0.783 \frac{a}{c} + 0.118 \right] \frac{a}{t} \right.$$

$$\left. + \left[ 0.169 \left( \frac{a}{c} \right)^2 - 0.975 \frac{a}{c} + 0.95 \right] \left( \frac{a}{t} \right)^2 \right\} f_w \frac{\sigma_b \sqrt{\pi a}}{E(k)}$$

$$K_{(0)} = 1.2 \left( 1 - 0.34 \frac{a}{t} \right) \left\{ 0.99 + \left[ 0.451 \left( \frac{a}{c} \right)^2 - 0.63 \frac{a}{c} + 0.542 \right] \frac{a}{t} \right.$$

$$\left. + \left[ -4.867 \left( \frac{a}{c} \right)^2 + 3.748 \frac{a}{c} - 0.542 \right] \left( \frac{a}{t} \right)^2 \right\} f_w \frac{\sigma_b \sqrt{\pi a}}{E(k)} \sqrt{\frac{a}{t}}$$

(6-22)

式中,有限宽修正函数  $f_w$  为

$$f_w = \sec \left[ \frac{\pi c}{W} \sqrt{\frac{a}{t}} \right]^{1/2}$$

## 二、拉、弯组合载荷作用下表面裂纹的应力强度因子

实际工程构件的承载情况往往是复杂的。拉伸、弯曲载荷组合作用时,垂直于裂纹面作用的既有拉伸正应力,又有弯曲正应力。组合载荷作用下裂纹面上的正应力通常是线性或近似线性分布的,如图 6.12 所示。

将非线性(近似线性)分布的名义应力作线性近似;再将线性分布的应力视

为均匀拉伸和纯弯曲两种情况的叠加；在弹性小变形条件下，即可由前述拉伸、弯曲载荷作用下表面裂纹的应力强度因子解叠加得出拉、弯组合载荷作用下的应力强度因子的解。

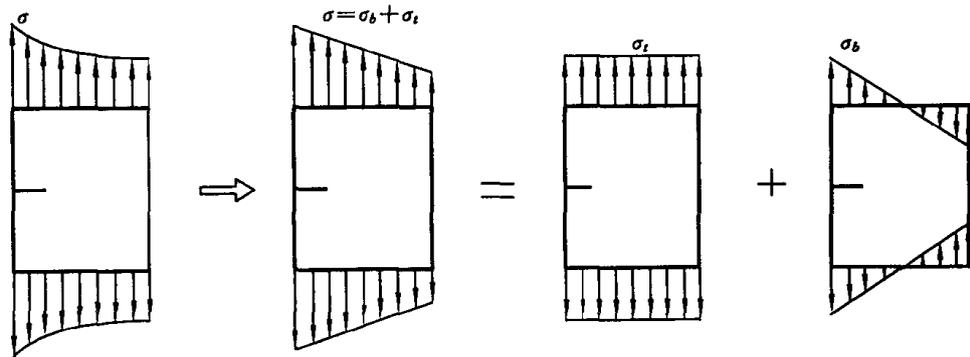


图 6.12 名义应力的线性化及拉、弯载荷的叠加

Kanazawa 利用 Kobayashi 等的计算结果，通过数据拟合给出了下述由多项式表达的拉、弯组合载荷作用下的应力强度因子的解：

$$K_{(\pi/2)} = (M_1 M_2 \sigma_t + M_3 \sigma_b) \frac{\sqrt{\pi a}}{E(k)}$$

$$K_{(0)} = 1.18 M_1 M_4 \left[ \sigma_t + \left( 1 - 0.306 \frac{a}{t} \right) \sigma_b \right] \frac{\sqrt{\pi a}}{E(k)} \sqrt{\frac{a}{c}} \quad (6-23)$$

式中， $\sigma_t$ 、 $\sigma_b$  分别为图 6.12 所示之名义拉伸、弯曲应力， $E(k)$  仍为第二类完全椭圆积分，且各系数分别为

$$M_1 = 1 + 0.12[1 - (a/2c)]^2$$

$$M_2 = 1 + 0.127(a/t) - 0.079(a/c) - 0.558(a/t)^2 - 0.175(a/t)(a/c) + 0.279(a/c)^2 + 1.44(a/t)^3 - 1.06(a/t)^2(a/c) + 0.609(a/t)(a/c)^2 - 0.249(a/c)^3$$

$$M_3 = 1.183 - 1.22(a/t) - 0.286(a/c) + 0.867(a/t)^2 - 0.00677(a/t)(a/c) + 0.23(a/c)^2 + 0.467(a/t)^3 - 1.92(a/t)^2(a/c) + 0.633(a/t)(a/c)^2 - 0.182(a/c)^3$$

$$M_4 = 0.994 - 0.0126(a/t) + 0.0701(a/c) + 0.0155(a/t)^2 + 0.179(a/t)(a/c) - 0.211(a/c)^2 - 0.0839(a/t)^3 + 0.231(a/t)^2(a/c) - 0.3(a/t)(a/c)^2 + 0.162(a/c)^3$$

由上述表达式给出的在弯曲载荷作用下表面裂纹最深处( $\theta=\pi/2$ )的应力强度因子的计算结果(为与 Kobayashi 的解相比较,以修正函数  $M_{\theta(\pi/2)}$  的形式给出),在图 6.11 中用虚线示出,二者基本上是相符的。

Newman 和 Raju 将拉、弯组合载荷作用下半椭圆表面裂纹周边任一点的应力强度因子表达为

$$K = F_s \left( \frac{a}{c}, \frac{a}{t}, \frac{c}{W}, \phi \right) \frac{(\sigma_t + H\sigma_b) \sqrt{\pi a}}{E(k)} \quad (6-24)$$

式中,  $\sigma_t$ 、 $\sigma_b$  分别为名义拉伸和弯曲应力;第二类完全椭圆积分  $E(k)$  由(6-2)式或(6-13)式给出;角  $\phi$  按图 6.5 定义;修正系数  $F_s$  与(6-14)式中相同;系数

$$H = H_1 + (H_2 - H_1) \sin^p \phi; \quad p = 0.2 + a/c + 0.6a/t$$

$$H_1 = 1 - 0.34a/t - 0.11(a/c)(a/t)$$

$$H_2 = 1 + G_1(a/t) + G_2(a/t)^2$$

$$G_1 = -1.22 - 0.12(a/c)$$

$$G_2 = 0.55 - 1.05(a/c)^{3/4} + 0.47(a/c)^{3/2}$$

适用范围为:

$$0 \leq a/c \leq 1, \quad 0 \leq a/t < 1, \quad c/W < 0.5。$$

## 小 结

1. 高应力区一般在零、构件表面。疲劳载荷作用下萌生的裂纹大都起源于应力水平高的表面。故表面裂纹引起的断裂破坏,是工程实际中最常见的。
2. 表面裂纹通常可用半椭圆描述其形状。
3. 无限大体中埋藏椭圆裂纹周边的应力强度因子是不同的,工程中关注的是沿短、长半轴处裂纹尖端的应力强度因子。在拉伸应力场内:  
当  $\theta=\pi/2$  时,即在短轴方向的裂纹尖端,应力强度因子最大,且由(6-1)式知

$$K_{(\pi/2)} = \frac{\sigma_t \sqrt{\pi a}}{E(k)}$$

当  $\theta=0$  时,即在长轴方向的裂纹尖端,应力强度因子最小,且有

$$K_{(0)} = \frac{\sigma_t \sqrt{\pi a}}{E(k)} \sqrt{\frac{a}{c}}$$

无限大体中圆盘形埋藏裂纹( $a/c=1$ )的应力强度因子处处相同,且

$$K = \frac{2}{\pi} \sigma_t \sqrt{\pi a}$$

4. 拉伸载荷作用下,半无限大体中半椭圆表面裂纹的应力强度因子

$$K = M_f \frac{\sigma_t \sqrt{\pi a}}{E(k)} \left( \sin^2 \theta + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta \right)^{1/4}$$

当  $c \rightarrow \infty, a/c \rightarrow 0$  时,  $K = 1.1215 \sigma_t \sqrt{\pi a}$

当  $a/c = 1$  时,拉伸载荷作用下表面半圆形裂纹最深处的应力强度因子

$$K = 1.03 \frac{2}{\pi} \sigma_t \sqrt{\pi a}$$

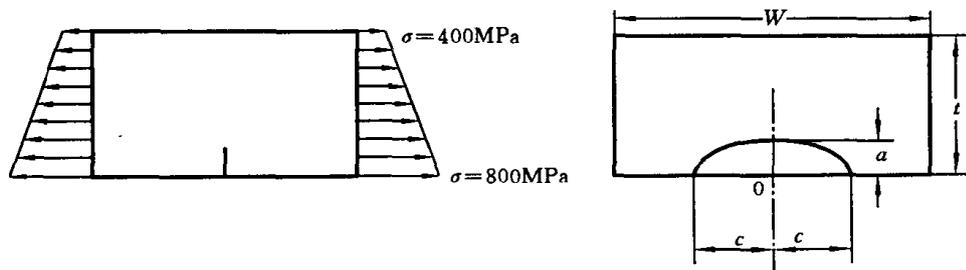
故当裂纹的形状比  $a/c$  从 0~1 连续变化时,前表面修正系数  $M_f$  之值应在 1.03~1.1215 之间。

5. 断裂力学研究已得到了一些工程上可用的有限体中表面裂纹的应力强度因子数值解。
6. 在弹性小变形条件下,拉、弯组合载荷作用下的应力强度因子解,可由拉伸、弯曲载荷作用下表面裂纹的应力强度因子解叠加得到。

### 思考题与习题

- 6-1 拉伸载荷作用下,圆盘形裂纹、椭圆裂纹、表面半椭圆裂纹尖端各处的应力强度因子是否相同? 试讨论表面半椭圆裂纹最深处与表面处的应力强度因子的大小。
- 6-2 在什么条件下,拉、弯组合载荷作用下的应力强度因子解,可由拉伸、弯曲载荷作用下表面裂纹的应力强度因子解叠加得到? 如何将垂直于裂纹面作用的分布载荷线性化并分解成拉、弯两部分?
- 6-3 某大直径球壳(壁厚  $t = 20\text{mm}$ )在打压验收试验中发生爆裂,检查发现其内部有  $2a = 1.2\text{mm}$ ,  $2c = 4\text{mm}$  的埋藏椭圆裂纹。已知材料的屈服应力为  $\sigma_{ys} = 1200\text{MPa}$ ,  $K_{1c} = 80\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ , 试估计断裂应力  $\sigma_c$ 。
- 6-4  $W = 100\text{mm}$ ,  $t = 12\text{mm}$  的板中有一  $a = 2\text{mm}$ ,  $c = 5\text{mm}$  的半椭圆表面裂纹,受拉伸载荷  $\sigma = 600\text{MPa}$  作用,试求裂纹表面处( $\phi = 0$ )和最深处( $\phi = \pi/2$ )的应力强度因子。
- 6-5 圆筒形容器直径  $D = 500\text{mm}$ ,壁厚  $t = 18\text{mm}$ ,承受  $p = 40\text{MPa}$  的内压作用。已知材料性能为  $\sigma_{ys} = 1700\text{MPa}$ ,  $K_{1c} = 60\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ 。若有一平行于轴线的纵向半椭圆裂纹,裂纹深  $a = 2\text{mm}$ ,长  $2c = 6\text{mm}$ ,试计算容器的抗断裂工作安全系数  $n_f$ 。
- 6-6 某高强度钢拉杆承受拉应力作用,接头处有双侧对称孔边角裂纹  $a = 1\text{mm}$ ,  $c = 2\text{mm}$ ,孔径  $d = 12\text{mm}$ ,  $W = 20\text{mm}$ ,接头耳片厚为  $t = 10\text{mm}$ 。若已知材料的断裂韧性为  $K_{1c} = 120\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ ,试估计当工作应力  $\sigma = 700\text{MPa}$  时,是否发生断裂。
- 6-7  $W = 100\text{mm}$ ,  $t = 12\text{mm}$  的板中有  $a = 2\text{mm}$ ,  $c = 5\text{mm}$  的半椭圆表面裂纹,受线性分部载

荷作用,如题 6-7 图所示。试求裂纹最深处( $\phi=\pi/2$ )的应力强度因子。



题 6-7 图

## 第七章 弹塑性断裂力学简介

用线弹性材料物理模型,按照弹性力学方法,研究含裂纹弹性体内的应力分布,给出描述裂纹尖端应力场强弱的应力强度因子  $K$ ,并由此建立裂纹扩展的临界条件,处理工程问题,即线弹性断裂力学(LEFM——Linear Elastic Fracture Mechanics)。

线弹性断裂力学给出的裂纹尖端附近的应力趋于无穷大。然而,事实上任何实际工程材料,都不可能承受无穷大的应力作用。因此,裂尖附近的材料必然要进入塑性,发生屈服。

### 7.1 裂纹尖端的小范围屈服

#### 一、裂尖屈服区

5.2 节给出了无限大板中裂纹尖端附近任一点  $(r, \theta)$  处的正应力  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$  和剪应力  $\tau_{xy}$  的线弹性解答。当  $r \rightarrow 0$  时,应力以  $r^{-1/2}$  的阶次趋于无穷大。对于任何实际的工程材料,在趋于无穷大的应力作用下,必然要发生屈服。因此,有必要了解裂尖附近材料的屈服及其对应力强度因子解答的影响。

线弹性断裂力学分析给出了裂纹尖端附近任一点处的正应力  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$  和剪应力  $\tau_{xy}$ ,换言之,即裂尖附近任一点的应力状态已知。由此,可以计算该点的主应力,再利用适当的塑性屈服准则,即可得到裂纹尖端屈服区域的形状与尺寸。有兴趣的读者可参考有关断裂力学方面的书籍,这里仅简单讨论沿裂纹线上屈服区域的大小。

由(5-1)式可知,在裂纹线上( $\theta=0$ ),注意到  $K=\sigma\sqrt{\pi a}$ ,有

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma\sqrt{\frac{a}{2r}} = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}}; \quad \tau_{xy} = 0 \quad (7-1)$$

对于平面问题,有  $\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$ ;若为平面应力状态,还有  $\sigma_z=0$ ;若为平面应变状态,则有  $\sigma_x=\nu(\sigma_x+\sigma_y)$ 。

注意到  $\tau_{xy}=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$ ,则裂纹线上任一点的主应力为

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \quad \text{及} \quad \sigma_3 = \begin{cases} 0 & \text{(平面应力)} \\ 2\nu K_1 / \sqrt{2\pi r} & \text{(平面应变)} \end{cases} \quad (7-2)$$

塑性力学中, von Mises 屈服条件为

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_{ys}^2$$

将(7-2)式给出的主应力代入 Mises 屈服条件, 得到

$$K_1 / \sqrt{2\pi r_p} = \sigma_{ys} \quad \text{(平面应力)}$$

$$(1 - 2\nu)K_1 / \sqrt{2\pi r_p} = \sigma_{ys} \quad \text{(平面应变)}$$

即可得到塑性屈服区尺寸

$$\left. \begin{aligned} r_p &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_1}{\sigma_{ys}} \right)^2 && \text{(平面应力)} \\ r_p &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_1}{\sigma_{ys}} \right)^2 (1 - 2\nu)^2 && \text{(平面应变)} \end{aligned} \right\} \quad (7-3)$$

式中,  $\sigma_{ys}$  为材料的屈服应力,  $\nu$  为泊松比。对于金属材料,  $\nu \approx 0.3$ , 这表明由于受到厚度方向的约束, 平面应变情况下裂尖塑性区比平面应力时要小得多。

当  $\theta=0$  时(在  $x$  轴上), 裂纹附近区域的应力分布及裂纹线上的塑性区尺寸如图 7.1 所示。图中的虚线为线弹性解给出的  $\sigma_y$ , 当  $r \rightarrow 0$  时,  $\sigma_y \rightarrow \infty$ 。实际上, 靠近裂尖处的材料将由于  $\sigma_y > \sigma_{ys}$  而进入屈服。假定材料为弹性-理想塑性材料, 屈服区内的应力恒为  $\sigma_{ys}$ , 如图中  $AB$  线段所示, 即塑性区尺寸为  $r_p$ 。至此, 考虑裂尖屈服后, 应力分布应由实线  $AB$  与虚线  $BK$  表示。更进一步考查发现, 由实线  $AB$  与虚线  $BK$  表示的裂尖应力分布与原线弹性解(虚线  $HK$ )相比较, 少了  $AHB$  部分。因为原线弹性解是满足静力平衡条件的, 则

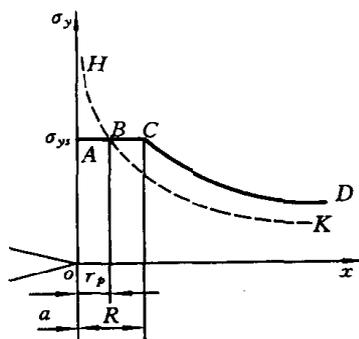


图 7.1 裂尖应力分布及塑性区

考虑屈服后的应力分布也必须使静力平衡条件得到满足, 即由于  $AB$  部分材料屈服而少承担了的应力必须转移到附近还能进一步承载的部分弹性材料上, 其结果将使更多材料进入屈服。因此, (7-3)式给出的塑性区尺寸需要进行修正。

假定线弹性解答在屈服区外仍然适用, 修正后的屈服区尺寸为  $R$ ; 截面之内力等于应力  $\sigma_y(x)$  与微面积  $t dx$  的乘积沿  $x$  轴的积分。令  $t=1$  为单位厚度, 则内力为图 7.1 中应力分布曲线图形下的面积。为满足静力平衡条件, 应考虑使塑性

修正后的  $ABCD$  曲线下的面积与线弹性解  $HBK$  曲线下的面积相等。由于已假定线弹性解答在屈服区外仍然适用,可知曲线  $CD$  与  $BK$  下的面积是相等的,故只需  $AC$  下的面积等于曲线  $HB$  下的面积即可,于是得到

$$R\sigma_{ys} = \int_0^{r_p} \sigma_y(x) dx$$

注意到式中  $\sigma_y = K_1 / \sqrt{2\pi r}$ ,  $r_p = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_1}{\sigma_{ys}} \right)^2$ , 积分后不难得到平面应力情况下裂尖的塑性区尺寸

$$R = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_1}{\sigma_{ys}} \right)^2 = 2r_p$$

依据上述分析,并考虑到平面应变时三轴应力作用的影响, Irwin 给出的塑性区尺寸:

$$R = 2r_p = \frac{1}{\alpha\pi} \left( \frac{K_1}{\sigma_{ys}} \right)^2 \quad \alpha = \begin{cases} 1 & \text{(平面应力)} \\ 2\sqrt{2} & \text{(平面应变)} \end{cases} \quad (7-4)$$

上式指出,裂纹尖端的塑性区尺寸与  $(K_1/\sigma_{ys})$  的平方成正比,平面应变时的裂尖塑性区尺寸约为平面应力情况下的  $1/3$ 。

## 二、考虑裂尖屈服后的应力强度因子

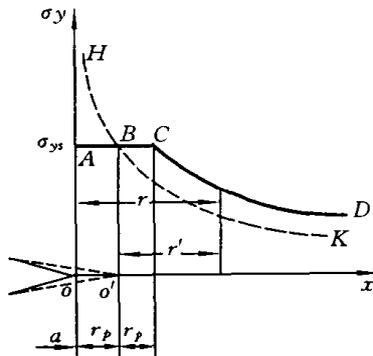


图 7.2 Irwin 的塑性修正

对于理想塑性材料,考虑裂纹尖端的屈服后,裂尖附近的应力分布应为图 7.1 中  $ACD$  曲线。 $AC$  直线段尺寸为  $R=2r_p$ , 应力  $\sigma_y=\sigma_{ys}$ ; 曲线  $CD$  与线弹性解  $BK$  相同,但向右平移了一个  $BC=r_p$  的距离。假想裂纹尺寸由  $a$  增大到  $a+r_p$ , 则裂纹尖端的线弹性解恰好就是曲线  $CD$ , 如图 7.2 所示。 $a+r_p$  称为有效裂纹长度, 只要用  $a+r_p$  代替真实裂纹长度  $a$ , 并注意到  $r'=r-r_p$ , 就可由原来的线弹性断裂力学结果直接给出考虑 Irwin 塑性修正的解答。即

$$K_1 = \sigma \sqrt{\pi(a+r_p)} \quad (7-5)$$

在裂纹线上 ( $\theta=0$ ) 的应力

有

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \sigma_{ys}, & r &\leq 2r_p \\ \sigma_y &= \frac{K_1}{\sqrt{2\pi(r-r_p)}}, & r &\geq 2r_p\end{aligned}\quad (7-6)$$

**例 7.1** 无限宽中心裂纹板,受远场拉应力  $\sigma$  作用,试讨论塑性修正对应力强度因子的影响。

**解** 由线弹性断裂力学给出无限宽中心裂纹板的应力强度因子

$$K_1 = \sigma\sqrt{\pi a}$$

考虑塑性修正时,由(7-5)式有

$$K'_1 = \sigma\sqrt{\pi(a+r_p)}$$

将(7-4)式给出的  $r_p$  代入上式,得到

$$\begin{aligned}K'_1 &= \sigma \left\{ \pi \left[ a + \frac{1}{2\alpha\pi} \left( \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sigma_{ys}} \right)^2 \right] \right\}^{1/2} \\ &= \sigma\sqrt{\pi a} \left\{ \left[ 1 + \frac{1}{2\alpha} \left( \frac{\sigma}{\sigma_{ys}} \right)^2 \right] \right\}^{1/2} = \lambda K_1 \\ \lambda &= \left[ 1 + \frac{1}{2\alpha} \left( \frac{\sigma}{\sigma_{ys}} \right)^2 \right]^{1/2}\end{aligned}$$

注意到  $\lambda > 1$ ,故考虑塑性修正后应力强度因子增大。 $K'_1$  与  $K_1$  二者的相对误差为

$$\epsilon = \frac{K'_1 - K_1}{K_1} = \lambda - 1$$

对于平面应力情况,  $\alpha=1$ 。当  $(\sigma/\sigma_{ys})=0.2$  时,  $\epsilon=1\%$ ; 当  $(\sigma/\sigma_{ys})=0.5$  时,  $\epsilon=6\%$ ; 当  $(\sigma/\sigma_{ys})=0.8$  时,  $\epsilon=15\%$ 。对于平面应变情况,  $\alpha \approx 3$ ,二者相差要小一些。

由此可见,弹性计算与考虑塑性修正时所得到的应力强度因子的差别随  $(\sigma/\sigma_{ys})$  的增大而增大,亦即随裂尖塑性区尺寸的增大而增大。

### 三、小范围屈服时表面裂纹的应力强度因子修正

由 6.1 节知,无限大体中半椭圆表面裂纹最深处的应力强度因子

$$K_1 = \frac{M_f \sigma \sqrt{\pi a}}{E(k)} \quad (7-7)$$

式中,  $M_f$  为前表面修正系数,通常取  $M_f=1.1$ ;  $E(k)$  为第二类完全椭圆积分。

考虑裂尖材料的屈服,按照 Irwin 的塑性修正,应当用  $a+r_p$  代替原裂纹尺寸  $a$ ,故有

$$K_1 = \frac{1.1\sigma\sqrt{\pi(a+r_p)}}{E(k)}$$

无限大体中半椭圆表面裂纹最深处处于平面应变状态,故由(7-4)式知

$$r_p = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \left( \frac{K_1}{\sigma_{ys}} \right)^2$$

代入上式后,二边平方,整理后即得

$$K_1 = \frac{1.1\sigma\sqrt{\pi a}}{Q} \quad (7-8)$$

式中

$$Q = \{ [E(k)]^2 - 0.212(\sigma/\sigma_{ys})^2 \}^{1/2}$$

称为形状参数。

由此可见,考虑小范围屈服时,表面裂纹的应力强度因子计算只需用形状参数  $Q$  代替第二类完全椭圆积分  $E(k)$  即可。工程中,对于有限体内表面裂纹的应力强度因子计算,也可采用上述修正。

为便于计算机计算,利用(6-13)式的近似表达,可将形状参数  $Q$  写为

$$Q = [1 + 1.47(a/c)^{1.64} - 0.212(\sigma/\sigma_{ys})^2]^{1/2} \quad (7-9)$$

**例 7.2** 某大尺寸厚板含一表面裂纹,受远场拉应力  $\sigma$  作用。材料的屈服应力为  $\sigma_{ys}=600\text{MPa}$ ,断裂韧性  $K_{1c}=50\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ ,试估计:

- 1) 作用应力  $\sigma=500\text{MPa}$  时的临界裂纹深度  $a_c$  (设  $a/c=0.5$ )。
- 2)  $a/c=0.1$ ,  $a=5\text{mm}$  时,此表面裂纹厚板的临界断裂应力  $\sigma_c$ 。

**解** 1) 无限大体中半椭圆表面裂纹最深处的应力强度因子由(7-8)式给出,形状参数  $Q$  由(7-9)式给出,在发生断裂的临界状态有

$$K_1 = \frac{1.1\sigma\sqrt{\pi a_c}}{Q} = K_{1c};$$

可知

$$a_c = \frac{Q^2 K_{1c}^2}{1.21\sigma^2\pi}$$

$$Q^2 = 1 + 1.47(0.5)^{1.64} - 0.212(500/600)^2 = 1.32$$

故得

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{Q^2 K_{1c}^2}{1.21\sigma^2\pi} = \left( \frac{1.32 \times 50^2}{1.21 \times 500^2 \times 3.14} \right) \text{m} \\ &= 0.00347\text{m} = 3.47\text{mm} \end{aligned}$$

2) 断裂临界状态有

$$K_1 = \frac{1.1\sigma_c\sqrt{\pi a}}{Q} = K_{1c}$$

注意此时形状参数  $Q$  是  $\sigma_c$  的函数, 即

$$\begin{aligned} Q^2 &= 1 + 1.47(0.1)^{1.64} - 0.212(\sigma_c/600)^2 \\ &= 1.034 - 0.212(\sigma_c/600)^2 \end{aligned}$$

将上述临界断裂条件式两边平方, 再将  $Q^2$  代入, 整理后得

$$\begin{aligned} \sigma_c^2 &= \frac{1.034K_{1c}^2}{1.21\pi a + 0.212(K_{1c}/\sigma_{ys})^2} \\ &= \left( \frac{1.034 \times 50^2}{1.21\pi \times 0.005 + 0.212(50/600)^2} \right) (\text{MPa})^2 \\ &= 126282 (\text{MPa})^2 \end{aligned}$$

开方后得到  $\sigma_c = 355.4 \text{ MPa}$

一般地说, 只要裂尖塑性区尺寸  $r_p$  与裂纹尺寸  $a$  相比很小 ( $a > 20 \sim 50r_p$ ), 即可认为满足小范围屈服条件, 线弹性断裂力学就可以得到有效的应用。对于一些高强度材料; 对于处于平面应变状态 (厚度大) 的构件; 对于断裂时的应力远小于屈服应力的情况, 小范围屈服条件通常是满足的。

## 7.2 裂纹尖端张开位移

中、低强度材料, 屈服强度不高, 但一般有较高的断裂韧性。由于断裂韧性强, 可能在较大的应力  $\sigma$  作用下并不发生断裂; 作用应力  $\sigma$  越大, 由 (7-4) 式可知裂尖塑性区尺寸将越大。如果应力  $\sigma$  大到使裂纹所在截面上的净截面应力  $\sigma_{\text{net}} = \sigma W / (W - 2a)$  到达屈服应力  $\sigma_{ys}$ , 则塑性区将扩展至整个截面, 造成全面屈服, 如图 7.3 所示。

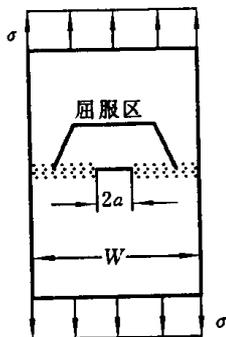


图 7.3 裂纹面全面屈服

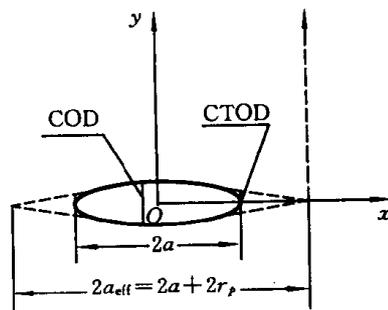


图 7.4 裂纹顶端张开位移

当裂纹尖端存在着较大范围屈服时,线弹性断裂力学不再适用。此时,随着作用应力的增大,裂尖塑性区增大,裂纹越来越张开。裂纹张开的尺寸用裂纹张开位移(COD)来描述,其大小应当与裂纹是否扩展或断裂相关。显然可知,COD是  $x$  坐标的函数,且裂纹尺寸  $a$  越大,COD 也越大。裂纹尖端张开位移(CTOD——Crack Tip Opening Displacement)是在  $x=a$  处的裂纹张开位移,记作  $\delta$ ,如图 7.4 所示。用  $\delta$  描述裂纹尖端区域的应力应变场,建立适于大范围屈服的弹塑性断裂判据,应当更为恰当。

如图 7.4 所示,Dugdale 设想有一虚拟裂纹长  $a_{\text{eff}}=a+r_p$ ,  $r_p$  是裂尖屈服区;在长  $r_p$  的虚拟裂纹上、下裂纹面上加上  $\sigma=\sigma_{ys}$  的应力作用而使裂纹闭合,然后进行了准弹性分析。

平面应力条件下,在净截面应力  $\sigma/\sigma_{ys}<1$  时,即在全面屈服之前,利用 Dugdale 等的结果可以给出裂纹尖端张开位移  $\delta$  与作用应力  $\sigma$  间的关系为

$$\delta = \frac{8\sigma_{ys}a}{\pi E} \ln \left[ \sec \left( \frac{\pi\sigma}{2\sigma_{ys}} \right) \right] \quad (7-10)$$

如果作用应力  $\sigma$  很小,  $\sigma/\sigma_{ys} \ll 1$ ,则可将上式中  $\ln \sec$  项逐次展开后略去高次项,得到

$$\ln \left[ \sec \left( \frac{\pi\sigma}{2\sigma_{ys}} \right) \right] = \ln \left[ 1 - \frac{\pi^2\sigma^2}{8\sigma_{ys}^2} \right]^{-1} = \ln \left[ 1 + \left( \frac{\pi^2\sigma^2}{8\sigma_{ys}^2} \right) \right] = \frac{\pi^2\sigma^2}{8\sigma_{ys}^2}$$

因此,对于小范围屈服情况,(7-10)式成为

$$\delta = \frac{\sigma^2\pi a}{\sigma_{ys}E} = \frac{K_1^2}{\sigma_{ys}E} \quad (7-11)$$

在发生断裂的临界状态下,  $K_1 \rightarrow K_{1c}$ ,  $\delta \rightarrow \delta_c$ 。故上式给出了平面应力情况下,小范围屈服时  $\delta_c$  与材料断裂韧性  $K_{1c}$  的换算关系。

一般地,(7-11)式可写为

$$\delta = \beta \frac{K_1^2}{\sigma_{ys}E} \quad (7-12)$$

在平面应力情况下,  $\beta=1$ ;在平面应变情况下,  $\beta=(1-\nu^2)/2$ 。

因此,在小范围屈服情况下,断裂判据可用应力强度因子  $K$  表达为  $K_1 \leq K_{1c}$ ,也可以用裂纹尖端张开位移  $\delta$  表达为  $\delta \leq \delta_c$ 。

若屈服范围较大,  $\delta$  由(7-10)式给出,则用裂纹尖端张开位移  $\delta_c$  作为描述材料抗断裂能力的参量时,还需要研究 CTOD 的试验确定方法。

## 7.3 COD 测试与弹塑性断裂控制设计

### 一、裂尖张开位移(COD)的测试

COD 试验,一般都采用三点弯曲试件进行。在试件缺口处粘贴一对厚度为  $h$  的切口,以便安装夹式引伸计测量裂纹张开位移,如图 7.5 所示。随着载荷  $P$  的增加,刀口处的张开位移  $V$  不断增大,与  $K_{Ic}$  测试一样,可以记录其  $P$ - $V$  曲线。

将裂纹尖端张开位移  $\delta$  分为弹性部分  $\delta_e$  和塑性部分  $\delta_p$ ,即

$$\delta = \delta_e + \delta_p \quad (7-13)$$

式中,弹性部分  $\delta_e$  可由前面小范围屈服情况的分析给出,即采用(7-12)式。

裂尖有较大的屈服区(甚至全面屈服)后,在试样韧带处将形成塑性铰。假设发生开裂之前二裂纹面绕塑性铰中心  $O'$  作刚性转动,如图 7.5 所示, $O'$  到裂纹尖端的距离为  $r(W-a)$ ,  $r$  称为转动因子。则由几何关系可得到裂纹尖端张开位移的塑性部分  $\delta_p$  与切口处张开位移的塑性部分  $V_p$  间的关系为

$$\delta_p = \frac{r(W-a)V_p}{r(W-a) + (a+h)} \quad (7-14)$$

式中,  $h$  为刀口的厚度;转动因子  $r$  可以由更精细的实验测得,在大范围屈服情况下,  $r$  一般在 0.3~0.5 之间,如图 7.6 所示。国家标准 GB2358—80 中建议将转动因子  $r$  取为 0.45,英国标准协会建议  $r$  取为 0.4。

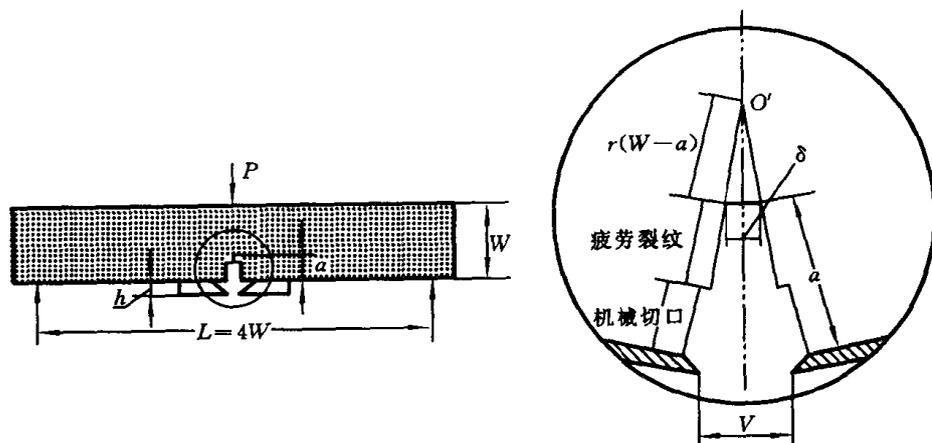


图 7.5 COD 测试

因此,裂纹尖端张开位移  $\delta$  可由下式通过实验确定:

$$\delta = \delta_c + \delta_p = \beta \frac{K_1^2}{E\sigma_{ys}} + \frac{r(W-a)V_p}{r(W-a) + (a+h)} \quad (7-15)$$

式中,  $K_1$  由(5-8)式计算,它是载荷  $P$  与裂纹长度  $a$  的函数;国家标准 GB2358—80 中建议按平面应变情况将  $\beta$  取为  $(1-\nu^2)/2$ 。

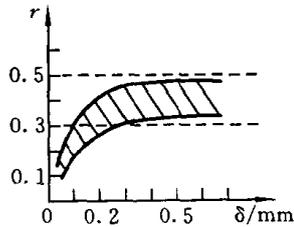


图 7.6  $r$ -COD 关系

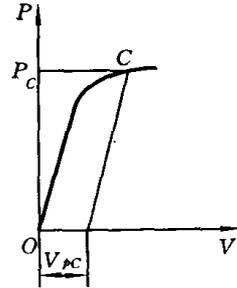


图 7.7  $P$ 、 $V$  值的确定

类似于  $K_{1c}$  测试,按照标准规定,由断口测量确定裂纹尺寸;由记录的  $P$ - $V$  曲线,借助声发射等监测技术,确定发生失稳断裂的临界点  $C(P_c, V_c)$ 。再过临界点  $C$  作一与  $P$ - $V$  曲线起始直线段斜率相同的直线,由该直线与横坐标的交点获得临界张开位移的塑性部分  $V_{p,c}$ ,如图 7.7 所示。

例 7.3 已知某钢材的力学性能为:  $E=210\text{GPa}$ ,  $\nu=0.3$ ,  $\sigma_{ys}=450\text{MPa}$ 。标准三点弯曲试样尺寸为:  $B=25\text{mm}$ ,  $W=50\text{mm}$ ;切口厚度  $h=2\text{mm}$ ,预制裂纹长度  $a=26\text{mm}$ 。

1) 若施加载荷  $P=50\text{kN}$  时测得  $V_p=0.33\text{mm}$ ,求此时的 CTOD。

2) 若在载荷  $P=60\text{kN}$ ,  $V_{p,c}=0.56\text{mm}$  时裂纹开始失稳扩展,求材料的临界 CTOD 值  $\delta_c$ 。

解 1) 三点弯曲试样的应力强度因子由(5-8)式给出为

$$K_1 = \frac{3PL}{2BW^2} \sqrt{\pi a} \left[ 1.090 - 1.735 \left( \frac{a}{W} \right) + 8.20 \left( \frac{a}{W} \right)^2 - 14.18 \left( \frac{a}{W} \right)^3 + 14.57 \left( \frac{a}{W} \right)^4 \right]$$

对于标准三点弯曲试样,有  $L=4W$ ;本题  $a/W=26/50=0.52$ ;代入上式后得到

$$K_1 = \frac{6P}{BW} \sqrt{\pi a} \left[ 1.090 - 1.735(0.52) + 8.20(0.52)^2 - 14.18(0.52)^3 + 14.57(0.52)^4 \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{6 \times 50 \times 10^{-3}}{0.025 \times 0.05} \sqrt{3.14 \times 0.026 \times 1.4765} \right) \text{MPa} \sqrt{\text{m}} \\
&= 101.3 \text{MPa} \sqrt{\text{m}}
\end{aligned}$$

注意,这里用的是 MN-m-MPa 单位系,得到的  $K$  的单位为  $\text{MPa} \sqrt{\text{m}}$ 。

裂纹尖端张开位移  $\delta$  的弹性项  $\delta_e$  由(7-12)式给出为

$$\begin{aligned}
\delta_e &= \frac{K_1^2(1-2\nu^2)}{2\sigma_{ys}E} = \left( \frac{101.3^2(1-0.3^2)}{2 \times 450 \times 210 \times 10^3} \right) \text{m} \\
&= 0.0000494 \text{m} = 0.049 \text{mm}
\end{aligned}$$

塑性部分  $\delta_p$  由(7-14)式给出为

$$\begin{aligned}
\delta_p &= \frac{r(W-a)V_p}{r(W-a) + (a+h)} = \left( \frac{0.45 \times (50-26) \times 0.33}{0.45(50-26) + (26+2)} \right) \text{mm} \\
&= 0.092 \text{mm}
\end{aligned}$$

故此时的裂纹尖端张开位移 CTOD 为

$$\delta = \delta_e + \delta_p = (0.049 + 0.092) \text{mm} = 0.141 \text{mm}$$

2) 类似于前,应力强度因子为

$$\begin{aligned}
K_1 &= \left( \frac{6 \times 60 \times 10^{-3}}{0.025 \times 0.05} \sqrt{3.14 \times 0.026 \times 1.4765} \right) \text{MPa} \sqrt{\text{m}} \\
&= 121.5 \text{MPa} \sqrt{\text{m}}
\end{aligned}$$

失稳扩展时的临界裂纹尖端张开位移  $\delta$  之弹性项

$$\begin{aligned}
\delta_{ec} &= \frac{K_{1c}^2(1-2\nu^2)}{2\sigma_{ys}E} = \left( \frac{121.5^2(1-0.3^2)}{2 \times 450 \times 210 \times 10^3} \right) \text{m} \\
&= 0.000071 \text{m} = 0.071 \text{mm}
\end{aligned}$$

塑性项

$$\begin{aligned}
\delta_{pc} &= \frac{r(W-a)V_{pc}}{r(W-a) + (a-h)} = \left( \frac{0.45 \times (50-26) \times 0.56}{0.45(50-26) + (26+2)} \right) \text{mm} \\
&= 0.156 \text{mm}
\end{aligned}$$

故材料的临界 CTOD 值为

$$\delta_c = \delta_{ec} + \delta_{pc} = (0.071 + 0.156) \text{mm} = 0.227 \text{mm}$$

## 二、CTOD 与弹塑性断裂控制设计

一般来说,裂纹尖端张开位移 CTOD 可以视为描述弹塑性断裂的控制参量。与控制低应力脆断的材料参数  $K_{Ic}$  一样,临界 CTOD 值 ( $\delta_c$ ) 也可作为弹塑性断裂是否发生的材料参数。以 CTOD 为控制参量的弹塑性断裂判据可写为

$$\delta \leq \delta_c \quad (7-16)$$

式中,左端  $\delta$  是给定载荷和几何情况下作用于裂尖的张开位移,如 Dugdale 在平面应力条件下给出的 (7-10) 式等,由分析计算得到;右端是材料的临界 CTOD 值,由试验测定。

上述判据给出了断裂应力、裂纹尺寸、断裂抗力间的关系,已知其中二者,即可估计另一个参数的可用范围,即进行初步的弹塑性断裂控制设计。

**例 7.4** 火箭发动机壳体为一直径  $d=500\text{mm}$ ,壁厚  $t=2.5\text{mm}$  的圆筒,材料的力学性能为  $E=200\text{GPa}$ ,  $\nu=0.3$ ,  $\sigma_{ys}=1200\text{MPa}$ ,  $\delta_c=0.05\text{mm}$ 。壳体的最大设计内压为  $p=8\text{MPa}$ ,试计算其可容许的最大缺陷尺寸。

**解** 承受内压薄壁壳体中的最大应力是环向应力,且

$$\sigma = pd/2t = [8 \times 0.5 / (2 \times 2.5 \times 10^{-3})] \text{MPa} = 800 \text{MPa}$$

薄壁壳体中的最危险的缺陷是纵向裂纹,其方向垂直于环向应力。

由于筒体直径远大于其厚度,可忽略筒体曲率的影响,近似视为承受环向应力作用的无限大中心裂纹板,且处于平面应力情况。由 (7-10) 式有

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{8\sigma_{ys}a}{\pi E} \ln \left[ \sec \left( \frac{\pi\sigma}{2\sigma_{ys}} \right) \right] = \frac{8 \times 1200a}{3.14 \times 200 \times 10^3} \ln \left[ \sec \left( \frac{\pi}{2} \times \frac{800}{1200} \right) \right] \\ &= 0.0106a \end{aligned}$$

利用弹塑性断裂判据 (7-16) 式,在临界状态下有

$$\delta = 0.0106a_c \leq \delta_c$$

$$a_c \leq (0.05/0.0106)\text{mm} = 4.71\text{mm}$$

故可以容许的缺陷总长度为  $2a=9.42\text{mm}$ 。

**讨论:** 假设问题为小范围屈服,按照 (7-11) 式有

$$\delta = \frac{K_1^2}{\sigma_{ys}E} \quad \text{或写为} \quad \delta = \frac{\sigma^2 \pi a}{\sigma_{ys}E}$$

对于本题则断裂判据写为

$$\delta = \frac{\sigma^2 \pi a_c}{\sigma_{ys}E} \leq \delta_c$$

$$\text{即 } a_c \leq \frac{\delta_c \sigma_{ys} E}{\sigma^2 \pi} = \left( \frac{0.05 \times 1200 \times 200 \times 10^3}{800 \times 800 \times 3.14} \right) \text{mm} = 5.97 \text{mm}$$

可容许的缺陷总长度为  $2a = 11.94 \text{mm}$ 。可见,当  $\sigma/\sigma_{ys}$  较大时,小范围屈服假设将引入较大的误差,且造成偏于危险的估计。

以裂纹尖端张开位移(CTOD)的研究为基础,已经发展了一些用于弹塑性断裂控制和缺陷评估的方法。如英国焊接研究所发展的将 CTOD 同局部应变水平相联系的缺陷评定方法、中国“压力容器缺陷评定规范”中的 CVDA 安全设计曲线、日本规范 JWES 2805—1983,等等。然而,因为弹塑性断裂问题涉及到缺陷的多样性、材料力学性能的多样性、载荷作用的多样性等等,问题十分复杂,仍是需要进一步研究的一个重要方向。

## 小 结

1. 线弹性断裂力学给出裂尖应力趋于无穷大,故裂尖附近的材料必然要发生屈服。
2. Irwin 给出的塑性区尺寸

$$R = 2r_p = \frac{1}{\alpha\pi} \left( \frac{K_1}{\sigma_{ys}} \right)^2, \quad \alpha = \begin{cases} 1 & \text{(平面应力)} \\ 2\sqrt{2} & \text{(平面应变)} \end{cases}$$

裂尖塑性区尺寸与  $(K_1/\sigma_{ys})$  成正比,平面应变情况下塑性区尺寸约为平面应力情况的 1/3。

3. 小范围屈服时, Irwin 给出修正后的应力强度因子为

$$K_1 = \sigma \sqrt{\pi(a + r_p)}$$

对于表面裂纹则有

$$K_1 = \frac{1.1\sigma\sqrt{\pi a}}{Q}; \quad Q \text{ 为形状参数。}$$

4. Dugdale 给出裂纹尖端张开位移  $\delta$ (CTOD) 与作用应力  $\sigma$  间的关系为

$$\delta = \frac{8\sigma_{ys}a}{\pi E} \ln \left[ \sec \left( \frac{\pi\sigma}{2\sigma_{ys}} \right) \right]$$

5. 小范围屈服情况下,裂尖张开位移为

$$\delta = \beta \frac{K_1^2}{\sigma_{ys} E}$$

在平面应力情况下,  $\beta = 1$ ; 在平面应变情况下,  $\beta = (1 - \nu^2)/2$ 。

6. 裂纹尖端张开位移  $\delta$  可以通过实验测定。

7. 与控制低应力脆断的材料参数  $K_{1C}$  一样, 临界 CTOD 值 ( $\delta_c$ ) 也可作为判断弹塑性断裂是否发生的材料参数。以 CTOD 为控制参量的弹塑性断裂判据为

$$\delta \leq \delta_c$$

由此, 可进行弹塑性断裂控制设计。

## 思考题与习题

- 7-1 试讨论裂尖塑性区尺寸与应力强度因子  $K_I$ 、材料屈服应力  $\sigma_{ys}$  之关系。
- 7-2 试讨论承受同样外载荷作用的厚、薄板裂纹尖端塑性区尺寸的大小。
- 7-3 直径  $D=500\text{mm}$ , 壁厚  $t=10\text{mm}$  的圆筒形压力容器, 设计内压  $p=5.2\text{MPa}$ 。已知材料性能为:  $\sigma_{0.2}=834\text{MPa}$ ,  $\delta_c=0.064\text{mm}$ 。若有一长  $2a=70\text{mm}$ 、平行于轴线的穿透裂纹, 试按小范围屈服情况估计容器的抗断安全系数  $n_f$ 。
- 7-4 某大尺寸厚板含有一  $a/c=0.2$  之表面裂纹, 受远场拉应力  $\sigma$  作用。材料的屈服应力为  $\sigma_{ys}=900\text{MPa}$ , 断裂韧性  $K_{1C}=100\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ , 试估计:
- 1) 作用应力  $\sigma=600\text{MPa}$  时的临界裂纹深  $a_c$ 。
  - 2) 若  $a=5\text{mm}$ , 求此表面裂纹厚板的临界断裂应力  $\sigma_c$ 。
- 7-5 某汽轮发电机转子承受  $\sigma=352\text{MPa}$  的最大拉应力作用, 已知材料性能为  $K_{1C}=130\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ ,  $\sigma_{ys}=550\text{MPa}$ 。若转子有一  $a/c=0.25$  的表面半椭圆裂纹, 考虑塑性修正, 按抗断安全系数  $n_f=K_{1C}/K_I=4$  控制, 试确定可容许的最大裂纹深度。
- 7-6 某宽板厚  $t=30\text{mm}$ , 测得其材料的断裂韧性为  $K_{1C}=30\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ , 屈服应力为  $\sigma_{ys}=620\text{MPa}$ 。
- 1) 若板中有一长为  $2a$  的中心穿透裂纹, 试估计承受  $\sigma=150\text{MPa}$  的拉应力作用时, 可允许的最大裂纹尺寸  $a_c$ 。
  - 2) 若板中有一深度为  $a$  的半椭圆表面裂纹, 假设  $a/c=0.5$ , 承受  $\sigma=150\text{MPa}$  的拉应力作用, 试估计可以允许的最大裂纹尺寸  $a_c$ 。
  - 3) 若板承受的载荷  $\sigma=600\text{MPa}$  (接近屈服应力), 考虑塑性修正, 再估计在上述两种情况下的许容缺陷容限尺寸。

## 第八章 疲劳裂纹扩展

前面讨论的应力疲劳、应变疲劳中,都认为材料是均匀、无缺陷的,由此研究疲劳载荷作用下的裂纹萌生机理、规律、寿命预测与控制。然而,在许多情况下,材料或构件中的缺陷是不可避免的。有缺陷怎么办?开始无缺陷的构件在使用中发现了裂纹,能否继续使用?含缺陷的构件如果还能继续使用,有多少剩余寿命?对于一些大型重要结构或构件,往往需要依靠检修来保证安全,如何控制检修?都是工程中需要研究与回答的问题。

20世纪60年代以后,断裂力学,尤其是线弹性断裂力学,已经得到相当完备的发展,为研究含缺陷结构的疲劳问题提供了理论基础;计算机技术的迅速发展,为含缺陷结构疲劳问题的研究提供了强有力的计算手段;60年代起出现并迅速发展的高倍电子显微镜、电液伺服控制疲劳机,电火花切割机等,为裂纹扩展的实验研究、裂纹扩展破坏机理的观察、裂纹的制备等提供了可用的实验手段。这些条件的具备,使含缺陷结构疲劳问题的研究成为可能。

近40年来,大量的研究和应用经验表明:线弹性断裂力学是研究疲劳裂纹扩展(Fatigue crack growth)的十分有力的工具。线弹性断裂力学认为,裂纹尖端附近的应力场是由应力强度因子 $K$ 控制的,故裂纹在疲劳载荷作用下的扩展应当能够利用应力强度因子 $K$ 进行定量的描述。工程中,线弹性断裂力学甚至被用来研究低强度、高韧性材料的疲劳裂纹扩展,因为在疲劳载荷下裂纹尖端的应力强度因子一般较低,裂纹尖端的塑性区尺寸也不大。只有当裂纹扩展速率很快或裂纹尺寸较小时,线弹性断裂力学的应用才受到限制。对于裂纹扩展速率很快的情况,由于此时裂纹扩展寿命只占构件总寿命的很小一部分,故这一限制在许多情况下对于疲劳分析是并不重要的。对于小裂纹的疲劳扩展,则需要利用弹塑性断裂力学分析,这正是仍在继续研究与发展的重点领域之一。

### 8.1 疲劳裂纹扩展速率

若裂纹尖端塑性区的尺寸 $r_p$ 远小于裂纹尺寸 $a$ ,即 $a \gg r_p$ ,则线弹性断裂力学可用。工程中最常见、最危险的裂纹,是垂直于最大主应力的张开型裂纹(或称I型裂纹)。本书将在线弹性断裂力学成立的条件下,讨论I型裂纹的疲劳裂纹

扩展。

疲劳裂纹扩展速率  $da/dN$  (或  $da/dt$ )，是在疲劳载荷作用下，裂纹长度  $a$  随循环次数  $N$  (或循环载荷作用时间  $t$ ) 的变化率，反映裂纹扩展的快慢。

### 8.1.1 $a-N$ 曲线与疲劳裂纹扩展控制参量

利用尖缺口并带有预制疲劳裂纹的标准试样，如中心裂纹拉伸试样 (CCT 试样——Center Crack Tension) 或者紧凑拉伸试样 (CT 试样——Compact Tension)，在给定载荷条件下进行恒幅疲劳实验，记录裂纹扩展过程中的裂纹尺寸  $a$  和循环次数  $N$ ，即可得到如图 8.1 所示的  $a-N$  曲线。 $a-N$  曲线给出了裂纹长度随载荷循环次数的变化。

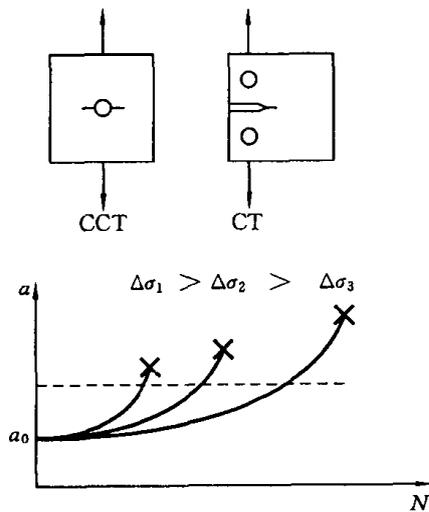


图 8.1  $a-N$  曲线

图 8.1 中示出了应力比  $R=0$  时，三种不同恒幅载荷作用下的  $a-N$  曲线。 $a-N$  曲线的斜率，就是裂纹扩展速率  $da/dN$ 。

注意到裂尖应力强度因子  $K=f\sigma\sqrt{\pi a}$ ， $f$  是几何修正因子。则由图中  $a-N$  曲线可知：

对于给定的  $a$ ，循环应力幅  $\Delta\sigma$  增大，即  $\Delta K$  增大，则曲线斜率  $da/dN$  增大。

对于给定的  $\Delta\sigma$ ，裂纹长度  $a$  增大，即  $\Delta K$  增大，则曲线斜率  $da/dN$  增大。

故裂纹扩展速率  $da/dN$  的控制参量是应力强度因子幅度  $\Delta K=f(\Delta\sigma, a)$ ，即

$$da/dN = \phi(\Delta K, R, \dots) \quad (8-1)$$

式中，应力比  $R=K_{\min}/K_{\max}=\sigma_{\min}/\sigma_{\max}=P_{\min}/P_{\max}$ ；与  $\Delta K$  相比， $R$  对疲劳裂纹扩展速率的影响是第二位的，将在下节讨论。

裂纹只有在张开的情况下才能扩展，压缩载荷的作用将使裂纹闭合。因此，应力循环的负应力部分对裂纹扩展无贡献，故疲劳裂纹扩展控制参量-应力强度因子幅度  $\Delta K$  定义为

$$\begin{aligned} \Delta K &= K_{\max} - K_{\min} & R > 0 \\ \Delta K &= K_{\max} & R < 0 \end{aligned} \quad (8-2)$$

### 8.1.2 疲劳裂纹扩展速率

由  $a-N$  曲线中任一裂纹尺寸  $a_i$  处的斜率,即可知其扩展速率  $(da/dN)_i$ ;同时,由已知载荷  $\Delta\sigma$  和  $a_i$ ,还可以计算相应的  $\Delta K_i$ 。这样就由  $a-N$  曲线得到了一组  $[\Delta K_i, (da/dN)_i]$  数据,进而可绘出  $da/dN-\Delta K$  曲线。

$da/dN-\Delta K$  曲线与  $S-N$  曲线、 $\epsilon-N$  曲线一样,都表示材料的疲劳性能,只不过  $S-N$  曲线、 $\epsilon-N$  曲线所描述的是疲劳裂纹萌生性能,  $da/dN-\Delta K$  曲线描述的是疲劳裂纹扩展性能而已。值得指出的是:  $S-N$  曲线、 $\epsilon-N$  曲线是以  $R=-1$  (对称循环)时的曲线作为基本曲线,  $da/dN-\Delta K$  曲线则是以  $R=0$  (脉冲循环)时的曲线作为基本曲线的。

在双对数坐标中画出的  $da/dN-\Delta K$  曲线图,如图 8.2 所示。图 8.1 中在相同应力比  $R$  下得到的三条不同  $\Delta\sigma$  下的  $a-N$  曲线,在  $da/dN-\Delta K$  图上成为一条曲线,这说明  $\Delta K$  是疲劳裂纹扩展速率的控制参量。

#### 一、 $da/dN-\Delta K$ 曲线

由图 8.2 可见,  $da/dN-\Delta K$  曲线可分为低、中、高速率三个区域。

1 区:是低速率区。该区域内,随着应力强度因子幅度  $\Delta K$  的降低,裂纹扩展速率迅速下降。到某一值  $\Delta K_{th}$  时,裂纹扩展速率趋近于零 ( $da/dN < 10^{-10} m/C$ )。若  $\Delta K < \Delta K_{th}$ ,可以认为裂纹不发生扩展。 $\Delta K_{th}$  是反映疲劳裂纹是否扩展的一个重要的材料参数,称为疲劳裂纹扩展的门槛应力强度因子幅度;是  $da/dN-\Delta K$  曲线的下限。

2 区:是中速率裂纹扩展区。此时,裂纹扩展速率一般在  $10^{-9} \sim 10^{-5} m/C$  范围内。大量的实验研究表明:中速率区内,  $da/dN-\Delta K$  有良好的对数线性关系。利用这一关系进行疲劳裂纹扩展寿命预测,是疲劳断裂研究的重点。

3 区:是高速率区,在这一区域内,  $da/dN$  大,裂纹扩展快,寿命短。其对裂纹扩展寿命的贡献,通常可以不考虑。随着裂纹扩展速率的迅速增大,裂纹尺寸迅速增大,断裂发生。断裂的发生由断裂条件  $K_{max} < K_C$  控制。因为  $\Delta K = (1-R) \cdot K_{max}$ ,故图 8.2 中的上渐近线为  $\Delta K = (1-R)K_C$ 。

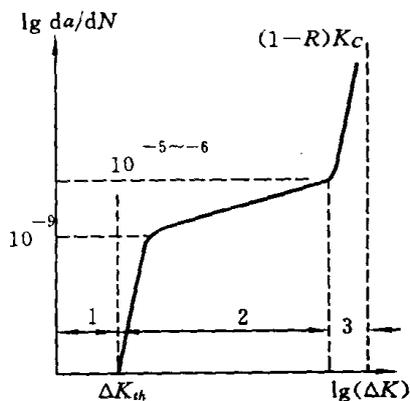


图 8.2  $da/dN-\Delta K$  曲线

## 二、裂纹扩展速率公式

对于中速率区的稳定裂纹扩展,  $\lg da/dN - \lg \Delta K$  间的线性关系可表达为

$$da/dN = C(\Delta K)^m \quad (8-3)$$

这就是著名的 Paris 公式(1963)。上式指出:应力强度因子幅度  $\Delta K$  是疲劳裂纹扩展的主要控制参量;  $\Delta K$  增大(即载荷水平  $\Delta\sigma$  增大或裂纹尺寸  $a$  增大), 则裂纹扩展速率  $da/dN$  增大。裂纹扩展参数  $C$ 、 $m$  是描述材料疲劳裂纹扩展性能的基本参数, 由实验确定。因为压应力对裂纹扩展基本无贡献, 故与  $S-N$  曲线、 $\epsilon-N$  曲线不同,  $da/dN - \Delta K$  曲线是以  $R=0$ (脉冲循环)时的曲线作为基本曲线的。

在低速率区内, 主要是控制应力强度因子幅度的门槛值  $\Delta K_{th}$ , 进行裂纹不扩展设计。亦即裂纹不发生疲劳扩展的条件为

$$\Delta K < \Delta K_{th} \quad (8-4)$$

$\Delta K_{th}$  也是由实验确定的描述材料疲劳裂纹扩展性能的重要基本参数。

如果将裂纹扩展速率从中速率区向高速率区转变的应力强度因子幅度记作  $\Delta K_T$ , 则当  $R=0$  时,  $\Delta K_T$  就等于最大循环应力作用下的  $K_{maxT}$ 。许多实验研究表明, 对于韧性金属材料, 可用下式估计裂纹扩展速率从 2 区向 3 区转变时的应力强度因子  $K_{maxT}$  为

$$K_{maxT} = 0.00637 \sqrt{E\sigma_{ys}} \quad (8-5)$$

式中,  $E$  为弹性模量,  $\sigma_{ys}$  为屈服极限, 单位为 MPa;  $K_{maxT}$  的单位为  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ 。

## 三、疲劳裂纹扩展速率参数( $C, m$ )的确定

由疲劳裂纹扩展实验, 可以确定 Paris 公式(8-3)中的裂纹扩展参数  $C$ 、 $m$ 。其方法如下:

- 1) 用标准试件在  $\Delta\sigma = \text{常数}$ ,  $R=0$ ,  $a=a_0$  的条件下, 进行疲劳裂纹扩展试验。
- 2) 记录  $\Delta\sigma$ 、 $a_i$ 、 $N_i$  数据。
- 3) 由  $(a_i, N_i)$  数据, 估计扩展速率  $(da/dN)_i$ 。如用割线法, 则以二相邻数据点连线(割线)的斜率, 作为该区间的平均裂纹尺寸  $\bar{a}_i = (a_{i+1} - a_i)/2$  所对应的裂纹扩展速率, 故有

$$(da/dN)_i = (a_{i+1} - a_i)/(N_{i+1} - N_i) \quad (8-6)$$

- 4) 由  $(\Delta\sigma, \bar{a}_i)$  数据, 估计对应于  $\bar{a}_i$  的应力强度因子幅度  $(\Delta K)_i$ 。
- 5) 将 Paris 公式(8-3)的两边取对数后写为

$$\lg(da/dN) = \lg C + m \lg(\Delta K) \quad (8-7)$$

利用上述 $[(da/dN)_i, (\Delta K)_i]$ 数据,按(8-7)式作最小二乘线性拟合,即可确定材料参数 $C, m$ 。

## 8.2 疲劳裂纹扩展寿命预测

从初始裂纹长度 $a_0$ 扩展到临界裂纹长度 $a_c$ ,所经历的载荷循环次数 $N_c$ ,称为疲劳裂纹扩展寿命。这里,以 Paris 裂纹扩展速率公式为基础,讨论疲劳裂纹扩展寿命的预测和抗疲劳断裂设计计算方法。

### 8.2.1 基本公式

要估算疲劳裂纹扩展寿命,必须首先确定在给定载荷作用下,构件发生断裂时的临界裂纹尺寸 $a_c$ 。依据线弹性断裂判据有

$$K_{\max} = f \sigma_{\max} \sqrt{\pi a_c} \leq K_c \quad \text{或} \quad a_c = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_c}{f \sigma_{\max}} \right)^2 \quad (8-8)$$

式中, $\sigma_{\max}$ 为最大循环应力; $K_c$ 为材料的断裂韧性; $f$ 一般是构件几何与裂纹尺寸的函数,可由应力强度因子手册查得。对于无限大中心裂纹板(板宽 $W \gg a$ ), $f=1$ ;对于单边裂纹无限大板(板宽 $W \gg a$ ), $f=1.12$ 。

另一方面,疲劳裂纹扩展公式可一般地写为

$$\frac{da}{dN} = \psi(\Delta K, R) = \chi(f, \Delta \sigma, a, R, \dots)$$

从初始裂纹 $a_0$ 到临界裂纹长度 $a_c$ 积分,有

$$\int_{a_0}^{a_c} \frac{da}{\chi(f, \Delta \sigma, a, R)} = \int_0^{N_c} dN$$

可以得到

$$\varphi(f, \Delta \sigma, R, a_0, a_c) = N_c \quad (8-9)$$

因为几何修正系数 $f$ 通常是裂纹尺寸的函数,上述方程往往需要利用数值积分求解。对于含裂纹无限大板, $f=$ 常数,在恒幅载荷作用下,由 Paris 公式有

$$\int_{a_0}^{a_c} \frac{da}{C(f \Delta \sigma \sqrt{\pi a})^m} = \int_0^{N_c} dN$$

得到

$$N_c = \begin{cases} \frac{1}{C(f\Delta\sigma \sqrt{\pi})^m (0.5m - 1)} \left( \frac{1}{a_0^{0.5m-1}} - \frac{1}{a_c^{0.5m-1}} \right) & m \neq 2 \\ \frac{1}{C(f\Delta\sigma \sqrt{\pi})^m} \ln\left(\frac{a_c}{a_0}\right) & m = 2 \end{cases} \quad (8-10)$$

方程(8-8)、(8-9)或(8-10),是疲劳裂纹扩展寿命估算的基本方程。利用这两个方程,可以按不同的需要,进行抗疲劳断裂设计。

### 8.2.2 Paris 公式的应用

利用前节所述之基本公式,进行抗疲劳断裂设计计算的主要工作包括:

- 1) 已知载荷条件  $\Delta\sigma$ 、 $R$ ,初始裂纹尺寸  $a_0$ ,估算临界裂纹尺寸  $a_c$  和剩余寿命  $N_c$ 。
- 2) 已知载荷条件  $\Delta\sigma$ 、 $R$ ,给定寿命  $N_c$ ,确定  $a_c$  及允许的初始裂纹尺寸  $a_0$ 。
- 3) 已知  $a_0$ 、 $a_c$ ,给定寿命  $N_c$ ,估算在使用工况( $R$ )下所允许使用的最大应力  $\sigma_{\max}$ 。

**例 8.1** 某大尺寸钢板有一边裂纹  $a_0=0.5\text{mm}$ ,受  $R=0$ ,  $\sigma_{\max}=200\text{MPa}$  的循环载荷作用。已知材料的屈服极限  $\sigma_{ys}=630\text{MPa}$ ,强度极限  $\sigma_u=670\text{MPa}$ ,弹性模量  $E=2.07 \times 10^5\text{MPa}$ ,门槛应力强度因子幅度  $\Delta K_{th}=5.5\text{MPa} \sqrt{\text{m}}$ ,断裂韧性  $K_c=104\text{MPa} \sqrt{\text{m}}$ ,疲劳裂纹扩展速率为  $da/dN=6.9 \times 10^{-12}(\Delta K)^3$ ,  $da/dN$  的单位为  $\text{m}/\text{c}$ 。试估算此裂纹板的寿命。

**解** 1) 确定应力强度因子  $K$  的表达式。

当裂纹长度  $a$  与板宽  $W$  之比  $a/W < 0.1$  时,可以采用无限大板的解。对于边裂纹,几何修正因子为  $f=1.12$ 。故应力强度因子表达式为

$$K = 1.12\sigma \sqrt{\pi a}$$

2) 确定应力强度因子幅度  $\Delta K$ :

$$\Delta K = K_{\max} - K_{\min} = 1.12(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) \sqrt{\pi a} = 1.12\Delta\sigma \sqrt{\pi a}$$

注意,本题为  $R=0$ ,有  $\sigma_{\min}=0$ ,所以  $\Delta\sigma=\sigma_{\max}=200\text{MPa}$ 。

3) 确定长度为  $a_0$  的初始裂纹在给定应力水平作用下是否扩展?

裂纹是否扩展由(8-4)式判断,当  $a=a_0=0.5\text{mm}=0.5 \times 10^{-3}\text{m}$  时,有

$$\Delta K = 1.12\Delta\sigma \sqrt{\pi a} = 9\text{MPa} \sqrt{\text{m}} > \Delta K_{th} = 5.5\text{MPa} \sqrt{\text{m}}$$

故可知,裂纹将扩展。

4) 计算临界裂纹长度  $a_c$ :

由断裂判据(8-8)式计算  $a_c$ , 有

$$a_c = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_C}{1.12\sigma_{\max}} \right)^2 = 0.068\text{m} = 68\text{mm}$$

5) 估算裂纹扩展寿命  $N_c$ 。

疲劳裂纹扩展寿命估算由(8-10)式计算。将  $a_0=0.005\text{m}$ ,  $a_c=0.068\text{m}$ ,  $\Delta\sigma=200\text{MPa}$ ,  $C=6.9 \times 10^{-12}$ ,  $m=3$  代入(8-10)式中第一式即得

$$N_c = 189500 \text{ 次循环}$$

讨论 1: 初始裂纹长度和材料断裂韧性对疲劳裂纹扩展寿命的影响

假定初始裂纹长度分别为  $a_0=0.5$ 、 $1.5$ 、 $2.5\text{mm}$ , 材料断裂韧性  $K_C=52$ 、 $104$ 、 $208\text{MPa} \sqrt{\text{m}}$ , 按上述方法计算得到的疲劳裂纹扩展寿命  $N_c$  列于下表中。

不同  $a_0$ 、 $K_C$  下的疲劳裂纹扩展寿命

$a_0/\text{mm}$	$K_C/\text{MPa} \sqrt{\text{m}}$	$a_c/\text{mm}$	$N_c/\text{千周}$	%
0.5	104	68	189.5	100
1.5	104	68	101.9	53.8
2.5	104	68	74.9	39.5
0.5	208	272	198.4	105
0.5	52	17	171.7	90.6

由表中结果可知: 材料的断裂韧性  $K_C$  增加一倍, 临界裂纹长度  $a_c$  增至 4 倍, 疲劳裂纹扩展寿命  $N_c$  只增加 5%; 断裂韧性降低一半, 临界裂纹长度  $a_c$  降至 1/4, 但寿命  $N_c$  只降低不到 10%。若材料的断裂韧性不变, 初始裂纹长度  $a_0$  从 0.5mm 增至 1.5mm, 疲劳裂纹扩展寿命  $N_c$  几乎降低了一半; 当  $a_0$  从 0.5mm 增至 2.5mm 时, 疲劳裂纹扩展寿命  $N_c$  降低了 60%。所以, 严格控制构件中的初始裂纹尺寸, 对于提高疲劳裂纹扩展寿命是十分重要的。材料断裂韧性  $K_C$  的改变, 将使临界裂纹长度发生极大的变化, 但对于疲劳裂纹扩展寿命的影响不大。然而, 为保证裂纹有一定的尺寸以便于检测, 材料必须有较高的断裂韧性。断裂韧性很低的高强脆性材料, 裂纹扩展寿命很短, 可以只考虑裂纹萌生寿命。

讨论 2:  $da/dN-\Delta K$  曲线与  $S-N$  曲线之关系

设例中的边裂纹板初始裂纹尺寸为  $a_0$ , 以  $a_f$  ( $a_f < a_c$ ) 定义寿命, 则在恒幅应力  $\Delta\sigma$  作用下, 由 Paris 公式有

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m = C[f(a, W, \dots)\Delta\sigma \sqrt{\pi a}]^m$$

注意到  $\Delta\sigma = \text{常数}$ , 积分上式有

$$\Delta\sigma^m N = \int_{a_0}^{a_f} \frac{da}{C[f \sqrt{\pi a}]^m} = \text{常数} \quad (8-11)$$

式中, 无论应力  $\Delta\sigma$  多大, 右端的积分均不改变, 是一个常数。将应力  $\Delta\sigma$  改写为  $\Delta S$ , 注意  $S_e = \Delta S/2$ , 故由上式可得

$$S_e^m N = C_1$$

此即  $S-N$  曲线。

由此可见:

若疲劳寿命完全由裂纹扩展所贡献, 则  $S-N$  曲线可由  $da/dN-\Delta K$  关系获得, 且指数与 Paris 公式相同。

对于一些内部不可避免地含有缺陷或裂纹的焊、铸件, 这是特别真实的。

如本例之边裂纹板,  $a_0 = 0.5\text{mm}$ , 若以  $a_f = 30\text{mm}$  定义其寿命, 则可算得  $\Delta\sigma = 200\text{MPa}$  时, 寿命  $N = 180000$ 。将  $S_e = \Delta S/2 = \Delta\sigma/2 = 100\text{MPa}$ ,  $N = 180000$ ,  $m = 3$ , 代入  $S-N$  曲线方程, 算得  $C_1 = 1.8 \times 10^{11}$ 。故其裂纹扩展寿命可用  $S-N$  曲线表达为

$$S_e^3 N = 1.8 \times 10^{11} \quad (8-12)$$

讨论 3: Miner 理论用于裂纹扩展阶段

假设尺寸为  $a_0$  的初始裂纹, 在应力水平  $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3$  作用下分别经历了  $n_1, n_2, n_3$  次循环后扩展到前述定义破坏的尺寸  $a_f$ 。

若在  $\Delta S_1$  作用下循环  $n_1$  次后, 裂纹尺寸从  $a_0$  扩展到  $a_1$ , 则由 (8-11) 式有

$$\Delta S_1^m n_1 = \int_{a_0}^{a_1} \frac{da}{\varphi(a)}$$

在  $\Delta S_1$  作用下, 裂纹尺寸从  $a_0$  扩展到定义破坏的尺寸  $a_f$ , 则有

$$\Delta S_1^m N_1 = \int_{a_0}^{a_f} \frac{da}{\varphi(a)}$$

式中,  $N_1$  为在  $\Delta S_1$  作用下一直到破坏的裂纹扩展寿命。

再在  $\Delta S_2$  作用下循环  $n_2$  次后, 裂纹尺寸从  $a_1$  扩展到  $a_2$ , 则有

$$\Delta S_2^m n_2 = \int_{a_1}^{a_2} \frac{da}{\varphi(a)}$$

在  $\Delta S_2$  作用下裂纹尺寸从  $a_0$  扩展到  $a_f$ , 则有

$$\Delta S_2^m N_2 = \int_{a_0}^{a_f} \frac{da}{\varphi(a)}$$

同样地, 若在  $\Delta S_3$  作用下循环  $n_3$  次后, 裂纹从  $a_2$  扩展到  $a_f$  有

$$\Delta S_3^m n_3 = \int_{a_2}^{a_f} \frac{da}{\varphi(a)}$$

在  $\Delta S_1$  作用下裂纹尺寸从  $a_0$  扩展到  $a_f$ , 则有

$$\Delta S_1^m N_1 = \int_{a_0}^{a_f} \frac{da}{\varphi(a)}$$

在  $\Delta S_i$  作用下的循环次数  $n_i$  与在  $\Delta S_i$  作用下的裂纹扩展寿命  $N_i$  之比  $n_i/N_i$ , 即为在  $\Delta S_i$  作用下循环  $n_i$  次的损伤。所以总损伤为

$$\frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} + \frac{n_3}{N_3} = \frac{\int_{a_0}^{a_1} \frac{da}{\varphi(a)} + \int_{a_1}^{a_2} \frac{da}{\varphi(a)} + \int_{a_2}^{a_f} \frac{da}{\varphi(a)}}{\int_{a_0}^{a_f} \frac{da}{\varphi(a)}} = 1$$

此即 Miner 理论。故若不计加载次序影响, Miner 理论也可用于裂纹扩展阶段。

对于本例之大尺寸边裂纹板, 若 载荷谱与损伤累积

$\Delta S_i/\text{MPa}$	$n_i/10^3$	$N_i/10^3$	$n_i/N_i$
150	30	426.6	0.0703
200	20	180.0	0.1111
250	10	92.1	0.1086
300	5	53.3	0.0938

$a_0 = 0.5\text{mm}$ ,  $a_f = 30\text{mm}$ , 每年经受的载荷谱如表所列, 则可先由裂纹扩展寿命公式或(8-12)式给出的  $S-N$  曲线计算各级应力水平下的寿命  $N_i$  (列于表中第三栏), 再计算各级载荷下的损伤  $n_i/N_i$  (表中第四栏)。

设板的裂纹扩展寿命为  $\lambda$  年, 则由 Miner 理论有

$$\lambda \sum n/N = 1$$

得到  $\lambda = 1/\sum n/N = (1/0.3838)$  年 = 2.6 年

**例 8.2** 含中心裂纹宽板, 受循环应力  $\sigma_{\max} = 200\text{MPa}$ ,  $\sigma_{\min} = 20\text{MPa}$  作用。 $K_c = 104\text{MPa}$ , 工作频率为  $0.1\text{Hz}$ 。为保证安全, 每 1000 小时进行一次无损检验。试确定检查时所能允许的最大裂纹尺寸  $a_i$ 。

[设已知裂纹扩展速率为:  $da/dN = 4 \times 10^{-14} (\Delta K)^4$  m/c]

解 1) 计算临界裂纹尺寸  $a_c$ 。

对于中心裂纹宽板,  $f = 1$ ,  $K = \sigma \sqrt{\pi a}$ 。有

$$a_c = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_c}{\sigma_{\max}} \right)^2 = 0.086\text{m}$$

2) 检查期间的循环次数。

$$N = (0.1 \times 3600 \times 1000) \text{ 次} = 3.6 \times 10^5 \text{ 次}$$

3) 检查时所能允许的裂纹尺寸  $a_i$ , 在下一检查周期内经  $N$  次循环后, 将不应扩展到引起破坏的裂纹尺寸  $a_c$ 。故在临界状态下, 由(8-10)式有

$$\frac{1}{a_i} = N_c C (\Delta\sigma \sqrt{\pi})^m + \frac{1}{a_c} = 160.8$$

注意本题  $m=4$ 。应力幅  $\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} = 180\text{MPa}$ , 解得

$$a_i = (1/160.8)m = 0.0062m = 6.2\text{mm}$$

所以, 检查中所能允许的最大裂纹尺寸为  $a_i = 6.2\text{mm}$ 。

讨论:

若检查时发现裂纹  $a_i > 6.2\text{mm}$ , 继续使用是不安全的。若要继续使用, 应当降低应力水平或者缩短检查周期。

如检查时发现裂纹  $a_i = 10\text{mm}$ , 希望不改变检查周期继续使用, 则应满足:

$$\Delta\sigma^m \leq \frac{1}{CN[Y(a) \sqrt{\pi}]^m} \left( \frac{1}{a_i^{m/2-1}} - \frac{1}{a_c^{m/2-1}} \right)$$

注意, 由于此时应力水平改变, 临界裂纹尺寸  $a_c$  不再为  $0.086m$ , 而应写为

$$a_c = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_c}{\sigma_{\max}} \right)^2 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{(1-R)K_c}{\Delta\sigma} \right)^2$$

由上述二式, 用数值法解得

$$\Delta\sigma \leq 159\text{MPa}$$

则

$$\sigma_{\max} = \Delta\sigma / (1-R) \leq 176\text{MPa}$$

如不降载, 采用缩短检修周期的方法, 则同样可求得由  $a_i = 10\text{mm}$  到  $a_c = 86\text{mm}$  的循环次数为

$$N \leq 213238 \text{ 次}$$

检查周期应缩短为

$$T \leq [N / (0.1 \times 3600)]h = 592h$$

### 8.2.3 恒幅载荷下, 裂纹扩展的数值计算方法

现在讨论在恒幅载荷作用下, 如何利用 Paris 公式进行疲劳裂纹扩展数值计算的方法。变幅载荷的情况, 将在以后讨论。

由 Paris 公式有

$$da/dN = C(\Delta K)^m = C\Delta\sigma^m\phi(a)$$

式中,  $\phi(a) = f(a, W, \dots) \sqrt{a}$ , 几何修正因子  $f(a, W, \dots)$  通常比较复杂, 导致  $\phi(a)$  不能解析积分。因此, 需要讨论数值积分方法。

若已知初始裂纹尺寸  $a_0$ , 应力水平  $\Delta\sigma$ , 疲劳裂纹扩展参数  $C, m$ , 则疲劳裂纹扩展分析可按下述步骤进行:

1) 由(8-4)式判断裂纹在给定的疲劳载荷作用下是否会扩展?

$$\Delta K_{a=a_0} = f(a_0, W, \dots) \Delta\sigma \sqrt{\pi a_0} \leq \Delta K_{th}$$

注意,  $\sigma_{min} < 0$  时, 取  $\Delta\sigma = \sigma_{max}$ 。

2) 如果裂纹扩展, 由断裂判据(8-8)式计算临界裂纹尺寸  $a_c$ , 即

$$a_c = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_c}{f\sigma_{max}} \right)^2$$

3) 选取适当的裂纹长度增量  $\Delta a_i$ 。因为裂纹尺寸小时对扩展寿命的影响大, 故一般可取  $\Delta a_i = 0.01a_{i-1}$ , 即裂纹尺寸小时,  $\Delta a_i$  较小; 裂纹尺寸大时,  $\Delta a_i$  较大; 裂纹长度  $\Delta a_i$  越小, 计算精度越高。

4) 计算对应于裂纹长度  $a_i$  和裂纹长度  $a_{i-1}$  时的应力强度因子  $\Delta K_i$  和  $\Delta K_{i-1}$ , 即

$$\Delta K_i = f(a_i, W, \dots) \Delta\sigma \sqrt{\pi a_i}$$

式中, 任一时刻的裂纹长度为

$$a_i = a_0 + \sum \Delta a_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

5) 如  $(\Delta K_i - \Delta K_{i-1}) / \Delta K_i < \epsilon (= 0.01)$ , 满足精度, 继续。

否则, 令  $\Delta a_i = \Delta a_i / 2$ , 返回 4)。

6) 假定在  $a_{i-1} - a_i$  内,  $da/dN$  不变, 且

$$\overline{(da/dN)}_i = C(\overline{\Delta K}_i)^m; \quad \overline{\Delta K}_i = (\Delta K_{i-1} + \Delta K_i) / 2$$

计算裂纹增长  $\Delta a_i$  所对应的循环数

$$\Delta N_i = \Delta a_i / \overline{(da/dN)}_i$$

则与裂纹长度  $a_i$  对应的累计循环次数为

$$N_i = \sum \Delta N_i$$

7) 重复 3—6 步, 直到  $a_i = a_0 + \sum \Delta a_i = a_c$  时停止。

由上述计算得到的  $(a_i, N_i)$  数据, 可作出裂纹扩展的  $a-N$  曲线, 且可知裂纹从  $a_0$  扩展到  $a_c$  的寿命  $N_c = \sum \Delta N_i$ 。

### 8.3 影响疲劳裂纹扩展的若干因素

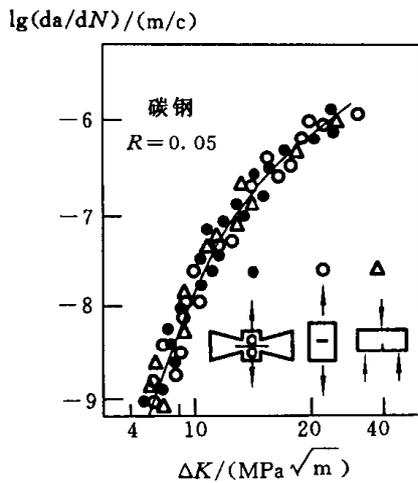


图 8.3 不同试件测得的  $da/dN-\Delta K$  曲线

对于给定的材料,在加载条件(应力比  $R$ 、频率等)和实验环境相同时,由不同形状、尺寸的试件所得到的疲劳裂纹扩展速率基本上是一致的。某碳钢用三种不同形状试件测定疲劳裂纹扩展速率的结果如图 8.3 所示。其  $da/dN-\Delta K$  曲线基本上是一致的,正因为如此,  $da/dN-\Delta K$  曲线才能作为材料疲劳裂纹扩展性能,并用于估算构件的疲劳裂纹扩展寿命。

如前所述,应力强度因子幅度  $\Delta K$ ,是控制疲劳裂纹扩展速率  $da/dN$  的最主要因素。与应力强度因子幅度  $\Delta K$  相比,尽管循环应力比  $R$  或者平均应力、加载频率与波形、环境等其它因素的影响是较次要的,但有时也是不可忽略的。

#### 8.3.1 平均应力或应力比的影响

当循环载荷的应力幅  $\sigma_a$  给定时,应力比  $R$  增大,平均应力  $\sigma_m$  也增大。注意到  $\sigma_a = (1-R)\sigma_{max}/2$ ,  $\sigma_m = (1+R)\sigma_{max}/2$ ,二者有下述关系:

$$\sigma_m = \frac{(1+R)}{(1-R)}\sigma_a \quad (8-13)$$

故讨论应力比  $R$  的影响就是讨论平均应力的影响。

##### 一、 $R > 0$ 的情况

以  $R=0$  的  $da/dN-\Delta K$  曲线为基本裂纹扩展速率曲线,应力比  $R$  改变时,  $da/dN-\Delta K$  曲线的变化一般有图 8.4 所示的趋势。

$R > 0$  时,应力循环中的  $\sigma_{min} > 0$ 。应力幅  $\sigma_a$  给定时,随  $R$  的增大,循环中最大应力  $\sigma_{max}$  和最小应力  $\sigma_{min}$  均增大。在裂纹扩展速率的三个区域内,  $da/dN$  均增大。图中表现为  $da/dN-\Delta K$  曲线整体向左移动。

在裂纹扩展分析最关心的中速率区,不同应力比下的  $da/dN-\Delta K$  曲线几乎是平行的。考虑应力比影响的  $da/dN-\Delta K$  曲线修正模型有许多种。其中,最著名的是 Forman 公式:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C(\Delta K)^m}{(1-R)K_C - \Delta K} \quad (8-14)$$

上式是在 Paris 公式的基础上修正得到的。

注意到  $\Delta K = (1-R)K_{\max}$ , 若  $K_{\max}$  趋近于  $K_C$ , 则式中右端分母趋近于零, 裂纹扩展速率  $da/dN$  趋近于无穷大, 裂纹失稳扩展而发生断裂。故随着应力比  $R$  的增大, 高速率区的上限  $(1-R)K_C$  降低。

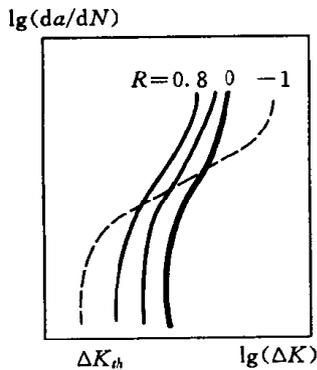


图 8.4 应力比的影响

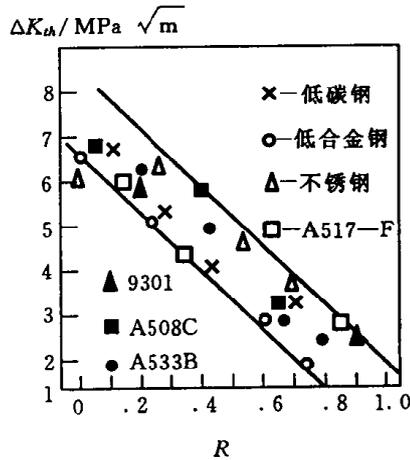


图 8.5  $R-\Delta K_{th}$  关系

若考虑门槛应力强度因子的影响, 疲劳裂纹扩展速率公式可进一步修正为

$$\frac{da}{dN} = \frac{C[(\Delta K)^m - (\Delta K_{th})^m]}{(1-R)K_C - \Delta K} \quad (8-15)$$

式中, 当  $\Delta K \rightarrow \Delta K_{th}$  时,  $da/dN \rightarrow 0$ , 裂纹不再扩展。

在低速率区, 随着应力比  $R$  增大, 疲劳裂纹扩展速率的下限(门槛值)  $\Delta K_{th}$  降低。图 8.5 示出了若干钢材的  $\Delta K_{th}$  值随应力比  $R$  改变的实验结果。

门槛值  $\Delta K_{th}$  与应力比  $R$  间的经验关系可以写为

$$\Delta K_{th} = \Delta K_{th}^0 (1 - \beta R)^\alpha \quad (8-16)$$

式中,  $\Delta K_{th}^0$  为  $R=0$  时的门槛应力强度因子, 称为基本门槛应力强度因子幅度;  $\alpha, \beta$  为由实验确定的参数。对于图 8.5 中所示的钢材, 其下限(保守估计)为

$$\Delta K_{th} = 7.03(1 - 0.85R)$$

## 二、 $R < 0$ 的情况

应力比  $R < 0$ , 即循环中包括负应力部分。为了便于统一分析和比较, 应当重

申;对于  $R < 0$  的载荷循环,  $\Delta K$  的计算只计其拉伸部分。这是因为:就理论分析而言,并没有定义压缩载荷作用下的应力强度因子;从物理概念上说,在压缩载荷下裂纹面是闭合的;由实验结果来看,在完全压缩的循环载荷作用下,若裂尖没有残余拉应力场存在,则裂纹不会扩展。

由图 8.4 可见,与  $R=0$  的情况相比,负应力的存在使低速率区  $da/dN$  加快;对中速率区的  $da/dN$  影响不大;在高速率区,因为上限  $(1-R)K_C$  增大,  $da/dN$  还有减缓的趋势。故在不同的裂纹扩展速率区域内,负应力的存在对  $da/dN$  的影响是不同的,情况比  $R > 0$  时复杂得多。

Walker 公式是工程中描述应力比  $R$  对裂纹扩展速率影响的一种常用数学模型,即

$$da/dN = C[(1-R)^m K_{max}]^n \quad (8-17)$$

式中的三个材料参数  $C$ 、 $m$  和  $n$ ,是由不同应力比下的疲劳裂纹扩展实验数据拟合得到的。

给定应力比  $R_i$ ,由实验测定  $a-N$  曲线后,可获得第  $i$  组  $[(K_{max})_{ij}, (da/dN)_{ij}]$  数据,将方程 (8-17) 改写为

$$da/dN = x_i (K_{max})^n \quad (8-18)$$

式中,  $x_i = C(1-R_i)^q$ ;  $q = mn$ 。将 (8-18) 式取对数后作最小二乘线性拟合,可以得到  $x_i$  和  $n$ 。再利用不同应力比下的  $(R_i, x_i)$  数据,按  $\lg x_i = \lg C + q \lg(1-R_i)$  的回归方程拟合  $C$  和  $q$ ,则  $m = q/n$ 。Walker 公式可以描述  $R > 0$  和/或  $R < 0$  时的疲劳裂纹扩展速率。一般说来,负应力的存在,总是会使疲劳裂纹扩展寿命有所降低的。

### 8.3.2 加载频率的影响

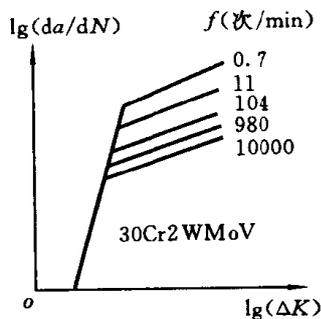


图 8.6 频率的影响

图 8.6 所示是 30Cr2WMoV 钢(30 万千瓦汽轮机高压转子钢材)在不同加载频率作用下的疲劳裂纹扩展速率实验结果。

由图可见:

1) 在低速区,加载频率的变化对疲劳裂纹扩展速率  $da/dN$  基本无影响。许多其它实验研究结果也证明了这一点。可以预料,只要频率不低到出现环境影响,不高到使裂纹尖端有显著发热,这种频率无关性都将保持。

2) 当裂纹扩展速率  $da/dN$  较高时, 加载频率  $f$  的降低使  $da/dN$  增大。

3) 在  $da/dN$  受到加载频率影响的范围内, 双对数图中的  $da/dN-\Delta K$  曲线基本平行。

利用 Paris 公式, 考虑频率影响时, 有

$$da/dN = C(f)(\Delta K)^m = (A - B \lg f)(\Delta K)^m \quad (8-19)$$

式中,  $C$  为加载频率的函数,  $C = (A - B \lg f)$  表示频率仅改变双对数图中  $da/dN-\Delta K$  直线的截距。

一般地说, 频率对疲劳裂纹扩展速率  $da/dN$  的影响比应力比  $R$  的影响要小得多。在室温、无腐蚀环境中, 频率在  $0.1 \sim 100\text{Hz}$  量级变化时对  $da/dN$  的影响几乎可以不考虑。应力循环波形(正弦波、三角波、矩形波等)的影响更是次要的。但是, 在高温或腐蚀环境下, 频率及波形对  $da/dN$  的影响显著增大, 因而是不能忽视的。

### 8.3.3 腐蚀环境对疲劳裂纹扩展的影响

在腐蚀介质环境作用下的疲劳, 称为腐蚀疲劳。腐蚀疲劳是介质引起的腐蚀破坏过程和扰动应力引起的疲劳破坏过程的共同作用。这二者的共同作用, 比其中任何一种单独作用更为有害。因为扰动应力下的裂纹扩展, 使新的裂纹面不断地暴露于腐蚀介质中, 加速了腐蚀; 不断发生的腐蚀过程也使疲劳裂纹得以更快地形成和扩展。

在腐蚀介质环境中, 疲劳裂纹扩展速率总是比在惰性介质环境(如真空、干氩或空气介质环境)中高, 有时甚至高几个数量级。而且, 一般说来, 液体腐蚀环境对疲劳裂纹扩展的影响比气体腐蚀环境更严重。

#### 一、应力腐蚀开裂

在腐蚀介质中, 即使只有静载荷作用, 且裂纹尖端的应力强度因子远低于临界断裂韧性值, 也可能在一定时间后发生裂纹的扩展。这种扩展称为应力腐蚀开裂 (Stress corrosion cracking)。

将带裂纹的试件加载到  $K_{Ii}$  ( $K_{Ii} < K_{Ic}$ ), 置于腐蚀介质中。若材料对该腐蚀介质敏感, 则在一定时间后裂纹将发生扩展。记录在  $K_{Ii}$  作用下腐蚀介质中裂纹开始发生扩展的时间  $t_f$ , 可以得到图 8.7 所示的一般关系。

由图可见:

1) 在腐蚀介质作用下, 裂纹可以在应力强度因子  $K_{Ii}$  低于  $K_{Ic}$  的情况下发生扩展。

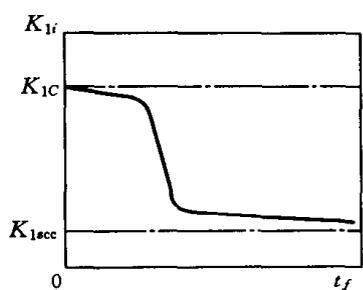


图 8.7  $K_{1i}-t_f$  关系

2) 作用的初始应力强度因子  $K_{1i}$  越低, 到发生裂纹扩展的时间  $t_f$  就越长。

3) 当  $K_{1i}$  趋于某极限值时, 到发生裂纹扩展的时间  $t_f$  趋于无限长, 这一应力强度因子的极限值称为应力腐蚀开裂的应力强度因子门槛值, 记作  $K_{1scc}$ 。因为实验时间不可能无限长, 故通常要规定一个实验截止时间(一般为 1000 小时), 然后由  $K_{1i} \sim t_f$  关系曲线估计  $K_{1scc}$ 。

$K_{1scc}$  是 I 型裂纹在平面应变条件下的应力腐蚀开裂门槛应力强度因子。若满足条件  $K_{1i} < K_{1scc}$ , 则将不发生应力腐蚀开裂。因此,  $K_{1scc}$  是一个与腐蚀介质有关的材料性能指标, 它表示出材料抵抗应力腐蚀开裂的能力。

## 二、腐蚀疲劳裂纹扩展速率 $(da/dt)_{CF}$

在腐蚀介质环境中, 疲劳裂纹的扩展速率称为腐蚀疲劳裂纹扩展速率, 记作  $(da/dN)_{CF}$ 。大量实验研究结果表明: 腐蚀疲劳裂纹扩展速率  $(da/dN)_{CF}$  与应力强度因子  $\Delta K$  的关系有如图 8.8 所示三类。

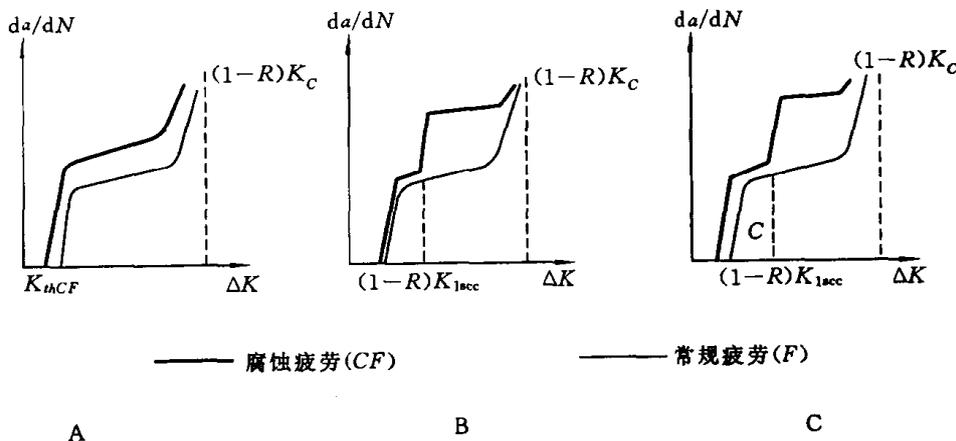


图 8.8 腐蚀疲劳裂纹扩展速率曲线分类

A 类: 腐蚀疲劳裂纹扩展速率  $(da/dN)_{CF}-\Delta K$  曲线, 大致与非腐蚀环境下的裂纹扩展速率  $(da/dN)_F-\Delta K$  曲线平行。这种情况表明, 腐蚀介质的作用使疲劳裂纹扩展速率普遍加快; 腐蚀疲劳裂纹扩展的应力强度因子门槛值  $(\Delta K)_{thCF}$  与无腐蚀时的  $\Delta K_{th}$  相比, 有较大的降低。铝合金在淡水中的疲劳裂纹扩展即属此类。

B类:注意到  $\Delta K = (1-R)K_{\max}$ , 由图中可知, 当  $K_{\max} < K_{1sc}$  时, 腐蚀介质对疲劳裂纹扩展速率几乎没有什么影响, 主要是疲劳过程的作用。若  $K_{\max} > K_{1sc}$ , 腐蚀的作用迅速显示, 大大加快了疲劳裂纹的扩展。接着,  $(da/dN)_{CF}-\Delta K$  曲线出现一个平台, 腐蚀的化学、电化学反应成为裂纹扩展的主因。如马氏体镍钢在干氢中的疲劳裂纹扩展即属此类。

C类:是 A、B 二类的混合型。在这种情况下, 即使  $K_{\max} < K_{1sc}$ , 腐蚀介质对疲劳裂纹扩展也有不利的影响。如高强钢在盐溶液中的疲劳裂纹扩展即属此类。

加载频率对腐蚀介质中的疲劳裂纹扩展有不可忽视的影响。加载频率越低, 越有充分的时间使腐蚀过程得以显示, 腐蚀疲劳裂纹扩展速率也就越快。

## 小 结

1. 疲劳裂纹扩展可用断裂力学方法分析, 若  $a \gg r_p$ , 则线弹性断裂力学可用。应力强度因子为:  $K = f(a)\sigma \sqrt{\pi a}$ ; 中心裂纹:  $f(a) = 1.0$ ; 边裂纹:  $f = 1.12$ 。
2. 疲劳裂纹扩展速率的主要控制参量是  $\Delta K$ , 下限有  $\Delta K_{th}$ , 上限有  $(1-R)K_C$ 。

$$\Delta K = K_{\max} - K_{\min} = f(a)\Delta\sigma \sqrt{\pi a} \quad R \geq 0, \quad \sigma_{\min} \geq 0$$

$$= K_{\max} \quad R < 0, \quad \sigma_{\min} < 0$$

裂纹不扩展条件  $\Delta K < \Delta K_{th}$

临界裂纹尺寸  $K_{\max} = K_C, \quad a_c = (1/\pi)(K_C/f\sigma_{\max})^2$

3. Paris 公式:  $da/dN = C(\Delta K)^m$

在恒幅载荷作用下, 积分后有

$$N_c = \begin{cases} \frac{1}{C(f\Delta\sigma \sqrt{\pi})^m (0.5m - 1)} \left( \frac{1}{a_0^{0.5m-1}} - \frac{1}{a_c^{0.5m-1}} \right) & m \neq 2 \\ \frac{1}{C(f\Delta\sigma \sqrt{\pi})^m} \ln \left( \frac{a_c}{a_0} \right) & m = 2 \end{cases}$$

4. 初始裂纹尺寸  $a_0$  对寿命有很大的影响, 要控制  $a_0$ 。
5. 拉伸平均应力使  $da/dN$  增大; 腐蚀环境下  $da/dN$  增高; 在高温、腐蚀环境下, 加载频率影响增大, 频率降低,  $da/dN$  加快。
6. 基本疲劳分析方法的比较, 见表 8-1。

表 8-1 疲劳分析方法比较

	应力疲劳法	应变疲劳法	断裂力学法
方法	$S < S_y; N > N_f$ (或 $10^4$ ) $S^m N = C$ Goodman 直线 $S_a/S_{-1} + S_m/S_u = 1$ Miner 理论: $D = \sum n/N = 1$ 相对 Miner 理论: $N_A = N_B \sum (n/N)_B$ $/( \sum n/N)_A$ 无限寿命设计 $S \leq S_f$	$S > S_y; N < N_f$ (或 $10^3$ ) $\epsilon_a = \sigma_a/E + (\sigma_a/k')^{1/n'}$ $\Delta\epsilon = \Delta\sigma/E + 2(\Delta\sigma/2K')^{1/n'}$ $\epsilon_a = \epsilon_{ea} + \epsilon_{pa}$ $= \frac{\sigma'_f - \sigma_m}{E} (2N)^b + \epsilon'_f (2N)^f$ Neuber: $K_\sigma \cdot K_\epsilon = K_t^2$ $\Delta\sigma\Delta\epsilon = K_t^2 \Delta S \Delta e$	$S < S_y; r_p \ll a$ , 考虑裂纹扩展 不扩展条件 $\Delta K < \Delta K_{th}$ 临界裂纹 $K_{max} = K_c$ Paris 公式 $da/dN = C(\Delta K)^m$
优点	1. 材料参数少,易于获取。 2. 分析方法简单。 3. 有大量的数据积累。	1. 能描述循环应力-应变响应。 2. 可考查载荷次序影响。 3. 利于缺口疲劳分析。 4. 利于疲劳-蠕变混合分析。	1. 可考虑裂纹扩展,利于控制。 2. 对扩展机理有较好的物理解释。 3. 可控制初始损伤,检查周期,使用载荷等,以保证安全。
缺点	1. 经验性,不考虑裂纹。 2. 材料参数与试件几何、载荷形式有关,通用性较差。 3. 缺口效应难于分析。	1. 分析计算较复杂。 2. 只考虑裂纹萌生。 3. 缺口分析偏保守。	1. 不研究裂纹起始。 2. 往往难于估计 $a_0$ 。 3. 构件几何复杂时难算 $K$ 。 4. LEFM 不满足时要用 EPFM。
应用	1. 长寿命构件,如传动轴弹簧,齿轮等。 2. 高强材料 $S < S_y, a_c$ 小。 3. 初步设计估算。 4. 与 LEFM 一起作全寿命分析。	1. $N$ 小,塑性应变大的构件,如低强结构钢缺口件。 2. 高温、大应变情况。 3. 高应力集中情况。 4. 与 LEFM 一起作全寿命分析。	1. 大型,重要结构件,如飞机结构,核反应堆,压力容器。 2. 预先有裂纹存在的结构,如大型焊、铸件。 3. 尖缺口寿命(近似裂纹)。

## 思考题与习题

- 8-1 疲劳裂纹扩展有何一般规律? 试述 Paris 公式的应用。
- 8-2 某中心裂纹铝板承受  $R=-1$  的循环载荷作用,  $\Delta S=200\text{MPa}$ , 在实验室空气环境下获得如下裂纹扩展数据:

$a/\text{mm}$	2.23	2.25	2.28	2.35	2.41	2.49	2.62	2.96	3.58	4.59	5.08	5.56
$N/10^3$	80	105	110	115	125	130	135	140	145	147	147.4	147.5

- a) 试作  $a-N$  曲线。
- b) 在  $\lg(da/dN)-\lg(\Delta K)$  图上描点, 试划分三个扩展区。
- c) 对上图之线性部分, 确定 Paris 公式之常数  $C$  和  $m$ 。
- 8-3 某宽板含中心裂纹  $2a_0$ , 受  $R=0$  的循环载荷作用,  $K_C=120\text{MPa}\sqrt{m}$ , 裂纹扩展速率为  $da/dN=2\times 10^{-12}(\Delta K)^3 m/C$ 。
- a) 试对于  $a_0=0.5\text{mm}$ ,  $2\text{mm}$  两种情况分别计算  $S_{\max}=100, 200, 300\text{MPa}$  时的寿命。
- b) 绘出此裂纹板在  $a_0=0.5\text{mm}$  时的  $S-N$  曲线。
- 8-4 某构件含一边裂纹。受  $S_{\max}=200\text{MPa}$ ,  $S_{\min}=20\text{MPa}$  循环应力作用, 已知  $K_C=150\text{MPa}\sqrt{m}$ , 构件的工作频率为  $f=0.1\text{Hz}$ 。为保证安全, 每 1000 小时进行一次无损检查, 试确定检查时所能允许的最大裂纹尺寸  $a_0$ 。  
(裂纹扩展速率为  $da/dN=4\times 10^{-14}(\Delta K)^4 m/C$ )
- 8-5 某中心裂纹宽板承受循环载荷作用,  $R=0$ 。已知  $K_C=100\text{MPa}\sqrt{m}$ ,  $\Delta K_{th}=6\text{MPa}\sqrt{m}$ ,  $da/dN=3\times 10^{-12}(\Delta K)^3 m/C$ 。假定  $a_0=0.5\text{mm}$ , 试估算:
- a) 裂纹不扩展时的最大应力  $S_{\max}$ 。
- b) 寿命为  $N=0.5\times 10^6$  次时所能允许的最大循环应力  $S_{\max}$ 。
- 8-6 由无损检测得知某宽板内存在有长  $a_0=3\text{mm}$  的初始边裂纹。依据材料的断裂韧性, 判定其断裂时的临界裂纹长度为  $a_c=8\text{mm}$ 。在给定使用循环载荷下, 计算可知疲劳裂纹扩展寿命为  $N_1$ 。若 Paris 裂纹扩展速率公式的指数为 3, 试估计:
- a) 提高材料的断裂韧性, 使  $a_c=10\text{mm}$  时, 疲劳裂纹扩展寿命增加的百分数。
- b) 减小初始裂纹尺寸, 使  $a_0=1\text{mm}$  时, 疲劳裂纹扩展寿命增加的百分数。
- 8-7 某航空发动机燃气涡轮盘由高强度材料制成, 其内部缺陷可用一圆盘形裂纹描述, 初始尺寸为  $a_0=0.1\text{mm}$ , 临界裂纹尺寸为  $a_c=2\text{mm}$ 。已知疲劳裂纹扩展速率  $da/dN(m/C)$  与应力强度因子幅度  $\Delta K(\text{MPa}\sqrt{m})$  的关系为  $da/dN=4\times 10^{-12}(\Delta K)^3$ , 每一次起飞/降落形成一个应力循环, 且  $\Delta\sigma=1000\text{MPa}$ , 试估计涡轮盘的寿命。
- 8-8 外半径  $R=30\text{mm}$ , 内半径  $r=15\text{mm}$  的枪筒由 NiCrMoV 钢制造, 射击时在枪筒内产生

的压力为  $p=320\text{MPa}$ 。材料断裂韧性  $K_{1c}=80\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ ，疲劳裂纹扩展速率  $da/dN=3\times 10^{-11}(\Delta K)^3$ 。若发现枪筒内壁有一深  $a_0=2\text{mm}$  的半圆形表面裂纹，试估计其剩余使用次数。

$$\left[ \text{厚壁筒内表面半圆形裂纹深处有: } K=1.12\times \frac{2}{\pi} p \sqrt{\pi a \left( \frac{2R^2}{R^2-r^2} \right)} \right]$$

# 第九章 裂纹闭合理论与 高载迟滞效应

线弹性断裂力学用应力强度因子  $K$  描述裂纹尖端场。裂尖附近的弹性应力正比于  $K/(r)^{1/2}$ , 当到裂纹尖端的距离  $r \rightarrow 0$  时, 无论应力强度因子  $K$  大或小 ( $K$  是有限值), 裂纹尖端的应力都将趋于无穷大。那么, 为什么会有疲劳裂纹扩展的门槛值  $\Delta K_{th}$  存在? 由前一章的讨论, 我们已经知道, 描述疲劳裂纹扩展的主要控制参量为  $\Delta K$ , 但不同应力比  $R$  下的  $da/dN-\Delta K$  曲线是不同的。如何解释应力比  $R$  对疲劳裂纹扩展速率的影响? 是否有比  $\Delta K$  更本质的疲劳裂纹扩展控制参量? 施加变幅载荷时, 从高载荷到低载荷或从低载荷到高载荷变化, 对于疲劳裂纹扩展的影响如何? 如何解释、预测载荷作用次序对  $da/dN$  的影响?

本章所要讨论的裂纹闭合理论和高载迟滞效应, 就是希望能有助于进一步认识上述问题。

## 9.1 循环载荷下裂尖的弹塑性响应

在讨论裂纹闭合理论前, 需要对循环载荷作用下裂纹尖端场的弹塑性应力-应变响应进行分析。为此, 先对循环载荷下材料的弹塑性应力-应变响应作一简单讨论。

### 一、循环载荷下材料的反向屈服

若对试件施加拉伸载荷,  $\sigma-\epsilon$  曲线一般有线弹性关系, 材料在  $\sigma = \sigma_{ys}$  时进入屈服。在屈服后的某一点开始卸载并反向加载(压缩),  $\sigma-\epsilon$  曲线将沿与加载时的弹性线平行的路径返回, 直到材料又一次发生屈服。如果将第一次屈服作为正向屈服, 则这种又一次屈服, 称为反向屈服。在反向屈服后的某一点再开始加载(拉伸),  $\sigma-\epsilon$  曲线仍沿同样斜率的弹性线上升, 直到材料再次进入屈服。图 9.1 示出了理想弹塑性材料和硬化材料在加、卸载过程中的  $\sigma-\epsilon$  响应。

值得注意的是: 若材料的屈服应力为  $\sigma_{ys}$ , 则无论理想弹塑性材料或硬化材料, 由载荷反向而引起反向屈服的应力增量均为  $2\sigma_{ys}$ , 如图 9.1 所示。

因此, 可以认为, 材料反向加载至屈服, 会形成反向塑性流动; 发生反向屈服的应力增量为  $\Delta\sigma = 2\sigma_{ys}$ 。

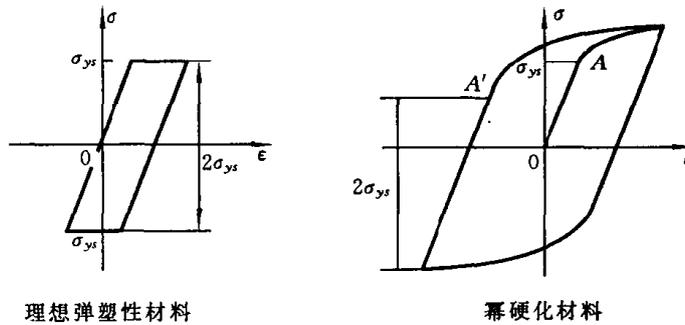


图 9.1 循环加载与反向屈服

## 二、裂尖的弹塑性响应

在单调载荷的作用下,线弹性断裂力学可给出沿裂纹线上的弹性应力分布。对于理想塑性材料, Irwin 给出的塑性区尺寸为

$$2r = \frac{1}{\alpha\pi} \left( \frac{K}{\sigma_{ys}} \right)^2, \quad \alpha = \begin{cases} 1 & \text{平面应力} \\ 2\sqrt{2} & \text{平面应变} \end{cases} \quad (9-1)$$

疲劳载荷的重复作用,使裂纹尖端弹塑性响应的描述更加复杂。为了能对循环载荷作用下裂纹尖端的弹塑性响应进行一般性分析,1967年, J. R. Rice 以弹性-理想塑性模型为基础,在比例塑性流动(即在每一处,塑性应变张量各分量相互都保持一个恒定的比例)的条件下,提出下述“塑性叠加法”(ASTM-STP 415,1967年)。

假定某一裂纹体(如中心穿透裂纹板),先承受载荷  $\sigma$  的作用;然后卸载(卸载幅度为  $\Delta\sigma$ ),则载荷成为  $\sigma - \Delta\sigma$ 。第一次施加载荷到达  $\sigma$  时,按单调加载情况可给出裂纹尖端的塑性区  $\omega_M$  为

$$\omega_M = 2r_p = \frac{1}{\alpha\pi} \left( \frac{K}{\sigma_{ys}} \right)^2 = \frac{Y^2 a \pi}{\alpha\pi} \left( \frac{\sigma}{\sigma_{ys}} \right)^2 \quad (9-2)$$

式中,应力强度因子  $K = Y\sigma(\pi a)^{1/2}$ ,  $Y$  为裂纹尺寸和裂纹体几何的函数。此时,由第七章可知,裂纹线上的应力分布为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{y|\sigma} &= \sigma_{ys} & 0 \leq x \leq \omega_M \\ \sigma_{y|\sigma} &= \frac{K}{\sqrt{2\pi(x - \omega_M/2)}} & x \geq \omega_M \end{aligned} \right\} \quad (9-3)$$

第二式中的弹性应力已按 Irwin 的有效裂纹长度进行了修正,如图 9.2(a)所示。

卸载  $\Delta\sigma$ (可视为反向加载  $\Delta\sigma$ )时,张开了的裂纹仍然会形成很大的应力集

中。因此,从载荷一开始下降,裂尖就会出现反向塑性流动。依据发生反向屈服的应力增量为  $2\sigma_{ys}$ ,可以写出反向塑性区尺寸  $\omega_c$  为

$$\omega_c = \frac{Y^2 a}{\alpha} \left( \frac{\Delta\sigma}{2\sigma_{ys}} \right)^2 \quad (9-4)$$

上式表明:反向塑性区尺寸可用与单调塑性区尺寸类似的方法计算,只要用  $\Delta\sigma$  代替  $\sigma$ 、用  $2\sigma_{ys}$  代替  $\sigma_{ys}$  即可。 $\omega_c$  也称为循环塑性区,如图 9.2(b)所示。

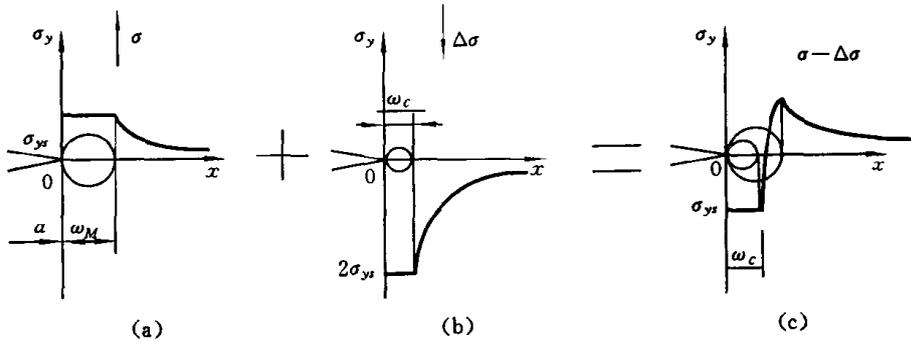


图 9.2 循环载荷下裂尖的应力分布

反向加载  $\Delta\sigma$  时,裂纹线上的应力分布为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{y|\Delta\sigma} &= 2\sigma_{ys} & 0 \leq x \leq \omega_c \\ \sigma_{y|\Delta\sigma} &= \frac{K_1}{\sqrt{2\pi(x - \omega_c/2)}} & x \geq \omega_c \end{aligned} \right\} \quad (9-5)$$

将加载到  $\sigma$  时裂纹线上的应力分布(图 9.2(a)),与卸载  $\Delta\sigma$  时裂纹线上的应力分布(图 9.2(b))相叠加,就得到从加载  $\sigma$  后再卸载  $\Delta\sigma$  时裂纹线上的应力分布(图 9.2(c))。这就是 Rice 的“塑性叠加法”。

加载  $\sigma$  后再卸载  $\Delta\sigma$  时,裂纹线上的应力分布可表达为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{y|\sigma-\Delta\sigma} &= \sigma_{y|\sigma} - \sigma_{y|\Delta\sigma} = -\sigma_{ys} & (0 \leq x \leq \omega_c) \\ \sigma_{y|\sigma-\Delta\sigma} &= \sigma_{y|\sigma} - \sigma_{y|\Delta\sigma} = \sigma_{ys} - \frac{K_1}{\sqrt{2\pi(x - \omega_c/2)}} & (\omega_c \leq x \leq \omega_M) \\ \sigma_{y|\sigma-\Delta\sigma} &= \frac{K_1}{\sqrt{2\pi(x - \omega_M/2)}} - \frac{K_1}{\sqrt{2\pi(x - \omega_c/2)}} & (x \geq \omega_M) \end{aligned} \right\} \quad (9-6)$$

若再继续施加反向载荷  $\Delta\sigma$ ,回到应力  $\sigma$ ,同样应用上述叠加法,则可得到图 9.2(a)所示的结果。即若载荷在  $\sigma - (\sigma - \Delta\sigma) - \sigma$  间循环,则裂纹尖端的塑性区尺寸将在  $\omega_M - \omega_c - \omega_M$  间变化。 $\omega_M$  为单调塑性区, $\omega_c$  为循环塑性区。

### 三、结论和限制

由上述分析可知：

1) 材料反向加载至屈服, 会形成反向塑性流动; 发生反向屈服的应力增量为  $\Delta\sigma = 2\sigma_{ys}$ 。

2) 卸载(反向加载)将在裂尖引起反向屈服, 形成循环塑性区  $\omega_c$ 。

3) 当应力比  $R=0$  时,  $\Delta\sigma = \sigma$ , 比较(9-2)、(9-4)二式, 有  $\omega_c = \omega_M/4$ ; 同样, 当应力比  $R=-1$  时,  $\Delta\sigma = 2\sigma$ , 有  $\omega_c = \omega_M$ 。

4) 卸载后再加载, 应力仍可由上述叠加方法计算。

Rice 的塑性叠加法是在理想塑性材料、比例流动(塑性应变张量各分量保持一恒定比例)的加载条件下得到的。因此, 应当受到这两个约束条件的限制。Rice 认为, 尽管平面应变屈服的可压缩性影响, 及从材料内部的面内变形(平面应变状态)到近表面的平面应力条件下的剪切带的转变, 都违反了比例流动的假设, 但其影响并不大; 直到反向塑性区尺寸等于单调塑性区尺寸( $\omega_c = \omega_M$ )时, 塑性叠加法仍是基本可用的。用显微硬度法测量裂尖塑性区尺寸的结果, 支持了上述结论。

## 9.2 裂纹闭合理论

### 一、闭合现象

进行断裂力学分析时, 将裂纹视为理想裂纹。即远场应力  $\sigma > 0$  时, 裂纹张开;  $\sigma < 0$  时, 裂纹闭合。

然而, 工程中的实际裂纹, 一般都是在疲劳载荷作用下发生和发展的。由上节的讨论可知, 在循环载荷作用下, 裂纹尖端不仅有正向循环时的加载单调塑性区, 还有反向(循环)塑性区。无论单调塑性区还是循环塑性区, 其尺寸都是正比于  $K^2$  的, 因而也是正比于裂纹尺寸  $a$  的。

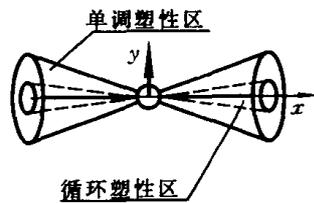


图 9.3 塑性变形区包迹

实际裂纹发生和扩展的过程中, 将在裂纹面附近留下如图 9.3 所示的塑性变形区包迹。这一包迹内的材料, 由于塑性变形, 在  $y$  方向产生了不可恢复的伸长。卸载时, 包迹外材料的弹性变形要恢复, 而包迹内发生过塑性变形的材料却不可能协调地恢复, 以适应弹性部分材料的收缩。因此, 裂纹面将发生闭合(至少是部分闭合), 才能满足变形的协

调。卸载时裂纹面附近存在的压应力是通过裂纹面传递的,只有裂纹表面闭合才能传递这种压力。

在完全卸载之前(即在某一大于零的拉伸载荷下),疲劳裂纹上、下表面相接触的现象,称为裂纹闭合(crack closure)。

W. Elber 于 1971 年首先在平面应力试件拉-拉疲劳裂纹扩展试验中观察到裂纹闭合现象。

## 二、闭合理论

从所观察到的实验现象入手,经过思考、分析与推理,Elber 提出了裂纹闭合理论。他认为:只有当施加应力大于某一应力水平时,裂纹才能完全张开,这一应力称为张开应力,记作  $\sigma_{op}$ ; 卸载时小于某一应力水平,裂纹即开始闭合,这一应力称为闭合应力,记作  $\sigma_{cl}$ 。实验测量的结果表明:张开应力  $\sigma_{op}$  和闭合应力  $\sigma_{cl}$  的大小基本相同,如图 9.4 所示。因为裂纹只有在完全张开之后才能扩展,所以应力循环中只有  $\sigma_{max} - \sigma_{op}$  的部分对疲劳裂纹扩展有贡献。

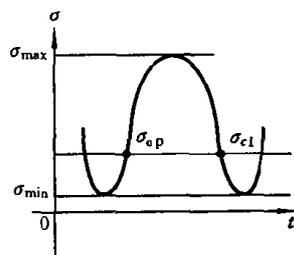


图 9.4 闭合应力

应力循环中,最大应力与张开应力之差,称为有效应力幅,记作  $\Delta\sigma_{eff}$ ,且

$$\Delta\sigma_{eff} = \sigma_{max} - \sigma_{op} \quad (9-7)$$

相应的有效应力强度因子幅度为

$$\Delta K_{eff} = Y(a)\Delta\sigma_{eff} \sqrt{\pi a} \quad (9-8)$$

疲劳裂纹扩展速率  $da/dN$  应由  $\Delta K_{eff}$  控制,于是 Paris 公式成为

$$da/dN = C(\Delta K_{eff})^m = C(U\Delta K)^m = U^m C(\Delta K)^m \quad (9-9)$$

式中, $U$  为裂纹闭合参数,且有

$$U = \Delta\sigma_{eff}/\Delta\sigma = \Delta K_{eff}/\Delta K < 1 \quad (9-10)$$

实验发现,闭合参数  $U$  是与应力比  $R$  有关的。例如,对于 2024-T3 铝合金,有

$$U = 0.5 + 0.4R$$

利用闭合理论给出的(9-9)式和上述闭合参数,用有效应力强度因子幅度  $\Delta K_{eff}$  来描述  $da/dN$ ,可使不同  $R$  下的  $da/dN$  趋于一致。图 9.5 示出了 J. Schijve

对 2024—T3 铝合金板材疲劳裂纹扩展试验研究的结果。由此可见,与  $\Delta K$  相比,有效应力强度因子幅度  $\Delta K_{eff}$  是控制裂纹扩展的更本质的参量。

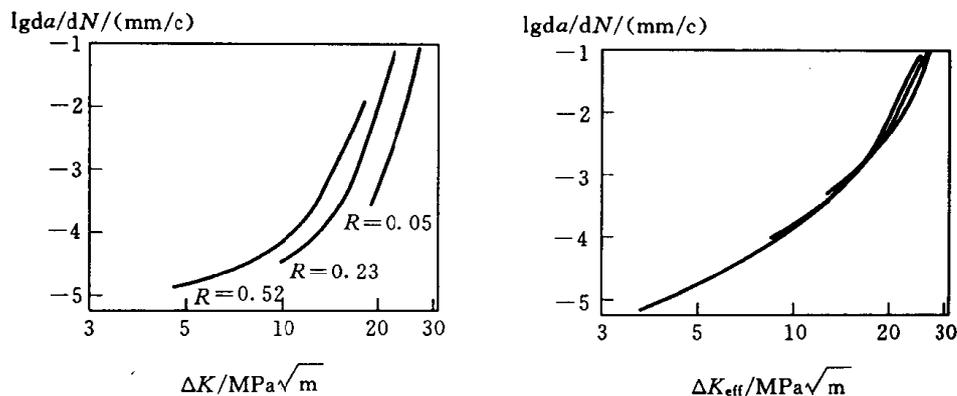


图 9.5 2024—T3 铝合金板材的疲劳裂纹扩展速率

### 三、闭合应力的实验测定

测定裂纹闭合应力的方法很多,如电阻法、光学法、电位法及超声表面波法,等等。但最可靠、应用最广的是利用裂纹张开位移测量闭合应力的 COD 法 (Crack Opening Displacement)。

在中心穿透裂纹宽板中,靠近裂纹面处 A、B 二点的张开位移,已由 Paris (1974) 给出:

$$[COD]_{AB} = 4\sigma a/E' = \alpha\sigma$$

或 
$$\sigma = (1/\alpha)[COD]_{AB} \quad (9-11)$$

式中,  $a$  为裂纹尺寸:  $a = 4a/E'$ , 在平面应力情况下,  $E' = E$ ; 平面应变时,  $E' = E/(1-\mu)^2$ 。

(9-11) 式表明,  $[COD]_{AB}$  是线性正比于所施加的应力  $\sigma$  和裂纹长度  $a$  的。若用带锯缝的板模拟理想裂纹板, 进行  $[COD]$  测量, 可以验证  $\sigma$ - $[COD]$  间的线性关系, 因为锯缝是完全张开的。锯缝长度  $a$  大,  $\sigma$ - $[COD]$  间线性关系的斜率  $E'/4a$  就小, 刚度就低; 锯缝短, 斜率  $E'/4a$  就大, 刚度就高, 如图 9.6 所示。图中还示出了含有疲劳裂纹的板中  $\sigma$ - $[COD]$  曲线的测量结果。

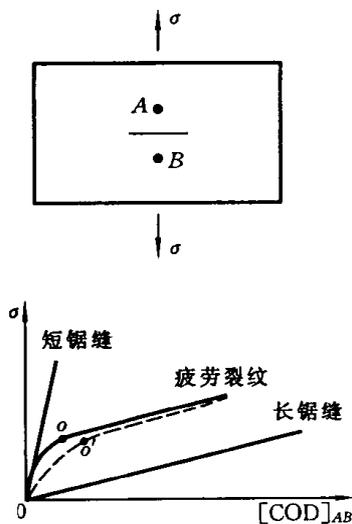


图 9.6  $\sigma$ -COD 曲线

图 9.6 中疲劳裂纹的  $\sigma$ -COD 记录有非线性

部分。在  $o$  点以下,  $\sigma$ -COD 记录并非线性的, 随着  $\sigma$  的增加,  $\sigma$ -COD 曲线的斜率  $E'/4a$  逐渐下降, 好像是裂纹尺寸  $a$  在逐渐加大。然而, 在一次循环加载中, 裂纹尺寸实际上并未改变, 曲线斜率  $E'/4a$  下降是原本闭合着的裂纹逐渐张开的结果。在  $o$  点以上,  $\sigma$ -COD 记录是线性的, 斜率与同样长度的锯缝相同, 表明此时的裂纹是完全张开的。加载时,  $\sigma$ -COD 记录由曲线转变为直线的  $o$  点所对应的应力, 即裂纹张开应力  $\sigma_{op}$ ;  $\sigma > \sigma_{op}$ , 裂纹才完全张开。卸载时,  $\sigma$ -COD 记录由直线变为曲线的点  $o'$  所对应的应力, 为裂纹闭合应力  $\sigma_{cl}$ ;  $\sigma < \sigma_{cl}$ , 裂纹开始闭合。 $\sigma_{op}$ 、 $\sigma_{cl}$  二者相差不大, 但闭合应力  $\sigma_{cl}$  更稳定且易于观察。

如果在 [COD] 测量中利用讯号  $\alpha\Delta\sigma$  进行补偿, (9-11) 式成为

$$[\text{COD}]_{AB} - \alpha\Delta\sigma = \alpha\sigma - \alpha\Delta\sigma = \alpha\sigma_{\min} = \text{常数} \quad (9-12)$$

上式表明, 只要裂纹是完全张开的, 则用  $\alpha\Delta\sigma$  补偿后所记录的  $[\text{COD}]_{AB} - \alpha\Delta\sigma$  应当为一常量(垂线)。一旦裂纹开始闭合, 则  $[\text{COD}]_{AB} - \alpha\Delta\sigma$  将偏离垂线, 如图 9.7 所示。这样的补偿记录, 可避免如图 9.6 中须分辨曲线到直线的过渡点位置而引入的人为误差, 提高测量精度。

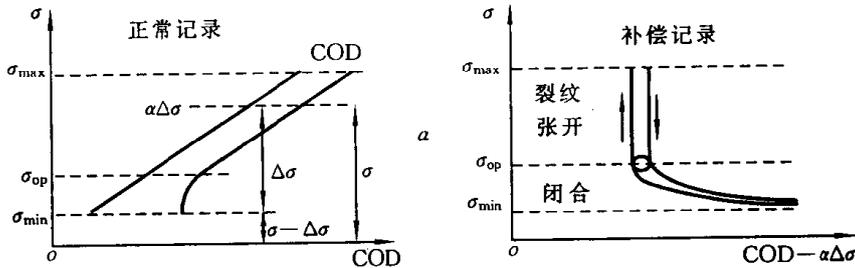


图 9.7 线性补偿法与  $\sigma$ - $([\text{COD}]_{AB} - \alpha\Delta\sigma)$  记录

#### 四、闭合理论对若干疲劳裂纹扩展现象的解释

##### 1. 门槛值 $\Delta K_{th}$

依照裂纹闭合理论, 循环应力中只有大于张开应力的部分, 对于疲劳裂纹扩展才有贡献。如果循环最大应力  $\sigma_{\max} \leq \sigma_{op}$ , 则裂纹将不扩展。于是, 有一个大于零的疲劳裂纹扩展的门槛应力强度因子幅度  $\Delta K_{th}$  存在, 即与  $\sigma_{op}$  所对应的  $\Delta K$ 。

##### 2. $R$ 的影响

裂纹闭合理论认为: 闭合参数  $U$  是与应力比  $R$  有关的, 如前所述。应力比  $R$  增大, 裂纹闭合参数  $U = \Delta\sigma_{eff}/\Delta\sigma$  增大, 有效应力强度因子幅度  $\Delta K_{eff}$  增大, 故裂纹扩展速率  $da/dN$  加快。所以,  $\Delta K_{eff}$  是描述疲劳裂纹扩展更本质的控制参量。

##### 3. 变幅载荷作用下裂纹扩展的加速和迟滞

图 9.8 所示为一典型的低—高—低变幅载荷谱。若无载荷间的影响,各级载荷水平下的疲劳裂纹扩展速率均可用 Paris 公式描述。然而,20 世纪 60 年代以来,变幅载荷谱下的大量试验研究表明:当循环载荷(或应力)幅从低到高变化

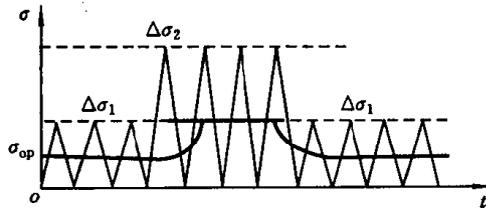


图 9.8 谱载荷及其张开应力水平

( $\Delta\sigma_1 \rightarrow \Delta\sigma_2$ ) 时,高载下的疲劳裂纹扩展速率高于按 Paris 公式给出的恒幅载荷下的  $da/dN$ ,即裂纹扩展加速;若循环载荷(或应力)幅从高到低变化( $\Delta\sigma_2 \rightarrow \Delta\sigma_1$ )时,低载下的疲劳裂纹扩展速率将低于恒幅载荷下的  $da/dN$ ,即有裂纹扩展迟滞效应。加速或迟滞现象,均需裂

纹在该载荷水平下扩展一段时间之后才会消失。

考虑裂纹闭合,若闭合参数  $U$  可如前所述,写为  $U=0.5+0.4R$ ,则对于图中  $R=0$  的情况,有  $U=\sigma_{op}/\sigma_{max}=0.5$ ,图中各级载荷下的  $\sigma_{op}$  各为  $(\sigma_{max})/2$ 。张开应力水平是外载荷作用下裂尖的物理响应,当外载变化时, $\sigma_{op}$  的改变应为一连续渐变过程,故变幅载荷作用下张开应力水平  $\sigma_{op}$  的变化如图 9.8 所示。由图可见,当应力水平从  $\Delta\sigma_1$  增至  $\Delta\sigma_2$  时,张开应力水平  $\sigma_{op}$  从  $\Delta\sigma_1/2$  逐渐增至  $\Delta\sigma_2/2$ ,然后才稳定在  $\Delta\sigma_2/2$ ;控制裂纹扩展速率的有效应力幅  $\Delta\sigma_{eff}=\sigma_{max}-\sigma_{op}$  则由突然增大后再逐渐减小到正常值,裂纹扩展速率  $da/dN$  也出现加速扩展后逐渐恢复正常的现象。同样,应力水平从  $\Delta\sigma_2$  降至  $\Delta\sigma_1$  时, $\sigma_{op}$  从  $\Delta\sigma_2/2$  逐渐降至  $\Delta\sigma_1/2$ , $\Delta\sigma_{eff}$  则突然减小,此后再逐渐恢复到正常值,故  $da/dN$  出现迟滞现象。这就是裂纹闭合理论对变幅载荷作用下裂纹扩展加速和迟滞现象的解释。

尽管仅仅依赖裂纹闭合理论还不足以对各种复杂的疲劳裂纹扩展现象作出完全的解释,但可以肯定地说,裂纹闭合理论作为一种机理,对于认识如上所述的许多典型现象是十分有益的。

### 9.3 高载迟滞效应

前节已提到在变幅载荷谱作用下,裂纹扩展有加速或迟滞效应。实验表明,这两种影响相比较,迟滞对寿命的影响比加速要大得多。人们希望利用这一现象延长寿命,控制裂纹扩展。故近 30 年来,对于高载引起的疲劳裂纹扩展迟滞,进行了大量的研究。

#### 一、高载迟滞现象与机理

1962 年, Schijve 和 Brock 研究 2024—T3 铝合金在高载作用后的疲劳裂纹

扩展时,按图 9.9 中的载荷谱施加载荷,得到了如图所示的  $a-N$  曲线实验结果。他们发现,在恒幅载荷  $\Delta\sigma$  作用下,每插入一次高载,裂纹扩展速率( $a-N$  曲线的斜率)就立即降低。直到在低载下经历了足够多的循环之后,  $da/dN$  才恢复到原来的水平。再施加一次高载,又是如此。总共施加了三次高载后,疲劳裂纹扩展的寿命几乎延长了 4 倍。

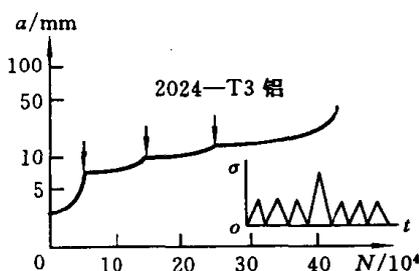


图 9.9 高载迟滞现象

在拉伸高载作用之后的低载循环中,发生的裂纹扩展速率减缓的现象,称为高载迟滞(Ratardation after application of overload)。高载的施加,可使后续低载循环中的  $da/dN$  下降,甚至止裂。

高载迟滞最常见的两种典型形式是:“立即迟滞”和“延迟迟滞”,如图 9.10 所示。

**立即迟滞(immediate retardation)**,即在高载作用后的低载循环中,裂纹扩展速率  $da/dN$  立即降至最小值,然后逐渐增大,直至恢复正常水平。立即迟滞通常是在由高到低的块谱载荷下发生的,或者说是在有多次高载作用后发生的。

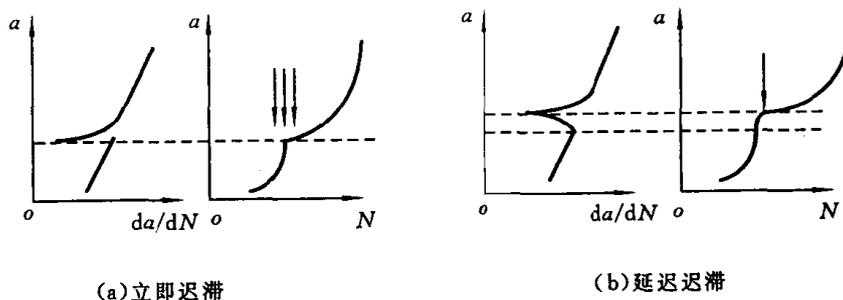


图 9.10 迟滞的两种典型形式

**延迟迟滞(delayed retardation)**,是在高载作用后,  $da/dN$  下降,但并不立即降至最小值;直到裂纹扩展了一段之后,  $da/dN$  才到达最小值,然后再逐渐恢复。这种延迟迟滞,通常是在单个或不多几个高载作用之后发生的。

关于高载迟滞现象发生机理的解释,主要有残余应力和裂纹闭合两种。

拉伸高载作用后,将在裂纹尖端前引入较大的残余压应力  $\sigma_{res}$ ;残余压应力的存在,使作用在裂尖的实际循环应力的最大、最小应力水平都下降,因而降低了裂尖实际循环应力中拉伸部分的大小和循环应力比,故裂纹扩展速率降低。这是由残余应力对高载迟滞现象发生机理的解释。

裂纹闭合理论对于高载迟滞现象的解释已在前节讨论过,即高载引入的残余压应力使裂纹张开应力  $\sigma_{op}$  增大,有效应力幅  $\Delta\sigma_{eff}$  降低,  $\Delta K_{eff}$  也降低,则裂纹扩展速率  $da/dN$  降低。

## 二、Wheeler 模型

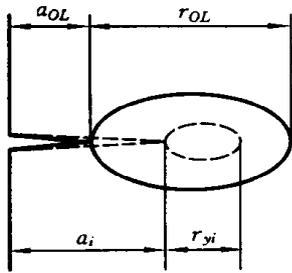


图 9.11 Wheeler 模型

描述迟滞期间疲劳裂纹扩展行为的 Wheeler 模型是 1971 年提出的。模型认为:迟滞是由于高载在裂纹尖端引入了大塑性区而造成的。当裂纹扩展到  $a_{OL}$  时,若施加的高载为  $\sigma_{OL}$ ,则裂纹尖端的塑性区  $r_{OL}$  如图 9.11 所示。

Wheeler 模型假设:

1) 高载  $\sigma_{OL}$  在裂尖引入了大塑性区  $r_{OL}$ 。此后,裂纹在高载塑性区  $r_{OL}$  内扩展。若裂纹尺寸为  $a_i$ ,则相应的在低载作用下的塑性区尺寸为  $r_{yi}$ 。且由(9-1)式有

$$r_{OL} = \frac{1}{\alpha\pi} \left( \frac{K_{OL}}{\sigma_{ys}} \right)^2, \quad r_{yi} = \frac{1}{\alpha\pi} \left( \frac{K_{maxi}}{\sigma_{ys}} \right)^2$$

2) 一旦裂纹穿过了高载塑性区  $r_{OL}$ ,即  $a_i + r_{yi} = a_{OL} + r_{OL}$  时,迟滞消失。

3) 塑性区内的残余应力使  $da/dN$  降低。迟滞期间的裂纹扩展速率  $(da/dN)_d$  可以利用恒幅载荷下的裂纹扩展速率  $(da/dN)_c$  并引入一个迟滞参数  $C_i$  表达为

$$(da/dN)_d = C_i (da/dN)_c \quad (9-13)$$

4) 在迟滞期间  $(a_i + r_{yi} \leq a_{OL} + r_{OL})$ ,迟滞参数  $C_i$  是指数型的,即

$$C_i = \{r_{yi} / [(a_{OL} + r_{OL}) - a_i]\}^{m'} \quad (9-14)$$

当迟滞消失时,  $a_i + r_{yi} = a_{OL} + r_{OL}$ , 上式给出  $C_i = 1$ 。参数  $m' \geq 0$ , 是由给定的谱载荷下的实验确定的;若  $m' = 0$ , 则  $C_i = 1$ , 表示无迟滞发生。

由 Wheeler 模型可知,  $a_i = a_{OL}$  时,  $C_i = (r_{yi}/r_{OL})^{m'}$ ; 此时  $C_i$  最小, 裂纹扩展速率  $da/dN$  也最小, 是立即迟滞。在此后的迟滞期间,  $C_i$  是单调增加的, 故裂纹扩展速率  $da/dN$  逐渐恢复。当裂纹长度到达  $a_i = a_{OL} + r_{OL} - r_{yi}$  时,  $C_i = 1$ , 迟滞即消失。

Wheeler 模型的特点是:简单,便于应用。模型参数  $m'$  需要实测,且  $m'$  与材料、载荷谱有关。然而,正因为  $m'$  是实测的,故用 Wheeler 模型预测寿命的结果较好。注意到该模型所给出的  $C_i$  是大于零且单调增加的,由(9-13)式知,  $da/dN$  亦大于零且单调增加,故不能解释延迟迟滞与止裂现象。

### 三、Willenberg 模型

以 Wheeler 模型为基础, Willenberg 提出了一个考虑高载引入的残余压应力, 用分析方法预测裂纹扩展迟滞的模型。

Willenberg 模型假设:

- 1) 迟滞是高载使裂尖产生大的塑性变形, 引入了残余压应力  $\sigma_{res}$  而发生的。
- 2) 迟滞消失的条件仍然为

$$a_i + r_{yi} = a_{OL} + r_{OL}$$

模型分析:

令  $a_p = a_{OL} + r_{OL}$ , 当  $a_i + r_{yi} < a_p$  时, 裂纹在高载塑性区内扩展, 有迟滞。若要消除迟滞, 则需要当时裂纹尺寸下的塑性区  $r_{yi} = r_{req}$ , 如图 9.12 所示, 使得

$$a_i + r_{req} = a_p = a_{OL} + r_{OL} \quad (9-15)$$

故有

$$a_p = a_i + \frac{1}{\alpha\pi} \left( \frac{K_{req}}{\sigma_{ys}} \right)^2 = a_i + \frac{1}{\alpha\pi} \left( \frac{Y\sigma_{req} \sqrt{\pi a_i}}{\sigma_{ys}} \right)^2 \quad (9-16)$$

得到不发生迟滞所需的循环最大应力为

$$\sigma_{req} = \frac{\sigma_{ys}}{Y} \sqrt{\alpha(a_p - a_i)/a_i} \quad (9-17)$$

事实上, 裂纹尺寸  $a = a_i$  时, 有迟滞; 这是因为高载引入了  $\sigma_{res}$ , 使得在裂纹尺寸  $a = a_i$  时有  $\sigma_{max} < \sigma_{req}$ , 才造成了迟滞。假定残余应力为不发生迟滞所需的循环最大应力  $\sigma_{req}$  与当时循环最大应力  $(\sigma_{max})_i$  二者之差, 即

$$\sigma_{res} = \sigma_{req} - (\sigma_{max})_i \quad (9-18)$$

则裂尖实际循环应力为

$$\begin{aligned} (\sigma_{max})_{effi} &= (\sigma_{max})_i - \sigma_{res} = 2(\sigma_{max})_i - \sigma_{req} \geq 0 \\ (\sigma_{min})_{effi} &= (\sigma_{min})_i - \sigma_{res} = (\sigma_{max})_i + (\sigma_{min})_i - \sigma_{req} \geq 0 \end{aligned} \quad (9-19)$$

因为循环负应力部分对裂纹扩展无贡献, 故  $(\sigma_{max})_{effi}$ 、 $(\sigma_{min})_{effi}$  若为负, 则取零。实际循环应力比为

$$R_{effi} = (\sigma_{min})_{effi} / (\sigma_{max})_{effi} \quad (9-20)$$

控制疲劳裂纹扩展的有效应力强度因子幅度为

$$\Delta K_{effi} = Y [(\sigma_{max})_{effi} - (\sigma_{min})_{effi}] \sqrt{\pi a_i} \quad (9-21)$$

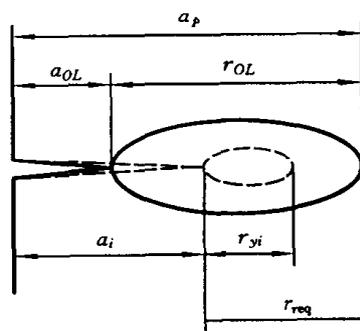


图 9.12 Willenberg 模型

考虑应力比  $R$  的影响,若裂纹扩展速率  $da/dN$  用 Forman 公式((8-14)式)描述,则有

$$da/dN = C(\Delta K_{eff})^m / [(1 - R_{eff})K_C - \Delta K_{eff}] \quad (9-22)$$

上式给出的即为迟滞期间的裂纹扩展速率  $(da/dN)_d$ 。这样,由(9-17)、(9-18)式算出残余应力  $\sigma_{res}$  后,即可估计迟滞期间的裂纹扩展速率  $(da/dN)_d$ ,进而预测疲劳裂纹扩展寿命了。

依据 Willenberg 模型,可以看到:

随着低载循环载荷作用下的裂纹扩展,尺寸  $a_i$  不断增大,迟滞消失所需要的  $\sigma_{req}$  不断下降,  $(\sigma_{max})_{eff}$ 、 $(\sigma_{min})_{eff}$  和  $R_{eff}$  逐渐增大,迟滞期间的裂纹扩展速率  $(da/dN)_d$  逐渐恢复。直到  $a_i + r_{yi} = a_p$  时,迟滞消失。

高载刚施加后,  $a_i = a_{OL}$  时,  $(da/dN)_d$  最小。此时若发生止裂,则止裂条件为

$$(\Delta K_{eff}) = 0 \quad \text{或} \quad (\sigma_{max})_{eff} = 0 \quad \text{或} \quad 2(\sigma_{max})_i - \sigma_{req} \leq 0 \quad (9-23)$$

由上述止裂条件可推得,止裂时有  $\sigma_{OL}/\sigma_{max} \geq 2$ ;实验获得金属材料的止裂超载比一般为  $\sigma_{OL}/\sigma_{max} = 2.3 \sim 2.7$ 。

Willenberg 模型也比较简单,可以用计算机逐循环计算。模型不依赖于实验参数,便于估算;但由于没有实验,预测精度较 Wheeler 模型差一些。Willenberg 模型仍不能解释延迟迟滞现象。尽管该模型可用来解释止裂,但其预计的止裂超载比与材料无关,并不太合理。

#### 四、拉、压高载作用次序对裂纹扩展的影响

拉伸高载在裂纹尖端形成大的拉伸塑性变形,卸载后留下大的残余压应力,使裂纹扩展速率降低。反之,若施加的是压缩高载,卸载后的残余拉应力必将对疲劳裂纹扩展产生不利的影 响。图 9.13 示出了不同的超载作用形式。

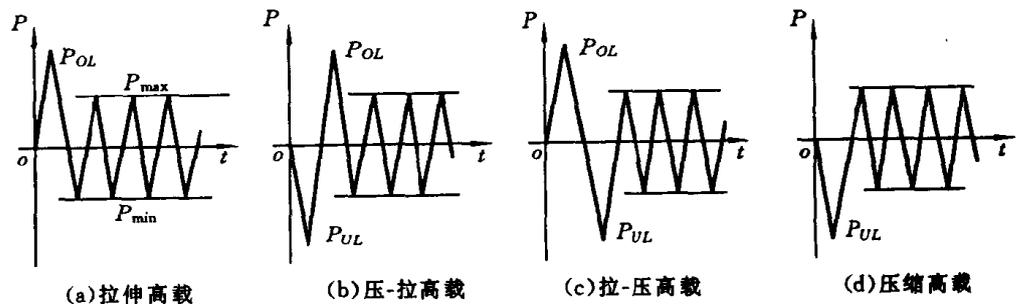


图 9.13 不同的超载谱型

图 9.14 是不同形式的超载作用对疲劳裂纹扩展速率影响的实验结果。粗实线是无高载作用时,恒幅载荷循环下的裂纹扩展  $a-N$  曲线。

a) 在如图 9.13(a)所示之拉伸高载作用后,迟滞影响很大,寿命可增加 1~10 倍,甚至止裂。

b) 施加如图 9.13(b)之先压后拉的高载,迟滞影响的程度略有减小。

c) 高载为先拉后压,如图 9.13(c)所示。则拉伸高载引入的残余压应力有较大消除,迟滞的影响进一步减弱。

d) 在如图 9.13(d)所示之压缩高载作用之后,高载引入的残余拉应力,将使疲劳裂纹扩展加速,但加速的影响程度显然比迟滞小得多。

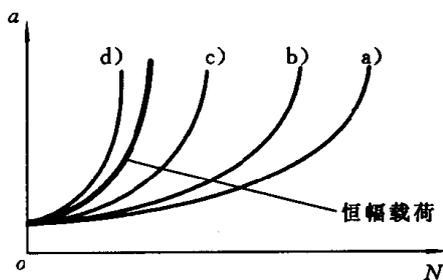


图 9.14 超载形式对  $da/dN$  的影响

## 小 结

1. 闭合现象是客观存在的。裂纹闭合理论有助于进一步认识疲劳裂纹扩展现象。
2. 闭合参数  $U$  或张开应力  $\sigma_{op}$  与应力比  $R$  有关。
3.  $\Delta K_{eff}$  是控制裂纹扩展的更本质的参量。
4. 拉伸高载的作用,会使后续低载的疲劳裂纹扩展速率  $da/dN$  下降,寿命延长。
5. 适当的拉伸预应变,可延长裂纹扩展寿命。
6. 迟滞与高载及其施加次序有关。

## 思考题与习题

- 9-1 什么是裂纹闭合?
- 9-2 试用闭合理论解释裂纹扩展门槛值  $\Delta K_{th}$  的存在和应力比  $R$  对疲劳裂纹扩展速率  $da/dN$  的影响。
- 9-3 在疲劳试验中,误加了一次大载荷,将对以后的裂纹扩展和寿命有何影响?

# 第十章 疲劳寿命预测和抗疲劳设计

## 10.1 概 述

构件或结构的疲劳寿命,一般分为裂纹起始(萌生)寿命和裂纹扩展寿命两部分,即  $N=N_i+N_p$ 。从开始使用到出现工程可检的裂纹  $a_i$  为止,是裂纹起始寿命  $N_i$ ;裂纹从  $a_i$  扩展到临界裂纹尺寸  $a_c$  的寿命是裂纹扩展寿命  $N_p$ 。

依据结构和材料的不同,上述两部分寿命在总寿命中所占的比例,是大不相同的。一般地说,高强脆性材料的裂纹起始寿命  $N_i$  较长,裂纹扩展寿命  $N_p$  较短;低强韧性材料、应力集中严重的构件则有相对较长的裂纹扩展寿命。对于韧性很低、一出现裂纹就有断裂危险的构件,通常只需考虑其裂纹起始寿命。反之,对于制造中不可避免会出现裂纹或类裂纹缺陷的构件(如焊、铸件等),则其疲劳寿命就是裂纹扩展寿命。

疲劳是一个长期的损伤累积过程。在这一过程中,材料的局部特性,作用于构件的载荷、环境等因素的变化是十分复杂的。由于疲劳问题的复杂性和材料疲劳性能本身的分散性,任何预测方法都只能给出统计正确的平均疲劳寿命。

### 一、关于寿命预测方法的一般要求

合理的疲劳寿命预测方法,一般应当满足下述条件:

- 1) 具有较高的精度和可靠性。即所预测的寿命与实际使用寿命相差不大,实际使用寿命或实验获得的寿命数据,应落在分析预测值及其分散带之内。
- 2) 有较普遍的适用范围。最好能够适用于不同的载荷谱、不同的材料、构件和环境,至少也要知道该方法的正确性条件和使用限制。
- 3) 不要求过多的、逐一硬配的、由实验结果拟合的参数,方法中所用的参数至少要能适用于某一类材料、某一类载荷谱,等等。
- 4) 计算工作量、计算成本应尽量低,至少要比实物疲劳试验低,否则将为实验所取代。
- 5) 最好能包括裂纹起始和扩展两个阶段的寿命预测。

## 二、寿命预测方法分类

目前已有的疲劳寿命预测方法,大致可分为如下四类:

### 1) 不考虑缺口根部或裂尖高应力区复杂情况的简单方法。

例如,  $S-N$  曲线, Miner 理论, Paris 或 Forman 的裂纹扩展公式等,采用的是名义应力或远场应力。

### 2) 考虑缺口根部或裂尖高应力区复杂情况之一部分的方法。

例如,考虑缺口应变的 Neuber 理论;考虑裂纹尖端残余压应力的 Willenberg 模型等。

### 3) 试图描述缺口根部或裂纹尖端真实情况的方法。

如 Elber 试图反映裂尖真实情况的裂纹闭合理论等。

### 4) 利用实际谱序实验结果的方法。

例如,利用相似构件在实际载荷谱下的使用损伤的相对 Miner 理论,利用变幅谱参数预测迟滞的 Wheeler 模型等。

上述前两类方法是以恒幅疲劳试验为基础的,后两类方法则趋于更真实地描述实际谱载荷的影响。

到目前为止,以恒幅疲劳试验数据( $S-N$  曲线、 $\epsilon-N$  曲线、 $da/dN-\Delta K$  曲线)为基础的寿命预测方法中,仍然是 Miner 理论、Paris 公式比较简单、适用。当然,若有以往的经验可用,相对 Miner 理论将给出更好的寿命预测。

随着疲劳研究的不断进步,疲劳寿命预测的能力不断提高,疲劳设计方法也得到不断发展。从疲劳持久极限  $S_f$  和应力强度因子门槛值  $\Delta K_{th}$  控制的无限寿命设计;到利用  $S-N$  曲线、 $\epsilon-N$  曲线和 Miner 理论、相对 Miner 理论进行的有限寿命设计;到考虑疲劳裂纹扩展,综合控制初始缺陷尺寸、剩余强度及检查周期的损伤容限设计和耐久性经济寿命分析,抗疲劳断裂的能力得到了极大的增强。但是,不同的疲劳设计方法之间并不是相互取代的关系,而应当是相互补充、完善,以满足不同情况、不同要求。同样,疲劳寿命预测方法也不是相互取代的。由于疲劳问题的复杂性,希望找到一种万能的方法去预测各种情况下的寿命,是不切实际的。

## 10.2 损伤容限设计

### 10.2.1 损伤容限设计原理

损伤容限设计,是近 30 年逐步形成和发展,并在许多领域得到应用的现代

疲劳断裂控制方法。例如,波音 757 飞机结构的设计,就是采用的损伤容限设计方法。损伤容限设计的设计原理,如图 10.1 所示。

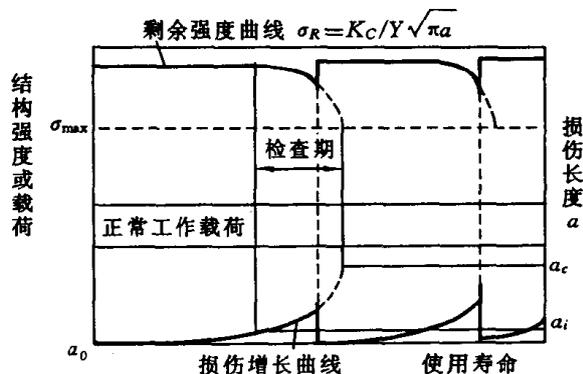


图 10.1 损伤容限设计原理

首先假定结构中存在着一个尺寸为  $a_0$  的初始缺陷 ( $a_0$  的大小通常由制造质量, 检出能力及实际使用经验等因素综合考虑确定), 然后选择韧性较好的材料制造, 保证这一结构在正常工作载荷作用下, 损伤是缓慢增长的, 如图中损伤增长曲线所示。在使用中, 随着损伤 (以裂纹尺寸表示, 图中右纵坐标  $a$ ) 的增长, 受损结构的剩余强度不断降低, 如图中剩余强度曲线所示。为了保证安全, 结构的剩余强度必须大于最大工作应力 ( $\sigma_{max}$ ), 故由剩余强度曲线和图中  $\sigma_{max}$  水平线交点对应确定的临界损伤长度  $a_c$ , 就是结构所能允许的最大损伤。从工程可检裂纹尺寸  $a_i$  到临界损伤长度  $a_c$  的时间, 即为裂纹检查期。在检查期内, 可合理安排检查, 保证在裂纹扩展到临界尺寸  $a_c$  之前被检查出来并修复。如图所示, 损伤修复后, 结构的剩余强度也重新恢复, 继续进入下一个使用期。损伤容限设计, 就是按照上述原理, 以检修控制裂纹扩展来保证安全的。

假定构件中存在着裂纹, 用断裂力学分析、疲劳裂纹扩展分析和试验验证, 证明在定期检查肯定能发现之前, 裂纹不会扩展到足以引起破坏。这种抗疲劳断裂设计方法, 称为损伤容限设计 (Damage tolerance design)。

因此, 损伤容限设计的三要素为: 剩余强度 (用断裂力学方法进行分析)、损伤增长 (按照疲劳裂纹扩展方法分析预测) 和检查周期 (依据检出能力进行的概率统计分析)。损伤容限设计的目标是: 以检查控制损伤的程度, 保证结构安全。损伤容限设计的关键是: 研究随机谱下的损伤累积方法, 以期尽可能正确地预测结构中的损伤增长。

## 10.2.2 随机载荷谱下的损伤累积方法

## 一、逐循环直接求和法

从原理上说,这种方法适用于如图 10.2 所示的任意随机谱。

在任意第  $i$  个循环下,由载荷谱可知相应循环的应力幅  $\Delta\sigma_i$  和应力比  $R_i$  (如按谱中的正变程确定),该循环下的裂纹扩展速率则为

$$\begin{aligned} (da/dN)_i &\approx \Delta a_i / \Delta N_i = g(\Delta K_i, R) \\ &= f(\Delta\sigma_i, a_i, R_i) \end{aligned}$$

(10-1)

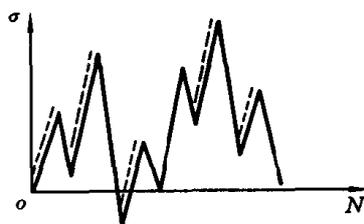


图 10.2 随机谱与正变程

注意到  $\Delta N_i = 1$ , 可算得  $\Delta a_i$ 。于是,裂纹尺寸和对应的循环次数为

$$a_i = a_0 + \sum \Delta a_i; \quad N = \sum \Delta N_i \quad (10-2)$$

如此重复进行,逐循环累积损伤,将可给出随机谱下的  $a-N$  曲线。

逐循环直接求和法的特点是:适用性广,适于各种载荷谱;可以通过函数  $f(\dots)$  的选取,考虑载荷间相互作用的影响。但因为  $N$  通常很大,故逐循环计算费时多。

## 二、线性近似数值积分法

适用于含有较长等幅块的载荷谱(如图 10.3 所示)。

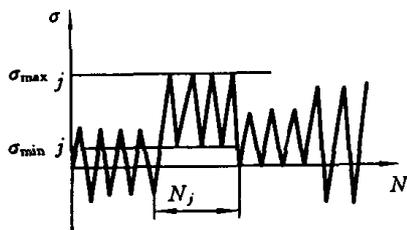


图 10.3 含较长等幅块的载荷谱

线性近似法的基本假设是:在某段等幅循环中的一小段裂纹扩展增量  $\Delta a$  内,  $da/dN$  近似保持为常数。因此,损伤可按下述方法累积:

1) 由载荷谱确定载荷水平  $j$  下的  $\sigma_{\max j}$ 、 $\sigma_{\min j}$  和  $N_j$ 。

2) 在当时长度  $a_j$  下,计算

$$(da/dN)_j = f(\Delta\sigma_j, a_j, R_j)$$

3) 选取适当的  $\Delta a$  (控制精度,如  $\Delta a \leq 0.01a$ ), 计算  $\Delta N = \Delta a / (da/dN)_j$ 。

4) 比较  $\Delta N$  与  $N_j$ 。

若  $\Delta N > N_j$ , 则  $\Delta a_j < \Delta a$ , 满足精度。令  $\Delta a_j = N_j (da/dN)_j$ ,  $a_{j+1} = a_j + \Delta a_j$ ,

返回 1);

若  $\Delta N < N_j$ , 则  $\Delta a_j > \Delta a$ , 不满足精度。取  $\Delta a_j = \Delta a$ ,  $N_j = N_j - \Delta N$ ,  $a_j = a_j + \Delta a_j$ , 返回 2)。

直到  $a_j = a_c$  或载荷谱结束为止。

线性近似法的特点是:  $da/dN$  大时, 一次计算较少的循环;  $da/dN$  较小时, 一次可计算较多的循环。既保持一定精度, 又能节省计算时间。

### 三、龙格-库塔法

龙格-库塔法(Runge-Kutta)是利用泰勒级数构造多项式导出的一种数值积分法。由此法代替上述线性近似方法求  $da/dN$ , 可以得到更好的精度或一次计算更多的循环。

四阶龙格-库塔法应用于裂纹扩展, 有下述对应关系:

四阶 R-K 法	应用于裂纹扩展(载荷与几何条件给定)
微分方程 $y' = f(x, y)$	$da/dN = f(a)$ ( $a$ 对应于 $y$ , $N$ 对应于 $x$ )
初始条件 $x = x_0$ 时, $y = y_0$	$N = N_0$ 时, $a = a_0$
当 $x_{n+1} = x_n + h$ 时, $y_{n+1}$ 的数值解为	$N_{n+1} = N_n + \Delta N$ 时, $a_{n+1}$ 为
$y_{n+1} = y_n + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$	$\Delta a = a_{n+1} - a_n = (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$
其中 $k_1 = hf(x_n, y_n)$	$k_1 = \Delta N f(a_n)$
$k_2 = hf(x_n + h/2, y_n + k_1/2)$	$k_2 = \Delta N f(a_n + k_1/2)$
$k_3 = hf(x_n + h/2, y_n + k_2/2)$	$k_3 = \Delta N f(a_n + k_2/2)$
$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$	$k_4 = \Delta N f(a_n + k_3)$

由此, 从  $n=0, 1, \dots, n, n+1$  递推计算。

**例 10.1** 某中心裂纹受  $R=0$ ,  $\Delta\sigma=100\text{MPa}$  的循环载荷作用,  $a_0=8\text{mm}$ 。计算 1000 次循环后的裂纹长度。设  $da/dN = \frac{1}{\pi} \times 10^{-8} (\Delta K)^2 = \Delta\sigma^2 a \times 10^{-8}$  ( $\text{MPa} \sqrt{\text{m}}$ ,  $\text{m}/\text{c}$ )。

**解** 将  $\Delta\sigma=100\text{MPa}$ , 代入裂纹扩展速率方程, 可知有

$$da/dN = a \times 10^{-4} (\text{m})$$

当  $N=0$  时,  $a=a_0=8\text{mm}$ ,  $\Delta N=1000$ ,

令  $a=a_0+\Delta a$ , 由龙格-库塔法求  $\Delta a$  如下:

$$k_1 = \Delta N f(a_0) = (1000 \times 0.008 \times 10^{-4}) \text{m} = 0.0008 \text{m}$$

$$k_2 = \Delta N f(a_0 + k_1/2) = (1000 \times (0.008 + 0.008/2) \times 10^{-4}) \text{m} \\ = 0.00084 \text{m}$$

类似可求出  $k_3 = 0.000842 \text{m}$ ,  $k_4 = 0.0008842 \text{m}$

所以有

$$\Delta a = a - a_0 = (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \\ = 0.000841366 \text{m} = 0.841366 \text{mm} \\ a = \Delta a + a_0 = 8.841366 \text{mm}$$

此例的解还可以由裂纹扩展速率方程直接积分得到,其结果为:

$$a = 8.841367 \text{mm}.$$

龙格-库塔法同样适于含有较长等幅块的载荷谱,但其计算精度较线性近似更好一些。有兴趣的读者可自行用线性近似法计算其结果,并加以比较。

#### 四、等效应力法

等效应力法适用于由某一典型载荷谱段(每年,万公里等)重复作用的载荷谱型。等效应力法希望寻求该典型载荷谱段的等效应力,以便将该谱段转换成一恒幅载荷谱,进一步简化计算。

转换后恒幅载荷谱的等效应力可写为

$$\bar{\sigma} = \left[ \frac{\sum \sigma_i^\alpha n_i}{\sum n_i} \right]^{1/\alpha} \quad (10-3)$$

式中,  $\sigma_i$ 、 $n_i$  分别为典型载荷谱段中载荷水平  $i$  所对应的应力(最大应力、最小应力或应力幅)和循环次数。 $\alpha$  是可以调整损伤等效性的参数。 $\alpha=2$  时,等效应力即通常采用的均方根应力。典型载荷谱段中的各载荷水平,也可利用循环计数的结果获得。

等效应力法使计算得到极大的简化,但  $\alpha$  之值一般应由试验结果选取。

#### 五、等效损伤法

与等效应力法一样,等效损伤法也是寻求典型载荷谱段的等效应力,以便将该谱段转换成一恒幅载荷谱的方法。只是,等效损伤法中的等效应力,是以裂纹扩展速率作为名义参数,由损伤等效转换而确定的。

对于如图 10.2 所示的典型谱段,设其循环次数为  $N_L$ ,则按损伤等效确定等效应力的方法为:

1) 计算每一载荷循环下的裂纹扩展速率  $(da/dN)_i$ ,它是谱中第  $i$  个循环所造成的损伤。

$$(da/dN)_i = f(\Delta\sigma_i, a)$$

2) 定义平均裂纹扩展速率为

$$(\overline{da/dN}) = \frac{1}{N_L} \sum (da/dN)_i \quad (10-4)$$

3) 在等效应力作用下, 应当有与原载荷谱相同的损伤累积率, 即

$$(\overline{da/dN}) = f(\overline{\Delta\sigma}, a) \quad (10-5)$$

由此方程即可解出等效应力  $\overline{\Delta\sigma}$ 。

等效损伤法和等效应力法, 简单适用。但它们事实上都是统计处理法, 均未考虑诸如载荷间相互作用的影响等。

### 10.3 耐久性设计

疲劳研究至 20 世纪 80 年代, 已发展了以疲劳极限控制的无限寿命设计; 以 S-N 曲线、 $\epsilon$ -N 曲线、Miner 理论为基础的安全寿命设计及以裂纹扩展分析为基础的损伤容限设计。这些方法有两个共同点:

1) 以保证结构的安全为目的。

2) 以构件最危险细节(一个或几个)的疲劳破坏代表整个构件的破坏。

随着现代科技的发展, 大型复杂结构件的使用条件越来越苛刻。对于重要结构件, 采用缓慢裂纹扩展设计, 按照损伤容限设计控制方法, 以检修保安全。

进一步研究, 将提出如下两个问题:

1) 除若干最危险细节外, 其它可能发生疲劳破坏处的损伤情况如何? 它们是否会在最危险细节经多次检修之后, 成为影响结构安全的主要矛盾?

2) 如何在保证结构安全和功能的条件下, 提高结构使用、维护的经济性? 或者, 什么时候检修既安全又经济?

为了回答上述问题, 需要在已有工作的基础上, 进一步研究: 1) 结构件细节群整体损伤状态的描述; 2) 维修经济性的评估方法。由此, 发展了以经济寿命分析为基础的耐久性设计方法。与以往的疲劳断裂设计方法相比, 耐久性设计方法的两个最重要的发展是: 从考虑若干最危险细节, 发展到考虑结构中可能发生疲劳开裂的细节全体; 从保证结构的使用安全性, 发展到既考虑结构使用安全又追求更好的使用维修经济性。

#### 一、耐久性设计原理

在规定期限内, 结构抵抗开裂的能力, 称为结构的耐久性(Durability)。耐久性分析是随时间变化的结构损伤程度的定量分析。

结构使用到某一寿命时,发生了不能经济修理的广布损伤,而不修理又可能引起结构的使用功能/安全问题,这一寿命就称为经济寿命(economic life)。

耐久性设计的研究对象是结构中各类相同的细节(应力集中处)群。其基本原理如图 10.4 所示,即

1)建立定量描述结构初始疲劳质量(IFQ)的当量初始裂纹尺寸分布(EIFS)。即用实验和分析的方法,定量描述结构在零时刻的损伤状态  $F_{a(0)}(y)$ 。 $F_{a(0)}(y)$ 是零时刻裂纹尺寸小于等于  $y$  的概率。

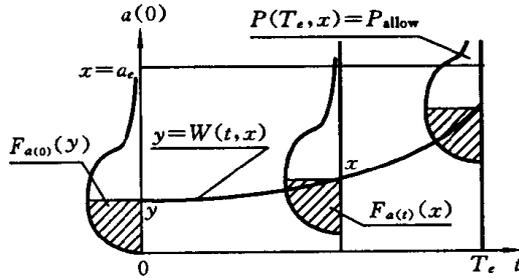


图 10.4 耐久性设计原理

2)建立描述使用载荷下裂纹扩展规律的裂纹扩展曲线(SCGMC)。即通过疲劳试验断口分析或疲劳断裂分析,建立损伤演变传递函数  $y=W(t,x)$ ,它反映了  $t$  时刻尺寸为  $x$  的裂纹与零时刻尺寸为  $y$  之裂纹的关系。

3)给出任一使用时刻的裂纹超过数概率  $P(t,x)$ ,  $P(t,x)$ 是  $t$  时刻裂纹尺寸大于  $x$  的概率。即用概率断裂力学分析方法,给出随时间变化的结构损伤程度的度量。

4)由维修经济性和使用功能/安全的要求,选取结构所能允许使用的裂纹超过数概率  $P_{allow}$ ,并由  $P(T_e, a_c) \leq P_{allow}$ ,确定经济寿命  $T_e$ 。 $P(T_e, a_c)$ 是在  $T_e$  时刻,裂纹尺寸小于可以用较经济的方法修理的尺寸  $a_c$  的概率。

因此,耐久性经济寿命分析的三要素为:初始疲劳质量(IFQ)、使用裂纹扩展曲线(SCGMC)和裂纹超过数概率  $P(t,x)$ 。还有一个经济寿命判据

$$P(T_e, a_c) \leq P_{allow} \quad (10-6)$$

## 二、耐久性分析方法简介

### 1. 初始疲劳质量(IFQ)的确定

初始疲劳质量用零时刻结构细节处的当量初始裂纹尺寸分布(EIFSD)描述,初始缺陷形态不一,尺寸微小,往往并非裂纹,一般不能直接观察到。故须通过结构细节采样疲劳实验,由断口条带(如图 1.9)观察数据反推得到。方法如图 10.5 所示。

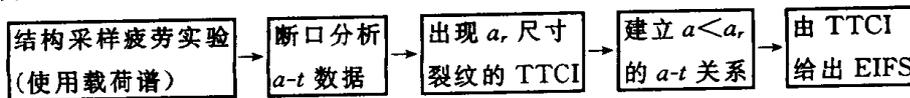


图 10.5 初始疲劳质量的估计方法

图中, TTCI 是尺寸为  $a_r$  之裂纹出现的时间(或寿命), 可用 Weibull 分布描述为

$$F_T(t) = \Pr(\text{TTCI} \leq t) = 1 - \exp\{-[(T - \epsilon)/\beta]^a\} \quad (10-7)$$

再利用裂纹扩展关系(如  $da/dt = Qa^b$ ), 积分后给出 EIFS= $a(0) = y$  与 TTCI 之间的关系(当  $b=1$  时, 有  $y = a_r \exp(-QT)$ )。则如图 10.6 所示, 可得到 EIFSD 为

$$F_{a(0)}(y) = \Pr(a(0) \leq y) = \Pr(\text{TTCI} \geq T) = 1 - F_T(T) \quad (10-8)$$

上式是用相容 Weibull 分布表达的当量初始裂纹尺寸分布。

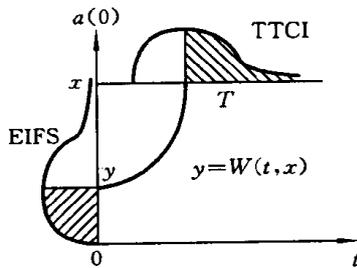


图 10.6 EIFS 分布

### 2. 使用裂纹扩展曲线(SCGMC)

使用中, 任一时刻  $t_2$  的裂纹尺寸  $a(t_2)$  与  $t_1$  时刻的裂纹尺寸  $a(t_1)$  的关系为

$$a(t_2) = a(t_1) + \Delta a$$

可见,  $\Delta a$  是  $t_1$  时刻的裂纹尺寸  $a(t_1)$  和时间间隔  $t_2 - t_1$  的函数。故又可写为

$$a(t_1) = W[a(t_2), t_2 - t_1]$$

令  $t_1 = 0$ ,  $a(t_1) = y$ ;  $t_2 = t$ ,  $a(t_2) = x$ , 则有

$$y = W(x, t) \quad (10-9)$$

### 3. 任意使用时刻的裂纹尺寸分布和裂纹超过数概率( $P(t, x)$ )

任意使用时刻  $t$  的裂纹尺寸  $a(t) \leq x$  的概率分布  $F_{a(t)}(x)$  可写为

$$\begin{aligned} F_{a(t)}(x) &= \Pr[a(t) \leq x] = \Pr[a(0) \leq y] = F_{a(0)}(y) \\ &= F_{a(0)}[W(x, t)] \end{aligned} \quad (10-10)$$

在  $t$  时刻, 结构细节处出现尺寸大于等于  $x$  之裂纹的概率则为

$$\begin{aligned} P(t, x) &= \Pr[a(t) \geq x] = 1 - \Pr[a(t) \leq x] \\ &= 1 - F_{a(0)}[W(x, t)] \end{aligned} \quad (10-11)$$

### 4. 经济寿命 $T_e$

依据以往的使用经验, 以修理方便、保证结构功能为标准, 选取允许使用的裂纹超过数概率  $P_{\text{allow}}$  (如美国空军对飞机机翼结构铆钉孔群取  $P_{\text{allow}}$  为 2%~5%), 则可由

$$P(T_e, a_r) = P_{\text{allow}} \quad (10-12)$$

解出经济寿命  $T_e$ 。  $a_r$  为可经济修理的裂纹尺寸, 如  $\phi 6$  的孔边出现裂纹, 扩至  $\phi 8$  是方便且经济的, 则  $a_r = 1\text{mm}$ ; 当  $r = 10\text{mm}$  的圆弧处有裂纹, 打磨成  $r = 12\text{mm}$  也是方便且经济的, 则  $a_r = 2\text{mm}$ , 这些都是可由实践得出的判断。

### 三、讨论

耐久性分析与损伤容限设计的比较列入表 10-1。

表 10-1 耐久性分析与损伤容限设计的比较

	损伤容限分析	耐久性经济寿命分析
研究对象	最危险部位的一个或几个大尺寸裂纹	各细节处存在的小尺寸裂纹群
研究方法	确定性裂纹扩展分析	概率断裂力学分析
研究内容	裂纹尺寸随着时间的增长	裂纹尺寸分布随时间的变化
研究目的	在可检期间内发现裂纹,保证安全	控制损伤程度,确定经济寿命

由表中可见,耐久性设计考虑结构中可能出现裂纹的所有细节群,可以定量评价结构的初始制造质量;比较真实合理地预测结构在使用过程中的损伤;给出经济寿命,进而能综合控制结构的设计、制造、使用和维修,寻求更好的经济效益。因此,可以说耐久性设计是结构抗疲劳断裂设计思想的一次飞跃。

### 小 结

1. 任何预测方法都只能给出统计正确的平均疲劳寿命。
2. 疲劳设计方法有:无限寿命设计;有限寿命设计;损伤容限设计和耐久性经济寿命分析。不同方法相互补充、完善,以满足不同的情况、不同的要求。
3. 损伤容限设计的三要素为:剩余强度、损伤增长和检查周期。其目标是:以检查控制损伤的程度,保证结构安全。
4. 耐久性经济寿命分析的三要素为:初始疲劳质量(IFQ)、使用裂纹扩展曲线(SCGMC)和裂纹超过数概率 $P(t, x)$ 。其目标是:既考虑结构整体的使用安全,又追求更好的维修经济性。

### 思考题与习题

- 10-1 简述损伤容限原理及其三要素。
- 10-2 什么是经济寿命?试述经济寿命分析要点。
- 10-3 试论耐久性与损伤容限设计之同异。
- 10-4 试论裂纹扩展损伤累积方法及各种方法之利弊。

## 附录 A 二维裂纹问题的弹性解

### 一、平面弹性问题的基本方程

不考虑体积力时,平面问题的平衡方程为

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (\text{A1})$$

式中,  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  为所论之  $xy$  平面上的三个面内应力分量。

还有三个面外应力分量则为

$$\tau_{xz} = 0; \quad \tau_{yz} = 0; \quad \sigma_z = \begin{cases} 0 & (\text{平面应力}) \\ \nu(\sigma_x + \sigma_y) & (\text{平面应变}) \end{cases}$$

$\nu$  是泊松比。

描述平面问题中应变分量  $\epsilon_x$ 、 $\epsilon_y$ 、 $\gamma_{xy}$  与位移分量  $u$ 、 $v$  间关系的几何方程为

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{A2})$$

将  $\epsilon_x$  对  $y$  的二阶偏导数与  $\epsilon_y$  对  $x$  的二阶偏导数相加, 得到

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

注意右端括号中的量正是  $\gamma_{xy}$ , 故上式给出了如下应变相容方程:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (\text{A3})$$

平面应力状态弹性问题中, 反映应力-应变关系的物理方程为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (\text{平面应力}) \quad (\text{A4})$$

对于平面应变状态 ( $\epsilon_z = 0$ ), 只须在上式中用  $E/(1-\nu^2)$  代替  $E$ , 用  $\nu/(1-\nu)$  代替  $\nu$  即可。

将 (A4) 式代入 (A3) 式, 即利用物理方程将相容方程用应力的形式表达, 则可得到

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

$$\text{或写为} \quad \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (\text{A5})$$

上式指出,  $(\sigma_x + \sigma_y)$  应当满足拉普拉斯微分方程, 即调和方程。或者说,  $(\sigma_x + \sigma_y)$  应当是调和函数。对于平面应变情况, 也可以用同样的方法得到同样的调和方程。

## 二、应力函数

求解平面弹性问题时, 应当满足平衡方程(A1)和调和方程(A5), 此外, 各应力分量在边界上还必须满足应力边界条件。

平衡微分方程(A1)的通解可写为

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (\text{A6})$$

式中, 函数  $\varphi$  称为平面问题的应力函数, 也称为 Airy 应力函数。

Airy 应力函数给出的应力分量总能满足平衡方程(A1), 为使其同时还能满足相容方程, 将(A6)式代入(A5)式后展开, 即可得到

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0; \quad \text{或写为} \quad \nabla^4 \varphi = 0 \quad (\text{A7})$$

故按应力求解平面弹性问题时, 只须由(A7)式求解应力函数  $\varphi$ , 再按(A6)式求应力分量即可。当然, 应力分量应当满足应力边界条件。

用复变函数法求解(A7)式, 可引入复变量  $z = x + iy$  及其共轭变量  $\bar{z} = x - iy$ , 方程(A7)则变换成为

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = 0 \quad (\text{A8})$$

积分后得到的实函数普遍解为

$$\varphi = \frac{1}{2} [\bar{z} \phi(z) + z \overline{\phi(z)} + \psi(z) + \overline{\psi(z)}] \quad (\text{A9})$$

式中,  $\phi(z)$ 、 $\psi(z)$  是由问题的边界条件确定的函数。

将上式代入(A6)式, 得到应力为

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4 \operatorname{Re}[\phi'(z)] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\phi''(z) + \psi''(z)] \end{aligned} \quad (\text{A10})$$

## 三、二维裂纹问题的弹性解

最简单的二维裂纹问题是含有长为  $2a$  的穿透裂纹的无限大平板, 在两端无穷远处承受垂直于裂纹面的拉应力  $\sigma$  作用的情况, 如图 A. 1 所示。

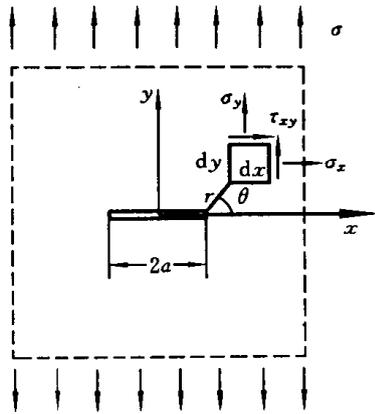
二维裂纹问题的应力边界条件可写为

在无穷远处:

$$\sigma_y(\infty) = \sigma; \quad \sigma_x(\infty) = 0; \quad \tau_{xy}(\infty) = 0$$

在裂纹面上:

$$(-a < x < a, y = 0) \quad \sigma_y = 0; \quad \sigma_x = 0; \quad \tau_{xy} = 0$$



由边界条件得到(A6)式中的函数  $\phi(z)$ 、 $\psi(z)$  分别为

$$\phi(z) = b - \frac{1}{4}\sigma z + \frac{1}{2}\sigma \sqrt{z^2 - a^2} \quad (A11)$$

$$\psi'(z) = -b + \frac{1}{2}\sigma z - \frac{a^2\sigma}{2\sqrt{z^2 - a^2}}$$

为使在裂尖  $z = a$  处满足位移为 0 的条件, 取式中  $b = (1/4)\sigma a$ 。

引入如图 A.1 所示以裂尖为原点的极坐标  $(r, \theta)$ , 则有

$$z = a + re^{i\theta}$$

图 A.1 无限大板中的 I 型裂纹

由(A10)式, 可得到当  $z \rightarrow a (r \ll a)$  时, 裂纹尖端附近任一点  $(r, \theta)$  处的正应力  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$  和剪应力  $\tau_{xy}$  分别为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y &= \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} &= \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (A12)$$

令  $K_1 = \sigma \sqrt{\pi a}$ ; 并注意在裂纹线上, 有  $\theta = 0$ , 上式给出:

$$\sigma_y = \sigma_x = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}}$$

故应力强度因子  $K$  反映了裂纹尖端附近区域应力场的强弱。

## 附录 B 相关试验标准

### 一、国家标准

- GB/T 10623—1989 金属力学性能试验术语  
GB/T 4086—1983 数据的统计处理和解释  
GB/T 228—1987 金属拉伸试验法  
GB/T 6397—1986 金属拉伸试验试样  
GB/T 1172—1999 黑色金属硬度及强度换算值  
GB/T 3075—1982 金属轴向疲劳试验方法  
GB/T 4337—1984 金属旋转弯曲疲劳试验方法  
GB/T 12443—1990 金属扭应力疲劳试验方法  
GB/T 15248—1994 金属材料轴向等幅低循环疲劳试验方法  
GB/T 2107—1980 金属高温旋转弯曲疲劳试验方法  
GB/T 10622—1989 金属材料滚动接触疲劳试验方法  
GB/T 12347—1996 钢丝绳弯曲疲劳试验方法  
GB/T 13682—1992 螺纹紧固件轴向载荷疲劳试验方法  
GB/T 13816—1992 焊接接头脉动拉伸疲劳试验方法  
GB/T 14229—1993 齿轮接触疲劳强度试验方法  
GB/T 14230—1993 齿轮弯曲疲劳强度试验方法  
GB/T 16947—1997 螺旋弹簧疲劳试验规范  
GB/T 7733—1987 金属旋转弯曲腐蚀疲劳试验方法  
GB/T 6398—2000 金属材料疲劳裂纹扩展速率试验方法  
GB/T 4161—1984 金属材料平面应变断裂韧度  $K_{Ic}$  试验方法  
GB/T 7732—1987 金属板材表面裂纹断裂韧度  $K_{Ic}$  试验方法  
GB/T 2038—1991 金属材料延性断裂韧度  $J_{Ic}$  试验方法  
GB/T 2358—1994 金属材料裂纹尖端张开位移 CTOD 试验方法  
GB/T 15970—1995 金属和合金的腐蚀:应力腐蚀试验

### 二、美国试验与材料协会(ASTM)标准

ASTM E1823—96el

Standard Terminology Relating to Fatigue and Fracture Testing

有关疲劳、断裂试验的标准术语

ASTM E456—96

Standard Terminology for Relating to Quality and Statistics  
统计学名词及相关术语

ASTM E8—98

Standard Test Methods for Tension Testing of Metallic Materials  
金属材料拉伸试验标准方法

ASTM E9—89ael

Standard Test Methods of Compression Testing of Metallic Materials  
at Room Temperature  
金属材料室温压缩试验标准方法

ASTM E466—96

Standard Practice for Conducting Force Controlled Constant  
Amplitude Axial Fatigue Tests of Metallic Materials  
金属材料恒幅轴向疲劳试验

ASTM E606—92

Standard Practice for Strain-Controlled Fatigue Testing  
应变控制疲劳试验

ASTM E1049—85(1990)

Standard Practices for Cycle Counting in Fatigue Analysis  
疲劳分析的循环计数

ASTM E739—91

Standard Practice for Statistical Analysis of Linear or Linearized  
Stress-Life(S-N)and Strain-Life (e-N)Fatigue Data  
应力寿命(S-N)和应变寿命(e-N)疲劳数据的线性统计分析

ASTM E1761—95

Standard Guide for Recommended Formats for Data Records Used in  
Computerization of Fatigue and Fracture Data of Metals  
金属疲劳和断裂数据计算机记录的推荐格式

ASTM E1942—98

Standard Guide for Evaluating Data Acquisition Systems Used in  
Cyclic Fatigue and Fracture Mechanics Testing  
循环疲劳和断裂试验用数据采集系统的评价

ASTM E647—95a

Standard Test Method for Measurement of Fatigue Crack Growth

Rates

疲劳裂纹扩展速率测定标准方法

ASTM E1457—98

Standard Test Method for Measurement of Creep Crack Growth Rates in Metals

金属材料蠕变裂纹扩展速率试验方法

ASTM E399—90el

Standard Test Method for Plane-Strain Fracture Toughness of Metallic Materials

金属材料平面应变断裂韧性  $K_{Ic}$  标准试验方法

ASTM E1290—93

Standard Test Method for Crack-Tip Opening Displacement (CTOD) Fracture Toughness Measurement

裂纹尖端张开位移 (CTOD) 标准试验方法

ASTM E813—89el

Standard Test Method for  $J_{Ic}$ , A Measure of Fracture Toughness

断裂韧性  $J_{Ic}$  标准试验方法

ASTM E561—94

Standard Practice for R-Curve Determination

阻力曲线 (R-曲线) 的测定

ASTM E740—88(1995)el

Standard Practice for Fracture Testing with Surface-Crack Tension Specimens

用表面裂纹拉伸试样进行断裂试验

ASTM E1922—97

Standard Test Method for Translaminar Fracture Toughness of Laminated Polymer Matrix Composite Materials

层合高分子基体复合材料层间断裂韧性试验方法

ASTM E604—83(1994)

Standard Test Method for Dynamic Tear Testing of Metallic Materials

金属材料动态断裂试验方法

ASTM E139—96

Standard Test Methods for Conducting Creep, Creep-Rupture, and

Stress-Rupture Tests of Metallic Materials

金属材料蠕变、蠕变断裂和应力断裂试验标准方法

ASTM E1221—96

Standard Test Method for Determining Plane-Strain Crack-Arrest Fracture Toughness,  $K_{Ic}$ , of Ferritic Steels

铁素体钢平面应变止裂断裂韧性  $K_{Ic}$  的试验方法

ASTM E1304—97

Standard Test Method for Plane-Strain (Chevron-Notch) Fracture Toughness of Metallic Materials

金属材料平面应变(V型槽口)断裂韧度的测试方法

ASTM E1681—95

Standard Test Method for Determining a Threshold Stress Intensity Factor for Environment-Assisted Cracking of Metallic Materials Under Constant Load

恒载荷下金属材料腐蚀开裂门槛应力强度因子测定标准方法

## 部分习题参考答案

1-6  $S_{\max}=250\text{MPa}$ ,  $S_{\min}=50\text{MPa}$ ,  $S_m=150\text{MPa}$ ,  $\Delta S=200\text{MPa}$

2-1  $t \approx 14$  小时

2-8  $N=87000$  次

2-9  $\lambda=2.94$  年;  $S_{\max}=418.94\text{MPa}$

3-5 a)  $N_{95}=53.58$  千周; b) 取  $N_0=50$  千周时,  $N_{95}=57$  千周

3-6  $r=-0.9938$ ;  $S^{3.88}N=8.09 \times 10^7$  (MPa, 千周)

4-5 a)  $K'=1013\text{MPa}$ ,  $n'=0.1836$ ,  $r=0.987$

b)  $b=-0.0888$ ,  $\sigma'_f=837.5$ ,  $\epsilon'_f=0.3489$

c)  $2N=5422$  次

4-8 a)  $N=1072$  次

b)  $N=1008$  次

4-9  $N=5997$  次

5-2  $\sigma_{c2}=480\text{MPa}$

5-4  $P=60\text{kN}$

5-6  $K_Q=158\text{MPa} \sqrt{\text{m}}$

6-5  $n_f=K_{1c}/K_1=1.63$

7-3  $n_f=\delta_c/\delta=2.4$

7-5  $a_{\max}=2.37\text{mm}$

8-4  $a_0=4.14\text{mm}$

8-5 a)  $S_{\max}=151.43\text{MPa}$

b)  $S_{\max}=214\text{MPa}$

8-6 a)  $N/N_1=1.17$

b)  $N/N_1=2.89$

## 参 考 文 献

- 1 Fuchs H O, Stephens R I. Metal fatigue in engineering. New York: Wiley, 1980.
- 2 Klesnil M. Fatigue of metallic materials. Elsevier Scientific Pub, 1980.
- 3 Collins J A. fatigue of materials in mechanics design. New York: Wiley, 1981.
- 4 陈麓, 蔡其巩, 王仁智编. 工程断裂力学(上). 北京: 国防工业出版社, 1977.
- 5 Broek D. Elementary engineering fracture mechanics. Noordhoff, The Netherlands, 1978.
- 6 高镇同. 疲劳应用统计学. 北京: 国防工业出版社, 1986.
- 7 (美) Hertzberg R W. 工程材料的变形与断裂力学. 王克仁译. 北京: 机械工业出版社, 1982.
- 8 黄志标. 断裂力学. 广州: 华南理工大学出版社, 1988.
- 9 陈传尧, 高大兴. 疲劳断裂基础. 武汉: 华中理工大学出版社, 1991.
- 10 林吉忠, 刘淑华. 金属材料的断裂与疲劳. 北京: 中国铁道出版社, 1989.
- 11 Bannantine J A, et. al. Fundamentals of metal fatigue analysis. Prentice Hall, New Jersey: Englewood Cliffs, 1990.
- 12 Schijve J. Four lectures of fatigue crack growth, Engng. Fract. Mech, 1979(11): 167
- 13 Elber W. The significance of fatigue crack closure, ASTM STP 486, 230, 1971.
- 14 Wheeler O E. Spectrum loading and crack growth. Trans. ASME J. Basic Engng, 1972 (94): 181
- 15 陈传尧, 高大兴. Fatigue crack propagation in a cast magnesium alloy. Fatigue of Engng. Mater & Struct, 1983(6): 167
- 16 陈传尧, 戴淑娟, 高大兴. Cr12Ni2WMoV 钢的疲劳条纹与宏观裂纹扩展. 金属学报, 1986 (22): 169
- 17 Glinka G A. cumulative model of fatigue crack growth, Int. J of Fatigue, 1982(4): 59
- 18 ASTM, Cyclic stress-strain behavior: analysis, experimentation & failure prediction, ASTM STP 519, 1973.
- 19 陈传尧, 高大兴. 表面裂纹的应力强度因子. 机械强度, 1984(1): 39
- 20 周玉启, 李克荣, 陈传尧. 铸镁合金机轮损伤容限设计. 固体力学学报, 1985(1): 44
- 21 Varanasi S R. The application of fracture mechanics methodology to the damage tolerance analysis of the Boeing 757 airplane, 6th Int. Conf. On Fracture, 1984(5): 3469
- 22 Parker A P, ed. The mechanics of fracture and fatigue, London: N. Y. E. & F. N. Spon. Ltd., 1981.
- 23 陈传尧, 陈幼平. The Maintenance Economy and Economic Life of Structures, Int. J. Fatigue, No. 4, Vol. 13, 1991.
- 24 陈传尧, 陈幼平. A Quantitative Economic Life Criterion, Engng. Fract. Mech, No. 1, Vol. 40, 1991.

- 25 (美) Rolfs S T, Barsom J M. 结构中的断裂与疲劳控制, 刘文琰等译, 北京: 机械工业出版社, 1985.
- 26 (美) Sandor B I. 循环应力与循环应变的基本原理. 俞炯亮译. 北京: 科学出版社, 1985.
- 27 陈传尧, 高大兴. Durability evaluation for components by simulating fatigue test and extreme value Analysis. Engng. Fract. Mech, No. 1, Vol. 45, 1993.
- 28 涂汉生. 数理统计. 北京: 中国铁道出版社, 1982.

Images have been losslessly embedded. Information about the original file can be found in PDF attachments. Some stats (more in the PDF attachments):

```
{
  "filename": "XzEwODcwMzQwLnppcA==",
  "filename_decoded": "_10870340.zip",
  "filesize": 16575281,
  "md5": "74c76b70c24b8b8a7db29745cd76bf60",
  "header_md5": "3ffae4bec1e1240d89c8a48d4b41a5b9",
  "sha1": "45f63b7a2a6c6df28a582f225d8336d3893ce1d6",
  "sha256": "e6a9d227fcb2ec264da72acda476ee1f267e1747f2e8b8c0c4601b68c743b96a",
  "crc32": 3043157396,
  "zip_password": "",
  "uncompressed_size": 17586961,
  "pdg_dir_name": "",
  "pdg_main_pages_found": 199,
  "pdg_main_pages_max": 199,
  "total_pages": 210,
  "total_pixels": 1229239360,
  "pdf_generation_missing_pages": false
}
```