



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

水力学 (第5版)

上册

四川大学水力学与山区河流开发保护国家重点实验室 编

高等教育出版社



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

TU13
88-5
1

水力学 (第5版)

SHUI LIXUE 上册

高等教育出版社·北京

内容简介

本书是“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材,系由原吴持恭主编的《水力学(第4版)》修订而成。本书论述水力学的主要理论及其应用,在第4版的基础上,保持了原书“循序渐进、加强基础、理论联系实际、利于教学”的特点,在整体安排上采用由浅入深的方式。上册以基础性和系统性为原则,在水静力学之后,从液体运动的流束理论出发,渐进式地介绍水动力学内容,经过水流型态、管流、明渠流、堰流与闸孔出流、水流衔接与消能、渗流,然后上升到流场理论、水力学模型试验基础。下册以实用性和前沿性为原则,按照由基础理论至工程应用的模式展开,结合高速水力学、河流动力学、环境水力学及计算水力学内容分别阐述。

全书上、下两册共19章。上册11章,包括:绪论、水静力学、液体运动的流束理论、流动阻力与水头损失、有压管道流动、明渠流动、堰流及闸孔出流、水流衔接与消能、液体运动的流场理论、渗流、水力学模型试验基础;下册8章,包括:高速水力学基础、高坝工程泄洪消能、河流动力学基础、水库泥沙淤积与引水防沙、环境水力学基础、水利水电工程水环境影响、计算水力学基础、数值计算在水利水电工程中的应用等。

本书可作为高等学校水利类、土木类等专业的教材,也可供独立学院、高职高专和成人高校师生及有关工程技术人员参考。

四川大学“水力学”课程于2013年入选国家级精品资源共享课立项项目,已在“爱课程”网上线,相关电子教案、教学视频、习题答案等教学资源,请登录网站查看。

图书在版编目(CIP)数据

水力学.上册/四川大学水力学与山区河流开发保护国家重点实验室编.--5版.--北京:高等教育出版社,2016.4

ISBN 978-7-04-044731-6

I. ①水… II. ①四… III. ①水力学-高等学校-教材 IV. ①TV13

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第019976号

策划编辑 周婷 责任编辑 周婷 封面设计 李小路 版式设计 杜微言
插图绘制 杜晓丹 责任校对 吕红颖 责任印制 朱学忠

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 高教社(天津)印务有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 34.5
字 数 630千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>
<http://www.hepmall.com>
<http://www.hepmall.cn>
版 次 1979年3月第1版
2016年4月第5版
印 次 2016年4月第1次印刷
定 价 49.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 44731-00

第5版序

本书是“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材，系对原吴持恭主编的《水力学（第4版）》的再次修订，以使本教材更好反映当前水力学的发展和适应教学改革的要求。

本次修订在认真分析水力学发展过程和广泛汲取教材使用单位和有关专家意见的基础上，对原教材内容进行适当增删和局部调整。本着基础性和系统性的原则，将基础水力学内容统一集中到上册；本着实用性和前沿性的原则，在下册中分专题介绍应用水力学的内容。主要修订内容包括：

一、按照基础水力学和应用水力学进行分类，重新调整上下两册章节内容。

二、针对高速水力学与河流动力学的突出问题，在下册中增加高坝工程泄洪消能、水库泥沙淤积与引水防沙内容，分别作为高速水力学与河流动力学的应用简介。

三、基于当前环境水力学的突出问题及其进展，在下册中增加环境水力学基础和水利水电工程水环境影响内容。

四、基于数值模拟技术的快速发展及广泛应用，在下册中增加计算水力学基础与水利工程的数值模拟内容。

五、为充分考虑水力学基础理论与工程应用案例，对全书例题与习题进行增删。

六、对全书进行全面的校核和修订。

本次修订工作是在许唯临教授主持下完成的。参加上册修订的有许唯临、李克锋、王协康、张法星、王波、安瑞冬，下册高速水力学内容修订的有许唯临、王伟、刘善均、张法星、田忠、张建民、邓军，河流动力学内容修订的有刘兴年、黄尔、王协康、杨克君、郭志学、聂锐华、杨奉广，环境水力学内容修订的有李嘉、李克锋、梁瑞峰、安瑞冬、李永，计算水力学内容修订的有林鹏智、肖鸿、李连侠、彭勇、陈日东等。许多兄弟院校的同志根据丰富的长期教学经验，对修订工作提出了宝贵的意见和建议；清华大学李玉柱教授认真、详细地审阅了本书，提出了许多宝贵的修改意见，在此一并表示衷心的感谢！

对于书中的不足之处，敬请批评指正，以便今后不断完善。

编者

2015年12月

第4版序

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，在第3版的基础上对全书再次进行修订，以使本书更好地适应21世纪水力学的学科发展与创新性人才的培养。

本次修订在广泛汲取教材使用单位和有关专家意见的基础上，本着保持特色、自主创新、与时俱进的原则，主要在以下几个方面进行了修订：

一、增加水力学发展简史的内容，以便更好地了解水力学研究与应用的发展历程。

二、基于当前高坝工程建设形势及高坝水力学进展，增加了“水流衔接与消能的若干新技术”内容。

三、鉴于工程泥沙问题日益突出，增加了工程防沙措施的相关内容。

四、基于计算机技术的快速发展，删除了原书中现已基本弃用的内容，如图解法内容，同时增加了计算机数值模拟的相关内容。

五、对全书进行全面的校核和修正。

本次修订工作是在许唯临教授主持下完成的。参加修订的有许唯临、刘兴年、李克锋、刘善均、王黎、王协康、王玉蓉、张建民、张新华、李冰冻、陈明千、易文敏等。许多兄弟院校的同志根据丰富的长期教学经验，对修订工作提出了宝贵的意见和建议；清华大学李玉柱教授认真、详细地审阅了本书，提出了许多宝贵的修改意见，在此一并表示衷心的感谢！

对于书中的缺点和不足之处，敬请批评指正，以便今后不断完善。

编者

2007年5月

第3版序

根据2002年全国“水力学及流体力学课程教学指导小组扩大会议”的精神，在第2版的基础上，对全书再次进行修订，以使本教材能够更好地适应当前水力学的发展和教学需要。

本次修订吸收了教学指导小组扩大会议上教材使用单位和有关专家的意见，并在会后以通信方式进一步征询了有关院校教师的意见。在此基础上，确定了保持特色、完善提高的原则，主要从以下几个方面进行了修订：

一、删除原书中现已弃用的内容，如“水力指数法”。同时，对原书中个别不适应水力学最新认识的描述加以适当修改，如对紊流时均运动微分方程组求解问题的描述。

二、在部分水力计算的图解法后，简要地增加相应的迭代法内容。

三、适当增加习题数量，以更好地反映各章主要教学内容。同时，增加思考题，以作为例题和习题的有效补充。

四、再次对全书进行全面校核和修正。

本次修订工作是在主编吴持恭教授总体安排下完成的。参加修订的有：许唯临、李克锋、王黎、王玉蓉、杨凌真、周茂林等同志。许多兄弟院校的同志根据其长期、丰富的教学经验，对修订工作提出了宝贵的意见和建议，在此深表谢意！

限于水平，书中缺点和错误在所难免，敬请批评指正。

编者

2003年1月

第2版序

1979年3月第1版的《水力学》是根据全国15所院校代表讨论制定的编写大纲编写的，当时要求编成既是教科书又是参考书。这次是根据1980年5月审定的《水力学教学大纲》（草案）对原书进行了一次较大的修订，以便更好地符合教学要求。在修订时力求贯彻教育部工科基础课程教材编委会工作会议关于大力提高教材质量的精神，以及“打好基础，精选内容，逐步更新，利于教学”的原则。

修订本除保持原书力求贯彻循序渐进、加强基础、理论联系实际、利于教学等原则外，我们主要作了以下一些修订：

一、原书属于基本理论的内容原则上不减。对一些非基本的以及属于专业课程范围的内容，而大纲中又没有要求的，如无压圆管的共轭水深计算、顺坡明渠中水跃、实用堰中的渥奇及克-奥剖面、隧洞水力计算、连接建筑物的水力计算、明渠恒定变量流、用直线比例法计算闸坝底板上的渗透压力等作了删减。

对大纲中有要求，原书未编入的内容，如液体的相对平衡、有能量输入输出的能量方程、窄深堰流水力计算、紊动扩散等作了补充。

二、原书体系基本上没有变动，但为了便于取舍，将液体运动的解析理论—三元分析法这章分为液体运动的流场理论、边界层理论基础、恒定平面势流等三章。

三、教科书字数有一定控制，凡属不同计算方法，只保留一种常用典型方法，其他方法删减或改为简介。例如关于天然河道水面曲线图解法，保留艾斯考夫图解法，删去控制曲线法；关于明渠恒定渐变流水面曲线的计算方法，保留逐段试算法，水力指数法改为简介。某些段落的文字叙述也作了修改，避免不必要的重复。为了减少篇幅，原书附录全部删去。

四、对例题、习题和图表进行了校核和修正。名词、符号全书力求做到统一。

本修订版由吴持恭、赵文谦、汝树勋分工执笔，由吴持恭主编。修订稿由华东水利学院张长高教授、清华大学余常昭教授主审。审稿会由教育部水力学教材编审小组主持，除有关编委及主审人外，参加的还有清华大学、武汉水利

电力学院、陕西机械学院、郑州工学院、广西大学等院校代表。与会同志提出了许多宝贵意见和建议，谨此表示感谢。

因限于水平，书中缺点和错误在所难免，恳切希望同志们指正。

编者

1982年7月10日

第1版序

本书是根据一九七八年一月教育部委托我校召开的高等学校工科基础课水力学教材编写会议讨论的编写大纲编写的，可作为高等学校工科水工建筑专业、农田水利专业等水力学课程的试用教材，也可作为其他有关专业的教学参考书。

本书分上、下两册出版。上册包括绪论，水静力学，液体运动的一元分析法，层流、紊流及其水头损失，有压管中恒定流，明渠恒定均匀流，明渠恒定非均匀流，水跃，堰流及闸孔出流的水力计算，泄水建筑物下游的水流衔接与消能。下册包括渠道连接建筑物的水力计算，隧洞的水力计算，明渠恒定变量流，有压管中的非恒定流，明渠非恒定流，液体运动的三元分析法，渗流，水工模型试验基础，高速水流，河渠泥沙运动的基本规律。各章均有例题及习题。书末有附录，内容包括引水系统的水力计算分析实例，实验数据的表示方法，有限单元法在水力学（平面势流）计算中的应用。

上册各章为各专业必学部分。下册各章，各学校可根据不同专业，不同地区及不同讲课学时酌情取舍。

本书由吴持恭同志主编，参加编写的有赵文谦、汝树勋、吴至维、华国祥、梁曾相、杨凌真、张道成、冉洪兴等同志。

一九七九年一月召开了本教材的审稿会，参加审稿会的有：主审单位武汉水利电力学院（徐正凡、黄克中、郑邦民），合肥工业大学（张长高、陈瑞、孙其荃）以及其他审稿单位清华大学，华东水利学院，大连工学院，华北水利水电学院，西北农学院，郑州工学院，太原工学院，新疆八一农学院，青海工农学院，云南农业大学等十三所院校的代表。参加审稿会的同志对本教材提出了不少宝贵的修改意见，谨此表示感谢。

限于编者水平，同时编写时间也比较仓促，因而在教材中缺点和错误在所难免，希望广大读者提出批评和指正。

编者
1979年2月

目录

1 绪论	1
1.1 水力学的任务与研究对象	1
1.2 水力学发展简史	2
1.3 液体的主要物理性质	5
1.4 连续介质和理想液体的概念	13
1.5 作用于液体上的力	14
1.6 水力学的研究方法	15
思考题	17
习题	17
2 水静力学	19
2.1 静水压强及其特性	19
2.2 液体的平衡微分方程式及其积分	23
2.3 重力作用下静水压强的基本公式	28
2.4 重力和惯性力同时作用下的液体平衡	35
2.5 作用于平面上的静水总压力	39
2.6 作用于曲面上的静水总压力	46
2.7 浮力及浮体与潜体的稳定性	53
思考题	56
习题	57
3 液体运动的流束理论	61
3.1 描述液体运动的方法	61
3.2 液体运动的一些基本概念	63
3.3 恒定总流的连续性方程	73
3.4 恒定总流的能量方程	74
3.5 恒定总流的动量方程	93
思考题	101

习题	102
4 流动阻力与水头损失	108
4.1 水头损失的物理概念及其分类	108
4.2 液流边界几何条件对水头损失的影响	111
4.3 均匀流沿程水头损失与切应力的关系	113
4.4 液体运动的两种型态	115
4.5 圆管中的层流运动及其沿程水头损失	120
4.6 湍流的特征	123
4.7 沿程阻力系数的变化规律	133
4.8 计算沿程水头损失的经验公式——谢才公式	139
4.9 局部水头损失	142
思考题	145
习题	146
5 有压管道流动	150
5.1 简单管道恒定流的水力计算	150
5.2 复杂管道恒定流的水力计算	168
5.3 有压管道中的水击问题	177
5.4 非恒定流的基本方程组	190
5.5 水击的基本微分方程组	193
5.6 调压系统中的水面振荡	196
思考题	201
习题	201
6 明渠流动	208
6.1 明渠水流的基本概念	208
6.2 明渠恒定均匀流	212
6.3 明渠恒定非均匀渐变流	229
6.4 明渠急变流	265
6.5 明渠非恒定流	284
思考题	293
习题	295

7	堰流及闸孔出流	300
7.1	堰流的类型及计算公式	301
7.2	薄壁堰流的水力计算	305
7.3	实用堰流的水力计算	307
7.4	宽顶堰流的水力计算	322
7.5	闸孔出流的水力计算	332
	思考题	341
	习题	341
8	水流衔接与消能	346
8.1	底流消能的水力计算	348
8.2	挑流消能的水力计算	368
8.3	面流及消能戽消能简介	376
	思考题	378
	习题	379
9	液体运动的流场理论	381
9.1	流速、加速度	381
9.2	流线与迹线的微分方程	385
9.3	液体质点运动的基本形式	387
9.4	无涡流与有涡流	391
9.5	恒定平面势流的流速势及流函数	397
9.6	液体运动的连续性方程	404
9.7	理想液体的运动微分方程	406
9.8	实际液体的运动微分方程	417
9.9	边界层理论基础	431
	思考题	453
	习题	453
10	渗流	456
10.1	渗流的基本概念	457
10.2	渗流的基本定律——达西定律	459
10.3	地下河槽中恒定均匀渗流和非均匀渐变渗流	463

10.4	棱柱体地下河槽中恒定渐变渗流的浸润曲线·····	465
10.5	普通井及井群的计算·····	472
10.6	水平不透水层上均质土坝的渗流计算·····	477
10.7	渗流场的基本微分方程及其解法·····	481
	思考题·····	485
	习题·····	485
11	水力学模型试验基础·····	487
11.1	量纲分析·····	487
11.2	相似原理·····	498
11.3	水工模型设计注意事项·····	511
11.4	变态模型·····	512
	思考题·····	517
	习题·····	517
附录	粗糙系数、管道及明渠各种局部水头损失系数·····	519
	参考文献·····	533

1 绪论

1.1 水力学的任务与研究对象

水力学是一门技术科学，它是力学的一个分支。水力学的任务是研究液体（主要是水）的平衡和机械运动的规律及其实际应用。

水力学所研究的基本规律有两大主要组成部分。一是关于液体平衡的规律，它研究液体处于静止（或相对平衡）状态时，作用于液体上的各种力之间的关系，这一部分称为水静力学；二是关于液体运动的规律，它研究液体在运动状态时，作用于液体上的力与运动要素之间的关系，以及液体的运动特性与能量转换等，这一部分称为水动力学。

在工农业生产的许多部门，如农田水利、水力发电、航运、交通、建筑、石油、化工、采矿、冶金等部门，都会遇到大量的与液体运动规律有关的生产技术问题，要解决这些问题必须具备水力学的知识。因此，水力学是高等工科院不少专业特别是水利类专业的一门重要技术基础课。

水力学在研究液体平衡和机械运动规律时，要应用物理学及理论力学中有关物体平衡及运动规律的原理，如力系平衡定理、动量定理、动能定理等。因为液体在平衡或运动状态下，也同样遵循这些普遍的原理，所以物理学和理论力学的知识是学习水力学课程必要的基础。

自然界的物质一般有三种存在形式，即固体、液体和气体。液体和气体常统称为流体。水作为一种流体，在运动过程中表现出与固体不同的特点。固体由于其分子间距离很小，内聚力很大，所以它能保持固定的形状和体积。它能承受一定数量的拉力、压力和剪切力。而流体则不同，由于其分子间距离较大，内聚力很小，它几乎不能承受拉力，抵抗拉伸变形；在微小剪切力作用下，流体很容易发生变形或流动，所以流体不能保持固定的形状。

液体与气体相比，液体分子内聚力却又比气体大得多，因为液体分子间距离较小，密度较大，所以液体虽然不能保持固定的形状，但能保持比较固定的体积。一个盛有液体的容器，若其容积大于液体的体积时，液体就不会充满整个容器，而具有自由表面（液体仅占据自身体积所需要的那部分空间）。气体不仅没有固定的形状，也没有固定的体积，极易膨胀和压缩，它可以任意扩散

直到充满其所占据的有限空间。而液体的压缩性很小，在很大的压力作用下，其体积的缩小甚微。液体的膨胀性同样也是很小的。气体和液体的主要差别就是它们的可压缩程度不同，但当气流速度远比声速小的时候，在运动过程中其密度变化很小，气体也可视为不可压缩，此时水力学的基本原理也同样可适用于气流。

1.2 水力学发展简史

水力学作为一门以应用为目的的学科，是人类逐步认识、掌握自然规律及不断深入生产实践的结晶，其发展与力学、数学、物理学等相关学科密不可分。人类社会在以农业文明为主的早期，对水力学的认识是从治水、灌溉、航运等方面开始的。在中国，据《尚书·禹贡》记载，4 000 多年前的上古时代就有大禹治水。《史记》记载，战国末期至秦代（前 256—前 210）修建了都江堰、郑国渠、灵渠三大水利工程，其中以四川岷江上的都江堰最为著名，迄今仍为泄洪、灌溉等发挥重大作用。公元 1 世纪前后，劳动人民基于水流的动力，制成了水碓、水磨和水排等水力器具。在古埃及、希腊、巴比伦和印度等，为了发展农业也修建了灌溉渠道工程，并发展了航运，而古罗马人则兴建了大规模的供水管道系统。约在公元前 250 年，希腊哲学家、物理学家阿基米德（Archimedes，前 287—前 212）在《论浮体》中论述了液体浮力和浮体的定律。此后，水力学的发展受生产力低下的影响，在相当长的时间内未受到重视，而未发展为一门学科。

直到 15 世纪的文艺复兴时期，意大利物理学家、艺术家达·芬奇（Leonardo da Vinci，1452—1519）通过设计制造小型水渠，系统地研究了物体的沉浮、孔口出流、物体的运动阻力及管道、明渠水流等问题。在 17 世纪，帕斯卡（Pascal B，1623—1662）在 1653 年提出了密闭流体能传递压强的原理——帕斯卡原理。至此，才使水力学认识从实践上升到了理论，水静力学理论初步形成。由于受到经典力学理论发展的制约，液体运动的动力学理论的建立相对较晚。牛顿（Newton I，1642—1727）于 1687 年出版的《自然哲学的数学原理》，研究了物体在阻尼介质中的运动，并针对粘性流体运动时的内摩擦力提出了牛顿内摩擦定律。18 世纪和 19 世纪，基于数学、力学、物理学等领域科学家的杰出成就，经典水动力学或称古典流体力学得以迅速发展。伯努利（Bernoulli D，1700—1782）在 1738 年出版的《水动力学》中阐述了液体运动能量的转换关系——伯努利方程。1748 年，俄国科学家罗蒙诺索夫（Lomonosov M V，1711—1765）提出了质量守恒定律。欧拉（Euler L，1707—

1783) 于 1755 年发表《流体运动的一般原理》，提出了流体的连续介质模型，建立了连续性微分方程和理想流体的运动微分方程，并给出了不可压缩理想流体运动的一般解析方法。1783 年，拉格朗日 (Lagrange J L, 1736—1813) 在总结前人工作的基础上，提出了一种新的描述流体运动的方法——拉格朗日法。英国物理学家、生理学家亥姆霍兹 (Helmholtz H L F von, 1821—1894) 在 1847 年用数学形式表达出一般的能量守恒原理；1858 年，将流体质点的运动分解为平移、变形及转动，即亥姆霍兹速度分解定理，进一步促进了古典流体力学的发展。英国力学家兰姆 (Lamb H, 1849—1934) 在其《流体运动数学理论》(1878 年初版，1895 年增订再版，改名《水动力学》) 中总结了 19 世纪流体力学的理论成就。

然而，随着工程实践的不断深入，忽略液体粘性作用的基本规律与实际情形还存在着较大的差别，法国科学家达朗贝尔 (D'Alembert J, 1717—1786) 于 1752 年发表的《流体阻尼的一种新理论》一文，第一次用流体动力学的微分方程表示场，并提出了著名的“达朗贝尔佯谬”，证实了理想流体假设的局限性。因此，实际中出现的许多流体力学问题，还得依靠水力学的经验公式或半经验公式，如在表征力学能量的伯努利方程中引进若干经验系数以计算阻力的影响，在只适用于均匀管流的哈根 (Hagen G H L, 1707—1884) - 泊肃叶 (Poiseuille J L, 1799—1869) 流动公式中加进考虑非均匀性的修正系数等。为此，一些技术工程师和实际工作者，在运用流体力学知识的同时，也部分地采用野外观测和室内试验结果的经验公式，从实验水力学角度较好地解决了当时许多实际工程问题。如法国工程师、发明家毕托 (Pitot H, 1695—1771) 于 1730 年发明测量流速的毕托管。法国工程师谢才 (Chézy A, 1718—1798) 于 1769 年建立计算均匀流的经验公式。法国工程师达西 (Darcy H, 1803—1858) 于 1856 年提出的线性渗流定律等。爱尔兰工程师曼宁 (Manning R, 1816—1897) 于 1889 年建立的糙率计算公式，现仍为世界各国工程界所采用。

19 世纪中叶，法国工程师纳维 (Navier C L M H, 1785—1836) 在欧拉理想流体运动方程的基础上，基于离散的分子模型，于 1821 年首次提出了不可压缩粘性流体的运动微分方程组。法国数学家、力学家、物理学家泊松 (Poisson S D, 1781—1840) 在 1831 年发表的《弹性固体与流体的平衡和运动一般方程研究报告》一文中，第一个完整地说明粘性流体的本构关系。1845 年，英国数学家、物理学家斯托克斯 (Stokes G G, 1819—1903) 严格地导出了粘性流体的运动方程，此后统称为纳维 - 斯托克斯方程 (简称 N-S 方程)，为研究实际流体运动奠定了坚实基础。19 世纪末至 20 世纪，随着生产和科技的迅速发展，单纯的理论或实验方法难以解决极为复杂的流体力学问题，如数

学上求解纳维-斯托克斯方程的困难,从而促使了古典流体力学和实验水力学的结合,并各自不断发展。英国力学家、物理学家、工程师雷诺(Reynolds O, 1842—1912)在1883年用实验证实了粘性流体的两种流动状态——层流和湍流(也称紊流)的客观存在,提出了流体流动相似律——雷诺数;1895年又引进雷诺应力的概念,用时均方法建立了不可压缩实际流体的湍流运动方程,又称为雷诺方程。1904年,德国工程师、力学家普朗特(Prandtl L, 1878—1953)提出了边界层概念,此后众多研究者从推理、数学论证和实验测量等各个角度,建立了边界层理论,为解决边界复杂的实际流体运动开辟了新的途径,同时把无粘性理论和粘性理论在边界层概念的基础上联系起来,使流体力学与水力学两种不同的研究方法得到了统一。后经美籍匈牙利力学家冯·卡门(Kármán T von, 1881—1963)、英国物理学家泰勒(Taylor G I, 1886—1975)等人的努力,边界层理论和湍流理论都有很大的发展,至此,现代流体力学逐渐形成,其中关于液体运动的部分构成了现代水力学的核心内容。

20世纪以来,蓬勃发展的经济建设提出了越来越复杂的水力学问题,如海洋资源的开发、环境污染的防治、高坝和巨型水电站的修建、高含沙河流的开发保护等,使现代水力学的内涵及其实际应用得到不断发展、更新和提高。与此同时,水力学和其他学科相互交叉渗透,形成新的交叉学科或边缘学科,如随着数学的发展、计算机技术的不断进步及水力学各种计算方法的出现,从而形成了计算水力学,为分析和研究复杂水力学问题提供了新的工具。此外,还形成了一大批新的学科分支,如水工水力学、施工水力学、船闸水力学、溃坝水力学、河流动力学、环境水力学、渗流水力学和冰水力学等。

纵观水力学的发展历程,现场观测、实验研究、理论分析及数值计算是相辅相成的。从阿基米德到现在的2000多年来,实验研究起到了关键性的作用,它用精细的观察测量手段揭示液体运动特征,通过实测资料的总结分析,给出了许许多多特定流动的物理模型,而现代测量技术如激光测速仪等在实验数据的监测、采集中的应用,都促进了现代水力学的发展。与此同时,实验研究需要理论指导,才能从分散的、表面上无联系的现象和实验数据中得出规律性的结论。1946年,随着第一台电子计算机的问世,以计算机为工具的数值计算方法得到迅速发展,它继理论分析和实验方法之后,成为现代水力学的第三种研究方法。不过,理论分析和数值计算也要依靠现场观测和实验室模拟给出物理图案或数据,以建立流动的力学模型和数学模式,最后,还须依靠实验来检验这些模型和模式的完善程度。由此可见,基于多学科的交叉研究及研究方法的综合应用将是现代水力学理论发展及实践应用的基础,现代水力学在水

利、农业、交通、地学、生物学、医学等领域正在得到越来越广泛的应用。

1.3 液体的主要物理性质

物体运动状态的改变都是受外力作用的结果。分析研究液体运动的规律，也要从分析液体的受力情况着手，而任何一种力的作用，都要通过液体自身的性质来表现，所以在研究液体运动规律之前，须对液体的物理特性有所了解。和机械运动有关的液体的主要物理性质如下：

1.3.1 惯性、质量与密度

惯性是指物体具有保持原有运动状态的特性。惯性的大小以质量来度量，质量愈大的物体，惯性也愈大。当物体受外力作用使运动状态发生改变时，由于液体的惯性引起对外界抵抗的反作用力称为惯性力。由于在非惯性系中，牛顿运动定律并不适用（牛顿运动定律包括牛顿第一运动定律、牛顿第二运动定律和牛顿第三运动定律，由牛顿在 1687 年于《自然哲学的数学原理》一书中总结提出。其中，第一运动定律说明了力的含义：力是改变物体运动状态的原因；第二运动定律指出了力的作用效果：力使物体获得加速度；第三运动定律揭示出力的本质：力是物体间的相互作用）。为了思维上的方便，可以假想在这个非惯性系中，除了相互作用所引起的力之外还受到由非惯性系而引起的力——惯性力。因而惯性力实际上并不存在，实际存在的只有原本将该物体加速的力，因此惯性力又常称为假想力。若物体的质量为 m ，加速度为 \mathbf{a} ，则惯性力可表示为

$$\mathbf{F} = -m\mathbf{a} \quad (1.1)$$

式中负号表示惯性力的方向与物体的加速度方向相反。

每一个物理量都包括有量的数值及量的种类。量的种类习惯上称为量纲，量纲是指物理量的属性，物理量可分为基本量和导出量，一切导出量均可从基本量中导出，由此建立了整个物理量之间的函数关系。对于基本量而言，其量纲为其自身。在物理学发展的历史上，先后曾建立过各种不同的量制，1971 年后，国际上普遍采用了国际单位制（简称 SI），选定了由 7 个基本量构成的量制，导出量均可用这 7 个基本量导出。7 个基本量的量纲分别用长度 L 、质量 M 、时间 T 、电流 I 、热力学温度 Θ 、物质的量 N 和发光强度 J 表示，则任何一个导出量 A 的量纲可写成

$$\dim A = L^\alpha M^\beta T^\gamma \Theta^\epsilon I^\zeta J^\xi \quad (1.2)$$

这是量纲的通式，式中的指数 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 称为量纲指数，全部指数均为零的

物理量，称为量纲一的量。在水力学中采用国际单位制，则长度、质量与时间为基本量，其他变量为导出量，即为 LMT 量纲系；若采用工程单位制，则长度、作用力与时间为基本量，其他变量为导出量。

量纲与单位不同，例如水深 $h = 1 \text{ m}$ ，也可用 $h = 100 \text{ cm}$ 表示，水深是表示一个“长度”的物理量；而 m 或 cm 是长度的单位，单位不同，量的数值也不同。但量纲则只有一个，即长度，用 L 表示。

根据国际单位制的规定，质量的单位用 kg ，力的单位为 N 。 1 N 的力定义为：在 1 N 力的作用下，质量为 1 kg 的物体得到 1 m/s^2 的加速度。

密度是指单位体积液体所含有的质量。液体的密度常以符号 ρ 表示，若一均质液体质量为 m ，体积为 V ，其密度为

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (1.3)$$

若已知某均质液体的密度与体积，则该液体的质量为

$$m = \rho V \quad (1.4)$$

密度的量纲为 ML^{-3} ，常用单位为 kg/m^3 。一般来讲，液体的密度随温度和压强的变化而变化，但水的密度随温度和压强的变化很小，所以水力学中常把水的密度视为常数，采用在一个标准大气压下 (101.33 kPa)，温度为 $4 \text{ }^\circ\text{C}$ 时的蒸馏水密度来计算，此时 ρ 为 1000 kg/m^3 ，而水银密度值为 $\rho_{\text{Hg}} = 13.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 。在水力学相关变量中，若采用 LMT 量纲系，则其基本量与导出量的量纲式可汇总为表 1.1。

表 1.1 水力学常用物理量量纲式

物理量名称	国际单位	量 纲 式	备 注
质量	kg	M	基本量
长度	m	L	基本量
时间	s	T	基本量
速度	m/s	LT^{-1}	
加速度	m/s^2	LT^{-2}	
流量	m^3/s	L^3T^{-1}	
体积	m^3	L^3	
密度	kg/m^3	ML^{-3}	
力	N	M LT^{-2}	
表面张力	N/m	M T^{-2}	
切应力	N/m^2	$\text{M L}^{-1}\text{T}^{-2}$	

续表

物理量名称	国际单位	量纲式	备注
运动粘度	m^2/s	L^2T^{-1}	
动力粘度	$\text{N}/\text{m}^2 \cdot \text{s}$ ($\text{Pa} \cdot \text{s}$)	$\text{M L}^{-1}\text{T}^{-1}$	
压强	N/m^2	$\text{M L}^{-1}\text{T}^{-2}$	
动量	$\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}$	MLT^{-1}	
动能	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$	$\text{M L}^2\text{T}^{-2}$	
势能	m	L	

1.3.2 万有引力特性与重力

万有引力特性是指任何物体之间相互具有吸引力的性质，其吸引力称为万有引力。地球对物体的引力称为重力，或称为重量。在研究液体所受的作用力时，重力常是一个很重要的力。一质量为 m 的液体，其所受重力的大小为

$$G = mg \quad (1.5)$$

式中， g 为重力加速度，常用单位为 m/s^2 。

1.3.3 粘滞性与粘滞系数

当液体处在运动状态时，若液体质点之间存在着相对运动，则质点间要产生内摩擦力抵抗其相对运动，这种性质称为液体的粘滞性，此内摩擦力又称为粘滞力。

如图 1.1 所示的液体沿着一个固体平面壁作平行的直线流动，且液体质点是有规则的一层一层向前运动而不互相混掺（这种各液层间互不干扰的运动称为“层流运动”，第 4 章将详细讨论这种运动的特性）。由于液体具有粘滞性的缘故，靠近壁面附近流速较小，远离壁面处流速较大，因而各个不同液层的流速大小是不相同的。若距固体边界为 y 处的流速为 u ，在相邻的 $y + dy$ 处的流速为 $u + du$ ，由于两相邻液层的流速不同（也就是存在着相对运动），在两液层之间将成对地产生内摩擦力。下面一层液体对上面一层液体作用了一个与流速方向相反的摩擦力，而上面一层液体对于下面一层液体则作用了一个与流速方向一致的外力，这两个摩擦力大小相等、方向相反，都具有抗拒其相对运动的性质。作用

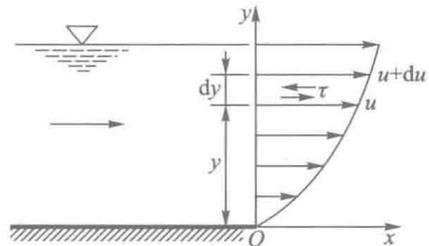


图 1.1

在上面一层液体上的外力有减缓其流动的趋势，作用在下面一层液体上的外力有加速其流动的趋势。

前人的科学实验证明，相邻液层接触面单位面积上所产生的内摩擦力 τ 的大小，与两液层之间的速度差 du 成正比，与两液层之间的距离 dy 成反比，同时与液体性质有关。将此实验结果写成表达式，即

$$\tau \propto \frac{du}{dy}$$

或

$$\tau = \eta \frac{du}{dy} \quad (1.6)$$

式中， η 为随液体种类不同而异的比例系数，称为动力粘度，简称粘度。两液层间流速增量与其距离的比值 $\frac{du}{dy}$ 又称为流速梯度。

式 (1.6) 就是著名的“牛顿内摩擦定律”，它可表述为：作层流运动的液体，相邻液层间单位面积上所作用的内摩擦力（或粘滞力），与流速梯度成正比，同时与液体的性质有关。

可以证明，流速梯度 $\frac{du}{dy}$ ，实质上是代表液体微团的剪切变形速度。如图 1.2 所示，从图 1.1 中将相距为 dy 的两层液流 1-1 和 2-2 分离出来，今取两液层间矩形微分体 $ABCD$ 来研究。设该微分体经过 dt 时段后运动至新的位置 $A'B'C'D'$ ，因液层 2-2 与液层 1-1 存在流速差为 du ，微分体除位置改变而引起平移运动之外，还伴随着形状的改变，由原来的矩形变成了平行四边形，也就是产生了剪切变形（或角变形）， AD 边或 BC 边都发生了角变形 $d\theta$ ，其剪切变形速度为 $\frac{d\theta}{dt}$ 。在 dt 时段内， D 点比 A 点所多移动的距离为 $du \cdot dt$ ，因为 dt 为微分时段，角变形 $d\theta$ 亦为微分量，可认为

$$d\theta \approx \tan(d\theta) = \frac{du \cdot dt}{dy}$$

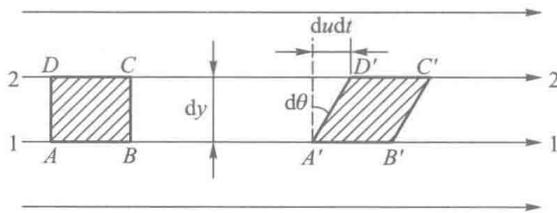


图 1.2

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{du}{dy} \quad (1.7)$$

所以内摩擦力公式 (1.6) 又可表达为

$$\tau = \eta \frac{d\theta}{dt} \quad (1.8)$$

由于内摩擦力与作用面平行, 故常称 τ 为切应力。

根据以上推证, 又可将牛顿内摩擦定律表述为: 液体作层流运动时, 相邻液层之间所产生的切应力与剪切变形速度成正比。所以液体的粘滞性可视为液体抵抗剪切变形的特性。

液体的性质对摩擦力的影响, 通过粘度 η 来反映。粘性大的液体 η 值大, 粘性小的液体 η 值小。 η 的单位为 $\text{N}/\text{m}^2 \cdot \text{s}$ 或 $\text{Pa} \cdot \text{s}$ 。

液体的粘滞性还可以用运动粘度 ν 来表示, 它是动力粘度 η 和液体密度 ρ 的比值 ($\nu = \frac{\eta}{\rho}$), 因为 ν 不包括力的量纲而仅仅具有运动量的量纲 L^2T^{-1} , 故称 ν 为运动粘度, 它的单位为 m^2/s 。

在同一种液体中, η 或 ν 值均随温度和压强而异, 但随压强变化关系甚微, 对温度变化较为敏感。为了使用方便, 在表 1.2 中列出了一个标准大气压条件下 (101.33 kPa), 不同温度时水的密度、动力粘度、运动粘度及体积模量的值。

表 1.2 不同温度时水的物理性质

温度 / °C	密度 / (kg/m^3)	动力粘度 / ($\times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$)	运动粘度 / ($\times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$)	体积模量 / ($\times 10^9 \text{ N}/\text{m}^2$)
0	999.9	1.792	1.792	2.04
5	1 000.0	1.519	1.519	2.06
10	999.7	1.308	1.308	2.11
15	999.1	1.100	1.141	2.14
20	998.2	1.005	1.007	2.20
25	997.1	0.894	0.897	2.22
30	995.7	0.801	0.804	2.23
35	994.1	0.723	0.727	2.24
40	992.2	0.656	0.661	2.27
45	990.2	0.599	0.605	2.29
50	988.1	0.549	0.556	2.30
60	983.2	0.469	0.477	2.28

续表

温度 / °C	密度 / (kg/m ³)	动力粘度 / (× 10 ⁻³ N · s/m ²)	运动粘度 / (× 10 ⁻⁶ m ² /s)	体积模量 / (× 10 ⁹ N/m ²)
70	977.8	0.406	0.415	2.25
80	971.8	0.357	0.367	2.21
90	965.3	0.317	0.328	2.16
100	958.4	0.284	0.296	2.07

最后还要指出，牛顿内摩擦定律只能适用于部分流体，对于某些特殊流体是不适用的。一般把符合牛顿内摩擦定律的流体称为牛顿流体，反之称为非牛顿流体。

如图 1.3 所示，A 线为牛顿流体，在温度不变条件下，这类流体的 η 值不变，切应力与剪切变形速度成正比，A 线为一斜率不变的直线。B 线为一种非牛顿流体，叫作理想宾汉流体，如泥浆、血浆等，这种流体只有在切应力达到某一值时，才开始剪切变形，但变形率是常数。C 线为另一种非牛顿流体，叫作伪塑性流体，如尼龙、橡胶的溶液、颜料、油漆等，其粘度随剪切变形速度的增加而减小。

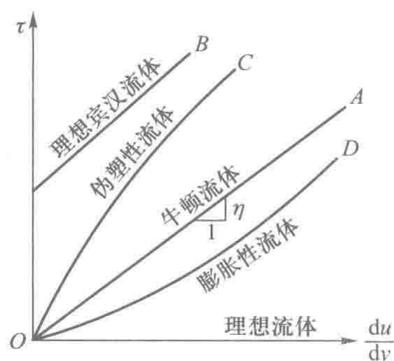


图 1.3

还有一类非牛顿流体叫作膨胀性流体，如生面团、浓淀粉糊等，其粘度随剪切变形速度的增加而增加，如 D 线所示。所以在应用内摩擦定律时，应注意其适用范围。

1.3.4 压缩性及压缩率

固体受外力作用要发生变形，当外力撤除后（外力不超过弹性限度时），有恢复原状的能力，这种性质称为物体的弹性。

液体不能承受拉力，但可以承受压力。液体受压后体积要缩小，压力撤除后也具有恢复原状的能力，这种性质称为液体的压缩性或弹性。液体压缩性的大小是以体积压缩率 κ 或体积模量 K 来表示。

体积压缩率是液体体积的相对缩小值与压强的增值之比。若某一液体在承受压强为 p 的情况下体积为 V ，当压强增加 dp 后，体积的改变值为 dV ，其体积压缩率为

$$\kappa = -\frac{dV}{V dp} \quad (1.9)$$

式中负号是考虑到压强增大，体积缩小，所以 dV 与 dp 的符号始终是相反的，为保持 κ 为正数，加一个负号。 κ 值愈大，则液体压缩性亦愈大。 κ 的单位为 m^2/N 。

由于液体被压缩时其质量并不改变，故

$$dm = \rho dV + Vd\rho = 0 \quad (1.10)$$

所以

$$\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho}$$

因而体积压缩率又可写作

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\rho} \quad (1.11)$$

所谓体积模量 K ，乃是体积压缩率的倒数，即

$$K = \frac{1}{\kappa} \quad (1.12)$$

K 值愈大，表示液体愈不容易压缩， $K \rightarrow \infty$ 表示绝对不可压缩。 K 的单位为 N/m^2 ，也可用 Pa 表示， $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N}/\text{m}^2$ 。

液体种类不同，其 κ 或 K 值不同，对同种液体，它们是随温度和压强而变化的，但这种变化一般较小，可视为常数。

不同温度时水的体积模量列于表 1.2 中。在一个标准大气压条件下， 10°C 时水的体积模量 K 为 $2.11 \times 10^9 \text{ N}/\text{m}^2$ 。也就是说，每增加一个大气压，水的体积相对压缩值约为两万分之一。可见，水的压缩性很小，所以对一般水利工程来说，认为水不可压缩是足够精确的。但对个别特殊情况，必须考虑水受压后的弹力作用。如研究水电站高压管道中的水流，当电站出现事故突然关闭进水阀后，管道中压力突然急剧升高，由于压力在短时间内骤然增加，液体受到压缩，相应产生的弹性力对运动的影响就不能忽视了。

1.3.5 表面张力

表面张力是自由表面上液体分子由于受两侧分子引力不平衡，使自由面上液体分子受到极其微小的拉力，这种拉力称为表面张力。表面张力仅在自由表面存在，液体内部并不存在，所以它是一种局部受力现象。由于表面张力很小，一般来说对液体的宏观运动不起作用，可以忽略不计，只有在某些特殊情况下，才显示其影响。表面张力的大小用表面张力系数来度量。

表面张力系数是指在自由面（把这个面看作一个没有厚度的薄膜一样）单位长度上所受拉力的数值，用 σ 表示，常用单位为 N/m 。 σ 的大小随液体种类

和温度变化而异。对于 20°C 的水， $\sigma = 0.0728 \text{ N/m}$ ，对于水银 $\sigma = 0.514 \text{ N/m}$ 。

在水力学实验中，经常使用盛有水或水银的细玻璃管做测压计，由于表面张力的影响，使玻璃管中液面和与之相连通容器中的液面不在同一水平面上，如图 1.4 所示，这就是物理学中所指出的毛细管现象。

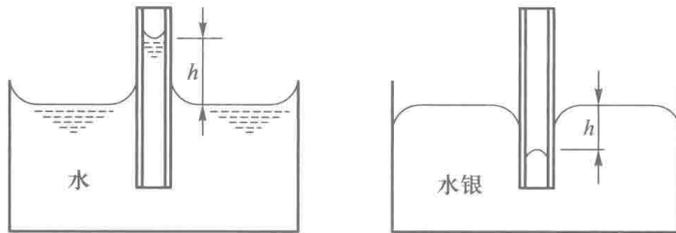


图 1.4

毛细管内水面升高值 h 的大小和管径大小及液体性质有关。图 1.5 所示为玻璃圆管内毛细管上升值与管径变化的关系。由图可见，管的内径愈小，毛细管上升值愈大，所以实验用的测压管内径不宜太小，同时要注意毛细管作用而引起的误差。

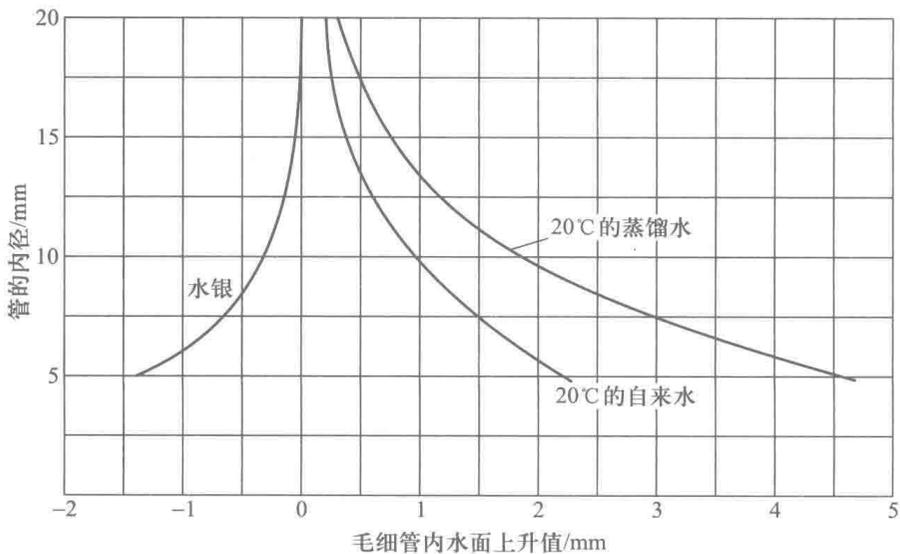


图 1.5 玻璃圆管内毛细管上升值

以上所介绍液体的五个主要物理性质，都在不同程度上决定和影响着液体的运动，但每一种性质的影响程度并不是同等的，在有些情况下，某种物理性质占支配地位，在另一些情况下，另一种物理性质占支配地位。就一般而论，重力、粘滞力对液体运动的影响起着重要作用。而弹性力及表面张力，只对某

些特殊水流运动发生影响。

1.3.6 液体的汽化压强

汽化是指物质从液态变为气态的相变过程。蒸发和沸腾是物质汽化的两种形式。前者是在液体表面上发生的汽化现象，而后者是当饱和蒸汽压等于外界压强时发生在液体内部的汽化现象。蒸汽压指的是在液体（或者固体）的表面存在着该物质的蒸汽，这些蒸汽对液体表面产生的压强就是该液体的蒸汽压。一定的温度下，同种物质的汽液两相处于平衡状态的蒸汽所产生的压强叫饱和蒸汽压或汽化压强，用符号 p_b 表示，常用单位 Pa 表示。液体的汽化压强随温度的升高而增大，当然还和液体种类有关。如在一个标准大气压下（101.33 kPa）时，水的汽化温度为 100℃；一旦水面压强降至 2.34 kPa，水在 20℃时就开始沸腾。水的汽化压强随温度变化见表 1.3 所示。

表 1.3 不同温度条件下水的汽化压强

水温/℃	0	5	10	15	20	25	30
汽化压强/kPa	0.61	0.87	1.23	1.70	2.34	3.17	4.24
水温/℃	40	50	60	70	80	90	100
汽化压强/kPa	7.38	12.33	19.92	31.16	47.34	70.10	101.33

当液体中某处的压强低于当地温度条件下的汽化压强时，液体汽化产生的气泡将不断膨胀，体积变大，产生空化现象。当低压区形成的气泡随水流运动至高压区时，受内外压差作用迫使气泡突然破灭，将产生巨大的瞬间冲击力，使相接触的固体壁面产生剥蚀，此现象称为空蚀。水力空化空蚀现象是水利水电工程建设中急需避免的问题。

1.4 连续介质和理想液体的概念

1.4.1 连续介质的概念

液体和任何物质一样，都是由分子所组成，分子与分子之间是不连续而有空隙的。水力学在研究液体运动时，只研究由于外力作用下的机械运动，不研究液体内部的分子运动，也就是说只研究液体的宏观运动而不研究其微观运动。这是因为分子间空隙的距离与生产上需要研究的液流尺度相比，是极为微小的。现代物理研究指出，在常温下，1 cm³ 的水中约含有 3×10^{22} 个水分子，

相邻分子间距离约为 3×10^{-8} cm, 可见分子间距离是相当微小的, 而在很小的体积中包含有难以计数的分子。

基于上述原因, 在水力学中, 把液体当作连续介质看待, 即假设液体是一种连续充满其所占据空间毫无空隙的连续体。水力学所研究的液体运动是连续介质的连续流动。

连续介质的概念是由瑞士学者欧拉 (Euler L, 1707—1783) 在 1753 年首先建议的, 它作为一种假定在流体力学的发展中起了巨大作用。如果把液体视为连续介质, 则液流中的一切物理量 (如速度、压强、密度等) 都可以视为空间坐标和时间的连续函数, 这样, 在研究液体运动规律时, 就可以利用连续函数的分析方法。长期的生产和科学实验证明, 利用连续介质假定所得出的有关液体运动规律的基本理论与客观实际是十分符合的。

1.4.2 理想液体的概念

在讲述液体的物理性质一节中已经指出, 实际液体除了具有惯性、万有引力特性之外还存在着粘滞性、可压缩性和表面张力, 这些特性都不同程度地对液体运动发生影响。通过以后有关章节讨论就会看到, 液体粘滞性的存在, 使得对水流运动的分析变得非常困难。水力学中为了使问题的分析简化, 引入了“理想液体”的概念。所谓理想液体, 就是把水假定为绝对不可压缩、不能膨胀、没有粘滞性、没有表面张力的连续介质。

由前面讨论已知, 实际液体的压缩性和膨胀性很小, 表面张力也很小, 与理想液体没有很大差别, 因而有没有考虑粘滞性是理想液体和实际液体的最主要差别。所以, 按照理想液体所得出的液体运动的结论, 应用到实际液体时, 必须对没有考虑粘滞性而引起的偏差进行修正。

1.5 作用于液体上的力

处于平衡或运动状态的液体, 均受到各种力的作用。作用于液体上的力, 按其物理性质来看, 有重力、惯性力、弹性力、摩擦力、表面张力等。如果按其作用的特点, 这些力可分为表面力和质量力两大类。

1.5.1 表面力

表面力是作用于液体的表面, 并与受作用的表面面积成比例的力。例如固体边界对液体的摩擦力, 边界对液体的反作用力, 一部分液体对相邻的另一部分液体 (在接触面上) 产生的水压力都属于表面力。

表面力的大小除用总作用力来度量以外，也常用单位面积上所受的表面力（即应力）来度量。若表面力与作用面垂直，此应力称为压应力或压强。若表面力与作用面平行，此应力称为切应力。

1.5.2 质量力

质量力是指通过所研究液体的每一部分质量而作用于液体的、大小与液体的质量成比例的力。如重力、惯性力就属于质量力。在均质液体中，质量与体积成正比，故质量力又称为体积力。质量力除用总作用力来度量外，也常用单位质量力来度量。单位质量力是指作用在单位质量液体上的质量力。若有一质量为 m 的均质液体，作用于其上的总质量力为 F ，则所受的单位质量力 f 为

$$f = \frac{F}{m} \quad (1.13)$$

若总质量力 F 在空间坐标轴上的投影分别为 F_x, F_y, F_z ，单位质量力 f 在相应坐标轴上的投影为 f_x, f_y, f_z ，则有

$$\begin{cases} f_x = F_x/m \\ f_y = F_y/m \\ f_z = F_z/m \end{cases} \quad (1.14)$$

单位质量力具有和加速度一样的量纲，为 LT^{-2} 。

1.6 水力学的研究方法

研究水力学有三种最基本的方法，即理论分析、科学试验及数值计算。而这三种方法常常是互相结合补充，相辅相成。

1.6.1 理论分析

水力学是建立在经典力学理论基础上的。物体的机械运动和作用的外力紧密相关，对液体运动进行理论分析，首先要研究作用在液体上的力，然后引用经典力学的基本原理（如牛顿定律、动能定理、动量定理等），来建立水流运动的基本方程式（如连续性方程、能量方程、动量方程等）。理论分析在建立液体运动的一般规律方面，已经达到较为成熟的程度。但由于实际水流运动的多样性，对于某些复杂的运动，完全用理论分析来解决还存在许多困难。

1.6.2 科学试验

科学试验的基本目的,一方面是检验理论分析成果的正确性,另一方面当有些水力学问题在理论上暂时还不能完全得到解决时,通过试验可以找到一些经验性的规律,以满足实际应用的需要。就当前水力学研究的实际情况来看,科学试验还是一个极其重要的手段。现阶段水力学的科学试验主要有三种方式:

(1) 原型观测

在野外或实际工程现场,对水流运动要素进行观测,收集第一手资料,为检验理论分析成果或总结某些基本规律提供依据。

(2) 模型试验

由于现有理论分析成果的局限性,或者因为实际水流运动比较复杂,使有些实际工程的水力学问题不能得到可靠而满意的解答,这时可在实验室内,以模型相似理论为指导,把实际工程缩小为模型,在模型上预演相应的水流运动,得出模型水流的规律性,然后再把模型试验成果,按照相似关系换算为原型的成果,以满足工程设计的需要。这种模型试验的方法,目前在工程实践中得到广泛的应用。

(3) 系统试验

由于野外观测受到某些条件的局限或因某种水流相似的规律在理论上还没有建立起来,则可在实验室内,小规模地造成某种水流运动,用以进行系统的试验观测,从中找出规律。

在科学试验中,为了得出水流运动的规律性,还必须使用分析的手段。这当中除了涉及一般数理知识、数据处理方法以外,还常运用量纲分析这个工具。量纲分析法是一种数学与物理相结合的分析方法。它的基本点是任意一个符合客观实际的物理方程式,方程中各项量纲必须一致(或称和谐)。当已正确掌握了影响某一物理过程的各种变量时,利用物理方程量纲和谐的原则,可以得出物理方程的函数结构形式。

量纲分析法还可以用来帮助检验一个物理方程式的正确性(即是否符合量纲和谐)以及推导某些物理量的量纲(导出量纲)。关于量纲分析的基本原理,本书后面有关部分还要详细介绍。

1.6.3 数值计算

任何流体运动都遵循质量守恒定律、动量定理和能量守恒定律。这些基本规律可由数学方程组来描述,如欧拉方程、纳维-斯托克斯方程等。工程

实际中的水力学问题，根据其具体特点，可以建立起不同的数学模型，这种数学模型通常是用一组给定初始条件与边界条件的微分方程组来表示。若采用数值方法离散微分方程组，通过计算机求解将可给出流体运动区域内的离散解。

近年来，随着计算机技术的发展，计算机的运算速度不断提高，而一系列有效近似计算方法，如有限差分法、有限元法、有限体积法等的不完善，使数值计算在水力学研究中的作用和地位不断提高，数值计算方法已成为与理论分析和试验方法具有同等重要意义的研究方法，目前在实际工程中得到越来越多的应用。

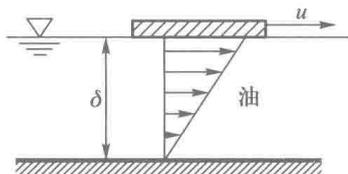
思 考 题

- 1.1 惯性、惯性力的定义及其物理意义是什么？
- 1.2 物理量的基本量与导出量的关系是什么？在水力学中采用的国际单位制量纲系是什么？
- 1.3 什么叫作粘滞性？粘滞性对液体运动起什么作用？
- 1.4 不同液体类型的切应力与流速梯度、剪切变形速度的关系是什么？
- 1.5 什么是汽化现象？什么是空化现象？影响该现象的关键因素是什么？
- 1.6 理想液体的基本假设是什么？理想液体与实际液体的根本区别何在？
- 1.7 作用于液体上的力可以分为哪两类？二者有何区别？试举例说明。
- 1.8 试深入说明都江堰水利枢纽工程主要组成及其应用的水力学基本原理。

习 题

- 1.1 利用 LMT 量纲系，推导液体动力粘度 η 的量纲。
- 1.2 已知某一矩形渠道，其流速分布可表示为 $u = \frac{0.05}{\nu} \left(Hy - \frac{1}{2}y^2 \right)$ ，式中 u 的单位为 m/s ； H 为总水深， y 为距河床底部的位置，单位均为 m ； ν 为水的运动粘度，单位为 m^2/s 。当水温为 15°C ， $H = 2.0 \text{ m}$ 时，试求河床底部与水面的切应力大小。
- 1.3 若某电梯以大小为 a 的加速度垂直上升，试问电梯内质量为 m 的物体所受的单位质量力为多少？

1.4 如图所示，有一块大小为 $1.0\text{ m} \times 0.5\text{ m}$ 的平板在油面上作水平运动，已知运动速度 $u = 1.0\text{ m/s}$ ，平板与固定边界的距离 $\delta = 1.0\text{ mm}$ ，油的动力粘度为 $1.2\text{ N/m}^2 \cdot \text{s}$ ，由平板所带动的油的速度成直线分布，试求平板所受的阻力。



题 1.4

1.5 当温度为 $20\text{ }^\circ\text{C}$ 时，若作用于 4.0 m^3 的水的压强增加了 1 个标准大气压，试求其体积变化率。

2 水静力学

水静力学的任务是研究液体平衡的规律及其实际应用。液体的平衡状态有两种：一种是静止状态，即液体相对于地球没有运动，处于相对静止；另一种是相对平衡状态，即所研究的整个液体对于地球虽在运动，但液体对于容器或者液体质点之间没有相对运动，处于相对平衡。沿直线等速行驶或等加速行驶的车厢中所盛液体就是处于相对平衡状态的例子。

研究水静力学的一个重要目的，就是要确定液体对边界的作用力。许多水工建筑物（如坝、闸门等）的表面都直接与液体接触，要进行这些建筑物的设计，首先必须计算液体作用于这些边界上的压力。液体在平衡状态下，没有内摩擦力，因此，在研究水静力学问题时，理想液体和实际液体都是一样的，没有区分的必要。

2.1 静水压强及其特性

2.1.1 静水压力与静水压强

如图 2.1 所示，在水库岸边的泄水洞前设置有平板闸门，当拖动闸门时需要一定的拉力，其主要原因是水库中的水体对闸门产生的压力，使闸门紧贴壁面。液体不仅对与之相接触的固体边界作用有压力，就是在液体内部，一部分液体对相邻的另一部分液体也作用有压力。静止（或处于相对平衡状态）液

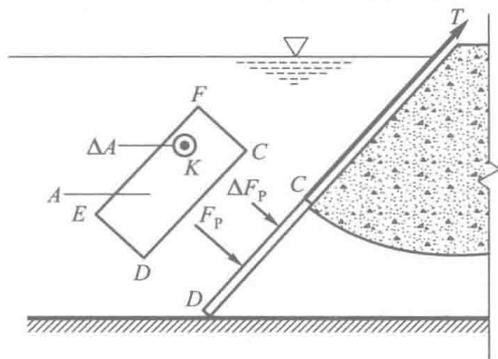


图 2.1

体作用在与之接触的表面上的水压力称为静水压力，常以 F_p 表示。在图 2.1 所示的平板闸门上，取微小面积 ΔA ，令作用于 ΔA 上的静水压力为 ΔF_p ，则 ΔA 面上单位面积所受的平均静水压力为

$$\bar{p} = \frac{\Delta F_p}{\Delta A} \quad (2.1)$$

\bar{p} 称为 ΔA 面上的平均静水压强。当 ΔA 无限缩小至趋于点 K 时，比值 $\frac{\Delta F_p}{\Delta A}$ 的极限值定义为 K 点的静水压强，即

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_p}{\Delta A} \quad (2.2)$$

在我国法定计量单位中，静水压力 F_p 的单位为 N 或 kN；静水压强 p 的单位为 Pa 或 kPa。

2.1.2 静水压强的特性

静水压强有两个重要的特性：

1. 静水压强的方向与受压面垂直并指向受压面。

在平衡液体中取出一块液体 M ，如图 2.2a 所示。今用 $N-N$ 面将 M 分为 I、II 两部分，若取出第 II 部分液体作为脱离体，在分割面 $N-N$ 上，I 部分液体对 II 部分液体作用有静水压力。设某点 K 所受的静水压强为 p ，围绕 K 点所取的微分面 dA 上所受的静水压力为 dF_p 。若 dF_p 不垂直于作用面而与通过 K 点的切线相交成 α 角（图 2.2b），则 dF_p 可分解为垂直于 dA 的作用力 dF_{pn} 及平行于通过 K 点切线的作用力 dF_{pt} 。然而，在绪论中指出过，静止液体不能承受剪切变形，显然， dF_{pt} 的存在必然破坏液体的平衡状态。所以，静水压力 dF_p 及相应的静水压强 p 必须与其作用面相垂直，即 $\alpha = 90^\circ$ 。

同样，如果与作用面垂直的静水压力 dF_p 不是指向作用面（图 2.2c），而是指向作用面的外法线方向，则液体将受到拉力，平衡也要受到破坏。

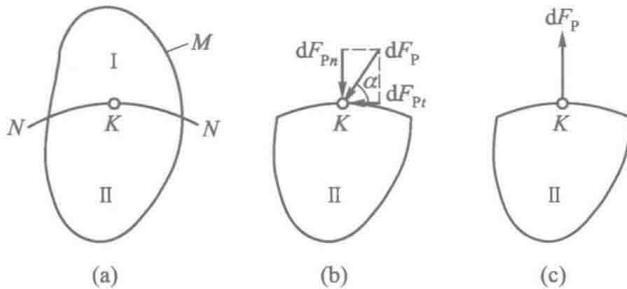


图 2.2

以上讨论表明，在平衡液体中静水压强只能是垂直并指向作用面，即静水压力只能是垂直的压力。

2. 任一点静水压强的和受压面方向无关，或者说作用于同一点上各方向的静水压强大小相等。

在证明这一特性之前，先通过下述例子来进一步说明该特性的含义。图 2.3a 表示平衡液体中有一垂直平板 AB ，设平板上 C 点的静水压强为 p_C ， p_C 垂直并指向受压面 AB 。假定 C 点位置固定不动，平板 AB 绕 C 点转动一个方位，变成图 2.3b 所示的情况。 AB 改变方位前后，作用在 C 点的静水压强大小仍然保持不变，这就是静水压强第二特性的含义。证明过程如下所述。

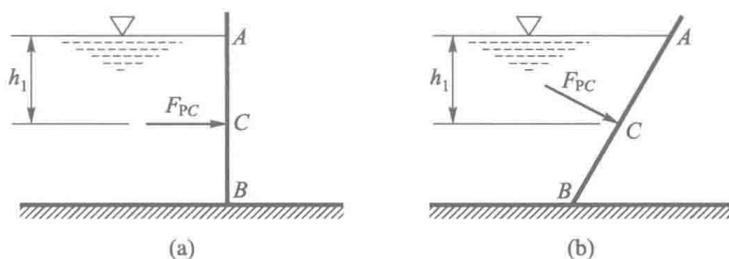


图 2.3

设在平衡液体内分割出一块无限小的四面体 $O'DBC$ (图 2.4)，倾斜面 DBC 的方向任意选取。为简单起见，让四面体的三个棱边与坐标轴平行，各棱边长为 Δx ， Δy ， Δz ，并让 z 轴与重力方向平行。四面体四个表面上受到周围液体的静水压力，因四个作用面的方向各不相同，如果能够证明，微小四面体无限缩小至 O' 点时，四个作用面上的静水压强大小都相等，则静水压强的第二个特性就得到了证明。为此目的，需要研究微小四面体在各种力作用下的平衡问题。

因为微小四面体是从平衡液体中分割出来的，它在所有外力作用下必处于平衡。作用于微小四面体上的外力包括两部分，一部分是四个表面上的表面力，即周围液体作用的静水压力；另一部分是质量力。在静止液体中质量力只有重力，在相对平衡液体中质量力还包括惯性力。图 2.4 中没有把质量力画出来。

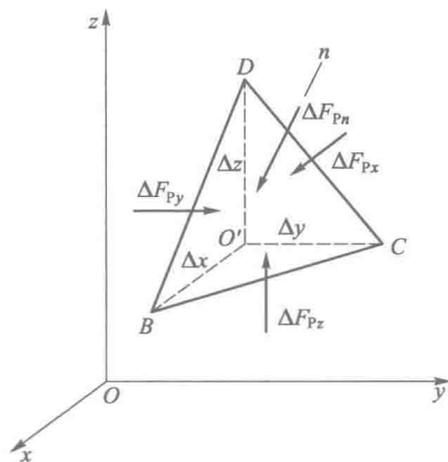


图 2.4

令 ΔF_{p_x} 为作用在 $O'DC$ 面上的静水压力；

ΔF_{p_y} 为作用在 $O'DB$ 面上的静水压力；

ΔF_{p_z} 为作用在 $O'BC$ 面上的静水压力；

ΔF_{p_n} 为作用在倾斜面 DBC 上的静水压力。

令四面体体积为 ΔV ，由几何学可知， $\Delta V = \frac{1}{6} \Delta x \Delta y \Delta z$ ；假定作用在四面体上单位质量力在三个坐标方向的投影为 f_x, f_y, f_z ；总质量力在三个坐标方向投影为

$$\begin{cases} F_x = \frac{1}{6} \rho \Delta x \Delta y \Delta z f_x \\ F_y = \frac{1}{6} \rho \Delta x \Delta y \Delta z f_y \\ F_z = \frac{1}{6} \rho \Delta x \Delta y \Delta z f_z \end{cases}$$

按照平衡条件，所有作用于微小四面体上的外力在各坐标轴上投影的代数和应分别为零，即

$$\left. \begin{aligned} \Delta F_{p_x} - \Delta F_{p_n} \cos(n, x) + \frac{1}{6} \rho \Delta x \Delta y \Delta z f_x &= 0 \\ \Delta F_{p_y} - \Delta F_{p_n} \cos(n, y) + \frac{1}{6} \rho \Delta x \Delta y \Delta z f_y &= 0 \\ \Delta F_{p_z} - \Delta F_{p_n} \cos(n, z) + \frac{1}{6} \rho \Delta x \Delta y \Delta z f_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

上式中 $(n, x), (n, y), (n, z)$ 表示倾斜面 DBC 的法线 n 与 x, y, z 轴的夹角。

若以 $\Delta A_x, \Delta A_y, \Delta A_z, \Delta A_n$ 分别表示四面体四个表面 $O'DC, O'DB, O'BC, DBC$ 的面积，则 $\Delta A_x = \Delta A_n \cos(n, x), \Delta A_y = \Delta A_n \cos(n, y), \Delta A_z = \Delta A_n \cos(n, z)$ 。

将式 (2.3) 中第一式各项同除以 ΔA_x ，并引入 $\Delta A_x = \Delta A_n \cos(n, x) = \frac{1}{2} \Delta y \Delta z$ 的关系，则有

$$\frac{\Delta F_{p_x}}{\Delta A_x} - \frac{\Delta F_{p_n}}{\Delta A_n} + \frac{1}{3} \rho \Delta x f_x = 0$$

上式中 $\frac{\Delta F_{p_x}}{\Delta A_x}, \frac{\Delta F_{p_n}}{\Delta A_n}$ 分别表示 ΔA_x 及 ΔA_n 面上的平均静水压强。如果让微小四面体无限缩小至 O' 点， $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 以及 $\Delta A_x, \Delta A_n$ 均趋近于零，对上式取极限，则有

$$p_x = p_n$$

对式 (2.3) 中第二式与第三式分别除以 ΔA_y 及 ΔA_z , 并作类似的处理后同样可得

$$p_y = p_n, \quad p_z = p_n$$

因斜面的方向是任意选取的, 所以当四面体无限缩小至一点时, 各个方向静水压强均相等, 即

$$p_x = p_y = p_z = p_n \quad (2.4)$$

静水压强第二个特性表明, 作为连续介质的平衡液体中, 任一点的静水压强仅是空间坐标的函数而与受压面方向无关, 所以

$$p = p(x, y, z) \quad (2.5)$$

2.2 液体的平衡微分方程式及其积分

2.2.1 液体平衡微分方程

液体平衡微分方程式, 是表征液体处于平衡状态时作用于液体上各种力之间的关系式。设想在平衡液体中分割出一块微分平行六面体 $abcdefgh$ (图 2.5), 其边长分别为 dx , dy , dz , 形心点在 $A(x, y, z)$, 该六面体应在所有表面力和质量力的作用下处于平衡。现分别讨论其所受的力。首先分析表面力:

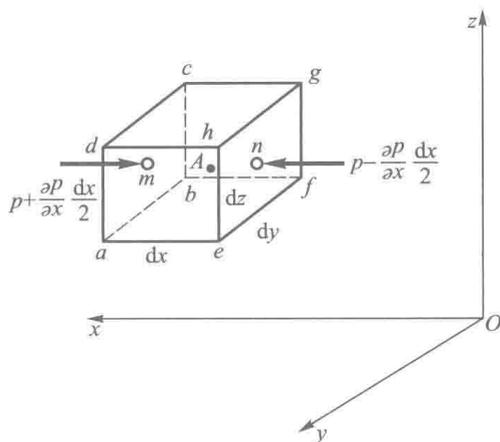


图 2.5

作用于六面体的表面力, 为周围液体对六面体各表面上所作用的静水压力。若平行六面体的形心点 A 处静水压强为 p , 由于静水压强是空间坐标的连

续函数, $abcd$ 面形心点 $m\left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right)$ 处的静水压强可按泰勒级数表示, 忽略高阶微量后为 $\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right)$; 对 $efgh$ 面形心点 $n\left(x - \frac{dx}{2}, y, z\right)$ 处的静水压强可表示为 $\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right)$ 。在微分面上可认为各点静水压强相等, 因而作用在 $abcd$ 及 $efgh$ 面上的静水压力各为 $\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dydz$ 及 $\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dydz$ 。

对其他各表面上的静水压力可用同样方法求得。

质量力分析如下: 令 f_x, f_y, f_z 分别表示作用于微分六面体上单位质量力在 x, y, z 轴上的投影, 则总质量力在 x 方向的投影为 $\rho f_x dx dy dz$ 。

当六面体处于平衡状态时, 所有作用于六面体上的力, 在三个坐标轴方向投影的和应等于零。在 x 方向有

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dydz + \rho f_x dx dy dz = 0$$

以 $dx dy dz$ 除上式各项并化简后为

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho f_x$$

同理, 对于 y, z 方向可推出类似结果, 从而得到微分方程组:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \rho f_x \\ \frac{\partial p}{\partial y} = \rho f_y \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \rho f_z \end{cases} \quad (2.6)$$

式 (2.6) 是瑞士学者欧拉于 1775 年首先推导出来的, 故又称为欧拉平衡微分方程式。该式的物理意义为: 平衡液体中, 静水压强沿某一方向的变化率与该方向单位体积上的质量力相等。

将式 (2.6) 中各式分别乘以 dx, dy, dz , 然后相加得

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho(f_x dx + f_y dy + f_z dz) \quad (2.7)$$

因为 $p = p(x, y, z)$, 故上式左端为函数 p 的全微分 dp 。于是式 (2.7) 可写作

$$dp = \rho(f_x dx + f_y dy + f_z dz) \quad (2.8)$$

式 (2.8) 是不可压缩均质液体平衡微分方程式的另一种表达形式。

基于液体平衡微分方程式, 可研究液体在平衡状态下作用于液体上的质量力应当具有的性质。

2.2.2 势力场、力势函数和有势力

如果一物体在某空间任一位置都受到一个大小和方向完全由所在位置确定的力作用,则这部分空间称为力场。如物体在地球表面的任何位置都受到一个确定的重力的作用,为此称地球表面的空间为重力场。又如星球在太阳周围的任何位置都要受到太阳的引力的作用,引力的大小和方向决定于该星球相对于太阳的位置,则称太阳周围的空间为太阳引力场,等等。

如果物体在力场内运动,作用于物体的力所作的功只与力作用点的初始位置和终了位置有关,而与该点的轨迹形状无关,这种力场称为势力场(或保守力场)。在势力场中,物体受到的力称为有势力或保守力。重力、惯性力都属于有势力。

现将式(2.6)中的前两式分别对 y 和 x 取偏导数,即

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} = \frac{\partial(\rho f_x)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(\rho f_y)}{\partial x}$$

对不可压缩均质液体, ρ 为常数,故上面等式可写作

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} = \rho \frac{\partial f_x}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} = \rho \frac{\partial f_y}{\partial x}$$

因函数的二次偏导数与取导的先后次序无关,故

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x}$$

同理,对式(2.6)中的其他项分别作类似的数学处理,并综合其结果为

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x} \\ \frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial y} \\ \frac{\partial f_z}{\partial x} = \frac{\partial f_x}{\partial z} \end{array} \right. \quad (2.9)$$

这就是不可压缩液体平衡时对质量力所加的限制条件。

上式表明,作用于平衡液体上的质量力应满足式(2.9)的关系。由理论力学知,当质量力满足式(2.9)时,必然存在一个仅与空间位置坐标有关的

力势函数 $U(x, y, z)$ ，并且函数 U 对 x, y, z 的偏导数等于单位质量力在 x, y, z 坐标方向的投影，即

$$\begin{cases} f_x = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} \\ f_y = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y} \\ f_z = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} \end{cases} \quad (2.10)$$

函数 $U(x, y, z)$ 即质量力的势函数，简称质量力势。而力势函数的全微分 dU ，应等于单位质量力在空间移动 ds 距离所作的功，其中， ds 在坐标轴上投影为 dx, dy, dz ，则

$$\begin{aligned} dU &= \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \\ &= f_x dx + f_y dy + f_z dz \end{aligned} \quad (2.11)$$

具有式 (2.10) 关系的力则称为有势力（或保守力），有势力所作的功与路径无关，而只与起点及终点的坐标有关。

上述讨论表明：作用在液体上的质量力必须是有势力，液体才能保持平衡。

2.2.3 液体平衡微分方程的积分

比较式 (2.8) 及式 (2.11)，可得出液体平衡微分方程式的另一种表达式：

$$dp = \rho \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) \quad (2.12)$$

或

$$dp = \rho dU \quad (2.13)$$

积分上式可得

$$p = \rho U + C \quad (2.14)$$

上式中积分常数 C ，可由已知条件确定。如果已知平衡液体边界上（或液体内部）某点的压强为 p_0 、力势函数为 U_0 ，则积分常数 $C = p_0 - \rho U_0$ 。代入式 (2.14)，变为

$$p = p_0 + \rho(U - U_0) \quad (2.15)$$

前面已经提到，力势函数 U 仅为空间坐标的函数，所以， $(U - U_0)$ 也只是空间坐标的函数而与 p_0 无关。故由式 (2.15) 可得出结论：平衡液体中，边界上的压强 p_0 将等值地传递到液体内部的一切点上；即当 p_0 增大或减小时，

液体中任意点的压强也相应地增大或减小同样数值。这就是著名的帕斯卡原理或称静压传递原理，由法国物理学家帕斯卡在 1653 年提出。

2.2.4 等压面及其特性

在平衡液体中，静水压强的的大小是空间坐标的函数。一般说来，不同点具有不同的静水压强值。但可以在平衡液体中找到这样一些点，它们具有相同的静水压强值，这些点连接成的面（可能是平面也可能是曲面）称为等压面。

等压面具有两个重要的性质：

1. 在平衡液体中等压面即是等势面。

因等压面上 p 为常数， $dp=0$ ，亦即 $\rho dU=0$ ；对于不可压缩均质液体， ρ 为不为零的常数，故在等压面上 $dU=0$ ，即 U 为常数。

2. 等压面与质量力正交。

为了证明这一性质，在平衡液体中任取一等压面（图 2.6），在等压面上有一质点 M ，质量为 dm ，它在质量力 F 的作用下，沿等压面移动微分距离

ds ；设 F 与 ds 之间夹角为 θ ，单位质量力在坐标轴上投影为 f_x, f_y, f_z ， ds 在坐标轴上投影为 dx, dy, dz ；若令 i, j, k 分别表示坐标轴上的单位矢量，则 F 与 ds 可表示为

$$F = (f_x i + f_y j + f_z k) dm, \quad ds = (dx i + dy j + dz k)$$

由理论力学可知，力 F 沿 ds 移动所作的功可写作矢量 F 与 ds 的数性积：

$$W = F \cdot ds = (f_x dx + f_y dy + f_z dz) dm \quad (2.16)$$

或

$$W = dU dm \quad (2.17)$$

因在等压面上 $dU=0$ ，所以质量力沿等压面移动所作的功为零，即 $W = F \cdot ds = 0$ 。这表明，质量力必须与等压面正交。

如果液体处于静止状态，即作用于液体上的质量力只有重力，则就一个局部范围而言，等压面必定是水平面；就一个大范围而论，等压面应是处处和地心引力成正交的曲面。

若平衡液体具有与大气相接触的自由表面，则自由表面必为等压面，因为自由表面上各点的压强都等于大气压强。此外，不同液体的交界面也是等

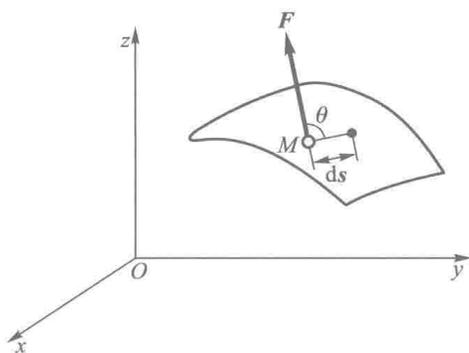


图 2.6

压面。

以上讨论等压面时，把密度 ρ 作为常数看待，把力势函数 U 作为空间坐标的连续函数。因此，在应用有关等压面的特性分析问题时，必须保证所讨论的介质是同一种连续介质。

2.3 重力作用下静水压强的基本公式

2.3.1 静水压强的计算公式

在实际工程中，作用于平衡液体上的质量力常常只有重力，即所谓静止液体。

若把直角坐标系的 z 轴取在铅垂方向（图 2.7），则质量力只在 z 轴方向有分力，即 $f_x=0$, $f_y=0$, $f_z=-g$ ，以之代入平衡微分方程式（2.8），则有

$$dp = \rho(f_x dx + f_y dy + f_z dz) = -\rho g dz$$

均质液体中 ρ 为常数，积分得

$$z + \frac{p}{\rho g} = C \quad (2.18)$$

在自由面上 $z = z_0$, $p = p_0$ ，则 $C = z_0 + \frac{p_0}{\rho g}$ 。

代入式（2.18）即可得出静止液体中任意点的静水压强计算公式：

$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z)$$

或

$$p = p_0 + \rho g h \quad (2.19)$$

式中， $h = z_0 - z$ 表示该点在自由面以下的淹没深度。式（2.19）就是计算静水压强的基本公式。它表明，静止液体内部任意点的静水压强由两部分组成：一部分是自由面上的气体压强 p_0 （当自由面与大气相通时， $p_0 = p_a$ ， p_a 为当地大气压强），它遵从帕斯卡原理等值地传递到液体内部各点；另一部分是 $\rho g h$ ，相当于单位面积上高度为 h 的水柱重量。

由式（2.19）还可以看出，淹没深度相等的各点静水压强相等（图 2.8a），故水平面即是等压面。但必须注意，这一结论只适用于质量力只有重力的同一种连续介质。对于不连续的液体（如液体被阀门隔开，见图 2.8b），或者一个水平面穿过了两种不同介质（图 2.8c），则位于同一水平面上的各点，压强并

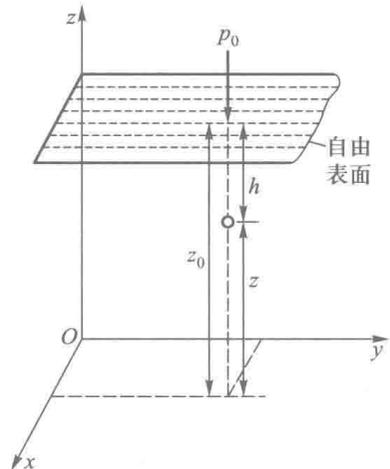


图 2.7

不一定相等，即水平面不一定是等压面。

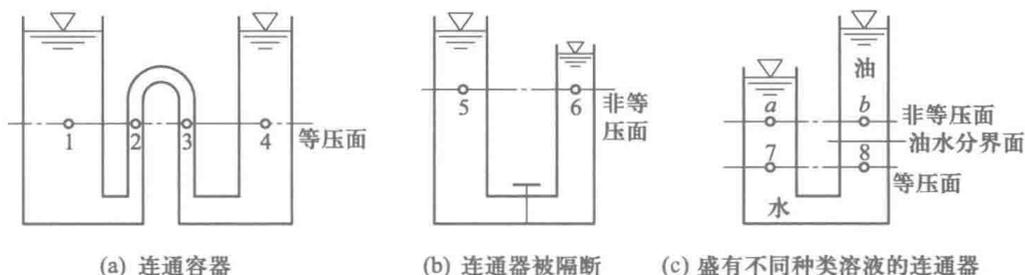


图 2.8

2.3.2 绝对压强、相对压强和真空压强

地球表面大气所产生的压强称为大气压强。海拔高程不同，大气压强也有所差异。国际上规定一个标准大气压为 101.33 kPa，在实际计算中，不同情况下采用不同的基准来度量压强，即所谓绝对压强与相对压强。

1. 绝对压强

以设想没有大气存在的绝对真空状态作为零点计量的压强，称为绝对压强。

2. 相对压强

把当地大气压作为零点计量的压强，称为相对压强。如果把一个压力表放在大气中，指针读数为零，那么用这压力表所测的压强值，则为相对压强。

绝对压强和相对压强，是按两种不同基准（即零点）计量的压强，它们之间相差一个当地大气压强值，二者的关系如图 2.9 所示。为了区别，以 p' 表示绝对压强， p 表示相对压强， p_a 则表示当地的大气压强。按上面的规定应有

$$p = p' - p_a \quad (2.20)$$

水利工程中，一般的自由表面都是敞开于大气中，自由面上的气体压强等于当地大气压强，即 $p_0 = p_a$ 。因而静止液体内任意点的相对压强为

$$p = (p_a + \rho gh) - p_a = \rho gh \quad (2.21)$$

若液体密度为常数时，式中液柱高 h 可表示压强 p 的大小，压强测量一节将作专门阐述。

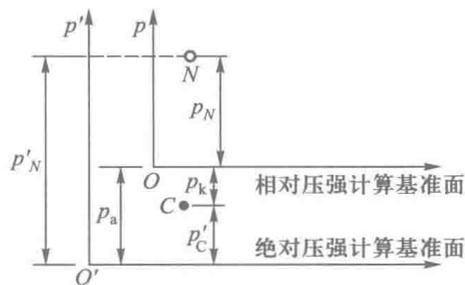


图 2.9

3. 真空压强

绝对压强总是正值，而相对压强则可能是正值，也可能是负值。当液体中某点的绝对压强小于当地大气压强 p_a ，即其相对压强为负值时，则称该点存在真空。真空压强是指液体中绝对压强小于当地大气压强的部分。真空压强的大小常用真空度 p_k 表示。真空度是指该点绝对压强小于当地大气压强的数值，即

$$p_k = p_a - p' \quad (2.22)$$

可见，有真空存在的点，其相对压强与真空度绝对值相等，相对压强为负值，真空度为正值。故真空也称负压。

2.3.3 压强的液柱表示法，水头与单位势能

1. 压强的液柱表示法

压强的大小一般以单位面积上的压力数值来表示，单位为 kPa，有时也用“工程大气压”作单位来表示，单位为 at，一个工程大气压为 98 kPa，例如某处压强为 196 kPa，也可以说该处压强为两个工程大气压，即 2 at。

压强的另一种表示方法，就是用液柱高表示。由式 (2.21) 可知，一定的液柱高可以产生一定的静水压强，例如 10 m 水柱高可以产生 98.0 kPa 静水压强，因此 98.0 kPa 的压强也可以说等于 10 m 水柱高。

除了用水柱高表示以外，也常采用水银（汞）柱高度来表示。汞的密度为水的 13.6 倍，所以水银柱高度为相应水柱高度的 $\frac{1}{13.6}$ 。

上述几种压强表示方法间的关系为

$$98.0 \text{ kPa} = 1 \text{ at} = 10 \text{ m H}_2\text{O} = 736 \text{ mm Hg}$$

2. 水头和单位势能

在 2.3.1 小节中曾导出了静水压强的基本方程式 $z + \frac{p}{\rho g} = C$ [式 (2.18)]。

在上述讨论的基础上可进一步来解释它的物理意义。

该式中 z 为静止液体内任意点在参考坐标平面以上的几何高度，称为位置水头； $\frac{p}{\rho g}$ 是该点的测压管内液柱高度，称为压强水头（其中，测压管为压强测量的一种方法，见 2.3.4 节。）；而 $\left(z + \frac{p}{\rho g}\right)$ 则称为测压管水头。故式 (2.18) 表明：静止液体内各点，测压管水头等于常数。

不难证明，静止液体内各点的测压管水头为常数，反映了静止液体内的能量守恒规律。设质量为 dm 的液体质点，其重心位于参考平面以上的几何高度为 z ，则该质点所具有的位能为 $dmgz$ ，故 $z = \frac{dmgz}{dmg}$ 代表了单位重量液体所具有的位能。

而测压管内液柱高度 $\frac{p}{\rho g}$, 则代表单位重量液体所具有的压强势能, 或简称压能。若液体中某点的压强为 p , 当在该处设置一开口的测压管时, 液体在压强 p 的作用下, 将沿测压管上升一个高度 $\frac{p}{\rho g}$ 才静止下来; 此时液体的压能转化成高度为 $\frac{p}{\rho g}$ 的位置势能。压强为 p , 质量为 dm 的液体, 由压能转化来的位置

势能为 $dmg \frac{p}{\rho g}$; 所以 $\frac{p}{\rho g} = \frac{dmg \frac{p}{\rho g}}{dmg}$ 就代表单位重量液体所具有的压能。

在静止液体内, 机械能只有位能和压能, 并总称为势能。故式 (2.18) 表明: 静止液体内各点, 单位重量液体所具有的势能 (简称单位势能) 相等。

例 2.1 图 2.10 所示为一密闭容器, 两侧各装一测压管, 右管上端封闭, 其中水面高出容器水面 3 m, 管内液面压强 p_0 为 78 kPa; 左管与大气相通, 大气压强 p_a 为 98 kPa。试求:

(1) 容器内液面压强 p_c 和左侧管内水面距容器液面高度 h 。

(2) B 点的绝对压强、相对压强。

(3) 若以容器底部为基准面, 计算右管中 B 点的测压管水头, 并分别用水柱高和水银柱高表示。

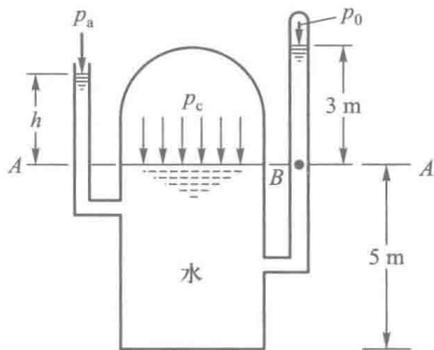


图 2.10

解: (1) 以 $A-A$ 为基准面, 由等压面概念可得

$$p_c = p_0 + \rho g \times 3 \text{ m} = 78 \times 1000 \text{ Pa} + 1000 \times 9.8 \times 3 \text{ Pa} = 107.4 \text{ kPa}$$

又因为 $p_c = p_a + \rho gh$, 则

$$h = \frac{p_c - p_a}{\rho g} = \frac{(107.4 - 98) \times 1000}{1000 \times 9.8} \text{ m} = 0.959 \text{ m (H}_2\text{O)}$$

(2) 由帕斯卡静压传递原理可知, B 点的绝对压强、相对压强分别为

$$p'_B = p_0 + \rho g \times 3 \text{ m} = 78 \times 1000 \text{ Pa} + 1000 \times 9.8 \times 3 \text{ Pa} = 107.4 \text{ kPa}$$

$$p_B = p'_B - p_a = 107.4 \text{ kPa} - 98 \text{ kPa} = 9.4 \text{ kPa}$$

(3) 以容器底部为基准面, B 的测压管水头表示为

$$z_B + \frac{p'_B}{\rho g} = z_B + \frac{p_0 + \rho g \times 3 \text{ m}}{\rho g} = 5 \text{ m} + \frac{78 \times 1000 + 1000 \times 9.8 \times 3}{1000 \times 9.8} \text{ m} = 15.959 \text{ m (H}_2\text{O)}$$

$$z_B + \frac{p_B'}{\rho g} = \frac{15.959 \times 736}{10} \text{ mm} = 1174.6 \text{ mm (Hg)}$$

2.3.4 压强的测量

测量液体（或气体）压强的仪器很多，并日趋现代化。本节仅介绍一些利用水静力学原理设计的液体测压计，其构造简单，方便可靠，至今仍在实验室内广泛使用。

1. 测压管

如图 2.11 所示，若欲测容器中 A 点的液体压强，可在容器上与 A 点齐平位置设置一开口细管，即测压管。如果 A 点压强大于大气压强，测压管中水面将上升一个高度 h 。因为容器中 A 点与同高程上测压管中 B 点位于同一等压面上，两点压强相等。从测压管内来看， B 点在自由面下的淹没深度为 h ， A 点相对压强为

$$p_A = \rho g h \quad (2.23)$$

则 $h = \frac{p_A}{\rho g}$ ， h 称为测压管高度或压强高度。

如果 A 点压强较小，为提高测量精度，增大测压管标尺读数，可以在测压管中放入轻质液体（如轻质油），也可以把测压管倾斜放置（图 2.12），此时用于计算压强的测压管高度 $h = L \sin \alpha$ ， A 点的相对压强则为

$$p_A = \rho g L \sin \alpha \quad (2.24)$$

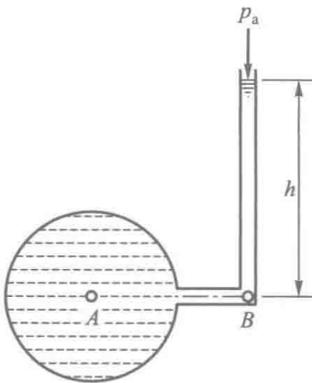


图 2.11

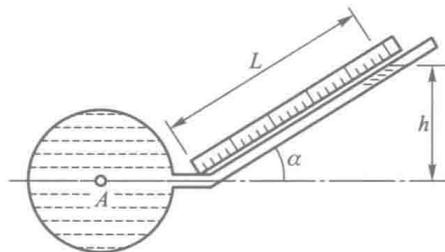


图 2.12

2. U 形水银测压计

当被测点压强很大时，利用上述测压管测量压强，所需测压管很长，在操作上很不方便，这时可以改用 U 形水银测压计（图 2.13）。U 形水银测压计，

是一个内装水银的 U 形管，管子一端与大气相通，另一端则与需测量的地方相连接，当一端与被测点 A 接通以后，在水压力作用下，U 形管右支水银面就会上升。令被测点 A 与左支水银面的高差为 b ，右支水银面与左支水银面高差为 h 。

在 U 形管内，水银面 $N-N$ 为等压面，因而点 1 和点 2 压强相等。

$$\text{对测压计右支} \quad p'_2 = p_a + \rho_{\text{Hg}}gh$$

$$\text{对测压计左支} \quad p'_1 = p'_A + \rho gb$$

$$A \text{ 点的绝对压强} \quad p'_A = p_a + \rho_{\text{Hg}}gh - \rho gb$$

$$A \text{ 点的相对压强} \quad p_A = \rho_{\text{Hg}}gh - \rho gb \quad (2.25)$$

式中， ρ 与 ρ_{Hg} 分别为水和水银的密度。

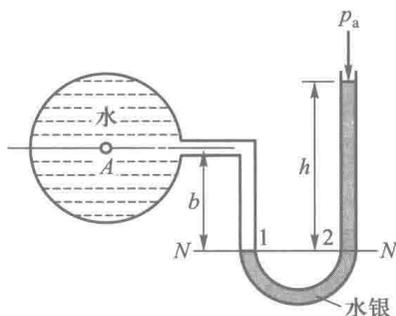


图 2.13

3. 差压计

差压计是直接测量两点压强差的装置。若被量测点之间压差较大，可使用 U 形水银差压计。图 2.14 中，左、右两容器内各盛一种介质（液体或气体），其密度分别为 ρ_A 、 ρ_B 。今使用 U 形水银差压计测量两容器中 A、B 两点之压差。测量时将差压计安放直立，当把差压计与容器连通后，差压计中水银面之高差为 h ，其余有关数据见图中说明。因 $c-c$ 平面是等压面，于是

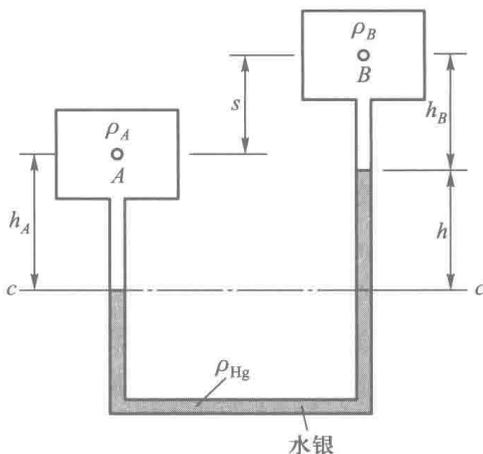


图 2.14

$$p_A + \rho_A gh_A = p_B + \rho_B gh_B + \rho_{\text{Hg}}gh$$

$$p_A - p_B = \rho_{\text{Hg}}gh + \rho_B gh_B - \rho_A gh_A$$

$$h_A + s = h_B + h$$

又

$$h_A = h + h_B - s$$

所以

$$p_A - p_B = (\rho_{\text{Hg}}g - \rho_A g)h + (\rho_B g - \rho_A g)h_B + \rho_A g s \quad (2.26)$$

上式是 A, B 两点压差的计算公式。

当两容器中盛有同种介质时 (即 $\rho_A = \rho_B = \rho$), A 与 B 之压差为

$$p_A - p_B = (\rho_{\text{Hg}}g - \rho g)h + \rho g s \quad (2.27)$$

当两容器中盛有同种介质, 且 A 与 B 位于同一高程 ($s=0$) 时, A 与 B 间压差为

$$p_A - p_B = (\rho_{\text{Hg}}g - \rho g)h \quad (2.28)$$

若被测点 A, B 之压差甚小, 为了提高测量精度, 可将 U 形差压计倒装 (图 2.15), 并在 U 形管中注入不与容器中介质相混合的轻质液体, 然后按同样方法建立 A, B 两点间压差的计算公式, 即

$$p_B - p_A = (\rho_A g - \rho_n g)h + (\rho_B g - \rho_A g)h_B - \rho_A g s \quad (2.29)$$

当 $\rho_A = \rho_B = \rho$ 时,

$$p_B - p_A = (\rho g - \rho_n g)h - \rho g s$$

当 $\rho_A = \rho_B = \rho, s=0$ 时,

$$p_B - p_A = (\rho g - \rho_n g)h$$

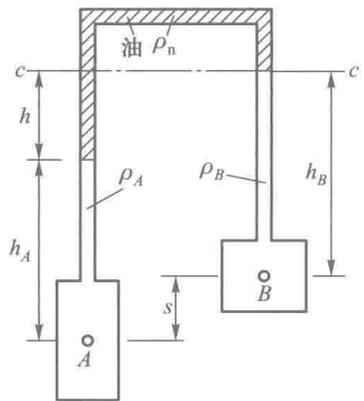


图 2.15

例 2.2 有一水塔 (图 2.16), 为了量出塔中水位, 在地面上装置一 U 形水银测压计, 测压计左支用软管与水塔相通。今测出测压计左支水银面高程 ∇_1 为 502.00 m, 左右两支水银面高差 h_1 为 1.16 m, 试求此时塔中水面高程 ∇_2 。

解: 令塔中水位与水银测压计左支水银面高差为 $h_2, h_2 = \nabla_2 - \nabla_1$ 。从测压计左支来看, ∇_1 高程处的相对压强为

$$p = \rho g (\nabla_2 - \nabla_1) = \rho g h_2$$

从测压计右支来看 $p = \rho_{\text{Hg}} g h_1$ 。所以

$$h_2 = \frac{\rho_{\text{Hg}} g h_1}{\rho g} = \frac{13.6 \times 10^3 \times 9.8 \times 1.16}{1000 \times 9.8} \text{ m} = 15.776 \text{ m (H}_2\text{O)}$$

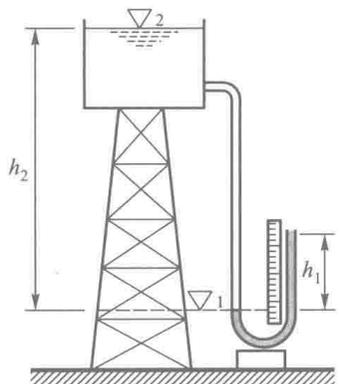


图 2.16

塔中水位 $\nabla_2 = \nabla_1 + h_2 = 502.00 \text{ m} + 15.776 \text{ m} = 517.776 \text{ m}$ 。

2.4 重力和惯性力同时作用下的液体平衡

如果液体相对于地球在运动，但相对于容器仍保持静止，这种状态称为相对平衡。在这种情况下，液体内部各质点之间以及液体与容器边界之间均不存在相对运动，当把坐标系取在容器上时，则液体相对于所取的坐标系而言，也处于静止状态。即应用理论力学的达朗贝尔原理（对于任意物理系统，所有惯性力或施加的外力，经过符合约束条件的虚位移，所作的虚功的总和等于零。或者说，作用于一个物体的外力与动力的反作用之和等于零），假想将惯性力或施加的外力加在运动的液体上，从而将这种运动问题作为静止问题来处理。

液体相对平衡状态的典型情况一般为两种：一是作等加速直线运动时容器内的静止液体；二是等角速度绕铅垂轴旋转时容器内的静止液体。

2.4.1 等加速直线运动

有一小车，内盛液体，车内纵横剖面均为矩形，当小车以等加速度 a 直线行驶后，液面将成为与水平面相交成 α 角的倾斜面，如图 2.17 所示，试求出自由液面方程式和液体内部静水压强的计算公式。

根据达朗贝尔原理，取 xOz 坐标系，则液体上作用的单位质量力为

$$f_x = -a, f_y = 0, f_z = -g$$

将上式代入液体平衡微分式 (2.8) 得

$$dp = \rho(-adx - gdz) \quad (2.30)$$

自由液面上有 $dp = 0$ ，而液体密度不为零，则

$$adx + gdz = 0$$

积分可得

$$ax + gz = C$$

在自由液面上， m 点处， $x = 0$ ， $z = H$ ，代入上式得 $C = gH$ ，因而自由液面方程为

$$ax + gz_s = gH \quad (2.31)$$

式中 x 和 z_s 为自由液面上任一点的坐标。

为求液体内部压强分布，对式 (2.30) 积分，可得

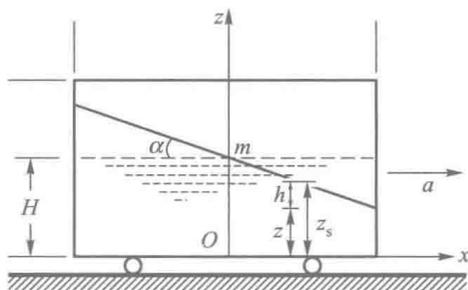


图 2.17

$$p = -\rho(ax + gz) + C'$$

在自由液面上, $p = p_0$, 对于 m 点处, $x = 0$, $z = H$, 得 $C' = p_0 + \rho gH$, 则

$$p = p_0 + \rho g(H - z) - \rho ax \quad (2.32)$$

结合自由液面方程式, 可得

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \rho g(H - z) - \rho g(H - z_s) \\ &= p_0 + \rho g(z_s - z) \\ &= p_0 + \rho gh \end{aligned} \quad (2.33)$$

由上式可知, 在受重力和水平惯性力作用的相对平衡情况下, 液体压强的分布规律与静止液体的分布规律也完全相似。所不同之处在于, 由于 h 随 z 和 x 而变, 即此处 p 不仅是 z 的函数, 也是 x 的函数。

2.4.2 等角速旋转运动

现仅以绕中心轴作等角速度旋转的圆柱形容器中的液体为例进行分析。如图 2.18 所示, 当一盛有液体的圆柱形容器绕筒轴作等角速度旋转时, 由于液体粘滞性作用, 与容器边壁接触的液体首先被带动而旋转并逐渐发展至中心, 使所有液体质点都绕轴 Oz 旋转。当运动稳定以后, 液体和容器均保持相同的旋转角速度, 液面则形成一个漏斗状的旋转抛物面, 处于平衡状态。

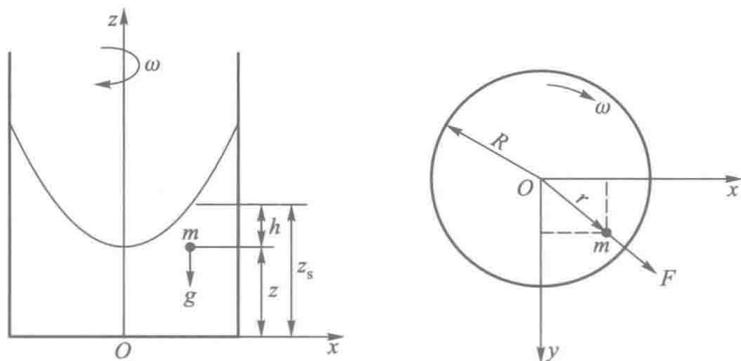


图 2.18

今将坐标系取在容器上, 使 z 轴与圆筒中心轴重合。根据达朗贝尔原理, 对具有加速度的运动物体进行受力分析时, 若加上一个与加速度相反的惯性力, 则作用于物体上的所有外力 (包括惯性力), 应保持平衡。所以, 对于所讨论的情况, 质量力应包括重力及离心惯性力。

在圆筒内任取一质点 $m(x, y, z)$, 作用于该质点单位质量上的离心惯性力为 $F = \omega^2 r$, ω 为容器 (也即液体质点) 旋转的角速度, r 为质点 m 距 Oz 轴的

垂直距离。 F 的方向为通过 m 点的半径方向。将 F 投影在 x, y 轴上得

$$f_x = \omega^2 x$$

$$f_y = \omega^2 y$$

单位质量力在 z 轴方向的投影只有重力，故

$$f_z = -g$$

将以上单位质量力代入式 (2.8)，即可得出作等角速度旋转的液体平衡微分方程式：

$$dp = \rho(\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz) \quad (2.34)$$

在等压面上 $dp = 0$ ，故令式 (2.34) 右端为零即可求出等压面方程：

$$\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz = 0$$

积分上式得

$$\frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) - gz = C \quad (2.35)$$

或

$$\frac{1}{2} \omega^2 r^2 - gz = C \quad (2.36)$$

式 (2.35) 或式 (2.36) 是以 z 轴为对称轴的旋转抛物面方程。所以，绕中心轴作等角速旋转的平衡液体，等压面为抛物面。这是因为旋转容器中液体质点所受的质量力不仅有重力，而且有离心惯性力，质量力的合力呈倾斜方向，且 r 不同的点合力倾斜方向不同，但各点质量力的合力均垂直于等压面。

在自由面的最低点 $x = 0, y = 0, z = z_0$ ，代入式 (2.35) 即可求出积分常数 $C = -gz_0$ ；把求得的 C 值代入原方程即得到自由面方程为

$$\frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) = g(z_s - z_0) \quad (2.37)$$

或

$$\frac{1}{2} \omega^2 r^2 = g(z_s - z_0) \quad (2.38)$$

式中 z_s 是自由面上任意点的纵坐标值。

其次再根据微分方程 (2.34) 来研究圆筒中静水压强的分布规律。

将式 (2.34) 积分得

$$p = \rho \left[\frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) - gz \right] + C_1$$

或

$$p = \rho \left[\frac{1}{2} \omega^2 r^2 - gz \right] + C_1 \quad (2.39)$$

式中 C_1 为积分常数。若已知自由面上压强为 p_0 并当 $r=0$ 时, $z=z_0$, 代入式 (2.39) 可求出积分常数 $C_1 = p_0 + \rho g z_0$ 。故

$$p = p_0 + \rho g z_0 + \rho \left[\frac{1}{2} \omega^2 r^2 - g z \right]$$

或

$$p = p_0 + \rho g (z_0 - z) + \rho \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \quad (2.40)$$

再把式 (2.38) 代入, 整理后变为

$$p = p_0 + \rho g (z_s - z) \quad (2.41)$$

若令 $h = z_s - z$, h 为液体内部任意质点 (x, y, z) 在自由液面下的淹没深度, 则

$$p = p_0 + \rho g h \quad (2.42)$$

上式表明, 相对平衡液体中任意点的静水压强仍然与该点淹没深度成比例, 等水深面仍是等压面。

最后需要指出, 在质量力只有重力作用的静止液体中, 曾导出这样的关系: 静止液体内部各点 $z + \frac{p}{\rho g} = C_2$, C_2 为常数。在有几种质量力同时作用的相对平衡液体中, 这种关系一般已不存在。将式 (2.39) 略加整理, 即可证明, 在绕中心轴作等角速旋转的液体中

$$z + \frac{p}{\rho g} - \frac{\omega^2 r^2}{2g} = C_3 \quad (2.43)$$

式中 C_3 为常数, 可见, 只有 r 值相同的那些点, 即位于同心圆柱面上的各点 $z + \frac{p}{\rho g}$ 才保持不变。

例 2.3 有一圆柱形容器 (图 2.19), 内半径为 R , 原盛水深度为 H , 将容器以等角速度 ω 绕中心轴 Oz 旋转, 试求运动稳定后容器中心及边壁处的水深。

解: 在容器边壁处 $r = R$, $z_s = z_w$, 由式 (2.38) 可求出容器边壁与中心处水深的差值为

$$z_w - z_0 = \frac{\omega^2 R^2}{2g} \quad (2.44)$$

由几何学可知, 旋转抛物面的体积为同底、等高的圆柱体体积的一半; 同时, 容器旋转后的水体体积应与静止时的水体体积相等, 故

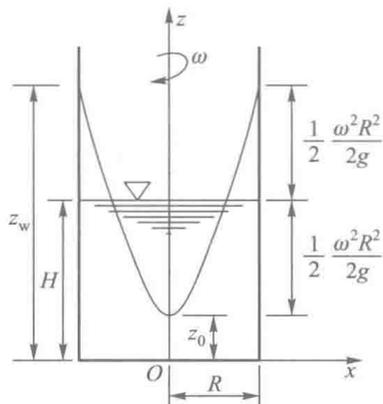


图 2.19

$$\pi R^2 z_w - \frac{1}{2} \pi R^2 (z_w - z_0) = \pi R^2 H$$

$$z_w = H + \frac{1}{2} (z_w - z_0) = H + \frac{1}{2} \frac{\omega^2 R^2}{2g} \quad (2.45)$$

上式表明：边壁处的水面比静止水面高 $\frac{1}{2} \frac{\omega^2 R^2}{2g}$ 。

将上式代入式 (2.44) 可求得容器中心处的水深为

$$z_0 = H - \frac{1}{2} \frac{\omega^2 R^2}{2g} \quad (2.46)$$

故中心点水面比静止水面低 $\frac{1}{2} \frac{\omega^2 R^2}{2g}$ 。

2.5 作用于平面上的静水总压力

水工建筑物常常都与水体直接接触。所以计算某一受压面上的静水压力是经常遇到的实际问题。

由于在工程界，习惯于把静水压强简称为静水压力，为了避免混乱，把某一受压面上所受的静水压力称为静水总压力。

2.5.1 作用在矩形平面上的静水总压力

矩形平面的形状规则，在水利工程上最为常见。计算矩形平面上所受的静水总压力，最方便的方法是利用静水压强分布图，所以常称此法为压力图法。

1. 静水压强分布图的绘制

由计算静水压强的基本公式可知，压强与淹没水深成线性函数关系。把某一受压面上压强随水深的这种函数关系表示成图形，称为静水压强分布图。其绘制规则是：

(1) 按一定比例，用线段长度代表该点静水压强的方向。

(2) 用箭头表示静水压强的方向，并与作用面垂直。

因为 p 与 h 为一次方的关系，故在深度方向静水压强系直线分布，只要绘出两个点的压强即可确定此直线。在图 2.20 中， A 点在自由面上，其相对压强 $p_A = 0$ ； B 点的淹没深度为 H ，其相对压强 $p_B = \rho g H$ ，用带箭头线段 EB 表

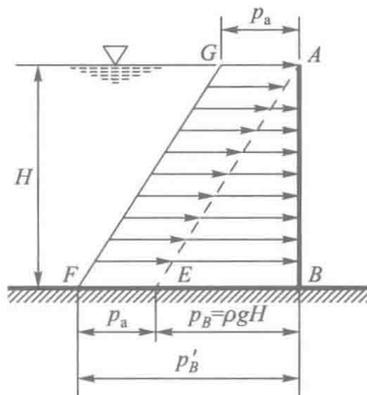


图 2.20

示 p_B 。连接直线 AE ，则 AEB 即表示 AB 面上的相对压强分布图。如果在 A 点及 B 点分别加上当地大气压强 p_a ，得 G, F 点，则 $AGFB$ 即为 AB 面上的绝对压强分布图。

在实际工程中，建筑物的迎水面及背水面均受有大气压强，其作用可互相抵消，故一般只需绘制相对压强分布图。图 2.21 中绘出了几种有代表性的相对压强分布图。

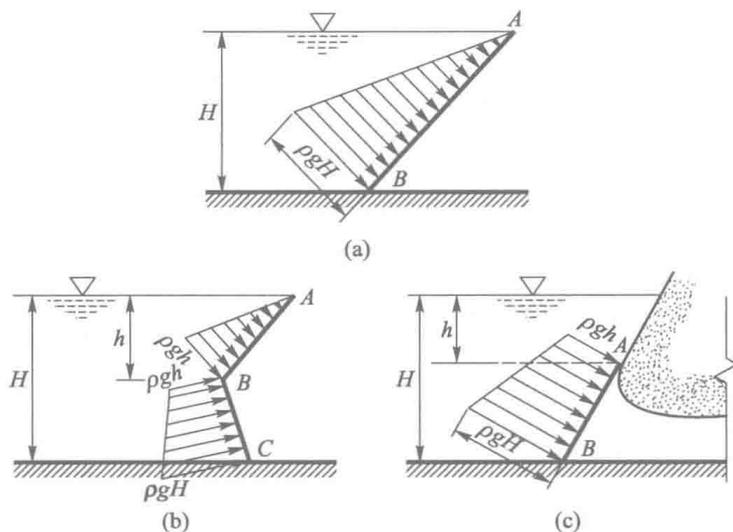


图 2.21

2. 静水总压力的计算

平面上静水总压力的大小，应等于分布在平面上各点静水压强作用的总和。因而，作用在单位宽度上的静水总压力，应等于静水压强分布图的面积；整个矩形平面的静水总压力，则等于平面宽度乘压强分布图的面积。

图 2.22 表示一任意倾斜放置的矩形平面 $ABEF$ ，平面长为 L 宽为 b ，并令其压强分布图的面积为 Ω ，则作用于该矩形平面上的静水总压力为

$$F_P = b\Omega \quad (2.47)$$

因为压强分布图为梯形， $\Omega = \frac{1}{2}(\rho gh_1 + \rho gh_2)L$ ，故

$$F_P = \frac{1}{2}\rho g(h_1 + h_2)bL \quad (2.48)$$

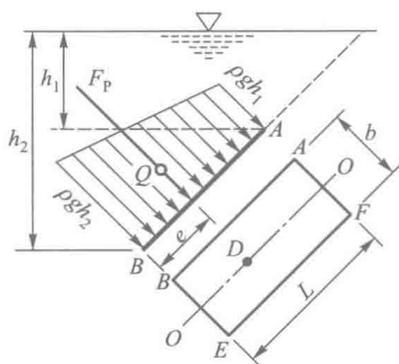


图 2.22

矩形平面有纵向对称轴, F_P 的作用点 D (又称压力中心) 必位于纵向对称轴 $O-O$ 上, 同时, 总压力 F_P 的作用点还应通过压强分布图的形心点 Q 。

当压强为三角形分布时, 压力中心 D 离底部距离为 $e = \frac{1}{3}L$; 当压强为梯

形分布时, 压力中心离底部距离 $e = \frac{L(2h_1 + h_2)}{3(h_1 + h_2)}$ (图 2.23)。

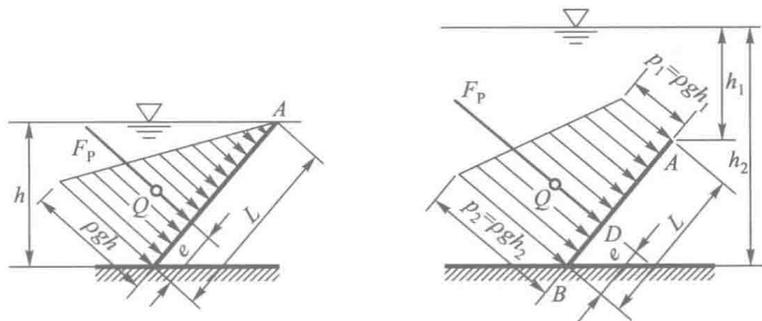


图 2.23

2.5.2 作用于任意平面上的静水总压力

当受压面为任意形状, 即为无对称轴的不规则平面时, 静水总压力的计算较为复杂。

如图 2.24 所示, 有一任意形状平面 EF , 倾斜置放于水中, 与水平面的夹角为 α , 平面面积为 A , 平面形心点在 C 。下面研究作用于该平面上静水总压力的大小和压力中心位置。

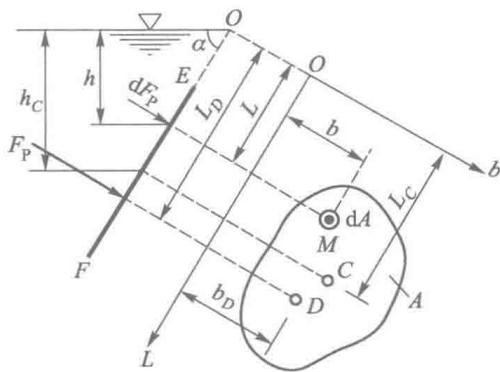


图 2.24

为了分析方便,以平面 EF 的延长面与水面的交线 Ob , 以及与 Ob 相垂直的 OL 为一组参考坐标系。

1. 总压力的大小

因为静水总压力是由每一部分面积上的静水压力所构成,先在 EF 平面上任选一点 M , 围绕点 M 取一微分面积 dA 。设 M 点在液面下的淹没深度为 h , 故 M 点的静水压强 $p = \rho gh$, 微分面上 dA 各点压强可视为与 M 点相同, 在 dA 面上所作用的静水压力 $dF_p = pdA = \rho gh dA$; 整个 EF 平面上的静水总压力则为

$$F_p = \int_A dF_p = \int_A \rho gh dA$$

设 M 点在 bOL 参考坐标系上的坐标为 (b, L) , 由图 2.24 可知

$$h = L \sin \alpha$$

于是

$$F_p = \rho g \sin \alpha \int_A L dA \quad (2.49)$$

上式中 $\int_A L dA$ 表示平面 EF 对 Ob 轴的面积矩, 并且

$$\int_A L dA = L_c \cdot A \quad (2.50)$$

L_c 表示平面 EF 形心点 C 至 Ob 轴的距离。将式 (2.50) 代入式 (2.49), 有

$$F_p = \rho g \sin \alpha \cdot L_c A$$

或

$$F_p = \rho g h_c \cdot A \quad (2.51)$$

式中 h_c 为平面 EF 形心点 C 在液面下的淹没深度, $h_c = L_c \sin \alpha$; 而 $\rho g h_c$ 为形心点 C 的静水压强 p_c 。故式 (2.51) 又可写作

$$F_p = p_c \cdot A \quad (2.52)$$

式 (2.52) 表明: 作用于任意平面上的静水总压力, 等于平面形心点上的静水压强与平面面积的乘积。形心点压强 p_c , 可理解为整个平面的平均静水压强。

2. 总压力的作用点 (压力中心)

设总压力作用点的位置在 D , 它在坐标系中的坐标值为 (L_D, b_D) 。由理论力学可知, 合力对任一轴的力矩等于各分力对该轴力矩的代数和。按照这一原理, 现来考查静水压力分别对 Ob 轴及 OL 轴的力矩。

对 Ob 轴:

$$F_p \cdot L_D = \int_A L p dA$$

将 $p = \rho g h = \rho g L \sin \alpha$ 代入上式, 则

$$F_p \cdot L_D = \rho g \sin \alpha \int_A L^2 dA \quad (2.53)$$

令 $I_b = \int_A L^2 dA$, I_b 表示平面 EF 对 Ob 轴的面积惯矩。由平行移轴定理:

$$I_b = I_C + L_C^2 A$$

上式中 I_C 表示平面 EF 对于通过其形心 C 且与 Ob 轴平行的轴线的面积惯性矩。将上式代入式 (2.53) 得

$$F_p \cdot L_D = \rho g \sin \alpha I_b = \rho g \sin \alpha (I_C + L_C^2 A)$$

$$\text{于是} \quad L_D = \frac{\rho g \sin \alpha (I_C + L_C^2 A)}{F_p} = \frac{\rho g \sin \alpha (I_C + L_C^2 A)}{\rho g L_C \sin \alpha \cdot A}$$

化简后得

$$L_D = L_C + \frac{I_C}{L_C A} \quad (2.54)$$

由此看出 $L_D > L_C$, 即总压力作用点 D (压力中心) 在平面形心点 C 之下。再将静水压力对 OL 轴取矩:

$$F_p \cdot b_D = \int_A b p dA$$

将 $p = \rho g L \sin \alpha$ 代入上式, 得

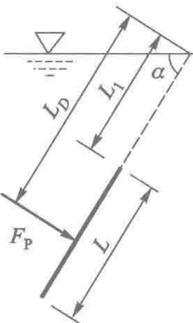
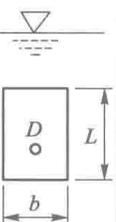
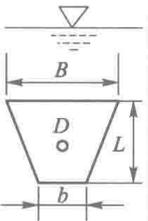
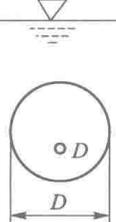
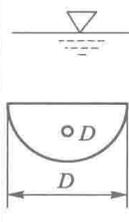
$$F_p \cdot b_D = \rho g \sin \alpha \int_A b L dA \quad (2.55)$$

令 $I_{bl} = \int_A b L dA$, I_{bl} 称为 EF 平面对 Ob 及 OL 轴的惯性积。将 I_{bl} 代入式 (2.55), 得

$$b_D = \frac{\rho g \sin \alpha I_{bl}}{\rho g L_C \sin \alpha A} = \frac{I_{bl}}{L_C A} \quad (2.56)$$

根据式 (2.54) 及式 (2.56) 求出 L_D 及 b_D , 则压力中心 D 的位置即可确定。很显然, 若平面 EF 有纵向对称轴, 则不必计算 b_D 值, 因为 D 点必定落在纵向对称轴上。为了使用方便, 表 2.1 中列出几种有纵向对称轴的常见平面静水总压力和压力中心位置的计算式。

表 2.1 几种常见平面静水总压力和压力中心位置的计算式

平面在水中位置*	平面形式	静水总压力 F_p 值	压力中心距水面的斜距
	矩形 	$F_p = \frac{\rho g}{2} L b (2L_1 + L) \sin \alpha$	$L_D = L_1 + \frac{(3L_1 + 2L)L}{3(2L_1 + L)}$
	等腰梯形** 	$F_p = \rho g L \sin^2 \alpha \cdot \left[L_1 + \frac{L(B+2b)}{3(B+b)} \right] (B+b)$	$L_D = L_1 + \frac{[2(B+2b)L_1 + (B+3b)L]L}{6(B+b)L_1 + 2(B+2b)L}$
	圆形 	$F_p = \frac{\pi}{8} D^2 (2L_1 + D) \cdot \rho g \sin \alpha$	$L_D = L_1 + \frac{D(8L_1 + 5D)}{8(2L_1 + D)}$
	半圆形 	$F_p = \frac{D^2}{24} (3\pi L_1 + 2D) \cdot \rho g \sin \alpha$	$L_D = L_1 + \frac{D(32L_1 + 3\pi D)}{16(3\pi L_1 + 2D)}$

* 当闸门为铅垂直放时, $\alpha = 90^\circ$, 此时 L_1 为 h_1 , L_D 为 h_D 。

** 等腰三角形平面, 相当于等腰梯形平面中令 $b = 0$ 的情况。

例 2.4 某泄洪隧洞, 在进口倾斜设置一矩形平板闸门 (图 2.25), 倾角 α 为 60° , 门宽 b 为 4 m, 门长 L 为 6 m, 门顶在水面下淹没深度 h_1 为 10 m, 若不计闸门自重时, 问沿斜面拖动闸门所需的拉力 F 为多少? (已知闸门与门槽之间摩擦因数 f 为 0.25) 门上静水总压力的作用点在哪里?

解: 当不计门重时, 拖动门的拉力至少需克服闸门与门槽间的摩擦力, 故 $F = F_p \cdot f$ 。为此须首先求出作用于门上静水总压力 F_p 。

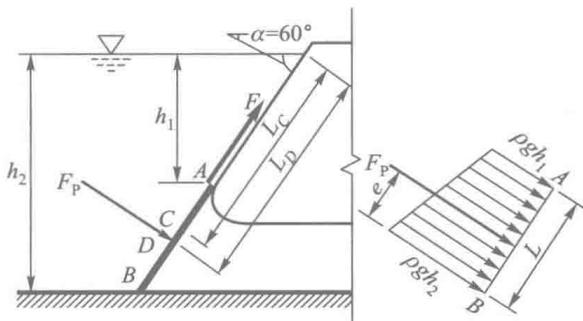


图 2.25

(1) 用压强分布图求 F_p 及作用点位置

首先画出闸门 AB 上静水压强分布图, 如图 2.25 所示。门顶处静水压强为 $\rho gh_1 = 1\,000 \times 9.8 \times 10 \text{ Pa} = 98 \text{ kPa}$; 门底处静水压强为 $\rho gh_2 = \rho g(h_1 + L \sin \alpha) = 1\,000 \times 9.8 \left(10 + 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ Pa} = 149 \text{ kPa}$ 。压强分布图为梯形, 其面积 $\Omega = \frac{1}{2}(\rho gh_1 + \rho gh_2)L = \frac{1}{2}(98 + 149) \times 6 \text{ kN/m} = 741 \text{ kN/m}$ 。静水总压力 $F_p = b \cdot \Omega = 4 \times 741 \text{ kN} = 2\,964 \text{ kN}$ 。

静水总压力作用点距闸门底部的斜距为

$$e = \frac{L(2h_1 + h_2)}{3(h_1 + h_2)} = \frac{6 \times \left(2 \times 10 + 10 + 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{3 \times \left(10 + 10 + 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right)} \text{ m} = 2.79 \text{ m}$$

总压力 F_p 距水面的斜距为

$$L_D = L + \frac{h_1}{\sin 60^\circ} - e = 6 \text{ m} + \frac{10}{0.87} \text{ m} - 2.79 \text{ m} = 14.71 \text{ m}$$

(2) 用解析法计算 F_p 及 L_D 以便比较

由式 (2.52), $F_p = p_C \cdot A = \rho gh_C \cdot bL$

$$h_C = h_1 + \frac{L}{2} \times \sin 60^\circ = 10 \text{ m} + 3 \times 0.87 \text{ m} = 12.61 \text{ m}$$

$$F_p = \rho gh_C \cdot bL = 1\,000 \times 9.8 \times 12.61 \times 4 \times 6 \text{ N} = 2\,964 \text{ kN}$$

由公式 (2.54) 求 F_p 的作用点距水面的斜距, 即

$$L_D = L_C + \frac{I_C}{L_C A}$$

$$L_C = \frac{L}{2} + \frac{h_1}{\sin 60^\circ} = 3 \text{ m} + \frac{10}{0.87} \text{ m} = 14.5 \text{ m}$$

对矩形平面，绕形心轴的面积惯性矩为

$$I_C = \frac{1}{12}bL^3 = \frac{1}{12} \times 4 \times 6^3 \text{ m}^4 = 72 \text{ m}^4$$

$$L_D = 14.5 + \frac{72}{14.5 \times 4 \times 6} \text{ m} = 14.71 \text{ m}$$

可见，采用上述两种方法计算其结果完全相同。

(3) 沿斜面拖动闸门的拉力

$$F = F_p \cdot f = 2964 \times 0.25 \text{ kN} = 741 \text{ kN}$$

例 2.5 一垂直放置的圆形平板闸门（图 2.26），已知闸门半径 R 为 1 m，形心在水下的淹没深度 h_C 为 8 m，求作用于闸门上静水总压力的大小及作用点位置。

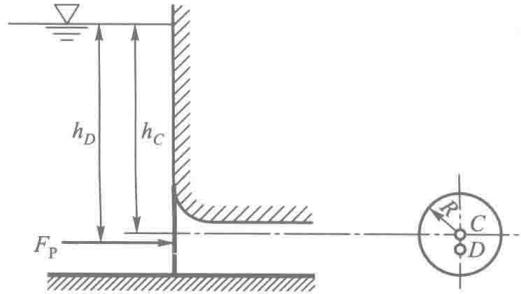


图 2.26

解：由式 (2.52) 计算总压力

$$F_p = p_C \cdot A = \rho g h_C \cdot \pi R^2 = 1000 \times 9.8 \times 8 \times 3.14 \times 1^2 \text{ N} = 246 \text{ kN}$$

作用点 D 应位于纵向对称轴上，故仅需求出 D 点在纵向对称轴上的位置。

在本题情况下，式 (2.54) 中 $L_C = h_C$ ， $L_D = h_D$ 。故

$$h_D = h_C + \frac{I_C}{h_C A}$$

圆形平面绕圆心轴线的面积惯性矩 $I_C = \frac{1}{4}\pi R^4$ 。则

$$h_D = 8 \text{ m} + \frac{\frac{1}{4} \times 3.14 \times 1^4}{8 \times 3.14 \times 1^2} \text{ m} = 8.03 \text{ m}$$

2.6 作用于曲面上的静水总压力

在水利工程上常遇到受压面为曲面的情况，如拱坝坝面、弧形闸墩或边墩、弧形闸门等，这些曲面多数为二向曲面（或称柱面），所以这里着重分析二向曲面的静水总压力计算。

作用在曲面上任意点处的相对静水压强，其大小仍等于该点的淹没深度乘以液体的单位体积的重量，即 $p = \rho g h$ ；其方向也是垂直指向作用面。二向曲面上的压强分布如图 2.27 所示。

图 2.28 所示为一母线与 Ox 轴平行的二向曲面，母线长为 b ，曲面在 yOz 面上的投影为曲线 EF ，曲面左侧受静水压力的作用。

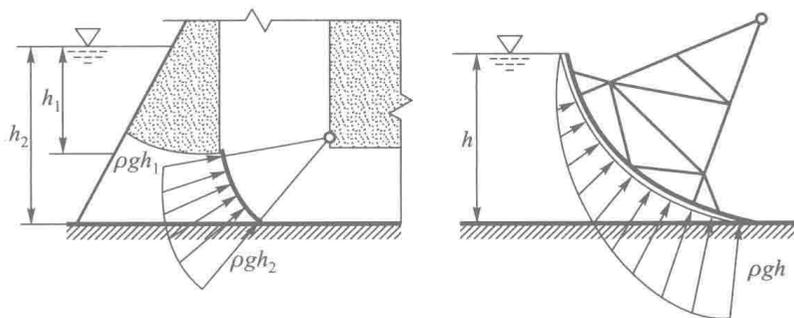


图 2.27

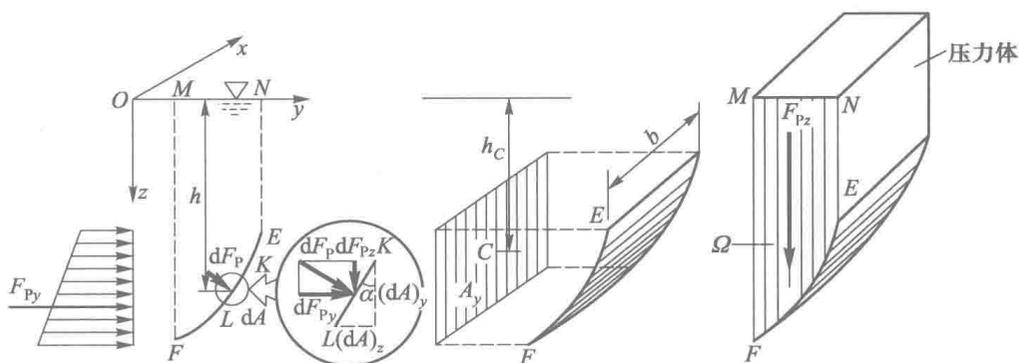


图 2.28

在计算平面上静水总压力大小时，可以把各部分面积上所受水压力直接求代数和，这相当于求一个平行力系的合力。然而，对于曲面由于各部分面积上所受静水压力的大小及方向均各不相同，故不能求代数和的方法来计算静水总压力。为了把它变成一个求平行力系的合力问题，只能分别计算作用在曲面上静水总压力的水平分力 F_{py} 和垂直分力 F_{pz} ，最后再将 F_{py} 与 F_{pz} 合成为总压力 F_p 。

2.6.1 静水总压力的水平分力

今在曲面 EF 上取一微分柱面 KL ，其面积为 dA ，对微分柱面 KL ，可视为倾斜平面，设它与铅垂面的夹角为 α ，作用于 KL 面上的静水压力为 dF_p ，由图 2.28 可见， dF_p 在水平方向的分力为

$$dF_{py} = dF_p \cos \alpha$$

总压力的水平分力可看作是无限多个 dF_{py} 的合力，故

$$F_{py} = \int dF_{py} = \int dF_p \cdot \cos \alpha \tag{2.57}$$

根据平面静水压力计算公式

$$dF_p = p \cdot dA = \rho gh \cdot dA$$

其中 h 为 dA 面形心点在液面下的淹没深度。于是

$$dF_p \cos \alpha = \rho gh dA \cos \alpha$$

令 $dA \cos \alpha = (dA)_y$, $(dA)_y$ 为 dA 在 xOz 坐标平面的投影面积。则

$$F_{p_y} = \int \rho gh dA \cos \alpha = \rho g \int_{A_y} h (dA)_y \quad (2.58)$$

由理论力学可知

$$\int_{A_y} h (dA)_y = h_C A_y \quad (2.59)$$

式中, A_y 为曲面 EF 在 xOz 坐标面上的投影面积; h_C 为 A_y 面形心点 C 在液面下的淹没深度。

将式 (2.59) 代入式 (2.58) 得

$$F_{p_y} = \rho gh_C A_y \quad (2.60)$$

式 (2.60) 表明: 作用在曲面上静水总压力 F_p 的水平分力 F_{p_y} , 等于曲面在 xOz 平面上的投影面 A_y 上的静水总压力。这样, 把求曲面上静水总压力的水平分力, 转化为求另一铅垂平面 A_y 的静水总压力问题。很明显, 水平分力 F_{p_y} 的作用线应通过 A_y 平面的压力中心。

2.6.2 静水总压力的垂直分力

如图 2.28 所示, 在微分柱面 KL 上, 静水压力 dF_p 沿铅垂方向的分力为

$$dF_{p_z} = dF_p \sin \alpha$$

整个 EF 曲面上总压力的垂直分力 F_{p_z} , 可看作许多个 dF_{p_z} 的合力, 故

$$F_{p_z} = \int dF_{p_z} = \int dF_p \cdot \sin \alpha = \int_A \rho gh dA \sin \alpha \quad (2.61)$$

令 $(dA)_z = dA \sin \alpha$, $(dA)_z$ 为 dA 在 xOy 平面上的投影, 代入式 (2.61), 得

$$F_{p_z} = \rho g \int_{A_z} h (dA)_z \quad (2.62)$$

从图 2.28 来看, $h (dA)_z$ 为 KL 面所托的水体体积, 而 $\int_{A_z} h (dA)_z$ 为 EF 曲面所托的水体体积。令

$$V = \int_{A_z} h (dA)_z \quad (2.63)$$

则式 (2.62) 可改写为

$$F_{Pz} = \rho g V \quad (2.64)$$

式中, V 是代表以面积 $EFMN$ 为底, 长为 b 的柱体体积, 该柱体称为压力体。式 (2.64) 表明: 作用于曲面上静水总压力 F_P 的垂直分力 F_{Pz} , 等于压力体内的水体重。

令压力体底面积 (即 $EFMN$ 的面积) 为 Ω , 则

$$V = b\Omega \quad (2.65)$$

2.6.3 压力体的概念

压力体是计算静水总压力垂直分力 F_{Pz} 的一个重要的概念。从上述分析可知, 压力体只是作为计算曲面上垂直压力的一个数值当量, 它不一定是由实际水体所构成。对图 2.28 所示的曲面, 压力体为水体所充实, 称为实压力体; 但在另外一些情况下, 式 (2.63) 所表达的压力体内, 不一定存在水体, 如图 2.29 所示的曲面, 其相应的压力体 (图中阴影部分) 内并无水体, 称为虚压力体。此外, 若压力体和液体在同侧, 但其自由面为液面的延伸面, 压力体部分充有液体, 这称为半虚半实压力体, 如图 2.30b 所示。

压力体应由下列周界面所围成:

- (1) 受压曲面本身;
- (2) 液面 (图 2.28) 或液面的延长面 (图 2.29);
- (3) 通过曲面的四个边缘向液面或液面的延长面所作的铅垂平面。

关于垂直分力 F_{Pz} 的方向, 则应根据曲面与压力体的关系而定: 当液体和压力体位于曲面的同侧 (图 2.28) 时, F_{Pz} 向下; 当液体及压力体位于曲面的两侧 (图 2.29) 时, F_{Pz} 向上。即实压力体 F_{Pz} 方向向下, 虚压力体时 F_{Pz} 方向向上。对于简单圆柱面, F_{Pz} 的方向也可以由作用的静水总压力垂直指向作用面这个性质加以确定。

当曲面为凹凸相间的复杂柱面时, 可在曲面与铅垂面相切处将曲面分开, 分别绘出各部分的压力体, 并定出各部分垂直压力的方向, 然后合成起来即可得出总的垂直压力的方向。图 2.30 所示的曲面 $ABCD$, 可分成 AC 及 CD 两部分, 其压力体及相应 F_{Pz} 的方向如图中 a, b 所示, 合成后的压力体则如图 2.30c 所示。曲面 $ABCD$ 所受静水总压力垂直分力 F_{Pz} 的大小及其方向, 即不难由图 2.30c 定出。

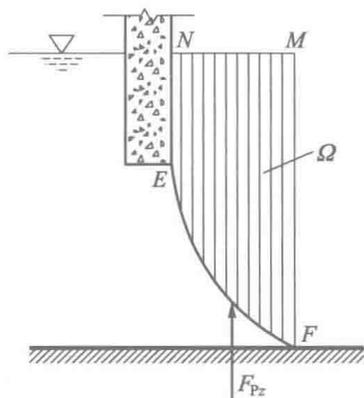


图 2.29

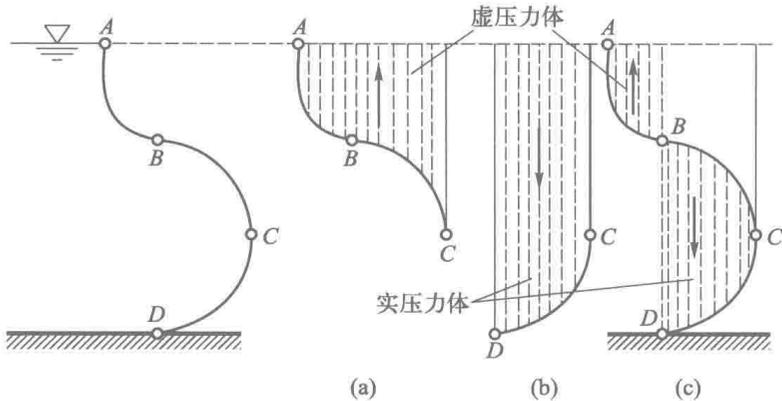


图 2.30

垂直分力 F_{Pz} 的作用线，应通过压力体的体积形心。

2.6.4 静水总压力

由二力合成定理，曲面所受静水总压力的大小为

$$F_p = \sqrt{F_{Py}^2 + F_{Pz}^2} \quad (2.66)$$

为了确定总压力 F_p 方向，可以求出 F_p 与水平面的夹角 α 值（图 2.31）：

$$\tan\alpha = \frac{F_{Pz}}{F_{Py}} \quad (2.67)$$

或

$$\alpha = \arctan \frac{F_{Pz}}{F_{Py}} \quad (2.68)$$

总压力 F_p 的作用线应通过 F_{Py} 与 F_{Pz} 的交点 K （图 2.31），过 K 点沿 F_p 的方向延长交曲面于 D ， D 点即为总压力 F_p 在曲面 AB 上的作用点。

最后，再把三向曲面上静水总压力的计算问题略为提示一下。当受压面为三向曲面时，曲面不仅在 yOz 平面上有投影，而且在 xOz 平面上也有投影，故曲面上所受的水平分力，除有与 y 轴方向平行的力 F_{Py} 外，还存在与 x 轴方向平行的分力 F_{Px} 。 F_{Px} 的计算原则与 F_{Py} 相同，它等于曲面在 xOz 投影面上的静水总压力。至于垂直分力 F_{Pz} 则和二向曲面计算方法一样。全部总压力应由 F_{Px} ， F_{Py} 和 F_{Pz} 三个分力合成。

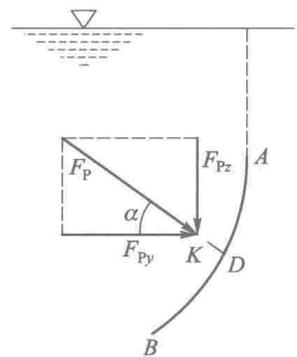


图 2.31

例 2.6 某灌区引水枢纽泄洪闸共装 5 孔弧形闸门，每孔门宽 b 为 10 m，

弧门半径 R 为 12 m，其余尺寸见图 2.32。试求当上游为正常引水位 66.50 m、闸门关闭情况下，作用于一孔弧形门上静水总压力大小及方向。

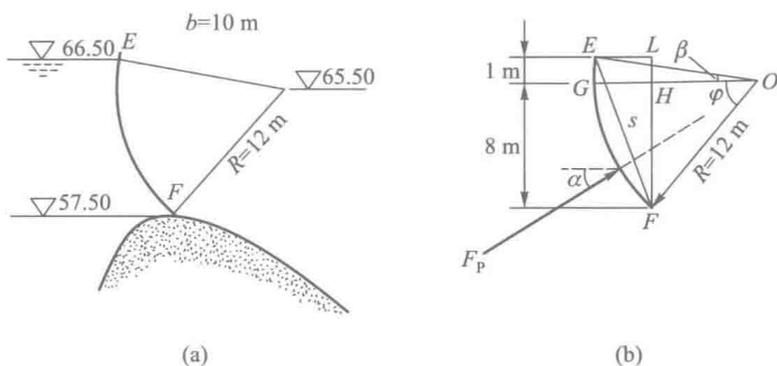


图 2.32

解：(1) 首先求水平分力 F_{Py} 。由式 (2.60) 有

$$F_{Py} = \rho g h_c A_y = 1000 \times 9.8 \times \frac{9}{2} \times 10 \times 9 \text{ N} = 3969 \text{ kN}$$

(2) 求垂直分力 F_{Pz} 。由式 (2.64) 与式 (2.65) 有

$$F_{Pz} = \rho g V \text{ 且 } V = b\Omega$$

如图 2.32b 所示，压力体的底面积 Ω 为弓形面积 EGF 与三角形面积 EFL 的和，其中，弓形面积为

$$S_{EGF} = \frac{1}{2} R^2 \times \frac{\pi}{180^\circ} \times (\beta + \varphi) - \frac{1}{2} s \sqrt{R^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

式中

$$\sin \beta = \frac{1 \text{ m}}{OE} = \frac{1}{12} = 0.083, \quad \beta = 4^\circ 47'$$

$$\sin \varphi = \frac{8 \text{ m}}{OF} = \frac{8}{12} = 0.667, \quad \varphi = 41^\circ 48'$$

$$\beta + \varphi = 4^\circ 47' + 41^\circ 48' = 46^\circ 35' = 46.58^\circ$$

$$\text{弦长 } s = 2R \sin \left(\frac{\beta + \varphi}{2} \right) = 2 \times 12 \times \sin \frac{46.58^\circ}{2} \text{ m} = 9.49 \text{ m}$$

$$\text{故弓形面积 } S_{EGF} = \frac{1}{2} \times 12^2 \text{ m}^2 \times \frac{3.14}{180^\circ} \times 46.58^\circ - \frac{9.49}{2} \sqrt{12^2 - \left(\frac{9.49}{2}\right)^2} \text{ m}^2 = 6.24 \text{ m}^2$$

$$\text{三角形面积 } S_{EFL} = \frac{1}{2} EL \cdot LF$$

式中

$$LF = 9 \text{ m}$$

$$EL = \sqrt{EF^2 - LF^2} = \sqrt{s^2 - LF^2} = \sqrt{9.49^2 - 9^2} \text{ m} = 3.01 \text{ m}$$

故三角形面积 $S_{EFL} = \frac{1}{2} \times 3.01 \times 9 \text{ m}^2 = 13.55 \text{ m}^2$

则 $\Omega = S_{EGF} + S_{EFL} = 6.24 + 13.55 \text{ m}^2 = 19.79 \text{ m}^2$

$$F_{p_z} = \rho g V = \rho g b \Omega = 1000 \times 9.8 \times 10 \times 19.79 \text{ N} = 1939 \text{ kN}$$

因压力体与液体位于曲面的两侧，故 F_{p_z} 的方向向上。

$$\text{总压力 } F_p = \sqrt{F_{p_y}^2 + F_{p_z}^2} = \sqrt{3969^2 + 1939^2} \text{ kN} = 4417 \text{ kN}$$

$$\text{总压力 } F_p \text{ 与水平方向的夹角为 } \alpha, \alpha = \arctan \frac{1939}{3969} = 26^\circ 2'.$$

因为曲面为圆柱面的一部分，各点压强均垂直于柱面并通过圆心，故总压力 F_p 也必通过圆心 O 点。

例 2.7 有一薄壁金属压力管，管中受均匀水压力作用，其压强为 p (图 2.33)，管内径为 D ，当管壁允许拉应力为 $[\sigma]$ 时，求管壁厚 δ 为多少？(不考虑由于管道自重和水重而产生的应力。)

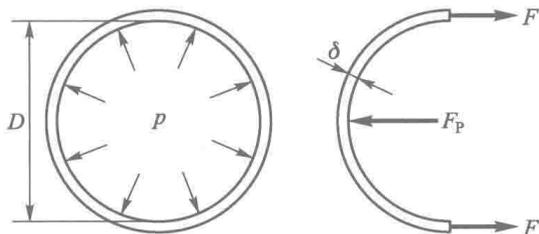


图 2.33

解：因水管在内水压力作用下，管壁将受到拉应力，此时外荷载为水管内壁（曲面）上的水压力。

为了分析水管内力与外荷载的关系，沿管轴方向取单位长度的管段，从直径方向剖开，在该剖面上管壁所受总内力为 $2F$ ，并且

$$2F = 2 \times \delta \times 1 \times \sigma = 2\delta\sigma$$

式中， σ 为管壁上的拉应力。

令 F_p 为作用于曲面内壁上总压力沿内力 F 方向的分力，由曲面总压力水平分力计算公式

$$F_p = p_c A_y = p \times D \times 1 = pD$$

外荷载与总内力应相等，即

$$2\delta\sigma = pD$$

若令管壁所受拉应力恰好等于其允许拉应力 $[\sigma]$ ，则所需要的管壁厚度为

$$\delta = \frac{\rho D}{2[\sigma]} \quad (2.69)$$

2.7 浮力及浮体与潜体的稳定性

2.7.1 阿基米德原理

当物体淹没于静止液体中时，作用于物体上的静水总压力等于该物体表面上所受静水压力的总和。

如图 2.34 所示，有一任意形状物体淹没于水下。研究液体作用于此物体上的力，和计算曲面静水总压力一样，假定整个物体表面（看作三向曲面）上的静水总压力可分为三个方向的分力： F_{Px} 、 F_{Py} 和 F_{Pz} 。

首先计算水平分力 F_{Px} 和 F_{Py} 。如图 2.34 所示，取坐标系 xOy 平面与液面重合。今以平行于 Oy 轴的直线与物体表面相切，其切点构成一根封闭曲线 $abdc$ ，曲线 $abdc$ 将物体表面分成左右两半，作用于物体表面静水总压力的水平分力 F_{Px} ，应为左半部表面上水平分力 F_{Px1} 和右半部表面上水平分力 F_{Px2} 之和。但是不难看出，左半部表面和右半部表面在 yOz 平面上的投影面积 A_x 相等，因而 F_{Px1} 和 F_{Px2} 大小相等，方向相反，合成后在 Ox 方向分力 F_{Px} 为零。

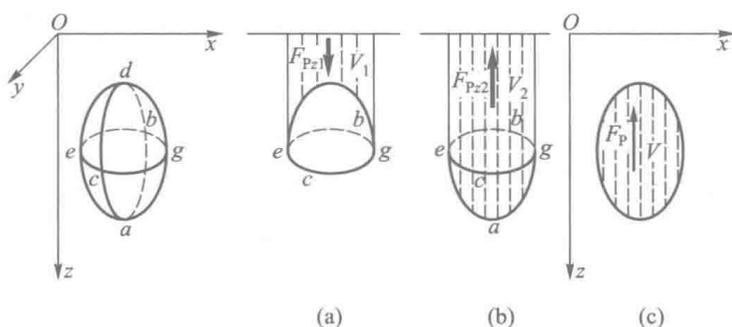


图 2.34

用同样方法可以证明，整个表面所受 Oy 方向的静水压力 F_{Py} 也等于零。

其次再来讨论垂直分力 F_{Pz} 。如图 2.34 所示，今以与 Oz 轴垂直的平面与物体表面相切，切点形成一条封闭曲线 $ebgc$ ，曲线把物体表面分成上、下两部分。图 2.34a 表示作用于上部分曲面的压力体 V_1 ，其相应的垂直压力 $F_{Pz1} = \rho g V_1$ ，方向向下；图 2.34b 表示作用于下部分曲面的压力体 V_2 ，相应的垂直压力 $F_{Pz2} = \rho g V_2$ ，方向向上；合成后的压力体 V 见图 2.34c， $\rho g V$ 就表示液体对淹

没在水中物体的静水总压力 F_p ，方向向上，其表达式为

$$F_p = \rho g(V_2 - V_1) = \rho gV \quad (2.70)$$

以上讨论表明：作用于淹没物体上的静水总压力只有一个铅垂向上的力，这就是浮力，其大小等于该物体所排开的同体积的水重。这一原理是希腊科学家阿基米德约公元前 250 年所发表，故称阿基米德原理。

液体对淹没物体的作用力，由于方向向上故也称上浮力，上浮力的作用点在物体被淹没部分体积的形心，该点称为浮心。

在证明阿基米德原理的过程中，假定物体全部淹没于水下，但所得结论，对部分淹没于水中的物体，也完全适用。

2.7.2 物体在静止液体中的浮沉

物体在静止液体中，除受重力作用外，还受到液体上浮力的作用。若物体在空气中的自重为 G ，其体积为 V ，则物体全部淹没于水下时，物体所受的上浮力为 ρgV 。

如果 $G > \rho gV$ 时，物体将会下沉，直至沉到底部才停止下来，这样的物体称为沉体。

如果 $G < \rho gV$ 时，物体将会上浮，一直要浮出水面，且使物体所排开的液体重量和自重刚好相等后，才保持平衡状态，这样的物体称为浮体。

如果 $G = \rho gV$ 时，物体可以潜没于水中的任何位置而保持平衡，这样的物体称为潜体。

物体的沉浮，是由它所受重力和上浮力的相互关系来决定的。

2.7.3 潜体的平衡及其稳定性

潜体的平衡，是指潜体在水中既不发生上浮或下沉，也不发生转动的平衡状态。图 2.35 所示为一潜体，为使讨论具有普遍性，假定物体内部质量不均

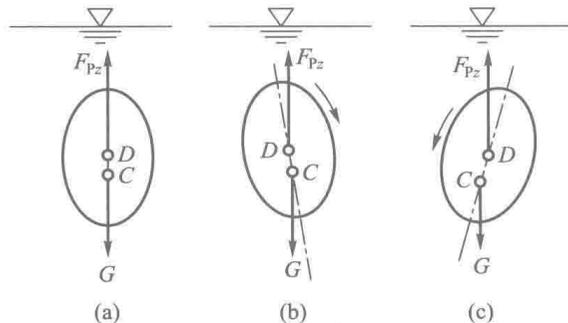


图 2.35

匀，重心 C 和浮心 D 并不在同一位置。这时，潜体在浮力及重力作用下保持平衡的条件是：

(1) 作用于潜体上的浮力和重力相等，即 $G = \rho g V$ 。

(2) 重力和浮力对任意点的力矩代数和为零。要满足这一条件，必须使重心 C 和浮心 D 位于同一条铅垂线上（图 2.35a）。

再来分析一下潜体平衡的稳定性。所谓平衡的稳定性是指已经处于平衡状态的潜体，如果因为某种外来干扰使之脱离平衡位置时，潜体自身恢复平衡的能力。

图 2.35b, c 表示一个重心位于浮心之下的潜体，原来处于平衡状态，由于外来干扰，使潜体向左或向右侧倾斜，因而有失去平衡的趋势。但倾斜以后，由重力和上浮力所形成的力偶可以反抗其继续倾倒。当外来干扰撤除后，自身有恢复平衡的能力，这样的平衡状态称为稳定平衡。

相反，如图 2.36 所示，一个重心位于浮心之上的潜体，原来处于平衡状态，由于外来干扰使潜体发生倾斜。当倾斜以后，由重力和上浮力所构成的力偶，有使潜体继续扩大其倾覆的趋势，这种平衡状态，即使在干扰撤除以后，仍可以遭到破坏，因而为不稳定平衡。

综上所述，潜体平衡的稳定条件是要使重心位于浮心之下。

当潜体的重心与浮心重合时，潜体处于任何位置都是平衡的，此种平衡状态称为随遇平衡。

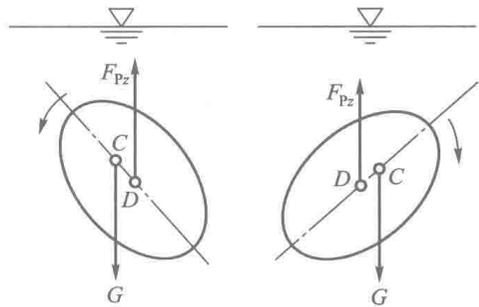


图 2.36 潜体的不稳定平衡

2.7.4 浮体的平衡及其稳定性

浮体的平衡条件和潜体一样，但浮体平衡的稳定要求和潜体有所不同。浮体重心在浮心之上时，其平衡仍有可能是稳定的。下面来作具体分析。

图 2.37 表示一横向对称的浮体，重心 C 位于浮心 D 之上。通过浮心 D 和重心 C 的直线 $O-O$ 称为浮轴，在平衡状态下，浮轴为一条铅垂直线。当浮体受到外来干扰（如风吹、浪打）发生倾斜时，浮体被淹没部分的几何形状改变，从而使浮心 D 移至新的位置 D' ，此时浮力 F_{pz} 与浮轴有一交点 M ， M 称为定倾中心， MD 的距离称为定倾半径，以 ρ 表示。在倾角 α 不大的情况下，实用上可近似认为 M 点位置不变。

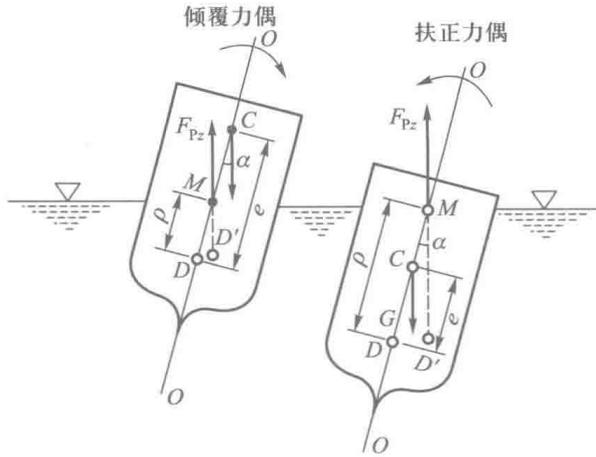


图 2.37 浮体平衡的稳定性

假定浮体的重心 C 点也不变，令 C 与 D 之间的距离为 e ，称 e 为重心与浮心的偏心距。由图 2.37 不难看出，当 $\rho > e$ （即定倾中心高于重心）时，浮体平衡是稳定的，此时浮力与重力所产生的力偶可以使浮体恢复平衡，故此力偶称为扶正力偶。若当 $\rho < e$ （即定倾中心低于重心）时，浮力与重力构成了倾覆力偶，使浮体有继续倾倒的趋势。

综上所述，浮体平衡的稳定条件为定倾中心要高于重心，或者说，定倾半径大于偏心距。

思 考 题

2.1 静水压强有哪些特性？静水压强的分布规律是什么？

2.2 何谓绝对压强、相对压强和真空压强？它们的表示方法有哪三种？它们之间有什么关系？

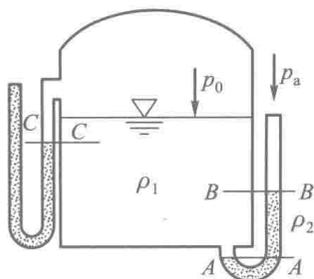
2.3 图示一密闭水箱，试分析水平面 $A-A$ 、 $B-B$ 、 $C-C$ 是否皆为等压面？何谓等压面？等压面的条件有哪些？

2.4 一密闭水箱（如图所示）系用橡胶管从 C 点连通容器 II，并在 A 、 B 两点各接一测压管，问：

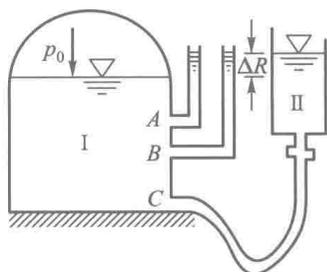
(1) A 、 B 两测压管中水位是否相同？如相同时，问 A 、 B 两点压强是否相等？

(2) 把容器 II 提高一些后， p_0 比原来值增大还是减小？两测压管中水位变化如何？

2.5 压力体的概念是什么？如何确定压力体的范围及作用力方向？



思 2.3



思 2.4

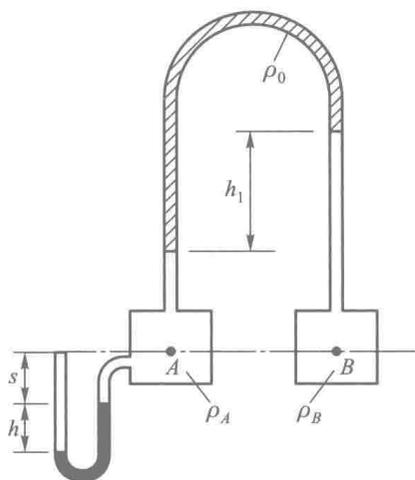
习 题

2.1 如图所示, 盛有同种介质 (密度 $\rho_A = \rho_B = 1\,200\text{ kg/m}^3$) 的两容器, 其中心点 A 与 B 位于同一高程, 今用 U 形差压计测定 A 与 B 点之压差 (差压计内盛油, 密度 $\rho_0 = 800\text{ kg/m}^3$), A 点还装有一水银测压计。其他有关数据 $s = 5\text{ cm}$, $h_1 = 20\text{ cm}$, $h = 4\text{ cm}$ 。试求:

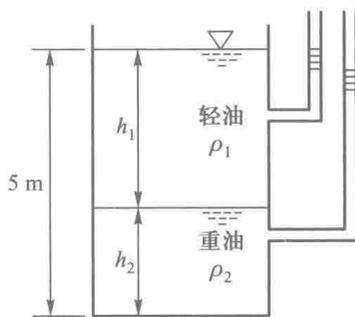
- (1) A 与 B 两点之压差为多少?
- (2) A 与 B 两点中是否有真空存在? 若存在其值为多少?

2.2 图示一圆柱形油桶, 内装轻油及重油。轻油密度 $\rho_1 = 600\text{ kg/m}^3$, 重油密度 $\rho_2 = 900\text{ kg/m}^3$, 当两种油重量相等时, 试求:

- (1) 两种油的深度 h_1 及 h_2 为多少?
- (2) 两测压管内油面将上升至什么高度?



题 2.1



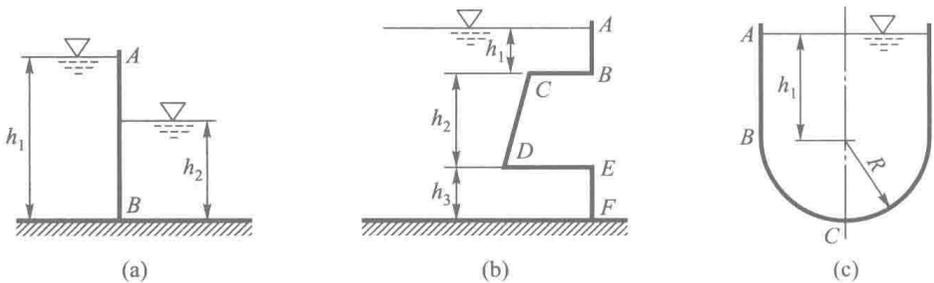
题 2.2

2.3 盛同一种液体的两容器，用两根 U 形差压计连接。上部差压计内盛密度为 ρ_A 的液体，液面高差为 A ；下部差压计内盛密度为 ρ_B 的液体，液面高差为 B 。求容器内液体的密度 ρ （用 ρ_A 、 ρ_B 及 A 、 B 表示）。

2.4 一圆柱形容器静止时盛水深度 $H=0.5\text{ m}$ ，筒总高为 0.8 m ，内径 $D=0.1\text{ m}$ ，若把圆筒绕中心轴作等角速度旋转；试问：

- (1) 不使水溢出容器，最大角速度为多少？
- (2) 为不使容器底中心露出，最大角速度为多少？

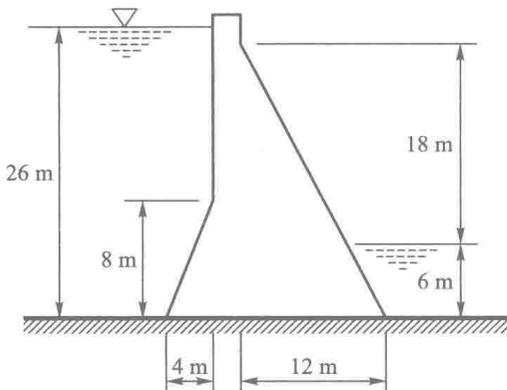
2.5 画出下列图中各标有字母的受压面上的静水压强分布图。



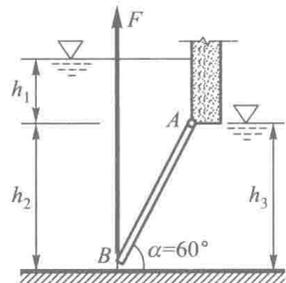
题 2.5

2.6 图示一混凝土重力坝，为了校核坝的稳定性，试分别计算当下游有水和下游无水两种情况下，作用于 1 m 长坝体上水平方向的水压力及垂直水压力。

2.7 图示一矩形平板闸门 AB ，门的转轴位于 A 端，已知门宽 4 m ，门重 98 kN （门厚均匀），闸门与水平面夹角 α 为 60° ， $h_1=1\text{ m}$ ， $h_2=2\text{ m}$ ，若不计门轴摩擦，在门的 B 端用铅垂方向钢索起吊。试求：



题 2.6

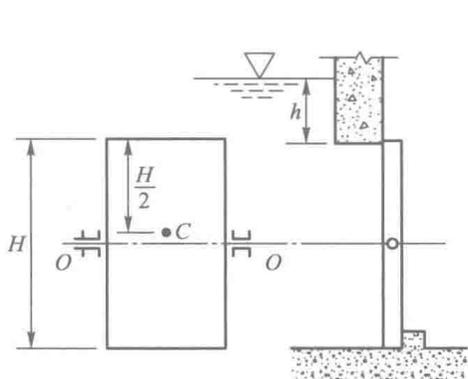


题 2.7

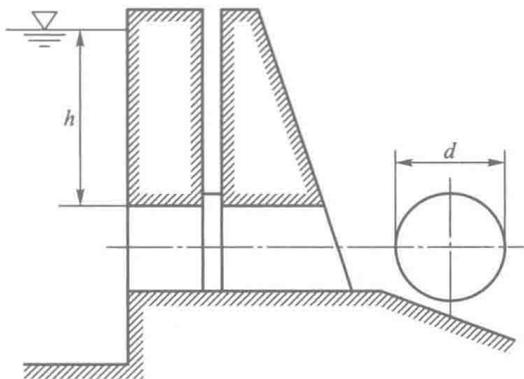
- (1) 当下游无水，即 $h_3 = 0$ 时启动闸门所需的垂向拉力 F ；
- (2) 当下游有水， $h_3 = h_2$ 时启动所需的垂向拉力 F 。

2.8 图示一直立的矩形自动翻板闸门，门高 H 为 5 m，如果要求水面超过门顶 h 为 1 m 时，翻板闸门即可自动打开，若忽略门轴摩擦的影响，问该门转动轴 $O-O$ 应放在什么位置？

2.9 图示渠道侧壁上，开有圆形放水孔，放水孔直径 $d = 1$ m，孔顶至水面的深度 $h = 3$ m，试求放水孔闸门上的水压力及压力中心位置。

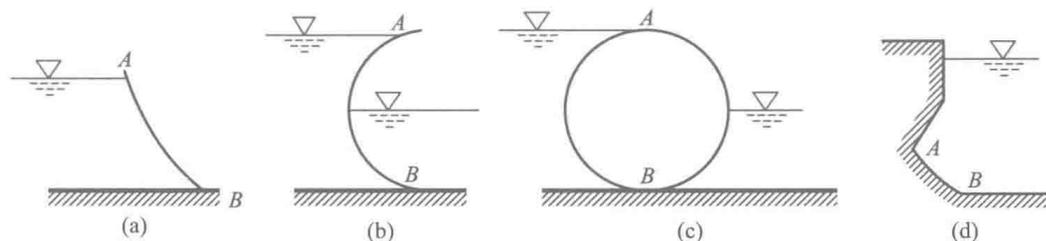


题 2.8



题 2.9

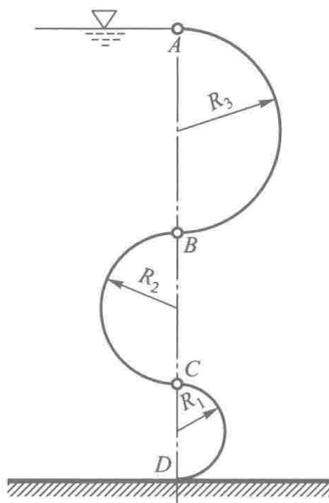
2.10 试画出下列图中各标有字母曲线上的水平压强分布图与压力体图，并分析其压力体类型和压力体方向。



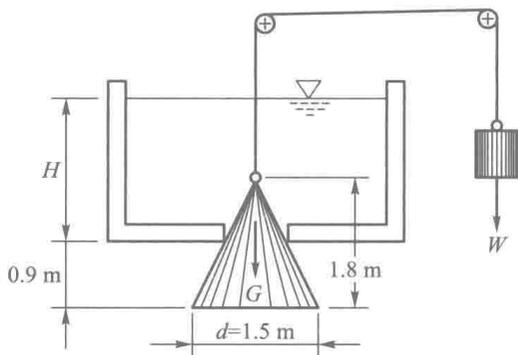
题 2.10

2.11 图示由三个半圆弧所连接成的曲面 $ABCD$ ，其半径 $R_1 = 1$ m， $R_2 = 2$ m， $R_3 = 3$ m，曲面宽 $b = 2$ m，试求该曲面所受水压力的水平分力及垂直分力各为多少？并指出垂直水压力的方向。

2.12 图示水箱圆形底孔采用锥形自动控制阀，锥形阀以钢丝悬吊于滑轮上，钢丝的另一端系有重量 W 为 12 000 N 的金属块，锥形阀自重 G 为 300 N。当不计滑轮摩擦时，问箱中水深 H 为多大时锥形阀即可自动开启？

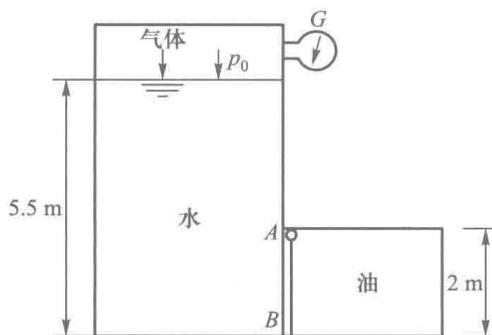


题 2.11



题 2.12

2.13 如图所示, 闸门 AB 宽 1.5 m , 铰在 A 点, 压力表 G 的读数为 -15 kPa , 在右侧箱中油的密度 $\rho_0 = 800\text{ kg/m}^3$ 。问在 B 点加多大的水平力才能使闸门 AB 平衡?



题 2.13

2.14 某电站压力输水管, 直径 $D = 2\text{ m}$, 管材允许抗拉强度 $[\sigma]$ 为 140 MPa 。若管内作用水头 H 为 140 m , 试设计管壁所需要的厚度 δ 。

3 液体运动的流束理论

上一章已经介绍了有关水静力学的基本原理及其应用。但是，在实际工程中经常遇到的是运动的液体，静止的液体只是一种特殊的存在形式。只有对运动液体进行深入的分析研究才能得出表征液体运动规律的一般的原理。从本章开始将讨论水动力学的一些基本理论及其应用。

液体的运动特性可用流速、加速度等物理量来表征，这些物理量通称为液流的运动要素。水动力学的基本任务就是研究这些运动要素随时间和空间的变化情况，以及建立这些运动要素之间的关系式，并用这些关系式来解决工程上所遇到的实际问题。

液体作机械运动时，它仍须遵循物理学及力学中的质量守恒定律、能量守恒定律及动量定律等普遍规律。

本章首先建立有关液体运动的基本概念，然后从流束理论出发，讨论一般液体运动所遵循的普遍规律并建立相应的方程式。即从质量守恒定律、能量守恒定律和动量定律出发分别建立水流微小流束的连续性方程、能量方程和动量方程。对微小流束的运动方程进行积分，通过引入断面平均流速、动能修正系数、动量修正系数等概念，得到恒定总流的连续性方程、能量方程及动量方程。

具体边界条件下的特定形式的水流运动，如管流、明渠水流、堰闸水流等，将分别在后面各章讨论。

3.1 描述液体运动的方法

液体流动时，表征运动特征的运动要素一般都随着时间和空间位置而变化，而液体又是由为数众多的质点所组成的连续介质，怎样来描述液体的运动规律呢？解决这个问题一般有两种方法，即拉格朗日法与欧拉法。

3.1.1 拉格朗日法

拉格朗日法以研究个别液体质点的运动为基础，通过对每个液体质点运动规律的研究来获得整个液体运动的规律性。所以这种方法又可叫作质点系法。

如某一液体质点 M (图 3.1), 在 $t = t_0$ 时刻占有空间坐标为 (a, b, c) , 该坐标称为起始坐标; 在任意 t 时刻所占有的空间坐标为 (x, y, z) , 该坐标称为运动坐标; 则运动坐标可表示为时间 t 与该点起始坐标的函数, 即

$$\left. \begin{aligned} x &= x(a, b, c, t) \\ y &= y(a, b, c, t) \\ z &= z(a, b, c, t) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

式中 a, b, c, t 称为拉格朗日变数。若给定方程中的 a, b, c 值, 就可以得到某一特定质点的轨迹方程。

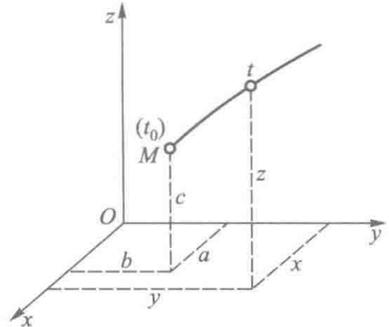


图 3.1

若要知道任一液体质点在任意时刻的速度, 可将式 (3.1) 对时间 t 取偏导数, 得出该质点的速度在 x, y, z 轴方向的分量为

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x(a, b, c, t)}{\partial t} \\ u_y &= \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y(a, b, c, t)}{\partial t} \\ u_z &= \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z(a, b, c, t)}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

同理, 若将式 (3.2) 对时间取导数, 可得出液体质点运动的加速度。

在以上的讨论中, 所描述的是液体质点的运动。这里所指的液体质点, 是指具有无限小的体积的液体质量, 它既不是液体分子, 也不同于数学上的空间点。空间点是一个几何概念, 既没有大小也没有质量, 而所说的液体质点, 它的尺寸大小比所研究的运动空间来说小得类似于一个点, 但其中确又包含了很多的液体分子。

拉格朗日法在概念上简明易懂, 它和研究固体质点运动的方法没有什么不同之处, 但由于液体质点的运动轨迹非常复杂, 要寻求为数众多的个别质点的运动规律, 除了较简单的典型运动情况以外, 将会在数学上导致难以克服的困难。而从实用的观点来看, 常常并不需要知道每个质点的运动情况, 因此这种方法在水力学上很少采用。在水力学上普遍采用的是欧拉法。

3.1.2 欧拉法

欧拉法是以考察不同液体质点通过固定的空间点的运动情况来了解整个流动空间内的流动情况, 即着眼于研究各种运动要素的分布场, 所以这种方法又

叫作流场法。采用欧拉法，可把流场中任何一个运动要素，表示为空间坐标和时间的函数。例如任意时刻 t 通过流场中任意点 (x, y, z) 的液体质点的流速在各坐标轴上的投影 u_x, u_y, u_z 可表示为

$$\left. \begin{aligned} u_x &= u_x(x, y, z, t) \\ u_y &= u_y(x, y, z, t) \\ u_z &= u_z(x, y, z, t) \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

若令上式中 x, y, z 为常数， t 为变数，即可求得在某一固定空间点上，液体质点在不同时刻通过该点的流速的变化情况。若令 t 为常数， x, y, z 为变数，则可求得在同一时刻，通过不同空间点上的液体质点的流速的分布情况（即流速场）。

将式 (3.3) 对时间取导数，可以得到质点通过流场中任意点的加速度在各坐标轴上的投影：

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{du_x}{dt} \\ a_y &= \frac{du_y}{dt} \\ a_z &= \frac{du_z}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

对流场内任意点的动水压强等其他运动要素，也可作类似的表示。

在实际工程中，一般都只需要弄清楚在某一些空间位置上水流的运动情况，而并不去追究液体质点的运动轨迹。例如研究一条隧洞中的水流，若知道了液体经过隧洞中不同位置时的速度及动水压强，基本就能满足工程设计的需要。所以欧拉法对水力学的研究具有重要的意义。

3.2 液体运动的一些基本概念

3.2.1 恒定流与非恒定流

用欧拉法描述液体运动时，一般情况下，将各种运动要素都表示为空间坐标和时间的连续函数。

如果在流场中任何空间点上所有的运动要素都不随时间而改变，这种水流称为恒定流。也就是说，在恒定流的情况下，任一空间点上，无论哪个液体质点通过，其运动要素都是不变的，运动要素仅仅是空间坐标的连续函数，而与时间无关。例如对流速而言：

$$\left. \begin{aligned} u_x &= u_x(x, y, z) \\ u_y &= u_y(x, y, z) \\ u_z &= u_z(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

因此，所有的运动要素对于时间的偏导数应等于零：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial u_z}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

如图 3.2 所示，在水库的岸边布置了一条泄水隧洞，当水库水位保持恒定不变（不随时间而变化）时，隧洞中水流（在隧洞中任何位置）的所有运动要素都不会随时间而改变，因而通过隧洞的水流为恒定流。

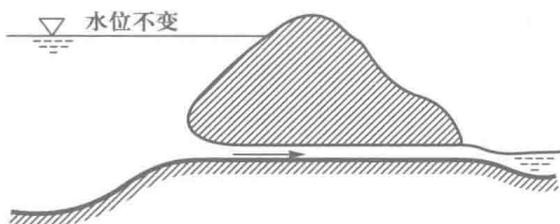


图 3.2

如果流场中任何空间点上有任何一个运动要素是随时间而变化的，这种水流称为非恒定流。

如图 3.3 所示，当水库中水位随着时间而改变（上升或下降），那么隧洞中水流的运动要素也必然随时间而改变，此时洞内水流为非恒定流。天然河道中洪水的涨落，进水闸在调节流量过程中渠道中的水流等，都是非恒定流的例子。

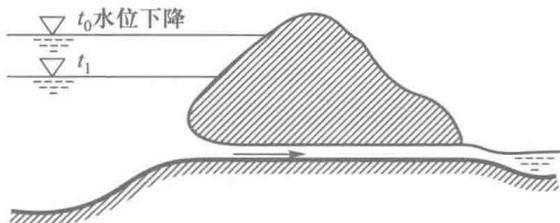


图 3.3

研究每一种实际水流运动，首先需要分清水流属于恒定流还是非恒定流。在恒定流问题中，不包括时间变量，水流运动的分析较为简单；而在非恒定流

的情况下，由于增加了时间变量，运动的分析就比较复杂。

3.2.2 流线与迹线

1. 流线与迹线的概念

前已述及，描述液体运动有两种不同的方法。拉格朗日法是研究液体质点在不同时刻的运动情况，欧拉法是考察同一时刻液体质点在不同空间位置的运动情况，前者引出了迹线的概念，后者引出了流线的概念。

某一液体质点在运动过程中，不同时刻所流经的空间点所连成的线称为迹线，即迹线就是液体质点运动时所走过的轨迹线。

流线与迹线不同，它是某一瞬时在场中绘出的一条曲线，在该曲线上所有各点的速度向量都与该曲线相切。所以流线表示出了瞬间的流动方向，其绘制方法如下：

设在某时刻 t_1 流场中有一点 A_1 ，该点的流速向量为 \mathbf{u}_1 （图 3.4），在这个向量上取与 A_1 相距为 Δs_1 的点 A_2 ；在同一时刻， A_2 点的流速向量设为 \mathbf{u}_2 ，在向量 \mathbf{u}_2 上取与 A_2 点相距为 Δs_2 的点 A_3 ；若该时刻 A_3 点的流速向量为 \mathbf{u}_3 ，在向量 \mathbf{u}_3 上再取与 A_3 相距为 Δs_3 的点 A_4 ，…，如此继续，可以得出一条折线 $A_1A_2A_3A_4\cdots$ ，若让所取各点距离 Δs 趋近于零，则折线变成一条曲线，这条曲线就是 t_1 时刻通过空间点 A_1 的一条流线。同样，可以作出 t_1 时刻通过其他各点的流线，这样一簇流线就反映了 t_1 时刻流场内的流动图像。如果水流为非恒定流，当时刻变为 t_2 时，又可以重新得到在 t_2 时刻的一簇新的流线，时间改变了，反映流场流动图像的流线也就改变了。所以对于非恒定流，流线只具有瞬时的意义。

对于一个具体的实际水流，可以根据流线方程式，采用实验方法，或者采用逐步近似法来绘出它的流线。

2. 流线的基本特性

根据上述流线的概念，可以看出流线具有以下几个基本特性：

(1) 恒定流时，流线的形状和位置不随时间而改变。因为整个流场内各点流速向量均不随时间而改变，显然，不同时刻的流线的形状和位置应是固定不变的。

(2) 恒定流时液体质点运动的迹线与流线相重合。如图 3.4 所示，假定 $A_1A_2A_3A_4\cdots$ 近似地代表一条流线（当 Δs 趋近于零时即为流线），在时刻 t_1 有一个质点从 A_1 点开

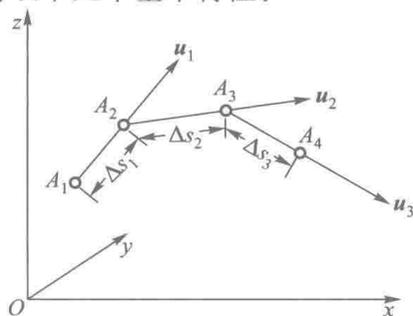


图 3.4

始运动, 经过 Δt_1 后达到 A_2 ; 到达 A_2 点后虽然时刻变成 $t_1 + \Delta t_1$, 但因恒定流的流线形状和位置均不改变, 此时 A_2 点的流速仍与 t_1 时刻相同, 仍然为 u_2 方向, 于是质点从 A_2 点沿 u_2 方向运动, 再经过 Δt_2 又到达 A_3 ; 在到达 A_3 后又沿 A_3 点处的流速 u_3 方向运动; 如此继续下去, 质点所走的轨迹完全与流线重合。

相反, 若水流为非恒定流, 不同的时刻, 各点的流速方向均与原来不同, 此时迹线一般与流线不相重合。

(3) 流线不能相交

如果流线相交, 那么交点处的流速向量应同时与这两条流线相切; 显然, 一个液体质点在同一时刻只能有一个流动方向, 而不能有两个流动方向, 所以流线是不能相交的。

3.2.3 微小流束与总流

1. 流管

在水流中任意取一微分面积 dA (图 3.5), 通过该面积周界上的每一个点, 均可作一条流线, 这样就构成一个封闭的管状曲面, 称为流管。

2. 微小流束

充满以流管为边界的一束液流, 称为微小流束。按照流线不能相交的特性, 微小流束内的液体不会穿过流管的管壁向外流动, 流管外的液体也不会穿过流管的管壁向流束内流动。当水流为恒定流时, 微小流束的形状和位置不会随时间而改变。在非恒定流中, 微小流束的形状和位置将随时间而改变。

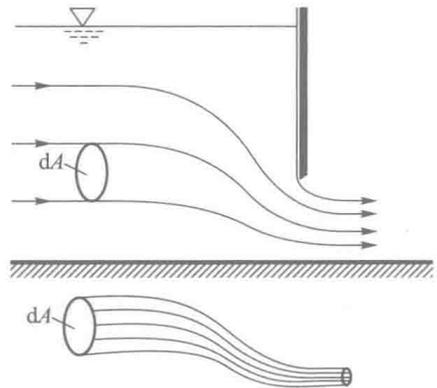


图 3.5

由于微小流束的横断面积是很小的, 一般在其横断面上各点的流速或动水压强可视为相等。

3. 总流

任何一个实际水流都具有一定规模的边界, 这种有一定大小尺寸的实际水流称为总流。总流可以看作由无限多个微小流束所组成。

4. 过水断面

与微小流束或总流的流线成正交的横断面称为过水断面, 该面积 dA 或 A

称为过水断面面积，单位为 m^2 。

如果水流的所有流线互相平行时，过水断面为平面，否则就是曲面（图 3.6）。

5. 流量

单位时间内通过某一过水断面的液体体积称为流量。流量常用的单位为 m^3/s ，流量一般以符号 Q 表示。

设在总流中任取一微小流束，其过水断面面积为 dA ，因微小流束过水断面上各点流速可认为相等，令 dA 面上流速为 u ，由于把过水断面定义为与水流方向成垂直，故单位时间内通过过水断面 dA 的液体体积为

$$u dA = dQ \quad (3.7)$$

dQ 即为微小流束的流量。

通过总流过水断面 A 的流量，应等于无限多个微小流束的流量之和，即

$$Q = \int_Q dQ = \int_A u dA \quad (3.8)$$

6. 断面平均流速

总流过水断面上的平均流速 v ，是一个抽象的流速，如果过水断面上各点的流速都相等并等于 v ，此时所通过的流量与实际流速为不均匀分布时所通过的流量相等，则流速 v 就称为断面平均流速。如图 3.7a 所示，因过水断面上的流速不等，各为 u_1, u_2, u_3, \dots ，根据式 (3.8)，通过过水断面的流量为 $\int_A u dA$ ，其中 $u dA$ 为任一微小流束的流量，积分后即为图 3.7a 的体积。现若将各点的流速截长补短，使过水断面上各点流速均相等，都等于 v ，如图 3.7b 所示，使其体积与图 3.7a 中的体积相等，则流速 v 就是断面平均流速。

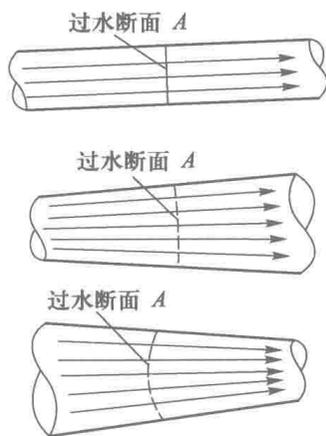


图 3.6

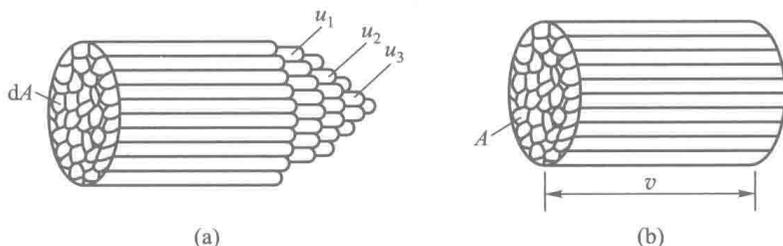


图 3.7

根据断面平均流速的定义：

$$Q = \int_A u dA = v \int_A dA = vA \quad (3.9)$$

或

$$v = \frac{Q}{A} \quad (3.10)$$

由此可见，通过总流过水断面的流量等于断面平均流速与过水断面面积的乘积。按照这样的概念，可以认为过水断面上各点的水流均以同一平均流速而运动着。所以引入断面平均流速的概念，可以使水流运动的分析得到简化，因为在实际应用中，有时并不一定需要知道总流过水断面上的流速分布，仅仅需要了解断面平均流速沿流程和随时间的变化情况。

3.2.4 一元流、二元流、三元流

凡水流中任一点的运动要素只与一个空间自变量（如流程坐标 s ）有关，这种水流称为一元流，微小流束就是一元流。对于总流，若把过水断面上各点的流速用断面平均流速去代替，这时总流也可视为一元流。

如果在水流中任取一过水断面，断面上任一点流速，除了随断面位置（即流程坐标 s ）变化外，还和另外一个空间坐标变量有关，这样，流场中任何点的流速和两个空间自变量有关，此种水流称为二元流。例如一断面为矩形的顺直明渠，当渠道宽度很大，两侧边界影响可以忽略不计时，水流中任意点的流速与两个空间位置变量有关，一个是决定断面位置的流程坐标 s ，另一个是该点在断面上距渠底的铅垂距离 z （图 3.8a）。而沿横向（ y 方向）流速是没有变化的。因而沿水流方向任意取一纵剖面来分析流动情况，都代表了其他任何纵剖面的水流情况。

若水流中任一点的流速，与三个空间位置变量有关，这种水流称为三元流。例如一矩形明渠，当宽度由 b_1 突然扩大为 b_2 ，在扩大以后的相当范围内，水流中任意点的流速，不仅与断面位置坐标 s 有关，还和该点在断面上的坐标 y 及 z 均有关（图 3.8b）。

严格地说，任何实际液体的运动都是三元流。但用三元流来分析，需要考虑运动要素在三个空间坐标方向的变化，问题非常复杂，还会遇到许多数学上的困难。所以水力学中常采用简化的方法，引入断面平均流速的概念，把总流视为一元流，用一元分析法来研究实际水流运动的规律。但实际水流过水断面上各点的流速是不相等的，用断面平均流速去代替实际流速所产生的误差，需要加以修正，修正系数可用试验求得。实践证明，水利工程中的一般水力学问

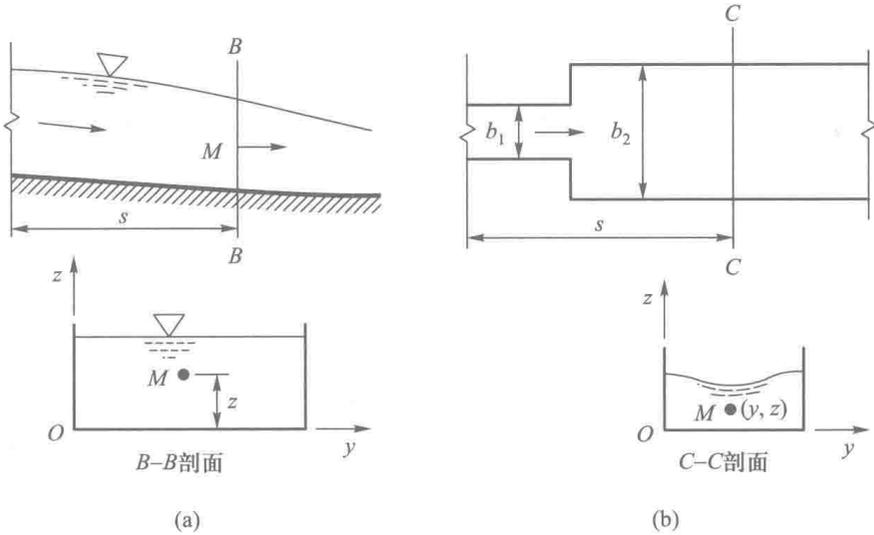


图 3.8

题，把水流看作是一元流或二元流来处理是可以满足生产要求的。但对有些水力学问题如高速水流的掺气、空蚀、脉动，泥沙和污染物输移规律的研究等都与水流内部结构有关，用一元流来分析难以满足要求，因为一元分析法回避了水流内部结构和运动要素在空间的分布。

为了遵循从简单到复杂的认识规律，本书在讨论水流运动规律时，首先从研究一元流着手，初步掌握了一元流的基本概念和原理以后，再去讨论更为普遍的三元流问题。

3.2.5 均匀流与非均匀流

1. 均匀流

当水流的流线为相互平行的直线时，该水流称为均匀流，直径不变的直线管道中的水流就是均匀流的典型例子。基于上述定义，均匀流应具有以下特性：

(1) 均匀流的过水断面为平面，且过水断面的形状和尺寸沿程不变。

(2) 均匀流中，同一流线上不同点的流速应相等，因而各过水断面上的流速分布相同，断面平均流速相等。

(3) 均匀流过水断面上的动水压强分布规律与静水压强分布规律相同，即在同一过水断面上各点测压管水头为一常数。如图 3.9 所示，在管道均匀流中，任意选择 1-1 及 2-2 两过水断面，分别在两过水断面上装上测压管，则同一断面上各测压管水面必上升至同一高程，即 $z + \frac{p}{\rho g} = C$ ，但不同断面上测

压管水面所上升的高程是不相同的，对 1-1 断面， $\left(z + \frac{p}{\rho g}\right)_1 = C_1$ ，对 2-2 断面， $\left(z + \frac{p}{\rho g}\right)_2 = C_2$ 。为了证明这一特性，今在均匀流过水断面上取一微分柱体，其轴线 $n-n$ 与流线正交，并与铅垂线成夹角 α ，如图 3.10 所示。微分柱体两断面形心点离基准面高度分别为 z 及 $z + dz$ ，其动水压强分别为 p 及 $p + dp$ 。作用在微分柱体上的力在 n 轴方向的投影有柱体两断面上的动水压力 $p dA$ 与 $(p + dp) dA$ ，以及柱体自重沿 n 方向的投影 $dG \cos \alpha = \rho g dA dn \cos \alpha = \rho g dA dz$ 。柱体侧面上的动水压力以及水流的内摩擦力与 n 轴正交，故沿 n 方向投影为零。在均匀流中，与流线成正交的 n 方向无加速度，亦即无惯性力存在。上述诸力在 n 方向投影的代数和为零，于是

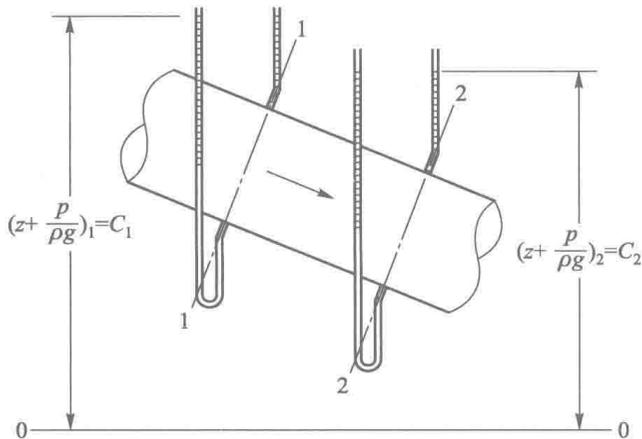


图 3.9

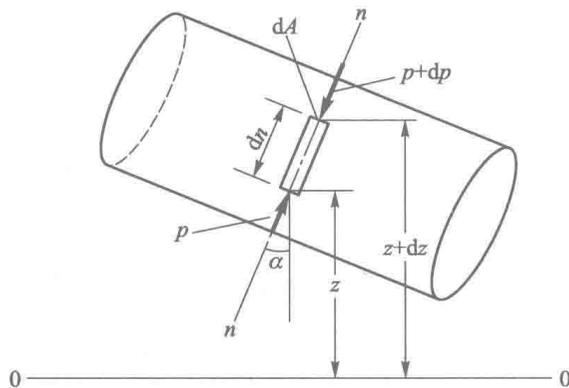


图 3.10

$$pdA - (p + dp)dA - \rho g dA dz = 0 \quad (3.11)$$

简化后得

$$\rho g dz + dp = 0 \quad (3.12)$$

对上式积分可得

$$z + \frac{p}{\rho g} = C \quad (3.13)$$

上式表明, 均匀流过水断面上的动水压强分布规律与静水压强分布规律相同, 因而过水断面上任一点动水压强或断面上动水总压力都可以按照静水压强以及静水总压力的公式来计算。

2. 非均匀流

若水流的流线不是互相平行的直线, 该水流称为非均匀流。如果流线虽然互相平行但不是直线 (如管径不变的弯管中水流), 或者流线虽为直线但不互相平行 (如管径沿程缓慢均匀扩散或收缩的渐变管中水流) 都属于非均匀流。

按照流线不平行和弯曲的程度, 可将非均匀流分为两种类型:

(1) 渐变流

当水流的流线虽然不是互相平行直线, 但几乎近于平行直线时称为渐变流 (或缓变流)。所以渐变流的极限情况就是均匀流。如果一个实际水流, 其流线之间夹角很小, 或流线曲率半径很大, 则可将其视为渐变流。但究竟夹角要小到什么程度, 曲率半径要大到什么程度才能视为渐变流, 一般无定量标准, 要看对于一个具体问题所要求的精度。由于渐变流的流线近似于平行直线, 在过水断面上动水压强的分布规律, 可近似地看作与静水压强分布规律相同。如果实际水流的流线不平行程度和弯曲程度太大, 在过水断面上, 沿垂直于流线方向就存在着离心惯性力, 这时, 再把过水断面上的动水压强按静水压强分布规律看待所引起的偏差就会很大。

水流是否可看作渐变流与水流的边界有密切的关系, 当边界为近于平行的直线时, 水流往往是渐变流。管道转弯, 断面扩大或收缩以及明渠中由于建筑物的存在使水面发生急剧变化处的水流都是急变流的例子, 如图 3.11 所示。

应当指出, 前面关于均匀流或渐变流的过水断面上动水压强遵循静水压强分布规律的结论, 必须是对于有固体边界约束的水流才适用。如由孔口或管道末端射入空气的射流, 虽然在出口断面处或距出口断面不远处, 水流的流线也近似于平行的直线, 可视为渐变流 (图 3.12), 但因该断面的周界上均与气体

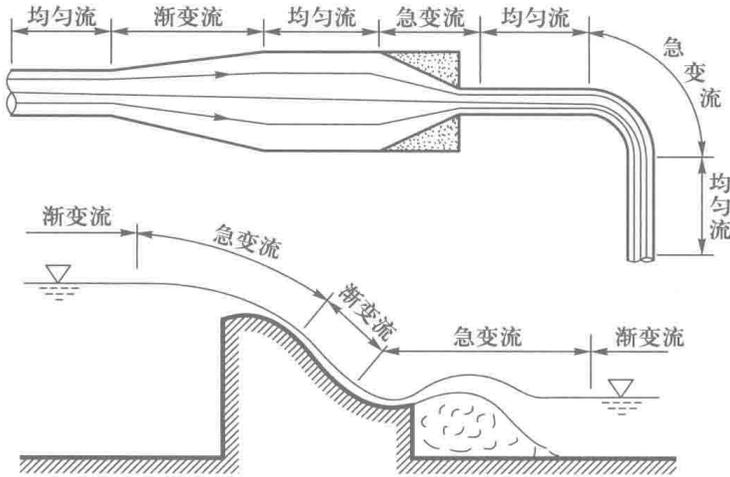


图 3.11

接触，断面上各点压强均为气体压强，从而过水断面上的动水压强分布不服从静水压强的分布规律。

(2) 急变流

若水流的流线之间夹角很大或者流线的曲率半径很小，这种水流称为急变流。

现在来简要地分析一下在急变流情况下，过水断面上动水压强的分布特性。如图 3.13 所示为一流线上凸

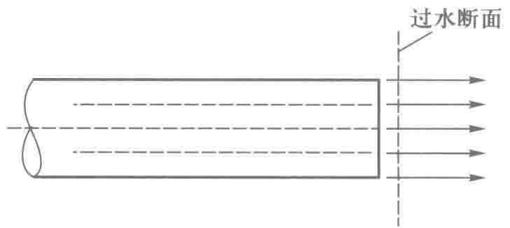


图 3.12

的急变流，为简单起见设流线为一簇互相平行的同心圆弧曲线。如果仍然像分析渐变流过水断面上动水压强分布的方法那样，在过水断面上取一微分柱体来研究它的受力情况。很显然，急变流与渐变流相比，在平衡方程式中，多了一个离心惯性力。离心惯性力的方向与重力沿 $n-n$ 轴方向的分力相反，因此使过水断面上动水压强比静水压强要小，图 3.13 的虚线部分表示静水压强分布图，实线部分为实际的动水压强分布图。

假如急变流为一下凹的曲线流动（图 3.14），由于液体质点所受的离心惯性力方向与重力作用方向相同，因此过水断面上动水压强比按静水压强计算所得的数值要大，图中虚线部分仍代表静水压强分布图，实线为实际动水压强分布图。

由上所述可知，当水流为急变流时，其动水压强分布规律，与静水压强分布规律不同。

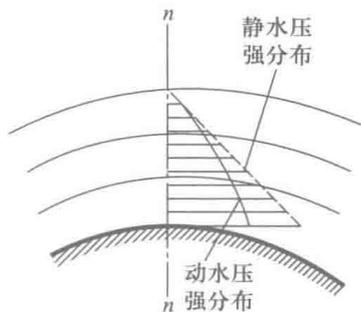


图 3.13

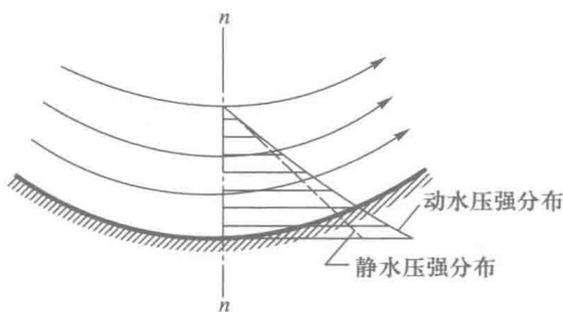


图 3.14

3.3 恒定总流的连续性方程

液体运动必须遵循质量守恒的普遍规律，液流的连续性方程式就是质量守恒定律的一种特殊形式。现推导如下：

今在恒定流中取出一段微小流束来研究。令过水断面 1-1 的面积为 dA_1 ，过水断面 2-2 的面积为 dA_2 ，相应的流速为 u_1 与 u_2 （图 3.15）。由于恒定流中微小流束的形状和尺寸是不随时间而改变的，且通过微小流束的侧壁没有液体流入或流出。有质量流入或流出的，只有两端过水断面。在 dt 时段内，从断面 1-1 流入的液体质量为 $\rho_1 u_1 dA_1 dt$ ，从断面 2-2 流出的液体质量为 $\rho_2 u_2 dA_2 dt$ 。由于液体是不可压缩的连续介质， $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ ，根据质量守恒定律，在 dt 时段内流入的质量应与流出质量相等，即

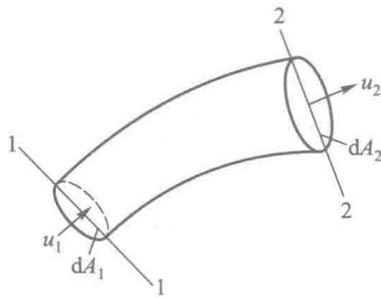


图 3.15

$$\rho u_1 dA_1 dt = \rho u_2 dA_2 dt$$

化简得

$$u_1 dA_1 = u_2 dA_2$$

或写作

$$dQ = u_1 dA_1 = u_2 dA_2 \quad (3.14)$$

上式就是不可压缩液体恒定流微小流束的连续性方程。若将上式对总流过水断面面积分，即

$$\int_Q dQ = \int_{A_1} u_1 dA_1 = \int_{A_2} u_2 dA_2$$

$$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (3.15)$$

上式就是恒定总流的连续性方程。式中 v_1 及 v_2 分别为总流过水断面 A_1 及 A_2 的断面平均流速。该式说明，在不可压缩液体恒定总流中，任意两个过水断面所通过的流量相等。也就是说，上游断面流进多少流量，下游任何断面也必然流走多少流量。

将式 (3.15) 移项，得

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{A_1}{A_2} \quad (3.16)$$

上式说明，在不可压缩液体恒定总流中，任意两个过水断面，其平均流速的大小与过水断面面积成反比，断面大的地方流速小，断面小的地方流速大。

连续性方程是水力学的三大基本方程之一，是用以解决水力学问题的重要公式，它总结和反映了水流的过水断面面积与断面平均流速沿流程变化的规律。

3.4 恒定总流的能量方程

前一节连续方程只说明了流速与过水断面的关系，是一个运动学方程。从本节起将进一步从动力学的观点来讨论水流各运动要素之间的关系。由于水流运动过程就是在一定条件下的能量转化过程，因此水流各运动要素之间的关系，可以通过分析水流的能量守恒规律求得。水流的能量方程就是能量守恒规律在水流运动中的具体表现。

3.4.1 理想液体恒定流微小流束的能量方程

今在理想液体恒定流中取一微小流束，并截取 1-1 及 2-2 断面之间的 ds 微分流段来研究（图 3.16），微分流段 ds 的横断面积为 dA 。

根据牛顿第二定律，作用在 ds 流段上的外力沿 s 方向的合力，应等于该流段质量 $\rho dA ds$ 与其加速度 $\frac{du}{dt}$ 的乘积。

作用在微分流段上沿 s 方向的外力有：过水断面 1-1 及 2-2 上的动水压力；重力沿 s 方向的分力 $dG \cos \alpha = \rho g dA ds \cos \alpha$ ，流段侧壁上的动水压力在 s 方向没有分力，由于考虑的是理想液体，侧壁上摩擦力为零。令在 1-1 断面上动水压强为 p ，其动水压力为 $p dA$ ，2-2 断面上的动水压强为 $p + dp$ ，其动水压力为 $(p + dp) dA$ 。若以 0-0 为基准面，断面 1-1 及 2-2 的形心点距基准面高分别为 z 及 $z + dz$ ，则 $\cos \alpha = \frac{dz}{ds}$ ，故重力沿 s 方向的分力为 $\rho g dA ds \frac{dz}{ds}$

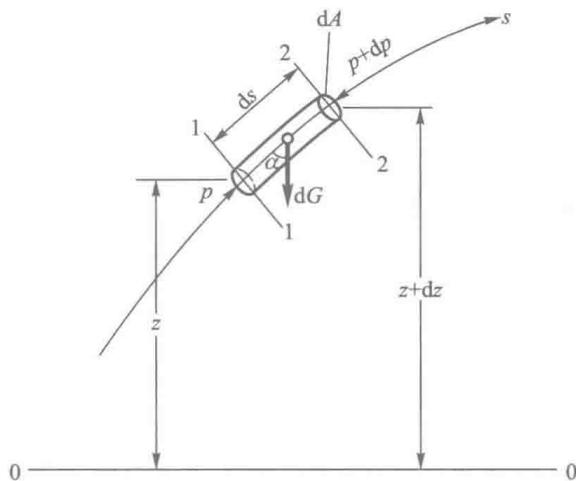


图 3.16

$=\rho g dA dz$ 。

对微分流段沿 s 方向应用牛顿第二定律，则有

$$p dA - (p + dp) dA - \rho g dA dz = \rho dA ds \frac{du}{dt} \quad (3.17)$$

对恒定一元流， $u = u(s)$ ，故

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{ds} \frac{ds}{dt} = u \frac{du}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{u^2}{2} \right) \quad (3.18)$$

将式 (3.18) 代入式 (3.17) 简化后可得

$$\frac{d}{ds} \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} \right) = 0 \quad (3.19)$$

将上式沿流程 s 积分，则有

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = C \quad (3.20)$$

对微小流束上任意两个过水断面有

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} \quad (3.21)$$

上式就是理想液体恒定流微小流束的能量方程。在水静力学一章中已讲过，液体中某一点处的几何高度 z 代表单位重量液体的位能， $\frac{p}{\rho g}$ 代表单位重量液体的压能。在运动的液体中，液体除具有位能和压能之外，还具有动能。若有某一质量为 m 的液体质点，其流速为 u ，该质点所具有的动能为 $\frac{1}{2}mu^2$ ，该质点内

单位重量液体所具有的动能为 $\frac{1}{2} \frac{mu^2}{mg} = \frac{u^2}{2g}$, 可见式 (3.21) 的左右两端分别代表微小流束上任意所取的两过水断面上, 单位重量液体所具有的全部机械能 (动能、压能与位能)。式 (3.21) 表明: 对于理想液体恒定总流, 微小流束内不同的过水断面上, 单位重量液体具有的机械能保持相等 (守恒)。该式是由瑞士科学家伯努利 (Bernoulli) 于 1738 年首先推导出来的, 在水力学中称为理想液体恒定流微小流束的伯努利方程。

上面所讨论的运动液体是没有粘滞性的理想液体, 因它没有粘滞性存在, 不需要克服内摩擦力而消耗能量, 故运动液体的机械能总是保持不变的。理想液体的能量方程中, 所谓能量保持不变, 是指水流的总机械能保持不变, 而其中任何一项能量, 如位能或动能或压能, 都是可以变化的, 因为能量是可以互相转化的。

3.4.2 实际液体恒定流微小流束的能量方程

由于实际液体存在着粘滞性, 在流动过程中, 要消耗一部分能量用于克服摩擦力而做功, 液体的机械能要沿流程而减少, 对机械能来说即存在着能量损失。因此对实际液体而言, 总是

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} > z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g}$$

令单位重量液体从断面 1-1 流至断面 2-2 所损失的能量为 h'_w , 则能量方程应写为

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + h'_w \quad (3.22)$$

式 (3.22) 就是不可压缩实际液体恒定流微小流束的能量方程。

在实用上, 所考虑的水流运动都是总流, 要把能量方程运用于解决实际问题, 还必须把微小流束的能量方程对总流过水断面面积分, 从而推广为总流的能量方程。但到现在为止, 还不能对所有水流运动普遍地进行积分, 只有对某些特定形式的水流运动, 如均匀流与渐变流, 积分才能实现。

3.4.3 实际液体恒定总流的能量方程

1. 实际液体恒定总流能量方程的推导

将不可压缩实际液体恒定流微小流束的能量方程对总流过水断面面积分, 便可推导出总流的能量方程。

若微小流束的流量为 dQ ，每秒钟通过微小流束任何过水断面的液体重量为 $\rho g dQ$ ，将式 (3.22) 各项乘以 $\rho g dQ$ ，并分别在总流的两个过水断面 A_1 及 A_2 上积分，即

$$\int_Q \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) \rho g dQ + \int_Q \frac{u_1^2}{2g} \rho g dQ = \int_Q \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right) \rho g dQ + \int_Q \frac{u_2^2}{2g} \rho g dQ + \int_Q h'_w \rho g dQ \quad (3.23)$$

在上式中共含有三种类型积分：

(1) 第一类积分为 $\int_Q \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) \rho g dQ$

若所取的过水断面为渐变流，则在断面上 $\left(z + \frac{p}{\rho g} \right) = \text{常数}$ ，因而积分是可能的，即

$$\int_Q \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) \rho g dQ = \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) \rho g \int_Q dQ = \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) \rho g Q \quad (3.24)$$

(2) 第二类积分为 $\int_Q \frac{u^2}{2g} \rho g dQ$

因 $dQ = u dA$ ，故 $\int_Q \frac{u^2}{2g} \rho g dQ = \int_A \rho g \frac{u^3}{2g} dA = \frac{\rho g}{2g} \int_A u^3 dA$ ，它为每秒钟通过过水断面 A 的液体动能的总和。若采用断面平均流速 v 来代替 u ，由于 $\int_A u^3 dA > \int_A v^3 dA$ ，故不能直接把动能积分符号内 u 换成 v ，而需要乘以一个修正系数 α 才能使之相等，因此

$$\int_Q \frac{u^2}{2g} \rho g dQ = \frac{\rho g}{2g} \int_A u^3 dA = \frac{\rho g}{2g} \alpha v^3 A = \rho g Q \frac{\alpha v^2}{2g} \quad (3.25)$$

式中

$$\alpha = \frac{\int_A u^3 dA}{v^3 A} \quad (3.26)$$

称为动能修正系数，其值大小取决于过水断面上流速分布情况，流速分布愈均匀， α 愈接近于 1；不均匀分布时， $\alpha > 1$ ；在渐变流时，一般 $\alpha = 1.05 \sim 1.1$ 。为计算简便起见，通常取 $\alpha \approx 1$ 。

(3) 第三类积分为 $\int_Q h'_w \rho g dQ$

假定各个微小流束单位重量液体所损失的能量 h'_w 都用某一个平均值 h_w 来代替，则第三类积分变为

$$\int_Q h'_w \rho g dQ = \rho g h_w \int_Q dQ = \rho g Q h_w \quad (3.27)$$

把三种类型积分结果代入式 (3.23), 各项同除以 $\rho g Q$ 后, 可得

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_w \quad (3.28)$$

上式即是不可压缩实际液体恒定总流的能量方程。它反映了总流中不同过水断面上 $\left(z + \frac{p}{\rho g}\right)$ 值和断面平均流速 v 的变化规律及其相互关系, 是水动力学中第二个最重要的基本方程式, 它和水流连续性方程一起联合运用, 可以解决许多水力学计算问题。

恒定总流的能量方程与恒定流微小流束的能量方程相比, 所不同的是总流能量方程中的动能 $\frac{\alpha v^2}{2g}$ 项是用断面平均动能来表示的, 而 h_w 则代表总流单位重量液体由一个断面流至另一断面的平均能量损失。

2. 实际液体恒定总流能量方程的图示

实际液体恒定总流能量方程中, 共包含了 4 个物理量, 其中 z 代表总流过水断面上单位重量液体所具有的平均位能, 一般又称为位置水头; $\frac{p}{\rho g}$ 代表过水断面上单位重量液体所具有的平均压能, 它反映了过水断面上各点平均动水压强所对应的压强高度, $\left(z + \frac{p}{\rho g}\right)$ 称为测压管水头; $\frac{\alpha v^2}{2g}$ 代表过水断面上单位重量液体所具有的平均动能, 一般称为流速水头。 h_w 为单位重量液体从一个过水断面流至另一过水断面克服水流阻力做功所损失的平均能量, 一般称为水头损失。在水力学中, 习惯上把单位重量液体所具有总机械能 (即位能、压能、动能的总和) 称为总水头, 并以 H 表示, 即

$$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} \quad (3.29)$$

在总流中任意选取两个过水断面, 该两断面上液流所具有的总水头若为 H_1 和 H_2 , 根据能量方程有

$$H_1 = H_2 + h_w \quad (3.30)$$

对于理想液体, 由于没有水头损失 $h_w = 0$, 则 $H_1 = H_2$, 即在不计能量损失情况下, 总流中任何过水断面上总水头保持不变。

为了形象地反映总流中各种能量的变化规律, 可以把能量方程用图形描绘出来。因为单位重量液体所具有的各种机械能都具有长度的量纲, 于是可用水头为纵坐标, 按一定的比例尺沿流程把过水断面的 z , $\frac{p}{\rho g}$ 及 $\frac{\alpha v^2}{2g}$ 分别绘于图上

(图 3.17)。\$z\$ 值在总流过水断面上各点是变化的，一般选取断面形心点的 \$z\$ 值来标绘，相应的 \$\frac{p}{\rho g}\$ 亦选用形心点动水压强来标绘。把各断面的 \$\left(z + \frac{p}{\rho g}\right)\$ 值的点连接起来可以得到一条测压管水头线（如图中虚线所示），把各断面 \$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g}\$ 值的点连接起来可以得到一条总水头线（如图中实线所示），任意两断面之间的总水头线的降低值，即为该两断面间的水头损失 \$h_w\$。

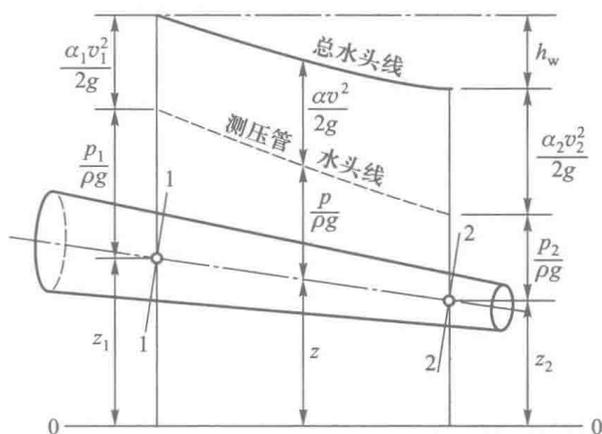


图 3.17

由能量方程的物理意义不难得出，实际液体总流的总水头线必定是一条逐渐下降的线（直线或曲线），因为总水头总是沿程减小的，而测压管水头线则可能是下降的线（直线或曲线）也可能是上升的线（直线或曲线）甚至可能是一条水平线，这要看总流的几何边界变化情况而作具体分析。总水头线沿流程的降低值与流程长度之比，称为总水头线坡度，也称水力坡度，常以 \$J\$ 表示。

若总水头线为直线时，

$$J = \frac{H_1 - H_2}{L} = \frac{h_w}{L} \quad (3.31)$$

当总水头线为曲线时，其坡度为变值，在某一断面处坡度可表示为

$$J = \frac{-dH}{dL} = \frac{dh_w}{dL} \quad (3.32)$$

因总水头增量 \$dH\$ 始终为负值，为使 \$J\$ 为正值，上式中加“-”号。总水头线坡度 \$J\$ 是表示单位流程上的水头损失。

对于河渠中的渐变流，其测压管水头线就是水面线，如图 3.18 所示。

3. 应用恒定总流能量方程的条件及注意之点

在解决大量实际水力学问题中，广泛应用恒定总流能量方程 (3.28)，从该方程的推导过程中可以看出，应用时应满足下列条件：

- (1) 水流必须是恒定流。
- (2) 作用于液体上的质量力只有重力。

(3) 在所选取的两个过水断面上，水流应符合渐变流条件，但在所取的两个断面之间，水流可以不是渐变流。如图 3.19 所示，虽然在由水池进入管道附近有急变流发生，只要把过水断面选取在水管进口以前符合渐变流条件的断面 1-1 及进口之后的断面 2-2，对 1-1 及 2-2 两过水断面，仍然可以应用能量方程。

(4) 在所取的两过水断面之间，流量保持不变，其间没有流量加入或分出。

但是应当指出，虽然在推证过程中使用了流量沿程保持不变的条件，但总流能量方程中的各项都是指单位重量液体的能量，所以在水流有分支或汇合的情况下，仍可分别对每一支水流建立能量方程式，现简要分析如下：

如图 3.20 所示两支汇合的水流，其每支流量分别为 Q_1 与 Q_2 ，根据能量守恒原理，从 1-1 断面及 2-2 断面在单位时间内输入的液体总能量，应当等于 3-3 断面输出的总能量加上两支水流能量损失，即

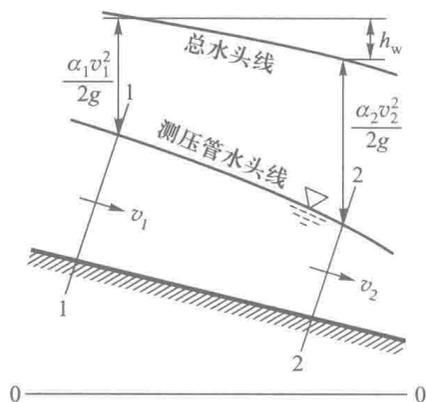


图 3.18

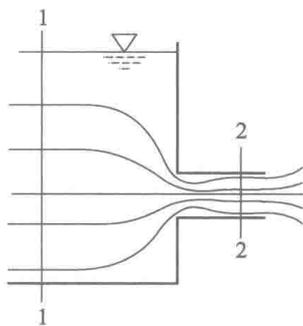


图 3.19

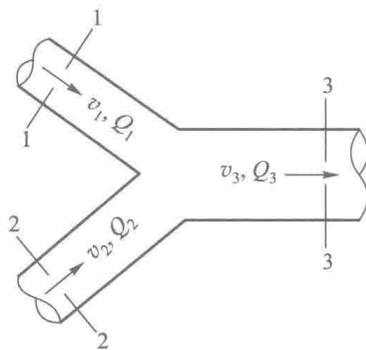


图 3.20

$$\begin{aligned} & \rho g Q_1 \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} \right) + \rho g Q_2 \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} \right) \\ & = \rho g Q_3 \left(z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{\alpha_3 v_3^2}{2g} \right) + \rho g Q_1 h_{w1-3} + \rho g Q_2 h_{w2-3} \end{aligned} \quad (3.33)$$

因 $Q_3 = Q_1 + Q_2$ ，代入上式整理后可得

$$\begin{aligned} & Q_1 \left[\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} \right) - \left(z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{\alpha_3 v_3^2}{2g} \right) - h_{w1-3} \right] + \\ & Q_2 \left[\left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} \right) - \left(z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{\alpha_3 v_3^2}{2g} \right) - h_{w2-3} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

上式中，若要左端两项之和等于零，必须要求各自分别为零，因为根据其物理意义，它每一项是表示其一支水流的输入总能量与输出总能量之差，因此它不可能是一项为正，另一项为负，故有

$$\begin{aligned} & Q_1 \left[\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} \right) - \left(z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{\alpha_3 v_3^2}{2g} \right) - h_{w1-3} \right] = 0 \\ & Q_2 \left[\left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} \right) - \left(z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{\alpha_3 v_3^2}{2g} \right) - h_{w2-3} \right] = 0 \end{aligned}$$

于是，对每一支水流，有

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{\alpha_3 v_3^2}{2g} + h_{w1-3} \quad (3.35)$$

$$z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{\alpha_3 v_3^2}{2g} + h_{w2-3} \quad (3.36)$$

为了在应用能量方程时使计算简便和不致发生错误，应注意以下几点：

(1) 基准面的选择是可以任意的，但在计算不同断面的位置水头 z 值时，必须选取同一基准面。

(2) 能量方程中 $\frac{p}{\rho g}$ 一项，可以用相对压强，也可以用绝对压强，但对同一问题必须采用相同的标准。

(3) 在计算过水断面的测压管水头 $\left(z + \frac{p}{\rho g} \right)$ 值时，可以选取过水断面上任意点来计算，因为在渐变流的同一断面上任何点的 $\left(z + \frac{p}{\rho g} \right)$ 值均相等，具体选择哪一点，以计算方便为宜。对于管道一般可选管轴中心点来计算较为方便，对于明渠一般在自由表面上选一点来计算比较方便。

(4) 不同过水断面上的动能修正系数 α_1 与 α_2 严格讲来是不相等的，且不等于 1，实用上对渐变流多数情况，可令 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ，但在某些特殊情况下， α

值需根据具体情况酌定。

3.4.4 流程中途有能量输入或输出时的能量方程

以上所推导的总流能量方程，是没有考虑到由 1-1 断面至 2-2 断面之间，中途有能量输入水流内部或从水流内部输出能量的情况。抽水管路系统中设置的抽水机，是通过水泵叶片转动向水流输入能量的典型例子（图 3.21）。在水电站有压管路系统上所安装的水轮机，是通过水轮机叶片由水流中输出能量的典型例子（图 3.22）。

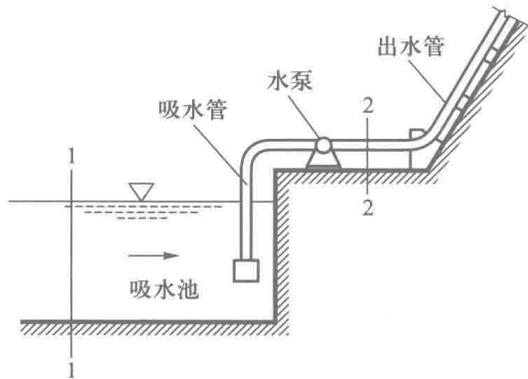


图 3.21

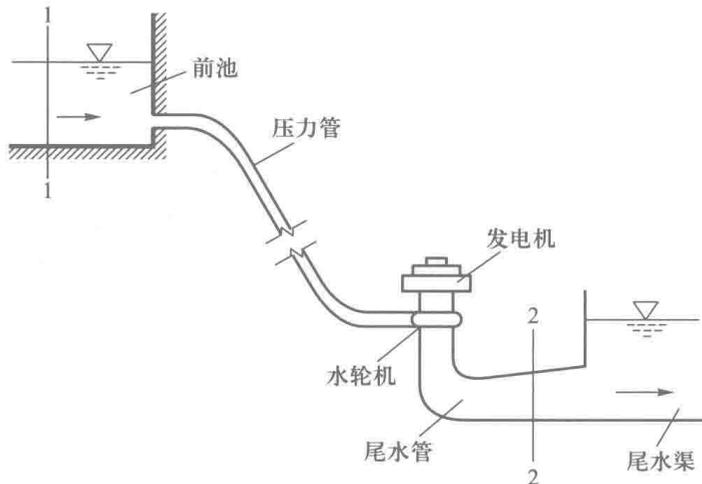


图 3.22

如图 3.21 及图 3.22 所示，如果所选择的断面 1-1 与 2-2 之间有能量输入或输出时，其能量方程应表达为如下形式：

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} \pm H_t = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_w \quad (3.37)$$

上式中 H_t 为 1-1 至 2-2 断面间, 通过外加设备使单位重量液体所获得或减少的机械能。当为输入能量时, 式中 H_t 前符号取“+”号, 输出能量时取“-”号。

若令输入电动机的功率为 P_p , 电动机和抽水机的总机械效率为 η_p , 则

$$\eta_p P_p = \rho g Q H_t$$

故

$$H_t = \frac{\eta_p P_p}{\rho g Q} \quad (3.38)$$

若水电站发电机的出力为 P_g , 水轮机与发电机的总效率为 η_g , 则

$$H_t = \frac{P_g}{\rho g Q \eta_g} \quad (3.39)$$

以上两式中, ρ 的单位是 kg/m^3 , Q 的单位是 m^3/s , H_t 的单位是 m , P_p 及 P_g 的单位是 W , $1 \text{ W} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{s}$ 。

3.4.5 能量方程的应用

如何利用能量方程来分析和解决具体水力学问题? 现以毕托管测流速、文丘里流量计、孔口及管嘴出流为例来讨论。

1. 毕托管测流速

在科学试验中, 常采用一种测量水流速度的仪器, 叫作毕托管。

毕托管是一根很细的弯管, 如图 3.23 所示, 其前端和侧面均开有小孔, 当需要测量水中某点流速时, 将弯管前端置于该点并正对水流方向, 前端小孔和侧面小孔分别由两个不同通道接入两根测压管, 测量时只需要读出这两根测压管的水面差, 即可求得所测点之流速。该点流速的求得就要利用能量守恒的关系, 现将其原理分析如下。

如图 3.23a 所示, 设先将一根弯管的前端封闭, 弯管侧面开一小孔, 把弯管正对水流方向, 把侧面开孔处置于欲测点 A 位置, 此时弯管 (相当于测压管) 中水面上升到某一高度 h_1 , 测压管所量得的高度 h_1 代表了 A 点的

动水压强, 即 $h_1 = \frac{P_A}{\rho g}$ 。设 A 点水

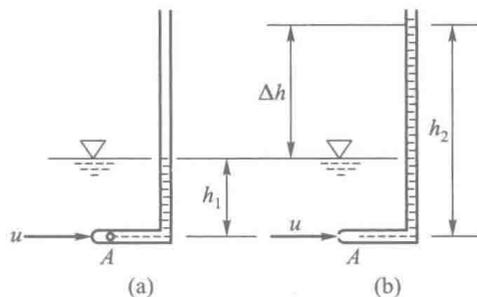


图 3.23

度为 u ，若以通过 A 点的水平面为基准面， A 点处水流的总能量 $H = \frac{p_A}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = h_1 + \frac{u^2}{2g}$ 。

假定再以另一根同样的弯管（图 3.23b），侧面不开孔，在其前端开一小孔，将弯管前端置于 A 点并正对水流方向。弯管放入后，由于 A 点水流受弯管的阻挡，流速变为零，动能将全部转化为压能，使测压管中水面上升至高度 h_2 。此 h_2 乃代表 A 点处水流的总能量，即 $H = h_2$ 。上述两不同弯管所得的 A 点总能量应相等，故

$$h_1 + \frac{u^2}{2g} = h_2 \quad (3.40)$$

由此可求出 A 点流速为

$$u = \sqrt{2g(h_2 - h_1)} = \sqrt{2g\Delta h} \quad (3.41)$$

式中 Δh 为两根测压管的水面差值。

真实的毕托管，并不是要用两根弯管进行两次测量，而是把两根管子纳入一根弯管当中，只是将前端的小孔和侧面的小孔由分别不同的通道接在两支测压管上。由于两个小孔的位置不同，因而测得的不是同一点上的能量，加之考虑毕托管放入水流中所产生的扰动影响，需要对式（3.41）加以修正，一般乘以修正系数 μ ，即

$$u = \mu \sqrt{2g\Delta h} \quad (3.42)$$

μ 称为毕托管的校正系数，一般 μ 为 0.98 ~ 1.0，从工厂买来的毕托管，说明书上给有 μ 值。毕托管使用过久 μ 值应再经过率定。

2. 文丘里流量计

文丘里流量计是测量管道中流量大小的一种装置，它由两段锥形管和一段较细的管子相连接而组成（图 3.24）。前面部分称为收缩段，中间部分称为喉管，后面部分为扩散段。若欲测量某管子中通过的流量，则把文丘里流量计连接在管段当中，在管道和喉管上分别设置测压管（也可直接设置差压计），用以测得该两断面（图 3.24 中的断面 1-1 和 2-2）上测压管高度差 h 。当已知测压管水位差 h 时，运用能量方程式即可计算出通过水管中的流量。现将其原理分析如下。

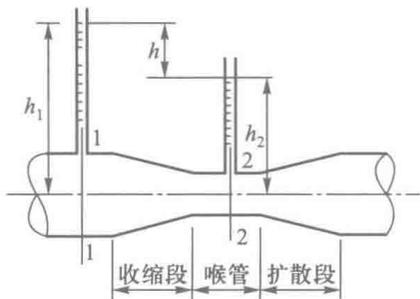


图 3.24

假定水管是水平放置的，对安装测压管的断面 1-1 和 2-2 写总流的能量方程：

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_w$$

若以管轴线为基准面，则 $z_1 = z_2 = 0$ ， $\frac{p_1}{\rho g} = h_1$ ， $\frac{p_2}{\rho g} = h_2$ 。设 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ，因断面 1-1 和 2-2 相距很近，暂时不计水头损失，令 $h_w = 0$ ，此时能量方程变为

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} &= \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \\ h_1 - h_2 = h &= \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \end{aligned}$$

由连续性方程可得

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{\frac{\pi}{4}d_2^2}{\frac{\pi}{4}d_1^2} = \frac{d_2^2}{d_1^2}$$

或

$$v_2 = v_1 \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2$$

上式中 d_1 、 d_2 分别为断面 1-1 及 2-2 处管道的直径。把 v_2 与 v_1 的关系代入前式，可得

$$\begin{aligned} h &= \frac{v_1^2}{2g} \left[\left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 - 1 \right] \\ v_1 &= \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 - 1}} \end{aligned} \quad (3.43)$$

因此通过文丘里流量计的流量为

$$Q = A_1 v_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 - 1}} \quad (3.44)$$

令

$$K = \frac{\pi d_1^2}{4} \sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 - 1}}$$

则

$$Q = K\sqrt{h} \quad (3.45)$$

很显然, 当水管直径 d_1 及喉管直径 d_2 确定以后, K 为一定值, 可以预先算出。由式 (3.45) 可见, 只要测得水管断面与喉管断面的测压管高差 h , 很快就得出流量 Q 值。

由于在上面的分析计算中, 没有考虑水头损失, 而水头损失将会促使流量减小, 因而实际流量比按式 (3.45) 算得的值小, 对于这个误差一般也是用一个修正系数 μ (称为文丘里管流量系数) 来修正, 实际流量为

$$Q = \mu K\sqrt{h} \quad (3.46)$$

流量系数 μ 一般为 0.95 ~ 0.98。

如果文丘里流量计上直接安装水银差压计 (图 3.25), 由差压计原理可知

$$\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = \frac{\rho_{\text{Hg}} g}{\rho g} h = 12.6h$$

式中 h 为水银差压计两水银面高差。此时文丘里流量计的流量为

$$Q = \mu K \sqrt{12.6h} \quad (3.47)$$

3. 孔口出流

如图 3.26 所示容器, 若在该容器侧壁上开一孔, 液体将从孔中流出, 这种水流现象称为孔口出流。当容器中水面保持恒定不变时 (可以给容器不断补充流量来达到这个目的), 通过孔口的水流则为恒定流。现应用能量方程来计算通过孔口的流速和流量。

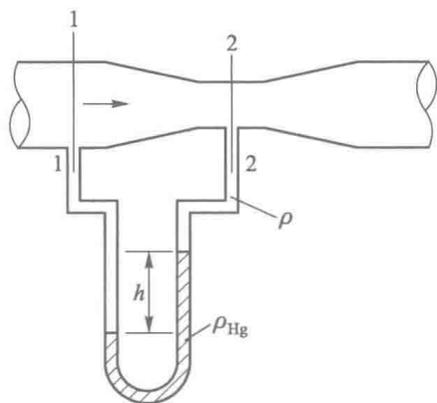


图 3.25

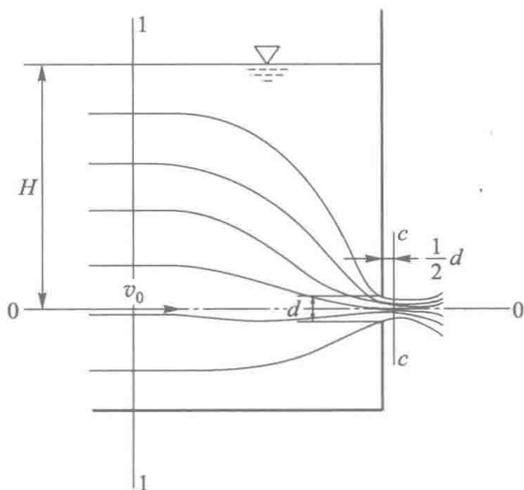


图 3.26

如果容器的容积很大, 液体质点将由远而近地向孔口方向移动, 在远离孔口的地方流速较小, 且流线为接近与孔口中心线平行的直线, 当逐渐流向孔口附近时, 流线开始发生弯曲, 以便逐渐改变其流向。假定孔壁很薄, 器壁与水流流束的接触面只有一条孔口的周界线, 孔壁厚度对流线形状不发生影响, 这种孔口称为薄壁孔口。由于流线只能逐渐弯曲而不能拐直角, 在孔口平面上, 流线都互不平行, 因而在孔口平面之后, 流束的横断面积比孔口面积要小, 这种现象称为过水断面的收缩。实验证明, 在离开孔口平面距离为 $\frac{1}{2}d$ (d 为孔口直径) 的 $c-c$ 断面处, 流束断面收缩到最小值, 而后由于空气的阻力影响, 流速降低, 流束横断面又开始扩散。 $c-c$ 断面称为收缩断面, 在该断面上流线彼此平行。

由上述流动情况看出, 对孔口出流应用能量方程时, 要选择两个符合渐变流的过水断面, 其中一个为离孔口有足够远的上游断面 1-1, 另一个应选收缩断面 $c-c$ 。

令 1-1 断面平均流速为 v_0 , $c-c$ 断面平均流速为 v_c , 今以通过孔口中心的水平面 0-0 为基准面写能量方程, 在计算过水断面上的 $\left(z + \frac{p}{\rho g}\right)$ 值时, 对 1-1 断面以选取自由表面上的一点最为方便, 该点的 $z_1 = H$, $\frac{p_1}{\rho g} = 0$ 。对于 $c-c$ 断面, 选取断面中心点计算较为方便, 该点 $z_c = 0$ 。若讨论的孔口很小 ($\frac{d}{H} \leq 0.1$ 时可以认为是小孔口), 实验证明, 对于小孔口流入大气的自由出流, $c-c$ 断面上动水压强和大气压强接近相等, 于是 $\frac{p_c}{\rho g} = 0$, 故能量方程为

$$H + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = \frac{\alpha_c v_c^2}{2g} + h_w \quad (3.48)$$

流经孔口的水头损失 h_w , 一般可用一个损失系数与流速水头 $\frac{v_c^2}{2g}$ 的乘积来表示, 即

$$h_w = \zeta_0 \frac{v_c^2}{2g} \quad (3.49)$$

ζ_0 称为孔口的水头损失系数, 令

$$H_0 = H + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} \quad (3.50)$$

式中 H 为孔口中心至容器水面的高差, 称为孔口的水头; $\frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}$ 称为行近流速水头; H_0 称为包括行近流速水头在内的孔口全水头。将上两式代入式 (3.48) 并解出 v_c 得

$$v_c = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c + \zeta_0}} \sqrt{2gH_0} \quad (3.51)$$

令

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c + \zeta_0}} \quad (3.52)$$

式中 φ 称为流速系数, 于是

$$v_c = \varphi \sqrt{2gH_0} \quad (3.53)$$

通过孔口的流量为

$$Q = v_c A_c$$

式中 A_c 为收缩断面的过水面积。设孔口的面积为 A , 令

$$A_c/A = \varepsilon \quad (3.54)$$

ε 称为孔口的收缩系数, 或者

$$A_c = \varepsilon A$$

因而

$$Q = \varepsilon \varphi A \sqrt{2gH_0} \quad (3.55)$$

$$Q = \mu A \sqrt{2gH_0} \quad (3.56)$$

上式中 $\mu = \varepsilon \varphi$, 称 μ 为孔口出流的流量系数。

根据实验, 小孔口的 $\varepsilon = 0.63 \sim 0.64$, $\varphi = 0.97 \sim 0.98$, $\mu = 0.60 \sim 0.62$ 。不同边界形式的孔口的流速系数 φ 、收缩系数 ε 或流量系数 μ 可参考有关手册。

在工程上还会遇到孔口的非恒定流, 如水池放空、船闸充水和泄水等, 均需计算放水与充水所需时间。现以棱柱形容器上游水位改变、孔口作自由出流 (图 3.27a) 及上游水位不变、下游水位不断升高、孔口作淹没出流 (图 3.27b) 为例, 计算方法说明如下。

设棱柱形容器的截面积为 Ω , 孔口面积为 A , 孔口水头为 H , 若行近流速不计, 则由式 (3.56) 可得

$$Q = \mu A \sqrt{2gH}$$

在 dt 时段内, 从孔口流过的水体积为 $Qdt = \mu A \sqrt{2gH} dt$ 。在同一时段内, 容器内水体积的变化量为 $-\Omega dH$, 负号是因为在 dt 时段内 H 值是减小的缘故。在同一时段内, 从孔口中流过的水体积应与容器中水体积的变化量相等, 即

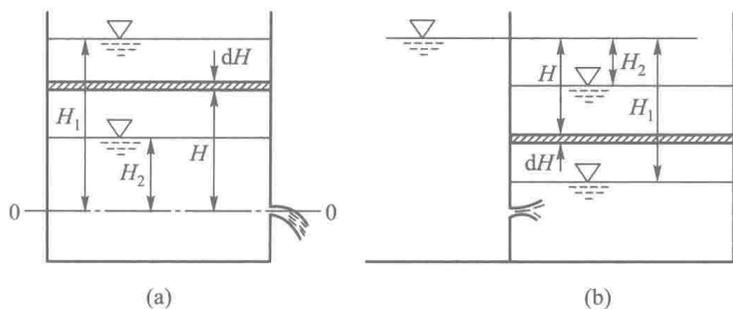


图 3.27

$$Qdt = -\Omega dH$$

或

$$\mu A \sqrt{2gH} dt = -\Omega dH$$

也可写作

$$dt = -\frac{\Omega}{\mu A \sqrt{2g}} \frac{dH}{\sqrt{H}}$$

若孔口水头从 H_1 变化到 H_2 ，对上式进行积分，得所需时间为

$$t = \frac{2\Omega}{\mu A \sqrt{2g}} (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}) \quad (3.57)$$

当 $H_2 = 0$ ，即放空容器，使容器中水位降至最低时（图 3.27a 情况）；或容器充水，使水位涨至与上游水位齐平（图 3.27b 情况）时所需时间为

$$t = \frac{2\Omega \sqrt{H_1}}{\mu A \sqrt{2g}} = \frac{2\Omega H_1}{\mu A \sqrt{2gH_1}} \quad (3.58)$$

式中 ΩH_1 为放空（图 3.27a）或充满（图 3.27b）容器的水量， $\mu A \sqrt{2gH_1}$ 为孔口水头 H_1 作用下的恒定出流量。由此可知，变水头时空放或充满容器所需的时间是水头不变的恒定流时放水或充水所需时间的 2 倍。

4. 管嘴恒定出流

若在孔口上连接一段长为 $(3 \sim 4)d$ 的短管（ d 为孔径）液体经短管而流出的现象，称为管嘴出流。某些坝内泄水孔，渠道壁上放水孔的水流均属管嘴出流。

图 3.28 所示为一圆柱形外管嘴。和孔口出流一样，水流进入管嘴后，由于流线弯曲形成一个收缩断面 $c-c$ ，然后流束再扩散至整个管嘴。现采用与孔口一样的分析方法，以通过管嘴中心的水平面 $0-0$ 为基准面，写出上游断面 $1-1$ 与收缩断面 $c-c$ 的能量方程可得

$$H + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} + \frac{p_a}{\rho g} = \frac{\alpha_c v_c^2}{2g} + \frac{p_c}{\rho g} + \zeta_0 \frac{v_c^2}{2g} \quad (3.59)$$

这里与孔口不同的是 $c-c$ 断面上的动水压强 p_c 不等于大气压强, 而水头损失 $\zeta_0 \frac{v_c^2}{2g}$ 一项的系数 ζ_0 则应和孔口出流基本上是一样的。

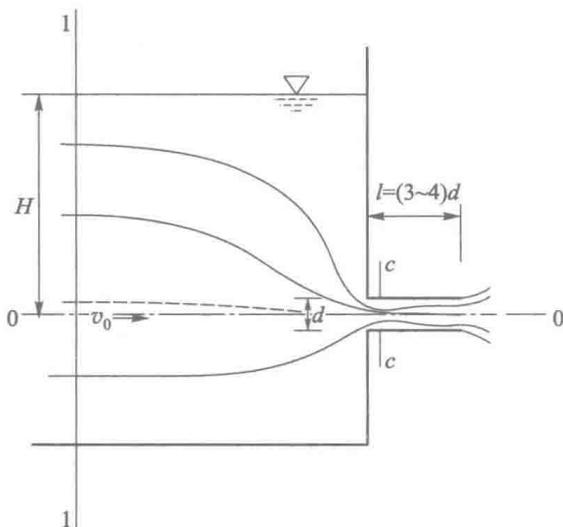


图 3.28

同样令 $H_0 = H + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}$, 从式 (3.59) 中解出 v_c 为

$$v_c = \varphi \sqrt{2g \left(H_0 + \frac{P_a - P_c}{\rho g} \right)} \quad (3.60)$$

上式中 $\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c + \zeta_0}}$ 称为管嘴的流速系数, 其值应和孔口出流的流速系数基本一样。

通过管嘴的流量:

$$Q = v_c A_c = v_c \cdot \varepsilon A$$

或

$$Q = \varepsilon \varphi A \sqrt{2g \left(H_0 + \frac{P_a - P_c}{\rho g} \right)} \quad (3.61)$$

或

$$Q = \mu A \sqrt{2g \left(H_0 + \frac{P_a - P_c}{\rho g} \right)} \quad (3.62)$$

上式中 A 为管嘴的横断面积, ε 为收缩系数, μ 为流量系数。

比较管嘴出流和孔口出流的计算公式可知,在孔口面积相同的情况下,通过管嘴的流量比孔口要大,因为两公式中 μ 值和 A 值都是相等的,而管嘴的有效水头多了一项 $\frac{P_a - P_c}{\rho g}$ 。不难看出,多出的水头值 $\frac{P_a - P_c}{\rho g}$ 恰为收缩断面上的真空值,因此管嘴流量增大的原因,是由于管嘴内有真空存在。为了使管嘴内真空存在,必须使管嘴有一定的长度,若管嘴长度 $l < (3 \sim 4)d$,管嘴的真空区有受破坏的可能,在这种情况下,就不能发挥管嘴可以增大流量的作用。如果管嘴过长,由于管段的阻力加大,增加流量的作用也同样减弱。

例 3.1 如图 3.29 所示,在水塔引出的水管末端连接一个消防喷水枪,将水枪置于和水塔液面高差 H 为 10 m 的地方,若水管及喷水枪系统的水头损失为 3 m,试问喷水枪所喷出的液体最高能达到的高度 h 为多少?(不计在空气中的能量损失。)

解:液体从水塔流至喷水枪再喷至最高点 2,取水塔液面作为一个过水断面,该断面流速很小,可视 $\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} \approx 0$;另取水枪喷至最高位置末端为一断面,到达最高点时水质点流速亦为零。以喷水枪出口水平面为基准面,写出上述两断面上点 1 和点 2 的能量方程:

$$H + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = h + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_w$$

因 1, 2 两点均为大气压强, $\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} = 0$, 同时 $\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} \approx 0$, $\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} = 0$, 代入上式, 得

$$h = 7 \text{ m}$$

例 3.2 如图 3.30 所示,从一水面保持恒定不变的水池中引出一管路,该管路末端流入大气,管路由三段直径不同的管道组成,其管径分别为 $d_1 = 0.2 \text{ m}$, $d_2 = 0.15 \text{ m}$, $d_3 = 0.175 \text{ m}$ 。若水池容积很大,水箱水头 $H = 5 \text{ m}$, 行近流速可以忽略 ($v_0 \approx 0$), 当不计管路的水头损失时,试求:

- (1) 出口流速 v_3 及流量 Q ;
- (2) 绘出管路的测压管水头线及总水头线。

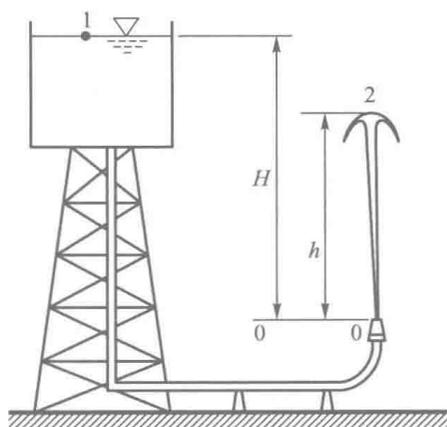


图 3.29

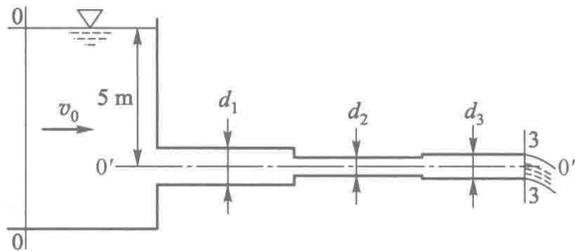


图 3.30

解：(1) 以管轴中心线 $0'-0'$ 为基准面，对水箱中远离出口的断面 $0-0$ 和管路出口断面 $3-3$ 应用能量方程：

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{\alpha_3 v_3^2}{2g} + h_w$$

因行近流速可以忽略，且不计管路水头损失，令 $\alpha_3 = 1$ ，并代入各已知量，有

$$H + 0 + 0 = 0 + 0 + \frac{v_3^2}{2g} + 0$$

解得

$$v_3 = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 5} \text{ m/s} = 9.899 \text{ m/s}$$

通过管路的流量

$$Q = v_3 A_3 = 9.899 \times \frac{3.14}{4} \times 0.175^2 \text{ m}^3/\text{s} = 0.238 \text{ m}^3/\text{s}$$

(2) 第一、二段管道的断面平均流速为

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.238}{\frac{1}{4} \times 3.14 \times 0.2^2} \text{ m/s} = 7.580 \text{ m/s},$$

$$v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0.238}{\frac{1}{4} \times 3.14 \times 0.15^2} \text{ m/s} = 13.475 \text{ m/s}$$

令 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ，则第一、二、三段管道的流速水头分别为

$$\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = \frac{1 \times 7.580^2}{2 \times 9.8} \text{ m} = 2.931 \text{ m}$$

$$\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} = \frac{1 \times 13.475^2}{2 \times 9.8} \text{ m} = 9.264 \text{ m}$$

$$\frac{\alpha_3 v_3^2}{2g} = \frac{1 \times 9.899^2}{2 \times 9.8} \text{ m} = 5.000 \text{ m}$$

第一、二、三段管道的测压管水头分别为

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = H - \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = 5 \text{ m} - 2.931 \text{ m} = 2.069 \text{ m}$$

$$z_2 + \frac{p_2}{\rho g} = H - \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} = 5 \text{ m} - 9.264 \text{ m} = -4.264 \text{ m}$$

$$z_3 + \frac{p_3}{\rho g} = H - \frac{\alpha_3 v_3^2}{2g} = 5 \text{ m} - 5.000 \text{ m} = 0 \text{ m}$$

由此绘出管路的总水头线和测压管水头线如图 3.31 所示：



图 3.31

3.5 恒定总流的动量方程

前面讨论了水流的连续性方程和能量方程，它们在解决实际水力学问题中具有重要的意义。但是对某些水力学问题，用能量方程求解就有一定的困难，例如求急变流范围内液体对边界的作用力，若用能量方程求解，式中的水头损失项一般很难确定，但又不能忽略。如果利用动量方程，则求解比较方便。

3.5.1 恒定总流动量方程的推导

由理论力学已知，质点系运动的动量定律可表达为：质点系的动量在某一方向的变化，等于作用于该质点系上所有外力的冲量在同一方向上投影的代数和。

现依据上述普遍的动量定律，来推求表达液体运动的动量变化规律的方程。

今在恒定总流中，取出某一流段来研究，如图 3.32 所示。该流段两端过水断面为 1-1 及 2-2。经微小时段 dt 后，设原流段 1-2 移至新的位置 1'-2'，从而产生了动量的变化。动量是矢量，设流段内动量的变化为 Δp ，应等于 1'-2' 与 1-2 流段内液体的动量 $p_{1'-2'}$ 和 p_{1-2} 之差，即

$$\Delta p = p_{1'-2'} - p_{1-2} \quad (3.63)$$

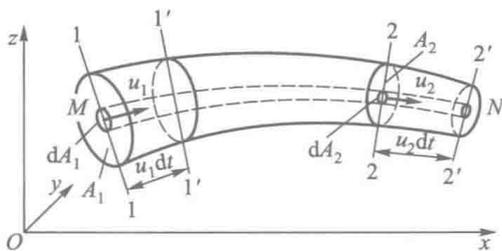


图 3.32

而 p_{1-2} 是 $1-1'$ 和 $1'-2$ 两段液体动量之和, 即

$$p_{1-2} = p_{1-1'} + p_{1'-2} \quad (3.64)$$

同理

$$p_{1'-2'} = p_{1'-2} + p_{2-2'} \quad (3.65)$$

虽然式 (3.64) 及式 (3.65) 中的 $p_{1'-2}$ 处于不同时刻, 但因所讨论的水流系恒定流, $1'-2$ 流段的几何形状和液体的质量、流速等均不随时间而改变, 因此 $p_{1'-2}$ 也不随时间而改变。把式 (3.64) 及式 (3.65) 代入式 (3.63), 可得

$$\Delta p = p_{2-2'} - p_{1-1'} \quad (3.66)$$

为了确定动量 $p_{2-2'}$ 及 $p_{1-1'}$, 今在所取的总流中任意取一微小流束 MN (图 3.32), 令断面 $1-1'$ 上微小流束的面积为 dA_1 , 流速为 u_1 , 则微小流束 $1-1'$ 流段内液体的动量为 $\rho u_1 dt dA_1 \cdot u_1$ 。对断面 A_1 积分, 可得总流 $1-1'$ 流段内液体的动量为

$$p_{1-1'} = \int_{A_1} \rho u_1 u_1 dt dA_1 = \rho dt \int_{A_1} u_1 u_1 dA_1 \quad (3.67)$$

同理

$$p_{2-2'} = \int_{A_2} \rho u_2 u_2 dt dA_2 = \rho dt \int_{A_2} u_2 u_2 dA_2 \quad (3.68)$$

因为断面上的流速分布一般是不知道的, 所以需要用断面平均流速 v 来代替 u , 所造成的误差以动量修正系数 β 来修正, 则以上两式可写作

$$p_{1-1'} = \rho dt \beta_1 v_1 \int_{A_1} u_1 dA_1 = \rho dt \beta_1 v_1 Q_1 \quad (3.69)$$

$$p_{2-2'} = \rho dt \beta_2 v_2 \int_{A_2} u_2 dA_2 = \rho dt \beta_2 v_2 Q_2 \quad (3.70)$$

比较式 (3.67) 及式 (3.69) 或式 (3.68) 及式 (3.70), 可知

$$\beta = \frac{\int_A u u dA}{v Q}$$

若过水断面上水流为渐变流, 流速 u 和断面平均流速 v 与动量投影轴的夹角 (令该夹角为 θ) 可视为相等, 故

$$\beta = \frac{\int_A u^2 dA}{v^2 A} \quad (3.71)$$

动量修正系数是表示单位时间内通过断面的实际动量与单位时间内以相应的断面平均流速通过的动量的比值。在一般渐变流中, 动量修正系数值为 $1.02 \sim 1.05$, 为计算简便计, 常采用 $\beta = 1.0$ 。因为 $Q_1 = Q_2 = Q$, 将式 (3.69), 式

(3.70) 代入式 (3.66) 得

$$\Delta p = \rho Q dt (\beta_2 v_2 - \beta_1 v_1) \tag{3.72}$$

设 $\sum F dt$ 为 dt 时段内作用于总流流段上的所有外力的冲量的矢量和，于是得恒定总流的动量方程为

$$\rho Q (\beta_2 v_2 - \beta_1 v_1) = \sum F \tag{3.73}$$

上式的左端代表单位时间内，所研究流段通过下游断面流出的动量和通过上游断面流入的动量之差，右端则代表作用于总流流段上的所有外力的矢量和。

在直角坐标系中，恒定总流的动量方程式可以写成三个投影表达式：

$$\begin{aligned} \rho Q (\beta_2 v_{2x} - \beta_1 v_{1x}) &= \sum F_x \\ \rho Q (\beta_2 v_{2y} - \beta_1 v_{1y}) &= \sum F_y \\ \rho Q (\beta_2 v_{2z} - \beta_1 v_{1z}) &= \sum F_z \end{aligned} \tag{3.74}$$

式中 v_{2x} , v_{2y} , v_{2z} 为总流下游过水断面 2-2 的断面平均流速在三个坐标方向的投影； v_{1x} , v_{1y} , v_{1z} 为上游过水断面 1-1 的断面平均流速在三个坐标方向的投影。 $\sum F_x$, $\sum F_y$, $\sum F_z$ 为作用在 1-1 与 2-2 断面间液体上的所有外力在三个坐标方向的投影代数和。

上述推证过程中，仅仅是从简单的一元流出发，输出动量的只有下游过水断面，输入动量的只有上游过水断面。事实上动量方程可以推广应用于流场中任意选取的封闭控制体。现举例说明如下：

如图 3.33 所示为一分叉管路，当对分叉段水流应用动量方程时，可以把沿管壁以及上下游过水断面所组成的封闭体作为控制体（图中虚线所示）。在这种情况下，对该封闭体的动量方程应为

$$\rho Q_2 \beta_2 v_2 + \rho Q_3 \beta_3 v_3 - \rho Q_1 \beta_1 v_1 = \sum F \tag{3.75}$$

式中 v_1 , v_2 , v_3 为三个过水断面上的平均流速， $\sum F$ 为作用于控制体上的外力矢量和。

动量方程是水动力学中重要的基本方程之一，应用较为广泛。在应用动量方程式时要注意以下几点：

1. 动量方程是矢量式，式中流速和作用力都是有方向的。因此，写动量方程时，必须首先选定投影轴，并标明投影轴的正方向，然后把流速和作用力

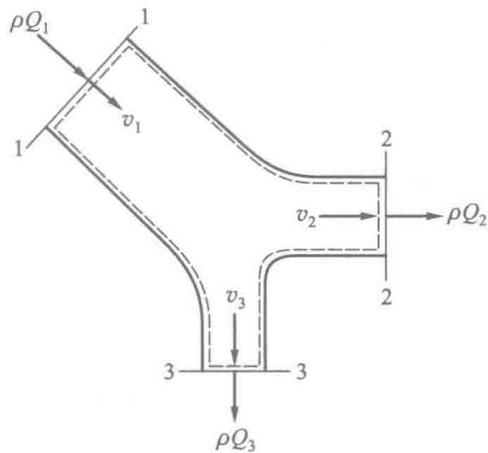


图 3.33

向该投影轴投影。凡是和投影轴的正向一致的流速和作用力均为正值，反之则为负值。投影轴是可以任意选择的，以计算方便为宜。

2. 控制体也是可以任意选取的，但一般是取整个总流的边界为控制体边界，对明渠水流来说总流的边界既有底部和侧壁的固体边界，也有自由水面边界，控制体的横向边界一般都是取过水断面。

3. 动量方程的左端，系单位时间内控制体内液体的动量改变值，必须是输出的动量减去输入的动量，切不可颠倒。

4. 当控制体某些边界面上的作用力恰好正是欲求的未知力时，其方向事先尚不明确，这时可以先暂时假定一个方向，此后若所求得该力的计算值为正，表明原假定方向正确，若所求得的值为负，表明与原假定方向相反。

5. 动量方程只能求解 1 个未知数，若方程中未知数多于 1 个时，必须借助于和其他方程（如连续性方程、能量方程）联合求解。

3.5.2 恒定总流动量方程的应用

1. 弯管内水流对管壁的作用力

由于弯管中水流为急变流，动水压强分布规律和静水压强不同，因此不能用静水压力的计算方法来计算弯管中液体对管壁的作用力。

如图 3.34 所示的弯管，管轴中心线位于 xOz 铅垂平面上，弯道的转角为 θ ，两端过水断面面积分别为 A_1 与 A_2 ，断面平均流速分别为 v_1 与 v_2 ，过水断面形心处的相对压强分别为 p_1 与 p_2 ，通过管道的流量为 Q ，弯管中水体重量为 G ，现分析弯管内的液体对管壁所作用的总作用力。

在弯管中，由于水流方向的变化和因管径变化产生流速大小的改变，从而引起弯道水流动量的改变，这种动量改变将引起水流对弯管的作用力。弯管内水流可作为一个总流来应用动量方程，并以 x, z 轴作为动量投影轴。因为液体在 y 轴方向没有流动，不需要研究 y 方向的动量变化问题。因为所提出的问题是确定水流对管壁的作用力，所以控制体的边界必须沿管壁的边界来选取，图

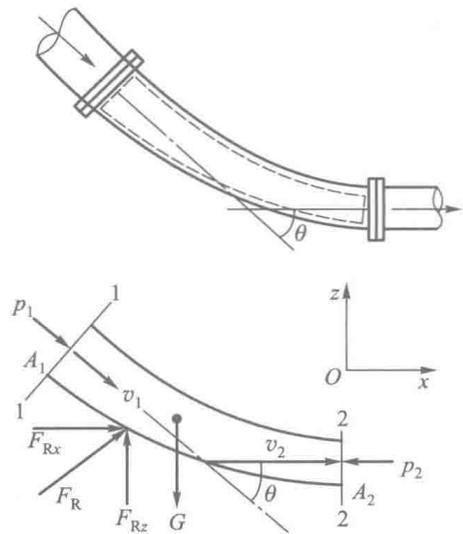


图 3.34

中虚线表示控制体。

作用于控制体的外力，包括控制体边界面上的表面力以及控制体内液体的重力。控制体边界面上的表面力，除两端断面上的动水压力外，还有管壁对水流的作用力 \mathbf{F}_R ， \mathbf{F}_R 和 水流对管壁的作用力大小相等方向相反。而水流对管壁的作用力实际上包含了两部分，一部分是动水压力，另一部分是摩擦力。只要求出反作用力 \mathbf{F}_R ，也就得到了水流对管壁的总作用力。为了分析计算方便，反作用力 \mathbf{F}_R 可分解为 x 和 z 方向两个分力 F_{R_x} 与 F_{R_z} 。

兹假定两端断面上的动量修正系数相等，即 $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ ，并假定两端断面上水流符合渐变流条件，其动水总压力等于形心点动水压强和过水断面积的乘积，即

$$F_{p1} = p_1 A_1, \quad F_{p2} = p_2 A_2$$

沿 x 轴方向动量方程为

$$\rho Q \beta (v_2 - v_1 \cos \theta) = p_1 A_1 \cos \theta - p_2 A_2 + F_{R_x}$$

因 $v_1 = \frac{Q}{A_1}$ ， $v_2 = \frac{Q}{A_2}$ ，代入上式可解出

$$F_{R_x} = \beta \rho Q^2 \left(\frac{1}{A_2} - \frac{\cos \theta}{A_1} \right) - p_1 A_1 \cos \theta + p_2 A_2 \quad (3.76)$$

沿 z 轴方向动量方程为

$$\rho Q \beta [0 - (-v_1 \sin \theta)] = -p_1 A_1 \sin \theta - G + F_{R_z}$$

由上式可解出

$$F_{R_z} = \beta \rho Q^2 \frac{\sin \theta}{A_1} + p_1 A_1 \sin \theta + G \quad (3.77)$$

将 F_{R_x} 与 F_{R_z} 合成即可得到总的反作用力 \mathbf{F}_R 。

从物理概念不难理解，当液体沿弯管作曲线运动时，液体将对管壁有一个离心力的作用，该离心力指向弯道外侧方向。由于弯管受有这个离心力的作用，使弯头有发生位移的趋势，同时由于动水压力的脉动影响（关于动水压力的脉动现象将在本书的下一章讲述）可以使管道产生振动，为此在工程上大型管道转弯的地方，都设置有体积较大的砌体（称为镇墩）将弯道加以固定。

2. 水流对溢流坝面的水平总作用力

如图 3.35 所示溢流坝，液体流经坝体附近时，流线弯曲较剧烈，故坝面上动水压强分布也不符合静水压强分布规律，不能按静水压力计算方法来确定坝面上的动水总压力。

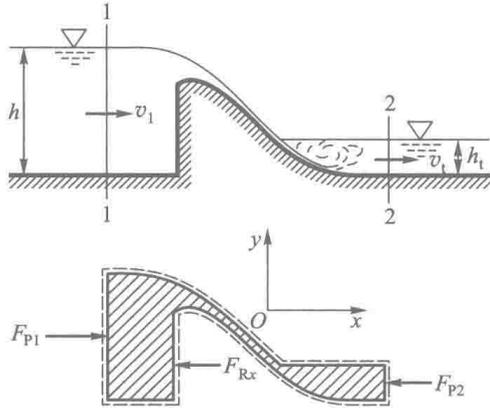


图 3.35

今以最简单的边界条件为例来进行分析，设河床横断面为矩形，其宽度为 b ，坝上游水深为 h ，断面 1-1 的平均流速为 v_1 ，坝下游水深为 h_1 ，2-2 断面平均流速为 v_2 ，今以 1-1 与 2-2 断面及沿坝面（包括上下游部分河床边界）与水流自由表面所围成的空间（图中虚线所示）作为控制体，并把 1-1 和 2-2 断面取在符合渐变流条件的位置，以便于计算这两个断面的动水压力。

若上下游河床均为平底，1-1 和 2-2 断面流速与 x 轴方向平行，该两断面上水流仅有沿 x 方向的流动，应用动量方程时只研究沿 x 轴方向的动量变化。

作用于控制体上的外力在 x 轴方向的投影，包括 1-1 断面上的动水压力 F_{p1} ，2-2 断面上的动水压力 F_{p2} ，坝体对水流的反作用力（在水平方向） F_{Rx} ， F_{Rx} 包含了水流与坝面摩擦力在 x 方向的投影。液体的重力在 x 方向投影为零。因

$$F_{p1} = \frac{1}{2}\rho g b h^2, \quad F_{p2} = \frac{1}{2}\rho g b h_1^2$$

$$\sum F_x = F_{p1} - F_{p2} - F_{Rx} = \frac{1}{2}\rho g b (h^2 - h_1^2) - F_{Rx}$$

沿 x 轴方向动量方程为

$$\rho Q (\beta_2 v_{2x} - \beta_1 v_{1x}) = \sum F_x$$

因

$$v_{1x} = v_1 = \frac{Q}{bh}$$

$$v_{2x} = v_2 = \frac{Q}{bh_1}$$

令 $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, 于是动量方程为

$$\beta\rho Q^2\left(\frac{1}{bh_1} - \frac{1}{bh}\right) = \frac{1}{2}\rho gb(h^2 - h_1^2) - F_{Rx}$$

由上式可解出

$$F_{Rx} = \frac{1}{2}b\left[\rho gh^2 - \rho gh_1 - \frac{2\beta\rho Q^2}{b^2}\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h}\right)\right] \quad (3.78)$$

F_{Rx} 的大小即为水流对坝体在水平方向的总作用力, 它包括了上游坝面和下游坝面水平作用力的总和。

3. 射流对垂直固定平面壁的冲击力

如图 3.36 所示, 设从喷嘴中喷出的水流, 以速度 v_0 射向一与水流方向垂直的固定平面壁, 当水流被平面壁阻挡以后, 对称地分开。沿壁面的流速为 v , 若所考虑的流动在一个水平面上, 则重力不起作用, 求此时射流对壁面的冲击力。

如图 3.36b 所示, 今取喷嘴出口断面 0-0 与沿壁面流动的断面 1-1 与 2-2 之间总流的外边界线作控制体来应用动量方程, 取与 v_0 方向一致的 x 轴为动量投影轴。作用于该控制体上 x 方向的外力有 0-0 断面上的动水压力, 以及平面壁对水体的反作用力 F_R 。在不计空气阻力时, 反作用力 F_R 的大小, 也就是射流对壁面的冲击力。因射流从喷嘴流入大气后, 0-0 断面上的动水压强 p_0 , 可以认为与大气压相等, 故其相对压强为零。于是写出 x 方向的动量方程为

$$\rho Q(0 - \beta_0 v_0) = 0 - F_R$$

故

$$F_R = \beta_0 \rho Q v_0$$

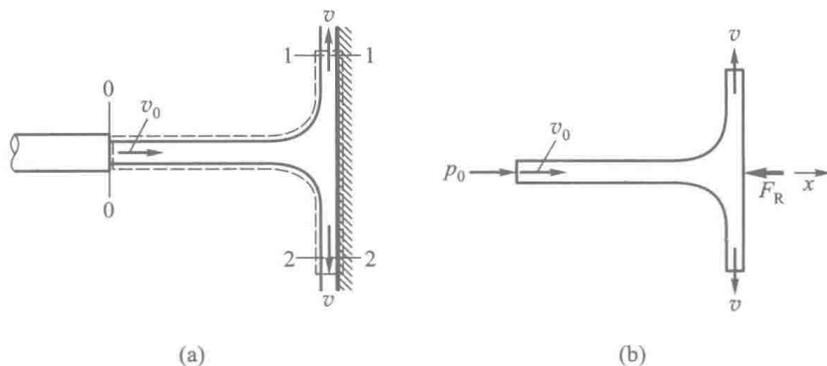


图 3.36

例 3.3 有一沿铅垂直立墙壁敷设的弯管如图 3.37 所示, 弯头转角为 90° , 起始断面 1-1 与终止断面 2-2 间的轴线长度 L 为 3.14 m, 两断面中心高差 Δz 为 2 m, 已知 1-1 断面中心处动水压强 p_1 为 117.6 kPa, 两断面之间水头损失 h_w 为 0.1 m, 管径 d 为 0.2 m, 试求当管中通过流量 Q 为 $0.06 \text{ m}^3/\text{s}$ 时, 水流对弯头的作用力。

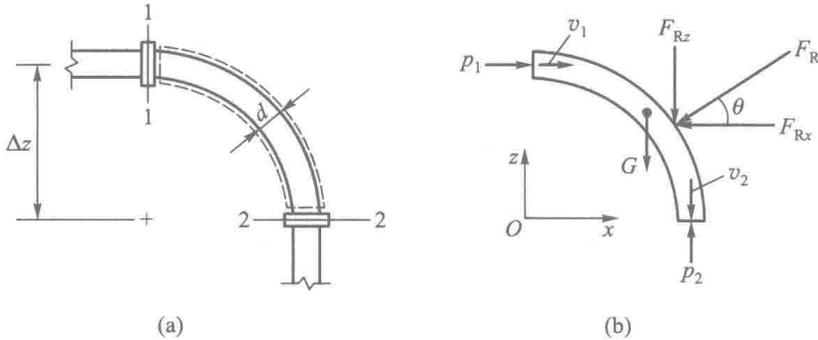


图 3.37

解: (1) 求管中流速

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\frac{\pi}{4}d^2} = \frac{0.06}{\frac{3.14}{4} \times 0.2^2} \text{ m/s} = 1.91 \text{ m/s}$$

(2) 求 2-2 断面中心处动水压强 p_2

以 2-2 断面为基准面, 对 1-1 与 2-2 断面写能量方程为

$$\Delta z + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} = 0 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} + h_w$$

于是

$$\frac{p_2}{\rho g} = \Delta z + \frac{p_1}{\rho g} - h_w$$

将 $h_w = 0.1 \text{ m}$, $p_1 = 117.6 \text{ kPa}$ 代入上式, 可求出

$$p_2 = \rho g \left(\Delta z + \frac{p_1}{\rho g} - h_w \right) = 9.8 \left(2 + \frac{117.6}{9.8} - 0.1 \right) \text{ kPa} = 136.2 \text{ kPa}$$

(3) 求弯头内水重

$$G = \rho g V = \rho g L \frac{\pi}{4} d^2 = 9.8 \times 3.14 \times \frac{3.14}{4} \times 0.2^2 \text{ kN} = 0.98 \text{ kN}$$

(4) 计算作用于 1-1 断面与 2-2 断面上动水总压力

$$F_{p1} = p_1 \frac{\pi d^2}{4} = 117.6 \times \frac{3.14 \times 0.2^2}{4} \text{ kN} = 3.7 \text{ kN}$$

$$F_{P2} = p_2 \frac{\pi d^2}{4} = 136.2 \times \frac{3.14 \times 0.2^2}{4} \text{ kN} = 4.28 \text{ kN}$$

(5) 对弯头内水流沿 x, z 方向分别写动量方程

令管壁对水体的反作用力在水平和铅垂方向的分力为 F_{Rx} 及 F_{Rz} , 则沿 x 方向动量方程为

$$\rho Q(0 - \beta v) = F_{P1} - F_{Rx}$$

$$F_{Rx} = F_{P1} + \beta \rho Q v = 3.7 + 1 \times 1 \times 0.06 \times 1.91 \text{ kN} = 3.815 \text{ kN}$$

沿 z 方向动量方程为

$$\rho Q(-\beta v - 0) = F_{P2} - G - F_{Rz}$$

$$F_{Rz} = F_{P2} - G + \beta \rho Q v$$

$$= 4.28 \text{ kN} - 0.98 \text{ kN} + 1 \times 1 \times 0.06 \times 1.91 \text{ kN} = 3.415 \text{ kN}$$

管壁对水流的总作用力为

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Rz}^2} = \sqrt{3.815^2 + 3.415^2} \text{ kN} = 5.12 \text{ kN}$$

令反作用力 F_R 与水平轴 x 的夹角为 θ , 则

$$\tan \theta = \frac{F_{Rz}}{F_{Rx}} = 0.895$$

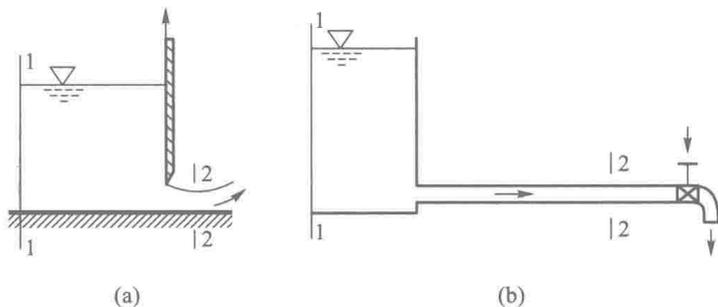
$$\theta = 41^\circ 48'$$

水流对管壁的作用力与 F_R 大小相等, 方向相反。

思考题

3.1 “恒定流与非恒定流”、“均匀流与非均匀流”、“渐变流与急变流”等三个概念是如何定义的? 它们之间有什么联系? 渐变流具有什么重要的性质?

3.2 图 a 表示一水闸正在提升闸门放水, 图 b 表示一水管正在打开阀门放水, 若它们的上游水位均保持不变, 问此时过水断面 1-1 和 2-2 的水流是否符合 $A_1 v_1 = A_2 v_2$ 的连续方程? 为什么?



思 3.2

3.3 能量方程中各项的几何意义和能量意义是什么？

3.4 关于水流去向问题，曾有以下一些说法如：“水一定是从高处向低处流”，“水是由压力大的地方向压力小的地方流”，“水是由流速大的地方向流速小的地方流”，这些说法对吗？试用基本方程论证说明。

3.5 什么叫总水头线和测压管水头线？水力坡度？均匀流的测压管水头线和总水头线的关系怎样？

3.6 总流的动量方程为 $\sum \mathbf{F} = \rho Q (\beta_2 \mathbf{v}_2 - \beta_1 \mathbf{v}_1)$ ，试问：

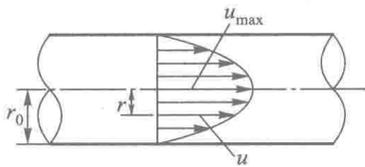
(1) $\sum \mathbf{F}$ 中都包括哪些力？

(2) 如果由动量方程求得的力为负值则说明了什么问题？

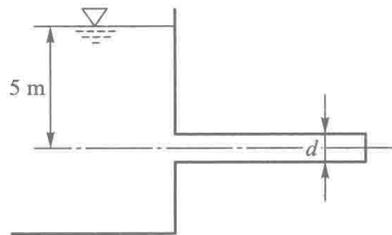
习 题

3.1 圆管中流速为轴对称分布（题 3.1 图），其分布函数为 $u = \frac{u_{\max}}{r_0^2} (r_0^2 - r^2)$ ， u 为距管轴中心为 r 处流速。若已知 r_0 为 2 cm， u_{\max} 为 0.1 m/s，求通过水管流量 Q 、断面平均流速 v 、过水断面的动能修正系数 α 及动量修正系数 β 。

3.2 从水池引出一直径 d 为 12 cm 的水管（如图所示），已知从进口至管道出口之间水头损失 h_w 为 $0.5 \frac{v^2}{2g}$ （ v 为水管中断面平均流速），求通过管道的流量 Q 。



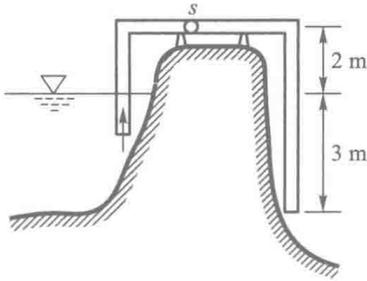
题 3.1



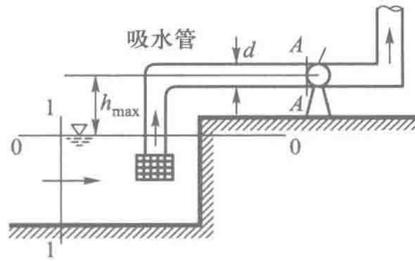
题 3.2

3.3 为将水库中水引至堤外灌溉，安装了一根直径 d 为 20 cm 的虹吸管（如图所示），当不计水头损失时，问通过虹吸管的流量 Q 为多少？在虹吸管顶部 s 点处的压强为多少？

3.4 有一抽水系统，如图所示，已知管径 $d = 15$ cm。当抽水流量 $Q = 0.030 \text{ m}^3/\text{s}$ 时，吸水管（包括进口）水头损失 $h_w = 1.0$ m，如限制吸水管末端断面 A 中心点的真空值不超过 68.68 kN/m^2 ，求水泵的最大安装高度 h_{\max} 。

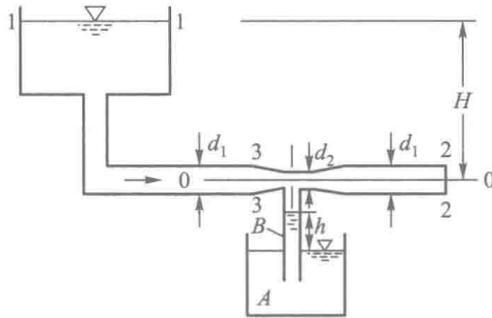


题 3.3



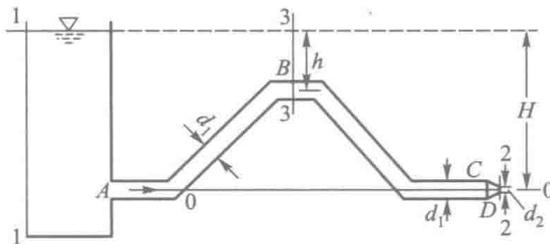
题 3.4

3.5 有一大水箱，下接一水平管道如图。已知大管和收缩段管径分别为 $d_1 = 5\text{ cm}$ 和 $d_2 = 4\text{ cm}$ ，水箱水面与管道出口中心点的高差为 $H = 1\text{ m}$ ，水箱面积很大，如不计水头损失，问容器 A 中水是否会沿管 B 上升？如上升，上升高度 h 为多少？



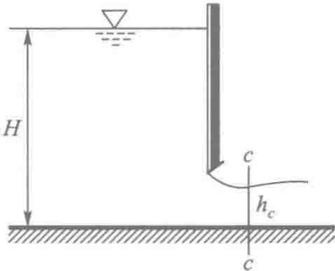
题 3.5

3.6 有一从水箱引水的管道，如图所示，等直径管段 ABC 的直径 $d_1 = 20\text{ cm}$ ，收缩段 CD 末端直径 $d_2 = 10\text{ cm}$ ，图中高差 $h = 5\text{ m}$ ， $H = 25\text{ m}$ ，管段 AB 、 BC 、 CD 的水头损失分别为 $h_{wAB} = 2.0 \frac{v^2}{2g}$ ， $h_{wBC} = 0.8 \frac{v^2}{2g}$ ， $h_{wCD} = 0.2 \frac{v^2}{2g}$ ，其中 v 为管段 ABC 中流速，求通过管道的流量及断面 3-3 中心的动水压强 p_3 。



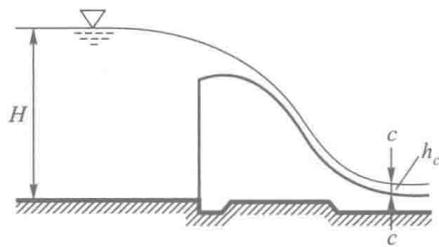
题 3.6

3.7 图示一平板闸门门宽 b 为 2 m，当通过流量 Q 为 $8 \text{ m}^3/\text{s}$ 时，闸前水深 H 为 4 m，闸孔后收缩断面水深 h_c 为 0.5 m，求作用于平板闸门上的动水总压力（不计摩擦力）。



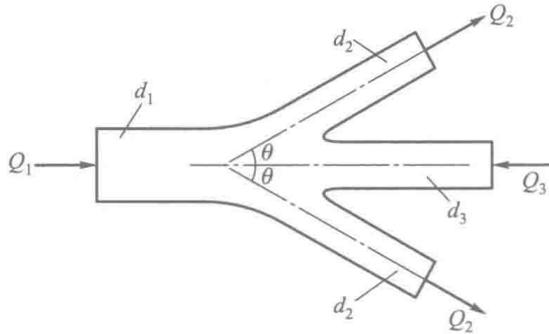
题 3.7

3.8 图示一拦河滚水坝，当通过流量 Q 为 $40 \text{ m}^3/\text{s}$ 时，坝上游水深 H 为 10 m，坝后收缩断面处水深 h_c 为 0.5 m，已知坝长 L 为 7 m，求水流对坝体的水平总作用力。



题 3.8

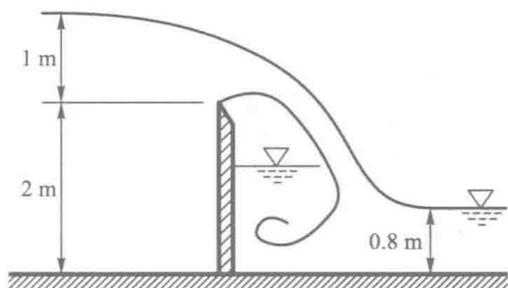
3.9 一四通叉管（如图所示），其轴线均位于同一水平面内，两端输入流量 $Q_1 = 0.2 \text{ m}^3/\text{s}$ ， $Q_3 = 0.1 \text{ m}^3/\text{s}$ ，相应断面动水压强 $p_1 = 20 \text{ kPa}$ ， $p_3 = 15 \text{ kPa}$ ，两侧叉管直接喷入大气。已知各管管径 $d_1 = 0.3 \text{ m}$ ， $d_3 = 0.2 \text{ m}$ ， $d_2 = 0.15 \text{ m}$ ， $\theta = 30^\circ$ ，试求交叉处，水流对管壁的作用力（忽略摩擦力）。



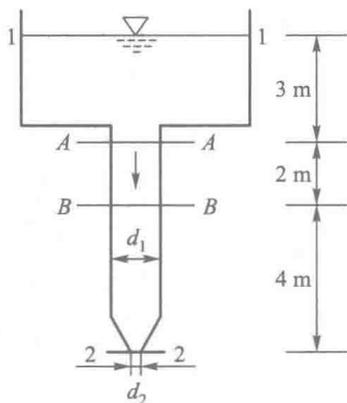
题 3.9

3.10 图示一矩形明渠宽 4 m，渠中设有薄壁堰，堰顶水深 1 m，堰高 2 m，下游水深 0.8 m。已知通过堰的流量 $Q = 6.8 \text{ m}^3/\text{s}$ ，堰后水舌内外均为大气，试求堰壁上所受的水平总压力（上下游河底为平底，河底摩擦力可以忽略）。

3.11 图示贮水器内水面保持恒定，底部接一铅垂直管输水，直管直径 $d_1 = 100 \text{ mm}$ ，末端收缩管嘴出口直径 $d_2 = 50 \text{ mm}$ ，若不计水头损失，求直管中 A、B 两断面的压强水头。

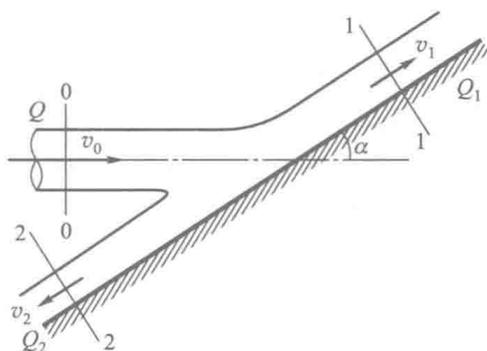


题 3.10



题 3.11

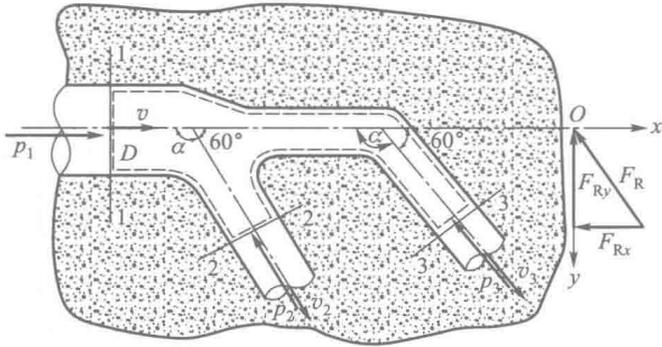
3.12 设有一股自喷嘴以速度 v_0 喷射出来的水流，冲击在一个与水流方向成 α 角的固定平面壁上，如图所示，当水流冲击到平面壁后，分成两股水流流出冲击区，若不计重量（流动在一个水平面上），并忽略水流沿平面壁流动时的摩阻力，试推证沿着射流方向施加于平面壁上的压力 $F_p = \rho \cdot Q \cdot v_0 \sin^2 \alpha$ ，并求出 Q_1 与 Q_2 各为多少？



题 3.12

3.13 图示水平放置的水电站压力钢管分岔段，用混凝土支座固定，已知主管直径 $D=3.0\text{ m}$ ，两个分岔管直径 $d=2.0\text{ m}$ ，转角 $\alpha=120^\circ$ ，主管末端压强 $p=294\text{ kPa}$ ，通过总流量 $Q=35\text{ m}^3/\text{s}$ ，两分岔管的流量相等，动水压强相等，损失不计，试求水对支座的总推力。

3.14 一水管将水流射至一曲面上，并沿曲面以与水平轴成 45° 角射出，其纵剖面图如图所示，已知水管末端直径 $d=10\text{ cm}$ ，流量 $Q=0.060\text{ m}^3/\text{s}$ ，水流在曲面内的平均长度 $l=1.5\text{ m}$ 。设水流流入和流出曲面时的流速大小不变，求水流作用于曲面上的力及其方向。

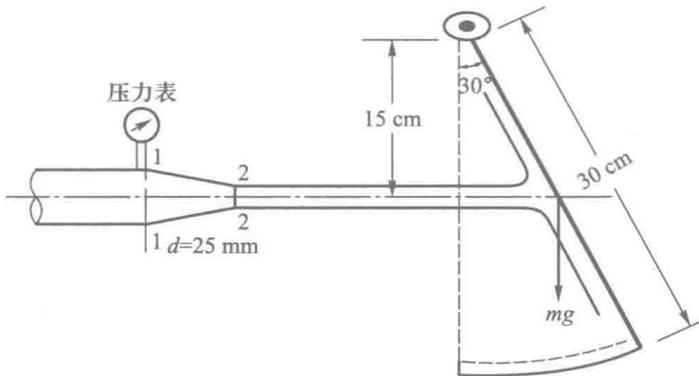


题 3.13



题 3.14

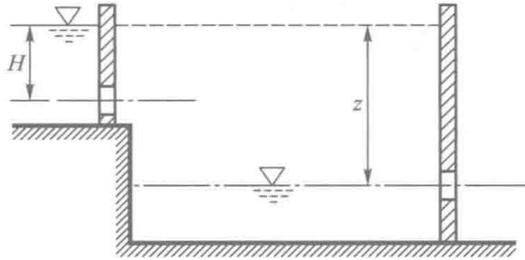
3.15 图示射流自喷嘴中水平射出，冲击在一块与射流方向垂直的正方形平板上，平板为等厚度，边长为 30 cm，平板上缘悬挂在铰上（铰摩擦力不计），当射流冲击到平板中心上后，平板偏转 30°，以后平板不再偏转。设喷嘴直径 $d = 25 \text{ mm}$ ，喷嘴前渐变流起点处压力表读数为 1.96 N/cm^2 ，该断面平均流速 $v = 2.76 \text{ m/s}$ ，喷嘴的局部水头损失系数 $\zeta_{\text{嘴}} = 0.3$ ，求平板的质量为多少？



题 3.15

3.16 如图所示船闸，闸室长 $l = 100 \text{ m}$ ，宽 $b = 10 \text{ m}$ ，上、下游闸门上的充放水孔面积 $A = 1 \text{ m}^2$ ，孔口的流量系数 $\mu = 0.65$ ，上游孔口的作用水头 $H = 2 \text{ m}$ ，上、下游水位差 $z = 4 \text{ m}$ ，试求：

- (1) 闸室的充水时间 t_1 (充水时下游放水孔全闭，上游充水孔全开)；
- (2) 闸室的放水时间 t_2 (放水时上游充水孔全闭，下游放水孔全开)。



题 3.16

4 流动阻力与水头损失

在前一章中已经讨论过理想液体和实际液体的能量方程式。因实际液体具有粘滞性，在流动过程中会产生水流阻力，克服阻力就要耗损一部分机械能，转化为热能，造成水头损失。水头损失与液体的物理特性和边界特征均有密切关系，所以本章首先对两种不同物理特性的液体（理想液体和实际液体）在不同边界条件下所产生的液流特征加以剖析，弄清楚水头损失的物理概念。又因水头损失的变化规律与液流形态有密切关系，所以本章在阐明液流形态及其特征的基础上，再讨论水头损失的变化规律及其计算方法。

4.1 水头损失的物理概念及其分类

在实际液体的能量方程中有一项水头损失 h_w ，而在理想液体的能量方程式中则没有。为什么实际液体在流动过程中会产生水头损失呢？

现在举两个例子来说明。

图 4.1 所示为液体在固体平面上流动的情况。若液体是没有粘滞性的理想液体，边界面就没有滞水作用，液流为平行直线流，过水断面上流速分布是均匀的，液体流动过程中没有任何能量损失。但实际液体是有粘滞性的，与边界面接触的液体质点将粘附在固体表面上，它们之间没有相对运动，流速为零，所以在边界面的法线方向上流速必然从零迅速加大，过水断面上的流速分布是不均匀的，因此相邻两流层之间都有相对运动。由于粘滞性的作用，有相对运动的两流层之间就有内摩擦切应力发生。液体流动过程中要克服这种摩擦阻力就要作功，作功就要损耗一部分液流的机械能，转化为热能而散失。在水力学中，能量损失都是用单位重量的液体所损失的能量来表示。在固体边界平直的水道中，单位重量的液体自一断面流至另一断面所损失的机械能就叫作该两断

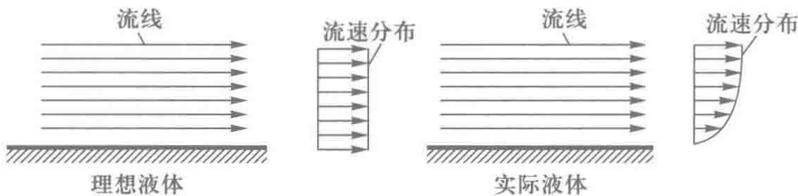


图 4.1

面之间的水头损失，这种水头损失是沿程都有并随流程长度而增加的，所以叫作沿程水头损失，常用 h_f 表示。

图 4.2 所示为液体流经圆柱体的情况。现取针对圆柱体圆心的一条流线来看。液体质点沿这条流线流向圆柱体时，流线间距逐渐增大，流速逐渐降低，由能量方程可知，压强必然逐渐增加。当液体质点流至 A 点时，流速减低至零，此时全部动能转化为压能，压能增加到最大。 A 点叫作驻点。液体质点到达驻点后，停滞不前，以后继续流来的质点就要进行调整，将部分压能转化为动能，改变原来流动的方向，沿圆柱面两侧继续向前流动。

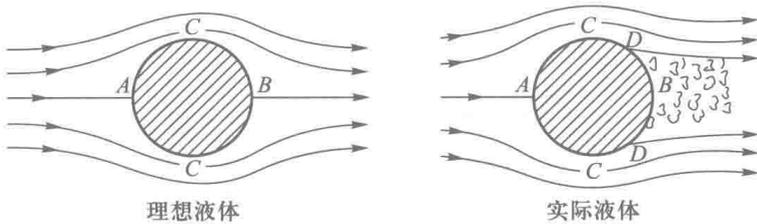


图 4.2

现在再来看看液体质点沿圆柱面流动的情况。

在理想液体情况下，液体质点由 A 点流到 C 点，由于圆柱面的弯曲，使液流挤压，流速沿程增加，压强沿程降低（即部分压能转化为动能）。从 C 点到 B 点，由于圆柱面的弯曲，使液流转为扩散，流速逐渐降低，压强逐渐增大（即部分动能转化为压能）。因为理想液体是没有粘滞性的，液体质点沿圆柱面流动过程中只有动能与压能的相互转化，没有能量损失。从 A 点到 C 点所获得的动能刚足以提高从 C 点到 B 点的压能，因此当液体质点前进到 B 点时，其流速与压强仍保持 A 点时的数值。

在实际液体的情况下就完全不同。从 A 点到 C 点为增速降压区，从 C 点到 B 点为降速增压区，但实际液体是有粘滞性的，液体沿圆柱面流动时沿程要损失一部分能量，所以从 C 点到 B 点时不可能同理想液流一样有足够的动能去恢复全部应有的压能，可能到一定位置，例如 D 点，液体质点的动能已全部转化为压能，流速降低到零。以后继续流来的质点就要改变流向，减缓液流扩散程度，使部分压能转化为动能，沿另一流线方向流去，这样就使主流脱离了圆柱面，圆柱面后面的液体随即填补主流所空出的区域，形成旋涡。这些旋涡随流带走，由于液体的粘滞作用，旋涡经过一段距离后，逐渐消失。在该旋涡区中，涡体（共同旋转的质点群）的形成、运转和分裂，以及流速分布改变过程中液体质点相对运动的加强，都使内摩擦增加，产生较大的能量损失，

这种能量损失是发生在局部范围之内的，叫作局部水头损失，常用 h_j 表示。在实际水利工程中产生旋涡区的情况是经常遇到的，当液体沿纵向边界流动时，只要局部地区边界的形状或大小改变（如管道或河渠中的断面突然扩大或缩小或流向有急剧变化），或有局部障碍（如管道中的阀门等），液流内部结构就要急剧调整，流速分布发生改变，流线发生弯曲，并产生旋涡，在这些局部地区都有局部水头损失（图 4.3）。在有些情况下，局部地区边界形状及大小的改变，液流内部结构在调整过程中，并不伴生旋涡，也会产生局部水头损失（如流线型的管道进口、管道或河渠中断面逐渐扩大或缩小等），这是因为流线发生弯曲，流速分布发生变化的过程中，都会加剧液体质点间的相对运动。

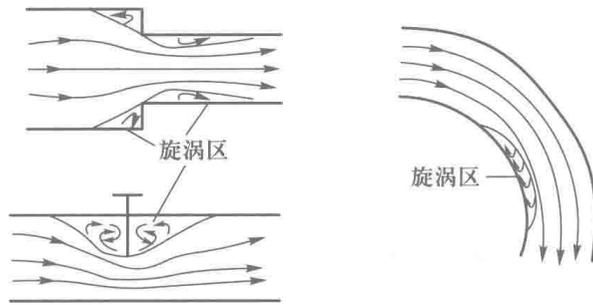


图 4.3

由以上分析可知，液流产生水头损失必须具备两个条件：（1）液体具有粘滞性；（2）由于固体边界的影响，液流内部质点之间产生相对运动。前者是主要的，起决定作用。若液体是有粘滞性的，即使固体边界是平直的，由于边界滞水作用，引起过水断面流速分布不均匀，也可使液流内部质点之间发生相对运动，从而产生切应力。若液体是没有粘滞性的理想液体，即使边界轮廓发生急剧变化，引起流线方向和间距的变化，也只能促使机械能的互相转化（如动能转化为压能或压能转化为动能等），不可能引起水头损失。把水头损失区分为沿程损失与局部损失，对液流本身来说，仅仅在于造成水头损失的外在原因有所不同而已，丝毫不意味着这两种水头损失在液流内部的物理作用方面有任何本质上的不同。就液流内部的物理作用来说，水头损失不论其产生的外因如何，都是由于液流内部质点之间有相对运动，因粘滞性的作用，产生切应力的结果。

某一流段沿程水头损失与局部水头损失的总和称为该流段的总水头损失。所以实际液体总流能量方程式中的总水头损失，可用下式表示：

$$h_w = \sum h_f + \sum h_j \quad (4.1)$$

式中 $\sum h_f$ 代表该流段中各分段的沿程水头损失的总和； $\sum h_j$ 代表该流段中各种局部水头损失的总和。

4.2 液流边界几何条件对水头损失的影响

产生水头损失的根源是实际液体本身具有粘滞性，但固体边界纵横方向的几何条件（即边界轮廓的形状和大小）对水头损失也有很大的影响。

4.2.1 横断面形状和大小

液流边界横断面形状和大小对水流的影响可用过水断面的水力要素来表征，如过水断面的面积 A 、湿周 χ 及水力半径 R 等。

仅根据过水断面面积的大小还不足以说明液流边界横断面几何形状和大小对水流的影响。例如两个不同形状的断面，一为正方形，一为扁长矩形，虽其过水断面面积相等，而且其他条件也相同，但扁长矩形渠槽中的液流所受到的阻力要大些，因而水头损失也要大些，这是因为扁长矩形渠槽中的液流与固体边界接触的周界要长些。液流过水断面与固体边界接触的周界线叫作湿周，常用 χ 表示。湿周也是过水断面的重要水力要素之一。湿周愈大，水流阻力及水头损失也愈大。

但两个过水断面的湿周相等，而形状不同，则过水断面面积一般是不相等的，虽通过同样大小的流量，水流阻力和水头损失也不相等，因为面积较小的过水断面液流通过的流速较大，流速大，水流阻力及水头损失也大。

所以，以过水断面面积 A 或湿周 χ 中任何一个水力要素来表征过水断面的水力特征都是不够全面的，只有把两者互相结合起来才较为全面。过水断面的面积 A 与湿周 χ 的比值称为水力半径，即

$$R = \frac{A}{\chi} \quad (4.2)$$

水力半径是过水断面的一个非常重要的水力要素，许多重要的水力学公式中都包含有这个要素。水力半径的量纲是长度 L ，常用单位为 m 。例如直径为 d 的圆管，当充满液流时， $A = \frac{\pi d^2}{4}$ ， $\chi = \pi d$ ，故水力半径为

$$R = \frac{A}{\chi} = \frac{\frac{\pi d^2}{4}}{\pi d} = \frac{d}{4} \quad (4.3)$$

4.2.2 纵断面形状

因边界纵向轮廓的不同, 可有两种不同形式的液流: 均匀流与非均匀流。

按均匀流的定义可知, 沿水流长度方向上各过水断面的水力要素及断面平均流速都是保持不变的。所以, 均匀流时只有沿程水头损失, 而且各单位长度上的沿程水头损失也是相等的, 总水头线应为一直线。又因各过水断面平均流速相等, 所以各过水断面上的流速水头也是相等的。由此可知, 均匀流时总水头线和测压管水头线是相互平行的直线 (图 4.4)。

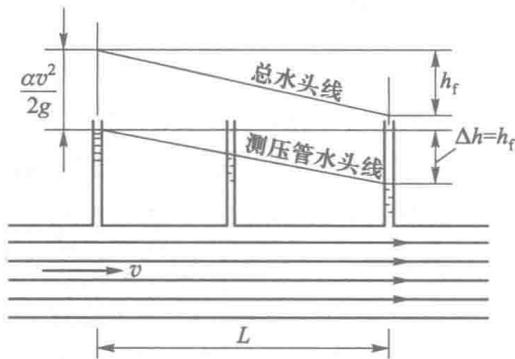


图 4.4

非均匀流与均匀流不同, 沿水流长度方向上各过水断面的形状及大小是不相等的, 各过水断面上的流速也是不等的, 所以非均匀流单位长度上的水头损失也不相等, 总水头线和测压管水头线是互不平行的曲线 (图 4.5)。

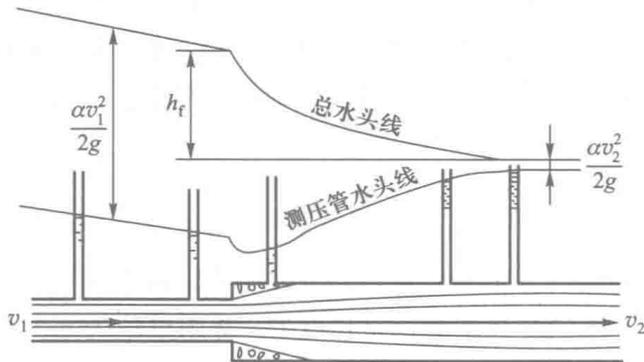


图 4.5

均匀流时无局部水头损失, 非均匀渐变流时局部水头损失可忽略不计, 非均匀急变流时两种水头损失均有。下面先研究沿程水头损失, 然后再讨论局部

水头损失。因为均匀流时只有沿程水头损失，所以研究沿程水头损失只要研究均匀流的水头损失就可以了。

4.3 均匀流沿程水头损失与切应力的关系

4.3.1 均匀流的切应力

在管道均匀流（图 4.6a）或明渠均匀流（图 4.6b）中，任意取出一段总流来分析。设总流与水平面成一角度 α ，过水断面面积为 A ，该段长度为 l 。令 p_1 、 p_2 分别表示作用于断面 1-1 及 2-2 的形心上的动水压强； z_1 、 z_2 表示该两断面形心距基准面的高度。作用在该总流流段上有下列各力：

1. 动水压力：作用在断面 1-1 上的动水压力 $F_{p1} = Ap_1$ ，作用在断面 2-2 上的动水压力 $F_{p2} = Ap_2$ ；

2. 重力：重力 $G = \rho gAl$ ；

3. 摩擦阻力：因为作用在各个流束之间的内摩擦力是成对地彼此相等而方向相反的，因此不必考虑。需要考虑的仅为不能抵消的总流与粘着在壁面上的液体质点之间的内摩擦力。令 τ_0 为总流边界上的平均切应力，则总摩擦力 $F = l\chi\tau_0$ ，式中 χ 为总流过水断面与壁面接触的周界线的长，即湿周。

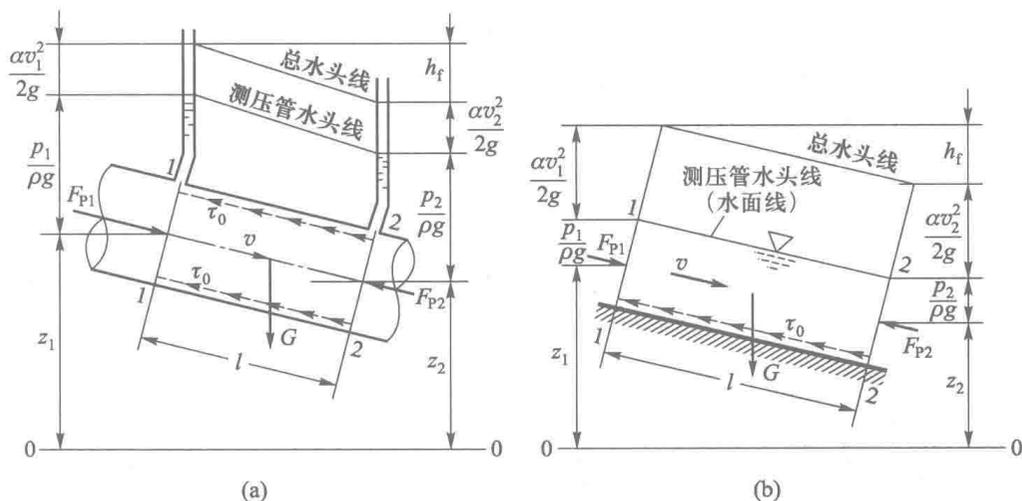


图 4.6

因为均匀流没有加速度，所以各作用力处于平衡状态，写出流动方向的平衡方程为

$$F_{p1} - F_{p2} + G \sin \alpha - F = 0$$

即

$$Ap_1 - Ap_2 + \rho g A l \sin \alpha - l \chi \tau_0 = 0$$

由图 4.6 可知 $\sin \alpha = \frac{z_1 - z_2}{l}$, 代入上式, 各项用 $\rho g A$ 除之, 整理后得

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right) = \frac{l \chi \tau_0}{A \rho g} \quad (4.4)$$

因断面 1-1 及 2-2 的流速水头相等, 则能量方程为

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right) = h_f$$

式 (4.4) 可改写成

$$h_f = \frac{l \chi \tau_0}{A \rho g} = \frac{l}{R} \frac{\tau_0}{\rho g} \quad (4.5)$$

因 $\frac{h_f}{l} = J$, 故上式也可写成

$$\tau_0 = \rho g R J \quad (4.6)$$

式 (4.5) 或式 (4.6) 就是均匀流沿程水头损失与切应力的关系式。

液流各流层之间均有内摩擦切应力 τ 存在, 在均匀流中任意取一流束按上述同样方法可求得

$$\tau = \rho g R' J \quad (4.7)$$

式中 R' 为流束的水力半径; J 为均匀总流的水力坡度。

由式 (4.6) 及式 (4.7) 可得

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{R'}{R}$$

对圆管均匀流来说, $R = \frac{d}{4} = \frac{r_0}{2}$, 式中 r_0 为圆管的半径, 则距管轴为 r 处的切应力为

$$\tau = \frac{r}{r_0} \tau_0 \quad (4.8)$$

所以圆管均匀流过水断面上切应力是按直线分布的, 圆管中心的切应力为零, 沿半径方向逐渐增大, 到管壁处为 τ_0 。

用同样方法, 可求得水深为 H 的宽浅明渠均匀流切应力的分布规律为

$$\tau = \left(1 - \frac{y}{H} \right) \tau_0 \quad (4.9)$$

所以在宽浅的明渠均匀流中, 过水断面上的切应力也是按直线分布的, 水

面上的切应力为零，离渠底为 y 处的切应力为 τ ，至渠底为 τ_0 。

欲应用上述公式求切应力 τ 或求沿程水头损失 h_f ，必须先知道 τ_0 ，因此现在的问题就归结到液流阻力规律的探讨。

4.3.2 切应力的影响因素

大量试验研究表明，边界切应力 τ_0 与下列因素有关：断面平均流速 v 、水力半径 R 、液体密度 ρ 、液体的动力粘度 η 及粗糙表面的凸出高度 Δ ，即

$$\tau_0 = f(R, v, \rho, \eta, \Delta) \quad (4.10)$$

根据量纲分析（详见本书 11.1 节），边界切应力的表达式为

$$\tau_0 = \frac{\lambda}{8} \rho v^2 \quad (4.11)$$

式中 λ 是表征沿程阻力大小的一个量纲一的系数，称为沿程阻力系数。它和水流雷诺数，壁面凸出高度和水力半径之比有关，可表示为

$$\lambda = f\left(Re, \frac{\Delta}{R}\right) \quad (4.12)$$

4.3.3 均匀流的沿程水头损失

将式 (4.11) 代入式 (4.5)，得

$$h_f = \lambda \frac{l}{4R} \frac{v^2}{2g} \quad (4.13)$$

上式就是计算均匀流沿程水头损失的一个基本公式，也叫达西（Darcy）公式。

对圆管来说，水力半径 $R = \frac{d}{4}$ ，故达西公式也可写作

$$h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \quad (4.14)$$

液体运动的水流阻力和沿程水头损失都与液流型态有关，所以无论要求解 τ_0 或 λ 或 h_f 都必须研究液流型态。

4.4 液体运动的两种型态

1883 年雷诺（Reynolds）曾用试验揭示了实际液体运动存在的两种型态即层流和湍流的不同本质。

4.4.1 雷诺试验

图 4.7 所示为雷诺试验装置的示意图。试验时将容器装满液体，使液面保

持稳定,使水流为恒定流。试验时将阀门 K_1 徐徐开启,液体自玻璃管中流出,然后将颜色液体的阀门 K_2 打开,就可看到在玻璃管中有一条细直而鲜明的带色流束,这一流束并不与未带色的液体混杂,如图 4.8a 所示。再将阀门 K_1 逐渐开大,玻璃管中流速逐渐增大,就可看到带色流束开始颤动并弯曲,具有波形轮廓(图 4.8b)。然后在其个别流段上开始出现破裂,因而失掉了带色流束的清晰形状。最后在流速达到某一定值时,带色流束便完全破裂,并且很快扩散成布满全管的旋涡,使全部水流着色(图 4.8c),说明此时流体质点已互相混掺。管中旋涡也就是由许多大小不等的共同旋转的质点群所组成,这些质点群叫作涡体。

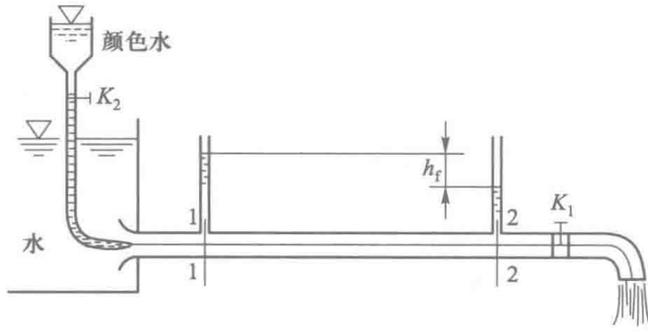


图 4.7

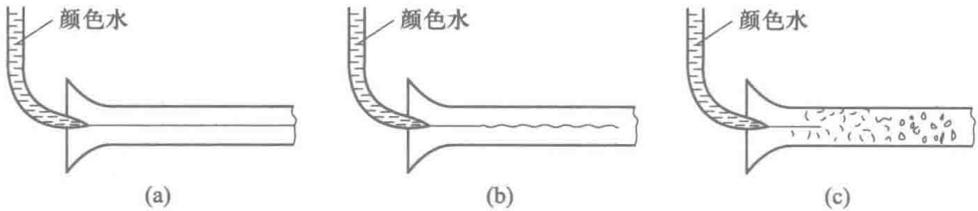


图 4.8

以上试验表明,同一液体在同一管道中流动,当流速不同时,液体可有两种不同形态的运动:

当流速较小时,各流层的液体质点是有条不紊地运动,互不混杂,这种形态的流动叫作层流。

当流速较大时,各流层的液体质点形成涡体,在流动过程中,互相混掺,这种形态的流动叫作湍流。

当试验以相反的程序进行时,则观察到的现象就以相反的程序而重演,但在湍流转变为层流时流速的数值要比层流转变为湍流时小。

若在玻璃管的两个断面 1-1 及 2-2 上各安一根测压管,则可测出断面

1-1 至 2-2 间的水头损失。由能量方程式得

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_f$$

因 $z_1 = z_2$, $\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$ 故 $\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = h_f$ 。这就是说, 两根测压管中的水柱差即为断面 1-1 至 2-2 的沿程水头损失。

据雷诺试验的结果, 液流型态不同, 沿程水头损失的规律也不同。若以 $\lg v$ 为横轴, 以 $\lg h_f$ 为纵轴, 将试验数据绘出, 如图 4.9 所示。相应于液体运动型态转变时的流速叫作临界流速。若试验时流速自小变大, 则层流维持至 C 点才能转变为湍流。C 点所对应的流速叫上临界流速 v'_{cr} 。若试验自相反程序进行, 则湍流维持至 B 点才转变为层流, B 点所对应的流速叫作下临界流速 v_{cr} 。BC 之间的液流型态依试验的程序而定, 可能为层流也可能是湍流, 称为过渡区。线段 AC 及 ED 可用下列方程式来表示:

$$\lg h_f = \lg k + m \lg v$$

式中 $\lg k$ 为截距, m 为直线的斜率。上式可表示成指数形式, 即

$$h_f = kv^m \quad (4.15)$$

据试验结果: 层流时适用直线 AC, $\theta_1 = 45^\circ$, 即 $m = 1$, 所以层流时沿程水头损失是与流速的一次方成比例的。湍流时适用直线 DE, $\theta_2 > 45^\circ$, $m = 1.75 \sim 2$, 所以湍流时沿程水头损失是与流速的 1.75 ~ 2 次方成比例的。由此可见, 液流型态不同, m 的取值亦不同。因此, 欲确定沿程水头损失必须首先判别液流的型态。

4.4.2 液流型态的判别

雷诺试验的结果发现, 临界流速与液体的密度 ρ 、动力粘度 η 及管径 d 都有密切关系, 并提出液流型态可用下列量纲一的数来判断:

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta} = \frac{v d}{\nu} \quad (4.16)$$

Re 即为雷诺数。液流型态开始转变时的雷诺数叫作临界雷诺数。若用下临界流速代入上式, 则求得的雷诺数叫作下临界雷诺数 Re_{cr} 。若用上临界流速代入

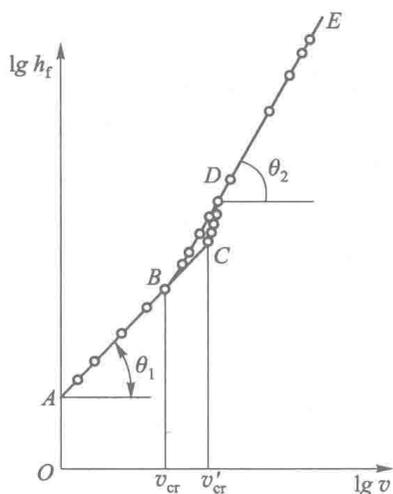


图 4.9

上式，则求得的雷诺数叫作上临界雷诺数 $Re_{cr'}$ 。

经大量试验证明，圆管中液流的下临界雷诺数是一个比较稳定的数值，即

$$Re_{cr} \approx 2\,000 \quad (4.17)$$

但上临界雷诺数是一个不稳定的数值， $Re_{cr'} = 12\,000 \sim 20\,000$ ，在个别情况下也有高达 $Re_{cr'} = 40\,000 \sim 50\,000$ 的，这要看液流平静程度及来流有无扰动而定。凡雷诺数大于下临界雷诺数时，即使液流原为层流，只要有任何微小扰动，就可以使层流变为湍流。在实际工程上扰动总是存在的，所以上、下临界雷诺数之间的液流是极不稳定的，在实用上都可以看作是湍流。因此判别液流型态以下临界雷诺数为标准：实际雷诺数大于下临界雷诺数时就是湍流，小于下临界雷诺数时一定是层流。

以上试验虽然都是以圆管液流为对象，但其结论对其他边界条件下的液流也是适用的，只是边界条件不同时，下临界雷诺数的数值不同而已。例如：明渠及天然河道 $Re_{cr} = \frac{vR}{\nu} \approx 500$ ，式中 R 为水力半径；平行固体壁之间的液流

$Re_{cr} = \frac{vb}{\nu} \approx 1\,000$ ，式中 b 为两壁之间的距离。

4.4.3 湍流形成过程的分析

由雷诺试验可知，层流与湍流的主要区别在于湍流时各流层之间液体质点有不断的互相混掺作用，而层流则无。涡体的形成是混掺作用产生的根源。下面讨论涡体的形成过程。

由于液体的粘滞性和边界面的滞水作用，液流过水断面上的流速分布总是不均匀的，因此相邻各流层之间的液体质点就有相对运动发生，使各流层之间产生内摩擦切应力。对于某一选定的流层来说，流速较大的邻层加于它的切应力是顺流向的，流速较小的邻层加于它的切应力是逆流方向的（图4.10）。因此该选定的流层所承受的切应力，有构成为力矩，使流层发生旋转的倾向。由于外界的微小干扰或来流中残存的扰动，该流层将不可避免地出现局部性的波动，随同这种波动而来的是局部流速和压强的重新调整。如图4.11a所示，波峰附近由于发生流线间距变化，在波峰上面，微小流束过水断面变小，流速变大，根据伯努利方程，压强要降低；而波峰下面，微小流束过水断面增大，流速变小，压强就增大。在波谷附近流速和压强也有相应的变化，

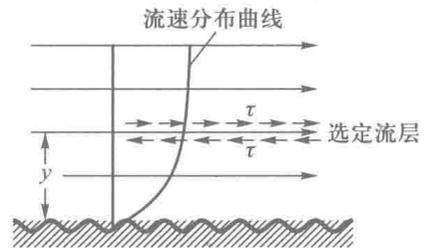


图 4.10

但与波峰处的情况相反。这样就使发生微小波动的流层各段承受不同方向的横向压力 F 。显然,这种横向压力将使波峰愈凸,波谷愈凹,促使波幅更加增大(图 4.11b)。波幅增大到一定程度以后,由于横向压力与切应力的综合作用,最后,使波峰与波谷重叠,形成涡体(图 4.11c)。涡体形成以后,涡体旋转方向与水流流速方向一致的一边流速变大,相反一边流速变小。流速大的一边压强小,流速小的一边压强大,这样就使涡体上下两边产生压差,形成作用于涡体的升力(图 4.12)。这种升力就有可能推动涡体脱离原流层而掺入流速较高的邻层,从而扰动邻层进一步产生新的涡体。如此发展下去,层流即转化为湍流。

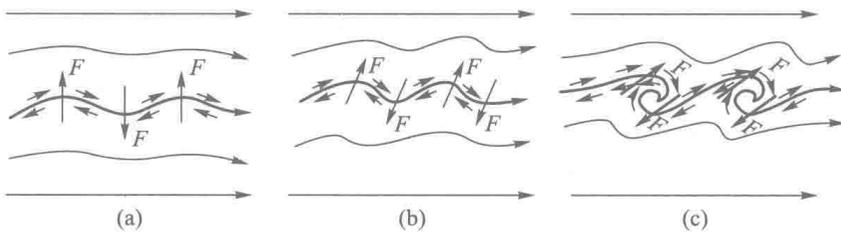


图 4.11

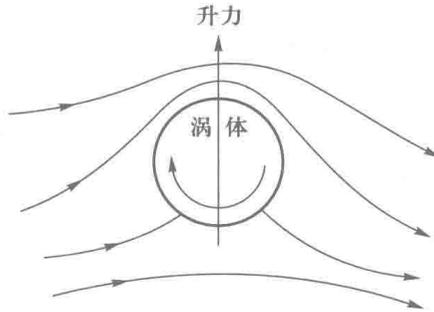


图 4.12

涡体产生并不一定就能形成湍流。一方面因为涡体由于惯性有保持其本身运动的倾向,另一方面因为液体是有粘滞性的,粘滞作用又要约束涡体的运动,所以涡体能否脱离原流层而掺入邻层,就要看惯性作用与粘滞作用两者的对比关系。只有当惯性作用与粘滞作用相比强大到一定程度时,才可能形成湍流。

现在来分析液体质点所受惯性力和粘滞力的量纲。惯性力 F 的量纲式为

$$\dim F = \dim(ma) = \dim\left(\rho V \frac{du}{dt}\right) = \dim\left(\rho V \frac{du}{ds} \frac{ds}{dt}\right) = \dim(\rho L^2 v^2)$$

粘滞力 F_T 的量纲式为

$$\dim F_T = \dim(\tau A) = \dim\left(\eta A \frac{du}{dy}\right) = \dim(\rho \nu L \nu)$$

惯性力与粘滞力的量纲之比 $\frac{\dim F}{\dim F_T} = \dim\left(\frac{\rho L^2 \nu^2}{\rho \nu L \nu}\right) = \dim\left(\frac{\nu L}{\nu}\right)$, 恰好与雷诺数的定义式相同。

所以雷诺数是表征惯性力与粘滞力的比值, 这就是可以用雷诺数来判别液流型态的道理。

由以上分析可知: 湍流形成的先决条件是涡体的形成, 其次是雷诺数要达到一定的数值。如果液流非常平稳, 没有任何扰动, 涡体不易形成, 则雷诺数虽然达到一定的数值, 也不可能产生湍流, 所以自层流转变为湍流时, 上临界雷诺数是极不稳定的。反之, 自湍流转变为层流时, 只要雷诺数降低到某一数值, 即使涡体继续存在, 若惯性力不足以克服粘滞力, 混掺作用即行消失, 所以不管有无扰动, 下临界雷诺数是比较稳定的。

由雷诺试验证明了不同液流型态, 沿程水头损失的规律是不同的。在实际水利工程中所遇到的水流大多数是湍流, 所以下面对层流沿程水头损失的计算, 只以圆管层流为例子作一简单介绍, 对湍流则将作较详细的讨论。

4.5 圆管中的层流运动及其沿程水头损失

圆管中的层流运动, 可以看作是由许多无限薄的同心圆筒层一个套一个地运动着, 因此每一圆筒层表面的切应力都可按牛顿内摩擦定律来计算, 即

$$\tau = -\eta \frac{du_x}{dr} \quad (4.18)$$

因各圆筒层的流速 u_x 是随半径 r 的增加而递减的, 故 $\frac{du_x}{dr}$ 为负值。

由式 (4.7) 可知圆筒层表面的切应力为

$$\tau = \rho g R' J = \frac{\rho g r J}{2} \quad (4.19)$$

由式 (4.18) 及式 (4.19) 得

$$\frac{\rho g r J}{2} = -\eta \frac{du_x}{dr}$$

两边积分整理后, 可得

$$u_x = -\frac{\rho g J}{4\eta} r^2 + C$$

式中 C 为积分常数。

当 $r = r_0$ 时, $u_x = 0$, 代入上式得 $C = \frac{\rho g J}{4\eta} r_0^2$ 。将 C 值代入, 得流速分布公式:

$$u_x = \frac{\rho g J}{4\eta} (r_0^2 - r^2) \quad (4.20)$$

上式表明, 圆管层流的流速在横断面上呈抛物线形分布 (图 4.13)。

圆管层流的断面平均流速为

$$\begin{aligned} v &= \frac{\int_A u_x dA}{A} = \frac{\int_0^{r_0} u_x \cdot 2\pi r dr}{\pi r_0^2} \\ &= \frac{\rho g J}{4\eta} \frac{\int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2) 2\pi r dr}{\pi r_0^2} = \frac{\rho g J r_0^2}{8\eta} = \frac{\rho g J d^2}{32\eta} \end{aligned}$$

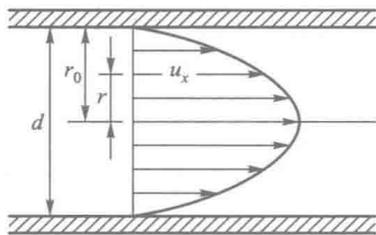


图 4.13

故

$$J = \frac{h_f}{l} = \frac{32\eta v}{\rho g d^2}$$

或

$$h_f = \frac{32\eta v l}{\rho g d^2} \quad (4.21)$$

上式就是计算圆管层流沿程水头损失的公式。此式表明: 在圆管层流中, 沿程水头损失与断面平均流速的一次方成比例, 这与雷诺试验的结果完全一致。若用达西公式的形式来表示圆管层流的沿程水头损失, 则由

$$h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = \frac{32\eta v l}{\rho g d^2}$$

可得

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (4.22)$$

由此可知, 圆管层流中沿程阻力系数 λ 仅系雷诺数的函数, 且与雷诺数成反比。

例 4.1 推求图 4.14 所示的二维明渠层流的沿程阻力系数、动能修正系数和动量修正系数。

解: 设二维明渠层流的水深为 H , 距渠底距离为 y 的 a 点的切应力为

$$\tau = \rho g R' J$$

由于 $R' = H - y$, 故有

$$\tau = \rho g (H - y) J$$

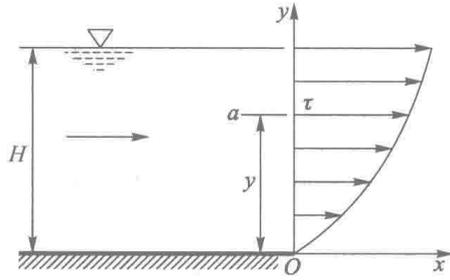


图 4.14

而根据牛顿内摩擦定律, a 点处水流的切应力为

$$\tau = \rho\nu \frac{du}{dy}$$

联立解以上两式, 可得

$$du = \frac{gJ}{\nu} (H - y) dy$$

积分得

$$u = \frac{gJ}{\nu} \int_0^H (H - y) dy = \frac{gJ}{\nu} \left(Hy - \frac{y^2}{2} \right) + C$$

在渠底 $y=0$ 处, $u=0$, 代入上式求得 $C=0$ 。于是有

$$u = \frac{gJ}{\nu} \left(Hy - \frac{y^2}{2} \right)$$

上式表明二维明渠层流在横断面上的流速呈抛物线分布。在水面 $y=H$ 处, $u = u_{\max} = \frac{gJH^2}{2\nu}$ 。

二维明渠层流的断面平均流速为

$$v = \frac{\frac{gJ}{\nu} \int_0^H \left(Hy - \frac{y^2}{2} \right) dy}{H} = \frac{gJH^2}{3\nu} = \frac{2}{3} u_{\max}$$

将 $J = \frac{h_f}{l}$ 代入上式, 可得

$$h_f = \frac{3\nu l}{gH^2} v$$

上式表明二维明渠层流的沿程水头损失与断面平均流速的一次方成正比。

以水力半径 $R=H$ 代入上式, 整理可得

$$h_f = \frac{24}{Re} \frac{l}{4R} \frac{v^2}{2g}$$

可见，二维明渠层流的沿程阻力系数 $\lambda = \frac{24}{Re}$ 。

动能修正系数

$$\alpha = \frac{\int_0^H u^3 dy}{v^3 H} = \frac{1}{v^3 H} \int_0^H \left(\frac{gJ}{v}\right)^3 \left(Hy - \frac{y^2}{2}\right)^3 dy = \frac{54}{35} \approx 1.54$$

动量修正系数

$$\beta = \frac{\int_0^H u^2 dy}{v^2 H} = \frac{1}{v^2 H} \int_0^H \left(\frac{gJ}{v}\right)^2 \left(Hy - \frac{y^2}{2}\right)^2 dy = \frac{6}{5} = 1.2$$

采用同样的方法可推导出圆管层流的动能修正系数 $\alpha = 2$ ，动量修正系数 $\beta = \frac{4}{3}$ 。可见层流的动能修正系数和动量修正系数都比 1 大得多，这主要是由于层流在横断面上的流速分布很不均匀造成的。

4.6 湍流的特征

4.6.1 运动要素的脉动

湍流的基本特征是许许多多大小不等的涡体相互混掺着前进，它们的位置、形态、流速都在时刻不断地变化着。因此当大小不一的涡体连续通过湍流中某一定点时，必然会反映出这一定点上的瞬时运动要素（如流速、压强等）随时间发生波动的现象，这种现象就叫作运动要素的脉动。

根据欧拉法，若在恒定流中选定某一空间定点，观察液体质点通过该点的运动状态，则在该定点上，不同时刻就有不同液体质点通过，各质点通过时的流速方向及大小都是不同的。某一瞬间通过该定点的流体质点的速度称为该定点的瞬时流速。任一瞬时流速总可分解为三个分速度 u_x ， u_y ， u_z 。若以瞬时流速的分速 u_x 为纵轴，以时间 t 为横轴，即可绘出 u_x 随时间而变化的曲线（图 4.15a）。试验研究的结果表明：瞬时流速虽有变化，但在足够长的时间过程中，它的时间平均值是不变的。

若取一足够长的时间过程 T ，在此时间过程中的时间平均流速为

$$\bar{u}_x = \frac{1}{T} \int_0^T u_x dt \quad (4.23)$$

图 4.15 中 AB 线即代表时间平均流速曲线。恒定流时， AB 与 t 轴平行（图 4.15a），即时间平均流速是不随时间而变化的。非恒定流时， AB 是与 t 轴

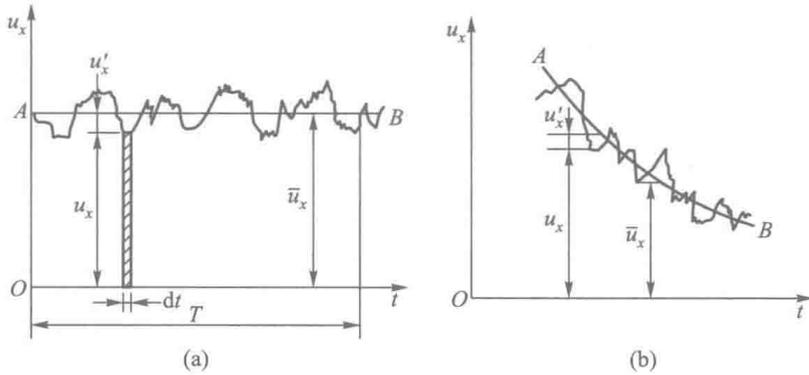


图 4.15

不平行的曲线（图 4.15b），即时间平均流速是随时间而变化的。

湍流时各运动要素时间平均值的这种规律性的存在，对湍流的研究带来很大的方便。只要建立了时间平均的概念，则以前所提到的分析水流运动规律的方法，对湍流的运动仍可适用。例如，对湍流来说，流线是指时间平均流速场的流线，流束是指时间平均流速的流束，恒定流是指时间平均的运动要素不随时间而变化的液流，非恒定流是指时间平均的运动要素随时间而变化的液流，等等。

瞬时流速与时间平均流速之差叫作脉动流速 u'_x ，即

$$u'_x = u_x - \bar{u}_x \quad (4.24)$$

这样，就可把瞬时流速看成是由时间平均流速与脉动流速两部分所组成的，即

$$u_x = \bar{u}_x + u'_x \quad (4.25)$$

而脉动值 u'_x 的时间平均总是等于零的。例如，对脉动流速 $u'_x = u_x - \bar{u}_x$ 进行时间平均

$$\bar{u}'_x = \frac{1}{T} \int_0^T u'_x dt = \frac{1}{T} \int_0^T u_x dt - \frac{1}{T} \int_0^T \bar{u}_x dt$$

由式 (4.23) 可知 $\frac{1}{T} \int_0^T u_x dt = \bar{u}_x$ ，又因 \bar{u}_x 为常数， $\frac{1}{T} \int_0^T \bar{u}_x dt = \frac{1}{T} \bar{u}_x \int_0^T dt = \bar{u}_x$ ，故

$$\bar{u}'_x = \frac{1}{T} \int_0^T u'_x dt = \bar{u}_x - \bar{u}_x = 0$$

其他运动要素如动水压强也可用同样方法来表示：

$$p = \bar{p} + p' \quad (4.26)$$

并用同样方法可证

$$\bar{p}' = \frac{1}{T} \int_0^T p' dt = 0$$

研究液体运动规律时，常用脉动流速的均方根值来表示脉动幅度的大小。在数理统计中，此值常用符号 δ 来表示，即

$$\delta = \sqrt{u'^2} \quad (4.27)$$

脉动流速的均方根值 δ 与时均特征流速 v 的比值称为湍动强度，以 T_u 表示，即

$$T_u = \frac{\delta}{v} = \frac{\sqrt{u'^2}}{v} \quad (4.28)$$

式中 v 为时均特征流速，对明渠流或管流，时均特征流速常采用断面平均流速；对绕流问题则用远离物体的时均流速。

图 4.16 所示为根据明渠试验资料绘制的湍动强度沿水深的变化曲线。图中 h 为水深， y 为距槽底的距离， T_{ux} 为 x 方向流速的湍动强度， T_{uy} 为 y 方向流速的湍动强度。由图可知：靠近槽底附近湍动强度最大，靠近水面湍动强度最弱。这是因为靠近槽底处的流速梯度和切应力都比较大，加之槽壁粗糙度干扰的影响也较强，因此靠近槽底附近最容易形成涡体，是涡体的发源地。

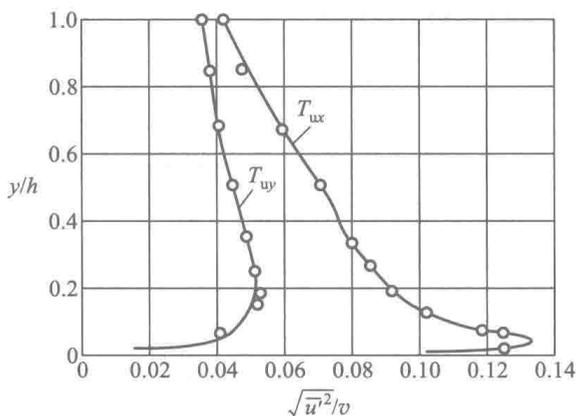


图 4.16

4.6.2 湍动产生附加切应力

在层流运动中由于流层间的相对运动所引起的粘滞切应力可由下式计算：

$$\tau = \eta \frac{du}{dy}$$

但湍流运动则不同，各流层间除有相对运动外，还有质点交换。因此，湍流切应力的计算，应引用时间平均的概念，把湍流运动两流层之间的时均切应

力 $\bar{\tau}$ 看作是由两部分所组成：第一部分为由相邻两流层间时间平均流速相对运动所产生的粘滞切应力 $\bar{\tau}_1$ ；第二部分为纯粹由脉动流速所产生的附加切应力 $\bar{\tau}_2$ 。所以湍流总切应力为

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_1 + \bar{\tau}_2 \quad (4.29)$$

湍流时均粘滞切应力与层流时一样计算，其公式为

$$\bar{\tau}_1 = \eta \frac{d\bar{u}_x}{dy} \quad (4.30)$$

计算附加切应力的公式可应用普朗特动量传递学说来推导。这一学说是假设液体质点在脉动运移过程中瞬时流速保持不变，因而动量也保持不变，而到达新位置后，动量即突然改变，并与新位置上原有液体质点所具有的动量一致。由动量定律，这种液体质点的动量变化，将产生附加切应力。应用这一学说就可建立附加切应力与液体质点脉动流速之间的关系。

图 4.17 所示为明渠二元均匀流中液体质点沿 y 轴方向混掺的示意图。在液流中取一垂直于 y 轴的微小截面 dA_y 进行分析，若 a 层液体质点以脉动流速 u'_y 通过该截面而进入 b 层，则在 dt 时间内所通过的质量为

$$\Delta m = \rho u'_y dA_y dt$$

这些液体质点原具有 x 方向的瞬时流速 u_x ，若运移过程中 u_x 保持不变，则进入 b 层后将显示出一个脉动流速 u'_x ，其值等于 u_x 与原 b 层液体质点时均流速的差值。由此可知这些液体质点到达 b 层后的动量变化为

$$\Delta m u'_x = \rho u'_x u'_y dA_y dt$$

根据动量定律，在 x 方向的力 ΔF 的冲量为

$$\Delta F dt = \rho u'_x u'_y dA_y dt$$

ΔF 为由液体质点混掺所引起的在截面 dA_y 上的剪力，故附加切应力为

$$\tau_2 = \frac{\Delta F}{dA_y} = \rho u'_x u'_y$$

因各流层之间液体质点是随时互相混掺的，脉动流速的大小及方向也是瞬时变化的，所以由脉动流速所产生的附加切应力应以时间平均值来表示：

$$\bar{\tau}_2 = \rho \overline{u'_x u'_y} \quad (4.31)$$

假设 y 方向的脉动流速向上为正，向下为负； x 方向的脉动流速向右为

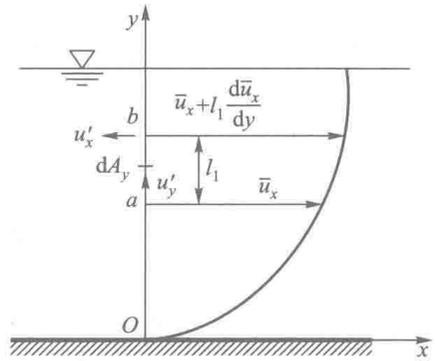


图 4.17

正, 向左为负。当 u'_y 为正时, 即液体质点自截面下层混掺到截面上层, 因为下层液体的时均流速小于上层, 在大多数情况下, 可以认为 u'_x 为负值, 即 u'_y 为正时 u'_x 为负。同理可证, 当 u'_y 为负时质量从上层向下层传递, 上层时均流速大, 一般 u'_x 为正值。所以 u'_x 与 u'_y 的符号总是相反的, 为了使湍流切应力以正值形式出现, 须在式 (4.31) 等号右边加一负号, 即

$$\bar{\tau}_2 = -\rho \overline{u'_x u'_y} \quad (4.32)$$

上式是湍流时均附加切应力表达式。下面把附加切应力的公式改变成为用时均流速来表示的关系式。

今设想 a 层某液体质点可以自由运移至 b 层。在运移过程中该液体质点至 b 层以前不会与其他质点碰撞。 ab 两层之间的距离 l_1 为液体质点的自由运移距离。若 a 层液体质点的时均流速为 \bar{u}_x , 则 b 层液体质点的时均流速为 $\bar{u}_x + l_1 \frac{d\bar{u}_x}{dy}$ 。设 a 层液体质点的脉动流速为 u'_{xa} , 则瞬时流速必为 $\bar{u}_x + u'_{xa}$ 。当 a 层液体质点以 u'_y 的流速向上运移一个距离 l_1 进入 b 层时, b 层将显示出 x 方向的脉动流速为

$$u'_x = u_{xa} - \left(\bar{u}_x + l_1 \frac{d\bar{u}_x}{dy} \right) = (\bar{u}_x + u'_{xa}) - \left(\bar{u}_x + l_1 \frac{d\bar{u}_x}{dy} \right) = - \left(l_1 \frac{d\bar{u}_x}{dy} - u'_{xa} \right)$$

该 x 方向脉动流速 u'_x 绝对值的时均值为

$$\overline{|u'_x|} = \overline{\left| l_1 \frac{d\bar{u}_x}{dy} - u'_{xa} \right|} = l_1 \frac{d\bar{u}_x}{dy}$$

而 y 方向脉动流速 u'_y 的绝对值的时均值 $\overline{|u'_y|}$ 与 $\overline{|u'_x|}$ 之间有一定的关联, 且属于同一数量级, 可令

$$\overline{|u'_y|} = k_1 \overline{|u'_x|} = k_1 l_1 \frac{d\bar{u}_x}{dy}$$

$\overline{|u'_x u'_y|}$ 与 $\overline{|u'_x|} \cdot \overline{|u'_y|}$ 是不相等的, 但应有一定的比例关系, 即

$$\overline{|u'_x u'_y|} = k_2 \overline{|u'_x|} \cdot \overline{|u'_y|} = k_1 k_2 l_1^2 \left(\frac{d\bar{u}_x}{dy} \right)^2$$

式中 k_1, k_2 均为比例系数。令 $l^2 = k_1 k_2 l_1^2$, 则

$$\overline{|u'_x u'_y|} = l^2 \left(\frac{d\bar{u}_x}{dy} \right)^2$$

因为 u'_x 与 u'_y 的乘积永远为负值, 故 $-\rho \overline{u'_x u'_y}$ 必定是正值, 由式 (4.32) 可得

$$\bar{\tau}_2 = -\rho \overline{u'_x u'_y} = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}_x}{dy} \right)^2 \quad (4.33)$$

式中 l 称为混掺长度，由推导过程可知它是一个与液体质点时均自由运移长度成比例的物理量。

若令 $\varepsilon = l^2 \frac{d\bar{u}_x}{dy}$ 或 $\eta_t = \rho l^2 \frac{d\bar{u}_x}{dy}$ ，则上式可写作

$$\bar{\tau}_2 = \rho \varepsilon \frac{d\bar{u}_x}{dy} = \eta_t \frac{d\bar{u}_x}{dy} \quad (4.34)$$

式中 ε 称为动量传递系数； η_t 称为湍动粘度。

故湍流的时均切应力公式为

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_1 + \bar{\tau}_2 = \eta \frac{d\bar{u}_x}{dy} + \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}_x}{dy} \right)^2 = \eta \frac{d\bar{u}_x}{dy} + \eta_t \frac{d\bar{u}_x}{dy}$$

以后讨论湍流运动时所有运动要素均采用时均值，为简便计，时均符号可以省去不写，即

$$\tau = \eta \frac{du_x}{dy} + \rho l^2 \left(\frac{du_x}{dy} \right)^2 = \eta \frac{du_x}{dy} + \eta_t \frac{du_x}{dy} \quad (4.35)$$

4.6.3 湍流中存在粘性底层

在湍流中，紧靠固体边界附近的地方，因脉动流速很小，由脉动流速产生的附加切应力也很小，而流速梯度却很大，所以粘滞切应力起主导作用，其流态基本上属层流。因此湍流中并不是整个液流都是湍流，在紧靠固体边界表面有一层极薄的层流层存在，该层流层叫粘性底层。在粘性底层以外的液流才是湍流（图 4.18）。在这两液流之间，还存在着一层极薄的过渡层，因其实际意义不大，可以不加考虑。

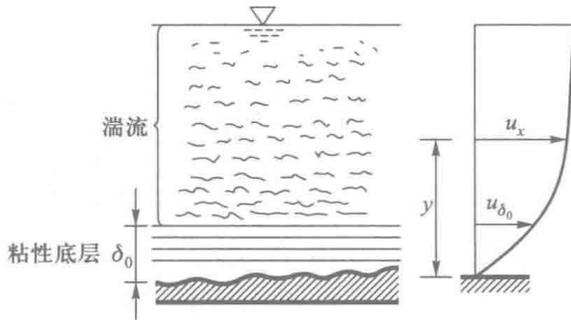


图 4.18

在工程实践中，粘性底层对湍流沿程阻力规律的研究有重大意义。现在先

来研究一下粘性底层的厚度 δ_0 。粘性底层的性质既然与层流一样，其切应力 $\tau = \eta \frac{du_x}{dy}$ ，其流速按抛物线规律分布。因粘性底层极薄，其流速分布可看作是按直线变化。即自 $y = 0$ ， $u_x = 0$ ，变化到 $y = \delta_0$ ， $u_x = u_{\delta_0}$ ，式中 u_{δ_0} 为粘性底层上边界的流速。这样

$$\frac{u_{\delta_0}}{\delta_0} = \frac{du_x}{dy}$$

故

$$\tau_0 = \eta \frac{du_x}{dy} = \eta \frac{u_{\delta_0}}{\delta_0}$$

整理后可得

$$\frac{u_{\delta_0}}{\delta_0} = \frac{\frac{\tau_0}{\rho}}{\frac{\eta}{\rho}}$$

令 $\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = u_*$ ，则上式可写作 $\frac{u_{\delta_0}}{u_*} = \frac{u_* \delta_0}{\nu}$ ，式中 u_* 具有与流速相同的量纲，叫作摩阻流速。

因 $\frac{u_{\delta_0}}{u_*}$ 为一个量纲一的数，常用符号 N 表示，可得

$$\delta_0 = \frac{N\nu}{u_*} \quad (4.36)$$

据尼古拉兹试验结果 $N = 11.6$ 。

因 $\tau_0 = \frac{\lambda}{8} \rho v^2$ ，故

$$u_* = \sqrt{\frac{\lambda}{8}} v \quad (4.37)$$

将式 (4.37) 代入式 (4.36)，得

$$\delta_0 = \frac{\sqrt{8} N d}{Re \sqrt{\lambda}}$$

式中雷诺数 $Re = \frac{vd}{\nu}$ 。若采用 $N = 11.6$ ，则

$$\delta_0 = \frac{32.8d}{Re \sqrt{\lambda}} \quad (4.38)$$

上式就是粘性底层厚度的公式。由该公式可知：粘性底层的厚度随雷诺数

的增加而减小。

固体边界的表面总是粗糙不平的，粗糙表面凸出高度叫作绝对粗糙度，常用 Δ 表示。粘性底层的厚度 δ_0 既随 Re 而变化，因此 δ_0 可能大于也可能小于 Δ 。

当 Re 较小时， δ_0 可以大于 Δ 若干倍。这样，边壁表面虽然高低不平，而凸出高度完全淹没在粘性底层之中（图 4.19a）。在这种情况下，粗糙度对湍流不起任何作用，边壁对水流的阻力，主要是粘性底层的粘滞阻力，从水力学观点来看，这种粗糙表面与光滑的表面是一样的，所以叫作水力光滑面。

当 Re 较大时，粘性底层极薄， δ_0 可以小于 Δ 若干倍。此时，边壁的粗糙度对湍流已起主要作用。当湍流流核绕过凸出高度时将形成小旋涡（图 4.19b）。边壁对水流的阻力主要是由这些小旋涡造成的，而粘性底层的粘滞力只占次要地位，与前者相比，几乎可以忽略不计。这种粗糙表面叫作水力粗糙面。

介于以上两者之间的情况，粘性底层已不足以完全掩盖住边壁粗糙度的影响（图 4.19c），但粗糙度还没有起决定性作用，这种粗糙面叫作过渡粗糙面。

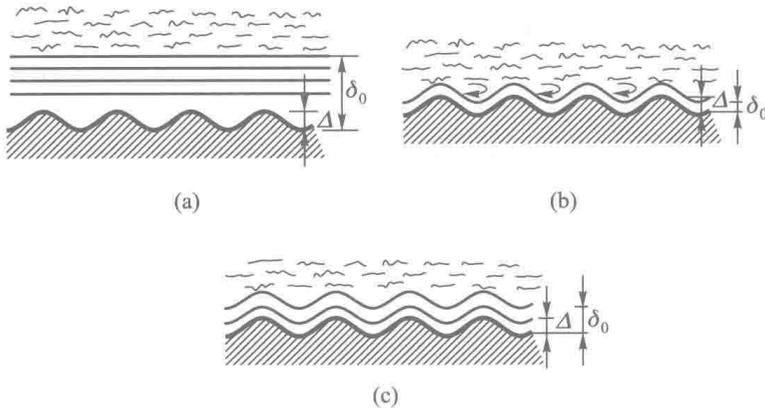


图 4.19

最后必须指出，所谓光滑面或粗糙面并非完全取决于固体边界表面本身是光滑的还是粗糙的，而必须依据粘性底层和绝对粗糙度两者大小的关系来决定。即使是同一固体边界面，在某一雷诺数下可能是光滑面，而在另一雷诺数下又可能是粗糙面。

以上所述是目前尚在采用的一种粘性底层的区分方法，尽管有人提出不同的观点，但迄今仍没有得到统一看法。

4.6.4 湍动使流速分布均匀化

湍流中由于液体质点相互混掺,互相碰撞,因而产生了液体内部各质点间的动量传递,动量大的质点将动量传给动量小的质点,动量小的质点影响动量大的质点,结果造成断面流速分布的均匀化。

图 4.20 是管道中湍流时均流速分布图。湍流流速分布的表达式,目前最常用的有以下两种:

1. 流速分布的指数公式——普朗特建议湍流流速分布可用下式表示:

$$\frac{u_x}{u_m} = \left(\frac{y}{r_0}\right)^n \quad (4.39)$$

式中 n 为指数,其值与雷诺数 Re 有关,其他符号见图 4.20。

当 $Re < 10^5$ 时, $n = \frac{1}{7}$, 这已为试验所证实,叫作流速分布的七分之一次方定律。当 $Re > 10^5$ 时, n 采用 $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$ 等可获得更准确的结果。

2. 流速分布的对数公式——湍流的时均切应力公式为

$$\tau = \eta \frac{du_x}{dy} + \rho l^2 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2$$

上式中两部分切应力的大小是随流动情况而不同的。在雷诺数较小,湍动较弱时,前者占主要地位。随着雷诺数的增加,湍动程度加剧,后者逐渐加大。到雷诺数很大,湍动已充分发展之后,则后者占绝对优势,前者影响已可忽略不计,即

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2 \quad (4.40)$$

对圆管流来说,由式 (4.8)

$$\tau = \tau_0 \frac{r}{r_0}$$

由图 4.21 可知 $r = r_0 - y$, 代入上式可得

$$\tau = \tau_0 \left(\frac{r_0 - y}{r_0}\right) = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{r_0}\right) \quad (4.41)$$

根据萨特克维奇 (Саткевич) 的研究结果

$$l = \kappa y \sqrt{1 - \frac{y}{r_0}} \quad (4.42)$$

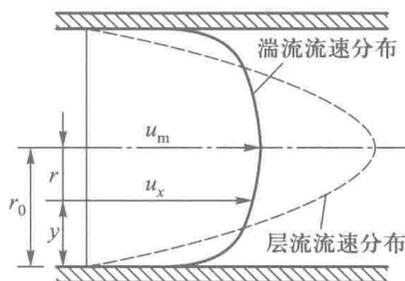


图 4.20

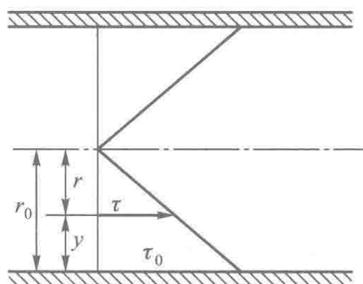


图 4.21

式中 κ 为一常数，叫卡门通用常数，试验结果 $\kappa=0.4$ 。

将式 (4.41) 和式 (4.42) 代入式 (4.40)，得

$$\tau_0 = \rho \kappa^2 y^2 \left(\frac{du_x}{dy} \right)^2$$

即

$$\frac{du_x}{dy} = \frac{1}{\kappa y} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \frac{u_*}{\kappa y} \quad (4.43)$$

将上式积分，得

$$u_x = \frac{u_*}{\kappa} \ln y + C \quad (4.44)$$

将 $\kappa=0.4$ 代入上式，得

$$u_x = 5.75 u_* \lg y + C \quad (4.45)$$

式中 C 为积分常数。

由上式可知：湍流时过水断面上的流速是按对数规律分布的，比层流时按抛物线分布要均匀得多（图 4.20）。这是因为湍流时由于液体质点的混掺作用，动量发生交换，使流速分布均匀化的结果。

目前对流速分布公式尚无纯理论解法。尼古拉兹（Никурадзе）采用管壁粘贴均匀砂的办法，形成各种不同的人工砂粒粗糙管，进行试验，求得

(1) 光滑管时，流速分布公式为

$$\frac{u_x}{u_*} = 5.75 \lg \frac{u_* y}{\nu} + 5.5 \quad (4.46)$$

将上式对圆管断面积分，可得断面平均流速公式为

$$\frac{v}{u_*} = 5.75 \lg \frac{r_0 u_*}{\nu} + 1.75 \quad (4.47)$$

(2) 粗糙管时，流速分布公式为

$$\frac{u_x}{u_*} = 5.75 \lg \frac{y}{\Delta} + 8.5 \quad (4.48)$$

将上式对圆管断面积分，可得断面平均流速公式为

$$\frac{v}{u_*} = 5.75 \lg \frac{r_0}{\Delta} + 4.75 \quad (4.49)$$

例 4.2 试用流速分布对数公式，推求二维明渠均匀流流速分布曲线上与断面平均流速 v 相等的点的位置（图 4.22）。

解：由式 (4.48)

$$u_x = u_* \left(5.75 \lg \frac{y}{\Delta} + 8.5 \right) = u_* \left(2.5 \ln \frac{y}{\Delta} + 8.5 \right)$$

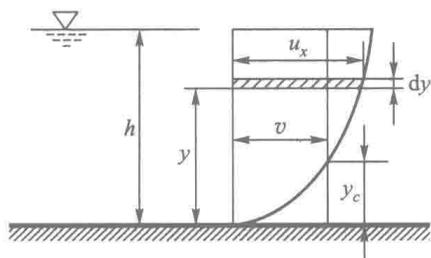


图 4.22

故单位宽度的渠道所通过的流量为

$$q = \int_0^h u_x dy = u_* \left(2.5 \int_0^h \ln \frac{y}{\Delta} dy + 8.5 \int_0^h dy \right)$$

$$v = \frac{q}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h u_x dy = u_* \left(\frac{2.5}{h} \int_0^h \ln \frac{y}{\Delta} dy + \frac{8.5}{h} \int_0^h dy \right)$$

$$= u_* \left(5.75 \lg \frac{h}{\Delta} + 6 \right)$$

即

$$\frac{v}{u_*} = 5.75 \lg \frac{h}{\Delta} + 6 \quad (4.50)$$

又因当 $u_x = v$ 处, $y = y_c$, 由式 (4.48) 得

$$\frac{v}{u_*} = 5.75 \lg \frac{y_c}{\Delta} + 8.5$$

令上式及式 (4.50) 等号右边相等, 可得

$$\lg \frac{h}{y_c} = 0.435, \text{ 即 } \frac{h}{y_c} = 2.72$$

故 $y_c = 0.367h$ 或 $h - y_c = h - 0.367h = 0.633h$ 。

由此可知, 在水面下 $0.633h$ 处的流速与平均流速相等, 所以在水文测验时用水面下 $0.6h$ 处的流速近似作为平均流速。

4.7 沿程阻力系数的变化规律

在 4.3.3 节中已求得计算沿程水头损失的公式:

$$h_f = \lambda \frac{l}{4R} \frac{v^2}{2g} \text{ 或 } h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$$

对圆管层流已求得沿程阻力系数 $\lambda = \frac{64}{Re}$, 对二元明渠层流已求得 $\lambda = \frac{24}{Re}$,

但湍流时至今尚无求沿程阻力系数的理论公式。尼古拉兹为了探讨这一问题，曾进行了一系列试验。他用不同粒径的人工砂粘贴在不同直径的管道的内壁上，用不同的流速进行试验，砂粒直径 Δ 与管道半径 r_0 的比值 $\frac{\Delta}{r_0}$ 称为相对粗糙度，而 $\frac{r_0}{\Delta}$ 称为相对光滑度。尼古拉兹用相对光滑度 $\frac{r_0}{\Delta} = 15, 30.6, 60, 126, 252, 507$ 等六组试验资料绘成曲线，如图 4.23 所示。图中 $Re = \frac{vd}{\nu}$ ， d 为管径。由图可以看出：

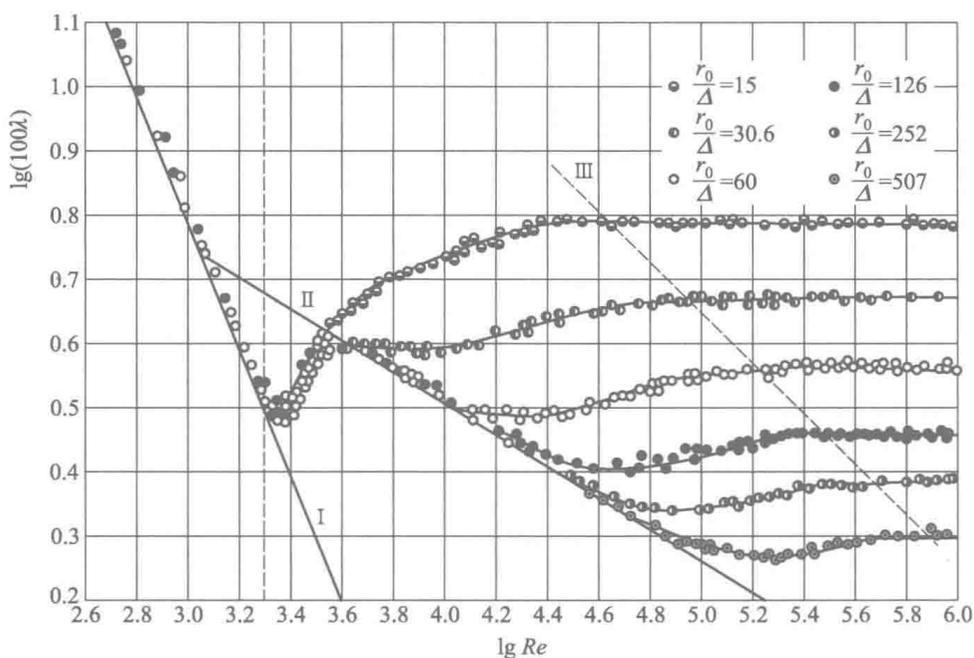


图 4.23

1. 当 $Re < 2000$ 时，沿程阻力系数 λ 与雷诺数 Re 的关系为直线 I，而与相对光滑度无关。直线 I 即代表层流时沿程阻力系数的规律，其方程式为

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

2. 当 $2000 < Re < 4000$ 时，为层流进入湍流的过渡区。 λ 值仅与 Re 有关，而与相对光滑度无关。因为它的范围很窄，实用意义不大。

3. 当 $Re > 4000$ 时，液流形态已进入湍流，沿程阻力系数决定于粘性底层厚度 δ_0 与绝对粗糙度 Δ 的关系：

(1) 当 Re 较小时，粘性底层较厚，可以淹没 Δ ，管壁就是水力光滑管。

其沿程阻力系数 $\lambda = f(Re)$ ，而与 Δ 无关。不管管壁的相对光滑度如何，所有的试验点都落在同一直线上。图中直线 II 就代表光滑管沿程阻力系数的规律。因为绝对粗糙度愈大，即相对光滑度愈小，就需要有较小的雷诺数才能保证管壁为光滑管，所以直线 II 是沿横坐标轴方向向下倾斜的。

(2) 在直线 II 与直线 III 之间的区域为光滑管过渡到粗糙管的过渡区。因雷诺数的增大，粘性底层相对减薄，以致不能完全淹没 Δ ，而管壁粗糙度已对沿程阻力发生影响，所以沿程阻力系数 $\lambda = f\left(\frac{r_0}{\Delta}, Re\right)$ 。

(3) 直线 III 以右的区域， λ 与 $\frac{r_0}{\Delta}$ 有关，而与 Re 无关，已属粗糙管区。这说明该区雷诺数增大，粘性底层继续变薄，湍流绕过凸出高度时已形成小旋涡，沿程阻力主要由这些小旋涡造成，粘性底层的粘滞阻力几乎可以忽略不计。所以此时管壁粗糙度对沿程阻力系数已起主要作用。若给定 l, d, v, Δ ，又因 λ 仅为 $\frac{r_0}{\Delta}$ 的函数，而与 Re 无关，由 $h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$ 可知， $h_f \propto v^2$ ，即该区沿程水头损失是与平均流速的平方成比例，所以粗糙管区常叫阻力平方区。

蔡克士大 (Зегжда) 用同样方法在矩形明渠中进行试验，得到与尼古拉兹试验结果相类似的一组曲线 (图 4.24)。图中雷诺数 $Re = \frac{vR}{\nu}$ ， R 为水力半径。

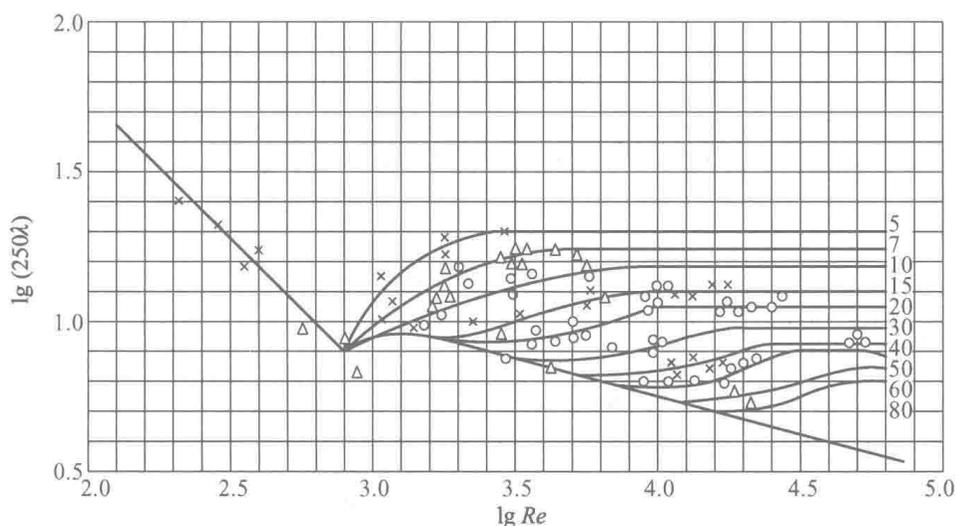


图 4.24

根据尼古拉兹等人试验的结果, 可对湍流分区的标准及计算沿程阻力系数的经验公式归纳如下:

i. 光滑区

当 $Re_* = \frac{\Delta \cdot u_*}{\nu} < 3.5$ 即 $\frac{\Delta}{\delta_0} < 0.3$ 时, 为光滑区。

光滑区时, 沿程阻力系数可用下列经验公式计算:

(1) 布拉休斯公式

$$\lambda = \frac{0.316}{Re^{1/4}} \quad (4.51)$$

适用范围 $4\,000 < Re < 10^5$ 。

(2) 尼古拉兹公式

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\lg(Re \sqrt{\lambda}) - 0.8 \quad (4.52)$$

适用范围 $Re < 10^6$ 。

ii. 过渡粗糙区

当 $3.5 \leq Re_* \leq 70$, 即 $0.3 \leq \frac{\Delta}{\delta_0} \leq 6$ 时, 为过渡粗糙区。

在过渡粗糙区时, 沿程阻力系数可由柯列布鲁克 - 怀特 (Cole - brook & White) 经验公式计算:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\lg\left(\frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{\Delta}{3.7d}\right) \quad (4.53)$$

适用范围 $3\,000 < Re < 10^6$ 。

iii. 粗糙区

当 $Re_* > 70$, 即 $\frac{\Delta}{\delta_0} > 6$ 时, 为粗糙区, 即阻力平方区。

该区沿程阻力系数可由尼古拉兹经验公式计算:

$$\lambda = \frac{1}{\left[2\lg\left(3.7 \frac{d}{\Delta}\right)\right]^2} \quad (4.54)$$

适用范围 $Re > \frac{382}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{r_0}{\Delta}\right)$ 。

对人工砂粒可用砂粒直径来代表绝对粗糙度, 但实际工程上水管的管壁粗糙度是无法直接进行量测的。目前的办法是通过管段的沿程水头损失试验, 将试验结果与人工砂粒加糙结果比较, 把具有同一沿程阻力系数 λ 值的砂粒粗糙度作为这类圆管的当量粗糙度。表 4.1 是常用管道及明渠中的当量粗糙度 Δ 值, 可供估算时参考。

表 4.1 常用管道及明渠中的当量粗糙度 Δ 值*

壁面种类 (工业管)	Δ/mm	壁面种类 (明渠)	Δ/mm
清洁铜管、玻璃管	0.0015 ~ 0.01	刨平木板制成的木槽	0.25 ~ 2.0
橡皮软管	0.01 ~ 0.03	非刨平木板制成的木槽,	0.45 ~ 3.0
新的无缝钢管	0.04 ~ 0.17	水泥浆粉面	0.8 ~ 6.0
旧钢管、涂柏油的钢管	0.12 ~ 0.21	水泥浆砖砌体	0.8 ~ 9.0
普通新铸铁管	0.25 ~ 0.42	混凝土槽	1.25 ~ 6.0
旧的生锈钢管	0.60 ~ 0.67	琢石护面	4.0 ~ 11.0
污秽的金属管	0.75 ~ 0.90	土渠	6.0 ~ 17.0
木管	0.25 ~ 1.25	水泥勾缝的普通块石砌体	25 ~ 45
陶土排水管	0.45 ~ 6.0	石砌渠道 (干砌、中等质量)	30 ~ 60
涂有珐琅质的排水管	0.25 ~ 6.0	卵石河床 ($d = 70 \sim 80 \text{ mm}$)	0.25 ~ 1.25
纯水泥的表面	0.25 ~ 1.25		

* 本表摘自苏联依杰里奇著《水力摩擦》，黄骏、夏颂佑译，电力出版社，1957年，第307页，以及莫斯特柯夫著《水力学手册》，麦乔威译，水利出版社，1956年，第153-154页。

图 4.25 所示为工业用各种不同相对粗糙度的圆管的沿程阻力系数 λ 与雷诺数 Re 的关系曲线，称为穆迪 (Moody) 图。根据该图查得的 λ 值与实际情况较为符合。

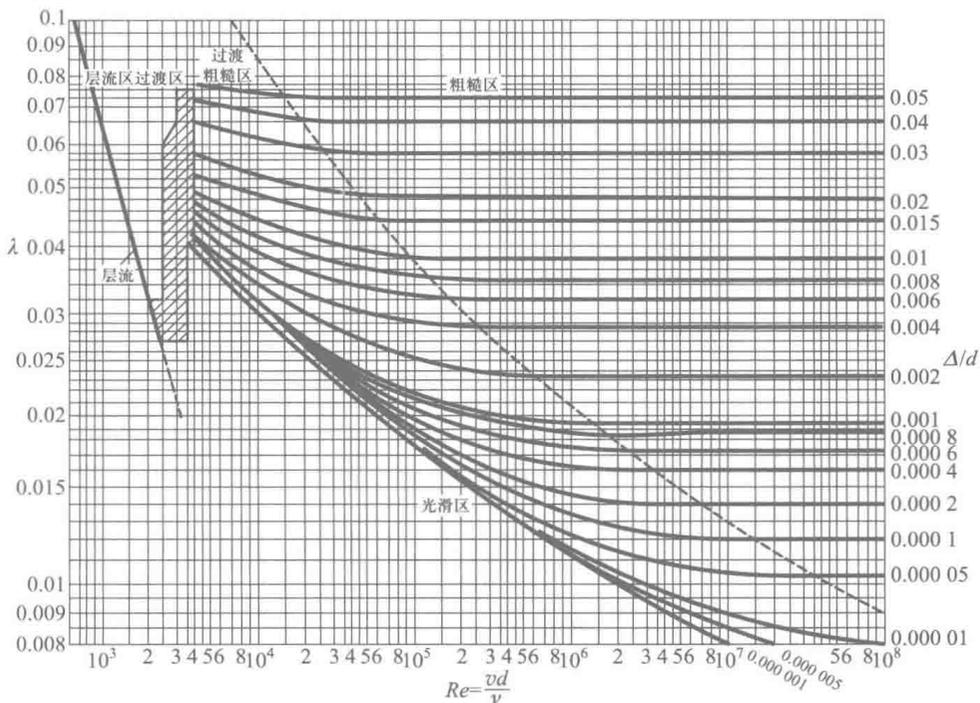


图 4.25

例 4.3 有一水管，直径 d 为 20 cm，管壁绝对粗糙度 $\Delta = 0.2$ mm，已知液体的运动粘度 ν 为 $0.015 \text{ cm}^2/\text{s}$ 。试求 Q 为 $5\,000 \text{ cm}^3/\text{s}$ ， $20\,000 \text{ cm}^3/\text{s}$ ， $400\,000 \text{ cm}^3/\text{s}$ 时，管道的沿程阻力系数 λ 各为多少？

解：(1) 当 $Q = 5\,000 \text{ cm}^3/\text{s}$ 时

$$A = \frac{\pi}{4} \times 20^2 \text{ cm}^2 = 314 \text{ cm}^2$$

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{5\,000}{314} \text{ cm/s} = 15.9 \text{ cm/s}$$

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{15.9 \times 20}{0.015} = 21\,200 > 2\,000$$

故知管中水流型态属于湍流。现在再判别属于哪个区域：

假设 $\lambda = 0.026$ ，则

$$\text{粘性底层厚度 } \delta_0 = \frac{32.8d}{Re\sqrt{\lambda}} = \frac{32.8 \times 20}{21\,200 \times \sqrt{0.026}} \text{ cm} = 0.192 \text{ cm} = 1.92 \text{ mm}$$

故 $\frac{\Delta}{\delta_0} = \frac{0.2}{1.92} = 0.104 < 0.3$ ，属于光滑区。

且 $Re = 2.12 \times 10^4 < 10^5$ ，故可应用布拉休斯公式求 λ 值，即

$$\lambda = \frac{0.316}{Re^{0.25}} = \frac{0.316}{(2.12 \times 10^4)^{0.25}} = 0.0262$$

与假设符合，故所求 $\lambda = 0.0262$ 。

若应用图 4.25，因 $\frac{\Delta}{d} = \frac{0.2}{20} = 0.01$ ， $Re = 2.12 \times 10^4$ ，查得 $\lambda = 0.0276$ 。

(2) 当 $Q = 20\,000 \text{ cm}^3/\text{s}$ 时

$$A = 314 \text{ cm}^2$$

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{20\,000}{314} \text{ cm/s} = 63.6 \text{ cm/s}$$

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{63.6 \times 20}{0.015} = 84\,800 > 2\,000，\text{故为湍流。}$$

现在来判别属于哪个区域：

假设 $\lambda = 0.022$

$$\delta_0 = \frac{32.8d}{Re\sqrt{\lambda}} = \frac{32.8 \times 20}{84\,800 \times \sqrt{0.022}} \text{ cm} = 0.052 \text{ cm} = 0.52 \text{ mm}$$

$$\frac{\Delta}{\delta_0} = \frac{0.2}{0.52} = 0.4$$

故 $0.3 < \frac{\Delta}{\delta_0} < 6$ ，属于过渡粗糙区。可应用柯列布鲁克-怀特公式计算 λ 值，即

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{\lambda}} &= -2\lg\left(\frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}} + \frac{\Delta}{3.7d}\right) \\ &= -2\lg\left(\frac{2.51}{84\,800 \times \sqrt{0.022}} + \frac{0.2}{3.7 \times 200}\right) = 6.686\end{aligned}$$

故 $\lambda = 0.0224$ ，与假设符合。

若应用图 4.25，因 $\frac{\Delta}{d} = 0.001$ ， $Re = 8.48 \times 10^4$ ，查得 $\lambda = 0.0224$ 。

(3) 当 $Q = 400\,000 \text{ cm}^3/\text{s}$ 时

$$A = 314 \text{ cm}^2$$

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{400\,000}{314} \text{ cm/s} = 1\,272 \text{ cm/s}$$

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{1\,272 \times 20}{0.015} = 1\,696\,000 > 2\,000, \text{ 故为湍流。}$$

现在来判别属于哪个区域：

假设 $\lambda = 0.02$

$$\delta_0 = \frac{32.8d}{Re\sqrt{\lambda}} = \frac{32.8 \times 20 \text{ cm}}{1\,696\,000 \times \sqrt{0.02}} = 0.0025 \text{ cm} = 0.025 \text{ mm}$$

$$\frac{\Delta}{\delta_0} = \frac{0.2}{0.025} = 8 > 6$$

故管壁属于粗糙区，可应用尼古拉兹公式求 λ 值，即 $\lambda = \frac{1}{\left[2\lg\left(3.7 \frac{d}{\Delta}\right)\right]^2} =$

$$\frac{1}{\left[2\lg\left(3.7 \times \frac{200}{0.2}\right)\right]^2} = 0.02, \text{ 与假设符合。}$$

因 $\frac{\Delta}{d} = 0.001$ ， $Re = 1.696 \times 10^6$ ，查图 4.25，得 $\lambda = 0.02$ 。

由本例可知，同一水管，不同流量通过时，其管壁可以是光滑区或过渡粗糙区，也可以是粗糙区。

4.8 计算沿程水头损失的经验公式——谢才公式

上节所讲的对沿程阻力系数变化规律的认识是 20 世纪前期研究的成果。要应用上节所讲的公式，必须采用自然管道或天然河道表面粗糙均匀化后的当量粗糙度。因目前尚缺乏这方面较完整的资料，所以这些公式并没有得到广泛应用。

为了满足生产实践的需要,早在 18 世纪中后期,人们即在总结大量实测资料的基础上,提出了一些计算沿程水头损失的经验公式,有些公式至今在工程实践中仍被广泛采用,在一定范围内满足工程设计的需要。

谢才 (Chézy) 总结了明渠均匀流的实测资料,提出计算均匀流的经验公式,后人称为谢才公式:

$$v = C \sqrt{RJ} \quad (4.55)$$

式中 C 为谢才系数; R 为断面水力半径,即 $R = \frac{A}{\chi}$; J 为水力坡度。

其实谢才公式与达西公式是一致的,只是表现形式不同。只要用

$$C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \quad (4.56)$$

代入达西公式就可得到谢才公式。所以谢才公式既可应用于明渠也可应用于管流。由于 λ 是量纲一的数,故谢才系数 C 是有量纲的,其量纲为 $L^{1/2}T^{-1}$, 单位 $m^{1/2}/s$ 。谢才公式可应用于不同流态或流区,只是谢才系数的公式不同而已。

在实际工程上所遇到的水流大多数是阻力平方区的湍流,谢才系数的经验公式是根据阻力平方区湍流的大量实测资料求得的,所以只能适用于阻力平方区的湍流。现在介绍两个比较常用的求谢才系数的公式:

1. 曼宁 (Manning, 1890) 公式

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6} \quad (4.57)$$

式中 n 称为粗糙系数,或简称糙率,具体取值见附录中的附表 1。

因为曼宁公式形式简单,计算方便,且应用于管道及较小的河渠可得到较满意的结果,故现为世界各国工程界所采用。

将式 (4.57) 代入式 (4.55) 得

$$v = \frac{1}{n} R^{2/3} J^{1/2} \quad (4.58)$$

2. 巴甫洛夫斯基 (Павловский, 1925) 公式

$$C = \frac{1}{n} R^y \quad (4.59)$$

式中

$$y = 2.5\sqrt{n} - 0.13 - 0.75\sqrt{R}(\sqrt{n} - 0.10) \quad (4.60)$$

作近似计算时, y 值的计算可用下列简式:

$$\left. \begin{array}{l} \text{当 } R < 1.0 \text{ m 时, } y = 1.5\sqrt{n} \\ \text{当 } R > 1.0 \text{ m 时, } y = 1.3\sqrt{n} \end{array} \right\} \quad (4.61)$$

巴甫洛夫斯基公式适用范围为

$$0.1 \text{ m} \leq R \leq 3.0 \text{ m}, 0.011 \leq n \leq 0.04$$

这里要注意, 上述各公式中水力半径 R 的单位均采用 m 。

粗糙系数 n 为表征边界表面影响水流阻力的各种因素的一个综合系数, 其概念不如绝对粗糙度那样单纯而明确。在实际工程中所遇到的情况往往非常复杂, 如管道有新有旧, 有生锈的有清洁的。天然河道的变化更为复杂, 即使在同一过水断面上。河滩与河槽的土壤性质及颗粒大小也不相同, 草木生长的情况更是千变万化, 而且河槽形态对粗糙系数也有一定的影响。所以要选择完全符合实际情况的 n 值是很困难的。虽然如此, 至今对粗糙系数 n 值的选择已积累了比较丰富的实测资料, 而对当量粗糙度 Δ 的选择困难更大, 所以计算沿程水头损失时, 在水利工程上仍广泛采用包含有 n 值的曼宁公式或巴甫洛夫斯基公式。

例 4.4 有一混凝土护面的梯形渠道 (图 4.26), 底宽 b 为 10 m , 水深 h 为 3 m , 两岸边坡度为 $1:1$, 粗糙系数 n 为 0.017 。如水流属阻力平方区, 试用各公式求谢才系数。

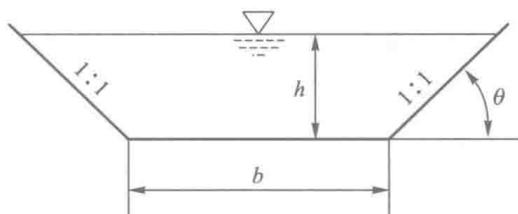


图 4.26

解: 过水断面面积 $A = bh + mh^2$, 式中 $m = \cot\theta$, 叫作边坡系数。

$$A = 10 \times 3 \text{ m}^2 + 1 \times 3^2 \text{ m}^2 = 39 \text{ m}^2$$

湿周 $\chi = b + 2\sqrt{1+m^2}h = 10 \text{ m} + 2\sqrt{1+1^2} \times 3 \text{ m} = 18.5 \text{ m}$

水力半径 $R = \frac{A}{\chi} = \frac{39}{18.5} \text{ m} = 2.11 \text{ m}$

(1) 按曼宁公式计算谢才系数

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6} = \frac{1}{0.017} \times 2.11^{1/6} \text{ m}^{1/2}/\text{s} = 66.5 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$$

(2) 按巴甫洛夫斯基公式计算谢才系数

$$\begin{aligned} y &= 2.5\sqrt{n} - 0.13 - 0.75\sqrt{R}(\sqrt{n} - 0.10) \\ &= 2.5\sqrt{0.017} - 0.13 - 0.75\sqrt{2.11}(\sqrt{0.017} - 0.10) \\ &= 0.163 \end{aligned}$$

$$C = \frac{1}{n} R^y = \frac{1}{0.017} \times 2.11^{0.163} \text{ m}^{1/2}/\text{s} = 66.3 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$$

4.9 局部水头损失

实际管道往往是由许多管段组成,有时各段管径并不一样,在各管段之间也用各种型式的管件来连接,如弯管、渐变管等;直段上还可能装有阀门。在渠道中也常有弯道、渐变段、拦污栅等。这样,水流在流动过程中,流向或过水断面有所改变,则水流内部各质点的流速、压强也都要改变,即水流内部结构在发生改变。同时水流内部各质点的机械能也在转化,即势能与动能互相转化并伴有能量损失。所以当液体流经这些部位时都要产生局部水头损失。局部水头损失的计算,应用理论来解是有很大困难的,主要是因为急变流情况下,作用在固体边界上的动水压强不好确定。目前只有少数几种情况可以用理论来作近似分析,大多数情况还只能用实验方法来解决。本节仅以圆管突然扩大的局部水头损失的计算为例进行介绍。

图 4.27 所示为一突然扩大的圆管,管的断面从 A_1 突然扩大至 A_2 ,液流自小断面进入大断面时,流股脱离固体边界,四周形成旋涡,然后流股逐渐扩大,约经距离 $(5 \sim 8)d_2$ 以后才与大断面吻合。在断面 1-1 及 2-2 处的水流均为渐变流,可写出能量方程式:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_w$$

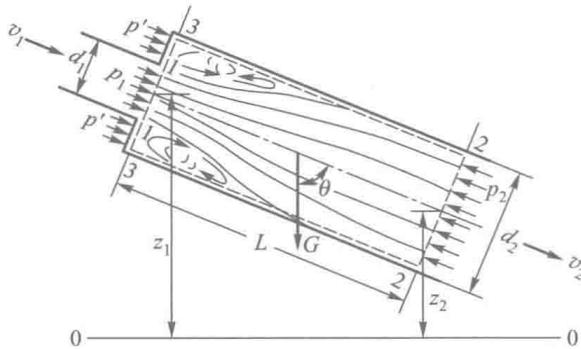


图 4.27

由于 1-1 和 2-2 两断面之间的距离很短,沿程水头损失可以略去不计,即 $h_w = h_j$, 则上式可写作

$$h_j = (z_1 - z_2) + \left(\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} \right) + \left(\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} - \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} \right) \quad (4.62)$$

显然上式中 p_1 及 p_2 是未知的,因此尚须应用动量定律来寻求另一关系式。

今取一控制体（如图 4.27 中虚线所示）来研究。首先讨论作用在控制体上的外力。

在断面 1-1 及 2-2 上因系渐变流，动水压强是按静水压强的规律分布的。但在环形断面 1-3 部分，液流为旋涡，动水压强无法计算，只能近似地假设按静水压强分布，即 $p' = p_1$ ，实验结果已经证实了这种假设是符合实际的。因此作用在断面 3-1-1-3 上有顺流向的总压力 $F_{p1} = p_1 A_2$ ，式中 p_1 为断面 1-1 形心上的压强。作用在断面 2-2 上逆流方向的总压力 $F_{p2} = p_2 A_2$ ，式中 p_2 为断面 2-2 形心上的压强。

因为 3-1-1-3 与 2-2 两断面之间的距离很短，作用在该流段四周表面上的摩擦阻力很小，可以忽略不计。

此外，尚有重力在流动方向的分量：

$$G \cos \theta = \rho g A_2 L \cos \theta = \rho g A_2 (z_1 - z_2)$$

该管中流量为 Q ，沿水流方向的动量变化为

$$\rho Q (\beta_2 v_2 - \beta_1 v_1)$$

写出该控制体沿水流方向的动量方程式为

$$p_1 A_2 - p_2 A_2 + \rho g A_2 (z_1 - z_2) = \rho Q (\beta_2 v_2 - \beta_1 v_1)$$

化简得

$$z_1 - z_2 + \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = \frac{(\beta_2 v_2 - \beta_1 v_1) v_2}{g}$$

将上式带入式 (4.62) 得

$$h_j = \frac{(\beta_2 v_2 - \beta_1 v_1) v_2}{g} + \frac{\alpha_1 v_1^2 - \alpha_2 v_2^2}{2g}$$

因 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 都是近似地等于 1，上式可简化为

$$h_j = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} \quad (4.63)$$

这就是断面突然扩大的局部水头损失的理论公式。这个公式经过实验验证有足够的准确性。

用 $v_1 = \frac{A_2 v_2}{A_1}$ 代入式 (4.63)，可得

$$h_j = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2 \frac{v_2^2}{2g} = \zeta_1 \frac{v_2^2}{2g} \quad (4.64)$$

或用 $v_2 = \frac{A_1 v_1}{A_2}$ 代入式 (4.63)，可得

$$h_j = \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_2 \frac{v_1^2}{2g} \quad (4.65)$$

式中 $\zeta_1 = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right)^2$, $\zeta_2 = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$ 叫作突然扩大的局部水头损失系数。

任何一种局部水头损失通常都可以用一个系数和流速水头的乘积来表示:

$$h_j = \zeta \frac{v^2}{2g}$$

式中局部水头损失系数 ζ 值可由试验测定, v 为发生局部水头损失以后 (或以前) 的断面平均流速。附表 2 列出了常见管道及明渠中各种局部水头损失系数的取值, 在查表时应特别注意 ζ 值所对应的流速所在断面的位置。

例 4.5 水从水箱流入一管径不同的管道, 管道连接情况如图 4.28 所示。已知: d_1 为 150 mm, l_1 为 25 m, λ_1 为 0.037; d_2 为 125 mm, l_2 为 10 m, λ_2 为 0.039。

局部水头损失系数: 进口 ζ_1 为 0.5, 逐渐收缩 ζ_2 为 0.15, 阀门 ζ_3 为 2.0。(以上 ζ 值相应的流速均采用发生局部水头损失后的流速。)

试求:

- (1) 沿程水头损失 Σh_f ;
- (2) 局部水头总损失 Σh_j ;
- (3) 要保持流量 Q 为 $25\ 000\ \text{cm}^3/\text{s}$ 所需要的水头 H 。

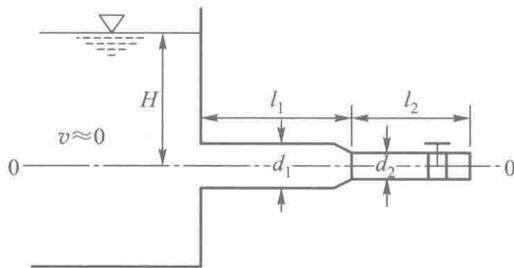


图 4.28

解: (1) 求沿程水头损失

第一管段:
$$h_{f1} = \lambda_1 \frac{l_1 v_1^2}{d_1 2g}$$

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{4 \times 0.025}{\pi \times 0.15^2} \text{ m/s} = 1.415 \text{ m/s}$$

$$h_{f1} = 0.037 \times \frac{25}{0.15} \times \frac{1.415^2}{2 \times 9.8} \text{ m} = 0.63 \text{ m}$$

第二管段:
$$h_{f2} = \lambda_2 \frac{l_2 v_2^2}{d_2 2g}$$

$$v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{4 \times 0.025}{\pi \times 0.125^2} \text{ m/s} = 2.04 \text{ m/s}$$

$$h_{l2} = 0.039 \times \frac{10}{0.125} \times \frac{2.04^2}{2 \times 9.8} \text{ m} = 0.663 \text{ m}$$

故 $\sum h_f = h_{f1} + h_{l2} = 0.63 \text{ m} + 0.663 \text{ m} = 1.293 \text{ m}$

(2) 求局部水头损失

$$\text{进口水头损失 } h_{j1} = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} = 0.5 \times \frac{1.415^2}{2 \times 9.8} \text{ m} = 0.051 \text{ m}$$

$$\text{逐渐收缩水头损失 } h_{j2} = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} = 0.15 \times \frac{2.04^2}{2 \times 9.8} \text{ m} = 0.032 \text{ m}$$

$$\text{阀门水头损失 } h_{j3} = \zeta_3 \frac{v_3^2}{2g} = 2.0 \times \frac{2.04^2}{2 \times 9.8} \text{ m} = 0.425 \text{ m}$$

故 $\sum h_j = h_{j1} + h_{j2} + h_{j3} = 0.051 \text{ m} + 0.032 \text{ m} + 0.425 \text{ m} = 0.508 \text{ m}$

(3) 要保持 Q 为 $25\,000 \text{ cm}^3/\text{s}$ 所需的水头

以 0-0 为基准面, 对水箱液面上与管子出口取能量方程式:

$$H + 0 + 0 = 0 + 0 + \frac{v_2^2}{2g} + h_w$$

$$\text{得 } H = \frac{v_2^2}{2g} + h_w$$

$$\text{因 } h_w = \sum h_f + \sum h_j = 1.293 \text{ m} + 0.508 \text{ m} = 1.801 \text{ m}$$

$$\text{故所需水头 } H = \frac{2.04^2}{2 \times 9.8} \text{ m} + 1.801 \text{ m} = 2.013 \text{ m}$$

思 考 题

4.1 雷诺数 Re 具有什么物理意义? 为什么可以起到判别液流型态 (层流、湍流) 的作用? 试说明由层流向湍流过渡的物理过程。

4.2 层流及湍流各有什么特点? 如何判别?

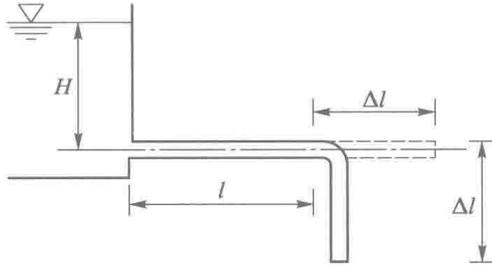
4.3 何谓“粘性底层”? 它与雷诺数有何关系? 它的厚度对沿程水头损失有何影响?

4.4 湍流中存在脉动现象, 具有非恒定流性质, 但又是恒定流, 其中有无矛盾? 为什么?

4.5 试根据尼古拉兹试验说明影响沿程阻力系数 λ 的因素及 λ 与谢才系数 C 之间的关系。试写出你所知道的计算 C 的经验公式。

4.6 有一圆管如图所示, 长度 l , 水头 H , 沿程阻力系数 λ , 流动处于阻力平方区 (不计局部损失), 现拟将管道延长 (管径不变) Δl , 试问水平伸长

Δl 和转弯延长 Δl ，哪一种布置流量较大？

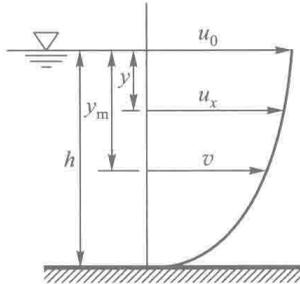


思 4.6

习 题

4.1 某二维明渠均匀流的流速分布规律为 $u_x = u_0 \left[1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right]$ ，如图所示。

- (1) 断面平均流速 v 与表面流速 u_0 的比值是多少？
- (2) 求流速分布曲线上与断面平均流速相等的点的位置，即 $y_m = ?$



题 4.1

4.2 有一直径为 25 cm 的圆管，内壁粘贴有 Δ 为 0.5 mm 的砂粒，如水温为 10°C ，问：

(1) 流动要保持为粗糙区最小流量需要多少？此时管壁上切应力 τ_0 为多大？

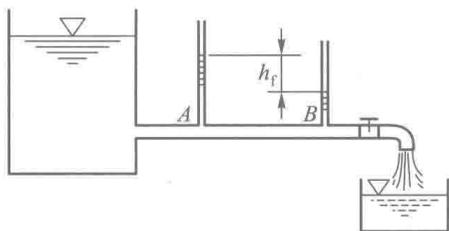
(2) 圆管中通过的流量为 $5\,000\text{ cm}^3/\text{s}$ ， $20\,000\text{ cm}^3/\text{s}$ ， $200\,000\text{ cm}^3/\text{s}$ 时，液流形态各为层流还是湍流？若为湍流应属于光滑区、过渡粗糙区还是粗糙区？其沿程阻力系数各为多少？若管段长度为 100 m，问沿程水头损失各为多少？

4.3 为了测定 AB 管段的沿程阻力系数 λ 值，可采用如图所示的装置。已知 AB 段的管长 l 为 10 m，管径 d 为 50 mm。今测得实验数据：

- (1) A ， B 两测压管的水头差为 0.80 m；

(2) 经 90 s 流入量水箱的水体积为 0.247 m^3 。试求该管段的沿程阻力系数 λ 值。

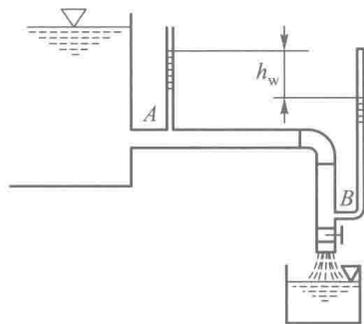
(3) 求 AB 管段的谢才系数 C 值, 并用曼宁公式求其粗糙系数 n 值。



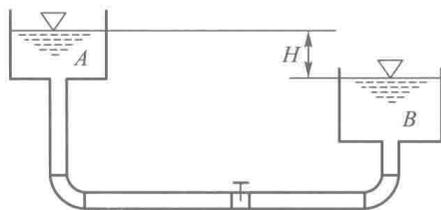
题 4.3

4.4 为测定 90° 弯管的局部水头损失系数 ζ 值, 可采用如图所示的装置。已知 AB 段管长 l 为 10 m, 管径 d 为 50 mm, 该管段的沿程阻力系数 λ 为 0.03, 今测得实验数据: (1) A, B 两测压管的水头差为 0.629 m; (2) 经 2 min 流入量水箱的水体积为 0.329 m^3 。试求弯管的局部水头损失系数 ζ 值。

4.5 如图所示, 水从水箱 A 流入水箱 B , 管路长 l 为 25 m, 管径 d 为 25 mm, 沿程阻力系数 λ 为 0.03, 管路中有两个 90° 弯管 ($\frac{d}{\rho} = 1$, 参见附表 2) 及一个闸板式阀门 ($\frac{a}{d} = 0.5$, 参见附表 2), 当两水箱的水位差 H 为 1.0 m 时, 试求管内通过的流量为多少?



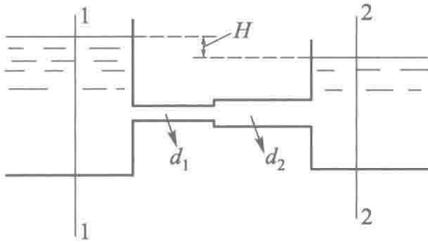
题 4.4



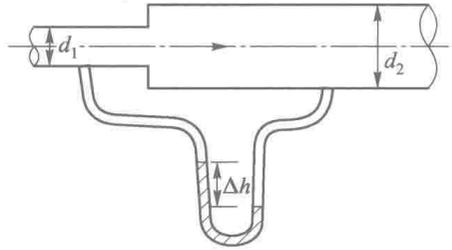
题 4.5

4.6 如图所示, 水从一水箱经过水管流入另一水箱, 管道为尖锐边缘入口, 该水管包括两段: $d_1 = 10 \text{ cm}$, $l_1 = 150 \text{ m}$, $\lambda_1 = 0.030$; $d_2 = 20 \text{ cm}$, $l_2 = 250 \text{ m}$, $\lambda_2 = 0.025$, 进水口局部水头损失系数 $\zeta_1 = 0.5$, 出口局部水头损失系数 $\zeta_2 = 1.0$, 上下游水面高差 $H = 5 \text{ m}$, 水箱尺寸很大, 可设箱内水面不变, 试求流量 Q 。

4.7 水平突然扩大管路，如图所示，已知：直径 $d_1 = 5 \text{ cm}$ ，直径 $d_2 = 10 \text{ cm}$ ，管中流量 $Q = 20 \text{ L/s}$ ，试求：U形水银差压计中的压差读数 Δh 。



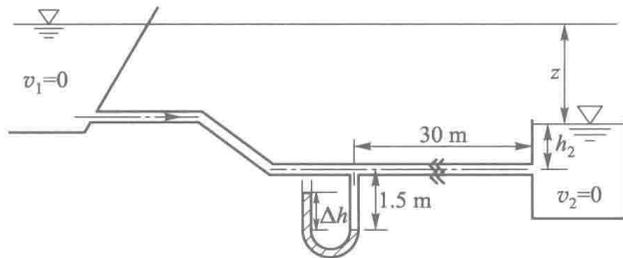
题 4.6



题 4.7

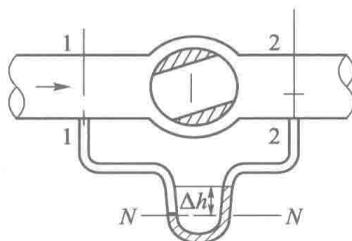
4.8 一直径沿程不变的输水管道，连接两水池，如图所示，已知管道直径 $d = 0.3 \text{ m}$ ，全管长 $l = 90 \text{ m}$ ，沿程阻力系数 $\lambda = 0.03$ ，进口局部水头损失系数 $\zeta_1 = 0.5$ ，折弯局部水头损失系数 $\zeta_2 = 0.3$ ，出口水头损失系数 $\zeta_3 = 1.0$ ，出口在下游水面以下深度 $h_2 = 2.3 \text{ m}$ ，在距出口 30 m 处设有一 U 形水银测压计，其液面 $\Delta h = 0.5 \text{ m}$ ，较低的水银液面距管轴 1.5 m ，试确定：

- (1) 通过的流量 Q 以及两水池水面差 z ；
- (2) 定性绘出总水头线及测压管水头线。



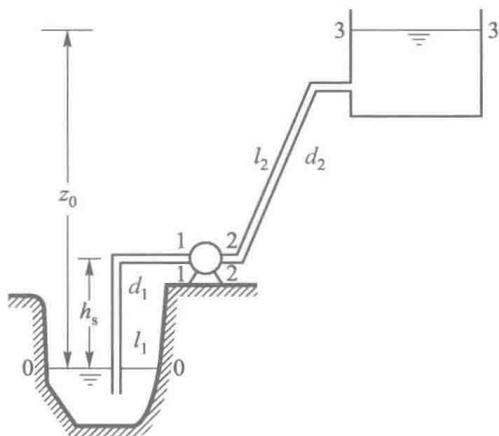
题 4.8

4.9 图示直径 $d = 100 \text{ mm}$ 的输水管道上设有旋塞阀门。打开阀门，管中流量 $Q = 7.85 \text{ L/s}$ 时，阀门局部阻力区两端的压差计数 $\Delta h = 10 \text{ cm}$ ，求旋塞阀门在该开度下的局部水头损失系数 ζ 值。



题 4.9

4.10 水泵装置如图所示，水泵安装高度 $h_s = 3\text{ m}$ ，高、低水池液面高差 $z_0 = 20\text{ m}$ 。吸水管的管径 $d_1 = 0.2\text{ m}$ ，长度 $l_1 = 4\text{ m}$ ，沿程阻力系数 $\lambda_1 = 0.024$ ，总的局部水头损失系数 $\zeta_1 = 6$ ；压力管的管径 $d_2 = 0.15\text{ m}$ ，管长 $l_2 = 50\text{ m}$ ，沿程阻力系数 $\lambda_2 = 0.028$ ，总的局部水头损失系数 $\zeta_2 = 8.5$ 。测得水泵出口的表压 $p_2 - p_a = 1.8 \times 10^5\text{ Pa}$ 。试计算水泵输水量 Q ，水泵扬程 H ，水泵有效功率 P 。



题 4.10

5 有压管道流动

在以上各章中讨论了液体运动的基本规律，导出了水力学中的三个基本方程——连续方程、能量方程及动量方程，并阐述了水头损失的计算方法。应用这些基本原理即可研究解决工程中常见的许多水力计算问题，如有压管中的恒定流、明渠恒定流及水工建筑物的水力计算等。

工程实践中为了输送液体，常须设置各种有压管道，如水电站的压力引水隧洞和压力钢管、水库的有压泄洪隧洞或泄水管、供给工农业和生活用水的水泵装置系统及给水管网、虹吸管以及输送石油的管道等。这类管道的整个断面均被液体所充满，断面的周界就是湿周；所以管道周界上的各点均受到液体压强的作用，因此称为有压管道。有压管道断面上各点的压强，一般不等于大气压强。

若有压管中液体的运动要素不随时间而变，称为有压管中的恒定流；若任一运动要素随时间而变，则称为有压管中的非恒定流。

实际工程中的管道，根据其布置情况可分为简单管道与复杂管道。复杂管道又可分为串联管道、并联管道及分叉管道。简单管道是最常见的，也是复杂管道的基本组成部分，其水力计算方法是各种管道水力计算的基础。

有压管道水力计算的主要内容之一是确定水头损失。水头损失包括沿程水头损失及局部水头损失两种。通常根据这两种水头损失在总损失中所占比重的大小，而将管道分为长管及短管两类：长管是指水头损失以沿程水头损失为主，其局部损失和流速水头在总水头中所占的比重很小，计算时可以忽略不计的管道；短管是局部损失及流速水头在总水头中占有相当的比重（例如，局部损失及流速水头大于总水头的5%），计算时不能忽略的管道。水泵的吸水管、虹吸管、混凝土坝内的压力泄水管都应按短管计算；只有长度较大而局部损失较小的管道才能按长管计算。

5.1 简单管道恒定流的水力计算

所谓简单管道是指管道直径不变且无分支的管道。

简单管道的水力计算可分为自由出流和淹没出流两种情况。

5.1.1 自由出流

管道出口水流流入大气，水流四周都受大气压强的作用，称为自由出流管道。

如图 5.1 所示为一简单管道和水池相接，末端流入大气。水池底部与管道出口中心齐平，若以通过出口中心高程的水平面为基准面，在水池中离管道进口一定距离处取断面 1-1（该断面符合渐变流条件），及管道出口断面 2-2；对断面 1-1 和 2-2 建立能量方程：

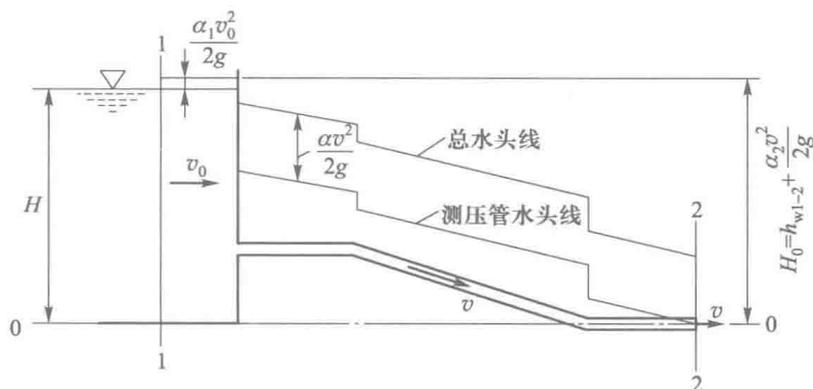


图 5.1

$$z_1 + H + \frac{\alpha_1 v_0^2}{2g} = z_2 + \frac{\alpha_2 v^2}{2g} + h_{w1-2}$$

令 $H + \frac{\alpha_1 v_0^2}{2g} = H_0$ ，且因 $z_1 = z_2 = 0$ ， $h_{w1-2} = h_f + \sum h_j$ ，则

$$H_0 = \frac{\alpha_2 v^2}{2g} + h_f + \sum h_j \quad (5.1)$$

式中： v 为管道内断面平均流速； v_0 为水池中的流速，称为行近流速； H 为管道出口断面中心与水池水面的高差，称为管道的水头； H_0 为包括行近流速水头在内的总水头。

式 (5.1) 表明，管道的总水头将全部消耗于管道的水头损失和保持出口的动能，如图 5.1 的总水头线和测压管水头线所示。

因为，沿程损失 $h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$ ，局部损失 $\sum h_j = \sum \zeta \frac{v^2}{2g}$

$\sum \zeta$ 为管路中各局部水头损失系数的总和；故式 (5.1) 可改写为

$$H_0 = \left(\alpha_2 + \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta \right) \frac{v^2}{2g}$$

取 $\alpha_2 = 1$ ，则管中流速可表示为

$$v = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta}} \sqrt{2gH_0}$$

通过管道的流量

$$Q = A \cdot v = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta}} A \sqrt{2gH_0} = \mu_c A \sqrt{2gH_0} \quad (5.2)$$

式中： A 为管道的过水断面面积； $\mu_c = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta}}$ 称为管道系统的流量系数。

若行近流速水头 $\frac{\alpha_1 v_0^2}{2g}$ 忽略不计，则式 (5.2) 可简化为

$$Q = \mu_c A \sqrt{2gH} \quad (5.3)$$

5.1.2 淹没出流

管道出口如果淹没在水下，便称淹没出流，如图 5.2 所示。

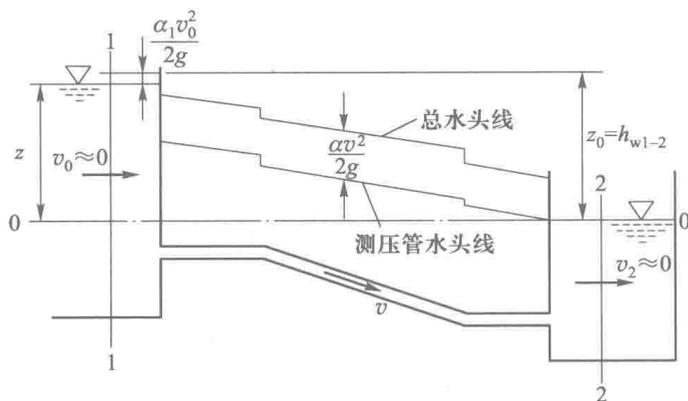


图 5.2

取上游水池断面 1-1 和下游水池断面 2-2（两处均符合渐变流条件），并以下游水池的水面作为基准面，列出能量方程式：

$$z + \frac{\alpha_1 v_0^2}{2g} = \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{w1-2}$$

式中， z 为上下游水面差。

相对于管道过水断面来说, A_2 一般都很大, 所以 $\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$ 可忽略不计, 则

$$z + \frac{\alpha_1 v_0^2}{2g} = h_{w1-2}$$

令 $z + \frac{\alpha_1 v_0^2}{2g} = z_0$, 则

$$z_0 = h_{w1-2} \quad (5.4)$$

上式表明, 管道在淹没出流的情况下, 其包括行近流速的上下游水位差 z_0 完全消耗于沿程损失及局部损失, 如图 5.2 的总水头线和测压管水头线所示。

因为 $h_{w1-2} = h_f + \sum h_j = \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta \right) \frac{v^2}{2g}$, 将 h_{w1-2} 代入式 (5.4), 整理后得管内平均流速:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta}} \sqrt{2gz_0}$$

若管道的过水断面面积为 A , 则通过的流量为

$$Q = A \cdot v = \mu_c A \sqrt{2gz_0} \quad (5.5)$$

式中: $\mu_c = \frac{1}{\sqrt{\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta}}$ 称为管道系统的流量系数。

当行近流速水头 $\frac{\alpha_1 v_0^2}{2g}$ 可以略去时, 则式 (5.5) 变为

$$Q = \mu_c A \sqrt{2gz} \quad (5.6)$$

比较式 (5.3) 与式 (5.6) 可以看出: 淹没出流时的有效水头是上下游水位差 z , 自由出流时是出口中心以上的水头 H ; 其次, 两种情况下流量系数 μ_c 的计算公式形式上虽然不同, 但数值是相等的。因为淹没出流时, μ_c 计算公式的分母上虽然较自由出流时少了一项 α_2 (取 $\alpha_2 = 1$), 但前者的 $\sum \zeta$ 中比后者的 $\sum \zeta$ 中多一个出口局部损失系数 ζ_0 , 在出口系流入水池的情况下 $\zeta_0 = 1$ 。故其他条件相同时两者的 μ_c 值实际上是相等的。

在以上的讨论中同时考虑了管道的沿程水头损失及局部水头损失, 这是按短管计算的情况。

若管道较长, 局部水头损失及流速水头可以忽略, 即所谓长管的情况, 计算将大为简化。式 (5.1) 变为

$$H = h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \quad (5.7)$$

水利工程中的有压输水道，水流一般属于湍流的水力粗糙区，其水头损失可直接按谢才公式计算。用 $\lambda = \frac{8g}{C^2}$ 代入上式，且有压管道的水力半径 $R = \frac{d}{4}$ ，则

$$H = \frac{8g}{C^2} \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = \frac{8g}{C^2} \frac{l}{4R} \frac{v^2}{2g} = \frac{Q^2}{A^2 C^2 R} l$$

令 $K = AC \sqrt{R}$ ，即得

$$H = h_f = \frac{Q^2}{K^2} l$$

或

$$Q = K \sqrt{\frac{h_f}{l}} = K \sqrt{J} \quad (5.8)$$

由上式可知，当水力坡度 $J=1$ ， $Q=K$ ，故 K 具有与流量相同的量纲，在水力学中 K 称为流量模数或特征流量。它综合反映管道断面形状、尺寸及边壁粗糙对输水能力的影响。水力坡度 J 相同时，输水能力与流量模数成正比。粗糙系数 n 为定值的圆管， K 值为管径的函数。

给水管道中的水流，一般流速不太大，可能属于湍流的粗糙区或过渡粗糙区。可以近似认为当 $v < 1.2 \text{ m/s}$ 时，管流属于过渡粗糙区， h_f 约与流速 v 的 1.8 次方成正比。故当按常用的经验公式计算谢才系数 C ，并代入式 (5.8) 求 h_f 时，应在右端乘以修正系数 k ，即

$$h_f = k \frac{Q^2}{K^2} l \quad (5.9)$$

按谢维列夫 (Шевелев) 的实验，旧钢管及旧铸铁管的修正系数 $k = 1.01 (v - 0.13)^{-0.13}$ ，式中 v 为流速，单位为 m/s 。

利用式 (5.3)、式 (5.6) 或式 (5.8) 可以进行短管及长管的各种水力计算。从上述可知，管道水力计算的主要问题之一是水头损失的确定，而水头损失与液流型态有关，不同的流态，有不同的阻力系数。所以，在作有压管道的水力计算时，应先按第 4 章的内容判别水流型态和流区，然后选用相应的公式计算阻力系数 λ 。

还应当指出，本章所述的长管及短管是相对于局部损失和流速水头在总水头中的比重而言，不能简单地用管道的绝对长度来判别。当管道中存在引起较大局部损失的管件（如部分开启的阀门、喷嘴、底阀等）时，即使管道很长，局部损失也不能略去，即必须按短管计算。所以，当没有把握证明局部损

故沿程水头损失占总水头的百分数为

$$\frac{h_f}{H} \times 100\% = \frac{19.79}{20} \times 100\% = 98.9\%$$

因 $98.9\% > 95\%$ ，则该管道按长管计算就可以了。

(3) 按长管计算管道所通过的流量

根据式 (5.8) 得

$$\begin{aligned} Q &= K \sqrt{\frac{h_f}{l}} = K \sqrt{\frac{H}{l}} = AC \sqrt{R} \sqrt{\frac{H}{l}} = A \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \sqrt{R} \sqrt{\frac{H}{l}} \\ &= \frac{3.14 \times 0.1^2}{4} \times \sqrt{\frac{8 \times 9.8}{0.025}} \times \sqrt{\frac{0.1}{4}} \times \sqrt{\frac{20}{800}} \text{ m}^3/\text{s} = 0.01097 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

故按长管计算与短管计算所得流量相差 $0.00004 \text{ m}^3/\text{s}$ ，相对误差为 $\frac{0.00004}{0.01093} \times 100\% = 0.36\%$ 。由此可见，将上述管道按长管计算，误差很小。

5.1.3 测压管水头线与总水头线的绘制

由图 5.1 和图 5.2 可知，测压管水头线与总水头线变化可揭示管道能量的组成及消耗形式。图 5.4 所示为一泄水管简图。若以管道出口断面中心的水平面为基准面，入口前断面 1-1 的总水头为 H_1 。由于通过管道的流量和管径皆为已知，各断面的平均流速即可求出，由入口至任一断面 $i-i$ 之间的全部水头损失 h_{wi} 也可算出。则按能量方程该断面上高程为 z_i 的某点上的压强水头为

$$\frac{p_i}{\rho g} = H_1 - z_i - \frac{\alpha_i v_i^2}{2g} - h_{wi}$$

式中 p_i 为 i 断面位置的动水压强， $\frac{p_i}{\rho g}$ 为测压管高度， z_i 为位能， $\frac{\alpha_i v_i^2}{2g}$ 为动能。

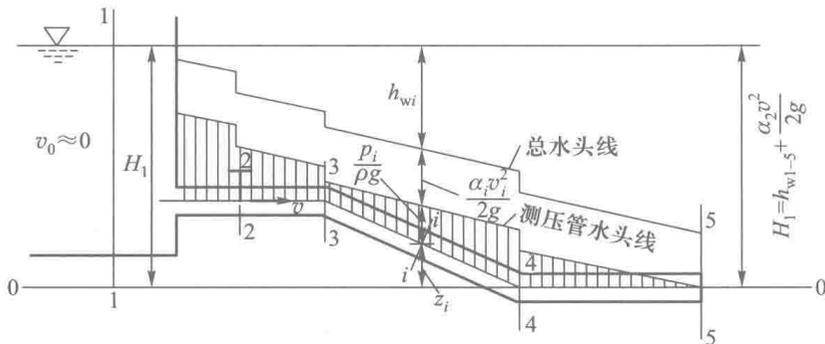


图 5.4

若入口 1-1 断面单位重量水的总水头为 H_1 ，则 2-2 断面单位重量水的总水头 $H_2 = H_1 - h_{w1-2}$ (h_{w1-2} 为 1-1 断面至 2-2 断面之间的全部水头损失)；同理 3-3 断面的总水头 $H_3 = H_2 - h_{w2-3}$ ；依此类推，可从入口至出口将各断面总水头按比例绘在图上，即可连成总水头线。存在局部损失的管段，一般可假设局部损失集中于一个断面上；只有沿程损失的管段，可用直线连接两断面间的总水头，而得总水头线。

根据能量方程，总水头可表示为

$$H_{\text{总}} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g}$$

因测压管水头比总水头少一项流速水头，即

$$\left(z + \frac{p}{\rho g} \right)_{\text{测压管水头}} = H_{\text{总}} - \frac{\alpha v^2}{2g}$$

所以在比总水头线低一个流速水头的位置上绘出各管段的测压管水头线，两线之间的间隔为流速水头。若管径不变，各断面流速水头相等，则测压管水头线和总水头线平行。各断面测压管水头线与该断面中心的距离即为该断面中心点的压强水头。如测压管水头线在某断面中心的上方，则该断面中心点的压强为正值；测压管水头线在某断面中心的下方，则该断面中心点的压强为负值。当管内存在较大负压时，其水流常处于不稳定状态，且可能产生空蚀现象，致使管道遭到破坏，因此实际工程中应采取必要措施以改变管内的受压情况。

具体计算与绘制水头线的步骤为

(1) 确定水平基准面及管道突变控制断面，如图 5.4 的管道出口中心为水平基准面，2-2、3-3、4-4 及进出口为突变控制断面。

(2) 绘制总水头线。根据计算沿程水头的达西公式 $h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$ ，在管径与粗糙系数相同的断面，沿程水头损失将随管长呈线性增加，则总水头线为向下倾斜的直线，而局部水头损失，可假定集中在突变断面，根据其大小，用跌坎表示。

(3) 绘制测压管水头线。在比总水头线低一个流速水头 $\frac{\alpha v^2}{2g}$ 的位置上，绘制测压管水头线。

(4) 利用测压管水头 $\left(z + \frac{p}{\rho g} \right)_{\text{测压管水头}}$ 与管径中心位置 z_i 变化图，可求出相应点或断面处的动水压强。

绘制总水头线和测压管水头线，要注意考虑管道进出口的水流条件，

图 5.5 给出了考虑进口行近流速和淹没出流特性的水头线连接方式。即进口行近流速 $v_0 \neq 0$ ，即上游流速水头 $\frac{\alpha_1 v_0^2}{2g} \neq 0$ (图 5.5a)，总水头线绘于水面线之上；若 $v_0 \approx 0$ (图 5.5b)，流速水头 $\frac{\alpha_1 v_0^2}{2g} = 0$ ，总水头线与水面线重合。管道进口水流受突缩进口局部损失的影响，管道进口段总水头线采用集中降落方式衔接；管道进口段的测压管水头线可通过总水头减管道进口流速水头 $\frac{\alpha v^2}{2g}$ 后绘制。对于出口为淹没水流情况，当出口流速 $v_2 \approx 0$ (图 5.5c)，出口局部水头损失为 $\zeta \frac{v^2}{2g} = 1.0 \frac{v^2}{2g}$ (直角出口 $\zeta = 1.0$)，其值与管道的流速水头相等，因此管道出口测压管水头线与下游水面线重合。若出口流速 $v_2 \neq 0$ 时，管道出口前后为突扩水流 (图 5.5d)，由于出口断面的局部水头损失集中绘于出口处，即总水头在此消耗局部水头损失 $\zeta \frac{v^2}{2g} = 1.0 \frac{v^2}{2g}$ (直角出口 $\zeta = 1.0$) 后，管道出口测压管水头线由管道出口至下游还有一个回升，而后与水面相接。如果管道出口为自由出流，测压管水头线则应中止于管道中心处。

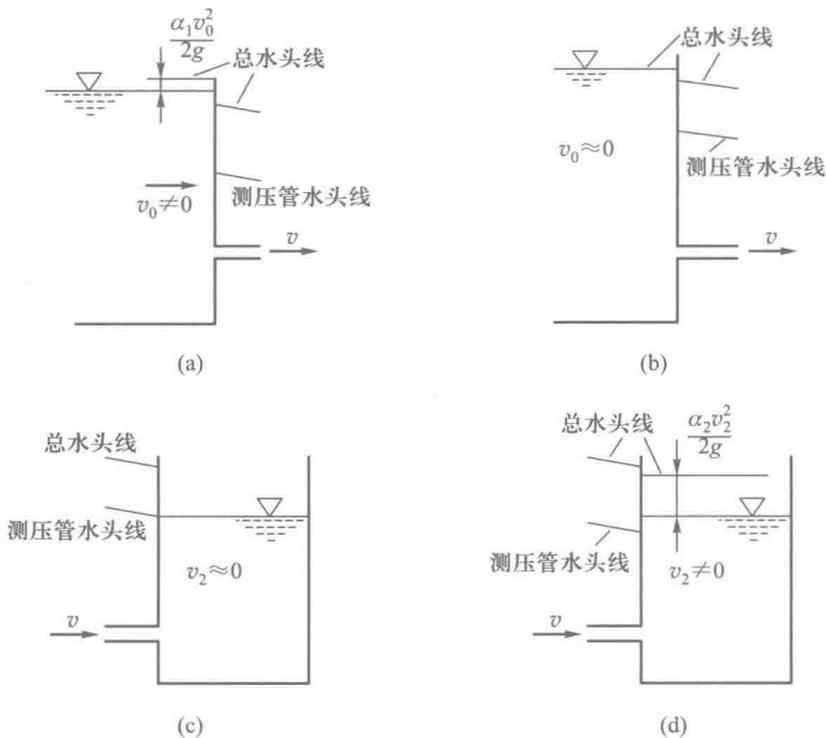


图 5.5

5.1.4 简单管道的恒定流水力计算

1. 管道直径的计算与选定

管道直径的计算与选定是各种管道系统水力计算及其设计的主要任务之一，基于给定的条件，一般可能出现下述两种情况：

(1) 管道的输水量 Q ，管长 l 及管道的总水头 H 均已确定。

在这种情况下，管道的直径是一个确定的数值，完全由水力学要求而定。

若管道为长管，与直径对应的流量模数由下式求得

$$K = \frac{Q}{\sqrt{\frac{H}{l}}} \quad (5.10)$$

按求得的流量模数 K ，反算可求所需的管道直径 d 。

若管道属短管，则由式 (5.3) 可得

$$d = \sqrt{\frac{4Q}{\mu_c \pi \sqrt{2gH}}} \quad (5.11)$$

但上式中的流量系数 μ_c 与管径有关。因此，在确定短管的直径时必须采用试算法。即先假定一个直径求 μ_c ，再按式 (5.11) 计算 d ，当假设值与计算所得值相等时即为所求。此外，在计算出管径 d 后，还应根据管道产品规格，选择与计算值相近的管径 d ，以作为最后确定的管径。

一般来说，管子的直径可分为外径、内径、公称直径。在设计图纸中一般采用公称直径来表示，公称直径是为了设计制造和维修的方便人为地规定的一种标准，是管子（或者管件）的规格名称。管子的公称直径和其内径、外径都不相等。公称直径是接近于内径（外径减两个皮厚），但是又不等于内径的一种管子直径的规格名称，在设计图纸中之所以要用公称直径，目的是为了根据公称直径可以确定管子、管件、阀门、法兰、垫片等结构尺寸与连接尺寸，公称直径采用符号 DN 表示，当设计采用公称直径 DN 表示管径时，应有公称直径 DN 与相应产品规格对照表。表 5.1 为常用管道公称直径和外径对照表。

表 5.1 常用管道公称直径和外径对照表

管道公称直径	管子大直径系列外径 $\Phi(A)$ /mm	管子小直径系列外径 $\Phi(B)$ /mm
DN 15	22	18
DN 20	27	25
DN 25	34	32

续表

管道公称直径	管子大直径系列外径 $\Phi(A)$ /mm	管子小直径系列外径 $\Phi(B)$ /mm
DN 32	42	38
DN 40	48	45
DN 50	60	57
DN 65	76	73
DN 80	89	89
DN 100	114	108
DN 125	140	133
DN 150	168	159
DN 200	219	219
DN 250	273	273
DN 300	324	325
DN 350	356	377
DN 400	406	426
DN 450	457	480
DN 500	508	530
DN 600	610	630

(2) 管道的输水量 Q ，管长 l 已知，要求选定所需的管径 d 及相应的水头 H 。

在这种情况下，一般是从技术和经济条件综合考虑选定管道直径。

管道使用的技术要求。流量一定的条件下，管径的大小与流速有关。若管内流速过大，会由于水击作用（将在 5.3 节中讨论）而使管道遭到破坏；对水流中挟带泥沙的管道，流速又不宜过小，以免泥沙沉积。一般情况下，水电站引水管中流速不宜超过 $(5 \sim 6)$ m/s；给水管道中的流速不应大于 $(2.5 \sim 3.0)$ m/s，不应小于 0.25 m/s。

管道的经济效益。若采用的管径较小，则管道造价低；但流速增大，水头损失增大，抽水耗电的电能也增加。反之，若采用较大的直径，则管内流速小，水头损失减小，运转费用也减小；但管道的造价增高。重要的管道，应选择几个方案进行技术经济比较，使管道投资与运转费用的总和最小，这样的流速称为经济流速，其相应的管径称为经济管径。

一般的给水管道， d 为 $(100 \sim 200)$ mm，经济流速为 $(0.6 \sim 1.0)$ m/s； d 为 $(200 \sim 400)$ mm，经济流速为 $(1.0 \sim 1.4)$ m/s。水电站压力隧洞的经济流速

为(2.5~3.5) m/s; 压力钢管为(3.0~4.0) m/s, 甚至(5.0~6.0) m/s。经济流速涉及的因素较多, 比较复杂, 选用时应注意因时因地制宜。

当根据技术要求及经济条件选定管道的流速后, 管道直径即可由下式求得

$$d = \sqrt{\frac{4Q}{\pi v}} \quad (5.12)$$

然后按管道产品规格选用接近计算结果又能满足过水流量要求的管径, 并按该管径计算管道所需的水头。

例 5.2 一横穿河道的钢筋混凝土倒虹吸管, 如图 5.6 所示。已知通过流量 $Q = 3 \text{ m}^3/\text{s}$, 倒虹吸管上下游渠中水位差 $z = 3 \text{ m}$, 倒虹吸管长 $l = 50 \text{ m}$, 其中经过两个 30° 的折角转弯, 其局部水头损失系数 $\zeta_b = 0.20$; 进口局部水头损失系数 $\zeta_e = 0.5$, 出口局部水头损失系数 $\zeta_2 = 1.0$, 上下游渠中流速 $v_1 = 1.5 \text{ m/s}$ 及 $v_2 = 1.5 \text{ m/s}$, 管壁粗糙系数 $n = 0.014$ 。试确定倒虹吸管直径 d 。

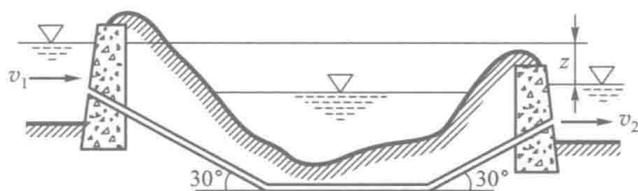


图 5.6

解: 倒虹吸管一般作短管计算。本题管道出口淹没在水下; 而且, 上下游渠道中流速相同, 流速水头消去。故应按式 (5.6) 计算:

$$Q = \mu_c A \sqrt{2gz} = \mu_c \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2gz}$$

所以

$$d = \sqrt{\frac{4Q}{\mu_c \pi \sqrt{2gz}}}$$

$$\text{其中 } \mu_c = \frac{1}{\sqrt{\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta}}, \text{ 且 } \lambda = \frac{8g}{C^2}, C = \frac{1}{n} R^{1/6}。$$

因为沿程阻力系数 λ 或谢才系数 C 都是 d 的复杂函数, 因此需用试算法。

先假设 $d = 0.8 \text{ m}$, 计算沿程阻力系数:

$$\lambda = \frac{8g}{C^2} = \frac{8gn^2}{R^{1/3}} = \frac{8 \times 9.8 \times 0.014^2}{\left(\frac{0.8}{4}\right)^{1/3}} = 0.0263$$

$$\begin{aligned} \mu_c &= \frac{1}{\sqrt{\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda \frac{l}{d} + \zeta_c + 2\zeta_b + \zeta_2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{0.0263 \times \frac{50}{0.8} + 0.5 + 2 \times 0.2 + 1.0}} = 0.531 \end{aligned}$$

$$\text{则 } d = \sqrt{\frac{4Q}{\mu_c \pi \sqrt{2gz}}} = \sqrt{\frac{4 \times 3}{0.531 \times 3.14 \times \sqrt{2 \times 9.8 \times 3}}} \text{ m} = 0.97 \text{ m, 与假设不符。}$$

故再假设 $d=0.95 \text{ m}$, 重新计算:

$$\lambda = \frac{8g}{C^2} = \frac{8gn^2}{R^{1/3}} = \frac{8 \times 9.8 \times 0.014^2}{\left(\frac{0.95}{4}\right)^{1/3}} = 0.0248$$

$$\begin{aligned} \mu_c &= \frac{1}{\sqrt{\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda \frac{l}{d} + \zeta_c + 2\zeta_b + \zeta_2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{0.0248 \times \frac{50}{0.95} + 0.5 + 2 \times 0.2 + 1.0}} = 0.558 \end{aligned}$$

$$\text{则 } d = \sqrt{\frac{4Q}{\mu_c \pi \sqrt{2gz}}} = \sqrt{\frac{4 \times 3}{0.558 \times 3.14 \times \sqrt{2 \times 9.8 \times 3}}} \text{ m} = 0.945 \text{ m}$$

因所得直径已和第二次假设值非常接近, 故采用管径 d 为 0.95 m 。

2. 虹吸管的水力计算

虹吸管是一种压力输水管道, 如图 5.7 所示, 顶部弯曲且其高程高于上游供水水面。若在虹吸管内造成真空, 使作用在上游水面的大气压强和虹吸管内压强之间产生压差, 则水流即能通过虹吸管最高处引向低处。虹吸管顶部的真空值理论上不能大于最大真空值, 即 10 m 水柱高。实际上, 当虹吸管内压强

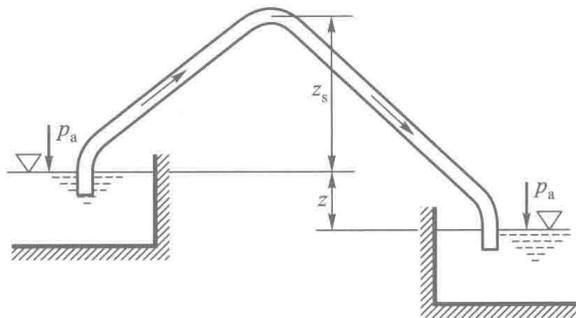


图 5.7

接近该温度下的汽化压强时，液体将产生汽化，破坏水流的连续性；故一般不使虹吸管中的真空值大于(7~8) m 水柱高。虹吸管的优点在于能跨越高地，减少挖方。

虹吸管的水力计算，主要是虹吸管输水流量的确定与虹吸管安装高度的确定。虹吸管长度一般不大，故应按短管计算。

例 5.3 有一渠道用两根直径 d 为 1.0 m 的混凝土虹吸管来跨过山丘(图 5.8)，渠道上游水面高程 $\nabla_1 = 100$ m，下游水面高程 $\nabla_2 = 99$ m，虹吸管长度 $l_1 = 8$ m， $l_2 = 12$ m， $l_3 = 15$ m，中间有 60° 的折角弯头两个，每个弯头的局部水头损失系数 $\zeta_b = 0.365$ ，若已知进口水头损失系数 $\zeta_e = 0.5$ ；出口水头损失系数 $\zeta_2 = 1.0$ ，管道糙率 $n = 0.014$ 。试确定：

- (1) 每根虹吸管的输水能力；
- (2) 当虹吸管中的最大允许真空值 h_v 为 7 m 时，问虹吸管的最高安装高程是多少？

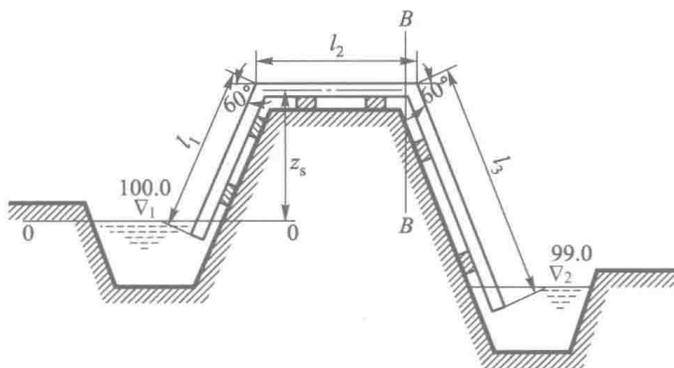


图 5.8

解：(1) 本题管道出口淹没在水面以下，为淹没出流。当不计行近流速影响时，可直接应用式 (5.6) 计算流量，即

$$Q = \mu_c A \sqrt{2gz} = \frac{1}{\sqrt{\lambda \frac{l}{d} + \zeta_e + 2\zeta_b + \zeta_2}} A \sqrt{2gz}$$

式中，上下游水头差为 $z = \nabla_1 - \nabla_2 = 100 \text{ m} - 99 \text{ m} = 1 \text{ m}$ 。

$$\lambda = \frac{8g}{C^2} = \frac{8gn^2}{R^{1/3}} = \frac{8 \times 9.8 \times 0.014^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^{1/3}} = 0.024$$

$$\text{则 } Q = \frac{1}{\sqrt{0.024 \times \frac{8+12+15}{1} + 0.5 + 2 \times 0.365 + 1.0}} \times \frac{3.14 \times 1^2}{4} \times \sqrt{2 \times 9.8 \times 1} \text{ m}^3/\text{s} =$$

1.985 m³/s。

(2) 虹吸管中最大真空一般发生在管子最高位置。本题中最大真空发生在第二个弯头前, 即 $B-B$ 断面。具体分析如下:

以上游渠道自由面为基准面, 令 $B-B$ 断面中心至上游渠道水面高差为 z_s , 对上游断面 $0-0$ 及断面 $B-B$ 列能量方程, 即

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = z_B + \frac{p'_B}{\rho g} + \frac{\alpha_B v_B^2}{2g} + h_{w0B}$$

代入相关变量可得

$$0 + \frac{p_a}{\rho g} + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = z_s + \frac{p'_B}{\rho g} + \frac{\alpha_B v^2}{2g} + \left(\lambda \frac{l_B}{d} + \zeta_e + \zeta_b \right) \frac{v^2}{2g}$$

式中, l_B 为从虹吸管进口至 $B-B$ 断面的长度。

取 $\frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} \approx 0$, $\alpha_B = 1.0$, 则

$$\frac{p_a}{\rho g} - \frac{p'_B}{\rho g} = z_s + \left(1 + \lambda \frac{l_B}{d} + \zeta_e + \zeta_b \right) \frac{v^2}{2g}$$

若要求管内真空值不大于某一允许值, 即 $\frac{p_a}{\rho g} - \frac{p'_B}{\rho g} \leq h_v$, 式中 h_v 为允许真空值, $h_v = 7 \text{ m}$ 。则

$$z_s + \left(1 + \lambda \frac{l_B}{d} + \zeta_e + \zeta_b \right) \frac{v^2}{2g} \leq h_v$$

即

$$z_s \leq h_v - \left(1 + \lambda \frac{l_B}{d} + \zeta_e + \zeta_b \right) \frac{v^2}{2g}$$

而

$$h_v - \left(1 + \lambda \frac{l_B}{d} + \zeta_e + \zeta_b \right) \frac{v^2}{2g} = 7 \text{ m} - \left(1 + 0.024 \times \frac{20}{1} + 0.5 + 0.365 \right) \times \frac{1}{2 \times 9.8} \times \left(\frac{1.985}{3.14 \times 1^2} \right)^2 \text{ m} = 6.24 \text{ m}$$

故虹吸管最高点与上游水面高差应满足 $z_s \leq 6.24 \text{ m}$ 。

3. 水泵装置的水力计算

图 5.9 所示为一抽水系统。通过水泵转轮转动的作用, 在水泵进口端形成真空, 使水流在池面大气压作用下沿吸水管上升, 流经水泵时从水泵获得新的能量, 从而输入压力管, 再流入水塔。

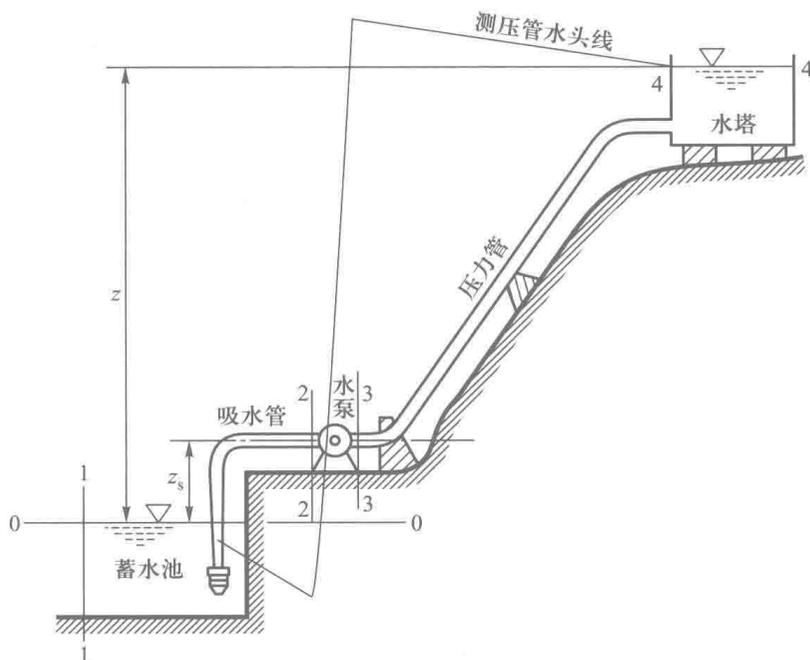


图 5.9

在设计水泵装置系统时，水力计算包括吸水管及压力管的计算。吸水管属于短管；压力管则根据不同情况按短管或长管计算。

(1) 吸水管的水力计算

主要任务是确定吸水管的管径及水泵的最大允许安装高程。

吸水管的管径一般是根据允许流速计算。通常吸水管的允许流速为 $0.8 \sim 1.25 \text{ m/s}$ ，或根据有关规范确定。流速确定后，则管径 d 为

$$d = \sqrt{\frac{4Q}{\pi v_{\text{允许}}}}$$

水泵的最大允许安装高程 z_s ，主要决定于水泵的最大允许真空值 h_v 和吸水管的水头损失。其计算方法与虹吸管允许安装高程的计算方法相同。

以水池水面为基准面，对断面 1-1 及水泵进口断面 2-2 列能量方程，得

$$\frac{p_a}{\rho g} = z_s + \frac{p'_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{w1-2}$$

由此

$$z_s = \frac{p_a - p'_2}{\rho g} - \left(\alpha_2 + \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta \right) \frac{v_2^2}{2g}$$

式中： v_2 为管内流速； $\frac{p_a - p'_2}{\rho g}$ 为断面 2-2 的真空值，不能大于水泵允许真空值 h_v 。所以

$$z_s \leq h_v - \left(\alpha_2 + \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta \right) \frac{v_2^2}{2g} \quad (5.13)$$

(2) 压力管的水力计算

压力管的计算在于决定必需的管径及水泵的装机容量。压力管的直径由经济流速确定，重要的工程应选择几个方案，进行技术经济比较。对于给排水管道，经济管径可按式估算：

$$d = \beta Q^{0.42} \quad (5.14)$$

式中： d 为直径，以 m 计； Q 为流量，以 m^3/s ； β 为系数，可取 0.8 ~ 1.2。

水流经过水泵时，从水泵的动力装置获得了外加的机械能，即水泵作了一定的功，才能使池中水历经压力管进入水塔。因而动力机械的功率可由式 (3.38) 改写成

$$P_p = \frac{\rho g Q H_t}{1000 \eta_p} \quad (5.15)$$

式中： Q 为流量，单位 m^3/s ； ρ 为水的密度，单位为 kg/m^3 ； η_p 为水泵和动力机械的总效率； P_p 为动力机械的功率，单位为 kW。

$z + h_{w1-4} = H_t$ 为水泵向单位重量液体所提供的机械能，称为水泵的总水头或扬程（以 m 计）。

扬程 H_t 的表达式可以直接由流程中有能量输入时的能量方程 (3.37) 求得

$$0 + \frac{p_a}{\rho g} + 0 + H_t = z + \frac{p_a}{\rho g} + 0 + h_{w1-4}$$

即

$$H_t = z + h_{w1-4} \quad (5.16)$$

式中的 h_{w1-4} 应包括水流从 1-1 流至 4-4 断面间的全部水头损失，即吸水管的水头损失 h_{w1-2} 和压力管的水头损失 h_{w3-4} 。故总扬程为

$$H_t = z + h_{w1-2} + h_{w3-4}$$

上式表明：水泵向单位重量液体所提供的机械能，一方面是用来将水流提高一个几何高度 z ；另一方面是用来克服水头损失 h_{w1-4} 。

例 5.4 用离心泵将湖水抽到水池，流量 $Q = 0.2 \text{ m}^3/\text{s}$ ，湖面高程 $\nabla_1 = 85.0 \text{ m}$ ，水池水面高程 $\nabla_3 = 105.0 \text{ m}$ ，吸水管长 $l_1 = 10 \text{ m}$ ，水泵的允许真空值 $h_v = 4.5 \text{ m}$ ，吸水管底阀局部水头损失系数 $\zeta_e = 2.5$ ， 90° 弯头局部水头损失系数 $\zeta_b = 0.3$ ，水泵入口前的渐变收缩段局部水头损失系数 $\zeta_g = 0.1$ ，吸水管沿程阻力系数 $\lambda = 0.022$ ，压力管道采用铸铁管，其直径 $d_2 = 500 \text{ mm}$ ，长度 $l_2 = 1000 \text{ m}$ ，粗糙系数 $n = 0.013$ （图 5.10）。试确定：

- (1) 吸水管的直径 d_1 ;
- (2) 水泵的安装高程 ∇_2 ;
- (3) 带动水泵的动力机械功率 P_p 。

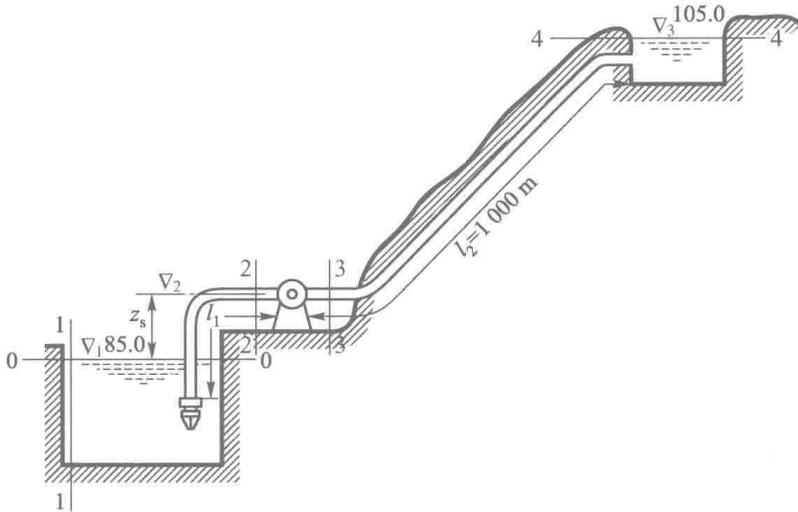


图 5.10

解：(1) 确定吸水管的直径：

采用设计流速 $v = 1.0 \text{ m/s}$ ，则

$$d_1 = \sqrt{\frac{4Q}{\pi v}} = \sqrt{\frac{4 \times 0.2}{3.14 \times 1}} \text{ m} = 0.505 \text{ m}$$

决定选用标准直径 $d_1 = 500 \text{ mm}$ 。

(2) 水泵安装高程的确定：安装高程是以水泵的允许真空值来控制的。令水泵轴中心线距湖面高差为 z_s ，则 $\nabla_2 = \nabla_1 + z_s$ ，可按式 (5.13) 计算 z_s 值：

$$\begin{aligned} z_s &= h_v - \left(\alpha_2 + \lambda \frac{l_1}{d_1} + \sum \zeta \right) \frac{v_2^2}{2g} \\ &= 4.5 \text{ m} - \left(1 + 0.022 \times \frac{10}{0.5} + 2.5 + 0.3 + 0.1 \right) \times \frac{1^2}{2 \times 9.8} \text{ m} \\ &= 4.5 \text{ m} - 0.22 \text{ m} = 4.28 \text{ m} \end{aligned}$$

则水泵轴最大允许安装高程：

$$\nabla_2 = \nabla_1 + z_s = 85 \text{ m} + 4.28 \text{ m} = 89.28 \text{ m}$$

(3) 带动水泵的动力机械功率，由式 (5.15) 和式 (5.16) 可得

$$P_p = \frac{\rho g Q (z + h_{w1-4})}{1000 \eta_p}$$

式中 $z = \nabla_3 - \nabla_1 = 105 - 85 \text{ m} = 20 \text{ m}$ 。

h_{w1-4} 为吸水管及压力管水头损失之和。在 z_s 的计算中, 已按短管求得吸水管水头损失为 0.22 m , 当吸水管按短管计算, 压力管按长管计算时, 整个管道的水头损失为

$$h_{w1-4} = 0.22 \text{ m} + \frac{Q^2}{K^2} l_2$$

且压力管的流量模数:

$$K = A_2 C_2 \sqrt{R_2} = \frac{3.14 \times 0.5^2}{4} \times \frac{1}{0.013} \left(\frac{0.5}{4} \right)^{1/6} \times \sqrt{\frac{0.5}{4}} \text{ m}^3/\text{s} = 3.77 \text{ m}^3/\text{s}$$

则 $h_{w1-4} = 0.22 \text{ m} + \frac{0.2^2}{3.77^2} \times 1000 \text{ m} = 3.03 \text{ m}$ 。

设动力机械的效率 $\eta_p = 0.7$, 水的密度 $\rho = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$, 即可求得所需动力机械功率:

$$P_p = \frac{\rho g Q (z + h_{w1-4})}{1000 \eta_p} = \frac{9.8 \times 1000 \times 0.2 \times (20 + 3.03)}{1000 \times 0.7} \text{ kW} = 64.48 \text{ kW}$$

5.2 复杂管道恒定流的水力计算

5.2.1 串联管道的水力计算

由直径不同的几段管道依次连接而成的管道, 称为串联管道。串联管道内的流量可以是沿程不变的; 也可以由于沿管道每隔一定距离有流量分出, 从而各段有不同流量。

图 5.11 所示为各管段有不同流量的串联管道。因为各管段的流量 Q 、直径 d 不同, 所以各管段中的流速也不同。这时, 整个管道的水头损失应等于各管段水头损失之和。给水工程中, 串联管道常按长管计算。则得

$$\begin{aligned} H &= h_{f1} + h_{f2} + h_{f3} \\ &= \frac{Q_1^2}{K_1^2} l_1 + \frac{Q_2^2}{K_2^2} l_2 + \frac{Q_3^2}{K_3^2} l_3 \end{aligned} \quad (5.17)$$

式中: Q_1, Q_2, Q_3 为各管段所通过的流量; l_1, l_2, l_3 为各管段长度; K_1, K_2, K_3 为各管段的流量模数。

在各管段的连接点水流应符合连续原理, 即

$$\begin{cases} Q_1 = Q_2 + q_1 \\ Q_2 = Q_3 + q_2 \end{cases} \quad (5.18)$$

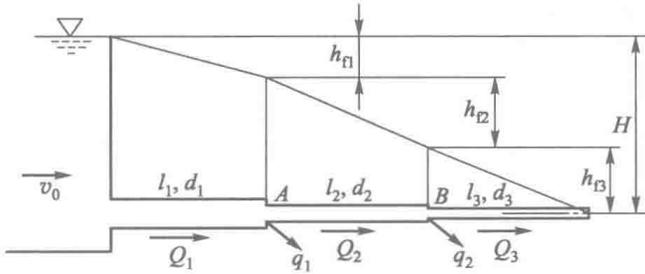


图 5.11

式 (5.17) 及式 (5.18) 是串联管道水力计算的基本公式。联立以上两式, 即可解算 Q , d , H 等各类问题。

在按长管计算的情况下, 各管段的测压管水头线与总水头线相重合; 整个管道的水头线呈折线形。这是由于各管段流速不同, 其水头线的坡度也各不相同。

水利工程中的有压输水隧洞或某些管道, 因结构或其他方面的要求, 各段有不同的断面尺寸, 但整个管道的流量沿程不变, 也属于串联管道。当管道长度不很大, 局部损失不能略去时, 应按短管计算。

在图 5.11 中, 令 $q_1 = q_2 = 0$, 则 $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$ 。当按短管计算时, 对进口上游及出口断面取能量方程, 并以通过出口断面中心的水平面作基准面 (图 5.12), 可得

$$H_0 = \sum h_{fi} + \sum h_{ji} + \frac{\alpha v^2}{2g}$$

即

$$H_0 = \sum \lambda_i \frac{l_i}{d_i} \frac{v_i^2}{2g} + \sum \zeta_i \frac{v_i^2}{2g} + \frac{\alpha v^2}{2g} \quad (5.19)$$

式中: v_i 为第 i 段管道的断面平均流速; v 为出口断面的平均流速; 其余各项的意义与习惯用法相同 (在图 5.12 中 $v = v_3$)。

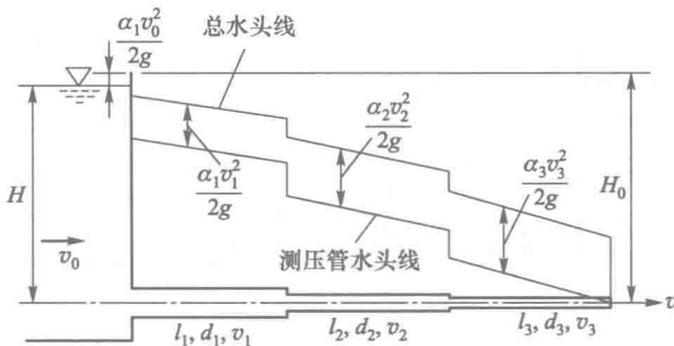


图 5.12

应用连续原理, 把第 i 段的断面平均流速 v_i 换算成出口断面平均流速, 并取 $\alpha = 1$, 则得

$$H_0 = \left[1 + \sum \lambda_i \frac{l_i}{d_i} \left(\frac{A}{A_i} \right)^2 + \sum \zeta_i \left(\frac{A}{A_i} \right)^2 \right] \frac{v^2}{2g}$$

整理后变为

$$v = \mu \sqrt{2gH_0}$$

$$Q = v \cdot A = \mu A \sqrt{2gH_0} \quad (5.20)$$

式中: A_i 为第 i 段管道的横断面积; A 为出口断面的横断面积; μ 为流量系数, 表示为

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum \lambda_i \frac{l_i}{d_i} \left(\frac{A}{A_i} \right)^2 + \sum \zeta_i \left(\frac{A}{A_i} \right)^2}} \quad (5.21)$$

当水流为湍流的粗糙区时, 阻力系数 λ_i 可用谢才系数 C_i 计算。则式 (5.21) 变为

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum \frac{8g}{C_i^2} \frac{l_i}{d_i} \left(\frac{A}{A_i} \right)^2 + \sum \zeta_i \left(\frac{A}{A_i} \right)^2}} \quad (5.22)$$

在按短管计算的情况下, 测压管水头线及总水头线并不重合, 它们是相互平行的折线, 如图 5.12 所示。

5.2.2 并联管道的水力计算

凡是两条或两条以上的管道从同一点分叉而又在另一点汇合所组成的管道称为并联管道。并联管道一般按长管计算。

如图 5.13 所示, 在 A, B 两点间有三管并联, 设各管管径为 d_1, d_2, d_3 , 通过流量分别为 Q_1, Q_2, Q_3 。管道的 A, B 两点是 A, B 间各支管所共有的,

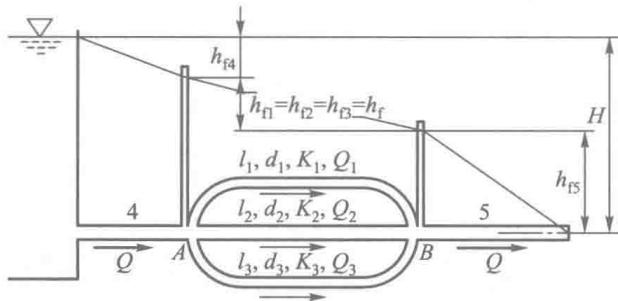


图 5.13

如在 A, B 两点设置测压管, 显然每根测压管只能有一个水面高程。所以, 单位重量液体通过 AB 间任何一条管道, 从 A 到 B 的能量损失都是相同的。若以 h_{f1}, h_{f2}, h_{f3} 分别表示各管的沿程水头损失, 则当不计局部损失时应有

$$h_{f1} = h_{f2} = h_{f3} = h_f \quad (5.23)$$

各支管的水头损失可按谢才公式计算:

$$\begin{cases} h_{f1} = \frac{Q_1^2}{K_1^2} l_1 \\ h_{f2} = \frac{Q_2^2}{K_2^2} l_2 \\ h_{f3} = \frac{Q_3^2}{K_3^2} l_3 \end{cases} \quad (5.24)$$

各支管的流量与总流量间应满足连续方程:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 \quad (5.25)$$

若总流量 Q 及各并联支管的直径、长度和粗糙系数为已知, 利用式 (5.24) 及式 (5.25) 的 4 个方程式可求出 Q_1, Q_2, Q_3 和水头损失 h_f 。

从式 (5.24) 中解出 Q_1, Q_2, Q_3 , 代入式 (5.25), 则有

$$Q = \left(\frac{K_1}{\sqrt{l_1}} + \frac{K_2}{\sqrt{l_2}} + \frac{K_3}{\sqrt{l_3}} \right) \sqrt{h_f}$$

及

$$h_f = \frac{Q^2}{\left(\frac{K_1}{\sqrt{l_1}} + \frac{K_2}{\sqrt{l_2}} + \frac{K_3}{\sqrt{l_3}} \right)^2} \quad (5.26)$$

h_f 求出后, 代入式 (5.24) 可求 Q_1, Q_2, Q_3 。

必须指出: 各并联支管的水头损失相等, 只表明通过每一并联支管的单位重量液体的机械能损失相等; 但各支管的长度、直径及粗糙系数可能不同, 因此通过流量也不同; 故通过各并联支管水流的总机械能损失是不等的, 流量大的, 总机械能损失大。

例 5.5 有两段管道并联, 已知总流量 $Q = 0.08 \text{ m}^3/\text{s}$, 管径 $d_1 = 200 \text{ mm}$, 管长 $l_1 = 500 \text{ m}$; 管径 $d_2 = 150 \text{ mm}$, 管长 $l_2 = 300 \text{ m}$, 管道为铸铁管 ($n = 0.0125$)。求并联管道两节点间水头损失 h_f 及支管流量 Q_1, Q_2 。

解: 并联管道两端节点间的水头损失可按式 (5.26) 计算, 即

$$h_f = \frac{Q^2}{\left(\frac{K_1}{\sqrt{l_1}} + \frac{K_2}{\sqrt{l_2}} \right)^2}$$

根据 $n = 0.0125$, $d_1 = 200 \text{ mm}$, $d_2 = 150 \text{ mm}$ 及 $K = AC\sqrt{R}$, 可求各管道流量模数为

$$K_1 = 0.341 \text{ m}^3/\text{s}, \quad K_2 = 0.158 \text{ m}^3/\text{s}$$

则

$$h_f = \frac{Q^2}{\left(\frac{K_1}{\sqrt{l_1}} + \frac{K_2}{\sqrt{l_2}}\right)^2} = \frac{0.08^2}{\left(\frac{0.341}{\sqrt{500}} + \frac{0.158}{\sqrt{300}}\right)^2} \text{ m} = 10.77 \text{ m}$$

将 h_f 值代入式 (5.24) 即可求出

$$Q_1 = K_1 \sqrt{\frac{h_{f1}}{l_1}} = 0.341 \times \sqrt{\frac{10.77}{500}} \text{ m}^3/\text{s} = 0.05 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_2 = K_2 \sqrt{\frac{h_{f2}}{l_2}} = 0.158 \times \sqrt{\frac{10.77}{300}} \text{ m}^3/\text{s} = 0.03 \text{ m}^3/\text{s}$$

5.2.3 分叉管道的水力计算

在水电站引水系统中, 经常碰到由一根总管从压力前池引水, 然后按水轮机的台数, 分成数根支管, 每根支管供水给一台水轮机, 这种分叉后不再汇合的管道, 称为分叉管道。

图 5.14 所示是一分叉管道, 总管自水池引出后, 从 B 点分叉, 然后通过两根支管分别于 C, D 两点流入大气。 C 点和水池水面的高差为 H_1 , D 点和水池水面的高差为 H_2 。当不计局部损失时, AB, BC, BD 各段的水头损失分别用 h_f, h_{f1}, h_{f2} 表示, 流量用 Q, Q_1, Q_2 表示。

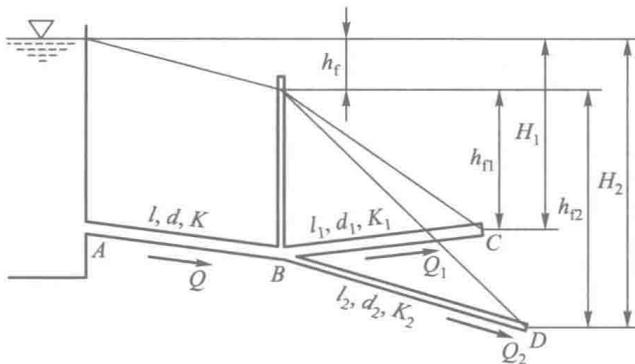


图 5.14

显然, 在此情况下管道 ABC 及 ABD 均可作为串联管道计算。对管道 ABC 应有

$$H_1 = h_f + h_{f1} = \frac{Q^2}{K^2} l + \frac{Q_1^2}{K_1^2} l_1 \quad (5.27)$$

对管道 ABD 应有

$$H_2 = h_{f1} + h_{f2} = \frac{Q^2}{K^2}l + \frac{Q_2^2}{K_2^2}l_2 \quad (5.28)$$

根据连续性条件

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad (5.29)$$

从式 (5.27) 和式 (5.28) 中解出 Q_1 , Q_2 , 代入式 (5.29), 可得

$$Q = \sqrt{\left(H_1 - \frac{Q^2}{K^2}l\right)\frac{K_1^2}{l_1}} + \sqrt{\left(H_2 - \frac{Q^2}{K^2}l\right)\frac{K_2^2}{l_2}} \quad (5.30)$$

求出总流量 Q 后, 代入式 (5.27) 与式 (5.28) 即可求出支管的流量 Q_1 及 Q_2 。

如果总流量 Q 是已知的, 也可以求解其他未知水力要素。但联立求解式 (5.27), 式 (5.28), 式 (5.29) 3 个方程只能求解 3 个未知数。

5.2.4 沿程均匀泄流管道的水力计算

前面讨论的管道其流量在每一管段范围内均沿程不变, 流量集中在管段末端泄出, 这种流量称为通过流量。但在实际工程上可能遇到从侧面不断连续泄流的管道, 例如用于人工降雨的管道; 给水工程中冷却塔的配水管; 滤池的反冲洗管等。沿程连续不断分泄出的流量称为沿程泄出流量, 单位是 $\text{m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})$ 。一般说来, 沿程泄出的流量是不均匀的, 也就是说, 流量沿管道的变化是一个以距离为变数的复杂函数。这里只研究一种最简单的情况, 就是管段各单位长度上的沿程泄出流量相等, 这种管道称为沿程均匀泄流管道。

如图 5.15 所示, 管道 AB 长为 l , 水头为 H , 管道末端流出的通过流量为 Q 。单位长度上沿程泄出流量为 q 。在离起点 A 距离为 x 的 M 点断面处, 流量为

$$Q_M = Q + (l - x)q$$

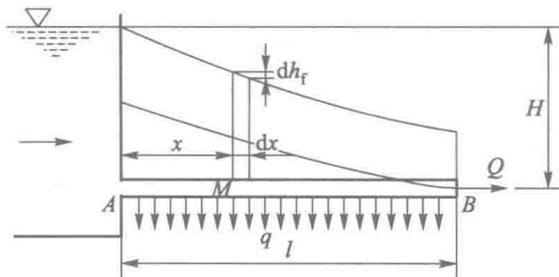


图 5.15

由于流量沿管道不断变化, 水流属变量流而且是非均匀流; 但在微小流段 dx 内, 可以认为流量不变, 并当作均匀流考虑。于是在 dx 管段内的沿程水头损失为

$$dh_f = \frac{1}{K^2} [Q + (l-x)q]^2 dx$$

将微小流段的水头损失对整个管道进行积分, 即得全管道 AB 的沿程水头损失:

$$\begin{aligned} H_{AB} = h_{fAB} &= \int_0^l \frac{1}{K^2} [Q + (l-x)q]^2 \cdot dx \\ &= \frac{l}{K^2} \left(Q^2 + Q \cdot q \cdot l + \frac{1}{3} q^2 l^2 \right) \end{aligned} \quad (5.31)$$

上式可近似地写为

$$H_{AB} = \frac{l}{K^2} (Q + 0.55ql)^2 = \frac{Q_r^2}{K^2} l \quad (5.32)$$

式中: $Q_r = Q + 0.55ql$, Q_r 称为折算流量。

从式 (5.32) 可见, 引用 Q_r 进行计算时, 便可把沿程均匀泄流的管道按一般只有通过流量的管道计算。

当通过流量 $Q=0$, 沿程均匀泄流的水头损失为

$$H_{AB} = h_{fAB} = \frac{1}{3} \frac{(ql)^2}{K^2} l \quad (5.33)$$

上式表明, 当流量全部沿程均匀泄出时, 其水头损失只等于全部流量集中在末端泄出时的水头损失的三分之一。

在沿程均匀泄流的情况下, 因流速沿程变化, 水力坡度 J 也沿程变化。不计局部损失时, 其总水头线及测压管水头线如图 5.15 所示。

例 5.6 有一由水塔供水的输水管道 (图 5.16), 全管道包括三段: AB , BC 及 CD ; 中间 BC 段为沿程均匀泄流管道, 每米长度上连续分泄的流量 q 为 $1.0 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$; 在管道接头 B 点要求分泄流量 $q_1 = 1.5 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$; CD 段末端的流量 $Q_3 = 1.0 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$ 。各段的长度及直径分别为: $l_1 = 300 \text{ m}$, $d_1 = 200 \text{ mm}$; $l_2 = 200 \text{ m}$, $d_2 = 150 \text{ mm}$; $l_3 = 100 \text{ m}$, $d_3 = 100 \text{ mm}$ 。管道都是铸铁管, $n = 0.0125$ 。求需要的水头 H 。

解: 本题中 AB , BC 及 CD 三段管道为串联管道, 整个管道的水头可按式 (5.17) 进行计算:

$$H = \frac{Q_1^2}{K_1^2} l_1 + \frac{Q_2^2}{K_2^2} l_2 + \frac{Q_3^2}{K_3^2} l_3$$

其中

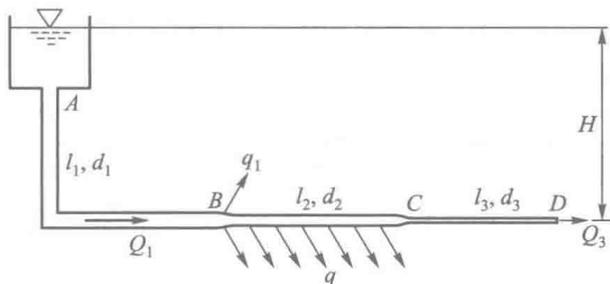


图 5.16

$$Q_1 = Q_3 + ql_2 + q_1 = 1.0 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s} + 1.0 \times 10^{-4} \times 200 \text{ m}^3/\text{s} + 1.5 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s} \\ = 0.045 \text{ m}^3/\text{s}$$

因为 BC 管段为沿程均匀泄流管道，管中的流量可按折算流量 Q_r 计算，即

$$Q_2 = Q_r = Q_3 + 0.55ql_2 = 1.0 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s} + 0.55 \times 1.0 \times 10^{-4} \times 200 \text{ m}^3/\text{s} \\ = 0.021 \text{ m}^3/\text{s}$$

当 $n = 0.0125$ ， $d_1 = 200 \text{ mm}$ ， $d_2 = 150 \text{ mm}$ ， $d_3 = 100 \text{ mm}$ ，根据 $K = AC\sqrt{R}$ ，可计算各管的流量模数为

$$K_1 = 0.3411 \text{ m}^3/\text{s}, \quad K_2 = 0.1584 \text{ m}^3/\text{s}, \quad K_3 = 0.0537 \text{ m}^3/\text{s}$$

则管道所需水头为

$$H = \frac{Q_1^2 l_1}{K_1^2} + \frac{Q_2^2 l_2}{K_2^2} + \frac{Q_3^2 l_3}{K_3^2} \\ = \frac{0.045^2}{0.3411^2} \times 300 \text{ m} + \frac{0.021^2}{0.1584^2} \times 200 \text{ m} + \frac{0.01^2}{0.0537^2} \times 100 \text{ m} = 12.20 \text{ m}$$

5.2.5 管网的水力计算

在给水处理与供热管路系统中，常将许多简单管道经串联、并联组合成管网，其布置形式可分为枝状管网和环状管网。枝状管网是由干管与若干支管组成的树枝状的、支管末端互不相连的管道系统，如图 5.17 所示。环状管网是由彼此邻接的环状管道组成的封闭管道系统，如图 5.18 所示。

1. 枝状管网的水力计算

在枝状管网水道系统中，水从供水起点到任一节点的水流流路只有一个，即每一管段只有唯一确定的计算流量。任一条分枝均可看作一条串联管道，其总水头损失等于各管段沿程水头损失之和。而任一分叉点处，与并联管道类似，由连续性原理可知，分叉处流入节点的流量应等于各支管流出节点的流量

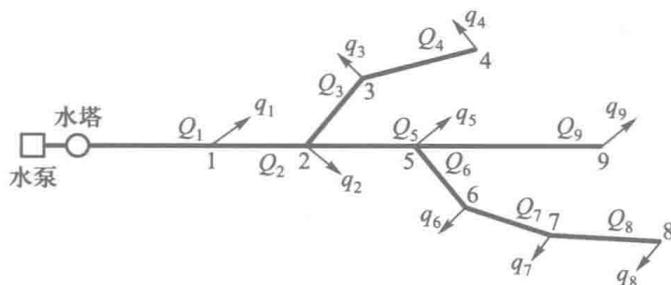


图 5.17

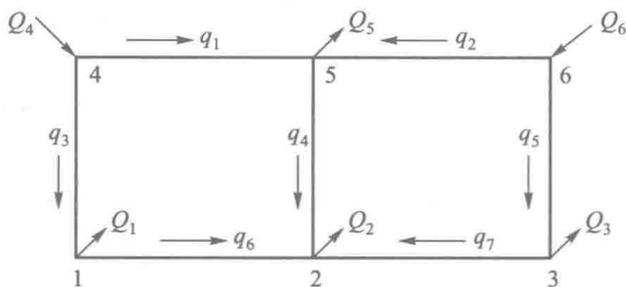


图 5.18

之和。对于图 5.17 中的水塔 - 1 - 2 - 3 - 4 管线，可得

$$H = \sum h_{fi} = h_{f1} + h_{f2} + h_{f3} + h_{f4} \quad (5.34)$$

其中节点 1、2、3、4 的流量关系满足

$$\begin{cases} Q_1 = Q_2 + q_1 \\ Q_2 = Q_3 + Q_5 + q_2 \\ Q_3 = Q_4 + q_3 \\ Q_4 = q_4 \end{cases} \quad (5.35)$$

式中 Q_i , q_i 分别为节点 i 处的供水流量及引用流量。

最后对不同的分枝线路列出水塔与分枝线路末端之间的能量方程，确定水塔高度 H_1 ：

$$H_1 = \sum h_{fi} + h_E + z_i - z_E \quad (5.36)$$

式中， z_i , z_E , h_E 分别为水塔地面高程和分枝管路末端地面高程与分枝管路末端自由水头， $\sum h_{fi}$ 为从水塔到管网控制末端的总水头损失。

枝状管网水力计算基本步骤：(1) 按管网布置图，绘制计算草图，对节点和管段顺序编号，并标明管段长度和节点地形标高。(2) 按最高日最高时用水量计算节点流量，并在节点旁引出箭头，注明节点流量及各末端的自由水头。

(3) 在管网计算草图上, 从管网末端的节点开始, 按照任一管段中的流量等于其下游所有节点流量之和的关系, 逐个向上一级供水管道推算每个管段的流量。(4) 利用式 (5.12), 根据管段流量和经济流速求出干线上各管段的管径, 并计算其水头损失。(5) 综合比较不同管道支线的总作用水头, 确定满足所有分枝管道的水塔高度和水泵扬程。

2. 环状管网的水力计算

环状管网的水流流动比枝状管网较为复杂, 如图 5.18 所示, 当水流从节点 4 和节点 6 流入管网, 最后从节点 1、2、3、5 流出。相邻的管环有共同的节点与共同的管段, 任一管段与节点流量变化将影响其他管段的流量, 因此, 环状管网的水力计算必须同时考虑该管网的所有节点与所有管段。

根据连续性原理和能量损失理论, 环状管网中的水流必须满足以下两个条件:

(1) 任何节点流入与流出的流量必须相等, 即流经任一节点流量的代数和等于零,

$$\sum Q_i = 0 \quad (5.37)$$

(2) 对于任一闭合环路, 若以顺时针流动的水头损失为正值, 逆时针流动水头的水头损失为负值, 则沿任一闭合环路一周计算的水头损失应等于零,

$$\sum h_{fi} = 0 \quad (5.38)$$

对图 5.18 的左闭合环路, 由①②两条件可得,

$$\begin{cases} Q_4 - q_1 - q_3 = 0 \\ q_3 - Q_1 - q_6 = 0 \\ q_1 + q_2 - Q_5 - q_4 = 0 \\ q_4 + q_6 + q_7 - Q_2 = 0 \end{cases} \quad (5.39)$$

$$(h_{i4-5} + h_{i5-2}) - (h_{i4-1} + h_{i1-2}) = 0 \quad (5.40)$$

对于图 5.18 右闭合环路可得到类似的关系式。由此可知, 环状管网的水力计算须联立求解众多的代数方程, 其求解过程相对繁杂, 这里不作深入讨论, 可参考相关的专业课程。

5.3 有压管道中的水击问题

当流场内液体质点通过空间点的运动要素 (如 v 、 p 等) 不仅随空间位置而变, 而且随时间而变时, 这种流动称为非恒定流动。

非恒定流在无压流及有压流中均可能产生。河道中洪水的涨落, 明渠中水

闸的启闭,都会使河渠中产生非恒定流;水库水位上涨或下降时,通过有压泄水管的出流则属于有压非恒定出流。

本节主要讨论有压管中一种重要的非恒定流——水击(或称水锤)。当有压管中的流速因某种外界原因而发生急剧变化时,将引起液体内部压强产生迅速交替升降的现象,这种交替升降的压强作用在管壁、阀门或其他管路元件上好像锤击一样,故称为水击。例如,水电站负荷变化时,必须调节压力引水管道末端的阀门,改变流量以适应负荷变化的需要。而流量的变化必然导致流速及液体动量也发生相应的变化。由动量定理可知,动量改变必须由外力所促成;所以,引水管内液体改变动量必然伴随着压强的急剧变化。若系关闭阀门,则引水管中首先发生压强急剧升高;若为开启阀门,则首先发生压强急剧下降。这种压强的升高或下降,有时会达到很大的数值,处理不当将导致管道系统发生强烈的振动,管道严重变形甚至爆裂。所以,在水电站压力引水系统的设计中,必须进行水击计算,以便确定可能出现的最大和最小的水击压强,并研究防止和削弱水击作用的适当措施。压力引水管较长的水电站,常在引水系统中修建调压室,以减小水击作用的强度和范围。水击发生时,调压系统中产生的水体振荡现象,也属于非恒定流动。

在前面各章的讨论中,均把液体看作不可压缩的。但在水击计算中,必须考虑液体的压缩性,因为水击发生时,管道内的压强发生巨大变化,液体的压缩性对水击压强的大小及其在管道中的传播,将产生显著的影响。另外,管内压强的巨大变化还会引起管壁的弹性变形,这种弹性变形的影响,在研究水击问题时也是必须考虑的。

5.3.1 阀门突然关闭时有压管道中的水击

1. 水击现象

在研究水击问题时,距离坐标 L 常取由阀门指向上游的方向。图5.19所示长度为 L 的有压管道,其管径与管壁厚度均沿程不变。

设管道的 B 端(进口)与水库相接,管道末端 A 处设一调节流量的阀门。为使问题简化,在以后的讨论中将略去水头损失及流速水头,即认为恒定流时管路中测压管水头线与静水头线 $M-M$ 相重合。

设在恒定流的条件下,管中平均流速为 v_0 ,压强为 p_0 。若阀门突然完全关闭(设关闭阀门所需时间为零),当不考虑液体的压缩性及管壁弹性时,整个管路中流速都应同时变为零;而且,在水流惯性的作用下,整个管路中的压强也应同时升至无穷大。但实际上,关闭阀门总需要一定的时间;同时,由于液体具有压缩性,管壁具有弹性,对水击起了缓冲作用。所以管路中的流速并不

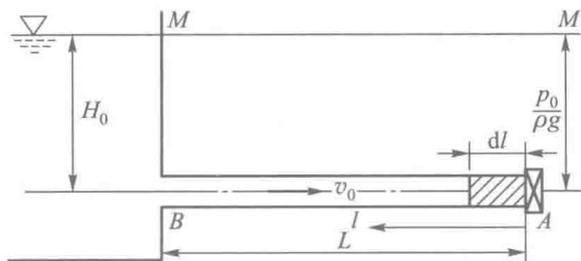


图 5.19

是各处同时变为零，而是从阀门开始向上游一个断面一个断面地逐步变为零；整个管路中的压强，也不是立即同时升至无穷大，而是从阀门起向上游一个断面一个断面地升高一定的数值。首先，在阀门关闭的一瞬间，紧靠阀门处长度为 dl 的液层速度变为零，压强立即升高 Δp ，由于 Δp 一般很大，故 dl 层液体被压缩，密度增大，使周围管壁膨胀。但是 dl 层上游的流动并未受到阀门关闭的影响，仍以 v_0 的速度继续向下游流动，当碰到停止不动的第一层液体时，也像碰到完全关闭的阀门一样，速度立即变为零，压强升高 Δp ，液体被压缩，周围管壁膨胀。这样一层接一层地将阀门关闭的影响向上游传播，直至传到水库为止。使整个管路压强增高了 Δp ，液体受到同样压缩，管壁也发生同样的膨胀。这种现象，实际上是扰动波在弹性介质中的传播现象，阀门关闭相当于产生一种扰动，这种扰动的影响只有通过弹性波才能传播至各个断面。在上述情况下，弹性波的传播使压强升高，而其传播方向又与恒定流时的流动方向相反，称之为增压逆波。

设以 a 表示弹性波的传播速度，则经过 $t = \frac{L}{a}$ 时段，弹性波传播至 B 断面。

时段 $0 < t < \frac{L}{a}$ 为水击波传播的第一阶段，其液体和管壁的特征如图 5.20a 所示。

在 $t = \frac{L}{a}$ 时，全管流动停止（图 5.20b），压强普遍升高，密度加大，管壁膨胀。但管路上游水库水位是固定不变的，管道进口处 B 断面在水库一侧的压强始终是 p_0 ，不会受水击的影响而改变；而另一侧则是受压缩液体的压强 $p_0 + \Delta p$ 。在这种不均衡压强的作用下， B 断面的液体不能保持平衡，转而由管道向水库方向流动。所以，从 $t = \frac{L}{a}$ 起，开始了水击波传播的第二个阶段。这时，由 B 断面开始水体产生的反向流速，其大小应等于第一阶段中的流速 v_0 。因

为, 第一阶段中的压强增量 Δp 是由流速差 $(0 - v_0)$ 而产生的; 那么根据动量守恒原理, 在同样压强增量 Δp 的作用下所产生的流速, 大小也应等于 v_0 , 但方向相反。反向流速 $-v_0$ 产生后, B 断面附近的液层, 压强马上恢复到原有压强 p_0 , 压缩的液体及膨胀的管壁也立即恢复原状。在水体弹性的作用下一层层地向下游传播, 至 $t = \frac{2L}{a}$ 时达到阀门处的 A 断面, 结束了水击发展的第二阶段 (图 5.20c、d), 整个管路中压强恢复到 p_0 , 液体及管壁也恢复常态, 但整个管中的液体均以 $-v_0$ 流动着。第二个阶段中, 弹性波的传播使压强下降 Δp , 其传播方向与恒定流时的流动方向相同, 所以称作降压顺波。它即是第一阶段中增压逆波的反射波。

时段 $t = \frac{2L}{a}$ 是水击弹性波由阀门至水库来回所需的时间, 水击计算中称为相长, 并以 T 表示, 即 $T = \frac{2L}{a}$ 。

在 $t = \frac{2L}{a}$ 时, 虽然全管压强已经恢复正常, 全管液体的密度及膨胀的管壁也恢复原状, 但水击波的传播现象并不停止。因为水流具有一个反向流速 $-v_0$, $-v_0$ 的存在是与阀门全部关闭而要求 $v_0 = 0$ 的条件不相容的, 这使液体有脱离阀门的趋势。从而引起阀门处液层的压强又骤然降低 Δp , 并使液体膨胀, 密度减小, 管壁收缩, 流动也随即停止。从阀门处 A 断面又开始了水击波传播的第三阶段: 压强降低、液体膨胀、管壁收缩的现象又这样一层层以波速 a 往上传播, 在 $t = \frac{3L}{a}$ 时到达进口的 B 断面 (图 5.20 f), 整个管路中流速变为零, 压强降低 Δp , 液体膨胀, 管壁处于收缩状态。显然, Δp 的绝对值应等于第一阶段中的压强增值。这一阶段中的弹性波称为降压逆波, 它是第二阶段中降压顺波的反射波。

当降压逆波反射到 B 端 (在 $t = \frac{3L}{a}$) 时, B 断面右侧的压强比库水位所要求的低了一个 Δp 值。在此压强差的作用下, 水流又发生以速度 v_0 向阀门方向的流动。流动一经开始, 压强立即恢复到 p_0 , 膨胀的液体及收缩的管壁也相应恢复原状。这个由水库反射回来的增压顺波又以波速 a 向阀门方向传播 (图 5.20 g), 到 $t = \frac{4L}{a}$ 时, 增压顺波传到阀门断面 A , 整个管路中压强恢复到 p_0 , 流速也恢复到 $t = 0$ 时的情况, 即以 v_0 向下游方向流动 (图 5.20 h)。这是水击波传播的第四个阶段。

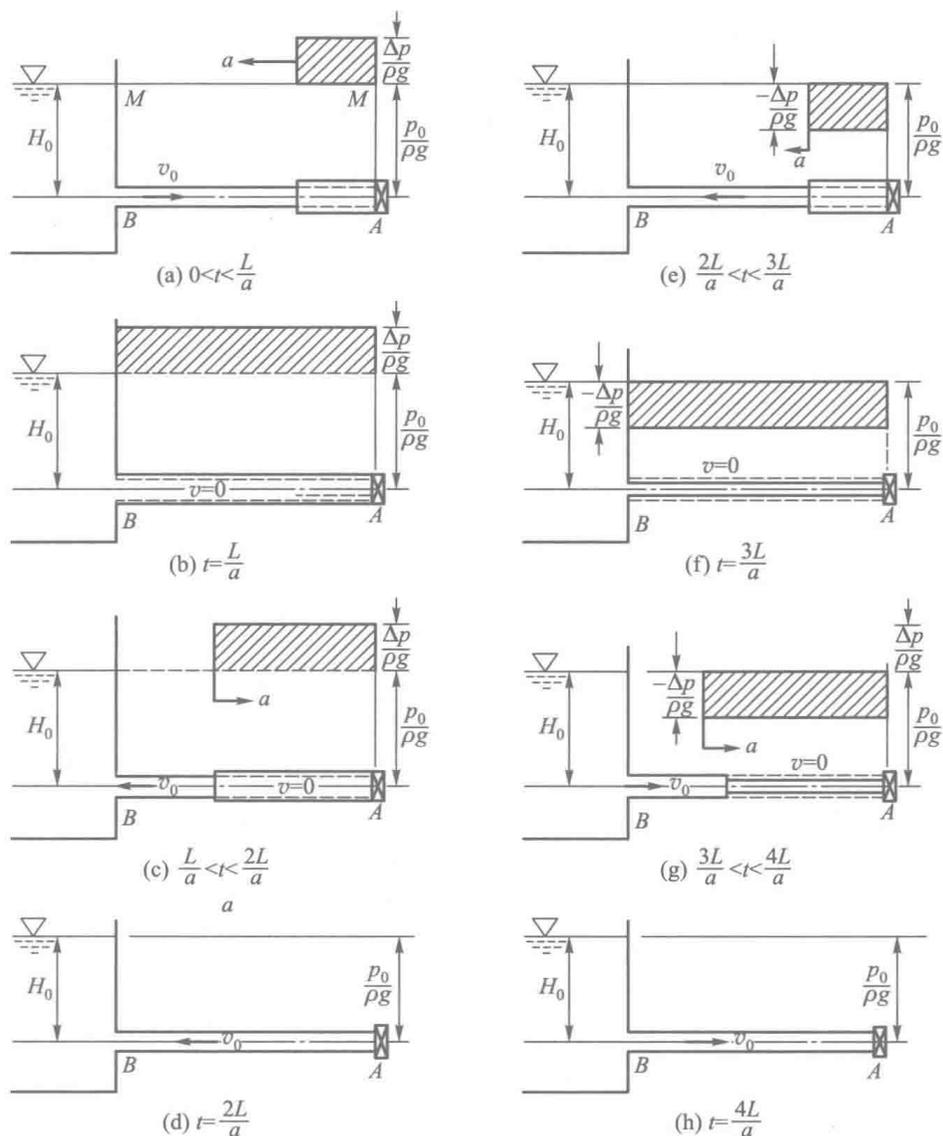


图 5.20

从阀门关闭 $t=0$ 时算起, 至 $t = \frac{2L}{a}$ 时, 称作第一相。由 $t = \frac{2L}{a}$ 至 $t = \frac{4L}{a}$ 又经过了一相, 称为第二相。因为到 $t = \frac{4L}{a}$ 时, 全管中压强、流速、液体及管壁都恢复到水击发生前的状态, 所以把 $t=0$ 到 $t = \frac{4L}{a}$ 称为一个周期。

到 $t = \frac{4L}{a}$ 时, 全管虽然恢复常态, 但水击现象仍然不会停止, 而是重复上

述过程，周而复始地循环发展下去。实际上，由于摩阻损失的存在，水击压强将逐渐衰减，以致最终停止下来。

现将上述四个阶段的运动特征归纳如表 5.2 所示。

表 5.2 水击过程的运动特征

过程	时距	速度变化	流动方向	压强变化	弹性波的传播方向	运动特征	液体状态
1	$0 < t < \frac{L}{a}$	$v_0 \rightarrow 0$	$B \rightarrow A$	增高 Δp	$A \rightarrow B$	减速增压	压缩
2	$\frac{L}{a} < t < \frac{2L}{a}$	$0 \rightarrow -v_0$	$A \rightarrow B$	恢复原状	$B \rightarrow A$	增速减压	恢复原状
3	$\frac{2L}{a} < t < \frac{3L}{a}$	$-v_0 \rightarrow 0$	$A \rightarrow B$	降低 Δp	$A \rightarrow B$	减速减压	膨胀
4	$\frac{3L}{a} < t < \frac{4L}{a}$	$0 \rightarrow v_0$	$B \rightarrow A$	恢复原状	$B \rightarrow A$	增速增压	恢复原状

从上述讨论可知：在阀门突然关闭的情况下，阀门断面产生一个单独的水击波，这个波在水库断面发生等值异号反射，即入射波和反射波绝对值相等、符号相反，入射波是增压波，反射波则为降压波，反之亦然；在阀门断面则发生等值同号反射，入射波是增压波，反射波也是增压波，反之亦然。水击发展的整个过程就是这个水击波传播和反射的过程。管道任一断面在任一时刻的水击压强值即为通过该断面的水击顺波和逆波叠加的结果。

图 5.21 所示是阀门突然关闭时，阀门断面压强随时间变化的情况。从阀门突然关闭的 $t=0$ 时起，该断面压强即由原来的 p_0 增加为 $p_0 + \Delta p$ ，直至降压顺波反射回来前夕 ($t \leq \frac{2L}{a}$ 时)，阀门断面始终保持压强为 $p_0 + \Delta p$ 。在 $t = \frac{2L}{a}$ 的一瞬间，压强则由 $p_0 + \Delta p$ 骤然下降至 p_0 ，再下降至 $p_0 - \Delta p$ 。此后，在 $t = \frac{2L}{a}$ 到 $t = \frac{4L}{a}$ 期间，压强保持着 $p_0 - \Delta p$ 。到 $t = \frac{4L}{a}$ 的一瞬间，该断面压强又由 $p_0 - \Delta p$ 增加至 p_0 ，再增加至 $p_0 + \Delta p$ 。就这样循环演变下去。

图 5.22 是表示管路进口 B 断面压强随时间的变化关系。显然， B 断面压强只是在 $t = \frac{L}{a}$ ， $t = \frac{3L}{a}$ ， $t = \frac{5L}{a}$ ， \dots 的一瞬间，压强短暂的升高 Δp 或下降 Δp ，其余时间，压强均保持为 p_0 。

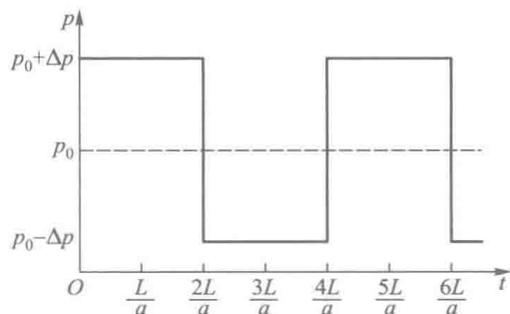


图 5.21

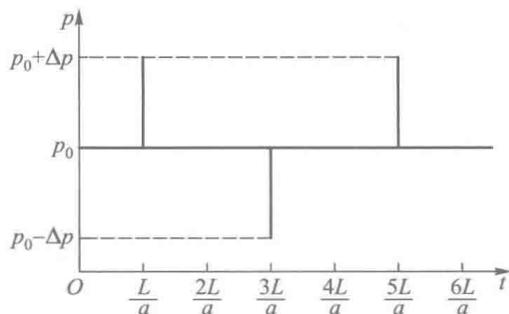


图 5.22

至于管路的中间, 例如距阀门为 l 的断面, 其压强升高将比阀门断面迟 $\frac{l}{a}$ 时段, 而又早 $\frac{l}{a}$ 时段结束, 如图 5.23 所示。

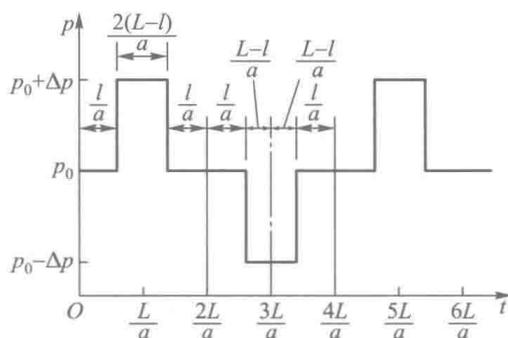


图 5.23

从图 5.21、图 5.22 及图 5.23 可知: 阀门断面压强最先升高和降低, 持续时间长, 变幅大。管道进口断面的压强增高或降低都只是发生在瞬间。至于管路的任一中间断面, 其压强的变幅和持续的时间都是介于上述二者之间。可见, 阀门处的水击最为严重, 而且总是在每相之末变幅最大。

2. 水击压强的计算

物体改变运动状态, 是由于外力作用的结果。同样, 阀门关闭时管道中水流速度的改变, 必然是由于一种压强增量的作用, 这个压强增量就是水击压强 (以 Δp 表示), 可以用动量定理来推求。

今在管道中取出长为 Δl 的管段来进行研究, Δl 的两端为 $m-m$ 及 $n-n$ 断面。并设管道中原有的流速为 v_0 , 压强为 p_0 , 水的密度为 ρ , 管道的横断面积为 A 。若部分关闭阀门而使管路中发生水击, 水击发生后, 经 Δt 时段, 水击

波由 $m-m$ 断面传至 $n-n$ 断面，则流段内的流速由 v_0 减到 v ；压强由 p_0 增加为 $p_0 + \Delta p$ ；水体被压缩，密度变为 $\rho + \Delta\rho$ ；管壁膨胀，横断面增加至 $A + \Delta A$ （图 5.24）。

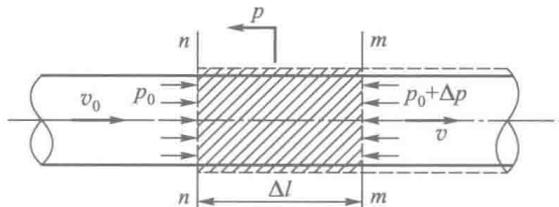


图 5.24

则水体原有的动量为 $\rho A v_0 \Delta l$ ，水击波通过后的动量为 $(\rho + \Delta\rho)(A + \Delta A)v \Delta l$ ，所研究的水体，在 Δt 时段内动量的变化是

$$(\rho + \Delta\rho)(A + \Delta A)v \Delta l - \rho A v_0 \Delta l$$

展开后，略去二阶微量，则得 $\rho A \Delta l (v - v_0)$ 。

作用在 Δl 段水体两端压力差为

$$p_0 A - (p_0 + \Delta p)(A + \Delta A) = p_0 A - (p_0 A + p_0 \Delta A + \Delta p A + \Delta p \Delta A)$$

略去二阶微量，并注意到水击中 $p_0 \Delta A$ 比 $\Delta p A$ 小得多；略去 $p_0 \Delta A$ 后，求得两端压力差的冲量为 $-\Delta p A \Delta t$ 。

由动量定理得

$$-\Delta p A \Delta t = \rho A \Delta l (v - v_0)$$

因为水击波的传播速度 $a = \frac{\Delta l}{\Delta t}$ ；所以水击压强增量为

$$\Delta p = \rho a (v - v_0) \quad (5.41)$$

若用水柱高表示压强增量，则得

$$\Delta H = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{a}{g} (v_0 - v) \quad (5.42)$$

当阀门突然完全关闭时 $v = 0$ ，则得相应的水头增量：

$$\Delta H = \frac{a}{g} v_0 \quad (5.43)$$

式 (5.41) 或式 (5.42) 常称为儒科夫斯基 (Жуковский) 公式，可用于计算阀门突然关闭或开启时的水击压强。一般压力引水钢管内水击波的传播速度 a 约为 1000 m/s ，设流速由 6 m/s 减少到零时，由式 (5.43) 可求得阀门突然完全关闭时的水头增量为

$$\Delta H = \frac{a}{g} v_0 = \frac{1000}{9.8} \times 6 \text{ m} \approx 600 \text{ m}$$

这相当于 60 个大气压，是一个极大的压强，若设计中未加考虑，必将带来严重的后果。

3. 水击波的传播速度

下面，根据质量守恒原理来推导水击波的传播速度。

仍取图 5.24 中长为 $\Delta l = a\Delta t$ 的流段进行研究。根据质量守恒原理，在 Δt 时段内，通过 $n-n$ 断面流入的液体质量与通过 $m-m$ 断面流出的流体质量之差，应等于同一时段内，该流段液体质量的增值。

在 Δt 时段内，流入与流出该流段液体的质量差为 $\rho v_0 A \Delta t - (\rho + \Delta\rho)(A + \Delta A)v\Delta t$ ，略去二阶微量后得

$$[\rho A(v_0 - v) - v(\rho\Delta A + \Delta\rho A)]\Delta t \quad (5.44)$$

在同一时段内， Δl 段内的液体，因水击波通过使压强增加、密度加大、管壁膨胀所引起质量增值为 $(\rho + \Delta\rho)(A + \Delta A)\Delta l - \rho A\Delta l$ ，不计二阶微量，则得

$$(\rho\Delta A + \Delta\rho A)\Delta l \quad (5.45)$$

根据质量守恒原理，应有

$$[\rho A(v_0 - v) - v(\rho\Delta A + \Delta\rho A)]\Delta t = (\rho\Delta A + \Delta\rho A)\Delta l$$

注意到 $\frac{\Delta l}{\Delta t} = a$ ，将上式整理可得

$$\rho A(v_0 - v) = (a + v)(A\Delta\rho + \rho\Delta A)$$

一般情况下，水击波的传播速度 a 比水流速度 v 大得多。略去右端的 v 后，上式变为

$$v_0 - v = \left(\frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{\Delta A}{A} \right) a$$

将式 (5.41) 中的 $v_0 - v$ 代入上式，取极限后可得水击波的传播速度 a 为

$$a = \frac{1}{\sqrt{\rho \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\rho} + \frac{1}{A} \frac{dA}{d\rho} \right)}} \quad (5.46)$$

式 (5.46) 分母中， $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\rho}$ 反映液体的压缩性； $\frac{1}{A} \frac{dA}{d\rho}$ 反映管壁的弹性。

根据绪论中对液体压缩性的讨论可知

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\rho} = \frac{1}{K} \quad (5.47)$$

式中 K 为液体的体积模量（表 5.3）。

对于直径为 D 、面积为 A 的管道，当压强增加 $d\rho$ 时，管壁膨胀，管径增

加 dD , 相应的面积增量 $dA = d\left(\frac{1}{4}\pi D^2\right) = \frac{1}{2}\pi D dD$ 。则

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dp} = \frac{1}{dp} \cdot \frac{dA}{A} = \frac{\frac{1}{2}\pi D dD}{\frac{1}{4}\pi D^2} \cdot \frac{1}{dp} = 2 \frac{dD}{D} \cdot \frac{1}{dp} \quad (5.48)$$

根据胡克定律, 直径的增量 dD 与管壁应力增量 $d\sigma$ 之间的关系为

$$\frac{d\sigma}{E} = \frac{dD}{D} \quad (5.49)$$

式中 E 为管壁材料的弹性模量 (表 5.3)。

表 5.3 常用管壁材料的弹性模量 E

管壁材料	E / Pa	$\frac{K}{E}$	备 注
钢管	19.6×10^{10}	0.01	水的体积模量 $K = 19.6 \times 10^8 \text{ Pa}$
铸铁管	9.8×10^{10}	0.02	
混凝土管	19.6×10^9	0.1	
木管	9.8×10^9	0.2	

例 2.7 中曾求得壁厚为 δ 的均质薄壁圆管中拉应力 σ 的表达式为

$$\sigma = \frac{pD}{2\delta} \quad (5.50)$$

则

$$d\sigma = \frac{D}{2\delta} dp \quad (5.51)$$

将式 (5.49) 及式 (5.51) 代入式 (5.48), 得

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dp} = \frac{D}{E\delta} \quad (5.52)$$

再将式 (5.47) 及式 (5.52) 代入式 (5.46), 即可求出均质薄壁圆管中水击波传播速度 a 的计算公式:

$$a = \frac{1}{\sqrt{\rho\left(\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dp} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dp}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\rho\left(\frac{1}{K} + \frac{D}{E\delta}\right)}} = \frac{\sqrt{\frac{K}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{K}{E} \cdot \frac{D}{\delta}}} \quad (5.53)$$

式中 δ 为管壁厚度。

由式 (5.53) 可以看出: 其他条件一定时, 水击波的传播速度与管壁材

料的弹性模量 E 有关。 E 愈大, 水击波的传播速度 a 也愈大; 当 $E = \infty$, 即管道为绝对刚体时, 水击波传播速度最大, 以 a_0 表示, 则

$$a_0 = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (5.54)$$

a_0 就是不受管壁影响时, 水击波的传播速度; 也就是声波在液体中的传播速度。 a_0 值与液体的压强及温度有关, 当压强为 1~25 个大气压时, 由表 1.2 可知, 水温在 10℃ 左右, 其密度 $\rho = 999.7 \text{ kg/m}^3$, 体积模量 $K = 2.11 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, a_0 为 1453 m/s; 水温在 5℃ 左右, 其密度 $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, 体积模量 $K = 2.06 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, a_0 为 1435 m/s。

从式 (5.53) 还可以看出: 管径 D 及管壁厚度 δ 对水击波的传播速度 a (从而, 也是对水击压强增量 Δp) 也有影响, D 大则水击波的传播速度 a 和压强增量 Δp 小; 反之则大。管壁厚度 δ 大, 则传播速度 a 和压强增量 Δp 也大; 反之则小。所以, 为减小水击压强增量, 在管壁材料强度允许的条件下, 应当选用直径较大, 管壁较薄的水管。

式 (5.53) 只能用于薄壁均质圆管, 当压力管道的横断面不是圆形或管壁系非均质材料 (如钢筋混凝土或各种衬砌隧洞等) 时, 其水击波传播速度的计算公式, 可查阅有关参考文献。

在本节的讨论中, 是以阀门突然关闭来说明水击波的发生和传播过程, 并导出了水击压强增量的计算公式。显然, 当阀门突然开启时, 水击的性质和突然关闭时完全一样。不同的是, 阀门突然开启时, 阀门断面所产生的初生水击波是增速减压逆波; 而由进口反射回来的则是增速增压顺波, 此后的传播及反射过程在性质上与阀门突然开启时完全相同。计算水击压强增量公式 (5.42), 对阀门突然开启也完全适用, 只不过阀门突然开启时 $v_0 < v$, Δp 应为负值。

5.3.2 阀门逐渐关闭时有压管道中的水击

以上分析中认为阀门是突然关闭的, 这是为分析问题方便而假设的一种理想情况。事实上, 关闭阀门总是需要一定的时间才能完成。也就是说, 在实际情况下阀门总是逐渐关闭的。由式 (5.53) 可知, 阀门关闭时间的长短, 并不会影响水击波的传播速度。所以, 阀门逐渐关闭时, 水击波的传播速度仍可用式 (5.53) 计算。

阀门逐渐关闭的整个过程, 可看作由一系列微小的突然关闭过程所综合。设阀门关闭所经历的总时间为 T_s , 则可将 T_s 分成 n 个时段 $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots$,

$\Delta t_n, T_s = \sum_{i=1}^n \Delta t_i$; 每个微小的突然关闭则发生在每个时段之初。若管内原来的压强是 p_0 , 流速是 v_0 。在 Δt_1 时段发生的第一个微小的突然关闭, 使流速由 v_0 减至 v_1 ; 在 Δt_2 时段发生的第二个微小突然关闭, 使流速由 v_1 减至 v_2 , \dots ; 在 Δt_n 时段, 则由 v_{n-1} 减至零。那么由各微小突然关闭单独引起的阀门断面水击压强增值, 均可由式 (5.41) 计算, 即

$$\Delta t_1 \text{ 时段 } \Delta p_1 = \rho a (v_0 - v_1)$$

$$\Delta t_2 \text{ 时段 } \Delta p_2 = \rho a (v_1 - v_2)$$

.....

$$\Delta t_i \text{ 时段 } \Delta p_i = \rho a (v_{i-1} - v_i)$$

.....

$$\Delta t_n \text{ 时段 } \Delta p_n = \rho a (v_{n-1} - 0)$$

第一个微小水击波产生后, 即以波速 a 向水库方向传播, 到达水库后, 又以减压波的方式用同样的波速反射回来, 到达阀门断面所需的时间是 $\frac{2L}{a}$ 。显然, 阀门关闭时间 T_s 与时段 $\frac{2L}{a}$ 间的相对大小关系, 将会影响阀门断面的水击压强。

可能出现下述三种情况:

1. 阀门关闭时间 $T_s < \frac{2L}{a}$, 亦即 $L > \frac{aT_s}{2}$ 。在这种情况下, 由水库反射回来的减压波尚未到达阀门断面时, 阀门已关闭完毕, 阀门断面的压强已升至最高值 (图 5.25b)。这个压强增量的最高值应是各个时段压强增值的总和, 即

$$\Delta p = \sum_{i=1}^n \Delta p_i = \rho a v_0$$

上式即是计算阀门突然完全关闭时水击压强增值的公式。它表明: 在阀门关闭时间 $T_s < \frac{2L}{a}$ 的条件下, 阀门断面的最大水击压强增量, 不受阀门关闭时间 T_s 长短的影响【但阀门上游某一管段, 可能受到减压反射波的影响, 而降低了最大水击压强增值 (图 5.25b)】。

2. 阀门关闭时间 $T_s = \frac{2L}{a}$, 即 $L = \frac{aT_s}{2}$ 。这时, 阀门刚关闭完毕, 由进口反射回来的降压波也同时到达阀门断面。所以, 阀门断面的最大水击压强增值仍与 T_s 的长短无关, 它等于

$$\Delta p = \rho a v_0$$

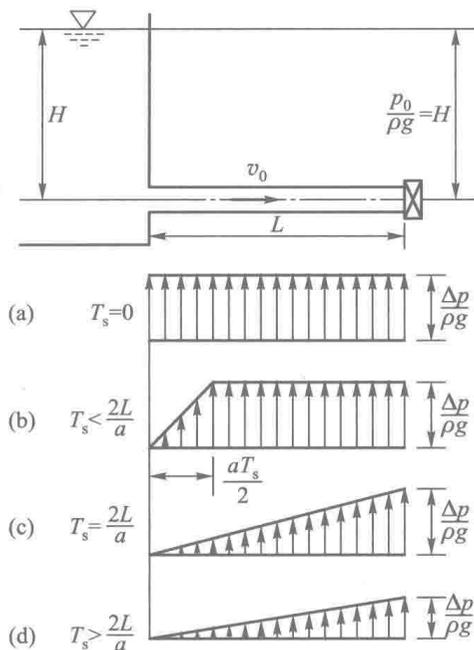


图 5.25

而阀门上游的各个断面，都受到了降压波的影响（图 5.25c）。

3. 阀门关闭时间 $T_s > \frac{2L}{a}$ 或 $L < \frac{aT_s}{2}$ 。也就是说，阀门还未关闭完毕（阀门断面压强还未升到最大值）时，由进口反射回来的减压波已经到达阀门断面。这时，一方面阀门还在继续关闭，新产生的增压波仍向上游传播，使管道各断面的压强继续升高；另一方面，由进口反射回来的减压波不断到达，使阀门处及其上游各断面压强减小；另外，反射到阀门处的减压波又将向上游反射……此后，情况则愈来愈复杂。总之，阀门断面将不能升到阀门突然关闭时那样高的水击压强（图 5.25d）。

上述第一、二种情况，即 $T_s \leq \frac{2L}{a}$ （包括阀门突然关闭）时，阀门处的压强不受阀门关闭时间长短的影响，称作直接水击；阀门断面最大水击压强增量，可直接用式（5.41）计算。

至于第三种情况，即 $T_s > \frac{2L}{a}$ 或 $L < \frac{aT_s}{2}$ 时，阀门处的水击压强与阀门关闭时间 T_s 的长短有关，称作间接水击。间接水击的压强增值是由一系列水击波在各自不同发展阶段叠加的结果。工程设计中总是力图合理地选择参数，并尽可能延长阀门调节时间，以避免产生直接水击。

5.4 非恒定流的基本方程组

非恒定流的基本方程包括运动方程及连续方程。

5.4.1 非恒定流的运动方程

应用牛顿第二定理，可导出非恒定流的运动方程式。

今在非恒定流中取出长度为 ds 的微小流束段来进行研究， s 轴取与恒定流时的水流方向一致；管轴线与水平线的夹角为 θ 。设在 dt 时刻内水击波由 $m - m$ 断面传至 $n - n$ 断面（图 5.26），若上游断面 $n - n$ 的密度为 ρ ，过水断面面积为 A ，湿周为 χ ，压强为 p ；则下游断面 $m - m$ 相应的各量为【在下面的推导中，未计入微分时段 dt 内 ρ ， p ， A ， χ 等的变化；若考虑这一变化并在整理时略去高阶无穷小量，仍能得到同样的结果。】： $\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial s} ds\right)$ ， $\left(A + \frac{\partial A}{\partial s} ds\right)$ ， $\left(\chi + \frac{\partial \chi}{\partial s} ds\right)$ ， $\left(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds\right)$ 。

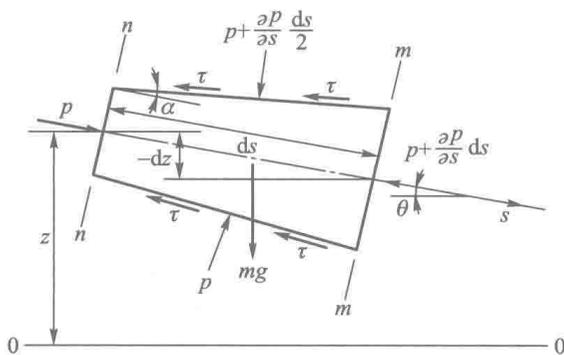


图 5.26

作用在该微小流束段上所有外力在 s 轴上的分力为： $n - n$ 断面及 $m - m$ 断面上水压力之差

$$\left[pA - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds \right) \left(A + \frac{\partial A}{\partial s} ds \right) \right]$$

侧面的水压力为

$$\left(p + \frac{\partial p}{\partial s} \frac{ds}{2} \right) \left(\frac{\partial A}{\partial s} ds \right)$$

以 τ 表示单位周界面上的平均阻力，则总阻力在 s 轴上的分量为

$$- \left[\tau \left(\chi + \frac{\partial \chi}{\partial s} \frac{ds}{2} \right) ds \right] \cos \alpha$$

α 为微小流束的侧壁与管轴线的交角, α 一般很小, 故取 $\cos \alpha = 1$ 。流段内液体的质量为

$$m = \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial s} \frac{ds}{2} \right) \left(A + \frac{\partial A}{\partial s} \frac{ds}{2} \right) ds$$

故重力在 s 轴上的分量为

$$mg \sin \theta = g \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial s} \frac{ds}{2} \right) \left(A + \frac{\partial A}{\partial s} \frac{ds}{2} \right) ds \cdot \sin \theta$$

因为 $\sin \theta = -\frac{\partial z}{\partial s}$, 故

$$mg \sin \theta = - \left[g \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial s} \frac{ds}{2} \right) \left(A + \frac{\partial A}{\partial s} \frac{ds}{2} \right) \frac{\partial z}{\partial s} ds \right]$$

根据牛顿第二定理, 作用在该流段上所有外力的合力应等于流段内液体质量与加速度的乘积, 即

$$\begin{aligned} & \left[pA - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds \right) \left(A + \frac{\partial A}{\partial s} ds \right) \right] + \left[\left(p + \frac{\partial p}{\partial s} \frac{ds}{2} \right) \frac{\partial A}{\partial s} ds \right] - \\ & \left[\tau \left(\chi + \frac{\partial \chi}{\partial s} \frac{ds}{2} \right) ds \right] - \left[g \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial s} \frac{ds}{2} \right) \left(A + \frac{\partial A}{\partial s} \frac{ds}{2} \right) \frac{\partial z}{\partial s} ds \right] \\ & = \left[\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial s} \frac{ds}{2} \right) \left(A + \frac{\partial A}{\partial s} \frac{ds}{2} \right) ds \right] \frac{du}{dt} \end{aligned}$$

在非恒定流中, 流速 u 为 s 及 t 的函数, 故

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s}$$

将 $\frac{du}{dt}$ 代入上式, 整理并略去高价微量, 即得

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} + g \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\tau \chi}{\rho A} = 0$$

或写成

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} \right) = -\frac{\tau \chi}{\rho g A} - \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (5.55)$$

上式即为微小流束非恒定流的运动方程。

设所考虑的总流为渐变流动, 将上式对整个总流过水断面积分, 略去断面上流速分布不均匀的影响, 即可得出非恒定总流的运动方程:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} \right) = -\frac{\tau_0 \chi_0}{\rho g A} - \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (5.56)$$

或写成

$$\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{1}{g} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} \right) + \frac{\tau_0 \chi_0}{\rho g A} = 0 \quad (5.57)$$

式中: z , p , v 分别表示总流过水断面上的平均高程、平均压强及平均流速; A 为过水断面积; χ_0 为湿周; τ_0 为流段 ds 周界上的平均切应力。

式 (5.56) 或式 (5.57) 常用来讨论有压管道中的水击问题。

对不可压缩流体, ρ 为常数, 可将式 (5.56) 中各项乘以 ds , 并从断面 1-1 至断面 2-2 积分, 可得出非恒定总流的能量方程:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + \int_1^2 \frac{\tau_0 \chi_0}{\rho g A} ds + \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds \quad (5.58)$$

式中: $\int_1^2 \frac{\tau_0 \chi_0}{\rho g A} ds$ 代表总流单位重量液体的阻力在 1-1 断面至 2-2 断面间所作的功, 即能量损失 h_w ; $\frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds$ 表示单位重量液体因当地加速度 $\frac{\partial v}{\partial t}$ 而引起的惯性力在 1-1 断面及 2-2 断面间所作的功, 称为惯性水头, 以 h_a 表示。 h_a 与 h_w 并不相同, h_w 是因阻力而损耗的水体能量, 它转化为热能而消失; h_a 则蕴藏在水体中而没有损耗。当 $\frac{\partial v}{\partial t}$ 为正时, 表明流速随时间而增大, h_a 为正值, 这时为了使 1-1 断面及 2-2 断面间水体的动能提高, 必须在 1-1 断面的水流中转移出一部分能量。当 $\frac{\partial v}{\partial t}$ 为负时, h_a 也为负值, 表明由于水流动能的降低, 水体要释放出一部分能量而转化成 2-2 断面的其他能量。

上述非恒定总流的能量方程可表示为

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_w + \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds \quad (5.59)$$

式 (5.59) 将用来讨论调压系统中的液面振荡问题。

5.4.2 非恒定流的连续方程

利用质量守恒原理, 可直接导出非恒定总流的连续方程。

在产生非恒定流的有压管中取出长度为 ds 的微分段作为控制体, 其两端断面为 $n-n$ 及 $m-m$ (图 5.27)。设 $n-n$ 断面的面积为 A , 流速为 v , 液体密度为 ρ , 则 dt 时段内通过 $n-n$ 断面流入的液体质量为 $\rho v A dt$ 。与 $n-n$ 断面相距为 ds 的 $m-m$ 断面, 在同一时段内流出的液体质量则为 $\rho v A dt + \frac{\partial}{\partial s}(\rho v A dt) ds$ 。流段

ds 在 dt 时段内质量的增量为 $\frac{\partial}{\partial t}(\rho A ds) dt$ 。

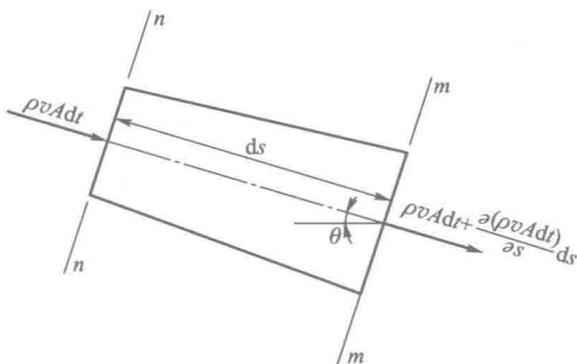


图 5.27

根据质量守恒定理，在 dt 时段内流入和流出该流段的液体质量差，等于同时段内该流段液体质量的增量，即

$$\rho v A dt - \left[\rho v A dt + \frac{\partial}{\partial s}(\rho v A dt) ds \right] = \frac{\partial}{\partial t}(\rho A ds) dt$$

整理上式可得出非恒定流连续方程的普遍形式：

$$\frac{\partial}{\partial s}(\rho v A) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho A) = 0 \quad (5.60)$$

上式将用于分析有压管中的水击问题。

对不可压缩流体 ρ 为常数，式 (5.60) 变为

$$\frac{\partial(vA)}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (5.61)$$

式 (5.61) 常用于明槽非恒定流的计算。

对于既不考虑液体的压缩性，也不考虑管壁弹性的管道非恒定流，上式还可进一步简化为

$$vA = f(t) \quad (5.62)$$

上式表明流量只随时间而变，对于某一特定的瞬间，流量是沿程不变的。调压系统中的液面振荡问题就属于这一情况。

5.5 水击的基本微分方程组

对非恒定流的运动方程及连续方程进行整理及简化，可导出水击的基本微分方程组——运动方程及连续方程。为方便计，将指向下游的 s 坐标改用由阀

门指向上游的坐标, 故式 (5.56) 及式 (5.60) 中 $\frac{\partial}{\partial s}$ 的各项改为 $-\frac{\partial}{\partial l}$ 。

5.5.1 水击的运动方程

令 $\left(z + \frac{p}{\rho g}\right) = H$, 对于圆管以 $A = \frac{1}{4}\pi D^2$, $\chi_0 = \pi D$ 及 $\tau_0 = \frac{1}{8}\lambda\rho v^2$ 代入式 (5.56), 改写后得

$$-g \frac{\partial H}{\partial l} + \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial l} + \frac{\lambda v^2}{2D} = 0 \quad (5.63)$$

式中: D 为管道直径; λ 为沿程阻力系数。

式 (5.63) 为考虑摩阻损失的水击运动微分方程。

如果略去摩阻损失, 并注意到在水击中 $v \frac{\partial v}{\partial l} \ll \frac{\partial v}{\partial t}$, 略去 $v \frac{\partial v}{\partial l}$ 后式 (5.63) 可进一步简化为

$$\frac{\partial H}{\partial l} = \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (5.64)$$

5.5.2 水击的连续方程

把非恒定流连续方程式 (5.60) 的 s 坐标改为 l 坐标, 且 $\frac{\partial}{\partial s}$ 的各项改为 $-\frac{\partial}{\partial l}$, 则

$$\frac{\partial}{\partial l}(\rho v A) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho A)$$

展开得

$$\rho v \frac{\partial A}{\partial l} + \rho A \frac{\partial v}{\partial l} + A v \frac{\partial \rho}{\partial l} = A \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial A}{\partial t} \quad (5.65)$$

在有压管道的非恒定流中, 管道的横断面积 A 及液体的密度 ρ 都是时间 t 及距离 l 的函数。即

$$\begin{cases} A = A(l, t) \\ \rho = \rho(l, t) \end{cases}$$

则有

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} - v \frac{\partial A}{\partial l} \\ \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} - v \frac{\partial \rho}{\partial l} \end{cases} \quad (5.66)$$

从上式中解出 $\frac{\partial A}{\partial t}$ 及 $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ 代入式 (5.65), 整理可得

$$\frac{\partial v}{\partial l} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} \quad (5.67)$$

上式右端第一项中的 $\frac{d\rho}{dt}$ 代表液体密度随时间的变化率, 即水的压缩性。第二项中的 $\frac{dA}{dt}$ 代表过水断面随时间的变化率, 即管壁的弹性。二者都是由水击压强增量 dp 而引起的, 故式 (5.67) 也可写成

$$\frac{\partial v}{\partial l} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dp} \right) \frac{dp}{dt} \quad (5.68)$$

在式 (5.46) 中解出 $\left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dp} \right)$ 代入上式, 则得

$$\frac{\partial v}{\partial l} = \frac{1}{\rho a^2} \frac{dp}{dt} \quad (5.69)$$

因为 $p = \rho g(H - z)$, 考虑到在水击波传播过程中, ρ 相对于 H 随 t 及 l 的变化而言, ρ 随 t 及 l 的变化甚小, 即可视 ρ 为常数, 则得

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} - v \frac{\partial p}{\partial l} = \rho g \left(\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial t} \right) - v \rho g \left(\frac{\partial H}{\partial l} - \frac{\partial z}{\partial l} \right) \quad (5.70)$$

式中: $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$; $\frac{\partial z}{\partial l} = \sin \theta$, θ 为管轴的倾角 (图 5.27)。

把式 (5.70) 代入式 (5.69) 后变为

$$\frac{\partial v}{\partial l} = \frac{g}{a^2} \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{vg}{a^2} \left(\frac{\partial H}{\partial l} - \sin \theta \right)$$

或

$$\frac{\partial H}{\partial t} = v \frac{\partial H}{\partial l} - v \sin \theta + \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial l} \quad (5.71)$$

式 (5.71) 是考虑到管轴倾斜影响的连续方程式。当略去管轴倾斜的影响, 并注意到 $v \frac{\partial H}{\partial l} \ll \frac{\partial H}{\partial t}$, 即略去 $v \frac{\partial H}{\partial l}$ 后得

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial l} \quad (5.72)$$

式 (5.63) 及式 (5.71) 是计及摩阻影响的水击微分方程组, 当略去摩阻损失及管轴倾斜影响后则变为式 (5.64) 及式 (5.72)。

利用上述偏微分方程组可求解水击问题, 其方法主要有以下几种:

① 解析法: 一般是从简化后的式 (5.64) 及式 (5.72) 出发。这是一组

典型的双曲线型偏微分方程，化为波动方程后可求出其通解，结合边界及初始条件可逐步求得任意断面在任意时刻的水击压强。其特点是物理意义明确，应用简便，但多适用于不计阻力的简单管道。

② 图解法：以解析法导出的基本关系为理论依据进行图解。能应用于较复杂的边界条件，特别是对复杂管道，它比解析法简单明了，但作图较繁。

③ 差分法：一般系直接从计及摩阻损失的式 (5.63) 及式 (5.71) 出发，这是一组拟线性双曲线型偏微分方程，求精确解是困难的。差分法的原理就是利用差商代替偏导数求近似解。

④ 特征线法：是把偏微分方程组式 (5.63) 及式 (5.71) 沿特征线变为常微分方程，再变为差分方程求近似解。

随着电子计算机技术的发展，后面两种方法得到了较为广泛的应用，其特点是计及摩阻损失，较第一、二种方法精度高，且能应用于复杂管道系统。详细内容可参考相关文献。

5.6 调压系统中的水面振荡

压力引水道较长的水电站，为使电站运行安全，常在引水系统中修建调压室（图 5.28）以减小水击压强及缩小水击的影响范围。

调压室通常是一个具有自由水面和一定容积的井式建筑物。当电站因负荷变化而产生的水击波由阀门（或导叶）传至调压室时，具有自由表面并能储存一定水体的调压室将水击波反射回下游压力管道，使调压室上游的引水管道很少承受水击波的作用。这就大大缩短了水击波的传播长度，削减了水击压强。

在反射水击波的同时，调压室中水面产生振荡现象。如图 5.28 所示，在恒定流的情况下，调压室中水位维持在比水库水位低一个 $\left(h_w + \frac{\alpha v^2}{2g}\right)$ 数值的高程（ h_w 是水库与调压室间的水头损失， v 是上游引水管道中的断面平均流速）。当机组丢弃全部负荷，阀门完全关闭时，调压室下游压力管中的水流很快停止下来，而上游引水管中的水流则在惯性作用下继续向下游流动，遇到停止的水体后，被迫流入调压室，使室内水位上升，上游库水位与调压室间水位差逐渐减少，上游引水道中流速也随之减小。当调压室中水位上升至库水位时，水流仍在惯性作用下继续流入调压室，直至室中水位上升至高出库水位某一数值才停止。接着由于调压室中水位高于库水位，水体作反向流动即由调压室流入水库，调压室水位开始下降，反向流速也逐渐减小，一直到调压室中水位降至某

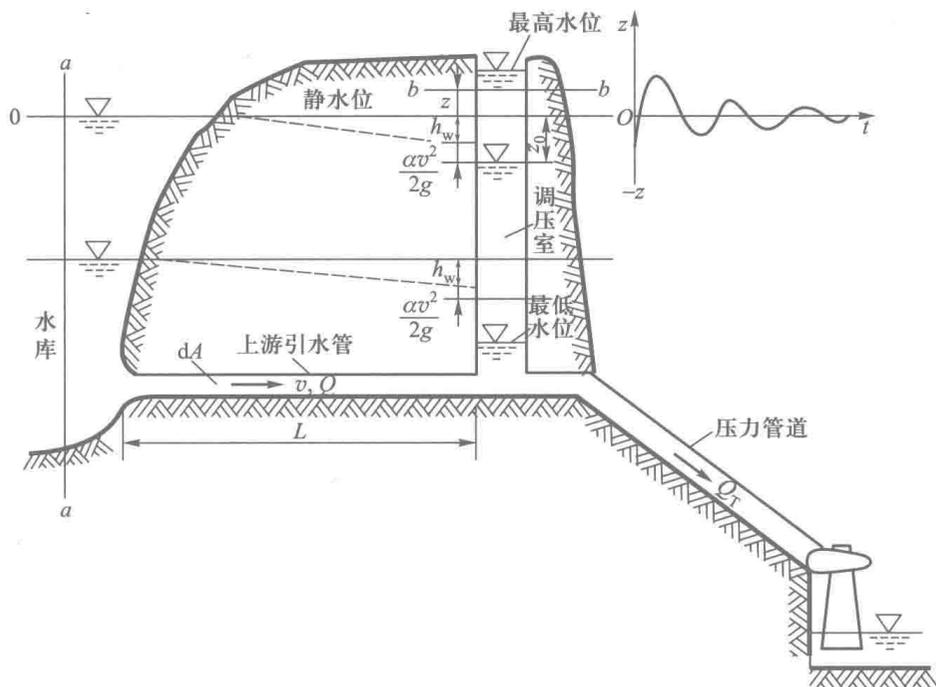


图 5.28

一最低水位时，反向流速才减小至零。此后，水流又加速流向调压室，室内水位又重新回升。就是这样，伴随着上游引水道内水体的往返运动，调压室内水面在某一静水位线上下振荡。只是由于摩擦损失的存在，运动水体的动能不断消耗，振荡幅度逐次减小，最后静止下来，达到新的恒定状态。

如果阀门不是瞬时全部关闭，而是部分关闭，其振荡现象亦完全一样，只不过振荡幅度不同而已。当水轮机系统增加负荷，阀门开启时，调压系统内也要产生水体振荡，所不同的是，上游引水管道中的水体由于惯性作用不能立即适应流量突然增加的需要，而是由调压室中首先泄放出一部分水体。所以调压室中水位是先行下降然后再回升。

从上述讨论可知，调压室及其上游引水道中的水体振荡和调压室下游压力管道中的水击，都属于非恒定流；而且都是起源于下游流量的改变。但二者的运动特性是有区别的，下游压力管中的水击波在传播过程中引起压强急剧变化，水体及管壁发生弹性变形，这时，起主要作用的力是与当地加速度所对应的惯性力及弹性力（有时阻力的作用也不能略去），所以水击计算中必须考虑液体的压缩性及管壁的弹性。而调压系统中的水体振荡，伴随着水体的往返运动，压强只发生缓慢而不大的变化，液体不会遭受明显的压缩，管壁也不会发生显著的膨胀；这种非恒定流动的主要作用力是惯性力及摩擦力，液体及管壁

的弹性可以略去不计。

为了便于分析调压室及其上游引水道中水体振荡的规律，首先选择等直径的竖立 U 形管作为简化模型进行讨论，然后再结合调压系统的特点补充说明。

一等直径的竖立 U 形管中盛水，平衡时管中液面处于 0-0 位置 (图 5.29)。设因某种外力作用使在 t 时刻 U 形管左右两支形成图示的水面差，则在重力及惯性力作用下，管中水体将来回振荡，并由于摩擦阻力作用而逐渐衰减以至最终达到平衡。

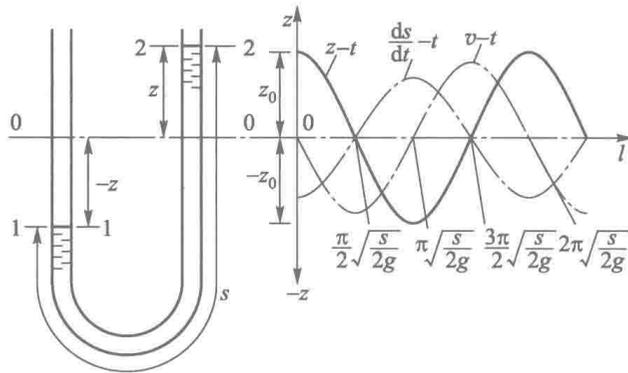


图 5.29

利用非恒定流的能量方程可以导出这种振荡的振幅、周期及水面位移、水流速度、加速度与时间的关系。

当不考虑水体的压缩性及管壁的弹性时，非恒定流的连续方程为式 (5.62)，即

$$vA = f(t) \quad \text{或} \quad v = F(t)$$

上式表明，等直径的 U 形管中流速 v 仅与时间有关，而与位置无关。

对 U 形管的 1-1 及 2-2 断面应用非恒定流的能量方程式 (5.59)，以 0-0 为基准面，并注意 $p_1 = p_2$ ， $v_1 = v_2$ ，当不计阻力时为

$$-z = z + \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds$$

因为 $\frac{\partial v}{\partial t}$ 与 s 无关，则得

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{2g}{s}z$$

式中， s 为 U 形管中水柱的长度。由图 5.29 可知， $v = \frac{dz}{dt}$ ，故上式可改写为

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{2g}{s}z \quad (5.73)$$

这是一个二阶常系数齐次常微分方程。它表明，水体振荡的加速度与位移 z 成正比，加速度的方向与位移方向相反，即指向平衡位置。式 (5.73) 的一般解可写为

$$z = C_1 \cos \sqrt{\frac{2g}{s}}t + C_2 \sin \sqrt{\frac{2g}{s}}t$$

设 $t=0$ 时 2-2 断面上 $z=z_0$ 及 $\frac{dz}{dt} = v = 0$ ，则上式中的积分常数为 $C_1 = z_0$ ， $C_2 = 0$ 。再代入上式得

$$z = z_0 \cos \sqrt{\frac{2g}{s}}t \quad (5.74)$$

上式表明，2-2 断面位移 z 与时间 t 呈余弦函数关系。式中 z_0 为 2-2 断面的初始位置，即振幅； $\sqrt{\frac{2g}{s}}$ 为角频率 ω ，所以振荡周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{s}{2g}}$ 。

由式 (5.74) 可得液面 2-2 的振荡速度为

$$v = \frac{dz}{dt} = -\sqrt{\frac{2g}{s}}z_0 \sin \sqrt{\frac{2g}{s}}t \quad (5.75)$$

式 (5.74)、式 (5.75) 及式 (5.73) 表达了 2-2 断面的位移、水面振荡速度及加速度与时间的关系。当 $t=0$ ， $z=z_0$ ， $v=0$ ，但具有向下的最大加速度；随着液面的下降，向下的速度加大，加速度减小，至 $t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{s}{2g}}$ 时，液面降至平衡位置 0-0，加速度减小至零，但向下速度最大；水面继续下降，速度逐渐减小，向上的加速度逐渐增大，至 $t = \pi \sqrt{\frac{s}{2g}}$ 时，水面下降至 $-z_0$ ，速度降至零，向上加速度变为最大值。此后，在反向水位差作用下，水流作反向运动，水面回升；到 $t = 2\pi \sqrt{\frac{s}{2g}}$ 时，水位、流速及加速度都恢复到初始情况。如果不计摩阻力的影响，水面振荡将周而复始地进行下去。上述过程可归结在表 5.4 并表示在图 5.29 中。

表 5.4 U 形管的水面振荡过程

时间 t	$z = z_0 \cos \sqrt{\frac{2g}{s}}t$	$v = -\sqrt{\frac{2g}{s}}z_0 \sin \sqrt{\frac{2g}{s}}t$	$\frac{dv}{dt} = -\frac{2g}{s}z$
0	z_0	0	$-\frac{2g}{s}z_0$

续表

时间 t	$z = z_0 \cos \sqrt{\frac{2g}{s}} t$	$v = -\sqrt{\frac{2g}{s}} z_0 \sin \sqrt{\frac{2g}{s}} t$	$\frac{dv}{dt} = -\frac{2g}{s} z$
$\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{s}{2g}}$	0	$-\sqrt{\frac{2g}{s}} z_0$	0
$\pi \sqrt{\frac{s}{2g}}$	$-z_0$	0	$\frac{2g}{s} z_0$
$\frac{3\pi}{2} \sqrt{\frac{s}{2g}}$	0	$\sqrt{\frac{2g}{s}} z_0$	0
$2\pi \sqrt{\frac{s}{2g}}$	z_0	0	$-\frac{2g}{s} z_0$

实际计算时, 必须计入摩阻损失才能与实际水面的振荡过程符合。对调压系统而言, 调压井中的惯性水头一般可以略去, 只需计入引水管的惯性水头 $\frac{s}{g} \frac{dv}{dt}$; 当计入摩阻损失并将基准面取在水库水面时, 式 (5.73) 变为

$$z = -\left(h_w + \frac{s}{g} \frac{dv}{dt}\right) \quad (5.76)$$

式中: z 为水库与调压室间的水位差, z 轴以向上为正; s 为管道进口至调压室的距离; h_w 为调压系统的水头损失, 可表示为

$$h_w = \zeta_c \frac{v^2}{2g}$$

其中, ζ_c 为调压系统的水头损失系数。

为求解调压系统的水面振荡, 还必须结合调压系统的特点建立调压井水流的连续方程式。设上游引水道的流量为 Q , 流入调压室的流量为 Q_s , 调压室下游水轮机的引用流量为 Q_T , 故对于不可压缩流体, 其连续方程可表示为

$$Q = Q_s + Q_T$$

设调压室的横断面积为 F , 向上的流速为 $\frac{dz}{dt}$; 上游引水道的横断面积为 A , 流速为 v 。则连续方程可改写为

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{1}{A} \left(Q_T + F \frac{dz}{dt} \right) \quad (5.77)$$

利用式 (5.76) 及式 (5.77), 可计算调压室的水面振荡问题。具体解法可参阅有关专业书籍或文献。

思考题

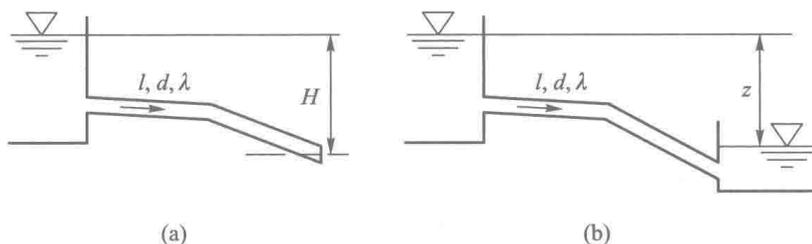
5.1 何谓有压管流？其水力特征是什么？

5.2 长管、短管是怎样定义的？判别标准是什么？如果某管道是短管，但想按长管公式计算，怎么办？

5.3 如图所示，两简单管道：a图自由出流，b图淹没出流，若两管道的作用水头 H 和 z ，管长 l ，管径 d 及沿程阻力系数 λ 均相同，试问：

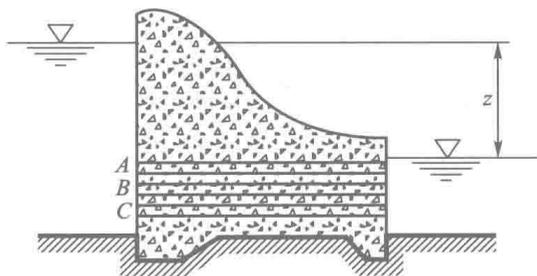
(1) 两管中通过的流量是否相同？为什么？

(2) 两管中各相应点的压强是否相同？为什么？



思 5.3

5.4 图示 A 、 B 、 C 为三条高程不同的坝身泄水管，其管径 d ，长度 l ，沿程阻力系数 λ 均相同，试问它们的泄流量是否相同？为什么？



思 5.4

5.5 什么叫水击？有压管道中的水击现象是怎样发生的？

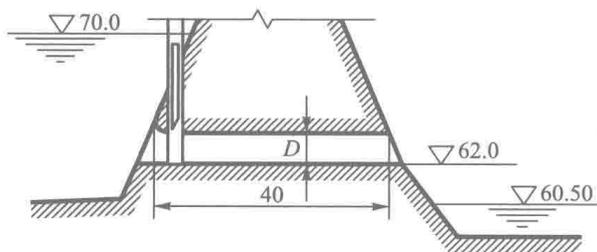
5.6 什么叫水击相、周期？水击相在水击计算中的作用是什么？

5.7 什么是直接水击？什么是间接水击？各有什么特点？

习 题

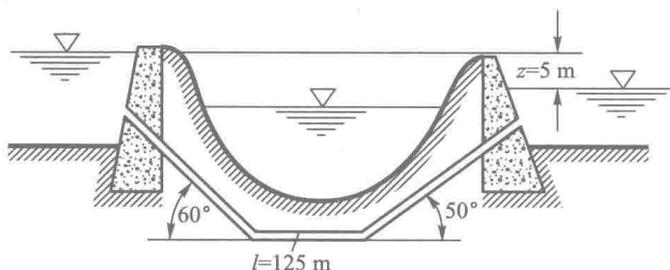
5.1 如图所示，坝下埋设一预制混凝土引水管，直径 $D = 0.5 \text{ m}$ ，长 40 m ，进口处有一道平板闸门控制流量，引水管出口底部高程 $\nabla 62.0 \text{ m}$ ，当上

游水位为 $\nabla 70.0\text{m}$ ，下游水位为 $\nabla 60.5\text{m}$ ，闸门全开时能引多大流量？



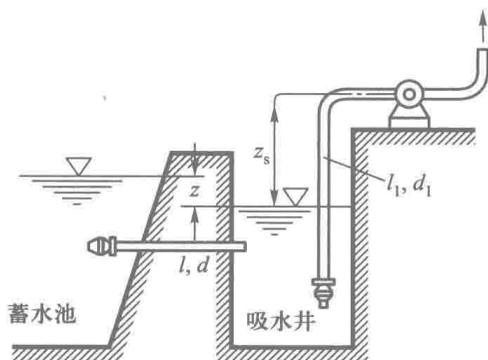
题 5.1

5.2 如图所示，倒虹吸管采用 500 mm 直径的铸铁管，长 $l = 125\text{m}$ ，进出口水位高程差 $z = 5\text{m}$ ，根据地形，两转弯角各为 60° 和 50° ，上下游渠道流速相等。问能通过多大流量？并绘出该虹吸管的测压管水头线及总水头线。



题 5.2

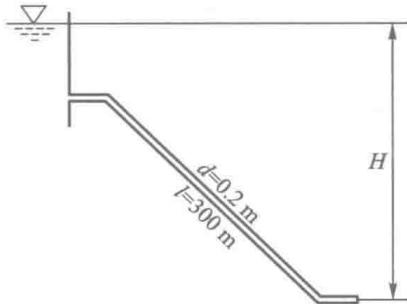
5.3 水泵自吸水井抽水，吸水井与蓄水池用自流管相接，其水位均不变，如图所示。水泵安装高度 $z_s = 4.5\text{m}$ ；自流管长 $l = 20\text{m}$ ，直径 $d = 150\text{mm}$ ；水泵吸水管长 $l_1 = 12\text{m}$ ，直径 $d_1 = 150\text{mm}$ ；自流管与吸水管的沿程阻力系数 $\lambda = 0.025$ ；自流管滤网的局部水头损失系数 $\zeta = 2.0$ ；水泵底阀的局部水头损失系



题 5.3

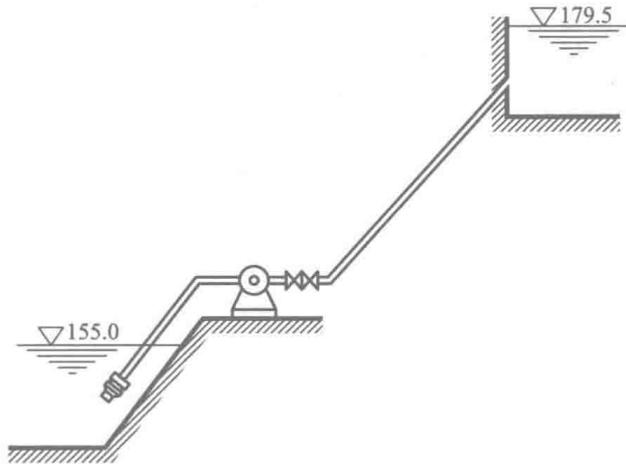
数 $\zeta = 9.0$ ； 90° 弯头的局部水头损失系数 $\zeta = 0.3$ ；若水泵进口真空值不超过6 m 水柱高，求水泵的最大流量是多少？在这种流量下，水池与水井的水位差 z 将为多少？

5.4 如图所示，钢管输水，流量 $Q = 0.05 \text{ m}^3/\text{s}$ ，管径 $d = 200 \text{ mm}$ ，管长 $l = 300 \text{ m}$ ，局部水头损失按沿程水头损失的 5% 计。问水塔水面要比管道出口高多少？



题 5.4

5.5 如图所示，用水泵提水灌溉，水池水面高程 $\nabla 179.5 \text{ m}$ ，河面水位 $\nabla 155.0 \text{ m}$ ；吸水为长 4 m、直径 200 mm 的钢管，设有带底阀的莲蓬头及 45° 弯头一个；压力水管为长 50 m、直径 150 mm 的钢管，设有逆止阀 ($\zeta = 2.0$)、闸阀 ($\zeta = 0.2$)、 45° 的弯头各一个，机组效率为 80%；已知流量为 $0.05 \text{ m}^3/\text{s}$ ，问要求水泵有多大扬程？

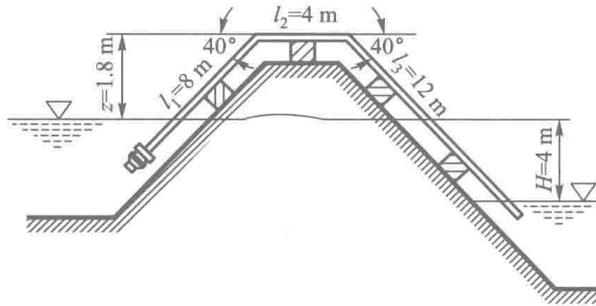


题 5.5

5.6 如图所示，用虹吸管从蓄水池引水灌溉。虹吸管采用直径 400 mm 的

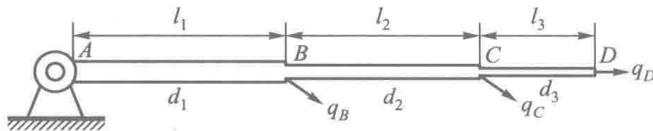
钢管，管道进口处安一莲蓬头，有2个 40° 转角；上下游水位差 $H=4.0\text{ m}$ ；上游水面至管顶高程 $z=1.8\text{ m}$ ；管段长度 $l_1=8.0\text{ m}$ ， $l_2=4.0\text{ m}$ ， $l_3=12.0\text{ m}$ 。要求计算：

- (1) 通过虹吸管的流量为多少？
- (2) 虹吸管中压强最小的断面在哪里，其最大真空值是多少？



题 5.6

5.7 图示水泵压水管为铸铁管，向 B 、 C 、 D 点供水。 D 点的服务水头为 4 m （即 D 点的压强水头 $\frac{P_D}{\rho g}$ 为 4 m 水柱高）； A 、 B 、 C 、 D 点在同一高程上。今已知 $q_B=q_C=q_D=0.01\text{ m}^3/\text{s}$ ；管径 $d_1=200\text{ mm}$ ，管长 $l_1=500\text{ m}$ ；管径 $d_2=150\text{ mm}$ ，管长 $l_2=450\text{ m}$ ；管径 $d_3=100\text{ mm}$ ，管长 $l_3=300\text{ m}$ ，求水泵出口处压强应为多少？

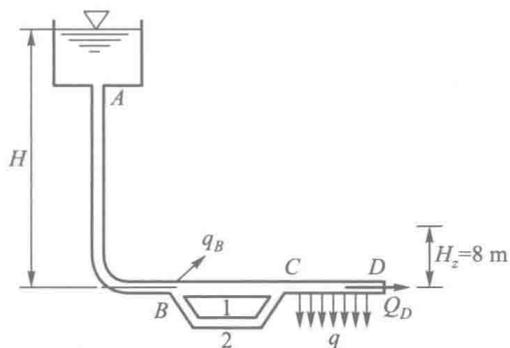


题 5.7

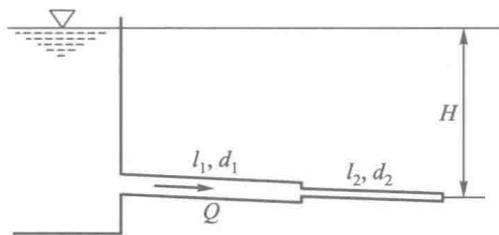
5.8 水塔供水的管道上有并联管道1及2，如图所示。管道为铸铁管，水自 D 点出流时，要求服务水头 $H_2=8.0\text{ m}$ ，其流量 $Q_D=0.02\text{ m}^3/\text{s}$ ；在 B 点出流量 $q_B=0.045\text{ m}^3/\text{s}$ ； CD 段为沿程均匀泄流管道，单位长度上的沿程泄流量 $q=1.0 \times 10^{-4}\text{ m}^2/\text{s}$ ，管长 $l_{CD}=300\text{ m}$ ，管径 $d_{CD}=200\text{ mm}$ ；管径 $d_1=150\text{ mm}$ ，管长 $l_1=350\text{ m}$ ；管径 $d_2=150\text{ mm}$ ，管长 $l_2=700\text{ m}$ ；管长 $l_{AB}=1000\text{ m}$ ，管径 $d_{AB}=250\text{ mm}$ ； D 点高程为 $\nabla 100.0\text{ m}$ 。试决定并联管道内流量分配，并计算水塔的水面高程。

5.9 图示为一串联管道自水池引水出流至大气中。第一段管道 $d_1=$

100 mm, $l_1 = 25$ m; 第二段管道 $d_2 = 50$ mm, $l_2 = 20$ m; 通过流量 $Q = 5.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$; 管道进口为锐缘形, 两段管道连接处为突然缩小; 管道的沿程阻力系数 $\lambda_1 = 0.025$, $\lambda_2 = 0.020$ 。求所需的水头 H 并绘制测压管水头线及总水头线。



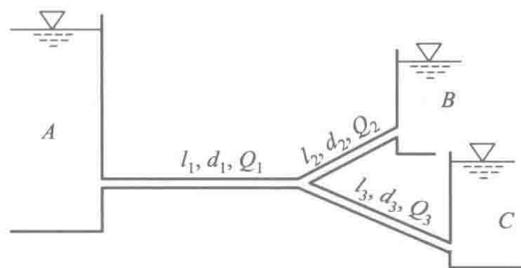
题 5.8



题 5.9

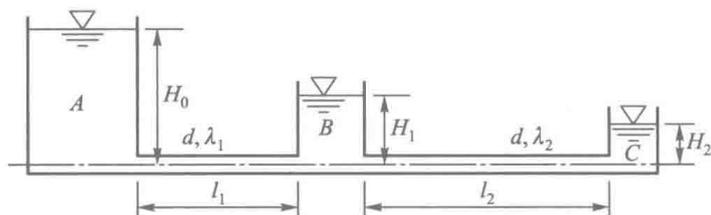
5.10 两水池间联以三条并联管道, 它们的长度相同, 直径分别是 d , $2d$ 及 $3d$; 假定各管有相同的沿程阻力系数 λ 。当直径为 d 的管道通过流量 $Q_1 = 0.05 \text{ m}^3/\text{s}$ 时, 直径为 $2d$ 及 $3d$ 的管道各通过流量为多少?

5.11 一分叉管道连接水池 A, B, C, 如图所示。设 1, 2, 3 段管道的直径及长度分别为: 管径 $d_1 = 500$ mm, 管长 $l_1 = 1000$ m; 管径 $d_2 = 400$ mm, 管长 $l_2 = 350$ m; 管径 $d_3 = 400$ mm, 管长 $l_3 = 800$ m。管道为新钢管, A, B, C 池的水面高程为: $\nabla_A = 30$ m, $\nabla_B = 20$ m, $\nabla_C = 0$ m。求通过各管的流量 Q_1 , Q_2 , Q_3 。



题 5.11

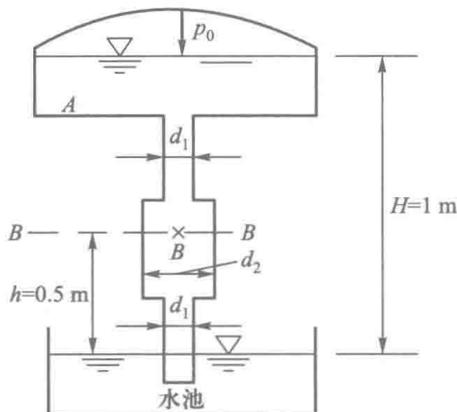
5.12 如图所示, 水自水池 A 沿水平设置的铸铁管流入水池 C, 若水管 $d = 200$ mm, $H_0 = 4.0$ m, $H_2 = 1.0$ m, $l_1 = 30$ m, $l_2 = 50$ m, 设沿程阻力系数 $\lambda = 0.02$, 求在水池 B 中的水深 H_1 。



题 5.12

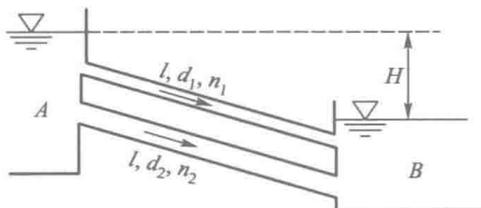
5.13 如图所示,水由封闭容器A沿垂直变直径管道流入下面的水池,容器内 $p_0 = 20 \text{ kPa}$ 且液面保持不变,若 $d_1 = 50 \text{ mm}$, $d_2 = 100 \text{ mm}$,容器内液面与水池液面的高差 $H = 1.0 \text{ m}$,只计局部水头损失,试求:

- (1) 管道通过的流量 Q ;
- (2) 距水池液面 $h = 0.5 \text{ m}$ 处的管道内B点的压强 p_B 。



题 5.13

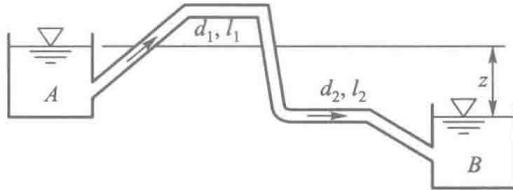
5.14 如图所示,用长度为 l 的两根平行管路由A水池向B水池引水,管径 $d_2 = 3d_1$,两管的粗糙系数 $n_2 = 1.1n_1$,局部水头损失不计,试分析两管中的流量比。



题 5.14

5.15 如图所示,一串联管连接 A, B 两水池,假设以长管看待,试绘制该输出管道的测压管水头线和总水头线,并指出:

- (1) 在哪些地方存在负压?
- (2) 最大真空值在何处?
- (3) 相对压强为零的断面在何处?



题 5.15

5.16 某输水管自水库中取水,末端用阀门控制流量。已知:管长 $l = 400 \text{ m}$,管径 $D = 300 \text{ mm}$,管壁厚 $\delta = 4.0 \text{ mm}$,管壁材料的弹性模量 $E = 19.6 \times 10^{10} \text{ Pa}$,初始时刻水头 $H_0 = 15 \text{ m}$,阀门全开时流量 $Q = 0.15 \text{ m}^3/\text{s}$ 。试计算阀门突然全部关闭时的最大水击压强及与此相应的管壁应力 σ ;若保持管壁厚度不变,直径 $D = 400 \text{ mm}$,其最大水击压强又为多少?并绘出距水库为 200 m 断面处水击压强及流速随时间变化的过程图。

5.17 一等直径 U 形管如图 5.29 所示,水柱长 $s = 1.0 \text{ m}$,2-2 断面的初始高度 $z_0 = 0.1 \text{ m}$,不计摩阻影响,求 2-2 断面水位下降至 $z = -0.1 \text{ m}$ 的时间,并求该时刻的水面振荡速度及加速度。

6 明渠流动

明渠是一种人工修建或自然形成的渠槽，当液体通过渠槽而流动时，形成与大气相接触的自由表面，表面上各点压强均为大气压强。所以，这种渠槽中的水流称为明渠水流或无压流。输水渠道、无压隧洞、渡槽、涵洞以及天然河道中的水流都属于明渠水流。

当明渠中水流的运动要素不随时间而变时，称为明渠恒定流，否则称为明渠非恒定流。明渠恒定流中，如果流线是一簇平行直线，则水深、断面平均流速及流速分布均沿程不变，称为明渠恒定均匀流；如果流线不是平行直线，则称为明渠恒定非均匀流。

设想在产生均匀流动的明渠中取出—单位长度的流段 $ABCD$ 进行分析(图 6.1)。设此流段水体重量为 G ，周界的摩擦阻力为 F_f ，流段两端的动水压力各为 F_{P1} ， F_{P2} 。从力学观点看，明渠均匀流是一种等速直线运动。则作用于流段上所有外力在流动方向的分量必达到平衡，即

$$F_{P1} + G \sin \theta - F_{P2} - F_f = 0$$

式中： θ 为渠底线与水平线的夹角。

因为均匀流中过水断面上的压强按静水压强分布，而且各过水断面的水深及过水断面积相同，故 $F_{P1} = F_{P2}$ 。则由上式可得

$$G \sin \theta = F_f$$

上式表明：明渠均匀流中摩阻力 F_f 与水流重力在流动方向的分力相平衡。当 $G \sin \theta \neq F_f$ 时，明渠中将产生非均匀流。

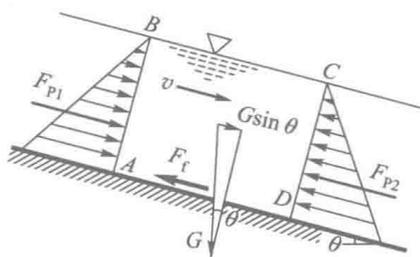


图 6.1

6.1 明渠水流的基本概念

明渠的断面形状、尺寸、底坡等对水流的流动状态有着重要的影响。所以为了研究明渠水流运动的规律，必须首先了解明渠的类型及其对水流运动的影响。

6.1.1 明渠的横断面

人工明渠的横断面，通常做成对称的几何形状。例如常见的梯形、矩形或圆形等。至于河道的横断面，则常呈不规则的形状，如图 6.2 所示。

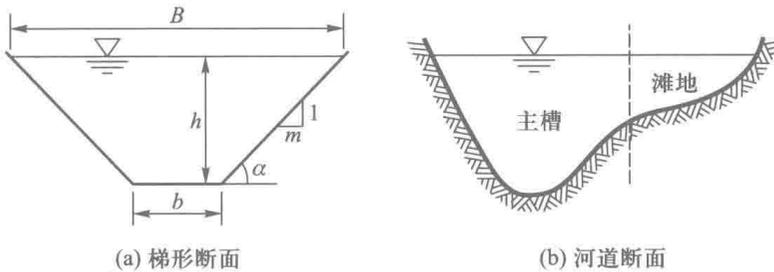


图 6.2

当明渠修在土质地基上时，往往做成梯形断面，其两侧的倾斜程度用边坡系数 m ($m = \cot \alpha$) 表示， m 的大小应根据土的种类或护面情况而定(表 6.1)。矩形断面常用于岩石中开凿或两侧用条石砌筑而成的渠道；混凝土渠或木渠也常做成矩形。圆形断面通常用于无压隧洞。

表 6.1 梯形渠道的边坡系数

土壤种类	边坡系数 m
粉砂	3.0 ~ 3.5
细砂、中砂和粗砂：	
1. 疏松的和中等密实的	2.0 ~ 2.5
2. 密实的	1.5 ~ 2.0
沙壤土	1.5 ~ 2.0
粘壤土、黄土或粘土	1.25 ~ 1.5
卵石和砌石	1.25 ~ 1.5
半岩性的抗水的土壤	0.5 ~ 1.0
风化的岩石	0.25 ~ 0.5
未风化的岩石	0 ~ 0.25

根据渠道的横断面形状、尺寸，就可以计算渠道过水断面的水力要素。如工程中应用最广的梯形渠道，其过水断面的诸水力要素关系如下：

水面宽度：

$$B = b + 2mh \quad (6.1)$$

或

$$B = (\beta + 2m)h \quad (6.2)$$

式中： β 为断面宽深比即 $\beta = \frac{b}{h}$ 。

过水断面面积：

$$A = \left(\frac{b+B}{2}\right)h = (b+mh)h \quad (6.3)$$

或

$$A = (\beta + m)h^2 \quad (6.4)$$

湿周：

$$\chi = b + 2h\sqrt{1+m^2} \quad (6.5)$$

或

$$\chi = (\beta + 2\sqrt{1+m^2})h \quad (6.6)$$

水力半径：

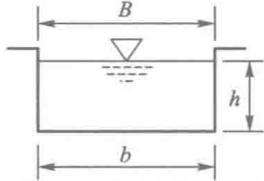
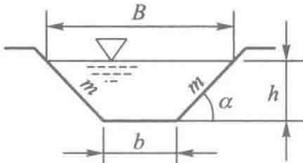
$$R = \frac{A}{\chi} = \frac{(b+mh)h}{b+2h\sqrt{1+m^2}} \quad (6.7)$$

或

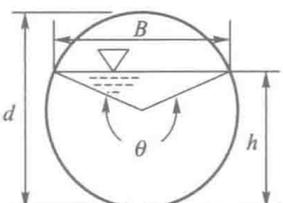
$$R = \frac{(\beta+m)h}{\beta+2\sqrt{1+m^2}} \quad (6.8)$$

对于矩形和圆形断面，可根据一定的几何关系，即求出过水断面的诸水力要素，如表 6.2 所示。

表 6.2 矩形、梯形、圆形过水断面的水力要素

断面形状	水面宽度 B	过水断面面积 A	湿周 χ	水力半径 R
矩形 	b	bh	$b + 2h$	$\frac{bh}{b + 2h}$
梯形 	$b + 2mh$	$(b + mh)h$	$b + 2h\sqrt{1+m^2}$	$\frac{(b + mh)h}{b + 2h\sqrt{1+m^2}}$

续表

断面形状	水面宽度 B	过水断面面积 A	湿周 χ	水力半径 R
圆形 	$2\sqrt{h(d-h)}$	$\frac{d^2}{8}(\theta - \sin\theta)^*$	$\frac{1}{2}\theta d$	$\frac{d}{4}\left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right)$

* 式中 θ 以 rad 计。

在工程实践中,有时由于地形、地质条件的改变,或是由于水流运动条件的需要,在不同的渠段,横断面形状、尺寸或底坡不完全相同。断面形状、尺寸及底坡沿程不变,同时又无弯曲的渠道,称为棱柱体渠道;而横断面形状、尺寸或底坡沿程改变的渠道,称为非棱柱体渠道(图 6.3)。

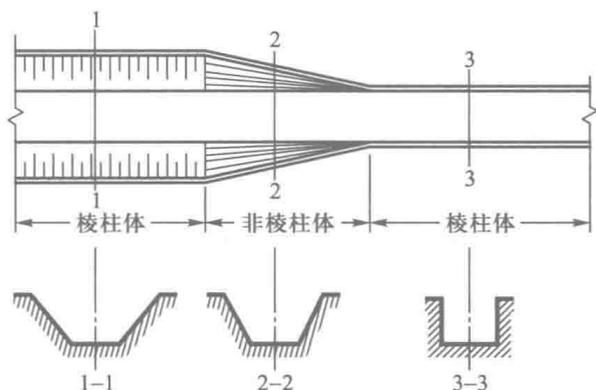


图 6.3

在非棱柱体渠道中,由于断面形状、尺寸或底坡等沿程发生变化,流线不会是相互平行的直线,故水流不可能形成均匀流。

6.1.2 明渠的底坡

明渠渠底纵向倾斜的程度称为底坡。底坡以符号 i 表示, i 等于渠底线与水平线夹角 θ 的正弦,即 $i = \sin\theta$ 。

当明渠渠底沿程降低时,称为顺坡明渠,如图 6.4a 所示,此时 $i > 0$;当渠底为水平时,称为水平明渠,如图 6.4b 所示,此时 $i = 0$;当渠底沿程升高时,称为逆坡明渠,如图 6.4c 所示,此时 $i < 0$ 。

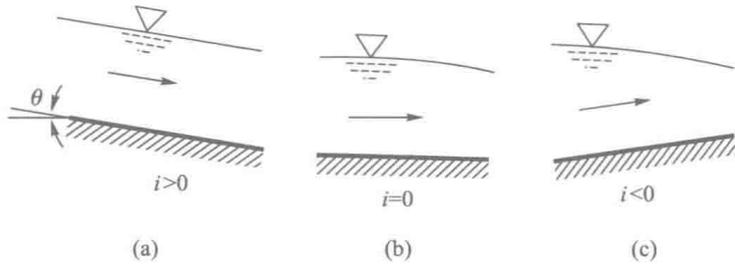


图 6.4

在平底渠道中 $i=0$ ，由图 6.1 可知，流段重力在顺流方向分力 $G \sin \theta = 0$ ；在逆坡渠道中，流段重力的分力 $G \sin \theta$ 与摩阻力 F_f 的方向一致；因而都不可能满足 $G \sin \theta = F_f$ 的平衡条件，故在平底及逆坡渠段中，不可能产生均匀流，只有在顺坡渠道中，才有可能形成均匀流。

6.2 明渠恒定均匀流

6.2.1 明渠均匀流的特性与形成条件

1. 明渠均匀流的特性

由于明渠均匀流的流线为一簇相互平行的直线，因此，它具有下列特性：

- (1) 过水断面的形状、尺寸及水深沿程不变。
- (2) 过水断面上的流速分布、断面平均流速沿程不变；因而，水流的动能修正系数及流速水头也沿程不变。
- (3) 总水头线、水面线及底坡线三者相互平行，即 $J = J_z = i$ (图 6.5)。

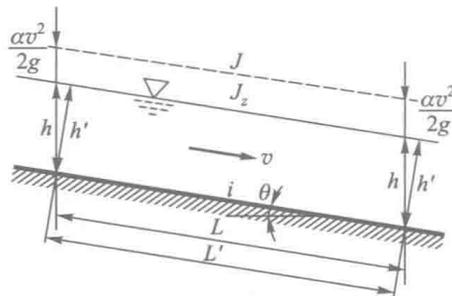


图 6.5

必须指出，因过水断面应与流线正交，故明渠均匀流的过水断面应为与底坡线相垂直（同时也与水面线相垂直）的平面，所以应在垂直于底坡线的方

向量取水深值（图 6.5 中此水深以 h' 表示）。但在实际工程中，如水电站的引水渠道，灌溉输水渠道等，底坡一般不大，为方便计，常用铅垂方向的水深 h 代替真实的水深 h' ；并用渠段的水平投影长度 L 代替渠段的实际长度 L' 。当底坡 $i \leq 0.1$ ($\theta \leq 6^\circ$ 左右) 时，这样处理对水深或长度引起的误差均小于 1%。但当渠道坡度很大时，将引起显著的误差。

2. 明渠均匀流的形成条件

由于明渠均匀流有上述特性，它的形成就需要有一定的条件：

- (1) 水流应为恒定流。因为在明渠非恒定流中必然伴随着波浪的产生，流线不可能是平行直线。
- (2) 流量应沿程不变，即无支流的汇入或分出。
- (3) 渠道必须是长而直的棱柱体顺坡明渠，粗糙系数沿程不变。
- (4) 渠道中无闸、坝或跌水等建筑物的局部干扰。

显然，实际工程中的渠道并不是都能严格满足上述要求的；特别是许多渠道中总有这种或那种建筑物存在，因此，大多数明渠中的水流都是非均匀流。但是，在顺直棱柱体渠道中的恒定流，当流量沿程不变时，只要渠道有足够的长度，在离开渠道进口、出口或建筑物一定距离的渠段，水流仍近似于均匀流（图 6.6），实际上常按均匀流处理。至于天然河道，因其断面几何尺寸、坡度、粗糙系数一般均沿程改变，所以不会产生均匀流。但对于较为顺直、整齐的河段，当其余条件比较接近时，也常按均匀流公式作近似解。

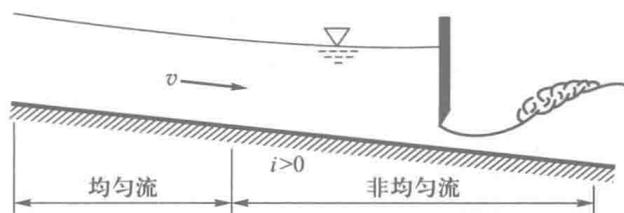


图 6.6

6.2.2 明渠均匀流的水力计算

1. 基本公式

明渠均匀流水力计算的基本公式有二，其一为恒定流的连续方程：

$$Q = Av = \text{常数}$$

另一则为均匀流的动力方程式，即谢才公式：

$$v = C \sqrt{RJ}$$

对于明渠均匀流来讲，因为 $J = i$ ，所以谢才公式可以写成如下的形式：

$$v = C\sqrt{Ri} \quad (6.9)$$

明渠中的水流多系处于阻力平方区，目前工程界广泛采用曼宁公式或巴甫洛夫斯基公式来确定上列公式中的谢才系数 C 。

根据连续方程和谢才公式，可得到计算明渠均匀流的流量公式：

$$Q = AC\sqrt{Ri} \quad (6.10)$$

或

$$Q = K\sqrt{i} \quad (6.11)$$

式中： $K = AC\sqrt{R}$ 为流量模数，单位为 m^3/s ，它综合反映明渠断面形状、尺寸和粗糙程度对过水能力的影响。在底坡一定的情况下，流量与流量模数成正比。

式(6.10)中的谢才系数 C 与断面形状、尺寸及边壁粗糙系数有关。从曼宁公式或巴甫洛夫斯基公式可知，它是 n 和 R 的函数。但分析表明， R 对 C 的影响远比 n 对 C 的影响小得多。因此，根据实际情况正确地选定粗糙系数，对明渠的计算将有重要的意义。在设计通过已知流量的渠道时，如果 n 值选得偏小，计算所得的断面也偏小，过水能力将达不到设计要求，容易发生水流漫溢渠槽，常常造成事故，还会因实际流速过大引起冲刷。如果选择的 n 值偏大，不仅因断面尺寸偏大而造成浪费，对挟带泥沙的水流还会形成淤积。

严格说来粗糙系数应与渠槽表面粗糙程度及流量、水深等因素有关；对于挟带泥沙的水流还受含沙量多少的影响。但主要的因素仍然是表面的粗糙情况。对于人工渠道，在长期的实践中积累了丰富的资料，实际应用时可参照这些资料选择粗糙系数值。对于天然河道，由于河床的不规则性，实际情况更为复杂，有条件时应通过实测来确定 n 值。

2. 水力最佳断面及允许流速

(1) 水力最佳断面

从均匀流的公式可以看出，明渠的输水能力（流量）取决于过水断面的形状、尺寸、底坡和粗糙系数的大小。设计渠道时，底坡一般依地形条件或其他技术上的要求而定；粗糙系数则主要取决于渠槽选用的建筑材料。在底坡及粗糙系数已定的前提下，渠道的过水能力则决定于渠道的横断面形状及尺寸。从经济观点上来说，总是希望所选定的横断面形状在通过已知的设计流量时面积最小，或者是过水面积一定时通过的流量最大。符合这种条件的断面，其工程量最小，称为水力最佳断面。

把曼宁公式代入明渠均匀流的基本公式，可得

$$Q = AC\sqrt{Ri} = \frac{1}{n} Ai^{1/2} R^{2/3} = \frac{1}{n} \frac{A^{5/3} i^{1/2}}{\chi^{2/3}} \quad (6.12)$$

由上式可知：当渠道的底坡 i ，粗糙系数 n 及过水断面面积 A 一定时，湿周 χ 愈小（或水力半径 R 愈大）通过流量 Q 愈大；或者说当 i, n, Q 一定时，湿周 χ 愈小（或水力半径 R 愈大）所需的过水断面面积 A 也愈小。

由几何学可知，面积一定时圆形断面的湿周最小，水力半径最大；因为半圆形的过水断面与圆形断面的水力半径相同，所以，在明渠的各种断面形状中，半圆形断面是水力最佳的。但半圆形断面不易施工，对于无衬护的土渠，两侧边坡往往达不到稳定要求，因此，半圆形断面难于普遍采用，只有在钢筋混凝土或钢丝网水泥构成的渡槽等建筑物中才采用类似半圆形的断面。

工程中采用最多的是梯形断面，其边坡系数 m 由边坡稳定要求确定。在 m 已定的情况下，同样的过水面积 A ，湿周的大小因底宽与水深的比值 b/h 而异。根据水力最佳断面的条件：

$$\left. \begin{array}{l} A = \text{常数} \\ \chi = \text{最小值} \end{array} \right\} \quad (6.13)$$

即

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dA}{dh} = 0 \\ \frac{d\chi}{dh} = 0, \frac{d^2\chi}{dh^2} > 0 \end{array} \right. \quad (6.14)$$

而 $A = (b + mh)h$ ， $\chi = b + 2h\sqrt{1 + m^2}$ ，分别写出 A, χ 对 h 的一阶导数并使之为零：

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dh} &= (b + mh) + h\left(\frac{db}{dh} + m\right) = 0 \\ \frac{d\chi}{dh} &= \frac{db}{dh} + 2\sqrt{1 + m^2} = 0 \end{aligned} \quad (6.15)$$

上二式中消去 $\frac{db}{dh}$ 后，解得

$$\frac{b}{h} = \beta_m = 2(\sqrt{1 + m^2} - m) = f(m) \quad (6.16)$$

式 (6.16) 表明：梯形水力最佳断面的 b/h 值仅与边坡系数 m 有关。因为

$$R = \frac{A}{\chi} = \frac{(b + mh)h}{b + 2h\sqrt{1 + m^2}} = \frac{(\beta + m)h}{(\beta + 2\sqrt{1 + m^2})}$$

用 β_m 代替上式中的 β 值，整理后得

$$R_m = \frac{h_m}{2}$$

即梯形水力最佳断面的水力半径等于水深的一半。

矩形断面可以看成为 $m = 0$ 的梯形断面。以 $m = 0$ 代入以上各式可求得矩形水力最佳断面的 β_m 及 R_m 值：

$$\beta_m = \frac{b_m}{h_m} = 2, \text{ 即 } b_m = 2h_m$$

$$R_m = \frac{h_m}{2}$$

不难证明，矩形或梯形水力最佳断面实际上是半圆的外切多边形断面（图 6.7）。

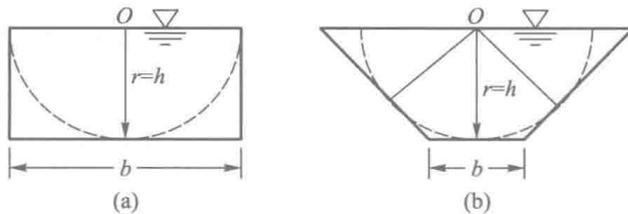


图 6.7

在一般土渠中，边坡系数 $m > 0$ ，则按式 (6.16) 求得的 $\beta_m < 1$ ，即梯形水力最佳断面通常都是窄而深的断面。这种断面虽然工程量最小，但不便于施工及维护，所以，无衬护的大型土渠不宜采用梯形水力最佳断面。

(2) 允许流速

为通过一定流量，可采用不同大小的过水断面，则渠道中将有不同的平均流速。如果这一流速过大，可能冲刷渠槽使渠道遭到破坏；如果这一流速过小，又会导致水流中挟带的泥沙淤积，降低渠道的过水能力。对航运渠道，流速的大小直接影响航运条件的优劣；对水电站的引水渠道，流速的大小还与电站的动能经济条件有关。所以，设计渠道时，断面平均流速应结合渠道所担负的生产任务（灌溉渠道、水电站引水渠道、航运渠道等）、渠道建筑材料的类型、水流中含沙量的多少及其他运用管理上的要求而选定：

① 渠道中的流速 v 应小于不冲允许流速 v' ，以保证渠道免遭冲刷。不冲允许流速 v' 与渠道建筑材料的物理特性（如土渠中土壤的种类、级配情况、密实程度等）和渠道水深有关。当渠中水流不挟带泥沙时，对岩石和人工护面渠道、粘性土质渠道及无粘性土质渠道的不冲刷允许流速可按表 6.3 选定。当渠中水流挟带泥沙时，不冲刷允许流速还与挟沙情况有关，可参考有关水力学手册确定。

表 6.3 不冲允许流速 v' 值表*

(一) 不同土质组成的渠道

土 质	不冲允许流速/(m/s)
轻壤土	0.6 ~ 0.8
中壤土	0.65 ~ 0.85
重壤土	0.7 ~ 0.95
粘土	0.75 ~ 1.0

注：表中所列不冲允许流速值为水力半径 $R=1.0\text{m}$ 时的情况；当 R 不等于 1.0m 时，表中所列数值应乘以 R^a ，指数 a 值可按下列情况采用；① 疏松的壤土、粘土 $a=1/3 \sim 1/4$ ；② 中等密实和密实的壤土、粘土 $a=1/4 \sim 1/5$ 。

(二) 不同防渗衬砌结构

防渗衬砌结构类别		不冲允许流速/(m/s)	
土料	粘土、粘砂混合土	0.75 ~ 1.00	
	灰土、三合土、四合土	<1.00	
水泥石	现场浇筑	<2.50	
	预制铺砌	<2.00	
砌石	干砌卵石（挂淤）	2.50 ~ 4.00	
	浆砌块石	单层	2.50 ~ 4.00
		双层	3.50 ~ 5.00
	浆砌料石	4.0 ~ 6.0	
	浆砌石板	<2.50	
质料 (土料保护层)	沙壤土、轻壤土	<0.45	
	中壤土	<0.60	
	重壤土	<0.65	
	粘土	<0.70	
	沙砾料	<0.90	
沥青混凝土	现场浇筑	<3.00	
	预制铺砌	<2.00	

续表

防渗衬砌结构类别		不冲允许流速/(m/s)
混凝土	现场浇筑	< 8.00
	预制铺砌	< 5.00
	喷射法施工	< 10.00

注：表中土料类和膜料类（土料保护层）防渗衬砌结构不冲允许流速值为水力半径 $R=1.0\text{m}$ 时的情况；当 R 不等于 1.0m 时，表中所列数值应乘以 R^a ，指数 a 值可按下列情况采用：① 疏松的土料或土料保护层， $a=1/3\sim 1/4$ ；② 中等密实和密实的土料或土料保护层， $a=1/4\sim 1/5$ 。

(三) 不同类型的石渠

水深/m	$v'/(m/s)$			
	0.4	1.0	2.0	3.0
岩性				
砾岩、泥灰岩、页岩	2.0	2.5	3.0	3.5
石灰岩、致密的砾岩、砂岩、白云石灰岩	3.0	3.5	4.0	4.5
白云砂岩、致密的石灰岩、硅质石灰岩、大理岩	4.0	5.0	5.5	6.0
花岗岩、辉绿岩、玄武岩、安山岩、石英岩、斑岩	15.0	18.0	20.0	22.0

* (一)、(二)、(三)内容引自“灌溉与排水工程设计规范”（中华人民共和国国家标准，GB 50288—99，1999年8月）。

② 渠道中的流速 v 应大于不淤流速 v'' ，以保证水流中悬浮的泥沙不淤积在渠槽中。 v'' 的大小与水流条件及挟沙特性等多方面的因素有关，可查阅有关手册确定。

③ 对航运渠道及水电站引水渠道，渠中流速还应满足某些技术经济条件及应用管理方面的要求。

例 6.1 某梯形土渠设计流量 Q 为 $2\text{m}^3/\text{s}$ ，渠道为重壤土，粗糙系数 n 为 0.025 ，边坡系数 m 为 1.25 ，底坡 i 为 0.0002 。试设计一水力最佳断面，并校核渠中流速（已知不淤流速 v'' 为 0.4m/s ）。

解：将式 (6.4) 及式 (6.8) 代入基本公式 (6.10)，并用曼宁公式计算谢才系数，整理后可得

$$h = \left[\frac{nQ (\beta + 2 \sqrt{1 + m^2})^{2/3}}{(\beta + m)^{5/3} i^{1/2}} \right]^{3/8} \quad (6.17)$$

当为水力最佳断面时 β 值应由下式确定：

$$\begin{aligned}\beta &= \beta_m = 2(\sqrt{1+m^2} - m) \\ &= 2(\sqrt{1+1.25^2} - 1.25) = 0.702\end{aligned}$$

将各已知值及求得的 β_m 值代入, 可求得水力最佳断面的水深及底宽为

$$\begin{aligned}h_m &= \left[\frac{0.025 \times 2 \times (0.702 + 2\sqrt{1+1.25^2})^{2/3}}{(0.702 + 1.25)^{5/3} \times 0.0002^{1/2}} \right]^{3/8} \text{ m} \\ &= 1.49 \text{ m}\end{aligned}$$

$$b_m = \beta_m h_m = 0.702 \times 1.49 \text{ m} = 1.05 \text{ m}$$

校核渠中流速是否满足不冲不淤的条件:

由表 6.3 查得重壤土时的不冲允许流速 $v'_R = (0.70 \sim 0.95) \text{ m/s}$, 对所设计的水力最佳断面 $R = \frac{h}{2} = \frac{1.49 \text{ m}}{2} = 0.745 \text{ m}$; 取 $\alpha = 0.25$, 则不冲允许流速 $v' = v'_R R^{1/4} = (0.70 \sim 0.95) \text{ m/s} \times (0.745)^{1/4} = (0.65 \sim 0.88) \text{ m/s}$ 。

已知不淤流速 $v'' = 0.40 \text{ m/s}$ 。渠中断面平均流速为

$$v = \frac{Q}{(b_m + mh_m)h_m} = \frac{2 \text{ m}^3/\text{s}}{(1.05 \text{ m} + 1.25 \times 1.49 \text{ m}) \times 1.49 \text{ m}} = 0.46 \text{ m/s}$$

故 $v'' < v < v'$, 所设计断面满足不冲刷不淤积的条件。

3. 水力计算的类型

应用基本公式 (6.9) 及 (6.10), 即可解决工程实践中常见的明渠均匀流的计算问题。

水利工程中, 梯形断面的渠道应用最广, 现以梯形渠道为例, 来说明经常遇到的几种问题的计算方法。由式 (6.10) 可以看出, 对于梯形渠道, 各水力要素间存在着下列函数关系:

$$Q = AC\sqrt{Ri} = f(m, b, h, i, n)$$

就是说, 上式中包括 Q, b, h, i, m, n 共 6 个变量。一般情况下, 边坡系数 m 及粗糙系数 n 是根据渠道护面材料的种类, 用经验方法来确定。因此, 梯形渠道均匀流的水力计算, 实际上是根据渠道所担负的生产任务、施工条件、地形及地质状况等, 预先选定 Q, b, h, i 这 4 个变量中的 3 个, 然后, 应用基本公式求另一个变量。

工程实践中所提出的明渠均匀流的水力计算问题, 主要有下列几种类型:

(1) 已知渠道的断面尺寸 b, m, h 及底坡 i , 粗糙系数 n , 求通过的流量 (或流速)。这一类型的问题大多属于对已成渠道进行校核性的水力计算。

例 6.2 某电站引水渠, 在粘土中开凿, 未加护面, 渠线略有弯曲, 在使用过程中, 岸坡已滋生杂草, $n = 0.03$ 。今测得下列数据: 断面为梯形, 边坡

系数 m 为 1.5, 底宽 b 为 34 m, 底坡 i 为 $1/6\ 500$, 渠底至堤顶高差为 3.2 m (图 6.8)。

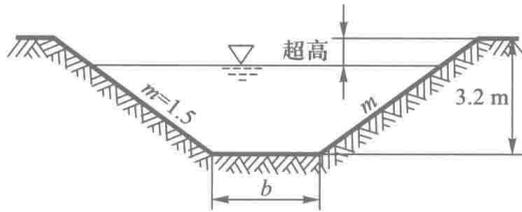


图 6.8

(1) 电站引用流量 Q 为 $67\text{ m}^3/\text{s}$ 。今因工业发展需要, 要求渠道供给工业用水, 试计算渠道在保证超高为 0.5 m 的条件下, 除电站引用流量外, 尚能供给多少工业用水? 并校核此时渠中是否发生冲刷。

(2) 与电站最小水头所相应的渠中水深 h 为 1.5 m, 试计算此时渠中通过的流量为多少? 在此条件下渠道是否发生淤积 (已知不淤流速 v'' 为 0.5 m/s)。

(3) 为便于运行管理, 要求绘制该渠道的水深 - 流量关系曲线 (在第 (1) 项和第 (2) 项要求的流量间绘制)。

解: (1) 求保证超高 0.5 m 时的流量, 并校核冲刷, 当超高为 0.5 m 时, 渠中水深 $h = 3.2\text{ m} - 0.5\text{ m} = 2.7\text{ m}$, 此时的断面水力要素为

$$A = (b + mh)h = (34\text{ m} + 1.5 \times 2.7\text{ m}) \times 2.7\text{ m} = 102.74\text{ m}^2$$

$$\chi = b + 2h\sqrt{1 + m^2} = 34\text{ m} + 2 \times 2.7\text{ m} \times \sqrt{1 + 1.5^2} = 43.74\text{ m}$$

$$R = \frac{A}{\chi} = \frac{102.74}{43.74}\text{ m} = 2.35\text{ m}$$

由 $C = \frac{1}{n} R^{1/6}$, $R = 2.35\text{ m}$, $n = 0.03$ 时, $C = \frac{1}{0.03} \times 2.35^{1/6}\text{ m}^{1/2}/\text{s} = 38.4\text{ m}^{1/2}/\text{s}$, 则

$$Q = AC \sqrt{Ri} = 102.74 \times 38.4 \times \sqrt{2.35 \times \frac{1}{6\ 500}}\text{ m}^3/\text{s} = 75.0\text{ m}^3/\text{s}$$

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{75.0}{102.74}\text{ m/s} = 0.73\text{ m/s}$$

在保证电站引用流量条件下, 渠道能供给工业用水量为

$$Q = 75.0\text{ m}^3/\text{s} - 67\text{ m}^3/\text{s} = 8.0\text{ m}^3/\text{s}$$

由表 6.3 查得, 渠道土质为粘土时 v'_R 为 0.85 m/s , 当 R 为 2.35 m 时 $v' = v'_R R^{1/4} = 1.05\text{ m/s} > v = 0.73\text{ m/s}$ 。故在此条件下, 渠道不会发生冲刷。

(2) 计算 h 为 1.5 m 时, 渠道通过的流量并校核淤积

计算 $h = 1.5 \text{ m}$ 的断面水力要素:

$$A = (b + mh)h = (34 \text{ m} + 1.5 \times 1.5 \text{ m}) \times 1.5 \text{ m} = 54.37 \text{ m}^2$$

$$\chi = b + 2h \sqrt{1 + m^2} = 34 \text{ m} + 2 \times 1.5 \text{ m} \times \sqrt{1 + 1.5^2} = 39.41 \text{ m}$$

$$R = \frac{A}{\chi} = \frac{54.37}{39.41} \text{ m} = 1.38 \text{ m}$$

当 $n = 0.03$, $R = 1.38 \text{ m}$ 时, 由曼宁公式求得

$$C = \frac{1}{0.03} 1.38^{1/6} \text{ m}^{1/2}/\text{s} = 35.17 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$$

$$Q = AC \sqrt{Ri} = 54.37 \times 35.17 \times \sqrt{1.38 \times \frac{1}{6500}} \text{ m}^3/\text{s} = 27.9 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{27.9}{54.37} \text{ m/s} = 0.51 \text{ m/s} > v'' = 0.5 \text{ m/s}$$

故渠道在 $h = 1.5 \text{ m}$ 时, 不会发生淤积。

(3) 绘制 $h = (1.5 \sim 2.7) \text{ m}$ 间水深 - 流量曲线

除 $h = 1.5 \text{ m}$, $h = 2.7 \text{ m}$ 已在前二项中计算过外, 今再设 $h = 2.0 \text{ m}$, 2.5 m 分别计算断面水力要素及流量、流速值, 如下表所列。

h/m	A/m^2	χ/m	R/m	$C = \frac{1}{n} R^{1/6} / (\text{m}^{1/2}/\text{s})$	$Q = AC \sqrt{Ri} / (\text{m}^3/\text{s})$	$v / (\text{m/s})$
1.5	54.37	39.41	1.38	35.17	27.9	0.510
2.0	74.00	41.22	1.80	36.80	45.3	0.612
2.5	94.40	43.01	2.19	37.98	65.8	0.700
2.7	102.74	43.74	2.35	38.40	75.0	0.730

根据上表可绘出 $h - Q$ 曲线 (图 6.9)。

(2) 已知渠道的设计流量 Q , 底坡 i , 底宽 b , 边坡系数 m 和粗糙系数 n , 求水深 h 。

例 6.3 某电站引水渠, 通过沙壤土地段, 决定采用梯形断面, 并用浆砌块石衬砌 ($n = 0.025$), 以减少渗漏损失和加强渠道耐冲能力; 取边坡系数 m 为 1; 根据天然地形, 为使挖、填方量最少, 选用底坡 i 为 $1/800$, 底宽 b 为 6 m , 设计流量 Q 为 $70 \text{ m}^3/\text{s}$ 。试计算渠堤高度 (要求超高 0.5 m)。

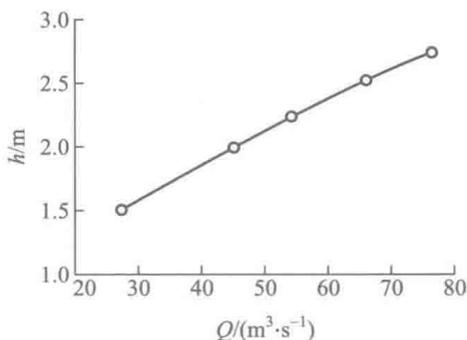


图 6.9

解：当求得水深 h 后，加上超高即得堤的高度。故本题主要是计算水深。

根据式 (6.10) $Q = AC \sqrt{Ri}$

对梯形断面 $A = (b + mh)h$, $\chi = b + 2h \sqrt{1 + m^2}$, $R = \frac{A}{\chi}$, $C = \frac{1}{n} R^y$ 代入上式，整理得

$$Q = (b + mh)h \frac{1}{n} \left[\frac{(b + mh)h}{b + 2h \sqrt{1 + m^2}} \right]^{y + \frac{1}{2}} \sqrt{i} \quad (6.18)$$

显然，在上式中 Q, b, m, n, i 为已知，仅 h 为未知。但上式系一高次方程，直接求解 h 是很困难的。可采用试算——图解法或迭代法求解。

(1) 试算——图解法

可假设一系列 h 值，代入上式计算相应的 Q 值，并绘成 $h - Q$ 曲线，然后根据已知流量，在曲线上即可查出要求的 h 值。

设 $h = 2.5, 3.0, 3.5, 4.0$ m，计算相应的 A, χ, R, C 及 Q 值如下表所列。

h/m	A/m^2	χ/m	R/m	$C/(\text{m}^{1/2}/\text{s})$	$Q = AC \sqrt{Ri}/(\text{m}^3/\text{s})$
2.5	21.25	13.07	1.625	44.5	42.6
3.0	27.00	14.48	1.866	45.5	59.3
3.5	33.25	15.90	2.090	46.5	78.6
4.0	40.00	17.30	2.310	47.0	100.9

由上表绘出 $h - Q$ 曲线 (图 6.10)。从曲线查得：

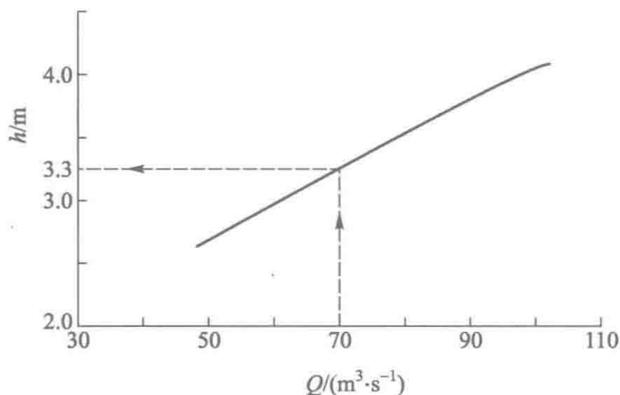


图 6.10

当 $Q = 70 \text{ m}^3/\text{s}$ 时， $h = 3.3 \text{ m}$ 。

(2) 迭代法

由式 (6.18) 可知，当 $y = 1/6$ ，即用曼宁公式计算谢才系数时，梯形断

面均匀流水深可用下式进行迭代计算：

$$h_{j+1} = \left(\frac{Qn}{\sqrt{i}} \right)^{3/5} \frac{(b + 2h_j \sqrt{1+m^2})^{2/5}}{b + mh_j} \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (6.19)$$

将 $h_1 = \left(\frac{nQ}{b\sqrt{i}} \right)^{3/5}$ 代入上式得 h_2 。

.....

当 $(h_{j+1} - h_j)$ 满足某给定的精度要求，则 h_{j+1} 即为所求的均匀流水深。

先以宽浅矩形渠道均匀流的水深 $h_1 = \left(\frac{nQ}{b\sqrt{i}} \right)^{3/5} = 3.55 \text{ m}$ 为初始值，求得

$$h_2 = \left(\frac{Qn}{\sqrt{i}} \right)^{3/5} \frac{(b + 2h_1 \sqrt{1+m^2})^{2/5}}{b + mh_1} = 3.30 \text{ m}$$

将 $h_2 = 3.30 \text{ m}$ 作为初始值，求得 $h_3 = 3.33 \text{ m}$ ；再将 $h_3 = 3.33 \text{ m}$ 作为初始值，求得 $h_4 = 3.33 \text{ m}$ 。

因 h_3 与 h_4 相等，则 h_4 即为所求的均匀流水深，即 $Q = 70 \text{ m}^3/\text{s}$ 时， $h = 3.33 \text{ m}$ 。

(3) 已知渠道的设计流量 Q ，底坡 i ，水深 h ，边坡系数 m 及粗糙系数 n ，求渠道底宽 b 。

这一类问题的计算方法，与前一类求 h 的方法类似，也是采用试算——图解法。

例 6.4 某灌溉渠道上有一渡槽，拟采用混凝土（用括泥刀做平）预制构件拼接成矩形断面（图 6.11）， $n = 0.013$ ，根据渡槽两端渠道尺寸及渠底高程，初步拟定渡槽的底坡 i 为 $1/1000$ ，水深 h 为 3.5 m ，设计流量 $31 \text{ m}^3/\text{s}$ 。试计算渠道底宽 b 。

解：采用试算——图解法。

设底宽 $b = 2.5 \text{ m}$ ，计算断面水力要素 A ， χ ， R ， C 及流量 Q ：

$$A = bh = 2.5 \text{ m} \times 3.5 \text{ m} = 8.75 \text{ m}^2$$

$$\chi = b + 2h = 2.5 \text{ m} + 2 \times 3.5 \text{ m} = 9.5 \text{ m}$$

$$R = \frac{A}{\chi} = \frac{8.75}{9.5} \text{ m} = 0.922 \text{ m}$$

当 $R = 0.922 \text{ m}$ ， $n = 0.013$ 时，由曼宁公式求得

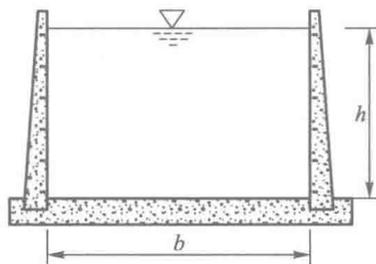


图 6.11

$$C = \frac{1}{0.013} \times 0.922^{1/6} \text{ m}^{1/2}/\text{s} = 75.9 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$$

则 $Q = AC \sqrt{Ri} = 20.2 \text{ m}^3/\text{s} < 31 \text{ m}^3/\text{s}$ 。

又设 $b = 3.0 \text{ m}$, 3.5 m , 4.0 m 计算结果如下表所列。

b/m	A/m^2	χ/m	R/m	$C/(\text{m}^{1/2}/\text{s})$	$Q = AC \sqrt{Ri}/(\text{m}^3/\text{s})$
2.5	8.75	9.5	0.92	75.9	20.20
3.0	10.50	10.0	1.05	77.5	26.30
3.5	12.25	10.5	1.17	78.7	32.90
4.0	14.00	11.0	1.28	79.7	39.70

根据上表绘制 $b-Q$ 曲线 (图 6.12)。由曲线查得当 $Q = 31 \text{ m}^3/\text{s}$ 时, $b = 3.35 \text{ m}$ 。

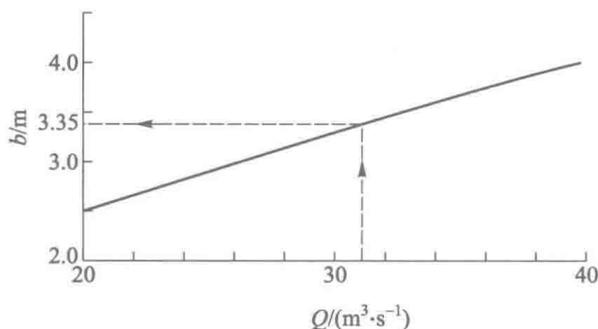


图 6.12

(4) 已知渠道的设计流量 Q , 水深 h , 底宽 b , 粗糙系数 n 及边坡系数 m , 求底坡 i 。

这一类问题, 相当于根据其他技术要求, 拟定了断面形式、尺寸及护面情况, 而计算底坡。利用式 (6.10) 可直接求解。

例 6.5 某灌溉渠上, 拟建渡槽一座, 初步确定采用钢丝网水泥喷浆薄壳结构, 表面用水泥灰浆抹面, $n = 0.013$, 断面为 U 形, 底部半圆直径 d 为 2.5 m , 上部接垂直侧墙高 0.8 m (包括超高 0.3 m) (图 6.13)。设计流量 Q 为 $5.5 \text{ m}^3/\text{s}$, 试计算渡槽底坡。

解: 由题意可得

$$h = \frac{d}{2} + 0.8 \text{ m} - 0.3 \text{ m} = \frac{2.5 \text{ m}}{2} + 0.5 \text{ m} = 1.75 \text{ m}$$

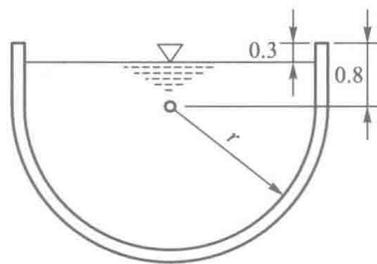


图 6.13

$$\begin{aligned}
 A &= d(0.8 \text{ m} - 0.3 \text{ m}) + \frac{1}{2}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \\
 &= 2.5(0.8 - 0.3) + \frac{1}{2} \times 3.14 \times \left(\frac{2.5}{2}\right)^2 \text{ m}^2 \\
 &= 3.71 \text{ m}^2 \\
 \chi &= 2 \times (0.8 \text{ m} - 0.3 \text{ m}) + \pi \times \frac{d}{2} \\
 &= 2 \times 0.5 \text{ m} + 3.14 \times \frac{2.5 \text{ m}}{2} \\
 &= 4.93 \text{ m} \\
 R &= \frac{A}{\chi} = \frac{3.71}{4.93} \text{ m} = 0.752 \text{ m}
 \end{aligned}$$

由曼宁公式求得 $C = \frac{1}{0.013} \times 0.752^{1/6} \text{ m}^{1/2}/\text{s} = 73.4 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$

$$\text{则堤坡 } i = \frac{Q^2}{C^2 A^2 R} = \frac{5.5^2}{73.4^2 \times 3.71^2 \times 0.752} = 0.00054 \approx \frac{1}{2000}$$

故所求底坡为 $i = \frac{1}{2000}$ 。

(5) 已知流量 Q 、流速 v 、底坡 i 、粗糙系数 n 和边坡系数 m ，要求设计渠道断面尺寸。这类问题的解算步骤可通过下例来说明。

例 6.6 一梯形渠道，已知： Q 为 $19.6 \text{ m}^3/\text{s}$ ， v 为 1.45 m/s ，边坡系数 m 为 1，粗糙系数 n 为 0.02，底坡 i 为 0.0007，求所需的水深及底宽。

解：联立求解式 (6.3) 及式 (6.5) 求水深 h ，得

$$h = \frac{-\chi \pm \sqrt{\chi^2 + 4A(m-2\sqrt{1+m^2})}}{2(m-2\sqrt{1+m^2})} \quad (6.20)$$

上式中的过水断面面积 A 及湿周 χ 可按下述方法求得：

$$\text{过水断面面积 } A = \frac{Q}{v} = \frac{19.6}{1.45} \text{ m}^2 = 13.5 \text{ m}^2$$

$$\text{水力半径 } R = \left(\frac{nv}{i^{1/2}}\right)^{3/2} = \left(\frac{0.02 \times 1.45}{0.0007^{1/2}}\right)^{3/2} \text{ m} = 1.15 \text{ m}$$

$$\text{湿周 } \chi = \frac{A}{R} = \frac{13.5}{1.15} \text{ m} = 11.7 \text{ m}$$

将 A 、 χ 代入，即可求得所需水深为

$$h = \frac{-11.7 \pm \sqrt{11.7^2 + 4 \times 13.5 \times (1 - 2\sqrt{1+1^2})}}{2(1 - 2\sqrt{1+1^2})} \text{ m} = \begin{cases} 1.51 \text{ m} \\ 4.89 \text{ m} \end{cases}$$

则相应的底宽为

$$\begin{aligned}
 b &= \chi - 2 \sqrt{1 + m^2} h \\
 &= 11.7 \text{ m} - 2 \sqrt{1 + 1^2} h \quad \begin{cases} h = 1.51 \text{ m 时}, b = 7.43 \text{ m} \\ h = 4.89 \text{ m 时}, b < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

故所需的断面尺寸为

$$h = 1.15 \text{ m}, \quad b = 7.43 \text{ m}$$

6.2.3 横断面粗糙度不同明渠均匀流的水力计算

由于不同的材料具有不同的粗糙系数,因此,当明渠的渠底和渠壁采用不同材料时,粗糙系数会沿湿周发生变化。例如边坡为混凝土护面而底部为浆砌卵石的渠道(图 6.14a)、利用圪工在山坡上所构成的渠道(图 6.14b)等,其各部分湿周具有不同的粗糙系数。此外,深挖的渠道因其下部与上部的土质不同,其下部及上部的粗糙系数亦各不相同,这种湿周的各部分具有不同粗糙系数的渠道称为非均质渠道。非均质渠道的水力计算通常按均质渠道的方法处理,但式(6.12)中的粗糙系数 n 应采用某一等效的粗糙系数 n_r (亦称综合粗糙系数)代替。 n_r 与各部分湿周的长度 χ_1, χ_2, \dots 及其相应的粗糙系数 n_1, n_2, \dots 有关。

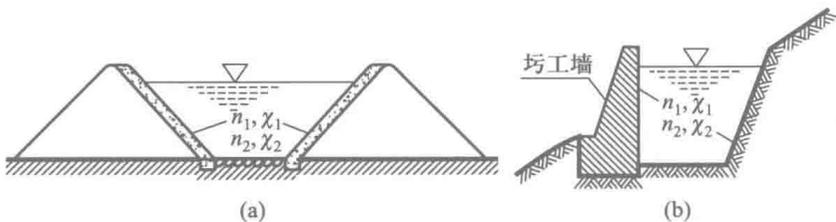


图 6.14

当渠道底部的粗糙系数小于侧壁的粗糙系数时, n_r 按下式计算:

$$n_r = \sqrt{\frac{n_1^2 \chi_1 + n_2^2 \chi_2}{\chi_1 + \chi_2}} \quad (6.21)$$

在一般情况下, n_r 也可按加权平均方法估算, 即

$$n_r = \frac{n_1 \chi_1 + n_2 \chi_2}{\chi_1 + \chi_2} \quad (6.22)$$

6.2.4 复式断面明渠均匀流的水力计算

当通过渠道的流量变化范围比较大时, 渠道的断面形状常采用如图 6.15a

所示的复式断面。复式断面的粗糙系数沿湿周可能不变，也可能发生变化，应视渠道的具体情况而定。但无论粗糙系数沿湿周变化与否，均不能对整个复式断面渠道中的均匀流直接应用公式 (6.12) 来计算流量，否则就会得到一个与实际情况不相符的结果：当水深由 $h < h'$ 增加到 $h > h'$ 时，在某一水深范围内流量不但不随着水深的增加而增加，反而会有所减少，如图 6.15b 中虚线所示。这是由于水深从 $h < h'$ 增加到 $h > h'$ 时，过水断面虽有所增加，但湿周突然增大许多，使水力半径骤然减小的缘故。图 6.15 中虚线是按式 (6.12) 计算出的水深 - 流量关系曲线；而实际的水深 - 流量关系曲线，应当如图中的实线所示。

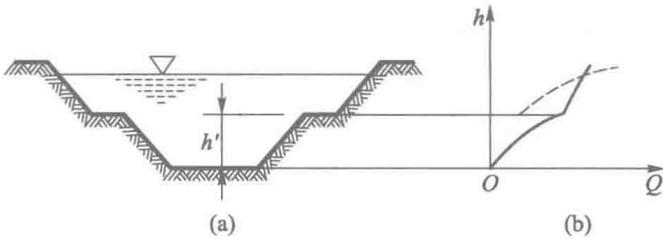


图 6.15

复式断面明渠均匀流的流量一般按下述方法计算：即先将复式断面划分成几个部分，使每一部分的湿周不致因水深的略微增大而产生急剧的增加。例如图 6.16 所示的复式断面，通常用 $a - a$ 及 $b - b$ 二铅垂线，将它分为 I、II 及 III 三个部分，然后再对每一部分应用式 (6.10) 则得到

$$\begin{aligned}
 Q_I &= A_I C_I \sqrt{R_I i} = K_I \sqrt{i} \\
 Q_{II} &= A_{II} C_{II} \sqrt{R_{II} i} = K_{II} \sqrt{i} \\
 Q_{III} &= A_{III} C_{III} \sqrt{R_{III} i} = K_{III} \sqrt{i}
 \end{aligned}$$

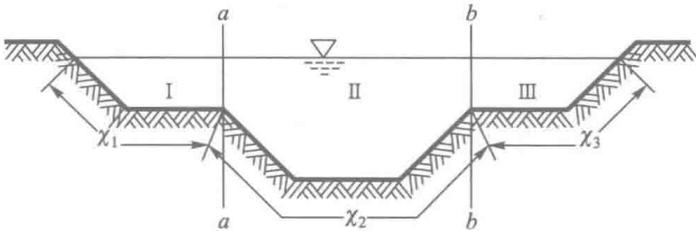


图 6.16

显然，通过复式断面渠道的流量，应为通过各部分流量 $Q_I, Q_{II}, Q_{III}, \dots, Q_n$ 的总和，于是

$$Q = (K_I + K_{II} + \dots + K_n) \sqrt{i} = \left(\sum_{j=1}^n K_j \right) \sqrt{i} \quad (6.23)$$

复式断面主槽水流与漫滩水流之间存在着复杂的动量交换关系。滩地由于植草和种树等人类活动，使得其糙率与主槽糙率差异明显。因此，复式断面明渠水流具有显著的三维特性，其流场结构示于图 6.17。有兴趣的读者可进一步查阅相关文献。

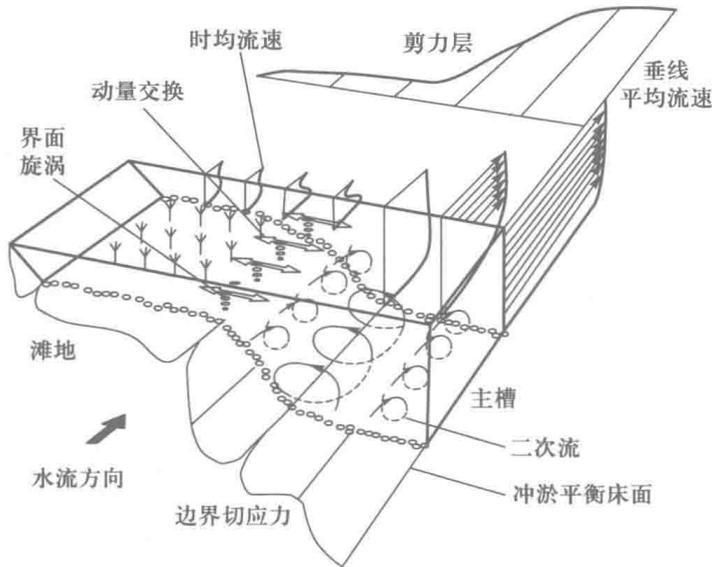


图 6.17 复式断面明渠水流流场结构概念图

例 6.7 一复式断面渠道如图 6.18 所示，已知 b_I 与 b_{III} 为 6 m， b_{II} 为 10 m； h_{II} 为 4 m， h_I 与 h_{III} 为 1.8 m； m_I 与 m_{III} 均为 1.5， m_{II} 为 2.0； n 为 0.02 及 i 为 0.000 2。求 Q 及 v 。

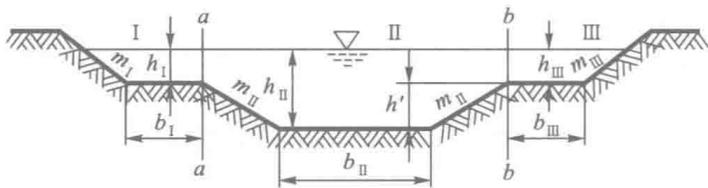


图 6.18

解：用 $a-a$ 及 $b-b$ 铅垂线将图中的复式断面分为 I，II 及 III 三个部分，各部分的断面面积分别为

$$A_I = A_{III} = \left(b_I + \frac{m_I h_I}{2} \right) h_I$$

$$= \left(6 + \frac{1.5 \times 1.8}{2} \right) \times 1.8 \text{ m}^2 = 13.2 \text{ m}^2$$

$$\begin{aligned} A_{\text{II}} &= (b_{\text{II}} + m_{\text{II}} h') h' + (b_{\text{II}} + 2m_{\text{II}} h') h_{\text{I}} \\ &= [10 + 2 \times (4 - 1.8)] \times (4 - 1.8) + [10 + 2 \times 2 \times (4 - 1.8)] \times 1.8 \text{ m}^2 \\ &= 31.7 \text{ m}^2 + 33.8 \text{ m}^2 = 65.5 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

各部分的湿周分别为

$$\chi_{\text{I}} = \chi_{\text{III}} = b_{\text{I}} + h_{\text{I}} \sqrt{1 + m_{\text{I}}^2} = 6 \text{ m} + 1.8 \text{ m} \times \sqrt{1 + 1.5^2} = 9.25 \text{ m}$$

$$\chi_{\text{II}} = b_{\text{II}} + 2 \sqrt{1 + m_{\text{II}}^2} h' = 10 \text{ m} + 2 \times \sqrt{1 + 2^2} \times (4 \text{ m} - 1.8 \text{ m}) = 19.8 \text{ m}$$

各部分的水力半径分别为

$$R_{\text{I}} = R_{\text{III}} = \frac{A_{\text{I}}}{\chi_{\text{I}}} = \frac{13.2}{9.25} \text{ m} = 1.43 \text{ m}$$

$$R_{\text{II}} = \frac{A_{\text{II}}}{\chi_{\text{II}}} = \frac{65.5}{19.8} \text{ m} = 3.31 \text{ m}$$

各部分的流量模数分别为

$$\begin{aligned} K_{\text{I}} = K_{\text{III}} &= A_{\text{I}} C_{\text{I}} \sqrt{R_{\text{I}}} = \frac{1}{n} A_{\text{I}} R_{\text{I}}^{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{1}{0.02} \times 13.2 \times 1.43^{\frac{2}{3}} \text{ m}^3/\text{s} = 837 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{\text{II}} &= A_{\text{II}} C_{\text{II}} \sqrt{R_{\text{II}}} = \frac{1}{n} A_{\text{II}} R_{\text{II}}^{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{1}{0.02} \times 65.5 \times 3.31^{\frac{2}{3}} \text{ m}^3/\text{s} = 7270 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

根据式 (6.23), 所给复式断面的流量为

$$\begin{aligned} Q &= (K_{\text{I}} + K_{\text{II}} + K_{\text{III}}) \sqrt{i} \\ &= (837 + 7270 + 837) \text{ m}^3/\text{s} \times \sqrt{0.0002} = 127 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

复式过水断面的平均流速为

$$\begin{aligned} v &= \frac{Q}{A_{\text{I}} + A_{\text{II}} + A_{\text{III}}} = \frac{127}{13.2 + 65.5 + 13.2} \text{ m/s} \\ &= 1.38 \text{ m/s} \end{aligned}$$

6.3 明渠恒定非均匀渐变流

人工渠道或天然河道中的水流绝大多数是非均匀流。明渠非均匀流的特点是明渠的底坡线、水面线、总水头线彼此互不平行 (图 6.19)。产生明渠非均

匀流的原因很多，明渠横断面的几何形状或尺寸沿流程改变，粗糙度或底坡沿流程改变，或在明渠中修建人工建筑物（闸、桥梁、涵洞），都能使明渠水流发生非均匀流动。

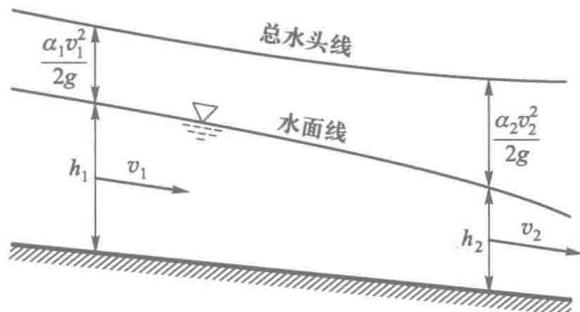


图 6.19

在明渠非均匀流中，若流线是接近于相互平行的直线，或流线间夹角很小、流线的曲率半径很大，这种水流称为明渠非均匀渐变流。反之为明渠非均匀急变流。

本节着重研究明渠中恒定非均匀渐变流的基本特性及其水力要素（主要是水深）沿程变化的规律。具体地说，就是要分析水面线的变化及其计算，以便确定明渠边墙高度，以及回水淹没的范围等。确定明渠水面线的形式及其位置，在工程实践中具有十分重要的意义。

因明渠非均匀流的水深沿流程是变化的， $h = f(s)$ ，为了不致引起混乱，把明渠均匀流的水深称为正常水深，并以 h_0 表示。

6.3.1 明渠水流的三种流态

明渠水流有和大气接触的自由表面，它与有压流不同，具有独特的水流流态。一般明渠水流有三种流态，即缓流、临界流和急流。掌握明渠水流流态的实质，对分析研究明渠水面线的变化规律有重要意义。

为了了解三种流态的实质，可以观察一个简单的实验。

若在静水中沿铅垂方向丢下一颗石子，水面将产生一个微小波动，这个波动以石子落点为中心，以一定的速度 v_w 向四周传播，平面上的波形将是一连串的同圆心，如图 6.20a 所示。这种在静水中传播的微波速度 v_w 称为相对波速。若把石子投入流动着的明渠均匀流中，则微波的传播速度应是水流的流速与相对波速的矢量和。当水流断面平均流速 v 小于相对波速 v_w 时，微波将以绝对速度 $v'_w = v_w - v$ 向上游传播，同时又以绝对速度 $v'_w = v + v_w$ 向下游传播

(图 6.20b)，这种水流称为缓流。当水流断面平均流速 v 等于相对波速 v_w 时，微波向上游传播的绝对速度 $v'_w = 0$ ，而向下游传播的绝对速度 $v'_w = 2v_w$ (图 6.20c)，这种水流称为临界流。当水流断面平均流速 v 大于相对波速 v_w 时，微波只以绝对速度 $v'_w = v + v_w$ 向下游传播，而对上游水流不发生任何影响 (图 6.20d)，这种水流称为急流。

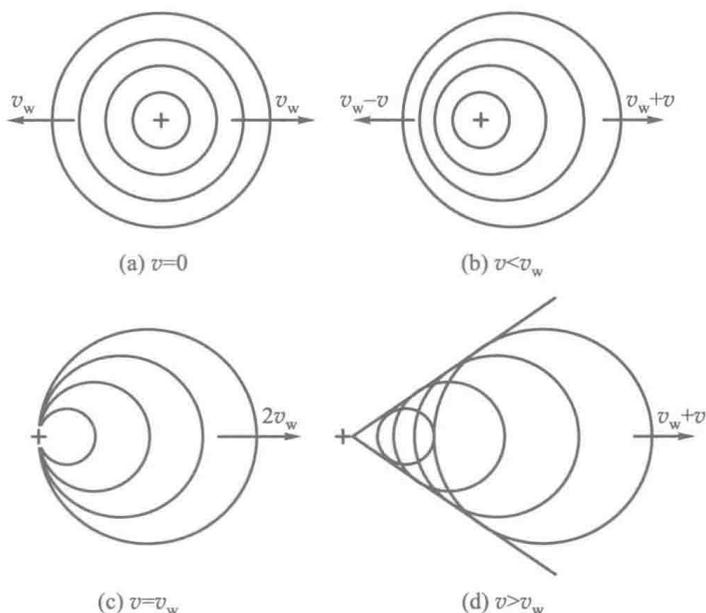


图 6.20

由此可知，只要比较水流的断面平均流速 v 和微波相对速度 v_w 的大小，就可判断干扰微波是否会往上游传播，也可判别水流是属于哪一种流态。

当 $v < v_w$ ，水流为缓流，干扰波能向上游传播；

$v = v_w$ ，水流为临界流，干扰波恰不能向上游传播；

$v > v_w$ ，水流为急流，干扰波不能向上游传播。

要判别流态，必须首先确定微波传播的速度，现在来推导微波传播速度的计算公式。

如图 6.21 所示，在平底矩形棱柱体明渠中，假设渠中水深为 h ，设开始时，渠中水流处于静止状态，用一竖直平板以一定的速度向左拨动一下，在平板的左侧将激起一个干扰的微波。微波波高为 Δh ，微波以波速 v_w 向左移动。某观察者若以波速 v_w 随波前进，他将看到微波是静止不动的，而水流则以波速 v_w 向右移动。这正像人们坐在火车上观察到车厢是不动的，而窗外铁路沿线的树木则以火车的速度向后运动一样。

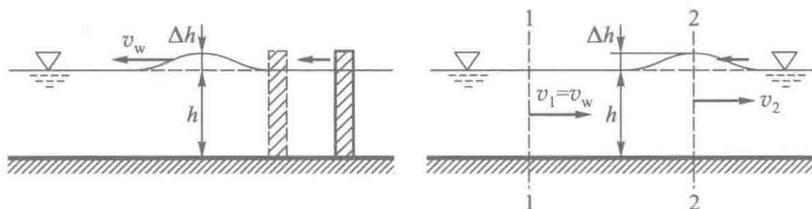


图 6.21

对上述移动坐标系来说,水流是作恒定非均匀流动。若忽略摩擦阻力,以水平渠底为基准面,对水流的两相距很近的 1-1 和 2-2 断面建立连续性方程式和能量方程式,有

$$hv_w = (h + \Delta h)v_2$$

$$h + \frac{\alpha_1 v_w^2}{2g} = h + \Delta h + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$$

联立求解上两式,并令 $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 1$, 得

$$v_w = \sqrt{gh \frac{\left(1 + \frac{\Delta h}{h}\right)^2}{\left(1 + \frac{\Delta h}{2h}\right)}} \quad (6.24)$$

对波高较小的微波,可令 $\Delta h/h \approx 0$, 则上式可简化为

$$v_w = \sqrt{gh} \quad (6.25)$$

上式就是矩形明渠静水中微波波速的计算公式。

如果明渠断面为任意形状时,则可证得

$$v_w = \sqrt{g\bar{h}} \quad (6.26)$$

式中: $\bar{h} = \frac{A}{B}$ 为断面平均水深, A 为断面面积, B 为水面宽度。

由上式可以看出,在忽略阻力情况下,微波波速的大小与断面平均水深的 $1/2$ 次方成正比,水深越大微波波速亦越大。

以上所讲的是微波在静水中的传播速度,在实际工程上水流都是流动的,设水流的断面平均流速为 v , 则微波沿流动方向传播的绝对速度 v'_w 应是静水中的波速 v_w 与水流流速的代数和,即

$$v'_w = v \pm v_w = v \pm \sqrt{g\bar{h}} \quad (6.27)$$

式中,取正号时为微波顺水流方向传播的绝对波速,取负号时为微波逆水流方向传播的绝对波速。

对临界流来说,断面平均流速恰好等于微波波速,即

$$v = v_w = \sqrt{g \bar{h}}$$

上式可改写为

$$\frac{v}{\sqrt{g \bar{h}}} = \frac{v_w}{\sqrt{g \bar{h}}} = 1 \quad (6.28)$$

$v/\sqrt{g \bar{h}}$ 是一个量纲一的数,称为弗劳德(Froude)数,用符号 Fr 表示。显然,对临界流来说弗劳德数恰好等于1,因此也可用弗劳德数来判别明渠水流的流态:

当 $Fr < 1$, 水流为缓流;

$Fr = 1$, 水流为临界流;

$Fr > 1$, 水流为急流。

弗劳德数在水力学中是一个极其重要的判别数,为了加深理解它的物理意义,可把它的形式改写为

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{g \bar{h}}} = \sqrt{2 \frac{\frac{v^2}{2}}{\frac{2g}{h}}} \quad (6.29)$$

由上式可以看出,弗劳德数是表示过水断面单位重量液体平均动能与平均势能之比的2倍开平方,随着这个比值大小的不同,反映了水流流态的不同。当水流的平均势能等于平均动能的2倍时,弗劳德数 $Fr = 1$,水流是临界流。弗劳德数愈大,意味着水流的平均动能所占的比例愈大。

弗劳德数的物理意义,还可以从液体质点的受力情况来认识。设水流中某质点的质量为 dm , 流速为 u , 则它所受到的惯性力 F 的量纲式为

$$\begin{aligned} \dim F &= \dim \left(dm \frac{du}{dt} \right) = \dim \left(dm \frac{du dx}{dx dt} \right) = \dim \left(\rho L^3 \frac{v}{L} v \right) \\ &= \dim(\rho L^2 v^2) \end{aligned}$$

重力 G 的量纲式为

$$\dim G = \dim(g dm) = \dim(\rho g L^3)$$

而惯性力和重力之比开平方的量纲式为

$$\dim \left(\frac{F}{G} \right)^{1/2} = \dim \left(\frac{\rho L^2 v^2}{\rho g L^3} \right)^{1/2} = \dim \left(\frac{v}{\sqrt{gL}} \right)$$

这个比值的量纲式与弗劳德数相同。由此可知弗劳德数的力学意义是代表水流的惯性力和重力两种作用的对比关系。当这个比值等于1时,恰好说明惯性力作用与重力作用相等,水流是临界流。当 $Fr > 1$ 时,说明惯性力作用大于重力的作用,惯性力对水流起主导作用,这时水流处于急流状态。当 $Fr <$

1 时, 惯性力作用小于重力作用, 这时重力对水流起主导作用, 水流处于缓流状态。

6.3.2 断面比能与临界水深

明渠中水流的流态也可从能量角度来分析。

1. 断面比能、比能曲线

图 6.22 所示为一渐变流, 若以 0-0 为基准面, 则过水断面上单位重量液体所具有的总能量为

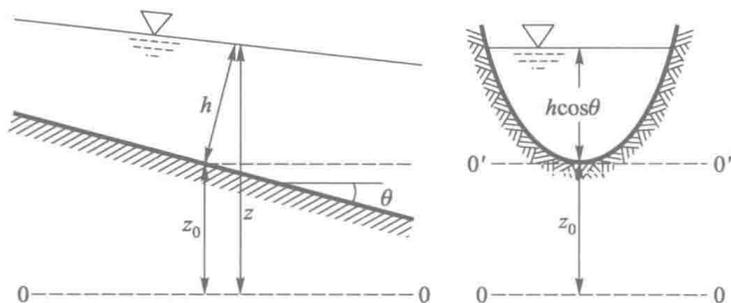


图 6.22

$$E = z + \frac{\alpha v^2}{2g} = z_0 + h \cos \theta + \frac{\alpha v^2}{2g} \quad (6.30)$$

式中 θ 为明渠底面对水平面的倾角。

如果把参考基准面选在渠底这一特殊位置, 把对通过渠底的水平面 0'-0' 所计算得到的单位能量称为断面比能, 并以 E_s 来表示, 则

$$E_s = h \cos \theta + \frac{\alpha v^2}{2g} \quad (6.31)$$

不难看出, 断面比能 E_s 是过水断面上单位重量液体总能量 E 的一部分, 二者相差的数值乃是两个基准面之间的高差 z_0 。

在实用上, 因一般明渠底坡较小, 可认为 $\cos \theta \approx 1$, 故常采用

$$E_s = h + \frac{\alpha v^2}{2g} \quad (6.32)$$

或写为

$$E_s = h + \frac{\alpha Q^2}{2gA^2} \quad (6.33)$$

由上式可知, 当流量 Q 和过水断面的形状及尺寸一定时, 断面比能仅仅是水深的函数, 即 $E_s = f(h)$, 按照此函数可以绘出断面比能随水深变化的关系曲线, 该曲线称为比能曲线。很明显, 要具体绘出一条比能曲线必须首先给

定流量 Q 和断面的形状及尺寸。对于一个已经给定尺寸的断面，当通过不同流量时，其比能曲线是不相同的；同样，对某一指定的流量，断面的形状及尺寸不同时，其比能曲线也是不相同的。

假定已经给定某一流量和过水断面的形状及尺寸，现在来定性地讨论一下比能曲线的特征。由式 (6.33) 可知，若过水断面面积 A 是水深 h 的连续函数，当 $h \rightarrow 0$ 时， $A \rightarrow 0$ ，则 $\frac{\alpha Q^2}{2gA^2} \rightarrow \infty$ ，故 $E_s \rightarrow \infty$ 。当 $h \rightarrow \infty$ 时， $A \rightarrow \infty$ ，则 $\frac{\alpha Q^2}{2gA^2} \rightarrow 0$ ，因而 $E_s \rightarrow \infty$ 。

若以 h 为纵坐标，以 E_s 为横坐标，根据上述讨论，绘出的比能曲线是一条二次抛物线（图 6.23），曲线的下端以水平线为渐近线，上端以与坐标轴成 45° 夹角并通过原点的直线为渐近线。该曲线在 K 点

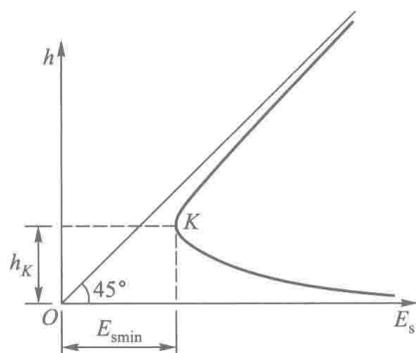


图 6.23

断面比能有最小值 $E_{s\min}$ 。 K 点把曲线分成上下两支。在上支，断面比能随水深的增加而增加；在下支，断面比能随水深的增加而减小。

若将式 (6.33) 对 h 取导数，可以进一步了解比能曲线的变化规律，即

$$\frac{dE_s}{dh} = \frac{d}{dh} \left(h + \frac{\alpha Q^2}{2gA^2} \right) = 1 - \frac{\alpha Q^2 dA}{gA^3 dh} \quad (6.34)$$

因在过水断面上 $\frac{dA}{dh} = B$ ， B 为过水断面的水面宽度，代入上式，得

$$\frac{dE_s}{dh} = 1 - \frac{\alpha Q^2 B}{gA^3} = 1 - \frac{\alpha v^2}{g \frac{A}{B}} \quad (6.35)$$

若取 $\alpha = 1.0$ ，则上式可写为

$$\frac{dE_s}{dh} = 1 - Fr^2 \quad (6.36)$$

上式说明，明渠水流的断面比能随水深的变化规律取决于断面上的弗劳德数。

对于缓流， $Fr < 1$ ， $\frac{dE_s}{dh} > 0$ ，相当于比能曲线的上支，断面比能随水深的增加而增加；对于急流， $Fr > 1$ ，则 $\frac{dE_s}{dh} < 0$ ，相当于比能曲线的下支，断面比能随

水深的增加而减少；对于临界流， $Fr = 1$ ，则 $\frac{dE_s}{dh} = 0$ ，相当于比能曲线上下两

支的分界点，断面比能为最小值。

2. 临界水深

相应于断面单位能量最小值的水深称为临界水深，以 h_K 表示。将式 (6.33) 对水深 h 取导数，并令其等于零，即可求得临界水深所应满足的条件：

$$\frac{dE_s}{dh} = 1 - \frac{\alpha Q^2 dA}{gA^3 dh} = 1 - \frac{\alpha Q^2 B}{gA^3} = 0 \quad (6.37)$$

今后凡相应于临界水深时的水力要素均注以脚标 K ，上式可写为

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{A_K^3}{B_K} \quad (6.38)$$

当流量和过水断面形状及尺寸给定时，利用上式即可求解临界水深 h_K 。

(1) 矩形断面明渠临界水深的计算

令矩形断面宽为 b ，则 $B_K = b$ ， $A_K = bh_K$ ，代入式 (6.38) 后可解出临界水深公式为

$$h_K = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gb^2}} \quad (6.39)$$

或

$$h_K = \sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}} \quad (6.40)$$

上式中 $q = \frac{Q}{b}$ 为单宽流量。由上式还可看出

$$h_K^3 = \frac{\alpha q^2}{g} = \frac{\alpha (h_K v_K)^2}{g}$$

故

$$h_K = \frac{\alpha v_K^2}{g}$$

或

$$\frac{\alpha v_K^2}{2g} = \frac{h_K}{2} \quad (6.41)$$

即在临界流时，断面比能

$$E_{smin} = h_K + \frac{h_K}{2} = \frac{3}{2}h_K \quad (6.42)$$

由此可知：在矩形断面明渠中，临界流的流速水头是临界水深的 $1/2$ ；而临界水深则是最小断面比能 E_{smin} 的 $2/3$ 。

(2) 断面为任意形状时, 临界水深的计算

若明渠断面形状不规则, 过水面积 A 与水深之间的函数关系比较复杂, 把这样的复杂函数代入式 (6.38), 不能得出临界水深 h_k 的直接解。在这种情况下, 一般只能用试算法或图解法求解 h_k 。

① 试算法

当给定流量 Q 及明渠断面形状、尺寸后, 式 (6.38) 的左端 $\frac{\alpha Q^2}{g}$ 为一定值, 该式的右端 $\frac{A^3}{B}$ 乃仅仅是水深的函数。于是可以假定若干个水深 h , 从而可算出若干个与之对应的 $\frac{A^3}{B}$ 值, 当某一 $\frac{A^3}{B}$ 值刚好与 $\frac{\alpha Q^2}{g}$ 相等时, 其相应的水深即为所求的临界水深 h_k 。

② 图解法

图解法的实质和试算法相同。当假定不同的水深 h 时, 可得出若干相应的 $\frac{A^3}{B}$ 值, 然后将这些值点绘成 $h - \frac{A^3}{B}$ 关系曲线图 (图 6.24) 在该图的 $\frac{A^3}{B}$ 轴上, 量取其值为 $\frac{\alpha Q^2}{g}$ 的长度, 由此引铅垂线与曲线相交于 C 点, C 点所对应的 h 值即为所求 h_k 。

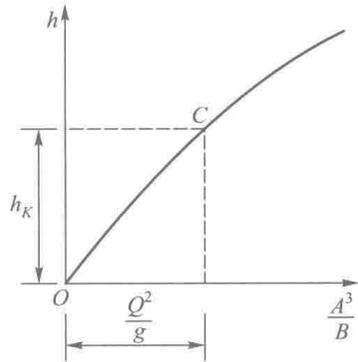


图 6.24

(3) 等腰梯形断面临界水深计算

若明渠过水断面为梯形, 且两侧边坡相同, 其临界水深可应用迭代法进行计算, 现将其原理简述如下:

$$h_k^{i+1} = \left(\frac{\alpha Q^2}{g b^2} \right)^{1/3} \frac{\left(1 + 2m \frac{h_k^i}{b} \right)}{1 + m \frac{h_k^i}{b}} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.43)$$

将 $h_k^1 = \left(\frac{\alpha Q^2}{g b^2} \right)^{1/3}$ 代入上式得 h_k^2 ;

.....

当 $(h_k^{i+1} - h_k^i)$ 满足某给定精度要求, 则 h_k^{i+1} 即为所求的临界水深。

根据所给流量及断面尺寸, 应用上述方法求出临界水深 h_k 以后, 也可用 h_k 来判别流态:

当 $h > h_K$ 时, $Fr < 1$, 为缓流;

$h = h_K$ 时, $Fr = 1$, 为临界流;

$h < h_K$ 时, $Fr > 1$, 为急流。

例 6.8 一矩形断面明渠, 流量 $Q = 30 \text{ m}^3/\text{s}$, 底宽 $b = 8 \text{ m}$ 。要求:

(1) 用计算及图解法求渠中临界水深;

(2) 计算渠中实际水深 $h = 3 \text{ m}$ 时, 水流的弗劳德数、微波波速, 并据此以不同的角度来判别水流的流态。

解: (1) 求临界水深

$$q = \frac{Q}{b} = \frac{30 \text{ m}^3/\text{s}}{8 \text{ m}} = 3.75 \text{ m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})$$

$$h_K = \sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{1 \times 3.75^2}{9.8}} \text{ m} = 1.13 \text{ m}$$

(2) 当渠中水深 $h = 3 \text{ m}$ 时

$$\text{渠中平均流速 } v = \frac{Q}{bh} = \frac{30}{8 \times 3} \text{ m/s} = 1.25 \text{ m/s}$$

$$\text{弗劳德数 } Fr = \sqrt{\frac{v^2}{gh}} = \sqrt{\frac{1.25^2}{9.8 \times 3}} = 0.231$$

$$\text{微波波速 } v_w = \sqrt{gh} = \sqrt{9.8 \times 3} \text{ m/s} = 5.42 \text{ m/s}$$

$$\text{临界流速 } v_K = \sqrt{gh_K} = \sqrt{9.8 \times 1.13} \text{ m/s} = 3.33 \text{ m/s}$$

从水深看, 因 $h > h_K$, 故渠中水流为缓流。

以 Fr 为标准, 因 $Fr < 1$, 水流为缓流。

以微波波速与实际水流流速作比较, 因 $v_w > v$, 微波可以向上游传播, 故水流为缓流。

以临界流速 v_K 与实际水流流速作比较, 因 $v < v_K$, 故水流为缓流。

例 6.9 一梯形断面渠道, 底宽 b 为 5 m , 边坡系数 m 为 1 。

要求: 计算通过流量分别为 $Q_1 = 10 \text{ m}^3/\text{s}$, $Q_2 = 15 \text{ m}^3/\text{s}$, $Q_3 = 20 \text{ m}^3/\text{s}$ 时的临界水深。

解: (1) 绘制 $h - \frac{A^3}{B}$ 关系曲线

因 $\frac{A^3}{B} = f(h)$, 对梯形断面

$$B = b + 2mh$$

$$A = (b + mh)h$$

先假定若干 h , 计算相应的 $\frac{A^3}{B}$ 值, 计算结果见下表。

水深 h/m	水面宽 B/m	过水面积 A/m^2	$A^3/B/\text{m}^5$
0.4	5.8	2.16	1.74
0.6	6.2	3.36	6.12
0.8	6.6	4.64	15.14
1.0	7.0	6.00	30.86
1.2	7.4	7.44	55.65

根据表中数值, 绘制 $h - \frac{A^3}{B}$ 关系曲线,

如图 6.25 所示。

(2) 计算各级流量下的 $\frac{Q^2}{g}$ 值, 并由图

6.25 中查读临界水深。

当 $\frac{Q_1^2}{g} = \frac{10^2}{9.8} \text{ m}^5 = 10.2 \text{ m}^5$ 时, 由图

6.25 查得 $h_{K1} = 0.69 \text{ m}$;

当 $\frac{Q_2^2}{g} = \frac{15^2}{9.8} \text{ m}^5 = 23.0 \text{ m}^5$ 时, 由图

6.25 查得 $h_{K2} = 0.91 \text{ m}$;

当 $\frac{Q_3^2}{g} = \frac{20^2}{9.8} \text{ m}^5 = 40.8 \text{ m}^5$ 时, 由图 6.25 查得 $h_{K3} = 1.09 \text{ m}$ 。

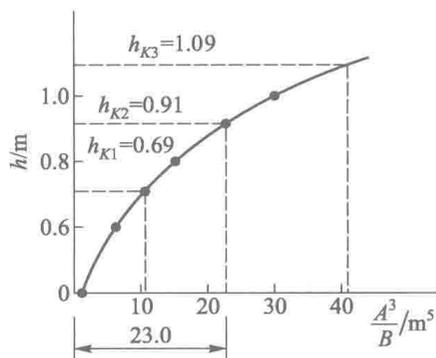


图 6.25

6.3.3 临界底坡、缓坡与陡坡

设想在流量和断面形状、尺寸一定的棱柱体明渠中, 当水流作均匀流时, 如果改变明渠的底坡, 相应的均匀流正常水深 h_0 亦随之而改变。如果变至某一底坡, 其均匀流的正常水深 h_0 恰好与临界水深 h_K 相等, 此坡度定义为临界底坡。

若已知明渠的断面形状及尺寸, 当流量给定时, 在均匀流的情况下, 可以将底坡与渠中正常水深的关系绘出如图 6.26 所示。不难理解, 当底坡 i 增大时, 正常水深 h_0 将减小; 反之, 当 i 减小时, 正常水深 h_0 将增大。从该曲线上必能找出一个正常水深恰好与临

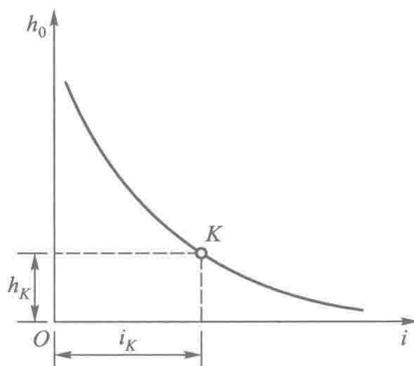


图 6.26

界水深相等的 K 点。曲线上 K 点所对应的底坡 i_k 即为临界底坡。

在临界底坡上作均匀流时，一方面它要满足临界流的条件：

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{A_k^3}{B_k}$$

另一方面又要同时满足均匀流的基本方程：

$$Q = A_k C_k \sqrt{R_k i_k}$$

联立求解上列二式可得临界底坡的计算式为

$$i_k = \frac{g A_k}{\alpha C_k^2 R_k B_k} = \frac{g \chi_k}{\alpha C_k^2 B_k} \quad (6.44)$$

式中： R_k ， χ_k ， C_k 为渠中水深为临界水深时所对应的水力半径、湿周、谢才系数。

由式 (6.44) 不难看出，明渠的临界底坡 i_k 与断面形状和尺寸、流量及渠道的糙率有关，而与渠道的实际底坡无关。

一个坡度为 i 的明渠，与其相应的临界底坡（即同流量、同断面尺寸、同糙率）相比较可能有三种情况，即： $i < i_k$ ， $i = i_k$ ， $i > i_k$ 。根据可能出现的不同情况，可将明渠的底坡分为三类：

当 $i < i_k$ ，为缓坡；

$i > i_k$ ，为陡坡；

$i = i_k$ ，为临界坡。

由图 6.26 可以看出，明渠中水流为均匀流时，若 $i < i_k$ ，则正常水深 $h_0 > h_k$ ；若 $i > i_k$ ，则正常水深 $h_0 < h_k$ ；若 $i = i_k$ ，则正常水深 $h_0 = h_k$ 。所以在明渠均匀流的情况下，用底坡的类型就可以判别水流的流态，即在缓坡上水流为缓流，在陡坡上水流为急流，在临界坡上水流为临界流。但一定要强调，这种判别只能适用于均匀流的情况。

例 6.10 梯形断面渠道，已知流量 Q 为 $45 \text{ m}^3/\text{s}$ ，底宽 b 为 10 m ，边坡系数 m 为 1.5 ，粗糙系数 n 为 0.022 ，底坡 i 为 0.0009 。要求：计算临界坡度 i_k ，并判别渠道底坡属缓坡还是陡坡。

解：由临界坡度的计算公式 $i_k = \frac{g A_k}{\alpha C_k^2 R_k B_k}$ 看出，式中各个水力要素与临界水深都有关系，因此必须首先计算临界水深。

运用迭代法计算 h_k 。

设 $h_k^1 = \left(\frac{\alpha Q^2}{g b^2} \right)^{1/3} = 1.274 \text{ m}$ ，将 $h_k^1 = 1.274 \text{ m}$ 作为初始值，代入式 (6.43)

进行迭代。

$$h_k^2 = \left(\frac{\alpha Q^2}{gb^2} \right)^{1/3} \frac{\left(1 + 2m \frac{h_k^1}{b} \right)}{\left(1 + m \frac{h_k^1}{b} \right)} = 1.191 \text{ m}, \text{ 将 } 1.191 \text{ m 作为第二次迭代的初始值}$$

计算 $h_k^3 = 1.196 \text{ m}$, 因 h_k^3 与 h_k^2 逼近, 停止迭代, 则

$$h_k = 1.2 \text{ m}$$

$$\chi_k = b + 2 \sqrt{1 + m^2} h_k = 10 \text{ m} + 2 \sqrt{1 + 1.5^2} \times 1.2 \text{ m} = 14.33 \text{ m}$$

$$A_k = (b + mh_k) h_k = (10 \text{ m} + 1.5 \times 1.2 \text{ m}) \times 1.2 \text{ m} = 14.16 \text{ m}^2$$

$$B_k = b + 2mh_k = 10 \text{ m} + 2 \times 1.5 \times 1.2 \text{ m} = 13.6 \text{ m}$$

$$R_k = \frac{A_k}{\chi_k} = \frac{14.16}{14.33} \text{ m} = 0.987 \text{ m}$$

$$C_k = \frac{1}{n} R_k^{1/6} = \frac{1}{0.022} \times 0.987^{1/6} \text{ m}^{1/2}/\text{s} = 45.36 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$$

$$i_k = \frac{9.8 \times 14.16}{1 \times 45.36^2 \times 0.987 \times 13.6} = 0.00499$$

因 $i < i_k$, 渠道属于缓坡渠道。

6.3.4 明渠水流流态的转换

在分析明渠水流问题时, 了解哪些区域会出现临界水深, 具有重要意义。例如, 在水文测验工作中或在野外踏勘时, 为了估算河道或渠道中流量, 常寻找一处发生临界水深的断面, 甚至人为地造成发生临界水深的条件。因为只要测得一个断面上的临界水深并量取了该断面的尺寸, 其流量即能简便而精确地计算出来, 又如在明渠中, 若知道发生临界水深断面的位置, 就相当于取得一个已知条件 (水深为临界水深), 把该断面作为控制断面, 据此来推求上下游水面曲线。

明渠中的水流, 因边界条件的改变, 水深自大于临界水深变为小于临界水深, 或自小于临界水深变为大于临界水深时, 其间必经过临界水深。现举例说明如下:

1. 当渠道底坡自陡坡变为缓坡时——如图 6.27 所示, 断面 $c-c$ 的上游渠道底坡为陡坡, 陡坡中的均匀流为急流, 其正常水深小于临界水深; 在断面 $c-c$ 的下游, 渠道底坡为缓坡, 缓坡中的均匀流为缓流, 其正常水深大于临界水深。在这种情况下, 水流会产生一种水面突然跃起的特殊水力现象, 叫作水跃。水跃自水深小于临界水深跃入大于临界水深, 其间必经过临界水深。关于水跃的问题将在 6.4 节中专门讨论。

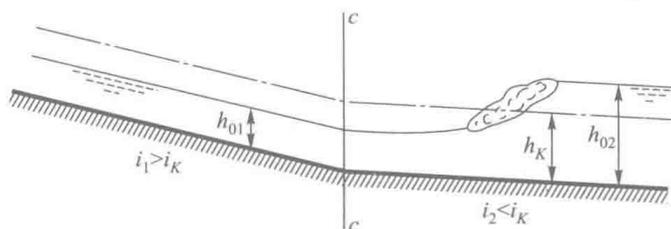


图 6.27

2. 当渠道底坡自缓坡变为陡坡时——如图 6.28 所示，在断面 $c-c$ 的上游，渠道底坡为缓坡，缓坡渠道中的均匀流为缓流，其正常水深大于临界水深；在断面 $c-c$ 的下游，渠道底坡为陡坡，陡坡渠道中的均匀流为急流，其正常水深小于临界水深。在这种情况下，水流会产生水面降落现象，叫作水跌。水流水深自大于临界水深变为小于临界水深，其间必经过临界水深，在实际应用时常假设临界水深发生在 $c-c$ 断面处。水跌的水力计算也将在本书 6.4 节中讨论。

3. 当缓坡渠道末端自由跌落时——如图 6.29 所示，自由跌落是水跌的一个特例，相当于图 6.28 中下游底坡变成铅垂跌坎时的情况，水流以水舌形式自由泻落。因上游渠道底坡为缓坡，缓坡渠道中的均匀流为缓流，其正常水深大于临界水深，下游端自由泻落时，水面必为下降曲线，其极限可以降至临界水深，理论上讲，在坎缘上水深必为临界水深。但事实上坎缘处的水深 h_e 并不等于临界水深，临界水深发生在坎缘上游 l_K 处。这是因为自由跌落属急变流，而临界水深的公式是假设水流为渐变流情况下推导出来的，没有考虑流线弯曲影响。据试验结果 $l_K = (3 \sim 4)h_K$ ， $h_e = (0.67 \sim 0.73)h_K$ 。但在推算跌坎上游水面曲线时，因 l_K 与渠道水面曲线长度相比，其值可以忽略不计，所以在实际应用时仍假设坎缘处的水深为临界水深。

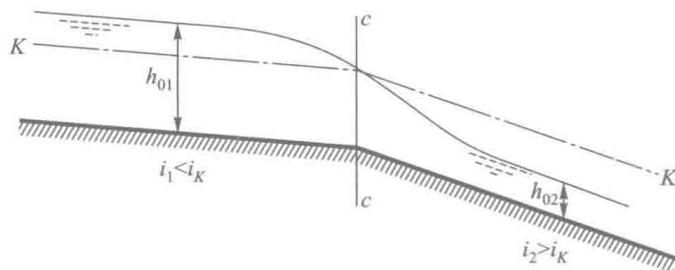


图 6.28

4. 当水流自水库进入陡坡渠道时——如图 6.30 所示，水库中水流为缓

流，而陡坡渠道中均匀流为急流，水流由缓流过渡到急流时，必经过临界水深。实际应用时，常假设临界水深发生在 $c-c$ 断面处。

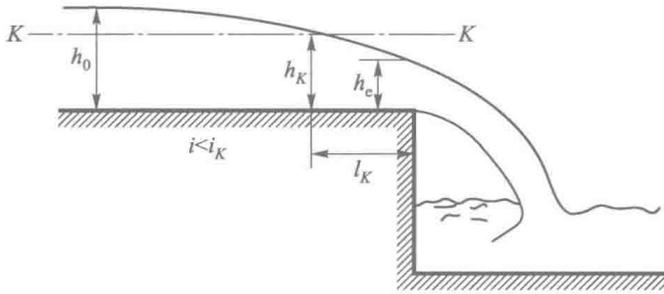


图 6.29

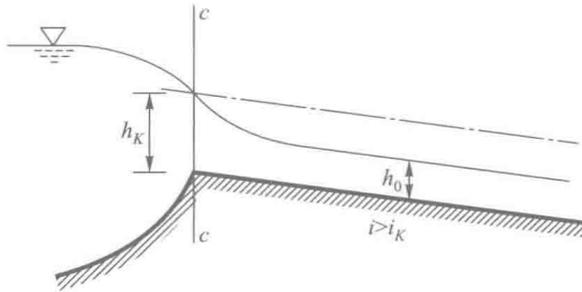


图 6.30

6.3.5 明渠恒定非均匀渐变流的微分方程

在底坡为 i 的明渠恒定非均匀渐变流中（图 6.31），沿水流方向任取一微分流段 ds ，设上游断面水深为 h ，水位为 z ，断面平均流速为 v ，河底高程为 z_0 ；由于非均匀流中各种水力要素沿流程改变，故微分流段下游断面水深为 $h + dh$ ，水位为 $z + dz$ ，平均流速为 $v + dv$ 。因水流为渐变流，可对微分流段的上、下游断面建立能量方程如下：

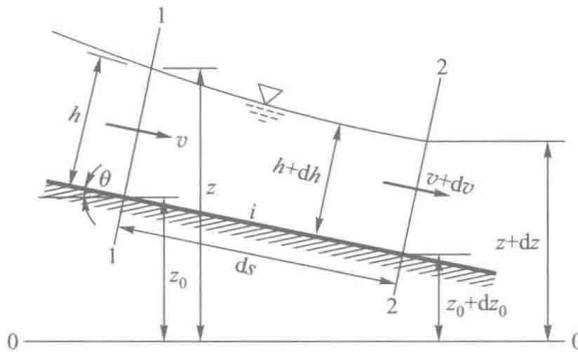


图 6.31

$$z_0 + h \cos \theta + \frac{p_a}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v^2}{2g} = (z_0 - ids) + (h + dh) \cos \theta + \frac{p_a}{\rho g} + \frac{\alpha_2 (v + dv)^2}{2g} + dh_f + dh_j \quad (6.45)$$

令 $\alpha_1 \approx \alpha_2 = \alpha$ ，又因

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2g} (v + dv)^2 &= \frac{\alpha}{2g} [v^2 + 2v dv + (dv)^2] \approx \frac{\alpha}{2g} (v^2 + 2v dv) \\ &= \frac{\alpha v^2}{2g} + d\left(\frac{\alpha v^2}{2g}\right) \end{aligned}$$

将上式代入式 (6.45)，化简得

$$ids = dh \cos \theta + d\left(\frac{\alpha v^2}{2g}\right) + dh_f + dh_j \quad (6.46)$$

式中： $d\left(\frac{\alpha v^2}{2g}\right)$ 表示微分流段内流速水头的增量； dh_f 表示微分流段内的沿程水头损失，目前对非均匀流的沿程水头损失尚无精确的计算方法，仍然近似地采用均匀流公式计算，即令 $dh_f = \frac{Q^2}{K^2} ds$ 或 $dh_f = \frac{v^2}{C^2 R} ds$ ，其中 K ， v ， C ， R 等值一般采用流段上、下游断面的平均值； dh_j 表示微分流段内的局部水头损失，一般令 $dh_j = \zeta d\left(\frac{v^2}{2g}\right)$ ，在流段收缩、扩散或弯曲不大的情况下，局部水头损失较之沿程水头损失小得多，可以忽略不计；但在某些情况下不计局部水头损失会带来较大误差时，就不可忽视。

将 dh_f 和 dh_j 代入式 (6.46) 中，得到

$$ids = dh \cos \theta + (\alpha + \zeta) d\left(\frac{v^2}{2g}\right) + \frac{Q^2}{K^2} ds \quad (6.47)$$

若明渠底坡 i 值小于 $\frac{1}{10}$ ，在实用上一般都采用 $\cos \theta = 1$ ，常用铅垂水深代替垂直于槽底的水深，则上式可写为

$$ids = dh + (\alpha + \zeta) d\left(\frac{v^2}{2g}\right) + \frac{Q^2}{K^2} ds \quad (6.48)$$

式 (6.47) 和式 (6.48) 是明渠恒定非均匀渐变流的基本微分方程。

1. 水深沿流程变化的微分方程

研究明渠非均匀流的重要目的是要探求明渠中水深沿流程的变化规律，为了今后讨论的方便，需将基本微分方程转化为水深沿流程变化关系的形式。

在实用上，因一般明渠底坡较小，现仅讨论 $i < \frac{1}{10}$ ， $\cos \theta \approx 1$ 的情况。

若将式 (6.48) 各项除以 ds 并移项, 可得

$$i - \frac{Q^2}{K^2} = \frac{dh}{ds} + (\alpha + \zeta) \frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2g} \right) \quad (6.49)$$

式中

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2g} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{Q^2}{2gA^2} \right) = -\frac{Q^2}{gA^3} \frac{dA}{ds} \quad (6.50)$$

在一般情况下, 非棱柱体明渠过水断面面积 A 是水深 h 和流程 s 的函数, 即 $A=f(h,s)$, 故

$$\frac{dA}{ds} = \frac{\partial A}{\partial h} \frac{dh}{ds} + \frac{\partial A}{\partial s} \quad (6.51)$$

上式中, 过水断面面积对于水深的偏导数 $\frac{\partial A}{\partial h}$, 等于过水断面的水面宽度 B 。如图 6.32 所示, 当过水断面上水深 h 有一微分增量 dh 时, 过水断面面积的增量为

$$Bdh = \frac{\partial A}{\partial h} dh$$

故

$$\frac{\partial A}{\partial h} = B \quad (6.52)$$

显然, 对于棱柱体明渠 $B = \frac{dA}{dh}$ 。将式 (6.50)、式 (6.51) 和式 (6.52) 代入式 (6.49), 化简整理后可得非棱柱体明渠非均匀渐变流水深沿流程变化的微分方程为

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - \frac{Q^2}{K^2} + (\alpha + \zeta) \frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial s}}{1 - (\alpha + \zeta) \frac{Q^2 B}{gA^3}} \quad (6.53)$$

对于棱柱体明渠, 则 $\frac{\partial A}{\partial s} = 0$; 同时在棱柱体明渠非均匀渐变流中局部水头损失很小, 一般可忽略不计, 取 $\zeta = 0$, 于是上式可简化为

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - \frac{Q^2}{K^2}}{1 - \frac{\alpha Q^2 B}{gA^3}} \quad (6.54)$$

上式主要用于分析棱柱体明渠非均匀渐变流水面线的变化规律。

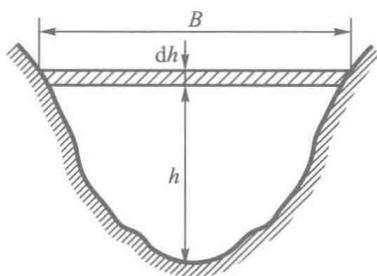


图 6.32

2. 水位沿流程变化的微分方程

在天然河道中,用水位的变化来反映非均匀流变化规律更加方便,所以当应用基本微分方程式探讨天然河道水流问题时,需导出水位沿流程变化的关系式。

由图 6.31 可见, $z = z_0 + h \cos \theta$, 于是

$$dz = dz_0 + \cos \theta \cdot dh$$

又因

$$z_0 - i ds = z_0 + dz_0$$

即

$$dz_0 = -i ds$$

所以

$$dz = -i ds + \cos \theta \cdot dh$$

因而

$$\cos \theta \cdot dh = dz + i ds \quad (6.55)$$

将式 (6.55) 代入基本微分方程 (6.47), 可得非均匀渐变流水位沿流程变化的微分方程式为

$$-\frac{dz}{ds} = (\alpha + \zeta) \frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{Q^2}{K^2} \quad (6.56)$$

式 (6.56) 对棱柱体及非棱柱体明渠都是适用的,但它主要应用于探讨天然河道水流的水位变化规律。

6.3.6 棱柱体明渠中恒定非均匀渐变流水面曲线分析

1. 基本方程

由于明渠非均匀渐变流水面曲线比较复杂,在进行定量计算之前,有必要先对它的形状和特点作一些定性分析。

棱柱体明渠非均匀渐变流的微分方程式 (6.54) 可改写为

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - \frac{Q^2}{K^2}}{1 - Fr^2} = \frac{i - J}{1 - Fr^2} \quad (6.57)$$

式 (6.57) 可用于定性分析棱柱体明渠非均匀渐变流水面线的变化规律。等式右端分子反映的是水流的均匀程度,分母则反映的是水流的急缓程度。

2. 水面线型式

式 (6.57) 表明,水深 h 沿流程 s 的变化与渠道底坡 i 及实际水流的流态 (反映在 Fr 中) 有关,所以对于水面曲线的型式应根据不同的底坡情况、不同流态进行具体分析。为此,首先将明渠按底坡大小分为三种情况:正坡 ($i > 0$),平底 ($i = 0$),逆坡 ($i < 0$)。

对于正坡明渠,根据它和临界底坡作比较,还可进一步区分为缓坡、陡

坡、临界坡三种情况。

在正坡明渠中，水流有可能作均匀流动，因而它存在着正常水深 h_0 。另一方面它也存在着临界水深。对于棱柱体明渠，任何断面临界水深相同，画出各断面临界水深线 $K-K$ ，是平行于渠底的直线。在正坡棱柱体渠道中，究竟临界水深 h_K 和正常水深 h_0 何者为大，则视明渠属于缓坡、陡坡或临界坡而别。图 6.33 乃是三种正坡棱柱体明渠中，正常水深线 $N-N$ 与临界水深线 $K-K$ 的相对位置关系。对于临界底坡明渠，因正常水深 h_0 和临界水深 h_K 相等，故 $N-N$ 线与 $K-K$ 线重合。

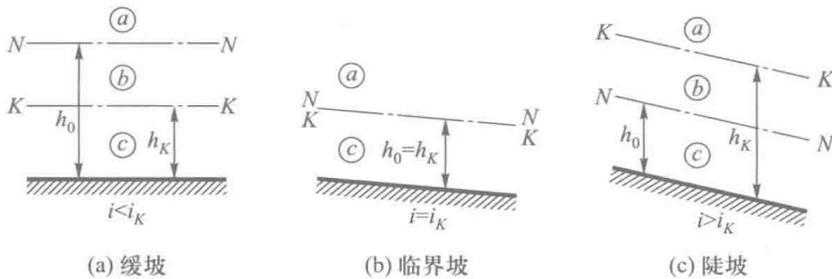


图 6.33

在平底及逆坡棱柱体明渠中，因不可能有均匀流，不存在正常水深 h_0 ，仅存在临界水深，所以只能画出与渠底相平行的临界水深线 $K-K$ 。图 6.34 乃是平底和逆坡棱柱体明渠中 $K-K$ 线情况。

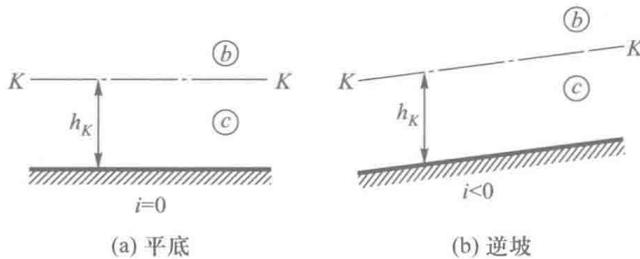


图 6.34

由于明渠中实际水流的水深可能在较大的范围内变化，也就是说它既可能大于临界水深，也可能小于临界水深，对于正坡明渠，它既可能大于正常水深，也可能小于正常水深。为了表征它的特点，可将水流实际可能存在的范围划分为三个区：

(1) a 区

凡实际水深 h 既大于 h_K ，又大于 h_0 即凡是在 $K-K$ 线和 $N-N$ 线二者之上

的范围称为 a 区。

(2) b 区

凡是实际水深 h 介于 h_K 和 h_0 之间的范围称为 b 区。 b 区可能有两种情况： $K-K$ 线在 $N-N$ 线之下（缓坡明渠），或 $K-K$ 线在 $N-N$ 线之上（陡坡明渠），无论哪种情况都属于 b 区。

(3) c 区

凡是实际水深 h 既小于 h_K 又小于 h_0 的区域，即在 $N-N$ 线及 $K-K$ 线二者之下的区域。

对于平底和逆坡棱柱体明渠，因不存在 $N-N$ 线，或者可以设想 $N-N$ 线在无限远处，所以只存在 b 区与 c 区。

由以上分析可知，棱柱体明渠可能有 5 种不同底坡，12 个流区。不同底坡和不同流区的水面曲线的型式是不同的。为了便于分类，将以不同流区和底坡来标志水面曲线的型式。缓坡 $i < i_K$ 为“1”类，陡坡 $i > i_K$ 为“2”类，临界坡 $i = i_K$ 为“3”类，平底 $i = 0$ 为“0”类，逆坡 $i < 0$ 为“'”类，并以 1, 2, 3, 0 和“'”为附标附于 a, b, c 区号上，这样棱柱体明渠中可以有 $a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, c_3; b_0, c_0; b', c'$ 共 12 种水面曲线。

在具体分析每条水面线的变化规律之前，先讨论 $\frac{dh}{ds}$ 可能出现的情况及其所表示的物理意义。

$\frac{dh}{ds} > 0$ ，表示水深沿程增加，水流的水面线为壅水曲线；

$\frac{dh}{ds} < 0$ ，表示水深沿程减小，水流的水面线为降水曲线；

$\frac{dh}{ds} = 0$ ，表示水深沿程不变，水流为均匀流，水面线为正常水深线，即与

$N-N$ 线重合；

$\frac{dh}{ds} \rightarrow 0$ ，表示水深趋近于沿程不变，即水流趋近于均匀流，水面线以 $N-N$

N 线为渐近线；

$\frac{dh}{ds} = i$ ，表示水深沿程增加，其增加率为 i 。可以证明，此时水面线为水平线；

$\frac{dh}{ds} \rightarrow i$ ，表示水深沿程增加，其增加率趋近于 i ，水面线以水平线为渐近线；

$\frac{dh}{ds} \rightarrow -\infty$ ，表示水深沿程减小，其减小率趋近于 ∞ ，水面线趋向于与流向垂直，此时水流已转变为急变流；

$\frac{dh}{ds} \rightarrow +\infty$ ，表示水深沿程增加，其增加率趋近于 ∞ ，水面线趋向于与流向垂直，此时水流也已转变为急变流。

3. 水面线分析

各种水面曲线的定性分析，可以从棱柱体明渠非均匀渐变流的微分方程式(6.57)得出。现以缓坡渠道为例，分析如下：

因为在正坡棱柱体明渠中，水流有可能发生均匀流动，方程式(6.57)中流量可以用均匀流态下的流量 $Q = K_0\sqrt{i}$ 去代换， K_0 表示均匀流正常水深对应的流量模数，因而式(6.57)可变成如下形式：

$$\frac{dh}{ds} = i \frac{1 - \left(\frac{K_0}{K}\right)^2}{1 - Fr^2} \quad (6.58)$$

对缓坡明渠 $i < i_k$ 情况：

(1) 在 a 区

因缓坡明渠 $h_0 > h_k$ ，故 $N-N$ 线在 $K-K$ 线之上， a 区内实际水流的水深 $h > h_0 > h_k$ ，故 $K > K_0$ ，同时因 $h > h_k$ ，水流为缓流， $Fr < 1$ ，由式(6.58)可知 $\frac{dh}{ds} > 0$ ，即水深沿流程增加，水面曲线为壅水曲线，将缓坡上 a 区的水面曲线用代号 a_1 表示，现进一步讨论 a_1 型壅水曲线上下游的变化趋势。

a_1 型壅水曲线的上游端水深最小，若取其极限情况，当 $h \rightarrow h_0$ 时， $K \rightarrow K_0$ ，因 a 区水流为缓流， $Fr < 1$ ，由式(6.58)知 $\frac{dh}{ds} \rightarrow 0$ ，即水深沿流程不变，故上游端当 $h \rightarrow h_0$ 时，水面线以 $N-N$ 线为渐近线。

如果渠道是无限长，下游端水深愈来愈大，其极限情况是 $h \rightarrow \infty$ ，此时 $K \rightarrow \infty$ ，因而 $Fr \rightarrow 0$ ，由式(6.58)可知，此时 $\frac{dh}{ds} \rightarrow i$ ，即水深沿流程的变化率和 i 相等，这意味着水面曲线趋近于水平线，因此 a_1 型壅水曲线的下游端以水平线为渐近线。 a_1 型壅水曲线的典型图像如图6.35a所示。坝上游水库区以及连接两水库的缓坡渠道（若两水库水面均分别在渠道 $N-N$ 线以上）中的水面曲线均是 a_1 型壅水曲线的实例（图6.35b和c）。

(2) 在 b 区

在缓坡渠道的 b 区， $h_k < h < h_0$ ，故 $K < K_0$ ，因缓坡渠道的 b 区 $h > h_k$ ，水

流为缓流, $Fr < 1$, 由式 (6.58) 可知 $\frac{dh}{ds} < 0$, 即水深沿流程减小, 水面曲线为降水曲线, 将缓坡上 b 区的水面曲线用代号 b_1 表示。

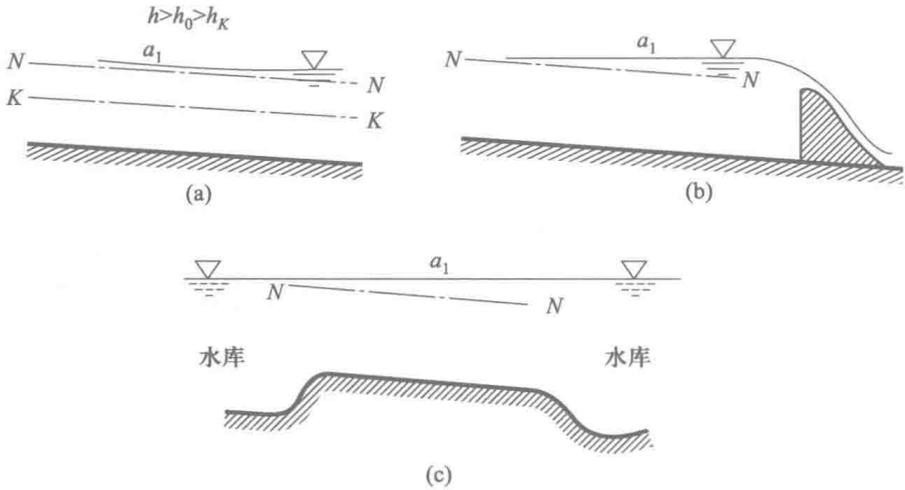


图 6.35 ($i < i_k$)

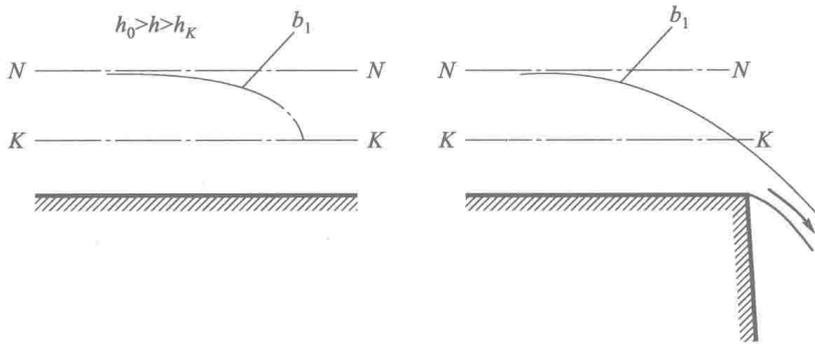
进一步讨论 b_1 型降水曲线上下游的变化趋势。 b_1 型降水曲线的上游端水深最大, 其极限情况是 $h \rightarrow h_0$, 当 $h \rightarrow h_0$ 时, $K \rightarrow K_0$, 由式 (6.58) 知 $\frac{dh}{ds} \rightarrow 0$, 即上游端以 $N-N$ 线为渐近线。

b_1 型曲线的下端水深最小, 其极限情况是 $h \rightarrow h_k$, 当 $h \rightarrow h_k$ 时, $Fr \rightarrow 1$, 而 K 为某一定值, 由式 (6.58) 可知 $\frac{dh}{ds} \rightarrow -\infty$, 即曲线的下端 h 接近 h_k 时, 曲线与 $K-K$ 线有成垂直的趋势。表明在 $h \rightarrow h_k$ 的局部范围内, 水面线曲率已经很大, 不再属于渐变流性质, 因而用现在的渐变流微分方程来讨论已不符合实际。客观事实亦已证明, 当 b_1 型曲线在降落到水深接近临界水深时, 水面线并无与 $K-K$ 线成正交的现象。 b_1 型降水曲线的典型图像如图 6.36 所示。当跌水上游为缓坡渠道时, 渠中水面曲线乃是 b_1 型降水曲线的实例。

(3) 在 c 区

在缓坡渠道的 c 区, 实际水深 $h < h_k < h_0$, 故 $K < K_0$, 且因水流为急流 $Fr > 1$, 由式 (6.58) 可知, 此时 $\frac{dh}{ds} > 0$, 水深沿流程增加, 水面线为壅水曲线, 将缓坡上 c 区的水面线用代号 c_1 表示。

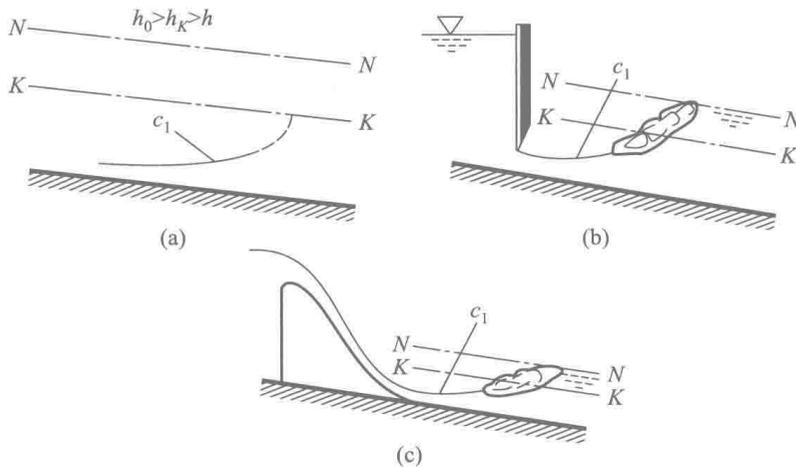
进一步讨论 c_1 型壅水曲线上下游的变化趋势。 c_1 型壅水曲线的下游端, 其水深增大的极限情况是达到 h_k , 当 $h \rightarrow h_k$ 时, $Fr \rightarrow 1$, 由式 (6.58) 可知,

图 6.36 ($i < i_k$)

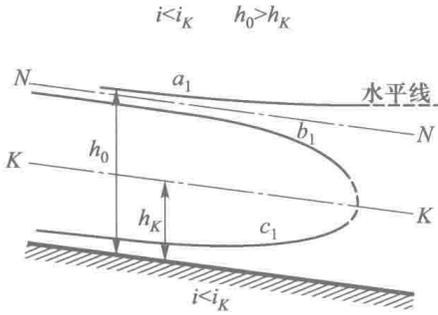
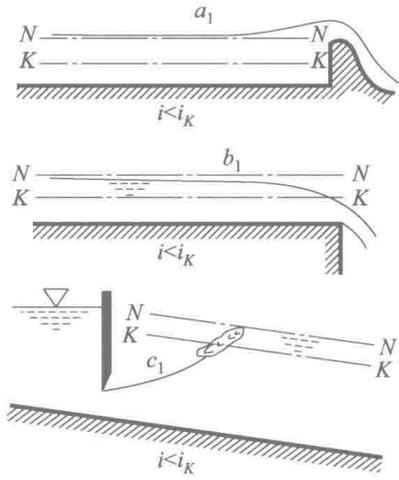
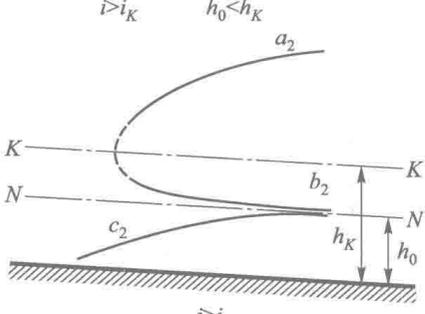
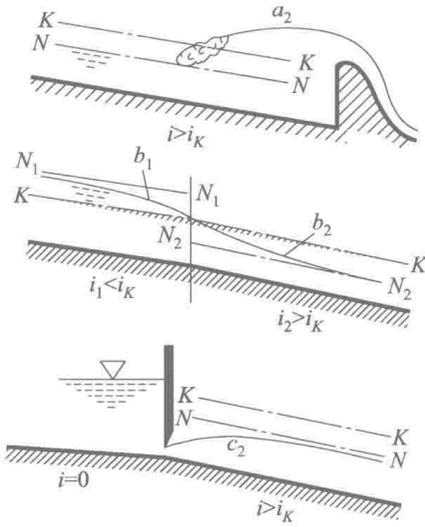
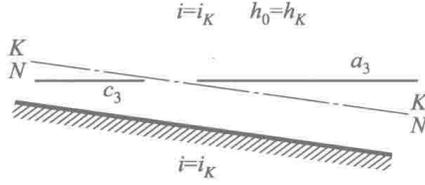
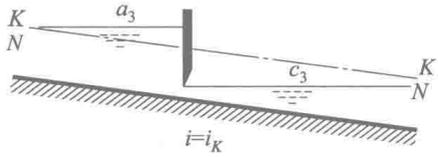
此时 $\frac{dh}{ds} \rightarrow \infty$ ，即曲线有与 $K-K$ 线成垂直的趋势。已如前面所指出，实际水流中不会发生此种现象。

c_1 型曲线的上端水深最小。但是明渠中只要有流量通过，水深就不会为零，因此没有必要讨论 $h \rightarrow 0$ 的趋势，上端的最小水深常常是受来流条件所控制。

c_1 型曲线的典型图像如图 6.37a 所示。闸下游，滚水坝下游渠道为缓坡时常有可能发生 c_1 型壅水曲线（图 6.37b 和 c）。

图 6.37 ($i < i_k$)

对于陡坡、临界坡、平底以及逆坡棱柱体明渠恒定非均匀渐变流的水面曲线型式，可采用类似方法分析，这里不再一一进行讨论。各类水面曲线的型式及实例列于图 6.38 中供参考。

水面曲线类型	实 例
<p>$i < i_K$ $h_0 > h_K$</p>  <p>水平线</p>	
<p>$i > i_K$ $h_0 < h_K$</p> 	
<p>$i = i_K$ $h_0 = h_K$</p> 	

续表

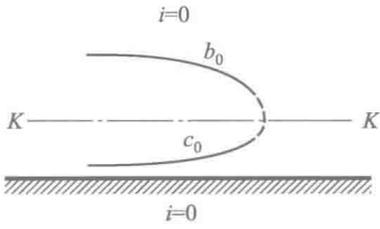
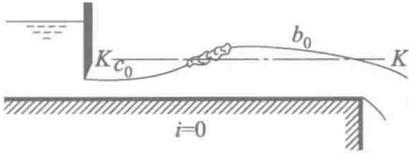
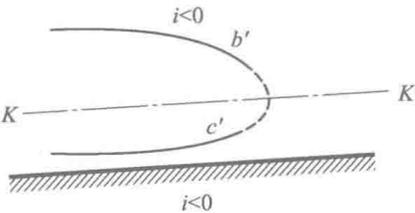
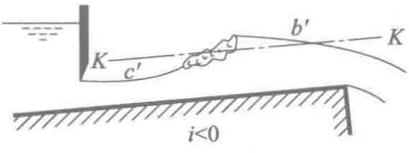
水面曲线类型	实 例
	
	

图 6.38

例 6.11 试讨论分析图 6.39 所示两段断面尺寸及糙率相同的长直棱柱体明渠，由于底坡变化所引起的渠中非均匀流水面变化形式。已知上游及下游渠道底坡均为缓坡，但 $i_2 > i_1$ 。

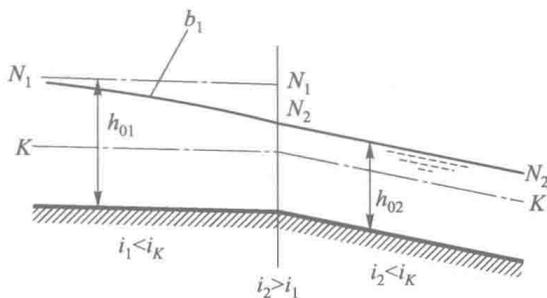


图 6.39

解：根据题意，上、下游渠道均为断面尺寸和糙率相同的长直棱柱体明渠，由于有坡度的变化，将在底坡转变断面上游或下游（或者上、下游同时）相当长范围内引起非均匀流动。

为分析渠中水面变化，首先分别画出上、下游渠道的 $K-K$ 线及 $N-N$ 线。由于上、下游渠道断面尺寸相同，故两段渠道的临界水深均相等。而上、下游渠道底坡不等，故正常水深则不等，因 $i_1 < i_2$ ，故 $h_{01} > h_{02}$ ，下游渠道的 $N-N$ 线低于上游渠道的 $N-N$ 线。

因渠道很长,在上游无限远处应为均匀流,其水深为正常水深 h_{01} ;下游无限远处亦为均匀流,其水深为正常水深 h_{02} 。

由上游较大的水深 h_{01} 要转变到下游较小的水深 h_{02} ,中间必经历一段降落的过程。水面降落有三种可能:

- (1) 上游渠中不降,全在下游渠中降落;
- (2) 完全在上游渠中降落,下游渠中不降落;
- (3) 在上、下游渠中分别都降落一部分。

在上述三种可能情况中,若按照第一种或第三种方式降落,那么必然会出现下游渠道中 a 区发生降水曲线的情况。前面已经论证,缓坡 a 区只能存在的是壅水曲线,所以第一、第三两种降落方式不能成立,唯一合理的方式是第二种,即降水曲线全部发生在上游渠道中,由上游很远处趋近于 h_{01} 的地方,逐渐下降至分界面处水深达到 h_{02} ,而下游渠道保持水深为 h_{02} 的均匀流,所以上游渠道水面曲线为 b_1 型降水曲线(图 6.39)。

4. 水面线的变化规律

综合分析图 6.38 中棱柱体明渠恒定非均匀渐变流的 12 种水面曲线,可以得出以下规律:

- (1) 所有 a 、 c 区水面线均为壅水曲线,但 a_3 、 c_3 水面线为水平线。
- (2) 所有 b 区水面线均为降水曲线,若有 $N-N$ 线时,以 $N-N$ 线为渐近线,且与 $K-K$ 线呈正交趋势。
- (3) 每个区域有且仅有一种形式确定的水面线。
- (4) 当渠道为顺坡且很长时,在扰动影响不到的区域水流保持为均匀流,水深保持正常水深,水面线为 $N-N$ 线。
- (5) 水流从缓流过渡到急流,水面线可平滑地通过临界水深,且临界水深发生的位置一般在坡度由缓变陡的连接断面;水流由急流过渡到缓流,除临界坡渠道外,均发生水跃。

6.3.7 明渠恒定非均匀渐变流的水力计算

1. 流量的计算

在 6.3.5 节中曾推出用水位表示的明渠恒定非均匀渐变流的基本微分方程式 (6.56),据此可以根据已知的水面线、断面尺寸和底坡等,来推算流量。

将式 (6.56) 改写成差分方程,有关的变量用流段平均要素代替,于是得到

$$-\frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{(\alpha + \zeta) Q^2}{2g \Delta s} \Delta \left(\frac{1}{A^2} \right) + \frac{Q^2}{K^2} \quad (6.59)$$

从上式中得出流量为

$$Q = \sqrt{\frac{z_u - z_d}{\frac{\alpha + \zeta}{2g} \left(\frac{1}{A_d^2} - \frac{1}{A_u^2} \right) + \frac{\Delta s}{K^2}}} \quad (6.60)$$

式中： z_u 为上游断面水位； z_d 为下游断面水位； A_u 为上游过水断面面积； A_d 为下游过水断面面积。

水文调查中根据洪水痕迹来估算洪峰流量即采用式 (6.60)。

2. 粗糙系数的计算

在 6.2.2 节中曾介绍过用明渠均匀流的方法计算明渠粗糙系数，但对于具有显著非均匀特征的水流，必须按照非均匀流来处理。采用曼宁公式 $C = \frac{1}{n}R^{1/6}$ ，由公式 (6.59) 整理得到

$$n = \frac{\overline{AR}^{2/3}}{Q} \left[\frac{z_u - z_d}{\Delta s} - (\alpha + \zeta) \frac{Q^2}{2g\Delta s} \left(\frac{1}{A_d^2} - \frac{1}{A_u^2} \right) \right]^{1/2} \quad (6.61)$$

例 6.12 某河流经过洪水调查找到历史上某次洪水的若干痕迹，测得有关资料列于下表中。河段上、下游断面间距 Δs 为 183 m，水位落差 Δz 为 2.59 m，横断面如图 6.40 所示。

断面	位置	粗糙系数 n	面积 A/m^2	水力半径 R/m	$R^{2/3}/\text{m}^{2/3}$	$K = \frac{1}{n}AR^{2/3}/(\text{m}^3/\text{s})$	$\sum K/(\text{m}^3/\text{s})$	$\bar{K} = \frac{K_u + K_d}{2}/(\text{m}^3/\text{s})$
上断面	左滩	0.07	105.0	0.84	0.89	1 330		
	主槽	0.05	70.0	2.06	1.62	2 270	5 370	
	右滩	0.07	108.0	1.24	1.15	1 770		6 070
下断面	左滩	0.07	98.0	0.75	0.83	1 160		
	主槽	0.05	90.0	2.19	1.63	3 030	6 770	
	右滩	0.07	147.0	1.37	1.23	2 580		

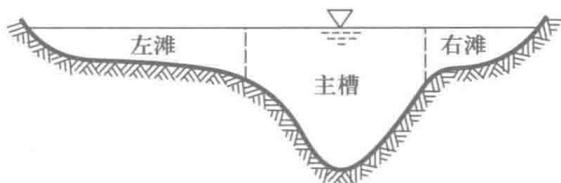


图 6.40

将表中有关数值代入式 (6.60), 不计局部损失, 则

$$Q = \left[\frac{2.59}{\frac{1}{19.6} \left(\frac{1}{335^2} - \frac{1}{283^2} \right) + \frac{183}{6070^2}} \right]^{1/2} \text{m}^3/\text{s} = 735.8 \text{m}^3/\text{s}$$

此次洪水的洪峰流量为 $735.8 \text{m}^3/\text{s}$ 。

例 6.13 某河段长 128m , 曾进行水力要素及河道断面的实测, 当河道中流量为 $1620 \text{m}^3/\text{s}$ 时, 河段有关资料列于下表中。若不计局部损失, 试计算该河段粗糙系数。

断面	水位 z/m	过水断面面积 A/m^2	水面宽度 B/m	平均水深 \bar{h}/m	水力半径 R/m
$u-u$	947.7	524.0	119.5	4.38	4.05
$d-d$	946.5	429.0	104.0	4.12	3.50
		$\bar{A} = 476.5$			$\bar{R} = 3.78$

将表中有关数值代入式 (6.61) 中, 可求得河段的粗糙系数为

$$n = \frac{476.5 \times 3.78^{2/3}}{1620} \left[\frac{1.2}{128} - \frac{1620^2}{128 \times 19.6} \left(\frac{1}{429^2} - \frac{1}{524^2} \right) \right]^{1/2}$$

$$= 0.0618$$

3. 水面曲线计算的逐段试算法

在对棱柱体明渠非均匀渐变流水面曲线型式作了定性分析之后, 理应将基本微分方程积分, 以便对水面曲线进行定量计算。但是实践证明, 将基本微分方程进行普遍积分非常困难, 常常需要引进一些近似的假定。所以本书着重介绍简明实用的逐段试算法, 这种方法不受明渠形式的限制, 对棱柱体及非棱柱体明渠均可适用。

(1) 基本计算公式

在 6.3.5 节中曾导出明渠恒定非均匀渐变流的基本微分方程 [即式 (6.48)] 为

$$i ds = dh + (\alpha + \zeta) d\left(\frac{v^2}{2g}\right) + \frac{Q^2}{K^2} ds$$

因渐变流中局部损失很小, 可以忽略, 即取 $\zeta = 0$, 并令 α 为 1, 上式可改写为

$$d\left(h + \frac{v^2}{2g}\right) = \left(i - \frac{Q^2}{K^2}\right) ds$$

或

$$\frac{dE_s}{ds} = i - \frac{Q^2}{K^2} = i - J \quad (6.62)$$

式中: E_s 为断面比能, $E_s = h + \frac{v^2}{2g} = h + \frac{Q^2}{2gA^2}$; $K = AC\sqrt{R}$; $J = \frac{Q^2}{K^2} = \frac{v^2}{C^2R}$ 。

现将式 (6.62) 微分方程写为差分方程。针对一短的 Δs 流段, 把水力坡度 J 用流段内平均水力坡度 \bar{J} 代替, 则有

$$\Delta s = \frac{\Delta E_s}{i - \bar{J}} = \frac{E_{sd} - E_{su}}{i - \bar{J}} \quad (6.63)$$

式 (6.63) 乃是逐段试算法计算水面曲线的基本公式。上式中 ΔE_s 为流段的两岸断面上断面比能差值, E_{sd} , E_{su} 分别表示 Δs 流段的下游及上游断面的断面比能, 流段的平均水力坡度 \bar{J} 一般采用:

$$\bar{J} = \frac{1}{2}(J_u + J_d) \quad (6.64)$$

或者

$$\bar{J} = \frac{Q^2}{\bar{K}^2} \quad (6.65)$$

平均值 \bar{K} 或 \bar{K}^2 可用以下三种方法之一计算:

$$\bar{K} = \bar{A}\bar{C}\sqrt{\bar{R}} \quad (6.66)$$

$$\bar{K}^2 = \frac{1}{2}(K_u^2 + K_d^2) \quad (6.67)$$

$$\frac{1}{\bar{K}^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{K_u^2} + \frac{1}{K_d^2}\right) \quad (6.68)$$

(2) 计算方法

用逐段试算法计算水面曲线的基本方法, 是先把明渠划分为若干流段, 然后对每一流段 Δs 应用公式 (6.63), 由流段的已知断面求未知断面, 然后逐段推算。

根据不同情况, 实际计算可能有两种类型:

① 已知流段两端的水深, 求流段的距离 Δs 。

这种类型计算, 对棱柱体渠道, 可以将已知参数代入式 (6.63), 直接解出 Δs 值, 不需要试算。如果计算任务是为了绘制棱柱体明渠的水面曲线, 则已知一端水深 h_1 , 可根据水面曲线的变化趋势, 假定另一端水深 h_2 , 从而求出其 Δs , 根据逐段计算的结果便可将水面曲线绘出。

但对非棱柱体明渠则不可能使用这种方法, 只能采用下述试算法。

② 已知流段一端的水深和流段长 Δs , 求另一端断面水深。

计算时可假定另一端断面水深, 从而按照式 (6.63) 算得一个 Δs , 若此

Δs 与已知 Δs 相等则假定水深即为所求, 若不等, 需重新假设, 直至算得的 Δs 与已知的 Δs 相等为止。

分段试算法, 是以差分方程代替微分方程, 在 Δs 流段内把断面比能 E_s 及水力坡度 J 视为线性变化, 因而计算的精度和流段的长度有关, 一般流段不宜取得太长。分段愈多其精度愈高。

例 6.14 一长直棱柱体明渠, 底宽 b 为 10 m, m 为 1.5, n 为 0.022, i 为 0.0009, 当通过流量 Q 为 $45 \text{ m}^3/\text{s}$ 时, 渠道末端水深 h 为 3.4 m。试计算渠道中的水面曲线。

解: (1) 由于渠道底坡大于零, 应首先判别渠道是缓坡或是陡坡, 水面曲线属于哪种类型。

本题条件与例 6.10 相同, 由例 6.10 计算已知 $h_k = 1.2 \text{ m}$, 再用迭代法计算均匀流水深 h_0 。设: $h_1 = \left(\frac{nQ}{b\sqrt{i}} \right)^{3/5} = 2.047 \text{ m}$ 代入迭代公式得

$$h_2 = \left(\frac{nQ}{\sqrt{i}} \right)^{3/5} \frac{(b + 2h_1 \sqrt{1+m^2})^{2/5}}{b + mh_1} = 1.954 \text{ m}$$

将 $h_2 = 1.954 \text{ m}$ 作为第二次迭代初始值代入迭代公式。

得 $h_3 = 1.959 \text{ m}$, 将其作为第三次迭代初始值代入迭代公式。

得 $h_4 = 1.959 \text{ m}$, 因 h_3 与 h_4 相逼近, 停止迭代, 故正常水深 h_0 为 1.96 m。

因 $h_0 > h_k$, 故渠道属于缓坡。又因下游渠道末端水深大于正常水深, 所以水面线一定在 a 区, 水面线为 a_1 型壅水曲线。 a_1 型水面曲线上游端以正常水深线为渐近线, 取曲线上游端水深比正常水深稍大一点, 即

$$h = h_0(1 + 1\%) = 1.96 \text{ m} \times (1 + 0.01) = 1.98 \text{ m}$$

(2) 计算水面曲线

首先列出各计算公式

$$\Delta s = \frac{E_{sd} - E_{su}}{i - \frac{v^2}{C^2 R}} = \frac{\Delta E_s}{i - J}$$

式中

$$E_s = h + \frac{\alpha v^2}{2g} = h + \frac{\alpha}{2g} \left(\frac{Q}{A} \right)^2$$

$$A = (b + mh)h$$

$$\chi = b + 2\sqrt{1+m^2}h$$

$$R = \frac{A}{\chi}$$

$$CR^{1/2} = \frac{1}{n} R^{1/6} R^{1/2} = \frac{1}{n} R^{2/3}$$

今以 $h_1 = 3.4 \text{ m}$, $h_2 = 3.2 \text{ m}$, 求两断面间之距离 Δs 。将有关已知数值代入上列各公式中, 分别求得

$$A_1 = (10 \text{ m} + 1.5 \times 3.4 \text{ m}) \times 3.4 \text{ m} = 51.34 \text{ m}^2$$

$$A_2 = (10 \text{ m} + 1.5 \times 3.2 \text{ m}) \times 3.2 \text{ m} = 47.36 \text{ m}^2$$

$$\chi_1 = 10 \text{ m} + 2 \times \sqrt{1 + 1.5^2} \times 3.4 \text{ m} = 22.26 \text{ m}$$

$$\chi_2 = 10 \text{ m} + 2 \times \sqrt{1 + 1.5^2} \times 3.2 \text{ m} = 21.54 \text{ m}$$

$$R_1 = \frac{51.34}{22.26} \text{ m} = 2.306 \text{ m}$$

$$R_2 = \frac{47.36}{21.54} \text{ m} = 2.199 \text{ m}$$

$$C_1 R_1^{1/2} = \frac{1}{n} R_1^{2/3} = \frac{1}{0.022} \times 2.306^{2/3} \text{ m/s} = 79.34 \text{ m/s}$$

$$C_2 R_2^{1/2} = \frac{1}{0.022} \times 2.199^{2/3} \text{ m/s} = 76.9 \text{ m/s}$$

$$v_1 = \frac{45.0}{51.34} \text{ m/s} = 0.8765 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{45.0}{47.36} \text{ m/s} = 0.9502 \text{ m/s}$$

$$\frac{v_1^2}{C_1^2 R_1} = \left(\frac{0.8765}{79.34} \right)^2 = 1.220 \times 10^{-4}$$

$$\frac{v_2^2}{C_2^2 R_2} = \left(\frac{0.9502}{76.9} \right)^2 = 1.528 \times 10^{-4}$$

$$\bar{J} = \frac{1}{2} \left(\frac{v_1^2}{C_1^2 R_1} + \frac{v_2^2}{C_2^2 R_2} \right) = \frac{1}{2} \times (1.220 + 1.528) \times 10^{-4} = 1.374 \times 10^{-4}$$

$$\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = \frac{1 \times 0.8765^2}{2 \times 9.8} \text{ m} = 0.0392 \text{ m}$$

$$\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} = \frac{1 \times 0.9502^2}{2 \times 9.8} \text{ m} = 0.0461 \text{ m}$$

$$\Delta s = \frac{3.4 + 0.0392 - (3.2 + 0.0461)}{(9 - 1.374) \times 10^{-4}} \text{ m} = 253.2 \text{ m}$$

其余各流段的计算完全相同, 为清晰起见, 采用列表法进行, 情况如下表所示。

(3) 根据表中的数值, 绘制水面曲线, 见图 6.41。

h/m	A/m^2	χ/m	R/m	$\frac{1}{n}R^{2/3}/(m/s)$	$v/(m/s)$	$J = \frac{v^2}{C^2 R}/(10^{-4})$	$\bar{J}/(10^{-4})$	$\frac{i - \bar{J}}{(10^{-4})}$	$\frac{cv^2}{2g}/m$	E_s/m	$\Delta E_s/m$	$\Delta s/m$	$\sum \Delta s/m$
3.4	51.34	22.26	2.306	79.34	0.8765	1.220	1.374	7.626	0.0392	3.4392	0.1931	253.2	0
3.2	47.36	21.54	2.199	76.90	0.9502	1.528	1.733	7.627	0.0461	3.2461	0.1916	251.2	253.2
3.0	43.50	20.82	2.089	74.28	1.034	1.938	2.218	6.782	0.0545	3.0545	0.1891	278.8	504.4
2.8	39.76	20.10	1.978	71.62	1.132	2.498	2.883	6.117	0.0654	2.8654	0.1863	304.6	783.2
2.6	36.14	19.38	1.865	68.87	1.245	3.268	3.816	5.184	0.0791	2.6791	0.1821	351.3	1087.8
2.4	32.64	18.65	1.750	66.01	1.379	4.364	5.161	3.839	0.0970	2.4970	0.1769	460.8	1439.1
2.2	29.26	17.93	1.632	63.01	1.538	5.958	6.493	2.507	0.1201	2.3201	0.0847	337.9	1899.9
2.1	27.62	17.57	1.572	61.45	1.629	7.027	7.847	1.153	0.1354	2.2354	0.0988	856.9	2237.8
1.98	25.68	17.14	1.498	59.51	1.752	8.667			0.1566	2.1366			3094.7

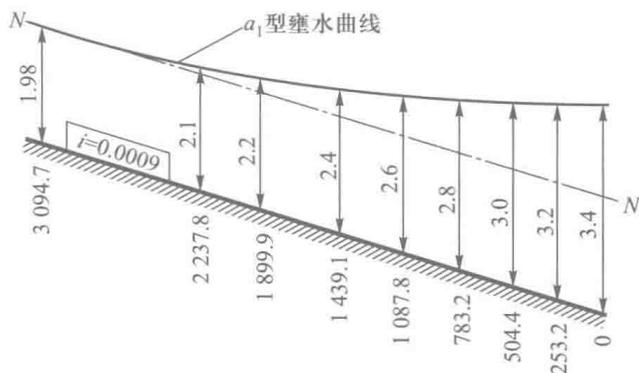


图 6.41

例 6.15 某一边墙成直线收缩的矩形渠道 (图 6.42), 渠长 60 m, 进口宽 b_1 为 8 m, 出口宽 b_2 为 4 m, 渠底为反坡, i 为 -0.001 , 粗糙系数 n 为 0.014, 当 Q 为 $18 \text{ m}^3/\text{s}$ 时, 进口水深 h_1 为 2 m。要求计算中间断面及出口断面水深。

解: 渠道宽度逐渐收缩, 故为非棱柱体明渠, 求指定断面的水深, 必须采用试算法。

仍引用公式 (6.63) 来计算

$$\Delta s = \frac{\Delta E_s}{i - \bar{J}} = \frac{E_{sd} - E_{su}}{i - \bar{J}}$$

(1) 计算中间断面的水深

已知中间断面宽度 b 为 6 m, 今假定其水深 h 为 1.8 m, 按下列各式计算有关水力要素:

$$A = bh = 6 \text{ m} \times 1.8 \text{ m} = 10.8 \text{ m}^2$$

$$\chi = b + 2h = 6 \text{ m} + 2 \times 1.8 \text{ m} = 9.6 \text{ m}$$

$$R = \frac{A}{\chi} = \frac{10.8}{9.6} \text{ m} = 1.125 \text{ m}$$

$$CR^{1/2} = \frac{1}{n} R^{2/3} = \frac{1}{0.014} \times 1.125^{2/3} \text{ m/s} = 77.28 \text{ m/s}$$

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{18}{10.8} \text{ m/s} = 1.667 \text{ m/s}$$

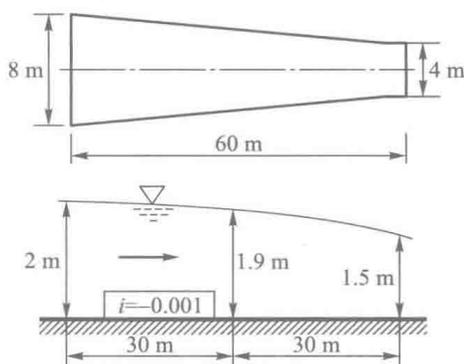


图 6.42

$$J = \frac{v^2}{C^2 R} = \left(\frac{1.667}{77.28} \right)^2 = 4.653 \times 10^{-4}$$

$$\frac{\alpha v^2}{2g} = \frac{1 \times 1.667^2}{2 \times 9.8} \text{ m} = 0.142 \text{ m}$$

将以上各值列于下表中。

又因进口断面宽度及水深已知，按以上公式计算进口断面的各水流要素，将计算结果列于下表中。

根据表中有关数值，代入式 (6.63) 中，算出 Δs 为

$$\Delta s = \frac{\Delta E_s}{i - \bar{J}} = \frac{1.942 - 2.065}{-(10 + 3.173) \times 10^{-4}} = 93.4 \text{ m}$$

计算得到 Δs 为 93.4 m，与实际长度 30 m 相差甚远，说明前面所假设之水深 1.8 m 与实际不符合，必须重新假设，故又假设中间断面水深为 1.9 m，按以上程序计算，得到 Δs 为 29.58 m，与实际长度非常接近，所以可认为中间断面水深为 1.9 m。

(2) 出口断面水深的计算与前面的计算方法完全一样，不再赘述。从下表中看出，出口水深应为 1.5 m。

断面编号	进口	中		出口	
b/m	8	6		4	
h/m	2	1.8	1.9	1.6	1.5
A/m^2	16.0	10.8	11.4	6.4	6.0
χ/m	12.0	9.6	9.8	7.2	7.0
R/m	1.333	1.125	1.163	0.889	0.857
$CR^{1/2}/(\text{m/s})$	86.42	77.28	78.99	66.06	64.35
$v/(\text{m/s})$	1.131	1.667	1.579	2.813	3.000
$\bar{J} = \frac{v^2}{C^2 R} / 10^{-4}$	1.691	4.653	3.996	18.11	21.73
$\bar{J} / 10^{-4}$		3.172	2.844	11.04	12.86
$(i - \bar{J}) / 10^{-4}$		-13.172	-12.84	-21.04	-22.86
$\frac{\alpha v^2}{2g} / \text{m}$	0.0646	0.1418	0.1270	0.4037	0.4592
E_s / m	2.065	1.942	2.027	2.004	1.959
$\Delta E_s / \text{m}$		-0.123	-0.038	-0.023	-0.068
$\Delta s / \text{m}$		93.4	29.6	10.9	29.8

6.3.8 河道水面线的计算

河道的过水断面一般极不规则,粗糙系数及底坡沿流程都有变化,可视为非棱柱体明渠,采用前面已讲过的非棱柱体明渠的计算方法来计算河道水面曲线。但是由于河道断面形状极不规则,有时河床还不断发生冲淤变化,人们对河道水情变化的观测,首先观测到的是水位的变化,因此研究河道水面曲线时主要研究水位的变化,这样河道水面曲线的计算便自成系统。虽然它与人工明渠水面曲线计算的具体作法不同,但并没有本质上的差别。

在计算河道水面曲线之前,先要收集有关水文、泥沙及河道地形等资料,如河道粗糙系数、河道纵横剖面图等。然后根据河道地形及纵横剖面把河道划分成若干计算流段,划分计算流段时应注意以下几个方面:

1. 要求每个计算流段内,过水断面形状、尺寸以及粗糙系数、底坡等变化都不太大。

2. 在一个计算流段内,上、下游断面水位差 Δz 不能过大,一般 Δz 对平原河流取 $0.2 \sim 1.0 \text{ m}$,山区河流取 $1.0 \sim 3.0 \text{ m}$ 。

3. 每个计算流段内没有支流流入或流出。若河道有支流存在,必须把支流放在计算流段的入口或出口,对加入的支流最好放在流段的进口附近,流出的支流放在流段的出口。由于支流的存在,将引起下游河道流量的改变,在计算中必须充分注意,并正确估计入流量或出流量的数值。

一般天然河流下游多为平原河道,流段可划分得长一些,上游多为山区河道,流段应划分得短一些。

关于河道的局部水头损失,一般对逐渐收缩的流段,局部损失很小,可以忽略不计。对扩散的河段,局部损失系数可取 $(-0.3 \sim -1.0)$,视扩散的急剧程度不同来选择。扩散角(指两岸的交角)较小者可取 -0.3 ,突然扩散可取 -1 。这里取局部损失系数为负值,并不意味着水头损失为负值。因河道非均匀流的局部水头损失表达式为 $dh_j = \zeta d\left(\frac{v^2}{2g}\right)$,对扩散河道,因 $d\left(\frac{v^2}{2g}\right)$ 为负值,故必须使 ζ 为负才能保持局部水头损失为正值。

河道水面曲线的计算可采用方程(6.56),计算方法仍可采用逐段试算法。

在计算之前把河道划分成若干计算流段,同时把微分方程式改写成差分方程,即认为在有限长的计算河段内,一切可变水流要素均成线性变化。方

程式 (6.56) 可写为

$$-\Delta z = (\alpha + \zeta) \frac{Q^2}{2g} \Delta \left(\frac{1}{A^2} \right) + \frac{Q^2}{K^2} \Delta s \quad (6.69)$$

式中

$$-\Delta z = z_u - z_d$$

$$\Delta \left(\frac{1}{A^2} \right) = \frac{1}{A_d^2} - \frac{1}{A_u^2}$$

采用

$$\frac{1}{K^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{K_u^2} + \frac{1}{K_d^2} \right)$$

将以上各值代入式 (6.69) 中, 并把方程中同一断面的水力要素列在等式的同一端, 得到

$$\begin{aligned} z_u + (\alpha + \zeta) \frac{Q^2}{2gA_u^2} - \frac{\Delta s Q^2}{2K_u^2} \\ = z_d + (\alpha + \zeta) \frac{Q^2}{2gA_d^2} + \frac{\Delta s Q^2}{2K_d^2} \end{aligned} \quad (6.70)$$

方程式 (6.70) 中凡具有 u 与 d 脚标者分别表示流段上游及下游断面的水力要素。方程的两端各是上游水位和下游水位的函数。令

$$\left. \begin{aligned} f(z_u) &= z_u + (\alpha + \zeta) \frac{Q^2}{2gA_u^2} - \frac{\Delta s Q^2}{2K_u^2} \\ \varphi(z_d) &= z_d + (\alpha + \zeta) \frac{Q^2}{2gA_d^2} + \frac{\Delta s Q^2}{2K_d^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.71)$$

试算法的步骤如下:

1. 若已知下游断面的水位 z_d (反之若已知上游断面水位 z_u , 其方法完全相同), 按式 (6.71) 求出函数 $\varphi(z_d)$ 值。

2. 假定若干上游断面水位 z_u , 按式 (6.71) 的第一式可算出相应的若干 $f(z_u)$ 值, 并绘制 $z_u - f(z_u)$ 关系曲线, 如图 6.43 所示。

在图 6.43 的横坐标上截取一段 $f(z_u) = \varphi(z_d)$ 值, 向曲线作铅垂线交曲线于 A 点, A 点之纵坐标值即为所求之上游断面水位 z_u 。该水位对另一个流段来讲, 又是下游水位。循着上述步骤, 可依次求出上游各断面的水位, 从而得到全河道的水面曲线。

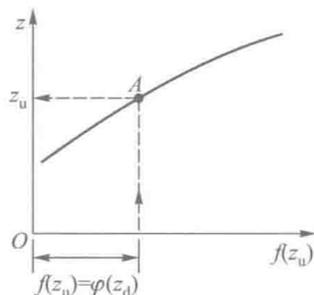


图 6.43

6.4 明渠急变流

如前所述,当明渠横断面的几何形状或尺寸沿流程改变,粗糙度或底坡沿流程改变,或者在明渠中修建人工建筑物,会使明渠水流发生非均匀流动。在明渠非均匀流中,如果在一定长度的流段内,流线发生急剧弯曲,流速及压强产生明显变化,这种流态称为明渠恒定非均匀急变流,简称明渠急变流。

与前述的明渠非均匀渐变流相比,明渠急变流有以下特点:

(1) 流线间夹角大,曲率半径小,过水断面上压强不服从静水压强分布规律。

(2) 由于一般产生在相对短的流段内,沿程阻力对明渠急变流总水头的影响较小,通常可以略去。

(3) 明渠急变流流动特性主要决定于边界条件变化和水流流态。相同的边界条件下,水流为急流或缓流将发生不同类型的明渠急变流。

(4) 明渠急变流流段,紊动剧烈,断面流速分布发生明显变化,断面动能修正系数 α 及动量修正系数 β 与渐变流的差别较大,一般不能假定为1。

综上所述,由于明渠急变流流态复杂,至今尚无成熟的理论分析方法。目前常应用动量定理按总流来分析流动的总变化,同时,还借助实验来确定一些必要的经验数据。

明渠急变流的类型很多,本节只讨论两种简单、典型的明渠急变流:水跃和跌水。

6.4.1 水跃现象

从6.3节得知,当明渠中的水流由急流状态过渡到缓流状态时,会产生一种水面突然跃起的特殊的局部水力现象,即在较短的渠段内水深从小于临界水深急剧地跃升到大于临界水深。这种特殊的局部水力现象称为水跃。在闸、坝以及陡槽等泄水建筑物的下游,一般常有水跃产生。

水跃的上部有一个作剧烈回旋运动的表面旋滚,翻腾滚动,掺入大量空气。旋滚之下则是急剧扩散的主流(图6.44)。

表面旋滚起点的过水断面1-1(或水面开始上升处的过水断面)称为跃前断面,该断面处的水深 h_1 叫跃前水深。表面旋滚末端的过水断面2-2称为跃后断面,该断面处的水深 h_2 叫跃后水深。跃后水深与跃前水深之差,即 $h_2 - h_1 = a$,称为跃高。跃前断面至跃后断面的距离则称为跃长 L_j 。

在跃前和跃后断面之间的水跃段内,水流运动要素急剧变化,水流紊动、

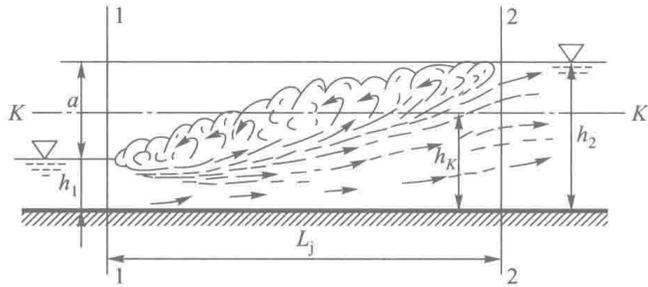


图 6.44

剪切强烈，旋滚与主流间动量不断交换，致使水跃段内有较大的能量损失。因此，常利用水跃来消除泄水建筑物下游高速水流中的巨大动能^①。

由观测得知，水跃的上部并非在任何情况下均有旋滚存在。水跃的形式主要与跃前断面的弗劳德数 Fr_1 有关。当 $1 < Fr_1 < 1.7$ 时，水跃表面会形成一系列起伏不大的单波，波峰沿流降低，最后消失（此时以波峰消失的过水断面为跃后断面）。这种形式的水跃称为波状水跃（图 6.45）^②。由于波状水跃无旋滚存在，故其消能效果很差。

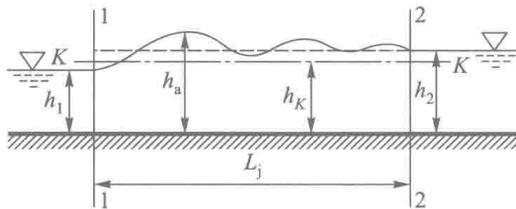


图 6.45

为了与波状水跃相区别，有时也称有表面旋滚的水跃为完全水跃。

6.4.2 水跃方程

在推导水跃方程之前，先探讨一下推导的方法。6.3 节在推导明渠恒定渐变流的基本方程时，应用了恒定总流的能量方程。现在是否仍然可以用它来推导水跃方程呢？对于属于明渠急变流的水跃来讲，在一定流段内有较大的能量损失。既不能将它忽略不计，又无法给出用来确定水跃能量损失的独立公式。因此，在推导水跃方程时，不能应用恒定总流的能量方程，而必须采用恒定总流的动量方程。因为，对水跃段应用动量方程可以不涉及水跃段的能量损失。

^① 在水利水电工程中，消能通常是指通过各种方式把水流的机械能（主要是动能）转化为内能（热能），不是指“消除了”能量。

^② 对于棱柱体矩形水平渠段中的波状水跃来讲，当 $1.2 < Fr_1 < 1.7$ 时，第一波峰处的水深 h_a （图 6.45）较跃后水深 h_2 大 16%。

设一水跃产生于底坡为 θ 的明渠中, 如图 6.46 所示。

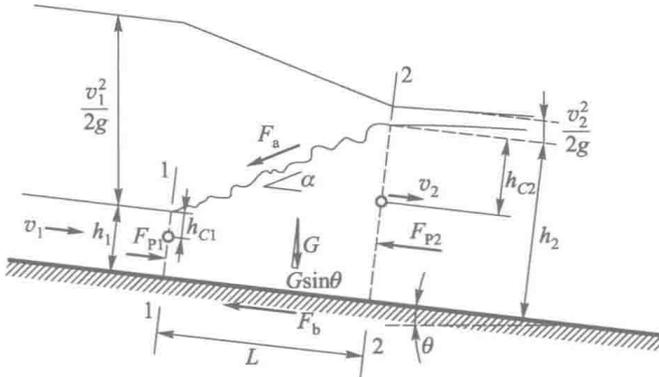


图 6.46

对跃前断面 1-1 和跃后断面 2-2 之间的水跃段沿水流方向写动量方程得

$$\rho Q(\beta_2 v_2 - \beta_1 v_1) = F_{P1} + G \sin \theta - F_{P2} - F_b - F_a \cos \alpha \quad (6.72)$$

式中, ρ 为水的密度; Q 为流量; v_1 、 v_2 分别为水跃跃前、跃后断面的平均流速; β_1 、 β_2 分别为水跃跃前、跃后断面的水流动量修正系数; F_{P1} 、 F_{P2} 分别为水跃跃前、跃后断面上的动水总压力; F_b 、 F_a 分别表示水跃段渠道壁面和空气的摩阻力; α 为水跃相对渠底的平均抬升坡度, $\alpha = \arctan \frac{h_2 - h_1}{L}$ 。

如果水跃跃前、跃后断面处的水流为渐变流, 作用于断面上的动水压强服从静水压强分布规律, 则有

$$F_{P1} = \rho g h_{c1} A_1 \cos \theta$$

$$F_{P2} = \rho g h_{c2} A_2 \cos \theta$$

式中, h_{c1} 、 h_{c2} 分别为水跃跃前、跃后断面形心到水面的距离; A_1 、 A_2 分别为水跃跃前、跃后断面的面积。

水跃发生在不长的流段内, 相关的实验观测表明, 水跃段渠道壁面和空气的摩擦阻力与跃前、跃后断面动水总压力之差相比要小得多, 一般可以略去。所以, 式 (6.72) 可以改写为

$$\rho Q(\beta_2 v_2 - \beta_1 v_1) = \rho g h_{c1} A_1 \cos \theta + G \sin \theta - \rho g h_{c2} A_2 \cos \theta \quad (6.73)$$

假设断面动量修正系数 $\beta_1 = \beta_2 = 1$, 又由连续性方程得知: $v_1 = Q/A_1$, $v_2 = Q/A_2$ 。如果水跃段的体积为 V , 则 $G = \rho V g$ 。所以式 (6.73) 可以进一步简化为

$$\frac{Q^2}{g A_1} + A_1 h_{c1} \cos \theta + V \sin \theta = \frac{Q^2}{g A_2} + A_2 h_{c2} \cos \theta \quad (6.74)$$

上式就是底坡为 θ 的明渠水流的水跃方程。

当明渠的底坡很小时, $\cos\theta \approx 1$, $\sin\theta \approx 0$, 则有

$$\frac{Q^2}{gA_1} + A_1 h_{c1} = \frac{Q^2}{gA_2} + A_2 h_{c2} \quad (6.75)$$

即为小底坡(水平底坡)明渠水流的水跃方程。

当明渠断面的形状、尺寸以及渠中的流量一定时, 水跃方程的左右两边都仅是水深的函数。此函数称为水跃函数, 以符号 $J(h)$ 表示, 则有

$$J(h) = \frac{Q^2}{gA} + Ah_c \quad (6.76)$$

于是, 水跃方程(6.75)也可以写成如下的形式:

$$J(h_1) = J(h_2) \quad (6.77)$$

上式表明, 在小底坡(水平底坡)明渠中, 跃前水深 h_1 与跃后水深 h_2 具有相同的水跃函数值, 所以也称这两个水深为共轭水深。

6.4.3 水跃共轭水深计算

当明渠断面的形状、尺寸和渠中的流量给定时, 由已知的一个共轭水深 h_1 (或 h_2) 来计算另一未知的共轭水深 h_2 (或 h_1), 称为共轭水深计算。共轭水深计算问题可应用水跃方程来解决。

1. 共轭水深计算的一般方法

应用水跃方程解共轭水深时, 虽然方程中仅有一个未知数—— h_2 (或 h_1), 但除了明渠断面的形状为简单的矩形外, 一般来讲, 水跃方程中的 A 和 h_c 都是共轭水深的复杂函数, 因此水深不易直接由方程解出。

在不易直接求解的情况下, 可以采用下述的一般方法, 即试算法。这种方法对于各种断面形状的明渠都是适用的。

在应用试算法解共轭水深时, 可先假设一个欲求的共轭水深代入水跃方程, 如所假设的水深能满足水跃方程, 则该水深即为所求的共轭水深。否则, 必须重新假设直至水跃方程得到满足为止。试算法可得较高的精确度, 但计算比较麻烦。

当流量和明渠断面的形状、尺寸给定时, 可假设不同水深, 根据式(6.76)算出相应水跃函数 $J(h)$, 以水深 h 为纵轴, 以水跃函数 $J(h)$ 为横轴, 即可绘出水跃函数曲线(图 6.47)。水跃函数曲线具有

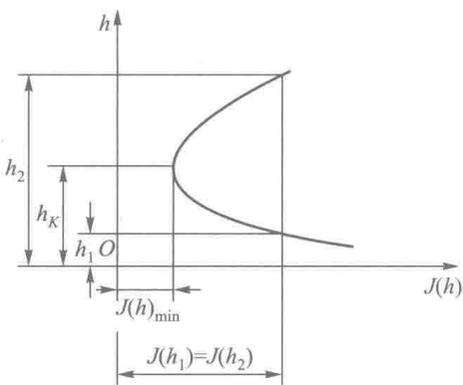


图 6.47

如下特性:

① 水跃函数 $J(h)$ 有一极小值 $J(h)_{\min}$, 与 $J(h)_{\min}$ 对应的水深即是临界水深 h_k (图 6.47);

② 当 $h > h_k$ 时 (相当于曲线的上半支), $J(h)$ 随着 h 亦即随着跃后水深的减小而减小;

③ 当 $h < h_k$ 时 (相当于曲线的下半支); $J(h)$ 随着 h 亦即随着跃前水深的减小而增大。

当明渠的流量以及断面的形状和尺寸一定时, 跃前水深越小则跃后水深越大; 反之, 跃前水深越大则跃后水深越小。跃前与跃后水深间的这一重要关系可以由图 6.47 看出。

例 6.16 证明与 $J(h)_{\min}$ 对应的水深即是临界水深。

证: 由微分学得知, 与 $J(h)_{\min}$ 对应的水深应满足下列方程 [令 $J(h)$ 的导数为零得出], 即

$$\frac{d[J(h)]}{dh} = \frac{d\left[\frac{Q^2}{gA} + Ah_c\right]}{dh} = -\frac{Q^2 B}{gA^2} + \frac{d(Ah_c)}{dh} = 0 \quad (6.78)$$

从图 6.48 中不难看出, 式中 Ah_c 乃是过水断面面积 A 对水面线 $0-0$ 的静矩。为了确定 $\frac{d(Ah_c)}{dh}$, 如果水深增加 Δh (水面线从而上升至 $0'-0'$), 由水深增量所导致的面积静矩增量 $\Delta(Ah_c)$ 为

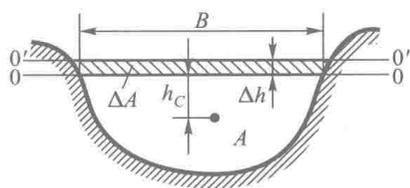


图 6.48

$$\begin{aligned} \Delta(Ah_c) &= \left[A(h_c + \Delta h) + B\Delta h \frac{\Delta h}{2} \right] - Ah_c \\ &= \left(A + B \frac{\Delta h}{2} \right) \Delta h \end{aligned}$$

式中方括号内的函数式是以 $0'-0'$ 为轴的新面积的静矩。于是

$$\frac{d(Ah_c)}{dh} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\Delta(Ah_c)}{\Delta h} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \left(A + B \frac{\Delta h}{2} \right) = A$$

将上式代入式 (6.78), 则得到

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{A^3}{B}$$

上式与临界水深的条件式 (6.38) 相同。因此, 与 $J(h)_{\min}$ 相应的水深即是临界水深。

例 6.17 当棱柱体水平明渠的流量, 断面的形状、尺寸以及跃前水深一

定时，试问水跃段中的底槛（图 6.49）将对跃后水深有何影响？

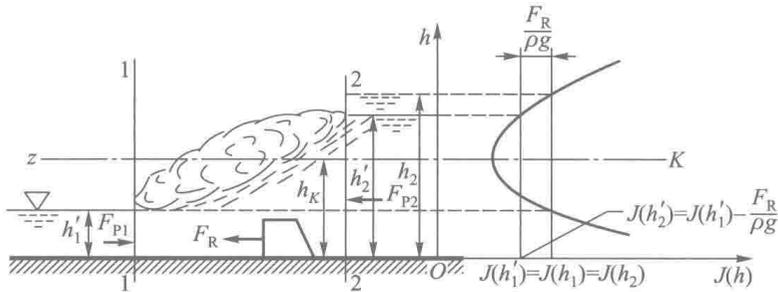


图 6.49

解：对图 6.49 所示的水跃段应用动量方程。采用推导水跃方程（6.75）时所采用的同样假定，则得到有槛时的水跃方程如下：

$$\frac{Q^2}{gA'_1} + A'_1 h'_{c1} = \frac{Q^2}{gA'_2} + A'_2 h'_{c2} + \frac{F_R}{\rho g} \quad (6.79)$$

或

$$J(h'_{c1}) = J(h'_{c2}) + \frac{F_R}{\rho g} \quad (6.80)$$

式中： A'_1 及 A'_2 分别表示有槛时水跃前、后断面的面积； h'_{c1} 及 h'_{c2} 分别表示有槛时水跃前、后断面上的形心距水面的距离； F_R 为槛的反动力； $J(h') = \frac{Q^2}{gA'} + A'h_c$ 。

无槛时的水跃方程（即式（6.77））为

$$J(h_1) = J(h_2)$$

因为有槛和无槛时的流量和跃前水深均相同，故

$$J(h'_1) = J(h_1) = J(h_2)$$

于是，由方程（6.80）得

$$J(h'_2) = J(h'_1) - \frac{F_R}{\rho g} \quad (6.81)$$

或

$$J(h'_2) < J(h_2)$$

根据水跃函数曲线的特性：水跃函数随着跃后水深的减小而减小（图 6.49），可知

$$h'_2 < h_2$$

即有槛时的跃后水深较无槛时的小。当 F_R 已知时， h'_2 可由图 6.49 所示的水跃

函数曲线解出。

实质上,只要在水跃段内给水流以反冲击力 F_R , 不论此力是来自槛还是来自其他设施,一般均可导致跃后水深的减小。例如利用射流给水流以反冲力亦可降低跃后水深(图 6.50)。

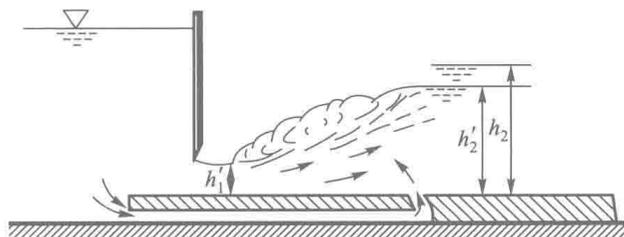


图 6.50

2. 梯形明渠水跃共轭水深的计算

边坡系数为 m 的梯形断面明渠的共轭水深可以运用迭代公式 (6.82) 计算:

$$h_{2,i+1} = \left\{ \frac{6 \left[J_1 - \frac{Q^2}{g(b + mh_{2,i})h_{2,i}} \right]}{3b + 2mh_{2,i}} \right\}^{0.5} \quad (6.82)$$

式中: $J_1 = \frac{Q^2}{g(b + mh_1)h_1} + \frac{h_1^2}{6}(3b + 2mh_1)$ 。迭代计算时,先假设 $h_{2,i}$ 的值,代入公式 (6.82), 如果 $h_{2,i+1}$ 的值与 $h_{2,i}$ 相等或者基本接近,即可认为 $h_{2,i+1}$ 、 h_1 互为共轭水深。

3. 矩形明渠水跃共轭水深的计算

矩形明渠中水跃的跃前或跃后水深可以直接由水跃方程解出。

对于矩形明渠,如以 b 表示渠宽, q 表示单宽流量,则

$$Q = bq, A = bh, h_c = \frac{h}{2}$$

将以上诸关系式代入水跃方程 (6.75), 则得到棱柱体矩形水平明渠的水跃方程如下:

$$\frac{q^2}{gh_1} + \frac{h_1^2}{2} = \frac{q^2}{gh_2} + \frac{h_2^2}{2} \quad (6.83)$$

对上式整理简化后,得到

$$h_1 h_2^2 + h_1^2 h_2 - \frac{2q^2}{g} = 0 \quad (6.84)$$

上式是对称二次方程。解该方程可得

$$h_2 = \frac{h_1}{2} \left(\sqrt{1 + 8 \frac{q^2}{gh_1^3}} - 1 \right) \quad (6.85)$$

$$h_1 = \frac{h_2}{2} \left(\sqrt{1 + 8 \frac{q^2}{gh_2^3}} - 1 \right) \quad (6.86)$$

因为跃前断面处水流弗劳德数的平方为 $Fr_1^2 = \frac{v_1^2}{gh_1} = \frac{q^2}{gh_1^3}$, 故公式 (6.85)

又可写成如下的形式:

$$h_2 = \frac{h_1}{2} (\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1) \quad (6.87)$$

或

$$\eta = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1) \quad (6.88)$$

式中: $\eta = \frac{h_2}{h_1}$ 称为共轭水深比。从上式可以看出, η 随着 Fr_1 的增加而增大。

水跃的共轭水深计算是以水跃方程为依据的。在推导该理论方程时, 曾作过一些假定。

许多研究人员对棱柱体矩形水平槽中的水跃进行了广泛的实验研究, 并积累了丰富的实验资料。图 6.51 所示为其中最完善的资料对矩形水平槽水跃方程进行的验证。

图中纵坐标 $\eta = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1)$ 为跃后与跃前水深的比值。

其他断面形状的水平槽的水跃实验也证实了水跃方程的误差不大。

由此可见, 水跃方程 (6.75) 或 (6.77) 是可以用于实际计算的。

例 6.18 有一水跃产生于一棱柱体矩形水平槽中。已知: q 为 $0.351 \text{ m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})$, h_1 为 0.0528 m 。求 h_2 。

解: 按公式 (6.85) 计算 h_2 , 有

$$\begin{aligned} h_2 &= \frac{h_1}{2} \left(\sqrt{1 + 8 \frac{q^2}{gh_1^3}} - 1 \right) \\ &= \frac{0.0528 \text{ m}}{2} \left(\sqrt{1 + 8 \times \frac{0.351^2}{9.8 \times 0.0528^3}} - 1 \right) = 0.665 \text{ m} \end{aligned}$$

实测 $h_2 = 0.665 \text{ m}$ 与计算值完全相同。

例 6.19 一水跃产生于一棱柱体矩形水平渠段中。今测得 $h_1 = 0.2 \text{ m}$, $h_2 = 1.4 \text{ m}$ 。求渠中的单宽流量 q 。

解: 由方程 (6.84) 解 q 得到下列公式:

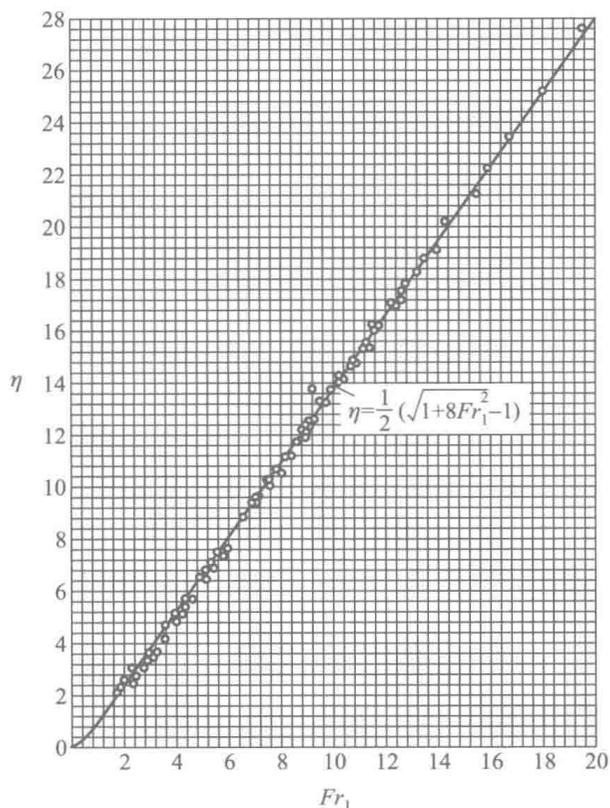


图 6.51

$$q = \sqrt{\frac{gh_1 h_2 (h_1 + h_2)}{2}} \quad (6.89)$$

将已知值代入上式，得

$$q = \sqrt{\frac{9.8 \times 0.2 \times 1.4 \times (0.2 + 1.4)}{2}} \text{ m}^3 / (\text{s} \cdot \text{m}) = 1.48 \text{ m}^3 / (\text{s} \cdot \text{m})$$

6.4.4 棱柱体水平明渠水跃的能量损失

1. 水跃能量损失机理

水跃的运动要素变化得很剧烈。图 6.52 绘出了水跃段中和跃后一些断面上的流速分布。从图中可以看出，流速急剧变化和水跃段中最大流速靠近底部的情况。在水跃表面旋滚与主流的交界面附近混掺强烈，从而导致该处水流的激烈湍动、剪切，使得湍流的附加切应力远较一般渐变湍流的大。水流运动要素的急剧变化，特别是很大的湍流附加切应力使跃前断面水流的大部分动能在水跃段中转化为热能而消失。

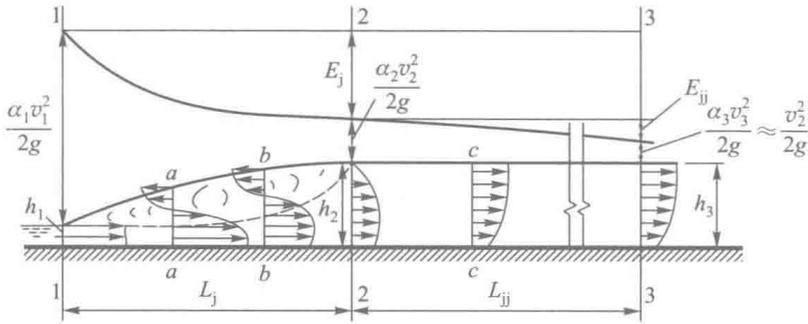


图 6.52

在跃后断面 2-2 处, 流速的分布还是很不均匀的 (图 6.52)。同时, 该处的湍动强度也远较正常的渐变湍流为大。虽然在断面 2-2 下游不远的断面 c-c 处, 流速分布已与渐变湍流的相近, 但湍动强度仍大。直到断面 3-3 处, 湍动强度才基本恢复正常。断面 2-2 与断面 3-3 之间的流段称为跃后段。其长度 L_{jj} 约为 $(2.5 \sim 3.0) L_j$ 。

在棱柱体水平明渠中, 断面 3-3 处的水深 h_3 与跃后水深 h_2 基本相等。故一般可近似地令 $h_3 = h_2$ 及 $v_3 = v_2$ 。虽然 $v_3 = v_2$, 但跃后断面 2-2 处的动能仍较断面 3-3 处的为大。这是因为, 断面 2-2 处的流速分布很不均匀和湍动强度大, 致使 α_2 较 α_3 (≈ 1) 大得较多。此多余的动能在跃后段中也将转化为热能而消失。

水跃能量损失的计算, 即在于确定水跃段的水头损失 E_j 和跃后段的水头损失 E_{jj} 。

2. 水跃段水头损失的计算

对水跃的跃前和跃后断面应用能量方程即可导出水跃段水头损失 E_j 的计算公式。

由能量方程导出的棱柱体水平明渠的 E_j 的计算公式如下:

$$E_j = \left(h_1 + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} \right) - \left(h_2 + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} \right) \quad (6.90)$$

式中: α_1 及 α_2 分别表示跃前及跃后断面处的水流动能修正系数。由于跃前断面处的水流可视为渐变流, 故在计算时可令 $\alpha_1 = 1$ 。至于 α_2 如前所述, 它一般较 1 大得较多。

在工程实践中, 水跃多产生于棱柱体矩形水平渠段中。在此情况下, 由连续性方程可知

$$v_2 = v_1 \frac{h_1}{h_2} = \frac{v_1}{\eta} \quad (6.91)$$

又由公式 (6.88) 得

$$Fr_1^2 = \frac{v_1^2}{gh_1} = \frac{\eta(\eta+1)}{2} \quad (6.92)$$

将以上两关系式代入公式 (6.88) 并取 $\alpha_1 = 1$, 整理简化后则得到棱柱体矩形水平明渠的 E_j 的计算公式如下:

$$E_j = \frac{h_1}{4\eta} [(\eta-1)^3 - (\alpha_2 - 1)(\eta+1)] \quad (6.93)$$

式中的 α_2 可按式计算:

$$\alpha_2 = 0.85 Fr_1^{2/3} + 0.25 \quad (6.94)$$

从上式可以看出, α_2 是随着 Fr_1 的增加而增大的。

3. 跃后段水头损失的计算

对跃后断面 2-2 和断面 3-3 应用能量方程则得到棱柱体水平明渠的跃后段的水头损失公式如下:

$$E_{jj} = \left(h_2 + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} \right) - \left(h_3 + \frac{\alpha_3 v_3^2}{2g} \right) \quad (6.95)$$

因为, 可以近似地令 $h_3 = h_2$, $v_3 = v_2$ 及 $\alpha_3 = 1$, 于是上式简化为

$$E_{jj} = (\alpha_2 - 1) \frac{v_2^2}{2g} \quad (6.96)$$

如将关系式 (6.91) 和 (6.92) 代入上式即可求得棱柱体矩形水平明渠的 E_{jj} 的计算公式:

$$E_{jj} = \frac{h_1}{4\eta} (\alpha_2 - 1)(\eta + 1) \quad (6.97)$$

4. 水跃总水头损失和水跃段水头损失的近似计算

水跃总水头损失 E 是指水跃段与跃后段水头损失之和。因此, 将公式 (6.90) 与 (6.95) 相加并令 $\alpha_1 = 1$, 则得到棱柱体水平明渠的 E 的计算公式为

$$E = E_j + E_{jj} = \left(h_1 + \frac{v_1^2}{2g} \right) - \left(h_3 + \frac{v_3^2}{2g} \right) \quad (6.98)$$

同理, 将公式 (6.93) 与 (6.97) 相加, 即得到棱柱体矩形水平明渠的 E 的计算公式如下:

$$E = \frac{h_1}{4\eta} (\eta - 1)^3 \quad (6.99)$$

为了了解水跃段水头损失在总水头损失中所占的百分比, 今以式 (6.93) 除以式 (6.99), 得到

$$\frac{E_j}{E} = 1 - (\alpha_2 - 1) \frac{\eta + 1}{(\eta - 1)^3} \quad (6.100)$$

因为 α_2 和 η 都是 Fr_1 的函数。因此, $\frac{E_j}{E}$ 也是 Fr_1 的函数。根据上式所绘的 $\frac{E_j}{E} - Fr_1$ 关系曲线如图 6.53 所示。从图中可以看出, 比值 $\frac{E_j}{E}$ 随着 Fr_1 的增加而增大。当 Fr_1 较小, 例如 $Fr_1 \leq 2.3$ 时, $\frac{E_j}{E} < 50\%$ 。这表明水跃段的水头损失较跃后段的水头损失为小, 水跃

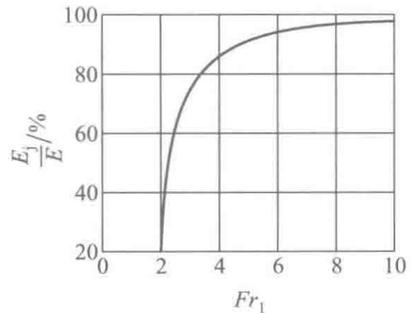


图 6.53

的消能效果不佳。但随着 Fr_1 的增加, $\frac{E_j}{E}$ 迅速增大。当 $Fr_1 = 4.5$ 时, E_j 已达到总水头损失的 90%。

因此, 当 Fr_1 较大时, 可以用水跃总水头损失 E 的计算公式 (6.99) 来近似计算棱柱体矩形水平明渠中水跃段的水头损失 E_j 。例如当 $Fr_1 \geq 6.3$ 时, 按公式 (6.99) 所计算出的 E_j 值, 其误差不到 5%。

对于非矩形明渠中的水跃, 由于现在缺乏 α_2 的计算公式, 故一般均用水跃总水头损失 E 的计算公式 (6.98) 来近似计算。当 Fr_1 较大时其误差亦不致过大。

5. 水跃的消能效率

水跃段水头损失 E_j 或水跃总水头损失 E 与跃前断面比能 E_1 之比称为水跃消能系数, 如以符号 K_j 表示, 则 $K_j = \frac{E_j}{E_1}$ 。显然, 消能系数 K_j 越大则水跃的消能效率越高。

棱柱体矩形水平明渠的消能系数可按下式计算, 即

$$K_j = \frac{E_j}{E_1} = \frac{\frac{h_1}{4\eta}(\eta - 1)^3}{h_1 + \frac{v_1^2}{2g}} = \frac{(\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 3)^3}{8(\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1)(2 + Fr_1^2)} \quad (6.101)$$

从上式可以看出, K_j 乃是 Fr_1 的函数。根据上式所绘出的 $K_j - Fr_1$ 关系曲线如图 6.54 的实线所示。 K_j 是随 Fr_1 的增加而增大的。因此, Fr_1 越大则水跃的消能效率也越高。当 $Fr_1 = 9.0$ 时, K_j 可达 70%。

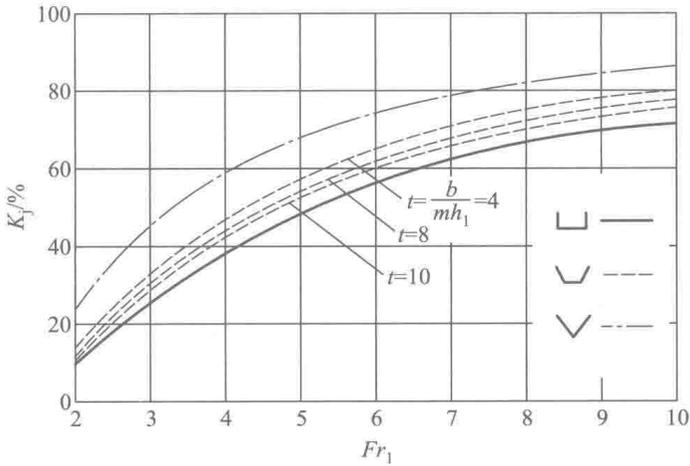


图 6.54

当 $Fr_1 > 9.0$ 时, 虽然消能效率可以进一步提高, 但实验表明, 此时跃后水面的波动很大并且一直传播到下游 (图 6.55a)。

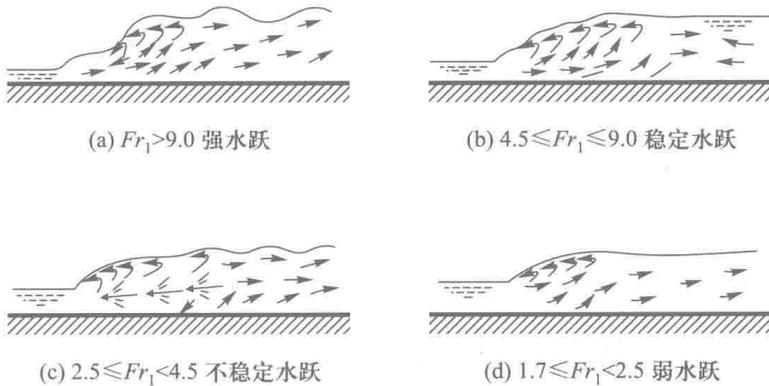


图 6.55

当 $4.5 \leq Fr_1 \leq 9.0$ 时, 水跃的消能效率高 ($K_j = 44\% \sim 70\%$; $\frac{E_j}{E} > 90\%$), 同时水跃稳定, 跃后水面也较平静 (图 6.55b)。因此, 如利用水跃消能, 最好能使其 Fr_1 位于此范围内。

当 $2.5 \leq Fr_1 < 4.5$ 时, $K_j < 44\%$, 同时水跃不稳定: 水跃段中的高速底流间歇地向水面蹿升, 跃后水面波动大并向下游传播 (图 6.55c)。

当 $1.7 \leq Fr_1 < 2.5$ 时, 虽然此时水跃的上部仍有旋滚存在, 但旋滚小而弱 (图 6.55d), 消能效率很低。

至于波状水跃 ($1 < Fr_1 < 1.7$), 其消能效率就更差。

几种非矩形明渠的 $K_j - Fr_1$ 关系曲线也绘在图 6.54 中。可以看出，跃前断面的弗劳德数相同时，非矩形明渠中水跃的消能效率较矩形明渠中的要高些。

最后指出，本小节所给出的有关公式，对坡度较小的棱柱体明渠也可近似应用。

例 6.20 有一水跃产生于一棱柱体矩形水平渠段中。已知： q 为 $5.0 \text{ m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})$ ， b 为 6.0 m ， h_1 为 0.5 m 。求水跃的水头损失。

解：(1) 水跃段的水头损失 E_j

$$\text{因为 } Fr_1 = \frac{v_1}{\sqrt{gh_1}} = \frac{q}{h_1 \sqrt{gh_1}} = \frac{5}{0.5 \times \sqrt{9.8 \times 0.5}} = 4.52, \text{ 所以 } \alpha_2 = 0.85 Fr_1^{2/3} + 0.25 = 0.85 \times 4.52^{2/3} + 0.25 = 2.57$$

$$\eta = \frac{1}{2}(\sqrt{1+8Fr_1^2} - 1) = \frac{1}{2} \times (\sqrt{1+8 \times 4.52^2} - 1) = 5.91$$

将以上计算出的 α_2 和 η 以及已知的 h_1 代入公式 (6.93)，得到

$$\begin{aligned} E_j &= \frac{h_1}{4\eta} [(\eta - 1)^3 - (\alpha_2 - 1)(\eta + 1)] \\ &= \frac{0.5 \text{ m}}{4 \times 5.91} \times [(5.91 - 1)^3 - (2.57 - 1) \times (5.91 + 1)] = 2.26 \text{ m} \end{aligned}$$

(2) 单位时间内水跃段中的能量损失 P_j

$$\begin{aligned} P_j &= 9.8QE_j = 9.8bqE_j \\ &= 9.8 \times 6 \times 5 \times 2.26 \text{ kW} = 664 \text{ kW} \end{aligned}$$

(3) 跃后段的水头损失 E_{jj}

$$\begin{aligned} E_{jj} &= \frac{h_1}{4\eta} (\alpha_2 - 1)(\eta + 1) \\ &= \frac{0.5 \text{ m}}{4 \times 5.91} \times (2.57 - 1) \times (5.91 + 1) = 0.23 \text{ m} \end{aligned}$$

(4) 水跃总水头损失 E

$$E = E_j + E_{jj} = 2.26 \text{ m} + 0.23 \text{ m} = 2.49 \text{ m}$$

(5) 水跃段水头损失占总水头损失的百分比

$$\frac{E_j}{E} = \frac{2.26}{2.49} = 90.8\%$$

(6) 水跃的消能系数 K_j

$$K_j = \frac{E}{E_1} = \frac{E}{h_1 + \frac{v_1^2}{2g}} = \frac{E}{h_1 \left(1 + \frac{Fr_1^2}{2}\right)}$$

$$= \frac{2.49}{0.5 \times \left(1 + \frac{4.52^2}{2}\right)} = 44.5\%$$

6.4.5 棱柱体水平明渠水跃跃长的确定

在完全水跃的水跃段中, 水流湍动强烈, 底部流速很大。因此, 除非河、渠的底部为十分坚固的岩石外, 一般均需设置护坦加以保护。此外, 在跃后段的一部分范围内也需铺设海漫以免底部冲刷破坏。由于护坦和海漫的长度都与完全水跃的跃长有关, 故跃长的确定问题具有重要的实际意义。但水跃运动非常复杂, 迄今还没有一个比较完善的、可供实际应用的理论跃长公式。在工程设计中, 一般多采用经验公式来确定跃长。

1. 矩形明渠的跃长公式

根据实验资料 (实验槽宽分别为 0.3 m, 0.46 m, 0.61 m, 1.21 m; $Fr_1 = 1.72 \sim 19.55$) 导出了下列的跃长公式:

$$L_j = 10.8h_1 (Fr_1 - 1)^{0.932} \quad (6.102)$$

跃长公式的另一形式为

$$L_j = C(h_2 - h_1) \quad (6.103)$$

式中: C 为一经验系数。斯米顿那 (Smetana) 取 $C = 6$; 欧勒佛托斯基 (Elebatorski) 取 $C = 6.9$ 。

实际上, 系数 C 乃是 Fr_1 的函数。吴持恭曾根据其试验资料 ($Fr_1 = 2.15 \sim 7.45$), 求得

$$C = \frac{10}{Fr_1^{0.32}} \quad (6.104)$$

2. 梯形明渠的跃长公式

梯形明渠中水跃的跃长可近似地按下列经验公式计算, 即

$$L_j = 5h_2 \left(1 + 4 \sqrt{\frac{B_2 - B_1}{B_1}}\right) \quad (6.105)$$

式中: B_1 及 B_2 分别表示水跃前后断面处的水面宽度。

最后指出:

(1) 由于水跃段中水流的强烈紊动, 因此水跃长度也是脉动的。以上各跃长公式所给出的完全水跃的跃长都是时均值。

(2) 跃长随着槽壁粗糙程度的增加而缩短。以上各公式可以用来确定一般混凝土护坦上的跃长。

(3) 当棱柱体明渠的底坡较小时, 以上各公式也可近似应用。

6.4.6 矩形水平扩散段中的水跃

非棱柱体明渠中的水流由急流直接过渡到缓流时，同棱柱体明渠中的水流一样，也要产生水跃。在工程实践中，最常见的是矩形水平扩散段中的水跃。例如陡槽及闸等水工建筑物常借一矩形水平扩散段与下游渠道或河槽平顺连接，并使水跃产生于其中，以利消能。

在实际工程中，扩散段的扩散角 θ 值一般较小。因为实验表明：当 θ 值较大时，例如 $\theta > 7^\circ$ ，扩散段中的水流就有可能扩散不佳，致使侧壁处产生回流从而迫使主流折冲侧壁形成如图 6.56 所示的折冲水流。

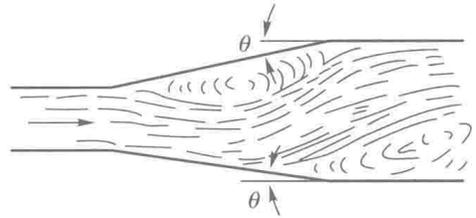


图 6.56

本节将讨论扩散角不大的矩形水平扩散明渠中水跃的基本计算问题：共轭水深和水跃长度的计算。

1. 矩形水平扩散明渠的水跃方程及其解

首先来推导用来计算共轭水深的水跃方程。

设一完全水跃产生于一矩形水平扩散明渠中。虽然，扩散水流的过水断面实际上是弧面。但因扩散角一般较小，故可近似地用平面 1-1 和 2-2 分别代替弧形的跃前和跃后断面，如图 6.57 所示。

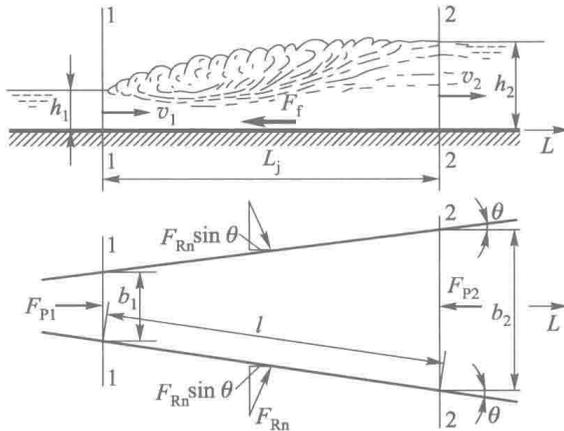


图 6.57

今取轴 L 为投影轴，对水跃段应用动量方程。如设 $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ ，并忽略 F_f ，则得

$$\beta \rho Q (v_2 - v_1) = F_{p1} - F_{p2} + 2F_{Rn} \sin \theta \quad (6.106)$$

式中： F_{Rn} 为侧壁反力。

水跃在侧壁上的投影 $ABCDG$ 如图 6.58 所示。侧壁反力 F_{Rn} 在数值上即等于此投影面上的动水总压力。由于水跃的水面线 DGC 难以准确确定，今近似地设水面线为一直线 CD 。于是，水跃在侧壁上的投影为一梯形 $ABCD$ 。虽然，用梯形来代替水跃的实际投影会使所计算出的 F_{Rn} 值有些偏小，但减小得不多。另一方面，在计算 F_{Rn} 值时，一般均设水跃段中含气水流的 ρg 等于纯水的 ρg ，这又会使 F_{Rn} 值有些增大。一增一减虽不会完全相抵，但总不致使 F_{Rn} 值的误差过大。

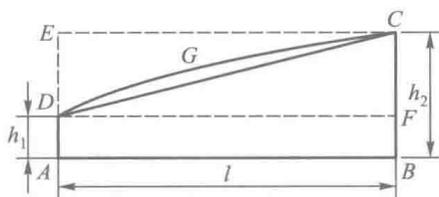


图 6.58

今以矩形平面 $ABCE$ 和 $ABFD$ (图 6.58) 上的静水总压力的平均值作为梯形 $ABCD$ 面上的动水总压力。于是侧壁反力 F_{Rn} 等于

$$F_{Rn} = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho g}{2} h_1^2 + \frac{\rho g}{2} h_2^2 \right) l$$

式中： $l = \frac{b_2 - b_1}{2 \sin \theta}$ ，其中 b_1 及 b_2 分别为跃前及跃后断面的宽度。

以 $\sin \theta$ 乘上式，则得

$$F_{Rn} \sin \theta = \frac{\rho g}{8} (h_1^2 + h_2^2) (b_2 - b_1) \quad (6.107)$$

设跃前及跃后断面上的压强分布服从静水压强分布规律，于是

$$F_{p1} = \frac{1}{2} \rho g h_1^2 b_1 \quad (6.108)$$

$$F_{p2} = \frac{1}{2} \rho g h_2^2 b_2 \quad (6.109)$$

又由连续性方程得

$$v_1 = \frac{Q}{b_1 h_1}, \quad v_2 = \frac{Q}{b_2 h_2}$$

将以上关系式以及式 (6.107)，(6.108) 和 (6.109) 代入方程 (6.106)，整理简化后即得到矩形水平扩散明渠的水跃方程如下：

$$\frac{4\beta Q^2}{g} \left(\frac{1}{b_2 h_2} - \frac{1}{b_1 h_1} \right) = (b_1 + b_2) (h_1^2 - h_2^2) \quad (6.110)$$

为了便于求解，今以 $b_1 h_1$ 除上式，并令 $\frac{h_2}{h_1} = \eta$ ， $\frac{b_2}{b_1} = \xi$ 和 $\frac{v_1^2}{gh_1} = Fr_1^2$ ，于是水跃方程可化为如下的量纲一的方程：

$$\frac{4\beta Fr_1^2}{\xi(1+\xi)} = \frac{\eta(\eta^2 - 1)}{\xi\eta - 1} \quad (6.111)$$

如令上式的 $\xi = 1$ ，并取 $\beta = 1$ ，即得到棱柱体矩形水平明渠的水跃量纲一的方程 (6.88)。

矩形扩散明渠的水跃量纲一的方程 (6.111) 的解为

$$\eta = 2 \sqrt{\frac{1 + \xi + 4\beta Fr_1^2}{3(1 + \xi)}} \cos \frac{\psi}{3} \quad (6.112)$$

或

$$h_2 = 2h_1 \sqrt{\frac{1 + \xi + 4\beta Fr_1^2}{3(1 + \xi)}} \cos \frac{\psi}{3} \quad (6.113)$$

式中的 ψ 按下式计算：

$$\cos \psi = -\frac{10.4\beta(1+\xi)^{0.5}Fr_1^2}{\xi(1+\xi+4\beta Fr_1^2)^{1.5}} \quad (6.114)$$

在应用以上公式进行计算时，可令 $\beta = 1.03$ 。

虽然公式 (6.112) 是在扩散角 θ 较小的情况下导出的。但实验资料表明：不仅在 θ 较小时，即使当 θ 角大到 25° ，按该式所计算出的 η 值 ($\beta = 1.03$) 也基本上与实测的 η 值相吻合 (图 6.59)。

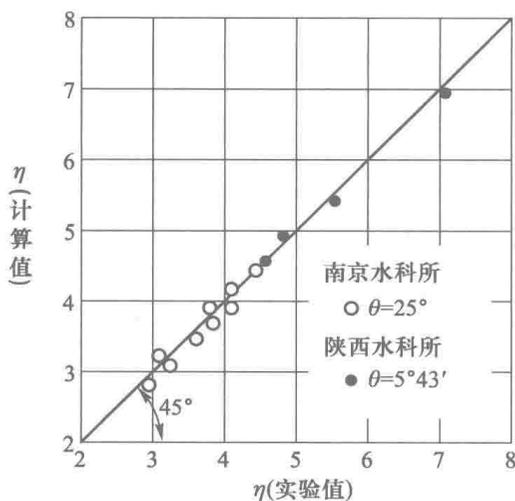


图 6.59

2. 矩形水平扩散明渠水跃的跃长公式

对于矩形水平扩散明渠中的完全水跃，迄今还没有一个较完善的跃长公式。以下公式仅供计算时参考。

陕西水利科学研究所水跃表面旋滚的水平投影作为跃长, 并根据模型试验资料 ($Fr_1 = 3.5 \sim 6.5$) 导出下列跃长公式:

$$L_j = 0.077h_1 (Fr_1 \cot\theta)^{1.5} \quad (6.115)$$

华西列夫 (Васильев) 对弧形闸门下游的矩形水平扩散槽中的水跃进行了试验。试验资料表明, 跃长是随着扩散角 θ 的增大而减小。根据试验资料得出的跃长公式如下:

$$L_j = \frac{10.3b_1h_1 (Fr_1 - 1)^{0.81}}{b_1 + 108h_1 (Fr_1 - 1)^{0.81} \sin\theta} \quad (6.116)$$

由于对跃长的判断标准不同, 按上式所算出的 L_j 值较表面旋滚的水平投影要长些。后者约为前者的 75% ~ 90%。

例 6.21 某陡槽下游的矩形水平扩散段中有一水跃产生。已知: $b_1 = 2.0 \text{ m}$, $Q = 6 \text{ m}^3/\text{s}$, $\cot\theta = 10$ 及 $h_1 = 0.391 \text{ m}$ 。求 L_j 及 h_2 。

解:

$$Fr_1 = \frac{v_1}{\sqrt{gh_1}} = \frac{Q}{b_1h_1\sqrt{gh_1}} = \frac{6}{2 \times 0.391 \times \sqrt{9.8 \times 0.391}} = 3.92$$

按公式 (6.115) 计算 L_j :

$$\begin{aligned} L_j &= 0.077h_1 (Fr_1 \cot\theta)^{1.5} = 0.077 \times 0.391 \text{ m} \times (3.92 \times 10)^{1.5} \\ &= 7.4 \text{ m} \end{aligned}$$

跃后断面的宽度为

$$b_2 = b_1 + \frac{2L_j}{\cot\theta}$$

于是

$$\xi = \frac{b_2}{b_1} = 1 + \frac{2L_j}{b_1 \cot\theta} = 1 + \frac{2 \times 7.4}{2 \times 10} = 1.74$$

按公式 (6.114) 确定 ψ 值 (取 $\beta = 1.03$):

$$\begin{aligned} \cos\psi &= -\frac{10.4\beta(1+\xi)^{0.5}Fr_1^2}{\xi(1+\xi+4\beta Fr_1^2)^{1.5}} \\ &= -\frac{10.4 \times 1.03 \times (1+1.74)^{0.5} \times 3.92^2}{1.74 \times (1+1.74+4 \times 1.03 \times 3.92^2)^{1.5}} = -0.292 \end{aligned}$$

故 ψ 为 107° 。按公式 (6.113) 计算 h_2 (取 $\beta = 1.03$), 得

$$\begin{aligned} h_2 &= 2h_1 \sqrt{\frac{1+\xi+4\beta Fr_1^2}{3(1+\xi)}} \cos \frac{\psi}{3} \\ &= 2 \times 0.391 \text{ m} \times \sqrt{\frac{1+1.74+4 \times 1.03 \times 3.92^2}{3 \times (1+1.74)}} \times \cos \frac{107^\circ}{3} = 1.8 \text{ m} \end{aligned}$$

按上式求得的 h_2 与模型实测值完全一致。

6.4.7 水跌

正如 6.3.4 小节中所述的那样, 当处于缓流流态的明渠水流, 因底坡突然变陡 (图 6.28) 或者底坡突然下落 (图 6.29), 引起水面急剧下降, 水流流态由缓流演变为急流。这种水流演变现象为水跌。如图 6.29 所示, 明渠底坡变成铅垂跌坎, 水流以水舌形式自由泻落的水跌又称为自由跌水。当底坡突然下跌, 水流失去渠底顶托和摩阻作用, 势能迅速转化为动能, 水面急剧下降, 流线急剧弯曲, 压强不服从静水压强分布规律, 自由跌水跌坎边缘的水深 h_e 不等于临界水深 h_K 。临界水深 h_K 发生在跌坎上游 l_K 处。

当上游渠道为正坡明渠时, 研究表明:

$$l_K = \beta h_K \quad (6.117)$$

式中 β 为经验系数, 当 $0.2 < Fr_0 < 0.9$, $\beta = 0.0298 \exp(6.0298 Fr_0)$ 。 Fr_0 为跌坎上游渠道中的均匀流的弗劳德数。

跌坎边缘的实际水深 h_e , 可由试验资料确定。对于水平底坡矩形明渠, 有

$$h_e = (0.66 \sim 0.73) h_K, \quad i = 0$$

$$\frac{h_e}{h_K} = 0.7415 + 0.0056 \left(\frac{i}{i_K} + 10 \right) - 0.0007 \left(\frac{i}{i_K} + 10 \right)^2 - 3 \times 10^{-5} \left(\frac{i}{i_K} + 10 \right)^3 + 10^{-6} \left(\frac{i}{i_K} + 10 \right)^4, \quad i \neq 0 \quad (6.118)$$

式中, i 为渠道底坡, i_K 为该流量对应的渠道临界底坡。公式适用于 $-10 < i/i_K < 20$ 。

6.5 明渠非恒定流

由于自然条件的变化 (如洪水涨落), 或者由于河渠上的水工建筑物 (如闸门) 不时地调节流量, 使河道或人工明渠中水流流速、水深 (或水位、流量) 等随时间而改变, 从而形成了明渠中的非恒定流。堤坝的溃决以及河口段由于潮汐的影响也会引起河道非恒定流。

严格地说, 自然界或水利工程中大多数明渠水流均属于非恒定流, 但为使问题简化, 实用上人们常把一些特定时段内水情随时间变化较缓慢的水流当作恒定流来处理。

研究明渠非恒定流的目的, 主要是确定在非恒定流过程中, 明渠水流的流速、水深 (或水位、流量) 等随时间和流程的变化规律。

6.5.1 明渠非恒定流的特性及波的分类

1. 明渠非恒定流的主要特性

(1) 明渠非恒定流必定是非均匀流。水力要素是时间 t 和流程 s 的函数。

(2) 明渠非恒定流也是一种波动现象。在压力管道中非恒定流波的传播是依靠压力差的作用，故称压力传播，而明渠中非恒定流波的传播则是依靠重力的作用，故称重力传播。

明渠非恒定流的波动与海洋、湖泊以及河流表面因风力或地震力的作用而产生的波动不同。风波和地震波使水质点基本上循着一定轨迹（圆或椭圆）作往复循环的运动，几乎没有流量的传递，只是同方向各处质点运动彼此相差一个相位而形成水面波形的推进，这种波动称为振动波（或推进波）。明渠非恒定流是由于在明渠的某一位置流量和水位发生改变而形成，它通过水流质点的位移而形成波的传播，在波所及区域内，要引起当地流量和水位的改变，这种波称为变位波。

明渠非恒定流的波由两部分所组成。波的前锋称为波额（或波锋），波的躯体称为波体，概化图形如图 6.60 所示。波额推进速度 v_w 称为波速， v 为过水断面上水流平均流速。

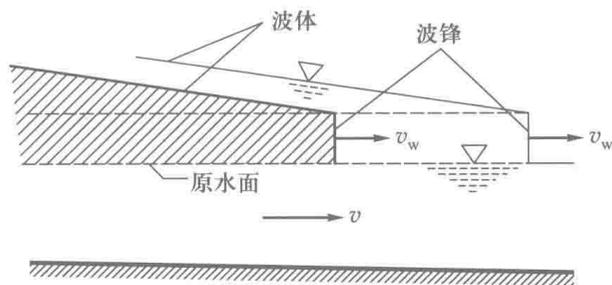


图 6.60

(3) 波所及之区域内，各过水断面水位流量关系一般不再是单一稳定的关系。

在稳定的没有冲淤变化的河渠内，当水流为恒定流时，由于水面坡度是恒定的，所以水位与流量呈单值关系。而非恒定流情况则不相同。在涨水过程中，同一水位下非恒定流的水面坡度比恒定流时大，因而其流量亦大。在落水过程中，同一水位情况下非恒定流的水面坡度比恒定流时小，因而其流量亦小。由于同一水位下水面坡度具有多值关系，使得流量相应地具有多值关系。图 6.61a 中虚线为恒定流时水位与流量关系曲线，绳套形实曲线是受洪水涨落

影响的非恒定流水位与流量关系曲线。还应当指出,非恒定流情况下,过水断面上的水面坡度、流速、流量、水位的最大值并不在同一时刻出现。例如涨水过程中,由于洪水波的传递,水面坡度增加得很快而首先出现最大值,而后依次再出现最大流速、最大流量、最高水位。落水过程中,先出现最小流量,然后出现最低水位。图 6.61b 显示了一次洪峰过程中最大流量超前于最高水位的情况。图中实线为流量过程线,虚线为水位过程线。

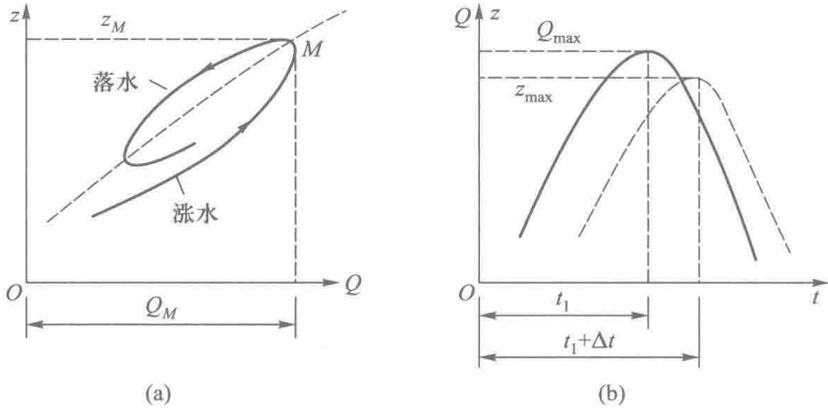


图 6.61

2. 明渠非恒定流波的分类

(1) 连续波和不连续波

从明渠非恒定流的水力要素随时间变化的急剧程度来分,有连续波和不连续波。当水力要素随时间改变缓慢,所形成的波高相对于波长很小,水流瞬时流线也近乎成平行直线,这种水流称为非恒定渐变流。它的各种水力要素可视为流程 s 和时间 t 的连续函数,故称为连续波。河流洪水波,水电站进行正常调节所引起的非恒定流均属此类。另一种类型的波是由于水力要素随时间剧烈改变而形成,波高较大(有时可大到若干米),波额水面很陡,几乎直立,在波额附近水力要素不再是流程 s 和时间 t 的连续函数,但波体部分水面仍较平缓,可近似看作渐变流,这种水流称为非恒定急变流,所形成的波称为不连续波,如溃坝波、潮汐波等属于此类。

(2) 涨水波和落水波

当波到达以后,引起明渠水位抬高者称为涨水波。相反,若波到达以后引起明渠水位下降者称为落水波。

(3) 顺波和逆波

波的传播方向与水流方向一致者称为顺波,反之则称为逆波。

例如某渠道上闸门迅速开启,如图 6.62 所示,在闸的上、下游将发生非恒定急变流——不连续波。下游因流量增加,水位迅速上涨,形成涨水顺波向下游传播,上游则因闸孔流量骤然增加、水位急剧下降形成落水逆波向上游传播。

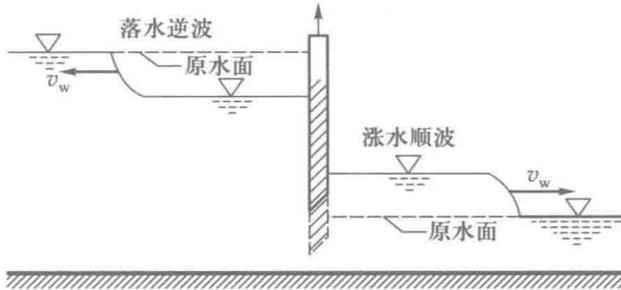


图 6.62

当闸门迅速关闭时,如图 6.63 所示,因闸孔出流流量减小,下游水位降低,形成落水顺波向下游传播,而上游则形成涨水逆波向上游传播。

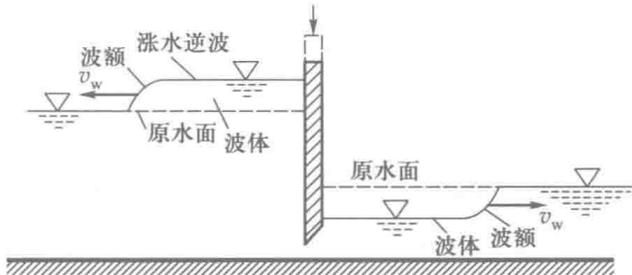


图 6.63

明渠非恒定流问题在水利工程设计及运行管理中经常遇到,因而研究明渠非恒定流的基本原理及计算方法十分必要,同时随着电子计算技术的发展和广泛应用,为解决明渠非恒定流计算问题提供了极为有利的条件。

6.5.2 明渠非恒定渐变流的基本方程

明渠非恒定渐变流的基本方程式是表征水力要素与流程坐标 s 和时间 t 的函数关系式,是由非恒定流的连续性方程和能量方程所组成。

1. 非恒定流连续性方程

现从明渠非恒定流中取长为 ds 的区间来研究。设 ds 区间内水流在初瞬时 t' 的水面线为 $a-a$, 经过 dt 时段以后,末瞬时 $t'' = t + dt$ 的水面线为 $b-b$, 如图 6.64 所示。

中，过水断面面积随时间的变化率与流量随位置的变化率之和为零。若 $\frac{\partial Q}{\partial s} < 0$ ，必然 $\frac{\partial A}{\partial t} > 0$ ，这说明在微分区间内如果流进的流量多，流出的流量少，区间内水位将随时间而上涨，发生涨水波。反之，若 $\frac{\partial Q}{\partial s} > 0$ 时，则 $\frac{\partial A}{\partial t} < 0$ ，这说明如果流进的流量少，流出的流量多，微分区间内水位将随时间而下降，明渠中会产生落水波。若 $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$ ，必 $\frac{\partial Q}{\partial s} = 0$ ，即 Q 沿程不变，水流为恒定流。

因 $Q = Av$ ， $A = A(s, t)$ ， $v = v(s, t)$ ，所以

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{\partial(Av)}{\partial s} = A \frac{\partial v}{\partial s} + v \frac{\partial A}{\partial s}$$

将上式代入式 (6.121) 得

$$\frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial v}{\partial s} + v \frac{\partial A}{\partial s} = 0 \tag{6.122}$$

式 (6.122) 是明渠非恒定流连续性方程的另一种表达式。对于矩形断面明渠， $A = bh$ ，式 (6.122) 可以写成

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial v}{\partial s} + v \frac{\partial h}{\partial s} = 0 \tag{6.123}$$

2. 明渠非恒定渐变流的能量方程式

在第 5 章已推出了一元非恒定渐变总流的能量方程式 (5.56)。如图 6.65 所示，因在明渠中习惯于用 z 来代表水位，若把式 (5.56) 应用于明渠水流，可将测压管水头改写为过水断面上的水位。

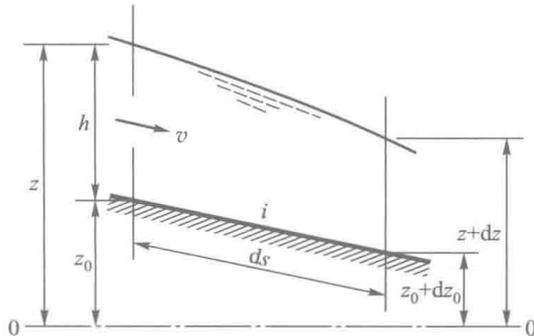


图 6.65

式 (5.56) 中 $\frac{\tau_0 \chi_0}{\rho g A}$ 项代表单位重量液体在单位长度内水流的沿程损失，故

$\frac{\tau_0 \chi_0}{\rho g A} = \frac{\partial h_f}{\partial s}$; 而 $\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2g} \right) = \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial s}$, 故式 (5.56) 可改写为

$$-\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial h_f}{\partial s} \quad (6.124)$$

上式便是明渠非恒定渐变总流的能量方程式, 或称为运动方程式。方程式左端 $-\frac{\partial z}{\partial s}$ 代表水面坡度 J , 它代表单位重量液体的势能沿流程的变化率。方程式右端 $\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t}$ 一项称为波动坡度 J_w , 它代表 (作用于单位重量液体上) 当地加速度所产生的惯性力沿单位流程所作的功。 $\frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial s}$ 一项称为动能坡度 J_v , 它代表单位重量液体的动能沿流程的变化率, 也可以看作 (作用于单位重量液体上) 迁移加速度所产生的惯性力沿单位流程所作的功。 $\frac{\partial h_f}{\partial s}$ 一项称为摩阻坡度 J_f , 它代表单位重量液体沿单位流程克服摩擦阻力所作的功。由此, 式 (6.124) 又可写作

$$J = J_w + J_v + J_f \quad (6.125)$$

式 (6.125) 反映了明渠非恒定流的能量守恒关系。即可理解为: 明渠非恒定流中, 势能沿流程的改变, 将用于克服阻力做功和转化为加速度而做功。

若水流为恒定流, 当地加速度为零, 故 $J_w = \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} = 0$, 式 (6.124) 变为仅含变量 s 的常微分方程:

$$-\frac{dz}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{dh_f}{ds}$$

此式即为明渠恒定非均匀渐变流的基本微分方程式。

若水流为恒定均匀流, 即 $J_v = \frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2g} \right) = 0$, 上式变为

$$-\frac{dz}{ds} = \frac{dh_f}{ds} = J_f = \frac{Q^2}{K^2} \quad \text{或} \quad Q = K \sqrt{J}$$

此式乃是熟知的恒定均匀流基本公式。由此可见, 当水力要素不随时间改变时, 明渠非恒定渐变流基本微分方程式即转化为恒定流基本微分方程式。

若将式 (6.124) 中摩阻坡度近似按恒定均匀流的摩阻坡度来计算, 即 $J_f = \frac{\partial h_f}{\partial s} = \frac{Q^2}{K^2}$, 或 $J_f = \frac{\partial h_f}{\partial s} = \frac{v^2}{C^2 R}$, 则式 (6.124) 可改写为

$$\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{Q^2}{K^2} = 0 \quad (6.126)$$

如图 6.65 所示, 若明渠渠底高程为 z_0 , 水深为 h , 底坡为 i , 水位为 z , 则 $z = z_0 + h$, $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z_0}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial s}$; 而 $\frac{\partial z_0}{\partial s} = -i$, 故 $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial h}{\partial s} - i$ 。这样可以把明渠非恒定流能量方程式 (6.124) 中的变量 z 改为变量 h 来表达, 即

$$i - \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial s} + J_f$$

或

$$\frac{\partial h}{\partial s} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} = i - J_f \quad (6.127)$$

或

$$\frac{\partial h}{\partial s} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} = i - \frac{v^2}{C^2 R} \quad (6.128)$$

式 (6.124)、式 (6.126) 或式 (6.128) 是明渠非恒定渐变流能量方程式不同表达形式, 根据计算方便可以任意选取其中之一。

明渠非恒定流的连续性方程式与能量方程式组成了求解明渠非恒定渐变流的微分方程组, 该方程组称为圣维南 (Saint-Venant) 方程组。圣维南方程组是具有 2 个独立变量 s, t 和两个从属变量 z, Q (或 h, v) 的一阶拟线性双曲型微分方程组。这类方程目前在数学上尚无精确的解析解法, 因而实践中常用数值解法。这些解法大致可归纳为以下几种:

第一种为差分法。就是把圣维南方程组离散化, 用偏差商代替偏微商。同时由于微分方程在离散化过程中采用的具体作法不一样, 又把差分格式分为显式差分 and 隐式差分两种。在确定计算格式的基础上, 结合水流的初始条件及边界条件, 再求指定变量域内各结点的函数值。

第二种为特征线法。是将非恒定流微分方程组转化为特征方程, 然后用差商取代微商改为差分方程, 再结合水流的初始条件及边界条件求方程组的近似解。

第三种为瞬时流态法。是将偏微分方程直接改写成差分方程, 然后结合水流初始条件及边界条件, 近似计算指定瞬时全流程各断面的水流情况。此法简称瞬态法。

第四种为微辐波理论法。首先假定由于波动所引起的各种水力要素的变化都是微小量, 这些微小量之乘积或平方值均可忽略不计, 这样将拟线性偏微分方程化为一阶线性常微分方程, 然后求解。

综上所述, 明渠非恒定流的计算, 无论采用哪种近似计算方法都需要结合水流的初始条件及边界条件进行, 因此下面讨论明渠非恒定渐变流基本方程的初始条件及边界条件。

6.5.3 初始条件及边界条件

1. 初始条件

初始条件通常是指非恒定流的起始时刻的水流条件，故常为非恒定流开始前的恒定流的流量与水位。就一般而言，初始条件也可以是非恒定流过程中，人们需要着手开始计算的任何指定时刻的水流条件。

如图 6.66 所示，设在 st 坐标平面上所研究的自变量域内有一条曲线 $s = s(t)$ ，曲线上各点（如 1, 2, 3, ...）的水力要素（如水位、流量或水深、流速）为已知。初始条件可以通过计算或实测而事先取得。

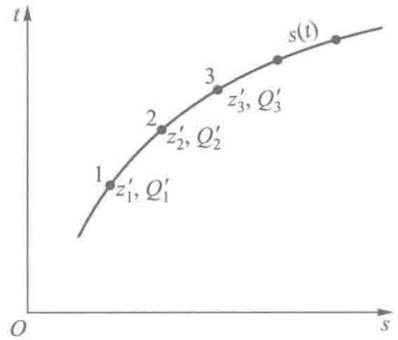


图 6.66

2. 边界条件

发生非恒定流的河渠两端断面应满足的水力条件称为边界条件。

(1) 第一边界条件

产生非恒定流的首端断面应满足的水力条件称为第一边界条件，它常常以发生非恒定流起始断面的流量过程线或水位过程线来表示：

$$Q = Q(t) \quad \text{或} \quad z = z(t)$$

例如洪水波、水电站调节波、溃坝波等，起端断面满足的水力条件都常以流量过程线表示。但由于各类问题不同，同类问题中又因各种具体情况不一样，因而过程线的形状、特点也不尽相同。如图 6.67a 为单一洪峰所形成的非恒定流流量过程线，图 6.67b 为电站日调节流量过程线。

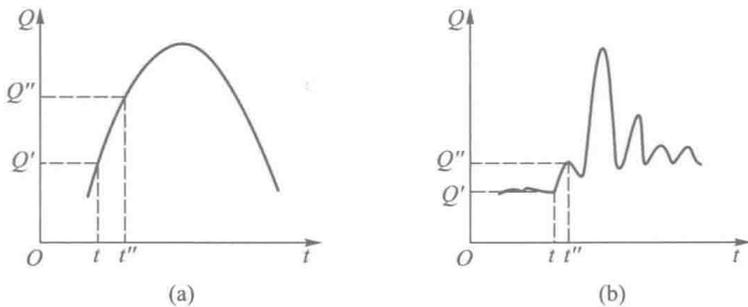


图 6.67

(2) 第二边界条件

非恒定流可能波及的末端断面应满足的水力条件称为第二边界条件。一般

以水位、流量关系来表示，例如洪水演算中第二边界条件用下游某断面恒定流的水位流量关系来表示，如图 6.68 所示。第二边界条件有时也用某一稳定水位来表示，如波及末端为大型水库或湖泊，则常以水库或湖泊的水位来表示。

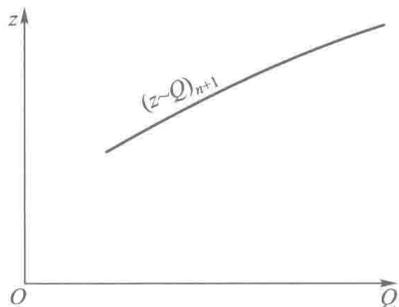
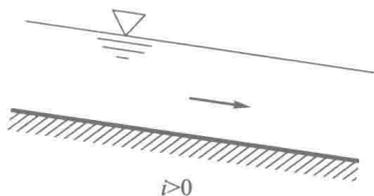


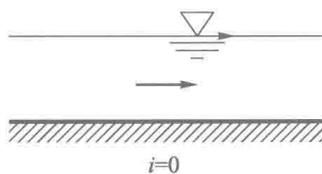
图 6.68

思考题

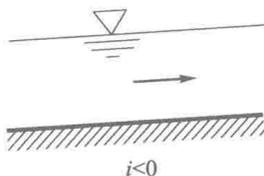
- 6.1 与有压管流相比，明渠水流的主要特征是什么？
- 6.2 明渠均匀流的特点是什么？产生条件又是什么？
- 6.3 如下图示的各种长渠中，糙率沿程不变，试从力学的观点分析是否可能产生均匀流动。



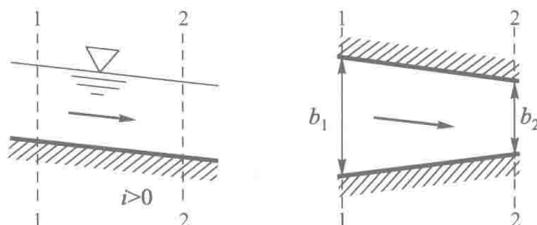
(a) 正底坡棱柱体渠道



(b) 平底坡棱柱体渠道



(c) 逆底坡棱柱体渠道



(d) 正底坡断面改变的渠道

思 6.3

- 6.4 均匀流水深与渠道底坡、糙率、流量之间有何关系？

6.5 今欲将产生均匀流的渠道中的流速减小，以减小冲刷，但流量仍然保持不变，试问有几种方法可以达到此目的。

6.6 明渠水流有哪三种流态，是如何定义的，判别标准是什么？

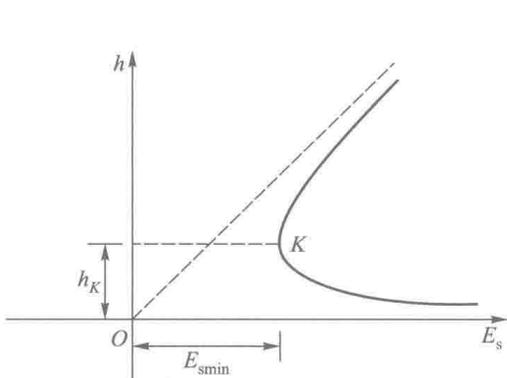
6.7 急流、缓流、临界流各有哪些特点？

6.8 弗劳德数的物理意义是什么？为什么可以用它来判别明渠水流的流态？

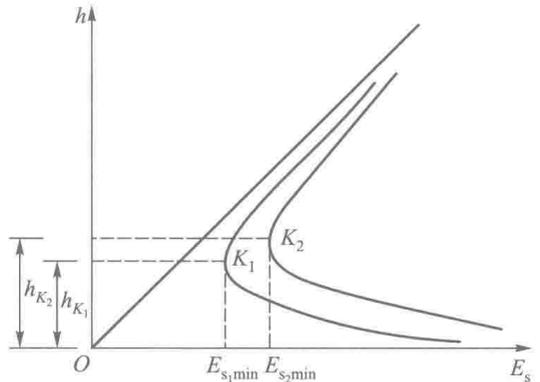
6.9 什么叫断面比能？它与断面单位重量液体的总能量 E 有何区别？

6.10 何谓断面比能曲线？比能曲线有哪些特征？

6.11 若渠道断面形状、尺寸一定，只使得原来的流量 Q_1 增大为 Q_2 （即 $Q_2 > Q_1$ ），试在同一图上绘出比能曲线，比较哪一个临界水深大；如果只增大底坡， h_K 又怎样变化？



思 6.10



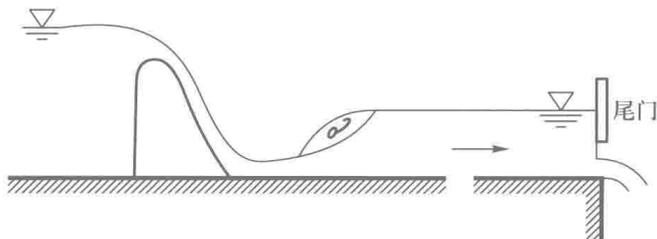
思 6.11

6.12 陡坡、缓坡、临界坡是怎样定义的？如何判别渠道坡度的陡缓？

6.13 缓坡渠道只能产生缓流，陡坡渠道只能产生急流，对吗？缓流或急流为均匀流时，只能分别在缓坡或陡坡上发生，对吗？

6.14 什么叫水跃、波状水跃和完全水跃？

6.15 试验槽中水流现象如图示，流量不变，如提高或降低一些尾门（尾门之前的水流始终为缓流），试分析水跃位置是否移动？向前移动还是向后移动？为什么？



思 6.15

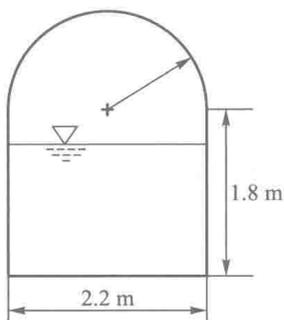
- 6.16 为什么可以利用水跃来消除能量？什么形式的水跃消能效率最高？
 6.17 明渠非恒定流的主要特征有哪些？
 6.18 明渠非恒定流波动的物理本质是什么？
 6.19 写出明渠非恒定渐变流的能量方程，试说明其各项的物理意义。

习 题

6.1 某水库泄洪隧道，断面为圆形，直径 d 为 8 m，底坡 i 为 0.002，粗糙系数 n 为 0.014，水流为无压均匀流，当洞内水深 h 为 6.2 m 时，求泄洪流量 Q 。

6.2 一梯形混凝土渠道，按均匀流设计。已知 Q 为 $35 \text{ m}^3/\text{s}$ ， b 为 8.2 m， m 为 1.5， n 为 0.012 及 i 为 0.000 12，求 h （用试算——图解法和迭代法分别计算）。

6.3 某电站进水口后接一方圆形无压引水隧洞，断面尺寸如图所示， n 为 0.018， i 为 0.002 2，试求当引水流量 Q 为 $5 \text{ m}^3/\text{s}$ ，洞内为均匀流时的水深 h （用试算——图解法和迭代法分别计算）。

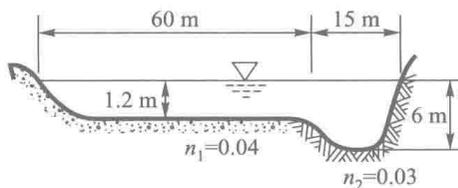


题 6.3

6.4 一梯形灌溉土质渠道，按均匀流设计。根据渠道等级、土质情况，选定底坡 i 为 0.001， m 为 1.5， n 为 0.025，渠道设计流量 Q 为 $4.2 \text{ m}^3/\text{s}$ ，并选定水深 h 为 0.95 m，试设计渠道的底宽 b 。

6.5 一梯形渠道，按均匀流设计。已知 Q 为 $23 \text{ m}^3/\text{s}$ ， h 为 1.5 m， b 为 10 m， m 为 1.5 及 i 为 0.000 5，求 n 及 v 。

6.6 某天然河道的河床断面形状及尺寸如图所示，边滩部分水深为 1.2 m，若水流近似为均匀流，河底坡度 i 为 0.000 4，试确定所通过的流量 Q 。

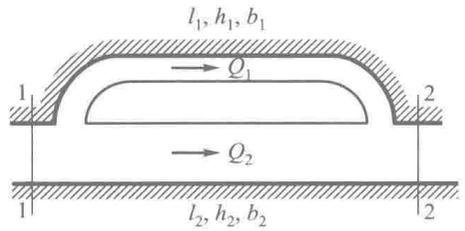


题 6.6

6.7 今欲开挖一梯形断面土渠。已知：流量 $Q = 10 \text{ m}^3/\text{s}$ 。边坡系数 $m = 1.5$ ，粗糙系数 $n = 0.02$ ，为防止冲刷的最大允许流速 $v = 1.0 \text{ m/s}$ ，试求：

- (1) 按水力最佳断面条件设计断面尺寸；
- (2) 渠道的底坡 i 为多少？

6.8 如图所示,有近似为矩形断面的分岔河道,已知:长度 $l_1 = 6000 \text{ m}$, $l_2 = 2500 \text{ m}$, 宽度 $b_1 = 80 \text{ m}$, $b_2 = 150 \text{ m}$, 水深 $h_1 = 2.2 \text{ m}$, $h_2 = 4 \text{ m}$, 河床的粗糙系数 $n = 0.03$, 当总流量 $Q = 400 \text{ m}^3/\text{s}$ 时, 1-1 断面处的水面高程为 $\Delta_1 = 120.00 \text{ m}$, 试近似地按均匀流计算:



题 6.8

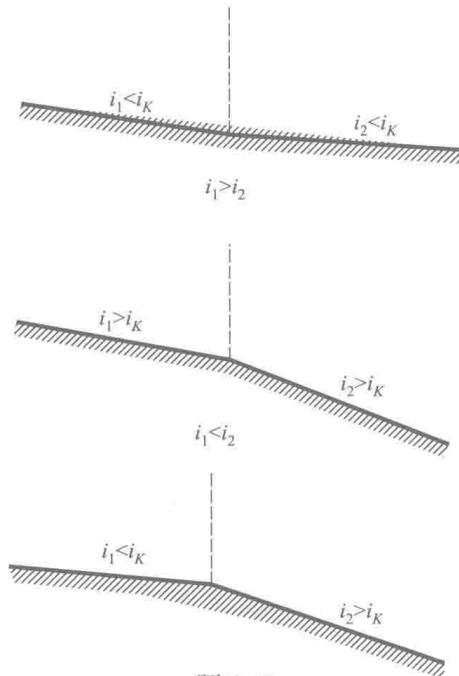
- (1) 2-2 断面的水面高程 Δ_2 ;
- (2) 流量分配 Q_1 及 Q_2 。

6.9 一梯形断面渠道, b 为 8 m , m 为 1 , n 为 0.014 , i 为 0.0015 ; 当流量分别为 $Q_1 = 8 \text{ m}^3/\text{s}$, $Q_2 = 16 \text{ m}^3/\text{s}$ 时。求:

- (1) 用试算法计算流量为 Q_1 时临界水深;
- (2) 用迭代法计算流量为 Q_2 时临界水深;
- (3) 流量为 Q_1 及 Q_2 时, 判别明渠水流作均匀流的流态。

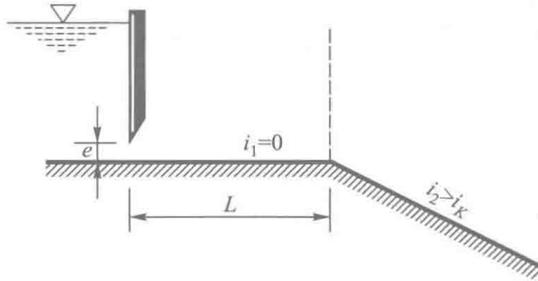
6.10 证明: 当断面比能 E_s 以及渠道断面形式、尺寸 (b, m) 一定时, 最大流量相应的水深是临界水深。

6.11 试分析并定性绘出图中三种底坡变化情况时, 上下游渠道水面线的形式。已知上下游渠道断面形状、尺寸及粗糙系数均相同并为长直棱柱体明渠。



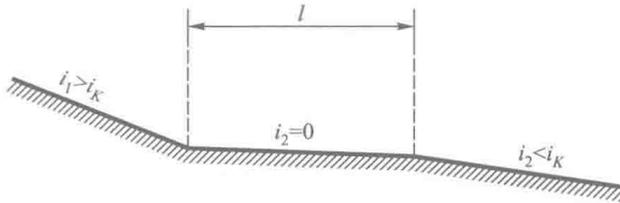
题 6.11

6.12 图示上、下游断面形状尺寸与粗糙系数均相同的直线渠道，上游为平底，下游为陡坡。在平底渠段设有平板闸门，已知闸孔开度 e 小于临界水深，闸门至底坡转折处的距离为 L ，试问当 L 的大小变化时，闸门下游渠中水面线可能会出现哪些形式？



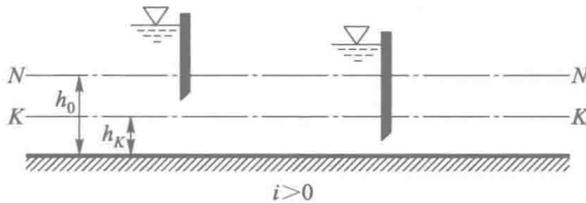
题 6.12

6.13 如图所示三段底坡不等的直线明渠，各段渠道断面形状尺寸及粗糙系数均相同，上下渠道可视为无限长，中间段渠道长度为 l ，试分析当中段渠道长度 l 变化时渠中水面线可能出现哪些形式？



题 6.13

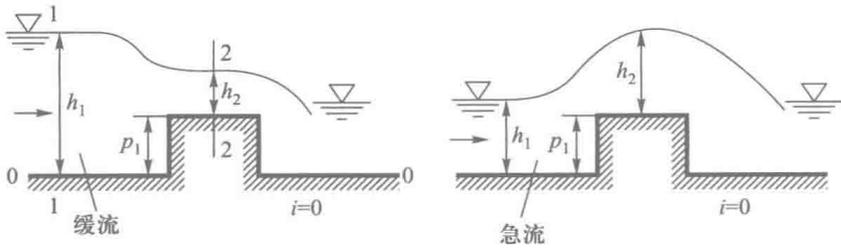
6.14 有一长直的棱柱体渠道，设有两平板闸门。当通过某一流量时渠中正常水深为 h_0 、临界水深为 h_K ，各闸门的开度如图所示，试绘出各段渠道水面曲线的形式。



题 6.14

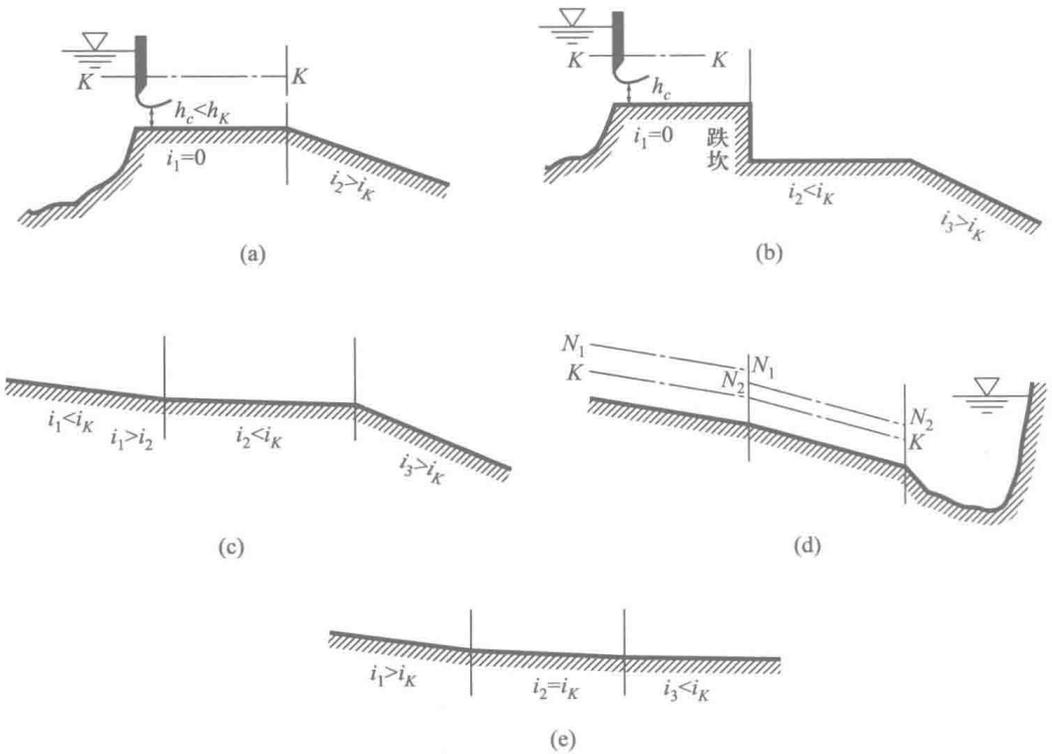
6.15 如图所示矩形渠道设置一潜坎，试证明缓流通过潜坎时，水面要下

降，而急流通过潜坎时，水面要上升（不计损失）。



题 6.15

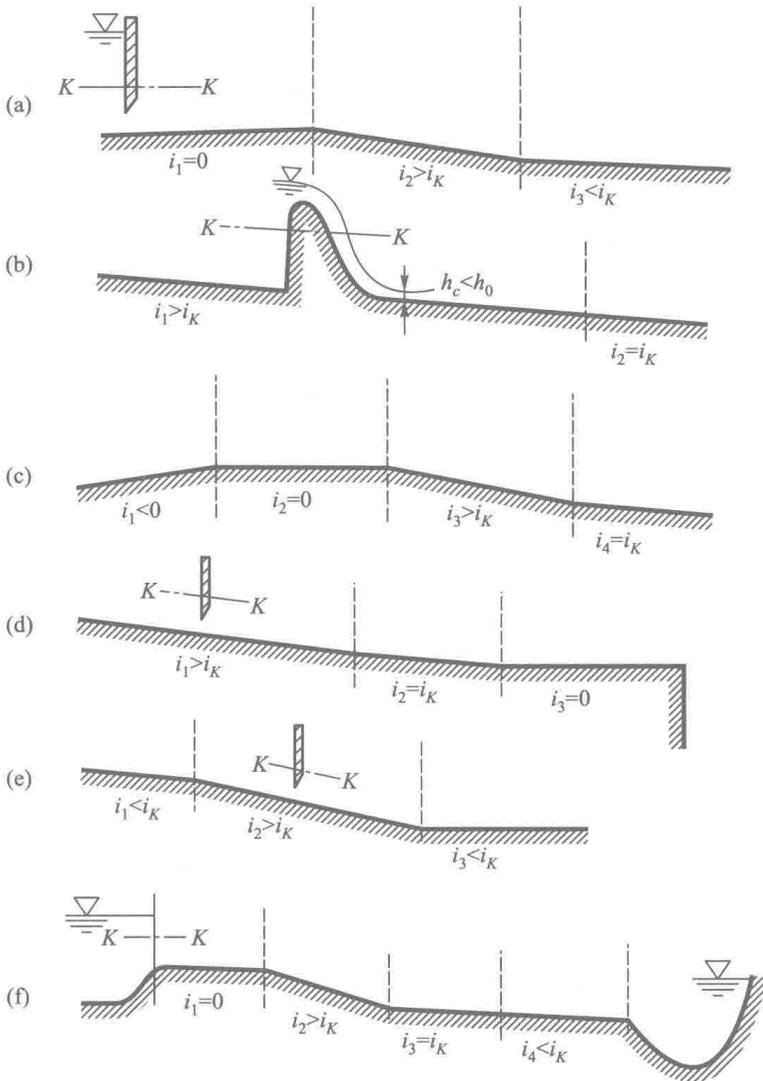
6.16 试定性分析图示流量 Q 和粗糙系数 n 一定的长直棱柱体渠道中可能产生的水面曲线型式。



题 6.16

6.17 在图示各段都长而直的棱柱体渠道中，已知流量 Q ，粗糙系数 n 均为一定，试定性绘出下列各渠道中的水面曲线。

6.18 一水跃产生于一棱柱体矩形水平渠段中。已知： b 为 5.0 m， Q 为 $50 \text{ m}^3/\text{s}$ ， h_1 为 0.5 m。



题 6.17

(1) 试判别水跃的形式并确定 h_2 。

(2) 计算 E_j , P_j , E_{jj} , E , K_j 及 L_j 。

6.19 一水跃产生于陡槽下游的矩形水平扩散段中。已知： b_1 为 2.0 m， Q 为 $5.4 \text{ m}^3/\text{s}$ ， θ 为 6° ， h_1 为 0.35 m。求 L_j 及 h_2 。

6.20 有一矩形渠道， Q 为 $40 \text{ m}^3/\text{s}$ ， b 为 10 m， n 为 0.013，若陡坡 i_1 与缓坡 i_2 相接，已知 $i_1 = 0.01$ ， $i_2 = 0.0009$ ，试问有无水跃发生的可能？若有水跃发生，试确定其位置。

7 堰流及闸孔出流

在水利工程中，为了泄水或引水，常修建水闸或溢流坝等建筑物，以控制河流或渠道的水位及流量。当这类建筑物顶部闸门部分开启，水流受闸门控制而从建筑物顶部与闸门下缘间的孔口流出时，这种水流状态叫作闸孔出流（图 7.1a 和 b）。当顶部闸门完全开启，闸门下缘脱离水面，闸门对水流不起控制作用时，水流从建筑物顶部自由下泄，这种水流状态称为堰流（图 7.1c 和 d）。

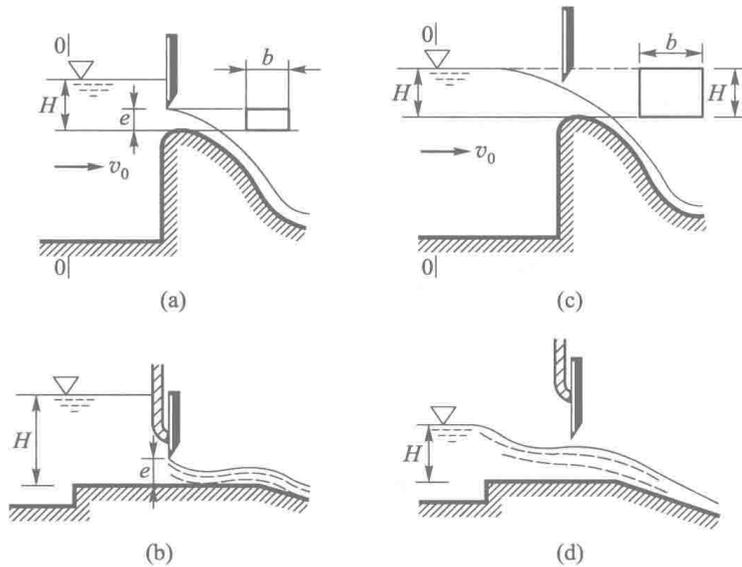


图 7.1

堰流和闸孔出流是两种不同的水流现象。

堰流由于闸门对水流不起控制作用，水面线为一条光滑的降落曲线；闸孔出流由于受到闸门的控制，闸孔上、下游的水面是不连续的。也正是由于堰流及闸孔出流这种边界条件的差异，它们的水流特征及过水能力也不相同。

同时，堰流与闸孔出流也存在着许多共同点。首先，堰流和闸孔出流都是因水闸或溢流坝等建筑物壅高了上游水位，在重力作用下形成的水流运动。从能量的观点来看，出流的过程都是一种势能转化为动能的过程。其次，这两种水流都是在较短的距离内流线发生急剧弯曲，离心惯性力对建筑物表面的压强

分布及建筑物的过水能力均有一定影响。因而，都属于明渠急变流，其出流过程的能量损失主要是局部损失。

实际上，对于明渠中具有闸门控制的同一过流建筑物而言，在某种条件下出流属于堰流，在另外的条件下也可以变成闸孔出流。这种水流的转化条件除与闸孔的相对开度 $\frac{e}{H}$ 有关外，还与闸底坎及闸门（或胸墙）的型式有关；另外，上游来流是涨水或降水也影响流态转换的界限值。下列数值，可作为判别的大致界限。

闸底坎为图 7.1b 与图 7.1d 所示的平顶堰时，

$$\frac{e}{H} \leq 0.65, \text{为闸孔出流；}$$

$$\frac{e}{H} > 0.65, \text{为堰流。}$$

闸底坎为图 7.1a 与图 7.1c 所示的曲线型堰时，

$$\frac{e}{H} \leq 0.75, \text{为闸孔出流；}$$

$$\frac{e}{H} > 0.75, \text{为堰流。}$$

式中： e 为闸孔开度； H 为从堰顶算起的闸前水深。

堰流及闸孔出流是水利工程中极为常见的水流现象，其水力计算的主要任务是研究过水能力的问题。所以，水利水电工程中常把明渠、溢洪道设置有堰或闸，控制过水流量的区段称为控制段。本章将应用水力学的基本原理，分析堰闸出流的水力特性，并介绍有关的水力计算方法。

7.1 堰流的类型及计算公式

7.1.1 堰流的类型

在水利工程中，常根据不同的建筑条件及使用要求，将堰作成不同的类型。例如，溢流坝常用混凝土或石料砌筑成厚度较大的曲线形或折线形；而实验室内使用的量水堰，一般用钢板或木板作成很薄的堰壁。显然，堰坎外形及厚度不同，其能量损失以及过水能力也会不同。

如图 7.2 所示，水流接近堰顶时，由于流线收缩，流速加大，自由表面也将逐渐下降。习惯上把堰前水面无明显下降的 0-0 断面叫作堰前断面；该断面堰顶以上的水深叫作堰顶水头，以 H 表示；堰前断面的流速称为行近流速

v_0 。实测表明，堰前断面距上游壁面的距离约为

$$l = (3 \sim 5)H$$

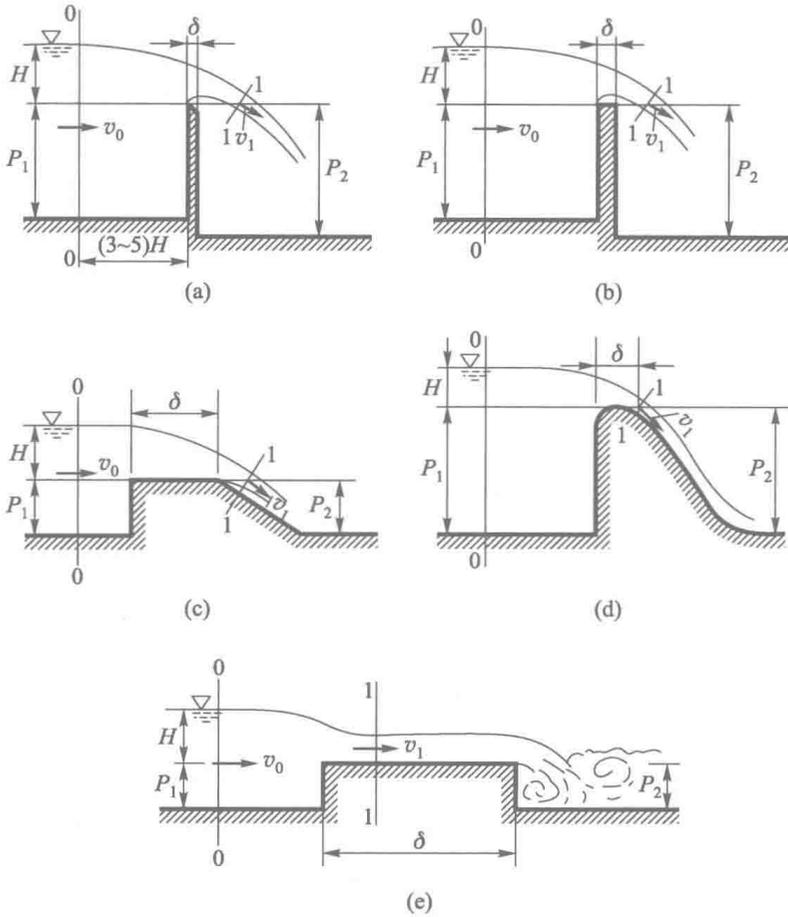


图 7.2

根据实验资料，流过堰顶的水流形态随堰坎厚度与堰顶水头之比 $\frac{\delta}{H}$ 而变。

工程上通常按照堰坎厚度 δ 与堰顶水头 H 的比值大小及水流的特征，将堰流分作薄壁堰流、实用堰流及宽顶堰流三种类型。

1. 薄壁堰流：即 $\frac{\delta}{H} < 0.67$ 。越过堰顶的水舌形状不受堰坎厚度的影响。

水舌下缘与堰顶只有线的接触，水面呈单一的降落曲线（图 7.2a 和 b）。实际应用的薄壁堰，堰顶常作成锐缘形，故薄壁堰也称锐缘堰。

2. 实用堰流：即 $0.67 < \frac{\delta}{H} < 2.5$ 。由于堰坎加厚，水舌下缘与堰顶呈面的

接触,水舌受到堰顶的约束和顶托。但这种影响还不大,堰顶水流主要还是在重力作用下自由跌落。工程中常将堰的剖面作成折线形或曲线形,前者称为折线形实用堰(图 7.2c),后者称为曲线形实用堰(图 7.2d)。

3. 宽顶堰流:即 $2.5 < \frac{\delta}{H} < 10$ 。在此条件下,堰坎厚度对水流的顶托作用已经非常明显。进入堰顶的水流,受到堰顶垂直方向的约束,过水断面渐小,流速加大,由于动能增加,势能必然减小;再加上水流进入堰顶时产生局部能量损失;所以,进口处形成水面跌落。此后,由于堰顶对水流的顶托作用,有一段水面与堰顶几乎平行。当下游水位较低时,出堰水流又产生第二次水面跌落,如图 7.2e 所示。实验表明,宽顶堰流的水头损失仍然主要是局部水头损失,沿程水头损失可以略去不计。

如果堰坎厚度继续增加,例如 $\frac{\delta}{H} > 10$,则沿程水头损失已经不能略去,水流特性不再属于堰流,而是明渠水流(图 7.3)。

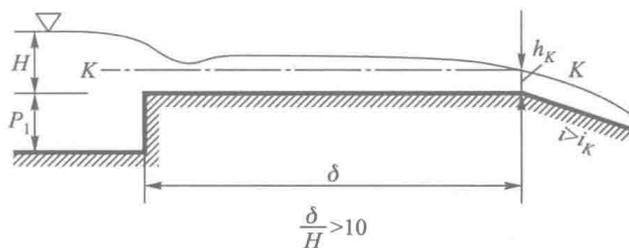


图 7.3

7.1.2 堰流的基本公式

现在应用能量方程式来推求堰流计算的基本公式。

对堰前断面 0-0 及堰顶断面 1-1 列出能量方程,以通过堰顶的水平面作为基准面(图 7.2)。其中,0-0 断面为渐变流;由于流线弯曲,1-1 断面水流属急变流,过水断面上测压管水头不为常数,故用 $\overline{\left(z + \frac{p}{\rho g}\right)}$ 表示 1-1 断面上测压管水头的平均值。由此可得

$$H + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = \overline{\left(z + \frac{p}{\rho g}\right)} + (\alpha_1 + \zeta) \frac{v_1^2}{2g}$$

式中: v_0 为 0-0 断面的平均流速,即行近流速; v_1 为 1-1 断面的平均流速; α_0 、 α_1 是相应断面的动能修正系数; ζ 为局部水头损失系数。

设 $H + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = H_0$, 其中 $\frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}$ 为行近流速水头, H_0 称为堰顶全水头。

令 $\left(z + \frac{p}{\rho g}\right) = \xi H_0$, ξ 为某一修正系数。则上式可改写为

$$H_0 - \xi H_0 = (\alpha_1 + \zeta) \frac{v_1^2}{2g}$$

即

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 + \zeta}} \sqrt{2g(H_0 - \xi H_0)}$$

因为堰顶过水断面面积一般为矩形, 设其断面宽度为 b ; 1-1 断面的水舌厚度用 kH_0 表示, k 为反映堰顶水流垂直收缩的系数。则 1-1 断面的过水面积应为 $kH_0 b$, 通过流量为

$$\begin{aligned} Q &= kH_0 b v_1 \\ &= kH_0 b \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 + \zeta}} \sqrt{2gH_0(1 - \xi)} \\ &= \varphi k \sqrt{1 - \xi} b \sqrt{2gH_0^{3/2}} \end{aligned}$$

式中: $\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 + \zeta}}$, 称为流速系数。

令 $\varphi k \sqrt{1 - \xi} = m$, 称为堰的流量系数。则

$$Q = mb \sqrt{2g} H_0^{3/2} \quad (7.1)$$

式 (7.1) 就是堰流计算的基本公式。对堰顶过水断面为矩形的薄壁堰流、实用堰流或宽顶堰流, 都是适用的。由式 (7.1) 可知, 过堰的流量与堰顶全水头 H_0 的 3/2 次方成比例, 即 $Q \propto H_0^{3/2}$ 。

从上面的推导可以看出: 影响流量系数的主要因素是 φ , k , ξ , 即 $m = f(\varphi, k, \xi)$ 。其中: φ 主要是反映局部水头损失的影响; k 主要是反映堰顶水流垂直收缩的程度; 而 ξ 则是代表堰顶断面的平均测压管水头与堰顶全水头之间的比例系数。显然, 所有这些因素除了与堰顶水头 H 有关外, 还与堰的边界条件有关, 例如, 上游堰高 P_1 , 堰顶进口边缘的形状等。所以, 不同类型、不同高度的堰, 其流量系数各不相同。

在实际应用中, 有时下游水位较高或下游堰高较小影响了堰的过流能力, 这种堰流称为淹没出流; 反之叫作自由出流。有些堰的堰顶过流宽度小于上游渠道宽度或是堰顶设有边墩及闸墩, 会引起水流的侧向收缩, 降低过水能力, 这种堰叫作有侧收缩堰; 反之, 称为无侧收缩堰。式 (7.1) 没有包含淹没及

侧收缩对堰过水能力的影响, 有关这些影响, 将在下面分别讨论每种堰流的水力计算方法时加以考虑。

7.2 薄壁堰流的水力计算

薄壁堰流流过时, 水头和流量关系稳定, 因此, 常作为水力模型试验或野外测量中一种有效的量水工具。有些临时性的挡水建筑, 如叠梁闸门 (图 7.4), 也可近似看作薄壁堰流计算。另外, 工程上广泛应用的曲线形实用堰, 其外形一般按照矩形薄壁堰流水舌下缘曲线设计。所以, 薄壁堰流的研究是具有实际意义的。

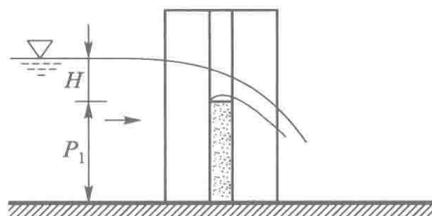


图 7.4

常用的薄壁堰, 堰坎顶部的过水断面常作成矩形或三角形, 分别称为矩形薄壁堰或三角形薄壁堰。

7.2.1 矩形薄壁堰流

实验证明: 当矩形薄壁堰流为无侧收缩, 自由出流时, 水流最为稳定, 测量精度也较高。所以用来量水的矩形薄壁堰应使上游渠宽与堰宽相同; 下游水位低于堰顶。此外, 为了保证堰为自由出流, 还应满足:

1. 堰上水头不宜过小 (一般应使 $H > 2.5 \text{ cm}$), 否则溢流水舌受表面张力作用, 出流很不稳定。
2. 水舌下面的空间应与大气相通, 否则由于溢流水舌把空气带走, 压强降低, 水舌下面形成局部真空, 也会造成出流不稳定。

图 7.5 所示是实验室中测得的无侧收缩、非淹没矩形薄壁堰自由出流的水舌形状。

无侧收缩、非淹没矩形薄壁堰的流量按式 (7.1) 计算, 即

$$Q = mb\sqrt{2g}H_0^{3/2}$$

为了便于根据直接测出的水头来计算流量, 可改写式 (7.1)。把行近流速的影响包括在流量系数中:

$$\begin{aligned} Q &= mb\sqrt{2g}\left(H + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}\right)^{3/2} \\ &= m\left(1 + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2gH}\right)^{3/2} b\sqrt{2g}H^{3/2} \end{aligned}$$

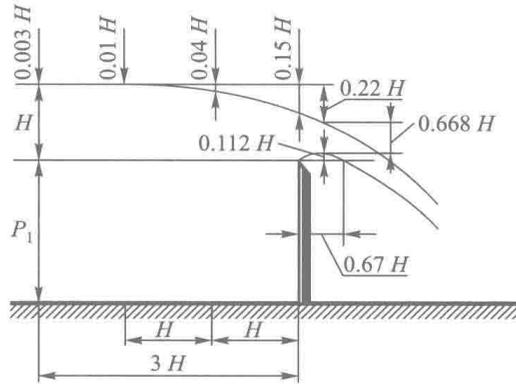


图 7.5

令 $m_0 = m \left(1 + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2gH} \right)^{3/2}$ ，则得

$$Q = m_0 b \sqrt{2g} H^{3/2} \quad (7.2)$$

式中，包括行近流速影响的流量系数 m_0 可按下列经验公式计算：

$$m_0 = 0.403 + 0.053 \frac{H}{P_1} + \frac{0.0007}{H} \quad (7.3)$$

式中， P_1 为上游堰高， H 与 P_1 均以 m 计。上式用于 $H \geq 0.25$ m， $\frac{H}{P_1} \leq 2$ 及 $P_1 \geq 0.3$ m 条件下。

例 7.1 某水力学实验室拟采用水工模型试验的方法对某溢流坝的水深、压强、掺气减蚀等水力学问题开展研究，需要在模型坝上游设计一量水堰，用来测量供水流量。根据试验任务书的要求，计算出模型需要的最大流量为 $0.4 \text{ m}^3/\text{s}$ ，最小流量为 $0.0348 \text{ m}^3/\text{s}$ 。结合模型试验场地规划，设计为足够长的等宽矩形薄壁堰，堰宽 0.6 m，堰高 1.2 m，堰板与堰槽正交，堰板顶部水平。而水电水利常规水工模型试验规程（DL/T 5244 - 2010）对量水堰还有如下要求：（1）模型流量超过 $0.030 \text{ m}^3/\text{s}$ 时，宜采用矩形薄壁堰，堰顶水头不应小于 30 mm；（2）矩形薄壁堰堰板高度应大于最大堰顶水头的 2 倍。试判断该实验室设计的量水堰是否满足试验和规程要求？

解：因为模型最小流量为 $0.0348 \text{ m}^3/\text{s}$ ，大于 $0.030 \text{ m}^3/\text{s}$ ，所以选择矩形薄壁堰是合适的。

假设堰顶水头为 30 mm 时，根据流量系数的计算公式（7.3），有

$$m_0 = 0.403 + 0.053 \frac{H}{P_1} + \frac{0.0007}{H}$$

$$= 0.403 + 0.053 \times \frac{0.03}{1.2} + \frac{0.0007}{0.03} = 0.4277$$

由流量计算公式 (7.2) 可得

$$\begin{aligned} Q &= m_0 b \sqrt{2g} H^{3/2} = 0.4277 \times 0.6 \times \sqrt{2 \times 9.8} \times 0.03^{1.5} \text{ m}^3/\text{s} \\ &= 0.0059 \text{ m}^3/\text{s} < 0.0348 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

所以, 最小流量 $0.0348 \text{ m}^3/\text{s}$ 时, 对应的堰顶水头超过 30 mm , 满足要求。

最大流量 $0.4 \text{ m}^3/\text{s}$ 时, 对应最大的堰顶水头, 设为 H , 则根据上面两个公式有

$$Q = \left(0.403 + 0.053 \times \frac{H}{1.2} + \frac{0.0007}{H} \right) \times 0.6 \times \sqrt{2 \times 9.8} \times H^{1.5} = 0.4 \text{ m}^3/\text{s}$$

通过试算可以求得 $H = 0.5 \text{ m}$, 因为 $2H = 2 \times 0.5 \text{ m} < 1.2 \text{ m}$, 所以该堰堰板高度大于最大堰顶水头的 2 倍, 满足要求。

综上所述, 该实验室设计的量水堰满足模型试验和规程的要求。

7.2.2 直角三角形薄壁堰流

当所需测量的流量较小 (例如 $Q < 0.05 \text{ m}^3/\text{s}$ 时), 若应用矩形薄壁堰, 则水头过小, 误差增大。一般可改用直角三角形薄壁堰 (图 7.6), 其流量计算公式为

$$Q = C_0 H^{5/2} \quad (7.4)$$

式中: C_0 为直角三角形薄壁堰的流量系数, 一般取 1.4 。

当 $H > 25 \text{ cm}$ 时, 上式修正为

$$Q = 1.343 H^{2.47} \quad (7.5)$$

式中: Q 为流量, 单位是 m^3/s ; H 为堰顶水头, 单位是 m 。

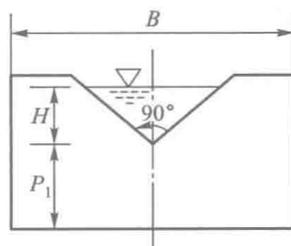


图 7.6

7.3 实用堰流的水力计算

实用堰是水利工程中最常见的堰型之一。作为挡水及泄水建筑物的溢流坝, 就是实用堰的典型例子。低溢流坝常用石料砌筑成折线形 (图 7.2c); 较高的溢流坝为了增大过流能力, 一般作成曲线形 (图 7.2d); 分别称为折线形实用堰和曲线形实用堰。

实用堰的计算公式仍为式 (7.1)。但在实际工程中, 实用堰常由闸墩及边墩分隔成为数个等宽的堰孔, 如图 7.7 所示。此时, 式 (7.1) 中的 $b = nb'$,

其中： n 为堰孔数； b' 为一个堰孔的净宽。当仅有边墩而无闸墩存在时， $n=1$ ， $b=b'$ 。

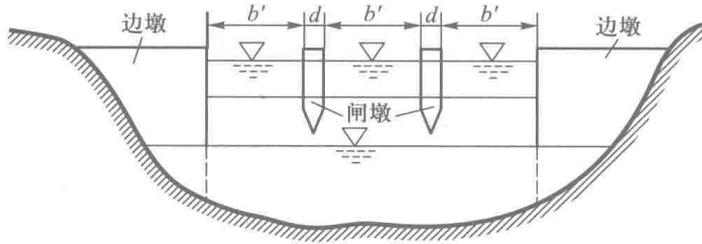


图 7.7

由于边墩或闸墩的存在，水流流经堰孔时，流线发生侧向收缩，减小了溢流宽度，增加了局部水头损失。故同样条件下，有侧收缩（即有边墩或闸墩存在）的堰，其流量较无侧收缩堰的流量为小。通常在式（7.1）的右端乘一个系数 ε_1 ，以考虑侧收缩对流量的影响， ε_1 为侧收缩系数，其值小于 1.0。

此外，实用堰在应用中还可能出现下游水位过高或下游堰高较小，导致过水能力减小，即形成所谓淹没出流的情况。这时也是在式（7.1）的右端乘上一个淹没系数 σ_s 来表示淹没的影响，其值也小于 1.0。

所以计算实用堰的公式应为

$$Q = \varepsilon_1 \sigma_s m n b' \sqrt{2g} H_0^{3/2} \quad (7.6)$$

若堰为无侧收缩（ $\varepsilon_1 = 1$ ）和自由出流（ $\sigma_s = 1$ ），则式（7.6）简化为式（7.1）。

7.3.1 曲线形实用堰的剖面形状

曲线形实用堰比较合理的剖面形状应当具有下列几个优点：过水能力大，堰面不出现过大的负压和经济、稳定。

一般情况下，曲线形实用堰的剖面由下列几个部分组成（图 7.8）：上游的直线段 AB ；堰顶曲线段 BC ；坡度为 $m_\alpha = \cot\alpha$ 的下游直线段 CD ；用来和下游河床或挑流鼻坎连接的反弧段 DE 。

上游直线段 AB 常作成垂直的，有时也作成倾斜的。上游直线段 AB 和下游直线段 CD 的坡度主要根据坝体的稳

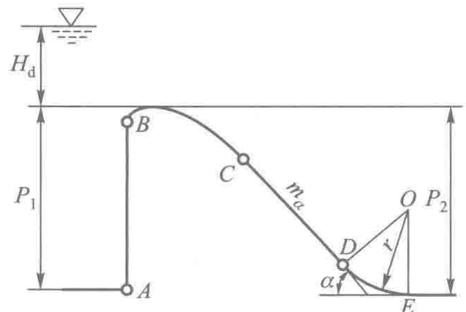


图 7.8

定和强度要求来选定。反弧段 DE 的作用是使直线段 CD 与下游河床平滑连接, 避免水流直冲河床, 或者把水流挑射至远离坝脚的位置, 有利于溢流坝防冲。反弧半径 r 的确定, 应结合消能型式统一考虑。一般情况下, 对于非岩基上高度不大的坝, 当水头 H 较大时, 可取 $r = (0.5 \sim 1.0)(H_d + z_{\max})$; 对于岩基上的高坝, 当水头 $H < 5 \text{ m}$ 时, 可取 $r = (0.25 \sim 0.5)(H_d + z_{\max})$ 。式中, H_d 为实用堰剖面设计水头, z_{\max} 为最大的上下游水位差。

堰顶曲线 BC 对水流特性的影响最大, 是设计曲线形实用堰剖面形状的关键。国内外设计堰剖面形状有许多方法, 主要区别就在于曲线段 BC 如何确定。

如果把曲线 BC 设计成与同样条件下薄壁堰自由出流的水舌下缘相吻合的形状, 则水流将紧贴堰面下泄, 水舌基本上不受堰面形状的影响, 堰面压强应为大气压强 (图 7.9a)。如果堰面曲线突出于水舌下缘, 如图 7.9b 所示, 则堰面将顶托水流, 水舌不能保持原有的形状, 堰面压强应大于大气压强; 堰前总水头中的一部分势能将转换成压能, 使转换成水舌动能的有效水头减小, 过水能力就会降低。反之, 若堰面低于水舌下缘, 溢流水舌将脱离堰顶表面, 脱离处空气被水舌带走, 堰面形成局部负压区 (图 7.9c); 堰顶附近负压区的存在, 等于加大了作用水头, 过水能力将增大。但是, 堰面过大的负压将会形成空蚀破坏和水舌颤动。所以, 理想的剖面形状应使堰面曲线与薄壁堰水舌下缘吻合。这样既不产生负压, 又有比较大的过水能力。但实际上由于堰面的粗糙度不可避免地对水舌发生影响, 再加上上游水头及水舌形状不会绝对稳定, 所以实际采用的剖面形状都是按薄壁堰水舌下缘曲线稍加修改而成。

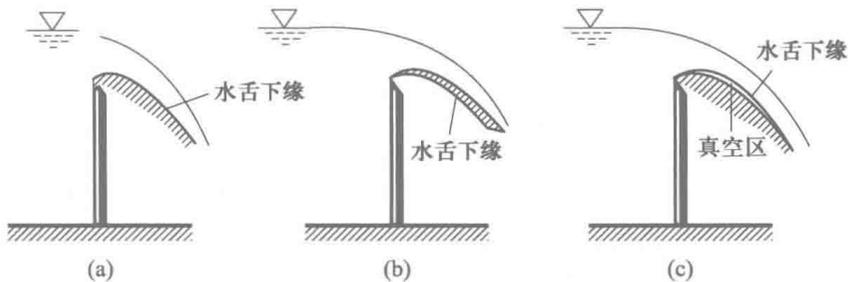


图 7.9

首先来分析薄壁堰自由出流时, 水舌下缘的特性。

矩形薄壁堰自由出流, 如图 7.10 所示。设堰顶 B 点处, 水流质点的流速 u 与水平方向的夹角为 θ , 则 x 、 y 方向的流速分量为

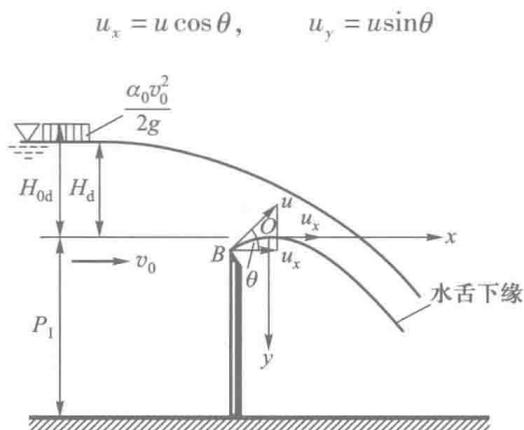


图 7.10

假定 u_x 在运动中保持为常数，并设水质点的运动只受重力作用。取坐标轴如图 7.10 所示，则当液体质点运动至坐标原点 O （水舌下缘最高点）时， $u_y = 0$ ， $u_x = u \cos \theta$ 。经 t 时刻后，液体质点的坐标值应为

$$\left. \begin{aligned} x &= u_x t = ut \cos \theta \\ y &= \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

消去 t 后，两端除以实用堰的设计水头 H_d ，整理后可得

$$\frac{y}{H_d} = k \left(\frac{x}{H_d} \right)^n \quad (7.8)$$

式中：系数 $k = \frac{H_d}{4 \cos^2 \theta \frac{u^2}{2g}}$ ，指数 $n = 2$ 。

式 (7.8) 还不能用来直接计算堰顶曲线。因为 u 和 θ 的值均未知，所以系数 k 不易确定。另外，由于水流行近堰顶时流线发生垂向收缩，邻近堰顶水舌内部的压强并不等于大气压强。因而，作用在液体质点上的力就不仅有重力，还有其他的力。这说明堰顶水流运动与一般的质点自由抛射运动有一定出入。所以，工程中通常通过试验研究求得不同条件下的 k 及 n 值，然后按式 (7.8) 计算堰顶曲线；或是根据直接量测的矩形薄壁堰自由溢流水舌下缘的曲线，经适当修改后得出堰顶曲线的坐标值。

过去，我国采用较多的是克里格 (Creager) - 奥菲采洛夫 (Офицеров) 剖面，简称克 - 奥剖面。但该剖面略显肥大。所以，很多溢流坝都采用美国陆军工程兵团水道试验站 (Waterways Experiment Station) 的标准剖面，即 WES 剖面。WES 剖面用曲线方程给出，便于控制；同时，堰剖面较瘦，可节省工

程量；另外，堰面压强分布比较理想，负压不大，空蚀风险很小。

美国内务部垦务局（Bureau Reclamation）在系统研究的基础上推荐渥奇（Ogee）剖面作为标准剖面。该剖面曲线的各有关参数均与行近流速水头及设计全水头的比值 $\alpha v_0^2/(2gH_{0d})$ 有关，即考虑了坝高对堰剖面曲线的影响。因此能适用于不同上游坝高的堰剖面设计。

有关克-奥剖面及渥奇剖面的设计方法可参考有关水力学书籍。下面着重介绍 WES 剖面的水力设计方法。

WES 剖面如图 7.11 所示。该剖面堰顶 O 点下游的曲线由式 (7.8) 计算，式中的系数 k 及指数 n 决定于堰上游面的坡度。如果堰的上游面不是直立的，系数 k 、指数 n 和其他参数的取值可参考溢洪道设计规范（SL 253—2000）。当上游面为垂直时， $k=0.5$ ， $n=1.85$ 。代入式 (7.8) 得

$$\frac{y}{H_d} = 0.5 \left(\frac{x}{H_d} \right)^{1.85} \quad (7.9)$$

式中的 H_d 为不包括行近流速水头的剖面设计水头，简称设计水头。

堰顶 O 点上游曲线，采用三段复合圆弧相接。这样做是为了把堰顶曲线与堰上游面平滑连接，改善了堰面压强分布，减小了负压。三段复合圆弧的半径 R 及坐标值如图 7.11 所示。如果堰的上游面不是直立的，堰顶 O 点上游曲线也可采用双圆弧曲线。如果上游堰面是倒悬的（要求倒悬高度大于 $0.5H_{\max}$ ，详见溢洪道设计规范（SL 253—2000）），堰顶 O 点上游曲线也可采用椭圆曲线。

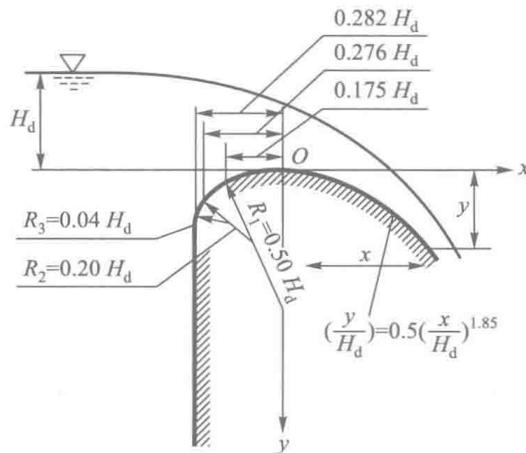


图 7.11

从上述可知，堰剖面曲线的坐标值（亦即堰剖面的大小）决定于所采

用的设计水头 H_d 。但所设计的堰在实际应用时,堰顶水头却是随流量 Q 的改变而在某一范围 ($H_{\min} \sim H_{\max}$) 内变化。因此,选定什么水头作为设计水头 H_d ,才会使所设计的堰剖面在已知的水头变化范围内工作时,既有较大的流量系数,又不会使堰面产生过大的负压,这是剖面设计中应当注意的问题。

如果以最大水头作设计水头,即 $H_d = H_{\max}$,虽然可以保证堰面不出现负压,但由于实际工作水头总是小于设计水头,堰面压强一般高于大气压强,流量系数减小;同时,在这种情况下所得出的堰剖面偏肥,显然是不经济的。反之,如果采用最小水头作设计水头,即 $H_d = H_{\min}$;虽然可以得到较为经济的剖面,但因实际工作水头往往大于设计水头,堰面会产生较大负压,严重时会引起坝面空蚀破坏。所以工程中经常采用的设计水头是 $H_d = (0.75 \sim 0.95) H_{\max}$ 。

上面所谈的堰剖面,在设计水头下工作时堰面一般不出现负压(或真空),称为非真空剖面。有一种剖面有意使堰剖面外形略低于溢流水舌的下缘,使堰面产生一定负压,可以得到较大的流量系数,这种剖面称为真空剖面。本章只介绍非真空剖面,有关真空剖面的水力计算可参阅相关文献。

7.3.2 曲线形实用堰的流量系数

实验研究表明,曲线形实用堰的流量系数主要决定于上游堰高与设计水头之比 $\frac{P_1}{H_d}$ 、堰顶全水头与设计水头之比 $\frac{H_0}{H_d}$ 以及堰上游面的坡度。对于堰上游面垂直的 WES 剖面:

若 $\frac{P_1}{H_d} \geq 1.33$,称为高堰,计算中可不计行近流速水头。在这种情况下,当实际的工作全水头等于设计水头,即 $\frac{H_0}{H_d} = 1$ 时,流量系数 $m_d = 0.502$; 当 $\frac{H_0}{H_d} < 1$ 时, $m < m_d$; 当 $\frac{H_0}{H_d} > 1$ 时, $m > m_d$ 。 $m = f\left(\frac{H_0}{H_d}\right)$ 的关系由图 7.12 中曲线 (a) 确定。

若 $\frac{P_1}{H_d} < 1.33$,行近流速加大,流量系数 m 随 $\frac{P_1}{H_d}$ 减小而减小。不同 $\frac{P_1}{H_d}$ 的堰,其 $m = f\left(\frac{H_0}{H_d}\right)$ 的关系见图 7.12 中的曲线 (b)、(c)、(d)、(e)。

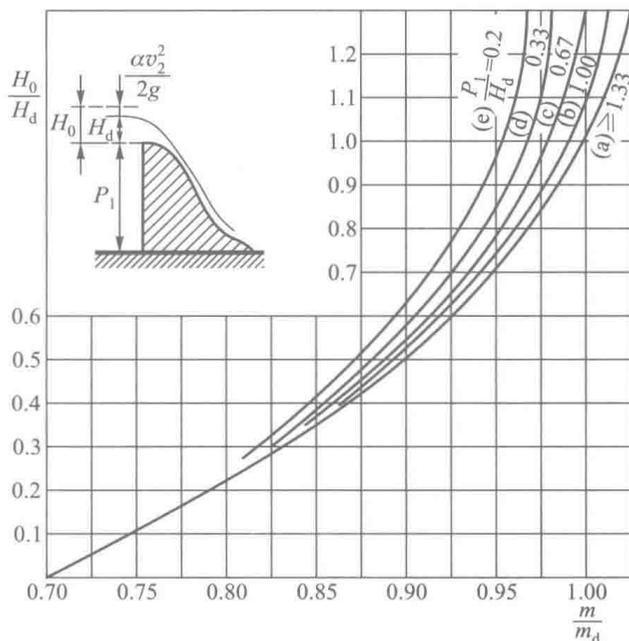


图 7.12

7.3.3 侧收缩系数

一般溢流坝都有边墩，多孔溢流坝还设有闸墩，边墩和闸墩将使水流在平面上发生收缩，减小了有效过水宽度，增大了局部水头损失（图 7.13），因而，降低了堰的过水能力。侧收缩系数就是用来考虑边墩及闸墩对过水能力的影响。

实验证明：侧收缩系数 ε_1 与边墩及闸墩头部的型式、堰孔的数目、堰孔的尺寸以及全水头 H_0 有关。可按下面的经验公式计算：

$$\varepsilon_1 = 1 - 2[K_u + (n-1)K_p] \frac{H_0}{nb'} \quad (7.10)$$

式中： n 为堰孔数； H_0 为堰顶全水头； K_u 为边墩形状系数； K_p 为闸墩形状系数。

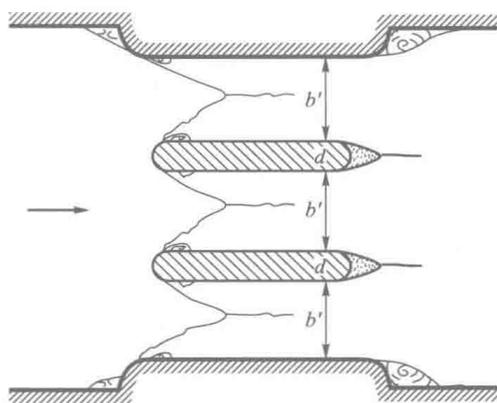


图 7.13

K_u 与边墩头部型式及行近水流的进水方向有关。设计中常用的为圆弧形边墩，当行近水流正向进入溢流堰顶时：对于与混凝土非溢流坝段邻接的高溢流堰，建议 K_u 取 0.1；对于与土坝

邻接的高溢流堰，建议 K_a 取 0.2。当上游来流非正向进水时， K_a 值应加大。

K_p 决定于闸墩的头部型式、 H_0/H_d 及闸墩头部与堰上游面的相对位置，对于头部与堰上游面齐平的高溢流堰，各种墩头型式的 K_p 与 H_0/H_d 的关系曲线，见图 7.14。当邻孔关闭时，闸墩实质上成为边墩。

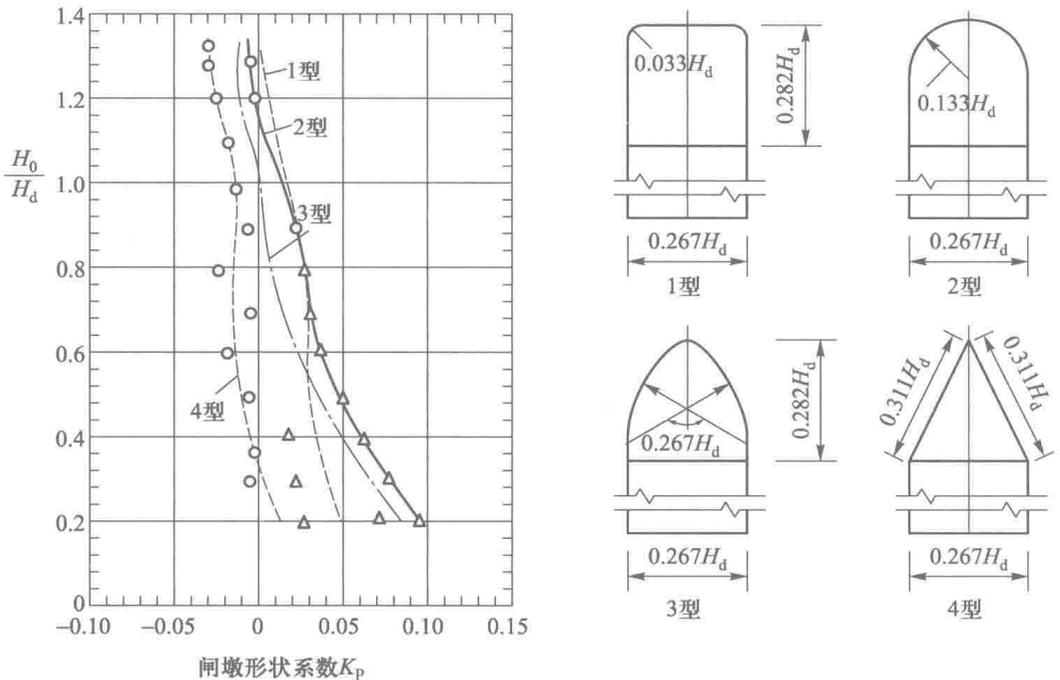


图 7.14

7.3.4 曲线型实用堰的淹没和下游堰高对过水能力的影响

实验研究表明：当下游水位高过堰顶至某一范围（对 WES 剖面 $h_s/H_0 > 1.5$ ， h_s 为从堰顶算起的下游水深）时，堰下游形成淹没水跃^①，邻近堰顶的下游水位高于堰顶，过堰水流受到下游水位的顶托，降低了过水能力，即所谓淹没出流，如图 7.15 所示。

实验中还表明：当下游护坦高程较高，即下游堰高较小（对 WES 剖面， $P_2/H_0 \leq 2$ ）时，即使下游水位低于堰顶，过堰水流受下游护坦的影响，也会产生类似淹没的效果而使流量系数降低。

^① 当下游水深 h_1 大于坝址收缩断面水深的共轭水深时，堰下游产生的水跃称为淹没水跃（图 7.15）。

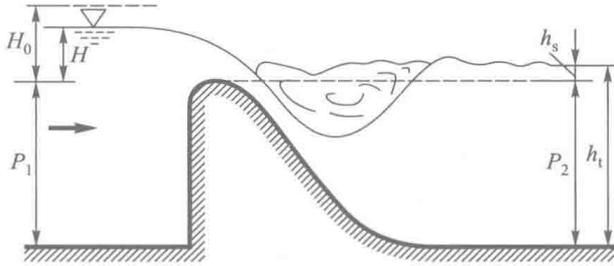


图 7.15

实际计算中，一般是用淹没系数 σ_s 来综合反映下游水位及下游堰高对过水能力的影响。淹没系数 σ_s 决定于 h_s/H_0 及 P_2/H_0 ，对 WES 剖面，其关系如图 7.16 所示。从图中可以看出：当 $h_s/H_0 \leq 0.15$ 及 $P_2/H_0 \geq 2$ 时，出流不受下游水位及护坦高程的影响，称为自由出流， $\sigma_s = 1$ 。

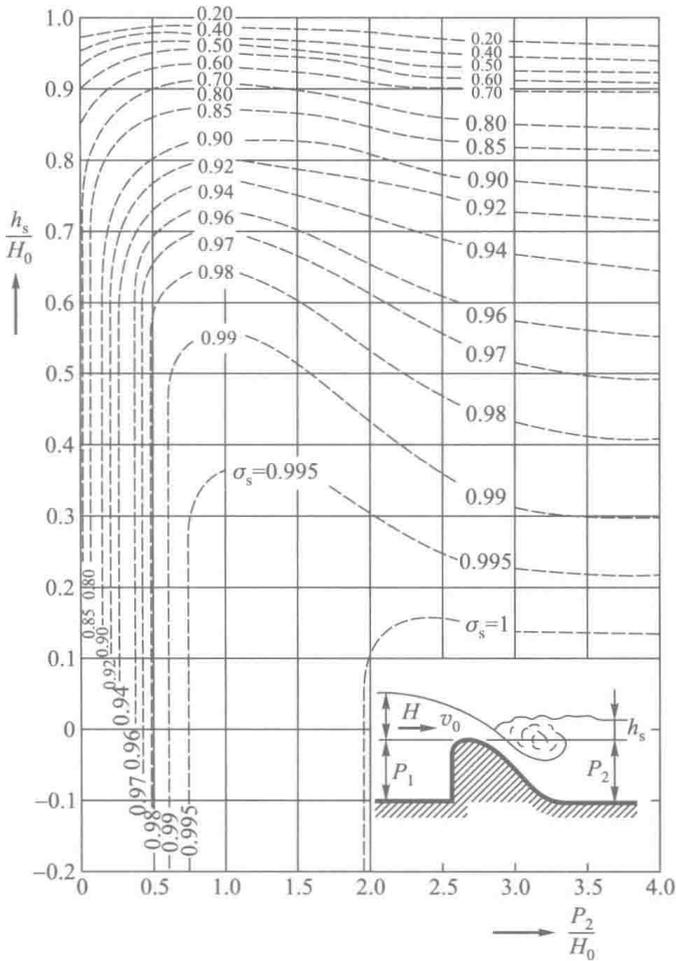


图 7.16

7.3.5 曲线型低堰的水力设计简介

水利工程中的河岸式溢洪道或开敞式进水闸，由于地形、地质等多方面因素的影响，常将底坎作成高度较小的宽顶堰或实用堰。当作成高度较小的曲线形实用堰时，常能得到比宽顶堰大的流量系数。这种高度较小的曲线形实用堰仍按式(7.6)计算，但其水力特性及流量系数均与高堰有一定区别。

1. 关于上、下游堰高的选择

前已述及，当堰型一定时，曲线形实用堰的流量系数随水头及堰高而变。若水头不变，则流量系数应为上游堰高 P_1 及下游堰高 P_2 的函数。下面针对 WES 堰型作简略介绍。

美国垦务局及水道试验站的试验表明：当 $P_1/H_d \geq 1.33$ 时，行近流速 v_0 很小，计算中 v_0 可以略去不计（即认为 $H_0 \approx H$ ）；此时若堰高 P_1 继续增加，过堰水舌的轨迹不再发生明显变化，流量系数也不再随堰高 P_1 而变，称为高堰。

若 $P_1/H_d < 1.33$ ，则称为低堰；随上游堰高 P_1 减小， v_0 加大， $\frac{\alpha v_0^2}{2g}$ 在堰前总水头 $\left(H_0 = H + \frac{\alpha v_0^2}{2g}\right)$ 中所占比例增大，计算时将不能略去；同时，堰高 P_1 减小还使堰前流线不能充分收缩，堰顶压强增大，流量系数降低；而且，过堰水舌的轨迹将因 v_0 增大而趋于平展，改变了堰顶下游堰面的压强分布。图 7.17 表示 WES 堰在设计水头情况下，设计流量系数 m_d 与 P_1/H_d 间的变化关系，该曲线也可用下列经验公式表示：

$$m_d = 0.4988 \left(\frac{P_1}{H_d}\right)^{0.0241} \quad (7.11)$$

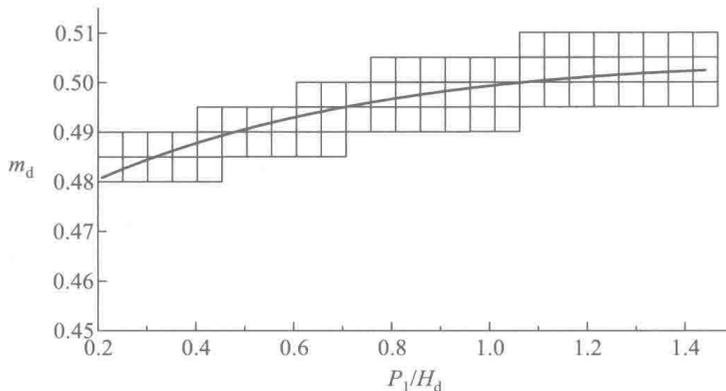


图 7.17

从图 7.17 中可以看出：在 $P_1/H_d < 1.33$ 的整个范围内， m_d 均随 P_1/H_d 减小而减小；但当 $P_1/H_d < 0.3$ 左右时，曲线坡度增大， m_d 减小迅速。故选择上游堰高时，以 $P_1 > 0.3H_d$ 为宜，以免 m_d 过小。

一些研究报告指出，当 $P_1/H_d < \frac{1}{15}$ 时，堰的过水能力受堰上游所出现的临界水深断面控制，这种堰称为特低堰。特低堰按式 (7.2) 计算流量，式中包括行近流速水头的流量系数为

$$m_0 = 0.707 \left(1 + \frac{P_1}{H_d} \right)^{3/2} \quad (7.12)$$

关于下游堰高 P_2 的影响，在 7.3.4 节中已经提到过。当 P_2 较小（对 WES 堰 $P_2/H_0 < 2$ ）时，溢过堰顶的水流容易受下游水位的顶托或是受下游反弧段曲率的影响，而使堰顶附近压强增大，因而使流量系数降低。在图 7.16 中， $h_s/H_0 \leq 0.15$ 及 $P_2/H_0 < 2$ 的范围即代表这一情况。此时，因下游堰高 P_2 较小而引起流量系数的降低，可通过淹没系数 σ_s 来反映。由图 7.16 可以看出，当 $P_2/H_0 \leq 0.7$ 左右时， σ_s 迅速减小。故下游堰高 P_2 以大于 $0.7H_0$ 为宜。

2. 关于低堰的剖面设计

前面所述的 WES 剖面，主要适用于高溢流堰，因为剖面设计中并未考虑行近流速的影响。但一些研究报告认为：WES 剖面可直接移用作低堰剖面。这样可以使所设计的堰剖面在超水头下工作（即实际全水头 $H_0 > H_d$ ）时堰面负压较小；因此，剖面设计水头可选小些，有利于节省工程量。

美国垦务局推荐的渥奇剖面适于作低堰剖面，但计算较繁。

我国广东省水利水电科学研究所建议两种由复合圆弧组成的剖面，简称驼峰堰，如图 7.18 所示。该种剖面型式简单，便于设计施工，可用作堰高 $P < 3\text{m}$ 的低堰剖面；其流量系数 m 为 0.42 ~ 0.46。

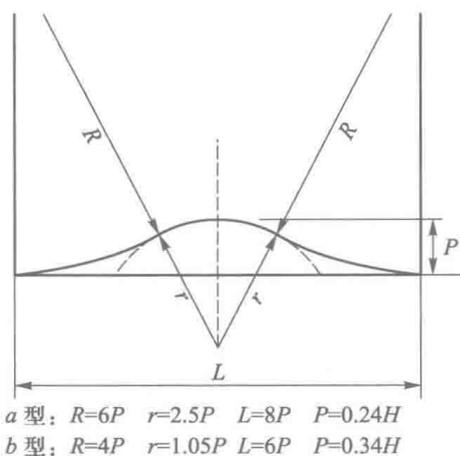


图 7.18

7.3.6 折线形实用堰

中、小型水利工程，常用当地材料如条石、砖或木材作成图 7.19 所示的折线形低堰，其流量系数随堰顶相对厚度 (δ/H)、相对堰高 (P_1/H) 及下游坡

度而变,可按表 7.1 选用。

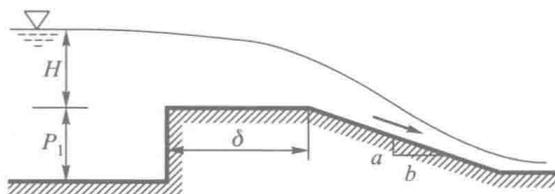


图 7.19

当堰顶角修圆后,其流量系数可较表 7.1 中的数值增加 5% 左右。

表 7.1 折线形实用堰的流量系数

下游坡 $a:b$	P_1/H	δ/H			
		2.0	1.0	0.75	0.5
1:1	2~3	0.33	0.37	0.42	0.46
1:2	2~3	0.33	0.36	0.40	0.42
1:3	0.5~2	0.34	0.36	0.40	0.42
1:5	0.5~2	0.34	0.35	0.37	0.38
1:10	0.5~2	0.34	0.35	0.36	0.36

例 7.2 某土坝中段为溢洪道,底坎采用曲线形实用堰。今已知:设计流量 Q 为 $1400\text{ m}^3/\text{s}$, 上游水位高程为 165.0 m ; 相应的下游水位高程为 110.0 m ; 筑坝处河床高程为 100.0 m ; 堰上游面垂直, 下游直线段坡度 $m_\alpha = \cot\alpha = 0.7$, 即 $\alpha = 55^\circ$; 边墩头部为圆弧形; 闸墩头部采用 3 型, 顶部与堰上游面齐平; 堰孔数 n 为 5; 每孔净宽 b' 为 12 m 。试确定堰顶高程及堰的剖面形状。

解: (1) 确定堰顶高程

因为上游水位高程减去堰顶水头即为堰顶高程。所以实际上就是要求计算设计水头 H_{0d} 。在设计条件下, 式 (7.6) 可写成

$$H_{0d} = \left(\frac{Q}{\sigma_s \varepsilon_1 n b' m_d \sqrt{2g}} \right)^{2/3}$$

采用 WES 剖面, 并假定 $P_1/H_d > 1.33$, 则 $m_d = 0.502$, 行近流速水头可以略去, 即 $H_{0d} \approx H_d$ 。

设堰为自由出流 $\sigma_s = 1$ 。侧收缩系数 ε_1 按式 (7.10) 计算:

$$\varepsilon_1 = 1 - 2[K_a + (n-1)K_p] \frac{H_d}{n b'}$$

式中: $b' = 12 \text{ m}$, 孔数 $n = 5$; 边墩形状系数 $K_a = 0.2$; 3型闸墩在 $H_0/H_d = 1$ 时, $K_p = 0$ 。代入上式得

$$\varepsilon_1 = 1 - 2 \times [0.2 + (5 - 1) \times 0] \times \frac{H_d}{5 \times 12} = 1 - 0.0066H_d$$

则

$$H_d = \left[\frac{1400}{1 \times (1 - 0.0066H_d) \times 5 \times 12 \times 0.502 \times 4.43} \right]^{2/3}$$

用试算法可求得

$$H_d = 4.9 \text{ m}$$

$$\text{堰顶高程为} \quad 165.0 \text{ m} - 4.9 \text{ m} = 160.1 \text{ m}$$

$$\text{上游堰高为} \quad 160.1 \text{ m} - 100.0 \text{ m} = 60.1 \text{ m}$$

因为 $P_1/H_d = 60.1/4.9 = 12.26 > 3$, 故为高堰, $m_d = 0.502$, 行近流速水头可以略去; 又因下游水位低于堰顶, 即 $h_1 - P_2 < 0$, 所以堰为自由流出, $\sigma_s = 1$ 。

(2) 堰剖面设计

堰顶 O 点上游三圆弧的半径及其水平坐标值为

$$R_1 = 0.50H_d = 0.50 \times 4.9 \text{ m} = 2.45 \text{ m}$$

$$x_1 = -0.175H_d = -0.175 \times 4.9 \text{ m} = -0.858 \text{ m}$$

$$R_2 = 0.20H_d = 0.2 \times 4.9 \text{ m} = 0.98 \text{ m}$$

$$x_2 = -0.276H_d = -0.276 \times 4.9 \text{ m} = -1.352 \text{ m}$$

$$R_3 = 0.04H_d = 0.04 \times 4.9 \text{ m} = 0.196 \text{ m}$$

$$x_3 = -0.282H_d = -0.282 \times 4.9 \text{ m} = -1.382 \text{ m}$$

O 点下游的曲线方程为

$$\left(\frac{y}{H_d} \right) = 0.5 \left(\frac{x}{H_d} \right)^{1.85}$$

即

$$y = 0.5 \times \frac{x^{1.85}}{(4.9)^{0.85}} = \frac{x^{1.85}}{7.721}$$

按上式算得的坐标值如下表:

x/m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y/m	0.129	0.467	0.989	1.683	2.554	3.564	4.740	6.068	7.546	9.170

根据表中数值可绘得堰顶下游曲线 OC (图 7.20)。

坡度 $m_a = 0.7$ 的下游直线段 CD 与曲线 OC 相切于 C 点。 C 点坐标 x_C, y_C 可如下求得:

对堰面曲线求一阶导数

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1.85}{7.72} x^{0.85} = 0.24x^{0.85}$$

直线 CD 的坡度为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{m_\alpha} = \frac{1}{0.7}$$

故有

$$0.24x_C^{0.85} = \frac{1}{0.7}$$

$$\text{即 } x_C = \left(\frac{1}{0.7 \times 0.24} \right)^{\frac{1}{0.85}} \text{ m} = 8.15 \text{ m}$$

$$y_C = \frac{(8.15)^{1.85}}{7.72} \text{ m} = 6.28 \text{ m}$$

坝下游反弧半径 r 按下式计算:

$$r = (0.25 \sim 0.5) (H_d + z_{\max})$$

式中, 上下游水位差 $z_{\max} = (165.0 - 110.0) \text{ m} = 55 \text{ m}$ 。故

$$r = (0.25 \sim 0.5) (4.9 \text{ m} + 55 \text{ m}) = (14.98 \sim 29.9) \text{ m}$$

取

$$r = 18 \text{ m}$$

反弧曲线的上端与直线 CD 相切于 D 点, 下端与河床相切于 E 点。 D 点、 E 点及反弧曲线圆心 O' 点的坐标, 可用作图法或下面的分析法确定:

(1) 反弧曲线圆心 O' 点

由图 7.20 可知

$$\begin{cases} x_{O'} = x_C + m_\alpha (P_2 - y_C) + r \cot \left(\frac{180^\circ - \alpha}{2} \right) \\ y_{O'} = P_2 - r \end{cases}$$

P_2 为下游堰高。本题中 $P_2 = P_1 = 60.1 \text{ m}$, 则

$$\begin{cases} x_{O'} = 8.15 \text{ m} + 0.7(60.1 \text{ m} - 6.28 \text{ m}) + 18 \text{ m} \cot \left(\frac{180^\circ - 55^\circ}{2} \right) = 55.2 \text{ m} \\ y_{O'} = 60.1 \text{ m} - 18 \text{ m} = 42.1 \text{ m} \end{cases}$$

(2) E 点坐标

$$\begin{cases} x_E = x_{O'} = 55.2 \text{ m} \\ y_E = P_2 = 60.1 \text{ m} \end{cases}$$

(3) D 点坐标

$$\begin{cases} x_D = x_{O'} - r \sin \alpha = 55.2 \text{ m} - 18 \text{ m} \times \sin 55^\circ = 40.4 \text{ m} \\ y_D = y_{O'} + r \cos \alpha = 42.1 \text{ m} + 18 \text{ m} \times \cos 55^\circ = 52.4 \text{ m} \end{cases}$$

根据上述计算结果, 可绘得堰剖面曲线如图 7.20 所示。

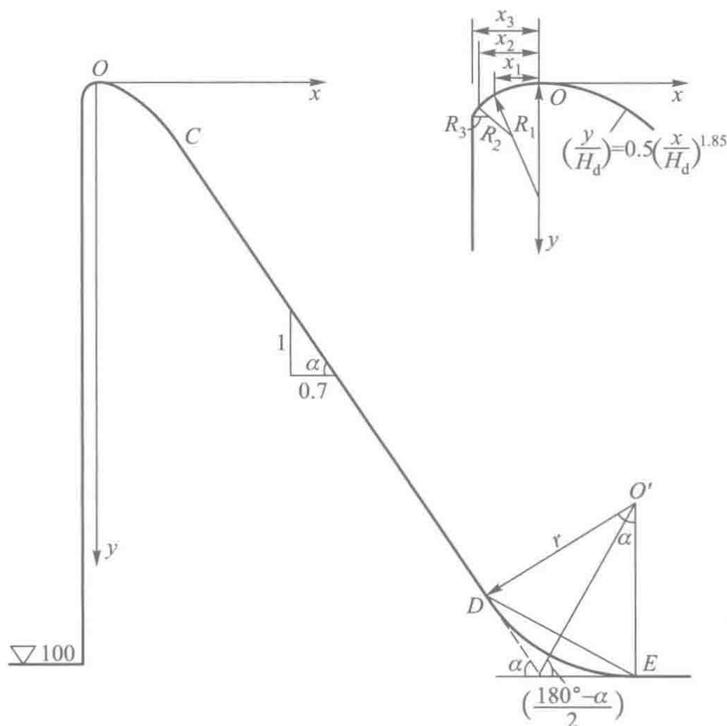


图 7.20

例 7.3 某溢流坝系按 WES 剖面设计的曲线形实用堰。堰宽 b 为 43 m，堰孔数 $n=1$ （即无闸墩），堰与非溢流的混凝土坝相接，边墩头部为半圆形，堰高 P_1 与 P_2 相同，均为 12 m，下游水深 h_1 为 7 m，设计水头 H_d 为 3.11 m。试求堰顶水头 H 为 4 m 时通过溢流坝的流量。

解：当 $H=4$ m 时， $P_1/H=12/4=3 > 1.33$ ；故可不计行近流速的影响，即 $H_0 \approx H$ 。

流量按式 (7.6) 计算：

$$Q = \varepsilon_1 \sigma_s m n b' \sqrt{2g} H_0^{3/2}$$

对与混凝土非溢流坝相接的圆弧形边墩， $K_a=0.1$ 。因无闸墩，故 $K_p=0$ 。所以

$$\varepsilon_1 = 1 - 2 \times [0.1 + (1-1) \times 0] \times \frac{4}{1 \times 43} = 0.981$$

因为 $h_1 - P_2 < 0$ ；又 $P_2/H=12/4=3$ ；故由图 7.16 查得 $\sigma_s=1$ ，即堰为自由出流。

对 WES 剖面，当设计水头 $H_d=3.11$ m， $P_1/H_d=12/3.11=3.86$ 时 $m_d=0.502$ 。当实际水头 $H=4$ m， $H_0/H_d=4/3.11=1.286$ 时，流量系数由图 7.12

查得 $m/m_0 = 1.024$, 则

$$m = 1.024 \times 0.502 = 0.514$$

将已知的 ε_1 , σ_s , m 代入公式即可求得所通过流量为

$$Q = 0.981 \times 1 \times 0.514 \times 1 \times 43 \times \sqrt{2 \times 9.8} \times 4^{3/2} \text{ m}^3/\text{s} = 768.4 \text{ m}^3/\text{s}$$

7.4 宽顶堰流的水力计算

当堰顶水平且厚度与水头之比满足 $2.5 < \delta/H < 10$ 时, 在进口处形成水面跌落, 堰顶范围内产生一段流线近似平行堰顶的渐变流动, 这种堰流即为宽顶堰流。

宽顶堰流是实际工程中一种极为常见的水流现象。宽顶堰具有底坎, 引起水流在垂直方向产生收缩, 形成宽顶堰水流; 当水流流经桥墩之间、隧洞或涵洞进口 (图 7.21b、c), 以及流经由施工围堰束窄了的河床时, 水流由于侧向收缩的影响, 也会形成进口水面跌落, 产生宽顶堰的水流状态, 称作无坎宽顶堰流。

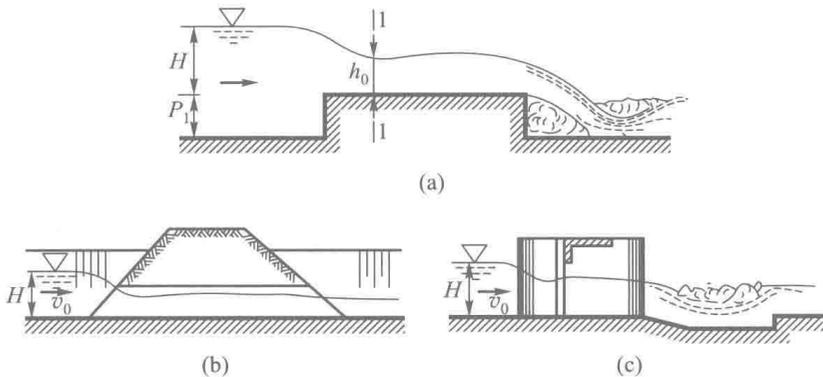


图 7.21

在各种形式的宽顶堰中, 当进口前沿较宽时, 常设有闸墩及边墩, 会产生侧向收缩。另外, 若上游水头一定, 下游水位升高至某一程度时, 宽顶堰会由自由出流变为淹没出流, 下泄流量减少。所以, 宽顶堰流的计算公式应当采用考虑到淹没及侧收缩影响的式 (7.6), 即

$$Q = \varepsilon_1 \sigma_s m n b' \sqrt{2g} H_0^{3/2}$$

7.4.1 流量系数

宽顶堰的流量系数 m 决定于堰顶的进口形式和堰的相对高度 P_1/H , 可用下列经验公式计算:

对堰顶入口为直角的宽顶堰（图 7.21a）

$$m = 0.32 + 0.01 \frac{3 - \frac{P_1}{H}}{0.46 + 0.75 \frac{P_1}{H}} \quad (7.13)$$

上式适用于 $0 \leq P_1/H \leq 3$ 。当 $P_1/H > 3$ 时， m 可视为常数，取 0.32。

对堰顶进口为圆角的宽顶堰（图 7.22）

$$m = 0.36 + 0.01 \frac{3 - \frac{P_1}{H}}{1.2 + 1.5 \frac{P_1}{H}} \quad (7.14)$$

上式适用于 $0 \leq P_1/H \leq 3$ 。当 $P_1/H > 3$ 时， m 可视为常数，取 0.36。

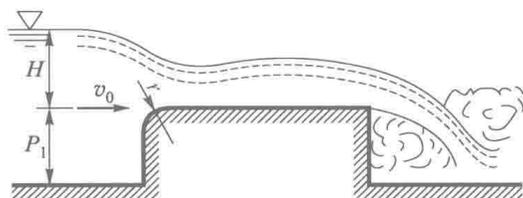


图 7.22

假定堰顶 1-1 断面（图 7.21a）的水深为临界水深 h_k ，压强按静水压强分布；并略去堰前 0-0 及 1-1 断面间的水头损失，即可证明宽顶堰流量系数的最大值 $m_{\max} = 0.385$ 。

7.4.2 侧收缩系数

反映闸墩及边墩对宽顶堰流影响的侧收缩系数 ε_1 用下面的经验公式计算：

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{\alpha_0}{\sqrt[3]{0.2 + \frac{P_1}{H}}} \sqrt[4]{\frac{b}{B}} \left(1 - \frac{b}{B}\right) \quad (7.15)$$

式中： α_0 为考虑墩头及堰顶入口形状系数。当闸墩（或边墩）头部为矩形，堰顶为直角入口边缘时 $\alpha_0 = 0.19$ ；当闸墩（或边墩）头部为圆弧形，堰顶入口边缘为直角或圆弧形时 $\alpha_0 = 0.1$ ； b 为溢流孔净宽； B 为上游引渠宽；其余符号如图 7.22 所示。

上式的应用条件为： $b/B > 0.2$ ； $P_1/H < 3$ 。当 $b/B < 0.2$ 时，应采用 $b/B = 0.2$ ；当 $P_1/H > 3$ 时，应采用 $P_1/H = 3$ 。

1. 对单孔宽顶堰（无闸墩）

式 (7.15) 中 b 采用两边墩间的宽度； B 可采用堰上游的水面宽度。

2. 对多孔宽顶堰（有边墩及闸墩）

侧收缩系数应取边孔及中孔的加权平均值：

$$\varepsilon_1 = \frac{(n-1)\varepsilon'_1 + \varepsilon''_1}{n} \quad (7.16)$$

式中： n 为孔数； ε'_1 为中孔侧收缩系数，按式 (7.15) 计算时，可取： $b = b'$ ， b' 为单孔净宽； $B = b' + d$ ， d 为闸墩厚度； ε''_1 为边孔侧收缩系数，用式 (7.15) 计算时，可取： $b = b'$ ， b' 为单孔净宽； $B = b' + 2\Delta$ ， Δ 为边墩计算厚度，是边墩边缘与堰上游同侧水边线间的距离。

7.4.3 宽顶堰的淹没条件及淹没系数

实验证明：当下游水位较低，宽顶堰为自由出流时，进入堰顶的水流，因受到堰坎垂直方向的约束，产生进口水面跌落，并在进口后约 $2H$ 处形成收缩断面，收缩断面 1-1 的水深 $h_c < h_K$ 。此后，堰顶水流保持急流状态，并在出口后产生第二次水面跌落。所以，在自由出流的条件下，水流由堰前的缓流状态，因进口水面跌落而变为堰顶上的急流状态（图 7.23a）。

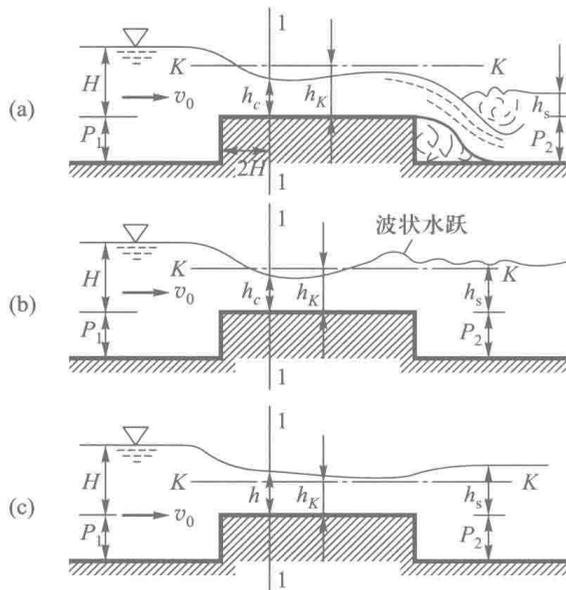


图 7.23

下面来分析，堰顶水头 H_0 及进口形式一定时，下游水位逐渐升高，宽顶堰形成淹没的过程。

由式(7.1)的推导过程可知,堰顶形式及上游水头已知时,通过宽顶堰的流量随收缩断面的平均测压管水头 $\left(z + \frac{p}{\rho g}\right) = h_c$ 而变^①; h_c 增大,流量减小。因此,下游水位只有升高到足以使收缩断面水深 h_c 增大时,宽顶堰才会形成淹没出流,并降低过水能力。

当宽顶堰下游水位低于临界水深线 $K-K$ 时(图 7.23a),无论下游水位是否高于堰顶,宽顶堰都是自由出流。因为在此情况下,堰顶收缩断面下游继续保持急流状态,堰下游水位变化不会影响 h_c 的大小。

当下游水位继续上升至高于 $K-K$ 线时,堰顶将产生水跃,如图 7.23b 所示。水跃位置随下游水深 h_t 的增加而向上游移动。

实验证明:当堰顶以上的下游水深 $h_s \geq (0.75 \sim 0.85)H_0$ 时,水跃移动到收缩断面 1-1 的上游,收缩断面水深增大为 h ,而 $h > h_k$;此时,整个堰顶水流变为缓流状态,成为淹没出流,如图 7.23c 所示。所以,宽顶堰的淹没条件(取平均值)为

$$h_s = 0.8H_0 \quad (7.17)$$

宽顶堰形成淹没后,堰顶中间段水面大致平行于堰顶,而由堰顶流向下流时,水流的部分动能转换为势能,故下游水位略高于堰顶水面(图 7.23c)。

宽顶堰的淹没系数 σ_s 随相对淹没度 h_s/H_0 的增大而减小。表 7.2 是试验得到的淹没系数值。

表 7.2 宽顶堰的淹没系数

h_s/H_0	0.80	0.81	0.82	0.83	0.84	0.85	0.86	0.87	0.88	0.89
σ_s	1.00	0.995	0.99	0.98	0.97	0.96	0.95	0.93	0.90	0.87
h_s/H_0	0.90	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	
σ_s	0.84	0.82	0.78	0.74	0.70	0.65	0.59	0.50	0.40	

如图 7.24 所示,对于下游水位较高的平底闸,过闸水流仍可采用宽顶堰计算,也可采用过闸面积与过闸流速的乘积计算,而过闸流速应为上、下游水位差的势能转化为动能所产生,因此有

$$Q = Av = (B\eta H) [\varphi \sqrt{2g(H - \eta H)}] = \varphi\eta \sqrt{1 - \eta} B \sqrt{2g} H^{3/2}$$

① 宽顶堰的收缩断面处,可近似当渐变流,故 $\left(z + \frac{p}{\rho g}\right) = \xi H_0 = h_c$ 。

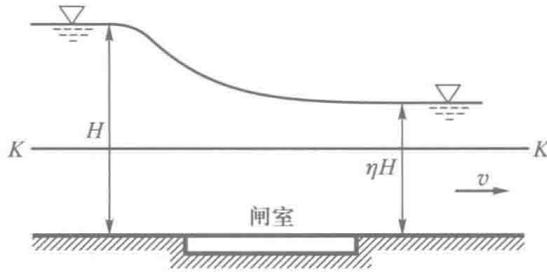


图 7.24

堰流公式中的 H_0 以堰上水头 H 代替, 并忽略过闸水流的能量损失, 得

$$m = \eta \sqrt{1 - \eta} \quad (7.18)$$

上式即为淹没度较大时的平底闸流量系数。

为求 m 的极值, 令 $m^2 = \eta^2(1 - \eta)$ 的微分为零, 得

$$\frac{d(m^2)}{d\eta} = 2\eta(1 - \eta) - \eta^2 = \eta(2 - 3\eta) = 0$$

$\eta = 0$ 明显不合理, 只有 $\eta = 2/3$ 才是合理解。所以

$$m_{\max} = \frac{2}{3} \sqrt{1 - \frac{2}{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0.385$$

表 7.3 为式 (7.18) 的计算结果。

表 7.3 平底堰在较大淹没度时的流量系数

h_s/H	0.667	0.70	0.75	0.78	0.80	0.82	0.84	0.86	0.88
m	0.385	0.383	0.375	0.366	0.358	0.348	0.336	0.322	0.305
m/m_{\max}	1.000	0.996	0.974	0.950	0.929	0.904	0.800	0.836	0.792
h_s/H	0.90	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98
m	0.285	0.273	0.260	0.246	0.230	0.212	0.192	0.168	0.139
m/m_{\max}	0.739	0.709	0.676	0.639	0.598	0.552	0.499	0.436	0.360

7.4.4 无坎宽顶堰流

无坎宽顶堰流, 是由于堰孔宽度小于上游引渠宽度, 水流受平面上的束窄产生侧向收缩, 引起水面跌落而形成。其计算公式与普通宽顶堰流公式相同。但在计算中一般不单独考虑侧向收缩的影响, 而是把它包含在流量系数中一并考虑, 即令 $m' = \varepsilon_1 m$, m' 为包括侧收缩影响的流量系数。故对无坎宽顶堰, 式 (7.6) 变为

$$Q = \sigma_s m' n b' \sqrt{2g} H_0^{3/2} \quad (7.19)$$

无坎宽顶堰的流量系数 m' ，可根据进口翼墙的形式及平面收缩的程度，从表 7.4、表 7.5 和表 7.6 中查得。

1. 直角形翼墙 (图 7.25)

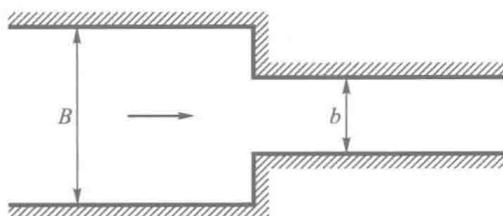


图 7.25 (B 为上游渠道底宽; b 为堰孔净宽)

表 7.4 直角形翼墙的流量系数

b/B	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
m'	0.320	0.322	0.324	0.327	0.330	0.334	0.340	0.346	0.355	0.367	0.385

2. 八字形翼墙 (图 7.26)

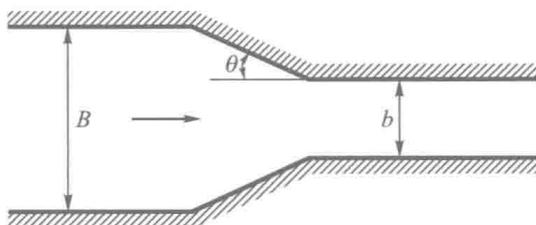


图 7.26 (B 为上游渠道底宽; b 为堰孔净宽; θ 为翼墙收缩角)

表 7.5 八字形翼墙的流量系数

$\cot\theta$	m'											
	b/B											
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
0.5	0.343	0.344	0.346	0.348	0.350	0.352	0.356	0.360	0.365	0.373	0.385	
1.0	0.350	0.351	0.352	0.354	0.356	0.358	0.361	0.364	0.369	0.375	0.385	
2.0	0.353	0.354	0.355	0.357	0.358	0.360	0.363	0.366	0.370	0.376	0.385	
3.0	0.350	0.351	0.352	0.354	0.356	0.358	0.361	0.364	0.369	0.375	0.385	

3. 圆弧形翼墙 (图 7.27)

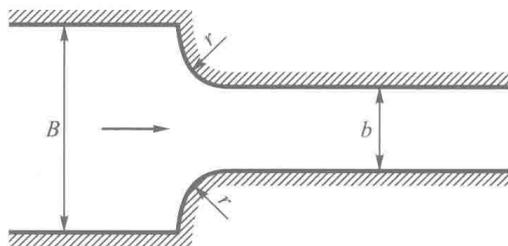
图 7.27 (B 为上游渠道底宽; b 为堰孔净宽; r 为圆弧翼墙的半径)

表 7.6 圆弧形翼墙的流量系数

r/b	m'	b/B										
		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.00		0.320	0.322	0.324	0.327	0.330	0.334	0.340	0.346	0.355	0.367	0.385
0.05		0.335	0.337	0.338	0.340	0.343	0.346	0.350	0.355	0.362	0.371	0.385
0.10		0.342	0.344	0.345	0.347	0.349	0.352	0.354	0.359	0.365	0.373	0.385
0.20		0.349	0.350	0.351	0.353	0.355	0.357	0.360	0.363	0.368	0.375	0.385
0.30		0.354	0.355	0.356	0.357	0.359	0.361	0.363	0.366	0.371	0.376	0.385
0.40		0.357	0.358	0.359	0.360	0.362	0.363	0.365	0.368	0.372	0.377	0.385
≥ 0.50		0.360	0.361	0.362	0.363	0.364	0.366	0.368	0.370	0.373	0.378	0.385

多孔无坎宽顶堰的流量系数, 应取边孔及中孔的加权平均值。

无坎宽顶堰的淹没系数, 可近似地由表 7.2 查用。

例 7.4 今拟在某拦河坝上游设置一灌溉进水闸如图 7.28 所示。已知, 进闸流量 Q 为 $41 \text{ m}^3/\text{s}$, 引水角 θ 为 45° , 闸下游渠道中水深 h_1 为 2.5 m , 闸前水头 H 为 2 m , 闸孔数 n 为 3 , 边墩进口处为圆弧形, 闸墩头部为半圆形, 闸墩厚 d 为 1 m , 边墩的计算厚度 Δ 为 0.8 m , 闸底坎进口为圆弧形, 坎长 δ 为 6 m , 上游坎高 P_1 为 7 m , 下游坎高 P_2 为 0.7 m , 拦河坝前河中流速 v_0 为 1.6 m/s 。求所需的堰孔净宽 b 。

解: 因为 $\frac{\delta}{H} = \frac{6 \text{ m}}{2 \text{ m}} = 3$, $2.5 < \frac{\delta}{H} < 10$, 故闸孔全开时为宽顶堰流, 其计算公式为

$$Q = \bar{\varepsilon}_1 \cdot \sigma_s \cdot mnb' \sqrt{2gH_0^{3/2}}$$

现分别计算式中各项:

(1) 闸前全水头 H_0

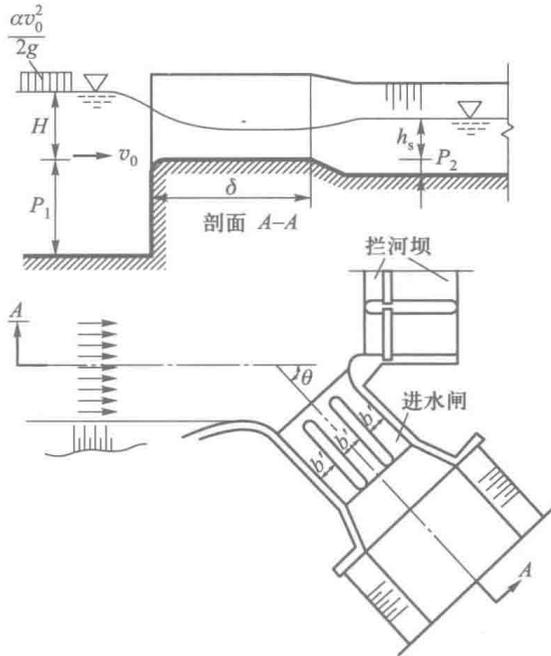


图 7.28

由于行近流速 v_0 的方向与进水闸轴线交角为 $\theta = 45^\circ$ ，故全水头 H_0 可用下列公式计算：

$$H_0 = H + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} \cos \theta = (2 \text{ m}) + \frac{1 \times (1.6 \text{ m/s})^2}{2 \times 9.8 \text{ m/s}^2} \cos 45^\circ = 2.1 \text{ m}$$

(2) 流量系数 m

当 $P_1 = 7 \text{ m}$ ， $\frac{P_1}{H} = \frac{7 \text{ m}}{2 \text{ m}} = 3.5$ 时，对堰顶入口为圆弧形的宽顶堰，流量系数 $m = 0.36$ 。

(3) 淹没系数 σ_s

$$\begin{aligned} \text{由} \quad h_s &= h_1 - P_2 = 2.5 \text{ m} - 0.7 \text{ m} = 1.8 \text{ m} \\ 0.8H_0 &= 0.8 \times 2.1 \text{ m} = 1.68 \text{ m} \end{aligned}$$

因为 $h_s > 0.8H_0$ ，故为淹没出流。根据 $\frac{h_s}{H_0} = \frac{1.8 \text{ m}}{2.1 \text{ m}} = 0.857$ ，从表 8.2 查得 $\sigma_s = 0.953$ 。

(4) 侧收缩系数 $\bar{\varepsilon}_1$

$$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{(n-1)\varepsilon_1' + \varepsilon_1''}{n}$$

对闸、边墩头部为圆弧形，堰顶入口边缘为圆弧的宽顶堰，式 (7.15)

中 $\alpha_0 = 0.1$ 。则

中孔侧收缩系数

$$\varepsilon'_1 = 1 - \frac{0.1}{\sqrt[3]{0.2 + \frac{7}{2}}} \sqrt[4]{\frac{b'}{b'+1}} \left(1 - \frac{b'}{b'+1}\right)$$

边孔侧收缩系数

$$\varepsilon''_1 = 1 - \frac{0.1}{\sqrt[3]{0.2 + \frac{7}{2}}} \cdot \sqrt[4]{\frac{b'}{b'+2 \times 0.8}} \left(1 - \frac{b'}{b'+2 \times 0.8}\right)$$

因为 b' 未知, 故计算只能按试算法进行。设 $nb' = 9 \text{ m}$, 则 $b' = \frac{9 \text{ m}}{3} = 3 \text{ m}$;

由此可求得

$$\varepsilon'_1 = 1 - \frac{0.1}{\sqrt[3]{0.2 + \frac{7}{2}}} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{3+1}} \cdot \left(1 - \frac{3}{3+1}\right) = 0.985$$

$$\begin{aligned} \varepsilon''_1 &= 1 - \frac{0.1}{\sqrt[3]{0.2 + \frac{7}{2}}} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{3+2 \times 0.8}} \cdot \left(1 - \frac{3}{3+2 \times 0.8}\right) \\ &= 0.980 \end{aligned}$$

则

$$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{(3-1) \times 0.985 + 0.98}{3} = 0.983$$

将各已知值代入堰流计算基本公式的右端, 当所得值等于已知流量时, 所假定的 nb' 即为所求:

$$\begin{aligned} Q &= 0.983 \times 0.953 \times 0.36 \times 9 \text{ m} \times \sqrt{2 \times 9.8 \text{ m/s}^2} \times (2.1 \text{ m})^{3/2} \\ &= 41 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

故所需的堰孔净宽 $b = 9 \text{ m}$, 分三孔 ($n = 3$), 每孔净宽 $b' = 3 \text{ m}$ 。

例 7.5 某泄洪排沙闸共四孔, 每孔净宽 b' 为 14 m ; 闸墩头部为半圆形, 墩厚 d 为 5 m , 闸室上游翼墙为八字形, 收缩角 θ 为 30° , 翼墙计算厚度 Δ 为 4 m ; 上游河道断面近似矩形, 河宽 B 为 79 m ; 闸室下游连一陡坡渠道坡度 i 为 2% , 闸底高程为 100 m (图 7.29)。试计算闸门全开, 上游水位高程为 111.0 m 时的流量。

解: 因闸室下游为陡坡渠道, 下游为急流。故闸门全开时通过闸室的水流应为多孔无坎宽顶堰自由出流。计算公式为

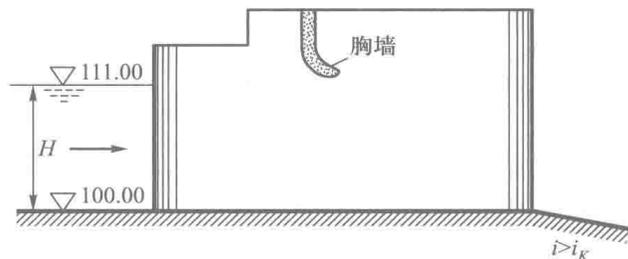


图 7.29

$$Q = \bar{m}' b \sqrt{2g} H_0^{3/2}$$

式中： $b = nb' = 4 \times 14 \text{ m} = 56 \text{ m}$ ； \bar{m}' 应为包括侧收缩影响的各孔流量系数的加权平均值。可分别计算中孔流量系数 m'_1 及边孔流量系数 m'_2 ，然后用加权平均法求 \bar{m}' 。具体计算如下：

中孔流量系数 m'_1

$$\left. \begin{aligned} \frac{r}{b'} &= \frac{d/2}{b'} = \frac{2.5 \text{ m}}{14 \text{ m}} = 0.179 \\ \frac{b}{B} &= \frac{b'}{b' + d} = \frac{14 \text{ m}}{14 \text{ m} + 5 \text{ m}} = 0.737 \end{aligned} \right\} \text{由表 7.6 查得 } m'_1 = 0.363$$

边孔流量系数 m'_2

$$\left. \begin{aligned} \frac{b}{B} &= \frac{b'}{b' + 2\Delta} = \frac{14 \text{ m}}{14 \text{ m} + 2 \times 4 \text{ m}} = 0.637 \\ \cot \theta &= \cot 30^\circ = 1.732 \end{aligned} \right\} \text{由表 7.5 查得 } m'_2 = 0.363$$

平均流量系数 \bar{m}'

$$\bar{m}' = \frac{(n-1)m'_1 + m'_2}{n} = \frac{(4-1) \times 0.363 + 0.363}{4} = 0.363$$

由于堰前过水断面不大，必须计入行近流速的影响。但流量未知， v_0 无法求出。可采用逐步近似法计算。

第一次近似计算：

假定 $v_{01} = 0$ ，即 $H_{01} = H = 11 \text{ m}$ ，则

$$Q_1 = 0.363 \times 4 \times 14 \text{ m} \times \sqrt{2 \times 9.8 \text{ m/s}^2} \times (11 \text{ m})^{3/2} = 3290 \text{ m}^3/\text{s}$$

第二次近似计算：

根据已求得的流量，可计算行近流速的近似值为

$$v_{02} = \frac{Q_1}{B \times H} = \frac{3290 \text{ m}^3/\text{s}}{79 \text{ m} \times 11 \text{ m}} = 3.79 \text{ m/s}$$

$$h_{02} = \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = \frac{1 \times (3.79 \text{ m/s})^2}{2 \times 9.8 \text{ m/s}^2} = 0.73 \text{ m}$$

则

$$H_{02} = H + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = 11 \text{ m} + 0.73 \text{ m} = 11.73 \text{ m}$$

$$Q_2 = 0.363 \times 4 \times 14 \text{ m} \times \sqrt{2 \times 9.8 \text{ m/s}^2} \times (11.73 \text{ m})^{3/2} = 3600 \text{ m}^3/\text{s}$$

第三次近似计算:

$$v_{03} = \frac{3600 \text{ m}^3/\text{s}}{79 \text{ m} \times 11 \text{ m}} = 4.14 \text{ m/s}$$

$$h_{03} = \frac{1 \times (4.14 \text{ m/s})^2}{2 \times 9.8 \text{ m/s}^2} = 0.87 \text{ m}$$

$$Q_3 = 0.363 \times 4 \times 14 \text{ m} \times \sqrt{2 \times 9.8 \text{ m/s}^2} \times (11.87 \text{ m})^{3/2} = 3680 \text{ m}^3/\text{s}$$

第四次近似计算:

按第三次求得的流量计算得

$$\begin{aligned} v_{04} &= 4.23 \text{ m/s} & h_{04} &= 0.91 \text{ m} \\ H_{04} &= 11.91 \text{ m} & Q_4 &= 3690 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

因为 Q_4 与 Q_3 相当接近 $\left(\frac{Q_4 - Q_3}{Q_4} = 0.27\%\right)$ 。故可认为所求的 $Q = 3690 \text{ m}^3/\text{s}$,

$$v_0 = 4.23 \text{ m/s}_0$$

7.5 闸孔出流的水力计算

实际工程中的水闸, 闸底坎一般为宽顶堰(包括无坎宽顶堰)或为曲线形实用堰; 闸门型式则主要有平板闸门及弧形闸门两种。当闸门部分开启, 出闸水流受到闸门的控制时即为闸孔出流。

闸孔出流水力计算的主要任务是: 在一定闸前水头下, 计算不同闸孔开度时的泄流量; 或根据已知的泄流量求所需的闸孔宽度 b 。显然, 不同的闸门类型, 不同的底坎型式, 水流收缩程度及能量损失的大小也不同, 泄流能力也会有所差异。下面分别进行讨论。

7.5.1 底坎为宽顶堰型的闸孔出流

图 7.29 是水平底坎上平板闸门的出流, H 为闸前水头, e 为闸孔开度。当水流行近闸孔时, 在闸门的约束下流线发生急剧弯曲; 出闸后, 流线继续收缩, 约在闸门下游 $(0.5 \sim 1)e$ 处出现水深最小的收缩断面。收缩断面的水深 h_c 一般小于临界水深 h_K , 水流为急流状态。而闸后渠道中的下游水深 h_t 一般大于临界水深 h_K , 水流呈缓流状态。由 6.4 节可知, 水流从急流到缓流时, 要

发生水跃，水跃位置随下游水深 h_t 而变。闸孔出流受水跃位置的影响可分为自由出流及淹没出流两种。

设收缩水深 h_c 的跃后水深为 h_c'' 。实验证明：

若 $h_t \leq h_c''$ ，则水跃发生在收缩断面处（图 7.30b）或收缩断面下游（图 7.30a）。此时，下游水深 h_t 的大小不影响闸孔出流，称为闸孔自由出流。

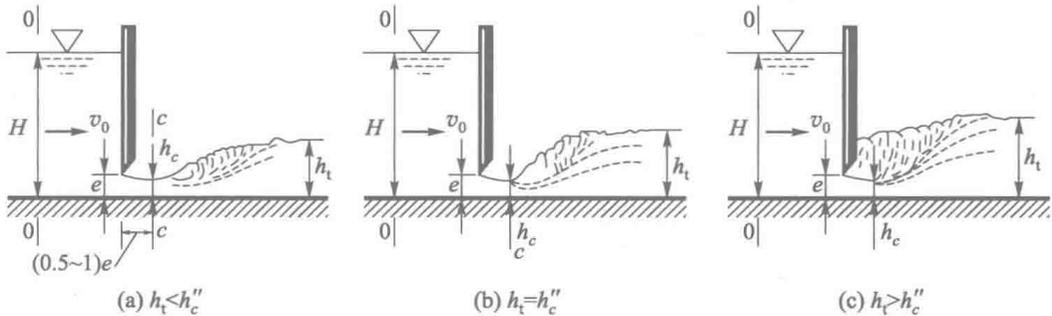


图 7.30

若 $h_t > h_c''$ ，则水跃发生在收缩断面上游（图 7.30c），水跃旋滚覆盖了收缩断面，称为闸孔淹没出流。此时通过闸孔的流量随下游水深 h_t 的增大而减小。

上述的判别条件对坎高不为零的宽顶堰型闸孔出流（图 7.31）也完全适用。

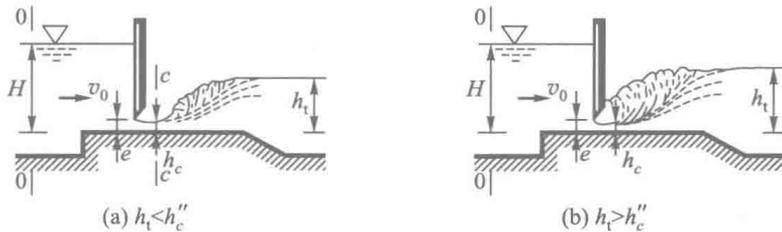


图 7.31

1. 底坎为宽顶堰型闸孔自由出流的水力计算

对图 7.30a、b 或图 7.31a 所示的闸孔自由出流，写闸前断面 0-0 及收缩断面 c-c 的能量方程：

$$H + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = h_c + \frac{\alpha_c v_c^2}{2g} + h_w$$

式中： h_w 是 0-0 到 c-c 断面间的水头损失，因为这一段水流是急变流，而且距离较短，可以只考虑局部水头损失，即 $h_w = \zeta \frac{v_c^2}{2g}$ ， ζ 为局部水头损失系数。

令 $H_0 = H + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}$, 称为闸前全水头。则上式可整理成

$$v_c = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c + \zeta}} \sqrt{2g(H_0 - h_c)}$$

令 $\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c + \zeta}}$, 称为流速系数。于是

$$v_c = \varphi \sqrt{2g(H_0 - h_c)}$$

因为 $Q = A_c v_c = v_c b h_c$, 所以有

$$Q = \varphi b h_c \sqrt{2g(H_0 - h_c)}$$

收缩断面水深 h_c 可表示为闸孔开度 e 与垂直收缩系数 ε_2 的乘积, 即

$$h_c = \varepsilon_2 e$$

又设 $\mu_0 = \varepsilon_2 \varphi$, μ_0 称为宽顶堰型闸孔出流的基本流量系数。则得

$$Q = \mu_0 b e \sqrt{2g(H_0 - \varepsilon_2 e)} \quad (7.20)$$

为了便于实际应用, 式 (7.20) 还可化为更简单的形式:

$$Q = \mu_0 b e \sqrt{1 - \varepsilon_2 \frac{e}{H_0}} \sqrt{2gH_0}$$

即

$$Q = \mu b e \sqrt{2gH_0} \quad (7.21)$$

式中 $\mu = \mu_0 \sqrt{1 - \varepsilon_2 \frac{e}{H_0}} = \varepsilon_2 \varphi \sqrt{1 - \varepsilon_2 \frac{e}{H_0}}$, μ 称为宽顶堰型闸孔自由出流的流量系数。

从式 (7.20) 或式 (7.21) 都可以看出, 闸孔出流的流量与闸前水头的 $1/2$ 次方成正比, 即 $Q \propto H_0^{1/2}$ 。

式 (7.20) 和式 (7.21) 都是宽顶堰型闸孔自由出流的计算公式。由于式 (7.21) 简单, 便于计算。下面的讨论均以式 (7.21) 为主。

下面来分析影响流量系数 μ 的主要因素:

因为流量系数 $\mu = \varepsilon_2 \varphi \sqrt{1 - \varepsilon_2 \frac{e}{H_0}}$ 。其中, 流速系数 $\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c + \zeta}}$, 是反映

0-0 断面至 c-c 断面间的局部水头损失和收缩断面 c-c 流速分布不均匀的影响。 φ 值主要决定于闸孔入口的边界条件 (如闸底坎的型式、闸门的类型等。对坎高为零的宽顶堰型闸孔, 可取 $\varphi = 0.95 \sim 1.0$; 对有底坎的宽顶堰型闸孔, 可取 $\varphi = 0.85 \sim 0.95$)。

垂直收缩系数 ε_2 是反映水流行经闸孔时流线在垂直底坎方向上的收缩程

度, 不仅与闸孔入口的边界条件有关, 而且还与闸孔的相对开度 e/H 有关。所以综合反映水流能量损失和收缩程度的流量系数 μ 值, 应决定于闸底坎的型式、闸门的类型和闸孔相对开度 e/H 值。

为了简化计算, 当闸前水头 H 较高, 而开度 e 较小或上游坎高 P_1 较大时, 行近流速 v_0 较小。在计算中可以不考虑行近流速的影响, 即令 $H \approx H_0$ 。

对于有边墩或闸墩存在的闸孔出流, 一般不需要在式 (7.21) 中再单独考虑侧收缩影响。实验证明, 在闸孔出流的条件下, 边墩和闸墩对流量影响很小。

下面讨论垂直收缩系数 ε_2 和流量系数 μ :

(1) 对于平板闸门的闸孔

儒科夫斯基 (Н. Е. Жуковский) 应用理论分析方法, 求得在无侧收缩的条件下, 平底坎平板闸门的垂直收缩系数 ε_2 与闸孔相对开度 e/H 的关系; ε_2 随相对开度的增加而加大, 如表 7.7 所示。

表 7.7 平板闸门的垂直收缩系数

e/H	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40
ε_2	0.615	0.618	0.620	0.622	0.625	0.628	0.630
e/H	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75
ε_2	0.638	0.645	0.650	0.660	0.675	0.690	0.705

流量系数 μ 可按南京水利科学研究所的经验公式计算:

$$\mu = 0.60 - 0.176 \frac{e}{H} \quad (7.22)$$

(2) 对于弧形闸门的闸孔

垂直收缩系数 ε_2 , 主要与闸门下缘切线与水平方向夹角 α 的大小有关, 可根据表 7.8 确定。

表 7.8 弧形闸门的垂直收缩系数

α	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
ε_2	0.789	0.766	0.742	0.720	0.698	0.678	0.662	0.646	0.635	0.627	0.622	0.620

表中的 α 值按下式计算:

$$\cos \alpha = \frac{c - e}{R}$$

式中的符号如图 7.32 所示。

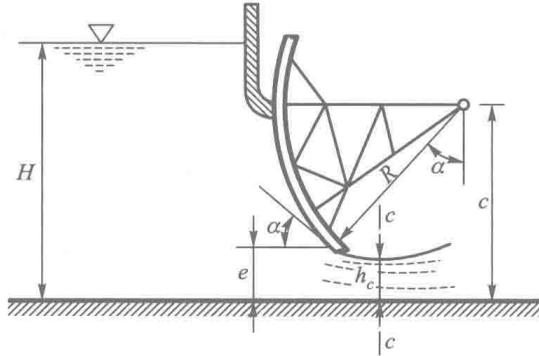


图 7.32

流量系数 μ 可由经验公式计算：

$$\mu = 0.97 - 0.81 \frac{\alpha}{180} - \left(0.56 - 0.81 \frac{\alpha}{180} \right) \frac{e}{H} \quad (7.23)$$

式中： α 的单位为度。上式的适用范围是 $25^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ ， $0 \leq e/H \leq 0.65$ 。

比较式 (7.22) 与式 (7.23) 可以看出：当 α 角不很大 ($\alpha < 80^\circ$) 时， e/H 相同，弧形闸门的流量系数大于平板闸门的流量系数。这是因为弧形闸门的面板，更接近于流线的形状，它对水流的干扰比平板闸门小，由此引起的水头损失小。

上面对平板闸门及弧形闸门所得出的垂直收缩系数 ϵ_2 及流量系数 μ 适用于平底闸孔。但某些实验证明，对于闸底坎高出渠底的宽顶堰型闸孔 (图 7.31)，只要收缩断面 $c-c$ 仍位于闸坎上，而且闸门系装在宽顶堰进口下游一定距离处，则堰坎对水流垂直收缩的影响将不显著，仍可按平底闸孔的公式计算。

例 7.6 某泄洪闸无底坎，孔宽 b 为 14 m，采用弧形闸门，弧门半径 R 为 22 m，门轴高 c 为 14 m。试计算上游水头 H 为 16 m，闸门开度 e 为 4 m 时，通过闸孔的流量 Q (闸孔为自由出流，不计行近流速影响)。

解：因为 $e/H = 4/16 = 0.25 < 0.65$ ，故为闸孔出流。

先求 $\cos \alpha = \frac{c-e}{R} = \frac{14-4}{22} = 0.454$ ； $\alpha = 63^\circ$ ；以此代入式 (7.23) 求流量系数：

$$\mu = 0.97 - 0.81 \times \frac{63}{180} - \left(0.56 - 0.81 \times \frac{63}{180} \right) \times \frac{4}{16} = 0.618$$

则通过闸孔的流量 (不计行近流速水头) 为

$$Q = \mu b e \sqrt{2gH} = 0.618 \times 14 \times 4 \times \sqrt{2 \times 9.8 \times 16} \text{ m}^3/\text{s} = 612 \text{ m}^3/\text{s}$$

2. 底坎为宽顶堰型闸孔淹没出流的水力计算

当下游水深大于收缩断面水深的共轭水深，即 $h_1 > h_c''$ 时，闸孔为淹没出流（图 7.33）。实验资料证明：闸孔被淹没后，收缩断面 $c-c$ 的实际水深增大为 h ，且 $h > h_c$ ，故实际作用水头减小为 $(H_0 - h)$ 。因而，闸孔淹没后其流量小于自由出流的流量。但 h 位于旋滚区不易测量，故实际计算时，是将计算平底闸孔自由出流的式（7.21）右端乘上一个淹没系数 σ_s ，而求得淹没闸孔出流的流量，即

$$Q_s = \sigma_s \mu b e \sqrt{2gH_0} \quad (7.24)$$

式中： μ 即为闸孔自由出流的流量系数。

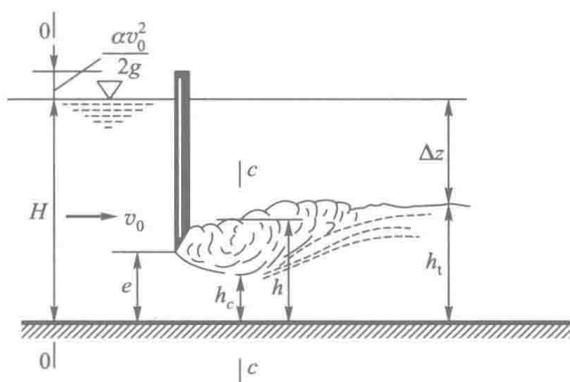


图 7.33

按式（7.24）计算淹没闸孔出流时，一般可以不计行近流速的影响。

根据南京水利科学研究所的研究，淹没系数 σ_s 与潜流比 $(h_1 - h_c'') / (H - h_c'')$ 有关，可由图 7.34 查得。

例 7.7 矩形渠道中修建一水闸，闸底板与渠底齐平，闸孔宽 b 等于渠道宽度， b 为 3 m，闸门为平板门。今已知，闸前水深 H 为 5 m，闸孔开度 e 为 1 m。求下游水深 h_1 为 3.5 m 时通过闸孔的流量。

解：因为 $\frac{e}{H} = \frac{1}{5} = 0.2 < 0.65$ ，故为闸孔出流。

先判别闸孔出流的性质：

由表 7.7，当 $e/H = 0.2$ 时，垂直收缩系数 $\varepsilon_2 = 0.620$ ，则收缩水深为

$$h_c = \varepsilon_2 e = 0.62 \times 1 \text{ m} = 0.62 \text{ m}$$

收缩水深 h_c 的共轭水深 h_c'' 由下式计算：

$$h_c'' = \frac{h_c}{2} \left(\sqrt{1 + 8 \frac{v_c^2}{gh_c}} - 1 \right)$$

收缩断面的流速 v_c 为

$$v_c = \frac{Q}{bh_c} = \frac{\mu be \sqrt{2gH_0}}{be\varepsilon_2} = \frac{\mu}{\varepsilon_2} \sqrt{2gH_0}$$

若不计行近流速的影响, 上式中闸孔自由出流的流量系数 μ 用式 (7.22) 计算, 则

$$v_c = \frac{0.60 - 0.176 \times 0.2}{0.620} \times \sqrt{2 \times 9.8 \times 5} \text{ m/s} = 9.04 \text{ m/s}$$

收缩断面的共轭水深为

$$h_c'' = \frac{0.62 \text{ m}}{2} \times \left(\sqrt{1 + 8 \times \frac{9.04^2}{9.8 \times 0.62}} - 1 \right) = 2.91 \text{ m}$$

因为 $h_1 > h_c''$, 故为闸孔淹没出流, 流量应根据式 (7.24) 计算。

潜流比 $\frac{(h_1 - h_c'')}{(H - h_c'')} = \frac{3.5 - 2.91}{5 - 2.91} = 0.282$, 从图 7.34 查得淹没系数 $\sigma_s = 0.72$ 。

所以闸孔出流的流量为

$$Q = 0.72 \times (0.6 - 0.176 \times 0.2) \times 3 \times 1 \times \sqrt{2 \times 9.8 \times 5} \text{ m}^3/\text{s} = 12.1 \text{ m}^3/\text{s}$$

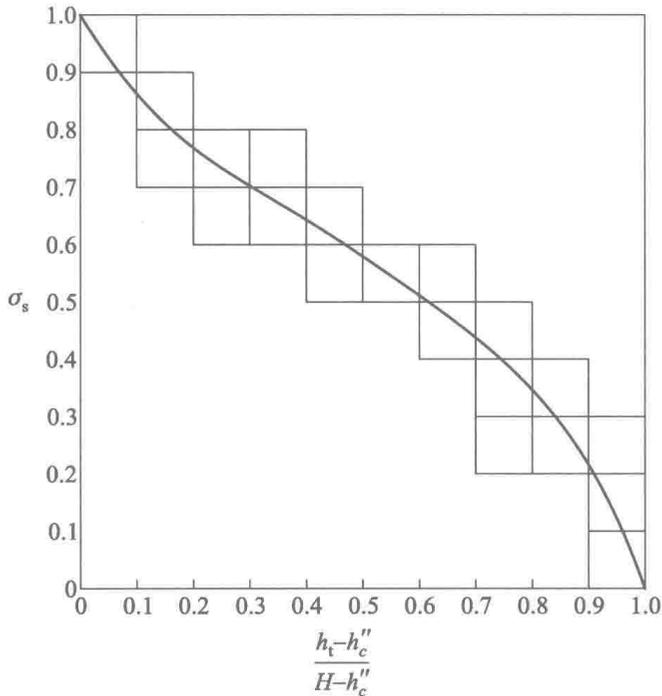


图 7.34

7.5.2 底坎为曲线形实用堰型的闸孔出流

图 7.35 所示为实用堰顶闸孔出流，当水流由闸前趋近闸孔时，流线在闸前的整个深度内向闸孔集中，故水流的收缩比平底闸孔充分和完善得多。出闸后，水舌在重力作用下，紧贴溢流面下泄，不像平底闸孔那样存在明显的收缩断面。所以，曲线形实用堰顶闸孔出流的流量系数也不同于平底闸孔的流量系数。

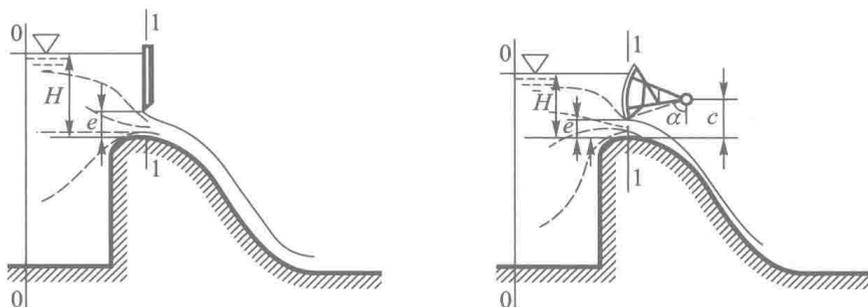


图 7.35

在实际工程中，由于下游水位过高而使曲线形实用堰顶闸孔形成淹没出流的情况是十分少见的，所以对曲线形实用堰顶的闸孔，只讨论自由出流的情况。

对堰前断面 0-0 及堰顶闸孔的 1-1 断面建立能量方程，并以通过堰顶的水平面作为基准面，可得

$$H + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + \zeta \frac{v_1^2}{2g}$$

式中： $\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right)$ 为 1-1 断面测压管水头的平均值，可用闸孔开度 e 乘以势能修正系数 β 表示，即令

$$\beta e = \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right)$$

由此可得

$$H_0 = \beta e + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + \zeta \frac{v_1^2}{2g}$$

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 + \zeta}} \sqrt{2g(H_0 - \beta e)} = \varphi \sqrt{2g(H_0 - \beta e)}$$

则通过闸孔的流量为

$$Q = v_1 be = be\varphi \sqrt{2g(H_0 - \beta e)}$$

可改写成

$$Q = be\varphi \sqrt{1 - \beta \frac{e}{H_0}} \sqrt{2gH_0}$$

或

$$Q = \mu be \sqrt{2gH_0} \quad (7.25)$$

式中： $\mu = \varphi \sqrt{1 - \beta \frac{e}{H_0}}$ ，称为曲线形实用堰顶闸孔自由出流的流量系数； $\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 + \zeta}}$ ，为曲线形实用堰顶闸孔自由出流的流速系数。

式(7.25)就是计算曲线形实用堰顶闸孔自由出流的公式。当堰高较大时， v_0 很小，行近流速水头可以略去不计，即令式(7.25)中 $H \approx H_0$ 。

比较式(7.21)与式(7.25)可知，平底闸孔自由出流与底坎为曲线形实用堰的闸孔自由出流具有相同的计算公式。但是，由于边界条件不同，它们的流量系数并不相同。

实验表明，影响曲线形实用堰顶闸孔出流流量系数的因素包括：闸门型式（平板门或弧形门）、闸门相对开度 e/H 、闸门的位置、堰剖面曲线的形状等。对弧形门还有门轴高度 c 、弧门半径 R ；对平板门还应包括闸门底缘的外形。在上述因素中，闸门型式和闸门相对开度的影响是主要的，其他因素的影响程度没有上述两个因素明显，相关的系统研究也较少。

1. 对平板闸门

流量系数可按下列经验公式计算：

$$\mu = 0.65 - 0.186 \frac{e}{H} + \left(0.25 - 0.357 \frac{e}{H} \right) \cos \theta \quad (7.26)$$

式中： θ 值如图7.36所示。

2. 对弧形闸门

由于系统研究不足，初步计算时，流量系数 μ 可按表7.9参考选用。重要的工程应通过水工模型试验确定。

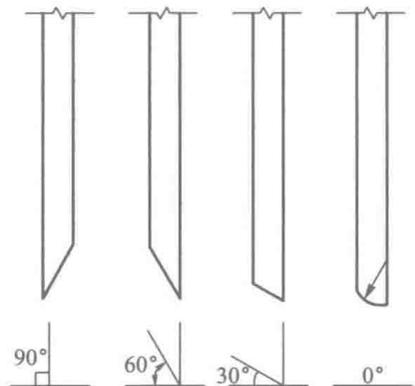


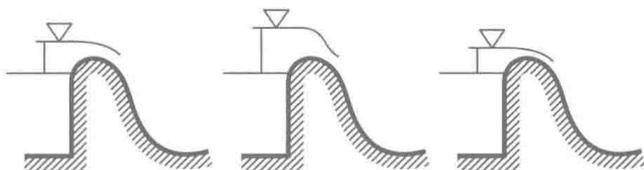
图 7.36

表 7.9 曲线形实用堰顶弧形闸门的流量系数

$\frac{e}{H}$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.50	0.60	0.70
μ	0.721	0.700	0.683	0.667	0.652	0.638	0.625	0.610	0.584	0.559	0.535

思考题

- 7.1 何谓堰流，堰流的类型有哪些？它们有哪些特点？如何判别？
- 7.2 堰流计算的基本公式及适用条件？影响流量系数的主要因素有哪些？
- 7.3 下图中的溢流坝只是作用水头不同，其他条件完全相同，试问：流量系数哪个大？哪个小？为什么？



思 7.3

7.4 淹没溢流对堰流有何重要影响？薄壁堰、实用堰及宽顶堰的淹没条件是什么？影响各种淹没系数的因素有哪些？

7.5 试分析在同样水头作用下，为什么实用剖面堰的过水能力比宽顶堰的过水能力大？

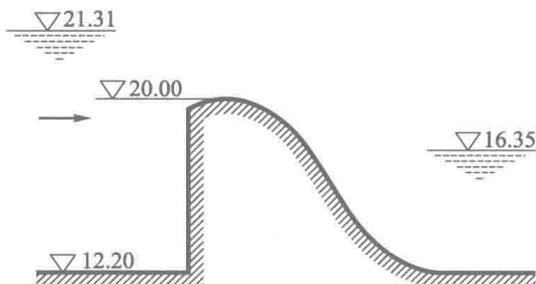
习 题

7.1 有一无侧收缩的矩形薄壁堰，上游堰高 P_1 为 0.5 m，堰宽 b 为 0.8 m，堰顶水头 H 为 0.6 m，下游水位不影响堰顶出流。求通过堰的流量。

7.2 某溢洪道宽度 10 m，设 WES 实用堰， $H_d = 15$ m，堰后有足够的跌落，不存在淹没问题，闸室宽度与溢洪道宽度相同，无侧向收缩，且无闸墩。已知设计水头对应流量系数 $m_d = 0.4988 (P_1/H_d)^{0.0241}$ 。堰高 P_1 分别为 10 m 和 20 m 条件下，(1) 试计算堰上水头 $H = 15$ m 时的流量系数和泄流量；(2) 分析为什么低堰的流量系数小而泄流量更大。

7.3 某河中筑有单孔溢流坝如图所示。剖面按 WES 曲线设计。已知：筑坝处河底高程为 12.20 m，坝顶高程为 20.00 m，上游设计水位高程为 21.31 m，下游水位高程为 16.35 m，坝前河道近似矩形，河宽 B 为 100 m，边墩头部呈圆弧形。试求上游为设计水位时，通过流量 Q 为 $100 \text{ m}^3/\text{s}$ 所需的

堰顶宽度 b 。



题 7.3

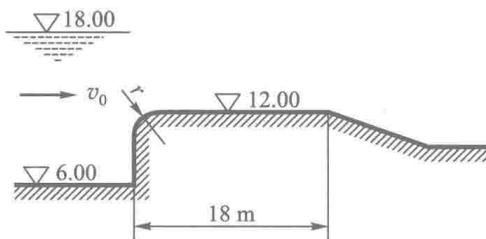
7.4 某电站溢洪道拟采用曲线形实用堰。今已知：溢流坝上游设计水位高程为 267.58 m；设计流量为 Q_d 为 $6840 \text{ m}^3/\text{s}$ ；相应的下游水位高程为 210.5 m；筑坝处河底高程为 180 m；上游河道近似三角形断面，水面宽 B 为 200 m。已确定溢流坝作成三孔，每孔净宽 b' 为 16 m；闸墩头部为半圆形；边墩头部为圆弧形。要求：

(1) 设计堰的剖面形状，确定堰顶高程；

(2) 当上游水位高程分别是 267.0 m 及 269.0 m 时，所设计的堰剖面通过的流量各为多少（下游水位低于堰顶）？

(3) 当通过流量 Q 为 $6000 \text{ m}^3/\text{s}$ 时，计算所需的 upstream 水位高程。

7.5 某灌溉进水闸为三孔，每孔宽 b' 为 10 m；闸墩头部为半圆形，闸墩厚 d 为 3 m；边墩头部为圆弧形，边墩计算厚度 Δ 为 2 m；闸前行近流速 v_0 为 0.5 m/s；其他数据如图所示。试确定相应于不同下游水位时的过闸流量：



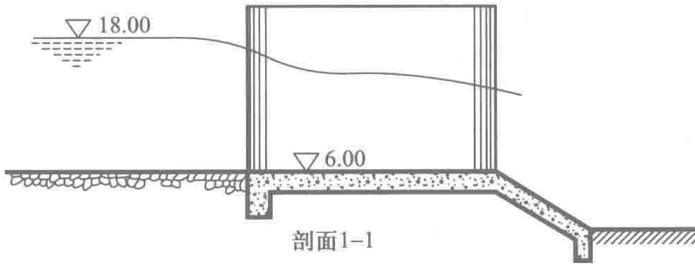
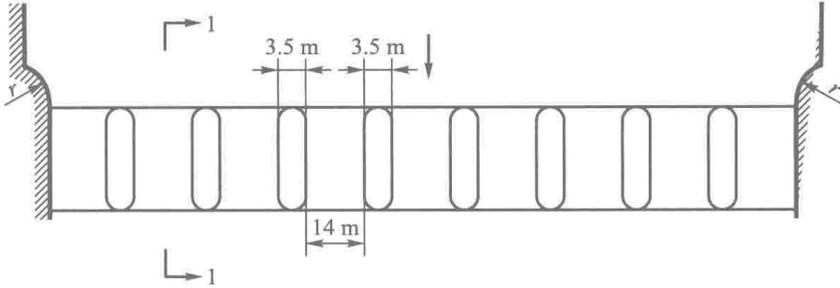
题 7.5

(1) 下游水位高程为 17.75 m。

(2) 下游水位高程为 16.70 m。

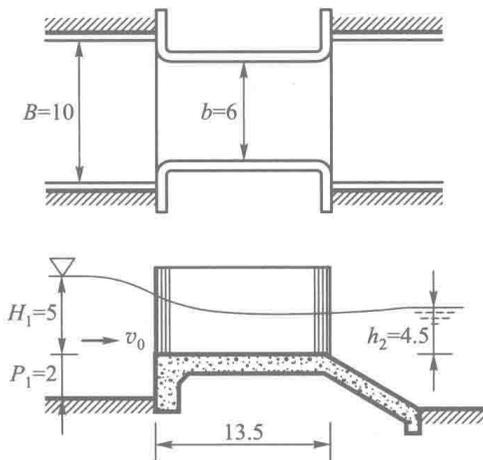
7.6 图示某拦河闸共 9 孔，每孔宽为 14 m；闸墩厚 d 为 3.5 m，闸墩头部

为圆形，边墩迎水面为圆弧形，圆弧半径 $r=5\text{ m}$ ，计算厚度 Δ 为 3 m ；闸前水位高程为 18 m ；闸底板高程为 6 m ；闸前行近流速 v_0 为 3 m/s ；下游水位不影响出流。试确定闸门全开时的过闸流量。



题 7.6

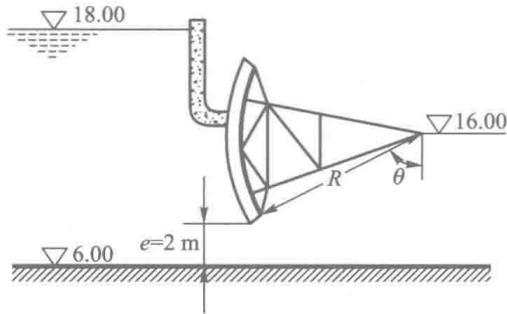
7.7 一具有水平顶的堰，各部分尺寸如图示（图中单位为 m ）。试：



题 7.7

- (1) 判断堰的类型。
 (2) 计算通过堰的流量。

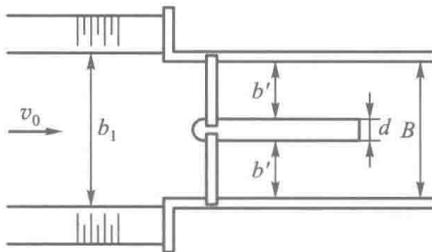
7.8 某水利枢纽设平底冲沙闸，如图所示，用弧形闸门控制流量。闸孔宽 b 为 10 m，弧门半径 r 为 15 m，门轴高程为 16.0 m，上游水位高程为 18.0 m，闸底板高程为 6.0 m。试计算：闸孔开度 e 为 2 m，下游水位高程为 8.5 m 及 14.0 m 时，通过闸孔的流量（不计行近流速的影响）。



题 7.8

7.9 某平底水闸，采用平板闸门。已知：水头 H 为 4 m，闸孔宽 b 为 5 m，闸门开度 e 为 1 m，行近流速 v_0 为 1.2 m/s。试求下游为自由出流时的流量。

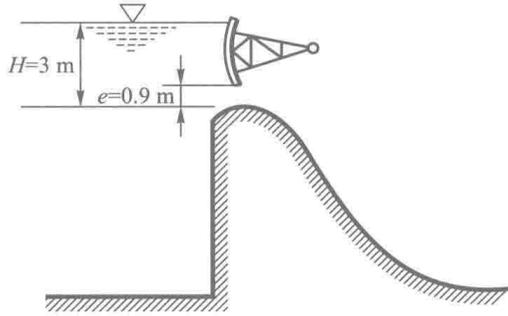
7.10 在图示底宽 b_1 为 6.8 m，边坡系数 m 为 1 的梯形渠道中，设置有两孔水闸，用平板闸门控制流量。闸坎高度为零，闸孔为矩形断面，闸墩头部为半圆形，墩厚 d 为 0.8 m；边墩头部为矩形。试求闸孔开度 e 为 0.6 m、闸前水深 H 为 1.6 m 时，保证通过流量 Q 为 $9 \text{ m}^3/\text{s}$ 所需的闸宽 B （下游为自由出流）。



题 7.10

7.11 实用堰顶部设平板闸门以调节上游水位。闸门底缘的斜面朝向上游倾斜角为 60° 。试求所需的闸孔开度 e 。已知：流量 Q 为 $30 \text{ m}^3/\text{s}$ ，堰顶水头 H 为 3.6 m，闸孔净宽 b 为 5 m（下游水位低于堰顶，不计行近流速）。

7.12 图示一溢流坝为曲线形实用堰，今在坝顶设弧形闸门。已知：上游水头 H 为 3 m，闸孔净宽 b 为 5 m。下游为自由出流，不计行近流速。试求闸孔开度 e 为 0.9 m 时的流量。



题 7.12

8 水流衔接与消能

天然河道中的水流，一般多属缓流，流量沿整个河宽方向的分布也比较均匀。但当在河道中修建了闸、坝等泄水建筑物后，壅高了上游水位，加大了上下游的水流落差，同时，为了节省建筑物的造价，常要求这类建筑物的泄水宽度比原河床小，单宽流量增大。这样，通过建筑物下泄的水流往往具有很高的流速，单位重量水体所具有的能量（即比能）也比下游河道中水流的正常比能大得多，对下游河床具有明显的破坏能力。特别是单宽流量加大，形成高速水流下泄，能量更为集中，破坏性也更大。

如图 8.1 所示的溢流坝，设水流自坝顶下泄至坝趾 $c-c$ 断面时的比能为 E_1 （主要是动能），下游 $2-2$ 断面的比能为 E_2 ，二者的比能差称为余能 $\Delta E = E_1 - E_2$ ， ΔE 的数值往往很大。设该溢流坝的单宽流量 $q = 80 \text{ m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})$ ，上下游水位差为 60 m，当略去坝前断面及 $2-2$ 断面的流速水头，不计坝面的能量损失时，余能近似等于上下游水位差，即 ΔE 为 60 m。则单位宽度河床上每秒钟应消除的能量为

$$\begin{aligned} N &= \rho g q \Delta E = (9\,800 \text{ N/m}^3) \times (80 \text{ m}^2/\text{s}) \times (60 \text{ m}) \\ &= 47\,000\,000 \text{ J}/(\text{m} \cdot \text{s}) \end{aligned}$$

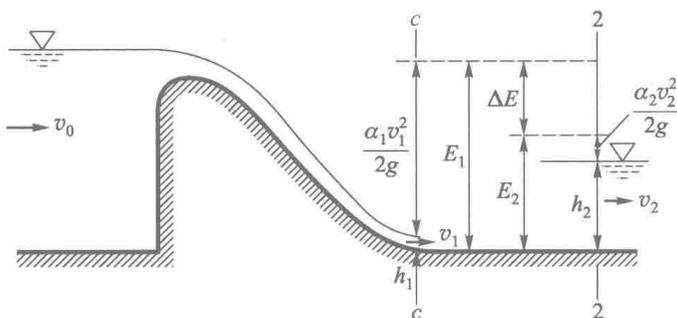


图 8.1

这样巨大的能量（主要为动能），若不采取有效措施加以消除，势必刷深河槽，冲毁河堤，甚至使建筑物遭到破坏。

所以，泄水建筑物下游水力设计的主要任务之一，就在于选择及设计适当的消能措施，使在下游较短距离内消除余能 ΔE ，并使 $c-c$ 断面的高速水流安

全地转换为下游的正常缓流，从而保证建筑物的安全。目前，常采用的衔接与消能措施，大致有下列三种类型：

1. 底流式消能

由 6.4 节可知，急流向缓流过渡时必然发生水跃。所谓底流消能，就是在建筑物下游采取一定的工程措施，控制水跃发生的位置，通过水跃产生的表面旋滚和强烈的紊动以达到消能的目的。从而使 $c-c$ 断面的急流与下游的正常缓流衔接起来。这种衔接形式由于高流速的主流在底部，故称为底流式消能（图 8.2）。

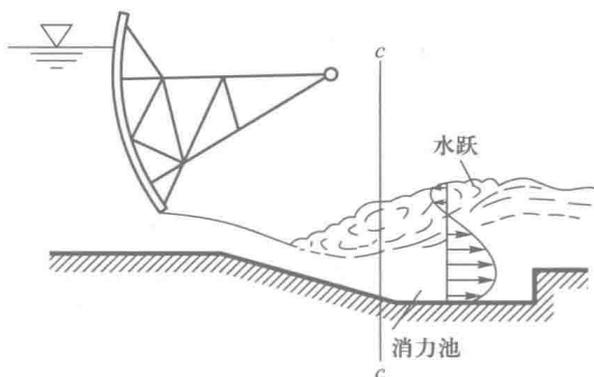


图 8.2

2. 挑流式消能

利用下泄水流所挟带的巨大动能，因势利导将水流挑射至远离建筑物的下游，使下落水舌对河床的冲刷不会危及建筑物的安全（图 8.3）。下泄水流的余能一部分在空中消散，大部分在水舌落入下游河道后被消除。

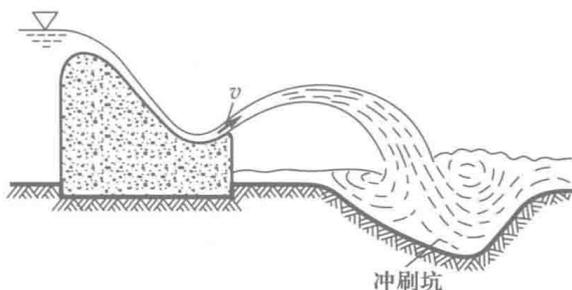


图 8.3

3. 面流式消能

当下游水深较大而且比较稳定时，可采取一定的工程措施，将下泄的高速

水流导向下游水流的上层，主流与河床之间由巨大的底部旋滚隔开，可避免高速主流对河床的冲刷。余能主要通过水舌扩散，流速分布调整及底部旋滚与主流的相互作用而消除。由于衔接段中，高流速的主流位于表层，故称为面流式消能（图 8.4）。

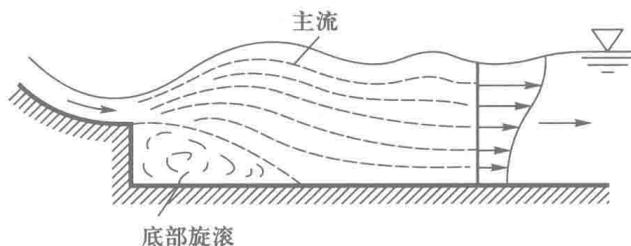


图 8.4

此外，还可以将上述三种基本的消能方式结合起来应用。如某些工程中采用的消能戽（图 8.5）就是一种底流和面流结合应用的实例。总之，工程实际中消能型式的选择是一个十分复杂的问题，必须结合具体工程的运用要求，并兼顾水力、地形、地质及使用条件进行综合分析，因地制宜地采取措施，以达到消除余能和保证建筑物安全的目的。

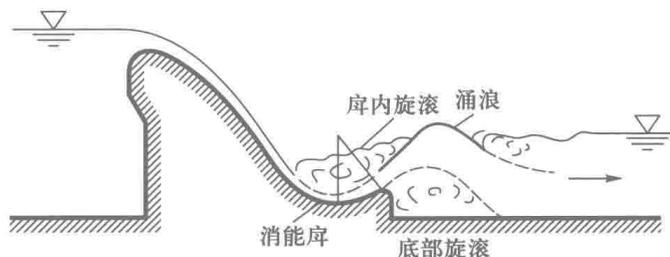


图 8.5

下面着重介绍底流消能及挑流消能的水力计算方法。其他消能方式的水力计算，可参阅有关资料。

8.1 底流消能的水力计算

底流消能是借助于一定的工程措施控制水跃位置，通过水跃发生的表面旋滚和强烈紊动来消除余能。由 6.4 节可知，水跃的能量损失随跃前断面弗劳德 Fr_1 的增大而增加。以矩形断面明渠为例，当 $Fr_1 = 5$ 时，通过水跃消除的能量 $\Delta E \approx 50\% E_1$ ， E_1 为跃前断面的比能；当 $Fr_1 = 7$ 时， $\Delta E \approx 64\% E_1$ ；当 $Fr_1 = 9$

时, $\Delta E \approx 70\% E_1$ 。由此可见, 水跃的消能效果是十分显著的。所以, 一般的水闸、中小型溢流坝或地质条件较差的各类泄水建筑物, 多采用底流式消能。这是一种基本的消能型式, 在水利水电工程中获得了广泛应用。

底流式消能的水力计算, 首先应分析建筑物下游的水流衔接形式, 亦即判定水跃发生的位置; 然后确定必要的工程措施。显然, 建筑物下游水跃的位置, 决定于通过建筑物下泄水流的特性和下游河道中水深和流速的大小。当通过流量一定时, 下游河道中的水深和流速通常是已知的。至于通过建筑物下泄的水流, 则常以建筑物下游的收缩断面作为分析水流衔接形式的控制断面。

8.1.1 泄水建筑物下游收缩断面水深的计算

以图 8.6 所示的溢流坝为例来说明收缩断面水深的计算方法。

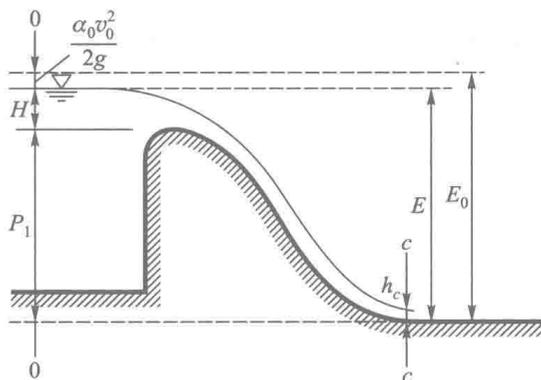


图 8.6

水流自坝顶下泄时, 势能逐渐转化为动能, 水深减小, 流速增加。到达坝趾的 $c-c$ 断面, 流速最大, 水深最小, 称为收缩断面, 其水深以 h_c 表示, h_c 小于临界水深 h_K 。现以通过收缩断面底部的水平面为基准面, 列出坝前断面 $0-0$ 及收缩断面 $c-c$ 的能量方程式, 可得

$$E_0 = h_c + \frac{\alpha_c v_c^2}{2g} + \zeta \frac{v_c^2}{2g} = h_c + (\alpha_c + \zeta) \frac{v_c^2}{2g} \quad (8.1)$$

式中: ζ 为 $0-0$ 断面至 $c-c$ 断面间的水头损失系数; E_0 为以收缩断面底部为基准面的坝前水流总比能。由图 8.6 可以看出

$$E_0 = P_1 + H + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = P_1 + H_0 \quad (8.2)$$

令流速系数 $\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c + \zeta}}$, 则式 (8.1) 可写作

$$E_0 = h_c + \frac{v_c^2}{2g\varphi^2}$$

把 $v_c = Q/A_c$ 代入上式得

$$E_0 = h_c + \frac{Q^2}{2g\varphi^2 A_c^2} \quad (8.3)$$

对于矩形断面, $A_c = bh_c$ 。取单宽流量计算, 则

$$E_0 = h_c + \frac{q^2}{2g\varphi^2 h_c^2} \quad (8.4)$$

当断面形状、尺寸、流量及流速系数已知时, 即可应用式 (8.3) 来计算收缩断面水深 h_c 。对矩形断面可用式 (8.4) 计算。

式 (8.3) 及式 (8.4) 都是三次方程式, 一般需用试算法求解, 计算可列表进行, 以便于检查错误及逐次逼近。

对于矩形断面还可将式 (8.4) 改变为计算其收缩断面水深的迭代式:

$$h_{ci+1} = \frac{q}{\varphi \sqrt{2g(E_0 - h_{ci})}} \quad (8.5)$$

将 $h_{c1} = \frac{q}{\varphi \sqrt{2gE_0}}$ 代入上式得 h_{c2} ;

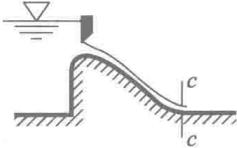
.....

当 $(h_{ci+1} - h_{ci})$ 满足精度要求时, 则 h_{ci} 即为所求。利用水跃方程, 可方便地算出其跃后水深 h''_c 。

以上所给出的计算收缩断面水深 h_c 及其共轭水深 h''_c 的公式, 不仅适用于溢流坝, 对水闸及其他型式的建筑物也完全适用。对于水闸, 也可用第 7 章所介绍的方法, 即用 $h_c = \varepsilon_2 e$ 直接计算。

应用上面的方法计算建筑物下游的收缩断面水深时, 必须确定流速系数 φ 值, φ 值的大小决定于建筑物的型式和尺寸, 严格来讲, 还与坝面的粗糙程度、反弧半径 r 及单宽流量的大小有关。影响因素比较复杂, 初步计算时可参考表 8.1 选定。

表 8.1 流速系数取值

	建筑物泄流方式	图 形	φ
1	堰顶有闸门的曲线形实用堰		0.85 ~ 0.95

续表

	建筑物泄流方式	图 形	φ
2	无闸门的曲线形实用堰 <ul style="list-style-type: none"> ① 溢流面长度较短 ② 溢流面长度中等 ③ 溢流面较长 		1.00 0.95 0.90
3	平板闸门下底孔出流		0.97 ~ 1.00
4	折线实用断面（多边形断面）堰		0.80 ~ 0.90
5	宽顶堰		0.85 ~ 0.95
6	跌水		1.00
7	末端设闸门的跌水		0.97 ~ 1.00

8.1.2 泄水建筑物下游水跃的位置与形式及其对消能的影响

河渠中的水流一般多属缓流，其水深 h_1 大于临界水深 h_K ，而闸坝或其他泄水建筑物出口水流往往为急流，收缩断面水深 h_c 常小于临界水深 h_K ，故泄水建筑物的下游必然发生水跃。

下面仍以溢流坝为例来说明水跃的位置与形式。为研究方便起见，设下游为缓坡棱柱体渠道，并认为下游水深 h_2 大致沿程不变（即下游渠道中近似均

匀流)。

水跃的位置决定于坝趾收缩断面水深 h_c 的共轭水深 h_c'' 与下游水深 h_t 的相对大小。可能出现下列三种情况：

第一种情况： $h_t = h_c''$

在这种情况下，因为 h_t 恰好等于 h_c 的共轭水深 h_c'' ，故水跃直接在收缩断面处发生（图 8.7a）。这种衔接形式，称为临界式水跃衔接。

第二种情况： $h_t < h_c''$

这时，收缩水深 h_c 与下游实有水深 h_t 不满足水跃的共轭条件，故水跃不在收缩断面处产生。由 6.4 节可知，在一定流量下，跃前水深越小，则所要求的跃后水深越大；反之，跃后水深越小，则其跃前水深越大。既然 $h_t < h_c''$ ，这表明与 h_t 相共轭的跃前水深 h_1' 应大于 h_c 。所以，急流将继续向下游流动一定距离，在流动过程中，损失消耗部分动能，流速逐渐减小，水深逐渐增大。至某一距离处，水深等于 h_1' ，水跃即开始发生（图 8.7b）。这种衔接形式，由于水跃发生在收缩断面的下游，称为远驱式水跃衔接。

第三种情况： $h_t > h_c''$

这种情况表明，坝下欲发生水跃，必须发生在这样一个断面处，该断面的水深等于 h_1' ，而且 $h_1' < h_c$ 。显然，坝下游不存在这样的断面，因为收缩断面已经是水深最小的断面。由 6.3 节关于断面比能的讨论可知：缓流中水深越大，断面比能越大。所以，与 h_t 相应的断面比能，将大于与收缩断面的跃后水深 h_c'' 相应的断面比能。由于下游的实有比能大，表面旋滚将涌向上游，并淹没收缩断面（图 8.7c）。这种水跃叫作淹没水跃，其衔接形式则称为淹没式水跃衔接。

工程中，一般用 h_t 与 h_c'' 之比来表示水跃的淹没程度，该比值称为水跃的淹没系数，用 σ_j 来表示，即

$$\sigma_j = \frac{h_t}{h_c''}$$

当 $\sigma_j > 1$ 时为淹没水跃。 σ_j 越大则表明水跃的淹没程度越大。当 $\sigma_j = 1$ 时，为临界水

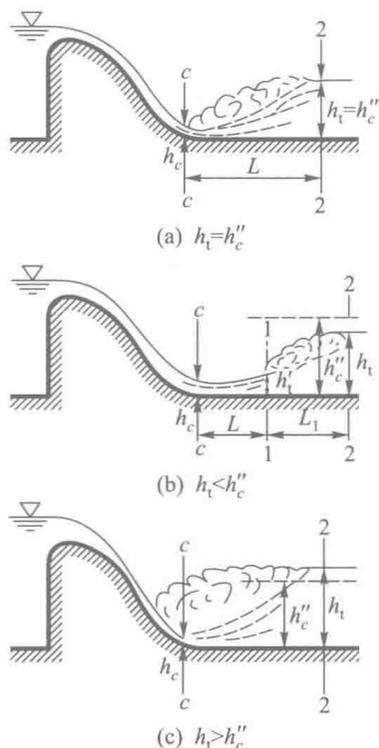


图 8.7

跃。当 $\sigma_j < 1$ 时，则为远驱式水跃。临界式及远驱式水跃都是非淹没水跃，或称为自由水跃，二者之间的区别仅在于它们所发生的相对位置不同。

6.4 节所讨论的有关水跃的知识（例如：水跃的能量损失及水跃长度的计算），都是对自由水跃而言。而淹没水跃则有其另外的特点。

理论及实验研究表明：当淹没系数 $\sigma_j > 1.2$ 时，淹没水跃的消能系数 K_j 小于弗劳德数相同时自由水跃的消能系数；淹没水跃的水跃长度，则大于自由水跃的水跃长度。而且， σ_j 越大，消能系数越小，水跃长度越大。主要的原因是，淹没程度增加，淹没水跃跃后断面的比能 $\left(h_t + \frac{\alpha_{21} v^2}{2g} \right)$ 亦增加，所以消能系数降低。同时，淹没程度增加，位于表面旋滚下面的高速主流扩散得越慢，因此，水跃长度加大。

上面所述的溢流坝下游水跃位置与形式的判别方法，对水闸或其他形式的泄水建筑物亦同样适用。图 8.8 是平底闸孔下游三种水跃衔接形式的示意图。

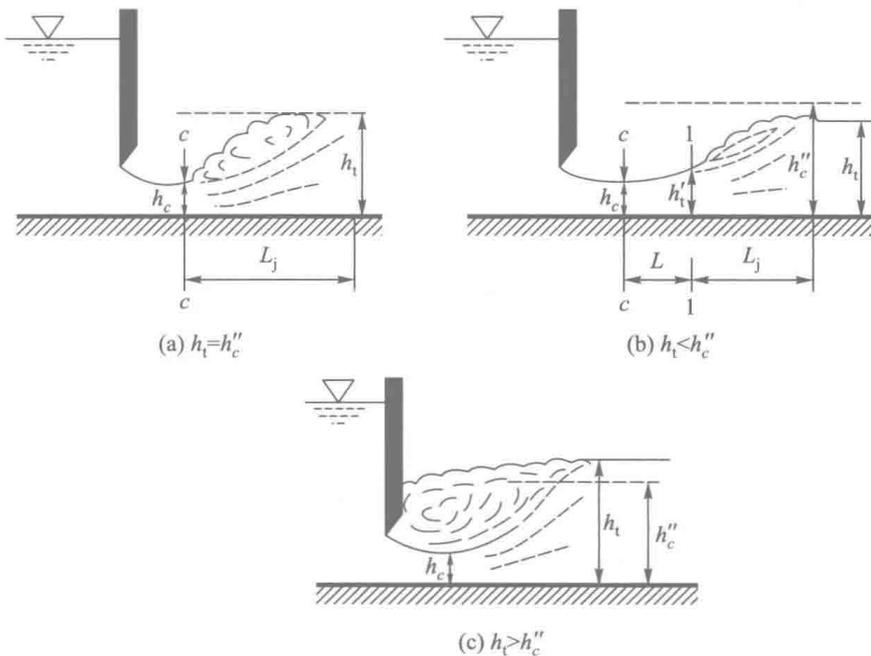


图 8.8

建筑物下游可能出现的三种水跃衔接形式，虽然都是通过水跃来消能，但由于水跃位置和形式的不同，消能的效果和所需的消能建筑物尺寸是各不相同的。

从水工和消能的观点来看，远驱式水跃最为不利。因为在此情况下，建筑物与跃前断面之间，还存在相当长的急流段。在这一段内，流速很高，对河床

的冲刷能力很大，河床必须有可靠的保护结构。所以，在远驱式水跃衔接的条件下，所需的护坦长度为

$$L_k = L + L_j \quad (8.6)$$

式中： L 为收缩断面 $c-c$ 至跃前断面间急流段的长度； L_j 为水跃长度。

对临界式水跃衔接，虽然所要求的护坦长度 $L_k = L_j$ ，较远驱式的短，但这种衔接形式是不稳定的。所以，工程设计中，要求下游产生一定淹没程度 ($\sigma_j = 1.05 \sim 1.10$) 的水跃。这时，护坦长度较小，消能效果也比较好，并能得到较为可靠的淹没水跃。但是水跃的淹没程度也不能太大，否则不仅消能效率较低，护坦长度也将因水跃长度增加而加大。

8.1.3 控制水跃位置的工程措施——消力池的水力计算

当建筑物下游产生远驱式或临界式水跃衔接时，为了改变这种不利的衔接形式，必须设法加大建筑物的下游水深，使水跃控制在紧靠建筑物之处，并形成淹没程度不大的水跃。

加大下游水深的工程措施，主要有下列两种：

- ① 降低护坦高程，使在下游形成消力池；
- ② 在护坦末端修建消能坎来壅高水位，使坎前形成消力池。

下面介绍宽度不变的矩形断面消力池的水力计算方法。计算内容包括：消力池深度及长度的确定。

1. 降低护坦高程所形成的消力池

(1) 消力池深度 d 的计算

为使建筑物下游形成淹没程度不大的水跃，消力池内的水深应为

$$h_T = \sigma_j h_{c1}'' \quad (8.7)$$

式中： σ_j 为水跃的淹没系数，一般取 $\sigma_j = 1.05$ ； h_{c1}'' 为护坦高程降低后收缩水深 h_{c1} 的跃后水深。

形成消力池后，水跃将发生在池内（图 8.9）。离开消力池的水流，由于垂向收缩，过水断面小，动能增加，水面跌落一个 Δz 值，其水流特性与淹没宽顶堰相同。由图 8.9 可以看出，消力池内的水深 h_T 为

$$h_T = d + h_1 + \Delta z \quad (8.8)$$

将式 (8.7) 代入式 (8.8)，则得到确定消力池深度 d 的计算公式：

$$d = \sigma_j h_{c1}'' - (h_1 + \Delta z) \quad (8.9)$$

现在来推求计算 Δz 的公式：

对消力池出口上游断面 1-1 及下游断面 2-2 列出能量方程式，以通过断面 2-2 底部的水平面作基准面，得

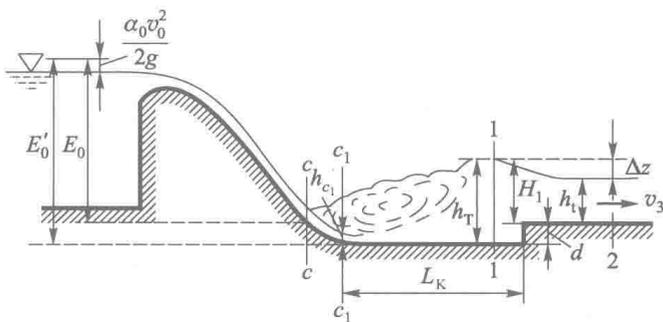


图 8.9

$$H_1 + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = h_1 + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \zeta \frac{v_2^2}{2g}$$

可整理成

$$\Delta z = H_1 - h_1 = \frac{v_2^2}{2g\varphi'^2} - \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}$$

令 $\alpha_1 = 1$; 并把 $v_2 = q/h_1$, $v_1 = q/(\sigma_j h_{c1}'')$ 代入上式, 则得

$$\Delta z = \frac{q^2}{2g} \left[\frac{1}{(\varphi' h_1)^2} - \frac{1}{(\sigma_j h_{c1}'')^2} \right] \quad (8.10)$$

式中, 消力池的流速系数 $\varphi' = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2 + \zeta}}$, 它决定于消力池出口处的顶部形式, 一般取 $\varphi' = 0.95$ 。

当 E_0 、 q 和 φ 已知时, 即可利用前述的式 (8.4), 式 (8.9) 及式 (8.10) 三个方程联合求解消力池深度 d 。但应当注意的是, 护坦高程降低一个 d 值后, E_0 增加为 $E'_0 = E_0 + d$; 收缩断面的位置也由 $c-c$ 断面下移至 c_1-c_1 断面。水深由 h_c 变为 h_{c1} 。所以, 利用式 (8.4) 求 h_{c1} 时, 式中的 E_0 应当用 E'_0 代替。因此, d 与 h_{c1}'' 之间是复杂的隐函数关系。故求解消力池深度 d 时, 一般需用试算法或图解法。具体的计算步骤见例 8.1。

在式 (8.9) 中略去 Δz , 并用护坦降低前收缩断面水深的共轭水深 h_c'' 代替 h_{c1}'' 。可得到粗略估算池深的近似公式:

$$d = \sigma_j h_c'' - h_1 \quad (8.11)$$

(2) 消力池长度 L_k 的计算

消力池的长度必须足以保证水跃不越出池外, 所以消力池的长度可以从水跃长度出发来考虑。但消力池内的水跃受到消力池末端的垂直壁面产生的一个反向作用力, 减小了水跃长度。所以, 消力池内的水跃长度仅为平底渠道中自由水跃长度的 70% ~ 80%。

由此可得，消力池长度为

$$L_k = (0.7 \sim 0.8)L_j \quad (8.12)$$

式中， L_j 为平底渠道中的自由水跃长度。

(3) 消力池设计流量的选择

上面所讨论的池深 d 及池长 L_k 的计算，都是针对一个给定的流量及相应的下游水深 h_1 ，但消力池建成后，必须在不同的流量下工作。为使所设计的消力池在不同流量时都能保证池中均形成淹没水跃，必须选择一个设计消力池尺寸的设计流量。

从简化公式 (8.11) 可以看出，池深 d 是随 $(h_c'' - h_1)$ 增大而增加。所以，可以认为，当 $(h_c'' - h_1)$ 为最大时的流量即为池深的设计流量。据此求出的池深 d ，是各种流量下所需消力池深度的最大值。实践证明，池深 d 的设计流量并不一定是建筑物所通过的最大流量。

实际计算时，应在给定的流量范围内，对不同的流量计算 h_c'' 及 h_c （即护坦降低前，坝趾断面的收缩水深及其跃后水深）。在直角坐标上绘出 $h_c'' = \varphi(Q)$ 的关系曲线；同时，将已知的 $h_1 = f(Q)$ 的关系曲线^①也绘入同一坐标上（图 8.11）。从该图中找出 $(h_c'' - h_1)$ 为最大值时的相应流量，即为消力池深 d 的设计流量。

因为消力池的长度决定于水跃长度 L_j 。一般说来，水跃长度系随流量的增加而增大。所以，消力池长度的设计流量应为建筑物通过的最大流量。

例 8.1 某溢流坝为 WES 剖面，坝顶部设闸门控制流量（图 8.10）。今保持坝顶水头 $H = 3.2 \text{ m}$ ，调节闸门开度，使单宽流量 q 的变化范围为 $(3 \sim 12) \text{ m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})$ ，相应的下游水深 h_1 可由图 8.11 查得。已知坝高 P_1 及 P_2 均为 10 m 。试判别坝下游水跃的衔接形式；若需设置消力池时，试计算降低护坦式的消力池深度及长度。

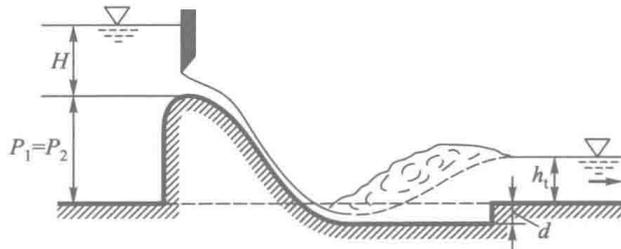


图 8.10

^① $h_1 = f(Q)$ 关系曲线，即下游水深 - 流量关系曲线。一般从水文测验中得到。

解：(1) 判别坝下游水跃的衔接形式

因为 $P_1 = 10 \text{ m} > 1.33H = 4.3 \text{ m}$ ，故可不计行近流速，即令 $H_0 = H = 3.2 \text{ m}$ 。

则 $E_0 = P_2 + H = (10 + 3.2) \text{ m} = 13.2 \text{ m}$ 。

由表 8.1 可知，对图 8.10 所示的溢流坝，可取流速系数 $\varphi = 0.90$ 。

当 $q = 3 \text{ m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})$ 时，可求得

$$h_K = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{(3 \text{ m}^2/\text{s})^2}{9.8 \text{ m/s}^2}} = 0.972 \text{ m}$$

设 $h_{c0} = 0.46h_K = 0.46 \times 0.972 \text{ m} = 0.447 \text{ m}$ ，代入公式 (8.5)，迭代计算：

$$h_{c1} = \frac{q}{\varphi \sqrt{2g(E_0 - h_{c1})}} = \frac{3}{0.9 \times \sqrt{19.6 \times (13.2 - 0.447)}} \text{ m} = 0.211 \text{ m}$$

$$h_{c2} = \frac{3}{0.9 \times \sqrt{19.6 \times (13.2 - 0.211)}} \text{ m} = 0.209 \text{ m}$$

$$h_{c3} = \frac{3}{0.9 \times \sqrt{19.6 \times (13.2 - 0.209)}} \text{ m} = 0.209 \text{ m}$$

可以看出，仅需迭代三次，计算收缩断面水深相邻两次计算值相等，所以，收缩断面水深 $h_c = 0.209 \text{ m}$ 。由矩形水平明渠中水跃公式 (6.85) 可知 h_c 的共轭水深 h_c'' 为

$$h_c'' = \frac{h_c}{2} \left(\sqrt{1 + 8 \frac{q^2}{gh_c^3}} - 1 \right) = \frac{0.209 \text{ m}}{2} \times \left(\sqrt{1 + 8 \times \frac{3^2}{9.8 \times 0.209^3}} - 1 \right) = 2.86 \text{ m}$$

同理，可算得 $q = 6 \text{ m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})$ 、 $9 \text{ m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})$ 、 $12 \text{ m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})$ 时，相应的 h_c'' (3.96 m、4.77 m、5.44 m)。

将 h_c'' 及 q 的对应数值绘在图 8.11 中，得 $h_c'' = \varphi(q)$ 曲线。

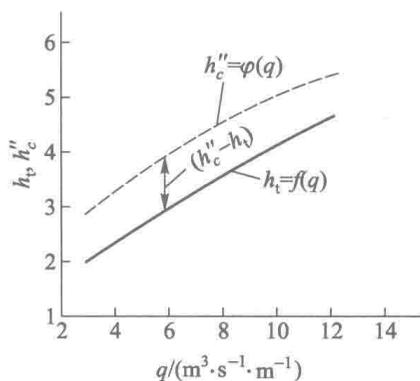


图 8.11

从图 8.11 可以看出，在所讨论的流量范围内， h_c'' 均大于 h_c ，故下游产生

远驱式水跃衔接。为使下游产生淹没水跃衔接，现拟设计一降低护坦高程的消力池。

(2) 消力池深度 d 的计算

根据图 8.11 的 $h_c'' = \varphi(q)$ 曲线与 $h_t = f(q)$ 曲线，不难求出 $(h_c'' - h_t)$ 最大时 $q = 6 \text{ m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})$ 。故消力池深度的设计流量为

$$q_d = 6 \text{ m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})$$

当 $q = 6 \text{ m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})$ 时， $h_K = 1.54 \text{ m}$ ， $h_c = 0.42 \text{ m}$ ， $h_c'' = 3.96 \text{ m}$ ， $h_t = 3.05 \text{ m}$ 。

首先接近似公式 (8.11) 初估池深的数值，即

$$d = \sigma_j h_c'' - h_t = 1.05 \times 3.96 \text{ m} - 3.05 \text{ m} = 1.11 \text{ m}$$

设 $d = 1.0 \text{ m}$ ，于是

$$E'_0 = E_0 + d = (13.2 + 1.0) \text{ m} = 14.2 \text{ m}$$

由式 (8.5) 和水跃方程式 (6.85) 可以求得

$$h_{c1}'' = 4.02 \text{ m}$$

再按式 (8.10) 计算 Δz (取消力池流速系数 $\varphi' = 0.95$)

$$\begin{aligned} \Delta z &= \frac{q^2}{2g} \left[\frac{1}{(\varphi' h_t)^2} - \frac{1}{(\sigma_j h_{c1}'')^2} \right] \\ &= \frac{(6 \text{ m}^2/\text{s})^2}{2 \times 9.8 \text{ m/s}^2} \left[\frac{1}{(0.95 \times 3.05 \text{ m})^2} - \frac{1}{(1.05 \times 4.02 \text{ m})^2} \right] \\ &= 0.12 \text{ m} \end{aligned}$$

代入式 (8.9) 计算池深 d ：

$$d = \sigma_j h_{c1}'' - (h_t + \Delta z) = 1.05 \times 4.02 \text{ m} - 3.05 \text{ m} - 0.12 \text{ m} = 1.05 \text{ m}$$

大于前设的 $d = 1.0 \text{ m}$ 。

又设 $d = 1.10 \text{ m}$ ，求得相应的各值为

$$E'_0 = 14.3 \text{ m}, h_{c1}'' = 4.06 \text{ m}$$

则

$$\begin{aligned} \Delta z &= \frac{(6 \text{ m}^2/\text{s})^2}{2 \times 9.8 \text{ m/s}^2} \left[\frac{1}{(0.95 \times 3.05 \text{ m})^2} - \frac{1}{(1.05 \times 4.06 \text{ m})^2} \right] = 0.12 \text{ m} \\ d &= 1.05 \times 4.06 \text{ m} - 3.05 \text{ m} - 0.12 \text{ m} = 1.10 \text{ m} \end{aligned}$$

与原假设符合，故所求池深 $d = 1.10 \text{ m}$ 。

(3) 消力池长度 L_K 的计算

池长的设计流量为最大流量，即 $q_d = q_{\max} = 12 \text{ m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})$ 。

相应于 $q = 12 \text{ m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})$ 时，由式 (8.5) 和水跃方程式 (6.85) 得

$$h_{c1} = 0.82 \text{ m}$$

$$h_{cl}'' = 5.59 \text{ m}$$

池长按式 (8.12) 计算:

$$L_K = (0.7 \sim 0.8) L_j$$

其中, 水跃长度为

$$\begin{aligned} L_j &= 10.8 h_{cl} (Fr_1 - 1)^{0.93} \\ &= 10.8 \times 0.82 \text{ m} \times \left(\sqrt{\frac{(12 \text{ m}^2/\text{s})^2}{9.8 \text{ m/s}^2 \times (0.82 \text{ m})^3} - 1} \right)^{0.93} = 33.4 \text{ m} \end{aligned}$$

故得消力池长度为

$$L_K = (0.7 \sim 0.8) \times 33.4 \text{ m} = (23.4 \sim 26.7) \text{ m}$$

取 $L_K = 25 \text{ m}$ 。

2. 在护坦末端修建消能坎所形成的消力池

当河床不易开挖或开挖太深造价不经济时, 可在护坦末端修建消能坎, 壅高坎前水位形成消力池, 以保证在建筑物下游产生淹没程度不大的水跃。这种消能坎式消力池的计算内容, 包括确定坎高 c 及池长 L_K 。池长 L_K 与降低护坦高程的消力池相同。下面介绍坎高 c 的计算方法。

为使建筑物下游产生淹没程度不大的水跃, 坎前的水深 h_T 应为

$$h_T = \sigma_j h_{cl}''$$

又从图 8.12 可以看出

$$h_T = c + H_1$$

式中: c 为坎高; H_1 为坎顶水头。

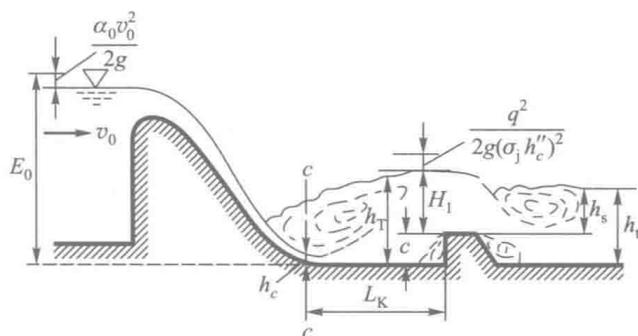


图 8.12

联立求解上面两式, 可得计算坎高的公式为

$$c = \sigma_j h_{cl}'' - H_1 \quad (8.13)$$

消能坎一般作成折线形或曲线形实用堰。故坎顶水头可用堰流公式计算:

$$H_1 = H_{10} - \frac{q^2}{2g(\sigma_j h_c'')^2} = \left(\frac{q}{\sigma_s m_1 \sqrt{2g}} \right)^{2/3} - \frac{q^2}{2g(\sigma_j h_c'')^2} \quad (8.14)$$

式中： m_1 为消能坎的流量系数，与坎的形状及池内水流状态有关，目前尚无系统资料，初步计算时可取 0.42； σ_s 为消能坎的淹没系数， $\sigma_s = f\left(\frac{h_1 - c}{H_{10}}\right) = f\left(\frac{h_s}{H_{10}}\right)$ 。

因为消能坎前有水跃存在，与一般实用堰前的水流状态不同，故淹没系数及淹没条件也应有所不同。实际表明：当 $h_s/H_{10} \leq 0.45$ 时，消能坎为非淹没堰， $\sigma_s = 1$ ；当 $h_s/H_{10} > 0.45$ 时为淹没堰， $\sigma_s < 1$ 。表 8.2 的数值，可供计算时参考使用。

表 8.2 消能坎的淹没系数

h_s/H_{10}	≤ 0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.72	0.74	0.76	0.78
σ_s	1.00	0.990	0.985	0.975	0.960	0.940	0.930	0.915	0.900	0.885
h_s/H_{10}	0.80	0.82	0.84	0.86	0.88	0.90	0.92	0.95	1.00	
σ_s	0.865	0.845	0.815	0.785	0.750	0.710	0.651	0.535	0.000	

应用式 (8.13) 及式 (8.14) 可以计算消能坎的高度。但计算也必须按试算法进行。因为式 (8.14) 中消能坎的淹没系数 σ_s 与未知的坎高 c 有关。

最后，必须注意，如果消能坎为非淹没堰，则应校核坎后的水流衔接情况（即把消能坎当作溢流堰，计算坎后的收缩水深及其共轭水深，并与下游水深 h_1 比较）。当坎后为远驱式水跃衔接时，必须设置第二道消能坎或采取其他消能措施。消能坎的流速系数 φ 一般可取 0.90 ~ 0.95。

当所设计的建筑物必须在 $q_{\min} \sim q_{\max}$ 之间运用时，应在该流量范围内选定几个 q 值，分别计算坎高 c ，然后取 c 的最大值作设计值。

例 8.2 某溢流坝，在单宽流量 q 为 $6 \text{ m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})$ 时，已求得坝趾收缩断面水深及其共轭水深为： h_c 为 0.42 m， h_c'' 为 3.96 m。若下游水深 h_1 为 3.50 m，试设计一消能坎式消力池。

解：因为 $h_c'' = 3.96 \text{ m} > h_1 = 3.50 \text{ m}$ ，故坝下游产生远驱式水跃衔接，需要修建消力池。

首先计算消能坎高度 c 。

由于坎高的计算与坎顶流态有关，故先假设消能坎为非淹没堰，即令 $\sigma_s = 1$ 。取消能坎的流量系数 $m_1 = 0.42$ 。则消能坎顶全水头 H_{10} 为

$$H_{10} = \left(\frac{q}{\sigma_s m_1 \sqrt{2g}} \right)^{2/3} = \left(\frac{6 \text{ m}^2/\text{s}}{1 \times 0.42 \times \sqrt{2 \times 9.8 \text{ m/s}^2}} \right)^{2/3} = 2.18 \text{ m}$$

于是

$$H_1 = H_{10} - \frac{q^2}{2g(\sigma_j h_c'')^2} = 2.18 \text{ m} - \frac{(6 \text{ m}^2/\text{s})^2}{2 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times (1.05 \times 3.96 \text{ m})^2} = 2.07 \text{ m}$$

将 H_1 代入式 (8.13) 可得坎高 c :

$$c = \sigma_j h_c'' - H_1 = 1.05 \times 3.96 \text{ m} - 2.07 \text{ m} = 2.09 \text{ m}$$

现在来校核消能坎后的水流衔接形式。以未修建消能坎底时河床高程为参考断面, 坎前断面的总能头 E_{10} 为

$$E_{10} = c + H_{10} = 2.09 \text{ m} + 2.18 \text{ m} = 4.27 \text{ m}$$

$$h_k = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{(6 \text{ m}^2/\text{s})^2}{9.8 \text{ m/s}^2}} = 1.54 \text{ m}$$

取消能坎的流速系数 $\varphi = 0.90$ 。由式 (8.5) 得消能坎后断面水深的跃后水深为

$$h_{cl}'' = 2.62 \text{ m}$$

因为

$$h_{cl}'' = 2.62 \text{ m} < h_1 = 3.5 \text{ m}$$

故坎后为淹没式水跃衔接。又

$$\frac{h_s}{H_{10}} = \frac{h_1 - c}{H_{10}} = \frac{3.5 \text{ m} - 2.09 \text{ m}}{2.18 \text{ m}} = 0.65 > 0.45$$

所以消能坎后形成淹没堰流, $\sigma_s < 1$ 。与原假设不符, 故消能坎高度必须按淹没堰计算。

设坎高 $c = 2.0 \text{ m}$ 。

在所设坎高情况下, 为保证池内产生淹没程度不大的水跃, 应有的坎顶水头

$$H_1 = \sigma_j h_c'' - c = 1.05 \times 3.96 \text{ m} - 2.00 \text{ m} = 2.16 \text{ m}$$

相应的坎顶全水头

$$H_{10} = H_1 + \frac{q^2}{2g(\sigma_j h_c'')^2} = 2.16 \text{ m} + \frac{(6 \text{ m}^2/\text{s})^2}{2 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times (1.05 \times 3.96 \text{ m})^2} = 2.27 \text{ m}$$

下面来校核在上述水头下消能坎作为一折线形堰, 能否通过已知的流量 $q = 6 \text{ m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})$ 。因为

$$\frac{h_s}{H_{10}} = \frac{3.5 \text{ m} - 2.0 \text{ m}}{2.27 \text{ m}} = 0.66 > 0.45$$

由表 8.2 查得 $\sigma_s = 0.956$, 则

$$q = \sigma_s m_1 \sqrt{2g} H_{10}^{3/2} = 0.956 \times 0.42 \times \sqrt{2 \times 9.8 \text{ m/s}^2} \times (2.27 \text{ m})^{3/2} \\ = 6.07 \text{ m}^3 / (\text{s} \cdot \text{m})$$

所求得消能坎的过水能力大于已知流量, 故应另外假设坎高 c 值。再设坎高 $c = 2.02 \text{ m}$, 则

$$H_1 = \sigma_j h_c'' - c = 1.05 \times 3.96 \text{ m} - 2.02 \text{ m} = 2.14 \text{ m} \\ H_{10} = H_1 + \frac{q^2}{2g(\sigma_j h_c'')^2} = 2.14 \text{ m} + \frac{(6 \text{ m}^2/\text{s})^2}{2 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times (1.05 \times 3.96 \text{ m})^2} = 2.25 \text{ m} \\ \frac{h_s}{H_{10}} = \frac{3.5 \text{ m} - 2.02 \text{ m}}{2.25 \text{ m}} = 0.66$$

由表 8.2 查得 $\sigma_s = 0.956$, 此时, 消能坎的过水能力为

$$q = 0.956 \times 0.42 \times \sqrt{2 \times 9.8 \text{ m/s}^2} \times (2.25 \text{ m})^{3/2} = 6.0 \text{ m}^3 / (\text{s} \cdot \text{m})$$

求得消能坎的过水能力与已知流量符合, 所以消能坎高度 $c = 2.02 \text{ m}$ 。

消能坎式消力池的长度与降低护坦式消力池相同, 即用式 (8.12) 计算:

$$L_K = (0.7 \sim 0.8) L_j$$

而

$$L_j = 10.8 h_c \left(\sqrt{\frac{q^2}{gh_c^3}} - 1 \right)^{0.93} \\ = 10.8 \times 0.42 \text{ m} \times \left(\sqrt{\frac{(6 \text{ m}^2/\text{s})^2}{9.8 \text{ m/s}^2 \times (0.42 \text{ m}^3)}} - 1 \right)^{0.93} = 24.2 \text{ m}$$

故得 $L_K = (0.7 \sim 0.8) \times 24.2 \text{ m} = (17.0 \sim 19.4) \text{ m}$, 取 $L_K = 18 \text{ m}$ 。

有时, 单纯降低护坦高程, 开挖量太大; 单纯建造消能坎, 坎又太高, 坎后容易形成远驱式水跃衔接。在这种情况下, 可考虑适当降低护坦高程, 同时修建不太高的消能坎。这种形式的消力池, 叫作综合式消力池 (图 8.13)。综合式消力池的水力计算, 一般是先按坎后产生临界水跃衔接的条件求得一坎高 c 。然后, 采用稍许降低的坎高值, 坎后即可形成淹没水跃。再根据这个坎高值和已求得的坎前水头 H_1 , 即可算出保证池中产生淹没水跃时所需的池深。详细的计算步骤可参考有关的水力学书籍。

3. 辅助消能工

为了改善消力池的消能效果, 常在池中设置辅助消能工, 如趾墩、消能墩及尾槛等 (图 8.14)。趾墩及消能墩均可分散入池水流, 加强水流剪切运动, 以提高消能效率; 消能墩还对池中水流产生反向作用力, 从而可减小消力池的深度及长度; 尾槛的作用则是改变出池水流的流速分布, 以减轻对下游的冲刷。

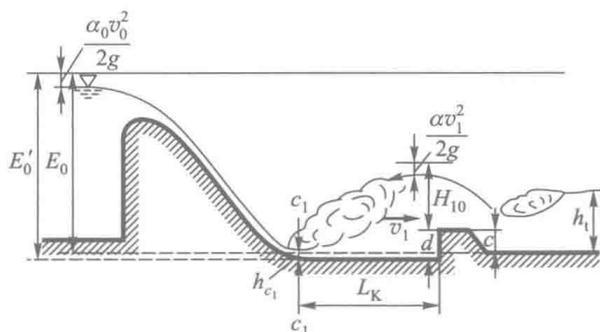


图 8.13

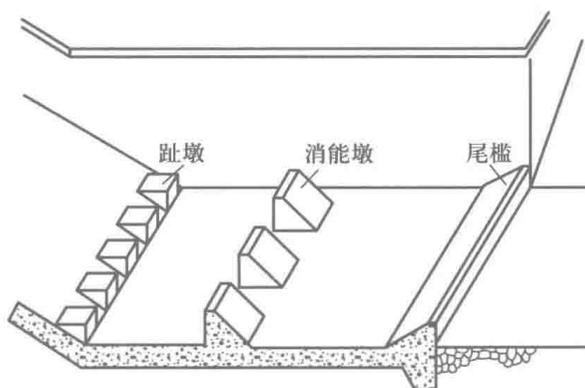


图 8.14

但当流速较高，例如坝趾附近流速 $v_c > (16 \sim 18) \text{m/s}$ 时，消能墩容易发生空蚀；同时，有漂浮物（如漂木，漂冰等）及推移质的河道，辅助消能工常遭撞击、磨蚀破坏。故对于重要工程，消能方案应通过水工模型试验确定。美国垦务局曾通过试验，提出了五种设有辅助消能工的消力池形式。它们分别适用于跃前断面弗劳德数为不同大小的各类泄水建筑物。为确定上述消力池的深度、长度及辅助消能工的尺寸，文中还提供了一些计算图形及公式。有兴趣的读者可参阅原著。

4. 护坦下游的河床保护

由 6.4 节可知，在水跃的跃后段内，底部流速较大，湍动强度也比均匀湍流为高，对河床仍具有较大的冲刷能力。所以，除河床岩质较好，足以抵抗冲刷者外，一般在护坦后还需要设置较为简易的河床保护段，称为海漫。海漫常用粗石料或表面凸凹不平的混凝土块铺砌而成，能够加速跃后段水流湍动的衰减过程，故海漫长度 L_p 可短于跃后段长度 L_{jj} ，初步按下式估算：

$$L_p = (0.65 \sim 0.80) L_{jj}$$

因 $L_{jj} = (2.5 \sim 3.0)L_j$, 故

$$L_p = (1.63 \sim 2.40)L_j \quad (8.15)$$

式中: L_j 为水跃长度。

此外, 离开海漫的水流还具有一定的冲刷能力, 往往在海漫末端形成冲刷坑。为保护海漫的基础不遭破坏, 海漫后常作成比冲刷坑略深的齿槽或防冲槽(图 8.15)。冲刷坑的计算可参阅有关文献。

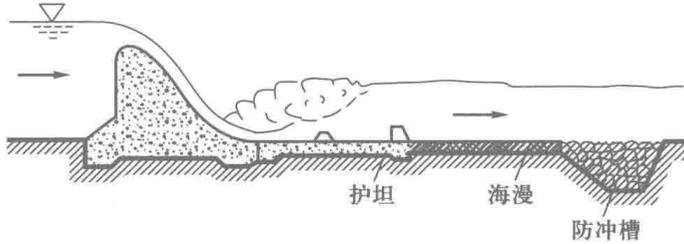


图 8.15

例 8.3 某矩形渠道经过天然坡度陡峻地段, 为减少挖填方工程量, 拟建造三级跌水(图 8.16)。已知: 流量 $Q = 10 \text{ m}^3/\text{s}$, 底宽 $b = 4 \text{ m}$, 各级跌水渠底落差相同, 即 $s_1 = s_2 = s_3 = 3 \text{ m}$, 下游渠道水深为 1.33 m , 跌水进口为无坎宽顶堰, 流量系数 m 为 0.365 。试确定各级跌水的消力池尺寸。

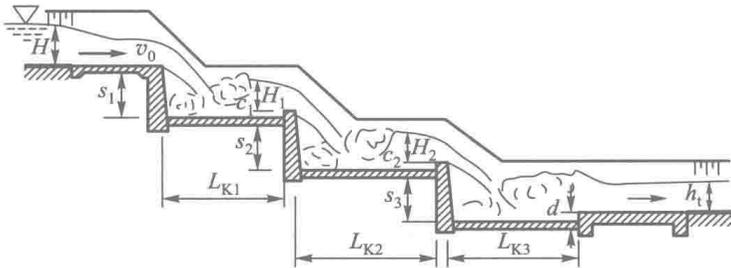


图 8.16

解: 水流自跌墙上游跌入下游渠段时动能较大, 故各级跌水平台必须做成消力池, 以免冲刷渠底。消力池的深度及长度应足以容纳跌落水流, 并使之在池内产生淹没水跃。消力池深度的计算方法如本节前面所述; 但消力池的长度 L_K 则应包括水流跌落的射程 L_0 , 即池长

$$L_K = L_0 + 0.8L_j \quad (8.16)$$

按质点抛射运动考虑, 取坐标如图 8.17 所示, 可求得 $A-A$ 断面中心点的射程为

$$L_0 = \frac{2mH_0^{3/2}}{h_A} \sqrt{P_2 + \frac{h_A}{2}} \quad (8.17)$$

式中： m 为堰坎的流量系数； P_2 为下游坎高； h_A 为堰坎顶部 $A-A$ 断面的水深，可由下面的方法确定：

当坎为宽顶堰（图 8.17a）时， $h_A \approx 0.5H_0$ 。

当坎为实用堰（图 8.17b）时， $h_A \approx 0.6H_0$ 。

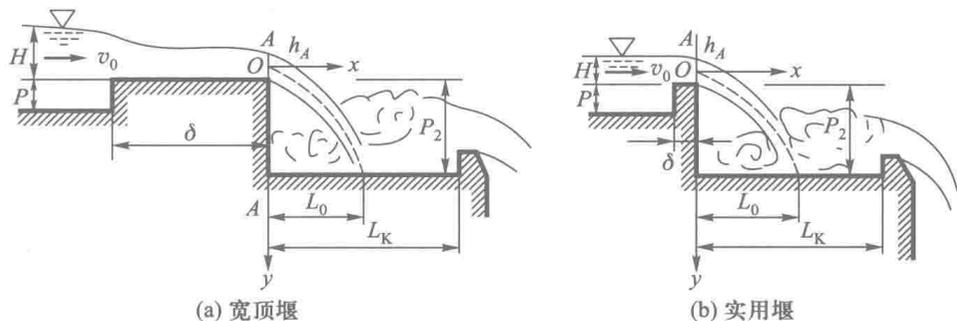


图 8.17

将 h_A 值代入式 (8.17)，可求得射程 L_0 的计算公式为
坎为宽顶堰时

$$L_0 = 4m \sqrt{(P_2 + 0.25H_0)H_0} \quad (8.18)$$

坎为实用堰时

$$L_0 = 3.34m \sqrt{(P_2 + 0.3H_0)H_0} \quad (8.19)$$

求得 L_0 后，即可代入式 (8.16) 计算消力池长度 L_K 。

(1) 第一级跌水计算

$$\text{单宽流量 } q = \frac{Q}{b} = \frac{10 \text{ m}^3/\text{s}}{4 \text{ m}} = 2.5 \text{ m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})$$

$$\text{临界水深 } h_K = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{(2.5 \text{ m}^2/\text{s})^2}{9.8 \text{ m/s}^2}} = 0.86 \text{ m}$$

跌水进口为无坎宽顶堰，流量系数 $m = 0.365$ ，故跌水进口水头为

$$H_0 = \left(\frac{q}{m \sqrt{2g}} \right)^{2/3} = \left(\frac{2.5 \text{ m}^2/\text{s}}{0.365 \times \sqrt{2 \times 9.8 \text{ m/s}^2}} \right)^{2/3} = 1.34 \text{ m}$$

从第一级跌水消力池底算起的上游总水头为

$$E_0 = s_1 + H_0 = 3 \text{ m} + 1.34 \text{ m} = 4.34 \text{ m}$$

对第一级跌水，取流速系数 $\varphi_1 = 0.90$ 。由式 (8.5) 和水跃方程式 (6.85) 得收缩水深及其共轭水深为

$$h_{c1} = 0.31 \text{ m}$$

$$h''_{c1} = 1.87 \text{ m}$$

今在第一级跌水平台上设置消能坎式消力池，以保证平台上产生淹没水跃。所需消能坎高为

$$c_1 = 1.05h''_{c1} - H_1$$

消能坎顶水头 H_1 由下式计算：

$$H_1 = H_{01} - \frac{q^2}{2g(1.05h''_{c1})^2}$$

而

$$H_{01} = \left(\frac{q}{m_1 \sqrt{2g}} \right)^{2/3} = \left(\frac{2.5 \text{ m}^2/\text{s}}{0.42 \times \sqrt{2 \times 9.8 \text{ m/s}^2}} \right)^{2/3} = 1.22 \text{ m}$$

式中： m_1 为消能坎的流量系数，取 0.42。于是

$$H_1 = 1.22 \text{ m} - \frac{(2.5 \text{ m}^2/\text{s})^2}{2 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times (1.05 \times 1.87 \text{ m})^2} = 1.14 \text{ m}$$

则得

$$c_1 = 1.05 \times 1.87 \text{ m} - 1.14 \text{ m} = 0.82 \text{ m}$$

第一级跌水下游消力池长度：

$$L_{K1} = L_{01} + 0.8L_{j1}$$

L_{01} 由式 (8.18) 计算，此时 $P_2 = s_1 = 3 \text{ m}$ ，

$$L_{01} = 4m \sqrt{(P_2 + 0.25H_0)H_0} = 4 \times 0.365 \times \sqrt{(3 \text{ m} + 0.25 \times 1.22 \text{ m}) \times 1.22 \text{ m}} = 2.93 \text{ m}$$

L_j 由下式计算：

$$L_j = 10.8h_{c1}(Fr_1 - 1)^{0.93} \\ = 10.8 \times 0.31 \text{ m} \times \left(\sqrt{\frac{(2.5 \text{ m}^2/\text{s})^2}{9.8 \text{ m/s}^2 \times (0.31 \text{ m})^3}} - 1 \right)^{0.93} = 11.10 \text{ m}$$

则第一级跌水下游消力池长度为

$$L_{K1} = 2.93 \text{ m} + 0.8 \times 11.10 \text{ m} \approx 12 \text{ m}$$

(2) 第二级跌水计算

$$E_0 = s_2 + c_1 + H_{01} = 3 \text{ m} + 0.82 \text{ m} + 1.22 \text{ m} = 5.04 \text{ m}$$

第二级跌水上游的消能坎，可视为折线形实用堰，故取 $\varphi_2 = 0.85$ 。由式 (8.5) 和水跃方程式 (6.85) 得收缩水深及跃后水深为

$$h_{c2} = 0.30 \text{ m}$$

$$h''_{c2} = 1.89 \text{ m}$$

第二级跌水下游消能坎顶水头 H_{02} 应与第一级跌水下游坎顶水头相同, 即

$$H_{02} = H_{01} = 1.22 \text{ m}$$

则

$$H_2 = H_{02} - \frac{q^2}{2g(1.05h''_{c2})^2} = 1.22 \text{ m} - \frac{(2.5 \text{ m}^2/\text{s})^2}{2 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times (1.05 \times 1.89 \text{ m})^2} = 1.14 \text{ m}$$

第二级跌水消能坎高度为

$$c_2 = 1.05h''_{c2} - H_2 = 1.05 \times 1.89 \text{ m} - 1.14 \text{ m} = 0.85 \text{ m}$$

现在来求第二级跌水下游消力池的长度。其中, 射程 L_{02} 应采用式 (8.19) 计算, 即

$$L_{02} = 3.34m_1 \sqrt{(P_2 + 0.3H_{01})H_{01}}$$

式中: $m_1 = 0.42$, $P_2 = s_1 + c_1 = 3 \text{ m} + 0.82 \text{ m} = 3.82 \text{ m}$, 于是

$$L_{02} = 3.34 \times 0.42 \times \sqrt{(3.82 \text{ m} + 0.3 \times 1.22 \text{ m}) \times 1.22 \text{ m}} = 3.17 \text{ m}$$

水跃长度为

$$L_j = 10.8 \times 0.3 \text{ m} \times \left(\sqrt{\frac{(2.5 \text{ m}^2/\text{s})^2}{9.8 \text{ m/s}^2 \times (0.3 \text{ m})^3} - 1} \right)^{0.93} = 11.2 \text{ m}$$

则得第二级跌水下游消力池长度为

$$L_{k2} = 3.17 \text{ m} + 0.8 \times 11.2 \text{ m} = 12.13 \text{ m}$$

可取消力池长度为 12 m。

(3) 第三级跌水计算

$$E_0 = s_3 + c_2 + H_{02} = 3 \text{ m} + 0.85 \text{ m} + 1.22 \text{ m} = 5.07 \text{ m}$$

当 $\varphi_3 = 0.85$ 时, 由式 (8.5) 和水跃方程式 (6.85) 得收缩水深及跃后水深为

$$h_{c3} = 0.30 \text{ m}$$

$$h''_{c3} = 1.90 \text{ m}$$

第三级跌水下游拟作成降低护坦式消力池, 先按下式估算所需的消力池深:

$$d = 1.05h''_c - h_1 = 1.05 \times 1.90 \text{ m} - 1.33 \text{ m} = 0.67 \text{ m}$$

设消力池深 0.62 m, 则有

$$E'_0 = E_0 + d = 5.07 \text{ m} + 0.62 \text{ m} = 5.69 \text{ m}$$

当 $\varphi_3 = 0.85$ 时, 计算得

$$h_c = 0.28 \text{ m}$$

$$h''_c = 1.98 \text{ m}$$

池深 d 按下式计算:

$$d = 1.05h''_c - h_1 - \Delta z$$

而

$$\Delta z = \frac{q^2}{2g} \left[\frac{1}{(\varphi' h_t)^2} - \frac{1}{(\sigma_j h_c'')^2} \right]$$

消力池出口流速系数 φ' 取 0.95, 所以

$$\Delta z = \frac{(2.5 \text{ m}^2/\text{s})^2}{2 \times 9.8 \text{ m/s}^2} \left[\frac{1}{(0.95 \times 1.33 \text{ m})^2} - \frac{1}{(1.05 \times 1.98 \text{ m})^2} \right] = 0.13 \text{ m}$$

则消力池深度为

$$d = 1.05 \times 1.98 \text{ m} - 1.33 \text{ m} - 0.13 \text{ m} = 0.62 \text{ m}$$

水流射程为

$$L_{03} = 3.34 \times 0.42 \times \sqrt{(3 \text{ m} + 0.85 \text{ m} + 0.62 \text{ m} + 0.3 \times 1.22 \text{ m}) \times 1.22 \text{ m}} = 3.4 \text{ m}$$

水跃长度为

$$L_j = 10.8 \times 0.28 \text{ m} \times \left(\sqrt{\frac{(2.5 \text{ m}^2/\text{s})^2}{9.8 \text{ m/s}^2 \times (0.28 \text{ m})^3} - 1} \right)^{0.93} = 11.97 \text{ m}$$

则所需消力池长度为

$$L_{K3} = 3.4 \text{ m} + 0.8 \times 11.97 \text{ m} = 13 \text{ m}$$

8.2 挑流消能的水力计算

所谓挑流消能,就是在泄水建筑物的下游端修建一挑流坎,利用下泄水流的巨大动能,将水流挑入空中,然后降落在远离建筑物的下游消能。这是中高水头泄水建筑物采用较多的一种消能方式。挑入空中的水舌,由于失去固体边界的约束,在湍动及空气阻力的作用下,发生掺气及分散,失去一部分动能。其余大部分动能则在水舌落入下游后被消除。因为水舌落入下游时,与下游水体发生碰撞,水舌继续扩散,流速逐渐减小,入水点附近则形成两个巨大的旋滚,主流与旋滚之间发生强烈的动量交换及剪切作用;潜入河底的主流则冲刷河床而成冲刷坑。下游形成冲刷坑并不一定会危及建筑物的安全,只要冲刷坑与建筑物之间有足够长的距离,建筑物的安全就能得到保证。挑流消能的优点是可以节约下游护坦,构造简单,便于维修;缺点是雾气大,尾水波动大。挑流消能水力计算的主要任务是:按已知的水力条件选定适宜的挑坎型式,确定挑坎的高程、反弧半径和挑射角,计算挑流射程和下游冲刷坑深度。

8.2.1 挑流射程的计算

挑流射程是指挑坎末端至冲刷坑最深点间的水平距离。由图 8.18 可以看出

上游断面 0-0 及断面 1-1 列能量方程, 整理后得

$$v_1 = \varphi \sqrt{2g(S_1 - h_1 \cos \theta)} \quad (8.23)$$

将式 (8.23) 代入式 (8.22), 得

$$L_0 = \varphi^2 \sin(2\theta) (S_1 - h_1 \cos \theta) \left[1 + \sqrt{1 + \frac{a - h_1 + \frac{h_1}{2} \cos \theta}{\varphi^2 \sin^2 \theta (S_1 - h_1 \cos \theta)}} \right] \quad (8.24)$$

对于高坝 $S_1 \gg h_1$, 略去 h_1 后, 式 (8.23) 及式 (8.24) 变为

$$v_1 = \varphi \sqrt{2gS_1} \quad (8.25)$$

$$L_0 = \varphi^2 \sin(2\theta) S_1 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{a - h_1}{\varphi^2 \sin^2 \theta S_1}} \right) \quad (8.26)$$

式中: S_1 为上游水面至挑坎顶部的高差; φ 为坝面流速系数, 它与坝上游至 1-1 断面间能量损失有关。

应用式 (8.24) 或式 (8.26) 即可计算 L_0 。但在上述推导中, 忽略了水舌在空中分散、掺气及空气阻力的影响。一些资料表明: 当 $v_1 > 15 \text{ m/s}$ 时, 上述影响已经不能忽略, 按上述公式计算的射程, 与实际射程相比有明显的偏差。为此, 工程上采取的办法是应用根据原型观测资料整理得到的经验公式确定 φ 值。因为整理原型观测资料时, 一般是由实测 L_0 代入式 (8.24) 求 φ , 由此得出的 φ 值包含了分散、掺气及空气阻力的影响。但由于影响射程因素较多, 工程具体情况差异很大, 上述处理方法仍只能作为初步估算之用。

长江流域规划办公室整理了一些原型观测及模型试验资料, 得出计算流速系数 φ 的经验公式为

$$\varphi = \sqrt[3]{1 - \frac{0.55}{K_E^{0.5}}} \quad (8.27)$$

式中: $K_E = q / (g^{0.5} S_1^{1.5})$ 称为流能比; q 为单宽流量。

式 (8.27) 用于 $K_E = 0.004 \sim 0.15$ 范围内。当 $K_E > 0.15$ 时, 取 $\varphi = 0.95$ 。

原水电部东北勘测设计院科研所整理了国内 9 个工程的原型观测资料, 得出

$$\varphi = 1 - \frac{0.0077}{\left(\frac{q^{2/3}}{S_0}\right)^{1.15}} \quad (8.28)$$

式中: q 为单宽流量, 单位为 $\text{m}^3 / (\text{s} \cdot \text{m})$; $S_0 = \sqrt{P^2 + B_0^2}$, P 为挑坎顶部以上的坝高, 单位为 m , B_0 为溢流面的水平投影长度, 单位为 m 。

必须指出, 式 (8.28) 量纲是不和谐的。它的应用范围是: $q^{2/3} / S_0 =$

0.025 ~ 0.25; 当 $q^{2/3}/S_0 > 0.25$ 时, $\varphi = 0.95$ 。

2. 水下射程 L_1 的计算

水舌自 2-2 断面进入下游水体后, 属于射流的潜没扩散运动, 应与质点的自由抛射运动有一定区别。可以近似认为, 水舌从 2-2 断面起沿入水角方向直线前进, 则

$$L_1 = \frac{t_s + h_1}{\tan\beta} \quad (8.29)$$

其中, t_s 为冲刷坑的深度。

入水角 β 可以这样求得: 对式 (8.21) 求一阶导数, 整理后得

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\tan^2\theta + \frac{2gy}{u_1^2 \cos^2\theta}}$$

在水舌入水处: $x = L_0$, $\frac{dy}{dx} = \tan\beta$ 。将式 (8.24) 中的 L_0 代入, 整理后

变为

$$\tan\beta = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\tan^2\theta + \frac{\left(a - h_1 + \frac{h_1}{2} \cos\theta\right)}{\varphi^2 (S_1 - h_1 \cos\theta) \cos^2\theta}} \quad (8.30)$$

则得水下射程的计算公式为

$$L_1 = \frac{t_s + h_1}{\sqrt{\tan^2\theta + \frac{a - h_1 + \frac{h_1}{2} \cos\theta}{\varphi^2 (S_1 - h_1 \cos\theta) \cos^2\theta}}} \quad (8.31)$$

略去 h_1 后得

$$L_1 = \frac{t_s + h_1}{\sqrt{\tan^2\theta + \frac{a - h_1}{\varphi^2 S_1 \cos^2\theta}}}$$

将式 (8.24) 及式 (8.31) 代入式 (8.20), 即可求出挑坎末端至冲刷坑最深点间的水平距离为

$$L = L_0 + L_1$$

$$= \varphi^2 \sin 2\theta (S_1 - h_1 \cos\theta) \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\left(a - h_1 + \frac{h_1}{2} \cos\theta\right)}{\varphi^2 \sin^2\theta (S_1 - h_1 \cos\theta)}} \right] +$$

$$\frac{t_s + h_t}{\sqrt{\tan^2 \theta + \frac{\left(a - h_t + \frac{h_t}{2} \cos \theta\right)}{\varphi^2 (S_1 - h_t \cos \theta) \cos^2 \theta}}} \quad (8.32)$$

略去 h_t 后得

$$L = \varphi^2 S_1 \sin 2\theta \left(1 + \sqrt{1 + \frac{a - h_t}{\varphi^2 S_1 \sin^2 \theta}} \right) + \frac{t_s + h_t}{\sqrt{\tan^2 \theta + \frac{a - h_t}{\varphi^2 S_1 \cos^2 \theta}}} \quad (8.33)$$

8.2.2 冲刷坑深度的估算

当水舌跌入下游河道时，下游河道中的水体相当于一个垫层，与下跌水舌发生碰撞；主流则潜入下游河底，主流前后形成两个大旋滚而消除一部分能量。若潜入下游河底的水舌所具有的冲刷能力仍然大于河床的抗冲能力时，河床被冲刷，从而形成冲刷坑。随着坑深的增加，水垫的消能作用加大，水舌冲刷能力降低。直至水舌的冲刷能力与河床的抗冲能力达到平衡时，冲刷坑才趋于稳定。

显然，冲刷坑的深度，决定于水流的冲刷能力与河床的抗冲能力两个方面的因素。水舌的冲刷能力主要与单宽流量、上下游水位差、下游水深的大小及水舌在空中分散、掺气的程度和水舌的入水角有关。而河床的抗冲能力则与河床的组成、河床的地质条件有关。对于砂卵石河床，其抗冲能力与散粒体的大小、级配和单位体积的重量有关；对于岩石河床，抗冲能力主要取决于岩基节理的发育程度、地层的产状和胶结的性质等因素。

由于影响因素的多样性和地质条件的复杂性，目前，对冲刷坑的发生、发展过程及其力学特性，以及各种影响因素的估价等，研究还不充分。所以，工程上还只能依据一些经验公式来估算冲刷坑的深度。

1. 砂卵石河床

对于砂卵石河床，冲刷坑深度可用下式计算：

$$t_s = 2.4q \left(\frac{\eta}{\omega} - \frac{2.5}{v_t} \right) \frac{\sin \beta}{1 - 0.175 \cot \beta} - 0.75h_t \quad (8.34)$$

式中： t_s 为冲刷坑深度，以 m 计； h_t 为冲刷坑后的下游水深，以 m 计； η 为反映流速脉动的某一系数值，可取 1.5 ~ 2.0； $v_t = \varphi \sqrt{2gz}$ 为水舌进入下游水面的流速，以 m/s 计； z 为上下游水位差，以 m 计； $\omega = \sqrt{\frac{2(\rho_s - \rho_0)d_{90}}{1.75\rho_0}}$ 为河床颗粒的水力粗度，以 m/s 计； ρ_s 为河床颗粒的密度； ρ_0 为冲刷坑内掺气水流

的密度； d_{90} 为河床颗粒级配曲线上，粒径小于它的颗粒重量占90%的粒径，以m计； β 为水舌的入水角，可按式(8.30)计算。

2. 岩石河床

对于岩石河床，计算冲刷坑深度的经验公式为

$$t_s = k_s \cdot q^{0.5} \cdot z^{0.25} - h_t \quad (8.35)$$

式中： t_s 为冲刷坑深度，以m计； z 为上下游水位差，以m计； h_t 为冲刷坑后的下游水深，以m计； q 为单宽流量，以 $\text{m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})$ 计；对各溢流孔闸门同步开启，边墙不扩散的挑坎， q 可采用挑坎上的单宽流量；对边墙扩散的挑坎，应采用水舌落入下游水面时的单宽流量； k_s 为反应岩基特性的系数。原水电部东北勘测设计院科学研究所分析了国内13个已成工程的原型观测资料，建议将岩基按其构造情况分为I，II，III，IV类，各类岩基的特征及相应的系数 k_s 值如表8.3所示。

表 8.3 基岩构造特性及 k_s 值

岩基构造特性描述	岩基类型	k_s 值
节理很发育、裂隙很杂乱，岩石成碎块状，裂隙内部分为粘土充填。包括松软结构、松散结构和破碎带	IV	1.5 ~ 2.0
节理较发育、岩石成块状，部分裂隙为粘土充填	III	1.2 ~ 1.5
节理发育、岩石成大块状，裂隙密闭，少有充填	II	0.9 ~ 1.2
节理不发育，多为密闭状，延展不长，岩石呈巨块状	I	< 1.0

冲刷坑是否会危及建筑物的基础，这与冲刷坑深度及河床岩基节理裂隙、层面发育情况有关，应全面研究确定。一般可认为，当冲刷坑上游侧与挑坎末端的距离大于2.5~5倍冲刷坑深度时，将不影响建筑物的安全。

8.2.3 挑坎型式及尺寸的选择

常用的挑坎有连续式及差动式两种(图8.19)。连续式挑坎施工简便，比相同条件下的差动式挑坎射程远。差动式挑坎，将挑坎作成齿状，使通过挑坎水流分成上下两层，垂直方向有较大的扩散，可以减轻对河床的冲刷；但流速高时易产生空蚀。目前，采用较多的是连续式挑坎。

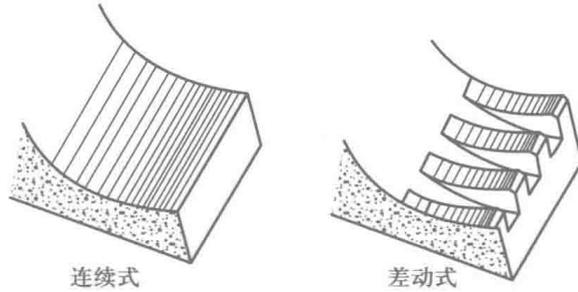


图 8.19

下面简略介绍连续式挑坎尺寸的选择。

挑坎尺寸包括挑角 θ 、反弧半径 r_0 及挑坎高程三个方面。合理的挑坎尺寸可以使同样水力条件下得到的射程最大，冲刷坑深度较浅。

1. 挑坎高程

挑坎高程愈低，出口断面流速愈大，射程愈远。同时，挑坎高程低，工程量也小，可以降低造价。但是，当下游水位较高并超过挑坎达一定程度时，水流挑不出去，达不到挑流消能的目的。所以，工程设计中常使挑坎最低高程等于或略低于下游最高尾水位。这时，由于挑流水舌将水流推向下流，因此，紧靠挑坎下游的水位仍低于挑坎高程。

2. 反弧半径 r_0

水流在挑坎反弧段内运动时所产生的离心力，将使反弧段内压强加大。反弧半径愈小，离心力愈大，挑坎内水流的压能增大，动能减小，射程也减小。因此，为保证有较好的挑流条件，反弧半径 r_0 至少应大于反弧最低点水深 h_c 的 4 倍。一般设计时，多采用 $r_0 = (6 \sim 10)h_c$ 。有的资料表明，不减小挑流射程的最小反弧半径 $r_{0\min}$ ，可用下面的经验公式计算：

$$r_{0\min} = 23 \frac{h_1}{Fr_1} \quad (8.36)$$

其中： $Fr_1 = v_1 / \sqrt{gh_1}$ ； v_1 、 h_1 为挑坎末端断面的流速及水深。

式 (8.36) 用于 $Fr_1 = 3.6 \sim 6.0$ 范围内。

3. 挑角 θ

按质点抛射运动考虑，当挑坎高程与下游水位同高时，挑角愈大 ($\theta < 45^\circ$)，射程 L_0 愈大。但挑角增大，入水角 β 也增大，水下射程 L_1 减小。同时，入水角增大后，冲刷坑深度增加。另外，随着挑角增大，开始形成挑流的流量，即所谓起挑流量也增大。当实际通过的流量小于起挑流量时，由于动能不足，水流挑不出去，而在挑坎的反弧段内形成旋滚，然后，沿挑坎溢流而

下,在紧靠挑坎下游形成冲刷坑,对建筑物威胁较大。所以,挑角不宜选得过大。我国所建成的一些大中型工程,挑角一般在 $15^\circ \sim 35^\circ$ 之间。

有的资料建议,按挑流射程最大的条件用下式计算挑角 θ :

$$\cot \theta = \sqrt{1 + \frac{P}{S_1}} \quad (8.37)$$

当坝面摩阻损失较小(如 $\varphi > 0.9$)时,上式是可用的。

例 8.4 某水库溢流坝为单孔,坝面按 WES 曲线设计。坝末端设有挑角 θ 为 35° 的挑坎。试计算下泄水流的射程和冲刷坑深度。其他已知数据如下:

下泄流量 Q 为 $450 \text{ m}^3/\text{s}$, 上游水位高程为 1688.65 m , 下游水位高程为 1661.96 m , 下游河床高程为 1657.30 m , 溢流宽度与挑坎宽度相同, 即 b 为 30 m , 其余尺寸如图 8.20 所示, 坝下游河床岩基属 III 类。

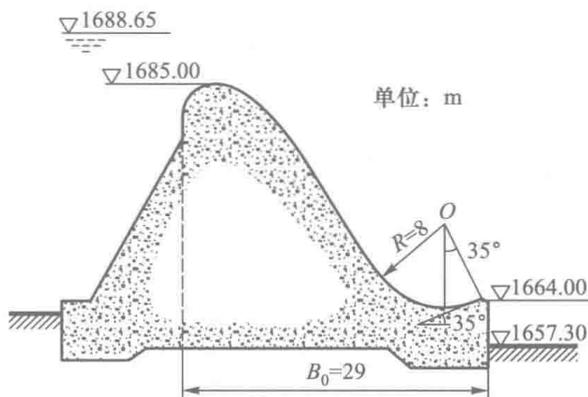


图 8.20

解: 根据已知数据求得

$$h_t = (1661.96 - 1657.30) \text{ m} = 4.66 \text{ m}$$

$$a = (1664.00 - 1657.30) \text{ m} = 6.70 \text{ m}$$

$$q = \frac{Q}{b} = \frac{450 \text{ m}^3/\text{s}}{30 \text{ m}} = 15 \text{ m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})$$

$$S_0 = \sqrt{(1685.00 \text{ m} - 1664.00 \text{ m})^2 + (29 \text{ m})^2} = 35.8 \text{ m}$$

$$z = (1688.65 - 1661.96) \text{ m} = 26.69 \text{ m}$$

$$S_1 = (1688.65 - 1664.00) \text{ m} = 24.65 \text{ m}$$

流速系数 φ 按式 (8.28) 计算: $\varphi = 1 - \frac{0.0077}{(q^{2/3}/S_0)^{1.15}} = 0.94$ 。

冲刷坑深度按式 (8.34) 计算。对 III 类岩基, 由表 8.3, 选用 $k_s = 1.3$ 。则得

$$t_s = k_s \cdot q^{0.5} \cdot z^{0.25} - h_t = (1.3 \times 15^{0.5} \times 26.69^{0.25} - 4.66) \text{ m} = 6.79 \text{ m}$$

将各已知值代入式 (8.32) (即略去坎顶水深 h_1) 计算射程:

$$\begin{aligned}
 L &= \varphi^2 S_1 \sin 2\theta \left(1 + \sqrt{1 + \frac{a - h_1}{\varphi^2 S_1 \sin^2 \theta}} \right) + \frac{t_s + h_1}{\sqrt{\tan^2 \theta + \frac{a - h_1}{\varphi^2 S_1 \cos^2 \theta}}} \\
 &= 0.94^2 \times 24.65 \times \sin 70^\circ \left(1 + \sqrt{1 + \frac{6.70 - 4.66}{0.94^2 \times 24.65 \times \sin^2 35^\circ}} \right) \text{ m} \\
 &\quad + \frac{(6.79 + 4.66) \text{ m}}{\sqrt{\tan^2 35^\circ + \frac{6.70 - 4.66}{0.94^2 \times \cos^2 35^\circ \times 24.65}}} \\
 &= 37.5 \text{ m}
 \end{aligned}$$

8.3 面流及消能岸消能简介

8.3.1 面流消能

面流消能是利用设置在溢流坝末端垂直鼻坎, 将自坝顶下泄的高速主流导至下游水流表层, 主要通过底部旋滚和表面旋滚的作用而消能。由于主流在一定距离内保持在表层, 从而大大减轻了对坝下河床的冲刷。所以, 面流消能对河床防冲的要求较低; 而且, 其中有的流态有利于漂木、泄冰。面流流态随鼻坎布置型式、单宽流量、下游水深及冲淤后河床的变化情况而变。图 8.21 表示坝高及鼻坎尺寸一定时, 在已知流量下, 流态随下游水位升高而转换的情况。不同流态具有不同的水流结构, 其消能效果及对河床的冲刷能力也各有差异。从冲刷角度而言, 淹没面流及自由面流对河床冲刷最轻; 自由混合流及淹没混合流次之; 底流及回复底流对河床冲刷最重。

从图 8.21 可以看出, 当欲使面流水

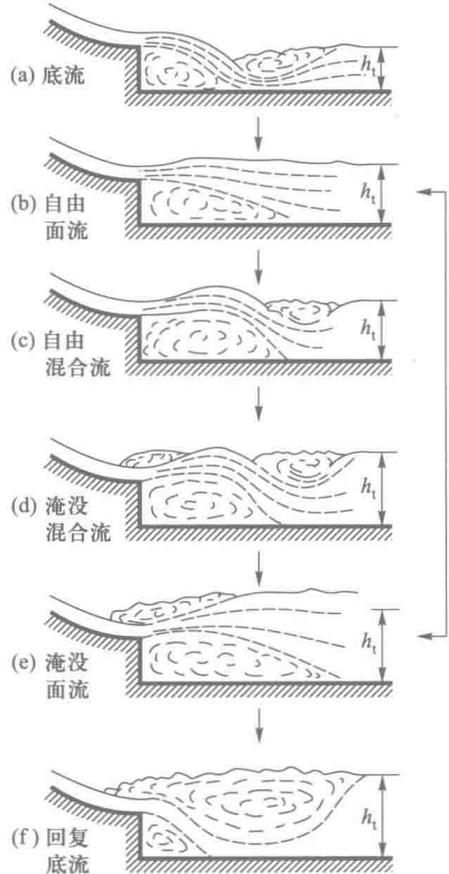


图 8.21

跃控制在某些固定流态范围内时，必须严格控制下游水深，使其稳定并保持在相应范围内。有关面流消能的水力设计方法，可参阅有关书籍。

必须强调指出，由于面流流态复杂多变，控制因素很多，现有的很多经验公式很难全面反映各种因素的影响。重要的工程设计都必须通过水工模型试验进行论证。

8.3.2 消能库消能

消能库消能是利用泄水建筑物的出流部分造成具有一定反弧半径和较大挑角所形成的挑坎（亦称戽斗），在下游尾水淹没挑坎的条件下，使从建筑下泄的高速水流在戽斗内产生激烈的表面旋滚，并通过戽后的涌浪及底部旋滚而获得较大的消能效果。图 8.22 是戽流形成过程的示意图。

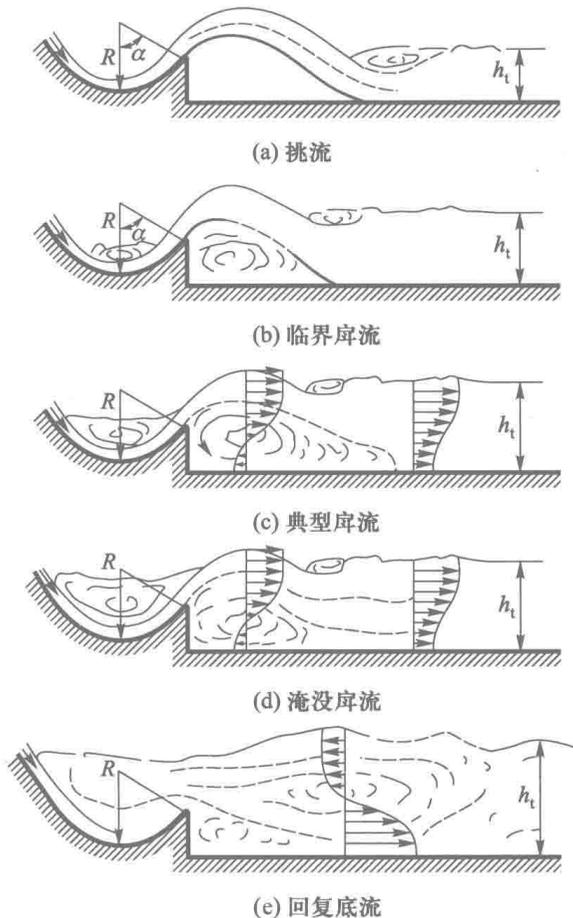


图 8.22

消能库是结合底流、面流特点的一种综合的消能方式。除戽斗外不需要设

置专门的消力池，故比底流消能节省工程量。同时，消能戽消能虽然也需要下游尾水位较高，但其适应的水深变化范围比面流广些，流态也比较稳定。主要的缺点是戽面及戽端容易被戽后反向旋滚卷入的河床质磨损；同时，像面流一样，下游尾水波动较大，冲刷岸坡。消能戽消能水力设计的主要任务是根据已知的水力条件（如单宽流量 q 、堰顶水头 H 、坝高 P 及下游水深 h_1 等），按产生戽流的要求选定戽斗尺寸（挑角 θ 、戽坎高度 a 、戽半径 R 及戽底高程）并计算戽后的冲刷情况。

必须指出，本章所述各节只着重研究了在纵剖面方向水流的衔接与消能问题，所介绍的计算方法主要是用在泄流宽度与原河宽相差不大、水流可简化为二维问题的条件下。当泄流前沿只占原河宽的一部分，或是多孔闸坝非各孔均匀开启时，都属于三维（或空间）问题，其水流运动较二维问题复杂得多。例如边墙急剧或突然扩散时，主流必然脱离边界并形成侧向回流，侧向回流又会对主流产生横向挤压作用甚至使水流偏斜而导致折冲水流，使衔接情况大为不利（图 8.23）。在水流衔接的空间问题方面，虽然已有一些初步成果，但尚欠成熟。这一类问题目前主要还是通过试验及三维紊流数值计算求得解决。

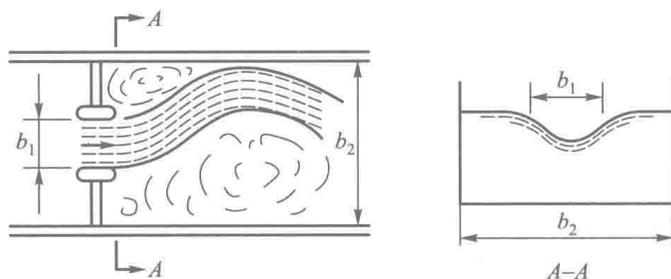


图 8.23

思考题

8.1 泄水建筑物下游常采用的水面衔接及消能措施有哪几种？它们各自的水流特征是什么？

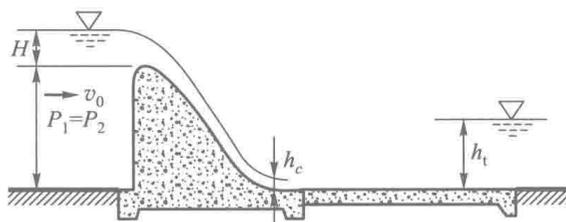
8.2 怎样判别堰、闸下游水流衔接形式（即确定水跃位置），可能有哪三种形式的水跃产生？

8.3 在什么情况下，堰、闸下游需要修建消力池？如何确定消力池的深度及长度。

习 题

8.1 有一溢流坝，流量系数 $m = 0.49$ ，当通过单宽流量 $q = 15 \text{ m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})$ 时，下游矩形断面河槽中的水深 $h_1 = 5.5 \text{ m}$ ，坝下游收缩断面水深 $h_{c0} = 0.86 \text{ m}$ 。(1) 求坝顶总水头 H_0 (其中: $\varepsilon = 1.0, \sigma_s = 1.0$)；(2) 判别坝下游是否发生水跃？若发生，指出为何种水跃。

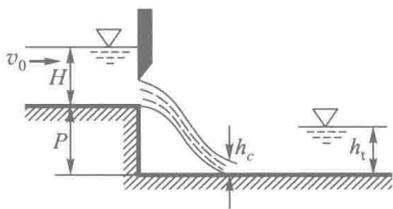
8.2 如图所示，坝高 P_1 与 P_2 均为 7 m ，单宽流量 q 为 $8 \text{ m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})$ ；流量系数 m 为 0.49 ；流速系数 φ 为 0.95 ；下游水深 h_1 为 3 m 。试求实用断面堰下游收缩断面的水深，并判断下游的水跃衔接形式。



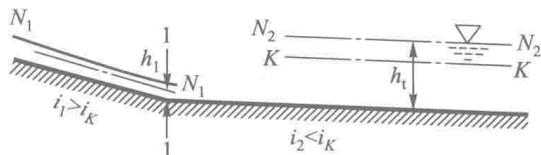
题 8.2

8.3 高度 P 为 2 m 的跌水，其出口处设平板闸门控制流量，如图所示。当流量 Q 为 $10 \text{ m}^3/\text{s}$ 时，下游水深 h_1 为 1.4 m ；河槽为矩形断面，底宽 b 为 4 m ；闸门前水头 H 为 1.6 m ；行近流速 v_0 为 1 m/s ；流速系数 φ 为 0.97 。试计算收缩断面水深 h_c ，并判断衔接形式。

8.4 图示矩形断面的陡槽，宽度 b 为 5 m ，下接一同样宽度的缓坡渠槽。当流量 Q 为 $20 \text{ m}^3/\text{s}$ 时，陡槽末端水深 h_1 为 0.5 m ；下游均匀流水深 h_1 为 1.8 m 。试判别水跃的衔接形式；如果水跃从 1-1 断面开始发生，所需的下游水深应为多少？



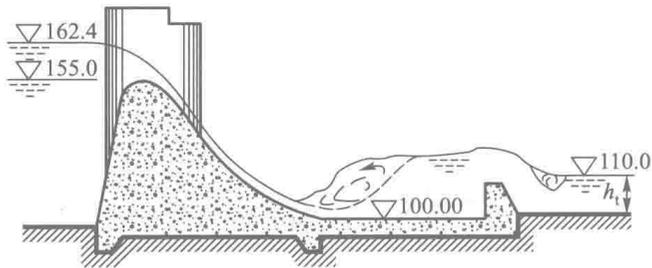
题 8.3



题 8.4

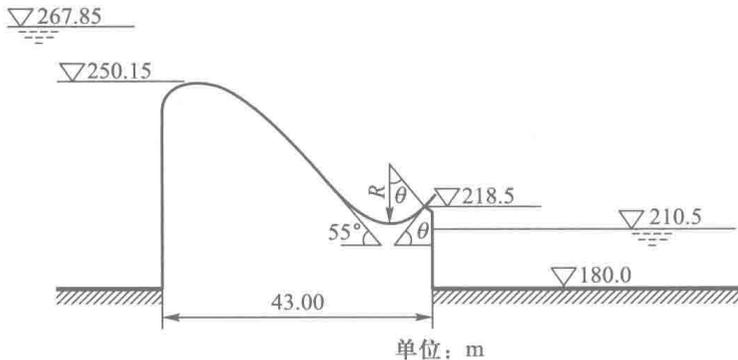
8.5 一单孔溢流坝，护坦宽与堰宽相同。试在下列已知条件下设计一降低护坦式消力池。单宽流量 q 为 $8 \text{ m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})$ ；堰顶水头 H_0 为 2.4 m ，下游堰高 P_2 为 7 m ，下游水深 h_1 为 3.5 m ，流速系数 φ 为 0.95 (图同题 8.2)。

8.6 某水库溢流坝为5孔，每孔净宽 b 为7m，闸墩厚2m，各高程如图所示。今已知各孔闸门全开，通过流量 Q 为 $1400\text{ m}^3/\text{s}$ 时，上游水位高程为162.4m；下游水位高程为110.0m；试判断下游水跃衔接形式。若需要，请设计一消能坎式消力池。



题 8.6

8.7 某电站溢流坝为3孔，每孔宽 b 为16m；闸墩厚4m；设计流量 Q 为 $6480\text{ m}^3/\text{s}$ ；相应的上、下游水位高程及河底高程如图所示。今在坝末端设一挑坎，采用挑流消能。已知：挑坎末端高程为218.5m；挑坎挑角 θ 为 25° ；反弧半径 R 为24.5m。试计算挑流射程和冲刷坑深度，下游河床为Ⅲ类岩基。



题 8.7

9 液体运动的流场理论

因分析水流的空间维度不同，探索液体运动基本规律有两种不同的途径，即流束理论和流场理论。

流束理论的内容在本书第3章已作详细阐述，这一理论的基本出发点是把微小流束看成是液体总流的一个微元体，液体总流就是由无数微小流束所组成。这样，只要应用机械运动的一般原理找出微小流束的运动规律，然后对整个液流积分，就可求出液体总流的运动规律。在积分过程中又用断面平均流速去代替断面上各点的流速，这种分析法，实际上就是把整个总流看作是一股流束，其误差用动能修正系数、动量修正系数等进行修正。这一方法是把液体运动看作一维流动，只考虑沿流束轴线方向的运动，而忽略与轴线垂直方向的横向运动，所以求得的结果在应用上有一定的局限性，并不是液体运动的普遍理论。

本章将介绍流场理论。这一理论是把液体运动看作是充满一定空间且由无数液体质点组成的连续介质运动。运动液体所占的空间，叫作流场。不同时刻，流场中每个液体质点都有一定的空间位置、流速、加速度、压强等，研究液体运动规律就是求解流场中这些运动要素的变化情况。分析的方法是在流场中任意取出一个微小平行六面体来研究，应用机械运动的一般原理，求出表达液体运动规律的微分方程式。这一方法把液体运动看作是三维流动，各运动要素均是空间坐标 (x, y, z) 的函数，所以研究的是液体最普遍的运动形式。由于导出的是一组偏微分方程，而且是非线性的，应用它来求解边界条件比较复杂问题的解析解，尚有一定的困难。但随着计算流体力学和计算机技术的发展，已经实现用它来数值求解一些复杂的水流问题。本章的内容将为读者进一步学习、研究提供必要的理论基础。

9.1 流速、加速度

在不同时刻，流场中每个液体质点都有一定的空间位置、流速、加速度、压强等。要知道液体运动的规律就需要了解这些运动要素的变化情况。但液体质点是无穷多的，到底用什么方法来表达整个液体的运动情况？在3.1节中已经讲过有两种不同的表达方法：即拉格朗日法和欧拉法。在水力学中广泛采用

的是欧拉法。现将各运动要素的欧拉表达法说明如下。

一般情况下,在同一时刻不同空间点 (x, y, z) 上液体的运动要素是不同的,即使在同一空间点上运动要素也是随时间 t 而变化的,所以各种运动要素是空间位置 (x, y, z) 和时间 t 的连续函数。例如不同时刻液体质点通过不同空间点时流速在 x, y, z 轴上的投影可用下列形式来表示:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= f_x(x, y, z, t) \\ u_y &= f_y(x, y, z, t) \\ u_z &= f_z(x, y, z, t) \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

若令上式中 x, y, z 为常数, t 为变数,即可求得不同时刻通过某一空间定点时各液体质点流速的变化情况。若令 t 为常数, x, y, z 为变数,就可求得同一瞬间在流场内通过不同空间点的液体质点的流速分布情况(即流速场)。

现在再来讨论加速度。在流速场中同一空间定点上不同液体质点通过该点时流速是不同的,即在同一空间定点上流速随时间而变。另一方面,在同一瞬间不同的空间点上流速也是不同的。若求某一液体质点在空间定点上的加速度时,应同时考虑以上两种变化的影响。例如图9.1a所示为坝身中的一个泄水孔,水库内水面随水流外泄而下降。在时刻 t ,某一液体质点通过渐变段上的 A 点,经过时间 dt 该液体质点运动到新的位置 A' 。在时刻 t , A 点流速为 u_x , A' 点的流速为 $u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx$ 。在时刻 $t + dt$, A 点的流速变为 $u_x + \frac{\partial u_x}{\partial t} dt$,而 A' 点的流速则变为 $\left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx\right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx\right) dt = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial t} dt$ (略去高阶微量)。在时刻 t ,通过 A 点的液体质点的流速为 u_x ,经过时刻 dt ,该液体质点运动到 A' 点,此时该液体质点的流速即为 A' 点在 $t + dt$ 时的流速 $u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial t} dt$,因此该液体质点通过 A 点时的加速度应为

$$a_x = \frac{\left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial t} dt\right) - u_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

式中第一项 $\frac{\partial u_x}{\partial t}$ 代表空间定点上流速随时间的变化率,叫作时变加速度,也称当地加速度;第二项 $u_x \frac{\partial u_x}{\partial x}$ 代表在同一时刻流速随位置的变化率,叫作位变加

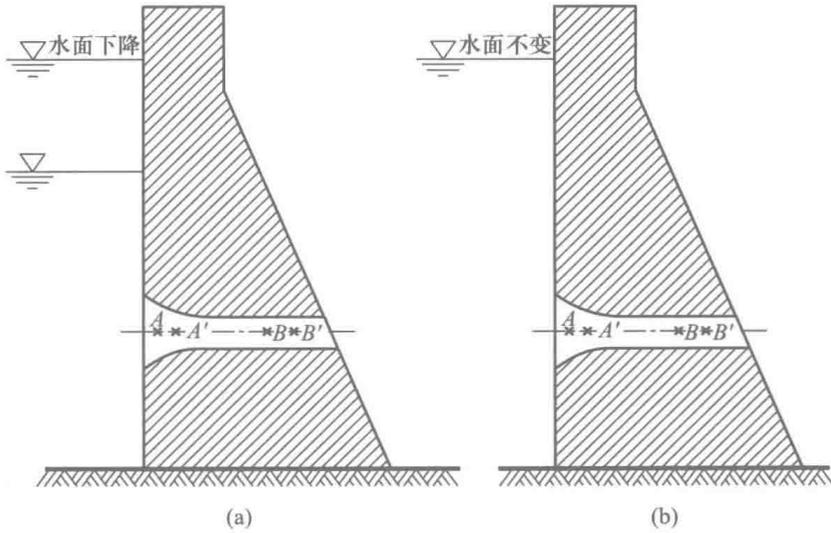


图 9.1

速度，也叫位移加速度。所以一个液体质点在空间某定点上的加速度应该是时变加速度与位变加速度之和。

上例是液体质点运动的轨迹与 x 轴重合的情况。在一般情况下，任一液体质点在空间定点上的加速度在三个坐标轴上的投影为

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{du_x}{dt} \\ a_y &= \frac{du_y}{dt} \\ a_z &= \frac{du_z}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

因 u_x, u_y, u_z 是 x, y, z 的连续函数，在微分时段 dt 中液体质点将运动到新的位置，所以 x, y, z 又是 t 的函数，利用复合函数微分的规则，则得加速度表达式为

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ a_y &= \frac{du_y}{dt} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ a_z &= \frac{du_z}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{dz}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

因 $\frac{dx}{dt} = u_x, \frac{dy}{dt} = u_y, \frac{dz}{dt} = u_z$ ，代入上式得

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ a_y &= \frac{du_y}{dt} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ a_z &= \frac{du_z}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

以上三式中等号右边第一项 $\frac{\partial u_x}{\partial t}$, $\frac{\partial u_y}{\partial t}$, $\frac{\partial u_z}{\partial t}$ 表示在每个固定点上流速对时间的变化率, 即为时变加速度。等号右边第二项至第四项之和 $u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}$, $u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z}$, $u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}$ 是表示流速随坐标的变化率, 即为位变加速度。因此, 一个液体质点在空间点上的全加速度应为该两加速度之和。这个概念同样适用于液体的密度与压强, 即

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + u_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + u_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (9.5)$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + u_x \frac{\partial p}{\partial x} + u_y \frac{\partial p}{\partial y} + u_z \frac{\partial p}{\partial z} \quad (9.6)$$

假若流场中液体质点通过任一空间点时所有运动要素都不随时间而改变, 这种流动叫作恒定流。这就是说, 恒定流时在流场中任一空间定点上, 不管哪个液体质点通过, 其运动要素都是不变的。

由定义, 恒定流应满足下列条件:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial u_z}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

所以, 恒定流时运动要素仅为空间坐标的函数而与时间无关:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= f_x(x, y, z) \\ u_y &= f_y(x, y, z) \\ u_z &= f_z(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (9.8)$$

如果流场中液体质点通过任一空间点时至少有一个运动要素是随时间而改变的, 这种流动就叫非恒定流。

恒定流时时变加速度为零, 非恒定流时时变加速度不等于零。但位变加速

度是否等于零并不决定于是否是恒定流，而要看液体质点自一点转移到另一点时流速是否改变。

如图 9.1b 所示，若在泄水孔的渐变段上取相邻的 A, A' 两点，在均匀段上取 B, B' 两点，当水库中的水面保持不变时，泄水孔中水流的运动要素不随时间而改变，故为恒定流。此时 A 点及 B 点的流速各保持一个常数，不随时间而改变，因此 A 点及 B 点的时变加速度均为零。但是 A' 点处的断面小于 A 点处的断面，因此 A' 点处的流速要大一些，这样 A 点就有位变加速度。而 B 点与 B' 点处的流速是相等的，因此没有位变加速度。

又如图 9.1a 所示，当水库中的水面随水流外泄而下降时，液体在泄水孔中流出的情况就不断改变，流速场及加速度场也不断变化，故为非恒定流。此时 A, B 两点都有时变加速度， A 点还有位变加速度，而 B 点的位变加速度则等于零。

9.2 流线与迹线的微分方程

拉格朗日法是研究液体中各个质点在不同时刻运动的变化情况；欧拉法则是在同一时刻研究不同质点的运动情况。前者引出了迹线的概念；后者建立了流线的概念。

流线是指某一瞬时 in 流速场内的一条几何曲线，在该曲线上的每个液体质点的速度向量都与该曲线相切。根据流线的定义，就可建立流线的微分方程式。

如图 9.2 所示，若在流线 AB 上取一微分段 ds ，因其无限小，可看作是直线。由流线定义可知流速向量 \mathbf{u} 与此流线微分段相重合。分别以 u_x, u_y, u_z 和 dx, dy, dz 表示流速向量 \mathbf{u} 和流线段 ds 在坐标轴上的投影，则其方向余弦为

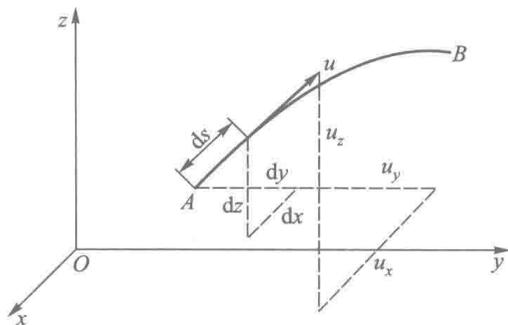


图 9.2

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{dx}{ds} = \frac{u_x}{u} \\ \cos \beta &= \frac{dy}{ds} = \frac{u_y}{u} \\ \cos \gamma &= \frac{dz}{ds} = \frac{u_z}{u} \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

即

$$\left. \begin{aligned} \frac{ds}{u} &= \frac{dx}{u_x} \\ \frac{ds}{u} &= \frac{dy}{u_y} \\ \frac{ds}{u} &= \frac{dz}{u_z} \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$

由此可知

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} = \frac{ds}{u} \quad (9.11)$$

上式就是流线的微分方程。式中 u_x , u_y , u_z 都是变量 x , y , z 和 t 的函数。因流线是某一指定时刻的曲线, 所以这里的时间 t 不应作为独立变量, 只能作为一个参变量出现。欲求某一指定时刻的流线, 需把 t 当作常数代入上式, 然后进行积分。

液体流动时, 某一液体质点在不同时刻所流经的路线叫作迹线。若图 9.2 中的曲线 AB 代表某一液体质点运动的迹线时, 则所取微分段 ds 即代表液体质点在 dt 时间内的位移, dx , dy , dz 代表位移 ds 在坐标轴上的投影, 故

$$\left. \begin{aligned} dx &= u_x dt \\ dy &= u_y dt \\ dz &= u_z dt \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$

由此可得迹线的微分方程为

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} = dt \quad (9.13)$$

这里的自变量是时间 t , 而液体质点的坐标 x , y , z 是时间的函数。在恒定流时, 各运动要素与时间无关, 流速只是坐标的函数, 所以迹线方程与流线方程相同, 都可用下列微分方程表示:

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} \quad \text{或} \quad \frac{u_x}{dx} = \frac{u_y}{dy} = \frac{u_z}{dz}$$

9.3 液体质点运动的基本形式

在一般情况下，刚体的运动是由平移及绕某一瞬间轴的转动所组成的，而液体的运动由于质点间没有刚性联系，所以更为复杂。

设想在液流中取一个微分平行六面体，各边长 dx , dy , dz 如图 9.3 所示，接近坐标轴原点的一个角点为 $P(x, y, z)$ ，令该点在各坐标轴上的分速度为 u_x , u_y , u_z 。其他各角点的速度假设都与 P 点不同，其间的变化可用泰勒级数去表达。例如 Q 点在各坐标轴上的分速度为

$$\text{沿 } x \text{ 方向 } \quad u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx$$

$$\text{沿 } y \text{ 方向 } \quad u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx$$

$$\text{沿 } z \text{ 方向 } \quad u_z + \frac{\partial u_z}{\partial x} dx$$

同理，可以写出微分平行六面体每个角点的分速度。

由于微分平行六面体各点的运动速度不同，因此经过时间 dt 后，这个六面体不但位置要发生移动，而且它的形状也将发生变化。作为组成六面体的每一个面也将发生这种变化，因此只要分析其中的一个面，例如 $PQRS$ 面，就可以了解整个微分六面体的运动情况。如图 9.4 所示，经过时间 dt 后，矩形平面 $PQRS$ 将达到新位置而变成 $P'Q'R'S'$ 的形状。它的整个变化过程可以看作是由下列几种基本运动形式所组成的。

1. 位置平移

由图 9.4 可以看出， P 的分速度 u_x , u_z 是矩形平面其他各角点 Q , R , S 相应分速度的组成部分。若暂不考虑 Q , R , S 各点的分速度与 P 点的相差部分，则经过时间 dt 后，整个矩形平面 $PQRS$ 将向右移动一个距离 $u_x dt$ ，向上移动一个距离 $u_z dt$ ，达到 $P'Q_1R_1S_1$ 的位置，但其形状和大小并没有改变。由此可知： u_x , u_y , u_z 是整个微分平行六面体在 x , y , z 各方向的位移速度。

2. 线变形

由于矩形平面 $PQRS$ 各角点在 x 方向的分速度不同， Q 对 P 与 R 对 S 在 x 方向均有相对运动，因 Q , P 与 R , S 在 x 方向分速度的差值是相等的，均等

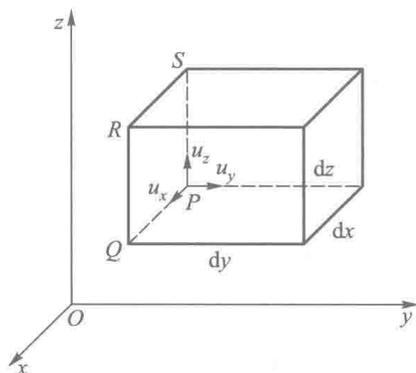


图 9.3

于 $\frac{\partial u_x}{\partial x} dx$, 所以在 dt 时间内边线 PQ 与 SR 在 x 方向的伸长均为 $\frac{\partial u_x}{\partial x} dx dt$ 。同理, 边线 PS 与 QR 在 z 方向的伸长均为 $\frac{\partial u_z}{\partial z} dz dt$ 。因此, 经过时间 dt 后, 矩形平面 $PQRS$ 因位置平移及边线伸长将变成矩形 $P'Q_2R_2S_2$ 。

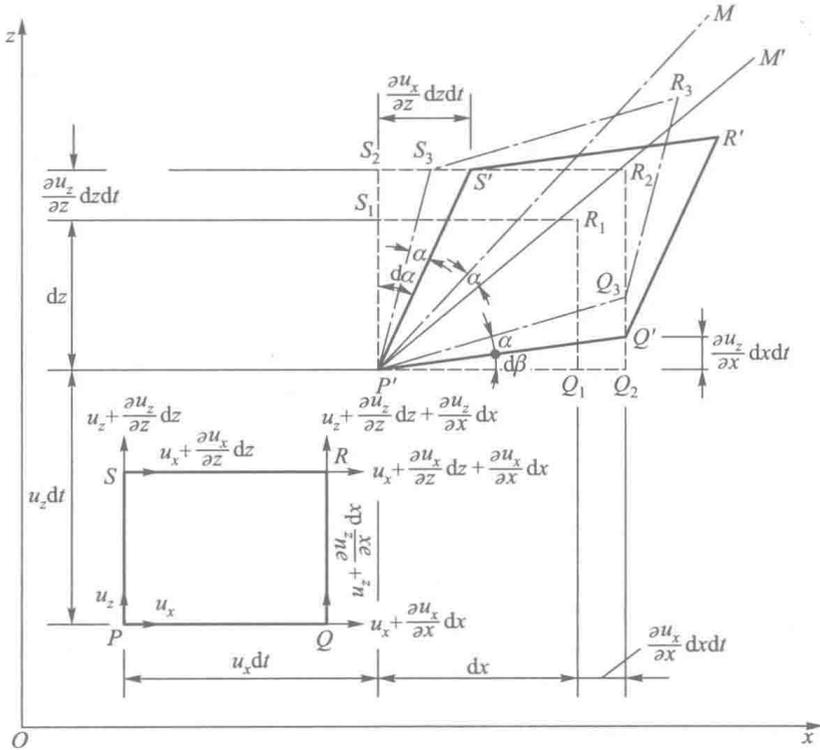


图 9.4

在各坐标轴方向每秒钟边线单位长度的伸长称为各坐标轴方向的线变形速率。由定义可求得微分平行六面体各坐标轴方向的线变形速率为

$$\left. \begin{aligned} x \text{ 方向 } \quad \frac{\frac{\partial u_x}{\partial x} dx dt}{dx dt} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ y \text{ 方向 } \quad \frac{\frac{\partial u_y}{\partial y} dy dt}{dy dt} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ z \text{ 方向 } \quad \frac{\frac{\partial u_z}{\partial z} dz dt}{dz dt} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (9.14)$$

3. 边线偏转

现在再来分析矩形平面各角点上与边线相正交方向的分速度的差异对运动的影响。 Q 点在 z 方向的分速度大于 P 点在 z 方向的分速度一个数值 $\frac{\partial u_z}{\partial x}dx$, 因此经过时间 dt 后 Q 点将比 P 点向上多移动一个距离 $\frac{\partial u_z}{\partial x}dxdt$, 致使 PQ 发生逆时针的偏转, 偏转角度为 $d\beta$ 。同理, S 点将比 P 点向右多移动一个距离 $\frac{\partial u_x}{\partial z}dzdt$, 致使 PS 发生顺时针的偏转, 偏转角度为 $d\alpha$ 。最后矩形平面 $PQRS$ 经过平移、线变形及边线偏转变成平行四边形 $P'Q'R'S'$ 。

由图可知

$$d\alpha \approx \tan d\alpha = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial z}dzdt}{dz + \frac{\partial u_z}{\partial z}dzdt}$$

上式分母中第二项与第一项相比为高阶微量, 可略去不计, 于是

$$d\alpha = \frac{\partial u_x}{\partial z}dt \quad \text{或} \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

同理

$$d\beta = \frac{\partial u_z}{\partial x}dt \quad \text{或} \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

由图 9.4 很明显地可以看出, 由矩形平面 $P'Q_2R_2S_2$ 变成平行四边形 $P'Q'R'S'$ 的过程可以分解为两部分: 首先使 $P'S_2$ 顺时针偏转一个角度 $d\alpha - \angle\alpha$, $P'Q_2$ 逆时针偏转一个角度 $d\beta + \angle\alpha$, 且令该两偏转角相等, 这样矩形平面 $P'Q_2R_2S_2$ 将变成平行四边形 $P'Q_3R_3S_3$, 此时平行四边形 $P'Q_3R_3S_3$ 的等分角线 $P'M$ 与矩形平面 $P'Q_2R_2S_2$ 的等分角线是重合的, 因此矩形平面只有直角纯变形, 没有旋转运动发生。其次再将整个平行四边形 $P'Q_3R_3S_3$ 绕通过 P' 点的 y 方向的轴顺时针旋转一个角度 α , (这样原等分角线 $P'M$ 也将旋转一个角度 α 而到 $P'M'$ 的位置) 变成平行四边形 $P'Q'R'S'$ 。

由以上分析可知, 矩形平面边线的偏转结果产生直角纯变形和整体旋转运动, 现分述如下:

(1) 角变形。角变形两边线的偏转角是相等的, 即

$$d\alpha - \angle\alpha = d\beta + \angle\alpha \quad (9.15)$$

故

$$\angle \alpha = \frac{d\alpha - d\beta}{2} \quad (9.16)$$

将式 (9.16) 代入式 (9.15) 可得每一直角边的偏转角为

$$d\alpha - \angle \alpha = d\beta + \frac{d\alpha - d\beta}{2} = \frac{d\alpha + d\beta}{2}$$

由此可知, 绕 y 方向直角边的变形角速度为

$$\theta_y = \frac{d\alpha - \angle \alpha}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha + d\beta}{dt} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$$

同理, 可写出绕 x 及 z 方向直角边的变形角速度。最后可得

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ \theta_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \theta_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9.17)$$

(2) 旋转运动。旋转是由于 $d\alpha$ 与 $d\beta$ 不等所产生的, 所考虑矩形平面的纯旋转角为 $\angle \alpha = \frac{1}{2}(d\alpha - d\beta)$, 故旋转角速度为

$$\omega_y = \frac{\angle \alpha}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha - d\beta}{dt} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$$

同理, 可写出绕 x 及 z 方向的旋转角速度。最后可得

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9.18)$$

由以上分析可知: 微分平行六面体最普遍的运动形式系由平移、线变形、角变形及旋转等四种基本形式所组成。实际运动也可能由其中某几种形式所组成。例如: 直角两边线的偏转角为异向等值时, 则只有直角纯变形, 没有旋转运动发生; 若直角两边线的偏转角为同向等值时, 则只有旋转运动而无直角变形。

若微分平行六面体的各边 dx , dy , dz 无限缩小, 则微小六面体的极限就变成质点, 这样, 以上所述的运动状态即代表在某一瞬时位于 P 点的一个液体质点的运动状态。由此可知, 一个液体质点的运动也是由平移、线变形、角变

形及旋转等四种基本形式所组成。

9.4 无涡流与有涡流

在水力学中常按液体质点本身有无旋转，将液体运动分作有涡流与无涡流两种。若液体流动时每个液体质点都不存在绕自身轴的旋转运动，即 $\omega = \omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ ，则称此种运动为无涡流。若液体流动时有液体质点存在绕自身轴的旋转运动，则称此种运动为有涡流。这是两种不同性质的液体运动。

涡是指液体质点绕其自身轴旋转的运动，不要把涡与通常的旋转运动混淆起来。例如图 9.5a 所示的运动，液体质点相对于 O 点作圆周运动，其轨迹是一圆周，但仍是无涡的，因为液体质点本身并没有旋转运动，只是它移动的轨迹是圆罢了。图 9.5b 所示的运动，液体质点除绕 O 点在圆周上运动外，自身又有旋转运动，这种运动才是有涡的。所以液体运动是否有涡不能单从液体质点运动的轨迹来看，而要看液体质点本身是否有旋转运动而定。

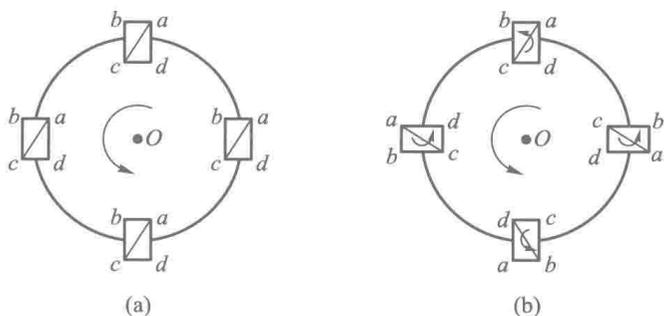


图 9.5

无涡流是液体质点没有绕自身轴旋转的运动，也就应满足下列条件：

$$\begin{cases} \omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = 0 \\ \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 0 \\ \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = 0 \end{cases}$$

则

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_z}{\partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (9.19)$$

在流动场中任意一点的分速度为 u_x , u_y , u_z , 假设这些分速度可以用某个函数 $\varphi(x, y, z, t)$ 在相应坐标轴上的偏导数来表示:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ u_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ u_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (9.20)$$

这个函数 φ 称为流速势函数, 分别对上式取导数:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y}, \quad \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \end{aligned}$$

因为函数的导数值与微分次序无关, 所以, 如果流速势函数存在, 是能满足式 (9.19) 的, 由此可得出结论: 如果流场中所有液体质点的旋转角速度都等于零, 即无涡流, 则必有流速势函数存在, 所以无涡流又称为势流。

式 (9.20) 依次在等号两边乘以 dx , dy , dz , 然后相加可得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = u_x dx + u_y dy + u_z dz \quad (9.21)$$

若时间 t 给定时, 上式左边是函数 φ 对变量 x , y , z 的全微分, 故

$$d\varphi = u_x dx + u_y dy + u_z dz \quad (9.22)$$

若流速为已知, 利用上式即可求出势流的流速势函数。

例 9.1 有一液流, 已知

$$\begin{cases} u_x = v \cos \alpha \\ u_y = v \sin \alpha \\ u_z = 0 \end{cases}$$

试分析液体运动的特征。

解: 由所给条件可知流速与时间无关, 故液流为恒定流, 流线与迹线重合。

由流线方程式

$$\frac{u_x}{dx} = \frac{u_y}{dy} = \frac{u_z}{dz}$$

可得

$$\frac{v \cos \alpha}{dx} = \frac{v \sin \alpha}{dy} = \frac{0}{dz}$$

将上式积分可得

$$(v \cos \alpha)y - (v \sin \alpha)x = C$$

或

$$y = (\tan \alpha)x + C'$$

所以流线是一组与 x 轴成 α 角的平行线，液流为平面直线均匀流（图 9.6）。

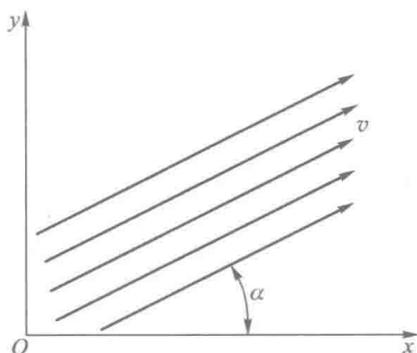


图 9.6

因 $\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$, 液体质点无线变形; $\theta_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = 0$, $\theta_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 0$, $\theta_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = 0$, 液体质点无角变形; $\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = 0$, $\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 0$, $\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = 0$, 液体质点自身无旋转运动。

由此可知, 该液流为无涡平面直线均匀流, 在运动过程中液体质点无变形运动。

无涡流必有流速势函数 $\varphi(x, y, t)$ 存在, 在给定时刻

$$\begin{aligned} d\varphi &= u_x dx + u_y dy = v \cos \alpha dx + v \sin \alpha dy \\ &= v(\cos \alpha dx + \sin \alpha dy) \end{aligned}$$

将上式积分即可求出流速势函数为

$$\varphi = (v \cos \alpha)x + (v \sin \alpha)y + C$$

或

$$\varphi = u_x x + u_y y + C$$

式中 C 为积分常数。

例 9.2 有一液流, 已知

$$\begin{cases} u_x = -ky \\ u_y = kx \\ u_z = 0 \end{cases}$$

试分析液体的运动特征。

解: 因该液流流速与时间无关, 故为恒定流, 流线与迹线重合。由流线方程式可得

$$\frac{-y}{dx} = \frac{x}{dy} = \frac{0}{dz}$$

积分得

$$x^2 + y^2 = C$$

由此可知, 流线是同心圆族, 液体质点作圆周运动。因 $\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$, 液体质点无线变形; $\theta_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = 0$, $\theta_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 0$, $\theta_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = 0$, 液体质点无角变形; $\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = 0$, $\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 0$, $\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = k$, 液体质点有旋转运动。

由此可知, 液体质点一边作圆周运动, 同时自身又有旋转运动, 但在运动过程中液体质点并不变形, 即形状和大小不变。

有涡流可用旋转角速度的矢量来表征, 所以有涡运动的几何描述可以类似描述流速场一样, 引用所谓涡线、涡束等概念。

涡线是某一瞬时在涡流场的一条几何曲线, 在这条曲线上各质点在同一瞬时的旋转角速度的矢量都与该曲线相切。涡线的作法与流线相似, 如图 9.7 所示。与流线类似, 涡线的微分方程式为

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z} \quad (9.23)$$

式中 ω_x , ω_y , ω_z 一般说来是 x , y , z , t

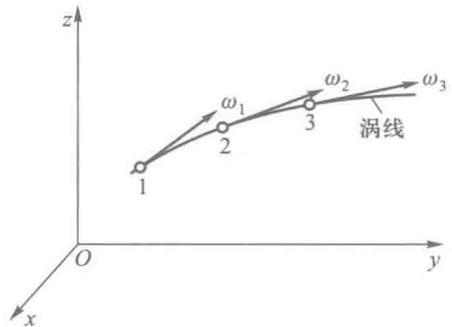


图 9.7

的函数,但在积分上式时, t 应作参变量。与流线一样,涡线本身也不会相交,在恒定流时涡线的形状也保持不变。

与流束相类似,任意取一微小面积,通过该面积各点作出一束涡线,称为微小涡束。在微小涡束断面上各点的旋转角速度可认为是相等的。

类似于流量,若微小涡束的横断面积为 $d\sigma$, 旋转角速度为 ω , 则 $\omega d\sigma$ 称为微小涡束的涡旋通量,或称为涡旋强度。

在流体力学中也常用另一物理量,叫作速度环量,来表示涡旋的强弱。

在运动液体所占的空间,取任意封闭周线 C , 在周线上彼此相距 Δs 的各点处画出某一瞬时在这些点上的流速矢量 \mathbf{u} 以及在这些点上顺周线绕行方向的切线,这些流速矢量与切线之间的夹角为 α (图 9.8), 写出和数 $\sum_1^n u \cos \alpha \Delta s$, 该和数的极限等于沿封闭周线的积分,即

$$\Gamma = \lim \sum_1^n u \cos \alpha \Delta s = \oint_C u \cos \alpha \Delta s = \oint_C u \cos(u, ds) ds$$

Γ 称为沿封闭周线 C 的速度环量。如果在周线上切向速度与所取的周线绕行方向相同,则速度环量为正,否则为负。

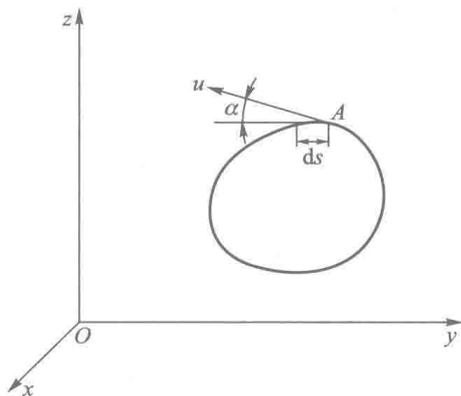


图 9.8

由解析几何可知,两直线夹角的余弦等于两直线方向余弦的对应乘积之和,故

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos(u, ds) = \cos(u, x) \cos(ds, x) + \\ &\quad \cos(u, y) \cos(ds, y) + \cos(u, z) \cos(ds, z) \\ &= \frac{u_x}{u} \frac{dx}{ds} + \frac{u_y}{u} \frac{dy}{ds} + \frac{u_z}{u} \frac{dz}{ds} \end{aligned}$$

即

$$u \cos(u, ds) ds = u_x dx + u_y dy + u_z dz$$

因此速度环量也可写成下列形式:

$$\Gamma = \oint_C (u_x dx + u_y dy + u_z dz) \quad (9.24)$$

若液体的运动是无涡的, 必有流速势函数存在, 而且由式 (9.22) 代入式 (9.24) 得

$$\Gamma = \oint_C d\varphi = [\varphi]_A^A = \varphi_A - \varphi_A = 0$$

由此可得出结论: 当流速势为单值时, 沿无涡流空间画出的任意封闭周线的速度环量都等于零。因此利用速度环量也可确定液体运动是有涡流还是无涡流。现举例如下。

例 9.3 以角速度 ω 绕垂直于纸面的轴线 O 像刚体一样旋转的液体 (图 9.9)。试问该液体运动是有涡流还是无涡流。

解: 对应于半径 r_1, r_2 的圆周速度分别是 $u_1 = r_1\omega, u_2 = r_2\omega$ 。任意取一圆心角 θ , 图中所画斜线部分沿周线的速度环量为

$$\Gamma = u_2 r_2 \theta - u_1 r_1 \theta = \theta \omega (r_2^2 - r_1^2)$$

因所论区域的面积

$$\Omega = \int_{r_1}^{r_2} r \theta dr = \frac{\theta}{2} (r_2^2 - r_1^2)$$

或

$$\theta (r_2^2 - r_1^2) = 2\Omega$$

故

$$\Gamma = 2\omega\Omega$$

由此可知, 速度环量等于旋转角速度 ω 与所论区域面积 Ω 乘积的 2 倍。

以上结论显然也适用于圆的任何切割部分, 因此所有液体的运动都是有涡的。

例 9.4 再来观察一个液体运动, 如图 9.10 所示, 它的流线都为绕 O 点的同心圆, 不过周线上任何一点的切向速度 u 的大小均等于 $\frac{C}{r}$, 其中 $C =$ 常数, r 为半径。试问这一液体运动是有涡流还是无涡流。

解: 取图中斜线部分周线的速度环量:

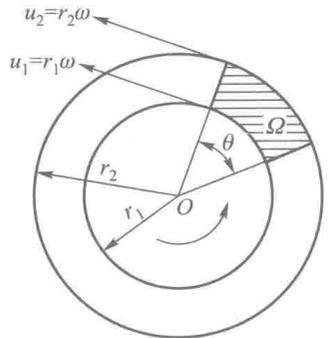


图 9.9

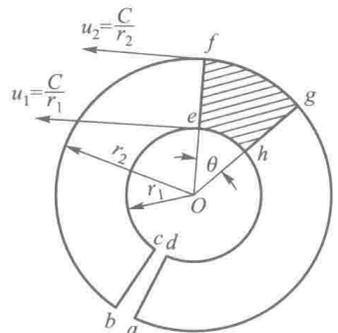


图 9.10

$$\Gamma = u_2 r_2 \theta - u_1 r_1 \theta = \frac{C}{r_2} r_2 \theta - \frac{C}{r_1} r_1 \theta = 0$$

所以讨论区域是无涡运动。这一结论可适用于任何不包括圆心的周线 $agfbceh-da$ ，所取速度环量均等于零。若取绕 O 点的闭合圆周作为周线就得

$$\Gamma = 2\pi r u = 2\pi r \frac{C}{r} = 2\pi C = \text{常数}$$

所以任何包括 O 点的圆周速度环量均不等于零，而且当半径 r 自 ∞ 至 0 ，速度环量均等于同一常数 $2\pi C$ 。由此可知仅在 O 点有涡旋存在，在流体力学中称这个点为奇点，这种液体流动为单纯环流。

9.5 恒定平面势流的流速势及流函数

由 9.4 节可知，液体运动可分为有涡流及无涡流。无涡流一定有流速势存在，所以也称为势流。严格地说，具有粘滞性的实际液体的流动都不是有势流动，就是理想液体的流动也可以是有涡流。但一般的液流都是从静止状态开始的（如在水库或容器中），在这种情况下，理想液体的流动都将是势流。在求解实际液体的运动问题时，根据边界层的概念（详见 9.9 节），在边界层以外，可以看作是理想液体的流动，因此，欲求解实际液体的运动问题，也需要求出边界层以外势流部分各运动要素的分布规律。此外在某些情况下，如雷诺数极大的水流，惯性作用占主导地位，粘滞性对水流的作用可以忽略，这样就近似地把实际液体看作是理想液体，用势流理论来求近似解。尤其是平面势流的理论在现代水力学中有一定的实用价值，例如孔口、内插管嘴、闸孔出流、深式底孔的进口、波浪、渗流及高坝溢流等问题都可应用势流理论来求解，且其正确性已为试验所证实。

势流必有流速势 $\varphi(x, y, z)$ 存在，对平面势流来说，流速势 φ 与流速的关系为

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ u_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (9.25)$$

对不可压缩液体， $\rho = \text{常数}$ ，故平面势流的连续性方程式可写成

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad (9.26)$$

将式 (9.25) 代入式 (9.26) 得

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (9.27)$$

上式就是拉普拉斯 (Laplace) 方程, 所以流速势是一个调和函数。

平面势流的流速场完全由流速势 φ 来确定, 若能求得流速势 φ , 应用式 (9.25) 就可求出各点的流速在各坐标轴方向的分量及流速本身, 这样就求得了流速场。再应用能量方程式就可求得压强场, 所以求解平面势流问题归根到底还是如何求解满足一定边界条件 (非恒定流时还有起始条件) 的拉普拉斯方程式问题。

9.5.1 流函数及其性质

求解平面流就是要探求它的流动场和流动图形, 要研究平面流的流动图形, 首先要研究流线。 $x-y$ 平面的平面流, 其流线方程式为

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y}$$

或写作

$$u_x dy - u_y dx = 0 \quad (9.28)$$

很自然地会提出这样的问题: 上述流线方程式可否积分成普通方程式? 一看就知道, 在某一确定时刻, 若上式左边是某一函数 $\psi(x, y)$ 的全微分, 则上式就可积分, 即

$$d\psi = u_x dy - u_y dx \quad (9.29)$$

此函数 $\psi(x, y)$ 叫作平面流的流函数。

在某一确定时刻两个自变量的函数 $\psi(x, y)$ 的全微分可写作

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \quad (9.30)$$

比较式 (9.29) 及式 (9.30) 可知流函数 $\psi(x, y)$ 存在的充分必要条件为

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ u_y &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (9.31)$$

将 u_x 对 x 求导数, u_y 对 y 求导数, 并相加得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x}, & \frac{\partial u_y}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

上式就是平面流的连续性方程式。由此可知：流函数存在的充分必要条件就是不可压缩液体的连续性方程式，所以不可压缩液体作平面的连续运动时就有流函数存在。

为了说明流函数在研究平面流中的实用意义，先说明流函数的性质：

1. 同一流线上各点的流函数为常数，或流函数相等的点连成的曲线就是流线

在某一确定时刻， ψ 是平面位置 (x, y) 的函数，在 $x-y$ 平面内，每个点 (x, y) 都给出 ψ 的一个数值，把 ψ 相等的点连接起来所得曲线，其方程式为

$$\psi(x, y) = \text{常数}$$

或

$$d\psi = 0 \quad (9.32)$$

由式 (9.29)、式 (9.30) 及式 (9.32) 可知

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = u_x dy - u_y dx = 0 \quad (9.33)$$

上式就是流线方程式 (9.28)。由此可知：流函数相等的点连接起来的曲线就是流线。若流函数的方程式能找出，则令 $\psi = \text{常数}$ ，即可求得流线的方程式，不同的常数代表不同的流线。

2. 两流线间所通过的单宽流量等于该两流线的流函数值之差

在平面流中任意两根流线上各取点 a 及 b ，通过 ab 任意连一曲线 \widehat{ab} ，在该曲线上任意取一点 M ，令 M 点的流速在 x, y 方向的分量各为 u_x, u_y ，通过 M 点在 \widehat{ab} 上取一微分段 ds ， ds 在 x, y 方向的分量各为 dx, dy 。由图 9.11 可以看出，通过 ds 段的微小流量为

$$dq = u_x dy - u_y dx$$

所以通过曲线 ab 的流量为

$$q_{\widehat{ab}} = \int_b^a dq = \int_b^a (u_x dy - u_y dx)$$

由式 (9.29) 可知， $u_x dy - u_y dx = d\psi$ ，故上式可写作

$$q_{\widehat{ab}} = \int_b^a d\psi = \psi_a - \psi_b \quad (9.34)$$

由此可得出结论：任何两条流线之间通过的单宽流量等于该两条流线的流函数值之差。

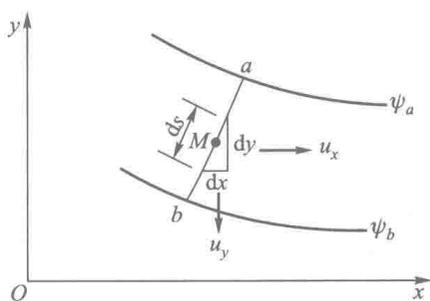


图 9.11

3. 平面势流的流函数是一个调和函数

上述两个性质对有涡流或势流都是适用的。当平面流为势流时, 则

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = 0$$

即

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0$$

将式 (9.31) 代入上式得

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

上式就是拉普拉斯方程。所以平面势流的流函数与流速势一样是一个调和函数。

9.5.2 流速势及等势线

平面势流必有流速势 $\varphi(x, y)$ 存在, 且

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ u_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (9.35)$$

函数 $\varphi(x, y)$ 的全微分为

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy$$

将式 (9.35) 代入上式得

$$d\varphi = u_x dx + u_y dy \quad (9.36)$$

φ 是平面位置 (x, y) 的函数, 在 $x-y$ 平面内每个点 (x, y) 都给出 φ 的一个数值, 把 φ 值相等的点连接起来所得的曲线就称为等势线, 所以等势线的方程式为

$$\varphi(x, y) = \text{常数}$$

或

$$d\varphi = 0$$

将式 (9.36) 代入上式可得

$$d\varphi = u_x dx + u_y dy = 0 \quad (9.37)$$

若流速势的方程式能找出, 则令 $\varphi = \text{常数}$, 即可求得等势线的方程式, 不同的常数代表不同的等势线。

例 9.5 图 9.12 所示为一平行于 x 轴的均匀等速流, 其流速为均匀分布,

各点均为 U 。

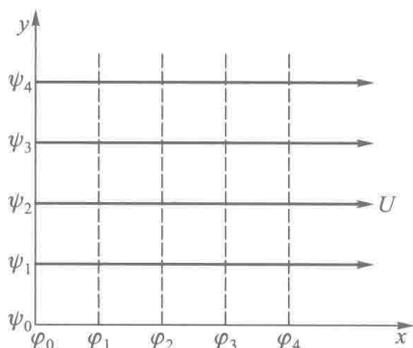


图 9.12

- (1) 证明该平面流为势流；
- (2) 求其流线方程式；
- (3) 求其等势线方程式。

解：(1) 因 $u_x = U$, $u_y = 0$, 故 $\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = 0$, 为平面势流。

(2) 由式 (9.29) $d\psi = u_x dy - u_y dx = U dy$, 积分得

$$\psi = Uy + C_1$$

式中 C_1 为积分常数。同一流线上 $\psi = \text{常数} = C_2$, 即在同一流线上

$$\psi = Uy + C_1 = C_2$$

故

$$y = \frac{C_2 - C_1}{U} = \frac{C}{U}$$

上式即为流线方程式。不同的 C 值代表不同的流线, 如图 9.12 中的实线所示。

(3) 由式 (9.36) 得

$$d\varphi = u_x dx + u_y dy = U dx$$

积分得

$$\varphi = Ux + C'_1$$

式中 C'_1 为积分常数。同一等势线上 $\varphi = Ux + C'_1 = C'_2$, 故

$$x = \frac{C'_2 - C'_1}{U} = \frac{C'}{U}$$

上式即为等势线方程式, 不同的 C' 值代表不同的等势线, 如图 9.12 中的虚线所示。

9.5.3 流函数与流速势的关系

1. 流函数与流速势为共轭函数

由前面分析可知, 在平面势流中任何一点都有一个流函数 ψ 及流速势 φ , 且

$$\begin{cases} u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

由此可得

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ u_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (9.38)$$

在高等数学中满足这种关系的两个函数称为共轭函数。所以在平面势流中流函数 ψ 与流速势 φ 是共轭函数。利用上式知道 u_x, u_y , 就可推求 ψ 及 φ , 或知道其中一个函数就可推求另一个函数。

2. 等流函数线与等流速势线相正交, 即流线与等势线相正交 等流函数线就是流线, 其方程式为

$$d\psi = u_x dy - u_y dx = 0 \quad (9.39)$$

流线上任意一定点的斜率为

$$m_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{u_y}{u_x}$$

等流速势线就是等势线, 其方程式为

$$d\varphi = u_x dx + u_y dy = 0 \quad (9.40)$$

在同一定点上等势线的斜率为

$$m_2 = \frac{dy}{dx} = -\frac{u_x}{u_y}$$

故

$$m_1 m_2 = \frac{u_y}{u_x} \left(-\frac{u_x}{u_y} \right) = -1$$

由此可知，流线与等势线在该定点上是相正交的。

9.5.4 流函数与流速势的极坐标表示法

有些平面势流采用极坐标来分析要方便得多。极坐标用 r 及 θ 来表示，如图 9.13 中 C 点的坐标为 (r, θ) ， C 点的流速沿 r 方向用 u_r 来表示，与 r 正交方向用 u_θ 来表示。由该图可以看出，直角坐标与极坐标的关系如下：

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\y &= r \sin \theta \\r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\\theta &= \arctan \frac{y}{x}\end{aligned}$$

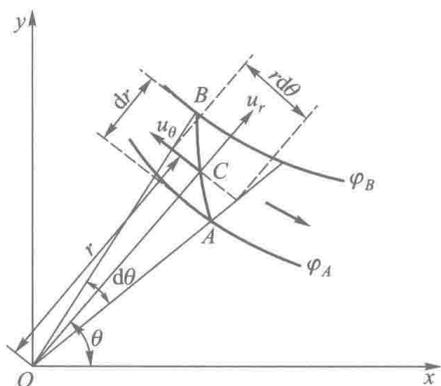


图 9.13

现在讨论一下流函数与流速势的极坐标表示法：如图 9.13 所示， A 点的极

坐标为 $(r - \frac{dr}{2}, \theta - \frac{d\theta}{2})$ ，其流函数为 ψ_A ； B 点的极坐标为 $(r + \frac{dr}{2}, \theta + \frac{d\theta}{2})$ ，其流函数为 ψ_B 。二流线之间流函数的变化为

$$d\psi = \psi_B - \psi_A = \text{通过 } \widehat{AB} \text{ 的流量}$$

流速 u_r 沿 r 方向自 \widehat{AB} 流出的流量为 $u_r r d\theta$ ，流速 u_θ 沿与 r 正交方向向 \widehat{AB} 流进的流量为 $-u_\theta dr$ ，故上式可改写成

$$d\psi = \text{通过 } \widehat{AB} \text{ 的流量} = u_r r d\theta - u_\theta dr \quad (9.41)$$

又因

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \psi}{\partial r} dr = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} r d\theta + \frac{\partial \psi}{\partial r} dr \quad (9.42)$$

比较式 (9.41) 及式 (9.42) 可得

$$\left. \begin{aligned}u_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\u_\theta &= -\frac{\partial \psi}{\partial r}\end{aligned} \right\} \quad (9.43)$$

同样对流速势 φ 可得

$$\left. \begin{aligned}u_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\end{aligned} \right\}$$

由此可得

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (9.44)$$

9.6 液体运动的连续性方程

因液体是连续介质，若在流场中任意划定一个封闭曲面，在某一给定时段中流入封闭曲面的液体质量与流出的液体质量之差应与该封闭曲面内因密度变化而引起的质量总变化相等。如果液体是不可压缩的均质液体，则流进与流出的液体质量应相等。以上结果用数学分析表达成微分方程，就叫作液体运动的连续性方程。

现设想在流场中取一空间微分平行六面体（图 9.14），六面体的边长为 dx , dy , dz ，其形心为 $A(x, y, z)$ ， A 点的流速在各坐标轴的投影为 u_x , u_y , u_z ，密度为 ρ 。

经一微小时段 dt 自后面流入的液体质量为

$$\left(\rho - \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) \left(u_x - \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydzdt$$

自前面流出的液体质量为

$$\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) \left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydzdt$$

故 dt 时段内在 x 方向流入与流出六面体的液体质量差为

$$\begin{aligned} & \left(\rho - \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) \left(u_x - \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydzdt - \\ & \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) \left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydzdt \\ &= - \left(u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) dx dy dz dt \\ &= - \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dx dy dz dt \end{aligned}$$

同理，在 dt 时段内流进与流出六面体的液体质量之差：

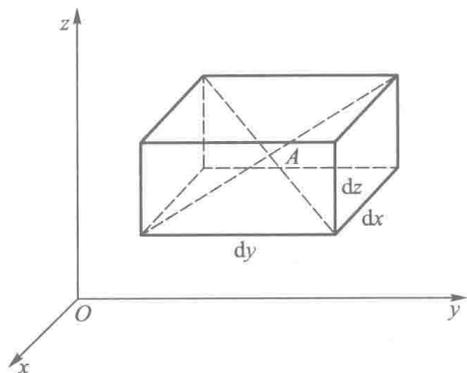


图 9.14

$$\text{在 } y \text{ 方向为} \quad -\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} dx dy dz dt$$

$$\text{在 } z \text{ 方向为} \quad -\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} dx dy dz dt$$

故在 dt 时间内流进与流出六面体总的液体质量的变化为

$$-\left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} \right] dx dy dz dt$$

又六面体内原来的平均密度为 ρ ，总质量为 $\rho dx dy dz$ ；经 dt 时段后平均密度为 $\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt$ ，总质量变为 $\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\right) dx dy dz$ ，故经过 dt 时段后六面体内质量总变化为

$$\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\right) dx dy dz - \rho dx dy dz = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt$$

在同一时段内，流进与流出六面体总的液体质量的差值应与六面体内因密度变化所引起的总的质量变化相等，即

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt = -\left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} \right] dx dy dz dt$$

除以 $dx dy dz dt$ 后得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} \right] = 0 \quad (9.45)$$

上式就是可压缩液体非恒定流的连续性方程。

对不可压缩液体， $\rho = \text{常数}$ ，因此得连续性方程为

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (9.46)$$

或写作 $\text{div } \mathbf{u} = 0$ ，式中 $\text{div } \mathbf{u}$ 叫速度散量，是个标量。

由式 (9.14) 可知， $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ ， $\frac{\partial u_y}{\partial y}$ ， $\frac{\partial u_z}{\partial z}$ 分别表示微分平行六面体沿 x ， y ， z

各方向的线变形速率。所以，微分平行六面体沿 x 方向的线变形为 $\frac{\partial u_x}{\partial x} dx dt$ ，

体积变化为 $\frac{\partial u_x}{\partial x} dx dy dz dt$ ；同理，沿 y 和 z 方向的体积变化为 $\frac{\partial u_y}{\partial y} dx dy dz dt$ 和 $\frac{\partial u_z}{\partial z}$

$dx dy dz dt$ ，故微分平行六面体的体积总变化为

$$\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dx dy dz dt$$

由式 (9.46) 可知，此体积总变化等于零。这说明液体微分平行六面体虽有

平移和线变形,但其体积大小保持不变。也就是说,如果一个方向有拉伸,则另一个方向必有压缩。

对不可压缩液体,可从连续性方程式(9.46)得到

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{u} dV = \iiint_V \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dx dy dz = 0 \quad (9.47)$$

根据高斯定理,上式的体积积分可用曲面积分来表示:

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{u} dV = \oiint_S u_n ds \quad (9.48)$$

式中: s 是体积 V 的封闭表面; u_n 为封闭表面上各点处流速在其外法线方向的投影,曲面积分 $\oiint_S u_n ds$ 称为通过封闭表面的速度通量。

由式(9.47)及式(9.48)可得

$$\oiint_S u_n ds = 0 \quad (9.49)$$

恒定流时,流管的全部表面积 s 包括两端断面和四周侧表面。在流管的侧表面上 $u_n = 0$,于是式(9.49)的曲面积分简化为

$$-\iint_{A_1} u_1 dA_1 + \iint_{A_2} u_2 dA_2 = 0$$

式中 A_1 为流管的流入断面积, A_2 为流管的流出断面积。上式第一项取负号是因为流速 u_1 的方向与 dA_1 的外法线的方向相反。由此可得

$$\iint_{A_1} u_1 dA_1 = \iint_{A_2} u_2 dA_2$$

或

$$Q_1 = Q_2 = \text{常数}$$

这就是说,恒定流时流管一端有流量 Q 流入,对不可压缩液体,另一端必有同样的流量流出。此与第3章中所求得的不可压缩液体恒定流的连续性方程完全一样。

9.7 理想液体的运动微分方程

前面讨论了液体运动的表达方法,分析了液体各种运动的特点。但是研究的只是液体运动本身,没有涉及引起液体运动的原因及条件。从本节开始将研究因外力作用而引起液体运动的规律。本节先研究理想液体的运动规律。虽然实际上并不存在理想液体,但在有些问题中,如粘滞力比其他力要小得多时,

为了分析问题简单起见,可把粘滞力略去不计,用理想液体去代替实际液体,其结果有足够的准确性。所以研究理想液体动力学是有实际意义的。

9.7.1 理想液体动水压强的特性

第一,理想液体动水压强的方向与受压面垂直并指向受压面。因为理想液体无粘滞性的作用,虽有质点的相对运动,也不会产生切应力,所以在作用面上的表面力只有压应力,没有切应力,因此理想液体的动水压强总是垂直并指向受压面。

第二,在理想液流中,任何点的动水压强在各方向上的大小均相等。这可由下列方法得到证明:

在理想液体流场中取一微小四面体 $OABC$, 如图 9.15 所示。四面体的三个边 OA , OB , OC 是相互垂直的,而且与三个坐标轴 x , y , z 相重合。倾斜面 ΔABC 是任意选取的,其面积为 ΔA_n 。假设作用在四面体四个表面上的平均动水压强各为 p_x , p_y , p_z 及 p_n , 各个面上的动水总压力各为 $\frac{1}{2} p_x \Delta y \Delta z$, $\frac{1}{2} p_y \Delta x \Delta z$, $\frac{1}{2} p_z \Delta x \Delta y$ 及 $p_n \Delta A_n$ 。

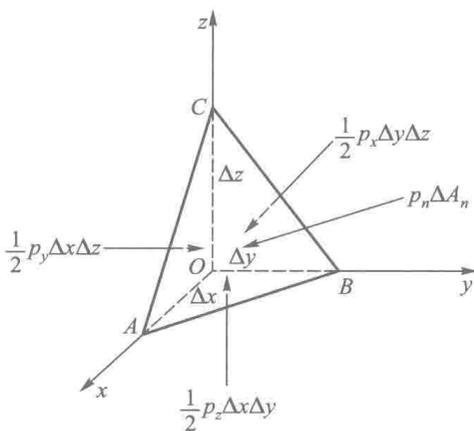


图 9.15

所受的质量力在各坐标轴上的投影分别为 f_x , f_y , f_z 。由理论力学可知,以上所有的表面力和质量力在各坐标轴上投影的代数和应等于该四面体的质量与加速度在各坐标轴上投影之乘积。若用 a_x , a_y , a_z 表示加速度在 x , y , z 轴上的投影,则可写出 x 方向的动力方程为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} p_x \Delta y \Delta z - p_n \Delta A_n \cos(n, x) + \frac{1}{6} f_x \rho \Delta x \Delta y \Delta z \\ & = \frac{1}{6} \rho \Delta x \Delta y \Delta z a_x \end{aligned}$$

因 $\Delta A_n \cos(n, x) = \Delta A_x = \frac{1}{2} \Delta y \Delta z$, 代入上式化简得

$$x \text{ 方向} \quad p_x - p_n + \frac{1}{3} f_x \rho \Delta x = \frac{1}{3} \rho \Delta x a_x$$

同理 y 方向 $p_y - p_n + \frac{1}{3} f_y \rho \Delta y = \frac{1}{3} \rho \Delta y a_y$

$$z \text{ 方向} \quad p_z - p_n + \frac{1}{3}f_z\rho\Delta z = \frac{1}{3}\rho\Delta z a_z$$

当 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 向 O 点缩小而趋近于 O 时, 微小四面体就变成一个点 O , p_x, p_y, p_z 及 p_n 就变成作用在 O 点上不同方向的动水压强。取 $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$ 时的极限, 则 $p_x = p_n, p_y = p_n, p_z = p_n$, 故 $p_x = p_y = p_z = p_n$ 。

由此可知, 理想液体动水压强的特性是与静水压强的特性完全一样的。

9.7.2 理想液体运动微分方程——欧拉方程

设在理想液体流场中任一点 $A(x, y, z)$ 的动水压强为 p , 速度为 u_x, u_y, u_z 。以 A 为中心, 取一微分平行六面体, 令其各边长为 dx, dy, dz 分别平行于 x, y, z 轴, 如图 9.16 所示。

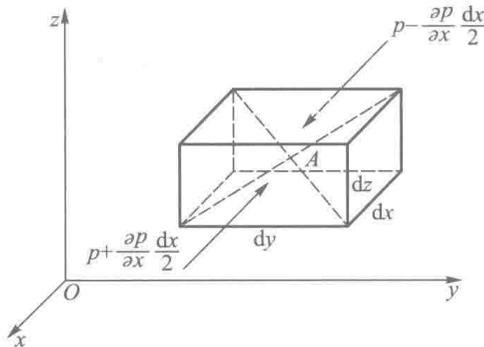


图 9.16

作用于六面体的力有表面力与质量力。

表面力只有动水压力。作用在六面体后边表面上的平均动水压强为 $p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}$, 而前边为 $p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}$ 。由此可得出作用在后边表面上的总动水压力为 $\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dydz$, 作用在前边表面上的总动水压力为 $\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dydz$ 。作用于其他四个表面上的总动水压力也可用同样方法求得。

假设单位质量的质量力在各坐标轴方向的投影为 f_x, f_y, f_z , 则作用于六面体上的质量力在 x 轴上的投影为 $f_x \rho dx dy dz$ 。

所有作用于六面体上的力在 x 轴上的投影的代数和应等于六面体的质量与加速度在 x 方向的投影之乘积, 即

$$f_x \rho dx dy dz + \left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dy dz = \rho dx dy dz \frac{du_x}{dt}$$

化简得

$$\left. \begin{aligned} f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{du_x}{dt} \\ f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{du_y}{dt} \\ f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{du_z}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (9.50)$$

同理

上式就是理想液体的运动微分方程。该方程是由欧拉在 1775 年首先推导出来的，所以也称为欧拉方程。这些方程对不可压缩的液体或可压缩的气体都是正确的。对前者密度 ρ 值为常量，而后者 ρ 值为变量。

对静止液体， $u_x = u_y = u_z = 0$ ，代入式 (9.50) 得

$$\left. \begin{aligned} f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.51)$$

上式称为静水力学欧拉平衡方程。

在 9.1 节中曾讲过加速度为时变加速度与位变加速度之和，若将式 (9.4) 代入式 (9.50)，欧拉方程可用展开的形式来表示：

$$\left. \begin{aligned} f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (9.52)$$

对不可压缩的理想液体而言， ρ 为已知常量，单位质量力 f_x, f_y, f_z 也是已知的，未知量仅为 p, u_x, u_y, u_z 。若联立求解欧拉方程 (9.52) 及连续性方程 (9.46)，从理论上来说，在理想液体中任意点在任意时刻的流速和动水压强是可以求得的。

9.7.3 葛罗米柯方程及其积分

为了使理想液体运动微分方程便于积分，葛罗米柯把欧拉方程作如下的改变：

因 $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$, 由此可写出 $\frac{u^2}{2}$ 对 x 轴的偏导数的表达式:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}{2} \right) = u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

故

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) - u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} - u_z \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

将上式代入欧拉方程组 (9.52) 的第一式得

$$\begin{aligned} f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) - u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} - u_z \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) - u_y \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + u_z \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

因 $\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 2\omega_z$, $\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} = 2\omega_y$, 代入上式整理后可得

$$\left. \begin{aligned} f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) - \frac{\partial u_x}{\partial t} &= 2(u_z \omega_y - u_y \omega_z) \\ \text{同理} \quad f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) - \frac{\partial u_y}{\partial t} &= 2(u_x \omega_z - u_z \omega_x) \\ f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u^2}{2} \right) - \frac{\partial u_z}{\partial t} &= 2(u_y \omega_x - u_x \omega_y) \end{aligned} \right\} \quad (9.53)$$

上式是葛罗米柯在 1881 年推导出来的, 叫作葛罗米柯方程。葛罗米柯方程只是欧拉方程的另一种数学表达形式, 在物理本质上并没有什么改变。但葛罗米柯方程把旋转角速度引入方程式中, 对于无涡流, 可令 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 等于零直接代入方程中, 应用十分简便。

若作用于液体上的质量力 f_x, f_y, f_z 是有势的, 由理论力学可知, 势场中的力在 x, y, z 三个坐标轴上的投影可用某一函数 $U(x, y, z, t)$ 的相应坐标轴的偏导数来表示:

$$\left. \begin{aligned} f_x &= \frac{\partial U(x, y, z, t)}{\partial x} \\ f_y &= \frac{\partial U(x, y, z, t)}{\partial y} \\ f_z &= \frac{\partial U(x, y, z, t)}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (9.54)$$

式中 $U(x, y, z, t)$ 称为力势函数, 又因液体是不可压缩的, $\rho = \text{常数}$, 将上式代入式 (9.53) 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) - \frac{\partial u_x}{\partial t} &= 2(u_z \omega_y - u_y \omega_z) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) - \frac{\partial u_y}{\partial t} &= 2(u_x \omega_z - u_z \omega_x) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) - \frac{\partial u_z}{\partial t} &= 2(u_y \omega_x - u_x \omega_y) \end{aligned} \right\} \quad (9.55)$$

上式就是作用于理想液体的质量力是有势的条件下的葛罗米柯方程。这个方程可适用于理想液体的恒定流与非恒定流、有涡流及无涡流。现将葛罗米柯方程在恒定流及非恒定流情况下的积分分述如下。

1. 理想液体恒定流的能量方程

恒定流时, $\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0$, 则式(9.55)可简化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) &= 2(u_z \omega_y - u_y \omega_z) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) &= 2(u_x \omega_z - u_z \omega_x) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) &= 2(u_y \omega_x - u_x \omega_y) \end{aligned} \right\}$$

以坐标任意增量 dx , dy , dz 分别乘以上三式各项, 然后相加得

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) dy + \frac{\partial}{\partial z} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) dz \\ &= 2[(u_z \omega_y - u_y \omega_z) dx + (u_x \omega_z - u_z \omega_x) dy + (u_y \omega_x - u_x \omega_y) dz] \end{aligned}$$

因恒定流时各运动要素与时间 t 无关, 因此上式等号左边为 $\left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right)$ 对空间坐标的全微分 $d\left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right)$, 等号右边可用行列式的形式来表示, 即

$$d\left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) = 2 \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} \quad (9.56)$$

显然, 当 $\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = 0$ 时, 上式是可以积分的, 积分后得

$$U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} = \text{常数}$$

或

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} - U = \text{常数} \quad (9.57)$$

上式就是理想液体恒定流的能量方程。这个方程是在 1738 年由伯努利 (Bernoulli) 求得的, 称为伯努利方程。从推导过程中可知该式的适用范围为

(1) 作用于理想流体的质量力是有势的;

(2) 液体是不可压缩的, $\rho = \text{常数}$;

(3) 行列式 $\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = 0$, 存在下列条件之一:

① $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$, 这一条件是液流为无涡流, 即液流为势流时, 式 (9.57) 可适用于全部势流中, 不限于在同一根流线上。

② $u_x = u_y = u_z = 0$, 这一条件系指液体是静止的, 即式 (9.57) 适用于液体处于静止状态时。

③ $\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}$, 这一条件是流线方程式, 即式 (9.57) 可适用于理想液体恒定流的同一根流线上。

④ $\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}$, 这一条件是涡线方程式, 即式 (9.57) 可适用于理想液体恒定涡流的同一根涡线上各点。

⑤ $\frac{u_x}{\omega_x} = \frac{u_y}{\omega_y} = \frac{u_z}{\omega_z}$, 这个条件是指恒定流中以流线与涡线相重合为特征的螺旋流, 即式 (9.57) 适用于恒定螺旋流。很明显地可以看出上式为流线方程与涡线方程的合并。所谓螺旋流系指液体质点既沿流线方向运动, 同时在运动过程中又绕流线旋转。

显然, 在实际应用时, 首先必须确定伯努利方程中的力函数 U 值。现在介绍在实用上常见的两种情况。

(1) 当作用于液体上的质量力只有重力时

若质量力是有势的, 即

$$f_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad f_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

故

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

当质量力只有重力时,

$$f_x = 0, \quad f_y = 0, \quad f_z = -g$$

因此

$$dU = -gdz$$

积分得 $U = -gz + C$, C 为积分常数。代入式 (9.57) 得

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = \text{常数} \quad (9.58)$$

若应用于前述的液流适用范围内的任意两点上, 则上式也可写作

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} \quad (9.59)$$

式 (9.58) 或式 (9.59) 也称为理想液体恒定流的绝对运动的伯努利方程。就是说, 液流的固体边界对地球没有相对运动, 作用在液体上的质量力只有重力而没有其他惯性力。

(2) 当作用于液体上的质量力除重力外还有离心惯性力时

例如离心水泵中的液体运动就是这种情况, 一方面液体沿固体边界运动, 另一方面此固体边界对地球又有相对运动。

图 9.17 为离心式水泵的叶轮示意图。一方面液体在叶片之间由中心向外运动, 另一方面叶轮以等角速度 ω 绕垂直轴作旋转运动。

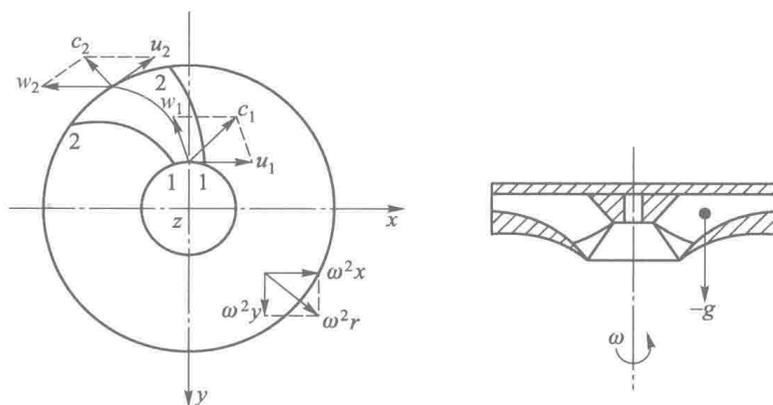


图 9.17

假定在叶片中运动的液流严格地沿叶片的对称线方向运动, 也就是说叶轮入口断面 1-1 处的相对速度 w_1 与叶轮出口断面 2-2 处的相对速度 w_2 皆与叶片对称线相切。并用 u_1 及 u_2 表示入口断面 1-1 及出口断面 2-2 处的圆周速度, 以 r_1 及 r_2 表示断面 1-1 及断面 2-2 处的半径, 则 $u_1 = \omega r_1$, $u_2 = \omega r_2$ 。

对于图 9.17 所示的坐标轴来说, 单位质量的质量力为

$$\begin{cases} f_x = \omega^2 r \cos \alpha = \omega^2 x \\ f_y = \omega^2 r \sin \alpha = \omega^2 y \\ f_z = -g \end{cases}$$

故

$$dU = f_x dx + f_y dy + f_z dz = \omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz$$

积分得

$$\begin{aligned} U &= \frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - gz + C = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - gz + C \\ &= \frac{\omega^2 r^2}{2} - gz + C \end{aligned} \quad (9.60)$$

在相对运动情况下，伯努利方程中流速 u 应该用相对速度 w 代替，将式 (9.60) 代入式 (9.57) 得

$$\frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} - \frac{\omega^2 r^2}{2} + gz = C$$

因圆周速度 $u = \omega r$ ，代入上式整理后得

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{w^2}{2g} - \frac{u^2}{2g} = C \quad (9.61)$$

对于断面 1-1，断面 2-2 两处写能量方程式：

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g} - \frac{u_2^2}{2g} \quad (9.62)$$

或

$$\left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g} \right) - \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} \right) = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} \quad (9.63)$$

式 (9.61)、式 (9.62) 或式 (9.63) 就是当质量力包括重力和离心力时液体相对运动的伯努利方程。

2. 理想液体非恒定流的能量方程

理想液体非恒定流的能量方程可由葛罗米柯方程积分求得。葛罗米柯方程的特点是直接把液体质点的旋转角速度反映在方程中，所以对非恒定无涡流应用非常方便，但对非恒定涡流则仅在一定条件下才能积分。现将这两种情形下对葛罗米柯方程的积分分述如下。

(1) 非恒定无涡流

无涡流时 $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ ，于是葛罗米柯方程 (9.55) 具有下列形式：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) - \frac{\partial u_x}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) - \frac{\partial u_y}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) - \frac{\partial u_z}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.64)$$

对上式进行积分是有困难的，必须将它改变形式。势流必有流速势函数 $\varphi(x, y, z, t)$ 存在，它对各坐标的偏导数分别等于

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

以上各式对 t 取偏导数，得

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$$

因导数的数值与取的次序无关，故

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right), \quad \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right), \quad \frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$$

将以上各式代入式 (9.64) 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.65)$$

上式依次分别乘以 dx , dy , dz 然后相加得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) dy + \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) dz = 0 \end{aligned}$$

对某一指定时刻，上式可写作

$$d \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = 0$$

积分得

$$U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = C_1$$

上式说明理想液体势流场内，在某一指定时刻 t ，任何位置的

$\left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$ 均相等, 都等于某一常数 C_1 , 但在不同时刻就有不同常数, 所以积分常数 C_1 是时间的函数, 故上式可写成

$$U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} - \frac{\partial\varphi}{\partial t} = C_1(t) \quad (9.66)$$

当质量力仅为重力时, $U = -gz + C$ 。代入式 (9.66) 得

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} + \frac{1}{g} \frac{\partial\varphi}{\partial t} = C(t) \quad (9.67)$$

上式就是理想液体非恒定无涡流的能量方程, 或称为拉格朗日方程。该式在研究无涡移动波时应用很广。

(2) 非恒定涡流

在这种情况下, 葛罗米柯方程 (9.55) 只有当非恒定流各空间点上的流速方向不随时间而变化时才能积分。如刚性管壁管路中的非恒定流就属于这种情况。此时, 流线与迹线重合, 因此如以 dx , dy , dz 表示同一流线上坐标的微分增量, 则 $dx = u_x dt$, $dy = u_y dt$, $dz = u_z dt$, 将葛罗米柯方程 (9.55) 中三个方程左边分别依次乘以 dx , dy , dz , 而右边分别乘以 $u_x dt$, $u_y dt$, $u_z dt$, 然后相加, 得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) dy + \frac{\partial}{\partial z} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) dz \\ & = \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} dx + \frac{\partial u_y}{\partial t} dy + \frac{\partial u_z}{\partial t} dz \right) \end{aligned} \quad (9.68)$$

因 $\left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2}\right)$ 是空间位置及时间的函数, 若应用于同一根流线上, 空间位置也可用沿流线上的长度来表示。这样, $\left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2}\right)$ 也是沿流线上的长度与时间的函数, 即

$$\left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) = f_1(x, y, z, t) = f_2(s, t)$$

因此上式全微分可写成

$$\begin{aligned} d\left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) dy + \\ & \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) dz + \frac{\partial}{\partial t} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) dt \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) ds + \frac{\partial}{\partial t} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) dt \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) dy + \frac{\partial}{\partial z} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) dz \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) ds \end{aligned}$$

将上式代入式 (9.68) 得

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) ds = \frac{\partial u_x}{\partial t} dx + \frac{\partial u_y}{\partial t} dy + \frac{\partial u_z}{\partial t} dz \quad (9.69)$$

由流线方程 $\frac{ds}{u} = \frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}$, 可得 $dx = u_x \frac{ds}{u}$, $dy = u_y \frac{ds}{u}$, $dz = u_z \frac{ds}{u}$ 。代

入式 (9.69) 得

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) ds = \frac{1}{u} \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial t} \right) ds \quad (9.70)$$

又因 $u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$, 对 t 取偏导数得

$$2u \frac{\partial u}{\partial t} = 2 \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial t} \right)$$

整理后可得

$$\frac{1}{u} \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial t} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}$$

故式 (9.70) 可写作

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) ds = \frac{\partial u}{\partial t} ds$$

若质量力仅为重力时, $U = -gz + C$, 代入上式, 积分后可得

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial u}{\partial t} ds \quad (9.71)$$

上式就是理想液体涡流的能量方程。该方程只能适用于流线与迹线重合时的非恒定流, 而且只能用于同一根流线上。

9.8 实际液体的运动微分方程

9.8.1 实际液体运动时所产生的内应力

上节所讲的都是理想液体的运动规律, 但在自然界中所存在的液体都是有粘滞性的, 由于粘滞性的存在, 有相对运动的各层液体之间均将产生切应力。因此在运动液体中任意划出一个平面 z (图 9.18), 作用在该平面上任意一点 A 的表面应力将与理想液体情况不同, 并非内法线方向, 而是倾斜方向的, 如

图中 p_x, p_y, p_z 在 x, y, z 三个方向均有分量：一个与 z 平面成法向的正应力 p_{zz} ，称为动水压强；两个与 z 平面成切向的切应力 p_{zx} 及 p_{zy} ，也可用 τ_{zx} 及 τ_{zy} 来表示，即 $p_{zx} = \tau_{zx}$ ， $p_{zy} = \tau_{zy}$ 。以后以 p 表示正应力， τ 表示切应力。在 p 或 τ 的右下角加两个脚号，第一个脚号表示应力所作用的面与那一个轴相垂直，第二个脚号表示应力作用方向与那一个轴平行。

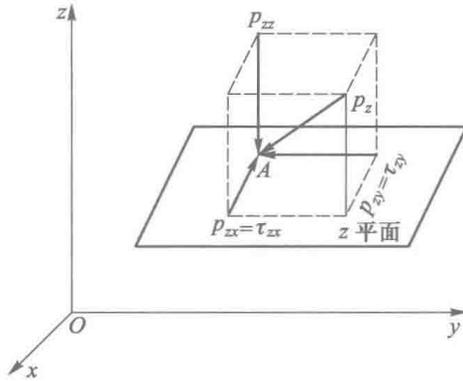


图 9.18

下面分别来讨论一下实际液体切应力与动水压强的性质和大小。

1. 切应力的性质和大小

液体运动时由于各点的流速不同，故在液体内部有相对运动发生，有相对运动的两层液体间由于粘滞性的存在必有切应力发生。若在分层运动的实际液体中分离出一个微分平行六面体，该六面体在时间 t 时在 xOz 平面上的投影如图 9.19 所示为一矩形 $ABCD$ 。 AD 边的流速为 u ， BC 边的流速为 $u + du$ 。经过时间 dt 后 AD 边沿 x 轴方向运动距离 $u dt$ ；同时 BC 边运动距离 $(u + du) dt$ 。因此矩形 $ABCD$ 将改变形状，边线 AB 将偏转一个角度 $d\theta$ 。由图可知 $\tan d\theta = \frac{du dt}{dz}$ 。当 $d\theta$ 极小时 $\tan d\theta \approx d\theta$ ，因此 $\frac{d\theta}{dt} = \frac{du}{dz}$ 。这就是说，在分层运动的实际液体中直角边的变形角速度与流速梯度相等。因此牛顿内摩擦定律可写成下列形式：

$$\tau = \eta \frac{du}{dz} = \eta \frac{d\theta}{dt} \quad (9.72)$$

在流体力学中也把上式扩大应用到实际液体的三维流动中，图 9.20a 为从实际液体中分离出来的微分平行六面体在 xOz 平面上的投影，各点的流速是不相等的，经时间 dt 后将发生直角变形如图 9.20b 所示。 BC 边对 AD 边来说有相对运动，产生切应力 τ_{zx} 。如图 9.20c 所示，其总直角变形为 $d\theta = d\alpha + d\beta$ ，直角变形速度为

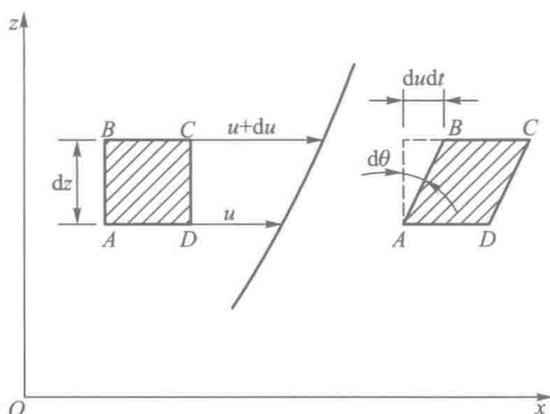


图 9.19

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\alpha + d\beta}{dt} = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{dx}{dt}}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

故

$$\tau_{zx} = \eta \frac{d\theta}{dt} = \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$$

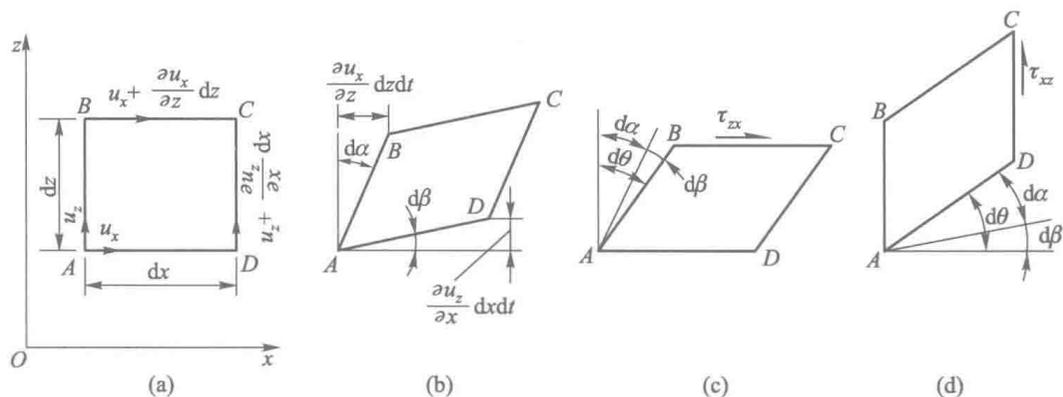


图 9.20

同理，DC 边对 AB 边来说也有相对运动，产生切应力 τ_{zx} ，相当于图 9.20d 所示，其直角变形速度仍为

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\alpha + d\beta}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

因此

$$\tau_{zx} = \eta \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)$$

由此可得

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$$

将微分平行六面体投影到 xOy 平面及 yOz 平面, 用同样方法可求出 τ_{yx} , τ_{xy} 及 τ_{yz} , τ_{zy} 。最后可综合写成

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \tau_{yx} = \tau_{xy} &= \eta \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \\ \tau_{zy} = \tau_{yz} &= \eta \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9.73)$$

由该式可知: 作用在两互相垂直平面上且与该两平面的交线相垂直的切应力大小都是相等的。

2. 动水压强的性质和大小

在运动的理想液体中, 任意点的动水压强各方向都是相等的, 那么在实际液体中任意点的动水压强的性质是否也一样? 以下讨论这个问题。

如图 9.21 所示, 在运动的实际液体中分离出一个微分平行六面体, 并将其分成两半, 取出上半三棱体来分析, 各面上所作用的表面力有正应力和切应力, 如图 9.22 所示。假设在 y

方向的加速度分量为 a_y , 重力为 $\frac{1}{2}\rho g dx dy dz$ 。

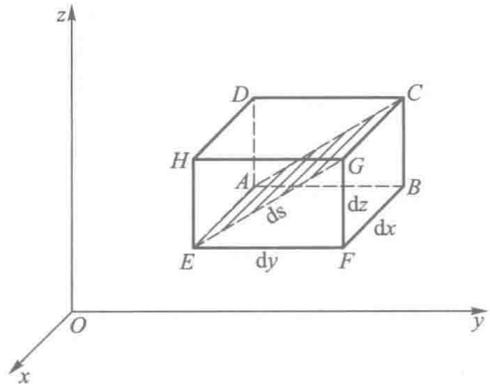


图 9.21

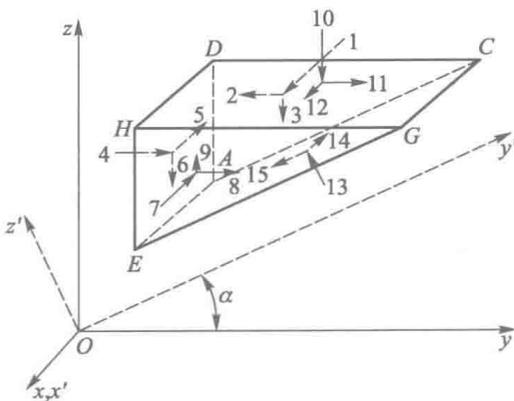


图 9.22

- 图中: 1. p_{xx} 2. τ_{xy}
 3. τ_{xz} 4. p_{yy} 5. τ_{yx}
 6. τ_{yz} 7. $p_{xx} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} dx$
 8. $\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx$ 9. $\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx$
 10. p_{zz} 11. τ_{zy} 12. τ_{zx}
 13. $p_{z'z'}$ 14. $\tau_{z'x'}$ 15. $\tau_{z'y'}$

根据牛顿运动第二定律可写出沿 y 方向的动力平衡方程式:

$$p_{yy} dx dz + \tau_{zy} dx dy - \tau_{xy} \frac{1}{2} dy dz + \frac{1}{2} \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy dz - p_{z'z'} dx ds \sin \alpha - \tau_{z'y'} dx ds \cos \alpha = \frac{1}{2} \rho dx dy dz a_y$$

因 $ds \sin \alpha = dz$, $ds \cos \alpha = dy$, 代入上式, 除以 $dx dz$ 得

$$p_{yy} + \tau_{zy} \cot \alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dy - p_{z'z'} - \tau_{z'y'} \cot \alpha = \frac{1}{2} \rho dy a_y$$

当 dx , dy , dz 趋近于零时, 该三棱体变成一点, p_{yy} , p_{zz} , $p_{z'z'}$ 就是该点各方向的动水压强。上式中含有 dy 的项与其他各项相比是一阶无限小量, 可略去不计, 上式可简化为

$$p_{yy} - p_{z'z'} + (\tau_{zy} - \tau_{z'y'}) \cot \alpha = 0$$

故

$$p_{yy} \neq p_{z'z'}$$

另取正交坐标系 Ox' , Oy' , Oz' , 令 Ox' 轴与 Ox 轴重合, Oy' 轴平行于 $AE-GC$ 平面。根据牛顿第二定律可写出沿 Oy' 轴的动力平衡方程式, 化简之, 其中含有 dx , dy , dz 的项与其他各项比较是一阶无限小量, 可以略去不计, 最后可得

$$\tau_{z'y'} = \tau_{zy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (p_{yy} - p_{zz}) \sin \alpha \cos \alpha \quad (9.74)$$

故

$$p_{yy} \neq p_{zz}$$

由此可知, $p_{yy} \neq p_{zz} \neq p_{z'z'}$, 即在实际液流中任一点的动水压强各方向是不相等的。所以在实用上均采用任意三个正交方向的动水压强的平均值来表示:

$$p = \frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3}$$

此平均动水压强是与方向无关的。这可证明如下:

若以 u_x , u_y , u_z 表示 A 点在 Ox , Oy , Oz 坐标系上的分速度, 以 $u_{x'}$, $u_{y'}$, $u_{z'}$ 表示 A 点在 Ox' , Oy' , Oz' 坐标系上的分速度。对两个不同坐标系而言可得

$$\tau_{zy} = \eta \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)$$

$$\tau_{z'y'} = \eta \left(\frac{\partial u_{z'}}{\partial y'} + \frac{\partial u_{y'}}{\partial z'} \right)$$

将以上两式的 τ_{zy} 及 $\tau_{z'y'}$ 代入式 (9.74) 得

$$\eta \left(\frac{\partial u_{z'}}{\partial y'} + \frac{\partial u_{y'}}{\partial z'} \right) = \eta \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (p_{yy} - p_{zz}) \sin \alpha \cos \alpha \quad (9.75)$$

又由坐标转换原理 (参看图 9.23)

可得

$$\left. \begin{aligned} y &= y' \cos \alpha - z' \sin \alpha \\ z &= y' \sin \alpha + z' \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (9.76)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{y'} &= u_y \cos \alpha + u_z \sin \alpha \\ u_{z'} &= u_z \cos \alpha - u_y \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (9.77)$$

由式 (9.76) 可得

$$\left. \begin{aligned} dy &= \cos \alpha dy' - \sin \alpha dz' \\ dz &= \sin \alpha dy' + \cos \alpha dz' \end{aligned} \right\} \quad (9.78)$$

又由式 (9.77) 中第一式得

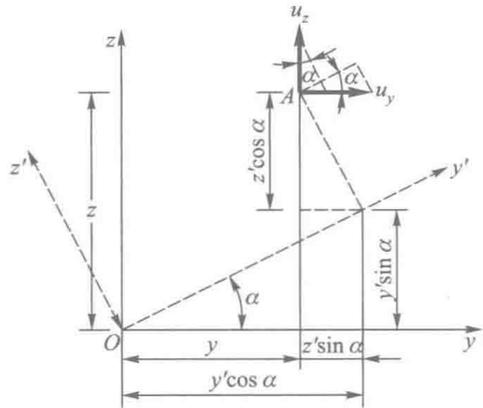


图 9.23

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_{y'}}{\partial z} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} \cos \alpha + \frac{\partial u_z}{\partial z} \sin \alpha \\ \frac{\partial u_{y'}}{\partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \cos \alpha + \frac{\partial u_z}{\partial y} \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (9.79)$$

由于速度是坐标函数, 故在 Oyz 坐标系内

$$du_{y'} = \frac{\partial u_{y'}}{\partial y} dy + \frac{\partial u_{y'}}{\partial z} dz$$

将式 (9.78) 代入上式得

$$\begin{aligned} du_{y'} &= \frac{\partial u_{y'}}{\partial y} (\cos \alpha dy' - \sin \alpha dz') + \frac{\partial u_{y'}}{\partial z} (\sin \alpha dy' + \cos \alpha dz') \\ &= \left(\cos \alpha \frac{\partial u_{y'}}{\partial y} + \sin \alpha \frac{\partial u_{y'}}{\partial z} \right) dy' + \left(-\sin \alpha \frac{\partial u_{y'}}{\partial y} + \cos \alpha \frac{\partial u_{y'}}{\partial z} \right) dz' \end{aligned} \quad (9.80)$$

在 $Oy'z'$ 坐标系内

$$du_{y'} = \frac{\partial u_{y'}}{\partial y'} dy' + \frac{\partial u_{y'}}{\partial z'} dz' \quad (9.81)$$

比较式 (9.80) 及 (9.81) 两式中带有 dz' 的项, 得

$$\frac{\partial u_{y'}}{\partial z'} = -\sin \alpha \frac{\partial u_{y'}}{\partial y} + \cos \alpha \frac{\partial u_{y'}}{\partial z}$$

将式 (9.79) 代入上式整理后可得

$$\frac{\partial u_{y'}}{\partial z'} = \frac{\partial u_y}{\partial z} \cos^2 \alpha - \frac{\partial u_z}{\partial y} \sin^2 \alpha + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \sin \alpha \cos \alpha \quad (9.82)$$

用类似的方法可得

$$\frac{\partial u_{z'}}{\partial y'} = \frac{\partial u_z}{\partial y} \cos^2 \alpha - \frac{\partial u_y}{\partial z} \sin^2 \alpha + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \sin \alpha \cos \alpha \quad (9.83)$$

将式 (9.82) 及式 (9.83) 代入式 (9.75), 并加以整理, 可得

$$p_{yy} - p_{zz} = 2\eta \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)$$

或写作

$$p_{yy} + 2\eta \frac{\partial u_y}{\partial y} = p_{zz} + 2\eta \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

取另一微分三棱体 $AEFGDH$, 用同样方法可求得

$$p_{yy} + 2\eta \frac{\partial u_y}{\partial y} = p_{xx} + 2\eta \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

故

$$p_{xx} + 2\eta \frac{\partial u_x}{\partial x} = p_{yy} + 2\eta \frac{\partial u_y}{\partial y} = p_{zz} + 2\eta \frac{\partial u_z}{\partial z} = \text{常数} = p$$

或写成

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} + 2\eta \frac{\partial u_x}{\partial x} &= p \\ p_{yy} + 2\eta \frac{\partial u_y}{\partial y} &= p \\ p_{zz} + 2\eta \frac{\partial u_z}{\partial z} &= p \end{aligned} \right\} \quad (9.84)$$

将以上三式相加, 整理后可得

$$p = \frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3} + \frac{2}{3}\eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)$$

对于不可压缩液体, 连续性方程为 $\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$, 代入上式得

$$p = \frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3} \quad (9.85)$$

由此可知, 常数 p 为在同一点上沿三个正交方向的动水压强的平均值。而

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= p - 2\eta \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ p_{yy} &= p - 2\eta \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ p_{zz} &= p - 2\eta \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (9.86)$$

上式等号右边第二项为由粘滞性所产生的附加正应力，所以实际液体中的动水压强 p_{xx} , p_{yy} , p_{zz} 可以看作是由两部分正应力所组成：在同一点上三个正交方向的动水压强平均值 p 及单纯由粘滞性所产生的附加正应力 p'_{xx} , p'_{yy} , p'_{zz} ，即

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= p + p'_{xx} \\ p_{yy} &= p + p'_{yy} \\ p_{zz} &= p + p'_{zz} \end{aligned} \right\} \quad (9.87)$$

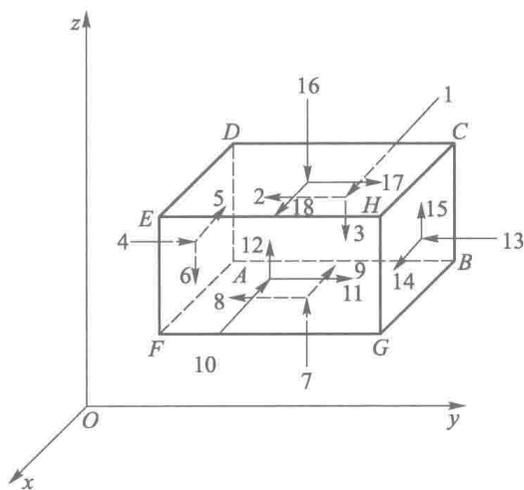
式中

$$\left\{ \begin{aligned} p'_{xx} &= -2\eta \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ p'_{yy} &= -2\eta \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ p'_{zz} &= -2\eta \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned} \right.$$

理想液体时 $\eta = 0$, $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = p$, 故在同一点上各方向的动水压强是相等的。

9.8.2 液流的运动微分方程

在实际液体中分离出一个微分平行六面体，如图 9.24 所示，各边长为 dx , dy , dz ，其质量为 $\rho dx dy dz$ 。作用在六面体上的表面力每面有三个：一个法向正应力，两个切应力。法向力都是沿内法线方向。假设包含 A 点的三个面上的切应力为负向，则包含 H 点的三个面上的切应力必为正向。



- 图中: 1. p_{xx} 2. τ_{xy} 3. τ_{xz}
 4. p_{yy} 5. τ_{yx} 6. τ_{yz}
 7. p_{zz} 8. τ_{zy} 9. τ_{zx}
 10. $p_{xx} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} dx$ 11. $\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx$
 12. $\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx$ 13. $p_{yy} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} dy$
 14. $\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy$ 15. $\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy$
 16. $p_{zz} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} dz$ 17. $\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz$
 18. $\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz$

图 9.24

根据牛顿第二定律写出 x 方向动力平衡方程:

$$\begin{aligned} & \rho f_x dx dy dz + p_{xx} dy dz - \left(p_{xx} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} dx \right) dy dz - \tau_{yx} dx dz + \\ & \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{zx} dx dy + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy \\ & = \rho dx dy dz \frac{du_x}{dt} \end{aligned}$$

化简得

$$\text{同理} \quad \left. \begin{aligned} f_x - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) &= \frac{du_x}{dt} \\ f_y - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{yy}}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) &= \frac{du_y}{dt} \\ f_z - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) &= \frac{du_z}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (9.88)$$

上式就是以应力表示的实际液体运动基本微分方程。

1. 纳维 - 斯托克斯 (Navier - Stokes) 方程

式 (9.88) 中除质量力 f_x, f_y, f_z 及密度 ρ 一般为已知量外, 式中尚有 9 个应力及 3 个速度分量共有 12 个未知量, 3 个运动微分方程加上 1 个连续方程仅有 4 个方程, 因此是无法求解的, 必须另找关系式。

若将已求得的式 (9.73) 及式 (9.86) 代入式 (9.88), 以第一式为例, 整理后可得

$$f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \frac{du_x}{dt}$$

对于不可压缩液体来说, $\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$, 故

$$\text{同理} \quad \left. \begin{aligned} f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) &= \frac{du_x}{dt} \\ f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) &= \frac{du_y}{dt} \\ f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) &= \frac{du_z}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (9.89)$$

上式括号内可以写成拉普拉斯算式 $\nabla^2 u_x, \nabla^2 u_y, \nabla^2 u_z$, 故上式可写成

$$\left. \begin{aligned} f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u_x &= \frac{du_x}{dt} \\ f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 u_y &= \frac{du_y}{dt} \\ f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 u_z &= \frac{du_z}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (9.90)$$

或

$$\left. \begin{aligned} f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u_x &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 u_y &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 u_z &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (9.91)$$

式 (9.90) 或式 (9.91) 就是适用于不可压缩粘滞性液体的运动微分方程, 一般通称之为纳维-斯托克斯方程。如果液体没有粘滞性 (即理想液体) 则 $\nu=0$, 于是纳维-斯托克斯方程就变成理想液体的欧拉运动方程 (9.50)。

如果没有运动, 则 $\frac{du_x}{dt}$, $\frac{du_y}{dt}$, $\frac{du_z}{dt}$ 均等于零, 且 u_x , u_y , u_z 也均等于零, 于是纳维-斯托克斯方程式就变成静水力学欧拉平衡方程 (9.51)。所以纳维-斯托克斯方程是不可压缩液体的普遍方程。

方程 (9.91) 有 4 个未知量 p , u_x , u_y 和 u_z , 而纳维-斯托克斯方程及连续性方程共有 4 个方程, 因此, 方程组是封闭的。但纳维-斯托克斯方程中存在非线性项, 使得求该方程组的解析解十分困难, 只有当非线性项在某些特殊条件下可以消除时, 才能较容易地求出解析解。在无法求得解析解的情况下, 进行数值求解便成为一种有效的途径。一般情况下, 目前的计算机容量和速度还无法满足直接数值求解纳维-斯托克斯方程的要求。近年来, 对某些流动问题, 已可以实现数值求解。

例 9.6 试用纳维-斯托克斯方程求直圆管层流运动的流速及流量表达式 (图 9.25)。

解: 层流运动时, 液体质点只有沿轴向的流动而无横向运动, 若取圆管中心轴为 y 轴, 则 $u_y \neq 0$, $u_x = u_z = 0$ 。现取纳维-斯托克斯方程组中第二式来看

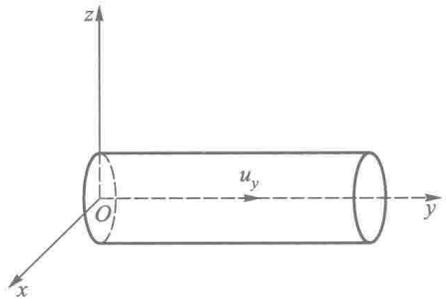


图 9.25

$$f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z}$$

恒定流时, $\frac{\partial u_y}{\partial t} = 0$ 。质量力只有重力时, $f_y = 0$, 因 $u_x = u_z = 0$, 所以

$$u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0, \quad u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0。由连续方程 \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, 可知 \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0。由此可得, u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} = 0。$$

将以上各值代入纳维-斯托克斯方程组第二式, 可简化为

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \eta \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) \quad (\text{a})$$

因 $\frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$, 所以 u_y 沿 y 方向没有变化, 由式 (a) 可知 $\frac{\partial p}{\partial y}$ 与 y 无关, 即动

水压强沿 y 轴方向的变化率 $\frac{\partial p}{\partial y}$ 是一个常数, 可写成

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \text{常数} = -\frac{\Delta p}{L} \quad (\text{b})$$

式中 Δp 为沿 y 方向长度为 L 的管段上的压强降落。由于压强是沿水流方向下降的, 所以应在 Δp 前加一负号。

因为圆管中的液流是轴对称的, $\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}$ 与 $\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}$ 相同, 而且 x 与 z 都是沿半径方向的, 故变量 x, z 可换成变量 r 。而 u_y 与 y 无关, 仅为 r 的函数, 所以 u_y 对 r 的偏导数可以直接写成全导数

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u_y}{\partial r^2} = \frac{d^2 u_y}{dr^2} \quad (\text{c})$$

将式 (b) 及式 (c) 代入式 (a) 可得

$$-\frac{\Delta p}{L} = 2\eta \frac{d^2 u_y}{dr^2}$$

或

$$\frac{d^2 u_y}{dr^2} = -\frac{\Delta p}{2\eta L}$$

将上式积分

$$\frac{du_y}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\eta L} r + C_1$$

利用轴心处的条件 $r=0$, $\frac{du_y}{dr}=0$, 得 $C_1=0$ 。故

$$\frac{du_y}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\eta L}r$$

再积分, 得

$$u_y = -\frac{\Delta p}{4\eta L}r^2 + C_2$$

利用管壁处的条件 $r=r_0$, $u_y=0$, 得 $C_2 = \frac{\Delta p}{4\eta L}r_0^2$, 故

$$u_y = \frac{\Delta p}{4\eta L}(r_0^2 - r^2)$$

上式表明: 圆管中层流过水断面上的流速是按抛物面的规律分布的。

由图 9.26 可知

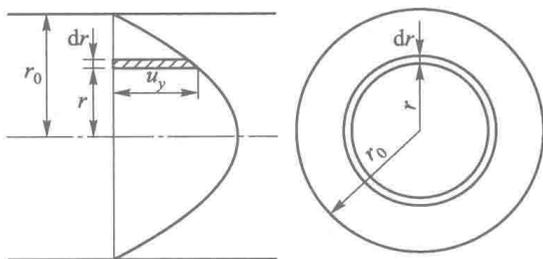


图 9.26

$$dQ = u_y 2\pi r dr$$

故通过过水断面的总流量为

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{r_0} u_y 2\pi r dr = \frac{\pi \Delta p}{2\eta L} \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2) r dr \\ &= \frac{\pi \Delta p}{8\eta L} r_0^4 \end{aligned}$$

过水断面平均流速为

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi r_0^2} = \frac{\Delta p}{8\eta L} r_0^2$$

2. 湍流的时均运动微分方程式——雷诺方程式

因

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

故方程组 (9.88) 中第一式可写成

$$\rho f_x - \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \frac{\partial u_x}{\partial t} + \rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \rho u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \quad (9.92)$$

若液体是不可压缩的, 则连续性方程式为

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

上式各项乘以 ρu_x , 得

$$\rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \rho u_x \frac{\partial u_y}{\partial y} + \rho u_x \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (9.93)$$

式 (9.92) 与式 (9.93) 相加, 得

$$\begin{aligned} \rho f_x - \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial u_x}{\partial t} + 2\rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \\ \rho \left(u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) &+ \rho \left(u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\ = \rho \frac{\partial u_x}{\partial t} + \rho \frac{\partial (u_x^2)}{\partial x} &+ \rho \frac{\partial (u_x u_y)}{\partial y} + \rho \frac{\partial (u_x u_z)}{\partial z} \end{aligned}$$

整理后得

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial u_x}{\partial t} &= \rho f_x - \frac{\partial}{\partial x}(p_{xx} + \rho u_x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx} - \rho u_x u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx} - \rho u_x u_z) \\ \text{同理} \quad \rho \frac{\partial u_y}{\partial t} &= \rho f_y - \frac{\partial}{\partial y}(p_{yy} + \rho u_y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zy} - \rho u_y u_z) + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy} - \rho u_y u_x) \\ \rho \frac{\partial u_z}{\partial t} &= \rho f_z - \frac{\partial}{\partial z}(p_{zz} + \rho u_z^2) + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xz} - \rho u_z u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yz} - \rho u_z u_y) \end{aligned} \right\} \quad (9.94)$$

上式是实际液体运动微分方程式的另一种表示形式, 既适用于层流, 也适用于瞬时湍流。但因湍流的瞬时运动要素有脉动现象, 应用时甚为困难, 因此研究湍流运动, 必须求出湍流的时均运动方程及连续性方程。

现将方程组 (9.94) 中的第一式进行时间平均, 即

$$\begin{aligned} \rho \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial u_x}{\partial t} dt &= \rho \frac{1}{T} \int_0^T f_x dt - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial}{\partial x}(p_{xx} + \rho u_x^2) dt + \\ &\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx} - \rho u_x u_y) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx} - \rho u_x u_z) dt \quad (9.95) \end{aligned}$$

因

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial u_x}{\partial t} dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial (\bar{u}_x + u'_x)}{\partial t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t} dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial u'_x}{\partial t} dt \\ &= \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t} + 0 = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T} \int_0^T f_x dt &= \frac{1}{T} \int_0^T (\bar{f}_x + f'_x) dt = \bar{f}_x \\
\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p}_{xx} + \rho u_x^2) dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial (\bar{p}_{xx} + \rho u_x^2)}{\partial x} dt + \\
&\quad \rho \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}_x^2 + 2 \bar{u}_x u'_x + u'^2_x) dt \\
&= \frac{\partial \bar{p}_{xx}}{\partial x} + \rho \frac{\partial \bar{u}_x^2}{\partial x} + \rho \frac{\partial \overline{u'^2_x}}{\partial x} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p}_{xx} + \rho \bar{u}_x^2 + \rho \overline{u'^2_x}) \\
\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx} - \rho u_x u_y) dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial (\bar{\tau}_{yx} + \tau'_{yx})}{\partial y} dt - \rho \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial}{\partial y} (\bar{u}_x + u'_x) (\bar{u}_y + u'_y) dt \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial y} dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \tau'_{yx}}{\partial y} dt - \\
&\quad \rho \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial}{\partial y} (\bar{u}_x \bar{u}_y + u'_x \bar{u}_y + \bar{u}_x u'_y + u'_x u'_y) dt \\
&= \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial y} - \rho \frac{\partial}{\partial y} (\bar{u}_x \bar{u}_y) - \rho \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'_x u'_y}) \\
&= \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\tau}_{yx} - \rho \bar{u}_x \bar{u}_y - \rho \overline{u'_x u'_y}) \\
\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx} - \rho u_x u_z) dt &= \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\tau}_{zx} - \rho \bar{u}_x \bar{u}_z - \rho \overline{u'_x u'_z})
\end{aligned}$$

故式 (9.95) 可写作

$$\left. \begin{aligned}
\rho \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t} &= \rho \bar{f}_x - \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p}_{xx} + \rho \bar{u}_x^2 + \rho \overline{u'^2_x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\tau}_{yx} - \rho \bar{u}_x \bar{u}_y - \rho \overline{u'_x u'_y}) + \\
&\quad \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\tau}_{zx} - \rho \bar{u}_x \bar{u}_z - \rho \overline{u'_x u'_z}) \\
\rho \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial t} &= \rho \bar{f}_y - \frac{\partial}{\partial y} (\bar{p}_{yy} + \rho \bar{u}_y^2 + \rho \overline{u'^2_y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\tau}_{zy} - \rho \bar{u}_y \bar{u}_z - \rho \overline{u'_y u'_z}) + \\
&\quad \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\tau}_{xy} - \rho \bar{u}_y \bar{u}_x - \rho \overline{u'_x u'_y}) \\
\rho \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial t} &= \rho \bar{f}_z - \frac{\partial}{\partial z} (\bar{p}_{zz} + \rho \bar{u}_z^2 + \rho \overline{u'^2_z}) + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\tau}_{xz} - \rho \bar{u}_z \bar{u}_x - \rho \overline{u'_z u'_x}) + \\
&\quad \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\tau}_{yz} - \rho \bar{u}_z \bar{u}_y - \rho \overline{u'_z u'_y})
\end{aligned} \right\} \quad (9.96)$$

上式就是湍流时均微分方程，由雷诺（1894年）首先提出的，叫作雷诺方程。

将湍流时均运动微分方程（9.96）与可以适用于层流的运动微分方程（9.94）比较，可以看出

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 (\bar{p}_{xx} + \rho \overline{u'^2_x}) \\
 \text{时均湍流正应力 } (\bar{p}_{yy} + \rho \overline{u'^2_y}) \\
 (\bar{p}_{zz} + \rho \overline{u'^2_z})
 \end{array} \right\} \text{比层流时正应力} \left. \begin{array}{l}
 p_{xx} \\
 p_{yy} \\
 p_{zz}
 \end{array} \right\} \text{多出一项} \left. \begin{array}{l}
 + \rho \overline{u'^2_x} \\
 + \rho \overline{u'^2_y} \\
 + \rho \overline{u'^2_z}
 \end{array} \right\} \\
 \\
 \left. \begin{array}{l}
 (\bar{\tau}_{xy} - \rho \overline{u'_x u'_y}) \\
 (\bar{\tau}_{yx} - \rho \overline{u'_x u'_y}) \\
 \text{时均湍流切应力 } (\bar{\tau}_{yz} - \rho \overline{u'_y u'_z}) \\
 (\bar{\tau}_{zy} - \rho \overline{u'_y u'_z}) \\
 (\bar{\tau}_{zx} - \rho \overline{u'_z u'_x}) \\
 (\bar{\tau}_{xz} - \rho \overline{u'_z u'_x})
 \end{array} \right\} \text{比层流时切应力} \left. \begin{array}{l}
 \tau_{xy} \\
 \tau_{yx} \\
 \tau_{yz} \\
 \tau_{zy} \\
 \tau_{zx} \\
 \tau_{xz}
 \end{array} \right\} \text{多出一项} \left. \begin{array}{l}
 -\rho \overline{u'_x u'_y} \\
 -\rho \overline{u'_x u'_y} \\
 -\rho \overline{u'_y u'_z} \\
 -\rho \overline{u'_y u'_z} \\
 -\rho \overline{u'_z u'_x} \\
 -\rho \overline{u'_z u'_x}
 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

这就是说，湍流时的时均应力可以看作是由两部分所组成的：即时均流速 \bar{u} 所构成的层流运动所产生的应力和单纯由流速脉动所引起的附加应力。 $\rho \overline{u'^2_x}$, $\rho \overline{u'^2_y}$, $\rho \overline{u'^2_z}$ 为附加正应力， $-\rho \overline{u'_x u'_y}$, $-\rho \overline{u'_y u'_z}$, $-\rho \overline{u'_z u'_x}$ 为附加切应力。这些附加应力都叫雷诺应力。

连续性方程式进行时间平均后得

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} = 0$$

由于湍流的瞬时运动要素用时均及脉动的运动要素来代替，使运动微分方程的未知量增加了6个附加应力，但方程式的数目并未增加，只有当找出6个附加应力的新的方程，才能获得封闭的方程组。一般情况下，这样的封闭方程组也需要采用数值方法进行求解。通过引入新的方程，使方程组封闭，进而配以适当的计算方法，便构成了所谓的湍流数学模型，它目前在流体计算中得到了广泛的应用。

9.9 边界层理论基础

前几节已经指出纳维-斯托克斯方程只有在边界条件极简单的情况下才能

求解,有些复杂的问题只能采用近似解法求解。近似解法一般是根据具体情况略去纳维-斯托克斯方程中的一些次要项来进行求解。例如,当雷诺数很小时可略去纳维-斯托克斯方程中的惯性项,因雷诺数是表征惯性力与粘滞力的比值的,雷诺数很小时,惯性力与粘滞力相比是微不足道的。1851年,斯托克斯曾应用这种方法求得了粘滞液体绕圆球时的阻力公式。但因人们在实际工程上所遇到的往往是雷诺数很大的情况,所以这种方法在实用上能解决问题的范围是很狭窄的。当雷诺数很大时,粘滞力与惯性力相比是微不足道的,因此在纳维-斯托克斯方程中粘性项可以略去不计。这样,就可把实际液体的运动简化为理想液体的运动来处理。但并不是所有液体的运动问题都能用这种办法来处理,最明显的例子是液体绕圆柱体的流动,如果略去粘滞力不计,那么液体绕圆柱体流动时作用于柱体的动水总压力等于零,也就是说圆柱体在静水中等速前进时没有阻力,这与实际是矛盾的。由此可见,当雷诺数很大时,如果不是针对具体情况具体分析,只是形式地处理纳维-斯托克斯方程,就会得到荒谬的结论。所以,当雷诺数很大时,有许多问题惯性项和粘性项两者均不能忽略,求解就很困难。1904年普朗特对雷诺数很大的情况进行了研究,首先创立了边界层理论,对解决高雷诺数粘滞液体的问题提供了理论分析的可能,流体力学的发展,从此进入了新的阶段。

9.9.1 边界层基本概念

在无限深的理想液体平行直线流中,如果顺流放置一块极薄的平板,则在平板上及其附近液体的流速将与未受扰动的原有流速 U_0 相同,平板对液流并无影响。若液体具有粘滞性,则情况就会完全不同,紧靠平板的一层液体的质点将附着于平板表面上,与平板表面无相对运动,流速为零;而在距平板法线方向一定距离处流速仍为未受扰动的原有流速 U_0 。因此,从平板表面到未扰动的液流之间存在着一个流速分布不均匀的区域,这个区域就是水流受平板影响的范围,叫作边界层,如图 9.27 所示。边界层的厚度常用符号 δ 表示。

边界层的厚度是沿平板而变化的。因为粘滞液体流经平板时有内摩擦阻力发生,克服阻力必耗损一部分能量,以致平板附近部分水流的流速变缓,流经平板距离愈长,耗损能量愈多,水流受平板影响范围也愈大,所以边界层的厚度总是随距板端的距离 x 而增加的。

边界层内的液流型态可能是层流,也可能是湍流。在板端附近边界层极薄,流速自零迅速增至 U_0 ,因此流速梯度极大,以致产生很大的内摩擦阻力,所以板端附近边界层内的液流往往是层流。距板端距离愈远,边界层厚度愈厚,流速梯度随边界层厚度增加而变小,内摩擦阻力也相应减小,边界层内的

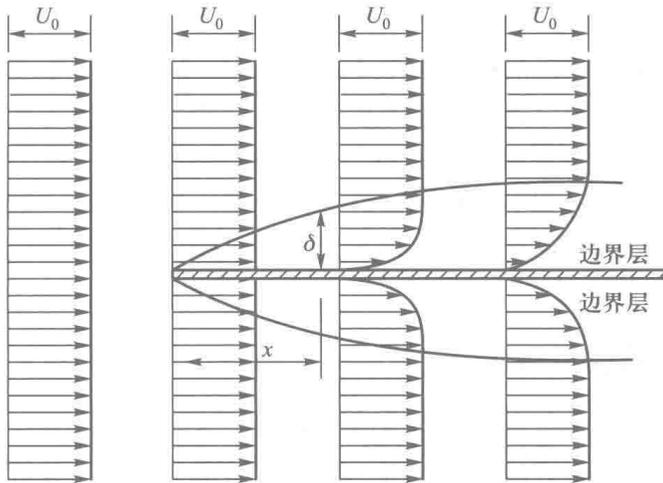


图 9.27

液流可自层流逐渐过渡到湍流。但在湍流边界层中靠近固体表面仍有一层极薄的粘性底层（厚度为 δ_0 ）存在，如图 9.28 所示。

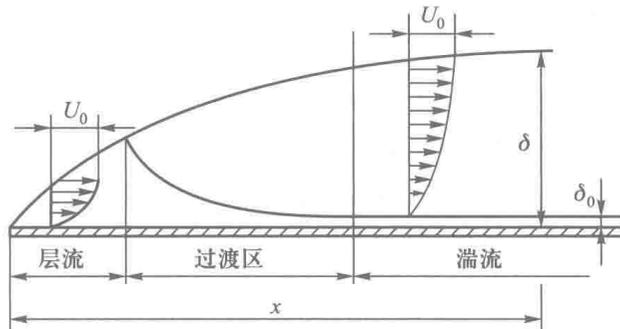


图 9.28

若雷诺数用形式

$$Re_x = \frac{U_0 x}{\nu}$$

表示，则距板端距离 x 愈远，雷诺数也愈大。当雷诺数达到某一临界值时，液流即自层流转变为湍流。据试验结果，临界雷诺数约在 $5 \times 10^5 \sim 10^6$ 之间，如液流非常平静，最高的临界雷诺数也可超过 10^6 。

根据边界层的概念，可把粘滞液流分成两个区域：在边界层以外，流速梯度为零，无内摩擦力发生，因而也可视为理想液体的流动，符合势流的运动规律；在边界层以内，流速自零增至 U_0 ，流速梯度很大，内摩擦力十分显著。因此，分析边界层内的运动规律时，必须以粘滞液体所服从的定律（纳维 -

斯托克斯方程) 为依据。

因为固体表面对水流的影响仅限于边界层内, 所以研究水工建筑物的水流阻力、能量损失等问题只要分析边界层内的水流即可。水流中产生局部阻力实质上也是边界层的分离现象所引起的。20 世纪中叶以来边界层的理论有很大发展, 许多水力学问题如溢流坝坝面流速系数理论值的推求、陡槽中高速水流掺气发生点的确定等, 都要从研究边界层入手, 所以研究边界层的理论对水力学的发展有重要意义。

9.9.2 边界层微分方程

现仅讨论恒定二维流情况, 在无限空间中水平放置的平板, 不考虑质量力的作用。这样, 不可压缩液体的纳维 - 斯托克斯微分方程及连续性方程可写作

$$\left. \begin{aligned} u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \\ u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.97)$$

利用边界层内液流的运动特性, 这些方程式可以大大简化。下面对上列各式中所包含的各项进行数量级估计。

在边界层内, y 的数值由零变到 δ 。根据边界层的定义, δ 与所绕流物体长度 l 的比值 $\frac{\delta}{l}$ 是很小的。

x 为距固体表面的距离, 所以它的数量级是所绕流的物体的长度 l 。

因在固体壁上 $u_x = 0$, 而在边界层外边界上 $u_x = U_0$, 所以 u_x 具有 U_0 的数量级。

由此可得到方程式中一些要素的数量级如下 (用符号 \sim 表示相同的数量级):

$$y \sim \delta, \quad x \sim l, \quad u_x \sim U_0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} \sim \frac{U_0}{\delta}, \quad \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \sim \frac{U_0}{\delta^2}, \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} \sim \frac{U_0}{l}, \quad \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \sim \frac{U_0}{l^2}.$$

由连续性方程式 $\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\partial u_y}{\partial y}$ 可知, $\frac{\partial u_y}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ 具有同一数量级, 因此

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} \sim \frac{U_0}{l}, \quad \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \sim \frac{U_0}{l\delta}.$$

又因 $u_y = \int_0^y \frac{\partial u_y}{\partial y} dy$, 故 $u_y \sim \frac{U_0}{l}\delta$, $\frac{\partial u_y}{\partial x} \sim \frac{U_0\delta}{l^2}$, $\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \sim \frac{U_0\delta}{l^3}$ 。

由此可以把方程组 (9.97) 中前两式各项的数量级标出:

$$\left. \begin{aligned} u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \\ \frac{U_0^2}{l} & \quad \frac{U_0^2}{l} & \quad \frac{U_0}{l^2} & \quad \frac{U_0}{\delta^2} \\ u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) \\ \frac{U_0^2 \delta}{l^2} & \quad \frac{U_0^2 \delta}{l^2} & \quad \frac{U_0 \delta}{l^3} & \quad \frac{U_0}{l \delta} \end{aligned} \right\} \quad (9.98)$$

根据上列方程组各项的数量级进行分析比较可以看出:

① 第一式中惯性项 $u_x \frac{\partial u_x}{\partial x}$ 和 $u_y \frac{\partial u_x}{\partial y}$ 是同一数量级的量, 因此两者相比任何一个都是不能省略的。

② 第一式中粘性项 $\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}$ 与 $\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$ 相比, 其数量级比例 $\frac{U_0}{l^2} : \frac{U_0}{\delta^2} = \left(\frac{\delta}{l} \right)^2$ 是一个微小值的平方, 故 $\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}$ 一项可略去不计。

③ 第二式中惯性项 $u_x \frac{\partial u_y}{\partial x}$ 和 $u_y \frac{\partial u_y}{\partial y}$ 是同一数量级的量, 两者相比, 任何一个都是不能省略的。

④ 第二式中粘性项 $\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}$ 与 $\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}$ 相比, 其数量级比例 $\frac{U_0 \delta}{l^3} : \frac{U_0}{l \delta} = \left(\frac{\delta}{l} \right)^2$ 是一个微小值的平方, 故 $\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}$ 可以略去不计。

由以上分析, 式 (9.98) 可以简化为

$$\left. \begin{aligned} u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \\ \frac{U_0^2}{l} & \quad \frac{U_0^2}{l} & \quad \frac{U_0}{\delta^2} \\ u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \\ \frac{U_0^2 \delta}{l^2} & \quad \frac{U_0^2 \delta}{l^2} & \quad \frac{U_0}{l \delta} \end{aligned} \right\} \quad (9.99)$$

再将上列方程组第二式中的惯性项和第一式的惯性项作一比较, 其数量级

的比例为 $\frac{U_0^2 \delta}{l^2} : \frac{U_0^2}{l} = \frac{\delta}{l}$ 是一个微小量, 因此第二式中的惯性项 $u_x \frac{\partial u_x}{\partial x}$ 和 $u_y \frac{\partial u_y}{\partial y}$ 在联立求解方程组时完全略去对解答的精确度并无影响。同样, 第二式中的粘性项与第一式中粘性项相比, 其数量级的比例 $\frac{U_0}{l\delta} : \frac{U_0}{\delta^2} = \frac{\delta}{l}$ 也是很小数值, 可以略去不计。

这样, 式 (9.97) 最后可化简为

$$\left. \begin{aligned} u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.100)$$

上式就是边界层的微分方程式。

由以上分析还可得出下列几点结论:

第一, 边界层内的压强沿 y 方向是不变的, 即 $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, 并等于边界层外边界上的压强。这一结论有很大的实用意义, 因为边界层外边界上的压强可用势流理论求得, 这样边界层内的压强分布也为已知。

第二, 式 (9.100) 中第一式惯性项与粘性项既然均不能省略, 那么它们应有相同的数量级, $\frac{U_0^2}{l} \sim \nu \frac{U_0}{\delta^2}$, 或改写成 $\left(\frac{\delta}{l}\right)^2 \sim \frac{\nu}{U_0 l} \sim \frac{1}{\frac{U_0 l}{\nu}}$ 。故

$$\frac{\delta}{l} \sim \frac{1}{\sqrt{\frac{U_0 l}{\nu}}} \sim \frac{1}{\sqrt{Re_l}} \quad (9.101)$$

式中: 雷诺数 $Re_l = \frac{U_0 l}{\nu}$ 。

由此可得出结论: 边界层的厚度与所绕流物体长度的比值的数量级是以该物体长度表示的雷诺数平方根的倒数。

第三, 方程组 (9.100) 中 p 为已知, 未知量仅为 u_x , u_y , 所以是可解的。该方程组也可应用于曲率比较小的曲面边界层, 但应取固体表面的曲线为 x 轴, y 轴应取曲线的法线方向。

边界层的微分方程 (9.100) 比一般粘滞液体运动的微分方程要简单得多。但应用时即使是最简单的边界条件也会遇到很大的困难。由于这个缘故,

在实用上边界层的近似解法就有很大价值。一般近似解法的基本微分方程式都是应用动量定理来建立的。下面将介绍这种方法。

9.9.3 边界层的几种厚度 (边界层厚度、排挤厚度、动量损失厚度及能量损失厚度)

在讨论近似法以前, 首先介绍几个有关边界层厚度的基本概念。

前面曾提到根据边界层的概念可把液流分成两个区域, 边界层内为粘滞液流, 边界层外为理想液体势流。但该两区域是无法截然划分的, 因为流速分布曲线是连续的, 并以与 y 轴平行的直线为渐近线, 所以从理论上讲, 固体边界对水流影响范围应扩展至无穷远处。但事实上在离开固体表面不远处流速即迅速自零增至接近 U_0 , 因此将固体表面沿法线方向分布的流速达到 $99\% U_0$ 之处即视作边界层的外边界并无多大误差, 因为在此范围以外, 流速已接近 U_0 , 流速梯度极小, 可以近似地把液流看作无内摩擦力发生的理想液体。以后所称边界层厚度即指这一范围的厚度而言。

实际液体流经固体壁面时, 由于固体边界对水流的阻滞作用, 使边界层内通过的流量比理想液体情况下在同一范围内所通过的流量要小。可以设想, 若液体是理想液体, 其流速分布将是均匀的, 其值均等于 U_0 。此时若将固体边界以上一个厚度为 δ_1 的水层排除, 则在 $\delta - \delta_1$ 厚度内所通过流量将与实际液体在边界层内所通过的流量 q_b 相等 (图 9.29)。这就是说, 由于实际液体受固体边界的影响将使在 δ 范围的流量与理想液体时相比减小了 $U_0\delta_1$ 。 δ_1 叫作流量损失厚度, 也常叫排挤厚度。

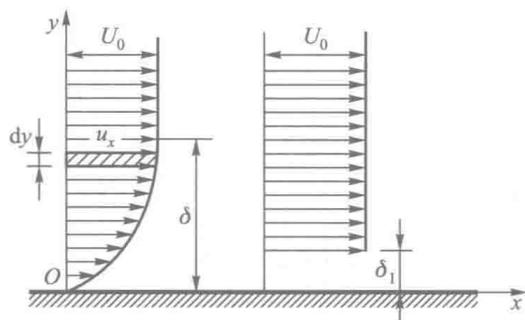


图 9.29

若用方程式来表示, 边界层内单宽流量为

$$q_b = \int_0^{\delta} u_x dy = U_0(\delta - \delta_1) = \int_0^{\delta} U_0 dy - U_0\delta_1$$

由此可得

$$\delta_1 = \frac{1}{U_0} \int_0^\delta (U_0 - u_x) dy = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u_x}{U_0}\right) dy \quad (9.102)$$

同样, 因固体边界的阻滞作用, 将使实际液体边界层内通过的液体动量比理想液体情况下通过的液体动量为小。若设想以理想液体来代替实际液体, 则可将固体边界上排除一个厚度为 δ^* 的水层, 这样 $\delta - \delta^*$ 厚度内所通过的液体动量与实际液体在边界层 δ 内所通过的动量相等 (图 9.30)。

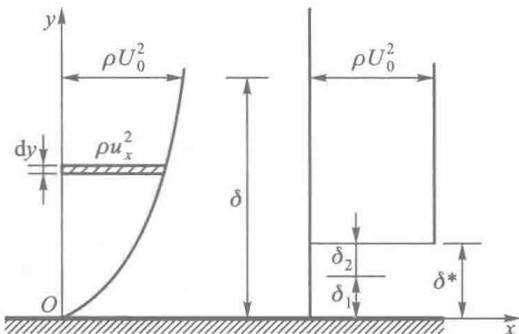


图 9.30

实际液体边界层内通过的单宽流量为 $\int_0^\delta u_x dy$, 动量为 $\int_0^\delta \rho u_x^2 dy$; 若以理想液体来代替, 则通过厚度为 $\delta - \delta^*$ 的液体动量为 $\rho U_0^2 (\delta - \delta^*)$, 以上两者应相等, 并令液体密度 $\rho =$ 常数, 则

$$M = \int_0^\delta \rho u_x^2 dy = \rho U_0^2 (\delta - \delta^*) = \int_0^\delta \rho U_0^2 dy - \rho U_0^2 \delta^*$$

由此可得

$$\delta^* = \frac{1}{U_0^2} \int_0^\delta (U_0^2 - u_x^2) dy = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u_x^2}{U_0^2}\right) dy \quad (9.103)$$

式中 δ^* 是动量的总损失厚度^①。实用上常称 $\delta_2 = \delta^* - \delta_1$ 为动量损失厚度。由式 (9.102) 及式 (9.103) 可知

$$\delta_2 = \delta^* - \delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u_x^2}{U_0^2}\right) dy - \int_0^\delta \left(1 - \frac{u_x}{U_0}\right) dy$$

① δ^* 由两部分组成: 一部分是由于流量损失所造成的动量损失, 其厚度为 δ_1 ; 另一部分是在边界层内通过实际流量为 $\int_0^\delta u_x dy$ 时, 由于液体受固体边界阻滞作用, 流速自 U_0 减为 u_x 时所减少的动量, 即 $\rho U_0^2 \delta_2 = \int_0^\delta \rho u_x U_0 dy - \int_0^\delta \rho u_x^2 dy$, 由此可得 $\delta_2 = \int_0^\delta \frac{u_x}{U_0} \left(1 - \frac{u_x}{U_0}\right) dy$, 与式 (9.104) 相同。

$$= \int_0^{\delta} \left(\frac{u_x}{U_0} - \frac{u_x^2}{U_0^2} \right) dy = \int_0^{\delta} \frac{u_x}{U_0} \left(1 - \frac{u_x}{U_0} \right) dy \quad (9.104)$$

同样，固体边界的阻滞作用，将使实际液体边界层内通过的液体能量比理想液体情况下通过的液体能量为小。若设想以理想液体代替实际液体，则可将固体边界以上排除一个厚度为 δ^{**} 的水层，这样在 $\delta - \delta^{**}$ 厚度内通过的液体能量将与实际液体在边界层 δ 内所通过的液体能量相等（图 9.31）。

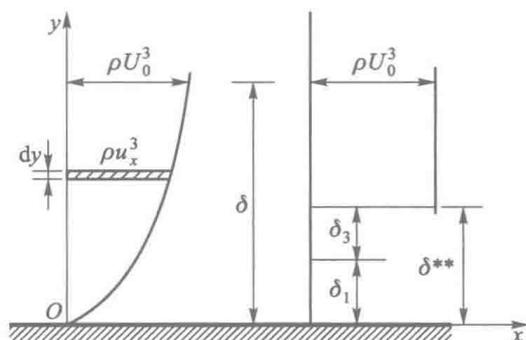


图 9.31

实际液体边界层内通过的单宽流量为 $\int_0^{\delta} u_x dy$ ，它的动能为 $\rho g \int_0^{\delta} u_x \left(\frac{u_x^2}{2g} \right) dy = \int_0^{\delta} \rho \frac{u_x^3}{2} dy$ ；若以理想液体来代替，则通过厚度为 $\delta - \delta^{**}$ 的液体动能为 $\frac{\rho U_0^3}{2} (\delta - \delta^{**})$ 。以上两者应相等，即

$$E = \int_0^{\delta} \rho \frac{u_x^3}{2} dy = \frac{\rho U_0^3}{2} (\delta - \delta^{**}) = \int_0^{\delta} \frac{\rho U_0^3}{2} dy - \frac{\rho U_0^3}{2} \delta^{**}$$

由此可得

$$\delta^{**} = \frac{1}{U_0^3} \int_0^{\delta} (U_0^3 - u_x^3) dy = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u_x^3}{U_0^3} \right) dy \quad (9.105)$$

实用上常称 $\delta_3 = \delta^{**} - \delta_1$ 为能量损失厚度。由式 (9.102) 及式 (9.105) 可知

$$\begin{aligned} \delta_3 &= \delta^{**} - \delta_1 = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u_x^3}{U_0^3} \right) dy - \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u_x}{U_0} \right) dy \\ &= \int_0^{\delta} \frac{u_x}{U_0} \left(1 - \frac{u_x^2}{U_0^2} \right) dy \end{aligned} \quad (9.106)$$

例 9.7 设边界层内流速分布符合指数定律， $u_x = U_0 \left(\frac{y}{\delta} \right)^n$ ，试求边界层

δ_1 , δ_2 , δ_3 的表示式。

解：因边界层厚度 δ 在某一固定断面上是一个定值，式 (9.102) 可写作

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \int_0^1 \left(1 - \frac{u_x}{U_0}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

将 $\frac{u_x}{U_0} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^n$ 代入上式得

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \int_0^1 \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^n\right] d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{n}{n+1}, \text{ 故 } \delta_1 = \frac{n}{n+1}\delta$$

同理

$$\begin{aligned} \frac{\delta_2}{\delta} &= \int_0^1 \frac{u_x}{U_0} \left(1 - \frac{u_x}{U_0}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \int_0^1 \left(\frac{y}{\delta}\right)^n \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^n\right] d\left(\frac{y}{\delta}\right) \\ &= \frac{n}{(n+1)(2n+1)} \end{aligned}$$

故

$$\delta_2 = \frac{n\delta}{(n+1)(2n+1)}$$

同理

$$\begin{aligned} \frac{\delta_3}{\delta} &= \int_0^1 \frac{u_x}{U_0} \left(1 - \frac{u_x^2}{U_0^2}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \int_0^1 \left(\frac{y}{\delta}\right)^n \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{2n}\right] d\left(\frac{y}{\delta}\right) \\ &= \frac{2n}{(n+1)(3n+1)} \end{aligned}$$

故

$$\delta_3 = \frac{2n\delta}{(n+1)(3n+1)}$$

例 9.8 如图 9.32 所示的陡槽中，设在断面 $x-x$ 处边界层外势流流速为 U_0 ，试证明水流自进口至 $x-x$ 断面处水头损失为 $h_{wx} = \frac{\delta_3 U_0^3}{2gq}$ 。

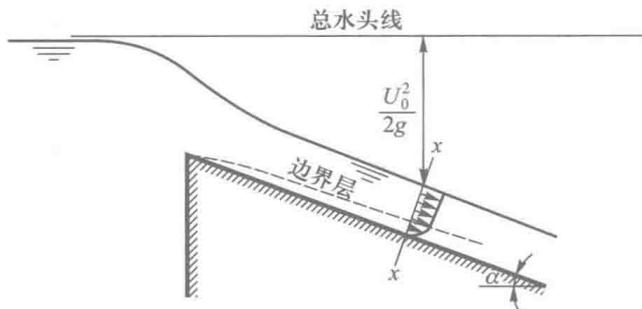


图 9.32

解：在断面 $x-x$ 处边界层内单宽流量为 $\int_0^\delta u_x dy$ ，它所具有的动能为

$$\rho g \int_0^\delta u_x \left(\frac{u_x^2}{2g} \right) dy = \rho \int_0^\delta \frac{u_x^3}{2} dy$$

如果没有能量损失，它所具有的动能应为

$$\rho g \int_0^\delta u_x \left(\frac{U_0^2}{2g} \right) dy = \rho \int_0^\delta u_x \frac{U_0^2}{2} dy$$

故水流流至断面 $x-x$ 处的能量损失为

$$\begin{aligned} \rho \int_0^\delta u_x \frac{U_0^2}{2} dy - \rho \int_0^\delta \frac{u_x^3}{2} dy &= \frac{\rho}{2} \int_0^\delta u_x (U_0^2 - u_x^2) dy \\ &= \frac{\rho U_0^3}{2} \int_0^\delta \frac{u_x}{U_0} \left(1 - \frac{u_x^2}{U_0^2} \right) dy = \frac{\rho U_0^3 \delta_3}{2} \end{aligned}$$

水头损失是单位重量液体的能量损失，上式除以液体重量 $\rho g q$ ，即得

$$h_{wx} = \frac{\rho \delta_3 U_0^3}{2 \rho g q} = \frac{\delta_3 U_0^3}{2 g q}$$

9.9.4 边界层的动量方程

设液体绕某一固体边界而流动，在固体边界的表面将形成一层很薄的边界层。现取出其中的一微分段 $ABCD$ 来研究，如图 9.33 所示。 AB 为离边界起点 x 处的断面， CD 为离边界起点 $x + dx$ 处的断面，该两断面无限接近。可将该小段边界层的底边 BD 看作直线，将坐标系的原点取在固体表面上， y 轴垂直于固体表面。 B 点边界层的厚度为 δ ， D 点处边界层厚度为 $\delta + \frac{\partial \delta}{\partial x} dx$ 。在边界层的外边界上每一点的流速在流动方向的分量一般不是一个常数，但是由于现在研究的是边界层的一微分段， AC 的长度是一个无限小量，因此可认为在该微分段外边界上的流速是常数，均等于 A 的流速 U_0 。

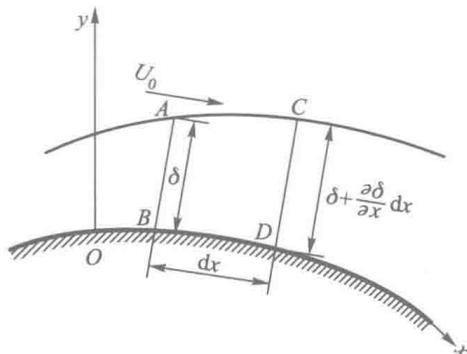


图 9.33

单位时间内通过断面 AB 的液体质量为

$$\rho q = \rho U_0 (\delta - \delta_1) \quad (9.107)$$

单位时间内通过断面 AB 的液体动量为

$$M = \rho U_0^2 (\delta - \delta^*) = \rho U_0^2 (\delta - \delta_1 - \delta_2) \quad (9.108)$$

现对边界层微分段的控制体 $ABCD$ 建立流动方向的动量方程式，为简便起见将问题看成是平面问题来讨论。

假设每单位时间自断面 AB 流入的质量为 ρq ，自断面 CD 流出的质量为 $\rho q + \frac{\partial(\rho q)}{\partial x} dx$ 。若液体是不可压缩的，则自 CD 断面流出的质量与自断面 AB 流入的质量之差应等于自边界层外边界 AC 流入的质量，故自外边界 AC 流入的质量等于 $\rho \frac{\partial q}{\partial x} dx$ 。由此可知，在时段 dt 内自边界层外边界流入的液体动量为

$(\rho U_0 \frac{\partial q}{\partial x} dx) dt$ 。令在时段 dt 内自断面 AB 流入的动量为 $M dt$ ，则自断面 CD 流出的动量为 $(M + \frac{\partial M}{\partial x} dx) dt$ 。由此可求得控制体 $ABCD$ 在时段 dt 内液体流动方向的动量变化为

$$\begin{aligned} \Delta M &= \left(M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) dt - M dt - \left(\rho U_0 \frac{\partial q}{\partial x} dx \right) dt \\ &= \frac{\partial M}{\partial x} dx dt - \rho U_0 \frac{\partial q}{\partial x} dx dt \end{aligned}$$

再来讨论在时段 dt 内作用在控制体 $ABCD$ 上的外力在流动方向的冲量。作用在控制体 $ABCD$ 上的外力有：作用在 AB 断面上的动水压力，作用在 CD 断面上的动水压力，作用在外边界 AC 面上的动水压力在流动方向的分量及固体表面的摩擦阻力。

因在边界层内同一过水断面上的动水压强是相同的，假设 AB 断面上的动水压强为 p ，则在 CD 断面上的动水压强为 $p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$ 。由此可知，作用在断面 AB 上的动水压力的冲量为

$$I_{AB} = p \delta dt$$

作用在断面 CD 上的动水压力的冲量为

$$I_{CD} = \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \left(\delta + \frac{\partial \delta}{\partial x} dx \right) dt$$

外边界上水流为势流，若不计算重力的影响，其能量方程式为 $\frac{p}{\rho g} + \frac{U_0^2}{2g} = \text{常}$

数。因外边界所取微分段上的流速可以看作是常数，所以作用在外边界 AC 上的动水压强也为常数，均等于 A 点的动水压强 p 。由此可求得作用在外边界面上的动水压力在流动方向的分量为

$$p \left[\left(\delta + \frac{\partial \delta}{\partial x} dx \right) - \delta \right] = p \frac{\partial \delta}{\partial x} dx$$

其冲量为

$$I_{AC} = p \frac{\partial \delta}{\partial x} dx dt$$

若作用在固体表面的切应力为 τ_0 ，则作用在 BD 面上摩擦阻力的冲量为

$$I_{BD} = \tau_0 dx dt$$

因此在时段 dt 内作用在整个控制体 $ABCD$ 上的外力在流动方向的冲量为

$$\begin{aligned} I &= I_{AB} + I_{AC} - I_{CD} - I_{BD} \\ &= p \delta dt + p \frac{\partial \delta}{\partial x} dx dt - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \left(\delta + \frac{\partial \delta}{\partial x} dx \right) dt - \tau_0 dx dt \\ &= -\delta \frac{\partial p}{\partial x} dx dt - \tau_0 dx dt \end{aligned}$$

由此便可对控制体 $ABCD$ 所包围的液体列出动量方程式：

$$-\delta \frac{\partial p}{\partial x} dx dt - \tau_0 dx dt = \frac{\partial M}{\partial x} dx dt - \rho U_0 \frac{\partial q}{\partial x} dx dt$$

上式各项约去 $dx dt$ ，则上式可写成

$$-\delta \frac{\partial p}{\partial x} - \tau_0 = \frac{\partial M}{\partial x} - \rho U_0 \frac{\partial q}{\partial x}$$

上式中 q 及 M 用式 (9.107) 及式 (9.108) 代入，化简整理后可得

$$-\frac{\tau_0}{\rho} - \frac{\delta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -U_0^2 \frac{\partial \delta_2}{\partial x} + (\delta - \delta_1 - 2\delta_2) U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} \quad (9.109)$$

因 $p + \frac{\rho U_0^2}{2} = \text{常数}$ ，两边微分得 $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x}$ ，代入上式得

$$-\frac{\tau_0}{\rho} = -U_0^2 \frac{\partial \delta_2}{\partial x} - (\delta_1 + 2\delta_2) U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x}$$

或

$$\frac{\tau_0}{\rho U_0^2} = \frac{\partial \delta_2}{\partial x} + (\delta_1 + 2\delta_2) \frac{1}{U_0} \frac{\partial U_0}{\partial x} \quad (9.110)$$

上式就是边界层的动量方程式。在推证过程中对式中 τ_0 并未作任何限制，故上式对层流、湍流均可适用，只是不同流态时应采用不同的 τ_0 而已。

当极薄平板顺流放置于无限平行直线流中时，平板厚度可以看作等于零，

且边界层也是很薄的，因此可以认为平板的存在并不影响边界层以外的液流，这样边界层的外边界上每点的流速及压强均将为常量，即 $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ ， $\frac{\partial U_0}{\partial x} = 0$ 。在这种情况下还可把方程式中的偏导数改为全导数，所以应用于平板边界层时，式 (9.110) 可简化为

$$\frac{\tau_0}{\rho U_0^2} = \frac{d\delta_2}{dx} \quad (9.111)$$

9.9.5 平板上层流边界层的计算

以下研究极薄平板顺流放置于无限平行直线流中平板上层流边界层的计算方法。应用式 (9.111) 来求解平板上的层流边界层时，边界层内流速分布公式必须已知。流速分布公式给定，则由 $\tau_0 = \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_{y=0}$ 可求得 τ_0 的公式。然后将 u_x 及 τ_0 代入平板边界层的动量方程式

$$\frac{\tau_0}{\rho U_0^2} = \frac{d\delta_2}{dx}$$

式中： $\delta_2 = \int_0^\delta \frac{u_x}{U_0} \left(1 - \frac{u_x}{U_0} \right) dy$ ，即可求出边界层厚度沿平板的变化规律。

边界层内不同的流速分布公式可求得不同结果。今假设 τ 在整个边界层内沿法线方向为直线变化，如图 9.34 所示，即可求边界层的近似解。

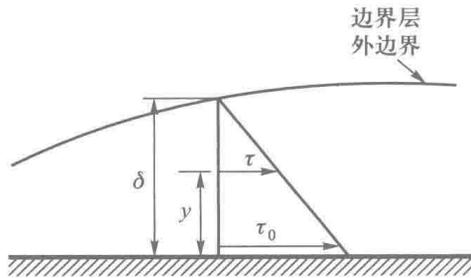


图 9.34

1. 层流边界层内的流速分布公式

由图 9.34 可知

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{\delta - y}{\delta} = 1 - \frac{y}{\delta}$$

故

$$\tau = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{\delta}\right) \quad (9.112)$$

层流时 $\tau = \eta \frac{du_x}{dy}$, 代入上式后进行积分得

$$u_x = \frac{\tau_0}{\eta} \left(y - \frac{y^2}{2\delta}\right) \quad (9.113)$$

当 $y = \delta$ 时, $u_x = U_0$ 代入上式得

$$\tau_0 = \frac{2\eta U_0}{\delta} \quad (9.114)$$

将上式代入式 (9.113), 可得层流边界层内流速分布公式为

$$\frac{u_x}{U_0} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \quad (9.115)$$

2. 层流边界层厚度的公式

由式 (9.104)

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{u_x}{U_0} \left(1 - \frac{u_x}{U_0}\right) dy$$

因该公式是在某一固定断面上对 y 进行积分的, 所以边界层厚度 δ 可以看作一个定值, 这样上式就可写作

$$\frac{\delta_2}{\delta} = \int_0^1 \frac{u_x}{U_0} \left(1 - \frac{u_x}{U_0}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (9.116)$$

将式 (9.115) 代入上式可得

$$\frac{\delta_2}{\delta} = \int_0^1 \left[2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right] \left[1 - 2\left(\frac{y}{\delta}\right) + \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right] d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{2}{15}$$

将 $\tau_0 = \frac{2\eta U_0}{\delta}$ 及 $\delta_2 = \frac{2}{15}\delta$ 代入平板边界层动量方程, 即

$$\frac{\tau_0}{\rho U_0^2} = \frac{d\delta_2}{dx}$$

化简得

$$\frac{\nu}{U_0} dx = \frac{1}{15} \delta d\delta$$

两边进行积分整理后可得

$$\delta = 5.48 \left(\frac{\nu x}{U_0}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (9.117)$$

或写成

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5.48}{\sqrt{Re_x}} \quad (9.118)$$

式中

$$Re_x = \frac{U_0 x}{\nu}$$

上式就是层流边界层的厚度沿平板长度方向的变化规律。

3. 平板的层流阻力

因

$$\tau_0 = \frac{2\eta U_0}{\delta}$$

将式 (9.117) 代入上式, 化简后可得

$$\tau_0 = \frac{0.73}{\sqrt{Re_x}} \frac{\rho U_0^2}{2} = C'_f \frac{\rho U_0^2}{2} \quad (9.119)$$

式中: C'_f 为当地摩阻系数, $C'_f = \frac{0.73}{\sqrt{Re_x}}$ 。

上式就是平板上的切应力 τ_0 沿平板长度方向的变化规律。由此便可推求平板的摩擦阻力。作用在平板上一侧摩擦阻力可用下式来计算:

$$F_f = b \int_0^l \tau_0 dx \quad (9.120)$$

式中: b 为平板的宽度, l 为平板长度。将式 (9.119) 代入上式, 得

$$\begin{aligned} F_f &= b \int_0^l \frac{0.73}{\sqrt{Re_x}} \frac{\rho U_0^2}{2} dx = \frac{0.73}{\sqrt{\frac{U_0}{\nu}}} b \frac{\rho U_0^2}{2} \int_0^l x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{1.46}{\sqrt{\frac{U_0 l}{\nu}}} b l \frac{\rho U_0^2}{2} = \frac{1.46}{\sqrt{Re_l}} b l \frac{\rho U_0^2}{2} \end{aligned} \quad (9.121)$$

式中:

$$Re_l = \frac{U_0 l}{\nu}$$

上式也可用下列形式来表示:

$$F_f = C_f b l \frac{\rho U_0^2}{2} \quad (9.122)$$

式中: $C_f = \frac{1.46}{\sqrt{Re_l}}$, 称为平板的表面阻力系数。

欲求作用于平板两侧的摩擦总阻力, 只要将式 (9.122) 乘以 2 即可。

不同的流速分布公式可求出不同的边界层厚度及摩擦阻力公式中的系数。据实验结果准确公式应为

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5.2}{\sqrt{Re_x}} \quad (9.123)$$

$$C_f = \frac{1.328}{\sqrt{Re_l}} \quad (9.124)$$

9.9.6 平板上湍流边界层的计算

湍流边界层内流速分布及固体表面的切应力 τ_0 与层流时不同。普朗特曾设想沿平板的边界层流动与管流的情况没有什么差别，管流可以看成是边界层厚度等于管子的半径的流动。这样就可应用管子的湍流流速分布公式及 τ_0 公式来解平板上湍流边界层的问题。

1. 用流速指数分布规律解湍流光滑板的边界层

在 4.6.4 节中曾经讨论过光滑管的流速分布符合 1/7 次方定律，即

$$\frac{u_x}{u_m} = \left(\frac{y}{r_0}\right)^{\frac{1}{7}}$$

应用于平板边界层，当 $y = \delta$ 时， $u_x = U_0$ ，代入上式得

$$\frac{U_0}{u_m} = \left(\frac{\delta}{r_0}\right)^{\frac{1}{7}}$$

以上两式相比得

$$\frac{u_x}{U_0} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}$$

由此可求得

$$\begin{aligned} \frac{\delta_2}{\delta} &= \int_0^1 \frac{u_x}{U_0} \left(1 - \frac{u_x}{U_0}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) \\ &= \int_0^1 \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}\right] d\left(\frac{y}{\delta}\right) \\ &= \frac{7}{72} \end{aligned}$$

即

$$\delta_2 = \frac{7}{72} \delta \quad (9.125)$$

又将光滑管切应力公式应用于平板上

$$\tau_0 = 0.0464 \left(\frac{\nu}{U_0 \delta}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{\rho U_0^2}{2} \quad (9.126)$$

故湍流光滑板的当地摩阻系数 $C'_f = 0.0464 \left(\frac{\nu}{U_0 \delta} \right)^{\frac{1}{4}}$ 。

将式 (9.125) 及式 (9.126) 代入平板边界层的动量方程式, 积分整理后可得

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0.38}{Re^{1/5}} \quad (9.127)$$

上式就是湍流光滑板边界层厚度沿平板长度方向的变化规律。将层流与湍流边界层厚度公式相比, 可以看出: 沿平板长度方向湍流边界层的厚度比层流边界层厚度增加要快一些。

一般在平板起端附近边界层为层流, 此后逐渐过渡到湍流。当平板较长时, 层流边界层的范围与湍流边界层相比, 长度极短, 如果忽略也无多大误差, 这样就可看作自板端开始均为湍流边界层。由此可求出平板上一侧的摩擦阻力为

$$F_f = b \int_0^l \tau_0 dx = C_f b l \frac{\rho U_0^2}{2}$$

式中:

$$C_f = \frac{0.074}{Re^{1/5}} \quad (9.128)$$

2. 用流速对数分布规律解湍流粗糙板的边界层

高度湍流时, 流速对数分布公式为

$$\frac{u_x}{u_*} = 5.75 \lg \frac{y}{\Delta} + 8.5$$

应用于平板边界层时, 当 $y = \delta$ 时, $u_x = U_0$, 上式可改写成

$$\frac{U_0}{u_*} = 5.75 \lg \frac{\delta}{\Delta} + 8.5 \quad (9.129)$$

由此可求得湍流粗糙板的当地摩阻系数为

$$C'_f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2} \rho U_0^2} = \frac{\rho u_*^2}{\frac{1}{2} \rho U_0^2} = \frac{2}{\left(\frac{U_0}{u_*} \right)^2} = \frac{2}{\left(5.75 \lg \frac{\delta}{\Delta} + 8.5 \right)^2}$$

即

$$C'_f = 2 \left(5.75 \lg \frac{\delta}{\Delta} + 8.5 \right)^{-2} \quad (9.130)$$

史里希廷 (Schlichting) 又求得不同表达形式的湍流粗糙板的当地摩擦系数公式为

$$C'_f = \left(1.58 \lg \frac{x}{\Delta} + 2.87 \right)^{-2.5} \quad (9.131)$$

湍流粗糙板的表面阻力系数公式为

$$C_f = \left(1.62 \lg \frac{l}{\Delta} + 1.89 \right)^{-2.5} \quad (9.132)$$

式中： x 为由平板前缘算起的距离， Δ 为平板的当量粗糙度， l 为平板长度。

雅林 (Yalin) 曾令式 (9.130) 与式 (9.131) 相等，求得

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{\delta} &= 0.0152 \frac{\Delta}{\delta} e^{2.3(\ln 30.1 \frac{\delta}{\Delta})^4} \\ \frac{\delta}{x} &= 0.0331 \frac{\Delta}{x} e^{(\lg 66.1 \frac{x}{\Delta})^4} \end{aligned} \right\} \quad (9.133)$$

上式就是湍流粗糙板边界层厚度沿平板的变化规律。

由式 (9.131) 可求得湍流粗糙板的切应力为

$$\tau_0 = C'_f \frac{\rho U_0^2}{2} = \left(1.58 \lg \frac{x}{\Delta} + 2.87 \right)^{-2.5} \frac{\rho U_0^2}{2} \quad (9.134)$$

由式 (9.132) 可求得湍流粗糙板一侧的摩擦阻力为

$$F_f = C_f b l \frac{\rho U_0^2}{2} = \left(1.62 \lg \frac{l}{\Delta} + 1.89 \right)^{-2.5} b l \frac{\rho U_0^2}{2} \quad (9.135)$$

例 9.9 今欲设计一玻璃水槽，已知槽宽 b 为 0.5 m，槽底用铜丝网加糙， Δ 为 0.002 m，槽中最大水深 h 控制在 0.3 m，尾门干扰段最长为 1.5 m，若玻璃槽中均匀流有效试验段最小应有 5.0 m，问该玻璃水槽最短长度应有多少米？

解：玻璃槽进口段边界层发展到水面后，沿程各断面的流速分布才是相同的，水流才为均匀流，所以玻璃水槽的最短长度应等于进口边界层发展到水面的距离，加有效均匀流试验段，再加尾门干扰段。

当边界层发展到水面时 $\delta = h$ ， $x = L$ ，式 (9.133) 应写作

$$\frac{L}{h} = 0.0152 \frac{\Delta}{h} e^{2.3(\ln 30.1 \frac{h}{\Delta})^4}$$

用 $\Delta = 0.002$ m， $h = 0.3$ m 代入上式，得

$$\frac{L}{0.3 \text{ m}} = 0.0152 \times \frac{0.002}{0.3} e^{2.3(\ln 30.1 \times \frac{0.3}{0.002})^4} = 31.22$$

求得

$$L = 0.3 \times 31.22 \text{ m} = 9.37 \text{ m}$$

故玻璃水槽的最短长度 = 9.37 m + 5.0 m + 1.5 m = 15.87 m，采用 16.0 m。

9.9.7 边界层的分离现象及绕流阻力

在自然界和工程实践中液体绕过凸形物时，常可观察到物体后面有许多旋

涡形成。图 9.35 所示为液体绕圆柱体流动时的情况。这种现象的发生可以用边界层的理论加以定性的说明。

在驻点 N 处压强最大，在较高压强作用下，液体由此分道向圆柱体两侧流动。由于圆柱面的阻滞作用便形成了边界层。边界层内的特点是液体运动时有能量损失。从 N 点起向下游达到 A 或 B 点以前，由于圆柱面的弯曲，使液流挤压，流速沿程增加，故沿边界层的外边

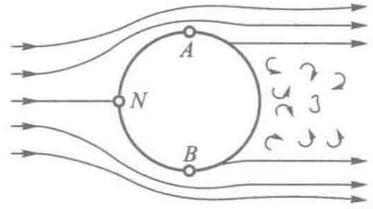


图 9.35

界上 $\frac{\partial U_0}{\partial x} = \text{正值}$ ， $\frac{\partial p}{\partial x} = \text{负值}$ ，即在外边界上压强是沿程下降的。由此可知：在 NA 或 NB 一段边界层内的液流是处于加速减压状态的。这就是说，在该段边界层内用压强下降来补偿能量损失外，尚有一部分压能变为动能。到 A 或 B 点时压强减至最小，流速增至最大。再往下游，由于圆柱面的弯曲，又使液流变为扩散，流速沿程减小，即 $\frac{\partial U_0}{\partial x} = \text{负值}$ ， $\frac{\partial p}{\partial x} = \text{正值}$ ，外边界上压强沿程增加，因此边界层内压强也沿程增加。边界层内液流的一部分动能用于克服摩擦阻力外，尚有一部分动能转变为压能，所以在 A 点或 B 点以下边界层内液流是处于减速增压状态。越往下游前进动能越小，结果到了 C 点由于动能减小至零而停止前进，如图 9.36 所示。在 C 点以下，若压强继续增加，就无动能可以变为压能，因此主流只有离开曲面，以减缓水流扩散，下游液体随即填补主流所空出的区域，形成旋涡，这种现象叫作边界层的分离。 C 点叫作分离点， CD 面叫作分离面。

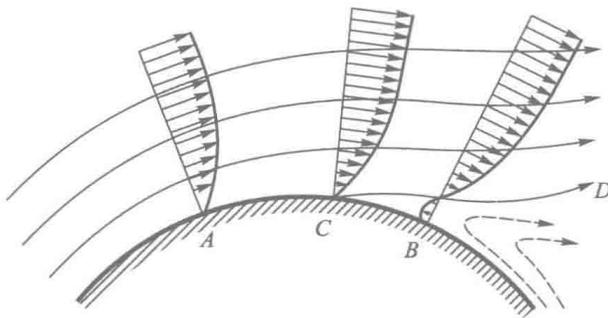


图 9.36

C 点的位置与物体形状、表面粗糙度及液流状态均有密切关系，至今尚无一般方法可以确定。只有当固体表面有凸出的锐角时，其分离点往往就在锐角的尖端，如图 9.37 所示。

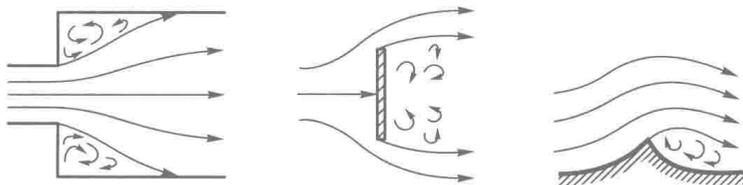


图 9.37

在物体后面形成的旋涡随流带走，由于液体的粘滞性，旋涡经过一段距离后，逐渐衰减，乃至消失。旋涡在产生与衰减的过程中损失的能量转化为热能，这种能量损失称为旋涡损失。与此相应的阻力称为旋涡阻力。旋涡阻力的大小与液体绕流物体时边界层的分离点在物体表面的位置有密切关系。分离点愈接近于物体的尾部，旋涡区就愈小，因而旋涡阻力也就愈小，否则形成较大的阻力。因此在一般工程上常把物体做成一种特殊形状，使在流速较大时也不致产生边界层的分离或使分离点接近于尾部，这样的物体就是人们常说的流线型物体，如图 9.38 所示。

由边界层理论可知，液体对所绕流物体的阻力是由两部分组成：即固体表面的摩擦阻力及旋涡阻力。

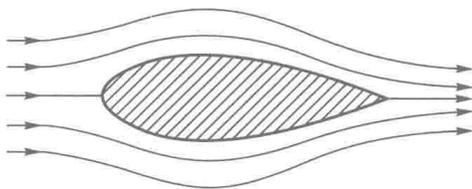


图 9.38

从力学观点看，液体作用在所绕流物体上的力可分成两类：作用方向与物体表面相切的切应力和作用方向与物体表面成法向的动水压强。

液体作用在物体表面上的摩擦力在水流方向的投影就是摩擦阻力，摩擦阻力可用下列公式表示：

$$F_f = C_f A_f \frac{\rho U_0^2}{2}$$

式中： A_f 为所绕流物体的特性面积，通常是指切应力作用的投影面积； C_f 为表面阻力系数。

由于物体尾部有旋涡发生以致作用在物体表面的压强分布不对称，使水流方向有压差产生。这一压差就是旋涡阻力，所以旋涡阻力也叫压强阻力。由于这一阻力与被绕流物体的形状及放置方位等有关，故也有人叫形状阻力。压强阻力也可用与摩擦阻力相类似公式表示：

$$F_p = C_p A_p \frac{\rho U_0^2}{2}$$

式中： C_p 为压强阻力系数； A_p 为与流速方向垂直的迎流投影面积。

因此液体对所绕流物体的总阻力也可用下列公式表示：

$$F_d = C_d A_d \frac{\rho U_0^2}{2} \quad (9.136)$$

式中： C_d 叫绕流阻力系数； A_d 为与流速垂直方向的迎流投影面积。绕流阻力系数至今尚不能完全用理论计算，主要是依靠实验来确定。图 9.39 所示为圆柱体的绕流阻力系数 C_d 与雷诺数 $Re = \frac{U_0 d}{\nu}$ 的关系。由图中可以看出：当 Re 很小时，边界层属层流性质，此时绕流阻力仅有摩擦阻力，尚无旋涡发生， C_d 与 Re 成反比。 Re 增大，圆柱体尾部即有旋涡发生，此时绕流阻力由摩擦阻力及压强阻力两部分组成。当 Re 增至 10^4 时，压强阻力是主要的，相对比较摩擦阻力很小，故绕流阻力几乎与 Re 无关。当 Re 增至 3×10^5 时，发现一个有趣的现象，即 C_d 突然下降，这是因为 Re 达到 3×10^5 时圆柱表面的层流边界层开始转变为湍流边界层。因湍流时边界层内的流速要比层流时为大，即湍流时边界层内液流所具有的动能较层流时为大，因此湍流时边界层分离点的位置较层流时更接近于尾部。一般层流时分离点在 $\alpha = 83^\circ$ 左右之处，而湍流时 $\alpha = 140^\circ$ 左右，如图 9.40 所示，所以当层流转变为湍流边界层时压强阻力系数突然减小。

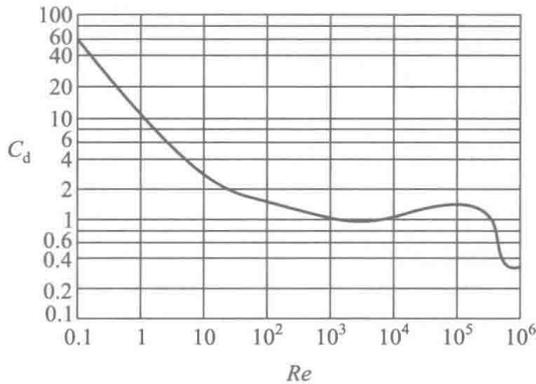
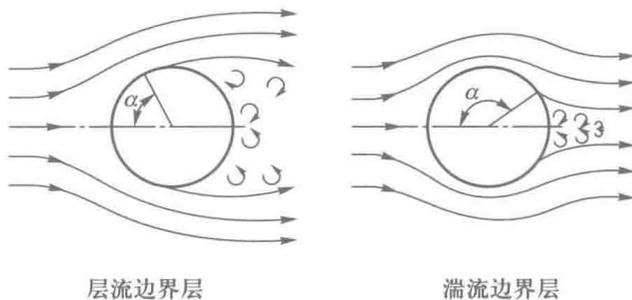


图 9.39



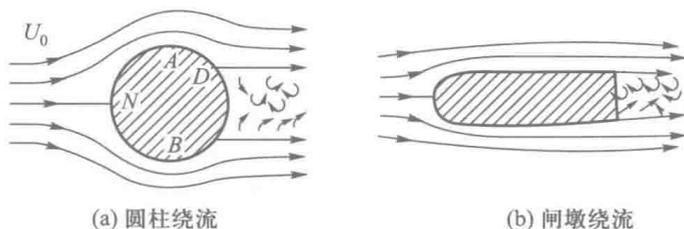
层流边界层

湍流边界层

图 9.40

思 考 题

- 9.1 用解析法分析液体质点运动的基本方法有哪两种？为什么常采用欧拉法？
- 9.2 什么叫时变加速度，什么叫位变加速度？
- 9.3 液体运动的基本形式有哪几种？写出它们的数学表达式？
- 9.4 什么叫无涡流？什么叫有涡流？它们的基本特征是什么？判别条件是什么？
- 9.5 连续性方程 $\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$ 对可压缩液体或非恒定流动是否成立，为什么？
- 9.6 写出纳维-斯托克斯方程并说明它的物理意义是什么？适用条件是什么？
- 9.7 何谓有势流？有势流与有涡流本质区别是什么？
- 9.8 有势流的特点是什么？研究平面势流有何实际意义？
- 9.9 势函数和流函数存在的充分必要条件是什么？
- 9.10 什么叫边界层？边界层液流有哪些特点？
- 9.11 何谓边界层分离？产生边界层分离的原因是什么？
- 9.12 液体对所绕物体的阻力是由哪两部分组成？与哪些因素有关？



思 9.12

习 题

- 9.1 已知一液流

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{ky}{x^2 + y^2} \\ u_y &= -\frac{kx}{x^2 + y^2} \\ u_z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

试分析液体运动的特征：(1) 是恒定流还是非恒定流；(2) 液体质点有无变形运动；(3) 液体微团有无旋转运动；(4) 求其流线方程。

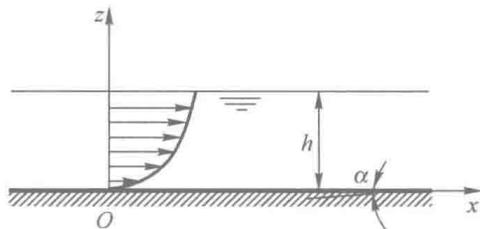
9.2 试应用纳维-斯托克斯方程证明实际液体渐变流在同一过水断面上的动水压强是按静水压强的规律分布的。

9.3 试证明实际液体均匀流中任意点平行于液流方向的动水压强与该点垂直于液流方向的动水压强相等。

9.4 有一恒定二元明渠均匀层流（见下图），试应用纳维-斯托克斯方程证明该水流：

$$(1) \text{ 流速分布公式为 } u_x = \frac{g \sin \alpha}{\nu} \left(zh - \frac{z^2}{2} \right);$$

$$(2) \text{ 单宽流量公式为 } q = \frac{gh^3}{3\nu} \sin \alpha.$$



题 9.4

9.5 已知粘性液体的流速分量为：

$$u_x = 8x - y$$

$$u_y = x - 8y \quad (\text{粘度为 } \eta)$$

试求：(1) 液体运动是连续的；

(2) 应力 p_{xx} , p_{yy} , τ_{xy} , τ_{yx} ；

(3) 若不计外力，且在 $x=y=0$ 处，压强为 p_0 ，写出压强分布表达式。

9.6 已知某流场的流速势为

$$\varphi = \frac{a}{4}(x^2 - y^2)$$

式中 a 为常数，试求：(1) u_x 及 u_y ；(2) 流函数方程。

9.7 一平面流动 x 方向的流速分量为 $u_x = 3a(x^2 - y^2)$ ，在点 $A(0,0)$ 处， $u_x = u_y = 0$ ，试求通过 $A(0,0)$, $B(1,1)$ 两点连线的单宽流量 Δq_{AB} 为多少？

9.8 设一平面不可压缩流动的速度分量为 $u_x = 2x - 3y$, $u_y = -3x - 2y$ 。

(1) 判断该流动是否满足连续方程；

(2) 求出该流动的流函数；

(3) 如果是势流求出势函数，并证明流线与等势线相互垂直。

9.9 假设平板层流边界层内流速分布公式为

$$\frac{u_x}{U_0} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4$$

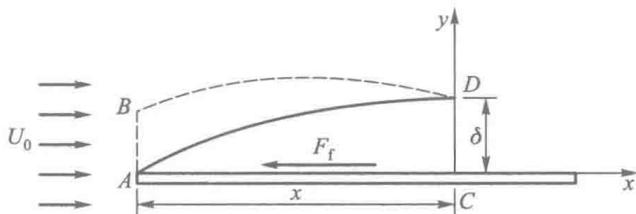
试求边界层厚度 δ 、 δ_1 、 δ_2 及板面切应力 τ_0 。

9.10 假设平板层流边界层内流速分布为 $u_x = U_0 \sin\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right)$ ，试求边界层的 δ_1 及 δ_2 。

9.11 有一平板，宽 0.5 m，长 0.8 m，顺流放置于水中，已知平板与水流的相对速度为 0.6 m/s，水温为 20℃，求平板中间及尾端的边界层厚度及壁面切应力大小。

9.12 有一长 0.8 m、宽 0.5 m 的平板，顺流放置于水中，水流流速为 0.5 m/s，水温为 20℃，求平板两面的总阻力及阻力系数。

9.13 如图所示，有一极薄平板顺流放置于无限平行直线流中，在距板端距离为 x 处边界层厚度为 δ ，边界层外流速未受扰动。其值为 U_0 ，边界层内流速为 u_x 随 y 而变化。今欲直接应用动量定理求平板对水流的总阻力，现采用下列方法来取控制体 $ABCD$ ： AB 全取在未扰动区内，其值大小能使流过 AB 的流量恰等于流过 CD 的流量；曲线 BD 则根据没有液体流过 BD 的原则来划定。试证明单宽平板对水流的总阻力 $F_f = \rho U_0^2 \delta_2$ 。



题 9.13

流体在孔隙介质中的流动称为渗流。地下水运动是最常见的渗流实例。在水利、土建、石油、化工、采矿、地质等许多部门，都涉及有关渗流的问题。水利工程中，常见的渗流问题有以下几方面。

1. 经过挡水建筑物的渗流

许多挡水建筑物如坝、围堰，广泛采用透水材料（如土、堆石）筑成，水可以通过建筑物中的孔隙流动。对于一个水库来说，这样就会造成水量损失，此外当渗流流速过大时，还可能造成土体颗粒的流失，使坝丧失稳定性。因此需要掌握渗流的规律，以便在设计中对上述后果加以估计，并采取相应的措施。

2. 水工建筑物地基中的渗流

若水工建筑物的地基是透水的，如土、砂砾石、岩石地基等都不同程度地可以透水，当水通过地基渗透时，不仅引起水量损失，同样也可以引起地基丧失稳定性。由于渗流的动水压力作用，在建筑物底部产生向上的扬压力，这对建筑物的稳定也有不利的影响。

3. 集水建筑物的渗流

在灌溉或工业与民用给水中，常用井或廊道等汇集地下所贮藏的水源，这种设施称为集水建筑物。在土壤改良及建筑施工中，为了降低地下水位，也常采用集水井或集水廊道，将地下水集中排走。只有掌握了地下水的流动规律，才能正确选择集水建筑物的尺寸，计算集水建筑物的供水能力。

4. 水库及河渠的渗流

当水库建成以后，库水位抬高，库区周围地下水位也相应抬高，改变了原有地下水运动状况，以致库区附近农田容易沼泽化和盐碱化，也可能使原来不受地下水浸润的建筑物地基变为受浸润的状态。如果河流原系由地下水补给水量，水库建成以后，补给量相应减少。同时库区的透水层可以使水库发生严重的漏水。河流和渠道都可以通过其床面的透水边界而渗透，河流水位变化时，地下水位也相应改变。对于任何输水渠道渗透损失太大都是不允许的。

本章的任务就是要研究水在给定的孔隙介质空间（渗流区）内，渗流的流速、压强分布以及渗流流量、渗流的水面线等，从而为解决上述实际渗流问题提供理论基础。

10.1 渗流的基本概念

10.1.1 水在土中的存在形式

土是孔隙介质的典型代表，研究渗流常以水在土中的渗流为例。水在土中的渗流规律，一方面取决于水的物理力学特性，同时也受到土体本身某些特性的制约。

水在土中有以下几种存在形式：气态水，吸着水，薄膜水，毛细水，重力水。

气态水以水蒸气形式存在于土壤孔隙中，它只能在有压差存在的区域之间运动，其数量极微，对于一般水利工程影响可以不计。

吸着水和薄膜水均是受分子力作用而挟持于土中的水，其数量极少，运动也很困难，一般情况下也不考虑。

毛细水是受表面张力而移动的水，它可以传递静水压力。

重力水是指重力作用下在土壤孔隙中运动的水，它在工程实践中具有重要意义。作为研究宏观运动的水力学，主要是研究重力水的运动，仅在个别场合才考虑毛细水和薄膜水的影响。例如在研究极细颗粒土中渗流或者在室内模型上进行渗流观测时，就要注意到毛细水的作用。在无压渗流中，毛细水区的液面比重力水的液面要高（图 10.1）。其上升的高度和土的颗粒粒径有关，颗粒愈小，毛细水上升高度愈大。

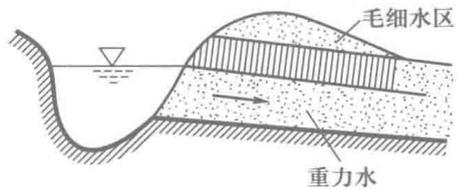


图 10.1

10.1.2 土的渗流特性

土的性质对渗流产生很大影响。疏松的土，其透水能力比密实的土就大得多，颗粒均匀的土透水能力较大，而不均匀的则较小。土的密实程度可用土的孔隙率 n 来反映。孔隙率是表示一定体积的土中，孔隙的体积 ω 与土体总体积 W （包含孔隙体积）的比值：

$$n = \frac{\omega}{W} \quad (10.1)$$

对于土体颗粒的均匀程度，常用土的不均匀系数 Φ 来反映：

$$\Phi = \frac{d_{60}}{d_{10}} \quad (10.2)$$

式中 d_{60} 表示土粒经过筛分时, 占 60% 重量的土粒所能通过的筛孔直径; d_{10} 表示筛分时占 10% 重量的土粒所能通过的筛孔直径。一般 Φ 值总是大于 1, Φ 值越大, 表示土粒越不均匀。均匀颗粒组成的土体, 则 $\Phi = 1$ 。

自然界土的结构情况相当复杂, 从渗流特性的角度, 可以把土分为均质土和非均质土两大类。若土的渗流特性各处相同, 不随空间位置而变化, 则称之为均质土, 反之则为非均质土。

天然的土体常成层状或柱状结构, 顺层理方向透水性强, 垂直于层理方向透水性弱。按照这方面的性质, 又可把土体划分为各向同性土与各向异性土两大类。各向同性土, 乃是其透水性能在各个方向均相同的土, 反之则为各向异性土。

设想一种土, 是由等直径的球形颗粒有规则地排列组成, 这种土乃是均质各向同性土。若以大小相同的长方体颗粒有规则地排列组成的土, 则是均质各向异性土。

在分析渗流的基本规律时, 先研究最简单的均质各向同性土中的渗流。当把这些规律应用于解决实际问题时, 再考虑到实际土体的特性。

10.1.3 渗流模型

液体在土中沿孔隙而流动, 其流动路程相当复杂, 无论理论分析或实验手段都很难确定在某一具体位置的真实运动速度, 从工程应用的角度来说也没有这样的必要。对于解决实际工程问题, 最重要的是在某一范围内宏观渗流的平均效果。在水力学中, 已经习惯于研究平均运动情况, 如过水断面上的平均流速、平均压强等。为了研究渗流的方便, 采用一种假想的渗流来代替实际的渗流, 这种假想的渗流即称之为“渗流模型”。所谓渗流模型, 乃认为渗流是充满了整个孔隙介质区域的连续水流, 包括土粒骨架所占据的空间在内, 均由水所充满, 似乎无土粒存在一样。渗流模型的实质在于, 把实际上并不充满全部空间的液体运动, 看作是连续空间内的连续介质运动。这样, 过去研究一般水力学的概念和方法, 就可以引申到研究渗流中来, 如过水断面、流线、流束、断面平均流速等。

根据渗流模型的概念, 某一微小过水断面上的渗流流速定义为

$$u = \frac{\Delta Q}{\Delta A} \quad (10.3)$$

式中: ΔQ 为通过微小过水断面 ΔA 的渗流流量; ΔA 为包括土粒骨架所占横截

面积在内的假想过水面积。很显然，真实的过水面积比 ΔA 小。若土系均质土，其孔隙率为 n ，真实的过水面积应为 $n\Delta A$ ，故通过该断面孔隙内的真实流速应为

$$u_0 = \frac{\Delta Q}{n\Delta A} \quad (10.4)$$

以渗流模型取代真实的渗流，必须遵守以下几个原则：

① 通过渗流模型的流量必须和实际渗流的流量相等。

② 对某一确定的作用面，从渗流模型所得出的动水压力，应当和真实渗流的动水压力相等。

③ 渗流模型的阻力和实际渗流应当相等，也就是说水头损失应当相等。

由于采用了渗流模型，把渗流视为连续介质运动，这为应用分析数学的工具开辟了广阔的前途，对渗流力学是一个重大的发展。

10.1.4 渗流类型

如前面已经提到的那样，引进渗流模型之后，分析渗流问题就可以和一般水力学方法一样。因此渗流可和一般水流运动一样，区分为恒定渗流及非恒定渗流，均匀渗流及非均匀渗流，渐变渗流及急变渗流，有压渗流和无压渗流等。

10.2 渗流的基本定律——达西定律

10.2.1 达西定律

关于渗流的基本规律，早在 1852—1855 年首先由法国工程师达西通过实验研究而总结出来，故称为达西定律。达西的实验研究是在均质砂土中液体作均匀流动的情况下进行的，但是这个研究成果已被后来的学者推广到整个渗流计算中去，达西定律成为最基本、最重要的公式。

达西实验装置情况如图 10.2 所示，装置的主要部分是一个上端开口的圆筒，筒中装有均质砂土，其上部有进水管 a 及保持恒定水位的溢水设备 b ，筒的侧壁装有测压管，分别设置在相距为 L 的两个过水断面 1-1 和 2-2 上。水自圆筒的上部经过砂土渗透，由滤水网 D 排出，渗流流量可由容器 C 量取。当筒的上部水面保持恒定以后，通过砂土的渗流是恒定流，测压管中水面恒定不变。达西观察到，安装在不同过水断面上的测压管水面高度不同，2-2 断面的测压管水面比 1-1 断面的要低，这说明液体渗过砂土有水头损失。因圆

筒中渗流为均匀流, 该二断面的测压管水头之差 ΔH , 为在 L 流程上渗流的水头损失, 即 $h_w = \Delta H$ 。

达西发现, 在不同尺寸的圆筒和不同类型土的渗流中所通过的渗流流量 Q , 与圆筒的横断面面积 A 和水力坡度 h_w/L 成正比, 并且与土的透水性质有关, 即

$$Q \propto A \frac{h_w}{L}$$

或

$$Q = kA \frac{h_w}{L} = kJA \quad (10.5)$$

式中: k 为反映土的透水性质的比例系数, 称为渗透系数。渗透系数具有流速的量纲。

按照前节的定义, 在过水断面 A 上的平均渗流流速为

$$v = \frac{Q}{A} = kJ \quad (10.6)$$

式 (10.6) 即为达西公式。它表明在均质孔隙介质中渗流流速与水力坡度的一次方成比例并与土的性质有关, 此即为著名的达西定律。

若渗流的水力坡度 J 以微分形式表示, 则 $J = -\frac{dH}{ds}$, H 为渗流的总水头。由于一般渗流流速很小, 其流速水头可以不计, 所以总水头 H 可用测压管水头来代替, 即

$$H = z + \frac{p}{\rho g} \quad (10.7)$$

式 (10.6) 又可表示为

$$v = -k \frac{dH}{ds} \quad (10.8)$$

式 (10.6) 或式 (10.8) 是根据达西实验结果所建立的均匀渗流的断面平均流速公式。基于上述公式, 可以引出渗流场中任意点的渗流流速关系。如图 10.3 所示, 一个夹在两个不透水层之间的含水区, 地下水在含水区作有压渗流, 若在微小流束 ab 的任意过水断面 1-1 上测压管水头

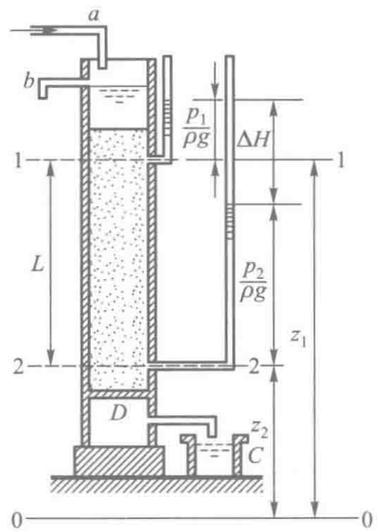


图 10.2

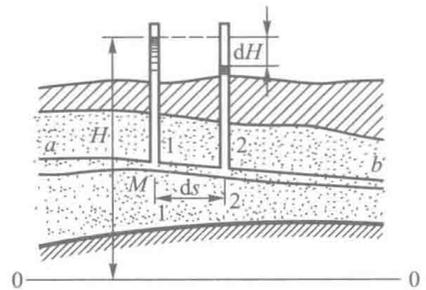


图 10.3

为 H ，经过 ds 流程后的断面 2-2 上，测压管水头下降 dH ，在断面 1-1 的 M 点处水力坡度 $J = -\frac{dH}{ds}$ ，按照达西定律的概念， M 点的渗流流速为

$$u = -k \frac{dH}{ds} \quad (10.9)$$

10.2.2 达西定律的适用条件

由达西定律可知，渗流的水头损失和流速的一次方成比例，也就是说水头损失和流速成线性关系。

很多学者的研究证明，达西定律仅在一定范围内才能适用。很明显，水头损失和流速一次方成比例，乃是液体作层流运动所遵循的规律，由此可见达西定律只能适用于层流渗流。在水利工程中，除了堆石坝、堆石排水体等大孔隙介质中的渗流为湍流之外，绝大多数渗流均属于层流范围，达西定律都可以适用。

达西定律的适用界限，曾有学者提出以颗粒直径来表示。如司立希特根据实验指出，达西定律适用于平均粒径在 0.01 ~ 3.0 mm 的土。后来的大多数学者认为此界限仍以雷诺数来表示更为适当。但是不同学者所用雷诺数的表达形式是不一样的，因而所得出的临界值也各不相同。大多数研究表明，由层流到湍流的临界雷诺数也不是一个常数，而是随着颗粒直径、孔隙率等因素而变化。巴甫洛夫斯基给出，当 $Re < Re_k$ 时渗流为层流， Re 为渗流的实际雷诺数， Re_k 为渗流的临界雷诺数。

$$Re = \frac{1}{0.75n + 0.23} \frac{vd}{\nu} \quad (10.10)$$

式中： n 为土的孔隙率； d 为土的有效粒径，以 cm 计。一般可用 d_{10} 来代表有效粒径。

$$Re_k = 7 \sim 9 \quad (10.11)$$

对于非层流渗流，可以用如下形式的公式来表达其流动规律：

$$v = kJ^{\frac{1}{m}} \quad (10.12)$$

上式中当 $m=1$ 时，为层流渗流。当 $m=2$ 时则为完全湍流渗流。当 $1 < m < 2$ 时，为层流到湍流的过渡区。

这里要着重指出，上述层流或非层流渗流规律，都是针对土体结构不因渗流而遭破坏而言。当渗流的作用引起了土体颗粒的运动，也就是说土在渗流作用下发生变形的情况就不在讨论之列。有关渗流变形和土体的渗透稳定性问题在土力学中专门研究。

10.2.3 渗透系数

在应用达西定律进行渗流计算时,需要确定土的渗透系数 k 值,它是反映土的渗流特性的一个综合指标。渗透系数的大小取决于很多因素,但主要取决于土的颗粒形状、大小、不均匀系数及水温,要精确确定其数值是比较困难的。一般确定 k 值常用以下几种方法。

1. 经验法

当进行初步估算时,由于没有获得可靠的实际资料,可以参照有关规范和已成工程的资料来选定 k 值。很显然,这种方法只有在粗略估算中可以采用。各类土的渗透系数的参考值见表 10.1。

表 10.1 土的渗透系数参考值*

土 名	渗透系数 k	
	m/d	cm/s
粘土	0.001	1×10^{-6}
粉质粘土	0.02	2×10^{-5}
砂质粉土 ~ 粉质粘土	0.1	1×10^{-4}
砂质粉土 ~ 粉质粘土	0.2	2×10^{-4}
粉砂	2 ~ 3	$2 \times 10^{-3} \sim 3 \times 10^{-3}$
粉细砂	5 ~ 8	$6 \times 10^{-3} \sim 9 \times 10^{-3}$
细砂	6 ~ 8	$7 \times 10^{-3} \sim 9 \times 10^{-3}$
中细砂	17	2×10^{-2}
中砂	20	2×10^{-2}
中粗砂	22	3×10^{-2}
粗砂	20 ~ 30	$2 \times 10^{-2} \sim 3 \times 10^{-2}$
砂砾石	45 ~ 50	$5 \times 10^{-2} \sim 6 \times 10^{-2}$
砂卵石	80	9×10^{-2}

* 本表资料引自中国建筑工业出版社 2007 年出版的《工程地质手册》。

2. 室内测定法

为了能较真实地反映土的透水性质,可将天然土取若干土样,在实验室内测定其渗透系数,达西实验装置就是通常采用的一种。将实测的流量与水头损失及设备装置的有关已知数据代入式 (10.5) 即可求得渗透系数:

$$k = \frac{QL}{Ah_w}$$

由于天然土并非完全均质土，所取土样不可能太多，因此也不可能完全反映真实情况，但这种方法毕竟是从实际出发，并且设备简单，费用较省，特别是以土作建筑物（土坝、反滤层）的材料时测定渗透系数多用此法。在室内测定天然土的渗透系数时，应保证在取样和操作过程中不使土的结构状态受到扰动。

3. 野外测定法

即在所研究的渗流区域的现场进行实测，这种方法能获得较为符合实际的大面积的平均渗透系数值，故对大型工程，在研究地基及库区渗流问题时，多用野外实测来取得原始资料。野外实测多是采用钻孔抽水或压水试验，通过对渗流参数的研究来求得平均渗透系数，此工作一般由水文地质勘测工作者来完成，其具体作法，可参考相关文献。

10.3 地下河槽中恒定均匀渗流和非均匀渐变渗流

若位于不透水基底上的孔隙区域内有地下水流动，且水流具有自由表面如图 10.4 所示，这种水流称为地下河槽水流。该渗流区则称为地下河槽，地下河槽水流乃是无压的渗流。

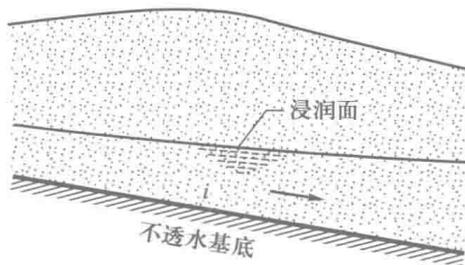


图 10.4

在自然界中，不透水基底很可能是不规则的，为了简单起见，一般都假定不透水基底为平面，以 i 表示其基底的坡度。

地下河槽和一般明渠一样，也可以分为棱柱体地下河槽及非棱柱体地下河槽。地下河槽水流的水力要素不沿流程改变者称为均匀渗流，反之为非均匀渗流。在非均匀渗流中，若流线近于平行直线则称为非均匀渐变渗流，反之为非均匀急变渗流。地下河槽水流的自由表面称为浸润面，其非均匀流动的水面曲线称为浸润曲线。

10.3.1 地下河槽中的均匀渗流

如图 10.5 所示, 在底坡为 i 的地下河槽中发生均匀渗流, 因均匀流时水深沿流程不变, 断面平均流速在各断面上是相等的, 水力坡度 J 和底坡 i 相等。按照达西定律, 断面平均流速为

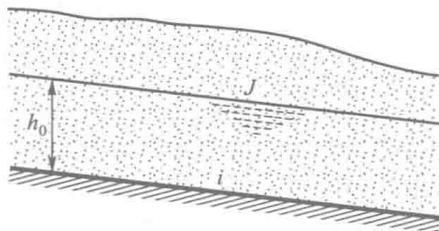


图 10.5

$$v = ki \quad (10.13)$$

通过过水断面的渗流流量为

$$Q = kiA_0 \quad (10.14)$$

式中: A_0 为均匀渗流时地下河槽的过水断面积。在很多情况下, 地下河槽都很宽阔, 其过水断面可视为矩形, 令 h_0 为均匀渗流的正常水深, 则 $A_0 = bh_0$, b 为地下河槽的宽度, 于是

$$Q = kibh_0 \quad (10.15)$$

通过地下河槽的单宽流量则为

$$q = kih_0 \quad (10.16)$$

10.3.2 地下河槽中非均匀渐变渗流的基本公式——杜比 (Dupuit J) 公式

达西定律所给出的计算公式 (10.6) 及 (10.8), 是对于均匀渗流的断面平均流速及渗流区域内任意点上的渗流流速的计算公式。为了研究非均匀渐变渗流的运动规律, 还必须建立非均匀渐变渗流的断面平均流速计算公式。

图 10.6 所示为一非均匀渐变渗流, 在相距为 ds 的断面 1-1 和断面 2-2 之间任意取微小流束 AB , 在 A 点的测压管水头设为 H_1 , H_1 应等于断面 1-1 的水面至基准面 0-0 的高度, 设 H_2 为 B 点的测压管水头, H_2 等于断面 2-2 的水面至基准面 0-0 的高度, 从 A 点至 B 点测压管水头差 $dH = H_2 - H_1$, 按照式 (10.8), 微小流束的 A 点处流速为

$$u = -k \frac{dH}{ds}$$

1-1 断面上的断面平均流速应为

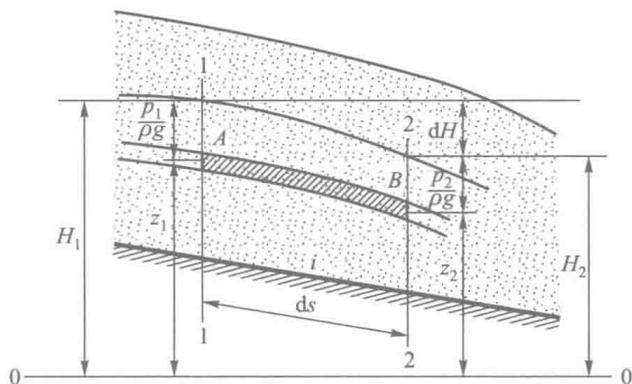


图 10.6

$$v = \frac{1}{A} \int_A u dA = \frac{1}{A} \int_A -k \frac{dH}{ds} dA \quad (10.17)$$

因在渐变流中，同一过水断面上的各点测压管水头等于常数，对于任何微小流束，从 1-1 断面流至 2-2 断面，其测压管水头差均为 dH 。同时在渐变流中，从 1-1 至 2-2 断面间各流线的长度 ds 也接近于相等，不同微小流束的水力坡度 $\frac{dH}{ds}$ 为一常数，故式 (10.17) 可写为

$$v = -k \frac{dH}{ds} \quad (10.18)$$

上式就是著名的杜比公式，系法国学者杜比于 1857 年首先推导出来。杜比公式表明，在渐变渗流中，过水断面上各点流速相等，并等于断面平均流速，流速分布图为矩形。但不同过水断面上的流速大小则是不相等的，如图 10.7 所示。

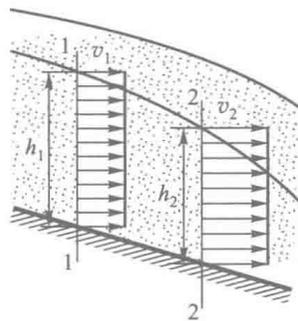


图 10.7

10.4 棱柱体地下河槽中恒定渐变渗流的浸润曲线

10.4.1 基本微分方程式

上节已经建立了计算非均匀渐变渗流断面平均流速的杜比公式，现在将基于杜比公式来建立非均匀渐变渗流的水力要素沿流程的变化关系式。

图 10.8 所示为地下河槽中的非均匀渐变渗流, 在距某起始断面为 s 的断面 1-1 处水深为 h , 测压管水头为 H , 经过 ds 流程以后的断面 2-2 处水深为 $h + dh$, 测压管水头为 $H + dH$, 由图中几何关系可见, 1-1 断面和 2-2 断面间测压管水头差为

$$-dH = ids - dh \quad (10.19)$$

故在微分流段内平均水力坡度为

$$J = -\frac{dH}{ds} = i - \frac{dh}{ds} \quad (10.20)$$

根据杜比公式, 断面平均流速为

$$v = k \left(i - \frac{dh}{ds} \right) \quad (10.21)$$

渗流流量为

$$Q = kA \left(i - \frac{dh}{ds} \right) \quad (10.22)$$

式 (10.22) 是棱柱体地下河槽恒定非均匀渐变渗流的基本微分方程式, 利用该式可以分析和计算非均匀渐变渗流的浸润曲线。

10.4.2 正坡 ($i > 0$) 地下河槽中浸润曲线

在研究明渠水流的水面曲线时就已知道, 对不同坡度的明渠, 其水面变化的形式是有区别的, 即使在同一类型底坡的明渠中, 实际水流的水深和正常水深、临界水深相比, 其所处的相对位置不同, 水面曲线的形式也不同。地下河槽中的浸润曲线, 也同样因坡度不同及实际水流所处的位置不同而形式也有所区别。

按照明渠水流中的定义, 临界水深是断面比能为最小值时的水深。但在渗流中流速水头 $\frac{\alpha v^2}{2g}$ 非常之小, 和 h 相比可以忽略, 所以断面比能在实际上就等于水深 h , 比能曲线变成了直线, 临界水深失去了意义。既然没有临界水深, 临界底坡也失去意义, 从而缓坡、陡坡的概念也不复存在, 急流、缓流、临界流的概念也不再存在。这样, 在地下河槽中只有正坡、平底与逆坡三种底坡类型。实际水流的水深, 也仅仅能和均匀渗流正常水深作比较。由此可见, 非均匀渐变渗流浸润曲线比明渠水流的水面曲线形式要简单。

下面首先研究正坡地下河槽的浸润曲线。在正坡地下河槽中, 因可以有均匀流存在, 其流量可用相应的均匀流流量公式来代替, 即

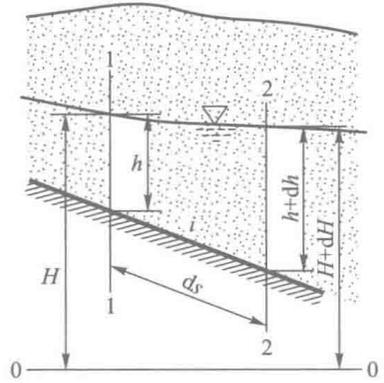


图 10.8

$$Q = kiA_0$$

将上式代入基本微分方程 (10.22) 得

$$kiA_0 = kA \left(i - \frac{dh}{ds} \right) \text{ 或 } \frac{dh}{ds} = i \left(1 - \frac{A_0}{A} \right) \quad (10.23)$$

利用上式可以分析正坡地下河槽浸润曲线的形式。因正坡地下河槽有正常水深存在, 可画出与底坡平行的正常水深线 $N-N$ (图 10.9), $N-N$ 线将水流划分为两个区域, 水深 $h > h_0$ 的称为 a 区, 水深 $h < h_0$ 的称为 b 区。

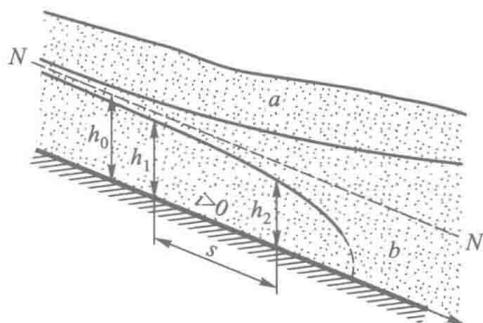


图 10.9

在 a 区, 因 $h > h_0$, 故 $A > A_0$, 由式 (10.23) 可知 $\frac{dh}{ds} > 0$, 浸润曲线为壅水曲线。在曲线的上游端, 当 $h \rightarrow h_0$ 时, $A \rightarrow A_0$, 由式 (10.23) 可知 $\frac{dh}{ds} \rightarrow 0$, 故上游端以 $N-N$ 线为渐近线。在曲线的下游端, 当 $h \rightarrow \infty$ 时, $A \rightarrow \infty$, 此时 $\frac{dh}{ds} \rightarrow i$, 故下游端以水平线为渐近线。

在 b 区, 因 $h < h_0$, $A < A_0$, 则 $\frac{dh}{ds} < 0$, 浸润曲线为降水曲线。在曲线上游端, 当 $h \rightarrow h_0$ 时, $A \rightarrow A_0$, 此时 $\frac{dh}{ds} \rightarrow 0$, 故上游端以 $N-N$ 线为渐近线。在曲线的下游端, 当 $h \rightarrow 0$ 时, $A \rightarrow 0$, 此时 $\frac{dh}{ds} \rightarrow -\infty$, 故下游端与槽底有成正交的趋势, 这种情况实际上不可能存在。

为了进行浸润曲线计算, 还需对微分方程 (10.23) 进行积分。

若地下河槽为矩形, $A = bh$, $\frac{A_0}{A} = \frac{h_0}{h}$, 令 $\eta = \frac{h}{h_0}$, 则 $dh = h_0 d\eta$, 将这些关系代入式 (10.23) 则

$$\frac{h_0 d\eta}{ds} = i \left(1 - \frac{1}{\eta} \right)$$

或

$$ds = \frac{h_0}{i} \left(1 + \frac{1}{\eta - 1} \right) d\eta \quad (10.24)$$

对上式积分可得

$$s = \frac{h_0}{i} \left(\eta_2 - \eta_1 + \ln \frac{\eta_2 - 1}{\eta_1 - 1} \right) \quad (10.25)$$

将上式化为常用对数为

$$s = \frac{h_0}{i} \left(\eta_2 - \eta_1 + 2.3 \lg \frac{\eta_2 - 1}{\eta_1 - 1} \right) \quad (10.26)$$

上式中 $\eta_2 = \frac{h_2}{h_0}$, $\eta_1 = \frac{h_1}{h_0}$ 。利用式 (10.26) 可进行正坡矩形地下河槽浸润曲线及其他有关的计算。

10.4.3 平坡 ($i=0$) 地下河槽中浸润曲线

将 $i=0$ 代入基本微分方程 (10.22) 式得

$$Q = -kA \frac{dh}{ds}$$

或

$$\frac{dh}{ds} = -\frac{Q}{kA} \quad (10.27)$$

因平坡地下河槽中不可能发生均匀流, 不存在正常水深, 浸润曲线仅有一种唯一的形式。从式 (10.27) 可知, 因为流量 Q 、渗透系数 k 及过水断面面积 A 均为正数, 无论实际水深 h 有多大, 始终有 $\frac{dh}{ds} < 0$, 所以平坡地下河槽中浸润曲线只能是降水曲线。如图 10.10 所示, 在曲线的下游端, 当 $h \rightarrow 0$ 时, $A \rightarrow 0$, 此时 $\frac{dh}{ds} \rightarrow -\infty$, 即浸润曲线和槽底有正交的趋势。在曲线的上游端, 则需视实际边界条件而定, 在极限情况下, 当 $h \rightarrow \infty$ 时, 则 $\frac{dh}{ds} \rightarrow 0$, 此时以水平线为渐近线。

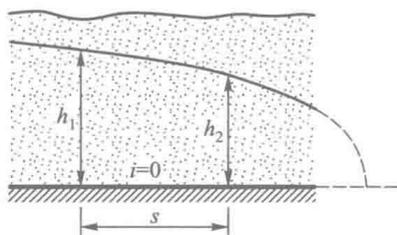


图 10.10

现对平坡地下河槽浸润曲线微分方程 (10.27) 进行积分。同样仅考虑矩

形断面地下河槽, $A = bh$, 则式 (10.27) 为

$$\frac{dh}{ds} = -\frac{Q}{kbh}$$

或

$$\frac{q}{k} ds = -h dh \quad (10.28)$$

积分则得

$$\frac{qs}{k} = \frac{1}{2}(h_1^2 - h_2^2) \quad (10.29)$$

利用上式可进行平坡地下河槽浸润曲线及其他有关的计算。

10.4.4 逆坡 ($i < 0$) 地下河槽中浸润曲线

令 $i' = |i|$ 代入基本微分方程 (10.22) 得

$$Q = -kA \left(i' + \frac{dh}{ds} \right) \quad (10.30)$$

和研究明渠水流水面曲线的方法一样, 虚拟一个在底坡为 i' 的地下河槽中的均匀流, 其流量和在底坡为 i 的逆坡河槽中的非均匀流所通过的流量相等, 则此虚拟的均匀渗流应当满足

$$Q = ki'A'_0 \quad (10.31)$$

式中: A'_0 为虚拟的均匀渗流正常水深所相应的过水断面积。将式 (10.22) 中流量以等值虚拟均匀渗流流量代入, 则有

$$ki'A'_0 = -kA \left(i' + \frac{dh}{ds} \right)$$

故

$$\frac{dh}{ds} = -i' \left(1 + \frac{A'_0}{A} \right) \quad (10.32)$$

由上式可见, 因 i' , A'_0 , A 均为正值, 所以无论实际水深多大, $\frac{dh}{ds} < 0$, 在

逆坡地下河槽中浸润曲线始终是降水曲线。

在曲线的下端, 当 $h \rightarrow 0$ 时, $A \rightarrow 0$, 此时 $\frac{dh}{ds} \rightarrow -\infty$, 此时浸润曲线与槽底有成正交的趋势。在曲线的上游端, 在极限情况下, 当 $h \rightarrow \infty$ 时, $A \rightarrow \infty$, 此时 $\frac{dh}{ds} \rightarrow i$, 故以水平线为渐近线, 曲线形状如图 10.11 所示。

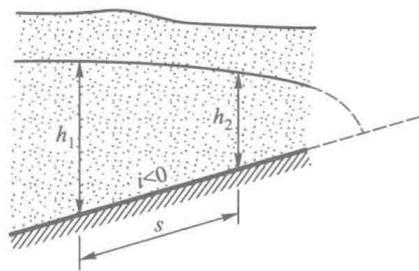


图 10.11

现对微分方程 (10.32) 进行积分, 仍然考虑矩形断面的地下河槽。令

$$\eta' = \frac{h}{h_0}$$

则

$$dh = h_0 d\eta'$$

代入方程 (10.32) 为

$$\frac{h_0 d\eta'}{ds} = -i' \left(1 + \frac{1}{\eta'} \right) \quad (10.33)$$

或

$$\frac{i'}{h_0} ds = -\frac{d\eta'}{1 + \frac{1}{\eta'}} = -\frac{\eta' d\eta'}{1 + \eta'} \quad (10.34)$$

对上式积分并把自然对数化为常用对数, 可得

$$\frac{i' s}{h_0} = \eta'_1 - \eta'_2 + 2.3 \lg \frac{1 + \eta'_2}{1 + \eta'_1} \quad (10.35)$$

上式中 $\eta'_1 = \frac{h_1}{h_0}$, $\eta'_2 = \frac{h_2}{h_0}$ 。利用式 (10.35) 可进行逆坡地下河槽浸润曲线及其他有关的水力计算。

例 10.1 如图 10.12 所示, 在渠道与河流之间为一透水的土层, 其不透水层基底的坡度 i 为 0.02, 土层的渗透系数 k 为 0.005 cm/s, 渠与河之间距离 s 为 180 m, 自渠中渗出之地下水的水深 h_1 为 1.0 m, 流入河道时地下水深 h_2 为 1.9 m, 试求每米长渠道向河道的渗流流量并计算浸润曲线。

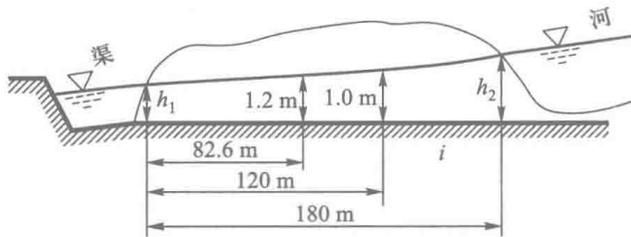


图 10.12

解: (1) 由式 (10.16) $q = kih_0$, 欲求渗流流量, 须先求正常水深 h_0 。

由题知 $h_1 < h_2$, 故浸润曲线为壅水曲线, 今利用式 (10.26) 来计算正常水深:

$$s = \frac{h_0}{i} \left(\eta_2 - \eta_1 + 2.3 \lg \frac{\eta_2 - 1}{\eta_1 - 1} \right)$$

因 $\eta_2 = \frac{h_2}{h_0}$, $\eta_1 = \frac{h_1}{h_0}$, 上式可改写为

$$is - h_2 + h_1 = 2.3h_0 \lg \frac{h_2 - h_0}{h_1 - h_0}$$

将 $h_1 = 1.0 \text{ m}$, $h_2 = 1.9 \text{ m}$ 代入上式得

$$h_0 \lg \frac{1.9 \text{ m} - h_0}{1.0 \text{ m} - h_0} = \frac{1}{2.3} (0.02 \times 180 \text{ m} - 1.9 \text{ m} + 1.0 \text{ m}) = 1.172 \text{ m}$$

上式左端为 h_0 的函数, 令 $h_0 \lg \frac{1.9 \text{ m} - h_0}{1.0 \text{ m} - h_0} = f(h_0)$, 则

$$f(h_0) = 1.172 \text{ m}$$

采用试算法, 假定一系列的 h_0 值, 计算相应的 $f(h_0)$, 其结果见表 10.2。

表 10.2

h_0/m	$f(h_0)/\text{m}$
0.92	1.001
0.94	1.131
0.96	1.315

根据表中数据, 用作图或内插法求得当 $h_0 = 0.95 \text{ m}$ 时 $f(h_0) = 1.172 \text{ m}$, 故正常水深为 0.95 m 。

每米长渠道内所渗出的流量为

$$\begin{aligned} q &= kih_0 = 0.00005 \text{ m/s} \times 0.02 \times 0.95 \text{ m} \\ &= 0.0000095 \text{ m}^3/(\text{s} \cdot \text{m}) \end{aligned}$$

(2) 计算浸润曲线

已知浸润曲线为壅水曲线, 起始水深 $h_1 = 1.0 \text{ m}$, 假定一系列的 h_2 值, 由式 (10.26) 可计算出相应的距离 s , 计算可按表 10.3 进行。

表 10.3

h_1/m	η_1	h_2/m	η_2	s/m
1.0	1.058	1.2	1.27	82.6
		1.4	1.48	120.0
		1.7	1.80	159.0
		1.9	2.01	180.0

根据表中所算出的 h_2 值及 s 值可以绘制浸润曲线。

例 10.2 某工厂区为降低地下水位，在水平不透水层上修建了一条长 100 m 的地下集水廊道（图 10.13），将集水经排水沟排走。由实测，在距廊道边缘距离 s 为 80 m 处地下水位开始下降，该处地下水水深 H 为 7.6 m，廊道中水深 h 为 3.6 m，由廊道排出总流量 Q 为 $2.23 \text{ m}^3/\text{s}$ ，试求土层的渗透系数 k 值。

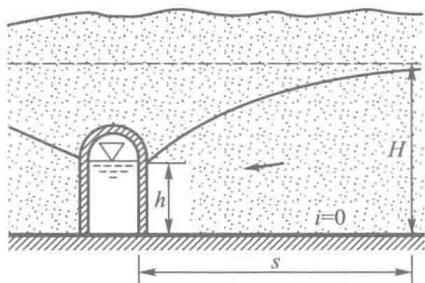


图 10.13

解：廊道中汇集的地下水流量由两侧土层中渗出，故每一侧渗出的单宽流量为

$$q = \frac{2.23 \text{ m}^3/\text{s}}{2 \times 100 \text{ m}} = 0.0112 \text{ m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})$$

由平坡地下河槽浸润曲线的计算公式（10.29）：

$$\frac{qs}{k} = \frac{1}{2}(h_1^2 - h_2^2)$$

令

$$h_1 = H = 7.6 \text{ m}, \quad h_2 = h = 3.6 \text{ m}$$

可解出

$$k = \frac{2qs}{H^2 - h^2} = \frac{2 \times 0.0112 \text{ m}^2/\text{s} \times 80 \text{ m}}{(7.6 \text{ m})^2 - (3.6 \text{ m})^2} = 4 \times 10^{-2} \text{ m/s}$$

10.5 普通井及井群的计算

在地表的无压透水层中所开掘的井称为普通井，若井底直达不透水层称为普通完全井，若井底没有达到不透水层则称为不完全井。

10.5.1 普通完全井

设含水层位于水平不透水层上，含水层厚度为 H 。掘井以后井中初始水位和原地下水位相同，当井中开始抽水后，含水层中地下水开始流向水井，井中

水位和周围地下水位开始下降。如果抽水继续进行并且抽水流量保持不变，同时假定含水层体积很大，可以无限制地供给一定流量而不致使含水层厚度 H 有所改变，则流向水井的地下渗流形成恒定流，此时井中水深 h_0 保持不变，周围地下水面降到某一固定位置，形成一恒定的漏斗形浸润面。

上述流动情况虽是一种假想，但当含水层足够大而抽水流量又不太大时，这种假想的恒定流比较符合实际情况。但是这里排除了井的周围有其他地下水流的干扰。在所考虑的流动情况下，流向水井的渗流过水断面，是一系列的同心圆柱面（仅仅在井壁附近局部地区，过水断面与同心圆柱面有较大偏差），通过井轴中心线沿径向的任何剖面上，流动情况都是相同的。如图 10.14 所示，若取任一距井轴为 r 的过水断面，令该断面上含水层厚度为 z ，其过水断面面积应为 $2\pi rz$ ，在断面上各处的水力坡度为

$$J = \frac{dz}{dr}$$

断面上的平均流速为

$$v = k \frac{dz}{dr}$$

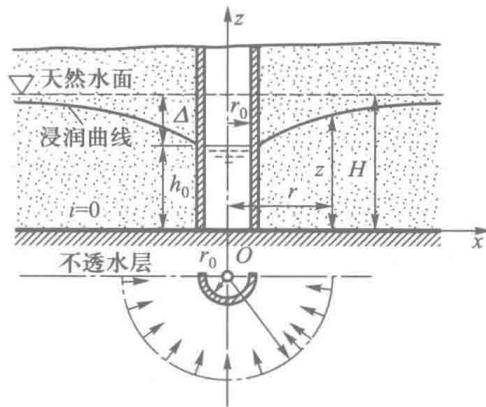


图 10.14

通过的渗流量为

$$Q = 2\pi rzk \frac{dz}{dr} \quad (10.36)$$

将上式改变形式如下：

$$2\pi rzdz = \frac{Q}{k} \frac{dr}{r} \quad (10.37)$$

对上式两端在相应变量范围内积分：

$$2\pi \int_{h_0}^z z dz = \frac{Q}{k} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r}$$

积分后得

$$z^2 - h_0^2 = \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{r}{r_0}$$

化为常用对数为

$$z^2 - h_0^2 = \frac{0.73Q}{k} \lg \frac{r}{r_0} \quad (10.38)$$

利用式 (10.38) 可绘制沿井的径向剖面的浸润曲线。

设想在距井轴相当距离 R 之处, 地下水不再受到井中抽水的影响, 也就是说该处地下水水深保持为 H , 这个距离 R 称为井的影响半径。如果认为只有影响半径 R 范围内地下水流才汇入井中, 那么令式 (10.38) 中 $r = R$, $z = H$, 即可求得井的恒定最大供水流量为

$$Q = k \frac{H^2 - h_0^2}{0.73 \lg \frac{R}{r_0}} \quad (10.39)$$

从理论上讲, 影响半径应为无穷大, 但从实用的观点看, 可以认为井的影响半径是一个有限的数值。例如当含水层厚度已经非常接近于 H (比如 95% H) 的地方, 可以认为井的影响到此为止。

利用式 (10.39) 计算井的供水量时, 必须先确定影响半径 R , 在一般初步计算中, R 可用经验公式来估算:

$$R = 3000\Delta \sqrt{k} \quad (10.40)$$

式中: Δ 为井的抽水深度, $\Delta = H - h_0$, R , Δ 均以 m 计, k 以 m/s 计。

在粗略估算时, 影响半径可按下列范围取用:

细粒土 $R = 100 \sim 200$ m

中粒土 $R = 250 \sim 700$ m

粗粒土 $R = 700 \sim 1000$ m

如果在井的附近有河流、湖泊、水库时, 影响半径应采用由井至这些水体边缘的距离。对极为重要的精确计算, 最好用野外实测方法来确定影响半径的大小。

虽然影响半径不易精确确定, 但由式 (10.39) 可以看出, 流量与影响半径的对数值成反比, 所以它对抽水量计算不会产生很大误差。

10.5.2 不完全井

若井底未达到不透水层, 这种井称为不完全井。不完全井的特点是, 水流

不仅沿井壁周围流入水井,同时也从井底流入水井,因此流动情况比较复杂,理论计算尚有困难,目前多采用完全井的计算公式乘以大于1的修正系数来计算。

$$Q = \frac{k(H'^2 - t^2)}{0.73 \lg \frac{R}{r_0}} \left(1 + 7 \sqrt{\frac{r_0}{2H'}} \cos \frac{H'\pi}{2H} \right) \quad (10.41)$$

式中符号如图 10.15 中所示。

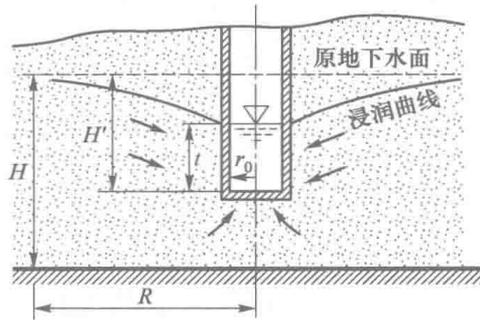


图 10.15

10.5.3 井群

无论是为了吸取地下水源,或是为了基坑开挖时降低地下水位,在一个区域常常不只是打一个井而是打许多井来同时抽水,若这些井之间距离不是很大,井与井之间地下水流互相发生影响,这样的许多井同时工作称为井群,如图 10.16 所示。

由于井与井之间水流相互影响,在井群区地下水流比较复杂,其浸润面也非常复杂。

现在仅讨论一种工作条件最简单的井群,即假定每个井均为完全井,每个井的尺寸相同,抽水流量相同,井与井之间距离很小。根据势流叠加原理,当若干井同时存在时,任意点 A 处的势函数为各井单独作用时在该点的势函数之和。利用这样的方法可以求出上述井群的总供水能力为

$$Q = 1.36 \frac{k(H^2 - h^2)}{\lg R - \frac{1}{n} \lg(r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n)} \quad (10.42)$$

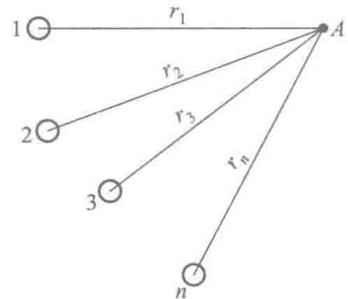


图 10.16

式中： n 为井的数目； h 为渗流区内任意点 A 的含水层厚度（即地下水深度）； r_1, r_2, \dots, r_n 为各水井至任一地下水深度为 h 处的 A 点的距离； R 为井群的影响半径，可接单井的影响半径计算； H 为原含水层的厚度。利用式 (10.42) 计算井群供水能力时，须已知某一指定位置的地下水深度 h 值。

每一个井的供水能力 $Q = \frac{Q_0}{n}$ 。当已知井群的总抽水量 Q_0 时，利用式 (10.42) 亦可计算在渗流区内任意点的地下水深度 h 值。

例 10.3 为在野外实测土层的渗透系数，在该区域打一口井，并沿井半径方向设置钻孔两个，如图 10.17 所示，然后用抽水机从井中抽水，待抽水持续一定时间使流量及井和钻孔中水位均已恒定不变之后，测得钻孔中水深 $h_1 = 2.6 \text{ m}$ ， $h_2 = 2.2 \text{ m}$ ，抽水流量 $Q = 0.0025 \text{ m}^3/\text{s}$ ，已知钻孔中心距井中心的距离 $r_1 = 60 \text{ m}$ ， $r_2 = 15 \text{ m}$ ，求井区附近土层的渗透系数。

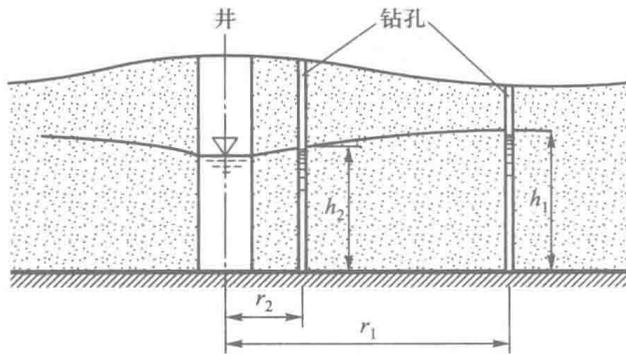


图 10.17

解：根据完全井的计算公式有

$$h_1^2 - h_2^2 = \frac{0.73Q}{k} \lg \frac{r_1}{r_2}$$

故

$$\begin{aligned} k &= \frac{0.73Q}{h_1^2 - h_2^2} \lg \frac{r_1}{r_2} \\ &= \frac{0.73 \times 0.0025 \text{ m}^3/\text{s}}{(2.6 \text{ m})^2 - (2.2 \text{ m})^2} \lg \frac{60 \text{ m}}{15 \text{ m}} \\ &= 0.000572 \text{ m/s} \end{aligned}$$

例 10.4 有一井群由 8 个普通完全井所组成，排列在一个矩形周界上，如图 10.18 所示。已知矩形边长为 60 m 和 40 m，井群的总供水能力 Q_0 为 $0.02 \text{ m}^3/\text{s}$ ，井的半径 r_0 为 0.1 m，井群的影响半径 R 为 500 m，地下水含水层厚度 H 为

10 m, 含水层渗透系数 k 为 0.001 m/s , 求井群中心点 O 的地下水位降低值 Δh 为多少?

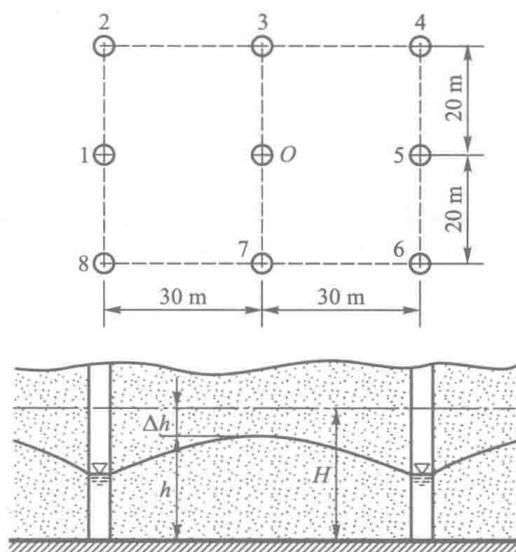


图 10.18

解: 各井至 O 点的距离为

$$r_1 = r_5 = 30 \text{ m}, \quad r_3 = r_7 = 20 \text{ m}$$

$$r_2 = r_4 = r_6 = r_8 = \sqrt{(30 \text{ m})^2 + (20 \text{ m})^2} = 36 \text{ m}$$

由井群的计算公式 (10.42) 可解出点 O 处地下水水深为

$$\begin{aligned} h^2 &= H^2 - \frac{Q_0}{1.36k} \left[\lg R - \frac{1}{n} \lg(r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_8) \right] \\ &= (10 \text{ m})^2 - \frac{0.02 \text{ m}^3/\text{s}}{1.36 \times 0.001 \text{ m/s}} \left[\lg 500 - \frac{1}{8} \lg(30 \times 36 \times 20 \times 36 \times 30 \times 36 \times 20 \times 36) \right] \\ &= 82.09 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

$$h = 9.06 \text{ m}$$

O 点处地下水位降低值为

$$\Delta h = 10 \text{ m} - 9.06 \text{ m} = 0.94 \text{ m}$$

10.6 水平不透水层上均质土坝的渗流计算

均质土坝渗流计算的主要目的是确定经过坝体的渗流量和坝内浸润曲线位置。

图 10.19 所示为筑于水平不透水地基上的均质土坝，上游液体将通过边界 AB 渗入坝体，在坝内形成自由表面（浸润面） AC ， C 点称为逸出点， $ABDC$ 区域为渗流区。

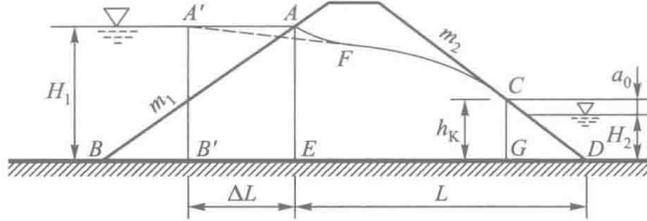


图 10.19

因一般坝轴线较长，故通常把土坝渗流作为平面问题看待，同时认为坝内渗流符合渐变渗流的条件。

在实用上，土坝渗流常采用“分段法”进行计算，并且有三段法和两段法两种计算方法。三段法是把坝内渗流区划分为三段，第一段为上游三角楔形体 ABE ，第二段为中间段 $AEGC$ ，第三段为下游出渗段 CGD 。对每一段可应用渐变渗流的基本公式（杜比公式）计算渗流流量，而通过每段的流量应当相等，通过三段的联合求解，可得出坝的渗流流量及逸出点水深 h_k ，并可画出浸润曲线 AC 。

两段法是在三段法的基础上进行了简化，把上游楔形体 ABE 用一个矩形体 $AEB'A'$ 去取代，取代以后的渗流效果一样。这样把第一段和第二段合并为一段，即上游渗流段 $A'B'GC$ 。

现用两段法来进行分析。

根据试验，等效的矩形体的宽度 ΔL 由下式确定：

$$\Delta L = \frac{m_1}{1 + 2m_1} H_1 \quad (10.43)$$

式中： m_1 为坝上游面的边坡系数。

10.6.1 上游段的计算

渗流从过水断面 $A'B'$ 至 CG 的水头差 $\Delta H = H_1 - h_k$ ，两过水断面之间平均渗透路程 $\Delta s = L + \Delta L - m_2 h_k$ ， m_2 为坝下游面的边坡系数，故上游段的平均水力坡度为

$$J = \frac{H_1 - h_k}{L + \Delta L - m_2 h_k}$$

根据杜比公式，上游段的平均渗流流速为

$$v = kJ = k \frac{H_1 - h_K}{L + \Delta L - m_2 h_K}$$

上游段单宽坝长的平均过水断面面积 $A = \frac{1}{2}(H_1 + h_K)$ ，上游段所通过的单宽渗流量为

$$q = v \cdot A = \frac{k(H_1^2 - h_K^2)}{2(L + \Delta L - m_2 h_K)} \quad (10.44)$$

很明显要用上式计算渗流量还不可能，因其中逸出点水深 h_K 是未知数，所以还须要对下游段建立计算公式，以便和式 (10.44) 进行联立求解。

10.6.2 下游段的计算

设坝下游有水，其水深为 H_2 ，逸出点在下游水位以上的高度为 a_0 ，因在下游水面以下的渗流为有压流，在水面以上部分为无压流，需要分开计算。同时根据实际流线的情况，把下游段内渗流的流线都看作是水平线。

首先研究下游段水面以上部分。如图 10.20 所示，设在距坝底的高度为 y 处取一水平微小流束 dy ，该微小流束由起始断面至末端断面的水头差应为 $(a_0 + H_2 - y)$ ，微小流束的长度为 $m_2(a_0 + H_2 - y)$ ，故微小流束的水力坡度 J 为 $\frac{1}{m_2}$ ，通过微小流束的单宽流量为

$$dq_1 = kJdy = \frac{k}{m_2} dy$$

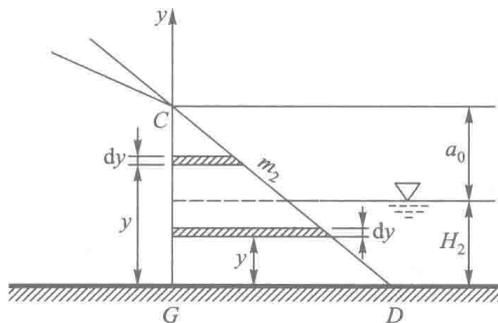


图 10.20

整个水面以上部分单宽渗透流量为

$$q_1 = \int dq_1 = \int_{H_2}^{a_0+H_2} \frac{k}{m_2} dy = \frac{k a_0}{m_2} \quad (10.45)$$

再考虑下游段水面以下的部分。同样，可在距坝底高度为 y 处取出一水平

微小流束 dy , 该微小流束由起始断面至末端断面水头差为 a_0 , 微小流束长度为 $m_2(a_0 + H_2 - y)$, 其水力坡度 J 为 $\frac{a_0}{m_2(a_0 + H_2 - y)}$, 通过微小流束的单宽流量为

$$dq_2 = kJdy = \frac{ka_0}{m_2(a_0 + H_2 - y)} dy$$

整个下游段水面以下的单宽流量为

$$\begin{aligned} q_2 &= \int dq_2 = \int_0^{H_2} \frac{ka_0}{m_2(a_0 + H_2 - y)} dy \\ &= \frac{ka_0}{m_2} \lg \frac{a_0 + H_2}{a_0} \end{aligned} \quad (10.46)$$

化为常用对数后上式为

$$q_2 = \frac{2.3ka_0}{m_2} \lg \frac{a_0 + H_2}{a_0} \quad (10.47)$$

通过下游段的全部单宽渗流量 $q = q_1 + q_2$, 即

$$q = \frac{ka_0}{m_2} \left(1 + 2.3 \lg \frac{a_0 + H_2}{a_0} \right) \quad (10.48)$$

上式中 $a_0 = h_K - H_2$, 联解方程式 (10.44) 及 (10.48), 可求得坝的渗流量 q 及逸出点高度 h_K 。

10.6.3 浸润曲线

如图 10.21 所示, 因用等效的矩形体取代上游三角楔形体, $A'B'$ 即为上游的入渗起始断面, 今取以点 G 为坐标原点的一组直角坐标系来研究浸润曲线的计算, x 轴以向左为正。

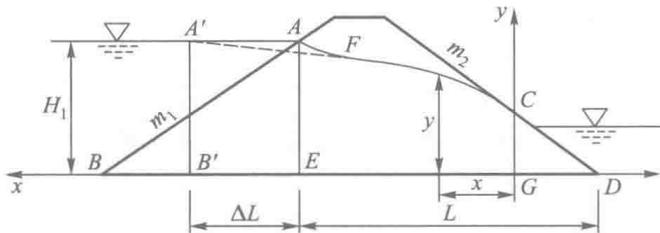


图 10.21

在任意水平坐标为 x 的过水断面上, 设其水深为 y , 根据杜比公式, 该断面的平均渗流流速为

$$v = k \frac{dy}{dx}$$

单宽渗流量为

$$q = ky \frac{dy}{dx}$$

或

$$qdx = kydy$$

将上式积分得

$$qx = \frac{1}{2}ky^2 + C \quad (10.49)$$

利用已知边界条件可确定积分常数 C ，当 $x = L + \Delta L - m_2 h_k$ 时， $y = H_1$ ，代入上式得

$$C = q(L + \Delta L - m_2 h_k) - \frac{1}{2}kH_1^2$$

将 C 值代入式 (10.49) 得

$$qx = \frac{1}{2}ky^2 + q(L + \Delta L - m_2 h_k) - \frac{1}{2}kH_1^2$$

或

$$y^2 = H_1^2 - \frac{2}{k}q[(L + \Delta L - m_2 h_k) - x]$$

将计算渗流流量的式 (10.44) 代入上式后，可得出浸润曲线的方程式为

$$y = \sqrt{\frac{x}{(L + \Delta L - m_2 h_k)}(H_1^2 - h_k^2) + h_k^2} \quad (10.50)$$

假定一系列的 x 值，由上式可算得相应的 y 值，从而描绘出坝内浸润曲线。由上式可见，当 $x=0$ 时， $y=h_k$ ，当 $x=(L + \Delta L - m_2 h_k)$ 时， $y=H_1$ 。

按式 (10.50) 所绘出的浸润曲线，其上游端是从 A' 点开始的，而实际上入渗点应在 A ，故曲线的前段 $A'F$ 应加以修正。在实用上常采用近似方法来修正它，即把 A 点作为曲线的上游端起点，再选择适当能与后半段曲线光滑连接的曲线 AF 去代替 $A'F$ 即可。

10.7 渗流场的基本微分方程及其解法

前面以达西定律为基础，采用流束理论的分析法，讨论了渐变渗流的有关水力计算问题，而没有涉及渗流场的求解。实践证明，许多实际工程中的渗流，不能视为一元流或渐变流。如水工建筑物地基中的渗流，一般渗流区极不

规则, 建筑物地下轮廓多有局部突变 (如齿槽、板桩等), 流线曲率很大, 渗流运动要素至少有两个方向的变化。另一方面由于生产实际的需要, 不仅要求了解渗流的某些宏观效果如渗流流量、过水断面平均流速, 而且必须弄清楚渗流区内各点的渗流流速和动水压强。所以渗流场的求解是十分重要的。

10.7.1 渗流场的连续性方程和运动方程

若在渗流场中分割出一块微分六面体, 根据渗流模型的概念视渗流为连续介质流动, 并假定液体不可压缩, 土的骨架亦不变形, 可以推导出恒定渗流的连续性方程为

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (10.51)$$

由于推证和处理方法与第 10 章中三维连续性方程一样, 这里不再详述其过程。

此外, 根据式 (10.9), 渗流场中任意点的渗流流速为

$$u = -k \frac{dH}{ds}$$

因而任一点流速在三个坐标方向投影可表达为

$$\left. \begin{aligned} u_x &= -k \frac{\partial H}{\partial x} \\ u_y &= -k \frac{\partial H}{\partial y} \\ u_z &= -k \frac{\partial H}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (10.52)$$

上式即为均质各向同性土中恒定渗流的运动微分方程式。式中 H 为流场中任意点的总水头, 实用上可视为测压管水头, 即

$$H = z + \frac{p}{\rho g}$$

连续性方程和运动微分方程, 构成了渗流的基本微分方程组, 它们共有 u_x , u_y , u_z , 及 H 等 4 个未知数, 通过联立求解微分方程组, 可求解渗流的流速场和水头 (或压强) 场。

10.7.2 渗流的流速势与拉普拉斯方程

若令函数

$$\varphi = -kH \quad (10.53)$$

对于均质各向同性土, 在渗流场中 k 为常数, 则运动微分方程可写为

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ u_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ u_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (10.54)$$

上式表明,符合达西定律的渗流属于势流,函数 φ 则是渗流场中的流速势函数。

将式(10.54)代入式(10.51)可得

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (10.55)$$

或

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0 \quad (10.56)$$

由此可知,不可压缩恒定渗流,水头函数满足拉普拉斯方程,通过求解拉普拉斯方程(在一定边界条件下)即可求解渗流场。

若渗流为平面流(二维问题),渗流场还存在流函数,所有求解平面势流的方法都可应用于解平面渗流问题,该方法可参见本书9.5节的内容。

10.7.3 渗流场解法简介

利用上述微分方程解渗流场的方法大致可分为四种类型。

1. 解析法

根据微分方程,结合具体边界条件以解析法求得水头函数 H 或流速势 φ 的解析解,从而得到流速和压强场的分布函数。但由于实际渗流问题的复杂性,用解析法所能求解的问题是很有限制的。

2. 数值解法

用近似解法求得有关渗流要素在场内若干点上的数值。随着电子计算机的发展,数值解法的应用愈来愈广泛,精度亦愈来愈高。常用的数值解法为有限差分法和有限单元法。

3. 图解法

图解法也是一种近似方法,它用逐步近似方法绘出流场的流网,从而求解平面渗流问题。对于一般工程问题,图解法可以给出较为满意的结果,因而应用较为普遍。

4. 实验法

采用一定比例的模型来模拟真实的渗流场,用实验手段测定流场中渗流要

素。实验法一般有沙槽模型法，狭缝槽法，电比拟法。其中以电比拟法应用较为广泛。

10.7.4 边界条件

无论采用解析法还是其他方法求解恒定渗流场，都涉及边界条件的确定。现以图 10.22 所示土坝平面渗流为例来说明确定边界条件的基本原则。

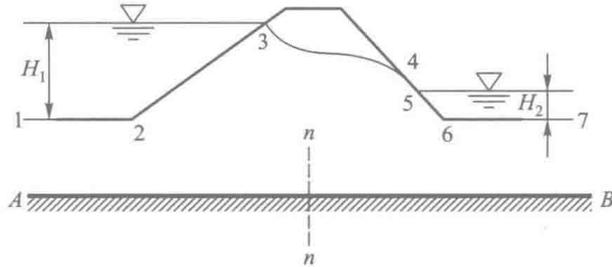


图 10.22

1. 不透水边界

因为液体不能穿过不透水边界而只能顺着它流动，所以不透水边界的任何点上渗透流速沿边界的法线方向无分速，即 $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ ， n 为边界法线方向。既然液体只能顺着边界流动，所以不透水边界必定是一条流线，该边界上流函数 $\psi = \text{常数}$ （关于流函数的定义见本书 9.5 节）。图 10.22 中不透水基底 AB 则是一条流线。

2. 透水边界

如图 10.22 中上游入渗边界 1-2-3 及下游出渗边界 5-6-7 均属于透水边界。不难看出，在上述透水边界上水头 H 或势函数 φ 为常数；例如在边界 1-2-3 上 $H = H_1$ ，在边界 5-6-7 上 $H = H_2$ 。因而透水边界线是等势线，液体穿过透水边界时，流速与之正交，流线亦与之正交。

3. 浸润线边界

浸润线是一条流线，该线上流函数 $\psi = \text{常数}$ ，同时线上各点压强均为大气压强，即 $p = 0$ ，于是水头函数 $H = z$ ，即浸润线上各点水头函数值与其几何纵坐标值相等。

4. 逸出边界

如图 10.22 中下游面 4-5 之间边界称为逸出边界。该边界上每一个点，都是坝内某一流线的终点，液体从此跨出渗流区而顺着坝面流动，但它不再具有渗流的性质。在逸出边界上各点压强均等于大气压强，水头函数随位置而改

变。因此可知逸出边界既不是流线，也不是等势线。

思 考 题

10.1 什么叫渗流？什么叫孔隙介质？

10.2 水在土壤中的存在形式有哪几种？其运动特征是什么？参与地下水运动，主要是什么形态的水流？

10.3 渗流的基本定律是什么？写出数学表达式并说明其物理意义。

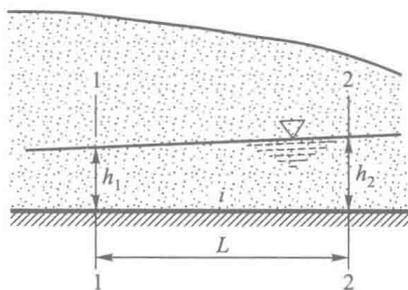
10.4 何谓渗透系数？它的物理意义是什么？怎样确定渗透系数值？

10.5 什么叫浸润线，浸润线的基本微分方程的形式是什么？

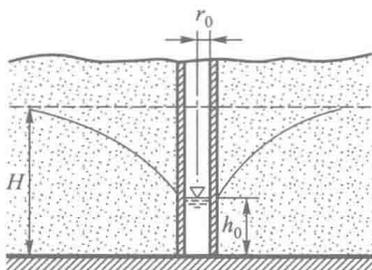
10.6 什么叫普通完全井，什么叫不完全井？写出普通井浸润曲线方程。

习 题

10.1 某河冬季由地下水补给水量，今测得不透水层坡度 i 为 0.0025，如图所示，1-1 断面含水层厚度 h_1 为 3m，2-2 断面含水层厚度 h_2 为 4m，两断面间距离 L 为 500m，土的渗透系数 k 为 0.05 cm/s，试计算地下水单宽渗流量。



题 10.1

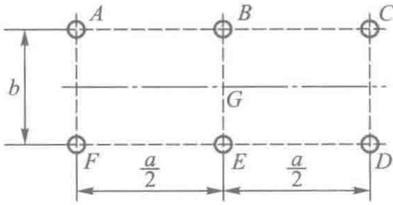


题 10.2

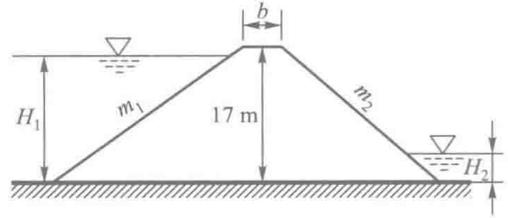
10.3 有一普通完全井群由六个井组成，井的布置如图所示，已知 a 为 50m， b 为 20m，井群的总流量 Q_0 为 3 l/s，各井抽水流量相同，井的半径 R 为 0.2m，蓄水层厚度 H 为 12m，土为粗砂，渗透系数 k 为 0.01 cm/s，影响半径 R 为 700m，试计算井群中心点 G 处的地下水面降低了多少？

10.4 某均质土坝建于不透水地基上，如图所示，已知坝高为 17m，上游

水深 H_1 为 15 m，下游水深 H_2 为 2 m，上游边坡系数 m_1 为 3，下游边坡系数 m_2 为 2，坝顶宽 b 为 6 m，坝身土的渗透系数经实验测得为 0.001 cm/s，试计算坝身的单宽渗流量并画出坝内浸润曲线。



题 10.3



题 10.4

11 水力学模型试验基础

理论分析和模型试验是研究水力学问题的两种基本方法。尽管数值计算极大地拓宽了理论分析的应用领域，但实际工程中的水流现象往往是很复杂的，单纯依靠理论分析来求解许多水力学问题遇到了很大的困难，此时采用模型试验与理论分析相结合的方式是解决问题的有效途径。

试验研究通常是在与原型相似而缩小了几何尺寸的模型上进行，在模型中观测流态和运动要素，然后把模型中的这些实测资料引申到原型上去，这样就产生了下面的问题：

- (1) 如何设计模型才能使模型和原型中的流动相似？
- (2) 如何正确选择各种参量进行量纲分析，用来辅助制定合适的试验方案？
- (3) 如何正确地处理、分析试验数据，找到数据的规律性？
- (4) 如何把模型中观测的流动现象和数据换算到原型中去，并进一步引申？

量纲和相似原理提供了解决这四个问题的理论基础。

本章将介绍量纲、相似原理和模型试验的基础。

11.1 量纲分析

11.1.1 量纲分析的基本概念

一般物理量都具有量纲，不同种类的物理量有不同的量纲，在 1.3 节中曾对量纲作过简要的介绍。当表征一个物理过程的方程已知时，则有关此过程的物理量之间的关系就确定了。任一物理过程，不仅各物理量之间关系具有规律性，而且这些物理量相应的量纲之间也存在规律性。量纲分析法，就是利用量纲之间的规律性去推求各物理量之间的规律性的方法。

物理方程中各项物理量的量纲之间存在着下列规律性：

1. 物理方程中各项的量纲应当相同。这一规律称为量纲和谐性（或齐次性）。不难理解，在一个物理方程中，不能把以长度计的物理量和以时间计的

物理量来相加或相减。

在3.4节关于能量方程的图示中,曾已阐明,能量方程中各项 $(z, \frac{p}{\rho g}, \frac{\alpha v^2}{2g})$ 均具有长度的量纲L,它是符合量纲和谐性原则的。

利用量纲和谐原则可以从一个侧面来检验某一物理方程的正确性。

2. 任一有量纲的物理方程可以改写为量纲一的项组成的方程而不会改变物理过程的规律性。

例如总流的能量方程,若等式两端各项用一量纲为长度L的某一水头H去除,则变为

$$\frac{z_1}{H} + \frac{p_1}{\rho g H} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2gH} = \frac{z_2}{H} + \frac{p_2}{\rho g H} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2gH} + \frac{h_w}{H}$$

显然,一个物理方程各项用同一数除,不会改变原方程的本质,但它在形式上却把原方程改换成了由量纲一的项组成的方程。利用量纲分析法去探求物理方程的形式时,常把物理方程各项用量纲一的形式来表达更具有普遍性。

11.1.2 量纲分析的 Rayleigh 法 (瑞利法)

如果某一物理量y由n个变量 $N_1, N_2, N_3, \dots, N_n$ 所确定,假定y可由各变量幂函数的乘积表示:

$$y = KN_1^{\alpha_1} N_2^{\alpha_2} N_3^{\alpha_3} \cdots N_n^{\alpha_n} \quad (11.1)$$

公式中,K为系数, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为待定指数。

根据量纲和谐原则,方程(11.1)左右两边基本量纲的指数应该相等。所以,可以确定待定指数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的值。这样就可以确定该物理过程的函数关系式。假设 y, N_1, N_2, \dots, N_n 的量纲分别为

$$M^a L^b T^c, \quad M^{a_1} L^{b_1} T^{c_1}, \quad M^{a_2} L^{b_2} T^{c_2}, \quad \dots, \quad M^{a_n} L^{b_n} T^{c_n}$$

则有

$$M^a L^b T^c = (M^{a_1} L^{b_1} T^{c_1})^{\alpha_1} \cdot (M^{a_2} L^{b_2} T^{c_2})^{\alpha_2} \cdots (M^{a_n} L^{b_n} T^{c_n})^{\alpha_n}$$

根据量纲和谐原则,有

$$\left. \begin{aligned} a &= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n \\ b &= \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n \\ c &= \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_n c_n \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

其中, $a, b, c, a_1, b_1, c_1, \dots, a_n, b_n, c_n$ 是已知的。

公式 (11.2) 是待定指数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的线性代数方程组。如果未知变量不多于三个, 则方程组 (11.2) 的解是确定的; 如果未知变量多于三个, 就只能得出以某三个为参数的其余各未知量的相对值。这就是 Rayleigh 量纲分析法。

11.1.3 量纲分析的 π 定理

任何一物理过程, 包含有 $k+1$ 个有量纲的物理量, 如果选择其中 m 个作为基本物理量, 那么该物理过程可以由 $[(k+1)-m]$ 个量纲一的数所组成的关系式来描述。因为这些量纲一的数是用 π 来表示, 故称为 π 定理。 π 定理又称为白金汉 (Buckingham) 定理。

下面对该定理的内容作进一步阐述, 并用简单的代数法加以证明。

设已知某物理过程含有 $k+1$ 个物理量 (其中 1 个因变量, k 个自变量), 当然一般不知道这些物理量之间所构成的函数关系式, 但可以写成一般的表达式为

$$N = f(N_1, N_2, N_3, \dots, N_k) \quad (11.3)$$

则各物理量 $N, N_1, N_2, N_3, \dots, N_k$ 之间的关系可用下列普遍方程来表示:

$$N = \sum_i \alpha_i (N_1^{a_i} N_2^{b_i} N_3^{c_i} \dots N_k^{n_i}) \quad (11.4)$$

式中: α 为量纲一的系数, i 为项数, a, b, c, d, e, \dots, n 为指数。

假设选用 N_1, N_2, N_3 三个物理量的量纲作基本量纲, 则各物理量的量纲均可用该三个基本物理量的量纲来表示:

$$\left. \begin{aligned} \dim N &= \dim N_1^x N_2^y N_3^z \\ \dim N_1 &= \dim N_1^{x_1} N_2^{y_1} N_3^{z_1} \\ \dim N_2 &= \dim N_1^{x_2} N_2^{y_2} N_3^{z_2} \\ \dim N_3 &= \dim N_1^{x_3} N_2^{y_3} N_3^{z_3} \\ \dim N_4 &= \dim N_1^{x_4} N_2^{y_4} N_3^{z_4} \\ \dim N_5 &= \dim N_1^{x_5} N_2^{y_5} N_3^{z_5} \\ \dots\dots \\ \dim N_k &= \dim N_1^{x_k} N_2^{y_k} N_3^{z_k} \end{aligned} \right\} \quad (11.5)$$

或写成普通方程式:

$$\left. \begin{aligned} N &= \pi N_1^x N_2^y N_3^z \\ N_1 &= \pi_1 N_1^{x_1} N_2^{y_1} N_3^{z_1} \\ N_2 &= \pi_2 N_1^{x_2} N_2^{y_2} N_3^{z_2} \\ N_3 &= \pi_3 N_1^{x_3} N_2^{y_3} N_3^{z_3} \\ N_4 &= \pi_4 N_1^{x_4} N_2^{y_4} N_3^{z_4} \\ N_5 &= \pi_5 N_1^{x_5} N_2^{y_5} N_3^{z_5} \\ &\dots\dots \\ N_k &= \pi_k N_1^{x_k} N_2^{y_k} N_3^{z_k} \end{aligned} \right\} \quad (11.6)$$

式中 $\pi, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \dots, \pi_k$ 为量纲一的比例系数。

由量纲的和谐性可知, 方程组 (11.6) 中各式等号两边的量纲应相等, 因此方程组第二式的 $x_1=1, y_1=0, z_1=0$, 得 $N_1 = \pi_1 N_1$, 故 $\pi_1 = 1$, 即 $N_1 = 1 \cdot N_1$ 。

同理, 由第三式可知: $N_2 = \pi_2 N_2$, 故 $\pi_2 = 1$, 即 $N_2 = 1 \cdot N_2$ 。

由第四式可知: $N_3 = \pi_3 N_3$, 故 $\pi_3 = 1$, 即 $N_3 = 1 \cdot N_3$ 。

这就是说, 选作基本物理量的三个 π 均等于 1, 这样式 (11.6) 可写作

$$\left. \begin{aligned} N &= \pi N_1^x N_2^y N_3^z \\ N_1 &= \pi_1 N_1 = 1 \cdot N_1 \\ N_2 &= \pi_2 N_2 = 1 \cdot N_2 \\ N_3 &= \pi_3 N_3 = 1 \cdot N_3 \\ N_4 &= \pi_4 N_1^{x_4} N_2^{y_4} N_3^{z_4} \\ N_5 &= \pi_5 N_1^{x_5} N_2^{y_5} N_3^{z_5} \\ &\dots\dots \\ N_k &= \pi_k N_1^{x_k} N_2^{y_k} N_3^{z_k} \end{aligned} \right\} \quad (11.7)$$

将式 (11.7) 代入式 (11.4), 得

$$\pi N_1^x N_2^y N_3^z = \sum_i \alpha_i [1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \pi_4^{d_i} \cdot \pi_5^{e_i} \cdot \dots \cdot \pi_k^{n_i} \cdot N_1^{(a_i + x_4 d_i + x_5 e_i + \dots + x_k n_i)} \cdot N_2^{(b_i + y_4 d_i + y_5 e_i + \dots + y_k n_i)} \cdot N_3^{(c_i + z_4 d_i + z_5 e_i + \dots + z_k n_i)}] \quad (11.8)$$

由于量纲的和谐性, 上式等号右边每一项的量纲都应与等号左边的量纲相同, 即

$$N_1^x N_2^y N_3^z = N_1^{(a_i + x_4 d_i + x_5 e_i + \dots + x_k n_i)} \cdot N_2^{(b_i + y_4 d_i + y_5 e_i + \dots + y_k n_i)} \cdot N_3^{(c_i + z_4 d_i + z_5 e_i + \dots + z_k n_i)}$$

由此可得

$$\left. \begin{aligned} a_i + x_4 d_i + x_5 e_i + \dots + x_k n_i &= x \\ b_i + y_4 d_i + y_5 e_i + \dots + y_k n_i &= y \\ c_i + z_4 d_i + z_5 e_i + \dots + z_k n_i &= z \end{aligned} \right\} \quad (11.9)$$

将式 (11.9) 代入式 (11.8), 得

$$\pi N_1^x N_2^y N_3^z = \sum_i \alpha_i (1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \pi_4^{d_i} \cdot \pi_5^{e_i} \cdot \dots \cdot \pi_k^{n_i} \cdot N_1^x \cdot N_2^y \cdot N_3^z)$$

以 $N_1^x N_2^y N_3^z$ 除上式各项得

$$\pi = \sum_i \alpha_i (1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \pi_4^{d_i} \cdot \pi_5^{e_i} \cdot \dots \cdot \pi_k^{n_i})$$

上式也可写成

$$\pi = f(1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \pi_4^{d_i} \cdot \pi_5^{e_i} \cdot \dots \cdot \pi_k^{n_i}) \quad (11.10)$$

式中量纲一的数可应用式 (11.6) 来求, 即

$$\pi_k = \frac{N_k}{N_1^{x_k} N_2^{y_k} N_3^{z_k}} \quad (11.11)$$

上式 N_1, N_2, N_3 为选择的三个基本物理量, x_k, y_k, z_k 可由分子分母的量纲相等来确定。

利用 π 定理, 可以推求某一物理过程的函数关系式。但是要强调指出, 不要误认为可以把 π 定理作为万能的工具, 只要经过一定的推演过程, 即可找到表达任何物理过程的方程。恰恰相反, π 定理的应用, 必须首先有赖于对所研究的物理过程有深入的了解 (理论分析或实验), 正确地确定影响该物理过程的主要物理量。否则, 即便是量纲分析本身完全正确, 也可能导致错误的结论。应当认识到, 正确地确定影响某一物理过程的因素, 是一件比较困难的任务。

11.1.4 量纲分析应用举例

1. 薄壁圆形孔口出流公式的推导

图 11.1 所示水箱侧壁开有圆形薄壁孔口, 已知收缩断面上断面平均流速

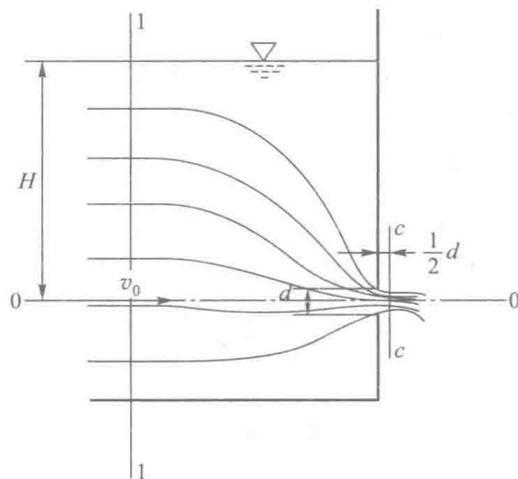


图 11.1

v_c 与孔口水头 H 、孔径 d ，重力加速度 g ，水的密度 ρ ，水的粘度 η 和表面张力 σ 等因素有关，试通过量纲分析推求流速 v_c 的计算公式。

由已知条件可将孔口收缩断面上平均流速公式写成下面的一般函数式：

$$v_c = f(H, \rho, g, d, \eta, \sigma) \quad (11.12)$$

上式中共有物理量 7 个，其中自变量数为 6 ($k=6$)。今选择 H, ρ, g 三个物理量作为基本物理量，则式 (11.12) 可以用 4 个量纲一的数组成的关系式来表达。这些量纲一的数 (π) 为

$$\pi = \frac{v_c}{H^x \rho^y g^z} \quad (11.13)$$

$$\pi_4 = \frac{d}{H^{x_4} \rho^{y_4} g^{z_4}} \quad (11.14)$$

$$\pi_5 = \frac{\eta}{H^{x_5} \rho^{y_5} g^{z_5}} \quad (11.15)$$

$$\pi_6 = \frac{\sigma}{H^{x_6} \rho^{y_6} g^{z_6}} \quad (11.16)$$

由于选择了 H, ρ, g 为基本物理量，由基本物理量所组成的量纲一的数均等于 1，即

$$\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 1$$

因为 π, π_4, π_5, π_6 均为量纲一的数，式 (11.13)，式 (11.14)，式 (11.15)，式 (11.16) 的右端，分子与分母的量纲应当相同。由式 (11.13) 则有

$$\dim v_c = \dim(H^x \rho^y g^z)$$

将上式中各物理量的量纲用 L, T, M 来表示，则有

$$LT^{-1} = L^x (ML^{-3})^y (LT^{-2})^z = L^{x-3y+z} M^y T^{-2z}$$

上式两端相同量纲的指数应相等，则

$$\begin{aligned} \text{对 M 来说} & \quad y = 0 \\ \text{对 L 来说} & \quad x - 3y + z = 1 \\ \text{对 T 来说} & \quad -2z = -1 \end{aligned}$$

解方程组得

$$\begin{cases} x = 0.5 \\ y = 0 \\ z = 0.5 \end{cases}$$

代入式 (11.13)，可得 $\pi = \frac{v_c}{\sqrt{gH}}$ 。

由式 (11.14), 可写出量纲式:

$$\dim d = \dim(H^{x_4} \rho^{y_4} g^{z_4})$$

或

$$L = L^{x_4} (ML^{-3})^{y_4} (LT^{-2})^{z_4} = L^{x_4 - 3y_4 + z_4} M^{y_4} T^{-2z_4}$$

上式两边相同量纲的指数应相等, 则

$$\text{对 } M \text{ 来说} \quad y_4 = 0$$

$$\text{对 } L \text{ 来说} \quad x_4 - 3y_4 + z_4 = 1$$

$$\text{对 } T \text{ 来说} \quad -2z_4 = 0$$

解方程组得

$$\begin{cases} x_4 = 1 \\ y_4 = 0 \\ z_4 = 0 \end{cases}$$

代入式 (11.14), 可得 $\pi_4 = \frac{d}{H}$ 。

由式 (11.15), 可写出量纲式:

$$\dim \eta = \dim(H^{x_5} \rho^{y_5} g^{z_5})$$

或

$$ML^{-1}T^{-1} = L^{x_5} (ML^{-3})^{y_5} (LT^{-2})^{z_5} = L^{x_5 - 3y_5 + z_5} M^{y_5} T^{-2z_5}$$

上式两边相同量纲的指数应相等, 则

$$\text{对 } M \text{ 来说} \quad y_5 = 1$$

$$\text{对 } L \text{ 来说} \quad x_5 - 3y_5 + z_5 = -1$$

$$\text{对 } T \text{ 来说} \quad -2z_5 = -1$$

解方程组得

$$\begin{cases} x_5 = 1.5 \\ y_5 = 1 \\ z_5 = 0.5 \end{cases}$$

代入式 (11.15), 可得 $\pi_5 = \frac{\eta}{\rho H^{3/2} \sqrt{g}} = \frac{\nu}{H \sqrt{gH}}$ 。

由式 (11.16), 可写出量纲式:

$$\dim \sigma = \dim(H^{x_6} \rho^{y_6} g^{z_6})$$

或

$$MT^{-2} = L^{x_6} (ML^{-3})^{y_6} (LT^{-2})^{z_6} = L^{x_6 - 3y_6 + z_6} M^{y_6} T^{-2z_6}$$

上式两边相同量纲的指数应相等, 则

$$\begin{aligned} \text{对 M 来说} & \quad y_6 = 1 \\ \text{对 L 来说} & \quad x_6 - 3y_6 + z_6 = 0 \\ \text{对 T 来说} & \quad -2z_6 = -2 \end{aligned}$$

解方程组得

$$\begin{cases} x_6 = 2 \\ y_6 = 1 \\ z_6 = 1 \end{cases}$$

代入式 (11.16), 可得 $\pi_6 = \frac{\sigma}{H^2 \rho g} = \frac{\sigma/\rho}{H (\sqrt{gH})^2}$

根据 π 定理, 可用 $\pi, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6$ 组成表征孔口出流的量纲一的数的关系式:

$$\pi = f(1, 1, 1, \pi_4, \pi_5, \pi_6) \quad (11.17)$$

即

$$\frac{v_c}{\sqrt{gH}} = f\left(\frac{d}{H}, \frac{v}{H\sqrt{gH}}, \frac{\sigma/\rho}{H(\sqrt{gH})^2}\right) \quad (11.18)$$

$$v_c = \frac{1}{\sqrt{2}} f\left(\frac{d}{H}, \frac{v}{H\sqrt{gH}}, \frac{\sigma/\rho}{H(\sqrt{gH})^2}\right) \sqrt{2gH} \quad (11.19)$$

令

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} f\left(\frac{d}{H}, \frac{v}{H\sqrt{gH}}, \frac{\sigma/\rho}{H(\sqrt{gH})^2}\right) \quad (11.20)$$

于是

$$v_c = \varphi \sqrt{2gH} \quad (11.21)$$

系数 φ 称为孔口的流速系数。量纲分析的结果表明, 流速系数 φ 是 $\frac{d}{H}, \frac{v}{H\sqrt{gH}}, \frac{\sigma/\rho}{H(\sqrt{gH})^2}$ 诸因数的函数。不难看出, \sqrt{gH} 这个量实际上是通过孔口的水流

流速的标志, 在数量上仅和流速 v_c 相差一个系数。若把 \sqrt{gH} 用特征流速 v 来代表, 即令 $v = \sqrt{gH}$, 则参数 $\frac{v}{H\sqrt{gH}}$ 可写为 $\frac{1}{vH/v}$, 而 vH/v 所表达的量纲一

的数, 就是雷诺数 (Reynolds Number)。雷诺数是和液体粘性有关的, 标志惯性力和粘性力之比的一个特征数。关于雷诺数的物理意义, 已在 4.4 节中

作了详细介绍。此外，量纲一的数 $\frac{\sigma/\rho}{H(\sqrt{gH})^2}$ 也可改写为 $\frac{\sigma/\rho}{Hv^2}$ ，或者 $\frac{1}{\frac{Hv^2}{\sigma/\rho}}$ ，

而 $\frac{Hv^2}{\sigma/\rho}$ 所表达的量纲一的数，在水力学中称为韦伯数 (Weber Number)，常以 We 来表示。韦伯数是反映表面张力大小的一个特征数，表示惯性力与表面张力之比。

综上所述，孔口流速系数与孔口相对孔径 d/H 以及雷诺数 Re ，韦伯数 We 有关。至于系数 φ 值的大小，只能通过实验来确定。但是量纲分析的价值还在于，它显示了影响 φ 值的因素，从而可以使实验工作具有明确的方向。

2. 推求边界切应力 τ_0 的表达式

大量的试验研究表明，壁面上的切应力 τ_0 与下面各因素有关：断面平均流速 v 、水力半径 R 、液体密度 ρ 、液体的动力粘性系数 η 及粗糙表面的凸出高度 Δ ，试用量纲分析法推导 τ_0 的表达式。

由上述条件可知

$$\tau_0 = f(R, v, \rho, \eta, \Delta)$$

今选择 ρ , v , R 三个物理量作为基本物理量，由式 (11.11) 得

$$\pi = \frac{\tau_0}{\rho^x v^y R^z}$$

上式等号右边分子分母的量纲应相等，则

$$\dim \tau_0 = \dim(\rho^x v^y R^z)$$

将上式中各物理量的量纲均用 L, T, M 来表示，则有

$$ML^{-1}T^{-2} = (ML^{-3})^x (LT^{-1})^y L^z = M^x L^{-3x+y+z} T^{-y}$$

上式等号两边相同量纲的指数应相等，则

$$\text{对 M 来说} \quad x = 1$$

$$\text{对 L 来说} \quad -3x + y + z = -1$$

$$\text{对 T 来说} \quad -y = -2$$

解方程组得

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

故

$$\pi = \frac{\tau_0}{\rho v^2}$$

用同样的方法可求得

$$\pi_1 = 1, \pi_2 = 1, \pi_3 = 1, \pi_4 = \frac{\eta}{\rho v R} = \frac{\nu}{v R} = \frac{1}{Re}, \pi_5 = \frac{\Delta}{R}$$

式中 Re 为雷诺数。根据 π 定理 $\pi = F(1, 1, 1, \pi_4, \pi_5)$

即

$$\frac{\tau_0}{\rho v^2} = F\left(\frac{1}{Re}, \frac{\Delta}{R}\right) \quad \text{或} \quad \tau_0 = F\left(\frac{1}{Re}, \frac{\Delta}{R}\right) \rho v^2$$

若令 $\lambda = 8F\left(\frac{1}{Re}, \frac{\Delta}{R}\right)$, 则可以得到公式 (4.11)

$$\tau_0 = \frac{\lambda}{8} \rho v^2$$

式中 λ 为沿程阻力系数, 是表征沿程阻力大小的一个量纲一的系数。由推导结果可以看出, 沿程阻力系数和水流雷诺数、壁面凸出高度和水力半径之比有关, 即公式 (4.12):

$$\lambda = f\left(Re, \frac{\Delta}{R}\right)$$

3. 推求矩形薄壁堰流量的计算公式

已知通过矩形薄壁堰的流量 Q 与堰顶水头 H 、重力加速度 g 、液体的密度 ρ 、动力粘度 η 、表面张力 σ 及堰孔宽度 b 有关。试用量纲分析方法推求流量的计算公式。

解: 由题意知

$$Q = f(H, g, \rho, \eta, \sigma, b)$$

式中共有 7 个物理量。现选取 H, g, ρ 三个物理量作基本物理量, 则按 π 定理应有 $7 - 3 = 4$ 个量纲一的数 π 的表达式, 即

$$\pi = \frac{Q}{H^x g^y \rho^z} \quad (11.22)$$

$$\pi_4 = \frac{\eta}{H^{x_4} g^{y_4} \rho^{z_4}} \quad (11.23)$$

$$\pi_5 = \frac{\sigma}{H^{x_5} g^{y_5} \rho^{z_5}} \quad (11.24)$$

$$\pi_6 = \frac{b}{H^{x_6} g^{y_6} \rho^{z_6}} \quad (11.25)$$

因为 π, π_4, π_5, π_6 均为量纲一的数, 故以上各式分子、分母量纲必定相同。由式 (11.22) 得

$$\dim Q = \dim(H^x g^y \rho^z)$$

当采用长度 L、时间 T 及质量 M 三个基本量纲来表示时，上式变为

$$L^3 T^{-1} = L^x (LT^{-2})^y (ML^{-3})^z$$

上式两端同一量纲的指数应相等，故

$$\text{对 L 应有} \quad x + y - 3z = 3$$

$$\text{对 T 应有} \quad -2y = -1$$

$$\text{对 M 应有} \quad z = 0$$

解方程组得 $x = \frac{5}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = 0$ ，代入式 (11.22) 得

$$\pi = \frac{Q}{H^{5/2} g^{1/2}}$$

同理，由式 (11.23)、(11.24)、(11.25) 三式可分别求得

$$\pi_4 = \frac{\eta}{H^{3/2} g^{1/2} \rho} = \frac{\nu}{H \sqrt{gH}}$$

$$\pi_5 = \frac{\sigma}{H^2 g \rho} = \frac{\sigma/\rho}{H (\sqrt{gH})^2}$$

$$\pi_6 = \frac{b}{H}$$

根据 π 定理

$$\pi = f(1, 1, 1, \pi_4, \pi_5, \pi_6)$$

即

$$\frac{Q}{H^{5/2} g^{1/2}} = f\left(\frac{\nu}{H \sqrt{gH}}, \frac{\sigma/\rho}{H (\sqrt{gH})^2}, \frac{b}{H}\right)$$

或改写为

$$\frac{Q}{H^{3/2} g^{1/2} b} = f_1\left(\frac{\nu}{b \sqrt{gH}}, \frac{\sigma/\rho}{b (\sqrt{gH})^2}, 1\right)$$

式中：

$$\frac{\nu}{b \sqrt{gH}} = \frac{1}{\frac{b \sqrt{gH}}{\nu}} = \frac{1}{Re}$$

$$\frac{\sigma/\rho}{b (\sqrt{gH})^2} = \frac{1}{\frac{b (\sqrt{gH})^2}{\sigma/\rho}} = \frac{1}{We}$$

则得

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} f_1\left(\frac{1}{Re}, \frac{1}{We}\right) b \sqrt{2g} H^{3/2}$$

令

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}} f_1\left(\frac{1}{Re}, \frac{1}{We}\right)$$

于是得

$$Q = mb \sqrt{2g} H^{3/2}$$

由上式可知：矩形薄壁堰的流量系数 m 是雷诺数 Re 及韦伯数 We 的函数。雷诺数 Re 反映液体粘滞性的影响，韦伯数 We 反映表面张力的影响。当堰顶水头足够大时， Re 及 We 对 m 的影响均可略去， m 的数值必须在不同的边界条件下通过实验确定。

11.2 相似原理

11.2.1 相似的基本概念

流动相似的概念是由几何形状相似的概念推广和发展而来的。在两个几何图形中，若它们的相应长度都保持固定的比例关系，则这两个图形就叫几何相似。但这种相似仅限于静态的相似。而液体运动时，问题要复杂得多，它属于机械运动的范畴。机械运动的流动相似，除要求静态的几何相似外，还要求动态相似；除要求形式相似外，还要求内容相似。

表征液体运动的量具有各种不同性质，主要有三种：表征流场几何形状的、表征运动状态的以及表征动力的物理量。因此，两个流动系统的相似，可以用几何相似、运动相似及动力相似来描述。现分别叙述于下。在叙述中原型中的物理量注以脚标“P”，模型中的物理量注以脚标“M”。

1. 几何相似

几何相似是指原型与模型保持几何形状和几何尺寸的相似，也就是原型和模型的任何一个相应线性长度保持一定的比例关系。设原型的线性长度为 L_P ，模型的线性长度为 L_M ，两者的比值用 λ_L 表示，称为几何相似的线性长度比尺，即

$$\lambda_L = \frac{L_P}{L_M} \quad (11.26)$$

因而

$$\text{面积比尺} \quad \lambda_A = \frac{A_P}{A_M} = \frac{L_P^2}{L_M^2} = \lambda_L^2$$

$$\text{体积比尺} \quad \lambda_V = \frac{V_P}{V_M} = \frac{L_P^3}{L_M^3} = \lambda_L^3$$

2. 运动相似

运动相似是指模型与原型两个流动中任何对应质点的迹线是几何相似的，而且任何对应质点流过相应线段所需的时间又是具有同一比例的。或者说，两个流动的速度场（或加速度场）是几何相似的，这两个流动就是运

动相似的。

$$\text{设时间比尺为} \quad \lambda_t = \frac{t_p}{t_M}$$

则

$$\text{速度比尺} \quad \lambda_v = \frac{v_p}{v_M} = \frac{L_p/t_p}{L_M/t_M} = \frac{\lambda_L}{\lambda_t} \quad (11.27)$$

$$\text{加速度比尺} \quad \lambda_a = \frac{a_p}{a_M} = \frac{L_p/t_p^2}{L_M/t_M^2} = \frac{\lambda_L}{\lambda_t^2} \quad (11.28)$$

3. 动力相似

原型和模型流动中任何对应点上作用着同名的力，各同名力互相平行且具有同一比值则称该两流动为动力相似。如果原型流动中有重力、阻力、表面张力的作用，则模型流动中在相应点上亦必须有这三种力作用，并且各同名力的比例应保持相等，否则多一种或少一种力作用或者比值不相等就不是动力相似的流动。自然界的水流，一般作用在质点上同时有几种力，如重力、粘滞力、表面张力和弹性力等。如果这些力的合力不等于零，则质点将作加速运动。根据达朗贝尔原理，在这个不平衡力系上假想加上一个惯性力，便可变为一个平衡力系。这个平衡力系构成了一个封闭的力的多边形。这样，动力相似就表征为模型与原型流动中任意相应点上的力的多边形相似，相应边（即同名力）成比例。

若分别以 G , F_T , F_S , F_E 及 F_I 代表重力、粘滞力、表面张力、弹性力和惯性力，则

$$\frac{G_p}{G_M} = \frac{F_{TP}}{F_{TM}} = \frac{F_{SP}}{F_{SM}} = \frac{F_{EP}}{F_{EM}} = \frac{F_{IP}}{F_{IM}}$$

或

$$\lambda_G = \lambda_T = \lambda_S = \lambda_E = \lambda_I \quad (11.29)$$

以上三种相似是模型和原型保持完全相似的重要特征。它们是互相联系、互为条件的。几何相似是运动相似、动力相似的前提条件，动力相似是决定流动相似的主导因素，运动相似是几何相似和动力相似的表现，它们是一个统一的整体，是缺一不可的。模型和原型的流动相似，它们的物理属性必须是相同的，尽管它们的尺度不同，但它们必须服从同一运动规律，并为同一物理方程所描述，才能做到几何、运动和动力的完全相似。

今以受牛顿第二定律约束的相似现象为例，来阐明这一问题。机械运动相似的两个系统都应受牛顿第二定律的约束，即应有

$$F = m \frac{du}{dt}$$

式中： F 为作用力； m 为质量； u 为流速； t 为时间。

这一公式对于模型和原型中任一对应点都应该是适用的。

$$\text{对原型来说} \quad F_P = m_P \frac{du_P}{dt_P} \quad (11.30)$$

$$\text{对模型来说} \quad F_M = m_M \frac{du_M}{dt_M} \quad (11.31)$$

在相似系统中存在着下列的比尺关系：

$$F_P = \lambda_F F_M, \quad m_P = \lambda_m m_M, \quad u_P = \lambda_u u_M, \quad t_P = \lambda_t t_M$$

代入式 (11.30)，整理后可得

$$\frac{\lambda_F \lambda_t}{\lambda_m \lambda_u} F_M = m_M \frac{du_M}{dt_M} \quad (11.32)$$

这样，就有表述相同数量关系的两个不同方程式 (11.31) 及式 (11.32)，两者只有在下列条件下才能统一起来，即

$$\frac{\lambda_F \lambda_t}{\lambda_m \lambda_u} = 1 \quad (11.33)$$

上式表明相似系统中 4 个物理量 F , m , u , t 的比尺之间的关系是受 $\frac{\lambda_F \lambda_t}{\lambda_m \lambda_u} = 1$ 约束的。因此 4 个相似比尺中只有 3 个是可以任意选定的，而第 4 个则必须由式 (11.33) 导出。所以相似系统中各物理量的比尺是不能任意选定的，而要受描述该运动现象的物理方程的制约。

因 $\lambda_m = \frac{m_P}{m_M} = \frac{\rho_P V_P}{\rho_M V_M} = \lambda_\rho \lambda_L^3$ ，又因相似系统中相应点的流速都是相似的，故可用某一特征流速 v (如断面平均流速) 代表各点流速，即 $\lambda_u = \lambda_v = \frac{\lambda_L}{\lambda_t}$ 。

把以上关系代入式 (11.33)，整理后可得

$$\frac{\lambda_F}{\lambda_\rho \lambda_L^2 \lambda_v^2} = 1 \quad (11.34)$$

也可写作

$$\frac{F_P}{\rho_P L_P^2 v_P^2} = \frac{F_M}{\rho_M L_M^2 v_M^2} \quad (11.35)$$

在相似原理中把量纲一的数 $\frac{F}{\rho L^2 v^2}$ 叫作牛顿数，用 Ne 来表示，上式也可写作

$$Ne_P = Ne_M \quad (11.36)$$

这就是说，两个相似流动的牛顿数应相等，这是流动相似的重要判据，称

为牛顿相似准则。

由以上推导过程可知, 牛顿数是作用力 F 与惯性力 $m \frac{du}{dt}$ 之比值, 牛顿数相等就是模型与原型中两个流动的作用力与惯性力之比应相等。

11.2.2 相似条件

上节说明了相似现象的相似特征, 并由此引申出确定不同物理量比尺关系的有关相似准数和相似准则。本节说明模型与原型相似的必要和充分条件。

与原型相似的模型不止一个, 可以有一系列大小不等的模型都可能与原型相似, 但这些模型中的任何一个都必须与原型为同一物理方程所表述, 这是实现相似的第一个条件。

物理方程有一般解, 也有特定解。所考虑的模型只是一系列模型中的一个特定的模型中的一个确定的相似现象。这个相似现象就相应于微分方程中的一个特定的单值解。所以两个流动相似就必须保持造成单值解的相似条件, 造成单值解的条件叫作单值条件。因此, 模型和原型单值条件所包含的物理量相似是实现相似的第二个条件。在恒定流情况下, 如果模型采用与原型同样液体, 则单值条件就是几何条件和边界条件, 即流场的几何形状、进出口断面的流动情况及边界的性质等。如果是非恒定流, 则单值条件还应包括初始条件, 即开始时刻的流动情况。如果模型采用与原型不同的液体, 则单值条件还应包括物性条件如液体的密度、粘滞系数等。单纯单值条件所包含的物理量相似, 还不能认为模型与原型的流动就相似, 因为相似现象中有关物理量的比尺是不能任意选定的, 它们之间还必须受到比尺关系式的约束, 所以有关的相似准数相等是实现相似的第三个条件。上述三个条件是实现相似的必要和充分条件, 满足了这三个条件, 模型与原型的流动才能完全相似。

11.2.3 不可压缩粘性液体运动相似准则

对水流来说, 作用力可能同时有几种力如重力、粘滞力、压力等, 但牛顿数中的力只表示所有作用力的合力, 而这个合力是由哪些力组成的并未揭示。因此牛顿相似准则只具有一般意义, 要解决具体模型试验的比尺关系还必须根据描述特定运动现象的物理方程来导出特定相似准则。现以描述不可压缩粘性液体的纳维 - 斯托克斯方程为例来推导相似准则。

根据纳维 - 斯托克斯方程 (x 方向), 原型流动中任意点的运动必须

$$f_{xP} - \frac{1}{\rho_P} \frac{\partial p_P}{\partial x_P} + \nu_P \nabla^2 u_{xP} = \frac{\partial u_{xP}}{\partial t_P} + u_{xP} \frac{\partial u_{xP}}{\partial x_P} + u_{yP} \frac{\partial u_{xP}}{\partial y_P} + u_{zP} \frac{\partial u_{xP}}{\partial z_P} \quad (11.37)$$

模型流动中任意点的运动必须遵循

$$f_{xM} - \frac{1}{\rho_M} \frac{\partial p_M}{\partial x_M} + \nu_M \nabla^2 u_{xM} = \frac{\partial u_{xM}}{\partial t_M} + u_{xM} \frac{\partial u_{xM}}{\partial x_M} + u_{yM} \frac{\partial u_{xM}}{\partial y_M} + u_{zM} \frac{\partial u_{xM}}{\partial z_M} \quad (11.38)$$

两个相似流动之间存在下列各种比尺关系:

$$\begin{aligned} \rho_P &= \lambda_\rho \rho_M, & \nu_P &= \lambda_\nu \nu_M, & p_P &= \lambda_p p_M \\ f_{xP} &= \lambda_g f_{xM}, & u_{xP} &= \lambda_v u_{xM}, & u_{yP} &= \lambda_v u_{yM} \\ u_{zP} &= \lambda_v u_{zM}, & t_P &= \lambda_t t_M, & \lambda_x &= \lambda_y = \lambda_z = \lambda_L \\ L_P &= \lambda_L L_M, \end{aligned}$$

将这些关系代入式 (11.37), 可得

$$\begin{aligned} \lambda_g f_{xM} - \frac{\lambda_p}{\lambda_\rho \lambda_L} \frac{1}{\rho_M} \frac{\partial p_M}{\partial x_M} + \frac{\lambda_\nu \lambda_v}{\lambda_L^2} \nu_M \nabla^2 u_{xM} \\ = \frac{\lambda_v}{\lambda_t} \frac{\partial u_{xM}}{\partial t_M} + \frac{\lambda_v^2}{\lambda_L} \left(u_{xM} \frac{\partial u_{xM}}{\partial x_M} + u_{yM} \frac{\partial u_{xM}}{\partial y_M} + u_{zM} \frac{\partial u_{xM}}{\partial z_M} \right) \end{aligned} \quad (11.39)$$

若两个流动相似, 则式 (11.38) 与式 (11.39) 应恒等, 由此可得

$$\lambda_g = \frac{\lambda_p}{\lambda_\rho \lambda_L} = \frac{\lambda_\nu \lambda_v}{\lambda_L^2} = \frac{\lambda_v}{\lambda_t} = \frac{\lambda_v^2}{\lambda_L}$$

或

$$\lambda_\rho \lambda_g = \frac{\lambda_p}{\lambda_L} = \frac{\lambda_\nu \lambda_v}{\lambda_L^2} = \frac{\lambda_\rho \lambda_v}{\lambda_t} = \frac{\lambda_\rho \lambda_v^2}{\lambda_L} \quad (11.40)$$

上式每一项分别表示作用在原型与模型对应点上同名力之间的比值。 $\lambda_\rho \lambda_g$ 为重力之间的比值, $\frac{\lambda_p}{\lambda_L}$ 为动水压强之间的比值, $\frac{\lambda_\nu \lambda_v}{\lambda_L^2}$ 为粘滞力之间的比值, $\frac{\lambda_\rho \lambda_v}{\lambda_t}$ 为当地加速度产生的当地惯性力之间的比值, $\frac{\lambda_\rho \lambda_v^2}{\lambda_L}$ 为位移加速度产生的位移惯性力之间的比值。

式 (11.40) 中各项均以位移惯性力的比值 $\frac{\lambda_\rho \lambda_v^2}{\lambda_L}$ 除之, 则得

$$\frac{\lambda_g \lambda_L}{\lambda_v^2} = \frac{\lambda_\rho}{\lambda_\rho \lambda_v^2} = \frac{\lambda_\nu}{\lambda_L \lambda_\nu} = \frac{\lambda_t}{\lambda_t \lambda_v} = 1 \quad (11.41)$$

上式也可写作

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\lambda_v^2}{\lambda_g \lambda_L} = 1 \\ \frac{\lambda_p}{\lambda_\rho \lambda_v^2} = 1 \\ \frac{\lambda_v \lambda_L}{\lambda_\nu} = 1 \\ \frac{\lambda_L}{\lambda_\nu \lambda_t} = 1 \end{array} \right\} \text{或} \left. \begin{array}{l} \frac{v_P^2}{g_P L_P} = \frac{v_M^2}{g_M L_M} \quad \textcircled{1} \\ \frac{p_P}{\rho_P v_P^2} = \frac{p_M}{\rho_M v_M^2} \quad \textcircled{2} \\ \frac{v_P L_P}{\nu_P} = \frac{v_M L_M}{\nu_M} \quad \textcircled{3} \\ \frac{L_P}{v_P t_P} = \frac{L_M}{v_M t_M} \quad \textcircled{4} \end{array} \right\} \quad (11.42)$$

这样就得到 4 个量纲一的数 $\frac{v^2}{gL}$, $\frac{p}{\rho v^2}$, $\frac{vL}{\nu}$, $\frac{L}{vt}$ 。第一个表征重力和位移惯性力的比值, 称为弗劳德数^①; 第二个表征动水压强与位移惯性力的比值, 称为欧拉数; 第三个表征粘滞力与位移惯性力的比值, 称为雷诺数; 第四个表征当地惯性力与位移惯性力的比值, 称为斯特劳哈尔数 (Strouhal Number)。这些量纲一的数都叫作相似准数。

由以上推导可知, 由纳维-斯托克斯方程所描述的模型与原型流动要保持相似, 则上列四个相似准数必须同时相等, 否则就不能保持几何、运动和动力的完全相似。这就是不可压缩粘性液体运动的相似准则。

若描述某一特定水流现象的物理方程为已知, 则均可应用与上述类似方法推导出相似准数, 从而导出相似的比尺关系。若表达水流现象的物理方程为未知时, 也可应用量纲分析法, 如 π 定理, 求出以量纲一的数表达的物理关系式, 在这种情况下, 所求得的量纲一的数就是相似准数。

11.2.4 单项力作用下的相似准则

不同的水流运动中作用于流体微团上的力是不同的。一般自然界的水流总是同时作用着几种力, 要想同时满足各种力的相似, 事实上是很困难的。例如在一个模型上要同时满足雷诺数相等和弗劳德数相等的条件就不易做到, 这是因为由式 (11.42) ③得到

$$\frac{v_P L_P}{\nu_P} = \frac{v_M L_M}{\nu_M} \quad \text{或} \quad v_M = v_P \lambda_L \frac{\nu_M}{\nu_P}$$

由式 (11.42) ①得到

① 通常也称 $Fr = \frac{v}{\sqrt{gh}}$ 的平方为弗劳德数。

$$\frac{v_P^2}{g_P L_P} = \frac{v_M^2}{g_M L_M} \quad \text{或} \quad v_M = v_P \sqrt{\frac{1}{\lambda_L}}$$

同时满足上述两个条件时，则

$$v_P \lambda_L \frac{\nu_M}{\nu_P} = v_P \sqrt{\frac{1}{\lambda_L}}$$

或

$$\lambda_L^{3/2} = \frac{\nu_P}{\nu_M}$$

因为 λ_L 是大于 1 的，所以 ν_P/ν_M 也应大于 1，即模型中液体的 ν 应是原型中液体 ν 的 $\lambda_L^{-3/2}$ 倍，如果 λ_L 不大，则还有可能选择到一种合适的模型液体，如果 λ_L 大，要选择一种相似的模型液体几乎是不可能的。例如 $\lambda_L = 50$ ，则 $\nu_M = \frac{1}{354}\nu_P$ ，运动粘滞系数这样小的液体在自然界中是不存在的。通常用原型液体作为模型液体，则 λ_L 必须等于 1，也就是说原型与模型的几何尺寸应完全相同，既不能放大也不能缩小，这就只能做原型实验。在实际水流中，在某种具体条件下，总有一种作用力起主要作用，而其他作用力是次要的。因此在模型试验时可以把实际问题简化，只要使其研究问题起主要作用的一种力保证作用相似，使之满足该主要作用力的相似准则，而忽略其他较次要的力，这种相似虽是近似的，但实践证明是能满足要求的。现在来推导单项力作用下的相似准则。

1. 重力相似准则

例如流经闸、坝的水流，起主导作用的力是重力，只要用重力代替牛顿数中的 F ，根据牛顿相似准则就可求出只有重力作用下液流相似的准则。

重力可表示为 $G = \rho g V$ ，或

$$\lambda_G = \frac{G_P}{G_M} = \lambda_\rho \lambda_g \lambda_L^3$$

以 λ_G 代替式 (11.34) 中的 λ_F ，则

$$\frac{\lambda_\rho \lambda_g \lambda_L^3}{\lambda_\rho \lambda_L^2 \lambda_\nu^2} = 1$$

或

$$\frac{\lambda_\nu^2}{\lambda_g \lambda_L} = 1$$

也可写成

$$\frac{v_P^2}{g_P L_P} = \frac{v_M^2}{g_M L_M} \quad (11.43)$$

由此可知,作用力只有重力时,两个相似系统的弗劳德数应相等,这就叫作重力相似准则,或称弗劳德准则。所以要做到重力作用相似,模型与原型之间各物理量的比尺不能任意选择,必须遵循弗劳德准则。现将各种物理量的比尺与模型比尺的关系推导如下:

(1) 流速比尺

在式(11.43)中,因 $g_P = g_M$,故

$$\lambda_v = \frac{v_P}{v_M} = \sqrt{\frac{L_P}{L_M}} = \lambda_L^{0.5} \quad (11.44)$$

(2) 流量比尺

$$\lambda_Q = \frac{Q_P}{Q_M} = \frac{A_P v_P}{A_M v_M} = \lambda_A \lambda_v = \lambda_L^2 \lambda_L^{0.5} = \lambda_L^{2.5} \quad (11.45)$$

(3) 时间比尺

因

$$\lambda_Q \lambda_t = \lambda_v$$

式中: λ_v 为原型和模型的体积比,故

$$\lambda_t = \frac{\lambda_v}{\lambda_Q} = \frac{\lambda_L^3}{\lambda_L^{2.5}} = \lambda_L^{0.5} \quad (11.46)$$

(4) 力的比尺

$$\lambda_F = \frac{M_P a_P}{M_M a_M} = \frac{\rho_P V_P \left(\frac{dv}{dt}\right)_P}{\rho_M V_M \left(\frac{dv}{dt}\right)_M} = \lambda_\rho \lambda_L^3 \quad (11.47)$$

(5) 压强比尺

$$\lambda_p = \frac{\lambda_F}{\lambda_A} = \frac{\lambda_\rho \lambda_L^3}{\lambda_L^2} = \lambda_\rho \lambda_L \quad (11.48)$$

当 $\lambda_\rho = 1$ 时, $\lambda_p = \lambda_L$ 。

(6) 功的比尺

$$\lambda_W = \lambda_F \lambda_L = \lambda_\rho \lambda_L^4 \quad (11.49)$$

当 $\lambda_\rho = 1$ 时, $\lambda_W = \lambda_L^4$ 。

(7) 功率的比尺

$$\lambda_P = \frac{\lambda_W}{\lambda_t} = \frac{\lambda_\rho \lambda_L^4}{\lambda_L^{0.5}} = \lambda_\rho \lambda_L^{3.5} \quad (11.50)$$

当 $\lambda_\rho = 1$ 时, $\lambda_P = \lambda_L^{3.5}$ 。

2. 阻力相似准则

阻力可表示为

$$F_T = \tau_0 \chi L$$

式中： τ_0 为单位面积上阻力； χ 为湿周； L 为长度。代入式 (11.35) 可得

$$\frac{\tau_{0P} \chi_P L_P}{\tau_{0M} \chi_M L_M} = \frac{\rho_P L_P^2 v_P^2}{\rho_M L_M^2 v_M^2}$$

因 $\tau_0 = \rho g R J$, $\chi = \frac{A}{R}$, 由上式可得

$$\frac{\rho_P g J_P A_P L_P}{\rho_M g J_M A_M L_M} = \frac{\rho_P L_P^2 v_P^2}{\rho_M L_M^2 v_M^2}$$

即

$$\lambda_\gamma \lambda_J \lambda_L^3 = \lambda_\rho \lambda_L^2 \lambda_v^2$$

化简得

$$\lambda_\gamma \lambda_J \lambda_L = \lambda_\rho \lambda_v^2$$

故

$$\lambda_\rho \lambda_g \lambda_J \lambda_L = \lambda_\rho \lambda_v^2$$

亦可写作

$$\frac{v_P^2}{g_P L_P J_P} = \frac{v_M^2}{g_M L_M J_M} \quad (11.51)$$

或

$$\frac{Fr_P}{J_P} = \frac{Fr_M}{J_M} \quad (11.52)$$

上式为阻力相似准则。由此可看出，要保证原型和模型的阻力相似，除保证重力相似所要求的 Fr 相等外，还必须保证模型与原型中水力坡度 J 相等。由此亦可得出，如果 $J_M = J_P$ ，则可用重力准则设计阻力相似的模型，也就是说可以式 (11.44) 至式 (11.50) 来决定原型与模型的各种物理量的比尺关系。什么情况下才能满足式 (11.52)? 这就要根据水流的流态来研究。

(1) 水流在阻力平方区

可用谢才公式计算 J 值：

$$J = \frac{v^2}{C^2 R}$$

若要求 $J_P = J_M$ ，则

$$\frac{v_P^2}{C_P^2 R_P} = \frac{v_M^2}{C_M^2 R_M}$$

若按弗劳德准则设计模型比尺，则由式 (11.44) 可知， $\lambda_v^2 = \lambda_L$ ，又因 $\lambda_R = \lambda_L$ ，代入上式得

$$\lambda_C^2 = 1$$

或

$$C_p = C_M \quad (11.53)$$

又因 $C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$, 故

$$\lambda_p = \lambda_M \quad (11.54)$$

在阻力平方区, $\lambda = f\left(\frac{\Delta}{R}\right)$, 所以

$$\frac{\Delta_p}{R_p} = \frac{\Delta_M}{R_M} \quad (11.55)$$

这就是说, 水流在阻力平方区时, 只要模型与原型的相对粗糙度相等, 就可做到模型与原型流动的阻力相似, 就可用弗劳德准则进行阻力作用相似模型的设计。

如用曼宁公式

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6}, \quad \lambda_c = \frac{1}{\lambda_n} \lambda_R^{1/6} = 1$$

则

$$\lambda_n = \lambda_L^{1/6} \quad (11.56)$$

这样, 模型粗糙系数按上式缩小后, 就可用弗劳德准则设计阻力相似模型。

(2) 水流在层流区

层流时, 阻力主要由水流的粘滞力引起, 粘滞切应力 $\tau = \eta \frac{du}{dy}$, 又因 $\tau = \rho g R J$, 故

$$J = \frac{\eta}{\rho g R} \frac{du}{dy} = \frac{\nu}{g R} \frac{du}{dy}$$

若要求 $J_p = J_M$, 则

$$\frac{\nu_p}{g_p R_p} \frac{du_p}{dy_p} = \frac{\nu_M}{g_M R_M} \frac{du_M}{dy_M}$$

即

$$\frac{\lambda_\nu \lambda_\nu}{\lambda_g \lambda_R \lambda_L} = 1$$

因 $\lambda_g = 1$, $\lambda_R = \lambda_L$, 上式也可写作

$$\frac{\lambda_\nu \lambda_\nu^2}{\lambda_\nu \lambda_L^2} = 1$$

若模型按弗劳德准则设计, 由式 (11.44) 可知 $\lambda_\nu^2 = \lambda_L$, 代入上式得

$$\frac{\lambda_v}{\lambda_v \lambda_L} = 1$$

或

$$\frac{\lambda_v \lambda_L}{\lambda_v} = 1 \quad (11.57)$$

即

$$Re_p = Re_M \quad (11.58)$$

由以上推证可知,水流为层流时,若模型按弗劳德准则设计,要使模型与原型的水流阻力相似,还必须要求两者的雷诺数相等。换句话说,水流为层流时,要使模型与原型水流阻力相似,两者的弗劳德数、雷诺数都必须相等,即既要重力相似又要粘滞力相似。本节开始时曾讲过,这是很难做到的。要粘滞力作用相似,则模型与原型的雷诺数必须相等,这叫雷诺准则。由雷诺准则推导模型与原型各物理量与模型比尺的关系如下:

① 流速比尺:若模型与原型用同一种液体,则 $\lambda_v = 1$, 由式 (11.57) 可得

$$\lambda_v = \frac{1}{\lambda_L} \quad (11.59)$$

② 流量比尺:

$$\lambda_Q = \lambda_v \lambda_A = \frac{\lambda_L^2}{\lambda_L} = \lambda_L \quad (11.60)$$

③ 时间比尺:

$$\lambda_t = \frac{\lambda_v}{\lambda_Q} = \frac{\lambda_L^3}{\lambda_L} = \lambda_L^2 \quad (11.61)$$

④ 力的比尺:

$$\begin{aligned} \lambda_F &= \frac{m_p a_p}{m_M a_M} = \frac{\rho_p V_p a_p}{\rho_M V_M a_M} = \frac{\rho_p L_p^3 \left(\frac{dv}{dt}\right)_p}{\rho_M L_M^3 \left(\frac{dv}{dt}\right)_M} \\ &= \frac{\rho_p L_p^3 L_M^3}{\rho_M L_M^3 L_p^3} = \frac{\rho_p}{\rho_M} = \lambda_\rho \end{aligned}$$

当 $\lambda_\rho = 1$ 时

$$\lambda_F = 1 \quad (11.62)$$

⑤ 压强比尺:

$$\lambda_p = \frac{\lambda_F}{\lambda_A} = \frac{\lambda_\rho}{\lambda_L^2} = \lambda_\rho \lambda_L^{-2}$$

当 $\lambda_p = 1$ 时

$$\lambda_p = \lambda_L^{-2} \quad (11.63)$$

⑥ 功的比尺:

$$\lambda_W = \lambda_F \lambda_L = \lambda_p \lambda_L$$

当 $\lambda_p = 1$ 时

$$\lambda_W = \lambda_L \quad (11.64)$$

⑦ 功率比尺:

$$\lambda_P = \frac{\lambda_F \lambda_L}{\lambda_t} = \frac{\lambda_p \lambda_L}{\lambda_L^2} = \lambda_p \lambda_L^{-1}$$

当 $\lambda_p = 1$ 时

$$\lambda_P = \lambda_L^{-1} \quad (11.65)$$

3. 惯性力相似准则

在非恒定流中由于在给定位置上的水力要素是随时间而变化的, 因此在非恒定流中当地惯性力往往起主要作用。由当地加速度 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 所引起的惯性力为

$$F_I = M \frac{\partial u}{\partial t} = \rho V \frac{\partial u}{\partial t}$$

因此

$$\lambda_F = \lambda_I = \lambda_p \lambda_L^3 \lambda_v \lambda_t^{-1}$$

代入式 (11.34) 得

$$\frac{\lambda_v \lambda_t}{\lambda_L} = 1$$

或写作

$$\frac{v_P t_P}{L_P} = \frac{v_M t_M}{L_M} \quad (11.66)$$

上式等号两边的量纲一的数称为斯特劳哈尔数, 用 Sr 表示, 上式也可写作

$$Sr_P = Sr_M$$

由此可知, 要使两个流动的当地惯性力作用相似, 则它们的斯特劳哈尔数必须相等, 这称为惯性力相似准则, 也称为斯特劳哈尔准则。

4. 弹性力相似准则

例如管流中的水击其主要作用力就是弹性力。弹性力 $F_E = KL^2$, 式中 K 为体积模量。若主要作用力为弹性力, 则 $F = F_E = KL^2$, 即 $\lambda_F = \lambda_E = \lambda_K \lambda_L^2$, 代入式 (11.34) 得

$$\frac{\lambda_p \lambda_v^2}{\lambda_K} = 1$$

或写作

$$\frac{\rho_P v_P^2}{K_P} = \frac{\rho_M v_M^2}{K_M} \quad (11.67)$$

上式等号两边的量纲一的数称为柯西数 (Cauchy Number), 用 Ca 表示, 上式也可写作

$$Ca_P = Ca_M$$

由此可知, 要使两个流动的弹性力作用相似, 它们的柯西数必须相等, 这称为弹性力相似准则, 或称柯西准则。

5. 表面张力相似准则

例如毛细管中的水流起主要作用的力是表面张力。表面张力 $F_s = \sigma L$, σ 为单位长度的表面张力。如作用力主要是表面张力, 则 $F = F_s = \sigma L$, 于是

$$\lambda_F = \lambda_\sigma \lambda_L$$

代入式 (11.34) 得

$$\frac{\lambda_\rho \lambda_L \lambda_v^2}{\lambda_\sigma} = 1$$

或写作

$$\frac{\rho_P L_P v_P^2}{\sigma_P} = \frac{\rho_M L_M v_M^2}{\sigma_M} \quad (11.68)$$

上式等号两边的量纲一的数称为韦伯数 (Weber Number), 用 We 表示, 上式可写作

$$We_P = We_M$$

由此可知, 要使两个流动的表面张力作用相似, 则它们的韦伯数必须相等, 这称为表面张力相似准则, 也称韦伯准则。

6. 压力相似准则

压力 $F_p = pA$, p 为压强, A 为面积, 则

$$\lambda_p = \lambda_\rho \lambda_L^2$$

若作用力主要是压力, 则 $F = F_p = pA$, 于是

$$\lambda_F = \lambda_p = \lambda_\rho \lambda_L^2$$

代入式 (11.34), 整理后得

$$\frac{\lambda_p}{\lambda_\rho \lambda_v^2} = 1$$

或写作

$$\frac{p_P}{\rho_P v_P^2} = \frac{p_M}{\rho_M v_M^2} \quad (11.69)$$

上式等号两边的量纲一的数称为欧拉数, 用 Eu 表示, 上式也可写作

$$Eu_p = Eu_M$$

由此可知, 要使两个流动的压力相似, 则它们的欧拉数必须相等, 这称为压力相似准则, 也称欧拉准则。

欧拉数中的动水压强 p 也可用压差 Δp 代替, 这样欧拉数具有下列形式:

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho v^2} \quad (11.70)$$

在研究空化现象时, 欧拉数具有重要意义。通常 Δp 用某处的绝对压强与汽化压强的差来表示, 并用欧拉数的 2 倍作为衡量空化的指标, 即

$$K = 2Eu = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho v^2} \quad (11.71)$$

K 就是空化数。

在一般情况下, 水流的表面张力、弹性力可以忽略, 恒定流时没有当地惯性力, 所以作用在液流上的主要作用力只有重力、摩擦力及动水压力。要使两个液流相似, 则弗劳德数、雷诺数及欧拉数必须相等。事实上三个准则只要有两个得到满足, 其余一个就会自动满足, 因为作用在液体质点上的三个外力与其合力的平衡力(惯性力)构成一个封闭的多边形, 只要对应点的各外力相似, 则它们的合力就会自动相似; 反之, 若合力和其他任意两个同名力相似, 则另一个同名力必定自动相似。通常动水压力是待求的量, 只要对应点的弗劳德数和雷诺数相等, 欧拉数就会自动相等。在这种情况下, 弗劳德准则、雷诺准则称为独立准则, 欧拉准则称为诱导准则。

11.3 水工模型设计注意事项

设计水工模型时要注意以下几个方面的问题:

(1) 关于模型长度比尺

水工模型的设计, 主要是根据试验目的和要求, 分析确定水流的主要作用力, 用相应的相似准则, 结合实验室的供水能力、场地大小, 确定模型的长度比尺。

如一个主要由重力驱动的水流流动, 原型流量为 $100\,000\text{ m}^3/\text{s}$, 初步选定 $\lambda_L = 100$, 则由式 (11.41) $\lambda_Q = \lambda_L^{2.5} = 100^{2.5} = 100\,000$, 模型流 $Q_M = \frac{100\,000}{100\,000}\text{ m}^3/\text{s} = 1\text{ m}^3/\text{s}$ 。如果实验室供水设备不能供给这么大的流量, 就应该加大 λ_L 使模型流量

减小。同样模型比尺也受场地的限制。

比尺初步确定以后, 仔细检验这个选定的比尺, 是否满足各种相似条件, 如不满足就要重新修改比尺或对相关量进行比尺修正和分析。

(2) 如果原型液流是湍流, 则模型中的液流也应该是湍流, 即 $Re > Re_{cr}$ 。在设计河道模型时要选择几个流速特别小的断面进行校核。

(3) 原型水流是缓流或急流, 模型中也相应为缓流或急流。

(4) 关于阻力

在阻力相似的模型中, 应该保持粗糙系数的相似, 并检验模型水流是否在阻力平方区。例如原型粗糙系数 $n_p = 0.02$, $\lambda_L = 100$, 由式 (11.52) $\lambda_n = \lambda_L^{1/6} = 2.15$, $n_m = \frac{0.02}{2.15} = 0.0093$, 可以用刨光木板或有机玻璃制造模型, 但这样小的粗糙系数是否在阻力平方区, 必须检验。

在设计隧洞模型时, 由于原型粗糙系数很小, 例如用混凝土或钢筋混凝土衬护的隧洞粗糙系数在 0.013 ~ 0.017 之间, 一般采用 0.014, 若取 $\lambda_L = 100$, 则 $n_m = \frac{0.014}{2.15} = 0.0065$, 这样小的粗糙系数在技术上显然是做不到的, 必须改变比尺, 或采用下节中介绍的变态模型的办法。

(5) 如果在原型中发生空化和空蚀, 在模型中的对应地方也应发生空化和空蚀。在试验虹吸管、坝的真空断面和水力机械负压出现的部位时, 要注意此条件。但只有在对大气压亦按模型尺寸缩小后才能在模型上得到相似的空化和空蚀现象, 要按比例缩小大气压只有在减压箱中才能达到。如果大气压不按比例缩小, 那么模型中出现空蚀时, 原型中将出现得更早。

(6) 表面张力的影响应尽可能减小, 使不妨碍波浪的形成。一般模型水流流速大于 0.23 m/s, 水深大于 3 cm, 就可以不考虑表面张力的影响。

(7) 应严格按照工程所在国家 (地区) 现行规范开展水工模型试验。

11.4 变态模型

上节已谈到, 在设计隧洞模型时, 模型粗糙系数常要求很小, 但这种材料不易找到。又如在天然河道的模型中, 水流常常达不到阻力平方区, 而原型河道水流一般在阻力平方区, 因此水流达不到阻力相似。为了克服这些困难, 通常模型的横向、纵向、垂直方向采用不同的线性长度比尺, 因而与原型几何上不完全相似的模型称为变态模型。而前面所讲的采用统一线性比尺的模型称为正态模型。下面概略介绍两种变态模型的设计原理。

11.4.1 纵向与横垂向比尺不同的变态模型

在隧洞模型试验时, 根据前面的正态模型设计要求选定线性比尺后, 再按 λ_n 公式计算 n_M , 但常常不能找到这种粗糙系数的模型材料, 而使用现有材料就会增大模型的粗糙系数。为了使隧洞水头损失保持相似, 就必须相应地缩短隧洞长度。此外, 有时因场地限制, 也要求缩短模型纵向长度。这样, 模型纵向的线性比尺与前面选定的线性比尺 (用作横断面方向的比尺) 就不同了, 也就是纵向比尺与横、垂向比尺不相等。

设纵向线性比尺为 λ_L , 横、垂向线性比尺为 λ_l , 根据重力相似准则, 将式 (11.43) 写成比尺形式, 得

$$\frac{\lambda_v^2}{\lambda_g \lambda_l} = 1$$

因 $\lambda_g = 1$, 故

$$\lambda_v = \lambda_l^{0.5}$$

$$\lambda_Q = \lambda_v \lambda_A = \lambda_l^{2.5}$$

同理, 将式 (11.51) 写成比尺形式得

$$\frac{\lambda_v^2}{\lambda_g \lambda_L \lambda_J} = 1$$

因为 $J = \frac{v^2}{C^2 R}$, 所以 $\lambda_J = \frac{\lambda_v^2}{\lambda_C^2 \lambda_R}$ 。代入前式得

$$\frac{\lambda_C^2 \lambda_R}{\lambda_g \lambda_L} = 1$$

因为 $\lambda_g = 1$, $\lambda_R = \lambda_l$, 所以

$$\lambda_C = \left(\frac{\lambda_L}{\lambda_l} \right)^{0.5} \quad (11.72)$$

又根据曼宁公式得

$$\lambda_C = \frac{\lambda_R^{1/6}}{\lambda_n} = \frac{\lambda_l^{1/6}}{\lambda_n}$$

由上两式等号右侧相等得

$$\lambda_n = \frac{\lambda_l^{2/3}}{\lambda_L^{1/2}} \quad (11.73)$$

如果隧洞的材料已选定, 并由准备试验测定 n_M , 原型 n_p 已知, 则 λ_n 可求得。隧洞模型横、垂向比尺 λ_l 已选定, 故由上式可求出模型纵向比尺为

$$\lambda_L = \frac{\lambda_l^{4/3}}{\lambda_n^2} \quad (11.74)$$

由此可求出隧洞模型的实际长度为

$$L_M = \frac{\lambda_n^2}{\lambda_l^{4/3}} L_P \quad (11.75)$$

11.4.2 纵、横向与垂直方向比尺不同的变态模型

一般天然河道中的水流都处于湍流的阻力平方区，在模型试验时，由于比尺缩小，模型水流达不到阻力平方区，而可能处于层流或过渡区。又常常因场地限制，不可能将线性比尺取得过小。所以要达到阻力相似，就必须使模型与原型雷诺数相等，这在一般满足重力相似的模型中是难于实现的。为此，在模型设计中，将纵、横向线性比尺和垂直方向线性比尺取不同数值，这样模型雷诺数可增加，使其达到阻力平方区。同时，这种模型变态后，模型水深增加，也可避免表面张力的影响。

设纵、横向线性比尺为 λ_L ，垂直方向线性比尺为 λ_h ，根据重力相似准则，得

$$\frac{\lambda_v^2}{\lambda_g \lambda_h} = 1$$

因 $\lambda_g = 1$ ，故

$$\lambda_v = \lambda_h^{0.5}$$

$$\lambda_Q = \lambda_v \lambda_A = \lambda_v \lambda_L \lambda_h = \lambda_L \lambda_h^{1.5}$$

同理，由阻力相似准则可得

$$\frac{\lambda_v^2}{\lambda_g \lambda_L \lambda_J} = 1$$

由于

$$\lambda_J = \frac{\lambda_v^2}{\lambda_C \lambda_R}$$

代入前式得

$$\frac{\lambda_C^2 \lambda_R}{\lambda_g \lambda_L} = 1 \quad (11.76)$$

由于 $C^2 = \frac{8g}{\lambda}$ ，即 $\lambda_C^2 = \frac{\lambda_g}{\lambda_\lambda}$ ，代入上式得

$$\lambda_\lambda = \frac{\lambda_R}{\lambda_L} \quad (11.77)$$

如果 $\lambda_R = \lambda_h$ (因为断面上的横向和垂直方向比尺不等, 所以 λ_R 不完全等于 λ_h), 则

$$\lambda_\lambda = \frac{\lambda_h}{\lambda_L} = \frac{1}{k} \quad (11.78)$$

所以

$$\lambda_M = \lambda_P \frac{\lambda_L}{\lambda_h} = k\lambda_P \quad (11.79)$$

式中: $k = \frac{\lambda_L}{\lambda_h}$ 称为变态模型的变率, 一般是大于 1 的数。由此可知, 模型中的阻力系数大于原型中的阻力系数 k 倍。所以说, 变态模型放弃了几何相似, 就不能达到真正的力学相似, 但可以得到平均流速和水位的相似, 而得不到流速分布的相似。

上面提到 $\lambda_R = \lambda_h$, 在变态模型中是有一定限制的, 因为

$$\lambda_R = \frac{\lambda_A}{\lambda_x} = \frac{\lambda_h \lambda_B}{\lambda_x}$$

式中: λ_x 为湿周的比尺, 根据萨巴涅也夫的研究证实, 在变率不超过 5 时, 湿周比尺可认为等于横向比尺, 即 $\frac{\lambda_B}{\lambda_x} = 1$, 从而 $\lambda_R = \lambda_h$, 变率的影响见表 11.1。

表 11.1 变率 ($\lambda_B/\lambda_h = \lambda_L/\lambda_h$) 对 λ_B/λ_x 的影响

λ_B/λ_h	1	5	10	20	30
λ_B/λ_x	1.0	1.019	1.067 7	1.228	1.429 9

现进一步来确定粗糙系数比尺及模型粗糙系数, 由式 (11.76) 得

$$\lambda_C^2 = \frac{\lambda_g \lambda_L}{\lambda_R}$$

因 $\lambda_R = \lambda_h$, $\lambda_g = 1$, 故

$$\lambda_C = \left(\frac{\lambda_L}{\lambda_h} \right)^{0.5} \quad (11.80)$$

由曼宁公式

$$\lambda_C = \frac{\lambda_R^{1/6}}{\lambda_n} = \frac{\lambda_h^{1/6}}{\lambda_n}$$

利用上两式相等得

$$\lambda_n = \left(\frac{\lambda_L}{\lambda_h} \right)^{0.5} \lambda_h^{1/6} \quad (11.81)$$

则模型粗糙系数为

$$n_M = n_P \left(\frac{\lambda_L}{\lambda_h} \right)^{0.5} \frac{1}{\lambda_h^{1/6}} = n_P \sqrt{\frac{k}{\lambda_h^{1/3}}} \quad (11.82)$$

由上式可看出, 变率 k 愈大, 模型粗糙系数愈大。例如, 取 $\lambda_L = 500$, $\lambda_h = 100$, 即 $k = 5$, 则

$$n_M = 1.08n_P$$

就是说, 在模型上粗糙系数比原型还要大一些, 这对于原型粗糙系数较小时, 模型可以做得到。但如果原型粗糙系数已较大, 如上游河道, 河床质是大卵石, 粗糙系数很大 (见附表 1 和附表 1.2), 要使模型的粗糙系数满足上式就有困难。因此, 还要考虑采用另一种方法来设计模型, 称为第二试验法。

第二试验法的主要物理概念是: 根据正态模型中保持 $\lambda_P = \lambda_M$, 或者 $C_P = C_M$, 也就是使 $\lambda_\lambda = 1$ 或 $\lambda_C = 1$, 因而得到

$$\lambda_n = \frac{n_P}{n_M} = \lambda_L^{1/6} \quad (11.83)$$

即粗糙系数比例关系与正态模型相同, 然后用加大流量的办法来实现水面比降的相似。因为

$$\lambda_J = \left(\frac{dz}{dx} \right)_P / \left(\frac{dz}{dx} \right)_M = \frac{\lambda_{dz}}{\lambda_{dx}} = \frac{\lambda_h}{\lambda_L}$$

根据谢才公式

$$\lambda_J = \frac{\lambda_h}{\lambda_L} = \frac{\lambda_v^2}{\lambda_C^2 \lambda_R}$$

因 $\lambda_C = 1$, $\lambda_R = \lambda_h$, 故

$$\text{流速比尺} \quad \lambda_v = \frac{\lambda_h}{\lambda_L^{1/2}}$$

$$\begin{aligned} \text{流量比尺} \quad \lambda_Q &= \lambda_v \lambda_A = \frac{\lambda_h}{\lambda_L^{1/2}} \lambda_L \lambda_h \\ &= \lambda_L^{1/2} \lambda_h^2 \end{aligned}$$

用第一试验法试验时, 流量比尺为 $\lambda_{Q1} = \lambda_L \lambda_h^{1.5}$, 模型中流量为 $Q_{M1} = Q_P / (\lambda_L \lambda_h^{1.5})$ 。用第二试验法试验时, 模型中流量为 $Q_{M2} = Q_P / (\lambda_L^{0.5} \lambda_h^2)$ 。所以

$$\frac{Q_{M2}}{Q_{M1}} = \frac{Q_P / (\lambda_L^{0.5} \lambda_h^2)}{Q_P / (\lambda_L \lambda_h^{1.5})} = \left(\frac{\lambda_L}{\lambda_h} \right)^{0.5} = \sqrt{k}$$

即第二试验法流量是第一试验法流量的 \sqrt{k} 倍, 若 $k = 5$, 则流量增加 1.24 倍。

要注意的是用这种方法进行试验时, 既没有满足重力相似, 也没有满足阻力相似, 仅保持了水面线的相似, 因此会使水流的流速分布变形。在研究宽阔

的、坡度不大的平原河流时，由于保持水面比降相近而增加流量以后，并不使河岸淹没条件与原型情况发生根本上的差异，因而在流速的形态方面也不会引起显著的变形。

无压湍流的流动形式在一定范围内与流速无关，这一点曾在苏联水利设计院水工实验室的别列弗拉克水利枢纽模型（变率为5）上作过校核，校核的结果证明，用第二试验法进行试验，当流量增至2.24倍时，水流断面中的流速分布，仍然同用第一试验法进行试验时一样。也就是说，在规定范围内增加流量，对流速分布的影响很小，以致完全为试验工作中通常对测量仪器所规定误差所掩盖。

用第二试验法进行试验时，模型上的流速比在用第一试验法时要大一些（流速也增至 \sqrt{k} 倍）。由此可知，在用第二试验法时，模型的雷诺数较大，更能保证模型水流为湍流。

变态模型放弃了几何相似特征，因此试验时必须慎重，力求变率不大，以避免 k 值超过5。模型变态以后，比降、流速以及下泄的单宽流量都增加，水工建筑物和河道整治建筑物，一般不宜采用变态模型试验。

思 考 题

- 11.1 进行水工模型试验的目的是什么？理论基础是什么？
- 11.2 什么叫相似原理？两种水流力学相似必须满足的条件是什么？
- 11.3 重力相似准则的相似条件是什么？比尺换算关系是什么？

习 题

- 11.1 试用N-S方程推导液流相似准则。
- 11.2 试用 π 定理推导不可压缩粘性流体在粗糙管内定常流动时，压强沿程降低速率的表达式。
- 11.3 用比尺 $\lambda_L = 20$ 的模型进行溢流坝的试验，今在模型中测得通过流量 $Q_M = 0.18 \text{ m}^3/\text{s}$ 时，坝顶水头 $H_M = 0.15 \text{ m}$ ，坝趾收缩断面处流速 $v_{cM} = 3.35 \text{ m/s}$ ，试求原型相应的流量、坝顶水头及收缩断面处的流速？
- 11.4 若实验室最大供水流量为 $0.10 \text{ m}^3/\text{s}$ ，前题溢流坝模型试验比尺 λ_L 应采用多大（ λ_L 应取整数）？若用该比尺按重力相似准则来设计模型，试求流速比尺、流量比尺及时间比尺？
- 11.5 有一坝高 $P = 12 \text{ m}$ 的溢流坝，坝顶水头 $H = 3 \text{ m}$ ，坝剖面为WES型曲线，流量系数设计时采用 $m = 0.49$ ，今欲通过断面模型试验验证其流量系

数，问模型试验时应按单宽流量为多大来放水、测量坝顶水头，以计算流量系数？（采用 $\lambda_L = 20$ ）

11.6 明渠恒定非均匀流的微分方程式可写作 $i - \frac{dh}{ds} = (\alpha + \zeta) \frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{v^2}{C^2 R}$ ，今欲设计纵、横方向与垂直方向比尺不同的变态模型。设纵、横方向线性比尺为 λ_L ，垂直方向的线性比尺为 λ_h ，试求该变态模型的流速比尺、流量比尺及谢才系数比尺。

附录 粗糙系数、管道及明渠各种 局部水头损失系数

附表 1 粗糙系数 n 值

明槽类型及其说明	最小值	正常值	最大值
(一) 水流半满的闭合水道 (采用附表 1.1 的数值)			
(二) 衬砌的或建造的明槽			
I. 金属			
1. 光滑的钢质表面			
(1) 未涂油漆	0.011	0.012	0.014
(2) 涂了油漆	0.012	0.013	0.017
2. 波纹金属	0.021	0.025	0.030
II. 非金属			
1. 水泥			
(1) 表面整洁	0.010	0.011	0.013
(2) 水泥浆	0.011	0.013	0.015
2. 木材			
(1) 刨光, 但未处理	0.010	0.012	0.014
(2) 刨光, 且用油浸过	0.011	0.012	0.015
(3) 未经刨光	0.011	0.013	0.015
(4) 有夹条的木板	0.012	0.015	0.018
(5) 用屋面油纸护面	0.010	0.014	0.017
3. 混凝土			
(1) 镏抹面	0.011	0.013	0.015
(2) 浮镏出面	0.013	0.015	0.016
(3) 抹面, 但底面上有砾石	0.015	0.017	0.020
(4) 表面未加工	0.014	0.017	0.020
(5) 喷浆, 良好的断面	0.016	0.019	0.023
(6) 喷浆, 波状的断面	0.018	0.022	0.025
(7) 浇注于开挖良好的岩面上	0.017	0.020	—
(8) 浇注于开挖得不规则的岩面上	0.022	0.027	—
4. 混凝土槽底, 浮镏过的, 但两侧的边坡为:			
(1) 浆砌琢石	0.015	0.017	0.020

续表

明槽类型及其说明	最小值	正常值	最大值
(2) 浆砌乱石	0.017	0.020	0.024
(3) 水泥砌块石, 抹面	0.016	0.020	0.024
(4) 水泥砌块石	0.020	0.025	0.030
(5) 干砌块石或乱石护坡	0.020	0.030	0.035
5. 砾石槽底, 但两侧之边坡为:			
(1) 支模浇注的混凝土	0.017	0.020	0.025
(2) 浆砌乱石	0.020	0.023	0.026
(3) 干砌块石或乱石护坡	0.023	0.033	0.036
6. 砖			
(1) 上釉的	0.011	0.013	0.015
(2) 水泥浆砌砖	0.012	0.015	0.018
7. 圪工			
(1) 水泥浆砌块石	0.017	0.025	0.030
(2) 干砌块石	0.023	0.032	0.035
8. 琢条石	0.013	0.015	0.017
9. 沥青			
(1) 光滑的	0.013	0.013	—
(2) 粗糙的	0.016	0.016	—
10. 植物护面	0.030	—	0.500
(三) 开挖的或浚深的			
1. 土槽, 水流顺直一致			
(1) 整洁, 新完工	0.016	0.018	0.020
(2) 整洁, 泄过水	0.018	0.022	0.025
(3) 砾石, 断面一致, 整洁	0.022	0.025	0.030
(4) 有低矮的牧草、少量的杂草	0.022	0.027	0.033
2. 土槽, 水流打卷、迟缓			
(1) 无植物	0.023	0.025	0.030
(2) 有牧草、一些杂草	0.025	0.030	0.033
(3) 有茂密的杂草或深槽中有水生植物	0.030	0.035	0.040
(4) 土底, 块石护坡	0.028	0.030	0.035
(5) 石底, 两岸杂草丛生	0.025	0.035	0.040
(6) 卵石底面, 边坡整洁	0.030	0.040	0.050
3. 拉索挖土机开挖出来的土槽			
(1) 无植物	0.025	0.028	0.033
(2) 两岸有少量的灌木	0.035	0.050	0.060
4. 岩石明槽			

续表

明槽类型及其说明	最小值	正常值	最大值
(1) 光滑且均匀一致	0.025	0.035	0.040
(2) 锯齿形的、不规则的	0.035	0.040	0.050
5. 未加养护的明槽, 杂草与灌木未经清除			
(1) 杂草密茂, 同水流深度一般高	0.050	0.080	0.120
(2) 槽底整洁, 两侧边坡上有灌木	0.040	0.050	0.080
(3) 同(2), 但为最高水位	0.045	0.070	0.110
(4) 灌木丛生密茂, 高水位	0.080	0.100	0.140
(四) 天然河道			
I. 小河(洪水位时水面宽度小于50m)			
1. 平原河流			
(1) 整洁, 顺直, 满槽水位, 无裂隙或深潭	0.025	0.030	0.033
(2) 同上(1)者, 但有较多的石块与杂草	0.030	0.035	0.040
(3) 整洁, 水流打卷, 有一些深潭和浅滩	0.033	0.040	0.045
(4) 同(3), 但有一些杂草和石块	0.035	0.045	0.050
(5) 同(3), 水位较低, 不过水的无效边坡和断面较大	0.040	0.048	0.055
(6) 同(3), 但石块更多	0.045	0.050	0.060
(7) 水流迟缓的河段, 多杂草, 有深潭	0.050	0.070	0.080
(8) 杂草很多的河段, 有深潭或树木及水下灌木严重阻水的洪水流路	0.075	0.100	0.150
2. 山区河流(槽中无植物, 两岸通常是陡峻的, 两岸上的树木和灌木在高水位时受淹)			
(1) 河底: 砾石、卵石和少量漂石	0.030	0.040	0.050
(2) 河底: 夹杂大漂石的卵石	0.040	0.050	0.070
II. 泛滥平原 } 采用附表 1.2 及 1.3 的数值			
III. 大河 }			

附表 1.1 压力管道粗糙系数 n 值

管道材料种类及状况	n		
	最小值	正常值	最大值
有机玻璃管	0.008	0.009	0.010
玻璃管	0.009	0.01	0.013
光滑的黄铜管	0.009	0.01	0.013
黑铁皮管	0.012	0.014	0.015
镀锌铁皮管(白铁皮管)	0.013	0.016	0.017
有护面层的铸铁管	0.010	0.013	0.014

续表

管道材料种类及状况	n		
	最小值	正常值	最大值
无护面层的铸铁管	0.011	0.014	0.016
钢管			
1. 纵缝和横缝都是焊接的, 但都不束狭过水断面	0.011	0.012	0.012 5
2. 纵缝焊接, 横缝铆接 (搭接), 一排铆钉	0.011 5	0.013	0.014
3. 纵缝焊接, 横缝铆接 (搭接), 二排或二排以上铆钉	0.013	0.014	0.015
4. 纵横缝都是铆接 (搭接), 一排铆钉且板厚小于或等于 11 mm	0.012 5	0.013 5	0.015
5. 纵横缝都是铆接 (有垫板), 二排或二排以上铆钉, 或者板厚大于 12 mm	0.014	0.015	0.017
水泥管 (表面洁净)	0.010	0.011	0.013
混凝土管及钢筋混凝土管			
1. 没有抹灰面层的			
(1) 钢模板, 施工质量良好, 接缝平滑	0.012	0.013	0.014
(2) 光滑木模板, 施工质量良好, 接缝平滑	—	0.013	—
(3) 光滑木模板, 施工质量一般	0.012	0.014	0.016
(4) 粗糙木模板, 施工质量不佳, 模板错缝跑浆	0.015	0.017	0.020
2. 有抹灰面层, 且抹灰面层经过抹光	0.010	0.012	0.014
3. 有喷浆面层的			
(1) 用钢丝刷仔细处理表面, 并经仔细抹光	0.012	0.013	0.015
(2) 用钢丝刷刷过, 且不允许喷浆脱落体凝结于衬砌面上	—	0.016	0.018
(3) 喷浆层是仔细喷的, 但既未用钢丝刷刷饰, 也未经抹光	—	0.019	0.023
木管 (由木板条拼成者)	0.010	0.011	0.012
缸瓦管 (陶土管)			
1. 普通的 (排水用)	0.011	0.013	0.017
2. 带釉的 (污水用)	0.011	0.014	0.017
岩石泄水管道			
1. 未衬砌的岩石			
(1) 条件中等的, 即已把突出的岩块除去而使壁面有所修整	0.025	0.030	0.033
(2) 条件不利的, 即壁面很不平整, 断面稍有超挖	—	0.040	0.045
2. 部分衬砌的岩石 (部分湿周上有喷浆面层、抹灰面层或衬砌面层)	0.022	0.030	—

附表 1.2 天然河道单式断面或主槽的较高水位部分之粗糙系数 n 值

类型	河段特征			粗糙系数 n
	河床组成及床面特性	平面形态及水流流态	岸壁特性	
I	河床为沙质组成, 床面较平整	河段顺直, 断面规整, 水流通畅	两侧岸壁为土质或砂质, 形状较整齐	0.020 ~ 0.024
II	河床为岩板、砂砾石或卵石组成, 床面较平整	河段顺直, 断面规整, 水流通畅	两侧岸壁为土、砂或石质, 形状较整齐	0.022 ~ 0.026
III	1 沙质河床, 河底不太平整	上游顺直, 下游接缓弯, 水流不够通畅, 有局部回流	两岸侧壁为黄土, 长有杂草	0.025 ~ 0.029
	2 河底为砂砾或卵石组成, 底坡较均匀, 床面尚平整	河段顺直段较长, 断面较规整, 水流较通畅, 基本上无死水, 斜流或回流	两侧岸壁为土、砂、岩石、略有杂草、小树, 形状较整齐	0.025 ~ 0.029
IV	1 细沙, 河底中有稀疏水草或水生植物	河段不够顺直, 上、下游附近弯曲, 有挑水坝, 水流不畅通	土质岸壁, 一岸坍塌严重, 为锯齿状, 长有稀疏杂草及灌木; 一岸坍塌, 长有稠密的杂草或芦苇	0.030 ~ 0.034
	2 河床为砾石或卵石组成, 底坡尚均匀, 床面不平整	顺直段距上弯道不远, 断面尚规整, 水流尚通畅, 斜流或回流不甚明显	一岸侧壁为石质, 陡坡, 形状尚整齐; 另一侧岸壁为砂土, 略有杂草、小树, 形状尚整齐	0.030 ~ 0.034
V	河底为卵石、块石组成, 间有大漂石, 底坡尚均匀, 床面不平整	顺直段夹于两弯道之间, 距离不远, 断面尚规整, 水流显出斜流、回流或死水现象	两侧岸壁均为石质, 陡坡, 长有杂草、树木, 形状尚整齐	0.035 ~ 0.040
VI	河床为卵石、块石、乱石, 或大块石、大乱石及大孤石组成; 床面不平整, 底坡有凹凸状	河段不顺直, 上下游有急弯, 或下游有急滩、深坑等。河段处于 S 形顺直段, 不整齐, 有阻塞或岩溶较发育, 水流不畅通, 有斜流、回流、漩涡、死水现象。河段上游为弯道或为两河汇口, 落差大, 水流急, 河中有严重阻塞, 或两侧有深入河中的岩石,	两侧岸壁为岩石及砂土, 长有杂草、树木, 形状尚整齐。两侧岸壁为石质砂夹乱石、风化页岩, 崎岖不平整, 上面生长杂草、树木	0.04 ~ 0.10

续表

类型	河段特征			粗糙系数 n
	河床组成及床面特性	平面形态及水流流态	岸壁特性	
VI		伴有深潭或有回流等。上游为弯道，河段不顺直，水行于深槽峡谷间，多阻塞，水流湍急，水声较大		

使用说明：

1. 天然河道粗糙系数表内列有三个方面的影响因素，河道粗糙系数是这三方面因素的综合反映。如实际情况与表列组合有变化时， n 值应适当变化。

2. 本表只适用于稳定河道。对于含沙量大的、冲淤变化严重的沙质河床，不宜采用本表。

3. 表中第VI类，所列粗糙系数 n 值实际上已把局部损失包括在内，故 n 值很大。其所依据的资料为量很少，使用时应加注意。

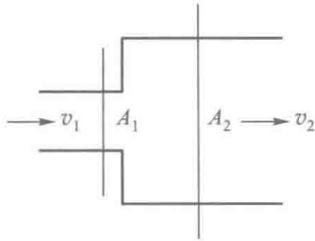
附表 1.3 滩地粗糙系数 n 值

类型	滩地特征描述			粗糙系数 n	
	平面和纵、横断面的形态	床质	植被	变化幅度	平均值
I	平面顺直，纵断面平顺，横断面整齐	土、沙质、淤泥	基本上无植物或为已收割的麦地	0.026 ~ 0.038	0.030
II	平面、纵断面、横断面尚顺直整齐	土、沙质	稀疏杂草、杂树或矮小农作物	0.030 ~ 0.050	0.040
III	平面、纵断面、横断面尚顺直整齐	砂砾、卵石堆或土沙质	稀疏杂草、小杂树或种有高秆作物	0.040 ~ 0.060	0.050
IV	上下游有缓弯，纵断面、横断面尚平坦，但有束水作用，水流不通畅	土沙质	种有农作物或有稀疏树林	0.050 ~ 0.070	0.060
V	平面不通畅，纵、横断面起伏不平	土沙质	有杂草、杂树或为水稻田	0.060 ~ 0.090	0.075
VI	平面尚顺直，纵、横断面起伏不平，有洼地、土埂等	土沙质	长满中密的杂草及农作物	0.080 ~ 0.120	0.100
VII	平面不通畅，纵、横断面起伏不平，有洼地、土埂等	土沙质	3/4 的地带长满茂密的杂草、灌木	0.100 ~ 0.160	0.130
VIII	平面不通畅，纵、横断面起伏不平，有洼地、土埂阻塞物	土沙质	全断面有稠密的植被、芦柴或其他植物	0.160 ~ 0.200	0.180

注：植物对水流的影响，跟水深对植物高度的比值有密切关系，本表没有反映这一关系，使用时应加注意。

附表 2 管道及明渠各种局部水头损失系数

一、突然扩大 (图 1)



$$\zeta_1 = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2 \quad \text{应用公式 } h_j = \zeta_1 \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\zeta_2 = \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \quad \text{应用公式 } h_j = \zeta_2 \frac{v_1^2}{2g}$$

图 1

二、逐渐扩大 (图 2)

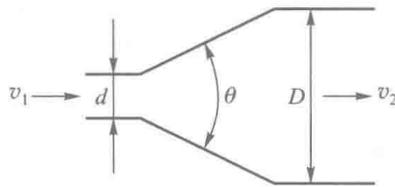


图 2

$$h_j = \zeta \frac{v_1^2}{2g}$$

式中的 ζ 值, 当 $\theta < 60^\circ$ 时, 由图 3 查取; 当 $\theta > 60^\circ$ 时, 由图 4 查取。

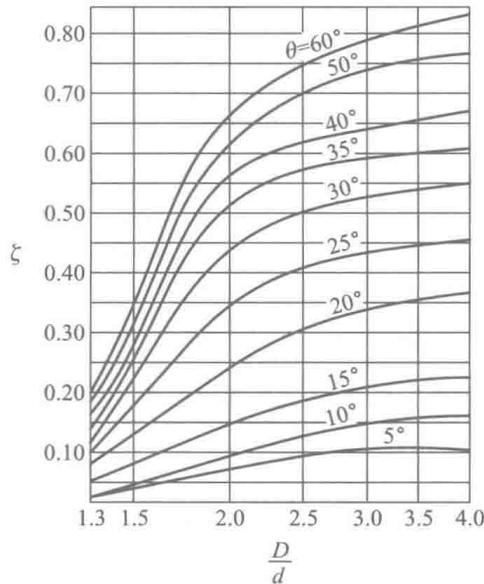


图 3

续表

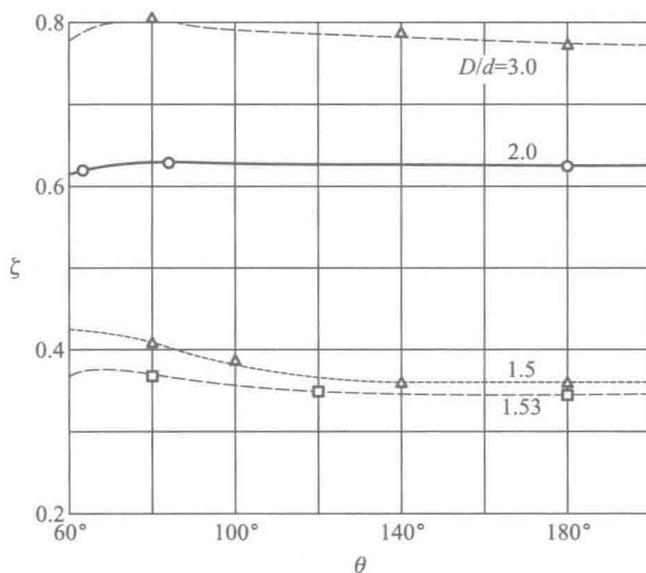


图 4

对于由圆形断面扩大为非圆形断面的情况，需进行专门试验。

三、突然缩小 (图 5)

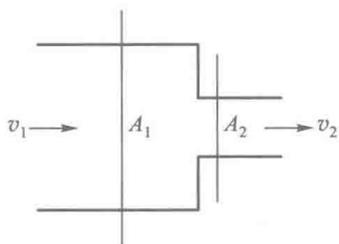


图 5

$$h_j = \zeta \frac{v_2^2}{2g}, \quad \zeta \text{ 由附表 2.1 查取, 也可按下列}$$

公式近似计算:

$$\zeta = \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)^2$$

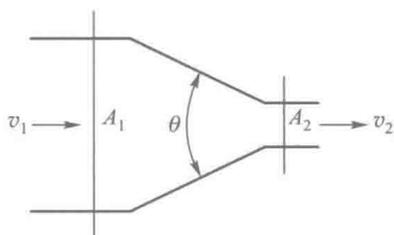
$$\varepsilon = \frac{A_c}{A_2} = 0.57 + \frac{0.043}{1.1 - \frac{A_2}{A_1}}$$

附表 2.1 管道突然缩小的损头系数 ζ 值

D/d	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	(1.0)
A_2/A_1	0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	(1.0)
ζ	0.50	0.50	0.49	0.49	0.46	0.43	0.38	0.29	0.18	0.07	(0)

续表

四、逐渐缩小 (图 6)



$$h_j = \zeta \frac{v_2^2}{2g}, \quad \zeta \text{ 值见图 7。}$$

图 6

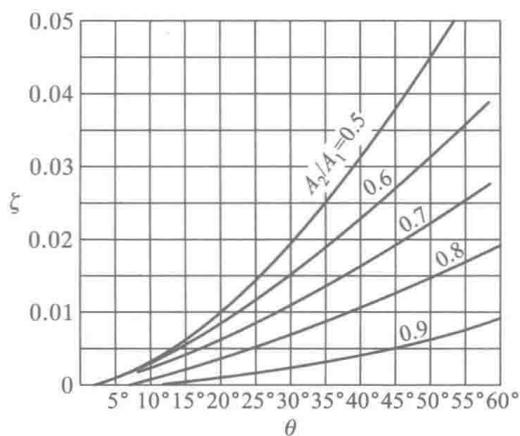


图 7

五、进口

$$h_j = \zeta \frac{v^2}{2g}$$

进口损失随进口几何形状的不同而异。

1. 方角入口 (图 8)

$$\zeta = 0.5$$

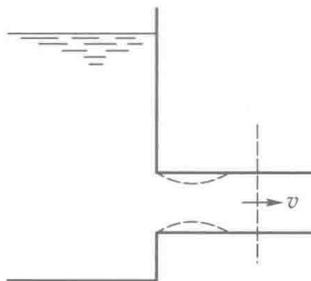


图 8

续表

2. 圆角入口 (图 9)

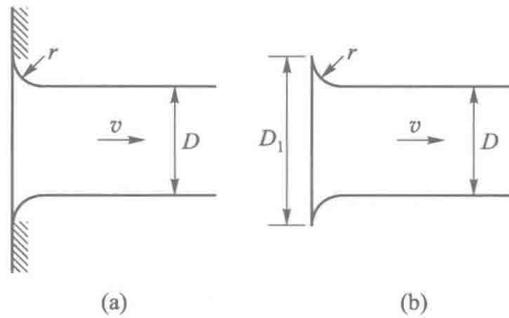
 ζ 值由附表 2.2 查取。

图 9

附表 2.2 圆角入口的损头系数 ζ 值

	ζ					
	$\frac{r}{D} = 0$	$\frac{r}{D} = 0.02$	$\frac{r}{D} = 0.06$	$\frac{r}{D} = 0.1$	$\frac{r}{D} = 0.16$	$\frac{r}{D} = 0.22$
入口位于壁上	0.5	0.35	0.2	0.11	0.05	0.03
入口自由放置	1	0.7	0.32	0.15	0.05	0.03

3. 圆锥状入口 (图 10)

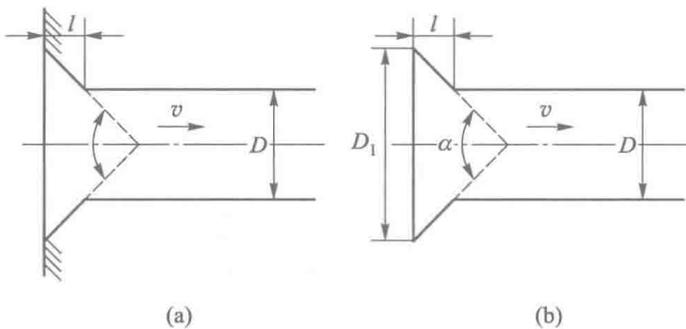
 ζ 值由附表 2.3 查取。

图 10

附表 2.3 圆锥状入口的损头系数 ζ 值

圆锥角 $\alpha/^\circ$	ζ					
	$\frac{l}{D}=0.025$	$\frac{l}{D}=0.05$	$\frac{l}{D}=0.075$	$\frac{l}{D}=0.1$	$\frac{l}{D}=0.25$	$\frac{l}{D}=0.5$
0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
10	0.47	0.44	0.42	0.38	0.36	0.28
20	0.44	0.39	0.34	0.31	0.26	0.18
40	0.41	0.32	0.26	0.21	0.16	0.1
60	0.4	0.3	0.23	0.18	0.15	0.14
90	0.45	0.42	0.39	0.37	0.35	0.33
180	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5

4. 探出式入口 (图 11)

ζ 值由附表 2.4 查取。

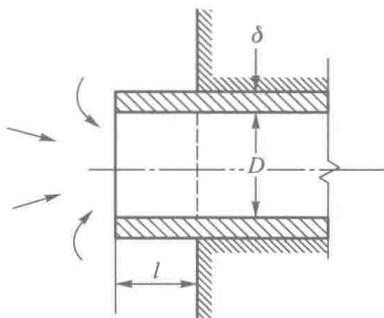


图 11

附表 2.4 探出式入口的损头系数 ζ 值

$\frac{\delta}{D}$	ζ				
	$\frac{l}{D}=0$	$\frac{l}{D}=0.002$	$\frac{l}{D}=0.010$	$\frac{l}{D}=0.05$	$\frac{l}{D}=0.5$
0	0.5	0.57	0.63	0.80	1.00
0.008	0.5	0.53	0.58	0.74	0.88
0.016	0.5	0.51	0.53	0.58	0.77
0.024	0.5	0.50	0.51	0.53	0.68
0.030	0.5	0.50	0.51	0.52	0.61
0.050	0.5	0.50	0.50	0.50	0.53

续表

5. 椭圆形入口 (图 12)

$$\zeta = 0.01 \sim 0.05$$

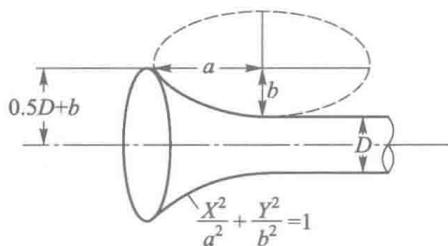
高水头时: $a=0.55D, b=0.145D$ 低水头时: $a=0.50D, b=0.0976D$

图 12

6. 斜管入口 (图 13)

$$\zeta = 0.5 + 0.3\cos\theta + 0.2\cos^2\theta$$

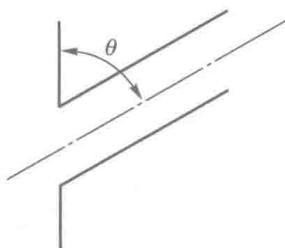


图 13

六、出口

$$h_j = \zeta \frac{v^2}{2g}$$

1. 液面下出流的管子出口 (图 14)

$$\zeta = 1$$

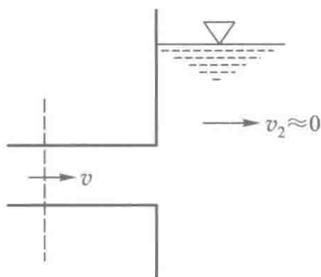


图 14

续表

2. 大气中出流的管子出口 (图 15)

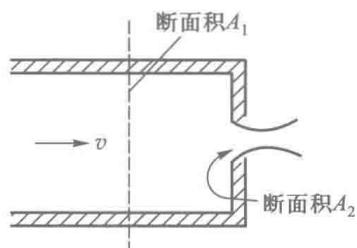
 ζ 值由附表 2.5 查取。

图 15

附表 2.5 图 15 所示水流出口的损头系数 ζ 值

$\frac{A_2}{A_1}$	0.11	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
ζ	268	66.5	28.9	15.5	9.81	5.80	3.70	2.38	1.56

七、弯管 (图 16)

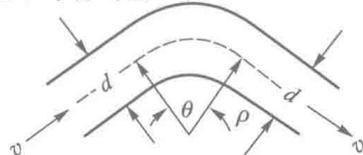


图 16

$$h_j = \zeta \frac{v^2}{2g}$$

$$\zeta = \left[0.131 + 0.163 \cdot 2 \left(\frac{d}{\rho} \right)^{7/2} \right] \left(\frac{\theta}{90^\circ} \right)^{1/2}$$

八、折管 (图 17)

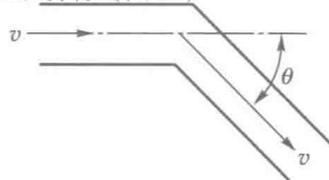


图 17

$$h_j = \zeta \frac{v^2}{2g}$$

$$\zeta = 0.946 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2.05 \sin^4 \frac{\theta}{2}$$

九、岔管 (图 18)

$$h_j = \zeta \frac{v_0^2}{2g}$$

1. 普通 Y 形对称分岔管

 $\zeta = 0.75$

续表

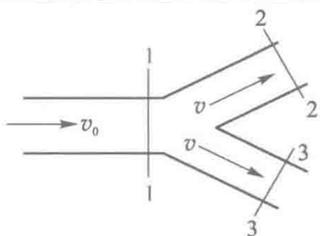


图 18

2. 圆锥状 Y 形对称分岔管 (分岔开始后形成逐渐收缩的圆锥形)。

$$\zeta = 0.5$$

参考文献

- [1] 赵振兴, 等. 水力学内容提要习题详解 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2012.
- [2] 张志昌. 水力学习题解析 [M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2012.
- [3] 张志昌. 水力学 [M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2011.
- [4] 赵振兴, 何建京. 水力学 [M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2010.
- [5] 裴国霞. 水力学学习指导与习题详解 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2009.
- [6] 刘亚坤. 水力学 [M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2008.
- [7] 吴持恭. 水力学 (上、下册) [M]. 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [8] 夏泰淳. 工程流体力学 [M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2006.
- [9] 齐鄂荣, 曾玉红. 工程流体力学 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2005.
- [10] 李炜, 徐孝平. 水力学 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2000.
- [11] 童显武, 等. 高水头泄水建筑收缩式消能工 [M]. 北京: 中国农业科技出版社, 2000.
- [12] 李建中, 宁利中. 高速水力学 [M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1994.
- [13] 张长高. 水动力学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1993.
- [14] ладдоДД, 等. 泄水建筑物水力计算手册 [M]. 陈肇和, 等, 译. 北京: 北京印刷三厂, 1993.
- [15] 许荫椿, 胡得保, 薛朝阳. 水力学 [M]. 北京: 科学出版社, 1990.
- [16] 陈椿庭. 高坝大流量泄洪建筑物 [M]. 北京: 水利电力出版社, 1988.
- [17] 杨凌真. 水力学难题分析 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1987.
- [18] 徐正凡. 水力学 (上、下册) [M]. 北京: 高等教育出版社, 1986.
- [19] 清华大学水力学教研室. 水力学 (上、下册) [M]. 北京: 高等教育出版社, 1980.
- [20] 中华人民共和国国家能源局. DL/T 5244—2010 水电水利工程常规水工模型试验规程 [S]. 北京: 中国电力出版社, 2010.
- [21] 中华人民共和国国家发展和改革委员会. DL/T 5207—2005 水工建筑物抗冲磨防空蚀混凝土技术规范 [S]. 北京: 中国电力出版社, 2005.
- [22] 中华人民共和国水利部. SL 253—2000 溢洪道设计规范 [S]. 北京: 中国水利水电出版社, 2000.

ISBN 978-7-04-044731-6



9 787040 447316 >

定价 49.60元