

研究生教学用书

公共基础课系列

教育部学位管理与研究生教育司推荐研究生教学用书

实用小波方法

(第三版)

Practical Wavelet Method

徐长发 李国宽

BOOKS FOR GRADUATE STUDENTS

华中科技大学出版社

研究生教学用书
公共基础课系列

ISBN 978-7-5609-2454-0



9 787560 924540

定价：22.80元

研究生教学用书
公共基础课系列

教育部学位管理与研究生教育司推荐研究生教学用书

实用小波方法

(第三版)

徐长发 李国宽

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

实用小波方法(第三版)/徐长发 李国宽. —武汉:华中科技大学出版社,
2009年8月
ISBN 978-7-5609-2454-0

I. 实… II. ①徐… ②李… III. 小波分析-高等学校-教材 IV. O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 126243 号

实用小波方法(第三版)

徐长发 李国宽

责任编辑:徐正达
责任校对:张琳

封面设计:潘群
责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录排:武汉佳年华科技有限公司
印刷:华中科技大学印刷厂

开本:787mm×960mm 1/16

印张:16

字数:310 000

版次:2009年8月第3版

印次:2009年8月第4次印刷

定价:22.80元

ISBN 978-7-5609-2454-0/O·494

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 简 介

本书用通俗的数学语言介绍了小波理论及其应用的基本知识,围绕时-频分析需要的问题,讨论了 Fourier 变换和窗口 Fourier 变换的不足之处,详细分析了小波变换的基本原理,详细阐述了多分辨逼近和小波分解的基本思想,详细讨论了离散小波变换及其快速算法的实现过程,介绍了几种常用的小波及其构造方法,还给出了多方面应用例子并分析了小波方法在应用中的基本原理.

本书内容丰富,深入浅出,利于实用和读者自学,可作为高等院校理工科本科高年级学生和研究生的教材,也可作为从事信号处理研究的技术人员的参考书.

Abstract

This book aims at providing the reader with the basic knowledge of wavelet theory and its practical application in concise mathematical language. In this book, centering on the question of the requirement for time-frequency analysis, the defects of Fourier Transform and Window Fourier Transform are discussed. The basic principle of wavelet is introduced in detail. The fundamental concept of multi-resolution and wavelet decomposition are illustrated. Implementation of discrete wavelet transform and its fast algorithms, several commonly-used wavelets and their construction methods are investigated. In addition, some application examples in many respects are demonstrated, and principle of wavelet application is analyzed.

This book is characterized by substantial content and beneficial to self-study learners. It can be used as teaching material for senior undergraduates postgraduates, and serve as a reference for researchers in signal processing area.

写在“研究生教学用书”出版 15 周年前岁

“接天莲叶无穷碧，映日荷花别样红。”今天，我国的教育正处在一个大发展的崭新时期，而高等教育即将跨入“大众化”的阶段，蓬蓬勃勃，生机无限。在高等教育中，研究生教育的发展尤为迅速。在盛夏已临，面对池塘中亭亭玉立的荷花，风来舞举的莲叶，我深深感到，我国研究生教育就似夏季映日的红莲，别样多姿。

党的十六大报告以空前的力度强调了“科教兴国”的发展战略，强调了教育的重大作用，强调了教育的基础性、全局性、先导性，强调了在社会主义建设中教育的优先发展的战略地位。从报告中，我们可以清楚看到，对高等教育而言，不仅赋予了重大的历史任务，而且更明确提出了要培养一大批拔尖创新人才。不言而喻，培养一大批拔尖创新人才的历史任务主要落在研究生教育肩上。“百年大计，教育为本；国家兴亡，人才为基。”国家之间的激烈竞争，在今天，归根结底，最关键的就是高级专门人才，特别是拔尖创新人才的竞争。由此观之，研究生教育的任务可谓重矣！重如泰山！

前事不忘，后事之师。历史经验已一而再、再而三地证明：一个国家的富强，一个民族的繁荣，最根本的是要依靠自己，要以“自力更生”为主。《国际歌》讲得十分深刻，世界上从来就没有什么救世主，只有靠自己救自己。寄希望于别人，期美好于外力，只能是一种幼稚的幻想。内因是发展的决定性的因素。当然，我们决不应该也决不可能采取“闭关锁国”，自我封闭，固步自封的方式来谋求发展，重犯历史错误。外因始终是发展的必要条件。正因为如此，我们清醒看到了，“自助者人助”，只有“自信、自尊、自主、自强”，只有独立自主，自强不息，走以“自力更生”为主的发展道路，才有可能在向世界开放中，争取到更多的朋友，争取到更多的支持，充分利用好外部的各种有利条件，来扎扎实实地而又尽可能快地发展自己。这一切的关键就在于，我们要有数量与质量足够的高级专门人才，特别是拔尖创新人才。何况，在科技高速发展与高度发达，而知识经济已初见端倪的今天，更加如此。人才，高级专门人才，

拔尖创新人才,是我们一切事业发展的基础。基础不牢,地动山摇;基础坚牢,大厦凌霄;基础不固,木凋树枯;基础深固,硕茂葱绿!

“工欲善其事,必先利其器。”自古凡事皆然,教育也不例外。教学用书是“传道授业解惑”培育人才的基本条件之一。“巧妇难为无米之炊。”特别是在今天,学科的交叉及其发展越来越多及越快,人才的知识基础及其要求越来越广及越高,因此,我一贯赞成与支持出版“研究生教学用书”,供研究生自己主动地选用。早在 1990 年,本套用书中的第一本即《机械工程测试·信息·信号分析》出版时,我就为此书写了个“代序”,其中提出:一个研究生应该博览群书,博采百家,思路开阔,有所创见。但这不等于他在一切方面均能如此,有所不为才能有所为。如果一个研究生的主要兴趣与工作不在某一特定方面,他也可选择一本有关这一特定方面的书作为了解与学习这方面知识的参考;如果一个研究生的主要兴趣与工作在这一特定方面,他更应选择一本有关的书作为主要的学习用书,寻觅主要学习线索,并缘此展开,博览群书。这就是我赞成要为研究生编写系列的“研究生教学用书”的原因。今天,我仍然如此来看。

还应提及一点,在教育界有人讲,要教学生“做中学”,这有道理;但须补充一句,“学中做”。既要在实践中学习,又要在学习中实践,学习与实践紧密结合,方为全面;重要的是,结合的关键在于引导学生思考,学生积极主动思考。当然,学生的层次不同,结合的方式与程度就应不同,思考的深度也应不同。对研究生特别是对博士研究生,就必须是而且也应该是“研中学,学中研”,在研究这一实践中,开动脑筋,努力学习,在学习这一过程中,开动脑筋,努力研究;甚至可以讲,研与学通过思考就是一回事情了。正因为如此,“研究生教学用书”就大有英雄用武之地,供学习之用,供研究之用,供思考之用。

在此,还应进一步讲明一点。作为一个研究生,来读“研究生教学用书”中的某书或其他有关的书,有的书要精读,有的书可泛读。记住了书上的知识,明白了书上的知识,当然重要;如果能照着用,当然更重要。因为知识是基础。有知识不一定有力量,没有知识就一定没有力量,千万千万不要轻视知识。对研究生特别是博士研究生而言,最为重要的还不是知识本身这个形而下,而是以知识作为基础,努力通过某种实践,同时深入独立思考而体悟到的形而上,即《老子》所讲的不可道的“常道”,即思维能力的提高,即精神境界的升华。《周易·系辞》讲了:“形而上谓

之道,形而下谓之器。”我们的研究生要有器,要有具体的知识,要读书,这是基础;但更要有“道”,更要一般,要体悟出的形而上。《庄子·天道》讲得多么好:“书不过语。语之所贵者意也,意有所随。意之所随者,不可以言传也。”这个“意”,就是孔子所讲的“一以贯之”的“一”,就是“道”,就是形而上。它比语、比书,重要多了。要能体悟出形而上,一定要有足够数量的知识作为必不可缺的基础,一定要在读书去获得知识时,整体地读,重点地读,反复地读;整体地想,重点地想,反复地想。如同韩愈在《进学解》中所讲的那样,能“提其要”,“钩其玄”,以达到南宋张孝祥所讲的“悠然心会,妙处难与君说”的体悟,化知识为己之素质,为“活水源头”。这样,就可驾驭知识,发展知识,创新知识,而不是为知识所驾驭,为知识所奴役,成为计算机的存储装置。

这套“研究生教学用书”从第一本于1990年问世以来,到明年,就经历了不平凡的15个春秋。从研究生教育开始以来,我校历届领导都十分关心研究生教育,高度重视研究生教学用书建设,亲自抓研究生教学用书建设;饮水思源,实难忘怀!“逝者如斯夫,不舍昼夜。”截至今天,“研究生教学用书”的出版已成了规模,蓬勃发展。目前已出版了用书69种,有的书发行了数万册,有22种分别获得了国家级、省部级教材奖、图书奖,有数种已为教育部列入向全国推荐的研究生教材,有20种一印再印,久销不衰。采用此书的一些兄弟院校教师纷纷来信,称赞此书为研究生培养与学科建设作出了贡献。我们深深感激这些鼓励,“衷心藏之,何日忘之?!”没有读者与专家的关爱,就没有我们“研究生教学用书”的发展。

唐代大文豪李白讲得十分正确:“人非尧舜,谁能尽善?”我始终认为,金无足赤,物无足纯,人无完人,文无完文,书无完书。“完”全了,就没有发展了,也就“完”蛋了。江泽民同志在党的十六大报告中讲得多么深刻:“实践没有止境,创新也没有止境。”他又指出,坚持“三个代表”重要思想的关键是与时俱进。这套“研究生教学用书”更不会例外。这套书如何?某本书如何?这样的或那样的错误、不妥、疏忽或不足,必然会有。但是,我们又必须积极、及时、认真而不断地加以改进,与时俱进,奋发前进。我们衷心希望与真挚感谢读者与专家不吝指教,及时批评。当局者迷,兼听则明;“嚶其鸣矣,求其友声。”这就是我们肺腑之言。当然,在这里,还应该深深感谢“研究生教学用书”的作者、审阅者、组织者(华

华中科技大学研究生院的有关领导和工作人员)与出版者(华中科技大学出版社的编辑、校对及其全体同志);深深感谢对“研究生教学用书”的一切关心者与支持者,没有他们,就决不会有今天的“研究生教学用书”。

我们真挚祝愿,在我们举国上下,万众一心,在“三个代表”重要思想的指引下,努力全面建设小康社会,加速推进社会主义现代化,为实现中华民族伟大复兴,“芙蓉国里尽朝晖”这一壮丽事业中,让我们共同努力,为培养数以千万计高级专门人才、特别是一大批拔尖创新人才,完成历史赋予研究生教育的重大任务而作出应有的贡献。

谨为之序。

中国科学院院士
华中科技大学学术委员会主任
杨叔子
2003 年 7 月于喻园

前 言

小波分析是在 Fourier 分析的基础上发展起来的. 作为时-频分析方法, 小波分析比 Fourier 分析有着许多本质性的进步. 小波分析提供了一种自适应的时域和频域同时局部化的分析方法, 无论分析低频或高频局部信号, 它都能自动调节时-频窗, 以适应实际分析的需要. 小波分析在局部时-频分析中具有很强的灵活性, 能聚焦到信号时段和频段的任意细节, 被喻为时-频分析的显微镜. 小波分析的快速算法为分析和实际问题带来极大的方便. 它的这些特点使得时-频分析的方法和应用得到了辉煌的发展. 现在, 小波分析方法已广泛应用于信号处理、图像处理、模式识别、语音识别、地震勘探、CT 成像、计算机视觉、航空航天技术、故障监控、通信与电子系统等众多的学科和相关技术的研究中. 由小波分析方法带来的高新技术成果迅速增加, 其研究正在向纵深发展.

小波分析之所以得到如此广泛的应用, 完全归功于它的数学机理的创见性和完善性. 小波分析是泛函分析、调和分析、时-频分析、数值分析、逼近论和广义函数论等众多学科知识完美结合的结晶, 具有完善的理论体系. 然而, 小波分析的研究背景是具体的, 理论和方法是实用的, 实现过程是简便的. 数学工作者有责任突破其复杂的数学障碍, 显现其实用本质, 让小波分析方法和 Fourier 分析方法一样, 成为一种基础的、普及的、容易为广大读者所掌握和应用的数学工具.

作者试图为广大读者提供一本便于自学和实用的小波分析教科书. 为此, 本书以阐述小波分析的基本原理、算法实现和基本应用为出发点, 贯串着便于自学、理解的主线条, 层层深入地讨论和解决问题, 用通俗易懂的数学形式来描述和解释全书内容. 读者仅具备高等数学基础知识和一般的计算方法方面的基础知识就可顺利阅读. 因此, 强调可读性、强调实用性、强调理论和实践的统一是本书的特点.

作者研究小波分析及其应用十多年, 多次讲授小波分析课程. 本书出版后, 受到广泛的好评和充分的肯定, 并入选教育部学位管理与研究生教育司推荐研究生教学用书. 在此对支持本书的同仁们一并表示感谢, 也敬请广大读者指出本书中的不足之处.

作 者

2009 年 10 月

目 录

第 1 章	Fourier 分析	(1)
1.1	函数(模拟信号)的 Fourier 级数	(1)
1.2	函数(模拟信号)的 Fourier 变换	(7)
1.3	几个函数的 Fourier 变换	(9)
1.4	Fourier 变换的性质	(16)
1.5	卷积及其 Fourier 变换	(19)
1.6	相关函数及其 Fourier 变换	(27)
1.7	离散 Fourier 变换和谱函数的近似计算	(32)
1.8	在时域和频域中分析信号的应用举例	(38)
第 2 章	窗口 Fourier 变换	(44)
2.1	短时的时-频分析需要	(44)
2.2	卷积与窗	(45)
2.3	WFT 的基本思想	(47)
2.4	时窗、频窗、时-频窗及其度量	(49)
2.5	WFT 反演公式	(53)
2.6	WFT 的某些局限性	(54)
第 3 章	小波变换	(56)
3.1	自适应窗函数的设计	(56)
3.2	小波、小波变换的定义和条件	(57)
3.3	小波变换的自适应时-频窗	(60)
3.4	离散小波变换及其频带特性	(64)
第 4 章	多分辨逼近与正交小波级数	(66)
4.1	函数(模拟信号)的多尺度逼近	(66)
4.2	多分辨逼近	(73)
4.3	正交小波级数和正交小波变换	(78)
4.4	离散小波分解所表现的局部时-频分析方法	(81)
第 5 章	正交小波的快速算法	(84)
5.1	Mallat 算法	(84)
5.2	小波包算法	(94)
第 6 章	小波分析方法在滤波和消噪方面的应用原理	(98)
6.1	小波分析在常规滤波方面的应用	(98)

6.2	小波分析在消噪方面的应用	(98)
6.3	小波分析在平稳信号消噪中的应用	(99)
6.4	小波分析在非平稳信号消噪中的应用	(100)
6.5	小波分析在语言信号基音提取和压缩存储中的应用	(105)
第7章	小波分析在突变信号检测方面的应用	(107)
7.1	检测信号突变点方法的原理	(107)
7.2	小波变换模极大值的检测办法	(110)
7.3	几类突变点的奇异度	(112)
7.4	小波函数的光滑性、衰减性和消失矩	(114)
7.5	小波变换模极大值用于突变点分类	(116)
7.6	用小波变换模极大值重建小波变换	(119)
第8章	多分辨逼近中的一些重要关系	(127)
8.1	多分辨逼近生成元及其性质	(127)
8.2	正交尺度函数和正交小波的性质	(132)
8.3	关于构造尺度函数的讨论	(138)
第9章	正交小波	(144)
9.1	Shannon 正交小波	(144)
9.2	Haar 小波	(146)
9.3	Battle-Lemarie 小波	(148)
9.4	Meyer 小波	(150)
9.5	Daubechies 紧支集正交小波	(151)
第10章	紧支集内插小波及其快速算法	(162)
10.1	紧支集内插小波的性质	(162)
10.2	相应的低通滤波器和高通滤波器	(165)
10.3	分解和回复算法	(168)
10.4	其它特点	(169)
第11章	样条半正交小波及其快速算法	(171)
11.1	紧支集样条节点基函数及其基本性质	(171)
11.2	时域信号的样条函数插值逼近	(174)
11.3	紧支集样条半正交小波的代数构造方法	(178)
11.4	样条半正交小波的分解、回复算法	(188)
11.5	插值样条小波及其快速算法	(193)
第12章	双正交小波及其快速算法	(195)
12.1	双正交多分辨逼近	(195)
12.2	双正交小波的分解算法和回复算法	(198)

12.3	双正交滤波器的性质和要求·····	(200)
12.4	样条双正交小波的代数构造方法·····	(203)
12.5	样条双正交小波的频域构造方法·····	(208)
12.6	双正交小波提高消失矩的方法·····	(210)
第 13 章	二维小波变换与图像处理 ·····	(218)
13.1	二维信号的多分辨逼近·····	(218)
13.2	二维信号的小波子空间分解及其频域含义·····	(220)
13.3	二维信号的分解回复算法·····	(223)
13.4	图像小波分析应用的原理·····	(232)
结束语	·····	(238)
参考文献	·····	(240)

第 1 章 Fourier 分析

众所周知,一个复杂的波形可以看做一个函数或模拟信号,也可以看做一种复杂的振动现象,它是由许多不同频率、不同振幅的谐波叠加而成的.例如,光波为不同强度、不同波长的单色光的叠加,可分解为光谱.声音也可分解为不同音调、不同音强的声谱.天线回路中的复杂电信号可分解为不同频率、不同振幅的简谐电磁波. Fourier 分析就是对函数(模拟信号)作谐波分解、合成和分析的有力的数学工具,它在声学、光学、电学、力学等学科,特别是在数字信号处理方面,都有着非常广泛的应用.

本章介绍 Fourier 分析的基本性质、基本应用和基本注意事项,这些知识是学习以后各章节的基础知识.

1.1 函数(模拟信号)的 Fourier 级数

1. 物理背景

众所周知,以 2π 为周期的复杂的波都可以用以 2π 为周期的函数(模拟信号) $f(t)$ 来描述,物理实验也表明,它可由形如 $A_n \sin(nt + \theta_n)$ 的若干谐波叠加而成.换句话说,以 2π 为周期的函数(模拟信号) $f(t)$ 可分解为不同频率、不同振幅和不同相位的谐波信号.因此,完全有理由认为 $f(t)$ 有如下的表现形式:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(nt + \theta_n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \sin\theta_n \cos nt + A_n \cos\theta_n \sin nt) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt). \end{aligned} \quad (1.1)$$

其中, $A_n \sin(nt + \theta_n)$ 称为第 n 次谐波, A_n 表现振幅, n 表现频率, θ_n 表现相位.

为了确定式(1.1)中的系数 a_n 和 b_n ,要用公式

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx &= 0, \quad m, n = 0, 1, \dots, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx &= \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n, \end{cases} \quad m, n = 1, 2, \dots, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n, \end{cases} \quad m, n = 1, 2, \dots. \end{aligned}$$

式(1.1)两边同乘以 $\cos nx$ 或 $\sin nx$, 并在 $[-\pi, \pi]$ 上积分, 就可得到以 2π 为周期的函数(模拟信号)的 Fourier 级数, 即

$$\begin{cases} f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt, \quad n = 0, 1, \dots, \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt, \quad n = 1, 2, \dots. \end{cases} \quad (1.2)$$

只要对式(1.2)的自变量 t 作变换, 令

$$t = \frac{2\pi}{T}x,$$

就可得到以 T 为周期的函数(模拟信号)的 Fourier 级数, 即

$$\begin{cases} f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\Delta\omega t + b_n \sin n\Delta\omega t), \\ a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\Delta\omega t dt, \quad n = 0, 1, \dots, \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\Delta\omega t dt, \quad n = 1, 2, \dots, \\ \Delta\omega = 2\pi/T. \end{cases} \quad (1.3)$$

对式(1.2)作简单变形, 周期 T 的函数 $f(t)$ 的 Fourier 级数还可表现为

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \sin(n\Delta\omega t + \theta_n).$$

其中, $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ 和 $\theta_n = \arctan \frac{b_n}{a_n}$ 分别表现频率为 $n\Delta\omega$ 的谐波的振幅和相位.

式(1.2)和式(1.3)表明, 周期为 T 的函数确实可以分解为若干简谐波之和, 但这些谐波的频率是离散出现的, 不是连续出现的, 它们是基频 $\Delta\omega$ 的整数倍.

2. 可用 Fourier 级数表示的函数

函数(模拟信号)可能有间断, 这类函数可以展开为 Fourier 级数吗?

定理 1.1 设 $f(t)$ 是以 T 为周期的实函数, 且在 $[-T/2, T/2]$ 上连续或仅有有限个第一类间断点, 允许有有限个极值点而不允许无穷振荡, 那么, 在 $f(t)$ 的连续点处, 级数(1.3)收敛于 $f(t)$; 在 $f(t)$ 的间断点 $f(t_0)$ 处, 级数(1.3)收敛于 $\frac{f(t_0-0) + f(t_0+0)}{2}$, 即收敛于左、右端值的中间值.

若仅在 $[-T/2, T/2]$ 上有一段信号 $f(t)$, 可从两个方面理解它的 Fourier 级数. 一方面是关于 $f(t)$ 表现为级数形式的, 可理解 $f(t)$ 作周期延拓成周期为 T 的函数, 利用定理 1.1, $f(t)$ 可表示为定义在 \mathbf{R} 上的 Fourier 级数; 另一方面是关于 Fourier 级数表现实际信号 $f(t)$ 的, 虽然级数在 \mathbf{R} 上都有表现, 但在 $[-T/2, T/2]$

区段上才是表现真实信号的. 另外, 虽然在间断点处出现中间值, 实际信号并无此表现, 但是这不会影响对原信号的讨论.

将一段信号 $f(t), t \in [0, T/2]$ 延拓成周期为 T 的函数, 可作奇延拓, 也可作偶延拓. 若作奇延拓, 则 $f(t)$ 是周期为 T 的函数, 在 $[-T/2, T/2]$ 上是奇函数, 它的 Fourier 级数中仅含 $\sin n\Delta\omega t$ 项; 若作偶延拓, $f(t)$ 在 $[-T/2, T/2]$ 上是偶函数, 它的 Fourier 级数中仅含 $\cos n\Delta\omega t$ 项.

3. 关于 Fourier 级数的理解

从时域角度来理解 Fourier 级数, 将 $\{\cos n\Delta\omega t, \sin n\Delta\omega t\}$ 看做具有频率 $n\Delta\omega$ 的谐波, 则时域表现的函数(模拟信号) $f(t)$ 可分解为无穷个简谐波之和.

从频域角度来理解 Fourier 级数, 因为 $f(t)$ 的频率范围是 $\omega \in [0, +\infty)$, 所以, 可将 ω 轴用间距 $\Delta\omega$ 作离散分划, 离散点 $n\Delta\omega$ 处对应着频率为 $n\Delta\omega$ 的谐波 $\{\cos n\Delta\omega t, \sin n\Delta\omega t\}$, 其幅值为 $\{a_n, b_n\}$, 这样就可将时域函数 $f(t)$ 与谐波组形成 1—1 对应关系, 即

$$f(t) \longleftrightarrow \{a_n \cos n\Delta\omega t, b_n \sin n\Delta\omega t\}_0^{+\infty}.$$

这是时域形式和频域形式的 1—1 对应关系. 虽然 $f(t)$ 的时域表现可能是复杂的, 特点不明显的, 但是它的频域形式却是详细具体的. 这种在频域中的详细具体形式称为频谱. 显然, 时域中的 $f(t)$ 作了某些改变, 这会在其频谱中详细具体地表现出来; 频谱若作了某些改变, 其对应的时域形式也会随之改变. 于是, 人们可以从时域和频域这两个方面来分析和处理函数(模拟信号)了. 这种时-频分析方法具有极其广泛的应用背景.

Fourier 级数所表现的时-频对应关系还可表示为

$$f(t) \longleftrightarrow \{a_n, b_n\}_0^{+\infty},$$

这种表现形式又为人们利用数学和计算机分析、处理函数(模拟信号)提供了方便.

从近似角度理解, 在 Fourier 级数中取 N 项, 则有

$$f_N(t) \longleftrightarrow \{a_n, b_n\}_0^N,$$

这是可具体计算的, 而且 $f_N(t) \approx f(t)$ 的误差也是可计算和估计的.

从逼近角度理解, 在 Fourier 级数中, 当 $N \rightarrow +\infty$ 时, 有

$$f_N(t) \rightarrow f(t).$$

从计算机存储角度理解, 只要存储了 $\{a_n, b_n\}_0^N$ 这些离散数据, 就相当于存储了 $f_N(t)$ 这个时域函数.

因此, 在分析和处理某个函数(模拟信号) $f(t)$ 时, 可按照需要的精度, 对其近似表现 $f_N(t)$ 在时域及其频谱方面作存储、计算、分析和处理.

4. Fourier 级数的复指数形式

Fourier 级数(见式(1.3))虽然形象直观, 但有一定的局限性, 例如时域函数(模拟信号)的展开系数 a_n 和 b_n 较难计算. 在实际应用中常采用 Fourier 变换, 为

此先介绍 Fourier 级数的复指数形式.

利用复变函数的基本知识,把

$$\begin{aligned}\cos n\Delta\omega t &= \frac{1}{2}(e^{-in\Delta\omega t} + e^{in\Delta\omega t}), \\ \sin n\Delta\omega t &= \frac{i}{2}(e^{-in\Delta\omega t} - e^{in\Delta\omega t})\end{aligned}$$

代入式(1.2),就有

$$\begin{cases} f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\Delta\omega t}, \\ c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\Delta\omega t} dt, \end{cases} \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (1.4)$$

称式(1.2)和式(1.3)为 Fourier 级数的三角形式,称式(1.4)为 Fourier 级数的复指数形式.这两种表现形式之间的联系可由下面的关系式来体现:

$$\begin{cases} c_n = \text{Re}c_n + i\text{Im}c_n, \\ \text{Re}c_n = a_n/2, \quad \text{Im}c_n = b_n/2, \\ \text{Re}c_n = \text{Re}c_{-n}, \quad \text{Im}c_n = -\text{Im}c_{-n}, \\ |c_n| = |c_{-n}| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{A_n}{2}, \\ \text{arg}c_n = -\text{arg}c_{-n} = \theta_n = \arctan \frac{b_n}{a_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.5)$$

Fourier 级数的三角形式是仅用正频率的谐波来表现周期函数 $f(t)$ 的,这是一种接近物理实验的形式;Fourier 级数的复指数形式要用正频率和负频率一起来表现周期函数 $f(t)$,它不仅可转化为三角形式,而且在表现方面接近于后面即将介绍的 Fourier 变换的形式.

5. 函数(模拟信号)的频谱

根据 Fourier 级数定义和物理含义可知,要观察和分析某个时域周期函数(模拟信号),只要观察和分析 Fourier 级数的展开系数 $\{c_n\}$ 就可以了. $\text{Re}c_n = a_n/2 = \text{Re}c_{-n}$,它们关于 $n=0$ 偶对称, c_n 的实部能表现谐波分量 $\cos n\Delta\omega t$ 的大小; $\text{Im}c_n = b_n/2 = -\text{Im}c_{-n}$,它们关于 $n=0$ 奇对称, c_n 的虚部能表现谐波分量 $\sin n\Delta\omega t$ 的大小.据此理由,称 $\{c_n\}$ 为离散频谱.复系数 c_n 的模量 $|c_n| = A_n/2$,它反映了频率为 $n\Delta\omega$ 的谐波分量的幅值大小,它是关于 $n=0$ 偶对称的,称 $\{|c_n|\}$ 为离散振幅谱. $|c_n|^2 = A_n^2/4$ 反映了关于频率为 $n\Delta\omega$ 谐波分量的能量,它关于 $n=0$ 偶对称,称 $\{|c_n|^2\}$ 为离散功率谱. c_n 的辐角 $\text{arg}c_n = \theta_n = \arctan \frac{b_n}{a_n}$ 关于 $n=0$ 奇对称,它反映了频率为 $n\Delta\omega$ 谐波分量的相位,称 $\{\text{arg}c_n\}$ 为离散相位谱.现将这些量示意于图 1.1 中.通常分析中仅用到振幅谱、功率谱和相位谱这三种图谱.

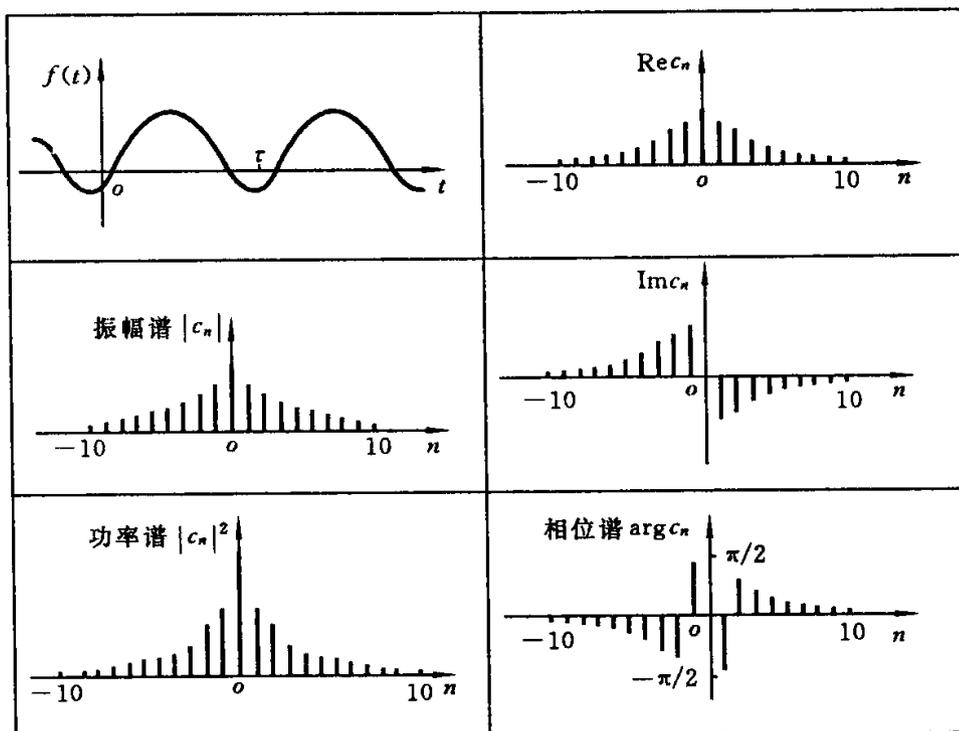


图 1.1 Fourier 级数频谱示意图

应该看到,完全不同性质的两个信号或者有局部区别的两个信号,它们的区别一定会在频谱图中有所表现,可结合 Fourier 级数的性质具体地判断时域和频域的不同表现.例如,对同一周期信号的不同时段而言,因为它仅仅是原周期信号的平移表现,所以它们的离散振幅谱和离散功率谱是相同的,但时移会使得它们的离散相位谱有区别.又例如,对不同性质的两个信号而言,因为它们的本质特性有区别,所以它们的离散振幅谱、离散功率谱和离散相位谱都是不相同的.这就是说,时域信号的不同特征都会细微地表现在离散频谱中,这就是 Fourier 级数能够用于分析信号特征的应用原理.

6. 时域函数(模拟信号)的回复

利用 $f(t)$ 的频谱 $\{c_n\}$ 数据,利用它与 Fourier 级数的关系,理论上可准确地回复 $f(t)$;但在实际应用中,仅能利用 $\{c_n\}$ 的有限数据来近似回复 $f(t)$.

若 $f(t)$ 是光滑的周期函数,通过理论分析知,当 $f(t)$ 是 m 次连续可微函数即 $f(t) \in C^m$ 时,有

$$|c_n| = O\left(\frac{1}{|n|^{m+2}}\right), \quad n \in \mathbf{Z}, \quad |n| \rightarrow +\infty.$$

这就是说,函数越光滑,当 $|n| \rightarrow +\infty$ 时 $|c_n|$ 下降就越快,在这种情况下,就可以用项数较少的 Fourier 级数较好地近似回复 $f(t)$.

若 $f(t)$ 是有间断的周期函数, t_0 是其间断点,用项数不同的 Fourier 级数近似回复 $f(t)$ 的表现如图 1.2 所示.由图可见,无论取多少项,其回复结果在间断点 t_0

处的值总是等于 $\frac{f(t_0-0)+f(t_0+0)}{2}$ ；级数的项数取得越多，对曲线的光滑部分的近似效果越好，但在曲线的间断点附近会出现振荡且越靠近间断点振荡越激烈，振荡超调量 ϵ 总维持在 0.089 左右。这一现象称为 Gibbs 现象，是由于过多引进高频量且高频量的幅值不能减小所造成的。

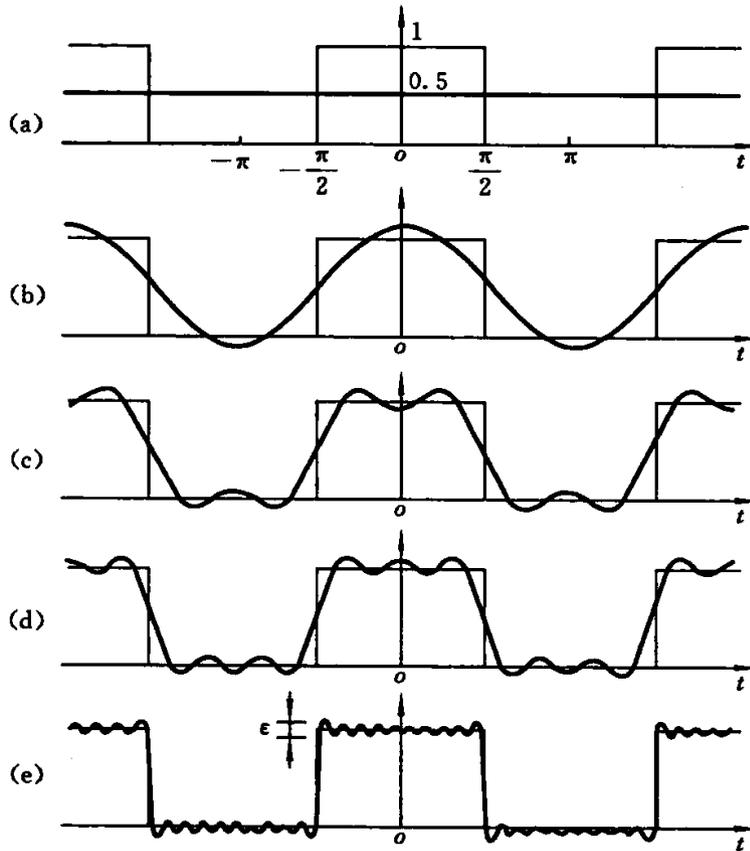


图 1.2 方波信号、高次谐波之和与 Gibbs 现象

Fourier 级数对函数(模拟信号)的逼近效果在数值分析中有相关的描述。在 Fourier 级数中 $\{e^{-in\Delta\omega t}\}$ 是正交基。若记近似回复函数为

$$f_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\Delta\omega t},$$

记其误差为

$$\|f(t) - f_N(t)\|_2^2 = \int_{-T/2}^{T/2} |f(t) - f_N(t)|^2 dt,$$

则 $f_N(t)$ 是对 $f(t)$ 的最佳平方逼近, 且

$$\|f(t)\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2,$$

$$\|f_N(t)\|_2^2 = \sum_{n=-N}^N |c_n|^2,$$

$$\|f(t) - f_N(t)\|_2^2 = \sum_{|n| \geq N+1} |c_n|^2,$$

$$\|f(t) - f_{N+1}(t)\|_2 \leq \|f(t) - f_N(t)\|_2.$$

从 Fourier 级数的时域和频域的对应关系方面来考虑问题, 因为修改频谱 $\{c_n\}$ 相当于修改信号 $f(t)$ 的时域表现, 所以可以按照某些实际要求去修改频谱, 也可以在频域中设计出具有某种特性 (例如对谐波频率的低通、带通、高通特性) 的频谱, 再将其回复到时域, 得到满足各种要求和特性的时域信号.

1.2 函数(模拟信号)的 Fourier 变换

前面讨论了周期函数可用离散频率为 $n\Delta\omega$ 的谐波来表现. 一个定义在 \mathbf{R} 上的非周期函数 $f(t)$ 能否用谐波来表现呢?

1. Fourier 积分公式

将非周期函数 $f(t)$ 看做周期为 T 的函数 $f_T(t)$ 当周期 $T \rightarrow +\infty$ 时转化的结果. 于是, 利用式(1.4), 有

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} f_T(t) \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(\tau) e^{-in\Delta\omega\tau} d\tau \right] e^{in\Delta\omega t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\left(\int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega} f_T(\tau) e^{-in\Delta\omega\tau} d\tau \right) e^{in\Delta\omega t} \right] \Delta\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (1.6)$$

在上述推导中用到了式(1.3)中的关系 $\Delta\omega = 2\pi/T$, 还用到了关于和式极限的积分定义. 上述推导是有条件的, 它允许非周期函数含有有限个间断点, 间断点两侧的函数值是有界的, 或即 $f(t)$ 是有界变差的, 对任意 $t \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$f(t \pm 0) < +\infty.$$

上述推导还要求非周期函数 $f(t)$ 是绝对可积函数, 即要求

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty,$$

这相当于对 $|f(t)|$ 的衰减性提出了较高的要求.

综上所述, 记

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (1.7)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (1.8)$$

对 $t \in (-\infty, +\infty)$ 有如下的 Fourier 积分定理.

定理 1.2 对 $t \in (-\infty, +\infty)$, 若 $f(t)$ 是有界变差且是绝对可积函数, 则在 $f(t)$ 的连续点处, Fourier 积分(见式(1.8))收敛于 $f(t)$; 在 $f(t)$ 的间断点 $f(t_0)$ 处, Fourier 积分(见式(1.8))收敛于 $\frac{f(t_0-0) + f(t_0+0)}{2}$.

2. Fourier 变换

在上述 Fourier 积分中,式(1.7)可看做积分变换,它将时间 t 作自变量的时域函数 $f(t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$, 通过指定的积分运算,变换为频率 ω 作自变量的频域函数 $F(\omega)$, $\omega \in (-\infty, +\infty)$; 式(1.8)可看做式(1.7)所示变换的逆变换,它将频域函数 $F(\omega)$ 通过类似的积分运算,变换为原来的时域函数 $f(t)$; 由式(1.7)和式(1.8)所示的 $f(t)$ 和 $F(\omega)$ 是 1—1 对应的变换对. 它们具有非常优美的对称形式,以后将会看到,它们还有着明确的物理含义和良好的运算性质,有着广泛的应用. 为此,将其定义如下.

定义 1.1 称式(1.7)为 Fourier 变换,记为 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, $F(\omega)$ 称为 $f(t)$ 的像函数; 称式(1.8)为 Fourier 逆变换,记为 $\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t)$, $f(t)$ 称为 $F(\omega)$ 的像原函数.

应该看到,在 Fourier 变换的定义中,记号 $\mathcal{F}[f(t)]$ 强调了 Fourier 变换 \mathcal{F} 及其作用对象 $f(t)$, 记号 $F(\omega)$ 强调了 Fourier 变换的结果是一个关于 ω 作为自变量的函数; Fourier 逆变换 \mathcal{F}^{-1} 的作用对象是 $F(\omega)$, 其变换结果为 $f(t)$.

由 Fourier 变换的定义可知, $f(t)$ 和 $F(\omega)$ 构成 1—1 对应的 Fourier 变换对; 再比较对照 Fourier 级数的定义可知, Fourier 变换和 Fourier 级数具有相同的物理含义, Fourier 变换建立了时域函数 $f(t)$, $t \in \mathbf{R}$ 和频域函数 $F(\omega)$, $\omega \in \mathbf{R}$ 的相互转换关系. 由式(1.7)和式(1.8)可见,非周期函数 $f(t)$ 也是由许多不同频率的谐波分量 $e^{i\omega t}$ 合成的. 应该注意的是,周期函数 Fourier 级数的谐波分量 $e^{in\Delta\omega t}$ (见式(1.4))是离散分布的,非周期函数 Fourier 变换的谐波分量 $e^{i\omega t}$ 是连续分布的. 因此, $F(\omega)$ 反映了 $f(t)$ 中各频率分量的分布密度,称 $F(\omega)$ 为频谱密度函数(简称为频谱或连续频谱),称 $|F(\omega)|$ 为振幅谱,称 $|F(\omega)|^2$ 为功率谱,称 $\arg F(\omega)$ 为相位谱.

3. Fourier 变换与 Fourier 级数的联系

Fourier 级数是用离散频率 $n\Delta\omega$ 表现周期函数的, Fourier 变换是用连续频率 ω 表现非周期函数的,那么,在 $n\Delta\omega$ 处级数和变换的表现结果有没有差别呢?

要进行比较,首先要有可比性. 对 Fourier 级数而言,它不仅能表现 $[-T/2, T/2]$ 这个周期段函数的频谱分析,也能表现其它周期段函数的频谱分析; 对 Fourier 变换而言,它不仅能表现周期函数的一个周期段的频谱分析,也能表现非周期函数的频谱分析. 因此,为了可比,选定 $f(t)$, $t \in [-T/2, T/2]$ 函数段,选定 $n\Delta\omega$ 作为比较频率.

一方面,可认为此函数段是某个周期函数的一个周期段,将其作周期延拓后用 Fourier 级数的复指数形式(见式(1.4))表示,即知关于离散频率 $n\Delta\omega$ 的谐波分量 $e^{-in\Delta\omega t}$ 的振幅为

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\Delta\omega t} dt.$$

另一方面,可将此函数段以外部分用零值代替,将其看做定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的非周期函数,并使用 Fourier 变换式(1.7)和式(1.8),即任意频率 ω 所对应谐波分量 $e^{-i\omega t}$ 的振幅为 $F(\omega)$,特别是对离散频率 $n\Delta\omega$,其谐波分量的振幅为

$$\begin{aligned} F(\omega) \Big|_{\omega=n\Delta\omega} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-in\Delta\omega t} dt \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\Delta\omega t} dt \\ &= Tc_n. \end{aligned} \quad (1.9)$$

由此可见,就离散频率 $n\Delta\omega$ 而言,这两种分析的结果仅相差一个不变的常数,它们是等价的.

在实际应用中常需分析一段长度为 T 的非周期信号 $f(t)$,记 $f(t)$ 的 Fourier 变换为 $F(\omega)$, $f(t)$ 又可看做周期函数在一个周期段(周期为 T)上的表现.那么 $f(t)$ 的 Fourier 级数为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{F(n\Delta\omega)}{T} e^{in\Delta\omega t}.$$

同样,若已知 $f(t)$ 的 Fourier 级数的展开系数的振幅谱 $\{|c_n|\}$,它是对应于谐波频率

$$\omega_n = n\Delta\omega = n2\pi/T$$

分量的振幅,那么 $\{|c_n|\}$ 的包络线就是 $|F(\omega)|/T$,从而容易确定 $f(t)$ 的 Fourier 变换 $F(\omega)$ 和 $|F(\omega)|$ (见图 1.3).

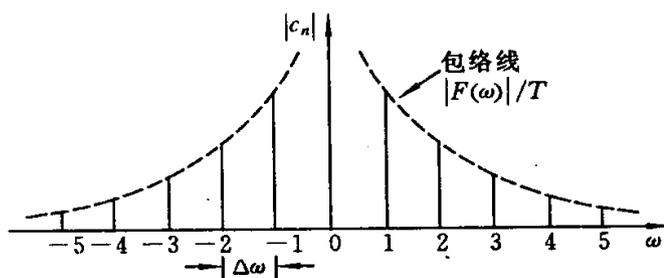


图 1.3 Fourier 级数振幅谱和 Fourier 变换振幅谱的关系

1.3 几个函数的 Fourier 变换

为了进一步理解 Fourier 变换的形式,也为了以后进一步应用 Fourier 变换,下面先熟悉几个常用函数经 Fourier 变换后的谱函数.

1. 矩形函数及其谱函数

矩形函数的数学描述为

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \epsilon, \\ 0, & |t| > \epsilon. \end{cases} \quad (1.10)$$

直接采用 Fourier 变换的定义,可得到其谱函数

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\text{rect}(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-\epsilon}^{\epsilon} \\ &= 2\epsilon \frac{\sin \epsilon \omega}{\epsilon \omega}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

于是, $\text{rect}(t)$ 和 $2\epsilon \frac{\sin \epsilon \omega}{\epsilon \omega}$ 组成 Fourier 变换对.

矩形函数的谱函数 $2\epsilon \frac{\sin \epsilon \omega}{\epsilon \omega}$ 有如下特点:它是偶函数,当 $\omega=0$ 时,其函数值为 2ϵ ;当 $\omega = \pm n\pi/\epsilon$ 时,其函数值为零,且当 $|\omega| \rightarrow +\infty$ 时是快速衰减的;它在 $(-\infty, +\infty)$ 内积分值是有限的. 矩形函数及其谱函数的图形如图 1.4 所示.

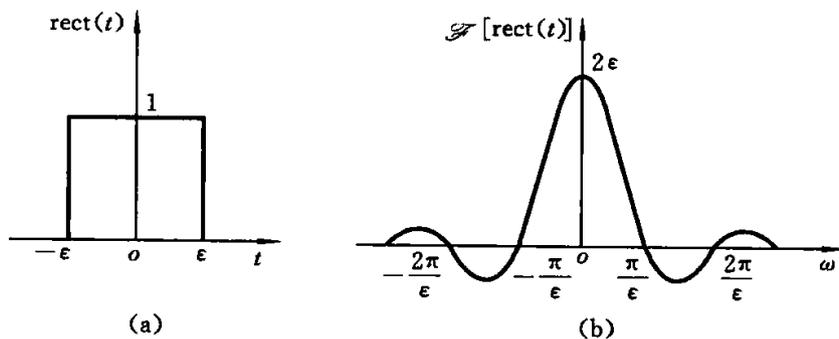


图 1.4 矩形函数及其谱函数图形

2. 山形函数及其谱函数

山形函数也是常见的函数,其数学形式为

$$\Omega_2(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq \epsilon, \\ 0, & |t| > \epsilon. \end{cases} \tag{1.12}$$

它的谱函数为

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\Omega_2(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_2(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} (1 - |t|) e^{-i\omega t} dt \\ &= (2\epsilon)^2 \left[\frac{\sin(\epsilon \omega)}{\epsilon \omega} \right]^2. \end{aligned} \tag{1.13}$$

于是, $\Omega_2(t)$ 和 $\mathcal{F}[\Omega_2(t)]$ 构成 Fourier 变换对,它们的图形如图 1.5 所示.

3. δ 函数及其谱函数

δ 函数是由实际现象抽象出来的. 若设质点均匀分布在 x 轴 $[0, \epsilon]$ 段上,其总质量为 1,则平均密度分布函数为

$$\rho_{\epsilon}(x) = \begin{cases} 1/\epsilon, & x \in [0, \epsilon], \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

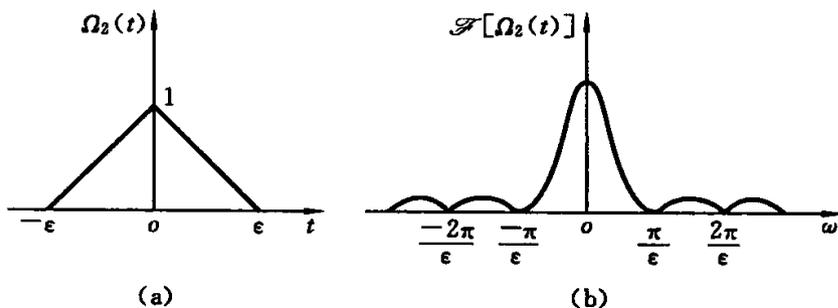


图 1.5 山形函数及其谱函数图形

若将区段长度 $\epsilon \rightarrow 0$, 即质量为 1 的质点放置在坐标原点, 则密度分布函数为

$$\rho(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \rho_\epsilon(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

尽管 $\rho(x)$ 的逐点表现非常奇特, 但它的物理特性表明, 它的总质量 $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx =$

1. 据此, 抽象出 δ 函数的数学形式

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases}$$

且
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1.$$

δ 函数的物理特性是关键性的. δ 函数的许多性质, 利用物理特性解释会更直观, 更方便.

$\delta(x)$ 的含义是, 质量为 1 的质点置于 $x=0$ 处时的密度分布; $\delta(x-x_0)$ 表示质量为 1 的质点置于 $x=x_0$ 处时的密度分布. 据密度分布的含义, 有

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0). \end{cases} \quad (1.14)$$

其中, $f(t)$ 是连续函数.

δ 函数是一种广义函数, 它不同于通常意义的函数. δ 函数能表现某一点处的瞬间变化, 它有着广泛的应用. 例如, 瞬时冲击力、脉冲电流都可用 δ 函数来表述, 间断函数在间断点处的变化率也可用 δ 函数表示, 例如对 Heaviside 单位阶跃函数

$$h(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

不难发现下述关系成立:

$$\begin{aligned} \frac{dh(t)}{dt} &= \delta(t), \\ \int_{-\infty}^t \delta(t) dt &= h(t). \end{aligned}$$

δ 函数的谱函数很容易得到,事实上,

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega t} \Big|_{t=0} = 1.$$

于是, $\delta(t)$ 和 1 构成 Fourier 变换对,因此下式也应成立:

$$\mathcal{F}^{-1}[1] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega = \delta(t).$$

仿此公式,令 t 为 $-t$ 或 $t-t_0$,利用 Fourier 变换对的概念,则有

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} d\omega = \delta(t) = \delta(-t), \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-t_0)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(t-t_0)} d\omega = \delta(t-t_0) = \delta(t_0-t). \end{cases} \quad (1.15)$$

这是关于 δ 函数的重要公式.

值得说明的是, δ 函数虽是表示瞬间时域变化的,但是,其谱函数却对 $\omega \in (-\infty, +\infty)$ 都有强度 1. 或者说, δ 函数中均匀地含有各种谐波,其谱函数是白色频谱.

δ 函数及其谱函数如图 1.6 所示. $\delta(t)$ 的图形常按其物理含义表示,即在 $t=0$ 处用长度为 1 的有向线段表示;同样,对于 $\delta(t-t_0)$,按其物理含义在 $t=t_0$ 处放置质量为 1 的质点,于是它的图形用 $t=t_0$ 处的长度为 1 的有向线段表示.

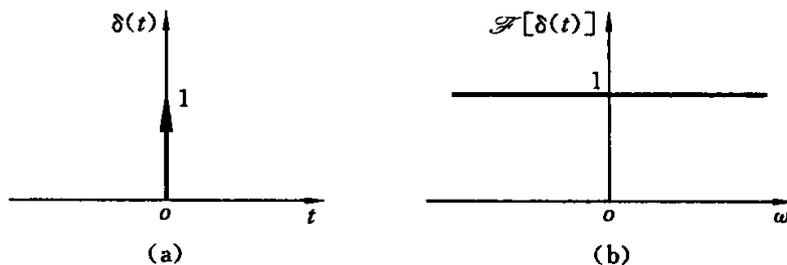


图 1.6 δ 函数及其谱函数图形

4. 阶跃函数、符号函数及其谱函数

阶跃函数为

$$h(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (1.16)$$

需将其变形为

$$h(t) = \begin{cases} \lim_{a \rightarrow 0} e^{-at}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

再用 Fourier 变换的定义求得谱函数,有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[h(t)] &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-i\omega t} dt \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a + i\omega} = \frac{1}{i\omega}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

阶跃函数及其振幅谱如图 1.7 所示.

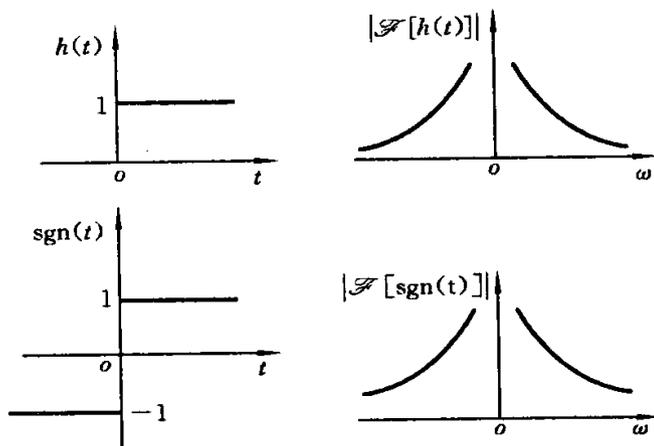


图 1.7 阶跃函数、符号函数及其振幅谱

符号函数为

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ -1, & t < 0, \end{cases} \quad (1.18)$$

将其变形为

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} \lim_{a \rightarrow 0} e^{-at} h(t), & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ \lim_{a \rightarrow 0} [-e^{at} h(-t)], & t < 0, \end{cases}$$

于是利用 Fourier 变换的定义,有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\text{sgn}(t)] &= \lim_{a \rightarrow 0} \left(\int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-i\omega t} dt - \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-i\omega t} dt \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{1}{a + i\omega} - \frac{1}{a - i\omega} \right) = \frac{2}{i\omega}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

符号函数及其振幅谱如图 1.7 所示.

综合 $\delta(t)$ 、 $\text{sgn}(t)$ 、 $h(t)$ 、 $\text{rect}(t)$ 和 $\Omega_2(t)$ 之间的关系是有用的. 通常的函数(模拟信号)经常要用这些基本函数来表述,特别是有限突变的函数(模拟信号)更是如此. 另外, $\Omega_2(t)$ 的导数是 $\text{sgn}(t)$, $h(t)$ 和 $\text{sgn}(t)$ 的导数是 $\delta(t)$, $\text{rect}(t) * \text{rect}(t)$ 是 $\Omega_2(t)$, $\text{rect}(t)$ 自身卷积次数越多所得到的函数越光滑. 还有, $f(t) \cdot \delta(t - t_k)$ 相当于 $f(t)$ 在 $t = t_k$ 处被采样, $f(t) \cdot h(t)$ 相当于 $f(t)$ 仅被保留 $t \geq 0$ 的部分, $f(t) \cdot \text{rect}(t)$ 相当于 $f(t)$ 被截取, $f(t) \cdot \Omega_2(t)$ 相当于 $f(t)$ 被限制, 等等. 这些理解在信号分析处理中是被经常用到的.

5. 余弦函数及其谱函数

设 $f(t) = \cos \omega_0 t$, 其中 ω_0 是一个确定值, 现计算 $f(t)$ 的谱函数. 按 Fourier 变

换定义,有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\cos\omega_0 t] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\omega_0 t e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} [e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}] e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{-i(\omega-\omega_0)t} + e^{-i(\omega+\omega_0)t}] dt, \end{aligned}$$

利用式(1.15),就有

$$\mathcal{F}[\cos\omega_0 t] = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]. \quad (1.20)$$

其图形如图 1.8 所示.

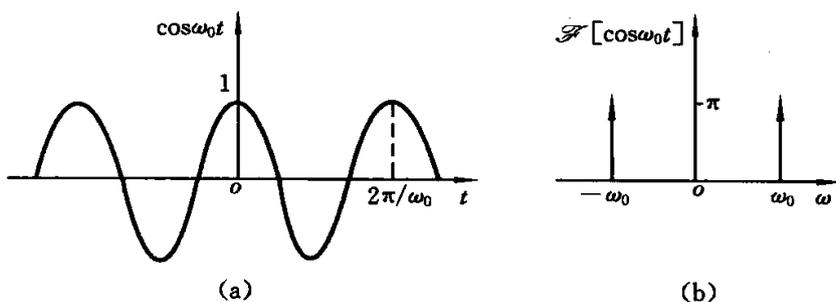


图 1.8 余弦函数及其谱函数图形

下面解释 Fourier 级数及其变换关于谐波 $\cos\omega_0 t$ 的表示形式. 若取 ω_0 为 Fourier 级数中的基本谐波频率,即

$$\omega_0 = n\Delta\omega = n \frac{2\pi}{T},$$

则在形如式(1.3)的 Fourier 级数中仅有一个谐波分量 $a_n \cos n\Delta\omega t$ 是非零的,且有

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (\cos n\Delta\omega t)^2 dt = \frac{2\pi}{T}.$$

在形如式(1.4)的 Fourier 级数中有两个谐波分量 $c_{-n} e^{in\Delta\omega t}$ 和 $c_n e^{-in\Delta\omega t}$ 是非零的,且复系数 c_{-n} 和 c_n 仅有实部,为

$$c_{-n} = c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos n\Delta\omega t e^{-in\Delta\omega t} dt = \frac{\pi}{T}.$$

由于取 ω_0 为特殊值的原因,Fourier 变换中的两个谐波 $e^{in\Delta\omega t}$ 和 $e^{-in\Delta\omega t}$ 同于复形式的 Fourier 级数情形,变换的结果也仅有实部,为

$$F(-n\Delta\omega) = F(n\Delta\omega) = Tc_n = \pi.$$

若取 $\omega_0 \in \mathbf{R}$ 为任意实数,则 $\mathcal{F}[\cos\omega_0 t]$ 有两项,它们都是实数. 一个是关于“谐波” $\cos(-\omega_0 t)$ 的,其“幅值”为 $F(-\omega_0) = \pi$; 另一个是关于“谐波” $\cos(\omega_0 t)$ 的,其“幅值”也为 $F(\omega_0) = \pi$. 另外, $\cos\omega_0 t$ 和 $\mathcal{F}[\cos\omega_0 t]$ 组成 Fourier 变换对,且有

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}(\cos\omega_0 t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\cos\omega_0 t) e^{i\omega t} d\omega$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] e^{i\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{2} [e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}] \\
&= \cos \omega_0 t.
\end{aligned}$$

6. Gauss 函数及其谱函数

Gauss 函数

$$g(t) = e^{-a^2} \quad (a > 0) \quad (1.21)$$

有着广泛的应用,其 Fourier 变换为

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[g(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2} e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 - i\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a \left(t + \frac{i\omega}{2a} \right)^2 + \frac{(i\omega)^2}{4a}} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt,
\end{aligned}$$

于是有
$$\mathcal{F}(e^{-a^2}) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}. \quad (1.22)$$

可见, Gauss 函数的 Fourier 变换仍然是一个 Gauss 函数,它们都有着良好的衰减特性.

Gauss 函数可适当修改为

$$g_a(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{t^2}{4a}}, \quad a > 0, \quad (1.23)$$

使得 $\int_{-\infty}^{+\infty} g_a(t) dt = 1$, 其图形如图 1.9 所示,由平均密度分布和 δ 函数的关系易知

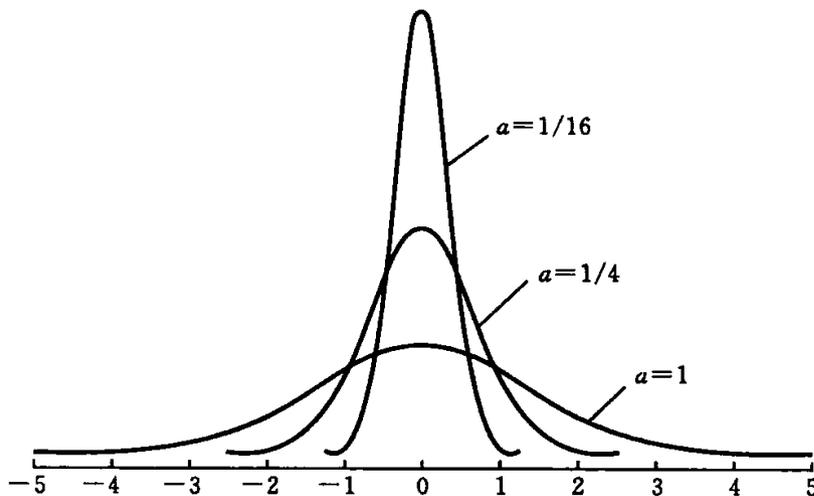


图 1.9 Gauss 函数 g_a

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} g_a(t) = \delta(t). \quad (1.24)$$

1.4 Fourier 变换的性质

Fourier 变换有许多良好的性质,利用这些性质可方便地求得时域函数(模拟信号) $f(t)$ 的频域表现 $F(\omega)$,也可方便地利用频域函数 $F(\omega)$ 求得它在时域中所对应的函数(模拟信号) $f(t)$,掌握这些性质对深入理解和广泛、灵活应用 Fourier 变换都是重要的.本节仅介绍一些基本性质,其它更深层次的与应用有关的性质将在后面介绍.

1. 对称性质

设时域函数(模拟信号)为 $f(t)$,其 Fourier 变换在频域中的表现为 $F(\omega)$,两者的 1—1 对应关系用“ \longleftrightarrow ”记号表示,那么 Fourier 变换的对称性可表示为

$$\begin{aligned} f(t) &\longleftrightarrow F(\omega), \\ f(-t) &\longleftrightarrow F(-\omega), \end{aligned} \quad (1.25)$$

即模拟信号反向,其 Fourier 变换也反向.

据此性质可知,若 $f(t)$ 是偶函数, $f(t) = f(-t)$,则它的频域表现也是偶函数, $F(\omega) = F(-\omega)$,且

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt,$$

此时 $F(\omega)$ 可看做对 $f(t)$ 作余弦变换.

同样可知,若 $f(t)$ 是时域奇函数, $f(t) = -f(-t)$,则它的频域表现也是奇函数, $F(\omega) = -F(-\omega)$,且

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt.$$

此时 $F(\omega)$ 可看做对 $f(t)$ 作正弦变换.

2. 线性性质

若 α 和 β 为实(复)常数,且

$$\begin{aligned} f(t) &\longleftrightarrow F(\omega), \\ g(t) &\longleftrightarrow G(\omega), \end{aligned}$$

则

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \longleftrightarrow \alpha F(\omega) + \beta G(\omega). \quad (1.26)$$

据此性质可知,两个时域信号叠加,其相应的频域表现也叠加.

3. 移位性质

设 t_0 和 ω_0 为实常数, $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$,则

$$f(t - t_0) \longleftrightarrow F(\omega) e^{-i\omega t_0}, \quad (1.27)$$

$$f(t) e^{i\omega_0 t} \longleftrightarrow F(\omega - \omega_0). \quad (1.28)$$

此性质可直接由 Fourier 变换的定义得到(证明从略).

式(1.27)表明,当函数沿时间轴平移,或者说信号表现为提前、滞后时,其频率成分和大小不发生变化.同样,式(1.28)表明了谱函数平移时,其时域表现由 $f(t)$ 调制为 $f(t)e^{i\omega_0 t}$. 调制在通信系统中有较好的解释和应用. 信号 $f(t)$ 乘以谐波 $\cos\omega_0 t$ 称为振幅调制,其中 $\cos\omega_0 t$ 称为载波, $f(t)\cos\omega_0 t$ 称为已调制信号. $f(t)\cos\omega_0 t$ 是一个按 $\cos\omega_0 t$ 规律振荡、但振幅受到调制的信号.

4. 时频互换性质

Fourier 变换是成对出现的,若将频域表现当做时域信号,那么它的 Fourier 变换会有何改变呢? 这种时频互换性质简述如下:

$$\begin{aligned} \text{若} \quad & f(t) \longleftrightarrow F(\omega), \\ \text{则} \quad & F(t) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega). \end{aligned} \quad (1.29)$$

据此可知,若把 $F(\omega)$ 图形放在时域中且改写为 $F(t)$,则相应的频域图形会同于 $f(-t)$ 的表现,但幅值作了改变. 特别值得注意的是,图 1.4 所示的时域中的矩形波对应着频域中的 Shannon 函数. 若将 Shannon 函数作为时域函数时,由图 1.10 可知,其频域表现仍是矩形波.

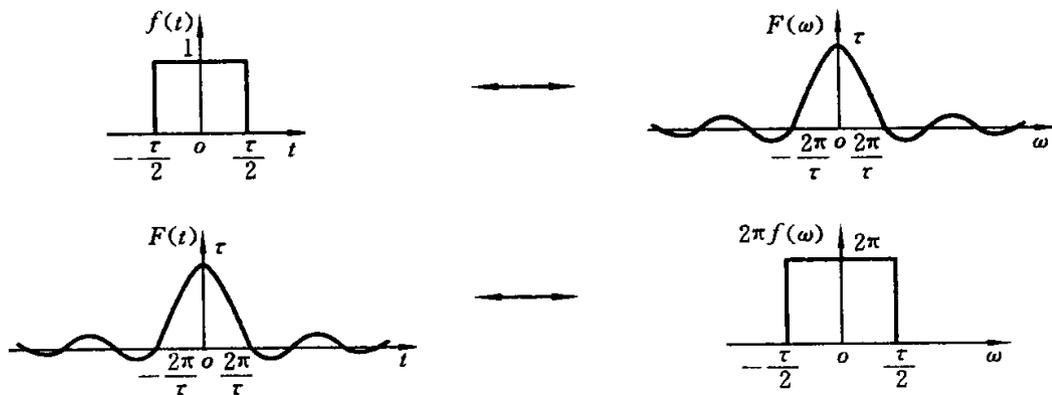


图 1.10 Fourier 变换的对偶性示意图

5. 伸缩性质

设 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, 常数 $a > 0$, 则

$$f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right). \quad (1.30)$$

关于式(1.30)的证明是容易的,只要利用 Fourier 变换的定义和相应的变量代换,即有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(at)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\frac{\omega}{a}x} dx \\ &= \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right). \end{aligned}$$

式(1.30)的物理含义是明显的(见图 1.11):对于 $a > 1$,信号 $f(t)$ 被横向压缩

为 $f(at)$, 此时 $F(\omega)$ 却被拉伸为 $\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$; 对于 $a < 1$, 信号 $f(t)$ 被横向拉伸了, 此时 $F(\omega)$ 却被压缩了.

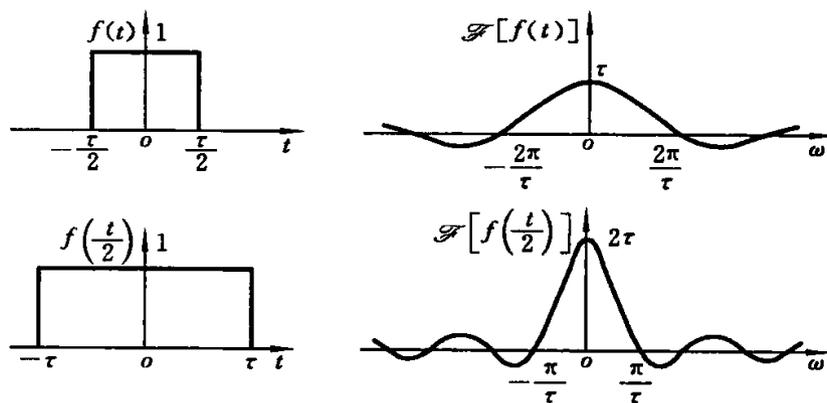


图 1.11 Fourier 变换伸缩性质示意图

6. 微分性质

若 $f^{(n)}(t)$ 满足 Fourier 变换条件, 则

$$f'(t) \longleftrightarrow i\omega F(\omega), \quad (1.31)$$

$$f^{(n)}(t) \longleftrightarrow (i\omega)^n F(\omega), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.32)$$

下面仅证明式(1.31), 式(1.32)的证明与之类似. 考虑到 $f'(t)$ 是绝对可积分的, 所以当 $|t| \rightarrow +\infty$ 时, $f(t) \rightarrow 0, f(t)e^{-i\omega t} \rightarrow 0$, 于是有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f'(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= f(t) e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= i\omega F(\omega). \end{aligned}$$

式(1.31)和式(1.32)所示的微分性质对求解某些函数的 Fourier 变换有用, 对讨论信号变化率有用, 而且对求解微分方程也是有用的.

7. 乘积定理和 Parseval 等式

记

$$f_1(t) \longleftrightarrow F_1(\omega),$$

$$f_2(t) \longleftrightarrow F_2(\omega),$$

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega),$$

则

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \overline{f_2(t)} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F_1(\omega)} F_2(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega) \overline{F_2(\omega)} d\omega, \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega. \quad (1.34)$$

式(1.33)称为乘积定理, 式(1.34)称为 Parseval 等式.

式(1.33)和式(1.34)的证明过程对学习下面内容是有帮助的,证明过程中要特别注意共轭函数的概念.

式(1.33)的证明如下:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \overline{f_2(t)} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F_2(\omega)} e^{i\omega t} d\omega \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F_2(\omega)} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) e^{-i\omega t} dt \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F_2(\omega)} F_1(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F_1(\omega)} F_2(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

关于式(1.34)的证明,只要在式(1.33)中令 $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$,且注意 $|F(\omega)|^2 = F(\omega) \overline{F(\omega)}$,证明过程是显然的.

式(1.33)具有明显的含义,其左边可看做两个时域函数的内积,其右边可看做两个相应频域函数的内积,该式表明 Fourier 变换不改变内积的性质.

式(1.34)也具有明显的含义,其左边可看做信号在时域中的某种能量,其右边可看做信号在频域中的能量,该式表明 Fourier 变换不改变信号的总能量.

乘积定理和 Parseval 等式无论在理论研究方面还是在实际应用方面都是非常重要的.

1.5 卷积及其 Fourier 变换

卷积在信号分析处理中是经常被用到的概念,它有许多重要的应用,这里仅介绍卷积运算的含义及其基本特性,以使读者对卷积有较深刻的理解.

1. 线性系统所确定的卷积运算

在实际应用中常采用探测黑匣子的办法来探测某个物理系统的性能.假设有一组独立的信号 $\{x_i(t)\}$ 作为输入信号,经该系统作用后,即输入信号经变换 T 作用后,得到的输出响应为 $\{y_i(t)\}$. 用模型描述为

输入信号 \rightarrow 系统 \rightarrow 输出信号,

$$T[x_i(t)] = y_i(t).$$

于是,可以利用输入和输出信号之间的关系来探测该系统的变换性能 T ,也可以在已知系统性能 T 和输入信号 $x_i(t)$ 的基础上来讨论输出信号 $y_i(t)$ 特性.

为了讨论方便,常常假设该物理系统是线性不变延迟系统.所谓线性,是指线性叠加性,即输入被放大为 $\alpha_i x_i(t)$ 时输出也相应放大为 $\alpha_i y_i(t)$,输入被叠加为 $\sum \alpha_i x_i(t)$ 时输出也相应叠加为 $\sum \alpha_i y_i(t)$;所谓不变延迟性,是指输入信号 $x_i(t - \Delta t)$ 有 Δt 延时表现时,输出信号 $y_i(t - \Delta t)$ 也有同样的 Δt 延时表现.也就是

说, T 是线性不变延时变换, 系统是线性不变延时系统.

为了探测某个线性不变延时系统的作用机制, 可输入一个脉冲信号, 或输入一个近似于脉冲的矩形方波信号

$$\tilde{h}(t-t_i) = \begin{cases} 1, & t_i \leq t \leq t_{i+1}, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

其响应表现为 $g(t-t_i)$, 如图 1.12 所示, $g(t-t_i)$ 是 $g(t)$ 的延时表现. 可知, 只要 $t_{i+1}-t_i = \Delta t \rightarrow 0$, 其响应表现就越接近该系统的真实响应.

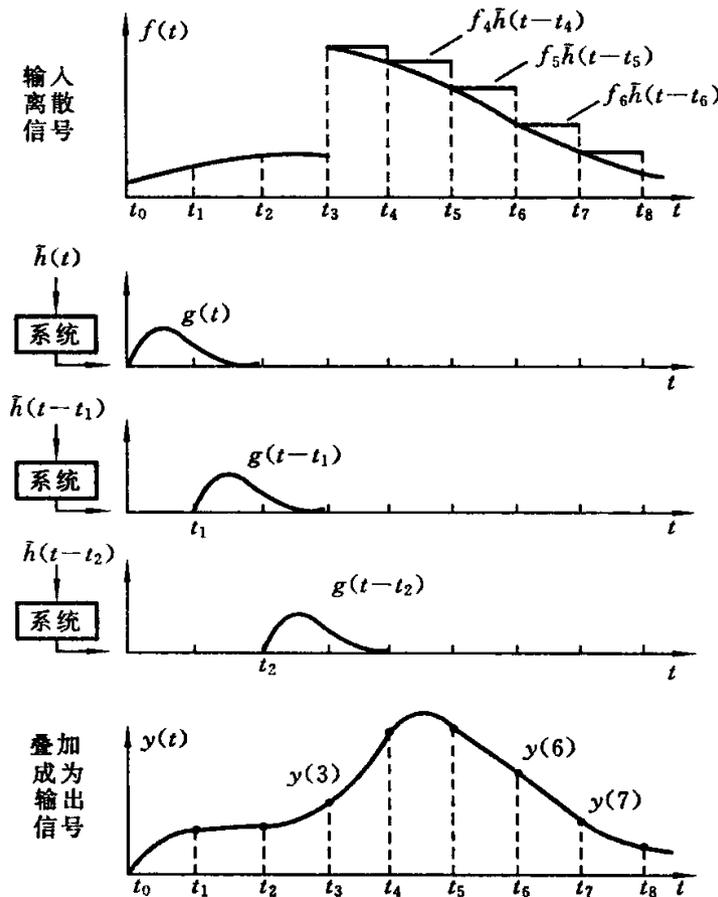


图 1.12 线性系统的输入、延时、叠加示意图

为了讨论连续信号 $f(t)$ 输入时的系统响应曲线, 可先考虑一组离散信号 $\{f_i \tilde{h}(t-t_i)\}$ 作为输入信号, 它经线性不变延时系统作用后, 相应的输出信号要叠加在一起, 为 $\sum_i f_i \tilde{h}(t-t_i)g(t-t_i)$; 再考虑 $\Delta t \rightarrow 0$ 的情形, 此时 $f_i \tilde{h}(t-t_i)$ 变为 $f(i\Delta t)$ 再变为输入信号就是 $f(\tau)$, 对 i 求和变为积分, 于是输出信号

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

就是该线性不变延时系统对 $f(t)$ 的响应曲线(见图 1.12).

上述积分具有普遍性, 由此总结出卷积的定义.

2. 卷积定义和几个卷积例子

实函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的卷积是一种特定运算,其定义和记号如下:

$$f(t) * g(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \quad (1.35)$$

要使该积分有意义, $f(t)$ 和 $g(t)$ 都要衰减得足够快,卷积的结果是一个关于 $t \in (-\infty, +\infty)$ 的新的函数.

关于卷积运算,由定义式(1.35)可知,按积分规则来理解卷积是必要的.但要注意:对 τ 积分所得的结果是关于 t 的函数;定义中要求先将 $g(\tau)$ 反向变成 $g(-\tau)$,然后将 $g(-\tau)$ 改写为 $g(-\tau+t)$, t 是平移量,这样 $g(-\tau)$ 就可以从 $t=-\infty$ 平移到 $t=+\infty$ (见图 1.13);当 t 为任意确定位置时,定义式(1.35)所表示的积分仅是在 $f(\tau)$ 和 $g(-\tau+t)$ 的公共非零区域上进行的,例如图中 $t=t_2$ 时积分区间为 $[t_0, t_2]$,积分结果是 $t=t_2$ 处的值 $(f * g)(t_2)$;当 $t=t_6$ 时积分区间为 $[t_4, t_6]$,积分结果是 $t=t_6$ 处的值 $(f * g)(t_6)$;当 t 从 $-\infty$ 连续地变化到 $+\infty$ 时,卷积结果 $(f * g)(t)$ 是关于 $t \in (-\infty, +\infty)$ 的连续变化的曲线.

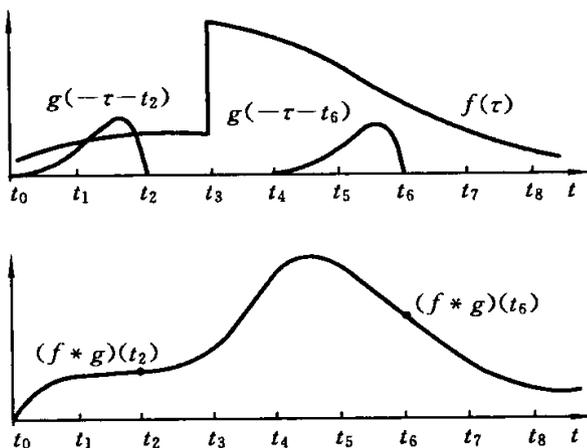


图 1.13 卷积关于过程和结果的示意图

下面接着介绍的是关于几个常用函数的卷积例子.

1) 函数 $f(t)$ 和 Heaviside 阶跃函数的卷积

从 1.3 节可知,Heaviside 函数为

$$h(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

因为

$$\begin{aligned} (f * h)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau, \end{aligned} \quad (1.36)$$

且

$$\frac{d[f * h]}{dt} = f(t),$$

所以用阶跃函数作卷积的结果是 $f(t)$ 的原函数,卷积把 $f(t)$ 的光滑度提高了

一阶.

2) 函数 $f(t)$ 和矩形函数 $\text{rect}(t)$ 的卷积

矩形函数 $\text{rect}(t)$ 如式(1.10)所示, 且

$$(f * \text{rect})(t) = \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} f(\tau) d\tau. \quad (1.37)$$

由于对任意确定的 t , 数值 $(f * \text{rect})(t)$ 是通过一个区段积分来获得的, 该区段中的值 $f(\tau)$, $\tau \in (t-\epsilon, t+\epsilon)$ 要作累积, 所以通过卷积将消除 $f(\tau)$ 所存在的间断表现, 卷积的结果也将 $f(t)$ 的光滑度提高了一阶.

3) 用卷积构造样条函数

若定义一阶样条 $\Omega_1(t)$ 是式(1.10)中 $\epsilon=1/2$ 的矩形函数, 即

$$\Omega_1(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1/2, \\ 0, & |t| > 1/2, \end{cases} \quad (1.38)$$

则 $(\Omega_1 * \Omega_1)(t) = \Omega_2(t)$ 是山形函数, 称为二阶样条或一次样条函数

$$\Omega_2(t) = (\Omega_1 * \Omega_1)(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases} \quad (1.39)$$

相应地, $(\Omega_2 * \Omega_1)(t) = \Omega_3(t)$ 是帽形函数, 称为三阶样条或二次样条函数

$$\Omega_3(t) = (\Omega_2 * \Omega_1)(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}|t| + \frac{9}{8}, & \frac{1}{2} \leq |t| \leq \frac{3}{2}, \\ -t^2 + \frac{3}{4}, & |t| < \frac{1}{2}, \\ 0, & |t| \geq \frac{3}{2}. \end{cases} \quad (1.40)$$

同样, $\Omega_k(t) = (\Omega_{k-1} * \Omega_1)(t)$, 即 $\Omega_1(t)$ 自身卷积 k 次得到 $k+1$ 阶样条或 k 次样条函数. 阶数越高的样条函数越光滑.

在数值分析和模拟信号的数学表述中, 这些样条函数都可以作为插值基函数. 由本例关于样条函数的构造中读者不难发现: 插值基函数和另一个插值基函数作卷积, 其结果仍然是一个插值基函数.

3. 卷积运算的基本性质

1) 交换律和结合律

$$(f * g)(t) = (g * f)(t), \quad (1.41)$$

$$[(f * g) * h](t) = [f * (g * h)](t). \quad (1.42)$$

事实上, 利用卷积定义和变量代换, 有

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - s) g(s) ds \\ &= (g * f)(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(f * g) * h](t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(s)h(t-s)ds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(s-\tau)d\tau \right] h(t-s)ds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)h((t-\tau)-\xi)d\xi \right] d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)(g * h)(t-\tau)d\tau \\
&= [f * (g * h)](t).
\end{aligned}$$

2) 平移规则

记平移运算的记号为

$$T_b f(t) = f(t-b),$$

则卷积的平移性质为

$$T_b(f * g) = (T_b f) * g = f * (T_b g), \quad (1.43)$$

$$T_{b+c}(f * g) = (T_b f) * (T_c g). \quad (1.44)$$

验证这两个等式正确性的关键在于对卷积定义的理解.

$T_b(f * g)$ 理解为卷积函数 $f * g$ 的自变量 t 向右平移 b , 即

$$T_b(f * g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g[(t-b)-\tau]d\tau;$$

$(T_b f) * g$ 理解为 $f(\tau)$ 向右平移后再与 $g(\tau)$ 作卷积, 即

$$(T_b f) * g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau-b)g(t-\tau)d\tau;$$

而 $T_b g$ 在卷积中表示 $g(t)$ 平移为 $g(t-b)$, 故

$$f * (T_b g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau-b)d\tau.$$

3) 奇偶规则

1° 偶函数与偶函数的卷积是偶函数;

2° 奇函数与奇函数的卷积是偶函数;

3° 奇函数与偶函数的卷积是奇函数.

4) 微分积分规则

因为 $f(t) * g(t)$ 是关于变量 t 的函数, 所以可对其微分和积分, 结果如下:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(t) * g(t)]dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt, \quad (1.45)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[f(t) * g(t)] &= \left[\frac{d}{dt}f(t) \right] * g(t) \\
&= \left[\frac{d}{dt}g(t) \right] * f(t), \quad (1.46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^t [(f * g)(\xi)] d\xi &= \left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right] * g(t) \\ &= \left[\int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \right] * f(t).\end{aligned}\quad (1.47)$$

式(1.45)表明卷积曲线和 t 轴所围的面积等于 $f(t)$ 曲线所围面积乘以 $g(t)$ 曲线所围的面积. 事实上,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau) g(\tau) d\tau &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta) d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi.\end{aligned}$$

式(1.46)表明,卷积曲线的变化率等于 $f(t)$ 的变化率函数与 $g(t)$ 的卷积结果,也等于 $g(t)$ 的变化率函数与 $f(t)$ 的卷积结果. 事实上,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau) g(\tau) d\tau &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{d}{dt} f(t-\tau) \right] g(\tau) d\tau \\ &= \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] * g(t) \\ &= \left[\frac{d}{dt} g(t) \right] * f(t).\end{aligned}$$

式(1.47)表明,卷积函数的原函数等于 $f(t)$ 的原函数与 $g(t)$ 的卷积结果,也等于 $g(t)$ 的原函数与 $f(t)$ 的卷积结果. 事实上,只要对式(1.47)两边求导,并注意它是关于上限变量的导数,即

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t [(f * g)(\xi)] d\xi &= (f * g)(t), \\ \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau &= f(t), \\ \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau &= g(t),\end{aligned}$$

则显然看出式(1.47)的正确性.

5) 卷积的 Fourier 变换规则——卷积定理

设 $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$, $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$, 则

$$f(t) * g(t) \longleftrightarrow F(\omega) \cdot G(\omega), \quad (1.48)$$

$$f(t) \cdot g(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega). \quad (1.49)$$

式(1.48)的证明如下:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t) * g(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau) e^{-i\omega(t-\tau)} dt \\ &= F(\omega) \cdot G(\omega).\end{aligned}$$

式(1.49)的证明如下:

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\eta) G(\omega - \eta) d\eta \right] e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\eta) e^{i\omega\eta} d\eta \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega - \eta) e^{i(\omega - \eta)t} d(\omega - \eta) \\ &= f(t) \cdot g(t). \end{aligned}$$

式(1.48)和式(1.49)所表示的卷积定理对简化运算是非常有效的. 时域中复杂的卷积运算在频域中表现为简单的乘积运算; 同样, 在频域中的卷积运算在时域中也得以简化为乘积运算.

在信号分析处理中, 常需讨论某信号的频谱, 由式(1.48)和式(1.49)可知

$$| \mathcal{F}[f(t) * g(t)] | = | F(\omega) | \cdot | G(\omega) |, \quad (1.50)$$

$$| \mathcal{F}[f(t) * f(t)] | = | F(\omega) |^2. \quad (1.51)$$

这就是说, 卷积信号的振幅谱等于卷积前的振幅谱的乘积; 某信号自身卷积的振幅谱就是该信号的功率谱. 这个性质为分析信号的振幅谱和功率谱带来许多方便.

利用式(1.48)、式(1.38)至式(1.40)以及式(1.13), 很容易表述各阶样条函数的 Fourier 变换及其频谱, 有

$$\begin{aligned} \Omega_1(t) &\longleftrightarrow \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}, \\ \Omega_2(t) &= \Omega_1(t) * \Omega_1(t) \longleftrightarrow \left[\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right]^2, \\ \Omega_3(t) &= \Omega_2(t) * \Omega_1(t) \longleftrightarrow \left[\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right]^3, \\ \Omega_4(t) &= \Omega_3(t) * \Omega_1(t) \longleftrightarrow \left[\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right]^4. \end{aligned}$$

4. 离散卷积的计算

卷积运算有很多重要的应用. 在时域中看, 它可用来检测分析线性系统的特性和响应; 由于它有积分平均的作用, 它又可用来光滑曲线和消噪, 可用来检测信号的突变点位置; 由于它在样条基函数方面的表现, 它还可以用来构造插值基函数. 在频域中看, 两个频谱的乘积对应时域的卷积, 于是卷积可用来限频或滤波, 用来设计构造各种滤波器; 从数学角度来看, 卷积是一种积分变换, 它有许多良好性质, 它会产生许多有意义的解释……限于篇幅的原因, 卷积的这些应用本书不作详细介绍, 读者可以在后面章节中得到相应的启发.

在实际应用中常需要计算离散信号的卷积, 此时已知 $f(\tau)$ 的等距离散值 $\{f(k)\}$, 已知 $g(\tau)$ 被同样的间隔离散为 $\{g(k)\}$, 我们可利用卷积的定义和数值积分的办法来解决离散卷积的计算问题.

先假定离散信号 $\{f(k)\}$ 是长数据的, 离散信号 $\{g(k)\}_1^M$ 是短数据的, 那么按照卷积的定义, 可将其反向为 $\{\bar{g}(k)\}_1^M$, 再将 $\{\bar{g}(k)\}_1^M$ 从 $\{f(k)\}$ 的左端开始逐点向右移动并逐点计算出卷积数值. 如图 1.14 所示, 将 $\{\bar{g}(k)\}_1^M$ 作为“模板”, 由左向右移动, 计算的卷积数值记为

$$w(m) = (f * g)(m).$$

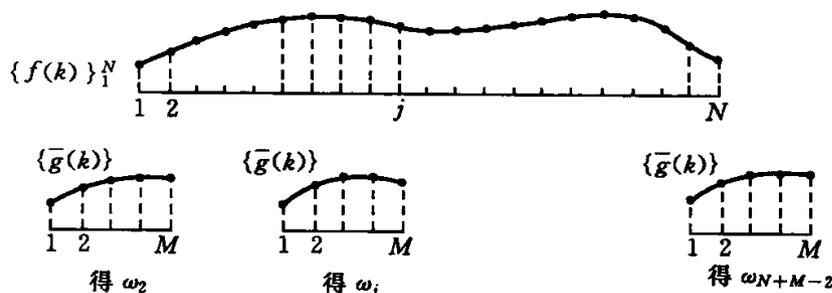


图 1.14 离散卷积过程示意图

当 $\{\bar{g}(k)\}_1^M$ 向右移动且与 $\{f(k)\}$ 有可积分部分时, 卷积数值就可能不为零; 当 $\bar{g}(M)$ 对着 $f(2)$ 时, 仅有两个数据参与计算, 采用数值积分公式

$$w(2) = h[f(1)\bar{g}(M-1) + f(2)\bar{g}(M)],$$

其中 h 是离散数据的采样间隔; 再向右移动, 当 $\bar{g}(M)$ 对着 $f(j)$ 时, 此时有多个数据参与计算, 采用数值积分公式的计算式为

$$w(j) = h[f(j-M+1)\bar{g}(1) + \dots + f(j)\bar{g}(M)];$$

继续向右移动, 当 $\bar{g}(2)$ 对着 $f(N)$ 时, 也仅有两个数据参与计算, 其数值积分的计算式为

$$w(N+M-2) = h[f(N-1)\bar{g}(1) + f(N)\bar{g}(2)].$$

应该注意, $\{f(k)\}_1^N$ 和 $\{\bar{g}(k)\}_1^M$ 的卷积数据为 $\{w(k)\}_1^{N+M-1}$, 卷积结果的离散数据量基本上是 $\{f(k)\}$ 和 $\{\bar{g}(k)\}$ 数据量的和.

在作离散卷积时常常会遇到这样的情况, 采集信号 $\{f(k)\}$ 源源不断, 希望实时处理 $f(t) * g(t)$ 的离散卷积问题, 这时可换一个角度思考实时处理的办法. 设 $f(t)$ 被分成等长度的若干段, 每段记为 $f_i(t)$, 于是

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t),$$

$$f(t) * g(t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t) * g(t).$$

这就是说, 各段 $f_i(t)$ 与 $g(t)$ 作卷积后相加, 就可得到整体卷积结果了. 根据这个想法, 设每段 $f_i(t)$ 被离散为 N 个数据, $g(t)$ 是被离散为 M 个数据的模板, 同时设置存储器 A 和 B 都可存储分段卷积的 $N+M-1$ 个数据, 再将 $f_i(t) * g(t)$ 的 $N+M-1$ 个数据存放于 A 中, 将 $f_{i+1}(t) * g(t)$ 的 $N+M-1$ 个数据存放于 B 中.

注意, A 中的后 $M-1$ 个数据和 B 中的前 $M-1$ 个数据叠加, 才可以得到关于 $f(t) * g(t)$ 的正确的且实时的结果.

1.6 相关函数及其 Fourier 变换

相关函数在信号分析处理中经常被用到, 本节将介绍相关运算与卷积运算的异同, 介绍相关函数的基本性质和应用原理.

1. 相关函数的定义

不同函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的互相关函数的定义和记号如下:

$$R_{fg}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t+\tau)d\tau, \quad (1.52)$$

$$R_{gf}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)f(t+\tau)d\tau. \quad (1.53)$$

特殊情形是, 同一函数 $f(t)$ 的自相关函数的定义和记号为

$$R_{ff}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)f(t+\tau)d\tau. \quad (1.54)$$

由自相关函数的定义可知, 能量有限的函数(模拟信号)才能作自相关. 一般, 当 $|t| \rightarrow \infty$ 时 $R_{ff}(t) \rightarrow 0$. 特别值得注意的是, 自相关函数是偶函数, 且有极大值, 即

$$R_{ff}(t) = R_{ff}(-t),$$

$$R_{ff}(0) = \max R_{ff}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\tau)|^2 d\tau.$$

对于互相关函数来说, 同样只有能量有限的函数(模拟信号)才能作互相关. 互相关函数一般不是偶函数, 但是交换互相关次序后的结果为

$$R_{fg}(t) = R_{gf}(-t).$$

不难看出, 相关函数和卷积函数的相同之处在于, 它们都可看做内积、积分平均和积分变换的表述形式; 不同之处在于, 卷积过程中有一个函数要反向, 但互相关函数和自相关函数的积分过程中没有什么函数反向的表现.

至于互相关(或自相关)函数的离散计算, 基本上同于离散卷积的计算. 例如, 已知 $f(t)$ 的有限等距采样的离散数据 $\{f(k)\}_1^M$, 也已知具有相同采样间隔的离散数据 $\{g(k)\}_1^N$, 将 $\{g(k)\}_1^N$ 从 $\{f(k)\}_1^M$ 左端开始逐点向右移动, 并作数值积分, 就可获得离散的互相关函数的数据值 $\{R_{fg}(k)\}_1^{M+N-1}$.

在实际应用中常用平均值例如 $\left\{ \frac{1}{M+N} R_{fg}(k) \right\}$ 作为相关程度的离散值.

2. 相关函数的 Fourier 变换

先讨论自相关函数的 Fourier 变换. 由于自相关函数是关于 $f(\tau)$ 和 $f(t+\tau)$ 的积分形式, 所以利用 Fourier 变换的移位性质, 有 $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$, $f(t+\xi) \longleftrightarrow F(\omega)e^{i\omega\xi}$. 故由 Fourier 变换乘积定理的式(1.33), 有

$$\begin{aligned}
 R_{ff}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) f(t+\tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F(\omega)} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 e^{i\omega t} d\omega;
 \end{aligned}$$

由 Fourier 逆变换形式可知

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[R_{ff}(t)] &= |F(\omega)|^2, \\
 \mathcal{F}^{-1}[|F(\omega)|^2] &= R_{ff}(t).
 \end{aligned}$$

故知自相关函数的 Fourier 变换对为

$$R_{ff}(t) \longleftrightarrow |F(\omega)|^2, \quad (1.55)$$

即自相关函数 $R_{ff}(t)$ 的谱函数就是 $f(t)$ 的功率谱函数.

利用 $R_{ff}(t)$ 是偶函数的性质, 利用 Parseval 等式, 有

$$\begin{aligned}
 R_{ff}(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [f(\tau)]^2 d\tau \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.
 \end{aligned}$$

此式表明, 自相关函数在 $t=0$ 处的值 $R_{ff}(0)$ 是 $R_{ff}(t)$ 的最大值, 它的量值正好等于 $f(t)$ 的能量值.

同样, 若 $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$, $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$, 利用互相关定义、Fourier 变换的移位性质和乘积定理, 有

$$\begin{aligned}
 R_{fg}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t+\tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\overline{F(\omega)} G(\omega)] e^{i\omega t} d\omega,
 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[R_{fg}(t)] &= \overline{F(\omega)} G(\omega), \\
 \mathcal{F}[R_{gf}(t)] &= F(\omega) \overline{G(\omega)},
 \end{aligned}$$

故知互相关函数的 Fourier 变换对为

$$R_{fg}(t) \longleftrightarrow \overline{F(\omega)} G(\omega), \quad (1.56)$$

且互相关能量谱函数具有共轭关系, 即

$$\mathcal{F}[R_{fg}(t)] = \overline{\mathcal{F}[R_{gf}(t)]}. \quad (1.57)$$

3. 自相关函数的应用

自相关函数隐含着良好的性质, 在信号分析处理中常常应用这些性质.

1° 信号延迟后其自相关函数不变. 设原信号为 $f(t)$, 延迟时段 ξ 后为 $\tilde{f}(t)$, 即 $\tilde{f}(t) = f(t+\xi)$, 显然 $\tilde{f}(t)$ 和 $f(t)$ 是相似的. 于是

$$R_{ff}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) f(t+\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau + \xi) f(t + \tau + \xi) d(\tau + \xi) \\
 &= R_{\tilde{f}\tilde{f}}(t).
 \end{aligned}$$

这说明, $f(t)$ 和 $\tilde{f}(t)$ 相似时, 相应的自相关函数 $R_{ff}(t)$ 和 $R_{\tilde{f}\tilde{f}}(t)$ 是完全相同的.

2° 信号的周期性在其自相关函数中保持不变. 设信号 $f(t)$ 是以 T 为周期的, $f(t) = f(t+T)$, 那么其相关函数为

$$\begin{aligned}
 R_{ff}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) f(t + \tau) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) f(t + T + \tau) d\tau \\
 &= R_{ff}(t + T).
 \end{aligned}$$

这说明, 自相关函数 $R_{ff}(t)$ 所表现的周期性正是原信号 $f(t)$ 的周期性.

3° 随机噪声的自相关表现. 白噪声 $\sigma(t)$ 在频域中的表现是平行于 ω 轴的一条直线, 设其功率谱为

$$|\mathcal{F}[\sigma(t)]|^2 = \frac{P}{2}, \quad -\infty < \omega < +\infty,$$

其中 P 为常数, 则据自相关函数和功率谱的关系式(1.55), 有

$$R_{\sigma\sigma}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P}{2} e^{i\omega t} d\omega = \frac{P}{2} \delta(t),$$

由此可知, 白噪声信号的自相关函数在 $t=0$ 处有一个脉冲值, 在 $t \neq 0$ 处为零, 这说明白噪声没有相似性.

还有一种随机噪声是带通白噪声, 它的功率谱为

$$|\mathcal{F}[\sigma(t)]|^2 = \begin{cases} \frac{P}{2}, & \omega_0 - \Omega \leq \omega \leq \omega_0 + \Omega, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

其中表示中心频率的参数 ω_0 和噪声频率范围的参数 Ω 都是常数. 利用式(1.55), 还利用频域中的矩形函数

$$\text{rect}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega_0 - \Omega \leq \omega \leq \omega_0 + \Omega, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

带通白噪声的自相关函数可表示为

$$\begin{aligned}
 R_{\sigma\sigma}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0 - \Omega}^{\omega_0 + \Omega} \frac{P}{2} e^{i\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P}{2} \text{rect}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\
 &= P\Omega \frac{\sin\Omega t}{\Omega t} e^{i\omega_0 t},
 \end{aligned}$$

它在 $t=0$ 处有最大值 $P\Omega$, 当 t 足够大时 $R_{\sigma\sigma}(t) \rightarrow 0$.

4° 自相关过程可以压制噪声表现. 当信号 $f(t)$ 中混有随机噪声时, 无论是白噪声还是带通白噪声, 含噪信号 $\tilde{f}(t) = f(t) + \sigma(t)$ 的自相关函数表现为

$$\begin{aligned} R_{\tilde{f}\tilde{f}}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [f(\tau) + \sigma(\tau)][f(t + \tau) + \sigma(t + \tau)] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) f(t + \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(\tau) f(t + \tau) d\tau \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sigma(t + \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(\tau) \sigma(t + \tau) d\tau \\ &= R_{ff}(t) + R_{\sigma f}(t) + R_{f\sigma}(t) + R_{\sigma\sigma}(t). \end{aligned}$$

因为随机噪声和确定信号之间无相关性, 所以 $R_{\sigma f}$ 和 $R_{f\sigma}$ 几乎为零; 又因为随机噪声的自相关函数 $R_{\sigma\sigma}(t)$ 的强度小, 衰减快, 所以确定信号的自相关函数 $R_{ff}(t)$ 在 $R_{\tilde{f}\tilde{f}}(t)$ 中占主要成分, 特别当 $|t|$ 略大时有 $R_{\tilde{f}\tilde{f}}(t) \approx R_{ff}(t)$.

应用例 1 信号为正弦函数

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi),$$

混有白噪声后表现为

$$\tilde{f}(t) = f(t) + \sigma(t);$$

其自相关函数可表示为两部分内容, 即

$$R_{\tilde{f}\tilde{f}}(t) = R_{ff}(t) + R(t).$$

其中, $R_{ff}(t)$ 表示 $f(t)$ 的自相关函数, $R(t) = R_{\sigma f}(t) + R_{f\sigma}(t) + R_{\sigma\sigma}(t)$ (见图 1.15). 由图可见, 当 $R(t)$ 很快衰减后, 留下的即是与原信号同频的 $R_{ff}(t)$.

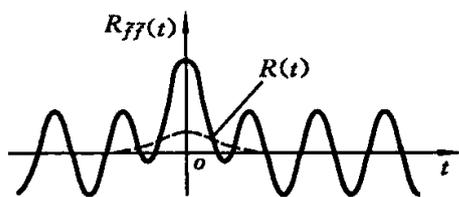


图 1.15 正弦波混有白噪声的信号自相关示意图

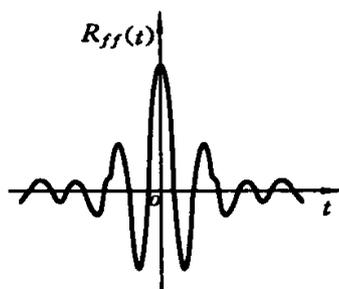


图 1.16 车桥振动自相关函数的表现

应用例 2 检测汽车车桥的振动周期. 让汽车在沙石路上行进, 检测出汽车车桥的振动信号 $f(t)$, 作自相关函数 $R_{ff}(t)$ (见图 1.16). 借助该图可检测出主峰图形外的周期表现, 从而可确定车桥振动频率, 并设计相应的减振办法.

与此例类似的应用还有很多, 例如: 声呐信号为 $f(t)$, 接受到的回声信号为 $\tilde{f}(t) = f(t) + \sigma(t)$, 其中 $\sigma(t)$ 为海浪等原因造成的白噪声; 若在自相关函数 $R_{\tilde{f}\tilde{f}}(t)$ 中检测出周期性, 则说明附近有机器 (如潜艇发动机) 的周期振动; 此外, 还可进一步分析振动频率和振源的距离.

4. 互相关函数的应用

互相关函数隐含着良好的性质,在信号分析处理中常常应用这些性质.

1° 互相关函数中仍含有原信号的周期性信息. 若设 $f(t)$ 具有周期性, 即 $f(t) = f(t-T)$, $g(t)$ 没有周期性, 则 $R_{fg}(t) = R_{fg}(t+T)$. 事实上,

$$\begin{aligned} R_{fg}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t+\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau-T)g(t+\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)g(t+T+\xi)d\xi \\ &= R_{fg}(t+T). \end{aligned}$$

同样,若设 $g(t)$ 是周期函数, $f(t)$ 无周期表现, 或者 $f(t)$ 和 $g(t)$ 都有周期表现时, 它们的互相关函数 $R_{fg}(t)$ 中仍具有这些周期性表现.

2° 互相关过程可用于消噪. 假设 $f(t)$ 和 $g(t)$ 中都混有随机白噪声, 即

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) &= f(t) + \sigma(t), \\ \tilde{g}(t) &= g(t) + \bar{\sigma}(t), \end{aligned}$$

其中 $\sigma(t)$ 和 $\bar{\sigma}(t)$ 表示白噪声. 观察其互相关表现, 应有

$$R_{\tilde{f}\tilde{g}}(t) = R_{fg}(t) + R_{f\bar{\sigma}}(t) + R_{\sigma g}(t) + R_{\sigma\bar{\sigma}}(t),$$

其中 $R_{f\bar{\sigma}}(t)$ 为确定信号 $f(t)$ 与随机信号的互相关, 均值 $R_{f\bar{\sigma}}(t)$ 几乎为零; 同样有 $R_{\sigma g}(t)$ 几乎为零; $R_{\sigma\bar{\sigma}}(t)$ 表示随机信号的互相关, 当然均值 $R_{\sigma\bar{\sigma}}(t)$ 也为零. 因此, $R_{fg}(t)$ 是 $R_{\tilde{f}\tilde{g}}(t)$ 的主体部分, 噪声的影响基本上被排除了.

3° 信号 $f(t)$ 与其滞后信号 $g(t) = f(t-\tau_0)$ 的互相关函数在 $t = \tau_0$ 处取得最大值. 事实上, 由互相关定义, 有

$$\begin{aligned} R_{fg}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t+\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)f(t-\tau_0+\tau)d\tau \\ &= R_{ff}(t-\tau_0). \end{aligned}$$

因为 $R_{ff}(0)$ 取得最大值, 所以 $R_{fg}(t)$ 在 $t = \tau_0$ 处取得最大值. 该性质说明, 若将 $g(t)$ 看做 $f(t)$ 经过 τ_0 的延时信号, 或者, 若认为经 τ_0 延时后 $g(t)$ 与 $f(t)$ 相似, 则 $R_{fg}(t)$ 在 $t = \tau_0$ 处取得最大值, τ_0 就是这两个信号的延时间隔 (见图 1.17).

应用例 1 利用回波信号检测反射体距离. 设 $f(t)$ 是声呐或雷达的发射信号, $g(t)$ 是回波信号, 认为反射波是发射波的时延加噪声的结果,

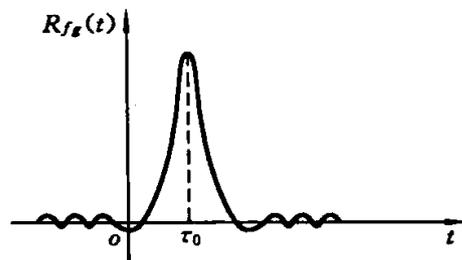


图 1.17 延时相似信号的互相关曲线

即 $g(t) = f(t - \tau_0) + \sigma(t)$, 则: 检测互相关函数 $R_{fg}(t)$ 最大值, 可确定延时间隔 τ_0 ; 用 $\tau_0/2$ 乘以波速可确定反射目标的距离; 用 $R_{fg}(\tau_0)/R_{ff}(0)$ 可度量回波强度, 进而判断反射体反射信号的能力.

应用例 2 检测地下管道泄漏的位置. 设地下输油管在 x^* 处有细孔泄漏, 泄漏必发出响声, 可据经验大致判断 x^* 的位置, 并在 x^* 两侧的输油管上安装信号检测器, 得到信号 $f(t)$ 和 $g(t)$. 可认为信号 $f(t)$ 和 $g(t)$ 有相似之处, 它们都是 x^* 处泄漏信号的不同的延时结果, 于是找出互相关函数 $R_{fg}(t)$ 的最大值, 求得 τ_0 . τ_0 表明的是声音在距离 D 中的传播时间, D 是两检测器和 x^* 处的距离差, 求出 D 就可确定 x^* .

应用例 3 检测汽车座椅振动的传递通道. 汽车在行进中, 司机座椅的振动可能与发动机的振动有关, 也可能与前轮轴振动有关, 还可能与后轮轴振动有关. 于是, 在可能的位置检测得振动信号, 再与座椅振动信号作互相关分析, 就可确定座椅振动与后轮轴的振动的相关性最大.

应用例 4 检测系统的频率响应特性. 设输入信号为 $x(t)$, 系统的时域特性为 $h(t)$, 输出信号为 $y(t)$, 它们之间应遵从卷积规则

$$y(t) = x(t) * h(t);$$

上式两边和 $x(t)$ 作互相关, 经推导不难得到

$$R_{yx}(t) = R_{xx}(t) * h(t).$$

对上式两边作 Fourier 变换, 在 $R_{yx}(t)$ 和 $R_{xx}(t)$ 频率响应已知的情况下 (例如 $x(t)$ 为白噪声, $\mathcal{F}[R_{xx}(t)] \equiv 1$), 就可求得系统的频率响应 $\hat{h}(\omega)$, 从而确定系统自身的特性.

应用例 5 检测信号段的匹配位置. 设已知 $g(t)$, $t \in [\epsilon_1, \epsilon_2]$ 仅是 $f(t)$ 信号中的一小部分, 即

$$f(t) = \begin{cases} g(t), & t \in [\epsilon_1, \epsilon_2], \\ \xi(t), & t \in [a, b] \setminus [\epsilon_1, \epsilon_2], \end{cases}$$

希望检测出 $g(t)$ 在 $f(t)$ 中相匹配的位置. 考虑到 $g(t)$ 仅在 $[\epsilon_1, \epsilon_2]$ 区段上具有相似性, 在其它区段上相似程度很差, 于是可用 $f(t)$ 和 $g(t)$ 作互相关函数. 易知, 只有当 $g(t)$ 与它在 $f(t)$ 中的信号段完全重合时, 互相关函数才能取得最大值, 这样也就确定了匹配位置.

1.7 离散 Fourier 变换和谱函数的近似计算

正如前面几节所讨论的, 任意的能量有限的时域函数 (模拟信号) 与其相应的谱函数构成 Fourier 变换对, 函数 (模拟信号) 的这两种表现形式可以相互转换, 我们既可以对它们作时域分析, 也可以对它们作频域分析. 本节主要讨论用计算机对函数 (模拟信号) 作离散频谱分析的问题.

1. 连续信号和离散信号

对于要分析的连续函数(模拟信号) $f(t)$, $t \in \mathbf{R}$, 它在理论上是无限长的, 但在实际应用分析中总是要作有限截断处理的. 对于周期函数来说, 截取一个或多个周期段; 对于非周期函数来说, 可截取一个主要的部分段; 被截取的部分不妨表示为 $f(t)$, $t \in [-T/2, T/2]$. 对其作等距 Δt 的采样, 记 $f_j = f(j\Delta t)$, 可获得此函数段一组样本值 $\{f_j\}_{-N}^N$, 这就是与连续信号相应的离散信号.

在实际应用中常用信号检测器获得信号, 再用 A/D 转换器将其转换为离散信号.

2. 连续谱和离散谱, 离散的 Fourier 变换对

在前面曾经讨论过, 一个连续的周期函数(模拟信号)可展开为 Fourier 级数, 一个连续信号与一个无穷的离散序列构成 Fourier 变换对, 即

$$f(t) \longleftrightarrow \{C_n\}_{-\infty}^{+\infty}.$$

在实用中要对离散频谱作有限截断, 再用有限的离散频谱回复为连续信号 $\tilde{f}(t)$, 此时 $\tilde{f}(t) \approx f(t)$.

在前面也曾经讨论过, 一个连续的时域信号与一个连续的谱信号构成 Fourier 变换对, 即

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega),$$

其对应规则为

$$\begin{cases} F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \\ f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \end{cases} \quad (1.58)$$

这种时频对应关系在理论推导和分析中是方便的, 但用计算机对信号作时域处理和频域处理却是不方便的.

基于此, 需要与时域离散信号 $\{f(j\Delta t)\} = \{f_j\}_{-N}^N$ 相等数据的频域离散信号 $\{F(k\Delta\omega)\} = \{F_k\}_{-N}^N$ 来构成离散的 Fourier 变换对

$$\{f_j\}_{-N}^N \longleftrightarrow \{F_k\}_{-N}^N,$$

且按照式(1.58)建立它们的互逆规则

$$\begin{cases} F_k = \Delta t \sum_{j=-N}^N f_j e^{-i[j\Delta t][k\Delta\omega]}, \\ f_j = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{k=-N}^N F_k e^{i[j\Delta t][k\Delta\omega]}. \end{cases} \quad (1.59)$$

3. 离散 Fourier 变换的快速算法

从表面上看, 按式(1.59)计算并不难, 但仔细分析可知, 要计算 N 个点的离散 Fourier 变换的工作量为 $O(N^2)$ 次复运算(一次复运算是指复数的一次乘法和加

法). 在实际应用中, 要处理的信息量大(N 大), 处理还要及时, 需要运用快速算法. 计算工作者经过艰辛的努力, 设计出了

快速 Fourier 变换(FFT)算法, 利用 $\{f_j\}_{-N}^N$ 求 $\{F_k\}_{-N}^N$;

快速 Fourier 逆变换(IFFT)算法, 利用 $\{F_k\}_{-N}^N$ 求 $\{f_j\}_{-N}^N$.

这两种快速算法是类似的, 其计算工作量为 $O(N \log_2 N)$; 与通常算法相比, 提高工效倍数为 $N^2 / (N \log_2 N) = N / \log_2 N$. 例如, 当 $N = 10^3$ 时, 提高工效约 100 倍; 当 $N = 10^6$ 时, 提高工效约 5×10^4 倍. FFT 和 IFFT 算法不仅计算量最佳, 而且计算精度高, 计算过程稳定. 它有定型的程序可用, 已被广泛地应用于谐波分析中.

4. 取样效应

虽然 $\{f_j\}_{-N}^N$ 和 $\{F_k\}_{-N}^N$ 是离散 Fourier 变换对, 但由于截取函数的有限长度和作等距离散的原因, 用 $\{F_k\}$ 来表现 $F(\omega)$ 就不可避免地会产生误差.

一方面, $\{F_k\}$ 是有限长度的, 它所表现的谐波 $e^{i\omega_k j \Delta t}$ 的频率范围有限, ω_k 是其所表现的频率, 但有些高频量得不到反映.

事实上, 在取样频率 $1/\Delta t$ 确定的情况下, 较高的频率 Ω 都可表示为 $\Omega = \omega_k + m/\Delta t$, 其中, ω_k 在 $\{F_k\}$ 所能表现的频率范围内, m 是整数, $m/\Delta t$ 是 Ω 中频率比 ω_k 高的部分, 于是在 Δt 间隔取样时 $\{F_k\}$ 具体表现的谐波

$$e^{i\Omega j \Delta t} = e^{i[\omega_k + m/\Delta t] j \Delta t} = e^{i\omega_k j \Delta t}.$$

关于频率为 $m/\Delta t$ 的谐波分量是表现不出来的, 无论怎样加工处理都无法分辨, 它们被折合到比 $1/\Delta t$ 更低的频率 $|\omega_k| \leq 1/(2\Delta t)$ 的谐波中. 这就是取样频率所造成的频率混叠效应. 换句话说, 用 $\{F_k\}$ 所表现的谐波频率范围为

$$|\omega_k| \leq \frac{1}{2\Delta t}. \quad (1.60)$$

它与取样间隔 Δt 有关.

总之, 由于取样间隔 Δt 不能无限小, 于是由 $\{F_k\}$ 所表现的频率辨认范围只能是有限大的, 即 $|\omega_k| \leq 1/(2\Delta t)$. 这就表明, 在应用中要根据需要分辨的频率范围来确定取样间隔 Δt . 换句话说, 取样间隔 Δt 大, 则在频域中信号的频率表现范围相对小; 若要在较宽的频率范围内分析信号, 则必须减小时域的取样间隔.

另一方面, 由 $\{F_k\}$ 所表现的频谱 $F(\omega)$ 被平滑处理了, 在一定程度上破坏了 $F(\omega)$ 的精细结构.

事实上, 在用离散 Fourier 变换作谐波分析时, 通常是截取有限段 $-T/2 \leq t \leq T/2$ 来分析 $f(t)$ 的, 这相当于待分析的函数是 $f(t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$ 和

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T/2, \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases}$$

相乘所得的新函数

$$\tilde{f}(t) = f(t) \cdot \text{rect}(t)$$

$$= \begin{cases} f(t), & |t| \leq T/2, \\ 0, & |t| > T/2. \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\tilde{f}(t)] &= \tilde{F}(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[f(t)] * \mathcal{F}[\text{rect}(t)]. \end{aligned}$$

显然, $\tilde{F}(\omega)$ 是 $F(\omega)$ 被平滑处理后的结果, 它一定程度上破坏了 $F(\omega)$ 的精细结构.

一个典型的例子是: 取 $f(t)=1$, 其谱函数为 $F(\omega)=\delta(\omega)$ 是一条很窄的谱线; 取定 $\tilde{f}(t)$ 的时间段 $[-T/2, T/2]$ 分析, 则谱函数

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \delta(\omega) * \mathcal{F}[\text{rect}(t)] \\ &= \frac{T}{2\pi} \cdot \frac{\sin(T\omega/2)}{T\omega/2}. \end{aligned}$$

即窄谱线 $\delta(\omega)$ 被拉宽为有主峰和边瓣的图形(见图 1.18).

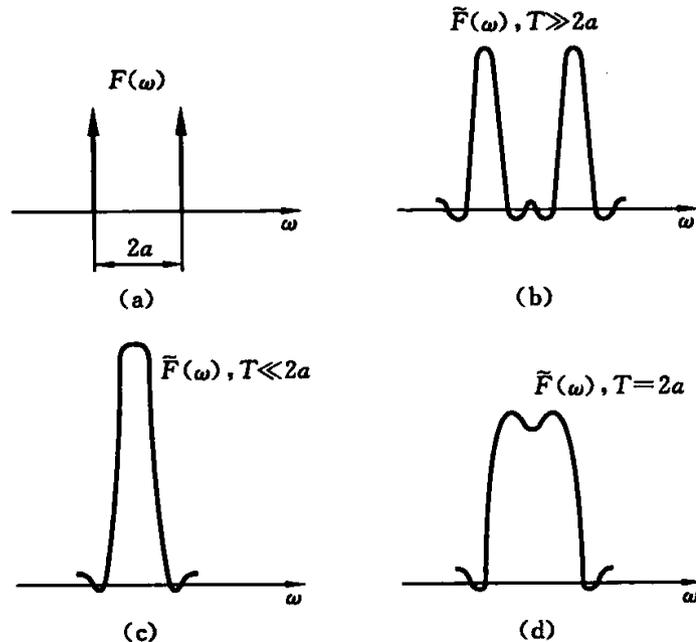


图 1.18 取样范围对 $\mathcal{F}[\cos at]$ 的影响

另一个典型例子是: 取 $f(t)=\cos at$, 由式(1.20)知其谱函数

$$F(\omega) = \pi\delta(\omega+a) + \pi\delta(\omega-a)$$

是相距为 $2a$ 的两根谱线(见图 1.18); 由于截取的函数段为 $[-T/2, T/2]$, 原谱函数被扩散为

$$\tilde{F}(\omega) = \frac{T}{2} \cdot \frac{\sin[(\omega+a)T/2]}{(\omega+a)T/2} + \frac{T}{2} \cdot \frac{\sin[(\omega-a)T/2]}{(\omega-a)T/2};$$

若 $T \gg 2a$, 则 $\tilde{F}(\omega)$ 成双峰状(见图 1.18(b)), 可以明确分辨 $\tilde{F}(\omega)$ 在 $\omega \pm a$ 处的跃起表现; 若 $T \ll 2a$, 则 $\tilde{F}(\omega)$ 成单峰状(见图 1.18(c)), 以及当 $T=2a$ 时, $\tilde{F}(\omega)$ 成不明显双峰状(见图 1.18(d)). $T \ll 2a$ 和 $T=2a$ 的表现对分辨 $\delta(\omega \pm a)$ 都是不利的.

以上例子表明了有限范围取样时所存在的频谱扩散的现象. 总之, 由于取样范围不能无限大, 频谱分辨的精细程度只是有限的. 频域分辨率实为 ω 被离散的宽度, 即

$$\Delta\omega = \frac{1}{T} = \frac{1}{2N\Delta t}, \quad (1.61)$$

也就是说, 采样间隔 Δt 确定后, 这段长度为 T 的离散信号的频域分析范围就确定为 $\left[-\frac{1}{2\Delta t}, \frac{1}{2\Delta t}\right]$, 离散 Fourier 变换值 $\{F_k\}_{-N}^N$ 共 $(2N+1)$ 个, 频域分析范围被等分为 $2N$ 份, 所以式(1.61)表示了频域分辨率.

总之, 对于定长信号来说, 时域中等分数增多, 时域分辨率提高, 时域的分析范围不变; 此时相应的, 频域的分析范围提高了, 但频域的分辨率没有改变.

5. 谱的近似计算和信号的近似回复

要用离散 Fourier 变换近似计算谱函数, 必须注意取样效应.

对时域函数(模拟信号) $f(t)$ 取有限宽度 T , 应考虑到有效区段被截取; 取采样间隔 Δt , 应考虑到时域中函数的精细变化被反映. 这样, 可获得时域的一串样本值 $\{f_j\}_{-N}^N$. 由取样效应分析可知, T 和 Δt 又决定了用 $\{F_k\}$ 表现 $F(\omega)$ 的有效分辨精度和有效分辨范围, T 决定了精细分辨程度 $\Delta\omega = 1/T$, Δt 决定了有效的频率范围 $|\omega_k| \leq 1/(2\Delta t)$. 换言之, 在离散 Fourier 变换中, 用 $\{f_j\}_{-N}^N$ 在离散 Fourier 变换或在 FFT 算法应用中, 应注意:

离散时域信号 $\{f_j\}_{-N}^N$ 和离散频域信号 $\{F_k\}_{-N}^N$ 构成了离散的 Fourier 变换对, 即

$$\{f_j\}_{-N}^N \longleftrightarrow \{F_k\}_{-N}^N.$$

时域离散信号序列 $\{f_j\}_{-N}^N$,	时域分辨精度为 $\Delta t = T/(2N)$,
时域分辨范围为 $-T/2 \leq t \leq T/2$,	时域近似特点为 $f_j = f(t_j)$;
频域离散信号序列 $\{F_k\}_{-N}^N$,	频域分辨精度为 $\Delta\omega = 1/T$,
频域分辨范围为 $ \omega_k \leq 1/(2\Delta t) = N/T$,	频域近似特点为 $F_k \approx F(\omega_k)$.

总之, 在同时兼顾时域表现和频域表现的情况下, 截取时域信号的有效长度 T , 取用采样间隔 Δt , 获得 $2N+1$ 个样本值的时域离散信号 $\{f_j\}_{-N}^N$, 利用 FFT 算法即可获得 $2N+1$ 个节点处的离散频域信号 $\{F_k\}_{-N}^N$, 由此获得近似的频谱曲线; 相应地, 由 $\{F_k\}_{-N}^N$, 利用 IFFT 算法, 又可回复离散时域信号 $\{f_j\}_{-N}^N$, 并由此获近似的时域信号.

为了对近似时域信号和近似频域信号有进一步的直观认识, 下面举一个实验性的例子.

如图 1.19 所示, 原信号 $f(t)$ 的长度为 T , 它有光滑部分, 阶跃表现和邻近的两个尖峰表现如图(a)所示. 将其分为 40 等份离散, 作 FFT, 其时域的近似回复信号

和频域的近似振幅谱信号分别记为 $f_{40}(t)$ 和 $|F_{40}(\omega)|$ (见图(b)、(c)); 相应于 60 等份时, 有 $f_{60}(t)$ 和 $|F_{60}(\omega)|$ (见图(d)、(e)); 相应于 320 等分时, 有 $f_{320}(t)$ 和 $|F_{320}(\omega)|$ (见图(f)、(g)).

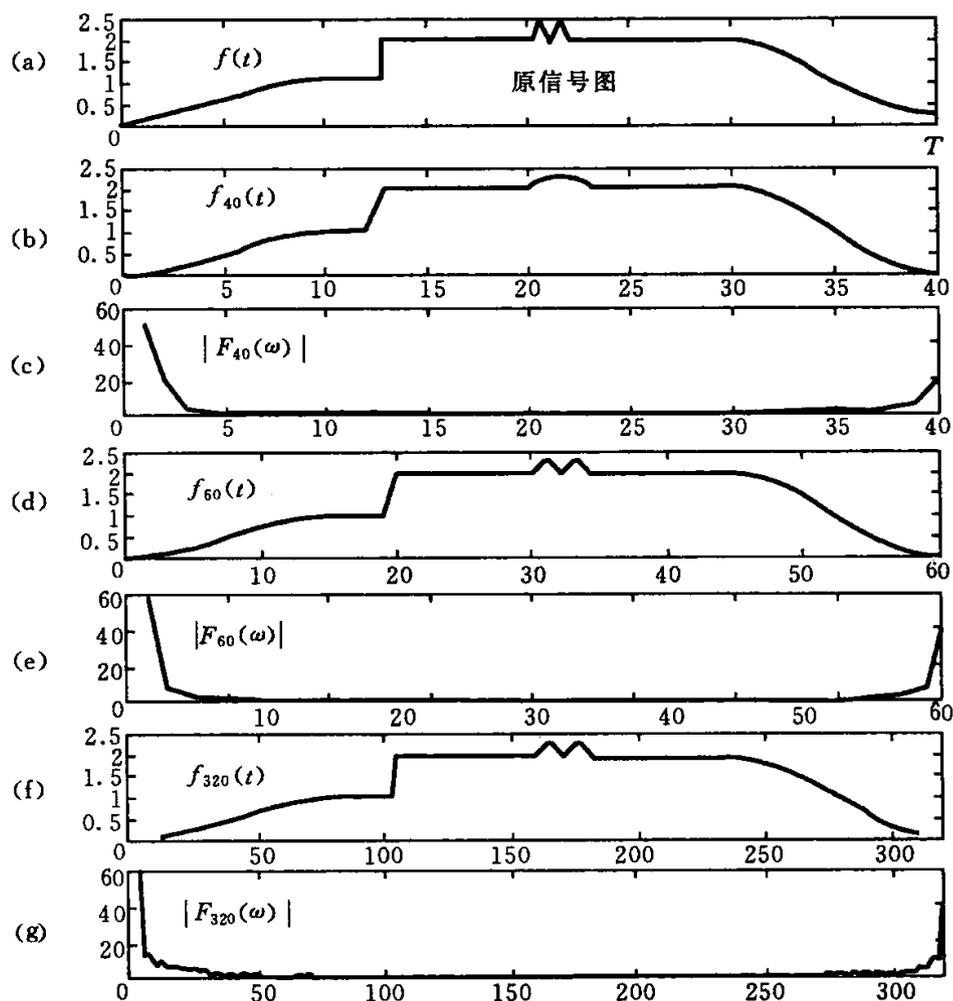


图 1.19 时域分辨率与频域分辨率参照图形

观察图 1.19 可知如下几点表现:

(1) 由时域中几个回复近似信号图对比可知, 对定长信号段 T 增加等份数, Δt 减小, 时域分辨率提高了, 回复信号对原信号的逼近程度也变好了.

(2) 若曲线 $f(t)$ 是平滑的, 则它的高频含量较小; 图(a)中 $f(t)$ 有尖峰和阶跃表现, 则它一定含有较多的高频量.

(3) 随着时域采样间隔 Δt 变小, 频域中的识别范围变大了, 如当 $\Delta t = T/40$ 时, 频率识别范围为 $[0, 40/T]$; 当 $\Delta t = T/60$ 时, 其频率识别范围为 $[0, 60/T]$. 但是频域中的分辨率并没有改变, 始终为 $\Delta\omega = 1/T$.

(4) 随着 Δt 变小, $\{f_j\}$ 近似 $f(t)$ 的程度变好, $\{F_k\}$ 近似 $F(\omega)$ 的程度是否也会越变越好呢? 对比图(c)、(e)和(g)发现, $|F(\omega)|$ 在图形两端附近的值有较大的变化, 经分析可知, 其主要原因是时域信号分析长度为 T , 这在时域中相当于

$f(t) \cdot \text{rect}(t)$, 截断产生了较多的高频量, 其频域表现 $F(\omega) * \mathcal{F}[\text{rect}(t)]$ 中, $\mathcal{F}[\text{rect}(t)]$ 的主瓣和边瓣都影响着这个卷积结果, 这正是图(g)中出现一些振荡表现的原因, 并不影响对信号频谱的分析. 实验证明, 只要截取的信号段较长, 离散的数据量(N 值)较大, 用 FFT 作振幅谱、功率谱图是实用的.

顺便指出, 对某个 $f(t)$ 信号段作其频谱图, 它不可能是理想的 $F(\omega)$ 的表现. 信号的时域分辨率和频域分辨率之间总存在着矛盾. 提高时域分辨率的办法是减小采样间隔, 提高频域分辨率的一般办法是增加信号段长度, 这些要求在实用中都有不可取之处. 因此, 在实际应用中要根据不同的目的采用不同的频谱分析方法和不同的频谱图. 例如有的书籍中介绍了关于在 FFT 基础上的修正算法, 以利于提高频域的分辨率. 本章后面介绍的对数功率谱和倒频谱方法, 也都是为了加强应用而设计的.

1.8 在时域和频域中分析信号的应用举例

根据 Fourier 变换原理, 时域信号 $f(t)$ 和它的频域表现 $F(\omega)$ 组成 Fourier 变换对, 因此既可在时域中分析 $f(t)$ 的特点和表现, 也可在频域中分析 $F(\omega)$ 的特点和表现. 这两种分析可以互相补充, 掌握这两种分析可以对信号有更深刻的认识.

关于信号的时域分析问题, 在前面讨论卷积和相关运算的应用中已经涉及, 本节仅作简要的总结. 本节主要介绍频域分析信号的问题, 也就是依据 $F(\omega)$ 的表现, 分析信号组成和特征量.

1. 时域分析的目标和应用

利用 $f(t)$ 的表现, 在时域中要分析信号的哪些特性呢?

1) 消噪并显现确定信号

在实际应用中, 待分析的信号常由两部分组成. 一部分是表现研究对象的确定信号 $f(t)$, 另一部分是随机噪声 $\sigma(t)$. 只有设法降低噪声含量, 提高信噪比, 才能显现确定信号 $f(t)$ 并讨论它的内在规律. 消噪问题非常重要, 消噪的方法也很多. 前面曾经介绍过的用 $f(t) + \sigma(t)$ 作自相关, 可有效地消噪并显现 $f(t)$ 的自相关函数; 还有, 将 $f(t) + \sigma(t)$ 和另一个随机噪声 $\sigma_1(t)$ 作互相关, 显现 $f(t)$ 和 $\sigma_1(t)$ 的互相关, 再利用其频域性质, 表现消噪后的 $F(\omega)$, 再返回到时域中表现 $f(t)$, 以达到消噪的目的.

2) 确定信号 $f(t)$ 在时域中的幅值变化规律, 特别是确定周期变化规律

利用 $f(t)$ 作自相关, 检测 $R_{ff}(t)$ 的振荡峰值就可检测 $f(t)$ 中隐含的周期性. 利用回波信号和 $f(t)$ 作互相关, 或者利用回波信号作自相关, 都可确定反射体的反射能力和反射体的振动周期. 若向窗户玻璃发射特殊的激光信号, 那么反射信号中就会携带室内的振动信号, 在反射信号中消去激光的固有表现, 即可获得室内的振动信号的幅值变化规律.

3) 检测 $f(t)$ 的突变位置

由亮度值构成的信号 $f(t)$ 若有突变, 则它会反映物体的边缘信息; 弹性体振动信号中若有突变, 则它可能反映弹性体的异常(例如断裂)的信息. 由此可知, 检测 $f(t)$ 的突变位置是有应用意义的. 卷积可用于检测信号突变的位置, 具体内容可参见第 7 章.

4) 确定两相似信号的时滞时间

在管壁两个不同位置检测管道内液体流动所产生的信号, 这两个信号互相关最大值所反应的时滞时间, 可认为是液体流经这两个信号检测点距离所需的时间, 用这种方法可测量管道内的液体流动速度和流量. 用同样的办法, 也可以测量流水线的运动速度. 类似的应用还有很多.

5) 其它可能的应用

例如在语音的时域分中, 要搞清楚语言是如何分段的, 哪些语言是元音、清辅音、浊辅音, 它们的强度和振动周期等内容都可在时域中作出分析.

2. 用功率谱对信号作频域分析

对确定信号 $f(t)$ 来说, 其频谱 $F(\omega)$ 值有正有负; 其振幅谱 $|F(\omega)|$ 是非负且是偶对称的; 其功率谱 $|F(\omega)|^2$ 能突出那些 $|F(\omega)| > 1$ 的主要成分, 压制那些 $|F(\omega)| < 1$ 的次要成分, 因此功率谱能显现信号的主要频率成分.

在实际应用中, 对有限离散信号 $\{f(n)\}_0^{N-1}$ 常先作自相关

$$R_{ff}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1-n} f(k)f(k+n), \quad 0 \leq n \leq N-1,$$

再对自相关数据 $\{R_{ff}(n)\}_0^{N-1}$ 作 FFT, 求得离散的功率谱 $\left\{ \frac{1}{N} |F(n\Delta\omega)|^2 \right\}_{-N+1}^{N-1}$,

仅取其正频率部分 $\left\{ \frac{1}{N} |F(n\Delta\omega)|^2 \right\}_0^{N-1}$ 的包络线作为观察分析用的功率谱曲线 $P_f(\omega)$. 由于采用 FFT 算法, 不可避免地存在取样效应, 应用中也常采取一些校正措施, 使 $P_f(\omega)$ 曲线更有效地表现 $|F(\omega)|^2$. 关于校正措施, 可参见信号处理技术方面的书籍.

用功率谱对信号作频域分析有哪些应用呢?

1) 从含噪信号中识别确定信号的主频率

通常采集的离散信号中是含有噪声的, 对这段采集信号作自相关, 则可有效地消噪且有效地表现确定信号, 在此基础上求得功率谱曲线, 它所突出的主要频率成分正是要分析信号的频域特征. 同样可知, 不同信号将会有不同的主频率特征, 不同的主频率特征反映了不同信号的区别.

2) 识别不同性质的故障信号

对某个运转的机械系统或电网系统, 隔一段时间采集一段振动信号, 不断分析

这些信号段的功率谱,也可实时采样,实时作自相关运算,实时作出其功率谱,并将其与正常运转信号的功率谱作对比,功率谱异常就表示此机械系统有故障.不同类型的故障会有不同的频谱特征,从故障信号的功率谱中可以识别出故障的类型.

3) 模拟工况环境

在工程实践中,需要对设计制造出来的机械或部件作恶劣工况下的性能测试,例如汽车要在恶劣路况下行驶相当长的时间.其实,在实验室内模拟制造一种工况,就不需要到实际工况下作测试.这样不仅省时省钱,还可以进行强化快速试验,缩短试验时间.要模拟工况,可先实测实际环境的信号而得到相应的功率谱,再调整模拟工作台使其工况的功率谱与实测的信号功率谱相似,用功率谱作为模拟特征,模拟工况是不困难的.

4) 其它的信号识别与模拟应用

这方面的应用实例非常多,这里仅简略叙述语音信号识别与模拟的应用.人们可广泛分析各种文字标准读音信号在频域中的特征,于是计算机可利用标准读音的阅读特征来识别文字和输出文字,从而达到阅读文章、输出文章的目的.若还能识别某人用方言阅读时的频域特征,那么,计算机同样可利用方言阅读特征来识别文字和输出文字.语音识别用于破案也是可能的.例如,若已获得某犯罪嫌疑人的一段录音,则可分析出他的发音特征,可在众多监听录音中识别出犯罪嫌疑人的语音,从而给跟踪和追击犯罪嫌疑人提供有力的依据.

3. 用倒频谱分析信号特征

在信号的频谱分析中,除了经常使用振幅谱、功率谱 $P_f(\omega)$ 以外,还常常使用对数功率谱和倒频谱.

对数功率谱定义为

$$L_f(\omega) = | \lg P_f(\omega) |.$$

功率谱 $P_f(\omega)$ 对突出和识别频谱的主要特征是有利的,但当功率谱中有多个大小不同的特征都需要识别时,由于取对数的原因, $L_f(\omega)$ 会使小量放大,从而,这些不同特征更容易显现和识别了.另外,取对数能使乘法运算变为叠加运算,信号的卷积运算的功率谱表现为不同功率谱的相乘关系,对数功率谱又让其表现为叠加关系,因此对数功率谱对识别卷积系统的频谱特征是有帮助的.例如图 1.20(b) 所示是某时域信号的功率谱,它有三个频谱特征,但小的不易识别;图 1.20(c) 所示的对数功率谱能更清晰地表现这三个频谱特征,用计算机检索这些特征就变得更方便、更准确了.

倒频谱定义为

$$C_f(\tau) = | \mathcal{F}[L_f(\omega)] |^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} | \lg P_f(\omega) | e^{-i\omega\tau} d\omega.$$

倒频谱 $C_f(\tau)$ 实质上是将频域表现再作 Fourier 变换处理,它具有时域的量纲.但

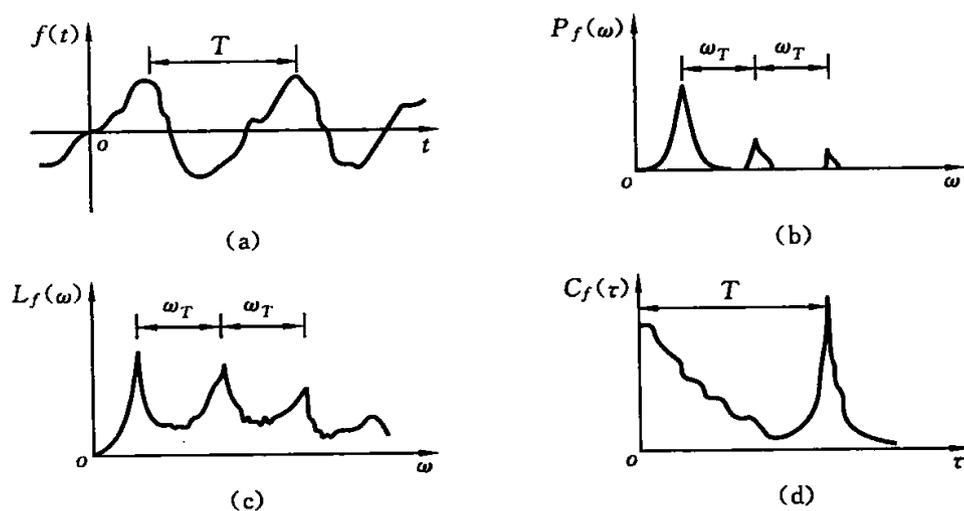


图 1.20 关于功率谱、对数功率谱和倒频谱示意图

应注意,它是一种新的时域表现形式,绝不是原信号的表现.倒频谱形式有什么特点呢?以下从两个方面加以说明.

(1) 由自相关、对数功率谱和倒频谱的定义,不难看出如下两个 Fourier 变换对

$$\begin{aligned} R_{ff}(t) &\longleftrightarrow P_f(\omega), \\ C_f(\tau) &\longleftrightarrow |\lg P_f(\omega)|. \end{aligned}$$

在时域周期性表现方面, $C_f(\tau)$ 与 $R_{ff}(t)$ 类似,它们都能表现原信号在时域中的周期性;在频域周期性表现方面,原信号在频域中的周期性应在 $P_f(\omega)$ 中有所表现, $P_f(\omega)$ 中的频域周期性表现又同于 $|\lg P_f(\omega)|$ 中的表现.总之,倒频谱 $C_f(\tau)$ 中能表现原信号在时域中的周期性.

(2) 由倒频谱的定义可以看出,尽管不同频段的信号共同作用在一起是复杂的,但其对数功率谱可将不同频段的功率谱表现为叠加性;再作 Fourier 变换,即作倒频谱,还将保持不同频段表现的叠加性.所以,倒频谱可实现不同频段表现的分离.

在倒频谱中,不同频段的能量集中表现是如何分离的呢?由于倒频变换的变换因子为

$$e^{-i\omega\tau} = \cos\omega\tau - i\sin\omega\tau,$$

τ 值小对应着谐波频率变动小, τ 值大对应着谐波频率变动大.于是,在原信号中既含有低频率变动的信号又含有高频率变动的信号时, $C_f(\tau)$ 能有效地将这两部分表现加以区分和隔离.

根据这些分析,再来观察图 1.20(d),则可看出倒频谱图所表现的内容.图中右边的峰值是原信号中较高频率那部分的一种综合表现,它被放大了,它与低频综合表现分离了;低频表现的峰值和高频表现峰值之间的距离 T 反映了这两类信号

的相关距离,也就是原信号的时域周期.时域周期和频域周期的关系为 $T=1/\omega_T$.

对数功率谱和倒频谱在语音分析中有较好的应用效果.

语音信号是由多个环节对声波进行调制的结果.第一,由间隔中断气流经发音器官产生一种始止调制的声波,这是一种 10 Hz 以下的次声波,人们是听不到的;第二,由声带调制产生基频声波,它一般在 75~500 Hz 范围内,男声偏低,女声偏高,基频波是声音的主要特征;第三,由摩擦产生调制声波,摩擦调制声波的频率范围很宽,还带有随机性;第四,经鼻腔和口腔调制改变音色.不同的调制组合能发出各种语音.最后形成的语音信号的频率范围为 50~2 000 Hz(歌唱信号的频率范围为 50~2 500 Hz).

对一个具体的字母的发音来说,它由基本发音(频率偏低,强度或大或小)、共振发音(频率中等,强度有大、小之别)和摩擦发音(频率偏高,强度偏低)三个环节组成.如何显现这些发音细节的频域特征呢?用对数功率谱或倒频谱可以将这些不同频段的细节显现出来.

例如,某男声关于元音“i”读音的对数功率谱(倒频谱图类似,仅是坐标变量要作改变)如图 1.21 所示,图中出现四个主要的共振峰.

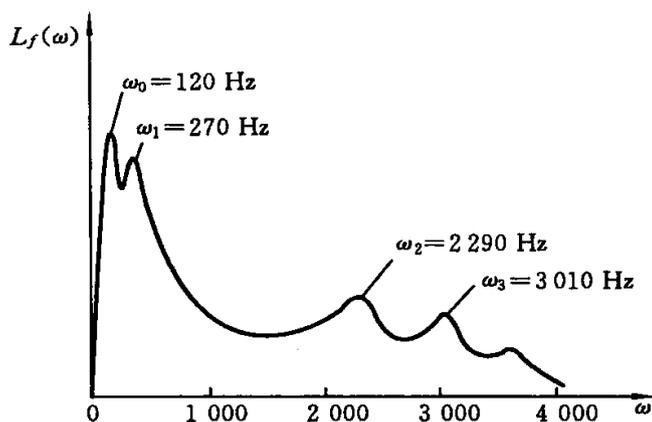


图 1.21 男声关于“i”读音的对数功率谱

第一个峰值处是基频 $\omega_0=120$ Hz,男声一般的基频范围为 80~160 Hz,女声一般的基频范围为 160~400 Hz.

第二个峰值处是喉部开启状况的振动频率 $\omega_1=270$ Hz.

第三个峰值处是舌根限制发音的那部分振动频率 $\omega_2=2 290$ Hz.

第四个峰值对应着收音时音调的共振频率 $\omega_3=3 010$ Hz.

图 1.22 表示的是三个汉语单词男、女声的对数功率谱,这些图的含义与图 1.21 中的解释相同.

应该明白,这些发音频谱图的表现,主要是由发音人固有条件所决定的,例如声带和口腔的结构、发音的习惯等条件决定了对数功率谱图的特性表现.尽管环境改变会影响时域的音调波形,但这个谱图一般不随外界环境而改变.

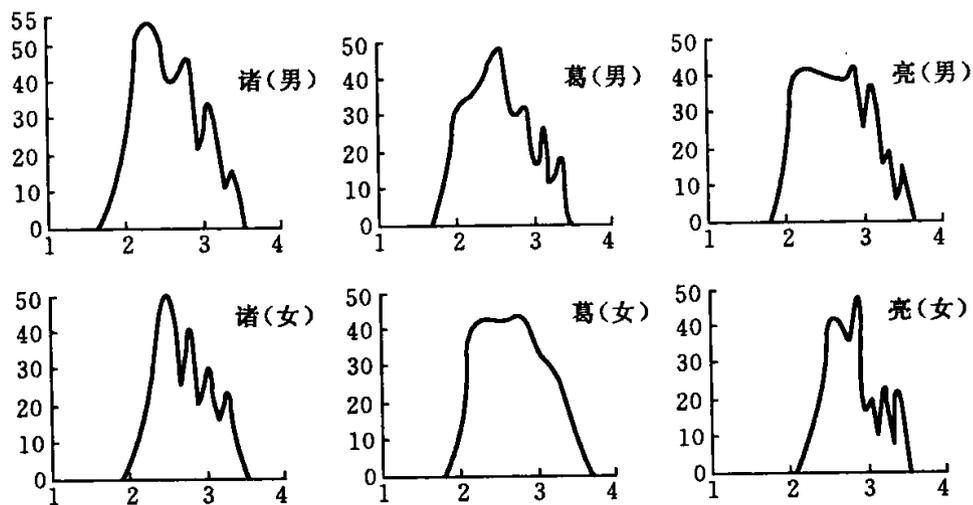


图 1.22 三个汉语单词男、女声的对数功率谱图

第2章 窗口 Fourier 变换

Fourier 分析在信号分析处理中的杰出贡献,在于它将复杂的时域信号转换到频域中,时域信号和频域信号组成 Fourier 变换对,人们既可以在时域中分析信号,也可以在频域中更细致地作出特殊分析.无论在时域还是在频域,Fourier 变换都是定义在 \mathbf{R} 上的,它不能分析局部时域信号的局部频谱特性,它没有时-频局部化功能.本章介绍的窗口 Fourier 变换(简记为 WFT)正是在时-频局部分析方面取得了本质性的进步.本章中关于时-频局部化的概念和表述,关于时-频窗的含义及其度量办法,对以后章节的学习都是重要的.

2.1 短时的时-频分析需要

实际中待分析的确定性的时域信号常分为平稳信号和非平稳信号.平稳信号的变化较平缓;非平稳信号的变化急剧,甚至有突变表现.如音乐信号、语音信号、探地信号、电网中含有用电故障表现的电压信号等,都是非平稳信号.对于非平稳信号,人们常常需要了解某局部段的时域信号所对应的频谱特性,也常常需要了解某频段的频谱表现所对应的时域表现.

具体地说,对于音乐信号,人们希望了解某段时域信号所反映的主要频率范围,也想了解某些频段的信号表现得是否丰富,希望通过改变频率特性来改变音乐信号的听觉效果.对于语音信号,人们希望了解按单词读音将时域信号分段,分析每段时域信号的频谱特征,以便判断这段信号所代表的单词读音.对于桩基施工所采集的信号,人们希望知道所表现的什么局部时域信号对应着桩基前端达到什么性质的地层,什么局部时域信号表示桩基发生了断裂现象.对于电网运行所采集的电压信号,人们希望实时地对电网运行信号进行监测分析,快速判断故障信号的特征,判断故障的类型以及故障发生的时间和地点,这样的即时反应才能保证电网正常运行.

总之,人们在分析信号时,常常需要对信号先作时域局部化处理,例如按要求分段,再作频域分析;也常常需要对信号先作频域局部化处理,例如低频分离处理、频带分离处理和高频分离处理,再用频域信号的改变来获得所需的时域信号;还有,希望时域和频域都能作出时-频局部化处理,以建立局部时域信号和局部频域信号的对应关系.这些就是实际需要中所提出的关于短时段时域信号所对应的局部频域特性的要求,即时-频局部化的要求.

传统的 Fourier 分析对上述时-频局部化要求是无能为力的.只要仔细观察分

析 Fourier 变换的表达式

$$F(\omega) = \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbf{R},$$

即可明白其中的原因. 一方面, Fourier 变换要求提供 $f(t), t \in \mathbf{R}$ 的全部信息, 即使截取短时段信号 $f(t), t \in [-T/2, T/2]$, 但 $F(\omega)$ 提供的是关于 $\omega \in \mathbf{R}$ 的全部信息, 主要反映这个短时段时域信号的那些局部频域特性却无法知道. 另一方面, 时域信号 $f(t)$ 的局部改变会影响其 $F(\omega)$ 的全局改变, $F(\omega)$ 在某个特定的 ω^* 处的表现不可能通过局部时域信号得到, 它需要提供 $f(t), t \in \mathbf{R}$ 的全部信息. 特别值得注意的是, $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1, \mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega)] = 1/(2\pi)$, 这清楚地表明: 时域中某点的局部变化会影响频域全局; 同样, 频域中的某点的局部变化也会影响到时域全局. 因此, Fourier 分析方法没有时-频局部化功能.

2.2 卷积与窗

卷积的 Fourier 变换对

$$f(t) * w(t) \leftrightarrow \hat{f}(\omega) \cdot \hat{w}(\omega), \quad (2.1)$$

$$f(t) \cdot w(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \hat{f}(\omega) * \hat{w}(\omega) \quad (2.2)$$

提供了关于时域局部化或者频域局部化的一种办法. 在下面的讨论中, $f(t)$ 始终用来表示待分析的时域信号, $\hat{f}(\omega)$ 是其频谱表示; $w(t)$ 表示为实现局部化所选用的时域函数(信号), $\hat{w}(\omega)$ 是其相应的频谱表现; $w(t)$ 的不同选择, 将会导致时域或频域中的不同的局部化效果.

1. 理想频窗函数和理想滤波器

先观察式(2.1)右边以及 $\hat{w}(\omega)$ 在频域中所能起到的局部化作用. 人们可以在频域中选择形式最简单的矩形函数 $\hat{w}(\omega - \omega^*)$, 用 $\hat{f}(\omega) \cdot \hat{w}(\omega - \omega^*)$ 对 $\hat{f}(\omega)$ 实现低通滤波、带通滤波和高通滤波; 也可以选择频域中的线性样条函数(山形函数)和二次样条函数(经过伸缩变化)作为滤波器. 如图 2.1 所示, 滤波器的滤波范围为 $[\omega^* - \Delta_\omega, \omega^* + \Delta_\omega]$, ω^* 表示滤波的中心频率, Δ_ω 表示滤波频率的影响半径.

形如图 2.1 所示的 $\hat{w}(\omega)$ 称为频窗函数, 也称为滤波器. 当 $\omega^* = 0$ 时, 它们为低通滤波器; 当 $\omega^* \neq 0$ 时, 它们是带通滤波器. 当然, $\hat{f}(\omega)$ 减去低通的频率分量就实现了高通滤波.

由式(2.1)可知, 滤波在频域中表现为 $\hat{f}(\omega) \cdot \hat{w}(\omega)$, 频域的局部化表现得很清楚; 滤波在时域中表现为 $f(t) * w(t)$, 这是定义在 \mathbf{R} 上的卷积. 然而, 在实际应

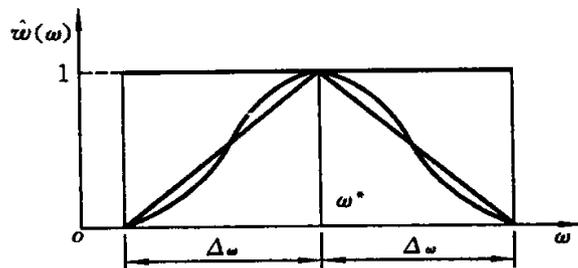


图 2.1 三种理想的滤波器(频窗函数)

用中,卷积只能在有限的时段中进行,所以卷积所对应的频域滤波效果就不再是如图 2.1 所示的理想情形了.

滤波在信号处理中是非常重要的,应用也极其广泛.例如,传播信号是确定频率的(像激光、雷达、声呐信号等),或者是固定频段的(像电话、电视信号等),为了消去在传播过程中混入的噪声,用带通滤波是有效的.又如,几个不同频段的信号混叠在一起传播,可使用带通滤波将这些信号分离开.还如,要消去音乐中刺耳的高频噪声,应该使用低通滤波.

2. 理想时窗函数及其频域表现

再观察式(2.2)左边以及 $w(t)$ 在时域中所能起到的局部化作用.人们可在时域中选择形式最简单的矩形函数 $w(t-t^*)$,用 $f(t) \cdot w(t-t^*)$ 来实现对 $f(t)$ 的开窗效果,即实现在时域中的局部化效果;人们也可选择在时域中具有局部作用的线性样条函数(山形函数)和二次样条函数(经伸缩变化)等时窗函数.如图 2.2 所示,这些时窗函数的开窗范围为 $[t^* - \Delta_t, t^* + \Delta_t]$, t^* 表示开窗的中心位置, Δ_t 表示开窗的影响半径.

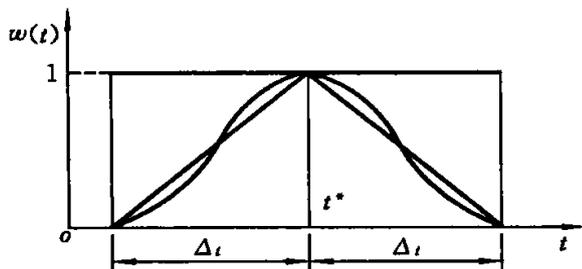


图 2.2 三种时窗函数示意图

形如图 2.2 所示的三种时窗函数,它们在时域中的支集(即定义域)是有限范围的,开窗效果在时域中 $f(t)w(t-t^*)$ 表现得非常清楚;但开窗效果在频域中为 $\hat{f}(\omega) * \hat{w}(\omega)$,这也是一个定义在 $\omega \in \mathbb{R}$ 上的卷积,实际计算这个卷积也需要作有限截断.

3. 对卷积的进一步理解

第 1 章中曾经对卷积作过较多的讨论,这里将对卷积的表现力作进一步讨论.

(1) 时域卷积可实现滤波.人们只要确定滤波器 $\hat{w}(\omega)$,那么在频域中的开窗(滤波)效果和应用含义都是直观的,其滤波效果可通过时域中的卷积来实现且实现过程是简单的.

(2) 时域卷积可看做内积.对比它们的运算定义:

$$\text{内积} \quad (f(t), w(t)) = \int_{\mathbb{R}} f(t)w(t)dt,$$

$$\text{卷积} \quad (f * w)(\tau) = \int_{\mathbb{R}} f(t)w(\tau - t)dt.$$

可以看出:内积是一个具体数值;卷积具有内积形式,对于确定的 τ 它是一个数值,对于变化的 τ 它是一个函数.

(3) 时域卷积可看做积分变换.这里将 $w(\tau-t)$ 看做变换因子,原信号 $f(t)$ 经积分变换后演变成为一个新的函数(模拟信号).

(4) 时域卷积可看做信号 $f(t)$ 在 $t = -\tau$ 附近的局部化处理, 此时的时窗函数为 $w(-t)$.

2.3 WFT 的基本思想

为克服 Fourier 变换在时-频局部化方面的不足, 也为了对时域信号作局部分析, D. Gabor 于 1946 年提出了 WFT 方法.

WFT 的数学形式为

$$(Gf)(\omega, b) = \int_{\mathbf{R}} f(t)w(t-b)e^{-i\omega t} dt. \quad (2.3)$$

其中, 实函数 $w(t)$ 为时窗函数. 由于式(2.3)右边形式是由 Gabor 提出的一种积分变换, 此类变换称为 Gabor 变换, 变换结果是关于 ω 和 b 的函数, 故用记号 $(Gf)(\omega, b)$ 表示这种变换.

WFT(即式(2.3))实现时域和频域局部化的基本思想是重要的. 在时域局部化方面, 它通过引进的时窗函数 $w(t)$, 使时域信号 $f(t)$ 在 $t=b$ 附近被局部化为 $f(t)w(t-b)$ (见图 2.3). 在频域局部化表现方面, 要观察 $(Gf)(\omega, b)$ 的表现. 为此, 利用卷积定理(见式(2.2)), 有

$$\begin{aligned} (Gf)(\omega, b) &= \mathcal{F}[f(t) \cdot w(t-b)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[f(t)] * \mathcal{F}[w(t-b)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \hat{f}(\omega) * [\hat{w}(\omega)e^{-i\omega b}] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{w}(\xi-\omega)} e^{i(\xi-\omega)b} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega b} \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\xi) \overline{\hat{w}(\xi-\omega)}](b). \end{aligned} \quad (2.4)$$

其中, $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$, $\hat{w}(\omega) = \mathcal{F}[w(t)]$ 是通用记号. 由式(2.3)、(2.4)可清楚地看出, WFT 的结果是关于 ω 和 b 的函数; 若将 b 固定, 则它是关于 ω 的函数; 若 $\hat{w}(\omega)$ 在 $\omega = \eta$ 附近是有局部化作用的, 则 $\hat{f}(\xi) \overline{\hat{w}(\xi-\omega)}$ 在 $\omega = \eta$ 附近是被局部化

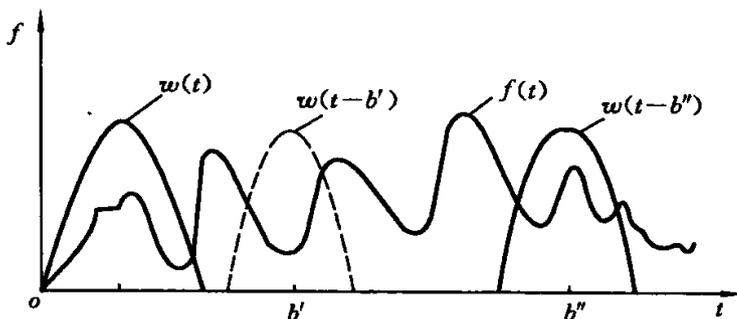


图 2.3 时窗函数 $w(t)$ 的时域局部化表现

的, 频域信息 $\hat{f}(\omega)$ 就能在 $\omega = \eta$ 附近被局部化. 总之, 粗略地看, WFT 是在 $t = b$ 附近的时间窗中观察时域信号 $f(t)$, 在 $\omega = \eta$ 附近的频率窗中观察频域信号 $\hat{f}(\omega)$. 显然, 要使 WFT 能用于时-频局部化分析, 必须对 $w(t)$ 和 $\hat{w}(\omega)$ 提出合适的要求.

在没有进一步深入讨论之前, 下面举一个如图 2.4 所示的简单例子, 从中可以初步观察 WFT 在时-频局部化分析方面的效果和作用. 这里选用 $w(t)$ 如下:

$$f(t) = \sin \pi t^2,$$

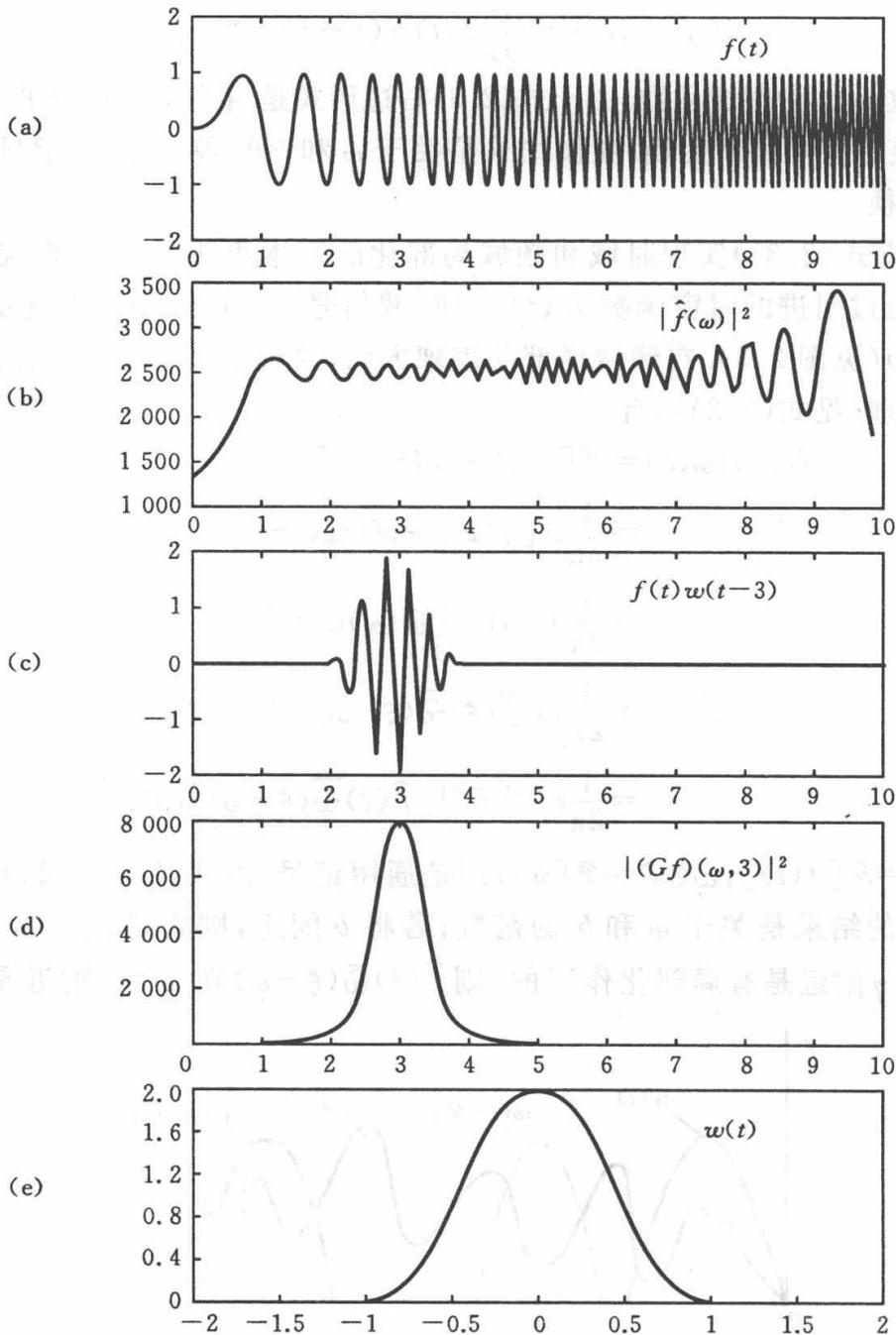


图 2.4 WFT 在时频局部化方面的表现

$$w(t) = \begin{cases} 1 + \cos\pi t, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

$w(t)$ 如图 2.4(e)所示. 选用信号 $f(t)$ 如图 2.4(a)所示,其能量密度分布 $|\hat{f}(\omega)|^2$ 如图 2.4(b)所示,可以看出,Fourier 分析是不能表现时-频局部化特性的. 当时窗采用 $w(t-3)$ 时, $f(t)w(t-3)$ 有时域局部化表现(见图 2.4(c)); $(Gf)(\omega, 3)$ 的能量密度分布如图 2.4(d)所示,局部频率能量集中在 $\omega=3$ 附近,这样就达到了局部分析的目的. 若将时窗函数右移,则 $f(t)$ 在时域被局部化的表现会发生变化,其窗口 Fourier 变换所表现的局部频率的能量大小和位置也将发生变化,同样可通过分析得到此时的频率特征.

2.4 时窗、频窗、时-频窗及其度量

1. 时窗及其度量

时窗函数起着时域局部化的作用,时域信号 $f(t)$ 通过形式 $f(t)w(t)$ 只要能在某种度量标准下被局部化, $w(t)$ 就可视为时窗函数. 因此,时窗函数的定义域可以是有限的,也可以是无限制的;时窗函数的图形可以是偶对称的、奇对称的,也可以是不对称的. 时窗函数一般是实函数. 时窗函数 $w(t)$ 的开窗效果是用时窗中心 $t^*[w(t)]$ 和时窗半径 $\Delta_t[w(t)]$ 来表示的,若无须指明时窗函数,可直接使用记号 t^* 和 Δ_t .

时窗中心可仿照力学中关于重心的描述来定义,时窗中心应是一个有限值,即

$$t^* = \frac{\int_{\mathbf{R}} t |w(t)|^2 dt}{\int_{\mathbf{R}} |w(t)|^2 dt} < +\infty.$$

时窗半径可仿照力学中求矩量的办法来定义,时窗半径也应是一个有限值,即

$$\Delta_t = \left[\frac{\int_{\mathbf{R}} (t-t^*)^2 |w(t)|^2 dt}{\int_{\mathbf{R}} |w(t)|^2 dt} \right]^{1/2} < +\infty.$$

特别地,令 $\int_{\mathbf{R}} |w(t)|^2 dt = 1$,这可以通过调整 $w(t)$ 的形状简单地做到. 此时,时窗函数 $w(t-b)$ 当 $b=0$ 时的时窗中心和时窗半径定义为

$$\begin{cases} t^* = \int_{\mathbf{R}} t |w(t)|^2 dt, \\ \Delta_t = \left[\int_{\mathbf{R}} (t-t^*)^2 |w(t)|^2 dt \right]^{1/2}. \end{cases} \quad (2.6)$$

在此定义下,当 $w(t-b)$, $b=0$ 时,时窗函数的限时作用表现为:以 t^* 为中心的 $[t^* - \Delta_t, t^* + \Delta_t]$ 范围,时窗宽度为 $2\Delta_t$.

同样,在此定义下,对 $w(t-b)$, $b \neq 0$ 的情形,利用时窗中心和时窗半径的直观

几何含义, 不难理解

$$\begin{cases} t^* [w(t-b)] = t^* [w(t)] + b, \\ \Delta_t [w(t-b)] = \Delta_t [w(t)]. \end{cases} \quad (2.7)$$

事实上, 数学推导也是成立的, 利用式(2.5), 有

$$\begin{aligned} t^* [w(t-b)] &= \int_{\mathbf{R}} t |w(t-b)|^2 dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} (x+b) |w(x)|^2 dx \\ &= t^* [w(t)] + b, \\ |\Delta_t [w(t-b)]|^2 &= \int_{\mathbf{R}} [t - (t^* + b)]^2 |w(t-b)|^2 dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} [x + b - (t^* - b)]^2 |w(x)|^2 dx \\ &= \int_{\mathbf{R}} |t - t^*|^2 |w(t)|^2 dt \\ &= \Delta_t [w(t)]^2. \end{aligned}$$

2. 频窗及其度量

在 WFT 中, $w(t)$ 起着时域局部化的作用, $\hat{w}(\omega)$ 起着频域局部化的作用, $w(t)$ 是时窗函数, $\hat{w}(\omega)$ 是频窗函数. 频域信号 $\hat{f}(\omega)$ 通过形式 $\hat{f}(\omega)\hat{w}(\omega)$ 只要能在某种度量标准下被局部化, $\hat{w}(\omega)$ 就可视为频窗函数. 因此, 频窗函数 $\hat{w}(\omega)$ 的定义域可以是有限的, 也可以是无限制的; 频窗函数 $\hat{w}(\omega)$ 可以是实函数, 也可以是复函数; 它的图形 $|\hat{w}(\omega)|$ 可以是偶对称的或奇对称的, 也可以是不对称的. 频窗函数的开窗效果度量类似于时窗效果度量(见式(2.6)).

频窗中心 ω^* 和频窗半径 Δ_ω 都是有限值, 它们定义为

$$\begin{cases} \omega^* = \frac{\int_{\mathbf{R}} \omega |\hat{w}(\omega)|^2 d\omega}{\int_{\mathbf{R}} |\hat{w}(\omega)|^2 d\omega}, \\ \Delta_\omega = \left[\frac{\int_{\mathbf{R}} (\omega - \omega^*)^2 |\hat{w}(\omega)|^2 d\omega}{\int_{\mathbf{R}} |\hat{w}(\omega)|^2 d\omega} \right]^{1/2}. \end{cases} \quad (2.8)$$

同时窗一样, 频窗平移 η 后, 有

$$\begin{cases} \omega^* [\hat{w}(\omega-\eta)] = \omega^* + \eta, \\ \Delta_\omega [\hat{w}(\omega-\eta)] = \Delta_\omega. \end{cases} \quad (2.9)$$

3. 时-频窗及其度量

应该看出, 如果 $w(t)$ 是时窗函数, 不一定能保证 $\hat{w}(\omega)$ 是频窗函数; 反之, 如果

$\hat{w}(\omega)$ 是频窗函数, 也不一定能保证 $w(t)$ 是时窗函数.

所谓窗函数 $w(t)$, 要求它不仅可作时窗函数, 还要求 $\hat{w}(\omega)$ 能作频窗函数. 这就对窗函数提出了更高的要求.

一方面, $w(t)$ 是时窗函数, 时窗中心 t^* 和时窗半径 Δ_t 都是有限值, 它满足式 (2.6) 中的较强的限制, 即

$$\int_{\mathbf{R}} t^2 |w(t)|^2 dt < +\infty.$$

据 \mathbf{R} 上定积分存在判别法则, 应要求: 当 $|t| \rightarrow \infty$ 时, $|t|^2 |w(t)|^2 < 1/|t|$; 再注意到在 $t=0$ 处的连续性, 所以 $|w(t)|$ 的衰减性可表示为

$$|w(t)| \leq \frac{K}{1+|t|^{3/2+\epsilon}}, \quad (2.10)$$

其中 $\epsilon > 0$ 是一个小的正数. 这就是说, 当 $|t| \rightarrow \infty$ 时, $|w(t)|$ 的衰减速度应比 $1/|t|^{3/2}$ 快.

另一方面, $\hat{w}(\omega)$ 是频窗函数, 频窗中心 ω^* 和频窗半径 Δ_ω 都是有限值, 它满足式 (2.8) 中的较强的限制, 即

$$\int_{\mathbf{R}} \omega^2 |\hat{w}(\omega)|^2 d\omega < +\infty.$$

同样易知, 此时应满足

$$|\hat{w}(\omega)| \leq \frac{K}{1+|\omega|^{3/2+\epsilon}}. \quad (2.11)$$

总之, 窗函数 $w(t)$ 及其频域表现 $\hat{w}(\omega)$ 应同时具有较强的衰减性 (见式 (2.10) 和式 (2.11)). 因此, 为了实现对信号时-频局部化分析, 要精心选择窗函数.

窗函数的时-频局部化效果的度量应在时域和频域这两方面同时进行为宜. 它的时域局部化作用被限制在时窗区间 $[(t^* - b) - \Delta_t, (t^* - b) + \Delta_t]$ 范围内, 它的频域局部化作用被局限在频窗区间 $[(\omega^* + \eta) - \Delta_\omega, (\omega^* + \eta) + \Delta_\omega]$ 范围内. 于是, 可构建时-频坐标系 (参见图 2.5), 用时窗区间和频窗区间形成一个矩形的时-频窗. 时-频窗是窗函数的时-频局部化功能的几何直观的描述.

另外, 由式 (2.7) 和式 (2.9) 可知, 在 WFT 中, 在时窗中心和频窗中心有移动的情形下, 若窗函数 $w(t)$ 不变, 则其窗半径 Δ_t 和 Δ_ω 是不会改变的. 换句话说, 在 WFT 的时-频坐标系中, 任意的窗中心 (b, η) 所在的时频窗面积恒为 $4\Delta_t\Delta_\omega$ 不变.

4. Gauss 窗函数

前面已讨论了窗函数所必须满足的条件式 (2.10) 和式 (2.11), 简言之, 窗函数在时域和频域中都具有快速衰减性. 很多函数都可以作为窗函数, 例如式 (2.5) 所示的一段余弦函数, 1.3 节中介绍的矩形函数、山形函

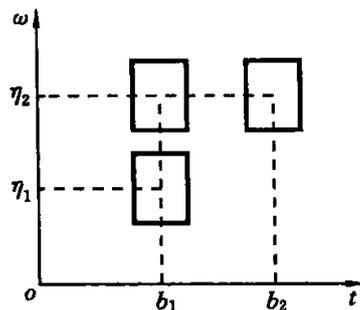


图 2.5 WFT 时窗示意图

数、 m 次样条函数等。

这里重点介绍 Gauss 窗函数。取用 Gauss 函数的变形形式(见式(1.23)和图1.9)

$$g_a(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-t^2/(4a)}, \quad a > 0$$

作为时窗函数,从图形上看, $g_a(t)$ 是偶对称且是快速衰减的。可以选择实常数 $a > 0$ 来实现函数的伸缩,调整时窗的宽窄;也可以选择实常数 b ,使 $g_a(t-b)$ 实现函数平移,调整时窗的位置。因为

$$\hat{g}_a(\omega) = \frac{1}{4a} e^{-a\omega^2}, \quad a > 0$$

仍是 Gauss 函数,也是偶对称和快速衰减的,所以 $\hat{g}_a(\omega)$ 又可作频窗函数。

可方便地看出,其时窗中心和频窗中心为

$$t^* [g_a(t)] = 0,$$

$$\omega^* [\hat{g}_a(\omega)] = 0.$$

为了计算时窗和频窗半径,要用到公式

$$\begin{cases} \int_{\mathbf{R}} e^{-\xi t^2} dt = \pi^{1/2} \xi^{-1/2}, \\ \int_{\mathbf{R}} t^2 e^{-\xi t^2} dt = \frac{1}{2} \pi^{1/2} \xi^{-3/2}. \end{cases}$$

只要令 $\xi=1/(4a)$,就有

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} [g_a(t)]^2 dt &= (8\pi a)^{-1/4}, \\ \int_{\mathbf{R}} t^2 [g_a(t)]^2 dt &= \left[\frac{1}{4\pi a} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} (2a)^{3/2} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

再按式(2.6)算出

$$\Delta_t [g_a(t)] = \sqrt{a}.$$

同理,令 $\xi=a, t=\omega$,即可算出

$$\Delta_\omega [\hat{g}_a(\omega)] = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

于是,当采用 $g_a(t-b)$ 作窗函数时,

时-频窗中心坐标为 (b, η) ,

时-频窗位置为 $[b-\Delta_t, b+\Delta_t] \times [\eta-\Delta_\omega, \eta+\Delta_\omega]$,

时-频窗面积为 $A = (2\Delta_t)(2\Delta_\omega) = 2$.

$g_a(t-b)$ 作为窗函数时,相应的 WFT 在 ω 相平面中的时-频窗如图 2.5 所示。

在 WFT 中,用 $g_a(t)$ 作窗函数和同其它的 $w(t)$ 作窗函数一样,无论时-频窗

中心 (b, η) 处于何处,时-频窗总是形状相同且面积相同的。

5. 时-频局部化的两个例子

据前面分析可知,WFT 能分析不同的局部时域信号有哪些不同的频域表现。下面就不改变和改变窗函数的情形举例说明。

应用例 1 关于不改变窗函数的情形.如图 2.4 所示的振动信号,可用相同的窗函数对不同时段开窗.可以发现,在时窗中心 $t^* = 3$ 时,WFT 结果表明频域能量大致集中在 $\omega^* = 3$ 附近.同样可以推算和验证,在时窗中心移至 $t^* = 7$ 附近时,变换结果表明频域能量大致集中在 $\omega^* = 7.2$ 附近.从时-频窗角度看,由于窗函数没有改变,所以时-频窗的形状和面积都没有发生变化,但是由于信号是非规则的,在时窗中心 t^* 改变的同时,频窗中心 ω^* 也改变了。

应用例 2 关于改变窗函数的情形.设有一连串单词读音的语音信号,人们不仅需要不同单词读音的信号段分离,而且还要在频域中分析各个时段信号(对应不同单词读音)的频谱特征.区分单词读音的办法有多种,例如能量法就是其中的一种.对一长串语音信号先作短时段的能量分布图,即取 N 个数据作平方和,

图 2.6 就是关于读音“WHAT SHE SAID”信号取用不同 N 值的能量分布图.由于每个单词读音的能量都有一个急剧增长和急剧减弱的规律,所以能量分布图可以用来区分每个单词的时段信号.能量分布图可以从能量角度对单词分类,例如元音信号能量大,浊辅音能量次之,清辅音能量较小.当然还可采用其它方法联合判断出每个单词的时域信号段.应该看到,不同单词读音信号的长度是不相同的,所以,对不同长度的信号段要改变时窗长度,一般采用变长度的矩形窗函数,才能对每个单词作时域的 WFT,才能获得关于每个单词的功率谱、对数功率谱,才能获得关于每个单词的频域特征.图 1.22 所示的就是不同单词的对数功率谱,人们从中可区分出关于喉内发音、喉前发音、口腔发音和舌前发音的特征表现。

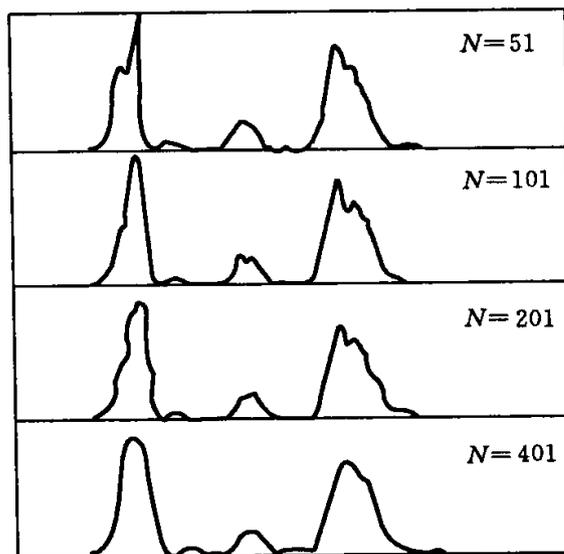


图 2.6 关于“WHAT SHE SAID”语音取不同 N 值所对应的能量分布图

2.5 WFT 反演公式

任何一种积分变换,只有当它具有反演公式时,它才会有意义。

相应于式(2.3)的 WFT 反演公式为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} [e^{i\omega t} (Gf)(\omega, b)] w(t-b) d\omega db. \quad (2.12)$$

其中, 函数 $f(t)$ 经 WFT 得到 $(Gf)(\omega, b)$, 它是关于连续变量 $\omega \in \mathbf{R}$ 和 $b \in \mathbf{R}$ 的函数, 故式(2.12)中会出现对 $\omega \in \mathbf{R}$ 和 $b \in \mathbf{R}$ 的积分.

式(2.12)的证明是不难的. 事实上, 先把式(2.3)中的 $f(t)w(t-b)$ 看做整体形式, 再对 $(Gf)(\omega, b)$ 作 Fourier 逆变换, 有

$$f(t)w(t-b) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{i\omega t} (Gf)(\omega, b) d\omega,$$

上式两边同时乘以 $w(t-b)$, 再对变量 b 积分. 注意, 对实函数 $w(t-b)$ 总可假定

$$\int_{\mathbf{R}} [w(t)]^2 dt = \int_{\mathbf{R}} [w(t-b)]^2 db = 1. \quad (2.13)$$

这样就可以看出式(2.12)的正确性.

类似于 Fourier 变换的乘积定理和 Parseval 等式, WFT 也有相应的公式

$$\int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} (Gf)(\omega, b) \overline{(Gg)(\omega, b)} d\omega db = 2\pi \int_{\mathbf{R}} f(t)g(t) dt, \quad (2.14)$$

$$\int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} |(Gf)(\omega, b)|^2 d\omega db = 2\pi \int_{\mathbf{R}} [f(t)]^2 dt. \quad (2.15)$$

其中, $f(t)$ 、 $g(t)$ 和 $w(t)$ 都是实函数.

下面证明式(2.14).

先把 WFT 看做某函数的 Fourier 变换, 即

$$(Gf)(\omega, b) = \mathcal{F}[f(t)w(t)],$$

于是利用 Parseval 等式, 有

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}} (Gf)(\omega, b) \overline{(Gg)(\omega, b)} d\omega \\ &= \int_{\mathbf{R}} \mathcal{F}[f(t)w(t-b)] \overline{\mathcal{F}[g(t)w(t-b)]} d\omega \\ &= 2\pi \int_{\mathbf{R}} [f(t)w(t-b)] \overline{[g(t)w(t-b)]} dt \\ &= 2\pi \int_{\mathbf{R}} f(t)g(t)[w(t-b)]^2 dt, \end{aligned}$$

再将上式对变量 b 积分, 并利用式(2.13), 立即可证得式(2.14).

在式(2.14)中令 $g(t) = f(t)$, 即有式(2.15).

2.6 WFT 的某些局限性

就时-频局部化而言, WFT 在 Fourier 分析的基础上取得了本质的进步. 用 WFT 分析信号可在时-频窗这个局部范围内观察, 时-频窗面积反映了时-频局部化的精细程度. 是否可选择某个窗函数, 能使时-频窗面积充分小呢? Heissenberg 测不准原理表明, 任何窗函数所相应的时-频窗面积都有 $A \geq 2$. 这就是说, 就时-频

窗面积而言, Gauss 窗函数 $g_a(t)$ 已经是最好的结果了.

时-频局部化的精细程度还反映在时-频窗形状上. 低频信号的特点是, 在较大的时间范围内幅值变化慢, 其频率范围窄, 于是分析低频信号的时-频窗特点应是时窗宽且频窗窄; 高频信号的特点是, 在较小的时间范围内幅值变化快, 其频率范围宽, 于是分析高频信号的时-频窗特点应是时窗窄且频窗宽. WFT 分析信号的时-频窗形状有什么表现呢? 以 Gauss 窗函数 $g_a(t-b)$ 为例, 选定 a , 其时-频窗形状确定; $g_a(t-b_1)$ 和 $g_a(t-b_2)$ 的时-频窗的形状不变; $f(t)g_a(t-b_1)$ 和 $f(t)g_a(t-b_2)$ 这两处局部化信号的频带和频率中心不变, 不变形状的时-频窗从 b_1 处移至 b_2 处; 若时窗 $g_a(t-b_1)$ 不变, 信号由 $f(t)$ 变为 $\tilde{f}(t)$, 则 $f(t)w(t-b_1)$ 和 $\tilde{f}(t)w(t-b_1)$ 的中心频率将由 η_1 处移至 η_2 处, 此时的时-频窗形状仍然不变(见图 2.5); 为了分析局部低频信号, 可选择较大的参数 a , 使 Δ_t 增大, Δ_ω 变窄; 为了分析局部高频信号, 可再选择较小的参数 a , 使 Δ_t 变窄, Δ_ω 变宽. 总之, 虽然 WFT 可分析低频和高频信号, 但其表现显得呆滞; 若用确定 a 的时-频窗来分析同一信号的不同时段, 则有时适合, 有时不适合; 若通过调整参数 a 来分析同一信号的不同时段, 则又显得很麻烦.

时-频局部化的精细程度还表现于分析高、低频信号的自适应时-频窗方面. 在给定的实际模拟信号中, 常常同时含有表示某种特定情况的低频信号段和表示另外特定情况的高频信号段, 此时需要一种自适应的时-频局部化方法. 也就是说, 选择某个窗函数, 希望其时-频窗形状是自适应变化的, 对低频信号, 其窗口形状自动变得扁平, 对高频信号, 其窗口形状自动变得瘦长. 对于这方面的要求, WFT 是无能为力的.

在时-频局部分析中往往还要求将频域分成若干个细小频带, 进一步分析信号在各个频带中的表现; 往往要分析局部的时域信号的局部频域特征, 局部时域信号在各个子频带中的局部表现; 往往还要实时地、精细程度更高地、自适应地分析信号. 对于这些要求, WFT 也是无能为力的. 下面章节介绍的小波分析方法对满足这些要求作出了杰出的贡献.

第3章 小波变换

窗口 Fourier 变换(WFT)在时-频分析中不能根据高、低频信号的特点,自适应地调整时-频窗,在时-频局部化的精细方面和灵活方面表现欠佳.小波变换可以克服 WFT 的这一缺点.针对自适应时-频窗的要求,本章从积分变换出发,先分析这种窗函数应具备的抽象形式,再分析这类窗函数应满足的条件.为了便于循序渐进地学习,我们不必急于了解小波函数的表达形式和小波变换的应用方法,因为这些问题在以后章节会有明确的论述.

3.1 自适应窗函数的设计

正如 2.5 节所讨论的那样,在实际的时-频局部分析中,需要一种自适应的时-频窗.在分析低频信号时,它的时窗宽而频窗窄;在分析高频信号时,它的时窗窄而频窗宽.什么形式的窗函数才能适应这些要求呢?为此,先分析 WFT 不能实现自适应时-频窗的原因.

在 WFT 中,通常先是以时域开窗的数学形式为主来考虑问题的,也就是说,

$$(Gf)(\omega, b) = \int_{\mathbf{R}} [f(t)w(t-b)]e^{-i\omega t} dt.$$

先将 $f(t)$ 时域局部化为 $f(t)w(t-b)$,再对开窗后局部时域信号作 Fourier 变换.因此, $w(t-b)$ 的设计难以自动适应低、高频信号在时域和频域中的局部表现,从而出现了时-频窗形状不变的特点.

也可换一个角度观察 WFT,即采用形式

$$(Gf)(\omega, b) = \int_{\mathbf{R}} f(t) \overline{\tilde{w}(\omega, t-b)} dt,$$

其中, $\tilde{w}(\omega, t-b) = w(t-b)e^{i\omega t}$.这是一种新的思考方式,在积分变换的意义下,既把 \tilde{w} 看做变换函数,又把 \tilde{w} 看做对 $f(t)$ 在时域和频域都能起限制作用的窗函数.基于这种考虑,不妨假设窗函数具有抽象形式 $\tilde{w} = \psi_{ab}(t)$,其中

$$\psi_{ab}(t) = a^{1/2} \psi(at-b), \quad a \in \mathbf{R}_+,$$

它是由 $\psi(t)$ 经平移和放缩的结果(见图 3.1).

形如 $\psi_{ab}(t)$ 的窗函数能同时在时域和频域方面具有局部化能力吗?为了定性地说明这个问题,先对

$$(Gf)(\omega, b) = \int_{\mathbf{R}} f(t) \overline{\psi_{ab}(t)} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\psi}_b(\omega)} d\omega,$$

$$\hat{\psi}_b(\omega) = a^{-1/2} e^{-i\omega \frac{b}{a}} \hat{\psi}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

的形式表现能力作观察分析.

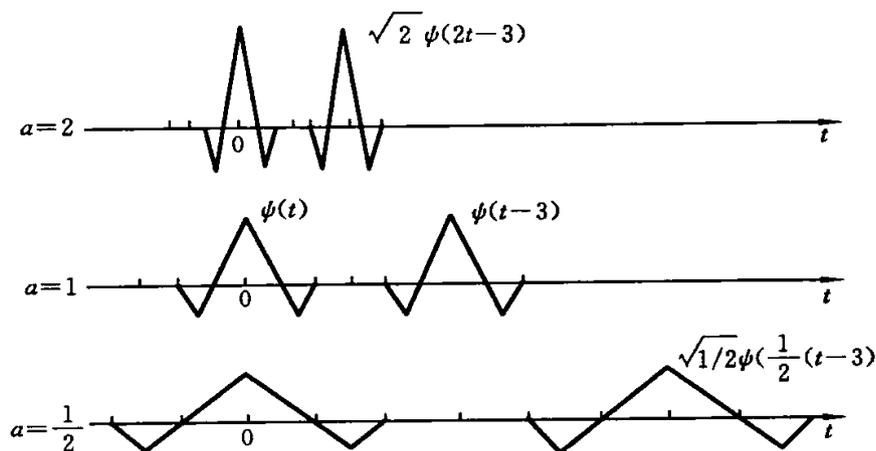


图 3.1 $\psi_{ab}(t)$ 是 $\psi(t)$ 经平移和伸缩的结果(其中 $b=3$)

对于 $a < 1$ 的情形. 若在时域中观察, $\psi(t)$ 被拉宽且振幅被压低后成为 $\psi_{ab}(t)$, 则 $\psi_{ab}(t)$ 不仅可能起到时域局部化的作用, 而且可能使时窗变得较宽. 若在频域中观察, $\hat{\psi}(\omega)$ 被压窄为 $\hat{\psi}(\omega/a)$, 则 $\hat{\psi}_{ab}(\omega)$ 不仅可能起到频域局部化的作用, 而且可能使频窗变得较窄. 这样, 在 $a < 1$ 的情况下, $\psi_{ab}(t)$ 作为窗函数, 其时-频窗可能是“扁平”的, 这就可能适应低频信号的时-频局部化的需要.

对于 $a > 1$ 的情形. 若在时域中观察, $\psi(t)$ 被压窄且振幅被拉高后成为 $\psi_{ab}(t)$, 则 $\psi_{ab}(t)$ 不仅可能起到时域局部化的作用, 而且可能使时窗变得较窄. 若在频域中观察, $\hat{\psi}(\omega)$ 被拉宽为 $\hat{\psi}(\omega/a)$, 则 $\hat{\psi}_{ab}(\omega)$ 不仅可能起到频域局部化的作用, 而且可能使频窗变得较宽. 这样, 在 $a > 1$ 的情况下, $\psi_{ab}(t)$ 作为窗函数, 其时-频窗可能是“瘦窄”的, 这就可能适应高频信号时-频局部化的需要.

总之, 引用形如 $\psi_{ab}(t)$ 的窗函数, 在 a 自动改变的情况下, 它能够对低频和高频信号起到自适应的短时分析效果.

关于上述特点, 下面会有定量的描述.

3.2 小波、小波变换的定义和条件

根据前面的分析, 把对模拟信号 $f(t)$ 的积分变换

$$W_f(a, b) = \int_{\mathbf{R}} f(t) \overline{\psi_{ab}(t)} dt \quad (3.1)$$

称为小波变换, 其中

$$\psi_{ab}(t) = a^{1/2} \psi(at - b) \quad (3.2)$$

是由 $\psi(t)$ 经平移和放缩的结果. 当满足一定允许条件时 $\psi(t)$ 称为允许小波函数.

由式(3.2)有

$$\begin{aligned} \|\psi_{ab}(t)\|_0^2 &= \int_{\mathbf{R}} |\psi_{ab}(t)|^2 dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} |a^{1/2}\psi(at-b)|^2 dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} |\psi(at-b)|^2 d(at-b) \\ &= \int_{\mathbf{R}} |\psi(t)|^2 dt \\ &= \|\psi(t)\|_0^2, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\psi_{ab}(t)] &= \hat{\psi}_{ab}(\omega) \\ &= \int_{\mathbf{R}} a^{1/2}\psi(at-b)e^{-i\omega t} dt \\ &= a^{-1/2} \int_{\mathbf{R}} \psi(at-b)e^{-i\frac{\omega}{a}(at-b)} e^{-i\omega\frac{b}{a}} d(at-b) \\ &= a^{-1/2} e^{-i\omega\frac{b}{a}} \hat{\psi}\left(\frac{\omega}{a}\right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

其中, $\|\psi(t)\|_0^2$ 表明了 $\psi(t)$ 的一种模量. 式(3.3)说明, $\psi(t)$ 经式(3.2)那样作平移和伸缩变化之后, 其模量是不变的. 式(3.4)则体现出 $\hat{\psi}_{ab}(\omega)$ 与参数 a 关联, 且会随着 a 的变化而改变.

小波变换作为一种积分变换, 只有当它能作回复变换时, 才是有意义的. 为了推导小波变换的回复公式, 需要参照 Fourier 积分变换推导回复公式所需要的乘积定理式(1.33), 即

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \mathcal{F}[f(t)] \mathcal{F}[g(t)] d\omega = \int_{\mathbf{R}} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

上式表明了变换前两个函数的能量积分和它们在变换后的能量积分之间的等价关系, 而且, 当 $g(t) = \delta(t-x)$ 时, 由上式可推导出 Fourier 逆变换公式. 受此启发, 当积分变换是小波变换时, 可以得到类似于乘积定理式(1.33)的表现形式.

$$\begin{aligned} \text{先观察} \quad W_f(a, b) &= \int_{\mathbf{R}} f(t) \overline{\psi_{ab}(t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \mathcal{F}[f(t)] \mathcal{F}[\overline{\psi_{ab}(t)}] d\omega \\ &= \frac{a^{-1/2}}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\psi}\left(\frac{\omega}{a}\right)} e^{i\frac{b}{a}\omega} d\omega \\ &= \frac{a^{1/2}}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(a\omega) \overline{\hat{\psi}(\omega)} e^{ib\omega} d\omega \\ &= \frac{a^{1/2}}{2\pi} \mathcal{F}[\hat{f}(a\omega) \overline{\hat{\psi}(\omega)}](b), \end{aligned}$$

结果是变量 b 的函数. 上式推导中用到了积分变换的共轭关系, 例如

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}} \xi(\omega) e^{i b \omega} d\omega &= \int_{\mathbf{R}} [\overline{\xi(\omega) e^{-i b \omega}}] d\omega \\ &= \overline{\mathcal{F}[\xi(\omega)]}.\end{aligned}$$

比照推导 $W_f(a, b)$ 的办法, 有

$$\begin{aligned}W_g(a, b) &= \int_{\mathbf{R}} g(t) \overline{\psi_{ab}(t)} dt \\ &= \frac{a^{1/2}}{2\pi} \overline{\mathcal{F}[\widehat{g}(a\omega) \widehat{\psi}(\omega)]}(b).\end{aligned}$$

下面再观察

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbf{R}} W_f(a, b) \overline{W_g(a, b)} db \\ &= \int_{\mathbf{R}} \left\{ \frac{a^{1/2}}{2\pi} \overline{\mathcal{F}[\widehat{f}(a\omega) \widehat{\psi}(\omega)]}(b) \right\} \left\{ \frac{a^{1/2}}{2\pi} \mathcal{F}[\widehat{g}(a\omega) \widehat{\psi}(\omega)](b) \right\} db \\ &= \frac{a}{2\pi} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \overline{\mathcal{F}[\widehat{f}(a\omega) \widehat{\psi}(\omega)]}(b) \mathcal{F}[\widehat{g}(a\omega) \widehat{\psi}(\omega)](b) db \\ &= \frac{a}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} [\widehat{f}(a\omega) \widehat{\psi}(\omega)] \overline{[\widehat{g}(a\omega) \widehat{\psi}(\omega)]} d\omega.\end{aligned}$$

利用上式结果, 又有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbf{R}} \left[\int_{\mathbf{R}} W_f(a, b) \overline{W_g(a, b)} db \right] \frac{1}{a} da \\ &= \int_{\mathbf{R}} \left[\frac{a}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \widehat{f}(a\omega) \overline{\widehat{g}(a\omega) \widehat{\psi}(\omega)} d\omega \right] \frac{1}{a} da \\ &= \left[\int_{\mathbf{R}} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega \right] \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \widehat{f}(a\omega) \overline{\widehat{g}(a\omega)} d(a\omega) \\ &= C_{\psi} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi \\ &= C_{\psi} \int_{\mathbf{R}} f(t) \overline{g(t)} dt.\end{aligned}$$

故小波变换有类似于 Fourier 变换中乘积定理式(1.33)的结果:

$$\begin{cases} \int_{\mathbf{R}} \left[\int_{\mathbf{R}} W_f(a, b) \overline{W_g(a, b)} db \right] \frac{1}{a} da = C_{\psi} \int_{\mathbf{R}} f(t) \overline{g(t)} dt, \\ C_{\psi} = \int_{\mathbf{R}} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty. \end{cases} \quad (3.5)$$

在式(3.5)中, 取 $g(t) = f(t)$ 就得到类似于 Parseval 等式的能量关系式(略); 在式(3.5)中取 $g(t) = \delta(t-x)$, 就有

$$W_g(a, b) = \int_{\mathbf{R}} \delta(t-x) \overline{\psi_{ab}(t)} dt = \overline{\psi_{ab}(x)},$$

其中用到公式

$$\int_{\mathbf{R}} f(t) \delta(t-x) dt = f(x),$$

故由式(3.5)可推得回复公式

$$\int_{\mathbf{R}} \left[\int_{\mathbf{R}} W_f(a,b) \psi_{ab}(t) db \right] \frac{1}{a} da = C_{\psi} f(t). \quad (3.6)$$

不难理解,式(3.5)和式(3.6)成立的条件是小波变换被允许的依据.由此可进一步分析允许小波函数 $\psi(t)$ 所必须具备的条件.

下面分析允许小波函数 $\psi(t)$ 应满足的条件.要使式(3.1)的积分变换有意义,一方面,由式(3.3)要求 $\int_{\mathbf{R}} |\psi(t)|^2 dt < +\infty$,这就要求 $\psi(t)$ 具有快速衰减性;另一方面,由 $\hat{\psi}(\omega)$ 的连续性和 $|C_{\psi}| < +\infty$ 可推知

$$\hat{\psi}(0) = 0,$$

因为如果 $\hat{\psi}(0) \neq 0$,那么 $|\hat{\psi}(\omega)|^2/\omega$ 在 $\omega=0$ 处会等于 $+\infty$,于是由式(3.5)所决定的系数 C_{ψ} 就不可能是有界量;再由 Fourier 变换的表达式可推知

$$\int_{\mathbf{R}} \psi(t) dt = 0,$$

这表明 $\psi(t)$ 具有波动性.总之, $\psi(t)$ 是像波一样的快速衰减函数,形如小的波,这也就是 $\psi(t)$ 称为小波的原因.

称满足条件 $|C_{\psi}| < +\infty$ 的函数 $\psi(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 是允许小波.

应该注意,允许小波只是允许可作正向和逆向的小波变换的函数,若要让 $\psi(t)$ 或 $\psi_{ab}(t)$ 能作窗函数,还必须满足关于窗中心和窗半径的度量要求(见 2.3 节和式(3.7)).所以,可作窗函数的小波函数除保持振荡性以外,其衰减速度要比允许小波的快;作为窗函数的小波函数 $\psi_{ab}(t)$ 是由同一函数 $\psi(t)$ 经平移和放缩得到的, $\psi_{ab}(t)$ 在时域和频域都要求具有较强的局部化功能.

3.3 小波变换的自适应时-频窗

在小波变换定义中,小波函数 $\psi_{ab}(t)$ 是窗函数,它的时-频窗表现了小波变换的时-频局部化能力.仿照 2.3 节的描述和讨论,本节将主要讨论 $\psi_{ab}(t)$ 的开窗效果.

记 t^* 为时窗中心, Δ_t 为时窗半径, ω^* 为频窗中心, Δ_{ω} 为频窗半径,则关于窗函数 $\psi_{ab}(t)$,有

$$\begin{cases} t^* = \frac{1}{\|\psi_{ab}(t)\|_0^2} \int_{\mathbf{R}} t |\psi_{ab}(t)|^2 dt, \\ \Delta_t = \frac{1}{\|\psi_{ab}(t)\|_0} \left\{ \int_{\mathbf{R}} (t-t^*)^2 |\psi_{ab}(t)|^2 dt \right\}^{1/2}, \\ \omega^* = \frac{1}{\|\hat{\psi}_{ab}(\omega)\|_0^2} \int_{\mathbf{R}} \omega |\hat{\psi}_{ab}(\omega)|^2 d\omega, \\ \Delta_{\omega} = \frac{1}{\|\hat{\psi}_{ab}(\omega)\|_0} \left\{ \int_{\mathbf{R}} (\omega-\omega^*)^2 |\hat{\psi}_{ab}(\omega)|^2 d\omega \right\}^{1/2}. \end{cases} \quad (3.7)$$

关于窗函数 $\psi(t)$ 的度量,可在式(3.7)中令 $a=1, b=0$ 得到,因为这些是基本量,所以特别标记为 t_ψ^* 、 Δ_ψ 、 ω_ψ^* 和 Δ_ψ .

由于 $\psi_{ab}(t)$ 是由 $\psi(t)$ 经平移和放缩后的结果,所以式(3.7)中关于 $\psi_{ab}(t)$ 的窗的度量可用 $\psi(t)$ 的相应量表示.

因为由式(3.3)有

$$\|\psi_{ab}(t)\|_0^2 = \|\psi(t)\|_0^2, \quad (3.8)$$

所以,利用变量代换有

$$\begin{aligned} t^* &= \frac{1}{\|\psi_{ab}(t)\|_0^2} \int_{\mathbf{R}} t |\psi_{ab}(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{\|\psi(t)\|_0^2} \int_{\mathbf{R}} t |a^{1/2} \psi(at-b)|^2 dt \\ &= \frac{1}{\|\psi(t)\|_0^2} \int_{\mathbf{R}} t |\psi(at-b)|^2 d(at) \\ &= \frac{1}{\|\psi(\xi)\|_0^2} \int_{\mathbf{R}} \frac{\xi+b}{a} |\psi(\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{a} t_\psi^* + \frac{b}{a} \\ &= \frac{1}{a} (t_\psi^* + b), \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \Delta_t &= \frac{1}{\|\psi_{ab}(t)\|_0} \left[\int_{\mathbf{R}} (t-t^*)^2 |\psi_{ab}(t)|^2 dt \right]^{1/2} \\ &= \frac{1}{\|\psi_{ab}(t)\|_0} \left[\int_{\mathbf{R}} \left(t - \frac{1}{a} t_\psi^* - \frac{b}{a} \right)^2 |\psi(at-b)|^2 d(at-b) \right]^{1/2} \\ &= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\|\psi(x)\|_0} \left[\int_{\mathbf{R}} (x-t_\psi^*)^2 |\psi(x)|^2 dx \right]^{1/2} \\ &= \frac{1}{a} \Delta_\psi. \end{aligned} \quad (3.10)$$

式(3.9)表明,若 $\psi(t)$ 不被压缩, $a=1$, $\psi(t)$ 仅向右移动 b 而变为 $\psi(t-b)$, 则 $\psi(t)$ 的时窗中心 t_ψ^* 也向右移动 b , 变为 $t_\psi^* + b$; 若 $\psi(t)$ 变为 $\psi_{ab}(t)$, 则时窗中心就由 t_ψ^* 变为 $\frac{1}{a}(t_\psi^* + b)$. 式(3.10)表明,对 $\psi(t)$ 的平移并不改变其时窗宽度; 当 $\psi(t)$ 被压缩 $1/a$ 变为 $\psi_{ab}(t)$ 时, 其时窗半径 Δ_t 也相应地被压缩了 $1/a$. 这些都可以从几何角度得到形象的解释.

与之类似,关于 $\hat{\psi}_{ab}(\omega)$ 的频窗的度量也可用 $\hat{\psi}(\omega)$ 的相应量来表示. 事实上,因为由式(3.4)有

$$\hat{\psi}_{ab}(\omega) = a^{-1/2} e^{-i\omega \frac{b}{a}} \hat{\psi}\left(\frac{\omega}{a}\right),$$

$$\begin{aligned}
 |\hat{\psi}_a(\omega)|^2 &= a^{-1} \left| \hat{\psi}\left(\frac{\omega}{a}\right) \right|^2, \\
 \|\hat{\psi}_a(\omega)\|_0^2 &= \int_{\mathbf{R}} |\hat{\psi}_a(\omega)|^2 d\omega \\
 &= \int_{\mathbf{R}} \left| \hat{\psi}\left(\frac{\omega}{a}\right) \right|^2 d\left(\frac{\omega}{a}\right) \\
 &= \|\hat{\psi}(\omega)\|_0^2,
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

于是有

$$\begin{aligned}
 \omega^* &= \frac{1}{\|\hat{\psi}_a(\omega)\|_0^2} \int_{\mathbf{R}} \omega |\hat{\psi}_a(\omega)|^2 d\omega \\
 &= \frac{a}{\|\hat{\psi}_a(\omega)\|_0^2} \int_{\mathbf{R}} \left(\frac{\omega}{a}\right) \left| \hat{\psi}\left(\frac{\omega}{a}\right) \right|^2 d\left(\frac{\omega}{a}\right) \\
 &= \frac{a}{\|\hat{\psi}(\omega)\|_0^2} \int_{\mathbf{R}} \xi |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \\
 &= a\omega_{\hat{\psi}}^*,
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_\omega &= \frac{1}{\|\hat{\psi}_a(\omega)\|_0} \left[\int_{\mathbf{R}} (\omega - \omega^*)^2 |\hat{\psi}_a(\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2} \\
 &= \frac{1}{\|\hat{\psi}_a(\omega)\|_0} \left[\int_{\mathbf{R}} (\omega - a\omega_{\hat{\psi}}^*)^2 \left| \hat{\psi}\left(\frac{\omega}{a}\right) \right|^2 d\left(\frac{\omega}{a}\right) \right]^{1/2} \\
 &= a\Delta_{\hat{\psi}}.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

从式(3.13)可以看出,当 $\psi(t)$ 被压缩 $1/a$ 变为 $\psi_a(t)$ 时,其频窗半径被拉宽了 a 倍.

总之,用 $\psi_a(t)$ 作窗函数时,小波变换能在时-频局部范围内分析信号,此时,

$$\text{时-频窗中心为} \quad \left(\frac{1}{a}(t_{\hat{\psi}}^* + b), a\omega_{\hat{\psi}}^* \right),$$

$$\text{时窗宽度为} \quad 2\Delta_t = 2\Delta_{\hat{\psi}}/a,$$

$$\text{频窗宽度为} \quad 2\Delta_\omega = 2a\Delta_{\hat{\psi}},$$

$$\text{时-频窗面积为} \quad 2\Delta_t \cdot 2\Delta_\omega = 4\Delta_{\hat{\psi}}\Delta_{\hat{\psi}}.$$

小波变换时-频窗如图 3.2 所示,其中:图(a)表明,小波函数作为时窗函数,当它在时域被拉宽时,它的频窗宽度被压窄,它的频窗中心也变小;图(b)表明,对于同一个时窗中心而言,随着频窗中心(频带中心)上移,小波变换的频窗宽度(频带宽)被拉宽,其时窗宽度相应被压窄.

下面具体说明小波变换的时-频局部化机理.

对于参数 a 固定、参数 b 自由的情形,小波变换 $W_f(a, b)$ 是关于变量 b 的时域函数;由于 $\hat{\psi}_a(\omega)$ 是频窗函数的缘故,小波变换 $W_f(a, b)$ 实际上是被限制在

$$\text{频窗} = [a\omega_{\hat{\psi}}^* - a\Delta_{\hat{\psi}}, a\omega_{\hat{\psi}}^* + a\Delta_{\hat{\psi}}]$$

这个子频带范围内的时域函数.

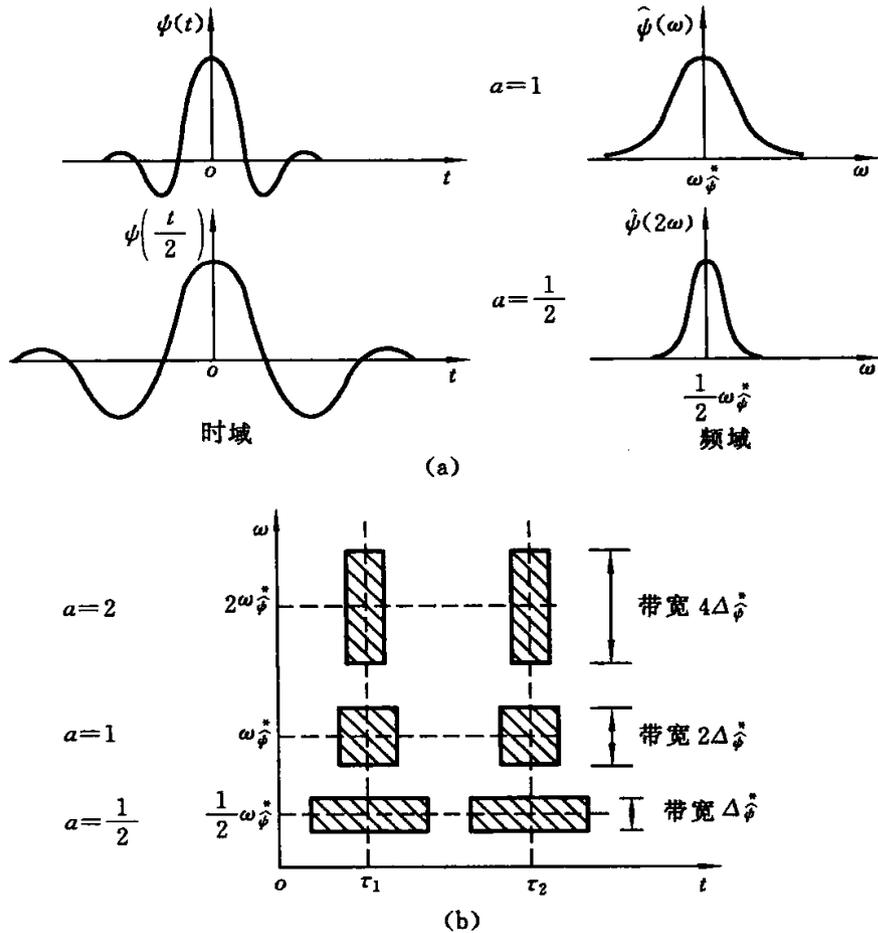


图 3.2 小波变换时-频窗示意图

对于参数 a 和参数 b 都固定的情形, 由于 $\psi_{ab}(t)$ 是时窗函数和 $\hat{\psi}_{ab}(\omega)$ 是频窗函数的缘故, $W_f(a, b)$ 的时域和频域表现实际上被限制在

$$\begin{aligned} \text{时-频窗} &= [a\omega_{\hat{\psi}}^* - a\Delta_{\hat{\psi}}^*, a\omega_{\hat{\psi}}^* + a\Delta_{\hat{\psi}}^*] \\ &\times \left[\frac{1}{a}(t_{\psi}^* + b) - \frac{\Delta_{\psi}}{a}, \frac{1}{a}(t_{\psi}^* + b) + \frac{\Delta_{\psi}}{a} \right] \end{aligned}$$

范围内. 由于 $W_f(a, b)$ 是与 $f(t)$ 对应的一种积分变换, 所以小波变换 $W_f(a, b)$ 实际上是在积分变换机制下将 $f(t)$ 和 $\hat{f}(\omega)$ 限制在时-频窗内的一种局部化表现. 换句话说, $W_f(a, b)$ 在时窗内的表现对应着 $f(t)$ 在时窗内的表现, $\mathcal{F}[W_f(a, b)]$ 在频窗内的表现对应着 $\hat{f}(\omega)$ 在频窗内的表现.

下面进一步具体说明小波变换的时-频窗是自适应的.

从小波窗函数 $\psi_{ab}(t)$ 的参数选择方面观察. 当 a 较大时, 频窗中心 $a\omega_{\hat{\psi}}^*$ 自动地调整到较高的频率中心的位置, 且时-频窗形状自动地变为“瘦窄”状; 因为高频信号在很短的时域范围内的幅值变化大, 频率含量高, 所以这种“瘦窄”时-频窗正符合高频信号的局部时-频特性. 同样, 当 a 较小时, 频窗中心 $a\omega_{\hat{\psi}}^*$ 自动地调整到较低位置, 且时-频窗的形状自动地变为“扁平”状; 因为低频信号在较宽的时域范围内

仅有较低的频率含量,所以这种“扁平”状的时-频窗正符合低频信号的局部时-频特性. WFT 仅具有不变时-频窗,无论频率中心处于何处,其时-频窗形状不改变,其时-频局部分析显得很单一. 与之相比,小波变换的时-频窗是灵活可调的,是自适应的.

3.4 离散小波变换及其频带特性

在 3.3 节中,针对 a 和 b 是连续变量的情形,分析了小波窗函数 $\psi_{ab}(t)$ 关于时-频局部化功能和自适应的时-频窗的具体表现. 在实际应用中,通常将 $\psi_{ab}(t)$ 中的连续变量 a 和 b 取为整数离散形式,将 $\psi_{ab}(t)$ 表示为

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k),$$

相应的小波变换表示为离散小波变换

$$W_f(j, k) = (f(t), \psi_{j,k}(t))$$

的形式. 下面将进一步讨论离散小波 $\psi_{j,k}(t)$ 和离散小波变换 $W_f(j, k)$ 所具有的子频带特性.

离散小波 $\psi_{j,k}(t)$ 是由小波函数 $\psi(t)$ 经 2^j 整数倍放、缩和经整数 k 平移所生成的函数族 $\{\psi_{j,k}(t)\}$, $j, k \in \mathbf{Z}$, 它适合

$$\begin{aligned} \|\psi_{j,k}(t)\|_0^2 &= \|\psi(t)\|_0^2, \\ |\mathcal{F}[\psi_{j,k}(t)]|^2 &= 2^{-j} |\hat{\psi}(\omega/2^j)|^2. \end{aligned}$$

若 $\psi(t)$ 满足允许小波条件式(3.5), 则 $\psi_{j,k}(t)$ 也是允许小波; 若 $\psi(t)$ 具有时-频局部化表现, 则 $\psi_{j,k}(t)$ 也具有时-频局部化表现. 利用式(3.12)和式(3.13)具体观察 $\psi_{j,k}(t)$ 的频窗表现, 则

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{j,k}(\omega) \text{ 的频窗中心为} & \quad \omega^* = 2^j \omega_{\hat{\psi}}, \\ \hat{\psi}_{j,k}(\omega) \text{ 的频窗半径为} & \quad \Delta_{\omega} = 2^j \Delta_{\hat{\psi}}. \end{aligned}$$

其中, $\omega_{\hat{\psi}}^*$ 和 $\Delta_{\hat{\psi}}$ 分别是 $\hat{\psi}(\omega)$ 所具有的频窗中心和频窗宽度, 对选定的小波函数 $\psi(t)$ 而言, 它们是确定量.

离散小波变换

$$W_f(j, k) = \int_{\mathbf{R}} f(t) \bar{\psi}_{j,k}(t) dt$$

是关于频率指标 j 和平移指标 k 的函数, 由

$$(f(t), \psi_{j,k}(t)) = \frac{1}{2\pi} (\hat{f}(\omega), \hat{\psi}_{j,k}(\omega))$$

和 $\hat{\psi}_{j,k}(\omega)$ 的频窗范围可知, 经 $\psi_{j,k}(t)$ 作用的小波变换实际上把信号 $f(t)$ 的频率范围 $\hat{f}(\omega)$ 限制在 $[\omega^* - \Delta_{\omega}, \omega^* + \Delta_{\omega}]$ 子频带内, 小波变换结果是这个频带内的时域分量. 小波 $\psi_{j,k}(t)$ 是一带通函数, 小波变换在频域方面的局部化作用由 j 调节, 在时域方面的局部化作用由 k 调节.

在第4章中将会看到,对于不同的 j ,这些子频带是不重叠的,这样,原信号的频率范围被划分为由 $\{\psi_{j,k}(t)\}$ 所表现的子频带,信号经小波变换表现为不同子频带分量之和,对原信号的局部时-频分析就表现为对那些描述子频带内的时域分量的分析.反应低频的局部分析应表现于反应低频的子频带分量中,反应高频的局部分析应表现于反应高频的子频带分量中.由此可知,小波分析方法并不像Fourier分析方法那样把时域信号表示为若干精确的频率分量之和,而是将其表示为若干描述子频带的时域分量之和.正是由于这种表示方式,小波分析方法才获得了在时-频局部化方面的成功,才获得关于时-频局部化方面的丰富多彩的应用.

到目前为止,我们只是对小波变换的时-频局部化特点进行了初步介绍,为了深入研究和应用它,还必须努力构造小波函数.

此时,最容易想到的是 Gauss 函数,它在时域和频域中都有局部化特点. Morlet小波函数

$$\psi(t) = e^{-t^2/2} e^{i\omega_0 t},$$

$$\hat{\psi}(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-(\omega-\omega_0)^2/2}$$

就是在这种思考下构造出来的.另外, Marr 小波函数

$$\psi(t) = (1-t^2) e^{-t^2/2},$$

$$\hat{\psi}(\omega) = \sqrt{2\pi} \omega^2 e^{-\omega^2/2}$$

是利用 Gauss 函数二阶导数构造出来的.这些小波函数都满足允许小波条件且具有时-频局部化特点.还有, Shannon 小波和 Haar 小波也是容易想到和构造的(见第9章).为了不同的应用目的,还需构造出具有不同性能的小波函数,例如,为加强小波函数的光滑性、衰减性、紧支性、对称性以及正交性去构造各种小波.人们为此作过不少探索和尝试,但在较长的时期中小波函数的构造方法还缺乏统一性.

1986年, S. Mallat 和 Y. Meyer 提出了多分辨逼近的框架,这是一个理性思考的又是具体可行的框架.至此,我们才真正找到了构造各种小波函数的统一办法,也正是在此基础上,我们才在深层次上认识了小波函数和小波变换.

第4章 多分辨逼近与正交小波级数

正如第3章所讨论的那样,小波变换提供了一种自适应的时-频局部化分析方法,其中有两个基本点是需要努力认识和实现的:其一,如何将时域信号分解为代表子频段特点的时域分量之和,这些时域分量正是小波变换所确定的;其二,如何确定构造小波函数的统一方法.本章介绍的多分辨逼近的理性框架不仅解决了这些问题,而且使人们加深了对小波分析基本原理的理解,加深了对其应用原理方面的理解.

需要强调指出的是,应用好小波分析方法是建立在深刻理解小波分析的基本原理基础上的,不应急功近利地追求使用小波具体操作过程.因此,深刻理解多分辨逼近这个理性框架是十分重要的.

4.1 函数(模拟信号)的多尺度逼近

为了加强对本章重点内容,多分辨逼近的理解,本节先总结人们熟知和经常使用的关于多尺度逼近的内容.

1. 内积空间 $L^2(\mathbf{R})$

在有关书籍中,以及在本书第1~3章中,都提到能量有限信号 $f(t), t \in \mathbf{R}$, 数学中把全体能量有限信号(函数)的集合记为 $L^2(\mathbf{R})$, 即

$$L^2(\mathbf{R}) = \left\{ f(t) \left| \int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 dt < +\infty \right. \right\}.$$

$L^2(\mathbf{R})$ 是一个函数线性空间. 所谓“空间”和“线性”是指 $L^2(\mathbf{R})$ 中函数间线性运算的结果仍是 $L^2(\mathbf{R})$ 中的函数, 它对于线性运算来说, 具备像宇宙空间那样的自封闭性, 即空间中的元素经线性运算后所获得的元素仍在此空间中. 据此理解, $L^2(\mathbf{R})$ 是函数线性空间的简单描述为: 若 $f, g \in L^2(\mathbf{R})$, $k, \xi \in \mathbf{R}$, 则

$$kf(t) + \xi g(t) = w(t) \in L^2(\mathbf{R}).$$

在高等数学中通常研究单个函数, 这里, 函数线性空间则是把具有某种性质的函数归类研究, 此时, 可把 $L^2(\mathbf{R})$ 中的某个函数看做一个点或一个向量. 若把 $L^2(\mathbf{R})$ 中的元素既看做函数又看做点, 则高等数学中的极限、微分、积分概念可继续使用, 例如用点列(即函数序列)逼近 $L^2(\mathbf{R})$ 中的点(即函数), 对 $L^2(\mathbf{R})$ 中的函数求导数和计算积分. 若把 $L^2(\mathbf{R})$ 中的元素看做向量, 则线性代数中的许多概念也可在 $L^2(\mathbf{R})$ 中继续使用, 例如向量长度、向量距离、向量内积、向量线性无关、向量正交、向量子空间、基底向量、子空间正交、子空间互补等概念就有了新的内容.

$L^2(\mathbf{R})$ 中的内积运算定义为

$$(f(t), g(t)) = \int_{\mathbf{R}} f(t) \overline{g(t)} dt, \quad \forall f, g \in L^2(\mathbf{R}). \quad (4.1)$$

当 $g(t)$ 是复函数时, $\overline{g(t)}$ 表示其共轭函数; 当 $g(t)$ 是实函数时, $\overline{g(t)} = g(t)$. 内积记号 (\cdot, \cdot) 可给书写带来方便. 内积显然具有下面几个性质:

- 1° $(f, g) = (g, f)$;
- 2° $(\alpha f_1 + \beta f_2, g) = \alpha(f_1, g) + \beta(f_2, g)$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$;
- 3° $(f, f) \geq 0$, 当且仅当 $f=0$ 时 $(f, f)=0$.

满足内积定义和性质的函数线性空间称为内积空间, $L^2(\mathbf{R})$ 是内积空间.

$L^2(\mathbf{R})$ 中函数正交的概念可描述为: 对任意 $f, g \in L^2(\mathbf{R})$, 若

$$(f(t), g(t)) = 0,$$

则称 $f(t)$ 和 $g(t)$ 是正交的.

$L^2(\mathbf{R})$ 中的模定义为

$$\|f(t)\|_0 = \left(\int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \quad (4.2)$$

从向量方面理解, 模可度量函数向量的长度, 可度量两个函数向量的距离, 如 $\|f(t)\|_0$ 可表示 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 和 $0 \in L^2(\mathbf{R})$ 之间的距离, 可表示 $f(t)$ 向量的长度; $\|f(t) - g(t)\|_0$ 可表示函数向量 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 和 $g(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 之间的距离. 从物理方面理解, 模可看做一种特定形式的能量, 模就是这种能量的度量标准. 根据模可用于度量向量的理解, 易知, 模满足下述性质:

- 1° $\|f+g\|_0 \leq \|f\|_0 + \|g\|_0$ (三角不等式);
- 2° $\|f+g\|_0^2 + \|f-g\|_0^2 = 2(\|f\|_0^2 + \|g\|_0^2)$ (平行四边形对角线规则);
- 3° $|(f, g)| \leq \|f\|_0 \|g\|_0$ (Schwarz 不等式, 内积和向量长度规则).

关于有限个函数向量 $\{\phi_k(t)\}_{k=1}^n$ 的线性相关或线性无关, 仍用关系式

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k(t) = 0$$

来描述. 对上式两边分别与 $\phi_k(t)$, $k=1, 2, \dots, n$ 作内积, 得到一个线性方程组

$$\begin{pmatrix} (\phi_1, \phi_1) & (\phi_2, \phi_1) & \cdots & (\phi_n, \phi_1) \\ (\phi_1, \phi_2) & (\phi_2, \phi_2) & \cdots & (\phi_n, \phi_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\phi_1, \phi_n) & (\phi_2, \phi_n) & \cdots & (\phi_n, \phi_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

于是可知, $\{\phi_k(t)\}_1^n$ 线性无关的充要条件是该方程组仅有零解, 即 $\alpha_k = 0, k=1, 2, \dots, n$, 或是该方程组的系数矩阵非奇异. 在线性代数中仅讨论由有限个无关函数所构成的有限维函数向量空间.

然而, $L^2(\mathbf{R})$ 是无穷维函数线性空间, $L^2(\mathbf{R})$ 中共有 (按自然数排序) 无穷个线

性无关向量, $\{\phi_k(t)\}_1^\infty$ 构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的基函数族, 于是

$$L^2(\mathbf{R}) = \text{span}\{\phi_k(t) \mid k = 1, 2, \dots\},$$

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(t), \quad \forall f(t) \in L^2(\mathbf{R}).$$

不难理解, $L^2(\mathbf{R})$ 的基函数族 $\{\phi_k(t)\}_1^\infty$ 中的基函数若是相互正交(或标准正交)的, 则称其为正交基函数族(或标准正交基). 同样, $L^2(\mathbf{R})$ 中也有子空间的概念. 设 W_m 和 W_n 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的两个子空间, 它们也可能是无穷维的, 若对任意 $f(t) \in W_m$ 和 $g(t) \in W_n$, $f(t)$ 和 $g(t)$ 都是正交的, 则称 W_m 和 W_n 是正交子空间, 记为 $W_m \perp W_n$. $L^2(\mathbf{R})$ 中也有补空间的概念. 设 $V_j \subset L^2(\mathbf{R})$, $W_j \subset L^2(\mathbf{R})$, $V_{j+1} \subset L^2(\mathbf{R})$, 若 $V_{j+1} = V_j + W_j$ 且 $W_j = V_{j+1}/V_j$, 则称 W_j 是 V_j 在 V_{j+1} 中的补空间; 若 W_j 和 V_j 还是正交的, 则称 W_j 是 V_j 在 V_{j+1} 中的正交补空间.

2. 函数(模拟信号)多尺度逼近的基本思想

函数(模拟信号)的多尺度逼近(multi-scale analysis, 简称 MSA)方法是人们熟知和常用的, 它是一种基本的离散逼近方法, 在许多领域都有重要应用. 这里仅简略介绍它对模拟信号的离散逼近应用. 它的基本思想有三部分内容.

(1) 在 0 尺度下构造关于模拟信号 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 的近似函数 $f^0(t)$. 先将时间轴 $t \in (-\infty, +\infty)$ 采用间隔 Δ^0 作等距离散分划, 节点为 $\{t_k^0\}$, 节点编号为 $k \in \mathbf{Z}$; 再将基函数 $\phi(t)$ 的整节点平移 $\phi(t-k)$ 定义为关于节点 k 处的基函数. 这样便可构造出 0 尺度下的近似函数

$$f^0(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k^0 \phi(t-k).$$

(2) 在 j 尺度下构造关于模拟信号 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 的近似函数 $f^j(t)$. 所谓 j 尺度分划就是对 0 尺度分划的 j 次细分, 此时的等距间隔为 $\Delta^j = \Delta^0/2^j$, 节点编号仍为 $k \in \mathbf{Z}$. 但应注意 j 尺度下的编号为 $2^j n$ 的节点正好对应着 0 尺度下的编号为 n 的节点; 此时的基函数 $\phi_{j,k}(t)$ 是关于 $\phi(t)$ 的整数倍平移和放缩的形式

$$\phi_{j,k} = \phi(2^j t - k),$$

在 j 尺度下, 每个节点 k 仍对应着一个基函数 $\phi_{j,k}(t)$. 这样便可构造出 j 尺度下的近似函数

$$f^j(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k^j \phi_{j,k}(t). \quad (4.3)$$

(3) 保证 $j \rightarrow \infty$ 时有 $f^j(t) \rightarrow f(t)$. 首先应该看出, 在尺度 j 指标和基函数 $\{\phi_{j,k}(t)\}$ 给定的前提下, 不同的组合系数 $\{c_k^j\}$ 对应着不同的 $f^j(t)$, 这些函数可归为同一类函数, 它们都是由基函数 $\{\phi_{j,k}(t)\}$ 表述的, 都是平方可积分的, 这个函数类记为

$$V_j = \{f^j(t) \mid f^j(t) = \sum_k c_k^j \phi_{j,k}(t), f^j(t) \in L^2(\mathbf{R})\}.$$

显然, V_j 是一函数线性空间, 且是 $L^2(\mathbf{R})$ 的子空间, $V_j \subset L^2(\mathbf{R})$. 再变动尺度 j , 因为 $f(t)$ 的近似函数 $f^j(t) \in V_j$, 所以 $f^j(t) \rightarrow f(t)$ 从函数子空间角度可描述为

$$\cdots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \cdots \subseteq L^2(\mathbf{R}).$$

于是, $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ 是一个嵌套式的子空间逼近序列. 不难想象, 在每个 V_j 中取定一个关于 $f(t)$ 的近似函数 $f^j(t)$, 由此得到的近似函数序列 $\{f^j(t)\}_{j \in \mathbf{N}}$ 是逼近 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 的.

3. 多尺度逼近的基本条件——Riesz 基

在多尺度逼近中用基函数 $\{\phi_{j,k}(t)\}$ 及组合系数 $\{c_k^j\}$ 按式(4.3)构造近似函数 $f^j(t) \in L^2(\mathbf{R})$, 这种构造形式对 $f^j(t)$ 、 $\{c_k^j\}$ 和 $\{\phi_{j,k}(t)\}$ 有限制要求.

因 $f^j(t) \in V_j \subset L^2(\mathbf{R})$ 的能量是有限的, 所以, 按 $L^2(\mathbf{R})$ 中模来表示能量, 有

$$\|f^j(t)\|_0^2 = \left\| \sum_k c_k^j \phi_{j,k}(t) \right\|_0^2 < +\infty.$$

若 $\phi_{j,k}(t)$ 是标准平移正交基, 即对固定的指标 j , 有

$$(\phi_{j,k}(t), \phi_{j,l}(t)) = \delta_{k,l},$$

此时 $f^j(t)$ 的能量为

$$\begin{aligned} \|f^j(t)\|_0^2 &= (f^j(t), f^j(t)) \\ &= \left(\sum_k c_k^j \phi_{j,k}, \sum_l c_l^j \phi_{j,l} \right) \\ &= \sum_k |c_k^j|^2 < +\infty. \end{aligned}$$

这两种能量表示形式是等价的, 在数学形式上描述为

$$A \sum_k |c_k^j|^2 \leq \left\| \sum_k c_k^j \phi_{j,k}(t) \right\|_0^2 \leq B \sum_k |c_k^j|^2, \quad (4.4)$$

其中, A 和 B 是正常数.

式(4.4)称为 Riesz 基条件, 它描述了一般节点基函数在表示 $f^j(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 时应满足的条件. 其实, 读者不必过多地追究 Riesz 基的条件式(4.4). 在下面的例子中将看到, 有些熟知、常用的插值型节点基函数都是 Riesz 基, 用它们可方便地表示能量有限的近似信号, 也可方便地形成多尺度逼近.

4. 关于模拟信号多尺度逼近的几个例子

1) 梳状函数逼近

取节点基函数 $\phi_{j,k}(t) = \delta(t - t_k^j)$, 据 $\delta(t - t_k^j)$ 的物理意义, 节点 t_k^j 处质点的“质量”为 1, 其它节点处质点的“质量”为 0, 于是 j 尺度下的梳状函数为

$$f^j(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} f(t_k^j) \delta(t - t_k^j).$$

形象地说, 这就是用离散采样值 $\{f(t_k^j)\}$ 来近似表示函数(模拟信号) $f(t)$. 当然, δ 函数是广义函数, 梳状函数也是广义函数, $f^j(t)$ 只有在积分中才能表现出通常的函数的意义. 显然, 加密采样 $j \rightarrow \infty$ 时, $f^j(t) \rightarrow f(t)$.

2) 阶跃函数逼近

取节点基函数是形如式(1.10)的矩形函数,这时 $f^j(t)$ 为阶梯函数(见图4.1),阶跃函数在节点处的值仍是采样值 $\{f(t_k^j)\}$. 显然,离散加密 $j \rightarrow \infty$ 时, $f^j(t) \rightarrow f(t)$.

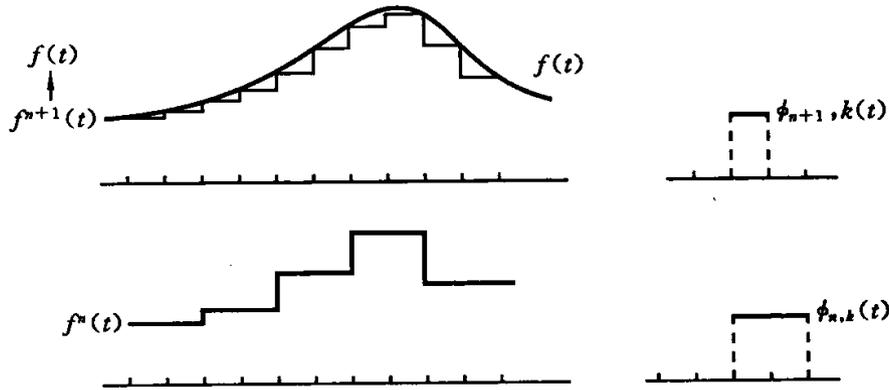


图 4.1 用阶跃函数作多尺度逼近示意图

3) 折线函数逼近

取节点基函数是形如式(1.12)的山形函数,即线性样条函数,这时作为近似函数的折线函数 $f^j(t)$ 是连续的,其节点值也是采样值 $f(t_k^j)$,离散加密 $j \rightarrow \infty$ 时,用折线函数逼近连续函数 $f(t)$ 是合适的,但逼近光滑函数不够理想(见图4.2).

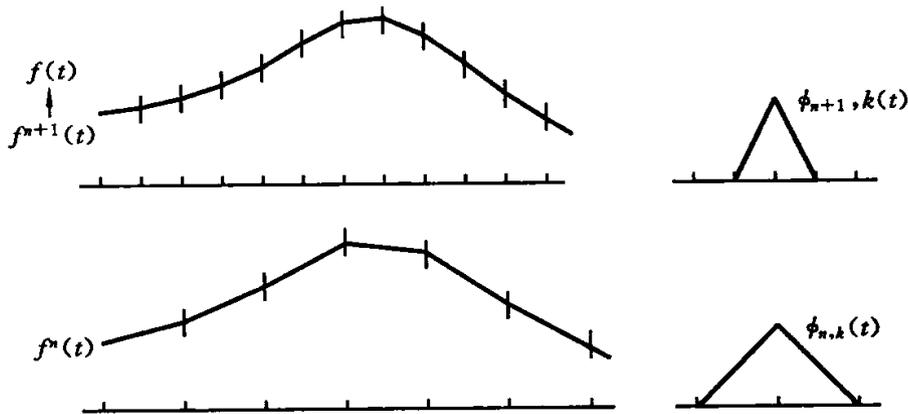


图 4.2 用折线函数作多尺度逼近示意图

4) Shannon 逼近

取节点基函数

$$\phi(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t},$$

$$\phi(t-k) = \begin{cases} 1, & t = k \in \mathbf{Z}, \\ 0, & t \in \mathbf{Z}, t \neq k, \end{cases}$$

此时按式(4.3)有

$$f^j(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} f(t_k^j) \phi_{j,k}(t),$$

这称为 Shannon 逼近. 在 $f^j(t)$ 表达式中,组合系数为采样值,这是便于应用的. 当

分划加密 $j \rightarrow \infty$ 时 $f^j(t) \rightarrow f(t)$. 但是, 当 $|t| \rightarrow \infty$ 时, $|\phi(t)|$ 是与 $1/|t|$ 同级衰减的 (见图 1.4), $\phi(t)$ 的支集 (定义域) 不是有限范围的, 这对实际应用带来不便.

5) 样条逼近

取用节点基函数为 m 阶样条函数

$$\phi(t) = \Omega_m(t),$$

参见式(1.40)和第11章有关内容可知, $m=1$ 是矩形函数, $m=2$ 是山形函数, $\Omega_m(t)$ 是有限支集的且是 $m-1$ 次可微函数. 用样条函数可构造出较光滑的近似函数 $f^j(t)$, 当分划加密 $j \rightarrow \infty$ 时 $f^j(t) \rightarrow f(t)$. 然而式(4.3)中的组合系数 $\{c_k^j\}$ 要用特殊方法计算得到 (参见第11章).

5. 多尺度逼近中的正交基表示

在多尺度逼近中, 采用式(4.3)来构造近似函数, 其中, 节点基函数 $\phi_{j,k}(t)$ 可以是平移正交的, 也可以是平移不正交的. 若 $\phi_{j,k}(t)$ 是标准正交的基函数

$$(\phi_{j,k}(t), \phi_{j,m}(t)) = \delta_{k,m},$$

则给近似函数 $f^j(t)$ 的表示带来方便, 此时有

$$\begin{aligned} f^j(t) &= \sum_k c_k^j \phi_{j,k}(t), \quad f^j(t) \in V_j, \\ c_k^j &= (f^j(t), \phi_{j,k}(t)) \\ &= (f(t), \phi_{j,k}(t)), \\ \|f^j(t)\|_0^2 &= (f^j(t), f^j(t)) \\ &= \sum_k |c_k^j|^2. \end{aligned}$$

其中, c_k^j 的表示形式值得注意, 因为 $\phi_{j,k}(t) \in V_j, \phi_{j,k}(t) \notin V_{j+1}/V_j, f^{j+1}(t) - f^j(t) \notin V_j$, 故

$$\begin{aligned} (f^{j+1}(t), \phi_{j,k}(t)) &= (f^j(t), \phi_{j,k}(t)) + (f^{j+1}(t) - f^j(t), \phi_{j,k}(t)) \\ &= (f^j(t), \phi_{j,k}(t)). \end{aligned}$$

同理, 也有

$$\begin{aligned} (f(t), \phi_{j,k}(t)) &= (f^{j+1}(t), \phi_{j,k}(t)) \\ &= (f^j(t), \phi_{j,k}(t)) \\ &= c_k^j. \end{aligned}$$

6. 关于节点基函数的几个应用特点

在多尺度逼近中, 选择不同类型的节点基函数会产生不同的逼近效果. 下面介绍节点基函数的几个应用特点.

1) 内插性

内插型节点基函数的特点是

$$\phi(t-k) \Big|_{t=j} = \delta_{j,k}, \quad j, k \in \mathbf{Z}.$$

由此可知, δ 函数 (在广义函数的意义下)、矩形函数、山形函数和 Shannon 函数都是内插型节点基函数, 但样条函数 Ω_m 当 $m \geq 3$ 时不是内插型的. 若采用内插型节

点基函数,按式(4.3)作近似模拟信号是非常方便的,此时的组合系数 c_i^j 就是 t_i^j 节点处的样本值 $f(t_i^j)$.

2) 光滑性

节点基函数的光滑程度是由其连续可微的次数来衡量的.例如样条函数 Ω_m 是 $m-1$ 次分段多项式,它是 $m-2$ 次连续可微的基函数,按式(4.3)构造的近似模拟信号 $f^j(t)$ 也是 $m-2$ 次连续可微的;按照数值分析的讨论结果, $f^j(t)$ 对 $f(t)$ 的逼近程度为

$$\|f(t) - f^j(t)\|_0 = O((\Delta^j)^m),$$

其中 Δ^j 是 j 尺度分划间隔;于是 m 大时 Ω_m 的光滑性好,此时的逼近误差小,逼近效果好.

3) 正交性

前面曾经讨论过的节点基函数,如 δ 函数在广义函数意义下是平移正交的,矩形函数和 Shannon 函数是平移正交的.样条函数 $\Omega_m, m \geq 2$ 不是平移正交的.节点基函数的平移正交性质为构造形如式(4.3)的近似模拟信号带来方便.还有一类节点基函数,如 $\{\cos kx, \sin kx\}$,是关于 $k \in \mathbf{Z}$ (频率)指标正交的,见第 1 章 Fourier 级数形式,其线性组合形式也对构造近似模拟信号带来方便.无论采用哪一类具有正交性的基函数作线性组合,这种形式的近似函数在许多学科中都有着广泛且方便的应用.

4) 快衰性和紧支性

所谓某函数是紧支的,就是指该函数的定义域是有限范围的.前面讨论过的各阶样条函数 Ω_m 都是紧支的,但 Shannon 函数不是紧支的.非紧支的节点基函数还有衰减快慢之分.用紧支的节点基函数的线性组合描述近似模拟信号会使积分变换 $(f^j(t), \phi(t))$ 的计算量减少且计算精度提高;若采用非紧支的节点基函数,特别是衰减缓慢的节点基函数,则计算效果和逼近效果会差些.

5) 对称性

前面讨论过的样条函数 Ω_m 都是偶对称的,应用中要适当注意对称中心的位置(见第 11 章);Shannon 函数也是偶对称的.当然也存在奇对称的节点基函数.不难理解,对于偶(或奇)对称的模拟信号,用偶(或奇)对称节点基函数的线性组合形式作近似模拟有时会方便一些.在信号处理中,常常用具有对称性的节点基函数作卷积,因为

$$\frac{d}{dt}(f(t) * \phi(t)) = \frac{d}{dt}f(t) * \phi(t) = f(t) * \frac{d}{dt}\phi(t),$$

于是节点基函数的对称性可以表现信号 $f(t)$ 的突变性和局部对称性(见第 7 章).

综上所述,一个节点基函数可能同时具有多项良好性质,应选择具有恰当性质的节点基函数,按式(4.3)的线性组合形式作近似模拟和计算分析,只有这样才能

在不同目的的实际应用中取得满意的效果。

本节介绍的多尺度逼近概念对下一节理解多分辨逼近概念是有帮助的。本节介绍了几个常用的节点基函数,关于更多的节点基函数及其构造,读者在学习了以后章节就会得到很多启发。

4.2 多分辨逼近

1986年, S. Mallat 和 Y. Meyer 在多尺度逼近的基础上提出了多分辨逼近 (multi-resolution analysis, 简称 MRA) 的概念。它是理解和构造小波的统一框架,无论在理论分析还是在构造、理解和应用小波方面,它都是十分重要的。目前,几乎所有的图书(包括原著)对多分辨逼近的描述都十分抽象,这不利于一般读者的学习和理解,所以 4.1 节较详细地讲解了多尺度逼近的内容。在此基础上,再理解多分辨逼近会感到轻松些。

总结前面内容,多尺度逼近是指一串嵌套式闭子空间逼近序列 $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$, 它满足下列要求:

$$1^\circ \cdots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \cdots \subseteq L^2(\mathbf{R}), \bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\}, \bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j = L^2(\mathbf{R});$$

$$2^\circ V_j = \text{span}\{\phi_{j,k}(t) \mid \phi_{j,k}(t) = \phi(2^j t - k), k \in \mathbf{Z}\};$$

3° $\{\phi_{j,k}(t)\}$ 是 Riesz 基, 即

$$A \sum_{k \in \mathbf{Z}} |c_k|^2 \leq \left\| \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \phi_{j,k}(t) \right\|_2^2 \leq B \sum_{k \in \mathbf{Z}} |c_k|^2.$$

上述诸式的意义已在 4.1 节中作了解释。多尺度逼近的基本含义是:在 j 尺度离散分划下,用节点基函数 $\phi_{j,k}(t)$ 的线性组合描述近似函数(模拟信号) $f^j(t) \in V_j \subset L^2(\mathbf{R})$, 若分划加密 $j \rightarrow \infty$, 则 $f^j(t) \rightarrow f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 。

定义 4.1 多分辨逼近是指一串嵌套式闭子空间逼近序列 $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$, 它满足下列要求:

$$1^\circ \cdots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \cdots \subseteq L^2(\mathbf{R}), \bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\}, \bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j = L^2(\mathbf{R});$$

$$2^\circ V_j = \text{span}\{\phi_{j,k}(t) \mid \phi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k), k \in \mathbf{Z}\};$$

$$3^\circ \phi(t) = \sum_n h_n \phi(2t - n), \{h_n\} \in l^2; \quad (4.5)$$

4° $\{\phi(t - k)\}$ 是 Riesz 基。

其中,式(4.5)称为双尺度方程, $\phi(t)$ 称为尺度函数或多分辨逼近的生成元。

多分辨逼近的基本含义是:在 j 尺度离散分划下,用节点基函数,注意是不同的节点基函数, $\phi_{j,k}(t)$ 的线性组合描述近似函数(模拟信号) $f^j(t) \in V_j \subset L^2(\mathbf{R})$, 若分划加密 $j \rightarrow \infty$, 则 $f^j(t) \rightarrow f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 。

多分辨逼近和多尺度逼近有什么区别? 为此先从形式上作粗略观察,可知多分辨逼近在多尺度逼近基础上仅增加了少量条件。

(1) 在多尺度逼近中, 仅取 $\phi_{j,k}(t) = \phi(2^j t - k)$, 仅强调近似函数(模拟信号) $f^j(t)$ 的描述形式, 仅强调 $f^j(t) \rightarrow f(t)$ 的逼近效果; 在多分辨逼近中要求 $\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k)$, 这不仅强调了 $f^j(t) \rightarrow f(t)$ 的逼近效果; 而且强调了 $\phi_{j,k}(t)$ 的形式会有利于时-频分析. 例如 $\phi_{j,k}(t)$ 的形状更适宜作局部分析的时窗函数, 也为了使小波变换的时-频窗具有自适应性.

(2) 在多尺度逼近中, $\phi(t) \in V_0 \subset V_1$, 虽然会隐含着 $\phi(t)$ 可由 $\{\phi(2t-n)\}$ 表示的事实, 然而在仅仅考虑逼近的情况下, 并不强调相邻尺度层子空间 V_j 和 V_{j+1} 间的联系; 在多分辨逼近中则重点强调了双尺度方程式(4.5)是一种显式的线性关系, 而强调双尺度方程有利于表述子空间 V_j 间的递推关系, 有利于实现快速算法.

下面分析多分辨逼近所表明几个重要事实. 这些事实对理解和应用多分辨逼近作时-频分析十分重要.

1. $\phi(t)$ 生成多分辨逼近

因为 V_j 的基函数 $\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k)$ 都是由 $\phi(t)$ 经平移放缩表示的, 所以, 由 $\phi(t)$ 是 Riesz 基可推知 $\{\phi_{j,k}(t)\}$ 是 Riesz 基(按 Riesz 基定义证明), 由式(4.5)所表明的 V_0 和 V_1 之间的传递关系可推知 V_j 和 V_{j+1} 之间的相同的传递关系, 即

$$\phi_{j,0}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_n h_n \phi_{j+1,n}(t).$$

所以说, 由 $\phi(t)$ 生成了 $\{V_j\}$, $\phi(t)$ 生成了多分辨逼近, $\phi(t)$ 是多分辨逼近的生成元. 由生成元的这种含义可知, 函数 $\phi(t)$ 只有满足多分辨逼近定义(见定义 4.1)中的条件 3° 和条件 4° 才能作为生成元.

2. 多分辨逼近确定了 $L^2(\mathbb{R})$ 的子空间直和分解关系

因为 $V_j \subset V_{j+1}$, 记 $W_j = V_{j+1}/V_j$, 即 W_j 是 V_j 在 V_{j+1} 中的补子空间, 所以有

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j,$$

其中, 记号“ \oplus ”表示子空间直和关系. 可把这种关系传递下去, 就有如图 4.3 所示的结构.



图 4.3 多分辨逼近确定的关于 $L^2(\mathbb{R})$ 的子空间直和分解关系示意图

在多分辨逼近中若仅取用 $\{V_j\}$, 则是一种多尺度逼近; 若对所有子空间 W_j 的总和感兴趣, 则有

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j. \tag{4.6}$$

这表明, $L^2(\mathbb{R})$ 可表示为关于子空间 W_j 的直和分解关系, 这种关系在小波分析中是重要的.

3. 多分辨逼近明确了 W_j 的结构

因为 $V_0 \subset V_1$, $\phi(t) \in V_0$ 可由 V_1 中的基函数线性表示, 具体表现为双尺度

方程

$$\phi(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} h_n \phi(2t - n).$$

同样, 因为 $W_0 \oplus V_0 = V_1, W_0 \subset V_1$, 记 W_0 的基函数为 $\{\phi(t-k)\}$, 则 $\phi(t) \in W_0$ 一定可由 V_1 中的基函数线性表示, 设表示式为

$$\phi(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} g_n \phi(2t - n), \quad (4.7)$$

其中, $\phi(t)$ 称为小波函数. 式(4.7)称为 $\phi(t)$ 所满足的双尺度方程. 这里仅强调由多分辨逼近所确定存在的如式(4.7)的关系, 这是 W_0 和 V_1 之间的传递关系.

由 $\{\phi(t-n)\}$ 是 Riesz 基, 利用式(4.7)可推知 $\{\phi(t-n)\}$ 是 W_0 的 Riesz 基. 只要仿照 V_j 和 V_0 基的表述形式, 记

$$W_j = \text{span}\{\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k), k \in \mathbf{Z}\},$$

又可推知 $\{\psi_{j,k}(t)\}$ 是 W_j 的 Riesz 基, 且

$$\psi_{j,0}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} g_n \phi_{j+1,n}(t).$$

这就是说, W_0 和 V_1 的传递关系与 W_j 和 V_{j+1} 的传递关系同形.

因 W_j 也是一个函数线性子空间, 它的基是 $\{\psi_{j,k}(t)\}$, 所以 W_j 中的函数 $w^j(t)$ 的表述形式为

$$w^j(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} d_k \psi_{j,k}(t), \quad (4.8)$$

其中, $\{\psi_{j,k}(t)\}$ 称为小波基, $w^j(t)$ 称为小波分量, W_j 称为小波子空间.

4. 多分辨逼近明确了 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 的级数表示形式

由以上讨论可知, $L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus W_j$ (见式(4.6)), W_j 之间没有非零的公共元素, 于是, 任一个 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 可分解为各个子空间分量 $w^j(t) \in W_j$ 的直和, 因此, 利用式(4.8)就有

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{j \in \mathbf{Z}} w^j(t) \\ &= \sum_{j \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{Z}} d_k^j \psi_{j,k}(t), \quad \forall f(t) \in L^2(\mathbf{R}), \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$L^2(\mathbf{R}) = \text{span}\{\psi_{j,k}(t) \mid j \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{Z}\}.$$

这是 $f(t)$ 的小波展开级数, 这种展开形式既与尺度 j 有关, 也与平移参数 k 有关. 小波级数在小波分析中是重要的.

5. 多分辨逼近能将频域分成子频带的直和

以上主要在时域中讨论 $L^2(\mathbf{R})$ 的子空间分解关系、子空间构造关系及函数的表述形式. 下面从频域中认识多分辨逼近.

首先, $f^j(t)$ 可看做有限频宽的信号, 这是由于采样间隔造成的, 在 1.7 节中已作过论述. 由于 $f^j(t) = \sum_k c_k^j \phi_{j,k}(t), c_k^j = (f, \phi_{j,k}), \phi_{j,k}(t)$ 的平移指标 k 不影响其

频率范围,所以 $\phi_{j,k}(t)$ 的频率宽度应和 $f^j(t)$ 的频率宽度相同. 由此可知, $\phi_{j,k}(t)$ 是频率范围同于 $f^j(t)$ 的低通函数.

另外,由于 $\phi_{j-1,k}(t)$ 的频宽是 $\phi_{j,k}(t)$ 频宽的一半,这可以通过比较其 Fourier 变换的关系得知,也可以从采样间隔扩大一倍的原因看出,所以 $f^{j-1}(t)$ 的频宽仅是 $f^j(t)$ 频宽的一半. 再由 $f^j(t) = f^{j-1}(t) + w^{j-1}(t)$ 看出, $f^j(t)$ 的频宽被分为两部分:一部分是关于一半频宽的低频,这是由 $f^{j-1}(t)$ 表现的;另一部分是关于 $f^j(t) - f^{j-1}(t)$ 的相对高的频带部分,这实际上是一个频带,它是由 $w^{j-1}(t)$ 表现的. 因此, $w^{j-1}(t) = \sum_k d_k^{j-1} \psi_{j-1,k}(t)$ 中的 $\psi_{j-1,k}(t)$ 是带通函数.

再从频域角度分析多分辨逼近中的空间分解关系,总结前面讨论可知: $\dots V_{j-2} \subset V_{j-1} \subset V_j \dots$ 表明,随着尺度指标减少, V_j 所表示的频宽将逐半地减小; $\dots W_{j-2} \oplus W_{j-1} = V_j$ 表明,小波子空间 W_{j-2} 和 W_{j-1} 等在频域中的表现是带状的,彼此是不重叠的(见图 4.4).

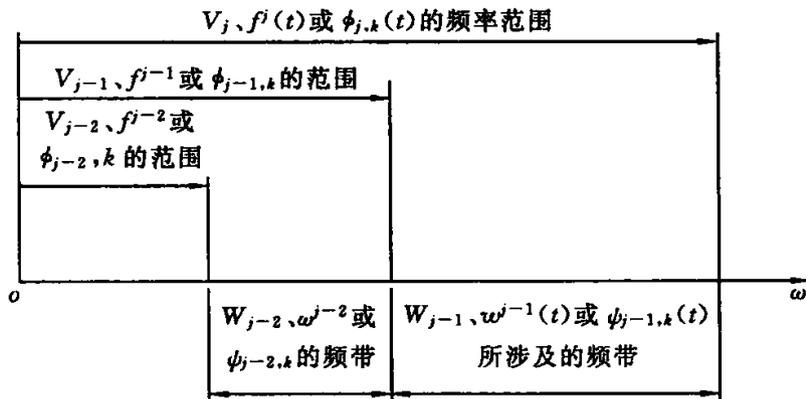


图 4.4 多分辨逼近所确定的频带分隔示意图

总之,多分辨逼近所确定的小波子空间分解关系 $L^2(\mathbf{R}) = \oplus W_j$ 表明,任一个信号 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 的频率被分隔为若干互不重叠的子频带的直和,换句话说, $f(t)$ 在多分辨逼近框架下分解为若干表示子频带的分量 $w^j(t)$ 的直和, $f(t)$ 的任何局部位置的高频带分量部分或低频带分量部分将分别表现在不同的小波子空间中,多分辨逼近提供的这种子频带分析方法,是它关于频域局部化功能的一种表现,是与 Fourier 频域分析方法不同的. 多分辨逼近在时域和频域中同时提供了一种多分辨率的分析方法.

6. 多分辨逼近所确定的数字滤波器

在多分辨逼近中,双尺度方程

$$\begin{cases} \phi(t) = \sum h_n \phi(2t - n), \\ \psi(t) = \sum g_n \phi(2t - n) \end{cases} \quad (4.10)$$

是起着关键作用的,也是具有代表性的. 它代表的 V_j 和 V_{j+1} 之间的一般传递关系

以及 W_j 和 V_{j+1} 之间的一般传递关系, 可由

$$\begin{aligned}\phi_{j,0}(t) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum h_n \phi_{j+1,n}(t), \\ \psi_{j,0}(t) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum g_n \phi_{j+1,n}(t)\end{aligned}$$

中得到解释.

在频域中观察 $V_j \oplus W_j = V_{j+1}$ 的分频含义前面已作了讨论, 这种分频效果应该在双尺度方程中也能体现, 为此对式(4.10)两边作 Fourier 变换, 有

$$\begin{cases} \hat{\phi}(2\omega) = H(\omega) \hat{\phi}(\omega), \\ \hat{\psi}(2\omega) = G(\omega) \hat{\phi}(\omega), \end{cases} \quad (4.11)$$

其中

$$\begin{aligned}H(\omega) &= \frac{1}{2} \sum h_n e^{-i\omega n}, \\ G(\omega) &= \frac{1}{2} \sum g_n e^{-i\omega n}.\end{aligned}$$

式(4.11)清楚地表明, $\hat{\phi}(\omega)$ 所代表的 $\{\phi(2t-n)\}$ 的有限频率范围, 在 $H(\omega)$ 的乘积作用下被缩小一半, 成为 $\hat{\phi}(2\omega)$, $\hat{\phi}(2\omega)$ 代表的是关于 $\{\phi(t-n)\}$ 的有限频率范围, $\hat{\phi}(2\omega)$ 是 $\hat{\phi}(\omega)$ 的低频部分. 这就是说, $H(\omega)$ 是低通滤波器的频域表现, 它在频域中的低通滤波效果是通过时域中的离散卷积 $\sum h_n \phi(2t-n)$ 来实现的, $\{h_n\}$ 是低通数字滤波器. 同理可知, $\{g_n\}$ 是高通数字滤波器, 其频域表现为 $G(\omega)$, 它在频域中的高通滤波效果是通过时域中的离散卷积 $\sum g_n \phi(2t-n)$ 来实现的. 在式(4.10)中, $\phi(2t-n)$ 的频率范围是有限的, 它经低通数字滤波器 $\{h_n\}$ 离散卷积作用后得到低通函数 $\phi(t)$, 它经高通数字滤波器 $\{g_n\}$ 离散卷积作用后得到带通函数 $\psi(t)$.

总结以上关于多分辨逼近的六点分析, 可以得到这么一个认识: 多分辨逼近是多尺度逼近按时-频分析需要改进的结果, 多分辨逼近所确定的小波分解分析方法是一种频带分析方法, 可以从多个方面对它加以理解和运用. 在时域表现方面, 可以从多尺度逼近 $\{f^j(t)\}$ 的低通关系来理解, 可以从小波分量 $\{w^j(t)\}$ 的带通表现来理解, 还可以从小波级数 $\sum_{j,k} d_k \psi_{j,k}(t)$ 中关于 $\{\psi_{j,k}(t)\}$ 的带通性能来理解; 在滤波器方面, 可以从低通数字滤波器 $\{h_n\}$ 和高通数字滤波器 $\{g_n\}$ 角度来理解; 在频域表现方面, 可以从式(4.11)的频域表现来理解, 可以从 $\psi_{j,k}(t)$ 时-频窗角度来理解, 还可以从下面即将介绍的正交小波级数和正交小波变换角度来理解; 等等. 任何一种理解都有相应的表述和应用, 这将在学习和应用小波分析的过程中进一步加深.

7. 多分辨逼近是构造小波的统一框架

由多分辨逼近定义可知, 只要给定尺度函数 $\phi(t)$ (它必须是 Riesz 基) 和双尺

度方程 $\phi(t) = \sum h_n \phi(2t-n)$, 则 $\psi(t) = \sum g_n \phi(2t-n)$ 的双尺度关系是存在的, 从而在

$$V_j = \text{span}\{\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k), k \in \mathbf{Z}\}, j \in \mathbf{Z}$$

和 $W_j = \text{span}\{\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), k \in \mathbf{Z}\}, j \in \mathbf{Z}$

的描述下, 多分辨逼近就确定了小波子空间的直和分解关系和函数(信号) $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 的小波分解形式

$$f(t) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} w^j(t),$$

$$w^j(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} d_k^j \psi_{j,k}(t).$$

由此可知, 从原则上讲, 只要给定 $\phi(t)$ 和 $\{h_n\}$ 满足多分辨逼近的要求, 只要求出 $\{g_n\}$ 并满足下述条件:

$$\begin{cases} \phi(t) = \sum h_n \phi(2t-n), \\ \psi(t) = \sum g_n \phi(2t-n), \\ V_0 \oplus W_0 = V_1, \end{cases} \quad (4.12)$$

小波函数 $\psi(t)$ 就是存在的且能被构造出来. 所以, 多分辨逼近为构造小波提供了一个统一框架. 根据不同要求, 按式(4.12)的标准可构造不同的小波(参见第9~11章).

4.3 正交小波级数和正交小波变换

第3章的小波变换和第4章的多分辨逼近有哪些直接的联系呢? 本节将在多分辨逼近的框架下把函数(信号) $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 表示成正交小波级数, 在此基础上用正交小波变换进一步理解多分辨逼近和小波变换的联系.

1. 正交小波级数

多分辨逼近包含了多尺度逼近的内容, 若 $\{\phi(t-n)\}$ 是平移正交的 Riesz 基, 则近似函数的组合系数可以方便地表示出来. 由此自然会想到, 若在多分辨逼近中给定尺度函数 $\phi(t)$ 是关于整数编号节点平移正交的, 由多分辨逼近所确定的小波子空间是否会有良好的性质呢? 由多分辨逼近所确定的小波级数是否也会有简洁的表示呢? 答案是肯定的. 下面以定理的形式归并给出.

定理 4.1 设 $\phi(t)$ 生成多分辨逼近, 称 $\phi(t)$ 为尺度函数, 称 $\psi(t)$ 为小波函数. 记双尺度方程为

$$\phi(t) = \sum h_n \phi(2t-n),$$

$$\psi(t) = \sum g_n \phi(2t-n),$$

$$g_n = (-1)^n h_{1-n}.$$

设 $\{\phi(t-n)\}$ 是标准平移正交的, $\phi(t) \in L^2(\mathbf{R})$, 则有:

- 1° V_j 的基函数 $\{\phi_{j,k}(t)\}$ 关于平移指标 k 是标准正交的;
 2° W_j 的基函数 $\{\psi_{j,k}(t)\}$ 关于尺度指标 j 正交, 关于平移指标 k 标准正交;
 3° $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, $V_j \perp W_j$, $j \in \mathbf{Z}$;
 4° $\{\psi_{j,k}(t)\}$, $j, k \in \mathbf{Z}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的标准正交基, $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 可展开为正交小波级数, 即

$$f(t) = \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} d_k^j \psi_{j,k}(t),$$

$$d_k^j = (f(t), \psi_{j,k}(t)). \quad (4.13)$$

证明 首先推导基函数平移标准正交的一个等价结论. 若 $\{\phi(t-k)\}$ 是标准正交的, 则等价地有

$$\begin{aligned} \delta_{0,k} &= (\phi(t), \phi(t-k)) \\ &= \left(\sum_n h_n \phi(2t-n), \sum_m h_m \phi(2(t-k)-m) \right) \\ &\stackrel{2k+m=i}{=} \sum_n h_n \left[\sum_i h_{i-2k} (\phi(2t-n), \phi(2t-i)) \right] \\ &\stackrel{i=n}{=} \frac{1}{2} \sum_n h_n h_{n-2k}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

与之类似, $\{\psi(t-k)\}$ 标准正交的等价地表示为

$$\begin{aligned} \delta_{0,k} &= (\psi(t), \psi(t-k)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_n g_n g_{n-2k}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

关于定理 4.1 中 1° 的证明, 只要利用变量代换和 $\{\phi(t-k)\}$ 的标准正交性质式 (4.14), 有

$$\begin{aligned} (\phi_{j,0}(t), \phi_{j,k}(t)) &= (2^{j/2} \phi(2^j t), 2^{j/2} \phi(2^j t - k)) \\ &= (\phi(t), \phi(t-k)) \\ &= \delta_{0,k}, \end{aligned}$$

这就证明了 $\{\phi_{j,k}(t)\}$ 是平移标准正交的.

关于 2° 的证明, 需先证明 $\{\psi_{j,k}(t)\}$ 是标准平移正交的, 然而, 由 1° 的证明过程知, 只需证明 $\{\psi(t-k)\}$ 是标准平移正交的即可. 为此, 利用 $g_n = (-1)^n h_{1-n}$, 有

$$\begin{aligned} (\psi(t), \psi(t-k)) &= \frac{1}{2} \sum_n g_n g_{n-2k} \\ &= \frac{1}{2} \sum_n (-1)^n h_{1-n} (-1)^{n-2k} h_{1-n+2k} \\ &= \frac{1}{2} \sum_n h_{1-n} h_{1-n+2k} \\ &= \frac{1}{2} \sum_m h_m h_{m-2k}, \end{aligned}$$

此式在推导中用到了 $1-n+2k=m$. 再利用式(4.14), 就有

$$(\psi(t), \psi(t-k)) = \delta_{0,k}.$$

这就证明了 $\{\psi_{j,k}(t)\}$ 是关于平移指标 k 标准正交的.

关于 3° 的证明, 这里仅证明 $V_0 \perp W_0$ 是不失一般性的. 利用双尺度方程有

$$\begin{aligned} (\phi(t), \psi(t)) &= \left(\sum_n h_n \phi(2t-n), \sum_k g_k \phi(2t-k) \right) \\ &= \sum_n h_n \sum_k g_k (\phi(2t-n), \phi(2t-k)), \end{aligned}$$

于是, 由 $\{\phi(2t-k)\}$ 的平移正交性即知

$$(\phi(t), \psi(t)) = 0, \text{ 当 } n \neq k \text{ 时.}$$

下面考察 $n=k$ 的情形, 此时有

$$\begin{aligned} (\phi(t), \psi(t)) &= \frac{1}{2} \sum_n h_n g_n \\ &= \frac{1}{2} \sum_n h_n (-1)^n h_{1-n}; \end{aligned}$$

现将 n 分为偶数和奇数两部分, 于是有

$$\begin{aligned} \sum_n h_n (-1)^n h_{1-n} &= \sum_m h_{2m} h_{1-2m} - \sum_m h_{2m+1} h_{-2m} \\ &= \sum_m h_{2m} h_{1-2m} - \sum_m h_{2m} h_{1-2m} \\ &= 0. \end{aligned}$$

故有

$$(\phi(t), \psi(t)) = 0, \text{ 当 } n = k \text{ 时.}$$

由 $V_0 \perp W_0$ 可推知 $V_j \perp W_j$.

定理 4.1 中的 3° 还有另一层含义, 即对同一个尺度指标 j , W_j 是 V_j 在 V_{j+1} 中的正交补子空间, $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, 除 V_j 和 W_j 子空间之外, V_{j+1} 中不再含有其它非零函数子空间, 证明略去.

利用 3° 很容易证得 2° 中的另一部分结论, 即 $\{\psi_{j,k}(t)\}$ 是关于尺度指标 j 正交的, 因为 $W_j \perp W_l, j \neq l$.

4° 的证明很简单, 它是 1°~3° 的必然结果. 例如, 由 $\{\phi(t-k)\}$ 是标准正交基和简单的变量代换就可推得 $\{\phi_{j,k}\}$ 和 $\{\psi_{j,k}\}$ 都是标准正交基. 由 $L^2(\mathbf{R})$ 的子空分解关系 $L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_j W_j$ 和 W_j 中的元素的表达式 $w^j(t) = \sum_k d_k^j \psi_{j,k}(t)$, 即有

$$f(t) = \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} d_k^j \psi_{j,k}(t);$$

再利用 $\psi_{j,k}$ 关于 j 指标正交和关于 k 指标平移正交的性质, 在上式两边用 $\psi_{j,k}(t)$ 作内积, 就得到式(4.13).

2. 正交小波变换

定理 4.1 实质上表明了当尺度函数 $\phi(t)$ 是标准正交基情形时多分辨逼近的一

种表现形式,所以仍可从理解多分辨逼近的角度来理解正交小波级数.在多分辨逼近框架下,正交小波分解关系如图4.5所示.

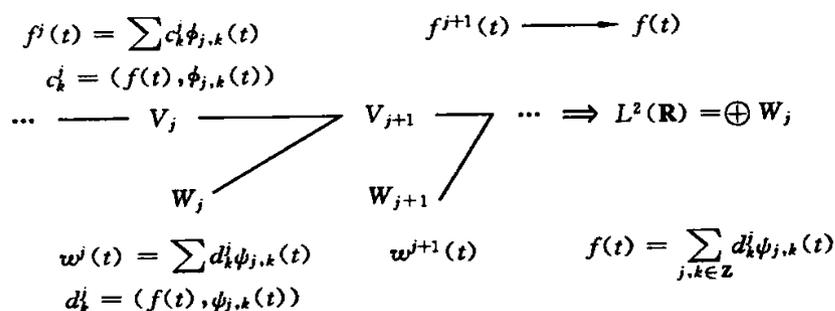


图4.5 $L^2(\mathbf{R})$ 正交小波分解关系示意图

(1) 观察 $V_j \rightarrow L^2(\mathbf{R})$, $f^j(t) \rightarrow f(t)$, 这是一种多尺度逼近. 随着 j 指标的增大, 信号 $f^j(t)$ 无论是在时域中还是在频域中的表现都会逼近 $f(t)$; 反之, 随着 j 指标的减小, 采样间隔增大, $f^j(t)$ 所表现的频率范围减小, 低频量突出, 信号表现为“粗糙”、“模糊”和“平缓”. 在正交小波级数中, 由于基函数 $\{\phi_{j,k}(t)\}$ 的正交性, $f^j(t)$ 的展开系数为

$$c_k^j = (f(t), \phi_{j,k}(t)).$$

这是由低通函数 $\phi_{j,k}(t)$ 表现的积分变换, 但这不是第3章所讨论的小波变换.

(2) 观察 $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, $V_j \perp W_j$. 因为 V_j 是 V_{j+1} 中的低频表现部分, V_j 的频率范围仅是 V_{j+1} 的一半, W_j 是 V_{j+1}/V_j 的频带部分, 所以可以认为, V_j 表现了 V_{j+1} 的“概貌”, W_j 表现了 V_{j+1} 的“细节”. 这种细节的时域表现形式是 $w^j(t)$, 由于 $\{\psi_{j,k}(t)\}$ 的正交性, 其展开系数为

$$d_k^j = (f(t), \psi_{j,k}(t)).$$

这是由带通函数 $\psi_{j,k}(t)$ 表现的积分变换, 也是第3章中所描述和要求的小波变换. 在正交小波分解以及相应的小波变换中, 取

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k),$$

尺度按 2^j 变化, 正交小波变换是一般小波变换中的特殊情形.

由以上分析可知, 正交小波 $\{\psi_{j,k}\}$ 就是第3章中所要求的小波函数 $\psi_{ab}(t) = |a|^{1/2} \psi(at - b)$ 关于 $a = 2^j$ 和 $b \in \mathbf{Z}$ 的离散表现, 它也是由同一个小波函数 $\psi(t)$ 经二进伸缩和整节点平移生成的. 以后将会看到, 这种离散特性和正交特性对实际计算和实际应用带来方便.

4.4 离散小波分解所表现的局部时-频分析方法

由第3章可知, 小波变换的目的在于局部时-频分析, 在于获得自适应的时-频窗, 那么, 由多分辨逼近所确定的离散小波分解是如何体现这些要求的呢?

在多分辨逼近所确定的离散小波分解关系

$$L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} W_j,$$

$$w^j(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} d_k^j \psi_{j,k}(t), w^j(t) \in W_j$$

之中,不一定要要求 $\{\psi_{j,k}(t)\}$ 是平移标准正交的,但它们都是由小波函数 $\psi(t)$ 经平移和放缩生成的,都是具有时-频局部化功能的带通函数,它们的带通性质也表现出 $w^j(t) \in W_j$ 的子频带性质.若 $\{\psi_{j,k}(t)\}$ 是标准正交的,则 $d_k^j = (f, \psi_{j,k})$ 表现出正交小波变换的形式,且把 f 限制在由 $\psi_{j,k}$ 所决定的子频带内.若 $\{\psi_{j,k}(t)\}$ 不是标准正交的,虽然此时 $d_k^j \neq (f, \psi_{j,k})$,但 $(f, \psi_{j,k})$ 仍可理解为把 f 限制在由 $\psi_{j,k}$ 所决定的子频带内.

由多分辨逼近所确定的离散小波分解并不局限于表现 $(f, \psi_{j,k})$,而是在更广泛的意义上考虑,把 $f(t)$ 分解为若干子频带分量 $w^j(t)$,它用确定的离散数据 $\{d_k^j\}$ 来表现,通过对小波分量 $w^j(t)$ (实际上是通过离散数据 $\{d_k^j\}$)的分析来达到局部时-频分析的目的.

在离散小波分解中,小波分量 $w^j(t)$ 是时域表现的分量,但它频率含量是局限在子频带范围内的;对于不同的 j ,这些子频带在频窗意义下是相互不重叠的(见图 4.4).换句话说,时域信号 $f(t)$ 被分解为若干个时域的细节信号 $w^j(t)$, $f(t)$ 的频率范围被分解为若干个频域的子频带细节,某个局部信号的低频含量及局部细节、高频含量及局部细节都将在不同的小波分量 $w^j(t)$ 中得到表现.这个局部信号的频域特征将综合地、然而又是细致地表现在各个子频带中,这个局部信号的时域特征将综合地、然而又是细致地表现在各个小波分量中.据此道理,离散小波分解能将某个局部信号的局部时-频特征表现得更细致.

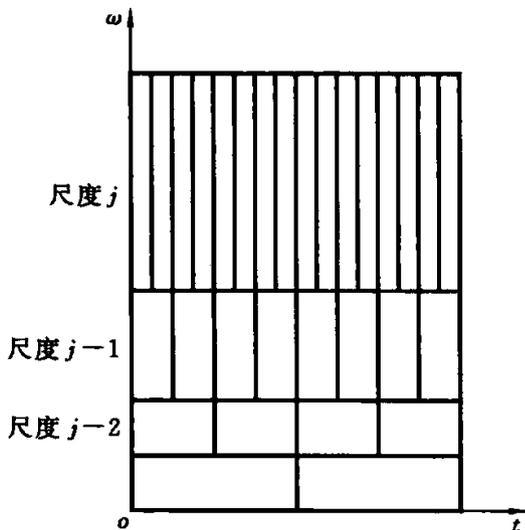


图 4.6 离散小波分解自适应时-频窗示意图

离散小波分解通过离散数据 $\{d_k^j\}$ 来表现局部的时-频信息,由于 $w^j(t) = \sum d_k^j \psi_{j,k}$,所以, $w^j(t)$ 对应的子频带及它的局部时-频窗都由 $\psi_{j,k}$ 来决定,据第 3 章的知识可知,其时窗宽度和频窗宽度分别为

$$2\Delta_t = \frac{2\Delta_\psi}{2^j}$$

和 $2\Delta_\omega = 2 \times 2^j \Delta_\psi$.

其中, Δ_ψ 和 Δ_ψ 是由 $\psi(t)$ 决定的已知值.于是,可画出各子频带中关于离散小波分解所确定的时-频窗示意图(见图 4.6).

离散小波分量在不同尺度上都有表现,时-频窗形状随不同子频带而自动调整(见

图 4.6). j 值大尺度细, 相应小波分量 $w^j(t)$ 表现了某个子频带信号, 其频率中心较高且频带较宽, 瘦窄的时-频窗正好有利于对这种高频端子频带信号作局部分析. 同样, 当 j 值较小时, $w^j(t)$ 表现了另一类子频带信号, 其频率中心低且频带窄, 扁平的时-频窗正好有利于对低频端子频带信号作局部分析. 离散小波分解具有自适应的时-频窗, 且可聚焦分析信号的局部时域位置和局部频段.

第5章 正交小波的快速算法

多分辨逼近(MRA)为深刻理解小波原理和小波构造提供了一个极好的理性框架,本章介绍的关于正交小波快速算法则为应用小波提供了非常便捷的手段.特别是在应用这些快速算法作信号的时-频分析时,仅需要待分析信号的有关数据和双尺度方程的传递系数 $\{h_n\}$ 和 $\{g_n\}$,并不涉及尺度函数 $\phi(t)$ 和小波函数 $\psi(t)$ 的具体表达式.因此,尽管读者目前还不知道小波的具体构造,但仍可从后面章节的内容中借用一下正交小波的传递系数 $\{h_n\}$ 和 $\{g_n\}$,直接应用快速算法作小波分析.

5.1 Mallat 算法

1. 尺度空间的有限分解及数据表征

多分辨逼近框架表明 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 可分解为无穷个小波分量的直和,但在实际应用中,仅知道 $f(t)$ 的近似函数 $f^n(t)$, 例如由采样信号所决定的信号函数可看做 $f^n(t)$, 此时可以在多分辨逼近框架下理解为 $f^n(t) \in V_n$. 于是就有如下的尺度空间的有限分解表现:

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= W_n \oplus V_n \\ &= W_n \oplus W_{n-1} \oplus V_{n-1} \\ &= W_n \oplus W_{n-1} \oplus \cdots \oplus W_0 \oplus V_0. \end{aligned}$$

其中,子空间及其分量表述为

$$\begin{aligned} f^j(t) &= \sum_k c_k^j \phi_{j,k}(t), \quad f^j(t) \in V_j, \\ w^j(t) &= \sum_k d_k^j \psi_{j,k}(t), \quad w^j(t) \in W_j, \\ \phi(t) &= \sum_n h_n \phi(2t-n), \quad \phi(t) \in V_0, \\ \psi(t) &= \sum_n g_n \psi(2t-n), \quad \psi(t) \in W_0. \end{aligned}$$

V_{n+1} 的有限分解关系仅是多分辨逼近无穷分解中的一部分,因此,有限分解就子空间而言、就函数分量而言并就频率范围而言,其含义都同于多分辨逼近.例如, V_{n+1} 中的元素 $f^{n+1}(t)$ 是有限频率范围的, $f^0(t) \in V_0$ 是 $f^{n+1}(t)$ 最低频表现, W_j 中元素 $w^j(t)$ 是具有特定带宽的,它们互不重叠,这些频带的总和正是 $f^{n+1}(t)$ 的频率范围.

为了数字计算和信号分析处理的目的,需要将 $f^j(t)$ 和 $w^j(t)$ 用离散数据来表

示. 因为 $f^j(t) = \sum c_k^j \phi_{j,k}(t)$ 表明 $f^j(t) \in V_j$ 和 $\{c_k^j\}$ 是 1-1 对应的, 可用数据 $\{c_k^j\}$ 来表示 $f^j(t) \in V_j$. 同样, 可用数据 $\{d_k^j\}$ 来表示 $w^j(t) \in W_j$. 这些数据 $\{c_k^j\}$ 和 $\{d_k^j\}$ 不仅分别反映了 $f^j(t)$ 和 $w^j(t)$ 在时域中的变化, 而且分别反映了它们在频域中的频带特性, 其中 j 表示尺度方面的二进规则离散, k 表示整节点标记的时移离散.

2. 分解算法

分解算法要实现的目标是: 在 $\{\phi(t-n)\}$ 是标准正交基条件下, 已知 $\{c_k^{j+1}\}$ 、 $\{h_n\}$ 和 $\{g_n\}$, 求 $\{c_k^j\}$ 和 $\{d_k^j\}$.

先简单考虑 $V_1 = V_0 \oplus W_0$ 的关系, 已知 $\{c_k^1\}$ 、 $\{h_n\}$ 和 $\{g_n\}$, 求 $\{c_k^0\}$ 和 $\{d_k^0\}$. 因为 $\{\phi(t-n)\}$ 是平移正交的, 于是有

$$\begin{aligned} c_n^0 &= (f^0, \phi_{0,n}) \\ &= (f^0 + w^0, \phi_{0,n}) \\ &= (f^1, \phi_{0,n}) \\ &= \sum_k c_k^1 (\phi_{1,k}, \phi_{0,n}) \\ &= \sum_k c_k^1 (2^{1/2} \phi(2t-k), \phi(t-n)) \\ &= \sum_k c_k^1 (2^{1/2} \phi(2t-k), \sum_m h_m \phi(2(t-n)-m)) \\ &= 2^{1/2} \sum_k c_k^1 \sum_m h_m (\phi(2t-k), \phi(2t-2n-m)) \\ &= \sum_{\substack{k=2n+m \\ m=k-2n}} 2^{-1/2} \sum_k c_k^1 h_{k-2n}. \end{aligned}$$

同理可推得

$$d_n^0 = 2^{-1/2} \sum_k c_k^1 g_{k-2n}.$$

再看当 $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ 时, 推导 c_n^j 和 d_n^j 的过程. 由于 V_1 、 V_0 和 W_0 之间的关系与 V_{j+1} 、 V_j 和 W_j 之间的关系相同, 特别值得注意的是, 这两种情形的双尺度方程关系相同, 所以不难想象, 一般的分解公式与前面推导的结果一样, 有

$$\begin{cases} c_n^j = 2^{-1/2} \sum_k c_k^{j+1} h_{k-2n}, \\ d_n^j = 2^{-1/2} \sum_k c_k^{j+1} g_{k-2n}. \end{cases} \quad (5.1)$$

事实上

$$\begin{aligned} c_n^j &= (f^j, \phi_{j,n}) \\ &= (f^{j+1}, \phi_{j,n}) \\ &= \sum_k c_k^{j+1} (\phi_{j+1,k}, \phi_{j,n}) \\ &= \sum_k c_k^{j+1} (2^{(j+1)/2} \phi(2^{j+1}t-k), 2^{j/2} \phi(2^j t-n)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_k c_k^{j+1} (2^{(j+1)/2} \phi(2(2^j t - k/2)), 2^{j/2} \phi(2^j t - n)) \\
 &= \sum_k c_k^{j+1} 2^{1/2} (\phi(2x - k + 2n), \phi(x)) \\
 &= \sum_k c_k^{j+1} 2^{1/2} (\phi(2x - k + 2n), \sum_m h_m \phi(2x - m)) \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_k c_k^{j+1} h_{k-2n}.
 \end{aligned}$$

同理可推导式(5.1)中 d_n^j 的有关公式.

式(5.1)的实现过程如图 5.1 所示, 尺度 j 所存储的数据 $\{c_n^j\}$ 都是按整数编号的. 若以 j 尺度层为基础来观察 $j+1$ 尺度层, 则 j 尺度层的采样节点编号 n 对应着 $j+1$ 尺度层上编号为 $2n$ 的采样节点, 或者说 $j+1$ 尺度的采样节点是在 j 尺度采样节点基础上均匀加密的结果; 若以 $j+1$ 尺度层为基础来观察 j 尺度层, 则 $j+1$ 尺度层上隔 2 取样的节点正好对应着 j 尺度层上的采样节点.

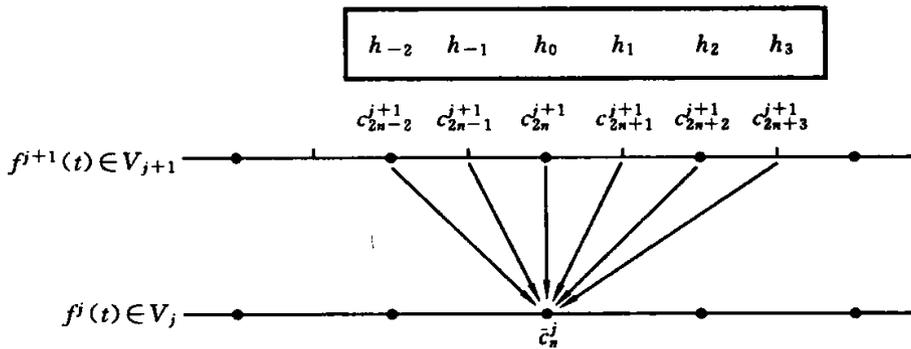


图 5.1 分解算法计算 $\{c_n^j\}$ 示意图

图 5.1 表明了由 $j+1$ 尺度向 j 尺度的限制过程, $\{h_n\}$ 可以看做限制过程的权系数. 假设 $\{h_n\}$ 仅有 6 个元素, 那么, 式(5.1)所表明的限制过程相当于把 $(h_{-2}, h_{-1}, h_0, h_1, h_2, h_3)$ 作为靠模, 其中心点 h_0 对准 c_{2n}^{j+1} 后再作加权平均, 即

$$c_n^j = \frac{\sqrt{2}}{2} (h_{-2} c_{2n-2}^{j+1} + h_{-1} c_{2n-1}^{j+1} + h_0 c_{2n}^{j+1} + h_1 c_{2n+1}^{j+1} + h_2 c_{2n+2}^{j+1} + h_3 c_{2n+3}^{j+1}).$$

按照这一实现过程, 可以得到 $\{c_n^j\}$, 并且可以作如下三种理解: ① 靠模 $\{h_n\} = \{h_{-2}, h_{-1}, h_0, h_1, h_2, h_3\}$ 中心 h_0 对准 $j+1$ 尺度层的偶节点, 按上式计算, 模板隔 2 右移; ② 用 $\{c_n^{j+1}\}$ 和 $\{h_n\}$ 作相关运算, 再隔 2 取值就可以获得 $\{c_n^j\}$; ③ 记 $\{\bar{h}_n\} = \{h_3, h_2, h_1, h_0, h_{-1}, h_{-2}\}$, 用 $\{c_n^{j+1}\}$ 和 $\{\bar{h}\}$ 作卷积后再隔 2 取值. 总之, 按此实现过程都可以获得 $\{c_n^j\}$, 且是非常快捷的.

图 5.1 虽然仅表明由 $\{c_n^{j+1}\}$ 计算 $\{c_n^j\}$ 的限制过程, 它同样也表明了由 $\{c_n^{j+1}\}$ 计算 $\{d_n^j\}$ 的限制过程, 只不过要将权系数(靠模)换成 $\{g_n\}$ 而已. 对正交小波而言, $g_n = (-1)^n h_{1-n}$ 是由 $\{h_n\}$ 简单决定的.

式(5.1)所表明计算过程由算子表示会更简单些. 记 $C^j = \{c_n^j\}$, $D^j = \{d_n^j\}$. 记低通滤波算子 H 的运算意义如式(5.1)的第一式所示, 即

$$(HC^{j+1})_n = 2^{-1/2} \sum_k c_k^{j+1} h_{k-2n}.$$

同样, 记高通滤波算子 G 的运算意义如式(5.1)的第二式所示, 即

$$(GC^{j+1})_n = 2^{-1/2} \sum_k c_k^{j+1} g_{k-2n}.$$

采用算子表示后, 式(5.1)所表明分解算法结构如图 5.2 所示.

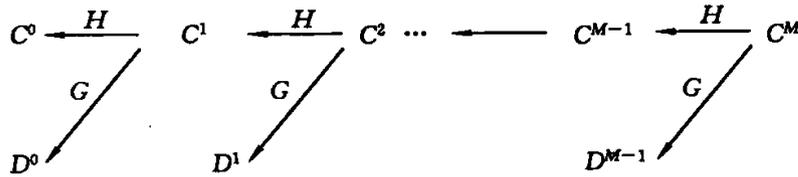


图 5.2 分解算法结构示意图

图 5.2 表明, 只要在细密采样间隔的尺度层次上给定 C^M , 就可利用分解算法快速地获得较粗采样间隔尺度层上的有关数据 C^j 和 D^j ($0 \leq j \leq M-1$). 假设实际问题中 C^M 有 N 个数据, 则 $M-1$ 尺度层上的 C^{M-1} 和 D^{M-1} 各有 $N/2$ 个数据, 依此类推. 还假设 $\{h_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 分别有 A 个数据, 那么, 用 C^M 计算 C^{M-1} 和 D^{M-1} 共需 $2AN$ 次运算, 从 $M-1$ 到 $M-2$ 尺度层共需 $2AN/2$ 次运算. 类推可知, 要得到 C^j 和 D^j ($0 \leq j \leq M-1$) 共需 $2AN \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^M} \right)$ 次运算. 由此可见, 分解算法是快捷的.

3. 回复算法

回复算法是分解算法的逆过程. 此时已知数据 $\{c_k^j\}$ 和 $\{d_k^j\}$, $0 \leq j \leq M-1$, 希望利用这些数据快速准确地重构出数据 $\{c_k^M\}$.

$$\begin{aligned} \text{因为} \quad c_n^{j+1} &= (f^{j+1}, \phi_{j+1,n}) \\ &= (f^j + w^j, \phi_{j+1,n}) \\ &= (f^j, \phi_{j+1,n}) + (w^j, \phi_{j+1,n}) \\ &= \sum_k c_k^j (\phi_{j,k}, \phi_{j+1,n}) + \sum_k d_k^j (\psi_{j,k}, \phi_{j+1,n}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又因为} \quad (\phi_{j,k}, \phi_{j+1,n}) &= (2^{j/2} \phi(2^j t - k), 2^{(j+1)/2} \phi(2^{j+1} t - n)) \\ &= 2^{1/2} \int_{\mathbf{R}} \phi(x) \phi(2x - n + 2k) dx \\ &= 2^{1/2} \sum_m h_m \int_{\mathbf{R}} \phi(2x - m) \phi(2x - n + 2k) dx \\ &= 2^{-1/2} \sum_m h_m \int_{\mathbf{R}} \phi(t - m) \phi(t - n + 2k) dt, \\ (\psi_{j,k}, \phi_{j+1,n}) &= 2^{-1/2} \sum_m g_m \int_{\mathbf{R}} \phi(t - m) \phi(t - n + 2k) dt, \end{aligned}$$

所以, 只要将 $m=n-2k$ 代入上式, 就有

$$c_n^{j+1} = 2^{-1/2} \left(\sum_k c_k^j h_{n-2k} + \sum_k d_k^j g_{n-2k} \right).$$

此式含有两部分回复内容: 一部分是由 j 尺度层“低频量” $\{c_k^j\}$ 回复到 $j+1$ 尺度的, 可用 $\{\tilde{c}_n^{j+1}\}$ 标记; 另一部分是由 j 尺度层反应细节的“高频量” $\{d_k^j\}$ 回复到 $j+1$ 尺度层的, 可用 $\{\tilde{\tilde{c}}_n^{j+1}\}$ 标记. 这两部分内容合起来才是 $j+1$ 尺度层的原数据 $\{c_n^{j+1}\}$. 据此理解, 总结成如下的回复公式:

$$\begin{cases} \tilde{c}_n^{j+1} = 2^{-1/2} \sum_k c_k^j h_{n-2k}, \\ \tilde{\tilde{c}}_n^{j+1} = 2^{-1/2} \sum_k d_k^j g_{n-2k}, \\ c_n^{j+1} = \tilde{c}_n^{j+1} + \tilde{\tilde{c}}_n^{j+1}. \end{cases} \quad (5.2)$$

图 5.3 表明了按式(5.2)计算 $\{\tilde{c}_n^{j+1}\}$ 的计算过程, 实现此计算过程应注意下面两点: 一是 $j+1$ 尺度层偶数编号为 $2n$ 的采样节点对应着 j 尺度层上编号为 n 的采样节点; 二是回复示意图中采用的数据 $\{h_n\}$ 必须为分解算法中的有限数据, 这里仍采用 $\{h_{-2}, h_{-1}, h_0, h_1, h_2, h_3\}$.

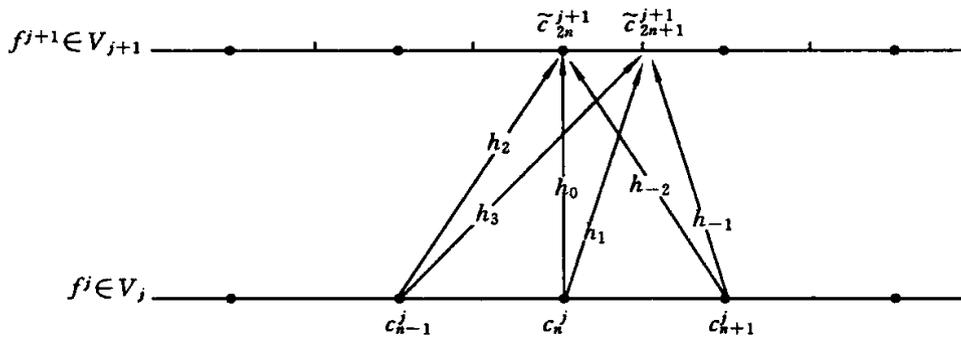


图 5.3 回复算法计算 $\{\tilde{c}_n^{j+1}\}$ 示意图

不难看出, 计算 $\{\tilde{c}_n^{j+1}\}$ 可分为两步进行:

(1) 计算 $j+1$ 尺度层上的偶数编号采样点处的 \tilde{c}_{2n}^{j+1} , 此时可对 j 尺度层采样节点循序推进, 用靠模 $\{h_2, h_0, h_{-2}\}$, 按公式

$$\tilde{c}_{2n}^{j+1} = h_2 c_{n-1}^j + h_0 c_n^j + h_{-2} c_{n+1}^j$$

计算出 $j+1$ 尺度层上偶数编号节处的相应值.

(2) 计算 $j+1$ 尺度层上的奇数编号的采样点处的 \tilde{c}_{2n+1}^{j+1} , 其循序推进过程仍同于第一步, 但需另用靠模 $\{h_3, h_1, h_{-1}\}$, 且按公式

$$\tilde{c}_{2n+1}^{j+1} = h_3 c_{n-1}^j + h_1 c_n^j + h_{-1} c_{n+1}^j$$

来计算.

图 5.3 也表明了式(5.2)中用 $\{d_k^j\}$ 计算 $\{\tilde{\tilde{c}}_n^{j+1}\}$ 的过程, 此时要采用 $\{g_n\}$, 计算式应为

$$\tilde{c}_{2n}^{j+1} = g_2 d_{n-1}^j + g_0 d_n^j + g_{-2} d_{n+1}^j,$$

$$\tilde{c}_{2n+1}^{j+1} = g_3 d_{n-1}^j + g_1 d_n^j + g_{-1} d_{n+1}^j.$$

为了更清楚地表明 $\{c_k^j\}$ 和 $\{d_k^j\}$, $0 \leq j \leq M-1$ 回复 $\{c_n^j\}$ 的关系, 记低频回复算子 H^* 的运算意义为

$$(H^* C^j)_n = 2^{-1/2} \sum_k c_k^j h_{n-2k},$$

其中, $C^j = \{c_k^j\}$; 记高频回复算子 G^* 的运算意义为

$$(G^* D^j)_n = 2^{-1/2} \sum_k d_k^j g_{n-2k},$$

其中, $D^j = \{d_k^j\}$. 在这些回复算子意义下, 式(5.2)可表示为

$$\begin{cases} \tilde{C}^{j+1} = H^* C^j, \\ \tilde{D}^{j+1} = G^* D^j, \\ C^{j+1} = \tilde{C}^{j+1} + \tilde{D}^{j+1}. \end{cases}$$

于是从 $j=0$ 尺度层到 $j=M$ 尺度层的回复算法过程可用图 5.4 表示.

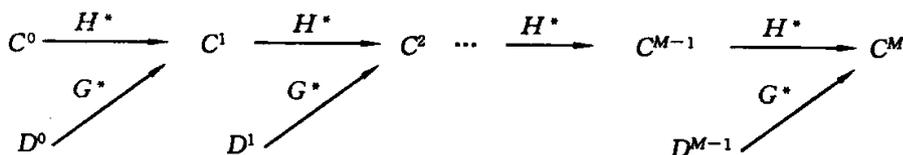


图 5.4 回复算法结构示意图

图 5.4 表明, 对数据 C^M 作如图 5.3 的分解, 仅需存储数据 $C^0, D^0, D^1, \dots, D^{M-1}$, 利用这些数据可顺利地回复 C^j ($1 \leq j \leq M-1$), 也可顺利地回复 C^M .

回复算法也是快捷的, 现估计其计算量. 设 $\{h_l\}$ 和 $\{g_l\}$ 分别有 A 个数据, M 尺度层 $\{c_k^M\}$ 有 N 个数据, 则 $M-1$ 尺度层上 $\{c_k^{M-1}\}$ 有 $N/2$ 个数据, 用 $\{c_k^{M-1}\}$ 计算 $\{\tilde{c}_k^M\}$ 中的偶节点值和奇节点值分别需要 $\frac{A}{2} \cdot \frac{N}{2}$ 次运算; 由 $\{c_k^{M-1}\}$ 计算 $\{\tilde{c}_k^M\}$ 共需 $AN/2$ 次运算; 由 $\{d_k^{M-1}\}$ 计算 $\{\tilde{c}_k^M\}$ 也需 $AN/2$ 次运算; 由 $M-1$ 尺度层数据回复 M 尺度层数据共需 AN 次运算. 可依此类推出其它相邻尺度层之间采用回复算法的运算量, 最后, 知总运算量为

$$AN \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{M-1}} \right).$$

4. Mallat 算法实现中的一些问题

函数(模拟信号)按正交小波展开的分解算法和回复算法一起称为 Mallat 算法. Mallat 算法是一种纯数字的快速递推算法, 但在使用 Mallat 算法时, 仍有一些具体问题需引起注意.

1) 数字滤波器的选用

对正交尺度函数 $\phi(t)$ 而言, Mallat 算法中仅需数据 $\{c_k^M\}$ 和 $\{h_n\}$ 即可进行快速

的分解和回复递推运算. 要存储的数据为 $\{c_k^j\}$ 和 $\{d_k^j\}$, $0 \leq j \leq M-1$, 这些有用的数据的存储量等于 $\{c_k^M\}$ 的数据存储量. 特别值得强调的是, Mallat 算法中隐含着两类关系, 一类是关于多分辨逼近方面的, 例如对 $0 \leq j \leq M-1$, 有

$$\begin{aligned} f^j(t) &= \sum_k c_k^j \phi_{j,k}(t), \\ w^j(t) &= \sum_k d_k^j \psi_{j,k}(t), \\ f^{j+1}(t) &= f^j(t) + w^j(t), \\ \phi_{j,0}(t) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_n h_n \phi_{j+1,n}(t), \\ \psi_{j,0}(t) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_n g_n \psi_{j+1,n}(t). \end{aligned}$$

另一类关系是由于尺度函数 $\phi(t)$ 平移正交性产生的, 例如

$$\begin{aligned} c_k^j &= (f(t), \phi_{j,k}(t)), \\ d_k^j &= (w^j(t), \psi_{j,k}(t)), \\ g_n &= (-1)^n h_{1-n}, \quad 0 \leq j \leq M-1. \end{aligned}$$

Mallat 算法正是利用了这些关系, 在算法实施过程中不需尺度函数 $\phi(t)$ 和小波函数 $\psi(t)$ 的具体形式, 只要求它们存在并找出 $\{h_n\}$, 就可以顺利地进行分解和回复处理了. 因此, 只要查得正交尺度函数双尺度方程的传递系数 $\{h_n\}$, 就可以应用 Mallat 算法了. 选用 $\{h_n\}$ 时应留神双尺度方程的表述形式, 本书中采用

$$\phi(t) = \sum_n h_n \phi(2t - n)$$

的形式, 以后将会看到 $\sum_n h_n = 2$ (见式(8.10)); 有些书中采用

$$\phi(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_n \tilde{h}_n \phi(2t - n)$$

的形式, 此时 $\sum_n \tilde{h}_n = \sqrt{2}$. 所以, 在实际应用中要注意选用 $\sum_n h_n = 2$ 的 $\{h_n\}$, 不可误用. 本书后面将介绍 Daubechies 正交小波, 相应的 $\{h_n\}$ 是数据有限的, 这有利于减少实施 Mallat 算法的计算量.

顺便指出, 如果尺度函数 $\phi(t)$ (如样条函数) 不是平移正交的, 它虽然可以生成多分辨逼近, 但由此构造出的样条小波 $\psi(t)$ 仅关于尺度正交, 没有平移正交性. 此时

$$\begin{aligned} f^j(t) &= \sum_k c_k^j \phi_{j,k}(t), \\ c_k^j &\neq (f(t), \phi_{j,k}(t)). \end{aligned}$$

所以对于样条小波, Mallat 算法不再适用, 必须另行推导相应的分解和回复算法.

2) 原始数据 $\{c_k^M\}$ 的选用

在正交小波分解中, $\phi(t)$ 是正交尺度函数, M 尺度层上的展开系数 $c_k^M =$

$(f, \phi_{M,k})$, 但是用复杂的计算来确定原始数据 $\{c_k^M\}$ 是不合算的, 应采用如下所述的变通处理办法.

先令细密采样间隔尺度层上, 有

$$c_k^M = (f(t), \phi(t-k)),$$

这就是说, V_M 的基函数为 $\{\phi(t-k)\}$, V_{M-1} 的基函数为 $\{2^{-1/2} \phi(2^{-1}t-k)\}$, V_{M-j} 的基函数为 $\{2^{-j/2} \phi(2^{-j}t-k)\}$, V_0 的基函数为 $2^{-M/2} \phi(2^{-M}t-k)$. 于是 $V_M, V_{M-1}, \dots, V_{M-j}, \dots, V_0$ 这些子空间的基函数仍是二进伸缩的, 这些子空间的传递关系仍是多分辨逼近的双尺度方程; 同样利用分解算法(见式(5.1))和回复算法(见式(5.2))来处理有关 $\{c_k^M\}, \{c_k^{M-1}\}, \dots, \{c_k^0\}$ 和 $\{d_k^{M-1}\}, \{d_k^{M-2}\}, \dots, \{d_k^0\}$ 的数据.

在此基础上, 简单取用

$$\{c_k^M\} = \{f(t_k)\},$$

即用细尺度层上的采样值作为初始数据 $\{c_k^M\}$. 这种做法似乎有些不严密. 一方面,

$$f^M(t) = \sum (f, \phi(t-k)) \phi(t-k),$$

当 $M \rightarrow +\infty$ 时, $f^M \rightarrow f(t)$; 另一方面, 由于选用 $c_k^M = f(t_k)$, 有

$$\tilde{f}^M(t) = \sum_k f(t_k) \phi(t-k),$$

当 $M \rightarrow +\infty$ 时, $\tilde{f}^M \rightarrow \tilde{f}(t)$. 对这两方面进行对比, 用 $\{f(t_k)\}$ 代替 $\{c_k^M\}$ 可行吗?

要回答这个问题, 可从多方面考察用 $\{f(t_k)\}$ 代替 $\{c_k^M\}$ 的可行性. 一方面, M 尺度层采样间隔细密, $\phi(t_k) \approx 1$, $\phi(t-k)$ 类似于 $\delta(t-k)$ 的表现, 系数 c_k^M 非常接近于采样值 $f(t_k)$. 事实上, 只要尺度基函数 $\phi(t)$ 是连续的, M 尺度层采样间隔 $h_M \ll 1$, 那么就有

$$|(f(t), \phi(t-k)) - f(t_k)| = O(h_M^\xi), \quad \xi > 2,$$

即用 $\{f(t_k)\}$ 作为 $\{c_k^M\}$ 的近似值时仅有微小误差. 另一方面, 在细密分划下, 数据 $\{f(t_k)\}$ 替代数据 $\{(f(t), \phi(t-k))\}$ 同样有效地表现了 $f^M(t)$ 的时域变化波动状况和有效的频率范围, 这种替代不会影响对 $f^M(t)$ 的时频分析. 最后还应看到, 用 $\{f(t_k)\}$ 作原始数据, 用 Mallat 算法分解后, 还能准确地回复原始数据 $\{f(t_k)\}$. 总之, 用 $\{f(t_k)\}$ 代替 $\{c_k^M\}$ 是实用方便的.

3) 分解层数和采样间隔的关系

这个问题主要从以下几方面考虑便可得出结论.

(1) 最细的 M 尺度层的采样间隔 h_M 大小由两个因素来决定: ① 使采样数据 $\{f(kh_M)\}$ 能够真实反映 $f(t)$ 的各种变化表现, 如光滑、突变、振动等, 满足时域分析的需要; ② 采样间隔 h_M 的大小决定了 $f^M(t)$ 的频率范围, 这种频率范围应满足对原信号的频域分析的需要. 关于 $f^M(t)$ 的频率范围, 由取样效应(见 1.7 节)可知, $f^M(t)$ 最大的频率范围为 $|\omega(f^M)| \leq 1/(2h_M)$; 同样由最粗的 0 尺度层的采样间隔 $h_0 = 2^M h_M$, 易知 f^M 最低的频率范围为 $|\omega(f^M)| \geq 1/(2h_0)$. 于是从需要分辨的

最高频率和需要分辨的最低频率这两个指标,也可决定最细尺度层的采样间隔和数据分解的层数.

(2) 在最细的 M 尺度层上,应取用多少个数据才能满足 M 个层次的数据分解呢? 在 Mallat 算法中, $\{c_k^{M-1}\}$ 的数据量仅为 $\{c_k^M\}$ 数据量的一半,依此类推. 于是,可根据 0 尺度层至少要取用 N_0 个数据才能表现低频量的需要,推知在 M 尺度层,至少取用 $N_M=2^M N_0$ 个数据,才能满足 M 个分解层次的需要.

4) 扩展数据的多少

在 Mallat 算法的运算中,需用到所存储的数据外面的数据,如图 5.5 实线框内数据是要存储的. 在分解算法中,若 $\{h_n\}$ 仅有六个数据,由图 5.1 可知,要用到实线框外的数据 c_{-1}^2 和 c_{-2}^2 才能计算出 c_0^1 ,要用到 $c_{N_2+1}^2$ 、 $c_{N_2+2}^2$ 和 $c_{N_2+3}^2$ 才能计算出 $c_{N_1}^1$. 其它层次的情形类似.

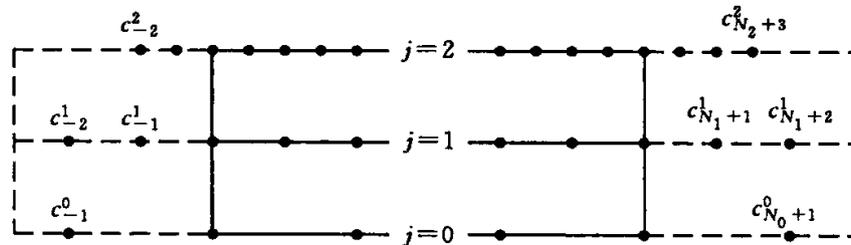


图 5.5 Mallat 算法会涉及没有存储的数据示意图

因此在应用 Mallat 算法时,实际使用的数据要比可用于分析的数据多,要根据待分析数据的具体情况来确定使用数据.

(1) 可获得信号的较多数据,仅需分析其中的一部分数据,此时可将待分析数据段两端作数据扩展,这些扩展数据仍是原信号的数据. 这样便可满足 Mallat 算法多层数据分解回复的需要,可保证待分析数据段的有效性.

(2) 仅仅知道原信号的某个数据段,待分析的也是这个信号数据段,此时需要对此数据段两端扩展数据,可采用零数据扩展、奇对称扩展、偶对称扩展、光滑顺延性扩展等办法,这些也都是离散 Fourier 分析的数据扩展办法. 具体使用哪一种办法,可按信号表现来决定.

(3) 已知某信号段的离散数据,但在作多层数据分解回复时数据量不够用. 此时有两种办法来增加初始数据,其一是对原信号重新加密采样,其二是对已知离散数据作插值处理.

5. Mallat 算法所表现的频域分解特点

有限尺度空间的正交小波子空间的直和分解关系,例如

$$\begin{aligned} V_3 &= W_2 \oplus V_2 \\ &= W_2 \oplus W_1 \oplus V_1 \\ &= W_2 \oplus W_1 \oplus W_0 \oplus V_0, \end{aligned}$$

在 Mallat 算法中是通过算子 H 和 G 来表现的. 数据 C^j 表征 $f^j \in V_j$, 数据 D^j 表征 $w^j \in W_j$, 那么在 Mallat 算法中,

$$C^j = HC^{j+1},$$

$$D^j = GC^{j+1},$$

从而实现了

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, j = 0, 1, 2$$

$$V_j \perp W_j, j = 0, 1, 2.$$

这种子空间分解和算子 H 与 G 之间的关系如图 5.6 所示.

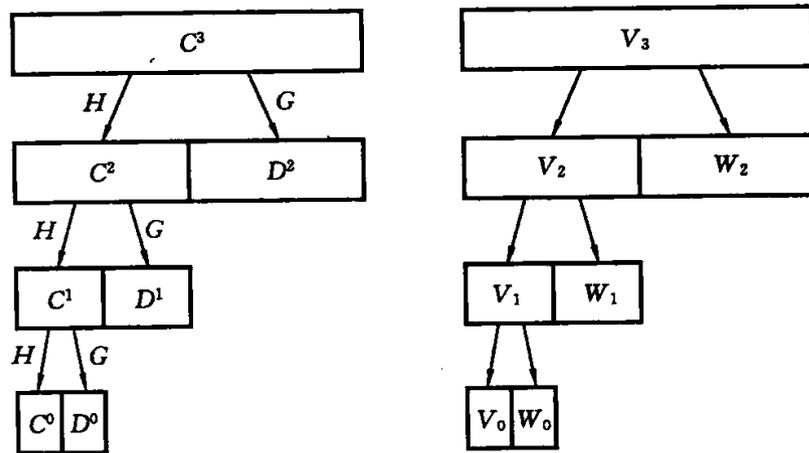


图 5.6 Mallat 算法所确定的数据分解和子空间分解的对应关系

因为 f^{j+1} 和 f^j 都是有限频率范围的, f^j 的频率范围仅是 f^{j+1} 的相对低频部分, w^j 的频率范围是 f^{j+1} 的相对高频部分, 所以 w^j 是 f^{j+1} 的关于高频带的分量. 换成子空间来描述, V_{j+1} 所表现的频率范围被分解为两部分, 一部分是由 V_j 表现的低频部分, 另一部分是由 W_j 表现的频带部分. 因此, V_3 尺度空间的直和分解, 表明把 f^3 的频率范围分解为由 W_2 、 W_1 、 W_0 和 V_0 所表现的频带, 且这些频带是互不重叠的.

这里所说的 W_2 所表现的频带宽度, 也就是其基函数 $\psi_{2,k}(t)$ (是窗函数) 的频窗宽度. 由式(3.13)可知, W_1 所表现的频带宽是 W_2 的一半, 尺度指标减小, 则小波子空间所表现的频带宽分半减小. 由于对任意尺度而言, 小波子空间所表现的时-频窗面积是恒定不变的常数, 所以对时-频窗的时窗宽度而言, 尺度指标减小, 则相应的时窗宽度成倍增加.

图 5.7 表示了正交小波分解(以 V_3 分解为例)用于分析 t^* 处局部时域信号时, 在各个频带的时-频窗表现.

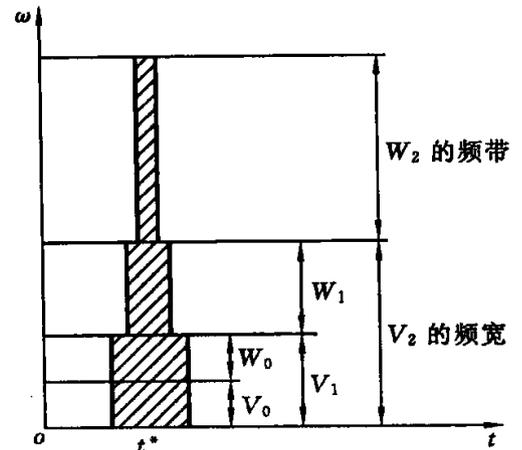


图 5.7 正交小波分解在各频段的时-频窗示意图

5.2 小波包算法

1. 对正交小波分解的进一步细分要求

在正交小波分解中,如果最细尺度层的采样密度和分解层次确定,那么,细尺度空间所对应的频率范围、频带划分的宽度、各频带中时-频窗的形状、各频带中时-频局部化的精细程度等就随之确定。

在这种确定时-频分析的规则中,如果需要在高频端的更窄的频带内观测局部信号的表现,正交小波分解所确定的时-频分析方法是不能满足要求的。

根据这一要求,可以设想,若把正交小波分解中的各个小波子空间再作更细致的分解,则其对应的频带将被进一步细分,这样会在时-频分析中增加灵活性,也可以最大可能地提高时域和频域的分辨率,使时-频分析能聚焦于任意的细节。

2. 正交小波包分解算法及其频域表现

这里仍以 V_3 的空间分解及其数据 C^3 的分解为例来说明小波包分解算法。下面将用 U_3 表示 V_3 ,称 C^3 是表现 U_3 的数据。用正交小波分解中的算子 H 和 G ,按图 5.8 所示的方法形成小波包数据,图 5.9 则表示了与图 5.8 相对应的小波包子空间分解结构关系。图中的子空间标记,例如 U_2^1 和 U_2^2 ,其下标表示分解层次,其上标则表示子空间的顺序。对 U_3 的第一层分解,有两个子空间,第二层分解有四个子空间,第三层分解共有八个子空间。

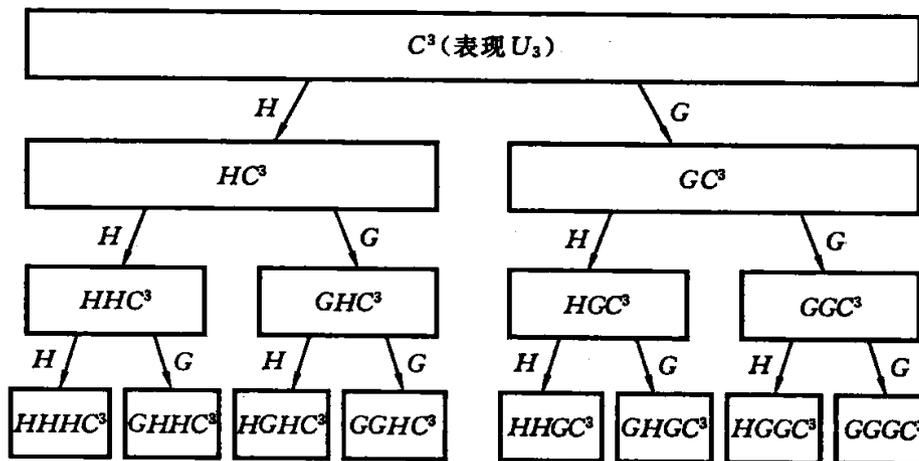


图 5.8 小波包数据分解关系

弄清图 5.9 中各子空间的相互关系是重要的。由于正交小波分解中算子 H 和 G 的作用,在第一层分解中,有

$$U_3 = U_2^1 \oplus U_2^2, U_2^1 \perp U_2^2.$$

由于 $C_2^1 = HC^3$, H 是低通滤波算子,所以 U_2^1 是 U_3 中低频分量组成的子空间;同理, $C_2^2 = GC^3$, G 是高通滤波算子,所以 U_2^2 是 U_3 中高频分量组成的子空间;这样,子空间 U_3 被分解为不同频带的两个子空间 U_2^1 和 U_2^2 ;由于正交分解的缘故,所以

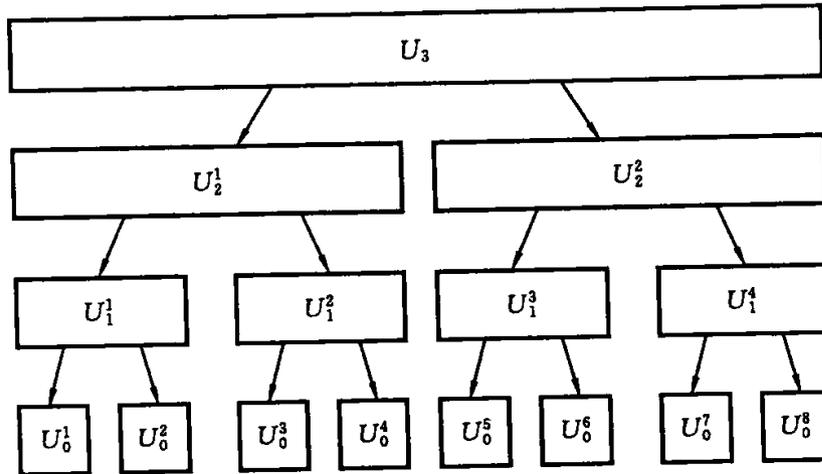


图 5.9 小波包空间分解结构

子空间 U_2^1 和 U_2^2 是相互正交的.

类比可知,第二层分解中有

$$U_2^1 = U_1^1 \oplus U_1^2, U_1^1 \perp U_1^2,$$

$$U_2^2 = U_1^3 \oplus U_1^4, U_1^3 \perp U_1^4.$$

同样类比可知,在第三层分解中有

$$U_1^n = U_0^{2n-1} \oplus U_0^{2n}, U_0^{2n-1} \perp U_0^{2n}, n = 1, 2, 3, 4.$$

另外,在同一尺度上的所有子空间都是正交的,例如, $U_1^1, U_1^2, \dots, U_1^4$ 是相互正交的, $U_0^1, U_0^2, \dots, U_0^8$ 是相互正交的. 还有一些子空间是相互不正交的,例如 U_0^1 、 U_1^1 、 U_2^1 和 U_3 , 它们互相不垂直, U_0^5 、 U_1^3 和 U_2^2 之间也互相不垂直. 总之,把 H 和 G 在正交小波分解中的作用类比到小波包情形,是不难弄清各子空间之间的正交性的.

弄清小波包空间所对应的频带也是很重要的. 从子空间对应频带相互不重叠的表现也可以了解子空间之间的正交性质. 图 5.10 仅表示了 U_2^2 所对应频带的分解情形.

总之,小波包可以从多个方面去理解. 从数据结构关系来看,它是一种二分树结构;从数据分解关系来看,它是一种递推算法;从空间分解关系来看,它把正交小波分解的子空间作进一步细分;从频域划分来看,它将有限频带细分为若干更细频带的组合.

3. 正交小波包回复算法

在小波包分解的基础上要实现回复,首先要考虑用哪些子空间的直和能表现原先被分解的尺度函数空间;其次,由于这种子空间组合形式是多种多样的,所以要求组合方案必须适应实际分析问题的需要,特别是局部时-频分析的需要. 根据这两种考虑,将几种回复方案及其作局部分析时所对应的时-频窗形状分别绘制于图 5.11 中,以便对各种方案作出对比.

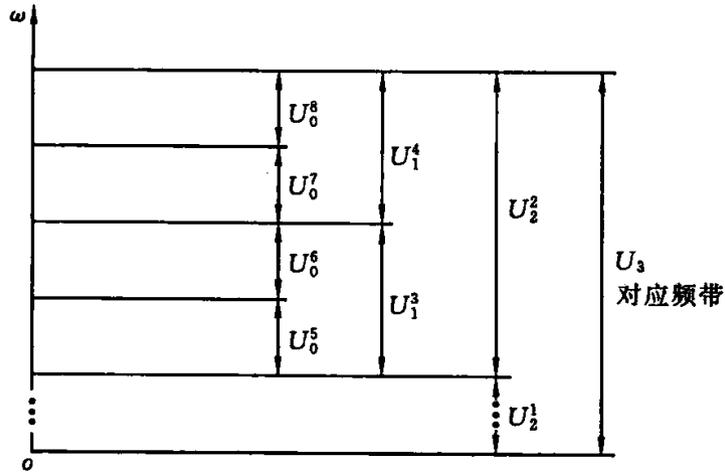


图 5.10 关于图 5.9 小波包子空间所对应的频带

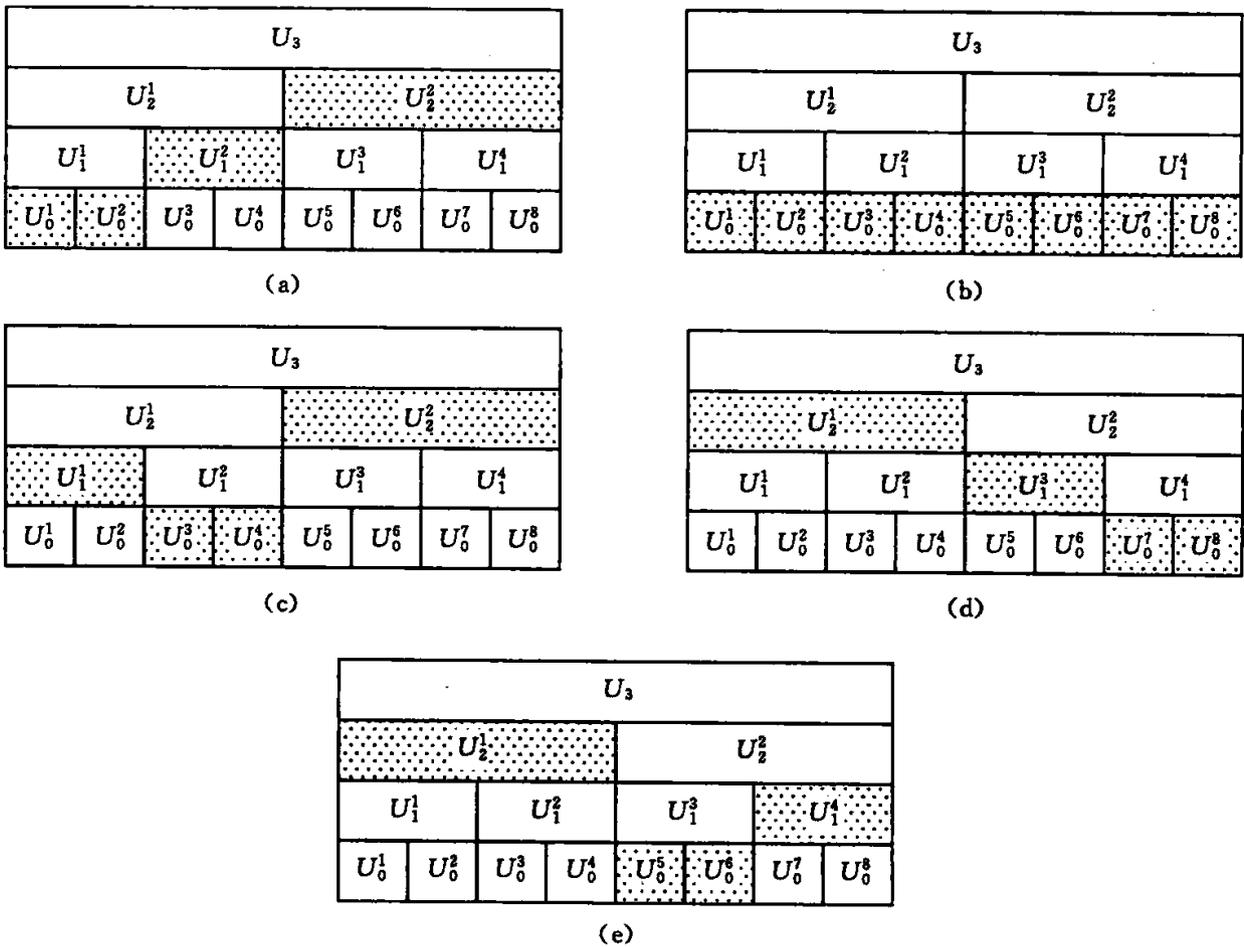


图 5.11 小波包回复算法中的几种空间组合方案

图 5.11 中的五类小波包方法在时-频分析各有特点. 图 5.11(a) 正对应着正交小波分解、回复的情形. 这种组合就各个子空间对应的频带宽度而言, 频率越高的地方频带宽度越大, 所以该组合所确定的分解和回复算法不利于高频频带的进一步的细分观察.

图 5.11(b)所示的小波包分解和回复算法,把有限频带作了较细的划分,这样就可以在某个更窄的频带中观察信号的变化特点,提高了频域中的分辨率.该图所示的小波包分解、回复算法相当于在各个频段作窗口 Fourier 变换的分析方法.

图 5.11(c)所示的小波包分解回复算法加强了中间频段的频域分辨率,适当降低了高频段的频域分辨率;同样可知,图 5.11(d)所示的算法则加强了中高频段的分析.

由以上分析可知,小波包算法是一种灵活的时-频分析方法.根据对信号的经验估计,可以根据信号分析处理中的各种要求,任意地加强某些特定时段和特定频段的观察和分析.

第 6 章 小波分析方法在滤波和消噪方面的应用原理

6.1 小波分析在常规滤波方面的应用

常规的几种滤波,例如低通滤波、高通滤波和带通滤波等,虽然用其它的滤波方法可以实现,但小波分析方法在常规的滤波方面表现得更为清晰和简洁.

低通滤波要求保留原信号中某个特定低频范围的信号,去掉高频量.正交小波的 Mallat 算法对低通滤波是行之有效的,例如数据 C^M 能表现 f^M 的频率范围, HC^M 可表现关于 f^M 的一半的低频范围(参见图 5.6、图 5.7).若要实现更细致的低通滤波,可利用正交小波包算法,例如图 5.11(b)所示的正交小波包分解,保留 $U_0^0 \sim U_0^7$ 且令 $U_8^0 = 0$,可实现保留 f^M 频率范围 $7/8$ 的低通滤波.总之,灵活地运用 Mallat 算法和小波包算法,可实现各种要求的低通滤波.

高通滤波要求保留原信号的高频量,去掉特定范围的低频量.仍然可以利用正交小波分解、正交小波包分解在频域方面的表现,保留信号分解中对应于高频量的数据,用零代替低频量所对应的数据,这样就能方便地实现高通滤波.例如在图 5.11(b)所示的小波包分解中,仅保留 U_8^0 和 U_8^7 ,令 $U_0^0 \sim U_7^0 = 0$,用 U_8^0 和 U_8^7 回复出的信号 \tilde{f}^M 就是高通的.其回复过程仍同于 Mallat 算法中的表现,此种情形为

$$U_1^1 = H^* U_0^7 + G^* U_8^0, \quad \tilde{f}^M = G^* U_1^1.$$

带通滤波要求保留原信号的某个特定频带.据正交小波(包)分析方法在频域方面的表现,可实现非常细致的、清晰的带通滤波.同样,若把若干频段的信息混叠后传输,小波(包)分析方法可把它们有效地分离出来.

6.2 小波分析在消噪方面的应用

1. 白噪声的几个特点

实际采集的信号中常含有白噪声,只有作消噪处理,才能有效地表现原信号中的有用信息.下面先介绍白噪声的几个特点.

(1) 白噪声可看做一个平稳的随机信号,记为 $\sigma(t)$,它在各采样点处的值 $\sigma(t_n)$ 是一个随机量, $\sigma(t_n)$ 取值大小与其它采样点处的随机取值无关.因此,白噪声的随机性表明,不同的白噪声 $\sigma_1(t)$ 和 $\sigma_2(t)$ 是不相关的.

(2) 白噪声可看做是能量无限且是零均值的.白噪声在时域中没有衰减性,所以它是能量无限的.白噪声是随机变动的,所以

$$\frac{\sum_n \sigma(t_n)}{\sum_n \sigma^2(t_n)} = 0.$$

(3) 相对于确定信号而言,白噪声的时域表现是均匀密集的.

(4) 白噪声包含着全部频谱,即 $\mathcal{F}[\sigma(t)] = 1$.

2. 白噪声的小波分析特点

(1) 实际工程中的有用信号通常表现为低频信号或一些比较平稳的信号,而噪声通常表现为高频信号.对含有噪声的有用信号作小波分解,噪声信号主要表现在各个尺度的信号中的高频信号部分.以图 5.6 为例,噪声此时主要表现在数据 D^2 、 D^1 和 D^0 中.然而,噪声在高频系数的幅值方面的表现,是随着尺度变大和分解层次增多,按约 $2^{-1/2}$ 倍快速衰减的(参见图 6.3 和图 6.4).另外,噪声在各个不同尺度上的表现也是不相关的.

(2) 根据上面对噪声特点的分析,可提出两种小波分析消噪方法.

① 强制消噪处理方法.该方法把小波分解结构中的高频系数全部变为 0 值,即把某几个尺度的高频分量全部丢弃,然后再对信号进行重构处理.这种方法比较简单,重构后的信号也比较平滑,但容易丢失原信号中有用的高频分量.

② 门限消噪处理方法.该方法要根据经验或某种依据设定门限值(阈值),对信号小波分解中的最高频系数用门限值处理,即大于门限值的部分保留,低于门限值的系数变为零值.这符合噪声在高频部分均匀密集的特点.对其它各尺度的高频系数改变门限值处理,随着分解层次的增加,门限值可按约 $2^{-1/2}$ 倍减小.这种门限消噪处理方法往往符合实际要求.

6.3 小波分析在平稳信号消噪中的应用

平稳信号通常表现为低频信号,但是实际采集的信号中往往混有噪声,根据确定信号的某些已知的特点以及噪声的某些特点,可以采取灵活的办法达到消噪的目的.

(1) 实际测量的周期信号中混有白噪声,希望消噪并清晰地表现周期信号.因为这种周期信号是低频的,自相关过程能较好地表现周期性,所以这种自相关过程能较好地滤掉白噪声(见图 6.1).另一方面,实用信号是低频的,且是周期表现的,这种特点在小波分解分量中一定有所表现.总之,将小波分解消噪和自相关过程消噪结合使用,会有较满意的结果.

(2) 时频受限信号中含有白噪声的情形也是常见的.在自动检测、水下勘探、声呐探物等工程技术问题中,使用的探测信号常常是具有确定频带的;接受到的反馈信号中含有探测信号的特性,含有探测物体的反射特性,这部分确定信号也是具有一定频带的;接受到的反馈信号中往往含有较强的噪声;另外,与发射信号相比,

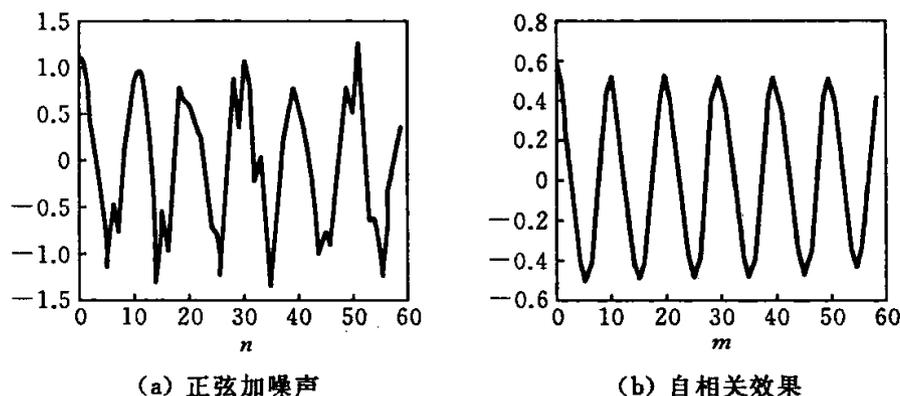


图 6.1 正弦加噪声信号的自相关效果

反馈信号还具有一定的时滞性. 为了有效地分析接受信号, 必须首先进行消噪处理, 以便真实地表现能反应探测对象的确定信号; 然后再分析确定信号, 以便获得检测对象关于位置、尺度、距离、反射特点等方面的有用信息.

对于这类时-频受限信号的消噪问题, 可以将接受信号作细致的小波包分解, 将频限之外的信号全部去掉, 达到初步消噪的目的. 但是, 在保留的频限内的接受信号中仍含有噪声信号, 这时, 可以用门限滤波方法进一步消除在固定频限内的噪声, 还可以用相关性消噪, 也可以将上述过程反复几遍, 以达到较好的消噪效果, 提高信噪比.

(3) 连续监测电网电压, 以便考察用电情况, 分析用电故障的原因. 图 6.2(a) 表明, 采集信号中不仅有白噪声信号, 还有电器发生故障的信号, 我们希望压制噪声而保留用电故障信号的特征. 在对这种信号作小波分解消噪处理时, 若采用强制消噪方法, 则处理后的信号比较光滑, 但同时也去掉了故障信号的某些有用表现; 若采用门限消噪方法, 则能较妥善地解决消噪和保留故障信号方面的要求(见图 6.2(b)和(c)). 应该注意的是, 虽然电网电压信号是具有频率限制的, 但是人们一般不知道故障信号的频率限制范围, 所以不能采用频限消噪的办法.

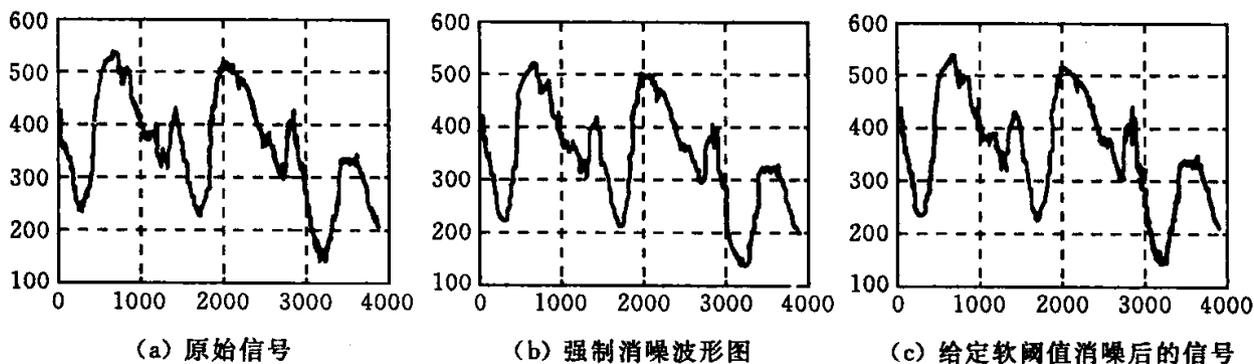


图 6.2 用电故障信号的消噪表现

6.4 小波分析在非平稳信号消噪中的应用

在实际工程应用中, 所分析的信号常常是非平稳信号, 它可能包含着尖峰和突

变的表现,噪声也可能是非平稳的白噪声.要分析这类信号,必须对信号作预处理,将信号中的噪声尽可能地压制,以便提取有用的信号.非平稳信号除了含有非常有用的低频信号外,其突变部分通常反应了检测对象的某些重要特征,含有较丰富的高频信号.因此,对非平稳信号作滤波预处理,既要消掉噪声所表现的高频量,又要保留那些反应信号突变部分的高频量.

用传统的 Fourier 分析方法不能满足非平稳信号滤波预处理的要求,因为它不能区分哪些是表现突变部分的有用的高频量,哪些是属于噪声的无用的高频量,它不能给出在某个局部时间段或时间点上的信号频域变化表现.对于采用 Fourier 分析方法处理的低通滤波,当低通频率范围较窄时,滤波后的信号突变部分变得平滑了,因为反应突变部分的高频量被当做噪声滤掉了;当低通频率范围较宽时,信号突变部分虽然得到体现,但信号中仍存在着大量的噪声.

正交小波分解具有自适应的时-频局部化功能.在信号的突变部分,某些小波分量表现幅度大,它与噪声在高频部分的均匀表现正好形成明显的对比,因此正交小波分解能有效地区分信号中的突变部分和噪声,达到消噪预处理的效果.同样,正交小波包分解能更细致地表现信号突变部分的高频量,也能明显地表现低频信号中所混杂的噪声高频量,所以正交小波包也能有效地达到对非平稳信号进行消噪预处理的效果.

例如,一个矩形波原始信号中混有白噪声(见图 6.3(a)),希望在兼顾突变表现的情况下作消噪处理.因为用 Fourier 分析方法的处理效果不理想,现用小波分析方法处理.为此,对图 6.3(a)中信号作五个水平的正交小波分解,这些小波分量的表现如图 6.3(b)所示.可见,噪声在不同尺度上都有分量表现,但能量在高频部分较集中且是较均匀分布的;局部突变信号在各个尺度上都有突出的表现.根据这些表现,可采用两种滤波消噪的办法.① 先检索与突变点相对应的各尺度层上的小波变换模极大值,即小波变换值取绝对值后取最大值(见第 7 章),仅保留对应于突变点位置的小波变换值,其它小波变换值用零值代替.这种处理结果会使回复信号的突变点变得稍平滑.② 在高频(细尺度)部分,仅保留与突变点位置相对应的小波变换值,其它小波变换值用零值代替;在低频(较粗尺度)部分,保留突变点及其附近的小波变换极大值.这种处理办法相当于不同尺度层使用不同门限值处理,能较好地表现信号的突变部分,能较好地达到消噪的目的.这种处理的结果如图 6.3(c)所示,其回复信号如图 6.3(d)所示.

另一个例子如图 6.4 所示.对一个非平稳含噪信号采用八个尺度的二次样条小波变换,这种二次样条小波是奇对称的(见图 11.3),这种小波变换对信号的突变处理也是有突出表现的.保留这些突出表现,消除噪声表现,可得到如图 6.6 所示的各尺度层上的表现及回复信号,回复信号的消噪效果是明显的.

非平稳信号一般表现为含噪突变信号,消噪的关键之一在于有效识别信号突

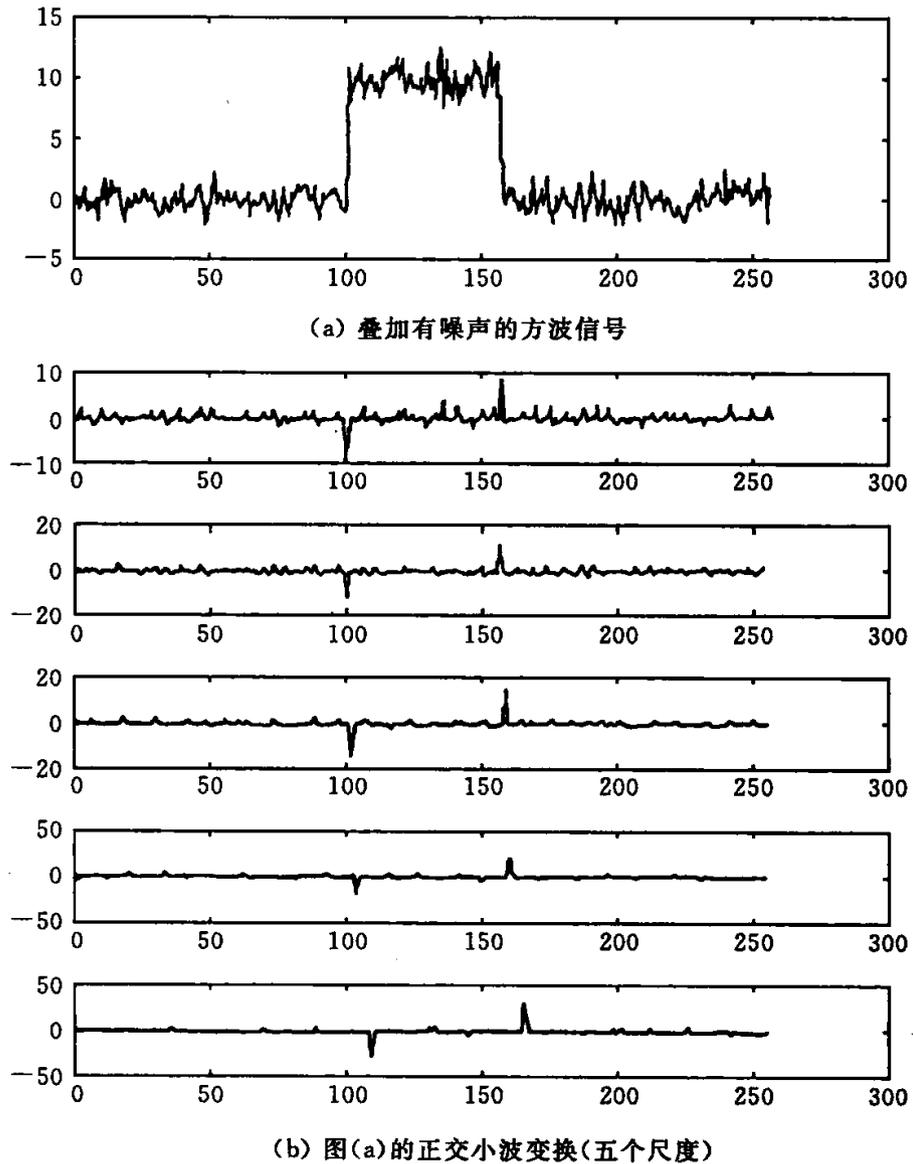
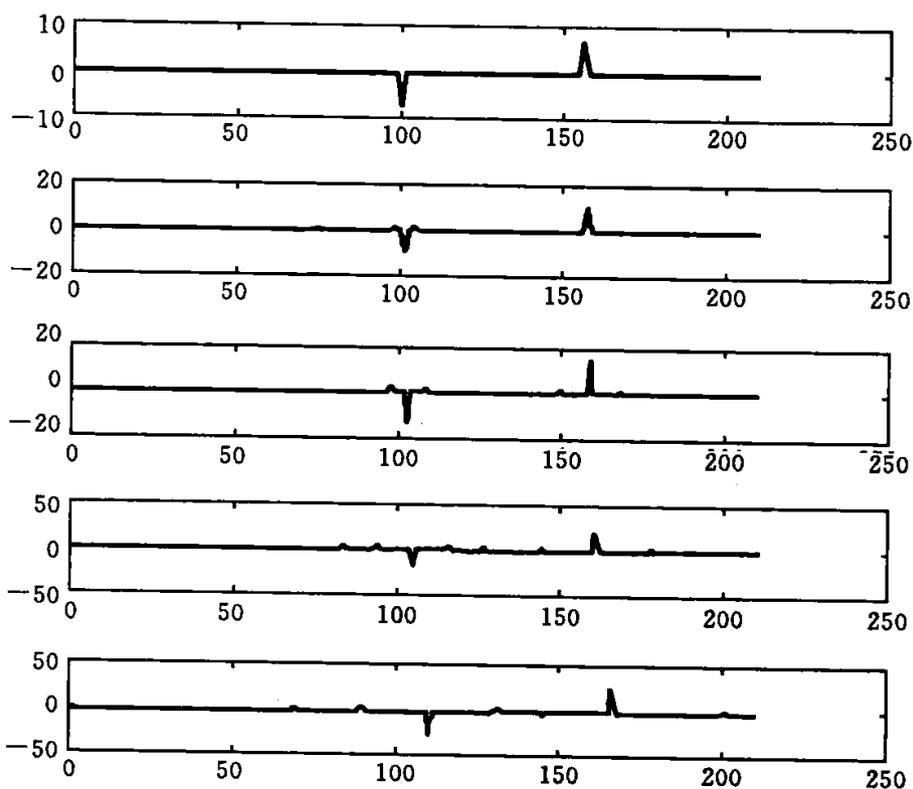


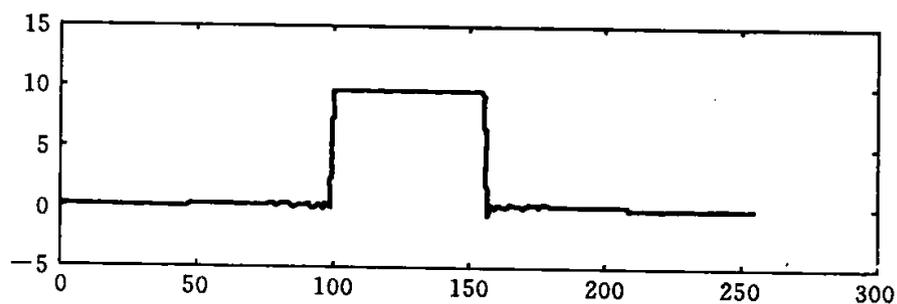
图 6.3 由小波变换模

变点的位置. 比较图 6.3 和图 6.4 可知, 正交小波变换在各个尺度层上虽然能符号一致地反映信号突变点位置, 但对应的小波变换极大值点在各个尺度层上有移位表现, 这是由于正交小波不对称的原因造成的, 这种移位表现不利于机器的自动识别. 然而, 由于二次样条小波是奇对称的, 所以信号突变点位置与各尺度层上的小波变换模极大值符号一致地, 并位置整齐地对应着, 这种特点有利于机器自动识别信号突变点.

仅保留对应着信号突变点的小波变换模极大值有时是不够的, 有些小波变换模极大值虽然幅值较小但却是有用的信息, 噪声的小波变换模极大值是应除去的信息. 如何有效地增强有用信息, 压制无用信息, 这也是非平稳信号消噪的关键之一. 下面介绍的办法是行之有效的.



(c) 消噪后的模极大值图(五个尺度)



(d) 由图(c)的重建信号

极大值消除加性白噪声

假设非平稳信号用对称的小波(例如二次样条小波)作多尺度层小波分解,由于这种小波分解对信号突变点能作出符号一致的且位置整齐的对应表现,又由于白噪声的小波分解在较细尺度层上是均匀稠密且是相关性很差地表现的,因此,将相邻两个细尺度层上的小波变换对应相乘,就能进一步增强信号在突变点处的表现并压低噪声的表现(见图 6.5(b)).

图 6.5(c)将图 6.5(b)中的突出表现全部放大并归一化,形成一种空间屏蔽滤波器;图 6.5(d)是将屏蔽滤波器与最细层小波变换再相乘的结果,所示结果可作为最细尺度层上的新的小波变换.

按照这种处理办法,可将图 6.4 中第 8 和第 7 层、第 7 和第 6 层、第 6 和第 5 层的处理结果,分别作为图 6.6 中第 8 层、第 7 层和第 6 层的小波变换,保留第 1

至第 5 层的分量,由此得到的图 6.6 中的回复信号无论在消噪还是在保留突变信号表现方面都是较理想的.

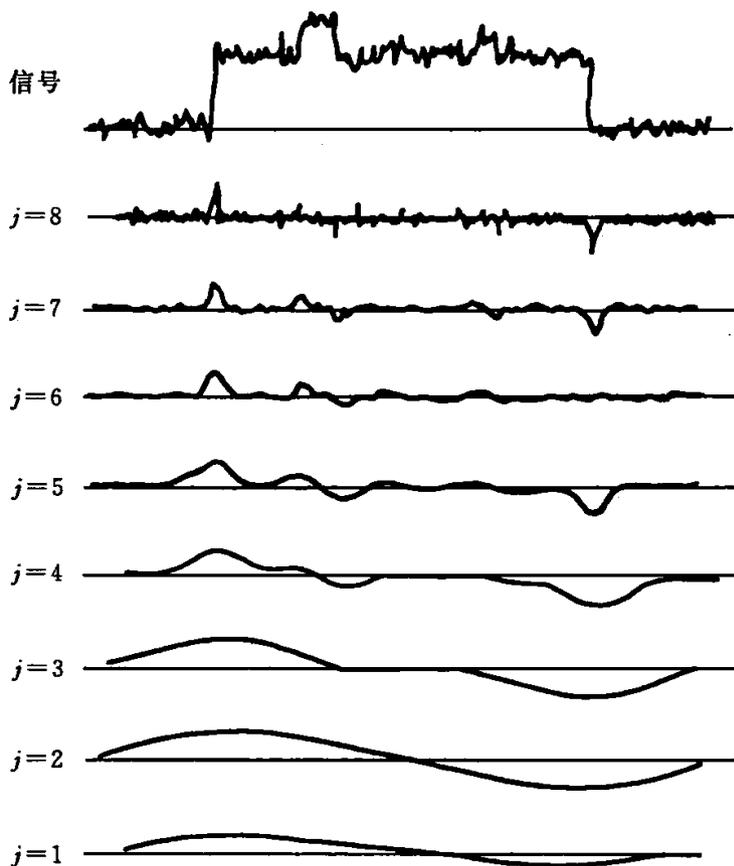


图 6.4 含噪信号的二次样条小波变换

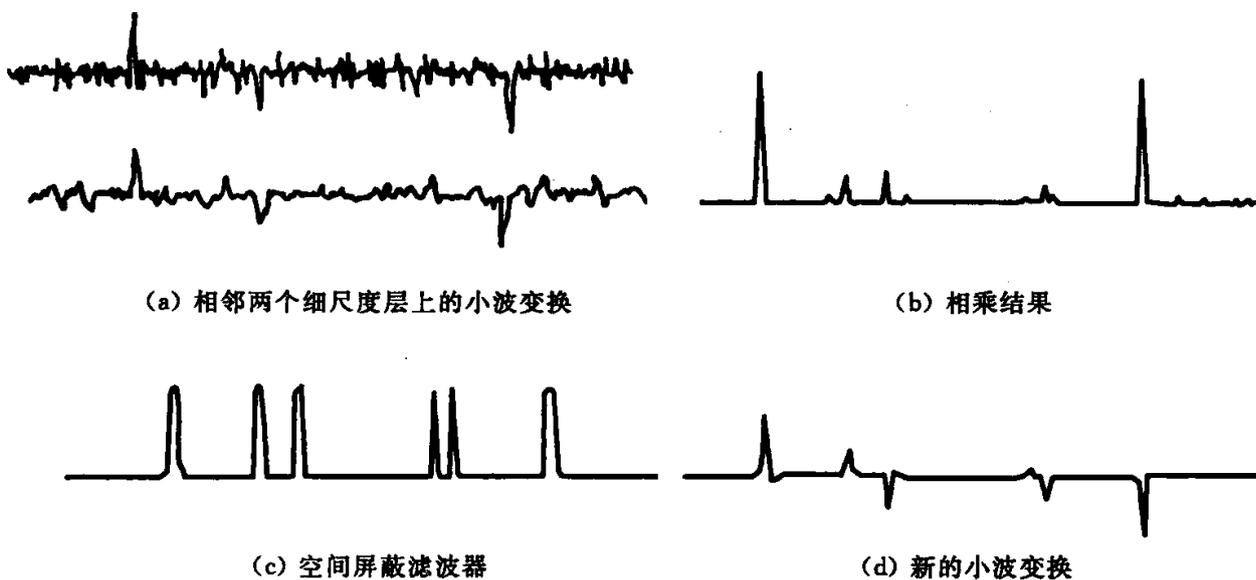


图 6.5 空间屏蔽滤波器

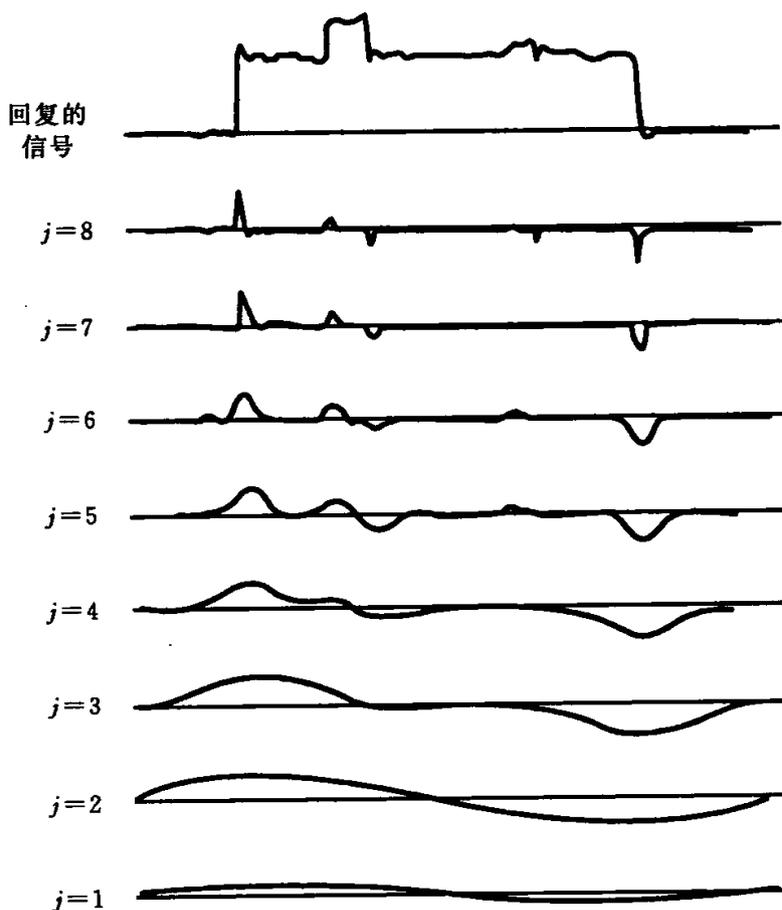


图 6.6 关于图 6.4 的处理结果

6.5 小波分析在语言信号基音提取和压缩存储中的应用

语言信号的基音提取是语音分析处理中的一个关键问题. 可根据不同基音表现去识别不同语音的特征, 可利用基音作语言合成, 也可利用基音表现对原语言信号作压缩存储处理.

语音信号的频带一般不超过 20 kHz. 语音信号有着十分复杂的波形, 它可以看做一个非平稳信号. 这种非平稳信号基本上由两部分组成. 一部分是低频量, 主要由基音来表现; 另一部分是高频量, 主要由噪声、突变边缘等来表现. 基音是限定在一定频率范围内的低频量, 有着强度和周期的特征, 可根据语音信号的这些特点来确定提取基音的办法.

(1) 对语音信号逐次作低通滤波, 滤去高次谐波. 每次低通滤波能将频率范围减小一半, 逐次低通滤波可滤去基音之外的高频量, 留下的那些仅含基音的信号变得平滑, 平滑的基音信号段之间有一定间隔, 利用这种间隔可识别基音之间的区别.

(2) 同一基音的周期和强度特征, 随着发音体和基音的不同而有所区别, 在一个基音的平滑信号段内统计的峰值, 可用来确定基音的周期数和幅值大小.

(3) 可利用基音的低频时域表现来确定基音的中心频率,也可通过 Fourier 变换将基音低频信号变换到频域中,可用分析能量集中程度来确定基音的中心频率.

(4) 上述关于基音周期和中心频率的估计会有偏差,可在相应的时域和频域中作些细致的修正处理,提高判断精度.

(5) 在基音提取处理中,语音信号段长度有限,小波分解层次不多,这是主要困难之一. 处理办法之一是,对原信号作低通滤波时不作隔 2 取样处理. 而是逐点地作平滑处理,这样多次平滑后仍有足够的数据长度可供使用. 处理办法之二是,作隔 2 取样的小波分解处理后,对保留下来的平滑信号数据再作较细密的插值处理,这样也可提供足够的数据长度.

(6) 用正交小波包分解也容易捕捉语言信号的各种特征.

(7) 提取语音基音特征,非常有利于语音信号的压缩存储,因为同一基音有聚类规律,相同基音之间也有聚类规律.

第 7 章 小波分析在突变信号检测方面的应用

突变信号检测在数字信号处理中具有非常重要的地位和作用,举例如下.

采集被监控系统在运行过程中所发生的信号时,当被监控系统内部突然跳动、产生断裂、发生故障或发生特殊变化时,采样信号就会发生突变.检测这些突变信号,判断突变信号在时域和频域中的特点,就可对运行故障进行分析、判断和控制.

在声呐探物、物体探伤等技术中发射的限时限频信号,经一段时间后反射波才到达接收器,接收信号会发生突变,检测这种突变点就可以估算被探测对象的距离、大小和一些其它特点.

在图像处理中,把像素点的灰度作为像素点位置的函数,那么清晰的物体边缘在图像信号中表现为突变,检测这些突变信号就可以掌握图像中物体的边缘和形体特性.这在图像识别、目标检测、计算机视觉应用方面都是关键性的技术问题.

对于某些特殊要求,若掌握了突变信号就可以掌握所需要的全部信号,那么检测出少量的突变信号,就可以实现对所需全部信号的数据压缩目标.数据压缩在节省存储空间和信号快速传输中是关键性的技术问题.

7.1 检测信号突变点方法的原理

信号突变点的表现具有局部性.它可分为两类:一类是关于突变中心点局部奇对称的突变点,另一类是关于突变中心点局部偶对称的突变点.若用一个局部奇对称或一个局部偶对称的窗函数分别与这两类局部突变信号作卷积,并在突变中心点附近的局部范围内观察卷积结果,则有如下规律:

局部奇 * 局部奇 = 局部偶,

局部奇 * 局部偶 = 局部奇,

局部偶 * 局部奇 = 局部奇,

局部偶 * 局部偶 = 局部偶.

现将局部信号的卷积效果示意于图 7.1 中.

为了构造具有局部奇对称和局部偶对称的卷积函数,自然就想到 Gauss 函数及其导函数

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2},$$
$$\psi^{(1)}(t) = \frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} t e^{-t^2/2},$$

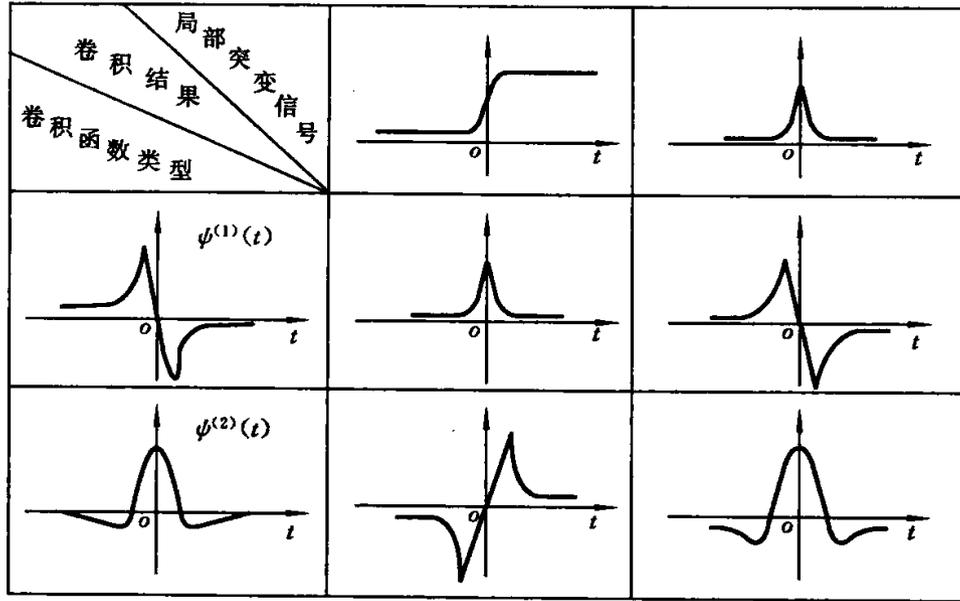


图 7.1 局部卷积的局部极大值点、局部过零点与信号突变点关系示意图

$$\psi^{(2)}(t) = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1-t^2)e^{-t^2/2}.$$

其中, Gauss 函数 $\theta(t)$ 是平滑函数, 它与信号的内积或卷积可使信号平滑化. 它还是一个偶对称的低通函数, 其一阶导数 $\frac{d\theta}{dt}$ 是局部奇对称的带通函数, 其二阶导数 $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ 是局部偶对称的带通函数. 它们与信号作内积或卷积可以出现如图 7.1 所示的、表现突变信号的突变特征. 这种表现用数学形式可表示为

$$\begin{aligned} f * \theta(t) &= \int f(\tau)\theta(t-\tau)d\tau, \\ f * \psi^{(1)}(t) &= \int f(\tau) \frac{d}{dt}\theta(t-\tau)d\tau \\ &= \frac{d}{dt} \int f(\tau)\theta(t-\tau)d\tau = \frac{d}{dt}[f * \theta(t)], \\ f * \psi^{(2)}(t) &= \int f(\tau) \frac{d^2}{dt^2}\theta(t-\tau)d\tau \\ &= \frac{d^2}{dt^2} \int f(\tau)\theta(t-\tau)d\tau = \frac{d^2}{dt^2}[f * \theta(t)]. \end{aligned}$$

上述卷积表现信号突变点的效果如图 7.2 所示.

另外, Gauss 函数的一阶导数 $\psi^{(1)}(t)$ 和二阶导数 $\psi^{(2)}(t)$ 既满足允许小波的时域表现, 即 $\int \psi^{(m)}(t)dt = 0, m = 1, 2$, 也满足允许小波的带通频域表现, 所以, 由

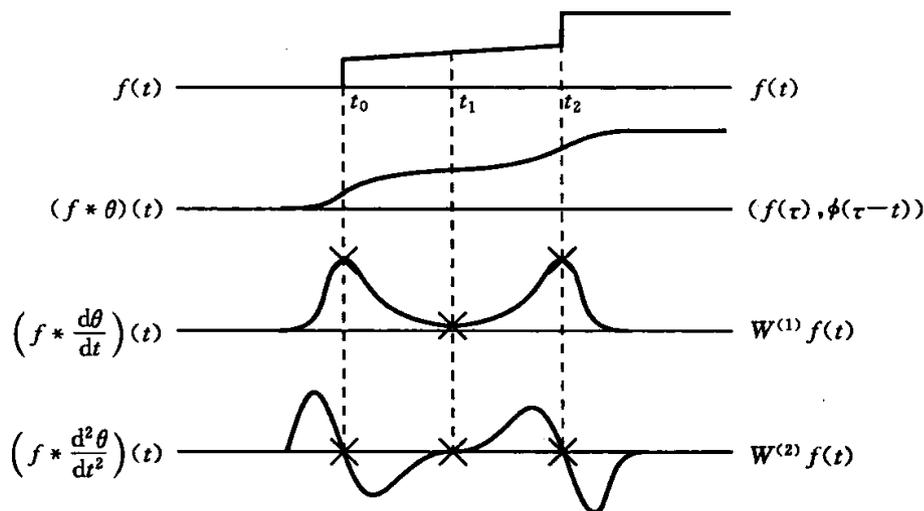


图 7.2 卷积表现信号突变点的效果

Gauss 函数可构造允许小波. 其实, Morlet 小波和 Marr 小波就是利用 Gauss 函数的导数构造的(参见文献[1]~[8]).

若取平滑函数

$$\theta(t) = \cos t, \quad t \in [-\pi/2, \pi/2],$$

$\theta(t)$ 是偶对称的, 则 $\frac{d\theta}{dt}$ 和 $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ 分别是局部奇对称和局部偶对称的. 它们都满足允许小波的条件: 都是带通函数, 与局部突变信号的卷积如图 7.1 所示, 也可用于突变信号的检测.

一般, 对于任意的平滑函数 $\theta(t)$, 若 $\theta'(0)=0$ 且当 $|t| \rightarrow \infty$ 时 $\theta(t) \rightarrow 0$ 足够快, 则此平滑函数是一个低通函数, 而 $\frac{d\theta}{dt}$ (当具有足够快的衰减性时) 是一个局部奇对称的带通函数, $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ (当具有足够快的衰减性时) 是一个局部偶对称的带通函数, 小波函数可利用一般的平滑函数去构造.

上述关于平滑函数和小波函数的关系在多分辨逼近中也可得到相应的理解. 在多分辨逼近中, 尺度函数是低通平滑函数, 小波函数是带通函数, 小波函数可能是局部奇对称的形式, 也可能是局部偶对称的形式. 小波变换的内积形式也是一种卷积形式, 小波函数的局部对称性和带通性质, 使得小波变换能够表现如图 7.1 所示的突变信号的局部突变特征. 根据这种理解, 可认为:

$\phi(t)$ ——平滑尺度函数, 低通函数;

$\psi^{(1)}(t)$ ——局部奇对称的小波函数, 带通函数;

$\psi^{(2)}(t)$ ——局部偶对称的小波函数, 带通函数.

于是, 通过内积和卷积形式

$$\int f(\tau)\psi^{(m)}(\tau-t)d\tau = \int f(\xi+t)\psi^{(m)}(\xi)d\xi, m = 1, 2,$$

$$\int f(\tau)\psi^{(m)}(t-\tau)d\tau = \int f(\xi+t)\psi^{(m)}(-\xi)d\xi, m = 1, 2$$

的对比可知,在局部范围内,小波变换(内积)的极大值点或过零点位置与信号突变点位置的对应关系是与卷积结果相同的(见图7.2).图中, $W^{(1)}f(t)$ 表示用局部奇对称小波所作的小波变换, $W^{(2)}f(t)$ 表示用局部偶对称小波所作的小波变换.

根据图7.2所表现的特点,可得到如下结论:

(1) 由于 $\phi(t)$ 是平滑低通函数,所以 (f, ϕ) 将信号在突变点处的部分高频量滤去,它在突变点处变成较为平滑的了.

(2) 由于小波函数 $\psi^{(1)}(t)$ 是局部奇对称的带通函数,所以小波变换 $W^{(1)}f(t)$ 的极大值点对应着阶跃信号的突变点(或边缘),它也对应着 $W^{(2)}f(t)$ 的过零点.

(3) 由于小波函数 $\psi^{(2)}(t)$ 是局部偶对称的且是带通的,其小波变换 $W^{(2)}f(t)$ 的过零点对应着阶跃信号的突变点(或边缘),也对应着 $W^{(1)}f(t)$ 的极大值点.

(4) 因为阶跃函数的导数是 δ 函数,因此,结合图7.1不难理解,阶跃形式的信号突变点(或边缘)对应着 $W^{(1)}f(t)$ 的尖峰脉冲波,尖峰形式的信号突变点对应着 $W^{(2)}f(t)$ 的极大值点(见图7.3).

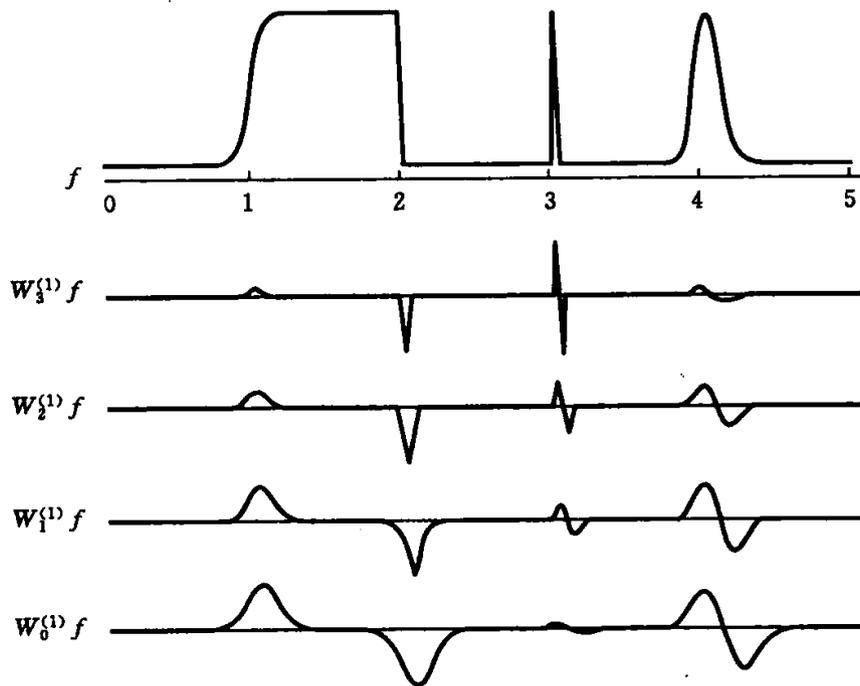


图7.3 几种突变信号的二次样条小波变换模极大值随尺度的变化

7.2 小波变换模极大值的检测办法

一般地,局部光滑信号的小波变换绝对值较小,局部突变信号小波变换绝对值较大.根据这个特点,人们可采用某个门限值对变换信号进行处理,保留绝对值比

阈值大的部分,再从中确定最大绝对值所处的位置,从而进一步确定突变点的位置,这种检测方法称为小波变换模极大值的检测方法.

采用小波变换模极大值的检测方法应注意以下几个问题.

(1) 用对称小波和不对称小波作信号分解时,其小波变换模极大值的位置表现有所区别.图 6.4 和图 7.3 是用样条小波处理的结果,样条小波是一种对称小波,用对称小波处理信号时,局部突变信号的小波变换在不同尺度上都有符号一致的表现,而且小波变换模极大值在不同尺度上的位置是整齐对应的,这一特点非常有利于捕捉小波变换模极大值的位置,非常有利于准确检测出信号突变点的位置.图 6.3 和图 7.4 是用 Daubechies 正交小波处理的结果,紧支集 Daubechies 正交小波除 Haar 小波外都是不对称的.用不对称小波作信号处理时,局部突变信号的小波变换模极大值的位置在不同尺度上有明显的移位现象,只有纠正这种移位表现才能用小波变换模极大值方法检测出局部突变点的位置.

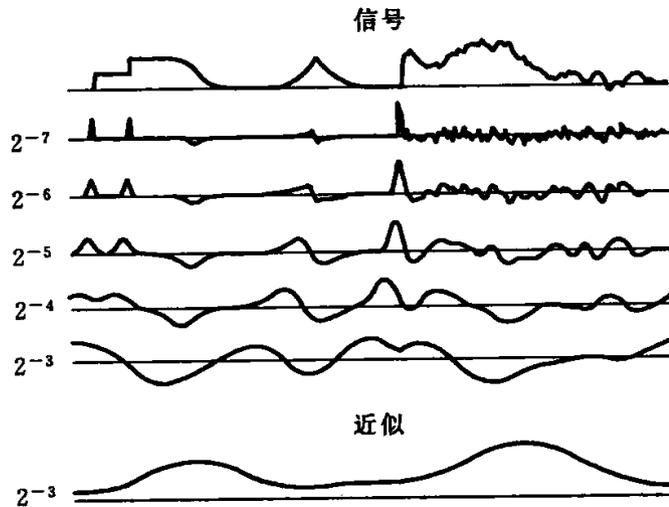


图 7.4 几种突变信号的 Daubechies 正交小波变换模极大值随尺度的变化

(2) 仅利用一个尺度上的小波变换模极大值表现去判断突变点的位置是不可靠的,只有利用多个尺度层上的表现去判断突变点的位置才能提高检测的准确性和可靠性.

(3) 不同类型的突变信号的小波变换模极大值的表现是不同的,图 7.3 所示的是通常所见的几类突变信号的小波变换,有的随尺度变粗而变大,有的几乎不变,有的则随着尺度变粗而变小;若希望根据小波变换模极大值随尺度变化的规律来判断突变点的类型,就必须分析区别这几类常见突变点的度量办法,分析其小波变换模极大值随尺度变化的规律,这些内容将在 7.3 节中给出.

(4) 信号有时表现出直观的常见的几类突变,有时表面看来是光滑的,但其 n 阶导数会有突变表现,怎样才能在小波变换中显露出这种隐含的突变表现呢? 7.4 节中讨论了采用高阶消失矩小波作小波变换可解决这个问题.

7.3 几类突变点的奇异度

函数(模拟信号)的突变可表现为不连续情形,如 δ 函数和阶跃函数;可表现为连续情形,如折线的一阶导数的有限突变情形;也可表现为光滑情形,如函数的 n 阶导数有限突变的情形. 为了对突变点分类,必须用到 Lipschitz 指数的概念.

1. 关于 Lipschitz 指数

大家知道,当在 t_0 的邻域内 $f(t) \in C^n$, 且其 $n+1$ 阶导数可积分时, $f(t)$ 的 Taylor 展开式可表示为

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(t_0)}{i!} (t-t_0)^i + R_n(t) \\ &= P_n(t) + R_n(t). \end{aligned}$$

其中, n 是正整数; $P_n(t)$ 是关于变量 t 的 n 次多项式; $R_n(t)$ 是展开式的余项, 且

$$\begin{aligned} |R_n(t)| &= |f(t) - P_n(t)| \\ &= O(|t-t_0|^{n+1}). \end{aligned}$$

这种点态的 Taylor 展开式把函数及其点态的光滑性联系起来, 将函数及其多项式逼近联系起来, $|R_n(t)|$ 表示了逼近的误差阶. 然而仔细分析 t_0 附近关于 $|R_n(t)|$ 的表现, 上述描述是不够细致的.

定义 7.1 称 $f(t)$ 在 t_0 处是(点态)Lipshitz 指数 α 的, 如果存在常数 $K > 0$ 和 $n = [\alpha]$ (对 α 取整) 次多项式 $P_n(t)$, 使得

$$|f(t) - P_n(t)| \leq K |t - t_0|^\alpha, \quad n \leq \alpha \leq n+1. \quad (7.1)$$

若 $f(t)$ 对任意的 $t_0 \in [a, b]$ 都有式(7.1)成立且常数 K 与 t_0 的位置无关, 则称 $f(t)$ 在 $[a, b]$ 上是具有一致 Lipschitz 指数 α 的, 或称 $f(t)$ 在 $[a, b]$ 上是 α 正则的. 在 $[a, b]$ 上具有一致 Lipschitz 指数 α 的全体函数的集合记为 C^α .

关于对点态 Lipschitz 指数 α 的理解, 下面分两种情况讨论.

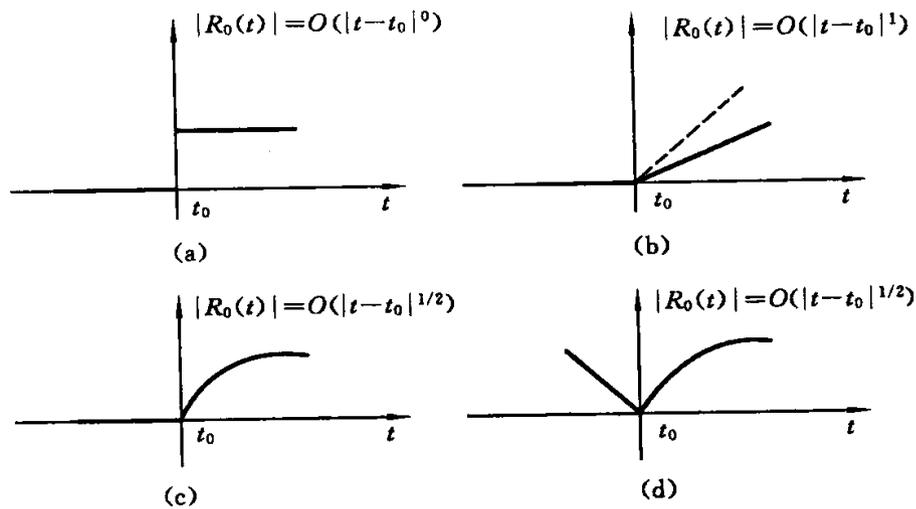
(1) 设 $n=0, 0 \leq \alpha \leq 1$. 此时 $f(t)$ 在 t_0 处是不光滑的, 可能是连续的, 也可能是不连续的; 在 t_0 附近作为 $f(t)$ 近似的零次多项式 $P_0(t)$ 可选为某个常数, 例如 $f(t_0)$; 在点态情形即在 t_0 的充分小的邻域内按 Lipschitz 指数的定义有

$$\begin{aligned} |R_0(t)| &= |f(t) - P_0(t)| \\ &= O(|t-t_0|^\alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq 1; \end{aligned}$$

但在 t 充分接近 t_0 时, $R_0(t)$ 在 t_0 附近是有多种变化表现的, 图 7.5 表示了其中的几种表现.

不难看出, 当 $0 \leq \alpha \leq 1$ 时, $O(|t-t_0|^\alpha)$ 反映了函数值 $f(t)$ 在 $P_0(t)$ 附近的增长状况, 反映了 $f(t)$ 的零阶导数在 t_0 附近的增长状况; 当 $f(t)$ 在 t_0 处连续时, 它也隐含表现了“一阶导数”在 t_0 附近的突变状况.

(2) 设正整数 $n \neq 0, n \leq \alpha \leq n+1$. 据定义

图 7.5 函数在 t_0 处的 Lipschitz 指数 $\alpha \in [0, 1]$ 的几种表现

$$\begin{aligned} |R_n(t)| &= |f(t) - P_n(t)| \\ &= O(|t - t_0|^\alpha), \quad n \leq \alpha \leq n + 1, \end{aligned}$$

其中, $P_n(t)$ 就选为 Taylor 展开式的前 $n+1$ 项, 是对 $f(t)$ 的有效逼近, 此式表示了逼近误差. 这种逼近关系在 n 阶导数情形表现为

$$\begin{aligned} |R_n^{(n)}(t)| &= |f^{(n)}(t) - P_n^{(n)}(t)| \\ &= O(|t - t_0|^{\alpha-n}), \quad 0 \leq \alpha - n \leq 1. \end{aligned}$$

根据情况(1)可知, 无论 $f^{(n)}(t)$ 在 $t=t_0$ 处是连续的还是有限跃度的, $f^{(n)}(t)$ 在 t_0 邻域内的增长状况为 $O(|t-t_0|^{\alpha-n})$ (见图 7.5). 若 $f^{(n)}(t)|_{t=t_0} = f^{(n)}(t_0)$, 则 Lipschitz 指数 α 的定义中还隐含着“ $n+1$ 阶导数”在 t_0 附近的突变状况.

由此可见, Lipschitz 指数的定义式(7.1)在不使用导数描述的情况下表现了用多项式 $P_n(t)$ 点态逼近一般函数的内容, 它包含了对光滑函数 $f(t) \in C^n$ 的逼近, 也包含了 $f^{(n)}(t)$ 在 t_0 处有限突变这种广义情形的逼近, 且逼近的误差阶表现得更为细致, 将 t_0 处有限突变用 $n \leq \alpha \leq n+1$ 作了更细致的分类. 这些特点在 Taylor 展开式中是得不到体现的.

2. 模拟信号中几类常见突变点的 Lipschitz 指数

在信号分析处理中常见下面几类突变信号. 因为检索并判别这些突变点非常重要, 所以这里集中讨论这几类突变点的 Lipschitz 指数.

斜坡型函数在 t_0 处突变, 有一定宽度的山形函数也属于此类情形, 其在 t_0 处的 Lipschitz 指数为 $\alpha=1$.

阶跃函数在 t_0 处突变, 其在 t_0 处的 Lipschitz 指数为 $\alpha=0$.

δ 函数在 t_0 处突变, 很窄范围内的尖峰函数基本上可看做 δ 函数, t_0 处 δ 函数的 Lipschitz 指数为 $\alpha=-1$. 由于 δ 函数的原函数是阶跃函数, 阶跃函数的导数是

δ 函数, 求导一次可将原函数的光滑度降低一阶, 所以从阶跃函数的指数 $\alpha=0$ 可推知 δ 函数的指数 $\alpha=-1$.

函数光滑, 其 n 阶导数在 t_0 处突变, 据 Lipschitz 指数的含义, 可知该函数在 t_0 处的 Lipschitz 指数为 $n \leq \alpha \leq n+1$, 其 n 阶导数在 t_0 处的奇异度为 $\alpha-n$.

7.4 小波函数的光滑性、衰减性和消失矩

为了深刻了解不同奇异度函数的小波变换的细致表现, 还必须进一步了解小波函数的光滑性、衰减性和消失矩性质.

1. 关于 $f(t) \in C^n(\mathbf{R})$ 和 $\hat{f}(\omega)$ 的光滑性和衰减性关系

所谓 $f(t) \in C^n(\mathbf{R})$, 是指 $f^{(n)}(t)$ 在 \mathbf{R} 上是连续可微的; 所谓 $f(t) \in C^\alpha(\mathbf{R})$, $n \leq \alpha \leq n+1$, 是指 $f(t)$ 在 \mathbf{R} 上是一致 Lipschitz 指数 α 的, 且 $f(t) \in C^n(\mathbf{R})$; 因此可参考 $f(t) \in C^n(\mathbf{R})$ 的情形来讨论 $f(t) \in C^\alpha(\mathbf{R})$ 的相应问题.

定理 7.1 设 $f(t)$ 的 Fourier 变换为 $\hat{f}(\omega)$, 则下述关系成立:

$$f(t) \in C^n(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R}) \iff \int_{\mathbf{R}} |\hat{f}(\omega)| (1+|\omega|^n) d\omega < +\infty, \quad (7.2)$$

$$f(t) \in C^n(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R}) \iff |\hat{f}(\omega)| \leq \frac{K}{1+|\omega|^{n+1+\epsilon}}, \quad |\omega| \rightarrow \infty, \quad (7.3)$$

$$\hat{f}(\omega) \in C^n(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R}) \iff |f(t)| \leq \frac{K}{1+|t|^{n+1+\epsilon}}, \quad |t| \rightarrow \infty. \quad (7.4)$$

证明 首先证明式(7.2). 因为 $f(t) \in C^n(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$, 所以由逆变换公式可知

$$\mathcal{F}[f^{(k)}(t)] = (i\omega)^k \hat{f}(\omega), \quad 0 \leq k \leq n,$$

$$|f^{(k)}(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} |i\omega|^k \cdot |\hat{f}(\omega)| \cdot |e^{i\omega t}| d\omega, \quad 0 \leq k \leq n,$$

由 $f^{(k)}(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 有

$$|\hat{f}^{(k)}(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} |\omega|^k |\hat{f}(\omega)| d\omega < +\infty, \quad 0 \leq k \leq n,$$

于是推知

$$\int_{\mathbf{R}} |\hat{f}(\omega)| (1+|\omega|^n) d\omega < +\infty.$$

反之, 由式(7.2)右边出发可推出

$$\int_{\mathbf{R}} |\omega|^k |\hat{f}(\omega)| d\omega < +\infty, \quad 0 \leq k \leq n,$$

$$\int_{\mathbf{R}} |i\omega|^k \cdot |\hat{f}(\omega)| \cdot |e^{i\omega t}| d\omega < +\infty, \quad 0 \leq k \leq n,$$

$$\int_{\mathbf{R}} |f^{(k)}(t)| d\omega < \infty, \quad 0 \leq k \leq n,$$

从而证得 $f(t) \in C^n(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$.

再证明式(7.3). 因为 $f(t) \in C^n(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$, 所以

$$\int_{\mathbf{R}} |\hat{f}(\omega)| (1 + |\omega|^n) d\omega < +\infty,$$

$$\int_{\mathbf{R}} |\hat{f}(\omega)| \cdot |\omega|^n d\omega < +\infty.$$

利用积分比较原则, 即当 $|g(x)| \leq \frac{1}{|x|^{1+\varepsilon}}$ 时 $\int_{\mathbf{R}} g(x) dx < +\infty$, 有

$$|\hat{f}(\omega)| \cdot |\omega|^n \leq \frac{K_1}{|\omega|^{1+\varepsilon}}, \quad |\omega| \rightarrow \infty,$$

从而有
$$|\hat{f}(\omega)| \leq \frac{K_1}{|\omega|^{n+1+\varepsilon}} \leq \frac{K}{1 + |\omega|^{n+1+\varepsilon}}.$$

反之, 若
$$|\hat{f}(\omega)| \leq \frac{K}{1 + |\omega|^{n+1+\varepsilon}} \leq \frac{K}{|\omega|^{n+1+\varepsilon}},$$

则有
$$|\hat{f}(\omega)| \cdot |\omega|^n \leq \frac{K}{|\omega|^{1+\varepsilon}},$$

$$|\hat{f}(\omega)| \leq \frac{K}{|\omega|^{1+\varepsilon}};$$

从而有
$$|\hat{f}(\omega)| (1 + |\omega|^n) \leq \frac{K}{1 + |\omega|^{1+\varepsilon}},$$

$$\int_{\mathbf{R}} |\hat{f}(\omega)| (1 + |\omega|^n) d\omega < +\infty.$$

最后利用式(7.2) 就证得 $f(t) \in C^n(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$.

式(7.4) 的证明是容易的, 只要注意时域和频域的互换对应性, 即可知道式(7.4) 的正确性.

类同于定理 7.1, 关于 $f(t) \in C^\alpha(\mathbf{R})$ 和 $\hat{f}(\omega)$ 的光滑性和衰减性的关系, 可用下面的定理表示.

定理 7.2 设 $f(t)$ 和 $\hat{f}(\omega)$ 为 Fourier 变换对, $0 \leq \alpha \in \mathbf{R}$, 则下述关系成立:

$$f(t) \in C^\alpha(\mathbf{R}) \subset L^2(\mathbf{R}) \iff \int_{\mathbf{R}} |\hat{f}(\omega)| (1 + |\omega|^\alpha) d\omega < \infty, \quad (7.5)$$

$$f(t) \in C^\alpha(\mathbf{R}) \subset L^2(\mathbf{R}) \iff |\hat{f}(\omega)| \leq \frac{K}{1 + |\omega|^{\alpha+1+\varepsilon}}, \quad |\omega| \rightarrow \infty, \quad (7.6)$$

$$\hat{f}(\omega) \in C^\alpha(\mathbf{R}) \subset L^2(\mathbf{R}) \iff |f(t)| \leq \frac{K}{1 + |t|^{\alpha+1+\varepsilon}}, \quad |t| \rightarrow \infty. \quad (7.7)$$

该定理与定理 7.1 对照即可得到含义明确的理解, 该定理可利用 Lipschitz 指数的定义来证明, 证明过程略去.

该定理可用于讨论信号、尺度函数和小波函数的光滑性和衰减性.

2. 小波函数的消失矩、光滑性、衰减性和支集长度

定义 7.2 称小波函数 $\psi(t)$ 具有 N 阶消失矩, 如果

$$\begin{cases} \int_{\mathbf{R}} t^k \psi(t) dt = 0, k = 0, 1, \dots, N-1, \\ \int_{\mathbf{R}} |t|^N |\psi(t)| dt < +\infty. \end{cases} \quad (7.8)$$

据消失矩定义可知,任意的 $m \leq N-1$ 次多项式

$$P_m(t) = \sum_{k=0}^m \xi_k t^k$$

与 N 阶消失矩的 $\psi(t)$ 作小波变换,则有

$$(P_m(t), \psi(t)) = 0, 0 \leq m \leq N-1.$$

假设 $\psi(t)$ 具有 N 阶消失矩,在 t_0 的邻域中 $f(t) \in C^\alpha, n \leq \alpha \leq n+1$, 对此种情形 $(f(t), \psi(t))$ 会有什么表现呢? 因为 $f(t)$ 可在 $t=t_0$ 附近可表示为

$$f(t) = P_n(t-t_0) + R_n(t-t_0),$$

$$f^{(n)}(t) = R^{(n)}(t-t_0)$$

$$|R^{(n)}(t-t_0)| = O(|t-t_0|^\alpha), 0 < \alpha < 1,$$

所以,当 $0 \leq n \leq N-1$ 时,只要 $R_n^{(n)}(t-t_0)$ 在 t_0 邻域中有突变表现,它可能是 δ 函数、阶跃函数、有一定宽度的山形函数,也可能是具有分数次增长表现的函数,于是就有

$$(f^{(n)}(t), \psi(t-t_0)) \neq 0.$$

由此可见, N 阶消失矩小波的小波变换能表现信号 $f(t)$ 低阶导数直到 $N-1$ 阶导数有突变的细节.

具有 N 阶消失矩小波函数 $\psi(t)$,其衰减性和光滑性表现会怎样呢? 首先,由式(7.8)利用积分比较原则有

$$\int_{\mathbf{R}} t^N \psi(t) dt \leq +\infty,$$

$$\int_{\mathbf{R}} (1+|t|^N) |\psi(t)| dt < +\infty;$$

于是有

$$\begin{cases} |\psi(t)| \leq \frac{K}{1+|t|^{N+1+\epsilon}}, |t| \rightarrow \infty, \\ \hat{\psi}(\omega) \in C^N(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R}), \psi(t) \in C^N(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R}). \end{cases} \quad (7.9)$$

因此可以看到,小波函数 $\psi(t)$ 的消失矩越大,它就越光滑,其衰减性越快.

关于小波函数 $\psi(t)$ 的支集长度与其消失矩指标 N 之间的关系,有如下定理.

定理 7.3 若小波函数 $\psi(t)$ 具有 N 阶消失矩,则其支集长度至少为 $2N-1$.

证明略,有兴趣的读者可参见文献[8].

7.5 小波变换模极大值用于突变点分类

在了解了信号奇异程度分类和小波函数的快速衰减性表现后,可进一步讨论

小波变换与奇异度指标 α 和尺度 j 的关系,进一步讨论各类奇异信号的小波变换的不同表现.

1. 小波变换与 Lipschitz 指数 α 和尺度 j 的关系

定理 7.4 设 $\psi(t)$ 具有 N 阶消失矩, A 是正常数, 当尺度 j 的数值较大时, $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 一致 Lipschitz 指数 $\alpha \leq N$ 的充要条件为

$$|W_j f(t)| \leq A 2^{-j(\alpha+1/2)}. \quad (7.10)$$

证明 不妨设 $f(t)$ 仅在 t_0 处是 Lipschitz 指数 $\alpha \leq N$ 的. 因为 $f(t) \in C^{\alpha}(\mathbf{R})$ 是一致 α 的, 记 $m = [\alpha] \leq N$, 则有

$$|f(t) - P_m(t)| \leq K |t - t_0|^{\alpha}.$$

因为 $\psi(t)$ 和 $\psi_{j,k}(t)$ 都具有 N 阶消失矩, 现将 $\psi_{j,k}(t)$ 改写为

$$\psi_{j,k}(t) = s^{1/2} \psi(s(t - \tilde{t})),$$

其中, $s = 2^j$, \tilde{t} 和 t_0 都在 $\psi_{j,k}(t)$ 的支集内. 于是 j 尺度下的小波变换的模可表示为

$$\begin{aligned} |W_j f(t)| &= |(f(t), \psi_{j,k}(t))| \\ &= |(f(t), s^{1/2} \psi(s(t - \tilde{t})))| \\ &\leq K s^{1/2} (|t - t_0|^{\alpha}, |\psi(s(t - \tilde{t}))|) \\ &= K s^{1/2} \cdot s^{-1} (|s^{-1}x + \tilde{t} - t_0|^{\alpha}, |\psi(x)|). \end{aligned}$$

利用公式

$$|a + b|^{\alpha} \leq 2^{\alpha} (|a|^{\alpha} + |b|^{\alpha}),$$

则有

$$\begin{aligned} |W_j f(t)| &\leq K s^{-1/2} \left[\int_{\mathbf{R}} |s^{-1}x|^{\alpha} |\psi(x)| dx + \int_{\mathbf{R}} |\tilde{t} - t_0|^{\alpha} |\psi(x)| dx \right] \\ &= K s^{-(\alpha+1/2)} \left[\int_{\mathbf{R}} |x|^{\alpha} |\psi(x)| dx + s^{\alpha} |\tilde{t} - t_0|^{\alpha} \int_{\mathbf{R}} |\psi(x)| dx \right], \end{aligned}$$

此式方括号中全是有界量, 故有

$$|W_j f(t)| \leq A 2^{-j(\alpha+1/2)}.$$

前面完成了必要性证明, 充分性证明较麻烦, 略去.

下面总结定理 7.3 和定理 7.4 所能表述的几个含义.

(1) 局部奇异信号关于 $W_j f(t)$ 的影响范围. 假设 t_0 是突变点, 对称小波函数 $\psi(t)$ 的支集宽度为 $2M$, 那么 $W_j f(t)$ 影响范围为 $[t_0 - 2^{-j}M, t_0 + 2^{-j}M]$, $W_{j-1} f(t)$ 的影响范围为 $[t_0 - 2^{-j+1}M, t_0 + 2^{-j+1}M]$, 所以随着尺度变粗, 其影响范围越来越大.

(2) 尺度指标 j 较大且 $j \rightarrow +\infty$ 时, 小波变换的模 $|W_j f(t)|$ 能表现某突变点 t_0 处的局部奇异性. 因为 $j \rightarrow +\infty$ 时, 小波函数的支集向 t_0 收缩, $|W_j f(t)|$ 与 $2^{-j(\alpha+1/2)}$ 同级衰减, 这样, 在 j 值已知和 $2^{-j(\alpha+1/2)}$ 量值已知的情况下, 可以度量 t_0 处局部奇异性 α 的数值. 值得说明的是, 尺度指标 j 较小时, 式(7.10)是不能特别地反映什么问题的.

(3) 在实际应用中, j 不可能无限大, 仅可能是较大的值, 在选用小波函数时将面临着消失矩阶数与支集长度之间的权衡问题。

若信号 $f(t)$ 的孤立奇点相距较远, 孤立奇点之间的 $f(t)$ 是光滑的, 那么选择高阶消失矩的小波, 可使 $f(t)$ 的光滑部分的小波变换变得很小, 这有利于突出奇点位置及其变换效果, 也有利于数据压缩。

若 $f(t)$ 奇点间的距离较近, 应选择短支集的小波, 尺度分划也应相应地细小些, 以便尽可能地使小波支集内仅包含单个奇点, 这样才能有利于奇点检测和数据压缩。

选用较大消失矩的小波函数, 其小波变换能说明较多的问题. 因为式(7.10)中明确地指出, 当消失矩指标 $N \geq \alpha$ 时, 小波变换才能反映局部奇异性指标 α , 此时对大于 N 值的指标 α 是不能反映的. 换句话说, N 值大, 小波变换能表现的 α 值的范围就大; 反之, N 值小, 小波变换所能表现的 α 值范围也就小。

选用较大消失矩的小波函数, 对应于信号光滑部分的小波变换值小, 由于小波函数光滑程度高的缘故, 在计算、舍入、门限值处理过程中形成的误差也将是光滑性高的小误差, 这种误差不易被发觉, 即回复信号的视觉效果好. 当选用低阶消失矩(支集短、光滑性差)的小波函数时, 所产生的误差容易被察觉, 回复信号的视觉效果也相应地差些。

(4) 小波变换的模 $|W_j f(t)|$ 随尺度变化的规律为:

若 $\alpha < 0$, 例如在 δ 函数或尖峰函数的突变点处, 随着 j 值的增大(尺度变细), $|W_j f(t)|$ 将越来越大. 对于白噪声信号来说, 因为它是随机的、且是密集地逐点地类似于 δ 函数形的, 所以其指数 $\alpha < 0$, 其小波变换幅值也是随 j 值增大而增大且是密集的。

若 $\alpha = 0$, 例如在阶跃函数突变点处, $|W_j f(t)|$ 将不随尺度的改变而变化。

若 $\alpha > 0$, 例如在折线突变点处, 随着 j 值增大(尺度变细), $|W_j f(t)|$ 将越来越小. 若具体比较折线函数突变点($\alpha=1$)和 $f^{(2)}(t)$ 突变点($\alpha=2$)处的小波变换模极大值, 利用式(7.10)可知, 在同一尺度上 $|W_j f(t)|$ 前者大; 当 $j \rightarrow +\infty$ 时, 前者的衰减速度慢。

2. 用 $|W_j f(t)|$ 极大值推算突变点的奇异度指标

假设信号 $f(t)$ 在 t_0 处突变, 其奇异度指标为 α ; 假设采用对称的小波, 其小波变换 $|W_j f(t)|$ 在 t_0 处取得极大值, 且在不同尺度层时它都在 t_0 处取得极大值; 检索并保留突变点 t_0 处不同层的小波变换模极大值, 并标记如下:

$$\begin{aligned} |W_j f(t_0)| &= \beta_j \\ &= A 2^{-j(\alpha+1/2)}, \\ |W_{j-1} f(t_0)| &= \beta_{j-1} \\ &= A 2^{-(j-1)(\alpha+1/2)}; \end{aligned}$$

对上面两个式子取对数,有

$$\begin{aligned}\ln\beta_j &= \ln A - j\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\ln 2, \\ \ln\beta_{j-1} &= \ln A - (j-1)\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\ln 2,\end{aligned}$$

消去 $\ln A$, 得

$$\alpha \approx \frac{\ln\beta_{j-1} - \ln\beta_j}{\ln 2} - \frac{1}{2}.$$

应该看到,在较细尺度层上作上述估计才是较准确的,在多个较细尺度层上作上述估计可获得较稳定的结果.

7.6 用小波变换模极大值重建小波变换

以上已经讨论了按小波变换模极大值原则检测并存储对应突变点处的小波变换值 $W_j f(t_s)$, 这些值是带符号的, 而且是不规则地稀疏分布的. 利用这些数值, 可以判断函数(信号)突变点的位置, 也可以判断其局部突变的程度, 这些方法和结论是有广泛的应用背景的. 本节要讨论的是利用这些少量存储的数据 $W_j f(t_s)$ 来近似重建 j 尺度上的全部小波变换值 $W_j f(t)$, $t \in \mathbf{R}$. 这方面的研究是非常有意义的, 因为人们仅用少数数值即可实现 j 尺度上全部小波变换的回复, 从而进一步回复原信号, 实现数据的压缩.

下面用含有明显突变的无噪的信号模型(见图 7.3)作为分析对象, 在 j 尺度层上存储了且仅仅存储了相应于突变点的小波变换模极大值, 讨论近似回复该尺度层上的小波变换的几种算法. 注意, 本节不讨论利用小波变换回复原信号的问题.

记 j 尺度层上的小波变换为 $W_j f(t)$, 存储的小波变换模极大值为 $\{W_j f(t_s)\}$, $\{t_s\}$ 为模极大值对应的时域位置, 它可能是突变点也可能不是突变点; 近似回复的小波变换记为 $g_j(t)$, 它仅在 t_s 处取得极大值, 且仅在 t_s 处 $g_j(t_s) = W_j f(t_s)$, 近似回复结果为 $g_j(t) \approx W_j f(t)$.

1. 简单回复模型及其相应算法

结合图 7.3 并分析突变点小波变换在各尺度层的表现, 可以看出: 对于任意的某个突变点, 其小波变换在细尺度层上表现范围窄, 局部衰减快; 在粗尺度层上的表现范围宽, 局部衰减较慢. 所以, 人们可以在细尺度层上作出简单处理.

算法 1 在较细尺度层上, 用小波变换模极大值直接作为该尺度层上的小波变换的近似, 即

$$g_j(t) = \begin{cases} W_j f(t_s), & t_s \text{ 是模极大值点,} \\ 0, & \text{其它节点处.} \end{cases}$$

该算法仅在较细尺度层上可行, 在哪几个较细尺度层上实施算法 1 应据实际

情况来决定。

2. 稳态微分方程模型及其相应算法

假设 t_s 和 t_{s+r} 是两个相邻的模极大值点, 假设 $|t_s - t_{s+r}|$ 大于该层的小波支集, 这两点处的小波变换极大值分别为 $W_j f(t_s)$ 和 $W_j f(t_{s+r})$. 假设这两点之间的小波变换是表现平稳的曲线, 可将其看做某个常微分方程两点边值问题的解. 据此, 提出一种带约束的微分方程模型, 即

$$\begin{cases} -2^{-pj} \frac{d^2 g_j(t)}{dt^2} + g_j(t) = 0, & t \in (t_s, t_{s+r}), \\ g_j(t_s) = W_j f(t_s), & \text{正值或负值,} \\ g_j(t_{s+r}) = W_j f(t_{s+r}), & \text{正值或负值.} \end{cases} \quad (7.11)$$

该微分方程的解的特点有: ① 解仅在端点处取得模极大值; ② 解曲线是某种稳定平衡态的表现, 解曲线表现平滑, 不会有摆动现象; ③ 参数 p_j 越大时, 曲线越显得松弛, 和 t 轴的重合部分越多, 如图 7.6 所示。

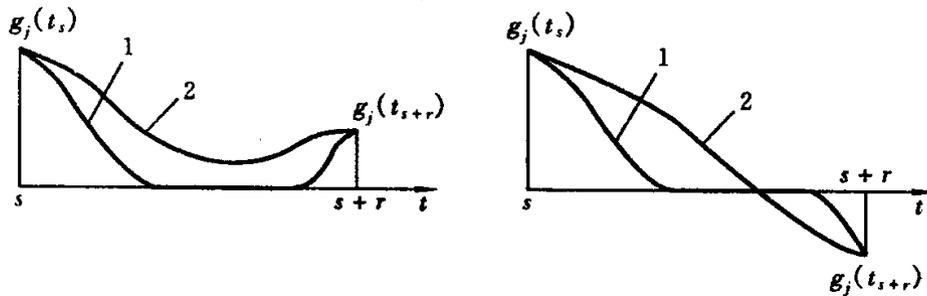


图 7.6 解曲线随 p_j 值变化的规律

1— p_j 值较大时 2— p_j 值较小时

先假设 t_s 和 t_{s+r} 的距离大于小波支集长度, 即 $|t_s - t_{s+r}| \geq 2M$, 注意 t_s 右侧和 t_{s+r} 左侧的近似曲线 $g_j(t)$ 是描述小波变换的, 所以它们不仅保持着 M 宽度的非零值, 而且这些曲线段还符合上面所述的微分方程模型 (7.11) 解的特点. 于是, 问题转化为在 t_s 和 t_{s+M} 上求解式 (7.11), 其边值为

$$\begin{aligned} g_j(t_s) &= W_j f(t_s), \\ g_j(t_{s+M}) &= 0. \end{aligned}$$

该区段上的求解办法可采用差分方程迭代法. 具体地说, 先将此问题差分离散为

$$\begin{cases} -2^{-pj} \frac{g_j(k-1) - 2g_j(k) + g_j(k+1)}{h^2} + g_j(k) = 0, & s < k < s+M, \\ g_j(s) = W_j f(t_s), \\ g_j(s+M) = 0. \end{cases}$$

其中, k 表示 j 尺度层上节点 s 和 $s+M$ 之间的节点编号, h 为 j 尺度的采样间隔. 将此差分方程组写成迭代格式, 如 G-S 迭代格式

其中, $[\xi]$ 表示对 ξ 取整.

3. 基于稳态模型的局部替代算法

前面用 $g_j(t)$ 近似替代 $W_j f(t)$ 的工作是在局部区段 $[t_s, t_{s+r}]$ 上进行的, 显然, 也要在模极大值点 t_s 左边区段 $[t_{s-q}, t_s]$ 上进行近似替代工作. 于是人们自然地会想到, 以模极大值点 t_s 为中心, 在 t_s 两边作近似替代处理.

在 t_s 附近, $g_j(t)$ 选用什么函数呢? 据稳态模型解的特点可知, $g_j(t)$ 在 t_s 左右都是快速衰减且单调的, 据 $|(f(t), \psi(t))| \leq K|f| \cdot |\psi|$ 可知, $g_j(t)$ 在 t_s 附近应具有与 $|\psi|$ 的同级衰减速度. 于是, 可选用

$$g_j(t) = W_j f(t_s) \cdot L_{oc}(t).$$

其中

$$\begin{cases} L_{oc}(t) = \cos \frac{\pi(t-t_s)}{\xi} & (\text{余弦函数}), \\ L_{oc}(t) = \exp \frac{|t-t_s|}{t-\xi} & (\text{指数函数}), \\ L_{oc}(t) = \frac{1}{1+(t-t_s)^\xi} & (\text{速降函数}), \\ L_{oc}(t) = 1 - \frac{|t-t_s|}{\xi} & (\text{山形函数}), \end{cases} \quad (7.14)$$

式(7.14)中的参数 ξ 是用来调整衰减速度和影响范围的.

在 t_s 附近用 $g_j(t)$ 作局部替代的范围有多大呢? 仍参考前面的分析. 一般来说, 小波变换在 t_s 附近的影响范围为 $[t_{s-M}, t_{s+M}]$. 若两个相邻的模极大值点距离较近, 也可采用相应于算法 2 中的一些措施.

综上所述, 有如下算法 3.

算法 3(局部稳态替代算法) 在较细的尺度层上, 用下述步骤实现 $g_j(t) \approx W_j f(t)$:

1° 对所有模极大值点 t_s 在 $[t_{s-M}, t_{s+M}]$ 范围内作局部替代, 即

$$g_j(t) = W_j f(t_s) L_{oc}(t),$$

其中 $L_{oc}(t)$ 参照式(7.14)选用;

2° 判断相邻模极大值点 t_s 和 t_{s+r} 的距离, 若 $M < |t_s - t_{s+r}| < 2M$, 则在 $[t_{s+r-M}, t_{s+M}]$ 上作光滑处理; 若 $2 < |t_s - t_{s+r}| \leq M$, 则用直线作替代.

4. 基于小波变换模板的局部替代算法

算法 1 至算法 3 对模极大值点 t_s 附近作局部替代时, 局部替代函数没有顾及突变点的类型, 也没有更细致地考虑不同类型突变点附近的小波变换的形状区别. 这里讨论的问题, 不是在模极大值点附近作替代, 而是利用多层的模极大值点判定信号突变点位置 T_s 及其奇异度 α , 再在突变点 T_s 处采用相应的小波变换模板 W_j 作局部替代.

为了便于说明问题, 这里假设信号分解时采用偶对称小波函数, 其支集为 M ,

由于小波变换模极大值点 t_s 在不同尺度层上是整齐对应的, 所以可判定信号突变点位置 T_s 及其奇异度 α .

对于斜坡类函数的突变点 T_s 来说, 它的奇异度 $0 < \alpha \leq 1$, 其小波变换曲线形状是以 T_s 为中心点的奇对称的双峰形式, 峰值高度和宽度将随着尺度指标 j 和小波函数的衰减性而变化. 对于阶跃类函数的突变点 T_s 来说, 它的奇异度 $\alpha = 0$, 其小波变换曲线形状也是以 T_s 为中心的奇对称的双峰形状, 峰值高度和宽度不受尺度指标 j 的影响, 但却受到小波函数消失矩(衰减性)的影响. 对于尖峰类函数的突变点 T_s 来说, 它的奇异度 $-1 \leq \alpha < 1$, 其小波变换曲线形状是以 T_s 为中心的偶对称的单峰形状, 峰值高度和宽度也将随尺度指标 j 和小波函数的消失矩(衰减性)而变化. 这些规律如图 7.1 所示.

于是, 人们可事先构造并存储零尺度层上的三类突变点的小波变换模板, 统一记为 $W^\alpha(t)$, $\alpha = -1, 0, 1$. 这些模板数据已反应了突变信号受小波函数消失矩(衰减性)的影响, 也反应了数据宽度与尺度 j 的关系(对称小波支集长度都是 $2M$ 个单位, 单位宽度随指标 j 自动变化), 在 j 尺度层上模板表现记为 W_j^α , 其模板大值的大小将受指标 α 和 j 的影响, 还需仔细讨论, 此时式(7.10)即

$$|W_j f(t_s)| = A 2^{-j(\alpha+1/2)}$$

可以被利用.

在固定的 j 尺度层上, 对于 $\alpha = 0$ 的突变点 T_s , 启用模板 $W^0(t)$, 因为

$$\begin{aligned} |W_j f(t_s)| &= |W_j^0(t_s)| \\ &= 2^{-j(0+1/2)} |W^0(t)|, \end{aligned}$$

所以将 T_s 对准 $W^0(t)$ 中心, 小波变换在 T_s 附近的替代为

$$g_j(t) = 2^{-j(0+1/2)} W^0(t).$$

在固定的 j 尺度层上, 对于 $-1 \leq \alpha < 0$ 的突变点 T_s , 启用模板 $W^{-1}(t)$, 因为

$$\begin{aligned} |W_j f(t_s)| &= A 2^{-j(\alpha+1/2)}, \\ |W_j^{-1}(t_s)| &= A 2^{-j(-1+1/2)}, \\ W_j f(t_s) &= 2^{-j(\alpha+1)} W_j^{-1}(t_s) \\ &= 2^{-j(\alpha+1)} 2^{-j(-1+1/2)} W^{-1}(t_s), \end{aligned}$$

所以将 T_s 对准 $W^{-1}(t)$ 中心, 小波变换在 T_s 附近的替代为

$$g_j(t) = 2^{-j(\alpha+1/2)} W^{-1}(t).$$

在固定的 j 尺度层上, 对于 $0 < \alpha \leq 1$ 的突变点 T_s , 启用模板 $W^1(t)$, 因为

$$\begin{aligned} |W_j f(t_s)| &= A 2^{-j(\alpha+1/2)}, \\ |W_j^1(t_s)| &= A 2^{-j(1+1/2)}, \\ W_j f(t_s) &= 2^{-j(\alpha-1)} W_j^1(t_s) \\ &= 2^{-j(\alpha-1)} 2^{-j(1+1/2)} W^1(t_s), \end{aligned}$$

所以将 T_s 对准 $W^1(t)$ 中心, 小波变换在 T_s 附近的替代为

$$g_j(t) = 2^{-j(\alpha+1/2)} W^1(t_s).$$

综上所述, 有如下算法 4.

算法 4(局部模板替代算法) 在较细的尺度层上, 突变点 T_s 对准模板中心, 在 $[T_{s-M}, T_{s+M}]$ 范围内实现 $g_j(t) \approx W_j f(t)$.

若 $\alpha=0$, 则

$$g(t) = 2^{-j/2} W^0(t),$$

若 $-1 \leq \alpha < 0$, 则

$$g(t) = 2^{-j(\alpha+1/2)} W^{-1}(t),$$

若 $0 < \alpha \leq 1$, 则

$$g(t) = 2^{-j(\alpha+1/2)} W^1(t).$$

5. 扩散微分方程模型及相应算法

在同一个 j 尺度层上往往有多个模极大值 $\{W_j f(t_s)\}$, 算法 1 至算法 4 是关于单个模极大值点附近或关于单个突变点附近的近似替代算法, 能否在该尺度层上将这些模极大值整体考虑并将其修改为近似的小波变换表现呢? 为此, 引用 j 尺度层上的扩散方程模型

$$\begin{cases} \frac{\partial g_j(t, \xi)}{\partial \xi} = a(t) \frac{\partial^2 g_j(t, \xi)}{\partial t^2} - g_j(t, \xi), & \xi > 0, t \in \mathbf{R}, \\ g_j(t, 0) = \begin{cases} W_j f(t_s), & t = t_s \text{ 时,} \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \end{cases} \quad (7.15)$$

该模型当 $a(t) = 2^{-j}$ 时实际上是将局部稳态微分方程模型(7.11)修改为整体扩散模型的结果. 该模型的扩散机制可使一个孤立表现的离散值沿 t 轴向两边扩散为一条光滑曲线, 扩散过程(用 ξ 表示)越长, 扩散曲线越平坦且趋于稳定, 如图 7.7 所示. 另外, $a(t)$ 值越小, 扩散曲线越是衰减得快. 据这些道理不难理解, j 尺度层上多个离散的模极大值将被扩散为整体的小波变换近似表现.

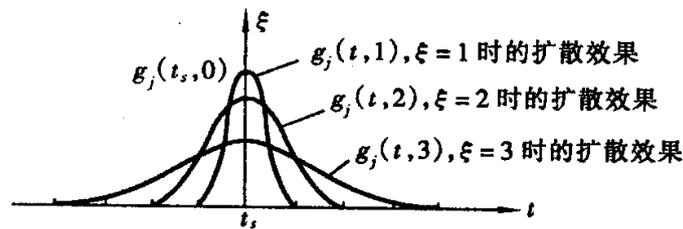


图 7.7 孤立初值扩散过程示意图

显式求解模型(7.17)的差分方程为

$$\frac{g_j(t_m, \xi_{k+1}) - g_j(t_m, \xi_k)}{\tau} = a(t_m) \left[\frac{g_j(t_{m-1}, \xi_k) - 2g_j(t_m, \xi_k) + g_j(t_{m+1}, \xi_k)}{h^2} \right] - g_j(t_m, \xi_k), m \in \mathbf{Z}, 0 \leq k \in \mathbf{N}.$$

其中, t_m 是 j 层的分划节点, h 是 j 层的采样间隔, $\tau = \xi_{k+1} - \xi_k$ 是关于 ξ 的离散间隔, 据显式求解的要求, 应满足 $r = |a(t_m)| \tau / h^2 \leq 1/2$. 该差分方程的显式计算格式为

$$\begin{cases} g_j(t_m, \xi_{k+1}) = r g_j(t_{m-1}, \xi_k) + (1-2r) g_j(t_m, \xi_k) + r g_j(t_{m+1}, \xi_k), \\ g_j(t_m, \xi_0) = \begin{cases} W_j f(t_m), & \text{当 } t_m = t_s \text{ 为模极大值点,} \\ 0, & \text{当 } t_m \neq t_s \text{ 为模极大值点,} \end{cases} \\ r = |a(t_m)| \tau / h^2 \leq 1/2, m \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{N}_+. \end{cases} \quad (7.16)$$

要用差分格式(7.16)的解替代 j 层的小波变换, 据扩散过程的表现, 还应解决以下几个问题.

(1) 扩散过程持续多长, k 值取多大的问题. 这要由式(7.16)的扩散规律和数据扩散宽度来决定. 由式(7.16)不难看出, 单点 t_m 处独立的非零离散值经一步扩散后, 将在 t_{m-1}, t_m, t_{m+1} 处出现非零值, 经两步扩散后将在 t_{m-2}, \dots, t_{m+2} 处出现非零值, 经 k 步扩散后将在 t_{m-k}, \dots, t_{m+k} 范围内出现非零值. 若要求向一边数据扩散的长度 k 不超过小波基长度 M , 则可估算出扩散过程 $k \leq M$.

(2) 扩散系数 $a(t)$ 的选择问题. 这要由模极大值位置点之间的距离关系来决定. 一方面要求 $a(t)$ 的选取使得扩散曲线是指数衰减的, 只有这样才能适合小波变换替代规则; 另一方面要求 $a(t)$ 应随着不同的模极大值点位置来改变, 例如, t_{s-1} 和 t_s 的距离大于 t_s 和 t_{s+1} 的距离时, 应该由 $|t_s - t_{s+1}|$ 来决定衰减速度和数据衰减宽度.

(3) 克服某些无须扩散替代的问题. 这可看做问题(2)的修补工作. 大家知道, 相距很近且符号相异的两个极大值是一种较特殊的情况(见图 7.1), 它可能是尖峰信号的奇对称小波变换结果, 也可能是阶跃信号的偶对称小波变换的结果, 由于这两个极大值位置太近, 不用式(7.16)扩散而宜用直线来替代它们之间的小波变换. 在程序实现方面也是容易做到的, 在用式(7.16)逐点计算时, 可跳过上述节点, 待扩散完成后, 再用直线替代作修补工作即可.

(4) 克服扩散过程使模极大值变小的问题. 由图 7.7 可知, 模极大值 $|g_j(t_s, 0)|$ 随着扩散过程越变越小, 这是不合要求的. 正确的结果是, t_s 处的极大值 $g_j(t_s, \xi_k) \equiv W_j f(t_s)$, 即该点处的极大值不随扩散过程而改变. 这一要求是很容易实现的, 用式(7.16)扩散一次后立即恢复原来的模极大值, 在此基础上再进行下一次扩散过程. 这样操作的结果实际上是加强了 $g_j(t_s, \xi_k)$ 在 t_s 附近的衰减性, 是有利于近似替代的.

在上述几个问题中, 仅问题(2)是比较灵活的, 读者可利用各自的知识与智慧来解决 $a(t)$ 的选择问题.

总结以上的讨论, 提出如下算法 5.

算法 5(整体扩散替代算法) 在较细尺度层上, 用下述步骤整体实现 $g_j(t, \xi_k)$

$\approx W_j f(t)$.

1° 按式(7.16)对 $m \in \mathbf{Z}$ 逐点计算, 每完成一个迭代步骤后, 令

$$g_j(t_s, \xi_k) = W_j f(t_s),$$

当 $k=M$ 时迭代停止.

2° 对相距很近的模极大值位置点 t_s 和 t_{s+1} , 有

$$|t_{s+1} - t_s| < M,$$

在这两点之间作直接替代修正.

该算法是在 j 尺度上整体回复小波变换的算法, 当然也可以建立局部扩散模型和局部回复小波变换的算法; 也可以建立其它的数字模型及其相应的算法; 关于利用小波变换模极大值回复小波变换的办法, 应该是不拘一格和丰富多彩的.

第 8 章 多分辨逼近中的一些重要关系

多分辨逼近(MRA)是构造、研究和应用小波的基本框架,为了便于从理论分析角度构造小波,必须讨论多分辨逼近中的一些重要的关系.例如,尺度函数 $\phi(t)$ 是形成多分辨逼近的生成元,具有什么性质的函数才能作为生成元呢? 数字滤波器 $\{h_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 及相应的频域滤波器 $H(\omega)$ 和 $G(\omega)$ 可起着分频的作用,具备哪些性质时它们才能分别作为低通滤波器和高通滤波器呢? 要构造的小波函数 $\psi(t)$ 及其 $\hat{\psi}(\omega)$ 应具有哪些适合应用需要的特点呢? …… 这些问题都必须在多分辨逼近结构中分析上述诸量的性质的基础上才能得到解决.

8.1 多分辨逼近生成元及其性质

多分辨逼近概念在理解、分析、构造和应用小波方面都是极其重要的,本节将对多分辨逼近作更深入细致的讨论,并在此基础上分析总结多分辨逼近的一般性质.

所谓二进的多分辨逼近是指满足下述条件的函数线性空间序列 $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$:

$$1^\circ V_j \subset V_{j+1}, \bigcap_{m \in \mathbf{Z}} V_m = \{0\}, \bigcup_{m \in \mathbf{Z}} V_m = L^2(\mathbf{R});$$

$$2^\circ \xi(t) \in V_j \iff \xi(2t) \in V_{j+1};$$

$$3^\circ \phi(t) \in V_0, \{\phi(t-n)\} \text{ 是 } V_0 \text{ 的 Riesz 基.}$$

条件 3° 描述了函数线性空间 V_0 的构造形式,即

$$V_0 \ni f^0(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k^0 \phi(t-k),$$

$$V_0 = \text{span}\{\phi(t-k), k \in \mathbf{Z}\}.$$

由此,可从多个方面分析总结有关 $\phi(t)$ 的一些性质.

(1) 从节点基函数的线性组合形式方面分析. 这种数学表示形式类似于数值计算方法中的插值函数的表示形式, $\{\phi(t-k)\}$ 是节点基函数,它满足最低要求 $\sum_{k \in \mathbf{Z}} \phi(t-k) = 1$; 令 $t = 0$, 又知 $\sum_{k \in \mathbf{Z}} \phi(k) = 1$; 在细密分划下,节点基函数的这种性

质就表现为 $\int_{\mathbf{R}} \phi(t) dt = 1$.

(2) 从 $\phi(t)$ 衰减表现方面分析. 由于 $f^0(t)$ 是由 $\phi(t-k)$ 的线性组合形式表示的,所以由 $f^0(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 推知, $\phi(t) \in L^2(\mathbf{R})$, $\phi(t)$ 是具有快速衰减表现的.

(3) 从 $\{\phi(t-k)\}$ 是 Riesz 基方面分析. 一方面,当 $\{\phi(t-k)\}$ 是平移标准正交基时,对 $f^0(t) \in L^2(\mathbf{R})$, 有

$$\|f^0(t)\|_0^2 = \sum_{k \in \mathbf{Z}} |c_k^0|^2;$$

另一方面, $f^0(t)$ 用标准平移正交基或用非平移正交基做线性组合表示时, 其 $\|f^0(t)\|_0^2$ 是相互等价的, 所以应满足式(4.4)所描述的 Riesz 基表现.

综上所述, 由条件 3° 可知, $\phi(t)$ 应满足下述性质:

$$\int_{\mathbf{R}} \phi(t) dt = 1; \tag{8.1}$$

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} \phi(t-k) = 1, \phi(t) \in L^2(\mathbf{R}); \tag{8.2}$$

$$A \sum_k |c_k^0|^2 \leq \|f^0(t)\|_0^2 = \left\| \sum_k c_k^0 \phi(t-k) \right\|_0^2 \leq B \sum_k |c_k^0|^2. \tag{8.3}$$

条件 2° 表明 $\phi(t) \in V_0, \phi(2t) \in V_1$, 这样在 $\phi_{j,k}(t)$ 归一化时, 条件 2° 描述了函数线性空间 V_j 的构造形式, 即

$$V_j = \text{span}\{\phi_{j,k}(t), k \in \mathbf{Z}\},$$

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k),$$

$$f^j(t) = \sum_k c_k^j \phi_{j,k}(t),$$

$$f^j(t) \in V_j \subset L^2(\mathbf{R}).$$

特别值得注意的是, 由于 $V_j \subset V_{j+1}, \phi_{j,k}(t) \in V_j$ 可由 V_{j+1} 的基函数线性表示, 故条件 2° 隐含着双尺度方程

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sum_n h_n \phi(2t-n) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_n h_n \phi_{1,n}(t) \end{aligned}$$

或
$$\phi_{j,k}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_n h_n \phi_{j+1,2k+n}(t). \tag{8.4}$$

同样, 由 $\{\phi(t-n)\}$ 是 V_0 的 Riesz 基可推知 $\{\phi_{j,k}\}$ 是 V_j 的 Riesz 基, 即

$$A \sum_k |c_k^j|^2 \leq \|f^j(t)\|_0^2 = \left\| \sum_k c_k^j \phi_{j,k} \right\|_0^2 \leq B \sum_k |c_k^j|^2. \tag{8.5}$$

在多分辨逼近的应用中, 双尺度方程往往是已知的, 因此条件 2° 实质上是强调了 V_j 和 V_{j+1} 之间的传递关系.

条件 1° 描述了函数子空间序列的逼近性质, 即 $\{V_j\} \rightarrow L^2(\mathbf{R})$, 同样描述了 $f^j(t) \rightarrow f(t), f^j(t) \in V_j, f(t) \in L^2(\mathbf{R})$.

条件 1°~3° 一起表明了 $L^2(\mathbf{R})$ 按小波子空间 W_j 的直和分解关系, 即

$$\begin{cases} V_{j+1} = V_j \oplus W_j, & W_j = V_{j+1}/V_j, \\ L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} W_j. \end{cases} \tag{8.6}$$

值得指出的是, $\phi(t)$ 在多分辨逼近中通常称为尺度函数或生成元, 它通常不一定是平移正交的, 式(8.6)中的小波子空间不一定是相互正交的; 在时域中讨论多

分辨逼近生成元 $\phi(t)$, 它应满足式(8.1)至式(8.4); 在频域中讨论 $\hat{\phi}(\omega)$, 它还具有下面一些其它的性质.

Riesz 基定义式(8.3)等价于

$$A \leq \sum_n |\hat{\phi}(\omega + 2n\pi)|^2 \leq B. \quad (8.7)$$

事实上, 对于 $f^0(t) \in V_0$, $f^0(t) = \sum_k c_k^0 \phi(t-k)$ 可看做 $\{c_k^0\}$ 和 $\{\phi(t-k)\}$ 的类似于卷积的形式, 其 Fourier 变换为

$$\begin{aligned} \hat{f}^0(\omega) &= \sum_k c_k^0 \int_{\mathbf{R}} \phi(t-k) e^{-i\omega t} dt \\ &= \sum_k c_k^0 e^{-ik\omega} \hat{\phi}(\omega) \\ &= H_f(\omega) \hat{\phi}(\omega), \end{aligned}$$

其中, $H_f(\omega) = \sum_k c_k^0 e^{-ik\omega}$ 是以 2π 为周期的 $L^2(\mathbf{R})$ 中的函数, 即 $H_f(\omega) \in L^2_{2\pi}$, 而且

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |H_f(\omega)|^2 d\omega &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_k c_k^0 e^{-ik\omega} \right|^2 d\omega \\ &= 2\pi \sum_k |c_k^0|^2, \end{aligned}$$

其中用到了 $\{e^{-ik\omega}\}$ 的正交性质. 于是有

$$\begin{aligned} \|f^0(t)\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} |\hat{f}^0(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} |H_f(\omega)|^2 |\hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_n \int_{-\pi}^{\pi} |H_f(\omega)|^2 |\hat{\phi}(\omega + 2n\pi)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_f(\omega)|^2 \sum_n |\hat{\phi}(\omega + 2n\pi)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

再利用 Riesz 基定义式(8.3), 就有

$$\|f^0(t)\|^2 \leq B \sum_k |c_k^0|^2 = \frac{B}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_f(\omega)|^2 d\omega,$$

$$\|f^0(t)\|^2 \geq A \sum_k |c_k^0|^2 = \frac{A}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_f(\omega)|^2 d\omega.$$

综合以上三式, 有

$$\int_{-\pi}^{\pi} |H_f(\omega)|^2 \left(\sum_n |\hat{\phi}(\omega + 2n\pi)|^2 - A \right) d\omega \geq 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |H_f(\omega)|^2 \left(\sum_n |\hat{\phi}(\omega + 2n\pi)|^2 - B \right) d\omega \leq 0.$$

最后利用 $H_f(\omega) \in L^2_{2\pi}$ 是任意的且 $|H_f(\omega)|^2 > 0$, 就可证得式(8.7).

同样可证明式(8.7)与式(8.3)等价.

在时域中,生成元 $\phi(t)$ 满足式(8.1),在频域中观察,可认为式(8.1)是 $\hat{\phi}(\omega)$ 在 $\omega=0$ 时的表现,即 $\int_{\mathbf{R}} \phi(t) dt = \int_{\mathbf{R}} \phi(t) e^{-i0t} dt = \hat{\phi}(0)$,故有

$$\hat{\phi}(0) = 1. \quad (8.8)$$

在时域中生成元 $\phi(t)$ 满足双尺度方程式(8.4),对此式两边作 Fourier 变换,可知其在频域中的表现为

$$\hat{\phi}(2\omega) = H(\omega) \hat{\phi}(\omega), \quad (8.9)$$

其中, $H(\omega) = \frac{1}{2} \sum_n h_n e^{-in\omega}$ 是频域中的低通滤波器.关于式(8.9)的证明是推演性的,事实上,对式(8.4)两边作 Fourier 变换,有

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\omega) &= \int_{\mathbf{R}} \sum_n h_n \phi(2t-n) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} \sum_n h_n e^{-i\frac{\omega}{2}n} \int_{\mathbf{R}} \phi(2t-n) e^{-i\frac{\omega}{2}(2t-n)} d(2t-n) \\ &= H\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \end{aligned}$$

若在式(8.4)中令 $t = \tilde{t}/2$,则上面的推演结果为式(8.9).

$H(\omega)$ 是 $\{h_n\}$ 在频域中的表征,它可看做数据 $\{h_n\}$ 的离散 Fourier 变换.由式(8.8)和式(8.9),可简单推得

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{2} \sum h_n e^{-in\omega}, \\ H(0) = 1 &\iff \sum h_n = 2, \end{aligned} \quad (8.10)$$

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} H\left(\frac{\omega}{2^j}\right). \quad (8.11)$$

其中, $H(\omega)$ 是周期为 2π 的函数.由式(8.8)和式(8.9)知 $H(0)=1$,由 $H(\omega)$ 的定义有 $\sum_n h_n = 2$,由式(8.9)所确定的递推关系可推导出式(8.11).

上述多分辨逼近中的若干关系式可以说是分别从时域和频域角度理解双尺度方程和生成元 $\phi(t)$ 的结果.还可以物理的角度得到一些直观认识.

(1) $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 分别是低通和高通函数.由

$$(f(t), \phi(t)) = \frac{1}{2\pi} (\hat{f}(\omega), \hat{\phi}(\omega))$$

可知: $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$, $\hat{f}(\omega)$ 频域宽广; $\phi(t) \in V_0$, $\hat{\phi}(\omega)$ 仅是低频表现; $(f(t), \phi(t))$ 可看做 $f(t)$ 被限制在 V_0 中关于 t 处的表现; $(\hat{f}(\omega), \hat{\phi}(\omega))$ 可看做是 $\hat{f}(\omega)$ 被限制在 V_0 频宽范围内关于 ω 处的表现.由此可对卷积 $(f(t), \phi(t-k))$ 作物理解释,这种时域卷积结果是 $f(t)$ 被限制在 V_0 中的时域表现 $f^0(t)$,这种卷积结果隐含着

$\hat{f}(\omega)$ 被限制在 V_0 所表现的低频范围内, 所以可以称 $\phi(t)$ 是低通函数. 同理, 卷积 $(f(t), \psi(t-k))$ 的结果是 $f(t)$ 被限制在 $W_0 = V_1/V_0$ 中的时域表现, 它隐含着 $\hat{f}(\omega)$ 被限制在 W_0 表现的高频范围内, 所以可以称 $\psi(t)$ 是高通函数.

(2) $H(\omega)$ 和 $G(\omega)$ 分别是频域的低通和高通滤波器. 由

$$\hat{\phi}(2\omega) = H(\omega) \hat{\phi}(\omega)$$

可知, $\hat{\phi}(2\omega)$ 的频域范围较窄, $\hat{\phi}(\omega)$ 的频域范围较宽, $\hat{\phi}(2\omega)$ 的频域范围是 $\hat{\phi}(\omega)$ 的低频部分, $\hat{\phi}(\omega)$ 是经过 $H(\omega)$ 的乘积限制才得到其低频部分 $\hat{\phi}(2\omega)$ 的, 所以称 $H(\omega)$ 为频域的低通滤波器. 同理

$$\hat{\psi}(2\omega) = G(\omega) \hat{\psi}(\omega)$$

表明, $\hat{\psi}(\omega)$ 是经过 $G(\omega)$ 的乘积限制才得到其高频部分的, 所以称 $G(\omega)$ 为频域的高通滤波器.

(3) $\{h_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 分别是低通和高通数字滤波器. 由双尺度方程

$$\phi(t) = \sum_n h_n \phi(2t-n)$$

可知, $\phi(2t-n) \in V_1, \phi(t) \in V_0, \phi(t)$ 比 $\phi(2t)$ 表现得更平滑. 由于 $\{h_n\}$ 的作用, 较宽频率范围的量才被限制在其低频范围, 所以称 $\{h_n\}$ 是低通数字滤波器. 同理, 由

$$\psi(t) = \sum_n g_n \psi(2t-n)$$

可知, $\psi(2t-n) \in V_1, \psi(t) \in W_0 = V_1/V_0$. 由于 $\{g_n\}$ 的作用, 较宽频率范围的量才被限制在其高频部分, 所以称 $\{g_n\}$ 是高通数字滤波器.

综上所述, 在多分辨逼近结构中, 由生成元所满足的双尺度方程可推导出卷积函数、频域滤波器和数字滤波器的相应性质和公式, 为阅读方便, 现归类列出.

关于低通函数 $\phi(t)$ 和高通函数 $\psi(t)$, 有

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sum_n h_n \phi(2t-n), & \psi(t) &= \sum_n g_n \psi(2t-n), \\ \int_{\mathbf{R}} \phi(t) dt &= 1, & \int_{\mathbf{R}} \psi(t) dt &= 0, \\ \sum_k \phi(t-k) &= 1, & \sum_k \psi(t-k) &= 0, \\ \sum_k \phi(k) &= 1, & \sum_k \psi(k) &= 0, \end{aligned}$$

$$A \leq \sum_n |\hat{\phi}(\omega + 2n\pi)|^2 \leq B.$$

关于频域低通滤波器 $H(\omega)$ 和频域高通滤波器 $G(\omega)$, 有

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(2\omega) &= H(\omega) \hat{\phi}(\omega), & \hat{\psi}(2\omega) &= G(\omega) \hat{\psi}(\omega), \\ H(\omega) &= \frac{1}{2} \sum_n h_n e^{-i\omega n}, & G(\omega) &= \frac{1}{2} \sum_n g_n e^{-i\omega n}, \\ H(0) &= 1, & G(0) &= 0. \end{aligned}$$

关于低通数字滤波器 $\{h_n\}$ 和高通数字滤波器 $\{g_n\}$, 有

$$\sum_n h_n = 2, \{h_n\} \text{ 快速衰减,}$$

$$\sum_n g_n = 0, \{g_n\} \text{ 振荡且快速衰减.}$$

8.2 正交尺度函数和正交小波的性质

一个二进的多分辨逼近决定了由式(8.6)所描述的函数子空间的分解关系, 其中尺度子空间 V_0 的基 $\{\phi(t-n)\}$ 是由 $\phi(t)$ 平移生成的, $\phi(t)$ 称为多分辨逼近的生成元, 或简称为尺度函数; 小波子空间 W_0 的基函数 $\{\psi(t-n)\}$ 是由 $\psi(t)$ 平移生成的, $\psi(t)$ 称为小波函数.

在二进关系下, $\phi_{j,k}(t) \in V_j$ 和 $\psi_{j,k}(t) \in W_j$ 的构造形式为

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k),$$

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k).$$

利用 $V_j \subset V_{j+1}, W_j \subset V_{j+1}$ 可推知

$$\begin{cases} \phi_{j,k}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_n h_n \phi_{j+1,2k+n}, \\ \psi_{j,k}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_n g_n \phi_{j+1,2k+n}. \end{cases}$$

其中, 当 $j=0, k=0$ 时的表现是大家熟悉的形式

$$\begin{cases} \phi(t) = \sum_n h_n \phi(2t - n), \\ \psi(t) = \sum_n g_n \phi(2t - n). \end{cases} \quad (8.12)$$

若多分辨逼近的尺度函数 $\phi(t) \in V_0$ 是标准正交的, 则可推知 $\psi(t) \in W_0$, $\phi_{j,k}(t) \in V_j, \psi_{j,k}(t) \in W_j$ 都是标准正交的, 从而 MRA 所确定的式(8.6)是正交小波子空间分解, 且

$$W_j \perp W_m, j \neq m;$$

$$V_j \perp W_j, j \in \mathbf{Z}.$$

推导是简单的(见 4.3 节), 这些正交关系表现为

$$(\phi_{j,k}(t), \phi_{j,n}(t)) = \delta_{k,n}, \quad (8.13)$$

$$(\phi_{j,k}(t), \psi_{j,n}(t)) = 0, \quad (8.14)$$

$$(\psi_{j,k}(t), \psi_{m,n}(t)) = \delta_{j,m} \delta_{k,n}. \quad (8.15)$$

此时, 标准正交的 $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 的某些性质将会在一般多分辨逼近有关性质的基础上表现出更强的规律性.

标准正交尺度函数 $\phi(t)$ 也是 Riesz 基, 与式(8.3)相对应, 有

$$\begin{aligned}\|f^0(t)\|_0^2 &= \left\| \sum_k c_k^0 \phi(t-k) \right\|_0^2 \\ &= \sum_k |c_k^0|^2.\end{aligned}\quad (8.16)$$

标准正交的 $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 满足双尺度方程式(8.12), 其标准正交的表现式(8.13)和式(8.15), 分别等价于

$$\frac{1}{2} \sum_n h_n h_{n-2k} = \delta_{0,k}, \quad (8.17)$$

$$\frac{1}{2} \sum_n g_n g_{n-2k} = \delta_{0,k}. \quad (8.18)$$

式(8.17)和式(8.18)的证明可参见式(4.14)和式(4.15)的证明过程, 关于 $\{h_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 的关系还满足

$$\begin{cases} \sum_n h_n = 2, \\ \sum_n g_n = 0, \\ g_n = (-1)^n h_{1-n}. \end{cases} \quad (8.19)$$

下面讨论正交尺度函数 $\phi(t)$ 和正交小波 $\psi(t)$ 在频域中的表现 $\hat{\phi}(\omega)$ 和 $\hat{\psi}(\omega)$ 的有关性质.

利用尺度函数 $\phi(t)$ 的标准正交性, 有

$$\begin{aligned}\delta_{0,k} &= \int_{\mathbf{R}} \phi(t) \bar{\phi}(t-k) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{\phi}(\omega) \bar{\hat{\phi}}(\omega-k) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} |\hat{\phi}(\omega)|^2 e^{ik\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_n \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{\phi}(\omega+2n\pi)|^2 e^{ik\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_n |\hat{\phi}(\omega+2n\pi)|^2 \right] e^{ik\omega} d\omega.\end{aligned}$$

把上式看做关于 $[\cdot]$ 的 Fourier 逆变换, 于是有

$$\begin{aligned}\delta_{0,k} &= \int_{\mathbf{R}} \phi(t) \bar{\phi}(t+k) dt \\ \iff \delta_{0,k} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} |\hat{\phi}(\omega)|^2 e^{ik\omega} d\omega \\ \iff \sum_n &|\hat{\phi}(\omega+2n\pi)|^2 = 1.\end{aligned}\quad (8.20)$$

将式(8.3)和式(8.16)比较, 将式(8.7)和式(8.20)比较, 即可看出一般尺度函数和标准正交尺度函数在性质表现方面的一些区别和联系.

标准正交基所满足的双尺度方程式(8.12)在频域中的表现为

$$\hat{\phi}(2\omega) = H(\omega) \hat{\phi}(\omega), \quad (8.21)$$

$$\hat{\psi}(2\omega) = G(\omega) \hat{\phi}(\omega). \quad (8.22)$$

其中, $H(\omega) = \frac{1}{2} \sum_n h_n e^{-in\omega}$, $G(\omega) = \frac{1}{2} \sum_n g_n e^{-in\omega}$ 是周期为 2π 的函数.

在 $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 标准正交的条件下, $H(\omega)$ 和 $G(\omega)$ 满足下述关系:

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1, \quad (8.23)$$

$$|G(\omega)|^2 + |G(\omega + \pi)|^2 = 1. \quad (8.24)$$

事实上, 由式(8.20)和式(8.21)可推得式(8.23), 此时

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_n |\hat{\phi}(\omega + 2n\pi)|^2 \\ &= \sum_n |\hat{\phi}(2\omega + 2n\pi)|^2 \\ &= \sum_n |H(\omega + n\pi)|^2 |\hat{\phi}(\omega + n\pi)|^2 \\ &= \sum_k |H(\omega + 2k\pi)|^2 |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 \\ &\quad + \sum_k |H(\omega + (2k+1)\pi)|^2 |\hat{\phi}(\omega + (2k+1)\pi)|^2 \\ &= \sum_k |H(\omega)|^2 |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 \\ &\quad + \sum_k |H(\omega + \pi)|^2 |\hat{\phi}(\omega + \pi + 2k\pi)|^2 \\ &= |H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2. \end{aligned}$$

同样, 可用式(8.20)和式(8.22)推得式(8.24).

从另一个角度看, 在多分辨逼近框架下, 式(8.23)和式(8.24)既可分别被认为是 $\{\phi(t-n)\} \in V_0$ 和 $\{\psi(t-n)\} \in W_0$ 的标准正交基双尺度方程在频域中的表现, 也可认为它们分别与式(8.13)和式(8.15)等价.

$V_0 \perp W_0$. 在时域中已由式(8.14)所表现, 在频域中, 它的等价形式为

$$H(\omega)\bar{G}(\omega) + H(\omega + \pi)\bar{G}(\omega + \pi) = 0. \quad (8.25)$$

式(8.25)的证明过程与式(8.23)的证明过程相仿, 即

$$\begin{aligned} 0 &= (\psi(t), \phi(t-k)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(\omega) \hat{\phi}(\omega) e^{ik\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} G\left(\frac{\omega}{2}\right) \bar{H}\left(\frac{\omega}{2}\right) \left|\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2 e^{ik\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_n G\left(\frac{\omega}{2} + n\pi\right) \bar{H}\left(\frac{\omega}{2} + n\pi\right) \left|\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + n\pi\right)\right|^2 e^{ik\omega} d\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_n G(\omega + n\pi) \bar{H}(\omega + n\pi) |\hat{\phi}(\omega + n\pi)|^2 e^{ik\omega} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_n G(\omega + 2n\pi) \bar{H}(\omega + 2n\pi) |\hat{\phi}(\omega + 2n\pi)|^2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_n G(\omega + 2n\pi + \pi) \bar{H}(\omega + 2n\pi + \pi) |\hat{\phi}(\omega + 2n\pi + \pi)|^2 \right] e^{ik\omega} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [G(\omega) \bar{H}(\omega) + G(\omega + \pi) \bar{H}(\omega + \pi)] \sum_n |\hat{\phi}(\omega + 2n\pi)|^2 e^{ik\omega} d\omega.
\end{aligned}$$

在以上公式推演中用到了

$$G\left(\frac{\omega}{2} + n\pi\right) = G(\omega + n\pi)$$

和

$$\hat{\phi}(\omega + 2n\pi) = \hat{\phi}(\omega + \pi + 2n\pi)$$

这些周期函数的性质. 另外, 上式对任意 $k \in \mathbf{Z}$ 成立, 由此证得式(8.25)成立.

同样, 式(8.25)也可看做式(8.14)在频域中的表现.

对正交尺度函数 $\phi(t)$ 和正交小波 $\psi(t)$, 还可进一步讨论关于 $H(\omega)$ 和 $G(\omega)$ 的联系, 取

$$G(\omega) = e^{-i\omega} \bar{H}(\omega + \pi). \quad (8.26)$$

显然, 这样的 $G(\omega)$ 满足式(8.24)和式(8.25). 再利用 $H(\omega)$ 和 $G(\omega)$ 的定义, 对式(8.26)进行演化, 有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_n g_n e^{-i\omega n} &= G(\omega) \\
&= e^{-i\omega} \bar{H}(\omega + \pi) \\
&= \frac{1}{2} \sum_n h_n e^{-i\omega(1-n)} e^{i\pi n} \\
&= \frac{1}{2} \sum_n (-1)^n h_n e^{-i\omega(1-n)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\xi} (-1)^{\xi} h_{1-\xi} e^{-i\omega\xi},
\end{aligned}$$

比较等式两边各项, 即有

$$g_n = (-1)^n h_{1-n}.$$

这正是定理 4.1 中引用它的原因.

对于尺度函数正交的情形, 低通滤波器 $H(\omega)$ 满足式(8.23)和 $H(0) = 1$, 由此推知 $|H(\omega + \pi)|^2 = 0$, 于是有

$$\begin{cases} H(0) = 1, \\ H(\pm\pi) = 0. \end{cases} \quad (8.27)$$

对于尺度函数正交的情形, 低通数字滤波器 $\{h_n\}$ 也有特殊表现, 事实上由于

$$\begin{aligned}
 H(\pi) &= \frac{1}{2} \sum_n h_n e^{-in\pi} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_n (-1)^n h_n \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=\text{偶数}} h_n - \frac{1}{2} \sum_{n=\text{奇数}} h_n \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

由此推知

$$\begin{cases} \sum_n h_n = 2, \\ \sum_{n=\text{奇数}} h_n = \sum_{n=\text{偶数}} h_n = 1. \end{cases} \quad (8.28)$$

综上所述,在多分辨逼近结构中,若生成元(尺度函数)是平移正交的,则在时域和频域中可推导出更多的性质,现将这些性质按卷积函数、频域滤波器和数字滤波器归类如下。

关于正交的低通卷积函数(尺度函数) $\phi(t)$,关于正交的高通卷积函数(小波函数) $\psi(t)$,有

$$\begin{aligned}
 \phi(t) &= \sum_n h_n \phi(2t-n), & \psi(t) &= \sum_n g_n \psi(2t-n), \\
 \int_{\mathbf{R}} \phi(t-j)\phi(t-k)dt &= \delta_{jk}, & \int_{\mathbf{R}} \psi(t-j)\psi(t-k)dt &= \delta_{jk}, \\
 \int_{\mathbf{R}} \phi(t)\psi(t-k)dt &= 0, \forall k \in \mathbf{Z}, & \sum_n |\hat{\phi}(\omega+2n\pi)|^2 &= 1, \\
 \int_{\mathbf{R}} \phi(t)dt &= 1, & \int_{\mathbf{R}} \psi(t)dt &= 0, \\
 \sum_k \phi(t-k) &= 1, & \sum_k \psi(t-k) &= 0, \\
 \sum_k \phi(k) &= 1, & \sum_k \psi(k) &= 0.
 \end{aligned}$$

关于正交的频域低通滤波器 $H(\omega)$ 和正交的频域高通滤波器 $G(\omega)$, 有

$$\begin{aligned}
 \hat{\phi}(2\omega) &= H(\omega) \hat{\phi}(\omega), & \hat{\psi}(2\omega) &= G(\omega) \hat{\psi}(\omega), \\
 H(\omega) &= \frac{1}{2} \sum_n h_n e^{-i\omega n}, & G(\omega) &= \frac{1}{2} \sum_n g_n e^{-i\omega n}, \\
 H(0) &= 1, \quad H(\pm\pi) = 0, & G(0) &= 0, \quad G(\pm\pi) = 1, \\
 |H(\omega)|^2 + |H(\omega+\pi)|^2 &= 1, & |G(\omega)|^2 + |G(\omega+\pi)|^2 &= 1, \\
 H(\omega)\bar{G}(\omega) + H(\omega+\pi)\bar{G}(\omega+\pi) &= 0, & G(\omega) &= e^{-i\omega}\bar{H}(\omega+\pi).
 \end{aligned}$$

关于正交的低通数字滤波器 $\{h_n\}$ 和正交的高通数字滤波器 $\{g_n\}$, 有

$$\begin{aligned} \sum_n h_n &= 2, & \sum_n g_n &= 0, \\ \sum_{n=\text{偶数}} h_n &= \sum_{n=\text{奇数}} h_n = 1, & g_n &= (-1)^n h_{1-n}, \\ \frac{1}{2} \sum_n h_n h_{n-2k} &= \delta_{0k}, & \frac{1}{2} \sum_n g_n g_{n-2k} &= \delta_{0k}. \end{aligned}$$

对于正交小波,其消失矩和光滑性在相应的滤波器中也有反映,具体见如下定理.

定理 8.1 设 $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 分别是平移正交的尺度函数和小波函数, $H(\omega)$ 是相应的低通滤波器,则下面三个结论是等价的:

(1) 小波函数 $\psi(t)$ 有 N 阶消失矩

$$\begin{cases} \int_{\mathbf{R}} t^k \psi(t) dt = 0, & k = 0, 1, \dots, N-1. \\ \int_{\mathbf{R}} |t^N \psi(t)| dt < +\infty. \end{cases} \quad (8.29)$$

$$(2) \quad \left. \frac{d^k \hat{\psi}(\omega)}{d\omega^k} \right|_{\omega=0} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (8.30)$$

$$(3) \quad \left. \frac{d^k H(\omega)}{d\omega^k} \right|_{\omega=\pi} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (8.31)$$

证明 因为小波函数 $\psi(t)$ 有 N 阶消失矩,由式(7.11)可知 $\psi(t)$ 和 $\hat{\psi}(\omega)$ 都是 N 次连续可微函数;又因为 $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 满足双尺度方程(8.12),由此推知 $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 具有相同的可微性, $\phi(t)$ 也是 N 次连续可微的函数.

于是,利用 $\hat{\psi}^{(k)}(\omega)$ 是 $(-it)^k \psi(t)$ 的 Fourier 变换这一形式特点,有

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^{(k)}(0) &= \int_{\mathbf{R}} (-it)^k \psi(t) dt \\ &= (-i)^k \int_{\mathbf{R}} t^k \psi(t) dt, \end{aligned}$$

可证得结论(1)和结论(2)是等价的.

再由式(8.12)和式(8.26),有

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(2\omega) &= G(\omega) \hat{\psi}(\omega) \\ &= e^{-i\omega} \bar{H}(\omega + \pi) \hat{\psi}(\omega), \end{aligned}$$

因为 $\hat{\psi}(0) \neq 0$, 所以对上式求导,即可证得结论(2)和结论(3)是等价的.

由定理 8.1 可知,在时域中正交小波的消失矩越高,则在频域中 $\hat{\psi}(\omega)$ 在 $\omega=0$ 处表现得越平滑,高通滤波的性能越好.这一特性还可从 $|H(\omega)|^2$ 的图形表现(参见图 9.8)中理解:由该图可以看出, $|H(\omega)|^2$ 在 $\omega=\pi$ 处越平滑, $H(\omega)$ 的低通性能越好;相应地 $|G(\omega)|^2$ 在 $\omega=0$ 处越平滑,则 $G(\omega)$ 的高通性能也越好.

8.3 关于构造尺度函数的讨论

在多分辨逼近结构中,尺度函数 $\phi(t)$ 、低通数字滤波器 $\{h_n\}$ 和频域低通滤波器 $H(\omega)$ 三者是相互关联的,它们满足下述关系式:

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \sum_n h_n \phi(2t - n), \\ \hat{\phi}(2\omega) &= H(\omega) \hat{\phi}(\omega).\end{aligned}$$

只要确定三者中的一个,其它两个就相应地被确定了.这三者在数字信号处理中起着非常重要的作用,特别是 $\phi(t)$ 在信号的逼近描述和滤波方面都起着重要的作用,所以下面就 $\phi(t)$ 的构造问题进行简略的讨论.

1. 利用时域特性构造尺度函数

尺度函数 $\phi(t)$ 在时域中的特性可由多分辨逼近的定义得到体现. ① 它是多分辨逼近的生成元,满足双尺度方程;② 它是节点基函数,符合 Riesz 基表现,它的线性组合可构成近似信号,且随着尺度变化去逼近原信号;③ 它是低通函数,它在不同尺度下能产生分频效果和作用;④ 就一般而论,低通函数不一定是节点基函数,只有节点基函数才既是低通函数又是多分辨逼近的生成元.下面介绍利用这些时域特性构造尺度函数的几种方法.

方法 1 已知尺度函数,利用相关运算和卷积运算构造更光滑的尺度函数.

设 $\phi_1(t)$ 和 $\phi_2(t)$ 是已知的尺度函数,将其相关函数和卷积函数分别记为

$$\begin{cases} R_{11}(t) = \int_{\mathbf{R}} \phi_1(\tau) \phi_1(t + \tau) d\tau, \\ R_{12}(t) = \int_{\mathbf{R}} \phi_1(\tau) \phi_2(t + \tau) d\tau, \\ S_{11}(t) = \int_{\mathbf{R}} \phi_1(\tau) \phi_1(t - \tau) d\tau, \\ S_{12}(t) = \int_{\mathbf{R}} \phi_1(\tau) \phi_2(t - \tau) d\tau, \end{cases} \quad (8.32)$$

可以证明上述四种函数都是尺度函数.下面仅就 $S_{12}(t)$ 证明它满足式(8.1)至式(8.3).

首先证明 $S_{12}(t)$ 满足式(8.1),为此,对 $S_{12}(t)$ 积分,有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}} S_{12}(t) dt &= \int_{\mathbf{R}} \left[\int_{\mathbf{R}} \phi_1(\tau) \phi_2(t - \tau) d\tau \right] dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} \phi_1(\tau) \left[\int_{\mathbf{R}} \phi_2(t - \tau) dt \right] d\tau \\ &= 1.\end{aligned}$$

其次证明 $S_{12}(t)$ 满足式(8.2),为此,考察对 $S_{12}(t)$ 的整节点平移求和,有

$$\sum_k S_{12}(t - k) = \sum_k \int_{\mathbf{R}} \phi_1(\tau) \phi_2(t - k - \tau) d\tau$$

$$= \int_{\mathbf{R}} \sum_k \phi_2(t-k-\tau) \phi_1(\tau) d\tau.$$

于是当 t 取整数时,有

$$\sum_k \phi_2(t-k-\tau) = \sum_k \phi_2(j-\tau) = 1,$$

从而有

$$\sum_k S_{12}(k) = 1.$$

再证明 $S_{12}(t)$ 满足 Riesz 基性质式(8.3),此时要用到

$$A \leq \| S_{12}(t) \|_0^2 = \left\| \int_{\mathbf{R}} \phi_1(\tau) \phi_2(t-\tau) d\tau \right\|_0^2 \leq B,$$

于是用 $\{S_{12}(t-n)\}$ 作节点基函数表述能量有限近似函数时就有

$$A \sum_n |c_n|^2 \leq \left\| \sum_n c_n S_{12}(t-n) \right\|^2 \leq B \sum_n |c_n|^2.$$

下面讨论,当采用 $S_{12}(t)$ 作多分辨逼近生成元时,关于双尺度方程

$$S_{12}(t) = \sum_n \tilde{h}_n S_{12}(2t-n)$$

中低通数字滤波器 $\{\tilde{h}_n\}$ 的求取问题. 只要在此双尺度方程中令 $t = k \in \mathbf{Z}$, 则有

$$S_{12}(k) = \sum_n \tilde{h}_n S_{12}(2k-n), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

这是一个线性方程组,其中 $\{S_{12}(k)\}$ 已知, $\{\tilde{h}_n\}$ 未知,在 $\sum_n \tilde{h}_n = 2$ 约束下,该线性方程组有唯一解.

该方法的典型例子是在第11章中介绍的样条函数的构造方法. 已知单位矩形函数,它是一种节点基函数,称为一阶样条函数;由一阶样条函数作自卷积就得到二阶样条函数;由一阶样条函数和二阶样条函数作卷积就得到三阶样条函数;由一阶样条函数和 $m-1$ 阶样条函数作卷积就得到 m 阶样条函数;卷积次数越多,由此得到的样条函数的光滑性就越好,支集也就越大. m 阶样条函数都可作为节点基函数,都可作为多分辨逼近的生成元.

方法2 已知低通数字滤波器,利用双尺度方程构造尺度函数.

双尺度方程

$$\phi(t) = \sum_n h_n \phi(2t-n) \quad (8.33)$$

表明:若已知 $\{h_n\}$ 是低通数字滤波器,则一定存在着某个尺度函数 $\phi(t)$ 满足此双尺度方程;若已知 $\phi(t)$ 是尺度函数,则一定存在着某个低通数字滤波器 $\{h_n\}$ 满足双尺度方程.

满足双尺度方程的低通数字滤波器 $\{h_n\}$ 是有要求的,例如要求 $\{h_n\}$ 快速衰减, $h_0 \leq 1$, $\sum_n h_n = 2$, 还可要求对称性和短数据等. 满足这些要求的低通数字滤波器是多样的,例如根据某个尺度函数 $\phi_1(t)$ 是低通卷积函数的特性,取

$$\{h_n\} = 2\{\phi_1(n)\};$$

例如,直接取

$$\{h_n\} = \left\{ \frac{1}{16}, \frac{8}{16}, \frac{14}{16}, \frac{8}{16}, \frac{1}{16} \right\}$$

或

$$\{h_n\} = \left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \right\}$$

等. 当低通数字滤波器 $\{h_n\}$ 取定时,由双尺度方程可求得相应尺度函数 $\phi(t)$ 的整节点和分节点函数值,例如在式(8.33)中取 $t=k \in \mathbf{Z}$,就有

$$\phi(k) = \sum_n h_n \phi(2k-n), k \in \mathbf{Z}$$

在 $\sum_k \phi(k) = 1$ 的约束下求得整节点值 $\{\phi(k)\}$;取 $t = \frac{k}{2} \in \mathbf{Z}$,就有

$$\phi\left(\frac{k}{2}\right) = \sum_n h_n \phi(k-n), k \in \mathbf{Z}$$

在 $\sum_k \phi(k) = 1$ 的约束下求得分节点值 $\left\{\phi\left(\frac{k}{2}\right)\right\}$;从而确定尺度函数 $\phi(t)$ 的图形.

若取定低通数字滤波器 $\{h_n\}$,注意它一定是低通数字滤波器;再取定 $\phi_0(t)$ 是低光滑程度的尺度函数;由此构造下述迭代过程:

$$\phi_m(t) = \sum_n h_n \phi_{m-1}(2t-n), m = 1, 2, \dots$$

显然,若迭代过程收敛,则有

$$\phi_\infty(t) = \sum_n h_n \phi_\infty(2t-n),$$

$\phi(t) = \phi_\infty(t)$ 就是满足双尺度方程的尺度函数,且 $\phi(t)$ 是光滑的.

为了看清迭代过程,这里选择

$$\phi_0(2t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1/2, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

$$\{h_n\} = \left\{ \frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{11}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16} \right\},$$

其迭代效果如图 8.1 所示.

如果迭代过程收敛,那么所构造的尺度函数的支集(supp $\phi(t)$)有多长呢?若设

$$\text{supp } \phi_0(t) = [-S, S], \quad \{h_n\}_M^M,$$

则
$$\text{supp } \phi_0(2t) = \left[\frac{-S}{2}, \frac{S}{2} \right],$$

$$\text{supp } \phi_1(t) = \left[\frac{-1}{2}(S+M), \frac{1}{2}(S+M) \right],$$

$$\begin{aligned} \text{supp } \phi_2(t) &= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{-S-M}{2} - M \right), \frac{1}{2} \left(\frac{S+M}{2} + M \right) \right] \\ &= \left[\frac{-1}{2^2}(S + (2^2 - 1)M), \frac{1}{2^2}(S + (2^2 - 1)M) \right], \end{aligned}$$

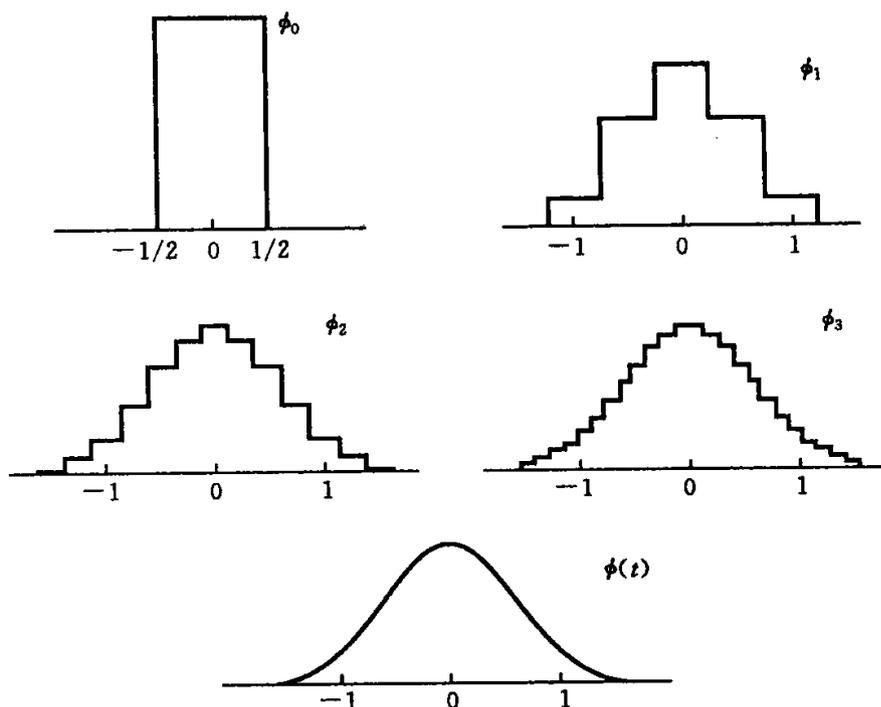


图 8.1 用迭代过程构造光滑的尺度函数

$$\text{supp } \phi_m(t) = \left[\frac{-1}{2^m}(S + (2^m - 1)M), \frac{1}{2^m}(S + (2^m - 1)M) \right],$$

当 $m \rightarrow +\infty$ 时,有

$$\text{supp } \phi(t) = [-M, M].$$

如果迭代过程收敛,那么双尺度方程(8.32)中的尺度函数的整节点函数值 $\{\phi(n)\}$ 、分节点函数值 $\left\{\phi\left(\frac{n}{2}\right)\right\}$ 都可求出,也可画出 $\phi(t)$ 的图形.

2. 利用频域特性构造尺度函数

双尺度方程的频域形式为

$$\hat{\phi}(2\omega) = H(\omega) \hat{\phi}(\omega),$$

其中

$$H(\omega) = \frac{1}{2} \sum_n h_n e^{-i\omega n},$$

$H(\omega)$ 是低通滤波器,是周期为 2π 的复函数. 由于 $H(\omega)$ 和 $\{h_n\}$ 有关, $|H(\omega)|$ 的图形能反应 $\{h_n\}$ 低通数字滤波的效果,所以可以利用 $H(\omega)$ 的直观图形求 $\{h_n\}$, 从而构造与之对应的尺度函数 $\phi(t)$.

方法 3 利用滤波器 $H(\omega)$ 的实函数形式,设定 $\{h_n\}$ 获得 $H(\omega)$ 的直观的低通效果图形,再由 $\{h_n\}$ 且利用双尺度方程求得尺度函数.

首先,当 $H(\omega)$ 是偶对称的实函数时,其图形可能有多种表现(见图 8.2). 据低通滤波的直观含义,若 $H(\pm\pi) = 0$,则低通滤波和高通滤波的效果能清晰分离没有混叠现象,图中低通效果由好到差的顺序分别是曲线 1、曲线 2 和曲线 3 所示的

情形. 若 $H(\pm\pi) \neq 0$, 则低通滤波和高通滤波有混叠现象, 低通效果由好到差的顺序分别是曲线 4 和曲线 5 所示的情形.

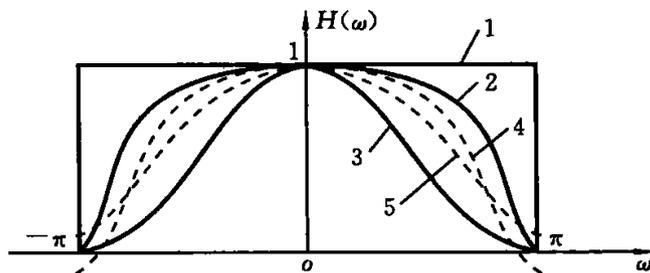


图 8.2 低通滤波器 $H(\omega)$ 曲线的多种表现

其次, 当 $\{h_n\}$ 是偶对称序列时, $H(\omega)$ 表现为

$$H(\omega) = \frac{1}{2} \sum_n h_n \cos n\omega.$$

这是周期为 2π 的偶对称实函数, 是余弦级数.

最后总结关于方法 3 寻求尺度函数的实施办法.

若 $H(\pm\pi) = 0$, 则由

$$\sum_n h_n = 2,$$

$$\sum h_n \cos n\pi = \sum_{n=\text{偶数}} h_n - \sum_{n=\text{奇数}} h_n = 0$$

推知

$$\sum_{n=\text{偶数}} h_n = 1, \quad \sum_{n=\text{奇数}} h_n = 1$$

这样的 $\{h_n\}$ 所对应的 $H(\omega)$ 的图形就会表现为图 8.2 中的曲线 1 至曲线 3 那样, 这样的 $\{h_n\}$ 是容易选定的, 例如

$$\{h_n\}_{-1}^1 = \left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \right\},$$

$$\{h_n\}_{-2}^2 = \left\{ \frac{1}{8}, \frac{4}{8}, \frac{6}{8}, \frac{4}{8}, \frac{1}{8} \right\},$$

$$\{h_n\}_{-3}^3 = \left\{ \frac{1}{16}, \frac{2}{16}, \frac{7}{16}, \frac{12}{16}, \frac{7}{16}, \frac{2}{16}, \frac{1}{16} \right\},$$

$$\{h_n\}_{-4}^4 = \left\{ \frac{1}{16}, \frac{2}{16}, \frac{3}{16}, \frac{6}{16}, \frac{8}{16}, \frac{6}{16}, \frac{3}{16}, \frac{2}{16}, \frac{1}{16} \right\}.$$

这样的 $\{h_n\}$ 一旦选定, 就一定存在某个尺度函数, 使之满足双尺度方程 $\phi(t) = \sum h_n \phi(2t-n)$. 容易看到, $\{h_n\}$ 的数据越多, $\phi(t)$ 的支集就越长, $H(\omega)$ 的低通效果也就越好.

若 $H(\pm\pi) \neq 0$, 则 $\{h_n\}$ 只需满足低通数字滤波器的基本要求

$$\sum_{n=-M}^M h_n = 2.$$

显然,若 $\sum_{n=\text{偶数}} h_n > \sum_{n=\text{奇数}} h_n$, 相应的 $H(\omega)$ 图形就像图 8.2 中的曲线 5 那样, $H(\pm\pi) > 0$. 例如

$$\{h_n\}_{-2}^2 = \left\{ \frac{1}{16}, \frac{7}{16}, \frac{16}{16}, \frac{7}{16}, \frac{1}{16} \right\};$$

若 $\sum_{n=\text{奇数}} h_n > \sum_{n=\text{偶数}} h_n$, 相应的 $H(\omega)$ 图形就像图 8.2 中的曲线 4 那样 $H(\pm\pi) < 0$, 例如

$$\{h_n\}_{-2}^2 = \left\{ \frac{1}{16}, \frac{9}{16}, \frac{12}{16}, \frac{9}{16}, \frac{1}{16} \right\}.$$

作为本节结束, 这里强调三方面的内容.

(1) 低通数字滤波器的构造是方便的, 人们可结合不同的滤波要求构造出不同的低通数字滤波器;

(2) 尺度函数是很多的而且是构造方便的, 人们可结合滤波要求和对信号处理的目的要求构造出各种各样的尺度函数, 还可要求尺度函数具有内插性、对称性、紧支性、光滑性、正交性等;

(3) 本节构造的尺度函数一般是不平移正交的, 然而只要尺度函数存在而不管它的正交性如何, 只要确定了双尺度方程的传递系数, 即低通数字滤波器 $\{h_n\}$, 就确定了某个多分辨逼近, 从而就可以依据多分辨逼近的结构原理去分析信号的低频分量和信号的高频细节分量.

第9章 正交小波

由第4章和第5章的讨论可知,正交小波分解具有良好的性质,Mallat算法为正交小波分解和回复提供了便捷的递推算法.为了应用正交小波分解去处理实际问题,必须构造正交小波,给出其双尺度方程式(8.12),只有已知 $\{h_n\}$ 和 $\{g_n\}$ ($g_n = (-1)^n h_{1-n}$)时,才可利用Mallat算法.在正交小波的构造中,有时要求它具有良好的时-频局部效果;有时要求它具有有限的支集,以便减少Mallat算法中的计算量;有时还要正交小波有足够的光滑度和消失矩,以便提高描述信号的精度.本章先利用我们熟知的知识构造出Shannon正交小波和Haar正交小波,再进一步讨论紧支集Daubechies正交小波系列,本章构造正交小波的方法都是浅显易懂的.

9.1 Shannon 正交小波

先介绍Shannon采样定理的构造思想.因为

$$\hat{\phi}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

和

$$\phi(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$

是Fourier变换对(参见1.3节),所以,显然可看出 $\hat{\phi}(\omega)$ 是关于平移量 $2n\pi$ 的正交基,即

$$(\hat{\phi}(\omega), \hat{\phi}(\omega - 2n\pi)) = 2\pi\delta_{0,n}.$$

根据Parseval等式,Fourier变换前后的内积性质不变,知 $\phi(t)$ 关于平移量 n 是标准正交的,即

$$(\phi(t), \phi(t - n)) = \delta_{0,n}, \quad (9.1)$$

所以, $\{\phi(t - n)\}$ 构成多分辨逼近中 V_0 的标准正交基.不仅如此, $\phi(t)$ 还是一种插值型基函数,即

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ 0, & t = n \neq 0. \end{cases} \quad (9.2)$$

根据这两个特点,很容易理解Shannon采样定理的表述形式,即

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_n f(t_n) \phi(t - n) \\ &= \sum_n f(t_n) \frac{\sin \pi(t - n)}{\pi(t - n)}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Shannon采样定理能用离散采样信号 $\{f(t_n)\}$ 表示连续信号 $f(t)$,式(9.3)的级数

形式也有利于数学推导和分析.

下面讨论 Shannon 正交小波的构造. 因为 $\{\phi(t-n)\}$ 是关于整节点平移的 V_0 的标准正交基, 所以, 只要推导出 $\phi(t)$ 所满足的双尺度方程, 就可确定 $\{h_n\}$, 并可相应地确定 $\{g_n\}$ 和正交小波 $\psi(t)$.

因为 $\phi(t) \in V_0 \subset V_1$, $\phi(t)$ 也可按式(9.3)用基函数 $\{\phi(2t-n)\}$ 展开为

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \sum_n \phi\left(\frac{n}{2}\right) \phi(2t-n) \\ &= \sum_n \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2} \phi(2t-n) \\ &= \sum_k \frac{\sin[(2k+1)\pi/2]}{(2k+1)\pi/2} \phi(2t-2k-1) + \phi(2t) \\ &= \sum_k \frac{2(-1)^k}{(2k+1)\pi} \phi(2t-2k-1) + \phi(2t).\end{aligned}$$

将上式与双尺度方程

$$\phi(t) = \sum_k h_k \phi(2t-k)$$

比较, 由此获得 $\{h_n\}$, 其中,

$$\begin{cases} h_0 = 1, \\ h_{2n} = 0, \quad n \neq 0, \\ h_{2n+1} = \frac{2(-1)^n}{(2n+1)\pi}. \end{cases}$$

利用 $g_n = (-1)^n h_{1-n}$, 可推导出 $\psi(t)$ 的表达式, 具体地有

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \phi(2t-n) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n h_{1-n} \phi(2t-n) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k+1} \phi(2t+2k) - h_0 \phi(2t-1) \\ &= 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^k \sin(2t+2k)\pi}{(2k+1)\pi} - \frac{\sin 2\pi(t-1/2)}{2\pi(t-1/2)} \\ &= \frac{\sin\pi(t-1/2) - \sin 2\pi(t-1/2)}{\pi(t-1/2)}.\end{aligned}\tag{9.4}$$

对式(9.4)的第一项, 有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\frac{\sin\pi(t-1/2)}{\pi(t-1/2)}\right] &= \mathcal{F}\left[\phi\left(t-\frac{1}{2}\right)\right] \\ &= e^{-i\pi\omega/2} \hat{\phi}(\omega);\end{aligned}$$

对式(9.4)的第二项, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\frac{\sin 2\pi(t-1/2)}{\pi(t-1/2)}\right] &= 2\mathcal{F}[\phi(2t-1)] \\ &= e^{-i\pi\omega/2} \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \end{aligned}$$

于是可推出

$$\hat{\psi}(\omega) = e^{-i\pi\omega/2} \left[\hat{\phi}(\omega) - \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right].$$

Shannon 正交尺度函数 $\phi(t)$ 以及正交小波函数 $\psi(t)$ 在时域和频域中的图形如图 9.1 所示。

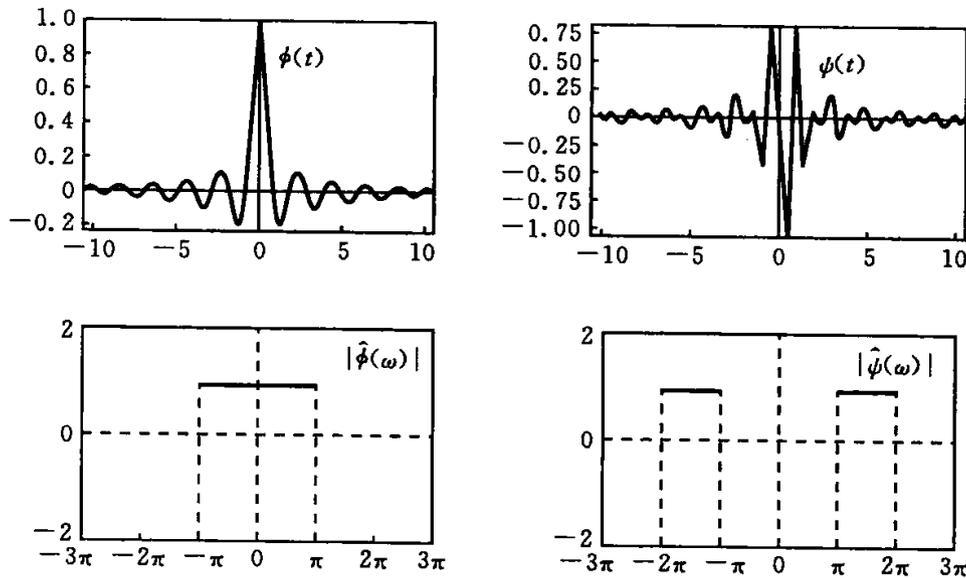


图 9.1 Shannon 正交尺度函数和正交小波

Shannon 正交尺度函数 $\phi(t)$ 和小波函数 $\psi(t)$ 的频域局部化能力较强, 但它们在时域中是支集无限的, 当 $|t| \rightarrow +\infty$ 时它们仅按 $O(1/|t|)$ 的衰减速度趋于零. 它们的时域局部化能力差, 双尺度系数 $\{h_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 的数据不是有限数, 虽可截取其主要部分加以应用, 但使用 Mallat 算法时的计算量较大。

另外, 由于 $\hat{\psi}(\omega)$ 在 $\omega=0$ 处的所有阶导数值都等于零, 所以由定理 8.1 可知, $\psi(t)$ 是无穷次可微且有无穷阶消失矩。

由 Shannon 小波的构造过程, 可总结出构造正交小波的方法。

方法 1 利用频域正交基, 确定时域正交基, 从而构造出正交尺度函数、正交小波和相应的数字滤波器。

9.2 Haar 小波

Shannon 正交尺度函数的构造办法是, 在频域中取矩形函数 $\hat{\phi}(\omega)$ 作为标准正交基, 从而得到时域中的标准正交尺度函数 $\phi(t)$ 。现在, 在时域中取定标准正交的尺度函数为

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (9.5)$$

按照多分辨逼近构造小波的办法,只要推导出相应的双尺度方程

$$\phi(t) = \sum_n h_n \phi(2t-n), \quad (9.6)$$

确定双尺度方程的系数 $\{h_n\}$,就可按 $g_n = (-1)^n h_{1-n}$ 确定 $\{g_n\}$,从而确定正交小波函数 $\psi(t)$.

因为利用 $\phi(t)$ 的正交性,由式(9.6)有

$$\int_{\mathbf{R}} \phi(t) \phi(2t-n) dt = \int_{\mathbf{R}} \sum_k h_k \phi(2t-k) \phi(2t-n) dt, \quad (9.7)$$

$$h_n = \begin{cases} 1, & n=0,1, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

所以,求得 $\{h_n\}$ 仅有两个非零数值,于是 $\{g_n\}$ 也仅有两个非零数值,即

$$g_n = (-1)^n h_{1-n} = \begin{cases} 1, & n=0, \\ -1, & n=1, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases} \quad (9.8)$$

从而进一步推导出 $\psi(t)$ 的时域表达式为

$$\psi(t) = \sum_n g_n \phi(2t-n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq t < 1. \end{cases}$$

$\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 的图形如图9.2所示.

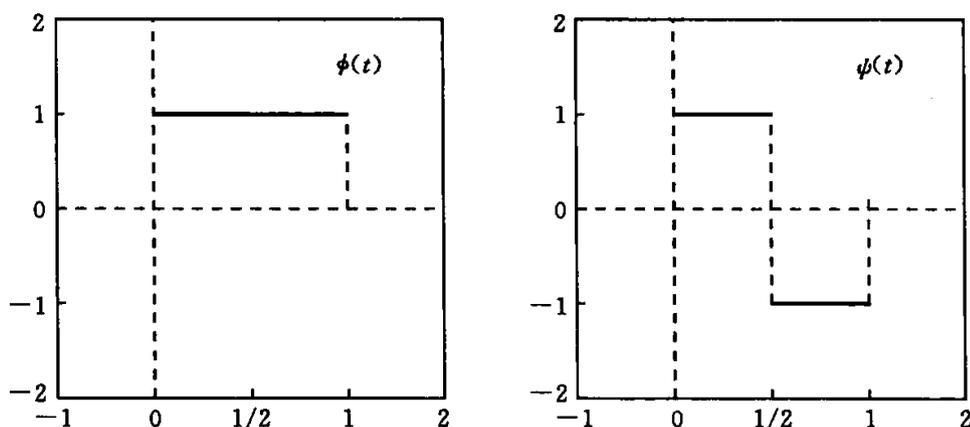


图 9.2 矩形标准正交函数和 Haar 标准正交小波

$\psi(t)$ 称为 Haar 小波.由图 9.2 可见,Haar 小波在时域中支集很短,在时域中的局部能力强,但

$$\hat{\psi}(\omega) = \mathcal{F}[\phi(2t)] - \mathcal{F}[\phi(2t-1)].$$

类似于 Shannon 小波的时域表现, $|\hat{\psi}(\omega)|$ 的衰减速度慢, $\hat{\psi}(\omega)$ 在频域中的局部分析能力差. 另外, 用 Haar 小波级数表述近似函数, 其光滑程度太低, 表现力差. Haar 小波仅有一阶消失矩.

由 Haar 小波的构造过程可总结出另一种构造正交小波的方法.

方法 2 利用时域的标准正交基, 利用双尺度方程, 直接构造正交小波及相应的滤波器.

9.3 Battle-Lemarie 小波

该小波构造方法具有普遍性.

方法 3 把样条基函数作为尺度函数 $\tilde{\phi}(t)$, 在频域中对 $\phi(\omega)$ 作标准化处理为 $\hat{\phi}(\omega)$, 以此来构造标准正交的尺度函数和正交的小波函数.

这是因为, 对不正交的尺度函数, 例如样条基函数, 有

$$A \leq \sum_n |\hat{\phi}(\omega + 2n\pi)|^2 \leq B.$$

将 $\hat{\phi}(\omega)$ 作标准化处理, 即

$$\hat{\phi}(\omega) = \hat{\phi}(\omega) / \left[\sum_n |\hat{\phi}(\omega + 2n\pi)|^2 \right]^{1/2},$$

则有

$$\sum_n |\hat{\phi}(\omega + 2n\pi)|^2 = 1,$$

此式等价地表明 $\phi(t)$ 是标准正交基.

Battle-Lemarie 正交小波系列就是用此方法对样条函数进行改造的结果, 现简要介绍如下.

取线性样条基函数

$$\tilde{\phi}(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & 0 \leq |t| \leq 1/2, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

利用

$$\tilde{\phi}(t) = \frac{1}{2} \tilde{\phi}(2t+1) + \tilde{\phi}(2t) + \frac{1}{2} \tilde{\phi}(2t-1),$$

$$\hat{\phi}(\omega) = \left[\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right]^2,$$

$$\begin{aligned} \sum_n |\hat{\phi}(\omega + 2n\pi)|^2 &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos \omega \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + 2 \cos^2 \frac{\omega}{2} \right) \end{aligned}$$

及前面的正交化办法, 求得

$$\hat{\phi}(\omega) = \sqrt{3} \frac{4 \sin^2(\omega/2)}{\omega^2 [1 + 2 \cos^2(\omega/2)]^{1/2}}.$$

其 Fourier 逆变换为所求的标准正交的尺度函数 $\phi(t)$.

为了推导 $\phi(t)$ 及其相应小波函数的双尺度方程, 利用其在频域中的表现式 (8.21)、式(8.22)和式(8.26), 有

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{\widehat{\phi}(2\omega)}{\widehat{\phi}(\omega)} \\ &= \cos^2 \frac{\omega}{2} \left[\frac{1 + 2\cos^2(\omega/2)}{1 + 2\cos^2 \omega} \right]^{1/2}, \\ G(\omega) &= e^{-i\omega} \overline{H}(\omega + \pi) \\ &= e^{-i\omega} \sin^2 \frac{\omega}{2} \left[\frac{1 + 2\sin^2(\omega/2)}{1 + 2\cos^2 \omega} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

再按 $H(\omega)$ 和 $G(\omega)$ 的定义

$$H(\omega) = \frac{1}{2} \sum h_n e^{-in\omega},$$

$$G(\omega) = \frac{1}{2} \sum g_n e^{-in\omega},$$

分别对 $H(\omega)$ 和 $G(\omega)$ 作 Fourier 逆变换, 即可求出双尺度系数 $\{h_n\}$ 和 $\{g_n\}$. 因为 $\phi(t)$ 是标准正交的, 所以只要求出 $\{h_n\}$ 即可相应得到 $g_n = (-1)^n h_{1-n}$.

图 9.3 给出了由线性样条函数构造出来的 Battle-Lemarie 正交尺度函数 $\phi(t)$ 和正交小波函数 $\psi(t)$ 的图形.

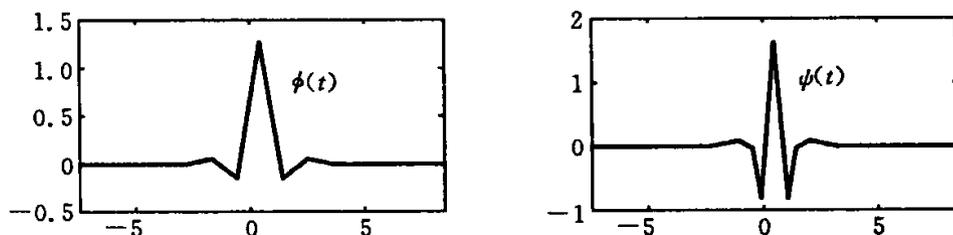


图 9.3 由线性样条构造的 Battle-Lemarie 正交尺度函数和正交小波函数

若用二次样条基函数

$$\tilde{\phi}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t+1)^2, & -1 \leq t < 0, \\ \frac{3}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2, & 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{1}{2}(t-2)^2, & 1 \leq t \leq 2, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

并利用

$$\tilde{\phi}(t) = \frac{1}{4} \tilde{\phi}(2t+1) + \frac{3}{4} \tilde{\phi}(2t) + \frac{3}{4} \tilde{\phi}(2t-1) + \frac{1}{4} \tilde{\phi}(2t-2)$$

和样条函数的卷积关系(见 1.5 节), 求得

$$\hat{\phi}(\omega) = e^{-i\omega/2} \left[\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right]^3.$$

同样可利用正交化方法求出 $\hat{\phi}(\omega)$ ，再在此基础上求得 $\phi(t)$ 、 $\psi(t)$ 及其相应的双尺度方程。

由二次样条函数构造出的 Battle-Lemarie 正交尺度函数 $\phi(t)$ 和正交小波函数 $\psi(t)$ 如图 9.4 所示。

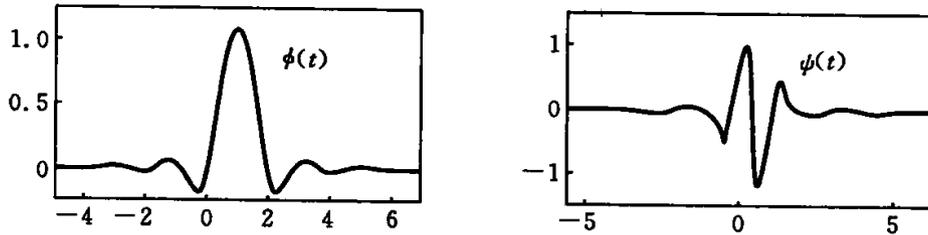


图 9.4 由二次样条构造的 Battle-Lemarie 正交尺度函数和正交小波函数

同样，还可利用 N 阶样条来构造正交的尺度函数和小波函数，这就是 Battle-Lemarie 小波函数系列(见文献[8])。该小波系列有如下几个特点：

- (1) 没有解析表达式，而且是非紧支集，即它们的定义域不是有限范围的；
- (2) 样条函数阶次越大，小波函数越光滑，其衰减就越缓慢；
- (3) Battle-Lemarie 系列小波函数 $\psi(t)$ 都具有对称性。

9.4 Meyer 小波

Meyer 试图构造在时域和频域都具有良好局部特性的正交小波。

方法 4 设法构造 $\hat{\phi}(\omega)$ ，使其满足 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2n\pi)|^2 = 1$ ，以此确定 $\hat{\phi}(\omega)$ ，从而构造出正交的尺度函数和正交小波。

Meyer 设计的 $\hat{\phi}(\omega)$ 的形式表现为

$$\hat{\phi}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \frac{2\pi}{3}, \\ \cos \left[\frac{\pi}{2} \beta \left(\frac{3}{4\pi} |\omega| - 1 \right) \right], & \frac{2\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{4\pi}{3}, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

其中 $\beta(\omega)$ 可以是某个多项函数；也可以是其它形式，例如

$$\beta(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \leq 0, \\ \sin^2 \frac{\pi}{2} \omega, & 0 < \omega < 1, \\ 1, & \omega \geq 1; \end{cases}$$

$\beta(\omega)$ 的设计一定要使 $\hat{\phi}(\omega)$ 的图形满足

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2n\pi)|^2 = 1.$$

在此情况下,相应的尺度函数 $\phi(t)$ 是平移正交基.

利用双尺度方程,有

$$\hat{\phi}(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

可求得
$$H(\omega) = \sqrt{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}[2(\omega + 2n\pi)].$$

从而推知

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\omega) &= e^{-i\frac{\omega}{2}} \cdot \overline{H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \cdot \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= \sqrt{2\pi} e^{-i\frac{\omega}{2}} \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}[\omega + 2\pi(2n + 1)] \cdot \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= \sqrt{2\pi} e^{-i\frac{\omega}{2}} [\hat{\phi}(\omega + 2\pi) + \hat{\phi}(\omega - 2\pi)] \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \end{aligned}$$

即有
$$\hat{\psi}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin\left[\frac{\pi}{2}\beta\left(\frac{3}{2\pi}|\omega| - 1\right)\right] e^{i\frac{\omega}{2}}, & \frac{2\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{4\pi}{3}, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos\left[\frac{\pi}{2}\beta\left(\frac{3}{4\pi}|\omega| - 1\right)\right] e^{i\frac{\omega}{2}}, & \frac{4\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{8\pi}{3}, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

现将 $\psi(t)$ 和 $\hat{\psi}(\omega)$ 的图形置于图 9.5 中.

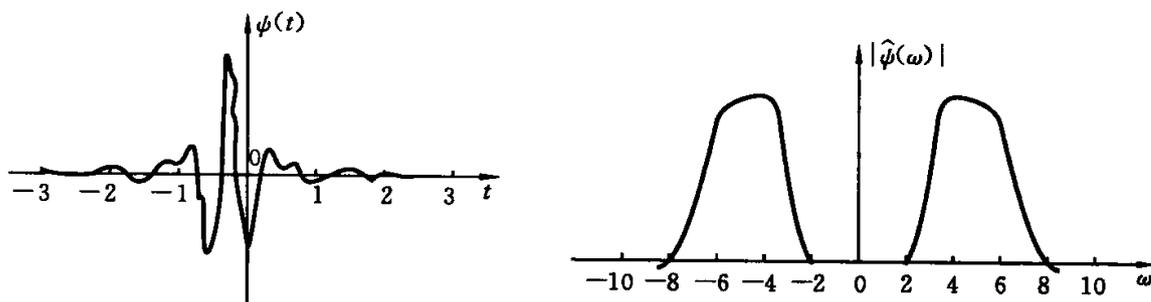


图 9.5 Meyer 正交小波的时域和频域图形

Meyer 正交小波在频域中是紧支集的, $\omega \in \left[-\frac{8\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right]$, 而且其连续可微的次数同于 $\beta(\omega)$ 的连续可微次数. 若用 k 表示 $\beta(\omega)$ 或 $\hat{\psi}(\omega)$ 的连续可微的次数, 则 $\hat{\psi}(\omega)$ 的衰减速度为

$$|\hat{\psi}(\omega)| \leq c_k (1 + |\omega|^2)^{-k}.$$

这样, Meyer 正交小波在时域和频域局部化能力方面比 Battle-Lemarie 小波都有改善.

9.5 Daubechies 紧支集正交小波

对于正交小波,我们希望它是有限支集的,以使 Mallat 算法更快捷;希望它是

光滑的,以便高精度地模拟和分析信号;希望它的时域和频域的局部化能力是强劲的,以便在信号分析处理中发挥突出的作用. Daubechies 小波为此作出了杰出的贡献,所有有关小波分析的著作中都讨论和引用了 Daubechies 小波.

然而, Daubechies 在构造正交小波时假设

$$H(\omega) = \left[\frac{1}{2}(1 + e^{-i\omega}) \right]^N S(e^{-i\omega}),$$

其中, $S(e^{-i\omega})$ 为实系数的代数多项式,一般难以理解此假设的原由,也难以弄懂其中复杂的推导和证明,只得囫圇地用其结果. 这在不同程度上影响了对小波和小波应用理解的深度和广度.

本节将从正交小波构造的基本思想出发,用直观、简明的初等方法构造 Daubechies 小波,与此同时,还可获得一些有良好性质和良好应用的滤波器.

方法 5 Daubechies 紧支集正交小波构造方法,假设

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = \left[\cos^2 \frac{\omega}{2} + \sin^2 \frac{\omega}{2} \right]^{2L} = 1,$$

将公式变形,从而确定 $H(\omega)$ 的形式和 $\{h_n\}$ 的数据,从而构造出紧支集正交尺度函数 $\phi(t)$ 和紧支集正交小波 $\psi(t)$.

首先分析 $H(\omega)$ 和 $|H(\omega)|^2$ 的某些特性.

对紧支集标准正交尺度函数 $\phi(t)$, 已有如下关系:

$$\hat{\phi}(2\omega) = H(\omega) \hat{\phi}(\omega),$$

$$H(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N h_n e^{-in\omega},$$

$$H(0) = 1,$$

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1.$$

其中, N 是有界正整数, $H(\omega)$ 是以 2π 为周期的函数,特别是 $|H(\omega)|^2$ 也可看做一个以 2π 为周期的函数,且 $|H(\omega)|^2$ 是偶对称 2π 周期函数,即

$$|H(0)|^2 = 1,$$

$$|H(\pm\pi)|^2 = 0.$$

从滤波器角度看, $|H(\omega)|^2$ 是低通滤波器, $|H(\omega + \pi)|^2$ 是高通滤波器,且 $|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1$.

一方面, $|H(\omega)|^2$ 是以 2π 为周期的偶对称函数,它一定具有余弦级数形式,即

$$\begin{cases} |H(\omega)|^2 = \sum_{n=0}^N \xi_n \cos n\omega, \\ \xi_0 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^N h_k^2, \\ \xi_n = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-n} h_j h_{j+n}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (9.9)$$

其中, $\{\xi_n\}$ 的推导如下:

$$\begin{aligned}
 |H(\omega)|^2 &= \left| \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N h_n e^{-in\omega} \right|^2 \\
 &= \frac{1}{4} \left| \sum_{k=0}^N h_k \cos k\omega + i \sum_{k=0}^N h_k \sin k\omega \right|^2 \\
 &= \frac{1}{4} \left[\left(\sum_{k=0}^N h_k \cos k\omega \right)^2 + \left(\sum_{k=0}^N h_k \sin k\omega \right)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left[\sum_{k=0}^N h_k^2 \cos^2 k\omega + \sum_{k=0}^N h_k^2 \sin^2 k\omega + 2 \sum_{i=0}^N \sum_{\substack{j=0, \\ j < i}}^N (h_i \cos i\omega)(h_j \cos j\omega) \right] \\
 &\quad + \frac{1}{4} \left[2 \sum_{i=0}^N \sum_{\substack{j=0, \\ j < i}}^N (h_i \sin i\omega)(h_j \sin j\omega) \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left[\sum_{k=0}^N h_k^2 + 2 \sum_{i=0}^N \sum_{\substack{j=0, \\ j < i}}^N h_i h_j \cos(i-j)\omega \right].
 \end{aligned}$$

令 $n=i=j$, 则

$$\begin{aligned}
 |H(\omega)|^2 &= \frac{1}{4} \left[\sum_{k=0}^N h_k^2 + 2 \sum_{n=1}^N \left(\sum_{j=0}^{N-n} h_j h_{j+n} \right) \cos n\omega \right] \\
 &= \sum_{n=0}^N \xi_n \cos n\omega.
 \end{aligned}$$

对上式中的系数进行比较, 可得式(9.9)中的 $\{\xi_n\}$.

另一方面, $|H(\omega)|^2$ 是以 2π 为周期的偶对称函数, 它的 Fourier 级数的复数形式为

$$|H(\omega)|^2 = \sum_n \eta_n e^{-in\omega}.$$

$|H(\omega)|^2$ 的偶对称性决定其展开系数 $\{\eta_n\}$ 也是偶对称的, 所以 $|H(\omega)|^2$ 应具有

$$|H(\omega)|^2 = \sum_{n=-N}^N \eta_n e^{-in\omega}$$

形式.

将上式与式(9.9)对比, 从而可确定 $|H(\omega)|^2$ 的两种形式, 即

$$\left\{ \begin{aligned}
 |H(\omega)|^2 &= \sum_{n=0}^N \xi_n \cos n\omega, \\
 \xi_0 &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^N h_k^2, \\
 \xi_n &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-n} h_j h_{j+n}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \\
 |H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 &= 1;
 \end{aligned} \right. \quad (9.10)$$

$$\begin{cases} |H(\omega)|^2 = \sum_{n=-N}^N \eta_n e^{-in\omega}, \\ \eta_0 = \xi_0, \\ \eta_{\pm n} = \frac{1}{2} \xi_n, n = 1, 2, \dots, N, \\ |H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1. \end{cases} \quad (9.11)$$

利用式(9.10)可设计并计算出正交尺度函数 $\phi(t)$ 和 $\{h_n\}$ 、 $\psi(t)$ 以及 $\hat{\phi}(\omega)$ 和 $\hat{\psi}(\omega)$ 。利用式(9.11)可构造一个新的低通滤波器 $\{\eta_n\}_{-N}^N$ 。

为了用式(9.10)计算出 $\{h_n\}$ ，必须先给定 $|H(\omega)|^2$ 或 $\{\xi_n\}$ 。最简单直观地，可利用 $\sin^2 \omega + \cos^2 \omega = 1$ 变形为

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1$$

的形式，从而确定 $|H(\omega)|^2$ 和 $\{\xi_n\}$ 。

具体过程是：将公式

$$\cos^2 \frac{\omega}{2} + \sin^2 \frac{\omega}{2} = 1$$

变形为
$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \omega\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \omega\right) = 1.$$

令
$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \omega,$$

$$|H(\omega + \pi)|^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \omega,$$

则由式(9.10)可知

$$\{\xi_0, \xi_1\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}.$$

出于对滤波器的考虑，为了减少低通滤波器 $|H(\omega)|^2$ 和高通滤波器 $|H(\omega + \pi)|^2$ 的重叠部分，改善它们对低频和低频分量的区分效果，受上述简单情形的启发，可采用下面恒等式来表现 $|H(\omega)|^2$ ，即

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1 = \left(\cos^2 \frac{\omega}{2} + \sin^2 \frac{\omega}{2} \right)^{2L}.$$

当 $L=1$ 时，有

$$\begin{aligned} & |H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 \\ &= \left(\cos^2 \frac{\omega}{2} + \sin^2 \frac{\omega}{2} \right)^2 \\ &= \cos^4 \frac{\omega}{2} + 2 \cos^2 \frac{\omega}{2} \sin^2 \frac{\omega}{2} + \sin^4 \frac{\omega}{2} \\ &= \cos^4 \frac{\omega}{2} + 2 \left(\cos^2 \frac{\omega}{2} + \sin^2 \frac{\omega}{2} \right) \cos^2 \frac{\omega}{2} \sin^2 \frac{\omega}{2} + \sin^4 \frac{\omega}{2} \end{aligned}$$

$$= \cos^4 \frac{\omega}{2} \left(1 + 2\sin^2 \frac{\omega}{2}\right) + \sin^4 \frac{\omega}{2} \left(1 + 2\cos^2 \frac{\omega}{2}\right).$$

令

$$\begin{aligned} |H(\omega)|^2 &= \cos^4 \frac{\omega}{2} \left(1 + 2\sin^2 \frac{\omega}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{9}{16}\cos\omega - \frac{1}{16}\cos 3\omega, \end{aligned}$$

$$|H(\omega + \pi)|^2 = \sin^4 \frac{\omega}{2} \left(1 + 2\cos^2 \frac{\omega}{2}\right),$$

于是有 $\{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{9}{16}, 0, \frac{-1}{16}\right\}$.

当 $L=2$ 时, 仿照以上推导过程, 有

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{75}{128}\cos\omega - \frac{25}{256}\cos 3\omega + \frac{3}{256}\cos 5\omega,$$

$$\{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{75}{128}, 0, \frac{-25}{256}, 0, \frac{3}{256}\right\}.$$

当 L 为一般情形时, 为了简便地看清推导过程, 记 $\cos^2 \frac{\omega}{2} = \square$, $\sin^2 \frac{\omega}{2} =$

\triangle , 有

$$\begin{aligned} &|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 \\ &= 1 \\ &= \left(\cos^2 \frac{\omega}{2} + \sin^2 \frac{\omega}{2}\right)^{2L} \\ &= [\square + \triangle]^{2L} \\ &= \sum_{n=0}^{2L} C_{2L}^n \square^{2L-n} \triangle^n \\ &= \square^{2L} + \sum_{n=1}^{L-1} C_{2L}^n \square^{2L-n} \triangle^n + C_{2L}^L \square^L \triangle^L + \sum_{n=L+1}^{2L-1} C_{2L}^n \square^{2L-n} \triangle^n + \triangle^{2L} \\ &= \square^{2L} + \sum_{n=1}^{L-1} C_{2L}^n \square^{2L-n} \triangle^n + C_{2L}^L \square^{L+1} \triangle^L \\ &\quad + C_{2L}^L \square^L \triangle^{L+1} + \sum_{n=L+1}^{2L-1} C_{2L}^n \square^{2L-n} \triangle^n + \triangle^{2L}. \end{aligned}$$

其中, C_{2L}^n 为二项式展开系数. 再令

$$|H(\omega)|^2 = \square^{2L} + \sum_{n=1}^{L-1} C_{2L}^n \square^{2L-n} \triangle^n + C_{2L}^L \square^{L+1} \triangle^L,$$

$$|H(\omega + \pi)|^2 = C_{2L}^L \square^L \triangle^{L+1} + \sum_{k=1}^{L-1} C_{2L}^k \triangle^{2L-k} \square^k + \triangle^{2L}.$$

对 $|H(\omega)|^2$ 表示式进行整理,可确定 $\{\xi_n\}$.

在 $\{\xi_n\}$ 确定的情况下,可利用式(9.10)列出求解双尺度系数 $\{h_n\}$ 的具体形式的非线性方程组

$$\begin{cases} h_0^2 + h_1^2 + \cdots + h_{2L+1}^2 = 4\xi_0, \\ h_0 h_1 + h_1 h_2 + \cdots + h_{2L} h_{2L+1} = 2\xi_0, \\ h_0 h_{2L} + h_1 h_{2L+1} = 2\xi_{2L}, \\ h_0 h_{2L+1} = 2\xi_{2L+1}. \end{cases} \quad (9.12)$$

在条件

$$\sum_{n=0}^{2L+1} h_n = 2$$

约束下求解非线性方程组式(9.12),就可解得 $\{h_n\}$.

具体地说,当 $L=1$ 时,由以上推导,可知具体的非线性方程组为

$$\begin{cases} h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 2, \\ h_0 h_1 + h_1 h_2 + h_2 h_3 = 9/8, \\ h_0 h_3 = -1/8, \\ h_0 + h_1 + h_2 + h_3 = 2. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} h_0 = 0.683\ 012\ 701\ 892\ 217\ 0, \\ h_1 = 1.183\ 012\ 701\ 892\ 210\ 0, \\ h_2 = 0.316\ 987\ 298\ 107\ 779\ 0, \\ h_3 = -0.183\ 012\ 701\ 892\ 218\ 0. \end{cases}$$

当 $L=2$ 时,非线性方程组为

$$\begin{cases} h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + h_4^2 + h_5^2 = 2, \\ h_0 h_1 + h_1 h_2 + h_2 h_3 + h_3 h_4 + h_4 h_5 = 75/64, \\ h_0 h_2 + h_1 h_3 + h_2 h_4 + h_3 h_5 = 0, \\ h_0 h_3 + h_1 h_4 + h_2 h_5 = -25/128, \\ h_0 h_4 + h_1 h_5 = 0, \\ h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 = 2, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} h_0 = 0.470\ 467\ 207\ 784\ 161\ 0, \\ h_1 = 1.141\ 116\ 915\ 831\ 440\ 0, \\ h_2 = 0.650\ 365\ 000\ 526\ 229\ 0, \\ h_3 = -0.190\ 934\ 415\ 568\ 326\ 0, \\ h_4 = -0.120\ 832\ 208\ 310\ 396\ 0, \\ h_5 = 0.049\ 817\ 499\ 736\ 883\ 5. \end{cases}$$

这些系数正是 Daubechies 正交尺度函数的双尺度系数(见表 9.1).

表 9.1 相应于不同 N 值的 Daubechies 双尺度系数

	n	$h(n)$		n	$h(n)$	
$N=3$	0	0.683 012 701 892 217 0	$N=11$	11	0.001 523 533 805 602 5	
	1	1.183 012 701 892 210 0		$N=13$	0	0.110 099 430 745 616 0
	2	0.316 987 298 107 779 0			1	0.560 791 283 625 486 0
	3	-0.183 012 701 892 218 0			2	1.031 148 491 636 140 0
$N=5$	0	0.470 467 207 784 161 0			3	0.664 372 482 211 070 0
	1	1.141 116 915 831 440 0			4	-0.203 513 822 462 630 0
	2	0.650 365 000 526 229 0			5	-0.316 835 011 280 617 0
	3	-0.190 934 415 568 326 0			6	0.100 846 465 009 383 0
	4	-0.120 832 208 310 396 0			7	0.114 003 445 159 735 0
	5	0.049 817 499 736 883 5			8	-0.053 782 452 589 685 0
$N=7$	0	0.325 803 428 051 296 0			9	-0.023 439 941 564 204 5
	1	1.010 945 715 091 820 0			10	0.017 749 792 379 359 7
	2	0.892 200 138 260 897 0			11	0.000 607 514 995 402 2
	3	-0.039 575 026 235 644 6	12		-0.002 547 904 718 187 1	
	4	-0.264 507 167 369 039 0	13	0.000 500 226 853 122 5		
	5	0.043 616 300 474 177 0	$N=15$	0	0.076 955 622 108 156 7	
	6	0.046 503 601 070 981 6		1	0.442 467 247 152 271 0	
	7	-0.014 986 989 330 389 7		2	0.995 486 150 427 785 0	
$N=9$	0	0.226 418 982 597 698 0		3	0.827 816 532 422 400 0	
	1	0.853 943 542 705 024 0		4	-0.022 385 735 333 807 0	
	2	1.024 326 944 259 190 0		5	-0.401 658 632 781 026 0	
	3	0.195 766 961 347 808 0		6	0.000 668 194 092 439 0	
	4	-0.342 656 715 382 934 0		7	0.182 076 356 847 330 0	
	5	-0.045 601 131 883 546 7		8	-0.024 563 901 045 698 8	
	6	0.109 702 658 642 134 0		9	-0.062 350 206 650 282 0	
	7	-0.008 826 800 108 358 3		10	0.019 772 159 296 704 0	
	8	-0.017 791 870 101 954 1		11	0.012 368 844 819 632 8	
	9	0.004 717 427 939 067 9		12	-0.006 887 719 256 884 2	
$N=11$	0	0.157 742 432 002 900 0		13	-0.000 554 004 548 958 9	
	1	0.699 503 814 075 233 0		14	0.000 955 229 711 299 3	
	2	1.062 263 759 881 730 0	15	-0.000 166 137 261 373 3		
	3	0.445 831 322 930 034 0	$N=17$	0	0.053 850 349 589 324 6	
	4	-0.319 986 598 892 122 0		1	0.344 834 303 813 947 0	
	5	-0.183 518 064 060 295 0		2	0.855 349 064 359 389 0	
	6	0.137 888 092 974 743 0		3	0.929 545 714 366 252 0	
	7	0.038 923 209 708 328 6		4	0.188 369 549 506 339 0	
	8	-0.044 663 748 330 189 2		5	-414 751 761 801 863 0	
	9	0.000 783 251 152 297 0		6	-0.136 953 549 024 727 0	
	10	0.006 756 062 362 927 8	7	0.210 068 342 279 038 0		

续表

	n	$h(n)$		n	$h(n)$
$N=17$	8	0.043 452 675 461 236 2	$N=19$	5	-0.353 336 201 793 890 0
	9	-0.095 647 264 120 190 8		6	-0.277 109 878 720 837 0
	10	0.000 354 892 813 236 6		7	0.180 127 448 533 337 0
	11	0.031 624 165 852 512 6		8	0.131 602 987 101 045 0
	12	-0.006 679 620 226 277 7		9	-0.100 966 571 196 713 0
	13	-0.006 054 960 575 090 2		10	-0.041 659 248 087 550 7
	14	0.002 612 967 280 494 6		11	0.046 969 814 097 425 5
	15	0.000 325 814 671 352 2		12	0.005 100 436 967 858 1
	16	-0.000 356 329 759 021 5		13	-0.015 179 002 335 814 2
	17	0.000 055 645 514 034 3	14	0.001 973 325 364 985 7	
$N=19$	0	0.037 717 157 592 229 6	15	0.002 817 686 590 205 2	
	1	0.266 122 182 793 760 0	16	-0.000 969 947 839 851 7	
	2	0.745 575 071 486 251 0	17	-0.000 164 709 006 089 7	
	3	0.973 628 110 733 399 0	18	0.000 132 354 366 851 3	
	4	0.397 637 741 769 007 0	19	-0.000 018 758 415 627 5	

对于不同的 L , 记 $N=2L+1$, 解出 $\{h_n\}_0^N$ 列于表 9.1 中, 以便应用. 还可利用 $\{h_n\}_0^N$ 和 8.3 节中的方法求出 $\phi(t)$ 的离散值, 画出 $\phi(t)$ 的函数图形; 还可以相应地画出 $\psi(t)$ 的函数图形, 并将这些图形一起绘制于图 9.6 中, 以便对照分析 Daubechies 小波系列. 还可将 $\hat{\phi}(\omega)$ 和 $\hat{\psi}(\omega)$ 的一些图形列于图 9.7 中, 以便进一步认识 Daubechies 小波系列在频域局部化方面的表现.

对比图 9.6 和图 9.7, 可知 Daubechies 正交小波系列在如下几方面具有特点.

(1) 关于支集. $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 的支集大小与 $\{h_n\}_0^N$ 的数据个数有关. 在双尺度方程

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^N h_n \phi(2t-n)$$

中, $N = 2L + 1$, 低通数字滤波器为 $\{h_n\}_0^N$ 时, $\phi(t)$ 的支集为 $[0, N]$. 同理, 由

$$\psi(t) = \sum_{n=0}^N (-1)^n h_{1-n} \phi(2t-n)$$

可知, $\psi(t)$ 的支集为 $[-N+1, N]$.

(2) 关于对称性. Daubechies 已经证明, 除了 Haar 小波是反对称的以外, 其它连续、紧支且正交的尺度函数和小波函数都不具有对称性.

(3) 关于衰减性和光滑性. 随着 N 的增大, $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 的支集增大, 其衰减性将降低, 但光滑性将增高. 但总的来说, $\phi(t)$ 的光滑性不是很好, 根据 $\phi(t) \in C^\alpha$ 等价于

$$\int_{\mathbf{R}} |\hat{\phi}(\omega)| (1+|\omega|)^\alpha d\omega < +\infty, \omega \in \mathbf{R}, \alpha \geq 0,$$

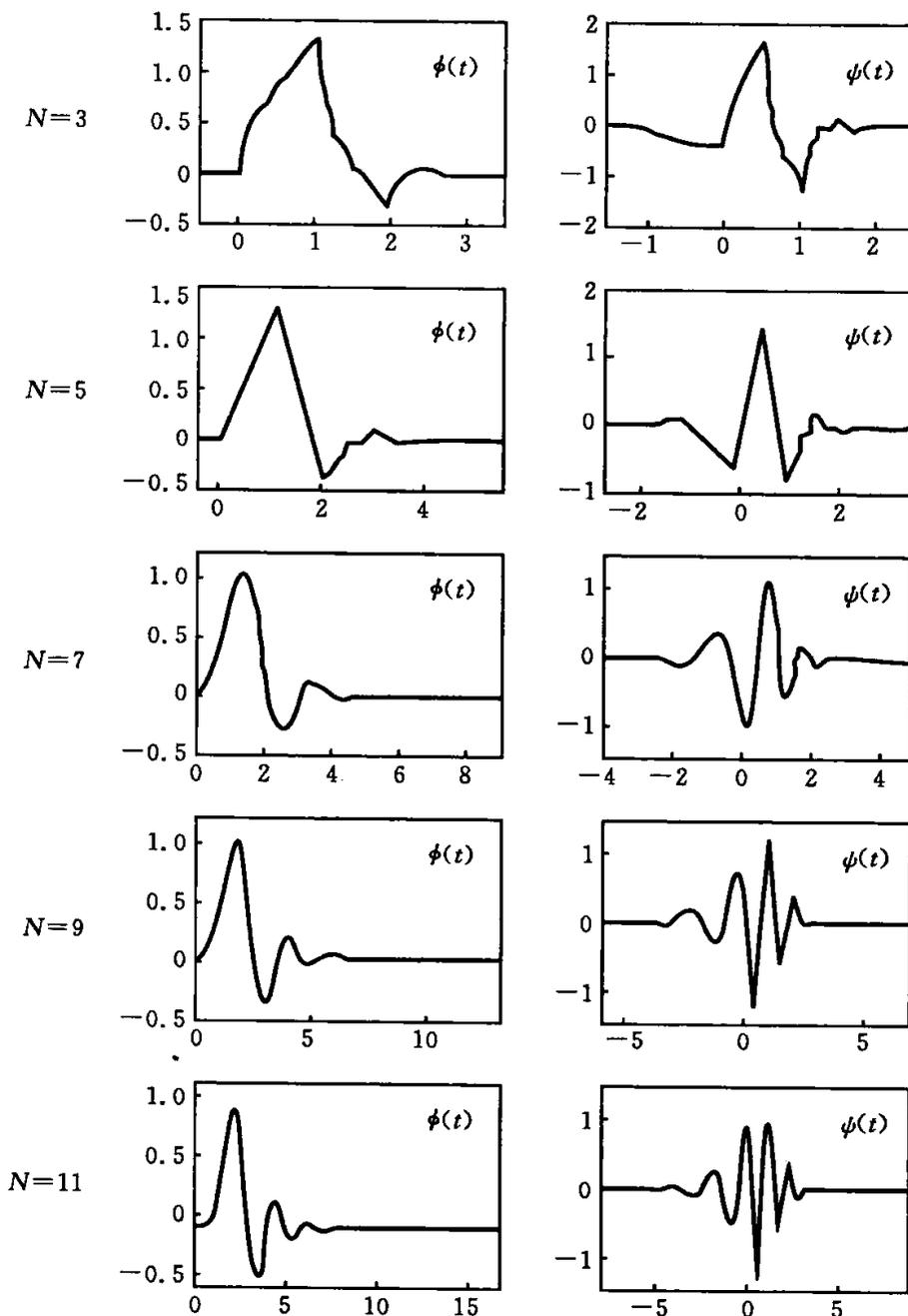


图 9.6 Daubechies 小波 $\psi(t)$ 和相应尺度函数 $\phi(t)$ 系列

可估算出 $\phi(t)$ 的光滑程度。 $\phi(t)$ 系列的光滑程度如表 9.2 所示。

表 9.2 Daubechies 尺度函数 $\phi(t)$ 的光滑程度

N	3	5	7	9	11	13	15	17	19
α	$0.5 - \epsilon (\epsilon > 0)$	0.915	1.275	1.596	1.888	2.158	2.415	2.611	2.902

基函数 $\phi(t)$ 的光滑程度决定了

$$f^j(t) = \sum_k (f(t), \phi_{j,k}(t)) \phi_{j,k}(t)$$

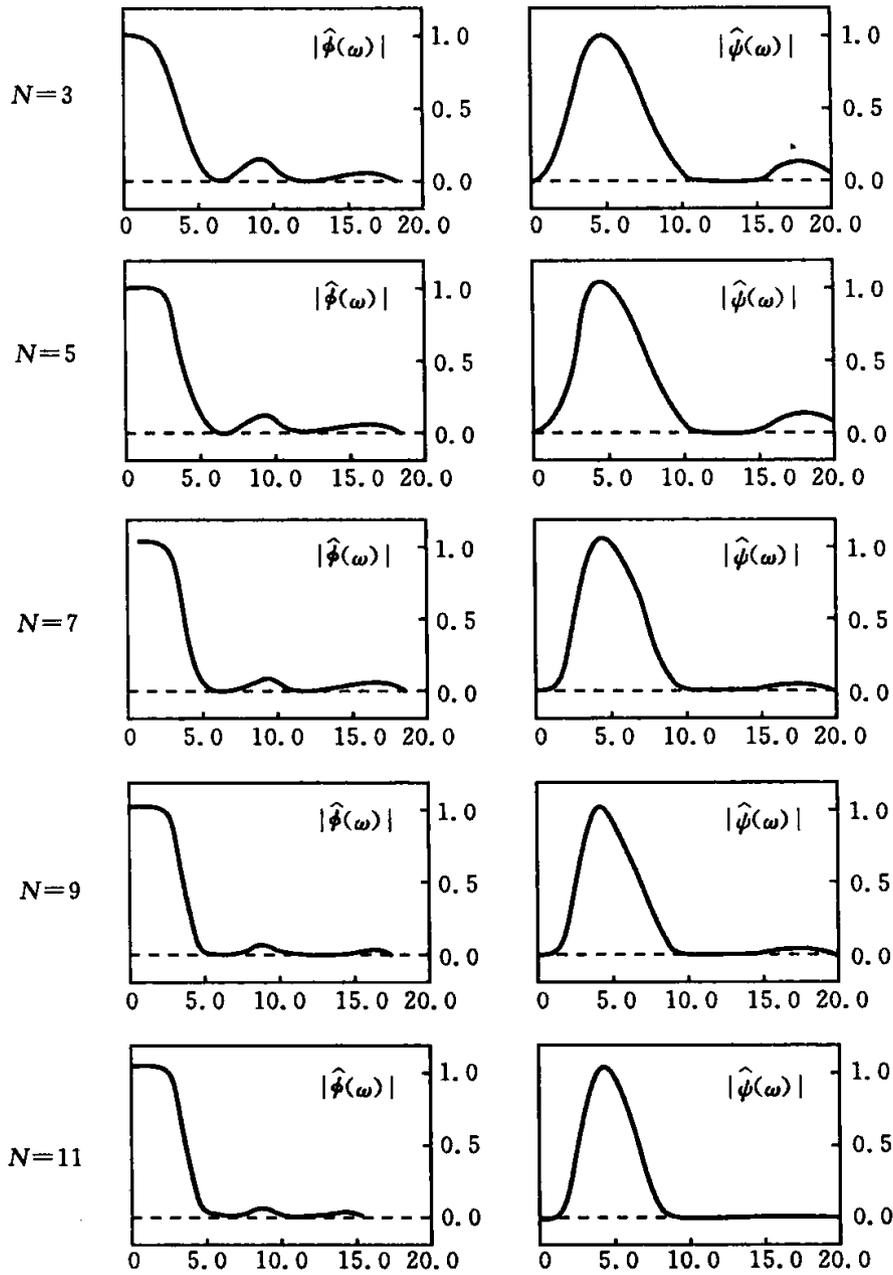


图 9.7 Daubechies 小波系列关于 $|\hat{\phi}(\omega)|$ 和 $|\hat{\psi}(\omega)|$ 的比较

中 $f^j(t)$ 近似 $f(t)$ 的精度, 因此, Daubechies 小波系列的光滑性不理想, 但它的正交性给小波分解和回复带来方便.

(4) 关于消失矩. 支集越长时, Daubechies 小波越光滑且消失矩越高, 其消失矩与光滑性有关, 由于 $\psi(t)$ 和 $\phi(t)$ 的光滑程度相同, 由消失矩的定义可知, 表 9.2 中的 $\alpha+1$ 就是相应的 $\psi(t)$ 的消失矩阶数.

(5) 关于分频特性. 和其它小波函数一样, Daubechies 正交小波的分频特性由低通滤波器 $H(\omega)$ 和 $G(\omega)$ 来描述. 因为

$$|H(\omega)|^2 + |G(\omega)|^2 = 1,$$

$$H(\omega - \pi) = G(\omega),$$

所以,由图 9.8 可看出,当 N 增大时, $H(\omega)$ 和 $G(\omega)$ 的频率重叠部分减少, $H(\omega)$ 和 $G(\omega)$ 的分频特性增强.这一分频特性由 $\hat{\phi}(\omega)$ 和 $\hat{\psi}(\omega)$ 也能较清楚地表现出来(见图 9.7),当 N 增大时, $\hat{\phi}(\omega)$ 的低通特性增强,且 $\hat{\psi}(\omega)$ 的带通特性增强也是明显的.

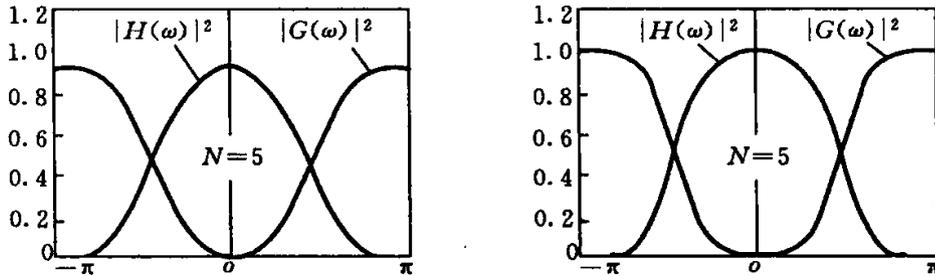


图 9.8 不同 N 值时 $H(\omega)$ 和 $G(\omega)$ 分频示意图

(6) 由图 9.8 可以看出, $|H(\omega)|^2$ 和 $|G(\omega)|^2 = |H(\omega - \pi)|^2$ 也能分频,因此 $|H(\omega)|^2$ 的时域表现 $\{\eta_n\}$ 也是一个低通滤波器. $\{\eta_n\}$ 由式(9.11)给出,其作为低通滤波器的表现还将在第 10 章中进一步讨论.

第 10 章 紧支集内插小波及其快速算法

Daubechies 小波具有正交性和紧支性方面的优点, 不对称是其不足. 然而, 在某些实际应用中又需要小波的对称性. 例如, 当采用小波变换来检测奇异信号突变点位置时, 若采用对称的小波作小波分解(见图 7.3 采用的二次样条小波的相应情形), 对同一个突变点来说, 各尺度层上的小波变换模极大值的位置是对齐的; 而采用不对称的 Daubechies 小波时, 这些小波变换模极大值的位置有移位(见图 6.3), 这给自动检索突变点位置带来不便. 为了构造具有对称性的小波函数, 本节将讨论 Daubechies 的 $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 作自相关函数的情形. 其定义为

$$\begin{cases} \theta(t) = \int_{\mathbf{R}} \phi(x)\phi(x+t)dx, \\ \rho(t) = \int_{\mathbf{R}} \psi(x)\psi(x+t)dx. \end{cases} \quad (10.1)$$

$\theta(t)$ 和 $\rho(t)$ 的形状可如图 10.1 所示. 本节将讨论 $\theta(t)$ 是某个多分辨逼近(MRA)的生成元, $\rho(t)$ 是与 $\theta(t)$ 相对应的小波函数, 还将讨论与 $\theta(t)$ 和 $\rho(t)$ 相对应的滤波器. 本章内容可参阅文献[10].

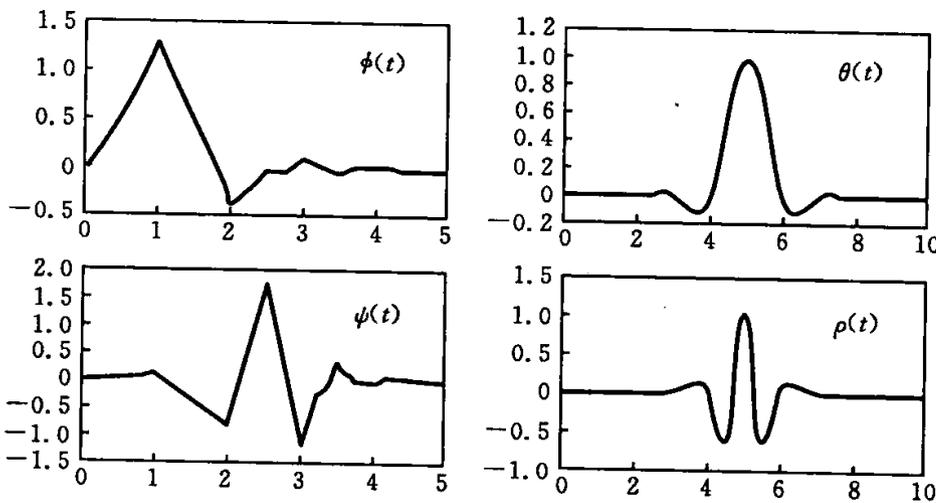


图 10.1 当 $N=5$ 时, 分别与 Daubechies 尺度函数 $\phi(t)$ 和小波函数 $\psi(t)$ 相对应的 $\theta(t)$ 和 $\rho(t)$ 的图形

10.1 紧支集内插小波的性质

1. $\theta(t)$ 的性质

1° $\{\theta(t-k)\}$ 是 V_0 的 Riesz 基, 即 $\theta(t)$ 满足

$$A_1 \sum_k |c_k^0|^2 \leq \left\| \sum_k c_k^0 \theta(t-k) \right\|^2$$

$$\leq B_1 \sum_k |c_k^0|^2, \quad 0 < A_1 \leq B_1 < +\infty,$$

或者等价地, $\hat{\theta}(\omega)$ 满足

$$0 < A_2 \leq \sum_n |\hat{\theta}(\omega + 2n\pi)|^2 \leq B_2 < +\infty.$$

事实上, 性质 1° 的证明类似于式 (8.32) 的证明. 下面利用频域性质证明 $\theta(t)$ 是 Riesz 基由 $\theta(t)$ 的定义式 (10.1), 有

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \int_{\mathbf{R}} \phi(x)\phi(x+t)dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \hat{\phi}(\omega) \overline{\hat{\phi}(\omega)} e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

此式的推导过程可参见 1.6 节, 于是有

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(\omega) &= |\hat{\phi}(\omega)|^2, & (10.2) \\ 0 < \sum_n |\hat{\theta}(\omega + 2n\pi)|^2 &= \sum_n |\hat{\phi}(\omega + 2n\pi)|^4 \\ &\leq \left(\sum_n |\hat{\phi}(\omega + 2n\pi)|^2 \right)^2 = 1. \end{aligned}$$

这正说明 $\{\theta(t-k)\}$ 是 V_0 的 Riesz 基. 此性质说明, Riesz 基的自相关函数仍是 Riesz 基.

2° $\theta(t)$ 满足双尺度方程

$$\theta(t) = \sum_{n=-N}^N a_n \theta(2t-n), \quad (10.3)$$

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_n = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-n} h_j h_{j+n}, \quad n \neq 0, \\ a_{2n} = 0, \end{cases} \quad (10.4)$$

其中, N 是 $\phi(t)$ 的支集长度, $\{h_n\}_0^N$ 是 Daubechies 尺度函数 $\phi(t)$ 的双尺度系数, 且

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N h_n &= 2, \\ \sum_{j=0}^N h_j h_{j-2n} &= 2\delta_{0,n}. \end{aligned}$$

事实上, 由 $\phi(t)$ 的标准正交性显然有 $a_0 = 1$; 对于其它 a_n 的情形, 仍利用 $\theta(t)$ 的定义去推导, 有

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \int_{\mathbf{R}} \phi(x)\phi(x+t)dx \\ &= \int_{\mathbf{R}} \sum_{j=0}^N h_j \phi(2x-j) \sum_{k=0}^N h_k \phi(2x+2t-k) dx \\ &= \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N h_j h_k \int_{\mathbf{R}} \phi(2x-j)\phi(2x+2t-k) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N h_j h_k \int_{\mathbb{R}} \phi(y) \phi(y + 2t - k + j) dy \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N h_j h_k \theta(2t - k + j) \\
&= \sum_{n=-N}^N a_n \theta(2t - n).
\end{aligned}$$

其中, a_n 正表现了离散数据 $\{h_n\}_0^N$ 的自相关结果.

3° $\theta(t)$ 是偶对称的, 即

$$\theta(t) = \theta(-t).$$

由性质 1°~3° 可知, 按式(10.1)构造的偶对称的函数 $\theta(t)$ 正是某个多分辨逼近的生成元.

4° $\hat{\theta}(\omega)$ 满足下述关系:

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}(2\omega) &= A(\omega) \hat{\theta}(\omega), \\
A(\omega) &= |H(\omega)|^2.
\end{aligned} \tag{10.5}$$

其中

$$\begin{aligned}
H(\omega) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N h_n e^{-i\omega n}, \\
A(\omega) &= \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^N a_n e^{-i\omega n}.
\end{aligned}$$

事实上, 由 $\theta(t)$ 的双尺度方程, 有

$$\hat{\theta}(2\omega) = A(\omega) \hat{\theta}(\omega).$$

利用式(10.2), 有

$$|\hat{\phi}(2\omega)|^2 = A(\omega) |\hat{\phi}(\omega)|^2.$$

比较上式和 $\phi(t)$ 的双尺度方程, 即知 $A(\omega) = |H(\omega)|^2$.

2. $\rho(t)$ 的性质

1° $\{\rho(t-n)\}$ 是 W_0 的 Riesz 基, $\rho(t)$ 是偶对称的, 即

$$\rho(t) = \rho(-t).$$

性质 1° 的证明可仿照 $\theta(t)$ 的性质 1° 的证明(略).

2° $\rho(t)$ 满足双尺度方程

$$\rho(t) = \sum_{n=-N}^N b_n \theta(2t - n), \tag{10.6}$$

$$b_n = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-n} g_j g_{j+n}. \tag{10.7}$$

其中, $\{g_j\}_0^N$ 是 $\psi(t)$ 所对应的双尺度系数, $\{b_n\}$ 也可由下式给出:

$$\rho(t) = \theta(2t) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N/2} a_{2j-1} [\theta(2t - 2j + 1) + \theta(2t + 2j - 1)] \tag{10.8}$$

事实上,由式(10.4)可推出

$$\begin{cases} \theta(t) = \theta(2t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N/2} a_{2j-1} [\theta(2t-2j+1) + \theta(2t+2j-1)], \\ \rho(t) = \theta(2t) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N/2} a_{2j-1} [\theta(2t-2j+1) + \theta(2t+2j-1)], \\ \theta(2t) = \frac{1}{2} \theta(t) + \frac{1}{2} \rho(t). \end{cases} \quad (10.9)$$

由此不难确定式(10.8)给出 $\{b_n\}$ 的正确性.

3° $\hat{\rho}(\omega)$ 满足下述关系:

$$\begin{aligned} \rho(\omega) &= |\hat{\psi}(\omega)|^2, \\ \hat{\rho}(2\omega) &= B(\omega) \hat{\rho}(\omega), \\ B(\omega) &= |G(\omega)|^2 = |H(\omega + \pi)|^2. \end{aligned} \quad (10.10)$$

其中

$$\begin{aligned} B(\omega) &= \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^N b_n e^{-in\omega}, \\ G(\omega) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N g_n e^{-in\omega}. \end{aligned}$$

性质 3° 的证明可仿照 $\theta(t)$ 的性质 4° 的证明(略).

4° $\hat{\theta}(\omega)$ 和 $\hat{\rho}(\omega)$ 满足下述关系:

$$\begin{aligned} \theta(2\omega) &= A(\omega) \hat{\theta}(\omega), \\ \rho(2\omega) &= B(\omega) \hat{\rho}(\omega), \\ A(\omega) + B(\omega) &= 1. \end{aligned} \quad (10.11)$$

5° $\rho(t)$ 是允许小波,即

$$C_\rho = \int_{\mathbf{R}} \frac{|\hat{\rho}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty.$$

综上所述,由 $\theta(t)$ 可生成某个多分辨逼近, $\rho(t)$ 是与 $\theta(t)$ 相对应的小波函数. 若记尺度空间和小波子空间分别为

$$\begin{aligned} V_j &= \text{span}\{\theta_{j,k}(t) \mid \theta_{j,k} = 2^{j/2} \theta(2^j t - k), k \in \mathbf{Z}\}, \\ W_j &= \text{span}\{\rho_{j,k}(t) \mid \rho_{j,k} = 2^{j/2} \rho(2^j t - k), k \in \mathbf{Z}\}, \end{aligned}$$

则有

$$V_{j+1} = W_j \oplus V_j, j \in \mathbf{Z}.$$

应注意, V_j 的基函数 $\{\theta_{j,k}\}$ 和 W_j 的基函数 $\{\rho_{j,k}\}$ 都不是平移正交的, V_j 和 W_j 也不是正交的.

当 $N=5$ 时, Daubechies 尺度函数 $\phi(t)$ 和小波函数 $\psi(t)$ 的自相关函数 $\theta(t)$ 和 $\rho(t)$ 如图 10.1 所示.

10.2 相应的低通滤波器和高通滤波器

对于 Daubechies 正交尺度函数 $\phi(t)$ 和相应的小波函数来说,双尺度方程的时

域和频域表现为

$$\begin{cases} \phi(t) = \sum_{n=0}^N h_n \phi(2t-n), \\ \hat{\phi}(2\omega) = H(\omega) \hat{\phi}(\omega) \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \psi(t) = \sum_{n=0}^N g_n \phi(2t-n), \\ \hat{\psi}(2\omega) = G(\omega) \hat{\phi}(\omega). \end{cases}$$

它们表现了相应多分辨逼近中的分频特性,即 $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 分别为低通和带通函数; $\{h_n\}_0^N$ 和 $\{g_n\}_0^N$ 分别为低通和高通数字滤波器,且它们的频域表现分别为 $H(\omega)$ 和 $G(\omega)$;在分频效果方面应满足

$$|H(\omega)|^2 + |G(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1.$$

对于尺度函数 $\theta(t)$ 和相应的小波函数 $\rho(t)$ 来说,其双尺度方程的时域和频域表现为

$$\begin{cases} \theta(t) = \sum_{n=-N}^N a_n \theta(2t-n), \\ \hat{\theta}(2\omega) = A(\omega) \hat{\theta}(\omega) \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \rho(t) = \sum_{n=-N}^N b_n \theta(2t-n), \\ \hat{\rho}(2\omega) = B(\omega) \hat{\theta}(\omega). \end{cases}$$

它们也表明了相应的多分辨逼近中的分频特性,即 $\theta(t)$ 和 $\rho(t)$ 分别为低通和带通函数; $\{a_n\}_0^N$ 和 $\{b_n\}_0^N$ 分别为低通和高通数字滤波器,其频域表现分别为 $A(\omega)$ 和 $B(\omega)$. 由于

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(\omega) &= |\hat{\phi}(\omega)|^2, \\ \hat{\rho}(\omega) &= |\hat{\psi}(\omega)|^2, \\ A(\omega) &= |H(\omega)|^2, \\ B(\omega) &= |G(\omega)|^2, \\ A(\omega) + B(\omega) &= 1, \end{aligned}$$

故知 $\theta(t)$ 的低通效果比 $\phi(t)$ 的好, $\rho(t)$ 的带通效果比 $\psi(t)$ 的好;在数字滤波器的低通和高通性能方面, $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的效果比 $\{h_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 的好,因为 $A(\omega)$ 和 $B(\omega)$ 的重叠部分比 $H(\omega)$ 和 $G(\omega)$ 的重叠部分小.

关于低通数字滤波器 $\{a_n\}$ 的构造,可以从两个方面进行.一方面,利用式(10.4)知

$$a_0 = 1, \quad a_{2n} = 0, \quad a_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N h_k h_{k+n}, \quad n \neq 0,$$

即当 $n \neq 0$ 时,可利用 Daubechies 双尺度系数 $\{h_n\}$ 作离散自相关,这可方便地计算

出 $\{a_n\}$. 另一方面, 利用 $|H(\omega)|^2$ 的展开表现, 由式(9.15)和式(9.16)确定的 $\{\eta_n\}$, 就是所需要的低通数字滤波器 $\{a_n\}$.

关于高通数字滤波器 $\{b_n\}$ 的构造, 只要在已知 $\{a_n\}$ 的情况下利用式(10.9), 就可很方便地获得 $\{b_n\}$.

为了便于应用, 下面列出几个关于不同 N 值(这是 Daubechies 双尺度系数 $\{h_n\}_0^N$ 中的 N 值)时, 按 $|H(\omega)|^2$ 的展开表现所构造的低通数字滤波器 $\{a_n\}$ 和高通数字滤波器 $\{b_n\}$.

$$N = 1 \text{ 时, } \quad \{a_n\} = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right\},$$

$$\{b_n\} = \left\{ \frac{-1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{4} \right\};$$

$$N = 3 \text{ 时, } \quad \{a_n\} = \left\{ \frac{-1}{32}, 0, \frac{9}{32}, \frac{1}{2}, \text{对称} \right\},$$

$$\{b_n\} = \left\{ \frac{1}{32}, 0, \frac{-9}{32}, \frac{1}{2}, \text{对称} \right\};$$

$$N = 5 \text{ 时, } \quad \{a_n\} = \left\{ \frac{3}{512}, 0, \frac{-25}{512}, 0, \frac{75}{356}, \frac{1}{2}, \text{对称} \right\},$$

$$\{b_n\} = \left\{ \frac{-3}{512}, 0, \frac{25}{512}, 0, \frac{-75}{356}, \frac{1}{2}, \text{对称} \right\}.$$

下面将 $\{a_n\}$ 列于表 10.1 中.

表 10.1 低通数字滤波器 $\{a_n\}_{-N}^N$

	n	$\{a_n\}_{-N}^N$		n	$\{a_n\}_{-N}^N$
$N=1$	0	0.5	$N=7$	± 3	-0.059 814 453 1
	± 1	0.25		± 4	0.0
$N=3$	0	0.5		± 5	0.011 962 890 6
	± 1	0.281 25		± 6	0.0
	± 2	0.0		± 7	-0.001 220 703 1
	± 3	-0.031 25			
$N=5$	0	0.5		$N=9$	0
	± 1	0.210 674 157 3	± 1		0.302 810 643 3
	± 2	0.0	± 2		0.0
	± 3	-0.048 828 125 0	± 3		-0.067 291 259 8
	± 4	0.0	± 4		0.0
	± 5	0.005 859 375 0	± 5		0.017 303 466 8
$N=7$	0	0.5	± 6		0.0
	± 1	0.299 072 209 9	± 7		-0.003 089 904 8
	± 2	0.0	± 8		0.0
			± 9	0.000 267 028 8	

10.3 分解和回复算法

现在讨论在 j 尺度层上对采样值 $\{f^j(n)\} \in V_j$ 利用低通数字滤波器 $\{a_n\}$ 和高通数字滤波器 $\{b_n\}$ 作分解和回复的算法. 由于 $\theta(t)$ 和 $\rho(t)$ 不是平移正交的, 所以 Mallat 算法对 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是不适用的. 本节将利用 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的特点, 仅从滤波器含义的角度对离散数据 $\{f^j(n)\}$ 作分解和回复.

1. 分解算法

已知 j 尺度层上的采样数据 $\{f^j(n)\} \in V_j$, 它是反应有限频率的离散数据. 分解算法就是用低通数字滤波器 $\{a_n\}$ 把 $\{f^j(n)\}$ 分解为反应低频量的离散数据 $\{f^{j-1}(n)\} \in V_{j-1}$, 用高通数字滤波器把 $\{f^j(n)\}$ 分解为反应高频量的离散数据 $\{w^{j-1}(n)\} \in W_{j-1}$.

现以 $\{a_n\}_{-3}^3$ 为例来说明分解算法的实现过程. 把 $\{a_n\}_{-3}^3$ 当做模板, 其中心 a_0 对应 $\{f^j(n)\}$ 的偶节点处 (见图 10.2), 分解算法的计算过程为

$$f^{j-1}(2n) = a_0 f^j(2n) + a_{\pm 1} f^j(2n \pm 1) + a_{\pm 3} f^j(2n \pm 3).$$

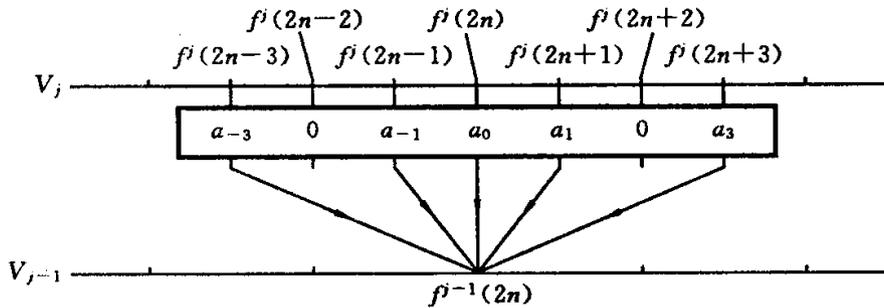


图 10.2 用低通数字滤波器 $\{a_n\}$ 实现 $V_j \rightarrow V_{j-1}$ 的分解算法图

这样便获得 $\{f^{j-1}(n)\} \in V_{j-1}$. 于是, $\{f^{j-1}(n)\}$ 是对 $\{f^j(n)\}$ 的近似, $\{f^{j-1}(n)\}$ 表现了 $\{f^j(n)\}$ 所含有的低频分量.

与之类似, 采用高通数字滤波器 $\{b_n\}$ 将 $\{f^j(n)\} \in V_j$ 分解为 $\{w^{j-1}(n)\} \in W_{j-1}$ 的算法 (见图 10.3), 其计算过程为

$$w^{j-1}(2n) = b_0 f^j(2n) + b_{\pm 1} f^j(2n \pm 1) + b_{\pm 3} f^j(2n \pm 3).$$

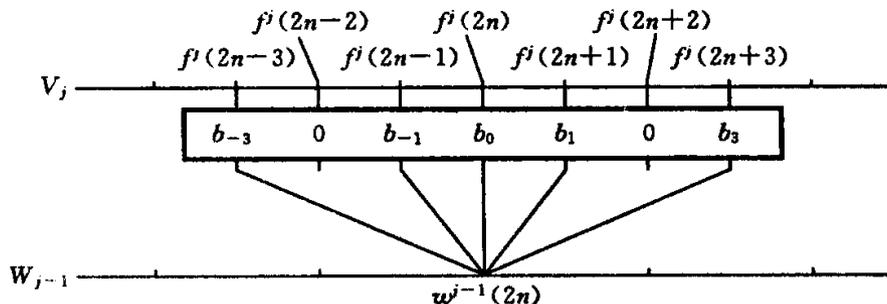


图 10.3 用高通数字滤波器 $\{b_n\}$ 实现 $V_j \rightarrow W_{j-1}$ 的分解算法图

分解过程可以在多个尺度上进行. 图 10.4 表明了将 $\{f^3(n)\} \in V_3$ 作多尺度分解的结构, 需要存储的是关于 V_0 、 W_0 、 W_1 和 W_2 中的离散数据, 这些数据的总量和 V_3 中离散数据量相同.

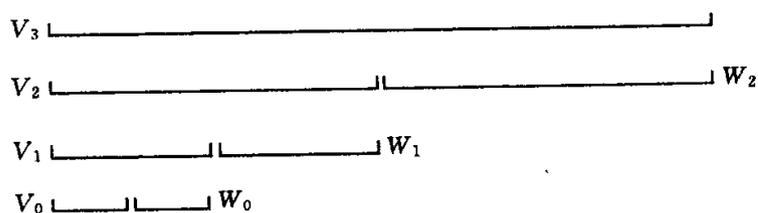


图 10.4 V_3 作低通和高通数据分解的结构图

2. 回复算法

由于 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的特殊性, $a_{2n} = b_{2n} = 0$, $a_{\pm(2n+1)} = -b_{\pm(2n+1)}$, 所以有

$$f^{j-1}(2n) + w^{j-1}(2n) = (a_0 + b_0) f^j(2n) = f^j(2n).$$

故由 V_{j-1} 和 W_{j-1} 中的离散数据可准确回复 V_j 中那些偶编号节点处的离散数据.

V_j 中那些奇编号节点处的数据回复另有特殊性. 为了说明问题, 仍以 $\{a_n\}_{-3}^3$ 和 $\{b_n\}_{-3}^3$ 为例, 现假设 V_j 尺度层上偶编号节点值 $f^j(2n)$ 已准确回复且 $f^{j-1}(4)$ 和 $w^{j-1}(4)$ 已知, 由于

$$\begin{aligned} f^{j-1}(4) &= a_{-3} f^j(1) + 0 f^j(2) + a_{-1} f^j(3) + a_0 f^j(4) \\ &\quad + a_1 f^j(5) + 0 f^j(6) + a_3 f^j(7), \\ w^{j-1}(4) &= b_{-3} f^j(1) + 0 f^j(2) + b_{-1} f^j(3) + b_0 f^j(4) \\ &\quad + b_1 f^j(5) + 0 f^j(6) + b_3 f^j(7), \end{aligned}$$

则在另外存储 $f^j(1)$ 和 $f^j(3)$ 的情况下能很容易地回复 $f^j(5)$ 和 $f^j(7)$, 于是, 其它的 V_j 尺度层上的奇编号节点值也可轻松地回复.

综上所述, 在分解过程中若多存储几个 V_j 中的数据, 这种额外的存储量很少, 则可利用 V_0 和 W_0 中的数据完全回复出 V_1 中的全部数据; 与之类似, 可以准确回复细尺度层 V_j 中的全部数据.

10.4 其它特点

本章讨论的紧支集内插小波及其滤波器的特点主要集中于两个方面. 一方面由 $\theta(t)$ 和 $\rho(t)$ 生成多分辨逼近, $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 作为偶对称的低通滤波器和高通滤波器具有良好的分频效果. 另一方面, $\{\theta(t-n)\}$ 和 $\{\rho(t-n)\}$ 可作为 V_0 和 W_0 的插值型基函数, 它非常有利于函数和信号的表述和分析.

$\{a_n\}$ 是偶对称的低通数字滤波器, $\{b_n\}$ 是偶对称的高通数字滤波器, 这种偶对称性给检测突变信号、图像边缘带来方便. 一方面, 在模极大值检测方法中, 这种偶对称性使得各尺度层上的模极大值点位置准确对齐信号的突变点或图像的边缘,

以便机器能作出准确的判断. 另一方面, 这种偶对称性和回复的准确性能使回复出来的信号较清晰地保持局部的突变表现, 也能使回复出来的图像能较清晰地保留边缘特征, 得到较清晰的图像. 这种特点与 Daubechies 正交小波相比, 无论在算法的复杂性方面还是在处理效果方面, 都是有见长之处的.

值得强调的是, 虽然内插型小波不是正交小波, 但利用相应的低通和高通数字滤波器, 也可仿照图 5.6 和图 5.8 那样形成小波分解和小波包分解算法.

$\{\theta(t-n)\}$ 不仅是 V_0 的 Riesz 基, 而且

$$\theta(t) \Big|_{t=t_n} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \in \mathbf{Z}, n \neq 0, \end{cases}$$

$\theta(t)$ 的支集为 $[-N, N]$, 所以称 $\theta(t)$ 是内插型尺度函数. 与之类似, $\rho(t)$ 称为内插型小波. 这种内插型基函数的特点能使函数(信号)展开为简洁形式, 即

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(n) \theta(t-n).$$

其中, $f(n)$ 是函数(信号)在整节点处的值. 这种展开形式对表述和分析离散信号是方便的, 它起着与 Shannon 样本定理同样的作用; 同时, 它对函数插值也是方便的; 它还能在微分方程数值解法中发挥效用, 因为它能很简便地处理边界条件.

第 11 章 样条半正交小波及其快速算法

众所周知,样条节点基函数有着良好的性质,在曲线拟合方面发挥了杰出的作用.它是定义在整节点上的基函数,可按多尺度逼近概念作出 $f^j(t) \rightarrow f(t) \in L^2(\mathbf{R})$. 然而,它是否存在双尺度方程,是否生成多分辨逼近,是否可构造出与它相应的样条小波呢? 另外,由于样条函数具有对称性,它怎样构造出具有对称性的样条小波呢? 这些是构造样条小波的动力. 本章内容可参见文献[3].

11.1 紧支集样条节点基函数及其基本性质

样条节点基函数在 1.5 节中已有简单介绍. 常用的样条节点基函数形式如下: 一阶样条(或称为零次样条)是矩形函数,其形式为

$$\Omega_1(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

二阶样条(或称为线性样条)形式为

$$\Omega_2(t) = (\Omega_1 * \Omega_1)(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geq 1. \end{cases}$$

三阶样条(或称为二次样条)形式为

$$\Omega_3(t) = (\Omega_2 * \Omega_1)(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} - \frac{3|t|}{2} + \frac{9}{8}, & \frac{1}{2} \leq |t| \leq \frac{3}{2}, \\ -t^2 + \frac{3}{4}, & |t| < \frac{1}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

四阶样条(或称为三次样条)形式为

$$\Omega_4(t) = (\Omega_3 * \Omega_1)(t) = \begin{cases} -\frac{|t|^3}{6} + t^2 - 2|t| + \frac{4}{3}, & 1 < |t| < 2, \\ \frac{|t|^3}{2} - t^2 + \frac{2}{3}, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geq 2. \end{cases}$$

现将常用的 $\Omega_1(t) \sim \Omega_4(t)$ 的图形集中于图 11.1 中,还将 $\Omega_2(t) \sim \Omega_6(t)$ 节点值和一阶导数值分别列于表 11.1 和表 11.2 中. 在实际计算中,这些数表常常是方便有用的.

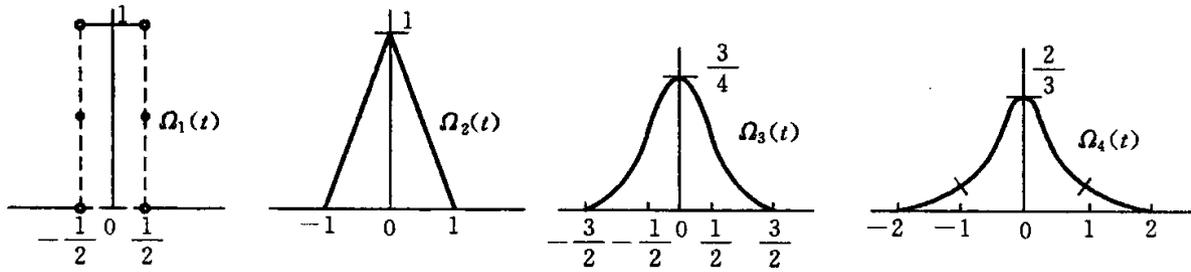


图 11.1 $\Omega_1(t)$ 、 $\Omega_2(t)$ 、 $\Omega_3(t)$ 、 $\Omega_4(t)$ 的图形

表 11.1 $\Omega_m(t)$ 的节点数值表

$m \backslash t$	0	$\pm \frac{1}{2}$	± 1	$\pm \frac{3}{2}$	± 2	$\pm \frac{5}{2}$	± 3
2	1	$\frac{1}{2}$					
3	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$				
4	$\frac{2}{3}$	$\frac{23}{48}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{48}$			
5	$\frac{115}{192}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{19}{96}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{384}$		
6	$\frac{11}{20}$	$\frac{841}{1920}$	$\frac{13}{60}$	$\frac{79}{1280}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{3840}$	

表 11.2 $\Omega'_m(t)$ 的节点数值表

$m \backslash t$	0	$\pm \frac{1}{2}$	± 1	$\pm \frac{3}{2}$	± 2	$\pm \frac{5}{2}$	± 3
2	0	∓ 1	$\mp \frac{1}{2}$				
3	0	∓ 1	$\mp \frac{1}{2}$				
4	0	$\mp \frac{5}{8}$	$\mp \frac{1}{2}$	$\mp \frac{1}{8}$			
5	0	$\mp \frac{1}{2}$	$\mp \frac{11}{24}$	$\mp \frac{1}{6}$	$\mp \frac{1}{12}$		
6	0	$\mp \frac{77}{192}$	$\mp \frac{5}{12}$	$\mp \frac{75}{384}$	$\mp \frac{1}{24}$	$\mp \frac{1}{384}$	

不难看出,样条函数 $\Omega_m(t)$ 都是偶对称的,且其支集(函数值局部非零的范围)是有限的;它在 $t=0$ 处取得最大值且向两边单调、快速地衰减;阶数越大, $\Omega_m(t)$ 越光滑且支集越长.

$\Omega_m(t-n)$ 可视为整节点 n 处的节点基函数,用其线性组合可描述近似函数,这种表示方式形象直观. Ω_m 的定义域为 $[-\frac{m}{2}, \frac{m}{2}]$,当 m 为偶数时 Ω_m 的支集可用整节点表示,当 m 为奇数时 Ω_m 的支集不能用整节点表示,这给信号分析处理带来

不便.

为了让样条函数定义域表示为整节点形式,现修改样条函数的定义如下:

$$N_1(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{其它}; \end{cases}$$

$$N_m(t) = (N_{m-1} * N_1)(t)$$

$$= \int_0^1 N_{m-1}(t-x) dx.$$

对比 $N_m(t)$ 和 $\Omega_m(t)$ 不难发现: $N_1(t)$ 是 $\Omega_1(t)$ 向右平移 $1/2$ 个单位的结果, $N_1(t)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的特征函数, 用 $\{N_1(t-l)\}$ 作节点基函数可方便地构造出阶跃函数; $N_2(t)$ 是山形函数, 是 $\Omega_2(t)$ 向右平移了一个单位的结果, 用 $\{N_2(t-l)\}$ 作节点基函数可构造出折线函数; $N_m(t)$ 是 $\Omega_m(t)$ 向右平移了 $m/2$ 个单位的结果, $N_m(t)$ 是定义在 $[0, m]$ 上的, 用 $\{N_m(t-l)\}$ 作节点基函数可构造出分段 $m-1$ 次多项式插值函数.

用 $N_m(t)$ 表示 m 阶样条函数, 无论 m 是奇数还是偶数的情形, $N_m(t)$ 的支集都用 $[0, m]$ 整节点表示; $N_m(t)$ 的整节点平移也可方便地表述为 $N_m(t-n)$. 应该注意, $N_m(t-n)$ 的支集为 $[n, n+m]$, 对称中心位于 $(n+m)/2$ 处; 当 m 为偶数时, 其对称中心正好落在整节点上; 当 m 为奇数时, 其对称中心不在整节点上. 另外, 还应注意, $N_m(t)$ 是分段 $m-1$ 次多项式; 但就整体而言, $N_m(t)$ 是 C^{m-2} 中的函数, 它的 $m-2$ 阶导数是分段连续的函数, 它的 $m-1$ 阶导数则是分段阶跃函数了.

为了今后使用方便, 下面列出部分 $N_m(t)$ 的整节点数值表(见表 11.3).

表 11.3 $N_m(t)$ 整节点数值表

$t \backslash m$	0	1	2	3	4	5	6
2	0	1	0				
3	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0			
4	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0		
5	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	
6	0	$\frac{1}{120}$	$\frac{13}{60}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{13}{60}$	$\frac{1}{120}$	0

样条基函数还具有下述一些良好的性质:

1° $N_m(t)$ 的支集为 $[0, m]$, 即 $\text{supp}N_m(t) = [0, m]$.

2° $N_m\left(\frac{m}{2}+t\right) = N_m\left(\frac{m}{2}-t\right)$.

3° $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} N_m(t-k) = 1, \int_{\mathbf{R}} N_m(t) dt = 1$.

$$4^\circ N_m(t) = \frac{t}{m-1} N_{m-1}(t) + \frac{m-t}{m-1} N_{m-1}(t-1).$$

$$5^\circ N'_m(t) = N_{m-1}(t) - N_{m-1}(t-1).$$

$$6^\circ \int_{\mathbf{R}} g^{(m)}(t) N_m(t) dt = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} g(k).$$

$$7^\circ \int_{\mathbf{R}} N_m(t-i) N_m(t-j) dt = N_{2m}(m - |i-j|).$$

$$8^\circ \hat{N}_m(\omega) = \left(\frac{1-e^{-i\omega}}{i\omega} \right)^m = \left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right)^m e^{-i\frac{m}{2}\omega}.$$

这些性质为数学推演和定量表示提供了方便.

性质 1° 表明了 $N_m(t)$ 的支集范围; 性质 2° 表明 $N_m(t)$ 是关于 $t=m/2$ 偶对称的; 性质 3° 表明 $N_m(t)$ 作节点基函数时所表现的基本特性; 性质 4° 表明了样条函数的递推规则, 用此规则可简便求得 $N_m(t)$ 的节点函数值; 性质 5° 表明了样条函数的导数规则, 用此规则可简便求得 $N'_m(t)$ 的节点函数值; 性质 6° 表明了 $N_m(t)$ 参与分部积分时是方便计算的; 性质 7° 表明了 $N_m(t)$ 的内积规则; 性质 8° 表明了 $N_m(t)$ 的 Fourier 变换有很强的规则表现. 另外, 性质 1°~5° 在用样条函数作插值逼近时经常用到; 性质 4°~7° 在用样条函数作最小二乘逼近和求微分方程数值解时经常用到; 性质 1°~8° 在构造样条半正交小波时经常用到.

11.2 时域信号的样条函数插值逼近

在数值分析中, 人们讨论的是有限区间上的样条函数逼近. 此时, 已知 $f(t)$, $t \in [a, b]$ 上一串样本值 $\{f_l\}_0^N$, $[a, b]$ 被均分为 N 等份, 样条插值函数为

$$P(t) = \sum_{l=0}^N c_l N_m \left(t + \frac{m}{2} - l \right), \quad t \in [a, b],$$

作为近似函数, $P(t)$ 是 $m-1$ 次多项式函数. 用样条函数作插值逼近有许多见长之处: ① $N_m(t)$ 的线性组合形式和递推性质在分析、计算和应用方面带来很多方便; ② 可固定分划指标 N , 增大样条基函数的阶数指标 m , 这样可提高 $P(t)$ 对 $f(t)$ 的逼近程度; ③ 可固定基函数的阶数指标 m , 增大分划指标 N , 即细密分划, 边样也可提高 $P(t)$ 对 $f(t)$ 的逼近程度. 然而, 用样条函数作插值逼近时, 边值条件的处理有不便之处, 往往需要求解线性代数方程组, 参见文献[11].

在信号分析处理中, 人们用样条函数逼近的是无限区间上的信号 $f(t)$, $t \in \mathbf{R}$. 此时, $t \in \mathbf{R}$, 均分细密程度用指标 j 来表示, 已知的是 j 指标分划下的关于信号的样本值 $\{f^j\}_{l \in \mathbf{Z}}$, 样条插值函数为

$$f^j(t) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} c_l N_m \left(t + \frac{m}{2} - l \right),$$

$f^j(t)$ 是分段 $m-1$ 次多项式函数. 不难看出, 用样条函数作插值逼近的长处仍保

持着;但要注意在无限区间上作插值逼近有其特殊性,关键在于组合系数 $\{c_l\}$ 的确定问题.

若取用 $N_1(t)$ 或 $N_2(t)$ 作节点基函数,其组合系数 $\{c_l\}$ 就是样本值 $\{f_l\}$,然而由此构造出来的近似函数 $f^j(t)$ 的光滑性低,对原信号的逼近程度低.若取用 $m>2$ 的 $N_m(t)$ 作节点基函数, $f^j(t)$ 的逼近程度提高了,但组合系数 $\{c_l\}$ 该如何方便地确定呢?下面具体介绍的是便于信号分析处理的两种样条插值方法.

1. 样条插值方法 I

在信号处理中,已知样本值 $\{f(n)\}$,我们希望仅用样本值构造样条插值的系数 $\{c_l\}$,希望插值函数 $f^j(t)$ 在整节点 $n \in \mathbf{Z}$ 处的值就是样本值 $f(n)$,这种插值方法的描述为

$$\begin{cases} f^j(t) = \sum_l c_l N_m\left(t + \frac{m}{2} - l\right), \\ f^j(n) = f(n). \end{cases} \quad (11.1)$$

这种插值方法称为样条函数拟插值方法.这样的插值函数 $f^j(t)$ 显然是 $m-1$ 次多项式,由于 $f^j(n) = f(n)$ 的缘故, $f^j(t)$ 在整节点附近的邻域中具有较高的插值精度,在相邻整节点之间仍是 $m-1$ 次多项式,故 $f^j(t)$ 的插值效果可描述为

$$\begin{aligned} |f(n) - f^j(n)| &= 0, \quad n \in \mathbf{Z}, \\ |f(t) - f^j(t)| &= O(h^m), \quad t \in (t_n, t_{n+1}), \quad n \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

其中, h 为采样间隔长度.

在拟插值方法中,为了让插值系数由样本值构成,可设计 $c_l = \sum_i \lambda_{l-i} f(i)$ 为离散卷积形式;为了充分利用 $f^j(t)$ 是 $m-1$ 次多项式这个特点,可令 $f^j(t) \equiv P(t)$, $P(t)$ 为次数不超过 $m-1$ 的多项式时,式(11.1)两边是恒等成立的.于是,式(11.1)可具体描述为

$$\begin{aligned} f^j(n) &= P(n) \\ &= \sum_l \left[\sum_i \lambda_{l-i}^{\xi} P(i) \right] N_m\left(n + \frac{m}{2} - l\right), \quad n \in \mathbf{Z}. \end{aligned} \quad (11.2)$$

其中

$$c_l = \sum_i \lambda_{l-i}^{\xi} P(i) = \sum_i \lambda_i^{\xi} P(l-i).$$

为了使式(11.2)对次数不超过 $m-1$ 次的多项式 $P(t)$ 都成立,令

$$\begin{cases} \lambda_i^{\xi} = \delta_{i,n} + d_i^{\xi}, \\ d_i^{\xi} = \delta_{i,0} - N_m\left(\frac{m}{2} - i\right), \end{cases} \quad (11.3)$$

其中, ξ 表示离散卷积的次数.

下面,先观察 $\{d_i\}$ 与 $\{P(i)\}$ 作一次离散卷积的表现:

$$\sum_i d_{l-i}^1 P(i) = \sum_i d_i^1 P(l-i)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_i \left[\delta_{i,0} - N_m \left(\frac{m}{2} - i \right) \right] P(l-i) \\
 &= P(l) - \sum_i N_m \left(\frac{m}{2} - i \right) P(l-i).
 \end{aligned}$$

由于 $N_m(t)$ 的对称中心在 $t = \frac{m}{2}$ 处, 且有 $N_m \left(\frac{m}{2} - i \right) = N_m \left(\frac{m}{2} + i \right)$, i 是从对称中心向两边的整节点平移量, i 不超过 $N_m(t)$ 的半个支集长度 $\left[\frac{m}{2} \right]$, 其中 $[\cdot]$ 是取整记号, 所以当 m 是偶数时有

$$\begin{aligned}
 \sum_i d_{l-i}^1 P(i) &= \left[1 - N_m \left(\frac{m}{2} \right) \right] P(l) - \sum_{i=1}^{\left[\frac{m}{2} \right]} N_m \left(\frac{m}{2} - i \right) [P(l-i) + P(l+i)] \\
 &= \left[1 - N_m \left(\frac{m}{2} \right) \right] P(l) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^{\left[\frac{m}{2} \right]} N_m \left(\frac{m}{2} - i \right) [P(l-i) - 2P(l) + P(l+i)], \\
 &\quad \sum_{i=1}^{\left[\frac{m}{2} \right]} N_m \left(\frac{m}{2} - i \right) \cdot 2P(l) \\
 &= P(l) - \sum_{i=0}^{\left[\frac{m}{2} \right]} N_m \left(\frac{m}{2} - i \right) P(l) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^{\left[\frac{m}{2} \right]} N_m \left(\frac{m}{2} - i \right) [P(l-i) - 2P(l) + P(l+i)] \\
 &= - \sum_{i=1}^{\left[\frac{m}{2} \right]} N_m \left(\frac{m}{2} - i \right) [P(l-i) - 2P(l) + P(l+i)]. \tag{11.4}
 \end{aligned}$$

由此可见, 用 $\{d_i\}$ 和 $\{P(i)\}$ 作一次离散卷积, 其结果是关于 $P(l)$ 处的二阶中心差分的组合.

将式(11.4)代入式(11.2), 又将出现类似 $\{d_i\}$ 和 $\{P(l)\}$ 的离散卷积, 所以在式(11.2)中, $\xi=1$ 时将出现四阶中心差分, $\xi=2$ 时将出现六阶中心差分. 总之, 在式(11.2)中适当增加卷积次数, 就会出现 $m-1$ 次多项式 $P(t)$ 的高阶差分等于零的表现, 式(11.2)就会表现为

$$\begin{aligned}
 f^j(n) &= \sum_l \left[\sum_i \lambda_{l-i}^\xi P(i) \right] N_m \left(n + \frac{m}{2} - l \right) \\
 &= \sum_l \left[\sum_i \delta_{i,n} P(i) + \sum_i d_{l-i}^\xi P(i) \right] N_m \left(n + \frac{m}{2} - l \right) \\
 &= P(n) \sum_l N_m \left(n + \frac{m}{2} - l \right) \\
 &= P(n).
 \end{aligned}$$

若 m 是奇数, 式(11.4)的推导只需作微小改变, 此时

$$\begin{aligned}\sum d_{l-i}^f P(i) &= P(l) - \sum_{i=1}^{[m/2]} N_m\left(\frac{m}{2} - i\right) [P(l-i) + P(l+i)] \\ &= - \sum_{i=1}^{[m/2]} N_m\left(\frac{m}{2} - i\right) [P(l-i) - 2P(l) + P(l+i)],\end{aligned}\quad (11.5)$$

于是关于式(11.4)和式(11.2)的结论仍然成立. 总之, 无论 m 是偶数还是奇数, 样条插值函数式(11.1)中的系数 c_n 都可由整节点的样本值卷积生成.

具体地, 若取用 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 作节点基函数, 样条插值函数的组合系数 c_l 就是样本值 f_l^j . 若取用 $N_3(t)$ 作节点基函数, 其组合系数 c_l 可用式(11.3)作一次卷积得到, 此时

$$\begin{aligned}\lambda_i^1 &= 2\delta_{i,0} - N_3\left(\frac{3}{2} - i\right), \\ N_3\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{8}, \quad N_3\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}, \quad N_3\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{8}, \\ c_l &= \sum_i \left[2\delta_{i,0} - N_3\left(\frac{3}{2} - i\right) \right] f(l-i) \\ &= -\frac{1}{8}f(l-1) + \left(2 - \frac{3}{4}\right)f(l) - \frac{1}{8}f(l+1).\end{aligned}$$

若取用 $N_4(t)$ 作节点基函数, 其组合系数 c_l 也只需按式(11.3)作一次卷积得到, 此时

$$\begin{aligned}\lambda_i^1 &= 2\delta_{i,0} - N_4(2-i), \\ N_4(1) &= \frac{1}{6}, \quad N_4(2) = \frac{2}{3}, \quad N_4(3) = \frac{1}{6}, \\ c_l &= \sum_i \left[2\delta_{i,0} - N_4(2-i) \right] f(l-i) \\ &= -\frac{1}{6}f(l-1) + \left(2 - \frac{2}{3}\right)f(l) + \frac{1}{6}f(l+1).\end{aligned}$$

这样, 等距 h 分划下的三次拟插值样条函数可表示为

$$f^j(t) = \sum_i c_i N_4(t-2-n),$$

它对二次连续可微、三次分段连续的多项式函数是准确的, 且

$$\begin{aligned}|f(n) - f^j(m)| &= 0, \quad n \in \mathbf{Z}, \\ |f(t) - f^j(t)| &= O(h^4).\end{aligned}$$

2. 样条插值方法 II

已知 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 的整节点采样值 $\{f(n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$, 求

$$\begin{cases} f^j(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(n) L_{2m}(t-n), \\ L_{2m}(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \xi_k N_{2m}(t+m-k). \end{cases}\quad (11.6)$$

其中, $L_{2m}(t)$ 称为插值样条基函数,

$$L_{2m}(l) = \delta_{0,l} = \begin{cases} 1, & l = 0, \\ 0, & l \neq 0, l \in \mathbf{Z} \end{cases} \quad (11.7)$$

具有 Lagrange 插值基函数的形式.

不像样条插值方法 I 中的插值基函数 $\left\{ N_m \left(t + \frac{m}{2} - n \right) \right\}$ 那么明显, 这里的插值基函数 $\{L_{2m}(t-n)\}$ 要通过求解式(11.6)和式(11.7)的联立方程组, 通过解出 $\{\xi_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$ 才能构造出来. 研究表明, $L_{2m}(t)$ 可以被具体确定, $\{\xi_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$ 当 $2m \geq 3$ 时是无穷序列, 但它具有指数衰减速度, 这样构造出来的 $L_{2m}(t)$ 不仅具有式(11.7)所示的良好特性, 而且也具有指数衰减速度. 例如当 $m=2$ 时, 用 $N_4(t)$ 构造出

$$L_4(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \xi_k N_4(t+2-k),$$

$$\xi_{-k} = \xi_k = \sqrt{3}(-2+\sqrt{3})^k, \quad k \geq 0, k \in \mathbf{Z}.$$

$L_4(t)$ 的图形如图 11.2 所示.

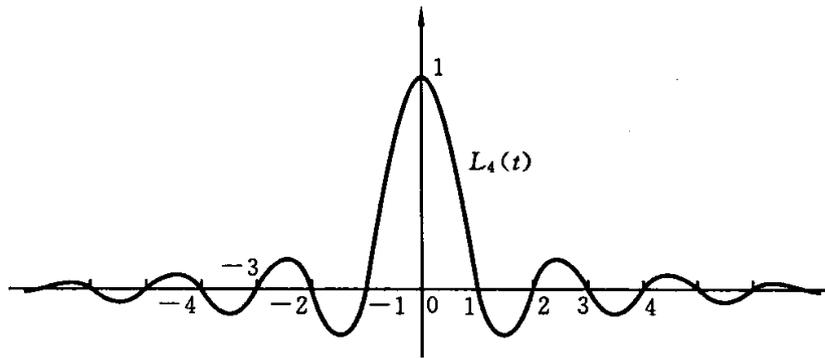


图 11.2 插值样条 $L_4(t)$ 的图形

应该看出, 一方面用方法 II 构造插值函数 $f^j(t)$ 很简单, 仅需略多于 $\{f(n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$ 的样本值即可构造出 $f^j(t)$, 在 $t \in [t_{-2N}, t_{2N}]$ 区段上良好地近似于 $f(t)$; 另一方面, 在此区段上的近似程度也具有 $2m-1$ 次多项式的近似效果, 即

$$|f(n) - f^j(n)| = 0, \quad n \in \mathbf{Z},$$

$$|f(t) - f^j(t)| = O(h^{2m}), \quad t \in (t_n, t_{n+1}), \quad n \in \mathbf{Z}.$$

式(11.6)具有采样定理的表现形式, 可用样本值 $\{f(n)\}$ 作插值系数构造出 $f(t)$ 的近似函数 $f^j(t)$, 这种表现形式便于分析和应用.

11.3 紧支集样条半正交小波的代数构造方法

众所周知, 样条函数 $N_m(t)$ 的平移放缩可作为基函数, 可对 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 作多尺度逼近, 于是, 利用样条函数构造样条小波的问题就自然会出现. 为此, 必须首先讨论样条函数 $N_m(t)$ 能生成一个多分辨逼近, 然后才能在这个多分辨逼近框架下设法构造样条小波.

样条函数 $N_m(t)$ 是尺度函数, 这可从以下两方面理解. 一方面在 $j=0$ 尺度分划下, $\{N_m(t-k)\}$ 可作为节点基函数, 其线性组合

$$f^0(t) = \sum_n c_n^0 N_m(t-n), \quad f^0(t) \in V^0$$

可良好地近似 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$, 这种样条基函数正符合 Riesz 基的定义(为了节省篇幅, 这里不再重复论证). 另一方面, 样条函数 $N_m(t)$ 具有双尺度方程

$$N_m(t) = \sum_k p_k N_m(2t-k).$$

双尺度系数 $\{p_k\}$ 将在下面给出, 此处暂不作推导. 由此可知, 样条函数 $N_m(t)$ 能生成一个多分辨逼近.

根据多分辨逼近的含义, 记

$$V_j = \text{span}\{\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2} N_m(2^j t - k), k \in \mathbf{Z}\},$$

$$W_j = \text{span}\{\psi_{j,k}(t), k \in \mathbf{Z}\},$$

则

$$V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subseteq L^2(\mathbf{R}),$$

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j.$$

其中, 小波子空间 W_j 是存在的, 但一般情况下 W_j 仅是 V_j 在 V_{j+1} 中的补子空间而不是正交补子空间, 若要求 $W_0 \perp V_0$, 就需要有特殊的约束.

根据多分辨逼近的含义构造样条小波, 就是以 $\phi(t) = N_m(t)$ 作为尺度函数, 构造相应的小波函数 $\psi(t)$, 使其满足

$$\phi(t) = N_m(t) = \sum_k p_k N_m(2t-k), \quad (11.8)$$

$$\psi(t) = \sum_k q_k N_m(2t-k), \quad (11.9)$$

$$\int_{\mathbf{R}} \phi(t-k) \psi(t) dt = 0. \quad (11.10)$$

由于 $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都没有平移正交性质, 但 $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 是正交的, 所以满足式(11.8)至式(11.10)的样条小波 $\psi(t)$ 是一种半正交小波.

1. 样条半正交小波滤波器的性质

样条半正交小波双尺度方程式(11.8)、式(11.9), 仍采用第 8 章中的含义, 它们在频域中的表示为

$$\begin{cases} \hat{\phi}(2\omega) = P(\omega) \hat{\phi}(\omega), \\ P(\omega) = \frac{1}{2} \sum_k p_k e^{-ik\omega}, \end{cases} \quad (11.11)$$

$$\begin{cases} \hat{\psi}(2\omega) = Q(\omega) \hat{\psi}(\omega), \\ Q(\omega) = \frac{1}{2} \sum_k q_k e^{-ik\omega}. \end{cases} \quad (11.12)$$

这里共出现四个关系对. 其一, $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$, 它们分别是尺度函数(低通卷积函数)

和小波函数(高通卷积函数);其二, $\hat{\phi}(\omega)$ 和 $\hat{\psi}(\omega)$, 它们分别是 ϕ 和 ψ 在频域中的表现;其三, $\{p_k\}$ 和 $\{q_k\}$, 它们分别是低通数字滤波器和高通数字滤波器;其四, $P(\omega)$ 和 $Q(\omega)$, 它们分别是对应于 $\{p_k\}$ 和 $\{q_k\}$ 的(频域)低通滤波器和(频域)高通滤波器.

对于尺度函数 $\phi(t)$ 和小波函数 $\psi(t)$, 它们的双尺度方程分别为

$$\phi(t) = N_m(t) = \sum_{k=0}^m p_k \phi(2t-k), \quad t \in [0, m], \quad (11.13)$$

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{3m-2} q_k \phi(2t-k), \quad t \in [0, 2m-1], \quad (11.14)$$

式中的求和指标如何确定? 小波函数 $\psi(t)$ 的支集长度如何确定?

对于式(11.3), 由于 $\phi(t) = N_m(t), t \in [0, m]$, 要求用 $\{\phi(2t-k)\}$ 作线性组合的支集长度正好等于 $\phi(t)$ 的支集长度, 从而可确定 $k=0, 1, \dots, m$.

对于式(11.4), 由于要求 $\phi(t) \perp \psi(t)$, $\psi(t)$ 是关于 $\{\phi(2t-k)\}$ 的线性组合, 这就要求用于求和的 $\{\phi(2t-k)\}$ 应与 $\phi(t)$ 有公共支集, 据此可确定 $\psi(t)$ 构造式中的求和指标及 $\psi(t)$ 的支集范围.

例如, 对 $\phi(t) = N_2(t), t \in [0, 2]$ 来说, $\{\phi(2t-k)\}_{-1}^3$ 与 $\phi(t)$ 有公共支集, 所以 $\psi(t)$ 双尺度方程的求和指标 $k=-1, 0, \dots, 3$ 等同于求和指标 $k=0, 1, \dots, 4$, 由 $\{\phi(2t-k)\}_0^4$ 可确定 $\psi(t), t \in [0, 3]$ (参见图 11.3、图 11.4).

例如, 对 $\phi(t) = N_3(t), t \in [0, 3]$ 来说, $\{\phi(2t-k)\}_{-2}^5$ 与 $\phi(t)$ 有公共支集, 所以 $\psi(t)$ 双尺度方程的求和指标为 $k=0, 1, \dots, 7$, 由 $\{\phi(2t-k)\}_0^7$ 可确定 $\psi(t), t \in [0, 5]$ (参见图 11.5、图 11.6).

例如, 对 $\phi(t) = N_4(t), t \in [0, 4]$ 来说, $\{\phi(2t-k)\}_{-3}^7$ 与 $\phi(t)$ 有公共支集, 所以相应的求和指标为 $k=0, 1, \dots, 10$, 再由 $\{\phi(2t-k)\}_0^{10}$ 可确定相应小波函数 $\psi(t)$ 的支集为 $t \in [0, 7]$ (参见图 11.7、图 11.8).

总结归纳易知, 式(11.14)中, $\phi(t) = N_m(t), t \in [0, m], \{\phi(2t-k)\}_{-\frac{m-1}{2}}^{2m-1}$ 与 $\phi(t)$ 有公共支集, 所以 $\psi(t)$ 双尺度方程的求和指标为 $k=0, 1, \dots, 3m-2, \psi(t)$ 的支集为 $t \in [0, 2m-1]$.

低通数字滤波器 $\{p_k\}_0^m$ 具有和 $\phi(t)$ 同样的偶对称性, 即

$$\begin{cases} p_{\frac{m}{2}-k} = p_{\frac{m}{2}+k}, & \text{当 } m \text{ 为偶数时,} \\ p_{(\frac{m}{2}-\frac{1}{2})-k} = p_{(\frac{m}{2}+\frac{1}{2})+k}, & \text{当 } m \text{ 为奇数时;} \end{cases}$$

它还具有一般低通数字滤波器的表现:

$$\begin{cases} \sum_{k=\text{奇数}} p_k = 1, \\ \sum_{k=\text{偶数}} p_k = 1, \\ \sum_k p_k = 2. \end{cases} \quad (11.15)$$

高通数字滤波器 $\{q_k\}_0^{3m-2}$ 具有和 $\psi(t)$ 同样的对称性, 在下面构造小波函数 $\psi(t)$ 时将会看到: 当 m 为偶数时, $\psi(t)$ 是偶对称的; 当 m 为奇数时, $\psi(t)$ 是奇对称的. 所以 $\{q_k\}$ 的对称性表现为

$$\begin{cases} q_{(\frac{3}{2}m-1)-k} = q_{(\frac{3}{2}m-1)+k}, & \text{当 } m \text{ 为偶数时,} \\ -q_{(\frac{3}{2}m-1-\frac{1}{2})-k} = q_{(\frac{3}{2}m-1+\frac{1}{2})+k}, & \text{当 } m \text{ 为奇数时;} \end{cases}$$

它还具有一般高通数字滤波器的表现:

$$\begin{cases} \sum_{k=\text{奇数}} q_k = -1, \\ \sum_{k=\text{偶数}} q_k = 1, \\ \sum_k q_k = 0. \end{cases} \quad (11.16)$$

低通滤波器 $P(\omega)$ 是 $\{p_k\}$ 的频域表现, 由其定义式(11.11)可知

$$P(0) = 1, \quad P(n\pi) = 0.$$

高通滤波器 $Q(\omega)$ 是 $\{q_k\}$ 的频域表现, 由其定义式(11.12)以及式(11.16), 有

$$Q(0) = 0, \quad Q(n\pi) = 1.$$

事实上, 在式(11.12)中令 $\omega = 0$, 有

$$Q(0) = \frac{1}{2} \sum_k q_k = 0;$$

令 $\omega = \pi$, 有

$$\begin{aligned} Q(\pi) &= \frac{1}{2} \sum_k q_k e^{-ik\pi} \\ &= \frac{-1}{2} \sum_{k=\text{奇数}} q_k + \frac{1}{2} \sum_{k=\text{偶数}} q_k \\ &= 1. \end{aligned}$$

另外, $P(\omega)$ 和 $Q(\omega)$ 的半正交性质表现为

$$Q(\omega) \overline{P(\omega)} + Q(\omega + \pi) \overline{P(\omega + \pi)} = 0.$$

2. 线性样条半正交小波的代数构造方法

线性样条函数 $N_2(t)$ 作为尺度函数 $\phi(t)$, 其表达式为

$$\phi(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 2-t, & 1 \leq t \leq 2, \end{cases}$$

其双尺度方程为

$$\phi(t) = \frac{1}{2} \phi(2t) + \phi(2t-1) + \frac{1}{2} \phi(2t-2), \quad (11.17)$$

其双尺度方程的传递系数为

$$\{p_k\}_0^2 = \left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \right\}. \quad (11.18)$$

$\{\phi(t-n)\}$ 和 $\{\phi(2t-n)\}$ 相互关系如图 11.3 所示.

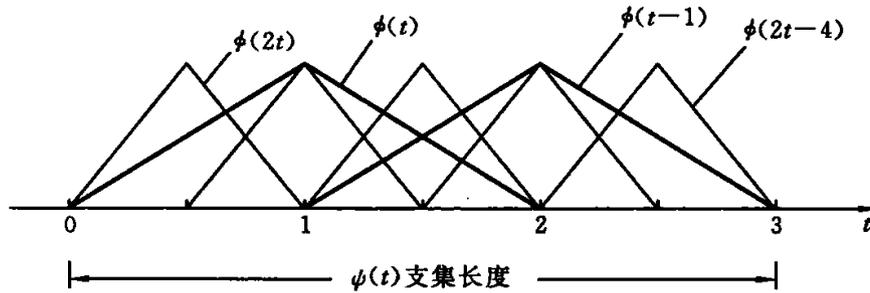


图 11.3 线性样条 $\phi(t)$ 、 $\psi(t)$ 和 $\{\phi(2t-n)\}$ 的关系

线性样条半正交小波 $\psi(t)$ 的构造方程为

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^4 q_k \phi(2t-k). \quad (11.19)$$

由于 $\{\phi(t-n)\}_{n=1}^2$ 与 $\psi(t)$ 有公共支集,将其与式(11.19)两边作内积(注意,由于 $\psi(t)$ 和 $\phi(t)$ 的偶对称性, $\phi(t+1)$ 和 $\phi(t-2)$ 同 $\psi(t)$ 内积的方程是相同的),得到三个方程,即

$$\sum_{k=0}^4 q_k (\phi(2t-k), \phi(t-n)) = 0, \quad n = 0, 1, 2,$$

其中

$$(\phi(2t-1), \phi(t)) = \frac{5}{6},$$

$$(\phi(2t), \phi(t)) = (\phi(2t-2), \phi(t-1)) = \frac{1}{2},$$

$$(\phi(2t+1), \phi(t)) = (\phi(2t-3), \phi(t)) = \frac{1}{12}.$$

再与式(11.16)和 $\{q_k\}$ 的对称性关系:

$$q_0 = q_4,$$

$$q_1 = q_3,$$

$$\sum_{k=\text{奇数}} q_k = -1,$$

$$\sum_{k=\text{偶数}} q_k = 1,$$

联立求解得到

$$\{q_k\}_0^4 = \left\{ \frac{1}{12}, \frac{-1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{12} \right\}. \quad (11.20)$$

$\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 的图形见图 11.4.

3. 二次样条半正交小波的代数构造方法

二次样条 $N_3(t)$ 作为尺度函数 $\phi(t)$,其表达式为

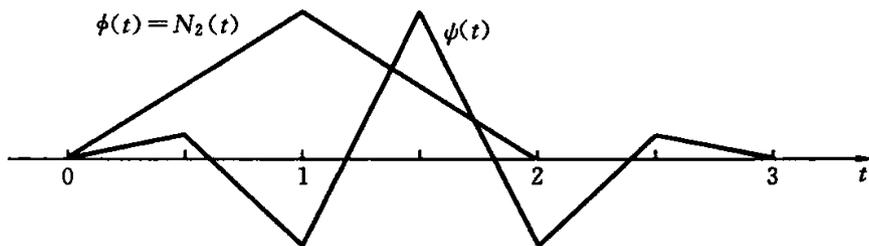


图 11.4 线性样条尺度函数 $\phi(t)$ 及其半正交小波 $\psi(t)$ 的图形

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2, & t \in [0, 1], \\ \frac{3}{4} - \left(t - \frac{3}{2}\right)^2, & t \in [1, 2], \\ \frac{1}{2}(t-3)^2, & t \in [2, 3]. \end{cases}$$

双尺度方程为

$$\phi(t) = \frac{1}{4}\phi(2t) + \frac{3}{4}\phi(2t-1) + \frac{3}{4}\phi(2t-2) + \frac{1}{4}\phi(2t-3), \quad (11.21)$$

双尺度方程的传递系数为

$$\{p_k\}_0^3 = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4} \right\}, \quad (11.22)$$

$\{\phi(t-n)\}$ 和 $\{\phi(2t-n)\}$ 的关系如图 11.5 所示.

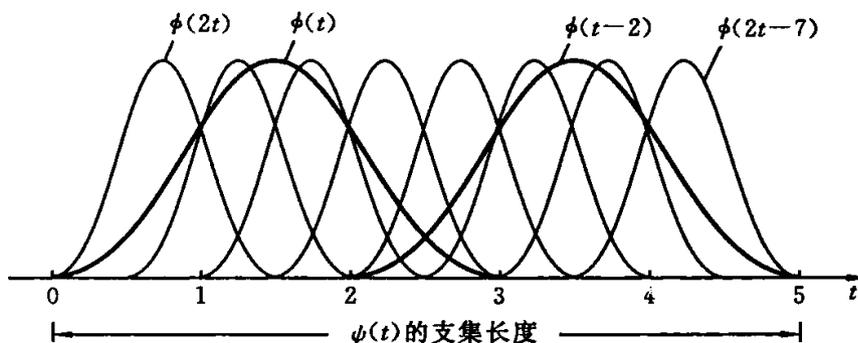


图 11.5 二次样条 $\phi(t)$ 、 $\psi(t)$ 和 $\{\phi(2t-n)\}$ 的关系

由前面的分析可知, $\psi(t)$ 的构造式为

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^7 q_k \phi(2t-k). \quad (11.23)$$

由于 $\{\phi(t-n)\}_{-2}^4$ 与 $\psi(t)$ 有公共支集, 所以将其与式(11.23) 两边作内积(参见图 11.5), 可列出七个方程, 即

$$(\psi(t), \phi(t-n)) = 0, \quad n = -2, -1, \dots, 4,$$

作内积时要用到下面的数据:

$$\begin{aligned} (\phi(t), \phi(t)) &= 66/120, \\ (\phi(t), \phi(t \pm 1)) &= 26/120, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\phi(t), \phi(t \pm 2)) &= 1/120, \\(\phi(t), \phi(2t)) &= (\phi(t), \phi(2t-3)) = 147/960, \\(\phi(t), \phi(2t-1)) &= (\phi(t), \phi(2t-2)) = 303/960, \\(\phi(t), \phi(2t-4)) &= 29/960, \\(\phi(t), \phi(2t-5)) &= 1/960.\end{aligned}$$

再利用式(11.16),又可列出几个方程:

$$\begin{aligned}q_k &= -q_{7-k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \\ \sum_{k=\text{奇数}} q_k &= -1, \\ \sum_{k=\text{偶数}} q_k &= 1.\end{aligned}$$

最后,联立上述方程组,消去同解方程,最后解得

$$\{q_k\}_0^7 = \left\{ \frac{1}{480}, \frac{-29}{480}, \frac{147}{480}, \frac{-303}{480}, \frac{303}{480}, \frac{-147}{480}, \frac{29}{480}, \frac{-1}{480} \right\}. \quad (11.24)$$

二次样条尺度函数 $\phi(t)$ 及其半正交小波 $\psi(t)$ 的图形如图 11.6 所示.

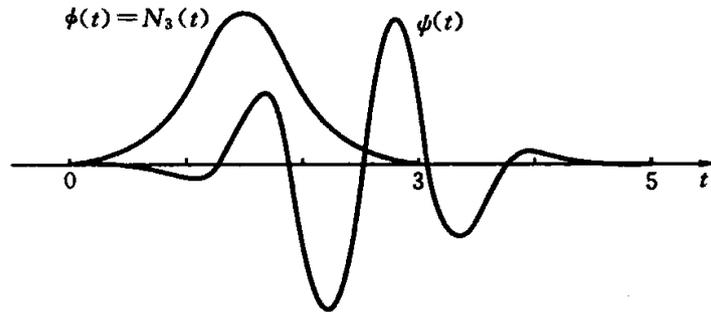


图 11.6 二次样条尺度函数 $\phi(t)$ 及其半正交小波 $\psi(t)$ 的图形

4. 三次样条半正交小波的代数构造方法

三次样条 $N_4(t)$ 作为尺度函数 $\phi(t)$, 其表达式为

$$N_4(t) = \begin{cases} \frac{1}{6}t^3, & 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{-1}{2}(t-2)^3 - (t-2)^2 + \frac{2}{3}, & 1 \leq t \leq 2, \\ \frac{1}{2}(t-2)^3 - (t-2)^2 + \frac{2}{3}, & 2 \leq t \leq 3, \\ \frac{-1}{6}(t-4)^3, & 3 \leq t \leq 4. \end{cases}$$

双尺度方程为

$$\phi(t) = \frac{1}{8}\phi(2t) + \frac{1}{2}\phi(2t-1) + \frac{3}{4}\phi(2t-2) + \frac{1}{2}\phi(2t-3) + \frac{1}{8}\phi(2t-4).$$

(11.25)

其双尺度方程的传递系数为

$$\{p_k\}_0^4 = \left\{ \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8} \right\}. \quad (11.26)$$

$\{\phi(t-n)\}$ 和 $\{\phi(2t-n)\}$ 的关系如图 11.7 所示.

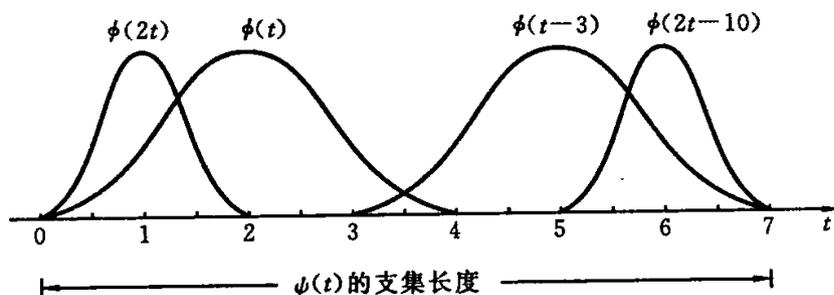


图 11.7 三次样条 $\{\phi(t-n)\}$ 和 $\{\phi(2t-n)\}$ 关系

由前面的分析可知, $\psi(t)$ 的支集长度为 $[0, 7]$ (参见图 11.7), $\psi(t)$ 关于 $t=7/2$ 对称, 三次样条半正交小波 $\psi(t)$ 的构造式为

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{10} q_k \phi(2t-k). \quad (11.27)$$

由图 11.7 可以看到, $\{\phi(t-n)\}_{-3}^6$ 与 $\psi(t)$ 有公共支集, 其正交性表现为

$$(\psi(t), \phi(t-n)) = 0, \quad n = -3, -2, \dots, 6;$$

再利用小波函数的对称性和振荡性, 即

$$q_k = q_{10-k}, \quad k = 0, 1, \dots, 5,$$

$$\sum_{k=\text{奇数}} q_k = -1,$$

$$\sum_{k=\text{偶数}} q_k = 1.$$

共列出十二个方程, 列出这些方程时要用到以下数据:

$$(\phi(t), \phi(t)) = \frac{2\,416}{5\,040},$$

$$(\phi(t), \phi(t \pm 1)) = \frac{1\,191}{5\,040},$$

$$(\phi(t), \phi(t \pm 2)) = \frac{120}{5\,040},$$

$$(\phi(t), \phi(t \pm 3)) = \frac{1}{5\,040},$$

$$(\phi(t), \phi(2t)) = \frac{7\,592}{8 \times 5\,040},$$

$$(\phi(t), \phi(2t-1)) = \frac{9\,241}{8 \times 5\,040},$$

$$(\phi(t), \phi(2t-2)) = \frac{12\,132}{8 \times 5\,040},$$

$$\begin{aligned}
 (\phi(t), \phi(2t-3)) &= \frac{7\,592}{8 \times 5\,040}, \\
 (\phi(t), \phi(2t-4)) &= \frac{3\,952}{8 \times 5\,040}, \\
 (\phi(t), \phi(2t-5)) &= \frac{1\,677}{2 \times 8 \times 5\,040}, \\
 (\phi(t), \phi(2t-6)) &= \frac{124}{2 \times 8 \times 5\,040}, \\
 (\phi(t), \phi(2t-7)) &= \frac{1}{2 \times 8 \times 5\,040}.
 \end{aligned}$$

最后解出

$$\{q_k\}_{k=0}^{10} = \left\{ \frac{1}{8!}, \frac{-124}{8!}, \frac{1\,677}{8!}, \frac{-7\,904}{8!}, \frac{18\,482}{8!}, \boxed{\frac{-24\,264}{8!}}, \text{偶对称} \right\}. \quad (11.28)$$

其中,方框中的元素是对称中心.

图 11.8 是关于三次样条尺度函数 $\phi(t)$ 及其半正交小波 $\psi(t)$ 的图形.

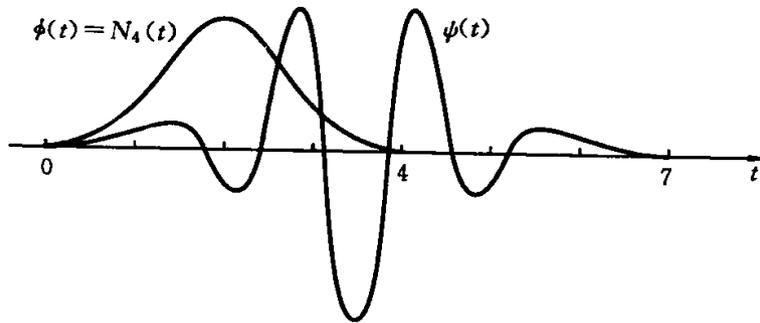


图 11.8 三次样条尺度函数 $\phi(t)$ 及其半正交小波 $\psi(t)$ 的图形

5. 样条半正交小波的理论推导结果

用代数方法构造样条半正交小波,形象直观,对尺度函数 $\phi(t)$ 和半正交小波函数 $\psi(t)$ 有更具体的认识,便于实际应用,构造过程中所用到的知识也是简单的;然而用代数方法去构造高阶样条的半正交小波是困难的.下面介绍文献[3]中有关的一般理论推导结果.

定理 11.1 设 $\phi(t) = N_m(t)$, $\psi(t)$ 是其半正交小波,它们分别满足双尺度方程式(11.8)和式(11.9),则

$$p_k = \begin{cases} 2^{-m+1} \binom{m}{k}, & 0 \leq k \leq m, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases} \quad (11.29)$$

$$q_k = \frac{(-1)^k}{2^{m-1}} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} N_{2m}(k+1-l), \quad k = 0, 1, \dots, 3m-2. \quad (11.30)$$

其中, $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都是有限支集的, 其支集长度为

$$\begin{aligned}\operatorname{supp} \phi(t) &= [0, m], \\ \operatorname{supp} \psi(t) &= [0, 2m - 1].\end{aligned}$$

$\psi(t)$ 有对称性, 对称中心在 $t = m - 1/2$ 处, 当 m 为偶数时它是偶对称的, 当 m 为奇数时它是奇对称的.

证明 先证明式(11.29).

因为
$$\hat{N}_m(\omega) = \left(\frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega} \right)^m,$$

$$N_m(t) = \sum_k p_k N_m(2t - k),$$

所以
$$\hat{N}_m(\omega) = \frac{1}{2} \left[\sum_k p_k e^{-ik\omega/2} \right] \hat{N}_m\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \sum_k p_k e^{-ik\omega/2} &= \left(\frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega} \right)^m \left(\frac{i\omega/2}{1 - e^{-i\omega/2}} \right)^m \\ &= \left(\frac{1 + e^{-i\omega/2}}{2} \right)^m \\ &= 2^{-m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} e^{-ik\omega/2}.\end{aligned}$$

这里采用了二项式展开系数的记号

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k! (m-k)!}.$$

于是, 用式(11.29)计算出 $\{p_k\}$ 关于 $m = 2, 3, 4$ 的情形, 正好是式(11.18)、式(11.22)和式(11.26)所表述的结果.

下面证明式(11.30).

这里要用到双尺度方程式(11.8)和式(11.9)的频域表示

$$\hat{\phi}(2\omega) = P(\omega) \hat{\phi}(\omega),$$

$$\hat{\psi}(2\omega) = Q(\omega) \hat{\phi}(\omega)$$

中的记号

$$P(\omega) = \frac{1}{2} \sum_k p_k e^{-ik\omega},$$

$$Q(\omega) = \frac{1}{2} \sum_k q_k e^{-ik\omega};$$

还要用到

$$\int_{\mathbf{R}} \phi(t) \phi(t-n) dt = \gamma_n \neq \delta_{n,0}$$

和相应的计算式

$$\int_{\mathbf{R}} N_m(t) N_m(t-n) dt = N_{2m}(m-n) = \gamma_n; \quad (11.31)$$

由 Fourier 变换的乘积定理, 有

$$\begin{aligned}\gamma_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} |\hat{\phi}(\omega)|^2 e^{in\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\omega} \left(\sum_l |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 \right) d\omega,\end{aligned}$$

将 γ_n 看做 Fourier 级数的系数, 即有

$$\begin{aligned}\gamma(\omega) &= \sum_n \gamma_n e^{-in\omega} \\ &= \sum_l |\hat{\phi}(\omega + 2l\pi)|^2.\end{aligned}$$

这样就可以利用半正交条件式(11.10), 即

$$\int_{\mathbf{R}} \phi(t-k)\psi(t) dt = 0$$

仿照式(8.25)的推导过程, 就由

$$Q(\omega) \overline{P(\omega)} \overline{\gamma(\omega)} + Q(\omega + \pi) \overline{P(\omega + \pi)} \overline{\gamma(\omega + \pi)} = 0$$

导出

$$Q(\omega) = e^{i\omega} \overline{P(\omega + \pi)} \overline{\gamma(\omega + \pi)}, \quad (11.32)$$

于是有

$$q_k = \sum_l (-1)^k p_{-l} \gamma_{l-k-1}.$$

这就推得式(11.30)的正确性.

用式(11.30)可计算出 $\{q_k\}$ 关于 $m=2, 3, 4$ 的情形, 这正好是式(11.20)、式(11.24)和式(11.28)所表述的结果.

11.4 样条半正交小波的分解、回复算法

应该看到, 由于样条小波是一种半正交小波, 它对函数空间的分解结构仍同于图 5.6 所示的正交分解结构; 但也应看到, 在各个小波子空间中, 描述小波分量无法利用基函数的平移正交性质.

1. 分解算法

已知 $f^j(t) = \sum c_k^j N_m(2^j t - k)$, 要求满足分解关系

$$f^j(t) = f^{j-1}(t) + g^{j-1}(t)$$

的分量表达式

$$f^{j-1}(t) = \sum c_k^{j-1} \phi_{j-1,k}(t),$$

$$g^{j-1}(t) = \sum d_k^{j-1} \psi_{j-1,k}(t),$$

或已知 $\{c_k^j\}$, 求 $\{c_k^{j-1}\}$ 和 $\{d_k^{j-1}\}$.

由于在分解算法推导中没有基函数的平移正交性可以利用, 所以先假设在子空间正交直和分解下的基本分解形式为

$$\phi(2t-l) = \sum_k [a_{l-2k} \phi(t-k) + b_{l-2k} \psi(t-k)], \quad (11.33)$$

再利用分量 $f^{j-1}(t) \in V_{j-1}$, $g^{j-1}(t) \in W_{j-1}$, $V_{j-1} \cap W_{j-1} = \{0\}$ 的关系获取分解公式. 具体地说, 一方面有

$$\begin{aligned} f^j(t) &= \sum_l c_l^j \phi(2^j t - l) \\ &= \sum_l c_l^j \left\{ \sum_k [a_{l-2k} \phi(2^{j-1} t - k) + b_{l-2k} \psi(2^{j-1} t - k)] \right\} \\ &= \sum_k \left[\sum_l a_{l-2k} c_l^j \right] \phi(2^{j-1} t - k) + \sum_k \left[\sum_l b_{l-2k} c_l^j \right] \psi(2^{j-1} t - k), \end{aligned}$$

另一方面有分解关系

$$\begin{aligned} f^j(t) &= f^{j-1}(t) + g^{j-1}(t), \\ f^{j-1}(t) &= \sum_k c_k^{j-1} \phi(2^{j-1} t - k), \\ g^{j-1}(t) &= \sum_k d_k^{j-1} \psi(2^{j-1} t - k), \end{aligned}$$

将上面诸式合并就有

$$\sum_k \left[\sum_l a_{l-2k} c_l^j - c_k^{j-1} \right] \phi(2^{j-1} t - k) + \sum_k \left[\sum_l b_{l-2k} c_l^j - d_k^{j-1} \right] \psi(2^{j-1} t - k) = 0,$$

所以利用 $V_{j-1} \cap W_{j-1} = \{0\}$ 就得到分解公式

$$\begin{cases} c_k^{j-1} = \sum_l a_{l-2k} c_l^j, \\ d_k^{j-1} = \sum_l b_{l-2k} c_l^j. \end{cases} \quad (11.34)$$

记 $\{c_k^j\} = C^j$, $\{d_k^j\} = D^j$, 式(11.34)所示的抽象形式为

$$\begin{aligned} C^{j-1} &= AC^j, \\ D^{j-1} &= BC^j, \end{aligned}$$

则式(11.34)所示的数据分解过程如图 11.9 所示.

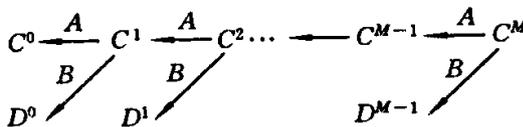


图 11.9 数据分解过程示意图

由式(11.34)可知, 使用样条小波时的数据分解过程基本类似于 Mallat 分解算法的过程, 但这里采用的是特殊的分解序列 $\{a_l\}$ 和 $\{b_l\}$. 应用式(11.33)可以计算分解序列 $\{a_l\}$ 和 $\{b_l\}$ 的数据. 具体做法是在式(11.33)两边用 $\{\phi(t-n)\}$ 作内积, 可获得用于求解 $\{a_l\}$ 的方程组; 在式(11.33)两边用 $\{\psi(t-n)\}$ 作内积, 可获得用于求解 $\{b_l\}$ 的方程组. 本书略去具体的求解过程, 仅列出常用的关于 $N_2(t)$ 和 $N_4(t)$ 所生成小波函数 $\psi(t)$ 的分解序列(见表 11.4)供直接选用.

表 11.4 分解算法中的数据 $\{a_k\}$ 和 $\{b_k\}$

k	$m=2$		$m=4$	
	a_k	b_k	a_k	b_k
1	0.683 012 701 892	0.866 025 403 784	0.893 162 856 314	-1.475 394 519 892
2	0.316 987 298 108	-0.316 987 298 108	0.400 680 825 467	0.468 422 596 633
3	-0.116 025 403 784	-0.232 050 807 569	-0.282 211 870 811	0.742 097 698 477
4	-0.084 936 490 539	0.084 936 490 539	-0.232 924 626 134	-0.345 770 890 775
5	0.031 088 913 246	0.062 177 826 491	0.129 083 571 218	-0.389 745 580 800
6	0.022 758 664 048	-0.022 758 664 047	0.126 457 446 356	0.196 794 277 304
7	-0.008 330 249 198	-0.016 660 498 395	-0.066 420 837 387	0.207 690 838 380
8	-0.006 098 165 652	0.006 098 165 652	-0.067 903 608 499	-0.106 775 803 373
9	0.002 232 083 545	0.004 464 167 091	0.035 226 101 674	-0.111 058 440 711
10	0.001 633 998 562	-0.001 633 998 561	0.036 373 586 989	0.057 330 952 254
11	-0.000 598 084 983	-0.001 196 169 967	-0.018 815 686 621	0.059 433 388 390
12	-0.000 437 828 595	0.000 437 828 595	-0.019 473 269 356	-0.030 709 700 871
13	0.000 160 256 388	0.000 320 512 777	0.010 066 747 520	-0.031 811 811 318
14	0.000 117 315 818	-0.000 117 315 818	0.010 424 052 187	0.016 440 944 687
15	-0.000 042 940 569	-0.000 085 881 139	-0.000 387 929 819	0.017 028 029 466
16	-0.000 031 434 679	0.000 031 434 678	-0.005 579 839 208	-0.008 800 839 839
17	0.000 011 505 891	0.000 023 011 782	0.002 883 979 478	-0.009 114 745 138
18	0.000 008 422 897	-0.000 008 422 897	0.002 986 784 625	0.004 710 957 034
19	-0.000 003 082 990	-0.000 006 165 980	-0.001 543 728 719	0.004 878 941 541
20	-0.000 002 256 905	0.000 002 256 905	-0.001 598 768 083	-0.002 521 687 975
21	0.000 000 826 079	0.000 001 652 158	0.000 826 326 663	-0.002 611 601 542

在使用表 11.4 中的数据时应注意以下几点：

(1) 数据 $\{a_k\}$ 是一种低通数字滤波器，它的作用是将 j 尺度层的数字信号 $\{c_k^j\}$ 分解为 $j-1$ 尺度层上的低频数字信号 $\{c_k^{j-1}\}$ 。 $\{a_k\}$ 是偶对称的，对称中心数据是 a_1 ，表中只列出了一半的数据，其下标 k 只是顺序编号，与其它的编号没有对应关系。

(2) 数据 $\{b_k\}$ 是一种高通数字滤波器，它的作用是将 $j+1$ 尺度层上的数字信号 $\{c_k^{j+1}\}$ 分解为 $j-1$ 尺度层上的高频数字信号 $\{d_k^{j-1}\}$ 。 $\{b_k\}$ 与小波函数 $\psi(t)$ 的对称性相同，对于 $m=2$ 和 $m=4$ 来说， $\{b_k\}$ 都是偶对称的。表中的 $\{b_k\}$ 仅列出一半的数据，其偶对称的中心是表中的 b_1 。

(3) 数据分解实际操作过程完全类似于正滤波器的分解情形,也不用顾及这些数字滤波器的对称中心该对准什么位置.可先将 $\{a_k\}$ 和 $\{b_k\}$ 做成靠模形式,从左向右在 j 尺度层上将靠模 $\{a_k\}$ 隔 2 平移作离散内积;也可用靠模 $\{a_k\}$ 和 $\{c_k^i\}$ 从左向右地作卷积再隔 2 取值,这样就实现了 $\{c_k^i\}$ 限制为低频数字信号 $\{c_k^{i-1}\}$.同样,用靠模 $\{b_k\}$ 按上述办法操作就可实现将 $\{c_k^i\}$ 限制为高频细节的数字信号 $\{d_k^{i-1}\}$.

2. 回复算法

已知
$$f^{j-1}(t) = \sum c_k^{j-1} N_m(2^{j-1}t - k),$$

$$g^{j-1}(t) = \sum d_k^{j-1} \psi_{j-1,k}(t),$$

要求

$$f^{j-1}(t) + g^{j-1}(t) = f^j(t),$$

$$f^j(t) = \sum c_k^j N_m(2^j t - k),$$

或已知 $\{c_k^{j-1}\}$ 和 $\{d_k^{j-1}\}$,求 $\{c_k^j\}$.

推导回复算法相对简单些.利用双尺度方程式(11.8)和式(11.9),有

$$\begin{aligned} f^{j-1}(t) + g^{j-1}(t) &= \sum_l [c_l^{j-1} \phi(2^{j-1}t - l) + d_l^{j-1} \psi(2^{j-1}t - l)] \\ &= \sum_l [c_l^{j-1} \sum_k p_k \phi(2^j t - 2l - k) + d_l^{j-1} \sum_k q_k \phi(2^j t - 2l - k)] \\ &= \sum_l \sum_k [c_l^{j-1} p_{k-2l} + d_l^{j-1} q_{k-2l}] \phi(2^j t - k) \\ &= \sum_k \left\{ \sum_l [p_{k-2l} c_l^{j-1} + q_{k-2l} d_l^{j-1}] \right\} \phi(2^j t - k). \end{aligned}$$

故利用 $f^j(t)$ 的表达式可得到回复公式

$$c_k^j = \sum_l [p_{k-2l} c_l^{j-1} + q_{k-2l} d_l^{j-1}]. \quad (11.35)$$

为了简略表明式(11.35)所示的回复过程,记式(11.35)的抽象形式为

$$C^j = PC^{j-1} + QD^{j-1},$$

则式(11.35)所示的回复过程如图 11.10 所示.

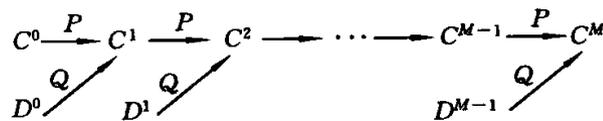


图 11.10 回复过程示意图

同样可以看出,式(11.35)所示的关于样条小波的回复过程基本类似于 Mallat 回复过程,但这里采用的回复序列 $\{p_k\}$ 和 $\{q_k\}$ 是样条函数及其小波的双尺度系数.这些双尺度系数在前面已经给出,为了方便应用,在表 11.5 中列出了常用的关于 $N_2(t)$ 和 $N_4(t)$ 情形的双尺度系数.注意,这些系数是对称的.表中仅列出了一半的数据.

表 11.5 双尺度方程系数即回复算法中的数据 $\{p_k\}$ 和 $\{q_k\}$

k	$m=2$		$m=4$	
	p_k	q_k	p_k	q_k
1	$\frac{2}{2}$	$\frac{20}{4!}$	$\frac{6}{8}$	$-\frac{24\ 264}{8!}$
2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{12}{4!}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{18\ 482}{8!}$
3		$\frac{2}{4!}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{7\ 904}{8!}$
4				$\frac{1\ 677}{8!}$
5				$-\frac{124}{8!}$
6				$\frac{1}{8!}$

回复过程的实际操作也是简便的. 按照式(11.35)的含义, 按照数据分解过程的理解, 在实现数据回复时, 先将 $\{p_k\}$ 和 $\{q_k\}$ 分别做成奇靠模 $\{p_{-(2k+1)}\}$ 、 $\{q_{-(2k+1)}\}$ 和偶靠模 $\{p_{-2k}\}$ 、 $\{q_{-2k}\}$; 用 $\{p_{-2k}\}$ 和 $\{c_i^{-1}\}$ 作卷积, 用 $\{q_{-2k}\}$ 和 $\{d_i^{-1}\}$ 作卷积, 叠加作为 j 尺度层偶编号节点处的信号值; 用 $\{p_{-(2k+1)}\}$ 和 $\{c_i^{-1}\}$ 作卷积, 用 $\{q_{-(2k+1)}\}$ 和 $\{d_i^{-1}\}$ 作卷积, 叠加作为 j 尺度层奇编号节点处的信号值.

作为本节结束语, 下面对样条半正交小波作总结和说明.

(1) 半正交样条小波不具备平移正交性, 但它除具备紧支性、光滑性之外, 还增加了对称性. 这种对称性为信号分析处理带来方便, 特别是在奇异点检测和数据压缩方面带来方便, 在图像的边缘处理方面带来方便.

(2) 样条小波半正交的分解算法中使用了低通数字滤波器 $\{a_k\}$ 和高通数字滤波器 $\{b_k\}$, 回复算法中使用了样条小波的双尺度系数 $\{p_k\}$ 和 $\{q_k\}$, 与正交小波分解回复算法中仅用到 $\{h_k\}$ 和 $\{g_k\}$ 相比, 这些分解和回复数据在使用中是不能混淆的. 同时还应看到, 分解过程中用到的数字滤波器 $\{a_k\}$ 和 $\{b_k\}$ 的数据量大, 回复过程中用到的数字滤波器 $\{p_k\}$ 和 $\{q_k\}$ 的数据量小.

(3) 按样条半正交小波分解的原意, 应先计算出细密分划层上对信号的插值系数 $\{c_n^i\}$, 再对其作不同尺度的分解, 计算 $\{c_n^i\}$ 的工作量是较大的. 正如正交小波分解选取初始数据那样, 在样条半正交小波分解中的初始数据也可直接选用样本值 $\{f(n)\}$ 作为 $\{c_n^i\}$, 因为在采样间隔细密时, $\{f(n)\}$ 和 $\{c_n^i\}$ 一样反应了信号的变化程度, 因为半正交样条小波的分解回复算法在理论上是对初始数据准确回复的, 所以直接采用样本值 $\{f(n)\}$ 作为信号分析处理的初始数据是简单易行的.

(4) 采用样条半正交小波也可形成小波包算法, 由此对信号可作出更细致的时-频分析.

11.5 插值样条小波及其快速算法

由于插值样条函数 $L_{2m}(t)$ 是基函数, $L_{2m}(t)$ 是对称的低通函数, $L'_{2m}(t)$ 必是带通函数, 又由于

$$L'_2(2t-1) = N_1(2t) - N_1(2t-1)$$

正是 Haar 小波基, 所以, $L_{2m}^{(m)}(2t-1)$ 是否可以构成小波基的问题就很自然被提出. 为此, 令

$$\psi(t) = L_{2m}^{(m)}(2t-1),$$

并具体考察两个问题.

(1) $\psi(t)$ 是不是由 $N_m(t)$ 生成的小波, 即要验证

$$(N_m(t-n), \psi(t)) = 0$$

的正确性;

(2) 若记

$$V_0 = \text{span}\{N_m(t-n)\},$$

$$W_0 = \text{span}\{\psi(t-n)\}_1,$$

$$V_1 = \text{span}\{2^{1/2}N_m(2t-n)\},$$

要验证 $V_1 = V_0 \oplus W_0$ 的正确性, 且要推导 $\psi(t)$ 由 $\{N_m(2t-n)\}$ 线性表示的双尺度方程.

对于第一个问题, 由于

$$\begin{aligned} (N_m(t-n), \psi(t)) &= \int_{\mathbf{R}} N_m(t-n) L_{2m}^{(m)}(2t-1) dt \\ &= \frac{(-1)^m}{2^m} \int_{\mathbf{R}} L_{2m}(2t-1) N_m^{(m)}(t-n) dt \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{1}{2^m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} \int_{\mathbf{R}} L_{2m}(2t-1) \delta(t-n-k) dt \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{1}{2^m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} L_{2m}(2n+2k-1) \\ &= 0, \end{aligned}$$

所以

$$W_0 = \text{span}\{\psi(t-n), n \in \mathbf{Z}\}$$

且

$$W_0 \perp V_0,$$

$$V_1 = V_0 \oplus W_0.$$

对于第二个问题, 关键是推导出 $\psi(t)$ 关于 $N_m(2t-k)$ 的双尺度方程. 为此要用到式(11.6)

$$L_{2m}(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \xi_k N_{2m}(t+m-k)$$

和公式

$$N_{2m}^{(m)}(t) = \sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{m}{l} N_m(t-l),$$

$$\begin{aligned}
 \text{于是有} \quad \psi(t) &= L_{2m}^{(m)}(2t-1) \\
 &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} \xi_k N_{2m}^{(m)}(2t-1-m-k) \\
 &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} \xi_k \sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{m}{l} N_m(2t-1+m-k-l) \\
 &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} q_n N_m(2t-n).
 \end{aligned}$$

$$\text{其中} \quad q_n = \sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{m}{l} \xi_{m+n-1-l}.$$

综上所述,可得到如下结论:记

$$\begin{aligned}
 V_j &= \text{span}\{\phi_{j,k} = 2^{j/2} N_m(2^j t - k), k \in \mathbf{Z}\}, \\
 W_j &= \text{span}\{\psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), k \in \mathbf{Z}\},
 \end{aligned}$$

则 $V_{j+1} = V_j \oplus W_j, V_j \perp W_j$. 其中, $\phi(t) = N_m(t)$ 称为样条尺度函数,它生成多分辨逼近系列 $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$; $\psi(t) = L_{2m}^{(m)}(2t-1)$ 是由插值样条函数 $L_{2m}(t)$ 构造的,所以称它为插值样条小波;它们满足双尺度方程

$$\begin{aligned}
 \phi(t) &= \sum p_k \phi(2t-k), \\
 \psi(t) &= \sum q_k \psi(2t-k), \\
 p_k &= \begin{cases} 2^{-m+1} \binom{m}{k}, & 0 \leq k \leq m, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases} \\
 q_k &= \sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{m}{l} \xi_{m+n-1-l}.
 \end{aligned}$$

其中, ξ_l 由式(11.6)给出.

应该看到,半正交样条小波是一种紧支的对称的小波. 紧支性使分解回复算法的计算量减少,对称性使某些实际的数据分析过程表现出所需要的性质,半正交性使其分解回复算法基本类似于 Mallat 算法. 本节讨论的插值样条小波也是一种半正交的对称的小波,但失去了紧支性质;它的半正交性质和对称性质在信号分解回复中的作用同于半正交样条小波. 但是,由于它不是有限支集的,所以在应用中必须对 $\{q_k\}$ 作有限截断,这样用插值样条小波作分解、回复算法同于半正交样条小波的情形,只是要求采用不同的分解回复数据.

利用插值样条小波,同样可仿照图 5.6 和图 5.8 做出多尺度上的小波分解算法和小波包分解算法.

第 12 章 双正交小波及其快速算法

大家知道, Daubechies 正交小波在紧支性和正交性方面有着良好的表现, 但它缺少对称性, 这一缺点使它在信号的边缘检测方面表现不佳; 样条半正交小波虽具有对称性, 但它用于数据分解的数字滤波器的数据量大, 这一缺点使它在信号的密集边缘检测方面表现不佳; 在实际应用中人们希望构造出具有对称性、光滑性、紧支性的小波, 特别地希望分解和回复的数字滤波器的数据量要小.

本章介绍的双正交小波数字滤波器就具有对称性、较高的消失矩、数据量小等优点, 它是数字信号处理和图像处理的理想的数学工具之一.

本章从数据分解及其完全回复的条件出发, 通俗易懂地介绍了双正交多分辨逼近(MRA)的概念及双正交数字滤波器的构造方法. 值得强调的是, 只有仔细地理解了双正交小波分解的概念, 才能有效地使用双正交数字滤波器.

12.1 双正交多分辨逼近

大家知道, 若给定两个不同的尺度函数 $\phi(t)$ 和 $\tilde{\phi}(t)$, 则每一个尺度函数都可生成一个多分辨逼近序列.

对 $\phi(t)$ 生成的多分辨逼近序列 $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ 来说, 它存在如下关系:

$$\begin{aligned} V_j &\subset V_{j+1} \subset \cdots \subseteq L^2(\mathbf{R}), \\ W_j &= V_{j+1}/V_j, \\ V_j &= \text{span}\{\phi_{j,k}(t) \mid \phi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\phi(2^j t - k), k \in \mathbf{Z}\}, \\ W_j &= \text{span}\{\psi_{j,k}(t) \mid \psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k), k \in \mathbf{Z}\}, \\ &\begin{cases} \phi(t) = \sum h_n \phi(2t - n), \\ \psi(t) = \sum g_n \phi(2t - n). \end{cases} \end{aligned} \quad (12.1)$$

对 $\tilde{\phi}(t)$ 生成的多分辨逼近序列 $\{\tilde{V}_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ 来说, 它存在如下关系:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_j &\subset \tilde{V}_{j+1} \subset \cdots \subseteq L^2(\mathbf{R}) \\ \tilde{W}_j &= \tilde{V}_{j+1}/\tilde{V}_j, \\ \tilde{V}_j &= \text{span}\{\tilde{\phi}_{j,k}(t) \mid \tilde{\phi}_{j,k}(t) = 2^{j/2}\tilde{\phi}(2^j t - k), k \in \mathbf{Z}\}, \\ \tilde{W}_j &= \text{span}\{\tilde{\psi}_{j,k}(t) \mid \tilde{\psi}_{j,k}(t) = 2^{j/2}\tilde{\psi}(2^j t - k), k \in \mathbf{Z}\}, \\ &\begin{cases} \tilde{\phi}(t) = \sum \tilde{h}_n \tilde{\phi}(2t - n), \\ \tilde{\psi}(t) = \sum \tilde{g}_n \tilde{\phi}(2t - n). \end{cases} \end{aligned} \quad (12.2)$$

1. 双正交多分辨逼近的定义

称满足关系

$$(\phi(t-k), \tilde{\phi}(t-l)) = \delta_{k,l} \quad (12.3)$$

的尺度函数 $\phi(t)$ 和 $\tilde{\phi}(t)$ 是互为对偶尺度函数。

由对偶尺度函数 $\phi(t)$ 和 $\tilde{\phi}(t)$ 生成的多分辨逼近序列 $\{V_j\}$ 和 $\{\tilde{V}_j\}$ 称为对偶多分辨逼近序列。

在对偶多分辨逼近序列中, 若 $V_j \perp \tilde{W}_j, \tilde{V}_j \perp W_j$, 则称 $\{V_j\}$ 和 $\{\tilde{V}_j\}$ 是双正交的多分辨逼近序列。

2. 低通数字滤波器和尺度函数的对偶关系

利用双尺度方程式(12.1)、式(12.2)和尺度函数对偶关系式(12.3)可推得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_m h_{m-2k} \sum_n \tilde{h}_{n-2l} &= \delta_{m,n} \\ \iff (\phi(t-k), \tilde{\phi}(t-l)) &= \delta_{k,l}. \end{aligned} \quad (12.4)$$

事实上

$$\begin{aligned} (\phi(t-k), \tilde{\phi}(t-l)) &= \left(\sum_i h_i \phi(2t-2k-i), \sum_s \tilde{h}_s \tilde{\phi}(2t-2l-s) \right) \\ &= \sum_m h_{m-2k} \sum_n \tilde{h}_{n-2l} (\phi(2t-m), \tilde{\phi}(2t-n)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_m h_{m-2k} \sum_n \tilde{h}_{n-2l} (\phi(t-m), \tilde{\phi}(t-n)) \end{aligned}$$

则由 ϕ 和 $\tilde{\phi}$ 的对偶性推得式(12.4)。

称满足式(12.4)的 $\{h_n\}$ 和 $\{\tilde{h}_n\}$ 是对偶低通数字滤波器。

另外, 由 $\phi(\cdot)$ 和 $\tilde{\phi}(\cdot)$ 的对偶关系容易推证 $\phi_{j,k}(t)$ 和 $\tilde{\phi}_{j,l}(t)$ 也是对偶的。

3. 高通数字滤波器和小波函数的对偶关系

利用双尺度方程, 仿照式(12.4)的推导过程易知

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_m g_{m-2k} \sum_n \tilde{g}_{n-2l} &= \delta_{m,n} \\ \iff (\psi(t-k), \tilde{\psi}(t-l)) &= \delta_{k,l}. \end{aligned} \quad (12.5)$$

称满足式(12.5)的 $\{g_n\}$ 和 $\{\tilde{g}_n\}$ 是对偶高通数字滤波器。

由 ϕ 和 $\tilde{\phi}$ 的对偶关系容易推证 $\psi_{j,k}(t)$ 和 $\tilde{\psi}_{j,l}(t)$ 也是对偶的。

4. 尺度函数和小波函数的双正交条件

尺度函数和小波函数的双正交关系为

$$\begin{aligned} \sum_m g_{m-2k} \tilde{h}_{m-2l} &= 0 \\ \iff (\psi(t-k), \tilde{\phi}(t-l)) &= 0, \\ \sum_m \tilde{g}_{m-2k} h_{m-2l} &= 0 \end{aligned} \quad (12.6)$$

$$\iff (\tilde{\psi}(t-k), \phi(t-l)) = 0. \quad (12.7)$$

下面仅证明式(12.6),关于式(12.7)的证明是类似的,仍利用双尺度方程和对偶关系,有

$$\begin{aligned} (\psi(t-k), \tilde{\phi}(t-l)) &= \left(\sum_i g_i \phi(2t-2k-i), \sum_j \tilde{h}_j \tilde{\phi}(2t-2l-j) \right) \\ &= \sum_m g_{m-2k} \sum_n \tilde{h}_{n-2l} (\phi(2t-m), \tilde{\phi}(2t-n)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_m g_{m-2k} \tilde{h}_{m-2l} = 0. \end{aligned}$$

什么样的数字滤波器才能保证尺度函数和小波函数是双正交的呢?受正交小波中低通数字滤波器和高通数字滤波器在形式上的启发,令

$$\begin{cases} g_n = (-1)^n \tilde{h}_{1-n}, \\ \tilde{g}_n = (-1)^n h_{1-n}, \end{cases} \quad (12.8)$$

就可保证尺度函数和小波函数的双正交要求.事实上,

$$\begin{aligned} (\psi(t-k), \tilde{\phi}(t-l)) &= \frac{1}{2} \sum_m g_{m-2k} \tilde{h}_{m-2l} \\ &= \frac{1}{2} \sum_m (-1)^{m-2k} \tilde{h}_{1-m+2k} \tilde{h}_{m-2l} \\ &= \frac{1}{2} \sum_m (-1)^m \tilde{h}_{1-m} \tilde{h}_{m-2(k+l)}; \end{aligned}$$

若令 $m-2(k+l) = 1-n$, 则又有

$$(\psi(t-k), \tilde{\phi}(t-l)) = \frac{1}{2} \sum_n (-1)^{1-n} \tilde{h}_{n-2(k+l)} \tilde{h}_{1-n};$$

比较这两个式子可以看出,奇数项求和和偶数项求和的符合相反,这样就证得

$$(\psi(t-k), \tilde{\phi}(t-l)) = 0.$$

同样可证得

$$(\tilde{\psi}(t-k), \phi(t-l)) = 0.$$

5. 函数(模拟信号)的双正交小波级数形式

综合前面的讨论可知,只要给定对偶的低通数字滤波器 $\{h_n\}$ 和 $\{\tilde{h}_n\}$,令相应的高通数字滤波器 $g_n = (-1)^n \tilde{h}_{1-n}$, $\tilde{g}_n = (-1)^n h_{1-n}$;或者只要给定对偶的尺度函数 $\phi(t)$ 和 $\tilde{\phi}(t)$,令相应的小波函数为

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \sum_n g_n \phi(2t-n) \\ &= \sum_n (-1)^n \tilde{h}_{1-n} \phi(2t-n), \\ \tilde{\psi}(t) &= \sum_n \tilde{g}_n \tilde{\phi}(2t-n) \\ &= \sum_n (-1)^n h_{1-n} \tilde{\phi}(2t-n), \end{aligned}$$

即可确定双正交多分辨逼近关系(见图 12.1).

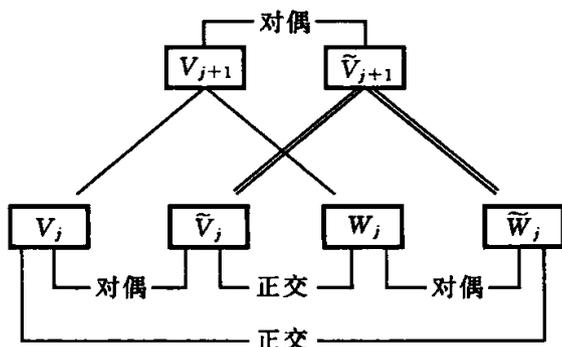


图 12.1 双正交小波子空间的相互关系

在双正交多分辨逼近中, $L^2(\mathbf{R})$ 可分解为小波子空间的直和, 即

$$L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} W_j,$$

$$L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} \tilde{W}_j.$$

相应地, 任意的信号 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$, 既可描述为

$$\begin{cases} f(t) = \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} d_k^j \psi_{j,k}(t), \\ d_k^j = (f(t), \tilde{\psi}_{j,k}(t)), \end{cases} \quad (12.9)$$

也可描述为

$$\begin{cases} f(t) = \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} \tilde{d}_k^j \tilde{\psi}_{j,k}(t), \\ \tilde{d}_k^j = (f(t), \psi_{j,k}(t)), \end{cases} \quad (12.10)$$

其中, 展开系数 d_k^j 或 \tilde{d}_k^j 是利用小波函数 $\tilde{\psi}(t)$ 和 $\psi(t)$ 的对偶关系得到的, 或者说是利用子空间的双正交关系得到的. 因此, 用双正交小波将信号表示为式(12.9)或式(12.10)的形式, 称为信号的双正交小波分解.

12.2 双正交小波的分解算法和回复算法

信号可以按式(12.9)作级数展开, 此式又可理解为

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{j+1}(t) \in \tilde{V}_{j+1} &\rightarrow f(t) \in L^2(\mathbf{R}), \\ \tilde{f}^{j+1}(t) &= \sum_n c_n^{j+1} \tilde{\phi}_{j+1,n}(t) \\ &= \sum_n c_n^j \tilde{\phi}_{j,n} + \sum_n d_n^j \tilde{\psi}_{j,n}, \end{aligned} \quad (12.11)$$

其中, 为了获得 c_n^j 和 d_n^j , 可利用双正交性质, 在式(12.11)两边分别用 $\phi_{j,n}(t)$ 和 $\psi_{j,n}(t)$ 作内积, 就有

$$\begin{aligned} c_n^j &= (\tilde{f}^{j+1}(t), \phi_{j,n}(t)) \\ &= (f(t), \phi_{j,n}(t)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_n^j &= (\tilde{f}^{j+1}(t), \psi_{j,n}(t)) \\ &= (f(t), \psi_{j,n}(t)). \end{aligned}$$

下面按式(12.11) 的表示形式讨论相应的分解、回复算法.

对于数据分解过程来说,有

$$\begin{aligned} c_n^j &= (f, \phi_{j,n}) \\ &= (f, 2^{-1/2} \sum_{\xi} h_{\xi} \phi_{j+1,2n+\xi}) \\ &= 2^{-1/2} \sum_k h_{k-2n} (f, \phi_{j+1,k}) \\ &= 2^{-1/2} \sum_k h_{k-2n} c_k^{j+1}; \end{aligned}$$

同理可得

$$d_n^j = 2^{-1/2} \sum_k g_{k-2n} c_k^{j+1}.$$

对于数据回复过程来说,对式(12.11) 利用双尺度方程,有

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{j+1}(t) &= \sum_k c_k^{j+1} \tilde{\phi}_{j+1,k} \\ &= \sum_n c_n^j \tilde{\phi}_{j,n} + \sum_n d_n^j \tilde{\psi}_{j,n} \\ &= \sum_n c_n^j 2^{-1/2} \sum_{\xi} \tilde{h}_{\xi} \tilde{\phi}_{j+1,2n+\xi} + \sum_n d_n^j 2^{-1/2} \sum_{\xi} \tilde{g}_{\xi} \tilde{\phi}_{j+1,2n+\xi} \\ &= \sum_k \left[2^{-1/2} \sum_n \tilde{h}_{k-2n} c_n^j + 2^{-1/2} \sum_n \tilde{g}_{k-2n} d_n^j \right] \tilde{\phi}_{j+1,k}. \end{aligned}$$

总结以上结果,有双正交分解,回复算法 I.

$$\begin{cases} c_n^j = 2^{-1/2} \sum_k h_{k-2n} c_k^{j+1}, \\ d_n^j = 2^{-1/2} \sum_k g_{k-2n} c_k^{j+1}, \\ c_k^{j+1} = 2^{-1/2} \sum_n \tilde{h}_{k-2n} c_n^j + 2^{-1/2} \sum_n \tilde{g}_{k-2n} d_n^j. \end{cases} \quad (12.12)$$

算法I是采用滤波器组 $\{h_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 作分解过程,用滤波器组 $\{\tilde{h}_n\}$ 和 $\{\tilde{g}_n\}$ 作回复过程.

为了更简明地理解这个双正交算法,现将分解过程简记为

$$C^j = HC^{j+1}, \quad D^j = GC^{j+1},$$

其中, C^j 、 D^j 和 C^{j+1} 分别表示数据 $\{c_n^j\}$ 、 $\{d_n^j\}$ 和 $\{c_n^{j+1}\}$, H 和 G 分别表示式(12.12)中相应运算的算子.同样,回复过程也可简记为

$$C^{j+1} = \tilde{H}^* C^j + \tilde{G}^* D^j,$$

其中, \tilde{H}^* 和 \tilde{G}^* 分别表示式(12.12)中相应运算的算子.在这种简洁表述下,双正交分解算法 I 可用图 12.2 表示.

信号也可表示为式(12.10) 的双正交小波级数形式,式(12.10) 可理解为

$$\begin{aligned} f^{j+1}(t) &\in V_{j+1} \rightarrow f(t) \in L^2(\mathbf{R}), \\ f^{j+1}(t) &= \sum \tilde{c}_k^{j+1} \phi_{j+1,k}, \end{aligned}$$

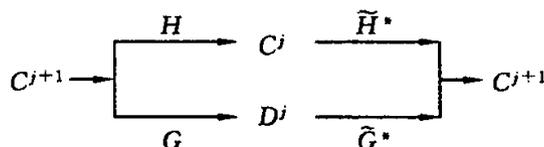


图 12.2 双正交分解、回复算法 I 的示意图

$$f^{j+1}(t) = \sum_n \tilde{c}_n^j \phi_{j,n} + \sum_n \tilde{d}_n^j \psi_{j,n}. \quad (12.13)$$

于是仿照前面的推导就可得到.

双正交分解、回复算法 II

$$\begin{cases} \tilde{c}_n^j = 2^{-1/2} \sum_k \tilde{h}_{k-2n} \tilde{c}_k^{j+1}, \\ \tilde{d}_n^j = 2^{-1/2} \sum_k \tilde{g}_{k-2n} \tilde{c}_k^{j+1}, \\ \tilde{c}_k^{j+1} = 2^{-1/2} \sum_n h_{k-2n} \tilde{c}_n^j + 2^{-1/2} \sum_n g_{k-2n} \tilde{d}_n^j. \end{cases} \quad (12.14)$$

算法 II 是采用滤波器组 $\{\tilde{h}_n\}$ 和 $\{\tilde{g}_n\}$ 作分解过程,用滤波器组 $\{h_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 作回复过程.算法 II 的实现过程可用图 12.3 表示.

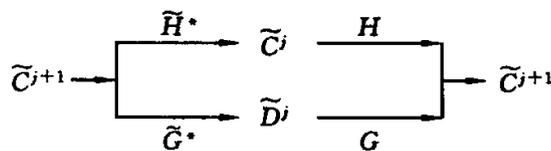


图 12.3 双正交分解、回复算法 II 的示意图

从数据完全回复的角度来观察,上述算法 I 和 II 是等价的;然而在考虑分解效果时,易知用消失矩阶数高的滤波器作数据分解能较好地表现信号的细节.

12.3 双正交滤波器的性质和要求

为了加深对双正交小波的理解,为了构造和应用双正交小波,本节将对双正交数字滤波器和频域滤波器的表现特性作归类总结,还将对双正交滤波器的应用要求作分析总结.

1. 双正交数字滤波器的性质

在双正交多分辨逼近中有两组双正交的数字滤波器,即 $\{h_n\}$ 、 $\{g_n\}$ 和 $\{\tilde{h}_n\}$ 、 $\{\tilde{g}_n\}$.

它们满足双尺度方程,见式(12.1)和式(12.2).

它们满足关于低通、高通数字滤波器的基本关系,即

$$\begin{cases} \sum_n h_n = 2, & \sum_{n=\text{奇数}} h_n = \sum_{n=\text{偶数}} h_n = 1, \\ \sum_n g_n = 0, & -\sum_{n=\text{奇数}} g_n = \sum_{n=\text{偶数}} g_n = 1; \end{cases} \quad (12.15)$$

$$\begin{cases} \sum_n \tilde{h}_n = 2, & \sum_{n=\text{奇数}} \tilde{h}_n = \sum_{n=\text{偶数}} \tilde{h}_n = 1, \\ \sum_n g_n = 0, & -\sum_{n=\text{奇数}} g_n = \sum_{n=\text{偶数}} g_n = 1. \end{cases} \quad (12.16)$$

它们满足对偶关系, 见式(12.4) 和式(12.5).

它们满足双正交关系, 见式(12.6)、式(12.7) 和式(12.8).

它们还满足数据的完全回复关系, 即

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \sum_n \tilde{h}_{k-2n} \sum_l h_{l-2n} + \frac{1}{2} \sum_n \tilde{g}_{k-2n} \sum_l g_{l-2n} = \delta_{k,l}, \\ \frac{1}{2} \sum_n h_{k-2n} \sum_l \tilde{h}_{l-2n} + \frac{1}{2} \sum_n g_{k-2n} \sum_l \tilde{g}_{l-2n} = \delta_{k,l}. \end{cases} \quad (12.17)$$

下面证明式(12.17) 中的第一式. 因为由式(12.12) 有

$$\begin{aligned} c_k^1 &= 2^{-1/2} \sum_n \tilde{h}_{k-2n} c_n^0 + 2^{-1/2} \sum_l \tilde{g}_{k-2n} d_n^0 \\ &= \left[\frac{1}{2} \sum_n \tilde{h}_{k-2n} \sum_l h_{l-2n} + \frac{1}{2} \sum_n \tilde{g}_{k-2n} \sum_l g_{l-2n} \right] c_k^1, \end{aligned}$$

于是证得第一式.

同样可简单推证式(12.17) 中的第二式.

2. 双正交滤波器的频域性质

数字滤波器 $\{h_n\}$ 、 $\{g_n\}$ 、 $\{\tilde{h}_n\}$ 、 $\{\tilde{g}_n\}$ 的频域表现分别记为

$$H(\omega) = \frac{1}{2} \sum_n h_n e^{-i\omega n},$$

$$G(\omega) = \frac{1}{2} \sum_n g_n e^{-i\omega n},$$

$$\tilde{H}(\omega) = \frac{1}{2} \sum_n \tilde{h}_n e^{-i\omega n},$$

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{1}{2} \sum_n \tilde{g}_n e^{-i\omega n},$$

其中, $H(\omega)$ 和 $\tilde{H}(\omega)$ 是频域中的低通滤波器, $G(\omega)$ 和 $\tilde{G}(\omega)$ 是频域中的高通滤波器, 它们都是以 2π 为周期的函数.

它们满足相应双尺度方程的频域表现, 即

$$\begin{cases} \hat{\phi}(2\omega) = H(\omega) \hat{\phi}(\omega), \\ \hat{\psi}(2\omega) = G(\omega) \hat{\phi}(\omega); \end{cases} \quad (12.18)$$

$$\begin{cases} \hat{\tilde{\phi}}(2\omega) = \tilde{H}(\omega) \hat{\tilde{\phi}}(\omega), \\ \hat{\tilde{\psi}}(2\omega) = \tilde{G}(\omega) \hat{\tilde{\phi}}(\omega). \end{cases} \quad (12.19)$$

它们满足双正交的频域表现, 由式(12.8) 有

$$\begin{cases} G(\omega) = \tilde{H}(\omega + \pi) e^{-i\omega}, \\ \tilde{G}(\omega) = \tilde{H}(\omega + \pi) e^{-i\omega}. \end{cases} \quad (12.20)$$

$$\begin{cases} H(0) = 1, & H(\pm\pi) = 0, & G(0) = 0, \\ \tilde{H}(0) = 1, & \tilde{H}(\pm\pi) = 0, & \tilde{G}(0) = 0. \end{cases} \quad (12.21)$$

由式(12.6)和式(12.7)有

$$\begin{cases} \tilde{H}(\omega)\tilde{G}(\omega) + H(\omega)\bar{G}(\omega) = 0, \\ \tilde{H}(\omega)\bar{H}(\omega) + \tilde{G}(\omega)\bar{G}(\omega) = 1. \end{cases} \quad (12.22)$$

若将此式与正交小波情形的式(8.23)和式(8.24)比较,可知在双正交情形中两个低通滤波器的关于 $\tilde{H}(\omega)\bar{H}(\omega)$ 的频域效果,正好等同于正交小波情形中一个低通滤波器关于 $H(\omega)\bar{H}(\omega)$ 的频域效果.

3. 对双正交滤波器的其它要求

双正交小波在正交小波基础上放宽了条件,所以人们既可利用正交小波的表现推知双正交小波的某些特点,又可对双正交小波提出其它的便于应用的要求,例如要求它同时具备紧支性、对称性和光滑性.

1) 关于紧支性要求

由双尺度方程可知,有限长度的低通数字滤波器对应着紧支集的尺度函数,于是:

若 $\{h_n\}, N_1 \leq n \leq N_2$, 则 $\phi(t)$ 的支集为 $[N_1, N_2]$;

若 $\{\tilde{h}_n\}, \tilde{N}_1 \leq n \leq \tilde{N}_2$, 则 $\tilde{\phi}(t)$ 的支集为 $[\tilde{N}_1, \tilde{N}_2]$.

在此基础上,由 $g_n = (-1)^n \tilde{h}_{1-n}, \tilde{g}_n = (-1)^n h_{1-n}$ 以及关于 $\phi(t)$ 和 $\tilde{\phi}(t)$ 的双尺度方程,可推知:

$\{g_n\}, 1 - \tilde{N}_2 \leq n \leq 1 - \tilde{N}_1, \psi(t)$ 的支集长度为 $|\tilde{N}_2 - \tilde{N}_1 + N_2 - N_1|$;

$\{\tilde{g}_n\}, 1 - N_2 \leq n \leq 1 - N_1, \tilde{\psi}(t)$ 的支集长度为 $|N_2 - N_1 + \tilde{N}_2 - \tilde{N}_1|$.

因此,若要求低通数字滤波器是有限长度的,就可保证双正交小波是紧支的.

2) 关于对称性要求

紧支集正交小波除 Haar 小波外都是不对称的,但在双正交小波中正交性和紧支性是可以同时具备的.

根据双尺度方程可知,若要求低通数字滤波器 $\{h_n\}$ 和 $\{\tilde{h}_n\}$ 是对称的,就可保证对偶尺度函数 $\phi(t)$ 和 $\tilde{\phi}(t)$ 的对称性,也可保证双正交小波 $\psi(t)$ 和 $\tilde{\psi}(t)$ 的对称性.

3) 关于消失矩的要求

借鉴正交小波的表现,可知关于高阶消失矩双正交小波的结论:

$\psi(t)$ 有 p 阶消失矩,即 $\int t^k \psi(t) dt = 0, k = 0, 1, \dots, p-1$

$\Leftrightarrow \hat{\psi}^{(k)}(0) = 0, 0 \leq k \leq p$

$\Leftrightarrow G(\omega)$ 在 $\omega = 0$ 处有 p 重零点,其中 $G(\omega) = e^{-i\omega} \bar{H}(\omega + \pi)$

$\Leftrightarrow \tilde{H}(\omega)$ 在 $\omega = \pi$ 处有 p 重零点, 其中 $\tilde{H}(\omega) = \frac{1}{2} \sum \tilde{h}_n e^{-i\omega n}$.

因此, 若要求 $\tilde{H}(\pi)$ 有 p 重零点, 再由 $\tilde{H}(\omega)$ 确定 $\{\tilde{h}_n\}$, 就可保证 $\psi(t)$ 具有 p 阶消失矩.

4) 关于双正交小波应用次序的要求

双正交小波可采用两种分解、回复公式, 即

$$f(t) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} (f, \psi_{j,k}) \tilde{\psi}_{j,k}(t)$$

或

$$f(t) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} (f, \tilde{\psi}_{j,k}) \psi_{j,k}(t),$$

而 $\psi(\cdot)$ 和 $\tilde{\psi}(\cdot)$ 可能具有不同阶次的消失矩, 应该采用哪一个公式实现分解、回复过程为好?

现以第一个公式为例来说明问题, 该公式用 $\{h_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 作数据分解, 用 $\{\tilde{h}_n\}$ 和 $\{\tilde{g}_n\}$ 作数据回复.

若 $\psi(t)$ 具有 p 阶消失矩, 因分解过程中的小波分量 (f, ψ) 是由 $\{g_n\}$ 来实现的, 则小波分量此时可以表现 $f^{(i)}(t)$, $i \leq p$ 的突变细节, 对 $f(t)$ 更高阶导数的突变细节不能表现. 因此, 高阶消失矩小波的小波变换 (f, ψ) 对表现更多的信号突变细节是有利的.

设 $\tilde{\psi}(t)$ 具有 \tilde{p} 阶消失矩, 由于消失矩阶数对应于 $\tilde{\psi}(t)$ 的光滑程度, 用 $\tilde{\psi}(t)$ 的小波级数表现 $f(t)$ 的逼近度就是由 $\tilde{\psi}(t)$ 的光滑程度决定的, 所以高阶消失矩小波用于回复过程有利于提高对原信号的逼近程度.

12.4 样条双正交小波的代数构造方法

大家知道, 在已知尺度函数 $\phi(t)$ 的情况下去构造双正交小波, 其关键是构造对偶的尺度函数 $\tilde{\phi}(t)$, 本节介绍的代数构造方法浅显易懂, 读者可从中对双正交小波产生更加具体的认识.

尺度函数 $\phi(t)$ 及其对偶的尺度函数 $\tilde{\phi}(t)$, 它们所满足的双尺度方程为

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sum_n h_n \phi(2t - n), \\ \tilde{\phi}(t) &= \sum_n \tilde{h}_n \tilde{\phi}(2t - n); \end{aligned}$$

它们的对偶关系为

$$(\tilde{\phi}(t), \phi(t - k)) = \delta_{0,k}.$$

在双正交小波的应用中, 人们只要知道低通数字滤波器 $\{h_n\}$ 和 $\{\tilde{h}_n\}$, 不需要知道 $\tilde{\phi}(t)$ 的具体形式, 就可按照 $g_n = (-1)^n \tilde{h}_{1-n}$ 和 $\tilde{g}_n = (-1)^n h_{1-n}$ 构造出相应的高通数字滤波器 $\{g_n\}$ 和 $\{\tilde{g}_n\}$; 从而可用 $\{h_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 作数据分解, 用 $\{\tilde{h}_n\}$ 和 $\{\tilde{g}_n\}$ 作数据回复; 也可用 $\{\tilde{h}_n\}$ 和 $\{\tilde{g}_n\}$ 作数据分解, 用 $\{h_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 作数据回复.

应该明白,在已知 $\phi(t)$ 的情况下仅利用对偶关系去求解 $\tilde{\phi}(t)$ 是不充分的,只有对 $\tilde{\phi}(t)$ 附加种种要求才能确定它,因此 $\tilde{\phi}(t)$ 是不唯一的. 还应该明白, $\tilde{\phi}(t)$ 的具体形式显然是不知道的,但只要确定出它的双尺度方程的组合系数 $\{\tilde{h}_n\}$,就可利用它的双尺度方程具体地作出 $\tilde{\phi}(t)$ 的图形.

1. 线性样条函数双正交低通数字滤波器的代数构造方法

已知线性样条函数作为尺度函数,它的双尺度方程为

$$\phi(t) = \sum_{n=-1}^1 h_n \phi(2t-n), \quad t \in [-1, 1],$$

$$\{h_n\}_{n=-1}^1 = \left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \right\},$$

要求确定其对偶的低通数字滤波器 $\{\tilde{h}_n\}$.

(1) 设 $\{\tilde{h}_n\}_{n=-2}^2$ 有 5 个数据, $\tilde{\phi}(t)$ 的双尺度方程为

$$\tilde{\phi}(t) = \sum_{n=-2}^2 \tilde{h}_n \tilde{\phi}(2t-n), \quad t \in [-2, 2],$$

为直观起见,图 12.4 表明了 $\phi(t)$ 和 $\{\phi(2t-n)\}$ 的组合关系,表明了 $\tilde{\phi}(t)$ 和 $\{\tilde{\phi}(2t-n)\}$ 的组合关系;图 12.5 表明了 $\tilde{\phi}(t)$ 需要和哪些 $\{\phi(t-n)\}$ 考虑内积关系;图 12.6 表明了当考虑 $(\phi(t+1), \tilde{\phi}(t))$ 时哪些 $\{\phi(2t-n)\}$ 和 $\{\tilde{\phi}(2t-n)\}$ 存在内积关系.

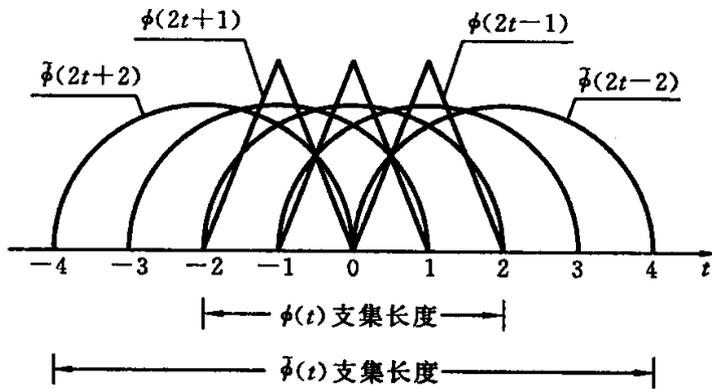


图 12.4 关于 $\phi(t)$ 和 $\tilde{\phi}(t)$ 的双尺度关系示意图

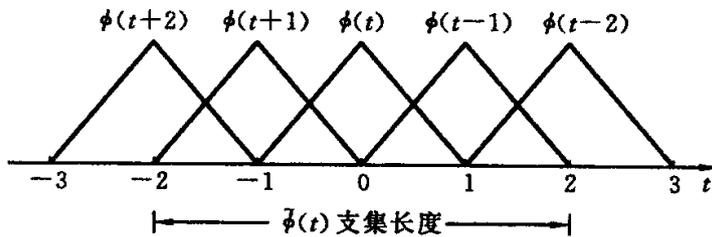
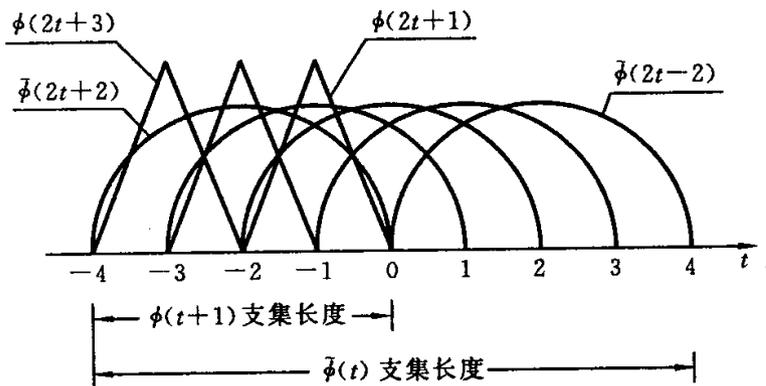


图 12.5 $(\phi(t-n), \tilde{\phi}(t))$ 有公共支集的示意图

图 12.6 $(\phi(t+1), \tilde{\phi}(t))$ 在细尺度上关于支集表现的示意图

考虑 $\{\phi(t-n)\}$ 和 $\tilde{\phi}(t)$ 的对偶关系. 由图 12-5 可知, $\{\phi(t-n)\}_2^2$ 与 $\tilde{\phi}(t)$ 有公共支集; 若 $\tilde{\phi}(t)$ 是对称的, 则由对偶关系可列出如下三个方程:

$$(\phi(t+2), \tilde{\phi}(t)) = 0,$$

$$(\phi(t+1), \tilde{\phi}(t)) = 0,$$

$$(\phi(t), \tilde{\phi}(t)) = 1.$$

代入双尺度方程, 注意: 在细尺度层上对偶关系表现为

$$(\phi(2t-k), \tilde{\phi}(2t-n)) = -\delta_{k,n},$$

这种对偶关系用图形表现是很直观的, 当 $\phi(2t-k)$ 的中心点与 $\tilde{\phi}(2t-n)$ 的中心点对齐时, 其内积非零; 当它们的中心点错位时, 其内积为零. 这样, 上述三个方程中仅有后两个方程有意义, 其具体表现为

$$\begin{cases} \frac{1}{2}h_0 \tilde{h}_{-2} + \frac{1}{2}h_1 \tilde{h}_{-1} = 0, \\ \frac{1}{2}h_{-1} \tilde{h}_{-1} + \frac{1}{2}h_0 \tilde{h}_0 + \frac{1}{2}h_1 \tilde{h}_1 = 1. \end{cases}$$

若假设 $\{\tilde{h}_n\}$ 是偶对称的低通数字滤波器, 于是可添加如下相关的方程:

$$\tilde{h}_1 + \tilde{h}_{-1} = 1,$$

$$\tilde{h}_1 = \tilde{h}_{-1},$$

$$\tilde{h}_2 + \tilde{h}_0 + \tilde{h}_{-2} = 1,$$

$$\tilde{h}_2 = \tilde{h}_{-2}.$$

由上述方程可解得

$$\{\tilde{h}_{-2}, \tilde{h}_{-1}, \tilde{h}_0, \tilde{h}_1, \tilde{h}_2\} = \left\{ \frac{-1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{4} \right\}.$$

在 $\tilde{\phi}(t)$ 双尺度方程确定的情况下是可以画出 $\tilde{\phi}(t)$ 的图形的, 但在实际应用中不需要它的具体形式, 这里不再画出它的图形.

(2) 设 $\{\tilde{h}_n\}_4^4$ 有九个数据, 即 $\tilde{\phi}(t), t \in [-4, 4]$, 那么利用对偶关系, 可列出以下五个方程:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}h_{-1}\tilde{h}_{-1} + \frac{1}{2}h_0\tilde{h}_0 + \frac{1}{2}h_1\tilde{h}_1 = 1, \\ \frac{1}{2}h_{-1}\tilde{h}_1 + \frac{1}{2}h_0\tilde{h}_2 + \frac{1}{2}h_1\tilde{h}_3 = 0, \\ \frac{1}{2}h_{-1}\tilde{h}_3 + \frac{1}{2}h_0\tilde{h}_4 = 0, \\ \frac{1}{2}h_{-1}\tilde{h}_{-3} + \frac{1}{2}h_0\tilde{h}_{-2} + \frac{1}{2}h_1\tilde{h}_{-1} = 0, \\ \frac{1}{2}h_0\tilde{h}_{-4} + \frac{1}{2}h_1\tilde{h}_{-3} = 0. \end{cases}$$

添加如下关于低通数字滤波器要求的方程:

$$\begin{aligned} \sum \tilde{h}_{2n} &= 1, \\ \sum \tilde{h}_{2n+1} &= 1, \end{aligned}$$

再添加如下偶对称要求的方程:

$$\tilde{h}_n = \tilde{h}_{-n}, \quad n = 1, 2, 3, 4,$$

由此解得

$$\{\tilde{h}_n\}_{-4}^4 = \left\{ \frac{-1}{4} + \frac{1}{2}\tilde{h}_1, \frac{1}{2} - \tilde{h}_1, \frac{-1}{4}, \tilde{h}_1, 2 - \tilde{h}_1, \text{偶对称} \right\}.$$

人们可以调整参数 \tilde{h}_1 得到不同的 $\{\tilde{h}_n\}$. 为了增强时域的局部化作用,可要求 $\{\tilde{h}_n\}$ 中部数据相对大些,两旁的数据相对小些. 例如,取 $\tilde{h}_1 = 1$,则有

$$\{\tilde{h}_n\} = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}, 1, 1, 1, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4} \right\};$$

取 $\tilde{h}_1 = 19/32$,则有

$$\{\tilde{h}_n\} = \left\{ \frac{3}{64}, \frac{-3}{32}, \frac{-1}{4}, \frac{19}{32}, \frac{45}{32}, \frac{19}{32}, \frac{-1}{4}, \frac{-3}{32}, \frac{3}{64} \right\}.$$

(3) 设 $\{\tilde{h}_n\}_{-6}^6$ 有13个数据, $\tilde{\phi}(t)$ 的支集为 $t \in [-6, 6]$,仍利用对偶关系列出方程组,再添补关于低通、偶对称表现的方程组,解得

$$\{\tilde{h}_n\}_{-6}^6 = \left\{ \frac{-1}{2}\tilde{h}_5, \tilde{h}_5, \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\tilde{h}_0, \frac{-3}{2} + h_0 - \tilde{h}_5, \frac{-1}{4} + \frac{1}{2}\tilde{h}_5, 2 - \tilde{h}_0, \tilde{h}_0, \text{偶对称} \right\}.$$

同样可调整参数 \tilde{h}_0 和 \tilde{h}_5 来改变 $\{\tilde{h}_n\}$ 的形式结构,以便于各种应用的目的. 例如取 $\tilde{h}_0 = 175/128, \tilde{h}_5 = 5/218$,则有

$$\{\tilde{h}_n\}_{-6}^6 = \left\{ \frac{-5}{512}, \frac{5}{256}, \frac{17}{256}, \frac{39}{256}, \frac{-123}{512}, \frac{81}{128}, \frac{175}{128}, \text{偶对称} \right\}.$$

2. 二次样条函数双正交低通数字滤波器的代数构造方法

已知 $\phi(t)$ 是二次样条函数,它满足双尺度方程,其低通数字滤波器为 $\{h_n\}_0^3 = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4} \right\}$,要确定其对偶的低通数字滤波器 $\{\tilde{h}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

(1) 设 $\{\tilde{h}_n\}_0^3$ 有四个数据, 即 $\tilde{\phi}(t), t \in [0, 3]$, 简单作图直观理解, 据对偶关系可列出方程组

$$\begin{cases} (\phi(t), \tilde{\phi}(t)) = 1, \\ (\phi(t-1), \tilde{\phi}(t)) = 0, \\ (\phi(t+1), \tilde{\phi}(t)) = 0. \end{cases}$$

代入双尺度方程, 有

$$\begin{cases} \frac{1}{2}h_0\tilde{h}_0 + \frac{1}{2}h_1\tilde{h}_1 + \frac{1}{2}h_2\tilde{h}_2 + \frac{1}{2}h_3\tilde{h}_3 = 1, \\ \frac{1}{2}h_0\tilde{h}_2 + \frac{1}{2}h_1\tilde{h}_3 = 0, \\ \frac{1}{2}h_2\tilde{h}_0 + \frac{1}{2}h_3\tilde{h}_1 = 0. \end{cases}$$

添补如下关于低通数字滤波器要求的方程:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_0 + \tilde{h}_2 &= 1, \\ \tilde{h}_1 + \tilde{h}_3 &= 1, \end{aligned}$$

再如下添补偶对称要求的方程:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_0 &= \tilde{h}_3, \\ \tilde{h}_1 &= \tilde{h}_2, \end{aligned}$$

由上述诸方程可解得

$$\{\tilde{h}_n\}_0^3 = \left\{ \frac{-1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{-1}{2} \right\}.$$

(2) 设 $\{\tilde{h}_n\}_{-2}^5$ 有八个数据, 即 $\tilde{\phi}(t), t \in [-1, 4]$, 通过简单作图并根据对偶关系可列出方程组

$$\begin{cases} (\phi(t), \tilde{\phi}(t)) = 1, \\ (\phi(t-1), \tilde{\phi}(t)) = 0, \\ (\phi(t-2), \tilde{\phi}(t)) = 0, \\ (\phi(t+1), \tilde{\phi}(t)) = 0, \\ (\phi(t+2), \tilde{\phi}(t)) = 0. \end{cases}$$

代入双尺度方程, 有

$$\begin{cases} \frac{1}{2}h_0\tilde{h}_0 + \frac{1}{2}h_1\tilde{h}_1 + \frac{1}{2}h_2\tilde{h}_2 + \frac{1}{2}h_3\tilde{h}_3 = 1, \\ \frac{1}{2}h_0\tilde{h}_2 + \frac{1}{2}h_1\tilde{h}_3 + \frac{1}{2}h_2\tilde{h}_4 + \frac{1}{2}h_3\tilde{h}_5 = 0, \\ \frac{1}{2}h_0\tilde{h}_4 + \frac{1}{2}h_1\tilde{h}_5 = 0, \\ \frac{1}{2}h_0\tilde{h}_{-2} + \frac{1}{2}h_1\tilde{h}_{-1} + \frac{1}{2}h_2\tilde{h}_0 + \frac{1}{2}h_3\tilde{h}_1 = 0, \\ \frac{1}{2}h_2\tilde{h}_{-2} + \frac{1}{2}h_3\tilde{h}_{-1} = 0. \end{cases}$$

添补如下关于 $\{\tilde{h}_n\}$ 是偶对称低通数字滤波器的基本关系:

$$\begin{aligned}\tilde{h}_{-1} + \tilde{h}_1 + \tilde{h}_3 + \tilde{h}_5 &= 1, \\ \tilde{h}_{-2} + \tilde{h}_0 + \tilde{h}_2 + \tilde{h}_4 &= 1, \\ \tilde{h}_{-2} &= \tilde{h}_5, \\ \tilde{h}_{-1} &= \tilde{h}_4, \\ \tilde{h}_0 &= \tilde{h}_3, \\ \tilde{h}_1 &= \tilde{h}_2,\end{aligned}$$

由上述诸方程组可解得

$$\{\tilde{h}_n\}_{-3}^4 = \left\{ \frac{-1}{3} \tilde{h}_3, \tilde{h}_3, \frac{-1}{2} - \tilde{h}_3, \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \tilde{h}_3, \text{偶对称} \right\}.$$

人们可调整参数,使得 $\{\tilde{h}_n\}_{-3}^4$ 这一低通滤波器满足应用方面的要求.

12.5 样条双正交小波的频域构造方法

设样条尺度函数为 $\phi(t)$, 其对偶尺度函数为 $\tilde{\phi}(t)$, 它们的双尺度方程的频域表示形式为

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(2\omega) &= H(\omega) \hat{\phi}(\omega), \\ \hat{\tilde{\phi}}(2\omega) &= \tilde{H}(\omega) \hat{\tilde{\phi}}(\omega),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}H(\omega) &= \frac{1}{2} \sum_n h_n e^{-i\omega n}, \\ \tilde{H}(\omega) &= \frac{1}{2} \sum_n \tilde{h}_n e^{-i\omega n},\end{aligned}$$

它们应满足双正交小波在频域中的分频和回复关系

$$\tilde{H}(\omega)\bar{H}(\omega) + \tilde{H}(\omega + \pi)\bar{H}(\omega + \pi) = 1. \quad (12.23)$$

在频域中若能利用式(12.23), 利用已知的 $H(\omega)$ 求得 $\tilde{H}(\omega)$, 则利用 $\tilde{H}(\omega)$ 的表达式可以求得相应的对偶的低通数字滤波器 $\{\tilde{h}_n\}$, 从而可以确定 $\tilde{\phi}(t)$ 和 $\psi(t)$. 另一方面, 根据双正交性质, $H(\omega)$ 和 $\tilde{H}(\omega)$ 在 $\omega = \pi$ 处关于零点的重数分别决定了 $\phi(t)$ 和 $\tilde{\phi}(t)$, 也分别决定了 $\tilde{\psi}(t)$ 和 $\psi(t)$ 的消失矩阶数. 在此认识的基础上, 下面重点讨论样条函数的频域表达式.

对于 p 阶样条函数 $\phi(t) = N_p(t)$ 来说, 已知

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\omega) &= \exp\left(\frac{-i\epsilon\omega}{2}\right) \left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}\right)^p, \\ H(\omega) &= \exp\left(\frac{-i\epsilon\omega}{2}\right) \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^p,\end{aligned}$$

其中, $H(\omega)$ 由关系式 $\hat{\phi}(2\omega) = H(\omega) \hat{\phi}(\omega)$ 求得; p 为偶数时 $\epsilon = 0$, p 为奇数时 $\epsilon =$

1. 由此式可判定线性样条函数($p = 2$)、二次样条函数($p = 3$)和三次样条函数($p = 4$)分别具有二阶、三阶和四阶消失矩。

由式(12.39)分析计算(过程见文献[8],略去)得

$$\tilde{H}(\omega) = \sqrt{2} \exp\left(\frac{-i\epsilon\omega}{2}\right) \left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^{\tilde{p}} \sum_{k=0}^{q-1} \left(\frac{q-1+k}{k}\right) \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{2k},$$

其中, \tilde{p} 是 $\tilde{H}(\omega)$ 在 $\omega = \pi$ 处的重根数,即 $\tilde{\phi}(\omega)$ 的消失矩阶数; $q = (p + \tilde{p})/2$ 。

最后,由 $H(\omega)$ 和 $\tilde{H}(\omega)$ 的表达式计算出相应的双正交低通数字滤波器 $\{h_n\}$ 和 $\{\tilde{h}_n\}$;同时得到 $\phi(t)$ 和 $\tilde{\phi}(t)$ 的消失矩阶数,即 $\tilde{\psi}(t)$ 和 $\psi(t)$ 的消失矩阶数分别为 p 和 \tilde{p} ;下面将介绍几个利用频域性质构造的双正交的低通数字滤波器。

1. 线性样条函数的几个不同消失矩的双正交数字滤波器

对于线性样条函数 $\phi(t)$,其消失矩 $p = 2$,由其双尺度方程所决定的低通数字滤波器为

$$\{h_n\}_{-1}^1 = \left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \right\}.$$

其对偶的尺度函数为 $\tilde{\phi}(t)$ 。当 $\tilde{\phi}(t)$ 消失矩阶数 $\tilde{p} = 2$ 时,由其双尺度方程所决定的低通数字滤波器为

$$\{\tilde{h}_n\}_{-2}^2 = \left\{ \frac{-1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right\};$$

当 $\tilde{\phi}(t)$ 消失矩阶数 $\tilde{p} = 4$ 时,相应的低通数字滤波器为

$$\{\tilde{h}_n\}_{-4}^4 = \left\{ \frac{3}{64}, \frac{-3}{32}, \frac{-1}{4}, \frac{19}{32}, \frac{45}{32}, \text{偶对称} \right\};$$

当 $\tilde{\phi}(t)$ 消失矩阶数 $\tilde{p} = 6$ 时,相应的低通数字滤波器为

$$\{\tilde{h}_n\}_{-6}^6 = \left\{ \frac{-5}{512}, \frac{5}{256}, \frac{17}{256}, \frac{-39}{256}, \frac{-123}{512}, \frac{81}{128}, \frac{175}{128}, \text{偶对称} \right\}.$$

在图 12-7 中画出了当 $\phi(t)$ 的消失矩 $p = 2$ 和 $\tilde{\phi}(t)$ 的消失矩 $\tilde{p} = 4$ 情形的两个双正交小波 $\tilde{\psi}(t)$ 和 $\psi(t)$ 的图形。

2. 二次样条函数的几个不同消失矩的双正交数字滤波器

对于二次样条函数 $\phi(t)$,其消失矩 $p = 3$,由其双尺度方程所决定的低通数字滤波器为

$$\{h_n\}_{-1}^2 = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4} \right\}.$$

当其对偶尺度函数 $\tilde{\phi}(t)$ 的消失矩阶数 $\tilde{p} = 3$ 时,由其双尺度方程所决定的低通数字滤波器为

$$\{\tilde{h}_n\}_{-3}^3 = \left\{ \frac{3}{32}, \frac{-9}{32}, \frac{-7}{32}, \frac{45}{32}, \frac{45}{32}, \text{偶对称} \right\};$$

当 $\tilde{\phi}(t)$ 消失矩阶数 $\tilde{p} = 5$ 时,相应的低通数字滤波器为

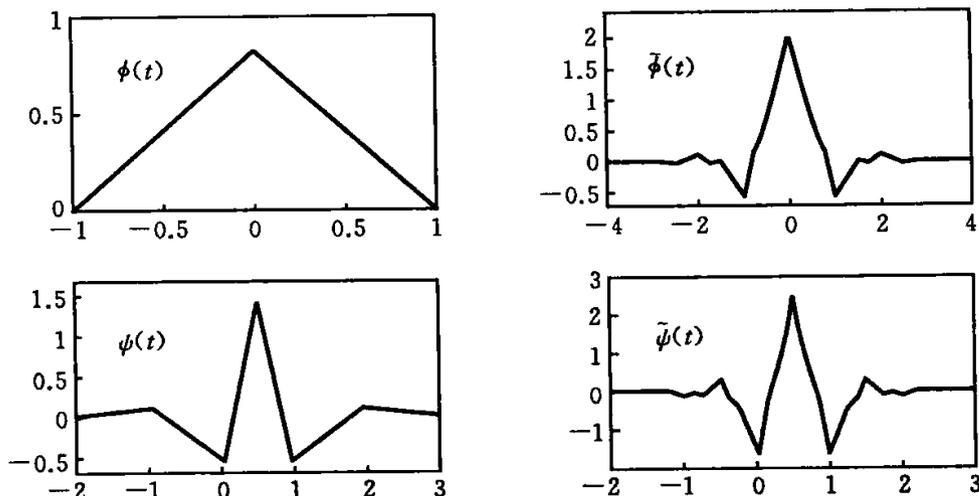


图 12.7 由山形函数构造出来的一种双正交小波的图形

$$\{\tilde{h}_n\}_{-5}^6 = \left\{ \frac{-5}{256}, \frac{15}{256}, \frac{19}{256}, \frac{-97}{256}, \frac{-13}{128}, \frac{175}{128}, \frac{75}{128}, \text{偶对称} \right\}.$$

3. 三次样条函数的几个不同消失矩的双正交数字滤波器

对于三次样条函数 $\phi(t)$, 其消失矩阶数 $p = 4$, 由其双尺度方程决定的低通数字滤波器为

$$\{h_n\}_{-3}^3 = \{0.091\ 271\ 763\ 114, 0.057\ 543\ 526\ 228, 0.591\ 271\ 763\ 114, 1.115\ 087\ 052\ 458, \text{偶对称}\}.$$

对偶尺度函数为 $\tilde{\phi}(t)$, 当 $\tilde{\phi}(t)$ 的消失矩阶数 $p = 4$ 时, 由其双尺度方程所决定的低通数字滤波器为

$$\{\tilde{h}_n\}_{-4}^4 = \{0.053\ 497\ 514\ 822, -0.033\ 728\ 236\ 886, -0.156\ 446\ 533\ 058, 0.533\ 728\ 236\ 886, 1.205\ 898\ 036\ 472, \text{偶对称}\}.$$

12.6 双正交小波提高消失矩的方法

本节介绍的方法能有效地提高双正交小波的消失矩, 也能构造出新的双正交小波, 该方法无论在理解还是在构造双正交小波方面都是富有启发性的.

1. 提高双正交小波消失矩的可能性

对于双正交的频域滤波器 $H(\omega)$ 、 $\tilde{H}(\omega)$ 、 $G(\omega)$ 和 $\tilde{G}(\omega)$ 来说, $H(\omega)$ 及其对偶的 $\tilde{H}(\omega)$ 都是低通的频域滤波器, $G(\omega)$ 和 $\tilde{G}(\omega)$ 是由规则

$$\begin{aligned} G(\omega) &= e^{-i\omega} \tilde{H}(\omega + \pi), \\ \tilde{G}(\omega) &= e^{-i\omega} \tilde{H}(\omega + \pi) \end{aligned}$$

随之确定的, 若改变某个频域滤波器 $\tilde{H}(\omega)$ 的形式, 只要双正交滤波器组还满足频域中的关于分频和回复的特性, 满足式(12.23), 则它们仍然是双正交的.

基于这个理由和式(12.23)的形式特点, 令 $H(\omega)$ 和 $\tilde{G}(\omega)$ 不变, 引进新的滤波

器 $L(2\omega)$, 且令

$$\begin{cases} \tilde{H}_{\text{new}}(\omega) = \tilde{H}(\omega) + \tilde{G}(\omega)\bar{L}(2\omega), \\ G_{\text{new}}(\omega) = G(\omega) - H(\omega)L(2\omega), \end{cases} \quad (12.24)$$

那么新的滤波器组 $H(\omega)$ 、 $G_{\text{new}}(\omega)$ 和 $\tilde{H}_{\text{new}}(\omega)$ 、 $\tilde{G}(\omega)$ 是否是双正交的呢?

为此, 将这个新的滤波器组代入式(12.23), 有

$$\begin{aligned} & \tilde{H}_{\text{new}}(\omega)\bar{H}(\omega) + \tilde{G}(\omega)\bar{G}_{\text{new}}(\omega) \\ &= (\tilde{H}(\omega) + \tilde{G}(\omega)\bar{L}(2\omega))\bar{H}(\omega) + \tilde{G}(\omega)(\bar{G}(\omega) - \bar{H}(\omega)\bar{L}(2\omega)) \\ &= \tilde{H}(\omega)\bar{H}(\omega) + \tilde{G}(\omega)\bar{G}(\omega) = 1. \end{aligned}$$

由此可见, 频域滤波器组 $H(\omega)$ 、 $G_{\text{new}}(\omega)$ 和 $\tilde{H}_{\text{new}}(\omega)$ 、 $\tilde{G}(\omega)$ 仍然是双正交的.

由于 $\tilde{H}_{\text{new}}(\omega)$ 对应着 $\tilde{\phi}_{\text{new}}(t)$, $G_{\text{new}}(\omega)$ 对应着 $\psi_{\text{new}}(t)$, $\tilde{\phi}_{\text{new}}(t)$ 对应着 $\psi_{\text{new}}(t)$, 于是

$$\begin{aligned} & \psi_{\text{new}}(t) \text{ 具有 } p \text{ 阶消失矩} \\ & \iff \tilde{H}_{\text{new}}(\pi) = 0 \text{ 有 } p-1 \text{ 重零点} \\ & \iff G_{\text{new}}(0) = 0 \text{ 有 } p-1 \text{ 重零点} \\ & \iff G_{\text{new}}(\omega) \text{ 在 } \omega = 0 \text{ 处的零阶至 } p-2 \text{ 阶导数值全为零.} \end{aligned}$$

因此, 引用 $L(2\omega)$ 可能使 $G_{\text{new}}(0) = 0$ 的零点重数得到提高, 这样就可以达到提高 $G_{\text{new}}(\omega)$ 消失矩阶数的目的了.

要设计出的 $G_{\text{new}}(\omega)$ 在 $\omega = 0$ 处比 $G(\omega)$ 有更高阶的零点重数, 对 $L(2\omega)$ 有什么要求呢?

(1) 要保证 $\tilde{H}_{\text{new}}(\omega)$ 和 $G_{\text{new}}(\omega)$ 仍然分别是低通和高通频域滤波器, 应要求

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\text{new}}(0) &= 1, \\ \tilde{H}_{\text{new}}(\pi) &= 0, \\ G_{\text{new}}(0) &= 0, \end{aligned}$$

从而由式(12.39)推知

$$L(0) = L(\pi) = 0,$$

$L(2\omega)$ 是 π 周期的函数,

由于 $H(\omega)$ 、 $G(\omega)$ 、 $\tilde{H}(\omega)$ 、 $\tilde{G}(\omega)$ 都是以 2π 为周期的函数, $L(2\omega)$ 是以 π 为周期的函数, 所以在式(12.40)中引入的频域滤波器用 $L(2\omega)$ 表示.

(2) 要求 $G_{\text{new}}(0) = 0$ 有更高阶零点重数, 就必须要求 $L(0) = 0$ 有更高阶零点重数.

(3) 要求 $G_{\text{new}}(\omega)$ 具有对称性, 在 $H(\omega)$ 和 $G(\omega)$ 对称性要求下, 还必须对 $L(2\omega)$ 施加对称性要求.

2. 单向提升消失矩的双正交小波快速算法

设原有已知的双正交频域滤波器 $H(\omega)$ 、 $G(\omega)$ 、 $\tilde{H}(\omega)$ 、 $\tilde{G}(\omega)$, 相应的数字滤波

器为 $\{h_n\}$ 、 $\{g_n\}$ 、 $\{\tilde{h}_n\}$ 、 $\{\tilde{g}_n\}$ ，相应的滤波器算子为 H 、 G 、 \tilde{H} 、 \tilde{G} ，相应的尺度函数和小波函数为 $\phi(t)$ 、 $\psi(t)$ 、 $\tilde{\phi}(t)$ 、 $\tilde{\psi}(t)$ 。按式(12.24)作单向提升消失矩的变换，经单向提升后的新的双正交频域滤波器为 $H(\omega)$ 、 $G^\oplus(\omega)$ 、 $\tilde{H}^\oplus(\omega)$ 、 $\tilde{G}(\omega)$ ；新的数字滤波器为 $\{h_n\}$ 、 $\{g_n^\oplus\}$ 、 $\{\tilde{h}_n^\oplus\}$ 、 $\{\tilde{g}_n\}$ ；新的数字滤波器算子为 H 、 G^\oplus 、 \tilde{H}^\oplus 、 \tilde{G} ；新的尺度函数和小波函数为 $\phi(t)$ 、 $\psi^\oplus(t)$ 、 $\tilde{\phi}^\oplus(t)$ 、 $\tilde{\psi}(t)$ 。还记与 $L(2\omega)$ 相应的数字滤波器算子为 L 。

按式(12.24)作单向提升变换，提升后的双正交数字滤波器算子可表示为

$$\begin{cases} H = H, & \tilde{G} = \tilde{G}, \\ \tilde{H}^\oplus = \tilde{H} + \tilde{G}L, \\ G^\oplus = G - HL. \end{cases} \quad (12.25)$$

现用 H 和 G^\oplus 作数据分解，用 \tilde{H}^\oplus 和 \tilde{G} 作数据回复，就有单向提升的双正交小波分解、回复算法为

$$\begin{cases} C^j = HC^{j+1}, \\ D^j = G^\oplus C^{j+1} = GC^{j+1} - LC^j, \\ C^{j+1} = \tilde{H}^\oplus C^j + \tilde{G} D^j, \\ \quad = \tilde{H} C^j + \tilde{G}(LC^j + D^j). \end{cases} \quad (12.26)$$

这种新的双正交分解、回复过程如图 12.8 所示，其中两图的分解、回复过程是等效的。

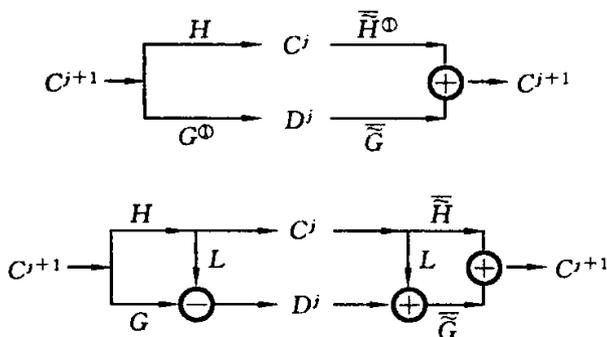


图 12.8 单向提升的双正交小波分解、回复算法的实现过程

读者不难看出，单向提升变换式(12.40)不改变 H 和 \tilde{G} ，即不改变 $\phi(t)$ 和 $\tilde{\psi}(t)$ ；而是将 \tilde{H} 改变为 \tilde{H}^\oplus ，将 $\tilde{\phi}(t)$ 改变为 $\tilde{\phi}^\oplus(t)$ ；将 G 改变为 G^\oplus ，将 $\psi(t)$ 改变为 $\psi^\oplus(t)$ ；只要选择算子 L 适当，即可提高 $\tilde{\phi}^\oplus(t)$ 和 $\psi^\oplus(t)$ 的消失矩。同时不难看出，在式(12.41)和图 12.8 所示的单向提升的双正交快速算法中，人们仅需在原有双正交处理中增加较少的运算量，就可获得采用高阶消失矩 $\tilde{\phi}^\oplus(t)$ 和 $\psi^\oplus(t)$ 的变换结果，从而增加了对细节信号的表现能力。

3. 双向提升消失矩的双正交小波快速算法

正如前面所讨论的，对于某个给定的双正交频域滤波器 $H(\omega)$ 、 $G(\omega)$ 、 $\tilde{H}(\omega)$ 、

$\tilde{G}(\omega)$, 可作一次提升变换, 将其变为 $H(\omega)$ 、 $G^\oplus(\omega)$ 、 $\tilde{H}^\oplus(\omega)$ 、 $\tilde{G}(\omega)$, 其中 $H(\omega)$ 和 $\tilde{G}(\omega)$ 没有发生变化, $G(\omega)$ 和 $\tilde{H}(\omega)$ 分别改变为 $G^\oplus(\omega)$ 和 $\tilde{H}^\oplus(\omega)$; 这组经提升变换后的频域滤波器仍然是双正交的, 它满足双正交条件, 即

$$\tilde{H}^\oplus(\omega)\bar{H}(\omega) + \tilde{G}(\omega)G^\oplus(\omega) = 1.$$

同样, 人们可以在双正交频域滤波器 $H(\omega)$ 、 $G^\oplus(\omega)$ 、 $\tilde{H}^\oplus(\omega)$ 、 $\tilde{G}(\omega)$ 的基础上, 不改变 $G^\oplus(\omega)$ 和 $\tilde{H}^\oplus(\omega)$, 仅提升变换 $H(\omega)$ 和 $\tilde{G}(\omega)$, 这样就可获得更新的双正交频域滤波器 $H^\oplus(\omega)$ 、 $G^\oplus(\omega)$ 、 $\tilde{H}^\oplus(\omega)$ 、 $\tilde{G}^\oplus(\omega)$; 变换的具体形式为

$$\begin{cases} H^\oplus(\omega) = H(\omega) + G^\oplus(\omega)\bar{S}(2\omega), \\ \tilde{G}^\oplus(\omega) = \tilde{G}(\omega) - \tilde{H}^\oplus(\omega)S(2\omega); \end{cases} \quad (12.27)$$

其中 $S(2\omega)$ 是新引进的, 它的作用应同于第一次提升变换中所引进 $L(2\omega)$ 的作用, 要保证

$$\begin{aligned} H^\oplus(0) &= 1, \\ H^\oplus(\pi) &= 0, \\ \tilde{G}^\oplus(0) &= 0, \end{aligned}$$

且要保证 $\tilde{G}^\oplus(0) = 0$ 的零点重数高于 $\tilde{G}(0) = 0$ 的零点重数, 由此推知 $S(2\omega)$ 的最低要求为

$$S(0) = S(\pi) = 0.$$

第二次提升变换所获得的频域滤波器 $H^\oplus(\omega)$ 、 $G^\oplus(\omega)$ 、 $\tilde{H}^\oplus(\omega)$ 、 $\tilde{G}^\oplus(\omega)$ 是双正交的, 这既可以从两次提升变换形式相同的事实中得到判断, 也可以直接验证其以下双正交条件:

$$\begin{aligned} & \tilde{H}^\oplus(\omega)\bar{H}^\oplus(\omega) + \tilde{G}^\oplus(\omega)\bar{G}^\oplus(\omega) \\ &= \tilde{H}^\oplus(\omega)(\bar{H}(\omega) + \bar{G}^\oplus(\omega)S(2\omega)) + (\tilde{G}(\omega) - \tilde{H}^\oplus(\omega)S(2\omega))\bar{G}^\oplus(\omega) \\ &= \tilde{H}^\oplus(\omega)\bar{H}(\omega) + \tilde{H}^\oplus(\omega)\bar{G}^\oplus(\omega)S(2\omega) \\ & \quad + \tilde{G}(\omega)\bar{G}^\oplus(\omega) - \tilde{H}^\oplus(\omega)\bar{G}^\oplus(\omega)S(2\omega) \\ &= \tilde{H}^\oplus(\omega)\bar{H}(\omega) + \tilde{G}(\omega)\bar{G}^\oplus(\omega) = 1. \end{aligned}$$

第二次提升变换得到了 $\tilde{G}^\oplus(\omega)$, 它所对应的小波函数 $\tilde{\psi}^\oplus(t)$ 将比原来的小波函数 $\tilde{\psi}(t)$ 具有更高阶消失矩.

记第二次提升变换后的滤波器算子分别为 H^\oplus 、 G^\oplus 、 \tilde{H}^\oplus 、 \tilde{G}^\oplus , S 是用于提升的滤波器算子, 于是用 H^\oplus 和 G^\oplus 作数据分解, 用 \tilde{H}^\oplus 和 \tilde{G}^\oplus 作数据回复时, 就有双向提升的双正交小波分解、回复算法为

$$\begin{cases} D^j = G^\oplus C^{j+1} \\ C^j = H^\oplus C^{j+1} = HC^{j+1} + G^\oplus \bar{S}C^{j+1} = HC^{j+1} + \bar{S}D^j, \\ C^{j+1} = \tilde{H}^\oplus C^j + \tilde{G}^\oplus D^j = \tilde{H}^\oplus * C^j + \tilde{G}^\oplus * D^j - \tilde{H}^\oplus \bar{S}D^j \\ \quad = \tilde{H}^\oplus (C^j - \bar{S}D^j) + \tilde{G}^\oplus D^j. \end{cases} \quad (12.28)$$

据此可知,图 12.9 所示的两个数据分解、回复过程是等效的。

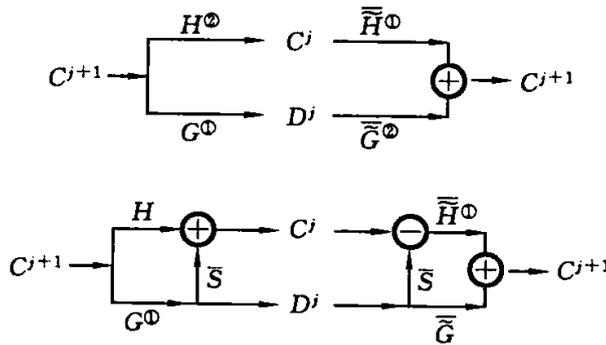


图 12.9 双向提升后的双正交分解、回复算法的实现过程

将图 12.9 和图 12.8 结合起来观察不难发现,在仅已知原来的双正交滤波器算子 H 、 G 、 \bar{H} 、 \bar{G} 和用于提升的滤波器算子 L 和 S 的情况下,双向提升的双正交数据分解、回复过程可如图 12.10 所示。

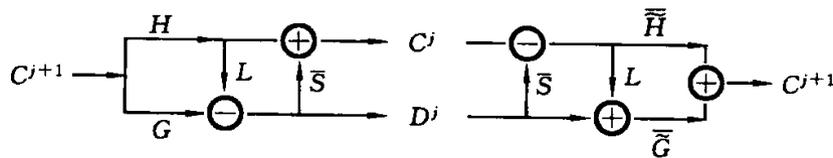


图 12.10 双向提升后的双正交分解、回复算法的等效实现过程

应该看到,经双向提升变换后, C^j 是光滑曲线的数据表现,它能较好地表现低频量; D^j 是经高阶消失矩小波变换后的数据表现,它能丰富地表现信号分解的细节;其回复过程不仅能准确回复原始的数据 C^{j+1} ,而且能提高回复信号对原始信号的逼近精度。

4. 进一步讨论

前面讨论的双向提升双正交小波消失矩的办法及其实现过程,可引发人们更多的思考。

(1) 提升变换可多次交替进行. 对原有的形式简单消失矩阶数低的双正交小波滤波器 $H(\omega)$ 、 $G(\omega)$ 、 $\bar{H}(\omega)$ 、 $\bar{G}(\omega)$, 第一次提升将其变为 $H^\oplus(\omega)$ 、 $G^\oplus(\omega)$ 、 $\bar{H}^\oplus(\omega)$ 、 $\bar{G}^\oplus(\omega)$; 第二次的对偶提升将其变为 $H^\ominus(\omega)$ 、 $G^\ominus(\omega)$ 、 $\bar{H}^\ominus(\omega)$ 、 $\bar{G}^\ominus(\omega)$; 第三次又在第二次提升的基础上提升,将其变为 $H^\oplus(\omega)$ 、 $G^\oplus(\omega)$ 、 $\bar{H}^\oplus(\omega)$ 、 $\bar{G}^\oplus(\omega)$; 这样便可交替地、不断地提升. 至于提升变换中所用到的 $S(2\omega)$ 和 $L(2\omega)$, 其性质表现是相同的,可以采用同一个 $L(2\omega)$ 作交替提升变换。

(2) 提升变换可构造多种多样的双正交滤波器和双正交小波函数. 由此可知,双正交小波基是非常多的,构造这些双正交小波基也是一件很简单的事情,人们只要略加要求就可以构造出适合多种应用目的双正交小波,就可构造出具有对称性和紧支性的双正交小波。

(3) 提升变换可构造多种多样的正交滤波器和正交小波函数. 由于正交小波

是双正交小波的特例,在正交小波情形,分解过程采用滤波器算子 H 和 G ,其相应的频域滤波器为 $H(\omega)$ 和 $G(\omega)$. 回复过程采用 \bar{H} 和 \bar{G} ,其相应的频域滤波器为 $\bar{H}(\omega)$ 和 $\bar{G}(\omega)$,于是双正交频域滤波器当 $H(\omega) = \bar{H}(\omega)$ 和 $G(\omega) = \bar{G}(\omega)$ 时就是正交的频域滤波器. 当然,提升变换也可用于提升正交小波的消失矩,可用于构造多种多样的正交小波.

(4) 在应用中,无须先构造高阶消失矩的双正交小波再作双正交分解、回复工作. 根据图 12.9 的启发,只要知道某个形式简单的双正交小波,即可知道 H, G, \bar{H}, \bar{G} ; 只要知道某个提升算子 L ,即可按图 12.9 所示过程交替地多次地作提升运算,达到某种高阶消失矩双正交小波作数据分解、回复的效果.

5. 提高双正交小波消失矩的例子

大家知道,正交小波也是一种双正交小波,本节将从最简单的双正交小波(Haar 小波)出发利用提升变换来构造新的双正交小波,读者可从中更具体地掌握提升变换的实现过程,也可得到一些更实用的双正交小波.

1) 将 Haar 小波单向提升为二阶消失矩的双正交小波

Haar 小波所对应的数字滤波器为

$$\begin{aligned} \{h_0, h_1\} &= \{1, 1\}, \\ \{g_0, g_1\} &= \{1, -1\}; \end{aligned}$$

它所对应的频域滤波器为

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-i\omega}, \\ G(\omega) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-i\omega}, \end{aligned}$$

且 $H(0) = 1, H(\pi) = 0, G(0) = 0$. 因为 $G(0) = 0$ 仅有一重零点,所以 Haar 小波是一阶消失矩的.

现将 Haar 小波看做一种双正交小波, $H(\omega) = \bar{H}(\omega), G(\omega) = \bar{G}(\omega)$,并将其提升为 $\tilde{H}^\circledast(\omega), \tilde{G}^\circledast(\omega), H^\circledast(\omega), G^\circledast(\omega)$, 其中

$$\begin{aligned} \tilde{H}^\circledast(\omega) &= \tilde{H}(\omega) + \tilde{G}(\omega)L(2\omega), \\ G^\circledast(\omega) &= G(\omega) - H(\omega)L(2\omega). \end{aligned}$$

由于当 $\omega = 0$ 和 $\omega = \pi$ 时 $L(2\omega) = 0$,不妨设

$$\begin{aligned} L(2\omega) &= \xi \sin 2\omega, \\ G^\circledast(\omega) &= G(\omega) - H(\omega)\xi \sin 2\omega, \end{aligned}$$

为了保证 $\psi^\circledast(t)$ 具有二阶消失矩,应要求 $G^\circledast(0) = 0$, 且 $\frac{d}{d\omega}G^\circledast(\omega)|_{\omega=0} = 0$; 由此算出 $\xi = i/4$, 且有

$$L(2\omega) = \frac{i}{4} \sin 2\omega = \frac{1}{8}(e^{i2\omega} - e^{-i2\omega}),$$

$$\{l_n\} = \{l_{-2}, l_{-1}, l_0, l_1, l_2\} = \left\{ \frac{-1}{8}, 0, 0, 0, \frac{1}{8} \right\}.$$

最后得到经一次提升后的双正交频域滤波器

$$\begin{cases} H(\omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-i\omega}, \\ G^{\textcircled{1}}(\omega) = \frac{1}{16}e^{-i3\omega} + \frac{1}{16}e^{-i2\omega} + \frac{-1}{2}e^{-i\omega} + \frac{1}{2} + \frac{-1}{16}e^{i\omega} + \frac{-1}{16}e^{i2\omega}, \\ \tilde{H}^{\textcircled{1}}(\omega) = \frac{-1}{16}e^{-i3\omega} + \frac{1}{16}e^{-i2\omega} + \frac{1}{2}e^{-i\omega} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}e^{i\omega} + \frac{-1}{16}e^{i2\omega}, \\ \tilde{G}(\omega) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-i\omega}, \end{cases}$$

其中 $G^{\textcircled{1}}(0) = 0, \tilde{H}^{\textcircled{1}}(0) = 1, \tilde{H}^{\textcircled{1}}(\pi) = 0$ 仍然成立. 这组双正交数字滤波器相应为

$$\begin{cases} \{h_n\} = \{1, 1\}, \\ \{g_n^{\textcircled{1}}\} = \left\{ \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, -1, 1, \frac{-1}{8}, \frac{-1}{8} \right\}, \\ \{\tilde{h}_n^{\textcircled{1}}\} = \left\{ \frac{-1}{8}, \frac{1}{8}, 1, 1, \frac{1}{8}, \frac{-1}{8} \right\}, \\ \{\tilde{g}_n\} = \{1, -1\}, \end{cases}$$

其中 $\{g_n^{\textcircled{1}}\}$ 具有二阶消失矩, $\{\tilde{g}_n\}$ 具有一阶消失矩.

2) 对 Haar 小波作双向提升

单向提升过程将 $G(\omega)$ 改变为 $G^{\textcircled{1}}(\omega)$, $\tilde{H}(\omega)$ 改变为 $\tilde{H}^{\textcircled{1}}(\omega)$, 现在在此基础上将 $\tilde{G}(\omega)$ 改变为 $\tilde{G}^{\textcircled{2}}(\omega)$, $H(\omega)$ 改变为 $H^{\textcircled{2}}(\omega)$, 变换规则为

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{\textcircled{2}}(\omega) &= \tilde{G}(\omega) - \tilde{H}^{\textcircled{1}}(\omega)S(2\omega), \\ H^{\textcircled{2}}(\omega) &= H(\omega) + G^{\textcircled{1}}(\omega)\bar{S}(2\omega). \end{aligned}$$

为了也保证 $\tilde{\psi}^{\textcircled{2}}$ 具有二阶消失矩, 应要求 $\tilde{G}^{\textcircled{2}}(0) = 0, \frac{d}{d\omega} \tilde{G}^{\textcircled{2}}(\omega)|_{\omega=0} = 0$, 还考虑到当 $\omega = 0$ 和 $\omega = \pi$ 时 $S(2\omega) = 0$. 所以设

$$\begin{aligned} S(2\omega) &= \eta \sin 2\omega, \\ \tilde{G}^{\textcircled{2}}(\omega) &= \tilde{G}(\omega) - \tilde{H}^{\textcircled{1}}(\omega) \eta \sin 2\omega; \end{aligned}$$

由此算出 $\eta = i/4$, 且有

$$S(2\omega) = \frac{i}{4} \sin 2\omega = \frac{1}{8} (e^{i2\omega} - e^{-i2\omega}),$$

$$\{s_n\} = \{s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2\} = \left\{ \frac{-1}{8}, 0, 0, 0, \frac{1}{8} \right\}.$$

最后得到经双向提升后的双正交频域滤波器

$$\left\{ \begin{array}{l} H^{\otimes}(\omega) = \frac{1}{128}(e^{-i5\omega} + e^{-i4\omega} - 8e^{-i3\omega} + 8e^{-i2\omega} + 62e^{-i\omega} + 62 \\ \quad + 8e^{i\omega} - 8e^{i2\omega} + e^{i3\omega} + e^{i4\omega}), \\ G^{\oplus}(\omega) = \frac{1}{16}e^{-i3\omega} + \frac{1}{16}e^{-i2\omega} + \frac{-1}{2}e^{-i\omega} + \frac{1}{2} + \frac{-1}{16}e^{i\omega} + \frac{-1}{16}e^{i2\omega}, \\ \tilde{H}^{\oplus}(\omega) = \frac{-1}{16}e^{-i3\omega} + \frac{1}{16}e^{-i2\omega} + \frac{1}{2}e^{-i\omega} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}e^{i\omega} + \frac{-1}{16}e^{i2\omega}, \\ \tilde{G}^{\otimes}(\omega) = \frac{1}{128}(-e^{-i5\omega} + e^{-i4\omega} + 8e^{-i3\omega} + 8e^{-i2\omega} - 62e^{-i\omega} + 62 \\ \quad - 8e^{i\omega} - 8e^{i2\omega} - e^{i3\omega} + e^{i4\omega}), \end{array} \right.$$

其中 $\tilde{G}^{\otimes}(0) = 0, H^{\otimes}(0) = 1, H^{\otimes}(\pi) = 0$ 仍然成立. 这组双正交数字滤波器为

$$\left\{ \begin{array}{l} \{h_n^{\otimes}\} = \frac{1}{64}\{1, 1, -8, 8, 62, 62, 8, -8, 1, 1\}, \\ \{g_n^{\oplus}\} = \frac{1}{8}\{1, 1, -8, 8, -1, -1\}, \\ \{\tilde{h}_n^{\oplus}\} = \frac{1}{8}\{-1, 1, 8, 8, 1, -1\}, \\ \{\tilde{g}_n^{\otimes}\} = \frac{1}{64}\{-1, 1, 8, 8, -62, 62, -8, -8, -1, 1\}, \end{array} \right.$$

其中 $\{g_n^{\oplus}\}$ 和 $\{\tilde{g}_n^{\otimes}\}$ 都具有二阶消失矩.

不难看出, 用上述办法还可将 $\{g_n^{\oplus}\}$ 和 $\{\tilde{h}_n^{\oplus}\}$ 分别提升为 $\{g_n^{\otimes}\}$ 和 $\{\tilde{h}_n^{\otimes}\}$, $\{g_n^{\otimes}\}$ 具有三阶消失矩; 又可将 $\{\tilde{g}_n^{\otimes}\}$ 和 $\{h_n^{\otimes}\}$ 分别提升为 $\{\tilde{g}_n^{\oplus}\}$ 和 $\{h_n^{\oplus}\}$, $\{\tilde{g}_n^{\oplus}\}$ 具有三阶消失矩.

第 13 章 二维小波变换与图像处理

在实际应用中,二维信号 $f(x, y) \in L^2(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$ 也是经常使用的. 例如一幅图像,对任一点 (x, y) 有一个图像信号的灰度值 $f(x, y)$ 与之对应,点坐标 (x, y) 连续变化时就确定了一个连续变化的二维信号(函数) $f(x, y)$.

本章讨论图像——二维信号的分析处理问题. 值得强调的是,二维信号可看做一维信号的推广. 一维信号的离散、表述、逼近的方法可简单推广到二维情形,一维信号的多分辨逼近(MRA)概念可简单推广到二维情形,一维信号的分析处理目标和办法都可简单推广到二维情形. 换句话说,二维信号的分析处理办法都可以从一维信号分析处理办法中得到理解和启发. 牢记这个基本点,学习本章内容就很容易了.

13.1 二维信号的多分辨逼近

1. 二维信号的离散化

对于给定的一维信号 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$, 可看做定义在 \mathbf{R} 上的函数曲线, 若将定义域(直线)用一定间隔离散化, 其离散节点 $x = x_m$ 用整数编号 m 表示, 其相应的函数值(一维信号的采样值)表示为 $f(m)$, 则 $\{f(m)\}_{m \in \mathbf{Z}}$ 就是一维信号 $f(t)$ 的离散化表示形式.

对于给定的二维信号 $f(x, y) \in L^2(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$, 其二维平面的定义域可用一定间隔的平行线网格离散, 每个网格节点采用整数编号 (m, n) , 每个网格节点对应着一个函数值(二维信号的采样值) $f(m, n)$, 则 $\{f(m, n)\}_{m, n \in \mathbf{Z}}$ 就是二维信号的离散化表示形式(见图 13.1).

2. 二维信号的 Riesz 基表示

对于一维信号 $f(t)$, 记 $\phi(t)$ 是 Riesz 基, 它是定义在整节点处的节点基函数, 每个节点 m 处定义一个节点基函数 $\phi(t-m)$, 其线性组合

$$f^0(t) = \sum c_m^0 \phi(t-m)$$

可以表示某个能量有限信号, $f^0(t)$ 可作为 $f(t)$ 的近似.

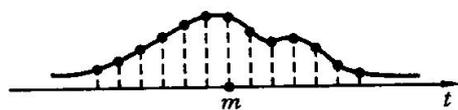
二维信号也可以用 Riesz 基表示为近似信号

$$f^0(x, y) = \sum c_{m,n}^0 \Phi(x-m, y-n),$$

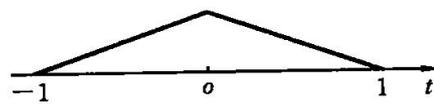
$f^0(x, y)$ 是一种二维的能量有限信号, $f^0(x, y)$ 可作为 $f(x, y)$ 的近似, 其中定义在 (m, n) 处的节点基函数形式为

$$\Phi(x-m, y-n) = \phi(x-m)\phi(y-n).$$

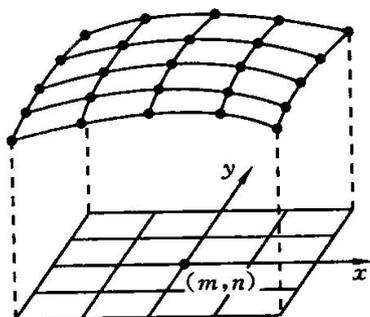
这是一维节点基函数 $\phi(x-m)$ 和 $\phi(y-n)$ 的乘积形式, 又称为一维节点基函数的张量积形式. 图 13.2 中以 $\phi(t)$ 是山形节点基函数为例, 画出了 $\phi(x)\phi(y)$ 的图形. 图 13.3 给出某个一维尺度函数 $\phi(x)$ 和小波函数 $\psi(y)$ 张量积形式的图形. 图中, $\phi(x)\psi(y)$ 表示在 x 方向是按 $\phi(x)$ 规律变化的, 在 y 方向是按 $\psi(y)$ 规律变化的; 而 $\psi(x)\psi(y)$ 则是在 x 和 y 方向都是按 $\psi(\cdot)$ 的规律变化的.



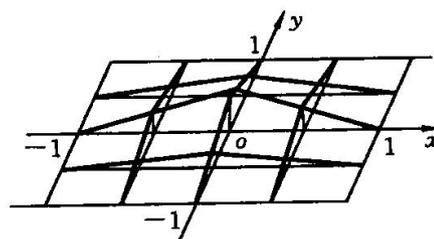
(a) 一维信号 $f(t)$ 及其采样值



(a) 一维节点基函数



(b) 二维信号 $f(x, y)$ 及其采样值



(b) 一维节点基函数 (山形函数) 的张量积

图 13.1 信号离散化示意图

图 13.2 二维节点基函数采用一维节点基函数的张量积形式

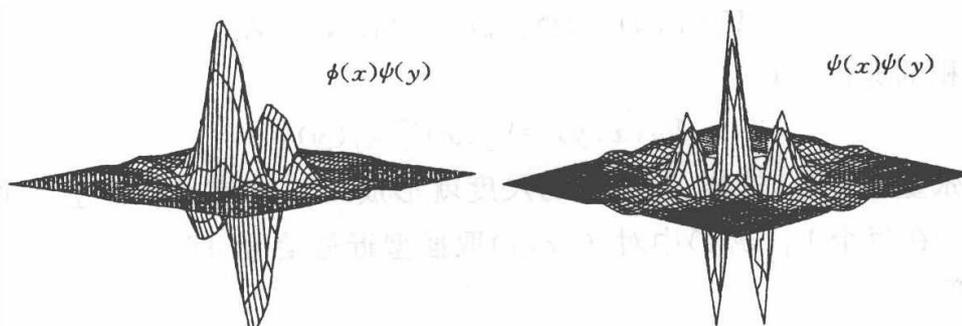


图 13.3 某一维小波的张量积图形

3. 二维信号的多分辨逼近

在一维多分辨逼近中, 信号的定义域在某个离散分划下被不断地细分, 零尺度的离散分划被细分后成为 1 尺度的离散分划, $j-1$ 尺度的离散分划被细分后成为 j 尺度的离散分划, 这样就形成了一个网格序列. 在 j 尺度下一维节点基函数的表现形式为

$$\phi_{j,m}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - m),$$

由此生成一个表示一维信号的线性空间为

$$V_j = \text{span}\{\phi_{j,m}(t) \mid m \in \mathbf{Z}\}.$$

这样,对于所有的尺度就形成了一维信号线性空间的序列 $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$. 在每个 V_j 中对 $f(t)$ 取插值型近似信号,即

$$0 \text{ 尺度, } f^0(t) = \sum c_m^0 \phi(t-m), f^0(t) \in V_0,$$

$$1 \text{ 尺度, } f^1(t) = \sum c_m^1 \phi_{1,m}(t), f^1 \in V_1,$$

$$j \text{ 尺度, } f^j(t) = \sum c_m^j \phi_{j,m}(t), f^j(t) \in V_j.$$

则当 $j \rightarrow +\infty$ 时,有 $f^j(t) \rightarrow f(t) \in L^2(\mathbf{R})$. 这就是一维信号的多分辨逼近.

二维多分辨逼近可看做一维多分辨逼近的推广. 信号的定义域是平面,先作零尺度分划,再不断细分,同样可获得网格分划序列(见图 13.4).

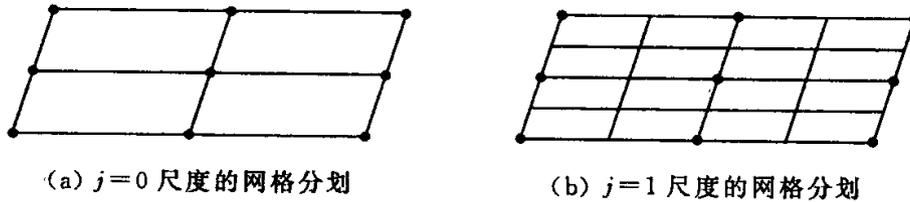


图 13.4 二维网格细分示意图

在 j 尺度下,二维节点基函数采用如前所述的一维节点基函数的张量积形式,具体为

$$\Phi_{j,m,n}(x,y) = 2^{j/2} \phi(2^j x - m) 2^{j/2} \phi(2^j y - n),$$

由此生成的表示二维信号的线性空间为

$$V_j(x,y) = \{\Phi_{j,m,n}(x,y) \mid m,n \in \mathbf{Z}\},$$

由于张量积的原因,有

$$V_j(x,y) = V_j(x) \otimes V_j(y), \tag{13.1}$$

其中 \otimes 是张量积记号,这样,对所有的尺度就形成了二维信号线性空间的序列 $\{V_j(x,y)\}_{j \in \mathbf{Z}}$. 在每个 $V_j(x,y)$ 中对 $f(x,y)$ 取插型近似信号,即

0 尺度,

$$f^0(x,y) = \sum c_{m,n}^0 \Phi(x-m,y-n), f^0(x,y) \in V_0(x) \otimes V_0(y),$$

1 尺度,

$$f^1(x,y) = \sum c_{m,n}^1 \Phi_{1,m,n}(x,y), f^1(x,y) \in V_1(x) \otimes V_1(y),$$

j 尺度,

$$f^j(x,y) = \sum c_{m,n}^j \Phi_{j,m,n}(x,y), f^j(x,y) \in V_j(x) \otimes V_j(y).$$

则当 $j \rightarrow +\infty$ 时,有 $f^j(x,y) \rightarrow f(x,y) \in L^2(\mathbf{R})$,这就是二维信号的多分辨逼近.

13.2 二维信号的小波子空间分解及其频域含义

在二维多分辨逼近中仍然存在着小波子空间分解关系,即

$$V_{j+1}(x, y) = V_j(x, y) \oplus W_j(x, y),$$

$$W_j(x, y) = V_{j+1}(x, y) / V_j(x, y).$$

相应地,各个子空间中的时域信号存在如下分解关系:

$$f^{j+1}(x, y) = f^j(x, y) + w^j(x, y),$$

$$f^j(x, y) \in V_j(x, y),$$

$$w^j(x, y) \in W_j(x, y),$$

$$f^j(x, y) = \sum c_{m,n}^j \Phi_{j,m,n}(x, y),$$

$$w^j(x, y) = \sum d_{m,n}^j \Psi_{j,m,n}(x, y),$$

其中, $f^j(x, y)$ 反映了 $f^{j+1}(x, y)$ 中的低频分量, $w^j(x, y)$ 反映了 $f^{j+1}(x, y)$ 中相应的高频分量; $\Phi_{j,m,n}$ 是 $V_j(x, y)$ 的基函数, $\Psi_{j,m,n}(x, y)$ 是 $W_j(x, y)$ 的基函数.

$\Psi_{j,m,n}(x, y)$ 是怎么构成的呢? 由式(13.1)有

$$\begin{aligned} V_{j+1}(x, y) &= V_{j+1}(x) \otimes V_{j+1}(y) \\ &= [V_j(x) \oplus W_j(x)] \otimes [V_j(y) \oplus W_j(y)] \\ &= V_j(x, y) \oplus [V_j(x) \otimes W_j(y) \oplus W_j(x) \otimes V_j(y) \oplus W_j(x) \otimes W_j(y)] \\ &= V_j(x, y) \oplus W_j(x, y), \end{aligned} \quad (13.2)$$

所以,二维小波子空间 $W_j(x, y)$ 由以下三部分组成:

(1) $V_j(x) \otimes W_j(y)$, 它的基函数是

$$\phi_{j,m}(x) \psi_{j,n}(y) = 2^{j/2} \phi(2^j x - m) 2^{j/2} \psi(2^j y - n);$$

(2) $W_j(x) \otimes V_j(y)$, 它的基函数是

$$\psi_{j,m}(x) \phi_{j,n}(y) = 2^{j/2} \psi(2^j x - m) 2^{j/2} \phi(2^j y - n);$$

(3) $W_j(x) \otimes W_j(y)$, 它的基函数是

$$\psi_{j,m}(x) \psi_{j,n}(y) = 2^{j/2} \psi(2^j x - m) 2^{j/2} \psi(2^j y - n).$$

于是

$$f^{j+1}(x, y) \in V_{j+1}(x, y)$$

也可相应地分解为 $V_j(x, y)$ 中的分量和 $W_j(x, y)$ 中的三个部分分量, 具体表现为

$$\begin{aligned} f^{j+1}(x, y) &= \sum_{m,n} c_{m,n}^j \phi_{j,m}(x) \phi_{j,n}(y) + \sum_{m,n} \alpha_{m,n}^j \phi_{j,m}(x) \psi_{j,n}(y) \\ &\quad + \sum_{m,n} \beta_{m,n}^j \psi_{j,m}(x) \phi_{j,n}(y) + \sum_{m,n} \gamma_{m,n}^j \psi_{j,m}(x) \psi_{j,n}(y). \end{aligned} \quad (13.3)$$

总之,在一维多分辨逼近中 $\phi(t)$ 是尺度函数, $\psi(t)$ 是小波函数. 在二维多分辨逼近中,式(13.1)表明由一维尺度函数的张量积得到二维尺度函数;式(13.2)表明由一维小波分解的张量积得到二维小波分解,具体分解如图 13.5 所示. 读者自然会理解到,二维小波分解的频域含义可以从一维小波分解的频域含义中得到,其具体频域含义也标注于图 13.5 中.

假设式(13.3)中的小波分解数据 $\{c_{m,n}^j\}$ 、 $\{\alpha_{m,n}^j\}$ 、 $\{\beta_{m,n}^j\}$ 、 $\{\gamma_{m,n}^j\}$ 已经获得,且按图 13.5 所示的位置存放. 下面具体说明式(13.3)中每个分量部分的频域含义.

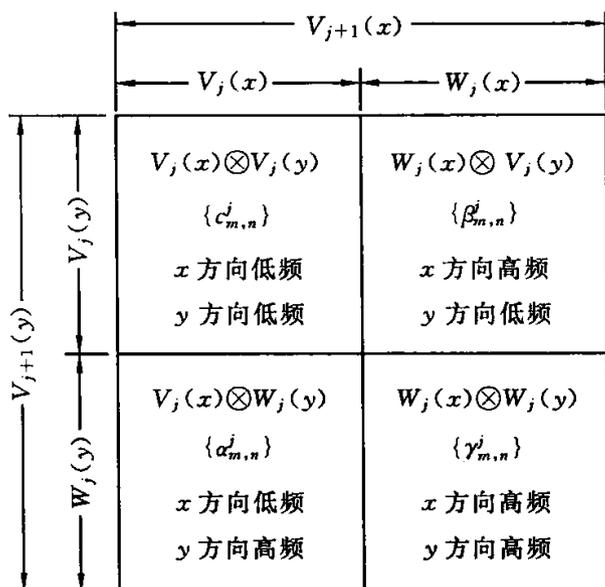


图 13.5 二维小波分解及其频域含义

首先应明白,式(13.3)中的 $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在一维小波分解中是分别用于表现低频量和高频量的,由此可很容易地理解式(13.3)中各项的频域含义。

$V_j(x) \otimes V_j(y)$ 表现了 $f^{j+1}(x, y)$ 中关于 x 方向的低频分量和关于 y 方向的低频分量,它用数据 $\{c_{m,n}^j\}$ 表征。

$V_j(x) \otimes W_j(y)$ 表现了 $f^{j+1}(x, y)$ 中关于 x 方向的低频分量和关于 y 方向的高频分量,它用数据 $\{\alpha_{m,n}^j\}$ 表征。

$W_j(x) \otimes V_j(y)$ 表现了 $f^{j+1}(x, y)$ 中关于 x 方向的高频分量和关于 y 方向的低频分量,它用数据 $\{\beta_{m,n}^j\}$ 表征。

$W_j(x) \otimes W_j(y)$ 表现了 $f^{j+1}(x, y)$ 中关于 x 方向的高频分量和关于 y 方向的高频分量,它用数据 $\{\gamma_{m,n}^j\}$ 表征。

二维信号在某个方向上有高频表现,这应如何理解呢? 因二维信号可看做二维曲面,用平行于 x 轴方向的一组平面切割二维曲面可得到一组曲线,它们可看做不同 y 固定值的关于 x 的一组曲线;用平行于 y 轴方向的一组平面切割二维曲面可得到另一组曲线,它们可看做不同 x 固定值的关于 y 的一组曲线. 因此二维信号可通过 x 方向的一组曲线或 y 方向的一组曲线观察分析它的光滑程度和不光滑的表现. 下面用最简单的曲面来说明问题。

如图 13.6 所示的曲面,不难看出它在 x 方向上有间断表现,而在 y 方向上没有明显的间断表现. 对这样的二维信号作小波分解,它关于 x 方向有高频表现和在 y 方向上主要是低频表现的特点应在 $W_j(x) \otimes V_j(y)$ 中有明显反应。

如图 13.7 所示的曲面,不难看出它在 x 方向上没有明显的间断表现,而在 y 方向上间断表现突出,对这样的二维信号作小波分解,它关于 x 方向的主要低频表现和 y 方向的高频表现的特点,应在 $V_j(x) \otimes W_j(y)$ 中有明显反应。

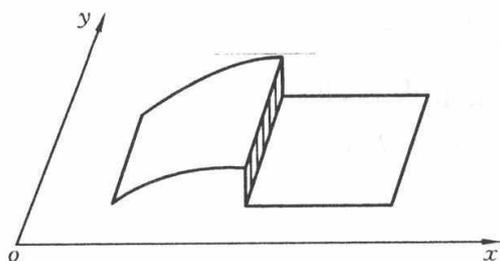


图 13.6 在 x 方向上有突出的高频表现的曲面

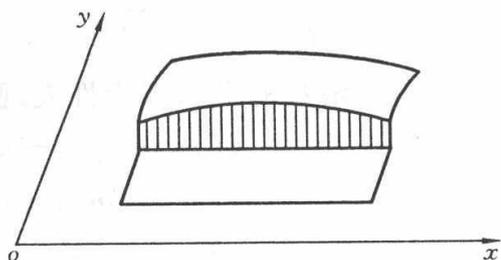


图 13.7 在 y 方向上有突出的高频表现的曲面

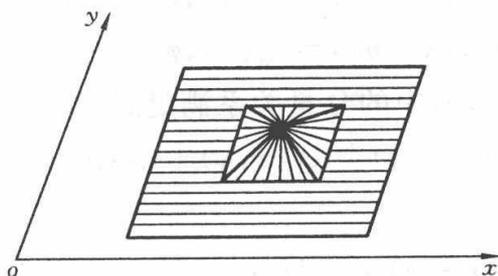


图 13.8 在锥体边缘处, x 方向和 y 方向都有突出的高频表现的曲面

如图 13.8 所示的曲面, 不难看出它在 x 方向和 y 方向上都存在明显的高频表现, 这一特点应该在 $W_j(x) \otimes W_j(y)$ 中明显地表现出来.

13.3 二维信号的分解回复算法

对二维信号作小波分解, 可采用正交小波分解, 也可采用半正交小波分解或双正交小波分解. 对于不同类型的小波来说, 其分解、回复算法虽然不相同, 但如图 13.5 所示的分解结构及其频域含义是相同的. 根据这个特点, 本节先分析二维正交小波的分解和回复过程, 在此基础上可直观地获得二维半正交小波和双正交小波的分解和回复算法.

1. 正交小波的分解、回复算法

二维信号的正交小波的分解、回复算法的推导方法和过程类同于一维正交小波的情形.

在二维正交小波分解中

$$V_1(x, y) = V_0(x, y) + W_0(x, y), \quad V_0(x, y) \perp W_0(x, y),$$

$V_0(x, y)$ 和 $W_0(x, y)$ 中的基函数双尺度方程可由一维情形得到, 即

$$\phi(x)\phi(y) = \sum h_s \phi(2x-s) \sum h_r \phi(2y-r), \quad s, r \in \mathbf{Z},$$

$$\phi(x)\psi(y) = \sum h_s \phi(2x-s) \sum g_r \phi(2y-r), \quad s, r \in \mathbf{Z},$$

$$\psi(x)\phi(y) = \sum g_s \phi(2x-s) \sum h_r \phi(2y-r), \quad s, r \in \mathbf{Z},$$

$$\psi(x)\psi(y) = \sum g_s \phi(2x-s) \sum g_r \phi(2y-r), \quad s, r \in \mathbf{Z}.$$

$V_0(x, y)$ 中基函数的平移正交性表现可由一维情形得到, 即

$$\begin{aligned} & (\phi(x-m)\phi(y-n), \phi(x-k)\phi(y-l)) \\ &= (\phi(x-m), \phi(x-k))(\phi(y-n), \phi(y-l)) \\ &= \delta_{m,k} \delta_{n,l}. \end{aligned}$$

$W_0(x, y)$ 中的基函数和 $V_0(x, y)$ 中基函数的正交关系也可由一维情形得到, 即

$$\begin{aligned} & (\phi(x)\psi(y), \phi(x-m)\phi(y-n)) = (\phi(x), \phi(x-m))(\psi(y), \phi(y-n)) = 0, \\ & (\psi(x)\phi(y), \phi(x-m)\phi(y-n)) = (\psi(x), \phi(x-m))(\phi(y), \phi(y-n)) = 0, \\ & (\psi(x)\psi(y), \phi(x-m)\phi(y-n)) = (\psi(x), \phi(x-m))(\psi(y), \phi(y-n)) = 0. \end{aligned}$$

$V_1(x, y)$ 、 $V_0(x, y)$ 、 $W_0(x, y)$ 中的分量关系满足式(13.3), 有

$$f^1(x, y) = f^0(x, y) + w_1^0(x, y) + w_2^0(x, y) + w_3^0(x, y),$$

其具体展开形式为

$$\begin{aligned} & \sum c_{k,l}^1 \cdot 2^{1/2} \phi(2x-k) \cdot 2^{1/2} \phi(2y-l) \\ &= \sum c_{m,n}^0 \phi(x-m)\phi(y-n) + \sum \alpha_{m,n}^0 \phi(x-m)\psi(y-n) \\ & \quad + \sum \beta_{m,n}^0 \psi(x-m)\phi(y-n) + \sum \gamma_{m,n}^0 \psi(x-m)\psi(y-n). \end{aligned} \quad (13.4)$$

1) 正交小波分解算法

此时要在已知 $\{c_{k,l}^1\}$ 的情况下, 求 $\{\alpha_{m,n}^0\}$ 、 $\{\beta_{m,n}^0\}$ 和 $\{\gamma_{m,n}^0\}$.

在式(13.4)两边用 $\phi(x-s)\phi(y-r)$ 作内积, 利用正交性, 该式右边仅有 $c_{m,n}^0$, 该式左边利用双尺度方程, 有

$$\begin{aligned} & \left(\sum c_{k,l}^1 \cdot 2^{1/2} \phi(2x-k) \cdot 2^{1/2} \phi(2y-l), \phi(x-s)\phi(y-r) \right) \\ &= \sum c_{k,l}^1 \left(2^{1/2} \phi(2x-k), \sum h_m \phi(2x-2s-m) \right) \\ & \quad \cdot \left(2^{1/2} \phi(2y-l), \sum g_n \phi(2y-2r-n) \right), \end{aligned}$$

所以有
$$c_{m,n}^0 = \sum_{k,l} 2^{-1} h(k-2m)h(l-2n)c_{k,l}^1. \quad (13.5a)$$

在式(13.4)两边用 $\phi(x-m)\phi(y-n)$ 作内积, 利用正交性和双尺度方程, 同于上述推导, 有

$$\alpha_{m,n}^0 = \sum_{k,l} 2^{-1} h(k-2m)g(l-2n)c_{k,l}^1. \quad (13.5b)$$

在式(13.4)两边用 $\psi(x-m)\phi(y-n)$ 作内积, 有

$$\beta_{m,n}^0 = \sum_{k,l} 2^{-1} g(k-2m)h(l-2n)c_{k,l}^1. \quad (13.5c)$$

在式(13.4)两边用 $\psi(x-m)\psi(y-n)$ 作内积, 有

$$\gamma_{m,n}^0 = \sum_{k,l} 2^{-1} g(k-2m)g(l-2n)c_{k,l}^1. \quad (13.5d)$$

2) 正交小波回复算法

此时已知 $\{\alpha_{m,n}^0\}$ 、 $\{\beta_{m,n}^0\}$ 和 $\{\gamma_{m,n}^0\}$ 的情况下, 求 $\{c_{k,l}^1\}$ 。

仍利用式(13.4), 在其两边用 $2^{1/2}\phi(2x-k)2^{1/2}\phi(2y-l)$ 作内积, 利用正交性, 该式左边仅有 $c_{k,l}^1$, 该式右边利用双尺度方程, 该式右边共有四项, 其中第一项为

$$\begin{aligned} & (\sum c_{m,n}^0 \phi(x-m)\phi(y-n), 2^{1/2}\phi(2x-k)2^{1/2}\phi(2y-l)) \\ &= \sum c_{m,n}^0 (\sum h_s \phi(2x-2m-s), 2^{1/2}\phi(2x-k)) \\ & \cdot (\sum h_r \phi(2y-2n-r), 2^{1/2}\phi(2y-l)), \end{aligned}$$

将其运算结果记为 $c_{k,l}^{1,0}$, 有

$$c_{k,l}^{1,0} = \sum_{m,n} 2^{-1} h(k-2m)h(l-2n)c_{m,n}^0. \quad (13.6a)$$

第二项的运算结果记为 $c_{k,l}^{1,1}$, 类似推导, 有

$$c_{k,l}^{1,1} = \sum_{m,n} 2^{-1} h(k-2m)g(l-2n)\alpha_{m,n}^0. \quad (13.6b)$$

第三项的运算结果记为 $c_{k,l}^{1,2}$, 有

$$c_{k,l}^{1,2} = \sum_{m,n} 2^{-1} g(k-2m)h(l-2n)\beta_{m,n}^0. \quad (13.6c)$$

第四项的运算结果记为 $c_{k,l}^{1,3}$, 有

$$c_{k,l}^{1,3} = \sum_{m,n} 2^{-1} g(k-2m)g(l-2n)\gamma_{m,n}^0. \quad (13.6d)$$

综上所述, 得到回复公式

$$c_{k,l}^1 = c_{k,l}^{1,0} + c_{k,l}^{1,1} + c_{k,l}^{1,2} + c_{k,l}^{1,3}. \quad (13.6e)$$

2. 关于正交小波分解、回复算法运算表现和频域表现的理解

前面关于二维正交小波的分解和回复公式看起来显得很复杂, 然而对比一维正交小波分解和回复公式的含义, 二维情形可得到更简单、更清晰的理解。

在分解算法式(13.5a)至式(13.5d)中, 记:

H_x 是 x 方向低通滤波算子, 其定义为

$$H_x \{c_{k,l}^1\} = \sum_k 2^{-1/2} h(k-2m) \{c_{k,l}^1\},$$

H_y 是 y 方向低通滤波算子, 其定义为

$$H_y \{c_{k,l}^1\} = \sum_l 2^{-1/2} h(l-2n) \{c_{k,l}^1\},$$

G_x 是 x 方向高通滤波算子, 其定义为

$$G_x \{c_{k,l}^1\} = \sum_k 2^{-1/2} g(k-2m) \{c_{k,l}^1\},$$

G_y 是 y 方向高通滤波算子, 其定义为

$$G_y \{c_{k,l}^1\} = \sum_l 2^{-1/2} g(l-2n) \{c_{k,l}^1\}.$$

于是可将式(13.5a)至式(13.5d)简洁表示为如下的分解运算形式:

$$\begin{cases} \{c_{m,n}^0\} = H_x H_y \{c_{k,l}^1\}, & (13.7a) \\ \{\alpha_{m,n}^0\} = H_x G_y \{c_{k,l}^1\}, & (13.7b) \\ \{\beta_{m,n}^0\} = G_x H_y \{c_{k,l}^1\}, & (13.7c) \\ \{\gamma_{m,n}^0\} = G_x G_y \{c_{k,l}^1\}. & (13.7d) \end{cases}$$

式(13.7a)可从运算方面和频域表现方面来理解:先对二维数据 $\{c_{k,l}^1\}$ 沿 y 方向逐行地作低通数字滤波,采用数据分解的低通数字滤波器 $\{h_n\}$,运算结果为 $H_y\{c_{k,l}^1\}$;再对二维数据 $H_y\{c_{k,l}^1\}$ 沿 x 方向逐行地作低通数字滤波,采用数据分解的低通数字滤波器 $\{h_n\}$,运算结果为 $H_x H_y\{c_{k,l}^1\}$;这样,通过两次一维数字滤波获得 $\{c_{m,n}^0\}$,它是反映 $\{c_{k,l}^1\}$ 在 x 方向低频、 y 方向低频的数据。

式(13.7b)也可从运算方面和频域表现方面来理解:先对二维数据沿 y 方向逐行地作高通数字滤波,采用数据分解的高通数字滤波器 $\{g_n\}$,运算结果为 $G_y\{c_{k,l}^1\}$;再对二维数据 $G_y\{c_{k,l}^1\}$ 沿 x 方向逐行地作低通数字滤波,采用数据分解的低通数字滤波器 $\{h_n\}$,运算结果为 $H_x G_y\{c_{k,l}^1\}$;经两次一维数字滤波的结果 $\{\alpha_{m,n}^0\}$ 能反映 $\{c_{k,l}^1\}$ 关于 x 方向低频、 y 方向高频的表现。

式(13.7c)和式(13.7d)可作如上类同的理解。

在回复算法式(13.6a)至式(13.6e)中,记:

H_x^* 是 x 方向的低频回复算子,其定义为

$$H_x^* \{c_{m,n}^0\} = \sum_m 2^{-1/2} h(k-2m) \{c_{m,n}^0\},$$

H_y^* 是 y 方向的低频回复算子,其定义为

$$H_y^* \{c_{m,n}^0\} = \sum_n 2^{-1/2} h(l-2n) \{c_{m,n}^0\},$$

G_x^* 是 x 方向的高频回复算子,其定义为

$$G_x^* \{d_{m,n}^0\} = \sum_m 2^{-1/2} g(k-2m) \{d_{m,n}^0\},$$

G_y^* 是 y 方向的高频回复算子,其定义为

$$G_y^* \{d_{m,n}^0\} = \sum_n 2^{-1/2} g(l-2n) \{d_{m,n}^0\}.$$

于是可将式(13.6a)至式(13.6e)简洁表示为如下的回复运算:

$$\begin{cases} \{c_{k,l}^{1,0}\} = H_x^* H_y^* \{c_{m,n}^0\}, & (13.8a) \\ \{c_{k,l}^{1,1}\} = H_x^* G_y^* \{\alpha_{m,n}^0\}, & (13.8b) \\ \{c_{k,l}^{1,2}\} = H_y^* G_x^* \{\beta_{m,n}^0\}, & (13.8c) \\ \{c_{k,l}^{1,3}\} = G_x^* G_y^* \{\gamma_{m,n}^0\}, & (13.8d) \\ \{c_{k,l}^1\} = \{c_{k,l}^{1,0}\} + \{c_{k,l}^{1,1}\} + \{c_{k,l}^{1,2}\} + \{c_{k,l}^{1,3}\}. & (13.8e) \end{cases}$$

式(13.8a)可从运算方面和频域表现方面来理解:先对二维数据 $\{c_{m,n}^0\}$ 沿 y 方向逐行地作低频回复运算,采用数据回复的低通数字滤波器 $\{h_n\}$,运算结果为

$H_y^* \{c_{m,n}^0\}$; 再对二维数据 $H_y^* \{c_{m,n}^0\}$ 沿 x 方向逐行地作低频回复运算, 采用数据回复的低通数字滤波器 $\{h_n\}$, 运算结果为 $H_x^* H_y^* \{c_{m,n}^0\}$; 经两次一维数据回复运算得到 $\{c_{k,l}^1\}$, 它是数据 $\{c_{m,n}^0\}$ 回复的结果.

式(13.8b)也可作类似的理解: 先对二维数据 $\{a_{m,n}^0\}$ 沿 y 方向逐行地作高频回复运算, 采用数据回复的高通数字滤波器 $\{g_n\}$, 运算结果为 $G_y^* \{a_{m,n}^0\}$; 再对二维数据 $G_y^* \{a_{m,n}^0\}$ 沿 x 方向逐行地作低频回复, 采用数据回复的低通数字滤波器 $\{h_n\}$, 运算结果为 $H_x G_y \{a_{m,n}^0\}$; 经两次一维数据回复运算得到 $\{c_{k,l}^1\}$, 它是数据 $\{a_{m,n}^0\}$ 回复的结果.

式(13.8c)、式(13.8d)也可作如上类同的理解.

式(13.8e)表明, 将数据块 $\{c_{k,l}^1\}$ 、 $\{c_{k,l}^2\}$ 、 $\{c_{k,l}^3\}$ 直接累加就得到数据块 $\{c_{k,l}^4\}$.

3. 半正交小波的分解、回复算法

一维半正交小波的尺度函数是 $\phi(x)$, 小波函数是 $\psi(x)$, $\{\phi(x-n)\}$ 不平移正交, $\{\psi(x-n)\}$ 不平移正交, 但 $\{\phi(x-n)\}$ 和 $\{\psi(x-n)\}$ 是正交的. 由于这种半正交性, 一维信号数据在用半正交小波作数据分解时采用

低通数字滤波器 $\{a_n\}$,

高通数字滤波器 $\{b_n\}$;

作数据回复时采用

低频回复数字滤波器 $\{p_n\}$,

高频回复数字滤波器 $\{q_n\}$.

详细过程可参见第 11 章.

二维半正交小波是一维半正交小波的张量积形式, 二维半正交小波分解过程、回复过程的方法及其频域含义同于二维正交小波情形, 只是分解过程和回复过程采用了不同的数字滤波器而已. 因此, 仿照二维正交小波的情形可顺利地写出二维半正交小波的分解、回复算法.

1) 半正交小波分解算法

已知 $\{c_{k,l}^1\}$, 求 $\{c_{m,n}^0\}$ 、 $\{a_{m,n}^0\}$ 、 $\{\beta_{m,n}^0\}$ 、 $\{\gamma_{m,n}^0\}$. 记:

A_x 是 x 方向的低通滤波算子, 其定义为

$$A_x \{c_{k,l}^1\} = \sum_k 2^{-1/2} a(k-2m) \{c_{k,l}^1\},$$

A_y 是 y 方向的低通滤波算子, 其定义为

$$A_y \{c_{k,l}^1\} = \sum_l 2^{-1/2} a(l-2n) \{c_{k,l}^1\},$$

B_x 是 x 方向的高通滤波算子, 其定义为

$$B_x \{c_{k,l}^1\} = \sum_k 2^{-1/2} b(k-2m) \{c_{k,l}^1\},$$

B_y 是 y 方向的高通滤波算子,其定义为

$$B_y\{c_{k,l}^1\} = \sum_l 2^{-1/2} b(l-2n)\{c_{k,l}^1\}.$$

仿式(13.7a)至式(13.7d),有

$$\begin{cases} \{c_{m,n}^0\} = A_x A_y \{c_{k,l}^1\}, & (13.9a) \\ \{\alpha_{m,n}^0\} = A_x B_y \{c_{k,l}^1\}, & (13.9b) \\ \{\beta_{m,n}^0\} = A_y B_x \{c_{k,l}^1\}, & (13.9c) \\ \{\gamma_{m,n}^0\} = B_x B_y \{c_{k,l}^1\}. & (13.9d) \end{cases}$$

其具体的计算式是将式(13.5a)至式(13.5d)中的 $\{h_n\}$ 换成 $\{a_n\}$, $\{g_n\}$ 换成 $\{b_n\}$ 的结果. 对式(13.9a)至式(13.9d)在运算方面和频域表现方面的理解同于正交小波情形式(13.7a)至式(13.7d)的理解.

2) 半正交小波回复算法

已知 $\{c_{m,n}^0\}$ 、 $\{\alpha_{m,n}^0\}$ 、 $\{\beta_{m,n}^0\}$ 和 $\{\gamma_{m,n}^0\}$, 求 $\{c_{k,l}^1\}$. 记:

P_x 是 x 方向的低频回复算子,其定义为

$$P_x\{c_{m,n}^0\} = \sum_m 2^{-1/2} p(k-2m)c_{m,n}^0,$$

P_y 是 y 方向的低频回复算子,其定义为

$$P_y\{c_{m,n}^0\} = \sum_n 2^{-1/2} p(l-2n)c_{m,n}^0,$$

Q_x 是 x 方向的高频回复算子,其定义为

$$Q_x\{d_{m,n}^0\} = \sum_m 2^{-1/2} q(k-2m)d_{m,n}^0,$$

Q_y 是 y 方向的高频回复算子,其定义为

$$Q_y\{d_{m,n}^0\} = \sum_n 2^{-1/2} q(l-2n)d_{m,n}^0.$$

仿式(13.8a)至式(13.8e)有

$$\begin{cases} \{c_{k,l}^{1,0}\} = P_x P_y \{c_{m,n}^0\}, & (13.10a) \\ \{c_{k,l}^{1,1}\} = P_x Q_y \{\alpha_{m,n}^0\}, & (13.10b) \\ \{c_{k,l}^{1,2}\} = Q_x P_y \{\beta_{m,n}^0\}, & (13.10c) \\ \{c_{k,l}^{1,3}\} = Q_x Q_y \{\gamma_{m,n}^0\}, & (13.10d) \\ \{c_{k,l}^1\} = \{c_{k,l}^{1,0}\} + \{c_{k,l}^{1,1}\} + \{c_{k,l}^{1,2}\} + \{c_{k,l}^{1,3}\}. & (13.10e) \end{cases}$$

其具体计算式是将式(13.6a)至式(13.6e)中的 $\{h_n\}$ 换成 $\{p_n\}$, $\{g_n\}$ 换成 $\{q_n\}$ 的结果. 对式(13.10a)至式(13.10e)的理解,同于正交小波情形式(13.8a)至式(13.8e)的理解.

4. 双正交小波的分解、回复算法

在一维双正交小波中(参见第11章),利用了两个互相对偶的多分辨逼近 $\{V_j\}$ 和 $\{\tilde{V}_j\}$, 得到两种分解、回复算法.

第一种分解、回复算法式(12.24)中采用了数据分解低通数字滤波器 $\{h_n\}$,数据分解高通数字滤波器 $\{g_n\}$,低频回复数字滤波器 $\{\tilde{h}_n\}$,高频回复数字滤波器 $\{\tilde{g}_n\}$.

第二种分解、回复算法式(12.25)中采用了数据分解低通数字滤波器 $\{\tilde{h}_n\}$,数据分解高通数字滤波器 $\{\tilde{g}_n\}$,低频回复数字滤波器 $\{h_n\}$,高频回复数字滤波器 $\{g_n\}$.

二维双正交小波是一维双正交小波的张量积形式,二维双正交小波分解、回复过程的方法及其频域含义同于二维正交小波和半正交小波的情形,只是分解过程和回复过程采用了不同的数字滤波器而已.因此,仿照前面关于半正交小波的讨论可顺利地写出二维双正交小波的分解、回复算法.

1) 双正交小波分解算法 I

已知 $\{c_{k,l}^1\}$,求 $\{c_{m,n}^0\}$ 、 $\{\alpha_{m,n}^0\}$ 、 $\{\beta_{m,n}^0\}$ 和 $\{\gamma_{m,n}^0\}$,记:

H_x 是 x 方向的低通滤波算子,其定义为

$$H_x\{c_{k,l}^1\} = \sum_k 2^{-1/2} h(k-2m) c_{k,l}^1,$$

H_y 是 y 方向的低通滤波算子,其定义为

$$H_y\{c_{k,l}^1\} = \sum_l 2^{-1/2} h(l-2n) c_{k,l}^1,$$

G_x 是 x 方向的高通滤波算子,其定义为

$$G_x\{c_{k,l}^1\} = \sum_k 2^{-1/2} g(k-2m) c_{k,l}^1,$$

G_y 是 y 方向的高通滤波算子,其定义为

$$G_y\{c_{k,l}^1\} = \sum_l 2^{-1/2} g(l-2n) c_{k,l}^1.$$

仿式(13.9a)至式(13.9d),有

$$\begin{cases} \{c_{m,n}^0\} = H_x H_y \{c_{k,l}^1\}, & (13.11a) \\ \{\alpha_{m,n}^0\} = H_x G_y \{c_{k,l}^1\}, & (13.11b) \\ \{\beta_{m,n}^0\} = G_x H_y \{c_{k,l}^1\}, & (13.11c) \\ \{\gamma_{m,n}^0\} = G_x G_y \{c_{k,l}^1\}. & (13.11d) \end{cases}$$

其分解过程和频域表现的理解同于正交小波的情形,例如对式(13.11b)的理解为:对二维数据 $\{c_{k,l}^1\}$ 沿 y 方向用高通数字滤波器 $\{g_n\}$ 逐行作高通数字滤波,再将此结果(二维数据 $G_y\{c_{k,l}^1\}$)沿 x 方向用低通数字滤波器 $\{h_n\}$ 逐行作低通数字滤波,这样就得到了 $\{\alpha_{m,n}^0\}$.该结果能有效地表现 $\{c_{k,l}^1\}$ 在 x 方向低频和 y 方向高频的特点.对其它分解算法运算式的理解类似.

2) 双正交小波回复算法 I

已知 $\{c_{m,n}^0\}$ 、 $\{\alpha_{m,n}^0\}$ 、 $\{\beta_{m,n}^0\}$ 和 $\{\gamma_{m,n}^0\}$,求 $\{c_{k,l}^1\}$,记:

\tilde{H}_x^* 是 x 方向的低频回复算子,其定义为

$$\tilde{H}_x^* \{c_{m,n}^0\} = \sum_m 2^{-1/2} \tilde{h}(k-2m) \{c_{m,n}^0\},$$

\tilde{H}_y^* 是 y 方向的低频回复算子,其定义为

$$\tilde{H}_y^* \{c_{m,n}^0\} = \sum_n 2^{-1/2} \tilde{h}(l-2n) \{c_{m,n}^0\},$$

\tilde{G}_x^* 是 x 方向的高频回复算子,其定义为

$$\tilde{G}_x^* \{d_{m,n}^0\} = \sum_m 2^{-1/2} \tilde{g}(k-2m) \{d_{m,n}^0\},$$

\tilde{G}_y^* 是 y 方向的高频回复算子,其定义为

$$\tilde{G}_y^* \{d_{m,n}^0\} = \sum_n 2^{-1/2} \tilde{g}(l-2n) \{d_{m,n}^0\},$$

仿式(13.10a)至式(13.10e),有

$$\begin{cases} \{c_{k,l}^{1,0}\} = \tilde{H}_x^* \tilde{H}_y^* \{c_{m,n}^0\}, & (13.12a) \\ \{c_{k,l}^{1,1}\} = \tilde{H}_x^* \tilde{G}_y^* \{a_{m,n}^0\}, & (13.12b) \\ \{c_{k,l}^{1,2}\} = \tilde{G}_x^* \tilde{H}_y^* \{\beta_{m,n}^0\}, & (13.12c) \\ \{c_{k,l}^{1,3}\} = \tilde{G}_x^* \tilde{G}_y^* \{\gamma_{m,n}^0\}, & (13.12d) \\ \{c_{k,l}^1\} = \{c_{k,l}^{1,0}\} + \{c_{k,l}^{1,1}\} + \{c_{k,l}^{1,2}\} + \{c_{k,l}^{1,3}\}. & (13.12e) \end{cases}$$

其回复过程和频域表现的理解同于正交小波的情形.

同理,若记 \tilde{H}_x 、 \tilde{H}_y 分别是 x 和 y 方向的低通滤波算子, \tilde{G}_x 和 \tilde{G}_y 分别是 x 和 y 方向的高通滤波算子, H_x^* 和 H_y^* 分别是 x 和 y 方向的低频回复算子, G_x^* 和 G_y^* 分别是 x 和 y 方向的高频回复算子,则有双正交小波分别算法 II 和回复算法 II.

3) 双正交小波分解算法 II

$$\begin{cases} \{c_{m,n}^0\} = \tilde{H}_x \tilde{H}_y \{c_{k,l}^1\}, & (13.13a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \{a_{m,n}^0\} = \tilde{H}_x \tilde{G}_y \{c_{k,l}^1\}, & (13.13b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \{\beta_{m,n}^0\} = \tilde{G}_x \tilde{H}_y \{c_{k,l}^1\}, & (13.13c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \{\gamma_{m,n}^0\} = \tilde{G}_x \tilde{G}_y \{c_{k,l}^1\}. & (13.13d) \end{cases}$$

4) 双正交小波回复算法 II

$$\begin{cases} \{c_{k,l}^{1,0}\} = H_x^* H_y^* \{c_{m,n}^0\}, & (13.14a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \{c_{k,l}^{1,1}\} = H_x^* G_y^* \{a_{m,n}^0\}, & (13.14b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \{c_{k,l}^{1,2}\} = G_x^* H_y^* \{\beta_{m,n}^0\}, & (13.14c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \{c_{k,l}^{1,3}\} = G_x^* G_y^* \{\gamma_{m,n}^0\}, & (13.14d) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \{c_{k,l}^1\} = \{c_{k,l}^{1,0}\} + \{c_{k,l}^{1,1}\} + \{c_{k,l}^{1,2}\} + \{c_{k,l}^{1,3}\}. & (13.14e) \end{cases}$$

5. 多层次小波分解及其频域含义

像一维信号的小波多层次分解那样,二维信号也可作小波多层次分解,且是 x 方向和 y 方向一维多层次分解的张量积,两层分解的具体结构如图 13.9 所示.

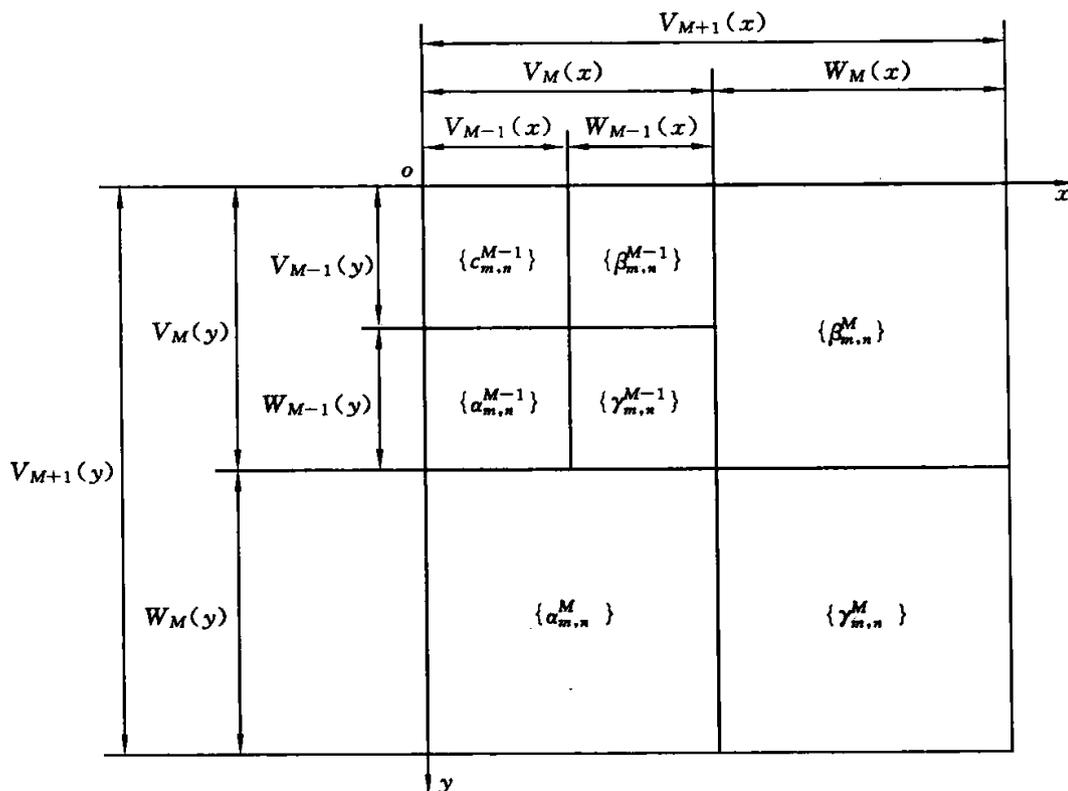


图 13.9 二维正交小波分解结构示意图

图 13.9 能反应以下问题.

(1) 关于二维信号数据分解和回复的结构. 二维数据 $\{c_{m,n}^{M+1}\}$ 作一次小波分解得 $\{c_{m,n}^M\}$ 、 $\{\alpha_{m,n}^M\}$ 、 $\{\beta_{m,n}^M\}$ 、 $\{\gamma_{m,n}^M\}$, 二维数据 $\{c_{m,n}^M\}$ 再作一次小波分解得 $\{c_{m,n}^{M-1}\}$ 、 $\{\alpha_{m,n}^{M-1}\}$ 、 $\{\beta_{m,n}^{M-1}\}$ 、 $\{\gamma_{m,n}^{M-1}\}$. 在回复过程中, 由 $\{c_{m,n}^{M-1}\}$ 、 $\{\alpha_{m,n}^{M-1}\}$ 、 $\{\beta_{m,n}^{M-1}\}$ 、 $\{\gamma_{m,n}^{M-1}\}$ 回复出数据 $\{c_{m,n}^M\}$, 再由 $\{c_{m,n}^M\}$ 、 $\{\alpha_{m,n}^M\}$ 、 $\{\beta_{m,n}^M\}$ 、 $\{\gamma_{m,n}^M\}$ 回复二维信号的原始数据 $\{c_{m,n}^{M+1}\}$.

(2) 关于二维信号小波分解数据的理解. $\{\alpha_{m,n}^M\}$ 表现了 $\{c_{m,n}^{M+1}\}$ 关于 x 方向的低频量和 y 方向的高频量, $\{\alpha_{m,n}^{M-1}\}$ 表现了 $\{c_{m,n}^M\}$ 关于 x 方向的低频量和 y 方向的高频量. 由图可明显看出, $\{\alpha_{m,n}^{M-1}\}$ 所表示的 x 方向的低频量范围仅是 $\{\alpha_{m,n}^M\}$ 所表示的位于低端的一半, $\{\alpha_{m,n}^{M-1}\}$ 所表示的 y 方向的高频(频率范围和频率中心)量都比 $\{\alpha_{m,n}^M\}$ 所表示的要低. 仿照这种理解, 读者可自行比较关于 $\{\beta_{m,n}^{M-1}\}$ 和 $\{\beta_{m,n}^M\}$ 在 x 方向的高频量和 y 方向的低频量的表现区别, 可自行比较 $\{\gamma_{m,n}^{M-1}\}$ 和 $\{\gamma_{m,n}^M\}$ 在 x 方向的高频量和 y 方向的高频量的表现区别.

(3) 关于特殊二维信号在图中数据的反应. 对于图 13.6 所示的曲面, 其图像数据若作两层小波分解, 则小波变换模极大值在 $\{\beta_{m,n}^{M-1}\}$ 和 $\{\beta_{m,n}^M\}$ 中表现突出, 在 $\{\gamma_{m,n}^{M-1}\}$ 和 $\{\gamma_{m,n}^M\}$ 中表现微弱. 对于图 13.7 所示曲面, 其图像数据作两层小波分解, 则小波变换模极大值在 $\{\alpha_{m,n}^{M-1}\}$ 和 $\{\alpha_{m,n}^M\}$ 中表现突出, 在 $\{\gamma_{m,n}^{M-1}\}$ 和 $\{\gamma_{m,n}^M\}$ 中表现微弱. 对于图 13.8 所示曲面, 相应图像数据作两层小波分解, 图像锥顶位置处小波变换模极大值在 $\{\gamma_{m,n}^{M-1}\}$ 和 $\{\gamma_{m,n}^M\}$ 中表现突出, 在其它数据块表现次之.

为看清图像分解表现,在图 13.10 中,将一幅图像在三个尺度层上作正交小波分解,分解数据按图 13.9 所示的结构存储.读者可自行观察分析图像中不同平面在分解数据的不同数据块中的特殊表现.

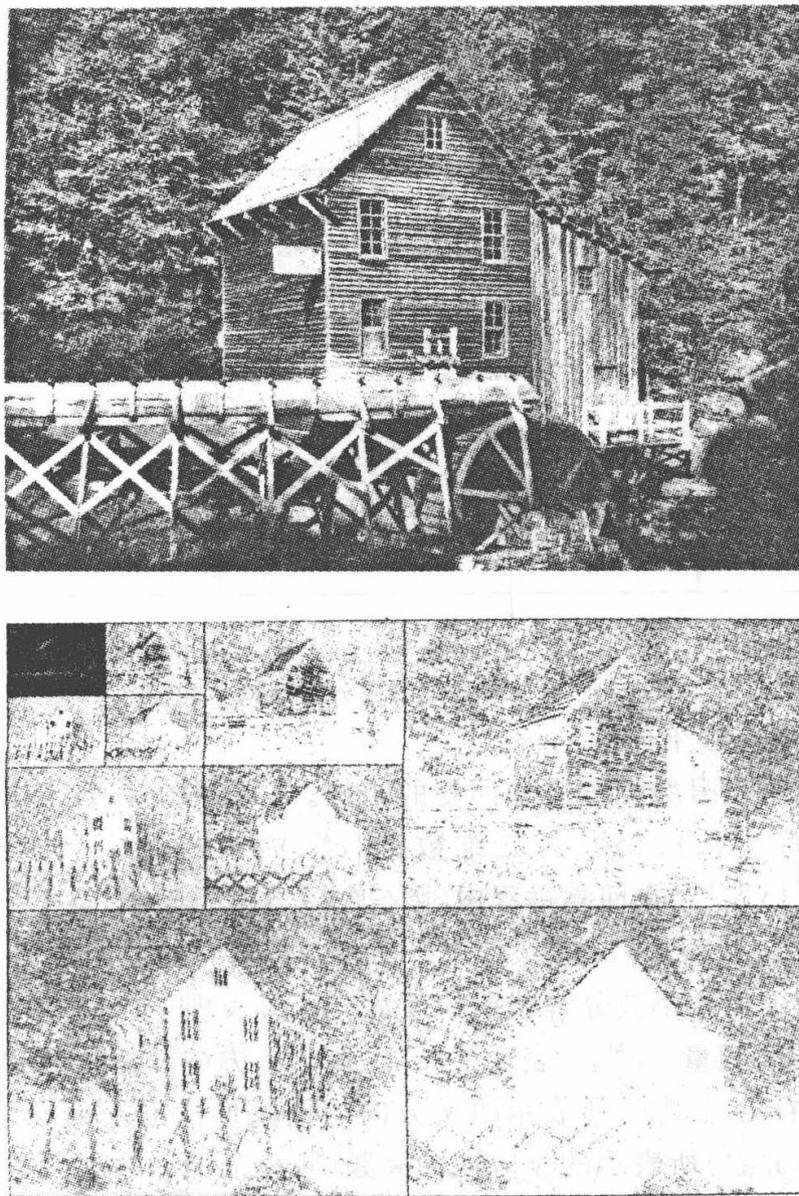


图 13.10 图像在三个尺度层上作小波分解

13.4 图像小波分析应用的原理

同一维信号小波分解的应用一样,二维信号的小波分解的应用也是十分广泛的,一维信号的小波处理目的、方法和技巧都可以推广到二维信号的小波处理过程中,但所有这些应用全部是建立在对二维小波分解的理解基础上的.特别地,对图 13.5 和图 13.9 的理解是关键性的.

在二维信号分析处理中,要根据不同的目的和要求,仔细分析信号所反应的物

理特性, 仔细分析数据的表现特点, 有针对性地提出处理办法才是切实可行的。

1. 图像消噪

图像中常常混有噪声, 例如卫星透过云层拍摄的照片传真到地面, 图像就含有噪声. 噪声种类很多, 如某个频段内的噪声、周期噪声、白噪声等. 为了抑制噪声, 提高信噪比, 提高图像的质量, 消噪处理是图像处理中的一项基本的且十分重要的任务. 根据噪声的不同表现特点, 采用相应的有效办法, 才能达到有效的消噪目的(参见文献[15]~[38]).

一般而言, 二维信号的噪声主要出现在高频部分, 那么, 二维信号的小波分解是如何表现高频分量的呢? 由图 13.5 和图 13.9 可知, 数据 $\{\alpha_{m,n}^{M-1}\}$ 和 $\{\alpha_{m,n}^M\}$ 能较突出地反映 y 方向的高频量, 而在 x 方向则主要表现低频量; $\{\beta_{m,n}^{M-1}\}$ 和 $\{\beta_{m,n}^M\}$ 能较突出地表现 x 方向的高频量; $\{\gamma_{m,n}^{M-1}\}$ 和 $\{\gamma_{m,n}^M\}$ 能表现 x 和 y 方向的高频量; $\{c_{m,n}^{M-1}\}$ 主要表现低频量. 根据这种规律, 可采用阈值处理手段, 有目的地在 x 方向、 y 方向以及对角线方向抑制噪声高频量的表现. 其处理原理类似于一维消噪情形.

图 13.11(a) 给出的是原始二维图像 ($\sin x \sin y$) 的表现, 在原始信号中加上 Gauss 噪声信号后图形表现如图 13.11(b) 所示. 现对受污染的图像数据作一次正交小波分解, 经简单门限值处理后抑制了噪声, 消噪后的图像如图 13.11(c) 所示.

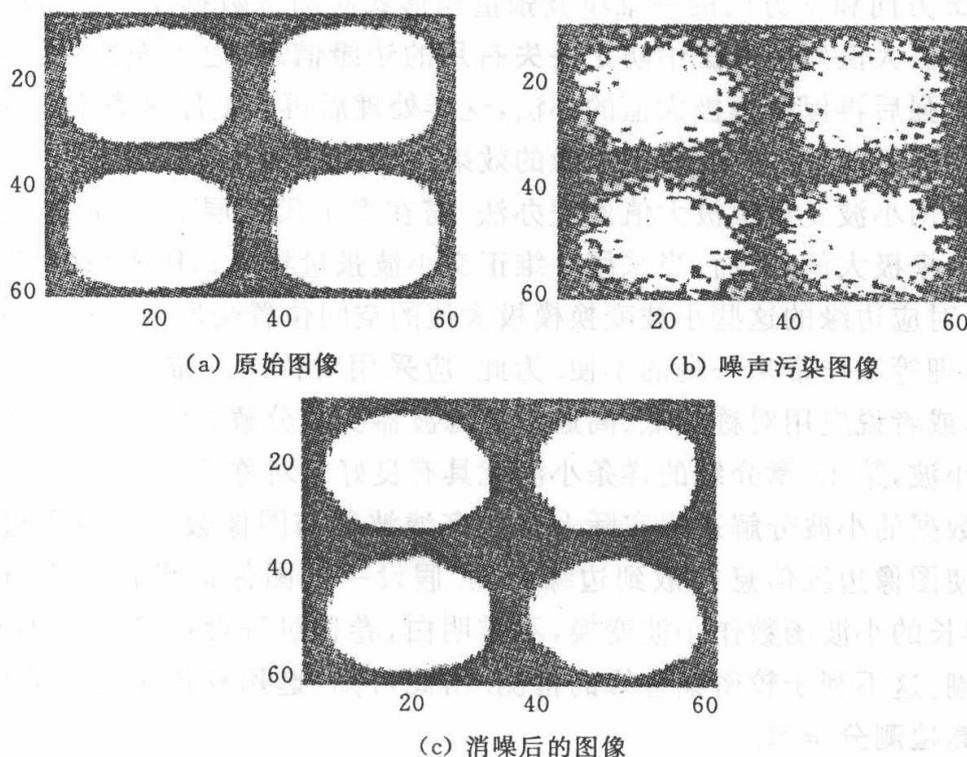


图 13.11 二维图像消噪

图像的边缘应该是明朗的, 由于噪声才使其模糊. 对于这种情形, 也可仿照一维情形的处理办法, 先强化边缘信息, 再进行消噪处理, 最后回复出图像的边缘, 这

样处理的效果会好些.

若有两幅背景相同的含噪图像,将两幅图像对齐后相减,则固定不变的信号会消失,噪声信号因相关性差而被大部分保留.在这种情况下作消噪处理的针对性强,效果也好.

总之,可利用噪声的不同特点来确定具体有效的消噪办法.

2. 图像边缘检测

图像边缘检测无论在图像消噪、图像识别、图像匹配还是在图像数据压缩等方面都是很重要的.图像边缘检测的原理和方法基本上是一维信号奇异点检测原理和方法的推广,但也有一些自身的特点(参见文献[15]~[38]).

图像边缘往往是由若干条曲线段组成的,沿着此边缘段的信号表现往往是光滑的,垂直于此边缘段的信号表现出奇异性.图像信号若采用张量积一维小波的形式进行小波分解,则数据 $\{\alpha_{m,n}\}$ 、 $\{\beta_{m,n}\}$ 和 $\{\gamma_{m,n}\}$ 分别体现了边界信号奇异性在 y 方向、 x 方向;保留这些数据中反映边缘突变的小波变换模极大值,可有效地反映并回复图像的边缘.据此道理,还可重新组织数据,采用 x' 和 y' 方向一维小波的张量积形式,这样的小波分解数据则在 x' 和 y' 方向较明显地表现边缘信号的突变性.同样,也可将上述两种方法结合起来表现图像边缘,以减少图像边缘信息的丢失.若仅采用 x 方向和 y 方向的一维小波张量积形式对图像数据作小波分解,为了在小波变换模极大值处理办法中防止丢失有用的边缘信息,也可先把小波变换模极大值信号增强后再保留模极大值的办法,这样处理后再回复原来表现边缘的数据,从而回复的图像能达到较好表现边缘的效果.

为了采用小波变换模极大值处理办法,需在多个尺度层上保留对应图像边缘的小波变换模极大值.然而,当采用一维正交小波张量积形式作图像数据多层次小波分解时,对应边缘的这些小的波变换模极大值的空间位置会发生偏移现象,这给检测、数据处理等工作带来一定的不便.为此,应采用对称的一维小波张量积形式作小波分解,或者说应用对称的低、高通数字滤波器实现分解算法.本书第10章介绍的内插值小波,第11章介绍的样条小波就具有良好的对称性.

图像数据的小波分解过程实际上是数字滤波器与图像数据的卷积过程,这个卷积过程使图像边缘信息扩散到边缘两侧.假设一些图像边缘较密集,边缘间距小,用支集长的小波函数作小波变换,不难明白,卷积过程会使各边缘小波变换表现变得模糊,这不利于较密集边缘的检测.由此可知,选用支集短的小波能对较密集边缘提高检测分辨率.

在边缘检测中不同光滑性即不同消失矩的小波也是有不同的应用表现的.因为在一维信号的小波分析中, N 阶消失矩小波的小波变换能反映信号导数不大于 N 的突变状况,由此可知在图像处理中,高阶消失矩的小波变换能反映图像更多类型的边缘细节.

3. 图像分割

所谓图像分割是指将反映某个特定物体的部分图像从整幅图像中分离出来。关于图像分割的原理是简单明了的,只要将特定物体的外部边缘清晰地检测出来,就能顺利地实现图像分割的目的。

图像分割的应用非常普遍。例如对于给定的一幅医疗图像,往往需要将某个特定的生理组织图像分离出来单独地分析研究;分离出某根血管图像以便分析其组织异常情况;分离出某个肿瘤图像以便分析其量变和质变的表现;分离出某个骨骼图像以便确定其三维形状和人工构造骨骼;等等。例如对于给定的一幅行进汽车的图像,需将其牌照图像部分分离出来,需将牌照中每个字符的部分图像分离出来,以使用计算机快速地识别该汽车的牌照号码。例如计算机要识别文件中的文字,必须将每个文字图像作分割处理;计算机要识别语言,必须将语言信号按文字发音作分割处理。例如对于给定的一幅航拍图像,常常需要将某个特定结构的图像分离出来,以便分析其地质结构或形体结构的特征。关于图像分割的应用是不胜枚举的。

4. 图像匹配

所谓图像匹配,是将反映某特定物体的部分图像确定其在整体图像中的位置。图像匹配的原理是简单明了的,一是要清晰表现特定物体在部分图像和整体图像中的边缘,二是要将该特定物体的两个边缘图形按方位和特征对齐。做到这两点就很容易实现图像匹配的目的了。

图像匹配的应用非常普遍。例如两幅医疗图像需要按某个生理组织作图像匹配,以便扩大图像的显示范围;两幅航拍照片需要按某个特定结构匹配,以便形成一幅涵盖范围更广的图片。例如在计算机图像制导中,需不断搜索判断目标图像在整幅图像中的位置,以便锁定目标。又例如,对某个物体构造其三维图形,可以从不同侧面获得多幅图像,再按物体的某些特征匹配,以便计算并获得不同视角的三维图形信息。关于图像匹配的应用也是不胜枚举的。

5. 图像拼接和镶嵌

局部性图片拼接成全局性图片,一幅图片中嵌入另一幅局部图片,这就是人工合成图像技术。这项技术在电影、电视和科技领域都有重要作用。

图像拼接和镶嵌的关键在于,两幅图像在拼接后不能出现明显的缝口,两幅图像的亮度在拼接后应平滑过渡。这就需要用到图像数字处理技术,小波分析方法可以细微地处理人工合成图像问题(参见文献[32])。

例如,两幅图像直接拼接成一幅图像,通过图像扫描输入原始数据,作多尺度层的小波分解,获得分解数据 $c^0, a^0, \beta^0, \gamma^0, \dots, a^M, \beta^M, \gamma^M$, 这些数据的含义如图 13.9 所示。观察这些数据块,发现每个数据块中都有两个突出的问题:① 由于两幅图像亮度差异造成数据块中有两半不同的亮度表现,应该采取手段使这两半的亮度表现均衡;② 两幅图像的接合边界在每个数据块中表现突出,应该采取手段使

边界两边平滑过渡. 经这样处理后的图像数据再回复出来的新图像就会消除两个半幅图像的亮度差异, 也会消除缝口的明显表现, 使其成为一幅完整的图像.

图像镶嵌处理的办法也基本类似于图像拼接处理办法, 用同样的办法也可对图像作局部明暗处理.

6. 图像数据压缩

图像数据是二维数组, 其数据量大, 为了提高图像的传输速度和存储效率等, 必须对图像数据进行压缩处理. 这也是图像处理中的一个重要的技术问题. 图像数据压缩的原理是明确的, 就是要尽可能地消除数据间的冗余, 尽可能少地存储有用数据, 利用压缩存储的数据回复出的图像要在视觉上为人们所接受. 当然, 可分析图像数据之间的各种各样的规律, 再根据这些规律确定消除数据冗余的办法, 因此图像数据压缩的方法应该是多种多样的. 这里仅在几个方面讨论数据压缩的办法.

直观地考察经一次小波分解的图像数据(见图 13.5), 它由四部分组成: $\{c_{m,n}^0\}$ 反映了图像平缓变化的表现, 表现了图像的低频分量, 其视觉感觉明显. $\{\alpha_{m,n}^0\}$ 反映了图像在 y 方向的变化细节, 它在 x 方向低频量突出, 在 y 方向高频量突出. 这些数据中幅值较大的数据可能反映了图像的重要细节(如边缘、纹理等), 幅值较小的数据则反映了图像中对视觉不那么敏感的细节. 同样, $\{\beta_{m,n}^0\}$ 和 $\{\gamma_{m,n}^0\}$ 数据也有类似的表现图像重要细节和不重要细节的区别. 用门限值处理办法, 对那些高频量数据进行处理, 直接丢弃那些对视觉影响小的、不是反映图像重要细节的数据, 而保留反映图像重要细节的数据, 这样, 需存储的数据大大减少, 达到数据压缩的目的. 从图 13.5 和图 13.9 中可以看到, 在反映高频量的数据块中, 的确存在着非常多的对视觉不敏感的数据, 采用这种简单的图像数据压缩方法是有很明显压缩效果的.

若仅保留有关图像边缘的数据, 其它数据则全部丢弃, 那么, 要存储的数据一定很少. 然而, 图像数据压缩的目的不仅是为了减少数据存储量, 而且还为了回复出的图像不影响人们的视觉效果. 然而, 利用图像边缘回复出图像的办法, 仅在一定的条件下适合数据压缩的要求. 当然, 也可以保留有关图像边缘的数据, 保留图像块纹理方面的数据, 其它数据则全部丢弃, 这样的数据压缩办法也只是在一定范围内适合数据压缩的要求.

现在, 要将图像作多尺度层次分解, 例如像图 12.2 那样作三次小波分解, 那么, 对某种确定的保留数据策略(例如保留边界特征)而言, 在数据块 $\{\alpha_{m,n}^0\}$ 、 $\{\alpha_{m,n}^1\}$ 和 $\{\alpha_{m,n}^2\}$ 之间一定存在着关联性质; 同样, 在 $\{\beta_{m,n}^0\}$ 、 $\{\beta_{m,n}^1\}$ 和 $\{\beta_{m,n}^2\}$ 之间, 在 $\{\gamma_{m,n}^0\}$ 、 $\{\gamma_{m,n}^1\}$ 和 $\{\gamma_{m,n}^2\}$ 之间, 也存在着关联性质. 抓住这种关联性质作图像数据压缩和图像数据编码会进一步提高编码效率, 提升图像数据压缩的效果.

现以保留图像边界特征为例考虑 $\{\gamma_{m,n}^0\}$ 、 $\{\gamma_{m,n}^1\}$ 和 $\{\gamma_{m,n}^2\}$ 数据块之间的联系. 把它们对应地分成若干子块, 简记为 $\{\gamma^0\}_i$ 、 $\{\gamma^1\}_i$ 和 $\{\gamma^2\}_i$, $1 \leq i \leq N$; $\{\gamma^0\}_i$ 可聚类

地分为重要子块和不重要子块,其不重要子块所对应的子块 $\{\gamma^1\}_i$ 和 $\{\gamma^2\}_i$ 往往也是不重要的,其重要子块所对应的子块 $\{\gamma^1\}_i$ 和 $\{\gamma^2\}_i$ 中一般也含有重要信息;重要子块 $\{\gamma^0\}_i$ 、 $\{\gamma^1\}_i$ 和 $\{\gamma^2\}_i$ 之间就数据量而言是逐渐膨胀的,就数字关系而言是相互关联的,且具有一定的相似传递关系,利用这些关系作聚类式的数据压缩图像编码可提高图像数据压缩比。

7. 图像弱小目标的检测与跟踪

图像制导技术在跟踪弱小目标方面也有着重要的应用,其关键在于对含有目标的背景图像作图像处理,检测出运动目标的位置、方向和速度,以确定相应的追踪操作。图像制导要涉及较多的图像小波分析处理技术(参见文献[32]~[38])。基于本书的范围,这里仅简要介绍有关的原理和办法。

(1) 为了方便分析和捕捉运动目标,可利用图像序列。这个序列图像的背景基本不动,仅是目标在运动。

(2) 由于序列图像中含有背景噪声和其它噪声,也含有弱小目标。弱小目标有时被噪声淹没,有时相对于背景灰度值发生突变,所以要作预处理工作。预处理的目的在于抑制噪声和增强小目标的表现力。图像预处理办法基本上类似于一维情形的处理办法。预处理办法之一是,用相邻两幅图像相减,基本上可以消除背景噪声,并获得含有目标的局部图像,但噪声的抑制效果一般不好。预处理办法之二是,对单幅图像作多层次小波分解,用门限值处理并保留目标边缘(也含有少量的其它的边缘信息);再按图 6.6 所示的办法增强边缘,以达到抑制噪声、增强小目标(有些边缘也会被增强)的目的。

(3) 对预处理图像序列作综合校正处理,检索增强后的小目标。特别值得注意的是,因为小目标非零灰度值相对集中,误留目标的非零灰度值较零散,其它背景经预处理后的灰度值为零,所以检测非零灰度值集中区即可检测出寻找目标的范围和质心位置。

(4) 按(3)所述办法形成新的图像序列,由此可确定小目标的位置、运动方向和运动速度。

结 束 语

目前,已有不少关于小波分析及其应用方面的图书,它们往往强调学术性而忽略了普及性.本书以强调普及性和实用性为主,从数学的角度、用较通俗的描述方式讨论小波分析的基本内容,主要围绕时-频分析的需要讨论小波分析的基本原理及其应用的基本思想,仅介绍便于普及的、实用的内容.读者只需高等数学基础知识就可顺利阅读,在掌握基本内容后即可独立地开展应用研究工作,可自己编程,也可应用一些关于小波分析的软件.现在,提供小波分析软件的地方很多,读者只要在网上搜索“Wavelet Software”就会得到很多信息,可在网上下载关于各类小波的软件。

然而,用好小波分析这个工具,是建立在深刻理解小波分析机理的基础上的,因此,在阅读本书时,首先应在理解它的基本内容上下工夫。

小波分析作为一种新的时-频分析技术,它的应用领域相当广阔,它的成果相当丰富而辉煌,其快速算法的固化所带来的应用前景也是不可估量的。

构造不同类型、不同特点的小波是小波分析理论及其应用研究的主要内容之一.小波构造可纳入多分辨逼近的框架中,小波的构造方法和表现形式是丰富多彩的:有些小波是从滤波器的特点出发而构造出来的,有些小波是从时域或频域中的一般 Riesz 基作为出发点而获得的.在正交性表现方面,有些小波是不正交的,有些小波是半正交的,有些小波关于尺度和平移都是正交的,也有些小波是采用对偶概念构造出来的双正交的;关于正交性度量形式,有些小波是关于内积、带权内积正交的,有些小波是关于 Sobolev 模正交的;关于对称的要求,有些小波是奇对称的,有些小波是偶对称的;关于光滑性的要求,有些小波光滑性低,有些小波光滑性高,有些小波是无穷次可微的;关于小波支集长的要求,有些小波是支集无限的,有些小波是支集有限的;关于小波局部化能力和衰减性方面的要求,有些小波是具有高阶消失矩的;关于小波的函数形式,有些小波无法用函数解析表示,有些是多项式小波,有些是有理函数小波,有些是指数函数形式的小波.在本书介绍的多分辨逼近框架中,尺度函数仅有一个,在各个尺度分划下,用该尺度函数的整平移线性组合表示该尺度的近似信号,在此结构下,一个尺度函数对应着一个小波函数.其实,在各个尺度下可用多个函数的整平移线性组合表示该尺度的近似信号,于是这多个函数可生成多分辨逼近,由此可构造出多重小波.在本书介绍的多分辨逼近框架中,相邻尺度分划是二分关系,这样由一个尺度函数构造出多种多样的二进小波,某尺度下近似信号所表示的频域范围被分为两半,一半是低频带部分,另一半

是高频带部分. 其实, 相邻尺度分划可以是三分关系, 由一个尺度函数可生成三进的多分辨逼近, 由此可构造两个小波函数, 此时某尺度下近似信号所表示的频域范围被分为三等份, 即低频带部分和两个高频带部分, 这将有利于更细致地分析信号. 不仅如此, 人们还可对三进小波提出正交性、半正交性、双正交性、奇对称性、偶对称性、短支集性、高阶消失矩等众多的性质要求, 这将有利于更方便地分析信号. 这些内容本书不再讨论.

用小波级数逼近不同类型的函数, 是小波理论及其应用研究的另一个重要方面. 本书在此处仅对这方面内容作了一些简略的介绍, 有兴趣的读者可以进一步阅读文献[18]~[24]. 关于小波方法求解常微分和偏微分方程(初边值问题), 可按 Ritz-Galerkin 方法, 将有限项小波级数代入弱解方程, 求解相应的代数方程组, 即可获得微分方程的数值解. 这种小波 Ritz-Galerkin 方法仍有许多问题值得研究. 一是构造不同光滑程度的小波基, 构造按微分方程形式正交的小波基, 特别是在闭区间上的正交小波基, 以满足对微分方程解逼近性质的需要, 以满足快速算法的需要. 二是关于相应代数方程组元素(通常是某种内积形式)的快速递推算法和压缩存储算法的研究. 三是小波逼近理论方面性质的研究. 关于小波方法求解积分方程特别是边界积分方程, 仍可将有限小波级数代入相应的弱解方程, 此时的离散代数方程组系数矩阵的元素分布会表现出很强的规律性, 为系数矩阵元素的压缩存储和减小求解工作量提供了新的途径. 然而, 各种带奇异核数值积分的快速算法还需深入研究. 虽然小波方法求解微分方程和积分方程还未达到方便、实用的阶段, 但这方面工作对小波分析提出了更多的、更深层次的研究内容, 为小波分析的深入发展增加了新的动力.

小波分析是关于时-频分析的一种新技术, 是关于函数离散逼近且具有时-频含义的一种新方法, 它融合了数学领域许多好的实用方法, 让人们耳目一新. 小波分析的研究现状非常类似于有限元方法的初、中期阶段, 小波分析在理论和应用方面的深入研究有着非常广阔的前景. 希望本书能为广大读者从事小波分析理论及应用研究起到引导作用.

参考文献

- [1] 刘贵忠, 邸双亮. 小波分析及其应用[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1992.
- [2] 秦前清, 杨宗凯. 实用小波分析[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1994.
- [3] 崔锦泰. 小波分析导论[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1995.
- [4] 李世雄. 小波变换及其应用[M]. 北京: 高等教育出版社, 1997.
- [5] 彭玉华. 小波变换与工程应用[M]. 北京: 科学出版社, 1999.
- [6] 胡昌华, 张军波, 夏军, 等. 基于 MATLAB 的系统分析与设计——小波分析[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1999.
- [7] 杨福生. 小波变换的工程分析与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2000.
- [8] DAUBECHIES I. Ten Lectures on Wavelets[J]. SIAM. Philadelphia, 1992.
- [9] MEYER Y. Wavelets and Applications. Proceedings of the International Conference Marseille[M], France(1989). RMA20. 1992.
- [10] CHANGFA X, CHAO C, GUOKUAN L, et al. The Interpolating Wavelet and Its Applications, Conference of International Symposium on Multispectral Image Processing [M]. SPIE. 1998:428-432.
- [11] 李岳生, 齐东旭. 样条函数方法[M]. 北京: 科学出版社, 1979.
- [12] 徐长发, 王邦. 实用计算方法[M]. 2 版. 武汉: 华中科技大学出版社, 2009.
- [13] 徐长发. 实用偏微分方程数值解法[M]. 2 版. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002.
- [14] 徐长发. 科技应用中的微分变分模型[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2004.
- [15] 林湘宁, 刘沛, 徐长发. 小波分析基础理论及其在电力系统中的应用 I, II, III[J]. 电力系统自动化, 1997, 21(10, 11, 12): 80-83, 75-79, 79-83.
- [16] 陈加忠, 徐长发. 基于小波分析的压缩扩张技术在短波通信中的应用[J]. 无线电工程, 1998, 28(5): 17-19.
- [17] 陈加忠, 徐长发, 王宏远. 多基编码技术在短波线路压扩器中的应用[J]. 信号处理, 1999 (2): 152-156.
- [18] 熊联欢, 徐长发, 谢晓明. Sobolev 正交小波函数[J]. 应用数学, 1995(增刊): 85-90.
- [19] 徐长发, 冯勇. B 小波有限元方法及其数值稳定性分析 (I)-(III)[J]. 华中理工大学学报, 1996, 24(6): 105-112.
- [20] 熊联欢, 李德华, 徐长发. 求解常系数 ODE 的 Sobolev 正交小波有限元法[J]. 华中理工大学学报, 1997, 25(5): 75-78.
- [21] 徐长发, 姚亦峰. 小波方法解对流方程中的压缩存储和快速算法[J]. 华中理工大学学报, 1997, 25(6): 94-99.
- [22] 徐长发, 姚亦峰. 对数型奇异核小波展开的递推算法[J]. 华中理工大学学报, 1998, 26(5): 109-112.

- [23] 徐长发,姚亦峰.带小波函数的 Cauchy 主值积分的数值计算[J].高校计算数学学报,1998(2):97-105.
- [24] 徐长发,姚亦峰.求解一类 Hilbert 核的奇异积分方程的小波方法[J].高校计算数学学报,2000(1):28-35.
- [25] 蔡超,徐长发.带小波函数积分的外推加速算法[J].应用数学,1999,12(3):21-25.
- [26] 朱春喜,徐长发,蔡超.双正交多重小波的一种构造方法[J].应用数学,1999,4(12):121-125.
- [27] 朱春喜,徐长发,蔡超.对称反对称多重尺度函数的构造[J].高校计算数学学报,2000(4):371-378.
- [28] 廖国勇,徐长发.一种快速重构信号的方法[J].华中科技大学学报,2002,30(8),96-100.
- [29] 付敏,徐长发,李艳.基于多尺度分析的数据非线性压缩和恢复[J].华中科技大学学报,31(11),101-103.
- [30] 徐长发,陈端,张锴. Daubechies 小波的 δ -序列数值求解 PDE[J]. 华中科技大学学报,2004,32(10),112-116.
- [31] 徐长发,张锴,闵志方.插值样条 δ -序列求解非线性对流扩散方程[J]. 华中科技大学学报,2005,33(7),122-124.
- [32] 徐长发,闵志方,张锴.一种基于 PDE 提高信噪比的图像处理算法[J].2006,34(2),14-16.
- [33] 李国宽,李红.从图像序列中检测定位小目标的一种方法[J].华中理工大学学报,1999,27(8):63-65.
- [34] 李国宽,李红.红外图像序列中运动小目标的检测方法[J].华中理工大学学报,1999,27(11):20-22.
- [35] 李国宽,李红.基于向量小波变换的小目标检测方法[J].华中理工大学学报,2000,28(1):73-75.
- [36] 李国宽,彭嘉雄.基于小波变换的红外成像弱小目标检测方法[J].华中理工大学学报,2000,28(5):69-71.
- [37] 李红,李国宽.向量小波及其在语音信号增强中的应用[J].华中理工大学学报,1999,27(11):23-24.
- [38] 李红,李国宽.向量小波及其在活动图像编码中的应用[J].华中理工大学学报,1999,27(11):19-20.
- [39] 李红,李国宽.向量小波及其在图像拼接中的应用[J].华中理工大学学报,1999,27(11):21-22.

Images have been losslessly embedded. Information about the original file can be found in PDF attachments. Some stats (more in the PDF attachments):

```
{
  "filename": "XzEyMzgwODY1LnppcA==",
  "filename_decoded": "_12380865.zip",
  "filesize": 18878673,
  "md5": "16b3f080b2dff07570d1b289672449bd",
  "header_md5": "82c6d424e6a909329b2870bc7acebccb",
  "sha1": "79e6a25b0a9db77addf944c71dcad45896adc33d",
  "sha256": "6fcf6cfd5284436f7ec390962179abbfa870843f7d490138759fd327024642cb",
  "crc32": 2711765346,
  "zip_password": "wcpfxk&^TDwcpfxk",
  "uncompressed_size": 19418419,
  "pdg_dir_name": "",
  "pdg_main_pages_found": 241,
  "pdg_main_pages_max": 241,
  "total_pages": 254,
  "total_pixels": 1306042560,
  "pdf_generation_missing_pages": false
}
```