"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

工程数学

——积分变换

（第六版）

ENGINEERING MATHEMATICS

东南大学数学学院 张元林 编

高等教育出版社

ENGINEERING MATHEMATICS

工程数学——
积分变换（第六版）
习题全解指南

配套辅导书扫码轻松购

天猫旗舰店

官方微店

ISBN 978-7-04-051262-5

9 787040 512625 >

定价 28.50 元

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

工程数学

——积分变换

（第六版）

ENGINEERING MATHEMATICS

东南大学数学学院 张元林 编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书介绍 Fourier 变换和 Laplace 变换这两类积分变换的基本内容及其某些应用，初版于 1978 年，再版于 1982 年，三版于 1989 年，四版于 2003 年，五版于 2012 年。本次修订在基本保持第五版的系统和结构的基础上，增添了一些内容，特别是“积分变换的 MATLAB 运算”（第三章），并加强了该书的实用性和灵活性，以适应不同专业和不同层次的要求，书中的例题与习题也作了适量的补充与调整。书后附有 Fourier 变换简表和Laplace变换简表，可供读者学习时查用。书中给出的习题答案可供参考。

本书可供高等学校非数学类专业本科生选作教材，也可作为工科研究生的教材或教学参考书，亦可供广大工程技术人员和科研工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学. 积分变换 / 张元林编. ——6 版. ——北京：高等教育出版社，2019. 4

ISBN 978-7-04-051262-5

Ⅰ. ①工… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①工程数学-高等学校-教材②积分变换-高等学校-教材 Ⅳ. ①TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 011964 号

策划编辑 于丽娜　责任编辑 杨 帆　封面设计 赵 阳　版式设计 童 丹
插图绘制 于 博　责任校对 高 歌　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　刷	高教社(天津)印务有限公司		http://www.hepmall.com
开　本	787mm×960mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　张	14.5	版　次	1978 年 12 月第 1 版
字　数	240 千字		2019 年 4 月第 6 版
购书热线	010－58581118	印　次	2019 年 4 月第 1 次印刷
咨询电话	400－810－0598	定　价	28.50 元

物 料 号 51262－00

第六版前言

本书第五版自2012年6月出版以来，被许多高等院校选为教材。经过6年来的教学实践的检验，获得同行和广大读者的支持与认可。他们普遍认为本书具有文字叙述简明扼要、逻辑严谨论述清晰、例题习题配置适当以及便于自学等优点，同时也提出了一些宝贵的意见和建议，这些将是本次修订要认真考虑的。

本书第五版及其配套的习题全解指南于2014年10月以套书形式被评为“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材。为了使本书更好地适应我国科学技术、经济建设和高等教育事业的发展，基于同行和广大读者的宝贵意见和建议，本次修订基本保持第五版的内容和结构体系，修改和补充一些内容。具体说来，即

(1) 对第五版书中个别例子的提法和解法以及个别地方的表述进行修改和补充，使读者更好地理解积分变换在后继课程和工程技术领域中的重要性。

(2) 随着科学技术的发展和计算机应用的普及，本次修订增加了“积分变换的MATLAB运算”作为第三章，主要用它来求解函数的Fourier变换、Laplace变换以及它们的逆变换等问题。这样，不仅是与时俱进，让读者的精力更多地集中在基本概念、性质及变换技巧的学习和研究上，而且还为读者增添了一种新的解题方法，也为相关工程技术人员和科研工作者的需要提供了一个易学好用、方便快捷的有效工具。

(3) 在本书第五版中已经说明有星号*的内容可根据不同专业、不同教学时数等情况加以取舍，它们也可供对此有兴趣的读者和学有余力的学生参考。为了更好地做到这一点，本次修订时，某些应用的内容以二维码的形式呈现。这样，可以节省篇幅，也可以为有兴趣的读者和学有余力的学生提供更多的内容，从而扩大读者的视野，增加解题的方法，提高解题的能力。

本次修订，对同行和广大读者提供的宝贵意见和建议表示衷心的感谢。

高等教育出版社数学分社的领导和同志们长期以来对本书的多次修订、

出版都给予了大力支持，特别是于丽娜编辑和杨帆编辑在本次修订和出版工作中给予了热情的支持，付出了辛勤的劳动。编者谨此致以诚挚的谢意。

由于编者水平有限，书中的不妥之处在所难免。编者热忱欢迎使用本书的老师和广大读者批评指正。

张元林

2018 年 5 月于南京

第五版前言

本书第四版自2003年12月出版以来，被许多高等学校选为教材。经过7年多教学实践的检验，一些素不相识的读者和老师寄来了他们对本书的使用意见，除了认可和鼓励外，也提出了一些宝贵的建议和要求。所有这些无疑是本次修订要认真加以考虑的。

随着改革开放的不断深入，我国的科学技术、高等教育和经济建设都有了长足的发展，这就要求教学内容和课程设置与之相适应。加强基础课程的教材建设是不可缺少的重要环节，也是保证和提高教学质量，培养“高精尖”人才的关键。

积分变换是高等学校理工类专业学生继高等数学和复变函数之后的又一门重要的数学基础课程。学好积分变换不仅可以复习和巩固高等数学和复变函数的相关基础知识，而且又为后继课程的学习和工程技术的应用打下必要的理论基础。由此可见这门课程的教学内容和教材建设的重要性。

鉴于读者和同行们的宝贵意见与建议，在基本保持本书第四版的系统与结构的前提下，编者参阅国内外相关教材，主要作了如下修订：进一步加强基本内容，包括概念和方法的阐释，以便读者更好理解和牢固掌握；改写第四版中的个别内容，包括习题和答案中的一些错误或不当表述；进一步调整和补充适量的例题和习题，注意它们的典型性和多样性，以利于学生掌握所学内容，提高分析问题和解决问题的能力；进一步注意本课程的实用性，在第一章中增加一节多重 Fourier 变换，介绍它的概念、性质及某些应用，从而拓展 Fourier 变换的应用范围；在第二章中，将本书第四版中的§2.3与§2.4交换了次序，以便更系统地阐述求 Laplace 逆变换的方法。

对于书中有星号*的内容，可根据不同专业、不同教学时数及不同层次要求等情况加以取舍。如不包含星号*的内容，建议使用本书的教学时数为18—20。书中有星号*的内容，虽然超出本课程的教学基本要求，但可供对此有兴趣的读者和学有余力的学生参考，从而能够扩大学生的视野。该书也可作为相关工程技术人员和科研工作者的参考用书。

一本好的教材是编者和读者，特别是使用该教材的教师们共同营造的，是很多教师多年教学实践的结果。为此，编者向他们及对本书提出宝贵意见和

建议的同行们表示衷心感谢。

高等教育出版社数学分社的领导和同志们长期以来对本书的多次修订、出版都给予了大力支持，特别是李艳馥、蒋青和于丽娜对本书的近期修订和出版工作，付出了辛勤劳动。编者谨此表示深深的谢意。

限于编者水平，书中的不妥和谬误在所难免，敬请使用本书的同行和广大读者批评指正。

编　者

2012 年 2 月于南京

第四版前言

本书第三版自1989年5月出版以来，为许多院校用作教材。经过10多年教学实践的检验，受到了同行和广大读者的欢迎。同时他们也提出了宝贵的意见和建议，这也是促成本次修订的理由。在此谨表谢忱。

此次修订的另一个动因，则是课程体系与设置、教材的建设与改革须与时俱进。10多年来，改革开放不断深入，我国经济建设和科学技术迅速发展，教育环境发生了很大变化，教学改革取得很大进展，本书的再次修订也是适应时代进步的必然。

高等教育出版社高等理工分社的支持又使本书的此次修订由编者和读者的愿望变成了现实。在此同样表示感谢。

本次修订，其基本内容符合原国家教委1995年颁布的《工程数学课程教学基本要求》，为满足各类专业及不同层次的需求，并体现理论联系实际的原则，加强了本书的实用性。如此更有利于学生学以致用，也可使本书成为有关专业的研究生、教师和从事相关工作的技术人员的参考用书。在保持第三版系统和结构的前提下，本版增加了一些内容。第一章增加了§1.5 Fourier变换的应用，其中给出"微分、积分方程的Fourier变换解法"和"偏微分方程的Fourier变换解法"两小节；第二章在§2.5 Laplace变换的应用中充实了微分方程的Laplace变换解法的内容，增加了"偏微分方程的Laplace变换解法"一小节；同时在这两章中，还调整和补充了适量的例题和习题。

积分变换应用广泛，本书只能给出一些最基本的内容和应用范例，以求举一反三之效，从而激活读者思维，开阔思路，扩大视野，增强其学习兴趣。书中有星号*的内容可根据不同专业，不同教学时数等情况加以取舍。它们也可供对此有兴趣的读者和学有余力的学生参考。

本书第三版的编者署名为南京工学院数学教研组，而南京工学院早于1988年更名为东南大学。因此，本书第四版即如封面所署名，特此说明，以免混淆。

由于编者水平所限，书中错误或不妥之处在所难免，殷切希望使用本书的教师及广大读者批评指正，以期日后再作修订。

编　者

2003 年 6 月于南京

目　录

引　言

在数学中，为了把较复杂的运算转化为较简单的运算，常常采取一种变换手段.例如数量的乘积或商可以通过对数变换变成对数的和或差，然后再取反对数，即得到原来数量的乘积或商.这一方法的实质就是把较复杂的乘除运算通过对数变换化为较简单的加减运算（当然，上述运算是依赖于对数表来完成的）.再如解析几何中的坐标变换、复变函数中的保角变换等都属于这种情况.所谓积分变换，就是通过积分运算，把一个函数变成另一个函数的变换，一般是含有参变量 α 的积分

$$F(\alpha)=\int_a^b f(t)K(t,\alpha)\mathrm{d}t.$$

它的实质就是把某函数类 A 中的函数 $f(t)$ 通过上述积分的运算变成另一函数类 B 中的函数 $F(\alpha)$，这里 $K(t,\alpha)$ 是一个确定的二元函数，称为积分变换的核.当选取不同的积分域和变换核时，就得到不同名称的积分变换.例如变换核 $K(t,\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$，积分域 $(a,b)=(-\infty,+\infty)$，则有

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \quad (\omega \text{ 为实变量}),$$

变换核 $K(t,s)=\mathrm{e}^{-st}$，积分域 $(a,b)=(0,+\infty)$，则有

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \quad (s \text{ 为复变量}).$$

它们分别称为 Fourier 变换和 Laplace 变换（在应用数学中，常用的积分变换还有 Fourier 正弦变换，Fourier 余弦变换，Hankel 变换和 Mellin 变换等）. $f(t)$ 称为象原函数，$F(\alpha)$ 称为 $f(t)$ 的象函数，在一定条件下，它们是一一对应的，而且变换是可逆的.

用积分变换去解微分方程或其他方程，就如同用对数变换计算数量的乘积或商一样.如果从原方程中直接求未知的解 y 有困难或较为复杂时，则可求它的某种积分变换的象函数 Y，然后再由求得的 Y 去找 y.当然，这种变换的选择应当使得由原来关于 y 的方程经变换得到的关于 y 的象函数 Y 的方程是容易求解的.一般地说，在这种变换之下，原来的偏微分方程可以减少自变量的个数直至变成常微分方程，原来的常微分方程可以变成代数方程，从而使得在函数类 B 中的运算简化，找出在 B 中的一个解，再经过逆变换，就得到原来要

在函数类 A 中所求的解(当然,上述求变换与求逆变换是可以依赖于积分变换表来完成的).

积分变换的理论和方法不仅在数学的许多分支中有着广泛的应用,而且在其他自然科学和各种工程技术领域中已成为不可缺少的运算工具.本书要介绍的是最常用的两类积分变换:Fourier 变换和 Laplace 变换.我们着重讨论它们的定义、性质及某些应用.

第一章　Fourier 变换

§1.1　Fourier 积分

在学习 Fourier 级数的时候，我们已经知道，一个以 T 为周期的函数 $f_T(t)$，如果在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上满足 Dirichlet 条件（即函数在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上满足：

1° 连续或只有有限个第一类间断点；

2° 只有有限个极值点），

那么在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上就可以展成 Fourier 级数. 在 $f_T(t)$ 的连续点处，级数的三角形式为

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)\ , \tag{1.1}$$

其中

$$\omega=\frac{2\pi}{T},$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\cos n\omega t\mathrm{d}t\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\sin n\omega t\mathrm{d}t\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

为了今后应用上的方便，下面把 Fourier 级数的三角形式转换为复指数形式. 利用 Euler 公式①

$$\cos\varphi=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}}{2},$$

---

① 数学中常用“i”表示虚数单位，这里用“j”表示虚数单位是按照电工学中通常的习惯.

$$\sin\varphi=\frac{e^{j\varphi}-e^{-j\varphi}}{2j}=-j\frac{e^{j\varphi}-e^{-j\varphi}}{2},$$

此时,(1.1)式可写为

$$\begin{aligned}f_T(t)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{jn\omega t}+e^{-jn\omega t}}{2}+b_n\frac{e^{jn\omega t}-e^{-jn\omega t}}{2j}\right)\\&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-jb_n}{2}e^{jn\omega t}+\frac{a_n+jb_n}{2}e^{-jn\omega t}\right).\end{aligned}$$

如果令

$$c_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\,dt,$$

$$\begin{aligned}c_n&=\frac{a_n-jb_n}{2}\\&=\frac{1}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\cos n\omega t\,dt-j\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\sin n\omega t\,dt\right]\\&=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)(\cos n\omega t-j\sin n\omega t)\,dt\\&=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)e^{-jn\omega t}\,dt\quad(n=1,2,3,\cdots),\end{aligned}$$

$$c_{-n}=\frac{a_n+jb_n}{2}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)e^{jn\omega t}\,dt\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

而它们可合写成一个式子

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)e^{-jn\omega t}\,dt\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

若令

$$\omega_n=n\omega\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

则(1.1)式可写为

$$\begin{aligned}f_T(t)&=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_ne^{j\omega_nt}+c_{-n}e^{-j\omega_nt})\\&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_ne^{j\omega_nt},\end{aligned}$$

这就是 Fourier 级数的复指数形式,或者写为

$$f_T(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)e^{-j\omega_n\tau}\,d\tau\right]e^{j\omega_nt}.\tag{1.2}$$

下面我们来讨论非周期函数的展开问题.任何一个非周期函数 $f(t)$ 都可以看成是由某个周期函数 $f_T(t)$ 当 $T\to+\infty$ 时转化而来的.为了说明这一点,我们作周期为 T 的函数 $f_T(t)$,使其在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$ 之内等于 $f(t)$,而在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$ 之外按周期 T 延拓到整个数轴上,如图 1-1 所示.很明显,T 越大,$f_T(t)$ 与 $f(t)$ 相等的范围也越大,这表明当 $T\to+\infty$ 时,周期函数 $f_T(t)$ 便可转化为 $f(t)$,即有

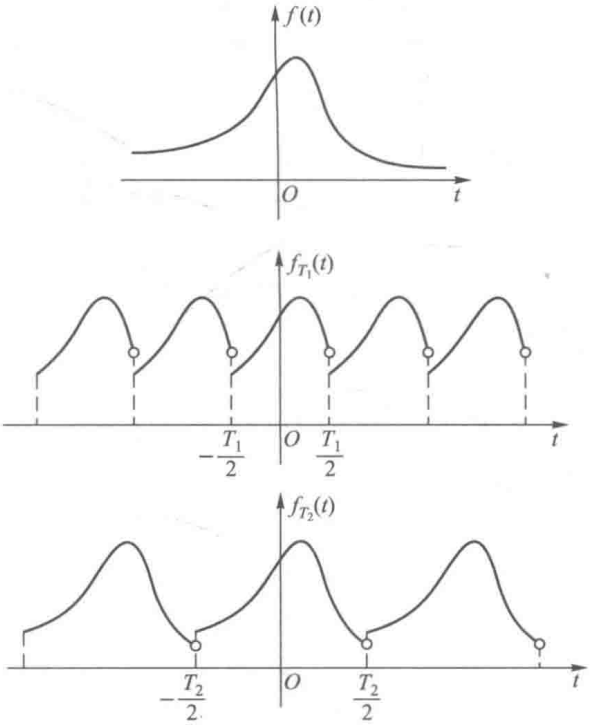


图 1-1

$$\lim_{T\to+\infty} f_T(t)=f(t).$$

这样,在(1.2)式中令 $T\to+\infty$,结果就可以看成是 $f(t)$ 的展开式,即

$$f(t)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_n\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_n t}.$$

当 n 取一切整数时,ω_n 所对应的点便均匀地分布在整个数轴上,如图 1-2 所示.若两个相邻点的距离以 $\Delta\omega_n$ 表示,即

$$\Delta\omega_n=\omega_n-\omega_{n-1}=\frac{2\pi}{T},\ \text{或}\ T=\frac{2\pi}{\Delta\omega_n},$$

图 1-2

则当 $T\to+\infty$ 时,有 $\Delta\omega_n\to 0$,所以上式又可以写为

$$f(t)=\lim_{\Delta\omega_n\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_n\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_n t}\Delta\omega_n. \tag{1.3}$$

当 t 固定时,$\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_n\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_n t}$ 是参数 ω_n 的函数,记为 $\Phi_T(\omega_n)$,即

$$\Phi_T(\omega_n)=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_n\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_n t}.$$

利用 $\Phi_T(\omega_n)$ 可将(1.3)式写成

$$f(t)=\lim_{\Delta\omega_n\to 0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Phi_T(\omega_n)\Delta\omega_n.$$

很明显,当 $\Delta\omega_n\to 0$,即 $T\to+\infty$ 时,$\Phi_T(\omega_n)\to\Phi(\omega_n)$,这里

$$\Phi(\omega_n)=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_n\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_n t}.$$

从而 $f(t)$ 可以看作是 $\Phi(\omega_n)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的积分

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\omega_n)\mathrm{d}\omega_n,$$

即

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\omega)\mathrm{d}\omega,$$

亦即

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

这个公式称为函数 $f(t)$ 的 **Fourier 积分公式**.应该指出,上式只是由(1.3)式的右端从形式上推出来的,是不严格的.至于一个非周期函数 $f(t)$ 在什么条件下,可以用 Fourier 积分公式来表示,有下面的收敛定理.

Fourier 积分定理 若 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足下列条件:

1° $f(t)$ 在任一有限区间上满足 Dirichlet 条件;

2° $f(t)$ 在无限区间 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积(即积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t$ 收敛),则有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega^{①} \tag{1.4}$$

成立,而左端的$f(t)$在它的间断点t处,应以$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$来代替.这个定理的条件是充分的,它的证明要用到较多的基础理论,这里从略.

(1.4)式是$f(t)$的**Fourier 积分公式的复数形式**,利用Euler公式,可将它转化为三角形式.因为

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau+\mathrm{j}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega,\end{aligned}$$

考虑到积分$\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau$是$\omega$的奇函数,就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega=0,$$

从而

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega. \tag{1.5}$$

又考虑到积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

是ω的偶函数,(1.5)式又可写为

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega. \tag{1.6}$$

这便是$f(t)$的**Fourier 积分公式的三角形式**.

在实际应用中,常常要考虑奇函数和偶函数的 Fourier 积分公式.当$f(t)$为奇函数时,利用三角函数的和差公式,(1.6)式可写为

---

① 式中的反常积分都是在主值意义下的,所谓主值意义是指

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{N}f(x)\mathrm{d}x.$$

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)(\cos\omega t\cos\omega\tau+\sin\omega t\sin\omega\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega.$$

由于$f(t)$为奇函数,故$f(\tau)\cos\omega\tau$和$f(\tau)\sin\omega\tau$分别是关于τ的奇函数和偶函数.因此

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau\mathrm{d}\tau\right]\sin\omega t\mathrm{d}\omega. \tag{1.7}$$

当$f(t)$为偶函数时,同理可得

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau\right]\cos\omega t\mathrm{d}\omega. \tag{1.8}$$

它们分别称为**Fourier 正弦积分公式**和**Fourier 余弦积分公式**.

特别,如果$f(t)$仅在$(0,+\infty)$上有定义,且满足 Fourier 积分存在定理的条件,我们可以采用类似于 Fourier 级数中的奇延拓或偶延拓的方法,得到$f(t)$相应的 Fourier 正弦积分展开式或 Fourier 余弦积分展开式.

例 1 求函数$f(t)=\begin{cases}1, & |t|\leqslant 1,\\ 0, & 其他\end{cases}$的 Fourier 积分表达式.

解 根据 Fourier 积分公式的复数形式(1.4),有

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-1}^{1}(\cos\omega\tau-\mathrm{j}\sin\omega\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^1\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}(\cos\omega t+\mathrm{j}\sin\omega t)\mathrm{d}\omega\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega\quad(t\neq\pm1),\end{aligned}$$

当$t=\pm1$时,$f(t)$应以$\dfrac{f(\pm1+0)+f(\pm1-0)}{2}=\dfrac{1}{2}$代替.

我们也可以根据 Fourier 积分公式的三角形式(1.6)来计算.事实上,这里$f(t)$为偶函数,还可以根据 Fourier 余弦积分公式获得结果.读者不妨计算和比较一下.

根据上述的结果,我们可以写为

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}f(t), & t\neq\pm1,\\ \dfrac{1}{2}, & t=\pm1,\end{cases}$$

即

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & |t|<1,\\ \dfrac{\pi}{4}, & |t|=1,\\ 0, & |t|>1.\end{cases}$$

据此也可看出,利用$f(t)$的 Fourier 积分表达式可以推证一些反常积分的结果.这里,当$t=0$时,有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{2},$$

这就是著名的 **Dirichlet 积分**.

例 2 求函数$f(t)=\begin{cases}1, & 0<t\leqslant1,\\ 0, & t>1\end{cases}$的 Fourier 积分表达式.

解 我们可以根据 Fourier 积分公式的复数形式(1.4)或三角形式(1.6)来计算,但为了方便也可以对函数$f(t)$进行偶延拓,即补充函数$f(t)$在$(-\infty,0)$上的定义,使得$f(t)$在$(-\infty,+\infty)$上成为偶函数,这样可以利用 Fourier 余弦积分公式(1.8)来计算.实际上,这就是例 1 的结果.即

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}f(t), & t\neq\pm1,\\ \dfrac{1}{2}, & t=\pm1.\end{cases}$$

当$t>0$时,有

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}f(t), & 0<t<1,\\ \dfrac{1}{2}, & t=1,\\ 0, & t>1,\end{cases}$$

即

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & 0<t<1,\\ \dfrac{\pi}{4}, & t=1,\\ 0, & t>1.\end{cases}$$

如果对函数$f(t)$进行奇延拓,即补充函数$f(t)$在$(-\infty,0)$上的定义,使得$f(t)$在$(-\infty,+\infty)$上成为奇函数,这样就可以利用 Fourier 正弦积分公式(1.7)来计算,即

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau\mathrm{d}\tau\right]\sin\omega t\mathrm{d}\omega\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{1}\sin\omega\tau\mathrm{d}\tau\right]\sin\omega t\mathrm{d}\omega\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{(1-\cos\omega)\sin\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

当$t>0$时,有

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{(1-\cos\omega)\sin\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}f(t), & 0<t<1,\\ \dfrac{1}{2}, & t=1,\\ 0, & t>1,\end{cases}$$

即

$$\int_0^{+\infty}\frac{(1-\cos\omega)\sin\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & 0<t<1,\\ \dfrac{\pi}{4}, & t=1,\\ 0, & t>1.\end{cases}$$

可以看出,同一函数$f(t)$进行奇延拓和偶延拓,其 Fourier 积分表达式是不相同的,而由此引出的两个反常积分,在$t>0$时有着相同的积分结果.读者可自行验证.

习题一

1. 试证:若$f(t)$满足 Fourier 积分定理条件,则有

$$f(t)=\int_0^{+\infty}a(\omega)\cos\omega t\mathrm{d}\omega+\int_0^{+\infty}b(\omega)\sin\omega t\mathrm{d}\omega,$$

其中

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau,$$

$$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau\mathrm{d}\tau.$$

2. 求下列函数的 Fourier 积分：

(1) $f(t)=\begin{cases}1-t^2, & t^2\leqslant 1,\\ 0, & t^2>1;\end{cases}$

(2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ e^{-t}\sin 2t, & t\geqslant 0;\end{cases}$

(3) $f(t)=\begin{cases}0, & -\infty<t<-1,\\ -1, & -1<t<0,\\ 1, & 0<t<1,\\ 0, & 1<t<+\infty.\end{cases}$

3. 求下列函数的 Fourier 积分，并推证下列积分结果：

(1) $f(t)=e^{-\beta|t|}(\beta>0)$，证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2\beta}e^{-\beta|t|}$；

(2) $f(t)=e^{-|t|}\cos t$，证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos\omega t d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-|t|}\cos t$；

(3) $f(t)=\begin{cases}\sin t, & |t|\leqslant\pi,\\ 0, & |t|>\pi,\end{cases}$ 证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\pi\sin\omega t}{1-\omega^2}d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin t, & |t|\leqslant\pi,\\ 0, & |t|>\pi.\end{cases}$$

4. 求函数 $f(t)=e^{-\beta t}(\beta>0,t\geqslant 0)$ 的 Fourier 正弦积分表达式和 Fourier 余弦积分表达式.

5. 求积分方程 $\int_0^{+\infty}f(t)\cos\omega t dt=\begin{cases}1-\omega, & 0\leqslant\omega\leqslant 1,\\ 0, & \omega>1\end{cases}$ 的解.

§1.2 Fourier 变换

1. Fourier 变换的概念

定义 若函数 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 Fourier 积分定理的条件，则称函数

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt \tag{1.9}$$

为 $f(t)$ 的 **Fourier 变换**.而称函数

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{1.10}$$

为 $F(\omega)$ 的 **Fourier 逆变换**.

根据定义和(1.4)式可以看出,$f(t)$ 和 $F(\omega)$ 通过指定的积分运算可以相互表达.(1.9)式叫做 $f(t)$ 的 **Fourier 变换式**,可记为

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)].$$

$F(\omega)$ 叫做 $f(t)$ 的**象函数**.(1.10)式叫做 $F(\omega)$ 的 **Fourier 逆变换式**,可记为

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)].$$

$f(t)$ 叫做 $F(\omega)$ 的**象原函数**.

(1.9)式右端的积分运算,叫做取 $f(t)$ 的 Fourier 变换,同样,(1.10)式右端的积分运算,叫做取 $F(\omega)$ 的 Fourier 逆变换.可以说象函数 $F(\omega)$ 和象原函数 $f(t)$ 构成了一个 Fourier 变换对,它们有相同的奇偶性.

当 $f(t)$ 为奇函数时,从(1.7)式出发,则

$$F_s(\omega)=\int_0^{+\infty}f(t)\sin\omega t\mathrm{d}t \tag{1.11}$$

叫做 $f(t)$ 的 **Fourier 正弦变换式**(简称为**正弦变换**),即

$$F_s(\omega)=\mathscr{F}_s[f(t)],$$

而

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}F_s(\omega)\sin\omega t\mathrm{d}\omega \tag{1.12}$$

叫做 $F(\omega)$ 的 **Fourier 正弦逆变换式**(简称为**正弦逆变换**),即

$$f(t)=\mathscr{F}_s^{-1}[F_s(\omega)].$$

当 $f(t)$ 为偶函数时,从(1.8)式出发,则

$$F_c(\omega)=\int_0^{+\infty}f(t)\cos\omega t\mathrm{d}t \tag{1.13}$$

叫做 $f(t)$ 的 **Fourier 余弦变换式**(简称为**余弦变换**),即

$$F_c(\omega)=\mathscr{F}_c[f(t)].$$

而

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}F_c(\omega)\cos\omega t\mathrm{d}\omega \tag{1.14}$$

叫做 $F(\omega)$ 的 **Fourier 余弦逆变换式**(简称为**余弦逆变换**),即

$$f(t)=\mathscr{F}_c^{-1}[F_c(\omega)].$$

显然,若函数 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义,且满足 Fourier 积分定理的条件,则其象函数 $F(\omega)$,$F_s(\omega)$ 及 $F_c(\omega)$ 之间的关系满足:

当 $f(t)$ 为奇函数时,$F(\omega)=-2\mathrm{j}F_s(\omega)$;当 $f(t)$ 为偶函数时,$F(\omega)=2F_c(\omega)$.

如果函数 $f(t)$ 只在 $(0,+\infty)$ 上有定义(称之为半无限区间上的函数,或单侧函数),且满足 Fourier 积分定理的条件,则可以通过奇延拓或偶延拓,得到 $f(t)$ 的正弦变换或余弦变换.

例 1 求函数 $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \mathrm{e}^{-\beta t}, & t\geqslant 0\end{cases}$ 的 Fourier 变换及其积分表达式,其中 $\beta>0$.这个 $f(t)$ 叫做**指数衰减函数**,是工程技术中常碰到的一个函数.

解 根据(1.9)式,有

$$\begin{aligned}F(\omega)&=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\beta+\mathrm{j}\omega}=\frac{\beta-\mathrm{j}\omega}{\beta^2+\omega^2}.\end{aligned}$$

这便是指数衰减函数的 Fourier 变换.下面我们来求指数衰减函数的积分表达式.

根据(1.10)式,并利用奇偶函数的积分性质,可得

$$\begin{aligned}f(t)&=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta-\mathrm{j}\omega}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

由此我们顺便得到一个含参量反常积分的结果：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & t=0,\\ \pi\mathrm{e}^{-\beta t}, & t>0.\end{cases}$$

例 2 求函数 $f(t)=A\mathrm{e}^{-\beta t^2}$ 的 Fourier 变换及其积分表达式，其中 $A>0,\beta>0$. 这个函数叫做**钟形脉冲函数**，也是工程技术中常碰到的一个函数.

解 根据(1.9)式，有

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta\left(t^2+\frac{\mathrm{j}\omega}{\beta}t\right)}\mathrm{d}t$$

$$=A\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta\left(t+\frac{\mathrm{j}\omega}{2\beta}\right)^2}\mathrm{d}t.$$

如令 $t+\dfrac{\mathrm{j}\omega}{2\beta}=s$，上式为一复变函数的积分，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta\left(t+\frac{\mathrm{j}\omega}{2\beta}\right)^2}\mathrm{d}t=\int_{-\infty+\frac{\mathrm{j}\omega}{2\beta}}^{+\infty+\frac{\mathrm{j}\omega}{2\beta}}\mathrm{e}^{-\beta s^2}\mathrm{d}s.$$

由于 $\mathrm{e}^{-\beta s^2}$ 为复平面 s 上的解析函数，取如图 1-3 所示的闭曲线 l：矩形 $ABCDA$，按 Cauchy 积分定理，有

$$\oint_l\mathrm{e}^{-\beta s^2}\mathrm{d}s=0,$$

即

$$\left(\int_{l_{AB}}+\int_{l_{BC}}+\int_{l_{CD}}+\int_{l_{DA}}\right)\mathrm{e}^{-\beta s^2}\mathrm{d}s=0,$$

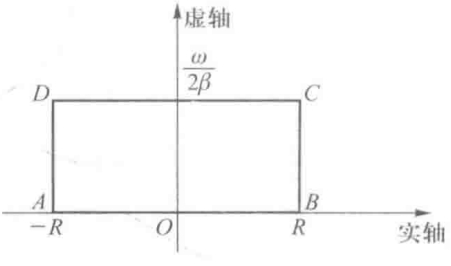


图 1-3

其中，当 $R\to+\infty$ 时，有

$$\int_{l_{AB}}\mathrm{e}^{-\beta s^2}\mathrm{d}s=\int_{-R}^{R}\mathrm{e}^{-\beta t^2}\mathrm{d}t\to\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}},①$$

$$\left|\int_{l_{BC}}\mathrm{e}^{-\beta s^2}\mathrm{d}s\right|=\left|\int_{R}^{R+\frac{\mathrm{j}\omega}{2\beta}}\mathrm{e}^{-\beta s^2}\mathrm{d}s\right|$$

① 此积分结果可由概率积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$ 推得. 它的证明通过计算反常积分(也称为广义积分)的方法能够获得. 例如可参看同济大学数学系编《高等数学》(上册)(高等教育出版社，2014 年 7 月第七版)第五章第五节.

$$= \left| \int_0^{\frac{\omega}{2\beta}} e^{-\beta(R+ju)^2} d(R+ju) \right|$$

$$\leqslant e^{-\beta R^2} \int_0^{\frac{\omega}{2\beta}} \left| e^{\beta u^2 - 2R\beta u j} \right| du = e^{-\beta R^2} \int_0^{\frac{\omega}{2\beta}} e^{\beta u^2} du \to 0.$$

同理，当 $R \to +\infty$ 时，$\left| \int_{l_{DA}} e^{-\beta s^2} ds \right| \to 0$. 从而，当 $R \to +\infty$ 时，有

$$\int_{l_{BC}} e^{-\beta s^2} ds \to 0, \int_{l_{DA}} e^{-\beta s^2} ds \to 0.$$

由此可知

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{l_{CD}} e^{-\beta s^2} ds + \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} = \lim_{R \to +\infty} \left(- \int_{l_{DC}} e^{-\beta s^2} ds \right) + \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} = 0,$$

即

$$\int_{-\infty + \frac{j\omega}{2\beta}}^{+\infty + \frac{j\omega}{2\beta}} e^{-\beta s^2} ds = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}.$$

因此，钟形脉冲函数的 Fourier 变换为

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} A e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}.$$

下面我们来求钟形脉冲函数的积分表达式.根据(1.10)式，并利用奇偶函数的积分性质，可得

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}} (\cos \omega t + j \sin \omega t) d\omega \\ &= \frac{A}{\sqrt{\pi\beta}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}} \cos \omega t d\omega. \end{aligned}$$

由此还可得到一个含参量反常积分的结果：

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}} \cos \omega t d\omega = \frac{\sqrt{\pi\beta}}{A} f(t) = \sqrt{\pi\beta} e^{-\beta t^2}.$$

例 3 求函数 $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 < t \leqslant \pi, \\ 0, & t > \pi \end{cases}$ 的正弦变换和余弦变换.

解 根据(1.11)式,$f(t)$的正弦变换为

$$F_s(\omega)=\mathscr{F}_s[f(t)]$$
$$=\int_0^{+\infty}f(t)\sin\omega t\mathrm{d}t=\frac{\sin\omega\pi}{1-\omega^2}.$$

根据(1.13)式,$f(t)$的余弦变换为

$$F_c(\omega)=\mathscr{F}_c[f(t)]$$
$$=\int_0^{+\infty}f(t)\cos\omega t\mathrm{d}t=\frac{1+\cos\omega\pi}{1-\omega^2}.$$

可以发现,在半无限区间上的同一函数$f(t)$,其正弦变换和余弦变换的结果是不同的.这一结论对于§1.1中的例2也同样成立,函数$f(t)=\begin{cases}1, & 0<t\leqslant 1,\\ 0, & t>1\end{cases}$的正弦变换和余弦变换分别为$F_s(\omega)=\dfrac{1-\cos\omega}{\omega}$和$F_c(\omega)=\dfrac{\sin\omega}{\omega}$.

2. 单位脉冲函数及其 Fourier 变换

在物理和工程技术中,除了指数衰减函数以外,还常常会碰到单位脉冲函数.有许多物理现象具有脉冲性质,如在电学中,线性电路受具有脉冲性质的电势作用后所产生的电流;在力学中,机械系统受冲击力作用后的运动情况等.研究此类问题就会产生我们要介绍的单位脉冲函数.

在原来电流为零的电路中,某一瞬时(设为$t=0$)进入一单位电量的脉冲,现在要确定电路上的电流$i(t)$.以$q(t)$表示上述电路中到时刻t为止通过导体截面的电荷函数(即累积电量),则

$$q(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0,\\ 1, & t>0.\end{cases}$$

由于电流是电荷函数对时间的变化率,即

$$i(t)=\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(t+\Delta t)-q(t)}{\Delta t},$$

所以,当$t\neq 0$时,$i(t)=0$;当$t=0$时,由于$q(t)$是不连续的,从而在普通导数的意义下,$q(t)$在这一点处导数不存在,如果我们形式地计算这个导数,则得

$$i(0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(0+\Delta t)-q(0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}=\infty.$$

这就表明,在通常意义下的函数类中找不到一个函数能够用来表示上述电路的电流,为了确定这种电路上的电流,必须引进一个新的函数,这个函数称为单位脉冲函数或称为**Dirac 函数**,简单地记成δ-函数.它是英国物理学家 Dirac

在研究量子力学时首先引入的.随着 δ-函数在应用上所起的作用逐渐被人们所认识,从而使得人们从数学上去研究它,并建立起称之为广义函数的严格数学理论.有了这种函数,对于许多集中于一点或一瞬时的量,例如点电荷、点热源、集中于一点的质量以及脉冲技术中的非常窄的脉冲等,就能够像处理连续分布的量那样,以统一的方式加以解决.

δ-函数是一个广义函数,它没有普通意义下的"函数值",所以,它不能用通常意义下"值的对应关系"来定义.在广义函数论中,δ-函数定义为某基本函数空间上的线性连续泛函,但要讲清楚这个定义,需要应用一些超出工科院校工程数学教学大纲范围的知识.为了方便起见,我们仅把 δ-函数看作是弱收敛函数序列的弱极限①.

定义 对于任何一个无穷次可微的函数 $f(t)$,如果满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_{\varepsilon}(t)f(t)\,\mathrm{d}t, \tag{1.15}$$

其中 $\delta_{\varepsilon}(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{1}{\varepsilon}, & 0\leqslant t\leqslant\varepsilon,\\ 0, & t>\varepsilon,\end{cases}$ 则称 $\delta_{\varepsilon}(t)$ 的弱极限为 **δ-函数**.记为 $\delta(t)$,即

$$\delta_{\varepsilon}(t)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{弱}}\delta(t),$$

或简记为 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta_{\varepsilon}(t)=\delta(t)$.

---

① 严格说来,应是弱 * -收敛.所谓函数序列 $\{S_n(t)\}$ 弱收敛于函数 $S(t)$(或者说,$S(t)$ 为该序列的弱极限),是指对于任何一个无穷次可微的函数 $f(t)$ 都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(t)f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b S(t)f(t)\,\mathrm{d}t,$$

式中 $[a,b]$ 亦可为 $(-\infty,+\infty)$.并记为 $S_n(t)\xrightarrow[n\to\infty]{\text{弱}}S(t)$.上式中左、右两边的积分未必存在.为保证积分存在,对 $S_n(t)$,$S(t)$ 要附加条件,如 $\{S_n(t)\}$ 是可积的,当积分区间为 $(-\infty,+\infty)$ 时,$S_n(t)$ 要局部可积(即在任何一个有限区间上可积),$S(t)$ 在某一有限区间外等于 0.

此定义容易推广为 $S_{\varepsilon}(t)\xrightarrow[\varepsilon\to\varepsilon_0]{\text{弱}}S(t)$,其中 $\varepsilon,\varepsilon_0$ 为实数.

这就表明，δ-函数可以看成一个普通函数序列①的弱极限.

$\delta_\varepsilon(t)$的图形如图 1-4 所示.对任何 $\varepsilon>0$，显然有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^\varepsilon\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{d}t=1.$$

---

① 这里的普通函数序列 $\delta_\varepsilon(t)$ 称为 δ-型序列.除了 $\delta_\varepsilon(t)$ 以外，还可以找到其他的 δ-型序列.下面我们给出普通函数序列成为 δ-型序列的一个充分条件，即 δ-型序列是指满足下列两个条件的局部可积的函数序列：

(i) 对于任意的 $M>0$，存在常数 C_M，使得对于一切 a,b,ε，当 $|a|\leqslant M$，$|b|\leqslant M$ 时，有 $\left|\int_b^a\delta_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant C_M$；

(ii) 对于任何两个固定的且为非零的 a,b，都有

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_a^b\delta_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & a<b<0\text{ 及 }0<a<b,\\ 1, & a<0<b.\end{cases}$$

可以证明，

$$G_\varepsilon(t)=\begin{cases}0, & |t|>\varepsilon,\\ \dfrac{1}{2\varepsilon}, & |t|<\varepsilon,\end{cases}\qquad H_\varepsilon(t)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{t^2+\varepsilon^2}\quad(\varepsilon>0)$$

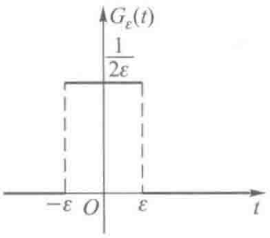
以及

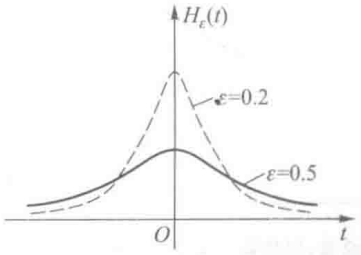
$$K_\omega(t)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin\omega t}{t}\quad(\omega>0)$$

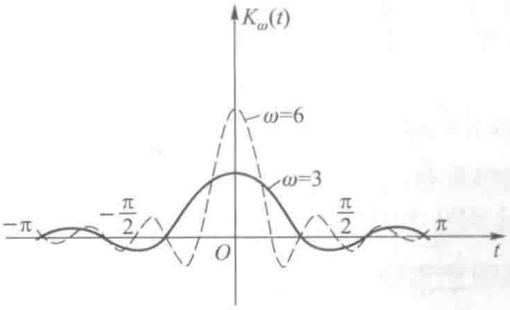
等均是 δ-型序列.按照(1.15)式的意义，都可用来定义 δ-函数，即

$$\delta(t)=\lim_{\varepsilon\to0}G_\varepsilon(t),\ \delta(t)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{t^2+\varepsilon^2},\ \delta(t)=\lim_{\omega\to\infty}\frac{\sin\omega t}{\pi t}.$$

$G_\varepsilon(t)$，$H_\varepsilon(t)$，$K_\omega(t)$的图形如下列各图所示.







按(1.15)式给出的 δ-函数定义,取 $f(t)=1$ 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,\mathrm{d}t=1.$$

工程上,常将 δ-函数称为**单位脉冲函数**.有一些工程书上,将 δ-函数用一个长度等于 1 的有向线段来表示(见图 1-5).这个线段的长度表示 δ-函数的积分值,称为 δ-函数的强度.

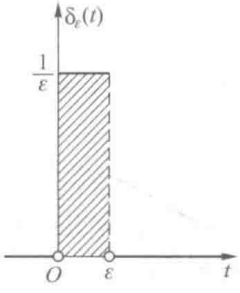


图 1-4

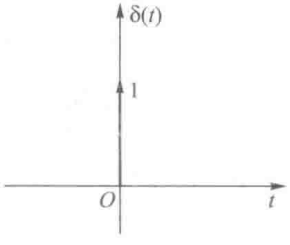


图 1-5

由(1.15)式给出的 δ-函数的定义,可以推出 δ-函数的一个重要结果,称为 δ-函数的筛选性质:

若 $f(t)$ 为无穷次可微的函数,则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\,\mathrm{d}t=f(0). \tag{1.16}$$

事实上,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\,\mathrm{d}t&=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(t)f(t)\,\mathrm{d}t\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}f(t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

由于 $f(t)$ 是无穷次可微函数,显然 $f(t)$ 是连续函数,按积分中值定理,有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{\varepsilon\to 0}f(\theta\varepsilon)\quad(0<\theta<1),$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\,\mathrm{d}t=f(0).$$

更一般地还成立着

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)\,\mathrm{d}t=f(t_0). \tag{1.17}$$

显然,当 $f(t)$ 为连续函数时,(1.16)式和(1.17)式也都成立.

由 δ-函数的筛选性质可知,尽管 δ-函数本身没有普通意义下的函数值,但它与任何一个无穷次可微函数 $f(t)$ 的乘积在 $(-\infty,+\infty)$ 上的积分都对应着一个确定的数 $f(0)$ 或 $f(t_0)$.因此,在广义函数论中也用(1.16)式或(1.17)式来定义 δ-函数,即若某一函数与任何一个无穷次可微函数 $f(t)$ 的乘积在 $(-\infty,+\infty)$ 上的积分值为 $f(0)$ 或 $f(t_0)$,则该函数就称为 δ-函数.

类似地,我们还可以定义多维 δ-函数.下面给出二维 δ-函数的定义.

对于任何一个无穷次可微的二元函数 $f(x,y)$,如果满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x,y)f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(x,y)f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\delta_\varepsilon(x,y)=\begin{cases}0, & x,y<0,\\ \dfrac{1}{\varepsilon^2}, & 0\leqslant x,y\leqslant\varepsilon,\\ 0, & x,y>\varepsilon,\end{cases}$ 则称 $\delta_\varepsilon(x,y)$ 的弱极限为二维 δ-函数.记为 $\delta(x,y)$,即

$$\delta_\varepsilon(x,y)\xRightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{弱}}\delta(x,y),$$

或简记为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x,y)=\delta(x,y).$$

由此定义,可推出二维 δ-函数的一个重要结果,也可称为二维 δ-函数的筛选性质:

若 $f(x,y)$ 为无穷次可微的二元函数,则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x,y)f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(0,0).$$

一般地,有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0,y-y_0)f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(x_0,y_0).$$

据此,我们还可以得到一个重要结果,即二维 δ-函数可以看成两个一维 δ-函数的乘积:

$$\delta(x,y)=\delta(x)\delta(y).$$

一般地,

$$\delta(x-x_0,y-y_0)=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0).$$

对于更高维的 δ-函数,上述的概念和相关性质也能类似地推出.

δ-函数除了重要的筛选性质外,下面的性质也是不难得到的:

1° δ-函数是偶函数,即 $\delta(t)=\delta(-t)$.

2° δ-函数是单位阶跃函数的导数,即

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=u(t),\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)=\delta(t),$$

其中 $u(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t>0\end{cases}$ 称为**单位阶跃函数**.

3° 若 a 为非零实常数,则 $\delta(at)=\dfrac{1}{|a|}\delta(t)$.

4° 若 $f(t)$ 为无穷次可微的函数,则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t)f(t)\mathrm{d}t=-f'(0).$$

一般地,有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(n)}(t)f(t)\mathrm{d}t=(-1)^n f^{(n)}(0),$$

更一般地,有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(n)}(t-t_0)f(t)\mathrm{d}t=(-1)^n f^{(n)}(t_0).$$

它们的证明放在习题中,请读者自己完成.

这里的性质 4°,可以作为 δ-函数的导数定义,例如若某一函数与任何一个无穷次可微函数 $f(t)$ 的乘积在 $(-\infty,+\infty)$ 上的积分值为 $-f'(0)$,则称该函数为 δ-函数的导数,即 $\delta'(t)$.事实上,δ-函数是无穷次可微的广义函数,它的各阶导数 $\delta^{(n)}(t)\ (n=1,2,\cdots)$ 也都是广义函数,利用 δ-型序列的弱极限可以推得 δ-函数的各阶导数.

根据(1.16)式,我们可以很方便地求出 δ-函数的 Fourier 变换:

$$F(\omega)=\mathscr{F}[\delta(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\Big|_{t=0}=1.$$

可见,单位脉冲函数 $\delta(t)$ 与常数 1 构成了一个 Fourier 变换对.同理,$\delta(t-t_0)$ 和 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$ 亦构成了一个 Fourier 变换对.

需要指出的是,这里为了方便起见,我们将 $\delta(t)$ 的 Fourier 变换仍旧写成古典定义的形式,所不同的是,此处反常积分是按(1.15)式来定义的,而不是普通意义下的积分值.所以,$\delta(t)$ 的 Fourier 变换是一种广义 Fourier 变换.因此,有关 δ-函数与普通函数乘积的积分运算可以形式地进行分部积分或变量代换,而获得的结论与广义函数论的结论是一致的,例如 δ-函数的 n 阶导数的结果也可以利用分部积分和筛选性质,再通过数学归纳法而获得.这一点对后面

的一些例子亦是如此.

在物理学和工程技术中,有许多重要函数不满足 Fourier 积分定理中的绝对可积条件,即不满足条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty.$$

例如常数、符号函数、单位阶跃函数以及正、余弦函数等,然而它们的广义 Fourier 变换也是存在的,利用单位脉冲函数及其 Fourier 变换就可以求出它们的 Fourier 变换.所谓广义是相对于古典意义而言的,在广义意义下,同样可以说,象函数 $F(\omega)$ 和象原函数 $f(t)$ 亦构成一个 Fourier 变换对.为了不涉及 δ-函数的较深入的理论,我们可以通过 Fourier 逆变换来推证单位阶跃函数的 Fourier 变换.

例 4 证明单位阶跃函数 $u(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t>0\end{cases}$ 的 Fourier 变换为 $\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)$.

证 事实上,若 $F(\omega)=\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)$,则按 Fourier 逆变换可得

$$\begin{aligned}
f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\pi\delta(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{d}\omega\\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega\\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega.
\end{aligned}$$

为了说明 $f(t)=u(t)$,就必须计算积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega$. 我们已经知道 Dirichlet 积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin\omega}{\omega}\mathrm{d}\omega=\dfrac{\pi}{2}$,因此,有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}, & t<0,\\ 0, & t=0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & t>0,\end{cases}$$

其中,当 $t=0$ 时,结果是显然的;当 $t<0$ 时,可令 $u=-t\omega$,则

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(-u)}{u}\mathrm{d}u=-\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u=-\frac{\pi}{2}.$$

将此结果代入 $f(t)$ 的表达式中，当 $t\neq 0$ 时，可得

$$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0, & t<0,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{\pi}{2}=1, & t>0.\end{cases}$$

这就表明 $\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)$ 的 Fourier 逆变换为 $f(t)=u(t)$. 因此，$u(t)$ 和 $\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)$ 构成了一个 Fourier 变换对，所以，单位阶跃函数 $u(t)$ 的积分表达式在 $t\neq 0$ 时，可写为

$$u(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega.$$

同样，若 $F(\omega)=2\pi\delta(\omega)$，则由 Fourier 逆变换可得

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=1.$$

所以，1 和 $2\pi\delta(\omega)$ 也构成了一个 Fourier 变换对. 同理，$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$ 和 $2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ 也构成了一个 Fourier 变换对. 由此可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=2\pi\delta(\omega),\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega-\omega_0)t}\mathrm{d}t=2\pi\delta(\omega-\omega_0).$$

显然，这两个积分在普通意义下都是不存在的，这里积分的意义仍是按(1.15)式来定义的.

例 5 求正弦函数 $f(t)=\sin\omega_0 t$ 的 Fourier 变换.

解 根据 Fourier 变换公式，有

$$\begin{aligned}F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\sin\omega_0 t\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}}{2\mathrm{j}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2\mathrm{j}}\int_{-\infty}^{+\infty}[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega-\omega_0)t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega+\omega_0)t}]\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2\mathrm{j}}[2\pi\delta(\omega-\omega_0)-2\pi\delta(\omega+\omega_0)]\\&=\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)].\end{aligned}$$

例 6 求 $\delta'(t-1)$ 的 Fourier 变换.

解 利用分部积分和 δ-函数的筛选性质,有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[\delta'(t-1)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t-1)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \delta(t-1)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \mathrm{j}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-1)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{j}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-1)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{j}\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\Big|_{t=1} = \mathrm{j}\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}.\end{aligned}$$

实际上,我们也可以利用 δ-函数的性质 4°求得结果,即

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[\delta'(t-1)] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t-1)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= -\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right)\Big|_{t=1} \\ &= -(-\mathrm{j}\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t})\Big|_{t=1} = \mathrm{j}\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}.\end{aligned}$$

例 7 若 $g(t)$ 为一连续函数,证明 $g(t)\delta(t-t_0)=g(t_0)\delta(t-t_0)$.

证 设 $f(t)$ 为具有无穷次可微的函数,只要能证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\delta(t-t_0)f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t_0)\delta(t-t_0)f(t)\mathrm{d}t$$

即可.利用筛选性质,有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\delta(t-t_0)f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)[g(t)f(t)]\mathrm{d}t = g(t_0)f(t_0),$$

而

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t_0)\delta(t-t_0)f(t)\mathrm{d}t = g(t_0)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)\mathrm{d}t = g(t_0)f(t_0),$$

故

$$g(t)\delta(t-t_0) = g(t_0)\delta(t-t_0).$$

显然,这一结论,对于不同的连续函数 $g(t)$,就会有不同的结果.

通过上述的讨论,我们可以看出引进 δ-函数的重要性.它使得在普通意义下的一些不存在的积分,有了确定的数值.利用 δ-函数及其 Fourier 变换可以很方便地得到工程技术上许多重要函数的 Fourier 变换,并且使得许多变换的推导大大地简化.因此,本书介绍 δ-函数主要是为了提供一个有用的数学工具,而不去追求它在数学上的严谨叙述或证明.对 δ-函数理论的详尽内容有兴趣的读者可阅读有关的参考书.

3. 非周期函数的频谱

Fourier 变换和频谱概念有着非常密切的关系.随着无线电技术、声学、振动学的蓬勃发展,频谱理论也相应地得到了发展,它的应用也越来越广泛.我们这里只能简单地介绍一下频谱的基本概念,至于它的进一步理论和应用,留待有关专业课程再作详细的讨论.

在 Fourier 级数的理论中,我们已经知道,对于以 T 为周期的非正弦函数 $f_T(t)$,它的第 n 次谐波$\left(\omega_n=n\omega=\dfrac{2n\pi}{T}\right)$

$$a_n\cos\omega_n t+b_n\sin\omega_n t=A_n\sin(\omega_n t+\varphi_n)$$

的振幅为

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2},$$

而在复指数形式中,第 n 次谐波为

$$c_n e^{j\omega_n t}+c_{-n}e^{-j\omega_n t},$$

其中

$$c_n=\frac{a_n-jb_n}{2},\ c_{-n}=\frac{a_n+jb_n}{2},$$

并且

$$|c_n|=|c_{-n}|=\frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}.$$

所以,以 T 为周期的非正弦函数 $f_T(t)$ 的第 n 次谐波的振幅为

$$A_n=2|c_n|\ (n=0,1,2,\cdots),$$

它描述了各次谐波的振幅随频率变化的分布情况.所谓频谱图,通常是指频率和振幅的关系图,所以 A_n 称为 $f_T(t)$ 的振幅频谱(简称为频谱).由于 $n=0,1,2,\cdots$,所以频谱 A_n 的图形是不连续的,称之为离散频谱.它清楚地表明了一个非正弦周期函数包含了哪些频率分量及各分量所占的比重(如振幅的大小).因此频谱图在工程技术中应用比较广泛.例如,图 1-6 所示的周期性矩形脉冲,在一个周期 T 内的表达式为

$$f_T(t)=\begin{cases}0, & -\dfrac{T}{2}\leqslant t<-\dfrac{\tau}{2},\\ E, & -\dfrac{\tau}{2}\leqslant t<\dfrac{\tau}{2},\\ 0, & \dfrac{\tau}{2}\leqslant t\leqslant\dfrac{T}{2}.\end{cases}$$

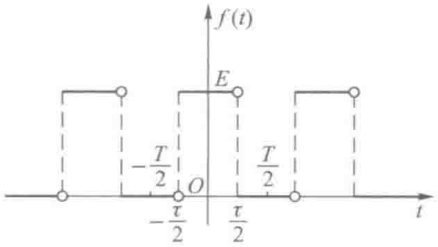


图 1-6

它的 Fourier 级数的复指数形式为

$$f_T(t)=\frac{E\tau}{T}+\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{+\infty}\frac{E}{n\pi}\sin\frac{n\pi\tau}{T}e^{jn\omega t},$$

可见 $f_T(t)$ 的 Fourier 系数为

$$c_0=\frac{E\tau}{T},\ c_n=\frac{E}{n\pi}\sin\frac{n\pi\tau}{T}\quad(n=\pm1,\pm2,\cdots).$$

它的频谱为

$$A_0=2|c_0|=\frac{2E\tau}{T},$$

$$A_n=2|c_n|=\frac{2E}{n\pi}\left|\sin\frac{n\pi\tau}{T}\right|\quad(n=1,2,\cdots).$$

如 $T=4\tau$ 时，有

$$A_0=\frac{E}{2},\ A_n=\frac{2E}{n\pi}\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|,\ \omega_n=n\omega=\frac{n\pi}{2\tau}\quad(n=1,2,\cdots).$$

这样，我们把计算出来的各次谐波振幅的数值，在频谱图中直观地表示出来，如图 1-7 所示.

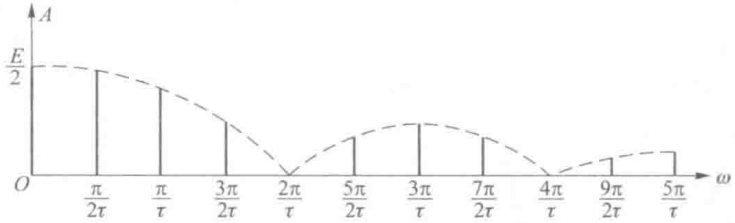


图 1-7

对于非周期函数 $f(t)$，当它满足 Fourier 积分定理中的条件时，则在 $f(t)$ 的连续点处可表示为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega,$$

其中

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

为它的 Fourier 变换.在频谱分析中,Fourier 变换 $F(\omega)$ 又称为 $f(t)$ 的**频谱函数**,而频谱函数的模 $|F(\omega)|$ 称为 $f(t)$ 的**振幅频谱**(亦简称为**频谱**).由于 ω 是连续变化的,故我们称之为连续频谱.对一个时间函数作 Fourier 变换,就是求这个时间函数的频谱函数.

例 8 作图 1-8 中所示的单个矩形脉冲的频谱图.

解 根据上面的讨论,单个矩形脉冲的频谱函数为

$$\begin{aligned}F(\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\&=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}E\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\&=\frac{2E}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}.\end{aligned}$$

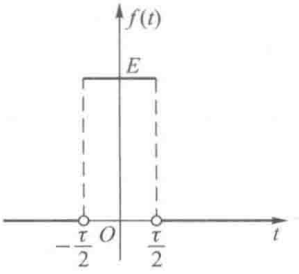


图 1-8

再根据振幅频谱

$$|F(\omega)|=2E\left|\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\omega}\right|$$

可作出频谱图,如图 1-9 所示(其中只画出 $\omega\geqslant 0$ 这一半).

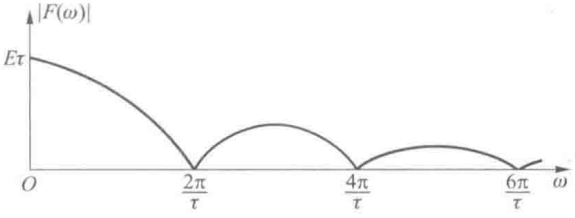


图 1-9

此外,振幅频谱 $|F(\omega)|$ 是频率 ω 的偶函数,即

$$|F(\omega)|=|F(-\omega)|.$$

事实上,

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos \omega t \mathrm{d}t - \mathrm{j}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin \omega t \mathrm{d}t,$$

所以

$$|F(\omega)| = \sqrt{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos \omega t \mathrm{d}t\right)^2 + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin \omega t \mathrm{d}t\right)^2},$$

显然有

$$|F(\omega)| = |F(-\omega)|.$$

我们定义 $\varphi(\omega) = \arctan \dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin \omega t \mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos \omega t \mathrm{d}t}$ 为 $f(t)$ 的**相角频谱**.显然,相角频谱 $\varphi(\omega)$ 是 ω 的奇函数,即 $\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega)$,在这里就不详细讨论了.

例 9 作指数衰减函数 $f(t) = \begin{cases} 0, & t<0, \\ \mathrm{e}^{-\beta t}, & t \geqslant 0 \end{cases}$ $(\beta>0)$ 的频谱图.

解 根据(1.9)式和例 1 的结果,可得

$$F(\omega) = \frac{1}{\beta + \mathrm{j}\omega},$$

所以

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + \omega^2}},$$

频谱图形如图 1-10 所示.

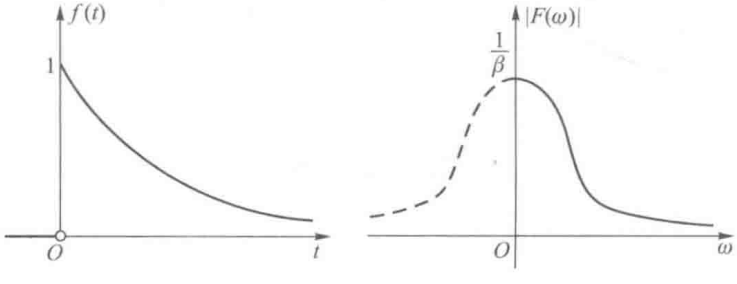


图 1-10

例 10 作单位脉冲函数 $\delta(t)$ 的频谱图.

解 根据(1.16)式,有

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = 1,$$

它们的图形表示在图 1-11 中.

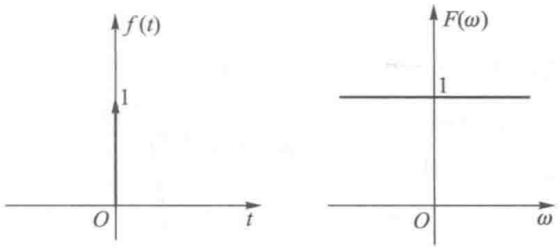


图 1-11

同样，当 $f(t)=\delta(t-t_0)$ 时，$F(\omega)=e^{-j\omega t_0}$，而 $f(t)$ 的振幅频谱为 $|F(\omega)|=1$. 当 $f(t)=1$ 时，$F(\omega)=2\pi\delta(\omega)$. 它们的图形分别表示在图 1-12 和图 1-13 中.

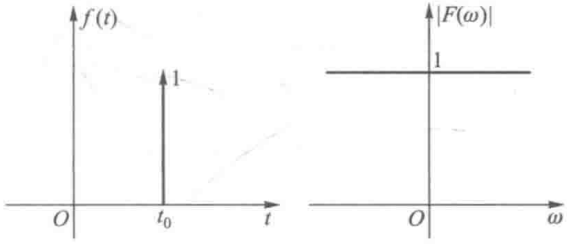


图 1-12

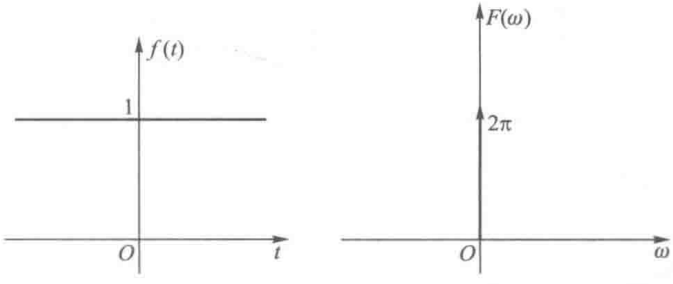


图 1-13

在物理学和工程技术中，将会出现很多非周期函数，它们的频谱求法，这里不可能一一列举. 我们将经常遇到的一些函数及其 Fourier 变换（或频谱）列于附录 I 中，以备读者查用.

习题二

1. 求矩形脉冲函数 $f(t)=\begin{cases}A, & 0\leqslant t\leqslant \tau,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 的 Fourier 变换.

2. 设 $F(\omega)$ 是函数 $f(t)$ 的 Fourier 变换，证明 $F(\omega)$ 与 $f(t)$ 有相同的奇偶性.

3. 求下列函数的 Fourier 变换，并推证下列积分结果：

(1) $f(t)=\begin{cases}\alpha e^{-\beta t}, & t>0,\\ 0, & t<0\end{cases}$ $(\alpha>0,\beta>0)$，证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega=\begin{cases}\pi e^{-\beta t}, & t>0,\\ \frac{\pi}{2}, & t=0,\\ 0, & t<0;\end{cases}$$

(2) $f(t)=\begin{cases}\cos t, & |t|\leqslant\pi,\\ 0, & |t|>\pi,\end{cases}$ 证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{\omega\sin\omega\pi\cos\omega t}{1-\omega^2}d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cos t, & |t|<\pi,\\ -\frac{\pi}{4}, & |t|=\pi,\\ 0, & |t|>\pi.\end{cases}$$

4. 求函数 $f(t)=e^{-t}(t\geqslant 0)$ 的 Fourier 正弦变换，并推证

$$\int_0^{+\infty}\frac{\omega\sin\alpha\omega}{1+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha}\quad(\alpha>0).$$

5. 设 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$，试证明

(1) $f(t)$ 为实值函数的充要条件是 $F(-\omega)=\overline{F(\omega)}$；

(2) $f(t)$ 为纯虚值函数的充要条件是 $F(-\omega)=-\overline{F(\omega)}$，

其中 $\overline{F(\omega)}$ 为 $F(\omega)$ 的共轭函数.

6. 已知某函数的 Fourier 变换为 $F(\omega)=\frac{\sin\omega}{\omega}$，求该函数 $f(t)$.

7. 已知某函数的 Fourier 变换为 $F(\omega)=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$，求该函数 $f(t)$.

8. 已知某函数的 Fourier 变换为 $F(\omega)=-\frac{\pi}{a}e^{a|\omega|}$，$\mathrm{Re}(a)<0$，求该函数 $f(t)$.

9. 求符号函数（又称正负号函数）$\mathrm{sgn}\,t=\frac{t}{|t|}=\begin{cases}-1, & t<0,\\ 1, & t>0\end{cases}$ 的 Fourier 变换.

10. 求函数 $f(t)=\frac{1}{2}\left[\delta(t+a)+\delta(t-a)+\delta\left(t+\frac{a}{2}\right)+\delta\left(t-\frac{a}{2}\right)\right]$ 的 Fourier 变换.

11. 求下列函数的 Fourier 变换:

(1) $f(t)=\cos t\sin t$;　　(2) $f(t)=\sin^3 t$;

(3) $f(t)=\sin\left(5t+\frac{\pi}{3}\right)$;　　(4) $f(t)=e^{-a|t|}$, $\mathrm{Re}(a)>0$;

(5) $f(t)=e^{-|t|}\cos t$;

(6) $f(t)=\begin{cases}\sin t, & |t|\leqslant\pi,\\ 0, & |t|>\pi.\end{cases}$

12. 证明 δ-函数的下列性质:

(1) δ-函数是偶函数,即 $\delta(t)=\delta(-t)$;

(2) δ-函数是单位阶跃函数的导数,即

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau=u(t),\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)=\delta(t),$$

其中 $u(t)$ 为单位阶跃函数;

(3) 若 a 为非零实常数,则 $\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$;

(4) 若 $f(t)$ 为无穷次可微的函数,则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(n)}(t-t_0)f(t)\,\mathrm{d}t=(-1)^n f^{(n)}(t_0).$$

13. 证明:若 $\mathscr{F}[e^{j\varphi(t)}]=F(\omega)$,其中 $\varphi(t)$ 为一实函数,则

$$\mathscr{F}[\cos\varphi(t)]=\frac{1}{2}[F(\omega)+\overline{F(-\omega)}],$$

$$\mathscr{F}[\sin\varphi(t)]=\frac{1}{2\mathrm{j}}[F(\omega)-\overline{F(-\omega)}],$$

其中 $\overline{F(-\omega)}$ 为 $F(-\omega)$ 的共轭函数.

14. 证明 δ-函数的下列等式:

(1) $t\delta'(t)=-\delta(t)$;　　(2) $(1-e^t)\delta'(t)=\delta(t)$;

(3) $g(t)\delta(t)=g(0)\delta(t)$,其中 $g(t)$ 是一个连续函数;

(4) $g(t)\delta'(t)=-g'(0)\delta(t)$,其中 $g(t)$ 为连续函数,且 $g(0)=0$.

15. 求下列函数的 Fourier 变换:

(1) $g(t)=\delta(t)+2\delta'(t)+3\delta''(t)$;

(2) $g(t)=1+\delta(t+1)+\delta''(t-1)$.

16. 证明二维 δ-函数和一维 δ-函数的下列关系：

$$\delta(x,y)=\delta(x)\delta(y).$$

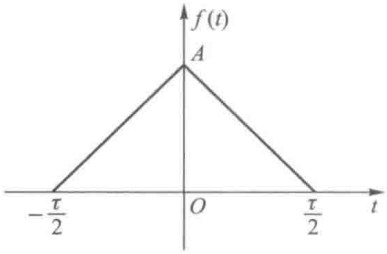
17. 证明周期为 T 的非正弦函数 $f_T(t)$ 的频谱函数为

$$F(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\delta(\omega-n\omega_0),$$

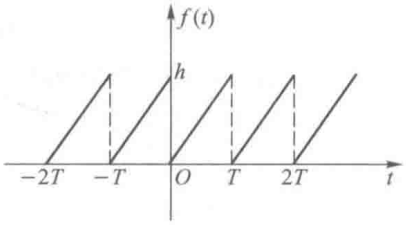
其中 c_n 为 $f_T(t)$ 的 Fourier 级数展式中的系数.

18. 求如图所示的三角形脉冲的频谱函数.

19. 求作如图所示的锯齿形波的频谱图.



(第 18 题)



(第 19 题)

20. 求 Gauss 分布函数

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

的频谱函数.

§1.3 Fourier 变换的性质

这一节，我们将介绍 Fourier 变换的几个重要性质. 为了叙述方便起见，假定在这些性质中，凡是需要求 Fourier 变换的函数都满足 Fourier 积分定理中的条件. 在证明这些性质时，不再重述这些条件，希望读者注意.

1. 线性性质

设 $F_1(\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)]$，$F_2(\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]$，$\alpha,\beta$ 是常数，则

$$\mathscr{F}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega). \tag{1.18}$$

这个性质的作用是很显然的，它表明了函数线性组合的 Fourier 变换等于各函数 Fourier 变换的线性组合. 它的证明只需根据定义就可推出.

同样，Fourier 逆变换亦具有类似的线性性质，即

$$\mathscr{F}^{-1}[\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)]=\alpha f_1(t)+\beta f_2(t). \tag{1.19}$$

2. 位移性质

$$\mathscr{F}[f(t\pm t_0)]=\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\omega t_0}\mathscr{F}[f(t)]. \tag{1.20}$$

它表明时间函数 $f(t)$ 沿 t 轴向左或向右位移 t_0 的 Fourier 变换等于 $f(t)$ 的 Fourier 变换乘以因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t_0}$ 或 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$. 该性质也称为时域上的位移性质.

证 由 Fourier 变换的定义，可知

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f(t\pm t_0)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t\pm t_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\&\xlongequal{\text{令 } t\pm t_0=u}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(u\mp t_0)}\mathrm{d}u\\&=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\omega t_0}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega u}\mathrm{d}u\\&=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\omega t_0}\mathscr{F}[f(t)].\end{aligned}$$

同样，Fourier 逆变换亦具有类似的位移性质，即

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega\mp\omega_0)]=f(t)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\omega_0 t}. \tag{1.21}$$

它表明频谱函数 $F(\omega)$ 沿 ω 轴向右或向左位移 ω_0 的 Fourier 逆变换等于原来的函数 $f(t)$ 乘以因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$ 或 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}$. 该性质也称为频域上的位移性质.

例 1 求矩形单脉冲 $f(t)=\begin{cases}E, 0<t<\tau,\\0, \text{其他}\end{cases}$ 的频谱函数.

解 根据 Fourier 变换的定义，有

$$\begin{aligned}F(\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_0^{\tau}E\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\&=-\frac{E}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\Big|_0^{\tau}=\frac{E}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega\tau}{2}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega\tau}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega\tau}{2}})\\&=\frac{2E}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega\tau}{2}}\sin\frac{\omega\tau}{2}.\end{aligned}$$

如果我们根据 § 1.2 例 8 介绍的矩形单脉冲

$$f_1(t)=\begin{cases}E, & -\frac{\tau}{2}<t<\frac{\tau}{2},\\0, & \text{其他}\end{cases}$$

的频谱函数

$$F_1(\omega)=\frac{2E}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2},$$

利用位移性质,就可以很方便地得到上述 $F(\omega)$.因为 $f(t)$ 可以由 $f_1(t)$ 在时间轴上向右平移 $\frac{\tau}{2}$ 得到,所以

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\mathscr{F}\left[f_1\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}F_1(\omega)$$

$$=\frac{2E}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega\tau}{2}}\sin\frac{\omega\tau}{2},$$

且

$$|F(\omega)|=|F_1(\omega)|=\frac{2E}{\omega}\left|\sin\frac{\omega\tau}{2}\right|.$$

两种解法的结果一致,其频谱如图 1-9 所示.

例 2 求 $\mathscr{F}[\mathrm{e}^{-\beta(t-t_0)^2}]$ 及 $\mathscr{F}[\mathrm{e}^{-\beta t^2}\cos at]$.

解 根据 §1.2 例 2,即钟形脉冲函数的 Fourier 变换,有

$$\mathscr{F}[\mathrm{e}^{-\beta t^2}]=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}.$$

利用位移性质(1.20)式,可得

$$\mathscr{F}[\mathrm{e}^{-\beta(t-t_0)^2}]=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\mathrm{e}^{-\left(\mathrm{j}\omega t_0+\frac{\omega^2}{4\beta}\right)}.$$

利用位移性质(1.21)式,可得

$$\mathscr{F}[\mathrm{e}^{-\beta t^2}\cos at]=\mathscr{F}\left[\mathrm{e}^{-\beta t^2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}at}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}at}}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\mathscr{F}[\mathrm{e}^{-\beta t^2}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}at}+\mathrm{e}^{-\beta t^2}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}at}]$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\left[\mathrm{e}^{-\frac{(\omega-a)^2}{4\beta}}+\mathrm{e}^{-\frac{(\omega+a)^2}{4\beta}}\right].$$

3. 微分性质

如果 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续或只有有限个可去间断点,且当 $|t|\to+\infty$ 时,$f(t)\to 0$,则

$$\mathscr{F}[f'(t)]=\mathrm{j}\omega\mathscr{F}[f(t)]. \tag{1.22}$$

证 由 Fourier 变换的定义,并利用分部积分可得

$$\mathscr{F}[f'(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f'(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\mathrm{j}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\mathrm{j}\omega\mathscr{F}[f(t)].$$

它表明一个函数的导数的 Fourier 变换等于这个函数的 Fourier 变换乘以因子 $\mathrm{j}\omega$.

推论 若 $f^{(k)}(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续或只有有限个可去间断点，且 $\lim\limits_{|t|\to+\infty} f^{(k)}(t)=0, k=0,1,2,\cdots,n-1$①，则有

$$\mathscr{F}[f^{(n)}(t)]=(\mathrm{j}\omega)^n\mathscr{F}[f(t)]. \tag{1.23}$$

该性质表明，可以利用 Fourier 变换将微分运算转化为代数运算，从而使得 Fourier 变换在微分方程求解中起着重要的作用.

同样，我们还能得到象函数的导数公式. 设 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(\omega)=\mathscr{F}[-\mathrm{j}tf(t)].$$

它表明一个函数 Fourier 变换的导数等于 $-\mathrm{j}t$ 与这个函数乘积的 Fourier 变换.

一般地，有

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\omega^n}F(\omega)=(-\mathrm{j})^n\mathscr{F}[t^nf(t)].$$

在实际中，常常用象函数的导数公式来计算 $\mathscr{F}[t^nf(t)]$.

例 3 已知函数 $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \mathrm{e}^{-\beta t}, & t\geqslant 0\end{cases}(\beta>0)$，试求 $\mathscr{F}[tf(t)]$ 及 $\mathscr{F}[t^2f(t)]$.

解 根据 § 1.2 的例 1 知

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\frac{1}{\beta+\mathrm{j}\omega}.$$

利用象函数的导数公式，有

$$\mathscr{F}[tf(t)]=\mathrm{j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(\omega)=\frac{1}{(\beta+\mathrm{j}\omega)^2},$$

$$\mathscr{F}[t^2f(t)]=\mathrm{j}^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\omega^2}F(\omega)=\frac{2}{(\beta+\mathrm{j}\omega)^3}.$$

---

① 为证明方便起见，这里附加了条件

$$\lim_{|t|\to+\infty} f^{(k)}(t)=0, k=0,1,2,\cdots,n-1.$$

事实上，满足 Fourier 积分定理条件的函数 $f^{(k)}(t), k=0,1,2,\cdots,n$，其附加条件必成立.

4. 积分性质

如果当 $t\to+\infty$ 时，$g(t)=\int_{-\infty}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t\to 0$①，那么

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\mathscr{F}[f(t)]. \tag{1.24}$$

证 因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t=f(t),$$

所以

$$\mathscr{F}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\mathscr{F}[f(t)],$$

又根据上述微分性质

$$\mathscr{F}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\mathrm{j}\omega\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t\right],$$

故

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\mathscr{F}[f(t)].$$

它表明一个函数积分后的 Fourier 变换等于这个函数的 Fourier 变换除以因子 $\mathrm{j}\omega$.

例 4 求微分积分方程 $x'(t)-\int_{-\infty}^{t} x(t)\,\mathrm{d}t=2\delta(t)$ 的解 $x(t)$，其中 $-\infty<t<+\infty$.

解 设 $\mathscr{F}[x(t)]=X(\omega)$，对方程两边同时取 Fourier 变换，利用 § 1.2 例 1 的结果以及 Fourier 变换的线性性质，微分性质和积分性质，可得

$$\mathrm{j}\omega X(\omega)-\frac{1}{\mathrm{j}\omega}X(\omega)=2,$$

$$X(\omega)=\frac{-2\mathrm{j}\omega}{1+\omega^2}=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega}-\frac{1}{1-\mathrm{j}\omega},$$

所以

---

① 当 $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)\neq 0$ 时，积分性质应为

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}F(\omega)+\pi F(0)\delta(\omega),$$

其中 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$. 它的证明放在 § 1.4 的末尾.

$$x(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{1}{2}, & t=0,\\ \mathrm{e}^{-t}, & t>0\end{cases}-\begin{cases}\mathrm{e}^{t}, & t<0,\\ \dfrac{1}{2}, & t=0,\\ 0, & t>0\end{cases}=\begin{cases}-\mathrm{e}^{t}, & t<0,\\ 0, & t=0,\\ \mathrm{e}^{-t}, & t>0.\end{cases}$$

运用 Fourier 变换的线性性质、微分性质以及积分性质，可以将线性常系数微分方程（包括积分方程和微积分方程）转化为代数方程，通过解代数方程与求 Fourier 逆变换，就可以得到相应的原方程的解. 另外，Fourier 变换还是求解偏微分方程的方法之一，其计算过程与上述步骤大体相似，这些内容我们将在 § 1.6 Fourier 变换的应用中加以讨论.

5*. 乘积定理

若 $F_1(\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)]$，$F_2(\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]$，则

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f_1(t)}f_2(t)\,\mathrm{d}t&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{F_1(\omega)}F_2(\omega)\,\mathrm{d}\omega,\\ \int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)\,\overline{f_2(t)}\,\mathrm{d}t&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\omega)\,\overline{F_2(\omega)}\,\mathrm{d}\omega,\end{aligned}\right\}\tag{1.25}$$

其中$\overline{f_1(t)}$，$\overline{f_2(t)}$，$\overline{F_1(\omega)}$及$\overline{F_2(\omega)}$分别为$f_1(t)$，$f_2(t)$，$F_1(\omega)$及$F_2(\omega)$的共轭函数.

证

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f_1(t)}f_2(t)\,\mathrm{d}t\\ &=\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f_1(t)}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{d}t\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(\omega)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f_1(t)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\omega^{①}\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(\omega)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f_1(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\omega\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(\omega)\overline{\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\right]}\mathrm{d}\omega\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{F_1(\omega)}F_2(\omega)\,\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

同理可得

① 我们在这里假定，$F_1(\omega)$或$F_2(\omega)$在$(-\infty,+\infty)$上绝对可积，因此能够证明积分次序可以交换. 今后遇到类似问题时，我们不再说明.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\overline{f_2(t)}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega)\overline{F_2(\omega)}\mathrm{d}\omega .$$

若 $f_1(t)$,$f_2(t)$ 为实函数,则乘积定理的结论可写为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F_1(\omega)}F_2(\omega)\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega)\overline{F_2(\omega)}\mathrm{d}\omega. \tag{1.26}$$

该性质的结论与证明本身并非特别重要,但由它引出的能量积分(或称 Parseval 等式)无论在理论上还是在应用上都是十分重要的.

6*. 能量积分

若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$,则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega. \tag{1.27}$$

这一等式又称为 **Parseval 等式**.

证 在(1.26)式中,令 $f_1(t)=f_2(t)=f(t)$,则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\overline{F(\omega)}\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\mathrm{d}\omega ,$$

其中

$$S(\omega)=|F(\omega)|^2$$

称为**能量密度函数**(或称**能量谱密度**).它可以决定函数 $f(t)$ 的能量分布规律.将它对所有频率积分就得到 $f(t)$ 的总能量

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2\mathrm{d}t,$$

故 Parseval 等式又称为**能量积分**.显然,能量密度函数 $S(\omega)$ 是 ω 的偶函数,即

$$S(\omega)=S(-\omega).$$

利用能量积分还可以计算某些积分的数值.

例 5 求 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$.

解 根据 Parseval 等式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega$$

可知,若设

$$f(t)=\frac{\sin t}{t},$$

则它的 Fourier 变换可由附录 I 中第 5 式得到

$$F(\omega)=\begin{cases}\pi, & |\omega|<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\pi^2\mathrm{d}\omega=\pi.$$

若设 $F(\omega)=\dfrac{\sin\omega}{\omega}$,则由 § 1.2 的例 8 可知

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & |t|<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\mathrm{d}\omega=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2\mathrm{d}t=2\pi\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}\mathrm{d}t=\pi.$$

由此可知,当此类积分的被积函数为$[\varphi(x)]^2$时,取 $\varphi(x)$ 为象原函数或象函数都可以求得积分的结果.

除了上面介绍的 Fourier 变换的几个重要性质外,还有些性质放在习题中留给读者去证明.

习题三

1. 若 $F_1(\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)]$, $F_2(\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]$, α,β 是常数,证明(线性性质):

$$\mathscr{F}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega),$$
$$\mathscr{F}^{-1}[\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)]=\alpha f_1(t)+\beta f_2(t).$$

2. 若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$,证明(对称性质):

$$f(\pm\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\mp t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t,$$

即

$$\mathscr{F}[F(\mp t)]=2\pi f(\pm\omega).$$

3. 若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$, a 为非零常数,证明(相似性质):

$$\mathscr{F}[f(at)]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

4. 若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，证明（象函数的位移性质）：

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega\mp\omega_0)]=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\omega_0 t}f(t),$$

即

$$F(\omega\mp\omega_0)=\mathscr{F}[\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\omega_0 t}f(t)].$$

5. 若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，证明（象函数的微分性质）：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(\omega)=\mathscr{F}[-\mathrm{j}tf(t)].$$

6. 若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，证明（翻转性质）：

$$F(-\omega)=\mathscr{F}[f(-t)].$$

7. 若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，证明：

$$\mathscr{F}[f(t)\cos\omega_0 t]=\frac{1}{2}[F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)],$$

$$\mathscr{F}[f(t)\sin\omega_0 t]=\frac{1}{2\mathrm{j}}[F(\omega-\omega_0)-F(\omega+\omega_0)].$$

8. 若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，$a$ 为非零常数，试证明：

(1) $\mathscr{F}[f(at-t_0)]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{a}t_0}$；

(2) $\mathscr{F}[f(t_0-at)]=\frac{1}{|a|}F\left(-\frac{\omega}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{a}t_0}$.

9. 设函数 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|<1,\\ 0, & |t|>1,\end{cases}$ 利用对称性质，证明

$$\mathscr{F}\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\begin{cases}\pi, & |\omega|<1,\\ 0, & |\omega|>1.\end{cases}$$

10. 利用象函数的微分性质，求 $f(t)=t\mathrm{e}^{-t^2}$ 的 Fourier 变换.

11. 若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，利用 Fourier 变换的性质求下列函数 $g(t)$ 的 Fourier 变换：

(1) $g(t)=tf(2t)$；　　(2) $g(t)=(t-2)f(t)$；

(3) $g(t)=(t-2)f(-2t)$；　　(4) $g(t)=t^3f(2t)$；

(5) $g(t)=tf'(t)$；　　(6) $g(t)=f(1-t)$；

(7) $g(t)=(1-t)f(1-t)$；　　(8) $g(t)=f(2t-5)$.

12. 利用能量积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega$，求下列积分的值：

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}\mathrm{d}x$;

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$;　　(4) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

§1.4 卷积与相关函数

上一节我们介绍了关于 Fourier 变换的一些重要性质,本节还要介绍 Fourier 变换的另一类重要性质,它们都是分析线性系统的极为有用的工具.

1. 卷积定理

(1) 卷积的概念

若已知函数 $f_1(t)$,$f_2(t)$,则积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

称为函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的**卷积**,记为 $f_1(t)*f_2(t)$,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau=f_1(t)*f_2(t). \tag{1.28}$$

容易验证卷积运算满足:

1) 交换律　$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$;

2) 结合律　$f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]=[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)$;

3) 对加法的分配律

$$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t).$$

卷积还具有下列基本性质:

1) 卷积的数乘

$$a[f_1(t)*f_2(t)]=[af_1(t)]*f_2(t)=f_1(t)*[af_2(t)]\ (a\text{ 为常数});$$

2) 卷积的微分

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f_1(t)*f_2(t)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_1(t)*f_2(t)=f_1(t)*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_2(t);$$

3) 卷积的积分

$$\int_{-\infty}^{t}[f_1(\xi)*f_2(\xi)]\mathrm{d}\xi=f_1(t)*\int_{-\infty}^{t}f_2(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_{-\infty}^{t}f_1(\xi)\mathrm{d}\xi*f_2(t).$$

对卷积,还有如下的不等式

$$|f_1(t)*f_2(t)|\leqslant|f_1(t)|*|f_2(t)|$$

成立,即函数卷积的绝对值小于等于函数绝对值的卷积.

我们仅给出对加法的分配律的证明,其余结论的证明留给读者自行完成.

根据卷积的定义,有

$$
\begin{aligned}
& f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)[f_2(t-\tau) + f_3(t-\tau)]\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_3(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t),
\end{aligned}
$$

即卷积满足对加法的分配律.

例 1 证明 $f(t) * \delta(t) = f(t)$.

证 根据卷积定义,利用 δ-函数为偶函数及筛选性质,有

$$
\begin{aligned}
f(t) * \delta(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(\tau-t)\mathrm{d}\tau = f(\tau)\Big|_{\tau=t} = f(t).
\end{aligned}
$$

若利用卷积的交换律会更方便,因为

$$
\delta(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) f(t-\tau)\mathrm{d}\tau = f(t-\tau)\Big|_{\tau=0} = f(t).
$$

例 2 若

$$
f_1(t) = \begin{cases} 0, t<0, \\ 1, t \geqslant 0, \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} 0, & t<0, \\ \mathrm{e}^{-t}, t \geqslant 0, \end{cases}
$$

求 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积.

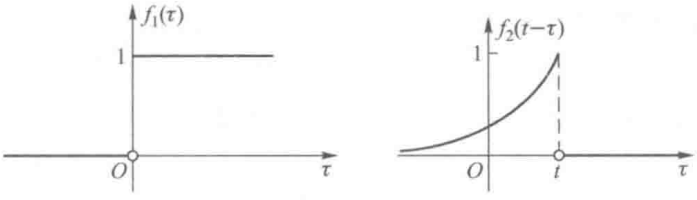
解 按卷积的定义,有

$$
f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau.
$$

我们可以用图 1-14(a)和(b)来表示 $f_1(\tau)$ 和 $f_2(t-\tau)$ 的图形,当 $t<0$ 时,$f_1(\tau)f_2(t-\tau)=0$;而 $f_1(\tau)f_2(t-\tau) \neq 0$ 的区间从图 1-14 中可以看出,在 $t \geqslant 0$ 时,为 $[0,t]$.所以

$$
\begin{aligned}
f_1(t) * f_2(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \begin{cases} 0, & t<0, \\ \int_0^t 1 \cdot \mathrm{e}^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau, & t \geqslant 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$= \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - e^{-t}, & t \geqslant 0. \end{cases}$$



(a)　　(b)

图 1-14

同样,$f_2(t)*f_1(t)$亦得到上述的结果,读者可自己演算一下.

为确定$f_1(\tau)f_2(t-\tau)\neq 0$的区间,还可以用解不等式组的方法加以解决.仍以本例来说,要$f_1(\tau)f_2(t-\tau)\neq 0$,即要求

$$\begin{cases} \tau \geqslant 0, \\ t-\tau \geqslant 0 \end{cases} \quad 或 \begin{cases} \tau \geqslant 0, \\ \tau \leqslant t \end{cases}$$

成立.可见,当$t\geqslant 0$时,$f_1(\tau)f_2(t-\tau)\neq 0$的区间为$[0,t]$,故

$$f_1(t)*f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t 1\cdot e^{-(t-\tau)}\,d\tau$$

$$= \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - e^{-t}, & t \geqslant 0. \end{cases}$$

卷积在 Fourier 分析的应用中,有着十分重要的作用,这是由下面的卷积定理所决定的.

(2) 卷积定理

假定$f_1(t)$,$f_2(t)$都满足 Fourier 积分定理中的条件,且$\mathscr{F}[f_1(t)]=F_1(\omega)$,$\mathscr{F}[f_2(t)]=F_2(\omega)$,则

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)] = F_1(\omega)\cdot F_2(\omega), \\ 或\quad &\mathscr{F}^{-1}[F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)] = f_1(t)*f_2(t). \end{aligned}\right\} \tag{1.29}$$

证　按 Fourier 变换的定义,有

$$\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(t)*f_2(t)]e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau\right] e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)e^{-j\omega\tau} f_2(t-\tau)e^{-j\omega(t-\tau)}\,d\tau\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t-\tau) e^{-j\omega(t-\tau)} dt \right] d\tau$$
$$= F_1(\omega) \cdot F_2(\omega).$$

这个性质表明,两个函数卷积的 Fourier 变换等于这两个函数 Fourier 变换的乘积.

同理可得

$$\mathscr{F}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega), \tag{1.30}$$

即两个函数乘积的 Fourier 变换等于这两个函数 Fourier 变换的卷积除以 2π.

不难推证,若 $f_k(t)$ 满足 Fourier 积分定理中的条件,且

$$\mathscr{F}[f_k(t)] = F_k(\omega) \quad (k=1,2,\cdots,n),$$

则有

$$\mathscr{F}[f_1(t) * f_2(t) * \cdots * f_n(t)] = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega) \cdot \cdots \cdot F_n(\omega),$$
$$\mathscr{F}[f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot \cdots \cdot f_n(t)] = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} F_1(\omega) * F_2(\omega) * \cdots * F_n(\omega).$$

从上面我们可以看出,卷积并不总是很容易计算的,但卷积定理提供了卷积计算的简便方法,即化卷积运算为乘积运算.这就使得卷积在线性系统分析中成为特别有用的方法.

2*. 相关函数

相关函数的概念和卷积的概念一样,也是频谱分析中的一个重要概念.本节在引入相关函数的概念以后,主要是来建立相关函数和能量谱密度之间的关系.

(1) 相关函数的概念

对于两个不同的函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$,称积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t+\tau) dt$$

为两个函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的**互相关函数**,用记号 $R_{12}(\tau)$ 表示,即

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t+\tau) dt, \tag{1.31}$$

而积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t+\tau) f_2(t) dt$$

记为 $R_{21}(\tau)$,即

$$R_{21}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t+\tau)f_2(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.32}$$

当 $f_1(t)=f_2(t)=f(t)$ 时，称积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)f(t+\tau)\,\mathrm{d}t$$

为函数 $f(t)$ 的**自相关函数**（简称**相关函数**）.用记号 $R(\tau)$ 表示，即

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)f(t+\tau)\,\mathrm{d}t. \tag{1.33}$$

根据 $R(\tau)$ 的定义，可以看出：自相关函数是一个偶函数，即

$$R(-\tau)=R(\tau).$$

事实上，$R(-\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)f(t-\tau)\,\mathrm{d}t$，令 $t=u+\tau$，可得

$$R(-\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u+\tau)f(u)\,\mathrm{d}u=R(\tau).$$

关于互相关函数，有如下的性质：

$$R_{21}(\tau)=R_{12}(-\tau).$$

（2）相关函数和能量谱密度的关系

在（1.26）式中，令 $f_1(t)=f(t)$，$f_2(t)=f(t+\tau)$ 且

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)],$$

再根据位移性质，可得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)f(t+\tau)\,\mathrm{d}t&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{F(\omega)}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega,\end{aligned}$$

即

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega.$$

由能量谱密度的定义可以推得

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau.$$

由此可见，自相关函数 $R(\tau)$ 和能量谱密度 $S(\omega)$ 构成了一个 Fourier 变换对：

$$\left.\begin{aligned} R(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\omega, \\ S(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau. \end{aligned}\right\} \tag{1.34}$$

利用相关函数 $R(\tau)$ 及 $S(\omega)$ 的偶函数性质，可将(1.34)式写成三角函数的形式

$$\left.\begin{aligned} R(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\cos\omega\tau\mathrm{d}\omega, \\ S(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau. \end{aligned}\right\} \tag{1.35}$$

当 $\tau=0$ 时，

$$R(0) = \int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\mathrm{d}\omega,$$

即 Parseval 等式.

若 $F_1(\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)]$，$F_2(\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]$，根据乘积定理，可得

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(t+\tau)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{F_1(\omega)}F_2(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\omega.$$

我们称 $S_{12}(\omega)=\overline{F_1(\omega)}F_2(\omega)$ 为**互能量谱密度**.同样可见，它和互相关函数亦构成一个 Fourier 变换对：

$$\left.\begin{aligned} R_{12}(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{12}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\omega, \\ S_{12}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{12}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau. \end{aligned}\right\} \tag{1.36}$$

我们还可以发现，互能量谱密度有如下的性质：

$$S_{21}(\omega)=\overline{S_{12}(\omega)},$$

这里，$S_{21}(\omega)=F_1(\omega)\overline{F_2(\omega)}$.

例 3 求指数衰减函数 $f(t)=\begin{cases}0, & t<0, \\ \mathrm{e}^{-\beta t}, & t\geqslant 0\end{cases}$ $(\beta>0)$ 的自相关函数和能量谱密度.

解 根据自相关函数的定义，有

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(t+\tau)\mathrm{d}t.$$

我们可以用图 1-15(a)、(b)和(c)来表示 $f(t)$ 和 $f(t+\tau)$ 的图形，而它们乘积 $f(t)f(t+\tau)\neq 0$ 的区间从图 1-15 中可以看出：

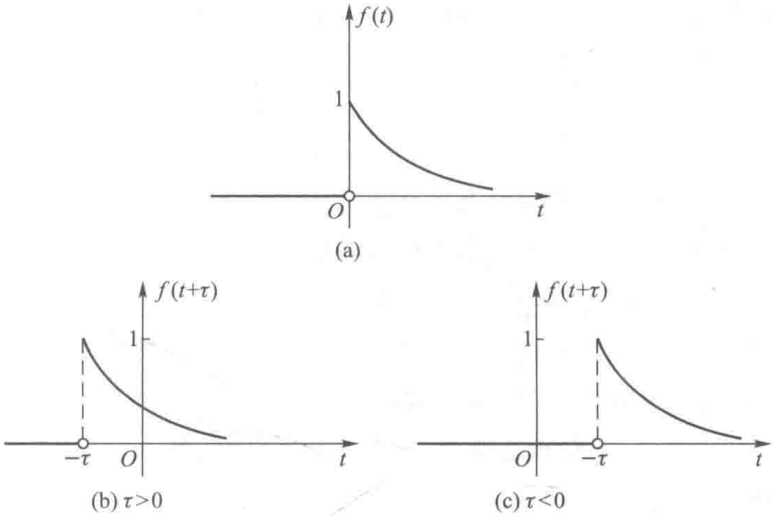


图 1-15

当 $\tau\geqslant 0$ 时，积分区间为 $[0,+\infty)$，所以

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)f(t+\tau)\,\mathrm{d}t=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta t}\mathrm{e}^{-\beta(t+\tau)}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-\beta\tau}}{-2\beta}\mathrm{e}^{-2\beta t}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{\mathrm{e}^{-\beta\tau}}{2\beta},$$

当 $\tau<0$ 时，积分区间为 $[-\tau,+\infty)$，所以

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)f(t+\tau)\,\mathrm{d}t=\int_{-\tau}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta t}\mathrm{e}^{-\beta(t+\tau)}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-\beta\tau}}{-2\beta}\mathrm{e}^{-2\beta t}\Big|_{-\tau}^{+\infty}=\frac{\mathrm{e}^{\beta\tau}}{2\beta},$$

可见，当 $-\infty<\tau<+\infty$ 时，自相关函数可合写为

$$R(\tau)=\frac{1}{2\beta}\mathrm{e}^{-\beta|\tau|}.$$

将求得的 $R(\tau)$ 代入(1.34)式，即得能量谱密度为

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\beta}\mathrm{e}^{-\beta|\tau|}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau,$$

$$=\frac{1}{\beta}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta\tau}\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\beta^{2}+\omega^{2}}$$

$$=\frac{1}{\beta^2+\omega^2}.$$

为确定 $f(t)f(t+\tau)\neq 0$ 的区间,也可以用解不等式组的方法加以解决.由函数 $f(t)$ 求相关函数 $R(\tau)$,要决定积分的上、下限,有时为了避免这种麻烦,可以先求出 $f(t)$ 的 Fourier 变换 $F(\omega)$,再根据

$$S(\omega)=|F(\omega)|^2,\ R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\omega$$

求得结果,读者不妨就这个例题自己验算一下.

最后还要指出,本节和上一节介绍的是古典意义下的 Fourier 变换的一些性质.对于广义 Fourier 变换来说,除了象函数的积分性质的结果稍有不同以外,其他性质在形式上也都相同,但不同的是变换中的反常积分是按(1.15)式来定义的,而不是普通意义下的积分值.

例 4 利用 Fourier 变换的性质,求 $\delta(t-t_0)$,$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$ 以及 $tu(t)$ 的 Fourier 变换.

解 因为 $\mathscr{F}[\delta(t)]=1$,按位移性质可知

$$\mathscr{F}[\delta(t-t_0)]=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}\mathscr{F}[\delta(t)]=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}.$$

又因为 $\mathscr{F}[1]=2\pi\delta(\omega)$,按象函数的位移性质可知

$$\mathscr{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}]=2\pi\delta(\omega-\omega_0).$$

可见,这和前面得到的结果是完全一致的.

由 $\mathscr{F}[u(t)]=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)$,按象函数的微分性质 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(\omega)=\mathscr{F}[-\mathrm{j}tf(t)]$ 可知

$$\mathscr{F}[tu(t)]=\mathrm{j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\mathscr{F}[u(t)]=\mathrm{j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)\right]$$

$$=\mathrm{j}\left[\frac{-1}{\mathrm{j}\omega^2}+\pi\delta'(\omega)\right]=-\frac{1}{\omega^2}+\mathrm{j}\pi\delta'(\omega).$$

例 5 若 $f(t)=\cos\omega_0 t\cdot u(t)$,求 $\mathscr{F}[f(t)]$.

解 根据(1.30)式,有

$$\mathscr{F}[\cos\omega_0 t\cdot u(t)]=\frac{1}{2\pi}\mathscr{F}[\cos\omega_0 t]*\mathscr{F}[u(t)].$$

而

$$\mathscr{F}[\cos\omega_0 t]=\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)],$$

$$\mathscr{F}[u(t)]=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega).$$

卷积满足对加法的分配律的结论对广义函数的卷积来说形式上也相同，所以

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f(t)] &= \frac{1}{2\pi}[\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)]*\left[\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)\right] \\ &= \frac{1}{2}[\delta(\omega-\omega_0)*\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\delta(\omega+\omega_0)*\frac{1}{\mathrm{j}\omega} \\ &\quad +\delta(\omega-\omega_0)*\pi\delta(\omega)+\delta(\omega+\omega_0)*\pi\delta(\omega)].\end{aligned}$$

根据卷积定理(1.29)式，有

$$\begin{aligned}\delta(\omega\pm\omega_0)*\frac{1}{\mathrm{j}\omega} &= \mathscr{F}^{-1}\left\{\mathscr{F}[\delta(\omega\pm\omega_0)]\cdot\mathscr{F}\left[\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right]\right\} \\ &= \mathscr{F}^{-1}\left\{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\omega_0 t}\cdot\mathscr{F}\left[\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right]\right\} \\ &= \mathscr{F}^{-1}\left\{\mathscr{F}\left[\frac{1}{\mathrm{j}(\omega\pm\omega_0)}\right]\right\} = \frac{1}{\mathrm{j}(\omega\pm\omega_0)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta(\omega\pm\omega_0)*\pi\delta(\omega) &= \pi[\delta(\omega\pm\omega_0)*\delta(\omega)] \\ &= \pi\mathscr{F}^{-1}\{\mathscr{F}[\delta(\omega\pm\omega_0)]\cdot\mathscr{F}[\delta(\omega)]\} \\ &= \pi\mathscr{F}^{-1}\{\mathscr{F}[\delta(\omega\pm\omega_0)]\} = \pi\delta(\omega\pm\omega_0).\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}&\mathscr{F}[f(t)] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mathrm{j}(\omega-\omega_0)}+\frac{1}{\mathrm{j}(\omega+\omega_0)}+\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)\right] \\ &= \frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0^2-\omega^2}+\frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)].\end{aligned}$$

我们也可以根据位移性质(1.21)式来计算.因为

$$\begin{aligned}f(t) &= \cos\omega_0 t\cdot u(t) \\ &= \frac{1}{2}u(t)(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f(t)] &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mathrm{j}(\omega-\omega_0)}+\pi\delta(\omega-\omega_0)+\frac{1}{\mathrm{j}(\omega+\omega_0)}+\pi\delta(\omega+\omega_0)\right] \\ &= \frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0^2-\omega^2}+\frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)].\end{aligned}$$

同理可得

$$\mathscr{F}[\sin\omega_0 t\cdot u(t)]=\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}+\frac{\pi}{2\mathrm{j}}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)].$$

例 6 若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$,证明

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\frac{F(\omega)}{\mathrm{j}\omega}+\pi F(0)\delta(\omega). \tag{1.37}$$

证 由前面介绍的积分性质知道,当 $g(t)=\int_{-\infty}^{t}f(t)\,\mathrm{d}t$ 满足 Fourier 积分定理的条件时,有

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\frac{F(\omega)}{\mathrm{j}\omega}.$$

当 $g(t)$ 为一般情况时,我们可以将 $g(t)$ 表示成 $f(t)$ 和 $u(t)$ 的卷积,即

$$g(t)=f(t)*u(t).$$

这是因为

$$f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

利用卷积定理(1.29)式,有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[g(t)]&=\mathscr{F}[f(t)*u(t)]=\mathscr{F}[f(t)]\cdot\mathscr{F}[u(t)]\\&=F(\omega)\cdot\left[\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)\right]\\&=\frac{F(\omega)}{\mathrm{j}\omega}+\pi F(\omega)\delta(\omega)=\frac{F(\omega)}{\mathrm{j}\omega}+\pi F(0)\delta(\omega).\end{aligned}$$

最后一个等号的成立,是对无穷次可微函数 $f(t)$ 按(1.15)式及(1.16)式而得到的.这就表明,当 $\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=0$ 的条件不满足时,它的 Fourier 变换就应包括一个脉冲函数,即

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\frac{F(\omega)}{\mathrm{j}\omega}+\pi F(0)\delta(\omega).$$

特别,当 $\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=0$,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t=0$$

时,由于 $f(t)$ 是绝对可积的,所以

$$F(0)=\lim_{\omega\to0}F(\omega)=\lim_{\omega\to0}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\omega \to 0} [f(t) e^{-j\omega t}] dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 0.$$

由此可见，当 $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = 0$ 时，就有 $F(0) = 0$，从而与前面的结果相一致.

习题四

1. 证明下列各式：

(1) $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$；

(2) $f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] = [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t)$；

(3) $a[f_1(t) * f_2(t)] = [af_1(t)] * f_2(t) = f_1(t) * [af_2(t)]$（$a$ 为常数）；

(4) $e^{at}[f_1(t) * f_2(t)] = [e^{at} f_1(t)] * [e^{at} f_2(t)]$（$a$ 为常数）；

(5) $[f_1(t) + f_2(t)] * [g_1(t) + g_2(t)]$

$= f_1(t) * g_1(t) + f_2(t) * g_1(t) + f_1(t) * g_2(t) + f_2(t) * g_2(t)$；

(6) $\dfrac{d}{dt}[f_1(t) * f_2(t)] = \dfrac{d}{dt} f_1(t) * f_2(t) = f_1(t) * \dfrac{d}{dt} f_2(t)$；

(7) $\int_{-\infty}^{t} [f_1(\xi) * f_2(\xi)] d\xi = f_1(t) * \int_{-\infty}^{t} f_2(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{t} f_1(\xi) d\xi * f_2(t)$；

(8) $f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$；

(9) $f(t) * \delta'(t) = f'(t)$；

(10) $f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau$.

2. 若 $f_1(t) = e^{-\alpha t} u(t)$，$f_2(t) = \sin t \cdot u(t)$，求 $f_1(t) * f_2(t)$.

3. 若

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^{-t}, & t \geqslant 0, \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求 $f_1(t) * f_2(t)$.

4. 若 $F_1(\omega) = \mathscr{F}[f_1(t)]$，$F_2(\omega) = \mathscr{F}[f_2(t)]$，证明

$$\mathscr{F}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega).$$

5. 求下列函数的 Fourier 变换：

(1) $f(t) = \sin \omega_0 t \cdot u(t)$；

(2) $f(t)=e^{-\beta t}\sin\omega_0 t\cdot u(t)\quad(\beta>0)$;

(3) $f(t)=e^{-\beta t}\cos\omega_0 t\cdot u(t)\quad(\beta>0)$;

(4) $f(t)=e^{j\omega_0 t}u(t)$;

(5) $f(t)=e^{j\omega_0 t}u(t-t_0)$;

(6) $f(t)=e^{j\omega_0 t}tu(t)$.

6. 证明互相关函数和互能量谱密度的下列性质:

$$R_{21}(\tau)=R_{12}(-\tau),$$

$$S_{21}(\omega)=\overline{S_{12}(\omega)}.$$

7. 已知某信号的相关函数 $R(\tau)=\frac{1}{4}e^{-2a|\tau|}$,求它的能量谱密度 $S(\omega)$,其中 $a>0$.

8. 已知某波形的相关函数 $R(\tau)=\frac{1}{2}\cos\omega_0\tau$($\omega_0$为常数),求这个波形的能量谱密度.

9. 求函数 $f(t)=e^{-\alpha t}u(t)\ (\alpha>0)$ 的能量谱密度.

10. 若函数

$$f_1(t)=\begin{cases}\frac{b}{a}t, & 0\leqslant t\leqslant a,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad f_2(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant a,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的互相关函数 $R_{12}(\tau)$.

§1.5* 多重 Fourier 变换

前面我们介绍了一元函数的 Fourier 变换,但在实际应用中有时还需要考虑多元函数的 Fourier 变换.因此,这一节我们将扼要地介绍多重 Fourier 变换的概念及其基本性质.

1. 多重 Fourier 变换的概念

为了叙述方便,我们先介绍二元函数的 Fourier 变换,即二重 Fourier 变换.然后再推广到三重,n 重 Fourier 变换.

假设二元函数 $f(x,y)$ 在 $-\infty<x,y<+\infty$ 区域上绝对可积且对每个变量都满足 Fourier 变换的条件,先将 $f(x,y)$ 对 x 取 Fourier 变换而将 y 看成参数,可得

$$F(\omega_1,y)=\mathscr{F}[f(x,y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)e^{-j\omega_1 x}dx. \tag{1.38}$$

再将 $F(\omega_1,y)$ 对 y 取 Fourier 变换而将 ω_1 看成参数，可得

$$F(\omega_1,\omega_2)=\mathscr{F}[F(\omega_1,y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega_1,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_2 y}\mathrm{d}y. \tag{1.39}$$

现将(1.38)式代入(1.39)式，则有

$$\begin{aligned}F(\omega_1,\omega_2)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_1 x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_2 y}\mathrm{d}y\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega_1 x+\omega_2 y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

对(1.38)式和(1.39)式分别取其 Fourier 逆变换，有

$$\mathscr{F}^{-1}[f(\omega_1,y)]=f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega_1,y)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_1 x}\mathrm{d}\omega_1 \tag{1.40}$$

和

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega_1,\omega_2)]=F(\omega_1,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega_1,\omega_2)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_2 y}\mathrm{d}\omega_2. \tag{1.41}$$

现将(1.41)式代入(1.40)式，可得

$$f(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega_1,\omega_2)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_1 x+\omega_2 y)}\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2.$$

由此，我们可以给出二重 Fourier 变换的定义.

定义 若二元函数 $f(x,y)$ 在 $-\infty<x,y<+\infty$ 区域上绝对可积且对每个变量都满足 Fourier 变换的条件，则称函数

$$F(\omega_1,\omega_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega_1 x+\omega_2 y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.42}$$

为 $f(x,y)$ 的**二重 Fourier 变换**.而称函数

$$f(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega_1,\omega_2)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_1 x+\omega_2 y)}\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2 \tag{1.43}$$

为 $F(\omega_1,\omega_2)$ 的**二重 Fourier 逆变换**.

同样，称 $F(\omega_1,\omega_2)$ 为 $f(x,y)$ 的**象函数**(**或频谱函数**)，而称 $f(x,y)$ 为 $F(\omega_1,\omega_2)$ 的**象原函数**.

可以看出 $f(x,y)$ 和 $F(\omega_1,\omega_2)$ 通过指定的积分运算可以相互表达.显然，(1.42)式和(1.43)式构成一对二重 Fourier 变换对.

从上面(1.42)式的推导过程可以发现二重 Fourier 变换可以通过对 x 和对 y 分别取 Fourier 变换而得到.换句话说，二重 Fourier 变换也可以分解成分别对 x 和对 y 的两个一重 Fourier 变换.这一特性为求二重Fourier 变换提供了一种计算方法.

类似地，三元函数 $f(x,y,z)$ 的三重 Fourier 变换对为

$$\begin{cases} F(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=\iiint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y,z)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega_1 x+\omega_2 y+\omega_3 z)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \text{①} \\ f(x,y,z)=\dfrac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty} F(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_1 x+\omega_2 y+\omega_3 z)}\,\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2\mathrm{d}\omega_3. \end{cases}$$

一般地，n 元函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的 n 重 Fourier 变换对为

$$\begin{cases} F(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)=\iint\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\cdot \\ \qquad\qquad \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega_1 x_1+\omega_2 x_2+\cdots+\omega_n x_n)}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n, \\ f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\dfrac{1}{(2\pi)^n}\iint\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)\cdot \\ \qquad\qquad \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_1 x_1+\omega_2 x_2+\cdots+\omega_n x_n)}\,\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2\cdots\mathrm{d}\omega_n. \end{cases}$$

为了书写和应用上的方便，可以用矢量形式来表示多元函数的 Fourier 变换.

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为一个矢量 $\boldsymbol{x}$ 的 n 个分量，而 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 为另一个矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 的 n 个分量，即

$$\boldsymbol{x}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\},\ \boldsymbol{\omega}=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}.$$

通常 $\boldsymbol{x}$ 表示位置矢量，$\boldsymbol{\omega}$ 表示波数矢量.因此，n 元函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的 n 重 Fourier 变换对可表示为

$$\begin{cases} F(\boldsymbol{\omega})=\iint\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, & (1.44) \\ f(\boldsymbol{x})=\dfrac{1}{(2\pi)^n}\iint\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} F(\boldsymbol{\omega})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}, & (1.45) \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x}=\omega_1x_1+\omega_2x_2+\cdots+\omega_nx_n$ 为两个矢量的数量积，$\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$，$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}=\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2\cdots\mathrm{d}\omega_n$.

例 1 求函数 $f(\boldsymbol{x})=a\mathrm{e}^{-b^2|\boldsymbol{x}|^2}$ 的 Fourier 变换，其中 a,b 均为常数，$\boldsymbol{x}=\{x,y\}$.

解 显然，这是一个求二元函数 $f(x,y)$ 的二重 Fourier 变换问题，根据(1.44)式(或(1.42)式)，有

$$F(\boldsymbol{\omega})=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

---

① 为书写方便，以下对整个空间上的三重积分，四重积分，…，n 重积分的积分记号分别写为 $\iiint_{-\infty}^{+\infty}$，$\iiiint_{-\infty}^{+\infty}$，…，$\iint\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}$.

$$=a\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-b^2|\boldsymbol{x}|^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x})}\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

注意到被积函数

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-b^2|\boldsymbol{x}|^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x})}&=\mathrm{e}^{-b^2(x^2+y^2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega_1x+\omega_2y)}\\&=\mathrm{e}^{-[b^2(x^2+y^2)+\mathrm{j}(\omega_1x+\omega_2y)]}\\&=\mathrm{e}^{-(b^2x^2+\mathrm{j}\omega_1x)}\mathrm{e}^{-(b^2y^2+\mathrm{j}\omega_2y)},\end{aligned}$$

其中

$$\mathrm{e}^{-(b^2x^2+\mathrm{j}\omega_1x)}=\mathrm{e}^{-b^2\left(x+\frac{\mathrm{j}\omega_1}{2b^2}\right)^2}\mathrm{e}^{\left(\frac{\mathrm{j}\omega_1}{2b}\right)^2}.$$

由已知积分结果 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=\sqrt{\pi}$，得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(b^2x^2+\mathrm{j}\omega_1x)}\mathrm{d}x&=\mathrm{e}^{\left(\frac{\mathrm{j}\omega_1}{2b}\right)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(bx+\frac{\mathrm{j}\omega_1}{2b}\right)^2}\mathrm{d}x\\&=\mathrm{e}^{\left(\frac{\mathrm{j}\omega_1}{2b}\right)^2}\frac{1}{b}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u\\&=\frac{\sqrt{\pi}}{b}\mathrm{e}^{\left(\frac{\mathrm{j}\omega_1}{2b}\right)^2}.\end{aligned}$$

同样可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(b^2y^2+\mathrm{j}\omega_2y)}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{\pi}}{b}\mathrm{e}^{\left(\frac{\mathrm{j}\omega_2}{2b}\right)^2}.$$

因此

$$\begin{aligned}F(\boldsymbol{\omega})=F(\omega_1,\omega_2)&=a\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(b^2x^2+\mathrm{j}\omega_1x)}\mathrm{d}x\right]\mathrm{e}^{-(b^2y^2+\mathrm{j}\omega_2y)}\mathrm{d}y\\&=a\frac{\sqrt{\pi}}{b}\mathrm{e}^{\left(\frac{\mathrm{j}\omega_1}{2b}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{b}\mathrm{e}^{\left(\frac{\mathrm{j}\omega_2}{2b}\right)^2}\\&=\frac{a}{b^2}\pi\mathrm{e}^{-\frac{1}{4b^2}(\omega_1^2+\omega_2^2)}\\&=\frac{a}{b^2}\pi\mathrm{e}^{-\frac{1}{4b^2}|\boldsymbol{\omega}|^2}.\end{aligned}$$

我们能够看到，这里的二重 Fourier 变换是通过对 x 和对 y 分别取一重 Fourier 变换而得到的，只要一重 Fourier 变换的获得是方便的，就不难获得二重 Fourier 变换的结果.

在实际应用中，我们还会遇到这样的三元函数 $f(x,y,t)$ 和四元函数 $f(x,y,z,t)$. 以四元函数为例，其中 x,y,z 为空间坐标变量，而 t 是时间变量. 同

样可以写出其四重 Fourier 变换对，即

$$F(\boldsymbol{\omega},\omega)=\iiiint_{-\infty}^{+\infty} f(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x}+\omega t)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t,$$

$$f(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{(2\pi)^4}\iiiint_{-\infty}^{+\infty} F(\boldsymbol{\omega},\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x}+\omega t)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\mathrm{d}\omega,$$

其中 ω,t 分别表示角频率和时间，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2\mathrm{d}\omega_3\mathrm{d}\omega.$$

2. 多重 Fourier 变换的性质

一重 Fourier 变换的许多性质都可以类似地推广到多重 Fourier 变换中来. 现在我们列出一些基本性质，而它们的证明作为习题留给读者.

假设在这些性质中，凡是需要求 Fourier 变换的多元函数都满足多重 Fourier 变换的条件，而 $\boldsymbol{x}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$\boldsymbol{\omega}=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$ 是两个不同的矢量，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 均为常数.

(1) 线性性质

设 $F_1(\boldsymbol{\omega})=\mathscr{F}[f_1(\boldsymbol{x})]$，$F_2(\boldsymbol{\omega})=\mathscr{F}[f_2(\boldsymbol{x})]$，则

$$\mathscr{F}[\alpha_1 f_1(\boldsymbol{x})+\alpha_2 f_2(\boldsymbol{x})]=\alpha_1 F_1(\boldsymbol{\omega})+\alpha_2 F_2(\boldsymbol{\omega}). \tag{1.46}$$

该性质表明多元函数线性组合的多重 Fourier 变换等于各多元函数的多重 Fourier 变换的线性组合.

同样，多重 Fourier 逆变换亦具有类似的线性性质，即

$$\mathscr{F}^{-1}[\alpha_1 F_1(\boldsymbol{\omega})+\alpha_2 F_2(\boldsymbol{\omega})]=\alpha_1 f_1(\boldsymbol{x})+\alpha_2 f_2(\boldsymbol{x}). \tag{1.47}$$

一般地，若 $\mathscr{F}[f_i(\boldsymbol{x})]=F_i(\boldsymbol{\omega})$，$i=1,2,\cdots,n$，则

$$\mathscr{F}\Big[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(\boldsymbol{x})\Big]=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i F_i(\boldsymbol{\omega}), \tag{1.48}$$

$$\mathscr{F}^{-1}\Big[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i F_i(\boldsymbol{\omega})\Big]=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(\boldsymbol{x}). \tag{1.49}$$

(2) 位移性质

若 $F(\boldsymbol{\omega})=\mathscr{F}[f(\boldsymbol{x})]$，则

$$\mathscr{F}[f(\boldsymbol{x}\pm\boldsymbol{x}_0)]=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x}_0)}F(\boldsymbol{\omega}). \tag{1.50}$$

上式表明将函数 $f(\boldsymbol{x})$ 整个平移 $\boldsymbol{x}_0$ 的多重 Fourier 变换等于 $f(\boldsymbol{x})$ 的多重 Fourier 变换乘以因子 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x}_0)}$.

同样，多重 Fourier 逆变换亦具有类似的位移性质，即

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\boldsymbol{\omega}\mp\boldsymbol{\omega}_0)]=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}(\boldsymbol{\omega}_0\cdot\boldsymbol{x})}f(\boldsymbol{x}). \tag{1.51}$$

上式表明频谱函数(象函数) $F(\boldsymbol{\omega})$ 整个平移 $\boldsymbol{\omega}_0$ 的多重 Fourier 逆变换等于原

来的函数 $f(\boldsymbol{x})$ 乘以相应的因子 $e^{\pm j(\boldsymbol{\omega}_0\cdot\boldsymbol{x})}$.

(3) 微分性质

若 $F(\boldsymbol{\omega})=\mathscr{F}[f(\boldsymbol{x})]$,则

$$\mathscr{F}\left[\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\right]=j\omega_i\mathscr{F}[f(\boldsymbol{x})]\quad(1\leqslant i\leqslant n).\tag{1.52}$$

上式表明一个函数 $f(\boldsymbol{x})$ 对某一个坐标分量 x_i 的(偏)导数的多重 Fourier 变换等于这个函数的多重 Fourier 变换乘以因子 $j\omega_i$.

同样,多重 Fourier 逆变换亦具有类似的微分性质,即

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{\omega})}{\partial \omega_i}=\mathscr{F}[-jx_i f(\boldsymbol{x})]\quad(1\leqslant i\leqslant n).\tag{1.53}$$

上式表明频谱函数(象函数) $F(\boldsymbol{\omega})$ 对某一个分量 ω_i 的(偏)导数等于原函数 $f(\boldsymbol{x})$ 与 $-jx_i$ 乘积的多重 Fourier 变换.

一般地,有

$$\mathscr{F}\left[\frac{\partial^n f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i^n}\right]=(j\omega_i)^n\mathscr{F}[f(\boldsymbol{x})],\tag{1.54}$$

$$\frac{\partial^n F(\boldsymbol{\omega})}{\partial \omega_i^n}=(-j)^n\mathscr{F}[x_i^n f(\boldsymbol{x})].\tag{1.55}$$

为了引进多元函数的卷积定理,首先将两个一元函数的卷积概念推广到多元函数的情形.若已知函数 $f_1(\boldsymbol{x})$, $f_2(\boldsymbol{x})$,则 n 重积分

$$\iint\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\boldsymbol{\tau})f_2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\tau})\,d\boldsymbol{\tau}$$

称为函数 $f_1(\boldsymbol{x})$ 与 $f_2(\boldsymbol{x})$ 的**卷积**,记为 $f_1(\boldsymbol{x})*f_2(\boldsymbol{x})$,即

$$f_1(\boldsymbol{x})*f_2(\boldsymbol{x})=\iint\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\boldsymbol{\tau})f_2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\tau})\,d\boldsymbol{\tau},\tag{1.56}$$

其中 $\boldsymbol{\tau}=\{\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n\}$ 称为一个**变参矢量**.

(4) 卷积定理

若 $F_1(\boldsymbol{\omega})=\mathscr{F}[f_1(\boldsymbol{x})]$, $F_2(\boldsymbol{\omega})=\mathscr{F}[f_2(\boldsymbol{x})]$,则

$$\mathscr{F}[f_1(\boldsymbol{x})*f_2(\boldsymbol{x})]=F_1(\boldsymbol{\omega})\cdot F_2(\boldsymbol{\omega}).\tag{1.57}$$

上式表明两个函数卷积的多重 Fourier 变换等于这两个函数多重 Fourier 变换的乘积.

同理可得

$$\mathscr{F}[f_1(\boldsymbol{x})\cdot f_2(\boldsymbol{x})]=\frac{1}{2\pi}F_1(\boldsymbol{\omega})*F_2(\boldsymbol{\omega}).\tag{1.58}$$

上式表明两个函数乘积的多重 Fourier 变换等于这两个函数多重 Fourier 变换的卷积除以 2π.

一般地,有

$$\mathscr{F}[f_1(\boldsymbol{x})*f_2(\boldsymbol{x})*\cdots*f_n(\boldsymbol{x})]=F_1(\boldsymbol{\omega})\cdot F_2(\boldsymbol{\omega})\cdot\cdots\cdot F_n(\boldsymbol{\omega}),\quad(1.59)$$

$$\mathscr{F}[f_1(\boldsymbol{x})\cdot f_2(\boldsymbol{x})\cdot\cdots\cdot f_n(\boldsymbol{x})]=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}F_1(\boldsymbol{\omega})*F_2(\boldsymbol{\omega})*\cdots*F_n(\boldsymbol{\omega}).\quad(1.60)$$

除了上述的基本性质外,我们还要给出一个重要结论:

如果 $f(\boldsymbol{x})=g_1(x_1)\cdot g_2(x_2)\cdot\cdots\cdot g_n(x_n)$,则有

$$F(\boldsymbol{\omega})=\mathscr{F}[f(\boldsymbol{x})]=\mathscr{F}[g_1(x_1)]\cdot\mathscr{F}[g_2(x_2)]\cdot\cdots\cdot\mathscr{F}[g_n(x_n)].\quad(1.61)$$

它表明一个 n 元函数 $f(\boldsymbol{x})$ 能够分离成 n 个分别只依赖于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一元函数的乘积,则 $f(\boldsymbol{x})$ 的 n 重 Fourier 变换等于相应的 n 个一元函数的一重 Fourier 变换的乘积.这个结论在实际应用中十分方便.现再举一个例子来加以说明.

例 2 求函数 $f(\boldsymbol{x})=\left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2|\boldsymbol{x}|^2}{2}}$ 的 Fourier 变换,其中 $\alpha>0,\boldsymbol{x}=\{x,y,z\}$,即 $|\boldsymbol{x}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

解 这是一个三重 Fourier 变换问题.因为

$$f(\boldsymbol{x})=\left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2|\boldsymbol{x}|^2}{2}}=\left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{2}(x^2+y^2+z^2)}$$

$$=\left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{2}x^2}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{2}y^2}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{2}z^2},$$

这里取 $g_1(x)=\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{2}x^2},g_2(y)=\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{2}y^2},g_3(z)=\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{2}z^2}$,而

$$\mathscr{F}[g_1(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g_1(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_1 x}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(\frac{\alpha^2x^2}{2}+\mathrm{j}\omega_1 x\right)}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)^2\left[\left(x+\frac{\mathrm{j}\omega_1}{\alpha^2}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{j}\omega_1}{\alpha^2}\right)^2\right]}\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{\omega_1^2}{2\alpha^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}x+\frac{\mathrm{j}\omega_1}{\sqrt{2}\alpha}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$\left(\text{令 } u=\frac{\alpha}{\sqrt{2}}x+\frac{\mathrm{j}\omega_1}{\sqrt{2}\alpha}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{\omega_1^2}{2\alpha^2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{\omega_1^2}{2\alpha^2}}.$$

同理可得

$$\mathscr{F}[g_2(y)]=\frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{\omega_2^2}{2\alpha^2}},\quad \mathscr{F}[g_3(z)]=\frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{\omega_3^2}{2\alpha^2}}.$$

所以

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f(\boldsymbol{x})]=F(\boldsymbol{\omega})&=\iiint_{-\infty}^{+\infty}f(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x})}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\&=\left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}}\mathscr{F}[g_1(x)]\cdot\mathscr{F}[g_2(y)]\cdot\mathscr{F}[g_3(z)]\\&=\left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}}\cdot\frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{\alpha^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\alpha^2}(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)}\\&=\left(\frac{4\pi}{\alpha^2}\right)^{\frac{3}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\alpha^2}(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)}\\&=\left(\frac{4\pi}{\alpha^2}\right)^{\frac{3}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\alpha^2}|\boldsymbol{\omega}|^2}.\end{aligned}$$

习题五

1. 求函数 $f(\boldsymbol{x})=A\mathrm{e}^{-a^2|\boldsymbol{x}|^2}$ 的 Fourier 变换，其中 A,a 均为常数，$\boldsymbol{x}=\{x,y,z\}$.

2. 利用 Fourier 变换性质，求函数 $f(\boldsymbol{x})=A\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$ 的 Fourier 变换，其中 A 为常数，$\boldsymbol{x}=\{x,y\}$，$\boldsymbol{x}_0=\{x_0,y_0\}$.

3. 已知某函数的 Fourier 变换 $F(\boldsymbol{\omega},t)=\mathrm{e}^{-a^2|\boldsymbol{\omega}|^2t}$，求该函数 $f(\boldsymbol{x},t)$，其中 $a>0$，$\boldsymbol{\omega}=\{\omega_1,\omega_2\}$.

4. 若 $F(\boldsymbol{\omega})=\mathscr{F}[f(\boldsymbol{x})]$，证明（位移性质）

$$\mathscr{F}[f(\boldsymbol{x}\pm\boldsymbol{x}_0)]=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x}_0)}F(\boldsymbol{\omega}).$$

5. 若 $F(\boldsymbol{\omega})=\mathscr{F}[f(\boldsymbol{x})]$，证明（微分性质）

$$\mathscr{F}\left[\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\right]=\mathrm{j}\omega_i\mathscr{F}[f(\boldsymbol{x})]\quad(1\leqslant i\leqslant n).$$

6. 若 $F(\boldsymbol{\omega})=\mathscr{F}[f(\boldsymbol{x})]$，证明（卷积定理）

$$\mathscr{F}[f_1(\boldsymbol{x})*f_2(\boldsymbol{x})]=F_1(\boldsymbol{\omega})\cdot F_2(\boldsymbol{\omega}).$$

§1.6 Fourier 变换的应用

对一个系统进行分析和研究，首先要知道该系统的数学模型，也就是要建立该系统特性的数学表达式.所谓线性系统，在许多场合下，它的数学模型可以用一个线性的微分方程、积分方程、微分积分方程（这三类方程统称为微分、积分方程）乃至于偏微分方程来描述，或者说凡是满足叠加原理的一类系统均可称为线性系统.这一类系统在振动力学、电工学、无线电技术、自动控制理论或其他学科及工程技术领域的研究中，都占有很重要的地位.本节将应用 Fourier 变换来求解这类线性方程.

1. 微分、积分方程的 Fourier 变换解法

根据 Fourier 变换的线性性质、微分性质和积分性质，对欲求解的方程两端取 Fourier 变换，将其转化为象函数的代数方程，由这个代数方程求出象函数，然后再取 Fourier 逆变换就得出原来方程的解.这种解法的示意图可见图 1-16.这是我们求解此类方程的主要方法.具体做法可见下面的例子.

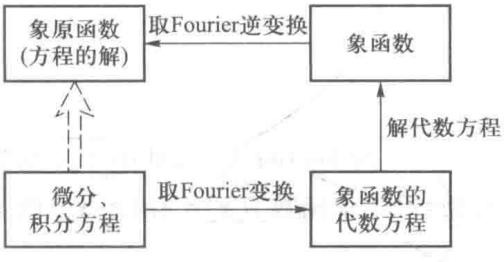


图 1-16

例 1 求积分方程 $\int_0^{+\infty} g(\omega)\sin \omega t \mathrm{d}\omega = f(t)$ 的解 $g(\omega)$，其中

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\sin t, & 0<t\leqslant \pi,\\ 0, & t>\pi.\end{cases}$$

解 因为该积分方程可以改写为

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} g(\omega)\sin \omega t \mathrm{d}\omega = \frac{2}{\pi}f(t),$$

所以，由（1.12）式知，$\frac{2}{\pi}f(t)$ 为 $g(\omega)$ 的 Fourier 正弦逆变换，从而由（1.11）

式,有

$$
\begin{aligned}
g(\omega) &= \int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi} f(t) \sin \omega t \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi} \sin t \sin \omega t \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos(1-\omega)t - \cos(1+\omega)t] \mathrm{d}t \\
&= \frac{\sin \omega \pi}{1-\omega^2}.
\end{aligned}
$$

我们还可以利用卷积定理来求解某些积分方程.

例 2 求解积分方程

$$g(t) = h(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t-\tau) \mathrm{d}\tau,$$

其中 $h(t)$,$f(t)$ 为已知函数,且 $g(t)$,$h(t)$ 和 $f(t)$ 的 Fourier 变换都存在.

解 设 $\mathscr{F}[g(t)] = G(\omega)$,$\mathscr{F}[h(t)] = H(\omega)$ 和 $\mathscr{F}[f(t)] = F(\omega)$.由卷积定义知,积分方程右端第二项等于 $f(t) * g(t)$.因此上述积分方程两端取 Fourier 变换,由卷积定理可得

$$G(\omega) = H(\omega) + F(\omega) \cdot G(\omega),$$

所以

$$G(\omega) = \frac{H(\omega)}{1 - F(\omega)}.$$

由 Fourier 逆变换,可求得积分方程的解

$$
\begin{aligned}
g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H(\omega)}{1 - F(\omega)} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}\omega.
\end{aligned}
$$

例 3 求微分积分方程

$$y'(t) - \int_{-\infty}^{t} y(t) \mathrm{d}t = -\cos t$$

的解,其中 $-\infty < t < +\infty$.

解 设 $\mathscr{F}[y(t)] = Y(\omega)$,我们采用两种方法.

方法一 对该方程两边同时取 Fourier 变换,利用 Fourier 变换的线性性质、微分性质和积分性质,可得

$$\mathrm{j}\omega Y(\omega)-\frac{1}{\mathrm{j}\omega}Y(\omega)=-\pi[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)].$$

所以

$$Y(\omega)=\frac{\mathrm{j}\omega\pi}{1+\omega^2}[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)].$$

从而

$$\begin{aligned}
y(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Y(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{j}\omega\pi}{1+\omega^2}[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{\mathrm{j}}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega}{1+\omega^2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\delta(\omega+1)\mathrm{d}\omega+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega}{1+\omega^2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\delta(\omega-1)\mathrm{d}\omega\right]\\
\left(\text{利用}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=f(t_0)\right)&=\frac{\mathrm{j}}{2}\left[\frac{\omega}{1+\omega^2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\Big|_{\omega=-1}+\frac{\omega}{1+\omega^2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\Big|_{\omega=1}\right]\\
&=\frac{\mathrm{j}}{2}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}\right)\\
&=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}}{2\mathrm{j}}\\
\left(\text{利用}\sin\omega_0 t=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}}{2\mathrm{j}}\right)&=-\frac{1}{2}\sin t.
\end{aligned}$$

因此,该方程的解为 $y(t)=-\frac{1}{2}\sin t$.

方法二 对该方程的两边对 t 求导,可得

$$y''(t)-y(t)=\sin t.$$

这是一个二阶线性常系数非齐次微分方程.同样,对该方程两边取 Fourier 变换,可得

$$(\mathrm{j}\omega)^2Y(\omega)-Y(\omega)=\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)].$$

所以

$$Y(\omega)=\frac{-\mathrm{j}\pi}{1+\omega^2}[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)].$$

从而

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Y(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{\mathrm{j}\pi}{1+\omega^2}[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \\
&= -\frac{\mathrm{j}}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+\omega^2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\delta(\omega+1)\mathrm{d}\omega - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+\omega^2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\delta(\omega-1)\mathrm{d}\omega\right] \\
&= -\frac{\mathrm{j}}{2}\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}}{2\mathrm{j}} \\
&= -\frac{1}{2}\sin t.
\end{aligned}
$$

因此,该方程的解有同样的结果,即 $y(t)=-\frac{1}{2}\sin t$.

通过上述两种方法,我们可以看出利用 Fourier 变换求线性常系数非齐次微分方程(包括积分方程和微分积分方程)的解,实际上是求该方程的一个特解.

例 4 求线性常系数非齐次微分方程

$$y''(t)-y(t)=-f(t)$$

的解,其中 $f(t)$ 为非零的已知函数.

解 根据例 3 知道,利用 Fourier 变换求方程的解,实际上是求该方程的一个特解.在例 3 的方法二中可以看到非齐次微分方程中的自由项为明确的函数表达式 $\sin t$.而本例中自由项为非零的已知函数,但没有给出明确的函数表达式,尽管我们可以通过参数变异法等方法获得结果,但比较麻烦(有兴趣的读者可扫描"参数变异法"二维码),而利用 Fourier 变换的方法就比较简单、方便了.

设 $\mathscr{F}[y(t)]=Y(\omega)$, $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$.利用 Fourier 变换的线性性质和微分性质,对上述微分方程两端取 Fourier 变换,可得

$$(\mathrm{j}\omega)^2Y(\omega)-Y(\omega)=-F(\omega),$$

所以

$$Y(\omega)=\frac{1}{1+\omega^2}F(\omega).$$

从而

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Y(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+\omega^2}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

如果我们能够确定$\frac{1}{1+\omega^2}$的 Fourier 逆变换,则 $y(t)$ 可以通过卷积的形式给出.由习题一的第 3 题第(1)小题(或附录 Ⅰ 中的公式(21))可知,$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|t|}$ 与$\frac{1}{1+\omega^2}$构成一个 Fourier 变换对,因此,由卷积定理,有

$$y(t)=\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|t|}\right)*f(t)$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-|t-\tau|}\mathrm{d}\tau.$$

例 5 求微分积分方程

$$ax'(t)+bx(t)+c\int_{-\infty}^{t}x(t)\mathrm{d}t=h(t)$$

的解,其中$-\infty<t<+\infty$,a,b,c 均为常数,$h(t)$ 为已知函数.

解 根据 Fourier 变换的线性性质、微分性质和积分性质,且记

$$\mathscr{F}[x(t)]=X(\omega),\ \mathscr{F}[h(t)]=H(\omega).$$

对上述方程两端取 Fourier 变换,可得

$$a\mathrm{j}\omega X(\omega)+bX(\omega)+\frac{c}{\mathrm{j}\omega}X(\omega)=H(\omega),$$

$$X(\omega)=\frac{H(\omega)}{b+\mathrm{j}\left(a\omega-\frac{c}{\omega}\right)}.$$

而上式的 Fourier 逆变换为

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{H(\omega)}{b+\mathrm{j}\left(a\omega-\frac{c}{\omega}\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

通过上面五个例题可以看出,除例 1 是按 Fourier 正弦变换公式直接获得积分方程的解以外,其余四个例题的解法都是按示意图的三个步骤进行的.还可以看出,这类线性方程的未知函数都是单变量函数.例如质点的位移,电路中的电流、电压等物理量一般都是时间 t 的函数.这些物理量的变化规律在数

学上的表示就形成上述各类方程.但在自然界和工程技术领域中还有许多物理量不仅与时间 t 有关,还与空间位置(x,y,z)有关.例如一根细长杆上的温度分布问题和声波在介质中传播的问题等,研究这些物理量的变化规律就会获得含有未知的多变量函数及其偏导数的关系式,即称之为**偏微分方程**或**数学物理方程**.还要说明的是,如果要确定一个物理模型中某一物理量的具体的变化规律,除方程外,还需要附加一些条件,因为方程仅反映该物理模型中物理量的共同规律,而实际中提出的物理模型都有特定的"环境"和"初始状态",这在数学上就称为**边界条件**和**初值条件**,它们统称为**定解条件**.对于一个具体的物理模型来说,方程加上定解条件才是问题的完整提法,且称之为**定解问题**.方程加上初值条件构成的定解问题称为**初值问题**;方程加上边界条件构成的定解问题称为**边值问题**;而既有初值条件又有边界条件的定解问题又称为**混合问题**.关于定解问题的提法及其适定性问题在偏微分方程理论中有详细的论述,有兴趣的读者可参看有关书籍.下一小节,我们将通过例题表明 Fourier 变换还是求解偏微分方程的方法之一,其计算过程与求解上述各类线性方程大体相似.

2*. 偏微分方程的 Fourier 变换解法

本小节针对线性偏微分方程中的未知函数是二元函数的情形加以讨论,同时,对于未知函数是多元函数的某些偏微分方程的定解问题也作了介绍.主要通过一些较典型的例题来说明 Fourier 变换求解某些偏微分方程定解问题的方法.

为了叙述方便起见,对于 $u=u(x,t)$ 及其偏导数$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$作为 x 的一元函数取 Fourier 变换时都满足 Fourier 变换中微分性质的条件;$\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$关于 x 取 Fourier 变换时允许(偏)导数运算与积分运算交换次序,即

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega x}\mathrm{d}x\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega x}\mathrm{d}x\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\mathscr{F}[u(x,t)].\end{aligned}$$

同理,

$$\mathscr{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathscr{F}[u(x,t)].$$

对于多元函数也有类似的相应要求.在解题时,不再重述这些条件,希望读者注意.

例 6 (一维波动方程的初值问题)利用 Fourier 变换求解定解问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\infty<x<+\infty,t>0),\\ u|_{t=0}=\cos x,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sin x.\end{cases}$$

解 由于未知函数 $u(x,t)$ 中的自变量 x 的变化范围是 $(-\infty,+\infty)$,因此,对方程及初值条件关于 x 取 Fourier 变换,记

$$\mathscr{F}[u(x,t)]=U(\omega,t),$$

$$\mathscr{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=(\mathrm{j}\omega)^2U(\omega,t)=-\omega^2U(\omega,t),$$

$$\mathscr{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathscr{F}[u(x,t)]=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}U(\omega,t),$$

$$\mathscr{F}[\cos x]=\pi[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)] \quad (\text{见附录 I 的公式(10)}),$$

$$\mathscr{F}[\sin x]=\pi\mathrm{j}[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)] \quad (\text{见附录 I 的公式(11)}).$$

这样,我们就将求解原定解问题转化为求解含有参数 ω 的常微分方程的初值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2U,\\ U\Big|_{t=0}=\pi[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)],\\ \left.\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\pi\mathrm{j}[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)].\end{cases}$$

这里,方程是 $U(\omega,t)$ 关于 t 的一个二阶常系数齐次微分方程,我们很容易得到该方程的通解为

$$U(\omega,t)=c_1\sin\omega t+c_2\cos\omega t.$$

由初值条件可知

$$c_1=\frac{\pi}{\omega}\mathrm{j}[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)],\ c_2=\pi[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)].$$

因此,常微分方程初值问题的解为

$$U(\omega,t)=\frac{\pi}{\omega}\mathrm{j}[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]\sin\omega t+\pi[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)]\cos\omega t$$

$$=\left(\frac{\pi}{\omega}\mathrm{j}\sin\omega t+\pi\cos\omega t\right)\delta(\omega+1)+\left(\pi\cos\omega t-\frac{\pi}{\omega}\mathrm{j}\sin\omega t\right)\delta(\omega-1).$$

对上述解取 Fourier 逆变换,且利用 δ-函数的筛选性质,可以获得原定解问题的解为

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\mathscr{F}^{-1}[U(\omega,t)]\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{\pi}{\omega}\mathrm{j}\sin\omega t+\pi\cos\omega t\right)\delta(\omega+1)\right.\\&\quad\left.+\left(\pi\cos\omega t-\frac{\pi}{\omega}\mathrm{j}\sin\omega t\right)\delta(\omega-1)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega x}\mathrm{d}\omega\\&=\sin t\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}}{2\mathrm{j}}+\cos t\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}}{2}\\&=\sin t\sin x+\cos t\cos x\\&=\cos(t-x).\end{aligned}$$

从例 6 求解的过程可以看出,用 Fourier 变换求解偏微分方程类似于图 1-16 的三个步骤,即先将定解问题中的未知函数看作某一个自变量的函数,对方程及定解条件关于该自变量取 Fourier 变换,把偏微分方程和定解条件化为象函数的常微分方程的定解问题,再根据这个常微分方程和相应的定解条件,求出象函数,然后再取 Fourier 逆变换,得到原定解问题的解.

例 7 (一维热传导方程的初值问题)利用 Fourier 变换求解定解问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)\quad(-\infty<x<+\infty,t>0),\\ u|_{t=0}=\varphi(x).\end{cases}$$

解 同例 6,对定解问题关于 x 取 Fourier 变换,记

$$\mathscr{F}[u(x,t)]=U(\omega,t),$$

$$\mathscr{F}[f(x,t)]=F(\omega,t),$$

$$\mathscr{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=-\omega^2U(\omega,t),$$

$$\mathscr{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(\omega,t),$$

$$\mathscr{F}[\varphi(x)]=\Phi(\omega).$$

这样,我们就将求解原定解问题转化为求解含有参数 ω 的常微分方程的初值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=-a^2\omega^2U+F(\omega,t),\\ U|_{t=0}=\Phi(\omega).\end{cases}$$

由一阶线性非齐次常微分方程的求解公式可得

$$U(\omega,t)=\Phi(\omega)\mathrm{e}^{-a^2\omega^2t}+\int_0^t F(\omega,\tau)\mathrm{e}^{-a^2\omega^2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau.$$

对上式两端取 Fourier 逆变换,且借助于附录 I 中的公式(6),可知

$$\mathscr{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-a^2\omega^2t}]=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$$

再根据 Fourier 变换的卷积性质,从而可以获得原定解问题的解,即

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\mathscr{F}^{-1}[U(\omega,t)]\\&=\varphi(x)*\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}+\int_0^t f(x,\tau)*\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

此例中的偏微分方程是非齐次的,这里 $f(x,t)$ 是与热源有关的量,而且求解的区域又是无界的,若用其他方法来求解,其运算要比 Fourier 变换方法复杂得多.

如果 $f(x,t)=0$,那么偏微分方程为齐次的.此时可得

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi.$$

例 8 (上半平面无源静电场内电势的边值问题)利用 Fourier 变换求解定解问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0\ (-\infty<x<+\infty,y>0),\\ u\Big|_{y=0}=f(x),\\ \lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}u=0.\end{cases}$$

解 本例中的偏微分方程称为 Laplace 方程.它是用来描述稳恒过程的,所以未知函数 $u=u(x,y)$ 与时间 t 无关.由于 x 的变化范围是 $(-\infty,+\infty)$,因此,我们对方程和边界条件关于 x 取 Fourier 变换,记

$$\mathscr{F}[u(x,y)]=U(\omega,y),$$

$$\mathscr{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=-\omega^2 U(\omega,y),$$

$$\mathscr{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}U(\omega,y),$$

$$\mathscr{F}[f(x)]=F(\omega).$$

这样,我们就将求解原定解问题转化为求解含有参数 ω 的常微分方程的边值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}y^2}-\omega^2 U=0,\\ U\Big|_{y=0}=F(\omega),\\ \lim\limits_{\omega^2+y^2\to+\infty} U=\lim\limits_{y\to+\infty} U=0.\end{cases}$$

解此二阶常系数线性齐次微分方程可得其通解为

$$U(\omega,y)=c_1\mathrm{e}^{|\omega|y}+c_2\mathrm{e}^{-|\omega|y},$$

代入边界条件,有 $c_1+c_2=F(\omega)$,由 $\lim\limits_{y\to+\infty} U=0$,必有 $c_1=0$,从而 $c_2=F(\omega)$.因此,边值问题的解为

$$U(\omega,y)=F(\omega)\mathrm{e}^{-|\omega|y}.$$

对上式两端取 Fourier 逆变换,且借助于附录 I 中的公式(31),可知

$$\mathscr{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-|\omega|y}]=\frac{y}{\pi}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}.$$

再利用 Fourier 变换的卷积性质,从而获得原定解问题的解,即

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\mathscr{F}^{-1}[U(\omega,y)]\\&=f(x)*\frac{y}{\pi(x^2+y^2)}\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{yf(\tau)}{(x-\tau)^2+y^2}\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

下面我们将举例说明利用 Fourier 正弦变换和余弦变换,也能求解某些偏微分方程的定解问题.

例 9 (半有界杆热传导方程的混合问题)求解定解问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0<x<+\infty\ ,t>0),\\ u\Big|_{x=0}=\varphi(t),\\ u\Big|_{t=0}=0.\end{cases}$$

解 根据热传导问题的物理意义,我们可以假定:当 $x\to+\infty$ 时,有 $u(x,t)\to 0$, $\dfrac{\partial}{\partial x}u(x,t)\to 0$.由于已知边界条件 $u\Big|_{x=0}=\varphi(t)$,且 x 的变化范围是 $(0,+\infty)$,因此对方程和初值条件关于 x 取 Fourier 正弦变换,其中 $\mathscr{F}_s\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]$ 的结果可由分部积分法得到.记

$$\mathscr{F}_s[u(x,t)]=\int_0^{+\infty}u(x,t)\sin\omega x\,\mathrm{d}x=U_s(\omega,t),$$

$$\mathscr{F}_s\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin\omega x\,\mathrm{d}x=\omega u\Big|_{x=0}-\omega^2 U_s,$$

$$\mathscr{F}_s[u|_{t=0}]=U_s|_{t=0},$$

$$\mathscr{F}_s\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_s.$$

这样,我们就将求解原定解问题转化为求解含有参数 ω 的常微分方程的初值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}U_s}{\mathrm{d}t}=a^2[\omega\varphi(t)-\omega^2 U_s],\\ U_s\Big|_{t=0}=0,\end{cases}$$

其解为

$$U_s(\omega,t)=\mathrm{e}^{-\omega^2a^2t}\int_0^t a^2\omega\varphi(\xi)\mathrm{e}^{\omega^2a^2\xi}\mathrm{d}\xi.$$

对上式两端取 Fourier 正弦逆变换,并利用已知的积分公式

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-a^2x^2}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a^2}},$$

因此,原定解问题的解为

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\mathscr{F}_s^{-1}[U_s(\omega,t)]\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}U_s(\omega,t)\sin\omega x\mathrm{d}\omega\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2a^2}{\pi}\int_0^t \left[\int_0^{+\infty} \omega e^{-a^2\omega^2(t-\xi)} \sin \omega x \mathrm{d}\omega\right] \varphi(\xi)\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{2a^2}{\pi}\int_0^t \varphi(\xi)\left[\frac{1}{-2a^2(t-\xi)} e^{-a^2\omega^2(t-\xi)} \sin \omega x \Big|_0^{+\infty}\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2a^2(t-\xi)}\int_0^{+\infty} e^{-a^2(t-\xi)\omega^2} x\cos \omega x \mathrm{d}\omega\right] \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{x}{\pi}\int_0^t \frac{\varphi(\xi)}{t-\xi}\left[\int_0^{+\infty} e^{-a^2(t-\xi)\omega^2} \cos \omega x \mathrm{d}\omega\right] \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\varphi(\xi)}{(t-\xi)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\xi)}} \mathrm{d}\xi.
\end{aligned}
$$

下面一个例子和例 9 相比较,仅仅是边界条件不同,我们需要用 Fourier 余弦变换来求解此定解问题.

例 10 (半有界杆热传导方程的混合问题)求解定解问题:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} (0<x<+\infty, t>0), \\
\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \varphi(t), \\
u\Big|_{t=0} = 0.
\end{cases}
$$

解 类似于例 9 的解法,但由于已知的边界条件是$\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \varphi(t)$,因此对方程和初值条件关于 x 取 Fourier 余弦变换.同样地,记

$$
\mathscr{F}_c[u(x,t)] = \int_0^{+\infty} u(x,t)\cos \omega x \mathrm{d}x = U_c(\omega, t),
$$

$$
\mathscr{F}_c\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos \omega x \mathrm{d}x = -\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} - \omega^2 U_c(\omega, t),
$$

$$
\mathscr{F}_c[u|_{t=0}] = U_c\Big|_{t=0},
$$

$$
\mathscr{F}_c\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_c.
$$

这样,我们就将求解原定解问题转化为求解含有参数 ω 的常微分方程的初值问题:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}U_c}{\mathrm{d}t} = a^2[-\varphi(t) - \omega^2 U_c], \\
U_c|_{t=0} = 0,
\end{cases}
$$

其解为

$$U_c(\omega,t)=-\mathrm{e}^{-\omega^2a^2t}\int_0^t a^2\varphi(\xi)\mathrm{e}^{\omega^2a^2\xi}\mathrm{d}\xi.$$

对上式两端取 Fourier 余弦逆变换可得原定解问题的解为

$$\begin{aligned}
u(x,t)&=\mathscr{F}_c^{-1}[U_c(\omega,t)]\\
&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}U_c(\omega,t)\cos\omega x\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{-2a^2}{\pi}\int_0^t\left[\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-a^2\omega^2(t-\xi)}\cos\omega x\mathrm{d}\omega\right]\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\\
&=\frac{-2a^2}{\pi}\int_0^t\varphi(\xi)\cdot\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{t-\xi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\xi)}}\mathrm{d}\xi\\
&=-\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{t-\xi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\xi)}}\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

如果在例 10 中也使用 Fourier 正弦变换，就会发现

$$\mathscr{F}_s\left[\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right]=\omega u\big|_{x=0}-\omega^2U_s$$

中的边界条件 $u\big|_{x=0}=\varphi(t)$，在例 10 中未给定；反之，如果在例 9 中使用 Fourier 余弦变换，同样发现

$$\mathscr{F}_c\left[\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right]=-\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}-\omega^2U_c$$

中的边界条件 $\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}=\varphi(t)$，在例 9 中也未给定. 由此可见，对此类定解问题，当边界条件为 $u\bigg|_{x=0}=\varphi(t)$ 时，应当对自变量 x 采用 Fourier 正弦变换；而边界条件为 $\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}=\varphi(t)$ 时，应当对自变量 x 采用 Fourier 余弦变换.

本小节上面的例题主要是针对偏微分方程中的未知函数是二元函数的情形，从而可以用 Fourier 变换去求解一维波动方程、一维热传导方程及上半平面静电场的电势等定解问题. 下面我们将用 Fourier 变换来求解偏微分方程中未知函数为多元函数的情形.

例 11 （二维热传导方程的初值问题）利用二重 Fourier 变换求解定解问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad (-\infty < x,y < +\infty, t > 0),\\ u\Big|_{t=0}=\varphi(x,y).\end{cases}$$

解 由于未知函数 $u(x,y,t)$ 中的坐标变量 x,y 的变化范围是 $(-\infty,+\infty)$. 因此,对方程及初值条件关于坐标变量 x,y 取二重 Fourier 变换.记

$$\mathscr{F}[u(x,y,t)]=U(\omega_1,\omega_2,t),$$

$$\mathscr{F}[u(x,y,0)]=U(\omega_1,\omega_2,0),$$

$$\mathscr{F}[\varphi(x,y)]=\Phi(\omega_1,\omega_2).$$

利用多重 Fourier 变换的性质,有

$$\mathscr{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=(\mathrm{j}\omega_1)^2U(\omega_1,\omega_2,t)=-\omega_1^2U(\omega_1,\omega_2,t),$$

$$\mathscr{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]=(\mathrm{j}\omega_2)^2U(\omega_1,\omega_2,t)=-\omega_2^2U(\omega_1,\omega_2,t),$$

$$\mathscr{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{F}[u(x,y,t)]=\frac{\partial}{\partial t}U(\omega_1,\omega_2,t).$$

这样,我们就将求解原定解问题转化为求解含有参数 ω_1,ω_2 的常微分方程的初值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=-a^2(\omega_1^2+\omega_2^2)U,\\ U\Big|_{t=0}=\Phi(\omega_1,\omega_2).\end{cases}$$

这是一个一阶常系数线性齐次常微分方程.它的通解为

$$U(\omega_1,\omega_2,t)=c\mathrm{e}^{-a^2(\omega_1^2+\omega_2^2)t}.$$

由初值条件可得 $c=\Phi(\omega_1,\omega_2)$,所以

$$U(\omega_1,\omega_2,t)=\Phi(\omega_1,\omega_2)\mathrm{e}^{-a^2(\omega_1^2+\omega_2^2)t}.$$

对上式两端取二重 Fourier 逆变换,且借助于习题五的第 3 题的结论(或直接利用二重 Fourier 逆变换公式计算),可知

$$\mathscr{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-a^2(\omega_1^2+\omega_2^2)t}]=\frac{1}{4a^2\pi t}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{4a^2t}}.$$

再利用多重 Fourier 变换的卷积性质,从而获得原定解问题的解,即

$$
\begin{aligned}
u(x,y,t) &= \mathscr{F}^{-1}[U(\omega_1,\omega_2,t)] \\
&= \varphi(x,y) * \frac{1}{4a^2\pi t} e^{-\frac{x^2+y^2}{4a^2 t}} \\
&= \frac{1}{4a^2\pi t}\varphi(x,y) * e^{-\frac{x^2+y^2}{4a^2 t}} \\
&= \frac{1}{4a^2\pi t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau_1,\tau_2) e^{-\frac{(x-\tau_1)^2+(y-\tau_2)^2}{4a^2 t}} d\tau_1 d\tau_2,
\end{aligned}
$$

其中 τ_1,τ_2 为变参矢量的两个分量，即 $\boldsymbol{\tau}=\{\tau_1,\tau_2\}$. 因此，原定解问题的解也可以用矢量形式表示，即

$$
\begin{aligned}
u(\boldsymbol{x},t) &= \frac{1}{4a^2\pi t}\varphi(\boldsymbol{x}) * e^{-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4a^2 t}} \\
&= \frac{1}{4a^2\pi t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\boldsymbol{\tau}) e^{-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\tau}|^2}{4a^2 t}} d\boldsymbol{\tau}.
\end{aligned}
$$

如果 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 为有界连续函数，则不难推出 n 维热传导方程初值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \nabla^2 u \quad (-\infty < x_i < +\infty, i=1,2,\cdots,n, t>0), \\
u(\boldsymbol{x},t)\Big|_{t=0} = \varphi(\boldsymbol{x})
\end{cases}
$$

的解为

$$
u(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\iint\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\boldsymbol{\tau}) e^{-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\tau}|^2}{4a^2 t}} d\boldsymbol{\tau},
$$

其中

$$
\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\},
$$

$$
\boldsymbol{\tau} = \{\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n\}, d\boldsymbol{\tau} = d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_n.
$$

例 12 （三维热传导方程的初值问题）求解定解问题：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad (-\infty < x,y,z < +\infty, t>0), \\
u\Big|_{t=0} = e^{-(x^2+y^2+z^2)}.
\end{cases}
$$

解 记 $\varphi(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$，按照上面给出的 n 维热传导方程初值问题的求解公式（或仿照例 11 直接计算求解）可得

$$
u(x,y,z,t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau_1,\tau_2,\tau_3) \cdot e^{-\frac{(x-\tau_1)^2+(y-\tau_2)^2+(z-\tau_3)^2}{4a^2 t}} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3
$$

$$=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2)}\cdot e^{-\frac{(x-\tau_1)^2+(y-\tau_2)^2+(z-\tau_3)^2}{2}}d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3$$

$$=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau_1^2}e^{-\frac{(x-\tau_1)^2}{4a^2t}}d\tau_1\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau_2^2}e^{-\frac{(y-\tau_2)^2}{4a^2t}}d\tau_2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau_3^2}e^{-\frac{(z-\tau_3)^2}{4a^2t}}d\tau_3,$$

其中

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau_1^2}e^{-\frac{(x-\tau_1)^2}{4a^2t}}d\tau_1=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\tau_1^2+\frac{x^2-2x\tau_1+\tau_1^2}{4a^2t}\right)}d\tau_1$$

$$=e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{4a^2t+1}{4a^2t}\right)\tau_1^2+\frac{x\tau_1}{2a^2t}}d\tau_1$$

$$=e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\cdot e^{\frac{x^2}{4a^2t(4a^2t+1)}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{4a^2t+1}{4a^2t}\left(\tau_1-\frac{x}{4a^2t+1}\right)^2}d\tau_1$$

$$=e^{-\frac{x^2}{4a^2t+1}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{4a^2t+1}{4a^2t}\left(\tau_1-\frac{x}{4a^2t+1}\right)^2}d\tau_1,$$

令 $Q=\sqrt{\frac{4a^2t+1}{4a^2t}}\left(\tau_1-\frac{x}{4a^2t+1}\right)$,则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau_1^2}e^{-\frac{(x-\tau_1)^2}{4a^2t}}d\tau_1=\sqrt{\frac{4a^2t}{4a^2t+1}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t+1}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Q^2}dQ$$

$$=\frac{2a\sqrt{\pi t}}{\sqrt{4a^2t+1}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t+1}}.$$

同理可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau_2^2}e^{-\frac{(y-\tau_2)^2}{4a^2t}}d\tau_2=\frac{2a\sqrt{\pi t}}{\sqrt{4a^2t+1}}e^{-\frac{y^2}{4a^2t+1}},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau_3^2}e^{-\frac{(z-\tau_3)^2}{4a^2t}}d\tau_3=\frac{2a\sqrt{\pi t}}{\sqrt{4a^2t+1}}e^{-\frac{z^2}{4a^2t+1}}.$$

因此,原定解问题的解为

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\cdot\frac{2a\sqrt{\pi t}}{\sqrt{4a^2t+1}}\cdot\frac{2a\sqrt{\pi t}}{\sqrt{4a^2t+1}}\cdot\frac{2a\sqrt{\pi t}}{\sqrt{4a^2t+1}}e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4a^2t+1}}$$

$$=\frac{1}{(\sqrt{4a^2t+1})^3}e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4a^2t+1}},$$

或者写为

$$u(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{(\sqrt{4a^2t+1})^3}\mathrm{e}^{-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4a^2t+1}},$$

其中 $\boldsymbol{x}=\{x,y,z\}$，$|\boldsymbol{x}|^2=x^2+y^2+z^2$.

在本节例 6 后，我们已经说明了用 Fourier 变换求解偏微分方程定解问题的步骤.从解题步骤可以看出，它的优点是方法比较简单、直接，而且不论方程和边界条件是否为齐次的都可以使用，但它的最大难点是最后一个步骤，即如何求 Fourier 逆变换.例如我们能用 Fourier 变换很方便地求出一维波动方程初值问题的解，而用（多重）Fourier 变换求解高维（例如二维或三维）波动方程初值问题的解，在最后一步求逆变换时，就会遇到一定的麻烦，需要借助于其他的方法来解决，这里不作深入讨论；当然，利用偏微分方程中的行波法能够解决高维波动方程初值问题的解.有兴趣的读者可参考有关书籍.

习题六

1. 求微分方程 $x'(t)+x(t)=\delta(t)$ $(-\infty<t<+\infty)$ 的解.

2. 设 $f(t)=\mathrm{e}^{-t^2}$，利用象函数的导数公式，求 $f(t)$ 的 Fourier 变换.

3. 利用 Fourier 变换，解下列积分方程：

(1) $\int_0^{+\infty} g(\omega)\cos\omega t\mathrm{d}\omega=\frac{\sin t}{t}$;

(2) $\int_0^{+\infty} g(\omega)\sin\omega t\mathrm{d}\omega=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<1,\\ 2, & 1\leqslant t<2,\\ 0, & t\geqslant 2;\end{cases}$

(3) $\int_0^{+\infty} g(\omega)\cos\omega t\mathrm{d}\omega=\begin{cases}1-t, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ 0, & t>1;\end{cases}$

(4) $\int_0^{+\infty} g(\omega)\sin\omega t\mathrm{d}\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cos t, & 0\leqslant t<\pi,\\ -\frac{\pi}{4}, & t=\pi,\\ 0, & t>\pi.\end{cases}$

4. 求解下列积分方程：

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y(\tau)}{(t-\tau)^2+a^2}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{t^2+b^2}$ $(0<a<b)$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|t-\tau|}y(\tau)\mathrm{d}\tau=\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

5. 求下列微分积分方程的解 $x(t)$：

(1) $x'(t) - 4\int_{-\infty}^{t} x(t)\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-|t|}$, $-\infty < t < +\infty$；

(2) $ax'(t) + b\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau = ch(t)$，其中 $f(t)$，$h(t)$ 为已知函数，a,b,c 均为已知常数.

6. 求解下列偏微分方程的定解问题：

(1) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t\sin x \quad (-\infty < x < +\infty, t > 0), \\ u\Big|_{t=0} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \sin x; \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Au \quad (-\infty < x < +\infty, t \geq 0), \\ u\Big|_{t=0} = \delta(\xi - x), \end{cases}$$

其中 a,A 均为常数；

(3) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (-\infty < x < +\infty, y > 0), \\ u\Big|_{y=0} = f(x), \\ \lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} u = 0, \end{cases}$$

(i) $f(x) = \begin{cases} -1, & x<0, \\ 1, & x>0, \end{cases}$ (ii) $f(x) = \begin{cases} 0, & x<-1, \\ 1, & -1<x<1, \\ 0, & x>1; \end{cases}$

(4) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < +\infty, t > 0), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \\ u\Big|_{t=0} = \begin{cases} A, & 0 < x < 1, \\ 0, & 1 < x < +\infty, \end{cases} \end{cases}$$

其中 a,A 均为常数；

(5) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < +\infty, t > 0), \\ u\Big|_{x=0} = 0, \\ u\Big|_{t=0} = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases} \end{cases}$$

(6) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos t \quad (-\infty < x < +\infty, t > 0), \\ u\Big|_{t=0} = \sin x; \end{cases}$$

(7) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad (-\infty < x, y, z < +\infty, t > 0), \\ u\Big|_{t=0} = \mathrm{e}^{-x^2}\cos(2y - z); \end{cases}$$

(8) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x, y, t) \quad (-\infty < x, y < +\infty, t > 0), \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(x, y). \end{cases}$$

第二章　Laplace 变换

§2.1　Laplace 变换的概念

1. 问题的提出

在第一章我们讲过，一个函数当它除了满足 Dirichlet 条件以外，还在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足绝对可积的条件时，就一定存在古典意义下的 Fourier 变换.但绝对可积的条件是比较强的，许多函数即使是很简单的函数（如单位阶跃函数、正弦函数、余弦函数以及线性函数等）都不满足这个条件；其次，可以进行 Fourier 变换的函数必须在整个数轴上有定义，但在物理、无线电技术等实际应用中，许多以时间 t 作为自变量的函数往往在 $t<0$ 时是无意义的或者是不需要考虑的，像这样的函数都不能取 Fourier 变换.这就使得 Fourier 变换的应用范围受到相当大的限制.

对于任意一个函数 $\varphi(t)$，能否经过适当地改造使其进行 Fourier 变换时克服上述两个缺点呢？这就使我们想到前面讲过的单位阶跃函数 $u(t)$ 和指数衰减函数 $e^{-\beta t}(\beta>0)$ 所具有的特点.用前者乘 $\varphi(t)$ 可以使积分区间由 $(-\infty,+\infty)$ 换成 $[0,+\infty)$，用后者乘 $\varphi(t)$ 就有可能使其变成绝对可积，因此，为了克服 Fourier 变换上述的两个缺点，我们自然会想到用 $u(t)e^{-\beta t}(\beta>0)$ 来乘 $\varphi(t)$，即

$$\varphi(t)u(t)e^{-\beta t}\quad(\beta>0).$$

结果发现，只要 β 选得适当，一般说来，这个函数的 Fourier 变换总是存在的.对函数 $\varphi(t)$ 进行先乘 $u(t)e^{-\beta t}(\beta>0)$，再取 Fourier 变换的运算，这样就产生了 Laplace 变换.

对函数 $\varphi(t)u(t)e^{-\beta t}(\beta>0)$ 取 Fourier 变换，可得

$$\begin{aligned}G_\beta(\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)u(t)e^{-\beta t}e^{-j\omega t}dt\\&=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-(\beta+j\omega)t}dt=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt,\end{aligned}$$

其中

$$s=\beta+j\omega,\quad f(t)=\varphi(t)u(t).$$

若再设

$$F(s)=G_{\beta}\left(\frac{s-\beta}{\mathrm{j}}\right),$$

则得

$$F(s)=\int_{0}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t.$$

由此式所确定的函数 $F(s)$，实际上是由 $f(t)$ 通过一种新的变换得来的，这种变换我们称为 Laplace 变换.

定义 设函数 $f(t)$ 当 $t\geqslant 0$ 时有定义，而且积分

$$\int_{0}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \quad (s\text{ 是一个复参量})$$

在复平面 s 的某一区域内收敛，由此积分所确定的函数记为

$$F(s)=\int_{0}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t, \tag{2.1}$$

则称(2.1)式为函数 $f(t)$ 的 **Laplace 变换式**.记为

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)],$$

$F(s)$ 称为 $f(t)$ 的 **Laplace 变换**(或称为**象函数**).

若 $F(s)$ 是 $f(t)$ 的 Laplace 变换，则称 $f(t)$ 为 $F(s)$ 的 **Laplace 逆变换**(或称为**象原函数**)，记为

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)].$$

由(2.1)式可以看出，$f(t)$ $(t\geqslant 0)$ 的 Laplace 变换，实际上就是 $f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}$ 的 Fourier 变换.

例 1 求单位阶跃函数 $u(t)=\begin{cases}0, t<0,\\ 1, t>0\end{cases}$ 的 Laplace 变换.

解 根据 Laplace 变换的定义，有

$$\mathscr{L}[u(t)]=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t,$$

这个积分在 $\mathrm{Re}(s)>0$ 时收敛，而且有

$$\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{s},$$

所以

$$\mathscr{L}[u(t)]=\frac{1}{s} \quad (\mathrm{Re}(s)>0).$$

例 2 求函数 $f(t)=\mathrm{e}^{kt}$ 的 Laplace 变换(k 为实数).

解 根据(2.1)式，有

$$\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{kt} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-k)t} dt,$$

这个积分在 $\mathrm{Re}(s)>k$ 时收敛,而且有

$$\int_0^{+\infty} e^{-(s-k)t} dt = \frac{1}{s-k},$$

所以

$$\mathscr{L}[e^{kt}] = \frac{1}{s-k} \quad (\mathrm{Re}(s)>k).$$

2. Laplace 变换的存在定理

从上面的例题可以看出,Laplace 变换存在的条件要比 Fourier 变换存在的条件弱得多,但是对一个函数作 Laplace 变换也还是要具备一些条件的.那么,一个函数究竟满足什么条件时,它的 Laplace 变换一定存在呢? 下面的定理将解决这个问题.

Laplace 变换的存在定理 若函数 $f(t)$ 满足下列条件:

1°在 $t\geqslant 0$ 的任一有限区间上连续或分段连续;

2°当 $t\to+\infty$ 时,$f(t)$ 的增长速度不超过某一指数函数,亦即存在常数 $M>0$ 及 $c\geqslant 0$,使得

$$|f(t)| \leqslant Me^{ct}, \quad 0\leqslant t<+\infty$$

成立(满足此条件的函数,称它的增大是不超过指数级的,c 为它的增长指数).则 $f(t)$ 的 Laplace 变换

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

在半平面 $\mathrm{Re}(s)>c$ 上一定存在,右端的积分在 $\mathrm{Re}(s)\geqslant c_1>c$ 上绝对收敛而且一致收敛,并且在 $\mathrm{Re}(s)>c$ 的半平面内,$F(s)$ 为解析函数.

证* 由条件 2°可知,对于任何 t 值($0\leqslant t<+\infty$),有

$$|f(t)e^{-st}| = |f(t)|e^{-\beta t} \leqslant Me^{-(\beta-c)t}, \quad \mathrm{Re}(s)=\beta,$$

若令 $\beta-c\geqslant\varepsilon>0$ (即 $\beta\geqslant c+\varepsilon=c_1>c$),则

$$|f(t)e^{-st}| \leqslant Me^{-\varepsilon t}.$$

所以

$$\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-st}| dt \leqslant \int_0^{+\infty} Me^{-\varepsilon t} dt = \frac{M}{\varepsilon}.$$

根据含参量反常积分的性质可知,在 $\mathrm{Re}(s)\geqslant c_1>c$ 上(2.1)式右端的积

分不仅绝对收敛而且一致收敛①.不仅如此,若在(2.1)式的积分号内对 s 求导,则

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[f(t)\mathrm{e}^{-st}]\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} -tf(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t,$$

而

$$|-tf(t)\mathrm{e}^{-st}| \leqslant Mt\mathrm{e}^{-(\beta-c)t} \leqslant Mt\mathrm{e}^{-\varepsilon t},$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[f(t)\mathrm{e}^{-st}]\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} Mt\mathrm{e}^{-\varepsilon t}\mathrm{d}t = \frac{M}{\varepsilon^2}.$$

由此可见,$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[f(t)\mathrm{e}^{-st}]\mathrm{d}t$ 在半平面 $\mathrm{Re}(s) \geqslant c_1 > c$ 内也绝对收敛并且一致收敛,从而求导和积分的次序可以交换,即

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(s) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[f(t)\mathrm{e}^{-st}]\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} -tf(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \mathscr{L}[-tf(t)].\end{aligned}$$

这就表明,$F(s)$ 在 $\mathrm{Re}(s) > c$ 内是可微的.根据复变函数的解析函数理论可知,$F(s)$ 在 $\mathrm{Re}(s) > c$ 内是解析的.

可以看出 Laplace 变换存在的条件要比 Fourier 变换存在的条件弱得多,大多数常见的 $u(t)$,$\cos kt$,t^m 等函数都不满足 Fourier 积分定理中绝对可积的条件,但它们都能满足 Laplace 变换存在定理中的条件 2°:

$$|u(t)| \leqslant 1 \cdot \mathrm{e}^{0t}, \text{此处 } M=1, c=0,$$

$$|\cos kt| \leqslant 1 \cdot \mathrm{e}^{0t}, \text{此处 } M=1, c=0,$$

由于 $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^m}{\mathrm{e}^t} = 0$,所以 t 充分大以后,有 $t^m \leqslant \mathrm{e}^t$,即

$$|t^m| \leqslant 1 \cdot \mathrm{e}^t,$$

这里,$M=1$,$c=1$.由此可见,对于某些问题(如在线性系统分析中),Laplace 变换的应用就更为广泛.

Laplace 变换存在定理的条件是充分的,而不是必要的.即若不满足定理条

---

① 这里利用了含参量反常积分一致收敛的一个充分条件,现叙述如下:如存在函数 $\varphi(t)$,使得 $|g(t,s)| < \varphi(t)$,而且积分 $\int_a^b \varphi(t)\mathrm{d}t$ 收敛(a,b 可为无限),则 $\int_a^b g(t,s)\mathrm{d}t$ 在某一闭区域内一定是绝对收敛的,并且是一致收敛的.

件的函数,它的 Laplace 变换仍有可能存在.例如$f(t)=t^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{t}}$在 $t=0$ 处不满足存在定理的条件 1°,但它的 Laplace 变换是存在的(见下面的例 4).

除了上面介绍的单位阶跃函数和指数函数的 Laplace 变换外,下面再求一些常用函数的 Laplace 变换.

例 3 求正弦函数 $f(t)=\sin kt$ (k 为实数)的 Laplace 变换.

解 根据(2.1)式,有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[\sin kt] &= \int_0^{+\infty} \sin kt e^{-st} dt \\ &= \frac{e^{-st}}{s^2+k^2}(-s\sin kt - k\cos kt)\Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{k}{s^2+k^2} \quad (\mathrm{Re}(s)>0).\end{aligned}$$

同理可得余弦函数 $f(t)=\cos kt$ (k 为实数)的 Laplace 变换

$$\mathscr{L}[\cos kt]=\frac{s}{s^2+k^2} \quad (\mathrm{Re}(s)>0).$$

例 4* 求幂函数 $f(t)=t^m$(常数 $m>-1$)的 Laplace 变换.

解 根据(2.1)式,有

$$\mathscr{L}[t^m] = \int_0^{+\infty} t^m e^{-st} dt,$$

为了求此积分,可令 $st=u$,由于 s 为右半平面内任一复数,则得到复数的积分变量 u.因此,可先考虑积分

$$\int_0^R t^m e^{-st} dt = \int_0^{sR}\left(\frac{u}{s}\right)^m e^{-u}\left(\frac{du}{s}\right) = \frac{1}{s^{m+1}}\int_0^{sR} u^m e^{-u} du,$$

这里的积分路线是图 2-1 中的 OB 直线段.如设

$$s=re^{j\theta}, \quad -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2},$$

则 B 就对应着 $sR=rR\cos\theta+jrR\sin\theta$ 这样的点,A 对应着$rR\cos\theta$这样的点.由于上述积分的被积函数在原点不是解析的,为此,取长度 ε,使 C 对应着 $s\varepsilon=r\varepsilon\cos\theta+jr\varepsilon\sin\theta$ 这样的点,而 D 对应着 $r\varepsilon\cos\theta$ 这样的点.根据 Cauchy 积分定理,有

$$\frac{1}{s^{m+1}}\oint_{DABCD} u^m e^{-u} du = \frac{1}{s^{m+1}}\left(\int_{\overline{DA}} + \int_{\overline{AB}} + \int_{\overline{BC}} + \int_{\overline{CD}}\right) = 0.$$

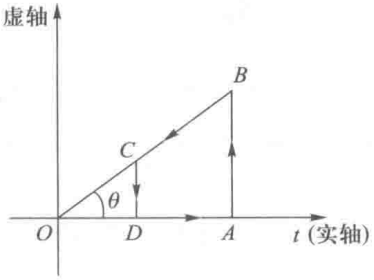


图 2-1

在上式中两边取 $R\to+\infty$,$\varepsilon\to0$ 时,有

$$\frac{1}{s^{m+1}}\int_{\overline{DA}}u^m\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\frac{1}{s^{m+1}}\int_{r\varepsilon\cos\theta}^{rR\cos\theta}u^m\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$$

$$\to\frac{1}{s^{m+1}}\int_0^{+\infty}t^m\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t,$$

$$\frac{1}{s^{m+1}}\int_{\overline{BC}}u^m\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=-\frac{1}{s^{m+1}}\int_{\overline{CB}}u^m\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=-\frac{1}{s^{m+1}}\int_{s\varepsilon}^{sR}u^m\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{1}{s^{m+1}}\int_{r\varepsilon\cos\theta+\mathrm{j}r\varepsilon\sin\theta}^{rR\cos\theta+\mathrm{j}rR\sin\theta}u^m\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$$

$$\to-\frac{1}{s^{m+1}}\int_0^{\infty}u^m\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u,$$

$$\frac{1}{s^{m+1}}\int_{\overline{AB}}u^m\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\frac{1}{s^{m+1}}\int_{rR\cos\theta}^{rR\cos\theta+\mathrm{j}rR\sin\theta}u^m\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u.$$

如令 $u=rR\cos\theta+\mathrm{j}v$,$\mathrm{d}u=\mathrm{j}\mathrm{d}v$,则

$$\left|\frac{1}{s^{m+1}}\int_{rR\cos\theta}^{rR\cos\theta+\mathrm{j}rR\sin\theta}u^m\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u\right|$$

$$=\left|\frac{\mathrm{j}}{s^{m+1}}\int_0^{rR\sin\theta}\mathrm{e}^{-(rR\cos\theta+\mathrm{j}v)}(rR\cos\theta+\mathrm{j}v)^m\mathrm{d}v\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{|s|^{m+1}}\int_0^{rR|\sin\theta|}\left|\mathrm{e}^{-rR\cos\theta}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}v}(rR\cos\theta+\mathrm{j}v)^m\right|\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{|s|^{m+1}}\int_0^{rR|\sin\theta|}\mathrm{e}^{-rR\cos\theta}(r^2R^2\cos^2\theta+v^2)^{\frac{m}{2}}\mathrm{d}v.$$

令 $v=rR\cos\theta\tan\alpha$,$\mathrm{d}v=rR\cos\theta\sec^2\alpha\mathrm{d}\alpha$,又因为 $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$,有 $\cos\theta>0$,所以

$$\left|\frac{1}{s^{m+1}}\int_{rR\cos\theta}^{rR\cos\theta+\mathrm{j}rR\sin\theta}u^m\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{|s|^{m+1}}\int_0^{|\theta|} \mathrm{e}^{-rR\cos\theta}(rR\cos\theta)^{m+1}\sec^{m+2}\alpha\,\mathrm{d}\alpha$$

$$= \frac{1}{|s|^{m+1}}(rR\cos\theta)^{m+1}\mathrm{e}^{-rR\cos\theta}\int_0^{|\theta|}\sec^{m+2}\alpha\,\mathrm{d}\alpha \to 0,$$

从而

$$\frac{1}{s^{m+1}}\int_{rR\cos\theta}^{rR\cos\theta+\mathrm{j}rR\sin\theta} u^m\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u \to 0.$$

依同理

$$\left|\frac{1}{s^{m+1}}\int_{\overline{CD}} u^m\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u\right|$$

$$= \left|\frac{-1}{s^{m+1}}\int_{\overline{DC}} u^m\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u\right|$$

$$= \left|\frac{1}{s^{m+1}}\int_{r\varepsilon\cos\theta}^{r\varepsilon\cos\theta+\mathrm{j}r\varepsilon\sin\theta} u^m\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{|s|^{m+1}}(r\varepsilon\cos\theta)^{m+1}\mathrm{e}^{-r\varepsilon\cos\theta}\int_0^{|\theta|}\sec^{m+2}\alpha\,\mathrm{d}\alpha \to 0 \quad (m>-1),$$

从而

$$\frac{1}{s^{m+1}}\int_{\overline{CD}} u^m\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u \to 0 \quad (m>-1),$$

故

$$\frac{1}{s^{m+1}}\int_0^{+\infty} t^m\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t + 0 - \frac{1}{s^{m+1}}\int_0^{\infty} u^m\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u + 0 = 0,$$

即

$$\frac{1}{s^{m+1}}\int_0^{\infty} u^m\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u = \frac{1}{s^{m+1}}\int_0^{+\infty} t^m\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}\text{①}.$$

因此

$$\mathscr{L}[t^m] = \int_0^{+\infty} t^m\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}} \quad (\mathrm{Re}(s)>0).$$

---

① 我们定义积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{m-1}\mathrm{d}t$ 为 Gamma 函数(或 Γ 函数),记为 $\Gamma(m)$,即

$$\Gamma(m) = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{m-1}\mathrm{d}t,$$

其中 $m>0$.容易证明 Γ 函数具有如下的递推公式

$$m\Gamma(m) = \Gamma(m+1).$$

由此可知,当 m 为正整数时,$\Gamma(m+1) = m!$.

当 m 为正整数[1]时，$\mathscr{L}[t^m]=\dfrac{m!}{s^{m+1}}\quad(\mathrm{Re}(s)>0)$.

当 $m=-\dfrac{1}{2}$ 时，则令 $\sqrt{t}=u$，有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[t^{-\frac{1}{2}}]&=\int_0^{+\infty}t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}\frac{1}{u}\mathrm{e}^{-su^2}2u\mathrm{d}u\\&=2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\sqrt{s}u)^2}\frac{1}{\sqrt{s}}\mathrm{d}(\sqrt{s}u)\\&=\sqrt{\frac{\pi}{s}}.\end{aligned}$$

这就表明不满足 Laplace 变换存在定理条件的函数 $t^{-\frac{1}{2}}$，仍然存在 Laplace 变换.

例 5 求周期性三角波

$$f(t)=\begin{cases}t, & 0\leqslant t<b,\\ 2b-t, & b\leqslant t<2b\end{cases}$$

且 $f(t+2b)=f(t)$（见图 2-2）的 Laplace 变换.

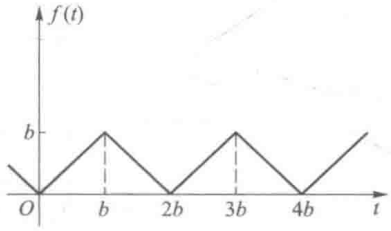


图 2-2

解 根据(2.1)式，有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f(t)]&=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2b}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t+\int_{2b}^{4b}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t+\int_{4b}^{6b}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\&\quad+\cdots+\int_{2kb}^{2(k+1)b}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t+\cdots\end{aligned}$$

---

① 当 m 为正整数时，利用 Laplace 变换中的微分性质将很方便地获得这一结果.

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{2kb}^{2(k+1)b} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t.$$

令 $t=\tau+2kb$，则

$$\int_{2kb}^{2(k+1)b} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^{2b} f(\tau + 2kb)\mathrm{e}^{-s(\tau+2kb)}\mathrm{d}\tau$$

$$= \mathrm{e}^{-2kbs}\int_0^{2b} f(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}\mathrm{d}\tau,$$

而

$$\int_0^{2b} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^{b} t\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t + \int_b^{2b}(2b-t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \frac{1}{s^2}(1-\mathrm{e}^{-bs})^2,$$

所以

$$\mathscr{L}[f(t)] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2kbs}\int_0^{2b} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2b} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2kbs}\right).$$

由于当 $\mathrm{Re}(s)>0$ 时，

$$|\mathrm{e}^{-2bs}| = \mathrm{e}^{-\beta 2b} < 1,$$

所以

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(\mathrm{e}^{-2kbs}) = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2bs}},$$

从而

$$\mathscr{L}[f(t)] = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2bs}}\int_0^{2b} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2bs}}(1-\mathrm{e}^{-bs})^2\frac{1}{s^2}$$

$$= \frac{1}{s^2}\frac{(1-\mathrm{e}^{-bs})^2}{(1-\mathrm{e}^{-bs})(1+\mathrm{e}^{-bs})}$$

$$= \frac{1}{s^2}\frac{1-\mathrm{e}^{-bs}}{1+\mathrm{e}^{-bs}} = \frac{1}{s^2}\tanh\frac{bs}{2}.$$

一般地，设有以 T 为周期的函数 $f(t)$，即 $f(t+T)=f(t)$ $(t>0)$，当 $f(t)$ 在一个周期上是连续或分段连续时，则有

$$\mathscr{L}[f(t)] = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \quad (\mathrm{Re}(s) > 0)$$

成立.这就是求周期函数的 Laplace 变换公式.

我们还要指出,满足 Laplace 变换存在定理条件的函数 $f(t)$ 在 $t=0$ 处为有界时,积分

$$\mathscr{L}[f(t)]=\int_{0}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

中的下限取 0^+ 或 0^- 不会影响其结果.但当 $f(t)$ 在 $t=0$ 处包含了脉冲函数时,Laplace 变换的积分下限必须明确指出是 0^+ 还是 0^-,因为

$$\mathscr{L}_+[f(t)]=\int_{0^+}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t,$$

$$\mathscr{L}_-[f(t)]=\int_{0^-}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_{0^-}^{0^+}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t+\mathscr{L}_+[f(t)].$$

而当 $f(t)$ 在 $t=0$ 附近有界时,$\int_{0^-}^{0^+}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=0$,即

$$\mathscr{L}_-[f(t)]=\mathscr{L}_+[f(t)].$$

当 $f(t)$ 在 $t=0$ 处包含了脉冲函数时,$\int_{0^-}^{0^+}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\neq 0$,即

$$\mathscr{L}_-[f(t)]\neq\mathscr{L}_+[f(t)].$$

为了考虑这一情况,我们需将进行 Laplace 变换的函数 $f(t)$,当 $t\geqslant 0$ 时有定义扩大为当 $t>0$ 及 $t=0$ 的任意一个邻域内有定义.这样,Laplace 变换的定义

$$\mathscr{L}[f(t)]=\int_{0}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

应为

$$\mathscr{L}_-[f(t)]=\int_{0^-}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t.$$

但为了书写方便起见,我们仍写成(2.1)式的形式.

例 6 求单位脉冲函数 $\delta(t)$ 的 Laplace 变换.

解 根据上面的讨论,按(2.1)式,并利用性质:$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t)\mathrm{d}t=f(0)$,有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[\delta(t)]&=\int_{0}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\&=\int_{0^-}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-st} \Big|_{t=0} = 1.$$

例 7 求函数 $f(t) = e^{-\beta t}\delta(t) - \beta e^{-\beta t} u(t)$ $(\beta > 0)$ 的 Laplace 变换.

解 根据(2.1)式,有

$$\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} [e^{-\beta t}\delta(t) - \beta e^{-\beta t} u(t)] e^{-st} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \delta(t) e^{-(s+\beta)t} dt - \beta \int_0^{+\infty} e^{-(s+\beta)t} dt$$

$$= e^{-(s+\beta)t} \Big|_{t=0} + \frac{\beta e^{-(s+\beta)t}}{s+\beta} \Big|_0^{+\infty} = 1 - \frac{\beta}{s+\beta} = \frac{s}{s+\beta}.$$

在今后的实际工作中,我们并不需要用反常积分的方法来求函数的 Laplace 变换,有现成的 Laplace 变换表可查,就如同使用三角函数表、对数表及积分表一样.本书已将工程实际中常遇到的一些函数及其 Laplace 变换列于附录Ⅱ中,以备读者查用.

下面再举一些通过查表求 Laplace 变换的例子.

例 8 求 $\sin 2t \sin 3t$ 的 Laplace 变换.

解 根据附录Ⅱ中公式(20),在 $a=2, b=3$ 时,可以很方便地得到

$$\mathscr{L}[\sin 2t \sin 3t] = \frac{12s}{(s^2+5^2)(s^2+1^2)} = \frac{12s}{(s^2+25)(s^2+1)}.$$

读者不妨按定义验算和比较一下.

例 9 求 $\frac{e^{-bt}}{\sqrt{2}}(\cos bt - \sin bt)$ 的 Laplace 变换.

解 这个函数的 Laplace 变换,在本书给出的附录Ⅱ中找不到现成的结果,但是

$$\frac{e^{-bt}}{\sqrt{2}}(\cos bt - \sin bt) = e^{-bt}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos bt - \cos\frac{\pi}{4}\sin bt\right)$$

$$= e^{-bt}\sin\left(-bt + \frac{\pi}{4}\right).$$

根据附录Ⅱ中公式(17),在 $a=-b, c=\frac{\pi}{4}$ 时,可以得到

$$\mathscr{L}\left[\frac{e^{-bt}}{\sqrt{2}}(\cos bt - \sin bt)\right] = \mathscr{L}\left[e^{-bt}\sin\left(-bt + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=\frac{(s+b)\sin\frac{\pi}{4}+(-b)\cos\frac{\pi}{4}}{(s+b)^2+(-b)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}s}{2(s^2+2bs+2b^2)}.$$

总之,查表求函数的 Laplace 变换要比按定义去做方便得多,特别是掌握了 Laplace 变换的性质,再使用查表的方法,就能更快地找到所求函数的 Laplace 变换.

习题一

1. 求下列函数的 Laplace 变换,并给出其收敛域,再用查表的方法来验证结果.

(1) $f(t)=\sin\frac{t}{2}$;　　(2) $f(t)=e^{-2t}$;

(3) $f(t)=t^2$;　　(4) $f(t)=\sin t\cos t$;

(5) $f(t)=\sinh kt$ (k 为实数);　　(6) $f(t)=\cosh kt$ (k 为复数);

(7) $f(t)=\cos^2 t$;　　(8) $f(t)=\sin^2 t$.

2. 求下列函数的 Laplace 变换:

(1) $f(t)=\begin{cases}3, & 0\leqslant t<2,\\ -1, & 2\leqslant t<4,\\ 0, & t\geqslant 4;\end{cases}$

(2) $f(t)=\begin{cases}3, & t<\frac{\pi}{2},\\ \cos t, & t>\frac{\pi}{2};\end{cases}$

(3) $f(t)=e^{2t}+5\delta(t)$;

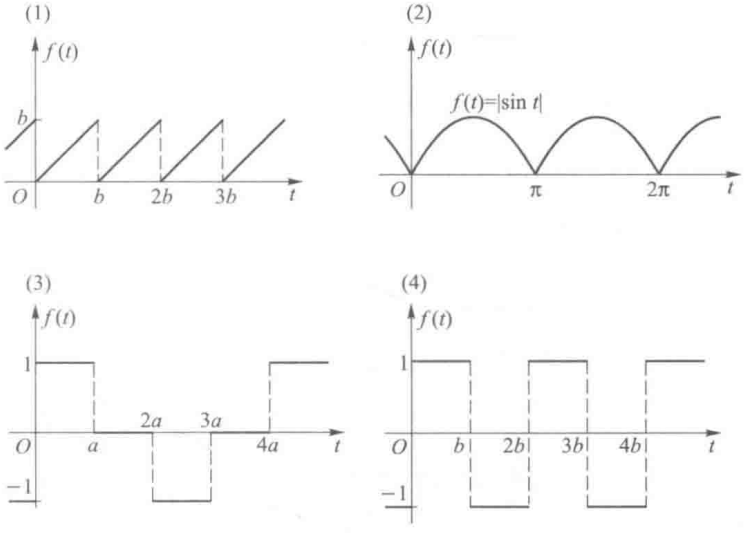
(4) $f(t)=\cos t\cdot\delta(t)-\sin t\cdot u(t)$.

3. 设 $f(t)$ 是以 2π 为周期的函数,且在一个周期内的表达式为

$$f(t)=\begin{cases}\sin t, & 0<t\leqslant\pi,\\ 0, & \pi<t<2\pi,\end{cases}$$

求 $\mathscr{L}[f(t)]$.

4. 求下列各图所示周期函数的 Laplace 变换：



（第 4 题）

§2.2 Laplace 变换的性质

这一节，我们将介绍 Laplace 变换的几个基本性质，它们在 Laplace 变换的实际应用中都是很有用的. 为了叙述方便起见，假定在这些性质中，凡是要求 Laplace 变换的函数都满足 Laplace 变换存在定理中的条件，并且把这些函数的增长指数都统一地取为 c. 在证明这些性质时，我们不再重述这些条件，希望读者注意.

1. 线性性质

若 α,β 是常数，

$$\mathscr{L}[f_1(t)]=F_1(s),\quad \mathscr{L}[f_2(t)]=F_2(s),$$

则有

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{L}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha\mathscr{L}[f_1(t)]+\beta\mathscr{L}[f_2(t)],\\&\mathscr{L}^{-1}[\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)]=\alpha\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)]+\beta\mathscr{L}^{-1}[F_2(s)].\end{aligned}\right\}\tag{2.2}$$

这个性质表明函数线性组合的 Laplace 变换等于各函数 Laplace 变换的线性组合. 它的证明只需根据定义，利用积分性质就可推出.

2. 微分性质

若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，则

$$\mathscr{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0). \tag{2.3}$$

证 根据 Laplace 变换的定义，有

$$\mathscr{L}[f'(t)]=\int_0^{+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t,$$

对右端积分利用分部积分法，可得

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t &= f(t)\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\ &=s\mathscr{L}[f(t)]-f(0)^{①} \quad (\mathrm{Re}(s)>c).\end{aligned}$$

所以

$$\mathscr{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0).$$

这个性质表明了一个函数求导后取 Laplace 变换等于这个函数的 Laplace 变换乘参变数 s，再减去函数的初值.

推论 若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，则有

$$\mathscr{L}[f''(t)]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0),$$

一般地，

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}[f^{(n)}(t)]\\ &=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)\\ &=s^nF(s)-\sum_{i=0}^{n-1}s^{n-1-i}f^{(i)}(0) \quad (\mathrm{Re}(s)>c).\end{aligned} \tag{2.4}$$

特别，当初值 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$ 时，有

$$\mathscr{L}[f'(t)]=sF(s),\quad \mathscr{L}[f''(t)]=s^2F(s),\cdots,$$
$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)]=s^nF(s). \tag{2.5}$$

此性质使我们有可能将 $f(t)$ 的微分方程转化为 $F(s)$ 的代数方程，因此它对分析线性系统有着重要的作用，现在利用它推算一些函数的 Laplace 变换.

例 1 利用(2.4)式求函数 $f(t)=\cos kt$ 的 Laplace 变换.

---

① 这里 $f(0)$ 应理解为 $f(0^-)$，以下同，但当 $f(t)$ 在 $t<0$ 无定义时，可取 $f(0^-)=f(t)u(t)\Big|_{t=0^-}=0$.

解 由于 $f(0)=1, f'(0)=0, f''(t)=-k^2\cos kt$，则由(2.4)式有

$$\mathscr{L}[-k^2\cos kt]=\mathscr{L}[f''(t)]=s^2\mathscr{L}[f(t)]-sf(0)-f'(0),$$

即

$$-k^2\mathscr{L}[\cos kt]=s^2\mathscr{L}[\cos kt]-s,$$

移项化简得

$$\mathscr{L}[\cos kt]=\frac{s}{s^2+k^2}\quad(\mathrm{Re}(s)>0).$$

例 2 利用(2.4)式，求函数 $f(t)=t^m$ 的 Laplace 变换，其中 m 是正整数.

解 由于 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(m-1)}(0)=0$，而 $f^{(m)}(t)=m!$. 所以

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[m!]&=\mathscr{L}[f^{(m)}(t)]\\&=s^m\mathscr{L}[f(t)]-s^{m-1}f(0)-s^{m-2}f'(0)-\cdots-f^{(m-1)}(0),\end{aligned}$$

即

$$\mathscr{L}[m!]=s^m\mathscr{L}[t^m],$$

而

$$\mathscr{L}[m!]=m!\,\mathscr{L}[1]=\frac{m!}{s},$$

所以

$$\mathscr{L}[t^m]=\frac{m!}{s^{m+1}}\quad(\mathrm{Re}(s)>0).$$

此外，由 Laplace 变换存在定理，还可以得到象函数的微分性质：

若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，则

$$F'(s)=-\mathscr{L}[tf(t)],\quad \mathrm{Re}(s)>c. \tag{2.6}$$

一般地，有

$$F^{(n)}(s)=(-1)^n\mathscr{L}[t^nf(t)],\quad \mathrm{Re}(s)>c. \tag{2.7}$$

它的证明留给读者.

例 3 求函数 $f(t)=t\sin kt$ 的 Laplace 变换.

解 因为 $\mathscr{L}[\sin kt]=\dfrac{k}{s^2+k^2}$，所以根据上述象函数的微分性质可知

$$\mathscr{L}[t\sin kt]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{k}{s^2+k^2}\right)=\frac{2ks}{(s^2+k^2)^2},\quad \mathrm{Re}(s)>0.$$

同理可得

$$\mathscr{L}[t\cos kt]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{s}{s^2+k^2}\right)=\frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2},\quad \mathrm{Re}(s)>0.$$

3. 积分性质

若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，则

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s}F(s). \tag{2.8}$$

证 设 $h(t)=\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t$，则有

$$h'(t)=f(t)，且\ h(0)=0.$$

由上述微分性质，有

$$\mathscr{L}[h'(t)]=s\mathscr{L}[h(t)]-h(0)=s\mathscr{L}[h(t)],$$

即

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s}\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{s}F(s).$$

这个性质表明了一个函数积分后再取 Laplace 变换等于这个函数的 Laplace 变换除以复参数 s.

重复应用(2.8)式，就可得到：

$$\mathscr{L}\left[\underbrace{\int_0^t \mathrm{d}t\int_0^t \mathrm{d}t\cdots\int_0^t}_{n次} f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s^n}F(s). \tag{2.9}$$

此外，由 Laplace 变换存在定理，还可以得到象函数的积分性质：

若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，则

$$\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_s^\infty F(s)\,\mathrm{d}s \tag{2.10}$$

或

$$f(t)=t\mathscr{L}^{-1}\left[\int_s^\infty F(s)\,\mathrm{d}s\right].$$

一般地，有

$$\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t^n}\right]=\underbrace{\int_s^\infty \mathrm{d}s\int_s^\infty \mathrm{d}s\cdots\int_s^\infty}_{n次} F(s)\,\mathrm{d}s. \tag{2.11}$$

它的证明留给读者.

例 4 求函数 $f(t)=\dfrac{\sinh t}{t}$ 的 Laplace 变换.

解 因为 $\mathscr{L}[\sinh t]=\dfrac{1}{s^2-1}$(见本章习题一的 1(5)),所以根据上述象函数的积分性质可知

$$\mathscr{L}\left[\frac{\sinh t}{t}\right]=\int_s^{\infty}\mathscr{L}[\sinh t]\mathrm{d}s=\int_s^{\infty}\frac{1}{s^2-1}\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{s-1}{s+1}\bigg|_s^{\infty}=\frac{1}{2}\ln\frac{s+1}{s-1}.$$

如果积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$ 存在,按(2.10)式,取 $s=0$,则有

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}F(s)\mathrm{d}s,$$

其中 $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$. 这一公式,常用来计算某些积分. 例如,$\mathscr{L}[\sin t]=\dfrac{1}{s^2+1}$,则有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\frac{1}{s^2+1}\mathrm{d}s=\arctan s\bigg|_0^{\infty}=\frac{\pi}{2}.$$

这与 Dirichlet 积分的结果完全一致.

4. 位移性质

若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$,则有

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}f(t)]=F(s-a)\quad(\mathrm{Re}(s-a)>c).\tag{2.12}$$

证 根据(2.1)式,有

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}f(t)]=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{at}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-(s-a)t}\mathrm{d}t,$$

由此看出,上式右方只是在 $F(s)$ 中把 s 换成 $s-a$,所以

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}f(t)]=F(s-a)\quad(\mathrm{Re}(s-a)>c).$$

这个性质表明了一个象原函数乘函数 e^{at} 的 Laplace 变换等于其象函数作位移 a.

例 5 求 $\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}t^m]$.

解 我们已经知道 $\mathscr{L}[t^m]=\dfrac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}$,利用位移性质,可得

$$\mathscr{L}[e^{at}t^m]=\frac{\Gamma(m+1)}{(s-a)^{m+1}}.$$

例 6 求 $\mathscr{L}[e^{-at}\sin kt]$.

解 已知 $\mathscr{L}[\sin kt]=\frac{k}{s^2+k^2}$,由位移性质可得

$$\mathscr{L}[e^{-at}\sin kt]=\frac{k}{(s+a)^2+k^2}.$$

5. 延迟性质

若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$,又 $t<0$ 时 $f(t)=0$,则对于任一非负实数 τ,有

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{L}[f(t-\tau)]=e^{-s\tau}F(s),\\ \text{或}\quad &\mathscr{L}^{-1}[e^{-s\tau}F(s)]=f(t-\tau).\end{aligned}\right\}\tag{2.13}$$

证 根据(2.1)式,有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f(t-\tau)]&=\int_0^{+\infty}f(t-\tau)e^{-st}dt\\&=\int_0^{\tau}f(t-\tau)e^{-st}dt+\int_{\tau}^{+\infty}f(t-\tau)e^{-st}dt,\end{aligned}$$

由条件可知,当 $t<\tau$ 时,$f(t-\tau)=0$,所以上式右端第一个积分为零.对于第二个积分,令 $t-\tau=u$,则

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f(t-\tau)]&=\int_0^{+\infty}f(u)e^{-s(u+\tau)}du\\&=e^{-s\tau}\int_0^{+\infty}f(u)e^{-su}du\\&=e^{-s\tau}F(s)\quad(\mathrm{Re}(s)>c).\end{aligned}$$

函数 $f(t-\tau)$ 与 $f(t)$ 相比,$f(t)$ 从 $t=0$ 开始有非零数值.而 $f(t-\tau)$ 是从 $t=\tau$ 开始才有非零数值,即延迟了一个时间 τ.从它们的图像来看,$f(t-\tau)$ 的图像是由 $f(t)$ 的图像沿 t 轴向右平移距离 τ 而得,如图 2-3 所示.这个性质表明,时间函数延迟 τ 的 Laplace 变换等于它的象函数乘指数因子 $e^{-s\tau}$.

注意,这里当 $t<0$ 时,$f(t)=0$ 是不可缺少的,它表明了 $f(t)u(t)$ 与 $f(t)$ 是两个不同的函数.因此,该性质也可以如下表述:

若 $\mathscr{L}[f(t)u(t)]=F(s)$,则对任意的正数 τ,有

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)u(t-\tau)]=e^{-s\tau}F(s)$$

或

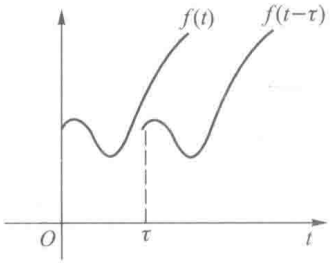


图 2-3

$$\mathscr{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-s\tau}F(s)]=f(t-\tau)u(t-\tau).$$

例 7 求函数 $u(t-\tau)=\begin{cases}0, t<\tau,\\ 1, t>\tau\end{cases}$ 的 Laplace 变换.

解 我们已经知道 $\mathscr{L}[u(t)]=\dfrac{1}{s}$,根据延迟性质,有

$$\mathscr{L}[u(t-\tau)]=\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-s\tau}.$$

例 8 求函数 $f_1(t)=\cos(t-\tau)u(t-\tau)$ 和 $f_2(t)=\cos(t-\tau)$ 的 Laplace 变换.

解 根据延迟性质,有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f_1(t)]&=\mathscr{L}[\cos(t-\tau)u(t-\tau)]\\&=\mathrm{e}^{-s\tau}\mathscr{L}[\cos t]\\&=\frac{s}{s^2+1}\mathrm{e}^{-s\tau}.\end{aligned}$$

由于 $\cos(t-\tau)=\cos t\cos\tau+\sin t\sin\tau$,根据线性性质,有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f_2(t)]&=\mathscr{L}[\cos(t-\tau)]\\&=\cos\tau\mathscr{L}[\cos t]+\sin\tau\mathscr{L}[\sin t]\\&=\cos\tau\frac{s}{s^2+1}+\sin\tau\frac{1}{s^2+1}\\&=\frac{1}{s^2+1}(s\cos\tau+\sin\tau).\end{aligned}$$

如果这样求解则是错误的:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f_2(t)]&=\mathscr{L}[\cos(t-\tau)]\\&=\mathrm{e}^{-s\tau}\mathscr{L}[\cos t]=\frac{s}{s^2+1}\mathrm{e}^{-s\tau}.\end{aligned}$$

这是因为当 $t<\tau$ 时 $f_2(t)\neq 0$. 即不满足延迟性质的条件.

例 9 求如图 2-4 所示的阶梯函数 $f(t)$ 的 Laplace 变换.

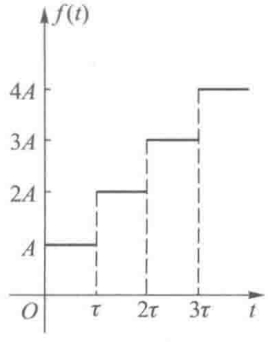


图 2-4

解 利用单位阶跃函数,可将这个阶梯函数表示为

$$f(t)=A[u(t)+u(t-\tau)+u(t-2\tau)+\cdots]$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}Au(t-k\tau).$$

上式两边取 Laplace 变换,并假定右边也可以逐项取 Laplace 变换①,再由 Laplace 变换的线性性质及延迟性质,可得

$$\mathscr{L}[f(t)]=A\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s}e^{-s\tau}+\frac{1}{s}e^{-2s\tau}+\frac{1}{s}e^{-3s\tau}+\cdots\right),$$

当 $\mathrm{Re}(s)>0$ 时,有 $|e^{-s\tau}|<1$,所以,上式右端圆括号中为一公比的模小于 1 的等比级数,从而

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{A}{s}\frac{1}{1-e^{-s\tau}}=\frac{A}{s}\frac{1}{(1-e^{-\frac{s\tau}{2}})(1+e^{-\frac{s\tau}{2}})}$$
$$=\frac{A}{2s}\left(1+\coth\frac{s\tau}{2}\right)\quad(\mathrm{Re}(s)>0).$$

一般地,若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$,则对任何 $\tau>0$,有

$$\mathscr{L}\left[\sum_{k=0}^{\infty}f(t-k\tau)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\mathscr{L}[f(t-k\tau)]$$

---

① 可以证明,满足 Laplace 变换存在定理条件的函数 $f(t)$ ($t<0$ 时,$f(t)=0$),对任何 $\tau>0$,有

$$\mathscr{L}\left[\sum_{k=0}^{\infty}f(t-k\tau)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\mathscr{L}[f(t-k\tau)].$$

$$= F(s) \cdot \frac{1}{1 - e^{-s\tau}} \quad (\mathrm{Re}(s) > c).$$

例 10 求如图 2-5 所示的单个半正弦波 $f(t)$ 的 Laplace 变换.

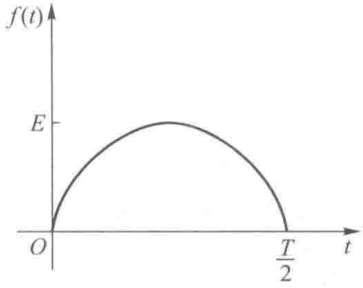


图 2-5

解 由图 2-6 可知, $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, 所以

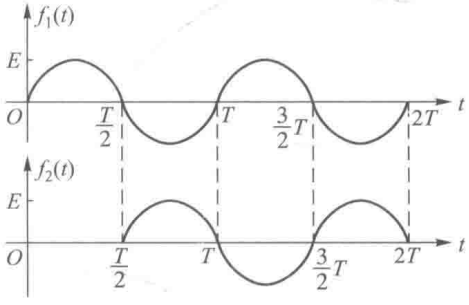


图 2-6

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}[f(t)] \\
&= \mathscr{L}[f_1(t)] + \mathscr{L}[f_2(t)] \\
&= E\mathscr{L}\left[\sin\frac{2\pi}{T}t \cdot u(t)\right] + E\mathscr{L}\left[\sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{T}{2}\right) \cdot u\left(t - \frac{T}{2}\right)\right] \\
&= \frac{E\dfrac{2\pi}{T}}{s^2 + \left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2}(1 + e^{-\frac{T}{2}s}) = \frac{E\omega}{s^2 + \omega^2}(1 + e^{-\frac{T}{2}s}),
\end{aligned}$$

其中 $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

例 11 求如图 2-7 所示的半波正弦函数 $f_T(t)$ 的 Laplace 变换.

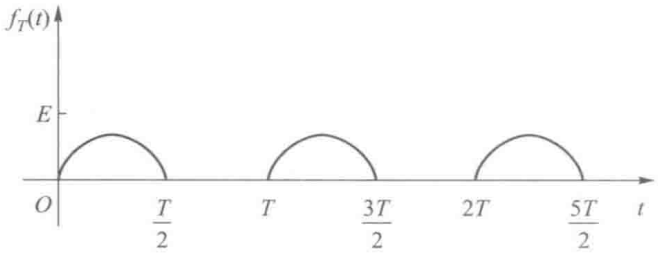


图 2-7

解 这实际上是周期函数的 Laplace 变换的问题,但也可以用延迟性质加以解决.由例 10 可得从 $t=0$ 开始的单个半正弦波的 Laplace 变换为

$$F(s)=\frac{E\omega}{s^2+\omega^2}(1+\mathrm{e}^{-\frac{T}{2}s}),$$

从而

$$\mathscr{L}[f_T(t)]=\frac{F(s)}{1-\mathrm{e}^{-sT}}=\frac{E\omega}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\frac{T}{2}s}}.$$

这是一个求周期函数 Laplace 变换的简单方法,即设 $f_T(t)\ (t>0)$ 是周期为 T 的周期函数,如果

$$f(t)=\begin{cases}f_T(t), & 0\leqslant t<T,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

且 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$,则

$$\mathscr{L}[f_T(t)]=\frac{F(s)}{1-\mathrm{e}^{-sT}}.$$

6*. 初值定理与终值定理

(1) 初值定理

若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$,且 $\lim\limits_{s\to\infty}sF(s)$ 存在,则

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{t\to 0}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s),\\ \text{或写为}\quad &f(0)=\lim_{s\to\infty}sF(s).\end{aligned}\right\}\tag{2.14}$$

证 根据 Laplace 变换的微分性质,有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f'(t)]&=s\mathscr{L}[f(t)]-f(0)\\&=sF(s)-f(0).\end{aligned}$$

由于已假定$\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$存在,故$\lim\limits_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty} sF(s)$亦必存在,且两者相等,即

$$\lim_{s\to\infty} sF(s)=\lim_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty} sF(s).$$

在前式两端取 $\mathrm{Re}(s)\to+\infty$ 时的极限,得

$$\begin{aligned}\lim_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty}\mathscr{L}[f'(t)]&=\lim_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty}[sF(s)-f(0)]\\&=\lim_{s\to\infty}sF(s)-f(0),\end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}\lim_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty}\mathscr{L}[f'(t)]&=\lim_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty}\int_0^{+\infty}f'(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}\lim_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty}f'(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=0,\end{aligned}$$

(由 Laplace 变换存在定理所述的关于积分的一致收敛性知,允许交换积分与极限的运算次序)所以

$$\lim_{s\to\infty}sF(s)-f(0)=0,$$

即

$$\lim_{t\to0^+}f(t)=f(0)^{①}=\lim_{s\to\infty}sF(s).$$

这个性质表明函数$f(t)$在$t=0$时的函数值可以通过$f(t)$的Laplace 变换$F(s)$乘以s取$s\to\infty$时的极限值而得到,它建立了函数$f(t)$在坐标原点的值与函数$sF(s)$的无限远点的值之间的关系.

(2) 终值定理

若$\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$,且$sF(s)$的所有奇点全在s平面的左半部,则

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{t\to+\infty}f(t)=\lim_{s\to0}sF(s),\\ \text{或写为}\quad&f(+\infty)=\lim_{s\to0}sF(s).\end{aligned}\right\}\tag{2.15}$$

证 根据定理给出的条件和微分性质

$$\mathscr{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0),$$

两边取$s\to0$的极限,得

$$\lim_{s\to0}\mathscr{L}[f'(t)]=\lim_{s\to0}[sF(s)-f(0)]=\lim_{s\to0}sF(s)-f(0),$$

但是

---

① 可以证明,初值$f(0)$总是指当$t\to0^+$时$f(t)$的极限.只要这个极限存在,它与 Laplace 变换的积分下限是0^+还是0^-无关.

$$\lim_{s\to 0}\mathscr{L}[f'(t)]=\lim_{s\to 0}\int_0^{+\infty}f'(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}s=\int_0^{+\infty}\lim_{s\to 0}\mathrm{e}^{-st}f'(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{+\infty}f'(t)\mathrm{d}t=f(t)\Big|_0^{+\infty}=\lim_{t\to+\infty}f(t)-f(0),$$

所以

$$\lim_{t\to+\infty}f(t)-f(0)=\lim_{s\to 0}sF(s)-f(0).$$

即

$$\lim_{t\to+\infty}f(t)=f(+\infty)=\lim_{s\to 0}sF(s).$$

这个性质表明函数 $f(t)$ 在 $t\to+\infty$ 时的数值(即稳定值),可以通过 $f(t)$ 的 Laplace 变换乘 s 取 $s\to 0$ 时的极限值而得到,它建立了函数 $f(t)$ 在无穷远的值与函数 $sF(s)$ 在原点的值之间的关系.

在 Laplace 变换的应用中,往往先得到 $F(s)$ 再去求出 $f(t)$.但是对于一个较复杂的系统,由 $F(s)$ 来确定 $f(t)$ 不是一件容易的事情.因此我们有时并不关心函数 $f(t)$ 的表达式,而是需要知道 $f(t)$ 在 $t\to 0$ 或 $t\to+\infty$ 时的性态,这两个性质给我们提供了方便,能使我们直接由 $F(s)$ 来求出 $f(t)$ 的两个特殊值 $f(0)$,$f(+\infty)$.例如在可靠性系统中,对某些稳态可靠性指标的确定带来了方便.

例 12 若 $\mathscr{L}[f(t)]=\dfrac{1}{s+a}$,求 $f(0)$,$f(+\infty)$.

解 根据(2.14)式及(2.15)式

$$f(0)=\lim_{s\to\infty}sF(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{s}{s+a}=1,$$

$$f(+\infty)=\lim_{s\to 0}sF(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s}{s+a}=0.$$

我们已经知道 $\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-at}]=\dfrac{1}{s+a}$,即 $f(t)=\mathrm{e}^{-at}$.显然,上面所求结果与直接由 $f(t)$ 所计算的结果是一致的.

但应用终值定理时需要注意定理条件是否满足,例如函数 $f(t)$ 的 $F(s)=\dfrac{1}{s^2+1}$,则 $sF(s)=\dfrac{s}{s^2+1}$ 的奇点 $s=\pm\mathrm{j}$ 位于虚轴上,就不满足定理的条件.虽然 $\lim\limits_{s\to 0}sF(s)=\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{s}{s^2+1}=0$,而

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]=\sin t,\ \lim_{t\to+\infty}f(t)=\lim_{t\to+\infty}\sin t$$

是不存在的.

习题二

1. 求下列函数的 Laplace 变换:

(1) $f(t)=t^2+3t+2$;　　(2) $f(t)=1-te^t$;

(3) $f(t)=(t-1)^2e^t$;　　(4) $f(t)=\frac{t}{2a}\sin at$;

(5) $f(t)=t\cos at$;　　(6) $f(t)=5\sin 2t-3\cos 2t$;

(7) $f(t)=e^{-2t}\sin 6t$;　　(8) $f(t)=e^{-4t}\cos 4t$;

(9) $f(t)=t^ne^{at}$;　　(10) $f(t)=u(3t-5)$;

(11) $f(t)=u(1-e^{-t})$;　　(12) $f(t)=\frac{e^{3t}}{\sqrt{t}}$.

2. 若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$, a 为正实数,证明(相似性质)

$$\mathscr{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

并利用此结论,计算下列各式:

(1) 已知 $\mathscr{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\arctan\frac{1}{s}$,求 $\mathscr{L}\left[\frac{\sin at}{t}\right]$;

(2) 求 $\mathscr{L}[f(at-b)u(at-b)]$, b 为正实数;

(3) 求 $\mathscr{L}\left[e^{-\frac{t}{a}}f\left(\frac{t}{a}\right)\right]$;

(4) 求 $\mathscr{L}\left[e^{-at}f\left(\frac{t}{a}\right)\right]$.

3. 若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$,证明(象函数的微分性质)

$$F^{(n)}(s)=(-1)^n\mathscr{L}[t^nf(t)],\quad \mathrm{Re}(s)>c.$$

特别 $\mathscr{L}[tf(t)]=-F'(s)$,或 $f(t)=-\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}[F'(s)]$,并利用此结论,计算下列各式:

(1) $f(t)=te^{-3t}\sin 2t$,求 $F(s)$;

(2) $f(t)=t\int_0^t e^{-3t}\sin 2t\mathrm{d}t$,求 $F(s)$;

(3) $F(s)=\ln\frac{s+1}{s-1}$,求 $f(t)$;

(4) $f(t)=\int_0^t te^{-3t}\sin 2t\mathrm{d}t$,求 $F(s)$.

4. 若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$,证明(象函数的积分性质)

$$\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_s^{\infty}F(s)\mathrm{d}s,$$

或

$$f(t)=t\mathscr{L}^{-1}\left[\int_s^{\infty}F(s)\mathrm{d}s\right].$$

并利用此结论,计算下列各式:

(1) $f(t)=\frac{\sin kt}{t}$,求 $F(s)$;

(2) $f(t)=\frac{e^{-3t}\sin 2t}{t}$,求 $F(s)$;

(3) $F(s)=\frac{s}{(s^2-1)^2}$,求 $f(t)$;

(4) $f(t)=\int_0^t\frac{e^{-3t}\sin 2t}{t}\mathrm{d}t$,求 $F(s)$.

5. 计算下列积分:

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\mathrm{d}t$;

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t}e^{-t}\mathrm{d}t$;

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}\cos bt-e^{-mt}\cos nt}{t}\mathrm{d}t$;

(4) $\int_0^{+\infty}e^{-3t}\cos 2t\mathrm{d}t$;

(5) $\int_0^{+\infty}te^{-2t}\mathrm{d}t$;

(6) $\int_0^{+\infty}te^{-3t}\sin 2t\mathrm{d}t$;

(7) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{2}t}\sinh t\sin t}{t}\mathrm{d}t$;

(8) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}\sin^2 t}{t}\mathrm{d}t$;

(9) $\int_0^{+\infty}t^3e^{-t}\sin t\mathrm{d}t$;

(10) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t$;

(11) $\int_0^{+\infty}e^{-t}\mathrm{erf}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$,其中 $\mathrm{erf}\sqrt{t}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}e^{-u^2}\mathrm{d}u$ 称为误差函数;

(12) $\int_0^{+\infty}J_0(t)\mathrm{d}t$, 其中 $J_0(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}$ 称为零阶 **Bessel** 函数.

6. 求下列函数的 Laplace 逆变换：

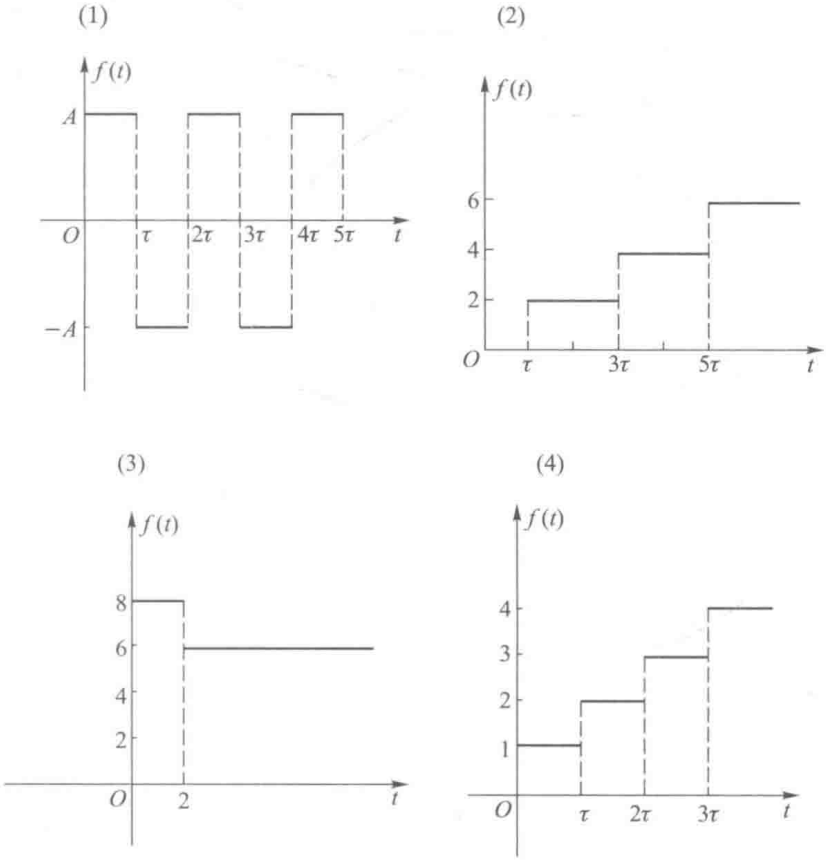
(1) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+4}$；　　(2) $F(s)=\dfrac{1}{s^4}$；

(3) $F(s)=\dfrac{1}{(s+1)^4}$；　　(4) $F(s)=\dfrac{1}{s+3}$；

(5) $F(s)=\dfrac{2s+3}{s^2+9}$；　　(6) $F(s)=\dfrac{s+3}{(s+1)(s-3)}$；

(7) $F(s)=\dfrac{s+1}{s^2+s-6}$；　　(8) $F(s)=\dfrac{2s+5}{s^2+4s+13}$.

7. 求下列各图所示函数 $f(t)$ 的 Laplace 变换.



（第 7 题）

§2.3 卷 积

前面我们介绍了 Laplace 变换的几个基本性质.本节还要介绍 Laplace 变换的卷积性质.它不仅被用来求某些函数的逆变换及一些积分值,而且在线性系统的分析中起着重要的作用.

1. 卷积的概念

在第一章我们已经讨论了 Fourier 变换的卷积性质.在那里讲过,两个函数的卷积是指

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

如果 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 都满足条件:当 $t<0$ 时,$f_1(t)=f_2(t)=0$,则上式可写成

$$\begin{aligned}&f_1(t)*f_2(t)\\&=\int_{-\infty}^{0}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau+\int_{0}^{t}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau+\int_{t}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\\&=\int_{0}^{t}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\tag{2.16}$$

可见这里的卷积定义和 Fourier 变换中给出的卷积定义是完全一致的.今后如不特别声明,都假定这些函数在 $t<0$ 时恒为零.它们的卷积都按(2.16)式计算.因此,由(2.16)式定义的卷积除了满足交换律、结合律和对加法的分配律以外,仍然具有下列基本性质:

(1) 卷积的数乘

$$a[f_1(t)*f_2(t)]=[af_1(t)]*f_2(t)=f_1(t)*[af_2(t)]\ (a\text{ 为常数});$$

(2) 卷积的微分

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f_1(t)*f_2(t)]&=f_1(t)*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_2(t)+f_1(t)f_2(0)\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_1(t)*f_2(t)+f_1(0)f_2(t);\end{aligned}$$

(3) 卷积的积分

$$\int_0^t[f_1(\xi)*f_2(\xi)]\,\mathrm{d}\xi=f_1(t)*\int_0^t f_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\int_0^t f_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi*f_2(t);$$

而且亦有如下的不等式

$$|f_1(t)*f_2(t)|\leqslant|f_1(t)|*|f_2(t)|$$

成立,即函数卷积的绝对值小于等于函数绝对值的卷积.

例 1 求函数 $f_1(t)=t$ 和 $f_2(t)=\sin t$ 的卷积,即求 $t*\sin t$.

解 根据定义,

$$t*\sin t=\int_0^t \tau\sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

分部积分一次,可得

$$\begin{aligned}t*\sin t&=\int_0^t \tau\sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\\&=\tau\cos(t-\tau)\Big|_0^t-\int_0^t\cos(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=t-\sin t.\end{aligned}$$

由卷积的交换律可知

$$\sin t*t=t-\sin t.$$

2. 卷积定理

假定 $f_1(t)$,$f_2(t)$ 满足 Laplace 变换存在定理中的条件,且

$$\mathscr{L}[f_1(t)]=F_1(s),\quad \mathscr{L}[f_2(t)]=F_2(s),$$

则 $f_1(t)*f_2(t)$ 的 Laplace 变换一定存在,且

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(s)\cdot F_2(s),\\ \text{或}\quad &\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)\cdot F_2(s)]=f_1(t)*f_2(t).\end{aligned}\right\}\tag{2.17}$$

证 容易验证 $f_1(t)*f_2(t)$ 满足 Laplace 变换存在定理的条件,它的变换式为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)]&=\int_0^{+\infty}[f_1(t)*f_2(t)]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

从上面这个积分式子可以看出,积分区域如图 2-8 所示(阴影部分).由于二重积分绝对可积,因此可以交换积分次序,即

$$\mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)]=\int_0^{+\infty}f_1(\tau)\left[\int_\tau^{+\infty}f_2(t-\tau)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\tau.$$

令 $t-\tau=u$,则

$$\int_\tau^{+\infty}f_2(t-\tau)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}f_2(u)\mathrm{e}^{-s(u+\tau)}\mathrm{d}u=\mathrm{e}^{-s\tau}F_2(s),$$

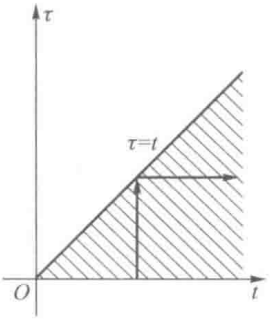


图 2-8

所以

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)] &= \int_0^{+\infty} f_1(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}F_2(s)\,\mathrm{d}\tau \\ &= F_2(s)\int_0^{+\infty} f_1(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= F_1(s)\cdot F_2(s).\end{aligned}$$

这个性质表明两个函数卷积的 Laplace 变换等于这两个函数 Laplace 变换的乘积.

不难推证,若 $f_k(t)$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 满足 Laplace 变换存在定理中的条件,且 $\mathscr{L}[f_k(t)]=F_k(s)$ $(k=1,2,\cdots,n)$,则有

$$\mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)*\cdots*f_n(t)]=F_1(s)\cdot F_2(s)\cdot\cdots\cdot F_n(s).$$

在 Laplace 变换的应用中,卷积定理起着十分重要的作用.下面我们利用它来求一些函数的逆变换.

例 2 若 $F(s)=\dfrac{1}{s^2(1+s^2)}$,求 $f(t)$.

解 因为

$$F(s)=\frac{1}{s^2(1+s^2)}=\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s^2+1},$$

所以取

$$F_1(s)=\frac{1}{s^2},\quad F_2(s)=\frac{1}{s^2+1},$$

于是

$$f_1(t)=t,\quad f_2(t)=\sin t,$$

根据卷积定理和例 1,得

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=t*\sin t=t-\sin t.$$

例 3 若 $F(s)=\dfrac{s^2}{(s^2+1)^2}$,求 $f(t)$.

解 因为

$$F(s)=\frac{s^2}{(s^2+1)^2}=\frac{s}{s^2+1}\cdot\frac{s}{s^2+1},$$

所以

$$\begin{aligned}f(t)&=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\cdot\frac{s}{s^2+1}\right]=\cos t*\cos t\\&=\int_0^t\cos\tau\cos(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{2}\int_0^t[\cos t+\cos(2\tau-t)]\,\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{2}(t\cos t+\sin t).\end{aligned}$$

例 4 若 $\mathscr{L}[f(t)]=\dfrac{1}{(s^2+4s+13)^2}$,求 $f(t)$.

解 因为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f(t)]&=\frac{1}{(s^2+4s+13)^2}=\frac{1}{[(s+2)^2+3^2]^2}\\&=\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\cdot\frac{3}{(s+2)^2+3^2},\end{aligned}$$

根据位移性质,

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right]=\mathrm{e}^{-2t}\sin 3t,$$

于是

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{9}(\mathrm{e}^{-2t}\sin 3t)*(\mathrm{e}^{-2t}\sin 3t)\\&=\frac{1}{9}\int_0^t\mathrm{e}^{-2\tau}\sin 3\tau\,\mathrm{e}^{-2(t-\tau)}\sin 3(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{9}\mathrm{e}^{-2t}\int_0^t\sin 3\tau\sin 3(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{9}e^{-2t}\int_0^t\frac{1}{2}[\cos(6\tau-3t)-\cos 3t]d\tau$$

$$=\frac{1}{18}e^{-2t}\left[\frac{\sin(6\tau-3t)}{6}-\tau\cos 3t\right]\Bigg|_0^t$$

$$=\frac{1}{54}e^{-2t}(\sin 3t-3t\cos 3t).$$

例 5 若 $\mathscr{L}[f(t)]=\frac{s}{(s^2+1)^2}e^{-as}(a>0)$,求 $f(t)$.

解 利用卷积定理先求出

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^2}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{s}{s^2+1}\right]$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]*\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]$$

$$=\sin t*\cos t$$

$$=\int_0^t\sin\tau\cos(t-\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t[\sin(2\tau-t)+\sin t]d\tau=\frac{1}{2}t\sin t.$$

再由延迟性质,有

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^2}e^{-as}\right]=\frac{1}{2}(t-a)\sin(t-a)u(t-a).$$

这里,单位阶跃函数 $u(t-a)$ 是不可缺少的.

不难看出,例 2—例 5 中的函数也可以利用其他方法来求其逆变换,读者不妨自己试一试.

习题三

1. 证明下列各式:

(1) $f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$;

(2) $f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]=[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)$;

(3) $f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$;

(4) $a[f_1(t)*f_2(t)]=[af_1(t)]*f_2(t)=f_1(t)*[af_2(t)]$ (a 为常数);

(5) $e^{at}[f_1(t)*f_2(t)]=[e^{at}f_1(t)]*[e^{at}f_2(t)]$ (a 为常数);

(6) $\frac{d}{dt}[f_1(t)*f_2(t)]=f_1(t)*\frac{d}{dt}f_2(t)+f_1(t)f_2(0)$

$$=\frac{d}{dt}f_1(t)*f_2(t)+f_1(0)f_2(t);$$

(7) $\int_0^t[f_1(\xi)*f_2(\xi)]d\xi=f_1(t)*\int_0^t f_2(\xi)d\xi=\int_0^t f_1(\xi)d\xi*f_2(t)$;

(8) $[f_1(t)+f_2(t)]*[g_1(t)+g_2(t)]$

$=f_1(t)*g_1(t)+f_2(t)*g_1(t)+f_1(t)*g_2(t)+f_2(t)*g_2(t)$.

2. 求下列卷积:

(1) $1*1$;　　(2) $t*t$;

(3) t^m*t^n(m,n 为正整数);　　(4) $t*e^t$;

(5) $\sin t*\cos t$;　　(6) $\sin kt*\sin kt$ ($k\neq 0$);

(7) $t*\sinh t$;　　(8) $\sinh at*\sinh at$ ($a\neq 0$);

(9) $u(t-a)*f(t)$ ($a\geqslant 0$);　　(10) $\delta(t-a)*f(t)$ ($a\geqslant 0$).

3. 设 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$,利用卷积定理,证明 $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right]=\frac{F(s)}{s}$.

4. 利用卷积定理,证明 $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{a}{s(a^2+s^2)}\right]=\frac{1}{a}(1-\cos at)$.

5. 利用卷积定理,证明

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\right]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^t\int_0^{\sqrt{t}}e^{-\tau^2}d\tau,$$

并求 $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\right]$.

§ 2.4 Laplace 逆变换

前面我们主要讨论了由已知函数 $f(t)$ 求它的象函数 $F(s)$,但在实际应用中常会碰到与此相反的问题,即已知象函数 $F(s)$ 求它的象原函数 $f(t)$.本节将较系统地解决这个问题.

由 Laplace 变换的概念可知,函数 $f(t)$ 的 Laplace 变换,实际上就是 $f(t)u(t)e^{-\beta t}$ 的

Fourier 变换.于是,当$f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}$满足 Fourier 积分定理的条件时,按 Fourier 积分公式,在$f(t)$连续点处有

$$\begin{aligned} f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)u(\tau)\mathrm{e}^{-\beta\tau}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\left[\int_{0}^{+\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{j}\omega)\tau}\mathrm{d}\tau\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\beta+\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega, \quad t>0. \end{aligned}$$

等式两边同乘$\mathrm{e}^{\beta t}$,并考虑到它与积分变量ω无关,则

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\beta+\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{(\beta+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}\omega, \quad t>0.$$

令$\beta+\mathrm{j}\omega=s$,有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\beta-\mathrm{j}\infty}^{\beta+\mathrm{j}\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s, \quad t>0, \tag{2.18}$$

这就是从象函数$F(s)$求它的象原函数$f(t)$的一般公式.右端的积分称为**Laplace 反演积分**.尽管前面我们利用 Laplace 变换的一些性质推出了某些象原函数和象函数之间的对应关系,但对一些比较复杂的象函数,要求出其象原函数,就不得不借助于 Laplace 反演公式,它和(2.1)式$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$成为一对互逆的积分变换公式,我们也称$f(t)$和$F(s)$构成了一个**Laplace 变换对**.由于(2.18)式是一个复变函数的积分,计算复变函数的积分通常比较困难,但当$F(s)$满足一定条件时,可以用留数方法来计算这个反演积分.特别当$F(s)$为有理函数时更为简单.下面的定理将提供计算这种反演积分的方法.

定理 若$s_1,s_2,\cdots,s_n$是函数$F(s)$的所有奇点(适当选取β使这些奇点全在$\mathrm{Re}(s)<\beta$的范围内),且当$s\to\infty$时,$F(s)\to 0$,则有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\beta-\mathrm{j}\infty}^{\beta+\mathrm{j}\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{s=s_k}[F(s)\mathrm{e}^{st}],$$

即

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{s=s_k}[F(s)\mathrm{e}^{st}], \quad t>0. \tag{2.19}$$

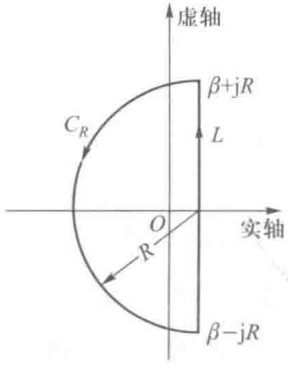


图 2-9

证 作图 2-9 所示的闭曲线$C=L+C_R$,C_R在

$\mathrm{Re}(s)<\beta$ 的区域内是半径为 R 的圆弧，当 R 充分大后，可以使 $F(s)$ 的所有奇点包含在闭曲线 C 围成的区域内. 同时 e^{st} 在全平面上解析，所以 $F(s)\mathrm{e}^{st}$ 的奇点就是 $F(s)$ 的奇点. 根据留数定理可得

$$\oint_C F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s = 2\pi\mathrm{j}\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{s=s_k}[F(s)\mathrm{e}^{st}],$$

即

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\left[\int_{\beta-\mathrm{j}R}^{\beta+\mathrm{j}R}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s+\int_{C_R}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s\right]=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{s=s_k}[F(s)\mathrm{e}^{st}].$$

在上式左方，取 $R\to+\infty$ 时的极限，并根据复变函数论中的 Jordan 引理①，当 $t>0$ 时，有

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s=0,$$

从而

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\beta-\mathrm{j}\infty}^{\beta+\mathrm{j}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{s=s_k}[F(s)\mathrm{e}^{st}],\quad t>0.$$

这就证明了我们的定理.

若函数 $F(s)$ 是有理函数：$F(s)=\dfrac{A(s)}{B(s)}$，其中 $A(s)$，$B(s)$ 是不可约的多项式，$B(s)$ 的次数是 n，而且 $A(s)$ 的次数小于 $B(s)$ 的次数，在这种情况下它满足定理对 $F(s)$ 所要求的条件，因此(2.19)式成立.

情况一 若 $B(s)$ 有 n 个单零点 $s_1,s_2,\cdots,s_n$，即这些点都是 $\dfrac{A(s)}{B(s)}$ 的单极点，根据留数的计算方法，有

$$\operatorname*{Res}_{s=s_k}\left[\frac{A(s)}{B(s)}\mathrm{e}^{st}\right]=\frac{A(s_k)}{B'(s_k)}\mathrm{e}^{s_kt},$$

---

① Jordan 引理有几种形式，这里指出的是其中一种，称为推广的 Jordan 引理：设复变量 s 的一个函数 $F(s)$ 满足下列条件：

(i) 它在左半平面内($\mathrm{Re}(s)<\beta$)除有限个奇点外是解析的；

(ii) 对于 $\mathrm{Re}(s)<\beta$ 的 s，当 $|s|=R\to+\infty$ 时，$F(s)$ 一致地趋于零，

则当 $t>0$ 时有

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s=0,$$

其中 C_R：$|s|=R$，$\mathrm{Re}(s)<\beta$，它是一个以点 $\beta+\mathrm{j}0$ 为圆心，R 为半径的圆弧.

从而根据(2.19)式,有

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A(s_k)}{B'(s_k)}e^{s_k t},\qquad t>0. \tag{2.20}$$

情况二 若 s_1 是 $B(s)$ 的一个 m 级零点,$s_{m+1},s_{m+2},\cdots,s_n$ 是 $B(s)$ 的单零点,即 s_1 是 $\frac{A(s)}{B(s)}$ 的 m 级极点,s_i $(i=m+1,m+2,\cdots,n)$ 是它的单极点.根据留数的计算方法,有

$$\operatorname*{Res}_{s=s_1}\left[\frac{A(s)}{B(s)}e^{st}\right]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{s\to s_1}\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}\left[(s-s_1)^m\frac{A(s)}{B(s)}e^{st}\right],$$

所以有

$$f(t)=\sum_{i=m+1}^{n}\frac{A(s_i)}{B'(s_i)}e^{s_i t}+\frac{1}{(m-1)!}\lim_{s\to s_1}\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}\left[(s-s_1)^m\frac{A(s)}{B(s)}e^{st}\right],\quad t>0. \tag{2.21}$$

这两个公式都称为 **Heaviside 展开式**,在用 Laplace 变换解常微分方程时经常碰到.

例 1 利用留数方法求 $F(s)=\frac{s}{s^2+1}$ 的逆变换.

解 这里 $B(s)=s^2+1$,它有两个单零点 $s_1=\mathrm{j}$,$s_2=-\mathrm{j}$,由(2.20)式得

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]=\frac{s}{2s}e^{st}\Big|_{s=\mathrm{j}}+\frac{s}{2s}e^{st}\Big|_{s=-\mathrm{j}}$$

$$=\frac{1}{2}(e^{\mathrm{j}t}+e^{-\mathrm{j}t})=\cos t,\quad t>0.$$

这和我们熟知的结果是一致的.

例 2 利用留数方法求 $F(s)=\frac{1}{s(s-1)^2}$ 的逆变换.

解 这里 $B(s)=s(s-1)^2$,$s=0$ 为单零点,$s=1$ 为二级零点,由(2.21)式可得

$$f(t)=\frac{1}{3s^2-4s+1}e^{st}\Big|_{s=0}+\lim_{s\to 1}\frac{d}{ds}\left[(s-1)^2\frac{1}{s(s-1)^2}e^{st}\right]$$

$$=1+\lim_{s\to 1}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}e^{st}\right)=1+\lim_{s\to 1}\left(\frac{t}{s}e^{st}-\frac{1}{s^2}e^{st}\right)$$

$$=1+(te^{t}-e^{t})=1+e^{t}(t-1),\qquad t>0.$$

例 3 利用部分分式的方法求 $F(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s-2)(s+3)}$的逆变换.

解 因为 $F(s)$为一个有理分式,可以利用部分分式的方法将$F(s)$化成

$$F(s)=\frac{1}{(s+1)(s-2)(s+3)}=\frac{-\frac{1}{6}}{s+1}+\frac{\frac{1}{15}}{s-2}+\frac{\frac{1}{10}}{s+3},$$

所以

$$f(t)=-\frac{1}{6}e^{-t}+\frac{1}{15}e^{2t}+\frac{1}{10}e^{-3t}.$$

例 4 利用部分分式的方法求 $F(s)=\dfrac{1}{s^{2}(s+1)}$的逆变换.

解 同样我们可以将 $F(s)$化成

$$F(s)=\frac{1}{s^{2}(s+1)}=\frac{-1}{s}+\frac{1}{s^{2}}+\frac{1}{s+1},$$

所以

$$f(t)=-1+t+e^{-t}.$$

例 5 利用 Laplace 变换的性质求 $F(s)=\ln\dfrac{s+1}{s-1}$的逆变换.

解 这里利用象函数的微分性质:$\mathscr{L}^{-1}[F'(s)]=-tf(t)$,而$F'(s)=\dfrac{-2}{s^{2}-1}$,

所以

$$\begin{aligned}f(t)&=-\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{-2}{s^{2}-1}\right]\\&=\frac{2}{t}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{2}-1}\right]=\frac{2}{t}\sinh t.\end{aligned}$$

例 6 利用 Laplace 变换的性质求 $F(s)=\dfrac{s}{(s^{2}-1)^{2}}$的逆变换.

解 这里利用象函数的积分性质:$f(t)=t\mathscr{L}^{-1}\left[\int_{s}^{\infty}F(s)\mathrm{d}s\right]$,而

$$\int_{s}^{\infty}F(s)\mathrm{d}s=\int_{s}^{\infty}\frac{s}{(s^{2}-1)^{2}}\mathrm{d}s=\frac{-1}{2(s^{2}-1)}\bigg|_{s}^{\infty}=\frac{1}{2(s^{2}-1)},$$

所以

$$f(t)=t\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{2(s^2-1)}\right]=\frac{t}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-1}\right]=\frac{t}{2}\sinh t.$$

例 7 利用卷积定理求 $F(s)=\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$的逆变换.

解 因为 $F(s)=\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^2}=\dfrac{s}{s^2+a^2}\cdot\dfrac{s}{s^2+a^2}$,所以

$$\begin{aligned}f(t)&=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\cdot\frac{s}{s^2+a^2}\right]\\&=\cos at*\cos at=\int_0^t\cos a\tau\cos a(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{2}\int_0^t[\cos a(2\tau-t)+\cos at]\,\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{2}\left(t\cos at+\frac{1}{a}\sin at\right).\end{aligned}$$

例 8 利用卷积定理求 $F(s)=\dfrac{\mathrm{e}^{-\pi s}}{s(s+a)}$的逆变换.

解 因为 $F(s)=\dfrac{\mathrm{e}^{-\pi s}}{s(s+a)}=\dfrac{\mathrm{e}^{-\pi s}}{s}\cdot\dfrac{1}{s+a}$,所以

$$\begin{aligned}f(t)&=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\pi s}}{s}\cdot\frac{1}{s+a}\right]\\&=u(t-\pi)*\mathrm{e}^{-at}=\int_0^t u(\tau-\pi)\mathrm{e}^{-a(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau\\&=\int_\pi^t\mathrm{e}^{-a(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{a}[1-\mathrm{e}^{-a(t-\pi)}]u(t-\pi).\end{aligned}$$

例 9 利用查表的方法求 $F(s)=\dfrac{1}{s(s^2+1)^2}$的逆变换.

解 根据附录Ⅱ中公式(31),在 $a=1$ 时,有

$$f(t)=(1-\cos t)-\frac{1}{2}t\sin t.$$

例 10 利用查表方法求 $F(s)=\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$的逆变换.

解 在附录Ⅱ所列的表中找不到现成的公式,但

$$F(s)=\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}=\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}-\frac{a^2}{(s^2+a^2)^2},$$

等式右边的两项,分别可以应用附录Ⅱ中的公式(30)和公式(29),所以

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}\right]=\frac{1}{2a}(\sin at+at\cos at),$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{a^2}{(s^2+a^2)^2}\right]=\frac{1}{2a}(\sin at-at\cos at),$$

这样

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\right]=t\cos at.$$

例 11 求 $F(s)=\dfrac{s}{(s-4)(s-2)^2}$的逆变换.

解 我们可以用不同的方法求 $F(s)$的逆变换 $f(t)$.例如:

方法一(利用留数方法)

这里 $B(s)=(s-4)(s-2)^2$,$s=4$ 为一级零点,$s=2$ 为二级零点,由(2.21)式可得

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{s}{3s^2-16s+20}e^{st}\bigg|_{s=4}+\lim_{s\to 2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[(s-2)^2\frac{s}{(s-4)(s-2)^2}e^{st}\right]\\&=e^{4t}+\lim_{s\to 2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{s}{s-4}e^{st}\right)\\&=e^{4t}+\lim_{s\to 2}\left[\frac{-4}{(s-4)^2}e^{st}+\frac{st}{s-4}e^{st}\right]\\&=e^{4t}-e^{2t}-te^{2t}=e^{4t}-(1+t)e^{2t}.\end{aligned}$$

方法二(利用部分分式方法)

因为 $F(s)$为一有理分式,可以将 $F(s)$化成

$$F(s)=\frac{s}{(s-4)(s-2)^2}=\frac{1}{s-4}-\frac{1}{s-2}-\frac{1}{(s-2)^2},$$

所以

$$f(t)=e^{4t}-e^{2t}-te^{2t}=e^{4t}-(1+t)e^{2t}.$$

方法三(利用卷积定理方法)

因为

$$F(s)=\frac{s}{(s-4)(s-2)^2}=\frac{s}{s-4}\cdot\frac{1}{(s-2)^2}=\left(1+\frac{4}{s-4}\right)\frac{1}{(s-2)^2},$$

其中

$$\mathscr{L}^{-1}\left[1+\frac{4}{s-4}\right]=\delta(t)+4e^{4t},\ \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2}\right]=te^{2t},$$

所以

$$\begin{aligned}
f(t)&=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\left(1+\frac{4}{s-4}\right)\frac{1}{(s-2)^2}\right]\\
&=(\delta(t)+4e^{4t})*te^{2t}\\
&=\int_0^t(\delta(\tau)+4e^{4\tau})(t-\tau)e^{2(t-\tau)}d\tau\\
&=\int_0^t\delta(\tau)(t-\tau)e^{2(t-\tau)}d\tau+\int_0^t 4e^{4\tau}(t-\tau)e^{2(t-\tau)}d\tau\\
&=te^{2t}+4e^{2t}\left[\int_0^t te^{2\tau}d\tau-\int_0^t \tau e^{2\tau}d\tau\right]\\
&=te^{2t}+4e^{2t}\left(-\frac{t}{2}+\frac{1}{4}e^{2t}-\frac{1}{4}\right)\\
&=e^{4t}-(1+t)e^{2t}.
\end{aligned}$$

方法四(利用查表方法)

根据附录Ⅱ中公式(40),在 $a=-4,b=-2$ 时,有

$$\begin{aligned}
f(t)&=\left.\frac{[a-b(a-b)t]e^{-bt}-ae^{-at}}{(a-b)^2}\right|_{\substack{a=-4\\b=-2}}\\
&=e^{4t}-(1+t)e^{2t}.
\end{aligned}$$

上述 11 个例子介绍了如何由一个象函数求出象原函数的一些方法,例 11 还介绍了用多种方法来求 Laplace 逆变换.所有这些都表明,在实际应用中应视具体问题来决定或选择求法.例如在例 1,例 2 中除了用留数的方法以外,也可以用部分分式的方法、卷积定理的方法和查表的方法求出逆变换(而且例 1 本身就是一个公式,即 $f(t)=\cos t$ 和 $F(s)=\frac{s}{s^2+1}$ 为一个 Laplace 变换对).例 3,例 4 除了用部分分式方法外,也可以用留数方法、查表的方法,甚至卷积定理的方法.其他的例子请读者思考,不妨试一试,从而更好地掌握和巩固所学的内容.

习题四

1. 设 $f_1(t)$, $f_2(t)$ 均满足 Laplace 变换存在定理的条件(设它们的增长指数均为 c),且 $\mathscr{L}[f_1(t)]=F_1(s)$, $\mathscr{L}[f_2(t)]=F_2(s)$,证明乘积 $f_1(t)\cdot f_2(t)$ 的 Laplace 变换一定存在,且

$$\mathscr{L}[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\int_{\beta-\mathrm{j}\infty}^{\beta+\mathrm{j}\infty}F_1(q)F_2(s-q)\mathrm{d}q,$$

其中 $\beta>c$, $\mathrm{Re}(s)>\beta+c$.

2. 求下列函数的 Laplace 逆变换(象原函数),并用另一种方法加以验证.

(1) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+a^2}$;　　(2) $F(s)=\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}$;

(3) $F(s)=\dfrac{s+c}{(s+a)(s+b)^2}$;　　(4) $F(s)=\dfrac{s^2+2a^2}{(s^2+a^2)^2}$;

(5) $F(s)=\dfrac{1}{(s^2+a^2)s^3}$;　　(6) $F(s)=\dfrac{1}{s(s+a)(s+b)}$;

(7) $F(s)=\dfrac{1}{s^4-a^4}$;　　(8) $F(s)=\dfrac{s^2+2s-1}{s(s-1)^2}$;

(9) $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s^2-1)}$;　　(10) $F(s)=\dfrac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}$.

3. 求下列函数的 Laplace 逆变换:

(1) $F(s)=\dfrac{1}{(s^2+4)^2}$;　　(2) $F(s)=\dfrac{s}{s+2}$;

(3) $F(s)=\dfrac{2s+1}{s(s+1)(s+2)}$;　　(4) $F(s)=\dfrac{1}{s^4+5s^2+4}$;

(5) $F(s)=\dfrac{s+1}{9s^2+6s+5}$;　　(6) $F(s)=\ln\dfrac{s^2-1}{s^2}$;

(7) $F(s)=\dfrac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}$;　　(8) $F(s)=\dfrac{1}{(s^2+2s+2)^2}$;

(9) $F(s)=\dfrac{s^2+4s+4}{(s^2+4s+13)^2}$;　　(10) $F(s)=\dfrac{2s^2+s+5}{s^3+6s^2+11s+6}$;

(11) $F(s)=\dfrac{s+3}{s^3+3s^2+6s+4}$;　　(12) $F(s)=\dfrac{2s^2+3s+3}{(s+1)(s+3)^3}$;

(13) $F(s)=\dfrac{1+e^{-2s}}{s^2}$;　　(14) $F(s)=\dfrac{s^3+5s^2+9s+7}{(s+1)(s+2)}$.

§2.5 Laplace 变换的应用

Laplace 变换和 Fourier 变换一样,在许多工程技术和科学研究领域中有着广泛的应用,特别是在力学系统、电学系统、自动控制系统、可靠性系统以及随机服务系统等系统科学中都起着重要作用.人们在研究这些系统时,往往是从实际问题出发,将研究的对象归结为一个数学模型,在许多场合下,这个数学模型是线性的.换句话说,它可以用线性的积分方程、微分方程、微分积分方程乃至于偏微分方程等来描述,这样,我们可以像用 Fourier 变换那样,用 Laplace 变换这一方法去分析和求解这类线性方程,而且我们可以发现这一方法是十分有效的,甚至是不可缺少的.它的求解步骤和用 Fourier 变换方法求解此类线性方程的步骤完全类似(参看图 1-16),下面我们将分别加以介绍.最后,还要给出线性系统的传递函数这一重要概念.

通过 §1.6 和本节的讨论,我们将能够明白在不同的情况下如何使用这两类变换,希望读者注意比较和总结.

1. 微分、积分方程的 Laplace 变换解法

例 1 求方程 $y''+2y'-3y=e^{-t}$ 满足初值条件

$$y\Big|_{t=0}=0,\ y'\Big|_{t=0}=1$$

的解.

解 设方程的解 $y=y(t)$, $t\geqslant 0$ 且设 $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$. 对方程的两边取 Laplace 变换,并考虑到初值条件,则得

$$s^2Y(s)-1+2sY(s)-3Y(s)=\frac{1}{s+1}.$$

这是含未知量 $Y(s)$ 的代数方程,整理后解出 $Y(s)$,得

$$Y(s)=\frac{s+2}{(s+1)(s-1)(s+3)},$$

这便是所求函数的 Laplace 变换,取它的逆变换便可以得出所求函数 $y(t)$.

为了求 $Y(s)$ 的逆变换,将它化为部分分式的形式,即

$$Y(s)=\frac{s+2}{(s+1)(s-1)(s+3)}=\frac{-\frac{1}{4}}{s+1}+\frac{\frac{3}{8}}{s-1}+\frac{-\frac{1}{8}}{s+3},$$

取其逆变换,最后得

$$y(t)=-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{3}{8}e^{t}-\frac{1}{8}e^{-3t}$$
$$=\frac{1}{8}(3e^{t}-2e^{-t}-e^{-3t}).$$

这便是所求微分方程满足所给初值条件的解.

本例是一个常系数非齐次线性常微分方程满足初值条件的求解问题.按照 § 1.6 中的提法,有时也简称为常系数线性微分方程的初值问题.下面将给出一个常系数线性微分方程的边值问题的例子.

例 2 求方程 $y''-2y'+y=0$ 满足边界条件

$$y(0)=0,\quad y(l)=4$$

的解,其中 l 为已知常数.

解 设方程的解 $y=y(x)$,$0\leqslant x\leqslant l$ 且设 $\mathscr{L}[y(x)]=Y(s)$(注意自变量 t 通常表示时间,如不会混淆,这里也可以记 $y=y(t)$).对方程的两边取 Laplace 变换,并考虑到边界条件,则得

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-2[sY(s)-y(0)]+Y(s)=0.$$

整理后可得

$$Y(s)=\frac{y'(0)}{(s-1)^2}.$$

取其逆变换,可得

$$y(x)=y'(0)xe^{x}.$$

为了确定 $y'(0)$,令 $x=l$,代入上式,由第二个边界条件可得

$$4=y(l)=y'(0)le^{l}.$$

从而

$$y'(0)=\frac{4}{l}e^{-l},$$

于是

$$y(x)=\frac{4}{l}xe^{x-l}.$$

这便是所求微分方程满足边界条件的解.通过求解过程可以发现,常系数线性微分方程的边值问题可以先当作它的初值问题来求解,而所得微分方程的解中含有未知的初值可由已知的边值而求得,从而最后完全确定微分方程满足边界条件的解.

对于某些变系数的微分方程,即当方程中每一项为 $t^n y^{(m)}(t)$ 的形式时也可以用 Laplace 变换的方法求解.由象函数的微分性质可知

$$\mathscr{L}[t^n f(t)]=(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\mathscr{L}[f(t)],$$

从而

$$\mathscr{L}[t^n f^{(m)}(t)]=(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\mathscr{L}[f^{(m)}(t)].$$

下面我们给出一个求解变系数微分方程初值问题的例子.

例 3 求方程 $ty''+(1-2t)y'-2y=0$ 满足初值条件

$$y\Big|_{t=0}=1,\ y'\Big|_{t=0}=2$$

的解.

解 对方程两边取 Laplace 变换,设 $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$,即

$$\mathscr{L}[ty'']+\mathscr{L}[(1-2t)y']-\mathscr{L}[2y]=0,$$

亦即

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]+sY(s)-y(0)+2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[sY(s)-y(0)]-2Y(s)=0.$$

考虑到初值条件,代入整理化简后可得

$$(2-s)Y'(s)-Y(s)=0.$$

这是可分离变量的一阶微分方程,即

$$\frac{\mathrm{d}Y}{Y}=-\frac{\mathrm{d}s}{s-2}.$$

积分后可得

$$\ln Y(s)=-\ln(s-2)+\ln C,$$

所以

$$Y(s)=\frac{C}{s-2},$$

取其逆变换可得 $y(t)=Ce^{2t}$,为确定常数 C,令 $t=0$ 代入,有

$$1=y(0)=C.$$

故方程满足初值条件的解为 $y(t)=e^{2t}$.

例 4 求积分方程

$$y(t)=h(t)+\int_0^t y(t-\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

的解，其中 $h(t)$，$f(t)$ 为定义在 $[0,+\infty)$ 上的已知实值函数.

解 设 $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$，$\mathscr{L}[h(t)]=H(s)$ 及 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$. 对方程两边取 Laplace 变换，由卷积定理可得

$$\begin{aligned}Y(s)&=H(s)+\mathscr{L}[y(t)*f(t)]\\&=H(s)+Y(s)\cdot F(s),\end{aligned}$$

所以

$$Y(s)=\frac{H(s)}{1-F(s)}.$$

如果令 $s=\beta+\mathrm{j}\omega$，由 Laplace 反演积分公式，有

$$\begin{aligned}y(t)&=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{H(s)}{1-F(s)}\right]\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\beta-\mathrm{j}\omega}^{\beta+\mathrm{j}\omega}\frac{H(s)}{1-F(s)}\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s\quad(t>0).\end{aligned}$$

这里，我们给出的是由象函数 $Y(s)$ 求它的象原函数 $y(t)$ 的一般公式，如果 $h(t)$ 和 $f(t)$ 具体给出，则可以提供多种方法获得结果. 例如取 $h(t)=t$，$f(t)=t$.

方法一 直接从象函数 $Y(s)$ 的关系式中求出 $y(t)$. 这里，$H(s)=\mathscr{L}[h(t)]=\mathscr{L}[t]=\frac{1}{s^2}$，$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\mathscr{L}[t]=\frac{1}{s^2}$. 因此

$$Y(s)=\frac{H(s)}{1-F(s)}=\frac{1}{s^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}\right),$$

所以

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-t})=\sinh t.$$

方法二 对原积分方程两边求导，化为微分方程后求解. 原积分方程

$$\begin{aligned}y(t)&=h(t)+\int_0^t y(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\\(\text{利用卷积定义})&=h(t)+\int_0^t y(\tau)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\(\text{由 } h(t)=f(t)=t)&=t+\int_0^t y(\tau)(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\&=t+t\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau-\int_0^t \tau y(\tau)\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

对上式两边分别对 t 求导，可得

$$y'(t)=1+\int_0^t y(\tau)\,\mathrm{d}\tau+ty(t)-ty(t)$$
$$=1+\int_0^t y(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

再求导,可得

$$y''(t)=y(t),$$

而且当 $t=0$ 时,有 $y(0)=0,y'(0)=1$.因此,求原积分方程的解转化为求下列微分方程的解,即

$$\begin{cases}y''(t)-y(t)=0,\\ y(0)=0,y'(0)=1.\end{cases}$$

对方程两边取 Laplace 变换,可得

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-Y(s)=0,$$

即

$$s^2Y(s)-1-Y(s)=0,$$

从而

$$Y(s)=\frac{1}{s^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}\right),$$

所以

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t})=\sinh t.$$

方法三 利用卷积的微分性质,求解下列方程

$$y(t)=t+\int_0^t y(\tau)(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=t+y(t)*t.$$

对上述方程两边分别对 t 求导,根据 Laplace 变换的卷积的微分性质,即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f_1(t)*f_2(t)]=f_1(t)*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_2(t)+f_1(t)f_2(0)$$
$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_1(t)*f_2(t)+f_1(0)f_2(t),$$

可得

$$y'(t)=1+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[y(t)*t]$$
$$=1+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)*t+y(0)\cdot t$$
$$(y(0)=0)=1+y'(t)*t,$$

再求导,可得

$$\begin{aligned} y''(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[y'(t) * t] \\ &= y'(t) * 1 + y'(t) \cdot 0 \\ &= y'(t) * 1 = \int_0^t y'(\tau) \cdot 1 \mathrm{d}\tau = y(t). \end{aligned}$$

同样可获得下列微分方程

$$\begin{cases} y''(t) - y(t) = 0, \\ y(0) = 0, y'(0) = 1. \end{cases}$$

因此,我们也能获得 $y(t) = \sinh t$.

求解该积分方程有多种方法,而且可以看出这一积分方程实际上是一个卷积型的积分方程,它有着许多实际应用.例如在更新过程中有许多重要的量(如更新函数、更新密度等)均满足这一方程.因此,在更新过程中特别称此积分方程为**更新方程**.下面我们再给出一些实际例子.

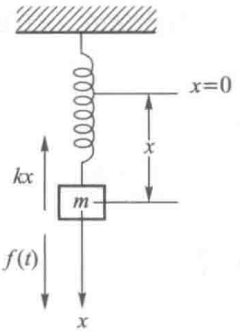


图 2-10

例 5 质量为 m 的物体挂在弹簧系数为 k 的弹簧一端(如图 2-10 所示),作用在物体上的外力为 $f(t)$.若物体自静止平衡位置 $x=0$ 处开始运动,求该物体的运动规律 $x(t)$.

解 根据 Newton 第二运动定律,有

$$mx'' = f(t) - kx,$$

其中 $-kx$ 由 Hooke 定律所得,是使物体回到平衡位置的弹簧的恢复力.所以,物体运动的微分方程为

$$mx'' + kx = f(t) \quad (t \geqslant 0),$$

且

$$x(0) = x'(0) = 0.$$

这是二阶常系数非齐次微分方程,现对方程两边取 Laplace 变换,设

$$\mathscr{L}[x(t)] = X(s), \quad \mathscr{L}[f(t)] = F(s),$$

并考虑到初值条件,则得

$$ms^2 X(s) + kX(s) = F(s),$$

如记 $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$,有

$$X(s)=\frac{1}{m}\cdot\frac{F(s)}{s^2+\omega_0^2}=\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{s^2+\omega_0^2}\cdot F(s).$$

因为 $\mathscr{L}\left[\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0}\right]=\frac{1}{s^2+\omega_0^2}$,应用卷积定理,所以有

$$\begin{aligned}x(t)&=\frac{1}{m}\cdot\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0}*f(t)\\&=\frac{1}{m\omega_0}\int_0^t f(\tau)\sin\omega_0(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

如 $f(t)$ 具体给出时,可以直接从解的象函数 $X(s)$ 的关系式中解出 $x(t)$ 来.例如:

当物体在 $t=0$ 时受到冲击力 $f(t)=A\delta(t)$,其中 A 为常数时,

$$\mathscr{L}[f(t)]=\mathscr{L}[A\delta(t)]=A,$$

有

$$X(s)=\frac{A}{m}\cdot\frac{1}{s^2+\omega_0^2},$$

从而

$$x(t)=\frac{A}{m\omega_0}\sin\omega_0 t.$$

可见,在冲击力作用下,运动为一正弦振动,振幅是$\frac{A}{m\omega_0}$,角频率是 ω_0,称 ω_0 为该系统的**自然频率**(或称**固有频率**).

值得注意的是上述微分方程是在 $t\geqslant 0$ 时建立起来的.如果在 $t>0$ 时,则微分方程及初值条件都会有变化,即

$$mx''+kx=0$$

且

$$x(0)=0,x'(0)=\frac{A}{m}.$$

这是因为冲击力 $\delta(t)$,当 $t>0$ 时已经作用过了,并且在 $t=0$ 时,使物体的初速度由零突变到$\frac{A}{m}$,但它们的解完全相同.读者不妨计算一下.

当物体所受作用力为 $f(t)=A\sin\omega t$ (A 为常数)时,

$$\mathscr{L}[f(t)]=A\frac{\omega}{s^2+\omega^2},$$

所以

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s^2+\omega_0^2} \cdot \frac{A\omega}{s^2+\omega^2} \\
&= \frac{A\omega}{m} \cdot \frac{1}{(s^2+\omega_0^2)(s^2+\omega^2)} \\
&= \frac{A\omega}{m} \cdot \frac{1}{\omega^2-\omega_0^2}\left(\frac{1}{s^2+\omega_0^2}-\frac{1}{s^2+\omega^2}\right),
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{A\omega}{m(\omega^2-\omega_0^2)}\left(\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0}-\frac{\sin\omega t}{\omega}\right) \\
&= \frac{A}{m\omega_0(\omega^2-\omega_0^2)}(\omega\sin\omega_0 t-\omega_0\sin\omega t).
\end{aligned}
$$

这里 ω 为作用力的**频率**(或称**扰动频率**).若 $\omega \neq \omega_0$,运动是由两种不同频率的振动复合而成的.若 $\omega=\omega_0$(即扰动频率等于自然频率),便产生共振,此时振幅将随时间无限增大.这是理论上的情形.实际上,在振幅相当大时,或者系统已被破坏,或者系统已不再满足原来的微分方程.

例 6 在图 2-11 所示的 RC 串联电路中,若外加电动势为正弦交流电压 $e(t)=U_m\sin(\omega t+\varphi)$,求开关闭合后,回路中电流 $i(t)$ 及电容器两端的电压 $u_C(t)$.

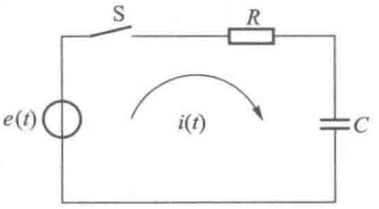


图 2-11

解 根据 Kirchhoff 定律,有

$$u_R+u_C=e(t),$$

其中

$$u_R=Ri(t), \quad i(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}.$$

所以

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=e(t)=U_m\sin(\omega t+\varphi),$$

这就是该电路中电容器两端电压所满足的关系式,它是一阶线性非齐次微分方程,现对方程式两边取 Laplace 变换,设

$$\mathscr{L}[u_C(t)]=U_C(s),$$

并注意到 $u_C(t)\big|_{t=0}=0$,得

$$RCsU_C(s)+U_C(s)=\mathscr{L}[e(t)].$$

但

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[e(t)]&=\mathscr{L}[U_m(\sin\omega t\cos\varphi+\cos\omega t\sin\varphi)]\\&=\frac{U_m\omega\cos\varphi}{s^2+\omega^2}+\frac{U_m s\sin\varphi}{s^2+\omega^2}\\&=\frac{U_m}{s^2+\omega^2}(\omega\cos\varphi+s\sin\varphi).\end{aligned}$$

所以

$$RCsU_C(s)+U_C(s)=\frac{U_m}{s^2+\omega^2}(\omega\cos\varphi+s\sin\varphi),$$

即

$$U_C(s)=\frac{U_m(\omega\cos\varphi+s\sin\varphi)}{RC\left(s+\frac{1}{RC}\right)(s-\mathrm{j}\omega)(s+\mathrm{j}\omega)}.$$

$U_C(s)$的一级极点为 $s_1=-\frac{1}{RC}, s_2=\mathrm{j}\omega, s_3=-\mathrm{j}\omega$.

根据 Heaviside 展开式(2.20),得

$$\begin{aligned}u_C(t)=\frac{U_m}{RC}\Bigg[&\frac{\omega\cos\varphi-\frac{1}{RC}\sin\varphi}{\left(-\frac{1}{RC}-\mathrm{j}\omega\right)\left(-\frac{1}{RC}+\mathrm{j}\omega\right)}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}+\frac{\omega\cos\varphi+\mathrm{j}\omega\sin\varphi}{\left(\mathrm{j}\omega+\frac{1}{RC}\right)(2\mathrm{j}\omega)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\\&+\frac{\omega\cos\varphi-\mathrm{j}\omega\sin\varphi}{\left(-\mathrm{j}\omega+\frac{1}{RC}\right)(-2\mathrm{j}\omega)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\Bigg],\end{aligned}$$

利用 Euler 公式,通过化简整理可得

$$\begin{aligned}u_C(t)=&\frac{U_m}{\omega C}\left[\frac{R}{\left(R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}\right)}\cos\varphi-\frac{\frac{1}{\omega C}}{\left(R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}\right)}\sin\varphi\right]\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\\&+\frac{U_m}{RC}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}}{-2\omega+\frac{2\mathrm{j}}{RC}}+\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}}{-2\omega-\frac{2\mathrm{j}}{RC}}\right]\\=&\frac{1}{\omega C}\cdot\frac{U_m}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\left(\frac{R}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\cos\varphi+\frac{-\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\sin\varphi\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\omega C}\cdot\frac{U_m}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\left[\frac{R}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\cos(\omega t+\varphi)+\frac{-\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\sin(\omega t+\varphi)\right].$$

由于在 RC 串联电路中,其阻抗为

$$Z=R-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C},\quad |Z|=\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}\ (\text{见图 2-12}),$$

$$I_m=\frac{U_m}{|Z|},$$

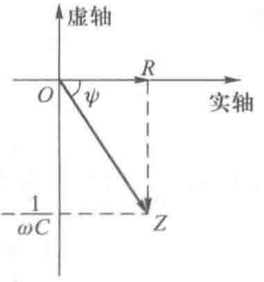


图 2-12

这样

$$u_C(t)=\frac{I_m}{\omega C}(\cos\psi\cos\varphi+\sin\psi\sin\varphi)\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$$

$$-\frac{I_m}{\omega C}[\cos\psi\cos(\omega t+\varphi)+\sin\psi\sin(\omega t+\varphi)]$$

$$=\frac{I_m}{\omega C}\cos(\varphi-\psi)\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}-\frac{I_m}{\omega C}\cos(\omega t+\varphi-\psi).$$

过渡电流 $i(t)=C\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$,所以

$$i(t)=C\left[\frac{I_m}{\omega C}\cos(\varphi-\psi)\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\left(-\frac{1}{RC}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{I_m}{\omega C}\sin(\omega t+\varphi-\psi)\cdot\omega\right]$$

$$=-\frac{I_m}{R\omega C}\cos(\varphi-\psi)\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}+I_m\sin(\omega t+\varphi-\psi).$$

这两个结果表明了电路在接通电源 $e(t)$ 以后,$u_C(t)$ 和 $i(t)$ 随时间变化的规律.它们都是由两部分构成的,由线性微分方程解的结构可知,它们的第一项对应着线性齐次微分方程的通解,称为所求量的**暂态分量**;它们的第二项对应着线性非齐次微分方程的特解,称为所求量的**稳态分量**.可以看出当时间$t\to+\infty$ 时,暂态分量消失,表明过渡过程结束,进入稳定状态.在实际工程中,时间 t 不可能是无限长的,我们称 $\tau=RC$ 为**时间常数**.它是表征过渡过程时间长短的一个物理量,一般当 $t=3\tau$ 时,就认为过渡过程结束,进入稳定状态.

例 7 在 RLC 电路中串接直流电源 E(如图 2-13 所示),求回路中电流 $i(t)$.

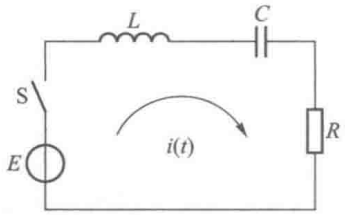


图 2-13

解 根据 Kirchhoff 定律,有

$$u_C+u_R+u_L=E,$$

其中

$$u_R=Ri(t),\quad i(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t},$$

即

$$u_C=\frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,\mathrm{d}t.$$

而 $u_L=L\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)$.代入上式,可得

$$\frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,\mathrm{d}t+Ri(t)+L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)=E,\quad i(0)=0.$$

这是 RLC 串联电路中电流 $i(t)$ 所满足的关系式,它是一个微分积分方程.对该方程两边取 Laplace 变换,且设 $\mathscr{L}[i(t)]=I(s)$,则有

$$\frac{1}{Cs}I(s)+RI(s)+LsI(s)=\mathscr{L}[E]=\frac{E}{s}.$$

所以

$$I(s)=\frac{\mathscr{L}[E]}{Ls+R+\dfrac{1}{Cs}}.$$

若用 r_1 和 r_2 表示方程 $s^2+\dfrac{R}{L}s+\dfrac{1}{LC}=0$ 的根,则有

$$r_1=-\frac{R}{2L}+\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}},\quad r_2=-\frac{R}{2L}-\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}.$$

我们记

$$\alpha=\frac{R}{2L},\quad \beta=\sqrt{\alpha^2-\frac{1}{LC}},$$

则可写

$$r_1=-\alpha+\beta,\quad r_2=-\alpha-\beta.$$

所以

$$s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}=(s-r_1)(s-r_2),$$

故

$$I(s)=\frac{E}{L(s-r_1)(s-r_2)}.$$

根据 Heaviside 展开式,可求得电流为

$$i(t)=\frac{E}{L}\left(\frac{e^{r_1t}}{r_1-r_2}+\frac{e^{r_2t}}{r_2-r_1}\right)=\frac{E}{L}\cdot\frac{e^{r_1t}-e^{r_2t}}{r_1-r_2}.$$

将 r_1,r_2的数值代入得

$$i(t)=\frac{Ee^{-\alpha t}(e^{\beta t}-e^{-\beta t})}{2\beta L}=\frac{E}{\beta L}e^{-\alpha t}\sinh\beta t.$$

当 $\alpha^2>\frac{1}{LC}$,即 $R>2\sqrt{\frac{L}{C}}$时,β 为一实数,此时可直接由上式计算 $i(t)$.

当 $R<2\sqrt{\frac{L}{C}}$时,β 为一虚数,上式可作如下的变换,令

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-\alpha^2},$$

此时

$$\beta=\sqrt{\alpha^2-\frac{1}{LC}}=j\omega.$$

考虑到

$$\sinh jz=j\sin z,$$

此时,$i(t)$可写成

$$i(t)=\frac{E}{\omega L}e^{-\alpha t}\sin\omega t.$$

该式表明在回路中出现了角频率为 ω 的衰减正弦振荡.

当 $R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$时,即在临界情况下,此时 $\beta=0,r_1=r_2=-\alpha$,有

$$I(s)=\frac{E}{L(s-r_1)(s-r_2)}=\frac{E}{L(s+\alpha)^2},$$

根据 Heaviside 展开式,$s=-\alpha$ 为二级极点.容易求得

$$i(t)=\frac{E}{L}te^{-\alpha t}.$$

注意,本例中的微分积分方程的初值问题,实际上可以转化为一个二阶线性常系数齐次微分方程的初值问题,有兴趣的读者可以一试.

例 8 求方程组

$$\begin{cases} y''-x''+x'-y=e^t-2, \\ 2y''-x''-2y'+x=-t \end{cases}$$

满足初值条件

$$\begin{cases} y(0)=y'(0)=0, \\ x(0)=x'(0)=0 \end{cases}$$

的解.

解 这是一个常系数微分方程组的初值问题.对方程组的两个方程两边取 Laplace 变换,设

$$\mathscr{L}[y(t)]=Y(s),\mathscr{L}[x(t)]=X(s).$$

并考虑到初值条件,则得

$$\begin{cases} s^2Y(s)-s^2X(s)+sX(s)-Y(s)=\dfrac{1}{s-1}-\dfrac{2}{s}, \\ 2s^2Y(s)-s^2X(s)-2sY(s)+X(s)=-\dfrac{1}{s^2}. \end{cases}$$

整理化简后为

$$\begin{cases} (s+1)Y(s)-sX(s)=\dfrac{-s+2}{s(s-1)^2}, \\ 2sY(s)-(s+1)X(s)=-\dfrac{1}{s^2(s-1)}. \end{cases}$$

解这个代数方程组,即得

$$\begin{cases} Y(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2}, \\ X(s)=\dfrac{2s-1}{s^2(s-1)^2}. \end{cases}$$

现根据 § 2.4 的 Heaviside 展开式来求它们的逆变换.

对于 $Y(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2}$,根据 § 2.4 的例 2 可得

$$y(t)=1+te^t-e^t.$$

$X(s)=\dfrac{2s-1}{s^2(s-1)^2}$具有两个二级极点:$s=0,s=1$.所以

$$x(t)=\lim_{s\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{2s-1}{(s-1)^2}e^{st}\right]+\lim_{s\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{2s-1}{s^2}e^{st}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&=\lim_{s\to 0}\left[te^{st}\frac{2s-1}{(s-1)^2}-\frac{2s}{(s-1)^3}e^{st}\right]\\
&\quad+\lim_{s\to 1}\left[te^{st}\frac{2s-1}{s^2}+e^{st}\frac{2(1-s)}{s^3}\right]\\
&=-t+te^t.
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{cases}
y(t)=1-e^t+te^t,\\
x(t)=-t+te^t.
\end{cases}
$$

这便是所求方程组的解.

对于某些变系数微分方程组以及微分积分方程组的初值问题的求解,将作为练习放在习题中.

从以上的例题可以看出,用 Laplace 变换求线性微分、积分方程及其方程组的解时,有如下的优点:

(1) 在求解的过程中,初值条件也同时用上了,求出的结果就是需要的特解.这样就避免了在微分方程的一般解法中,先求通解再根据初值条件确定任意常数求出特解的复杂运算.

(2) 零初值条件在工程技术中是十分常见的,由(1)可知,用 Laplace 变换求解就显得更加简单,而在微分方程的一般解法中不会因此而有任何简化.

(3) 对于一个非齐次的线性微分方程来说,当非齐次项(如例 5 中的 $f(t)$)不是连续函数,而是包含 δ-函数或有第一类间断点的函数时,用 Laplace 变换求解没有任何困难,而用微分方程的一般解法就会困难得多.

(4) 用 Laplace 变换求解线性微分、积分方程组时,不仅比微分方程组的一般解法要简便得多,而且可以单独求出某一个未知函数,而不需要知道其余的未知函数,这在微分方程组的一般解法中通常是不可能的.

此外,用 Laplace 变换方法求解的步骤明确、规范,便于在工程技术中应用,而且有现成的 Laplace 变换表,可直接获得象原函数(即方程的解).正由于这些优点,Laplace 变换在许多工程技术领域中有着广泛的应用.

利用 Laplace 变换的延迟性质,还可以求微分、差分方程的解.限于篇幅,这里不再介绍.下面我们将专门列出一小节来介绍某些偏微分方程的 Laplace 变换解法.

2°. 偏微分方程的 Laplace 变换解法

Laplace 变换也是求解某些偏微分方程的方法之一,其计算过程和步骤与求

解上述各类线性方程及用 Fourier 变换求解偏微分方程的过程及步骤相似.本小节也主要针对线性偏微分方程中的未知函数是二元函数的情形.为方便起见,假定二元函数 $u(x,t)$ 的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 关于 x 取 Laplace 变换或 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 关于 t 取 Laplace 变换都允许(偏)导数运算与积分运算交换次序.在解题时,不再说明.

例 9 (半有界弦振动方程的混合问题)利用 Laplace 变换求解定解问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ (x>0,t>0),\\ u\big|_{t=0}=0,\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0,\\ u\big|_{x=0}=\varphi(t),\ \lim\limits_{x\to+\infty}u(x,t)=0.\end{cases}$$

解 对定解问题关于 t 取 Laplace 变换,记

$$\mathscr{L}[u(x,t)]=U(x,s),$$
$$\mathscr{L}[\varphi(t)]=\Phi(s),$$

并利用 Laplace 变换的微分性质及初值条件,可得

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]=s^2U(x,s)-su(x,0)-\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=s^2U(x,s),$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^{+\infty}u(x,t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}U(x,s),$$

$$\mathscr{L}[u(0,t)]=U(0,s)=\Phi(s),$$

$$\lim_{x\to+\infty}U(x,s)=0①.$$

这样,求解原定解问题转化为求解含有参数 s 的常微分方程的边值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}U(x,s)-\dfrac{s^2}{a^2}U(x,s)=0,\\ U(0,s)=\Phi(s),\ \lim\limits_{x\to+\infty}U(x,s)=0.\end{cases}$$

这里,方程是 $U(x,s)$ 关于 x 的一个二阶常系数齐次线性微分方程,我们很容易得到该方程的通解为

---

① 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x,t)=0$ 可知,当 x 充分大时,对任给的正数 ε,对一切 $t>0$,有 $|u(x,t)-0|=|u(x,t)|<\varepsilon$,所以

$$|U(x,s)-0|=\left|\int_0^{+\infty}u(x,t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\right|\leqslant\varepsilon\int_0^{+\infty}|\mathrm{e}^{-st}|\mathrm{d}t=\frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}(s)}\ (\mathrm{Re}(s)>0).$$

从而有 $\lim\limits_{x\to+\infty}U(x,s)=0$.

$$U(x,s)=c_1\mathrm{e}^{-\frac{s}{a}x}+c_2\mathrm{e}^{\frac{s}{a}x}.$$

由其边界条件可得

$$c_1=\Phi(s),\quad c_2=0.$$

从而

$$U(x,s)=\Phi(s)\mathrm{e}^{-\frac{s}{a}x}.$$

对上式取 Laplace 逆变换,且利用延迟性质,从而获得原定解问题的解为

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\mathscr{L}^{-1}[U(x,s)]\\&=\mathscr{L}^{-1}[\Phi(s)\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}s}]\\&=\begin{cases}0, & t<\dfrac{x}{a},\\ \varphi\left(t-\dfrac{x}{a}\right), & t>\dfrac{x}{a}.\end{cases}\end{aligned}$$

从例 9 求解的过程可以看出,用 Laplace 变换求解偏微分方程的步骤类似于用 Fourier 变换求解偏微分方程的三个步骤,即先将定解问题中的未知函数看作某一个自变量的函数,对方程及定解条件关于该自变量取 Laplace 变换,把偏微分方程和定解条件化为象函数的常微分方程的定解问题;再根据这个常微分方程和相应的定解条件,求出象函数;然后再取 Laplace 逆变换,得到原定解问题的解.

例 10 (半有界杆热传导方程的混合问题)利用 Laplace 变换求解定解问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ (x>0,t>0),\\ u\big|_{t=0}=u_0,\\ u\big|_{x=0}=u_1,\quad \lim\limits_{x\to+\infty}u(x,t)=u_0,\end{cases}$$

其中 u_0,u_1 均为常数.

解 对定解问题关于 t 取 Laplace 变换,并利用微分性质及初值条件可得

$$\mathscr{L}[u(x,t)]=U(x,s),$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=sU(x,s)-u(x,0)=sU-u_0,$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}U(x,s).$$

这样,求解原定解问题转化为求解含有参数 s 的常微分方程的边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}-\dfrac{s}{a^2}U=-\dfrac{u_0}{a^2},\\ U(0,s)=\dfrac{u_1}{s},\ \lim\limits_{x\to+\infty}U(x,s)=\dfrac{u_0}{s}.\end{cases}$$

这是一个二阶常系数非齐次线性微分方程的边值问题,我们容易求得该方程的通解为

$$U(x,s)=c_1\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{s}}{a}x}+c_2\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}+\frac{u_0}{s}.$$

由边界条件可知

$$c_1=0,\quad c_2=\frac{1}{s}(u_1-u_0),$$

从而

$$U(x,s)=\frac{u_0}{s}+\frac{u_1-u_0}{s}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}.$$

对上式取 Laplace 逆变换,并根据附录Ⅱ中公式(62),原定解问题的解为

$$u(x,t)=u_0+(u_1-u_0)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right),$$

其中 $\operatorname{erfc}\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau$ 称为**余误差函数**.

值得一提的是,对于 $u=u(x,t)$,x,t 的变化范围都是$(0,+\infty)$,我们是否可以将此定解问题关于 x 取 Laplace 变换呢?实际上,我们从$\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}$关于 x 的 Laplace 变换就可以看出,设$\mathscr{L}[u(x,t)]=U(s,t)$,则由微分性质可知

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right]=s^2U(s,t)-su\Big|_{x=0}-\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}.$$

这里$\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}$是未知的,上式不能确定,从而原定解问题中的方程关于 x 取 Laplace 变换后得到的关于 $U(s,t)$的方程也是不确定的.因此,本例题不能对 x 取 Laplace 变换.这就告诉我们,由二元函数$u=u(x,t)$所构成的定解问题,是关于 x 还是关于 t 取 Laplace 变换,不仅要看 x 和 t 的变化范围(定义域),还要考虑定解问题中给出的定解条件.类似地,例 9 给出的定解问题也不能关于 x 取 Laplace 变换.读

者可试之.

例 11 利用 Laplace 变换求解定解问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=1\ (x>0,y>0),\\ u\mid_{x=0}=y+1,\\ u\mid_{y=0}=1.\end{cases}$$

解 设二元函数 $u=u(x,y)$,这里 x,y 的变化范围都是$(0,+\infty)$,现在将定解问题关于 x 取 Laplace 变换,记

$$\mathscr{L}[u(x,y)]=U(s,y),$$

由微分性质及已知条件 $u\mid_{x=0}=y+1$ 可以推出$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{x=0}=1$,从而

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right]&=\mathscr{L}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]=s\mathscr{L}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]-\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x=0}\\&=s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}U(s,y)-1.\end{aligned}$$

这样,原定解问题转化为含有参数 s 的一阶常系数线性微分方程的初值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{1}{s},\\ U\mid_{y=0}=\dfrac{1}{s}.\end{cases}$$

该方程满足初值条件的解很容易得到,即

$$U(s,y)=\frac{1}{s^2}y+\frac{1}{s}y+\frac{1}{s},$$

取其逆变换,可得原定解问题的解为

$$u(x,y)=xy+y+1.$$

本例题的定解问题也可以关于 y 取 Laplace 变换,其结果完全一样.读者不妨自己计算一下.

例 12 利用 Laplace 变换求解定解问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ (0<x<l,t>0),\\ u\mid_{x=0}=0,u\mid_{x=l}=0,\\ u\mid_{t=0}=6\sin\dfrac{\pi x}{2}.\end{cases}$$

解 实际上,这是一个有界杆热传导方程的混合问题.由于 x 的变化范围是$(0,l)$,而 t 的变化范围是$(0,+\infty)$,因此该定解问题应当关于 t 取 Laplace 变换.记

$$\mathscr{L}[u(x,t)]=U(x,s),$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=sU(x,s)-u\Big|_{t=0}=sU-6\sin\frac{\pi x}{2},$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}U(x,s).$$

这样,原定解问题转化为含有参数 s 的二阶常系数线性微分方程的边值问题

$$\begin{cases} a^2\dfrac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}-sU=-6\sin\dfrac{\pi x}{2}, \\ U\big|_{x=0}=0,U\big|_{x=l}=0. \end{cases}$$

由二阶常系数线性微分方程的一般解法可得其通解为

$$U(x,s)=c_1\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{s}}{a}x}+c_2\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}+\frac{6}{s+\dfrac{a^2\pi^2}{4}}\sin\frac{\pi x}{2}.$$

由边界条件可知 $c_1=c_2=0$,从而

$$U(x,s)=\frac{6}{s+\dfrac{a^2\pi^2}{4}}\sin\frac{\pi x}{2}.$$

对上式取其逆变换,则原定解问题的解为

$$u(x,t)=6\mathrm{e}^{-\frac{a^2\pi^2}{4}t}\sin\frac{\pi x}{2}.$$

例 13 (半有界杆热传导方程的混合问题)利用 Laplace 变换求解定解问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ (0<x<+\infty,t>0), \\ u\big|_{x=0}=\varphi(t), \\ u\big|_{t=0}=0. \end{cases}$$

解 这是 § 1.6 中给出的例 9,那里采用 Fourier 正弦变换的方法求得了该定解问题的解.现在我们将用 Laplace 变换的方法求该定解问题的解.对二元函数 $u=u(x,t)$来说,尽管 x,t 的变化范围都是$(0,+\infty)$,出于在例 10 中阐述的理由,该定解问题只能关于 t 取 Laplace 变换.记

$$\mathscr{L}[u(x,t)]=U(x,s),$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=sU(x,s)-u\big|_{t=0}=sU,$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}U(x,s),$$

$$\mathscr{L}[\varphi(t)]=\Phi(s).$$

由半有界杆热传导方程的物理意义可知，当 $x\to+\infty$，有 $u(x,t)\to 0$，从而也有 $U(x,s)\to 0$，这样，原定解问题可转化为二阶常系数线性齐次微分方程的边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}-\dfrac{s}{a^2}U=0,\\ U\big|_{x=0}=\Phi(s).\end{cases}$$

该齐次方程的通解为

$$U(x,s)=c_1\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{s}}{a}x}+c_2\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x},$$

根据边界条件 $U\big|_{x=0}=\Phi(s)$ 及 $\lim\limits_{x\to+\infty}U(x,s)=0$，可得

$$c_1=0,\quad c_2=\Phi(s),$$

因此

$$U(x,s)=\Phi(s)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}=\Phi(s)\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}\sqrt{s}},$$

从而原定解问题的解为

$$u(x,t)=\varphi(t)*\mathscr{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}\sqrt{s}}].$$

为了求得 $\mathscr{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}\sqrt{s}}]$，根据附录Ⅱ中的公式(62)，有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}\sqrt{s}}\right]&=\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\\&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

由题意知 x,t 均为正常数，所以，$x\to+\infty$ 时，$\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau\to 0$ 等价于 $t\to 0$ 时，

$$\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau\to 0.$$

如果记 $f(t)=\mathrm{erfc}\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau$，则

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-\frac{x}{a^2}\sqrt{s}},$$

由微分性质 $\mathscr{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0)$，即

$$sF(s)=\mathscr{L}[f'(t)]+f(0),$$

其中

$$f(0)=\lim_{t\to 0^+}f(t)=0.$$

所以

$$\mathscr{L}^{-1}[sF(s)]=f'(t).$$

因此

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-\frac{x}{a^2}\sqrt{s}}]&=\mathscr{L}^{-1}\left[s\left(\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-\frac{x}{a^2}\sqrt{s}}\right)\right]\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right]\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau\right]\\&=\frac{x}{2at\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}},\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\varphi(t)*\mathscr{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-\frac{x}{a^2}\sqrt{s}}]\\&=\varphi(t)*\frac{x}{2at\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\\&=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\varphi(\xi)}{(t-\xi)^{3/2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\xi)}}\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

这与 §1.6 中的例 9 结果完全一样.

以上我们介绍了利用 Fourier 变换方法和 Laplace 变换方法来求解微分方程.用这两种变换方法求微分、积分方程,只要根据自变量的变化范围是 $(-\infty,+\infty)$ 还是 $(0,+\infty)$,按示意图 1-16 的三个步骤进行,不难获得结果.但用这两种变换方法来求解偏微分方程,尽管其解题步骤与示意图 1-16 的三个步骤大体相似,但必须判断使用哪一种变换方法及对哪一个自变量取相应的变换.这里,我们在 §1.6 例 6 和例 12 以及 §2.5 例 9 后小结的基础上,再作如下的说明.

对于一个线性偏微分方程的定解问题，一般来说，要根据自变量的变化范围和方程及其定解条件的具体情况来决定选取变换方法.就本书所介绍的内容而言，首先，如果自变量的变化范围为$(-\infty,+\infty)$，应选取 Fourier 变换方法；如果自变量的变化范围为$(0,+\infty)$，则应选取 Laplace 变换方法，亦可选取 Fourier 正弦变换或余弦变换方法.其次，要考虑定解条件的形式，如果对未知函数 $u(x,t)$ 形成的定解问题关于自变量 t 取 Laplace 变换，根据 Laplace 变换的微分性质，必须在定解条件中给出该自变量为零时的未知函数值及直到低于方程阶数的各阶导数值，以二阶线性偏微分方程为例，必须给出 $u(x,t)\big|_{t=0}$ 及$\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}$的值，否则变换后的象函数的方程是不确定的（如 § 2.5 中的例 9 和例 10，而例 11 对两个自变量都可以取 Laplace 变换来求解）；如果某自变量取 Fourier 正弦变换，则要求定解条件中应给出该自变量为零时的未知函数值，如果某自变量取 Fourier 余弦变换，则要求定解条件中应给出该自变量为零时的未知函数的导数值，否则变换后的象函数的方程也是不确定的（如 § 1.6 中的例 9 和例 10）.因此，对自变量的变化范围为$(0,+\infty)$的定解问题有可能既可以取 Fourier 正弦或余弦变换，又可以取 Laplace 变换来求解（实际上，§ 1.6 的例 9 和 § 2.5的例 13 是同一个例题）.再则，对方程取某种变换时没有用到的定解条件都要取相应的变换，使它成为象函数方程的定解条件.最后，将变换成的常微分方程的定解问题求出其象函数，再通过取其逆变换而求得原定解问题的解.当然，求逆变换是一个难点，有一定的技巧，可以查积分变换表，也可以利用有关的性质和定理获得结果.同样，引进多元函数的 Laplace 变换的概念，我们就可以用 Laplace 变换去求解某些多维的偏微分方程的定解问题.限于篇幅，这里不再介绍了.有兴趣的读者可扫描“多重 Laplace 变换”二维码了解其基本概念.

3*. 线性系统的传递函数

（1）线性系统的激励和响应

我们已经知道，一个线性系统可以用一个常系数线性微分方程来描述.如例 6 中 RC 串联电路，电容器两端的电压 $u_C(t)$ 所满足的关系式为

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=e(t).$$

这是一个一阶常系数线性微分方程.我们通常将外加电动势$e(t)$看成是这个系统（即 RC 电路）的随时间 t 变化的输入函数，称为**激励**，而把电容器两端的电

压 $u_C(t)$ 看成是这个系统的随时间 t 变化的输出函数，称为**响应**.这样 RC 串联的闭合回路，就可以看成是一个有输入端和输出端的线性系统，如图 2-14 所示.而虚线框中的电路结构决定于系统内的元件参量和连接方式.这样一个线性系统，在电路理论中又称为**线性网络**（简称**网络**）.一个系统的响应是由激励函数与系统本身的特征（包括元件的参量和连接方式）所决定的.对于不同的线性系统，即使在同一激励下，其响应也是不同的.

在分析线性系统时，我们并不关心系统内部的各种不同的结构情况，而是要研究激励和响应同系统本身特性之间的联系，可用图 2-15 所示的情况表明它们之间的联系.为了描述这种联系需要引进传递函数的概念.

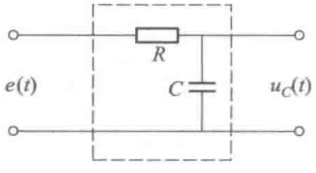


图 2-14

图 2-15

（2）传递函数的概念

假设有一个线性系统，在一般情况下，它的激励 $x(t)$ 与响应 $y(t)$ 所满足的关系，可用下列微分方程来表示：

$$\begin{aligned}&a_n y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+a_{n-2}y^{(n-2)}+\cdots+a_1y'+a_0y\\&=b_m x^{(m)}+b_{m-1}x^{(m-1)}+b_{m-2}x^{(m-2)}+\cdots+b_1x'+b_0x,\end{aligned}\tag{2.22}$$

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n,b_0,b_1,\cdots,b_m$ 均为常数，m,n 为正整数，$n\geqslant m$.

设 $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$，$\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$，根据 Laplace 变换的微分性质，有

$$\mathscr{L}[a_k y^{(k)}]=a_k s^k Y(s)-a_k[s^{k-1}y(0)+s^{k-2}y'(0)+s^{k-3}y''(0)+\cdots+y^{(k-1)}(0)]$$
$$(k=0,1,2,\cdots,n),$$

$$\mathscr{L}[b_k x^{(k)}]=b_k s^k X(s)-b_k[s^{k-1}x(0)+s^{k-2}x'(0)+s^{k-3}x''(0)+\cdots+x^{(k-1)}(0)]$$
$$(k=0,1,2,\cdots,m).$$

对(2.22)式两边取 Laplace 变换并通过整理，可得

$$D(s)Y(s)-M_{hy}(s)=M(s)X(s)-M_{hx}(s),$$

即

$$Y(s)=\frac{M(s)}{D(s)}X(s)+\frac{M_{hy}(s)-M_{hx}(s)}{D(s)},\tag{2.23}$$

其中

$$D(s)=a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0,$$

$$M(s)=b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0,$$

$$M_{hy}(s)=a_n y(0)s^{n-1}+[a_n y'(0)+a_{n-1}y(0)]s^{n-2}$$
$$+\cdots+[a_n y^{(n-1)}(0)+\cdots+a_2 y'(0)+a_1 y(0)],$$

$$M_{hx}(s)=b_m x(0)s^{m-1}+[b_m x'(0)+b_{m-1}x(0)]s^{m-2}$$
$$+\cdots+[b_m x^{(m-1)}(0)+\cdots+b_2 x'(0)+b_1 x(0)].$$

若令 $G(s)=\dfrac{M(s)}{D(s)}$, $G_h(s)=\dfrac{M_{hy}(s)-M_{hx}(s)}{D(s)}$,则(2.23)式可写成

$$Y(s)=G(s)X(s)+G_h(s), \tag{2.24}$$

式中

$$G(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}. \tag{2.25}$$

我们称 $G(s)$ 为**系统的传递函数**.它表达了系统本身的特性,而与激励及系统的初始状态无关.但 $G_h(s)$ 则由激励和系统本身的初值条件所决定.若这些初值条件全为零,即 $G_h(s)=0$,(2.24)式可写成

$$Y(s)=G(s)X(s)\text{或}\ G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}. \tag{2.26}$$

此式表明,在零初值条件下,系统的传递函数等于其响应的 Laplace 变换与其激励的 Laplace 变换之比.当我们知道了系统的传递函数以后,就可以由系统的激励按(2.24)式或(2.26)式求出其响应的 Laplace 变换,再通过求逆变换可得其响应 $y(t)$.而 $x(t)$ 和 $y(t)$ 之间的关系可用图 2-16 表示出来.

此外,传递函数不表明系统的物理性质.许多性质不同的物理系统,可以有相同的传递函数,而传递函数不相同的物理系统,即使系统的激励相同,其响应也是不相同的,因此对传递函数的分析研究,就能统一处理各种物理性质不同的线性系统.

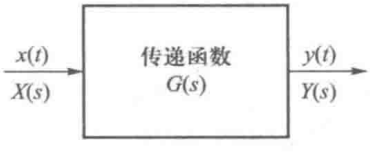


图 2-16

(3) 脉冲响应函数

假设某个线性系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$$

或

$$Y(s)=G(s)X(s),$$

若以 $g(t)$ 表示 $G(s)$ 的 Laplace 逆变换式，即

$$g(t)=\mathscr{L}^{-1}[G(s)],$$

则根据(2.26)式和 Laplace 变换的卷积定理可得

$$y(t)=g(t)*x(t)=\int_0^t g(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau,$$

即系统的响应等于其激励与 $g(t)=\mathscr{L}^{-1}[G(s)]$ 的卷积.

由此可见，一个线性系统除用传递函数来表征外，也可以用传递函数的逆变换 $g(t)=\mathscr{L}^{-1}[G(s)]$ 来表征.我们称 $g(t)$ 为**系统的脉冲响应函数**.它的物理意义可以这样解释，当激励是一个单位脉冲函数，即 $x(t)=\delta(t)$ 时，则在零初值条件下，有

$$\mathscr{L}[x(t)]=\mathscr{L}[\delta(t)]=X(s)=1,$$

所以

$$Y(s)=G(s),$$

即

$$y(t)=g(t).$$

可见，脉冲响应函数 $g(t)$，就是在零初值条件下，激励为 $\delta(t)$ 时的响应 $y(t)$，也就是传递函数的逆变换，如图 2-17 所示.

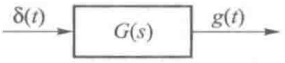


图 2-17

(4) 频率响应

在系统的传递函数中，令 $s=\mathrm{j}\omega$，则得

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{Y(\mathrm{j}\omega)}{X(\mathrm{j}\omega)}$$
$$=\frac{b_m(\mathrm{j}\omega)^m+b_{m-1}(\mathrm{j}\omega)^{m-1}+b_{m-2}(\mathrm{j}\omega)^{m-2}+\cdots+b_1(\mathrm{j}\omega)+b_0}{a_n(\mathrm{j}\omega)^n+a_{n-1}(\mathrm{j}\omega)^{n-1}+a_{n-2}(\mathrm{j}\omega)^{n-2}+\cdots+a_1(\mathrm{j}\omega)+a_0}.$$

我们称它为**系统的频率特性函数**，简称为**频率响应**.可以证明，当激励是角频率为 ω 的虚指数函数(也称为复正弦函数) $x(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 时，系统的稳态响应是 $y(t)=G(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$.因此频率响应在工程技术中又称为**正弦传递函数**.

总之，任何线性系统的正弦传递函数都可由该系统的传递函数中的 s 以 $\mathrm{j}\omega$ 来代替求得.

系统的传递函数、脉冲响应函数、频率响应是表征线性系统的几个重要概

念.下面我们将说明它们的求法.

例 14 如图 2-14 所示的 RC 串联电路,若电源电势 $e(t)$ 看成是电路的激励,则其响应(电容器两端的电压)$u_C(t)$ 与 $e(t)$ 所满足的微分方程式为

$$RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_C(t)+u_C(t)=e(t),$$

两边取 Laplace 变换,且 $\mathscr{L}[u_C(t)]=U_C(s)$,$\mathscr{L}[e(t)]=E(s)$,有

$$RC[sU_C(s)-u_C(0)]+U_C(s)=E(s),$$

所以

$$U_C(s)=\frac{E(s)}{RCs+1}+\frac{RCu_C(0)}{RCs+1}.$$

按传递函数的定义,此电路的传递函数为

$$G(s)=\frac{1}{RCs+1}=\frac{1}{RC\left(s+\frac{1}{RC}\right)},$$

而电路的脉冲响应函数就是传递函数的 Laplace 逆变换,即

$$g(t)=\mathscr{L}^{-1}[G(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{RC\left(s+\frac{1}{RC}\right)}\right]=\frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}.$$

在传递函数 $G(s)$ 中,令 $s=\mathrm{j}\omega$,可得频率响应为

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{RC\mathrm{j}\omega+1}.$$

关于传递函数的更深入的内容,将在有关的专业课程中进行讨论,这里不再叙述了.

习题五

1. 求下列常系数微分方程的解:

(1) $y'-y=\mathrm{e}^{2t}$,$y(0)=0$;

(2) $y''+4y'+3y=\mathrm{e}^{-t}$,$y(0)=y'(0)=1$;

(3) $y''+3y'+2y=u(t-1)$,$y(0)=0$,$y'(0)=1$;

(4) $y''-2y'+2y=2\mathrm{e}^{t}\cos t$,$y(0)=y'(0)=0$;

(5) $y''+2y'+5y=\mathrm{e}^{-t}\sin t$,$y(0)=0$,$y'(0)=1$;

(6) $y''-y=4\sin t+5\cos 2t$,$y(0)=-1$,$y'(0)=-2$;

(7) $y''+4y'+5y=h(t)$, $y(0)=c_1$, $y'(0)=c_2$ (c_1, c_2为常数);

(8) $y'''+3y''+3y'+y=1$, $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$;

(9) $y'''+y'=e^{2t}$, $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$;

(10) $y'''+3y''+3y'+y=6e^{-t}$, $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$;

(11) $y'''-3y''+3y'-y=t^2e^t$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$, $y''(0)=-2$;

(12) $y^{(4)}+2y''+y=0$, $y(0)=y'(0)=y'''(0)=0$, $y''(0)=1$;

(13) $y^{(4)}+y'''=\cos t+\frac{1}{2}\delta(t)$, $y(0)=y'(0)=y'''(0)=0$, $y''(0)=c_0$ (常数);

(14) $y''-2y'+y=0$, $y(0)=0$, $y(1)=2$;

(15) $y''-y=0$, $y(0)=0$, $y(2\pi)=1$;

(16) $y''+y=10\sin 2t$, $y(0)=0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

2. 求下列变系数微分方程的解:

(1) $ty''+y'+4ty=0$, $y(0)=3$, $y'(0)=0$;

(2) $ty''+2y'+ty=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=c_0$ (c_0为常数);

(3) $ty''+2(t-1)y'+(t-2)y=0$, $y(0)=2$;

(4) $ty''+(t-1)y'-y=0$, $y(0)=5$, $y'(+\infty)=0$;

(5) $ty''+(1-n)y'+y=0$, $y(0)=y'(0)=0$ ($n\geqslant 0$);

(6) $ty''+(1-n-t)y'+ny=t-1$ ($n=2,3,\cdots$), $y(0)=0$.

3. 求下列积分方程的解:

(1) $y(t)=at+\int_0^t \sin(t-\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau$;

(2) $y(t)=e^{-t}-\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau$;

(3) $\int_0^t y(\tau)y(t-\tau)\mathrm{d}\tau=16\sin 4t$;

(4) $y(t)+\int_0^t y(t-\tau)e^{\tau}\mathrm{d}\tau=2t-3$;

(5) $\int_0^t y(\tau)y(t-\tau)\mathrm{d}\tau=t^2e^{-t}$;

(6) $y(t)=\frac{1}{2}\sin 2t+\int_0^t y(\tau)y(t-\tau)\mathrm{d}\tau$.

4. 求下列微分积分方程的解:

(1) $\int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\mathrm{d}\tau=y'(t)$, $y(0)=1$;

(2) $y'(t)+\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau=1$, $y(0)=0$;

(3) $y'(t)+2y(t)+2\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau=u(t-b),y(0)=-2$;

(4) $y'(t)+3y(t)+2\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau=10\mathrm{e}^{-3t},y(0)=0$;

(5) $y'(t)-4y(t)+4\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{3}t^3,y(0)=0$;

(6) $y'(t)+3y(t)+2\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau=2[u(t-1)-u(t-2)],y(0)=1$.

5. 求下列微分、积分方程组的解:

(1) $\begin{cases}x'+x-y=\mathrm{e}^t,\\ y'+3x-2y=2\mathrm{e}^t,\end{cases}\quad x(0)=y(0)=1$;

(2) $\begin{cases}y'-2z'=f(t),\\ y''-z''+z=0,\end{cases}\quad y(0)=y'(0)=z(0)=z'(0)=0$;

(3) $\begin{cases}(2x''-x'+9x)-(y''+y'+3y)=0,x(0)=x'(0)=1,\\ (2x''+x'+7x)-(y''-y'+5y)=0,y(0)=y'(0)=0;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x''-x+y+z=0,\\ x+y''-y+z=0,x(0)=1,\ y(0)=z(0)=x'(0)=y'(0)=z'(0)=0;\\ x+y+z''-z=0,\end{cases}$

(5) $\begin{cases}ty+z+tz'=(t-1)\mathrm{e}^{-t},\\ y'-z=\mathrm{e}^{-t},\end{cases}\quad y(0)=1,z(0)=-1$;

(6) $\begin{cases}-3y''+3z''=t\mathrm{e}^{-t}-3\cos t,\\ ty''-z'=\sin t,\end{cases}\quad y(0)=-1,y'(0)=2,z(0)=4,z'(0)=z''(0)=0$;

(7) $\begin{cases}y''+2y+\int_0^t z(\tau)\mathrm{d}\tau=t,\\ y''+2y'+z=\sin 2t,\end{cases}\quad y(0)=1,y'(0)=-1$;

(8) $\begin{cases}x''+2x'+\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau=0,\\ 4x''-x'+y=\mathrm{e}^{-t},\end{cases}\quad x(0)=0,x'(0)=-1$.

6. 求下列线性偏微分方程的定解问题的解:

(1) $\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g\ (g\text{ 为常数})\ (x>0,t>0),\\ u\big|_{t=0}=0,\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0}=0,\\ u\big|_{x=0}=0;\end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\cos\omega t\ (x>0,t>0), \\ u\big|_{t=0}=0,\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0, \\ u\big|_{x=0}=0,\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\partial u}{\partial x}=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ (x>0,t>0), \\ u\big|_{t=0}=0, \\ u\big|_{x=0}=f(t), \\ \lim\limits_{x\to+\infty}u=0; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-hu\ (h\text{ 为常数})\ (x>0,t>0), \\ u\big|_{x=0}=u_0(\text{常数}), \\ u\big|_{t=0}=0; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=x^2y\ (0<x,y<+\infty), \\ u\big|_{y=0}=x^2, \\ u\big|_{x=0}=3y; \end{cases}$

(6) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a^2u+\varphi(x)\ (x>0,y>0), \\ u\big|_{x=0}=0,\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0, \\ \lim\limits_{y\to+\infty}u(x,y)<+\infty; \end{cases}$

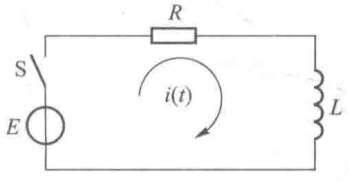
(7) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=0\ (x>0,t>0), \\ u\big|_{x=0}=\psi(t),\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0, \\ u\big|_{t=0}=\varphi(x),\psi(0)=\varphi(0)=0; \end{cases}$

$$(8)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ (0<x<l,t>0),\\ u\mid_{x=0}=0,u\mid_{x=l}=\varphi(t),\\ u\mid_{t=0}=0,\dfrac{\partial u}{\partial t}\mid_{t=0}=0.\end{cases}$$

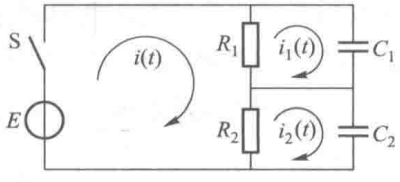
7. 设原点处质量为 m 的一质点当 $t=0$ 时在 x 方向上受到冲击力$k\delta(t)$的作用,其中 k 为常数,假定质点的初速度为零,求其运动规律.

8. 设有如图所示的 RL 串联电路,当 $t=t_0$时,将电路接上直流电源 E,求电路中的电流 $i(t)$.

9. 如图所示的电路,当 $t=0$ 时接入直流电源 E,求回路中电流 $i(t)$.



(第 8 题)



(第 9 题)

10. 某系统的传递函数为 $G(s)=\dfrac{K}{1+Ts}$,求在稳态情况下,当激励 $x(t)=A\sin\omega t$时的系统响应 $y(t)$,其中 K,T,A 均为常数.

11. 某系统的激励为 $x(t)=\sin t$,当系统的响应 $y(t)=\mathrm{e}^{-t}-\cos t+\sin t$ 时,求:

(1) 系统的传递函数 $G(s)$;

(2) 系统的脉冲响应函数 $g(t)$;

(3) 系统的频率响应函数 $G(\mathrm{j}\omega)$.

12. 设系统Ⅰ和系统Ⅱ串联,它们分别具有传递函数 $G_1(s)$和 $G_2(s)$,而系统Ⅰ的响应 $y(t)$为系统Ⅱ的激励.已知

$$G_1(s)=\mathrm{e}^{-s},\quad y(t)=\mathrm{e}^{-(t-2)}u(t-2),$$

求该串联系统的响应 $z(t)=(t-2)^2y(t)$时的串联系统的激励$x(t)$.

第三章* 积分变换的 MATLAB 运算

积分变换中最常用的两类变换是 Fourier 变换和 Laplace 变换.它们的理论和方法不仅在数学的许多分支中,而且在其他学科和工程技术领域中都有着广泛的应用,特别是在振动力学、电工学、自动控制以及可靠性系统中起着重要作用.我们知道,根据它们的定义通过反常积分的计算,或者利用其性质来求解函数的 Fourier 变换和 Laplace 变换以及它们的逆变换,其数学推导和演算往往是比较麻烦的,不仅花费时间,有时还会出错.但随着科学技术的发展和计算机应用的普及,现在我们可以在这两类变换的理论基础上,利用 MATLAB 软件来获得运算结果.这样,不仅可以让读者的精力更多地集中在基本概念、性质及变换技巧的学习和研究上,而且还为读者增添了一种新的解题方法,也为满足相关的工程技术人员和科研工作者的需要提供了一个易学好用、方便快捷的有效工具.

在这一章中,针对积分变换的需要,我们首先给出 MATLAB 软件的简单介绍.为了方便对 MATLAB 软件的使用和理解,这里选用的例题大部分来自前两章中的例题和习题以便读者分析和比较.

§3.1 MATLAB 软件简介

MATLAB 是英文 Matrix Laboratory(矩阵实验室)的缩写,它起源于矩阵代数运算,完成于 20 世纪 80 年代初.随着科学技术的发展和需要,MATLAB 语言进行了多次、大量的改进,它的功能越来越强大,不断适应新的要求提出新的解决方法.目前该语言已成为当今国际上科学界最具影响力,也是最有活力的软件.它不仅功能强、效率高,而且直观、简洁,便于操作使用,被广泛用于多学科中的设计、研究以及解决各种具体问题.

在积分变换中,主要利用 MATLAB 的"符号运算"来求解 Fourier 变换和 Laplace 变换以及它们的逆变换等问题.读者如对更多的内容有兴趣,可参考其他书籍.

1. 基本运算符

在符号运算中,首先介绍基本运算符.对于数组运算主要有三大类:算术运算符、关系运算符和逻辑运算符,见表 3-1.

表 3-1 MATLAB 基本运算符

算术运算符	关系运算符	逻辑运算符
+ 加法	< 小于	& 与
- 减法	> 大于	| 或
.* 乘法	<= 小于等于	~ 非
./ 除法	>= 大于等于	
.^ 乘方	== 等于	
	~= 不等于	

注意,关系运算符中的运算符表明一种判断关系.例如"<"是表明判断两个数字或两个变量是否存在小于关系;"==”是表明判断两个数字或两个变量是否存在相等的关系;其余类推.在积分变换的 MATLAB 运算中常用的是算术运算符.

2. 一些常用的变量和函数符号

在积分变换的 MATLAB 运算中常常会用到下面的常量、变量和函数符号,见表 3-2.

表 3-2 MATLAB 的一些常量、变量和函数符号

常量、变量或函数符号	含义或功能说明	常量、变量或函数符号	含义或功能说明
i 或 j	虚数单位	pi	圆周率 π
Inf 或 inf	无穷大	NaN	不定值
abs(x)	绝对值	sum(x)	求和
max(x)	最大值	min(x)	最小值
mean(x)	平均值	sign(x)	符号函数
sin(x)	正弦 $\sin x$	asin(x)	反正弦 $\arcsin x$
cos(x)	余弦 $\cos x$	acos(x)	反余弦 $\arccos x$
tan(x)	正切 $\tan x$	atan(x)	反正切 $\arctan x$
cot(x)	余切 $\cot x$	acot(x)	反余切 $\operatorname{arccot} x$
log(x)	自然对数 $\ln x$	log10(x)	常用对数 $\log x$
sinh(x)	双曲正弦 $\sinh x$	asinh(x)	反双曲正弦 $\operatorname{arsinh} x$
cosh(x)	双曲余弦 $\cosh x$	acosh(x)	反双曲余弦 $\operatorname{arcosh} x$
tanh(x)	双曲正切 $\tanh x$	atanh(x)	反双曲正切 $\operatorname{artanh} x$
coth(x)	双曲余切 $\coth x$	acoth(x)	反双曲余切 $\operatorname{arcoth} x$
exp(x)	指数函数 e^x	sqrt(x)	x 的算术平方根 $\sqrt{x}$
dirac(x)	单位脉冲函数 $\delta(x)$	heaviside(x)	单位阶跃函数 $u(x)$

注意,表中的 x 可以是常量,变量,数组或向量.例如 sum(x)表示对数组或向量 x 中各元素求和,max (x)表示求数组或向量 x 中的最大元素,其他情形也不难理解.

3. 与微积分有关的 MATLAB 符号运算的指令

微积分是高等数学的基础内容,也是自然科学和工程技术理论研究的重要工具,它的应用十分广泛.在积分变换的 MATLAB 运算中也离不开微积分的 MATLAB 运算,现在我们给出一些与微积分有关的 MATLAB 符号运算的指令.见表 3-3.

表 3-3 一些与微积分有关的 MATLAB 符号运算指令

指　令	说　明
symsum(S,x,a,b)	对通项 S 求和,其中 x 为变量,且 x 从 a 变到 b;当 x 缺省时,表明通项 S 中只有一个变量
limit(F, x, a)	求表达式 F 当自变量 $x\to a$ 的极限;当 a 缺省时为自变量 $x\to 0$ 的极限
solve(P, x)	对方程 P 中的指定变量 x 求解
diff(S, x, n)	求表达式 S 对变量 x 的 n 阶导数;当 n 缺省时为求一阶导数
dsolve(a)	对微分方程求解,其中输入参量 a 包含微分方程、初值条件和界定的自变量三部分内容,每一部分要用单引号界定,且彼此用逗号分开.如界定的自变量缺省,则默认为 t 或 x
int(F, x, a, b)	以 x 为积分变量,对被积函数 F 从下限 a 到上限 b 的定积分;如果 a,b 缺省时,则为不定积分,但表达式没有积分常数;如果多次使用指令 int( ),即为计算重积分

这里介绍的是 MATLAB R2017b 版本的软件,在 Windows10 的操作系统下的使用方法.打开计算机进入该操作系统,在其屏幕上双击 MATLAB 图标进入它的指令窗口.该窗口是用来输入和执行 MATLAB 指令,并显示运算结果.指令窗口用“>>”作为指令输入的提示符.该提示符是系统自动生成的,无需用键盘输入.如果输入一个指令后直接按回车键(Enter),或者加一个逗号“,”再按回车键,则执行输入的指令,并显示结果;如果输入一个指令再加上一个分号“;”再按回车键,则只执行输入的指令而不显示结果.类似地可进行多个指令的输入.所谓字符串是指一连串的字母、符号及数字等的组合,而标识符是指能代表变量、常量或文件名称的由英文字母起头的特定字符串.

下面再介绍两个常用的指令：

(1) syms 是用来创建或定义符号量(符号常量或符号变量)的指令.通常用指令 syms 定义一个或多个符号量,它们只能是标识符,不可以是数字、函数表达式或方程式.

(2) 百分号"%"是一个注释符,用来表明该符号及其后所有的文字和字符仅起到一个解释和说明的作用,不参与指令的运行,对计算不产生任何影响.因此在 MATLAB 的积分变换运算过程中,如遇到新的字符、变量、指令或需要解释的问题,也可以用该注释符加以说明.

现在我们给出一些与微积分有关的 MATLAB 运算的例子.注意,对需要用"%"来解释的问题一般在首次出现时使用,以后出现同样的问题将不再用"%"来说明.

例 1 求级数 $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$的和及前五项的和.

解 根据表 3-3 中的指令 symsum,在指令窗口输入：

```
>> clear;                          % 表示清除内存变量
>> syms n;
>> symsum (n/(2^n),n,1,inf)↵       % 符号"↵"表示回车后显示
                                     运算结果
ans =                              % ans 表示运算生成的结果
2
>> symsum (n/(2^n),n,1,5)↵
ans =
57/32
```

整理可得

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=2,\quad S=\sum_{n=1}^{5}\frac{n}{2^n}=\frac{57}{32}.$$

注 实际上,也可以一次完成两个求和指令 symsum 在指令窗口输入：

```
>> clear;
>> syms n;
>> S1=symsum (n/(2^n),n,1,inf),S2=symsum (n/(2^n),n,
1,5)↵
S1 =
```

```
2
S2 =
57/32
```

同样整理可得

$$S_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=2,\quad S_2=\sum_{n=1}^{5}\frac{n}{2^n}=\frac{57}{32}.$$

例 2 求函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$ 当 $x\to a$ 的极限.

解 根据表 3-3 中的指令 limit,在指令窗口输入:

```
>> clear;
>> syms x a;                    % 多个符号量之间必须空一格分开
>> limit((x^(1/3)-a^(1/3))/(x^(1/2)-a^(1/2)),x,a)↵
ans =
2/(3*a^(1/6))
```

整理可得

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\frac{2}{3\sqrt[6]{a}}.$$

例 3 求一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根.

解 根据表 3-3 中的指令 solve,在指令窗口输入:

```
>> clear;
>> syms x a b c ;
>> solve(a*x^2+b* x+c,x)↵
ans =
-(b+(b^2-4*a*c)^(1/2))/(2*a)
-(b-(b^2-4*a*c)^(1/2))/(2*a)
```

整理可得

$$x_{1,2}=\frac{1}{2a}\cdot(-b\pm\sqrt{b^2-4ac})=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

注 clear 表示清除内存变量,即为了删除以前在指令窗口输入的所有变量和函数对目前指令运行的影响.因此,有必要在输入指令前先输入“clear”.

例 4 已知 $y=\sin bx$,求 $S_1=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,$S_2=\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 根据表 3-3 中的指令 diff,在指令窗口输入:

```
>> clear;
>> syms y x b;
>> y=sin(b*x);
>> S1=diff(y,x),S2=diff(y,x,2)↵
S1=
b*cos(b*x)
S2=
-b^2sin(b*x)
```

整理可得

$$S_1=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=b\cos bx,\quad S_2=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-b^2\sin bx.$$

例 5 求方程 $y''+2y'-3y=\mathrm{e}^{-t}$ 满足初值条件 $y\Big|_{t=0}=0, y'\Big|_{t=0}=1$ 的解.

解 根据表3-3中的指令 dsolve,在指令窗口输入:

```
>> clear;
>> syms y t;
>> y=dsolve('D2y+2*Dy-3*y=exp(-t)','y(0)=0,Dy(0)=1','t')↵
        % D2y 表示对 y 求二阶导数,Dy 表示对 y 求一阶导数,其余类推
y=
(3*exp(t))/8-exp(-3*t)/8-exp(-t)/4
```

整理可得

$$y(t)=\frac{3}{8}\mathrm{e}^{t}-\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-3t}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}=\frac{1}{8}(3\mathrm{e}^{t}-2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-3t}).$$

例 6 求微分方程组 $\begin{cases} x'=y, & x\Big|_{t=0}=0, \\ y'=-x, & y\Big|_{t=0}=1 \end{cases}$ 的解.

解 根据表 3-3 中的指令 dsolve,在指令窗口输入:

```
>> clear;
>> syms x y t;
>> [x,y]=dsolve('Dx=y','Dy=-x','x(0)=0','y(0)=1','t') ↵
                % [x,y]为由两个微分方程构成的方程组的符号表示
```

```
x =
sin(t)
y =
cos(t)
```

整理可得

$$\begin{cases} x(t) = \sin t, \\ y(t) = \cos t. \end{cases}$$

例 7 求下列积分：$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 3x^y \mathrm{d}y$，$S_2 = \int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$，$S_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$，其中 x 为实数.

解 根据表 3-3 中的指令 int，在指令窗口输入：

```
>> clear;
>> syms y;
>> syms x real;                          % real 表示 x 为实数
>> f1 = 3 * x^y;
>> f2 = x * sqrt(1-x^2);
>> f3 = exp(-x^2);
>> S1 = int(f1, y, 0, pi/3), S2 = int(f2), S3 = int(f3, x,
-inf, +inf) ↵
S1 =
(3 * (x^(pi/3)-1))/log(x)
S2 =
-(1-x^2)^(3/2)/3
S3 =
pi^(1/2)
```

整理可得

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 3x^y \mathrm{d}y = \frac{3(\sqrt[3]{x^{\pi}} - 1)}{\ln x},$$

$$S_2 = \int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + C,$$

$$S_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

注 1 根据表 3-3 中的积分指令可以知道，S_1 是对被积函数 $3x^2$ 中指定积分变量 y 计算从 0 到 $\frac{\pi}{3}$ 的定积分；S_2 是一个不定积分，但 MATLAB 软件的积分指令给出的仅仅是被积函数的一个原函数而不含积分常数 C；S_3 是一个反常积分，它也称为概率积分.

注 2 本例中的 x 为实数，实际上 $x>0$ 其结果也是相同的，而这个条件是积分 S_1 所要求的.对于积分 S_2 和积分 S_3 可以去掉这个条件.有兴趣的读者可以一试.

注 3 在 MATLAB 软件中，如果多次使用积分指令，就可以获得重积分的运算.要注意的是必须先要化成累次积分，再用积分指令来运算.现举例如下.

例 8 计算下列重积分：

(1) $S_1 = \iint\limits_D y^2\sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant r^2, y \geqslant 0\}$；

(2) $S_2 = \iiint\limits_\Omega xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\}$；

(3) $S_3 = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}y\int_0^{2a\cos y} z^2(1 + \cos x)\sin y\mathrm{d}z$.

解 首先要将(1)和(2)中的重积分化成累次积分，而(3)已经是累次积分.因此，根据积分域，有

$$S_1 = \int_{-r}^{r}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} y^2\sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}y,$$

$$S_2 = \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz\mathrm{d}z.$$

根据表 3-3 中的指令 int，在指令窗口输入：

```
>> clear;
>> syms x y z r a;
>> f1=y^2*sqrt(r^2-x^2);
>> f2=x*y*z;
>> f3=z^2*(1+cos(x))*sin(y);
>> S1=int(int(f1, y, 0, sqrt(r^2-x^2)),x,-r,r), S2=
   int(int(int(f2,z,0,sqrt(1-x^2-y^2)), y, 0, sqrt(1-x^
   2)), x, 0, 1), S3=int(int(int(f3, z, 0, 2*a*cos(y)),
```

```
y, 0, pi/4), x, 0, 2*pi)↵
S1 =
16/45*r^5
S2 =
1/48
S3 =
a^3*pi
```

整理可得

$$S_1=\iint_D y^2\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-r}^{r}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}y^2\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}y=\frac{16}{45}r^5,$$

$$S_2=\iiint_\Omega xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}xyz\mathrm{d}z=\frac{1}{48},$$

$$S_3=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}y\int_0^{2a\cos y}z^2(1+\cos x)\sin y\mathrm{d}z=\pi a^3.$$

注 以上这些例子都可以用高等数学的方法加以验证和比较.

习题一

1. 求级数 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(x-1)^n}{n}$ 的和,其中 $x>0$.

2. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$; (2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a}$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

3. 已知二元函数 $f(x,y)=x^2\sin 2y$,分别求关于 x,y 的偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

4. 求解一元二次方程 $5x^2+x-x\sqrt{5x^2-1}-2=0$.

5. 求二阶常系数齐次微分方程 $y''-2y'+5y=0$ 的通解.

6. 求二阶常系数非齐次微分方程 $y''+y=-\sin 2x$ 满足初值条件 $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=1$ 的解.

7. 计算下列积分:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{2\sin\omega}{\omega}\mathrm{d}\omega$;

(3) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{-1}^0 x\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}y$.

§3.2 Fourier 变换及其逆变换的 MATLAB 运算

在 MATLAB 软件的工具箱中提供了求取 Fourier 变换及其逆变换的专用指令,即

(1) F=fourier(f)　　对函数 $f(x)$ 进行 Fourier 变换,返回的函数为 $F(\omega)$.

(2) f=ifourier(F)　　对函数 $F(\omega)$ 进行 Fourier 逆变换,返回的函数为 $f(x)$.

因此,指令中的 f 和 F 分别为 $f(x)$ 和 $F(\omega)$ 的符号表达式.现举例如下.

例 1　求 $f(t)=\cos t\sin t$ 的 Fourier 变换.

解　在 MATLAB 软件的指令窗口输入:

```
>> clear;
>> syms t;
>> f=cos(t)*sin(t);
>> F=fourier(f)↵
F =
-(pi*(dirac(w-2)-dirac(w+2))*1i)/2
        % 英文字母 w 代替希腊字母 ω,且为默认值;1i 表示为一个虚数
          单位 j,5*i 或 5i 表示为五个虚数单位 j,即 5j,其余类推
```

整理可得

$$F(\omega)=\frac{\pi}{2}\mathrm{j}[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2)].$$

注　为了验证所求结果的正确性,可对 $F(\omega)$ 求 Fourier 逆变换.为此,在指令窗口继续输入:

```
>> f=ifourier(F,t)↵          % 如不注明 t,则默认 x 为自变量
f =
(exp(-t*2i)*1i)/4-(exp(t*2i)*1i)/4
```

整理可得

$$f(t)=\frac{1}{4}e^{-2jt}j-\frac{1}{4}e^{2jt}j=\frac{1}{2}\frac{e^{2jt}-e^{-2jt}}{2j}=\frac{1}{2}\sin 2t=\cos t\sin t.$$

这就表明所求结果是正确的.以下的例子都可以用这个方法对所求结果加以验证.同时也可作为求 Fourier 逆变换的练习,读者可自行完成.

例 2 求钟形脉冲函数 $f(t)=Ae^{-\beta t^2}$ 的 Fourier 变换,其中 $A>0,\beta>0$.

解 在指令窗口输入(指令中用 b 代替 β):

```
>> clear;
>> syms t;
>> syms A positive;                    % positive 表示正数,即 A>0
>> syms b positive;
>> f=A*exp(-b*t^2);
>> F=fourier(f) ↵
F =
(A*pi^(1/2)*exp(-w^2/(4*b)))/b^(1/2)
```

整理可得

$$F(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}Ae^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}.$$

例 3 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{a^2+x^2}$ 的 Fourier 变换,其中 $a>0$.

解 在指令窗口输入:

```
>> clear;
>> syms t;
>> syms a positive;
>> f=1/(a^2+t^2);
>> F=fourier(f) ↵
F =
(pi*exp(-a*abs(w)))/a
```

整理可得

$$F(\omega)=\frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}.$$

例 4 求 $F(\omega)=\dfrac{2}{5+2j\omega-\omega^2}$ 的 Fourier 逆变换 $f(t)$.

解 在指令窗口输入：

```
>> clear;
>> syms t w;
>> F=2/(5+2*j*w-w^2);
>> f=ifourier(F,t)
f =
((pi*exp(t*(-1-2i))*(sign(t)+1)*1i)/2-
(pi*exp(t*(-1+2i))*(sign(t)+1)*1i)/2)/(2*pi)
```

% sign(t)= $\begin{cases}1, t>0,\\ -1, t<0,\end{cases}$ 为符号函数

整理可得

$$
\begin{aligned}
f(t)&=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi}{2}e^{-t(1+2j)}(\operatorname{sign}(t)+1)j-\frac{\pi}{2}e^{-t(1-2j)}(\operatorname{sign}(t)+1)j\right]\\
&=\frac{1}{2}e^{-t}\frac{e^{2jt}-e^{-2jt}}{2j}(\operatorname{sign}(t)+1)\\
&=\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t(\operatorname{sign}(t)+1)\\
&=\begin{cases}e^{-t}\sin 2t, & t>0,\\ 0, & t<0.\end{cases}
\end{aligned}
$$

注 对 $f(t)$ 求 Fourier 变换，则得到 $F(\omega)$.读者可自行完成来加以验证.

例 5 求 $F(\omega)=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$ 的 Fourier 逆变换 $f(t)$.

解 在指令窗口输入：

```
>> clear;
>> syms t w w0;
>> F=pi*(dirac(w+w0)+dirac(w-w0));
>> f=ifourier(F,t)
f =
exp(-t*w0*i)/2+exp(t*w0*i)/2
```

整理可得

$$
f(t)=\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}+\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}=\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}=\cos\omega_0 t.
$$

注 1 通过分析和比较，我们能够看到，利用 MATLAB 软件工具箱所提供的专用指令来求取 Fourier 变换及其逆变换不仅简单、快捷，而且非常有效.简

单、快捷是因为在它的工具箱中为这些运算提供了专用指令，无需另行编程；非常有效是因为运算结果能够很方便地通过逆运算加以验证，从而为有需求的读者提供了方便.

注 2 根据 Fourier 变换及其逆变换的定义，也可以用积分指令“int”来求出变换的结果.这可为求分段函数的 Fourier 变换及其逆变换以及函数的 Fourier 正、余弦变换（简称正、余弦变换）及其逆变换提供了方便.现举例如下.

例 6 求函数 $f(t)=\begin{cases} e^{\beta t}, & t<0, \\ e^{-\beta t}, & t\geqslant 0 \end{cases}$ 的 Fourier 变换.

解 这是一个分段函数，按照 Fourier 变换的定义，有

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0} e^{\beta t}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{+\infty} e^{-\beta t}e^{-j\omega t}dt.$$

根据表 3-3 中的积分指令，在指令窗口输入（指令中用 b 代替 β）：

```
>> clear;
>> syms t w b;
>> f1=exp(b*t)*exp(-j*w*t);
>> f2=exp(-b*t)*exp(-j*w*t);
>> F=int(f1,t,-inf,0)+int(f2,t,0,+inf) ↵
F =
-limit(exp(b*t)*exp(-t*w*1i),t,-Inf)/(b-w*1i)
-limit(exp(-b*t)*exp(-t*w*1i),t,Inf)/(b+w*1i)
+1/(b-w*1i)+1/(b+w*1i)
```

整理可得

$$F(\omega)=-\lim_{t\to-\infty}\frac{e^{(\beta-j\omega)t}}{\beta-j\omega}-\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-(\beta+j\omega)t}}{\beta+j\omega}+\frac{1}{\beta-j\omega}+\frac{1}{\beta+j\omega}=\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}.$$

例 7 求函数 $f(\boldsymbol{x})=ae^{-b^2|\boldsymbol{x}|^2}$ 的 Fourier 变换，其中 a,b 均为正常数，$\boldsymbol{x}=\{x,y\}$.

解 这是一个求二元函数 $f(x,y)$ 的二重 Fourier 变换问题.根据二重 Fourier 变换的定义，有

$$F(\boldsymbol{\omega})=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\boldsymbol{x})e^{-j\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x} \quad (\text{其中 } \boldsymbol{\omega}=\{\omega_1,\omega_2\}).$$

利用多重 Fourier 变换的变量可分离性质，即如果

$$f(\boldsymbol{x})=g_1(x_1)g_2(x_2)\cdots g_n(x_n),$$

则有

$$F(\boldsymbol{\omega})=\mathscr{F}[f(\boldsymbol{x})]=\mathscr{F}[g_1(x_1)]\mathscr{F}[g_2(x_2)]\cdots\mathscr{F}[g_n(x_n)],$$

其中 $\boldsymbol{\omega}=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，$\boldsymbol{x}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.

该结论表明一个 n 元函数 $f(\boldsymbol{x})$ 能够分离成 n 个分别只依赖于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一元函数的乘积，则 $f(\boldsymbol{x})$ 的 n 重 Fourier 变换等于相应的 n 个一元函数的 Fourier 变换的乘积. 在本题中，因为

$$f(\boldsymbol{x})=a\mathrm{e}^{-b^2|x|^2}=a\mathrm{e}^{-b^2(x^2+y^2)}=\sqrt{a}\,\mathrm{e}^{-b^2x^2}\cdot\sqrt{a}\,\mathrm{e}^{-b^2y^2},$$

现令

$$g_1(x)=\sqrt{a}\,\mathrm{e}^{-b^2x^2},\qquad g_2(y)=\sqrt{a}\,\mathrm{e}^{-b^2y^2},$$

从而

$$F(\boldsymbol{\omega})=\mathscr{F}[f(\boldsymbol{x})]=\mathscr{F}[g_1(x)]\mathscr{F}[g_2(y)]=G_1(\omega_1)G_2(\omega_2).$$

现在用 Fourier 变换的专用指令，在指令窗口输入：

```
>> clear;
>> syms w1 w2 x y;
>> syms a positive;
>> syms b positive;
>> g1 = sqrt(a) * exp(-b^2 * x^2);
>> g2 = sqrt(a) * exp(-b^2 * y^2);
>> G1 = fourier(g1,w1 ),G2 = fourier(g2,w2 )↵
G1 =
(pi^(1/2) * a^(1/2) * exp(-w1^2/(4 * b^2)))/b
G2 =
(pi^(1/2) * a^(1/2) * exp(-w2^2/(4 * b^2)))/b
```

整理可得

$$G_1(\omega_1)=\frac{1}{b}\sqrt{\pi a}\,\mathrm{e}^{-\frac{\omega_1^2}{4b^2}},\quad G_2(\omega_2)=\frac{1}{b}\sqrt{\pi a}\,\mathrm{e}^{-\frac{\omega_2^2}{4b^2}}.$$

从而

$$F(\boldsymbol{\omega})=G_1(\omega_1)\cdot G_2(\omega_2)=\frac{a}{b^2}\pi\mathrm{e}^{-\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{4b^2}}=\frac{a}{b^2}\pi\mathrm{e}^{-\frac{1}{4b^2}|\boldsymbol{\omega}|^2}$$

注 根据二重 Fourier 变换定义，不难看出也可以按照表 3-3 中的积分指令来求该函数的 Fourier 变换. 读者不妨自己试一试.

习题二

1. 求函数 $f(t)=\mathrm{e}^{-a|t|}$ 的 Fourier 变换，其中 $a>0$.

2. 求函数 $f(t)=tu(t)$ 的 Fourier 变换.

3. 求 $F(\omega)=\frac{\pi}{2}[(\sqrt{3}+\mathrm{j})\delta(\omega+5)+(\sqrt{3}-\mathrm{j})\delta(\omega-5)]$ 的 Fourier 逆变换 $f(t)$.

4. 求 $F(\omega)=\omega\sin\omega t_0+\mathrm{j}\omega$ 的 Fourier 逆变换 $f(t)$.

5. 已知某信号的相关函数 $R(\tau)=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2a|\tau|}$,求它的能量谱密度 $S(\omega)$.

6. 求函数 $f(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<1,\\ 0, & t\geqslant 1\end{cases}$ 的正弦变换和余弦变换.

7. 求函数 $f(\boldsymbol{x})=\left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2|\boldsymbol{x}|^2}{2}}$ 的 Fourier 变换,其中 $\alpha>0,\boldsymbol{x}=\{x,y,z\}$.

§3.3 Fourier 变换的某些应用

Fourier 变换在工程技术和系统分析的研究中有着广泛的应用.对于一个线性系统,在许多场合下,它的数学模型可以用一个线性的微分方程、积分方程、微分积分方程乃至于偏微分方程来描述.这一类系统在振动力学、电工学、无线电技术、自动控制理论或其他科学技术领域的研究中,都占有很重要的地位.同时,随着无线电技术、声学、振动学的蓬勃发展,频谱理论也得到了相应的发展和广泛的应用.在本节中,对于上述的问题,我们将通过 MATLAB 运算给出结果.

1. 求作函数的频谱图

在频谱分析中,函数 $f(t)$ 的 Fourier 变换 $F(\omega)$ 又称为 $f(t)$ 的频谱函数,而频谱函数的模 $|F(\omega)|$ 称为 $f(t)$ 的振幅频谱(亦简称为频谱).由于 ω 是连续变化的,也称之为连续频谱,而作出一个时间函数的频谱图主要是指绘出振幅频谱 $|F(\omega)|$ 与角频率 ω 之间的关系曲线.现举例如下.

例 1 求作函数 $f(t)=t\mathrm{e}^{-t^2}$ 的频谱图.

解 根据频谱函数的意义,我们首先应当求出该函数的 Fourier 变换.因此,在指令窗口输入:

```
>> clear;
>> syms t w;
>> f=t*exp(-t^2);
```

```
>> F=fourier(f)↵
F =
-(w*pi^(1/2)*exp(-w^2/4)*1i)/2
```

整理可得

$$F(\omega)=-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\omega \mathrm{j}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\omega^2}.$$

为了作出函数 $f(t)$ 的频谱图，即绘制 $|F(\omega)|$ 与 ω 之间的关系曲线，可在指令窗口继续输入：

```
>> S=(pi^(1/2)/2)*abs(-w*j*exp(-w^2/4);
>> ezplot(S,[-10,10])↵  % ezplot 为符号函数平面图形的绘制指令
```

则可获得图 3-1 所示的函数 $f(t)$ 的频谱图.

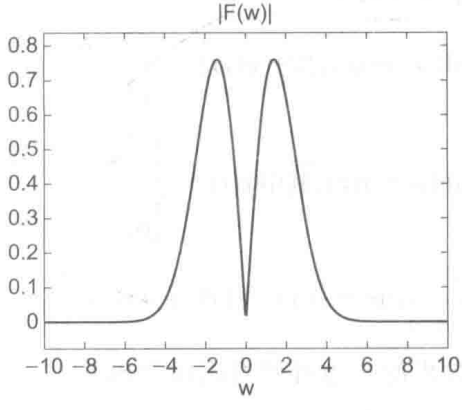


图 3-1 函数 $f(t)$ 的频谱图

如果要绘制函数 $f(t)$ 与 t 之间的关系曲线，可在指令窗口继续输入：

```
>> ezplot(f,[-5,5])↵
```

则可获得图 3-2 所示的函数 $f(t)$ 关于 t 的曲线.

注 对于所绘制的函数图形，当横坐标的量值变化时，这些图形的画面会有所改变.读者可自行试之.

2. 求解微分、积分方程

利用 Fourier 变换求解微分、积分方程的主要步骤如下：

(1) 对欲求解的方程作关于某个变量的 Fourier 变换；

(2) 从变换后的象函数方程中求出象函数；

(3) 对象函数再取 Fourier 逆变换就获得原来方程的解.

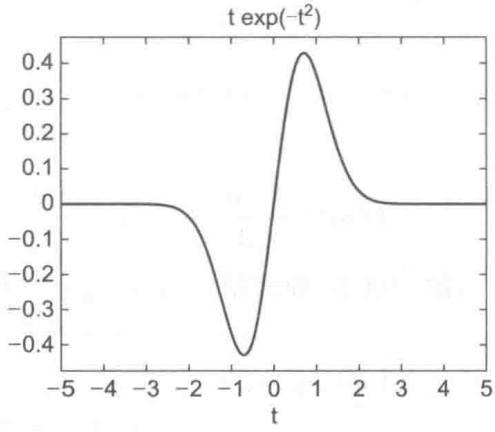


图 3-2 函数 $f(t)$ 关于 t 的曲线

下面将举例说明如何用 MATLAB 软件来进行运算的.

例 2 求下列积分方程的解:

(1) $\int_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t\mathrm{d}t = g(\omega)$,其中 $g(\omega)=\begin{cases}1-\omega, & 0\leqslant\omega\leqslant 1,\\ 0, & \omega>1;\end{cases}$

(2) $\int_0^{+\infty} g(\omega)\sin\omega t\mathrm{d}\omega = f(t)$,其中 $f(t)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\sin t, & 0\leqslant t\leqslant\pi,\\ 0, & t>\pi;\end{cases}$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{y(\tau)}{(t-\tau)^2+a^2}\mathrm{d}\tau = x(t)$,其中 $x(t)=\dfrac{1}{t^2+b^2}$,a,b 为常数,且 $b>a>0$.

解 (1) 由积分方程的左边可以看出未知函数 $f(t)$ 的 Fourier 余弦变换是已知的,即

$$F_c(\omega)=\int_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t\mathrm{d}t = g(\omega),$$

因此,求解原积分方程的问题转变为求 Fourier 余弦变换的逆变换问题.所以

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}F_c(\omega)\cos\omega t\mathrm{d}\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}g(\omega)\cos\omega t\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{1}(1-\omega)\cos\omega t\mathrm{d}\omega.$$

现在根据 MATLAB 软件中的积分指令,在指令窗口输入:

```
>> clear;
>> syms t w;
>> g=2*(1-w)*cos(w*t)/pi;
```

```
>> f=int(g,w,0,1) ↵
f =
-(2*cos(t)-2)/(t^2*pi)
```

整理可得该积分方程的解为

$$f(t)=\frac{-(2\cos t-2)}{\pi t^2}=\frac{2(1-\cos t)}{\pi t^2}.$$

(2) 因为该积分方程可以改写为 $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}g(\omega)\sin\omega t\mathrm{d}\omega=\frac{2}{\pi}f(t)$，所以 $\frac{2}{\pi}f(t)$ 为 $g(\omega)$ 的 Fourier 正弦逆变换，从而有

$$g(\omega)=\int_0^{+\infty}\frac{2}{\pi}f(t)\sin\omega t\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\sin t\sin\omega t\mathrm{d}t.$$

现在根据 MATLAB 软件中的积分指令，在指令窗口输入：

```
>> clear;
>> syms t w;
>> assume(w~=1&w~=-1);
>> f=sin(t)*sin(w*t);
>> g=int(f,t,0,pi) ↵
g =
-sin(pi*w)/(w^2-1)
```

整理可得该积分方程的解为

$$g(\omega)=\frac{-\sin\omega\pi}{\omega^2-1}=\frac{\sin\omega\pi}{1-\omega^2},$$

其中 $\omega\neq\pm1$. 显然，当 $\omega=1$ 时，$g(\omega)=\frac{\pi}{2}$；当 $\omega=-1$ 时，$g(\omega)=-\frac{\pi}{2}$.

(3) 利用卷积定理可以求解此类积分方程. 该方程的左边是未知函数 $y(t)$ 与 $\frac{1}{t^2+a^2}$ 的卷积，即 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y(\tau)}{(t-\tau)^2+a^2}\mathrm{d}\tau=y(t)*\frac{1}{t^2+a^2}$.

设 $Y(\omega)=\mathscr{F}[y(t)]$，$X(\omega)=\mathscr{F}[x(t)]$，$h(t)=\frac{1}{t^2+a^2}$ 且 $H(\omega)=\mathscr{F}[h(t)]$，则有

$$\mathscr{F}[y(t)*h(t)]=\mathscr{F}[x(t)],$$

即

$$\mathscr{F}[y(t)]\cdot\mathscr{F}[h(t)]=\mathscr{F}[x(t)],$$

从而

$$Y(\omega)=\frac{X(\omega)}{H(\omega)}.$$

为了求出 $Y(\omega)$ 的 Fourier 逆变换,先要求出 $x(t)$ 和 $h(t)$ 的 Fourier 变换.为此,根据 MATLAB 软件中的专用指令,在指令窗口输入:

```
>> clear;
>> syms t w;
>> syms a positive;
>> syms b positive;
>> h=1/(t^2+a^2);
>> x=1/(t^2+b^2);
>> H=fourier(h),X=fourier(x) ↵
H =
(pi*exp(-a*abs(w)))/a
X =
(pi*exp(-b*abs(w)))/b
```

整理可得

$$H(\omega)=\frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|},$$

$$X(\omega)=\frac{\pi}{b}e^{-b|\omega|}.$$

因此

$$Y(\omega)=\frac{X(\omega)}{H(\omega)}=\frac{a}{b}e^{(a-b)|\omega|}=\frac{a}{b}e^{-(b-a)|\omega|}=\frac{a}{b}e^{-c|\omega|},\text{其中 } c=b-a>0.$$

根据 MATLAB 软件中的专用指令,在指令窗口输入:

```
>> clear;
>> syms t w;
>> syms a b c positive;
>> Y=(a/b)*exp(-c*abs(w));
>> y=ifourier(Y,t) ↵
y =
(a*c)/(b*pi*(c^2+t^2))
```

整理可得该积分方程的解为

$$y(t)=\frac{ac}{b\pi(c^2+t^2)}=\frac{a(b-a)}{\pi b[t^2+(b-a)^2]}.$$

例 3 求微分积分方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)-4\int_{-\infty}^{t}x(t)\mathrm{d}t=g(t)$ 的解 $x(t)$，其中 $g(t)=\mathrm{e}^{-|t|}$.

解 设 $X(\omega)=\mathscr{F}[x(t)]$，$G(\omega)=\mathscr{F}[g(t)]$. 利用 Fourier 变换的线性性质、微分性质和积分性质，对该微分积分方程两边取 Fourier 变换，可得

$$\mathrm{j}\omega X(\omega)-4\frac{1}{\mathrm{j}\omega}X(\omega)=G(\omega),$$

所以

$$X(\omega)=\frac{G(\omega)}{\mathrm{j}\left(\omega+\frac{4}{\omega}\right)}.$$

现在根据 MATLAB 软件中的专用指令，在指令窗口输入：

```
>> clear;
>> syms t w;
>> g=exp(-abs(t));
>> G=fourier(g) ↵
G =
2/(w^2+1)

>> X=G/(j*(w+(4/w)));
>> x=ifourier(X,t) ↵
x =
((2*pi*exp(-abs(t))* sign(t))/3-(2*pi*exp(-2*abs(t))
*sign(t))/3)/(2*pi)
```

整理可得该微分积分方程的解为

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{2\pi}{3}\mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{sign}(t)-\frac{2\pi}{3}\mathrm{e}^{-2|t|}\mathrm{sign}(t)\right]$$

$$=\frac{1}{3}(\mathrm{e}^{-|t|}-\mathrm{e}^{-2|t|})\mathrm{sign}(t),$$

其中 $\operatorname{sign}(t)=\begin{cases}1, t>0,\\ -1, t<0,\end{cases}$ 而当 $t=0$ 时，$x(t)=0$. 因此该微分积分方程的解可进一步写为

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}), & t>0,\\ 0, & t=0,\\ \dfrac{1}{3}(\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t}), & t<0.\end{cases}$$

3. 求解偏微分方程

从上述求解微分、积分方程的例子中可以看出，这类线性方程的未知函数往往是与时间有关的单变量函数. 实际上，在自然界和工程技术领域中还有许多未知函数不仅与时间 t 有关，而且还与空间位置 (x,y,z) 有关. 例如一根细长杆上的温度分布问题和声波在介质中传播的问题，等等. 研究这些物理量的变化规律就会引出含有多个变量的未知函数，从而在数学上引出了求解偏微分方程的定解问题.

利用 Fourier 变换求解偏微分方程的步骤类似于求解微分、积分方程的步骤，即先将定解问题中的未知函数看作某个自变量的函数，对方程及定解条件关于该自变量取 Fourier 变换，使得未知函数对该自变量的求导次数降低一次，如果是只含有两个自变量（如一个时间变量和一个坐标变量）或含有多个自变量（如一个时间变量和两个坐标变量）的二阶偏微分方程，通过一重 Fourier 变换或二重 Fourier 变换就能把该偏微分方程和定解条件化为象函数的常微分方程的定解问题；再根据这个常微分方程和相应的定解条件，求出象函数；最后，对象函数取 Fourier 逆变换得到原定解问题的解. 下面给出例题加以说明.

例 4（一维波动方程的初值问题） 利用 Fourier 变换求解定解问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, -\infty<x<+\infty, t>0,\\ u|_{t=0}=\cos x,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sin x.\end{cases}$$

解 由于未知函数 $u(x,t)$ 中的自变量 x 的变化范围是 $(-\infty,+\infty)$. 因此，对方程及初值条件关于 x 取 Fourier 变换. 记 $U(\omega,t)=\mathscr{F}[u(x,t)]$. 利用微分性

质可得

$$\mathscr{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=(\mathrm{j}\omega)^2 U(\omega,t)=-\omega^2 U(\omega,t), \tag{3.1}$$

$$\mathscr{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathscr{F}[u(x,t)]=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}U(\omega,t), \tag{3.2}$$

而 cos x 和 sin x 的 Fourier 变换,可以通过 MATLAB 软件中的专用指令获得.即在指令窗口输入:

```
>> clear;
>> syms x w;
>> fc=cos(x);
>> fs=sin(x);
>> Fc=fourier(fc), Fs=fourier(fs) ↵
Fc =
pi*(dirac(w-1)+dirac(w+1))
Fs =
-pi*(dirac(w-1)-dirac(w+1))*1i
```

整理可得

$$\mathscr{F}[\cos x]=\pi[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)], \tag{3.3}$$

$$\mathscr{F}[\sin x]=\pi\mathrm{j}[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]. \tag{3.4}$$

因此,根据上面的(3.1)—(3.4)式,原定解问题转化为求解含有参数 ω 的二阶常系数线性齐次微分方程的初值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2 U,\\[2ex] U\Big|_{t=0}=\pi[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)],\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=\pi\mathrm{j}[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)].\end{cases}$$

根据 MATLAB 软件中求解常微分方程的专用指令(即表 3-3 中的指令 dsolve),在指令窗口继续输入:

```
>> U=dsolve('D2U=-w^2*U','U(0)=Fc,DU(0)=Fs','t') ↵
U =
(exp(-t*w*1i)*(Fc*w+Fs*1i))/(2*w)-
(exp(t*w*1i)*(Fs*1i-Fc*w))/(2*w)
```

整理可得

$$
\begin{aligned}
U(\omega,t) &= \frac{1}{2\omega}e^{-j\omega t}(F_c\omega+F_s j)-\frac{1}{2\omega}e^{j\omega t}(F_s j-F_c\omega) \\
&= F_c\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}+\frac{1}{\omega}F_s\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j} \\
&= F_c\cos\omega t+\frac{1}{\omega}F_s\sin\omega t \\
&= \pi[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)]\cos\omega t+\frac{\pi}{\omega}j[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]\sin\omega t \quad (3.5).
\end{aligned}
$$

为了求 $U(\omega,t)$ 的 Fourier 逆变换，必须按(3.5)式赋值于符号变量 U.为此，可在指令窗口继续输入：

```
>> U=pi*(dirac(w+1)+dirac(w-1))*cos(w*t)+(j*pi)/w
*(dirac(w+1)-dirac(w-1))*sin(w*t);
>> u=ifourier(U) ↵
u =
(pi*(exp(-x*1i)*sin(t)-exp(x*1i)*sin(t))*1i+pi*
(exp(-x*1i)*cos(t)+exp(x*1i)*cos(t)))/(2*pi)
```

整理可得原定解问题的解为

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}[\pi(e^{-jx}\sin t-e^{jx}\sin t)j+\pi(e^{-jx}\cos t+e^{jx}\cos t)] \\
&= \frac{j}{2}\sin t(e^{-jx}-e^{jx})+\frac{1}{2}\cos t(e^{-jx}+e^{jx}) \\
&= \sin t\frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}+\cos t\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2} \\
&= \sin t\sin x+\cos t\cos x \\
&= \cos(t-x).
\end{aligned}
$$

习题三

1. 求微分方程 $x'(t)+3x(t)=e^{-2t}$ 满足 $x(0)=5$ 的解.

2. 求积分方程 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y(\tau)}{(t-\tau)^2+a^2}d\tau=\frac{1}{t^2+b^2}(0<a<b)$ 的解.

3. 求微分积分方程 $x'(t)-\int_{-\infty}^{t}x(t)dt=2\delta(t)$ 的解，其中 $-\infty<t<+\infty$.

4.（三维热传导方程的初值问题） 利用三重 Fourier 变换求解定解问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), -\infty<x,y,z<+\infty, t>0\\ u\big|_{t=0}=h(x,y,z).\end{cases}$$

§3.4 Laplace 变换及其逆变换的 MATLAB 运算

在 MATLAB 软件的工具箱中提供了求取 Laplace 变换及其逆变换的专用指令，即

(1) F=laplace(f)　对函数 $f(x)$ 进行 Laplace 变换，返回的函数为 $F(s)$.

(2) f=ilaplace(F)　对函数 $F(s)$ 进行 Laplace 逆变换，返回的函数为 $f(x)$.

因此，指令中的 f 和 F 分别为 $f(x)$ 和 $F(s)$ 的符号表达式.现举例如下.

例 1　求函数 $f(t)=te^{-at}\sin bt$ 的 Laplace 变换，其中 $a>0, b>0$.

解　在 MATLAB 软件的指令窗口输入：

```
>> clear;
>> syms t;
>> syms a b positive;
>> f=t*exp(-a*t)*sin(b*t);
>> F=laplace(f) ↵
F =
(b*(2*a+2*s))/((a+s)^2+b^2)^2          % 变量 s 为默认值
```

整理可得

$$F(s)=\frac{b(2a+2s)}{[(a+s)^2+b^2]^2}=\frac{2b(s+a)}{[(s+a)^2+b^2]^2}.$$

注　为了验证所求结果的正确性，同样可对 $F(s)$ 求 Laplace 逆变换.为此，在指令窗口继续输入：

```
>> f=ilaplace(F) ↵
f =
(exp(-t*(a-b*1i))*exp(-t*(a+b*1i))*(t*exp(t*(a-b*1i))-t*exp(t*(a+b*1i)))*1i)/2   % 变量 t 为默认值
```

整理可得

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t(a-\mathrm{j}b)} \cdot \mathrm{e}^{-t(a+\mathrm{j}b)}\left(t\mathrm{e}^{t(a-\mathrm{j}b)} - t\mathrm{e}^{t(a+\mathrm{j}b)}\right)\mathrm{j} \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-2at}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}bt} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}bt}\right)t\mathrm{e}^{at}\mathrm{j}\right] \\
&= t\mathrm{e}^{-at}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}bt} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}bt}}{2\mathrm{j}} = t\mathrm{e}^{-at}\sin bt,
\end{aligned}
$$

这就表明所求结果是正确的.以下的例子都可以用这个方法对所求结果加以验证.读者可自行试之.

例 2 求函数 $f(t)=t^m(m>0)$ 的 Laplace 变换.

解 在指令窗口输入:

```
>> clear;
>> syms t;
>> syms m positive;
>> f=t^m;
>> F=laplace(f) ↵
F =
gamma(m+1)/s^(m+1)                    % gamma 表示 Γ 函数
```

整理可得

$$F(s)=\frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}.$$

注 实际上,当 $m>-1$ 时,结论也是成立的(见 §2.1 的例 4);当 m 为正整数时,$F(s)=\dfrac{m!}{s^{m+1}}$.

例 3 求 $F(s)=\dfrac{2s+5}{s^2+4s+13}$ 的 Laplace 逆变换.

解 在指令窗口输入:

```
>> clear;
>> syms s;
>> F=(2*s+5)/(s^2+4*s+13);
>> f=ilaplace(F) ↵
f =
2*exp(-2*t)*(cos(3*t)+sin(3*t)/6)
```

整理可得

$$f(t)=2e^{-2t}\left(\cos 3t+\frac{1}{6}\sin 3t\right)=e^{-2t}\left(2\cos 3t+\frac{1}{3}\sin 3t\right).$$

对 $f(t)$ 求 Laplace 变换,则得到 $F(s)$.读者可自行完成来加以验证.

注 1 从上面的例子可以看出,利用 MATLAB 软件工具箱所提供的专用指令来求取 Laplace 变换及其逆变换就如同求取 Fourier 变换及其逆变换那样,不仅简单、快捷,而且非常有效,同样也为有需求的读者提供了方便.

注 2 根据 Laplace 变换及其逆变换的定义,也可以用积分指令"int"来求出变换的结果.特别对分段函数的 Laplace 变换及其逆变换的求解提供了方便.现举例如下.

例 4 求下列函数的 Laplace 变换:

(1) $f(t)=\begin{cases}\sin t, & 0<t\leqslant\pi,\\ 0, & t>\pi;\end{cases}$ (2) $f(t)=\begin{cases}3, & 0\leqslant t<2,\\ -1, & 2\leqslant t<4,\\ 0, & t\geqslant 4.\end{cases}$

解 (1) 根据 Laplace 变换的定义,有

$$F(s)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt=\int_0^{\pi}\sin te^{-st}dt.$$

根据表 3-3 中的积分指令,在指令窗口输入:

```
>> clear;
>> syms t s;
>> F=int(sin(t)*exp(-s*t),t,0,pi) ↵
F =
(exp(-pi*s)+1)/(s^2+1)
```

整理可得

$$F(s)=\frac{e^{-\pi s}+1}{s^2+1}=\frac{1+e^{\pi s}}{(s^2+1)e^{\pi s}}.$$

(2) 根据 Laplace 变换的定义,有

$$F(s)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt=\int_0^2 3e^{-st}dt+\int_2^4 -e^{-st}dt.$$

根据表 3-3 中的积分指令,在指令窗口输入:

```
>> clear;
>> syms s t;
>> F1=int(3*exp(-s*t),t,0,2);
```

```
>> F2=int(-exp(-s*t),t,2,4);
>> F=F1+F2 ↵
F =
-(3*(exp(-2*s)-1))/s-(exp(-4*s)* (exp(2*s)-1))/s
```

整理可得

$$F(s)=\frac{-3(e^{-2s}-1)}{s}-\frac{e^{-4s}(e^{2s}-1)}{s}=\frac{1}{s}(3-4e^{-2s}+e^{-4s}).$$

例 5 求函数 $f(t)=\int_0^t e^{-3\tau}\sin 2\tau d\tau$ 的 Laplace 变换.

解 我们给出两种方法.

方法一 在指令窗口输入(指令中用 v 代替 τ):

```
>> clear;
>> syms v t;
>> f=int(exp(-3*v)*sin(2*v),v,0,t);
>> F=laplace(f) ↵
F =
2/(13*s)-(2*(s+3))/(13*((s+3)^2+4))-6/(13*((s+3)^
2+4))
```

整理可得

$$F(s)=\frac{2}{13s}-\frac{2(s+3)}{13[(s+3)^2+4]}-\frac{6}{13[(s+3)^2+4]}$$

$$=\frac{2}{13s}-\frac{2(s+6)}{13[(s+3)^2+4]}=\frac{2}{13}\left[\frac{1}{s}-\frac{s+6}{(s+3)^2+4}\right]=\frac{2}{s[(s+3)^2+4]}.$$

方法二 利用 Laplace 变换的积分性质:设 $F_1(s)=\mathscr{L}[f_1(t)]$,则 $\mathscr{L}\left[\int_0^t f_1(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{s}F_1(s)$. 因此,只要求出被积函数的 Laplace 变换.在指令窗口输入:

```
>> clear;
>> syms t positive;
>> f1=exp(-3*t)*sin(2*t);
>> F1=laplace(f1) ↵
F1 =
```

```
2/((s+3)^2+4)
```

整理可得

$$F(s)=\frac{1}{s}F_1(s)=\frac{2}{s[(s+3)^2+4]}.$$

显然,以上的这些例子也表明,利用 MATLAB 软件工具箱中提供的求取 Laplace 变换及其逆变换的专用指令和通用的积分指令,可以方便、快捷地获得运算结果.

习题四

1. 求函数 $f(t)=\frac{1}{a}(1-\cos at)$ 的 Laplace 变换,其中 $a\neq 0$.
2. 求函数 $f(t)=e^{2t}+5\delta(t)$ 的 Laplace 变换.
3. 求 $F(s)=\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$ 的 Laplace 逆变换 $f(t)$.
4. 求 $F(s)=\ln\frac{s+1}{s-1}$ 的 Laplace 逆变换 $f(t)$.

§3.5 Laplace 变换的某些应用

Laplace 变换和 Fourier 变换一样,在许多工程技术和科学研究领域中有着广泛的应用.特别是在力学系统、电学系统、自动控制系统、可靠性系统以及随机服务系统等系统科学中都起着重要作用.人们在研究这些系统时,往往是从实际问题出发,将研究的对象归结为一个数学模型.在许多场合下,这个数学模型可以用一个线性的微分方程、积分方程、微分积分方程乃至于偏微分方程来描述.这样,我们可以像用 Fourier 变换那样,用 Laplace 变换这一方法去分析和求解这类线性方程,而且其求解步骤也和 Fourier 变换方法完全类似.在本节中,对于上述问题,我们将通过 MATLAB 运算给出结果.

1. 求解微分、积分方程

利用 Laplace 变换求解微分、积分方程的主要步骤类同于 Fourier 变换的求解方法.在求解过程中要用到 Laplace 变换的微分性质和积分性质:设 $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$,则有

$$\mathscr{L}[y'] = \mathscr{L}[y'(t)] = sY(s) - y(0),$$

$$\mathscr{L}[y''] = \mathscr{L}[y''(t)] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0),$$

$$\mathscr{L}[ty] = \mathscr{L}[ty(t)] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}Y(s),$$

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t y(t)\,\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{s}Y(s).$$

现举例说明如下：

例 1（常系数微分方程的初值问题） 利用 Laplace 变换求解定解问题：

$$\begin{cases} y''+2y'+5y=\mathrm{e}^{-t}\sin t, \\ y\Big|_{t=0}=0, y'\Big|_{t=0}=1. \end{cases}$$

解 对方程两边取 Laplace 变换并结合初值条件，有

$$s^2Y(s)-1+2sY(s)+5Y(s)=\frac{1}{(s+1)^2+1},$$

化简后可得

$$Y(s)=\frac{(s+1)^2+2}{(s^2+2s+5)[(s+1)^2+1]}.$$

现在根据 MATLAB 软件中 Laplace 变换的专用指令，在指令窗口输入：

```
>> clear;
>> syms s;
>> Y=((s+1)^2+2)/((s^2+2*s+5)*((s+1)^2+1));
>> y=ilaplace(Y)↵
y =
(exp(-t)*sin(t))/3+(sin(2*t)*exp(-t))/3
```

整理可得

$$y(t)=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}\sin t+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}\sin 2t=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}(\sin t+\sin 2t).$$

注 直接使用 MATLAB 软件中求解微分方程的专用指令（即表 3-3 中的指令 dsolve）也能获得结果.读者可自行练习.

例 2 求微分积分方程 $y'(t)+2y(t)+2\int_0^t y(\tau)\,\mathrm{d}\tau=u(t-b), y(0)=-2$ 的解.

解 利用微分性质与积分性质，对方程两边取 Laplace 变换并结合初值条

件,有

$$sY(s)-y(0)+2Y(s)+\frac{2}{s}Y(s)=\frac{1}{s}e^{-sb},$$

即

$$Y(s)=\frac{e^{-sb}-2s}{(s+1)^2+1}.$$

为了获得该方程的解,利用 MATLAB 软件中 Laplace 逆变换的专用指令,在指令窗口输入:

```
>> clear;
>> syms s;
>> syms b;
>> Y=(exp(-s*b)-2*s)/((s+1)^2+1);
>> y=ilaplace(Y)
y =
-2*exp(-t)*(cos(t)-sin(t))-sin(b-t)*exp(b-t)*
heaviside(t-b)
```

整理可得

$$\begin{aligned}y(t)&=-2e^{-t}(\cos t-\sin t)-\sin(b-t)e^{b-t}u(t-b)\\&=2e^{-t}(\sin t-\cos t)+\sin(t-b)e^{-(t-b)}u(t-b).\end{aligned}$$

例 3 (*RL* 串联电路中的电流问题) 在图 3-3 所示的 *RL* 串联电路中,当 $t=0$ 时,开关 S 闭合.若外加电源电压 $E=E_0\sin\omega t$,求开关 S 闭合后,回路中的电流 $i(t)$,其中 R 为电阻,L 为电感.

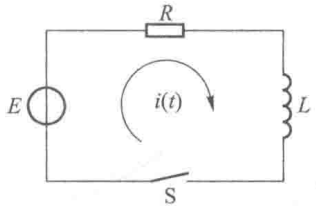


图 3-3 *RL* 串联电路

解 根据 Kirchhoff 定律,有

$$u_R+u_L=E,$$

其中 $u_R=Ri(t)$, 而 $u_L=L\dfrac{di(t)}{dt}$,代入上式,可得

$$\begin{cases}L\dfrac{di(t)}{dt}+Ri(t)=E_0\sin\omega t,t\geqslant 0,\\ i(0)=0.\end{cases}$$

这一定解问题是 *RL* 串联电路方程的初值问题.记 $\mathscr{L}[i(t)]=I(s)$,对微分方程两边取 Laplace 变换并结合初值条件,有

$$LsI(s)+RI(s)=E_0\frac{\omega}{s^2+\omega^2},$$

从而可得

$$I(s)=\frac{E_0}{Ls+R}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{E_0}{L}\cdot\frac{1}{s+\frac{R}{L}}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

根据卷积定理：$\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)\cdot F_2(s)]=f_1(t)*f_2(t)$，令

$$F_1(s)=\frac{1}{s+\frac{R}{L}},\quad F_2(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

显然，

$$f_1(t)=\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t},\quad f_2(t)=\sin\omega t.$$

因此，$I(s)$的逆变换为

$$i(t)=\mathscr{L}^{-1}[I(s)]=\frac{E_0}{L}(\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}*\sin\omega t)=\frac{E_0}{L}\int_0^t\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}\tau}\sin\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

现在，可以用 MATLAB 软件中的积分指令计算 $i(t)$，在指令窗口输入（用 v 代替 τ）：

```
>> clear;
>> syms E0 R L v w t;
>> i=(E0/L)*int(exp(-R*v/L)*sin(w*(t-v)),v,0,t) ↵
i =
(E0*(L*R*sin(t*w)-L*w*(L*cos(t*w)-L*exp(-(R*
t)/L))))/(L*(L^2*w^2+R^2))
```

整理可得

$$\begin{aligned}i(t)&=\frac{E_0(LR\sin\omega t-L\omega(L\cos\omega t-L\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t})}{L(L^2\omega^2+R^2)}\\&=\frac{E_0(R\sin\omega t-\omega(L\cos\omega t-L\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t})}{L^2\omega^2+R^2}\\&=\frac{E_0}{L^2\omega^2+R^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t)+\frac{E_0\omega L}{L^2\omega^2+R^2}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}.\end{aligned}$$

注 1 对于一个实际的 RL 串联电路，可以进一步求出电路中的回路电流 $i(t)$. 例如，该串联电路中的电阻 $R=10\ \Omega$，电感 $L=2$ H，而电源电压

$E=50\sin 5t$，其中 $E_0=50$，$\omega=5$，则

$$i(t)=\frac{5}{2}e^{-5t}+\frac{5}{2}(\sin 5t-\cos 5t).$$

若电路中的电源在 $t=0$ 时输入一个脉冲电压 $E=E_0\delta(t)$，则微分方程的 Laplace 变换式为

$$LsI(s)+RI(s)=E_0,$$

所以

$$I(s)=\frac{E_0}{Ls+R}=\frac{E_0}{L}\cdot\frac{1}{s+\frac{R}{L}},$$

从而

$$i(t)=\frac{E_0}{L}e^{-\frac{R}{L}t}.$$

注 2 从 $i(t)$ 的最后结果来看，一般分为两部分：第二部分代表一个稳定的振荡，即幅度不变的振荡，而第一部分是不稳定的，它随着时间而衰减. 我们可以看到：

$$\lim_{t\to+\infty} i(t)=\frac{E_0}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t),$$

而列举的两个特例分别为

$$\lim_{t\to+\infty} i(t)=\frac{5}{2}(\sin 5t-\cos 5t),$$

$$\lim_{t\to+\infty} i(t)=0.$$

这就表明 RL 串联电路中的电流与外加的电源电压的类型有关，例如 $E=E_0\delta(t)$，即在 $t=0$ 时输入了一个脉冲电压，因此回路中有电流存在仅仅是一个短暂的过程.

注 3 上面对 RL 串联电路给出了回路电流的计算和讨论. 对于 RC 串联电路以及 RLC 串联电路等都可以给出类似的计算和讨论. 不仅如此，在对于物理、力学、自动控制以及可靠性等系统的研究中，若它的数学模型能够归结为线性微分方程的初值问题，则用 Laplace 变换的方法来求解是非常方便的，从而也就可以使用 MATLAB 软件来进行运算.

2. 求解偏微分方程

Laplace 变换也是求解某些偏微分方程的方法之一，其计算过程和步骤与

求解上述各类线性方程及用 Fourier 变换求解偏微分方程的过程及步骤相似.这里主要针对线性偏微分方程中的未知函数是二元函数的情形.由于 Laplace 变换中变量 $x,t\in[0,+\infty)$,所以,Laplace 变换非常适合于求解半无限域的定解问题.下面给出例题加以说明.

例 4(半有界弦振动方程的混合问题) 利用 Laplace 变换求解定解问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},x>0,t>0,\\ u\Big|_{t=0}=0,\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0,\\ u\Big|_{x=0}=\sin bt,\lim\limits_{x\to+\infty}u(x,t)=0.\end{cases}$$

解 对该定解问题关于 t 取 Laplace 变换.记

$$\mathscr{L}[u(x,t)]=U(x,s),$$

并利用 Laplace 变换的微分性质及初值条件,有

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]=s^2U(x,s)-su(x,0)-\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=s^2U(x,s),$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^{+\infty}u(x,t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}U(x,s),$$

$$\mathscr{L}[u(0,t)]=\mathscr{L}[\sin bt]=\frac{b}{s^2+b^2},$$

$$\lim_{x\to+\infty}U(x,s)=0.$$

这样,求解原定解问题转化为求解含有参数 s 的常微分方程的边值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}U(x,s)-\dfrac{s^2}{a^2}U(x,s)=0,\\ U(0,s)=\dfrac{b}{s^2+b^2},\lim\limits_{x\to+\infty}U(x,s)=0.\end{cases}$$

这里的方程是 $U(x,s)$ 关于 x 的一个二阶常系数齐次线性微分方程.为了求出 $U(x,s)$,根据 MATLAB 软件中求解微分方程的专用指令(即表 3-3 中的指令 dsolve),在指令窗口输入:

```
>> clear;
>> syms x s;
>> U=dsolve('D2U-(s^2/a^2)*U=0','x') ↵
U =
```

```
C1 * exp(-(s * x)/a)+C2 * exp((s * x)/a)
```

整理可得

$$U(x,s)=C_1\mathrm{e}^{-\frac{s}{a}x}+C_2\mathrm{e}^{\frac{s}{a}x}.$$

由边界条件可得

$$C_1=\frac{b}{s^2+b^2},\qquad C_2=0.$$

从而

$$U(x,s)=\frac{b}{s^2+b^2}\mathrm{e}^{-\frac{s}{a}x}.$$

为了获得原定解问题的解,利用 MATLAB 软件中 Laplace 逆变换的专用指令,在指令窗口输入:

```
>> clear;
>> syms s x t a b;
>> U=(b/(s^2+b^2)) * exp(-s/a * x);
>> u=ilaplace(U) ↵
u =
heaviside(-(x- a * t)/a) * sin(b * (t-x/a))
```

整理可得

$$\begin{aligned}u(x,t)&=H\left(-\frac{x-at}{a}\right)\sin b\left(t-\frac{x}{a}\right)\\&=H\left(t-\frac{x}{a}\right)\sin b\left(t-\frac{x}{a}\right)\\&=\begin{cases}0, & t<\dfrac{x}{a},\\ \sin b\left(t-\dfrac{x}{a}\right), & t>\dfrac{x}{a}.\end{cases}\end{aligned}$$

注意,这里为了区别于未知函数 $u(x,t)$,记单位阶跃函数为 $H(t)$.

3. 线性系统的传递函数

所谓线性系统是指能用一个线性常系数微分方程描述的系统.外加给系统的随时间 t 变化的输入函数 $x(t)$,称为激励,而系统的随时间 t 变化的输出函数 $y(t)$,称为响应.一个系统的响应是由激励函数与系统本身的特征和结构所决定的.因此,在分析线性系统时,我们要研究激励和响应同系统本身特性

之间的联系.为了描述这种联系需要引进传递函数的概念.

所谓传递函数是指在零初值条件下,系统输出函数 $y(t)$ 的 Laplace 变换 $Y(s)$ 与输入函数 $x(t)$ 的 Laplace 变换 $X(s)$ 之比,记为 $G(s)$,即

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)} \qquad 或 \qquad Y(s)=G(s)X(s).$$

而 $x(t)$,$y(t)$ 及 $X(s)$,$Y(s)$,$G(s)$ 之间的关系可用图 3-4 的方框图表示.

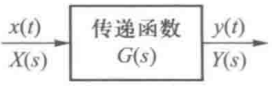


图 3-4

对于性质不同的物理系统,只要描述该系统运动规律的微分方程相同,就可以有相同的传递函数,而传递函数不相同的物理系统,即使系统的激励相同,其响应也是不相同的,可见传递函数不表明系统的物理性质.因此,对传递函数进行分析和研究,就能统一处理各种物理性质不同的线性系统.传递函数这一重要特性,使得具有相同传递函数的不同物理系统,在应用上可以互相转化.例如把研究机械系统的问题,转化为研究电路系统的问题.因此,传递函数是许多工程技术领域分析的理论基础.

如果用 $g(t)$ 表示 $G(s)$ 的 Laplace 逆变换,即 $g(t)=\mathscr{L}^{-1}[G(s)]$,则

$$y(t)=g(t)*x(t)=\int_0^t g(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau,$$

此结果表明系统的响应等于其激励与 $g(t)$ 的卷积.由此可见,一个线性系统除了用传递函数表征外,也可以用传递函数的 Laplace 逆变换 $g(t)$ 来表征.我们称 $g(t)$ 为系统的脉冲响应函数.它的物理意义可以这样解释:当激励 $x(t)=\delta(t)$ 时,则在零初值条件下,有

$$\mathscr{L}[x(t)]=\mathscr{L}[\delta(t)]=X(s)=1,$$

所以

$$Y(s)=G(s),$$

即

$$y(t)=g(t).$$

可见,脉冲响应函数 $g(t)$,就是在零初值条件下,激励为 $\delta(t)$ 时的响应 $y(t)$,也就是传递函数的 Laplace 逆变换,如图 3-5 所示.

在系统的传递函数中,令 $s=\mathrm{j}\omega$,则

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{Y(\mathrm{j}\omega)}{X(\mathrm{j}\omega)}$$

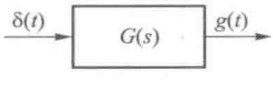


图 3-5

称为系统的频率特性函数,简称为频率响应.在工程技

术中，$G(\mathrm{j}\omega)$ 又称为正弦传递函数.由此可见，任何线性系统的正弦传递函数都可以由该系统的传递函数中的 s 以 $\mathrm{j}\omega$ 来代替获得.

系统的传递函数、脉冲响应函数、频率响应是表征线性系统的几个重要概念，下面我们将举例说明.

例 5 如图 3-6 所示的 RC 串联电路中，当外加电动势为 $e(t)$，看成是该串联电路的激励，而电容器两端的电压 $u_C(t)$ 看成该串联电路的响应.求开关闭合后，该电路系统的传递函数，电路的脉冲响应函数及其频率响应.

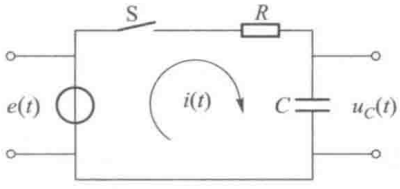


图 3-6 RC 串联电路

解 根据 Kirchhoff 定律，有

$$u_R(t)+u_C(t)=e(t),$$

其中 $u_R=Ri(t)$，$i(t)=C\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$，而且 $u_C(0)=0$.所以

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}+u_C(t)=e(t),\quad u_C(0)=0.$$

这是该电路系统的激励 $e(t)$ 和响应 $u_C(t)$ 所满足的一阶常系数非齐次线性微分方程.由此可见 RC 串联电路系统是一个线性系统.设 $\mathscr{L}[u_C(t)]=U_C(s)$，$\mathscr{L}[e(t)]=E(s)$.对上述微分方程两边取 Laplace 变换，利用微分性质并结合初值条件，有

$$RCsU_C(s)+U_C(s)=E(s),$$

即

$$U_C(s)=\frac{E(s)}{RCs+1}=\frac{E(s)}{RC\left(s+\dfrac{1}{RC}\right)}.$$

按传递函数的定义，有

$$G(s)=\frac{U_C(s)}{E(s)}=\frac{1}{RC\left(s+\dfrac{1}{RC}\right)},$$

按脉冲响应函数的定义，即取传递函数的 Laplace 逆变换，则

$$g(t)=\mathscr{L}^{-1}[G(s)]=\frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}},$$

按频率响应的定义，在传递函数中，令 $s=\mathrm{j}\omega$，则

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{RC\mathrm{j}\omega+1}.$$

注 只要知道描述系统的微分方程,在零初值条件下,通过 Laplace 变换及其逆变换的方法就能够获得该系统的传递函数、脉冲响应函数及其频率响应函数.

例 6 系统在激励 $x(t)=u(t)+tu(t)$ 的作用下,测得系统的响应为

$$y(t)=(t+0.9)-0.9\mathrm{e}^{-10t},$$

当系统在零初值条件下,求该系统的传递函数.

解 根据系统传递函数的定义,有

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}.$$

我们可以利用 MATLAB 软件中 Laplace 变换的专用指令,在指令窗口输入:

```
>> clear;
>> syms t s;
>> x=heaviside(t)+t*heaviside(t);
>> y=t+0.9-0.9*exp(-10*t);
>> X=laplace(x);
>> Y=laplace(y);
>> G=Y/X ↵
G =
-(9/(10*(s+10))-((9*s)/10+1)/s^2)/(1/s+1/s^2)
```

整理可得

$$G(s)=\frac{-\left[\dfrac{9}{10(s+10)}-\dfrac{\frac{9s}{10}+1}{s^2}\right]}{\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s^2}}=\frac{-\dfrac{9}{10(s+10)}+\dfrac{9s+10}{10s^2}}{\dfrac{s+1}{s^2}}=\frac{10}{s+10}.$$

注 传递函数 $G(s)$ 的获得,需要进行上述的计算,不仅计算麻烦,而且关系式稍不留神还会看错.实际上,这些工作可以由计算机来完成,只要在指令窗口输入:

```
>> G=factor(Y/X) ↵   % factor 为素数因子的符号函数
G =
[10,1/(s+10)]        % 在 factor 指令下,[a,b,c]表示为这些
```

因子的乘积,即[a,b,c]=abc

整理可得

$$G(s)=10\cdot\frac{1}{s+10}=\frac{10}{s+10}.$$

这样,我们可以很方便的直接获得结果.

例 7 设系统 1 和系统 2 串联(如图 3-7 所示),它们分别具有传递函数 $G_1(s)$ 和 $G_2(s)$,而系统 1 的响应 $y(t)$ 为系统 2 的激励.已知 $G_1(s)=e^{-s}$,$y(t)=e^{-(t-2)}u(t-2)$.求该串联系统的响应$z(t)=(t-2)^2y(t)$时的串联系统的激励 $x(t)$.

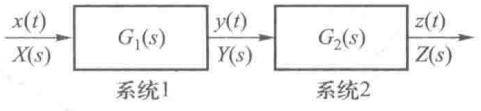


图 3-7

解 设 $\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$, $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$, $\mathscr{L}[z(t)]=Z(s)$. 对于系统 1 和 2,分别有

$$G_1(s)=\frac{Y(s)}{X(s)},\ G_2(s)=\frac{Z(s)}{Y(s)},$$

因此

$$Z(s)=G_2(s)Y(s)=G_2(s)G_1(s)X(s),$$

从而

$$X(s)=\frac{Z(s)}{G_1(s)G_2(s)}.$$

为了求出系统的激励 $x(t)$,利用 MATLAB 软件中 Laplace 变换的专用指令,在指令窗口输入:

```
>> clear;
>> syms s t;
>> y=exp(-t+2)*heaviside(t-2);
>> z=(t-2)^2*y;
>> G1=exp(-s);
>> Y=laplace(y);
>> Z=laplace(z);
>> G2=factor(Z/Y) ↵
G2 =
```

```
[2,1/(s+1),1/(s+1)]
```

整理可得

$$G_2(s)=2\cdot\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s+1}=\frac{2}{(s+1)^2}.$$

令 $G(s)=G_1(s)\cdot G_2(s)=\frac{2}{(s+1)^2}e^{-s}$.现在我们可以在指令窗口进一步输入:

```
>> G=(2/(s+1)^2)*exp(-s);
>> X=factor(Z/G) ↵
X=
[exp(-s),1/(s+1)]
```

整理可得

$$X(s)=\frac{1}{s+1}e^{-s}.$$

为了获得其逆变换,可在指令窗口继续输入:

```
>> X=(1/(s+1))*exp(-s);
>> X=ilaplace(X) ↵
X=
heaviside(t-1)*exp (1-t)
```

整理可得

$$x(t)=u(t-1)e^{-(t-1)}.$$

注 从本例可以看出,对于两个子系统构成的串联系统,则该系统的激励 $x(t)$ 与响应 $z(t)$ 之间构成了一个等价的单个系统,它们之间的关系为(见图 3-8)

$$Z(s)=G_1(s)G_2(s)X(s).$$

一般地,如有 k 个子系统构成一个串联系统,设第 i 个子系统的传递函数为 $G_i(s)$, $i=1,2,\cdots,k$. 则有

$$Z(s)=G_1(s)G_2(s)\cdots G_k(s)X(s),$$

这里,$x(t)$ 与 $z(t)$ 分别为该串联系统的激励与响应.

总之,从这一章给出的例题可以看出,MATLAB 软件无论是计算函数的 Fourier 变换及其逆变换,还是计算函数的 Laplace 变换及其逆变换都是一个方便快捷的有效工具.但是也应该看到,由于软件本身具有局

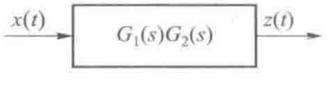


图 3-8

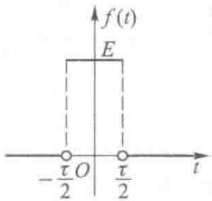
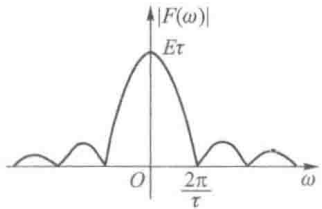
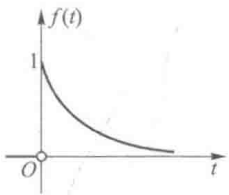
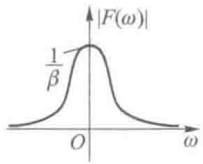
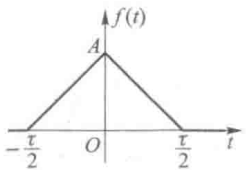
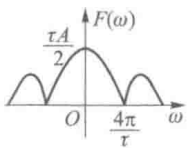
限性,所以并非所有的函数都能够用 MATLAB 软件来求函数的积分变换.例如我们不能利用 MATLAB 软件来求函数 $f(t)=e^{-t}$ 的 Fourier 变换,还需根据 Fourier 变换的定义、性质等,通过其他数学方法来求解.

习题五

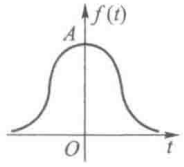
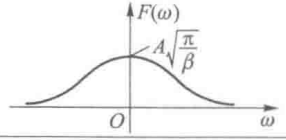
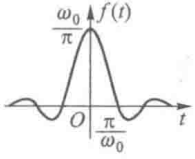
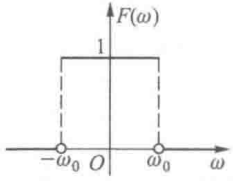
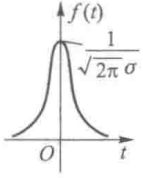
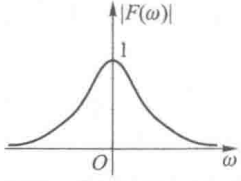
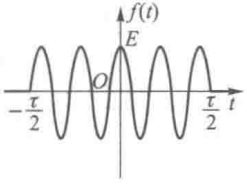
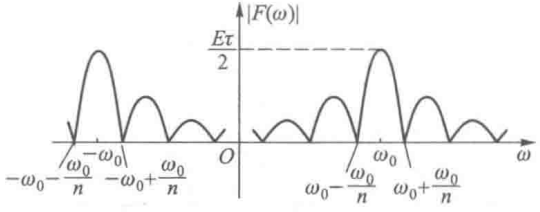
1. 求常系数微分方程 $y'''+3y''+3y'+y=1, y|_{t=0}=y'|_{t=0}=y''|_{t=0}=0$ 的解.
2. 求变系数微分方程 $ty''+2y'+ty=0, y(0)=1, y'(0)=c_0$($c_0$ 为常数)的解.
3. 求积分方程 $y(t)=e^{-t}-\int_0^t y(\tau)\,d\tau$ 的解.
4. 求微分积分方程 $\int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau=y'(t), y(0)=1$ 的解.
5. 求解偏微分方程的定解问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}=1, \quad x>0, t>0, \\ u|_{t=0}=1, \\ u|_{t=0}=t+1. \end{cases}$$

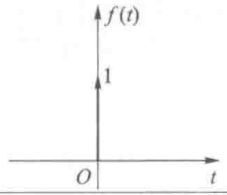
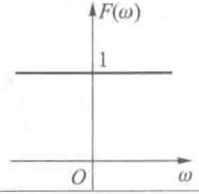
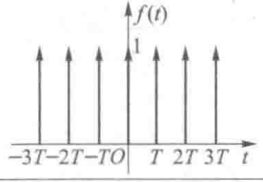
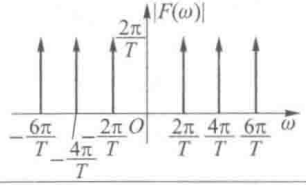
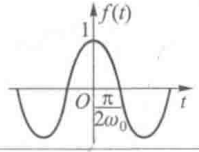
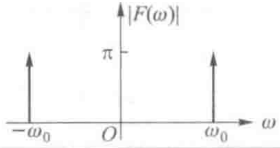
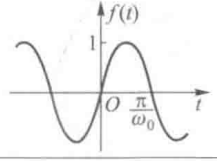
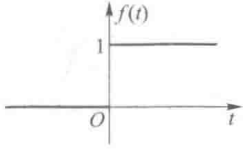
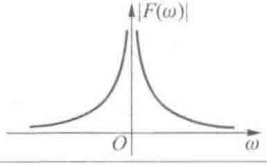
附录Ⅰ　Fourier 变换简表

	$f(t)$		$F(\omega)$	
	函　　数	图　　像	频　　谱	图　　像
1	矩形单脉冲 $f(t)=\begin{cases}E, & \lvert t\rvert\leqslant\frac{\tau}{2},\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$		$2E\dfrac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\omega}$	
2	指数衰减函数 $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ e^{-\beta t}, & t\geqslant 0\ (\beta>0)\end{cases}$		$\dfrac{1}{\beta+\mathrm{j}\omega}$	
3	三角形单脉冲 $f(t)=\begin{cases}\frac{2A}{\tau}\left(\frac{\tau}{2}+t\right), & -\frac{\tau}{2}\leqslant t<0,\\ \frac{2A}{\tau}\left(\frac{\tau}{2}-t\right), & 0\leqslant t<\frac{\tau}{2},\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$		$\dfrac{4A}{\tau\omega^2}\left(1-\cos\dfrac{\omega\tau}{2}\right)$	

续表

	$f(t)$		$F(\omega)$	
	函　　数	图　　像	频　　谱	图　　像
4	钟形脉冲 $f(t)=A\mathrm{e}^{-\beta t^2}(\beta>0)$		$\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}A\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}$	
5	Fourier 核 $f(t)=\frac{\sin\omega_0 t}{\pi t}$		$F(\omega)=\begin{cases}1, \lvert\omega\rvert\leqslant\omega_0,\\0, 其他\end{cases}$	
6	Gauss 分布函数 $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$		$\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$	
7	矩形射频脉冲 $f(t)=\begin{cases}E\cos\omega_0 t, \lvert t\rvert\leqslant\frac{\tau}{2},\\0, \quad 其他\end{cases}$		$\frac{E\tau}{2}\left[\frac{\sin(\omega-\omega_0)\frac{\tau}{2}}{(\omega-\omega_0)\frac{\tau}{2}}+\frac{\sin(\omega+\omega_0)\frac{\tau}{2}}{(\omega+\omega_0)\frac{\tau}{2}}\right]$	

续表

	$f(t)$		$F(\omega)$	
	函　　数	图　　像	频　　谱	图　　像
8	单位脉冲函数 $f(t)=\delta(t)$		1	
9	周期性脉冲函数 $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$ （T 为脉冲函数的周期）		$\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\frac{2n\pi}{T}\right)$	
10	$f(t)=\cos\omega_0 t$		$\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$	
11	$f(t)=\sin\omega_0 t$		$j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$	同上图
12	单位阶跃函数 $f(t)=u(t)$		$\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$	

续表

	$f(t)$	$F(\omega)$
13	$u(t-c)$	$\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega c}+\pi\delta(\omega)$
14	$u(t)\cdot t$	$-\frac{1}{\omega^2}+\pi j\delta'(\omega)$
15	$u(t)\cdot t^n$	$\frac{n!}{(j\omega)^{n+1}}+\pi j^n\delta^{(n)}(\omega)$
16	$u(t)\sin\alpha t$	$\frac{\alpha}{\alpha^2-\omega^2}+\frac{\pi}{2j}[\delta(\omega-\alpha)-\delta(\omega+\alpha)]$
17	$u(t)\cos\alpha t$	$\frac{j\omega}{\alpha^2-\omega^2}+\frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\alpha)+\delta(\omega+\alpha)]$
18	$u(t)e^{j\alpha t}$	$\frac{1}{j(\omega-\alpha)}+\pi\delta(\omega-\alpha)$
19	$u(t-c)e^{j\alpha t}$	$\frac{1}{j(\omega-\alpha)}e^{-j(\omega-\alpha)c}+\pi\delta(\omega-\alpha)$

续表

	$f(t)$	$F(\omega)$
20	$u(t)e^{j\alpha t}t^n$	$\frac{n!}{[j(\omega-\alpha)]^{n+1}}+\pi j^n\delta^{(n)}(\omega-\alpha)$
21	$e^{a\lvert t\rvert}, \mathrm{Re}(a)<0$	$\frac{-2a}{\omega^2+a^2}$
22	$\delta(t-c)$	$e^{-j\omega c}$
23	$\delta'(t)$	$j\omega$
24	$\delta^{(n)}(t)$	$(j\omega)^n$
25	$\delta^{(n)}(t-c)$	$(j\omega)^n e^{-j\omega c}$
26	1	$2\pi\delta(\omega)$
27	t	$2\pi j\delta'(\omega)$
28	t^n	$2\pi j^n\delta^{(n)}(\omega)$
29	$e^{j\alpha t}$	$2\pi\delta(\omega-\alpha)$
30	$t^n e^{j\alpha t}$	$2\pi j^n\delta^{(n)}(\omega-\alpha)$
31	$\frac{1}{a^2+t^2}, \mathrm{Re}(a)<0$	$-\frac{\pi}{a}e^{a\lvert\omega\rvert}$
32	$\frac{t}{(a^2+t^2)^2}, \mathrm{Re}(a)<0$	$\frac{j\omega\pi}{2a}e^{a\lvert\omega\rvert}$

续表

	$f(t)$	$F(\omega)$
33	$\frac{e^{jbt}}{a^2+t^2}$, $\mathrm{Re}(a)<0$, b 为实数	$-\frac{\pi}{a}e^{a\lvert\omega-b\rvert}$
34	$\frac{\cos bt}{a^2+t^2}$, $\mathrm{Re}(a)<0$, b 为实数	$-\frac{\pi}{2a}[e^{a\lvert\omega-b\rvert}+e^{a\lvert\omega+b\rvert}]$
35	$\frac{\sin bt}{a^2+t^2}$, $\mathrm{Re}(a)<0$, b 为实数	$-\frac{\pi}{2aj}[e^{a\lvert\omega-b\rvert}-e^{a\lvert\omega+b\rvert}]$
36	$\frac{\sinh at}{\sinh \pi t}$, $-\pi<a<\pi$	$\frac{\sin a}{\cosh \omega+\cos a}$
37	$\frac{\sinh at}{\cosh \pi t}$, $-\pi<a<\pi$	$-2j\frac{\sin\frac{a}{2}\sinh\frac{\omega}{2}}{\cosh \omega+\cos a}$
38	$\frac{\cosh at}{\cosh \pi t}$, $-\pi<a<\pi$	$2\frac{\cos\frac{a}{2}\cosh\frac{\omega}{2}}{\cosh \omega+\cos a}$
39	$\frac{1}{\cosh at}$	$\frac{\pi}{a}\frac{1}{\cosh\frac{\pi\omega}{2a}}$
40	$\sin at^2$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cos\left(\frac{\omega^2}{4a}+\frac{\pi}{4}\right)$
41	$\cos at^2$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cos\left(\frac{\omega^2}{4a}-\frac{\pi}{4}\right)$

续表

	$f(t)$	$F(\omega)$
42	$\frac{1}{t}\sin at$	$\begin{cases}\pi, & \lvert\omega\rvert\leqslant a,\\ 0, & \lvert\omega\rvert>a\end{cases}$
43	$\frac{1}{t^2}\sin^2 at$	$\begin{cases}\pi\left(a-\frac{\lvert\omega\rvert}{2}\right), & \lvert\omega\rvert\leqslant 2a,\\ 0, & \lvert\omega\rvert>2a\end{cases}$
44	$\frac{\sin at}{\sqrt{\lvert t\rvert}}$	$\mathrm{j}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{\lvert\omega+a\rvert}}-\frac{1}{\sqrt{\lvert\omega-a\rvert}}\right)$
45	$\frac{\cos at}{\sqrt{\lvert t\rvert}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{\lvert\omega+a\rvert}}+\frac{1}{\sqrt{\lvert\omega-a\rvert}}\right)$
46	$\lvert t\rvert^{\alpha},\alpha\neq 0,\pm 1,\pm 2,\cdots$	$-2\sin\frac{\alpha\pi}{2}\Gamma(\alpha+1)\lvert\omega\rvert^{-(\alpha+1)}$
47	$\operatorname{sgn} t$	$\frac{2}{\mathrm{j}\omega}$
48	$\mathrm{e}^{-at^2},\operatorname{Re}(a)>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
49	$\lvert t\rvert^{2k+1},k=0,1,2,\cdots$	$2(-1)^{k+1}(2k+1)!\ \omega^{-2(k+1)}$
50	$\ln(t^2+a^2),\quad a>0$	$-\frac{2\pi}{\lvert\omega\rvert}\mathrm{e}^{-a\lvert\omega\rvert}$
51	$\arctan\frac{t}{a},\quad a>0$	$-\frac{\pi\mathrm{j}}{\omega}\mathrm{e}^{-a\lvert\omega\rvert}$
52	$\frac{\mathrm{e}^{\pi t}}{(1+\mathrm{e}^{\pi t})^2}$	$\frac{\pi^2\omega}{\sinh\omega}$

附录Ⅱ　Laplace 变换简表

	$f(t)$	$F(s)$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
3	$t^m\ (m>-1)$	$\frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}$
4	$t^m e^{at}\ (m>-1)$	$\frac{\Gamma(m+1)}{(s-a)^{m+1}}$
5	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
6	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
7	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
8	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
9	$t\sin at$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
10	$t\cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
11	$t\sinh at$	$\frac{2as}{(s^2-a^2)^2}$
12	$t\cosh at$	$\frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$
13	$t^m\sin at\ (m>-1)$	$\frac{\Gamma(m+1)}{2j(s^2+a^2)^{m+1}}\cdot[(s+ja)^{m+1}-(s-ja)^{m+1}]$
14	$t^m\cos at(m>-1)$	$\frac{\Gamma(m+1)}{2(s^2+a^2)^{m+1}}\cdot[(s+ja)^{m+1}+(s-ja)^{m+1}]$
15	$e^{-bt}\sin at$	$\frac{a}{(s+b)^2+a^2}$
16	$e^{-bt}\cos at$	$\frac{s+b}{(s+b)^2+a^2}$

续表

	$f(t)$	$F(s)$
17	$e^{-bt}\sin(at+c)$	$\frac{(s+b)\sin c+a\cos c}{(s+b)^2+a^2}$
18	$\sin^2 t$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}\right)$
19	$\cos^2 t$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4}\right)$
20	$\sin at\sin bt$	$\frac{2abs}{[s^2+(a+b)^2][s^2+(a-b)^2]}$
21	$e^{at}-e^{bt}$	$\frac{a-b}{(s-a)(s-b)}$
22	$ae^{at}-be^{bt}$	$\frac{(a-b)s}{(s-a)(s-b)}$
23	$\frac{1}{a}\sin at-\frac{1}{b}\sin bt$	$\frac{b^2-a^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
24	$\cos at-\cos bt$	$\frac{(b^2-a^2)s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
25	$\frac{1}{a^2}(1-\cos at)$	$\frac{1}{s(s^2+a^2)}$
26	$\frac{1}{a^3}(at-\sin at)$	$\frac{1}{s^2(s^2+a^2)}$
27	$\frac{1}{a^4}(\cos at-1)+\frac{1}{2a^2}t^2$	$\frac{1}{s^3(s^2+a^2)}$
28	$\frac{1}{a^4}(\cosh at-1)-\frac{1}{2a^2}t^2$	$\frac{1}{s^3(s^2-a^2)}$
29	$\frac{1}{2a^3}(\sin at-at\cos at)$	$\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$
30	$\frac{1}{2a}(\sin at+at\cos at)$	$\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$
31	$\frac{1}{a^4}(1-\cos at)-\frac{1}{2a^3}t\sin at$	$\frac{1}{s(s^2+a^2)^2}$
32	$(1-at)e^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)^2}$

续表

	$f(t)$	$F(s)$
33	$t\left(1-\frac{a}{2}t\right)e^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)^3}$
34	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
35①	$\frac{1}{ab}+\frac{1}{b-a}\left(\frac{e^{-bt}}{b}-\frac{e^{-at}}{a}\right)$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
36①	$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\frac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)}+\frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
37①	$\frac{ae^{-at}}{(c-a)(a-b)}+\frac{be^{-bt}}{(a-b)(b-c)}+\frac{ce^{-ct}}{(b-c)(c-a)}$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
38①	$\frac{a^2e^{-at}}{(c-a)(b-a)}+\frac{b^2e^{-bt}}{(a-b)(c-b)}+\frac{c^2e^{-ct}}{(b-c)(a-c)}$	$\frac{s^2}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
39①	$\frac{e^{-at}-e^{-bt}[1-(a-b)t]}{(a-b)^2}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)^2}$
40①	$\frac{[a-b(a-b)t]e^{-bt}-ae^{-at}}{(a-b)^2}$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)^2}$
41	$e^{-at}-e^{\frac{at}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}at}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}at}{2}\right)$	$\frac{3a^2}{s^3+a^3}$
42	$\sin at\cosh at-\cos at\sinh at$	$\frac{4a^3}{s^4+4a^4}$
43	$\frac{1}{2a^2}\sin at\sinh at$	$\frac{s}{s^4+4a^4}$
44	$\frac{1}{2a^3}(\sinh at-\sin at)$	$\frac{1}{s^4-a^4}$
45	$\frac{1}{2a^2}(\cosh at-\cos at)$	$\frac{s}{s^4-a^4}$
46	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$
47	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$	$\frac{1}{s\sqrt{s}}$
48	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{at}(1+2at)$	$\frac{s}{(s-a)\sqrt{s-a}}$
49	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt}-e^{at})$	$\sqrt{s-a}-\sqrt{s-b}$

续表

	$f(t)$	$F(s)$
50	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{at}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\frac{a}{s}}$
51	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cosh 2\sqrt{at}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{\frac{a}{s}}$
52	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sin 2\sqrt{at}$	$\frac{1}{s\sqrt{s}}e^{-\frac{a}{s}}$
53	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sinh 2\sqrt{at}$	$\frac{1}{s\sqrt{s}}e^{\frac{a}{s}}$
54	$\frac{1}{t}(e^{bt}-e^{at})$	$\ln\frac{s-a}{s-b}$
55	$\frac{2}{t}\sinh at$	$\ln\frac{s+a}{s-a}=2\operatorname{artanh}\frac{a}{s}$
56	$\frac{2}{t}(1-\cos at)$	$\ln\frac{s^2+a^2}{s^2}$
57	$\frac{2}{t}(1-\cosh at)$	$\ln\frac{s^2-a^2}{s^2}$
58	$\frac{1}{t}\sin at$	$\arctan\frac{a}{s}$
59	$\frac{1}{t}(\cosh at-\cos bt)$	$\ln\sqrt{\frac{s^2+b^2}{s^2-a^2}}$
60②	$\frac{1}{\pi t}\sin(2a\sqrt{t})$	$\operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{s}}\right)$
61②	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-2a\sqrt{t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{\frac{a^2}{s}}\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{s}}\right)$
62	$\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{1}{s}e^{-a\sqrt{s}}$
63	$\operatorname{erf}\left(\frac{t}{2a}\right)$	$\frac{1}{s}e^{a^2s^2}\operatorname{erfc}(as)$
64	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-2\sqrt{at}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{\frac{a}{s}}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{a}{s}}\right)$
65	$\frac{1}{\sqrt{\pi(t+a)}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{as}\operatorname{erfc}(\sqrt{as})$
66	$\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{erf}(\sqrt{at})$	$\frac{1}{s\sqrt{s+a}}$

续表

	$f(t)$	$F(s)$
67	$\frac{1}{\sqrt{a}}e^{at}\mathrm{erf}(\sqrt{at})$	$\frac{1}{\sqrt{s}(s-a)}$
68	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
69	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
70	$t^m u(t)\quad(m>-1)$	$\frac{1}{s^{m+1}}\Gamma(m+1)$
71	$\delta(t)$	1
72	$\delta^{(n)}(t)$	s^n
73	$\mathrm{sgn}\ t$	$\frac{1}{s}$
74③	$J_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$
75③	$I_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2-a^2}}$
76	$J_0(2\sqrt{at})$	$\frac{1}{s}e^{-\frac{a}{s}}$
77	$e^{-bt}I_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{(s+b)^2-a^2}}$
78	$tJ_0(at)$	$\frac{s}{(s^2+a^2)^{3/2}}$
79	$tI_0(at)$	$\frac{s}{(s^2-a^2)^{3/2}}$
80	$J_0\left(a\sqrt{t(t+2b)}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}e^{b(s-\sqrt{s^2+a^2})}$
81	$\frac{1}{at}J_1(at)$	$\frac{1}{s+\sqrt{s^2+a^2}}$
82	$J_1(at)$	$\frac{1}{a}\left(1-\frac{s}{\sqrt{s^2+a^2}}\right)$
83	$J_n(t)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\left(\sqrt{s^2+1}-s\right)^n$
84	$t^{\frac{n}{2}}J_n(2\sqrt{t})$	$\frac{1}{s^{n+1}}e^{-\frac{1}{s}}$

续表

	$f(t)$	$F(s)$
85	$\frac{1}{t}J_n(at)$	$\frac{1}{na^n}(\sqrt{s^2+a^2}-s)^n$
86	$\int_t^{\infty}\frac{J_0(t)}{t}dt$	$\frac{1}{s}\ln(s+\sqrt{s^2+1})$
87④	$\mathrm{si}\ t$	$\frac{1}{s}\mathrm{arccot}\ s$
88⑤	$\mathrm{ci}\ t$	$\frac{1}{s}\ln\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$

注:① 式中 a,b,c 为不相等的常数.

② $\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$,称为误差函数.

$\mathrm{erfc}(x)=1-\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty}e^{-t^2}dt$,称为余误差函数.

③ $I_n(x)=j^{-n}J_n(jx)$,J_n 称为第一类 n 阶 Bessel 函数.I_n 称为第一类 n 阶变形的 Bessel 函数,或称为虚宗量的 Bessel 函数.

④ $\mathrm{si}\ t=\int_0^t\frac{\sin t}{t}dt$ 称为正弦积分.

⑤ $\mathrm{ci}\ t=\int_{-\infty}^t\frac{\cos t}{t}dt$ 称为余弦积分.

习题答案

第一章

习题一

2. (1) $f(t)=\frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega-\omega\cos\omega}{\omega^3}\cos\omega t\mathrm{d}\omega$;

(2) $f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{(5-\omega^2)\cos\omega t+2\omega\sin\omega t}{25-6\omega^2+\omega^4}\mathrm{d}\omega$;

(3) $f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega}\sin\omega t\mathrm{d}\omega$ ($|t|\neq 0,1$),而左端的 $f(t)$ 在它的间断点 $t_0=-1,0,1$ 处,应以 $\frac{f(t_0+0)+f(t_0-0)}{2}$ 代替.

3. (1) $f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}\cos\omega t\mathrm{d}\omega$;

(2) $f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos\omega t\mathrm{d}\omega$;

(3) $f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\pi\sin\omega t}{1-\omega^2}\mathrm{d}\omega$.

4. $f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\omega}{\beta^2+\omega^2}\sin\omega t\mathrm{d}\omega$,

$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}\cos\omega t\mathrm{d}\omega$.

5. $f(t)=\frac{2}{\pi t^2}(1-\cos t)$ $(t>0)$.

习题二

1. $F(\omega)=\frac{A(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau})}{\mathrm{j}\omega}$.

3. (1) $F(\omega)=\frac{\alpha(\beta-\mathrm{j}\omega)}{\beta^2+\omega^2}$;　　(2) $F(\omega)=\frac{2\omega\sin\omega\pi}{1-\omega^2}$.

4. $F_s(\omega)=\frac{\omega}{1+\omega^2}$.

6. $f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}[u(1+t)+u(1-t)-1], & |t|\neq 1,\\ \dfrac{1}{4}, & |t|=1.\end{cases}$

7. $f(t)=\cos\omega_0 t$.

8. $f(t)=\dfrac{1}{a^2+t^2}$, $\mathrm{Re}(a)<0$.

9. $F(\omega)=\dfrac{2}{\mathrm{j}\omega}$.

10. $F(\omega)=\cos\omega a+\cos\dfrac{\omega a}{2}$.

11. (1) $F(\omega)=\dfrac{\pi}{2}\mathrm{j}[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2)]$;

(2) $F(\omega)=\dfrac{\pi}{4}\mathrm{j}[3\delta(\omega+1)-\delta(\omega+3)+\delta(\omega-3)-3\delta(\omega-1)]$;

(3) $F(\omega)=\dfrac{\pi}{2}[(\sqrt{3}+\mathrm{j})\delta(\omega+5)+(\sqrt{3}-\mathrm{j})\delta(\omega-5)]$;

(4) $F(\omega)=\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$;

(5) $F(\omega)=\dfrac{2\omega^2+4}{\omega^4+4}$;

(6) $F(\omega)=\dfrac{-2\mathrm{j}}{1-\omega^2}\sin\omega\pi$.

15. (1) $G(\omega)=\mathscr{F}[g(t)]=1+2\mathrm{j}\omega-3\omega^2$;

(2) $G(\omega)=\mathscr{F}[g(t)]=2\pi\delta(\omega)+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}-\omega^2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}$.

18. $F(\omega)=\dfrac{4A}{\tau\omega^2}\left(1-\cos\dfrac{\omega\tau}{2}\right)$.

19. $A_0=2|c_0|=h$, $A_n=2|c_n|=\dfrac{h}{n\pi}$, $\omega_n=n\omega=\dfrac{2n\pi}{T}$ $(n=1,2,\cdots)$.

20. $F(\omega)=\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$.

习 题 三

10. $F(\omega)=\dfrac{1}{2\mathrm{j}}\sqrt{\pi}\,\omega\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4}}$.

11. (1) $\dfrac{\mathrm{j}}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F\left(\dfrac{\omega}{2}\right)$; (2) $\mathrm{j}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(\omega)-2F(\omega)$;

(3) $\frac{\mathrm{j}}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F\left(\frac{-\omega}{2}\right)-F\left(\frac{-\omega}{2}\right)$；　　(4) $\frac{1}{2\mathrm{j}}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\omega^3}F\left(\frac{\omega}{2}\right)$；

(5) $-F(\omega)-\omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(\omega)$；　　(6) $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}F(-\omega)$；

(7) $-\mathrm{j}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(-\omega)$；　　(8) $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}\mathrm{j}\omega}F\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

12. (1) π；　(2) $\frac{\pi}{2}$；　(3) $\frac{\pi}{2}$；　(4) $\frac{\pi}{2}$.

习　题　四

2. $f_1(t)*f_2(t)=\frac{\alpha\sin t-\cos t+\mathrm{e}^{-\alpha t}}{\alpha^2+1}$.

3. $f_1(t)*f_2(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}(\sin t-\cos t+\mathrm{e}^{-t}), & 0<t\leqslant\frac{\pi}{2},\\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}(1+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}), & t>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

5. (1) $F(\omega)=\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}+\frac{\pi}{2\mathrm{j}}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$；

(2) $F(\omega)=\frac{\omega_0}{(\beta+\mathrm{j}\omega)^2+\omega_0^2}$；

(3) $F(\omega)=\frac{\beta+\mathrm{j}\omega}{(\beta+\mathrm{j}\omega)^2+\omega_0^2}$；

(4) $F(\omega)=\frac{1}{\mathrm{j}(\omega-\omega_0)}+\pi\delta(\omega-\omega_0)$；

(5) $F(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega-\omega_0)t_0}\left[\frac{1}{\mathrm{j}(\omega-\omega_0)}+\pi\delta(\omega-\omega_0)\right]$；

(6) $F(\omega)=-\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2}+\pi\mathrm{j}\delta'(\omega-\omega_0)$.

7. $S(\omega)=\frac{a}{4a^2+\omega^2}$.

8. $S(\omega)=\frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$.

9. $S(\omega)=\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}$.

10. $R_{12}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{b}{2a}(a^2-\tau^2), & -a\leqslant\tau\leqslant 0,\\ \dfrac{b}{2a}(a-\tau)^2, & 0<\tau\leqslant a,\\ 0, & |\tau|>a.\end{cases}$

习 题 五

1. $F(\boldsymbol{\omega})=\mathscr{F}[f(\boldsymbol{x})]=\dfrac{A\pi^{\frac{3}{2}}}{a^3}\mathrm{e}^{-\frac{|\boldsymbol{\omega}|^2}{4a^2}}$, $\boldsymbol{\omega}=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$.

2. $F(\boldsymbol{\omega})=\mathscr{F}[f(\boldsymbol{x})]=A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x}_0)}$, $\boldsymbol{\omega}=\{\omega_1,\omega_2\}$, $\boldsymbol{x}_0=\{x_0,y_0\}$.

3. $f(\boldsymbol{x},t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\boldsymbol{\omega},t)]=\dfrac{1}{4a^2\pi t}\mathrm{e}^{-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4a^2t}}$, $\boldsymbol{x}=\{x,y\}$.

习 题 六

1. $x(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \mathrm{e}^{-t}, & t\geqslant 0.\end{cases}$

2. $F(\omega)=\sqrt{\pi}\ \mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4}}$.

3. (1) $g(\omega)=\begin{cases}1, & 0<\omega<1,\\ \dfrac{1}{2}, & \omega=1,\\ 0, & \omega>1;\end{cases}$ (2) $g(\omega)=\dfrac{2}{\pi\omega}(1+\cos\omega-2\cos 2\omega)$;

(3) $g(\omega)=\dfrac{2}{\pi\omega^2}(1-\cos\omega)$; (4) $g(\omega)=\dfrac{\omega}{\omega^2-1}(1+\cos\omega\pi)$.

4. (1) $y(t)=\dfrac{a(b-a)}{\pi b[t^2+(b-a)^2]}$;

(2) $y(t)=\sqrt{2\pi}\left(1-\dfrac{t^2}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

5. (1) $x(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}(\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t}), & t<0,\\ 0, & t=0,\\ \dfrac{1}{3}(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}), & t>0;\end{cases}$

(2) $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{cH(\omega)}{aj\omega+bF(\omega)}e^{j\omega t}d\omega$，其中 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，$H(\omega)=\mathscr{F}[h(t)]$.

6. (1) $u(x,t)=t\sin x$；

(2) $u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{At-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$；

(3) (i) $u(x,y)=\frac{2}{\pi}\arctan\frac{x}{y}$，

(ii) $u(x,y)=\frac{1}{\pi}\left[\arctan\left(\frac{1+x}{y}\right)+\arctan\left(\frac{1-x}{y}\right)\right]$；

(4) $u(x,t)=\frac{2A}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega x}{\omega}e^{-a^2\omega^2t}d\omega$，其中 $\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$，称为误差函数；

(5) $u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega}e^{-\omega^2t}\sin\omega x d\omega$；

(6) $u(x,t)=e^{-t}\sin x+\sin t$；

(7) $u(x,y,z,t)=\frac{1}{\sqrt{4a^2t+1}}e^{-\left(\frac{x^2}{4a^2t+1}+5a^2t\right)}\cos(2y-z)$；

(8) $u(x,y,t)=\varphi(x,y)*\frac{1}{4a^2\pi t}e^{-\frac{x^2+y^2}{4a^2t}}+\frac{1}{4a^2\pi}\int_0^t f(x,y,\tau)*\frac{1}{t-\tau}e^{-\frac{x^2+y^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau$

$$\overset{\text{或}}{=\!=\!=}\frac{1}{4a^2\pi t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi,\eta)e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}d\xi d\eta$$

$$+\frac{1}{4a^2\pi}\int_0^t\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi,\eta,\tau)}{t-\tau}e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\eta\right]d\tau.$$

第 二 章

习 题 一

1. (1) $F(s)=\frac{2}{4s^2+1}$ $(\mathrm{Re}(s)>0)$； (2) $F(s)=\frac{1}{s+2}$ $(\mathrm{Re}(s)>-2)$；

(3) $F(s)=\frac{2}{s^3}$ $(\mathrm{Re}(s)>0)$； (4) $F(s)=\frac{1}{s^2+4}$ $(\mathrm{Re}(s)>0)$；

(5) $F(s)=\dfrac{k}{s^2-k^2}$ $(\mathrm{Re}(s)>|k|)$;

(6) $F(s)=\dfrac{s}{s^2-k^2}$ $(\mathrm{Re}(s)>|\mathrm{Re}(k)|)$;

(7) $F(s)=\dfrac{s^2+2}{s(s^2+4)}$ $(\mathrm{Re}(s)>0)$;

(8) $F(s)=\dfrac{2}{s(s^2+4)}$ $(\mathrm{Re}(s)>0)$.

2. (1) $F(s)=\dfrac{1}{s}(3-4\mathrm{e}^{-2s}+\mathrm{e}^{-4s})$;

(2) $F(s)=\dfrac{3}{s}(1-\mathrm{e}^{-\frac{\pi s}{2}})-\dfrac{1}{s^2+1}\mathrm{e}^{-\frac{\pi s}{2}}$;

(3) $F(s)=\dfrac{1}{s-2}+5=\dfrac{5s-9}{s-2}$;

(4) $F(s)=1-\dfrac{1}{s^2+1}=\dfrac{s^2}{s^2+1}$.

3. $\mathscr{L}[f(t)]=\dfrac{1}{(1-\mathrm{e}^{-\pi s})(s^2+1)}$.

4. (1) $\mathscr{L}[f(t)]=\dfrac{1+bs}{s^2}-\dfrac{b}{s(1-\mathrm{e}^{-bs})}$;

(2) $\mathscr{L}[f(t)]=\dfrac{1}{1+s^2}\coth\dfrac{\pi s}{2}$;

(3) $\mathscr{L}[f(t)]=\dfrac{1}{s(1+\mathrm{e}^{-as})}\tanh as$;

(4) $\mathscr{L}[f(t)]=\dfrac{1}{s}\tanh\dfrac{bs}{2}$.

习 题 二

1. (1) $F(s)=\dfrac{1}{s^3}(2s^2+3s+2)$;

(2) $F(s)=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{(s-1)^2}$;

(3) $F(s)=\dfrac{s^2-4s+5}{(s-1)^3}$;

(4) $F(s)=\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}$;

(5) $F(s)=\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$;

(6) $F(s)=\dfrac{10-3s}{s^2+4}$;

(7) $F(s)=\dfrac{6}{(s+2)^2+36}$;　　(8) $F(s)=\dfrac{s+4}{(s+4)^2+16}$;

(9) $F(s)=\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ (n 为正整数);　　(10) $F(s)=\dfrac{1}{s}e^{-\frac{5}{3s}}$;

(11) $F(s)=\dfrac{1}{s}$;　　(12) $F(s)=\sqrt{\dfrac{\pi}{s-3}}$.

2. (1) $\arctan\dfrac{a}{s}$;　　(2) $\dfrac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}s}F\left(\dfrac{s}{a}\right)$;

(3) $aF(as+1)$;　　(4) $aF(as+a^2)$.

3. (1) $F(s)=\dfrac{4(s+3)}{[(s+3)^2+4]^2}$;　　(2) $F(s)=\dfrac{2(3s^2+12s+13)}{s^2[(s+3)^2+4]^2}$;

(3) $f(t)=\dfrac{2}{t}\sinh t$;　　(4) $F(s)=\dfrac{4(s+3)}{s[(s+3)^2+4]^2}$.

4. (1) $F(s)=\operatorname{arccot}\dfrac{s}{k}$;　　(2) $F(s)=\operatorname{arccot}\dfrac{s+3}{2}$;

(3) $f(t)=\dfrac{t}{2}\sinh t$;　　(4) $F(s)=\dfrac{1}{s}\operatorname{arccot}\dfrac{s+3}{2}$.

5. (1) $\ln 2$;　　(2) $\dfrac{1}{2}\ln 2$;

(3) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{m^2+n^2}{a^2+b^2}$;　　(4) $\dfrac{3}{13}$;

(5) $\dfrac{1}{4}$;　　(6) $\dfrac{12}{169}$;

(7) $\dfrac{\pi}{8}$;　　(8) $\dfrac{1}{4}\ln 5$;

(9) 0;　　(10) $\dfrac{\pi}{2}$;

(11) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;　　(12) 1.

6. (1) $f(t)=\dfrac{1}{2}\sin 2t$;　　(2) $f(t)=\dfrac{1}{6}t^3$;

(3) $f(t)=\dfrac{1}{6}t^3e^{-t}$;　　(4) $f(t)=e^{-3t}$;

(5) $f(t)=2\cos 3t+\sin 3t$;　　(6) $f(t)=\dfrac{3}{2}e^{3t}-\dfrac{1}{2}e^{-t}$;

(7) $f(t)=\frac{1}{5}(3e^{2t}+2e^{-3t})$;

(8) $f(t)=2e^{-2t}\cos 3t+\frac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t$.

7. (1) $\mathscr{L}[f(t)]=\frac{A}{s}\tanh\frac{s\tau}{2}$;

(2) $\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{s\sinh s\tau}$;

(3) $\mathscr{L}[f(t)]=\frac{2}{s}(4-e^{-2s})$;

(4) $\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{2s}\left(1+\coth\frac{s\tau}{2}\right)$.

习 题 三

2. (1) t;

(2) $\frac{1}{6}t^3$;

(3) $\frac{m!\ n!}{(m+n+1)!}t^{m+n+1}$;

(4) e^t-t-1;

(5) $\frac{1}{2}t\sin t$;

(6) $\frac{1}{2k}\sin kt-\frac{t}{2}\cos kt$;

(7) $\sinh t-t$;

(8) $\frac{1}{2a}(at\cosh at-\sinh at)$;

(9) $\begin{cases}0, & t<a,\\ \int_0^t f(t-\tau)\mathrm{d}\tau, & 0\leqslant a\leqslant t;\end{cases}$

(10) $\begin{cases}0, & t<a,\\ f(t-a), & 0\leqslant a\leqslant t.\end{cases}$

5. $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\right]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}e^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau$.

习 题 四

2. (1) $f(t)=\frac{1}{a}\sin at$;

(2) $f(t)=\frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$;

(3) $f(t)=\frac{c-a}{(b-a)^2}e^{-at}+\left[\frac{c-b}{a-b}t+\frac{a-c}{(a-b)^2}\right]e^{-bt}$;

(4) $f(t)=\frac{3}{2a}\sin at-\frac{1}{2}t\cos at$;

(5) $f(t)=\frac{1}{a^4}(\cos at-1)+\frac{1}{2a^2}t^2$;

(6) $f(t)=\frac{1}{ab}+\frac{1}{a-b}\left[\frac{e^{-at}}{a}-\frac{e^{-bt}}{b}\right]$;

(7) $f(t)=\frac{1}{2a^3}(\sinh at-\sin at)$;

(8) $f(t)=2te^t+2e^t-1$;

(9) $f(t)=\sinh t-t$;

(10) $f(t)=\frac{1}{3}\cos t-\frac{1}{3}\cos 2t$.

3. (1) $f(t)=\frac{\sin 2t}{16}-\frac{t\cos 2t}{8}$;

(2) $f(t)=\delta(t)-2e^{-2t}$;

(3) $f(t)=\frac{1}{2}(1+2e^{-t}-3e^{-2t})$;

(4) $f(t)=\frac{1}{3}\sin t-\frac{1}{6}\sin 2t$;

(5) $f(t)=\frac{1}{9}\left(\sin\frac{2}{3}t+\cos\frac{2}{3}t\right)e^{-\frac{1}{3}t}$;

(6) $f(t)=\frac{2(1-\cosh t)}{t}$;

(7) $f(t)=\frac{1}{2}te^{-2t}\sin t$;

(8) $f(t)=\frac{1}{2}e^{-t}(\sin t-t\cos t)$;

(9) $f(t)=\left(\frac{1}{2}t\cos 3t+\frac{1}{6}\sin 3t\right)e^{-2t}$;

(10) $f(t)=3e^{-t}-11e^{-2t}+10e^{-3t}$;

(11) $f(t)=\frac{1}{3}e^{-t}(2-2\cos\sqrt{3}t+\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t)$;

(12) $f(t)=\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-3t}+\frac{3}{2}te^{-3t}-3t^2e^{-3t}$;

(13) $f(t)=\begin{cases}t, & 0\leqslant t<2,\\ 2(t-1), & t\geqslant 2;\end{cases}$

(14) $f(t)=\delta'(t)+2\delta(t)+2e^{-t}-e^{-2t}$.

习 题 五

1. (1) $y(t)=e^{2t}-e^{t}$;

(2) $y(t)=\frac{1}{4}[(7+2t)e^{-t}-3e^{-3t}]$;

(3) $y(t)=e^{-t}-e^{-2t}+\left[\frac{1}{2}-e^{-(t-1)}+\frac{1}{2}e^{-2(t-1)}\right]u(t-1)$;

(4) $y(t)=te^{t}\sin t$;

(5) $y(t)=\frac{1}{3}e^{-t}(\sin t+\sin 2t)$;

(6) $y(t)=-2\sin t-\cos 2t$;

(7) $y(t)=h(t)*e^{-2t}\sin t+e^{-2t}[c_1\cos t+c\sin t]$ $(c=2c_1+c_2)$;

(8) $y(t)=1-\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right)e^{-t}$;

(9) $y(t)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}e^{2t}+\frac{2}{5}\cos t-\frac{1}{5}\sin t$;

(10) $y(t)=t^3e^{-t}$;

(11) $y(t)=\left(\frac{1}{60}t^5-\frac{1}{2}t^2-t+1\right)e^{t}$;

(12) $y(t)=\frac{1}{2}t\sin t$;

(13) $y(t)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\left(c_0+\frac{1}{2}\right)t^2+\frac{1}{2}(\cos t-\sin t)$;

(14) $y(t)=2te^{t-1}$;

(15) $y(t)=\frac{\sinh t}{\sinh 2\pi}$;

(16) $y(t)=\sin t-\frac{10}{3}\sin 2t$.

2. (1) $y(t)=3J_0(2t)$, J_0为零阶第一类 Bessel 函数;

(2) $y(t)=\frac{\sin t}{t}$;

(3) $y(t)=(2+c_1t^3)e^{-t}$ (c_1为任意常数);

(4) $y(t)=5e^{-t}$;

(5) $y(t)=ct^{\frac{n}{2}}J_n(2\sqrt{t})$，$J_n$为 n 阶第一类 Bessel 函数；

(6) $y(t)=\dfrac{t}{n-1}+c_1t^n$（$c_1$为任意常数）.

3. (1) $y(t)=a\left(t+\dfrac{1}{6}t^3\right)$；

(2) $y(t)=(1-t)\mathrm{e}^{-t}$；

(3) $y(t)=8J_0(4t)$及 $y(t)=-8J_0(4t)$；

(4) $y(t)=-3+5t-t^2$；

(5) $y(t)=4\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}\mathrm{e}^{-t}$及 $y(t)=-4\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}\mathrm{e}^{-t}$；

(6) $y(t)=J_1(2t)$及 $y(t)=\delta(t)-J_1(2t)$，其中 J_1为一阶第一类 Bessel 函数.

4. (1) $y(t)=1+\dfrac{1}{2}t^2$；

(2) $y(t)=\sin t$；

(3) $y(t)=\mathrm{e}^{-(t-b)}\sin(t-b)u(t-b)-2\mathrm{e}^{-t}(\cos t-\sin t)$；

(4) $y(t)=5(-\mathrm{e}^{-t}+4\mathrm{e}^{-2t}-3\mathrm{e}^{-3t})$；

(5) $y(t)=\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{4}t^2-\dfrac{3}{8}\mathrm{e}^{2t}+\dfrac{1}{4}t\mathrm{e}^{2t}$；

(6) $y(t)=2(\mathrm{e}^{-(t-1)}-\mathrm{e}^{-2(t-1)})u(t-1)$

$-2(\mathrm{e}^{-(t-2)}-\mathrm{e}^{-2(t-2)})u(t-2)+2\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-t}$.

5. (1) $\begin{cases}x(t)=\mathrm{e}^t.\\ y(t)=\mathrm{e}^t;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}y(t)=(1-2\cos t)*f(t),\\ z(t)=-\cos t*f(t);\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x(t)=\dfrac{2}{3}\cos 2t+\dfrac{1}{3}\sin 2t+\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^t,\\ y(t)=-\dfrac{2}{3}\cos 2t-\dfrac{1}{3}\sin 2t+\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^t;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x(t)=\dfrac{2}{3}\cosh(\sqrt{2}t)+\dfrac{1}{3}\cos t,\\ y(t)=z(t)=-\dfrac{1}{3}\cosh(\sqrt{2}t)+\dfrac{1}{3}\cos t;\end{cases}$

(5) $\begin{cases} y(t)=J_0(t), \\ z(t)=-J_1(t)-e^{-t}; \end{cases}$

(6) $\begin{cases} y(t)=\dfrac{2}{3}t^2+\dfrac{5}{3}t-\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}e^{-t}, \\ z(t)=\dfrac{2}{3}t^2+\dfrac{8}{3}+\dfrac{1}{3}e^{-t}+\dfrac{1}{3}te^{-t}+\cos t; \end{cases}$

(7) $\begin{cases} y(t)=-\dfrac{7}{5}e^t+\dfrac{1}{2}(5+t-t^2)-\dfrac{1}{20}(\sin 2t+2\cos 2t), \\ z(t)=\dfrac{21}{5}e^t+2t+\dfrac{1}{5}(2\sin 2t-\cos 2t); \end{cases}$

(8) $\begin{cases} x(t)=3+\dfrac{1}{4}e^{-t}-\dfrac{13}{4}e^t+\dfrac{5}{2}te^t, \\ y(t)=-\dfrac{1}{4}e^{-t}-\dfrac{15}{2}te^t-\dfrac{31}{4}e^t. \end{cases}$

6. (1) $u(x,t)=\begin{cases} \dfrac{g}{2}t^2, & t<\dfrac{x}{a}, \\ \dfrac{gx}{2a^2}(2at-x), & t>\dfrac{x}{a}; \end{cases}$

(2) $u(x,t)=\begin{cases} \dfrac{2}{\omega^2}\left\{\sin^2\dfrac{\omega t}{2}-\sin^2\left[\dfrac{\omega}{2}\left(t-\dfrac{x}{a}\right)\right]\right\}, & t>\dfrac{x}{a}, \\ \dfrac{2}{\omega^2}\sin^2\dfrac{\omega t}{2}, & t<\dfrac{x}{a}; \end{cases}$

(3) $u(x,t)=\dfrac{x}{2a\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t \dfrac{f(\xi)}{(t-\xi)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\xi)}}d\xi;$

(4) $u(x,t)=\dfrac{2u_0}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\left(v^2+\frac{hx^2}{4a^2v^2}\right)}dv;$

(5) $u(x,y)=\dfrac{x^3y^2}{6}+3y+x^2;$

(6) $u(x,t)=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^x \varphi(\tau)\sin a(\tau-x)d\tau;$

(7) $u(x,t)=\begin{cases} \psi(t), & x-t<0, \\ \psi(t)+\varphi(x-t), & x-t>0; \end{cases}$

(8) $u(x,t)=u_{\frac{l-x}{a}}(t)\varphi\left(t-\dfrac{l-x}{a}\right)-u_{\frac{l+x}{a}}(t)\varphi\left(t-\dfrac{l+x}{a}\right)$

$$+u_{\frac{3l-x}{a}}(t)\varphi\left(t-\frac{3l-x}{a}\right)-u_{\frac{3l+x}{a}}(t)\varphi\left(t-\frac{3l+x}{a}\right),$$

其中 $u_\alpha(t)=\begin{cases}0, t<\alpha.\\ 1, t>\alpha\end{cases}(\alpha\geqslant 0)$.

7. $x(t)=\dfrac{K}{m}t$.

8. $i(t)=\dfrac{E}{R}\left[1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}\right]\ (t>t_0)$.

9. $i(t)=E\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}\delta(t)+\dfrac{E}{R_1+R_2}\left[1+\dfrac{(R_1C_1-R_2C_2)^2}{(C_1+C_2)^2R_1R_2}\mathrm{e}^{-\frac{R_1+R_2}{(C_1+C_2)R_1R_2}t}\right]$.

10. $y(t)=\dfrac{AK}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}\sin(\omega t-\arctan\omega T)$.

11. (1) $G(s)=\dfrac{2}{s+1}$;

(2) $g(t)=2\mathrm{e}^{-t}$;

(3) $G(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{2(1-\mathrm{j}\omega)}{1+\omega^2}$.

12. $x(t)=\mathrm{e}^{-(t-1)}u(t-1)$.

第 三 章

习 题 一

1. $S=\ln x,(0<x\leqslant 2)$.

2. (1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}=\dfrac{m}{n}$;

(2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a}=\dfrac{\sqrt[m]{a}}{am}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.

3. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x\sin 2y,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=4x\cos 2y,\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-4x^2\sin 2y$.

4. $x_{1,2}=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

5. $y=e^{x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$.

6. $y=\frac{1}{3}(\sin 2x+\sin x)+\cos x$.

7. (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2$,

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{2\sin\omega}{\omega}d\omega=\pi$,

(3) $\int_0^1 dx\int_{-1}^0 xe^{xy}dy=\frac{1}{e}$.

习 题 二

1. $F(\omega)=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$.

2. $F(\omega)=-\frac{1}{\omega^2}+j\pi\delta'(\omega)$.

3. $f(t)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+5t\right)$.

4. $f(t)=\delta'(t)+\frac{1}{2}[\delta'(t-t_0)-\delta'(t+t_0)]$.

5. $S(\omega)=\frac{a}{4a^2+\omega^2}$.

6. $F_s(\omega)=\frac{1-\cos\omega}{\omega}$, $F_c(\omega)=\frac{\sin\omega}{\omega}$.

7. $F(\boldsymbol{\omega})=\left(\frac{4\pi}{\alpha^2}\right)^{\frac{3}{4}}e^{-\frac{|\omega|^2}{2\alpha^2}}$.

习 题 三

1. $x(t)=e^{-2t}+4e^{-3t}$.

2. $y(t)=\frac{a(b-a)}{\pi b[t^2+(b-a)^2]}$.

3. $x(t)=e^{-|t|}\mathrm{sign}(t)=\begin{cases}e^{-t}, t>0,\\ 0, \quad t=0,\\ -e^{t}, t<0.\end{cases}$

4. $u(x,y,z,t)=\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^3\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}h(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta.$

习 题 四

1. $F(s)=\frac{a}{s(a^2+s^2)}.$

2. $F(s)=\frac{5s-9}{s-2}.$

3. $f(t)=\frac{1}{2}\left(t\cos at+\frac{1}{a}\sin at\right).$

4. $f(t)=\frac{2}{t}\sinh t$,其中 $\sinh t=\mathrm{sh}\ t=\frac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{2}$为双曲正弦函数.

习 题 五

1. $y(t)=1-\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right)\mathrm{e}^{-t}.$

2. $y(t)=\frac{\sin t}{t}.$

3. $y(t)=(1-t)\mathrm{e}^{-t}.$

4. $y(t)=\frac{1}{2}t^2+1.$

5. $u(x,t)=t(x+1)+1.$

[General Information]
书名=a
SS号=14584989