

高等学校教学参考书

# 《工程电磁场原理》 教师手册

倪光正 崔 翔等

高等教育出版社

## 内容简介

本手册是根据倪光正主编《工程电磁场原理》教材编写的配套教材。《工程电磁场原理》是教育部高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划的研究成果,是面向 21 世纪课程教材,同时还被列入普通高等教育“十五”国家级教材规划。

本书是专为使用《工程电磁场原理》教材的教师充实、展开教学内容,进一步提高教学质量而编写的,是作者群体教学经验的总结。全书内容按照该教材章节次序,逐一展述。包含每章的“基本内容与要求”、“教学体系框架”、“相关教学重点、难点解析”以及“习题解析与解答”,并附有本科生期中、期末典型试题和硕士研究生入学典型试题。此外,为便于使用该教材和本书的教师编写具有自己教学风格、方法和经验的讲稿,书中还附有围绕教学重点、难点展开的各相关知识的电子教案素材(光盘),读者可随意编辑使用。

本书可供普通高等学校教师作为讲授电磁场课程的参考书使用,也可作为广大读者自学电磁场课程的教学参考书和学习指导书,也适合报考硕士研究生的读者在复习电磁场理论知识时参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

《工程电磁场原理》教师手册/倪光正等. —北京:高等教育出版社,2004 .11

ISBN 7 - 04 - 014543 - X

.工 ... .倪 ... .电磁场 - 高等学校 - 教学参考资料 0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 109785 号

策划编辑 刘激扬 责任编辑 刘激扬 封面设计 张楠 责任绘图 尹文军  
版式设计 胡志萍 责任校对 胡晓琪 责任印制

---

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 64054588
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100011	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http:// www.hep.edu.cn</a>
总 机	010 - 58581000		<a href="http://www.hep.com.cn">http:// www.hep.com.cn</a>
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷			
开 本	787×960 1/16	版 次	年 月第 1 版
印 张	13	印 次	年 月第 次印刷
字 数	240 000	定 价	22.70 元(含光盘)

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号:14543 - 00

# 前 言

以分析各类宏观电磁现象的基本规律和应用原理与方法为核心的“电磁场”课程,是培养合格的电气信息类专业本科生所应具备知识结构的必要组成部分。我国近 30 年来“电磁场”课程单独设课的教学实践证明,本课程不仅为学生的专业课学习奠定了必需的工程电磁场的知识基础,而且也增强了学生适应和创造能力,完善其基本素质提供了根本保证。

基于提高“电磁场”课程教学质量的持续追求,本书是专门为倪光正主编《工程电磁场原理》教材编写的配套教材。目的在于能帮助教师把握该教材各章教学的基本要求,构筑讲授的教学体系和风格,并能结合相关教学重点、难点的分析和讨论,为撰写讲稿提供可行的建议与素材。此外,书中给出的习题解析与题解以及所附光盘中的电子教案素材,应有助于教师的教学组织与实施。

全书内容按照《工程电磁场原理》章节次序,逐一展述,包含每章的“基本内容与要求”、“教学体系框架”、“相关教学重点、难点解析”、“习题解析与解答”以及围绕教学重点、难点展开的各相关知识点的电子教案素材。书中还附有期中、期末典型试题,硕士研究生入学典型试题。

本书在“基本内容与要求”的撰写中,参照了我国“电磁场”课程单独设课以来,历届教育部原电工课程教学指导委员会电磁场课程指导小组制定的“高等工业学校电磁场理论课程教学基本要求”。从而,可以确认,由此反映的课程教学大纲应是国内同仁们长年共同切磋,沟通国内外电磁场课程教学经验与成果的结晶。以持续提高“电磁场”课程教学质量为目的,集聚作者群体从事“电磁场”课程教学几十年的教学经验,书中给出了讲授《工程电磁原理》教材的“教学体系框架”,以及“相关教学重点、难点解析”,其立意在于为使用该教材的教师充实和展开教学内容提供素材,有助于进一步提高教学质量。应该指出,各高校“电磁场”课程设置的教学计划、时数和要求不尽相同,并且任教的各位教师都有自己成熟的教学经验和方法,因此,作者更寄希望于本书能为广大教师形成自己独特的教学风格、方法和经验“添砖加瓦”,共同致力于“电磁场”精品课程的建设。

本书作者还倾心为《工程电磁场原理》教材的全套习题(含个别补充习题)编写了每一题的“解题思路”,以及详尽的题解,同时在书后所附光盘中给出了围绕教学重点、难点展开的各相关知识点的电子教案素材。这样,更有助于教师与教学对象的沟通,为学生营造生动活泼、主动学习的氛围。

参加本书编写的有倪光正、崔翔、杨仕友、李琳、熊素铭和倪培宏六位教师。

编写中得到浙江大学、华北电力大学两校同仁们的关心和支持,夏海霞、金志颖和罗平等硕(博)士研究生协助作者整理、打印书稿,谨在此一并致以衷心的感谢。

限于作者的能力和水平,书中不妥之处,敬请使用本书的同仁们和广大读者指正。

《工程电磁场原理》教师手册

编写组

2004年10月

# 目 录

绪论 .....	1
<b>第 1 章 电磁场的数学物理基础 .....</b>	<b>4</b>
1.1 基本内容与要求 .....	4
1.2 相关教学重点、难点解析 .....	4
1.2.1 电磁场的物理模型及其分析问题 .....	4
1.2.2 关于源量的注释 .....	5
1.2.3 矢量分析教学中的若干讨论点 .....	6
1.2.4 关于亥姆霍兹定理的注释 .....	8
1.2.5 电磁感应定律的推广 .....	9
1.2.6 电流概念的扩充·全电流定律 .....	11
1.3 习题解析与解答 .....	12
<b>第 2 章 静态电磁场 I: 静电场 .....</b>	<b>16</b>
2.1 基本内容与要求 .....	16
2.2 教学体系框架 .....	17
2.3 相关教学重点、难点解析 .....	18
2.3.1 电介质的极化·极化电场 .....	18
2.3.2 静电场边值问题的构造 .....	20
2.3.3 关于分离变量法及其应用的讨论 .....	22
2.3.4 关于镜像法及其应用的讨论 .....	27
2.3.5 关于部分电容概念的讨论 .....	31
2.3.6 虚位移法 .....	33
2.3.7 基于法拉第观点分析电场力 .....	35
2.3.8 场图示例 .....	36
2.4 习题解析与解答 .....	41
<b>第 3 章 静态电磁场 II: 恒定电流的电场和磁场 .....</b>	<b>87</b>
3.1 基本内容与要求 .....	87
3.2 教学体系框架 .....	88
3.3 相关教学重点、难点解析 .....	90
3.3.1 关于导电媒质中建立恒定电流场的讨论 .....	90
3.3.2 静电比拟原理的注释 .....	92
3.3.3 基于场矢量积分关系式的恒定磁场分析方法的讨论 .....	93
3.3.4 关于矢量磁位 $\mathbf{A}$ 在恒定磁场中的应用分析 .....	94

3.3.5	磁偶极子在外磁场中的受力分析 .....	98
3.3.6	作用于磁场中两种媒质分界面上的磁压力 .....	100
3.3.7	场图示例 .....	102
3.4	习题解析与解答 .....	104
<b>第 4 章</b>	<b>准静态电磁场 .....</b>	<b>141</b>
4.1	基本内容与要求 .....	141
4.2	教学体系框架 .....	141
4.3	相关教学重点、难点解析 .....	142
4.3.1	关于准静态场判别条件——似稳条件的讨论 .....	142
4.3.2	准静态场的基本方程及其导出关系式 .....	143
4.4	习题解析与解答 .....	144
<b>第 5 章</b>	<b>动态电磁场与电磁波 .....</b>	<b>155</b>
5.1	基本内容与要求 .....	155
5.2	教学体系框架 .....	155
5.3	相关教学重点、难点解析 .....	157
5.3.1	坡印廷定理与坡印廷矢量 .....	157
5.3.2	电磁位及其积分解 .....	160
5.3.3	电磁辐射 .....	161
5.3.4	均匀平面电磁波 .....	165
5.3.5	均匀平面电磁波的反射与透射 .....	166
5.3.6	波的极化与琼斯矢量 .....	171
5.3.7	有损媒质中的均匀平面电磁波 .....	173
5.3.8	导引电磁波 .....	174
5.4	习题解析与解答 .....	175
<b>附录一</b>	<b>本科生期中、期末典型试题 .....</b>	<b>191</b>
<b>附录二</b>	<b>硕士研究生入学典型试题 .....</b>	<b>196</b>
<b>参考书目</b>	<b>.....</b>	<b>199</b>

# 绪 论

## 一、“电磁场”课程的地位、作用与任务

“电磁场”是高等学校电气工程专业的一门技术基础课。其主要任务是：  
(1) 在“大学物理”电磁学的基础上，进一步阐述宏观电磁场的基本规律，并面向电气工程专业工程实际的需要，介绍相关技术应用的基本知识；(2) 培养学生用场的观点对电气工程中的电磁现象和电磁过程进行定性分析与判断的初步能力，以及进行定量分析的基本技能；(3) 通过电磁场理论的逻辑推理，培养学生正确的思维方法和严谨的科学态度。

电气工程专业的核心内容都是电磁现象在特定范围、条件下的体现，分析电磁现象的定性过程和定量方法是电气工程学生掌握专业知识和技能的基础。因而，电磁场课程所涉及的内容，是电气工程本科生所应具备的知识结构的必要组成部分。同时，近代科学技术发展进程表明，电磁场理论又是一些交叉学科的生长点和新兴边缘学科发展的基础。因此，本课程不仅将为电气工程学生专业课的学习准备必需的知识基础，而且将增强学生面向工程实际的适应能力和创造能力，关系到学生基本素质的培养。

## 二、引导入门的教学点

### (1) 什么是场？

教学实践证明，在本课程学习之始，首先让学生确立对“场”的科学、全面的认识，是引导学生进入本课程学习，并调动其学习主动性的重要知识切入点。

对于“场”的科学认识可以从以下物理与数学概念着手阐述：

物理概念上的描述：“遍及一个被界定的或无限扩展的空间内，存在着某种必须予以重视、研究的效应”。从而，结合生活实践，并用数学语言（即对应于空间、时间变量的相应物理量的函数关系）给出所论物理效应的“场”的描述。例如，由贴近生活实践的温度场  $T(x, y, z, t)$ 、重力场  $\mathbf{F}(x, y, z, t)$  的存在，即可进而演绎电场  $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ 、磁场  $\mathbf{B}(x, y, z, t)$  的客观存在。

纯数学意义上的描述：“给定区域内各点数值的集合，并由此规定了该区域内某一特定量的特性”。

显然，基于“场”的物理概念上的描述，通过数学语言、工具的运用，提升学生

思维抽象化的能力,从而将为本课程自始至终贯穿的数学建模、分析的教学主线索,并最终回归到相应工程物理问题的教学目的和任务奠定必需的学习基础。

## (2) 本课程的理论体系——宏观电磁理论

1865年英国物理学家麦克斯韦(J.C. Maxwell)建立的著名的麦克斯韦电磁场方程组,是宏观电磁理论体系的基础。基于宏观电磁理论所涉及的电磁现象和电磁过程的基本特征是:(1)场域(即场所存在的空间)中媒质是静止的,或其运动速度远小于光速;(2)场域作为点集,点的尺寸远大于原子间的距离。因此,在本课程所讨论的任一场点上,即意味着大量分子的集合,从而,场域中的媒质被看作为“连续媒质”,其电磁等各种物理性能都归结为对应的宏观统计平均效应的表征,即可通过若干个宏观等效的物性连续参数(如电导率、磁导率 $\mu$ 和介电常数)予以描述。

由此可见,宏观电磁理论在物理中也被称为“连续媒质电动力学”,但是,宏观电磁理论决不等于“量子电动力学”或“相对论电动力学”,后者已分别延拓到微观粒子或高速运动体系中电磁现象和过程的研究领域。

## (3) 工程电磁场问题的观察点——“电磁场的有效控制和利用”。

无论从理解近代科学技术成果,或者从发展并实现新的科学技术成果评价,电磁场理论及其应用不仅是日趋发展的电工、电子和信息科学技术的重要基础,而且也是旁及军事、生态、医疗、地质等众多领域新科学技术的生长点。这一切都可聚焦于“电磁场的有效控制和利用”的基本观察点上。在教材第6章“工程电磁场应用专题”中,即部分展示了这一现实的科学技术发展态势,可引导学生自学,拓展其对本课程地位、作用与任务的理解,激发其学习的兴趣与主动性。此外,“电磁场绪论课”录像片,以及作者正在编制的“工程电磁场绪论课”光盘都围绕上述教学目的,有助于本课程教学计划和内容的实施。

## 三、学习方法指导

电磁场理论体系完整、简练,但内涵丰富,概念性强,且较抽象。同时,应用数学知识与工具较多,涉及知识面宽。因而,为有助于学生改善难学、难用的状况,更需要在学生学习方法上加以指导。

### (1) 深入理解,建立正确的物理概念,并熟练运用必需的数学知识和工具。

教学实践证明,学生学习中正确理解物理概念是其困难的主要方面,故教与学两个方面都需致力以求,抓住主要矛盾,通过深入钻研、肯下功夫,使之得以缓解。本课程学习将遵循数学建模、分析的主线索展开,因此,除微积分基础知识外,矢量分析与场论,数理方程(偏微分方程)与特殊函数等数学知识和工具都应结合物理概念的讲授与理解,有的放矢地成为学生定性、乃至定量分析的必备知识基础。

## (2) 掌握常用的各种分析、计算的方法

通过例题、习题等环节, 不断提高解题能力, 这是理论联系实际, 也是通过实践又能动地深化概念理解的过程。

## (3) 逐步建立工程分析的观点

本课程终极目的即在于培养学生分析和解决工程电磁场问题的基本能力。

## (4) 正确的学习态度和方方法

为循序渐进地把握上述学习要领, 必须确立正确的学习态度, 并在方法论的高度上, 运用演绎法(由一般到特殊), 类比法和归纳法等, 以努力改进学习效率和完善学习效果。

## 四、本课程学时分配建议

本课程参考学时定为 60 学时。在学时分配比例上, 以电气工程类专业为例, 建议如下:

1. 绪论课(含可视化教材的演示)	2 学时
2. 电磁场的数学物理基础	6 学时
3. 静态电磁场 : 静电场	16 学时
4. 静态电磁场 : 恒定电流的电场和磁场	14 学时
5. 准静态电磁场	6 学时
6. 动态电磁场与电磁波	12 学时
7. 实验课	4 学时

若在信息工程类专业授课, 则宜将“动态电磁场与电磁波”学时数增加为 20 学时, 而将“静态电磁场 : 静电场”与“静态电磁场 : 恒定电流的电场和磁场”学时数分别减为 12 学时和 10 学时。

# 第 1 章 电磁场的数学物理基础

## 1.1 基本内容与要求

理解电磁场物理模型的构成。掌握电磁场的基本物理量——源量和场量的物理概念及其数学描述。理解宏观电磁场中连续媒质概念, 以及由其宏观等效的电磁性能参数(如电导率  $\sigma$ 、磁导率  $\mu$  和介电常数  $\epsilon$ ) 表征的媒质构成关系。

掌握电磁场物理量(矢量、标量)的数学描述式。掌握矢量代数(“平行四边形”法则、标量积和矢量积)运算式。掌握矢量积分(线积分、环量和通量)运算式。以电磁场分析为背景, 掌握标量场的梯度、矢量场的散度和旋度的概念, 及其运算规律。

了解场论的有关基础知识(散度定理、斯托克斯定理和亥姆霍兹定理)。

以物理电磁学知识为基础, 掌握电磁感应定律的推广形式, 以及基于位移电流假设的全电流定律。掌握麦克斯韦方程组的微分形式。

## 1.2 相关教学重点、难点解析

### 1.2.1 电磁场的物理模型及其分析问题

在学生已有的知识基础上, 根据电磁现象和过程分析的物理模型构造的本质, 通过电磁场分析问题与电路分析问题的物理模型之间的如下对比, 将可简洁明了地展述本教学重点。

电路分析问题:

实际的电工、电子技术装置  $\xrightarrow{\text{理想化假设}}$  电路模型(一种具体的物理模型)

电路模型:

理想电路元件 ( $R$ 、 $L$ 、 $C$ ) 及其组合  
理想电压、电流源 ( $e$ ,  $i$ )

分析问题  
以  $u$ ,  $i$  为基本物理量  
给定激励 ( $e$ ,  $i$ ) 求响应 ( $u$ ,  $i$ )

电磁场分析问题:

实际电磁装置中的电磁现象和过程  $\xrightarrow{\text{理想化假设}}$  电磁场的物理模型

电磁场的物理模型:

连续媒质的场空间(  $\epsilon$ 、 $\mu$  及其相应的几何结构)

理想化的场源(  $q, i$ )

分析问题

给定源量(  $q, i$ )求场分布

以  $E, B, D, H$  为基本 (  $E, B, D, H$ )

物理量(场量)

以上电磁场与电路分析问题的求解过程均可归结为:

(1) 给出与所分析的物理模型对应的基本规律性的数学描述(泛定方程)及其定解条件,即构造相应的数学模型;

(2) 运用相应的分析计算方法;

(3) 解出数学模型中的待求物理量,即可得所分析问题的确定解。

### 1.2.2 关于源量的注释

通常,电磁场物理模型中的基本物理量分为源量和场量两大类。源量  $q(\mathbf{r}, t)$  和  $i(t)$  分别用来描述产生电磁场效应的两类场源。

(1) 源量(电荷)  $q(\mathbf{r}, t)$  是物质基本属性之一。1897年英国科学家汤姆逊(J. J. Thomson)在实验中发现了电子,并因此在1906年获诺贝尔物理学奖。1907—1913年间,美国科学家密立根(R. A. Miliken)通过油滴实验,精确测定电子电荷的量值为

$$e = 1.60217733 \times 10^{-19} \quad (\text{单位: C})$$

确认了电荷量的量子化概念。换句话说,  $e$  是最小的电荷量,而任何带电粒子所带电荷都是  $e$  的整数倍。

宏观分析时,场源电荷常是数以亿计的电子电荷  $e$  的组合,故可不考虑其量子化的事实,而认为电荷量  $q$  可任意连续取值。由此,类同于由物质密度 给定物质的质量  $m$  一样,现引入关于电荷的平滑的平均密度函数概念,即以电荷密度分布的方式来给定带电体的电荷量。

因此,理想化实际带电系统的电荷分布形态,在电磁场的物理模型中,给出了对应于源量分布的四种电荷分布形式:点电荷  $q(\mathbf{r}, t)$ 、电荷体密度  $\rho(\mathbf{r}, t)$ 、电荷面密度  $\sigma(\mathbf{r}, t)$  和电荷线密度  $\lambda(\mathbf{r}, t)$ 。

(2) 源量(电流)  $i(t)$ :

源于电荷定向运动的电流  $i$  定义为

$$i = \frac{dq}{dt} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{单位: C/s 或 A}) \quad (1.1)^*$$

可见,电流  $i$  为一积分量,不是点函数。但是,在电磁场分析的物理模型中,研究的是场空间中各点的电磁现象和过程变化的规律性,因此,还必须引入对应于源

为与教材中公式编号有所区别,本手册中公式编号采用这种形式。

量  $i(t)$  分布的点函数形式的描述。为此,按式(1.1)定义了源量:体电流密度(简称电流密度)  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ 。该矢量点函数的量值为

$$|\mathbf{J}| = \lim_{s_n \rightarrow 0} \frac{i}{s_n} = \frac{di}{ds_n} \quad (\text{单位: A/m}^2) \quad (1.2)$$

式中  $i$  为流过垂直于电荷流动方向的面元  $s_n$  内的电流。该矢量点函数  $\mathbf{J}$  的方向,习惯上被定义为正电荷运动的方向。

### 1.2.3 矢量分析教学中的若干讨论点

在学生已有的高等数学中矢量分析概念的基础上,结合本课程教学的需要,可形成以下教学的讨论点:

#### (1) 掌握点函数在不同坐标系下的数学描述

**例 1.1** 设标量点函数  $\phi(\mathbf{r})$  在直角坐标系下的表示式为  $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ , 试写出该点函数在圆柱坐标系下的表示式,并以给定点的函数值验证该点函数与坐标系的选择无关。

[解] 由教材附录一可知  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ ,  $z = z$ 。代入之,即在圆柱坐标系下,该点函数应记为

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &= \phi(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) = (\rho \cos \theta)^2 + (\rho \sin \theta)^2 - z \\ &= \rho^2 - z \end{aligned}$$

设给定点  $P(x, y, z)$ , 其直角坐标为  $x=1, y=1$  和  $z=1$ ; 同样由附录一可知该点  $P$  对应的圆柱坐标为  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$ ,  $\theta = \arctan \frac{y}{x} = \frac{\pi}{4}$  和  $z = z = 1$ 。因此可得标量点函数  $\phi(\mathbf{r})$  在直角与圆柱坐标系中对应于  $P$  点处的函数值分别为

$$\phi(x, y, z) = \phi(1, 1, 1) = 1^2 + 1^2 - 1 = 1$$

和  $\phi(\rho, \theta, z) = \phi(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 1) = (\sqrt{2})^2 - 1 = 1$

两者结果相同。同理可继续逐点验证,其结论是:点函数值与所采用的坐标系无关。由此可指导学生解题 1-4。

#### (2) 巩固与掌握标量场梯度的物理概念及其数学描述

可通过上山、爬坡,乃至山地区域中公路、铁路线建设的实践,深化学生已有的关于梯度的物理概念。并可讨论以下例题,以进一步结合数学描述,深化对梯度物理概念的理解。

**例 1.2** 设一标量点函数  $\phi(\mathbf{r}) = \phi(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$  描述了空间标量场。试求:

该点函数在点  $P(1, 1, 1)$  处的梯度,以及表示该梯度方向的单位矢量;

求该点函数沿单位矢量  $\mathbf{e}_l = \cos 60^\circ \mathbf{e}_x + \cos 45^\circ \mathbf{e}_y + \cos 60^\circ \mathbf{e}_z$  方向的方向导数,并以点  $P(1, 1, 1)$  处该方向导数值与该点的梯度值作以比较,得出相应结论。

[解] 由梯度定义式(1 - 26), 可解出待求  $P$  点的梯度为

$$\begin{aligned} \left. \nabla \right|_P &= \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + y^2 - z) \Big|_P \\ &= 2x\mathbf{e}_x + 2y\mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z \Big|_{(1,1,1)} \\ &= 2\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

表征其方向的单位矢量

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_G \Big|_P &= \frac{\left. \nabla \right|_P}{\left| \left. \nabla \right|_P \right|} = (\cos \alpha) \mathbf{e}_x + (\cos \beta) \mathbf{e}_y + (\cos \gamma) \mathbf{e}_z \Big|_P \\ &= \frac{2x\mathbf{e}_x + 2y\mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z}{(2x)^2 + (2y)^2 + (-1)^2} \Big|_{(1,1,1)} \\ &= \frac{2}{3} \mathbf{e}_x + \frac{2}{3} \mathbf{e}_y - \frac{1}{3} \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

由方向导数与梯度之间的关联式(1 - 25)可知, 沿单位矢量  $\mathbf{e}$  方向的方向导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial l} &= \mathbf{G} \cdot \mathbf{e} \\ &= (2x\mathbf{e}_x + 2y\mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z) \cdot \left( \frac{1}{3} \mathbf{e}_x + \frac{2}{3} \mathbf{e}_y - \frac{1}{3} \mathbf{e}_z \right) \\ &= x + 2y - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

对于给定的  $P$  点, 上述方向导数在该点取值为

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_P &= x + 2y - \frac{1}{2} \Big|_{(1,1,1)} \\ &= \frac{1+2-2}{2} \end{aligned}$$

而该点的梯度值按式(1 - 27)可得为

$$\begin{aligned} \left| \left. \nabla \right|_P \right| &= \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}} \\ &= \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (-1)^2} \Big|_{(1,1,1)} \\ &= 3 \end{aligned}$$

显然, 因  $\left| \left. \nabla \right|_P \right|$  描述了  $P$  点处标量点函数的最大变化率, 即最大方向导数,

故  $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_P < \left| \left. \nabla \right|_P \right|$  恒成立。

由此可指导学生解题 1 - 1。

(3) 掌握直角坐标系下散度的导出过程, 及其表达式(1.2.5 节)。

由此可指导学生解题 1 - 2。

(4) 掌握直角坐标系下旋度的导出过程, 及其表达式(1.2.6 节)。

由此可指导学生解题 1 - 3。

(5) 强调指出以下几个矢量分析的恒等式:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla V &= 0 \quad (\text{任意标量函数梯度}(\nabla V)\text{的旋度恒等于零}); \\ \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &= 0 \quad (\text{任意矢量函数旋度}(\nabla \times \mathbf{A})\text{的散度恒等于零}); \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \\ \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &= \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \\ \nabla \cdot \nabla V &= \nabla^2 V \end{aligned}$$

### 1.2.4 关于亥姆霍兹定理的注释

主教材采用演绎法(由一般到特殊), 在麦克斯韦方程组的基础上, 展开描述宏观电磁场基本规律的基本方程体系。展述中同时突出了论述矢量场散度和旋度特性的亥姆霍兹定理, 从而以电磁场的散度和旋度构成电磁场的分析基础, 逐一阐述各种类型的电磁场, 并给出相应的基本场量的计算关系式。

亥姆霍兹定理的内涵在于: 无限空间中的电磁场作为矢量场  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ , 按定理所述, 其特性取决于它的散度和旋度特性。因定理表明, 该矢量场  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  可表示为

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (1.3)$$

式中标量函数

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (1.4)$$

和矢量函数

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (1.5)$$

由此可见, 无限空间中的电磁场  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  唯一地取决于其散度及旋度的分布。同时, 根据散度和旋度的物理意义, 由式(1.4)和式(1.5)可见, 定理也给出了电磁场中场量  $\phi(\mathbf{r})$  和  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  [当然, 也包含由式(1.3)定义的场量  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ] 与场源 [散度源  $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})$  和旋度源  $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r})$ ] 之间的定量关系。

此外, 基于亥姆霍兹定理, 当可对各种类型的电磁场给出如下规律性的描述:

(1) 无旋场: 若场中旋度处处为零, 即  $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0$ , 但其散度  $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) \neq 0$ , 则该矢量场  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  被称为无旋场。

由亥姆霍兹定理可知, 此时  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi(\mathbf{r})$ 。由此可见, 无旋场  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  也可通过一个标量函数  $\phi(\mathbf{r})$  的引入, 等价于该标量梯度场的描述。例如, 静电场满足无旋性  $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$ , 即可借助于标量电位函数  $\phi(\mathbf{r})$  的引入, 使无旋的矢量场  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  的描述, 等价于标量电位梯度场  $[-\nabla \phi(\mathbf{r})]$  的描述。

(2) 无散场(无源场或也称管量场): 若场中散度处处为零, 即  $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0$ ,

但其旋度  $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0$ , 则该矢量场  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  被称为无散场。例如, 恒定电流的磁场即为一例, 满足基本方程为  $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$  和  $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{J}_c$ 。

(3) 一般的矢量场: 若场中散度和旋度均不为零, 即  $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) \neq 0$ ;  $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) \neq 0$ , 这类场属一般的矢量场。此时, 矢量场  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  的解答即由式(1.3)给出。

### 1.2.5 电磁感应定律的推广

法拉第(M. Faraday)在 1831 年发现电磁感应现象时, 是在特定的导电回路中由实验而总结得出的规律。此后, 麦克斯韦把导电回路的概念推广到场域空间的任一假想闭合回路的情况, 提出了“涡旋电场”的假设, 即只要与该回路相交链的磁通发生变化, 即使没有感应电流产生, 但在该回路中的任一点总有感应电场  $\mathbf{E}$  存在, 因而沿任一闭合回路都会产生感应电动势。这一关于电磁感应定律的推广, 其数学描述即归结为麦克斯韦第二方程:

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.6)$$

方程表明, 源于感应电场  $\mathbf{E}$  的有旋性, 即  $\oint_l \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = e = - \frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ , 合成电场  $\mathbf{E}$  为涡旋场。

例 1.3 电子回旋加速器(回旋加速器)可作为麦克斯韦第二方程(1.6)物理含义最生动的实验例证。

电子回旋加速器的构造(图 1.1)中电磁铁由正弦电流激励, 在两磁极中间放置一扁平环形真空室。该加速器内运动电子的加速就是在这一真空室内由变动的磁场所产生的感应电场来实现的。

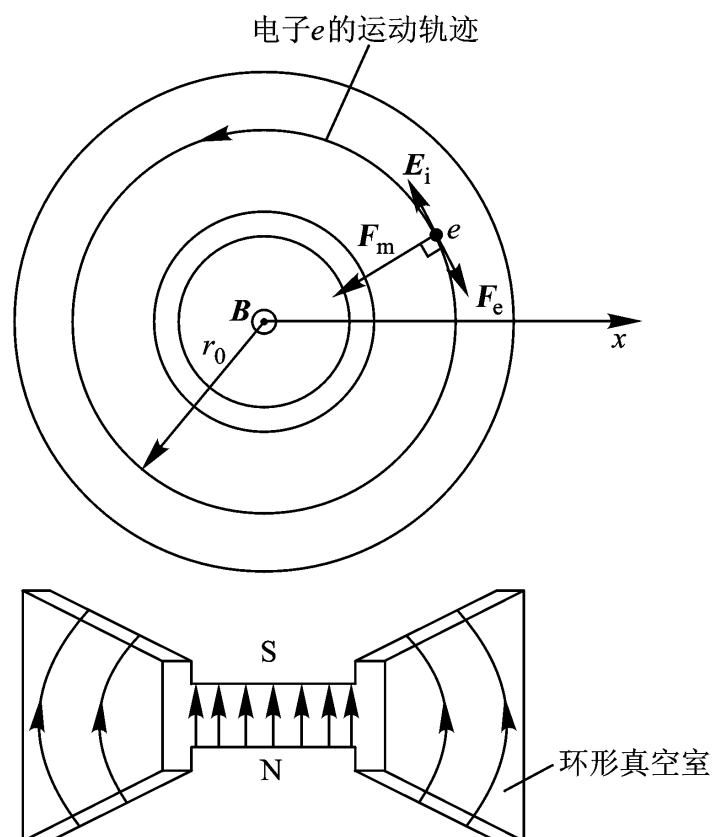


图 1.1 电子回旋加速器构造的原理图

设电子在真空室中运动是沿着半径为  $r_0$  的圆周轨道进行的(这一假设的实现将在下面阐述)。在正弦励磁电流由零到最大值的生长过程中  $\frac{1}{4}$  周期, 磁场也将由零单调地增加到某一终值。在这一段时间内, 圆周轨道上呈现感应电动势

$$e = \int_l \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \quad (1.7)$$

式中  $\int_l \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l}$  是穿过圆周轨道所限定面积的磁通;  $\mathbf{E}_i$  是由随时间变化的磁场所激励的感应电场。

当磁场对圆周轨道中心是对称分布时, 由式(1.7)可知, 轨道上任一场点处的感应电场强度值

$$E_i = - \frac{1}{2 r_0} \frac{d}{dt}$$

此时, 由电子枪射入的电子  $e$  ( $e < 0$ ) 在  $E_i$  作用下受到沿圆周轨道切向的电场力

$$F_e = |e| E_i = - \frac{|e|}{2 r_0} \frac{d}{dt}$$

与此同时, 电子还受到沿圆周轨道内法向的磁场力

$$F_m = |e| v B$$

式中  $B$  是轨道上电子所在处的磁感应强度。

从而电子即由时变磁场产生的感应电场加速, 同时在向心的磁场力作用下, 沿逆时针方向在圆周轨道上加速环行。因切向电场力  $F_e$  的作用等于切线方向上动量的变化率, 即

$$\frac{|e|}{2 r_0} \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} (m v)$$

今设电子射入真空室时,  $t_0 = 0$ , 且初速度  $v_0$  与末速度相比是很小的。在这些初始条件下, 将上式积分, 得

$$\frac{|e|}{2 r_0} = m v \quad (1.8)$$

而向心的磁场力  $F_m$  则被离心力所平衡, 即

$$|e| v B = \frac{m v^2}{r_0}$$

故有

$$|e| r_0 B = m v \quad (1.9)$$

联立式(1.8)和式(1.9), 便得

$$B = \frac{1}{2} \frac{m v^2}{r_0} \quad (1.10)$$

由此可知,为保证持续加速、能量不断积累的电子始终沿着圆周轨道运动,工程设计要求轨道上各场点处的磁感应强度必须符合式(1.10)。也就是说,该磁感应强度值必须等于轨道所限定面上平均磁感应强度的一半。这一条件可由加强该面中心部分的磁场来实现。

当设定励磁在 $\frac{1}{4}$ 周期的时间内,加速的电子能量可达几亿电子伏特( $1\text{ eV} = 1.60219 \times 10^{-19}\text{ J}$ )。一旦移出高能电子,使之去轰击一个“靶”时,即可产生射线等。这一生动体现了麦克斯韦第二方程物理含义的装置,被用于核物理研究、工业探伤、治疗癌症等应用场合。

### 1.2.6 电流概念的扩充·全电流定律

麦克斯韦在1861年提出了位移电流的假设,据此,磁场不仅可由传导电流产生,而且也可由随时间变化的电场所产生。现引入如图1.2所示的电容器放电的电路实例,以说明位移电流假设的科学性。

如图示,当开关S合上以后,电容器放电,在含电阻R的由导线连接的电路中,我们知道,流通的传导

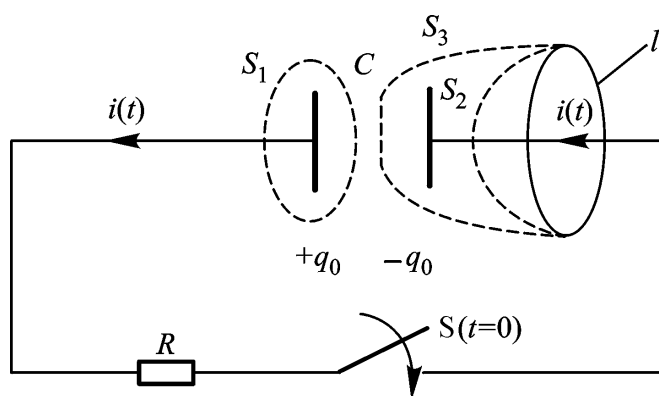


图 1.2 电容器放电的电路

电流  $i(t) = \frac{q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$ 。由此可见,

尽管电容器的两极板之间是相互绝缘的,或从电路观点而言,电路是断开的,但仍有随时间变动的电容器放电电流在电路的导电部分流通。因此,在放电过程中,穿过包围正极板的闭合面  $S_1$  的电流

$$i = \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \neq 0$$

这表明基于电荷守恒定律的静态场中传导电流的连续性方程(3-1)已不再满足,显然,需要扩充电流的概念。

另一方面,安培环路定律(1-69)也在分析此实例时遇到了困难。设在图1.2中取由闭合路径  $l$  所限定的与导线割切的任意曲面  $S_2$ ,则按安培环路定律有  $\int_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i(t)$ 。但是,若取由闭合路径  $l$  所限定,而不与导线割切的曲

面  $S_3$ ,则因  $S_3$  面中没有传导电流穿过,应有  $\int_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$ 。这同样表明,安培环路定律的应用需要扩展概念。不难看出,如果电流连续性原理得到扩展,则上述问题也就将随之化解。

麦克斯韦根据电荷守恒定律,令流出闭合面  $S_1$  的传导电流  $i_c$  等于该面内电荷  $q$  的减少率,即

$$i_c = - \frac{dq}{dt}$$

从而,按高斯定理(1 - 84d), 上式可以写成

$$i_c + \frac{d}{dt} \int_{S_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.11)$$

麦克斯韦将穿过  $S_1$  面的电位移通量的变化率称作为位移电流  $i_D$ , 即

$$i_D = \frac{d}{dt} \int_{S_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.12)$$

于是,可定义位移电流密度为

$$\mathbf{J}_D = \frac{d\mathbf{D}}{dt} \quad (1.13)$$

应指出,位移电流密度  $\mathbf{J}_D$  的方向与  $d\mathbf{D}$  的方向一致。

在引入位移电流,扩充了电流概念的基础上,式(1.11)物理意义显然是:由包围电容器正极板的闭合面  $S_1$  上流出的传导电流等于流入的位移电流,从而保持了电流的连续性。同时,安培环路定律也由此扩展为全电流定律(1 - 79)。

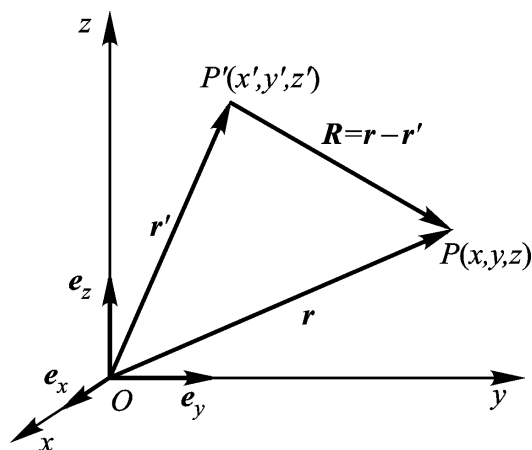
### 1.3 习题解析与解答

结合本章授课,为有助于学生在复习矢量分析数学知识的基础上,提供本课程所需的更为宽广的矢量分析与运算的基础知识,在此补充列入了题 1 - 1—题 1 - 4;同样,在学生复习物理电磁学的知识基础上,对应于本课程在理解与深化关于电磁场基本规律性——麦克斯韦方程组方面的教学需求,可引导学生分析求解题 4 - 1—题 4 - 6。

**1-1** 计算  $\frac{1}{R}$  及  $\frac{1}{R}$ , 式中  $R$  为空间中源点  $P'$  与场点  $P$  之间的距离,  $R > 0$ , 如题 1 - 1 图所示。

[解题思路]

在正确理解位矢  $\mathbf{r}$ 、 $\mathbf{r}'$  和距离矢量  $\mathbf{R}$  的基础上(1.2.1 节), 注意到, 算子  $\nabla$  是表征关于坐标  $(x, y, z)$  的运算, 即  $\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$  [式(1 - 28)]; 而算子  $\nabla'$  则是表征关于坐标  $(x', y', z')$  的运算, 即



题 1 - 1 图

$\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$ 。从而,即可算得本题关于待求标量函数  $(1/R)$  的两类梯度的表达式(1.2.4节)。

[解] 因为位矢  $\mathbf{r} = \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z$ ;  $\mathbf{r} = \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z$  而距离矢量

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r} = \mathbf{e}_x (x - x) + \mathbf{e}_y (y - y) + \mathbf{e}_z (z - z)$$

其模值

$$R = |\mathbf{R}| = \sqrt{(x - x)^2 + (y - y)^2 + (z - z)^2}$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{R} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{R} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R} \\ &= -\frac{1}{R^3} [\mathbf{e}_x (x - x) + \mathbf{e}_y (y - y) + \mathbf{e}_z (z - z)] \\ &= -\frac{\mathbf{R}}{R^3} \end{aligned}$$

同理可得  $\frac{1}{R} = \frac{\mathbf{R}}{R^3}$ , 由此可见  $\frac{1}{R} = -\frac{1}{R}$ 。

**1-2** 计算  $\nabla \cdot \frac{1}{R}$ , 式中  $R$  为距离矢量  $\mathbf{R}$  的模,  $R > 0$ , 如题 1-1 图所示。

[解题思路]

题设矢量运算式之数学含义是:首先,计算标量函数  $(1/R)$  的梯度,即  $(\nabla 1/R)$ , 如题 1-1 所述;然后,再计算该梯度的散度(1.2.5节),即  $\nabla \cdot (\nabla 1/R)$ ;

当梯度  $(\nabla 1/R)$  以直角坐标系  $(x, y, z)$  下的矢量函数表达式给出时,其散度运算亦应在直角坐标系下展开(附录二)。

[解] 由题 1-1 的解答已知,当  $R > 0$  时,  $\frac{1}{R} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3}$ , 有

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \frac{1}{R} &= \nabla \cdot \left( -\frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \frac{x - x}{R^3} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y - y}{R^3} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{z - z}{R^3} \end{aligned}$$

而

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x - x}{R^3} = \frac{1}{R^3} - \frac{3(x - x)^2}{R^5}$$

同理可得:

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{y - y}{R^3} = \frac{1}{R^3} - \frac{3(y - y)^2}{R^5}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{z - z}{R^3} = \frac{1}{R^3} - \frac{3(z - z)^2}{R^5}$$

故

$$\nabla \cdot \frac{1}{R} = \frac{3}{R^3} - \frac{3}{R^3} = 0 \quad (R > 0)$$

**1-3** 试证  $\nabla \times (1/R) = 0$ , 式中  $R$  为距离矢量  $\mathbf{R}$  的模,  $R > 0$ , 如题 1-1 图所示。

[解题思路]

题设矢量运算式之数学含义是: 首先, 计算标量函数  $(1/R)$  的梯度, 即  $\nabla (1/R)$ , 如题 1-1 所述; 然后, 再计算该梯度的旋度 (1.2.6 节), 即  $\nabla \times (1/R)$ ;

当梯度  $\nabla (1/R)$  以直角坐标系  $(x, y, z)$  下的矢量函数表达式给出时, 其旋度运算亦应在直角坐标系下展开 (附录二)。

[解] 由题 1-1 的解答已知, 当  $R > 0$ ,  $\frac{1}{R} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3}$ , 有

$$\begin{aligned} \nabla \times \frac{1}{R} &= \nabla \times \left( -\frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) \\ &= - \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{R^3} & \frac{y}{R^3} & \frac{z}{R^3} \end{vmatrix} \\ &= - \mathbf{e}_x \left( \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{R^3} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{y}{R^3} \right) + \mathbf{e}_y \left( \frac{\partial}{\partial z} \frac{x}{R^3} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{z}{R^3} \right) + \mathbf{e}_z \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{R^3} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{R^3} \right) \quad (1) \end{aligned}$$

而

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{R^3} = -\frac{3(z-y)(y-y)}{R^5}$$

同理可得:

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{y}{R^3} = -\frac{3(y-y)(z-z)}{R^5}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{x}{R^3} = -\frac{3(x-x)(z-z)}{R^5}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{z}{R^3} = -\frac{3(z-z)(x-x)}{R^5}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{R^3} = -\frac{(y-y)(x-x)}{R^5}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{R^3} = -\frac{(x-x)(y-y)}{R^5}$$

将以上各式代入式(1), 显然, 即有

$$\nabla \times \frac{1}{R} = 0$$

得证。

**1 - 4** 试将直角坐标系中的矢量  $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x y + \mathbf{e}_y x + \mathbf{e}_z \frac{x^2}{x^2 + y^2}$  转换为圆柱坐标系中表达的矢量。

[解题思路]

将矢量表达式作相应坐标系下的等价转换时, 基于矢量构成的两要素(模与方向)(1.2.1节), 理应包含其坐标量与单位矢量两个方面的等价转换处理(附录一)。

[解] 由附录一可知, 直角与圆柱两坐标系间的转换关系为:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z$$

代入之, 即得

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_x r \sin \varphi + \mathbf{e}_y r \cos \varphi + \mathbf{e}_z \frac{r^2 \cos^2 \varphi}{r^2}$$

然后, 再作单位矢量间的转换, 即:

$$\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_r \cos \varphi - \mathbf{e}_\varphi \sin \varphi, \quad \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_r \sin \varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos \varphi, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z$$

故在圆柱坐标系下该矢量  $\mathbf{A}$  的表达式为

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_r 2 \sin \varphi \cos \varphi + \mathbf{e}_\varphi (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \mathbf{e}_z \cos^2 \varphi$$

## 第2章 静态电磁场 I: 静电场

### 2.1 基本内容与要求

掌握静电场的基本方程,并理解其物理意义。

理解结合亥姆霍兹定理应用所给出的电场强度  $\mathbf{E}$  与电位 的定义及其物理涵义。理解静电场的无旋性,即电场强度的线积分与路径无关的性质,以及电场强度与电位之间的关系。

掌握叠加定理。对自由空间中的静电场,会应用矢量积分公式计算简单电荷分布产生的电场强度与电位;对于呈对称性分布特征的场,能熟练运用高斯定理求解其电场强度与电位分布。

了解媒质(电介质)的线性、均匀和各向同性的含义。了解电偶极子、电偶极矩的概念及其电场分布的特点。了解极化电荷、极化强度  $\mathbf{P}$  的定义及击穿场强的概念。了解通过极化电荷求极化电场分布的积分公式。

理解电位移矢量  $\mathbf{D}$  的定义,以及  $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{P}$  三者之间的关系。对电介质中的静电场,会求解具有相应对称性的场分布。

掌握电位所满足的偏微分方程(泊松方程和拉普拉斯方程),以及  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{D}$  和在不同媒质分界面上的衔接条件,能写出典型静电场问题所对应的数学模型——边值问题,并能求出一维边值问题的解,以及运用分离变量法能求出在直角坐标系下二维边值问题的解。会定性绘制场分布图。

理解边值问题解的惟一性定理。

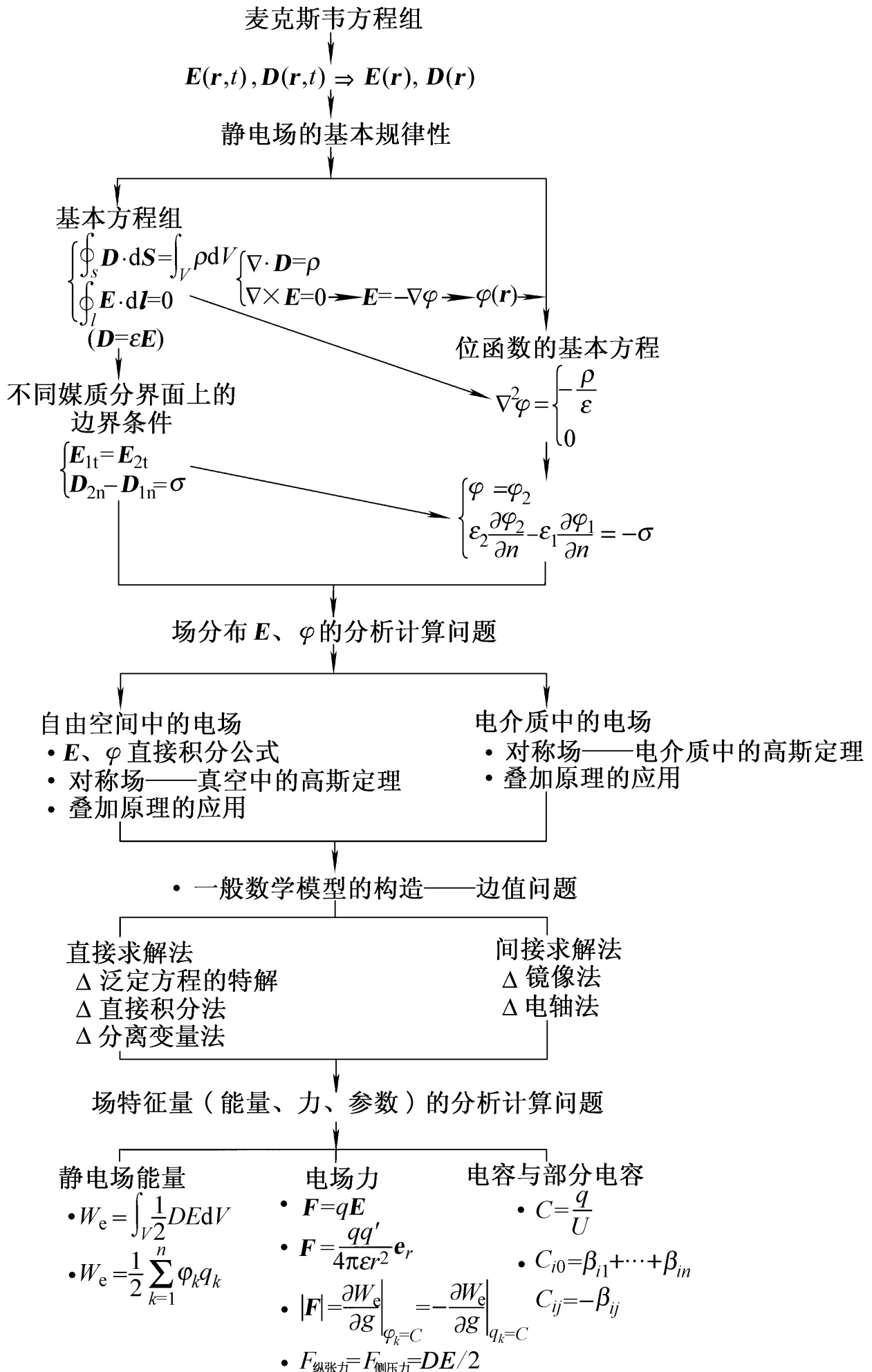
掌握镜像法。能应用镜像法求解与圆柱、平板、球形导体相关,或以平面为界面的两种无限大介质中的静电场问题。

掌握电容参数计算的原则与方法。了解多导体系统的部分电容、工作电容的概念。理解静电屏蔽概念。

理解电场能量及能量密度的概念,掌握具有对称性场分布特征的电场能量及其能量密度的计算方法。

掌握基于电场强度定义公式的电场力的求取方法。理解广义力和广义坐标的概念、能量与力之间的功能平衡关系。会应用虚位移法求电场力。了解法拉第计算力的观点,并能根据场图分析受力情况。

## 2.2 教学体系框架



## 2.3 相关教学重点、难点解析

### 2.3.1 电介质的极化·极化电场

物质的原子以一定的方式,通过化学键的连接构成分子,由此组成了物质。因此,引入电场的电介质,其基本特征是它所含的自由带电粒子极其微少,实际上可以说,它的全部带电粒子是被原子内聚力,分子内聚力或分子间的力紧密束缚着,故这些粒子的电荷称作束缚电荷。这样,电介质在静电场中的行为特征可看作束缚电荷在真空中外电场作用下的响应,即所谓电介质的极化现象。

取决于无极分子电介质( $H_2, N_2, O_2, CH_4, CCl_4$  等物质)或有极分子电介质( $H_2O, N_2O, SO_2$  和有机酸等物质)不同的物质内部结构,借助于电偶极子的物理模型,它们在真空中外电场  $E_0$  作用下,分别呈现的位移极化现象或取向极化现象,如图 2.1 和图 2.2 所示。对于无极分子电介质,在  $E_0 = 0$  的正常情况下,其分子内所有正、负电荷作用中心是重合的,呈电中性。而在外电场  $E_0$  作用下,由于正、负电荷受到相反方向的电场力,二者作用中心发生相对位移,形成一个感生的电偶极子,对外显现电性,即所谓位移极化现象。对于有极分子电介质,在  $E_0 = 0$  的正常情况下,其分子内所有正、负电荷的作用中心不相重合而形成电偶极子,但因热运动所致,分子电矩  $p(= qd)$  取向杂乱无章而相互抵消,对外呈电中性。在外电场  $E_0$  作用下,有极分子的电矩发生转向,这时,其等效电偶极子电矩的矢量和便不再为零,对外显现电性,即所谓取向极化现象。

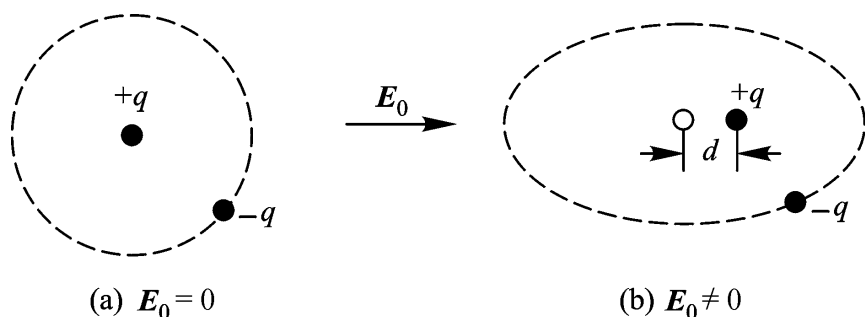


图 2.1 无极分子电介质的位移极化现象

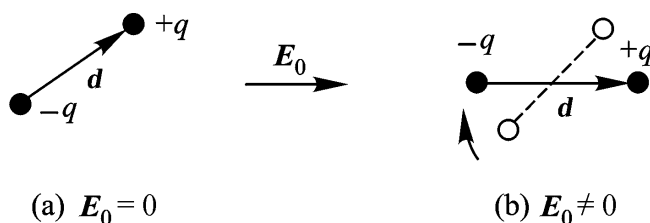


图 2.2 有极分子电介质的取向极化现象

在宏观分析极化现象时,不必区分以上两类极化现象的不同内涵,而共同归结为真空中由正、负束缚电荷构成的电偶极子所呈现的极化电场效应。因此,有

电介质存在的电场就是带电体上的自由电荷与极化形成的电矩共同在真空中产生的合成电场。

对应于极化形成的极化电场,在引入其场量——电极化强度矢量  $\mathbf{P}$  [定义式 (2-37)] 的基础上,可构造其源量——极化电荷面密度  $\rho_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_n$  和极化电荷体密度  $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ 。从而,真空中极化电场的分布和  $\mathbf{E}$  即可分别表示为式(2-46)和式(2-47)。

**例 2.1** 分析理想平板电容器极板间电介质中的电场。

[分析] 设该平板电容器两极板上分布的自由电荷面密度分别为  $+\sigma$  和  $-\sigma$ 。当电极之间为真空时,电容器内的电场强度  $\mathbf{E}_0$  的量值  $E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ , 其方向与电极平面垂直,且均匀分布。当在电极间插入均匀且各向同性的电介质时,则如图 2.3 所示,电介质中将产生极化效应,且仅在该电介质两表面处分别呈现面密度为  $+\sigma_p$  和  $-\sigma_p$  的正、负极化电荷分布(其内部极化电荷体密度  $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$ )。由此可见,极化电荷形成的极化电场  $\mathbf{E}'$  的量值  $E' = \frac{\sigma_p}{\epsilon_0}$ , 方向如图所示。因此,电介质中的电场(合成电场)为  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \mathbf{E}'$

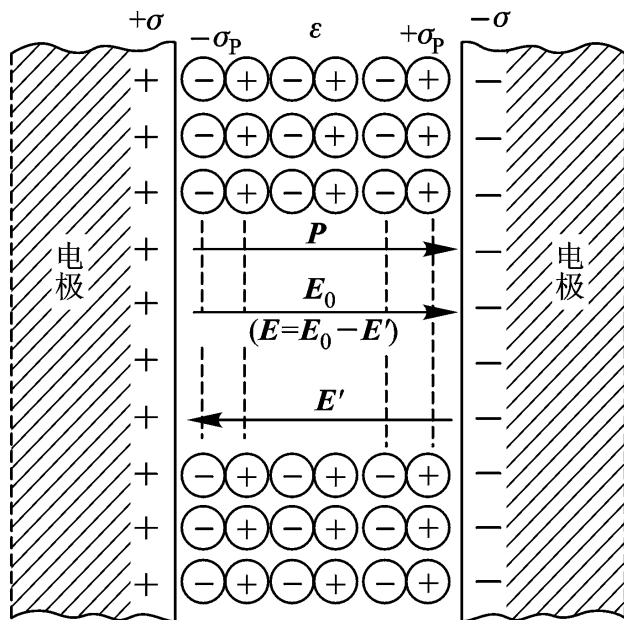


图 2.3 电介质中的电场

$\mathbf{E}$ , 其值为  $E = \frac{\sigma - \sigma_p}{\epsilon_0}$ 。这表明,在平板电容器极板上自由电荷面密度不变的情况下,有电介质时的电场强度,比真空时的电场强度减弱了由极化电荷所产生的场强  $\frac{\sigma_p}{\epsilon_0}$ 。

在此应当指出,如图 2.3 示意,  $\mathbf{P}$  线起始于负的束缚电荷而终止于正的束缚电荷。 $\mathbf{E}$  线起始于正的自由电荷或正的束缚电荷而终止于负的自由电荷或负的束缚电荷。

**例 2.2** 以理想平板电容器中放置双层电介质为例,分析两种电介质界面处的电场和电场强度  $\mathbf{E}$ 。

[分析] 设所分析的两种电介质  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  如图 2.4 所示,在均匀外电场  $E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$  作用下,产生极化效应。同上例,仅在该两种电介质的表面处分别呈现面密度为  $\rho_{p1}$  和  $\rho_{p2}$  的正、负极化电荷分布。根据两种不同介质分界面上的边界条件(2.4.3 节),且同样由图示意可见,在交界面的法线方向上,  $D_1 = D_{1n} = D_{2n} =$

$D_2$ , 即

$$\epsilon_0 \mathbf{E}_1 + \mathbf{P}_1 = \epsilon_0 \mathbf{E}_2 + \mathbf{P}_2$$

因已知  $P_{1n} = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{e}_n = P_{1n} = P_1$  和  $P_{2n} = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{e}_n = P_{2n} = P_2$ , 代入上式, 可得

$$\epsilon_0 (E_2 - E_1) = (P_1 - P_2) = P_{1n} - P_{2n} = P_n$$

今设  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$  (非同一电介质), 故  $P_{1n} \neq P_{2n}$ , 即  $P_n \neq 0$ 。这就表明, 交界面上介质的不均匀性导致了交界面上净束缚电荷的出现。换句话说, 交界面就成为电场线  $\mathbf{E}$  的源, 表明交界面上电场强度  $\mathbf{E}$  发生突变。

值得指出, 如图 2.4 所示,  $\mathbf{D}$  线起始于正的自由电荷而终止于负的自由电荷。

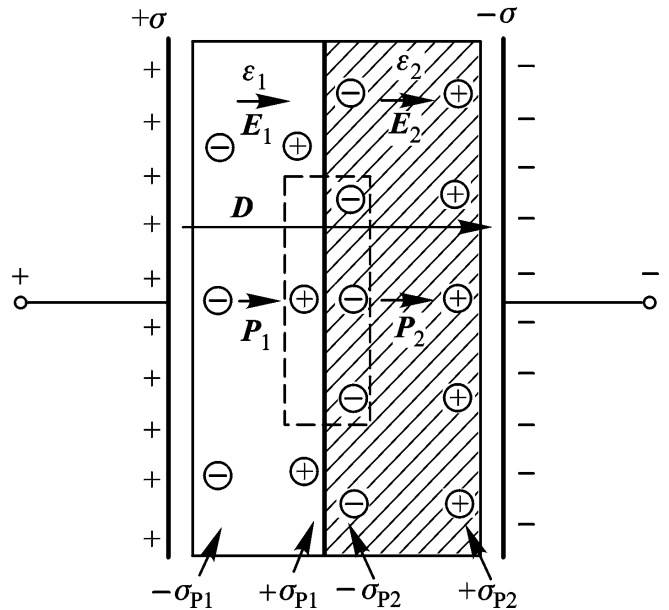


图 2.4 双层电介质的极化效应

### 2.3.2 静电场边值问题的构造

(1) 静电场分析计算的一般方法——边值问题(Boundary Value Problem, 简称为 BVP)。

在数学模型构造的立意上, 边值问题也被称为偏微分方程的定解问题, 或数学物理方程的定解问题。

(2) 静电场边值问题: 通常选取电位函数  $\varphi(\mathbf{r})$  为待求场函数, 其对应的边值问题(BVP)应构造如下:

泛定方程——基于  $\varphi(\mathbf{r})$  的场的规律性的描述;

定解条件——由给定工程物理问题所决定的场域边界上的边界条件 (Boundary Condition, 简记为 BC)。

(3) 泛定方程——泊松方程或拉普拉斯方程  
推导:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad \epsilon = \text{Const.} \\
 & \text{由散度方程 } \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \longrightarrow \nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} = \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \nabla \cdot \epsilon = \rho \longrightarrow \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \\
 & \hspace{20em} (\text{单一均匀介质}) \\
 & \text{由旋度方程 } \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{记拉普拉斯算子 } \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla \longrightarrow \nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon \\
 & \hspace{20em} (\text{泊松方程}) \\
 & \xrightarrow{(E = -\nabla \varphi)} -\epsilon \nabla \cdot \nabla \varphi = \rho \longrightarrow \boxed{\text{若场域 } V \text{ 内 } \rho(\mathbf{r}) = 0 \quad \nabla^2 \varphi = 0} \\
 & \hspace{20em} (\text{拉普拉斯方程})
 \end{aligned}$$

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r}) \quad (\mathbf{r} \text{ 场域 } V) \quad (2.1)$$

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}) = 0 \quad (\mathbf{r} \text{ 场域 } V) \quad (2.2)$$

(4) 定解条件——场域  $V$  边界  $S$  上的 BC, 也称场域  $V$  边界  $S$  上的边值, 可给定为以下三种类型:

第一类 BC:  $\varphi(\mathbf{r})|_S = f_1(\mathbf{r}_b)$  即对应于已知各带电导体电位值的情况;

第二类 BC:  $-\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial n}|_S = f_2(\mathbf{r}_b)$  即对应于已知各带电导体表面电荷分布的情况(因为带电导体表面  $S$  处  $D_n = \sigma$ , 即  $-\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_S = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ );

第三类 BC:  $\varphi(\mathbf{r}) + f_3(\mathbf{r}) - \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial n}|_S = f_4(\mathbf{r}_b)$ 。

(5) 边值问题的构造

$$1. \text{ 泛定方程为: } \Delta \varphi = -\rho(\mathbf{r}) \quad (\mathbf{r} \text{ 场域 } V)$$

$$\Delta \varphi = 0 \quad (\mathbf{r} \text{ 场域 } V)$$

1st BVP 2. 定解条件——B.C.(边值):

$$2\text{nd BVP} \quad \dots \quad \varphi(\mathbf{r})|_S = f_1(\mathbf{r}_b)$$

$$3\text{rd BVP} \quad \dots \quad -\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial n}|_S = f_2(\mathbf{r}_b)$$

$$\dots \quad \varphi(\mathbf{r}) + f_3(\mathbf{r}) - \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial n}|_S = f_4(\mathbf{r}_b)$$

注: 第一类边值问题(1st BVP)也称为狄利克雷(Dirichlet)问题;

第二类边值问题(2nd BVP)也称为诺伊曼(Neumann)问题;

第三类边值问题(3rd BVP)也称为柯西(Cauchy)问题。

(6) 讨论并指出:

通常, 当边界  $S = S_1 + S_2 + \dots$ , 且逐片分别给定为 1st BC 与 2nd BC 时, 则称之为由混合型 BC 构造的边值问题;

在工程问题分析中, 常选取  $-\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_S = 0$  的齐次第二类 BC, 此意味着在相应边界  $S$  上给定  $\mathbf{E}$  线或场的对称面(线)为相应的 BC;

当  $V$  域中存在多种均匀介质时, 务须分域定义:

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}) = -\rho_i(\mathbf{r}) \quad (\mathbf{r} \in V_i, i = 1, \dots, n) \quad (V = V_1 + V_2 + \dots + V_n)$$

且此时, 作为定解条件, 尚应引入不同媒质分界面上的 BC 为“衔接条件”, 或称之为辅助的 BC, 即:

$$\varphi_1|_{S_i} = \varphi_2|_{S_i} \quad ; \quad \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}|_{S_i} - \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}|_{S_i} = -\sigma_i(\mathbf{r}_i)$$

当场源分布在离坐标原点的有限距离内, 而场域  $V$  扩展至无限远处时, 则应给定无限远处的 BC 为

$$u(\mathbf{r}) \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0$$

(7) 边值问题求解的方法<sup>[12],[13]</sup>:

直接积分法——当待求场函数  $u(\mathbf{r})$  仅是一个坐标变量的函数时, BVP 即简约为常微分方程的定解问题, 可直接运用积分方法得解。

直接求解法

分离变量法——当待求场函数  $u(\mathbf{r})$  为两个或两个以上坐标变量的函数时, 本方法是直接求解 BVP 的经典方法。

镜像法

BVP 间接求解法 复位函数法、保角变换法

格林函数法等

有限差分法 (FDM)

有限元法 (FEM)

近似(数值)求解法 模拟电荷法 (CSM)

矩量法 (MOM)

边界元法 (BEM) 等

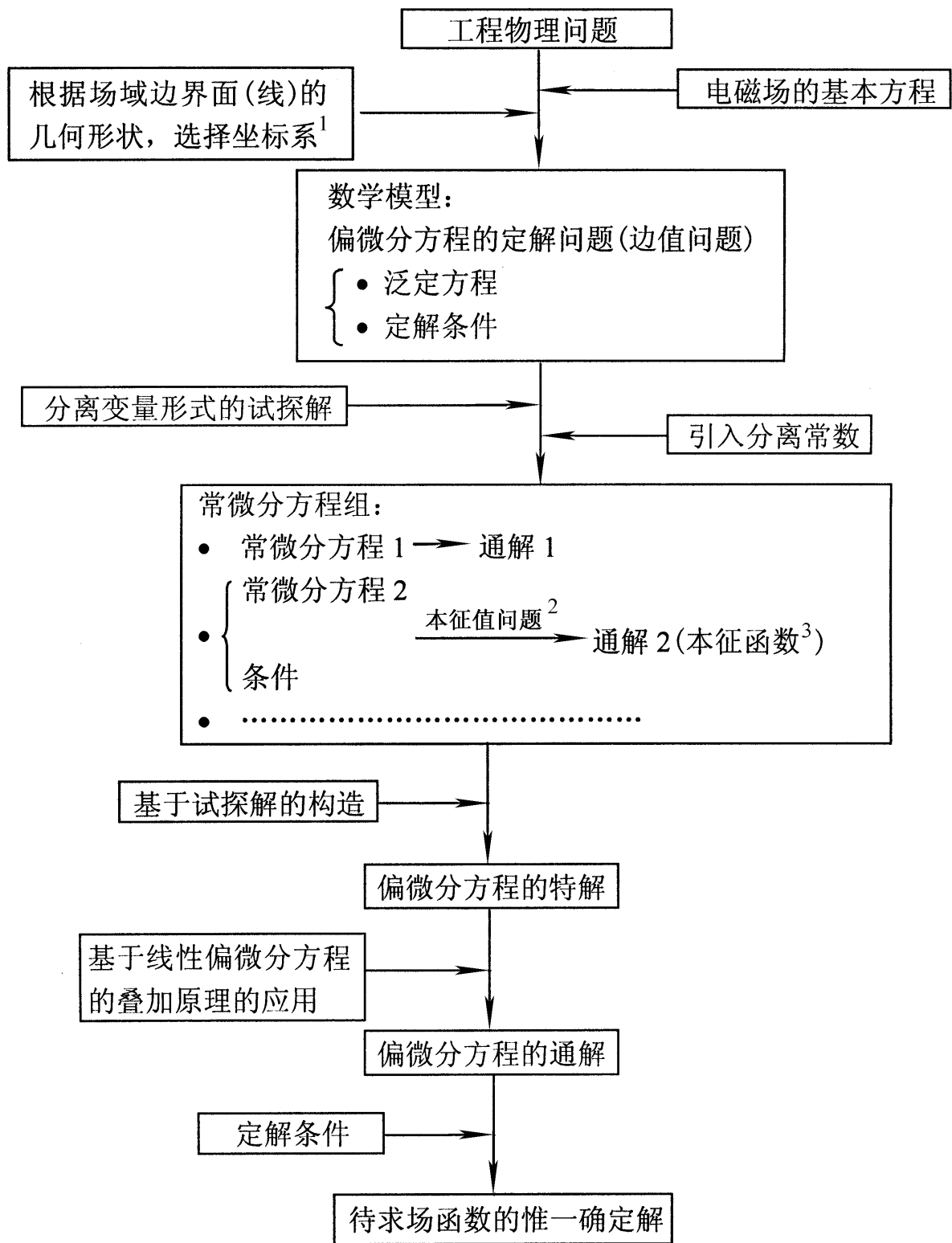
### 2.3.3 关于分离变量法及其应用的讨论

(1) 分离变量法: 当待求边值问题 (BVP) 的场函数  $U(\mathbf{r})$  是两个或两个以上坐标变量的函数时, 本方法是直接求解 BVP 的经典方法。一般说来, 当场域边界面(线)和某一正交曲线坐标系的坐标面(线)相吻合时, 它往往是一种简便而有效的方法。

对于泛定方程为拉普拉斯方程的 BVP, 分离变量法应用的具体求解步骤是: 应结合场域边界几何形状的特征, 选用适当的坐标系, 以给出问题的数学模型 (BVP); 设待求场函数由两个或两个以上各自仅含一个坐标变量的函数的乘积所组成, 并把这假设的函数 (试探解) 代入拉普拉斯方程, 借助于“分离常数”, 原来的偏微分方程就可相应地转换为两个或两个以上的常微分方程。

解出所得常微分方程的通解, 并按试探解结构得出待求偏微分方程的特解, 再按线性偏微分方程的特征, 由叠加原理构成偏微分方程的通解 (一般解); 根据问题所给定的定解条件, 逐一确定上述偏微分方程通解中各个待定的积分常数和特征值, 最终可得待求场函数唯一确定的解答。

以上展述的分离变量法求解步骤, 现继续通过以下的流程图予以描述, 有助于获得对于方法整体应用的更清晰的理解。



注 1: 常用的正交曲线坐标系有直角坐标系  $(x, y, z)$ 、圆柱坐标系  $(r, \theta, z)$ 、球坐标系  $(r, \theta, \varphi)$ 、椭圆柱面坐标系  $(x, y, z)$ 、抛物柱面坐标系、长旋转椭球坐标系、扁旋转椭球坐标系、旋转抛物面坐标系、圆锥曲面坐标系和椭球坐标系共 10 种, 可供分析使用。

注 2: 当常微分方程的非零解必须对应于定解条件的某些特定数值(本征值)时, 即构成该常微分方程的本征值问题。

注 3: 含本征值的解函数被称为本征函数。

应指出, 在工程电磁场的偏微分方程定解问题构造中, 其泛定方程可归结为椭圆型(如静电场)、抛物型(如磁准静态场)和双曲型(如动态电磁场, 电磁波)三类二阶线性偏微分方程。

(2) 直角坐标系中的平行平面场问题(2.5.3节)

例如,接地金属槽,矩形波导内的电磁场,忽略曲率半径的电机定、转子间的气隙磁场,矩形截面的汇流排等均可归属为这类典型分析问题的应用背景。

例 2.3 一长直接地金属槽的横截面如图2.5所示,其侧壁与底面电位均为零,而顶盖电位  $= m \sin \frac{\pi}{a} x$ 。求槽内电位分布。

[解] 此问题理想化为平行平面场问题。根据边界面的形状,采用直角坐标系如图 2.5 所示。槽内电位  $(x, y)$  满足拉普拉斯方程,构成如下的第一类边值问题:

$$\nabla^2 (x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0 \quad (0 < x < a, 0 < y < a) \quad (2.3)$$

$$= 0 \quad (x = 0, 0 < y < a) \quad (2.4)$$

$$= 0 \quad (0 < x < a, y = 0) \quad (2.5)$$

$$= 0 \quad (x = a, 0 < y < a) \quad (2.6)$$

$$= m \sin \frac{\pi}{a} x \quad (0 < x < a, y = a) \quad (2.7)$$

本例电位函数  $(x, y)$  的一般解为式(2-76)。现由给定的边界条件确定该一般解中的各个待定常数。由式(2.4)可知:

$$A_{10} = 0, \quad A_{1n} = 0 \text{ 和 } A_{-1n} = 0$$

由式(2.5)可知:

$$B_{10} = 0, \quad B_{1n} = 0 \text{ 和 } B_{-1n} = 0$$

即  $(x, y) = \sum_{n=1} C_n \sinh(m_n x) \sin(m_n y) +$

$$\sum_{n=1} D_n \sin(m_n x) \sinh(m_n y) + A_{20} B_{20} xy$$

由式(2.6)可知:

$$A_{20} B_{20} = 0, \quad C_n = 0 \text{ 和 } \sin m_n a = 0$$

由此可见,与分离常数  $m_n$  相关的待定常数  $m_n$  取值应为

$$m_n = \frac{n\pi}{a} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

故  $(x, y) = \sum_{n=1} D_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a}$

将式(2.7)代入上式,则得

$$m \sin \frac{\pi}{a} x = \sum_{n=1} D_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh(n\pi) \quad (2.8)$$

于是,由比较系数法得

$$D_1 = \frac{m}{\sinh} \quad (n=1)$$

$$D_n = 0 \quad (n \neq 1)$$

故本题所含本征值  $m_1 = \frac{\pi}{a}$ , 对应的本征函数为  $\sin \frac{\pi}{a}x$  和  $\sinh \frac{\pi}{a}y$ 。这样, 最终的待求电位  $\varphi(x, y)$  的确定解为

$$\varphi(x, y) = \frac{m}{\sinh} \sin \frac{\pi}{a}x \sinh \frac{\pi}{a}y \quad (2.9)$$

其相应的等位线分布如图 2.5 所示。

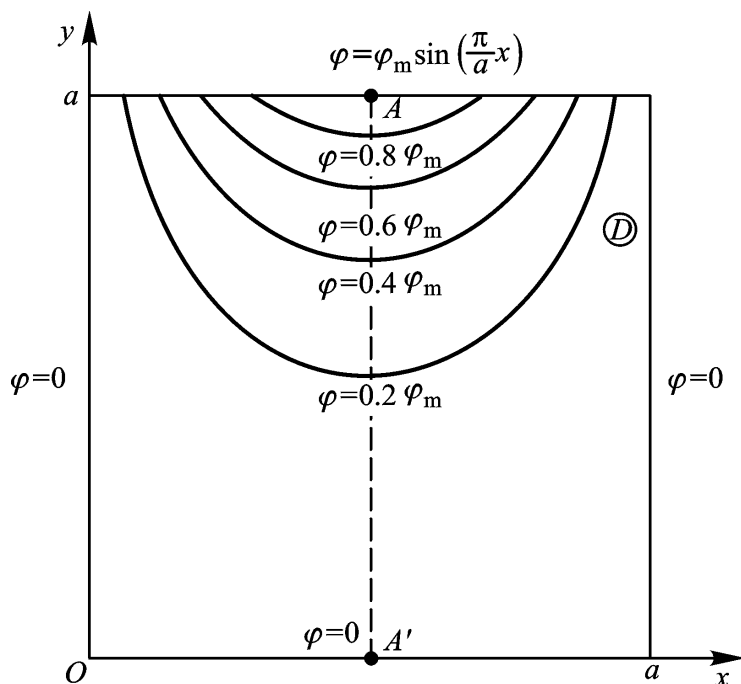


图 2.5 长直接地金属槽的横截面图

值得指出, 鉴于场分布的对称性, 本例分析也可压缩在  $\frac{D}{2}$  场域内进行, 当然, 这时定解条件需作相应变化 (应引入对称线  $AA'$  条件:  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{AA'} = 0$ )。这样的处理方法尤其在数值求解法应用中, 将显著地提高计算效率及其经济性。

**例 2.4** 一长直接地金属槽的横截面如图 2.6 所示, 其侧壁与底面电位均为零, 而顶盖电位  $\varphi = \varphi_0$ 。求槽内电位分布。

[解] 本例数学模型构造同前例, 仅定解条件 [式 (2.7)] 需改为如下形式的定解条件:

$$\varphi = \varphi_0 \quad (0 < x < a, y = a) \quad (2.10)$$

显然, 分离变量法的求解过程也与前例类同, 直至式 (2.8) 应改为

$$\varphi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi}{a}x \sinh \frac{n\pi}{a}y = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin \frac{n\pi}{a}x \quad (2.11)$$

为确定待定的  $E_n$ , 对于上式的处理方法, 除教材例 2-13 中的处理方法外,

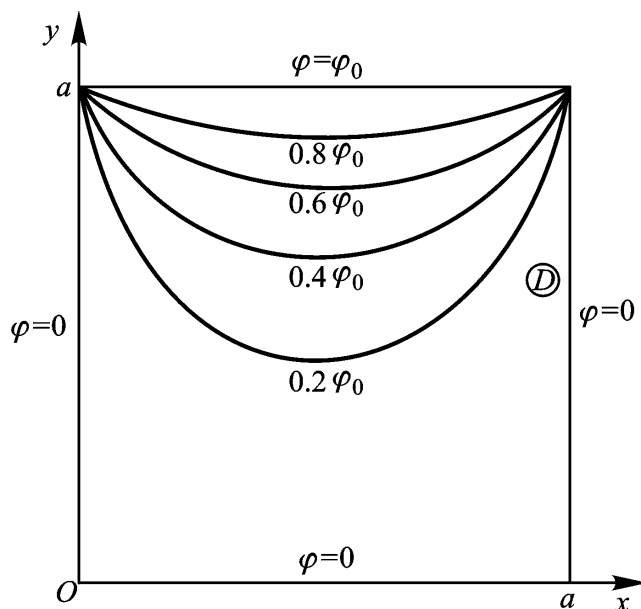


图 2.6 长直接地金属槽的横截面图

尚可按在区间  $[-l, l]$  上展开  $f(x) = \sum_{n=1} b_n \sin \frac{n x}{a}$  傅里叶正弦级数的系数  $b_n$  的计算关系式, 即

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n x}{l} dx$$

计算之。为此, 对于本例, 可延拓  $x$  的区间为  $[-a, a]$ , 这样可得

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{2}{a} \int_0^a \sin \frac{n x}{a} dx = \frac{2}{a} \cdot \frac{a}{n} \int_0^a \sin \frac{n x}{a} d \frac{n x}{a} \\ &= \frac{2}{n} (1 - \cos n) = \begin{cases} \frac{4}{n} & (n \text{ 为奇数}) \\ 0 & (n \text{ 为偶数}) \end{cases} \end{aligned}$$

从而, 最终的待求电位  $(x, y)$  的确定解为

$$(x, y) = \sum_{n=1, 3, \dots} \frac{4}{n \sinh(n)} \sin \frac{n x}{a} \sinh \frac{n y}{a} \quad (2.12)$$

其相应的等位线分布如图 2.6 所示。

(3) 圆柱坐标系中的平行平面场问题(2.5.3 节)

(4) 圆柱坐标系中的轴对称场问题

当场域结构如图 2.7 所示, 对  $z$  轴呈旋转对称分布特征时, 则如图选择圆柱坐标系, 待求场函数  $(\rho, z) = (\rho, z)$  仅与圆柱坐标变量  $\rho, z$  相关。此时, 应用分离变量法, 设试探解  $(\rho, z) = R(\rho) Z(z)$ , 代入拉普拉斯

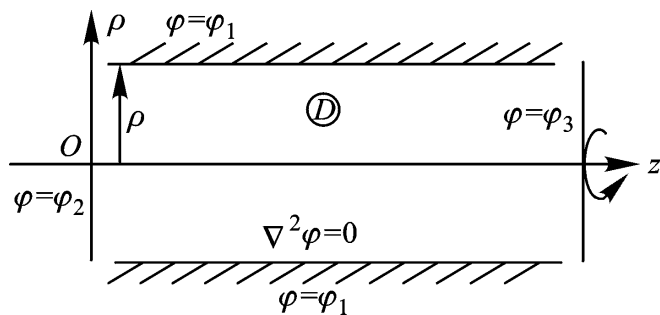


图 2.7 圆柱对称的轴对称场结构

方程  $\nabla^2 = 0$ , 即可将给定的偏微分方程分离为两个常微分方程联立求解的问题。应该指出, 这时, 对应于函数  $R(\rho)$  的常微分方程的解答不能应用初等函数予以表达, 而必须归结为一类特殊函数(贝塞尔函数)的表述式。

工程上, 静电电子透镜、同轴传输线等问题均属于这类典型问题的应用背景。鉴于这类问题的分离变量法应用已超越本课程教学大纲的基本要求, 故不再展述。

### (5) 球坐标系中的轴对称场问题

当场域结构如图 2.8 所示, 对  $z$  轴呈旋转对称分布特征时, 则如图选择球坐标系, 待求场函数  $\varphi(r, \theta, \phi) = \varphi(r, \theta)$  仅与球坐标变量  $r$ 、 $\theta$  相关。此时, 应用分离变量法, 设试探解  $\varphi(r, \theta) = R(r)H(\theta)$ , 代入拉普拉斯方程  $\nabla^2 = 0$ , 即可将给定的偏微分方程分离为两个常微分方程联立求解的问题。应该指出, 这时, 对应于函数  $H(\theta)$  的常微分方程的解答不能应用初等函数予以表达, 而必须归结为一类特殊函数(勒让德函数)的表述式。

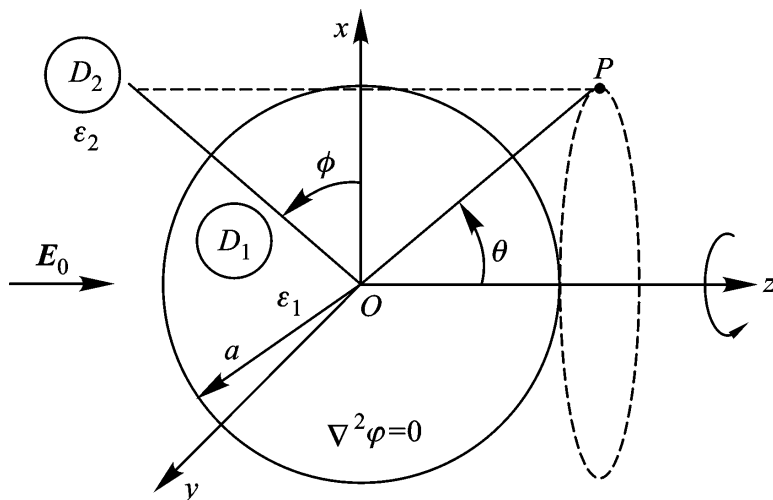


图 2.8 球形域的轴对称场结构

工程上, 变压器油中的球状气泡、杂质粒子, 球腔形的磁屏蔽等均属于这类典型问题的应用背景。鉴于这类问题的分离变量法应用已经超越本课程教学大纲的基本要求, 故不再展述。

## 2.3.4 关于镜像法及其应用的讨论

(1) 镜像法(Method of Images, 简称 IM): 用位于场域边界外虚设的较简单的镜像电荷分布来等效替代该边界上未知的较为复杂的电荷分布, 从而将原含该边界的非均匀媒质空间变换成无限大单一均匀媒质的空间, 使分析计算过程得以明显简化的一种间接求解法。

(2) 镜像法应用的理论基础——静电场解的惟一性定理(2.5.4 节)。

在导体形状、几何尺寸、带电状况, 以及媒质几何结构、特性给定不变的前提下, 根据惟一性定理, 不论采用何种方法, 只要找出的解答满足在同一泛定方程下问题所给定的边界条件, 那就是该问题的解答, 并且是惟一的解答。镜像法正是巧妙地应用了这一基本原理, 面向多种典型结构形式的工程电磁场问题, 而构成的一种有效的解析求解法。

(3) 镜像法应用的关键点:

镜像电荷的确定(镜像电荷的位置、个数及其电量大小“三要素”);  
等效求解的“有效场域”。

(4) 镜像法应用的示例

例 2.5 点电荷与无限大接地导电平面系统电场的镜像法的应用原理。

[分析] 以大地上方输电线电场、雷电云形成的大气电场、电力线路对有线通讯线路的干扰等工程问题为背景,典型化的基本问题可归结为无限大接地导板上方的点电荷激发的电场问题,如图 2.9 所示。对于这一典型问题,必须明确指出,其场分布  $(\mathbf{r})$  既不可能在已知场源分布情况下求解,也不可能运用叠加原理或高斯定理等直接求解法得出其解析解。因此,基于场的唯一性定理,启示我们可否采用别的间接求解法来求得该典型问题的场分布  $(\mathbf{r})$ ? 为此,考察如图 2.10(b)所示的一对相距  $2h$ , 位于无限大单一介质  $\epsilon_0$  空间中的正、负电荷  $q$  所激发的电场。现分析其上半空间的电场是否等同于原问题[图 2.10(a)]的点电荷——接地导板系统的电场?

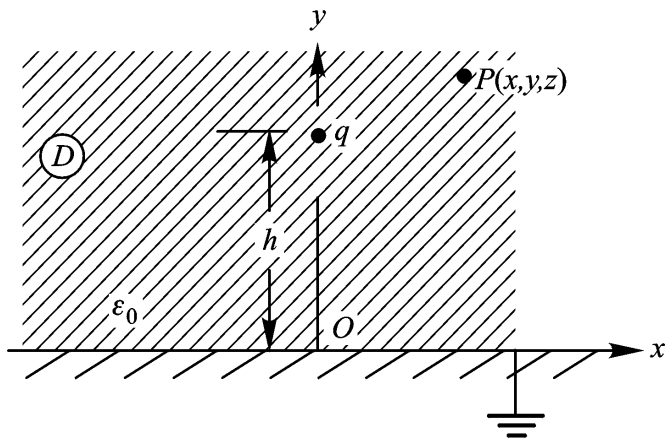
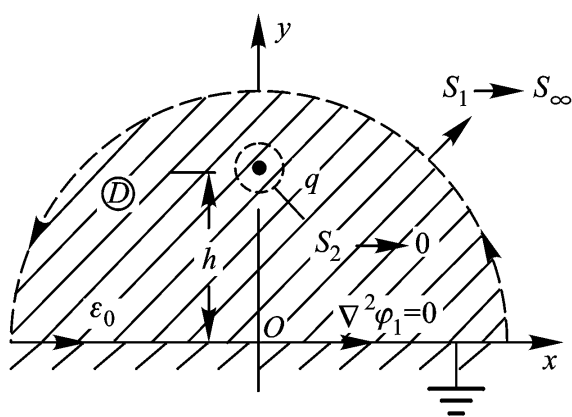
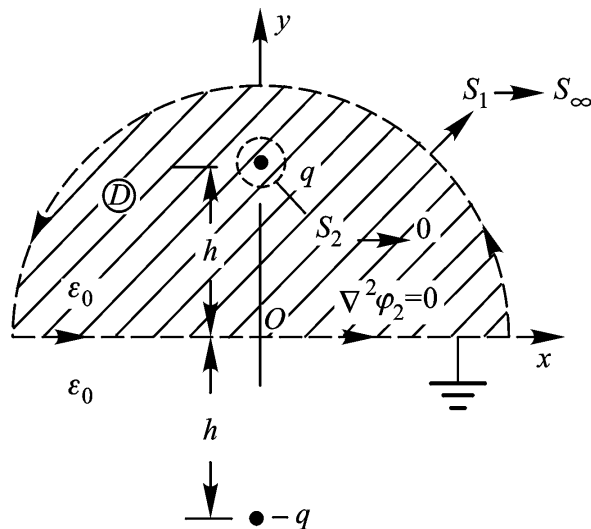


图 2.9 点电荷—接地导板系统

因此,基于场的唯一性定理,启示我们可否采用别的间接求解法来求得该典型问题的场分布  $(\mathbf{r})$ ? 为此,考察如图 2.10(b)所示的一对相距  $2h$ , 位于无限大单一介质  $\epsilon_0$  空间中的正、负电荷  $q$  所激发的电场。现分析其上半空间的电场是否等同于原问题[图 2.10(a)]的点电荷——接地导板系统的电场?



(a) 原问题 (点电荷—接地导板系统)



(b) 被考察问题 (一对正、负电荷的电场问题)

图 2.10 镜像法应用原理分析

设:如图 2.10 所示,包围点电荷  $q$  与平面 ( $y=0$ ) 作一闭合面  $S_1$ , 并令  $S_1$  趋向于无限大, 即  $S_1 \rightarrow S_\infty$ 。同时,包围点电荷  $q$  作一微小的闭合面  $S_2$ , 并令  $S_2 \rightarrow 0$ , 向点电荷  $q$  收缩。这样,所论场域  $D$  的边界面为  $(S_1 + S_2)$ 。令图 2.10(a)、(b) 两问题待求电位函数解分别为  $\phi_1$  和  $\phi_2$ , 由此分析如下:

(1) 在同样由  $S_1$ 、 $S_2$  围成的场域  $D$  内(上半空间), 泛定方程均满足拉普拉

斯方程:  $\nabla^2 \varphi_1 = 0$  和  $\nabla^2 \varphi_2 = 0$ ;

(2) 关于边界面上边界条件的分析:

边界面  $S_1$  上的 BC: 已知  $\varphi_1 \Big|_{S_1} = 0$ ; 而由  $\pm q$  两电荷的叠加效应, 显而易见,  $\varphi_2 \Big|_{S_1} = 0$ 。

边界面  $S_2$  上的 BC: 在  $S_2 \rightarrow 0$  向点电荷  $q$  收缩的极限情况下, 可将  $S_2$  面看作为导体表面, 即  $S_2$  为等位面, 且  $q$  值可看作为该等位面上自由电荷面密度  $= D_n$  的通量值。因此有

$$\begin{array}{ll} \varphi_1 \Big|_{S_2} = \text{Const.} & \varphi_2 \Big|_{S_2} = \text{Const.} \\ \text{对原问题:} & \text{对被考察问题:} \\ - \int_{S_2} \frac{1}{n} dS = q & - \int_{S_2} \frac{2}{n} dS = q \end{array}$$

显然, 对比两问题的分析结果可见, 电位函数  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  满足同一泛定方程 (拉普拉斯方程), 且在边界面 ( $S_1 + S_2$ ) 上满足相同的第一类 BC  $\varphi_1 \Big|_{S_1} = \varphi_2 \Big|_{S_1} = 0$  和相同的第二类 BC  $-\frac{1}{n} \Big|_{S_2} = -\frac{2}{n} \Big|_{S_2} = \text{某指定值}$ , 因此, 根据场的惟一性定理, 必有  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$  成立。

基于以上分析结果, 其结论是: 点电荷—接地导板系统的电场 [图 2.9 或图 2.10(a)] 可由相应的如图 2.10(b) 所示的上半空间的电场予以等效替代。换句话说, 原问题导板上未知的感应电荷的分布可用置于场域边界外虚设的点电荷 ( $-q$ ) 来等效代替, 该虚设的点电荷 ( $-q$ ) 位于给定的点电荷  $q$  的对称位置 (镜像位置), 故特称其为给定电荷  $q$  的镜像电荷。从而, 这一以等效变换为内核构成的间接求解法即称之为镜像法。必须强调指出的是, 在上述镜像法处理中, 对应于原问题导板下方  $E=0$  的非指定的求解域, 应等效地置换为导板上方的媒质。也就是说, 镜像法处理的电场为一无限大单一均匀媒质空间中的电场问题, 分析计算过程由此得以明显简化, 但解答的有效区域仅为与原问题对应的上半空间, 即如图 2.10(a)、(b) 所示对应的阴影区域。此外, 对于本例, 确定镜像电荷的“三要素”, 其结果显而易见为 镜像位置, 1 个镜像电荷, 与原电荷等电量、异号。

[讨论] 依本例同样的推理方法, 不难逐一分析讨论以下各类镜像法的应用原理:

电轴与无限大接地导电平面系统的电场(2.6.2 节);

电轴法(2.6.3)节;

点电荷与无限大介质平面系统的电场(2.6.4 节);

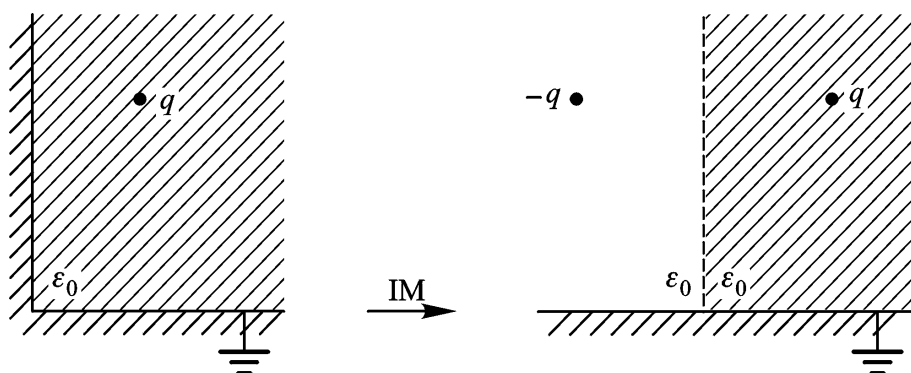
点电荷与导体球系统的电场(2.6.5节);

对此,本书在“习题解析与解答”中还继续展开了相应的阐述。

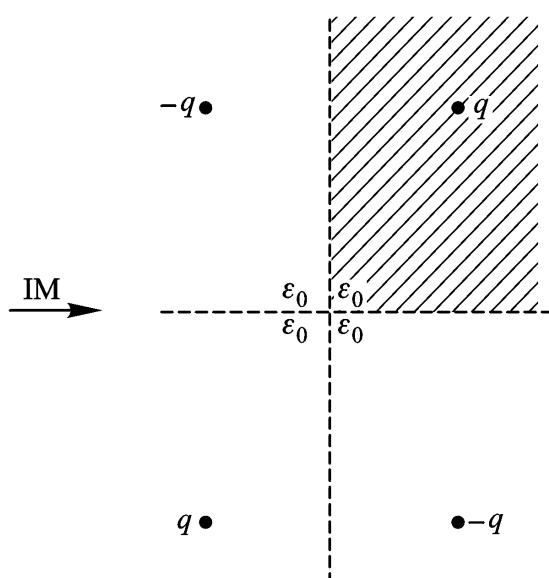
**例 2.6** 基于例2.5分析的镜像法应用原理,可推广应用镜像法于以下各类问题的求解:

(1) 点电荷—接地的直角导板系统

镜像法(IM)应用的图示如图 2.11 所示。



(a) 点电荷—接地的直角导板系统



(b) 镜像法的两次应用图示

图 2.11 镜像法推广应用之一

(2) 点电荷—角形边界的接地导板系统(2.6.1节)

(3) 点电荷—两无限大平行接地导板系统

镜像法(IM)应用的图示如图 2.12 所示。根据应用原理,所得结果为一连续镜像电荷的序列,但因随着连续镜像电荷的生成,其位置越来越远离求解场域  $D$ ,故问题是收敛的。换言之,可仅取对两导板 3—4 次连续镜像处理而生成的有限个镜像电荷与原电荷合成的电场,便能以足够的计算精度逼近于原问题的电场。

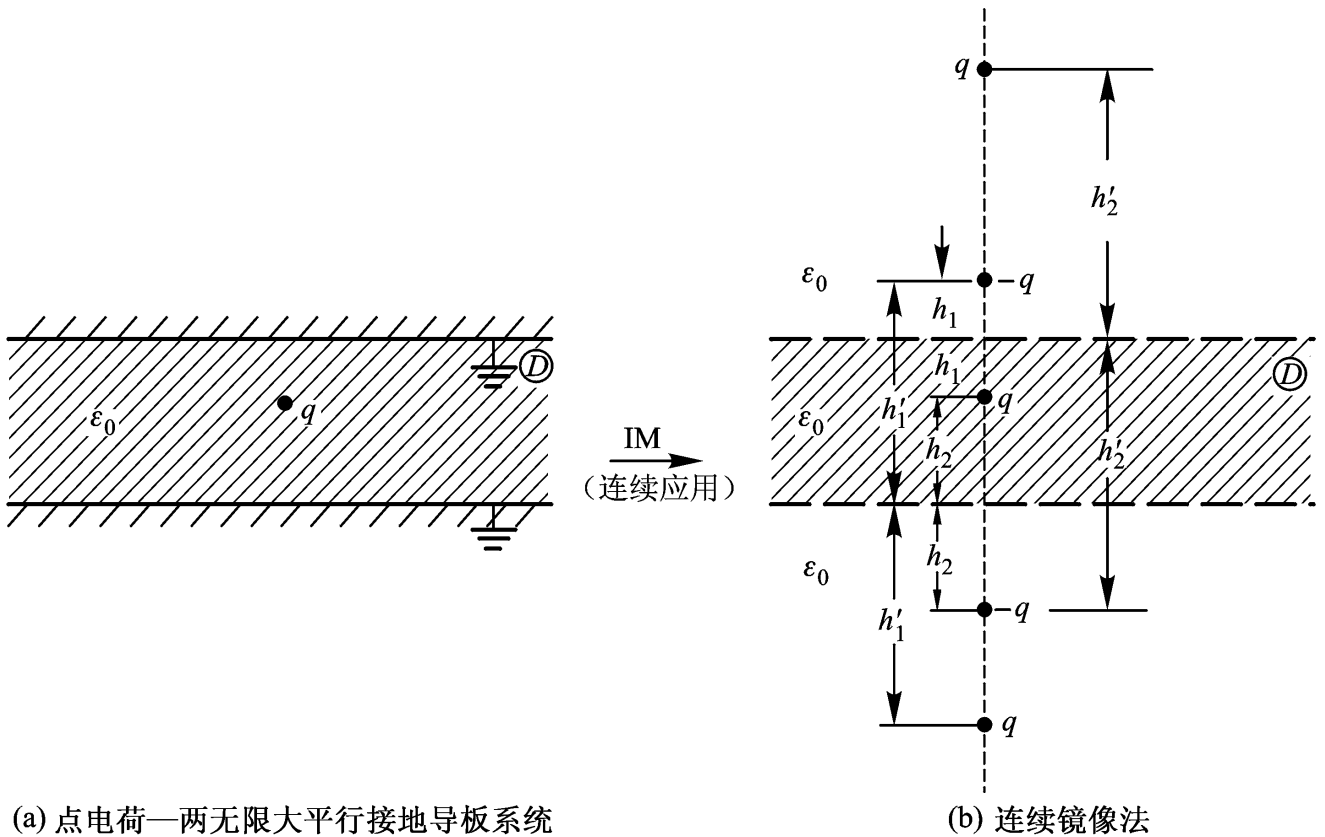


图 2.12 镜像法推广应用之三

### 2.3.5 关于部分电容概念的讨论

对于多导体系统,每个导体的电位不仅与导体本身电荷有关,同时还与其他导体上的电荷有关,显然,这是因为周围导体上电荷的存在必然影响周围空间场的分布。因此,基于多导体系统中电荷与电位之间的关联性(2.7.2节),工程上定义了两两导体间的相互电容,即部分电容的概念。关于两类部分电容: 自有部分电容  $C_{i0}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )——各导体与选为电位参考点的导体(0号导体)之间的部分电容; 互有部分电容  $C_{ij}$  ( $i$  或  $j = 1, 2, \dots, n$ , 且  $i \neq j$ ), 其计算关系式已列于式(2 - 124)和式(2 - 125)。

在初次学习、掌握部分电容概念时,应强调指出以下有关概念:

(1) 所有部分电容  $C_{i0}$ ,  $C_{ij}$ 恒为正值,且  $C_{ij} = C_{ji}$ ,它们分别与各导体的几何形状、尺寸,相对位置及所处介质 相关,而与各导体带电状况无关。此一概念可由部分电容和感应系数  $\gamma_{ij}$ 的关系得出。

(2) 任一部分电容值是和整个系统中所有导体的几何形状、尺寸,相对位置相互关联的。例如,在  $(n + 1)$ 个导体系统中,由式(2 - 123)可见,  $C_{10} = \frac{q_1}{U_{10}} \Big|_{U_{12} = U_{13} = \dots = U_{1n} = 0}$ ,这就表明,2、3、...、 $n$ 号导体的存在事实上影响了所论的空间电场,而绝非等同于纯粹的1号与0号两导体之间的电场。

(3) 在由  $(n + 1)$ 个导体组成的静电独立系统中,部分电容的总数可由组合

数  $C_{n+1}^2 = \frac{n(n+1)}{2}$  算得。

(4) 工程上等值电容(工作电容)的概念:将各个部分电容看成等值的电路参数。则实际的多导体系统就可由部分电容构成的等值网络(或称静电电路)予以描述。从而可用网络理论的方法,研究相应的电场问题。例如,对于两线输电线,记入大地影响后,若设大地为参考电位,且记为 0 号导体,则两输电线间的等

值电容即可定义为  $C = \frac{Q}{U_{12}} = C_{12} + \frac{C_{10} C_{20}}{C_{10} + C_{20}}$ 。

**例 2.7** 设教材例 2.19 中的导线 1 对地电位为  $U_1$ , 导线 2 接地。求导线 1 和导线 2 每米长度上的电荷。

[解] 按式(2-120), 当  $U_2 = 0$  时得:

$$Q_1 = \frac{U_1}{l} \text{ 和 } Q_2 = -\frac{U_1}{l}$$

而感应系数  $\beta_{ij}$  可通过电位系数  $\alpha_{ij}$  由式(2-121)计算之, 故最终可得导线 1 每米长度上( $l=1$ )的电荷

$$Q_1 = \alpha_{11} U_1 = \frac{2\pi \epsilon_0 \ln \frac{2h}{a}}{\ln \frac{2h}{a} \frac{2h^2}{d^2} + 1 \cdot \ln \frac{2h}{a} \frac{2h^2}{d^2} + 1} U_1$$

导线 2 每米长度上( $l=1$ )的电荷

$$Q_2 = \alpha_{21} U_1 = -\frac{2\pi \epsilon_0 \ln \frac{2h}{d} \frac{2h^2}{d^2} + 1}{\ln \frac{2h}{a} \frac{2h^2}{d^2} + 1 \cdot \ln \frac{2h}{a} \frac{2h^2}{d^2} + 1} U_1$$

显然, 鉴于所论为三导体系统, 故导线 1、2 上所带电荷  $|Q_1| = |Q_2|$ , 从而可进一步加深对前述讨论(2)的理解。

**例 2.8** 设想大地上方带有正电荷的雷积云与大地之间形成一均匀电场  $E_0$ , 如图 2.13 所示, 在该空间中敷设有带接地线防护的单线输电线。求:

(1) 在图 2.13(a) 所示并未引入输电线的情况下, 该输电线所在处 A 点的电位  $U_A$ ;

(2) 在接地线(接地钢索)引入条件下, 如图 2.13(b) 所示, 重求 A 点的电位  $U_A$ 。

[解] (1) 以大地为电位参考点, 按题设, 均匀电场  $E_0$  中单线输电线所在处 A 点的电位

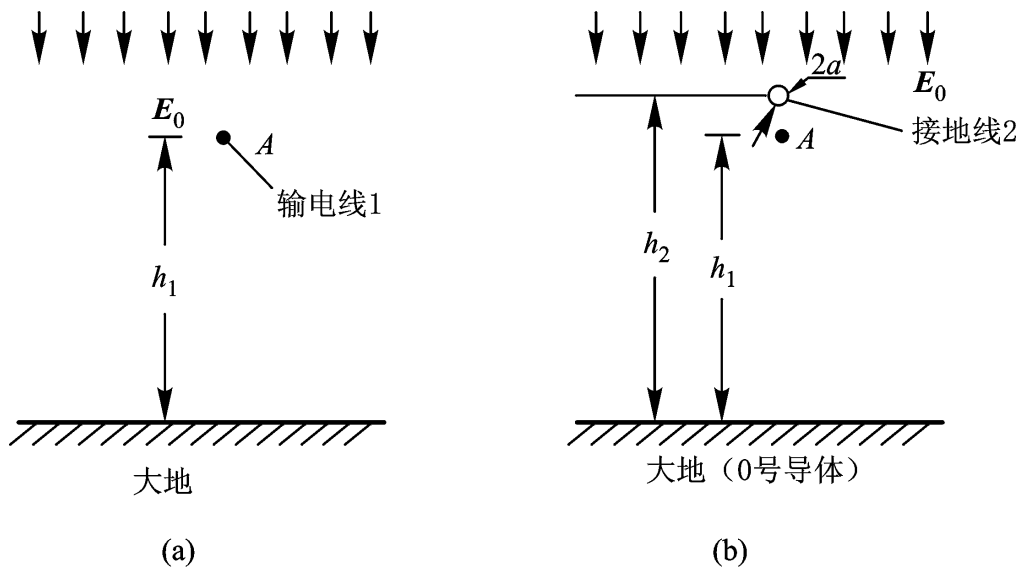


图 2.13

$$A = E_0 h_1$$

(2) 此时, A 点的电位不仅由均匀外电场  $E_0$  产生,而且还取决于接地线上电荷  $q$  的作用,故按式(2 - 116)可得

$$A = E_0 h_1 + {}_{12} q \quad (2.13)$$

式中,互有电位系数  ${}_{12}$  通过镜像法的应用,比照教材例 2 - 19 的分析,应可表示为

$${}_{12} = \frac{1}{2} \frac{1}{l} \ln \frac{h_1 + h_2}{h_2 - h_1}$$

其中,  $l$  为接地线的长度。

然后,再计入接地线的物理条件:

$${}_{22} = E_0 h_2 + {}_{22} q = 0$$

式中,自有电位函数  ${}_{22} = \frac{1}{2} \frac{1}{l} \ln \frac{2h_2}{a}$ 。将上式代入式(2.13),最终可得

$$A = E_0 h_1 - \frac{{}_{12}}{{}_{22}} h_2 = E_0 h_1 - h_2 \cdot \frac{\ln \frac{h_1 + h_2}{h_2 - h_1}}{\ln \frac{2h_2}{a}}$$

显而易见,  $A < A_0$ ,也就是说,接地线对雷电场下的输电线起到了预期的防护作用。

### 2.3.6 虚位移法

在电场中,物体的任何运动都关联着电场能量的变化与作用于物体上力所做的功。正是基于这样的物理本质,引入了虚位移法,即通过假设物体发生某一定的位移  $d_g$ ,然后由位移过程中电场能量的变化  $d_g W_e$  与外力及电场力做功之间的关系来计算电场力。这一功能平衡过程可一般性地表示为

$$dW = d_g W_e + F d_g \quad (2.14)$$

式中,  $dW$  表示与各带电体相连接的电源提供的能量。上式表明, 电场能量的增量与电场力所做的功之和等于外源提供的能量。

取决于带电系统设定的两种不同情况, 即常电位系统(各带电体接有端电压恒定的电源), 或常电荷系统(系统不接外源, 各导体上电荷保持不变), 按式(2.14), 由(2.9节)已作的分析, 可分别导得电场力的计算关系式为:

$$F = \left. \frac{W_e}{g} \right|_{k=C} \quad (2.15)$$

和

$$F = - \left. \frac{W_e}{g} \right|_{q_k=C} \quad (2.16)$$

在以上虚位移法构造中, 借鉴分析力学的概念, 其中  $g$  称为广义坐标, 泛指确定系统中各带电体形状、尺寸和位置的一组独立几何量(  $g_1, g_2, \dots, g_n$  ); 而把企图改变这些广义坐标的力  $F$  称作广义力。因此, 根据广义力与对应的广义坐标的乘积等于该广义力在改变相应广义坐标中所做的功, 可以理解, 如果设定的广义坐标是线位移(距离)、面积、体积和角度等, 则对应的广义力[即式(2.15)和式(2.16)中给出的电场力]是通常的机械力、表面张力、压强和转矩等。应指出, 由式(2.14)可知, 广义力  $F$  的假定正方向即为广义坐标  $g$  增加的方向。

**例 2.9** 分析静电伏特计(图 2.14)活动片(即指针)转动角度  $\alpha$  与被测电压  $U$  之间的关系。

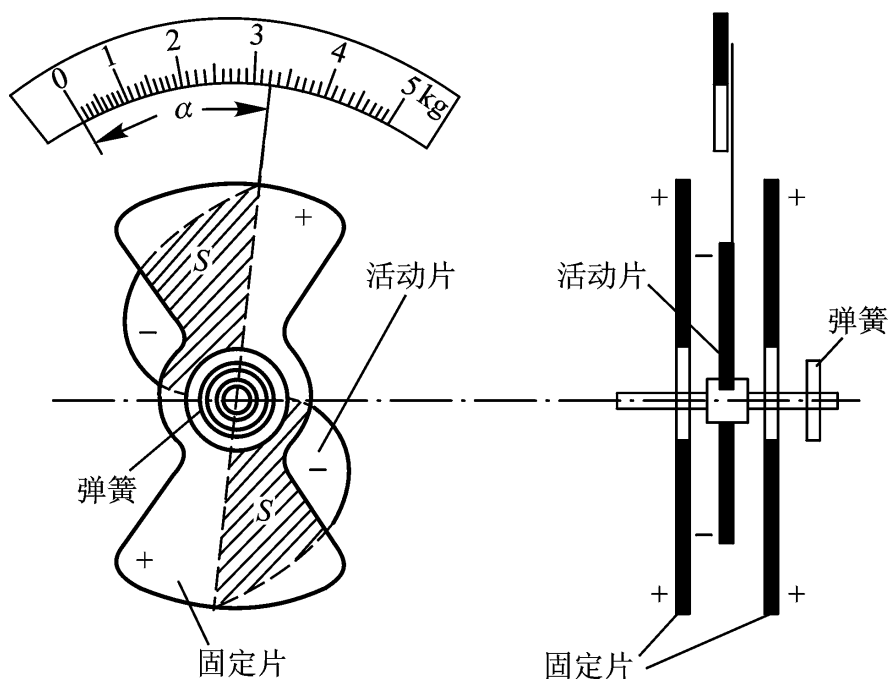


图 2.14 静电伏特计

[分析] 静电伏特计的活动片与固定片之间的电容  $C$  决定于活动片的转动角度  $\alpha$ , 即  $C = f(\alpha)$ 。

现应用虚位移法, 取转角  $\alpha$  为广义坐标, 则广义力  $F$  就是作用于活动片上的转矩  $M$ 。当静电伏特计固定片与活动片之间接上被测静电电压  $U$  时, 带有等

量异性电荷的固定极板与活动极板之间的引力形成转矩,由式(2.15)可得

$$M = -\frac{1}{2} CU^2 = \frac{U^2}{2} C$$

在平衡状态下,这一转矩由弹簧扭矩所平衡,而后者与转角  $\alpha$  成正比,即  $M = k_1 \alpha$ 。因此,指针的平衡位置决定于下列方程:

$$\frac{U^2}{2} C = k_1 \alpha \quad (2.17)$$

从上式可见,静电伏特计标度的特征,就是说  $\alpha = f(U)$  的函数关系取决于  $C = f(\alpha)$ 。如果设  $C = k_2 \alpha$ ,也就是说,若电容  $C$  与活动片的转动角度成正比,则有

$$C = \frac{1}{2} \frac{k_2}{k_1} U^2$$

这表明标度具有二次方特征。如果工程设计要求  $\alpha$  与  $U$  成正比例,即满足  $\alpha = k_2 U$  的条件。将此条件代入平衡方程式(2.17),便得

$$\frac{1}{2} C = 2 k_1 k_2^2 \frac{1}{U}$$

由此解出  $C$  与  $\alpha$  之间的关系是:

$$C = 2 k_1 k_2^2 \ln \alpha + A \quad (2.18)$$

如果忽略电容  $C$  的边缘效应,极板间电容是与图 2.14 中阴影线表示的极板重叠部分的面积  $S$  成正比的。显然,由解式可知,该面积  $S$  应与转角  $\alpha$  的对数成比例地增加。这样,就可设计标度近乎均匀的静电伏特计(图 2.14)。应当指出,式(2.18)在  $\alpha = 0$  时是无法满足的,因为电容不可能有无限大的数值。因此,这意味着标度的起始段原则上就不可能做成均匀的。

### 2.3.7 基于法拉第观点分析电场力

依照法拉第的看法,在电位移管轴线方向有纵张力,而在垂直于轴线方向的管壁上,则有侧压力作用。麦克斯韦定量给出了纵张力与侧压力的值均等于  $\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$  (单位:  $\text{N m}^{-2}$ )。这样,电位移管本身可形象地看作被拉紧了的橡皮筋,沿轴线方向,它有收缩的倾向,而在垂直于轴线方向,它有扩张的趋势。

应用法拉第观点,结合场图,就可对带电体受力状况作出由定性直至定量的分析。例如,一个孤立带电体的表面因电位移管纵张力的效应有自身扩张的受力作用[图 2.15(a)];两个带有异性电荷的物体[图 2.15(b)]由于相互之间电位移管的联系,故在其纵张力作用下,它们将互相吸引;而两个带同性电荷的物体[图 2.15(c)]互相排斥,这可以归结为电位移管侧压力的作用;一个不带电的导体携进另一个带电体的电场时,它就被吸引移向带电体,这一判断不难从图 2.15(d)所示电场图得知。显然,任何不带电的物体被携进不均匀的外电场

时就会感受到一种向电场较强区域移动的趋势。但是,一个横向几何形状对称的导体在均匀的外电场中[图 2.15(e)]一定是顺着电场方向定位,而决不会有向某一方向移动的趋势。

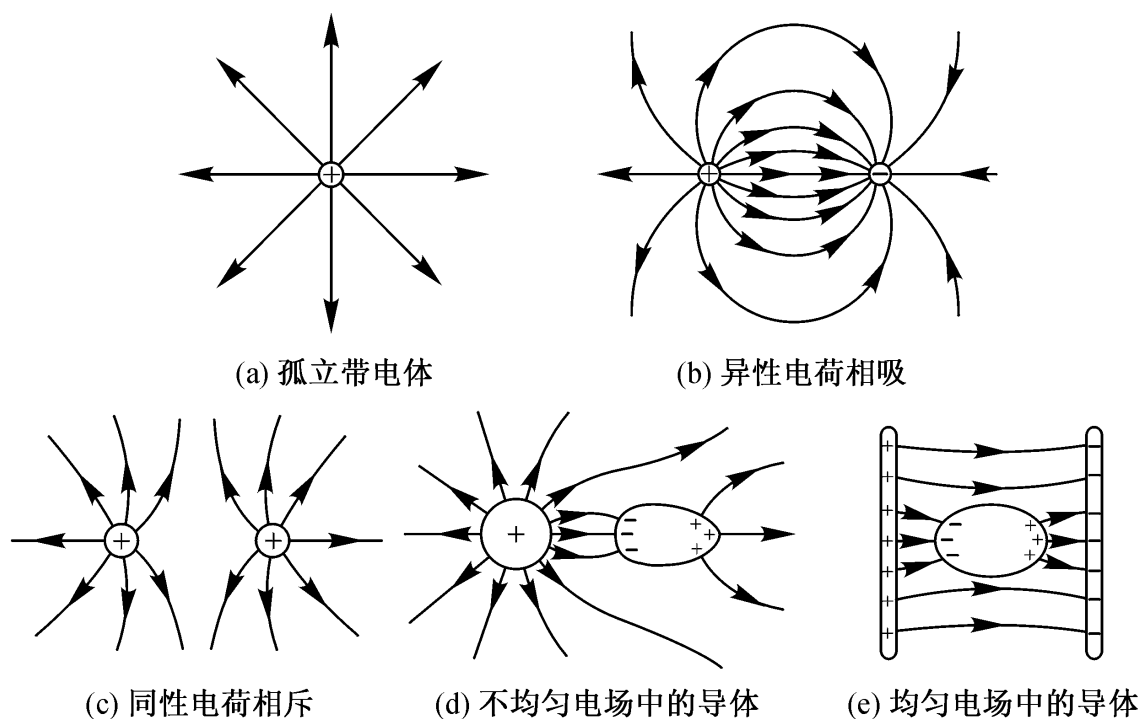


图 2.15

必须指出,法拉第关于电位移管有纵张力、侧压力效应的看法,以及电位移管本身,都不具有物理的实在,它只是用于电场力计算或者在场图解释上起着一种辅助作用的方法。

### 2.3.8 场图示例

电磁场具有能量,有与能量相应的质量,且还具有动量。除了这些表征物质的主要属性外,电磁场也遵循自然界的基本规律——能量守恒与转换定律,质量守恒与转换定律。但是,电磁场不同于通常理解的“实物”,如其质点(光子)的静止质量为零;没有一定的体积;没有“不可入性”;时变电磁场又具有时间、空间不可分割性等。我们认为,电磁场是物质的特殊形式,是不依赖于人们的意识存在,是能被人们的主观所反映的客观现实。

在理解电磁场这一“特殊形式的物质”时,其“看不见、摸不着”的物理特性是使学习者困惑,产生学习困难的主要原因之一。教学实践证明,电磁场场图描绘的方法给予电磁场以直观、形象表示,从而为定性乃至定量分析电磁场问题提供了极为有益的辅助手段。当今,各类电磁场应用软件的后处理技术即包含有场图可视化的丰富内容,为满足科学研究和工程技术的需求起到十分积极的作用。

结合本章学习内容,现汇编以下有关的电场场图,以供读者参阅,深化对相应知识点的理解。图中实线表示电场线( $E$ 线或 $D$ 线);虚线则表示等电位线(等 线)。

两个异性不等值的点电荷的电场(图 2.16);

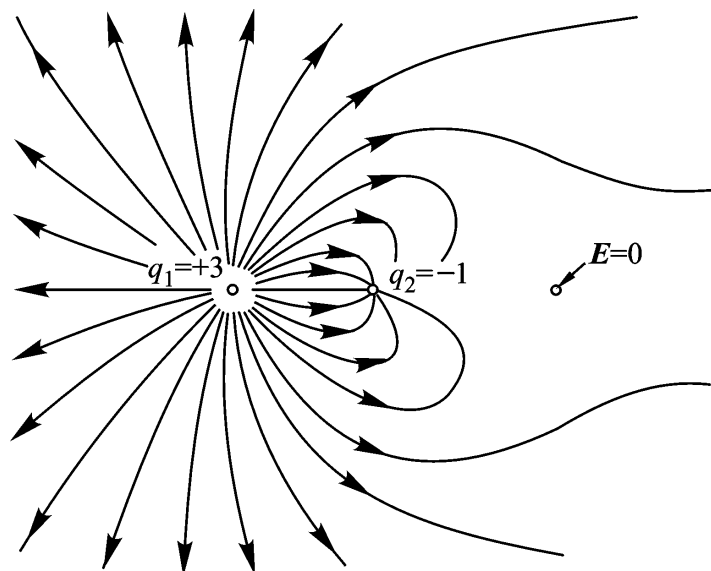


图 2.16 正、负电荷分别为  $q_1 = +3$ (相对值)和  $q_2 = -1$ (相对值)的两个异性点电荷的电场

两个等值异性点电荷的电场(图 2.17);

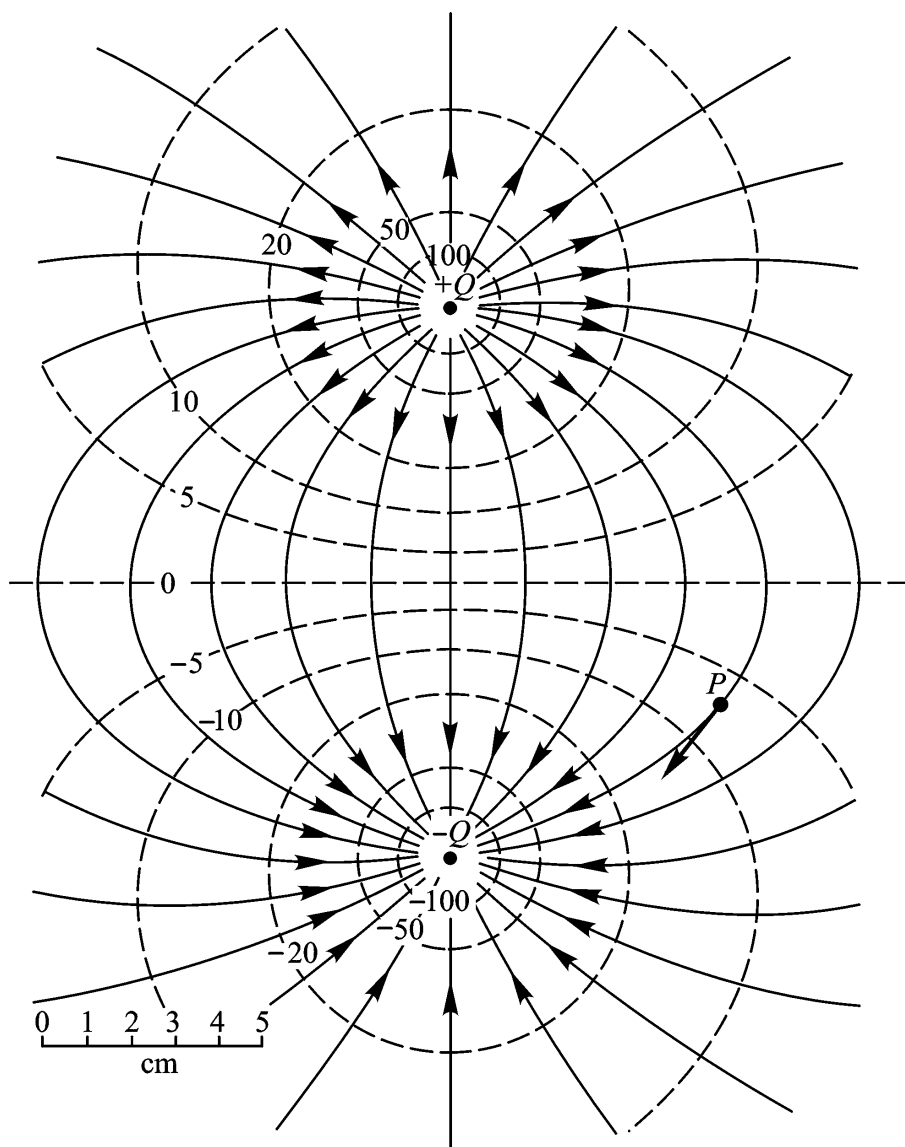


图 2.17 正、负电荷为  $1.4 \times 10^{-10} \text{C}$ , 相距 12.7 cm 的两个等值异性点电荷的电场

两个等值同性点电荷的电场(图 2.18);

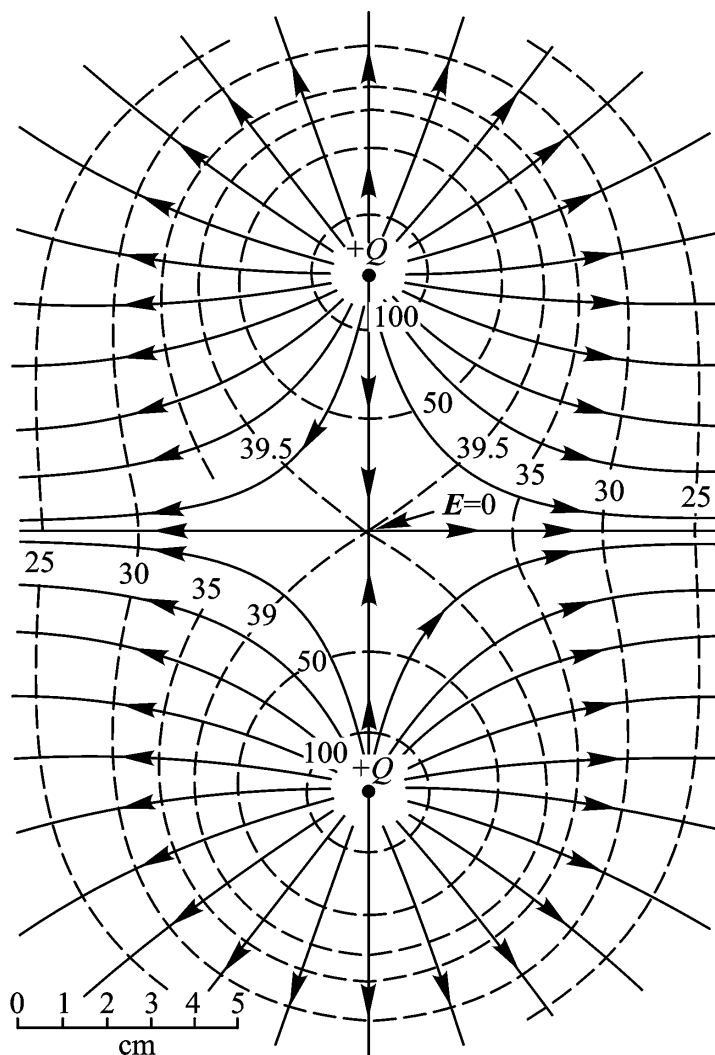


图 2.18 两个相距 12.7 cm 等值(电荷为  $1.4 \times 10^{-10}$  C)同性点电荷的电场

位于介质圆柱体附近线电荷 + 的电场(图 2.19);

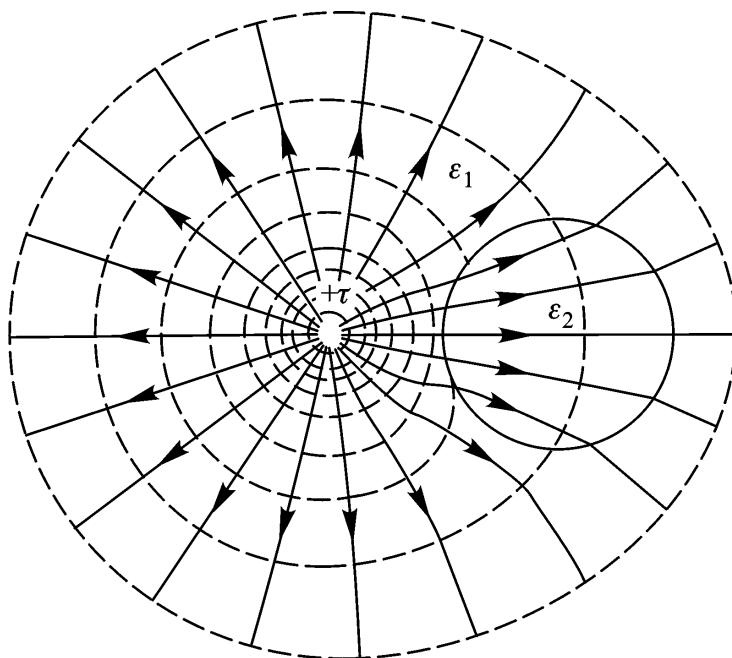


图 2.19 位于介质圆柱体附近的线电荷 + 的电场(  $\epsilon_2/\epsilon_1=5$ ,  
且实线表示  $\mathbf{D}$  线)

点电荷  $+Q$  与接地导体球之间的电场(图 2.20);

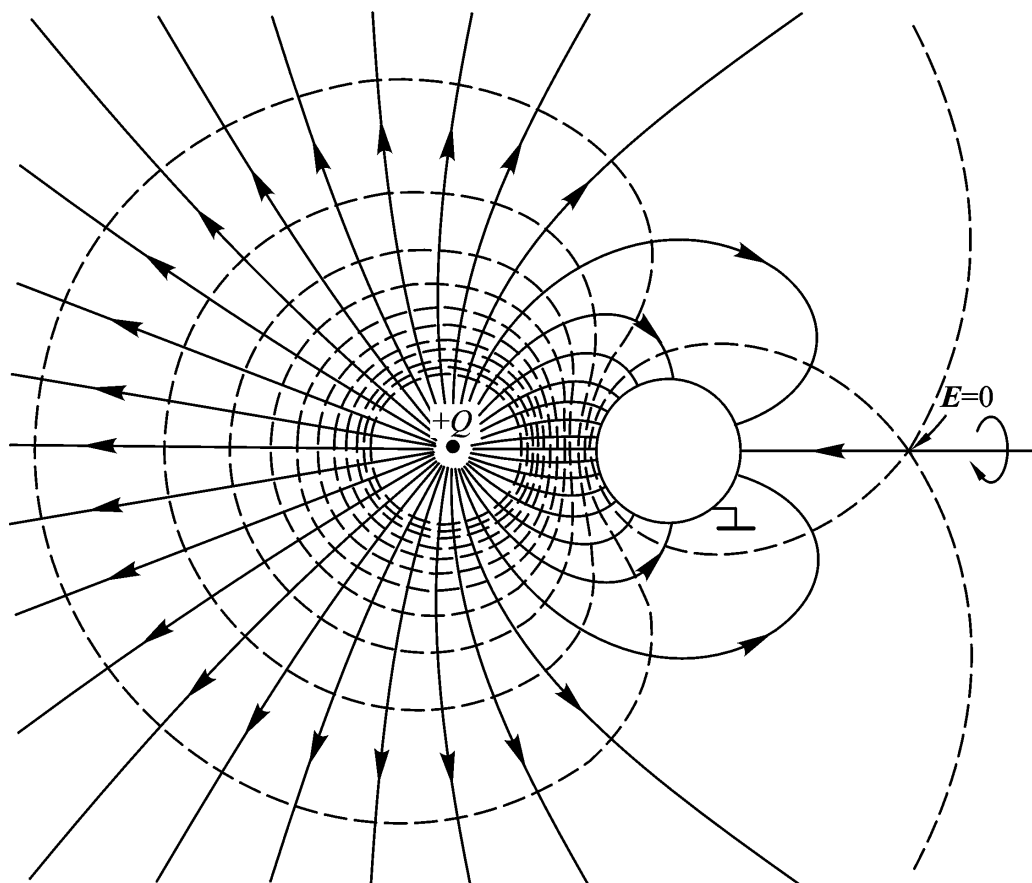


图 2.20 点电荷  $+Q$  与接地导体球之间的电场

两同半径同轴带电圆柱形导体筒之间的电场(图 2.21);

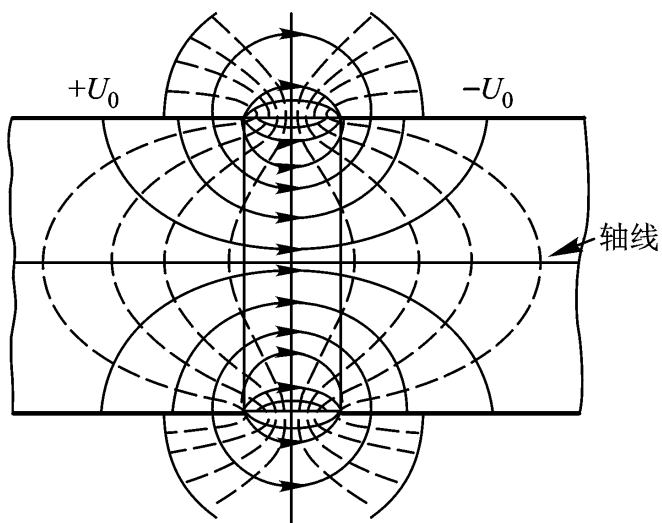


图 2.21 两同半径同轴带电圆柱形导体筒之间的电场

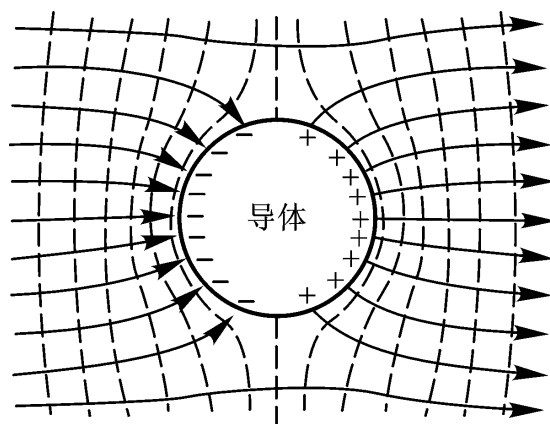


图 2.22 均匀外电场中的圆柱形导体

均匀外电场中的圆柱形导体(图 2.22);

均匀外电场中的介质圆柱体(图 2.23);

平行板电容器的电场(图 2.24);

大地上方三带电导体系统的电场(图 2.25);

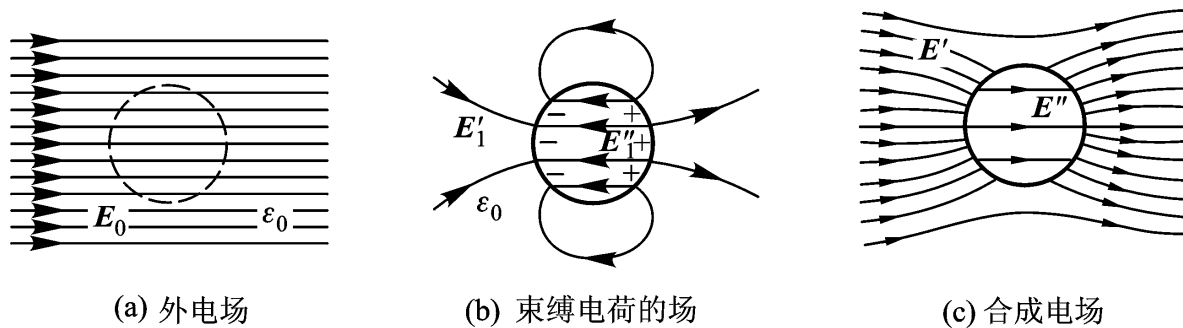


图 2.23 均匀外电场中的介质圆柱体

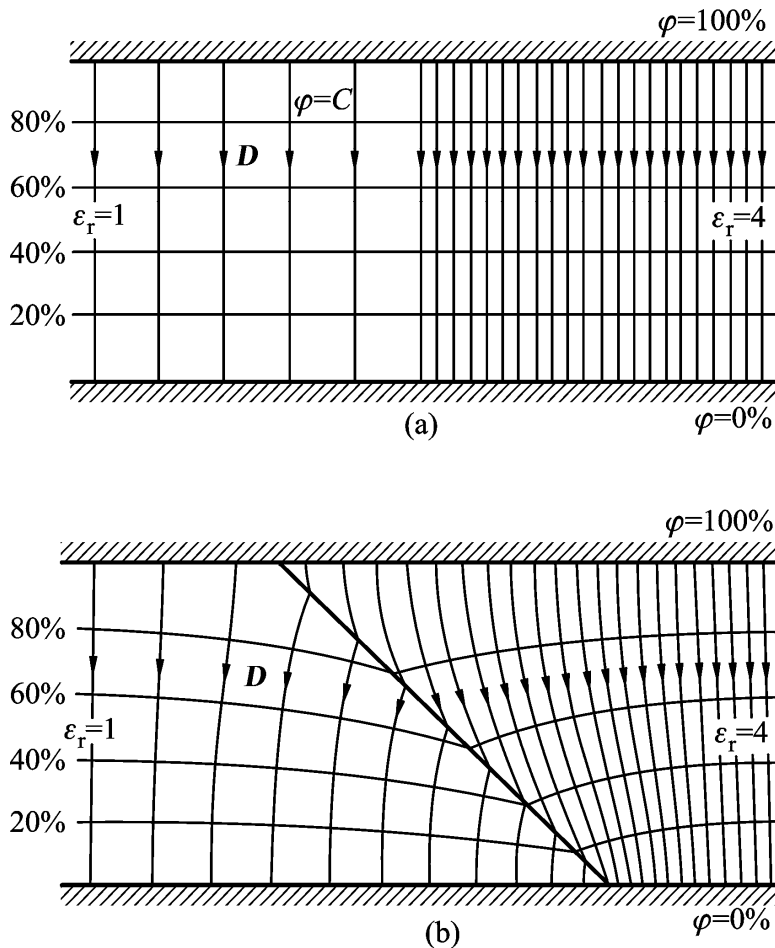


图 2.24 平行板电容器的电场

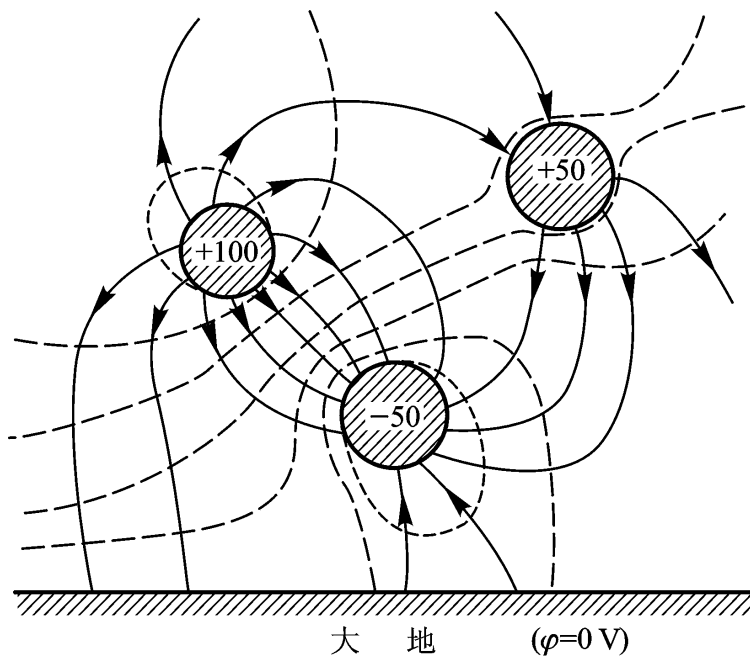


图 2.25 大地上方三带电导体系统的电场

同轴传输线内的电场(图 2.26)。

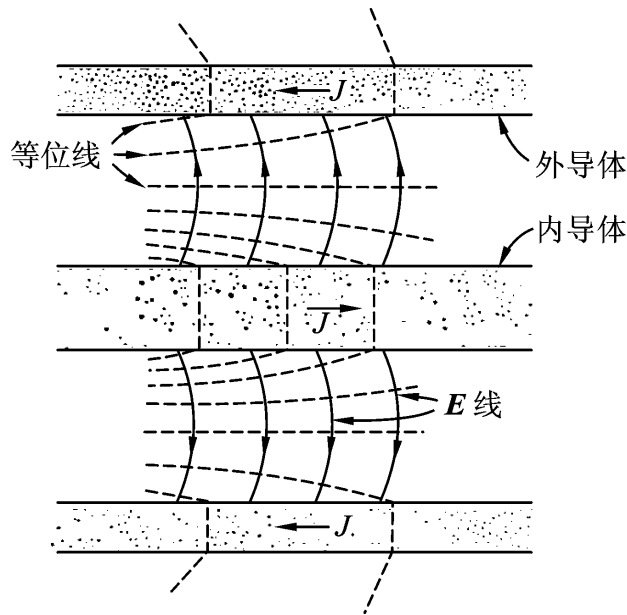


图 2.26 同轴传输线内的电场

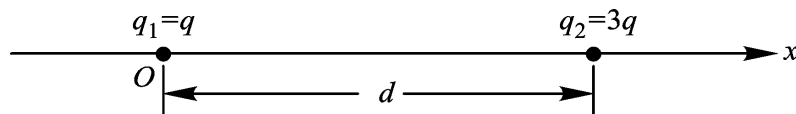
## 2.4 习题解析与解答

**2 - 1** 真空中有两个同号点电荷:  $q_1 (= q)$  和  $q_2 (= 3q)$ , 它们的距离为  $d$ 。试决定在其连线上, 哪一点的电场强度为零; 哪一点上由该两电荷所引起的电场强度值相等, 方向一致。

[解题思路]

本题属点电荷系统的电场问题。基于点电荷场源所激发的电场  $E$  的计算关系式(2 - 22), 应用叠加原理, 即可得解;

必须指出, 基于场量  $E$  的矢量场分析, 在叠加原理应用时, 务须遵循矢量分析的运算规则。



题 2 - 1 图

[解] 设定坐标系如图(以电荷  $q_1$  所在处为坐标原点)

(1) 在两电荷连线上, 何处  $E = 0$  ?

由判断, 惟当  $0 < x < d$  时, 才有可能存在  $E = 0$  的场点。此时应用叠加原理可得

$$E(x) = \frac{q_1}{4 \pi \epsilon_0 x^2} - \frac{q_2}{4 \pi \epsilon_0 (x - d)^2} = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 x^2} - \frac{3q}{4 \pi \epsilon_0 (x - d)^2} = 0$$

得

$$2x^2 + 2dx - d^2 = 0$$

故

$$x = \frac{-2d \pm \sqrt{4d^2 + 8d^2}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} d$$

舍去负根, 得解为  $x = \frac{3-1}{2} d$  处的场点上  $E=0$ 。

(2) 在两电荷连线上, 何处由它们激发的  $E$  值相同, 且方向一致?

可以判定, 当  $x < 0$  或  $x > d$  时, 两电荷产生的  $\mathbf{E}$  方向相同。且它们激发的  $E$  分别为:

$$E_{1x}(x) = -\frac{q}{4\epsilon_0 x^2}; \quad E_{2x}(x) = -\frac{3q}{4\epsilon_0 (x-d)^2} \quad (x < 0)$$

和

$$E_{1x}(x) = \frac{q}{4\epsilon_0 x^2}; \quad E_{2x}(x) = \frac{3q}{4\epsilon_0 (x-d)^2} \quad (x > d)$$

因此满足待求条件的点应由以下关系式给定, 即

$$\frac{1}{x^2} = \frac{3}{(x-d)^2}$$

得

$$x = \frac{3-1}{2} d \quad (\text{不合题意, 舍去}) \\ -\frac{3+1}{2} d$$

因此, 当  $x = -\frac{3+1}{2} d$  时, 由该两电荷激发的  $\mathbf{E}$  恰好量值相等, 方向一致。

**2-2** 真空中沿一正方形的两对角边分别放置长度为  $l$  的细导线, 它们分别带有等量而异号、均匀分布的电荷  $+q$  和  $(-q)$ 。试求正方形中心点的电场强度。

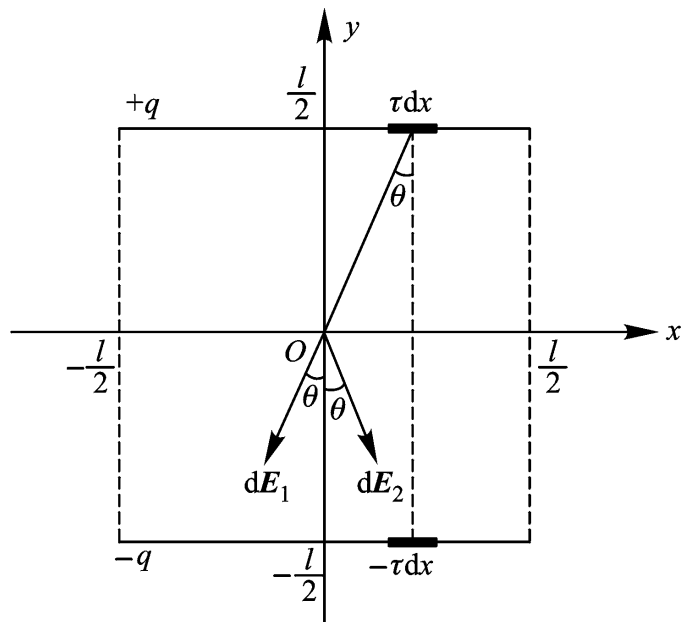
[解题思路]

本题属线电荷系统的电场问题。基于线电荷场源所激发的电场  $\mathbf{E}$  的计算关系式(2-20), 应用叠加原理, 即可得解;

必须指出, 基于场量  $\mathbf{E}$  的矢量场分析, 在叠加原理应用时, 务须遵循矢量分析的运算规则;

注意到对应于待求场点(正方形中心点)处的场源分布的对称性, 当可简化该场点处合成  $\mathbf{E}$  的求解过程。

[解] 建立如图所示的坐标系。在两线电荷上, 考虑处于对称位置的两元电荷( $dx$  和  $-dx$ ), 在正方形中心点  $O$  产生的电场强度。由于对称,  $dE_{1x} = -dE_{2x}$ , 故  $dE_x = dE_{1x} + dE_{2x} = 0$ , 而  $dE_{1y} = dE_{2y}$ , 故  $dE_y = dE_{1y} + dE_{2y} = 2dE_{1y}$ 。现两线电荷可以对称地离散成许多这样的对称元电荷组, 从而, 由这些元电荷组分别在  $O$  点产生的电场强度的叠加, 即得待求  $O$  点处的总电场强度, 即应有



题 2 - 2 图

$$E_{Oy} = 2 E_{1y} = 2 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\frac{q}{l}}{4} \cdot \frac{\frac{l}{2}}{x^2 + \frac{l}{2}^2} dx = \frac{q}{2} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{dx}{x^2 + \frac{l}{2}^2}$$

$$E_{Ox} = 0$$

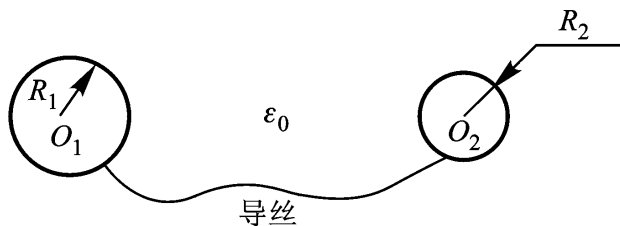
令  $x = \frac{l}{2} \tan \theta$ ,  $dx = \frac{l}{2} \sec^2 \theta d\theta$ , 代入前式得

$$E_{Oy} = \frac{q}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{l}{2} \sec^2 \theta}{\frac{l}{2} \sec^3 \theta} d\theta = \frac{2q}{l^2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta d\theta = \frac{2q}{l^2}$$

所以, 正方形中心点  $O$  处的电场强度

$$\mathbf{E}_O = - E_{Oy} \mathbf{e}_y = -\frac{2q}{l^2} \mathbf{e}_y$$

**2 - 3** 两个半径分别为  $R_1$  和  $R_2$  的导体球, 相距甚远(可分别看作为孤立的导体球), 其中球 1 带有电量为  $q$ , 球 2 不带电。现用一根细长的导丝连接两球, 且在分析中忽略该导丝对空间电场分布的影响。求:



题 2 - 3 图

- (1) 两个球上的电荷量;
- (2) 两个球上的电场强度;
- (3) 概括电荷与电场强度分布的规律性。

[解题思路]

据题意, 本题属两孤立的带电导体球的合成电场问题。孤立的带电导体球外的电场可等效为位于其球心的等量点电荷所产生的电场, 从而, 将

简化解题过程:

以“导丝连接两导体球”,即表征着两导体球等电位的物理条件;

基于点电荷场源的电场强度  $\mathbf{E}$  的计算关系式(2-21),即可展开解题过程。

[解] (1)据题意,可建立方程组

$$\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

$$q = q_1 + q_2$$

$$q_1 = \frac{qR_1}{R_1 + R_2}$$

$$q_2 = \frac{qR_2}{R_1 + R_2}$$

得

$$(2) \mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{e}_{R_1}}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} \frac{qR_1}{R_1 + R_2} = \frac{q\mathbf{e}_{R_1}}{4\pi\epsilon_0 R_1(R_1 + R_2)};$$

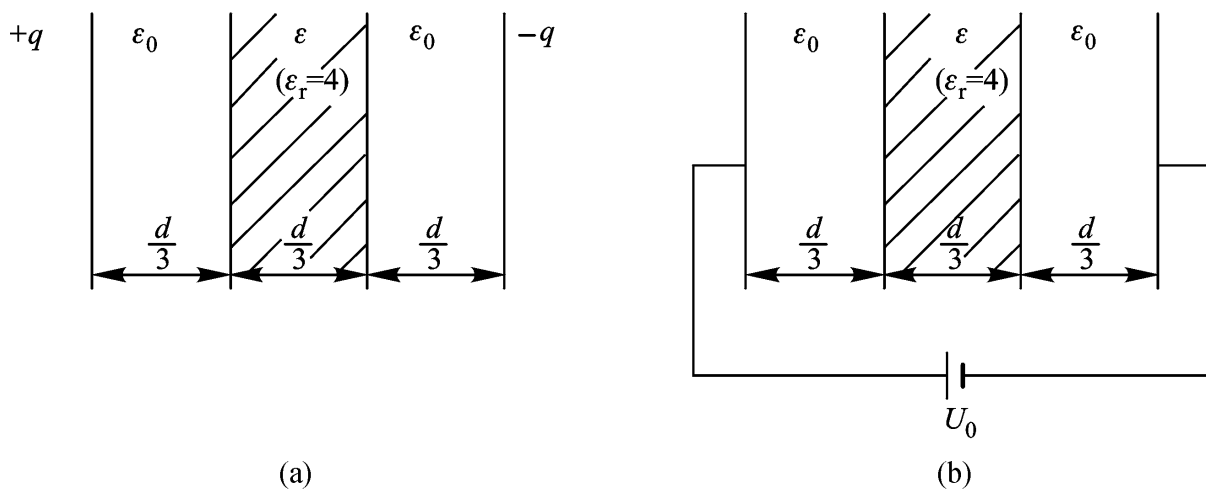
$$\mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{e}_{R_2}}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} \frac{qR_2}{R_1 + R_2} = \frac{q\mathbf{e}_{R_2}}{4\pi\epsilon_0 R_2(R_1 + R_2)}$$

$$(3) \frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2} (\text{成正比}), \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1} (E \text{ 的分布与曲率大小成正比})$$

**2-4** 一平行板电容器,板间距离为  $d$ ,介质为空气( $\epsilon_0$ ),忽略边缘效应。求:

(1)若如题2-4(a)图所示,插入一块  $\epsilon_r = 4$  的介质,试计算电容器中的  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{D}$  有无变化?板间电压有无变化?

(2)若如题2-4(b)图所示,插入介质( $\epsilon_r = 4$ ),同样计算电容器中的  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{D}$  有无变化?极板上的电荷量有无变化?



题 2-4 图

[解题思路]

理想的平板电容器电场可被看作为具有平行平面场特征的典型均匀电场,基于物理电磁学的基础知识,或应用真空中的高斯定理(2-6)可知,

对应于给定电荷  $q$  的求解条件,插入介质块前的电场强度  $\mathbf{E}_0$  的解为

$$\mathbf{E}_0 = \frac{q}{\epsilon_0 S} \mathbf{e}_x$$

设水平坐标轴  $Ox$  由左极板指向右极板,  $S$  为极板面积。

对应于给定电压  $U_0$  的求解条件,则其解为

$$\mathbf{E}_0 = \frac{U_0}{d} \mathbf{e}_x$$

插入介质块后,应用不同介质分界面上的边界条件(2 - 56),以及  $U_{PQ} = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  的基本关系式,即可分别展开解题过程;

极板上的电荷分布应遵循导体和电介质交界面上的边界条件(2 - 60),由此即可得解。

[解] (1) 原状态:  $\mathbf{E}_0 = \frac{q}{\epsilon_0 S} \mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}_0 = \frac{q}{S} \mathbf{e}_x$ ,  $U_0 = \frac{qd}{\epsilon_0 S}$

插入后,  $\mathbf{D}$  不变 ( $\mathbf{D}_{1n} = \mathbf{D}_{2n} = \mathbf{D}_0$ );  $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0$  不变,  $\mathbf{E}_2 = \frac{1}{4} \mathbf{E}_0$  变化;

$$U = \frac{2}{3} \frac{qd}{\epsilon_0 S} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \frac{qd}{\epsilon_0 S} = \frac{3}{4} U_0 \text{ 变化。}$$

(2) 原状态:  $\mathbf{E}_0 = \frac{U_0}{d} \mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}_0 = \frac{\epsilon_0 U_0}{d} \mathbf{e}_x$ ,  $\epsilon_0 = \frac{\epsilon_0 U_0}{d}$

插入后,由  $2 E_1 \cdot \frac{d}{3} + E_2 \cdot \frac{d}{3} = 2 E_1 \cdot \frac{d}{3} + \frac{1}{4} E_1 \cdot \frac{d}{3} = U_0$

得  $\mathbf{E}_1 = \frac{4}{3} \mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{E}_2 = \frac{1}{3} \mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{D}_1 = \frac{4}{3} \mathbf{D}_0$ ,  $\mathbf{D}_2 = \frac{1}{3} \mathbf{D}_0$ ,  $\epsilon_0 = \frac{4}{3} \epsilon_0$ , 即  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  和  $\epsilon_0$  均变化。

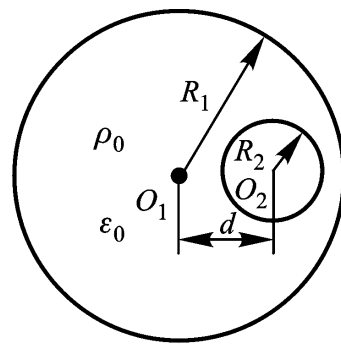
**2 - 5** 已知一半径为  $R_1$  的长直圆柱,离其轴线  $d$  处有一个半径为  $R_2$  的小圆柱,设在大小圆柱间均匀分布着体电荷密度  $\rho_0$ , 如题 2 - 5图所示。试求小圆柱内的  $\mathbf{E}$ 。

[解题思路]

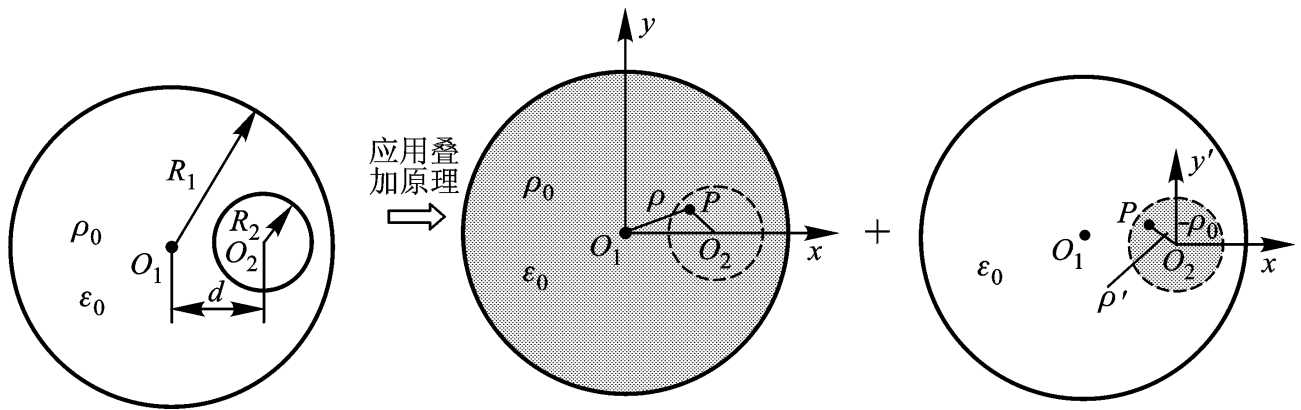
理想化假设待求电场分布具有平行平面电场分布的特征;

应用叠加原理,令待求小圆柱内的电场强度  $\mathbf{E}_P$  由图示的大圆柱内均匀分布的体电荷密度  $\rho_0$  的电场与小圆柱内均匀分布体电荷密度  $-\rho_0$  的电场共同作用所产生;

基于图示的大、小圆柱内由均匀分布的体电荷密度产生的电场,均具有圆柱形对称的平行平面场特征,故可有效地应用高斯定理(2 - 6)直接得到待求电场强度  $\mathbf{E}_P$  的解答。



题 2 - 5 图(1)



题 2 - 5 图(2)

[解] 解题示意图如下:

分别建立图示的  $xO_1y$  和  $xO_2y$  两坐标系, 并正确应用矢量分析的运算, 推演以下解题过程:

(1) 对于大圆柱内体电荷密度  $\rho_0$  产生的电场, 可选取单位长度的同轴圆柱面为高斯面, 由高斯通量定理得

$$\oint_S \rho_0 \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S} = \rho_0 E_1 \cdot 2\pi r = \rho_0 \pi r^2$$

故 
$$\mathbf{E}_1 = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \mathbf{e} \quad (0 < r < R_1)$$

(2) 对于小圆柱内体电荷密度  $-\rho_0$  产生的电场, 就坐标系  $xO_2y$  而言, 同理可得场点  $P$  处的电场强度为

$$\mathbf{E}_2 = \frac{-\rho_0}{2\epsilon_0} \mathbf{e} \quad (0 < r < R_2)$$

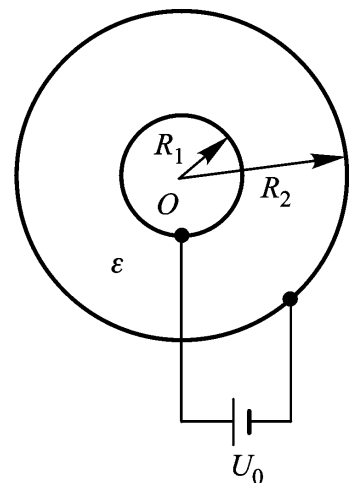
(3) 由此可知, 待求的小圆柱内的电场为以上二者的叠加, 即

$$\mathbf{E}_P = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} (\mathbf{e} - \mathbf{e}') = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} (r - r')$$

注意到两位矢  $\mathbf{e}$  与  $\mathbf{e}'$  间应有  $\mathbf{e}' = d\mathbf{e}_x$ , 故最终得

$$\mathbf{E}_P = \frac{\rho_0 d}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_x = \frac{\rho_0 d}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_{12}$$

**2 - 6** 对于高压同轴传输线, 为了在外导体尺寸固定不变 ( $R_2 = \text{定值}$ ) 与外施电压不变 ( $U_0 = \text{定值}$ ) 的情况下, 提高传输线的利用率, 工程上有所谓同轴线最佳尺寸的选择问题。设如题 2 - 6 图所示, 在  $R_2$  与  $U_0$  不变的条件下, 求:



题 2 - 6 图(1)

(1) 同轴线内哪里的电场强度最大?

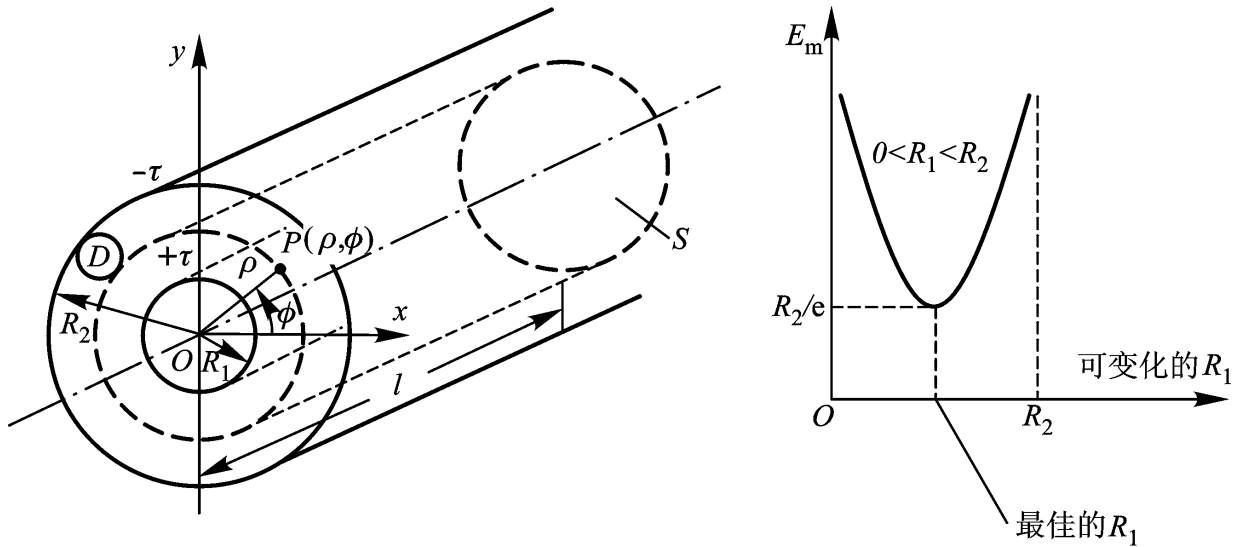
(2) 定性描绘随着内导体半径  $R$  的变化, 最大电场强度  $E_m$  变化曲线;

(3) 在介质得到最充分利用的前提下,即力求降低介质内  $E_m$  值的要求下,试求内导体半径的最佳尺寸应是外导体半径的多少倍?

[解题思路]

对于空载或带有负载的同轴传输线,其中间区段的电场分布均可被理想化为具有平行平面场特征;

该介质内的平行平面电场(求解场域  $D: R_1 < \rho < R_2$ )对线轴呈同轴圆柱形的对称分布,因此,可有效地应用电介质中的高斯定理(2-51),直接得出待求电场强度  $E_p$  的解答。



题 2 - 6 图(2)

[解] (1) 参照教材例 2 - 9, 设传输线内、外导体沿轴线方向每单位长度的荷电量分别为  $+\tau$  和  $-\tau$ , 作与传输线轴线同轴, 且半径为  $\rho$ , 长度为  $l$  的圆柱形高斯面  $S$ , 如图示。显然, 在圆柱面上  $D$  的数值相同, 方向为柱面的外法线方向, 而在二侧底面上则并无  $D$  的法向分量, 因此可得

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \cdot 2\pi\rho l = \tau l$$

即 
$$\mathbf{D} = \frac{\tau}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\rho$$

故 
$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\rho} \mathbf{e}_\rho \quad (R_1 < \rho < R_2)$$

显然,  $E_{\max}$  存在于  $\rho = R_1$  处, 其值为  $E_m = \frac{\tau}{2\pi\epsilon R_1}$

(2) 必须指出, 随着内导体半径  $R_1$  的变化 ( $0 < R_1 < R_2$ ), 在题设  $R_2 =$  定值与  $U_0 =$  定值的条件下, 前所设定的  $\tau = \tau(R_1)$  也将随之变化。这是因为

$$U_0 = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\tau}{2\pi\epsilon\rho} \cdot d\rho = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

故

$$= \frac{2 U_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = (R_1)$$

代入  $E_m$  式

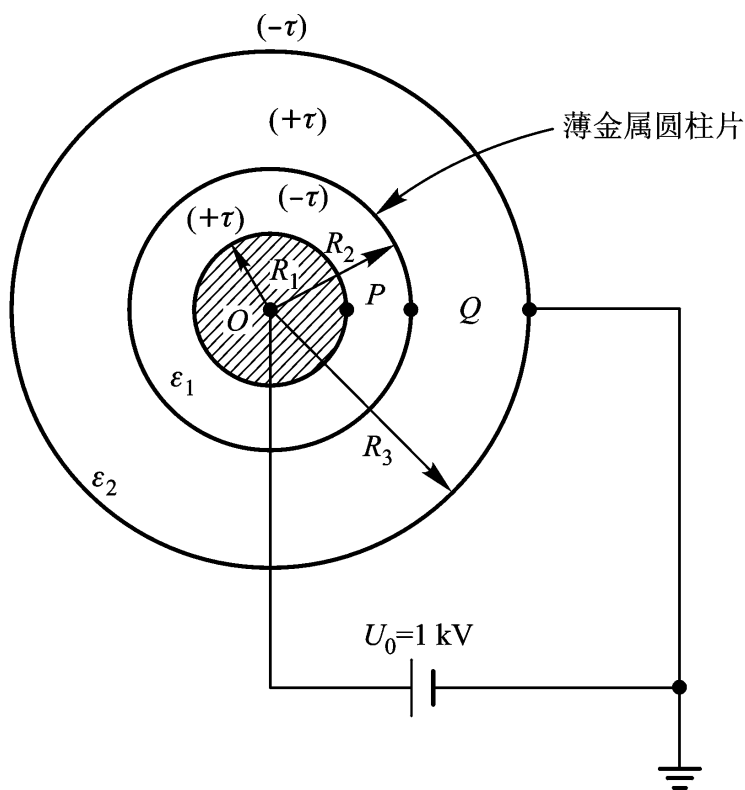
$$E_m = \frac{U_0}{R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

由此可定性描绘  $E_m$  与可变化的  $R_1$  之间的关系, 如图示。由分析得知, 当  $R_1 = 0$ , 或  $R_1 = R_2$  时,  $E_m$  , 故图示曲线中必有一下凹点。

(3) 题意表明, 应求  $\frac{dE_m}{dR_1} = 0$ 。得  $\ln \frac{R_2}{R_1} - 1 = 0$ , 即  $\ln \frac{R_2}{R_1} = 1$ , 故  $\frac{R_2}{R_1} = e$ 。

即  $R_1 = \frac{R_2}{e} = 0.3679 R_2$  为所求的同轴线内导体半径的最佳尺寸。

**2 - 7** 一圆柱形的电容器中, 同轴地置有两层绝缘体, 已知内导线的直径为 2 cm, 外导线的直径为 8 cm, 内外两绝缘层的厚度分别为 1 cm 和 2 cm。内外两导线间的电压为 1000 V。设有一层很薄的金属圆柱片放在两层绝缘介质之间, 欲使每种介质中的最大场强相等, 如以外导体为电位参考点, 试问金属圆柱片的电位应为何值?



题 2 - 7 图

[解题思路]

理想化假设待求电场具有圆柱形对称的平行平面场特征, 故可有效地应用电介质中的高斯定理(2 - 51), 直接得出待求电场强度分布的解答;

运用  $U_{PQ} = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  的基本关系式。

[解] 设内导体上的等效电荷线密度为  $\lambda$ 。作与题 2-6 相同的高斯面  $S$ ，则由高斯定理可得

$$E_1 = E_{1P} = \frac{\lambda}{2\epsilon_1} \quad (R_1 < r < R_2)$$

显然，在点  $P$  处达到介质  $\epsilon_1$  层绝缘中的最大电场强度，即

$$E_{1m} = E_{1P} = \frac{\lambda}{2\epsilon_1 R_1}$$

同理，在点  $Q$  处应有

$$E_{2m} = E_{2Q} = \frac{\lambda}{2\epsilon_2 R_2}$$

题设  $E_{1m} = E_{2m}$ ，即得

$$\frac{1}{\epsilon_1} = \frac{1}{\epsilon_2} = R_2 / R_1$$

设金属圆柱片的电位为  $U_1$ ，则

$$U_1 = \int_{R_2}^{R_3} \frac{\lambda}{2\epsilon_2} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\epsilon_2} \ln \frac{R_3}{R_2}$$

据电压平衡关系，有：

$$U_0 - U_1 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\epsilon_1} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\epsilon_1} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{U_0 - U_1}{U_1} = \frac{(\lambda / \epsilon_1) \ln(R_2 / R_1)}{(\lambda / \epsilon_2) \ln(R_3 / R_2)} = \frac{R_1 \ln(R_2 / R_1)}{R_2 \ln(R_3 / R_2)}, \quad U_0 = 1 + \frac{R_1 \ln(R_2 / R_1)}{R_2 \ln(R_3 / R_2)} U_1$$

故

$$U_1 = \frac{R_2 \ln(R_3 / R_2)}{R_2 \ln(R_3 / R_2) + R_1 \ln(R_2 / R_1)} U_0$$

$$= \frac{2 \ln(4/2)}{2 \ln(4/2) + 1 \ln(2/1)} \times 1000 \text{ V} = 666.67 \text{ V}$$

**2-8** 求下列情况下，真空中带电面间的电压：

- (1) 相距为  $a$  的两无限大平行板，面电荷密度分别为  $+\sigma_0$  和  $-\sigma_0$ ；
- (2) 无限长同轴圆柱面，半径分别为  $a$  和  $b$  ( $b > a$ )，每单位长度上的总电荷：内柱为  $q_0$ ，外柱为  $-q_0$ ；
- (3) 半径分别为  $R_1$  和  $R_2$  的两同心球面 ( $R_2 > R_1$ )，带有均匀分布的面电荷，其总量分别为  $q_0$  (内球面) 和  $-q_0$  (外球面)。

[解题思路]

分析场分布的对称性特征，然后，应用真空中的高斯定理(2-6)，通过正确地选取相应的高斯面  $S$ ，即可有效地直接得出待求电场强度分布的解答；

运用  $U_{PQ} = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  的基本关系式, 求相应带电面间的电压。

[解]

(1) 基于面对称的平行平面场特征, 通过作两底面与带电平行板平行的圆柱形的高斯面  $S$ , 且令其一侧底面位于带电导体内, 即可由高斯定理(2-6)得知板间电场强度为  $E = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}$ , 可见平行板间为均匀电场, 故板间电压  $U = E \cdot a = \frac{\sigma_0 a}{2\epsilon_0}$

(2) 基于圆柱形对称的平行平面场特征, 作与题 2-6 相同的高斯面  $S$ , 即可由高斯定理(2-6)得知两圆柱面间的电场强度为

$$E = E_r = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}$$

两圆柱面间的电压为

$$U = \int_a^b \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} dr = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

(3) 基于球形对称的场分布特征, 作半径为  $r$  的球形高斯面  $S$ , 则由球面上  $\mathbf{E}$  的数值相同, 方向为球面的外法线方向, 可得

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S E dS = E \oint_S dS = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_0}{\epsilon_0}$$

即两球面间的电场强度为

$$E = E_r = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

两球面间的电压

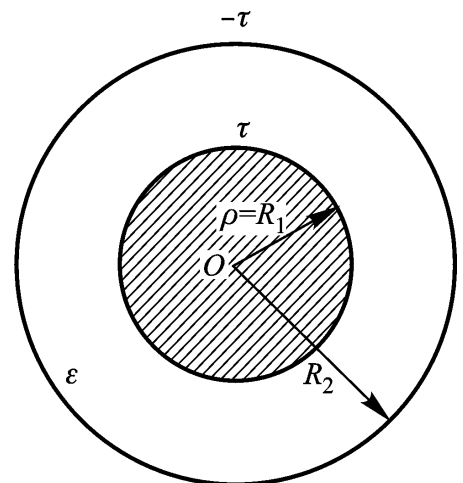
$$U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

**2-9** 一圆柱形电容器, 外导体的直径为 4 cm, 内外导体间介质的击穿电场强度为 200 kV/cm, 内导体的直径  $2r_1$  可以自由选定, 试问  $r_1$  为何值时, 该电容器能承受最大电压并求此最大电压值?

[解题思路]

理想化假设待求电场具有圆柱形对称的平行平面场特征, 故可有效地应用电介质中的高斯定理(2-51), 直接得出待求电场强度分布的解答;

运用  $U_{PQ} = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  的基本关系式;



题 2-9 图

根据该电容器的工作电压  $U = U(\quad)$ , 显然, 最大工作电压的条件应为  $dU/d = 0$ , 由此得解。

[解] 显然, 与题 2 - 6 的分析相同, 对于圆柱形电容器, 其最大电场强度  $E_{\max}$  必位于内导体表面上, 即

$$E_m = \frac{\quad}{2 R_1}$$

介质内电场强度

$$E = E = \frac{\quad}{2} = \frac{\quad}{2} \cdot \frac{R_1}{R_1} = E_m \cdot \frac{R_1}{R_1}$$

故圆柱形电容器的工作电压

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E d = \int_{R_1}^{R_2} R_1 E_m \cdot \frac{d}{R_1} = R_1 E_m \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (1)$$

按题意, 需求  $U = U(R_1)$  可以调节变动时, 该电容器可承受的最大电压值, 这就意味着应满足  $dU/dR_1 = 0$  这一极值条件, 即

$$\frac{dU}{dR_1} = E_m \ln \frac{R_2}{R_1} + R_1 \cdot E_m \cdot \frac{R_1}{R_2} \cdot \left(-\frac{R_2}{R_1^2}\right) = 0$$

$$E_m \ln \frac{R_2}{R_1} - 1 = 0$$

即:  $\ln \frac{R_2}{R_1} = 1, \quad R_1 = \frac{R_2}{e} = 0.736 \text{ cm}$

此时由式(1)可知

$$U_{\max} = 0.736 \times 200 \times 10^3 \times \ln \frac{2}{0.736} \text{ V} = 147 \text{ kV}$$

**2 - 10** 已知一真空电场中的电位函数为  $\varphi = 2x^2y + 20z - 4\ln(x^2 + y^2) \text{ V}$ , 求在  $P$  点(6 m, -2.5 m, 3 m)处的  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{D}$  及  $\rho_v$ 。

[解题思路]

按基本关系式  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ ,  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$  和  $\rho_v = -\nabla^2\varphi$ , 分别在给定电位函数的条件下求解;

由于  $\varphi = \varphi(x, y, z)$ , 因此, 应在直角坐标系下展开相应的计算关系式 [附录二]。

[解]  $\varphi_P = \varphi(6, -2.5, 3) = [2 \cdot (6^2) \cdot (-2.5) + 20 \cdot 3 - 4\ln(6^2 + 2.5^2)] \text{ V} = -134.97 \text{ V}$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_P &= -\nabla\varphi \Big|_P = -\left[ 4xy - 4 \cdot \frac{2x}{x^2 + y^2} \mathbf{e}_x + 2x^2 - 4 \cdot \frac{2y}{x^2 + y^2} \mathbf{e}_y + 20 \mathbf{e}_z \right] \Big|_P \\ &= -\left[ 60 - \frac{8 \cdot 6}{6^2 + 2.5^2} \mathbf{e}_x + 72 + \frac{8 \cdot 2.5}{6^2 + 2.5^2} \mathbf{e}_y + 20 \mathbf{e}_z \right] \end{aligned}$$

$$= 61.136 \mathbf{e}_x - 72.473 \mathbf{e}_y - 20 \mathbf{e}_z \text{ V/m}$$

$$\mathbf{D}_P = \epsilon_0 \mathbf{E}_P = 8.85 \times 10^{-12} (61.136 \mathbf{e}_x - 72.473 \mathbf{e}_y - 20 \mathbf{e}_z) \text{ C/m}^2$$

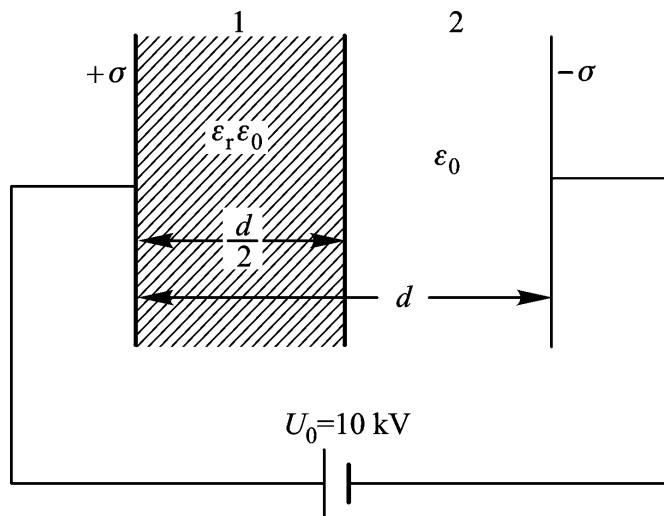
$$= (541.1 \mathbf{e}_x - 641.4 \mathbf{e}_y - 177.0 \mathbf{e}_z) \times 10^{-12} \text{ C/m}^2$$

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{D}_P = -\epsilon_0 \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \right) \Big|_P$$

$$= -\epsilon_0 \left( 4y + \frac{8(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{8(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + 0 \right) \Big|_P = -4\epsilon_0 y \Big|_P$$

故  $\rho_P = (6, -2.5, 3) = -4 \times 8.85 \times 10^{-12} \times (-2.5) \text{ C/m}^3 = 88.5 \times 10^{-12} \text{ C/m}^3$

**2 - 11** 一平行板电容器, 极板面积  $S = 400 \text{ cm}^2$ , 两板相距  $d = 0.5 \text{ cm}$ , 两板中间的一半厚度为玻璃所占, 另一半为空气。已知玻璃的  $\epsilon_r = 7$ , 其击穿强度为  $60 \text{ kV/cm}$ ; 空气的击穿场强为  $30 \text{ kV/cm}$ 。试问当该电容器接到  $10 \text{ kV}$  的电源时, 会不会被击穿?



题 2 - 11 图

[解题思路]

理想的平板电容器(忽略边缘效应)电场具有平行平面场特征, 且在单一均匀介质中为均匀场;

在两种不同介质分界面上, 运用不同介质分界面上的边界条件(2 - 56); 并在极板处运用导体和电介质交界面上的边界条件(2 - 60); 然后, 结

合  $U_{PQ} = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  的基本关系式, 即可展开解题过程。

[解] 设忽略边缘效应。

因介质分界面上无自由电荷分布, 故由图示可得  $D_1 = D_2 = \epsilon_0 \sigma$ , 得:

$$E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_r \epsilon_0}, \quad E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = 7 E_1$$

故  $\frac{d}{2} (E_1 + E_2) = \frac{d}{2} (E_1 + 7 E_1) = 4 d E_1 = U_0$

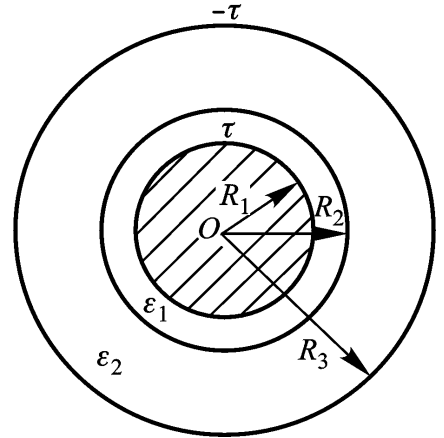
即得:

$$E_1 = \frac{U_0}{4d} = \frac{10}{4 \times 0.5} \text{ kV/cm} = 5 \text{ kV/cm}$$

$$E_2 = 7E_1 = 35 \text{ kV/cm}$$

可见,空气部分中的场强  $E_2 >$  空气的击穿场强  $E_j$  (30 kV/cm), 因此,空气层将被击穿,即意味着电容器被击穿,应退出工作系统。

**2 - 12** 具有两层同轴介质的圆柱形电容器,内导体的直径为 2 cm,内层介质的相对介电常数  $\epsilon_1 = 3$ ,外层介质的相对介电常数  $\epsilon_2 = 2$ ,欲使两层介质中的最大场强相等,并且内外层介质所承受的电压相等,试问两层介质的厚度各为多少?



题 2 - 12 图

[解题思路]

理想化假设待求电场具有圆柱形对称的平行平面场特征,故可有效地应用电介质中的高斯定理(2 - 51),直接得出待求电场强度分布的解答;

运用  $U_{PQ} = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  的基本关系式。

[解] 据题意,可列出以下二方程:

两层介质中的最大场强相等

$$\frac{Q}{2(3\epsilon_0)R_1} = \frac{Q}{2(2\epsilon_0)R_2} \quad (1)$$

两层介质所承受的电压相等

$$\frac{R_2}{R_1} \frac{Q}{2(3\epsilon_0)} d = \frac{R_3}{R_2} \frac{Q}{2(2\epsilon_0)} d \quad (2)$$

由方程(1),即得

$$R_2 = \frac{3}{2} R_1 = 1.5 \text{ cm}$$

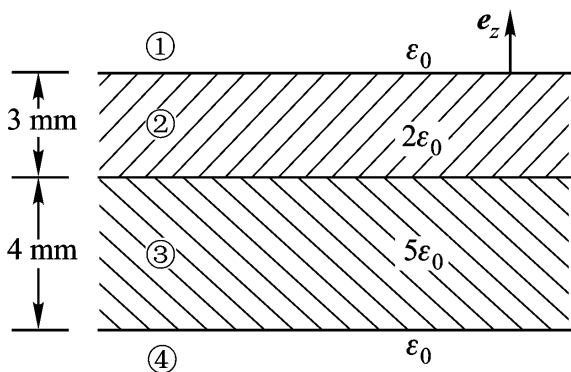
由方程(2),得:

$$\ln R_3 = \frac{5}{3} \ln 1.5$$

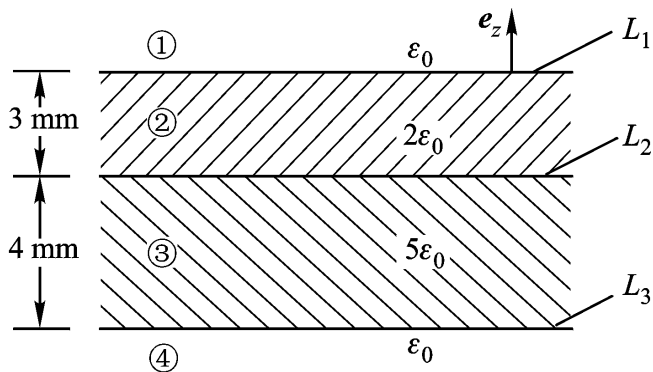
$$R_3 = 1.9656 \text{ cm}$$

因此,介质 1 的厚度 =  $R_2 - R_1 = 0.5 \text{ cm}$ , 介质 2 的厚度 =  $R_3 - R_2 = 0.4656 \text{ cm}$

**2 - 13** 真空中置有两无限大介质层如题 2 - 13 图所示。设区域 1 中的电场强度  $\mathbf{E}_1 = (10\mathbf{e}_x - 20\mathbf{e}_y + 30\mathbf{e}_z) \text{ V/m}$ , 分别求 1、2、3、4 四个区域中的电场强度  $\mathbf{E}$  与  $\mathbf{e}_z$  的夹角。



题 2 - 13 图(1)



题 2 - 13 图(2)

[解题思路]

首先,由给定的  $\mathbf{E}_1$ , 求  $\mathbf{E}_1$  对于分界面  $L_1$  的法线方向(即图中  $\mathbf{e}_z$  所示的方向)的夹角  $\alpha_1$ ; 然后,依次在分界面  $L_1$ 、 $L_2$  和  $L_3$  上应用两种不同介质分界面上的折射定律(2 - 57), 即可求得相应的关于法线方向的夹角  $\alpha_2$ 、 $\alpha_3$  和  $\alpha_4$ 。

[解] 
$$\cos \alpha_1 = \cos(\mathbf{E}_1, \mathbf{e}_z) = \frac{30}{10^2 + 20^2 + 30^2} = 0.80178$$
  

$$\alpha_1 = 36.70^\circ$$

依次在各个分界面上运用折射定律, 可得:

$$\tan \alpha_2 = \frac{2}{1} \tan \alpha_1 = 2 \tan 36.7^\circ = 1.4907$$

$$\alpha_2 = 56.146^\circ$$

$$\tan \alpha_3 = \frac{5}{2} \tan \alpha_2 = 2.5 \tan 56.146^\circ = 3.7269$$

$$\alpha_3 = 74.98^\circ$$

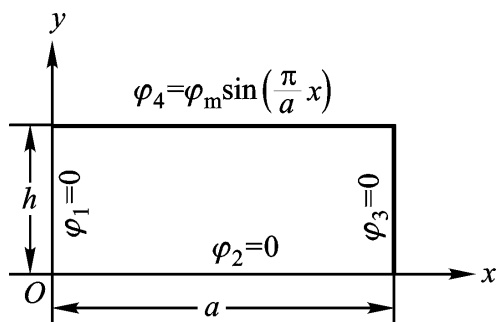
$$\tan \alpha_4 = \frac{1}{5} \tan \alpha_3 = 0.2 \tan 74.98^\circ = 0.7454$$

$$\alpha_4 = 36.70^\circ$$

**2 - 14** 一长直接地金属槽的横截面如题 2 - 14 图所示, 其侧壁与底面电位均为零, 而顶盖电位  $\varphi_4 = \varphi_m \sin \frac{\pi}{a} x$ 。求槽内电位分布。

[解题思路]

采用分离变量法(2.5.3 节)求解;  
 现为矩形域的平行平面场问题, 应在直角坐标系下展开分离变量法的求解过程得解。



题 2 - 14 图

[解] 本题为矩形域平行平面场问题。选取坐标系如题图 2 - 14 所示。对应的数学模型为

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & 0 < x < a \\ & & 0 < y < h \\ u &= 0, \quad 0 \leq y \leq h & x = 0, 0 \leq x \leq a \end{aligned} \quad (1)$$

$$u = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad y = 0 \quad (2)$$

$$u = 0, \quad 0 \leq y \leq h, \quad x = a \quad (3)$$

$$u = m \sin \frac{n}{a} x \quad (0 < x < a, y = h) \quad (4)$$

由通解(2 - 76)可知, 为满足条件(1), 必有:

$$A_{10} = 0, \quad A_{1n} = 0, \quad \text{和} \quad A_{1n} = 0$$

由条件(2), 必有:

$$B_{10} = 0, \quad B_{1n} = 0, \quad \text{和} \quad B_{1n} = 0$$

于是  $(x, y) = \sum_{n=1} C_n \sinh(m_n x) \sin(m_n y) + \sum_{n=1} C_n \sin(m_n x) \sinh(m_n y) + C_0 xy$

由条件(3), 必有:

$$C_0 = 0, \quad C_n = 0, \quad \text{和} \quad \sin(m_n a) = 0$$

故与分离常数 相关的待定系数  $m_n$  取值为:

$$m_n = \frac{n}{a} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

故  $(x, y) = \sum_{n=1} C_n \sin \frac{n}{a} x \sinh \frac{n}{a} y$  (5)

再由条件(4), 则得

$$m \sin \frac{n}{a} x = \sum_{n=1} C_n \sin \frac{n}{a} x \sinh \frac{n}{a} h$$

由比较系数法:

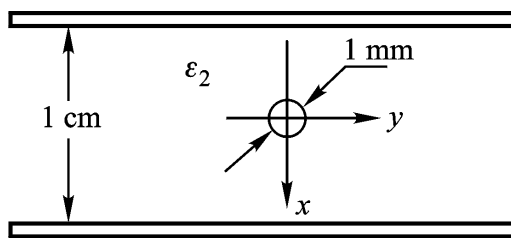
$$\begin{aligned} n = 1 & \quad C_1 = \frac{m}{\sinh \frac{h}{a}} \\ n \neq 1 & \quad C_n = 0 \end{aligned}$$

故本题所含本征值即为  $m_1 = \frac{m}{a}$ , 对应的本征函数为  $\sin \frac{m}{a} x$  和  $\sinh \frac{m}{a} y$ 。按式(5)便得最终的确解为

$$(x, y) = \frac{m}{\sinh \frac{h}{a}} \sin \frac{m}{a} x \sinh \frac{m}{a} y$$

**2 - 15** 一板间距离为  $d = 1 \text{ cm}$  的平行板电容器, 其中的介质(介电常数为  $\epsilon = 9 \epsilon_0$  的玻璃)内存在圆柱形气泡, 气泡直径为  $2r = 1 \text{ mm}$ , 如题 2 - 15 图所

示。已知玻璃和空气的击穿场强分别为  $15 \times 10^3 \text{ kV/m}$  和  $3 \times 10^3 \text{ kV/m}$ 。求该平行板电容器在下述情况下的最大工作电压：



题 2 - 15 图

[解题思路]

理想化平行板电容器(忽略边缘效应)电场为均匀的平行平面电场,且假设当介质内存在圆柱形气泡缺陷时,仅在该气泡周围有限范围内,合成电场畸变了原均匀电场。因此,本问题可看作为均匀外电场中引入一长直介质圆柱体的典型问题;

采用分离变量法(2.5.3 节),参照教材例 2 - 14,即可得解。

[解] 设平行板电容器极板间电压为  $U_0$ ,则在不考虑气泡时,该平行板电

容器的场强  $E_0 = \frac{U_0}{d}$ 。

(1) 由教材例 2 - 14 的讨论,可知气泡中的电位函数  $\phi_1 = -\frac{2\epsilon_2}{1+\epsilon_2} E_0 x$ , 故气泡中的电场强度为

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla \phi_1 = -\frac{1}{x} \mathbf{e}_x = \frac{2\epsilon_2}{1+\epsilon_2} E_0 \mathbf{e}_x = \frac{2\epsilon_2}{1+\epsilon_2} \frac{U_0}{d} \mathbf{e}_x$$

按题设,相应于该电容器最大工作电压的最大工作场强值为

$$E_{1m} = \frac{1}{4} \times 3 \times 10^3 \text{ kV/m} = 0.75 \times 10^3 \text{ kV/m}$$

故取决于气泡的击穿,系统的最大工作电压

$$U_m = \frac{(1+\epsilon_2)d}{2\epsilon_2} E_{1m} = \frac{(1+9) \times 0.01}{2 \times 9} \times 0.75 \times 10^3 \text{ kV} = 4.17 \text{ kV}$$

(2) 此时,应取决于玻璃的击穿,相应系统的最大工作电压为

$$U_m = E_m \cdot d = \frac{1}{4} \times 15 \times 10^3 \times 0.01 \text{ kV} = 37.5 \text{ kV}$$

**2 - 16** 位于均匀电场( $\mathbf{E}_0$ )中的导电圆柱体(其半径为  $a$ ),带有电荷(其线密度为  $\lambda$ )时,若电位参考点取在导电圆柱体上,试证明空间任意点  $P(r, \theta)$  的电

位为  $\phi_P = -\frac{\lambda}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{a^2}{r^2} \cos^2 \theta - \frac{a^2}{2r^2} \ln \frac{r}{a} \right]$ 。

[解题思路]

根据静电场解的惟一性定理(2.5.4 节),显然,必须证明给定的  $\phi_P$  既满足场的基本方程[泊松方程(2 - 65)或拉普拉斯方程(2 - 66)],又满足给

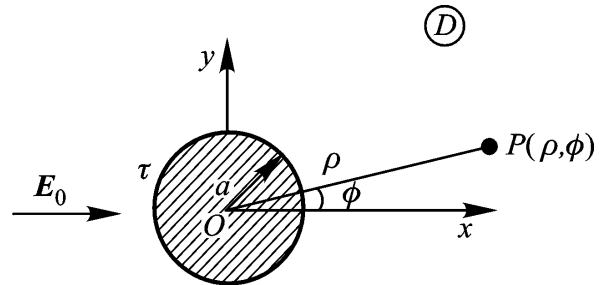
定的边界条件；

在设定分析所需的坐标系时，应遵循题意，由直观得知当  $\rho = a$  时， $\tau = 0$ ，满足关于导电圆柱体与电位参考点的物理条件的假设，故知坐标原点应选定在导电圆柱体的轴线上。

[证明] 按解题思路，确定坐标系如图所示。求解场域  $D$  为导电圆柱体外部的空间 ( $\rho > a$ )。基于惟一性定理，只需证明以下条件成立：

$$(1) \quad \tau = 0 \quad (\rho = a, \quad D)$$

$$(2) \quad \left. \tau \right|_{\rho=a} = 0, \quad \mathbf{E} \Big|_{\rho=a} = E_0 \mathbf{e}_x$$



题 2 - 16 图

证：(1) 按题设电位函数的解答，今应有

有

$$\tau(\rho, \phi) = \frac{1}{2} \left( \frac{\rho^2}{a^2} - 1 \right) + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{a^2}$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\rho^2}{a^2} - 1 \right) - E_0 \cos \phi - \frac{a^2}{2} E_0 \cos \phi - \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{a^2} + \frac{1}{2} - \frac{a^2}{3} E_0 \cos \phi = 0$$

(2) 同上理，今应有

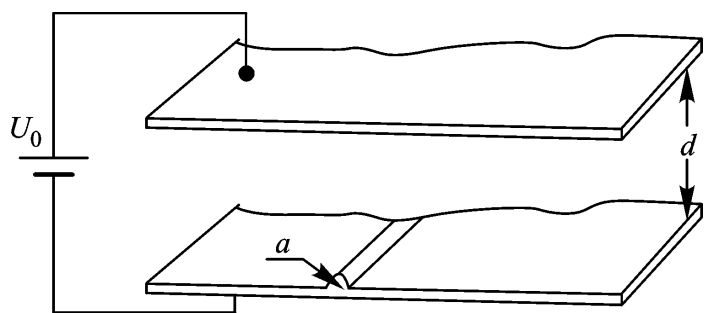
$$\left. \tau \right|_{\rho=a} = \left( 1 - \frac{a^2}{2} E_0 \cos \phi - \frac{1}{2} \ln \frac{\rho}{a} \right) \Big|_{\rho=a} = 0$$

以及

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \Big|_{\rho=a} &= - \left. \nabla \tau \right|_{\rho=a} = - \left( \frac{\partial \tau}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \right) \Big|_{\rho=a} \\ &= \left( E_0 \cos \phi + \frac{a^2}{2} E_0 \cos \phi + \frac{1}{2} E_0 \right) \mathbf{e}_\rho - \left( 1 - \frac{a^2}{2} E_0 \sin \phi \right) \mathbf{e}_\phi \Big|_{\rho=a} \\ &= E_0 \cos \phi \mathbf{e}_\rho - E_0 \sin \phi \mathbf{e}_\phi = E_0 \mathbf{e}_x \end{aligned}$$

由此得证。

**2 - 17** 一平行板电容器由于加工粗糙在一极板表面残留一半径为  $a$  的凸半圆棱，如题 2 - 17 图所示。试分析此加工缺陷对于电场分布的影响，在何处将出现最大电场强度，其值多大？



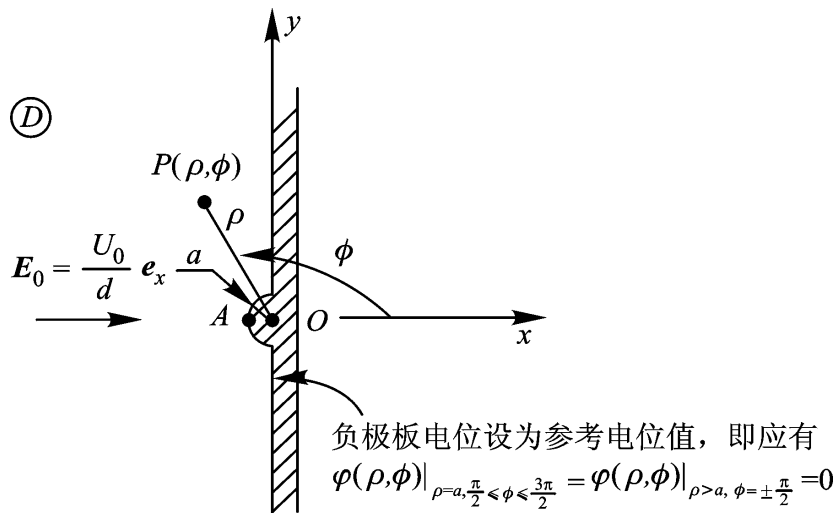
题 2 - 17 图 (1)

[解题思路]

通过对题设物理问题的深入分析与思考，应归纳出该问题

即系均匀外电场中引入一导电圆柱体的典型问题；

参照题 2 - 16 给定的电位函数  $\tau(\rho, \phi)$  的解答。



题 2 - 17(2)

[解] 按题设,该工程问题即可归结为如上图所示,半个导电圆柱体在均匀电场  $\mathbf{E}_0 = \frac{U_0}{d} \mathbf{e}_x$  中的合成电场问题。参考题 2 - 16 分析可知,这一因加工缺陷形成的电场问题的电位函数解为

$$\varphi(\rho, \phi) = - \left( 1 - \frac{a^2}{\rho^2} \right) E_0 \cos \phi$$

根据场的基础知识,可以判断,最大电场强度将位于半导电柱的 A 点处,其值为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_A &= - \left. \nabla \varphi \right|_{\rho=a} \\ &= - \left( E_0 \cos \phi + \frac{a^2}{\rho^2} E_0 \cos \phi \right) \mathbf{e}_\phi - \left( 1 - \frac{a^2}{\rho^2} \right) E_0 \sin \phi \mathbf{e}_\rho \Big|_{\rho=a, \phi=\pi/2} \\ &= - 2 E_0 \mathbf{e}_x = \frac{2 U_0}{d} \mathbf{e}_x \end{aligned}$$

故

$$E_{\max} = \frac{2 U_0}{d}$$

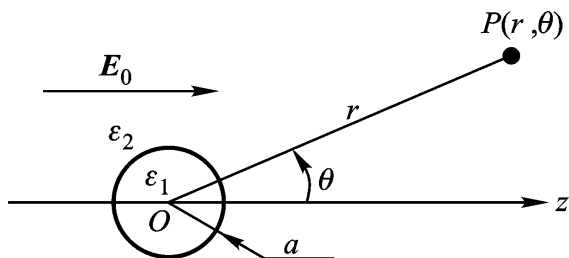
**2 - 18** 一介电常数为  $\epsilon_1$  的均匀介质球,处于均匀电场 ( $\mathbf{E}_0$ ) 中,设球心即为所选定的球坐标原点,且  $\mathbf{E}_0$  的方向沿着  $z$  轴(见图 2 - 18 图)。试证明  $\varphi = A \cos \theta + B r^{-2} \cos \theta$  为本题电位函数的表达式。

[解题思路]

根据题意,显然,基于静电场解的惟一性定理(2.5.4 节),现应证明给定的电位函数  $\varphi(r, \theta)$  满足拉普拉斯方程(2 - 66);

根据题设,并结合题图,可判定该合

成电场分布具有轴对称场特征,从而,应在球坐标系下展开  $\varphi(r, \theta)$  [附录二],求证之。



题 2 - 18 图

[证明] 基于惟一性定理, 只需证明以下泛定方程成立:

$$\Delta^2 \varphi_1 = 0 \quad (r < a)$$

$$\Delta^2 \varphi_2 = 0 \quad (r > a)$$

据题意, 今为一轴对称场, 即按题设坐标系, 在过对称轴 ( $z$  轴) 的轴对称平面内, 电位函数  $(r, \theta)$  与坐标  $z$  无关。换句话说, 按题设电位函数解, 今应有

$$\begin{aligned} \Delta^2 \varphi_1 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( A_1 r^2 \cos \theta - \frac{2 B_1}{r} \cos \theta \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( -A_1 r \sin^2 \theta - B_1 r^{-2} \sin^2 \theta \right) \\ &= \frac{2 A_1}{r} + \frac{2 B_1}{r^4} \cos \theta - \frac{2 A_1}{r} + \frac{2 B_1}{r^4} \cos \theta = 0 \end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned} \Delta^2 \varphi_2 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} \right) \\ &= \frac{2 A_2}{r} + \frac{2 B_2}{r^4} \cos \theta - \frac{2 A_2}{r} + \frac{2 B_2}{r^4} \cos \theta = 0 \end{aligned}$$

由此得证。

**2 - 19** 在分析上题的基础上, 若设  $r=0$  处,  $\varphi=0$ , 求球内、外电场和场强。

[解题思路]

在已知电位函数一般解的基础上, 欲得其确定解的关键在于给出与物理问题对应的定解条件;

本问题的定解条件应归结为:

- (1) 场域边界上的边界条件, 现应体现为无限远处的边界条件;
- (2) 衔接条件: 位于介质球表面的两种不同介质分界面上的边界条件 [(2 - 61) 和 (2 - 62)];
- (3) 电位参考点条件。

[解] 按上题所设电位函数的一般解, 现应给定:

$$\varphi_1 = A_1 r \cos \theta + B_1 r^{-2} \cos \theta \quad (r < a) \quad (1)$$

和 
$$\varphi_2 = A_2 r \cos \theta + B_2 r^{-2} \cos \theta \quad (r > a) \quad (2)$$

根据题设条件, 应给出下列定解条件以确定其中待定的各积分常数, 即:

电位参考点条件 
$$\varphi_1 \Big|_{r=0} = 0 \quad (3)$$

无限远处的边界条件 
$$\mathbf{E}_2 \Big|_r = E_0 \mathbf{e}_z \quad (4)$$

以及衔接条件 
$$\varphi_1 \Big|_{r=a} = \varphi_2 \Big|_{r=a} \quad (5)$$

和 
$$\frac{1}{r} \Big|_{r=a} = \frac{2}{r} \Big|_{r=a} \quad (6)$$

按以上定解条件[式(3)一式(6)],即可解得:

$$A_1 = -\frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0, \quad B_1 = 0;$$

$$A_2 = -E_0, \quad B_2 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} a^3 E_0;$$

故球内、外电位为:

$$u_1 = -\frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 r \cos\theta \quad (r < a)$$

$$u_2 = -\left[1 - \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \cdot \frac{a^3}{r^3}\right] E_0 r \cos\theta \quad (r > a)$$

球内、外场强为:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= -\nabla u_1 = -\frac{1}{r} \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \\ &= \frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 (\cos\theta \mathbf{e}_r - \sin\theta \mathbf{e}_\theta) = \frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 \mathbf{e}_z \quad (r < a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 &= -\nabla u_2 = -\frac{2}{r} \mathbf{e}_r - \frac{2}{r} \mathbf{e}_\theta \\ &= \left[1 + \frac{2(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \cdot \frac{a^3}{r^3}\right] E_0 \cos\theta \mathbf{e}_r + \left[\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \cdot \frac{a^3}{r^3} - 1\right] E_0 \sin\theta \mathbf{e}_\theta \quad (r > a) \end{aligned}$$

**2 - 20** 在上题中,若介质球为一空气泡( $\epsilon_1 = \epsilon_0$ ),处于变压器油( $\epsilon_2 = 2.2\epsilon_0$ )中,求最大电场强度较  $E_0$  大多少?

[解题思路]

因空气泡极化电场的引入畸变了原外施的均匀电场  $\mathbf{E}_0$ ,故可判断待求的最大电场强度必将发生在空气泡所在区域;

本题分析应承接题 2 - 19 的解答。

[解] 由上题解答可知,空气泡内为均匀场,故所求最大场强即为

$$E_1 = E_{\max} = \frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 = 1.22 E_0$$

故  $\frac{E_{\max}}{E_0} = 1.22$

**2 - 21** 空气中平行地放置两根长直导线,半径都是 6 cm,轴线间的距离为 20 cm。若导线间施加电压 1000 V,求:

- (1) 电场中的电位分布;
- (2) 导线表面电荷密度的最大及最小值。

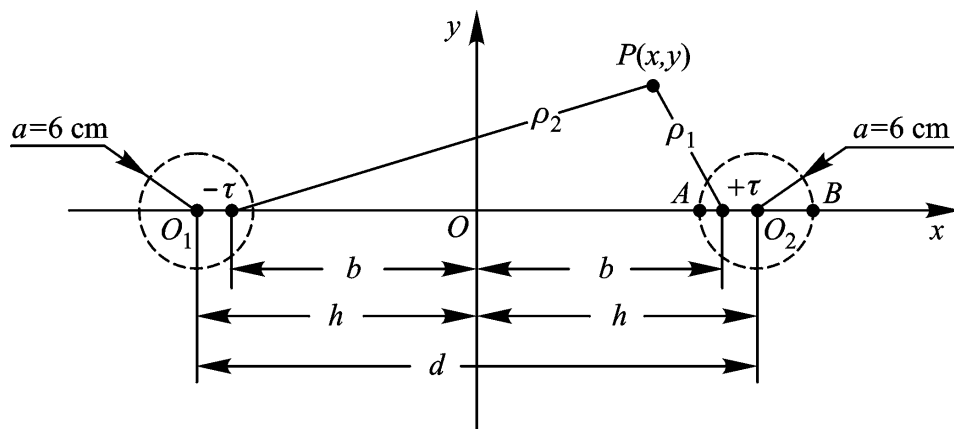
[解题思路]

本题为两同半径、带有等量异号电荷的平行长直圆柱导线间的电场问题,应采用电轴法(2.6.3 节),即可有效地展开解题过程;

题设为给定电压的条件,故解题思路可参照教材例 2 - 15;

导线表面最大与最小电荷面密度的求取,应依据该导线系统的最近与最远距离予以判断,其值计算的关系式为式(2-60)。

[解] 应用电轴法。因场分布的对称性,可确定电位参考面,即建立坐标系  $xOy$ , 如题 2-21 图所示。由此得知:



题 2-21 图

$$h = \frac{d}{2} = 10 \text{ cm}$$

故  $b = \sqrt{h^2 - a^2} = \sqrt{(10)^2 - 6^2} \text{ cm} = 8 \text{ cm}$

(1) 场中任意场点  $P$  处的电位

$$U_P = \frac{1}{2} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2} \ln \frac{(x+b)^2 + y^2}{(x-b)^2 + y^2}$$

基于题设两导线电位分别为  $\pm U_0/2$ , 式中, 等效电轴与给定的导线间电压  $U_0$  之间的关联可如下确定之:

因为  $U_A = \frac{U_0}{2} = 500 = \frac{1}{2} \ln \frac{b+h-a}{b-(h-a)} = \frac{1}{2} \ln \frac{8+10-6}{8-(10-6)} = \frac{1}{2} \ln 3$

所以  $\frac{1}{2} \ln 3 = \frac{500}{\ln 3} = 455.1$

因此所求场中的电位分布为

$$U_P = 455.1 \ln \frac{r_2}{r_1} = 455.1 \ln \frac{(x+8 \times 10^{-2})^2 + y^2}{(x-8 \times 10^{-2})^2 + y^2} \text{ V}$$

(2) 由电场的基础知识, 根据该系统“最近”与“最远”距离的判定, 可确认点  $A$ 、 $B$  分别对应于最大与最小电荷面密度所在点, 故首先计算:

$$E_A = E_{\max} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{b-(h-a)} + \frac{1}{b+(h-a)} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a(h-a)}$$

$$E_B = E_{\min} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a+h-b} - \frac{1}{b+h+a} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{h(h+a)}$$

然后, 由导线表面的电荷面密度  $\sigma = D_n$ , 可知:

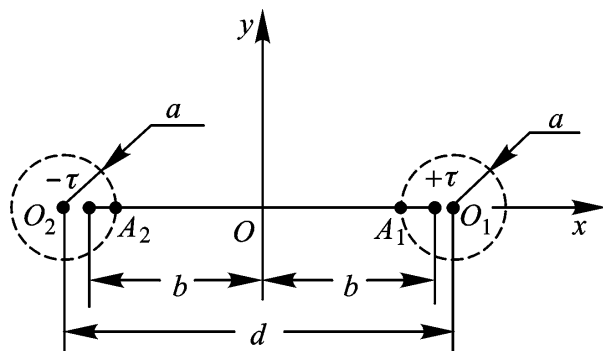
$$E_{\max} = 8.854 \times 10^{-12} \times 455.1 \cdot \frac{8}{6(10-6) \times 10^{-2}} \text{ C/m}^2 = 0.134 \mu\text{C/m}^2$$

$$E_{\min} = 8.854 \times 10^{-12} \times 455.1 \cdot \frac{8}{6(10+6) \times 10^{-2}} \text{ C/m}^2 = 0.0336 \mu\text{C/m}^2$$

**2-22** 两根互相平行的同半径圆柱形导线组成架空输电线。已知导线半径  $a = 0.3 \text{ cm}$ , 线间距  $d = 40 \text{ cm}$ , 线路长  $l = 3 \text{ km}$ 。求:

(1) 该输电线路的电容  $C$ ;

(2) 设线路架空高度为  $h = 10 \text{ m}$ , 这样, 若计及大地影响, 再求此时输电线路的总电容  $C$ 。



题 2-22 图(1)

[解题思路]

本题为两同半径、带有等量异号电

荷的平行长直圆柱导线间的电场问题, 采用电轴法(2.6.3节), 即可有效地展开解题过程;

当计及大地影响, 再求该输电线路的总电容  $C$  时, 可有如下两种解题方法:

(1) 方法一: 基于部分电容概念(2.7.2节), 由相应的部分电容组成的电网络求解的方法;

(2) 方法二: 应用镜像法(2.6.3节), 直接按多导体系统的电荷与电位关系, 由  $C = Q/U$  基本关系式求解的方法。

[解] (1) 应用电轴法, 如图所示, 由  $d = 2h$  并根据工程观点可知, 电轴位置为

$$b = \frac{d^2}{2} - a^2 \frac{d}{2} = 20 \text{ cm}$$

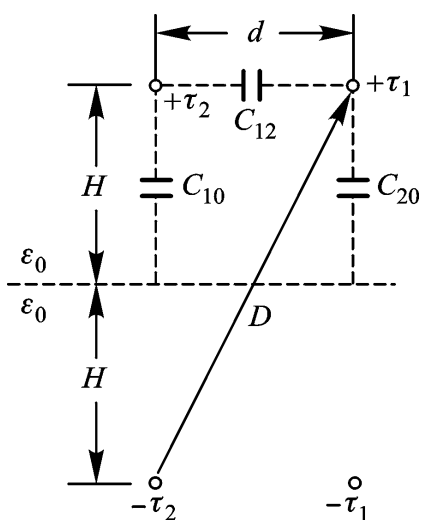
设线间电压为  $U$ , 则选取位于导线表面, 且与两导线表面最近距离对应的点  $A_1(h-a, 0)$  和  $A_2[-(h-a), 0]$ , 即可得两导线电位分别为:

$$U_{A_1} = \frac{U}{2} = \frac{1}{2} \ln \frac{b+h-a}{b-(h-a)} = \frac{1}{2} \ln \frac{2h}{a}$$

$$U_{A_2} = -\frac{U}{2} = -\frac{1}{2} \ln \frac{a}{2h}$$

故  $U = U_{A_1} - U_{A_2} = \frac{1}{2} \ln \frac{2h}{a}$

可得线间单位长度的电容  $C_l = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2h}{a}}$



题 2-22 图(2)

而该输电线路的电容即为  $C = C_l \cdot l = \frac{0.01704 l}{\ln \frac{2h}{a}} = 0.01704 \mu\text{F}$

(2) 方法一:

此时, 计及大地影响, 应先求各部分电容  $C_{10}$ ,  $C_{12}$  和  $C_{20}$ 。因导线半径  $a$  和  $d$  和  $H$ , 故应用镜像法, 如图可设各电轴位置均分别与导线几何轴线相重。则导线电位

$$U_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{2H}{a} + \frac{1}{2} \ln \frac{D}{d} = U_{11} + U_{12}$$

$$U_2 = U_{21} + U_{22}$$

式中:

$$U_{21} = U_{12}, \quad U_{22} = U_{11}$$

由此得:

$$C_{10} = U_{11} + U_{12} = \frac{U_{22} - U_{12}}{U_1 - U_2}$$

$$C_{20} = U_{21} + U_{22} = \frac{U_{11} - U_{21}}{U_1 - U_2}$$

从而, 对应于线长为  $l$  的该输电线路系统的各个部分电容分别为

$$C_{10} = C_{20} = \frac{2 \cdot 0.01704 l}{\ln \frac{2H}{a} \cdot \frac{2H}{d} + 1}$$

以及  $C_{12} = C_{21} = - \frac{U_{12}}{U_1 - U_2} = \frac{2 \cdot 0.01704 l \ln \frac{2H}{d} + 1}{\ln \frac{2H}{a} \cdot \frac{2H}{d} + 1 \cdot \ln \frac{2H}{a} \cdot \frac{2H}{d} + 1} - 1$

因而, 该输电线路计及大地影响后的总电容, 即工作电容为

$$C = C_{12} + \frac{C_{10} \cdot C_{20}}{C_{10} + C_{20}} = \frac{0.01704 l}{\ln \frac{2H}{a} \cdot \frac{d}{4H^2 + d^2}} = 0.017048 \mu\text{F}$$

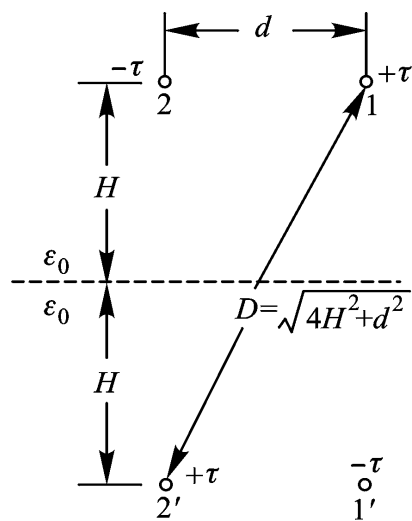
方法二:

首先, 应用镜像法, 给出传输线对地的镜像导线; 然后, 再应用电轴法, 得如图所示的四导线系统的电场问题。基于叠加原理, 将原传输线 1 和传输线 2 上的电位看作分别由  $11$  和  $22$  两对电轴共同作用所产生。这样, 传输线 1 和传输线 2 的电位分别为

$$U_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{2H}{a} + \frac{1}{2} \ln \frac{d}{D}$$

和  $U_2 = \frac{1}{2} \ln \frac{D}{d} + \frac{1}{2} \ln \frac{a}{2H}$

因而, 该输电线路系统的总电容



题 2 - 22 图(3)

$$C = C_l l = \frac{l}{U} = \frac{l}{\frac{1}{2} \ln \frac{d}{D} \cdot \frac{2H}{a}} = 0.017048 \mu\text{F}$$

显然,两种方法所得结果相同。

**2 - 23** 一线密度为  $\tau$  的线电荷,置于坐标为  $(a, b)$  处并靠近成直角的导电平板,如题 2 - 23 图所示,求:

(1) 线电荷每单位长度所受力;

(2) 在  $x = 0, y = 0$  表面上,每单位长度的感应电荷。

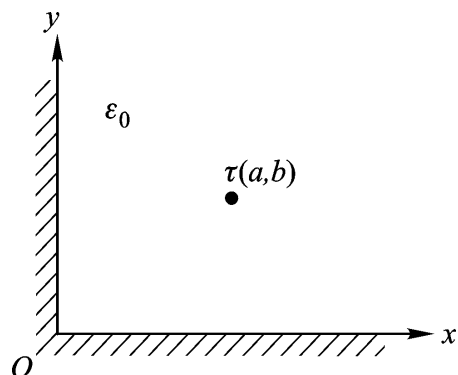
[解题思路]

本题为电轴与接地导电平面系统的电场问题,应采用镜像法(2.6.2节),通过两次等效变换,可构成四电轴系统的电场问题;

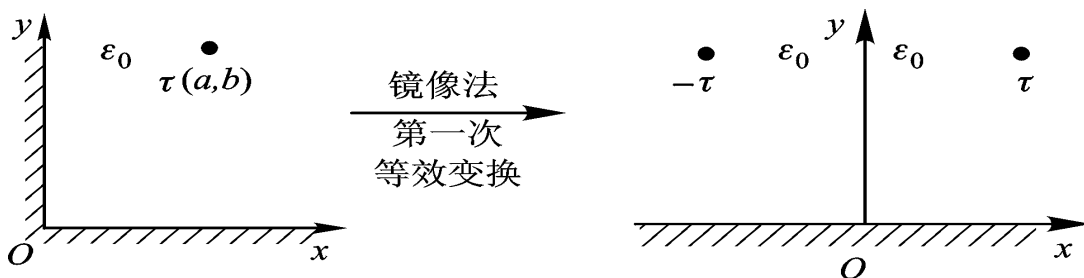
按题意,电场力可依据电场强度定义公式(2 - 134),即  $\mathbf{F} = \mathbf{E}$  计算之。但需注意,式中  $\mathbf{E}$  是除电轴  $\tau$  外其余镜像电轴在该电轴所在处产生的场强;同时,在由分作用力求合力时,必须遵循矢量代数运算规则;

导板表面处感应电荷的计算,应遵循导体和电介质交界面上的边界条件,即计算关系式(2 - 60)。

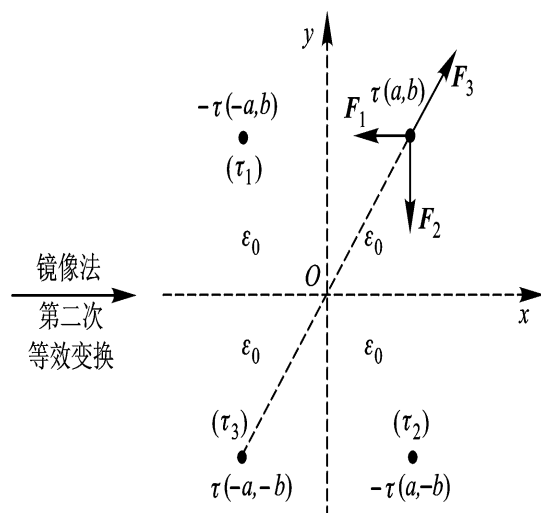
[解] 应用镜像法进行二次等效变换,如图所示。在确立三镜像电轴的基础上,即可按解题思路展开求解过程如下;



题 2 - 23 图(1)



题 2 - 23 图(2)

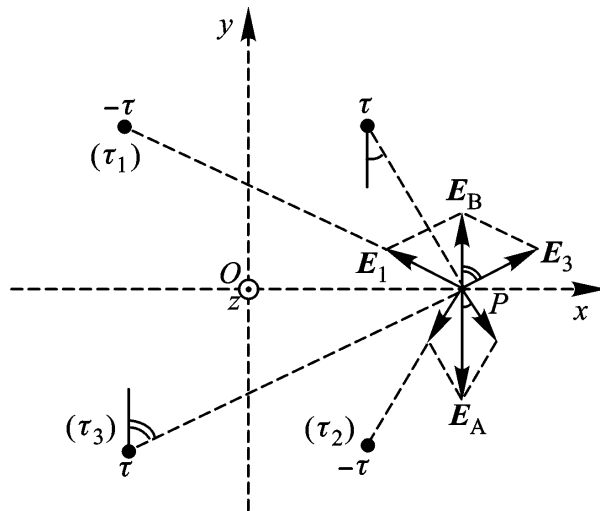


题 2 - 23 图(3)

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \mathbf{F}_1 = \mathbf{E}_1 &= \frac{-2}{2 \sqrt{0 + (2a)^2}} \mathbf{e}_x \\
 \mathbf{F}_2 = \mathbf{E}_2 &= \frac{-2}{2 \sqrt{0 + (2b)^2}} \mathbf{e}_y \\
 \mathbf{F}_3 = \mathbf{E}_3 &= \frac{2}{2 \sqrt{0 + 2 \sqrt{a^2 + b^2}}} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \mathbf{e}_x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \mathbf{e}_y \right) \\
 &= \frac{2}{4 \sqrt{0 + (a^2 + b^2)}} (a \mathbf{e}_x + b \mathbf{e}_y)
 \end{aligned}$$

故  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-2a}{4 \sqrt{0 + (a^2 + b^2)}} - \frac{2}{4 \sqrt{0 + a^2}} \mathbf{e}_x + \frac{2b}{4 \sqrt{0 + (a^2 + b^2)}} - \frac{2}{4 \sqrt{0 + b^2}} \mathbf{e}_y \\
 &= -\frac{2}{4 \sqrt{0 + (a^2 + b^2)}} \left( \frac{b^2}{a} \mathbf{e}_x + \frac{a^2}{b} \mathbf{e}_y \right)
 \end{aligned}$$



题 2 - 23 图(4)

(2) 如图示在  $y = 0$  导板表面任一点  $P$  处的电场为:

$$\mathbf{E}_A = -2 \cdot \frac{b}{2 \sqrt{0 + (x-a)^2 + b^2}} \cdot \frac{b}{\sqrt{(x-a)^2 + b^2}} \mathbf{e}_y = -\frac{b}{\sqrt{0 + (x-a)^2 + b^2}} \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{E}_B = 2 \cdot \frac{b}{2 \sqrt{0 + (x+a)^2 + b^2}} \cdot \frac{b}{\sqrt{(x+a)^2 + b^2}} \mathbf{e}_y = \frac{b}{\sqrt{0 + (x+a)^2 + b^2}} \mathbf{e}_y$$

故:

$$\mathbf{E}(x, y=0) = \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_B = \frac{b}{\sqrt{0 + (x+a)^2 + b^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + b^2}} \mathbf{e}_y$$

$$(x, y=0) = \sqrt{0} E_y = \frac{b}{\sqrt{(x+a)^2 + b^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + b^2}}$$

在导板表面上,  $z$  向为 单位长度的感应电荷

$$q \Big|_{y=0} = \int_0^b \frac{1}{(x+a)^2 + b^2} - \frac{1}{(x-a)^2 + b^2} dx$$

$$= -\arctan \frac{x+a}{b} - \arctan \frac{x-a}{b} \Big|_0^b = -\frac{2}{b} \arctan \frac{a}{b}$$

同理, 由于对称性, 互换  $x$  与  $y$ , 即得  $x=0$  表面处  $z$  向为 单位长度的感应电荷为

$$q \Big|_{x=0} = -\frac{2}{a} \arctan \frac{b}{a}$$

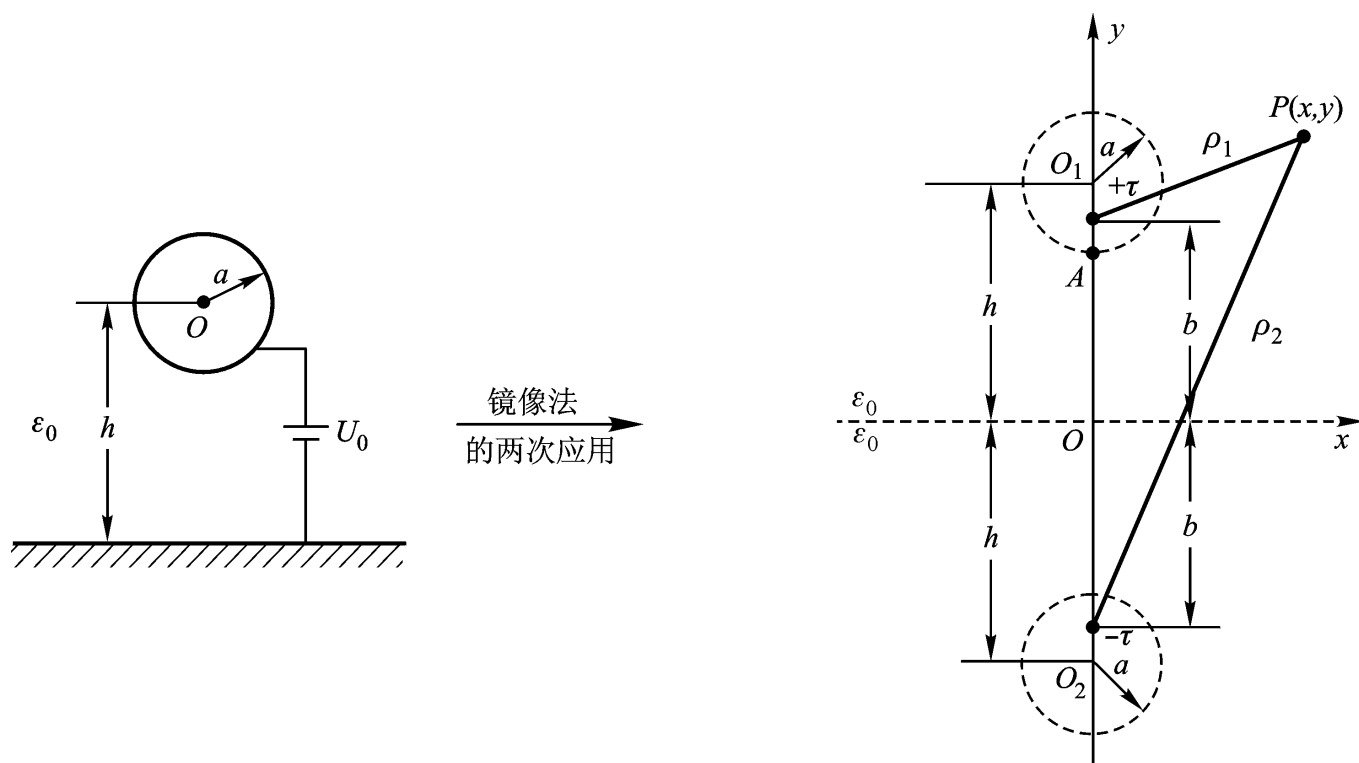
可以指出, 整个直角形导板表面对应于  $z$  向为 单位长度的感应电荷量为

$$Q = q \Big|_{x=0} + q \Big|_{y=0} = -\frac{2}{a} \arctan \frac{b}{a} + \arctan \frac{a}{b} = -\frac{2}{a} \arctan \frac{b}{a} + \frac{1}{b} \arctan \frac{a}{b} = -1$$

其值等于激励电荷量 ( $-1$ ), 且电荷极性相反, 与物理判断的期望一致。

**2-24** 在大地上方相距  $h$  处, 有一半径为  $a$  水平放置的长直圆导线, 其对地电位差为  $U_0$ , 求:

- (1) 空气中任一场点处的电位  $\varphi_P$ ;
- (2) 导线与大地间的电容量;
- (3) 导线所受的电场力。



题 2 - 24 图

[解题思路]

首先, 应用镜像法给出该长直带电圆导线对地的镜像导线; 然后, 再应用电轴法(2.6.3 节), 即可在确定等效电轴  $\pm$  的位置后, 展开解题过程; 题设为给定电压的条件, 故解题思路可参照教材例 2 - 15;

导线与大地之间的电容为两导体系统的电容,可由单位长度的电容值  $C_l = \lambda / U$  给出;

基于电轴法,该长直带电圆导线所受电场力可依据电场强度定义公式 (2-134),即  $F = qE$  求得。但需注意,式中  $E$  是其镜像导线的等效电轴在该长直带电圆导线的等效电轴所在处产生的场强。

[解] 由镜像法图示可得

(1)  $b = \sqrt{h^2 - a^2}$ , 在设定一对等效电轴  $+'$  和  $-'$  的前提下,可得场中任意场点  $P$  处的电位

$$U_P = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

由  $U_A = U_0$  得

$$U_0 = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \ln \frac{b+h-a}{a-h+b}$$

故

$$= \frac{2\epsilon_0 U_0}{\ln \frac{b+h-a}{a-h+b}}$$

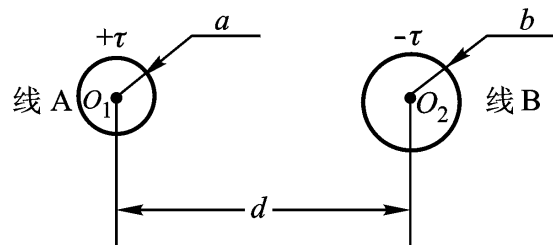
代入之

$$U_P = \frac{U_0}{\ln \frac{b+h-a}{a-h+b}} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$(2) \quad C_l = \frac{\lambda}{U_0} = \frac{2\epsilon_0}{\ln \frac{b+h-a}{a-h+b}}$$

$$(3) \quad F_l = E = \frac{\lambda^2}{2\epsilon_0(2b)} = \frac{\lambda^2}{4\epsilon_0 b} \ln \frac{b+h-a}{a-h+b} \quad (\text{方向为 } -e_r \text{ 方向})$$

**2-25** 一对不同半径的分别带有电荷密度为  $+\tau$ 、 $-\tau$  的无限长直传输线,如题 2-25 图所示。设线 A 半径  $a$  远小于线 B 半径  $b$ , 因此可认为线 A 表面电荷的对外作用中心即位于其轴线  $O_1$  处。求:



题 2-25 图(1)

(1) 单位长度的线间电容  $C$ ;

(2) 系统中的电场强度的最大值  $E_{\max}$  及

其所在点的位置。

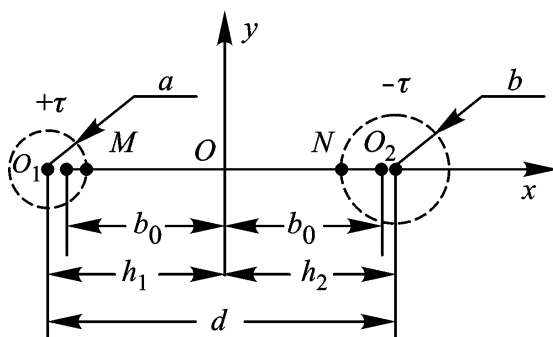
[解题思路]

本题为两不同半径、带有等量异号电荷的平行长直圆柱导线间的电场问题,采用电轴法(2.6.3 节),即可有效地展开解题过程;

解题的关键首先在于确定由设定的坐标系  $xOy$  所给出的等效电轴  $\pm'$  的位置;然后,即可建立等效电轴与线间电压之间的关系式;

该系统单位长度的线间电容为两导体系统的电容问题,可由  $C_l = \lambda / U$  计算之;

依据该带电导体系统最近距离的判断,确定  $E_{\max}$  所在点的位置;然后,基于线电荷电场的特征,应用高斯定理(参照教材例 2 - 9,或题 2 - 6),并由叠加原理即可求得  $E_{\max}$ 。



题 2 - 25 图(2)

[解] (1) 应用电轴法,按设定的坐标系  $xOy$ ,如图所示,可知电轴位置  $b_0$  应满足如下关系式:

$$b_0^2 = h_1^2 - a^2$$

$$b_0^2 = h_2^2 - b^2$$

$$d = h_1 + h_2$$

由此解得:

$$h_1 = \frac{d^2 + a^2 - b^2}{2d} \quad \frac{d^2 - b^2}{2d} \quad b_0$$

$$h_2 = \frac{d^2 + b^2 - a^2}{2d} \quad \frac{d^2 + b^2}{2d}$$

即确定等效电轴  $\pm$  位置如图所示。

显然,由电轴法可知该两圆柱导线间电压

$$U_{MN} = U_M - U_N$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\epsilon_0} \ln \frac{b_0 + h_1 - a}{a} - \ln \frac{b - (h_2 - b_0)}{h_1 + h_2 - b} \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0} \ln \frac{(2h_1 - a)(h_1 + h_2 - b)}{a(b - h_2 + h_1)} \end{aligned}$$

故单位长度的线间电容

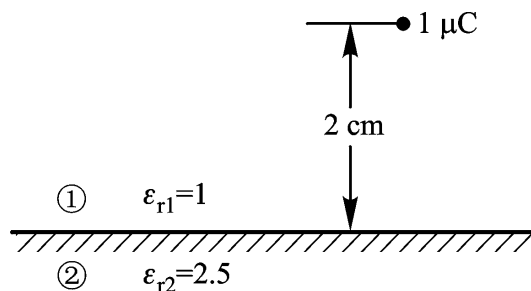
$$C_l = \frac{1}{U_{MN}} = \frac{2\epsilon_0}{\ln \frac{(2h_1 - a)(h_1 + h_2 - b)}{a(b - h_2 + h_1)}}$$

(2) 基于场的基础知识,可以判定,最大场强应位于  $M$  点,其值由两等效电轴电场的叠加,可得为

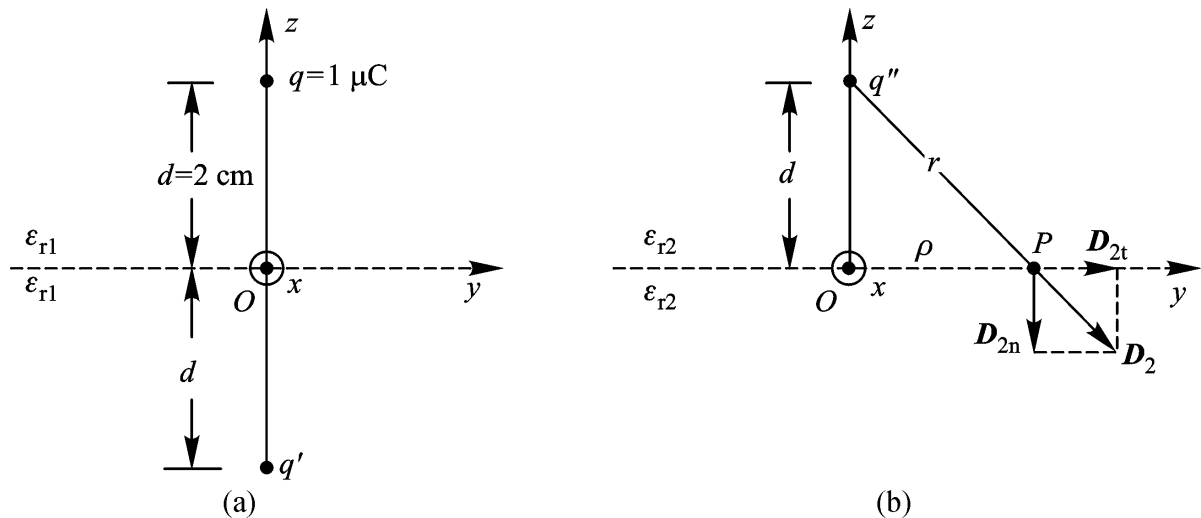
$$E_{\max} = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{1}{a} + \frac{1}{b_0 + h_1 - a} \quad \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{1}{a} + \frac{1}{2h_1 - a}$$

**2 - 26** 参阅题 2 - 26 图,求:

- (1) 点电荷所受之力;
- (2) 区域 2 中,镜像电荷所在处的电场强度及边界上的最大场强;
- (3) 在点电荷与边界距离一半处的电位;
- (4) 透入到区域 2 的  $D$  通量。



题 2 - 26 图(1)



题 2 - 26 图(2)

[解题思路]

本题为点电荷与无限大介质平面系统的电场问题,应采用镜像法(2.6.4节),可构成分别计算区域 1 和区域 2 中电场分布的等效计算模型;

上述等效计算模型为单一均匀介质中的电场问题,因此,由叠加原理的应用,即可解得待求场强、电位与电通量。

[解]

(1) 按 2.6.4 节镜像法的分析,可得镜像电荷:

$$q = \frac{\epsilon_{r1} - \epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} q = -\frac{3}{7} q, \quad q = \frac{2\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} q = \frac{10}{7} q$$

由图(a)所示计算区域 1(上半空间为有效区域)电场的计算模型,可知点电荷  $q$  所受之力为

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q\mathbf{E} = \frac{qq}{4\epsilon_{r1} \epsilon_0 (2d)^2} \mathbf{e}_z \\ &\quad - \frac{3}{7} (10^{-6})^2 \\ &= \frac{1}{4 \times 8.85 \times 10^{-12} \times (2 \times 2 \times 10^{-2})^2} \mathbf{e}_z \text{ N} = -2.41 \mathbf{e}_z \text{ N} \end{aligned}$$

(2) 由图(b)所示计算区域 2(下半空间为有效区域)电场的计算模型,可知镜像电荷所在处的电场强度为

$$\mathbf{E}(0, 0, -2) = \frac{q}{4\epsilon_{r2} \epsilon_0 (2d)^2} (-\mathbf{e}_z) = -3211.4 \mathbf{e}_z \text{ kV/m}$$

显然,在边界上(0, 0, 0)处,场强最大,其值为

$$\mathbf{E}_{\max} = \frac{q}{4\epsilon_{r2} \epsilon_0 d^2} (-\mathbf{e}_z) = -12845.6 \mathbf{e}_z \text{ kV/m}$$

(3) 由图(a)计算模型,可计算点电荷与边界距离一半处的电位为

$$(0, 0, 1) = \frac{1}{4\epsilon_0} \left( \frac{q}{(d/2)} + \frac{q}{(3d/2)} \right)$$

$$= 9 \times 10^9 \times \frac{1}{10^{-2}} + \frac{-\frac{3}{7}}{3 \times 10^{-2}} \times 10^{-6} \text{ V} = 771.43 \text{ kV}$$

(4) 由图(b)所示, 计算沿两介质分界面透入到区域 2 的  $\mathbf{D}$  通量, 首先, 必须计算位于该分界面上, 对应于区域 2 的电位移  $\mathbf{D}$  的法向分量, 即

$$D_{2n} = \frac{q}{4(\rho^2 + d^2)} \cdot \frac{d}{\rho^2 + d^2} = \frac{dq}{4(\rho^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\rho \text{ 为 } P \text{ 点至点 } O \text{ 的距离})$$

故  $\int_S \mathbf{D}_2 \cdot d\mathbf{S} = \int_S D_{2n} dS = \int_0^2 \frac{dq}{4(\rho^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} d\rho d\phi = 0.714 \mu\text{C}$

**2 - 27** 真空中一点电荷  $q = 10^{-6} \text{ C}$ , 放在距金属球壳(半径为 5 cm)的球心 15 cm 处, 求:

- (1) 球面上各点的  $\mathbf{E}$  表达式。何处场强最大, 数值如何?
- (2) 若将球壳接地, 情况如何?
- (3) 若将该点电荷置于球壳内距球心 3 cm 处, 求球内的  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{E}$ 。

[解题思路]

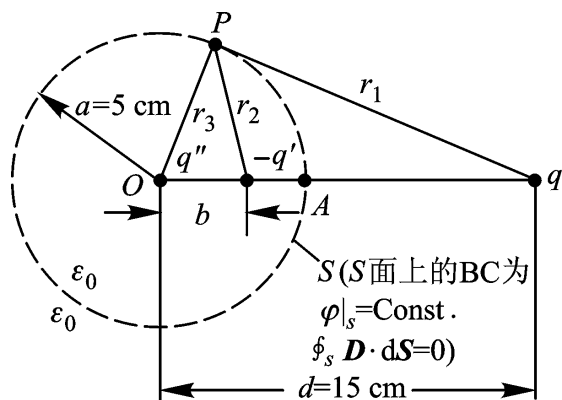
本题为点电荷与导体球系统的电场问题, 应采用镜像法(2.6.5 节), 即可有效地展开解题过程;

基于镜像法得出的等效计算模型为单一均匀介质中的电场问题, 因此, 由叠加原理的应用, 即可在其求解的有效区域内算出待求的  $\mathbf{E}$ ;

对应于问题(1), 据题意可知, 金属球壳应呈电中性。这时, 在下述“基本问题”讨论的基础上, 给出镜像电荷  $-q'$  后; 再根据高斯定理, 即沿金属球壳表面  $S$  的  $\mathbf{D}$  通量必须为零(电中性)的条件, 引入第二个镜像电荷  $q'' = q$ , 且在保证  $S$  面为等位面的隐含条件下, 该镜像电荷  $q''$  必应设定于球壳中心;

对应于问题(2), 据题意可知, 金属球壳电位为零。此即所论的“基本问题”(2.6.5 节);

对应于问题(3), 据题意可知, 金属球壳为电中性, 且给定的点电荷位于球壳内。此时, 首先, 基于“基本问题”之逆向处理, 得出金属球壳在接地条件下球外的镜像电荷  $-q$ ; 然后, 按金属球壳为电中性的条件, 引入均匀分布于球壳表面  $S$ , 总量为  $q$  的“镜像电荷” $q''$ , 以保证  $S$  面上的边界条件不变。



题 2 - 27 图(1)

[解] (1) 金属球壳呈电中性, 此时镜像电荷为  $-q$  和放置在球心的  $q = q_0$ 。

$$q = \frac{a}{d} q_0 = 0.3 \mu\text{C}$$

球壳电位

$$\begin{aligned} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \\ &= \frac{0.3 \times 10^{-6}}{4 \times 3.14 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 5 \times 10^{-2}} \text{V} = 60 \text{ kV} \end{aligned}$$

球壳上的电场强度为

$$\mathbf{E}_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \mathbf{e}_{r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \mathbf{e}_{r_2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \mathbf{e}_{r_3}$$

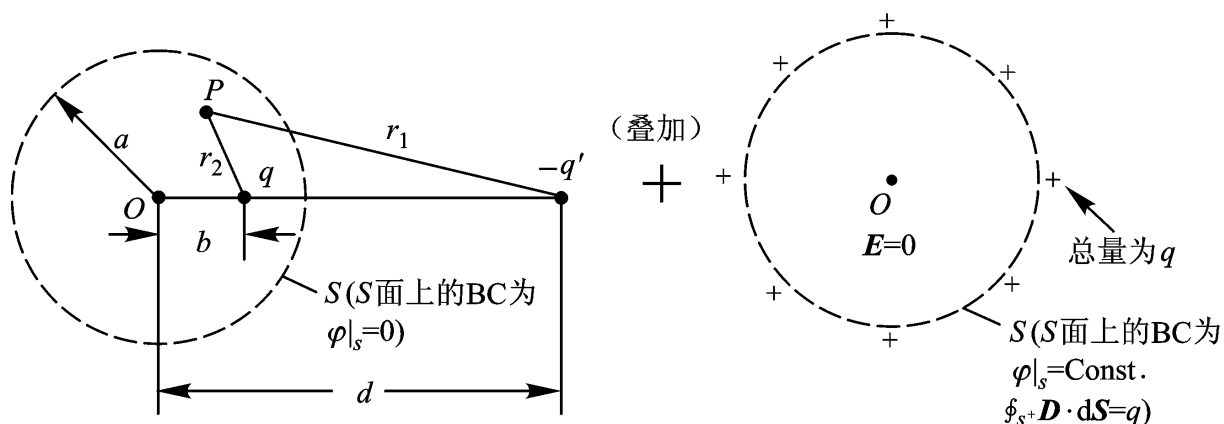
在球表面点 A 处场强最大, 其值为

$$\begin{aligned} E_{\max} &= 9 \times 10^9 \frac{10^{-6}}{(15-5) \times 10^{-2}{}^2} + \frac{\frac{1}{3} \times 10^{-6}}{5 - \frac{5^2}{15} \times 10^{-2}{}^2} - \frac{\frac{1}{3} \times 10^{-6}}{5^2 \times 10^{-4}} \text{ V/m} \\ &= 2.43 \times 10^6 \text{ V/m} \end{aligned}$$

(2) 球壳接地, 即  $\varphi|_{\text{球壳}} = 0$ , 此时, 对应于这一“基本问题”, 镜像电荷只有  $-q$ 。球面上:

$$\varphi = 0 \text{ V}, \quad \mathbf{E}_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \mathbf{e}_{r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \mathbf{e}_{r_2}$$

$$E_{\max} = 9 \times 10^9 \frac{10^{-6}}{(15-5) \times 10^{-2}{}^2} + \frac{\frac{1}{3} \times 10^{-6}}{5 - \frac{5^2}{15} \times 10^{-2}{}^2} \text{ V/m} = 3.6 \times 10^6 \text{ V/m}$$



题 2 - 27 图(2)

(3) 按题意, 金属球壳为电中性。由图示的镜像法的应用, 可令此时对应于“基本问题”的 BC ( $\varphi|_S = 0$ ), 可知其镜像电荷  $-q$  位于球外, 且其  $q = \frac{d}{a} q_0$

位置由距球心  $d$   $d = \frac{a^2}{b}$  确定。同时,为满足边界条件不变,即  $\left|_S = \text{Const.},$

$\int_{S^+} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$ ,在球壳迹线处尚应叠加呈均匀分布的总量为  $q$  的电荷效应,由此:

$$\begin{aligned} \text{球内} \quad &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} - \frac{\frac{d}{a}q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \\ \mathbf{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \mathbf{e}_2 - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

式中  $r_2, r_1$  分别为所设定的球内电荷  $q$  与镜像电荷  $(-q)$  至球壳内任一场点  $P$  处的距离。

**2 - 28** 有一半径为  $a$  的导体球,离球心  $d$  处有一点电荷  $q$ 。试求:

- (1) 该导体球的电位 ;
- (2) 点电荷  $q$  所受的电场力  $F_e$ 。

[解题思路]

本题为点电荷与导体球系统的电场问题,采用镜像法(2.6.5节),即可有效地展开解题过程;

基于镜像法得出的等效计算模型为单一均匀介质中的电场问题,因此,

由叠加原理的应用,即可在其求解的有效区域内算出待求的  $\mathbf{E}$ ;

据题意可知,导体球应呈电中性。这时,在“基本问题”(导体球接地情况)讨论的基础上,给出镜像电荷  $-q$  后;再根据高斯定理,即沿导体球表面  $S$  的  $\mathbf{D}$  通量必须为零(电中性)的条件,引入第二个镜像电荷  $q = q$ ,且在保证  $S$  面为等位面的隐含条件下,该镜像电荷  $q$  必应设定于球心;

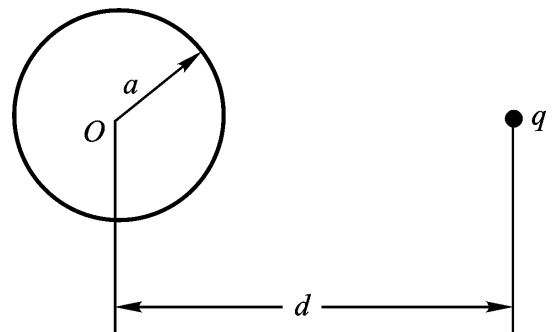
点电荷  $q$  所受电场力可按电场强度定义公式(2 - 134)求得。但需注意,式中  $\mathbf{E}$  是所有镜像电荷在该点电荷所在处产生的合成场强。

[解] (1) 由镜像法应用图示,对于基本问题(导体球接地情况),可知其镜

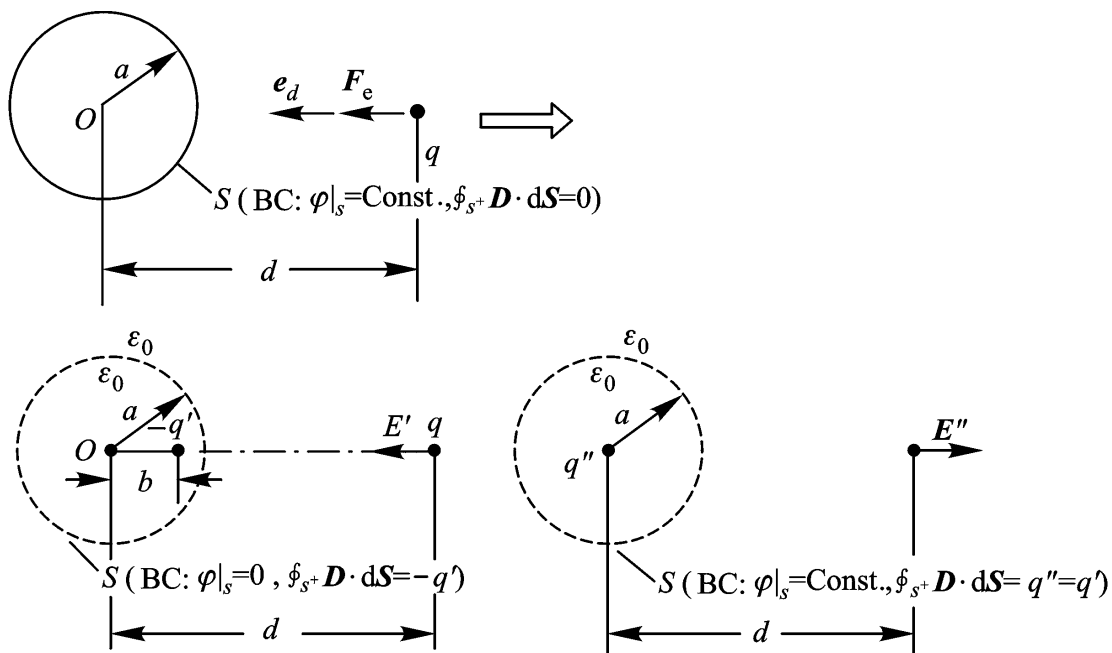
像电荷  $q = \frac{a}{d}q$ ,位于  $b = \frac{a^2}{d}$ ;为满足导体球为电中性的边界条件,故叠加的另一镜像电荷  $q = -(-q) = q$ ,且位于球中心。

$$\left|_{\text{球表面}} = \left|_{\text{导体球}} = \left|_{\text{球表面}} + \left|_{\text{球表面}} = 0 + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2}$$

$$(2) \quad \mathbf{F}_e = q\mathbf{E} = q(\mathbf{E} - \mathbf{E}') = q \left[ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (d-b)^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \right] \mathbf{e}_d$$



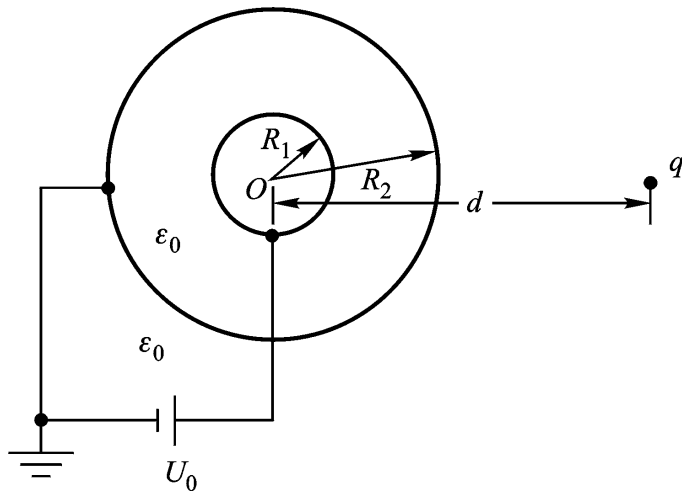
题 2 - 28 图(1)



题 2 - 28 图(2)

$$= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d} \frac{a}{(d-b)^2} - \frac{a}{d^2} \mathbf{e}_d = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{a^3}{d^3} \cdot \frac{(2d^2 - a^2)}{(d^2 - a^2)^2} \mathbf{e}_d$$

**2 - 29** 两同心球壳间的电压为  $U_0$ , 外球壳接地, 且与球心  $O$  相距  $d$  处有一点电荷  $q_0$ . 求球内外各点的电场强度  $\mathbf{E}$  和电位。



题 2 - 29 图(1)

[解题思路]

根据场的基础知识, 应判断接地的外球壳事实上已将问题分离为两个静电独立系统;

对于同心球壳间的电场, 据题意可知, 其边界条件为  $|_{R_1} = U_0$ ,  $|_{R_2} = 0$ 。该问题可由多种方法(如基于对称场中高斯定理应用的方法; 边值问题中的直接积分法等)求解之;

对于接地外球壳与点电荷  $q$  之间的电场, 属镜像法(2.6.5 节)所述的基本问题, 其解已明。

[解] 本系统实质上为两个静电独立系统的合成, 分别求解如下:

(1) 同心球壳间的电场。可采用如下两种方法求解:

方法一 基于对称场中高斯定理应用的方法

设内、外球壳分别荷电为  $+Q$  和  $-Q$ , 则作半径为  $r$  的球形高斯面, 即可解

得球壳间  $\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r$ , 从而

$$U_0 = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi r^2} \cdot \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{R_1 R_2 U_0}{(R_2 - R_1) r^2} \mathbf{e}_r \\ &= \frac{R_1 R_2 U_0}{(R_2 - R_1)} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned}$$

方法二 直接积分法

该电场的数学模型——在球坐标系下的 BVP 可表达为

$$\nabla^2 (r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) = 0 \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$\left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right|_{r=R_1} = U_0$$

$$\left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right|_{r=R_2} = 0$$

将上述泛定方程积分二次, 可得其通解为

$$= -\frac{C_1}{r} + C_2$$

然后, 代入定解条件, 以确定待定积分常数  $C_1$ 、 $C_2$ , 可得:

$$C_1 = \frac{R_1 R_2 U_0}{R_1 - R_2}, \quad C_2 = \frac{R_1 U_0}{R_1 - R_2}$$

故

$$(r) = \frac{R_1 R_2 U_0}{R_2 - R_1} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right)$$

基于在球坐标系下的  $\mathbf{E} = -\nabla(r)$  的基本表达式, 即可求得

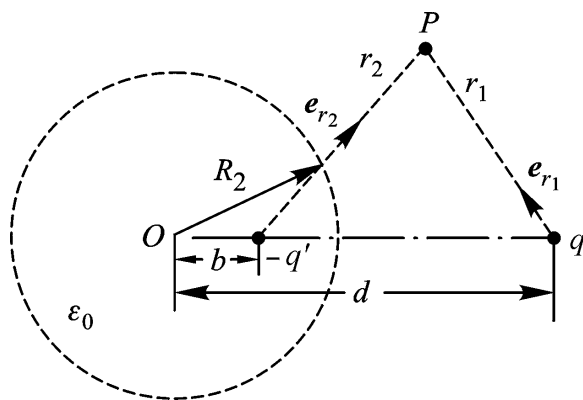
$$\mathbf{E} = -\frac{1}{r} \mathbf{e}_r = \frac{R_1 R_2 U_0}{(R_2 - R_1) r^2} \mathbf{e}_r$$

显然, 两种方法所得结果相同。

(2) 球外电场如图示, 引入镜像电荷  $-q = -\frac{R_2}{d}q$ , 其位置  $b = \frac{R_2^2}{d}$ , 从而场点  $P$  处的电场强度和电位分别为:

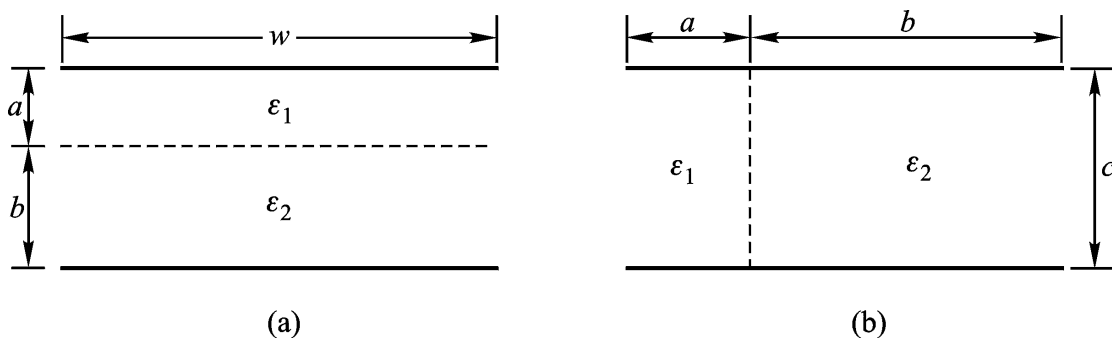
$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi r_1^2} \mathbf{e}_{r_1} - \frac{R_2}{d} \frac{q}{4\pi r_2^2} \mathbf{e}_{r_2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_1} - \frac{R_2}{dr_2}$$



题 2 - 29 图(2)

**2 - 30** 分别求题 2 - 30 图 (a) 和 (b) 所示深度为  $d$  的平行板电容器的电容。



题 2 - 30 图

[解题思路]

在忽略平行板电容器边缘效应的前提下, 根据题图所示其内介质结构形态的特点, 可理想化介质  $\epsilon_1$  和介质  $\epsilon_2$  内的电场分布均具有均匀的平行平面场的特征;

对于图(a)所示的两导体系统—平行板电容器, 以分别设定两极板上电荷面密度  $+$  和  $-$  为给定条件, 通过场分布的计算[可运用导体和电介质交界面上的边界条件(2 - 60)], 由相应的  $\mathbf{E}$  求  $U_{12} = \int_{12} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ , 然

后, 即可由  $C = \frac{q}{U_{12}}$  求得其电容值;

对于图(b)所示的两导体系统—平行板电容器, 以分别设定其对应于介质  $\epsilon_1$  和介质  $\epsilon_2$  的电荷面密度  $\pm \sigma_1$  和  $\pm \sigma_2$  为给定条件, 通过场分布的计算[可运用导体和电介质交界面上的边界条件(2 - 60)], 由相应的  $\mathbf{E}$  求  $U_{12} = \int_{12} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ , 然后, 即可由  $C = \frac{q}{U_{12}}$  求得其电容值。

[解] (a) 设平行板电容器极板上的面电荷密度为  $\sigma$ , 则可得:

$$q = \sigma w d, \quad E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_1}, \quad E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_2}$$

故: 
$$U_{12} = \int_{12} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_1 a + E_2 b = \frac{a}{\epsilon_1} + \frac{b}{\epsilon_2}$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\sigma w d}{\frac{a}{\epsilon_1} + \frac{b}{\epsilon_2}} = \frac{1}{\frac{a}{\epsilon_1 w d} + \frac{b}{\epsilon_2 w d}} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_1 C_1} + \frac{1}{\epsilon_2 C_2}}$$

[  $C_1 = \frac{\epsilon_1 S}{a}$ ,  $C_2 = \frac{\epsilon_2 S}{b}$ , ( $S = w d$ ) 分别为对应于介质  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  的电容。]

(b) 设  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  分别为极板上对应于介质  $\epsilon_1$  和介质  $\epsilon_2$  的面电荷密度。  
 $S_1 = a d$ ,  $S_2 = b d$  为相应极板面积。则由:

$$q = \sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2, \quad E_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_1}, \quad E_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_2}$$

得 
$$U_{12} = \int_{12} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_1 c = E_2 c$$

由此可知 
$$\frac{\sigma_1}{\epsilon_1} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_2}$$

从而: 
$$q = \sigma_1 S_1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sigma_1 S_2$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\sigma_1 S_1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sigma_1 S_2}{\frac{\sigma_1}{\epsilon_1} c} = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_1 S_1}{c} + \frac{\epsilon_2 S_2}{c}$$

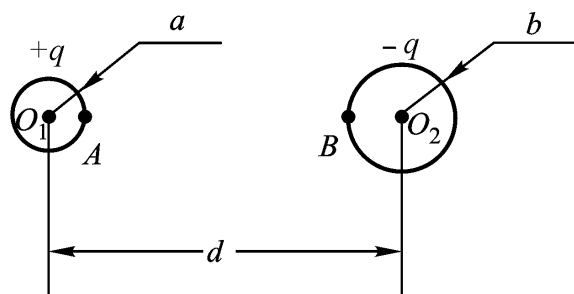
$C_1 = \frac{\epsilon_1 S_1}{c}$ ,  $C_2 = \frac{\epsilon_2 S_2}{c}$  分别为对应于介质  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  的电容。

**2 - 31** 证明: 相距为  $d$  的两个半径分别为  $a$  和  $b$  的导体球之间的电容近似

计算式 ( $d \gg a, b$ ) 为 
$$C = \frac{4 \pi \epsilon_0}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{d}}$$

[解题思路]

本题为两导体系统, 以设定两导体球分别带电量  $+q$  和  $-q$  为给定条件, 通过场分布的计算, 可由相应的



题 2 - 31 图

$\mathbf{E}$  求  $U_{12} = \int_{12} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ , 或径直由  $\rho$  的分布求  $U_{12} = \phi_1 - \phi_2$ ; 然后, 即可由

$C = \frac{q}{U_{12}}$  求得其电容值;

按题设条件  $d \gg a, b$ , 基于工程分析观点, 在应用叠加原理分别计算各

个带电导体球产生的电场时,可令各等效电荷的位置分别位于相应的球心。

[证明] 设两导体球分别带有  $+q$  和  $-q$  电荷。则应用叠加原理,如图所示,可知:

左导体球的电位为:

$$U_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{d-a} \right)$$

右导体球的电位为

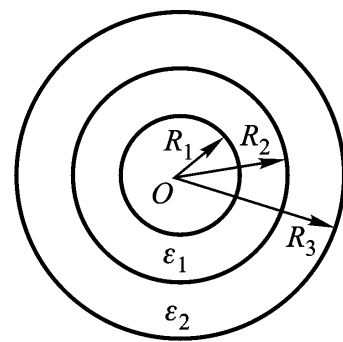
$$U_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{d-b} - \frac{1}{b} \right)$$

故: 
$$U = U_A - U_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2d-a-b}{(d-a)(d-b)} \right)$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{d}}$$

得证。

**2 - 32** 一由两个半径分别为  $R_1$  和  $R_2$  同心导体球壳制成的电容器,如题 2 - 32 图所示。在球壳间以  $r = R_2$  为界面,分别填有介质  $\epsilon_1 = \epsilon_{r1}\epsilon_0$  和  $\epsilon_2 = \epsilon_{r2}\epsilon_0$ 。试求其电容量  $C$ 。



题 2 - 32 图

[解题思路]

本题在计算待求球形电容器的电容  $C$  时,基于静电场解的惟一性定理(2.5.4 节),可通过在  $r = R_2$  界面上嵌入一理想的金属薄壳(其厚度趋于零)的处置方法,使求解过程得以简化;

在上述处置方法的基础上,待求问题可等效为由

两个同心球形电容器串联而形成的等值电容的问题。这样,分别对该两同心球形电容器,以设定带电量  $+q$  和  $-q$  为给定条件,通过场分布的

计算,由相应的  $\mathbf{E}$  求  $U_{12} = \int_{12} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ , 然后,即可由  $C = \frac{q}{U_{12}}$  求得其电容值,并最终解出等同于待求电容量  $C$  的等值电容值。

[解] 本题待求电容量  $C$  通过“解题思路”中所述的处置方法,可看作为两个同心球形电容器串联而成的等值电容。该两球形电容器的内、外球半径分别为  $R_1$ 、 $R_2$  和  $R_2$ 、 $R_3$ , 且相应填充有介质  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$ 。

设内、外球形导体表面分别带电为  $q$  和  $-q$ , 则由高斯定理可知,该两电容器中的电场分别为:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_1 r^2} \mathbf{e}_r \quad (R_1 < r < R_2), \quad \mathbf{E}_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_2 r^2} \mathbf{e}_r \quad (R_2 < r < R_3)$$

其电容量分别为:  $C_1 = \frac{q}{U_{12}} = \frac{q}{\int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{r}} = \frac{4\pi q}{\frac{1}{r_1 R_1} - \frac{1}{r_1 R_2}}$

和  $C_2 = \frac{q}{U_{23}} = \frac{q}{\int_{R_2}^{R_3} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{r}} = \frac{4\pi q}{\frac{1}{r_2 R_2} - \frac{1}{r_2 R_3}}$

故待求电容量为

$$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{4\pi q}{\frac{1}{r_1 R_1} - \frac{1}{r_2 R_3} + \frac{1}{R_2} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)}$$

**2 - 33** 半径为  $a$  和  $b$  的两个同轴圆柱导体的电位分别为  $\phi_a = 0$ ,  $\phi_b = U_0$ , 导体间两种介质  $\epsilon_1$  与  $\epsilon_2$  的分界面与轴平面相重合, 如题 2 - 33 图所示。求:

(1) 应用边值问题解算介质内的电位分布;

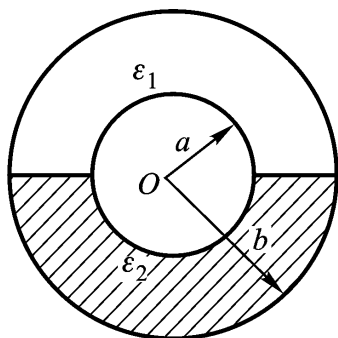
(2) 单位长度的电容  $C$ 。

[解题思路]

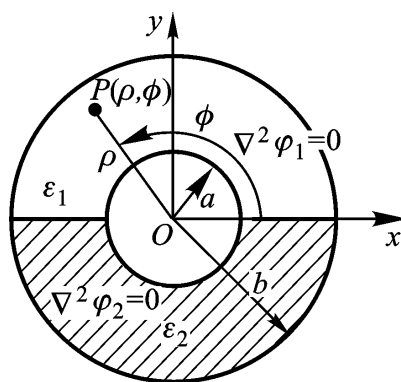
基于场的基础知识可以判断, 介质  $\epsilon_1$  与介质  $\epsilon_2$  分界面的存在并没有影响其内场分布具有圆柱形对称分布的平行平面场特征。因此, 应分域定义待求电位函数  $\phi_1$  和  $\phi_2$ , 并采用圆柱坐标系展开其泛定方程——拉普拉斯方程(2 - 66), 构成待求的边值问题(2.5.1 节);

本题为两导体系统, 其单位长度电容的计算, 可在已知电位  $\phi$  分布的基础上, 由  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  求  $\mathbf{E}$ ; 然后, 根据导体和电介质交界面上的边界条件(2 - 60),

解得每单位长度上的圆柱形导体所带电量  $Q$ , 从而, 即可由  $C = \frac{Q}{U_0}$  求得其电容值。



题 2 - 33 图(1)



题 2 - 33 图(2)

[解] (1) 根据场分布的特征, 可以判定  $\phi_1$  和  $\phi_2$  分布的规律相同, 且均仅为  $\rho$  的函数, 故其数学模型——边值问题可表述如下:

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \frac{1}{d} \frac{d}{dr} \left( \frac{d}{dr} \varphi_1 \right) = 0 \quad (a < r < b, 0 < z < d)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = \frac{1}{d} \frac{d}{dr} \left( \frac{d}{dr} \varphi_2 \right) = 0 \quad (a < r < b, z < 0 < z < 2d)$$

BC:

$$\begin{aligned} \left. \varphi_1 \right|_{r=a, 0} &= 0 \\ \left. \varphi_1 \right|_{r=b, 0} &= U_0 \\ \left. \varphi_2 \right|_{r=a, z=0} &= 0 \\ \left. \varphi_2 \right|_{r=b, z=0} &= U_0 \end{aligned}$$

衔接条件:

$$\begin{aligned} \left. \varphi_1 \right|_{z=0} &= \left. \varphi_2 \right|_{z=0} \\ \left. \frac{1}{n} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right|_{z=0} &= \left. \frac{2}{n} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \\ \left. \varphi_1 \right|_{z=d} &= \left. \varphi_2 \right|_{z=d} \\ \left. \frac{1}{n} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right|_{z=d} &= \left. \frac{2}{n} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right|_{z=d} = 0 \end{aligned}$$

分别将泛定方程积分二次, 可得  $\varphi_1, \varphi_2$  通解均为  $\varphi = C_1 \ln r + C_2$ , 代入相应的边界条件, 可知对于  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$ , 待定积分常数相同, 均为:

$$C_1 = \frac{U_0}{\ln \frac{b}{a}}, \quad C_2 = - \frac{U_0}{\ln \frac{b}{a}} \ln a$$

故介质  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  内的电位

$$\varphi_1(r) = \varphi_2(r) = \varphi(r) = \frac{U_0}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{r}{a}$$

值得指出, 本题特殊的场结构决定了所列衔接条件为自然满足的边界条件, 故不显现于边值问题定解的过程之中。

(2) 基于以上解答, 可知介质  $\epsilon_1$  中的电场强度

$$\mathbf{E}_1 = - \nabla \varphi_1 = - \frac{1}{r} \mathbf{e}_r = - \frac{U_0}{\ln \frac{b}{a}} \mathbf{e}_r$$

同理, 介质  $\epsilon_2$  中的电场强度

$$\mathbf{E}_2 = - \frac{U_0}{\ln \frac{b}{a}} \mathbf{e}_r = \mathbf{E}_1$$

由此可知, 对应于介质  $\epsilon_1$  的外导体表面上的面电荷密度

$$\rho_1 = D_{1n} = \epsilon_1 E_{1n} = \frac{\epsilon_1 U_0}{b \ln \frac{b}{a}}$$

对应于介质  $\epsilon_2$  的外导体表面上的面电荷密度

$$\rho_2 = D_{2n} = \epsilon_2 E_{2n} = \frac{\epsilon_2 U_0}{b \ln \frac{b}{a}}$$

故每单位长度上的外导体表面的电荷量

$$Q = q_1 + q_2 = (\epsilon_1 + \epsilon_2) \cdot b \cdot 1$$

每单位长度的电容

$$C_l = \frac{Q}{U_0} = \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{\ln \frac{b}{a}}$$

**2 - 34** 若将某线长为  $l$  的对称三芯电缆中三个导体相连, 测得导体与铅皮间的电容为  $0.051 \mu\text{F}$ , 若将电缆中的两导体与铅皮相连, 它们与另一导体间的电容为  $0.037 \mu\text{F}$ , 求:

- (1) 电缆的各个部分电容;
- (2) 每一相的工作电容;
- (3) 若在导体 1、2 之间加直流电压 100 V, 求导体每单位长度的电荷。

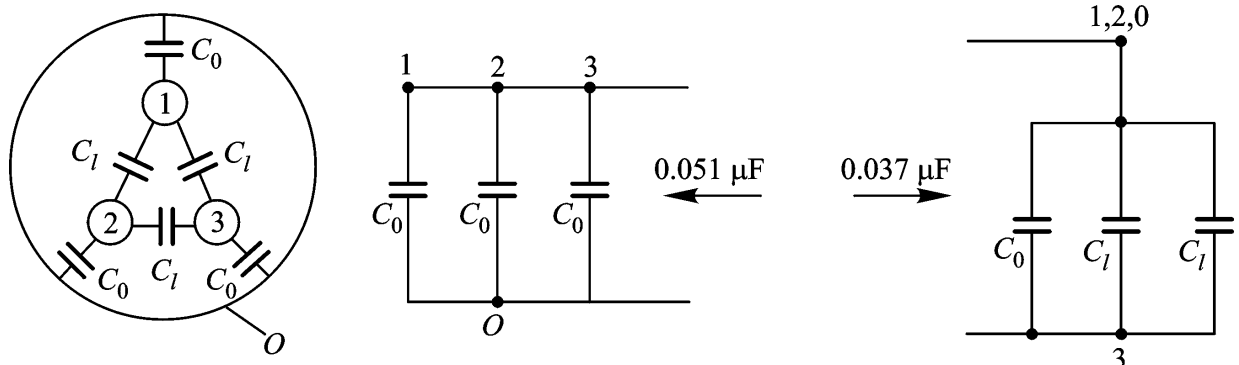
[解题思路]

根据三芯电缆的结构可知, 其为四导体系统 ( $n + 1 = 4$ ), 故其部分电容的个数为组合数  $C_{n+1}^2 = \frac{n(n+1)}{2} = 6$  (2.7.2 节), 且芯线间 3 个部分电容  $C_l$  与芯线对铅皮间的 3 个部分电容  $C_0$  分别对应相等;

按部分电容构成的电容网络结构, 即可在题设的条件下, 展开解题过程; 当求每一相的工作电容时, 应进行电容参数由  $\pi$  Y 的等值变换; 然后, 按三相对称电路, 其双 Y 型对称负载的中性点电位相等的条件, 作两中性点等电位连线的处置, 则双 Y 型对称负载即可变换为单个 Y 型的等效对称负载, 最终解得待求的一相的工作电容;

基于上述等值变换的结果, 根据两导体系统的电容与其电荷、电位的关系, 即可得知待求的导体 1、2 每单位长度的电荷量  $Q_{12} = \frac{C_{12} U_{12}}{l}$ 。

[解] (1) 三芯电缆结构和各部分电容如图。对应于两次测量结果的等值电路分别示于下图:



题 2 - 34 图(1)

由题设知

$$3 C_0 = 0.051 \mu\text{F}$$

故

$$C_0 = 0.017 \mu\text{F}$$

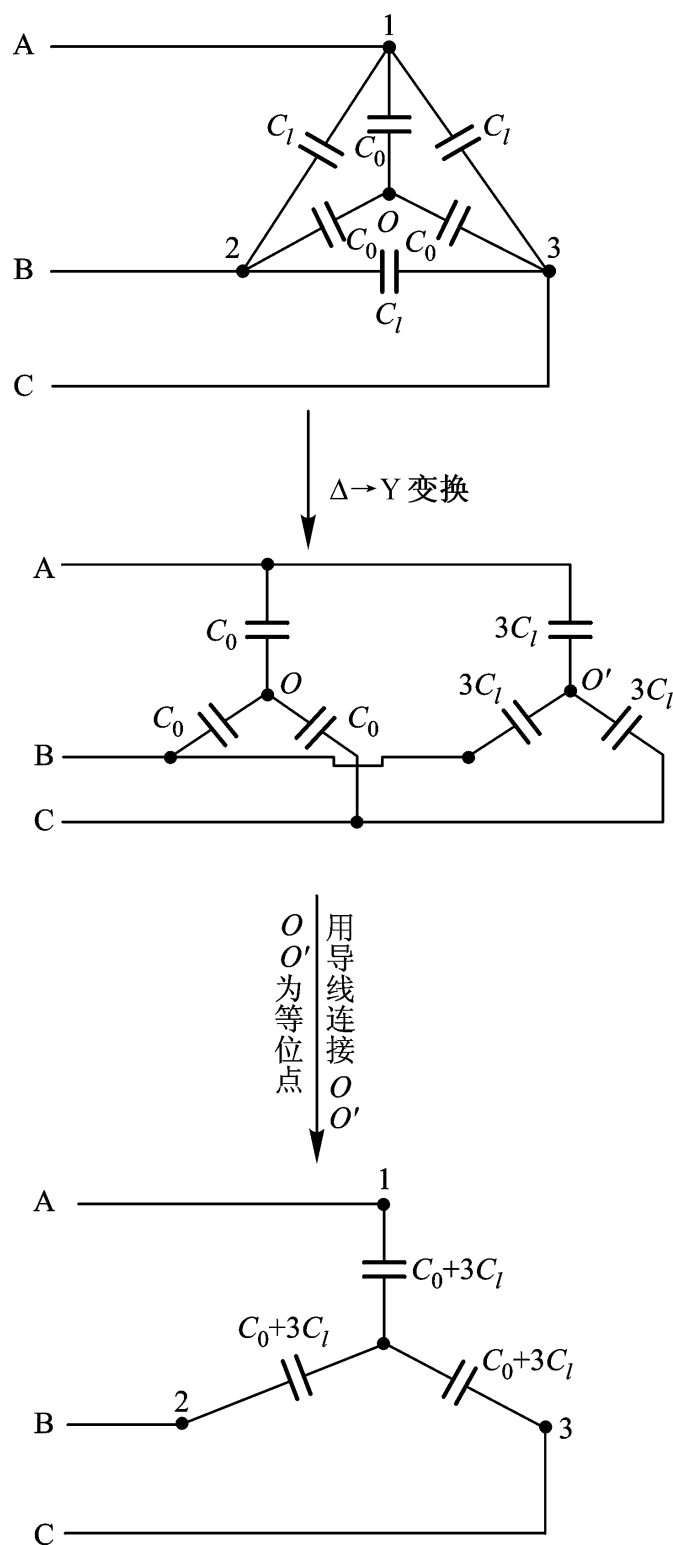
同理

$$C_0 + C_l + C_l = 0.037 \mu\text{F}$$

有

$$C_l = 0.010 \mu\text{F}$$

(2) 运行在三相供电情况下的电容网络如下图所示:

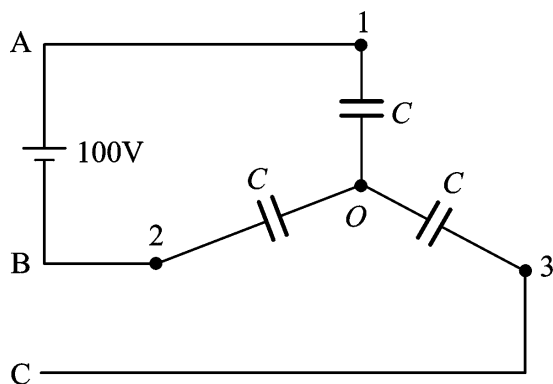


题 2 - 34 图(2)

故一相的工作电容(相电容)为

$$C = C_0 + 3 C_l = 0.047 \mu\text{F}$$

(3) 按题意, 此时工况如下图示:



题 2 - 34 图(3)

$$C_{12} = \frac{C}{2} = 0.0235 \mu\text{F}$$

故 
$$= \frac{Q}{l} = \frac{C_{12} U_{12}}{l} = \frac{0.0235 \times 100}{l} = \frac{2.35}{l} \mu\text{C/m}$$

**2 - 35** 一同轴电缆, 内外导体的直径分别为 10 mm 和 20 mm, 其中介质的介电常数为 5, 击穿场强为 200 kV/cm。试问此电缆每公里长度能储存的最大静电能量是多少?

[解题思路]

首先, 需求得该同轴电缆内的场分布。对此, 题 2 - 6 已给出解答;

在场分布已知的基础上, 按两导体系统静电场能量的计算关系式(2 - 130),

即  $W_e = \frac{qU}{2}$ , 可得待求的该电缆每公里长度所储存的最大静电能量。

[解] 由题 2 - 6 的同样分析, 可得同轴电缆内的电场强度为  $E(r) = \frac{U}{2r} \ln \frac{R_2}{R_1}$ , 因而与工作时介质可能承受的最大场强(即击穿场强)关联的最大电场强度应发生在内导体表面上, 其值为  $E_{\max} = \frac{U}{2R_1} \ln \frac{R_2}{R_1}$ , 即  $\frac{U}{2} = R_1 E_{\max} \ln \frac{R_2}{R_1}$ , 由此可知该电缆最大的工作电压为

$$U = \frac{2R_1 E_{\max}}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = R_1 E_{\max} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

因此, 该电缆每公里长度储存的最大静电能量为

$$\begin{aligned} W_{e\max} &= \frac{1}{2} U^2 \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{2} (R_1 E_{\max})^2 \ln \frac{R_2}{R_1} \\ &= 5 \times 10^{-3} (5 \times 10^{-3})^2 (2 \times 10^7)^2 \ln \frac{10}{5} \text{ J/m} = 963.58 \text{ J/km} \end{aligned}$$

**2 - 36** 设一点电荷如题 2 - 36 图所示由无限远处移动到导电平板上方  $h$  处。求:

(1) 电场力对电荷  $q$  所作之功;

(2) 对应于最终位置(平板上方  $h$  处), 点电荷  $q$  所受到的电场力  $\mathbf{F}$ 。

[解题思路]

本题为计入大地影响下的点电荷电场问题, 应采用镜像法(2.6.1节)求其场分布;

在场分布已知的基础上, 点电荷所受电场力可按电场强度定义公式(2-134)求得。但需注意, 式中  $\mathbf{E}$  是等效于大地感应电荷影响的镜像电荷在该点电荷所在处产生的场强;

电场力所作的功应由定义式  $W = \int_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$  计算之。

[解] (1) 应用镜像法如图示可知, 当点电荷  $q$  按题设路径由无限远处移至点  $P$  处时, “同步移动”的镜像电荷( $-q$ )在该点产生的电场强度为

$$\mathbf{E}_P = -\frac{q}{4\epsilon_0(2x)^2}\mathbf{e}_x$$

故电场力对点电荷  $q$  所作的功

$$\begin{aligned} W &= \int_h^\infty \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_h^\infty q\mathbf{E}_P \cdot d\mathbf{x} = \int_h^\infty \frac{q^2}{4\epsilon_0(2x)^2} dx \\ &= \frac{q^2}{16\epsilon_0} \left. -\frac{1}{x} \right|_h^\infty = -\frac{q^2}{16\epsilon_0 h} \end{aligned}$$

$$(2) \mathbf{F} = q\mathbf{E} = q \frac{q}{4\epsilon_0(2h)^2}(-\mathbf{e}_x) = \frac{q^2}{16\epsilon_0 h^2}(-\mathbf{e}_x)$$

**2-37** 试求半径为  $a$ , 带电量为  $q$  的带电肥皂泡的膨胀力。

[解题思路]

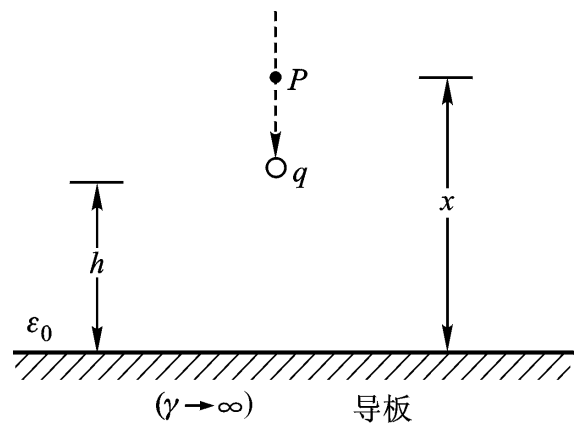
本题可应用如下两种解题方法(2.9节):

(1) 虚位移法: 本题根据物理判断, 宜以肥皂泡的体积为广义坐标, 因而, 相应的广义力(电场力)即为作用于肥皂泡表面的应力( $\text{N m}^2$ );

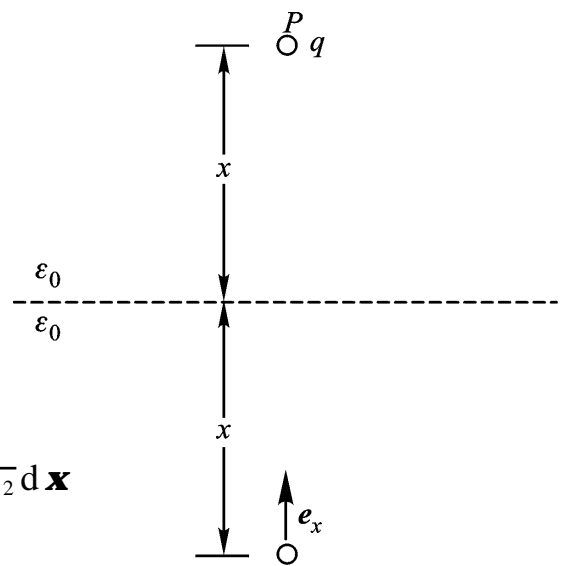
(2) 应用法拉第观点的方法: 此时, 通过对作用于肥皂泡表面的电位移( $\mathbf{D}$ )管受力分析, 即可求得作用于肥皂泡表面的电场力( $\text{N m}^2$ )。

[解] (1) 方法一 应用虚位移法求电场力。

据题意, 对应于给定电量  $q$  的条件, 应用常电荷系统的虚位移求力公式, 令广义坐标  $g$  为肥皂泡的体积  $V$ , 可得



题 2-36 图(1)



题 2-36 图(2)

$$F = - \frac{W_e}{V} \Big|_{q_k = C}$$

肥皂泡的电位为

$$= \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 a}$$

故电场能量

$$W_e = \frac{1}{2} q \phi = \frac{q^2}{8 \pi \epsilon_0 a}$$

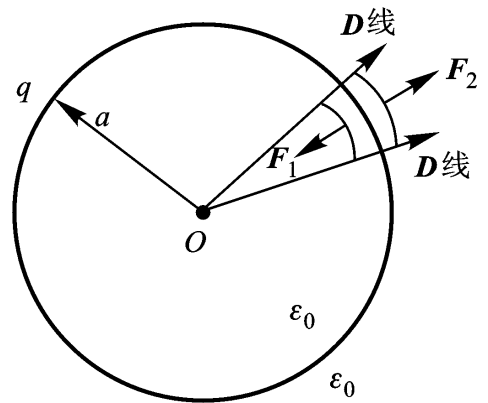
由此得作用于肥皂泡表面的电场力为

$$F = - \frac{\frac{q^2}{8 \pi \epsilon_0 a}}{\frac{4 \pi}{3} a^3} \Big|_{q=C} = \frac{q^2}{32 \pi^2 \epsilon_0 a^4} (\text{N m}^2)$$

其方向为沿肥皂泡半径增大的方向

(2) 方法二 应用法拉第观点求电场力。

如图示,沿电场方向在肥皂泡表面处截取一段很短的电位移 ( $D$ ) 管,设该管的截面积为  $S$ 。显然,因电场的球对称性决定了作用于该  $D$  管成对的侧压力  $F = F$ ,即沿肥皂泡表面切向受力平衡,不显现力的作用。但因肥皂泡内  $E = 0$ ,故如图示  $D$  管沿肥皂泡径向收缩的纵张力  $F_1 = 0$ 。令所取  $D$  管的长度趋向于零,则沿径向扩张的纵张力  $F_2$ ,即为作用于肥皂泡表面上的每单位面积上的电场力,其值为



题 2 - 37 图

$$F_2 = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 a^2} \right)^2 = \frac{q^2}{32 \pi^2 \epsilon_0 a^4} (\text{N m}^2)$$

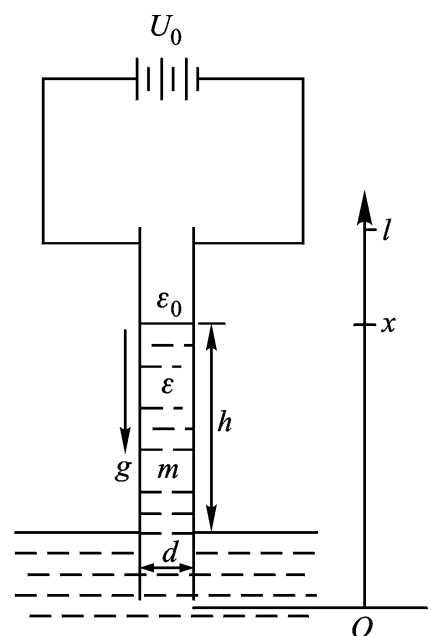
与方法一所得结果相同。

**2 - 38** 板间距离为  $d$ ,电压为  $U_0$  的两平行板电极,浸于介电常数为  $\epsilon$  的液态介质中。如题 2 - 38 图所示。已知介质液的质量密度是  $m$ ,试问两极板间的液体将升高多少?

[解题思路]

根据题设可知,当平行板间建立电场后,其内电场力的作用将导致介质液面的位差。为计算该电场力的效应,可应用如下两种解题方法(2.9节):

(1) 虚位移法:建立如图所示的坐标系,可以判断,应选取表征平行板电极内液面高度的坐标  $x$  为广义坐标,因而,相应的广义力即为作用于液面的



题 2 - 38 图(1)

电场力(N),其假定正方向为坐标  $x$  增加的方向;

(2) 应用法拉第观点的方法:此时,通过对作用于平行板电极内液面上的电位移( $\mathbf{D}$ )管受力分析,即可求得作用于该液面上的电场力( $\text{N m}^2$ )。

[解] (1) 方法一 应用虚位移法求电场力。

设定坐标系,如图示,设极板宽为  $w$ ,高度为  $l$ ,则可知平行板电极构成的电容为

$$C(x) = \frac{xw}{d} + \frac{\epsilon_0(l-x)w}{d}$$

故该平行板间建立的电场能量为

$$W_e = \frac{1}{2} CU_0^2 = \frac{wU_0^2}{2d} [\epsilon_0 l + (\epsilon - \epsilon_0)x]$$

应用虚位移法,在给定电位条件下,可求沿  $x$  正方向液面所受的电场力为

$$F_x = \left. \frac{W_e}{x} \right|_{k=c} = \frac{U_0^2}{2d} (\epsilon - \epsilon_0) w$$

此力应与介质液面位差对应的平行板间的液体重量相平衡,即

$$F_x = \frac{U_0^2}{2d} (\epsilon - \epsilon_0) w = mgdhw$$

由此可得液面提升量为 
$$h = \frac{(\epsilon - \epsilon_0) U_0^2}{2 mgd^2}$$

(2) 方法二 应用法拉第观点求电场力。

如图示,沿电场方向在介质液面上截取一横截面很小的电位移( $\mathbf{D}$ )管,设其侧面积为  $S$ 。显然,该  $\mathbf{D}$  管左、右侧的纵张力相互平衡,而其上、下侧面积所受的侧压力分别为

$$F = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 S \text{ 和 } F = \frac{1}{2} \epsilon E^2 S$$

令  $\mathbf{D}$  管的厚度趋于零,则可得作用于介质液面的  $S$  上的电场力

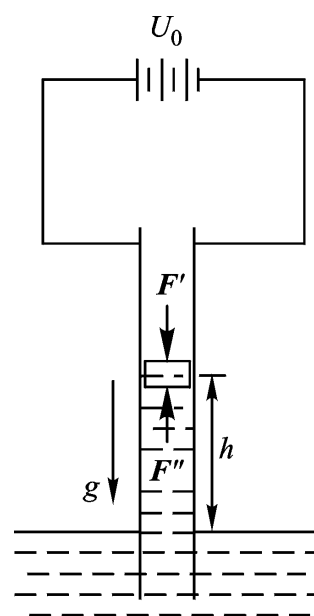
$$F = F - F = \frac{E^2}{2} (\epsilon - \epsilon_0) S$$

相应的单位面积上所受的力为

$$F_0 = \frac{F}{S} = \frac{E^2}{2} (\epsilon - \epsilon_0) = \frac{U_0^2}{2d^2} (\epsilon - \epsilon_0)$$

因此,作用于介质液面上的总电场力

$$F_{\text{总}} = F_0 S = F_0 dw$$



题 2-38 图(2)

应与平行板间提升的液体重量相平衡,即

$$\frac{U_0^2}{2d^2}(\rho - \rho_0)dw = mgdhw$$

由此可得液面提升量为  $h = \frac{U_0^2(\rho - \rho_0)}{2mgd^2}$

与方法一所得结果相同。

# 第3章 静态电磁场 II:恒定电流的电场和磁场

## 3.1 基本内容与要求

### (1) 恒定电场:

理解电流密度  $\mathbf{J}$  的定义、欧姆定律的微分形式及电功率密度(焦耳—楞次定律的微分形式)的概念。

理解电荷守恒定律及电流连续性原理。

掌握恒定电流场的基本方程,并理解其物理意义。

掌握电位所满足的微分方程(拉普拉斯方程)以及  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{J}$  和  $\rho$  在不同媒质分界面上的衔接条件,能写出典型恒定电流电场的边值问题,并能求其解答。

理解静电比拟原理,构成相似问题的条件,及其对应物理量和参数之间的关系。能应用静电比拟方法,了解恒定电流场中的镜像法。

理解电导的定义,掌握其计算原则。了解接地、接地电阻的概念(会计算简单形状接地器的接地电阻与跨步电压)。

### (2) 恒定磁场:

掌握恒定磁场的基本方程并理解其物理意义。

理解结合亥姆霍兹定理应用所给出的磁感应强度  $\mathbf{B}$  与矢量磁位  $\mathbf{A}$  的定义及其应用价值。掌握毕奥——萨伐尔定律。理解磁通连续性原理。

掌握叠加原理。对自由空间中的恒定磁场,会应用矢量积分公式计算规则电流(线、面和体电流)分布产生的磁感应强度与矢量磁位;对于呈对称性分布特征的场,能熟练运用安培环路定律,求解其磁感应强度的分布。

了解标量磁位的概念及其多值性。

了解平行平面磁场中等  $\mathbf{A}$  线和  $\mathbf{B}$  线的关系,会定性绘制场分布图。

了解媒质磁化及相应磁性媒质分类的概念。了解磁偶极子、磁偶极矩的概念及其磁场分布的特点。了解磁化强度  $\mathbf{M}$  的定义,及磁化电流的概念。了解通过磁化电流求磁化场分布的积分公式。

理解磁场强度  $\mathbf{H}$  的定义,以及  $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{H}$  和  $\mathbf{M}$  三者之间的关系。对媒质中的磁场,理解  $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{A}$  和  $\rho_m$  在不同媒质分界面上的衔接条件。会求解具有相应对称性的场分布,并在掌握矢量磁位所满足的微分方程(泊松方程和拉普拉斯方程)以及标量磁位所满足的微分方程(拉普拉斯方程)的基础上,能写出典型恒定

磁场问题所对应的数学模型——边值问题,并能求出一维边值问题的解,且能运用分离变量法求解二维边值问题。

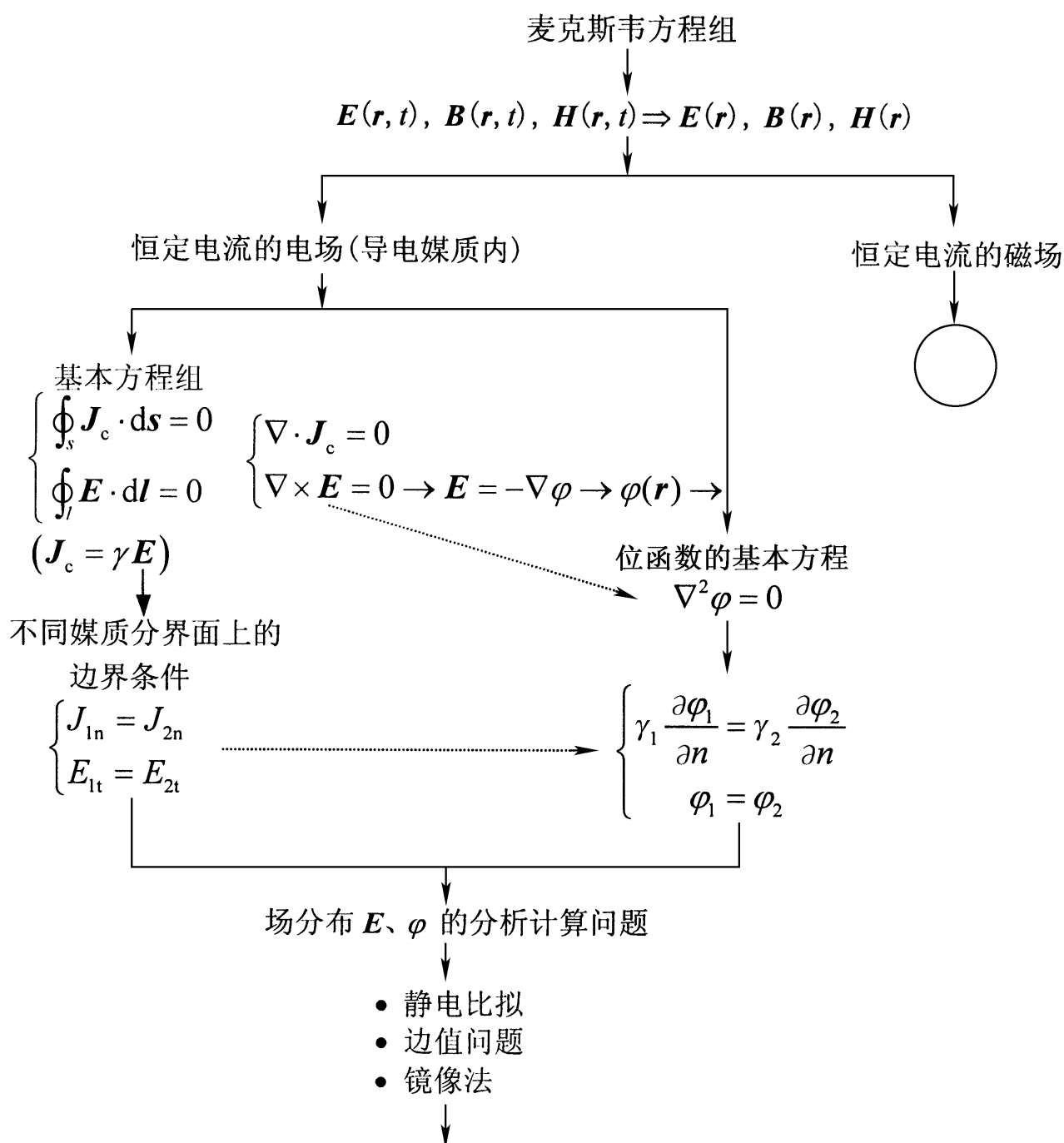
掌握恒定磁场中的镜像法。

理解磁链的概念。掌握自感  $L$ 、互感  $M$  的定义及其计算方法。

理解磁场能量及能量密度的概念,掌握具有对称性分布特征的磁场能量及其能量密度的计算方法。

会应用安培力、洛伦兹力计算公式,虚位移法及法拉第观点求磁场力,并能根据场图分析受力情况。

### 3.2 教学体系框架

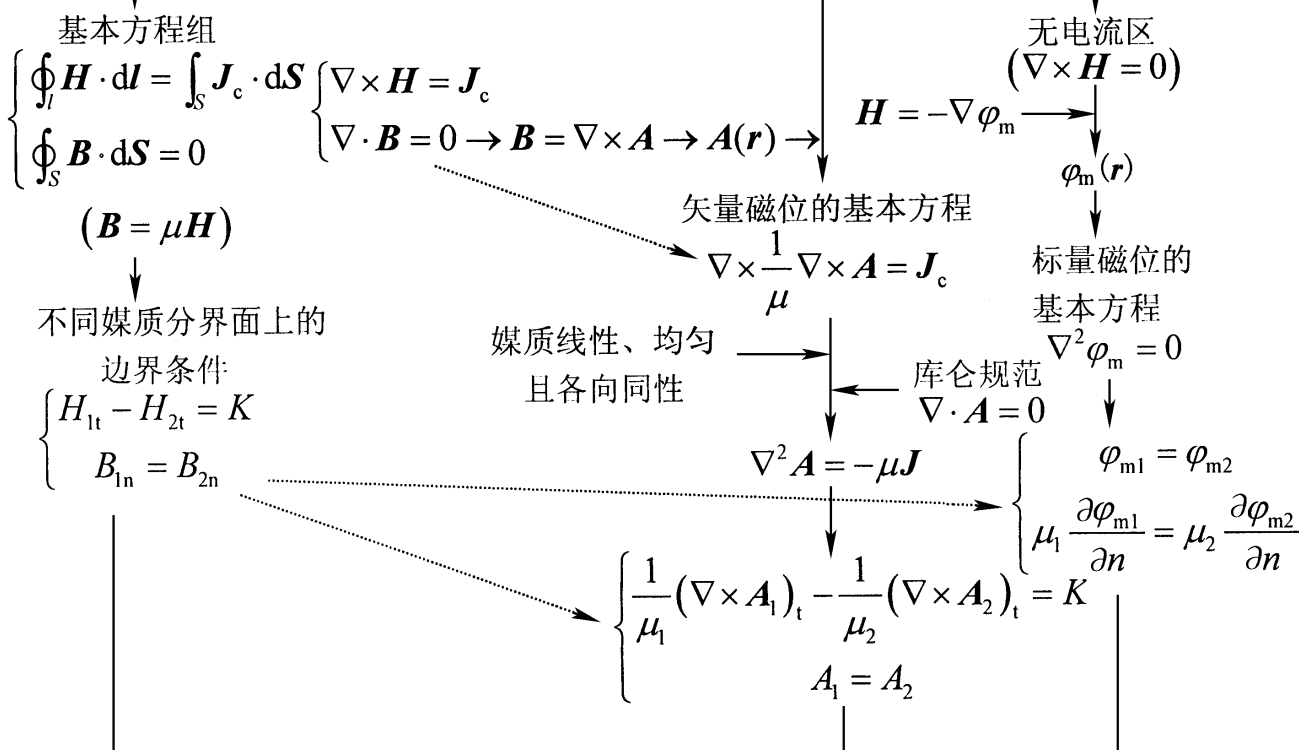


场特征量(功率损耗、参数)的分析计算

焦耳—楞次定律  
 $p = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$

- 电导  $G = I/U$
- 接地电阻

恒定电流的磁场(恒定磁场)

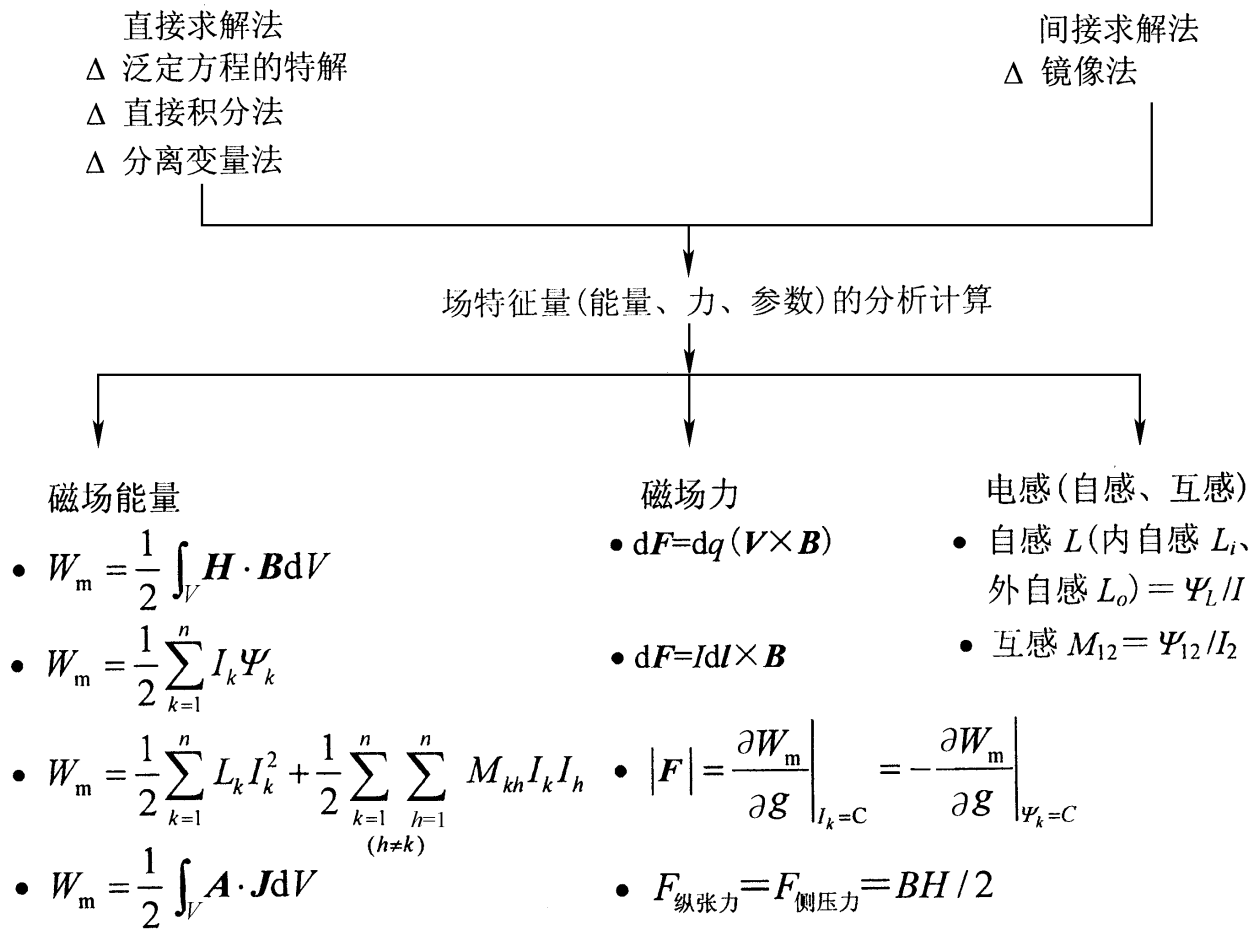


场分布  $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{A}$  或  $\varphi_m$  的分析计算问题

- 自由空间中的磁场
- $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{A}$  直接积分公式
  - 对称场—真空中的安培环路定律
  - 叠加原理的应用

- 媒质中的磁场
- 对称场—安培环路定律
  - 叠加原理的应用

• 边值问题



### 3.3 相关教学重点、难点解析

#### 3.3.1 关于导电媒质中建立恒定电流场的讨论

众所周知,在导线中欲形成恒定电流  $I$ ,则必须在其两端维持恒定的电压。如图 3.1 所示,把导线接到电池正负极两端即可达到这一目的。此时,由于电池极板上聚集着电荷,导线中因此有电场存在,驱使导线中自由电子在电场力的作用下向 A 端移动,形成了由 A 端向 B 端流动的电流  $I$ 。分析表明,一方面,电池内部的电化学反应将保证其正负离子在化学力与电场力动态平衡的作用下,不断补充极板上因形成电流而随之减少的聚集的电荷;另一方面,沿着导线表面将分布有处于不断交替与更换的运动态中,但其分布特性不变的电荷(驻定电荷)。因此,正是源于外电源极板上和导电媒质表面上呈恒定分布形态的自由电荷,两者合成的恒定电场建立了有恒定电流流通

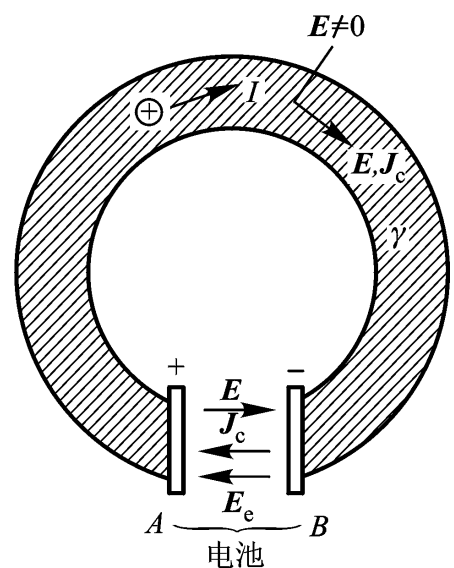


图 3.1 恒定电流的获得

的导电媒质中的电场,同时,也在电流周围的电介质中建立了不随时间改变的电场。应强调指出,这种恒定电场  $\mathbf{E}$  显然也具有静电场的特性,但本质上它不同于静电场,因为它源于动态平衡下的呈恒定分布形态的自由电荷,而更主要的是在导体中这种电场的维持是消耗能量的,因而需要外源不断地供给能量。为了与静电场有所区别,故称这种电场为恒定电场。

在不含外源的区域中,各向同性的导电媒质中的恒定电场是本章讨论的主题,此时,在温度一定的条件下,场中任一点的电流密度与电场强度成正比,即  $\mathbf{J}_c = \gamma \mathbf{E}$ 。在含外源的区域中,除恒定电场  $\mathbf{E}$  外,还有外源所产生的局外场  $\mathbf{E}_e$ ,因此,对应于维持恒定电流的平衡状态,电流密度  $\mathbf{J}_c = \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_e)$  ( $\gamma$  为外源内导电媒质的电导率)。

应当指出,在不含外源的区域中,另一位于导电媒质外电介质(含空气)中的恒定电场,由导电媒质内  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0$  可以推知,在其表面处  $E_t = 0$ ,显然,这表明该恒定电场分布不等同于静电场分布。但是,实际情况证明,在导电媒质表面,总有  $E_t \propto E_n$  的关系成立,故工程分析时常可略去  $E_t$ ,从而使导电媒质外电介质中的恒定电场问题归属为类比于静电场分析的范畴,对此,本章不再赘述。

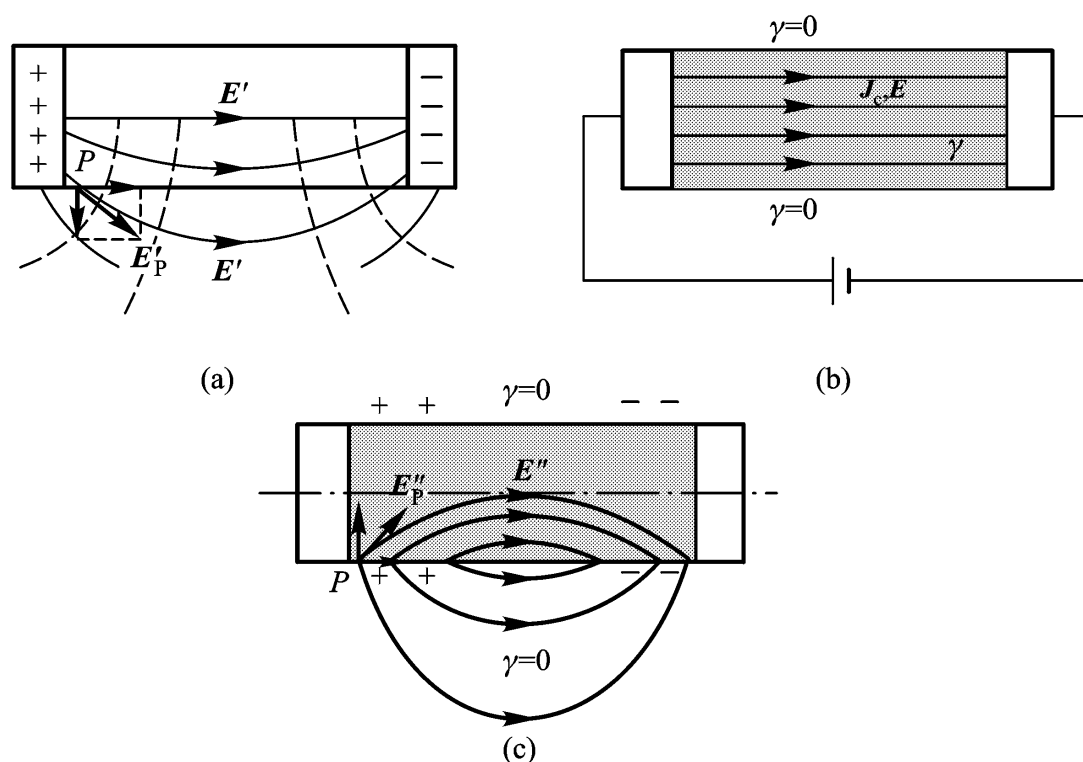


图 3.2

在以上分析中,涉及为维持恒定电流沿导线表面尚分布有驻定电荷的物理现象,对此可通过如图 3.2 所示的分析给出定性的解释。首先,展直图 3.1 所示的恒定电流场的物理模型;然后,设想移去导线,但其两端的等位面(即外源电极)仍然存在,则电场分布  $\mathbf{E}$  将如图 3.2(a) 所示。如果两电极间有导线存在,则导线内均匀的恒定电流必导致均匀分布的  $\mathbf{J}$  与  $\mathbf{E}$ ,如图 3.2(b) 所示。由此可见,仅依靠导

线两端电极上的自由电荷源,事实上不可能获得导线内均匀分布的恒定电场。为此,考察导线表面处任一场点  $P$ ,由图 3.2(a)可知,必须有另外的自由电荷产生的电场来抵消该点上垂直于电流方向的电场分量。由于无论在导线内或导线外,电位都满足拉普拉斯方程,也就是说,不可能在导线内或导线外存在另一种自由电荷的分布。因此,另一种自由电荷只能分布在导线的表面,如图 3.2(c)所示,这种由导线表面处所论的驻定电荷分布产生的电场  $\mathbf{E}$ ,与前述极板上电荷产生的电场  $\mathbf{E}$  相叠加,方能保证  $\mathbf{E} = \mathbf{E} + \mathbf{E}$  的分布与所期望的均匀恒定电流分布( $\mathbf{J}$ )相一致。换句话说,以典型的  $P$  点而言,即有  $\mathbf{E}_P = \mathbf{E}_P + \mathbf{E}_P$ ,  $\mathbf{E}_P$  必取与电流一致的方向。

### 3.3.2 静电比拟原理的注释

(1) 理论依据——场的惟一性定理(2.5.4 节)

(2) 静电比拟:

应用场合——均匀导电媒质中的恒定电场(电源外)与无源区( $\rho = 0$ )均匀介质中的静电场之间的静电比拟。

基本规律(共性)的比拟——微分方程( $\nabla^2 = 0$ )的相似性

定解条件(个性)的比拟——

两种场内相应电极几何形状、尺寸和相互位置相同(或相似);

相应电极处的 BC 相同(或相似):电极表面均为等位面,且相应电极间电压相同(或相似);

当由两种媒质组成时,则物理参数间关系式  $\frac{1}{\epsilon_1} = \frac{1}{\epsilon_2}$  成立,以保证两媒

质分界面处  $\mathbf{J}$  线与对应的  $\mathbf{D}$  线折射情况相同。

基于以上静电比拟方法的应用,对满足静电比拟关系的恒定电场与静电场,两者之间对应物理量和参数间的比拟,列于表 3.1。

表 3.1 对应物理量和参数的比拟关系

均匀导电媒质中的恒定电场(电源外)	$\mathbf{E}$		$\mathbf{J}$	$I$		$G$
均匀介质中的静电场( $\rho = 0$ 处)	$\mathbf{E}$		$\mathbf{D}$	$q$		$C$

(3) 方法的应用:

两种场在分析计算上“合二为一”。这样,恒定电场问题可转化为相应的静电场问题求解;或直接引用静电场的分析方法(如镜像法,应用高斯定理求对称场分布等),求解恒定电场问题;

在实验研究中,由于电流场中的电流、电位分布易于测定,故可用相应的电流场模型来研究待求的静电场问题(静电场造型),此种方法亦称为电流场模拟。

电流场模拟方法有:固体模拟(如铁板、导电纸模拟等);液体模拟(如电解槽方法等)。

推广到其他应用学科或工程领域,当可藉助于电流场模拟的实验方法进而分析非电量(液流、气流等)的拉普拉斯方程定解问题的解答。

### 3.3.3 基于场矢量积分关系式的恒定磁场分析方法的讨论

对无界的自由空间中的磁场,对应于不同分布形态的源量(线、面和体电流),其场分布既可通过基本场矢量——磁感应强度  $\mathbf{B}$ ,又可通过辅助的场矢量——矢量磁位  $\mathbf{A}$  给出描述。此时,与直接计算场分布  $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{A}$  相关联的基本关系式均为矢量积分关系式,前者由毕奥—萨伐尔定律[式(3-34)、式(3-36)和式(3-37)]给出;后者则由矢量形式的泊松方程[式(3-44)]的特解[式(3-31)]给出。

基于场矢量积分关系式的分析计算方法的基本思路同于静电场,即首先离散化整体电流分布为典型元电流( $\mathbf{J}_c dV$ 、 $\mathbf{K}dS$  或  $I d\mathbf{l}$ )分布的组合,求出相应于元电流的场中元磁感应强度  $d\mathbf{B}$  或元矢量磁位  $d\mathbf{A}$  的解答;然后,应用叠加原理,合成所有元电流的贡献,即得待求的场分布  $\mathbf{B}$  或  $\mathbf{A}$  的解答。

关于本方法中矢量磁位  $\mathbf{A}$  的应用示例将在下面专题阐述。这里,就磁感应强度  $\mathbf{B}$  的矢量积分关系式的典型应用原则讨论如下:

(1) 首先,分析场具有的特征性质,例如,轴对称性、平行平面对称性等,并据此,选择合适的坐标系,以求对问题给出最直接、简洁的数学表达式。应指出,如果不存在上述场分布的对称性,则虽能基于毕奥—萨伐尔定律写出相应的矢量积分计算式,但实际上并不一定能得出解析形式的解答。

(2) 采用“先分后合”的分析思路,对离散化整体电流分布所得的典型元电流分布,求出场点上其对应的元磁感应强度的解答;然后,应用叠加原理,合成所有元电流分布的贡献,即得待求恒定磁场的分布。

为此,在教材中编写了由例3-4、例3-5和例3-6组成的典型系列应用的示例。十分明显,例3-4描述了给定长直线电流分布所产生的一典型轴对称磁场,对其按上述原则,结合矢量分析与微积分,以及毕奥—萨伐尔定律的数理基础,即不难得出该例的解析解;例3-5描述了由给定面电流分布产生的具有平面对称性的磁场,按“先分后合”的分析思路,其离散化的无限多元电流片的集合即可形成在例3-4基础上的解题路线,由此进而运用叠加原理,其解析解显然可得;同样,例3-6描述了由给定体电流分布产生的具有平面对称性的磁场,基于其离散化的无限多面电流片的集合,即可形成在例3-5基础上的解题路线,由此得解。综上所述,在这一典型的系列问题求解过程中,例3-4无疑是构造该系列解题路线中的“基本问题”。

还应指出,对于一些具有对称性场分布特征的磁场问题,若能找到一条闭合曲线  $l$ ,在该曲线上,各点的磁感应强度  $\mathbf{B}$  或  $\mathbf{H}$  的数值相等,且其方向与积分元

$d\mathbf{l}$ 方向间有不变的夹角关系,则同样归属场矢量积分关系式的安培环路定律 [式(3-27)或式(3-73)],也是应用于场分布分析计算的有效方法。

### 3.3.4 关于矢量磁位 $\mathbf{A}$ 在恒定磁场中的应用分析

矢量磁位  $\mathbf{A}$  作为辅助场函数,在恒定磁场分析中的应用具有突出的实用价值。现分列其应用要点讨论如下:

#### (1) 关于矢量磁位 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 的定义,及其引入目的

矢量磁位  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  的定义可源于恒定磁场的无散性,即  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 。因此时根据矢量恒等式  $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ , 便可得知磁感应强度  $\mathbf{B}$  也可通过另一矢量  $\mathbf{A}$  的旋度算得,即  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 。在教材应用亥姆霍兹定理展述恒定磁场特性的体系中,矢量磁位  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  也可由恒定磁场的旋度特性给出描述,即

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV \quad (3.1)$$

而恒定磁场的散度特性(无散性),则决定了  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  的基本关系。

矢量磁位  $\mathbf{A}$  作为辅助计算量的引入,无疑是为了有助于简化恒定磁场的分析,这一结论可来自于各类恒定磁场问题的数学模型构造的实践,其中,对于具有平行平面场或轴对称场特征的磁场问题来说,若以矢量磁位  $\mathbf{A}$  为待求场量,则其数学模型将可归结为一维边值问题,从而相比于磁感应强度  $\mathbf{B}$  为待求场量的数学模型,不仅求解的自由度数减少,且定解条件亦往往易于给定。

#### (2) 关于矢量磁位 $\mathbf{A}$ 的直接积分计算关系式

对于给定源量  $\mathbf{J}_c(\mathbf{r})$  分布的无限大均匀各向同性媒质( $\mu$ )中的恒定磁场分析,基于亥姆霍兹定理即可给出矢量磁位  $\mathbf{A}$  的直接积分计算关系式为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}_c(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}_c(\mathbf{r}')}{R} dV \quad (3.2)$$

按元电流间的等价代换关系:  $\mathbf{J}_c(\mathbf{r}') dV = \mathbf{K}(\mathbf{r}') dS = Id\mathbf{l}$ , 上式可继续应用于给定面、线电流分布情况下矢量磁位  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  的直接积分计算关系式。

基于式(3.2)所示的关系,不难看出,场中  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  的方向恒同于给定的相应励磁电流的方向,应指出,此为矢量磁位  $\mathbf{A}$  应用中理应关注的物理概念。

根据  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{C})$  的基本关系( $\mathbf{C}$  为常矢量),可知矢量磁位是一相对量度的辅助计算量。因此,结合式(3.2)所表示的物理内涵,不难理解,当励磁电流  $\mathbf{J}_c(\mathbf{r})$  分布在位于邻近坐标原点的有限区域内时,必有  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \Big|_r = 0$ , 也就是说,该式蕴含无限远为矢量磁位  $\mathbf{A}$  参考点的物理条件。这样,当给定理想化的恒定磁场问题时,若电流分布被理想化延展至无限远处,则就不可能以无限远为  $\mathbf{A}$  的参考点,而需修正矢量磁位  $\mathbf{A}$  的直接积分计算关系式为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}_c(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV + \mathbf{C}$$

式中,  $\mathbf{C}$  为常矢量, 取决于磁位  $\mathbf{A}$  参考点的选择。对此, 教材例 3 - 10 进行了深入的分析讨论。

**例 3.1** 应用矢量磁位计算磁偶极子远区的磁场。

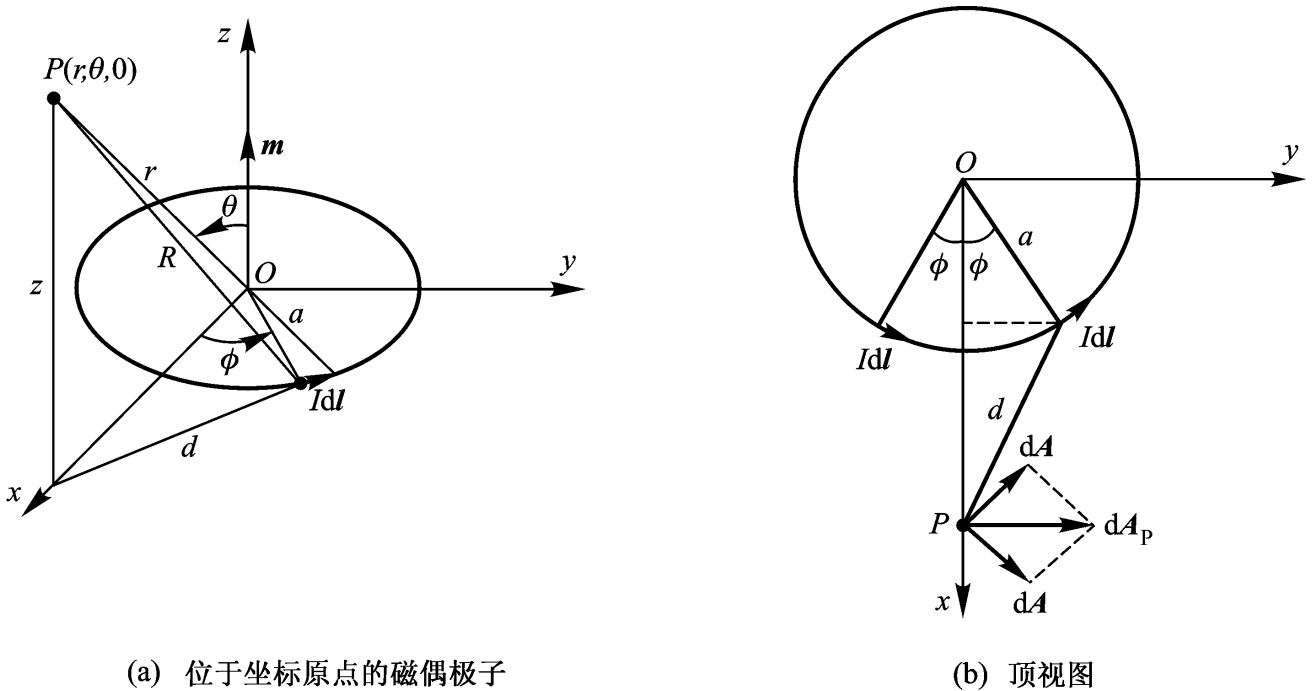


图 3.3 磁偶极子的磁场

[解] 如图 3.3 所示, 设磁偶极子位于坐标原点, 其磁偶极矩 (磁矩)  $\mathbf{m} = I\mathbf{S} = a^2 I \mathbf{e}_z$ 。现采用球坐标系, 以矢量磁位  $\mathbf{A}$  为待求量, 可见  $\mathbf{A}$  仅有  $\mathbf{e}_\theta$  方向分量且与  $\phi$  无关。为简化计算, 设场点  $P$  位于  $\theta = 0$  的平面, 且在磁偶极子的远区 ( $R \gg a$ )。

按“先分后合”的分析思路, 取元电流  $I d\mathbf{l}$ , 可知其在  $P$  点产生的元矢量磁位

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I d\mathbf{l}}{4\pi R}$$

注意到凡对称于  $xOz$  平面, 成对的元电流  $I d\mathbf{l}$  产生的  $d\mathbf{A}$  在数值上必对应相等, 且其矢量和如图示仅有  $\mathbf{e}_\theta$  方向的分量。因此, 环行电流  $I$  在  $P$  点产生的矢量磁位  $\mathbf{A} = A(r, \theta) \mathbf{e}_\theta$ , 而

$$A(r, \theta) = 2 \int_0^{\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a d \cos \phi}{R} \cos \theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{a \cos \phi}{R} d\phi$$

上式中

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{z^2 + d^2} \\ &= \left[ (r \cos \theta)^2 + (a \sin \theta)^2 + (r \sin \theta - a \cos \theta)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= (r^2 + a^2 - 2ar \sin \theta \cos \theta)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

由于  $R \gg a$ , 有

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{2a}{r} \sin \theta \cos \phi \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{a}{r} \sin \theta \cos \phi \right)$$

所以

$$\begin{aligned} A(r, \theta, \phi) &= \frac{\mu_0 I}{2} \int_0^d \frac{a \cos \theta}{r} \left( 1 + \frac{a}{r} \sin \theta \cos \phi \right) = \frac{\mu_0 a I}{2 r} \int_0^d \left( 1 + \frac{a}{r} \sin \theta \cos \phi \right) \cos \theta d\theta \\ &= \frac{\mu_0 a^2 I \sin \theta}{4 r^2} = \frac{\mu_0 S I \sin \theta}{4 r^2} = \frac{\mu_0}{4} \cdot \frac{|\mathbf{m} \times \mathbf{e}_r|}{r^2} \end{aligned}$$

故  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ (\sin \theta A) \mathbf{e}_\phi - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA) \mathbf{e}_\theta \right]$

$$= \frac{\mu_0 a^2 I}{4 r^3} 2 \cos \theta \mathbf{e}_\phi + \frac{\mu_0 a^2 I}{4 r^3} \sin \theta \mathbf{e}_\theta = \frac{\mu_0 m}{4 r^3} (2 \cos \theta \mathbf{e}_\phi + \sin \theta \mathbf{e}_\theta)$$

其计算结果与教材例 3 - 12 应用标量磁位所得的结果相同。

### (3) 基于矢量磁位 $\mathbf{A}$ 的数学模型——边值问题的构造

矢量磁位  $\mathbf{A}$  所满足的泛定方程:

由  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c$   $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$   $\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J}_c$  媒质均匀  
各向同性  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu \mathbf{J}_c$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}_c \text{ (矢量形式的泊松方程)} \quad (3.3)$$

为唯一地确定  $\mathbf{A}$ , 令  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  (库仑规范)

若在无源区, 则有

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0 \quad \text{(矢量形式的拉普拉斯方程)}$$

应指出, 取决于不同的坐标系,  $\nabla^2 \mathbf{A}$  有不同的展开式。对于直角坐标系, 应有

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 A_x \mathbf{e}_x + \nabla^2 A_y \mathbf{e}_y + \nabla^2 A_z \mathbf{e}_z$$

故  $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}_c$  可以分解为如下三个标量形式的泊松方程:

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_x &= -\mu J_x \\ \nabla^2 A_y &= -\mu J_y \\ \nabla^2 A_z &= -\mu J_z \end{aligned} \quad (3.4)$$

显然, 对照静电场中电位泊松方程的解答形式, 可得以上各偏微分方程的解答分别是:

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{J_x dV}{R} \\ A_y &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{J_y dV}{R} \\ A_z &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{J_z dV}{R} \end{aligned}$$

将以上三式合并成矢量形式, 得

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J} dV}{R} \quad (3.5)$$

由此可见,式(3.2)也就是如今矢量磁位  $\mathbf{A}$  所满足的矢量泊松方程的特解。

应强调指出,对于其他坐标系(如圆柱、球坐标系等),决无类同于式(3.4)所示简洁的关系式,而是在分解为相应的标量形式的泊松方程时,其相关的各分量间是相互耦合的。

定解条件的描述:

前已指出,场中矢量磁位  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  的方向取决于激磁电流密度  $\mathbf{J}_c$  的方向。因此,若以平行平面磁场(此时,可设  $\mathbf{J}_c = J_c \mathbf{e}_z$ )或轴对称磁场(此时,可设  $\mathbf{J}_c = J_c \mathbf{e}$ )为典型分析的对象,则所论问题即可被简化为求解矢量磁位  $\mathbf{A}$  的某一分量的问题(对于平行平面磁场,  $\mathbf{A} = A_z \mathbf{e}_z$ ;对于轴对称磁场,  $\mathbf{A} = A \mathbf{e}$ )。但是,对应于场中磁感应强度  $\mathbf{B}$  的分布,不论在平行平面磁场,还是在轴对称磁场中,它们将分别由二个分量(  $B_x$ 、 $B_y$  或  $B$ 、 $B_z$  )合成。

在平行平面磁场中,等  $A$  线(  $A_z = \text{Const.}$  )即为  $\mathbf{B}$  线;在轴对称磁场中,  $A = \text{Const.}$  即为  $\mathbf{B}$  线(3.3.4节)。因此,若以这两种场为典型分析对象,则其定解条件通常就按问题的物理本质,取磁场线为求解场域的边界,这时,对平行平面磁场得以采用  $A_z = A_0$  (某一定值),或取足够远处的近似逼近条件,即  $A_z = 0$  予以描述;对轴对称磁场,则常以过对称轴并扩展至无限远的磁场线为求解场域的边界,其数学描述即得以简洁地表述为  $A = 0$ 。

当场中存在不同媒质分界面时,则定解条件还须包含其上的“衔接条件”(3.5.3节),在此不再赘述。

**例 3.2** 半径为  $a$  的长直圆柱导体通有电流密度  $\mathbf{J}$ 。试写出矢量磁位的边值问题,并求该载流导体内外的磁场。

[解] 如图 3.4 所示,选圆柱坐标系,则  $\mathbf{J} = J \mathbf{e}$ , 故矢量磁位  $\mathbf{A} = A_z(\rho, \phi, z) \mathbf{e}_z$  仅有  $z$  方向分量,且由场的对称性可知  $A_z$  仅为坐标  $\rho$  的函数,其边值问题为

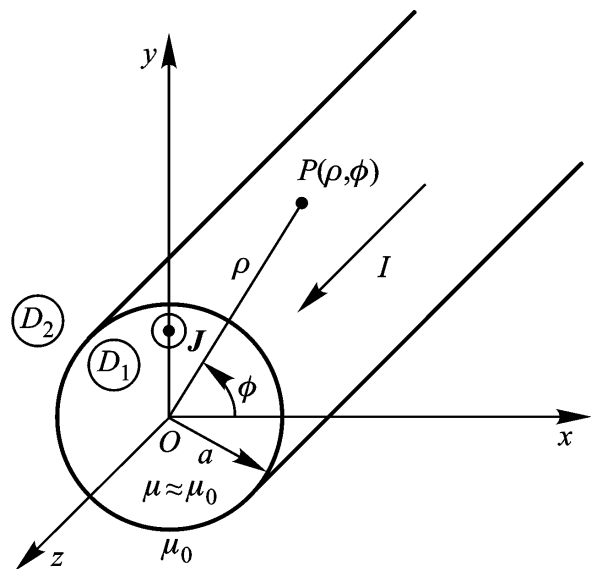


图 3.4 长直载流圆导线的磁场

$$\nabla^2 A_{z1} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dA_{z1}}{d\rho} \right) = -\mu_0 J \quad (\rho < a)$$

$$\nabla^2 A_{z2} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dA_{z2}}{d\rho} \right) = 0 \quad (\rho > a)$$

$$A_{z1} = A_{z2} = 0, \quad \frac{1}{\mu_0} \frac{dA_{z1}}{d\rho} = \frac{1}{\mu_0} \frac{dA_{z2}}{d\rho} \quad (\rho = a)$$

$$A_{z1} \Big|_{\rho=0} = \text{有限值}$$

直接积分两次,得

$$A_{z1} = -\frac{\mu_0 J}{4} r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

同理得

$$A_{z2} = C_3 \ln r + C_4$$

由定解条件,可解得上述四个待定积分常数为:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{\mu_0 J a^2}{4}, \quad C_3 = -\frac{\mu_0 J a^2}{2}, \quad C_4 = \frac{\mu_0 J a^2}{2} \ln a$$

故:  $A_{z1} = \frac{\mu_0 J}{4} (a^2 - r^2)$  (a)

$$A_{z2} = \frac{\mu_0 J a^2}{2} \ln \frac{a}{r}$$
 (a)

由  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  得:

$$B_1 = \frac{\mu_0 J}{2} = \frac{\mu_0 I}{2 a^2}$$
 (a)

$$B_2 = \frac{\mu_0 J a^2}{2} = \frac{\mu_0 I}{2}$$
 (a)

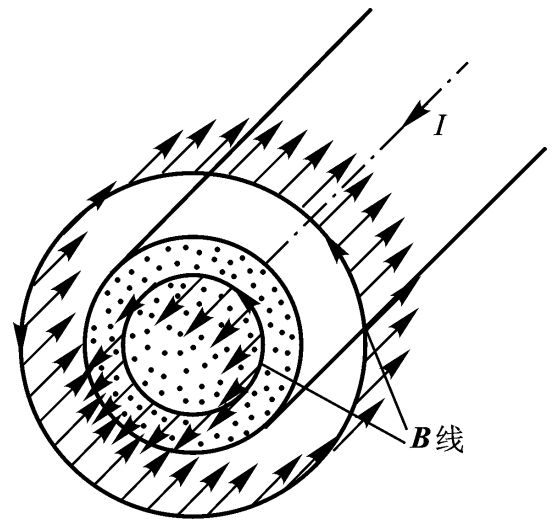


图 3.5  $\mathbf{B}$  线与等  $A$  线

所得计算结果同于教材例 3 - 7 基于安培环路定律的分析结果。

对于本例,由所得矢量磁位  $A_{z1}$ 、 $A_{z2}$  的解答,根据等  $A$  线即  $\mathbf{B}$  线的固有性质,可描绘典型的磁场线分布图,如图 3.5 所示。应注意,在场点上,  $\mathbf{B}$  的方向与  $\mathbf{A}$  的方向正交,是取决于  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  基本关系的必然结果,但在任一根磁场线上的各点  $A$  值相同。

### 3.3.5 磁偶极子在外磁场中的受力分析

在媒质磁化机理的分析中引入磁偶极子的物理模型,由此阐述了基于磁偶极子在外磁场中受力转动,形成其磁矩规则排列,增强或削弱外磁场的作用,从而给出了媒质磁化性能分类的描述。

鉴于上述分析的需求,也出于结合磁场力分析的进一步的教学目的,在此专题讨论磁偶极子在外磁场中的受力效应。

不失讨论的一般性,设磁偶极子位于  $xOy$  平面,其磁矩  $\mathbf{m}$  取向为  $\mathbf{e}_z$  方向,并设外磁场的磁感应强度  $\mathbf{B}$  含有  $B_y$ 、 $B_z$  两个分量,如图 3.6 所示。

应用左手定则可以看出,分量  $B_z$  作用于每个元电流  $I d\mathbf{l}$  的力  $d\mathbf{F}_1$  均位于  $xOy$  平面中,所以这种力对位于  $xOy$  平面上的载流回路只可能产生移动。可是,对所论的磁偶极子,由于在其范围内的磁场是均匀的 ( $|\mathbf{B}| = \text{Const.}$ ), 于是  $B_z$  是常量,而  $d\mathbf{F}_1 = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}_z$ , 从而

$$\mathbf{F}_1 = I \oint d\mathbf{l} \times \mathbf{B}_z = I \left( \oint d\mathbf{l} \right) \times \mathbf{B}_z = 0$$

式中  $\oint d\mathbf{l} = 0$ 。由此可得结论:均匀磁场作用于载流回路的合力总等于零,也就是说,这个力不会使载流回路移动。

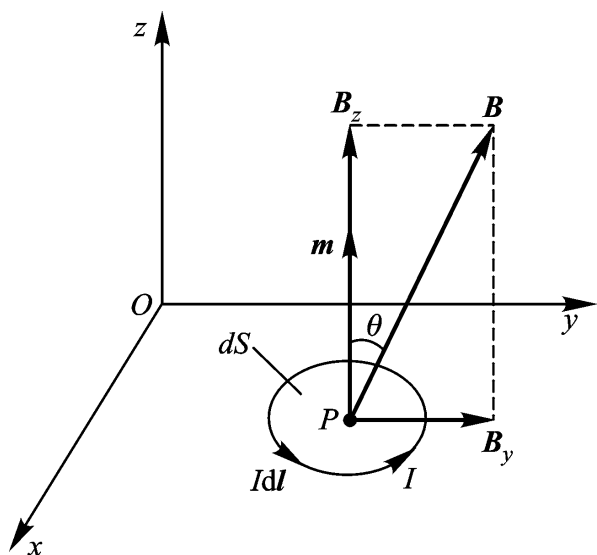


图 3.6 位于外磁场  $\mathbf{B}$  中的磁偶极子

分量  $B_y$  作用于每个元电流  $I d\mathbf{l}$  的

力  $d\mathbf{F}_2$  都垂直于  $xOy$  平面,注意到左半个载流回路受力方向向上,而右半个载流回路受力方向向下,因此,这种力使磁偶极子产生转动。从图中可以给出:

$$d\mathbf{l} = dx \mathbf{e}_x + dy \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{B}_y = B_y \mathbf{e}_y = B \sin \theta \mathbf{e}_y$$

力偶的转矩与其轴的选择无关,故现选取  $x$  轴来计算  $\mathbf{B}_y$  作用于磁偶极子的转矩。首先,元电流  $I d\mathbf{l}$  受力对  $x$  轴的元转矩为

$$\begin{aligned} d\mathbf{M} &= y \mathbf{e}_y \times d\mathbf{F}_2 = y \mathbf{e}_y \times (I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}_y) \\ &= y \mathbf{e}_y \times [I(dx \mathbf{e}_x + dy \mathbf{e}_y) \times B \sin \theta \mathbf{e}_y] \\ &= y \mathbf{e}_y \times IB \sin \theta dx \mathbf{e}_x = IB \sin \theta y dx \mathbf{e}_x \end{aligned}$$

由此可得磁偶极子对  $x$  轴的转矩(力偶)为

$$\mathbf{M} = IB \sin \theta \left( \int y dx \right) \mathbf{e}_x = -IB \sin \theta dS \mathbf{e}_x = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (3.6)$$

式中,应用格林公式  $\int_C X(x, y) dx + Y(x, y) dy = \int_D \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy$  可知,

$$\int_C y dx = -dS.$$

显然,磁偶极子在外磁场中要发生转动,其转矩  $\mathbf{M}$  取决于外磁场  $\mathbf{B}$  和其自身的磁矩  $\mathbf{m}$ 。应指出,磁偶极子的转动总是企图使其自身磁场与外磁场有一致的方向,也就是说,它总是企图加强外磁场,或企图交链尽可能多的磁通。这是因为  $\mathbf{m}$  与  $\mathbf{B}$  同向时( $\theta = 0$ ), 转矩  $\mathbf{M} = 0$ , 磁偶极子处于稳定平衡位置,静止不动。但应指出,当  $\mathbf{m}$  与  $\mathbf{B}$  反向时( $\theta = \pi$ ), 虽然转矩  $\mathbf{M} = 0$ , 可是这时磁偶极子的位置是不稳定的,故最终仍将趋于惟一的稳定平衡位置。

### 3.3.6 作用于磁场中两种媒质分界面上的磁压力

按照法拉第观点,磁场中任一磁感应强度管沿其轴线方向受到纵张力,而在垂直于轴线方向,则受到侧压力作用。纵张力和侧压力的量值相等,都等于  $BH/2$  (单位:  $\text{N m}^{-2}$ )。现由此出发,可求得作用于磁场中两种媒质分界面上的磁压力。

在两媒质交界面上,取一小面积  $\Delta S$  (图 3.7), 则从媒质  $\mu_1$  侧对该小面积沿磁场方向所作用的力为

$$F_1 = \frac{B_1 H_1}{2} \Delta S \cos \alpha_1$$

而在垂直于磁场方向所作用的力为

$$F_1' = \frac{B_1 H_1}{2} \Delta S \sin \alpha_1$$

由  $F_1$  和  $F_1'$  所得合力  $F_1$  在分界面的法向与切向的分量分别为:

$$\begin{aligned} F_{1n} &= F_1 \cos \alpha_1 - F_1' \sin \alpha_1 \\ &= \frac{B_1 H_1}{2} \Delta S (\cos^2 \alpha_1 - \sin^2 \alpha_1) \\ &= \frac{B_1 H_1}{2} \Delta S \cos(2\alpha_1) \end{aligned}$$

和  $F_{1t} = F_1 \sin \alpha_1 + F_1' \cos \alpha_1 = \frac{B_1 H_1}{2} \Delta S \sin(2\alpha_1)$

由此可得,媒质  $\mu_1$  作用于分界面上单位面积的合力为

$$P_1 = \frac{F_1}{\Delta S} = \frac{1}{2} (F_{1n}^2 + F_{1t}^2) = \frac{B_1 H_1}{2}$$

且因  $\frac{F_{1t}}{F_{1n}} = \tan(2\alpha_1)$

故此力对法线的偏倾角为法线与磁场方向夹角的二倍。

同理,可得媒质  $\mu_2$  作用于分界面上单位面积的合力为

$$P_2 = \frac{B_2 H_2}{2}$$

及其关于法线的偏倾角为

$2\alpha_2 = \arctan \frac{F_{2t}}{F_{2n}}$ , 如图 3.8 所示。

为求合力,可分别由该两力的法向和切向分量 ( $2\alpha_2 > 90^\circ$ ) 合成得:

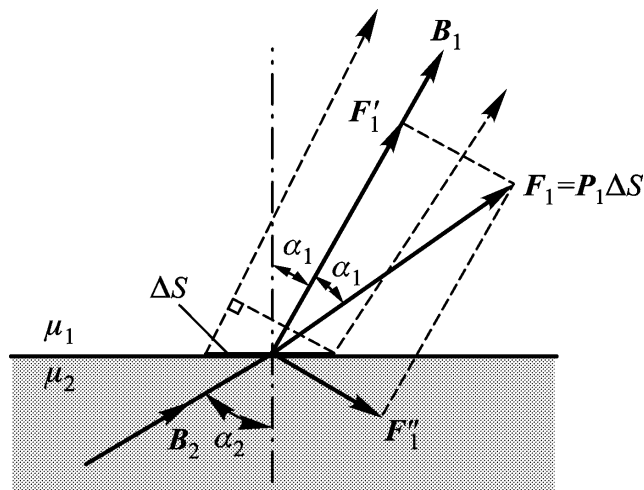


图 3.7

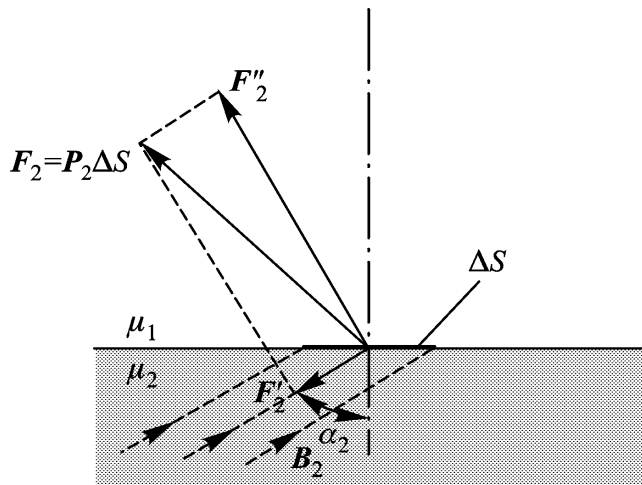


图 3.8

$$P_n = P_{1n} - P_{2n} = \frac{B_1 H_1}{2} \cos(2\alpha_1) - \frac{B_2 H_2}{2} \cos(2\alpha_2)$$

$$P_t = P_{1t} - P_{2t} = \frac{B_1 H_1}{2} \sin(2\alpha_1) - \frac{B_2 H_2}{2} \sin(2\alpha_2)$$

因为  $H_{1t} = H_{2t}$  (即  $H_1 \sin \alpha_1 = H_2 \sin \alpha_2$ ),  $B_{1n} = B_{2n}$  (即  $B_1 \cos \alpha_1 = B_2 \cos \alpha_2$ ), 故知  $P_t = 0$  (图 3.9)。

这样, 在任何媒质中, 不论磁场的方向怎样, 磁场作用于每一元面积上的力 (磁压力) 总是与该元面积相垂直, 其值为

$$\begin{aligned} P &= P_n = \frac{B_1 H_1}{2} (\cos^2 \alpha_1 - \sin^2 \alpha_1) - \frac{B_2 H_2}{2} (\cos^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_2) \\ &= \frac{B_{1n}^2}{2 \mu_1} - \frac{\mu_1 H_{1t}^2}{2} - \frac{B_{2n}^2}{2 \mu_2} + \frac{\mu_2 H_{2t}^2}{2} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{2 \mu_1 \mu_2} (B_{1n}^2 + \mu_1 \mu_2 H_{1t}^2) \end{aligned}$$

此力恒由磁导率较大的媒质指向磁导率较小的媒质。因为除了铁磁物质以外, 对于所有的媒质,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ ; 故此表面力仅在铁磁物质的表面上才起作用。如把  $\mu_2 = \mu_r \cdot \mu_0$  及  $\mu_1 = \mu_0$  代入, 其中  $\mu_r$  为铁磁物质的相对磁导率, 则可得磁场作用于铁磁物质表面 (单位面积上) 的磁压力, 其方向恒由铁磁物质指向空气, 其值为

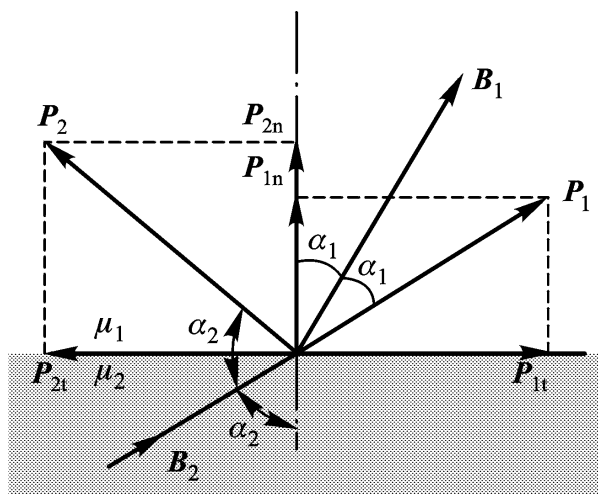


图 3.9

$$P = \frac{\mu_r - 1}{2 \mu_r \mu_0} (B_{1n}^2 + \mu_r \mu_0^2 H_{1t}^2)$$

$$= \frac{\mu_r - 1}{2 \mu_r \mu_0} (B_{1n}^2 + \mu_r \mu_0 B_{1t} \cdot H_{1t}) \quad (3.7)$$

式中  $B_{1n}$ ,  $B_{1t}$  及  $H_{1t}$  都是指界面上空气侧的磁场而言。在铁磁物体表面上的磁场, 通常可认为垂直于该物体的表面 ( $B_{1t} = 0$ ), 并因  $\mu_r \gg 1$ , 故工程上计算铁磁物体表面单位面积上所受的磁场力时, 常利用下式

$$P = \frac{B^2}{2 \mu_0} \quad (3.8)$$

若以铁磁物体把导线包围起来, 可释去载流导线上磁场的机械力作用 (将磁场力转移到铁磁物体上), 此种现象可以用表面力加以解释。

例如, 若将一导线放入铁管中, 则铁管的磁屏蔽作用将使该管内部导线所在处的磁感应强度, 较之铁管不存在时要小好多倍 (图 3.10)。假若现有电流流过被该管所包围的导线, 则在外磁场上需叠加该载流导线所产生的磁场。由此, 便

形成不对称的磁场分布,在管截面一侧中的磁感应强度将较另一侧中的为大,导致作用于管壁上的表面力在一侧较大。由此可见,几乎磁场内全部的机械力作用都由铁管承受,而作用于导线上的力,仅由铁管内部的那部分不大的磁感应强度所产生。在电机制造中,就广泛地利用上述原理而把导线嵌置在铁磁体的槽内,以释去导线所受到的机械力,并把这些力转移到铁磁体的槽齿壁上。

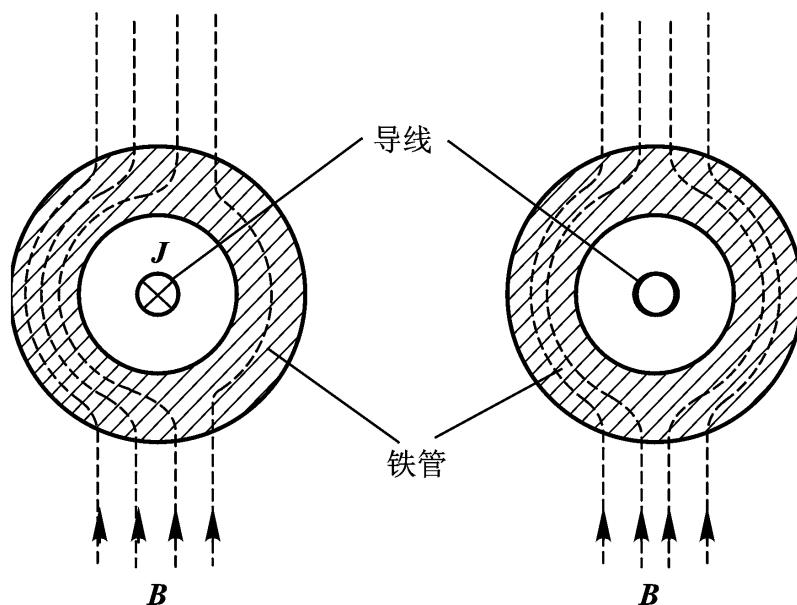


图 3.10

### 3.3.7 场图示例

已如前 2.3.8 节所述,在理解电磁场这一“特殊形式的物质”时,其“看不见、摸不着”的物理特性是使学习者困惑,产生学习困难的主要原因之一。教学实践证明,磁场场图描绘的方法给予磁场以直观、形象表示,从而为定性乃至定量分析磁场问题提供了极为有益的辅助手段。当今,各类磁场应用软件的后处理技术即包含有场图可视化的丰富内容,为满足科学研究和工程技术的需求,产生着十分积极的科学价值。

结合本章学习内容,现汇编以下有关的磁场场图,以供读者参阅,深化对相关知识点的理解(图中实线表示  $\mathbf{B}$  线;虚线为等标量磁位线)。

- 电偶极子的电场(图 3.11a)与磁偶极子的磁场(图 3.11b);
- 均匀外磁场中的一根长直载流导线周围的磁场(图 3.12);
- 位于两块铁磁平板( $\mu$  )之间的长直载流导线周围的磁场(图 3.13);
- 两平行长直载流导线的磁场(图 3.14);
- 两载流圆线圈的磁场(图 3.15);
- 均匀外磁场中的导磁体(图 3.16);

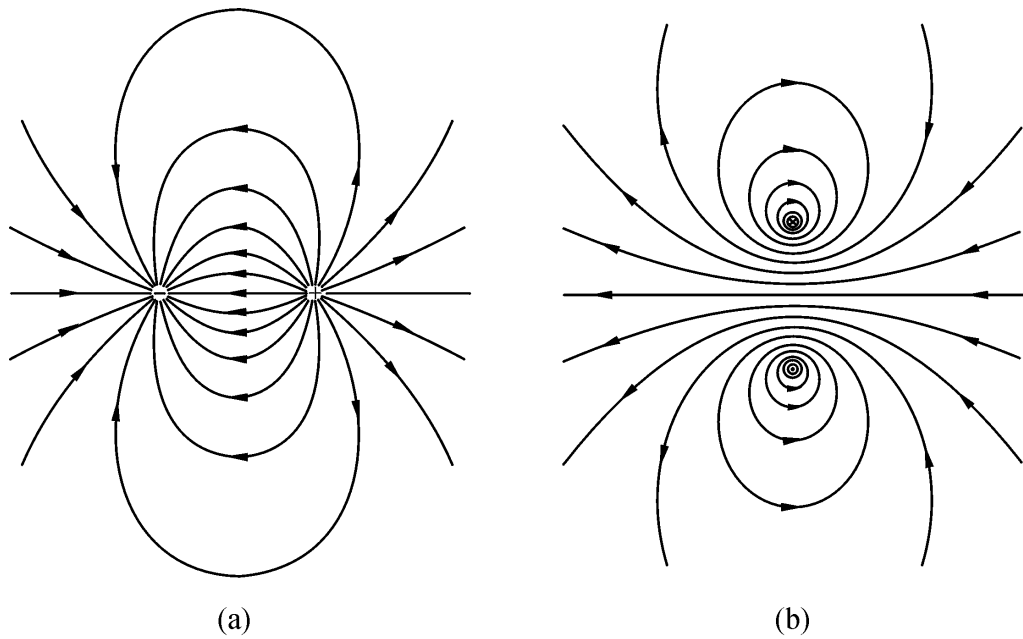


图 3.11 电偶极子的电场 (a) 与磁偶极子的磁场 (b)

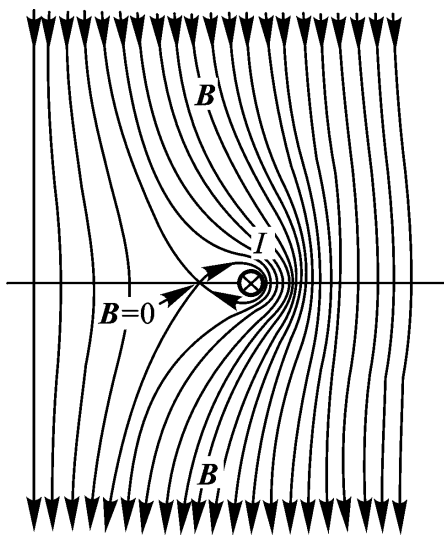


图 3.12 均匀外磁场中的一根长直载流导线周围的磁场

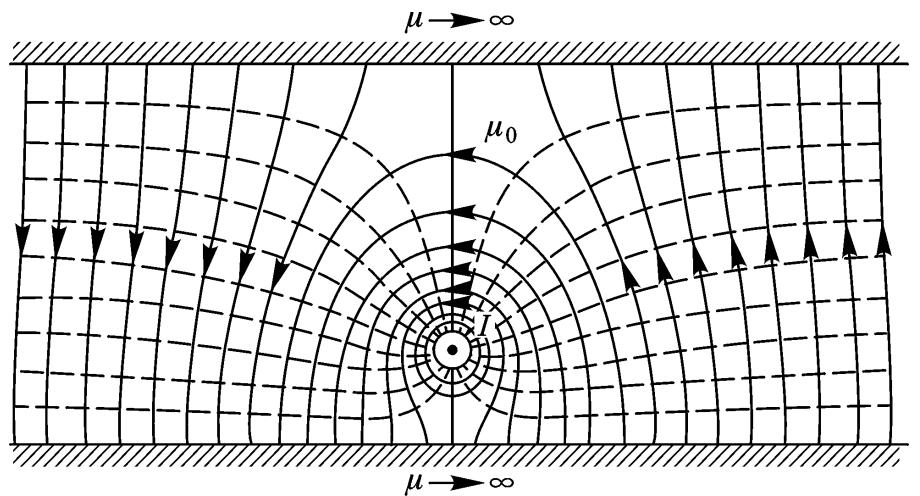


图 3.13 位于两块铁磁平板 ( $\mu \rightarrow \infty$ ) 之间的长直载流导线周围的磁场

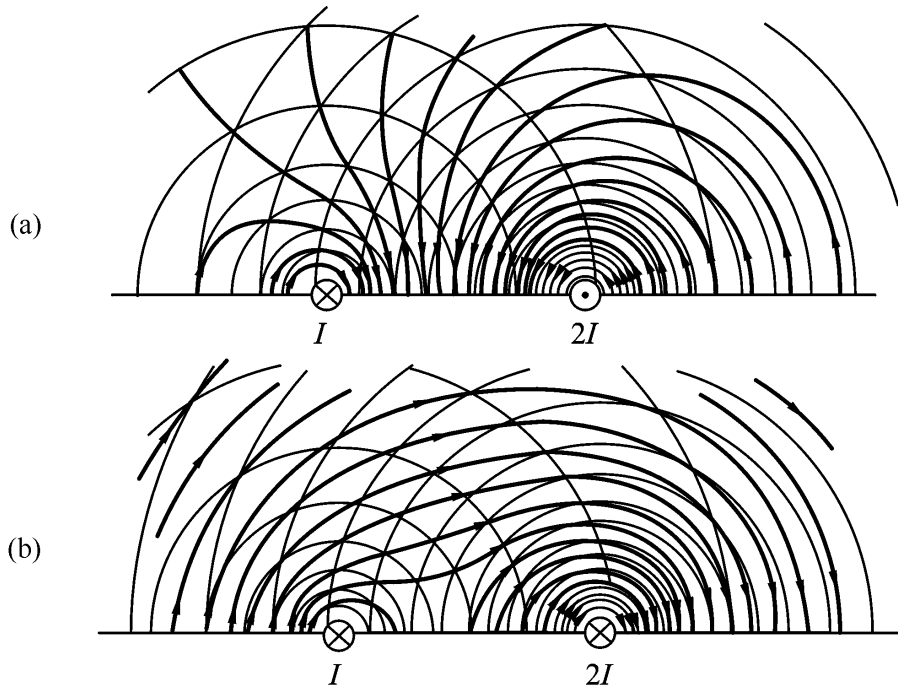


图 3.14 两平行长直载流导线的磁场

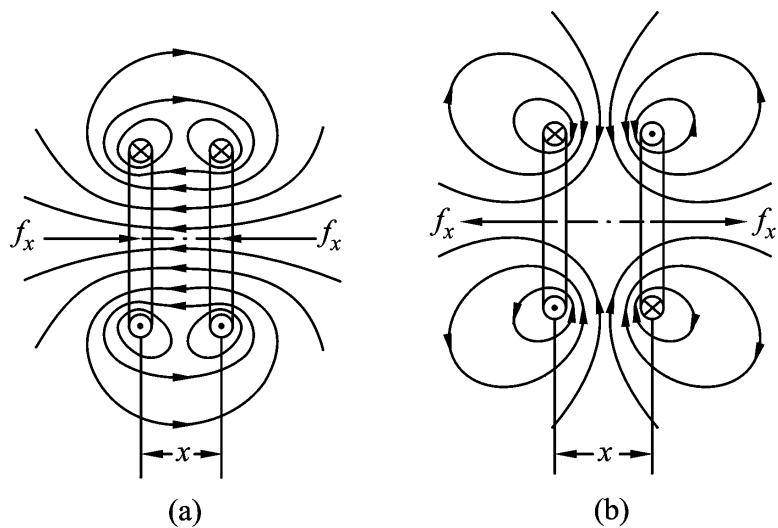


图 3.15 两载流圆线圈的磁场

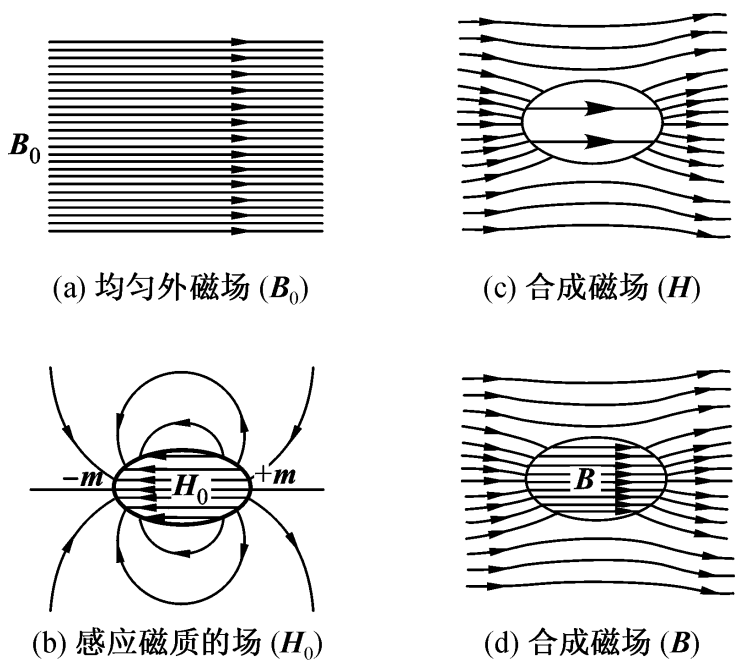


图 3.16 均匀外磁场中的导磁体

### 3.4 习题解析与解答

**3 - 1** 电导率为  $\sigma$  的均匀、各向同性的导体球，其表面上的电位为  $V_0 \cos \theta$ ，其中  $\theta$  是球坐标  $(r, \theta, \phi)$  的一个变量。试决定表面上各点的电流密度  $\mathbf{J}$ 。

[解题思路]

依题意，应根据恒定电流场中表征电流密度  $\mathbf{J}$  的媒质构成方程 (3 - 5)，在得知导体球表面各点电场强度  $\mathbf{E}$  分布的基础上，即可得解；

由该恒定电流场的无旋性 (3 - 2) 可知，所定义的电位函数  $V(\mathbf{r})$  与电场强度  $\mathbf{E}$  之间满足  $\mathbf{E} = -\nabla V$  的负梯度关系。因此，基于给定的在球坐标系下的  $V(\mathbf{r}) = V(r, \theta, \phi) = V_0 \cos \theta$  的表达式，按附录二中球坐标系下梯

度的展开式,即可由 解出在该导体球表面上的  $\mathbf{E}$  的分布,并最终如上所述解得待求  $\mathbf{J}$  的分布。

[解] 根据题意,设定以导体球球心为坐标原点的球坐标系,故按球坐标系下梯度展开式,可知

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = - \quad (\mathbf{r}) = - \quad ( ) = - \frac{1}{r} \mathbf{e} = \frac{0}{r} \sin \mathbf{e}$$

设导体球半径为  $r_0$ , 则在其表面上

$$\mathbf{E} \Big|_{r=r_0} = \frac{0}{r_0} \sin \mathbf{e}$$

从而,表面上各点的电流密度为

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{E} = \frac{0}{r_0} \sin \mathbf{e}$$

由此可见,在导体表面上,  $\mathbf{J}$  仅有 方向的分量。

**3 - 2** 一长度为 1 m, 内外导体的半径分别为  $R_1 = 5 \text{ cm}$ ,  $R_2 = 10 \text{ cm}$  的圆柱形电容器, 中间的非理想介质具有电导率  $\sigma = 10^{-9} \text{ S/m}$ 。若在两电极间加电压  $U_0 = 1000 \text{ V}$ , 求:

- (1) 各点的电位、电场强度;
- (2) 漏电导。

[解题思路]

首先,应判断场分布的特征。显然,在忽略该圆柱电容器边缘效应的理想化假设下,圆柱形极板间导电媒质中的恒定电流场具有对轴线呈同轴圆柱形对称分布的平行平面场特征。对此,可应用如下两种解题方法:

(1) 方法一——基于对称场中恒定电流场的基本关系[式(3 - 1)、式(3 - 2)和式(3 - 5)]所构造的解法。

具体解题路线:由设定  $I \quad \mathbf{J} \quad \mathbf{E} \quad U \quad G = I/U$ ;

(2) 方法二——采用静电比拟的方法(3.2.1 节)。

此时对应物理量与参数的类比关系,基于表 3 - 1 所列基本关系,应有:

$$\sim ; \sim ; \mathbf{E} \sim \mathbf{E} \text{ 和 } U \sim U。$$

[解] (1) 方法一 因电容器的长度远大于两圆柱形极板间距离,故可忽略边缘效应,极板间电场为对轴线呈同轴圆柱形对称分布的径向电场,且沿轴线分布呈平行平面场特征。设极板间漏电流为  $I$ , 由  $I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$ , 类比于题 2 - 6 的同样分析,即得电流密度为

$$\mathbf{J} = \frac{I}{2L} \mathbf{e} \quad (L \text{——电容器的长度})$$

故 
$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{2} = \frac{I}{L} \mathbf{e}$$

题设为给定电压的条件, 因此, 应继续通过场中电位, 进而解出  $U$  与所设的漏电流  $I$  之间的关联。为此, 若以外导体为电位参考点, 则电容器内任一点的电位为

$$\varphi(r) = \int_{R_2}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{R_2}^r \frac{I}{L} dr = \frac{I}{L} \ln \frac{R_2}{r}$$

由于 
$$U_0 = \varphi(R_1) = \frac{I}{L} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

得 
$$\frac{I}{L} = \frac{U_0}{\ln(R_2/R_1)} = \frac{1000}{\ln(10/5)} = 1442.7$$

因此, 待求场中各点的电位、电场强度分别为:

$$\varphi(r) = \frac{I}{L} \ln \frac{R_2}{r} = \frac{U_0}{\ln(R_2/R_1)} \ln \frac{R_2}{r} = 1442.7 \ln \frac{0.1}{r} \text{ V}$$

和 
$$\mathbf{E}(r) = \frac{U_0}{\ln(R_2/R_1)} \cdot \frac{1}{r} \mathbf{e} = 1442.7 \cdot \frac{1}{r} \mathbf{e} \text{ V/m}$$

最终按电路参数关系式, 即  $G = I/U$ , 可得待求的漏电导为

$$G = \frac{I}{U_0} = \frac{2 \cdot L}{\ln(R_2/R_1)} = \frac{2 \times 10^{-9} \times 1}{\ln(10/5)} \text{ S} = 9.06 \times 10^{-9} \text{ S}$$

## (2) 方法二

基于静电比拟原理, 在忽略边缘效应的理想化假设下, 本问题即可看作静电场中相应的同轴传输线(同轴电缆)(教材例 2 - 9、题 2 - 6)或圆柱形电容器(题 2 - 7)问题。

设极板间漏电流为  $I$ , 且以外导体( $r = R_2$ )为电位参考点, 则参照前已解得的静电场问题中的电位、电场强度和电容的解答, 即可得知场中各点的电场强度为

$$\mathbf{E}(r) = \frac{I}{2L} \mathbf{e}$$

应注意, 按题 2 - 6 中  $\mathbf{E}$  的解答, 即  $\mathbf{E} = \frac{I}{2L} \mathbf{e}$ , 在运用静电比拟原理写出本题恒定电流场  $\mathbf{E}$  的解答时, 由表 3 - 1 可知,  $I$  应对应于本题中的  $I/L$ 。

由此, 场中各点的电位

$$\varphi(r) = \int_{R_2}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{R_2}^r \frac{I}{2L} dr = \frac{I}{2L} \ln \frac{R_2}{r}$$

而按题设给定电压的条件, 即

$$U_0 = \varphi(R_1) = \frac{I}{2L} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

即 
$$\frac{I}{2L} = \frac{U_0}{\ln(R_2/R_1)}$$

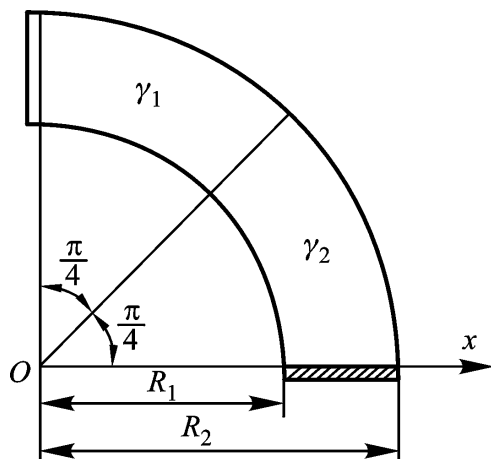
故 
$$U_0 = \frac{U_0}{\ln(R_2/R_1)} \ln \frac{R_2}{R_1} = 1442.7 \ln \frac{0.1}{0.01} \text{ V}$$

而 
$$\mathbf{E}(r) = \frac{U_0}{\ln(R_2/R_1)} \cdot \frac{1}{r} \mathbf{e} = 1442.7 \cdot \frac{1}{r} \mathbf{e} \text{ V/m}$$

这样,按电路参数关系式,可得待求的漏电导为

$$G = \frac{I}{U_0} = \frac{2L}{\ln(R_2/R_1)} = \frac{2 \times 10^{-9} \times 1}{\ln(10/5)} \text{ S} = 9.06 \times 10^{-9} \text{ S}$$

**3 - 3** 一导电弧片由两块不同电导率的薄片构成,如题3 - 3图所示。若  $\gamma_1 = 6.5 \times 10^7 \text{ S/m}$ ,  $\gamma_2 = 1.2 \times 10^7 \text{ S/m}$ ,  $R_2 = 45 \text{ cm}$ ,  $R_1 = 30 \text{ cm}$ , 钢片厚度为  $2 \text{ mm}$ , 电极间电压  $U = 30 \text{ V}$ , 且电极间求:



题 3 - 3 图

(1) 弧片内的电位分布(设  $x$  轴上的电极为零电位);

(2) 总电流  $I$  和弧片电阻  $R$ 。

[解题思路]

首先,应判断场分布的特征。显然,在题图所示的坐标平面内,基于平行平面场的特征以及给定电极处的边界条件(BC)可以判定,若采用点  $O$  为坐标原点的圆柱坐标系,则导电弧片内

电流场中任意场点处的电位  $(\mathbf{r}) = (r, \theta, z) = (r, \theta)$ , 即可构造待求电位函数  $(r, \theta)$  仅为一个坐标变量函数的边值问题(BVP)的数学模型;

根据边值问题(2.5节)的讨论,可见本题的数学模型即归结为位函数  $(r, \theta)$  的常微分方程的定解问题,采用直接积分法(2.5.2节)即可得解;

在解出导电弧片中电位  $(r, \theta)$  分布后,由  $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ ,  $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$ , 即可解出总电流

$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$ , 以及根据电路参数关系式,即  $R = U/I$ , 可解得待求的弧片电阻  $R$ 。

片电阻  $R$ 。

[解] (1) 本题为平行平面场问题,采用圆柱坐标系,可知导电片中的电位

$(r, \theta, z)$  仅为坐标  $(r, \theta)$  的函数,即  $\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$ , 从而根据题意可写出下列边值问题:

$$\text{泛定方程: } \nabla^2 \varphi_1(\rho) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 \varphi_1}{d\rho^2} = 0 \quad R_1 < \rho < R_2, \frac{R_1}{4} < \rho < \frac{R_2}{2} \quad (1)$$

$$\nabla^2 \varphi_2(\rho) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 \varphi_2}{d\rho^2} = 0 \quad R_1 < \rho < R_2, 0 < \rho < \frac{R_1}{4} \quad (2)$$

$$\text{BC: } \left. \varphi_2 \right|_{\rho=0} = 0$$

$$\left. \varphi_1 \right|_{\rho=\frac{R_2}{2}} = U_0 = 30 \text{ V}$$

$$\text{衔接条件: } \left. \varphi_1 \right|_{\rho=\frac{R_1}{4}} = \left. \varphi_2 \right|_{\rho=\frac{R_1}{4}}, \quad \left. \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{d\rho} \right|_{\rho=\frac{R_1}{4}} = \left. \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{d\rho} \right|_{\rho=\frac{R_1}{4}}$$

由此可见, 本题数学模型归结为位函数  $\varphi(\rho)$  的常微分方程的定解问题。因此, 对泛定方程(1)、(2)分别积分两次, 即得通解:

$$\varphi_1 = C_1 \rho + C_2; \quad \varphi_2 = C_3 \rho + C_4$$

利用 BC 以及位于两导电媒质 ( $\epsilon_1$ 、 $\epsilon_2$ ) 分界面上的 BC (即其衔接条件), 可确定积分常数, 得:

$$C_4 = 0, \quad C_1 = \frac{U}{\frac{R_1}{4} \epsilon_1 + \frac{1}{\epsilon_2}} = \frac{30}{\frac{R_1}{4} \epsilon_1 + \frac{6.5}{1.2}} = 5.953$$

$$C_2 = U - \frac{R_2}{2} C_1 = 20.65, \quad C_3 = \frac{1}{2} C_1 = 32.25$$

$$\varphi_1(\rho) = \frac{U}{\frac{R_1}{4} \epsilon_1 + \frac{1}{\epsilon_2}} \rho + \frac{U(\frac{R_1}{4} - \frac{R_2}{2})}{\epsilon_1 + \epsilon_2} = 5.95 \rho + 20.65 \text{ V} \quad \frac{R_1}{4} < \rho < \frac{R_2}{2}$$

故  $\varphi(\rho) =$

$$\varphi_2(\rho) = \frac{4 U \epsilon_1}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \rho = 32.25 \rho \text{ V} \quad 0 < \rho < \frac{R_1}{4}$$

(2) 基于  $\varphi(\rho)$  的解答, 可续求导电弧片中电场强度  $\mathbf{E}$  的分布, 应有

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi = -\frac{1}{\rho} \frac{d\varphi}{d\rho} \mathbf{e}_\rho$$

而在分界面上, 有  $\mathbf{J} = \epsilon_1 \mathbf{E}_1 = \epsilon_2 \mathbf{E}_2$  ( $\mathbf{J}$  呈现为分界面上的法向分量)

$$\text{得 } \mathbf{J}_1 = -\epsilon_1 \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi_1}{d\rho} \mathbf{e}_\rho = \frac{4 U \epsilon_1 \epsilon_2}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \mathbf{e}_\rho = \mathbf{J}_2$$

故导电弧片内流过的总电流

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{R_1}^{R_2} C_1 \epsilon_1 \frac{d}{\rho} d\rho = C_1 \epsilon_1 d \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$= \frac{4 U \epsilon_1 \epsilon_2 d}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \ln \frac{R_2}{R_1} = 3.137 \times 10^5 \text{ A}$$

按电路参数关系式, 弧片的电阻为

$$R = \frac{U}{I} = 9.56 \times 10^{-5}$$

**3 - 4** 一个由钢条组成的接地体系统, 已知其接地电阻为  $100 \Omega$ , 土壤的电导率  $\gamma = 10^{-2} S/m$ 。设有短路电流  $500 A$  从钢条流入地中, 有人正以  $0.6 m$  的步距向此接地体系统前进, 前足距钢条中心  $2 m$ , 试求跨步电压。(解题时, 可将该接地体系统用一半球形接地器等效替代之。)

[解题思路]

本题为电力系统中典型的跨步电压计算的应用问题。按题设, 鉴于在半无限大的大地的土壤媒质空间内, 由半球形接地器中流出的短路电流的电场具有球对称分布的特征, 因此, 可应用如下两种解题方法:

(1) 方法一——基于对称场中恒定电流场的基本关系 [式(3 - 1)、式(3 - 2)和式(3 - 5)] 所构造的解法。

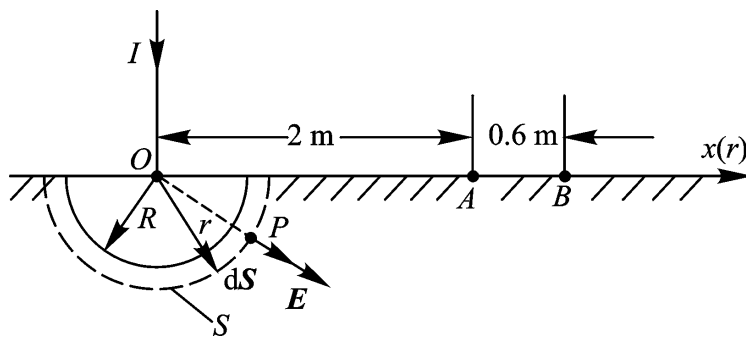
具体解题路线: 由设定  $I \quad \mathbf{J} \quad \mathbf{E}$  跨步电压  $U_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ ;

(2) 方法二——采用静电比拟的方法(3.2.1节)。

此时对应物理量的类比关系, 基于表 3 - 1 所列基本关系, 应有:

$$\sim ; \mathbf{E} \sim \mathbf{E} \text{ 和 } U \sim U。$$

[解] (1) 方法一 据题意, 本工程问题可归结为如图示的半球形接地器的电流场问题。



题 3 - 4 图(1)

以球半径  $r$  作与半球形接地器同心的半球面  $S$ , 并以球心  $O$  为球坐标系原点, 则基于该短路电流  $I$  由接地器流入土壤的电场  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(r)$ , 具有球对称分布的特征, 因而可得:

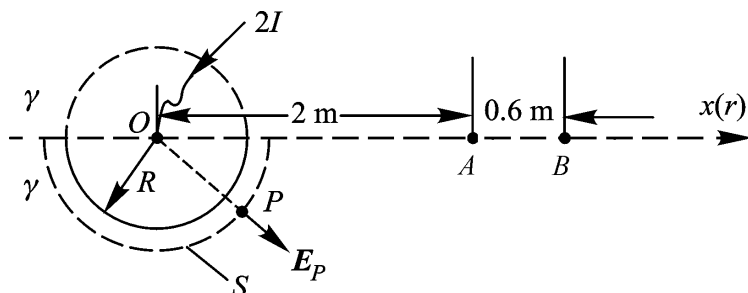
$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_S E \cdot dS = E \int_S dS = E \cdot 2\pi r^2$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{I}{2\pi r^2} \mathbf{e}_r$$

由此可知, 跨步电压为

$$\begin{aligned}
 U_{AB} &= \int_{r_A}^{r_B} E(r) dr = \int_{r_A}^{r_B} \frac{I}{2r^2} dr = \frac{I}{2} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \\
 &= \frac{500}{2 \times 10^{-2}} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2+0.6} \right) \text{ V} = 918 \text{ V}
 \end{aligned}$$

(2) 方法二 应用镜像法, 可得如图示的在单一均匀媒质中的电流场问题。显然, 基于静电比拟原理, 本问题即可看作静电场中相应的在单一均匀介质中的带电导体球的电场问题。



题 3 - 4 图(2)

参照前已解得的该静电场问题的电场强度  $\mathbf{E}$  和电压  $U$  的解答 (题 2 - 8(3)), 即可得知土壤中任意场点  $P$  处的电场强度

$$\mathbf{E}_P(r) = \frac{I}{2r^2} \mathbf{e}_r$$

式中, 按题 2 - 8(3) 中  $\mathbf{E}$  的解答, 在运用静电比拟原理写出本题  $\mathbf{E}$  的解答时, 由表 3 - 1 可知,  $q$  应对应于本题中的  $2I$ 。

由此可知, 待求的跨步电压即为

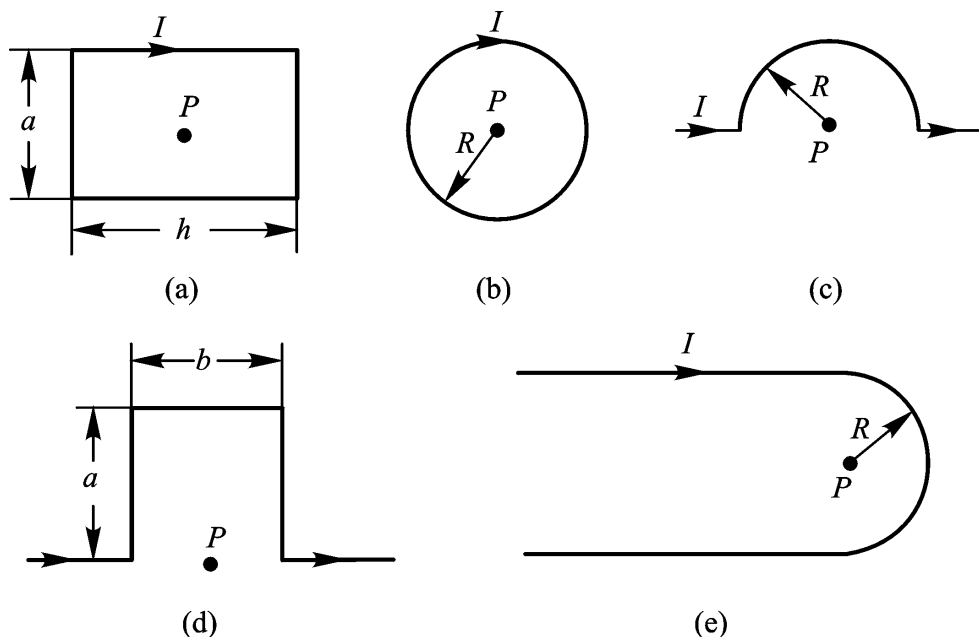
$$\begin{aligned}
 U_{AB} &= \int_{r_A}^{r_B} E(r) dr = \int_{r_A}^{r_B} \frac{I}{2r^2} dr = \frac{I}{2} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \\
 &= \frac{500}{2 \times 10^{-2}} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2+0.6} \right) \text{ V} = 918 \text{ V}
 \end{aligned}$$

**3 - 5** 分别求题 3 - 5 图(1)所示各种形状的线电流在真空中的  $P$  点所产生的磁感应强度。

[解题思路]

对于结构形态比较复杂的载流系统, 解题的基本思路是, 首先将整体电流分布离散化为典型的元电流 [式 (3 - 35)] 分布的组合, 求出相应于元电流的场中元磁感应强度的解答; 然后, 应用叠加原理, 合成所有元电流的贡献, 即得待求的  $\mathbf{B}$  场分布;

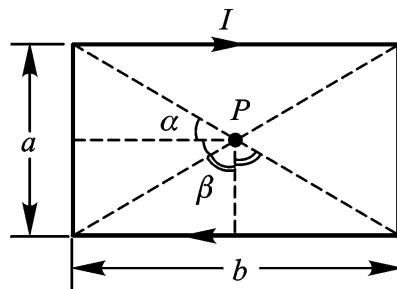
题(a) — (e) 的载流系统表明, 按“先分后合”的上述解题思路, 其典型载流元均归结为元电流  $Id\mathbf{l}$ ; 而由元电流所激励的元磁感应强度  $d\mathbf{B}$ , 对应于题设的无限大单一均匀媒质 (真空)  $\mu_0$  的条件, 当应由毕奥—萨伐尔定律 (3 - 34) 给出。



题 3 - 5 图(1)

[解] (a) 本题载流系统的构造可分解为四段有限长直载流导线的组合。因而基于教材例 3 - 4 的分析, 可得

$$\begin{aligned}
 B_P &= 2 \cdot \frac{\mu_0 I}{4} \frac{\frac{b}{2}}{\frac{a}{2}^2 + \frac{b}{2}^2} (\sin \alpha + \sin \beta) + 2 \cdot \frac{\mu_0 I}{4} \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}^2 + \frac{b}{2}^2} (\sin \alpha + \sin \beta) \\
 &= \frac{\mu_0 I}{b} \cdot 2 \cdot \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}^2 + \frac{b}{2}^2} + \frac{\mu_0 I}{a} \cdot 2 \cdot \frac{\frac{b}{2}}{\frac{a}{2}^2 + \frac{b}{2}^2} \\
 &= \frac{2 \mu_0 I}{ab} \cdot \frac{a^2 + b^2}{ab}
 \end{aligned}$$



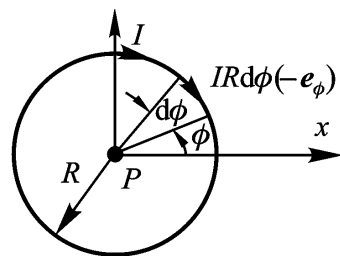
题 3 - 5 图(2)

$B_P$  方向垂直于该载流线圈平面(可取为  $\mathbf{e}_z$  方向)。

(b) 本题载流系统的构造可离散化为无限多个元电流  $I dl = IR d\phi$  的组合。如图示设定的坐标系, 可见电流元为  $IR d\phi (-\mathbf{e}_\phi)$ , 由毕奥—萨伐尔定律可得:

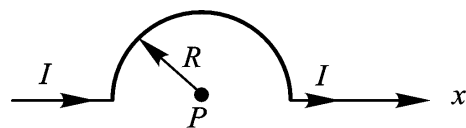
$$d\mathbf{B}_P = \frac{\mu_0}{4} \cdot \frac{IR d\phi (-\mathbf{e}_\phi) \times (-\mathbf{e}_r)}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4 R} d\phi (-\mathbf{e}_z)$$

$$\mathbf{B}_P = \int d\mathbf{B}_P = \frac{\mu_0 I}{4 R} \int_0^{2\pi} d\phi (-\mathbf{e}_z) = \frac{\mu_0 I}{2 R} (-\mathbf{e}_z)$$



题 3 - 5 图(3)

(c) 如图示, 本问题的载流系统可分解为直线载流部分和半圆环载流部分的叠加。对于前者, 基于毕奥—萨伐尔定律, 因有  $I d\mathbf{l} \times \mathbf{e}_R = I d x \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x = 0$  (左侧载流直线段) 或  $I d\mathbf{l} \times \mathbf{e}_R = I d x \mathbf{e}_x \times (-\mathbf{e}_x) = 0$  (右侧载流直线段), 故直线载流部分对场点  $P$  处的  $\mathbf{B}$  并无贡

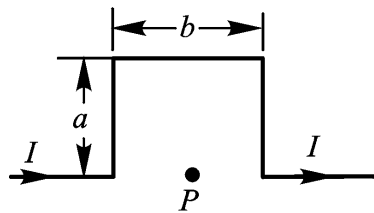


题 3 - 5 图(4)

献。换句话说,  $\mathbf{B}_P$  仅决定于半圆环载流线段的贡献。根据(b)的讨论, 显然, 半圆环载流线段在  $P$  点产生的磁感应强度  $\mathbf{B}_P = \frac{\mu_0 I}{4R} (-\mathbf{e}_z)$ , 此即为本题之解。

(d) 由(c)进行的分析可知, 左右两侧直线载流线段对  $P$  点的  $\mathbf{B}$  没有贡献, 而结合(a)的分析可见, 本问题的解即相当于(a)所示矩形载流回路效应的一半, 因此

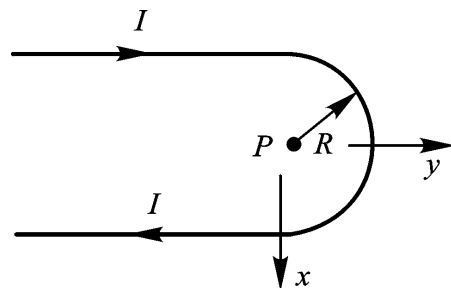
$$\mathbf{B}_P = \frac{\mu_0 I}{4R} \cdot \frac{(2a)^2 + b^2}{(2a)b} \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4R} \frac{4a^2 + b^2}{2ab} \mathbf{e}_z$$



题 3 - 5 图(5)

(e) 如图所示, 本问题的载流系统可分解为两根半无限长的长直载流导线与半圆形载流环共同产生的场效应, 因而由教材例 3 - 4和(c)的分析, 即可得出

$$\mathbf{B}_P = \frac{\mu_0 I}{4R} + \frac{\mu_0 I}{4R} + \frac{\mu_0 I}{4R} (-\mathbf{e}_z) = \frac{\mu_0 I(2+)}{4R} (-\mathbf{e}_z)$$



题 3 - 5 图(6)

**3 - 6** 真空中两根平行长直导线的截面半径都为  $R$ , 轴线距离为  $D$ , 导线中电流为  $I$ , 如题 3 - 6 图所示。

(1) 试求在两导线的轴线平面上各处  $\mathbf{B}$  的表达式;

(2) 若两导线的电流同方向, 求  $\mathbf{B}$  的表达式。

[解题思路]

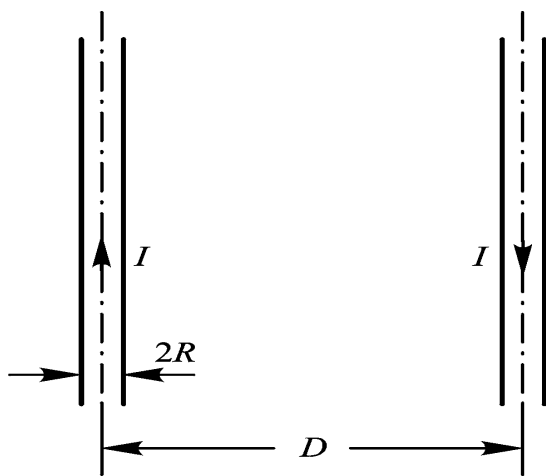
对应于本题的载流系统, “先分后合”的解题思路, 首先, 应归结为一根无限长直载流导线的磁场问题(教材例 3 - 4); 然后, 应用叠加原理, 最终得待求磁场  $\mathbf{B}$  的分布; 当求导线内部的磁场分布时, 因导线内电流  $I$  均匀分布, 即其电流密度  $\mathbf{J}$  为常数, 故应用真空中的安培环路定律(3 - 27), 可求出导线内任意场点处的  $\mathbf{B}$ 。

[解] 确立直角坐标系如题图(3)示。

(1) 由教材例 3 - 4 可知, 无限长直载流导线(设截面半径为  $R$ )的磁场在与导线轴相距  $r$  处场点上产生的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2r} \mathbf{e}_\phi \quad (r > R)$$

而对于导线内部与导线轴相距  $r$  处的场点, 作如题图(2)示的闭合回路  $l$ , 应用真空中的安培环路定律可得



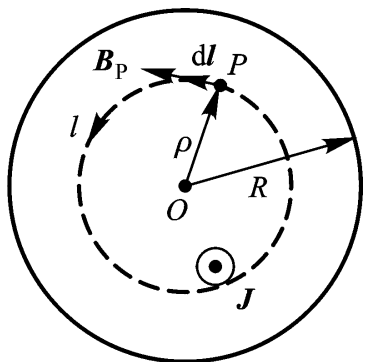
题 3 - 6 图(1)

$$\int_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_l B \cdot dl = B \int_l dl = B \cdot 2\pi R = \mu_0 I = \mu_0 \frac{I^2}{R^2}$$

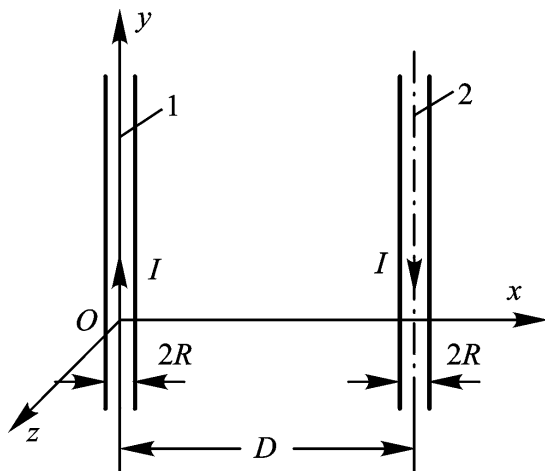
故导线内任意场点  $P$  上的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2 R^2} \mathbf{e}_\phi \quad (R < R)$$

基于以上两个方面的分析,应用叠加原理求解。设在两导线所在的  $xOy$  平面上任意场点  $P$  处,产生的磁场方向 ( $\mathbf{B}$  的方向) 为沿  $z$  轴方向,则基于上述无限长直载流导线场分布的解答,可得



题 3 - 6 图(2)



题 3 - 6 图(3)

$$B_P = B_{P1} + B_{P2}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2x} - \frac{\mu_0 I}{2(D-x)} = -\frac{\mu_0 ID}{2x(D-x)}$$

( $x < R$ ;  $R < x < (D-R)$  和  $x > (D+R)$ )

$$= -\frac{\mu_0 Ix}{2R^2} - \frac{\mu_0 I}{2(D-x)} = -\frac{\mu_0 I(R^2 - x^2 + xD)}{2R^2(D-x)}$$

( $-R < x < R$ )

$$= -\frac{\mu_0 I}{2x} - \frac{\mu_0 I(D-x)}{2R^2} = -\frac{\mu_0 I(x^2 - R^2 - xD)}{2xR^2}$$

( $(D-R) < x < (D+R)$ )

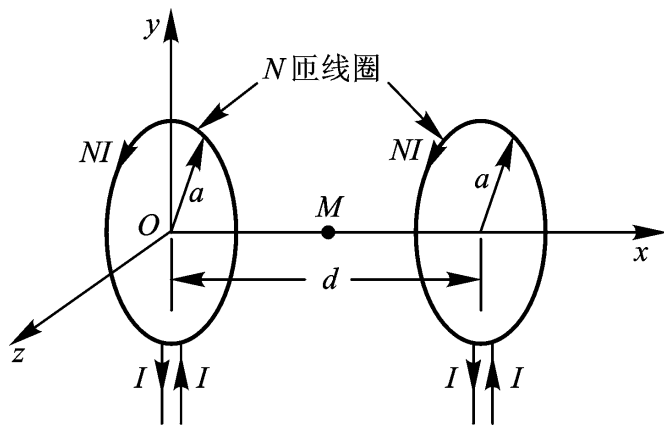
(2) 若导线 2 中电流与导线 1 中电流同向, 即沿  $y$  轴正向时, 则待求  $B_P$  与上式差别仅在于在  $B_{P2}$  前加一负号, 即可得解

$$= \frac{\mu_0 I}{2x} + \frac{\mu_0 I}{2(D-x)} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{D-2x}{x(D-x)} \quad (\text{导线外})$$

$$B_P = -\frac{\mu_0 Ix}{2R^2} + \frac{\mu_0 I}{2(D-x)} = \frac{\mu_0 I(R^2 + x^2 - xD)}{2R^2(D-x)} \quad (\text{导线 1 内部})$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{2x} + \frac{\mu_0 I(D-x)}{2R^2} = -\frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2 + x^2 - xD}{xR^2} \quad (\text{导线 2 内部})$$

**3-7** 题 3-7 图所示为工程上的亥姆霍兹线圈,用以在其中心  $M \frac{d}{2}, 0, 0$  附近获得均匀的磁场区。设该两载有同向电流  $I$  的各有  $N$  匝的圆环线圈,半径均为  $a$ ,相距为  $d$ 。试求:



题 3-7 图(1)

(1) 在两线圈轴线上任一场点  $P(x, 0, 0)$  处的磁感应强度  $\mathbf{B}_P$ ;

(2) 为获得均匀磁场区,设计中要求中点  $M$  处  $|\mathbf{B}_P|$  的二阶导数为零,试求此时几何尺寸  $a$  和  $d$  之间应满足的条件;

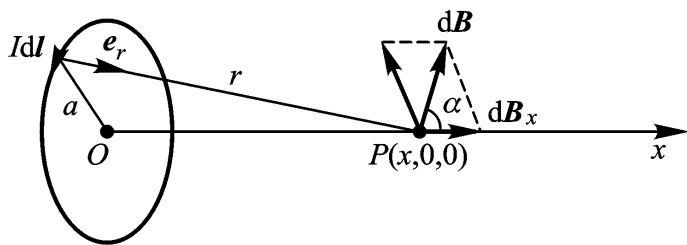
(3) 证明在中点  $M$  处  $|\mathbf{B}_P|$  将取得最大值。

[解题思路]

对应于本题由亥姆霍兹线圈给出的载流系统,“先分后合”的解题思路,首先,应归结为一个圆形载流回路的磁场问题;然后,将其离散化为无限多个元电流  $I d\mathbf{l}$  分布的组合,由毕奥—萨伐尔定律(3-34)求解之;最终再应用叠加原理,合成解出该亥姆霍兹线圈的磁场问题;

可以判断,在亥姆霍兹线圈系统的中点  $M$  处,  $|\mathbf{B}|$  取得最大值的条件当应是其对空间坐标变量的一阶导数满足为零的条件。

[解] (1) 首先分析单个载流线圈在点  $P$  处产生的  $\mathbf{B}$ , 根据“成对”元电流  $I d\mathbf{l}$  和  $I d\mathbf{l}$  在点  $P$  处合成的  $d\mathbf{B}$ , 仅有沿轴线  $Ox$  方向的分量,故在半径为  $a$  的周线上无限多个元电流  $I d\mathbf{l}$  最终在点  $P$  处  $\mathbf{B}$  合成效应只需考虑其  $x$  方向分量的叠加,即根据毕奥—萨伐尔定律可得



题 3-7 图(2)

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \int d\mathbf{B}_x = \int |\mathbf{dB}| \cos \alpha \mathbf{e}_x = \int \left| \frac{\mu_0 I d\mathbf{l} \times \mathbf{e}_r}{4\pi (a^2 + x^2)^{3/2}} \right| \frac{a}{a^2 + x^2} \mathbf{e}_x \\ &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi (a^2 + x^2)^{3/2}} \int d\mathbf{l} \mathbf{e}_x = \frac{\mu_0 I a^2}{2\pi (a^2 + x^2)^{3/2}} \mathbf{e}_x \end{aligned}$$

然后,遵循叠加原理,该亥姆霍兹线圈在其轴线上  $P$  点产生的磁感应强度

$$\mathbf{B}_P = B_x \mathbf{e}_x = \frac{N\mu_0 I a^2}{2} \frac{1}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{[a^2 + (d-x)^2]^{\frac{3}{2}}} \mathbf{e}_x$$

(2) 据题意, 由

$$\frac{d^2 B_x}{d x^2} = \frac{3 \mu_0 N I a^2}{2}$$

$$\frac{5 x^2}{(a^2 + x^2)^{\frac{7}{2}}} - \frac{1}{(a^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{5(d-x)^2}{[a^2 + (d-x)^2]^{\frac{7}{2}}} - \frac{1}{[a^2 + (d-x)^2]^{\frac{5}{2}}} \Bigg|_{x=\frac{d}{2}} = 0$$

整理之可得

$$5 x^2 - (a^2 + x^2) = 0$$

$$5(d-x)^2 - [a^2 + (d-x)^2] = 0$$

此联立方程解得:

$$x = \frac{a}{2} \text{ 与 } d = a$$

显然, 此即为亥姆霍兹线圈中均匀磁场区的存在条件。

(3) 在中点  $M \frac{d}{2}, 0, 0$  处, 按题意可知, 应证明该处  $|\mathbf{B}_M|$  对空间坐标变量的一阶导数为零, 即有

$$\frac{d B_M}{d x} \Bigg|_{x=\frac{d}{2}} = \frac{3 \mu_0 N I a^2}{2} - \frac{x}{(a^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{d-x}{[a^2 + (d-x)^2]^{\frac{5}{2}}} \Bigg|_{x=\frac{d}{2}} = 0$$

故

$$|\mathbf{B}_P|_{M \text{ 点}} = B_{P \text{ max}}$$

得证。

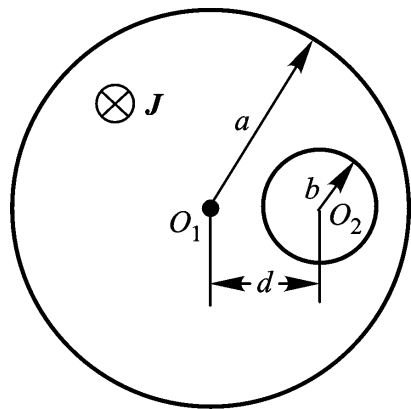
**3 - 8** 真空中, 一通有电流(电流密度为  $\mathbf{J} = J_0 \mathbf{e}_z$ ), 半径为  $a$  的无限长圆柱内, 有一半半径为  $b$  不同轴的圆柱形空洞。两轴线间相距  $d$ , 如题 3 - 8 图所示。试证: 小圆柱内的  $\mathbf{B}$  均匀, 且其值为  $\mu_0 J_0 d / 2$ 。

[解题思路]

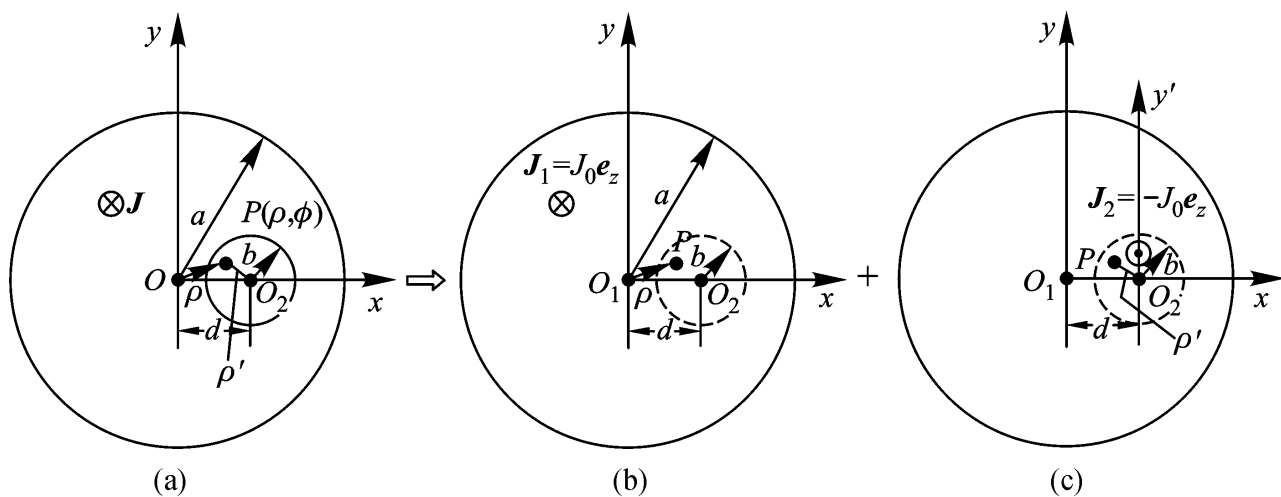
题设的载流系统在引用叠加原理为解题方法的基础上, 不难推断, 它可被分解为两个简单的分别载有同一电流密度  $|\mathbf{J}|$ , 但方向相反的无限长直圆柱形载流导体系统的合成效应;

基于上述分系统的磁场具有对轴线呈同轴圆柱形对称分布的平行平面场特征, 故可直接应用真空中的安培环路定律(3 - 27)解得其磁场分布; 为最终求得合成磁场的分布, 必须指出, 因  $\mathbf{B}$  场为矢量场, 故在叠加原理应用时, 务须遵循矢量分析的运算规则。

[证明] 如上所述, 题设的此载流系统可应用叠加原理分解为图示的(b)、(c)两载流系统的叠加来处理。



题 3 - 8 图(1)



题 3 - 8 图(2)

(1) 当分系统如图(b)所示在整个圆柱截面内通有电流密度为  $\mathbf{J}_1 = J_0 \mathbf{e}_z$  的电流时,由于场分布的对称性,  $\mathbf{B}_1$  是沿  $\mathbf{e}$  方向的,且仅与  $\rho$  有关,故应用安培环路定律(3 - 27)即可求得

$$2\pi \rho B_1 = \mu_0 J_0 \pi \rho^2$$

故  $\mathbf{B}_1 = B_1 \mathbf{e} = \frac{\mu_0 J_0}{2} \rho \mathbf{e} \quad (0 < \rho < a)$

(2) 当分系统如图(c)所示时,按坐标系  $xO_2y$ , 同上理,可得

$$\mathbf{B}_2 = B_2 \mathbf{e}' = -\frac{\mu_0 J_0}{2} \rho' \mathbf{e}' \quad (0 < \rho' < b)$$

由以上两解答的叠加,即得待求的小圆柱内的磁感应强度为

$$\mathbf{B}_P = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 J_0}{2} (\rho \mathbf{e} - \rho' \mathbf{e}')$$

而根据坐标系间转换关系有:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}' &= \frac{x^2 + y^2}{x'^2 + y'^2} (-\mathbf{e}_x \sin \alpha + \mathbf{e}_y \cos \alpha) \\ &= \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \frac{-y\mathbf{e}_x}{x^2 + y^2} + \frac{x\mathbf{e}_y}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{e}_x + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{e}_y \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} \mathbf{e}' &= \frac{(x-d)^2 + y^2}{(x-d)^2 + y^2} \frac{-y\mathbf{e}_x}{(x-d)^2 + y^2} + \frac{(x-d)\mathbf{e}_y}{(x-d)^2 + y^2} \\ &= -\frac{y}{(x-d)^2 + y^2} \mathbf{e}_x + \frac{(x-d)}{(x-d)^2 + y^2} \mathbf{e}_y \end{aligned}$$

代入得  $\mathbf{B}_P = \frac{\mu_0 J_0}{2} \{ -y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y - [ -y\mathbf{e}_x + (x-d)\mathbf{e}_y ] \} = \frac{\mu_0 J_0 d}{2} \mathbf{e}_y$

得证。

**3 - 9** 题 3 - 9 图为一半径为  $a$ 、磁导率为  $\mu$  的长直圆柱,通过密度为  $J_0 \mathbf{e}_z$  均匀分布的电流,圆柱周围是真空。求圆柱内外的  $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{H}$  及磁化电流密度  $\mathbf{J}_m$  和  $\mathbf{K}_m$ 。

[解题思路]

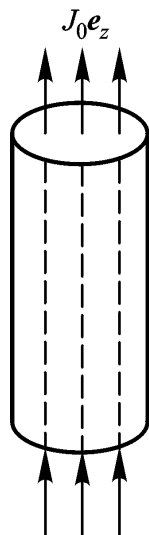
基于场分布的对称性——具有对轴线呈同轴圆柱形对称分布的平行平面场特征,可直接应用安培环路定律(3 - 27)和(3 - 73)解出待求的  $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{H}$  分布;按媒质磁化效应分析所得的基本关系,由磁化强度  $\mathbf{M}$  与  $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{H}$  之间的关联式(3 - 72),以及磁化体电流密度  $\mathbf{J}_m$ 、磁化面电流密度  $\mathbf{K}_m$  与磁化强度  $\mathbf{M}$  之间的关联式(3 - 68)、(3 - 69),即可解出  $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{J}_m$  和  $\mathbf{K}_m$  的分布。

[解] 理想化为图示无限长直载流圆柱,通过应用安培环路定律[式(3 - 27)和式(3 - 73)],即可得:

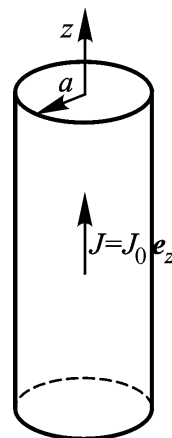
$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 a^2 J_0}{2} \mathbf{e} & (r > a) \\ \frac{\mu J_0}{2} \mathbf{e} & (r < a) \end{cases}$$

和

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \frac{a^2 J_0}{2} \mathbf{e} & (r > a) \\ \frac{J_0}{2} \mathbf{e} & (r < a) \end{cases}$$



题 3 - 9 图(1)



题 3 - 9 图(2)

在引入媒质磁化场的条件下,按磁场基本场量之间的关系式(3 - 72),可得

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{H} = \begin{cases} 0 & (r > a) \\ \frac{J_0 (\mu - \mu_0)}{2 \mu_0} \mathbf{e} & (r < a) \end{cases}$$

从而可解出磁化体电流密度  $\mathbf{J}_m$  和磁化面电流密度  $\mathbf{K}_m$  分别为:

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0} \frac{(\mu - \mu_0) J_0}{2} \mathbf{e}_z = \frac{(\mu - \mu_0) J_0}{2 \mu_0} \mathbf{e}_z$$

和

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \mathbf{e}_n \Big|_{r=a} = - \frac{(\mu - \mu_0) J_0 a}{2 \mu_0} \mathbf{e}_z$$

**3 - 10** 设载流为  $I$  的钢芯电缆,其内导体(钢芯)电导率为  $\sigma_1$ ,磁导率  $\mu_1 = 500 \mu_0$ ;外层导体(铝)电导率为  $\sigma_2$ ,磁导率  $\mu_2 = \mu_0$ 。求:

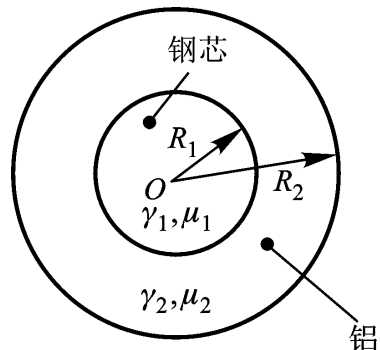
(1) 电缆内电流的分布;

(2) 电缆内外各处(即  $r < R_1$ ,  $R_1 < r < R_2$  和  $r > R_2$  三区域中)磁感应强度  $\mathbf{B}$  的分布。

[解题思路]

在该钢芯电缆为无限长直载流系统的理想化条件下, 根据其场分布的对称性, 即对轴线呈同轴圆柱形对称分布的平行平面场特征, 当可在进一步设定内、外导体分别载有不同的电流密度  $\mathbf{J}_1$  和  $\mathbf{J}_2$  的情况下, 应用安培环路定律 (3 - 73) 求解;

该钢芯电缆的运行工况表明, 其内、外导体中电流分布应反比于两导体的电阻 (或正比于两导体的电导)。



题 3 - 10 图

[解] (1) 设沿  $z$  轴放置的钢芯与外层铝导体中的电流密度分别为  $\mathbf{J}_1 = J_1 \mathbf{e}_z$  和  $\mathbf{J}_2 = J_2 \mathbf{e}_z$ , 则可知其运行工况应满足以下方程组:

$$J_1 R_1^2 + J_2 (R_2^2 - R_1^2) = I \quad (\text{由给定载流为 } I \text{ 的条件得出})$$

$$\frac{J_1 R_1^2}{J_2 (R_2^2 - R_1^2)} = \frac{\gamma_1 R_1^2}{\gamma_2 (R_2^2 - R_1^2)} \quad (\text{由电流分布正比于电导的关系得出})$$

由此解得:

$$J_1 = \frac{r_1}{r_2} \frac{I}{R_2^2 + \frac{r_1}{r_2} - 1 R_1^2}; \quad J_2 = \frac{I}{R_2^2 + \frac{1}{2} - 1 R_1^2}$$

(2) 应用安培环路定律, 可得:

$$B_1 2\pi r = \mu_1 J_1 \pi r^2$$

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_1 J_1}{2} \mathbf{e} = 250 \mu_0 J_1 \mathbf{e} \quad (r < R_1)$$

又由

$$B_2 2\pi r = \mu_2 [J_1 \pi R_1^2 + J_2 (\pi r^2 - \pi R_1^2)]$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 J_2}{2} \mathbf{e} + \frac{\mu_0 R_1^2 (J_1 - J_2)}{2} \mathbf{e} \quad (R_1 < r < R_2)$$

以及

$$B_3 2\pi r = \mu_0 I$$

$$\mathbf{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e} \quad (r > R_2)$$

**3 - 11** 真空中, 在  $x = -2 \text{ m}$ 、 $y = 0$  处, 有一沿  $\mathbf{e}_z$  方向  $6 \text{ mA}$  的线电流; 另外在  $x = 2 \text{ m}$ 、 $y = 0$  处, 有一沿  $(-\mathbf{e}_z)$  方向  $6 \text{ mA}$  的线电流。设原点的标量磁位  $\phi_m = 0$ , 试求沿  $y$  轴的  $\phi_m$ 。

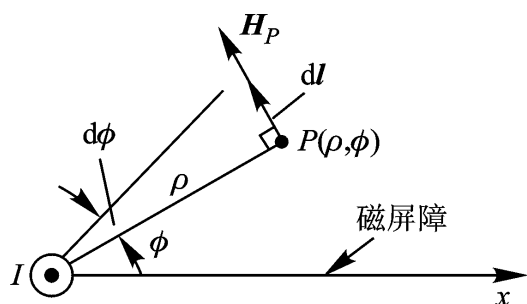
[解题思路]

为保证标量磁位  $\phi_m$  的单值性, 在分析中, 必须引入“磁屏障”(3.4.3 节);

标量磁位  $\phi_m$  为相对度量的计算辅助量, 在运用时, 还必须合适地选定零标量磁位的参考点;

本题的载流系统在引用叠加原理为解题方法的基础上, 可分解为两个简单的分别载有相同电流, 但流向相反的无限长直线电流系统的合成效应。

[解] 首先分析对应于单一无限长直线电流磁场分布的标量磁位  $\phi_m$  的表达式。设线电流  $I$  如图设置, 为保证  $\phi_m$  的单值性, 本题设定的磁屏障面为起自线电流表面沿  $x$  轴正方向无限延展的平面 [见图(1)]。显然, 该磁屏障面为一等磁位面, 为简化分析, 令其为参考磁位面, 即有



题 3 - 11 图(1)

$$\phi_m |_{\phi=0} = 0 \quad (1)$$

据磁位定义, 由式(3 - 51)可知:

$$d\phi_m = - \frac{\mathbf{B}_P}{\mu_0} \cdot d\mathbf{l} = - H_P dl = - \frac{I}{2} d\phi = - \frac{I}{2} d\phi$$

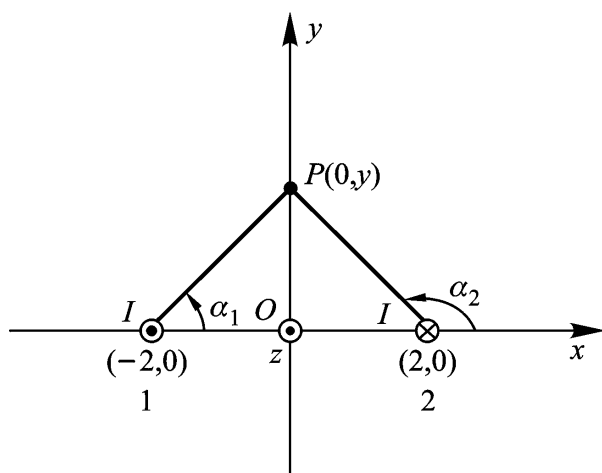
故 
$$\phi_m = - \frac{I}{2} \phi + c$$

代入式(1)的磁位参考点条件, 即得积分常数  $c = 0$ , 故在给定的线电流  $I$  流向下, 任意场点  $P(\rho, \phi)$  处的标量磁位

$$\phi_m = - \frac{I}{2} \phi$$

然后, 基于以上分析, 对于题设的载流系统, 如图(2)所示, 应用叠加原理可得

$$\phi_{mP} = \phi_{m1} + \phi_{m2} = - \frac{I}{2} \alpha_1 + \frac{I}{2} \alpha_2 + c$$



题 3 - 11 图(2)

根据前已确定的磁位参考点条件, 现应继续依此确定上式中待定的积分常数  $c$ 。显然, 当  $\alpha_2 = \alpha_1$  时, 应有  $\phi_{m2} = 0$ , 由此可知

$$c = - \frac{I}{2} \alpha_1$$

故 
$$\phi_{mP} = - \frac{I}{2} \alpha_1 + \frac{I}{2} (\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{I}{2} (-1 + 2 - 1) \\
 &= -\frac{I}{2} = -\frac{I}{2} \arctan \frac{y}{2}
 \end{aligned}$$

**3 - 12** 真空中厚度为  $d$  的无限大导板 ( $\mu = \mu_0$ ), 通有密度为  $J_0 \mathbf{e}_z$  的体电流, 求矢量磁位及磁感应强度。

[解题思路]

对应于本题的载流系统, 若单一求解其磁感应强度  $\mathbf{B}$  的分布, 则其“先分后合”的解题思路, 应可由教材例 3 - 4 例 3 - 5 例 3 - 6 依次展开的解题过程得到深入、系统的理解, 由此即可直接基于毕奥—萨伐尔定律(3 - 34)、真空中的安培环路定律(3 - 27), 并在运用叠加原理的基础上, 求得磁感应强度  $\mathbf{B}$  的分布。但应指出, 据题意, 本题系在引入辅助计算量——矢量磁位  $\mathbf{A}$  的前提下, 再求其磁感应强度  $\mathbf{B}$  的分布。因此, 应遵循下述解题途径:

- (1) 构造以矢量磁位  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  为待求量的边值问题的数学模型;
- (2) 求解上述数学模型, 得矢量磁位  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  的分布;
- (3) 再由  $\mathbf{A}$  的定义式, 即  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ , 最终解出磁感应强度  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  的分布;

在写出本题的数学模型——BVP 时, 应注意到计算场域内涉及有电流和无电流两类区域, 因此需分域定义相应的子域及与之对应的泛定方程;

当由已解出的  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ , 按定义式  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , 求解场中  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  的分布时, 需根据  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  表达式中相关的坐标变量, 在相应的坐标系下展开其旋度运算, 以解出  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 。

[解] 按计算场域  $D$  内有无电流存在, 如图所示划分子域, 即有  $D = D_1 + D_2 + D_3$ ; 然后, 设定直角坐标系如图。因励磁电流源  $\mathbf{J} = J_0 \mathbf{e}_z$ , 故由矢量磁位  $\mathbf{A}$  的直接积分计算式(3 - 31)可知

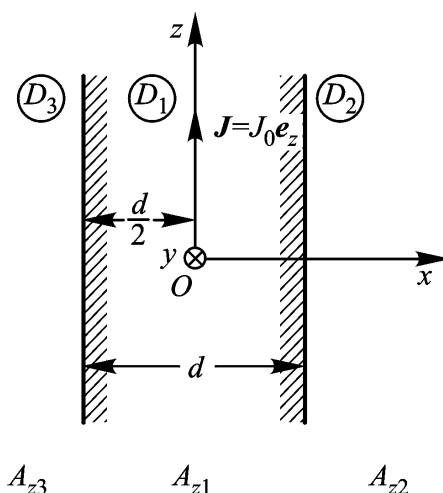
$$\mathbf{A} = A_z \mathbf{e}_z = A_z(x) \mathbf{e}_z$$

因而所构造的 BVP 中的泛定方程应分域定义为

$$\Delta^2 A_{z1}(x) = \frac{d^2 A_{z1}}{dx^2} = -\mu_0 J_0 \quad D_1 \quad -\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2}$$

$$\Delta^2 A_{z2}(x) = \frac{d^2 A_{z2}}{dx^2} = 0 \quad D_2 \quad x > \frac{d}{2}$$

$$\Delta^2 A_{z3}(x) = \frac{d^2 A_{z3}}{dx^2} = 0 \quad D_3 \quad x < -\frac{d}{2}$$



题 3 - 12 图

其对应的各子域中矢量磁位的通解为

$$A_{z1}(x) = c_1 x + c_2 - \frac{\mu_0 J_0}{2} x^2 \quad D_1: -\frac{d}{2} \leq x \leq \frac{d}{2}$$

$$A_{z2}(x) = c_3 x + c_4 \quad D_2: x \geq \frac{d}{2}$$

$$A_{z3}(x) = c_5 x + c_6 \quad D_3: x \leq -\frac{d}{2}$$

然后,引入相应的定解条件,以逐一确定各积分常数。

(1) 设定矢量磁位参考点为  $A_{z1} \Big|_{x=0} = 0$ , 故  $c_2 = 0$ 。

(2) 注意到场分布的对称性。对于  $D_1$  域,其解  $A_{z1}(x)$  应为偶函数,故  $c_1 = 0$ ; 对于  $D_2$  和  $D_3$  域,它们的解答  $A_{z2}(x)$  和  $A_{z3}(x)$  对相同的  $|x|$  应有同解,由此可以判定:  $c_4 = c_6$  和  $c_3 = -c_5$ 。这样,通解得以简化为

$$A_{z1} = -\frac{\mu_0 J_0}{2} x^2$$

$$A_{z2}(x) = c_3 x + c_4$$

$$A_{z3}(x) = -c_3 x + c_4$$

(3) 根据衔接条件,即在  $x = \pm \frac{d}{2}$  处,应有

$$A_{z1} = A_{z2}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{A_{z1}}{x} = \frac{1}{\mu_0} \frac{A_{z2}}{x}$$

$$-\frac{\mu_0 J_0}{2} \cdot \frac{d^2}{4} = c_3 \frac{d}{2} + c_4$$

得

$$-\mu_0 J_0 \cdot \frac{d}{2} = c_3$$

故

$$c_4 = \frac{\mu_0 J_0 d^2}{8}$$

最终得解

$$A_{z1}(x) = -\frac{\mu_0 J_0}{2} x^2 \quad |x| \leq \frac{d}{2}$$

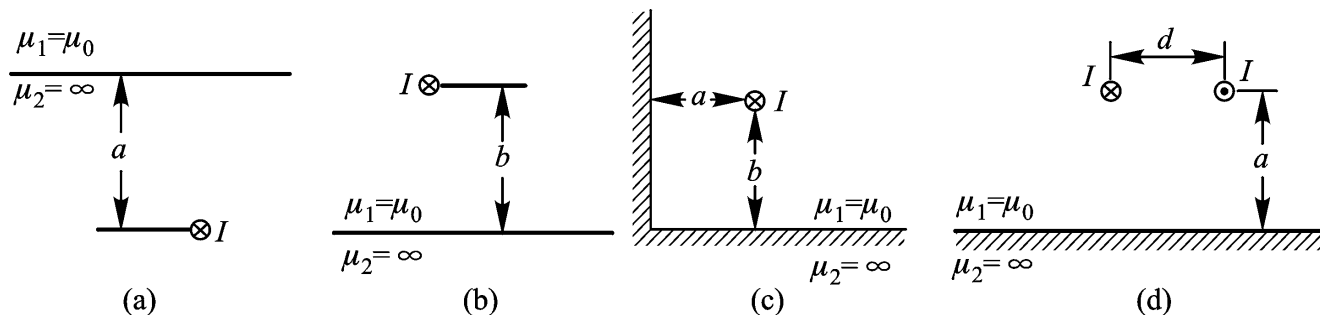
$$A_{z2}(x) = -\frac{\mu_0 J_0 d}{2} x - \frac{d^2}{4} \quad x \geq \frac{d}{2}$$

$$A_{z3}(x) = \frac{\mu_0 J_0 d}{2} x + \frac{d^2}{4} \quad x \leq -\frac{d}{2}$$

按上述矢量磁位函数的表达式,显然,应在直角坐标系下展开  $B = \nabla \times \mathbf{A}$ , 得

$$\mathbf{B} = -\frac{dA_z(x)}{dx}\mathbf{e}_y = \begin{cases} \mu_0 J_0 x \mathbf{e}_y & |x| < \frac{d}{2} \\ \mu_0 J_0 \frac{d}{2} \mathbf{e}_y & x > \frac{d}{2} \\ -\mu_0 J_0 \frac{d}{2} \mathbf{e}_y & x < -\frac{d}{2} \end{cases}$$

**3 - 13** 画出题 3 - 13 图所示各种情况下的镜像电流, 注明电流的方向、量值及有效的计算区域。



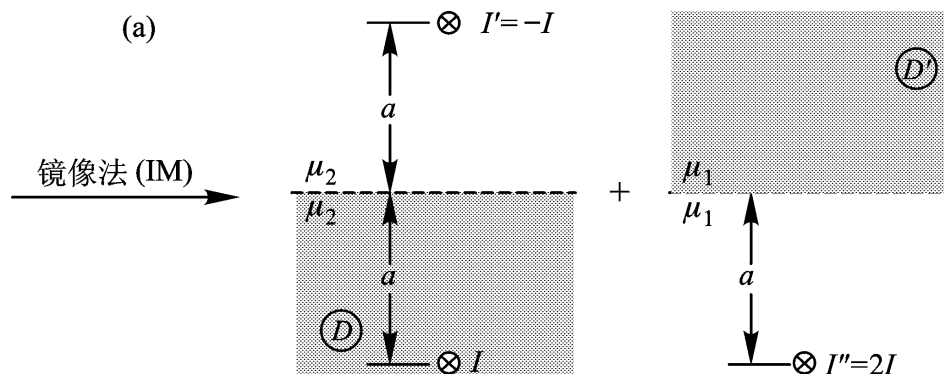
题 3 - 13 图(1)

[解题思路]

对于镜像法(3.5.4节)的应用, 镜像电流的确定应在满足给定 BC 不变的前提下, 把握其“三要素”, 即镜像电流的位置、个数和数值。显然, 其位置按镜像原则可直观给出; 其个数取决于原问题中给定电流的分布, 以及镜像法应用中等效变换的次数; 其量值则由原问题中给定的 BC 决定; 应强调指出, 因为电流  $I$  是代数量, 故在确定镜像电流  $I$ 、 $I$  的量值时, 均有应先给定其假定正方向(即参考方向)的问题。因此, 必须注意, 镜像电流  $I$ 、 $I$  的计算关系式(3 - 93)和(3 - 94), 即是在设定其参考方向与原电流  $I$  的方向相同的前提下给出的;

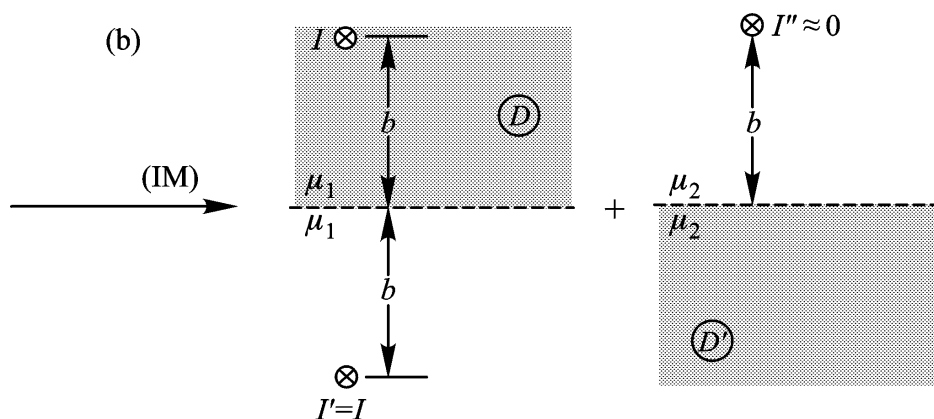
镜像法应用的另一关键是其等效求解的“有效计算区域”问题, 即经等效变换后, 该有效计算区域中的 BVP 应保持不变, 从而达到采用镜像法以简化原较复杂的 BVP 求解过程的目的。

[解]



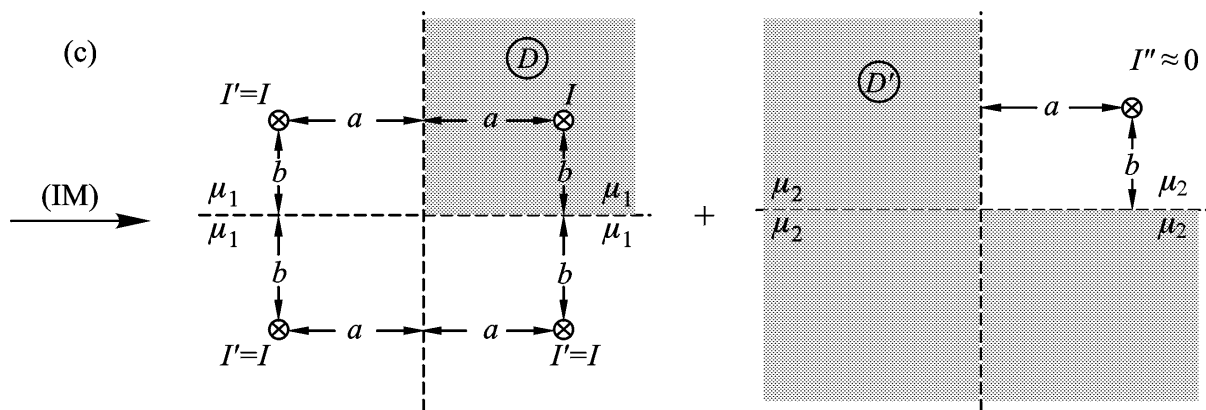
题 3 - 13 图(2)

镜像电流  $I = \lim_{\mu_2} \frac{-\mu_2 + \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I = -I$ ; 镜像电流  $I = \lim_{\mu_2} \frac{2\mu_2}{\mu_2 + \mu_1} I = 2I$ ; 有效计算区域分别记为  $D$  域和  $D'$  域(以下同之)。



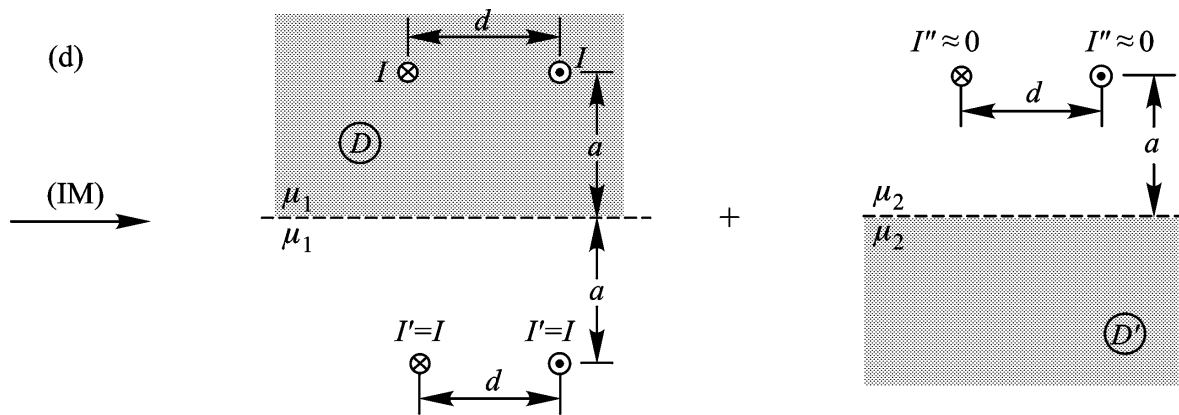
题 3 - 13 图(3)

$$I = \lim_{\mu_2} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I = I; \quad I = \lim_{\mu_2} \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I = 0$$



题 3 - 13 图(4)

镜像电流  $I$ 、 $I'$  分析同(b)。



题 3 - 13 图(5)

镜像电流  $I$ 、 $I'$  分析同(b)。

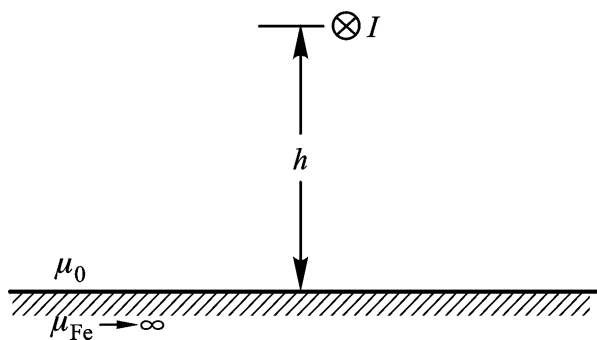
**3 - 14** 一长直载流导线平行于一无限大铁板 ( $\mu_{\text{Fe}}$ ), 相距为  $h$ , 通过的电流  $I$  方向如题 3 - 14 图所示, 求:

(1) 铁板表面任意点处的磁感应强度  $\mathbf{B}$ ;

(2) 铁板内任意点处的磁场强度  $\mathbf{H}$  和磁感应强度  $\mathbf{B}$ ;

(3) 定性描绘场图;

(4) 载流导线所受到的磁场力。



题 3 - 14 图(1)

**[解题思路]**

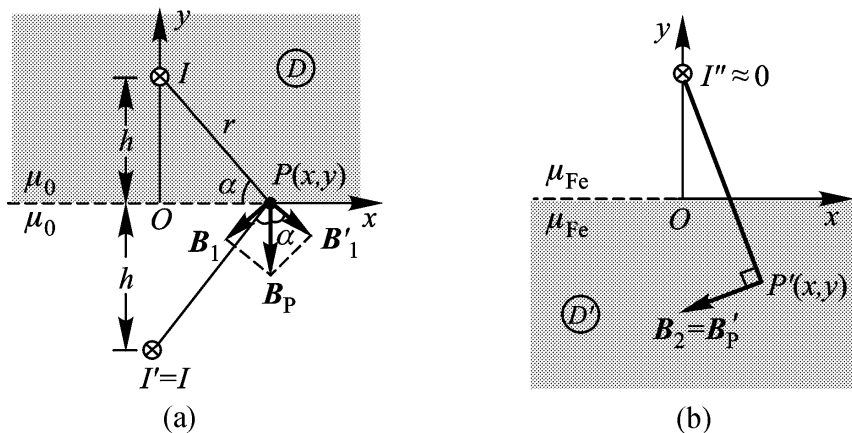
按题 3 - 13“ 解题思路”, 分别给出经镜像法等效变换后求解铁板上方(含铁板表面)的  $D$  域场分布, 以及求解铁板内  $D$  域场分布的场结构图。从而, 待求的较复杂的边值问题即被简化为单一均匀线性媒质中场分布的分析计算问题, 为叠加原理方法的应用或在具有对称场分布特征的平行平面场条件下直接应用安培环路定律(3 - 73)奠定了基础;

应指出, 磁场为矢量场, 因此, 场分布  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$  的求解必须遵循矢量分析的运算规则;

定性描绘场图的能力来自于观察、分析与实践经验的多方面知识的积累, 同时, 必须准确把握物理概念, 例如, 磁场线必须围绕励磁电流源(有旋场); 磁场线必与理想导磁体 ( $\mu$ ) 表面正交; 基于工程观点, 磁场线应垂直于铁磁材料 ( $\mu \gg \mu_0$ ) 表面等;

载流导线所受的磁场力可应用基本实验定律——安培力公式(1 - 8)求解。

[解] 经镜像法等效变换, 可得出分别对应于有效计算场域  $D$  和  $D$  的场结构, 如图所示。



题 3 - 14 图(2)

(a) 有效计算域  $D$  (b) 有效计算域  $D$

(1) 计算域  $D$ : 按式(3 - 93)可得镜像电流  $I = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I = I$ , 对于铁板表面任意点  $P$ , 由叠加原理的应用, 得

$$\mathbf{B}_P = \mu_0 \frac{2I}{2r} \cos(-\mathbf{e}_y) = \frac{\mu_0 I}{x^2 + h^2} \cdot \frac{x}{x^2 + h^2} (-\mathbf{e}_y) = \frac{\mu_0 Ix}{(x^2 + h^2)^2} (-\mathbf{e}_y)$$

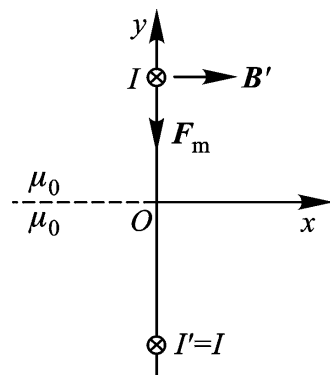
(2) 计算域  $D$ : 按式(3 - 94)可得镜像电流

$$I = \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I = 0$$

因而, 铁板内任意点  $P$  处的磁感应强度为

$$\mathbf{B}_P = \mu_2 \mathbf{H}_2 = \mu_2 \frac{I}{2r} \mathbf{e} = \mu_2 \frac{2\mu_0}{\mu_2 + \mu_0} \cdot \frac{I}{2r} \mathbf{e} = \frac{\mu_0 I}{r} \mathbf{e}$$

$$\mathbf{H}_P = 0$$



题 3 - 14 图(3)

(3) 图略(可参阅教材图 3 - 34, 但需注意, 本题原电流  $I$  方向与该图中  $I$  方向适反)。

(4) 应用安培力公式(1 - 8)求磁场力: 首先, 如题图(3)所示, 该载流导线所在处的磁感应强度为  $\mathbf{B} = \mu_0 \frac{I}{2(2h)} \mathbf{e}_x$ , 应指出, 式(1 - 8)中  $\mathbf{B}$  是除载流导线  $I$  外其余镜像电流在该载流导线处产生的  $\mathbf{B}$ 。由此可知, 元电流  $I d\mathbf{l}$  所受的元磁场力为  $d\mathbf{F}_m = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = I d l \frac{\mu_0 I}{4h} (-\mathbf{e}_y)$ , 故载流导线单位长度上受力大小是

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{F}_m}{dl} = \frac{\mu_0 I^2}{4h} (-\mathbf{e}_y) \quad (\text{N/m})$$

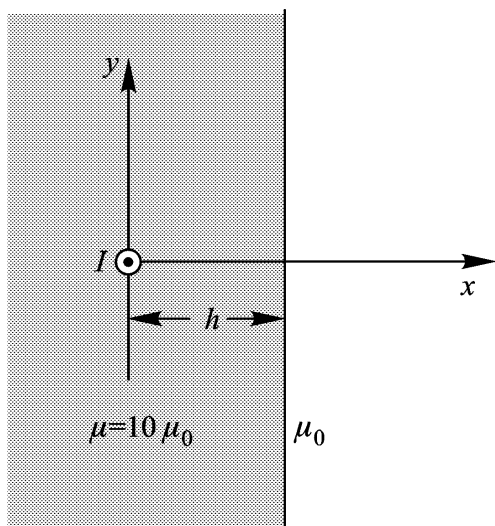
**3 - 15** 在大块铸铁板内, 距其平表面  $h = 15$  cm 处钻孔埋设了一根载流为  $I = 10$  A 的长直绝缘细导线。设铸铁的磁导率为  $\mu = 10\mu_0$ , 求:

(1) 在  $y = 0$  平面内, 沿  $x$  轴正向的磁感应强度值  $B = f(x)$  的变化关系;

(2) 作用于导线每单位长度上的电磁力  $\mathbf{F}$ 。

[解题思路]

按题 3 - 13“解题思路”, 分别给出经镜像等效变换后求解铸铁板内的  $D$  域场分布, 以及求解空气中  $D$  域场分布的场结构图。从而, 待求的较复杂的边值问题即被简化为单一均匀线性媒质中场分布的分析计算问题, 为叠加原理方法的应用或在具有对称场分布特征的平行平面场条件下直接应用安培环路定律(3 - 73)奠定了基础;

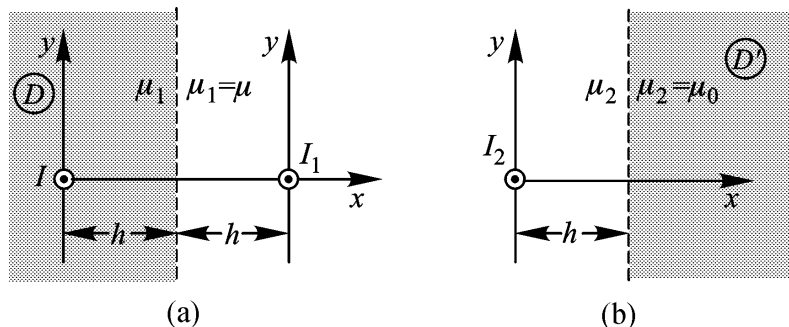


题 3 - 15 图(1)

应指出,磁场为矢量场,因此,场分布  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$  的求解必须遵循矢量分析的运算规则;

载流导线所受的磁场力可应用基本实验定律——安培力公式(1 - 8)求解。

[解] 经镜像法等效变换,可得出分别对应于有效计算场域  $D$  和  $D$  的场结构,如图所示。



题 3 - 15 图(2)

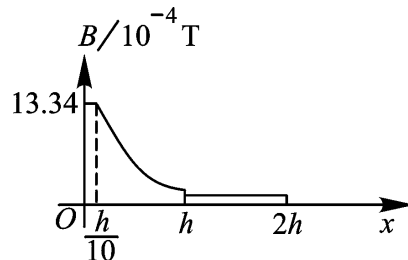
(a) 有效计算域  $D$  (b) 有效计算域  $D$

(1) 计算域  $D$ :按式(3 - 93)可得镜像电流  $I_1 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I = -\frac{9}{11} I = -8.18 \text{ A}$ ,应用叠加原理,即知沿  $x$  轴正方向在铸铁板内的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_1 I}{2x} + \frac{\frac{9}{11} I \mu_1}{2(2h - x)} \mathbf{e}_y \quad (0 < x < h)$$

计算域  $D$ :按式(3 - 94)可得镜像电流  $I_2 = \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I = \frac{20}{11} I = 18.18 \text{ A}$ ;因而,沿  $x$  轴正方向在空气中的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_2 \frac{20}{11} I}{2x} \mathbf{e}_y \quad (x > h)$$



题 3 - 15 图(3)

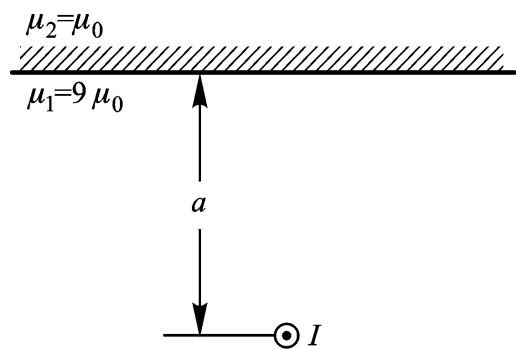
综合以上分析结果可描绘沿  $x$  轴正向  $B = f(x)$  的变化曲线如右图所示。图中,各相关特征点的  $B$  值计算结果列于下表:

$x/\text{cm}$	$B/10^{-4}\text{T}$
1.5	13.34
15	2.42
30	0.242

(2) 应用(1 - 8)安培力公式,类同于题 3 - 14(4)分析计算过程,即可求得作用于导线每单位长度上的电磁力为

$$\mathbf{F} = B I (-\mathbf{e}_x) = \frac{\mu_1 \frac{9}{11} I}{2 (2h)} \times 1 \times 10 (-\mathbf{e}_x) = 5.45 \times 10^{-4} (-\mathbf{e}_x) \text{ N}$$

**3 - 16** 在磁导率为  $\mu_1$  的媒质 1 中,有载流直导线与两媒质分界面平行,垂直距离为  $a$ 。设  $\mu_2 = \mu_0$ ,  $\mu_1 = 9\mu_0$ 。参阅题 3 - 16 图,求两种媒质中的磁场强度和载流导线每单位长度所受力。



题 3 - 16 图(1)

[解题思路]

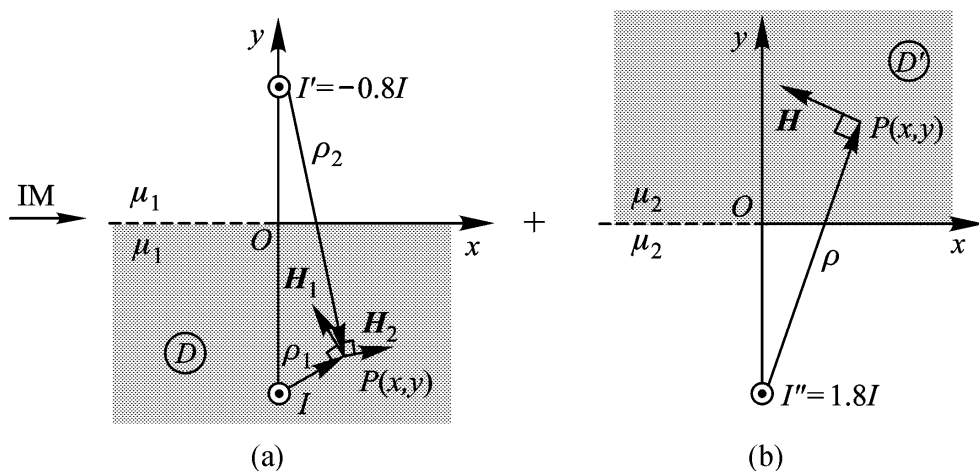
按题 3 - 13“解题思路”,分别给出经镜像法等效变换后求解媒质  $\mu_1$  的  $D$  域场分布,以及求解媒质  $\mu_2$  的  $D$  域场分布的场结构图。从而,待

求的较复杂的边值问题即被简化为单一均匀线性媒质中场分布的分析计算问题,为叠加原理方法的应用或在具有对称场分布特征的平行平面场条件下直接应用安培环路定律(3 - 73)奠定了基础;

应指出,磁场为矢量场,因此,场分布  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$  的求解必须遵循矢量分析的运算规则;

载流导线所受的磁场力可应用基本实验定律——安培力公式(1 - 8)求解。

[解] 经镜像法等效变换,可得出分别对应于有效计算场域  $D$  和  $D'$  的场结构,如图所示。其中,镜像电流  $I' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I = -0.8 I$ ,  $I'' = \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I = 1.8 I$ 。



题 3 - 16 图(2)

(a) 有效计算域  $D$  (b) 有效计算域  $D'$

(1) 媒质  $\mu_1$  的  $D$  域中的磁场强度:

分析可知:

$$\mathbf{e}_1 = x\mathbf{e}_x + (y+a)\mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_2 = x\mathbf{e}_x + (y-a)\mathbf{e}_y$$

对应于  $\mathbf{H}_1$  的单位矢量

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e} \times \mathbf{e}_1 = [x\mathbf{e}_y - (y+a)\mathbf{e}_x] / \rho_1$$

对应于  $\mathbf{H}_2$  的单位矢量

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e} \times \mathbf{e}_2 = [x\mathbf{e}_y - (y-a)\mathbf{e}_x] / \rho_2$$

基于叠加原理和安培环路定律的应用, 可得媒质  $\mu_1$  中任意场点处的磁场强度为

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(x, y) = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 &= \frac{I}{2} \mathbf{e}_1 + \frac{I}{2} \mathbf{e}_2 = \frac{I}{2} \frac{x\mathbf{e}_y - (y+a)\mathbf{e}_x}{x^2 + (y+a)^2} - 0.8 \cdot \frac{x\mathbf{e}_y - (y-a)\mathbf{e}_x}{x^2 + (y-a)^2} \\ &= \frac{I}{2} \left[ \frac{y+a}{x^2 + (y+a)^2} - \frac{0.8 \cdot (y-a)}{x^2 + (y-a)^2} \right] \mathbf{e}_x + \frac{x}{x^2 + (y+a)^2} - \frac{0.8x}{x^2 + (y-a)^2} \mathbf{e}_y \end{aligned}$$

(2) 媒质  $\mu_2$  的  $D$  域中的磁场强度:

$$\mathbf{H}(x, y) = \frac{I}{2} \mathbf{e} = \frac{0.9I}{2} \frac{x\mathbf{e}_y - (y+a)\mathbf{e}_x}{x^2 + (y+a)^2}$$

(3) 镜像电流  $I$  在导线处产生的磁感应强度  $\mathbf{B}$  为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_1 I}{2(2a)} \mathbf{e}_x = -\frac{9\mu_0 \cdot 0.8I}{4a} \mathbf{e}_x = -\frac{1.8\mu_0 I}{a} \mathbf{e}_x$$

故基于安培力公式, 载流导线上每单位长度所受之力为

$$\mathbf{F}_l = I \cdot \mathbf{l} \cdot \mathbf{e}_z \times \mathbf{B} = -\frac{1.8\mu_0 I^2}{a} \mathbf{e}_y$$

**3 - 17** 一无损耗同轴电缆尺寸如题 3 - 17 图所示。求:

(1) 单位长度的外电感  $L_0$ ;

(2) 单位长度的电容  $C_0$ ;

(3) 若  $D = 5 \text{ mm}$ ,  $d = 1.37 \text{ mm}$ , 介质的  $\epsilon_r = 2.4$ ,

$\mu_r = 1$ , 求此电缆的特性阻抗  $Z_0 = \sqrt{L_0/C_0}$  多大?

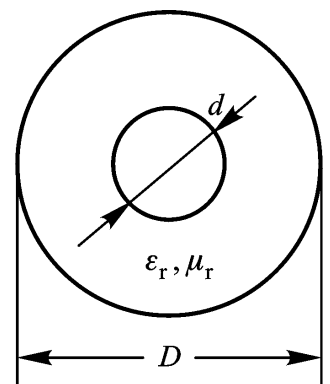
[解题思路]

凡电磁系统、装置电磁参数的精确计算, 均必须基于相应的电磁场分布的分析计算;

关于电感参数的计算, 除应界定自感系数  $L$  与

互感系数  $M$  外, 对自感系数  $L$  的计算取决于线匝与磁通相互交链的不同情况, 还必须区分并分别计算其内自感  $L_i$  和外自感  $L_o$ ;

基于场分布  $\mathbf{B}$ , 分析、计算电感参数的方法可归结为



题 3 - 17 图(1)

设定载流系统中的电流  $I$  有关的分析计算方法  $\mathbf{B}$  (  $L$  或  $M$  )

$$= \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$\times N$  (线匝数) (  $L$  或  $M$  ) 电感定义式  $L = \frac{\Phi}{I}$  或  $M = \frac{\Phi}{I}$ ;

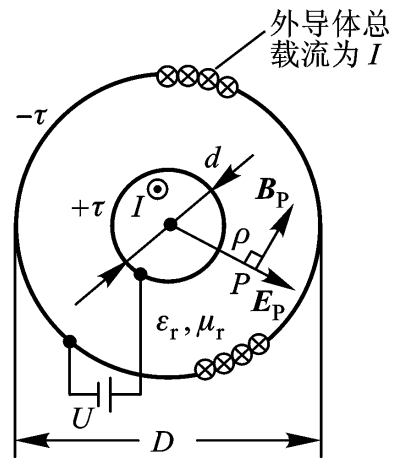
关于电容参数的计算, 同样基于场分布  $\mathbf{E}$  的分析、计算, 可归纳方法如下:

设定带电系统的电荷  $q$  有关的分析计算方法  $\mathbf{E}$

$$U = \int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{电容定义式} \quad C = \frac{q}{U}$$

[解] (1) 如图设该同轴电缆载流为  $I$ 。理想化绝缘媒质 ( $\epsilon_r, \mu_r$ ) 中的磁场具有圆柱对称的平行平面场特征, 故可直接引用安培环路定律解得

$$\mathbf{B}_p = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2} \mathbf{e} \quad \frac{d}{2} < \rho < \frac{D}{2}$$



题 3 - 17 图(2)

从而, 同于教材例 3 - 18 的分析, 取轴向长度为  $l$ , 宽为  $d$  的面积元  $dS$ , 即可在计算元磁通  $d\Phi$  的基础上, 求得与电流  $I$  全交链一次 (即  $N = 1$ ) 的外磁链

$$\begin{aligned} \Phi_o &= \int_S d\Phi_o = \int_S 1 \cdot d\Phi_o = \int_S \mathbf{B}_o \cdot d\mathbf{S} \\ &= \frac{D}{2} \frac{\mu_0 \mu_r I}{2} l d = \frac{\mu_0 \mu_r I l}{2} \ln \frac{D}{d} \end{aligned}$$

故所求的单位长度的外自感

$$L_o = \frac{\Phi_o}{Il} = \frac{\mu_0 \mu_r}{2} \ln \frac{D}{d}$$

(2) 如图设该同轴电缆内外导体带电为  $+$  和  $-$ , 理想化绝缘介质 ( $\epsilon_r$ ) 中的电场具有圆柱对称的平行平面场特征, 故可直接引用高斯定理 (2 - 6), 解得

$$\mathbf{E}_p = \frac{q}{2\pi\epsilon_r r} \mathbf{e}$$

从而, 内外导体间的电位差

$$U = \int_d^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{D}{2} \frac{q}{2\pi\epsilon_r r} d = \frac{q}{2\pi\epsilon_r} \ln \frac{D}{d}$$

故所求的单位长度的电容

$$C_o = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_r}{\ln \frac{D}{d}}$$

$$(3) Z_0 = \frac{L_0}{C_0} = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi^2 \epsilon_0 \epsilon_r} \ln \frac{D}{d} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r} \ln \frac{D}{d} = \frac{60}{r} \ln \frac{D}{d} = 50.14$$

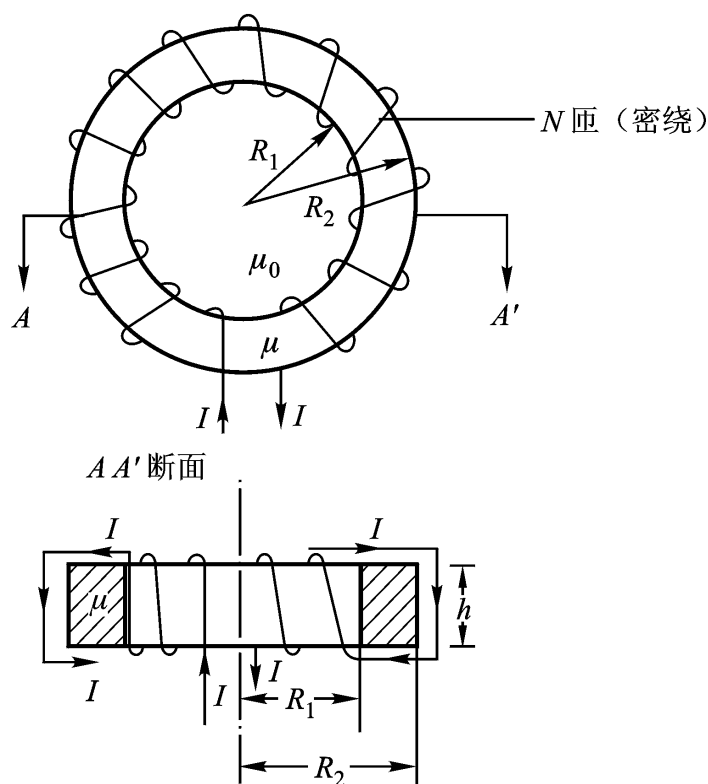
此即为同轴电缆重要工程参数之一——特性阻抗分析计算的结果。

**3 - 18** 一均匀密绕  $N$  匝的环形螺线管, 尺寸如题 3 - 18 图所示。环形铁心的磁导率为  $\mu$ , 求:

- (1) 环内的磁场强度  $\mathbf{H}$ ;
- (2) 环形铁心截面中的磁通  $\Phi$ ;
- (3) 该线圈的电感(自感)  $L$ ;
- (4) 该螺线管中存储的磁场能量  $W_m$ 。

[解题思路]

按题设载流系统“均匀密绕”的结构特点, 可以理想化假设该环形载流螺线管内的磁场(亦即主磁通)呈均匀分布的特征, 且其周围不存在漏磁场(即经空气路径闭合的漏磁通分布可以略而不计);



题 3 - 18 图(1)

在上述理想化假设的基础上, 取任一在环形铁心内闭合的圆形回路  $l$ , 即可应用安培环路定律(3 - 73)求出环内的磁场强度  $\mathbf{H}$  的分布;

在解得场分布  $\mathbf{H}$  的基础上, 设定与环形螺线管轴线正交的截面  $S$ , 由在该截面  $S$  上呈均匀分布的  $\mathbf{B}$ , 可继续解得穿过该截面  $S$  的磁通  $\Phi$ , 以及与  $N$  匝环形螺线管全交链的磁通链  $\Psi$ ; 然后, 由电感的定义式(3 - 95),

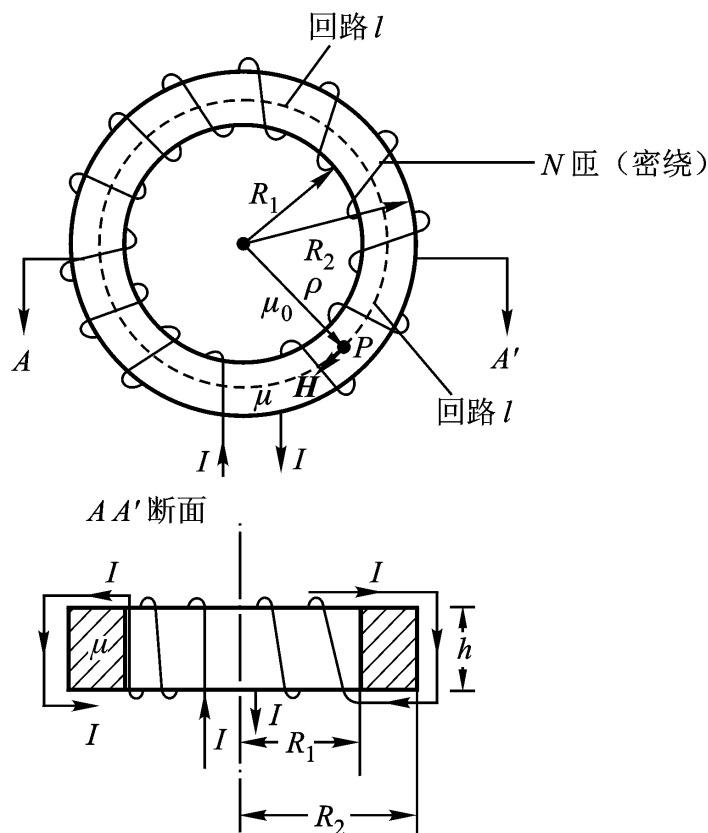
即可算出该螺线管的电感  $L$ ;

同样,在解得场分布  $\mathbf{H}$  的基础上,即可算出该螺线管中存储的磁场能量  $W_m$  [式(3 - 110)]。应该指出,本题若在解得场分布  $\mathbf{H}$  后,先求该螺线管中的磁场能量  $W_m$  [式(3 - 119)],则也可按单个载流回路自感的计算关系式(3 - 111),续求该螺线管的电感  $L$ 。

[解] (1) 按“解题思路”,如图示,取半径为  $\rho$  的闭合圆形回路  $l$ ,则应用安培环路定律(3 - 73)即得

$$\mathbf{H} = \frac{NI}{2} \mathbf{e}$$

(2) 设定元面积  $d\mathbf{S} = h d \mathbf{e}$ , 则穿过环形铁心截面  $S$  的磁通



题 3 - 18 图(2)

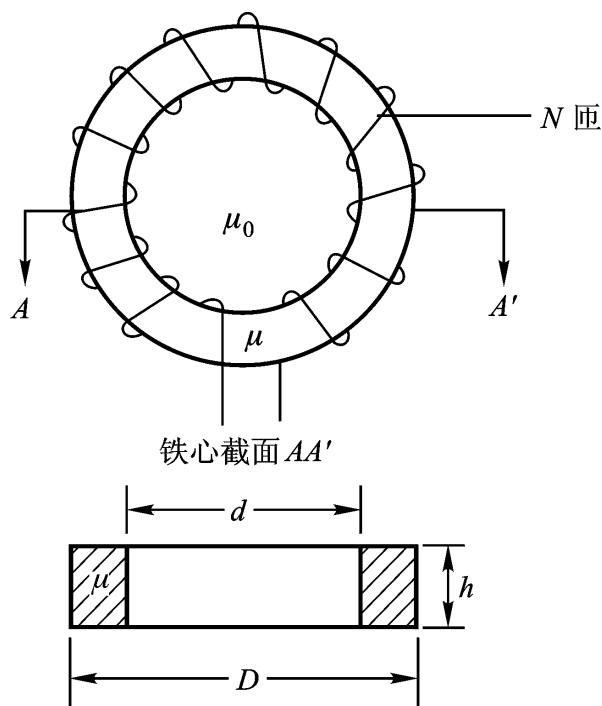
$$\begin{aligned} &= \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S B dS \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \mu \frac{NI}{2} h d\rho = \frac{\mu NI h}{2} \ln \frac{R_2}{R_1} \end{aligned}$$

(3) 基于磁通与线匝全交链的关系,故磁通链  $\Psi = N \Phi$ , 从而可得该环形螺线管的自感  $L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu N^2 h}{2} \ln \frac{R_2}{R_1}$

(4) 按单个载流回路的磁场能量  $W_m$  与其自感之间的内在关系,磁场能量

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{\mu N^2 h I^2}{4} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

**3 - 19** 一镯环形铁心线圈, 如题 3 - 19 图所示, 其有关几何尺寸与参数为  $D = 8 \text{ cm}$ ,  $d = 5 \text{ cm}$ ,  $h = 2 \text{ cm}$ ,  $\mu = 125 \mu_0$ 。试问: 为获得一个  $20 \text{ mH}$  的电感, 该线圈的匝数  $N$  应为多少?



题 3 - 19 图

[解题思路]

根据题 3 - 18 的分析, 已经导出电感  $L$  的计算关系式, 其中即已包含匝数  $N$  与其关系。应指出, 在题设的典型理想化条件下, 电感量正比于线圈匝数  $N$  的平方。

[解] 参照题 3 - 18 的题解, 由该线圈的电感计算式可知本题的电感为

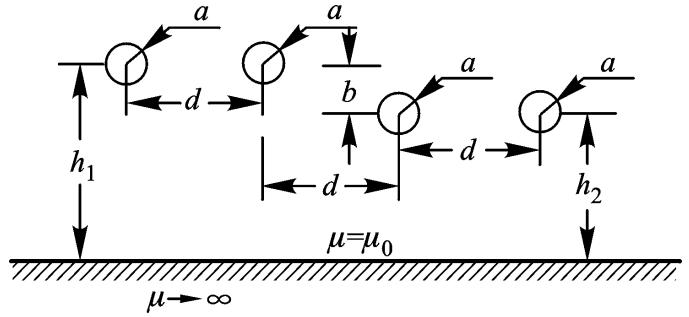
$$L = \frac{\mu N^2 h}{2} \ln \frac{D}{d}, \text{ 故得}$$

$$\begin{aligned} N &= \frac{2 L}{\mu h \ln \frac{D}{d}} \\ &= \frac{2 \times 20 \times 10^{-3}}{125 \times 4 \times 10^{-7} \times 2 \times 10^{-2} \ln \frac{8}{5}} \quad 292 \end{aligned}$$

**3 - 20** 二对位于空气中的无限长直导线(导线半径为  $a$ )分别平行放置, 与一无限大铁面相距为  $h_1$  和  $h_2$ , 且  $h_1, h_2, d \gg a$ , 如题 3 - 20 图所示。试求二对导线间的互感。

[解题思路]

互感系数的计算必须基于场分布的解答,因此,当设定其中一对导线载流为  $I$ , 由题设可知, 为求得在另一对导线中与之交链的互感磁通, 导线旁无限大铁面的磁化效应的影晌应采用镜像法予以考虑;

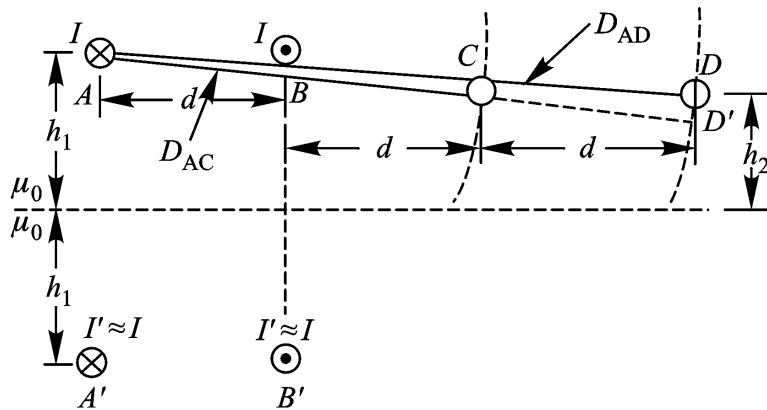


题 3 - 20 图(1)

在计算互感磁通时, 应参

照教材例 3 - 20 的处理方法, 将可基于磁通连续性原理简捷地得出计算关系式。

[解] 据题意, 设定一对无限长直导线回路(  $AB$  )通有电流  $I$ , 则应用镜像法可知与另一对无限长直导线回路(  $CD$  )交链的互感磁链  $M$ , 应可由载流导线  $A$ 、 $B$  及其镜像载流导线  $A'$ 、 $B'$  分别在回路  $CD$  中产生的互感磁链的总和求得, 如图所示。



题 3 - 20 图(2)

(1) 互感磁链  $M_A$ : 参照教材例 3 - 20 的处理方法, 由磁通连续性原理可知, 载流导线  $A$  所产生的穿过面积  $S (= l \cdot CD)$  的磁通应等于穿过面积  $S (= l \cdot CD)$  的磁通, 即

$$M_A = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S B dS = \int_{D_{AC}}^{D_{AD}} \frac{\mu_0 I}{2} l d = \frac{\mu_0 I l}{2} \ln \frac{D_{AD}}{D_{AC}} = \frac{\mu_0 I l}{2} \ln \frac{D_{AD}}{D_{AC}}$$

得  $M_A = M_A = \frac{\mu_0 I l}{2} \ln \frac{D_{AD}}{D_{AC}}$

(2) 互感磁链  $M_A$  :

同理  $M_A = M_A = \frac{\mu_0 I l}{2} \ln \frac{D_{A D}}{D_{A C}}$

(3) 互感磁链  $M_B$  :

同理  $M_{AB} = M_{BA} = \frac{\mu_0 I l}{2} \ln \frac{D_{BD}}{D_{BC}}$

(4) 互感磁链  $M_{AB}$  :

同理  $M_{BA} = M_{AB} = \frac{\mu_0 I l}{2} \ln \frac{D_{BD}}{D_{BC}}$

注意到对于 CD 回路, 互感磁链间的增助或互削关系, 故总的互感磁链为

$$M = M_{AB} + M_{BA} - M_{BC} - M_{CD} = \frac{\mu_0 I l}{2} \ln \frac{D_{AD} D_{BC}}{D_{AC} D_{BD}} + \ln \frac{D_{AD} D_{BC}}{D_{AC} D_{BD}}$$

$$= \frac{\mu_0 I l}{2} \ln \frac{(h_1 - h_2)^2 + (3d)^2 \cdot (h_1 - h_2)^2 + d^2}{(h_1 - h_2)^2 + (2d)^2} +$$

$$\ln \frac{(h_1 + h_2)^2 + (3d)^2 \cdot (h_1 + h_2)^2 + d^2}{(h_1 + h_2)^2 + (2d)^2}$$

该二对导线回路间的互感

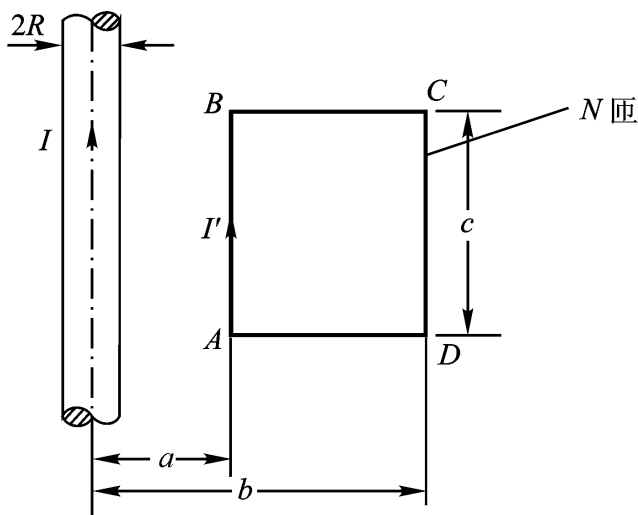
$$M = M' I = \frac{\mu_0 I l}{2} \ln \frac{(h_1 - h_2)^2 + (3d)^2 \cdot (h_1 - h_2)^2 + d^2}{(h_1 - h_2)^2 + (2d)^2} +$$

$$\ln \frac{(h_1 + h_2)^2 + (3d)^2 \cdot (h_1 + h_2)^2 + d^2}{(h_1 + h_2)^2 + (2d)^2}$$

**3 - 21** 一矩形线框(匝数为  $N$ )置于一无限长直载流导线(半径为  $R$ )的近旁, 如题 3 - 21 图所示, 框边与线轴平行。试求:

(1) 长直载流导线与线框间的互感  $M$ ;

(2) 若线框中顺时针方向流过电流  $I$ , 试计算线框各边所受的作用力(在图中标出力的参考方向), 并求该线框所受的合力。



题 3 - 21 图(1)

[解题思路]

场分布的计算基础——归结为无限长直载流导线的磁场问题, 可参考教材例 3 - 4;

为计算互感磁通  $M = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ , 显然, 元面积  $d\mathbf{S}$  选取中的坐标变量应与  $\mathbf{B}$  中坐标变量相一致, 且其指向取与  $\mathbf{B}$  一致的方向;

当计算两载流系统的相互作用力时, 根据本题上述计算过程, 宜采用虚位移法(3.8 节), 而其中引入的磁场能量  $W_m$  显然可简约为与所设定的

广义坐标相关联的相互作用能  $W_{m12}$ 。应强调指出, 基于虚位移法所求得的广义力  $\mathbf{F}$ , 其假定正方向(即参考方向)为广义坐标  $g$  增加的方向。

[解] (1)按“解题思路”的分析, 应选取元面积  $dS = cd$  如图所示, 从而, 可计算长直载流导线所产生的与矩形线框相交链的互感磁通为

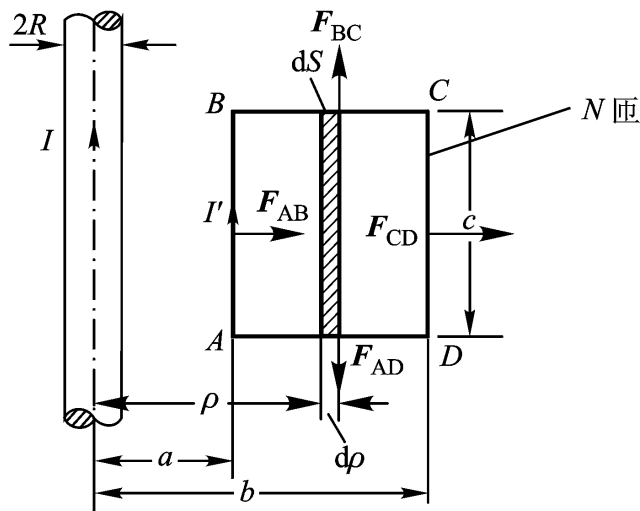
$$M = \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2} cd = \frac{\mu_0 Ic}{2} \ln \frac{b}{a}$$

故待求的互感系数

$$M = \frac{N}{I} = \frac{N}{I} = \frac{\mu_0 Nc}{2} \ln \frac{b}{a}$$

(2) 采用虚位移法, 计算两系统的相互作用能  $W_{\bar{m}} = MII$ 。

分析可知矩形线框的四边受力。对应于所设的广义力(相互作用力), 选取相应的广义坐标(位移), 并按广义坐标增加的方向定义为对应的广义力的参考方向。由此可标记  $\mathbf{F}_{AB}$ 、 $\mathbf{F}_{BC}$ 、 $\mathbf{F}_{CD}$ 和  $\mathbf{F}_{AD}$  如图示, 它们所对应的广义坐标显然分别为  $a$ 、 $c$ 、 $b$ 和  $c$ 。



题 3 - 21 图(2)

按题意, 本题应在常电流体系下展开各广义力的求解如下:

$$F_{AB} = \frac{W_{\bar{m}}}{a} \Big|_{I=c} = - \frac{\mu_0 NcII}{2 a} \quad F_{BC} = \frac{W_{\bar{m}}}{c} \Big|_{I=c} = \frac{\mu_0 NII}{2} \ln \frac{b}{a}$$

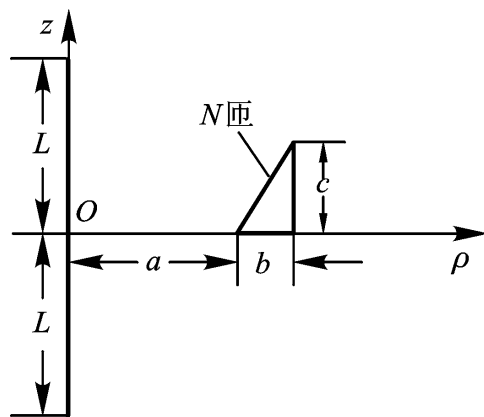
$$F_{CD} = \frac{W_{\bar{m}}}{b} \Big|_{I=c} = \frac{\mu_0 NcII}{2 b} \quad F_{AD} = \frac{W_{\bar{m}}}{c} \Big|_{I=c} = \frac{\mu_0 NII}{2} \ln \frac{b}{a}$$

从而, 最终可得线框所受合力  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{CD} = \frac{\mu_0 NcII}{2 ab} (a - b) \mathbf{e}_F$ ,  $\mathbf{e}_F$  方向与  $\mathbf{F}_{AB}$  同向。

**3 - 22** 一三角形线圈与一长度为  $2L$  的长直载流细导线位于同一平面 ( $Oz$  平面)内, 如题 3 - 22 图所示。设  $L \gg a$ 、 $b$ 、 $c$ ,  $a = 30 \text{ cm}$ ,  $b = 10 \text{ cm}$ ,  $c = 20 \text{ cm}$ , 三角形线圈匝数  $N = 50$ 。求:

(1) 设长直载流导线中通有恒定电流  $I$ , 计算线圈与导线间的互感  $M$ ;

(2) 若长直载流导线中流过的电流为一正弦稳态交变电流  $i = 2I \cos(\omega t)$ , 正方向如前,  $I = 100 \text{ A}$ ,  $f = 50 \text{ Hz}$ , 计算在三角形线圈中



题 3 - 22 图(1)

产生的感应电动势(应标明正方向)。

[解题思路]

场分布的计算基础——按题意,在  $L \gg a$  的给定条件下,据工程分析观点,可归结为无限长直载流导线的磁场问题,可参考教材例 3 - 4;

为计算互感磁通  $M = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ ,显然,元面积  $d\mathbf{S}$  选取中的坐标变量应与  $\mathbf{B}$  中坐标变量相一致,且其指向取与  $\mathbf{B}$  一致的方向;

关于感应电动势的计算,当应遵循法拉第电磁感应定律(1 - 60)。必须强调指出的是,沿闭合回路  $l$  的感应电动势  $e$  的参考方向应与所交链的磁通的参考方向满足右螺旋关系。

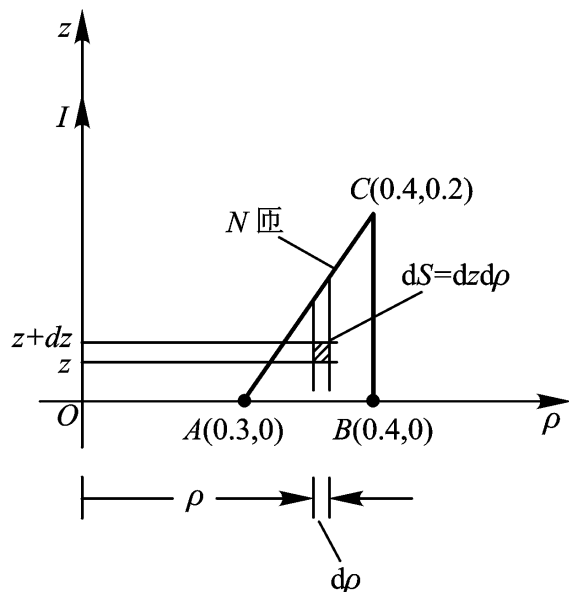
[解] (1) 按题设,可看作无限长直线电流  $I$  在三角形线圈中激励互感磁通  $\Phi_m$ ,从而待求互感

$$M = \frac{\Phi_m}{I}$$

显然,在图示的  $Oz$  平面内,磁感应强度

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \mathbf{e}$$

因此,在三角形线圈内,如图示,选取元面积  $dS = dzd\rho$ ,则互感磁链



题 3 - 22 图(2)

$$\begin{aligned} \Phi_m &= N \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = N \int_{0.3}^{0.4} \int_0^{0.2(1-\frac{\rho-0.3}{0.1})} \frac{\mu_0 I}{2} dzd\rho \\ &= N \int_{0.3}^{0.4} \frac{\mu_0 I}{2} (2 - 0.6) d\rho = \frac{\mu_0 NI}{0.3} \int_{0.3}^{0.4} (1 - \frac{\rho-0.3}{0.1}) d\rho \\ &= \frac{\mu_0 NI}{0.3} [0.1 - 0.3 \ln \frac{4}{3}] \end{aligned}$$

故  $M = \frac{\Phi_m}{I} = \frac{4 \times 10^{-7} \times 50}{0.3} [0.1 - 0.3 \ln \frac{4}{3}] \text{ H} = 2.739 \times 10^{-7} \text{ H}$

(2) 三角形线圈中的感应电动势

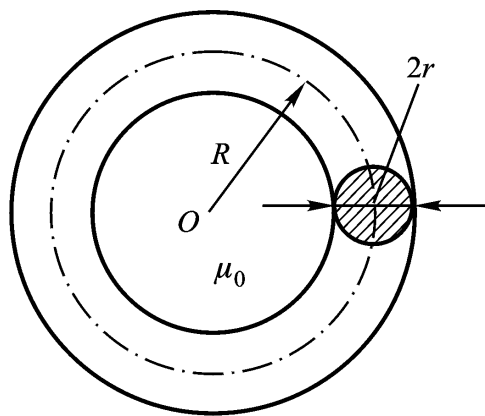
$$\begin{aligned} e_M &= - \frac{d\Phi_m}{dt} = - M \frac{di}{dt} = M \omega I \sin(\omega t) \\ &= 2 \times 100 \times 2.739 \times 10^{-7} \times 314 \sin(314 t) \text{ V} = 12.163 \sin 314 t \text{ mV} \end{aligned}$$

其正方向为 ACBA(顺时针)循行方向。

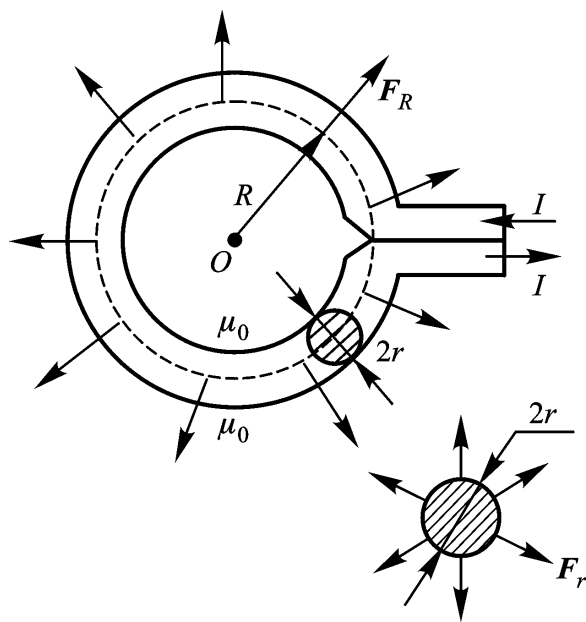
**3 - 23** 求题 3 - 23 图所示环形圆截面导线通有电流  $I$  时所受的力。设已知环形导线的电感  $L = \mu_0 R \ln \frac{8R}{r} - 2 + \frac{\mu_0 R}{4}$ , 式中  $R$  为环的平均半径;  $r$  为导线半径。

[解题思路]

根据题意, 本题宜采用虚位移法(3.8 节)求该环形载流系统所受的磁场力。显然, 该单个载流回路系统的磁场能量  $W_m$  可在题设其电感  $L$  已知的条件下求得[式(3 - 110)]; 而取决于与  $W_m$  相关联的广义坐标  $R$  和  $r$ , 该系统的广义力应表征为与  $R$  和  $r$  相关的作用力, 且其参考方向为相应的广义坐标增加的方向。



题 3 - 23 图(1)



题 3 - 23 图(2)

[解] 如图所示, 该载流环形导线将受二个电磁力  $F_R$  和  $F_r$  的作用, 即由虚位移法可知

$$F_R = \frac{W_m}{R} \Big|_{I=C} = \frac{1}{2} I^2 \frac{L}{R} \Big|_{I=C} = \frac{1}{2} I^2 \mu_0 \ln \frac{8R}{r} - 2 - \mu_0 R \frac{r}{8R} \frac{8}{r} + \frac{\mu_0}{4}$$

$$= \frac{1}{2} I^2 \mu_0 \ln \frac{8R}{r} - \frac{3}{4}$$

式中  $F_R > 0$ , 表明  $F_R$  的作用是使环形导线向外“扩张”的力。

以及

$$F_r = \frac{W_m}{r} \Big|_{I=C} = \frac{1}{2} I^2 \frac{L}{r} \Big|_{I=C}$$

$$= \frac{1}{2} I^2 \mu_0 R \frac{r}{8R} - \frac{1}{r^2} 8R = -\frac{1}{2} I^2 \frac{\mu_0 R}{r}$$

式中  $F_r < 0$ , 表明  $F_r$  的作用是使环形导线截面受到向轴线中心的“压缩”力。

**3 - 24** 参阅题 3 - 24 图, 当线框通有电流  $I_2$  时, 试用以下方法求长直导线

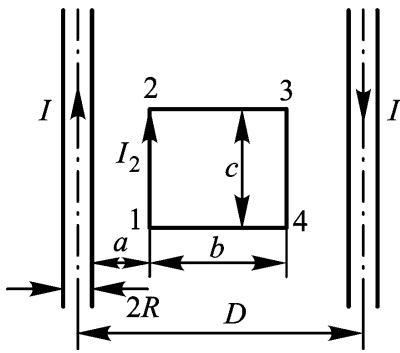
(通有电流  $I$ ) 对它的作用力。

(1) 用计算式  $\mathbf{F} = I(d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$ ;

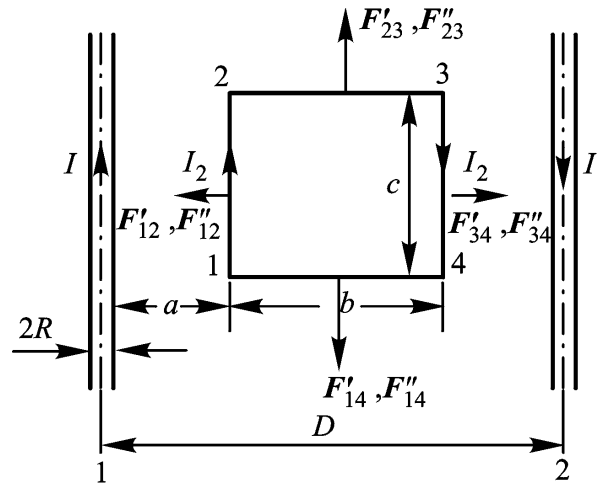
(2) 应用虚功原理。

[解题思路]

当应用安培力公式(1 - 8), 以及式(3 - 112)计算磁场力时, 必须遵循由元电流  $I d\mathbf{l}$  叉积其所在处的  $\mathbf{B}$  来定义元电流所受元磁场力  $d\mathbf{F}$  的参考方向; 当应用虚功原理(虚位移法)时, 则应遵循题 3 - 21“ 解题思路 ”中已作的分析。



题 3 - 24 图(1)



题 3 - 24 图(2)

[解] (1) 应用叠加原理, 首先分析载流导线 1 产生的磁场对载流线框的作用力。按图示线框各边受力的参考方向, 可得:

$$F_{12} = \left| I(d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \right| = \frac{II_2 \mu_0 c}{2(a+R)}$$

$$F_{23} = F_{14} = \frac{II_2 \mu_0}{2} \int_{a+R}^{a+b+R} \frac{d}{(a+R)^2} = \frac{II_2 \mu_0}{2} \ln \frac{a+b+R}{a+R}$$

$$F_{34} = \frac{II_2 \mu_0 c}{2[D - (a+b+R)]}$$

同理, 可得载流导线 2 产生于载流线框上的作用力  $F_{12}$ ,  $F_{23}$ ,  $F_{34}$  和  $F_{14}$ 。于是, 最终作用于载流线框各边的合力分别为:

$$F_{12} = F_{12} + F_{12} = \frac{II_2 \mu_0 c}{2} \frac{1}{a+R} + \frac{1}{D - (a+R)}$$

$$F_{23} = F_{14} = F_{23} + F_{23} = \frac{II_2 \mu_0}{2} \ln \frac{(a+b+R)(D - a - R)}{(D - a - b - R)(a+R)}$$

$$F_{34} = F_{34} + F_{34} = \frac{II_2 \mu_0 c}{2} \frac{1}{D - (a+b+R)} + \frac{1}{a+b+R}$$

(2) 为应用虚功原理,应首先解出两载流系统的互感系数  $M$ 。由载流导线 1 产生的与线框交链的互感磁通链为

$$\begin{aligned} \Phi_{12} &= \int_S \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_{a+R}^{a+b+R} \frac{\mu_0 I}{2} cd = \frac{\mu_0 cI}{2} \ln \frac{a+b+R}{a+R} \end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned} \Phi_{21} &= \int_{D-a-b-R}^{D-a-R} \frac{\mu_0 I}{2} cd \\ &= \frac{\mu_0 cI}{2} \ln \frac{D-a-R}{D-a-b-R} \end{aligned}$$

故  $M = \frac{\Phi_{12}}{I} = \frac{\Phi_{21}}{I} = \frac{\mu_0 c}{2} \ln \frac{(a+b+R)(D-a-R)}{(D-a-b-R)(a+R)}$

线框边  $\overline{12}$  受力

$$F_{12} = \frac{W_m}{g} \Big|_{I_k=c} = \frac{(MI I_2)}{(a+R)} \Big|_{I_k=c} = \frac{-I_2 \mu_0 c}{2} \frac{1}{D-(a+R)} + \frac{1}{a+R}$$

同理  $F_{34} = \frac{(MI I_2)}{(a+b+R)} \Big|_{I_k=c} = \frac{I_2 \mu_0 c}{2} \frac{1}{a+b+R} + \frac{1}{D-(a+b+R)}$

$$F_{14} = F_{23} = \frac{(MI I_2)}{c} \Big|_{I_k=c} = \frac{I_2 \mu_0}{2} \ln \frac{(a+b+R)(D-a-R)}{(D-a-b-R)(a+R)}$$

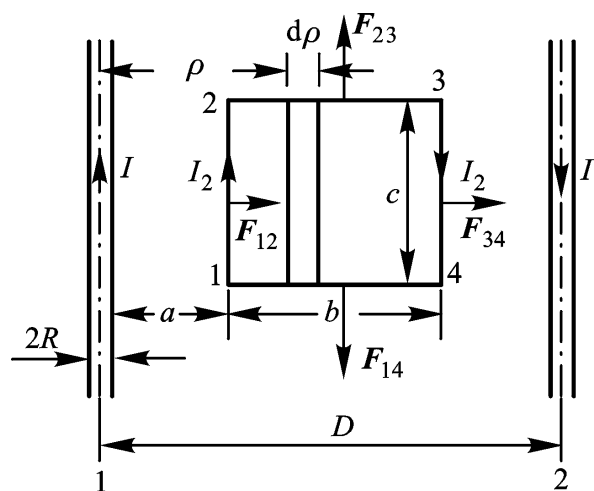
显然,以上两种方法所得结果相同。

### 3-25 求题 3-25 图所示两同轴导体壳系统中储存的磁场能量及自感。

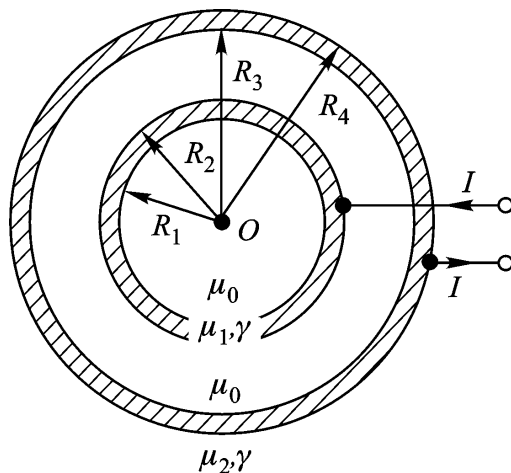
[解题思路]

本题为一个载流回路系统。无论磁场能量  $W_m$  及自感  $L$  的计算,均须先求得该载流系统内场分布  $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{H}$  的解答;

基于场分布具有同轴圆柱形对称的平行平面场特征,故可直接应用安培环路定律 (3-73) 解出场中各处  $\mathbf{H}$  的分布;然后,按磁场能量的计算关系式 (3-119),注意到按媒质特性参数分域积分再累加,即可求得该系统的  $W_m$ ,再由单个载流回路系统中磁场能量与自感系数之间的关联式 (3-111),可算得自感  $L$ 。



题 3-24 图(3)



题 3-25 图

[解] 设电流在导体内均匀分布, 则应用安培环路定律, 即可得各区域中磁场强度为

$$\begin{aligned}
 H(r) &= 0 & (r < R_1 \text{ 或 } r > R_4) \\
 &= \frac{I(r^2 - R_1^2)}{2(R_2^2 - R_1^2)} & (R_1 < r < R_2) \\
 &= \frac{I}{2} & (R_2 < r < R_3) \\
 &= \frac{I(R_4^2 - r^2)}{2(R_4^2 - R_3^2)} & (R_3 < r < R_4)
 \end{aligned}$$

设该同轴导壳系统的长度为  $l$ , 则其所存储的磁场能量为

$$\begin{aligned}
 W_m &= \int_V \frac{1}{2} \mu H^2 dV = \frac{\mu_1}{2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{I^2 (r^2 - R_1^2)^2}{2(R_2^2 - R_1^2)^2} \cdot 2\pi r dr \cdot l + \\
 &\quad \frac{\mu_0}{2} \int_{R_2}^{R_3} \frac{I^2}{2} \cdot 2\pi r dr \cdot l + \frac{\mu_2}{2} \int_{R_3}^{R_4} \frac{I^2 (R_4^2 - r^2)^2}{2(R_4^2 - R_3^2)^2} \cdot 2\pi r dr \cdot l \\
 &= \frac{I^2 l}{4} \frac{\mu_1}{(R_2^2 - R_1^2)^2} \left[ \frac{R_2^4}{3} - 2R_1^2 R_2^2 + \frac{R_1^4}{3} \right] + \mu_0 l \ln \frac{R_3}{R_2} + \\
 &\quad \frac{\mu_2}{(R_4^2 - R_3^2)^2} \left[ \frac{R_4^4}{3} - 2R_4^2 R_3^2 + \frac{R_3^4}{3} \right] \\
 &= \frac{I^2 l}{4} \frac{\mu_1}{(R_2^2 - R_1^2)^2} \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} + R_1^4 \ln \frac{R_2}{R_1} - R_1^2 (R_2^2 - R_1^2) + \\
 &\quad \mu_0 l \ln \frac{R_3}{R_2} + \frac{\mu_2}{(R_4^2 - R_3^2)^2} \frac{R_4^4 - R_3^4}{4} + R_4^4 \ln \frac{R_4}{R_3} - R_4^2 (R_4^2 - R_3^2)
 \end{aligned}$$

由此可算得

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{2 W_m}{I^2} = \frac{l}{2} \frac{\mu_1}{(R_2^2 - R_1^2)^2} \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} + R_1^4 \ln \frac{R_2}{R_1} - R_1^2 (R_2^2 - R_1^2) + \\
 &\quad \mu_0 l \ln \frac{R_3}{R_2} + \frac{\mu_2}{(R_4^2 - R_3^2)^2} \frac{R_4^4 - R_3^4}{4} + R_4^4 \ln \frac{R_4}{R_3} - R_4^2 (R_4^2 - R_3^2)
 \end{aligned}$$

# 第4章 准静态电磁场

## 4.1 基本内容与要求

理解准静态电磁场(电准静态场和磁准静态场)的定义。

掌握电准静态场和磁准静态场的基本方程,并理解其物理意义。

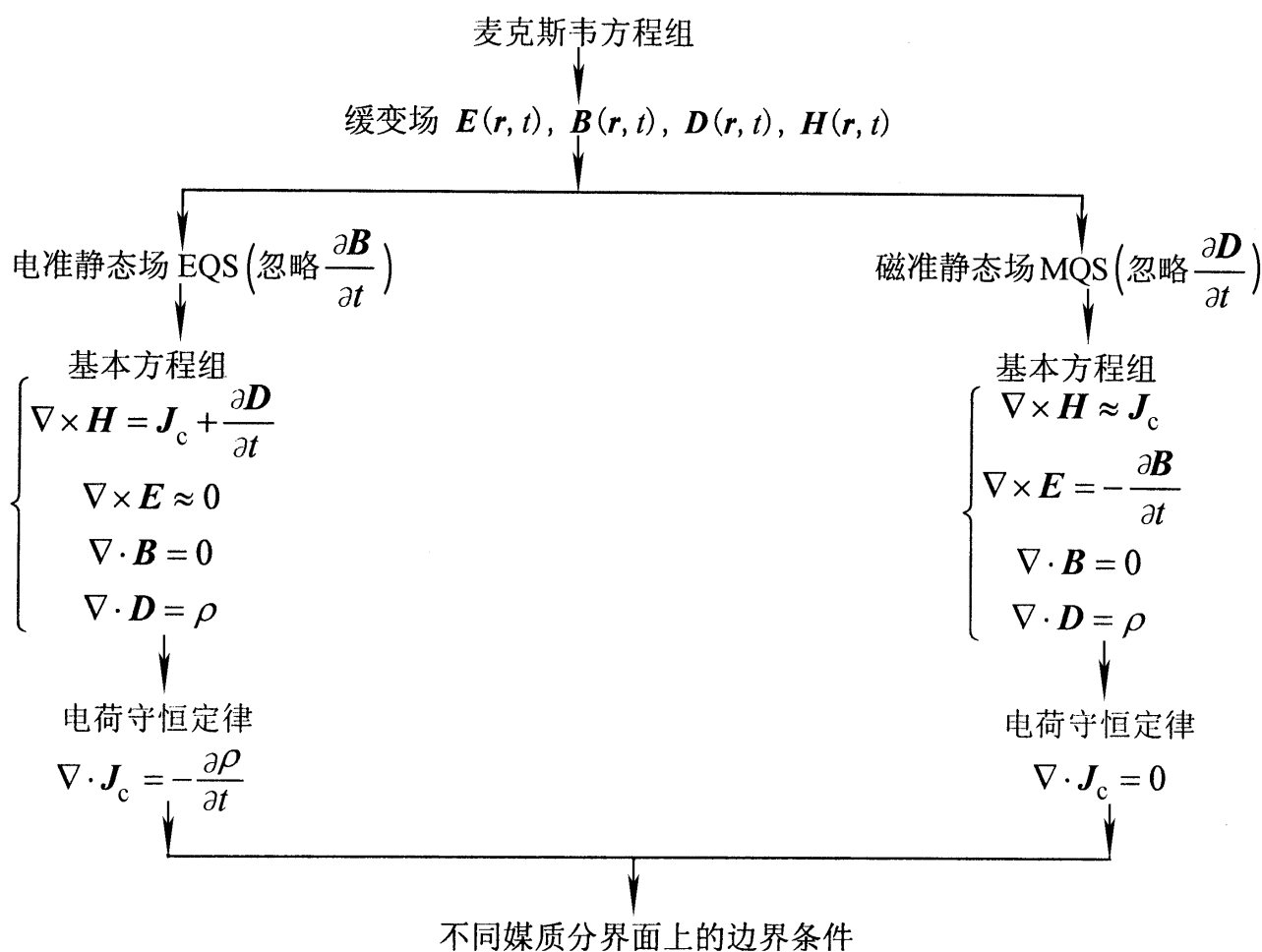
了解准静态电磁场的一般分析方法。

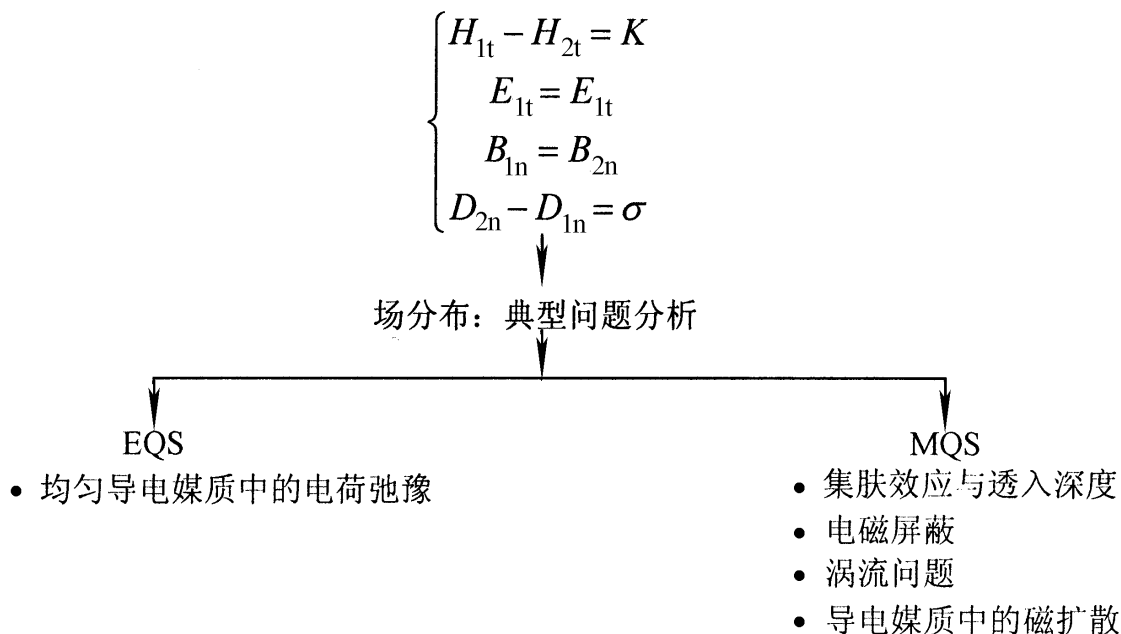
掌握时谐电磁场的复数表示法。

了解导电媒质中的自由电荷弛豫,以及磁扩散现象。

定性了解导电媒质中涡流的产生及其分布规律,掌握减小薄板涡流损耗的一般方法和措施。理解集肤效应和电磁屏蔽的含义。了解透入深度  $d$  的物理意义。

## 4.2 教学体系框架





## 4.3 相关教学重点、难点解析

### 4.3.1 关于准静态场判别条件——似稳条件的讨论

在第一章中已经指出,麦克斯韦方程组奠定了宏观电磁理论的基础,并进而引述了爱因斯坦关于麦克斯韦方程的评论:“这个方程的提出是牛顿时代以来物理学上的一个重要事件。它是关于场的定量数学描述,方程所包含的意义比我们指出的要丰富得多。在简单的形式下隐藏着深奥的内容,这些内容只有仔细的研究才能显示出来。方程是表示场的结构的定律。它不像牛顿定律那样,把此处发生的事件与彼处的条件联系起来,而是把此处的现在的场与最邻近的刚过去的场发生联系。假使我们已知此处的现在所发生的事件,藉助这些方程便可预测在空间稍为远一些,在时间上稍为迟一些所发生的事件。”显然,这也就是麦克斯韦当年预言电磁振荡能够产生各种波长的电磁波的理论依据所在。因而由场源  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  和  $(\mathbf{r}, t)$  所引起的场的扰动是以有限速度传播的,空间中某一时刻  $t$  的场是由比  $t$  早一些时候的  $\mathbf{J}$  的变化所决定的,而并不与  $t$  时刻的  $\mathbf{J}$  对应。换句话说,场和源之间不是瞬时关系。但是,如果场源随时间变化得足够缓慢,则可近似地认为源和场之间(即“因果关系”)具有瞬时关系,这样,在每一时刻,源和场之间的关系类同于静态场中源和场之间的关系,故称这类缓变场为准静态场(似稳场)。

从电流产生场的效应出发,可以看出,在源和场随时间变化的情况下,能以类同于静态场的观点处置,其关键分析点在于忽略位移电流。因而,在什么情况下得以忽略位移电流的影响,即归结为准静态场判别条件——似稳条件的论点。根据所论电磁场的物理背景可分述如下:

### (1) 导电媒质中的电磁场

教材 4.1.2 节中已经指出,在低频(缓变)电磁场中,如果  $\mathbf{J}_c \gg \mathbf{J}_D$ , 即可忽略位移电流,此时该缓变电磁场归结为磁准静态场。

现以时谐场为例,应用有效值关系,由  $J_c = \sigma E$ , 以及  $J_D = \omega D = \omega \epsilon E$ , 可进而将  $J_c \gg J_D$  的条件等同地表示为  $\sigma \gg \omega \epsilon$  (也被称为良导体条件)。

可以指出,对于金属这类良导体,因其电导率  $\sigma = 10^6 \sim 10^7 \text{ S/m}$ , 介电常数  $\epsilon_0$ , 故  $\omega \epsilon \ll 10^7 \text{ rad/s}$ 。这表明,在导体中的电磁场直至紫外线波段都允许略去位移电流。

### (2) 理想介质中的电磁场

在教材 5.3 节已经指出理想介质中动态电磁场的推迟作用,即某一时刻  $t$  的场量值并不与该时刻  $t$  的场源相对应,而是决定于  $(t - r/v)$  时刻的场源的变化。以时谐场为例,对应地,即给出了一个描述推迟效应的因子  $e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$  [式(5-48)或式(5-49)]。显然,忽略推迟作用的条件是  $e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \approx 1$ , 即  $k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = R/v = 2\pi R/\lambda \ll 1$ , 故有  $R \ll \lambda$ 。

由此可见,当场点与源点之间的距离  $R$  远小于场的波长  $\lambda$  时,略去位移电流是合理的。正是在这一理论分析的基础上,在 5.4 节电磁辐射的专题分析中,将满足  $R \ll \lambda$  条件的区域定义为近区,而在该区域中的电磁场也就被称为近场(准静态场或似稳场)。同样,对于由交变电流励磁的电磁系统或装置,若其励磁系统的线度尺寸  $l$  满足  $l \ll \lambda$  的条件,则该系统或装置中的电磁场即可归类为准静态场。

以上给出的  $\sigma \gg \omega \epsilon$ , 以及  $R \ll \lambda$  的条件,就是判别准静态场的条件,也称为似稳条件。

应该注意,似稳条件是相对的。例如,工频电力传输线的电磁场,其频率  $f = 50 \text{ Hz}$ ,  $\lambda = 6000 \text{ km}$ , 而对于运行在微波波段的微波器件、装置来说,若  $f = 3 \text{ GHz}$ , 则  $\lambda = 10 \text{ cm}$ 。由此可见,满足同一准静态场条件的上述这两类场,它们的空间范围显然不存在可比性。

## 4.3.2 准静态场的基本方程及其导出关系式

对于缓变场,基于工程分析观点,在忽略电磁感应效应  $-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  项或忽略位移电流效应  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  项的前提下,可将所论的准静态场分类为电准静态场(EQS)或磁准静态场(MQS),其基本方程及相应的导出关系式分列于下:

## 电准静态场 (EQS)

基本方程

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \frac{\mathbf{D}}{t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} =$$

## 磁准静态场 (MQS)

基本方程

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\mathbf{B}}{t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} =$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \mathbf{J}_c = (\mathbf{E} + \mathbf{E}_v)$$

导出关系:

电荷守恒定律

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_c = -\frac{\rho}{t}$$

判别式

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\text{即 } \mathbf{E} \ll \mathbf{E}_v (\nabla \times \mathbf{E} = 0)$$

场量积分关系式

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{(\mathbf{r}, t)}{R^2} \mathbf{e}_R dV$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}_c(\mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{D}}{t} \times \mathbf{e}_R}{R^2} dV$$

导出关系:

电荷守恒定律

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_c = 0$$

判别式

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c$$

$$\text{即 } \mathbf{J}_c \gg \frac{\mathbf{D}}{t}$$

场量积分关系式

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}_c(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{e}_R}{R^2} dV$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_v + \mathbf{E}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{(\mathbf{r}, t)}{R^2} \mathbf{e}_R - \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{e}_R}{t} dV$$

由基本方程的物理涵义可知,在忽略电磁感应效应  $-\frac{\mathbf{B}}{t}$  项 前提下定义的电准静态场中,实际上略去了随时间变化的磁场对电场分布的影响,即略去了二次源  $-\frac{\mathbf{B}}{t}$  的作用。同样,在忽略位移电流效应  $\frac{\mathbf{D}}{t}$  项 前提下定义的磁准静态场中,实际上略去了随时间变化的电场对磁场分布的影响,即略去了二次源  $\frac{\mathbf{D}}{t}$  的作用。从而,这两类场在每一时刻源和场之间的关系就类同于静态场中源和场之间的关系,因此,基于类比关系,即可直接导出上列各场量积分关系式。

## 4.4 习题解析与解答

**4-1** 电阻率为  $\rho$ , 半径为  $R$  的导线构成一面积为  $a \times b$  的矩形回路,它的一部分位于恒定磁场(磁感应强度为  $\mathbf{B}$ )中,如题 4-1 图所示。已知该回路以恒定速度  $v_0$  向右移动,求:

- (1) 回路中的感应电势;
- (2) 移动时, 回路所受的机械力;
- (3) 如回路断开(如图中所示), 求开路电压。

[解题思路]

根据题意, 待求感应电动势属动生电动势, 其计算关系式为式(1-61)。应指出, 动生电动势  $e$  的参考方向应由  $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$  的方向决定。

动生电动势在闭合导电回路中形

成的感应电流, 即归属为自由电荷的定向运动。因此, 感应电流在磁场中所受磁场力效应, 基于洛伦兹力公式(1-7), 可由式(3-112)计算之。

**[解]** (1) 因仅有  $\overline{12}$  边切割磁场线, 故动生电动势  $e$  的参考方向由  $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$  决定, 如图所示, 其值为

$$e = \int_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = v_0 B b$$

(2) 由于回路闭合, 该导电回路(设电阻为  $r$ ) 中将因感应电动势  $e$  产生感应电流, 其值为

$$i = \frac{e}{r} = \frac{v_0 B b}{\frac{2(a+b)}{R^2}} = \frac{R^2 v_0 B b}{2(a+b)}$$

这样, 载流导线在磁场中运动将受到磁场力的作用。就回路运动而言,  $\overline{12}$  边上的磁场力  $\mathbf{F}$  将与  $\mathbf{v}_0$  反向, 阻止回路的运动, 其值为

$$|\mathbf{F}| = i \left| \int_{l_{12}} d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \right| = i b B = \frac{R^2 v_0 B^2 b^2}{2(a+b)}$$

方向如图示。

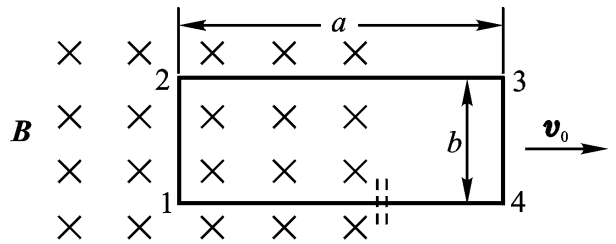
(3) 如回路如图示断开, 其开路电压必然与感应电势  $e$  相平衡, 即  $u_{\text{开路}} = e = v_0 B b$ , 其参考方向由断开点的右侧指向左侧。

**4-2** 设有一断开的矩形线环位于一长直导线的近旁, 见图 4-2 图。

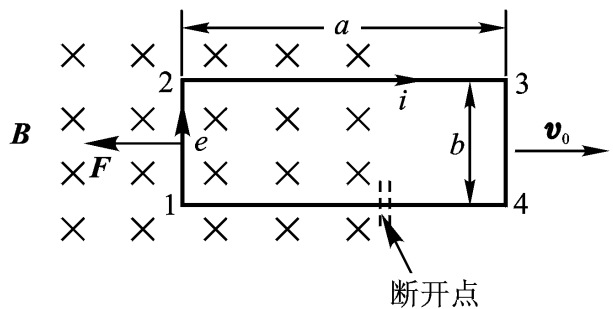
(1) 设  $i = I_m \cos(\omega t)$ , 确定开路电压并说明其极性(设矩形环的尺寸远小于自由空间中的与  $\mathbf{B}$  有关的波长);

(2) 设  $i$  为直流电, 但回路以  $v_0$  向右移动, 试决定其开路电压并指明其极性;

(3) 若导线中通有电流  $i = I_m \cos(\omega t)$ , 线环又向右以速度  $v_0$  运动, 重新决定  $u(t)$ 。



题 4-1 图(1)



题 4-1 图(2)

[解题思路]

根据题意(1), 待求感应电动势属感生电动势, 其计算关系式为式(1-62)。

应指出, 沿回路  $l$  感生电动势  $e$  的参考方向应与穿过回路的磁通 满足右螺旋关系;

根据题意(2), 待求感应电动势属动生电动势, 其计算关系式为式(1-61)。应指出, 动生电动势  $e$  的参考方向应由  $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$  的方向决定之。必须指出,

此时, 对应于运动媒质, 描述两系统间相对位置变化的空间坐标

应与时间坐标相关联, 即将 表示为  $= 0 + v_0 t$ 。

根据题意(3), 此时, 待求感应电动势应既含有感生电动势, 又含有动生电动势, 其计算关系式为式(1-64), 或式(1-60)。

[解] (1) 由长直线电流  $i = I_m \cos(\omega t)$  产生的磁场为

$$B(r, t) = \frac{\mu_0 i}{2r} = \frac{\mu_0 I_m}{2r} \cos(\omega t) = B_m(r) \cos(\omega t)$$

则穿过矩形导线回路的磁通(令  $r_0 = 0$ )

$$\Phi(t) = \int_0^{a+b} \frac{\mu_0 i}{2r} a dr = \frac{\mu_0 a}{2} \ln \left( 1 + \frac{b}{0} \right) I_m \cos(\omega t) = \Phi_m \cos(\omega t)$$

由法拉第电磁感应定律, 可知对矩形导线回路应有

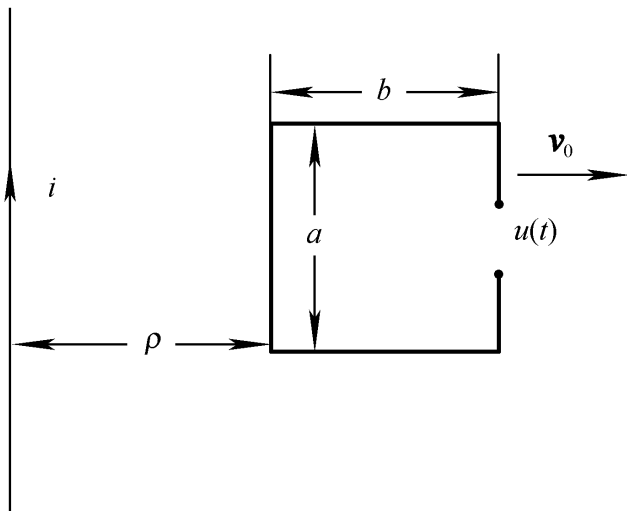
$$e(t) = u(t) = - \frac{d\Phi}{dt} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \Phi_m \omega \sin(\omega t) = \frac{\mu_0 a I_m}{2} \ln \left( 1 + \frac{b}{0} \right) \sin(\omega t)$$

开路电压  $u(t)$  的极性如图所示。

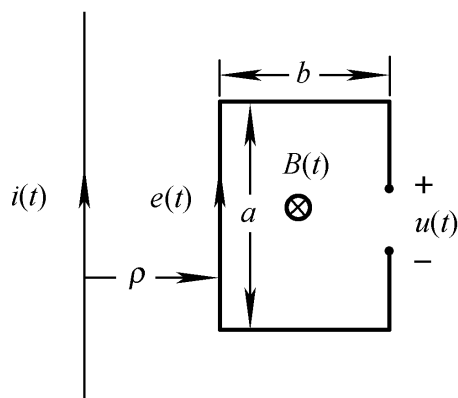
(2)  $i = I$ , 此属动生电动势问题。现由  $\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2r} \mathbf{e}_\phi$ , 可得穿过矩形导线回路的磁通为

$$\Phi = \int_0^{a+b+v_0 t} \frac{\mu_0 I}{2r} a dr = \frac{\mu_0 I a}{2} \ln \left( 1 + \frac{b}{0 + v_0 t} \right)$$

$$\text{故 } u(t) = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{\mu_0 I a}{2} \cdot \frac{0 + v_0 t}{0 + v_0 t + b} \cdot \frac{v_0 (0 + v_0 t) - (0 + b + v_0 t) v_0}{(0 + v_0 t)^2}$$



题 4-2 图(1)



题 4-2 图(2)

$$= \frac{\mu_0 abv_0 I}{2 (\lambda_0 + v_0 t)(\lambda_0 + v_0 t + b)}$$

$u(t)$  极性同上。

(3) 此时, 穿过矩形回路中的磁通, 由类同于(1)的分析得

$$\Phi(t) = \frac{\mu_0 a I_m}{2} \ln \left( 1 + \frac{b}{\lambda_0 + v_0 t} \right) \cos(\omega t)$$

故  $u(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 a I_m}{2} \ln \left( 1 + \frac{b}{\lambda_0 + v_0 t} \right) \sin(\omega t) + \frac{bv_0 \cos(\omega t)}{(\lambda_0 + v_0 t)(\lambda_0 + v_0 t + b)}$

**4 - 3** 应用感应电动势法测试磁场的探测线圈(圆柱形的小线圈), 以图所示方位放置于均匀的工频磁场  $B(t) = B_m \sin(\omega t)$  中, 探测线圈匝数为  $N$ , 几何尺寸如题 4 - 3 图所示。求探测线圈中的感应电势值(有效值)。

### [解题思路]

本题以工程中由感应电动势法测定磁场为应用背景, 分析探测线圈的结构及其参数与所测磁感应强度  $\mathbf{B}(t)$  产生的感生电动势  $\mathbf{e}(t)$  [式(1 - 62)] 之间的关系;

解题的关键在于分析该探测线圈所交链的随时间变化的磁链  $\Psi(t)$ 。为此, 对于题设的均匀外施工频磁场  $\mathbf{B}(t)$ , 首先, 分析得知, 仅有与该线圈轴线同向的  $\mathbf{B}(t)$  的分量才对感生电动势  $\mathbf{e}(t)$  有贡献; 其次, 该线圈多层线匝的结构决定了线圈各匝所交链的磁通并不相同, 即应从“部分交链”的情况着手分析。进一步分析可见, 凡与轴线同轴的圆柱形轮廓上的线匝所交链的磁通量相同, 因此, 可令元磁链  $d\Psi = dN \Phi$  (式中,  $dN$  即为上述圆柱形线匝轮廓所对应的元线匝;  $\Phi$  为  $dN$  所交链的磁通); 从而, 最终由元磁链的叠加积分, 即得待求的磁链  $\Psi(t)$ ;

因量测仪表的读数为正弦量的有效值,故分析结果关注于感生电动势的有效值。

[解] 根据“解题思路”,如图示,选取与测试线圈轴线同轴的半径为  $r$ ,厚度为  $dr$  的圆柱形薄壳,并定义其对应的线匝为元线匝  $dN = \frac{bdr}{b(R_2 - R_1)} N$ ,该元线匝中交链的磁通为

$$\begin{aligned} &= \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_s B dS \cos 30^\circ \\ &= B \frac{3}{2} r^2 \end{aligned}$$

从而,与其交链的元磁链即为

$$\begin{aligned} d\psi &= dN \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{bdr}{b(R_2 - R_1)} N \frac{3}{2} Br^2 \\ &= \frac{3}{2} \frac{NBr^2}{(R_2 - R_1)} dr \end{aligned}$$

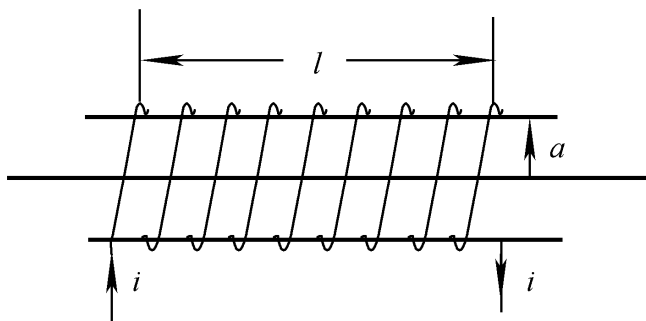
故与测试线圈交链的总磁链为

$$\begin{aligned} \psi &= \int_{R_1}^{R_2} d\psi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{3}{2} \frac{NBr^2}{(R_2 - R_1)} dr \\ &= \frac{3}{6} \frac{NB_m}{(R_2 - R_1)} \sin(\omega t) \cdot (R_2^2 + R_1 R_2 + R_1^2) \end{aligned}$$

感应电势  $e = - \frac{d\psi}{dt} = - \frac{3}{6} \frac{N}{(R_2 - R_1)} B_m \cos(\omega t) \cdot (R_2^2 + R_1 R_2 + R_1^2)$

故  $E = \frac{6}{12} \frac{N}{(R_2 - R_1)} B_m (R_2^2 + R_1 R_2 + R_1^2)$

**4 - 4** 一均匀绕制(每单位长度为  $N$  匝)的细长螺管线圈,螺管的半径为  $a$ ,且  $a \ll l$ (螺管的长度),如题 4 - 4 图所示。已知线圈中通有缓变电流  $i = I_m \sin(\omega t)$ 。求:



题 4 - 4 图(1)

- (1) 螺管线圈内外的磁感应强度  $\mathbf{B}(t)$ ;
- (2) 螺管线圈内外任意点的感应电场强度。

[解题思路]

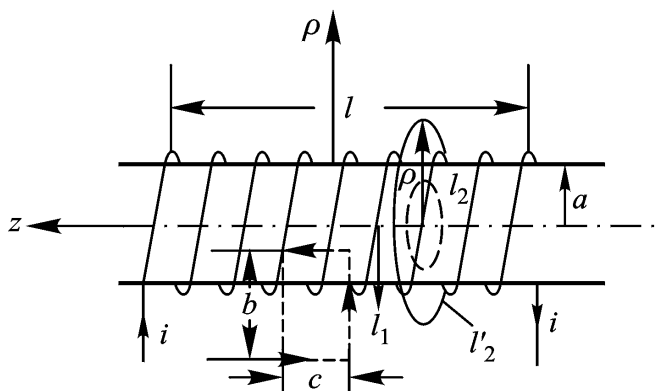
根据题意,显然,本题物理模型可以理想化为无限长直的载流螺旋管,因此,其场分布的特点是:螺线管内为均匀磁场;螺线管外的磁场理想化为零磁场分布。

基于上述场分布特征,可直接运用真空中的安培环路定律(3 - 27)计算螺线管中磁感应强度  $\mathbf{B}$  的分布;

根据题意,待求感应电动势属感生电动势,其计算关系式为式(1 - 62)。应指出,沿回路  $l$  感生电动势  $e$  的参考方向应与穿过回路的磁通  $\Phi$  满足右螺旋关系。

[解] 理想化为无限长直载流螺线管工况。

(1) 在长直螺线管线圈均匀密绕条件下,就中间区段磁场分布而言,螺线管内磁场方向与电流方向成右螺旋关系。如图若取一矩形闭合回路  $l_1$ ,则由安培环路定律可得



题 4 - 4 图(2)

$$\int_{l_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 Nci \quad (1)$$

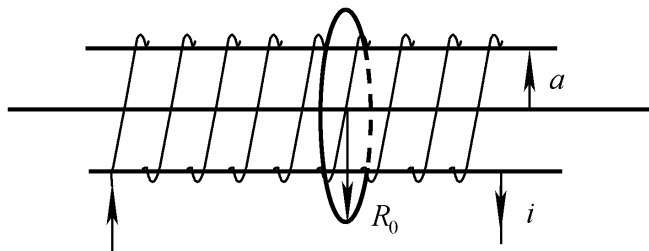
显然,如改变该矩形闭合回路  $l_1$  的长边尺寸  $b$ ,则在如图所示保持其两短边分别位于螺线管内、外的方位不变的情况下,式(1)恒成立。由此根据螺线管磁场分布的特征,不难判断,其磁感应强度为

$$\mathbf{B}(t) = \begin{cases} B_z(t) \mathbf{e}_z = \mu_0 Ni(t) \mathbf{e}_z & (\rho < a) \\ 0 & (\rho > a) \end{cases}$$

(2) 基于螺线管内均匀磁场  $\mathbf{B}$  分布的轴对称性,因而其感应电场  $\mathbf{E}$  亦具有同一的轴对称性质,两者参考方向之间应满足右螺旋关系。取图示半径为  $\rho$  的同心圆周为积分路径  $l_2$  和  $l_2$ ,应用法拉第电磁感应定律可求得由缓变磁场激励的感应电场为

$$\begin{aligned}
\int_{l_2 \text{ 或 } l_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= 2 \int_{s_2 \text{ 或 } s_2} E(r, t) \cdot \mathbf{e} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{d}{dt} \int_{s_2 \text{ 或 } s_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\
&= - \mu_0 N^2 \frac{di}{dt} = - \mu_0 N^2 I_m \cos(\omega t) \quad (r < a) \\
&= - \mu_0 N a^2 \frac{di}{dt} = - \mu_0 N a^2 I_m \cos(\omega t) \quad (r > a) \\
&= - \frac{\mu_0 N I_m}{2} \cos(\omega t) \mathbf{e} \quad (r < a) \\
\text{故 } \mathbf{E}(r, t) &= E(r, t) \mathbf{e} = - \frac{\mu_0 N a^2}{2} \cos(\omega t) \mathbf{e} \quad (r > a)
\end{aligned}$$

**4 - 5** 上题中,若另有一匝闭合导线与螺线管线圈同轴放置,其半径为  $R_0$ ,内阻为  $r$ ,电感可忽略不计(参阅题 4 - 5 图)。求闭合导线中的感应电流  $i(t)$  并作出相应的曲线。



题 4 - 5 图(1)

[解题思路]

根据题意,待求的感应电流  $i(t)$

源于闭合导线与螺旋管线圈中

交变磁通相互交链所产生的感应电动势,该感应电动势属感生电动势,其计算关系式为式(1 - 62)。应指出,沿回路  $l$  感生电动势  $e$  的参考方向应与穿过回路的磁通  $\Phi$  满足右螺旋关系;

在导电媒质内,感应电场强度  $\mathbf{E}$  与感应电流密度  $\mathbf{J}$  应满足媒质构成关系(3 - 5)。

**[解]** 设闭合导线的横截面积为  $S$ ,电导率为  $\sigma$ ,则导线内的电场强度  $E = \frac{J}{\sigma} = \frac{i}{S}$ ,其方向与感应电流同向。由上题可知,螺线管内外的磁感应强度为

$$B_z(t) = \begin{cases} \mu_0 N I_m \sin(\omega t) = B_m \sin(\omega t) & (r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases}$$

其中  $B_m = \mu_0 N I_m$ 。

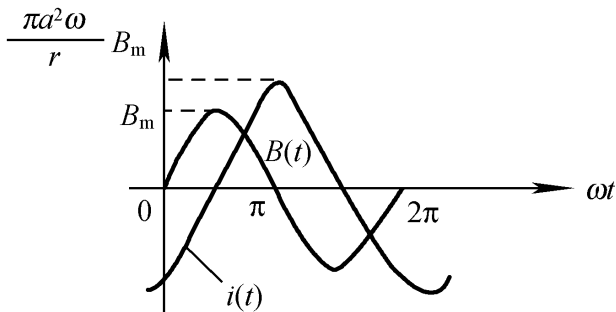
现沿闭合导线应用法拉第电磁感应定律,得

$$\begin{aligned}
\int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= E(R_0) \cdot 2\pi R_0 = \frac{i}{S} \cdot 2\pi R_0 = ir \\
&= - \frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = - \mu_0 a^2 N I_m \cos(\omega t)
\end{aligned}$$

故感应电流  $i(t)$  即为

$$i = - \frac{a^2}{r} B_m \cos(\omega t)$$

其随时间变化的曲线如图所示,在相位上滞后  $B(t)$  的角度为  $90^\circ$ 。



题 4 - 5 图(2)

**4 - 6** 若上题中单匝导线不闭合,如题 4 - 6 图所示,求开口处的电压  $u_{AB}(t)$ 。

[解题思路]

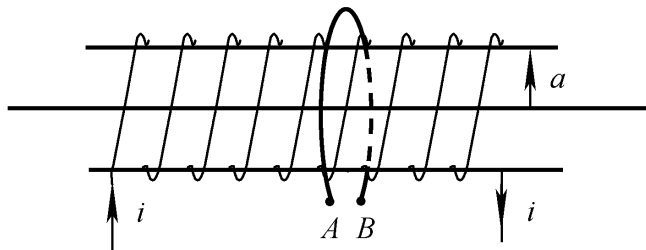
根据电压定义  $u_{AB} =$

$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ , 基于法拉第电磁

感应定律(1 - 60), 即可由上

题的解答续求本题的开路电

压  $u_{AB}(t)$ 。



题 4 - 6 图

[解] 在导体不闭合的情况下,导线中无感应电流,导线中的电场强度为零。但由于空间中存在感应电场,因此依然存在感应电动势,导致导线开口处产生电压  $u_{AB}$ 。沿导线回路应用法拉第电磁感应定律可得

$$\int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = u_{BA} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = - \mu_0 a^2 N I_m \cos(\omega t)$$

故 
$$u_{AB}(t) = - u_{BA}(t) = \mu_0 a^2 N I_m \cos(\omega t)$$

**4 - 7** 设在半径分别为  $a$  和  $b$  的两个同心球之间充满着理想电介质,其介电常数为  $\epsilon_0$ ,两球间接有交变电压  $u = U_m \sin(\omega t)$ 。

- (1) 应用位移电流密度的定义,求通过介质中任意点的位移电流密度;
- (2) 应用交流电路的方法计算两球间任意点间的位移电流密度。

[解题思路]

首先,应解出两同心球间的电场分布。根据场结构的特点,可以判定,该电场具有球对称分布的特征。因此,在假设内外同心球分别带有  $+q(t)$  和  $-q(t)$  的给定场源条件下,应用真空中的高斯定理(1 - 84d),类同于静电场中相应的分析,即可得同心球间电场强度  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  的分布;

其次,根据题设给定交变电压的条件,基于电压的定义式  $u(t) =$

$\int_l \mathbf{E}(t) \cdot d\mathbf{l}$ , 可导出  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  与  $u(t)$  的关联式,从而即可求得待求位移电

流密度 
$$\mathbf{J}_D = \epsilon_0 \frac{\mathbf{E}}{t};$$

从电路观点分析, 本题即为一理想电压源激励的纯电容电路。因此, 首先, 应基于上述场分布的分析基础, 解出所论电系统的电容参数  $C$  (两同心导球构成的电容  $C$ ); 然后, 即可由端口电流  $i_c = C \frac{d u_c}{d t}$ , 以及电流连续性原理, 导出位移电流密度  $i_D = i_c$ , 并根据位移电流场的球对称分布特征, 最终解得待求位移电流密度  $\mathbf{J}_D$ 。

[解] (1) 设内外球表面分别带有电量  $+q(t)$  和  $-q(t)$ , 于是, 根据待求电场具有球对称分布的特征, 应用高斯定理, 显然可得球内电场为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

故有 
$$u(t) = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \frac{q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r} = \frac{q(t)}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

即有 
$$\frac{q(t)}{4\pi\epsilon_0} = \frac{u(t)}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{ab}{b-a} U_m \sin(\omega t)$$

因而在给定电压条件下, 该电场的电场强度为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{abU_m}{(b-a)r^2} \sin(\omega t) \mathbf{e}_r$$

故 位移电流密度

$$\mathbf{J}_D = \frac{d\mathbf{D}}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \frac{\epsilon_0 ab}{(b-a)r^2} U_m \cos(\omega t) \mathbf{e}_r$$

(2) 如同“解题思路”中关于电路观点的分析, 在上述场分布解答的基础上,

可知两同心球间电容  $C = \frac{q}{U} = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a}$ , 故该电系统导线中的传

导电流为

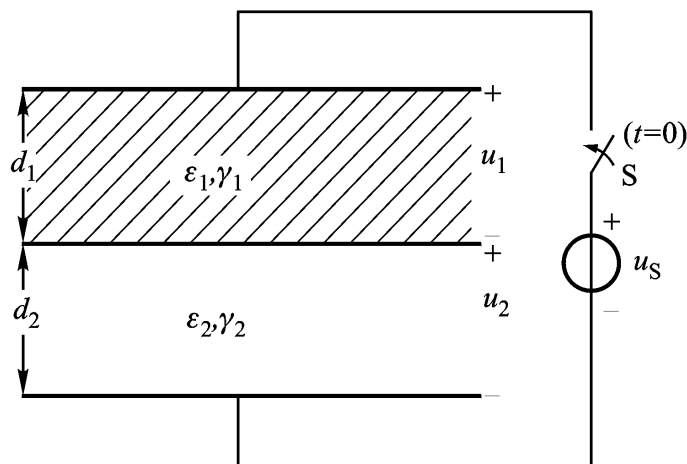
$$i_c = C \frac{d u_c}{d t} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a} U_m \cos(\omega t)$$

基于电流连续性原理, 显而易见, 在内外球壳间存在位移电流  $i_D = i_c$ 。由电极结构的球对称性出发, 可以判定, 位移电流方向为  $\mathbf{e}_r$  方向, 从而, 通过应用定义式  $i_D = \int_S \mathbf{J}_D \cdot d\mathbf{S}$ , 即可得位移电流密度

$$\mathbf{J}_D = \frac{i_D}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r = \frac{\epsilon_0 ab}{(b-a)r^2} U_m \cos(\omega t) \mathbf{e}_r$$

其结果与上述基于场观点的分析结果相同。

**4-8** 设一平板电容器由两层有损介质串联构成, 如题 4-8 图所示。其介电常数和电导率分别为  $\epsilon_1, \sigma_1$  和  $\epsilon_2, \sigma_2$ , 厚度分别为  $d_1$  和  $d_2$ 。设  $t=0$  时开关 S 闭合, 接通直流电压源  $u_s$ 。基于 4.2.2 节的讨论, 求:



题 4 - 8 图(1)

- (1) 施加于两层有损介质上的电压  $u_1(0_+)$ ,  $u_2(0_+)$  和  $u_1(\infty)$ ,  $u_2(\infty)$ ;  
 (2) 分别画出对应于  $t=0_+$  和  $t=\infty$  时刻的等值电路图。

[解题思路]

本题分析基础是教材 4.2.2 节。事实上,基于电磁场理论知识的积累,必然可以得出如下工程分析的结论:1. 对应于  $t=0_+$  时刻场分布的分析,应归属为静电场问题,即有损介质的特性完全取决于其介电常数的分布;2. 对应于  $t=\infty$  时刻场分布的分析,应归属为恒定电流场问题,即有损介质的特性完全取决于其电导率的分布;

根据本题的物理本质,在分析其场分布的物理规律性时,应聚焦于该电容器内两种不同媒质分界面上的 BC。由上述关于场分布的分析可知,所论的两种不同媒质分界面上的 BC,应兼容有电场与电流场的特征,因此,应列出对应于电场本质的基本关系式(4 - 17),以及对应于电流场本质的基本关系式(4 - 18),联立求解,导出分析所依据的基本方程;

分析中,若借鉴教材 4.2.2 节中已导出的电场  $\mathbf{E}$  的一般解,则其结论将一览无遗。

**[解]** (1) 根据“解题思路”,对于分界面上的边界条件,应有

$$D_{2n} - D_{1n} = -\rho_{f, \text{分界面}}$$

又据电荷守恒定律  $J_{2n} - J_{1n} = -\frac{\rho_{f, \text{分界面}}}{t}$ , 并代入  $J_{1n} = \gamma_1 E_{1n}$ ,  $J_{2n} = \gamma_2 E_{2n}$ , 则可得分界面上场量应满足的基本方程为

$$(\gamma_2 E_{2n} - \gamma_1 E_{1n}) + \frac{1}{t}(\epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n}) = 0 \quad (1)$$

1)  $t=0_+$  时, 由

$$E_1 d_1 + E_2 d_2 = u_S \quad (2)$$

联立求解式(1)和式(2)(见 4.2.2 节), 可得

$$E_1(0_+) = \frac{\epsilon_2 u_S}{d_2 \epsilon_1 + d_1 \epsilon_2}$$

显然,  $t = 0_+$  时刻的电场按介电常数分布, 即:

$$u_1(0_+) = E_1(0_+) d_1 = \frac{\frac{\epsilon_2}{d_2}}{\frac{\epsilon_1}{d_1} + \frac{\epsilon_2}{d_2}} u_S = \frac{C_2}{C_1 + C_2} u_S$$

$$u_2(0_+) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} u_S$$

2)  $t = \infty$  时, 由式(4-27)可得

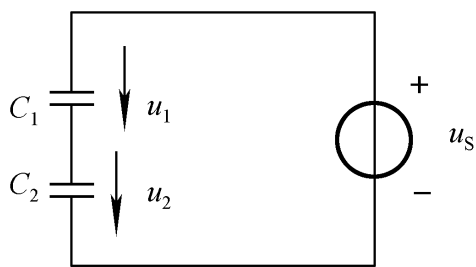
$$E_1(\infty) = \frac{\epsilon_2 u_S}{d_2 \epsilon_1 + d_1 \epsilon_2}$$

显然,  $t = \infty$  时刻的电场按电导率分布, 即:

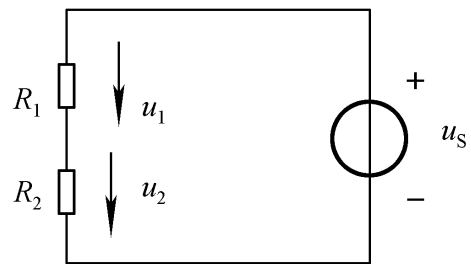
$$u_1(\infty) = E_1(\infty) d_1 = \frac{\frac{\sigma_1}{d_2}}{\frac{\sigma_2}{d_2} + \frac{\sigma_1}{d_1}} u_S = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_S$$

$$u_2(\infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_S$$

(2) 对应于  $t = 0_+$  和  $t = \infty$  时刻的等值电路图, 分别示于图(a)和图(b)。



(a)  $t=0_+$  时刻的等值电路图



(b)  $t=\infty$  时刻的等值电路图

题 4 - 8 图(2)

# 第 5 章 动态电磁场与电磁波

## 5.1 基本内容与要求

理解动态电磁场与电磁波的含义。

掌握动态电磁场方程组及其物理意义。理解不同媒质分界面上的边界条件。

理解动态电磁场中有损媒质特性参数的描述。

理解坡印廷矢量  $\mathbf{S}$  的含义, 会应用坡印廷定理分析电磁能量传输问题, 了解计算媒质等值交流电路参数的一般原则和方法。

掌握电磁位的定义, 以及与场量间的关系。理解洛伦兹规范。理解达朗贝尔方程解的物理意义。

了解由电磁位  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  求解电偶极子 (元天线) 辐射场的思路, 理解天线的方向图、辐射电阻、近区和远区的含义。

了解线天线与天线阵的概念。

掌握均匀平面电磁波在理想媒质和导电媒质中的传播规律, 能阐明理想介质与导电媒质中平面波传播特性的异同点。理解波阻抗、传播系数、相速、波长的含义, 并能熟练地计算这些传播特性参数。了解平面波的极化概念。

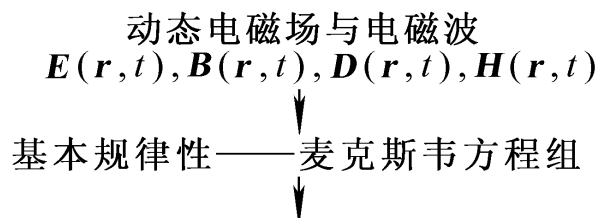
了解均匀平面电磁波垂直入射于媒质分界面时的反射和透射规律, 会计算反射系数和透射系数。掌握全反射现象和驻波的形成, 掌握驻波的特点及其分布规律。

了解电磁波的导波系统, 及其导波原理。

以矩形波导为重点, 了解导波系统的传输特性 (多模特性、截止波长及波导波长等), 以及波导中的电磁场分布。

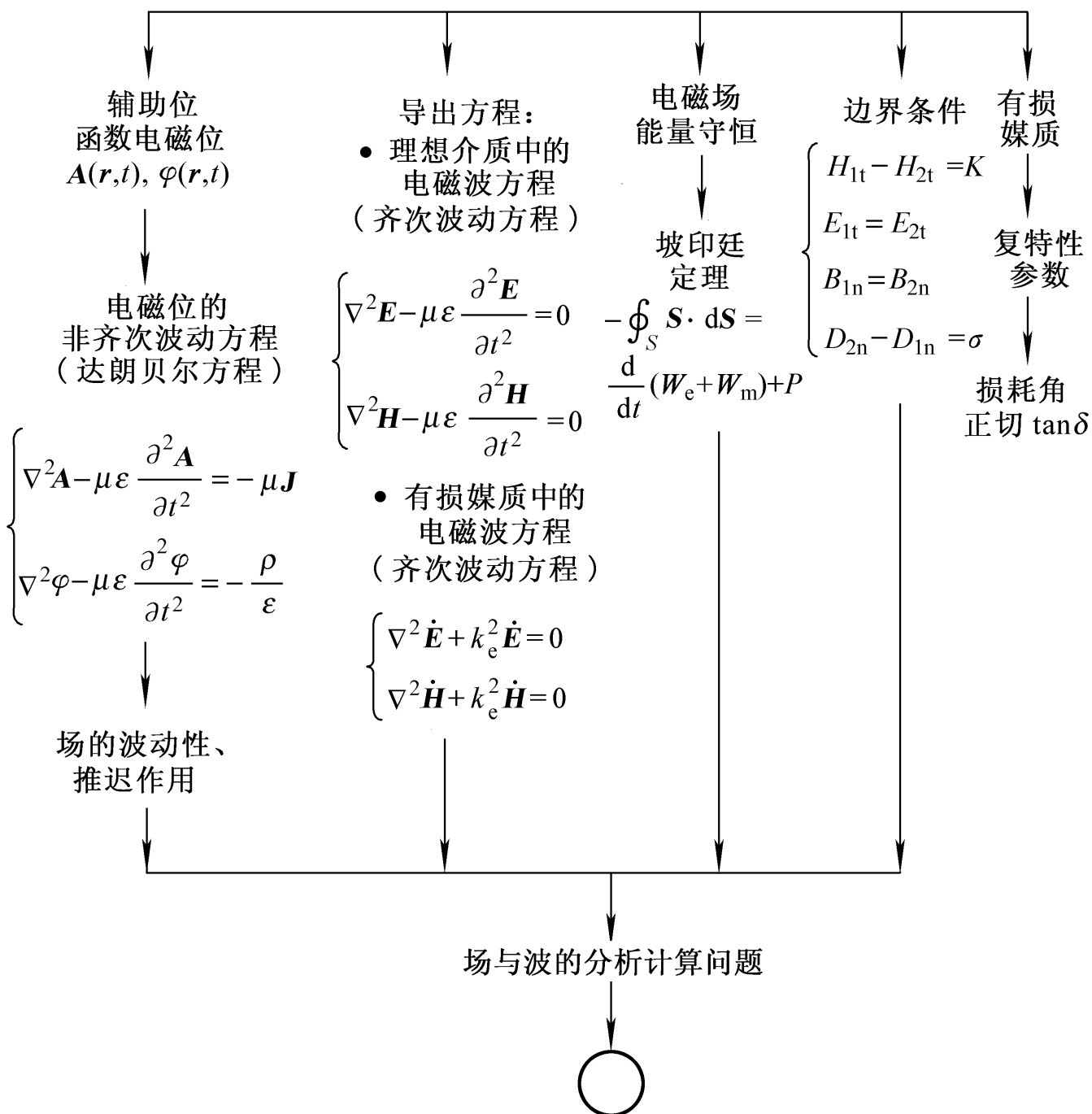
了解谐振腔的工作原理。

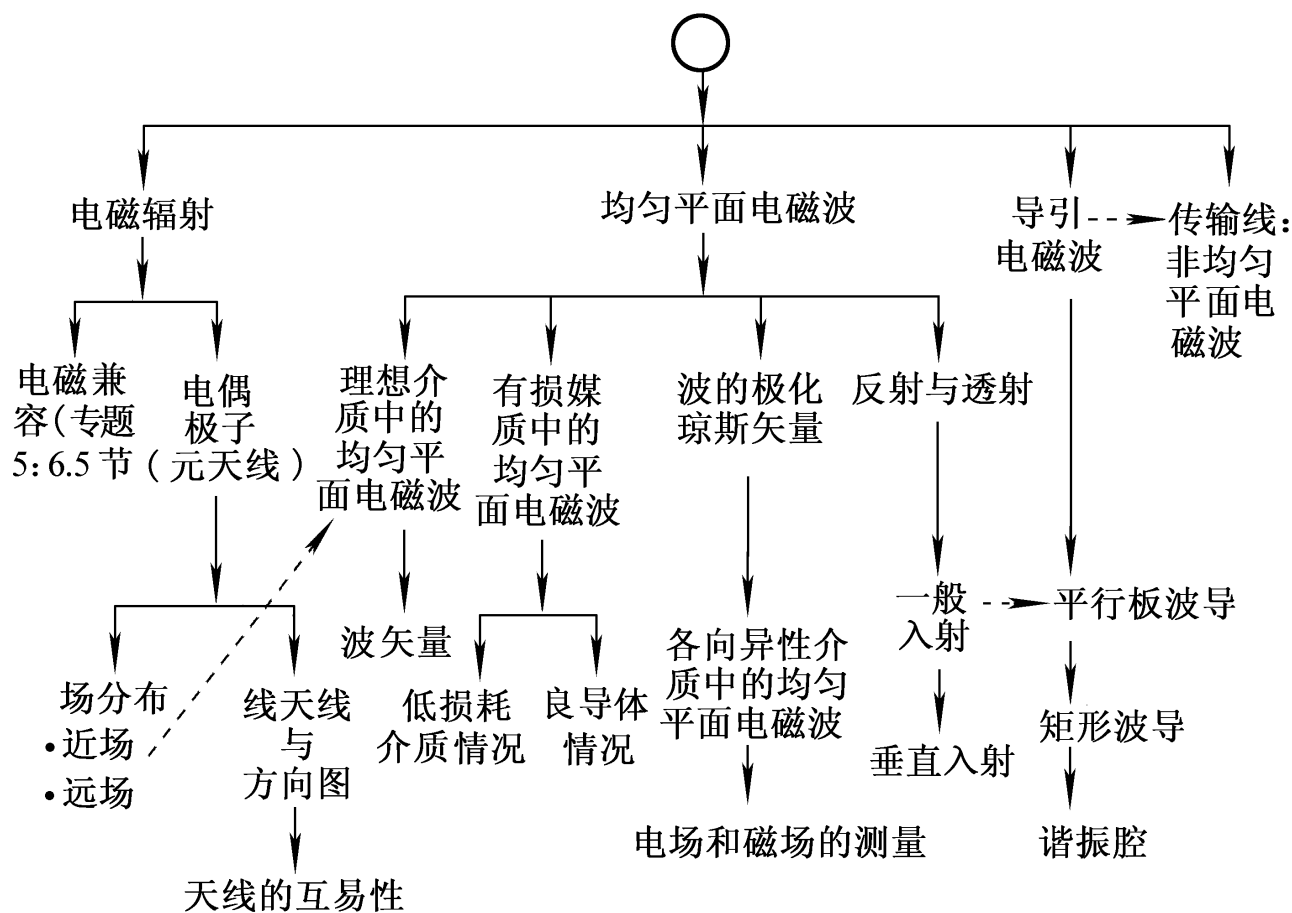
## 5.2 教学体系框架



$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \begin{cases} \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_D \\ \mathbf{J}_v \end{cases} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \end{cases}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \mathbf{J}_c = \gamma \mathbf{E}$$





本章首先介绍了动态电磁场分析的理论基础,也就是麦克斯韦方程组、媒质特性构成方程和电磁能量守恒关系(坡印廷定理)。然后,分别按照电磁辐射、均匀平面电磁波和导引电磁波三条主线从不同的角度深入研究电磁波的产生和传播规律。

在上面给出的教学体系框架中,各相关知识点间“带箭头的实线”表示知识讲授的逻辑进程和关联关系;“带箭头的虚线”表示对现有知识的推论,以便从另一个角度理解相关的知识,作为对“带箭头的实线”知识的一种补充理解。

使用本教材的教师可以很容易地根据学时多少对上述教学内容进行取舍和组合。

## 5.3 相关教学重点、难点解析

### 5.3.1 坡印廷定理与坡印廷矢量

坡印廷定理与坡印廷矢量是本章的教学重点之一。基于麦克斯韦方程组,推导出功率守恒关系的微分形式和积分形式,即坡印廷定理。这一定理是电磁能量守恒与转换规律性的具体体现,是坡印廷(John Henry Poynting, 1852—1914)在 1884 年至 1885 年期间发表的论文中提出的,它证明了空间中任意一点的电磁能量流可以简单地由该点的电场强度和磁场强度予以描述。坡印廷定理是电磁场理论中最重要的定

理之一,它不仅具有重要的理论意义,而且具有重要的工程应用价值。

首先,坡印廷定理从理论上揭示了电磁场的物质属性。电磁场是物质的一种特殊形式,其能量以场的形式分布于整个场域空间内,并且电磁场能量的传播及其转换满足坡印廷定理。

其次,坡印廷定理通过引入坡印廷矢量,给出了电磁场能量及其传播过程分析计算的基本方法。坡印廷矢量  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  与电场强度  $\mathbf{E}$  和磁场强度  $\mathbf{H}$  一样,既是空间坐标的函数又是时间的函数。坡印廷矢量  $\mathbf{S}$  给出了时刻  $t$  时空间任意一点的电磁功率的面密度矢量(也就是电磁能量流的面密度矢量),其方向表明了该点电磁能量的流动方向,且恒与该点的电场强度  $\mathbf{E}$  和磁场强度  $\mathbf{H}$  相垂直,三者构成右手螺旋关系;其数值等于穿过与它垂直的单位面积上的电磁功率。

再次,基于坡印廷矢量,还给出了关于电磁能量传输“图景”的明确物理概念,即负载从电源获取的能量并不是电源通过与负载相连接的导体向负载传输的,而是以电磁场的方式通过导体周围空间沿着导体方向传输给负载的,导体的作用仅在于建立其周围空间的电磁场并将能量从电源定向导引到负载。图 5.1 即通过以实线表示的坡印廷矢量  $\mathbf{S}$  的分布图,描绘了由电源至负载的电磁能量流的图景。

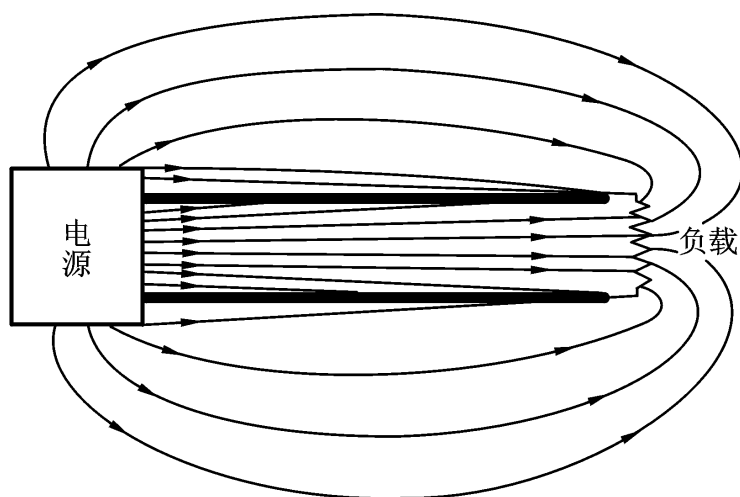


图 5.1 电磁能量流的图景

为了分析时谐电磁场的电磁能量或电磁功率问题,引入了复坡印廷矢量。在复坡印廷矢量的计算中,电场强度和磁场强度既可以采用有效值形式的复矢量也可以采用振幅形式的复矢量,即

$$\dot{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^* = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}}_m \times \dot{\mathbf{H}}_m^* \quad (5.1)$$

教材中采用有效值形式的电场强度和磁场强度复矢量。应该明确指出,复坡印廷矢量的数值等于穿过与它垂直的单位面积上的复功率,其实部为平均功率(又称有功功率),虚部为无功功率。由式(5-24)可知,输入闭合面  $S$  的复功率  $\dot{P}$  为

$$\begin{aligned}
 \text{坡印廷矢量} \cdot d\mathbf{S} &= - \int_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S} = - \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{S} \\
 &= \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* dV + j \int_V (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^* - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*) dV \\
 &= P + j(Q_L - Q_C) \\
 &= P + jQ
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

式中,  $P$  和  $Q$  分别为闭合面  $S$  所包围体积  $V$  内吸收的有功功率和无功功率;  $Q_L$  为体积  $V$  内对应于磁场能量的无功功率(又称为感性无功功率),  $Q_C$  为体积  $V$  内对应于电场能量的无功功率(又称为容性无功功率)。在工程中,经常利用式(5.2)用以确定一个电磁系统的等值电路参数,即

$$\begin{aligned}
 \text{等值电阻} \quad R &= \frac{P}{I^2} = \frac{1}{I^2} \operatorname{Re} \int_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S} \\
 \text{等值电抗} \quad X &= \frac{Q}{I^2} = \frac{1}{I^2} \operatorname{Im} \int_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S}
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

**例 5.1** 一半径为  $a$ , 高为  $d$  的圆柱形电阻棒(图 5.2), 其电导率为  $\gamma$ 。设有一电压源  $U_s$  通过两个半径为  $b$  ( $b \gg a, d$ ) 的理想导电圆板向电阻棒供电。试用坡印廷矢量分析电磁能量的传输过程。

[解] 由于  $b \gg a$  和  $d$ , 故可忽略两理想导电圆板间电场的边缘效应。显然, 在两理想导电圆板之间的电场强度为

$$\mathbf{E} = -\mathbf{e}_z \frac{U_s}{d} \quad (0 < r < b)$$

在圆柱形电阻棒内, 电流密度为

$$\mathbf{J} = -\mathbf{e}_z \frac{U_s}{d} \quad (0 < r < a)$$

磁场强度为

$$\mathbf{H} = -\mathbf{e}_\phi \begin{cases} \frac{U_s}{2d} & (0 < r < a) \\ \frac{U_s a^2}{2d} & (a < r < b) \end{cases}$$

因而坡印廷矢量为

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = -\mathbf{e}_r \begin{cases} \frac{U_s^2}{2d^2} & (0 < r < a) \\ \frac{a^2 U_s^2}{2d^2} & (a < r < b) \end{cases}$$

由坡印廷矢量  $\mathbf{S}$  的空间分布形态可以判定, 电压源经空气通过与圆柱形电阻棒同轴的圆柱面向该电阻棒提供能量。现对空气内任意圆柱面( $a < r < b$ )计算进

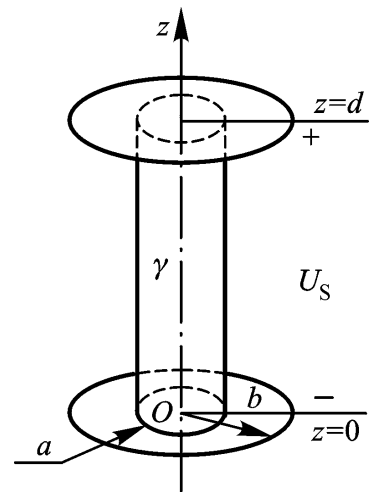


图 5.2 圆柱形电阻棒

入该圆柱面的坡印廷矢量的面积分,即得电压源向电阻棒提供的功率为

$$P = \int_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{S} \cdot (-\mathbf{e}_z 2\pi a d) = -\frac{a^2}{d} U_s^2 = \frac{U_s^2}{R}$$

式中,  $R = \frac{d}{a^2}$  正是圆柱形电阻棒的电阻。上述结果显然与电路理论的分析结果完全相同。这再次说明能量是通过空气域流向圆柱形电阻棒的,而并不像人们直观推断的那样,能量与电流相伴随沿上下理想导电板流向电阻棒。

进一步可求坡印廷矢量的散度,得

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = \begin{cases} \frac{U_s^2}{d^2} & (0 < r < a) \\ 0 & (a < r < b) \end{cases}$$

上式进一步说明,电磁能量只是穿过空气(或理想介质),空气(或理想介质)并不截获电磁能量,只有有损媒质才截获电磁能量。

### 5.3.2 电磁位及其积分解

电磁位及其在无限大均匀理想介质空腔中的积分解是本章的教学重点之一,也是讨论电磁辐射和天线的理论基础。

首先,应强调动态矢量位和动态标量位的定义,及其表达磁感应强度和电场强度的应用价值。其中,由于电磁位的引入,导致了麦克斯韦方程组中的两个方程自动满足,从而简化了麦克斯韦方程组的求解。同时尚应指出的是,电磁位只是简化动态电磁场求解的一种辅助函数,这种辅助函数不是惟一的,还存在其他形式的电磁位。

其次,应强调洛伦兹规范的重要性。为了使动态矢量位具有惟一性,需要人为地规定其散度。在工程实际中,根据动态电磁场的分析需要,可以采用不同的规范形式。规范不同,电磁位的二阶偏微分方程的形式也不相同。教材中采用洛伦兹规范,这样处置的优点是动态矢量位和动态标量位具有相同形式的二阶偏微分方程(非齐次波动方程),且动态矢量位和动态标量位在方程中没有耦合项出现,此外,在直角坐标系中,动态矢量位的三个分量在方程中也没有耦合项出现。这对于动态电磁场的分析是十分有利的。

再次,应强调非齐次波动方程的重要性。对于时谐电磁场,借助相量变换,可得电磁位的非齐次波动方程的复数形式或频域形式。通常,将频域形式的非齐次波动方程称为非齐次亥姆霍兹方程。无论非齐次波动方程的时域形式还是它的频域形式,均在动态电磁场理论中占有重要的地位。可以说,动态电磁场的产生、辐射、传播和接收的分析都是围绕非齐次(或齐次)波动方程进行的。

同样,应重点讲授电磁位积分解的物理意义。电磁位的积分解对于理解电

磁辐射、电磁波和电磁能量的传播等概念具有重要意义。通过对动态标量位物理意义的分析,建立起电磁场的空间传播概念,从而即可推得关于动态电磁场波动性和推迟作用的物理概念的描述。由于电磁场空间传播的时间滞后性,通常又将电磁位称为滞后位。对于时谐电磁场,电磁场空间传播的时间滞后性体现为电磁场的相位滞后性,从而得到电磁位积分解的复数形式,也就是非齐次亥姆霍兹方程的积分解。在这部分内容的讲授中,要明确时谐电磁场传播的波速、波长与波数的概念。

### 5.3.3 电磁辐射

电磁辐射是本章的教学重点之一,也是线天线理论的基础。为使学生更深入地掌握电磁波的产生机理和传播规律,教材中特意将电磁辐射安排在均匀平面电磁波之前讲授。

一般称图 5.3(a)中的电流元为电偶极子,其主要原因如下:可以认为电流元是如图 5.3(b)所示的相距  $l$  并用细直导线连接的两个固定导体小球,当一个导体小球上的电荷为  $+q(t)$  时,另一个导体小球上的电荷为  $-q(t)$ ,所以两者之间形成的电流为

$i(t) = \frac{dq}{dt}$ 。在时谐电磁场情况下,  $I = j \dot{q}$ 。电偶极子又常被称为赫兹偶极子。

首先,讨论最简单天线——电偶极子产生的电磁场。在近场讲授中,应着重从场与源的等相位性、与静态电磁场的对比,以及由于电场强度与磁场强度之间相位差为  $90^\circ$ ;导致坡印廷矢量平均值为零等方面进行分析,突出近场为似稳场或感应场的特征;在远场讲授中,应着重围绕场点相位滞后源点相位,坡印廷矢量平均值不为零,从而导致电磁功率的空间辐射,形成球面电磁波,并对其传播规律和波阻抗等方面进行分析。特别需要指出的是,在总结球面电磁波规律时要注意到与后述均匀平面电磁波传播规律的有机联系,为往后均匀平面电磁波的讲授奠定基础。

其次,无论是发射天线还是接收天线,方向图是描述天线辐射或接收的一个重要特性。借助于电偶极子的远场分析,重点介绍天线方向图的概念,并定义辐射功率和辐射电阻。

再次,为了提高学生的电磁环境保护意识,适当介绍一些人体暴露在电磁场中的安全限值的知识是十分必要的。目前,电磁环境问题已被广泛关注。例如,IEEE/ANSI的标准《人体暴露在射频电磁场的安全水平标准(3 kHz—300 GHz)》(《IEEE Standard for Safety Levels with Respect to Human Exposure to

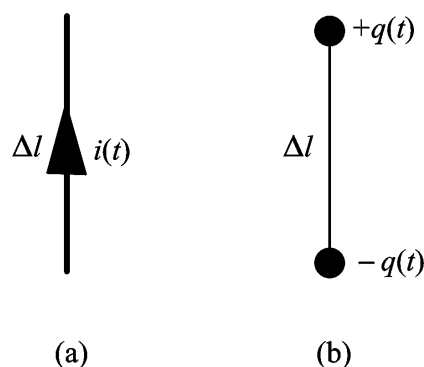


图 5.3 电流元与电偶极子

Radio Frequency Electromagnetic Fields, 3 kHz to 300 GHz》, IEEE C95.1 - 1991)

对频率为 90 MHz—300 GHz 的公众电磁场暴露功率面密度限值规定如下:

$$90\text{—}300 \text{ MHz: } 0.2 \text{ mW/cm}^2$$

$$300\text{—}12500 \text{ MHz: } \frac{f}{1250} \text{ mW/cm}^2, f \text{ 单位为 MHz};$$

$$12.5 \text{ GHz—}300 \text{ GHz: } 10 \text{ mW/cm}^2。$$

按照这个标准,当频率在 1 GHz 左右时,功率面密度限值约为  $1 \text{ mW/cm}^2$ 。

为了合理地评估电磁场暴露对生物和健康的影响,世界卫生组织(WHO, World Health Organization)于 1996 年开始了为期 10 年的国际合作研究计划。该计划项目主要研究从直流到 300 GHz 频率范围内的电磁场暴露对生物和健康的影响,该计划项目将于 2006 年结束。在这个计划项目中,世界卫生组织推荐采用国际非电离辐射保护委员会(ICNIRP, International Commission on Non-Ionizing Radiation Protection)制定的《时变电场、磁场和电磁场暴露限值导则(300 GHz 以下)》(《Guidelines for Limiting Exposure to Time-Varying Electric, Magnetic, and Electromagnetic Fields(up to 300 GHz)》, 详见 Health Physics, April 1998, Vol. 74, No. 4, pp. 494—522.)。这个导则对频率为 10 MHz—300 GHz 的公众电磁场暴露功率面密度限值规定如下:

$$10\text{—}400 \text{ MHz: } 0.2 \text{ mW/cm}^2;$$

$$400\text{—}2000 \text{ MHz: } \frac{f}{200} \text{ mW/cm}^2, f \text{ 单位为 MHz};$$

$$2\text{—}300 \text{ GHz: } 10 \text{ mW/cm}^2。$$

按照这个导则,当频率在 1 GHz 左右时,功率面密度限值为  $5 \text{ mW/cm}^2$ 。可以看出,即使采用上述导则,教材例 5 - 3 中的电磁场功率面密度值也大于  $5 \text{ mW/cm}^2$ 。

根据学时情况和专业需要,可对线天线与天线阵的讲授进行取舍,但介绍全方向性天线和定向性天线的概念是必要的。同时,简要讨论天线的互易性,使学生了解对于给定天线而言,无论将它作为发射天线还是作为接收天线,它们的方向图因子是相同的。

此外,应简要介绍电磁波频谱分配、使用和管理的知识。图 5 - 15 介绍了电磁波频谱的频率划分和各段频率的主要应用领域。对于频率低于毫米波的电磁波,一般按波长以毫米、厘米、分米、米、十米、百米、千米、万米、十万米、百万米、千万米和亿米进行频率划分如下:

频段	波长范围	频率范围
极高频(EHF)	0.1—1 cm	30—300 GHz
特高频(SHF)	1—10 cm	3—30 GHz
超高频(UHF)	10—100 cm	0.3—3 GHz
甚高频(VHF)	1—10 m	30—300 MHz

高频(HF)	10—100 m	3—30 MHz
中频(MF)	0.1—1 km	0.3—3 MHz
低频(LF)	1—10 km	30—300 kHz
甚低频(VLF)	10—100 km	3—30 kHz
超低频(ULF)	0.1—1 Mm	0.3—3 kHz
特低频(SLF)	1—10 Mm	30—300 Hz
极低频(ELF)	10—100 Mm	3—30 Hz

在上述频段书写中,英文缩写为:F—Frequency, H—High, M—Medium, L—Low, E—Extremely, S—Super, U—Ultra, V—Very。

**例 5.2** 图 5.4 为空气中半径为  $a$  的电流环,又称磁偶极子。设圆环半径  $a$  远小于其上电流频率对应的电磁波的波长,且  $a$  也远小于观察距离  $R$ 。试求:(1)矢量磁位、电场强度和磁场强度;(2)讨论磁偶极子的远场特性。

[解] (1) 采用如图 5.4 所示的球坐标系。定义

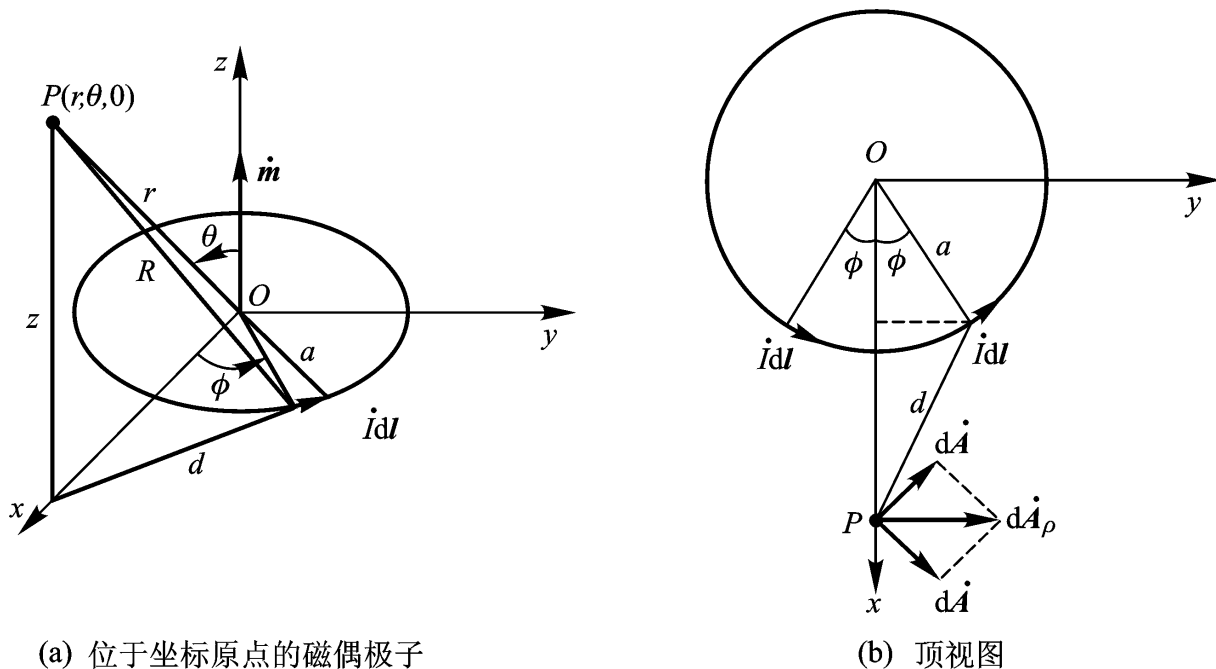


图 5.4 磁偶极子

$$\mathbf{m} = I S = a^2 I \mathbf{e}_z$$

为磁偶极子的磁矩。可见  $\mathbf{A}$  仅有  $\mathbf{e}_z$  方向分量且与  $\phi$  无关。为简化计算,设场点位于  $\theta = 0$  的平面。参照例 3.1 的解题思路,并按式(5-48),可得

$$\mathbf{A}(r, \theta) = 2 \frac{\mu_0 I}{4} \frac{a d}{R} \cos \theta e^{-jkR} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a \cos \theta}{R} d e^{-jkR}$$

式中

$$R = [(r \cos \theta)^2 + (a \sin \theta)^2 + (r \sin \theta - a \cos \theta)^2]^{1/2}$$

$$= (r^2 + a^2 - 2 a r \sin \theta \cos \theta)^{1/2}$$

由于  $R \gg a$ , 有

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{2a}{r} \sin \theta \cos \phi \right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{a}{r} \sin \theta \cos \phi \right)$$

所以

$$e^{-jkR} = e^{-jkr} e^{jk a \sin \theta \cos \phi}$$

因为  $ka = \frac{2}{\lambda} a$ , 由题设知  $a$  远小于  $\lambda$ , 则

$$e^{jk a \sin \theta \cos \phi} \approx 1 + jk a \sin \theta \cos \phi$$

这样, 有

$$e^{-jkR} \approx e^{-jkr} (1 + jk a \sin \theta \cos \phi)$$

将以上近似式代入  $\dot{A}(r, \theta, \phi)$ , 得

$$\begin{aligned} \dot{A}(r, \theta, \phi) &= \frac{\mu_0 \dot{I}}{2} \int_0^d \frac{a \cos \theta}{r} \left( 1 + \frac{a}{r} \sin \theta \cos \phi \right) (1 + jk a \sin \theta \cos \phi) e^{-jkr} \\ &= \frac{\mu_0 \dot{I}}{2} \int_0^d \frac{a}{r} \left( 1 + \frac{a}{r} \sin \theta \cos \phi + jk a \sin \theta \cos \phi \right) \cos \theta e^{-jkr} \\ &= \frac{\mu_0 a \dot{I}}{2 r} \int_0^d \left( \frac{a}{r} + jk a \sin \theta \cos \phi \right) e^{-jkr} = \frac{\mu_0 S \dot{I}}{4 r^2} (1 + jkr) \sin \theta e^{-jkr} \\ &= \frac{\mu_0}{4} \frac{\dot{m}}{r^2} (1 + jkr) \sin \theta e^{-jkr} = \frac{\mu_0}{4} \frac{\dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{e}_r}{r^2} (1 + jkr) e^{-jkr} \end{aligned}$$

进而可得:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}} &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \sin \theta \dot{A} \right) \mathbf{e}_\phi - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{A}) \mathbf{e}_\theta \\ &= \mathbf{e}_\theta \frac{\dot{m}}{2 r^3} (1 + jkr) \cos \theta e^{-jkr} + \mathbf{e}_\phi \frac{\dot{m}}{4 r^3} (1 + jkr - k^2 r^2) \sin \theta e^{-jkr} \\ \dot{\mathbf{E}} &= \frac{1}{j} \nabla \times \dot{\mathbf{H}} = -\mathbf{e}_j \frac{\mu_0 \dot{m}}{4 r^2} (1 + jkr) \sin \theta e^{-jkr} \end{aligned}$$

(2) 对于远场, 即  $kr \gg 1$  时, 电场强度和磁场强度分别为:

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{e}_\theta \frac{\mu_0 k \dot{m}}{4 r} \sin \theta e^{-jkr}$$

和

$$\dot{\mathbf{H}} = -\mathbf{e}_\phi \frac{k^2 \dot{m}}{4 r} \sin \theta e^{-jkr}$$

可见,  $\dot{\mathbf{E}}$  和  $\dot{\mathbf{H}}$  在空间上相互垂直, 并与半径  $r$  的球面相切, 且同相位。电场强度和磁场强度之比为

$$\eta_0 = \frac{E}{H} = \frac{\mu_0}{k} = \frac{\mu_0}{\omega} = 377$$

空间中任意一点的平均坡印廷矢量为

$$\mathbf{S}_{av} = \mathbf{e}_r \frac{\mu_0 k^3 \dot{m}^2}{16 r^2} \sin^2 \theta = \mathbf{e}_r \frac{\mu_0 \dot{m}^2}{4 r^2} \sin^2 \theta$$

这表明电磁波向无限远处传播。磁偶极子向外发出的总辐射功率为

$$P = \int_S \mathbf{S}_v \cdot d\mathbf{S} = \frac{8}{3} \frac{m^2}{4} = 320 \frac{a^4}{I^2}$$

辐射电阻为 
$$R_r = \frac{P}{I^2} = 320 \frac{a^4}{I^2}$$

### 5.3.4 均匀平面电磁波

均匀平面电磁波是本章的教学重点之一。应重点讲授无限大理想均匀介质中均匀平面电磁波的传播规律,着重阐述齐次波动方程解的物理意义,从相位滞后的角度理解频率、波长、波速、波数等概念。结合均匀平面电磁波的传播规律和空间中矢量的几何关系,深入理解电场强度、磁场强度与波矢量三者之间方向和大小的相互关系,并掌握它们之间的相互转换和计算。

在讲授中,可以先采用电偶极子天线在远场产生的球面电磁波引出 TEM 波和均匀平面电磁波的概念及其传播规律,再通过求解电场强度和磁场强度的齐次波动方程进行讲授的方法。这样电磁辐射与电磁波传播的概念可有机地结合在一起,从而对于学生深刻理解电磁波的发射、传播和接收的全过程是十分有益的。

例 5.3 已知空气中均匀平面电磁波的磁场强度为

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{120} (\mathbf{e}_x - 2\mathbf{e}_y - 3\mathbf{e}_z) e^{-j0.05(3x+z)} \text{ A/m}$$

试求:(1) 波矢量和频率;(2) 电场强度矢量的瞬时值;(3) 坡印廷矢量的平均值。

[解] (1) 由给定的磁场强度表达式和式(5-91),得

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z = 0.05(3x + z)$$

故知:  $k_x = 0.05 \times 3, k_y = 0, k_z = 0.05$

由此可得波矢量  $\mathbf{k} = 0.05(3\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z) \text{ rad/m}$

频率 
$$f = \frac{k}{2\pi\mu_0} = \frac{0.05 \times 2 \times 3 \times 10^8}{2} \text{ Hz} = 15 \text{ MHz}$$

(2) 由式(5-94)给出的电场强度、磁场强度和波矢量之间的关系式,得电场强度为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= \frac{1}{k} \dot{\mathbf{H}} \times \mathbf{k} = \frac{120}{0.05 \times 2} \times \frac{e^{-j0.05(3x+z)}}{120} \times 0.05 \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & -2j & -3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-\mathbf{e}_x j - 2\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z j - 3) e^{-j0.05(3x+z)} \text{ V/m} \end{aligned}$$

故电场强度矢量的瞬时值为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z, t) = & \mathbf{e}_x 2\sin[30 \times 10^6 t - 0.05(3x + z)] - \\ & \mathbf{e}_y 2\cos[30 \times 10^6 t - 0.05(3x + z)] - \\ & \mathbf{e}_z 6\sin[30 \times 10^6 t - 0.05(3x + z)] \text{ V/m} \end{aligned}$$

(3) 由式(5-26), 即得

$$\mathbf{S}_{av} = \text{Re}(\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) = \frac{1}{120} \text{Re} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -j & -2 & j \\ 1 & j2 & -3 \end{vmatrix} \text{ W/m}^2 = \frac{1}{30} (\mathbf{e}_x 3 + \mathbf{e}_z) \text{ W/m}^2$$

### 5.3.5 均匀平面电磁波的反射与透射

均匀平面电磁波的反射与透射是本章的教学重点之一。应重点阐明反射与透射分析的基本方法, 以及反射系数和透射系数的概念。

首先, 重点讲授均匀平面电磁波入射到无限大理想介质或理想导体平面的基本分析方法。即先应用电场强度、磁场强度和波矢量三者之间的相互关系, 在给定的坐标系中写出入射波、反射波和透射波的数学表达式; 然后, 利用电场强度和磁场强度切向分量的边界条件, 以入射场强分量表达反射场强分量和透射场强分量。为了简化分析, 一般按电场强度与入射平面的几何关系分解为平行极化和垂直极化两种情况。这样, 任意均匀平面电磁波入射问题的分析可以分解为平行极化情况与垂直极化情况的叠加。

其次, 应阐明反射系数与透射系数的定义。特别是对于平行极化情况, 不同教材中的定义是有差异的。但这种差异只是形式上的, 只要按照各自教材中的定义进行分析, 并不会影响最终结果的正确性。例如, 对于图 5.5 所示的平行极化情况, 教材中按电场强度在理想介质交界面上的切向分量定义平行极化情况下的反射系数

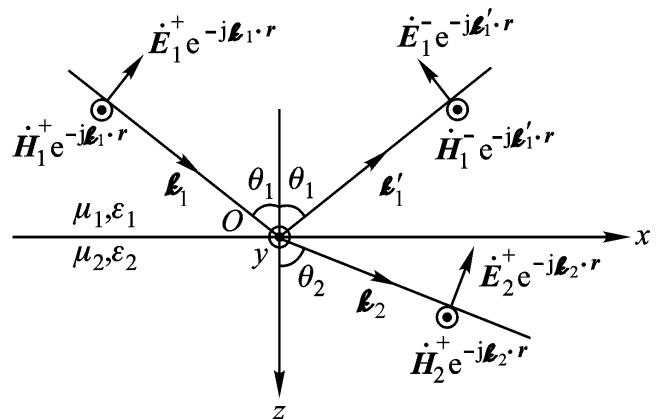


图 5.5 平行极化入射情况

数  $R$  和透射系数  $T$ , 即式(5-100)和式(5-101), 现重写如下:

$$R = \frac{-\dot{E}_1^- \cos \theta_1}{\dot{E}_1^+ \cos \theta_1} = \frac{2 \cos \theta_2 - \cos \theta_1}{2 \cos \theta_2 + \cos \theta_1} \quad (5.4)$$

$$T = \frac{\dot{E}_2^+ \cos \theta_2}{\dot{E}_1^+ \cos \theta_1} = \frac{2 \cos \theta_2}{2 \cos \theta_2 + \cos \theta_1} \quad (5.5)$$

显然, 按照上述定义, 平行极化情况下的反射系数  $R$  和透射系数  $T$  满足如下关系

$$1 + R = T \quad (5.6)$$

需要指出的是,在式(5.4)和式(5.5)的定义中,电场强度切向分量前的“+”和“-”是按其与坐标轴方向的相同与否确定的。

在有些教材中,平行极化情况下的反射系数  $R$  和透射系数  $T$  定义如下:

$$R = \frac{\dot{E}_1^-}{\dot{E}_1^+} = \frac{\cos \theta_1 - \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \cos \theta_2}{\cos \theta_1 + \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \cos \theta_2} \quad (5.7)$$

$$T = \frac{\dot{E}_2^+}{\dot{E}_1^+} = \frac{2 \cos \theta_1}{\cos \theta_1 + \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \cos \theta_2} \quad (5.8)$$

在式(5.7)和式(5.8)的定义中,主要侧重于反射波和透射波的总电场强度与入射波的总电场强度之间的关系。此时,平行极化情况下的反射系数  $R$  和透射系数  $T$  满足如下关系

$$1 + R = T \quad (5.9)$$

无论采用上述哪种定义,反射系数和透射系数都只是表达了入射波、反射波和透射波的电场强度在理想介质交界面上的相互关系,是电场强度和磁场强度边界条件的具体体现。对于理想导体平面情况,设图 5.5 中的 2 区(即  $z > 0$  的区域)为理想导体。由于  $\mu_2 = 0$ ,所以,无论对于平行极化情况还是垂直极化情况,无论采用上述哪种反射系数和透射系数的定义,透射系数均为零,反射系数均为 -1。

再次,当入射角为 0 时,即入射波的传播方向垂直于理想介质平面时,平行极化和垂直极化合并为同一种情况。此时,需重点讲解驻波比的概念和  $\lambda/4$  波长片与  $\lambda/2$  波长片的阻抗转换作用。如果学生在先期的电路理论中已经学习过均匀传输线理论,则这部分内容可以对比无损耗均匀传输线的相关内容进行讲授。

**例 5.4** 已知均匀平面电磁波由空气垂直入射到  $\mu_r = 1$  的理想介质平面,设理想介质占据半无限大空间,如在空气中测得该电磁波的驻波比为 2.7。试求理想介质的相对介电常数。

[解] 由式(5-127),得

$$|R| = \frac{SWR - 1}{SWR + 1} = \frac{2.7 - 1}{2.7 + 1} = 0.46$$

由式(5-113)得  $\frac{1+R}{1-R} = 2.7$

当  $R = +0.46$  时,得:  $\frac{1+0.46}{1-0.46} = 2.7$

$$\epsilon_r = \frac{1}{2.7^2} \frac{\mu_r \mu_0}{\mu_0} = 0.137$$

显然,  $r = 0.137$  小于 1 不合理, 舍去。又当  $R = -0.46$  时, 得:

$$= \frac{1 - 0.46}{1 + 0.46} \epsilon_0 = 0.37 \epsilon_0$$

$$r = \frac{1}{0.37 \epsilon_0} \frac{\mu_r \mu_0}{\epsilon_0} = 7.3$$

所以, 该理想介质的相对介电常数为 7.3。

**例 5.5** 一均匀平面电磁波由空气斜入射到位于  $z = 0$  的理想导体平面上, 已知入射波的电场强度为

$$\dot{\mathbf{E}}^+ = \mathbf{e}_y 3e^{-j(3x+4z)} \quad \text{V/m}$$

试求: (1) 入射波和反射波的波矢量; (2) 空气中合成电场强度和磁场强度; (3) 分析空气中合成波的特性。

[解] (1) 由题中给出的入射波电场强度表达式和式(5-91)等相位平面方程, 得

$$\mathbf{k}^+ = \mathbf{e}_x 3 + \mathbf{e}_z 4 \quad \text{rad/m}$$

可见入射波的波矢量  $\mathbf{k}^+$  位于  $xOz$  平面, 入射波的电场强度垂直于入射平面。如图 5.6 所示, 属于垂直极化入射问题。由图 5.6 可得

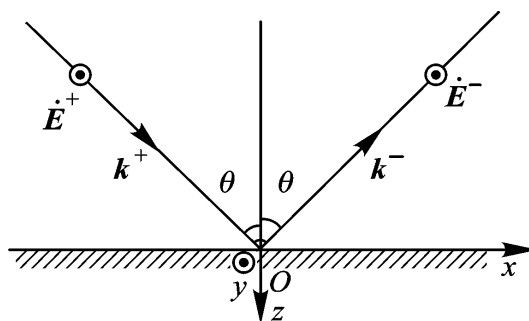


图 5.6 均匀平面电磁波斜入射理想导体平面

$$\mathbf{k}^- = \mathbf{e}_x 3 - \mathbf{e}_z 4 \quad \text{rad/m}$$

(2) 显然, 对于垂直极化情况, 反射系数  $R = -1$ , 有

$$\dot{\mathbf{E}}^- = R \mathbf{e}_y 3e^{-j\mathbf{k}^- \cdot \mathbf{r}} = -\mathbf{e}_y 3e^{-j(3x-4z)} \quad \text{V/m}$$

由式(5-94), 得入射波和反射波磁场强度分别为:

$$\dot{\mathbf{H}}^+ = \frac{1}{\eta_0} \mathbf{e}_{k^+} \times \mathbf{E}^+ = \frac{1}{120} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3e^{-j(3x+4z)} & 0 \end{vmatrix} \text{A/m}$$

$$= \frac{1}{200} (-\mathbf{e}_x 4 + \mathbf{e}_z 3)e^{-j(3x+4z)} \quad \text{A/m}$$

$$\dot{\mathbf{H}}^- = \frac{1}{\eta_0} \mathbf{e}_{k^-} \times \mathbf{E}^- = \frac{1}{120} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 3 & 0 & -4 \\ 0 & -3e^{-j(3x-4z)} & 0 \end{vmatrix} \text{A/m}$$

$$= -\frac{1}{200} (\mathbf{e}_x 4 + \mathbf{e}_z 3)e^{-j(3x-4z)} \quad \text{A/m}$$

所以, 空气中的合成电场强度和磁场强度分别为:

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}^+ + \dot{\mathbf{E}}^- = \mathbf{e}_y 3 [e^{-j(3x+4z)} - e^{-j(3x-4z)}] = -\mathbf{e}_y j 6 \sin(4z) e^{-j3x} \quad \text{V/m}$$

$$\text{和 } \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}^+ + \dot{\mathbf{H}}^- = -\frac{1}{200} \mathbf{e}_x [4e^{-j(3x+4z)} + 4e^{-j(3x-4z)}] + \frac{1}{200} \mathbf{e}_z [3e^{-j(3x+4z)} - 3e^{-j(3x-4z)}] \\ = -\mathbf{e}_x \frac{1}{25} \cos(4z) - \mathbf{e}_z j \frac{3}{100} \sin(4z) e^{-j3x} \quad \text{A/m}$$

(3) 基于所得的空气中合成电场强度和磁场强度的表达式可以看出, 合成波的电场强度和磁场强度在  $x$  方向均为正向行波, 而在  $z$  方向则呈现驻波分布。电场强度仅有垂直于传播方向(即  $x$  方向)的分量, 无传播方向的分量; 而磁场强度既有垂直于传播方向(即  $x$  方向)的分量, 也有传播方向的分量; 所以, 空气中的合成波为 TE 波。

**例 5.6** 图 5.7 为均匀平面电磁波入射到理想介质交界平面的示意图。已知理想介质 1 的参数为  $\epsilon_1 = 4, \mu_1 = 1$ ; 理想介质 2 的参数为  $\epsilon_2 = 9, \mu_2 = 1$ 。如果理想介质 1 中入射波的电场强度为

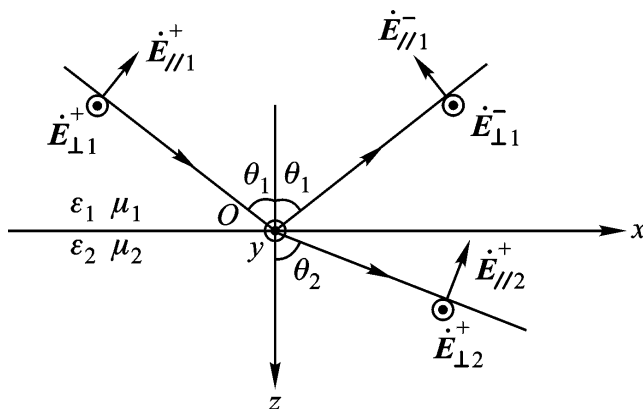


图 5.7 均匀平面电磁波入射到理想介质交界平面

$$\dot{\mathbf{E}}^+ = (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z) 3 e^{-j6(3x+z)} \quad \text{V/m}$$

试求: (1) 电磁波的频率; (2) 入射角和透射角; (3) 反射波和透射波的电场强度。

[解] (1) 首先求入射波的波矢量  $\mathbf{k}^+$ 。由题中给出的入射波电场强度表达式和式(5-91)等相位平面方程, 得

$$\mathbf{k}^+ = 6(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z) \text{ rad/m}$$

进而得

$$k_1^+ = |\mathbf{k}^+| = 6\sqrt{3+1} \text{ rad/m} = 12 \text{ rad/m}$$

故该电磁波频率为

$$f = \frac{k_1^+}{2\pi\mu_1\epsilon_1} = \frac{k_1^+ \times 3 \times 10^8}{2\pi\mu_{r1}\epsilon_{r1}} = \frac{12 \times 3 \times 10^8}{2\pi \times 2} \text{ Hz} = 286.5 \text{ MHz}$$

(2) 图 5.7 中入射角  $\theta_1$  为

$$\theta_1 = \arccos \frac{\mathbf{k}^+ \cdot \mathbf{e}_z}{|\mathbf{k}^+|} = \arccos \frac{6}{12} = 60^\circ$$

又由透射定律[式(5-96)],得

$$\theta_2 = \arcsin \frac{\mu_1}{\mu_2} \sin \theta_1 = \arcsin \frac{4}{9} \sin 60^\circ = \arcsin \frac{1}{3} = 35.3^\circ$$

(3) 将入射波的电场强度分解为平行极化和垂直极化两种情况进行分析,即:

$$\dot{\mathbf{E}}_1^+ = (\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_z) e^{-j6(3x+z)} \quad \text{V/m}$$

和  $\dot{\mathbf{E}}_1^+ = \mathbf{e}_y e^{-j6(3x+z)} \quad \text{V/m}$

且  $E_1^+ = 2 \text{ V/m}$ ,  $E_z^+ = 1 \text{ V/m}$ 。在本例中,由于  $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$ ,利用式(5-102)、式(5-108)和式(5-110),可得:

$$R = \frac{\frac{2}{1} - \sin^2 \theta_1 - \frac{2}{1} \cos \theta_1}{\frac{2}{1} - \sin^2 \theta_1 + \frac{2}{1} \cos \theta_1} = \frac{\frac{9}{4} - \sin^2 60^\circ - \frac{9}{4} \cos 60^\circ}{\frac{9}{4} - \sin^2 60^\circ + \frac{9}{4} \cos 60^\circ} = \frac{1.225 - 1.125}{1.225 + 1.125} = 0.0426$$

$$R = \frac{\cos \theta_1 - \frac{2}{1} - \sin^2 \theta_1}{\cos \theta_1 + \frac{2}{1} - \sin^2 \theta_1} = \frac{\cos 60^\circ - \frac{9}{4} - \sin^2 60^\circ}{\cos 60^\circ + \frac{9}{4} - \sin^2 60^\circ} = \frac{0.5 - 1.225}{0.5 + 1.225} = -0.42$$

$$T = 1 + R = 1.0426$$

和  $T = 1 + R = 0.58$

为了求反射波和透射波的电场强度,由图 5.7 得,反射波的波矢量  $\mathbf{k}^-$  为

$$\mathbf{k}^- = 6(\mathbf{e}_x - 3 - \mathbf{e}_z) \quad \text{rad/m}$$

透射波的波矢量  $\mathbf{k}^+$  为

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^+ &= 2 \pi f \mu_2 \mu_2 (\mathbf{e}_x \sin \theta_2 + \mathbf{e}_z \cos \theta_2) \\ &= \frac{2 \times 286.5 \times 10^6 \times \mu_{r2}}{3 \times 10^8} (\mathbf{e}_x \sin 35.3^\circ + \mathbf{e}_z \cos 35.3^\circ) \\ &= 18(\mathbf{e}_x 0.578 + \mathbf{e}_z 0.816) \quad \text{rad/m} \end{aligned}$$

在理想介质交界平面( $z=0$ )上,利用式(5-100)和式(5-101)平行极化情况的反射系数和透射系数的定义,有:

$$\dot{\mathbf{E}}_1^- = -R E_1^+ (-\mathbf{e}_x \cos \theta_1 - \mathbf{e}_z \sin \theta_2) e^{-j\mathbf{k}_1^- \cdot \mathbf{r}} = 0.0426(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z) e^{-j6(3x-z)} \quad \text{V/m}$$

$$\dot{\mathbf{E}}_1^- = \mathbf{e}_y R E_1^+ e^{-j\mathbf{k}_1^- \cdot \mathbf{r}} = -\mathbf{e}_y 0.42 e^{-j6(3x-z)} \quad \text{V/m}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_2^+ &= \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} T E_1^+ (\mathbf{e}_x \cos \theta_2 - \mathbf{e}_z \sin \theta_2) e^{-j\mathbf{k}_2^+ \cdot \mathbf{r}} \\ &= 1.278(\mathbf{e}_x 0.816 - \mathbf{e}_z 0.578) e^{-j18(0.578x + 0.816z)} \quad \text{V/m} \end{aligned}$$

和  $\dot{\mathbf{E}}_2^+ = \mathbf{e}_y T E_1^+ e^{-j\mathbf{k}_2^+ \cdot \mathbf{r}} = \mathbf{e}_y 0.58 e^{-j18(0.578x + 0.816z)} \quad \text{V/m}$

综上所述结果,反射波和透射波的电场强度为:

$$\dot{\mathbf{E}}_1^- = \dot{\mathbf{E}}_1^- + \dot{\mathbf{E}}_1^- = (\mathbf{e}_x 0.0426 - \mathbf{e}_y 0.42 + \mathbf{e}_z 0.0738) e^{-j(10.392x - 6z)} \text{ V/m}$$

$$\text{和 } \dot{\mathbf{E}}_2^+ = \dot{\mathbf{E}}_2^+ + \dot{\mathbf{E}}_2^+ = (\mathbf{e}_x 1.0426 + \mathbf{e}_y 0.58 - \mathbf{e}_z 0.7387) e^{-j(10.404x + 14.688z)} \text{ V/m}$$

### 5.3.6 波的极化与琼斯矢量

波的极化是本章的教学重点之一,它是描述平面电磁波状态的一个重要特征。在前面关于电磁波的讨论中,重点研究了电场强度在等相位平面上的一个横向分量的规律。然而,在一般情况下,电场强度在等相位平面上存在两个相互正交的横向分量。也就是说,在等相位平面上,平面电磁波总电场强度是由这两个相互正交的横向分量合成的。因此,掌握平面电磁波总电场强度在等相位面上的变化规律是十分重要的。这种变化规律被称为波的极化特性。按照平面电磁波总电场强度在等相位面上随时间的运动轨迹,波的极化特性分为线极化、圆极化和椭圆极化三种情况,而对于后两种情况,按照总电场强度随时间的运动方向和波的传播方向的螺旋关系,又分为左旋和右旋两种情况。熟悉这些极化特性的判定方法是十分必要的。

为了更有效地描述平面电磁波的极化特性,1941年琼斯(R. C. Jones)提出用一个2阶列向量表达电场强度复矢量的两个相互正交的横向分量(详见 R. C. Jones, J. Opt. Soc. Am. 31, 488, 1941)。这一表达平面电磁波电场强度的2阶列向量被后人称为琼斯矢量。与其他教材不同的是,书中采用了琼斯矢量表示均匀平面电磁波的电场强度。这样讲授的主要优点是波极化特性将更易表达,也就更容易理解和判断波的极化特性以及它们的旋向。同时,借助于归一化正交琼斯矢量,即线极化正交基  $\hat{x}$  和  $\hat{y}$  与圆极化正交基  $\hat{R}$  和  $\hat{L}$ , 更容易理解任意一个均匀平面电磁波均可以展开成为两个相互正交的线极化波或右旋圆极化波与左旋圆极化波的叠加形式的这个重要结论。这一结论在工程中是非常重要的。

琼斯矩阵是描述均匀平面电磁波器件输出电场强度与输入电场强度之间传输关系的一个  $2 \times 2$  阶方阵。然而,需要指出的是,假定无论均匀平面电磁波器件的入射端面还是出射端面,其反射系数均为零。因此,平面电磁波将全部透射这些端面。但是,在实际中平面电磁波是存在反射的,为此,可以通过在这些端面上加  $\lambda/4$  波长片予以消除。

正如教材中所指出的,基于琼斯矢量和琼斯矩阵的琼斯矩阵法为研究任意平面电磁波通过平面电磁波器件的传输问题,提供了一种十分有效的分析方法。如果学时充裕,可以简要介绍均匀平面电磁波在各向异性材料传播中的相位延迟效应和极化方向旋转效应以及对应的琼斯矩阵,并通过例题介绍  $\lambda/4$  波长片和  $\lambda/2$  波长片的极化特性转换作用。

例 5.7 试判断例 5.3 均匀平面电磁波的极化特性。

[解] 取坐标原点处电场强度矢量的瞬时值进行判断。由例 5.3 电场强度的瞬时解, 在坐标系原点处, 有

$$\mathbf{E}(0, 0, 0, t) = \mathbf{e}_x 2 \sin(30 \times 10^6 t) - \mathbf{e}_y 2 \cos(30 \times 10^6 t) - \mathbf{e}_z 6 \sin(30 \times 10^6 t) \text{ V/m}$$

电场强度的模值为

$$|\mathbf{E}(0, 0, 0, t)| = \sqrt{2 \sin^2(30 \times 10^6 t) + 4 \times 2 \cos^2(30 \times 10^6 t) + 6 \sin^2(30 \times 10^6 t)} \text{ V/m} \\ = 2\sqrt{2} \text{ V/m}$$

可见, 该电磁波为圆极化波。分别取  $t=0$  和  $t=\frac{1}{60} \mu\text{s}$ , 电场强度分别为:

$$\mathbf{E}(0, 0, 0, t) \Big|_{t=0} = -\mathbf{e}_y 2 \text{ V/m}$$

和 
$$\mathbf{E}(0, 0, 0, t) \Big|_{t=\frac{10^{-6}}{60}} = \mathbf{e}_x 2 - \mathbf{e}_z 6 \text{ V/m}$$

将上述两个不同时刻的电场强度矢量与波矢量  $\mathbf{k}$  画在坐标系中比较可以看出, 从  $t=0$  时刻的电场强度到  $t=\frac{1}{60} \mu\text{s}$  的电场强度的右手螺旋方向为波矢量的方向。所以, 该电磁波为右旋圆极化波。

例 5.8 试证明圆极化波的坡印廷矢量的瞬时值为一个常矢量。

[证] 只要证明归一化右旋和左旋圆极化波的坡印廷矢量的瞬时值是常矢量即可。设电磁波的传播方向为  $z$  轴方向, 角频率为  $\omega$ 。由式 (5-137) 和式 (5-138), 即:

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y j), \quad \hat{\mathbf{L}} = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y j)$$

归一化右旋和左旋圆极化波的电场强度复矢量分别为:

$$\dot{\mathbf{E}}_R = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y j) e^{-jkz}, \quad \dot{\mathbf{E}}_L = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y j) e^{-jkz}$$

对应的右旋和左旋圆极化波的磁场强度复矢量分别为:

$$\dot{\mathbf{H}}_R = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_x j + \mathbf{e}_y) e^{-jkz}, \quad \dot{\mathbf{H}}_L = \frac{1}{2} (-\mathbf{e}_x j + \mathbf{e}_y) e^{-jkz}$$

分别写出归一化右旋和左旋圆极化波电场强度和磁场强度矢量的瞬时值, 得:

$$\mathbf{E}_R = \mathbf{e}_x \cos(\omega t - kz) + \mathbf{e}_y \sin(\omega t - kz), \quad \mathbf{H}_R = \frac{1}{2} [-\mathbf{e}_x \sin(\omega t - kz) + \mathbf{e}_y \cos(\omega t - kz)]$$

和 
$$\mathbf{E}_L = \mathbf{e}_x \cos(\omega t - kz) - \mathbf{e}_y \sin(\omega t - kz), \quad \mathbf{H}_L = \frac{1}{2} [\mathbf{e}_x \sin(\omega t - kz) + \mathbf{e}_y \cos(\omega t - kz)]$$

归一化右旋和左旋圆极化波的坡印廷矢量的瞬时值分别为:

$$\mathbf{S}_R = \mathbf{E}_R \times \mathbf{H}_R = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \cos(t - kz) & \sin(t - kz) & 0 \\ -\sin(t - kz) & \cos(t - kz) & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_z \frac{1}{\mu_0}$$

和

$$\mathbf{S}_L = \mathbf{E}_L \times \mathbf{H}_L = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \cos(t - kz) & -\sin(t - kz) & 0 \\ \sin(t - kz) & \cos(t - kz) & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_z \frac{1}{\mu_0}$$

上式表明:无论是右旋和左旋圆极化波,其坡印廷矢量的瞬时值为一个常矢量。  
[证毕]

### 5.3.7 有损媒质中的均匀平面电磁波

在工程中,理想介质和理想导体是不存在的。因此,理应掌握均匀平面电磁波在有损媒质中的传播规律。在这部分内容的讲授中,宜对比均匀平面电磁波在有损媒质中与在理想介质中的传播规律,以有助于教学效果,并进而阐明均匀平面电磁波在低损耗介质和良导体中的传播特性。

对于良导体而言,应深入讲授透入深度与表面阻抗的概念,并与教材中4.3节的有关概念进行对比。需要指出的是,在第四章和第五章中都引入了透入深度  $d$  的概念,且计算公式相同。但是两者在概念上是有差别的。第四章中的电磁场是磁准静态场,由于忽略了位移电流对电磁场的影响,电磁场满足扩散方程。因此,  $e^{-j\frac{x}{d}}$  并不表示电磁场沿  $x$  方向传播过程中的相位变化,而是表示涡流电磁场沿  $x$  方向扩散过程中的相位变化。与之不同的是,第五章中的电磁场满足波动方程,在良导体内同时计入了位移电流和传导电流对电磁场的影响,因此,同样的  $e^{-j\frac{x}{d}}$  表示电磁场沿  $x$  方向传播过程中的相位变化。综上所述,在第四章中,透入深度  $d$  描述了涡流电磁场在良导体中的分布规律;在第五章中,透入深度  $d$  则描述了均匀平面电磁波在良导体中的衰减特性。

**例 5.9** 通有电流为  $I$  的圆截面长直导体,半径为  $a$  且大于 10 倍的透入深度  $d$ 。试求该导体单位长度的内阻抗。

[解] 有两种求解方法。

方法一:由题设知,该长直圆导体半径  $a$  大于 10 倍的透入深度  $d$ ,因此,可以将圆导体表面沿圆周展成为一个宽度为  $2a$  的平面导体。从而,可以借助式(5-167)所示的表面阻抗  $Z_s$  计算式,得出该导体的单位长度的内阻抗如下:

$$Z_0 = \frac{Z_s}{2a} = \frac{1+j}{2ad} = \frac{1}{2a} \mu_0 e^{j\frac{\pi}{4}}$$

方法二:建立圆柱坐标系,设  $z$  轴与圆导体轴线重合, $z$  轴方向为电流  $I$  的参考方向。显然,电磁场具有轴对称场特征。由安培环路定律,可得圆导体表面

处磁场强度为

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{I}{2a} \mathbf{e}_\phi$$

由于圆导体半径  $a$  大于 10 倍的透入深度  $d$ , 因此, 可以将圆导体表面的柱面电磁波视为平面电磁波处理。由良导体的波阻抗计算式 [式 (5 - 164)], 得圆导体表面处的电场强度为

$$\dot{\mathbf{E}} = \eta_c \dot{H} \mathbf{e}_z = \frac{I}{2a} \eta_c e^{j\bar{4}} \mathbf{e}_z$$

所以, 单位长度的圆导体吸收的复功率为

$$\begin{aligned} P_{\text{吸收}} &= - \int_S \dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^* \cdot d\mathbf{S} \\ &= \frac{I}{2a} \eta_c e^{j\bar{4}} \mathbf{e}_z \times \frac{I}{2a} \mathbf{e}_\phi^* \cdot 2\pi a (-\mathbf{e}_r) \\ &= \frac{1}{2} \frac{I}{a} \eta_c e^{j\bar{4}} I^2 = Z_0 I^2 \end{aligned}$$

显然, 由此可得该圆导体单位长度的内阻抗为

$$Z_0 = \frac{1}{2} \frac{\eta_c}{a} e^{j\bar{4}}$$

上式结果与方法一结果相同。

### 5.3.8 导引电磁波

导引电磁波是电磁波理论中的重要组成部分。如果学时允许, 应阐明电磁波在导波系统中的传播规律。若学时有限, 建议按图 5.8 给出的教学要点进行讲授。

首先, 通过麦克斯韦方程推导平面电磁波 (TEM 波) 存在的必要条件。平行板波导是一种特殊的传输线, 除可以导引 TEM 波外, 还可以导引其他形式的电磁波。

其次, 介绍导波系统的数学分析方法: 即先应用电场强度和磁场强度的纵向分量表示它们的横向分量, 然后, 求解由电场强度和磁场强度纵向分量所描述的边值问题。

再次, 以平行板波导为例, 通过求解 TE 波的边值问题, 介绍导波系统的模式理论。确定不同波型模式对应的截止频率与截止波长。此外, 基于平行极化波入射的全反射分析, 通过入射波和反射波的叠加和板间的横向驻波特性和, 推导平行板波导 TM 波的解答, 并确定其截止频率与截止波长。这样讲授的基本目的在于对导波系统的数学分析方法和模式理论有一个更加清晰的直观理解。

最后, 借助于电磁波在两平行板之间形成横向驻波的特性和齐次波动方程,

确定矩形波导中不同波型模式对应的截止频率和截止波长, 以及矩形谐振腔中不同波型模式对应的谐振频率和谐振波长。并简要介绍矩形波导单模传输的优点。

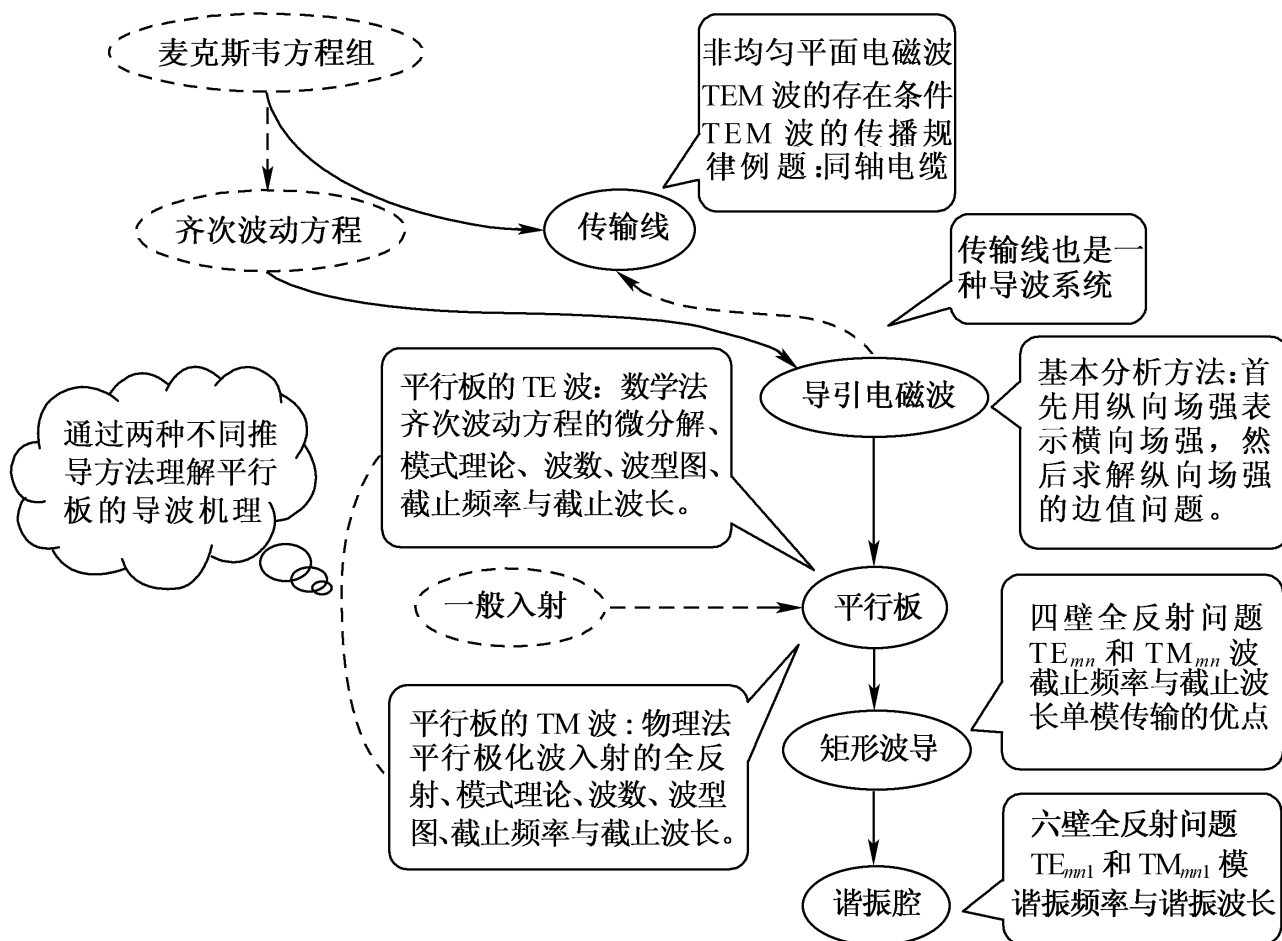


图 5.8 导引电磁波教学要点

## 5.4 习题解析与解答

**5 - 1** 已知在某一理想电介质(参数为  $\epsilon = 4\epsilon_0$ ,  $\mu = 5\mu_0$ )中的位移电流密度为  $2 \cos(\omega t - 5z) \mathbf{e}_x \mu A/m^2$ 。求:

- (1) 该媒质中的  $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{E}$ ;
- (2) 该媒质中的  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$ 。

[解题思路]

在媒质线性、稳态、源量与场量随时间呈同频正弦变化的条件下, 对时变电磁场(此时即为时谐场)问题进行相关的研究时, 通常采用频域分析的手段, 即在引入相量(复矢量)的体系下, 展开分析计算; 然后, 在频域中所得场量解答的基础上, 再通过反变换, 得出时域下待求场量的解答: 关于频域形式下时谐电磁场的描述已详述于 4.1.4 节。应指出, 教材采

用复矢量的有效值体系展开时谐电磁场的讨论。

[解] (1)按频域分析的方法,应用复矢量(有效值)表示式,可得题设位移电流密度

$$\dot{\mathbf{J}}_D = 2e^{-j5z} \mathbf{e}_x \mu A / m^2$$

由位移电流密度的定义式  $\mathbf{J}_D = \frac{d\mathbf{D}}{dt}$ , 即有  $\dot{\mathbf{J}}_D = j \dot{\mathbf{D}}$ , 故:

$$\dot{\mathbf{D}} = \frac{1}{j} \dot{\mathbf{J}}_D = -j \frac{2}{4} e^{-j5z} \mathbf{e}_x$$

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{\dot{\mathbf{D}}}{\epsilon_0} = -j \frac{2}{4} e^{-j5z} \mathbf{e}_x$$

得: 
$$\mathbf{D}(z, t) = \frac{2}{2} \sin(\omega t - 5z) \mathbf{e}_x \mu C / m^2$$

$$\mathbf{E}(z, t) = \frac{1}{2} \sin(\omega t - 5z) \mathbf{e}_x \mu V / m$$

(2) 由法拉第电磁感应定律的复数形式  $\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j \dot{\mathbf{B}}$  即可得:

$$\dot{\mathbf{B}} = j \frac{1}{z} \frac{\dot{\mathbf{E}}}{z} \mathbf{e}_y = -j \frac{2 \cdot 5}{4} e^{-j5z} \mathbf{e}_y$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{\dot{\mathbf{B}}}{\mu} = -j \frac{2}{4 \mu_0} e^{-j5z} \mathbf{e}_y$$

故时域解为:

$$\mathbf{B}(z, t) = \frac{2.5}{2} \sin(\omega t - 5z) \mathbf{e}_y \mu T$$

$$\mathbf{H}(z, t) = \frac{1}{2 \mu_0} \sin(\omega t - 5z) \mathbf{e}_y \mu A / m$$

**5 - 2** 设有一垂直放置的单元辐射子作为元天线, 已知  $q_m = 3 \times 10^{-7} C$ ,  $f = 5 \text{ MHz}$ ,  $l = 0.5 \text{ m}$ , 分别求与地面成  $40^\circ$  角度, 离单元辐射子中心为: (1)  $5 \text{ m}$  及 (2)  $5 \text{ km}$  处的  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{H}$  的表达式。

[解题思路]

本题为一典型的电偶极子(单元辐射子)对应的元天线的辐射场问题(5.4节)。为判明待求辐射场量  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$  计算关系式的归属, 首先, 应对所求场点位置作出其位于该元天线近区, 还是远区的判断。然后, 分别按相应的计算关系式[近区: 式(5-54)、式(5-56)和式(5-55); 远区: 式(5-57)和式(5-58)], 即可得待求场量  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$  的解答;

当给定系统无特定的计时起点时, 可合宜地选取源量的计时起点(初相

位),以展开确定的解题过程。

[解] 按“解题思路”,首先需对场点位置的归属作出判断。为此,由题设的该辐射子激励的电磁波的波长  $= \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{5 \times 10^6} \text{ m} = 60 \text{ m}$ ,可以判定  $r = 5 \text{ m} \ll$  应作近区处理,而  $r = 5 \text{ km} \gg$  则应看作为远区。

(1)  $r = 5 \text{ m}$ (近区):

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{\dot{q}}{4\pi\epsilon_0} \frac{l}{r^3} (2\cos\theta \mathbf{e}_r + \sin\theta \mathbf{e}_\theta)$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{\dot{I}}{4\pi r^2} \sin\theta \mathbf{e}_\phi$$

设  $\dot{q} = \frac{q_m \angle 0^\circ}{2}$ , 则  $\dot{I} = j \dot{q} = \frac{j q_m}{2}$ , 且按题设  $\theta = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$ , 代入之:

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{3 \times 10^{-7} \cdot 0.5 \angle 0^\circ}{4\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times 5^3} (2\cos 50^\circ \mathbf{e}_r + \sin 50^\circ \mathbf{e}_\theta) \text{ V/m} = (13.87 \mathbf{e}_r + 8.26 \mathbf{e}_\theta) \angle 2 \text{ V/m}$$

$$\dot{\mathbf{H}} = j \frac{2 \times 10^6 \times 5 \times 3 \times 10^{-7} \times 0.5}{2 \times 4 \times 5^2} \sin 50^\circ \mathbf{e}_\phi \text{ A/m} = (j1.149 \times 10^{-2} \mathbf{e}_\phi) \angle 2 \text{ A/m}$$

故:  $\mathbf{E}(r, t)|_{r=5} = (13.87 \mathbf{e}_r + 8.26 \mathbf{e}_\theta) \cos(2 \times 5 \times 10^6 t) \text{ V/m}$

$$\mathbf{H}(r, t)|_{r=5} = -1.149 \times 10^{-2} \sin(2 \times 5 \times 10^6 t) \mathbf{e}_\phi \text{ A/m}$$

(2)  $r = 5 \text{ km}$ (远区): 按题设波数  $k = \frac{2\pi}{c} = \frac{2 \times 5 \times 10^6}{3 \times 10^8} \text{ rad/m} = 0.10 \text{ rad/m}$

$$\begin{aligned} \text{故: } \dot{\mathbf{H}} &= j \frac{\dot{I}}{4\pi r} k \sin\theta e^{-jkr} \mathbf{e}_\phi = - \frac{\dot{q}}{4\pi r} k \sin\theta e^{-jkr} \mathbf{e}_\phi \\ &= - \frac{2 \times 5 \times 10^6 \times 3 \times 10^{-7} \times 0.5}{2 \times 4 \times 5 \times 10^3} \times 0.1 \times \sin 50^\circ e^{-j0.1 \times 5000} \mathbf{e}_\phi \\ &= (-5.745 \times 10^{-6} e^{-j500} \mathbf{e}_\phi) \angle 2 \text{ A/m} \end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{\mu_0}{0} \dot{\mathbf{H}} \mathbf{e}_\theta = 377 (-5.745 \times 10^{-6} e^{-j500}) \angle 2 \mathbf{e}_\theta \text{ V/m}$$

$$= (-2.166 \times 10^{-3} e^{-j500}) \angle 2 \mathbf{e}_\theta \text{ V/m}$$

$$\mathbf{H}(r, t)|_{r=5000} = -5.745 \times 10^{-6} \sin(2 \times 5 \times 10^6 t - 500) \mathbf{e}_\phi \text{ A/m}$$

$$\mathbf{E}(r, t)|_{r=5000} = -2.166 \times 10^{-3} \sin(2 \times 5 \times 10^6 t - 500) \mathbf{e}_\theta \text{ V/m}$$

**5-3** 设有一内阻为零的高频电源向某一单元辐射子天线供电,该天线的长度为  $l = 5 \text{ m}$ ,天线中的电流  $I = 35 \text{ A}$ ,电源的频率  $f = 10^6 \text{ Hz}$ ,求电源的电压及其输出的功率。

[解题思路]

当按端口参数来分析单元辐射子天线的端电压、电流,以及辐射功率等积分量之间的关系时,可由该元天线辐射电阻的定义式(5-63)出发,展

开相应的讨论和计算。

[解] 单元辐射子天线的辐射电阻为

$$R_r = \frac{2}{3} \frac{l^2}{c} = 80^2 \frac{l^2}{c} = 80^2 \frac{l \cdot f}{c} = 0.219$$

由于电源内阻为零,故电源电压全部降落在辐射电阻上,即  $U = R_r I = 7.665 \text{ V}$ ,输出的辐射功率  $P = R_r I^2 = 0.219 \times 35^2 \text{ W} = 268.275 \text{ W}$

**5 - 4** 在无限大的真空媒质中,一均匀平面电磁波的电场分量为  $E_x = 0$ ,  $E_y = 141 \cos 2 \times 10^8 t - \frac{x}{c} \text{ V/m}$ ,  $E_z = 0$ 。求:

(1) 此平面电磁波的磁场分量;

(2) 此平面电磁波的传播方向、频率、相速度、波长和波数。

[解题思路]

首先,应根据题设条件,判定该给定的均匀平面电磁波电场分量的基本特征:1. 电场沿  $y$  轴方向取向;2. 该均匀平面电磁波沿  $x$  轴正向传播;其次,由电磁波传播方向  $\mathbf{v}$  即为坡印廷矢量  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  所描述的电磁功率流的方向,可进而确定该均匀平面电磁波磁场分量的取向,并按理想介质中电磁波传播特性——波阻抗 [式(5 - 59)] 的基本关系求得磁场分量的振幅;最终,再由理想介质中  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$  波在时间上同相变化的基本关系,即可解出该均匀平面电磁波待求的磁场分量;

基于平面电磁波电场  $\mathbf{E}$  或磁场  $\mathbf{H}$  分量的数学表达式,结合理想介质中的均匀平面电磁波(5.5节)的讨论,即可逐一确定本题给定的电磁波的传播特性(传播方向、频率、相速度、波长和波数)。

[解] (1) 根据题设  $\mathbf{E} = E_y \mathbf{e}_y$  的表达式,由其中因子  $(t - x/c)$  可知该平面电磁波传播方向为  $\mathbf{e}_x$ ,从而,基于坡印廷矢量  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ ,且  $\mathbf{S}$  方向即为波速  $\mathbf{v}$  的方向,由此即可判定  $\mathbf{H} = H_z \mathbf{e}_z$ 。然后,由波阻抗  $Z = 377$ ,以及  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$  波在时间上同相变化的基本关系,即得其磁场分量为

$$H_z = \frac{141}{377} \cos 2 \times 10^8 t - \frac{x}{c} \text{ A/m}, \quad H_y = H_x = 0$$

(2) 传播方向可由  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = E \mathbf{e}_y \times H \mathbf{e}_z = EH \mathbf{e}_x$  判定为  $x$  轴正向其余各参数如下:

$$f = \frac{2}{2\pi} \times 10^8 = 10^8 \text{ Hz}$$

$$v = c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = 3 \text{ m}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2.094 \text{ rad/m}$$

5 - 5 在远离辐射源的相距为  $r$  的区域中, 已知电磁波的电场为

$$\mathbf{E} = \frac{100}{r} \sin \cos(\omega t - 2.09 \times 10^{-2} r) \mathbf{e} \text{ V/m. 设该区域的 } \epsilon = \epsilon_0, \mu = \mu_0. \text{ 求:}$$

- (1) 此电磁波的磁场;
- (2) 此电磁波的传播方向、波长和频率;
- (3) 每单位时间通过每单位面积的能量平均值。

[解题思路]

首先, 应根据题设条件, 判定该给定的在理想介质( $\epsilon_0, \mu_0$ )中的电磁波的基本特征: 1. 由等相位面方程  $r = \text{Const}$ , 可知其为球面波; 2. 电磁波传播方向为沿球坐标  $r$  增加的方向; 其次, 按理想介质中电磁波传播特性——波阻抗 [式(5-59)], 以及  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$  波在时间上同相变化的基本关系, 即可解出待求电磁波的磁场分量;

按该电磁波  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$  的数学表达式, 结合电磁波的物理概念, 当可得知其传播方向、波长和频率等传播特性参数;

待求的每单位时间通过每单位面积的能量平均值, 即电磁功率流面密度矢量  $\mathbf{S}$  (单位:  $\text{W/m}^2$ ) (5.2 节)。

[解] (1) 根据题设的  $\mathbf{E}$ , 如“解题思路”的分析, 可知该电磁波为球面波, 且波阻抗  $Z = 377 \Omega$ , 以及  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$  波在时间上同相变化, 故由此可得

$$\mathbf{H} = \frac{100}{377 r} \sin \cos(\omega t - 2.09 \times 10^{-2} r) \mathbf{e} \text{ A/m}$$

(2) 传播方向由  $\mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{S}$  可以判定, 即为  $\mathbf{e}_r$  方向

$$\begin{aligned} \text{由 } k = 2.09 \times 10^{-2} \text{ 可知, } k &= \frac{2\pi}{\lambda} = 2.09 \times 10^{-2}, \text{ 故 } \lambda = 300 \text{ m} \\ \omega &= 2\pi f = kv = 2.09 \times 10^{-2} \times 3 \times 10^8 \text{ rad/s} = 6.27 \times 10^6 \text{ rad/s} \\ f &= \frac{6.27 \times 10^6}{2\pi} \text{ Hz} = 10^6 \text{ Hz} \end{aligned}$$

(3)  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = H^2 \mathbf{e}_r = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}^2 \mathbf{e}_r$

$$= 8.85 \times 10^{-12} \frac{100^2}{2r^2} \sin^2 \cos^2 \times 3 \times 10^8 \mathbf{e}_r = 13.26 \frac{\sin^2 \cos^2}{r^2} \mathbf{e}_r$$

5 - 6 设在真空中, 有一沿铅垂线方向线性均匀极化且以频率  $f = 10^8 \text{ Hz}$  随时间作正弦变化的 TEM 波, 测得此 TEM 波的电场强度  $E$  (有效值)  $= 0.1 \text{ V/m}$ 。求:

- (1) 此 TEM 波的电场波  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ;
- (2) 此 TEM 波的磁场波  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ ;
- (3) 此 TEM 波的波长  $\lambda$ 、周期  $T$ 、相速  $v$ 、波数  $k$  以及波的传播方向;
- (4) 每单位时间通过每单位面积的能量平均值。

[解题思路]

波的极化概念(5.7.2节)确定地描述了电场强度矢量随时间在等相位面上的变化轨迹。因此,按题设,在合宜地选取某一坐标轴与铅垂线相重的前提下,结合其他给定条件,即可简洁地写出待求 TEM 波电场波的数学描述;

按理想介质中电磁波传播特性——波阻抗 [式(5-59)],以及  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$  波在时间上同相变化的基本关系,即可求得该 TEM 波的磁场波;

待求的每单位时间通过每单位面积的能量平均值,即电磁功率流面密度矢量  $\mathbf{S}$ (单位:  $\text{W}/\text{m}^2$ )(5.2节)。

[解] (1) 取坐标系  $xOy$ , 设  $x$  轴正向与 TEM 波传播方向一致,且取  $y$  轴方向为电场波方向,则电场波可记作(令  $E_z = 0$ ):

$$E_y(x, t) = 20.1 \sin \left[ 2 \times 10^8 t - \frac{x}{c} \right] = 0.1414 \sin(2 \times 10^8 t - 2.094 x) \text{ V/m}$$

$$\mathbf{E}_y = E_y \mathbf{e}_y$$

(2) 磁场波为:

$$H_z(x, t) = \frac{0.1414}{377} \cos \left[ 2 \times 10^8 t - \frac{x}{c} \right] = \frac{0.1414}{377} \cos[2 \times 10^8 t - 2.094 x] \text{ A/m}$$

$$\mathbf{H}_z = H_z \mathbf{e}_z$$

$$(3) \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2.094} \text{ m} = 3 \text{ m} \quad T = \frac{1}{f} = 10^{-8} \text{ 秒/周}$$

$$v = 3 \times 10^8 \text{ m/s} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2.094 \text{ rad/m}$$

$$(4) \quad \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{E^2}{\eta} \mathbf{e}_x = H^2 \eta \mathbf{e}_x = \mathbf{v} = E^2 v \mathbf{e}_x$$

$$= 8.85 \times 10^{-12} \times (0.1)^2 \times 3 \times 10^8 \mathbf{e}_x = 0.2655 \times 10^{-4} \mathbf{e}_x \text{ W/m}^2$$

5-7 已知自由空间中某一均匀平面波的电场强度  $\mathbf{E} = (100 \mathbf{e}_x + j100 \mathbf{e}_y) e^{-j2z/3}$ , 试决定该波的  $k$ 、 $v$ 、 $\lambda$ 、 $\omega$ 、 $\eta$ 、 $\mathbf{H}$  的表达式及  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{H}$  的瞬时表达式。

[解题思路]

本题均匀平面波  $\mathbf{E}$  采用了复矢量表示法(4.1.4节),基于电磁波的物理概念,当可由所给定的复数表示式中逐一确定该平面波的各个传播特性参数。值得指出的是,当由给定的电场强度  $\mathbf{E}$  确定其相应的磁场强度  $\mathbf{H}$  时,应在满足已知该平面波沿  $z$  轴正向传播的前提下,分别按给定的  $E_x$  和  $E_y$  求得相应的  $H_y$  和  $H_x$ ,然后再合成所得的  $H_y$  和  $H_x$ ,导出待求的磁场强度  $\mathbf{H}$ ;

基于线性媒质(自由空间)中的电磁波问题,可应用叠加原理,如同上述,由  $\mathbf{E}$  求  $\mathbf{H}$ 。同样,可应用叠加原理,由  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$  的频域形式的解答经反变换

求得  $\mathbf{E}(z, t)$  和  $\mathbf{H}(z, t)$  的时域形式的解答。

[解] 在自由空间中, 该均匀平面波的波速  $v = c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ , 根据  $\mathbf{E}$  的表达式, 可知相位常数  $k = \frac{2}{3} \text{ rad/m}$ , 故  $\omega = kv = 2 \times 10^8 \text{ rad/s}$ ,  $\lambda = \frac{2\pi}{k} = 3 \text{ m}$ , 又由  $\mathbf{E}_x = 100e^{-j\frac{2}{3}z}$ ,  $\mathbf{E}_y = j100e^{-j\frac{2}{3}z}$ , 可得  $\alpha_x = 0^\circ$ ,  $\alpha_y = 90^\circ$ ; 同样, 根据  $\mathbf{E}$  的表达式可见, 该均匀平面波沿  $z$  轴正向传播。因而, 对应于  $\mathbf{E}$  的  $\mathbf{E}_x$  分量, 可知其相应的磁场强度分量为

$$\dot{H}_y = \frac{\dot{E}_x}{\eta} = 0.27e^{-j\frac{2}{3}z};$$

而对应于  $\mathbf{E}$  的  $\mathbf{E}_y$  分量, 其相应的磁场强度分量为

$$\dot{H}_x = -\frac{\dot{E}_y}{\eta} = -j0.27e^{-j\frac{2}{3}z}$$

从而, 基于叠加原理, 可得待求的磁场强度为

$$\dot{\mathbf{H}} = (0.27\mathbf{e}_y - j0.27\mathbf{e}_x)e^{-j\frac{2}{3}z}$$

经反变换, 同样, 基于叠加原理, 由反变换可得该均匀平面波时域解为:

$$\mathbf{E}(z, t) = 100 \cdot 2 \cos \left( t - \frac{2}{3}z \right) \mathbf{e}_x - 100 \cdot 2 \sin \left( t - \frac{2}{3}z \right) \mathbf{e}_y$$

和 
$$\mathbf{H}(z, t) = 0.27 \cdot 2 \sin \left( t - \frac{2}{3}z \right) \mathbf{e}_x + 0.27 \cdot 2 \cos \left( t - \frac{2}{3}z \right) \mathbf{e}_y$$

**5-8** 有一频率为 30 MHz 的均匀平面波在无损耗的介质中沿  $\mathbf{e}_x$  方向传播。已知该介质的  $\epsilon = 20 \text{ pF/m}$  和  $\mu = 5 \text{ \mu H/m}$ 。  $\mathbf{E}$  只有  $\mathbf{e}_z$  分量且初相为零。当  $t = 6 \text{ ns}$ ,  $x = 0.4 \text{ m}$  时, 电场强度值为  $800 \text{ V/m}$ , 求  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{H}$  的瞬时表达式。

[解题思路]

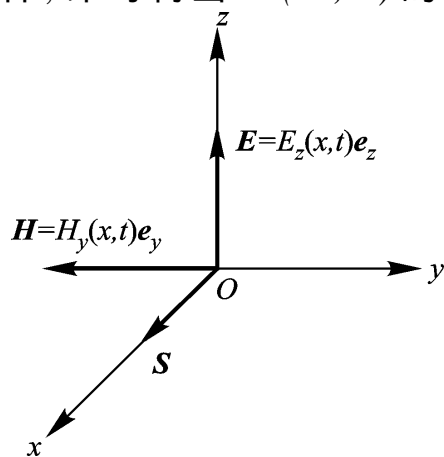
根据题意, 首先, 给出均匀平面波的电场  $\mathbf{E}$  的一般表达式:  $\mathbf{E}(x, t) = 2E \cos(\omega t - kx) \mathbf{e}_z$ ; 然后, 由已知  $f$ 、 $\epsilon$ 、 $\mu$ , 以及当  $t = 6 \times 10^{-9} \text{ s}$ ,  $x = 0.4 \text{ m}$  时,  $E(0.4, 6 \times 10^{-9}) = 800 \text{ V/m}$  的给定条件, 即可得出  $\mathbf{E}(x, t)$  的确定解;

当解出  $\mathbf{E}(x, t)$  后, 根据该均匀平面波的传播方向、传播特性参数, 即可继续得出相应的  $\mathbf{H}(x, t)$  的确定解。

[解] 如图示, 该均匀平面波沿  $\mathbf{e}_x$  方向传播, 其相速:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = 10^8 \text{ m/s}$$

$$\omega = 2\pi f = 6 \times 10^7 \text{ rad/s}$$



题 5-8 图

波数  $k = \frac{1}{\lambda} = 0.6 \text{ rad/m}$

波阻抗  $= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 500$

设如图示,  $\mathbf{E}(x, t) = 2E \cos(\omega t - kx) \mathbf{e}_z$ , 现由题设

$$800 = 2E \cos(6 \times 10^7 \cdot 6 \times 10^{-9} - 0.6 \cdot 0.4) = 2E \cos 0.12$$

即  $2E = \frac{800}{\cos 0.12} = 0.8 \text{ kV/m}$

故得  $\mathbf{E}(x, t) = 0.8 \cos(6 \times 10^7 t - 0.6 x) \mathbf{e}_z \text{ kV/m}$

根据该均匀平面波的传播方向、波阻抗, 可知其磁场强度为

$$\mathbf{H}(x, t) = -\frac{2E}{\eta} \cos(\omega t - kx) \mathbf{e}_y = -1.6 \cos(6 \times 10^7 t - 0.6 x) \mathbf{e}_y \text{ A/m}$$

**5 - 9** 在自由空间中, 一正弦稳态均匀平面电磁波的波长为 12 cm。当该电磁波进入一无损耗媒质后, 其波长变为 8 cm, 且此时电场强度的幅值  $E_m = 50 \text{ V/m}$ , 磁场强度的幅值  $H_m = 0.1 \text{ A/m}$ 。求该平面电磁波的频率  $f$  以及无损耗媒质的  $\mu_r$  和  $\epsilon_r$ 。

[解题思路]

在由不同媒质构成的空间中, 频率一定的电磁波将在不同媒质中呈现不同的传播速度、不同的波长、不同的波阻抗等。这些传播特性参数的变化完全取决于媒质, 即与相应媒质的电磁性能参数 ( $\mu_r, \epsilon_r$ ) 相关联。

[解] 根据题设的该均匀平面波在自由空间中传播的参数, 可知其交变频率

$$f = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3 \times 10^8}{12 \times 10^{-2}} \text{ Hz} = 2.5 \times 10^9 \text{ Hz}$$

由此可知, 在无损耗媒质中, 波速变为

$$v = \lambda f = 8 \times 10^{-2} \times 2.5 \times 10^9 \text{ m/s} = 2 \times 10^8 \text{ m/s} = \frac{1}{\mu} \quad (1)$$

另知该无损耗媒质的波阻抗为

$$= \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{50}{0.1} = 500 \quad (2)$$

联合求解式(1)和式(2), 即可得无损耗媒质的电磁性能参数为:

$$\mu_r = 1.989 \quad (\mu = 25 \times 10^{-7} \text{ H/m})$$

$$\epsilon_r = 1.131 \quad (\epsilon = 10^{-11} \text{ F/m})$$

**5 - 10** 在导电媒质(参数为  $\mu_0, \epsilon_0$  和  $\sigma$ ) 中有一沿  $z$  轴方向传播的均匀平面波。

(1) 试决定单位体积中热功率损耗的瞬时值和平均值;

- (2) 决定横截面为单位面积, 长度为  $0 \sim \lambda$  的体积中耗散的平均功率;  
 (3) 决定坡印廷矢量的平均值, 并据此重求(2);  
 (4) 试将(2)和(3)的结果相比较, 以良导体为例说明两者是否相等。

[解题思路]

关于电磁波在导电媒质中传播而伴随生成的能量、功率耗散问题的分析, 首先, 必须把握其关键的传播特性参数: 传播常数  $k_e$  与波阻抗  $Z_e$  (5.8.2 节); 然后, 在设定导电媒质中  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$  一般式 [式(5-157)和式(5-158)] 的基础上, 可采用以下两种求解方法;

- (1) 基于焦耳—楞次定律的微分形式(3-8)的方法:

此时, 按式(3-8)即得待求的单位体积内的热功率损耗, 进而可对应于一周期的时间变化, 求其平均值。然后, 继续沿波的传播方向累加上述的热功率损耗, 则可解得沿波传播方向, 横向取单位截面积的柱形导电媒质中耗散的平均功率。

- (2) 基于坡印廷定理(5.2 节)的方法:

此时, 按式(5-28)可求得坡印廷矢量的平均值, 其物理意义表征了电磁功率流面密度矢量的平均值。因而, 再遵循坡印廷定理, 通过计算

$\int_S \mathbf{S}_{av} \cdot d\mathbf{S}$  即可解得沿波传播方向, 横向取单位截面积的柱形导电媒质中耗散的平均功率。

在比较上述两种方法的计算结果时, 按题意, 当应在良导体条件下, 即  $\sigma \gg \omega\epsilon$ , 展开相应的分析。

[解] (1) 设  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$  的一般式为:

$$\mathbf{E}(z, t) = E_x(z, t) \mathbf{e}_x = E_m e^{-k_z z} \cos(\omega t - k_z z) \mathbf{e}_x$$

和 
$$\mathbf{H}(z, t) = H_y(z, t) \mathbf{e}_y = \frac{E_m}{|Z_e|} e^{-k_z z} \cos(\omega t - k_z z - \phi) \mathbf{e}_y$$

其中, 传播常数

$$k_e = \sqrt{j\omega\epsilon(\mu\sigma + j\omega\epsilon)} = \mu \sqrt{\frac{\omega\epsilon}{2} (1 - j)} = k - jk$$

波阻抗 
$$Z_e = \frac{j\omega\mu}{1 + j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}} = \frac{j\omega\mu}{1 + j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}} = \frac{j\omega\mu}{1 + j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}} = |Z_e| e^{j\phi}$$

基于焦耳—楞次定律, 可知单位体积内的热功率损耗为

$$p = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = |\mathbf{E}|^2 \sigma = E_m^2 e^{-2k_z z} \cos^2(\omega t - k_z z)$$

故其平均值为 
$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = E_m^2 e^{-2k_z z} \cdot \frac{1}{2} \int_0^T \cos^2(\omega t - k_z z) dt = \frac{E_m^2}{2} e^{-2k_z z}$$

- (2) 在  $z=0$  至  $z=\lambda$  之间单位横截面积的柱体中的平均功率损耗为

$$P = \int_0^z P \cdot dz = \frac{E_m^2}{2} \int_0^z e^{-2kz} dz = \frac{E_m^2}{4k}$$

(3) 坡印廷矢量的复数形式为

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \frac{1}{2} E_m e^{-kz} e^{-jkz} \mathbf{e}_x \times \frac{E_m}{|e|} e^{-kz} e^{jkz} e^j \mathbf{e}_y = \frac{E_m^2}{2|e|} e^{-2kz} e^j \mathbf{e}_z$$

故其平均值为

$$\mathbf{S}_{av} = \text{Re}[\mathbf{S}] = \frac{E_m^2}{2|e|} e^{-2kz} \cos \mathbf{e}_z$$

从而, 基于坡印廷定理, 可知流入题设体积中的平均功率为

$$-\int_S \mathbf{S}_{av} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{E_m^2}{2|e|} \cos e^{-2kz} \Big|_{z=0}^{z=} = \frac{E_m^2}{2|e|} \cos$$

(4) 对于良导体, 应有  $\gg$ ,  $k = k - \frac{\mu r}{2}$ , 故由(2)所得的平均功率损耗

$$P = \frac{1}{4k} E_m^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu} E_m^2$$

而由(3)所得的流入相应体积的平均功率为

$$-\int_S \mathbf{S}_{av} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{E_m^2}{2\mu} \cos 45^\circ = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu} E_m^2$$

由此可见(2)、(3)结果相等, 即柱体中平均热功率损耗等于坡印廷矢量的平均值流入该体积的净通量。

**5 - 11** 设有一均匀平面波在一良导体内传播, 其传播速度为光在自由空间波速的 0.1%, 且波长为 0.3 mm, 若该良导体的磁导率为  $\mu_0$ , 试决定该平面波的频率及良导体的电导率。

[解题思路]

本题求解的要素为

(1) 良导体: 即应满足  $\gg$  的条件;

(2) 已知该均匀平面波在良导体中的传播速度  $v$  和波长  $\lambda$ , 故从  $v$  和  $\lambda$  的计算关系式着手分析, 当能获得该均匀平面波待求的频率及良导体的电导率。

[解] 对于良导体, 传播常数  $k_c = \frac{\mu}{2} (1 - j) = k - jk$ , 由此, 在良导体

中波速  $v = \frac{1}{k} = \frac{2}{\mu}$ , 波长  $\lambda = \frac{2}{k} = 2 \frac{2}{\mu}$ 。

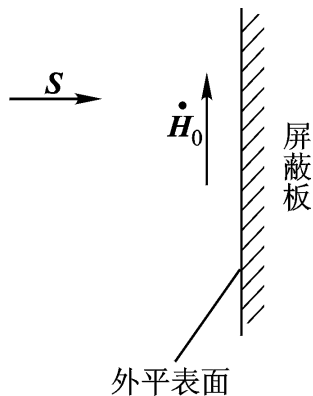
现题设为非磁性材料,  $\mu = \mu_0$ , 故由  $v = \frac{4}{\mu_0}$ , 代入题设的  $v = 0.1\% \cdot c$ ,

$= 0.3 \times 10^{-3} \text{ m}$ , 即可得

$$= \frac{4}{\mu_0 \nu} = \frac{4}{4 \times 10^{-7} \times 0.001 \times 3 \times 10^8 \times 0.3 \times 10^{-3}} = 1.111 \times 10^5 \text{ S/m}$$

和  $f = \frac{\nu}{\lambda} = 10^9 = 1 \text{ GHz}$

**5 - 12** 某仪器正常工作的条件要求其所在处的外界磁场强度  $H < 0.01 \text{ A/m}$ , 为此必须采取电磁屏蔽措施, 如题 5 - 12 图所示, 若今实测到在无限大屏蔽板外平表面处工频的干扰电磁场的磁场强度值为  $H_0 = 10 \text{ A/m}$ 。试按平面电磁波正入射到平表面的半无限大媒质的观点, 求:



题 5 - 12 图

(1) 若采用铝板屏蔽, 所需屏蔽板的厚度多大? (铝的电导率  $\sigma = 3.5 \times 10^7 \text{ S/m}$ ,  $\mu = \mu_0$ );

(2) 若采用铁板屏蔽, 则所需屏蔽板的厚度又多大? (铁的电导率  $\sigma = 8.3 \times 10^6 \text{ S/m}$ ,  $\mu = 2000 \mu_0$ );

(3) 若干扰电磁场为甚高频电磁场, 则应采用哪种材料?

[解题思路]

本题应按平面电磁波正入射到平表面的半无限大媒质(5.6.3 节)的条件, 展开分析。此时, 对应于电磁波透射到良导体媒质中的工况, 必将产生“集肤效应”(5.8.4 节), 故可通过电磁波的衰减因子, 即  $e^{-kl}$  ( $l$  为起源于屏蔽板表面, 以与表面正交的方向, 透入相应良导体的“深度”, 即待求的屏蔽板厚度), 得出所求解答;

当屏蔽对象为甚高频电磁场时, 基于电磁波在良导体中传播时, 其振幅迅速衰减的基本特性, 应采用良导体。

[解] 按题意, 电磁波衰减率应为

$$e^{-kl} = \frac{10}{0.01} = 1000$$

故屏蔽板厚度应至少为  $l = \frac{1}{k} \ln 1000 = \frac{6.9078}{k}$

(1) 铝:  $k = \frac{\omega \sqrt{\mu \sigma}}{2} = 83.12 \text{ 1/m}$

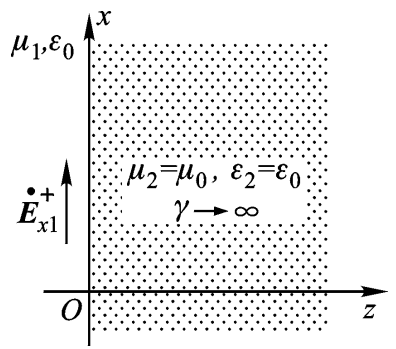
$$l = \frac{6.9078}{83.12} = 8.31 \text{ cm}$$

(2) 铁:  $k = \frac{\omega \sqrt{\mu \sigma}}{2} = 1810.2 \text{ 1/m}$

$$l = \frac{6.9078}{1810.2} = 0.3816 \text{ cm}$$

(3) 应采用良导体(铜、铝等)。

**5 - 13** 设空间有一沿  $x$  轴取向的线性极化波, 正入射于一完纯导体的表面, 如题 5 - 13 图所示。已知



$$\dot{\mathbf{E}}_{x1}^+ = 200e^{j10^\circ} e^{-jkz} \text{ V/m}$$

(1) 求电场强度及磁场强度的反射分量和透射分量(相量形式);

(2) 导体表面的面电流密度;

(3) 写出电场强度和磁场强度的瞬时表达式。

题 5 - 13 图

[解题思路]

根据题意, 此为一均匀平面电磁波正入射于平表面的半无限大理想导体的问题, 应按(5.6.3节)的理论分析结果, 在全反射的物理条件下, 展开分析;

分析的关键点在于投射面处电磁波场量  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$  所应遵循的物理条件, 即不同媒质分界面处的 BC[式(5-9)—式(5-12)]。

[解] (1) 由题设  $\dot{\mathbf{E}}_{x1}^+(z) = 200e^{j10^\circ} e^{-jkz}$  可知,  $\dot{\mathbf{H}}_{y1}^+(z) = \frac{1}{\eta_1} \dot{\mathbf{E}}_{x1}^+$ 。然后, 由全反射条件可得: 在完纯导体中的透射波为零; 反射波的分量分别为:

$$\dot{\mathbf{E}}_{x1}^-(z) = -200e^{j10^\circ} e^{jkz} \quad \text{和} \quad \dot{\mathbf{H}}_{y1}^-(z) = \frac{200}{377} e^{j10^\circ} e^{jkz}$$

(2) 根据投射面( $z=0$ )处的边界条件, 应有:

$$\dot{\mathbf{K}} = -\mathbf{e}_z \times \dot{\mathbf{H}}_{y1}^+(0) - \dot{\mathbf{H}}_{y1}^-(0) = \frac{1}{\eta_1} \dot{\mathbf{E}}_{x1}^+ - \dot{\mathbf{E}}_{x1}^- \mathbf{e}_x \Big|_{z=0} = 1.061e^{j10^\circ} \mathbf{e}_x$$

即  $\dot{\mathbf{K}} = 1.061 \cos(\omega t + 10^\circ) \mathbf{e}_x \text{ A/m}$

(3) 在完纯导体( )内, 透射波  $\dot{\mathbf{E}}^2 = \dot{\mathbf{H}}^2 = 0$ 。在媒质( $\mu_1, \epsilon_0$ )空间内, 由入射波与反射波合成的电场强度与磁场强度分别为:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_{x1}(z) &= \dot{\mathbf{E}}_{x1}^+(z) + \dot{\mathbf{E}}_{x1}^-(z) = \dot{\mathbf{E}}_{x1} (e^{-jkz} - e^{jkz}) = -2j \cdot 200e^{j10^\circ} \sin(kz) \\ &= 400e^{-j80^\circ} \sin(kz) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{和} \quad \dot{\mathbf{H}}_{y1}(z) &= \dot{\mathbf{H}}_{y1}^+(z) - \dot{\mathbf{H}}_{y1}^-(z) = \frac{1}{\eta_1} (\dot{\mathbf{E}}_{x1}^+ e^{-jkz} - \dot{\mathbf{E}}_{x1}^- e^{jkz}) = \frac{2}{\eta_1} \dot{\mathbf{E}}_{x1}^+ \cos(kz) \\ &= 1.061e^{j10^\circ} \cos(kz) \end{aligned}$$

对应的时域解(瞬时表达式)为:

$$E_{x1}(z, t) = 2 \cdot 400 \sin(kz) \cos(\omega t - 80^\circ) \text{ V/m}$$

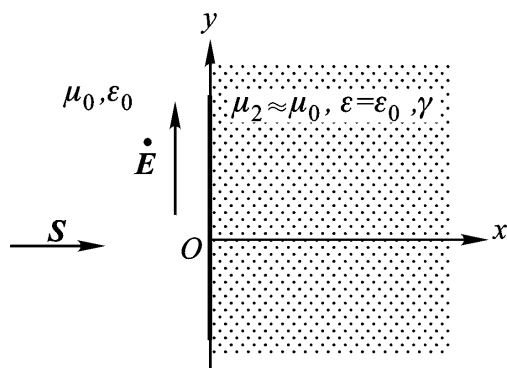
$$\text{和} \quad H_{y1}(z, t) = 2 \cdot 1.061 \cos(kz) \cos(\omega t + 10^\circ) \text{ A/m}$$

**5 - 14** 已知一均匀平面电磁波  $\mathbf{E} = E_y \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_y E_{ym} \cos(\omega t - kx)$  由空气正入射到一平表面的良导体(如题 5 - 14 图所示, 该导体充满  $x > 0$  的半空间, 其电

导率  $\gamma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$ , 磁导率  $\mu = \mu_0$ )。求:

(1) 该电磁波对于良导体的透入深度  $d$ , 并求在  $x = d$  处电场强度值与  $x = 0$  处电场强度值的比值多大?

(2) 若该良导体的电导率  $\gamma$ , 则将呈现何种物理现象? 求此时的透入深度  $d$  及良导体表面 ( $x = 0$ ) 处电场强度和磁场强度值。



题 5 - 14 图

[解题思路]

根据题意, 此为一均匀平面电磁波正入

射于平表面的半无限大导体的问题, 应按 (5.6.3 节) 的理论分析, 并按电磁波在良导体中传播的特性 (5.8.4 节), 即在“电的集肤效应”工程分析观点下, 展开分析;

当所论导体的电导率  $\gamma$ , 即该导体被理想化为完纯导体时, 则按 (5.6.3 节) 的理论分析, “电的集肤效应”将被呈现在该导体 (完纯导体) 表面 ( $x = 0$ ) 处的“全反射效应”所取代。

[解] (1) 此时, 电磁波的透入深度  $d = \frac{1}{k} = \frac{2}{\mu_0 \gamma}$ 。由波的衰减因子  $e^{-kx}$ , 可知当  $x = d$  时电场强度值与  $x = 0$  处电场强度值的比值为

$$\frac{E|_{x=d}}{E|_{x=0}} = e^{-1} = 0.368$$

(2) 当该良导体的电导率  $\gamma$  时, 将呈现全反射 (亦称驻波) 现象。此时, 由透入深度  $d$  的计算关系式可见, 当  $\gamma \rightarrow \infty$  时, 电磁波的透入深度  $d$  为零, 且基于电磁波投射面 ( $x = 0$ ) 处的 BC, 应有

$$E_{\text{合成}}|_{x=0} = 0$$

$$H_{\text{合成}}|_{x=0} = 2H_{zm} = 2 \frac{E_{ym}}{377} = 2 \frac{E_{ym}}{377} = 5.305 \times 10^{-3} E_{ym} \text{ A/m}$$

**5 - 15** 由远处辐射源激励产生的一正弦稳态均匀平面电磁波, 在空气中某点现测得其坡印廷矢量的平均值  $\mathbf{S}_{av} = (-\mathbf{e}_y) 100 \text{ mW/cm}^2$ , 频率  $f = 10 \text{ MHz}$ 。若设电场强度  $\mathbf{E}$  的方向沿  $z$  轴正方向, 试求:

(1) 该正弦稳态 (时谐) 电磁波的  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$  的瞬时表达式;

(2) 如该平面电磁波垂直入射到一无限大的平表面的玻璃板上, 且设玻璃表面位于  $xOz$  坐标平面, 玻璃板厚度看作为无限大, 求反射电磁波的  $\mathbf{E}$  和玻璃中透射电磁波的  $\mathbf{H}$  (玻璃的  $\epsilon_r = 4, \mu_r = 1$ )。

[解题思路]

据题设,应从坡印廷矢量的平均值  $\mathbf{S}_{av}$  [式(5-26)]分布着手分析。注意到,电磁波的传播特性参数(波阻抗)关联了时变电场  $\mathbf{E}$  与时变磁场  $\mathbf{H}$  振幅值之间的量值关系 [式(5-60)],因而,例如,在设定  $\mathbf{E}$  的初相位条件下,即可按正弦量的三要素:角频率、振幅和初相位,写出待求的  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$  的瞬时表达式:

当平面电磁波正入射到一无限大的平表面媒质时,应按 5.6.3 节的理论分析,可基于工程上反射和透射系数的描述,直接写出相应的反射电磁波的  $\mathbf{E}_r$  和透射电磁波的  $\mathbf{H}_t$  的解答。

[解] (1) 由  $\mathbf{S}_{av} = \text{Re}[\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*] = \frac{E^2}{Z} (-\mathbf{e}_y)$  可得电场强度的有效值

$$E = S_{av} Z = 100 \times (10^{-3} / 10^{-4}) \times 377 \text{ V/m} = 614 \text{ V/m}$$

现若设电场强度  $E(t)$  的初相位  $E = 0$ , 可定义该时谐电磁波的电场强度

$$E(y, t) = 2E \cos(\omega t + ky)$$

式中,波数  $k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 2\pi f \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ , 故代入题设的给定值即得

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(y, t) &= \mathbf{e}_z 2614 \cos(2 \times 10^7 t + 2 \times 10^7 \times 4 \times 10^{-7} \times 8.85 \times 10^{-12} y) \text{ V/m} \\ &= \mathbf{e}_z 868.3 \cos(6.28 \times 10^7 t + 0.2095 y) \text{ V/m} \end{aligned}$$

基于传播特性参数  $Z_0$ , 该时谐电磁波的磁场强度为

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(y, t) &= \frac{E_{zm}}{Z_0} \cos(\omega t + ky) (-\mathbf{e}_x) = \frac{868.3}{377} \cos(6.28 \times 10^7 t + 0.2095 y) (-\mathbf{e}_x) \text{ A/m} \\ &= 2.303 \cos(6.28 \times 10^7 t + 0.2095 y) (-\mathbf{e}_x) \text{ A/m} \end{aligned}$$

(2) 由题设,可知两种介质的特性阻抗分别为:

$$Z_1 = \frac{\mu_0}{\epsilon_0} = 377 \quad , \quad Z_2 = \frac{\mu_0}{4\epsilon_0} = 188.5$$

由此可得在垂直入射电磁波情况下,介质交界面上的反射和透射系数分别为:

$$R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{188.5 - 377}{188.5 + 377} = -0.333 \quad \text{和} \quad T = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} = \frac{2 \times 188.5}{188.5 + 377} = 0.666$$

因此反射电磁波的电场强度

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_r(y, t) &= RE_m \cos(\omega t - ky) \mathbf{e}_z = -0.333 \times 868.3 \cos(6.28 \times 10^7 t - 0.2095 y) \mathbf{e}_z \\ &= -289.14 \cos(6.28 \times 10^7 t - 0.2095 y) \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

透射电磁波的磁场强度  $\mathbf{H}_t(y, t) = \frac{TE_m}{Z_2} \cos(\omega t + ky) (-\mathbf{e}_x)$

式中对应于玻璃介质中的波数

$$k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 2 \times 10^7 \times 4 \times 10^{-7} \times 4 \times 8.85 \times 10^{-12} \text{ rad/m} = 0.419 \text{ rad/m}$$

代入之,即得

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(y, t) &= \frac{0.666 \times 868.3}{188.5} \cos(6.28 \times 10^7 t + 0.419 y) (-\mathbf{e}_x) \text{ A/m} \\ &= 3.0678 \cos(6.28 \times 10^7 t + 0.419 y) (-\mathbf{e}_x) \text{ A/m} \end{aligned}$$

**5 - 16** 一内部为空气的矩形金属波导(截面尺寸为 25 mm × 10 mm),当频率  $f = 10^4$  MHz 的电磁波进入波导后,该波导可传输什么波型电磁波?当波导中填充  $\epsilon_r = 4$  的理想介质后,其传输的波型有无变化?

[解题思路]

本题系给定结构的矩形波导中横电波(TE波)与横磁波(TM波)可传输波型的判定问题(5.9.3节),其关键分析点在于由截止波长  $\lambda_{cmn}$  [式(5-205)]或截止频率  $f_{cmn}$  [式(5-206)]所决定的物理条件。

[解] 由式(5-206)可得本题矩形空气波导的截止频率为

$$f_{cmn} = 3 \times 10^8 \sqrt{400 m^2 + 2500 n^2}$$

故其各阶波型的截止频率分别为:

$$\text{TE}_{10} \text{ 波 } f_{c10} = 6 \text{ GHz}; \quad \text{TE}_{01} \text{ 波 } f_{c01} = 15 \text{ GHz};$$

$$\text{TE}_{11} \text{ 和 } \text{TM}_{11} \text{ 波 } f_{c11} = 3 \times 10^8 \sqrt{400 \times 1 + 2500 \times 1} \text{ Hz} = 16.15 \text{ GHz}; \dots$$

更高阶波型的截止频率更高。由此可见,当今工作频率为  $f = 10^4 \text{ MHz} = 10 \text{ GHz}$  时,仅能传输的波型为  $\text{TE}_{10}$  波。

当波导中填充  $\epsilon_r = 4$  的理想介质后,则各阶波型的截止频率应为

$$f_{cmn} = \frac{3}{2} \times 10^8 \sqrt{400 m^2 + 2500 n^2}$$

故对应的各阶波型的截止频率将变化为:

$$\text{TE}_{10} \text{ 波 } f_{c10} = 3 \text{ GHz}; \quad \text{TE}_{01} \text{ 波 } f_{c01} = 7.5 \text{ GHz};$$

$$\text{TE}_{11} \text{ 和 } \text{TM}_{11} \text{ 波 } f_{c11} = 8.075 \text{ GHz};$$

$$\text{TE}_{20} \text{ 波 } f_{c20} = 6 \text{ GHz}; \quad \text{TE}_{30} \text{ 波 } f_{c30} = 9 \text{ GHz};$$

$$\text{TE}_{21} \text{ 和 } \text{TM}_{21} \text{ 波 } f_{c21} = 9.605 \text{ GHz}; \quad \text{TE}_{31} \text{ 和 } \text{TM}_{31} \text{ 波 } f_{c31} = 11.7 \text{ GHz};$$

$$\text{TE}_{40} \text{ 波 } f_{c40} = 12 \text{ GHz}; \dots$$

由此可见,此时除可传输  $\text{TE}_{10}$  波外,还可传输  $\text{TE}_{01}$ 、 $\text{TE}_{11}$ 、 $\text{TM}_{11}$ 、 $\text{TE}_{20}$ 、 $\text{TE}_{30}$ 、 $\text{TE}_{21}$ 、 $\text{TM}_{21}$  波。

**5 - 17** 若内充空气的矩形波导尺寸为  $b < a < 2b$ ,工作频率为 3 GHz。现如要求该工作频率至少高于主模  $\text{TE}_{10}$  波的截止频率的 20%,且至少低于  $\text{TE}_{01}$  波的截止频率的 20%。试求所设计波导尺寸  $a$  和  $b$  的取值范围。

[解题思路]

本题系在给定传输一定频率范围的横电波(TE波)的要求下,确定矩形

波导结构尺寸的典型工程问题。根据(5.9.3节)的理论分析,解题的出发点应归结为由式(5-206)给定的截止频率  $f_{cmn}$  的计算关系式。

[解] 在矩形空气波导中,  $TE_{10}$  波和  $TE_{01}$  波的截止频率分别为:

$$f_{c10} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{1}{2a} = \frac{c}{2a} \quad \text{和} \quad f_{c01} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{1}{2b} = \frac{c}{2b}$$

按题意,所设计的波导尺寸应满足如下要求:

$$3 \times 10^9 \text{ Hz} \leq \frac{c}{2a} \times 1.2 \quad (1)$$

$$3 \times 10^9 \text{ Hz} \leq \frac{c}{2b} \times 0.8 \quad (2)$$

联立求解式(1)和(2),可得波导尺寸的取值范围为:

$$a \geq 0.06 \text{ m}, \quad b \geq 0.04 \text{ m}$$

# 附录一 本科生期中、期末典型试题

## 本科生期中试题

### 一、填充题:(20分)

1. 静电场基本方程的积分形式是\_\_\_\_\_ , 相应的微分形式是\_\_\_\_\_。由此从数学、物理概念上可把静电场称为\_\_\_\_\_。

2. 静电场引入电位函数 作为辅助物理量的前提在于\_\_\_\_\_。基于电位函数 , 静电场的基本规律性可归结为\_\_\_\_\_。

3. 静电场中不同介质分界面上的边界条件可应用场量  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{D}$  描述为\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_。若应用电位 , 则相应地可描述为\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_。

4. 对于导体(媒质 1)和介质(媒质 2)分界面上的边界条件, 应描述为\_\_\_\_\_。

5. 在无限大由空气媒质构成的空间中, 若置有一孤立的球形导体球(球半径为  $a$ ), 设其带有电量为  $q$  ( $q > 0$ ) 的静电电荷, 则该导球的电位 = \_\_\_\_\_; 导球内、外的电场强度  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  分别为\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_; 在空间中建立的电场能量  $W_e =$  \_\_\_\_\_; 对应的电容参数  $C =$  \_\_\_\_\_; 球表面上每单位面积所受的电场力  $\mathbf{F}_e$ , 其大小为  $|\mathbf{F}_e| =$  \_\_\_\_\_, 方向为\_\_\_\_\_。

6. 在 SI 单位中, 以下电磁量的单位分别是:

电场强度  $\mathbf{E}$  \_\_\_\_\_; 电位移矢量  $\mathbf{D}$  \_\_\_\_\_;

磁感应强度  $\mathbf{B}$  \_\_\_\_\_, 它与“高斯(Gs)”之间的换算关系为\_\_\_\_\_;

磁通 \_\_\_\_\_; 磁场强度  $\mathbf{H}$  \_\_\_\_\_。

二、(18分)工程上, 为改善同轴电缆的电气性能, 即在内、外导体尺寸不变的条件下, 力求提高其耐压强度, 为此采用了多层绝缘结构, 如图 1 所示。试问:

(1) 若内、外导体间为单一绝缘介质 , 则电场强度的最大值应出现在何处? 其值多大?

(2) 如题述, 为力求提高该电缆的耐压强度, 其合理的结构应是  $\epsilon_1 > \epsilon_2$ , 还

是  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  ? 为什么? 描绘两种情况下  $|\mathbf{E}| \sim \rho$  的分布曲线。

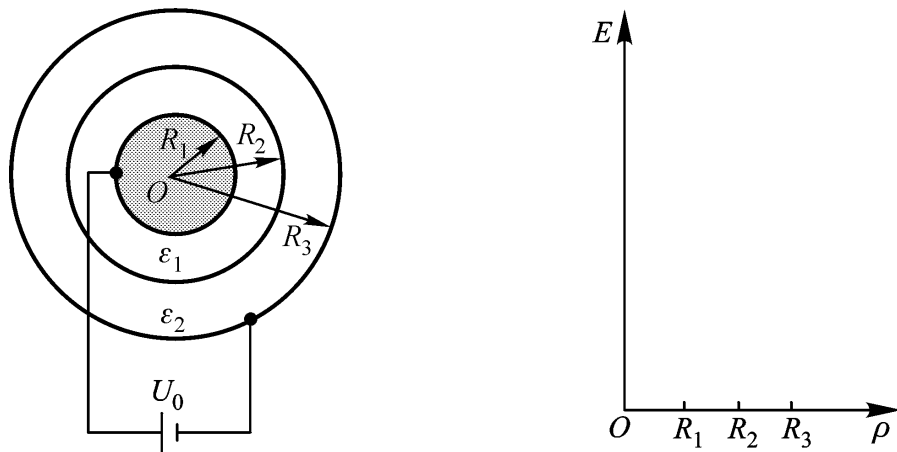


图 1

三、(18分) 在介质的介电常数为  $\epsilon_0$  的静电场中, 有一半径为  $a$  的长直圆柱体如图 2 所示。已知圆柱体内、外的电位函数  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  (采用圆柱坐标表示) 分别为

$\varphi_1$  和  $\varphi_2$  (采用圆柱坐标表示) 分别为

$$\varphi_1 = 0 \quad (r < a)$$

$$\varphi_2 = A - \frac{a^2}{2r^2} \cos^2 \phi \quad (r > a)$$

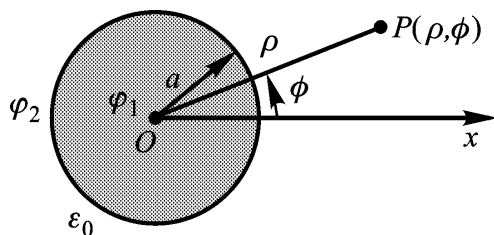


图 2

式中  $A$  为常量。试求:

(1) 证明解答  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  满足不同媒质分界面 ( $r = a$ ) 上的边界条件;

(2) 求圆柱体内、外的电场强度  $\mathbf{E}_1$  和  $\mathbf{E}_2$  (在圆柱坐标系中, 对于位函数  $u$  有以下矢量分析的微分运算关系式:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad u = -\frac{u}{r} \mathbf{e}_r + \frac{u}{r^2} \mathbf{e}_\phi + \frac{u}{z} \mathbf{e}_z$$

(3) 结合工程背景, 由本题解答试描述该问题的物理实在。

四、(18分) 二同心导体球壳间的电压为  $U_0$ , 外球壳接地, 且与球心  $O$  相距  $d$  处有一点电荷  $q$ 。求球内、外各点电场强度  $\mathbf{E}$  和电位 (如图 3 所示, 两球壳间和外球壳外介质的介电常数分别为  $\epsilon$  和  $\epsilon_0$ )。

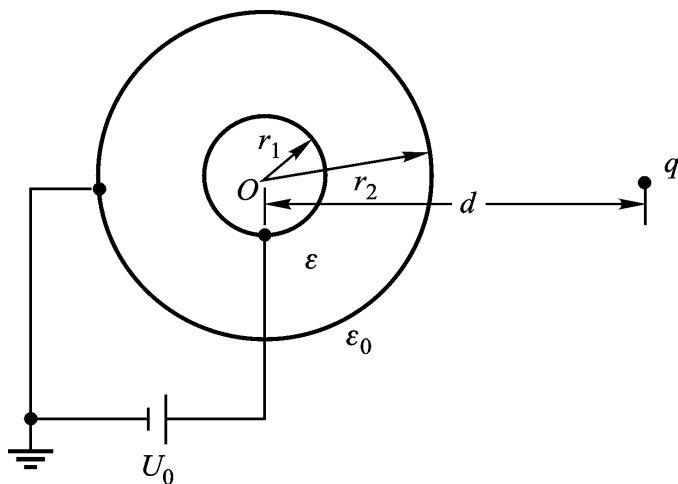


图 3

五、(12分)面积同为  $a \times b$  的两块导电平板平行放置,间距为  $d$ ,它们之间的空间,一半为空气,另一半为介质,如图4所示。现当两导电板间外施电压为  $U_0$  时,忽略该导板间电场的边缘效应,试求每块板所受的力和介质块的受力。

六、(14分)如图5所示,点电荷  $q_1$  和  $q_2$  分别位于介质  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  中,试述如何应用镜像法求解介质  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  中的电场(不必列出解式,仅需回答镜像电荷的设置,即镜像电荷的位置、个数、电量大小,以及对应的求解的有效区域)。

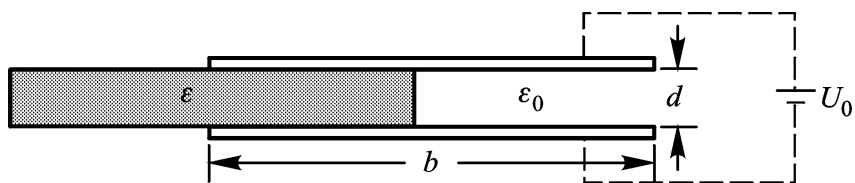


图4

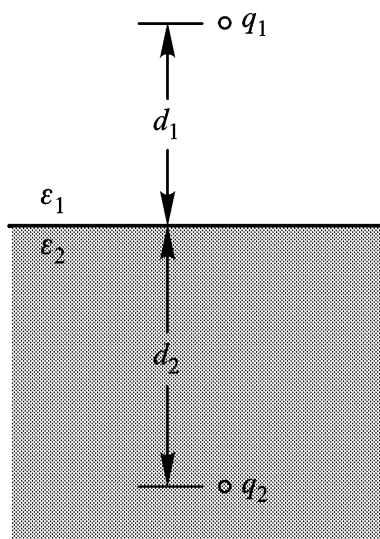


图5

## 本科生期末试题

### 一、填充题(15分)

1. (10分)电磁场的基本规律性可由电磁场基本方程组(麦克斯韦方程组)予以描述,试写出此基本方程组的以下各种表述方式:

方程 方程的称谓	积分形式	微分形式	时谐场中的相量形式

2. (5分)凡满足\_\_\_\_\_条件的时变电磁场,其在每一瞬间场量的解答均可按静态场规律进行分析,这类时变电磁场称为\_\_\_\_\_。在工频( $f = 50 \text{ Hz}$ )激励情况下,对有限线度尺寸的电磁装置内电磁场

的分析与计算,都可应用静态场的方法与公式,这是因为\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

二、(10分)当电磁能量或信号输送给负载时,取决于什么因素,在工程上,将可分别采取怎么样的“输电线”,以实现所需电磁能量或信号的传输?

三、(15分)无损耗同轴电缆尺寸如图1所示。求:

(1) 若不计电缆内芯和外导体损耗,即 \_\_\_\_\_, 则当其一端外接直流电源  $U$ , 另一端接入负载  $R$ , 测得电缆中电流为  $I$ 。求电缆的绝缘介质中  $P$  点的  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{H}$ , 以及该点的波印廷矢量  $\mathbf{S}$  ( $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{S}$  应在图中标记之);

(2) 计算波印廷矢量  $\mathbf{S}$  在电缆横截面  $S$  上的面积分, 该值的物理含义是什么?

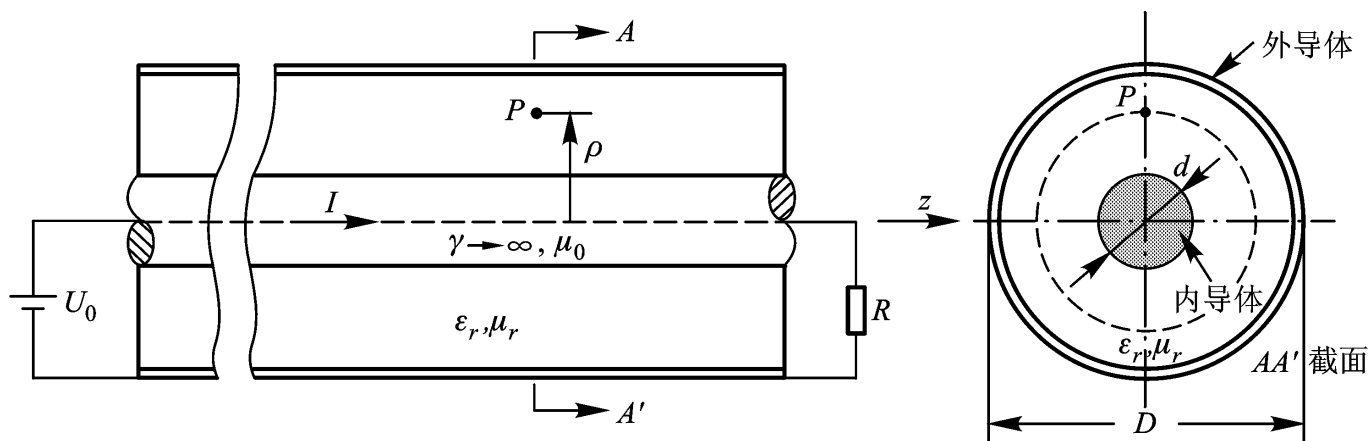


图 1

四、(16分)无损耗同轴电缆尺寸如上题图示。求:

(1) 导出单位长度的外电感  $L_0$  和单位长度电容  $C_0$ ;

(2) 若  $D = 5 \text{ mm}$ ,  $d = 1.37 \text{ mm}$ ; 介质的相对介电常数  $\epsilon_r = 2.4$ ; 相对磁导率  $\mu_r = 1$ 。求此电缆的特性阻抗  $Z_c = L_0 / C_0 = ?$

五、(20分)一长直载流导线平行于一无限大铁板 ( $\mu \rightarrow \infty$ ), 相距为  $h$ , 通过的电流  $I$  方向如图2所示, 求:

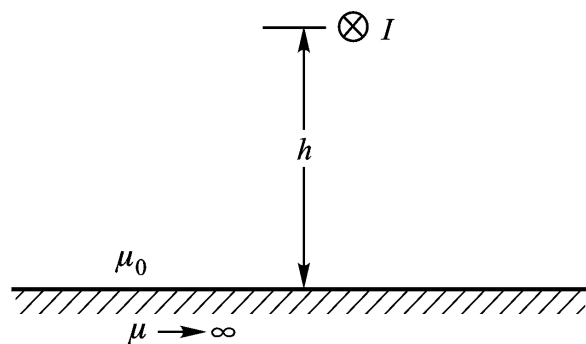


图 2

- (1) 沿铁板表面任意点处的磁感应强度  $\mathbf{B}$ ;
- (2) 铁板内任意点处的磁场强度  $\mathbf{H}$  和磁感应强度  $\mathbf{B}$ ;
- (3) 定性描绘场图;
- (4) 载流导线单位长度上所受到的磁场力。

六、(12分)在真空中,一随时间作正弦变化的 TEM 波的电场波为  $\mathbf{E}(x, t) = E_y(x, t) \mathbf{e}_y = 0.1414 \sin(2 \times 10^8 t - 2.094 x) \text{ V/m}$ , 求:

- (1) 此 TEM 波的磁场波  $\mathbf{H}(t)$  (瞬时表达式);
- (2) 此 TEM 波的频率  $f$ 、波长  $\lambda$ 、周期  $T$ 、相速  $v$ 、相位常数(波数)  $k$  以及波的传播方向。

七、(12分)今有一均匀平面电磁波  $\mathbf{E} = 0.1 \sin(2 \times 10^8 t - \frac{x}{v}) \mathbf{e}_y \text{ V/m}$  从真空正入射到一平表面的良导体,如图3所示。设该导体充满  $x > 0$  的半空间,其电导率  $\gamma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$ , 磁导率  $\mu = \mu_0$ 。求:

(1) 该电磁波对于良导体的透入深度  $d$ , 以及在该处电场强度的振幅值;

(2) 若该良导体的电导率  $\gamma \rightarrow \infty$ , 则将呈现何种物理现象? 并求此时的透入深度  $d$ , 以及表面处 ( $x = 0$ ) 的电场强度和磁场强度值。

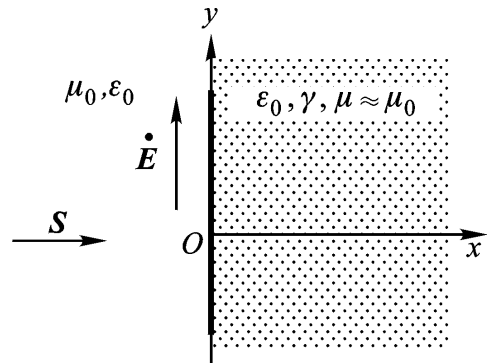


图 3

## 附录二 硕士研究生入学典型试题

### 一、填充题:(15分)

1. 为分析与解算电磁场问题的需要,在动态电磁场中,通常应用的辅助位函数为\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_。它们和基本场量  $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{E}$  之间的关联分别为\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_;和场源  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  与  $(\mathbf{r}, t)$  之间的关联,可由\_\_\_\_\_方程予以描述,其数学表达式形式如下:\_\_\_\_\_。

2. 在脱离电磁激励源后,电磁波在单位时间内通过单位面积的能量可表示为\_\_\_\_\_ (单位:\_\_\_\_\_),它在空间传播的方向可由\_\_\_\_\_来确定。

3. 在电磁场工程中,凡可作为准静态场处理的问题,均应满足\_\_\_\_\_条件,例如\_\_\_\_\_。

4. 电磁波在导电媒质中传播时,所谓透入深度  $d$  指的是\_\_\_\_\_ ,它与有关物理量间的关系是\_\_\_\_\_ ;波的传播速度将比在真空中的传播速度(光速)\_\_\_\_\_,它和有关物理量间的关系是\_\_\_\_\_。

二、(14分)如图1所示,  $S$  为变压器铁心,其中磁通随时间交变  $[ \Phi(t) = 0.002\cos(314t) \text{ Wb} ]$ 。绕于铁心上的开路线匝的两个线端  $A$  和  $B$ , 分别通过如图所示的导线接至两个结构全同的电动式伏特表  $(V_1)$  和  $(V_2)$ 。设线匝的电阻为  $R$ , 伏特表的内阻为  $R_v$ , 且  $R_v \gg R$ , 并假设空间中无漏磁通。求两个伏特表的读数。

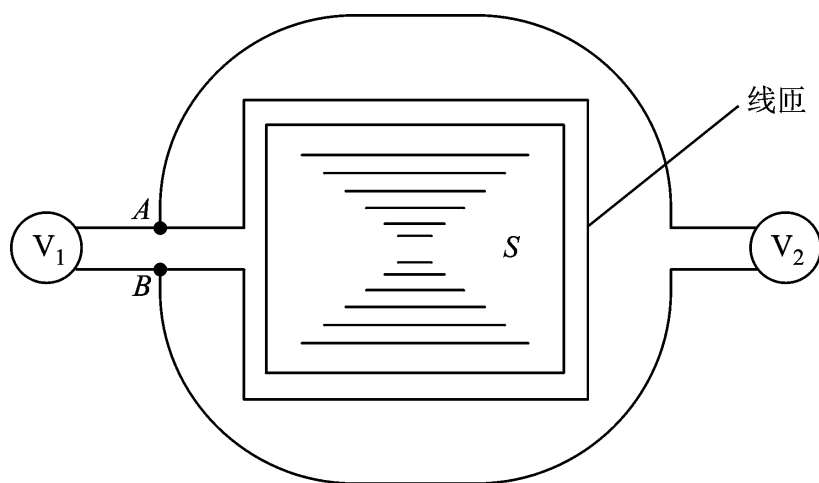


图 1

三、(20分)一内、外导体半径分别为  $a_1$ 、 $a_2$  的偏心电缆(图2),其二轴线间的距离为  $d_1$ ,内、外导体间外施电压  $U_0$  (外导体接地)。在离外导体轴线为  $d_2$  处,平行放置有一线电荷为  $q$ , 半径可忽略不计的导线。求:

- (1) 电缆内、外场分布(  $\mathbf{E}$ , );
- (2) 电缆内、外导体间每单位长度的电容;
- (3) 现若电缆内介质 为非理想电介质, 有漏电, 其电导率为 , 则每单位长度的电导为多大 ?

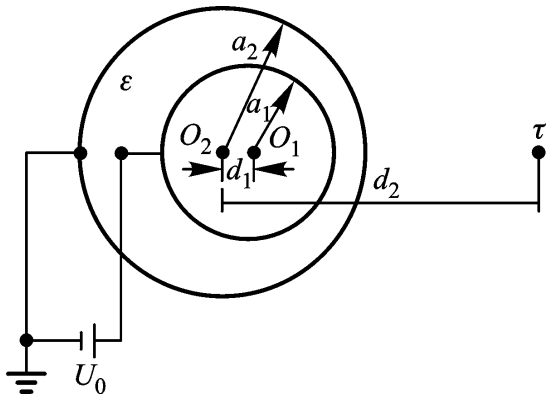


图 2

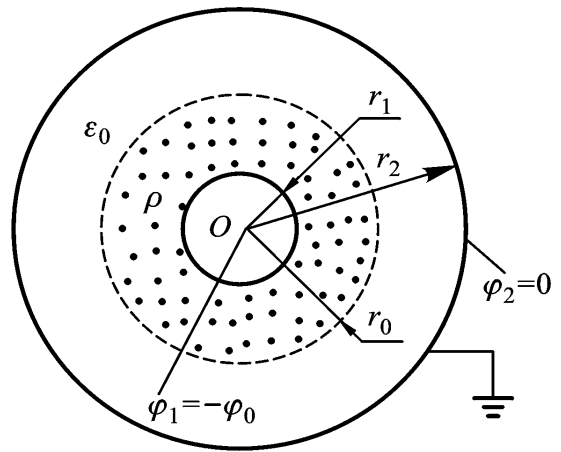


图 3

四、(15 分)管式电除尘器如图 3 所示。半径为  $r_1$  的圆柱形内电极(电晕线)周围积聚有体电荷密度 为一常量的电晕电荷。电晕的外半径为  $r_0$ 。内电极的电位为  $-\phi_0$ , 半径为  $r_2$  的管状外电极(收尘电极)接地。求:

- (1) 内、外电极间电位 ;
- (2) 内、外电极间电场强度  $\mathbf{E}$  的分布。

五、(16 分)一磁场探测线圈的内、外半径分别为  $R_1$ 、 $R_2$ , 在其圆环形线圈的截面  $(R_2 - R_1) \times b$  内分布的线匝数为  $N$ 。当如图将线圈置于均匀的工频磁场  $B(t) = B_m \sin(314t)$  中时, 试求该探测线圈中的感应电势值(有效值)与被测磁场方位间的关系, 以及最大与最小的感应电势值(设探圈轴线与磁场方向间夹角为 )

图 4

六、(20分)图示为一深槽异步电机转子的矩形槽,设其内矩形铜导条的几何尺寸  $h = 6\text{ cm}$ ,  $a = 1\text{ cm}$ , 磁导率  $\mu_1 = \mu_0$ , 电导率  $\gamma = 5.6 \times 10^7\text{ S/m}$ , 并设转子铁心磁导率  $\mu_2 = \infty$ 。求:

(1) 若铜导条中通有直流电流  $I = 20\text{ A}$ , 试求导条截面中的电流密度  $\mathbf{J}$  的分布;

(2) 现当铜导条如图 5 所示通以交变电流  $i = 28.2\sin(\omega t)\text{ A}$  时 ( $f = 50\text{ Hz}$ ), 求槽口处导条表面上点  $O$  处的磁场强度  $\mathbf{H}_0$ 、电场强度  $\mathbf{E}_0$ , 以及该点的坡印廷矢量  $\mathbf{S}$  的方向;

(3) 由(2), 续求导条截面中电流密度有效值  $J$  的分布, 并图示描绘之。

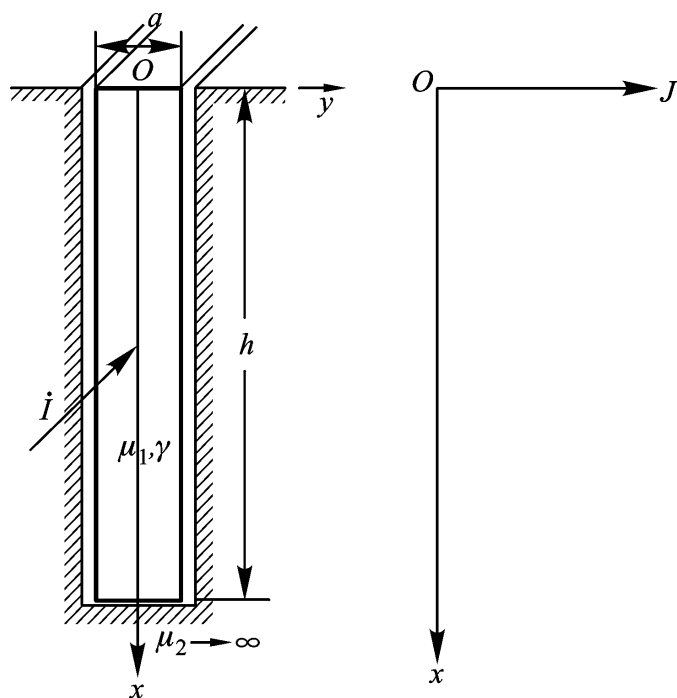


图 5

# 参 考 书 目

- [1] 倪光正主编 .工程电磁场原理 北京:高等教育出版社,2002
- [2] 冯慈璋主编 .电磁场(电工原理 ) 北京:人民教育出版社,1979
- [3] 上海交通大学电工原理教研组 .电工理论基础 .北京:人民教育出版社,1962
- [4] . . . .电工原理(第六版) 沈阳:东北教育出版社,1952
- [5] . . . . , . . . . .电工学的理论基础 北京:人民教育出版社,1960
- [6] . . . . .电工理论基础 北京:高等教育出版社,1986
- [7] 杨儒贵 .电磁场与电磁波 北京:高等教育出版社,2003
- [8] 马信山,张济世,王平编著 .电磁场基础 北京:清华大学出版社,1995
- [9] 倪光炯,王焱森等编著 .改变世界的物理学 上海:复旦大学出版社,1998
- [10] 正田英介主编 .电磁学 .北京:科学出版社,2001
- [11] 蔡圣善,朱耘,徐建军编著 .电动力学 .北京:高等教育出版社,2002
- [12] 梁昆淼编 .数学物理方法(第2版) .北京:人民教育出版社,1978
- [13] 倪光正,杨仕友,钱秀英,邱捷等编著。工程电磁场数值计算 .北京:机械工业出版社,2004

# 参 考 书 目

- [1] 倪光正主编 .工程电磁场原理 北京:高等教育出版社,2002
- [2] 冯慈璋主编 .电磁场(电工原理 ) 北京:人民教育出版社,1979
- [3] 上海交通大学电工原理教研组 .电工理论基础 .北京:人民教育出版社,1962
- [4] . . . .电工原理(第六版) 沈阳:东北教育出版社,1952
- [5] . . . . , . . . . .电工学的理论基础 北京:人民教育出版社,1960
- [6] . . . . .电工理论基础 北京:高等教育出版社,1986
- [7] 杨儒贵 .电磁场与电磁波 北京:高等教育出版社,2003
- [8] 马信山,张济世,王平编著 .电磁场基础 北京:清华大学出版社,1995
- [9] 倪光炯,王焱森等编著 .改变世界的物理学 上海:复旦大学出版社,1998
- [10] 正田英介主编 .电磁学 .北京:科学出版社,2001
- [11] 蔡圣善,朱耘,徐建军编著 .电动力学 .北京:高等教育出版社,2002
- [12] 梁昆森编 .数学物理方法(第2版) .北京:人民教育出版社,1978
- [13] 倪光正,杨仕友,钱秀英,邱捷等编著。工程电磁场数值计算 .北京:机械工业出版社,2004