



普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套教材
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUOJIAJI GUIHUA JIAOCAI PEITAO JIAOCAI

DIANLU LILUN JICHU XUEXI ZHIDAO

电路理论基础学习指导

梁贵书 董华英 编



中国电力出版社

<http://jc.cepp.com.cn>



普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套教材
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUOJIAJI GUIHUA JIAOCAI PEITAO JIAOCAI

DIANLU LILUN JICHU XUEXI ZHIDAO

电路理论基础学习指导

梁贵书 董华英 编
颜湘武 主审



中国电力出版社
<http://jc.cepp.com.cn>

Electrical Engineering

内 容 提 要

本书为普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套教材。

本书是华北电力大学梁贵书和董华英编写的《普通高等教育“十一五”国家级规划教材 电路理论基础(第三版)》的配套学习指导书。书中各章体系与主教材相同,每章包含五部分:本章知识结构图,知识点归纳与学习指导,重点、难点与考点,本章习题选解,自测题及参考答案。本书简明扼要地归纳总结了各章要点,提出了相应学习方法,指导读者更有效地掌握相关内容;给出了主教材中大部分习题的解题方法或提示,注重阐述解题思路、方法、步骤、特点和技巧,有些习题还提供了多种解法。

本书可作为学习电路课程的本科生及从事电路教学的教师的参考书,也可作为硕士研究生入学考试的辅导书。

图书在版编目(CIP)数据

电路理论基础学习指导/梁贵书,董华英编. —北京:中国电力出版社,2010.8

普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套教材

ISBN 978-7-5123-0655-4

I. ①电… II. ①梁…②董… III. ①电路理论-高等学校-教学参考资料 IV. ①TM13

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第129748号

中国电力出版社出版、发行

(北京三里河路6号 100044 <http://jc.cepp.com.cn>)

北京丰源印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

2011年1月第一版 2011年1月北京第一次印刷

787毫米×1092毫米 16开本 23印张 564千字

定价 38.00元

敬告读者

本书封面贴有防伪标签,加热后中心图案消失
本书如有印装质量问题,我社发行部负责退换

版权专有 翻印必究

前 言

本书是华北电力大学梁贵书和董华英编写的《普通高等教育“十一五”国家级规划教材电路理论基础（第三版）》的配套学习指导书，各章体系与主教材相同，每章包含五部分：① 本章知识结构图；② 知识点归纳与学习指导；③ 重点、难点与考点；④ 本章习题选解；⑤ 自测题及参考答案。知识结构图对本章知识点之间的内在联系进行了梳理，有利于读者掌握本章的脉络；知识点归纳与学习指导部分简明扼要地归纳总结了本章的要点，并提出了相应的学习方法，指导读者更有效地掌握相关内容；重点、难点与考点部分指明了本章的学习重点和难点以及考试热点，便于读者有的放矢；习题选解部分给出了主教材中大部分习题的解题方法或提示，所用解析方法与主教材中各章节讲述内容密切配合，注重阐述解题思路、方法、步骤、特点和技巧，有些习题还提供了多种解法；读者通过自测题可使自己对本章内容的掌握情况进行检测，做到心中有数。

电路课程的特点是内容广泛，内涵丰富，习题类型多且计算量大。要学好电路，仅凭课堂听讲是不够的，需要认真做一定数量的练习题。做练习题有助于加深理解和巩固电路的基本概念和基本理论，而理解基本概念又有助于问题的求解。因此，只有通过一定数量的练习和训练，才能比较牢固地掌握并熟练运用有关的基本概念和基本分析方法。

做习题要养成“题后反思”的好习惯。题后反思是电路学习过程中培养思维能力必不可少的手段之一。要学会反思，需注意以下几点：

(1) 反思联系。现代认知理论认为，人们掌握和理解知识，就是将所接受的知识经过人脑加工编码，使新旧知识联系起来，从而认知新旧知识的内在联系，达到对知识的理解和掌握。电路的基本概念、基本原理、基本定律与其他事物一样，并不是孤立的，而是普遍联系的。解题后，若能把解题中所联系到的基础知识与各知识有机地“串联”成知识线，“并联”成知识网，同时快速整理一下本题中总结出的规律、技巧或者出错的原因，并将它们与“知识线”、“知识网”有机统一起来，则有利于提高分析和归纳的反思能力。

(2) 反思多解。一道电路习题即使能完全做对，也不要“完成任务”、“一笑而过”，它往往会有多种解法。因而解完一道题后，应充分运用所学知识，从不同角度出發，利用不同的方法进行求解，可拓展思路、开阔视野，不但可得到最佳解法，而且还可使思维得以深化，有助于发散反思的展开。

(3) 反思规律。解题后，回想解题方法有无规律可循。从特殊题引申到一般题目的解答，有利于强化知识的应用，提高知识迁移水平。

(4) 反思演变。解题后，自己试着改变原题的结构或其他方面，从而可使一题变一串儿题，有利于开阔眼界，拓展反思思路，提高应变能力，防止定势思维的负面影响。而且，“一题多变”的学习方法是培养学生创造性思维所不可缺少的手段之一。

(5) 反思同类。解题后，要反思与该题同类的问题，进行对比，分析其解法，找出解答这一类题的方法和技巧。

(6) 反思错误。解题后，要总结和反思解答中易错的地方，通过找出导致错误的原因，

扫除或纠正思维中的盲点和错误，使自己从错误中悟理，借以发展思维能力。

本书虽属配套学习指导书，但对从事电路教学的教师和学习电路课程的学生都有一定的参考价值，既可在电路教学过程中使用，也可在复习、准备硕士研究生入学考试时使用。

本书由华北电力大学梁贵书和董华英共同编写。华北电力大学颜湘武教授对书稿进行了审阅，提出了宝贵的修改意见，进一步提高了本书的质量，在此表示衷心的感谢。

限于编者的水平和工作中的疏忽，书中可能留有错误和不妥之处，恳请读者批评指正，以便编者加以改进。

通信地址：河北省保定市华北电力大学 19 号信箱（邮编：071003）

E-Mail: gshliang@263.net

编 者

2010 年 11 月于华北电力大学

目 录

前言	
绪论	1
第 1 章 电路模型及其基本规律	2
1.1 本章知识结构图	2
1.2 知识点归纳与学习指导	3
1.3 重点、难点与考点	11
1.4 第 1 章习题选解	11
1.5 自测题及参考答案	24
第 2 章 简单电路和等效变换	26
2.1 本章知识结构图	26
2.2 知识点归纳与学习指导	26
2.3 重点、难点与考点	37
2.4 第 2 章习题选解	37
2.5 自测题及参考答案	49
第 3 章 复杂电阻电路的分析	51
3.1 本章知识结构图	51
3.2 知识点归纳与学习指导	51
3.3 重点、难点与考点	60
3.4 第 3 章习题选解	60
3.5 自测题及参考答案	73
第 4 章 电路定理	75
4.1 本章知识结构图	75
4.2 知识点归纳与学习指导	75
4.3 重点、难点与考点	81
4.4 第 4 章习题选解	82
4.5 自测题及参考答案	101
第 5 章 双口网络	104
5.1 本章知识结构图	104
5.2 知识点归纳与学习指导	104
5.3 重点、难点与考点	114
5.4 第 5 章习题选解	114
5.5 自测题及参考答案	137
第 6 章 线性动态电路的时域分析	139
6.1 本章知识结构图	139

6.2	知识点归纳与学习指导	139
6.3	重点、难点与考点	149
6.4	第6章习题选解	149
6.5	自测题及参考答案	179
第7章	正弦稳态电路的相量模型	182
7.1	本章知识结构图	182
7.2	知识点归纳与学习指导	182
7.3	重点、难点与考点	186
7.4	第7章习题选解	187
7.5	自测题及参考答案	193
第8章	正弦稳态电路的相量分析	195
8.1	本章知识结构图	195
8.2	知识点归纳与学习指导	195
8.3	重点、难点与考点	204
8.4	第8章习题选解	205
8.5	自测题及参考答案	229
第9章	谐振与互感	232
9.1	本章知识结构图	232
9.2	知识点归纳与学习指导	232
9.3	重点、难点与考点	240
9.4	第9章习题选解	240
9.5	自测题及参考答案	252
第10章	三相电路	255
10.1	本章知识结构图	255
10.2	知识点归纳与学习指导	255
10.3	重点、难点与考点	260
10.4	第10章习题选解	260
10.5	自测题及参考答案	270
第11章	非正弦周期信号线性电路的稳态分析	272
11.1	本章知识结构图	272
11.2	知识点归纳与学习指导	272
11.3	重点、难点与考点	278
11.4	第11章习题选解	278
11.5	自测题及参考答案	284
第12章	简单非线性电路	287
12.1	本章知识结构图	287
12.2	知识点归纳与学习指导	287
12.3	重点、难点与考点	292
12.4	第12章习题选解	293

12.5	自测题及参考答案	303
第 13 章	线性动态电路的复频域分析	305
13.1	本章知识结构图	305
13.2	知识点归纳与学习指导	305
13.3	重点、难点与考点	312
13.4	第 13 章习题选解	313
13.5	自测题及参考答案	324
第 14 章	电路代数方程的矩阵形式	326
14.1	本章知识结构图	326
14.2	知识点归纳与学习指导	326
14.3	重点、难点与考点	331
14.4	第 14 章习题选解	331
14.5	自测题及参考答案	338
第 15 章	分布参数电路	342
15.1	本章知识结构图	342
15.2	知识点归纳与学习指导	342
15.3	重点、难点与考点	347
15.4	第 15 章习题选解	347
15.5	自测题及参考答案	358
参考文献		360

绪 论

通过学习绪论，了解电路课程的作用、地位及电路理论发展概况，了解电路课程的主要内容（见图 0-1）和相互关系，提高对电路习题作用的认识，明确学习的目的。电路理论的组成如图 0-2 所示。本科电路课程只介绍电路分析的一些基本内容。电路分析知识的结构是“以模型为基础，以两类约束为基本依据，运用不同的方法对各种类型的电路进行分析”。电路课程与其他电气工程主要课程的联系如图 0-3 所示。绪论中特别强调了学习过程中注重电路学科能力培养的问题。由于绪论中提到了一些电路术语，只有在学习了相关内容后才能完全理解它们，因此，在学习过程中，需要在适当的时候回过头来阅读主教材绪论中标题三、四、五下的内容。

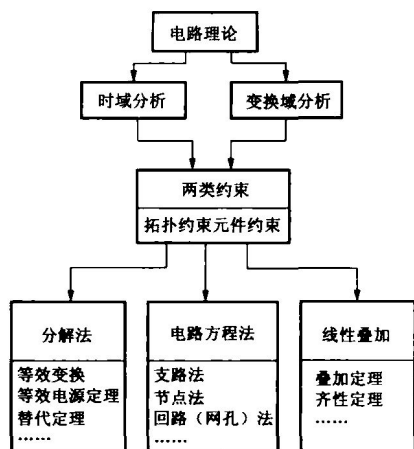


图 0-1 电路的基本分析方法

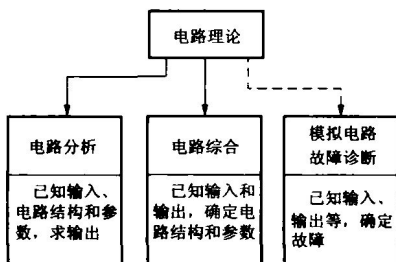
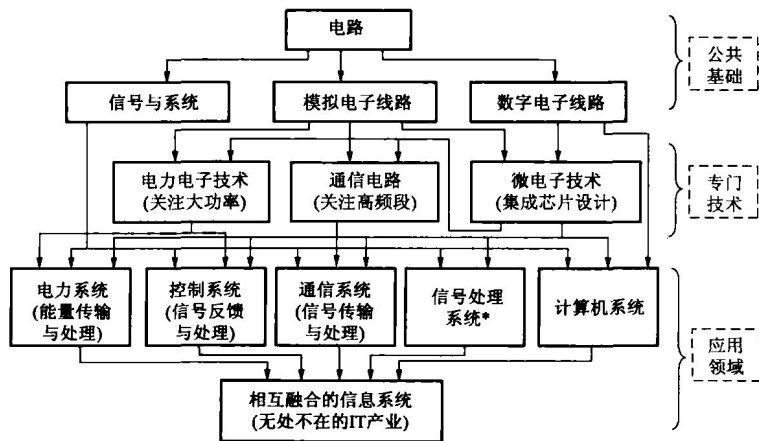


图 0-2 电路理论的组成



*指各类信号处理课程，包括某些专业的专门课程(如生物医学工程、核电子学等)

图 0-3 电路课程与其他电气工程主要课程的联系

第 1 章 电路模型及其基本规律

1.1 本章知识结构图

第 1 章知识结构图如图 1-1 所示。

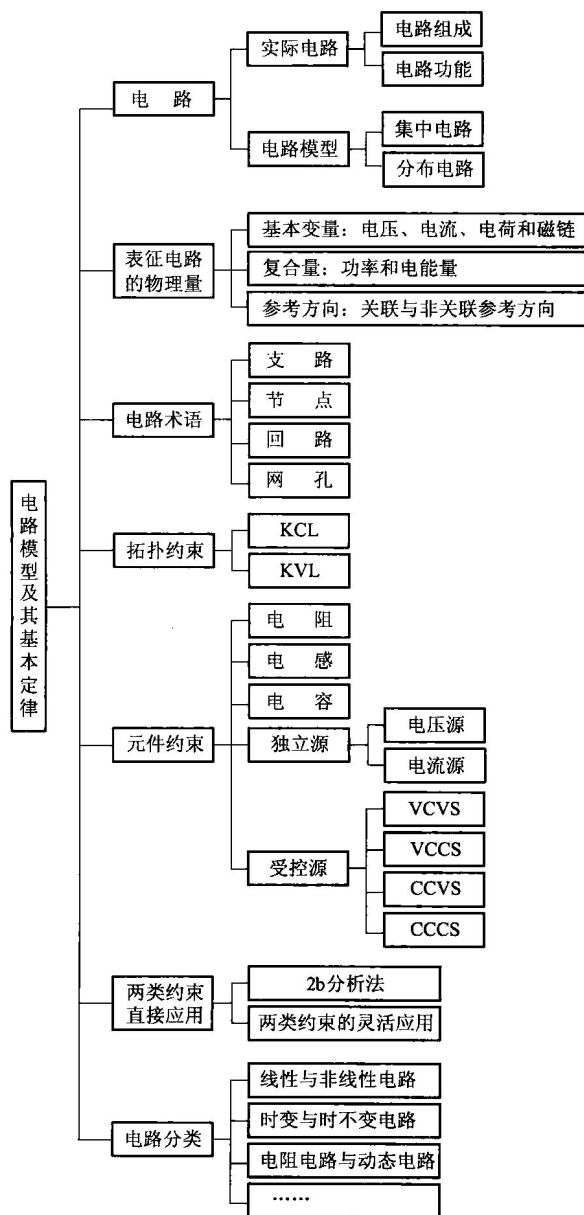


图 1-1 第 1 章知识结构图

1.2 知识点归纳与学习指导

本章涉及电路的基本概念和基本定律。虽然本章的一些内容与物理学电学的一些内容相似，但处理这些内容的方式却不同，电路是从工程的观点来阐述的，并不是简单的重复。

1.2.1 电路模型

实际电路是为了实现某种功能（传输和转换电能或传递和处理信号），把电器件、设备按照一定的方式连接而成的整体。它由电源、负载和中间环节三部分组成。电路理论研究的直接对象是电路模型，而不是实际电路。电路模型是对实际电路的科学抽象和逼近。本书用到的电路均指电路模型，它是由元件（元件也是模型）连接而成的整体。元件与器件的区别见主教材 1.4.5。

电路分为集中参数电路和分布参数电路两种。只有在电路本身的几何尺寸远远小于电路工作时电磁波的波长（集中化假设条件： $d \ll \lambda$ ），才能使用集中参数电路建模。

集中参数电路只考虑了时间因素，而忽略了空间效应，认为信号在电路中的传播时间为零。因此，集中参数电路中的电压和电流等仅仅是时间的函数。实际电路能否满足集中化条件，关键在于电路工作时感兴趣的最高频率 f_{\max} ($\lambda = v/f_{\max}$, v 为电路中信号的传播速度)。

电路模型的概念非常重要，初学电路者应时刻牢记分析的电路是模型。电路模型与实际电路是有差别的，电路模型中出现的一些少数现象在实际电路中并不发生。例如电源可提供无限大的功率，如果没有模型的概念，将无法理解这些现象。

1.2.2 常用的物理量

1. 电压、电流和功率

电路理论主要研究电路中发生的电磁现象，用电压、电流和〔电〕功率等物理量来描述其中发生的过程。它们的定义见表 1-1。

表 1-1 常用的物理量的定义

名称	符号	主单位	定义	方向	普遍关系式	备注
电流	$i(t)$	A (安)	电荷的定向移动形成电流。 单位时间内通过导体截面的电量定义为电流（强度）	正电荷移动的方向	$i = \frac{dq}{dt}$	q 为电荷
电压	$u(t)$	V (伏)	单位正电荷在电场力作用下从一点移到另一点所做的功	电压降的方向	$u = \frac{d\psi}{dt}$	ψ 为磁链
功率	$p(t)$	W (瓦)	单位时间内一段电路消耗或者产生的能量		$p = \frac{dW}{dt} = ui$	W 为能量

电路中非参考点 p 到参考点的电位 u_p （称为节点电压，规定参考点为低电位）是相对量，与参考点的选择有关；电路中任意两节点之间的电压是绝对量，与参考点的选择无关，二者的关系为

$$u_{ab} = u_a - u_b$$

物理量分为直流量（dc 或 DC）和时变量两种。直流量在数学上就是常数，一般用大写字母表示，如直流电流 I ；时变量用小写字母表示，如时变电流 i 。

物理量及电气参数的主单位及构成辅助单位的常用词头需要在学习过程中记忆。

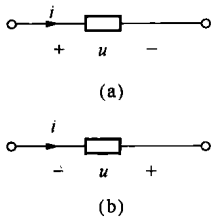


图 1-2 关联与非关联

参考方向

(a) 关联; (b) 非关联

2. 参考方向

电压、电流的参考方向将贯穿全书，所有表达式、方程等都是**在一定的参考方向下给出的。

在指定参考方向下，计算结果大于 0，表明参考方向与实际方向一致；计算结果小于 0，表明参考方向与实际方向相反。

对于一个元件或一段电路，电压、电流二者的参考方向不是关联的 [见图 1-2 (a)]，就是非关联的 [见图 1-2 (b)]。关联是指电流由“+”极性（高电位）端流向“-”极性（低电位）端，即沿电压降方向流动；非关联正好相反。

电路中的功率是守恒的。在参考方向下，一般功率公式的物理含义见表 1-2。

表 1-2 一般功率公式的物理含义

功率公式	关联参考方向	非关联参考方向
$p=ui$	按吸收功率计算	按发出功率计算
$p=-ui$	按发出功率计算	按吸收功率计算

注 吸收负功率表明实际为发出功率，发出负功率表示实际为吸收功率。

有关功率的计算示例见主教材 [例 1-1]。

参考方向说起来简单，但正确应用却存在相当的困难，初学者对此应引起足够重视。首先要明确参考方向与实际方向之间的关系，特别要时刻牢记电路分析中所用的方向都是参考方向，要随时正确判断采用的是关联参考方向，还是非关联参考方向。另外，应熟练掌握在不同参考方向下，根据计算需要（计算吸收功率还是发出功率），选取正确的功率公式，这也是电路基本功的体现点。特别是要养成习惯，解题过程中出现的电压和电流都必须在电路图中标出其参考方向，且在整个计算过程中不能变动；只有采用关联参考方向时，电压和电流的参考方向才能只标出其中一个。

1.2.3 基尔霍夫定律

本节介绍的常用术语有支路、节点、回路、网孔、支路电压、支路电流。对于同一电路，支路规定的不同，节点和回路（或网孔）的数目也可能不同。注意，理想导线（即短路线）相连的点为同一个节点，初学电路者有时误当作两个节点。网孔是一种特殊的回路，且只适用于平面电路。

电路连接方式的约束称为拓扑约束或结构约束。基尔霍夫定律是概括这种约束关系的基本定律。基尔霍夫定律分为 KCL 和 KVL 两个定律。它们有多种等价的陈述形式。

在本章中，KCL 给出了针对节点和闭合面（又称广义节点）的两种陈述；除了支路电压与节点电压之间关系，KVL 还给出了针对回路和假想回路的两种陈述，见表 1-3。

表 1-3 基尔霍夫定律

名称	基尔霍夫电流定律 (KCL)	基尔霍夫电压定律 (KVL)
内容陈述	对于集中参数电路中的任一节点（或广义节点），在任一时刻，通过该节点的所有支路电流的代数和等于零	对集中参数电路中的任一回路（或假想回路），在任一时刻，该回路中所有支路电压的代数和等于零

续表

名称	基尔霍夫电流定律 (KCL)	基尔霍夫电压定律 (KVL)
方程	$\sum i_k = 0$ (KCL 方程)	$\sum u_k = 0$ (KVL 方程)
方程类型	线性齐次代数方程 (各个支路电流所受的线性约束关系)	线性齐次代数方程 (各个支路电压所受的线性约束关系)
说明	在列写 KCL 方程时, 除了规定各支路电流的参考方向外, 还应规定是流出节点的电流取正号, 还是流入节点的电流取正号。当规定某一方向的电流取正号时, 另一方向的电流则取负号。两种不同规定下列写的 KCL 方程是等价的	在列写 KVL 方程时, 除了规定各支路电压的参考方向外, 还应选取回路的绕行方向, 并规定沿回路绕行方向, 支路电压为电压降的取正号, 还是电压升的取正号。规定某一方向的电压取正号时, 另一方向的电压则取负号。两种不同的规定下列写的 KVL 方程是等价的
物理意义	电荷守恒	能量守恒
适用范围	集中参数电路	
备注	与元件的性质无关	

例如, 对于图 1-3 中的节点, 电流 i_1 、 i_2 为流入节点, 电流 i_3 、 i_4 为流出节点。当规定流出节点的电流取正时, KCL 方程为

$$-i_1 - i_2 + i_3 + i_4 = 0$$

规定流入节点的电流取正时, 列写的 KCL 方程与此仅差一个负号, 二者是等价的。

对于图 1-4 所示电路中标出的回路, 沿顺时针的回路方向, 电压 u_1 为电压升 (u_1 的参考方向与回路方向相反), u_2 和 u_3 为电压降 (u_2 和 u_3 的参考方向与回路方向相同), 取电压降为正, 则 KVL 方程为

$$-u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

方程两边乘以 -1 可得电压升为正的方程。

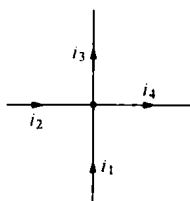


图 1-3 节点

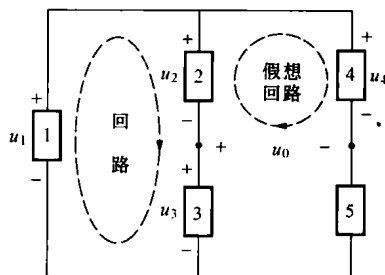


图 1-4 回路和假想回路

对图 1-4 中的假想回路有

$$-u_2 + u_4 - u_0 = 0$$

结论 对于 b 条支路、 n 个节点的电路, 有且仅有 $n-1$ 个独立的 KCL 方程, $b-n+1$ 个独立的 KVL 方程。

$n-1$ 个独立的 KCL 方程可对任意 $n-1$ 个节点应用 KCL 获得; 独立的 KVL 方程需要

选取独立回路列写。所谓独立回路是指能提供独立的 KVL 方程的回路。如果所选回路包含前面已选回路不含有的新支路,则该回路是一个独立回路。读者应能正确地选出全部的独立回路。对于平面电路,除外围网孔以外的全部内网孔是一组独立回路。

掌握基尔霍夫这两个定律的关键是正确地写出需要的 KCL 方程和 KVL 方程,这也是电路基本功的体现点。列写 KCL 方程时,要分清流入电流和流出电流;列写 KVL 方程时,要正确判断一个电压沿规定的回路方向是电压升,还是电压降。这里的电流流入和流出以及电压升和电压降都是相对参考方向而言的,与电流、电压计算值的正负无关。

1.2.4 二端元件和受控源

电路元件是电路的(最小)基本构造单元,是由端钮上的电压和电流之间的数学关系描述的。表征元件的电压与电流之间关系的方程称为元件的电压电流关系(VCR)或伏安关系(VAR)。元件的特性方程与元件的性质有关,与元件接入的电路和接入方式无关。因此,元件约束方程与拓扑约束方程是彼此独立的。对于 b 条支路、 n 个节点的电路,可写出 b 个独立的支路方程。

本章介绍了线性二端电阻、电感和电容以及电压源和电流源等 5 个二端元件,另外还介绍了多端元件——受控源。其他元件将在后续相关章节介绍。

线性二端元件、独立电源和受控源的定义及特性分别见表 1-4~表 1-6。

在学习电路元件这部分内容时,首先要掌握线性与非线性、时变与时不变、有源与无源几个基本概念,并重点掌握和记忆元件的电路符号、伏安关系(VAR)等。

表 1-4 线性二端元件的定义及特点

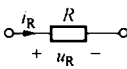
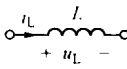
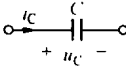
元件名称	电 阻	电 感	电 容
电路符号			
定义式	$u_R = Ri_R$	$\Psi = Li_L$	$q = Cuc$
伏安关系	压控型	$i_L(t) = i_L(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u_L(\tau) d\tau$	$i_C = C \frac{du_C}{dt}$
	流控型	$u_L = L \frac{di_L}{dt}$	$u_C(t) = u_C(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C(\tau) d\tau$
特性曲线	$u \sim i$ 平面上过原点的一条直线	$\Psi \sim i$ 平面上过原点的一条直线	$q \sim u$ 平面上过原点的一条直线
功率或储能公式	$p_R = u_R i_R = Ri_R^2 = Gu_R^2$	$W_L(t) = \frac{1}{2} Li_L^2(t)$	$W_C(t) = \frac{1}{2} Cu_C^2(t)$
性质	(1) 正值电阻消耗能量(耗能元件) (2) 无记忆元件	(1) 储能不耗能(储能元件) (2) 记忆元件 (3) 电感电流连续性	(1) 储能不耗能(储能元件) (2) 记忆元件 (3) 电容电压连续性
无源性	正值电阻无源, 负值电阻有源	正值电感无源, 负值电感有源	正值电容无源, 负值电容有源
备注	$R=0$ 时, 短路 ($u=0$) $G=0$ 时, 开路 ($i=0$)	i_L 为直流量时, 短路	u_C 为直流量时, 开路

表 1-5 独立电源的定义和特性

分 类	电 压 源	电 流 源
电路符号		
定义式	$u = u_s(t)$	$i = i_s(t)$
基本特性	(1) 电压源的端电压是确定量(直流量或确定的时间函数),与流过它的电流及其他支路的电压和电流无关 (2) 电压源的电流是任意的,由电压源和外接电路共同决定	(1) 电流源提供的电流是确定量(直流量或确定的时间函数),与其端电压及其他支路的电压和电流无关 (2) 电流源的端电压是任意的,由电流源和外接电路共同决定
功率公式	$p = u_s i$ (需要求出电压源的电流 i)	$p = u i_s$ (需要求出电流源的电压 u)
无源性	有源元件(有源元件在电路中可以提供功率,也可以吸收功率,视具体外部电路而定)	
特例	$u_s(t)$ 为直流量时,称为直流电压源	$i_s(t)$ 为直流量时,称为直流电流源
备注	$u_s(t) = 0$ 时,短路	$i_s(t) = 0$ 时,开路

注 对于直流电压源,有时也用电池符号表示。

表 1-6 受控源的定义和特性

分 类	受 控 电 压 源		受 控 电 流 源		
	电压控制电压源	电流控制电压源	电压控制电流源	电流控制电流源	
缩写	VCCS	CCVS	VCCS	CCCS	
电路符号					
伏安关系	控制支路	$i_1 = 0$ (开路)	$u_1 = 0$ (短路)	$i_1 = 0$ (开路)	$u_1 = 0$ (短路)
	受控支路	$u_2 = \alpha u_1$	$u_2 = r i_1$	$i_2 = g u_1$	$i_2 = \beta i_1$
应用示例	运算放大器		MOS管、跨导运放	BJT	
功率公式	$p = u_2 i_2$ (受控支路的功率)				
无源性	有源元件(受控源不是电路的激励,其发出功率是独立电源通过受控源间接对电路起作用)				
特点	受控支路的输出完全取决于控制量。只有控制量为 0 时,输出才为 0				

学习元件部分内容时应注意以下几点:

(1) 对于线性电阻、电感、电容,记忆的 VAR (压控型和流控型) 都是关联参考方向下的表达式,在非关联参考方向下加“-”号才能使用。

(2) 需要记忆电阻的功率公式、电容和电感的储能公式。

(3) 不论外接电路如何,把电压源或受控电压源接在电路中两点,它就规定了这两点之间的电压就是电压源的输出电压;把电流源或受控电流源接入一条支路,它就规定了该条支路的电流就等于电流源的输出电流。电压源和受控电压源的 VAR 应根据 KVL 写出,电流源和受控电流源的 VAR 应根据 KCL 写出,不能死记硬背。

(4) 受控源是一种两条支路的耦合电阻元件，没有控制支路，只有受控支路是没有意义的。因此，受控支路存在时，控制支路必须存在。

(5) 受控源的控制量所在支路一般不需要单独标出，故把受控源当作一个二端元件处理。通常先将受控源视为独立源（即受控电压源当作独立电压源、受控电流源当作独立电流源）进行分析，然后再进一步处理控制量。

(6) 注意器件与元件的区别。元件是有严格数学定义（特性方程）的，不论电压、电流为何值（包括 $\pm\infty$ ），元件的 VAR 都成立；相应地，元件的功率可为任意值（包括 $\pm\infty$ ）。而实际器件能够承受的电压、电流及功率都是有限值，超过时可能造成损坏；并且当电压、电流超过一定值时，器件呈现非线性，需采用非线性模型模拟；此外，对于同一个器件，电路的频率不同，采用的器件模型可能不同。

元件部分的难点是在不同参考方向下，正确使用元件的伏安关系、计算元件吸收与发出的功率以及受控源的处理方式。在不同参考方向下，正确地写出元件的 VAR 和正确计算元件吸收与发出的功率是电路的基本功体现点。

1.2.5 直接用两类约束分析电路

分析任何一个电路的基本依据都是电路的两类约束。以支路电流和支路电压为电路变量，直接依据两类约束建立电路方程进行分析计算的方法称为 2b 分析法，简称 2b 法。其方程可概括为： $n-1$ 个独立的 KCL 方程、 $b-n+1$ 个独立的 KVL 方程、 b 个元件或支路的特性方程。

由于 2b 法建立的方程较多，所以实际中很少使用。

直接利用两类约束求解电路时，往往需将所求电压或电流转化为求其他电压、电流，常用下列的表示方法：

表示电压的两种途径：① 根据元件的 VAR，将电压用电流表示；② 根据 KVL，将电压用其他电压表示。

表示电流的两种途径：① 根据元件的 VAR，将电流用电压表示；② 根据 KCL，将电流用其他电流表示。

使用上述表示方法时，注意以下几点：

(1) 流过（独立或受控）电压源（包括短路线）的电流，需要借助与电压源相串联元件的 VAR 或对含该电压源的节点应用 KCL 来求得。选择节点时，应尽可能避开电压源。

(2)（独立或受控）电流源（包括开路线）的端电压，需要借助与电流源相并联元件的 VAR 或对含该电流源的回路应用 KVL 来求得。选择回路时，应尽可能避开电流源。

(3) 一般而言，由元件 VAR 引入的电压（电流），接着应该用 KVL（KCL）把它用其他电压（电流）表示；而由 KVL（KCL）引入的电压（电流），接着应该用元件 VAR 把元件的电流（电压）表示出。

对于相对简单的电路，直接应用两类约束进行分析是经常使用的方法，特别要学会求某一电量时，将一个电量用其他电量表示的分析过程。

【例 1-1】 求图 1-5 所示电路中各个元件吸收的功率。

分析 对于计算元件或一段电路功率的问题，首先应求出相应的电压和电流（求功率实际上是求电压和电流），然后再按功率公式计算其功率。应用功率公式时要注意电压和电流的参考方向是否关联，以及所需求的是吸收的功率，还是发出的功率，这些都会影响计算结

果的正负符号。由于独立电流源的电流和独立电压源的电压已知，因此，求独立电压源的功率需知道流过其上的电流，求独立电流源的功率需求出其端电压。求受控电压源的功率需要先求出其流过的电流及其控制量，求受控电流源的功率需要先求出其端电压及其控制量。电压源的电流一般用 KCL 求得，电流源的电压一般用 KVL 得到。电阻的功率通常用公式 $p_R = Ri_R^2$ 或 $p_R = u_R^2/R$ 求出，所以只要先求出电阻的电压或电流即可。

本题 CCVS 的电流等于独立电流源的电流，VCCS 的电压等于独立电压源的电压，所以只要求出两个受控源的控制量即可求出受控源的功率。

2V 电压源的电流 i ，不仅是 CCVS 的控制量，也是流过 4Ω 电阻的电流。根据欧姆定律，该电流可以用电阻的端电压表示，该电阻的端电压可通过 4Ω 电阻和 2、6V 电压源组成的回路应用 KVL 求出。

VCCS 的控制量 u 是 1Ω 电阻的端电压，根据欧姆定律该电压可以用电阻的电流表示；由 KCL 可知，该电流等于独立电流源的电流。

求得 u 和 i 后，2A 电流源的端电压 u_0 可通过对 1Ω 电阻、6V 电压源、CCVS 和 2A 电流源组成的回路应用 KVL 求出；流过 6V 电压源的电流 i_0 通过对该电压源相连的节点应用 KCL 求得。

将上述分析过程整理即为该题的求解过程。

解 有关的电压、电流及其参考方向如图 1-5 所示。由 KVL 和欧姆定律得

$$\begin{aligned} 4i + 2 - 6 &= 0 \\ i &= 1\text{A} \end{aligned}$$

由欧姆定律和 KCL 得

$$u = 2 \times 1 = 2 \text{ (V)}$$

由 KVL 得

$$u_0 = u + 6 - 3i = 2 + 6 - 3 \times 1 = 5 \text{ (V)}$$

由 KCL 得

$$i_0 = 0.25u + i - 2 = 0.25 \times 2 + 1 - 2 = -0.5 \text{ (A)}$$

则各个元件吸收的功率分别为

$$p_{2\text{A}} = -2u_0 = -2 \times 5 = -10 \text{ (W)}, p_{2\text{V}} = 2i = 2 \times 1 = 2 \text{ (W)}$$

$$p_{6\text{V}} = -6i_0 = -6 \times (-0.5) = 3 \text{ (W)}, p_{1\Omega} = \frac{u^2}{1} = 4 \text{ (W)}$$

$$p_{3i} = -3i \times 2 = -3 \times 1 \times 2 = -6 \text{ (W)}, p_{0.25u} = 0.25u \times 6 = 0.25 \times 2 \times 6 = 3 \text{ (W)}$$

$$p_{4\Omega} = 4i^2 = 4 \text{ (W)}$$

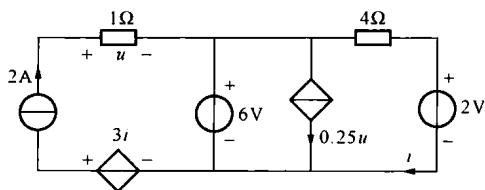


图 1-5 [例 1-1] 图

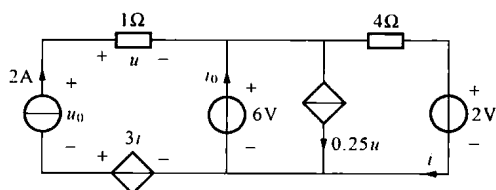


图 1-6 [例 1-1] 解图

计算结果表明：2A 电流源和 CCVS 实际为发出功率，2V 电压源、6V 电压源、VCCS 和两个电阻实际为吸收功率，并且所有元件吸收功率总和为零（功率守恒）。

【例 1-2】 求图 1-7 (a) 所示电路中的电流 I 。

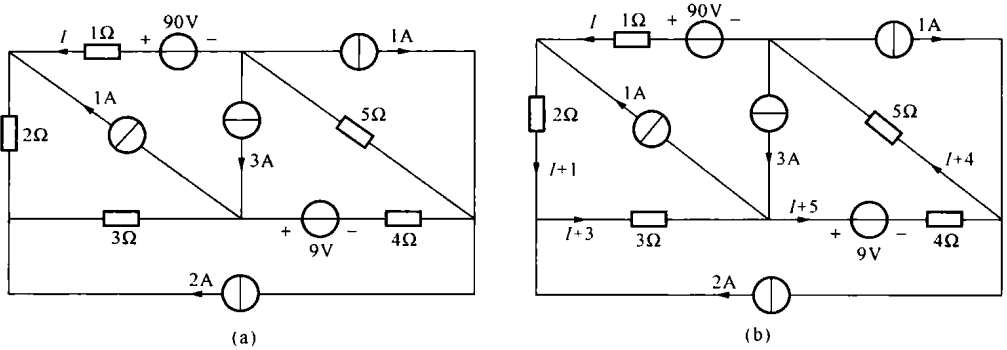


图 1-7 [例 1-2] 图

解 根据 KCL 可得所需支路电流如图 1-7 (b) 所示。对回路 90V—1Ω—2Ω—3Ω—9V—4Ω—5Ω 应用 KVL 和欧姆定律有

$$I+2(I+1)+3(I+3)+9+4(I+5)+5(I+4)=90$$

整理得

$$15I=30$$

所以

$$I=2\text{A}$$

注：本题亦可用第 3 章的回路法列写一个方程求解。

【例 1-3】 图 1-8 (a) 所示电路中，已知 $I=0$ ，求电阻 R 。

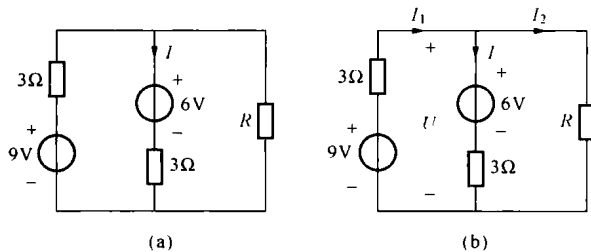


图 1-8 [例 1-3] 图

解 所用电压的参考方向如图 1-8 (b) 所示。因为 $I=0$ ，所以 $U=6+3I=6$ (V)。由 KVL 得

$$-3I_1+9=6$$

$$I_1=1\text{A}$$

由 KCL 得

$$I_2=I_1-I=1-0=1\text{ (A)}$$

故

$$R=\frac{U}{I_2}=\frac{6}{1}=6\text{ (}\Omega\text{)}$$

注：求电阻的电阻值常用的方法有：① 电阻的 VAR，即 $u_R = Ri_R$ ；② 功率公式 $P_R = Ri_R^2 = u_R^2/R$ 。

1.3 重点、难点与考点

重点与难点

本章内容是电路的基础，本书后续章节的内容是在本章的基础上向广度和深度展开的。因此，要求读者必须深刻理解、牢固掌握，能熟练应用，否则会影响后续内容的学习。

本章的重点是：① 参考方向；② 基尔霍夫定律；③ 二端元件（电阻、电感、电容和独立电源）的伏安关系和受控源的特性方程；④ 两类约束的灵活应用。

难点是：在不同的参考方向下，求吸收或提供的功率、正确地写出元件方程以及 KCL 方程和 KVL 方程；灵活应用两类约束分析电路也是本章乃至全书的难点。

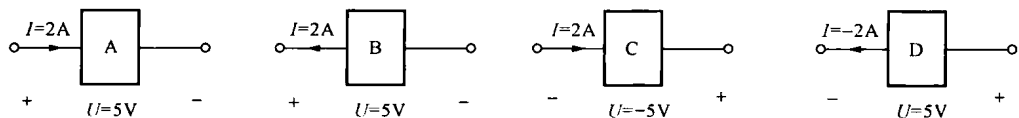
考点

本章内容是考试的重点和热点之一，题目多为小题，如元件特性、两类约束直接应用。有已知电路结构和元件参数求电压、电流或功率的正向思维分析计算题，也有已知电路结构和元件电压、电流或功率求元件参数的逆向思维题，主要考查对基本概念和两类约束的正确理解和熟练应用。

1.4 第1章习题选解

电路的物理量

1-3 分别求题 1-3 图所示各二端元件吸收和发出的功率。



题 1-3 图

解 各元件吸收的功率分别为

$$P_A = UI = 5 \times 2 = 10(\text{W}), P_B = -UI = -5 \times 2 = -10(\text{W})$$

$$P_C = -UI = -(-5) \times 2 = 10(\text{W}), P_D = UI = 5 \times (-2) = -10(\text{W})$$

各元件发出的功率分别为

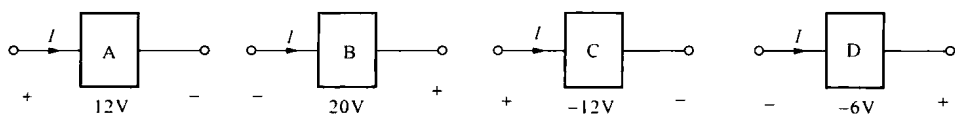
$$P_A = -UI = -5 \times 2 = -10(\text{W}), P_B = UI = 5 \times 2 = 10(\text{W})$$

$$P_C = UI = -5 \times 2 = 10(\text{W}), P_D = -UI = -5 \times (-2) = 10(\text{W})$$

注：(1) 计算吸收功率时，关联参考方向用 $P = UI$ ，非关联参考方向用 $P = -UI$ ；计算发出功率时，关联参考方向用 $P = -UI$ ，非关联参考方向用 $P = UI$ 。

(2) 计算结果表明，A 和 C 实际为吸收功率，B 和 D 实际为提供功率。

1-4 电路如题 1-4 图所示，分别求 A、B、C、D 中的电流。其中：A 吸收的功率为 72W，B 发出的功率为 100W，C 吸收的功率为 60W、D 发出的功率为 30W。



题 1-4 图

解

$$P_A = UI = 12I = 72 \Rightarrow I = \frac{72}{12} = 6 \text{ (A)}$$

$$P_B = UI = 20I = 100 \Rightarrow I = \frac{100}{20} = 5 \text{ (A)}$$

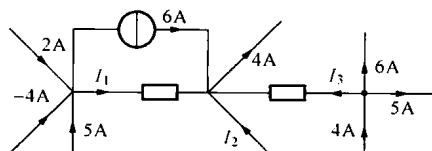
$$P_C = UI = -12I = 60 \Rightarrow I = \frac{60}{-12} = -5 \text{ (A)}$$

$$P_D = UI = -6I = 30 \Rightarrow I = \frac{30}{-6} = -5 \text{ (A)}$$

注：计算结果表明，A 和 B 电流的实际方向与指定的参考方向一致，C 和 D 电流的实际方向与指定的参考方向相反。

基尔霍夫定律

1-5 求题 1-5 图所示电路中的电流 I_1 和 I_2 。



题 1-5 图

解 由 KCL 得

$$I_1 = 2 + 5 - 4 - 6 = -3 \text{ (A)}$$

$$I_3 = 4 - 6 - 5 = -7 \text{ (A)}$$

$$I_2 = 4 - 6 - I_1 - I_3 = 4 - 6 - (-3) - (-7) = 8 \text{ (A)}$$

注：(1) 应用 KCL 时，为了尽可能地避免联立方程求解，一般先取只有一个未知电流的节点。

(2) 注意区别计算式 (KCL 方程) 中各项前应有的正、负号和有关电流本身带的正、负号 (写在括号内)。对 KVL 方程和元件特性方程同样如此。

(3) I_2 亦可通过闭合面求得。

1-7 题 1-7 图所示电路中，已知 $I_3 = 4\text{A}$ 。求 I_1 和 I_2 。

解 由 KCL 得

$$I_2 = 5 - 3 = 2 \text{ (A)}$$

由广义节点的 KCL 得

$$I_1 = 3 - 5 - I_3 = 3 - 5 - 4 = -6 \text{ (A)}$$

1-8 电路如题 1-8 图所示，已知 $i_1 = 2\text{A}$ ， $i_4 = 5\text{A}$ ， $i_7 = -5\text{A}$ ， $i_{10} = -3\text{A}$ ，试求出尽可能多的电流。如需确定所有电流，尚需给定哪些电流？

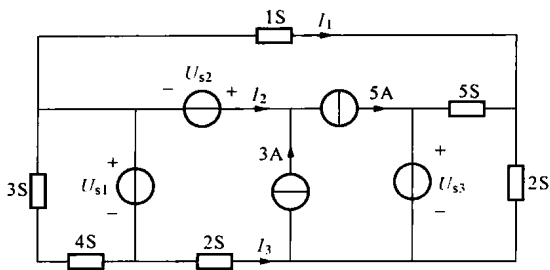
解 由 KCL 得

$$i_5 = -(i_1 + i_7) = -(2 - 5) = 3 \text{ (A)}, i_9 = -(i_4 + i_{10}) = -(5 - 3) = -2 \text{ (A)}$$

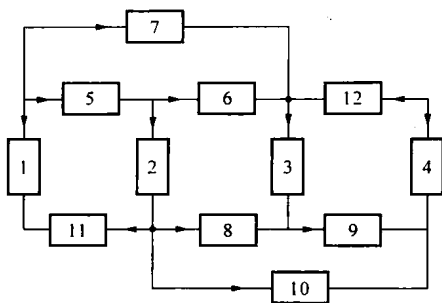
$$i_{12} = -i_4 = -5 \text{ (A)}, i_{11} = -i_1 = -2 \text{ (A)}$$

若给定 i_2 、 i_3 、 i_6 和 i_8 中任一就能确定全部电流。

注：必须清楚 KCL 方程中每一项的来由，必须保证清晰无误，不能有丝毫的含糊之处。



题 1-7 图



题 1-8 图

1-9 求题 1-9 图所示电路中的未知电压。

解 由 KVL 得

$$u_5 = 12 + 6 = 18 \text{ (V)}, u_3 = 2 + 6 = 8 \text{ (V)}$$

$$u_2 = u_3 - u_5 = 8 - 18 = -10 \text{ (V)}$$

注：应用 KVL 时，为了尽可能地避免联立方程求解，一般先取只有一个未知电压的回路。

1-10 电路如题 1-8 图所示，电压与电流采用关联参考方向，已知 $u_1 = 10\text{V}$ ， $u_2 = 5\text{V}$ ， $u_4 = -3\text{V}$ ， $u_6 = 2\text{V}$ ， $u_7 = -3\text{V}$ ， $u_{12} = 8\text{V}$ 。试求出尽可能多的电压。如需确定所有电压，尚需给定哪些电压？

解 由 KVL 得

$$u_5 = u_7 - u_6 = -3 - 2 = -5 \text{ (V)}, u_{11} = -u_2 - u_5 + u_1 = -5 - (-5) + 10 = 10 \text{ (V)}$$

$$u_{10} = -u_2 + u_6 - u_{12} + u_4 = -5 + 2 - 8 - 3 = -14 \text{ (V)}$$

若给定 u_3 、 u_8 和 u_9 中任一个就能确定全部电压。

注：必须清楚 KVL 方程中每一项的来由，必须保证清晰无误，不能有丝毫的含混之处。

1-12 题 1-12 图所示电路中 u_3 的参考方向已选定，若该电路的两个 KVL 方程分别为

$$u_1 - u_2 - u_3 = 0, -u_2 - u_3 + u_5 - u_6 = 0$$

- (1) 试确定 u_1 、 u_2 、 u_5 和 u_6 的参考极性；
- (2) 能否确定 u_4 的参考极性？
- (3) 若给定 $u_2 = 10\text{V}$ ， $u_3 = 5\text{V}$ ， $u_6 = -4\text{V}$ ，试确定其余各电压。

解 (1) 根据给定的两个 KVL 方程， u_1 、 u_2 、 u_5 和 u_6 的参考极性如题 1-12 解图 (a) 所示。

(2) 不能确定 u_4 的参考极性。

(3) 若指定 u_4 的参考极性如题 1-12 解图 (b) 所示，由 KVL 得

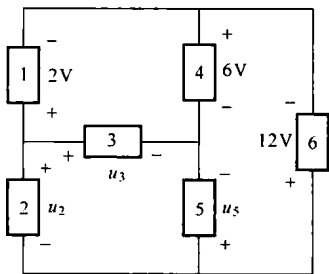
$$u_1 = u_2 + u_3 = 10 + 5 = 15 \text{ (V)}, u_4 = -u_2 - u_6 = -10 - (-4) = -10 + 4 = -6 \text{ (V)}$$

$$u_5 = -u_4 + u_3 = -(-6) + 5 = 6 + 5 = 11 \text{ (V)}$$

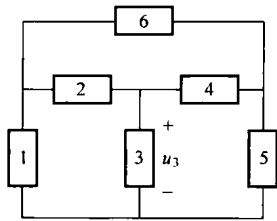
1-13 题 1-13 图所示电路中，已知 $I_1 = 2\text{A}$ ， $I_3 = -3\text{A}$ ， $U_1 = 10\text{V}$ ， $U_4 = -5\text{V}$ 。试计算各元件吸收的功率，并验证功率守恒。

解 所用电量的参考方向如题 1-13 解图所示。由 KCL 得

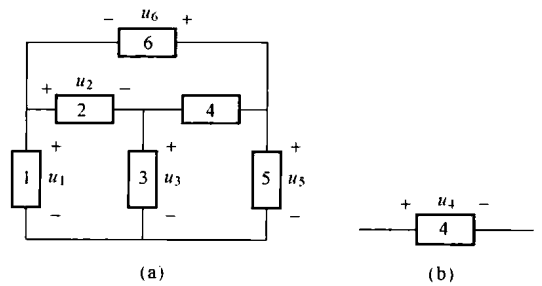
$$I_4 = I_1 + I_3 = 2 - 3 = -1 \text{ (A)}, I_2 = I_1 = 2 \text{ (A)}$$



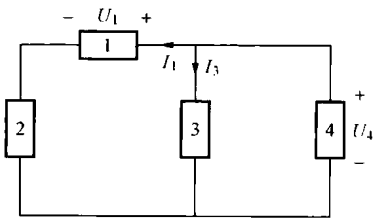
题 1-9 图



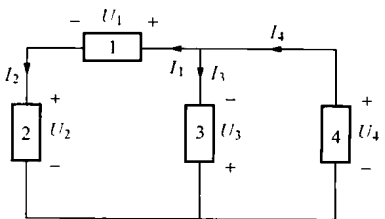
题 1-12 图



题 1-12 解图



题 1-13 图



题 1-13 解图

由 KVL 得

$$U_3 = -U_4 = -(-5) = 5 \text{ (V)}, U_2 = -U_1 + U_4 = -10 - 5 = -15 \text{ (V)}$$

各元件吸收的功率分别为

$$P_1 = U_1 I_1 = 10 \times 2 = 20 \text{ (W)}, P_2 = U_2 I_2 = -15 \times 2 = -30 \text{ (W)}$$

$$P_3 = -U_3 I_3 = -5 \times (-3) = 15 \text{ (W)}, P_4 = -U_4 I_4 = -(-5) \times (-1) = -5 \text{ (W)}$$

显然

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 20 - 30 + 15 - 5 = 0$$

故电路的功率是守恒的。

二端元件

1-16 0.2F 电容电流的波形如题 1-16 图所示, 若 $u_C(0) = 10\text{V}$, 求电容电压 $u_C(t)$, 并定性地画出其波形。

解 由电容电流的波形可写出电容电流的表达式为

$$i_C(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2.5t \text{ A} & 0 \leq t < 2\text{s} \\ -5t + 15 \text{ A} & 2\text{s} \leq t < 4\text{s} \\ 2.5t - 15 \text{ A} & 4\text{s} \leq t < 6\text{s} \\ 0 & t \geq 6\text{s} \end{cases}$$

(1) $0 \leq t < 2\text{s}$

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u_C(0) + \frac{1}{0.2} \int_0^t 2.5\tau d\tau = 10 + \frac{1}{0.2} \int_0^t 2.5\tau d\tau \\ &= 10 + 5 \times 2.5 \times \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^t = 10 + \frac{25}{4} t^2 \text{ (V)} \end{aligned}$$

$$u_C(2) = u_C(t) \Big|_{t=2s} = 10 + \frac{25}{4} \times 2^2 = 35 \text{ (V)}$$

(2) $2s \leq t < 4s$

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u_C(2) + \frac{1}{0.2} \int_2^t (-5\tau + 15) d\tau = 35 + 5 \int_2^t (-5\tau + 15) d\tau \\ &= 35 + 5 \times \left(-\frac{5}{2} \tau^2 + 15\tau \right) \Big|_2^t = -\frac{25}{2} t^2 + 75t - 65 \quad (\text{V}) \end{aligned}$$

$$u_C(4) = u_C(t) \Big|_{t=4s} = -\frac{25}{2} \times 4^2 + 75 \times 4 - 65 = 35 \text{ (V)}$$

(3) $4s \leq t < 6s$

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u_C(4) + \frac{1}{0.2} \int_4^t (2.5\tau - 15) d\tau = 35 + 5 \int_4^t (2.5\tau - 15) d\tau \\ &= 35 + 5 \times \left(\frac{5}{4} \tau^2 - 15\tau \right) \Big|_4^t = \frac{25}{4} t^2 - 75t + 235 \quad (\text{V}) \end{aligned}$$

$$u_C(6) = u_C(t) \Big|_{t=6s} = \frac{25}{4} \times 6^2 - 75 \times 6 + 235 = 10 \text{ (V)}$$

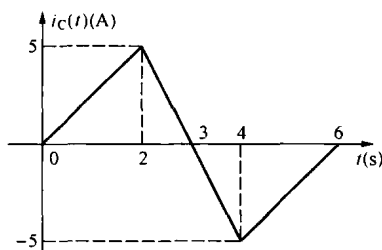
(4) $t \geq 6s$

$$u_C(t) = u_C(6) = 10 \text{ V}$$

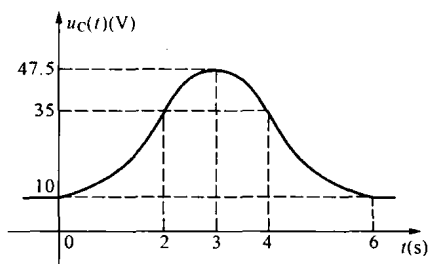
综上所述得

$$u_C(t) = \begin{cases} 10 & t < 0 \\ 10 + 6.25t^2 & 0 \leq t < 2s \\ -12.5t^2 + 75t - 65 & 2s \leq t < 4s \\ 6.25t^2 - 75t + 235 & 4s \leq t < 6s \\ 10 & t \geq 6s \end{cases} \quad (\text{单位: V})$$

$u_C(t)$ 的波形图如题 1-16 解图所示。



题 1-16 图



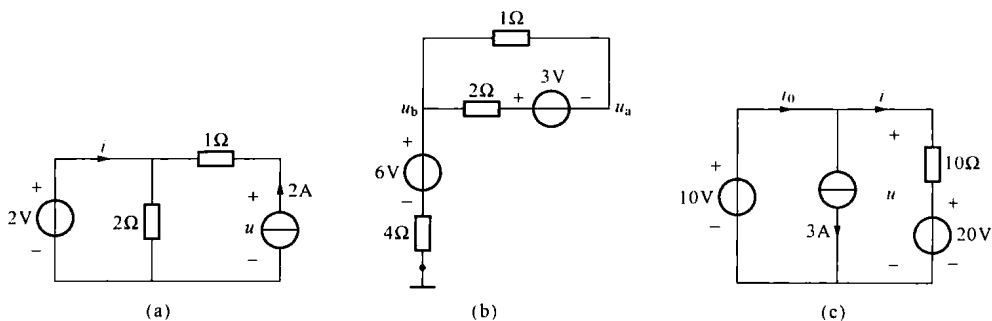
题 1-16 解图

注：本题为电容 VAR 积分形式 $u_C(t) = u_C(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C(\tau) d\tau$ 的应用，要关注它的初始状态 $u_C(t_0)$ 。 $u_C(t_0)$ 反映了电容在初始时刻的储能状况。

1-17 [提示] 本题为电感 VAR 积分形式 $i_L(t) = i_L(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u_L(\tau) d\tau$ 的应用，求解方法与题 1-16 类似。

两类约束的直接应用

1-18 求题 1-18 图所示各电路中指定的电压和电流。



题 1-18 图

解 (a) 题 1-18 图 (a) 所需电流的参考方向见图 1-18 解图 (a)。由 KVL 和欧姆定律得

$$i_1 = \frac{2}{2} = 1 \text{ (A)}$$

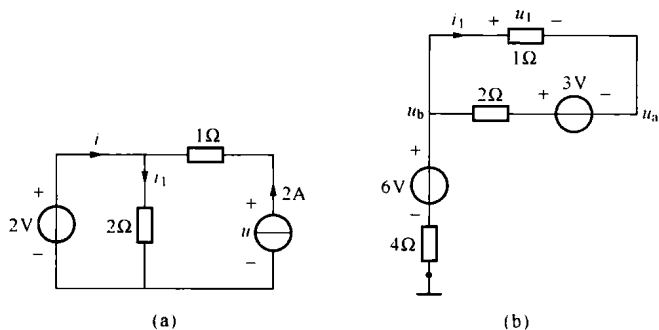
根据 KCL 有

$$i = i_1 - 2 = 1 - 2 = -1 \text{ (A)}$$

由 KVL 得

$$u = 2 \times 1 + 2 = 4 \text{ (V)}$$

(b) 题 1-18 图 (b) 所需电流和电压的参考方向见图 1-18 解图 (b)。由于 6V 电压源与 4Ω 电阻的串联支路不形成回路，故 $i = 0$ 。



题 1-18 解图

由 KVL 和欧姆定律得

$$u_b = 6 + 4i = 6 \text{ (V)}$$

对图中回路应用 KVL 和欧姆定律得

$$1 \times i_1 + 2i_1 = 3$$

所以

$$i_1 = \frac{3}{2+1} = 1 \text{ (A)}$$

由欧姆定律得

$$u_1 = 1 \times i_1 = 1 \text{ (V)}$$

则由 KVL 得

$$u_a = -u_1 + u_b = -1 + 6 = 5 \text{ (V)}$$

(c) 由 KVL 得 $u = 10\text{V}$ 。因为 $u = 10i + 20$ ，所以

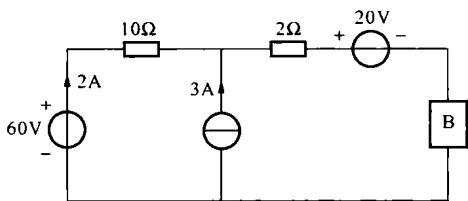
$$10 = 10i + 20$$

$$i = -1\text{A}$$

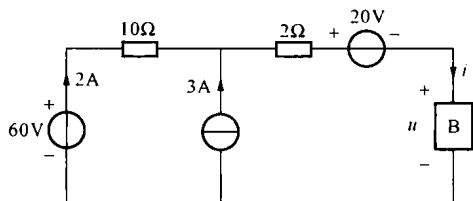
由 KCL 得

$$i_0 = 3 + i = 3 + (-1) = 2 \text{ (A)}$$

1-19 求题 1-19 图所示电路中元件 B 吸收的功率。



题 1-19 图



题 1-19 解图

解 设支路 B 的电压和电流的参考方向如题 1-19 解图所示。由 KCL 得

$$i = 2 + 3 = 5 \text{ (A)}$$

由 KVL 和元件 B 的 VAR 得

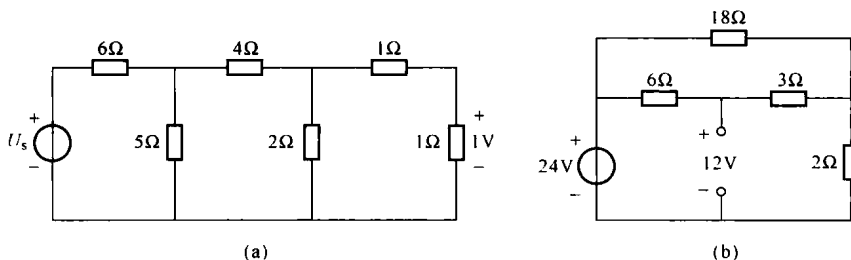
$$u = -20 - 2i - 2 \times 10 + 60 = -20 - 2 \times 5 - 20 + 60 = 10 \text{ (V)}$$

元件 B 吸收的功率为

$$P_B = ui = 10 \times 5 = 50 \text{ (W)}$$

注：求一般元件的功率通常用公式 $p = ui$ 。

1-20 求题 1-20 图所示电路中各支路的电流和电压。



题 1-20 图

解 (a) 各支路的电压、电流采用关联参考方向，如题 1-20 解图 (a) 所示。

$$I_1 = \frac{1}{1} = 1 \text{ (A)}, U_2 = (1+1)I_1 = 2 \text{ (V)}, I_2 = \frac{U_2}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ (A)}, I_3 = I_1 + I_2 = 1 + 1 = 2 \text{ (A)}$$

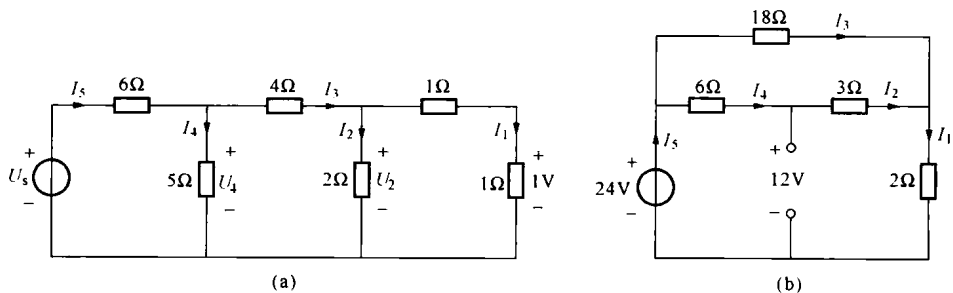
$$U_4 = 4I_3 + U_2 = 4 \times 2 + 2 = 10 \text{ (V)}, I_4 = \frac{U_4}{5} = \frac{10}{5} = 2 \text{ (A)}, I_5 = I_3 + I_4 = 2 + 2 = 4 \text{ (A)}$$

$$U_s = 6I_3 + U_4 = 6 \times 4 + 10 = 34 \text{ (V)}$$

(b) 各支路的电压、电流采用关联参考方向, 如题 1-20 解图 (b) 所示。

$$I_4 = \frac{24 - 12}{6} = 2 \text{ (A)}, I_2 = I_4 = 2 \text{ A}, I_3 = \frac{6I_4 + 3I_2}{18} = \frac{6 \times 2 + 3 \times 2}{18} = 1 \text{ (A)}$$

$$I_1 = I_2 + I_3 = 2 + 1 = 3 \text{ (A)}, I_5 = I_1 = 3 \text{ A}$$



题 1-20 解图

电压与电流取关联参考方向, 可得

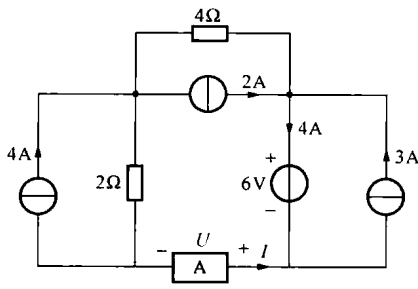
$$U_1 = 2I_1 = 2 \times 3 = 6 \text{ (V)}, U_2 = 3I_2 = 3 \times 2 = 6 \text{ (V)}$$

$$U_3 = 18I_3 = 18 \times 1 = 18 \text{ (V)}, U_4 = 6I_4 = 6 \times 2 = 12 \text{ (V)}$$

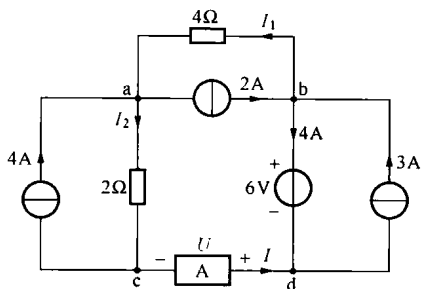
1-21 见 [例 1-3]。

1-22 求题 1-22 图所示电路中的电压 U 和电流 I , 并确定元件 A 可能是什么元件。

解 所需电量的参考方向如题 1-22 解图所示。对节点 d 列 KCL 方程



题 1-22 图



题 1-22 解图

$$I = 3 - 4 = -1 \text{ (A)}$$

对节点 b 列 KCL 方程

$$I_1 = 3 - 4 + 2 = 1 \text{ (A)}$$

对节点 c 列 KCL 方程

$$I_2 = 4 + I = 4 - 1 = 3 \text{ (A)}$$

对回路 abdca 列 KVL 方程有

$$U - 2I_2 - 4I_1 + 6 = 0$$

故

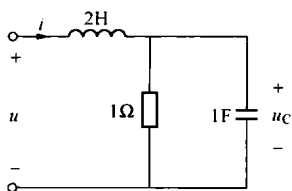
$$U = 2 \times 3 + 4 \times 1 - 6 = 4 \text{ (V)}$$

所以, 元件 A 可能是 4V 电压源, 也可能是 -1A 电流源, 还可能是 4Ω 电

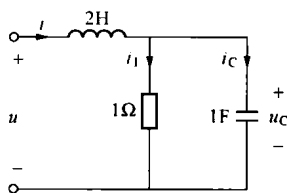
$$\text{阻} \left(R = -\frac{U}{I} = -\frac{4}{-1} = 4\Omega \right).$$

注：元件实际为吸收功率时，通常看成是电阻；元件实际为提供功率时，通常看成是电压源或电流源。

1-23 题 1-23 图所示电路中， $u_C(t) = 2e^{-2t}$ V，求电路中的电压 $u(t)$ 和电流 $i(t)$ 。



题 1-23 图



题 1-23 解图

解 所用电压的参考方向如题 1-23 解图所示。由元件的 VAR 得

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = \frac{d}{dt}(2e^{-2t}) = -4e^{-2t} \text{ (A)}$$

$$i_1(t) = \frac{u_C(t)}{R} = u_C(t) = 2e^{-2t} \text{ A}$$

由 KCL 得

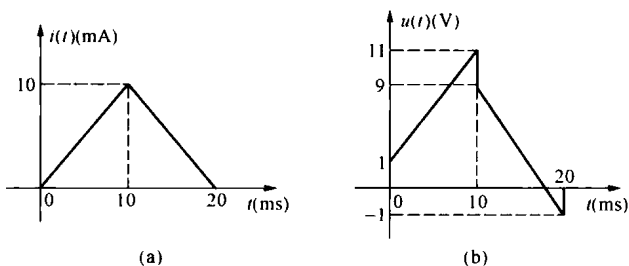
$$i(t) = i_C(t) + i_1(t) = -4e^{-2t} + 2e^{-2t} = -2e^{-2t} \text{ (A)}$$

由 KVL 和电感元件的 VAR 得

$$u(t) = 2 \frac{di}{dt} + u_C(t) = 2 \frac{d}{dt}(-2e^{-2t}) + 2e^{-2t} = 8e^{-2t} + 2e^{-2t} = 10e^{-2t} \text{ (V)}$$

1-24 一条支路只含一个电阻和一个电感，支路电流 $i(t)$ 和支路电压 $u(t)$ 取关联参考方向，其波形分别如题 1-24 图 (a)、(b) 所示。

- (1) 试确定 R 和 L 的连接方式；
- (2) 求 R 和 L 的值。



题 1-24 图

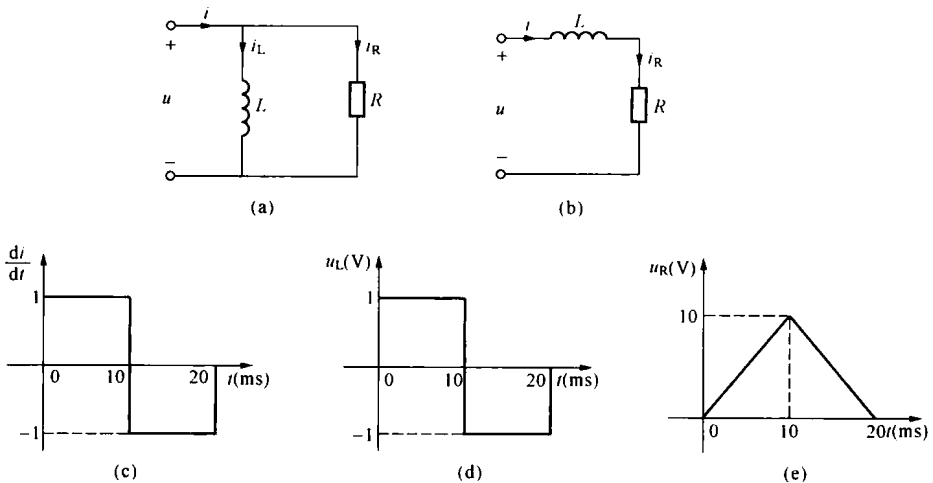
解 (1) R 和 L 的连接方式不是串联就是并联，如果是 R 和 L 并联连接，如题 1-24 解图 (a) 所示，则由 KCL 可知 $i(t) = i_L(t) + i_R(t)$ ， $i_R(t)$ 的波形和 $u(t)$ 的波形仅差一个比例系数 R ，而 $i_L(t)$ 的波形是对 $u(t)$ 取积分，将是二次函数，故 $i_R(t)$ 和 $i_L(t)$ 合成的波形不可能是 $i(t)$ 的三角波形。所以 R 和 L 不是并联连接，而只能采用题 1-24 解图 (b) 所示的串联连接。

(2) 由已知 $i(t)$ 的波形可得 $\frac{di}{dt}$ 的波形如题 1-24 解图 (c) 所示。由题 1-24 图 (a) 得 $i(0)=0$ ，由题 1-24 图 (b) 可知， $u(0)=1\text{V}$ ，而 $\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0}=1$ ， $u_L(t)=L\frac{di}{dt}$ ，所以

$$L = \frac{u_L(0)}{\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0}} = \frac{1}{1} = 1 \text{ (H)}$$

因此可画出 $u_L(t)$ 的波形，如题 1-24 解图 (d) 所示。根据 KVL 由 $u(t)$ 和 $u_L(t)$ 的波形可得 $u_R(t)$ 的波形如题 1-24 解图 (e) 所示。由题 1-24 图 (a) 和题 1-24 解图 (e) 易得

$$R = 1\text{k}\Omega$$



题 1-24 解图

1-25 题 1-25 图所示电路由一个电阻 R 、一个电感 L 和一个电容 C 组成。已知 $i(t) = 10e^{-t} - 20e^{-2t} \text{ A} (t \geq 0)$ ， $u_1(t) = -5e^{-t} + 20e^{-2t} \text{ V} (t \geq 0)$ 。若 $t=0$ 时，电路总储能为 25J ，试求 R 、 L 和 C 。

解 所需的电压、电流的参考方向如题 1-25 解图所示。因为 $\frac{di}{dt} = -10e^{-t} + 40e^{-2t} = 2u_1$ ，所以元件 1 为电感元件，电感 L 为

$$L = \frac{u_1(t)}{\frac{di}{dt}} = 0.5\text{H}$$

又因为 $i(0) = i(t)|_{t=0} = 10 - 20 = -10 \text{ (A)}$ ，所以

$$W_L(0) = \frac{1}{2}L[i(0)]^2 = \frac{1}{2} \times 0.5 \times (-10)^2 = 25 \text{ (J)}$$

而 $W(0) = W_C(0) + W_L(0) = 25 \text{ (J)}$ ，则

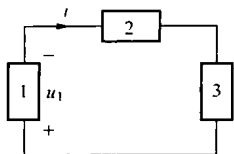
$$W_C(0) = 0$$

因此

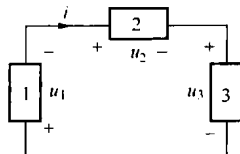
$$u_C(0) = 0$$

设元件 2 为电容、元件 3 为电阻，则 $u_2(0) = u_C(0) = 0$ 。由 KVL 得

$$u_3(0) = -u_1(0) - u_2(0) = -u_1(0) = -(-5 + 20) = -15 \text{ (V)}$$



题 1-25 图



题 1-25 解图

所以

$$R = \frac{u_3(0)}{i(0)} = \frac{-15}{-10} = 1.5 \text{ (}\Omega\text{)}$$

则

$$u_3(t) = Ri(t) = 15e^{-t} - 30e^{-2t} \text{ V} \quad (t \geq 0)$$

根据 KVL 有

$$u_2(t) = -u_1(t) - u_3(t) = -10e^{-t} + 10e^{-2t} \text{ V} \quad (t \geq 0)$$

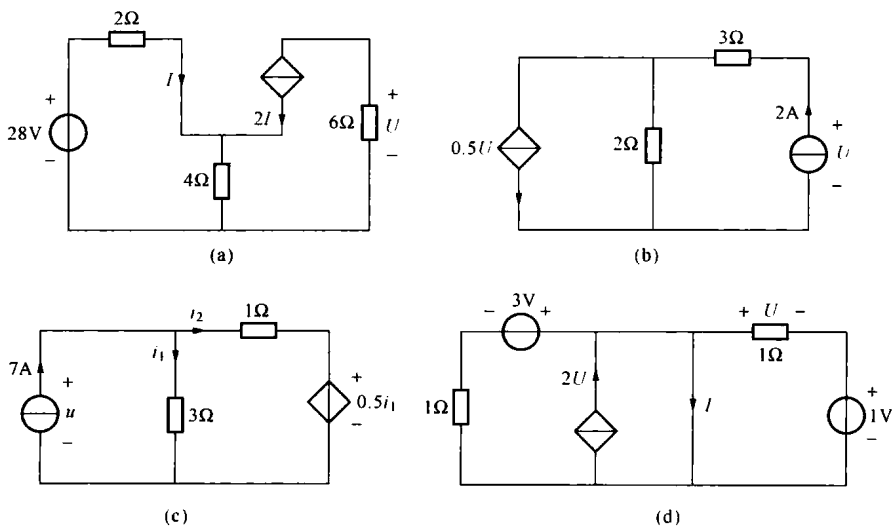
所以

$$C = \frac{i(t)}{\frac{du_C}{dt}} = \frac{i(t)}{\frac{du_2}{dt}} = 1\text{F}$$

注：求元件电气参数的常用方法是利用元件的 VAR。

含受控源电路

1-27 求题 1-27 图所示电路中指定的电压和电流。



题 1-27 图

解 (a) 设 4Ω 电阻上的电流 I_1 的参考方向如题 1-27 解图 (a) 所示。由 KCL 得

$$I_1 = I + 2I = 3I$$

由 KVL 得

$$2I + 4I_1 = 2I + 4 \times 3I = 28$$

$$I = 2A$$

所以

$$U = -2I \times 6 = -24 \text{ (V)}$$

(b) 设 2Ω 电阻上的电流 I_1 的参考方向如题 1-27 解图 (b) 所示。由 KCL 得

$$I_1 = 2 - 0.5U$$

由 KVL 得

$$U = 3 \times 2 + 2I_1 = 6 + 2 \times (2 - 0.5U)$$

解之得

$$U = 5V$$

(c) 由 KCL 得

$$i_2 = 7 - i_1$$

由 KVL 得

$$-3i_1 + i_2 \times 1 + 0.5i_1 = 0 \Rightarrow -3i_1 + (7 - i_1) \times 1 + 0.5i_1 = 0 \Rightarrow i_1 = 2A$$

所以

$$i_2 = 7 - i_1 = 7 - 2 = 5 \text{ (A)}$$

$$u = 3i_1 = 3 \times 2 = 6 \text{ (V)}$$

(d) 设支路电流 I_1 、 I_2 的参考方向如题 1-27 解图 (c) 所示。由 KVL 和元件的 VAR 得

$$I_1 \times 1 - 3 = 0 \Rightarrow I_1 = 3A$$

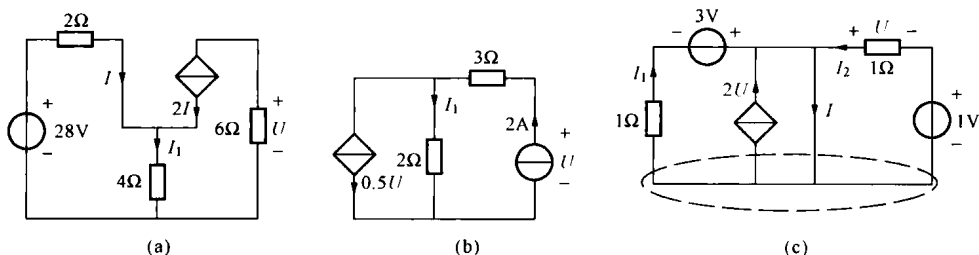
$$I_2 \times 1 - 1 = 0 \Rightarrow I_2 = 1A$$

所以

$$U = -I_2 \times 1 = -1 \text{ (V)}$$

对图中的广义节点应用 KCL 得

$$I = 2U + I_1 + I_2 = 2 \times (-1) + 3 + 1 = 2 \text{ (A)}$$



题 1-27 解图

注：(1) 受控源分为受控电压源和受控电流源两类，正确识别受控源的类型是很重要的。

(2) 只有控制量为零时，受控源的输出才为零。

(3) 分析含受控源的电路时，先把受控源当作独立源看待列写方程，然后再利用控制量与待求量之间的关系式消去控制量。

1-28 求题1-28图所示电路中受控电流源发出的功率和2V电压源吸收的功率。

解 所用量的参考方向如题1-28解图所示。由KVL和元件的VAR得

$$I = \frac{1-2}{2} = -0.5 \text{ (A)}, I_1 = \frac{1-2}{1} = -1 \text{ (A)}$$

由KCL得

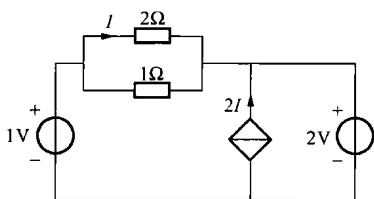
$$I_2 = I + I_1 = -1.5 \text{ (A)}, I_3 = I_2 + 2I = -1.5 + 2 \times (-0.5) = -2.5 \text{ (A)}$$

所以受控电流源发出的功率为

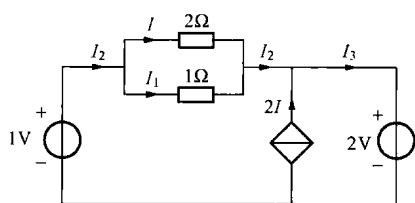
$$P_1 = 2 \times 2I = 2 \times 2 \times (-0.5) = -2 \text{ (W)}$$

2V电压源吸收的功率为

$$P_2 = 2I_3 = 2 \times (-2.5) = -5 \text{ (W)}$$



题1-28图



题1-28解图

注：计算电源的功率一般采用功率公式 $p=ui$ 。这就要求先计算出流过电压源的电流和电流源的端电压。

1-29 求题1-29图所示电路中的电流 I 和电压 U ，并计算 2Ω 电阻消耗的功率。

解 由KCL、KVL和元件的VAR得

$$2I + (3+I) \times 1 + 2I = 10$$

整理得

$$5I = 7$$

解之得

$$I = 1.4 \text{ A}$$

则

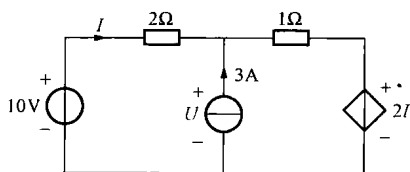
$$U = 10 - 2I = 10 - 2 \times 1.4 = 7.2 \text{ (V)}$$

2Ω 电阻消耗的功率为

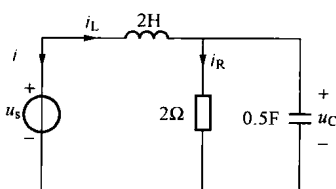
$$P_{2\Omega} = 2I^2 = 2 \times (1.4)^2 = 3.92 \text{ (W)}$$

注：求电阻吸收的功率，一般用公式 $P_R = Ri_R^2$ 或者 $P_R = u_R^2/R$ 。

1-30 列写题1-30图所示电路的基本方程，并进一步推导出只含变量 u_C 的方程。



题1-29图



题1-30图

解 (1) KCL 方程为

$$i_R + i_C - i_L = 0$$

KVL 方程为

$$u_R + u_L = u_s, \quad u_R - u_C = 0$$

元件方程为

$$u_L = 2 \frac{di_L}{dt}, \quad u_R = 2i_R, \quad i_C = 0.5 \frac{du_C}{dt}$$

(2) 将电阻、电容的方程代入 KCL 方程, 并利用 $u_R = u_C$ 得

$$0.5u_C + 0.5 \frac{du_C}{dt} - i_L = 0$$

上式两边对时间求导有

$$0.5 \frac{du_C}{dt} + 0.5 \frac{d^2u_C}{dt^2} - \frac{di_L}{dt} = 0$$

由电感和 KVL 方程分别得 $\frac{di_L}{dt} = 0.5u_L$, $u_L = u_s - u_C$ 。消去 u_L 后代入上述方程整理得

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{du_C}{dt} + u_C = u_s$$

注: 电阻电路的方程为代数方程, 动态电路的方程为微分—代数方程或者微分方程。

1.5 自测题及参考答案

1. 求图 1 所示电路中的电流 i 和电压 u 。
2. 求图 2 所示电路中的电流 i 。
3. 求图 3 所示电路中 3A 电流源吸收的功率和 4V 电压源提供的功率。

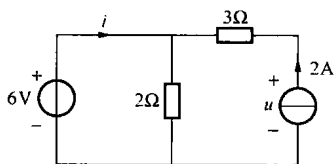


图 1

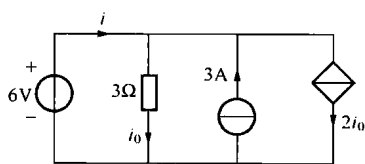


图 2

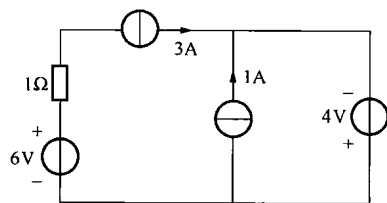


图 3

4. 求图 4 所示电路中 5V 电压源发出的功率和支路 ab 吸收的功率。
5. 求图 5 所示电路中受控电流源发出的功率。

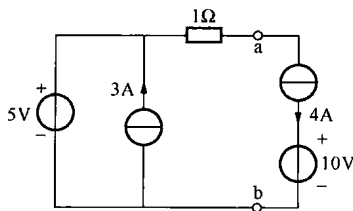


图 4

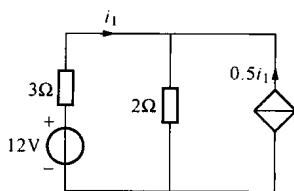


图 5

6. 求图6所示电路中元件A吸收的功率,并说明该元件可能是什么元件。
 7. 图7所示电路中, $i_L(t) = 2e^{-2t}$ A, 求电路中的电压 $u(t)$ 和电流 $i(t)$ 。

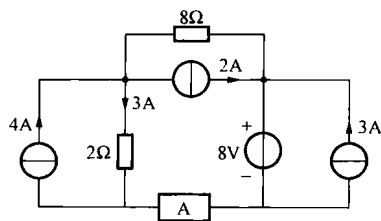


图6

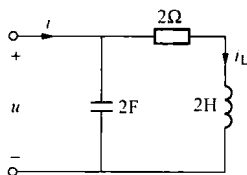


图7

参考答案

1. $i = 1\text{A}$, $u = 12\text{V}$
2. $i = 3\text{A}$
3. $P_{3\text{A}} = 21\text{W}$, $P_{4\text{V}} = 16\text{W}$
4. $P_{5\text{V}} = 5\text{W}$, $P_{ab} = 4\text{W}$
5. $P = 6\text{W}$
6. 6W ; 元件A可能是6V电压源,也可能是1A电流源,还可能是 6Ω 电阻 ($R = \frac{U}{I} = \frac{6}{1} = 6\Omega$)。消耗功率的元件一般认为是电阻
7. $-4e^{-2t}\text{V}$, $18e^{-2t}\text{A}$

第 2 章 简单电路和等效变换

2.1 本章知识结构图

第 2 章知识结构图如图 2-1 所示。

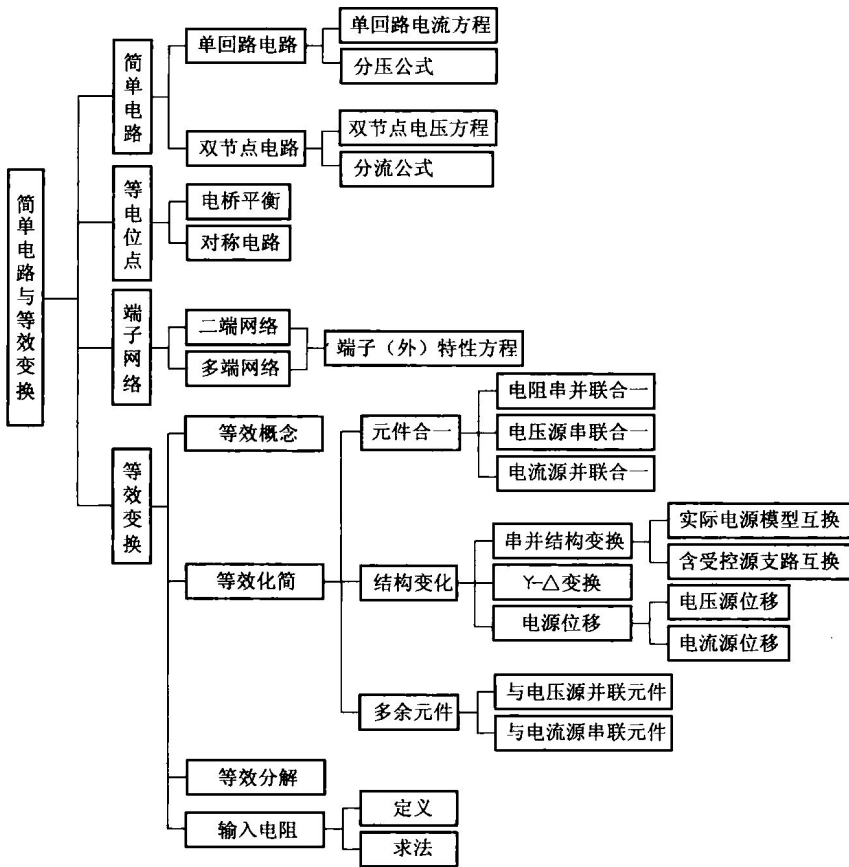


图 2-1 第 2 章知识结构图

2.2 知识点归纳与学习指导

本章主要内容分为简单电路的分析方法和等效变换分析法两部分内容。

2.2.1 简单电路的分析

单回路电路和双节点电路是两种最基本的简单电路。所谓单回路电路和双节点电路分别是指仅有单一回路的电路和仅有两个节点的电路。

1. 分压公式和分流公式

图 2-2 所示分压电路的分压公式为

$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u, \quad u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u$$

图 2-3 所示分流电路的分流公式为

$$i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i, \quad i_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} i = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$

使用分压公式和分流公式时应特别注意参考方向所引起的公式正负号的变化。

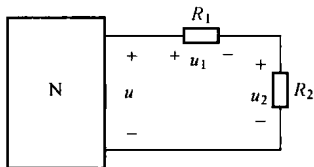


图 2-2 分压电路

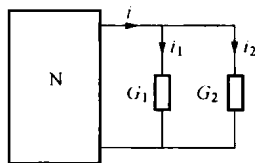


图 2-3 分流电路

2. 单回路电路

对于单回路电路，先列写回路电流方程求回路电流，然后再进一步求其他量。其一般分析步骤见主教材 2.1.2。

此处的单回路电路分析方法是第 3 章中回路（网孔）法应用到单回路电路的特殊情况。

3. 双节点电路

对于双节点电路，先列写节点电压方程求节点电压，然后再由节点电压求其他量。分析双节点电路的一般步骤见主教材 2.1.3。

此处的双节点电路分析方法是第三章中节点法应用到双节点电路的特殊情况。

在学习过程中，单回路电流方程和双节点电压方程的列写规律需要牢记。

2.2.2 等效变换分析

等效和等效电路是电路理论中非常重要的通用概念，将贯穿于全书。运用等效电路的概念解决电路问题的方法称为等效变换法，它是电路的主要分析方法之一。

1. 二端网络

网络按照可与外部相连的端子数目分为二端网络、三端网络、……三端及以上的网络称为多端网络。

二端网络（见图 2-4）的两个端子满足端口条件：流入一个端子的电流恒等于流出另一个端子的电流，故又称为单口〔网络〕。

要注意端口与端子的区别。端口是满足端口条件的一对端子。

电阻性二端网络端口伏安关系的一般形式为

$$u = Ri + u_s \text{ (流控型方程)} \quad \text{或者} \quad i = Gu + i_s \text{ (压控型方程)}$$

简单的二端网络可直接用两类约束写出其端口 VAR。例如，对于图 2-5 所示的二端网络，由 KCL 和元件的伏安关系得

$$u_1 = (1 - 4i) \times 3 = 3 - 12i$$

由 KVL 和元件的伏安关系得

$$u = i + 2u_1 = i + (3 - 12i) \times 2 = 6 - 23i$$

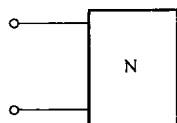


图 2-4 二端网络

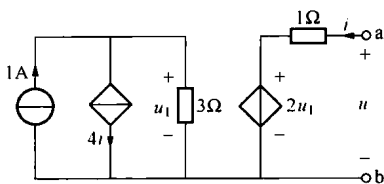


图 2-5 二端网络端口 VAR 用图

对于复杂的二端网络，可先通过等效化简转化为简单的二端网络，然后再对简单二端网络写出端口 VAR。

2. 等效二端网络

具有完全相同外部特性的网络称为等效网络。对于电阻性二端网络，其外部特性是指端口的伏安关系（VAR）。两个网络等效一般需要满足等效条件。

等效网络之间的代换称为等效变换。等效变换分为等效化简和等效分解两种，二者的过程正好相反。这种等效变换能保证电路的其他部分（外部电路）电压、电流保持不变。

通过等效化简可将一个复杂的网络化简成简单的网络。等效化简方法适用于只对电路中的部分电量感兴趣的情况，其基本思想是把感兴趣的部分电路和不感兴趣的部分电路分解开来，并把不感兴趣的一部分电路用一简单的等效电路代替，使分析得到简化。

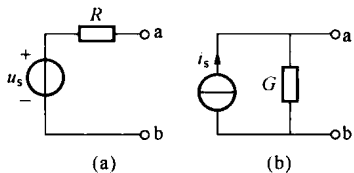


图 2-6 二端网络的最简等效电路

- (a) 戴维南等效电路；
- (b) 诺顿等效电路

本章讨论的等效化简方法是通过支路的逐一合并将二端网络化简为图 2-6 (a)、(b) 所示的最简等效电路，其实质是把数学上减少方程数目的过程在电路上通过电路的等效变换来实现。

等效是对任意的外部电路而言的，但对内部电路不等效。因此，应用等效变换法只能求外部电路的电量，不能求内部电路的电量。要求内部电路的电量，必须采用原电路求解。

通过支路的逐一合并化简二端网络本质上涉及两条支路的合并归一。直接能够合并归一的是同类元件的串联和并联化简，对应数学的合并同类项运算，见表 2-1。这些等效化简可推广到两个以上同类元件的情况。

表 2-1

同类元件的串联和并联化简

连接方式	电路 1	电路 2	等效条件	备注
电阻的串联			$R = R_1 + R_2$ 或 $G = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}$	R 称为等效电阻 G 称为等效电导 等效条件需要记忆
电阻的并联			$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ 或 $G = G_1 + G_2$	

续表

连接方式	电路 1	电路 2	等效条件	备注
电压源的串联			$u_s = u_{s1} + u_{s2}$	该等效条件不能死记硬背, 需用 KVL 写出
电流源的并联			$i_s = i_{s1} + i_{s2}$	该等效条件不能死记硬背, 需用 KCL 写出

【例 2-1】 分别求图 2-7 所示电路中指定的电流和电压。

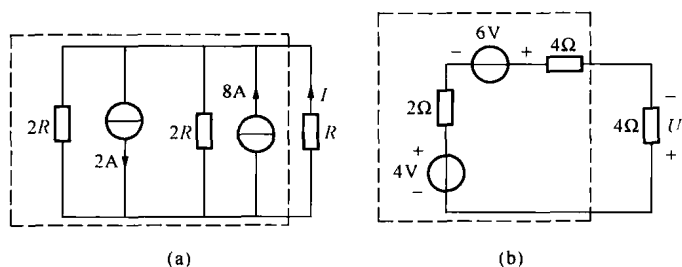


图 2-7 [例 2-1] 图

解 将待求量所在支路抽出, 剩下的部分电路形成二端网络, 如图 2-7 中虚线框所示。

(a) 二端网络内两个电阻并联可以合一, 两个电流源并联也可以合一, 如图 2-8 (a) 所示。注意, 由于两个电流源的方向相反, 等效电流源的电流为二者相减。由分流公式得

$$I = -\frac{1}{2} \times 6 = -3 \text{ (A)}$$

式中“—”是由假定的电流参考方向引起的。

(b) 二端网络内两个电阻串联可以合一, 两个电压源串联也可以合一, 如图 2-8 (b) 所示。由分压公式得

$$U = -\frac{4}{4+6} \times 10 = -4 \text{ (V)}$$

式中“—”是由假定的电压参考方向引起的。

为了使两条支路的连接出现上述同类元件的串并联, 需要对支路结构进行等效变换, 见表 2-2。它们对应数学运算中的方程变形。

多余元件的处理分别如图 2-9 (a)、(b) 所示。这对应数学上消去多余的方程。图 2-9 (a) 中的任意元件为电压源时, 不能违背 KVL; 图 2-9 (b) 中的任意元件为电流源时, 不能违背 KCL; 否则模型就是不合理的。对外部电路, 与电压源并联的多余元件开路处理, 与电流源串联的多余元件短路处理。

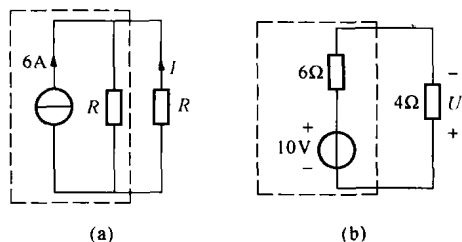
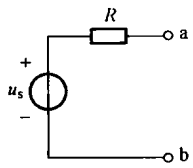
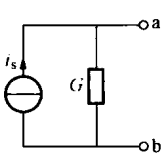
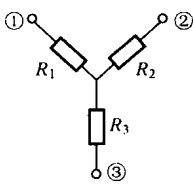
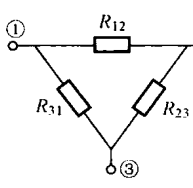


图 2-8 [例 2-1] 解图

表 2-2 不同支路结构的等效变换

变换形式	电路 1	电路 2	等效条件	备注
实际电源两种模型的等效互换	 <p>戴维南等效电路</p>	 <p>诺顿等效电路</p>	$R = \frac{1}{G}$ $u_s = \frac{i_s}{G}$	电流源的参考方向应从电压源的负极性指向正极性；电压源的正极性应位于电流源参考方向箭头所指的一端 两个电路中电阻相等
电阻的 Y-Δ 变换			对称 (3 个电阻相等) 情况下, 等效条件为 $R_{\Delta} = 3R_Y$ 。一般的等效条件查书即可	Y-Δ 变换简称星-角变换

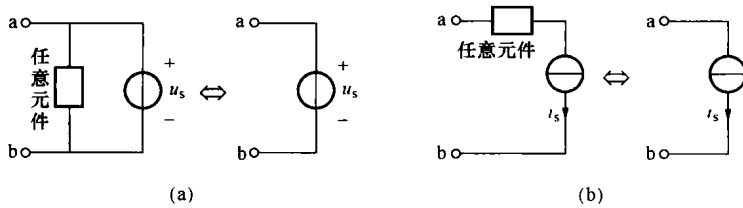
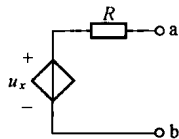
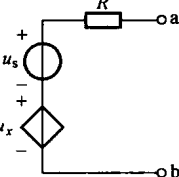


图 2-9 多余元件的处理

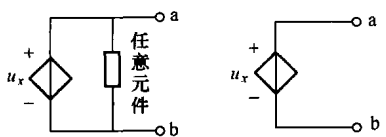
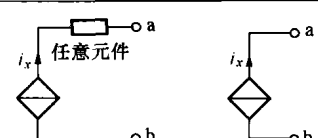
推广：① 在电路中，一个元件（或二端网络），当其两端电压为确定量时，对外等效可开路处理；② 在电路中，一个元件（或二端网络），当其流过的电流为确定量时，对外等效可短路处理。

受控源可类似独立源处理。含受控源的等效网络见表 2-3。但需要特别注意，受控源是双口元件，具有两条支路。在等效化简的过程中，当受控源的受控支路还存在时，不能把受控源的控制支路化简掉。含受控源网络的等效化简是个难点，必须下功夫掌握。

表 2-3 含受控源的等效网络

等效网络	等效条件	备注
	$u_x = Ri_x$ $R = \frac{1}{G}$	(1) R 的端电压、流过 G 的电流不能是控制量 (2) 注意两个受控源方向的关系
	$u_s = Ri_s$ $u_x = Ri_x$ $R = \frac{1}{G}$	(1) R 的端电压、流过 G 的电流不能是控制量 (2) 注意电源方向的关系

续表

等效网络	等效条件	备注
	与受控电压源并联的 多余元件开路处理	流过多余元件的电流不能是控制量
	与受控电流源串联的 多余元件短路处理	多余元件的端电压不能是控制量

其他有用的等效变换如图 2-10 所示。

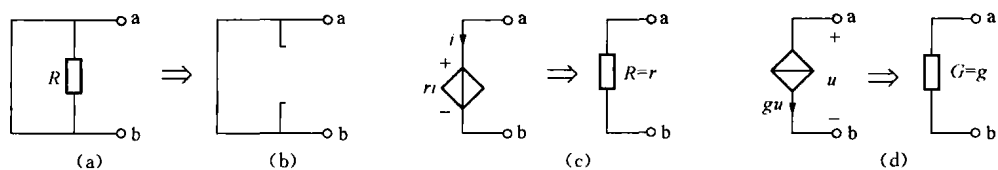


图 2-10 其他有用的等效变换

运用等效变换法化简二端网络应从离端口最远侧开始，并把电阻与电压源的串联、电阻与电流源的并联分别当作一条支路。

(1) 如果最远侧是支路的串联，则为了把这几条支路化简成一条支路，应先将这几条支路中的诺顿等效电路转化成戴维南等效电路，然后将同类元件合并归一，如图 2-11 所示。其中， $u_{s1} = R_1 i_{s1}$ ， $u_{s2} = R_2 i_{s2}$ 。

(2) 如果最远侧是支路的并联，则应先将这几条支路中的戴维南等效电路等效转化为诺顿等效电路，然后将同类元件合并归一，如图 2-12 所示。其中， $i_{s1} = \frac{u_{s1}}{R_1}$ ， $i_{s2} = \frac{u_{s2}}{R_2}$ 。

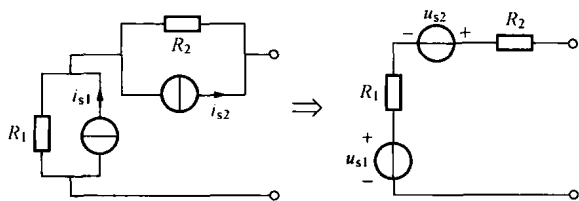


图 2-11 最远侧是支路的串联

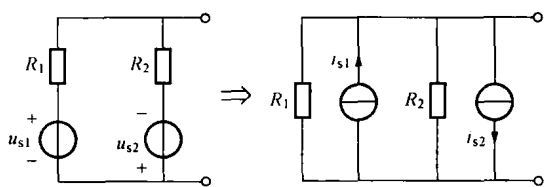


图 2-12 最远侧是支路的并联

(3) 出现电阻的Y连接或 Δ 连接时，需要进行Y- Δ 变换，转化为串并联方式。据此对电路进行逐步化简，就可把只含串、并、Y和 Δ 连接的二端网络化简成最简等效电路。

对含有受控源的电路进行等效化简，当化简成单回路或双节点的电路时，一般需要写出端口 VAR，依此画出等效电路。

等效化简法的基本思想是通过两条支路合一，逐步将网络化简。因此，要掌握等效化简法，读者应首先熟练掌握两条串联支路合一和两条支路并联合一的方法。学习本部分内容

时，要特别注意以下几点：

(1) 电压源串联化简和电流源并联化简的等效电源公式不能死记硬背，需要根据具体情况由 KVL 和 KCL 得出。

(2) 在利用实际电源两种模型的等效互换时，要注意电压源与电流源的方向关系，表 2-1 ~ 表 2-3 中的等效条件（一般记忆的是此条件）只有在规定的方向关系下才能使用。

(3) 含受控源的网络（有可能是子网络）化简到单回路或双节点电路时，需要写出相应的端口电压电流方程，再画出电路。因此，读者必须能根据不同参考方向下的端口方程熟练地画出对应的电路（特别要注意参考方向）。这一点也是电路的基本功之一。

(4) 正确判断支路之间的连接方式。必要时，可去掉电路中的开路、短路线，移动元件的位置，重新改画电路。

(5) 等效变换法主要用来求少数支路（特别是一条支路）的电量、二端网络的最简等效电路、二端网络的端口 VAR 等。

(6) 应用等效变换法求解电路时，应首先将电路分解，然后把不感兴趣的网络化简成最简等效电路，再连接上外部电路（即感兴趣的电路）求需要的电量。

【例 2-2】 试用等效化简的方法求图 2-13 (a) 所示电路中的电压 U 。

解 等效化简过程如图 2-13 (b) 所示。

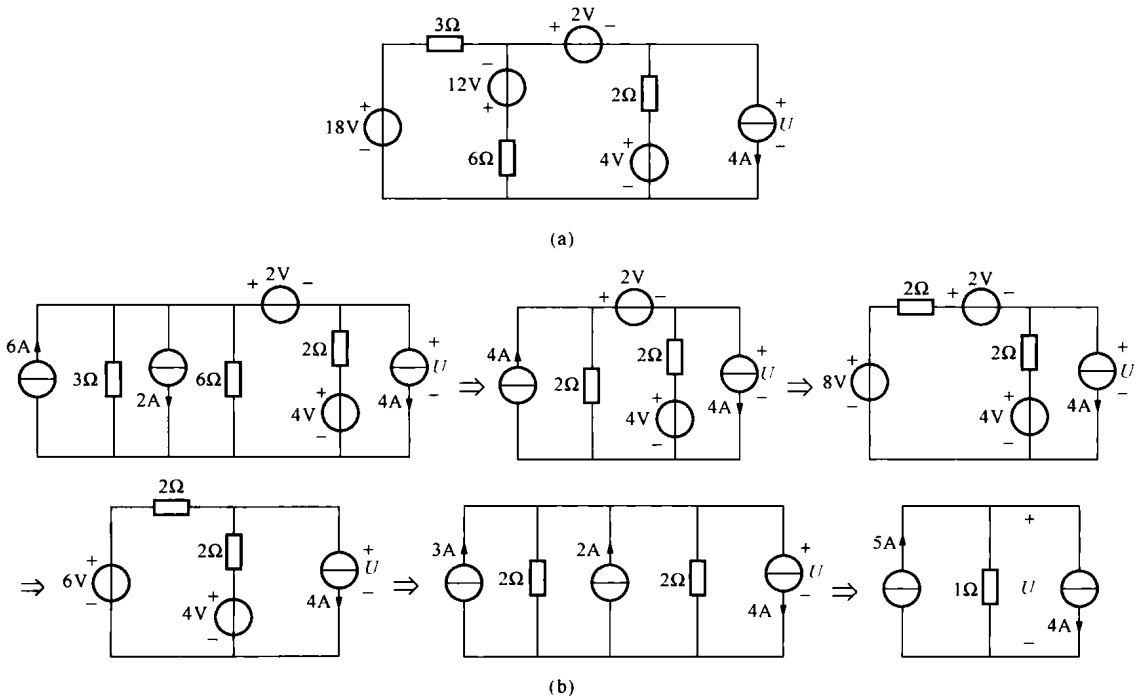


图 2-13 [例 2-2] 图

由最后的等效电路得

$$U = 1 \times (5 - 4) = 1 \text{ (V)}$$

【例 2-3】 求图 2-14 (a) 所示电路中的电流 i 。

解 将受控源视为独立源对电路进行等效化简，依次可得图 2-14 (b)、(c) 所示等效

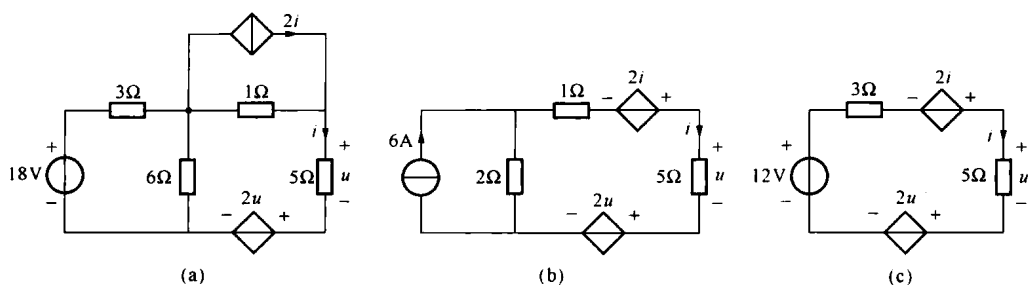


图 2-14 [例 2-3] 图

电路。由图 2-14 (c) 得

$$8i = 2i + 12 - 2u$$

且有

$$u = 5i$$

所以

$$16i = 12$$

因此

$$i = 0.75 \text{ A}$$

注：本题受控源的控制支路离端口比受控支路近，因此可直接进行等效变换求解。当受控源的控制支路离端口比受控支路远时，不能直接进行等效化简，否则会使控制量丢失。在此情况下，要进行等效变换可将控制量向端口转移，使得控制支路离端口比受控支路近。

2.2.3 利用等电位点化简电路

在电路分析和计算中常用下列两条简化规则：① 电路中电流为零的支路可以断开；② 电路中的等电位点可以短接。这两条规则实质上是第 4 章替代定理的推论。

1. 平衡电桥

图 2-15 所示惠斯顿电桥电路，当 $\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}$ 或者 $R_1 R_4 = R_2 R_3$ （电桥平衡条件）时，桥支路 R_g 无电流（ $i_g = 0$ ），两端节点 a 和 b 等电位（ $u_a = u_b$ ， $u_{ab} = 0$ ）。因此，电桥平衡时，桥支路 R_g 即可断开，亦可短接。

电桥电路中电阻的连接为 Y 连接和 Δ 连接，若电桥平衡，通过断开或短接桥支路，可转化为串并联连接（称为混联），从而避免复杂的 Y- Δ 变换。

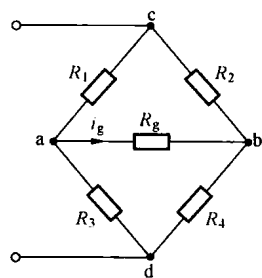


图 2-15 惠斯顿电桥电路

【例 2-4】 求图 2-16 (a) 所示电路 a、b 两端的等效电阻 R_{ab} 。

解 因为电路中 c、d 两点等电位（电桥平衡），cd 支路开路，如图 2-16 (b) 所示，则等效电阻为

$$R_{ab} = 3 // (1+1) // (3+3) = 1 \text{ } (\Omega)$$

2. 对称电路

平衡对称电路和传递对称电路是两种典型的对称电路。对于平衡对称电路（见图 2-17），由于与平衡对称面相交的点，相对端口而言，均为中间点，所以为等电位点。

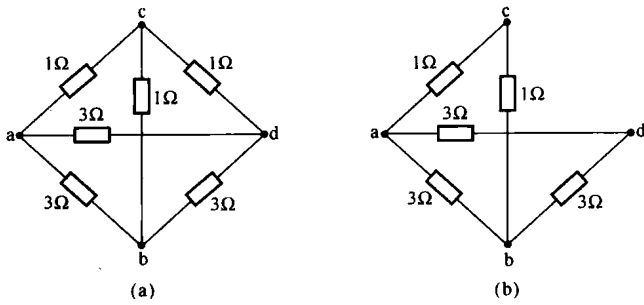


图 2-16 [例 2-4] 图

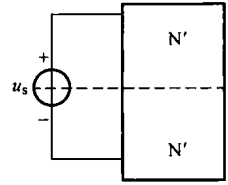


图 2-17 平衡对称电路

传递对称电路分为正对称电路 [又称翻转对称电路, 见图 2-18 (a)] 和反对称电路 [见图 2-18 (b)]。

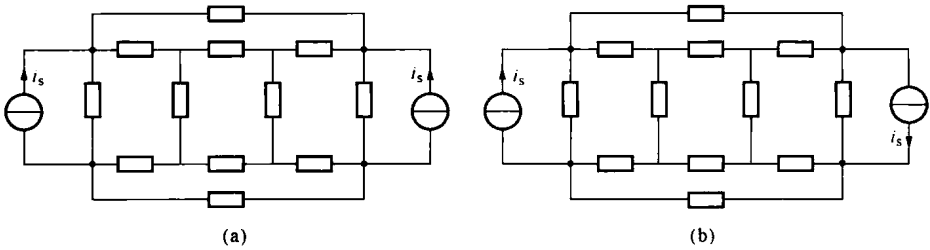


图 2-18 传递对称电路 (各个电阻相等)

(a) 正对称电路; (b) 反对称电路

在正对称电路中: ① 与中分线相交的平行连线中的电流为零, 故这些支路可以断开; ② 与中分线相交的每对交叉连线之间电压为零, 故可以短路。简言之, 所有的平行连线可以开路, 每对交叉连线可以短路。

在反对称电路中: ① 与中分线相交的每对交叉连线中的电流为零, 可以开路; ② 与中分线相交的每对平行连线之间的电压为零, 可以短路。简言之, 所有的成对平行连线可以短路, 所有的成对交叉连线可以开路。

【例 2-5】 求图 2-19 (a) 所示电路 a、b 两端的等效电阻 R_{ab} (图中电阻均为 3Ω)。

解 根据电路的对称结构, 原电路等效为图 2-19 (b) 所示的电路。利用电桥平衡, 电路可进一步等效为图 2-19 (c) 所示电路。则等效电阻为

$$R_{ab} = \left(\frac{R}{2} + \frac{R}{2} \right) // (R + R) = \frac{2}{3}R = \frac{2}{3} \times 3 = 2 (\Omega)$$

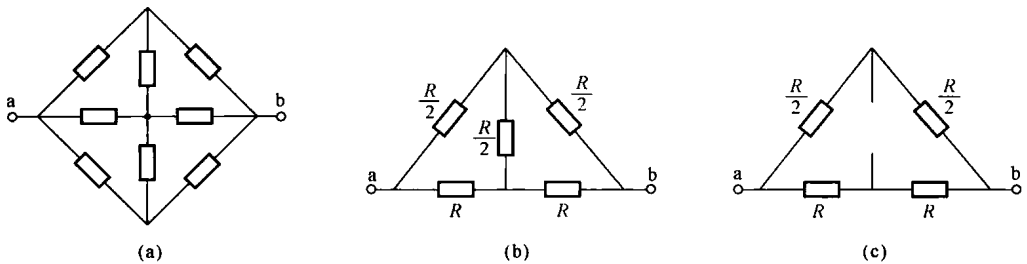


图 2-19 [例 2-5] 图

2.2.4 输入电阻

输入电阻是一个非常重要的概念，在后续章节中会多处使用，其求法必须熟练掌握。

定义 对于不含独立源的电阻性二端网络，其端口电压与端口电流的比值定义为该二端网络的输入电阻，又称为入端电阻，即

$$R_i \triangleq \frac{u}{i} \quad (\text{关联参考方向})$$

类似地可定义输入电导。输入电阻和等效电阻在数值上是相等的。由于受控源的有源性，某些由电阻和受控源构成的二端网络其输入电阻可能出现负值。

输入电阻的求法如下：

(1) 网络仅含电阻的串、并、Y和 Δ 连接时，可用电阻的串并联等效化简和Y- Δ 变换求得输入电阻。

(2) 对于含有受控源的网络，采用外加电源法求输入电阻。其方法是：在端口处加电压源 u_s (或电流源 i_s)，然后求出端口电流 i (或电压 u) (端口电压和电流的直接关系)，再代入输入电阻公式获得输入电阻。当控制支路比受控支路离端口近时，也可以用等效化简的方法求输入电阻。

(3) 当网络中只有一个受控源时，可先将端口电压、电流用控制量表示 (端口电压和电流的间接关系)，再代入输入电阻公式获得输入电阻。

无受控源的网络也可用外加电源法，但用电阻的串并联等效化简和Y- Δ 变换更简单。

【例 2-6】 求图 2-20 所示二端网络的输入电阻。

解 求含受控源网络的输入电阻的通用方法是先找出端口电压和电流的关系 (直接关系或间接关系)，再代入定义式求输入电阻。

方法 1：用外加 1A 电流源求端口电压。由 KVL 和欧姆定律得

$$u_0 = 10i + u = 10 + u$$

$$\text{而} \quad \frac{u}{20} + \frac{u-2u}{100} = 1$$

所以 $u = 25\text{V}$ ，则

$$u_0 = 10 + u = 10 + 25 = 35 \text{ (V)}$$

因此输入电阻为

$$R_i = \frac{u_0}{i} = \frac{35}{1} = 35 \text{ (}\Omega\text{)}$$

方法 2：将端口电压、电流用控制量表示，即

$$i = \frac{u}{20} + \frac{u-2u}{100} = \frac{u}{25}, \quad u_0 = 10i + u = 10 \times \frac{u}{25} + u = 1.4u$$

则输入电阻为

$$R_i = \frac{u_0}{i} = \frac{1.4u}{u/25} = 35 \text{ (}\Omega\text{)}$$

注：对于本题中的电路，亦可先求并联部分 (虚线部分) 的输入电阻，再加串联的 10Ω 电阻。

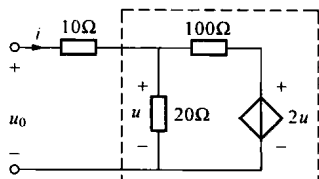


图 2-20 [例 2-6] 图

2.2.5 电容电路和电感电路

本章对电阻电路的讨论，可用于电容电路和电感电路。除了需要处理初始状态外，电容电路的各类公式和方法与电导类似，电感电路的各类公式和方法与电阻类似。

1. 电容电路

仅由电容和电压源组成的电路称为电容电路。

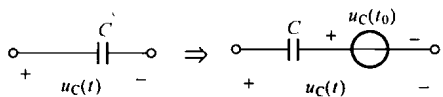


图 2-21 初始储能不为零电容的戴维南等效电路

(1) 初始储能不为零电容的戴维南等效电路如图 2-21 所示。

(2) 电容的串联和并联：

1) 串联电容电路的等效电容的倒数等于各电容倒数之和，等效电容的起始电压等于各电容起始电压的代数和。

2) 起始电压相等的并联电容电路的等效电容等于各电容之和，等效电容的起始电压仍为 $u_C(t_0)$ 。

显然，等效电容的公式与等效电导的公式类似。

(3) 电容电路的分压公式：

1) 初始储能为零的两个电容串联 [见图 2-22 (a)] 的分压公式为

$$u_1(t) = \frac{C_2}{C_1 + C_2} u(t), \quad u_2(t) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} u(t)$$

2) 初始储能不为零的两个电容串联 [其等效电路见图 2-22 (b)] 的分压公式为

$$u_1(t) = u_1(t_0) + \frac{C_2}{C_1 + C_2} [u(t) - u_1(t_0) - u_2(t_0)]$$

$$u_2(t) = u_2(t_0) + \frac{C_1}{C_1 + C_2} [u(t) - u_1(t_0) - u_2(t_0)]$$

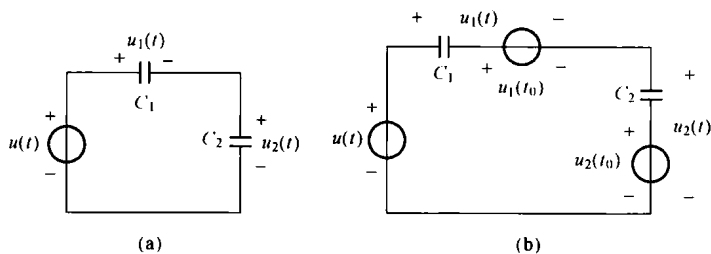


图 2-22 电容电路

2. 电感电路

仅由电感和电流源组成的电路称为电感电路。

(1) 初始储能不为零电感的诺顿等效电路如图 2-23 所示。

(2) 电感的串联和并联：

1) 起始电流相等的电感串联电路的等效电感等于各电感之和，等效电感的起始电流仍为 $i_L(t_0)$ 。

2) 并联电感电路的等效电感的倒数等于各电

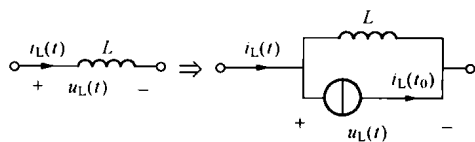


图 2-23 初始储能不为零电感的诺顿等效电路

感倒数之和，等效电感的起始电流等于各电感起始电流的代数和。

显然，求等效电感的公式与求等效电阻的公式类似。

(3) 电感电路的分流公式：

1) 初始储能为零的两个电感并联 [见图 2-24 (a)] 的分流公式为

$$i_1(t) = \frac{L_2}{L_1 + L_2} i(t), \quad i_2(t) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} i(t)$$

2) 初始储能不为零的两个电感并联 [其等效电路见图 2-24 (b)] 的分流公式为

$$i_1(t) = i_1(t_0) + \frac{L_2}{L_1 + L_2} [i(t) - i_1(t_0) - i_2(t_0)]$$

$$i_2(t) = i_2(t_0) + \frac{L_1}{L_1 + L_2} [i(t) - i_1(t_0) - i_2(t_0)]$$

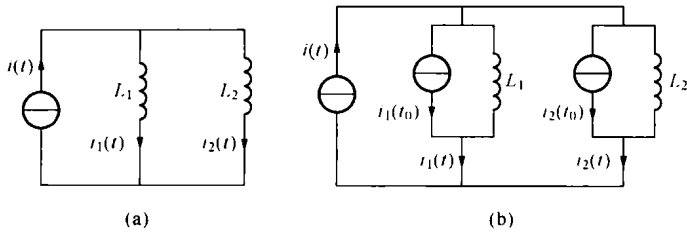


图 2-24 两电感并联

2.3 重点、难点与考点

重点与难点

本章的重点是等效及等效变换的概念、等效化简法（包括正确判断电路元件连接关系）、等电位法（电桥平衡、电路对称性）和输入电阻的求法。难点为含受控源电路的等效化简和输入电阻的求法、多余元件的判断、根据电路对称性判断等电位点。

考点

本章考试的重点和热点主要集中在用等效化简法求解电路、求二端网络（特别是含受控源二端网络）的输入电阻和求对称二端网络的等效电阻。本章所述的概念、原理和方法也会融入大型的综合试题。

2.4 第2章习题选解

单回路电路和双节点电路

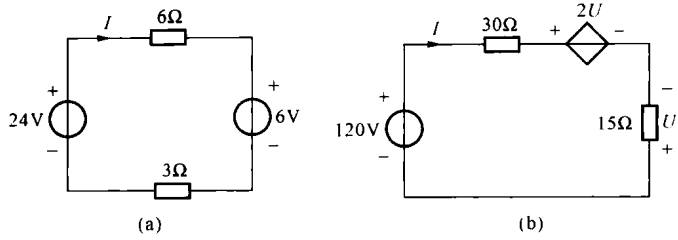
2-1 分别求题 2-1 图所示各电路中的电流 I 及各元件吸收的功率。

解 (a) 单回路电流方程为

$$(6+3)I = 24 - 6$$

解之得

$$I = 2\text{A}$$



题 2-1 图

各元件吸收的功率分别为

$$P_{24V} = -24I = -24 \times 2 = -48 \text{ (W)}, P_{6\Omega} = 6I^2 = 6 \times 2^2 = 24 \text{ (W)}$$

$$P_{3\Omega} = 3I^2 = 3 \times 2^2 = 12 \text{ (W)}, P_{6V} = 6I = 6 \times 2 = 12 \text{ (W)}$$

(b) 将受控电压源视为独立电压源, 则单回路电流方程为

$$(30+15)I = 120 - 2U$$

补充方程为

$$U = -15I$$

整理得

$$15I = 120$$

$$I = 8\text{A}$$

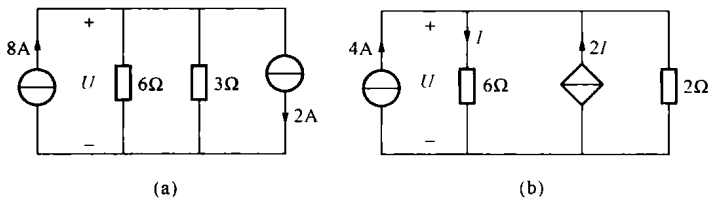
$$U = -15I = -15 \times 8 = -120 \text{ (V)}$$

各元件吸收的功率分别为

$$P_{120V} = -120I = -120 \times 8 = -960 \text{ (W)}, P_{30\Omega} = 30I^2 = 30 \times 8^2 = 1920 \text{ (W)}$$

$$P_{2U} = 2UI = 2 \times (-120) \times 8 = -1920 \text{ (W)}, P_{15\Omega} = 15I^2 = 15 \times 8^2 = 960 \text{ (W)}$$

2-2 分别求题 2-2 图所示电路中的电压 U 及各元件吸收的功率。



题 2-2 图

解 (a) 双节点电压方程为

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)U = 8 - 2$$

解之得

$$U = 12\text{V}$$

各元件吸收的功率分别为

$$P_{8A} = -8U = -8 \times 12 = -96 \text{ (W)}, P_{6\Omega} = \frac{U^2}{6} = \frac{12^2}{6} = 24 \text{ (W)}$$

$$P_{3\Omega} = \frac{U^2}{3} = \frac{12^2}{3} = 48 \text{ (W)}, P_{2A} = 2U = 2 \times 12 = 24 \text{ (W)}$$

(b) 将受控电流源当作独立电流源, 则双节点电压方程为

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)U = 4 + 2I$$

补充方程为

$$I = \frac{U}{6}$$

联立解得

$$U = 12\text{V}, I = 2\text{A}$$

各元件吸收的功率分别为

$$P_{4\text{A}} = -4U = -4 \times 12 = -48 \text{ (W)}, P_{6\Omega} = 6I^2 = 6 \times 2^2 = 24 \text{ (W)}$$

$$P_{2\Omega} = \frac{U^2}{2} = \frac{12^2}{2} = 72 \text{ (W)}, P_{2\text{I}} = -2IU = -2 \times 2 \times 12 = -48 \text{ (W)}$$

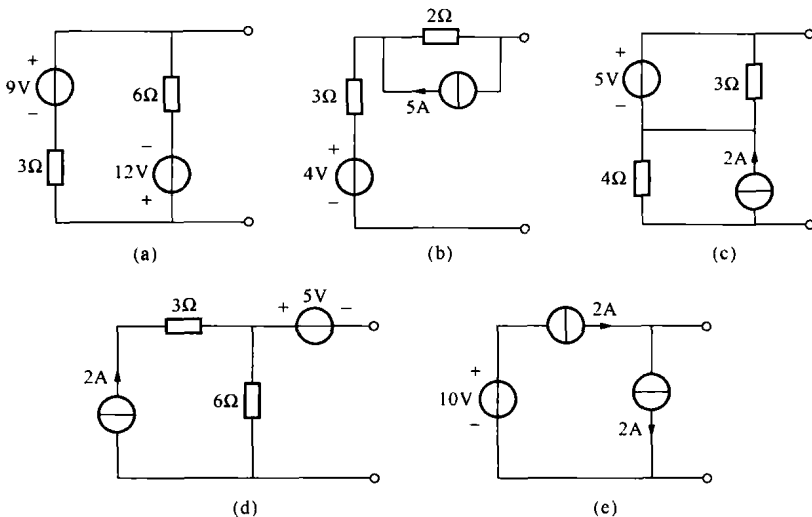
注: 单回路电路和双节点电路的分析方法是固定的, 必须熟练掌握。

二端网络的 VAR

注: ① 正确写出简单二端网络的端口伏安关系是电路的基本功之一; ② 由端口伏安关系正确画出对应的最简二端网络是电路的另一个基本功。

不含受控源二端网络的等效化简

2-5 化简题 2-5 图所示各二端网络。



题 2-5 图

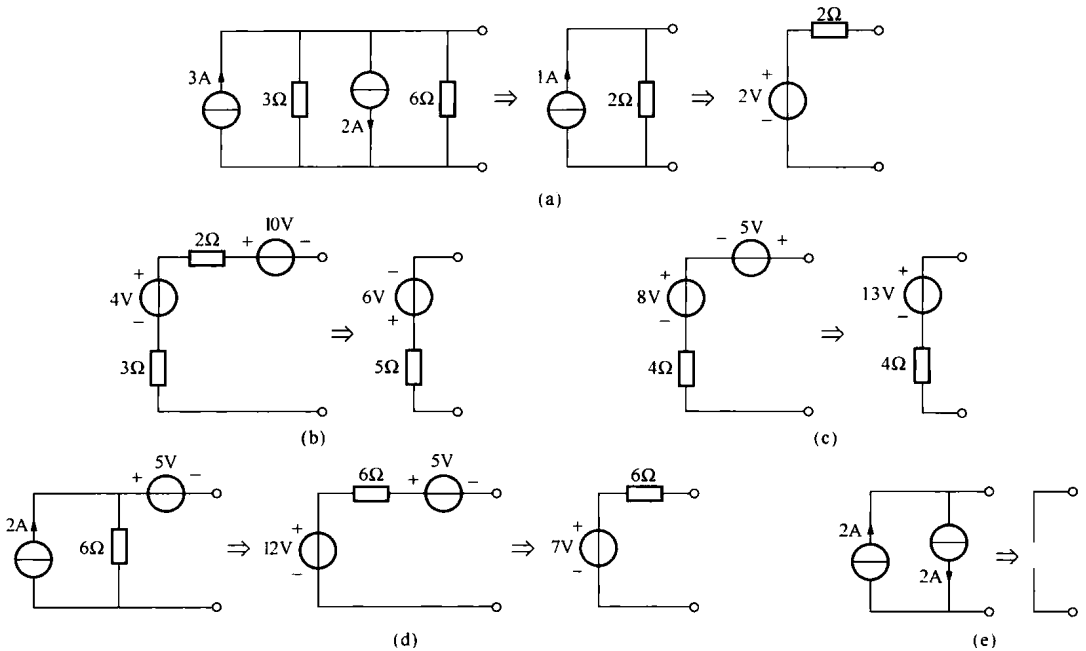
解 (a) 题 2-5 图 (a) 电路中两条支路并联, 需将支路等效为诺顿等效电路。等效过程如题 2-5 解图 (a) 所示。

(b) 题 2-5 图 (b) 电路中两条支路串联, 需将诺顿等效电路的支路等效为戴维南等效电路。等效过程如题 2-5 解图 (b) 所示。

(c) 题 2-5 图 (c) 电路中与电压源并联的电阻为多余元件, 开路处理。等效过程如题 2-5 解图 (c) 所示。

(d) 题 2-5 图 (d) 电路中 3A 电流源与 3Ω 电阻串联，为多余元件，短路处理。等效过程如题 2-5 解图 (d) 所示。

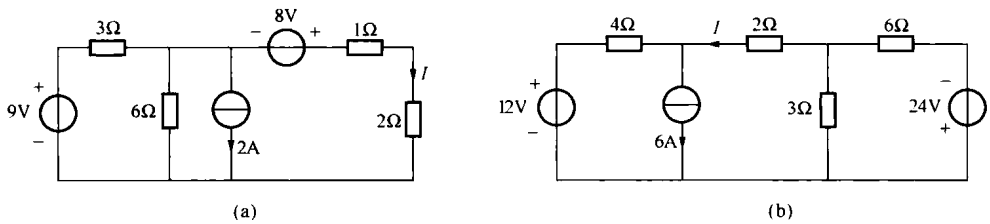
(e) 题 2-5 图 (e) 电路中 10V 电压源为多余元件，短路处理。等效过程如题 2-5 解图 (e) 所示。



题 2-5 解图

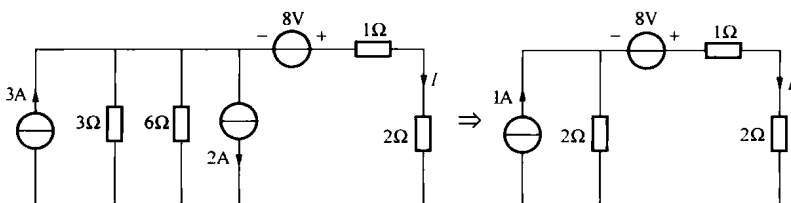
2-6 见 [例 2-2]。

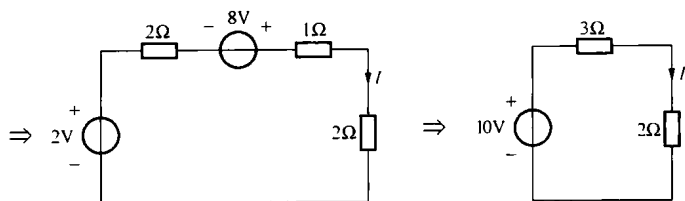
2-7 试用等效化简的方法求题 2-7 图所示各电路中的电流 I 。



题 2-7 图

解 (a) 原电路的等效化简过程如下：

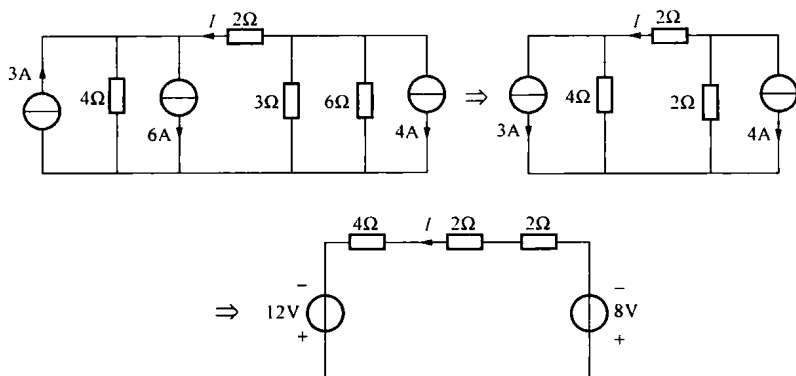




由等效简化电路可得

$$I = \frac{10}{3+2} = 2 \text{ (A)}$$

(b) 原电路的等效化简过程如下:

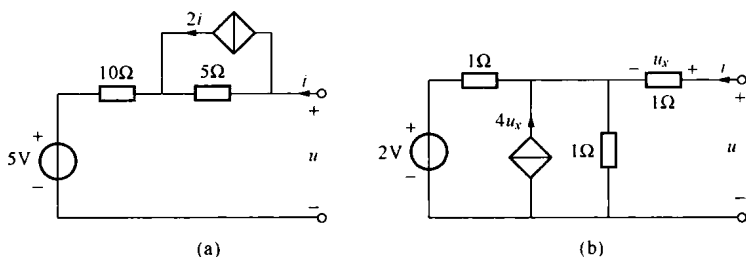


由等效简化电路可得

$$I = \frac{12-8}{4+2+2} = 0.5 \text{ (A)}$$

含受控源网络的等效化简

2-8 求题 2-8 图所示各二端网络的 VAR, 并画出最简等效电路。



题 2-8 图

解 (a) 原电路的等效化简过程如题 2-8 解图 (a) 所示。由 KVL 得

$$u = -10i + 15i + 5 = 5i + 5$$

最简等效电路如题 2-8 解图 (b) 所示。

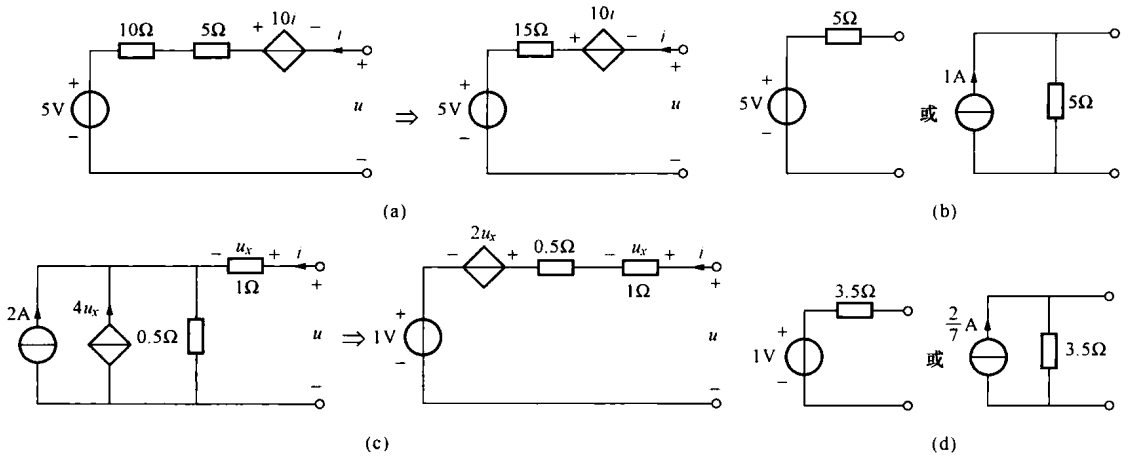
(b) 原电路的等效化简过程如题 2-8 解图 (c) 所示。由 KVL 得

$$u = i + 0.5i + 2u_x + 1 = 1.5i + 2u_x + 1$$

而 $u_x = i$, 所以

$$u = 1.5i + 2i + 1 = 3.5i + 1$$

因此, 最简等效电路如题 2-8 解图 (d) 所示。

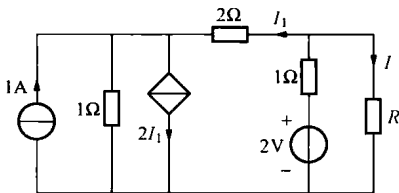


题 2-8 解图

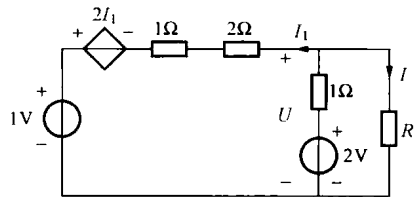
2-9 电路如题 2-9 图所示, 分别求 $R=1\Omega$ 和 $R=2\Omega$ 时的电流 I 。

解 由原电路进行等效变换得题 2-9 解图电路。由图可知, I_1 端口的伏安关系为

$$U = (1+2)I_1 - 2I_1 + 1 = I_1 + 1$$

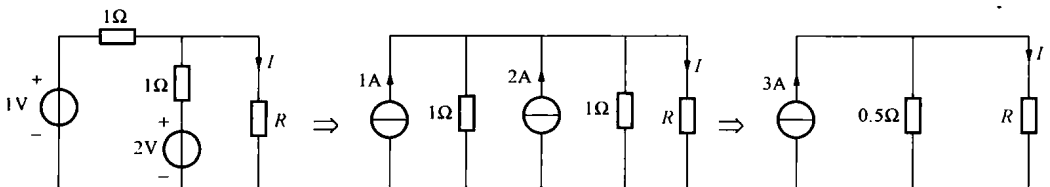


题 2-9 图



题 2-9 解图

据此可将电路进一步等效为:



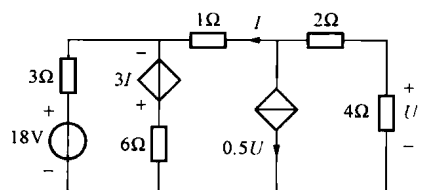
所以
$$I = \frac{0.5}{0.5+R} \times 3 = \frac{1.5}{0.5+R}$$

则 $R=1\Omega$ 时

$$I = \frac{1.5}{0.5+1} = 1 \text{ (A)}$$

$R=2\Omega$ 时

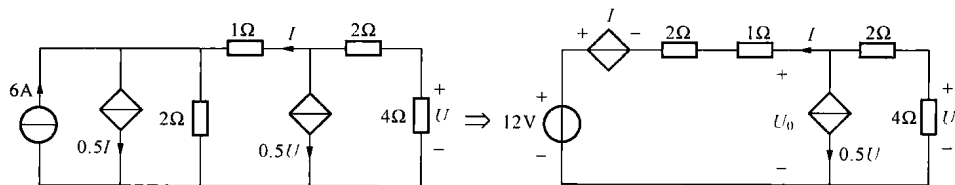
$$I = \frac{1.5}{0.5+2} = 0.6 \text{ (A)}$$



题 2-10 图

2-10 试用等效化简的方法求题 2-10 图所示电路中 4Ω 电阻的功率。

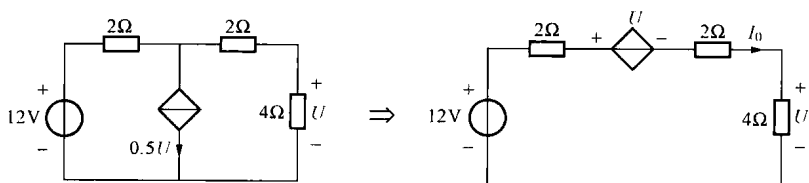
解 对原电路进行等效化简，过程如下：



由 KVL 得

$$U_0 = I + 2I - I + 12 = 12 + 2I$$

则电路可进一步等效为



单回路方程为

$$8I_0 = -U + 12, U = 4I_0$$

因此

$$8I_0 + 4I_0 = 12$$

则

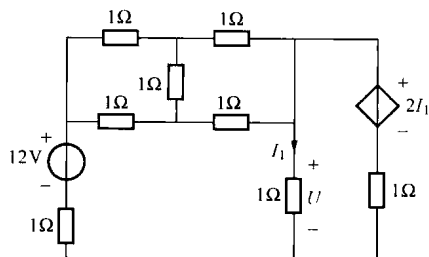
$$I_0 = 1A$$

所以

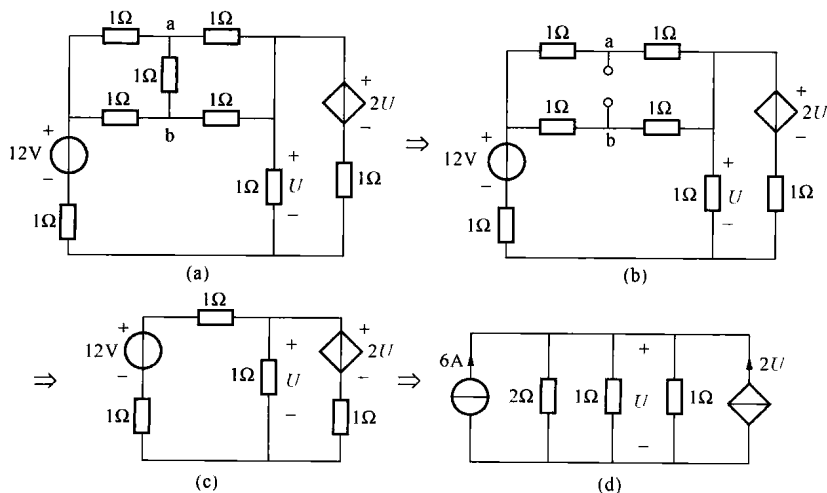
$$P = 4I_0^2 = 4 \times 1^2 = 4(W)$$

2-11 电路如题 2-11 图所示，试用等效化简法求电路中的电压 U 。

解 将控制量 I_1 用 U 代替（控制量转移），电路如题 2-11 解图 (a) 图所示。因为 a、b 两点等电位（电桥平衡），所以，电路可进一步等效为题 2-11 解图 (b) ~ (d)。



题 2-11 图



题 2-11 解图

双节点电压方程为

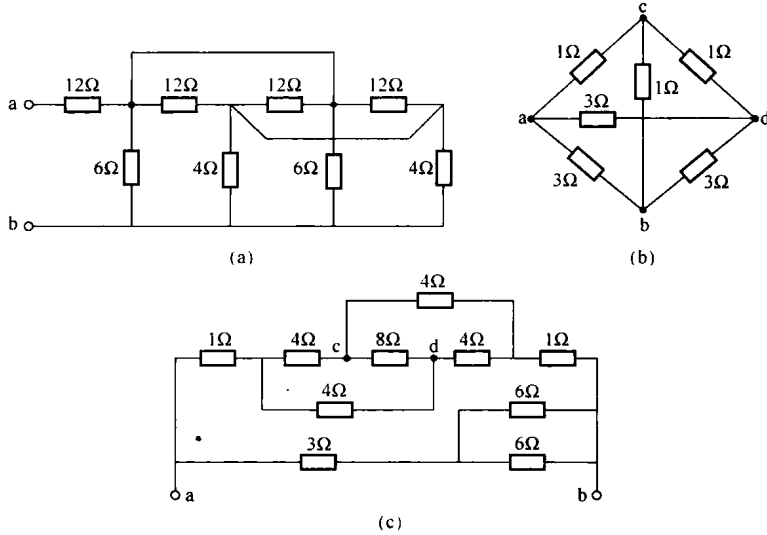
$$\left(1+1+\frac{1}{2}\right)U=6+2U$$

解之得

$$U=12\text{V}$$

输入电阻

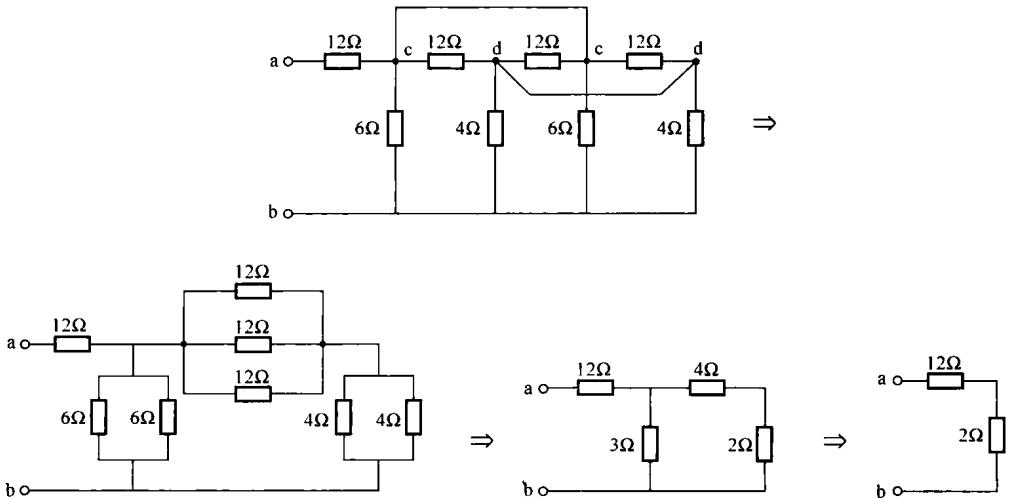
2-12 求题 2-12 图所示各电路 a、b 两端的输入电阻 R_{ab} 。



题 2-12 图

解 (a) 对节点进行编号, 并改画电路。显然, 电路仅由电阻串并联组成, 可进行电阻串并联等效化简 [见图 2-12 解图 (一)], 可得

$$R_{ab}=12+2=14 (\Omega)$$

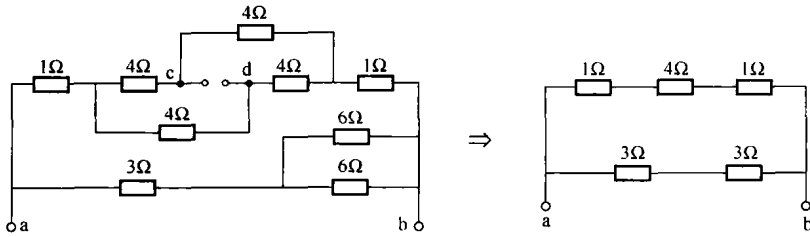


题 2-12 解图 (一)

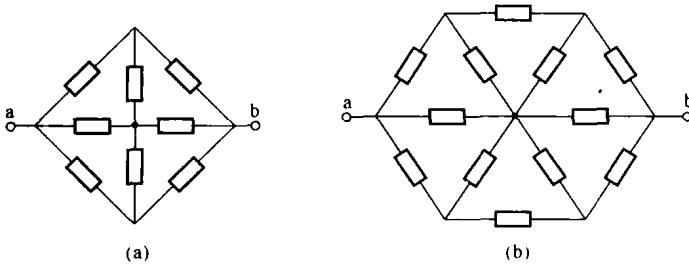
(b) 见 [例 2-4]。

(c) 因为 c、d 两点等电位 (电桥平衡), cd 支路开路, 则原电路可进行等效简化 [见图 2-12 解图 (二)], 可得

$$R_{ab} = (1+1+4) // (3+3) = 3 \text{ (}\Omega\text{)}$$



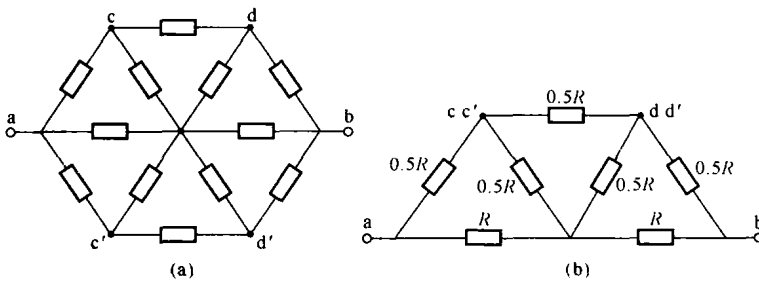
2-13 试求题 2-13 图所示电路位于 a、b 两个端钮之间的等效电阻 (图中电阻均为 R)。



题 2-13 图

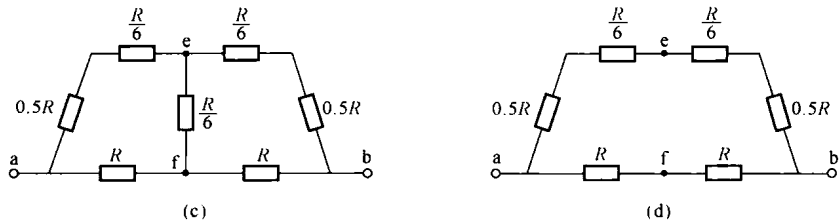
解 (a) 见 [例 2-5]。

(b) 对节点进行编号, 见图 2-13 解图 (a)。由电路的对称结构可知, c、c' 两点等电位, d、d' 两点等电位。将它们分别短接, 电路如图 2-13 解图 (b) 所示。



题 2-13 解图 (一)

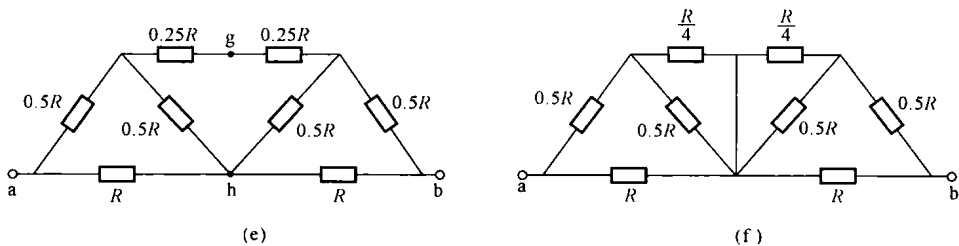
方法 1: 将 Δ 连接转化为 Y 连接, 电路如图 2-13 解图 (c) 所示。电桥平衡, e、f 两点等电位, 断开 ef 支路, 电路如图 2-13 解图 (d) 所示。



题 2-13 解图 (二)

$$R_{ab} = (R+R) // \left(0.5R + \frac{R}{6} + 0.5R + \frac{R}{6} \right) = \frac{4}{5}R$$

方法 2: 将题 2-13 解图 (b) 转化为题 2-13 解图 (e)。由电路结构可知, 题 2-13 解图 (e) 中 g、h 两点等电位, 因此可得题 2-13 解图 (f)。

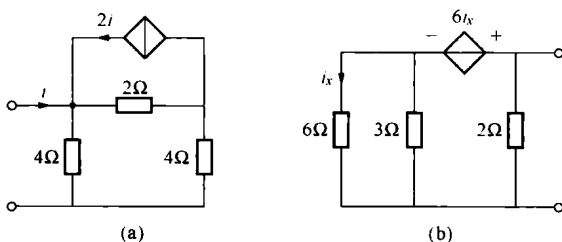


题 2-13 解图 (三)

$$R_{ab} = 2 \left[R // \left(\frac{R}{2} + \frac{R}{2} // \frac{R}{4} \right) \right] = \frac{4}{5}R$$

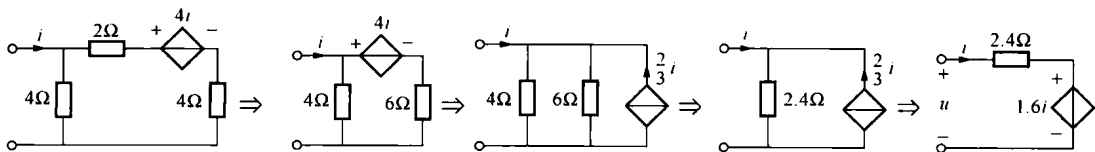
注: 对于几何结构完全对称、含有 Y 和 Δ 连接的电阻电路, 不必马上进行 Y- Δ 变换, 而应找出等电位点, 并短接处理。这样可有效减少计算量。

2-14 求题 2-14 图所示二端网络的输入电阻 R_i 。



题 2-14 图

解 (a) 原电路的等效化简过程如下:



由 KVL 得

$$u = 2.4i + 1.6i = 4i$$

所以, 输入电阻为

$$R_i = \frac{u}{i} = 4\Omega$$

(b) 端口电压和端口电流的参考方向如题 2-14 解图所示。

由 KVL 和元件的 VAR 得

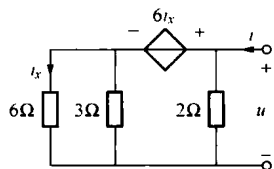
$$u = 6i_x + 6i_x = 12i_x$$

由 KCL 和元件的 VAR 得

$$i = \frac{u}{2} + i_x + \frac{6i_x}{3} = \frac{12i_x}{2} + 3i_x = 9i_x$$

所以

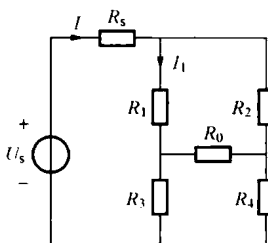
$$R_i = \frac{u}{i} = \frac{12i_x}{9i_x} = \frac{4}{3} (\Omega)$$



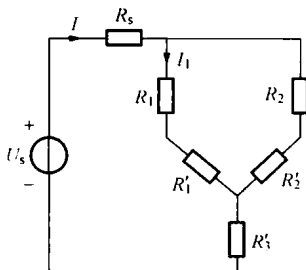
题 2-14 解图

Y-Δ变换

2-15 题 2-15 图所示电路中, $R_s = 5\Omega$, $R_1 = 36\Omega$, $R_2 = 20\Omega$, $R_3 = 10\Omega$, $R_4 = 50\Omega$, $R_0 = 40\Omega$, $U_s = 30V$ 。求电流 I 和 I_1 。



题 2-15 图



题 2-15 解图

解 利用 Δ -Y 变换, 将原电路等效为题 2-15 解图。其中

$$R'_1 = \frac{R_3 R_0}{R_0 + R_3 + R_4} = \frac{10 \times 40}{40 + 10 + 50} = 4 (\Omega), \quad R'_2 = \frac{R_4 R_0}{R_0 + R_3 + R_4} = \frac{50 \times 40}{40 + 10 + 50} = 20 (\Omega)$$

$$R'_3 = \frac{R_3 R_4}{R_0 + R_3 + R_4} = \frac{10 \times 50}{40 + 10 + 50} = 5 (\Omega)$$

由等效电路得

$$I = \frac{U_s}{R_s + (R_1 + R'_1) // (R_2 + R'_2) + R'_3} = \frac{30}{5 + (36 + 4) // (20 + 20) + 5} = 1 (\text{A})$$

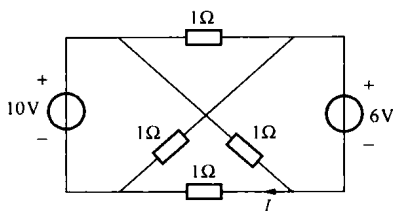
根据分流公式得

$$I_1 = \frac{1}{2} I = 0.5 \text{A}$$

注: 本题也可把 R_0 、 R_2 和 R_4 构成的 Y 连接变换为 Δ 连接进行分析。

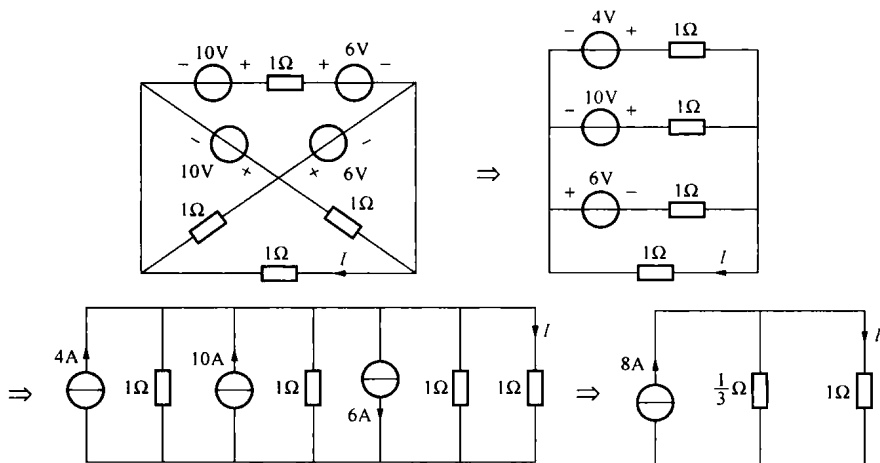
* 电源位移

2-16 求题 2-16 图所示电路中的电流 I 。



题 2-16 图

解 利用电压源位移原理将原电路中两个无伴电压源位移，再等效化简，过程如下：



由此可得

$$I = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} \times 8 = 2 \text{ (A)}$$

2-17 [提示] 先将无伴独立电压源位移，再进行等效化简可得双节点电路。

2-18 [提示] 求电压源 U_{s1} 提供的功率，需要求出该电压源的电流。将 U_{s1} 和电阻 R_1 相串联的支路抽出，对所得二端网络进行等效化简。先将 R_3 、 R_4 与 R_5 三个电阻构成的角型网络进行 Δ - Y 变换，再将无伴电流源 I_{s2} 位移，然后逐步化简。最终戴维南等效电路中电压源电压为 1.9V，电阻为 1.9Ω。

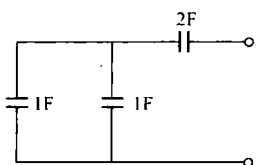
其他

2-23 求题 2-23 图所示二端电路的等效电容。

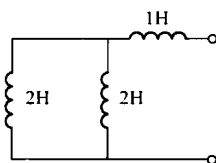
解 电容的串并联公式与电导相似，则有

$$C = 2 // (1 + 1) = \frac{2 \times 2}{2 + 2} = 1 \text{ (F)}$$

2-24 求题 2-24 图所示二端电路的等效电感。



题 2-23 图



题 2-24 图

解 电感的串并联公式与电阻相似, 则有

$$L = 1 + 2 // 2 = 1 + 1 = 2 \text{ (H)}$$

2.5 自测题及参考答案

1. 写出图 1 所示网络 ab 端口的伏安特性方程。

2. 求图 2 所示电路的电流 I 。

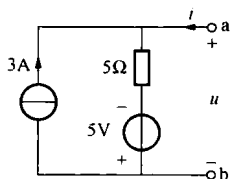


图 1

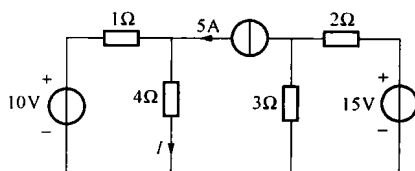


图 2

3. 求图 3 所示电路中的电压 U 。

4. 求图 4 所示各电路的输入电阻 R_i 。

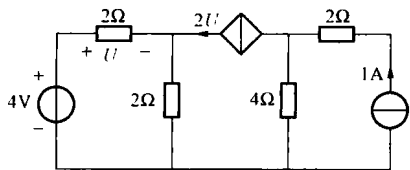
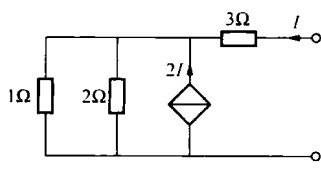
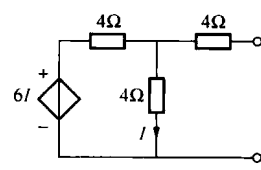


图 3



(a)



(b)

图 4

5. 求图 5 所示电路的输入电阻 R_i 。

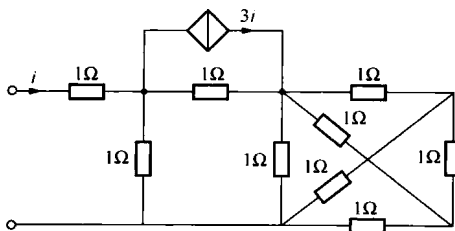


图 5

6. 用等效化简的方法分别求图 6 所示各电路中的电压 U 。

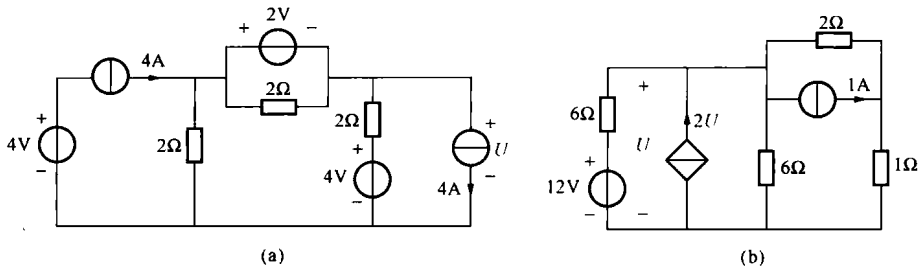


图 6

参考答案

1. $u = 5i + 10$
2. $I = 3\text{A}$
3. $U = \frac{2}{3}\text{V}$
4. $5\Omega; 12\Omega$
5. $R_i = 0.4\Omega$
6. $1\text{V}; -1\text{V}$

第3章 复杂电阻电路的分析

3.1 本章知识结构图

第3章知识结构图如图3-1所示。

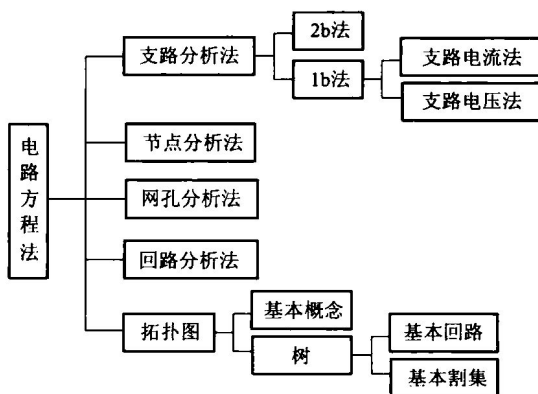


图3-1 第3章知识结构图

3.2 知识点归纳与学习指导

本章介绍的电路方程方法不需要进行电路结构的变化，而是通过选择合适的变量建立方程，其规律性强，是分析电路的一般方法。运用电路方程方法求解电路的一般步骤为：

(1) 按列写规则建立电路方程。受控源的处理原则：先把受控源视为独立源建立方程，再把控制量用方程变量表示（称为辅助方程）。

(2) 联立求解建立的方程获得方程变量的解。

(3) 依据 KCL 或 KVL 和元件（或支路）方程求解支路电流、电压，进而求得其他量。

本章介绍的方法有支路分析法、节点分析法、网孔分析法和回路分析法。本章的图论基本知识主要用来帮助有规律地选择独立回路。由于电路方程的列写有规律可循，因此，学习本章时，应先牢记各种方法的一般列写规则，再掌握特殊点的处理方法。

3.2.1 支路分析法

支路分析法分为 2b 分析法和 1b 分析法。2b 分析法已在第 1 章中介绍，1b 分析法又分为支路电流法和支路电压法两种。

1. 支路电流法

支路电流法是指以支路电流为变量建立电路方程进行分析计算的一种方法。这组以支路电流为变量的方程称为支路电流方程。列写支路电流方程的步骤如下：

(1) 指定各支路电流的参考方向。

(2) 根据 KCL, 对 $n-1$ 个独立节点列写 KCL 方程 (直接利用独立和受控电流源电流)。

(3) 应用 KVL 并结合元件的 VAR, 对 $b-n+1$ 个独立回路列写以支路电流为变量的方程。有受控源时, 用辅助方程 (控制量用支路电流表示) 消去控制量。回路中含有无伴电流源时, 需设定其端电压列写方程。

2. 支路电压法

支路电压法是指以支路电压为变量建立电路方程进行分析计算的一种方法。这组以支路电压为变量的方程称为支路电压方程。列写支路电压方程的步骤如下:

(1) 指定各支路电压的参考极性。

(2) 选取 $b-n+1$ 个独立回路, 列写独立的 KVL 方程 (直接利用独立和受控电压源电压)。

(3) 应用 KCL 并结合元件的 VAR, 对 $n-1$ 个独立节点列写以支路电压为变量的方程。有受控源时, 用辅助方程 (控制量用支路电压表示) 消去控制量。节点中含有无伴电压源时, 需设定其电流列写方程。

【例 3-1】 试用支路电流法求图 3-2 所示电路中的各支路电流。

解 由 KCL 得

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

由 KVL 得

$$7I_1 + 11I_2 = 70 - 6$$

$$-11I_2 + 7I_3 = 6$$

联立以上三式求解得

$$I_1 = 6\text{A}, I_2 = 2\text{A}, I_3 = 4\text{A}$$

3.2.2 节点分析法

节点〔分析〕法是以节点电压为变量建立电路节点电压方程进行分析计算的一种方法。

节点分析法是双节点电路分析方法的一般化。节点电压的参考方向均以参考点处为低电位 (负极性)。节点电压方程实质上体现的是节点的 KCL 方程。

对于 $(n+1)$ 个节点的电路, 节点电压方程的一般形式为

$$\begin{cases} G_{11}u_{n1} + G_{12}u_{n2} + \cdots + G_{1n}u_{nn} = J_1 \\ G_{21}u_{n1} + G_{22}u_{n2} + \cdots + G_{2n}u_{nn} = J_2 \\ \vdots \\ G_{n1}u_{n1} + G_{n2}u_{n2} + \cdots + G_{nn}u_{nn} = J_n \end{cases}$$

节点电压方程等号左边以流出节点电流为正。

1. 不含无伴电压源情形

不含无伴电压源时, 列写节点电压方程的一般步骤如下:

(1) 选定参考点, 并对独立节点进行编号。

(2) 把受控源视为独立电源列写“节点电压方程”。

这组方程相当于由电阻、电流源和有伴电压源组成电路的节点电压方程。每个方程都遵

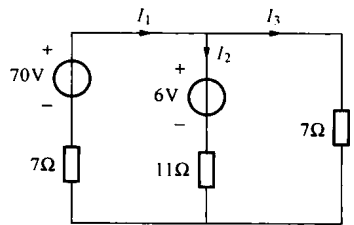


图 3-2 [例 3-1] 图

循下列的列写规律

本节点电压 \times 自电导 $+$ 相邻节点电压 \times 互电导 $=$ 本节点电源注入电流的代数和
其列写规则为:

1) 自电导 G_{ii} 等于连接在第 i 个节点的所有支路的电导 (与电流源串联者除外) 之和。互电导 G_{ij} ($i \neq j$) 等于节点 i 和 j 之间所有直接相连支路的电导 (与电流源串联者除外) 之和的负值, 此时 $G_{ij} = G_{ji}$ 。

列写方程前, 可先将与电流源相串联的元件短接。

2) J_i 为连接于节点 i 的所有电流源和等效电流源注入电流的代数和。电流源电流方向指向节点取正, 否则取负; 对于等效电流源, 电压源的正极性连接到节点时取正, 否则取负。其值等于电压源的电压除以相串联电阻的电阻值。

(3) 将非节点电压控制量用节点电压表示 (辅助方程)。如果控制量是电压, 则根据 KVL 将该电压用节点电压表示; 如果控制量是支路电流, 则根据元件的 VAR 先用支路电压表示, 再用节点电压表示。

(4) 消去上述“节点电压方程”中的非节点电压控制量, 整理得节点电压方程。

【例 3-2】 列写图 3-3 所示电路的节点电压方程 (仅用节点电压表示)。

解 把受控源视为独立电源, 则电路的节点电压方程为

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)U_{n1} - \frac{1}{2}U_{n2} - \frac{1}{2}U_{n3} = 2 \\ -\frac{1}{2}U_{n1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)U_{n2} = \frac{6}{2} - 2I_1 \\ -\frac{1}{2}U_{n1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)U_{n3} = \frac{2}{2} + 2I_1 \end{cases}$$

补充方程为

$$I_1 = \frac{U_{n2} - 6}{2} = 0.5U_{n2} - 3$$

整理得

$$\begin{cases} U_{n1} - 0.5U_{n2} - 0.5U_{n3} = 2 \\ -0.5U_{n1} + 2U_{n2} = 9 \\ -0.5U_{n1} - U_{n2} + U_{n3} = -5 \end{cases}$$

2. 含无伴电压源情形

电路中含有无伴电压源支路将给应用节点分析法带来困难, 分下列两种情况处理:

(1) 无伴电压源有一端接参考点。该电压源连接的非参考节点的电压已知。令节点电压等于电压源的电压作为该节点的节点电压方程。

(2) 无伴电压源接在两个非参考节点之间。将该电压源的电流 i 作为附加变量。在列写方程时, 先把无伴电压源当作一电流为 i 的电流源看待。然后补充用节点电压表示的无伴电压源方程作为附加方程。这种把电流选作附加变量建立方程进行分析的方法称为改进节点法, 相应的方程称为改进节点电压方程。

另一种方法是直接对包含无伴电压源的广义节点列写 KCL 方程, 并把电流直接用节点电压表示。

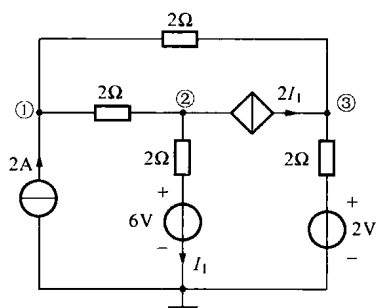


图 3-3 [例 3-2] 图

【例 3-3】 用节点法求图 3-4 所示电路中受控源吸收的功率。

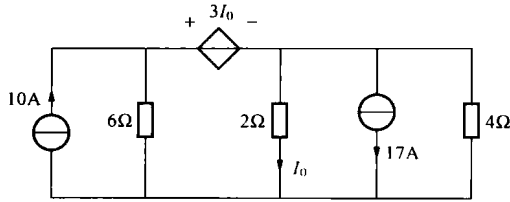


图 3-4 [例 3-3] 图

解 节点编号如图 3-5 (a) 所示。把无伴 CCVS 视为电流源，则电路的节点电压方程为

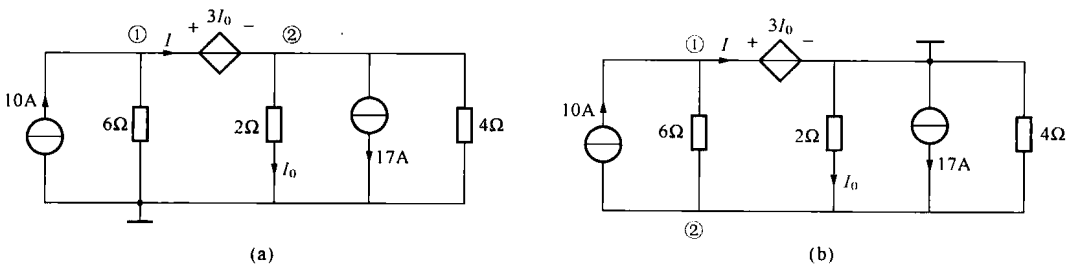


图 3-5 [例 3-3] 解图

$$\begin{cases} \frac{1}{6}U_{n1} = 10 - I \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)U_{n2} = I - 17 \end{cases}$$

补充方程为

$$\begin{cases} U_{n1} - U_{n2} = 3I_0 \\ I_0 = \frac{U_{n2}}{2} \end{cases}$$

将以上两组方程整理得

$$\begin{cases} 2U_{n1} + 9U_{n2} = -84 \\ U_{n1} - 2.5U_{n2} = 0 \end{cases}$$

解之得

$$U_{n1} = -15\text{V}, U_{n2} = -6\text{V}$$

则

$$I = 10 - \frac{U_{n1}}{6} = 10 - \frac{1}{6} \times (-15) = 12.5 \text{ (A)}$$

$$I_0 = \frac{U_{n2}}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \text{ (A)}$$

所以受控源吸收的功率为

$$P = 3I_0 I = 3 \times (-3) \times 12.5 = -112.5 \text{ (W)}$$

或者节点编号如图 3-5 (b) 所示，则节点电压方程为

$$\begin{cases} U_{n1} = 3I_0 \\ -\frac{1}{6}U_{n1} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)U_{n2} = 17 - 10 \end{cases}$$

补充方程为

$$I_0 = -\frac{U_{n2}}{2}$$

整理得

$$\begin{cases} U_{n1} + 1.5U_{n2} = 0 \\ -U_{n1} + 5.5U_{n2} = 42 \end{cases}$$

解之得

$$U_{n1} = -9\text{V}, U_{n2} = 6\text{V}$$

则

$$I_0 = -\frac{U_{n2}}{2} = -3 \text{ (A)}, I = 10 - \frac{U_{n1} - U_{n2}}{6} = 12.5 \text{ (A)}$$

所以受控源吸收的功率为

$$P = 3I_0 I = 3 \times (-3) \times 12.5 = -112.5 \text{ (W)}$$

注：通过选择合适的参考节点，可减少计算量。

学习节点分析法时，应先牢固掌握由电阻、独立电流源和有伴独立电压源组成电路的节点电压方程列写规律。在此基础上，学会含无伴电压源电路的处理，最后扩展到含受控源的电路。要特别注意：① 与电流源串联的电阻（多余元件）不考虑；② 通过单位，分清电阻和电导；③ 列写方程时，不要漏记接在两个非参考节点之间的无伴电压源的电流；④ 两个电阻 R_1 和 R_2 串联，其电导为 $1/(R_1 + R_2)$ ，而不等于 $(1/R_1 + 1/R_2)$ 。

3.2.3 网孔分析法

网孔分析法是以网孔电流为变量建立电路网孔电流方程进行分析计算的一种方法。

网孔电流方程实质上是 KVL 的体现，方程等号左边是以沿网孔电流方向的电压降为正，而右边则是独立电压源和等效电压源电压升为正。网孔分析法是单回路电路分析方法的一般化，只适用于平面电路。

网孔电流方程的一般形式 (l 个内网孔) 为

$$\begin{cases} R_{11}i_{m1} + R_{12}i_{m2} + \cdots + R_{1l}i_{ml} = E_{s1} \\ R_{21}i_{m1} + R_{22}i_{m2} + \cdots + R_{2l}i_{ml} = E_{s2} \\ \vdots \\ R_{l1}i_{m1} + R_{l2}i_{m2} + \cdots + R_{ll}i_{ml} = E_{sl} \end{cases}$$

1. 不含无伴电流源情形

不含无伴电流源时，列写网孔电流方程的一般步骤如下：

(1) 指定各网孔电流的参考方向（取同一方向）。

(2) 先把受控源当作独立源看待列写电路的“网孔电流方程”。这组方程相当于由二端电阻、电压源和有伴电流源组成电路的网孔电流方程，每个方程都遵循这样一个规律

本网孔电流 \times 自电阻 + 相邻网孔电流 \times 互电阻 = 本网孔电源电压升的代数和
其列写规则为：

1) 自电阻 R_{ii} 等于该网孔中所有支路的电阻（与电压源并联者除外）之和。互电阻 R_{ij}

($i \neq j$) 等于网孔 i 和网孔 j 的公共支路上电阻 (与电压源并联者除外) 之和的负值, 此时 $R_{ij} = R_{ji}$ 。

列写方程前, 可先将与电压源并联的电阻开路。

2) E_{si} 为第 i 个网孔中所有电压源和等效电压源电压升的代数和。当电压源的参考极性沿网孔电流方向为电压升时取正, 反之取负; 对于等效电压源, 当电流源的方向与所在网孔的网孔电流方向一致时取正, 反之取负号。其值等于电流源的电流乘以并联电阻的电阻值。

(3) 把非网孔电流的控制量用网孔电流表示 (辅助方程)。如果控制量是电流, 可根据 KCL 将该电流用网孔电流表示; 如果控制量是电压, 则根据元件 VAR 先把电压用其支路电流表示, 再用网孔电流表示。

(4) 消去“网孔电流方程”中的非网孔电流控制量, 整理得电路的网孔电流方程。

【例 3-4】 试用网孔法求图 3-6 (a) 所示电路中的电流 i 。

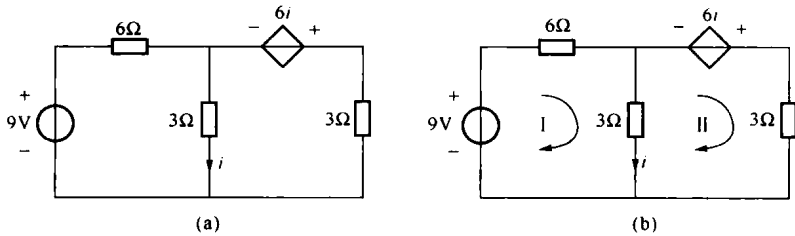


图 3-6 [例 3-4] 图

解 网孔编号如图 3-6 (b) 所示。电路的网孔电流方程为

$$\begin{cases} 9I_{m1} - 3I_{m2} = 9 \\ -3I_{m1} + 6I_{m2} = 6i \end{cases}$$

补充方程为

$$i = I_{m1} - I_{m2}$$

整理得

$$\begin{cases} 9I_{m1} - 3I_{m2} = 9 \\ -9I_{m1} + 12I_{m2} = 0 \end{cases}$$

联立解得

$$I_{m1} = \frac{4}{3} \text{ A}, I_{m2} = 1 \text{ A}$$

所以

$$i = I_{m1} - I_{m2} = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} \text{ (A)}$$

2. 含无伴电流源情形

电路中含有无伴电流源支路将给应用网孔法带来困难, 分下列两种情况处理:

(1) 无伴电流源位于外围网孔。无伴电流源所在的网孔电流已知。令网孔电流等于无伴电流源的电流作为该网孔的网孔电流方程。

(2) 无伴电流源位于两个网孔的公共支路。将该无伴电流源的端电压 u 选作附加变量。在列写方程时, 先把无伴电流源当作一电压为 u 的电压源看待, 然后补充用网孔电流表示的

无伴电流源方程作为附加方程。

【例 3-5】 试列图 3-7 (a) 所示电路的网孔电流方程 (仅用网孔电流表示)。

解 设受控电流源的端电压为 U_0 , 其参考方向如图 3-7 (b) 所示, 则网孔电流方程为

$$\begin{cases} (2+4) I_{m1} - 4I_{m2} = -U_0 - 4U_x + 4 \\ I_{m2} = -3 \\ -2I_{m2} + (2+3) I_{m3} = U_0 \end{cases}$$

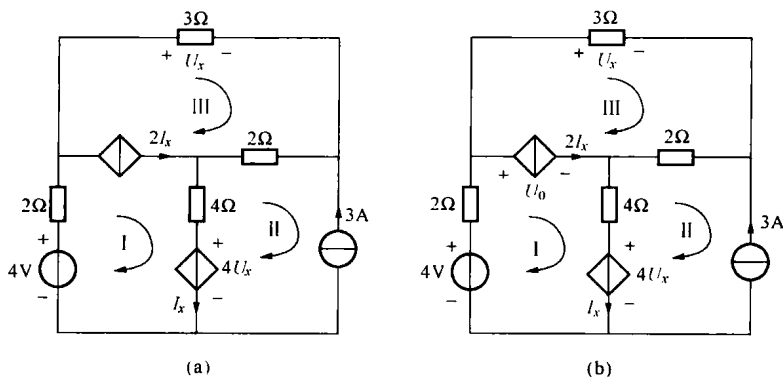


图 3-7 [例 3-5] 图

补充方程为

$$\begin{cases} I_{m1} - I_{m3} = 2I_x \\ I_x = I_{m1} - I_{m2} \\ U_x = 3I_{m3} \end{cases}$$

整理得电路的网孔电流方程为

$$\begin{cases} 6I_{m1} - 6I_{m2} + 17I_{m3} = 4 \\ I_{m2} = -3 \\ -I_{m1} + 2I_{m2} - I_{m3} = 0 \end{cases}$$

学习网孔分析法时, 可与节点分析法类比 (对偶) 地进行。应先掌握由电阻、独立电压源和有伴独立电流源组成电路的网孔电流方程列写规律。在此基础上, 扩展到包含无伴电流源的电路和含受控源的电路。要特别注意: ① 与电压源并联的电阻 (多余元件) 不考虑; ② 互电阻取电阻和的负值的原因是, 所有网孔电流取同一个方向使得两个网孔电流流过公共支路时方向相反; ③ 两个电阻 R_1 和 R_2 并联, 其电阻为 $R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$, 而不等于 $R_1 + R_2$; ④ 列写方程时, 不要漏记无伴电流源的端电压; ⑤ 熟练掌握支路电流与网孔电流的关系 (KCL 的一种表示形式)。

3.2.4 图论的基本知识

保持连接结构不变, 把电路中每条支路都用一条线段 (画成直线或弧线均可) 替换后所得到的几何结构图, 称为拓扑图, 简称“图”。这种图描述了原电路的结构及其连接性质, 即拓扑性质。图中的线段称为支路或边, 线段的端点称为节点或顶点。注意, 图并不反映元件的性质及支路之间的耦合关系。

电路元件的图如图 3-8 所示。

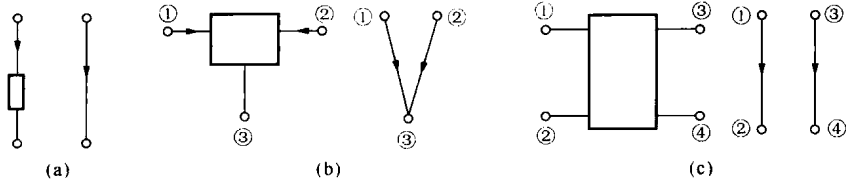


图 3-8 电路元件的图

(a) 二端元件 (支路); (b) 二端元件; (c) 双口元件

图是支路与节点的集合。每条支路都标有方向的图为有向图。支路均未赋以方向的图为无向图。任何两个节点之间都至少存在一条路径的图称为连通图。非连通图是由彼此分离的几部分组成的。在电路分析中,非连通图一般是由电路中的多口元件造成的。对于非连通图,分离的每一部分任取一节点,并把这些节点合并成一个节点(这样的合并对电路的性能并无影响),这样所得的图称为铰链图。铰链图是连通图。不失一般性,通常假设图是连通的。

子图: 其支路和节点都是原图的支路和节点的图。电路分析中常用的子图有回路、树和割集。

回路: 每个节点有且仅由两条支路相连的闭合路径。

树: 包含原图所有节点、不含回路的连通子图。组成树的支路称为树支,其余支路称为连支。对于 b 条支路、 n 个节点的图,树支数为 $n-1$,连支数为 $b-n+1$ 。

割集: 连通图中一些支路的集合。如果把这些支路全部移去,将使连通图变为分离的两部分;而少移去任一条支路,图仍是连通的。

确定割集的方法是先作出一个高斯面,然后再检验高斯面切割的一组支路是否符合上述的两个条件。如果符合,则这组支路的集合即为一个割集。显然,KCL 同样适用于割集。

基本回路: 只含一条连支的回路(单连支回路)。

习惯上取基本回路的方向与定义该基本回路的连支方向一致。基本回路数=连支数,基本回路组是一组独立回路。

基本割集: 只含一条树支的割集(单树支割集)。

习惯上取基本割集的方向与定义该基本割集的树支方向一致。基本割集数=树支数,基本割集组是一组独立割集。在确定基本割集时,应首先考虑单一树支的节点相连的一组支路。

树、基本回路和基本割集是拓扑图部分学习的重点,基本回路和基本割集也是难点。关键是牢固记忆它们的定义和掌握寻找基本回路和基本割集的方法。

3.2.5 回路分析法

回路〔分析〕法是一种以独立回路电流为变量,建立电路方程进行分析计算的方法。

回路法是网孔法的推广,不仅适用于平面电路,也适用于非平面电路。一般选取基本回路作为独立回路,回路电流就是相应的连支电流。

回路电流方程的一般形式 (l 个独立回路) 为

$$\begin{cases} R_{11}i_{l1} + R_{12}i_{l2} + \cdots + R_{1l}i_{lu} = E_1 \\ R_{21}i_{l1} + R_{22}i_{l2} + \cdots + R_{2l}i_{lu} = E_2 \\ \vdots \\ R_{l1}i_{l1} + R_{l2}i_{l2} + \cdots + R_{lu}i_{lu} = E_l \end{cases}$$

由于基本回路有多种选取方式,因此,回路法较网孔法具有更大的灵活性。回路电流方程与网孔电流方程的列写方法类似,但需注意,回路*i*与回路*j*的互电阻 R_{ij} ($i \neq j$),其绝对值等于这两个回路的共有支路的电阻(与电压源并联者除外)之和。当两个回路电流流过公共支路的方向相同时,互电阻取正,否则取负。掌握回路法的关键是:①能正确选出基本回路;②正确地找出公共支路和判断互电阻的正负号。

为了减少电路方程的数目,应尽可能多地把独立电流源、受控电流源和控制支路选作连支,把感兴趣的支路(即待求量所在支路)也选作连支。这样就使得电流源只属于一个基本回路,且该基本回路电流已知或不独立,该回路方程不需要再列写。

【例 3-6】 电路如图 3-9 (a) 所示,试设法只用一个方程求出电流 I 。

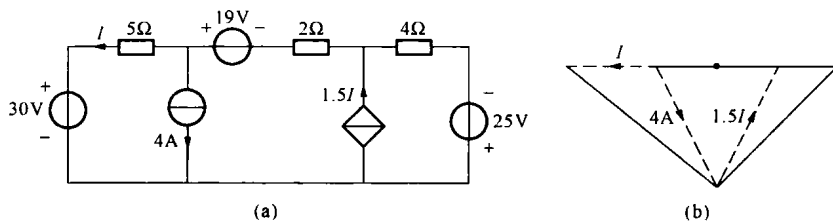


图 3-9 [例 3-6] 图

解 将待求电流支路、电流源、受控电流源选作连支,图 3-9 (a) 所示电路的拓扑图如图 3-9 (b) 所示。以待求电流 I 为回路电流的回路电流方程为

$$(5+4+2)I+4 \times (4+2)-1.5I \times 4=-30-25+19$$

整理得

$$5I=-60$$

则

$$I=-12\text{A}$$

注:本题也可直接用两类约束列写一个方程求解。

3.2.6 节点法和回路(网孔)法的比较

节点法和回路法既适用于平面电路,也适用于非平面电路,但网孔法只适用于平面电路。对于同一电路,节点法和回路(网孔)法所列方程数目不一定相同。节点数越少,无伴电流源越多,不能用压控型方程描述的元件越少,节点电压方程数越少;网孔数越少,无伴电压源越多,不能用流控型方程描述的元件越少,网孔电流方程数越少;由于树的选择是任意的,因此,回路法较网孔法具有更大的灵活性,基本回路越少,无伴电流源越多,回路电流方程数将越少。

对于给定的电路,选择何种方法建立方程,主要取决于所建方程数目的多少。一般而言,独立节点数少于独立回路数时选用节点法,否则选用回路(网孔)法。但具体选择方法时,还应考虑电路中电源的种类和所求量的类型。如果已知的电源是电流源,所求量为电压,则宜采用节点法。因为网孔电流或回路电流求出后,还得根据 KCL 和支路 VAR 进一步计算电压;反之,如果电源是电压源,所求量是电流,则采用回路(网孔)法较方便。

就网孔法和节点法二者相比较,设网孔数加上网孔公共支路无伴电流源数再减去外围网

孔中电流源数为 N_m ，独立节点数加上独立节点之间无伴电压源数再减去一端与参考点相连的电压源数为 N_n ，则当 $N_m < N_n$ 时，一般宜选用网孔法；否则选用节点法。就网孔法和回路法二者相比较：回路法需要事先选择树，公共支路需要细心判断，互电阻的正负需要具体确定，但容易处理任何支路的电流源，而且联立方程数可能更少；网孔法独立回路容易选定，公共支路一目了然，其方程的写法甚为简便，若将网孔电流取同一个方向，互电阻均取负，因而常为人所乐用，但处理公共支路的无伴电流源存在一定困难。从计算机辅助分析的角度看，以上三种分析方法中节点法的编程最为简单，可用添加支路的方法直接形成节点电压方程，因而应用最为广泛。

3.3 重点、难点与考点

重点与难点

本章的重点是节点分析法和回路（网孔）分析法，其中节点分析法在计算机辅助分析中获得了广泛应用。本章的难点是电路含无伴电压源和受控源时应用节点分析法、电路含无伴电流源和受控源时应用网孔分析法。基本回路和基本割集也是本章的难点。

考点

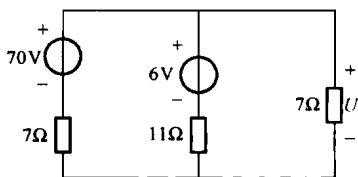
本章考试的重点和热点主要集中在节点分析法和回路（网孔）分析法，特别是电路含无伴电压源和受控源时应用节点分析法、电路含无伴电流源和受控源时应用网孔分析法，有时会涉及基本回路和基本割集、支路电流法。

3.4 第3章习题选解

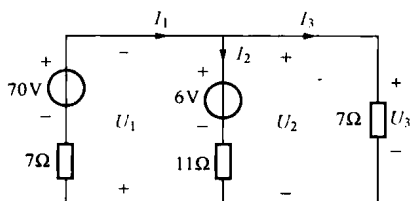
支路分析法

3-1 见 [例 3-1]。

3-2 试用支路电压法求题 3-1 图所示电路中的支路电压 U 。



题 3-1 图



题 3-2 解图

解 支路电压的参考方向如题 3-2 解图所示。由 KCL 和元件的 VAR 得

$$-\frac{U_1 + 70}{7} + \frac{U_2 - 6}{11} + \frac{U_3}{7} = 0$$

由 KVL 得

$$U_1 + U_2 = 0$$

$$U_2 - U_3 = 0$$

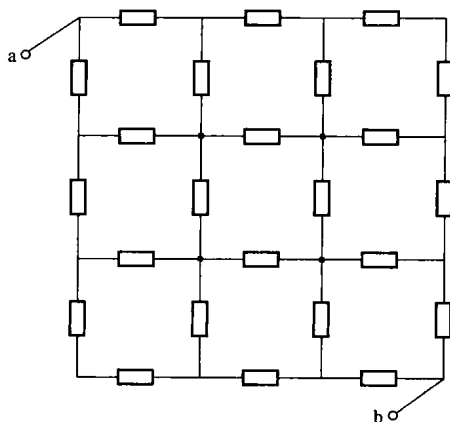
联立以上三式求解得

$$U_1 = -28\text{V}, U_2 = U_3 = 28\text{V}$$

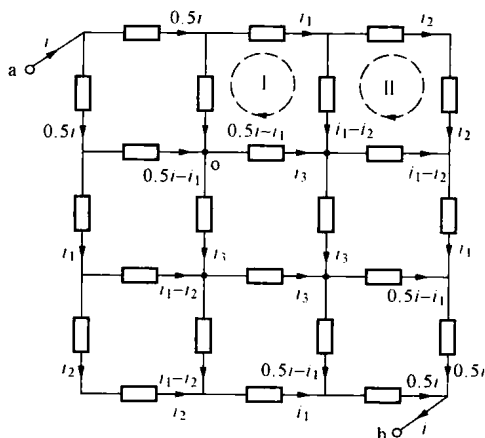
所以

$$U = U_3 = 28\text{V}$$

3-3 用支路分析法求题 3-3 图所示二端网络的输入电阻。已知图中各电阻均为 R 。



题 3-3 图



题 3-3 解图

解 根据电路对称结构的特点,各支路电流的分布情况如题 3-3 解图所示。由图可知,把端口电压 u_{ab} 用端口电流表示,需要先把电流 i_1 和 i_2 用端口电流表示。而支路电流共有 3 个未知量,故需列写 3 个独立的支路电流方程。为此,对两个独立网孔 I 和 II 以及独立节点 o 列写支路电流方程,得

$$\begin{cases} -(0.5i - i_1)R + i_1R + (i_1 - i_2)R - i_3R = 0 \\ -(i_1 - i_2)R + 2i_2R - (i_1 - i_2)R = 0 \\ 2(0.5i - i_1) - 2i_3 = 0 \end{cases}$$

解之得

$$i_1 = \frac{2}{7}i, i_2 = \frac{1}{7}i$$

所以

$$u_{ab} = 2(0.5i + i_1 + i_2)R = \frac{13}{7}Ri$$

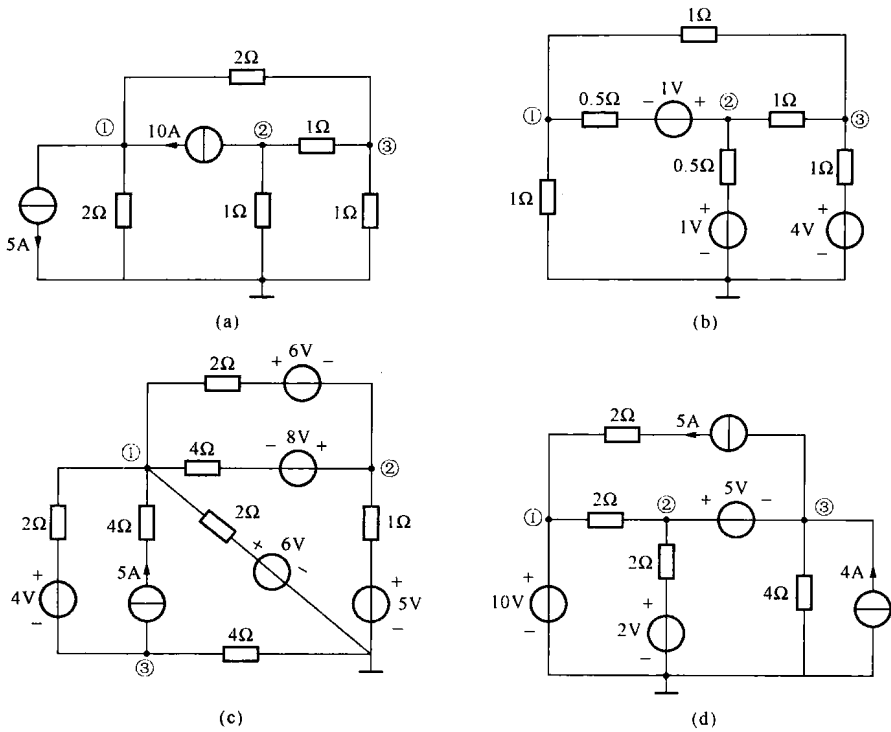
则

$$R_i = \frac{u_{ab}}{i} = \frac{13}{7}R$$

注: 本题求输入电阻的方法称为电流分布系数法。

节点分析法

3-4 列写题 3-4 图中各电路的节点电压方程 (仅用节点电压表示)。



题 3-4 图

解 (a) 节点电压方程为

$$\begin{cases} (0.5+0.5)U_{n1}-0.5U_{n3}=10-5 \\ (1+1)U_{n2}-U_{n3}=-10 \\ -0.5U_{n1}-U_{n2}+(1+1+0.5)U_{n3}=0 \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} U_{n1}-0.5U_{n3}=5 \\ 2U_{n2}-U_{n3}=-10 \\ -0.5U_{n1}-U_{n2}+2.5U_{n3}=0 \end{cases}$$

(b) 节点电压方程为

$$\begin{cases} (1+1+2)U_{n1}-2U_{n2}-U_{n3}=-2 \\ -2U_{n1}+(2+2+1)U_{n2}-U_{n3}=2+2 \\ -U_{n1}-U_{n2}+(1+1+1)U_{n3}=4 \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} 4U_{n1}-2U_{n2}-U_{n3}=-2 \\ -2U_{n1}+5U_{n2}-U_{n3}=4 \\ -U_{n1}-U_{n2}+3U_{n3}=4 \end{cases}$$

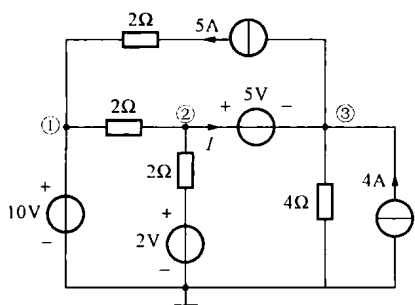
(c) 节点电压方程为

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)U_{n1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)U_{n2} - \frac{1}{2}U_{n3} = \frac{6}{2} - \frac{8}{4} + \frac{6}{2} + 5 + \frac{4}{2} \\ -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)U_{n1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1\right)U_{n2} = \frac{5}{1} - \frac{6}{2} + \frac{8}{4} \\ -\frac{1}{2}U_{n1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)U_{n3} = -5 - \frac{4}{2} \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} 7U_{n1} - 3U_{n2} - 2U_{n3} = 44 \\ -3U_{n1} + 7U_{n2} = 16 \\ -2U_{n1} + 3U_{n3} = -28 \end{cases}$$

(d) 设电压源支路的电流为 I , 参考方向如题 3-4 解图所示, 则电路的节点电压方程为



题 3-4 解图

$$\begin{cases} U_{n1} = 10 \\ -0.5U_{n1} + (0.5 + 0.5)U_{n2} = \frac{2}{2} - I \\ 0.25U_{n3} = I + 4 - 5 \end{cases}$$

补充方程为

$$U_{n2} - U_{n3} = 5$$

整理得

$$\begin{cases} U_{n1} = 10 \\ -0.5U_{n1} + U_{n2} + 0.25U_{n3} = 0 \\ U_{n2} - U_{n3} = 5 \end{cases}$$

注: (1) 计算自电导和互电导时, 与电流源串联的电阻不予考虑 (该电阻属于多余元件);

(2) 计算自电导和互电导时, 与电压源并联的电阻不属于多余元件, 需要考虑;

(3) 电路 (d) 中 5V 无伴电压源的电流切莫遗漏。

3-5 用节点分析法求题 3-5 图所示电路中的电压 U 和电流 I 。

解 节点电压方程为

$$\begin{cases} U_{n1} = 2 \\ -\frac{1}{2}U_{n1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)U_{n2} = 4 \\ -U_{n1} + 2U_{n3} = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_{n1} = 2 \\ -0.5U_{n1} + U_{n2} = 4 \\ -U_{n1} + 2U_{n3} = -4 \end{cases}$$

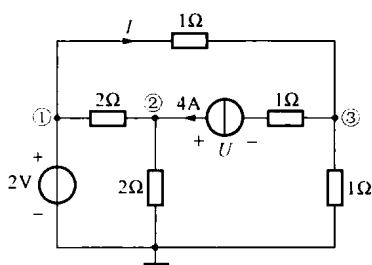
解之得

$$U_{n1} = 2\text{V}, U_{n2} = 5\text{V}, U_{n3} = -1\text{V}$$

所以

$$I = \frac{U_{n1} - U_{n3}}{1} = \frac{2 - (-1)}{1} = 3(\text{A}), U = U_{n2} - U_{n3} + 4 \times 1 = 5 - (-1) + 4 = 10(\text{V})$$

注: 计算自电导和互电导时, 与 4A 电流源串联的电阻不予考虑 (该电阻属于多余元件)。



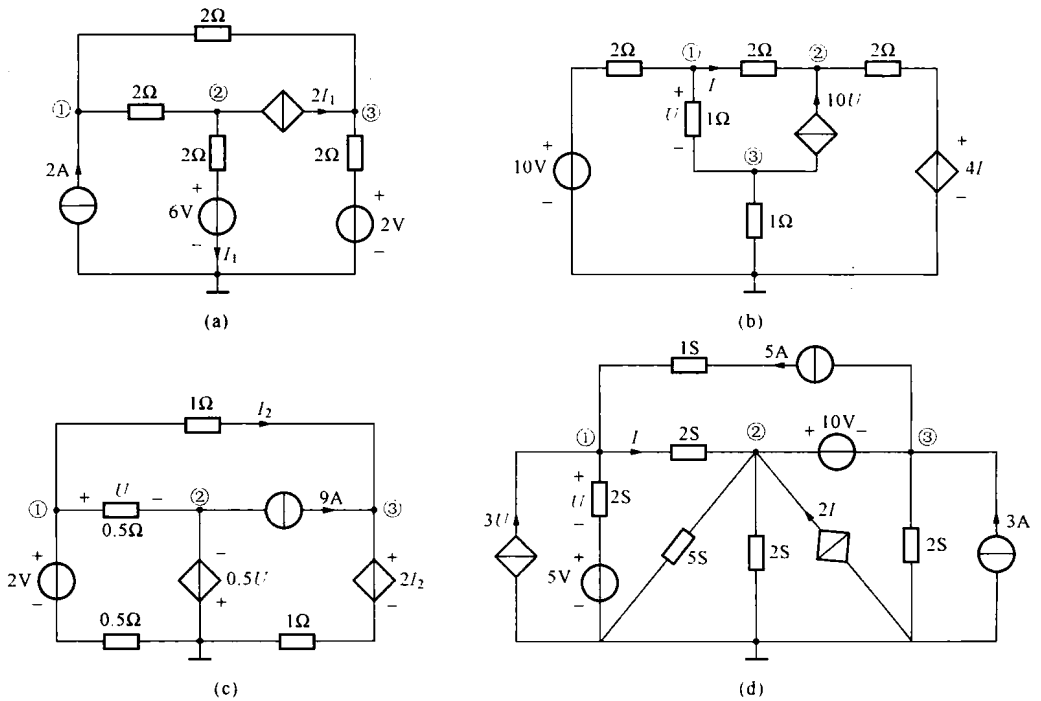
题 3-5 图

3-6 列写题 3-6 图所示各电路的节点电压方程（仅用节点电压表示）。

解 (a) 见 [例 3-2]。

(b) 电路的节点电压方程为

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1\right)U_{n1} - \frac{1}{2}U_{n2} - U_{n3} = \frac{10}{2} \\ -\frac{1}{2}U_{n1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)U_{n2} = 10U + \frac{4I}{2} \\ -U_{n1} + (1+1)U_{n3} = -10U \end{cases} \quad (1)$$



题 3-6 图

补充方程为

$$\begin{cases} U = U_{n1} - U_{n3} \\ I = \frac{U_{n1} - U_{n2}}{2} \end{cases} \quad (2)$$

将方程组 (2) 代入方程组 (1) 整理得节点电压方程为

$$\begin{cases} 2U_{n1} - 0.5U_{n2} - U_{n3} = 5 \\ -11.5U_{n1} + 2U_{n2} + 10U_{n3} = 0 \\ 9U_{n1} - 8U_{n3} = 0 \end{cases}$$

(c) 节点电压方程为

$$\begin{cases} (2+2+1)U_{n1} - 2U_{n2} - U_{n3} = 4 \\ U_{n2} = -0.5U \\ -U_{n1} + 2U_{n3} = 2I_2 + 9 \end{cases}$$

补充方程为

$$\begin{cases} U = U_{n1} - U_{n2} \\ I_2 = U_{n1} - U_{n3} \end{cases}$$

整理得

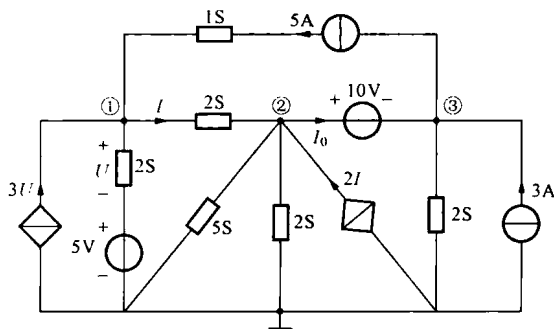
$$\begin{cases} 5U_{n1} - 2U_{n2} - U_{n3} = 4 \\ U_{n1} + U_{n2} = 0 \\ -3U_{n1} + 4U_{n3} = 9 \end{cases}$$

(d) 设电压源支路中的电流为 I_0 , 参考方向如题 3-6 解图所示。节点电压方程为

$$\begin{cases} (2+2)U_{n1} - 2U_{n2} = 3U + 5 \times 2 + 5 \\ -2U_{n1} + (2+2+5)U_{n2} = 2I - I_0 \\ 2U_{n3} = I_0 + 3 - 5 \end{cases}$$

补充方程为

$$\begin{cases} U = U_{n1} - 5 \\ I = 2(U_{n1} - U_{n2}) \\ U_{n2} - U_{n3} = 10 \end{cases}$$



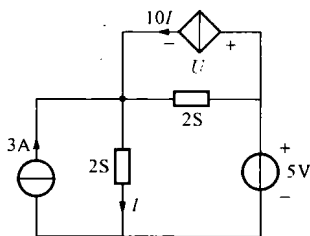
题 3-6 解图

整理得

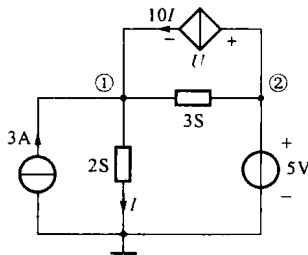
$$\begin{cases} U_{n1} - 2U_{n2} = 0 \\ -6U_{n1} + 13U_{n2} + 2U_{n3} = -2 \\ U_{n2} - U_{n3} = 10 \end{cases}$$

3-7 试用节点电压分析法求题 3-7 图所示电路中的电压 U 。

解 节点标号如题 3-7 解图所示。电路的节点电压方程为



题 3-7 图



题 3-7 解图

$$\begin{cases} (2+3)U_{n1} - 3U_{n2} = 3 + 10I \\ U_{n2} = 5 \end{cases}$$

补充方程为

$$I = 2U_{n1}$$

联立解得

$$U_{n1} = -1.2V$$

所以

$$U = U_{n2} - U_{n1} = 5 - (-1.2) = 6.2(\text{V})$$

3-8 见 [例 3-3]。

3-9 试绘出对应下列节点电压方程的最简单的电路。

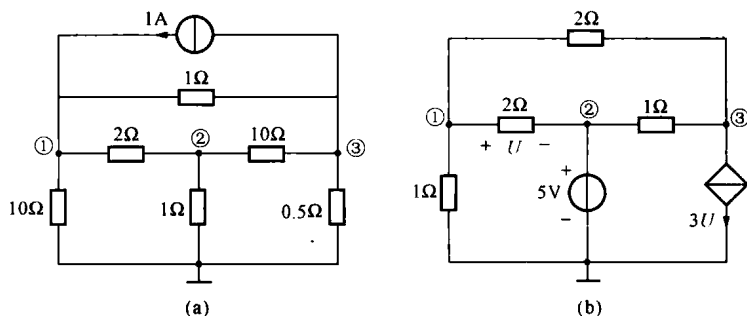
$$(1) \begin{cases} 1.6U_{n1} - 0.5U_{n2} - U_{n3} = 1 \\ -0.5U_{n1} + 1.6U_{n2} - 0.1U_{n3} = 0 \\ -U_{n1} - 0.1U_{n2} + 3.1U_{n3} = -1 \end{cases}; (2) \begin{cases} 2U_{n1} - 0.5U_{n2} - 0.5U_{n3} = 0 \\ U_{n2} = 5 \\ 2.5U_{n1} - 4U_{n2} + 1.5U_{n3} = 0 \end{cases}$$

解 (1) 方程组 (1) 对应的最简单电路如题 3-9 解图 (a) 所示。

(2) 由方程组 (2) 可知, 此电路含有受控源, 设控制量 $U = U_{n1} - U_{n2}$, 则方程组 (2) 可变为

$$\begin{cases} 2U_{n1} - 0.5U_{n2} - 0.5U_{n3} = 0 \\ U_{n2} = 5 \\ -0.5U_{n1} - U_{n2} + 1.5U_{n3} = -3(U_{n1} - U_{n2}) \end{cases}$$

方程组 (2) 对应的最简单电路如题 3-9 解图 (b) 所示。



题 3-9 解图

注: 由给定的电路方程组画电路, 电路不唯一。

3-10 某电路的节点电压方程为

$$\begin{cases} 6U_{n1} - 2U_{n2} - U_{n3} - 2U_{n4} = 2 \\ -2U_{n1} + 4U_{n2} - 2U_{n3} = 3 \\ U_{n1} - 2U_{n2} + 5U_{n3} - U_{n4} = 0 \\ -2U_{n1} - U_{n3} + 5U_{n4} = -1 \end{cases}$$

试列写下列情形的节点电压方程:

- (1) 在节点③和节点④之间接入一个 1Ω 电阻。
- (2) 在节点①和节点②之间接入一个 2A 的电流源, 方向由节点①指向节点②。
- (3) 在节点③和参考节点之间接入一个 VCCS, 方向由节点③指向参考节点。其受控支路的方程为 $I = 2(U_{n1} - U_{n2})$ 。
- (4) 同时接入上述三种元件。

解 (1) 情形 1 的示意图如题 3-10 解图 (a) 所示。节点电压方程为

$$\begin{cases} 6U_{n1} - 2U_{n2} - U_{n3} - 2U_{n4} = 2 \\ -2U_{n1} + 4U_{n2} - 2U_{n3} = 3 \\ U_{n1} - 2U_{n2} + (5+1)U_{n3} - (1+1)U_{n4} = 0 \\ -2U_{n1} - (1+1)U_{n3} + (5+1)U_{n4} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6U_{n1} - 2U_{n2} - U_{n3} - 2U_{n4} = 2 \\ -2U_{n1} + 4U_{n2} - 2U_{n3} = 3 \\ U_{n1} - 2U_{n2} + 6U_{n3} - 2U_{n4} = 0 \\ -2U_{n1} - 2U_{n3} + 6U_{n4} = -1 \end{cases}$$

(2) 情形 2 的示意图如题 3-10 解图 (b) 所示。节点电压方程为

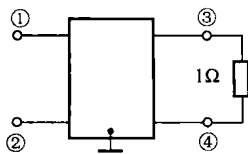
$$\begin{cases} 6U_{n1} - 2U_{n2} - U_{n3} - 2U_{n4} = 0 \\ -2U_{n1} + 4U_{n2} - 2U_{n3} = 5 \\ U_{n1} - 2U_{n2} + 5U_{n3} - U_{n4} = 0 \\ -2U_{n1} - U_{n3} + 5U_{n4} = -1 \end{cases}$$

(3) 情形 3 的示意图如题 3-10 解图 (c) 所示。节点电压方程为

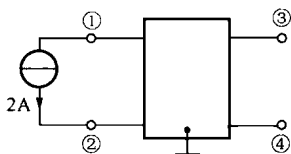
$$\begin{cases} 6U_{n1} - 2U_{n2} - U_{n3} - 2U_{n4} = 2 \\ -2U_{n1} + 4U_{n2} - 2U_{n3} = 3 \\ U_{n1} - 2U_{n2} + 5U_{n3} - U_{n4} = -2(U_{n1} - U_{n2}) \\ -2U_{n1} - U_{n3} + 5U_{n4} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6U_{n1} - 2U_{n2} - U_{n3} - 2U_{n4} = 2 \\ -2U_{n1} + 4U_{n2} - 2U_{n3} = 3 \\ 3U_{n1} - 4U_{n2} + 5U_{n3} - U_{n4} = 0 \\ -2U_{n1} - U_{n3} + 5U_{n4} = -1 \end{cases}$$

(4) 情形 4 的示意图如题 3-10 解图 (d) 所示。节点电压方程为

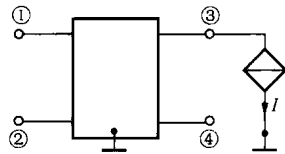
$$\begin{cases} 6U_{n1} - 2U_{n2} - U_{n3} - 2U_{n4} = 2 - 2 \\ -2U_{n1} + 4U_{n2} - 2U_{n3} = 3 + 2 \\ U_{n1} - 2U_{n2} + (5+1)U_{n3} - (1+1)U_{n4} = -2(U_{n1} - U_{n2}) \\ -2U_{n1} - (1+1)U_{n3} + (5+1)U_{n4} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6U_{n1} - 2U_{n2} - U_{n3} - 2U_{n4} = 0 \\ -2U_{n1} + 4U_{n2} - 2U_{n3} = 5 \\ 3U_{n1} - 4U_{n2} + 6U_{n3} - 2U_{n4} = 0 \\ -2U_{n1} - 2U_{n3} + 6U_{n4} = -1 \end{cases}$$



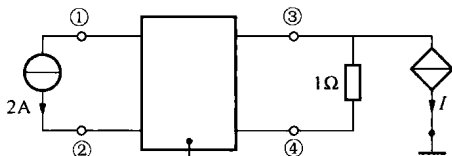
(a)



(b)



(c)



(d)

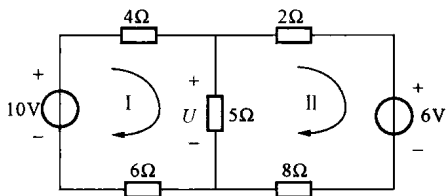
题 3-10 解图

网孔分析法

3-11 试用网孔电流分析法求题 3-11 图所示电路的电压 U 。

解 网孔电流的方向取顺时针方向, 如题 3-11 图所示。网孔电流方程为

$$\begin{cases} 15I_1 - 5I_2 = 10 \\ -5I_1 + 15I_2 = -6 \end{cases}$$



题 3-11 图

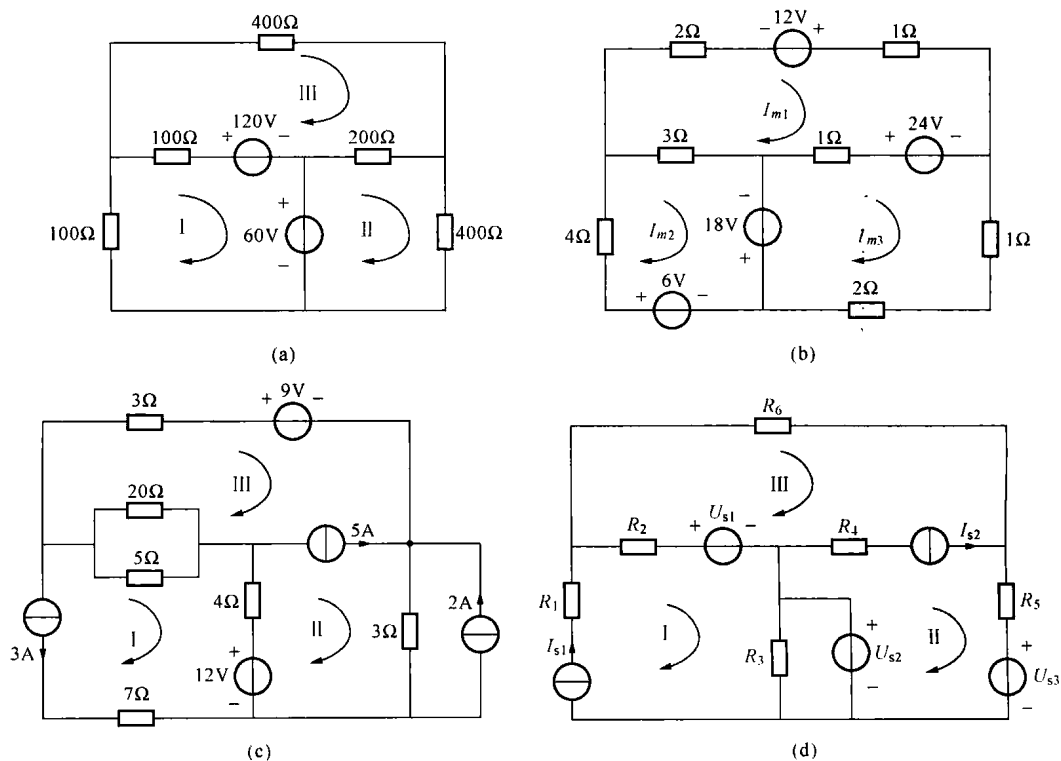
解之得

$$I_1 = \frac{3}{5} \text{ A}, I_2 = -\frac{1}{5} \text{ A}$$

所以

$$U = (I_1 - I_2) \times 5 = \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{5}\right) \times 5 = 4 \text{ (V)}$$

3-12 试列写题 3-12 图所示电路的网孔电流方程（仅用网孔电流表示）。



题 3-12 图

解 (a) 网孔电流方程为

$$\begin{cases} 200I_{m1} - 100I_{m3} = -180 \\ 600I_{m2} - 200I_{m3} = 60 \\ -100I_{m1} - 200I_{m2} + 700I_{m3} = 120 \end{cases}$$

(b) 网孔电流方程为

$$\begin{cases} (2+1+1+3)I_{m1} - 3I_{m2} - I_{m3} = 12+24 \\ -3I_{m1} + (4+3)I_{m2} = 18+6 \\ -I_{m1} + (1+1+2)I_{m3} = -24-18 \end{cases}$$

整理得网孔电流方程为

$$\begin{cases} 7I_{m1} - 3I_{m2} - I_{m3} = 36 \\ -3I_{m1} + 7I_{m2} = 24 \\ -I_{m1} + 4I_{m3} = -42 \end{cases}$$

(c) 设 5A 电流源两端电压为 U_0 ，参考方向如题 3-12 解图 (a) 所示。网孔电流方程为

$$\begin{cases} I_{m1} = -3 \\ -4I_{m1} + 7I_{m2} = -U_0 - 6 + 12 \\ -4I_{m1} + 7I_{m3} = -9 + U_0 \end{cases}$$

补充方程为

$$I_{m2} - I_{m3} = 5$$

整理得

$$\begin{cases} I_{m1} = -3 \\ -8I_{m1} + 7I_{m2} + 7I_{m3} = -3 \\ I_{m2} - I_{m3} = 5 \end{cases}$$

(d) 设电流源 I_{s2} 两端电压 U_0 的参考方向如题 3-12 解图 (b) 所示，则网孔电流方程为

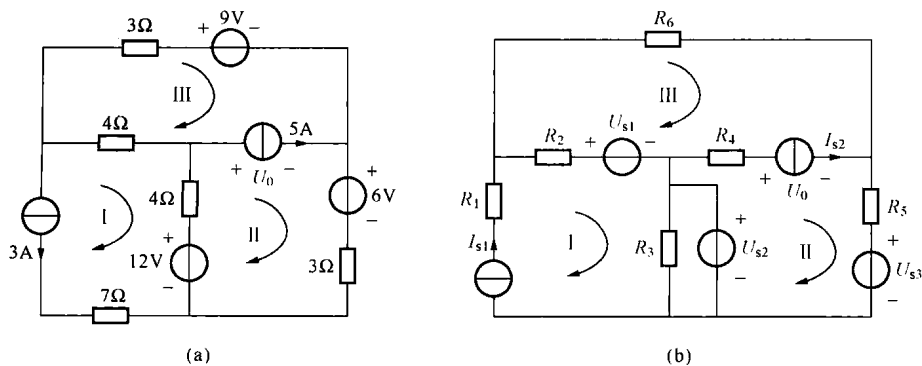
$$\begin{cases} I_{m1} = I_{s1} \\ (R_4 + R_5)I_{m2} - R_4I_{m3} = U_{s2} - U_{s3} - U_0 \\ -R_2I_{m1} - R_4I_{m2} + (R_2 + R_4 + R_6)I_{m3} = U_0 + U_{s1} \end{cases}$$

补充方程为

$$I_{m2} - I_{m3} = I_{s2}$$

整理得

$$\begin{cases} I_{m1} = I_{s1} \\ -R_2I_{m1} + R_5I_{m2} + (R_2 + R_6)I_{m3} = U_{s1} + U_{s2} - U_{s3} \\ I_{m2} - I_{m3} = I_{s2} \end{cases}$$

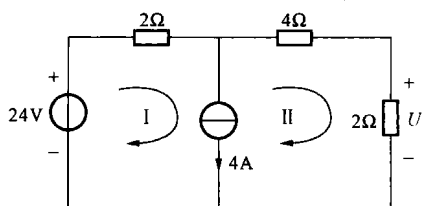


题 3-12 解图

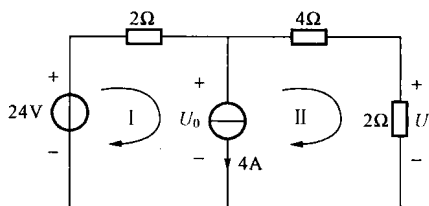
- 注：(1) 计算自电阻和互电阻时，与电压源并联的电阻不予考虑（该电阻属于多余元件）；
 (2) 题 3-12 图 (c)、(d) 电路中无伴电流源的端电压切莫遗漏；
 (3) 列写网孔电流方程时，与无伴电流源串联的电阻不是多余元件，需要考虑。

3-13 试用网孔电流分析法求题 3-13 图所示电路的电压 U 。

解 电流源两端电压 U_0 的参考方向如题 3-13 解图所示。网孔电流方程为



题 3-13 图



题 3-13 解图

$$\begin{cases} 2I_1 = -U_0 + 24 \\ (4+2)I_2 = U_0 \end{cases}$$

补充方程为

$$I_1 - I_2 = 4$$

整理得

$$\begin{cases} 2I_1 + 6I_2 = 24 \\ I_1 - I_2 = 4 \end{cases}$$

解之得

$$I_1 = 6\text{A}, I_2 = 2\text{A}$$

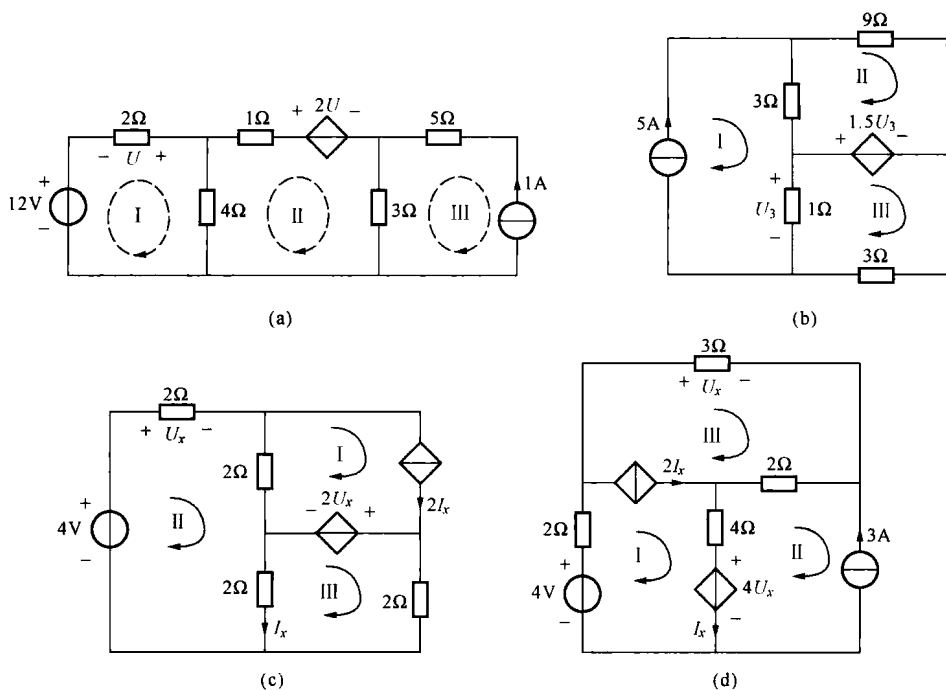
所以

$$U = 2I_2 = 2 \times 2 = 4 \text{ (V)}$$

注：4A 无伴电流源的端电压切莫遗漏。

3-14 见 [例 3-4]。

3-15 试列写题 3-15 图所示各电路的网孔电流方程（仅用网孔电流表示）。



题 3-15 图

解 (a) 网孔电流方程为

$$\begin{cases} 6I_1 - 4I_2 = 12 \\ -4I_1 + 8I_2 - 3I_3 = -2U \\ I_3 = -1 \end{cases}$$

补充方程为

$$U = -2I_1$$

整理得

$$\begin{cases} 3I_1 - 2I_2 = 6 \\ -8I_1 + 8I_2 - 3I_3 = 0 \\ I_3 = -1 \end{cases}$$

(b) 网孔电流方程为

$$\begin{cases} I_{m1} = 5 \\ -3I_{m1} + (3+9)I_{m2} = 1.5U_3 \\ -I_{m1} + (1+3)I_{m3} = -1.5U_3 \end{cases}$$

补充方程为

$$U_3 = (I_{m1} - I_{m3}) \times 1$$

整理得

$$\begin{cases} I_{m1} = 5 \\ -4.5I_{m1} + 12I_{m2} + 1.5I_{m3} = 0 \\ I_{m1} + 5I_{m3} = 0 \end{cases}$$

(c) 网孔电流方程为

$$\begin{cases} I_{m1} = 2I_x \\ -2I_{m1} + (2+2+2)I_{m2} - 2I_{m3} = 4 \\ -2I_{m2} + (2+2)I_{m3} = 2U_x \end{cases}$$


补充方程为

$$\begin{cases} U_x = 2I_{m2} \\ I_x = I_{m2} - I_{m3} \end{cases}$$

整理得

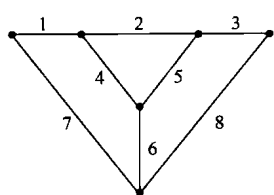
$$\begin{cases} I_{m1} - 2I_{m2} + 2I_{m3} = 0 \\ -I_{m1} + 3I_{m2} - I_{m3} = 2 \\ -3I_{m2} + 2I_{m3} = 0 \end{cases}$$

(d) 见 [例 3-5]。

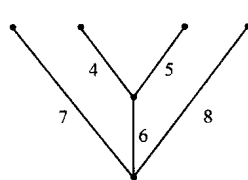
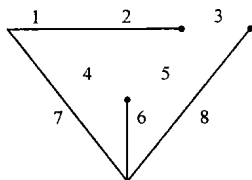
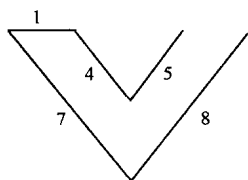
 拓扑图

3-16 试画出题 3-16 图所示拓扑图的 3 个树。

解 3 个树如题 3-16 解图所示。



题 3-16 图

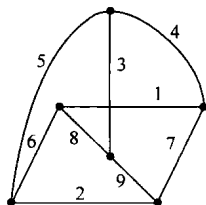


题 3-16 解图

注：由于树不是唯一的，故本题存在多种答案。

3-17 如题 3-17 图所示非平面图，选定支路 5、6、7、8、9 为树支。试写出与所选树对应的各基本回路和各基本割集。

解 基本回路：(1、7、8、9)，(2、6、8、9)，(3、5、6、8)，(4、5、6、7、8、9)。基本割集：(5、3、4)，(6、2、3、4)，(7、1、4)，(8、1、2、3、4)，(9、1、2、4)。

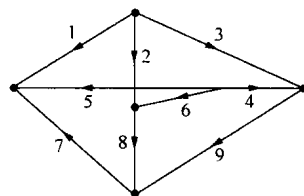


题 3-17 图

3-18 在题 3-18 图所示的有向图中，试求：(1) 支路集 {3, 4, 5, 8, 9} 和 {2, 5, 6, 7, 8} 中哪个支路集中的支路电压是一组独立完备的电压变量；(2) 支路集 {2, 3, 4, 9} 和 {3, 4, 5, 7} 中哪个支路集中的支路电流是一组独立完备的电流变量。

解 (1) 支路集 {3, 4, 5, 8, 9} 中的支路电压是一组独立完备的电压变量。因为 {3, 4, 5, 8, 9} 中的支路可以形成该图的一个树，而树支电压是一组独立完备的电压变量；支路集 {2, 5, 6, 7, 8} 中 {5, 6, 7, 8} 形成了回路，则由 {2, 5, 6, 7, 8} 组成的支路电压不全是树支电压，还有连支电压，所以不能构成一组独立完备的电压变量。

(2) 连支电流或网孔电流构成一组独立完备的电流变量。对于支路集 {2, 3, 4, 9}，若 {2, 3, 4, 9} 为连支，则树支应为 {1, 5, 6, 7, 8}，但 {5, 6, 7, 8} 形成了回路，故不构成树，则支路集 {2, 3, 4, 9} 中的支路电流不是连支电流，所以 {2, 3, 4, 9} 中的支路电流不是独立完备的电流变量。对于支路集 {3, 4, 5, 7}，剩余的支路集 {1, 2, 6, 8, 9} 正好构成一个树，所以 {3, 4, 5, 7} 为连支电流，因此是独立完备的电流变量。



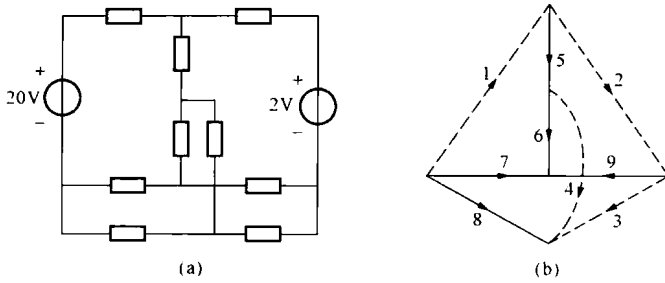
题 3-18 图

回路分析法

3-19 电路及其有向图分别如题 3-19 图 (a)、(b) 所示，题 3-19 图 (a) 中所有电阻均为 1Ω ，题 3-19 图 (b) 中实线为指定的树。试列写该电路的回路电流方程。

解 图 (b) 有向图共有 4 个基本回路。对应给定的树，基本回路分别为 (1, 5, 6, 7)，(2, 5, 6, 9)，(3, 7, 8, 9) 和 (4, 6, 7, 8)。由回路法得

$$\begin{cases} (1+1+1+1)i_{l1} - (1+1)i_{l2} - i_{l3} - (1+1)i_{l4} = 20 \\ -(1+1)i_{l1} + (1+1+1+1)i_{l2} - i_{l3} + i_{l4} = -2 \\ -i_{l1} - i_{l2} + (1+1+1+1)i_{l3} + (1+1)i_{l4} = 0 \\ -(1+1)i_{l1} + i_{l2} + (1+1)i_{l3} + (1+1+1+1)i_{l4} = 0 \end{cases}$$



题 3-19 图

整理得回路电流方程为

$$\begin{cases} 4i_{l1} - 2i_{l2} - i_{l3} - 2i_{l4} = 20 \\ -2i_{l1} + 4i_{l2} - i_{l3} + i_{l4} = -2 \\ -i_{l1} - i_{l2} + 4i_{l3} + 2i_{l4} = 0 \\ -2i_{l1} + i_{l2} + 2i_{l3} + 4i_{l4} = 0 \end{cases}$$

3-20 见 [例 3-6]。

3.5 自测题及参考答案

1. 列写图 1 所示各电路的网孔电流方程（仅用网孔电流表示）。

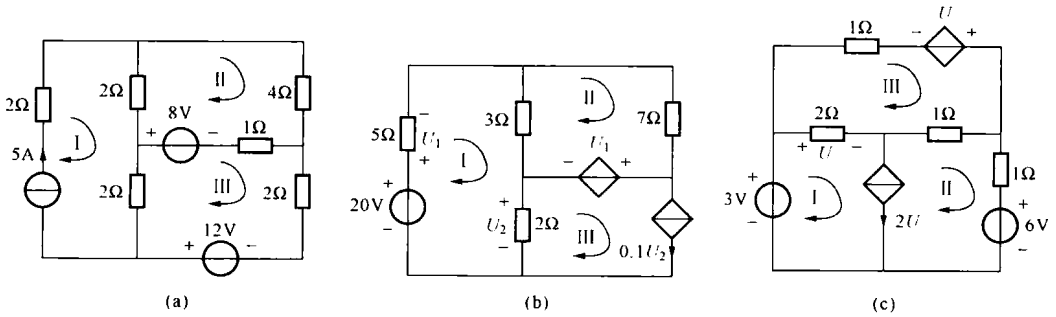


图 1

2. 列写图 2 所示各电路的节点电压方程（仅用节点电压表示）。

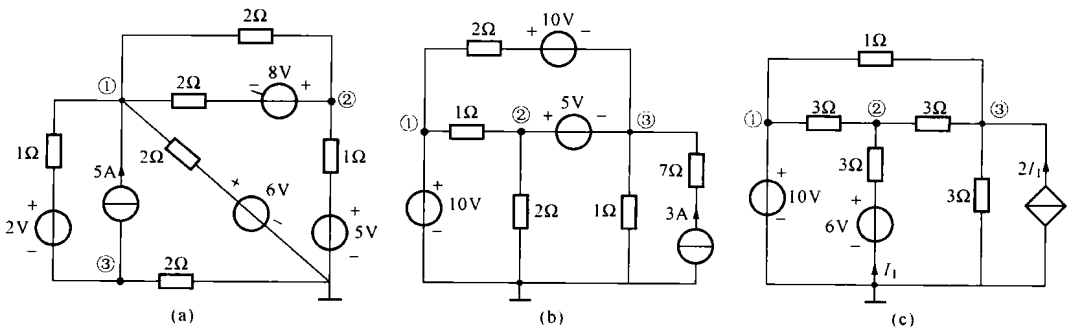


图 2

- 用一个方程求图 3 所示电路中的电流 I ，并进一步求电压 U_0 。
- 电路如图 4 所示，设法只用一个方程解出电流 I_x 。
- 求图 5 所示电路中的电流 I_1 。

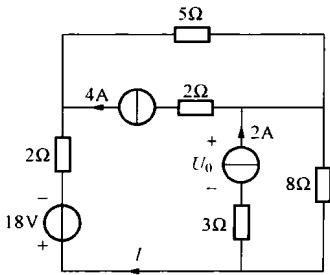


图 3

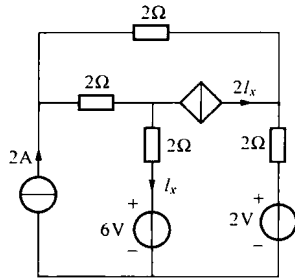


图 4

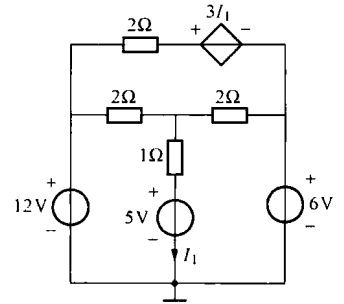


图 5

参考答案

$$1. (a) \begin{cases} I_{m1} = 5 \\ -2I_{m1} + 7I_{m2} - I_{m3} = 8 \\ -2I_{m1} - I_{m2} + 5I_{m3} = 4 \end{cases}; (b) \begin{cases} 10I_{m1} - 3I_{m2} - 2I_{m3} = 20 \\ I_{m1} + 5I_{m2} = 0 \\ -I_{m1} + 6I_{m3} = 0 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 2I_{m1} + 2I_{m2} - 3I_{m3} = -3 \\ -4I_{m1} - I_{m2} + 6I_{m3} = 0 \\ -3I_{m1} - I_{m2} + 4I_{m3} = 0 \end{cases}$$

$$2. (a) \begin{cases} 2.5U_{n1} - U_{n2} - U_{n3} = 6 \\ -U_{n1} + 2U_{n2} = 9 \\ -U_{n1} + 1.5U_{n3} = -7 \end{cases}; (b) \begin{cases} U_{n1} = 10 \\ -1.5U_{n1} + 1.5U_{n2} + 1.5U_{n3} = -2 \\ U_{n2} - U_{n3} = 5 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} U_{n1} = 10 \\ -\frac{1}{3}U_{n1} + U_{n2} - \frac{1}{3}U_{n3} = 2 \\ -U_{n1} + \frac{1}{3}U_{n2} + \frac{5}{3}U_{n3} = 4 \end{cases}$$

- -3.6A , -6.8V
- 0.25A
- 2A

第4章 电路定理

4.1 本章知识结构图

第4章知识结构图如图4-1所示。

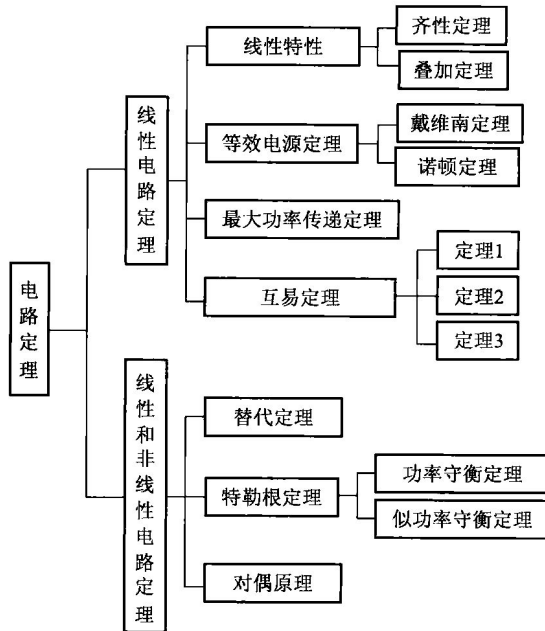


图4-1 第4章知识结构图

4.2 知识点归纳与学习指导

本章主要介绍电路的几个重要性质，利用这些性质可使一些复杂电路问题的求解得到简化。学习本章内容时，重点应放在掌握定理内容和定理应用的大思路上。

4.2.1 叠加定理与齐性定理

线性电路具有特有的线性关系，这种关系是用叠加定理和齐〔次〕性定理描述的。

1. 叠加定理

叠加定理在分析线性电路中起着重要的作用，它不仅是分析线性电路的一种方法，而且更重要的是由它可导出许多线性电路的有用性质。

叠加定理：在线性电路中，由多个（组）独立电源共同作用产生的响应（支路或节点电压、支路电流）等于每个（组）独立电源单独作用时所产生响应的叠加。

叠加定理仅适用于线性电路，不适用于非线性电路。叠加定理中的叠加为代数和，叠加时要注意响应的各个分量和总响应的参考方向，全部一致时，叠加就是相加；不一致时，叠加为代数和，分量方向与总响应方向一致的取正，相反的取负。叠加定理一般不能直接用来计算功率，需要间接地计算。因为功率不是电压或电流的一次函数。

学习用叠加定理分析具体电路时，重点放在正确画出单独作用的电路和正确叠加两个方面。电源单独作用的电路可用前面章节的方法分析。但在课程学习和考试中，电源单独作用的电路一般直接用两类约束或单回路电路、双节点电路的方法求解。

【例 4-1】 试用叠加定理求图 4-2 (a) 所示电路中的电流 I 。

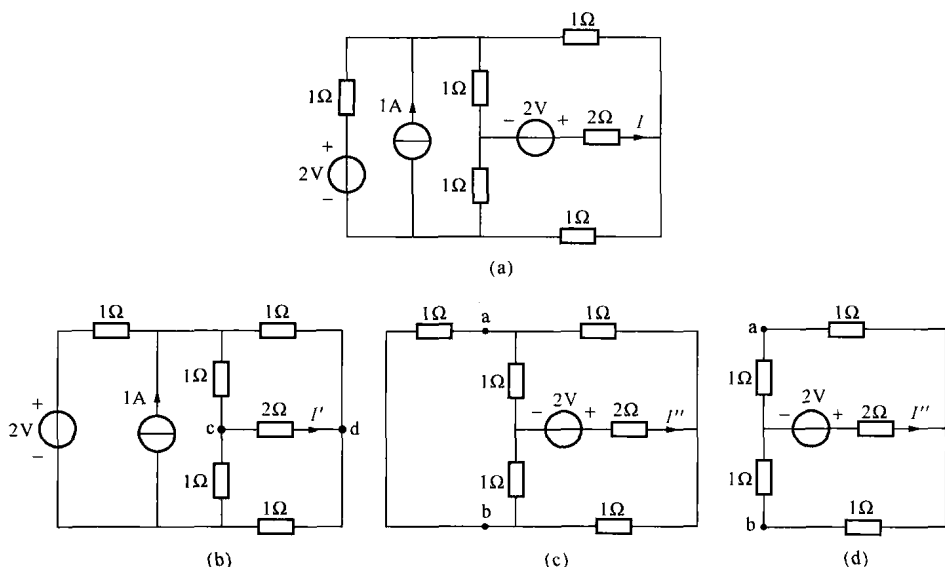


图 4-2 [例 4-1] 图

解 本题用分组的方式较简单。

(1) 图 4-2 (a) 中左边 2V 电压源和 1A 电流源共同作用，电路如图 4-2 (b) 所示。因为 c、d 两点等电位（电桥平衡），所以

$$I' = 0$$

(2) 右侧 2V 电压源单独作用，电路如图 4-2 (c) 所示。因为 a、b 两点等电位（电桥平衡），所以图 4-2 (c) 等效为图 4-2 (d)（桥支路断开），则

$$I'' = \frac{2}{2 + (1+1) // (1+1)} = \frac{2}{3} \text{ (A)}$$

(3) 由叠加定理得

$$I = I' + I'' = 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \text{ (A)}$$

注：(1) 使用叠加定理时，根据具体情况，可单个电源单独作用，也可以分组单独作用。

(2) 当一个（组）独立电源单独作用时，其他独立电源不作用，即置零。所谓电压源置零，就是将它短路；而电流源置零，就是将它开路。

2. 齐性定理

齐性定理内容: 在线性电路中, 当所有激励都增大或缩小 K 倍 (K 为实常数) 时, 响应也将同样增大或缩小 K 倍。特别地, 当电路中只有一个激励时, 响应与激励成正比。

设电阻电路中有 α 个独立电压源和 β 个独立电流源, 则由叠加定理和齐性定理可知, 任一响应都可表示为

$$k_1 u_{s1} + k_2 u_{s2} + \cdots + k_\alpha u_{s\alpha} + h_1 i_{s1} + h_2 i_{s2} + \cdots + h_\beta i_{s\beta} \text{ (线性特性)}$$

式中系数 k_j ($j=1, 2, \dots, \alpha$) 和 h_l ($l=1, 2, \dots, \beta$) 为与独立电源大小无关的常数, 它们仅取决于电路中的非独立电源元件参数及响应的类别和位置。响应不同, 系数不同。但应注意, 只有非独立电源元件参数都保持不变时, 这些系数才是定值, 而且响应与非独立电源元件参数一般为非线性关系。

利用叠加定理与齐性定理可分析计算具体电路和抽象电路 (电路结构和参数存在未知的电路)。上述响应形式 (常用其分组变形形式) 是分析抽象电阻电路的基础。

【例 4-2】 图 4-3 (a) 所示电路中, A 为一线性含源电阻网络。已知当 $U_s=0$ 、 $I_s=0$ 时, 毫安表的示数为 20mA; 当 $U_s=5\text{V}$ 、 $I_s=0$ 时, 毫安表的示数为 70mA; 当 $U_s=0$ 、 $I_s=1\text{A}$ 时, 毫安表的示数为 50mA。求当 $U_s=3\text{V}$ 、 $I_s=-2\text{A}$ 时, 毫安表的示数。

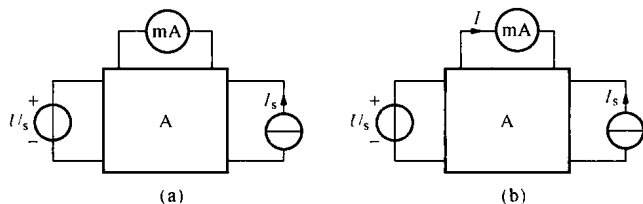


图 4-3 [例 4-2] 图

解 假设毫安表支路中电流的参考方向如图 4-3 (b) 所示。根据叠加定理和齐性原理, 设

$$I = a + bU_s + cI_s$$

由已知条件得

$$\begin{cases} a = 20 \\ a + 5b = 70 \\ a + c = 50 \end{cases}$$

联立解得

$$a = 20, b = 10, c = 30$$

则

$$I = 20 + 10U_s + 30I_s$$

因此, 当 $U_s=3\text{V}$ 、 $I_s=-2\text{A}$ 时, 有

$$I = 20 + 10U_s + 30I_s = 20 + 10 \times 3 - 30 \times 2 = -10 \text{ (mA)}$$

注: 联合应用叠加定理和齐性定理求解抽象电路问题时, 常采用分组的叠加定理。感兴趣的独立电源每个视为一组; 其他保持不变的独立电源通常视为一组, 其单独作用的响应保持不变。

4.2.2 等效电源定理

等效电源定理分为戴维南定理和诺顿定理，见表 4-1。

表 4-1 戴维南定理和诺顿定理

项目	戴维南定理	诺顿定理
定理内容	一个与外部电路无耦合关系的线性含源电阻性二端网络 N，对外电路而言，可以用一个电压源和一个电阻相串联的支路（称为戴维南等效电路）来等效。该电压源的电压等于网络 N 的开路电压 u_{oc} ；串联电阻 R_{eq} 称为戴维南等效电阻，它等于网络 N 中的全部独立电源置零后所得二端网络的输入电阻	一个与外部电路无耦合关系的线性含源电阻性二端网络 N，可用一个电流源和一个电阻的并联组合（称为诺顿等效电路）等效，此电流源的电流等于该网络 N 的短路电流 i_{sc} ；并联电导 G_{eq} （诺顿等效电导）等于网络 N 中全部独立电源置零后所得二端网络的输入电导
图示		
存在条件	$R_{eq} \neq \infty$	$G_{eq} \neq 0$
使用范围	被等效的含源二端网络是线性的，外部电路可以是线性的，也可以是非线性的	

对于同一线性含源二端电阻网络， $G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}}$ ， R_{eq} 、 u_{oc} 和 i_{sc} 三者的关系为 $u_{oc} = R_{eq} i_{sc}$ 。此

关系式也可用来确定 R_{eq} ，即 $R_{eq} = \frac{u_{oc}}{i_{sc}}$ 。

等效电源定理属于等效化简的内容，是十分有用的定理。它们的特点在于可将电路中不感兴趣的（内部保持不变）二端网络化简，以利于分析剩下的那部分电路。当求短路电流比求开路电压要容易时，使用诺顿定理求解。

用戴维南定理（诺顿定理）求解电路的步骤如下：

(1) 电路分解。将所求量所在的支路（或部分电路）抽出，其余部分电路视作一线性含源电阻性二端网络。

(2) 求上述线性含源电阻性二端网络的开路电压 u_{oc} （短路电流 i_{sc} ）。

(3) 确定线性含源电阻性二端网络的戴维南等效电阻 R_{eq} 。常用的两种方法为：

1) 转化为求输入电阻。对于含受控源的电路，可采用外加电源法求解。

2) 开短路法。分别计算开路电压 u_{oc} 和短路电流 i_{sc} ，则 $R_{eq} = u_{oc} / i_{sc}$ 。

(4) 将线性含源电阻性二端网络用戴维南等效电路（诺顿等效电路）代替，并与抽出的外部电路连接。对得到的等效电路求解可得所需的电压或电流。

等效电源定理用于抽象电路时，需根据给定的已知条件确定等效电路相应的两个参数。

【例 4-3】 图 4-4 (a) 所示电路在开关 S 断开时，电流 $I=1\text{A}$ 。求开关 S 接通后的电流 I 。

解 应用戴维南定理化简开关右侧的二端网络。

(1) 求 U_{oc} 。因为开关 S 断开时，电流 $I=1\text{A}$ ，所以

$$U_{\infty} = 10 \times 1 = 10 \text{ (V)}$$

(2) 求 R_{eq} 。独立电源置零后为电阻的串并联，故

$$R_{\text{eq}} = 10 // (8 + 6 // 3) = 5 \text{ (}\Omega\text{)}$$

(3) 求电压 U 。将开关左侧二端网络用其戴维南等效电路代替，如图 4-4 (b) 所示，则有

$$U = \frac{5}{5+5} \times 10 = 5 \text{ (V)}$$

(4) 求电流 I 。对于图 4-4 (b) 所示电路，由欧姆定律得

$$I = \frac{U}{10} = \frac{5}{10} = 0.5 \text{ (A)}$$

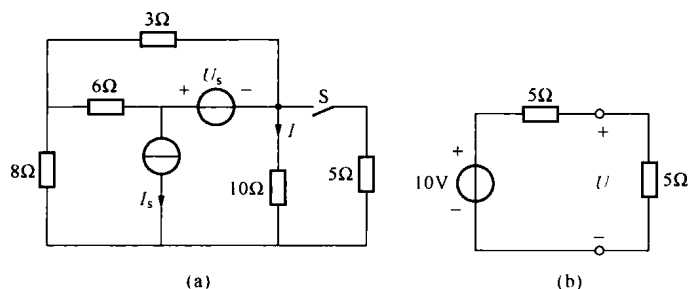


图 4-4 [例 4-3] 图

学习等效电源定理时，对于结构和参数都已知的具体电路，重点应放在正确画出求两个等效参数的电路，得到的两个电路可用前面章节的方法分析。在课程学习和考试中，得到的两个电路一般直接用两类约束或单回路电路、双节点电路的方法求解。当电路的结构和参数存在未知时，戴维南等效电路的两个参数需根据已知条件进行确定。

4.2.3 最大功率传输定理

最大功率传输定理内容：图 4-5 所示电路中，电源 $[U_s$ 和 R_s (正值)] 固定不变，负载 R_L (正值) 任意可调，则负载从电源获得最大功率的条件是 $R_L = R_s$ (称为匹配条件)，获得的最大功率为

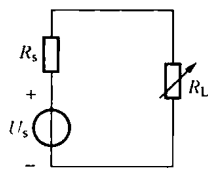


图 4-5 最大功率传输定理用图

$$P_{L\text{max}} = \frac{U_s^2}{4R_s}$$

说明：① 该定理的使用前提是电源参数 U_s 和 R_s 保持固定，如果电源为复杂的二端网络，则二端网络应保持不变；② 求最大功率，一般需先用戴维南定理把复杂的二端网络简化为戴维南等效电路，然后再用最大功率传输定理；③ 负载获最大功率时的传输效率 $\leq 50\%$ 。

4.2.4 替代定理

替代定理又称置换定理，是一个适用范围较广的定理。

替代定理内容：在线性或非线性电路中，若某支路的电压和电流分别为 u_k 和 i_k ，则只要此支路与其他支路无耦合关系，该支路就可以用一个电压为 u_k 的独立电压源或电流为 i_k 的独立电流源替代，而不影响该电路中其他部分的工作状态（替代前后的电路都应具有唯一解）。

注意，替代和等效是两个不同的概念。等效是对任意的外部电路而言的，而替代是对特定的外部电路而言的，即替代前后外部电路保持不变。因为一旦改变，替代支路的电压和电流将发生数值变化。定理中的支路也可以是二端网络。其推论见主教材 2.2.3 节。

【例 4-4】 在图 4-6 (a) 所示电路中， $U=9\text{V}$ ，求电阻 R 。

解 应用替代定理将电阻 R 用 9V 电压源替代，如图 4-6 (b)。由节点法得

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6}\right)U_n = \frac{18}{4} + \frac{9}{6}$$

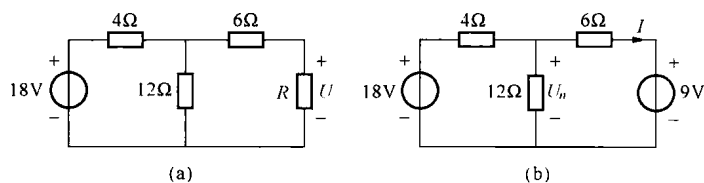


图 4-6 [例 4-4] 图

解之得

$$U_n = 12\text{V}$$

所以

$$I = \frac{U_n - U}{6} = \frac{12 - 9}{6} = 0.5 \text{ (A)}$$

则

$$R = \frac{U}{I} = \frac{9}{0.5} = 18 \text{ (}\Omega\text{)}$$

注：本题亦可用等效方法求解。注意本题用电阻串并联逐次分压求解虽然可行，但计算较繁琐。

利用替代定理可将大网络分裂成若干小网络来进行分析，此方法称为“分裂法”，如图 4-7 所示。

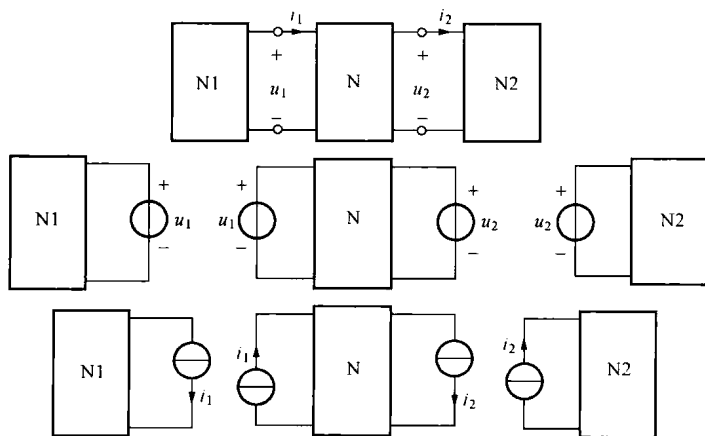


图 4-7 分裂法示意图

4.2.5 特勒根定理

特勒根定理是一个对集中参数电路普遍适用,而又能揭示电路本身最基本规律的定理。它有多种形式,其功率守恒定律和似功率守恒定律两种形式如下。

功率守恒定律:对于任一个具有 b 条支路的集中参数电路,假设各支路电流和电压取关联参考方向,则电路中各支路电压和对应支路电流乘积的代数和等于零,即

$$\sum_{k=1}^b u_k i_k = 0$$

似功率守恒定律:两个由不同元件组成,但拓扑结构完全相同的集中参数电路 N 和 \hat{N} ,设各支路电压和电流取关联参考方向,则

$$\sum_{k=1}^b u_k \hat{i}_k = 0, \quad \sum_{k=1}^b \hat{u}_k i_k = 0$$

4.2.6 互易定理

互易定理指出:对于具有互易性的网络(称为互易网络),在单一激励的情况下,当激励和响应互换位置时,将不改变同一激励所产生的响应。仅含二端线性电阻、电感和电容以及耦合电感和理想变压器(见第9章)组成的线性网络是互易网络。含有受控源、回转器(见第5章)的网络一般不满足互易条件。

设互易网络输入口(加激励的端口)电压、电流分别为 u_1 、 i_1 ,输出口(响应所在端口)电压、电流分别为 u_2 、 i_2 ,激励和响应互换后相应的电压、电流分别为 \hat{u}_1 、 \hat{i}_1 和 \hat{u}_2 、 \hat{i}_2 ,则在端口电压、电流取关联参考方向时,由似功率守恒定律得

$$u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 = \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2 \quad (\text{互易条件})$$

根据不同的端口条件,可得互易定理的3种形式。常用的两种形式如下:

形式1:电压源与电流表互换位置,电流表的示数不变。

形式2:电流源与电压表互换位置,电压表的示数不变。

注意:互易定理应用的前提是网络互易。

4.2.7 对偶原理

对偶性表述的是一种类比关系。电路中的对偶分为变量对偶、参数对偶、方程(或公式)对偶、元件对偶和电路对偶以及分析方法对偶。例如, u 和 i 、 Ψ 和 q 分别是对偶变量; R 和 G 、 L 和 C 分别是对偶参数;电感和电容的特性方程、平面电路的节点电压方程和网孔电流方程分别是对偶方程;电感和电容是对偶元件;串联电路和并联电路是对偶电路。对偶变量、对偶参数等统称为对偶元素。

将电路某一关系中的元素全部用相应的对偶元素代换后,所得新的关系对于对偶电路一定成立。这就是对偶原理。

对偶的概念是十分重要的,但要深刻地理解它,还有待于对后续章节的进一步学习。

4.3 重点、难点与考点

重点与难点

本章的重点是叠加定理与齐性定理、等效电源定理和最大功率传输定理以及替代定理,难点是这些定理的灵活应用和综合应用。

考点

本章考试的重点和热点主要集中在叠加定理、等效电源定理和最大功率传输定理，以及定理的灵活应用和综合应用，有时会涉及互易定理或特勒根定理。

4.4 第4章习题选解

叠加定理与齐性原理

4-2 求题4-2图所示电路中的电流 I 。图中各个电阻均为 1Ω 。

解 (1) 题4-2图左上角 1A 电流源单独作用，电路如题4-2解图(a)所示，则

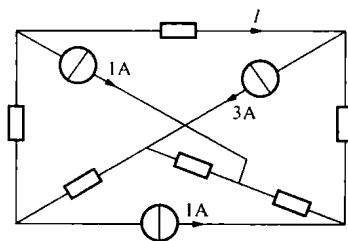
$$I' = -\frac{1}{2} \times 1 = -0.5 \text{ (A)}$$

(2) 下边 1A 电流源单独作用，电路如题4-2解图(b)所示。

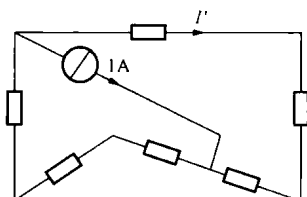
$$I'' = -\frac{1}{2} \times 1 = -0.5 \text{ (A)}$$

(3) 3A 电流源单独作用，电路如题4-2解图(c)所示，则

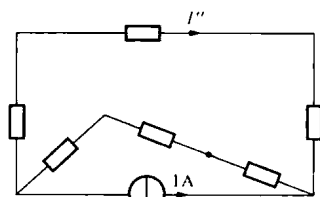
$$I''' = \frac{1}{2} \times 3 = 1.5 \text{ (A)}$$



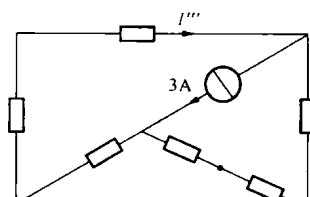
题4-2图



(a)



(b)



(c)

题4-2解图

(4) 由叠加定理得

$$I = I' + I'' + I''' = -0.5 - 0.5 + 1.5 = 0.5 \text{ (A)}$$

4-3 题4-3图所示电路中， $U_s = 2\text{V}$ 。(1) 要使 $I = 2\text{A}$ ， $I_s = ?$ (2) 要使 $I = 0$ ， $I_s = ?$ (3) 若 $I_s = 6\text{A}$ ，求电流 I 。

解 先求电流 I 与电流源 I_s 的关系式。 $U_s = 2\text{V}$ 单独作用，电路如题4-3解图(a)所示。由图可得

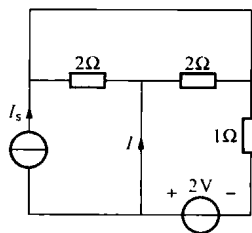
$$I' = \frac{2}{2//2+1} = 1 \text{ (A)}$$

I_s 单独作用，电路如题4-3解图(b)所示。由图可得

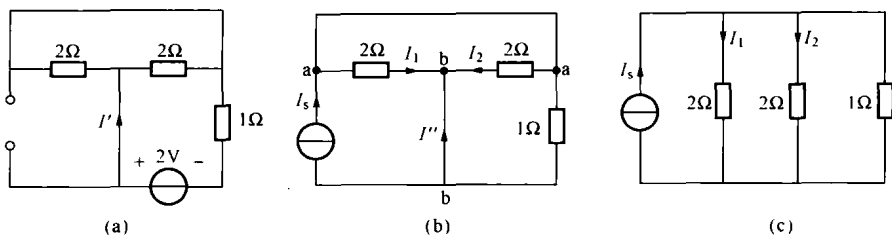
$$I'' = -(I_1 + I_2)$$

将题4-3解图(b)等效为题4-3解图(c)，则

$$I'' = -(I_1 + I_2) = -\frac{1}{2} I_s$$



题4-3图



题 4-3 解图

由叠加定理得

$$I = I' + I'' = 1 - \frac{1}{2} I_s$$

(1) 要使 $I = 2A$, 即

$$I = 1 - \frac{1}{2} I_s = 2$$

所以

$$I_s = -2A$$

(2) 要使 $I = 0$, 即

$$I = 1 - \frac{1}{2} I_s = 0$$

所以

$$I_s = 2A$$

(3) 当 $I_s = 6A$ 时

$$I = I' + I'' = 1 - \frac{1}{2} I_s = 1 - \frac{1}{2} \times 6 = -2 \text{ (A)}$$

4-4 见 [例 4-1]。

4-5 用叠加定理求题 4-5 图所示电路中的电流 I 。

解 (1) 电路中的电流源单独作用时, 电路如题 4-5 解图 (a) 所示, 则有

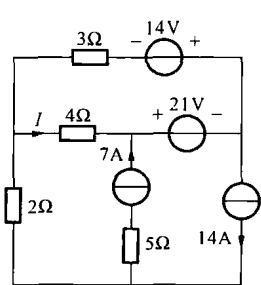
$$I' = \frac{3}{3+4} \times (14-7) = 3 \text{ (A)}$$

(2) 电路中的电压源单独作用时, 电路如题 4-5 解图 (b) 所示, 则有

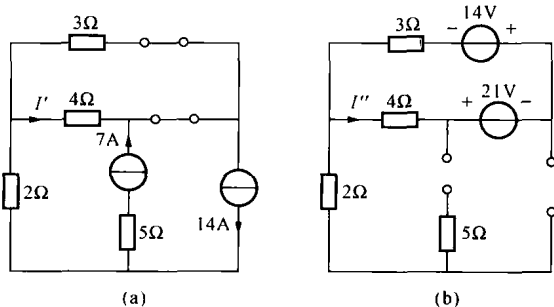
$$I'' = -\frac{14+21}{3+4} = -5 \text{ (A)}$$

(3) 由叠加定理得

$$I = I' + I'' = 3 - 5 = -2 \text{ (A)}$$



题 4-5 图



题 4-5 解图

4-6 试用叠加定理求题 4-6 图所示电路中的电压 U 。

解 (1) 9V 电压源单独作用, 电路如题 4-6 解图 (a) 所示, 则有

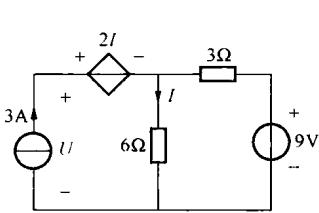
$$I' = \frac{9}{3+6} = 1 \text{ (A)}, U' = 2I' + 6I' = 8I' = 8 \text{ (V)}$$

(2) 3A 电流源单独作用, 电路如题 4-6 解图 (b) 所示, 则有

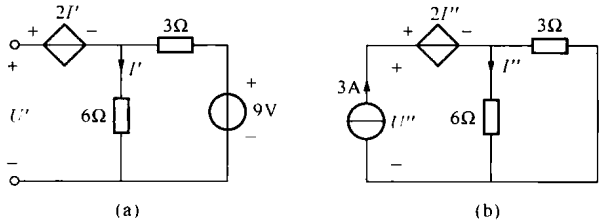
$$I'' = \frac{3}{3+6} \times 3 = 1 \text{ (A)}, U'' = 2I'' + 6I'' = 8I'' = 8 \text{ (V)}$$

由叠加定理得

$$U = U' + U'' = 8 + 8 = 16 \text{ (V)}$$



题 4-6 图



题 4-6 解图

注: 独立电源单独作用时, 电路的连接方式和电路参数以及受控源应保留不动 (控制量作相应的符号变化)。

4-7 试用叠加定理求题 4-7 图所示电路中的电流 I_1 。

解 (1) 19V 电压源单独作用时, 电路如题 4-7 解图 (a) 所示, 则有

$$(2+1+3) \times 3U_0 = 19 - U_0$$

$$19U_0 = 19$$

$$U_0 = 1\text{V}$$

$$I'_1 = 3U_0 = 3 \text{ (A)}$$

(2) 6A 电流源单独作用时, 电路如题 4-7 解图 (b) 所示, 则有

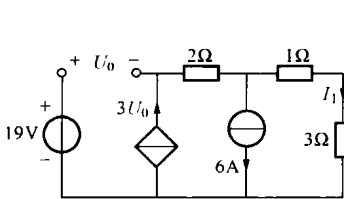
$$U_0 + 3U_0 \times 2 + (3U_0 - 6) \times (1+3) = 0$$

$$7U_0 + 12U_0 = 24$$

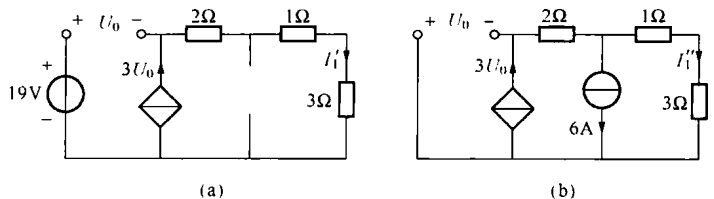
所以

$$U_0 = \frac{24}{19} \text{V}$$

$$I''_1 = 3U_0 - 6 = \frac{3 \times 24}{19} - 6 = -\frac{42}{19} \text{ (A)}$$



题 4-7 图



题 4-7 解图

(3) 由叠加定理得

$$I_1 = I'_1 + I''_1 = 3 - \frac{42}{19} = \frac{15}{19} \text{ (A)}$$

4-8 电路如题4-8图所示, 当 $I_s = 1\text{A}$ 时, 试用叠加定理求电压 U_1 , 并求电流源 I_s 为何值时 $U_1 = 0$ 。

解 (1) 2V 电压源单独作用, 电路如题4-8解图(a)所示。由 KVL 和元件的 VAR 得

$$I_0 + 2I' - (1+1) \times I' = 0 \Rightarrow I_0 = 0$$

$$(1+1+2) \times I' = -2$$

$$I' = -0.5\text{A}$$

$$U'_1 = (1+1)I' + 2 = 2I' + 2 = 1 \text{ (V)}$$

(2) 电流源 I_s 单独作用, 电路如题4-8解图(b)所示。节点电压方程为

$$\begin{cases} 2U_{n1} - U''_1 = I_s \\ -U_{n1} + 2.5U''_1 = 2I'' \end{cases}$$

$$I'' = U_{n1}$$

补充方程为
整理得

$$\begin{cases} 2U_{n1} - U''_1 = I_s \\ -3U_{n1} + 2.5U''_1 = 0 \end{cases}$$

解之得

$$U''_1 = \frac{3}{2}I_s$$

由叠加定理得

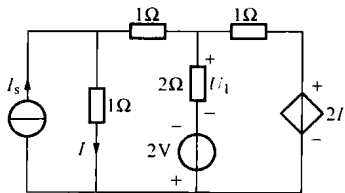
$$U_1 = U'_1 + U''_1 = 1 + \frac{3}{2}I_s$$

当 $I_s = 1\text{A}$ 时

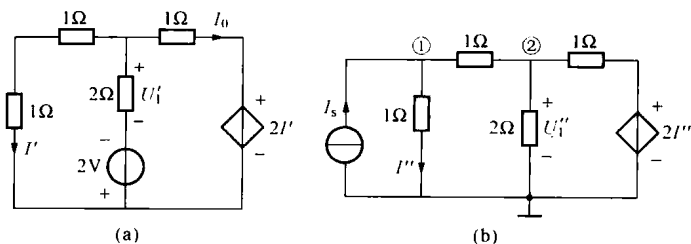
$$U_1 = U'_1 + U''_1 = 1 + \frac{3}{2} = 2.5 \text{ (V)}$$

若 $U_1 = U'_1 + U''_1 = 1 + \frac{3}{2}I_s = 0$, 则

$$I_s = -\frac{2}{3}\text{A}$$



题4-8图



题4-8解图

4-9 试用齐性原理分别求题4-9图所示电路中的电流 I_0 。图中各个电阻均为 1Ω 。

解 根据齐性定理, 利用倒推法求解。所用电量的参考方向如题4-9解图所示。设

$I'_0=1\text{A}$, 则

$$U'=1\text{V}, I'_1=1\text{A}, I'_2=I'_0+I'_1=1+1=2\text{ (A)}, U'_3=2I'_0+U'=2\times 1+1=3\text{ (V)}$$

$$I'_3=\frac{U'_3}{1}=3\text{ (A)}, I'_4=I'_3+I'_2=3+2=5\text{ (A)}, U'_5=I'_4\times 1+U'_3=5\times 1+3=8\text{ (V)}$$

$$I'_5=-3U'=-3\text{ (A)}, I'_6=I'_5+I'_4=-3+5=2\text{ (A)}$$

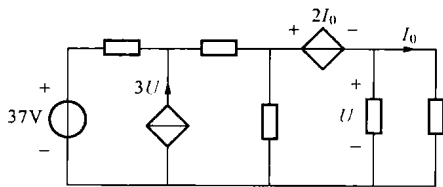
$$U'_s=I'_6\times 1+U'_5=2\times 1+8=10\text{ (V)}$$

因为 $U_s=37\text{V}$, 所以

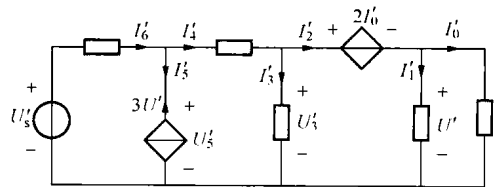
$$K=\frac{U'_s}{U_s}=3.7$$

由齐性原理得

$$I_0=KI'_0=3.7\times 1=3.7\text{ (A)}$$



题 4-9 图



题 4-9 解图

4-10 题 4-10 图所示电路中, 当开关 S 在位置 1 时, 毫安表的示数为 $I'=40\text{mA}$; 当开关 S 倒向位置 2 时, 毫安表的示数为 $I''=-60\text{mA}$ 。求把开关 S 倒向位置 3 时, 毫安表的示数。已知 $U_{s1}=4\text{V}$, $U_{s2}=6\text{V}$ 。

解 将原电路改画为题 4-10 解图。其中 N0 仅由电阻组成。由叠加定理和齐性原理得

$$I=\alpha+\beta U_s$$

其中, α 为不变电流源 I_s 单独产生的响应。S 在位置 1 时, $U_s=0$ 、 $I=40\text{mA}$; S 在位置 2 时, $U_s=4\text{V}$ 、 $I=-60\text{mA}$, 代入上式得

$$\begin{cases} 40=\alpha \\ -60=\alpha+4\beta \end{cases}$$

解之得

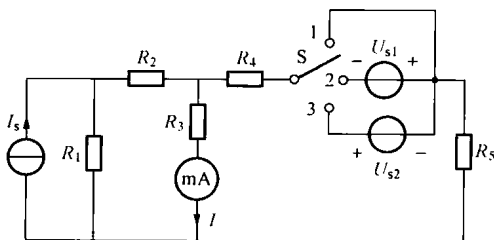
$$\alpha=40, \beta=-25$$

所以

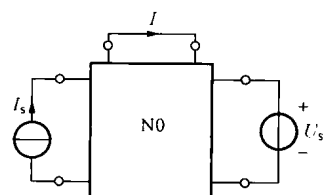
$$I=40-25U_s$$

S 在位置 3 时, $U_s=-6\text{V}$ 。因此

$$I=40-25\times(-6)=190\text{ (mA)}$$



题 4-10 图



题 4-10 解图

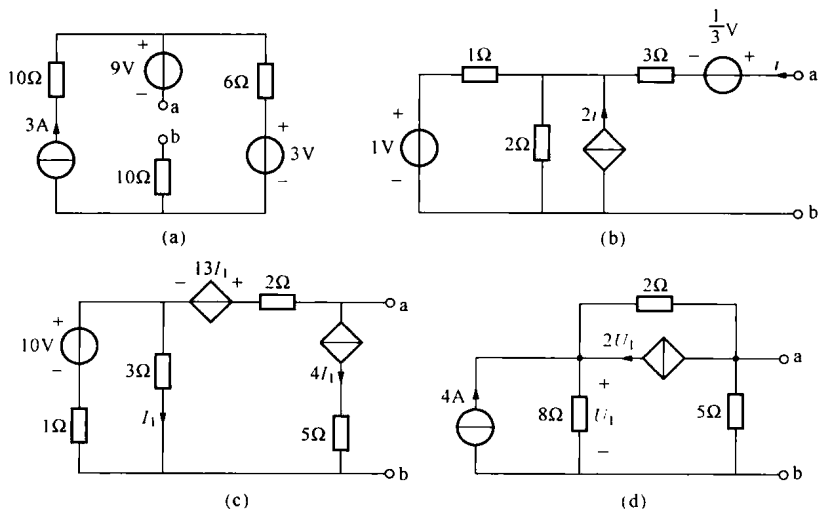
注：本题的电路属于结构已知、参数未知的抽象电路。

4-11 [提示] 本题的电路属于结构和参数均未知的抽象电路，解题思路与题4-10类似， $U_x = 2.5I_{s1} + 5I_{s2}$ 。

4-12 见 [例4-2]。

戴维南定理和诺顿定理

4-13 用戴维南定理或诺顿定理求题4-13图所示二端网络的等效电路。



题4-13图

解 (a) 开路电压

$$U_{oc} = -9 + 3 \times 6 + 3 = 12 \text{ (V)}$$

戴维南等效电阻

$$R_0 = 6 + 10 = 16 \text{ (}\Omega\text{)}$$

所以，戴维南等效电路和诺顿等效电路分别如题4-13解图(a)、(b)所示。

(b) 首先求 U_{oc} 。电路如题4-13解图(c)所示，则有

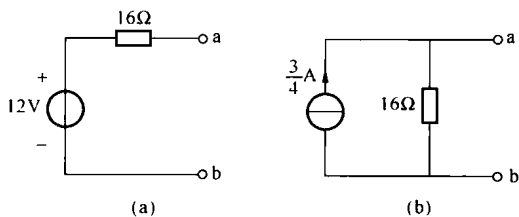
$$U_{oc} = \frac{2}{2+1} \times 1 + \frac{1}{3} = 1 \text{ (V)}$$

然后求 R_0 ①。电路如题4-13解图(d)所示，则有

$$u = 3i + (1/2) \times (i + 2i) = 5i$$

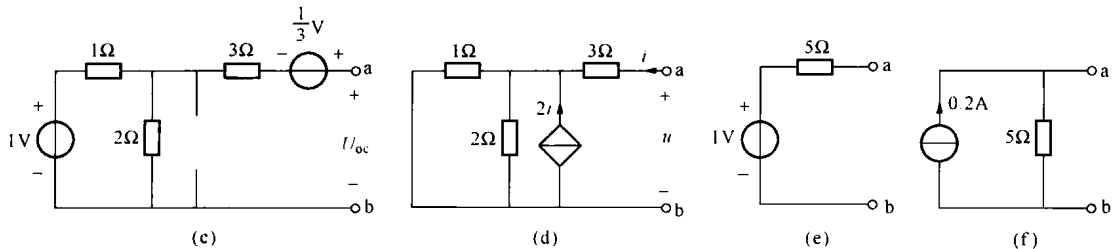
所以

$$R_0 = \frac{u}{i} = 5\Omega$$



题4-13解图(一)

① 本书多用 R_0 表示戴维南等效电阻。



题 4-13 解图 (二)

因此,戴维南等效电路和诺顿等效电路分别如题 4-13 解图 (e) 和 (f) 所示。

(c) 首先求 U_{oc} 。电路如题 4-13 解图 (g) 所示,则有

$$3I_1 + (I_1 + 4I_1) \times 1 = 10$$

$$I_1 = 1.25 \text{ A}$$

$$U_{oc} = -2 \times 4I_1 + 13I_1 + 3I_1 = 8I_1 = 8 \times 1.25 = 10 \text{ (V)}$$

$$U_{oc} = -2 \times 4I_1 + 13I_1 + 10 - (I_1 + 4I_1) \times 1 = 10 \text{ (V)}$$

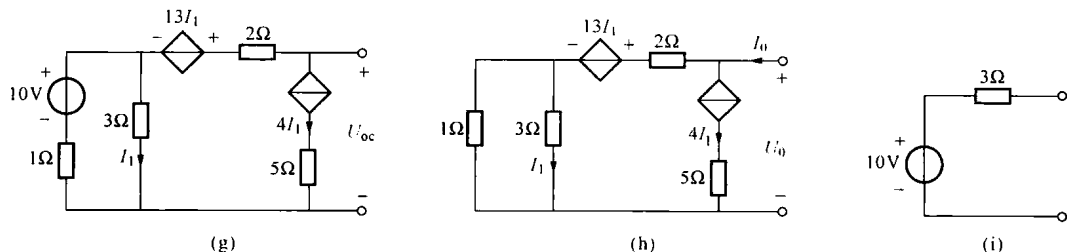
然后求 R_0 。电路如题 4-13 解图 (h) 所示。

$$I_0 = 4I_1 + I_1 + \frac{3I_1}{1} = 8I_1$$

$$U_0 = 2 \times (I_0 - 4I_1) + 13I_1 + 3I_1 = 2 \times (8I_1 - 4I_1) + 16I_1 = 24I_1$$

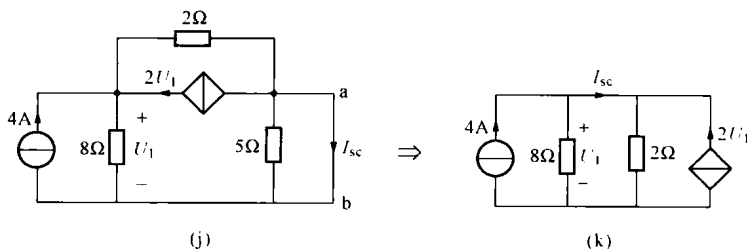
$$R_0 = \frac{U_0}{I_0} = \frac{24I_1}{8I_1} = 3 \text{ (}\Omega\text{)}$$

因此,戴维南等效电路如题 4-13 解图 (i) 所示。



题 4-13 解图 (三)

(d) 首先求短路电流 I_{sc} 。电路如题 4-13 解图 (j) 所示。该图可等效为题 4-13 解图 (k)。



题 4-13 解图 (四)

题 4-13 解图 (k) 电路的双节点电压方程为

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right)U_1 = 4 + 2U_1$$

解之得

$$U_1 = -\frac{32}{11}\text{V}$$

所以

$$I_{sc} = -2U_1 + \frac{U_1}{2} = -1.5U_1 = -1.5 \times \left(-\frac{32}{11}\right) = \frac{48}{11} \text{ (A)}$$

现在求 R_0 。电路如题 4-13 解图 (l) 所示。该图可等效为题 4-13 解图 (m)。由该图得

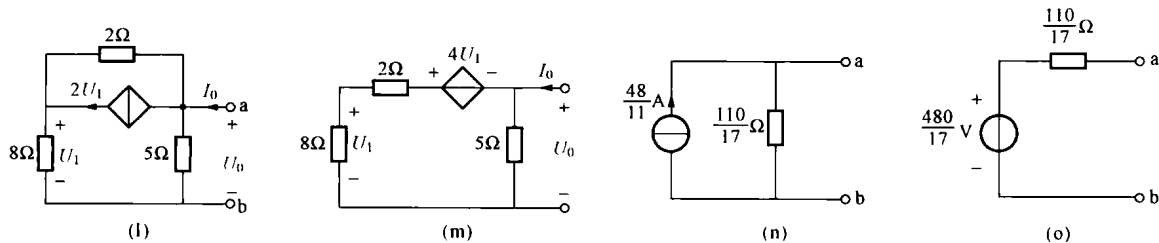
$$U_0 = -4U_1 + U_1 + 2 \times \frac{U_1}{8} = -2.75U_1$$

$$I_0 = \frac{U_0}{5} + \frac{U_1}{8} = -\frac{2.75}{5}U_1 + \frac{U_1}{8} = -0.55U_1 + 0.125U_1 = -0.425U_1$$

所以

$$R_0 = \frac{U_0}{I_0} = \frac{-2.75U_1}{-0.425U_1} = \frac{110}{17} \text{ (}\Omega\text{)}$$

因此，诺顿等效电路和戴维南等效电路分别如题 4-13 解图 (n) 和 (o) 所示。



题 4-13 解图 (五)

4-14 求题 4-14 图所示电路中 R_L 中的电流 I_L ；若 I_L 增大到原来的 3 倍，求此时负载电阻 R_L 的数值。

解 将 R_L 支路抽出，其余部分用其戴维南等效电路代替，电路如题 4-14 解图 (a) 所示。

(1) 求开路电压 U_{oc} 。电路如题 4-14 解图 (b) 所示，则有

$$I_1 = \frac{15 - 13}{1 + 1} = 1 \text{ (A)}$$

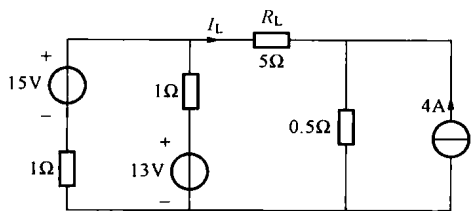
$$U_{oc} = 1 \times I_1 + 13 - 0.5 \times 4 = 1 + 13 - 2 = 12 \text{ (V)}$$

(2) 求等效电阻 R_0 ，即

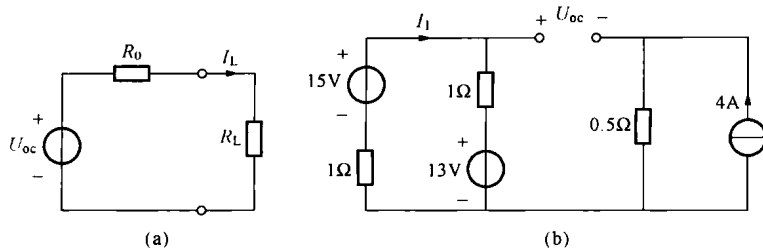
$$R_0 = 1 // 1 + 0.5 = 1 \text{ (}\Omega\text{)}$$

(3) 求当 $R_L = 5\Omega$ 时的电流 I_L 。由题 4-14 解图 (a) 得

$$I_L = \frac{U_{oc}}{R_0 + R_L} = \frac{12}{1 + 5} = 2 \text{ (A)}$$



题 4-14 图



题 4-14 解图

(4) 求当 I_L 增大到原来的 3 倍时的 R_L 。由题 4-14 解图 (a) 电路得

$$\frac{12}{1+R_L} = 3 \times 2$$

所以

$$R_L = 1\Omega$$

4-15 [提示] 先求网络 N 的戴维南等效电路, 然后, 由将其与外部电路 N' 连接所得电路可知, 要使 $I=0$, 则 $U_s = U_{oc} = 2V$ 。

4-16 见 [例 4-3]。

4-17 已知题 4-17 图所示电路中, 电阻 $R=2\Omega$ 时, 电流 $I=4A$ 。求 $R=5\Omega$ 时电流 I 。

解 (1) 求戴维南等效电阻 R_0 , 即

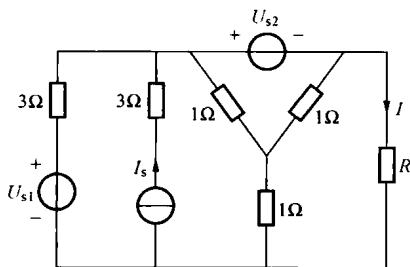
$$R_0 = 3 // [(1 // 1) + 1] = 3 // 1.5 = 1 (\Omega)$$

(2) 求 U_{oc} 。将待求支路抽出, 其余部分用其戴维南等效电路代替, 电路如题 4-17 解图所示。因为 $R=2\Omega$ 时, $I=4A$, 所以

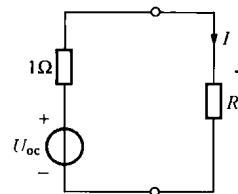
$$U_{oc} = (1+R)I = (1+2) \times 4 = 12 (V)$$

故当 $R=5\Omega$ 时, 电流 I 为

$$I = \frac{U_{oc}}{1+R} = \frac{12}{1+5} = 2 (A)$$



题 4-17 图

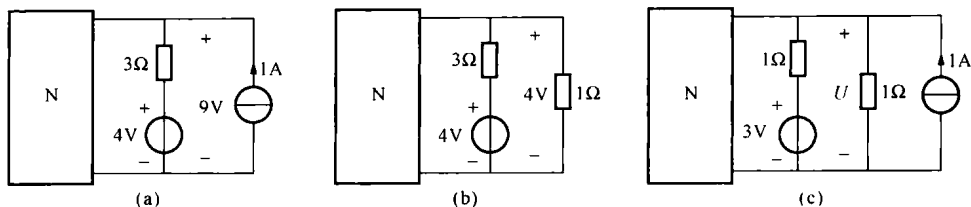


题 4-17 解图

注: 二端网络独立电源未知, 其他元件参数已知时, 可先求出其等效电阻, 然后用戴维南等效电路代替二端网络, 根据已知条件确定开路电压。

4-18 题 4-18 图中 N 为线性含源电阻性二端网络。试用题 4-18 图 (a)、(b) 两图的数据求题 4-18 图 (c) 中的电压 U 。

解 将题 4-18 图 (a)、(b) 中网络 N 分别用其戴维南等效电路代替, 电路分别如题 4-18 解图 (a)、(b) 所示。



题 4-18 图

题 4-18 解图 (a) 中, $I = 1 - \frac{9-4}{3} = -\frac{2}{3}$ (A), 所以

$$U_{oc} - \frac{2}{3}R_0 = 9$$

题 4-18 解图 (b) 中, $I = -4$ A, 所以

$$U_{oc} - 4R_0 = 4$$

联立以上两式求解得

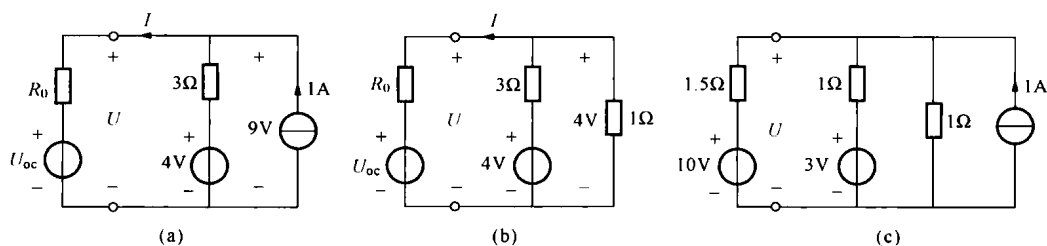
$$U_{oc} = 10\text{V}, R_0 = 1.5\Omega$$

将题 4-18 图 (c) 中网络 N 用其戴维南等效电路代替, 如题 4-18 解图 (c) 所示。由节点法得

$$\left(\frac{1}{1.5} + 1 + 1\right)U = 3 + 1 + \frac{10}{1.5}$$

解之得

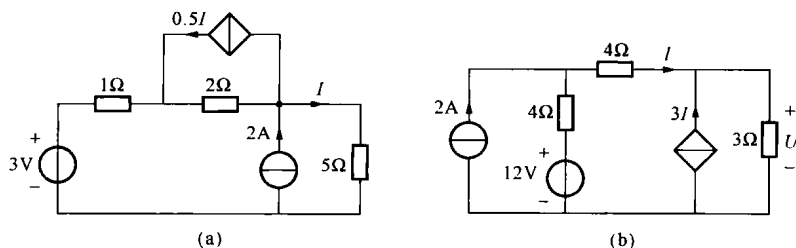
$$U = 4\text{V}$$



题 4-18 解图

注: 如果给定的不是结构和参数都已知的电路, 需根据具体已知条件确定抽象电路的等效电路。

4-19 试用戴维南定理求题 4-19 图所示电路中指定的电流 I 和电压 U 。



题 4-19 图

解 (a) 首先求开路电压 U_{oc} 。电路如题 4-19 解图 (a) 所示, 则

$$U_{oc} = (2+1) \times 2 + 3 = 9 \text{ (V)}$$

然后求 R_0 。电路如题 4-19 解图 (b) 所示, 则

$$U = 2 \times (-I - 0.5I) - 1 \times I = -4I$$

$$R_0 = \frac{U}{-I} = 4 \Omega$$

最后求电流 I 。电路如题 4-19 解图 (c) 所示。

$$I = \frac{9}{5+4} = 1 \text{ (A)}$$

(b) 首先求开路电压 U_{oc} 。电路如题 4-19 解图 (d) 所示。由 KCL 得

$$I + 3I = 0 \Rightarrow I = 0$$

$$U_{oc} = 4 \times 2 + 12 = 20 \text{ (V)}$$

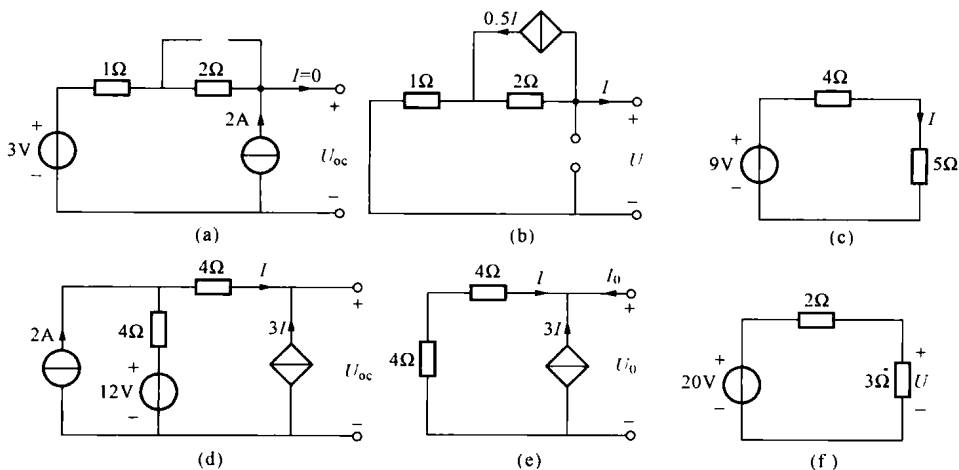
然后求 R_0 。电路如题 4-19 解图 (e) 所示, 则

$$U_0 = -(4+4) \times I = -8I, I_0 = -I - 3I = -4I$$

$$R_0 = \frac{U_0}{I_0} = \frac{-8I}{-4I} = 2 \text{ (}\Omega\text{)}$$

最后求电压 U 。电路如题 4-19 解图 (f) 所示, 则

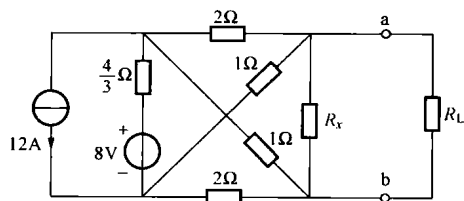
$$U = \frac{3}{3+2} \times 20 = 12 \text{ (V)}$$



题 4-19 解图

4-20 题 4-20 图所示电路中, $R_L = 1 \Omega$ 。当负载 R_L 开路时, 调节 R_x 使开路电压 $U_{oc} = 1 \text{ V}$, R_x 不再变动。试用诺顿定理求 R_L 消耗的功率。

解 (1) 求 I_{sc} 。电路如题 4-20 解图 (a) 所示, 等效变换可得题 4-20 解图 (b), 则有



题 4-20 图

$$I_1 = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3} + (2//1) + (2//1)} \times 6 = 3 \text{ (A)}, I_2 = \frac{2}{1+2} \times 3 = 2 \text{ (A)}, I_3 = \frac{1}{1+2} \times 3 = 1 \text{ (A)}$$

$$I_{sc} = I_2 - I_3 = 2 - 1 = 1 \text{ (A)}$$

(2) 求 R_0 。因为 $U_{oc} = 1\text{V}$ 、 $I_{sc} = 1\text{A}$ ，所以

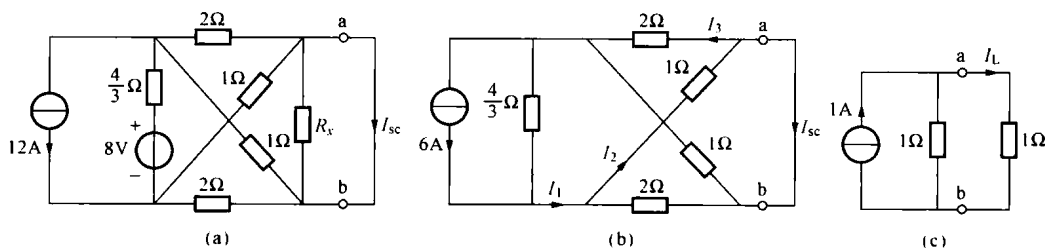
$$R_0 = \frac{U_{oc}}{I_{sc}} = 1\Omega$$

(3) 求 P_{RL} 。电路如题 4-20 解图 (c) 所示，则有

$$I_L = \frac{1}{1+1} \times 1 = 0.5 \text{ (A)}$$

所以

$$P_{RL} = R_L I_L^2 = 1 \times (0.5)^2 = 0.25 \text{ (W)}$$



题 4-20 解图

4-21 电路如题 4-21 图所示，试用诺顿定理求电流 I 。

解 (1) 求 I_{sc} 。电路如题 4-21 解图 (a) 所示。由 KVL 和元件的 VAR 得

$$3I_1 + 4I_{sc} = 30$$

由 KCL 和元件的 VAR 得

$$I_{sc} = I_1 + \frac{3I_1}{6} + 1.5I_1 = 3I_1$$

联立上述两式解得

$$I_1 = 2\text{A}, I_{sc} = 3I_1 = 6 \text{ (A)}$$

(2) 求 R_0 。电路如题 4-21 解图 (b) 所示。由 KCL 和元件的 VAR 得

$$I_0 = -I_1 - \frac{3I_1}{6} - 1.5I_1 = -3I_1$$

由 KVL 和元件的 VAR 得

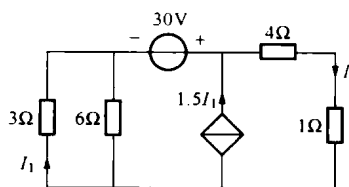
$$U_0 = 4I_0 - 3I_1 = 4 \times (-3I_1) - 3I_1 = -15I_1$$

所以

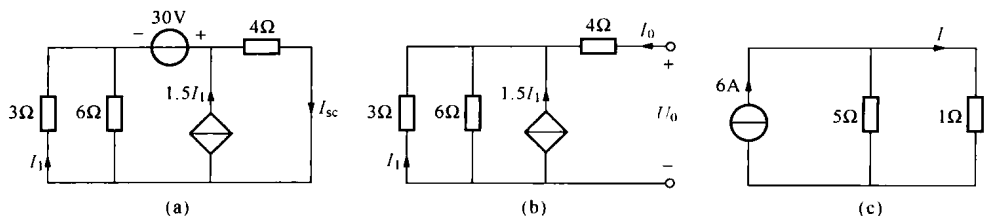
$$R_0 = \frac{U_0}{I_0} = \frac{-15I_1}{-3I_1} = 5 \text{ (}\Omega\text{)}$$

(3) 求电流 I 。电路如题 4-21 解图 (c) 所示，则

$$I = \frac{5}{5+1} \times 6 = 5 \text{ (A)}$$



题 4-21 图



题 4-21 解图

最大功率

4-22 题 4-22 图所示电路中的负载电阻 R_L 可变, 试问 R_L 等于何值时它吸收的功率最大? 此最大功率等于多少?

解 (1) 求 U_{oc} 。电路如题 4-22 解图 (a) 所示。由 KVL 得

$$2I + (I + 2I) \times 2 - 2 + 4 + 2I = 0 \Rightarrow I = -0.2A$$

所以

$$U_{oc} = -2I = -2 \times (-0.2) = 0.4 \text{ (V)}$$

(2) 求 R_0 。电路如题 4-22 解图 (b) 所示, 则有

$$U_0 = 2I + (I + 2I) \times 2 = 8I$$

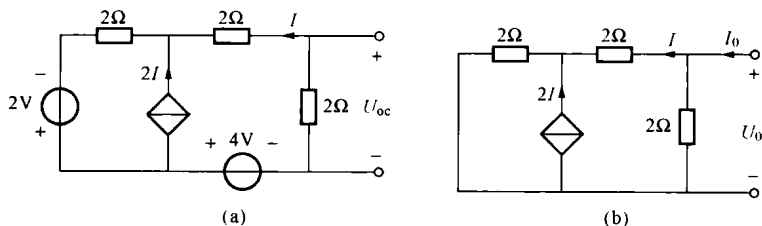
$$I_0 = I + \frac{U_0}{2} = I + \frac{8I}{2} = 5I$$

所以

$$R_0 = \frac{U_0}{I_0} = \frac{8I}{5I} = 1.6 \text{ (}\Omega\text{)}$$

根据最大功率传输定理, 当 $R_L = R_0 = 1.6 \Omega$ 时获得最大功率, 其值为

$$P_{\max} = \frac{U_{oc}^2}{4R_0} = \frac{0.4^2}{4 \times 1.6} = 0.025 \text{ (W)}$$



题 4-22 解图

4-23 题 4-23 图所示电路中, 负载电阻 $R_L = 3.6 \Omega$ 时获得最大功率, 试确定电路中 R_x 等于多少, 并求出此时 R_L 的最大功率值。

解 (1) 求 R_x 。电路如题 4-23 解图 (a) 所示, 则有

$$R_0 = (4 + R_x) // 6 = \frac{(4 + R_x) \times 6}{4 + R_x + 6} = 3.6 \text{ (}\Omega\text{)}$$

解之得

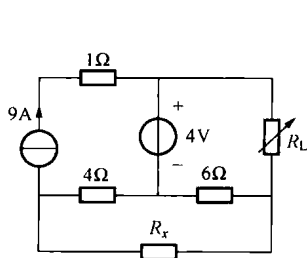
$$R_x = 5\Omega$$

(2) 求 U_{oc} 。电路如题 4-23 解图 (b) 所示, 则有

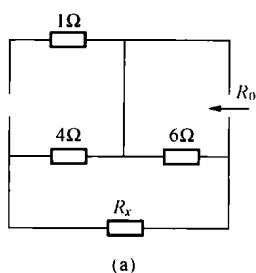
$$I_1 = \frac{4}{4+6+5} \times 9 = \frac{36}{15} = 2.4 \text{ (A)}, U_{oc} = 4 + 6I_1 = 4 + 6 \times 2.4 = 18.4 \text{ (V)}$$

由最大功率传输定理可得 R_L 的最大功率为

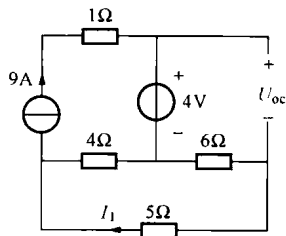
$$P_{\max} = \frac{U_{oc}^2}{4R_0} = \frac{18.4^2}{4 \times 3.6} = 23.5 \text{ (W)}$$



题 4-23 图



(a)



(b)

题 4-23 解图

替代定理

4-24 见 [例 4-4]。

特勒根定理

4-25 题 4-25 图所示电路中, NR 仅由二端线性电阻组成。对于不同的输入直流电压源 U_s 及不同的 R_1 、 R_2 值进行了两次测量, 得到下列数据: 当 $R_1 = R_2 = 2\Omega$ 、 $U_s = 8V$ 时, $I_1 = 2A$ 、 $U_2 = 2V$; 当 $R_1 = 1.4\Omega$ 、 $R_2 = 0.8\Omega$ 、 $\hat{U}_s = 9V$ 时, $\hat{I}_1 = 3A$, 求 \hat{U}_2 的值。

解 当 $R_1 = R_2 = 2\Omega$ 、 $U_s = 8V$ 时

$$I_1 = 2A, U_1 = U_s - 2I_1 = 8 - 2 \times 2 = 4 \text{ (V)}$$

$$U_2 = 2V, I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ (A)}$$

当 $R_1 = 1.4\Omega$ 、 $R_2 = 0.8\Omega$ 、 $\hat{U}_s = 9V$ 时

$$\hat{I}_1 = 3A, \hat{U}_1 = \hat{U}_s - R_1 \hat{I}_1 = 9 - 1.4 \times 3 = 4.8 \text{ (V)}, \hat{I}_2 = \frac{\hat{U}_2}{R_2} = \frac{\hat{U}_2}{0.8} = 1.25\hat{U}_2$$

对二端电阻组成的网络, 由特勒根定理得

$$-U_1 \hat{I}_1 + U_2 \hat{I}_2 = -\hat{U}_1 I_1 + \hat{U}_2 I_2$$

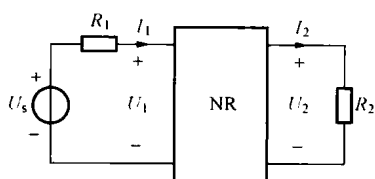
代入数据得

$$-4 \times 3 + 2 \times 1.25\hat{U}_2 = -4.8 \times 2 + \hat{U}_2 \times 1$$

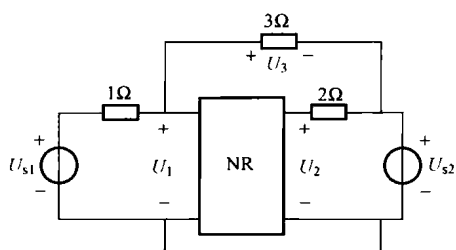
$$1.5\hat{U}_2 = 2.4$$

所以

$$\hat{U}_2 = 1.6V$$



题 4-25 图



题 4-26 图

注：使用特勒根定理时要注意电压和电流的参考方向。关联参考方向取正号时，非关联参考方向应取负号；反之依然。

4-26 题 4-26 图所示电路中，NR 仅由二端线性电阻组成， $U_{s1}=18\text{V}$ 。当 U_{s1} 作用、 U_{s2} 短路时，测得 $U_1=9\text{V}$ 、 $U_2=4\text{V}$ ；又当 U_{s1} 和 U_{s2} 共同作用时，测得 $U_3=-30\text{V}$ 。求直流电压源 U_{s2} 的值。

解 当 U_{s1} 作用、 U_{s2} 短路时，电路如题 4-26 解图 (a) 所示，则

$$U_1 = I_1 + 18 = 9 \text{ (V)} \Rightarrow I_1 = -9\text{A}$$

$$I_2 = \frac{U_2}{2} + \frac{U_3}{3} = \frac{U_2}{2} + \frac{U_1}{3} = \frac{4}{2} + \frac{9}{3} = 5 \text{ (A)}$$

当 U_{s1} 和 U_{s2} 共同作用时，电路如题 4-26 解图 (b) 所示，则有

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_3 + \hat{U}_{s2} = -30 + \hat{U}_{s2}$$

$$\hat{U}_1 = \hat{I}_1 + 18 \Rightarrow \hat{I}_1 = \hat{U}_1 - 18 = -30 + \hat{U}_{s2} - 18 = -48 + \hat{U}_{s2}$$

对于二端电阻组成的网络，由特勒根定理得

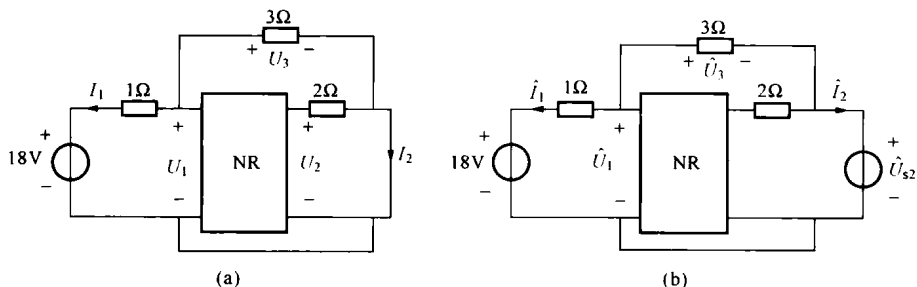
$$U_1 \hat{I}_1 + U_{s2} \hat{I}_2 = \hat{U}_1 I_1 + \hat{U}_{s2} I_2$$

代入数据得

$$9 \times (-48 + \hat{U}_{s2}) + 0 \times \hat{I}_2 = (-30 + \hat{U}_{s2}) \times (-9) + 5 \hat{U}_{s2}$$

解之得

$$\hat{U}_{s2} = 54\text{V}$$



题 4-26 解图

互易定理

4-27 试用互易定理求题 4-27 图所示电路中的电流 I 。

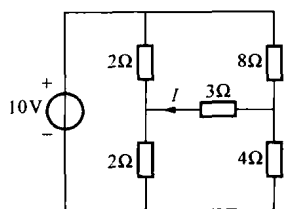
解 根据互易定理，求原电路中的 I ，可等价地求题 4-27 解图 (a) 中的 I 。将该图电路改画为题 4-27 解图 (b)，则有

$$I_0 = \frac{10}{3 + 2//2 + 8//4} = 1.5 \text{ (A)}$$

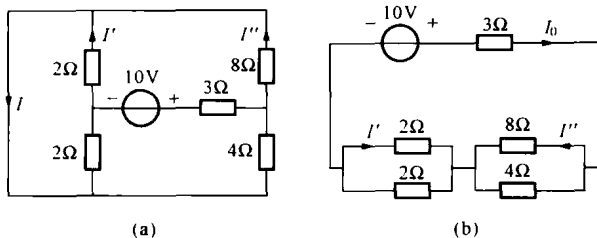
$$I' = -\frac{1}{2} I_0 = -0.75 \text{ (A)}, \quad I'' = \frac{4}{4+8} \times I_0 = \frac{4}{12} \times 1.5 = 0.5 \text{ (A)}$$

所以

$$I = I' + I'' = -0.75 + 0.5 = -0.25 \text{ (A)}$$



题 4-27 图



题 4-27 解图

注：用互易定理直接求解具体电路在实际中用得较少，更多的是用来求解含双口网络的电路。

4-28 二端线性电阻网络 NR 有一对输入端和一对输出端。当输入为 2A 电流源时，输入端电压为 10V，输出端电压为 5V。若把电流源移到输出端，同时在输入端跨接 5Ω 电阻，求 5Ω 电阻中流过的电流。

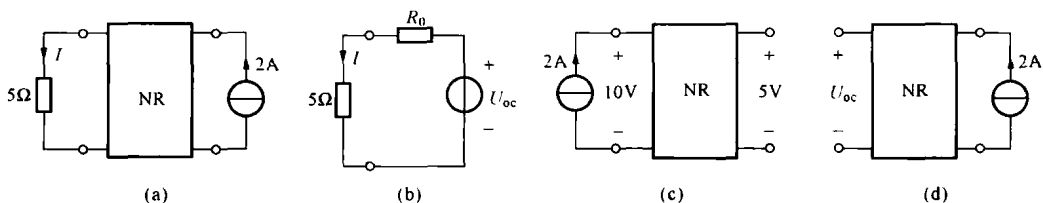
解 方法 1：由题意画出电路如题 4-28 解图 (a) 所示。将 5Ω 电阻支路抽出，其余部分用其戴维南等效电路代替，电路如题 4-28 解图 (b) 所示。

(1) 求 R_0 。电路如题 4-28 解图 (c) 所示，则有

$$R_0 = \frac{10}{2} = 5 \text{ (}\Omega\text{)}$$

(2) 求 U_{oc} 。电路如题 4-28 解图 (d) 所示。由互易定理得

$$U_{oc} = 5\text{V}$$

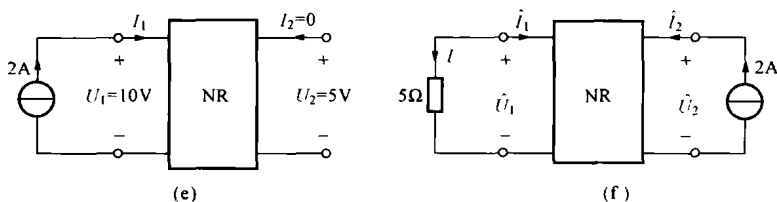


题 4-28 解图 (一)

(3) 求电流 I 。由题 4-28 解图 (b) 得

$$I = \frac{5}{5+5} = 0.5 \text{ (A)}$$

方法 2：利用特勒根拟功率守恒定理求解。由题意可得题 4-28 解图 (e)、(f) 所示的两个电路。



题 4-28 解图 (二)

对于仅由二端线性电阻组成的网络 NR, 由特勒根拟功率守恒定理可得

$$U_1 \hat{I}_1 + U_2 \hat{I}_2 = \hat{U}_1 I_1 + \hat{U}_2 I_2 \quad (\text{网络 NR 的互易条件})$$

题 4-28 解图 (e) 中, $U_1 = 10\text{V}$, $I_1 = 2\text{A}$, $U_2 = 5\text{V}$, $I_2 = 0$; 题 4-28 解图 (f) 中, $\hat{I}_2 = 2\text{A}$, $\hat{U}_1 = -5\hat{I}_1$, 代入上式得

$$10\hat{I}_1 + 5 \times 2 = -5\hat{I}_1 \times 2$$

解之得

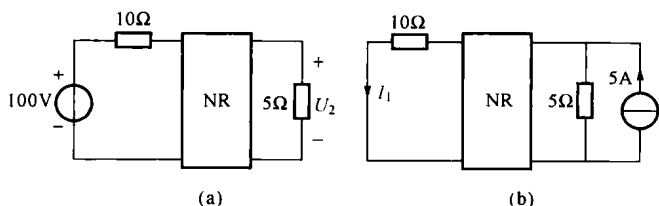
$$I = -\hat{I}_1 = 0.5\text{A}$$

4-29 题 4-29 图所示电路中, NR 仅由二端线性电阻所组成, 对于题 4-29 图 (a) 所示的电路有 $U_2 = 20\text{V}$ 。求题 4-29 图 (b) 电路中的电流 I_1 。

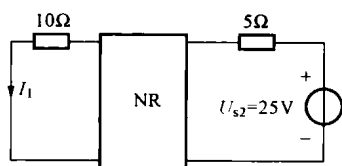
解 由题 4-29 图 (a) 得

$$I_2 = \frac{U_2}{5} = \frac{20}{5} = 4 \text{ (A)}$$

将题 4-29 图 (b) 等效为题 4-29 解图。由互易定理可知, 当 $U_{s2} = 100\text{V}$ 时, $I_1 = 4\text{A}$; 由齐性原理可知, 当 $U_{s2} = 25\text{V}$ 时, $I_1 = 1\text{A}$ 。



题 4-29 图



题 4-29 解图

其他

4-31 求题 4-31 图所示电路中的电压 U 。

解 因为 $U = I_1$, 将原电路等效为题 4-31 解图 (a)。将受控源所在支路抽出, 其余部分用其戴维南等效电路代替, 电路如题 4-31 解图 (b) 所示。

(1) 求 U_{∞} 。电路如题 4-31 解图 (c) 所示。利用叠加定理求开路电压 U_{∞} 。

1) 4V 电压源单独作用。电路如题 4-31 解图 (d) 所示, 图中 a、b 两点等电位 (电桥平衡), 该图可等效为题 4-31 解图 (e), 则有

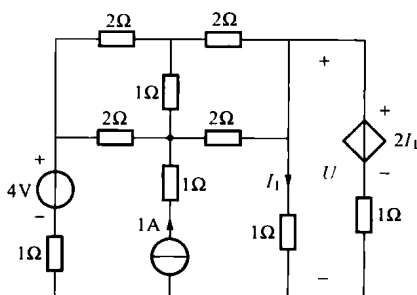
$$U'_{\infty} = \frac{1}{1 + (2+2)/(2+2) + 1} \times 4 = 1 \text{ (V)}$$

2) 1A 电流源单独作用。电路如题 4-31 解图 (f) 所示。由电路的对称结构易得

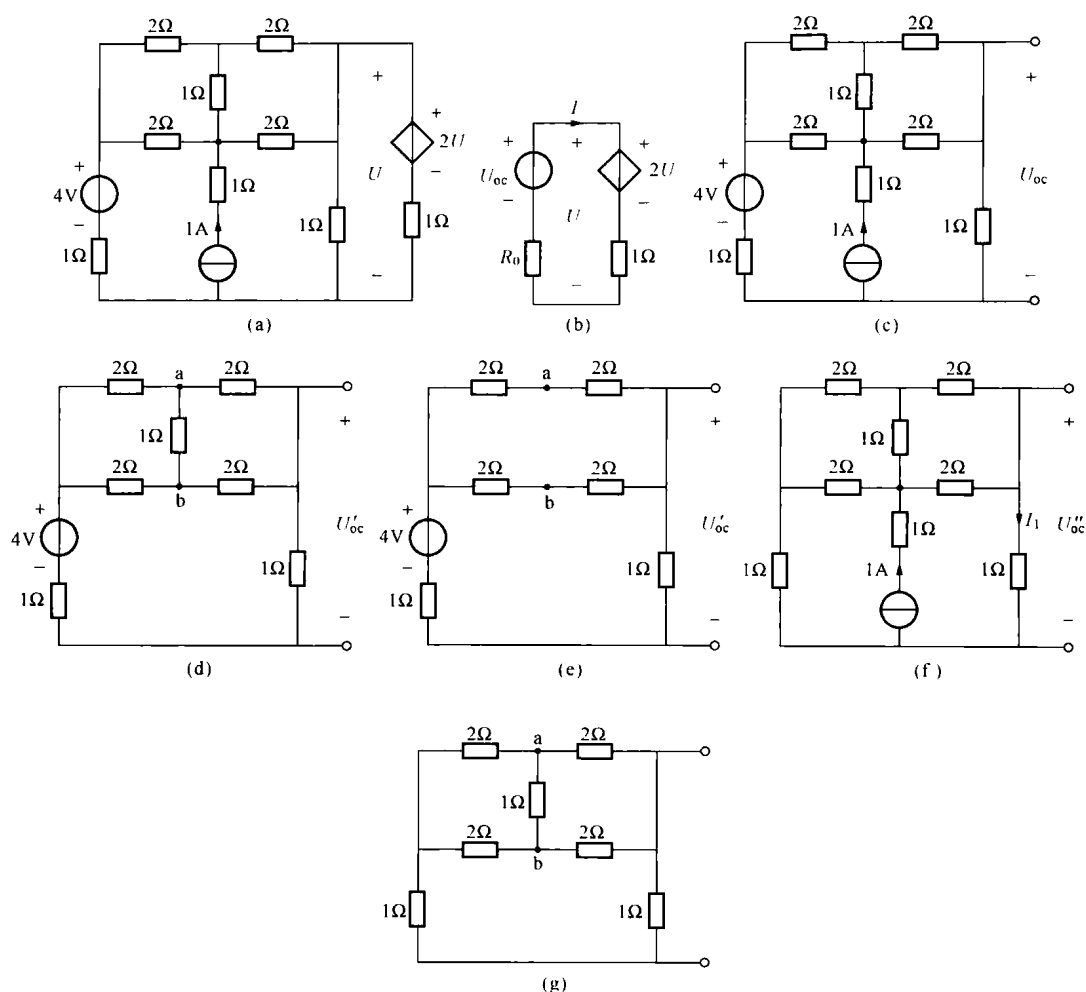
$$I_1 = 0.5\text{A}, U''_{\infty} = I_1 \times 1 = 0.5 \text{ (V)}$$

由叠加定理得

$$U_{\infty} = U'_{\infty} + U''_{\infty} = 1 + 0.5 = 1.5 \text{ (V)}$$



题 4-31 图



题 4-31 解图

(2) 求 R_0 。电路如题 4-31 解图 (g) 所示。图中 a、b 两点等电位 (电桥平衡), ab 支路可断开, 所以

$$R_0 = 1 // [(2+2) // (2+2) + 1] = 0.75 \text{ } (\Omega)$$

(3) 求电压 U 。由题 4-31 解图 (b) 可得如下方程

$$\begin{cases} (1+0.75)I+2U=1.5 \\ U=2U+I \end{cases}$$

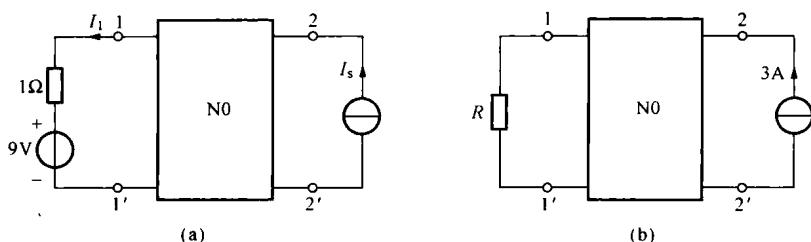
联立解得

$$U=6\text{V}$$

4-32 题 4-32 图 (a) 所示电路中 N_0 为不含独立源的线性电阻网络。已知当 $I_s=0$ 时, $I_1=-1\text{A}$; 当 $I_s=9\text{A}$ 时, $I_1=5\text{A}$ 。若将 N_0 的外电路改接为题 4-32 图 (b) 所示电路, 且已知 R 可获得最大功率, 试求 R 值及其最大功率 P_{\max} 。

解 (1) 求 $11'$ 右侧的戴维南等效电阻 R_{eq} 。因为当 $I_s=0$ 时, $I_1=-1\text{A}$, $U_1=I_1+9=8\text{V}$, 所以

$$R_{\text{eq}} = \frac{U_1}{-I_1} = 8\Omega$$



题 4-32 图

(2) 求 P_{max} 。

方法 1: $I_s = 9\text{A}$ 时, $I_1 = 5\text{A}$, $U_1 = I_1 + 9 = 5 + 9 = 14$ (V)。根据叠加定理和齐次定理得

$$U_1 = K_1 I_1 + K_2 I_s$$

由已知条件得

$$\begin{cases} 8 = K_1 \times (-1) \\ 14 = K_1 \times 5 + K_2 \times 9 \end{cases}$$

解之得

$$K_1 = -8, K_2 = 6$$

则

$$U_1 = -8I_1 + 6I_s$$

当 $I_s = 3\text{A}$ 时, 端口 1 的开路电压为

$$U_{\infty} = U_1 |_{I_1=0} = 6I_s = 6 \times 3 = 18 \text{ (V)}$$

因此, $R = R_{\text{eq}} = 8\Omega$ 时获得最大功率, 其最大功率为

$$P_{\text{max}} = \frac{U_{\infty}^2}{4R} = \frac{18^2}{4 \times 8} = \frac{81}{8} \text{ (W)}$$

方法 2: $I_s = 9\text{A}$ 时, 根据戴维南定理可得题 4-32 解图所示的等效电路。图中 $I_1 = 5\text{A}$, 则端口 1 的开路电压为

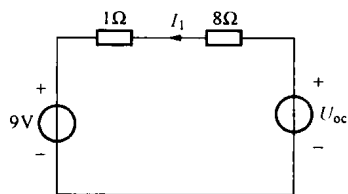
$$U'_{\infty} = 9I_1 + 9 = 9 \times 5 + 9 = 54 \text{ (V)}$$

故 $I_s = 3\text{A}$ 时, 端口 1 的开路电压为

$$U_{\infty} = \frac{3}{9} \times 54 = 18 \text{ (V)}$$

则

$$P_{\text{max}} = \frac{18^2}{4 \times 8} = \frac{81}{8} \text{ (W)}$$



题 4-32 解图

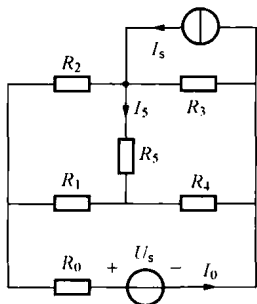
4-33 题 4-33 图所示电路中, 当 $R_5 = 8\Omega$ 时, $I_5 = 20\text{A}$, $I_0 = -11\text{A}$; 当 $R_5 = 2\Omega$ 时, $I_5 = 50\text{A}$, $I_0 = -5\text{A}$ 。试求: (1) R_5 为何值时能获得最大功率, 最大功率为多少? (2) R_5 为何值时, R_0 能获得最小功率。

解 将 R_5 支路抽出, 其余部分用其戴维南等效电路替代, 如题 4-33 解图所示, 则

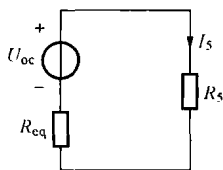
$$U_{\infty} - R_{\text{eq}} I_5 = R_5 I_5$$

代入已知条件得如下方程

$$\begin{cases} U_{oc} - 20R_{eq} = 20 \times 8 \\ U_{oc} - 50R_{eq} = 50 \times 2 \end{cases}$$



题 4-33 图



题 4-33 解图

解之得

$$U_{oc} = 200\text{V}, R_{eq} = 2\Omega$$

所以, $R_5 = R_{eq} = 2\Omega$ 时, R_5 获最大功率, 其最大功率为

$$P_{\max} = \frac{U_{oc}^2}{4R_{eq}} = \frac{(200)^2}{4 \times 2} = 5000 \text{ (W)}$$

(2) R_0 获最小功率的值为零。因此, 这个问题就转化为 R_5 为何值时 $I_0 = 0$ 。将 R_5 支路用电流为 I_5 的电流源替代, 由叠加定理和齐性定理得

$$I_0 = K_1 + K_2 I_5$$

代入已知条件有

$$\begin{cases} -11 = K_1 + 20K_2 \\ -5 = K_1 + 50K_2 \end{cases}$$

解之得 $K_1 = -15$, $K_2 = 0.2$ 。所以

$$I_0 = -15 + 0.2I_5$$

欲使 $I_0 = 0$, 则应有

$$I_0 = -15 + 0.2I_5 = 0$$

所以 $I_5 = 75\text{A}$ 。由题 4-33 解图得

$$75 = \frac{200}{2 + R_5}$$

解之得 $R_5 = \frac{2}{3}\Omega$, 即 $R_5 = \frac{2}{3}\Omega$ 时, $I_0 = 0$, R_0 获最小功率。

注: 由叠加定理和齐性定理设定的线性关系式, 适用于除独立电源以外的其他电气参数固定不变的线性电路。为了满足这一条件, 电气参数变换的支路可根据替代定理先用独立电源替代。

4.5 自测题及参考答案

1. 用叠加定理求图 1 所示电路中的电压 u 和电流 i 。

2. 用叠加定理求图 2 所示电路中受控源发出的功率。

3. 图 3 所示电路中, 含源单口网络 N 的端口电流为 i 。今欲使 R 中的电流为 $\frac{1}{3}i$, 求 R 的值。

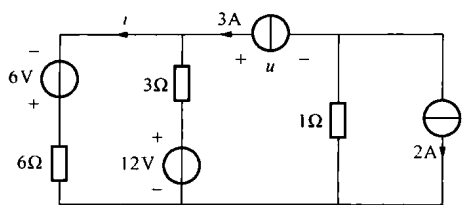


图 1

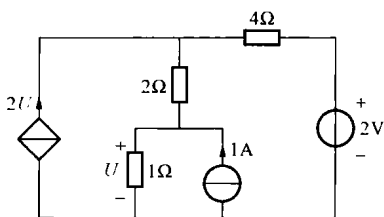


图 2

4. 用戴维南定理求图 4 所示电路中的电流 I 。

5. 图 5 所示电路中 N 为含源线性电阻网络。当 S 断开时, $U_{ab} = 12V$; 当 S 合上时, $U_{ab} = 14V$ 。求 N 的戴维南等效电路。

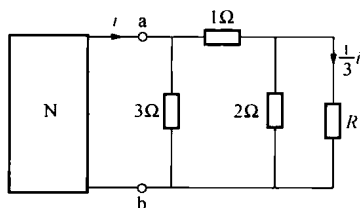


图 3

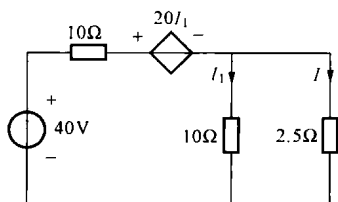


图 4

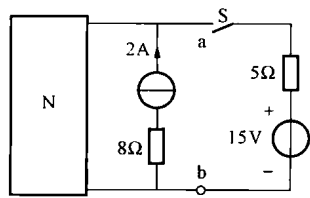


图 5

6. 图 6 所示电路中, R_L 可任意改变。已知当 $R_L = 9\Omega$ 时, $I_L = 0.4A$ 。问 R_L 应为何值时其上可获得最大功率? 并求出此最大功率 P_{max} 。

7. 图 7 所示电路中, NR 仅由线性电阻组成, $i_{s1} = 4A$, $i_{s2} = 6A$ 。当移去 i_{s2} 时, i_{s1} 发出的功率为 $56W$, 此时 $2-2'$ 端的开路电压为 $16V$; 将 i_{s1} 移去时, i_{s2} 发出的功率为 $108W$ 。试求当 i_{s1} 和 i_{s2} 同时作用于电路时, 电流源各自发出的功率。

8. 图 8 所示电路中, N 为含独立源的电阻电路。当 S 打开时有 $i_1 = 1A$, $i_2 = 5A$, $u_{oc} = 10V$; 当 S 闭合且调节 $R = 6\Omega$ 时, 有 $i_1 = 2A$, $i_2 = 4A$; 当调节 $R = 4\Omega$ 时, R 获得了最大功率。求调节 R 到何值时可使 $i_1 = i_2$ 。

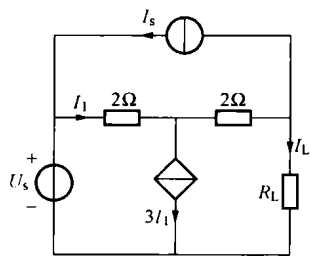


图 6

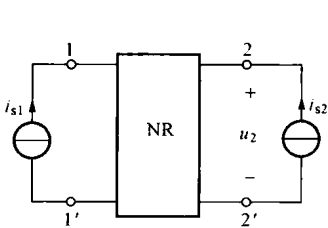


图 7

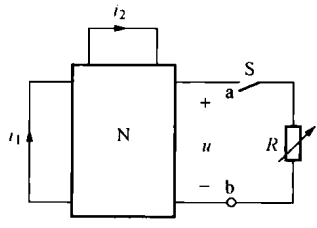


图 8

参考答案

1. 3A, 17V
2. 416W
3. $\frac{5}{3}\Omega$
4. 2A
5. 10Ω , -8V
6. 1Ω , 4W
7. 152W, 204W
8. 1Ω

第5章 双口网络

5.1 本章知识结构图

第5章知识结构图如图5-1所示。

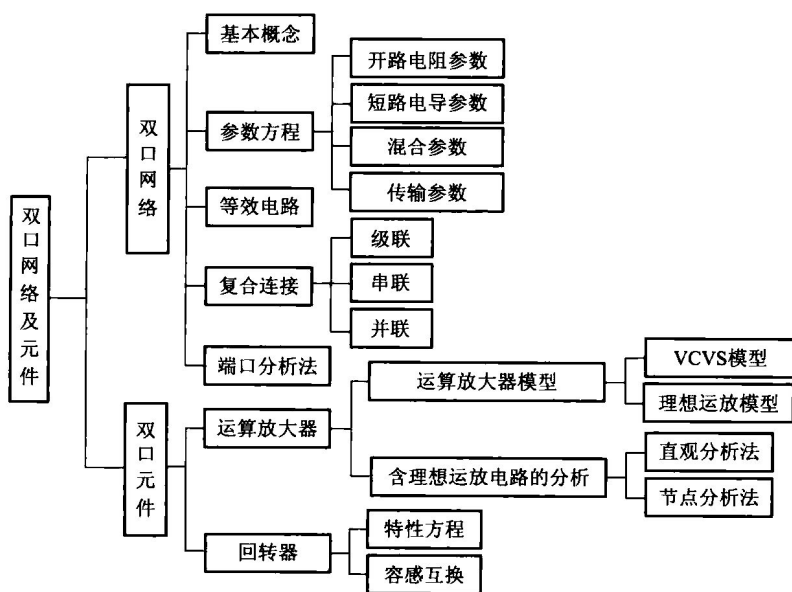


图 5-1 第5章知识结构图

5.2 知识点归纳与学习指导

本章内容分为双口网络和双口元件两大部分。

5.2.1 双口网络的基本概念

网络按照可与外部相连的端口数目分为单口网络、双口网络……三口及以上的网络称为多口网络。

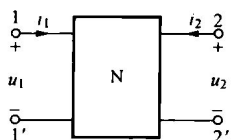


图 5-2 双口网络

对外具有两个端口的网络称为双口网络，如图5-2所示。双口网络简称双口，又称为二端口网络，是一种特殊的四端网络。三端网络可转化成双口网络，其特点是有一个公共端子。

在双口网络理论中，规定端口上的电压和电流都采用关联参考方向，如图5-2所示。端口1称为输入端口，端口2称为输出端口。

5.2.2 双口网络的参数及其方程

这里讨论的双口网络内部不含独立电源。同单口网络一样，当用双口概念分析电路时，

仅对端口上的电压、电流之间的关系感兴趣。对于线性电阻性双口网络，这种关系可用两个线性代数方程表示，共有6种表示形式，见表5-1。这些线性方程可用叠加定理和齐性定理导出。注意，对于具体的双口网络，6种参数不一定都存在。只要存在，同一双口网络任意两种参数之间都有一定的转换关系，见主教材表5-1。

双口网络的各种参数可由定义式确定。

双口网络的参数方程中端口电压、电流的排列顺序为：先端口1，后端口2；先电压，后电流，具有下列的统一形式

$$\begin{cases} y_1 = \alpha x_1 + \beta x_2 \\ y_2 = \eta x_1 + \theta x_2 \end{cases} \quad \text{或者} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \eta & \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

式中： α 、 β 、 η 和 θ 为双口网络的参数； $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \eta & \theta \end{bmatrix}$ 为参数矩阵，由网络本身的结构和元件决定，不能人为规定； x_k 、 y_k ($k=1, 2$)为端口电压、电流。

x_k ($k=1, 2$)可以人为设定，通过设其一为零，可得出各参数的定义式为

$$\alpha = \left. \frac{y_1}{x_1} \right|_{x_2=0}, \quad \beta = \left. \frac{y_1}{x_2} \right|_{x_1=0}, \quad \eta = \left. \frac{y_2}{x_1} \right|_{x_2=0}, \quad \theta = \left. \frac{y_2}{x_2} \right|_{x_1=0}$$

x_k 为电压时， $x_k=0$ 意味着端口 k 短路； x_k 为电流时， $x_k=0$ 意味着端口 k 开路。

表5-1 电阻性双口网络的常用参数及方程

参数名称	方程形式		参数的物理意义	互易条件	对称条件
	标量形式	矩阵形式			
开路电阻参数	$u_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2$ $u_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2$	$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$	R_{11} 、 R_{22} 输入和输出电阻 R_{12} 、 R_{21} 转移电阻	$R_{12} = R_{21}$	$R_{12} = R_{21}$ $R_{11} = R_{22}$
短路电导参数	$i_1 = G_{11}u_1 + G_{12}u_2$ $i_2 = G_{21}u_1 + G_{22}u_2$	$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$	G_{11} 、 G_{22} 输入和输出电导 G_{12} 、 G_{21} 转移电导	$G_{12} = G_{21}$	$G_{12} = G_{21}$ $G_{11} = G_{22}$
混合参数	$u_1 = h_{11}i_1 + h_{12}u_2$ $i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}u_2$	$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$	h_{11} 输入电阻， h_{22} 输出电导 h_{12} 电压比， h_{21} 电流比	$h_{12} = -h_{21}$	$h_{12} = -h_{21}$ $h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = 1$
逆混合参数	$i_1 = h'_{11}u_1 + h'_{12}i_2$ $u_2 = h'_{21}u_1 + h'_{22}i_2$	$\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H}' \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$	h'_{11} 输入电导， h'_{22} 输出电阻 h'_{12} 电流比， h'_{21} 电压比	$h'_{12} = -h'_{21}$	$h'_{12} = -h'_{21}$ $h'_{11}h'_{22} - h'_{12}h'_{21} = 1$
传输参数	$u_1 = Au_2 + B(-i_2)$ $i_1 = Cu_2 + D(-i_2)$	$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$	A 电压比， B 转移电阻 C 转移电导， D 电流比	$AD - BC = 1$	$AD - BC = 1$ $A = D$
逆传输参数	$u_2 = A'u_1 + B'i_1$ $-i_2 = C'u_1 + D'i_1$	$\begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}' \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$	A' 电压比， B' 转移电阻 C' 转移电导， D' 电流比	$A'D' - B'C' = 1$	$A'D' - B'C' = 1$ $A' = D'$

由定义式可知，任意一个参数都是端口开路或短路时，相应两个电量的比值。因此只要找出相应两个量之间的关系，代入定义式即可求得相应的参数。 α 和 η 由对应于 $x_2=0$ 的电路求取， β 和 θ 由对应于 $x_1=0$ 的电路求取。

确定双口网络的参数，除了上述定义式方法外，有时也直接写出其端口方程，再与参数方程对比获得。通过两个端口接电压源用回路法列写回路电流方程，消去非端口电流量写出流控型端口方程获得开路电阻参数；通过两个端口接电流源用节点法列写节点电压方程，消去非端口电压量写出压控型端口方程获得短路电导参数，混合参数或传输参数可用两类约束

写出相应的端口方程获得。

【例 5-1】 求图 5-3 (a) 所示双口网络的 G 参数。

解 双口网络端口电压和电流的参考方向如图 5-3 (b) 所示。

方法 1: 图 5-3 (b) 电路的节点电压方程为

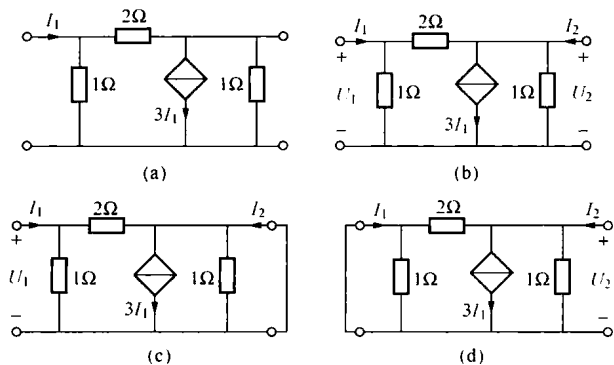


图 5-3 [例 5-1] 图

$$\begin{cases} I_1 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)U_1 - \frac{1}{2}U_2 = 1.5U_1 - 0.5U_2 \\ I_2 = -\frac{1}{2}U_1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right)U_2 + 3I_1 \\ \quad = -0.5U_1 + 1.5U_2 + 3 \times (1.5U_1 - 0.5U_2) = 4U_1 \end{cases}$$

矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

因此, G 参数矩阵为

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \text{S}$$

方法 2: 定义式法。

(1) 求 G_{11} 和 G_{21} 。令 $U_2 = 0$, 电路如图 5-3 (c) 所示。由该电路可得如下关系式

$$I_1 = U_1 + \frac{1}{2}U_1 = \frac{3}{2}U_1 = 1.5U_1, \quad I_2 = 3I_1 - \frac{1}{2}U_1 = 3 \times \frac{3}{2}U_1 - \frac{1}{2}U_1 = 4U_1$$

所以

$$G_{11} = \left. \frac{I_1}{U_1} \right|_{U_2=0} = \frac{1.5U_1}{U_1} = 1.5 \text{ (S)}, \quad G_{21} = \left. \frac{I_2}{U_1} \right|_{U_2=0} = \frac{4U_1}{U_1} = 4 \text{ (S)}$$

(2) 求 G_{12} 和 G_{22} 。令 $U_1 = 0$, 电路如图 5-3 (d) 所示。由该图得

$$I_1 = -\frac{1}{2}U_2 = -0.5U_2$$

$$I_2 = 3I_1 + U_2 - I_1 = 2I_1 + U_2 = 2 \times \left(-\frac{1}{2}U_2\right) + U_2 = 0$$

所以

$$G_{12} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{U_1=0} = \frac{-0.5U_2}{U_2} = -0.5 \text{ (S)}, \quad G_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{U_1=0} = 0$$

因此, G 参数矩阵为

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \text{S}$$

学习本部分内容时, 重点在于掌握双口网络参数及其表示的方程和互易条件及对称条件。一般可记忆参数方程, 再由此导出定义式。能正确地画出求参数相应的两个电路, 应用已学方法求取相应两个量的关系。在课程学习阶段和考试时, 特别要掌握直接用两类约束寻找关系的方法。

5.2.3 双口网络的等效电路

具有相同端口特性的双口网络是等效的。根据不同的参数方程可画出不同的等效电路。运用同一参数方程也可得出不同的等效电路。因此, 一个双口网络可有多种等效电路。最常用的是分别依据开路电阻参数方程和短路电导参数方程得到的 T 型(星形)和 Π 型(三角形)等效电路, 见表 5-2。

表 5-2 双口网络的 T 型和 Π 型等效电路

网络 型式	非互易网络		互易网络	互易参数关系式
	等效电路 1	等效电路 2		
T 型				$R_1 = R_{11} - R_{12}$ $R_2 = R_{22} - R_{12}$ $R_0 = R_{12}$
Π 型				$G_1 = G_{11} + G_{12}$ $G_2 = G_{22} + G_{12}$ $G_0 = -G_{12}$

【例 5-2】 电路如图 5-4 (a) 所示, 已知 $R_1 = R_2 = 1\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $\mu = 4$, $\beta = 2$, 求该网络的等效电路。

分析 先求双口网络的参数, 如开路电阻参数, 再由此画出等效电路。

解 (1) 求开路电阻参数。

方法 1: 定义式法。令 2-2' 端口开路 ($I_2 = 0$), 电路如图 5-4 (b) 所示, 有

$$I = I_1, U = \beta R_2 I = \beta R_2 I_1 = 2I_1$$

则

$$U_1 = R_1 (I_1 - \beta I) + R_3 I + \mu U = R_1 I_1 + (R_3 - \beta R_1) I + \mu U = I_1 + I_1 + 4 \times 2I_1 = 10I_1$$

$$U_2 = U + R_3 I + \mu U = (1 + \mu)U + R_3 I = 5U + 3I = 5 \times 2I_1 + 3I_1 = 13I_1$$

因此

$$R_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{10I_1}{I_1} = 10 (\Omega), R_{21} = \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{13I_1}{I_1} = 13 (\Omega)$$

令 1-1' 端口开路 ($I_1 = 0$), 电路如图 5-4 (c) 所示, 有

$$I = I_2, U' = -R_1\beta I = -2I_2, U = (I_2 + \beta I)R_2 = (1 + \beta)R_2 I_2 = 3I_2$$

则

$$U_1 = U' + R_3 I + \mu U = -2I_2 + 3I_2 + 4 \times 3I_2 = 13I_2$$

$$U_2 = U + R_3 I + \mu U = (1 + \mu)U + R_3 I = 5U + 3I = 5 \times 3I_2 + 3I_2 = 18I_2$$

因此

$$R_{22} = \frac{U_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{18I_2}{I_2} = 18 (\Omega), R_{12} = \frac{U_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{13I_2}{I_2} = 13 (\Omega)$$

方法 2: 方程法。首先将受控电流源位移, 如图 5-4 (d), 再进行等效变换可得图 5-4 (e)。对该电路列写回路电流方程有

$$\begin{cases} U_1 = (R_1 + R_3)I_1 + R_3 I_2 + \mu U - R_1\beta I = 4I_1 + 3I_2 + 4U - 2I \\ U_2 = R_3 I_1 + (R_2 + R_3)I_2 + \mu U + R_2\beta I = 3I_1 + 4I_2 + 4U + 2I \end{cases}$$

补充方程

$$I = I_1 + I_2, U = R_2 I_2 + R_2\beta I = I_2 + 2(I_1 + I_2) = 2I_1 + 3I_2$$

整理得

$$\begin{cases} U_1 = 4I_1 + 3I_2 + 4(2I_1 + 3I_2) - 2(I_1 + I_2) = 10I_1 + 13I_2 \\ U_2 = 3I_1 + 4I_2 + 4(2I_1 + 3I_2) + 2(I_1 + I_2) = 13I_1 + 18I_2 \end{cases}$$

与标准方程比较可得开路电阻参数为

$$R_{11} = 10\Omega, R_{12} = 13\Omega, R_{21} = 13\Omega, R_{22} = 18\Omega$$

(2) 画等效电路。由于 $R_{12} = R_{21}$, 所以网络是互易的。其 T 型等效电路如图 5-4 (f) 所示。其中

$$R_1 = R_{11} - R_{12} = 10 - 13 = -3 (\Omega), R_2 = R_{22} - R_{12} = 18 - 13 = 5 (\Omega), R_0 = R_{12} = 13\Omega$$

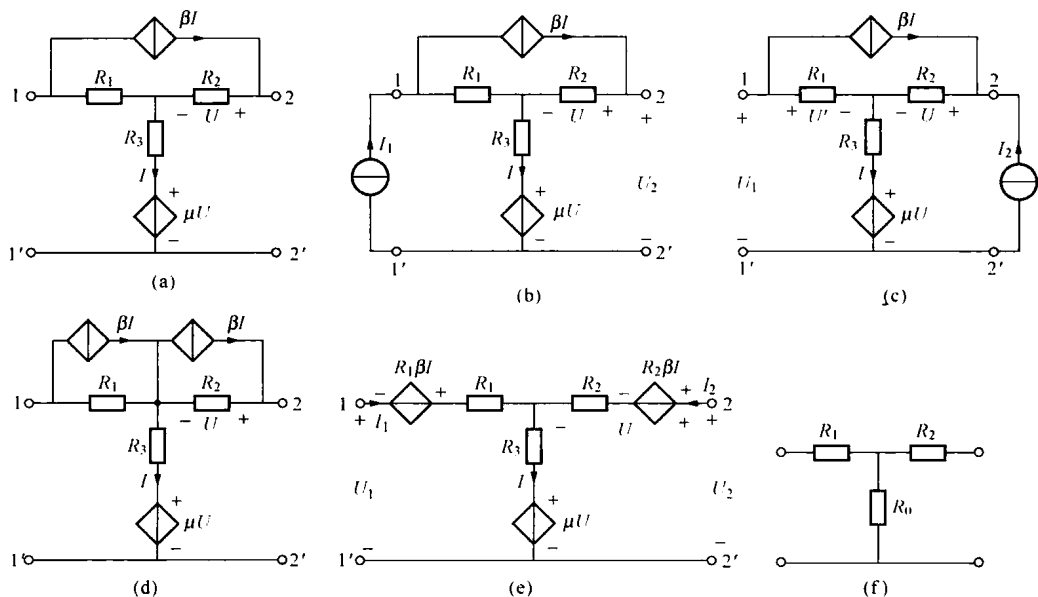


图 5-4 [例 5-2] 图

注: ① 含受控源的网络一般不是互易的, 本例给出的是特殊的网络; ② 含受控源的网络的等效电路有可能含有负电阻。实际上, 该负电阻可用 CCVS 表示; ③ 互易双口网络的

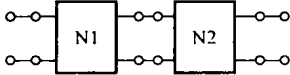
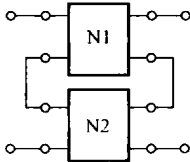
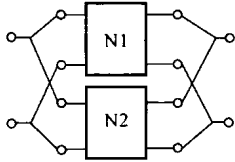
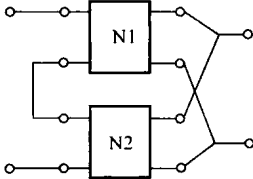
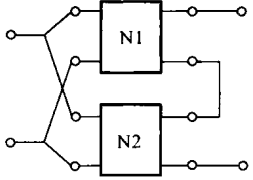
另一种等效电路是II型，可直接由G参数得出三个电阻值。

5.2.4 双口网络的复合连接

双口网络的复合连接分为级联、串联、并联、串并联和并串联五种，见表5-3。注意，级联不会破坏端口条件，但不论是端口的串联还是并联，都有可能破坏端口条件，故需要进行端口检验。只有满足端口条件时，涉及串并联的公式才能成立。

对于一个结构复杂的双口网络，要直接求出其参数，有时是十分困难的。但是，一些简单的双口网络的参数较容易求得，甚至可以直接写出。若能将一个复杂的双口网络分解成若干个简单的双口网络的复合连接，则可由这些简单双口网络的参数进而求得复杂双口网络的参数。这样就可简化复杂双口网络参数的计算。

表 5-3 双口网络的复合连接

连接方式	图示说明	公式
级联		$T = T_1 \cdot T_2$
串联		$R = R_1 + R_2$
并联		$G = G_1 + G_2$
串并联		$H = H_1 + H_2$
并串联		$H' = H'_1 + H'_2$

5.2.5 端口分析法

对于含双口网络的电路，可用端口分析方法分析计算。端口分析法的一般步骤如下：

(1) 列写电路(见图5-5)方程。方程由下列三部分组成：① 输入口所接二端网络N1的方程(方程变量包括输入端口电压、电流)；② 双口网络N的参数方程；③ 输出口所接

二端网络 N2 的方程 (方程变量包括输出端口电压、电流)。

(2) 联立上述 3 组方程求解。如果只对输出所接二端网络感兴趣, 则可将输入所接二端网络等效化简, 进而获得双口网络输出左侧网络的等效电路; 同样, 如果只对输入所接二端网络感兴趣, 则可将输出所接二端网络等效化简, 进而获得双口网络输入右侧网络的等效电路。

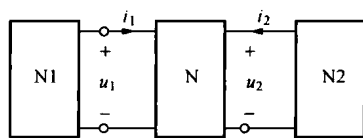
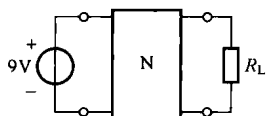


图 5-5 端口分析法用图



【例 5-3】 图 5-6 所示电路中, 非含源电阻双口网络 N 的传输参数矩阵 T 为

$$T = \begin{bmatrix} 2.5 & 6 \\ 0.5 & 1.6 \end{bmatrix}$$

图 5-6 [例 5-3] 图 求可调负载 R_L 获得最大功率时, 9V 电压源提供的功率。

解 端口电压、电流的参考方向如图 5-7 (a)。双口网络的传输参数方程为

$$\begin{cases} U_1 = 2.5U_2 - 6I_2 \\ I_1 = 0.5U_2 - 1.6I_2 \end{cases}$$

方法 1: (1) 求 R_L 。令 $U_1 = 0$, 代入上述传输参数方程, 由第一个方程得

$$R_{eq} = \frac{U_2}{I_2} = \frac{6}{2.5} = 2.4 (\Omega)$$

所以, $R_L = R_{eq} = 2.4 \Omega$ 时, 其获得最大功率。

(2) 求 9V 电压源提供的功率。此时负载电阻方程为

$$U_2 = -R_L I_2 = -2.4 I_2$$

将传输参数方程代入输入电阻的定义式得

$$R_i = \frac{U_1}{I_1} = \frac{2.5U_2 - 6I_2}{0.5U_2 - 1.6I_2}$$

将负载方程代入上式, 有

$$R_i = \frac{2.5 \times (-2.4 I_2) - 6 I_2}{0.5 \times (-2.4 I_2) - 1.6 I_2} = \frac{2.5 \times 2.4 + 6}{0.5 \times 2.4 + 1.6} = \frac{30}{7} (\Omega)$$

所以, 9V 电压源提供的功率为

$$P = \frac{U_s^2}{R_i} = \frac{9^2}{30/7} = 18.9 (\text{W})$$

方法 2: 由双口网络的传输参数方程可得 R 参数方程为

$$\begin{cases} U_1 = 5I_1 + 2I_2 \\ U_2 = 2I_1 + 3.2I_2 \end{cases}$$

由此可得图 5-7 (b) 所示的等效电路。

$$R_L = R_{eq} = 1.2 + 2 // 3 = 2.4 \Omega, R_i = 3 + 2 // (1.2 + 2.4) = \frac{30}{7} (\Omega)$$

所以, 9V 电压源提供的功率为

$$P = \frac{9^2}{30/7} = 18.9 (\text{W})$$

方法 3: 由双口网络的传输参数方程可得 G 参数方程为

$$\begin{cases} I_1 = \frac{4}{15}U_1 - \frac{1}{6}U_2 \\ I_2 = -\frac{1}{6}U_1 + \frac{5}{12}U_2 \end{cases}$$

由此可得图 5-7 (c) 所示的等效电路。类似方法 2 可求得 9V 电压源提供的功率。

方法 4: 将 $U_1 = 9\text{V}$ 代入传输参数方程得

$$9 = 2.5U_2 - 6I_2$$

故有

$$U_2 = 2.4I_2 + 3.6$$

由此可得图 5-7 (d) 所示的等效电路。图中, $U_{2oc} = 3.6\text{V}$, $R_{eq} = 2.4\Omega$ 。因此 $R_L = 2.4\Omega$, 则有

$$I_2 = -\frac{3.6}{2 \times 2.4} = -0.75 \text{ (A)}, U_2 = \frac{1}{2} \times 3.6 = 1.8 \text{ (V)}$$

所以

$$I_1 = 0.5U_2 - 1.6I_2 = 0.5 \times 1.8 - 1.6 \times (-0.75) = 2.1 \text{ (A)}$$

因此, 9V 电压源提供的功率为

$$P = U_1 I_1 = 9 \times 2.1 = 18.9 \text{ (W)}$$

方法 5: 由双口网络的传输参数方程可得下列方程

$$\begin{cases} U_2 = 1.6U_1 - 6I_1 \\ -I_2 = -0.5U_1 + 2.5I_1 \end{cases}$$

将 $U_1 = 9\text{V}$ 代入上式得

$$U_2 = 1.6 \times 9 - 6I_1 = 14.4 - 6I_1$$

$$-I_2 = -0.5 \times 9 + 2.5I_1 = -4.5 + 2.5I_1$$

所以

$$P_L = -U_2 I_2 = -15I_1^2 + 63I_1 - 64.8$$

$$\text{令 } \frac{dP_L}{dI_1} = 0, \text{ 得}$$

$$30I_1 - 63 = 0$$

则 $I_1 = 2.1\text{A}$ 。所以 9V 电压源提供的功率为

$$P = U_1 I_1 = 9 \times 2.1 = 18.9 \text{ (W)}$$

注: (1) 负载获得最大功率时, 9V 电压源提供的功率不等于负载获得的最大功率的 2 倍。

(2) 双口网络参数已知时, 先求出其等效电路, 然后再计算, 也是一种常用的方法。

5.2.6 双口元件

1. 理想运算放大器

运算放大器 (简称运放) 有四个端子与外部电路相连, 包括同相和反相输入端、输出端和公共端 g (通常接地), 其电路符号如图 5-8 (a) 所示。运放两个输入端的电流都近似为零, 输入电阻很高; 运放的输出电压 u_o 与输入电压 u_d ($u_d = u_+ - u_-$) 之间的转移特性曲线如图 5-8 (b) 所示 (虚线为实际曲线), 这一曲线几乎与输出电流无关, 故运放的输出电阻

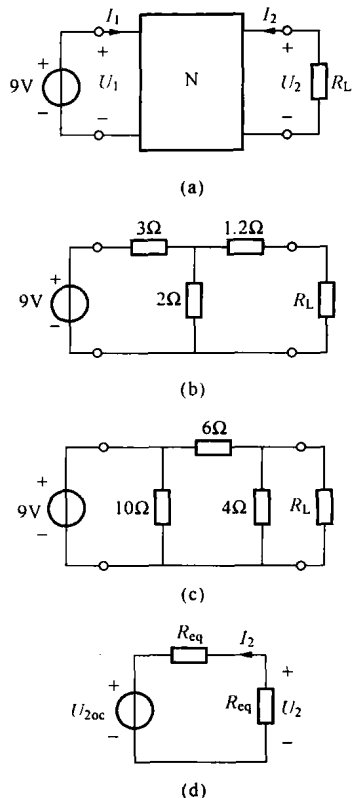


图 5-7 [例 5-3] 解图

很小。特性曲线分为三段：①段称为负饱和区 ($u_d < -\epsilon$)；②段称为线性区 ($|u_d| \leq \epsilon$)；③段称为正饱和区 ($u_d > \epsilon$)。运放的开环放大倍数 A ($A \approx U_{sat}/\epsilon$) 一般大于 10^5 ， ϵ 的典型值小于 10^{-4} V。图 5-8 (b) 中 U_{sat} 称为运放的饱和电压，它与运放的内部偏置电压有关，其值小于偏置电压。

本章讨论的是运放的低频线性应用，其电路模型如图 5-8 (c) 所示。取输入电阻 $R_i \rightarrow \infty$ 、输出电阻 $R_o = 0$ 时，运放的模型变为 VCVS。运放采用含 VCVS 的低频线性模型时，可按含受控源电路的分析方法进行分析。

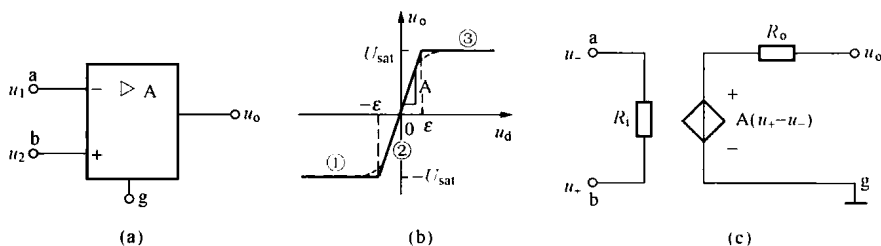


图 5-8 运算放大器

(a) 电路符号；(b) 电压转移特性曲线；(c) 线性低频电路模型

$\epsilon = 0$ (即 $A \rightarrow \infty$) 时，图 5-8 (b) 中的电压转移特性曲线变为图 5-9。工作在图 5-9 ②段线性区的运放称为理想运算放大器 (简称理想运放)，电路符号如图 5-10 所示。它是运放线性低频电路模型在 $R_i \rightarrow \infty$ 、 $R_o = 0$ 和 $A \rightarrow \infty$ 时的模型。理想运放是一种双口有源电阻元件，其 VAR (称为虚短虚断特性) 为

$$\begin{cases} u_d = u_+ - u_- = 0 \\ i_i = 0 \end{cases}$$

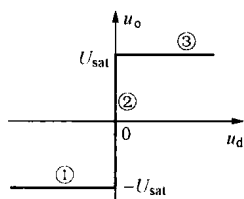


图 5-9 运放的低频理想模型

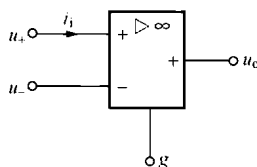


图 5-10 理想运放的符号

2. 含理想运放电路的分析

对于含有理想运放的电路，常用的分析方法有两种。

对于简单电路，可基于两类约束的直观法进行分析。理想运放输出端的电压和电流一般需要分别利用 KVL 和 KCL 来求。分析时抓住理想运放的两个主要特点 [两个输入端等电位 (虚短特性)，流入两输入端的电流为零 (虚断特性)]，对节点列写电流方程计及虚断特性，对回路列电压方程计及虚短特性。

【例 5-4】 求图 5-11 (a) 所示电路中的输出电压 U_o 。

【分析】 因运放输出端与参考点之间无直接支路相连，故所求的输出电压 U_o 可视为开路线的电压。该电压需通过 KVL 求得，为此选择由两个电阻 R_o 和运放的输入口以及输出口组成的回路 [见图 5-11 (b)]。运放输入口的电压为零 (虚短特性)；注意到运放输入端电流

为零（虚断特性），图 5-11 (b) 下方的两个电阻 R_1 和 R_0 为串联，该 R_0 的端电压可用分压公式获得；根据欧姆定律，图 5-11 (b) 上方电阻 R_0 的端电压可由流过其电流 I' 确定。为求得电流 I' ，对节点 a 应用 KCL，注意到运放输入端电流为零（虚断特性），该电流等于电流 I 。电流 I 可用两种方法确定：① 根据欧姆定律，电流 I 可由图 5-11 (b) 上方电阻 R_1 的端电压确定，该电压可通过选择由图 5-11 (b) 上方电阻 R_1 和下方电阻 R_0 ，以及运放的输入和电压源 U_1 组成的回路确定；② 图 5-11 (b) 上方电阻 R_1 和 R_0 流过同一个电流 I ，故电流 I 可由两个电阻的总电压 ($U_1 - U_o$) 除以两个电阻之和 ($R_1 + R_0$) 求得。

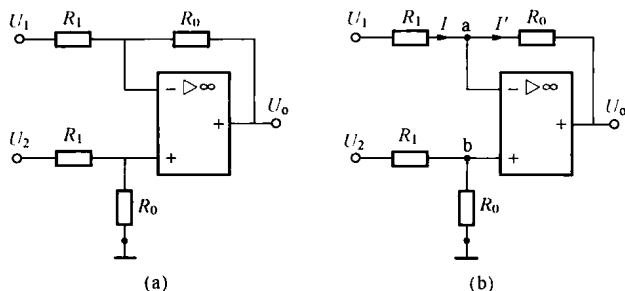


图 5-11 [例 5-4] 图

解 方法 1: 节点编号及所用电流的参考方向如图 5-11 (b) 所示。考虑理想运放的“虚断”特性，由分压公式得

$$U_b = \frac{R_0}{R_1 + R_0} U_2$$

考虑理想运放的“虚短”特性，由图 5-11 (b) 上方电阻 R_1 和下方电阻 R_0 ，以及运放的输入和电压源 U_1 组成的回路得

$$I = \frac{U_1 - U_b}{R_1} = \frac{1}{R_1} U_1 - \frac{R_0}{R_1(R_1 + R_0)} U_2$$

考虑理想运放的“虚断”特性，对节点 a 应用 KCL 有

$$I' = I = \frac{1}{R_1} U_1 - \frac{R_0}{R_1(R_1 + R_0)} U_2$$

考虑理想运放的“虚短”特性，由两个电阻 R_0 和运放的输入以及输出组成的回路得

$$U_o = -R_0 I' + U_b = -R_0 \left[\frac{1}{R_1} U_1 - \frac{R_0}{R_1(R_1 + R_0)} U_2 \right] + \frac{R_0}{R_1 + R_0} U_2 = \frac{R_0}{R_1} (-U_1 + U_2)$$

方法 2: 节点编号及所用电流的参考方向如图 5-11 (b) 所示。考虑理想运放的“虚断”特性得

$$I = \frac{U_1 - U_o}{R_1 + R_0}, U_b = \frac{R_0}{R_1 + R_0} U_2 \text{ (分压公式)}$$

由 KVL 和欧姆定律，并利用运放的“虚短”特性得

$$U_o = -R_0 I + U_b = -\frac{R_0}{R_1 + R_0} (U_1 - U_o) + \frac{R_0}{R_1 + R_0} U_2$$

整理得

$$\left(1 - \frac{R_0}{R_1 + R_0}\right) U_o = -\frac{R_0}{R_1 + R_0} U_1 + \frac{R_0}{R_1 + R_0} U_2$$

因此

$$U_o = \frac{R_0}{R_1} (-U_1 + U_2)$$

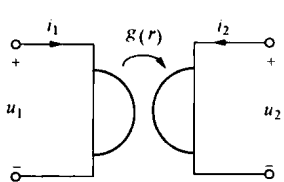
注：本例电路可实现减法运算功能，称为减法器。

对于含有理想运放的复杂电路，一般采用节点法进行分析。先计及两个输入端电流为零（虚断特性）的条件列写节点电压方程，然后再补充两个输入端节点等电位（虚短特性）的方程。但应注意，公共端接地时，不对运放的输出端节点列写节点电压方程。

当电路的后一级仅通过前一级理想运放的输出端和公共地端级联时，由于运放输出口相当于一理想电压源，后一级对前一级没有影响，因此，求前一级的输出电压时，可去掉后一级。例如，对于图 5-12 所示的运放电路，虚线左侧前一级的输出为 $u' = 2u_s$ ，虚线右侧后一级的输出 $u_o = -2u' = -4u_s$ 。

3. 回转器

回转器是一种非互易、无源双口电阻元件，其电路符号如图 5-13 所示。在图示回转方向下，回转器的 VAR 为



$$\begin{cases} u_1 = -ri_2 \\ u_2 = ri_1 \end{cases} \quad \text{或者} \quad \begin{cases} i_1 = gu_2 \\ i_2 = -gu_1 \end{cases}$$

式中： r 和 g 分别为回转电阻和回转电导，统称回转常数。

回转器有两个重要特性：

(1) 非能特性。回转器既不消耗能量，也不储存能量，这种特性称为非能特性，即有 $p(t) = u_1 i_1 + u_2 i_2 = 0$ 。

(2) 容感倒逆特性。回转器可把一个电容变换成一个电感，当然也可将一个电感变换成一个电容。

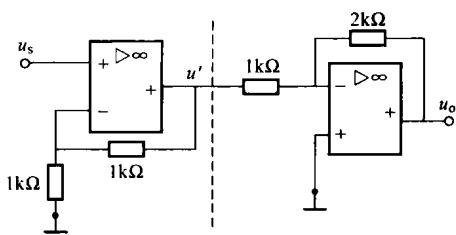


图 5-12 运放电路的级联

5.3 重点、难点与考点

重点与难点

本章的重点是双口网络的 4 种参数的确定、等效电路和端口分析法以及含理想运放电阻电路的分析。难点是含受控源双口参数的确定、端口分析法以及含理想运放电阻电路的分析。

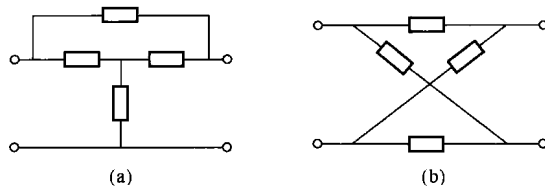
考点

本章考试的重点和热点主要集中在双口网络的参数确定、端口分析法和含理想运放电阻电路的分析。

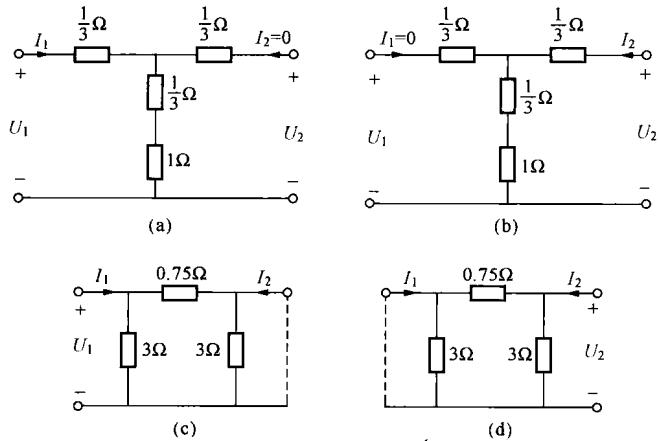
5.4 第 5 章习题选解

双口网络的参数

5-1 分别求题 5-1 图所示双口网络的 R 参数和 G 参数。图中各电阻值均为 1Ω 。



题 5-1 图



题 5-1 解图 (一)

解 (a) 先对题 5-1 图 (a) 电路进行角—星变换, 可得题 5-1 解图 (a)。

(1) 求 R 参数。

1) 求 R_{11} 和 R_{21} 。令 $I_2=0$, 则由参数的物理意义得

$$R_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{5}{3} \quad (\Omega)$$

而

$$U_2 = \left(1 + \frac{1}{3}\right) I_1 = \frac{4}{3} I_1$$

所以

$$R_{21} = \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{\frac{4}{3} I_1}{I_1} = \frac{4}{3} \quad (\Omega)$$

2) 求 R_{12} 和 R_{22} 。令 $I_1=0$, 由题 5-1 图 (a) 可得题 5-1 解图 (b), 则

$$R_{22} = \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{5}{3} \quad (\Omega)$$

$$U_1 = \left(1 + \frac{1}{3}\right) I_2 = \frac{4}{3} I_2$$

$$R_{12} = \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{I_1=0} = \frac{\frac{4}{3} I_2}{I_2} = \frac{4}{3} \quad (\Omega)$$

所以 R 参数矩阵为

$$\mathbf{R} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \Omega$$

(2) 求 G 参数。

方法 1: 由短路电导参数与开路电阻参数之间的关系得

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}^{-1} = \left(\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \text{S}$$

方法 2: 定义式法。首先对题 5-1 图 (a) 电路进行 Y- Δ 变换, 可得题 5-1 解图 (c)。

1) 求 G_{11} 和 G_{21} 。令 $U_2 = 0$, 电路如题 5-1 解图 (c) 所示。由该图可得

$$U_1 = \frac{3 \times 0.75}{3 + 0.75} I_1 = \frac{3}{5} I_1, \quad I_1 = \frac{5}{3} U_1, \quad I_2 = -\frac{3}{3 + 0.75} \times I_1 = -\frac{4}{5} I_1 = -\frac{4}{5} \times \frac{5}{3} U_1 = -\frac{4}{3} U_1$$

所以

$$G_{11} = \left. \frac{I_1}{U_1} \right|_{U_2=0} = \frac{\frac{5}{3} U_1}{U_1} = \frac{5}{3} \text{ (S)}, \quad G_{21} = \left. \frac{I_2}{U_1} \right|_{U_2=0} = \frac{-\frac{4}{3} U_1}{U_1} = -\frac{4}{3} \text{ (S)}$$

2) 求 G_{12} 和 G_{22} 。令 $U_1 = 0$, 电路如题 5-1 解图 (d) 所示, 由图可得

$$U_2 = \frac{3 \times 0.75}{3 + 0.75} I_2 = \frac{3}{5} I_2, \quad I_2 = \frac{5}{3} U_2$$

$$I_1 = -\frac{3}{3 + 0.75} \times I_2 = -\frac{4}{5} I_2 = -\frac{4}{5} \times \frac{5}{3} U_2 = -\frac{4}{3} U_2$$

所以

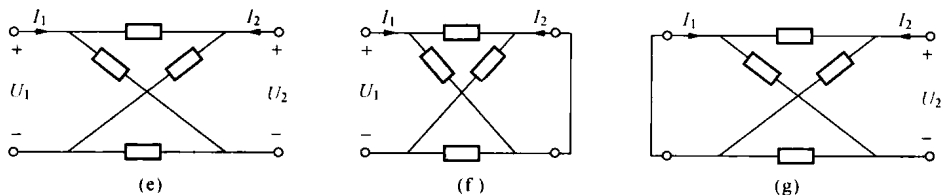
$$G_{12} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{U_1=0} = \frac{-\frac{4}{3} U_2}{U_2} = -\frac{4}{3} \text{ (S)},$$

$$G_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{U_1=0} = \frac{\frac{5}{3} U_2}{U_2} = \frac{5}{3} \text{ (S)}$$

故 G 参数矩阵为

$$\mathbf{G} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \text{S}$$

(b) 端口电压和电流的参考方向如题 5-1 解图 (e) 所示。



题 5-1 解图 (二)

(1) 求 R 参数。

1) 求 R_{11} 和 R_{21} 。因为 $I_2 = 0$ 时, $U_1 = [(1+1)/(1+1)] I_1 = I_1$, $U_2 = 0$ (电桥平衡), 所以

$$R_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{I_1}{I_1} = 1 \Omega, \quad R_{21} = \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{0}{I_1} = 0$$

2) 求 R_{22} 和 R_{12} 。因为 $I_1=0$ 时, $U_2=[(1+1)/(1+1)]I_2=I_2$, $U_1=0$ (电桥平衡), 所以

$$R_{22} = \frac{U_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{I_2}{I_2} = 1\Omega, R_{12} = \frac{U_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{0}{I_2} = 0$$

因此, R 参数矩阵为

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Omega$$

(2) 求 G 参数。

方法 1: G 参数矩阵为

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{S}$$

方法 2: 定义式法。

1) 求 G_{11} 和 G_{21} 。 $U_2=0$ 的电路如题 5-1 解图 (f) 所示。由该图得

$$I_1 = \frac{U_1}{1//1+1//1} = U_1, I_2 = 0 \text{ (电桥平衡)}$$

所以

$$G_{11} = \frac{I_1}{U_1} \Big|_{U_2=0} = \frac{U_1}{U_1} = 1\text{S}, G_{21} = \frac{I_2}{U_1} \Big|_{U_2=0} = \frac{0}{U_1} = 0$$

2) 求 G_{22} 和 G_{12} 。 $U_1=0$ 的电路如题 5-1 解图 (g) 所示, 由图可求得

$$I_2 = \frac{U_2}{1//1+1//1} = U_2, I_1 = 0 \text{ (电桥平衡)}$$

所以

$$G_{22} = \frac{I_2}{U_2} \Big|_{U_1=0} = \frac{U_2}{U_2} = 1\text{S}, G_{12} = \frac{I_1}{U_2} \Big|_{U_1=0} = \frac{0}{U_2} = 0$$

因此, G 参数矩阵为

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{S}$$

注: ① 本题的双口网络都是对称的, $R_{12}=R_{21}$, $R_{11}=R_{22}$, $G_{12}=G_{21}$, $G_{11}=G_{22}$, 对称的网络一定是互易的; ② 在由一种参数求另一种参数时, 不必死记硬背公式。只要将方程转化为相应参数方程的标准形式, 就可由一种参数求出另一种参数。

5-2 求题 5-2 图所示双口网络的开路电阻参数。

解 本题用回路法求解比定义式简便。所用端口电压、电流的参考方向如题 5-2 解图所示。由回路法得

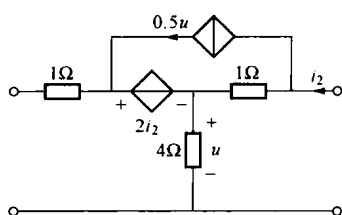
$$\begin{cases} u_1 = i_1 + 2i_2 + u \\ u_2 = (i_2 - 0.5u) \times 1 + u \end{cases}$$

将 $u=4(i_1+i_2)$ 代入上述方程消去 u , 整理得

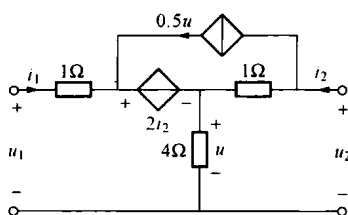
$$\begin{cases} u_1 = 5i_1 + 6i_2 \\ u_2 = 2i_1 + 3i_2 \end{cases}$$

所以, 开路电阻参数矩阵为

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Omega$$

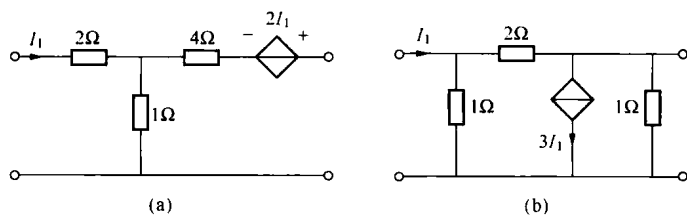


题 5-2 图



题 5-2 解图

5-3 求题 5-3 图所示双口网络的 G 参数。



题 5-3 图

解 (a) 双口网络端口电压和电流的参考方向如题 5-3 解图 (a) 所示。

方法 1: (1) 求 R 参数。题 5-3 解图 (a) 电路的回路电流方程为

$$\begin{cases} U_1 = 3I_1 + I_2 \\ U_2 = I_1 + 5I_2 + 2I_1 = 3I_1 + 5I_2 \end{cases}$$

矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

对照 R 参数方程可得 R 参数矩阵为

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \Omega$$

(2) 求 G 参数。G 参数矩阵为

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \text{S}$$

方法 2: 定义式法。

(1) 求 G_{11} 和 G_{21} 。 $U_2 = 0$ 的电路如题 5-3 解图 (b) 所示。由该图可得如下方程

$$\begin{cases} U_1 = 3I_1 + I_2 \\ 0 = I_1 + 5I_2 + 2I_1 \end{cases}$$

解之得

$$I_1 = \frac{5}{12}U_1, I_2 = -\frac{1}{4}U_1$$

所以

$$G_{11} = \left. \frac{I_1}{U_1} \right|_{U_2=0} = \frac{5}{12} \frac{U_1}{U_1} = \frac{5}{12} \text{ (S)}, \quad G_{21} = \left. \frac{I_2}{U_1} \right|_{U_2=0} = \frac{-\frac{1}{4}U_1}{U_1} = -\frac{1}{4} \text{ (S)}$$

(2) 求 G_{12} 和 G_{22} 。 $U_1=0$ 的电路如题 5-3 解图 (c) 所示。由该图可得如下方程

$$\begin{cases} 0 = 3I_1 + I_2 \\ U_2 = I_1 + 5I_2 + 2I_1 \end{cases}$$

解之得

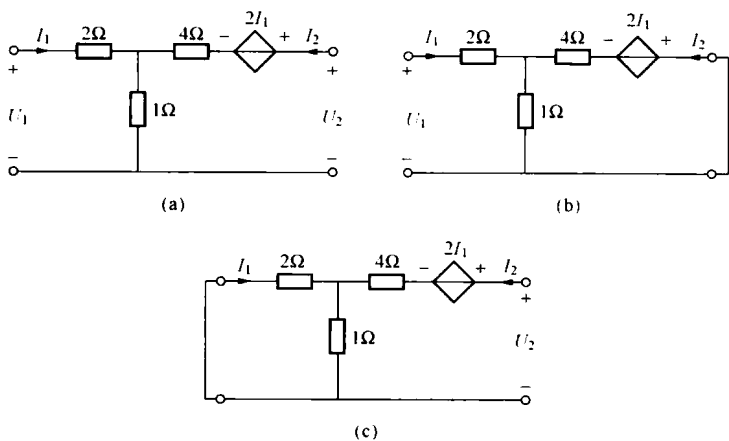
$$I_1 = -\frac{1}{12}U_2, \quad I_2 = \frac{1}{4}U_2$$

所以

$$G_{12} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{U_1=0} = -\frac{1}{12} \text{ S}, \quad G_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{U_1=0} = \frac{1}{4} \text{ S}$$

G 参数矩阵为

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \text{ S}$$



题 5-3 解图

(b) 见 [例 5-1]。

5-4 求题 5-4 图所示双口网络的 T 参数和 H 参数。

解 所用电压的参考方向如题 5-4 解图 (a) 所示。

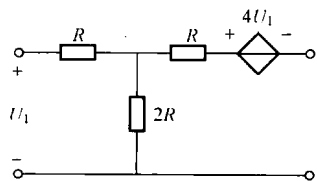
(1) 求 T 参数。

1) 求 A 和 C。令 $I_2=0$, 有

$$U_1 = 3RI_1$$

$$U_2 = -4U_1 + 2RI_1 = -4 \times 3RI_1 + 2RI_1 = -10RI_1$$

所以



题 5-4 图

$$A = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{I_2=0} = \frac{3RI_1}{-10RI_1} = -0.3, \quad C = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{I_2=0} = \frac{I_1}{-10RI_1} = -\frac{1}{10R}$$

2) 求 B 和 D 。令 $U_2=0$ ，电路如题 5-4 解图 (b) 所示。由该图可得如下方程

$$\begin{cases} 3RI_1 + 2RI_2 = U_1 \\ 2RI_1 + 3RI_2 = 4U_1 \end{cases}$$

解之得

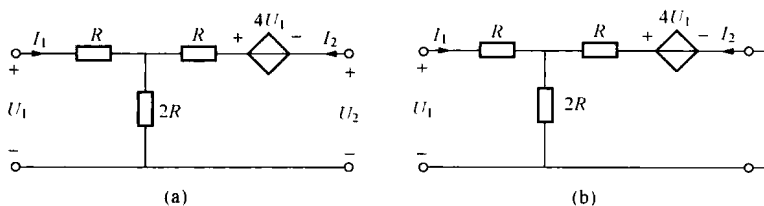
$$I_2 = \frac{2}{R}U_1, \quad I_1 = -\frac{1}{R}U_1$$

则

$$B = \left. \frac{U_1}{-I_2} \right|_{U_2=0} = \frac{U_1}{-\frac{2}{R}U_1} = -\frac{R}{2}, \quad D = \left. \frac{I_1}{-I_2} \right|_{U_2=0} = \frac{-\frac{1}{R}U_1}{-\frac{2}{R}U_1} = 0.5$$

所以

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -0.3 & -0.5R \\ -\frac{1}{10R} & 0.5 \end{bmatrix}$$



题 5-4 解图

(2) 求 H 参数。

1) 求 h_{11} 和 h_{21} 。 $U_2=0$ 的电路如题 5-4 解图 (b) 所示。由该图可得如下方程

$$\begin{cases} 3RI_1 + 2RI_2 = U_1 \\ 2RI_1 + 3RI_2 = 4U_1 \end{cases}$$

解之得

$$I_2 = \frac{2}{R}U_1, \quad I_1 = -\frac{1}{R}U_1$$

则

$$h_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{U_2=0} = -R, \quad h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{U_2=0} = \frac{\frac{2}{R}U_1}{-\frac{1}{R}U_1} = -2$$

2) 求 h_{12} 和 h_{22} 。当 $I_1=0$ 时，由题 5-4 解图 (a) 得

$$U_1 = 2RI_2$$

$$U_2 = -4U_1 + 3RI_2 = -4 \times 2RI_2 + 3RI_2 = -5RI_2$$

所以

$$h_{12} = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{I_1=0} = \frac{2RI_2}{-5RI_2} = -0.4, \quad h_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{I_1=0} = \frac{I_2}{-5RI_2} = -\frac{1}{5R}$$

因此, H 参数矩阵为

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -R & -0.4 \\ -2 & -\frac{1}{5R} \end{bmatrix}$$

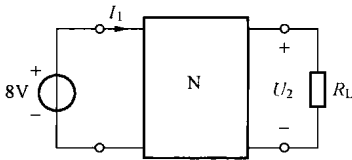
5-5 题 5-5 图中 N 为不含独立电源的对称双口网络。当 $R_L = \infty$ 时, $U_2 = 6V$, $I_1 = 2A$ 。求该双口网络 N 的开路电阻参数。

解 端口电压和端口电流的参考方向如题 5-5 解图所示。由于 $R_L = \infty$ 时, $I_2 = 0$, 此时, $U_1 = 8V$, $I_1 = 2A$, $U_2 = 6V$, 所以

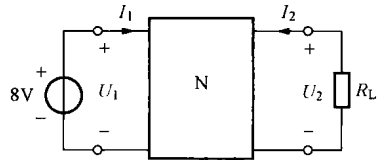
$$R_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{8}{2} = 4 (\Omega), \quad R_{21} = \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = 3\Omega$$

因为网络 N 为对称双口网络, 所以

$$R_{22} = R_{11} = 4\Omega, \quad R_{12} = R_{21} = 3\Omega$$

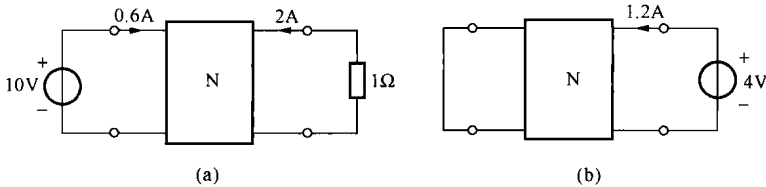


题 5-5 图



题 5-5 解图

5-6 题 5-6 图中标出了在互易双口网络 N 上进行的两次测量结果, 试根据这些测量结果求出该双口网络的 G 参数。



题 5-6 图

解 题 5-6 图 (b) 中, $U_1 = 0$, $I_2 = 1.2A$, $U_2 = 4V$, 所以

$$G_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{U_1=0} = \frac{1.2}{4} = 0.3 (\text{S})$$

G 参数方程为

$$\begin{cases} I_1 = G_{11}U_1 + G_{12}U_2 \\ I_2 = G_{21}U_1 + G_{22}U_2 \end{cases}$$

题 5-6 图 (a) 中, $I_1 = 0.6A$, $I_2 = 2A$, $U_1 = 10V$, $U_2 = -2 \times 1 = -2 (V)$, 代入 G 参数方程得

$$0.6 = 10G_{11} - 2G_{12} \quad (1)$$

$$2 = 10G_{21} - 2G_{22} \quad (2)$$

由式 (2) 得

$$G_{21} = \frac{2+2G_{22}}{10} = \frac{2+2 \times 0.3}{10} = 0.26 \text{ (S)}$$

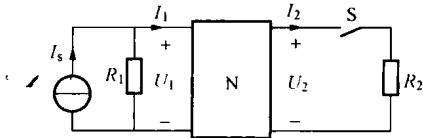
根据互易性有
由式(1)得

$$G_{12} = G_{21} = 0.26 \text{ S}$$

$$G_{11} = \frac{0.6+2G_{12}}{10} = \frac{0.6+2 \times 0.26}{10} = 0.112 \text{ (S)}$$

所以,网络的短路电导参数矩阵为

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0.112 & 0.26 \\ 0.26 & 0.3 \end{bmatrix} \text{ S}$$



题 5-7 图

5-7 题 5-7 图所示电路中, $I_s = 10 \text{ mA}$, $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 1000 \Omega$ 。S 打开时, 测得 $I_1 = 5 \text{ mA}$, $U_2 = -250 \text{ V}$; S 接通后, 测得 $I_1 = 5 \text{ mA}$, $U_2 = -125 \text{ V}$ 。求双口网络 N 的混合参数矩阵。

解 网络 N 的混合参数方程为

$$\begin{cases} U_1 = h_{11} I_1 + h_{12} U_2 \\ -I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} U_2 \end{cases}$$

由 S 打开时所测数据求得

$$U_1 = R_1 (I_s - I_1) = 100 \times (10 \times 10^{-3} - 5 \times 10^{-3}) = 0.5 \text{ (V)}$$

$$I_2 = 0$$

代入混合参数方程得

$$0.5 = 5 \times 10^{-3} h_{11} - 250 h_{12} \quad (1)$$

$$0 = 5 \times 10^{-3} h_{21} - 250 h_{22} \quad (2)$$

由 S 接通后所测数据求得

$$U_1 = R_1 (I_s - I_1) = 100 \times (10 \times 10^{-3} - 5 \times 10^{-3}) = 0.5 \text{ (V)}$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{-125}{1000} = -0.125 \text{ (A)}$$

代入混合参数方程又得

$$0.5 = 5 \times 10^{-3} h_{11} - 125 h_{12} \quad (3)$$

$$0.125 = 5 \times 10^{-3} h_{21} - 125 h_{22} \quad (4)$$

将式(1)与式(3)相减, 解得

$$h_{11} = 100 \Omega, h_{12} = 0$$

将式(2)与式(4)联立, 解得

$$h_{21} = 50, h_{22} = 10^{-3}$$

5-8 题 5-8 图所示电路中, $R_1 = 4 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$ 。S 断开时, 测得 $U_1 = 5 \text{ V}$, $U_2 = 3 \text{ V}$, $U_3 = 9 \text{ V}$; S 接通时, 测得 $U_1 = 4 \text{ V}$, $U_2 = 2 \text{ V}$, $U_3 = 8 \text{ V}$ 。求双口网络 N 的传输参数矩阵 \mathbf{T} 。

解 双口网络 N 的传输参数方程为

$$\begin{cases} U_1 = AU_2 - BI_2 \\ I_1 = CU_2 - DI_2 \end{cases}$$

S 断开时, $I_2 = 0$, $U_2 = 3 \text{ V}$, $U_1 = 5 \text{ V}$, $U_3 = 9 \text{ V}$, 则

$$I_1 = \frac{U_3 - U_1}{R_1} = \frac{9 - 5}{4} = 1 \text{ (A)}。$$

将上述条件代入传输参数方程得

$$A = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{I_2=0} = \frac{5}{3}, \quad C = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{I_2=0} = \frac{1}{3}$$

S 接通时, $U_1 = 4\text{V}$, $U_2 = 2\text{V}$, $U_3 = 8\text{V}$, 则 $I_2 = -\frac{U_2}{R_2} = -\frac{1}{3}\text{A}$, $I_1 = \frac{U_3 - U_1}{R_1} = \frac{8 - 4}{4} = 1 \text{ (A)}$ 。将这些条件代入传输参数方程得

$$\begin{cases} 4 = 2A + \frac{1}{3}B \\ 1 = 2C + \frac{1}{3}D \end{cases}$$

则

$$B = 12 - 6A = 12 - 6 \times \frac{5}{3} = 2, \quad D = 3 - 6C = 3 - 6 \times \frac{1}{3} = 1$$

所以, 网络 N 的传输参数矩阵 T 为

$$T = \begin{bmatrix} 5/3 & 2 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

5-9 已知题 5-9 图所示 T 型双口网络的开路电阻参数矩阵为

$$R = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \Omega$$

求 R_1 、 R_2 、 R_0 和 r 之值。

解 端口电压、电流的参考方向如题 5-9 解图所示。由回路法得

$$U_1 = rI_2 + (R_1 + R_0)I_1 + R_0I_2 = (R_1 + R_0)I_1 + (r + R_0)I_2$$

$$U_2 = R_0I_1 + (R_2 + R_0)I_2$$

故开路电阻参数为

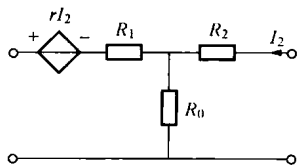
$$R_{11} = R_1 + R_0, \quad R_{12} = r + R_0, \quad R_{21} = R_0, \quad R_{22} = R_2 + R_0$$

由已知条件得

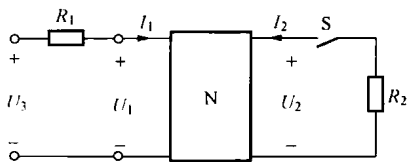
$$\begin{cases} R_1 + R_0 = 10 \\ r + R_0 = 8 \\ R_0 = 5 \\ R_2 + R_0 = 10 \end{cases}$$

联立解得

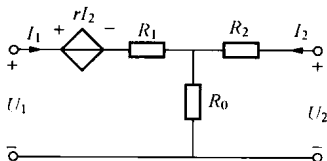
$$R_1 = 5\Omega, \quad R_2 = 5\Omega, \quad R_0 = 5\Omega, \quad r = 3\Omega$$



题 5-9 图



题 5-8 图



题 5-9 解图

双口网络的等效电路及互连

5-10 题 5-10 图所示电路中, N 为线性电阻性互易双口网络。当 $R_L = \infty$ 时, $U_2 = 7.5\text{V}$, 当 $R_L = 0$ 时, $I_1 = 3\text{A}$, $I_2 = -1\text{A}$ 。试求: (1) 双口网络 N 的 G 参数; (2) 双口网络 N 的三角形 (Π 型) 等效电路。

解 (1) 双口网络 N 的 G 参数方程为

$$I_1 = G_{11}U_1 + G_{12}U_2$$

$$I_2 = G_{21}U_1 + G_{22}U_2$$

因为 $R_L = 0$ 时, $U_2 = 0$, $I_1 = 3\text{A}$, $I_2 = -1\text{A}$, 所以

$$G_{11} = \left. \frac{I_1}{U_1} \right|_{U_2=0} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} \text{ (S)}, G_{21} = \left. \frac{I_2}{U_1} \right|_{U_2=0} = \frac{-1}{15} = -\frac{1}{15} \text{ (S)}, G_{12} = G_{21} = -\frac{1}{15} \text{ S}$$

$R = \infty$ 时, $U_2 = 7.5\text{V}$, $I_2 = 0$, 所以

$$0 = G_{21}U_1 + G_{22}U_2$$

则

$$G_{22} = -\frac{G_{21}U_1}{U_2} = -\left(-\frac{1}{15}\right) \times \frac{15}{7.5} = \frac{2}{15} \text{ (S)}$$

因此

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{15} & \frac{2}{15} \end{bmatrix} \text{ S}$$

(2) 设双口网络 N 的 Π 型等效电路如题 5-10 解图所示。 Π 型等效电路的 G 参数为

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix}$$

由此可得

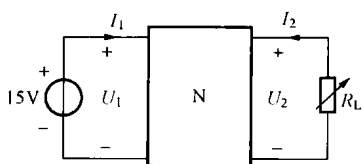
$$\begin{cases} G_1 + G_2 = \frac{1}{5} \\ -G_2 = -\frac{1}{15} \\ G_2 + G_3 = \frac{2}{15} \end{cases}$$

解之得

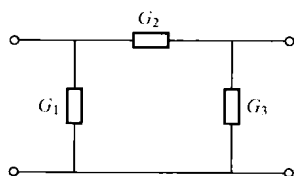
$$G_1 = \frac{2}{15} \text{ S}, G_2 = \frac{1}{15} \text{ S}, G_3 = \frac{1}{15} \text{ S}$$

或

$$R_1 = 7.5\Omega, R_2 = 15\Omega, R_3 = 15\Omega$$



题 5-10 图



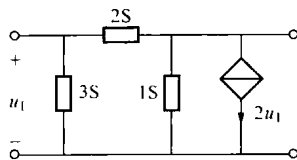
题 5-10 解图

5-11 已知双口网络的 G 参数为 $G_{11} = 5S$, $G_{12} = -2S$, $G_{21} = 0$, $G_{22} = 3S$ 。求其 Π 型等效电路。

解 由于 G 参数中 $G_{12} \neq G_{21}$, 故等效电路必须含有受控源。双口网络的 G 参数方程为

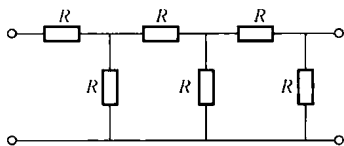
$$\begin{cases} i_1 = 5u_1 - 2u_2 \\ i_2 = 3u_2 = -2u_1 + 3u_2 + 2u_1 \end{cases}$$

第二个方程中的第 3 项 $2u_1$ 用 1 个 VCCS 表示 [一条支路的电压 (电流) 的表达式中含有其他支路的电压或电流, 则相应的项需用受控电压源 (电流源) 表示]。则根据上述方程可得题 5-11 解图所示的 Π 型等效电路。

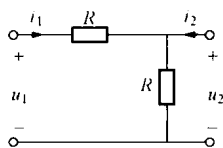


题 5-11 解图

5-12 利用双口网络的互连公式求题 5-12 图所示双口网络的传输参数。图中 $R = 1\Omega$ 。



题 5-12 图



题 5-12 解图

解 原网络可看成是题 5-12 解图所示 3 个子网络的级联。对于题 5-12 解图的子网络有

$$A_1 = \left. \frac{u_1}{u_2} \right|_{i_2=0} = \frac{u_1}{\frac{1}{1+1}u_1} = 2, \quad B_1 = \left. \frac{u_1}{-i_2} \right|_{u_2=0} = \frac{u_1}{i_1} = \frac{u_1}{u_1} = 1\Omega$$

$$C_1 = \left. \frac{i_1}{u_2} \right|_{i_2=0} = \frac{i_1}{i_1} = 1S, \quad D_1 = \left. \frac{i_1}{-i_2} \right|_{u_2=0} = \frac{i_1}{i_1} = 1$$

该子网络的传输参数矩阵为

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

由级联公式得

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_1^3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$$

5-13 题 5-13 图所示电路中双口网络 N 的开路电阻参数矩阵为 $\mathbf{R}_N = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Omega$ 。求开路电压 u 。

解 方法 1: 整个双口网络可看成是 N 和题 5-13 解图 (a) 所示两个子双口网络的串联。

题 5-13 解图 (a) 网络的开路电阻参数为

$$R'_{11} = \left. \frac{u_1}{i_1} \right|_{i_2=0} = 3 // (3+6) = 2.25 (\Omega), \quad R'_{21} = \left. \frac{u_2}{i_1} \right|_{i_2=0} = 0.75\Omega$$

由对称性得

$$R'_{22} = R'_{11} = 2.25\Omega, \quad R'_{12} = R'_{21} = 0.75\Omega$$

整个双口网络的开路电阻参数矩阵为

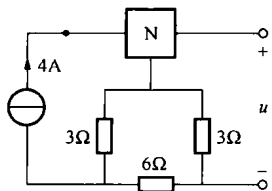
$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_N + \mathbf{R}' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.25 & 0.75 \\ 0.75 & 2.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.25 & 2.75 \\ 2.75 & 6.25 \end{bmatrix} \Omega$$

因此

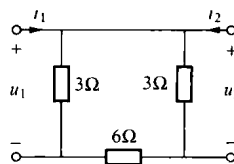
$$u = u_2 |_{i_2=0} = R_{21} i_1 = 2.75 \times 4 = 11 \text{ (V)}$$

方法 2: 用等效电路求解。将子网络 N 用 T 型等效电路代替, 如题 5-13 解图 (b) 所示。图中, $R_1 = R_{11} - R_{12} = 2\Omega$, $R_0 = R_{12} = 2\Omega$, $R_2 = R_{22} - R_{12} = 2\Omega$ 。由分流公式和 KVL 得

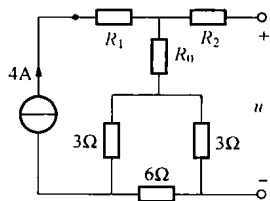
$$u = R_0 I_s + \frac{3I_s}{3 + (3+6)} \times 3 = 2.75 I_s = 2.75 \times 4 = 11 \text{ (V)}$$



题 5-13 图



(a)



(b)

题 5-13 解图

5-14 题 5-14 图所示互连电路中, 已知网络 N 的 G 参数矩阵为

$$\mathbf{G}_N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \text{S}$$

求电路中 6Ω 电阻吸收的功率。

解 本题电路为两个双口网络的并联, 从图中看出满足连接的端口条件, 所以可先求出总网络的 G 参数。

T 型网络的 R 参数为

$$\mathbf{R}_T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Omega$$

则其 G 参数为

$$\mathbf{G}_T = \mathbf{R}_T^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \text{S}$$

所以, 复合网络的 G 参数为

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_N + \mathbf{G}_T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \text{S}$$

等效网络如题 5-14 解图所示。该网络的 G 参数方程为

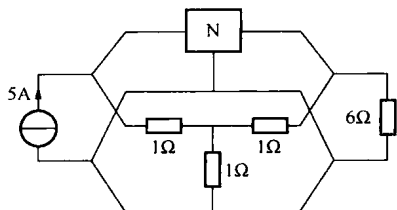
$$\begin{cases} I_1 = \frac{5}{3} U_1 + \frac{5}{3} U_2 \\ I_2 = \frac{1}{6} U_1 + \frac{5}{3} U_2 \end{cases}$$

将 $I_1 = 5\text{A}$, $U_2 = -6I_2$ 代入上式, 并联立求解, 得

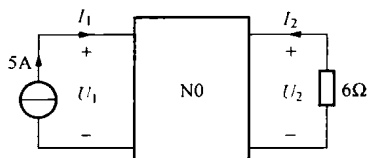
$$I_2 = 0.05\text{A}$$

所以 6Ω 电阻吸收的功率为

$$P_{RL} = 6I_2^2 = 6 \times 0.05^2 = 15 \text{ (mW)}$$



题 5-14 图



题 5-14 解图

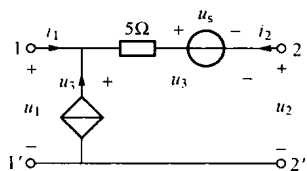
含源双口网络

* 5-15 分别求题 5-15 图所示双口网络的压控型和混合 I 型 VAR。

分析 求含源双口网络的方程，可转化为分别求非含源双口网络的参数和方程的常数项。

解 (1) 求压控型 VAR。先求 G 参数。

1) 求 G_{11} 和 G_{21} 。将端口 2 短路，并将电压源 u_s 置零，如题 5-15 解图 (a) 所示。



题 5-15 图

$$i_2 = -\frac{u_1}{5} = -0.2u_1, \quad i_1 = -i_2 - u_3 = 0.2u_1 - u_1 = -0.8u_1$$

因此

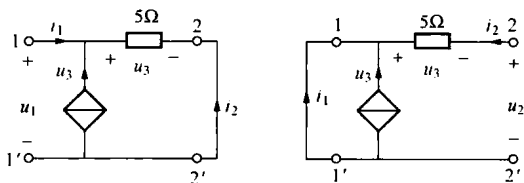
$$G_{11} = \left. \frac{i_1}{u_1} \right|_{u_2=0} = \frac{-0.8u_1}{u_1} = -0.8 \text{ (S)}, \quad G_{21} = \left. \frac{i_2}{u_1} \right|_{u_2=0} = \frac{-0.2u_1}{u_1} = -0.2 \text{ (S)}$$

2) 求 G_{12} 和 G_{22} 。将端口 1 短路，并将电压源 u_s 置零，如题 5-15 解图 (b) 所示。

$$i_2 = -u_3/5 = -(-u_2)/5 = 0.2u_2, \quad i_1 = -u_3 - i_2 = -(-u_2) - 0.2u_2 = 0.8u_2$$

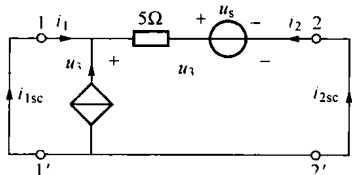
所以

$$G_{12} = \left. \frac{i_1}{u_2} \right|_{u_1=0} = \frac{0.8u_2}{u_2} = 0.8 \text{ (S)}, \quad G_{22} = \left. \frac{i_2}{u_2} \right|_{u_1=0} = \frac{0.2u_2}{u_2} = 0.2 \text{ (S)}$$



(a)

(b)



(c)

题 5-15 解图

然后求 i_{1sc} 和 i_{2sc} 。电路如题 5-15 解图 (c) 所示。因为 $u_3 = 0$ ，所以受控源受控支路处于开路。由题 5-15 解图 (c) 得

$$i_{2sc} = u_s/5 = 0.2u_s, \quad i_{1sc} = -i_{2sc} = -0.2u_s$$

综上，本题双口网络的压控型 VAR 为

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.8 \\ -0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.2u_s \\ 0.2u_s \end{bmatrix}$$

对于简单的网络，可直接写出相应的端口 VAR。本题亦可如此。

$$\begin{cases} i_1 = -u_3 + \frac{u_3 - u_s}{5} = -0.8u_3 - 0.2u_s \\ i_2 = -\frac{u_3 - u_s}{5} = -0.2u_3 + 0.2u_s \end{cases} \quad (1)$$

由 KVL 得

$$u_3 = u_1 - u_2 \quad (2)$$

将式 (2) 代入式 (1) 消去 u_3 , 整理得

$$\begin{cases} i_1 = -0.8(u_1 - u_2) - 0.2u_s = -0.8u_1 + 0.8u_2 - 0.2u_s \\ i_2 = -0.2(u_1 - u_2) + 0.2u_s = -0.2u_1 + 0.2u_2 + 0.2u_s \end{cases}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.8 \\ -0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.2u_s \\ 0.2u_s \end{bmatrix}$$

(2) 求混合 I 型 VAR。因为

$$u_3 = 5(i_1 + u_3) + u_s$$

所以

$$u_3 = -1.25i_1 - 0.25u_s$$

则

$$\begin{cases} u_1 = u_3 + u_2 = -1.25i_1 + u_2 - 0.25u_s \\ i_2 = -u_3 - i_1 = 0.25i_1 + 0.25u_s \end{cases}$$

因此, 所求的混合 I 型 VAR 为

$$\begin{cases} u_1 = -1.25i_1 + u_2 - 0.25u_s \\ i_2 = 0.25i_1 + 0.25u_s \end{cases}$$

矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.25 & 1 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.25u_s \\ 0.25u_s \end{bmatrix}$$

注: ① 本题的流控型 VAR 不存在; ② 一般不能用戴维南 (或诺顿) 等效电路代替含源双口网络。

端口分析方法

5-16 题 5-16 图所示双口网络 N 的开路 R 参数为 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Omega$, 求该双口网络 N 消耗的功率 P。

解 双口网络 N 的端口电压、电流的参考方向如题 5-16 解图所示。其 R 参数方程为

$$\begin{cases} U_1 = 2I_1 + I_2 \\ U_2 = I_1 + 2I_2 \end{cases} \quad (1)$$

双口网络 N 端接电路的 VAR 为

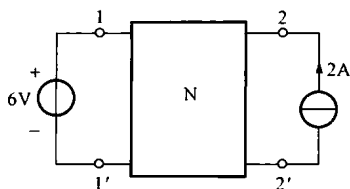
$$\begin{cases} U_1 = 6 \\ I_2 = 2 \end{cases} \quad (2)$$

联立方程 (1) 和 (2) 求解得

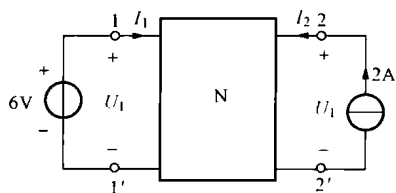
$$I_1 = 2\text{A}, U_2 = 6\text{V}$$

双口网络 N 消耗的功率为

$$P = U_1 I_1 + U_2 I_2 = 6 \times 2 + 6 \times 2 = 24 \text{ (W)}$$



题 5-16 图



题 5-16 解图

5-17 题 5-17 图所示电路中, N 为不含独立源的对称双口网络, 当 $R_L = \infty$ 时, $U_2 = 4V$, $I_1 = 2A$ 。试求: (1) 双口网络 N 的传输参数; (2) R_L 取多大时, $U_2 = 2V$?

解 (1) 求双口网络 N 的传输参数。电压和电流的参考方向如题 5-17 解图。 $R_L = \infty$ 时, $I_2 = 0$, $U_2 = 4V$, $I_1 = 2A$, $U_1 = 10V$, 所以

$$A = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{I_2=0} = \frac{10}{4} = 2.5, \quad C = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{I_2=0} = \frac{2}{4} = 0.5$$

因网络 N 为对称双口网络, 所以, $D = A = 2.5$, 且有

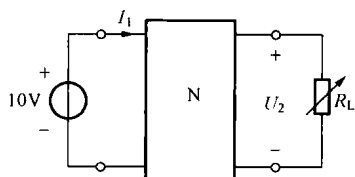
$$AD - BC = 1$$

则

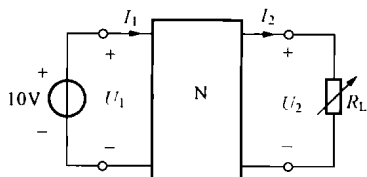
$$B = \frac{AD - 1}{C} = \frac{2.5^2 - 1}{0.5} = 10.5$$

传输参数矩阵为

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2.5 & 10.5 \\ 0.5 & 2.5 \end{bmatrix}$$



题 5-17 图



题 5-17 解图

(2) 求 R_L 。将 $U_1 = 10$, $U_2 = 2$ 和 $U_2 = R_L I_2$ 代入传输参数的第一个方程

$$U_1 = 2.5U_2 + 10.5I_2$$

可得

$$10 = 2.5 \times 2 + \frac{2 \times 10.5}{R_L}$$

所以

$$R_L = 4.2\Omega$$

5-18 题 5-18 图所示电路中, 双口网络 N 的电阻参数矩阵为

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \Omega$$

求 R_L 为何值时可获得最大功率? 并求此最大功率。

解 将双口网络 N 用等效的 T 型电路代替, 电路如题 5-18 解图 (a) 所示。其中

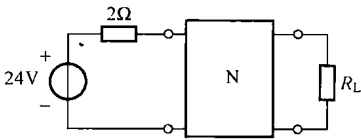
$$R_1 = R_{11} - R_{12} = 6 - 4 = 2 (\Omega), R_2 = R_{12} = 4 (\Omega), R_3 = R_{22} - R_{12} = 6 - 4 = 2 (\Omega)$$

将 R_L 抽出, 其余部分用其戴维南等效电路代替, 可得题 5-18 解图 (b) 所示的电路。其中

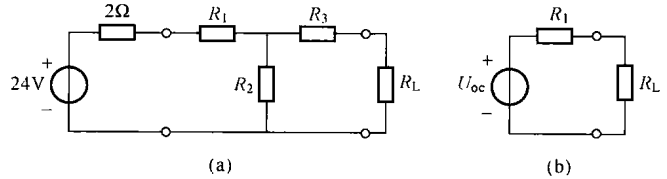
$$R_0 = R_3 + (R_1 + 2) // R_2 = 2 + (2 + 2) // 4 = 4 (\Omega), U_{oc} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + 2} \times 24 = \frac{4}{2 + 4 + 2} \times 24 = 12 (V)$$

因此, 当 $R_L = R_0 = 4 \Omega$ 时, R_L 获得最大功率, 其最大功率为

$$P_{\max} = \frac{U_{oc}^2}{4R_0} = \frac{12^2}{4 \times 4} = 9 (W)$$



题 5-18 图



题 5-18 解图



题 5-20 图

5-19 见 [例 5-3]。

5-20 题 5-20 图所示双口网络在 $R_2 = 0$ 和 $R_2 = \infty$ 时端口 1 的输入电阻分别为 R_0 和 R_∞ ; 端口 2 的戴维南等效电阻为 R_{eq} 。证明端口 1 的输入电阻 $R = \frac{R_0 R_{eq} + R_\infty R_2}{R_{eq} + R_2}$ 。

证明 设题 5-20 图所示双口网络的传输参数方程为

$$\begin{cases} u_1 = Au_2 - Bi_2 \\ i_1 = Cu_2 - Di_2 \end{cases}$$

$R_2 = 0$ 时, $u_2 = -R_2 i_2 = 0$, 所以

$$R_0 = \frac{u_1}{i_1} \Big|_{u_2=0} = \frac{B}{D}$$

$R_2 = \infty$ 时, $i_2 = 0$, 所以

$$R_\infty = \frac{u_1}{i_1} \Big|_{i_2=0} = \frac{A}{C}$$

$i_1 = 0$ 时, $Cu_2 - Di_2 = 0$, 所以

$$R_{eq} = \frac{u_2}{i_2} \Big|_{i_1=0} = \frac{D}{C}$$

因此

$$R = \frac{u_1}{i_1} = \frac{Au_2 - Bi_2}{Cu_2 - Di_2} = \frac{A(-R_2 i_2) - Bi_2}{C(-R_2 i_2) - Di_2} = \frac{AR_2 + B}{CR_2 + D} = \frac{\frac{A}{C}R_2 + \frac{B}{D} \cdot \frac{D}{C}}{R_2 + \frac{D}{C}} = \frac{R_\infty R_2 + R_0 R_{eq}}{R_2 + R_{eq}}$$

5-21 对于仅由线性二端电阻组成的单口网络, 设其输入电阻为 R , 端口电流为 i , 第 k 个电阻 r_k 的电流为 i_k 。证明 $\frac{\partial R}{\partial r_k} = \left(\frac{i_k}{i}\right)^2$ 。

证明 根据题意可画出题 5-21 解图 (a) 所示的电路。把单口网络内部的电阻 r_k 抽出, 形成题 5-21 解图 (b) 所示的双口网络。设双口网络的传输参数方程为

$$u = Au_k - Bi_k$$

$$i = Cu_k - Di_k$$

输出口所接电阻为 r_k , 则 $u_k = -r_k i_k$ 。输入口的输入电阻为

$$R = \frac{u}{i} = \frac{Au_k - Bi_k}{Cu_k - Di_k} = \frac{Ar_k i_k + Bi_k}{Cr_k i_k + Di_k} = \frac{Ar_k + B}{Cr_k + D}$$

故有

$$\frac{\partial R}{\partial r_k} = \frac{A(Cr_k + D) - C(Ar_k + B)}{(Cr_k + D)^2} = \frac{AD - BC}{(Cr_k + D)^2}$$

由于电阻双口网络是互易的, 所以 $AD - BC = 1$ 。因此

$$\frac{\partial R}{\partial r_k} = \frac{1}{(Cr_k + D)^2}$$

又因为 $i = Cu_k - Di_k = -(Cr_k + D)i_k$, 所以

$$\frac{i_k}{i} = -\frac{1}{Cr_k + D}$$

因此

$$\frac{\partial R}{\partial r_k} = \frac{1}{(Cr_k + D)^2} = \left(\frac{i_k}{i}\right)^2$$

注: 下列的证明是错误的。

设单口网络内部 b 条支路的电压和电流均取关联参考方向, 则根据特勒根定理有

$$ui = u_1 i_1 + u_2 i_2 + \dots + u_k i_k + \dots + u_b i_b$$

由于 $u = Ri$ 和 $u_k = r_k i_k$, 上式变为

$$Ri^2 = r_1 i_1^2 + r_2 i_2^2 + \dots + r_k i_k^2 + \dots + r_b i_b^2$$

对电阻 r_k 求导得

$$i^2 \frac{\partial R}{\partial r_k} = \frac{\partial}{\partial r_k} (r_1 i_1^2 + r_2 i_2^2 + \dots + r_k i_k^2 + \dots + r_b i_b^2) = i_k^2$$

所以

$$\frac{\partial R}{\partial r_k} = \left(\frac{i_k}{i}\right)^2$$

以上证明过程的错误在于, 电阻 r_k 发生变化时, 认为电流除了 i_k 以外均不发生变化。事实上, 当电阻 r_k 发生变化时, 所有电流一般均发生变化。

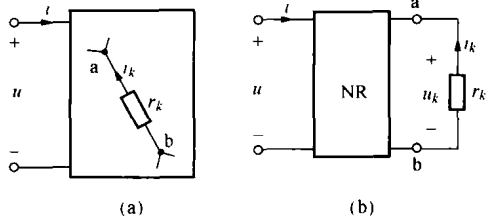
5-22 要求设计一个用于直流信号下的最简单的双口网络, 其负载 $R_L = 3\Omega$ 。技术指标要求如下:

(1) 由电源端口看进去的输入电阻 $R_i = 3\Omega$;

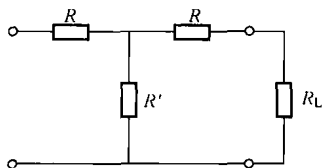
(2) 输出电压是输入电压的 $\frac{1}{2}$;

(3) 对调电源端口与负载端口, 网络性能不变。

解 根据题意, 所设计的双口网络为对称双口, 可用 T 型等值电路满足其要求, 如题 5-22 解



题 5-21 解图



题 5-22 解图

图所示。根据题意得

$$R + (R+3) // R' = 3 \quad (1)$$

$$\frac{(R+3) // R'}{R + (R+3) // R'} \times \frac{3}{3+R} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

由式(1)得

$$(R+3) // R' = 3 - R \quad (3)$$

将式(3)代入式(2)有

$$\frac{3-R}{R+3-R} \times \frac{3}{3+R} = \frac{1}{2}$$

解之得

$$R = 1\Omega$$

代入式(3)求得

$$R' = 4\Omega$$

*** 5-23** 电路如题 5-23 图所示。已知：当端口 11' 置理想电压源 $u_{s1} = 10\text{V}$ 时（上为正极性）， $u_2 = 8\text{V}$ （开路电压）。当端口 11' 短路时， $i_1 = 20\text{mA}$ ， $u_2 = 2\text{V}$ （开路电压）。求当端口 11' 接一电阻 $R = 500\Omega$ 时的 i_1 和 u_2 。

解 本题可用构造一个满足要求的双口网络来求解。构造的双口网络如题 5-23 解图所示。由题意可知， $u_{s1} = 10\text{V}$ 时， $u_2 = 8\text{V}$ ，故有

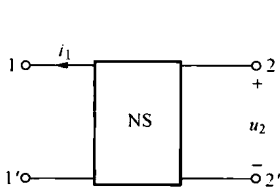
$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} \times 10 = 6$$

由此得 $R_2 = 1.5R_1$ 。当 1-1' 端口接一电阻 $R = 500\Omega$ 时，则

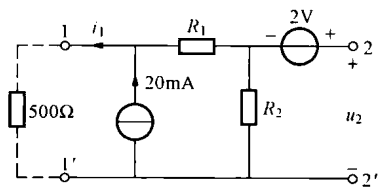
$$u_2 = 2 + \frac{500}{500 + 2.5R_1} \times 0.02 \times 1.5R_1 = 2 + \frac{6R_1}{200 + R_1} \quad (\text{V})$$

$$i_1 = \frac{2.5R_1}{500 + 2.5R_1} \times 20 = \frac{20R_1}{200 + R_1} \quad (\text{mA})$$

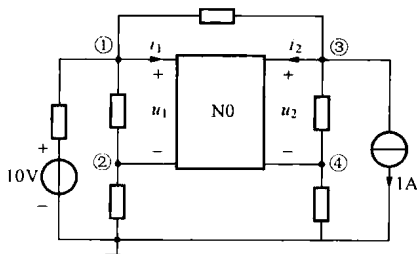
例如，取 $R_1 = 200\Omega$ ，则有 $i_1 = 10\text{mA}$ ， $u_2 = 5\text{V}$ 。



题 5-23 图



题 5-23 解图



题 5-24 图

5-24 题 5-24 图所示电路中，电阻均为 1Ω ，双口网络 N_0 的短路电导参数方程为

$$\begin{cases} i_1 = 2u_1 - 3u_2 \\ i_2 = u_1 + 4u_2 \end{cases}$$

试列写该电路的节点电压方程。

解 将双口网络的每个端口视作电流为相应端口电流的电流源，可得电路的节点电压方程为

$$\begin{cases} 3U_{n1} - U_{n2} - U_{n3} + i_1 = 10 \\ -U_{n1} + 2U_{n2} - i_1 = 0 \\ -U_{n1} + 2U_{n3} - U_{n4} + i_2 = -1 \\ -U_{n3} + 2U_{n4} - i_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

将双口网络 N0 的短路电导参数方程中端口电压用节点电压表示得下列补充方程

$$\begin{cases} i_1 = 2u_1 - 3u_2 = 2(U_{n1} - U_{n2}) - 3(U_{n3} - U_{n4}) \\ i_2 = u_1 + 4u_2 = U_{n1} - U_{n2} + 4(U_{n3} - U_{n4}) \end{cases} \quad (2)$$

从上述 (1)、(2) 两组方程中消去非节点电压变量, 整理得所需建立的节点电压方程为

$$\begin{cases} 5U_{n1} - 3U_{n2} - 4U_{n3} + 3U_{n4} = 10 \\ -3U_{n1} + 4U_{n2} + 3U_{n3} - 3U_{n4} = 0 \\ -U_{n2} + 6U_{n3} - 5U_{n4} = -1 \\ -U_{n1} + U_{n2} - 5U_{n3} + 6U_{n4} = 0 \end{cases}$$

含理想运放的电阻电路

5-25 见 [例 5-4]。

5-26 求题 5-26 图所示电路中的输出电压 U_o 。

解 方法 1: 所用电压的参考方向如题 5-26 解图 (a) 所示。注意到理想运放的虚短特性, 由 KVL 和元件的 VAR 得

$$I_1 = \frac{3-2+1}{10^3} = 2 \text{ (mA)}, I_2 = \frac{-2+1}{10^3} = -1 \text{ (mA)}, I_3 = \frac{1}{10^3} = 1 \text{ (mA)}$$

注意到理想运放的虚断特性, 则由 KCL 得

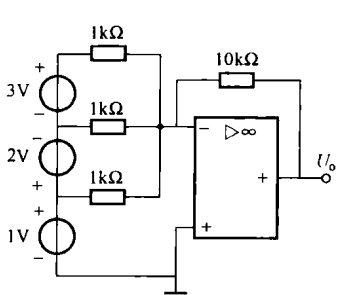
$$I_4 = I_1 + I_2 + I_3 = 2 \text{ (mA)}$$

所以

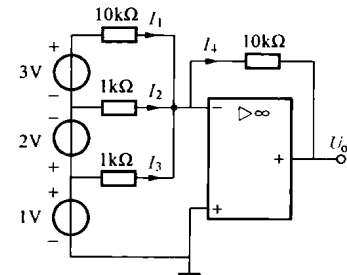
$$U_o = -10 \times 10^3 I_4 = -10 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-3} = -20 \text{ (V)}$$

方法 2: 利用戴维南定理, 原电路可等效为题 5-26 解图 (b), 则

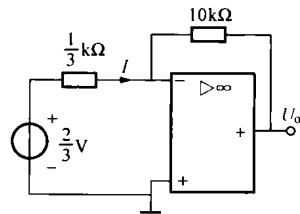
$$I = \frac{2/3}{1/3} = 2 \text{ (mA)}, U_o = -10 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-3} = -20 \text{ (V)}$$



题 5-26 图



(a)



(b)

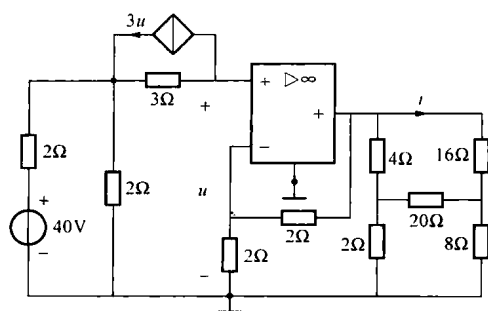
题 5-26 解图

5-27 求题 5-27 图所示电路中的 i 。

解 由运放的虚断、KVL 和元件的 VAR 得

$$u = -3 \times 3u + \frac{2}{2+2} \times 40$$

$$u = 2\text{V}$$



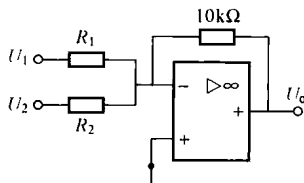
题 5-27 图

与 $U_o = -(5U_1 + 2U_2)$ 比较得

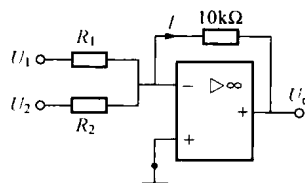
$$\frac{10}{R_1} = 5, \quad \frac{10}{R_2} = 2$$

因此

$$R_1 = 2\text{k}\Omega, \quad R_2 = 5\text{k}\Omega$$



题 5-28 图



题 5-28 解图

5-29 若要使题 5-29 图所示电路中 $U_2 = -12U_1$, 求电阻 R 之值。

解 所用电压的参考方向如题 5-29 解图所示。则

$$I_1 = \frac{U_1}{1000}$$

所以

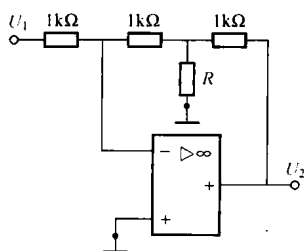
$$U_a = -1000I_1 = -U_1$$

因此

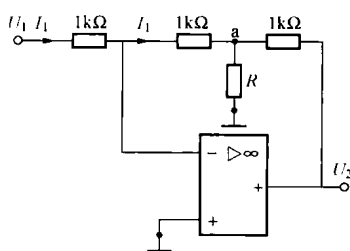
$$\begin{aligned} U_2 &= -\left(I_1 - \frac{U_a}{R}\right) \times 1000 + U_a = -\left(\frac{U_1}{1000} + \frac{U_1}{R}\right) \times 1000 - U_1 \\ &= -2U_1 - \frac{1000}{R}U_1 = -\left(2 + \frac{1000}{R}\right)U_1 \end{aligned}$$

又因为 $U_2 = -12U_1$, 所以

$$2 + \frac{1000}{R} = 12$$



题 5-29 图



题 5-29 解图

由运放的虚短、虚断和分压公式及电桥平衡原理得

$$i = \frac{2u}{16+8} = \frac{2 \times 2}{24} = \frac{1}{6} \text{ (A)}$$

5-28 若要求题 5-28 图所示电路的 $U_o = -(5U_1 + 2U_2)$, 求电阻 R_1 和 R_2 。

解 所用电流的参考方向如题 5-28 解图所示。则

$$I = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2}$$

所以

$$U_o = -10I = -\frac{10}{R_1}U_1 - \frac{10}{R_2}U_2$$

因此 $R=100\Omega$

5-30 用节点法求题 5-30 图所示电路中的输出电压 u_o 。

解 电路的节点电压方程为

$$\begin{cases} 3.5U_{n1} - U_{n2} - U_o = 18 \\ -U_{n1} + 2U_{n2} - U_o = 0 \end{cases}$$

因为 $U_{n2}=0$ ，则由第二个方程得

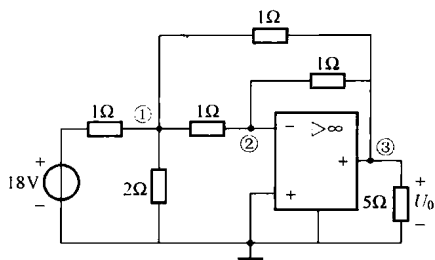
$$U_{n1} = -U_o$$

代入第一个方程有

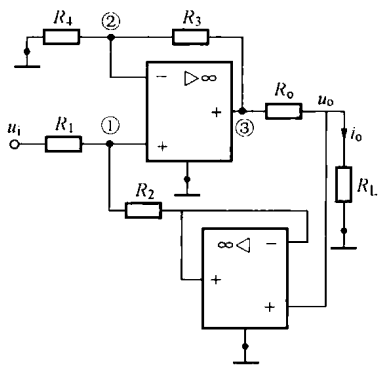
$$-3.5U_o - U_o = 18$$

所以

$$U_o = -\frac{18}{4.5} = -4 \text{ (V)}$$



题 5-30 图



题 5-31 图

5-31 题 5-31 图所示电路中，已知 $R_1=R_2=R_3=R_4=R_o$ 。证明 i_o 的大小与 R_L 无关。

解 利用理想运放的“虚断”特性列写节点①和②的节点电压方程，得

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)u_{n1} - \frac{1}{R_2}u_o = \frac{u_i}{R_1} \\ \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3}\right)u_{n2} - \frac{1}{R_3}u_{n3} = 0 \end{cases}$$

由运放的“虚短”特性得 $u_{n1} = u_{n2}$ ，且 $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_o$ ，则上述两个方程相减有

$$u_{n3} - u_o = u_i$$

利用运放的“虚断”特性得

$$i_o = \frac{u_{n3} - u_o}{R_o} = \frac{u_i}{R_o}$$

5-32 求题 5-32 图所示理想运放双口网络的开路电阻参数。

解 设理想运放的输出端电压为 u_o ，则利用理想运放的虚短虚断特性、KVL 和 KCL 有

$$\begin{aligned} u_1 &= R_s i_1 \\ u_o &= -R_f i_1 \end{aligned}$$

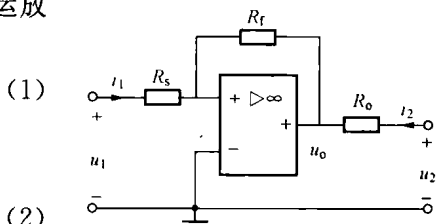
则由 KVL 得

$$u_2 = R_o i_2 + u_o = -R_f i_1 + R_o i_2 \quad (2)$$

将方程 (1) 和 (2) 与开路电阻参数方程的标准型比较可得

$$R_{11} = R_s, R_{12} = 0, R_{21} = -R_f, R_{22} = R_o$$

注：求简单二端口网络的参数时，通常直接写出方程与标准型比较得解。



题 5-32 图

回转器

5-33 题 5-33 图所示电路中，回转器的回转电阻 $r=1\Omega$ ，电流源电流 $I_s=5A$ ，求开路

电压 u_2 。

解 所用电量的参考方向如题 5-33 解图所示。回转器的 VAR 为

$$\begin{cases} u_1 = -ri_2 \\ u_2 = ri_1 \end{cases}$$

当回转器的出口开路时, 即 $i_2=0$ 时, 有

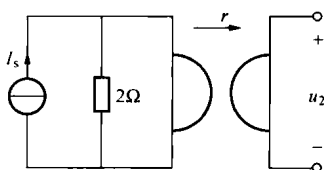
$$u_1 = -ri_2 = 0$$

得

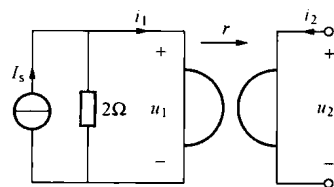
$$i_1 = I_s = 5\text{A}$$

则

$$u_2 = ri_1 = 1 \times 5 = 5\text{ (V)}$$



题 5-33 图

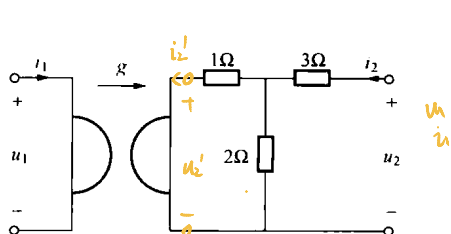


题 5-33 解图

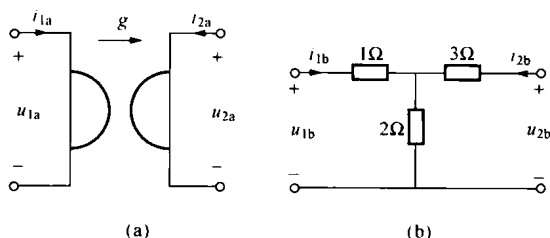
5-34 求题 5-34 图所示双口网络 N 的传输参数。其中回转系数 $g=0.5\text{S}$ 。

解 图示的双口网络 N 可看作题 5-34 解图 (a) 和 (b) 所示两个子网络的级联。

(1) 对于 5-34 解图 (a), 由回转器的 VAR 得



题 5-34 图



题 5-34 解图

$$\begin{cases} u_{1a} = -2i_{2a} \\ i_{1a} = 0.5u_{2a} \end{cases}$$

所以, 网络的传输参数为

$$\mathbf{T}_a = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) 下面求 5-34 解图 (b) 网络的传输参数。

1) 求 A_1 和 C_1 。当 $i_{2b}=0$ 时, 有

$$u_{1b} = (1+2)i_{1b} = 3i_{1b}, \quad u_{2b} = 2i_{1b}$$

所以

$$A_1 = \left. \frac{u_{1b}}{u_{2b}} \right|_{i_{2b}=0} = \frac{3i_{1b}}{2i_{1b}} = 1.5, \quad C_1 = \left. \frac{i_{1b}}{u_{2b}} \right|_{i_{2b}=0} = \frac{i_{1b}}{2i_{1b}} = 0.5\text{ (S)}$$

2) 求 B_1 和 D_1 。当 $u_{2b}=0$ 时, 有

$$u_{1b} = (1 + 2/3)i_{1b} = 2.2i_{1b}, \quad i_{2b} = -\frac{2}{3+2} \times i_{1b} = -0.4i_{1b}$$

所以

$$B_1 = \frac{u_{1b}}{-i_{2b}} \Big|_{u_{2b}=0} = \frac{2.2i_{1b}}{0.4i_{1b}} = 5.5 (\Omega), \quad D_1 = \frac{i_{1b}}{-i_{2b}} \Big|_{u_{2b}=0} = \frac{i_{1b}}{0.4i_{1b}} = 2.5$$

则 5-34 图 (b) 的传输参数为

$$\mathbf{T}_b = \begin{bmatrix} 1.5 & 5.5 \\ 0.5 & 2.5 \end{bmatrix}$$

因此, 双口网络 N 的传输参数为

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_a \mathbf{T}_b = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 & 5.5 \\ 0.5 & 2.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0.75 & 2.75 \end{bmatrix}$$

5.5 自测题及参考答案

1. 求图 1 所示双口网络的开路电阻参数。
2. 求图 2 所示双口网络的短路电导参数。
3. 图 3 电路中的 N 为不含独立电源的对称双口网络。当 $R_L = \infty$ 时, $U_2 = 6V$, $I_1 = 2A$ 。
(1) 分别求该双口网络 N 的传输参数和混合参数; (2) 求 $R_L = 2\Omega$ 时, 双口网络 N 吸收的功率。

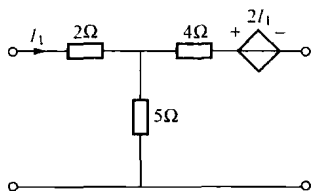


图 1

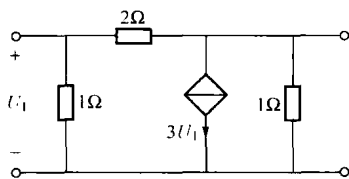


图 2

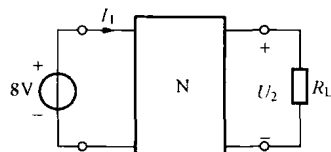


图 3

4. 已知双口网络 N 的短路电导参数为

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & -0.25 \\ -0.25 & 0.5 \end{bmatrix} \text{ S}$$

若该网络 11' 端口接 4V 电压源, 在 22' 端口接电阻 R_L , 如图 4 所示。(1) 求 R_L 为何值时其上获得最大功率; (2) 求此时 R 的最大功率; (3) 求 R_L 获得最大功率时, 电源发出的功率。

5. 图 5 所示电路中双口网络 N 的传输参数为

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

求 R_L 获得最大功率的条件, 并求此最大功率。

6. 电路如图 6 所示。求: (1) 输入口的输入电阻 R_i 和输出口的输出电阻; (2) 输出电压 u_o 。

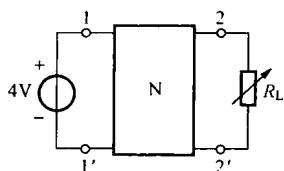


图 4

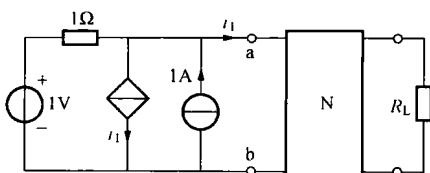


图 5

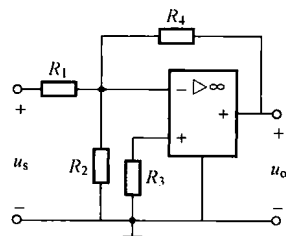


图 6

7. 求图 7 所示电路中的电压 u_o 和电流 i 。

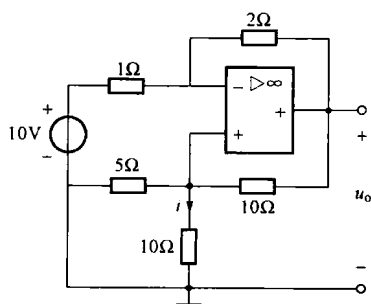


图 7

参考答案

1. $\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \Omega$

2. $\begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ 2.5 & 1.5 \end{bmatrix} \text{S}$

3. (1) $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{7}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$, $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$; (2) 20.48W

4. 2Ω , $P_{\max} = 0.25\text{W}$, $P_{U_1} = 15\text{W}$

5. $\frac{10}{7}\Omega$, $\frac{1}{70}\text{W}$

6. (1) R_1 , 0; (2) $-\frac{R_4}{R_1}u_s$

7. -80V , -2A

第 6 章 线性动态电路的时域分析

6.1 本章知识结构图

第 6 章知识结构图如图 6-1 所示。

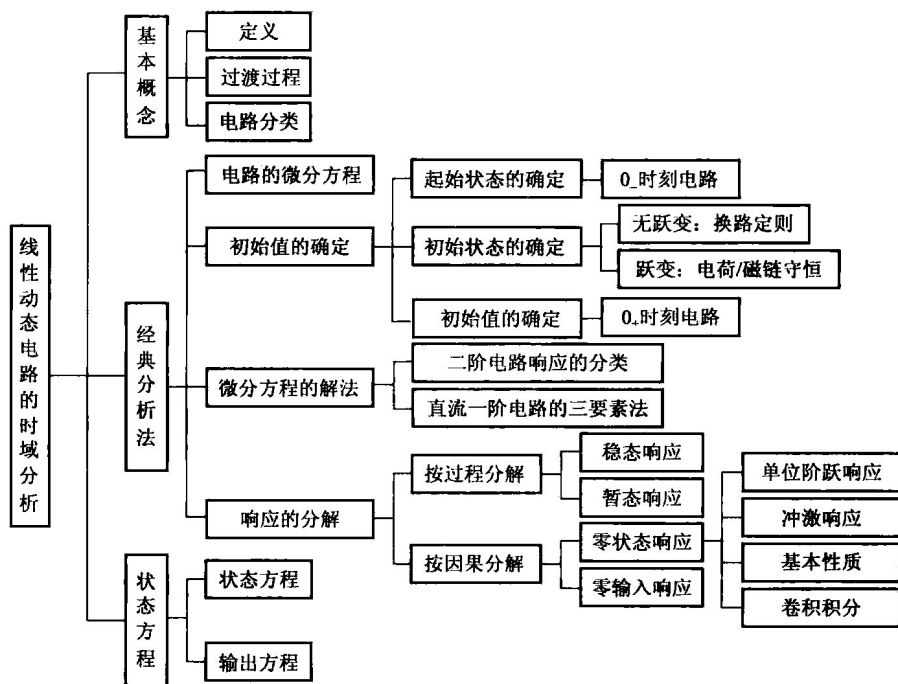


图 6-1 第 6 章知识结构图

6.2 知识点归纳与学习指导

本章主要介绍动态电路的基本概念及其经典分析法和状态方程。

6.2.1 动态电路的基本概念

由两种及以上类型元件组成的电路称为动态电路。动态电路的重要特征是当电路发生换路时，会经历过渡过程（又称为暂态过程、瞬态过程或动态过程）。

电路出现过渡过程的必要条件：① 电路含有不同类型的元件（含有储能元件）；② 电路出现换路。产生过渡过程的根本原因是电路中的储能发生了变化。

电阻性电路的方程是代数方程，但描述动态电路的方程为微分方程。描述电路输入和单输出关系的微分方程又称为输入—输出方程。

用一阶微分方程描述的电路称为一阶动态电路（简称一阶电路），单一电感或单一电容

的电路是典型的一阶电路。相应地，用 n 阶微分方程描述的电路称为 n 阶动态电路（简称 n 阶电路）。如果微分方程是线性的，则称为线性动态电路。

分析线性动态电路暂态过程的方法分为时域分析法和复频域分析法两大类。本章介绍时域分析法，该方法又分为经典分析法和状态变量分析法两种。

6.2.2 动态电路的经典分析法

1. 动态电路的微分方程

列写动态电路方程的基本依据仍然是 KCL、KVL 和元件的特性方程。对串联型电路首先从列写 KVL 方程开始；对于并联型电路则从列写 KCL 方程开始。

一阶电路是含有一个独立储能元件的动态电路，其输入—输出方程具有下列一般形式

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = f(t)$$

一个一阶电路的时间常数 τ 是唯一的，与电路的输入无关，仅取决于电路的结构和非独立电源元件的参数。它决定一阶电路过渡过程的快慢。工程上通常认为，经过 4τ 的时间后，电路的过渡过程结束。

二阶电路是含有两个独立储能元件的动态电路，其输入—输出方程具有下列一般形式

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\alpha \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = f(t)$$

式中： α 称为阻尼系数； ω_0 称为谐振频率。

n 阶电路含有 n 个独立的储能元件，其输入—输出方程具有下列一般形式

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t)$$

2. 动态电路的初始值

初始值是指输出量（高阶电路还应包括其相应的导数）在 $t=0_+$ 时刻的值。确定初始值的步骤如下：

(1) 求起始状态 $[u_C(0_-)$ 和/或 $i_L(0_-)]$ 。确定起始状态，分下列 4 种情况：

1) 给定 $u_C(0_-)$ 、 $i_L(0_-)$ 。例如，换路前电路处于零状态，此时 $u_C(0_-)=0$ ， $i_L(0_-)=0$ 。

2) 已知换路前电路的储能，此时用储能公式确定 $u_C(0_-)$ 、 $i_L(0_-)$ ：

$$W_C(0_-) = \frac{1}{2} C u_C^2(0_-), W_L(0_-) = \frac{1}{2} L i_L^2(0_-)$$

3) 已知 $q_C(0_-)$ 、 $\psi_L(0_-)$ ，此时用储能元件特性方程确定 $u_C(0_-)$ 、 $i_L(0_-)$ ：

$$q_C(0_-) = C u_C(0_-), \psi_L(0_-) = L i_L(0_-)$$

4) 0_- 时刻电路处于稳态。分下列 3 种情形：

情形 1：如果换路前电路中电源均为直流电源，则电路处于直流稳态。这种各支路电压、电流均为直流量的电路称为直流稳态电路。在直流稳态电路中，电容相当于开路、电感相当于短路。

将换路前电路中电容用开路线代替、电感用短路线代替，得 0_- 时刻电路，用电阻电路的分析方法求该电路可得 $u_C(0_-)$ 、 $i_L(0_-)$ 。

情形 2：如果电路中电源均为同频率的正弦电源，则电路处于正弦稳态。需要用正弦稳态电路的分析方法求出 $u_C(t)$ 、 $i_L(t)$ ，再令 $t=0$ 确定 $u_C(0_-)$ 、 $i_L(0_-)$ 。

情形 3：如果电路中电源为非正弦周期信号电源，则电路处于非正弦周期稳态。应采用非

正弦周期信号稳态电路的分析方法求出 $u_C(t)$ 、 $i_L(t)$ ，再令 $t=0$ 确定 $u_C(0_-)$ 、 $i_L(0_-)$ 。

具体问题有可能是上述 4 种情况中几种的组合。

(2) 确定初始状态 [$u_C(0_+)$ 和/或 $i_L(0_+)$]。当电路中电容电压和电感电流无跃变时，可用换路定则确定，即

$$u_C(0_+) = u_C(0_-), i_L(0_+) = i_L(0_-)$$

当电容电压发生跃变时，需要根据电荷守恒定律或用其他方法确定 $u_C(0_+)$ ；当电感电流发生跃变时，需要根据磁链守恒定律或用其他方法确定 $i_L(0_+)$ 。

注：电路中电源为有限值时，存在纯电容回路（仅由电容或电容和电压源构成的回路）和纯电感割集（仅由电感或电感和电流源构成的割集），分别是该纯电容回路中电容电压和该纯电感割集中电感电流出现跃变的必要条件。是否跃变，可通过检验电路的起始状态是否满足 $t=0_+$ 时刻电路的拓扑约束来判断；不满足，相应的电容电压、电感电流才发生跃变。而不在纯电容回路中的电容电压和不在纯电感割集中的电感电流不发生跃变。

(3) 作出 0_+ 时刻电路，求初始值。将换路后电路中电容用电压为 $u_C(0_+)$ 的电压源替代，电感用电流为 $i_L(0_+)$ 的电流源替代，得到 0_+ 时刻电路，求解该电阻电路可确定响应的初始值。在 0_+ 时刻电路中，独立电源的数值为其在 $t=0_+$ 时的激励值。这表明，初始值一般是由初始状态和独立源在 $t=0_+$ 时刻的激励值共同决定的。

由于 $i_C = C \frac{du_C}{dt}$ 和 $u_L = L \frac{di_L}{dt}$ ，因此， $u_C(t)$ 和 $i_L(t)$ 的一阶导数的初始值亦可由 0_+ 时刻电路间接求出。其他导数初始值一般需用微分方程求得。

【例 6-1】 图 6-1 (a) 所示电路在开关 S 动作前已工作很久，开关 S 在 $t=0$ 时闭合。求 $t=0_+$ 时的电压 $u_C(t)$ 、 $u_1(t)$ 和电流 $i_C(t)$ 以及 $\frac{du_1(t)}{dt}$ 。

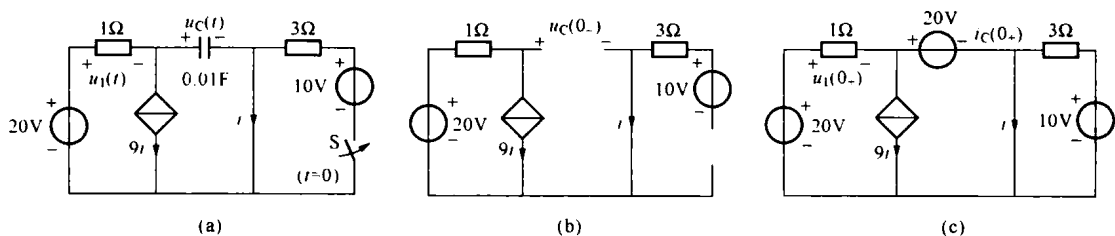


图 6-2 [例 6-1] 图

解 (1) 求 $u_C(0_-)$ 。 $t=0_-$ 的电路如图 6-2 (b) 所示。因 $i=0$ ，所以

$$u_C(0_-) = 20\text{V}$$

根据换路定则得

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 20\text{V}$$

(2) 求 $u_1(0_+)$ 和 $i_C(0_+)$ 。 0_+ 时刻电路如图 6-2 (c) 所示。由 KVL 得

$$u_1(0_+) = 20 - 20 = 0$$

由 KCL 得

$$i = i_C(0_+) + \frac{10}{3}$$

则根据 KVL 有

$$1 \times [9i + i_C(0_+)] = 20 - 20$$

所以

$$9 \times \left[i_C(0_+) + \frac{10}{3} \right] + i_C(0_+) = 0$$

求解得

$$i_C(0_+) = -3A$$

(3) 求 $\frac{du_1(0_+)}{dt}$ 。对于图 6-2 (a) 所示电路, 由 KVL 得

$$u_1(t) = 20 - u_C(t)$$

方程两边对时间求导, 并根据电容伏安关系有

$$\frac{du_1(t)}{dt} = -\frac{du_C(t)}{dt} = -\frac{i_C(t)}{C}$$

则

$$\frac{du_1(0_+)}{dt} = -\frac{du_C(0_+)}{dt} = -\frac{i_C(0_+)}{C} = -\frac{-3}{0.01} = 300 \text{ (V/s)}$$

3. 线性动态电路的经典分析法

动态电路经典分析法的一般步骤如下: ① 根据两类约束, 列出换路后电路的输入—输出方程; ② 求出相应的初始值; ③ 计算输出的强制分量 (即电路微分方程的特解); ④ 计算输出的自由分量 (即电路齐次微分方程的通解); ⑤ 将上述两个分量相加 (微分方程的解 = 通解 + 特解), 并用初始值确定积分常数, 可得所求输出。

(1) 计算输出的自由分量。电路的自由分量对应齐次微分方程的通解, 它的模式仅决定于电路的拓扑结构和元件参数, 而与输入无关。通解常用下列特征方程的方法确定。

令电路微分方程的右端项为零可得下列齐次微分方程

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0$$

相应的特征方程为

$$p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$$

由此可求得特征根 (电路中称为固有频率或自然频率) p_1 、 p_2 、 \dots 、 p_n 。根据特征根可以判断电路暂态过程的性质。

当特征根彼此不等时, 自由分量的形式为

$$y_h(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}$$

式中: A_k 为积分常数。

当特征根中出现 l 阶重根 ($n = m + l$) 时, 设 p_1 、 p_2 、 \dots 、 p_m 为单根, p_l 为 l 阶重根, 则自由分量的形式为

$$y_h(t) = \sum_{i=1}^m A_i e^{p_i t} + \sum_{k=1}^l A_k t^{k-1} e^{p_l t}$$

对于同一动态电路, 取不同的电压或电流为输出, 特征方程一般相同。只有纯电感回路中的电感电流或纯电容割集中的电容电压作为输出时, 才有零特征根的差别。

对于一阶电路, $p = -\frac{1}{\tau}$, 自由分量的一般形式为 $Ae^{pt} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$, 其变化方式完全由电路本身的特征根 p 所确定。

对于二阶电路, $p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ 。当 $\alpha > \omega_0$ (过阻尼) 时, p_1 和 p_2 为两个不等实根, $y_h(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$ 为非振荡响应; 当 $\alpha = \omega_0$ (临界阻尼) 时, $p_1 = p_2 = p$ 为两个相等的实根, $y_h(t) = A_1 e^{pt} + A_2 t e^{pt}$ 为非振荡响应; 当 $\alpha < \omega_0$ (欠阻尼) 时, p_1, p_2 为两个共轭复根, $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$ ($\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$), $y_h(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \phi)$ 为振荡响应。特别地, 当电路无损耗 ($\alpha = 0$, 无阻尼) 时, $y_h(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi)$ 为等幅振荡响应。

(2) 计算输出量的强制分量。特解的形式一般和输入形式相同, 故称之为强制分量。对应直流量和正弦量的强制分量的形式见表 6-1。

表 6-1 强制分量的形式

电路的激励源形式	强制分量的形式	备注
直流电源或阶跃电源	直流分量	
正弦电源 $F_m \sin(\omega t + \phi)$	$Y_{pm} \sin(\omega t + \phi + \theta)$	$j\omega$ 不是特征根
	$Y_{pmt} \sin(\omega t + \phi + \theta)$	$j\omega$ 是特征根

(3) 计算输出的全响应。由电路的起始状态和输入共同引起的响应称为全响应。将强制分量和自由分量相加, 并用初始值确定各个积分常数 A_k , 可得输出的全响应。

与求解微分方程相对应, 全响应可分解为

$$\text{全响应} = \text{强制分量} + \text{自由分量}$$

对于由直流、阶跃或周期信号激励的有损耗 [$\text{Re}(p_k) < 0$] 电路, 自由分量随时间衰减, 称为暂态分量, 它只存在于过渡过程之中; 强制分量为直流或周期信号, 称为稳态分量。这样, 全响应又可分解为

$$\text{全响应} = \text{稳态分量} + \text{暂态分量}$$

暂态分量是由初始状态和外加激励共同引起的, 但其模式与自由分量相同, 与输入无关; 而稳态分量为微分方程的特解 (强制分量), 与初始状态无关, 可由分析各种稳态电路的方法确定。

6.2.3 一阶电路的三要素法

$t=0$ 换路时, 直流一阶电路中任一电压或电流均可以用三要素公式求得, 即

$$y(t) = y(\infty) + [y(0_+) - y(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}}$$

显然, 当 $y(0_+) = y(\infty)$ 时, 电路无过渡过程。

三要素的计算步骤如下:

(1) 初始值 $y(0_+)$ 按前面所述的方法计算。

(2) 时间常数 τ 的求法。一阶电路分为 RC 一阶电路和 RL 一阶电路。时间常数 τ 的计算公式为

$$\tau = \begin{cases} RC & (\text{RC 一阶电路}) \\ \frac{L}{R} & (\text{RL 一阶电路}) \end{cases}$$

1) 对于单一储能元件的一阶电路, R 为从储能元件两端看进去的二端网络的戴维南等效电阻。

2) 对于多个储能元件的一阶电路, 可先把电路中所有独立电源置零, 然后把储能元件合并成一个等效储能元件 (若电路是一阶的, 这一点一定能够做到), 该等效储能元件的参数值就是公式中的 L 或 C ; 从等效储能元件两端看进去的二端网络的输入电阻就是公式中的 R 。

(3) 稳态值的确定。稳态时电路为直流稳态电路, 电容用开路线代替, 电感用短路线代替, 得 ∞ 时刻电路, 求解该电阻电路可得稳态值。

求解每个要素涉及的电路都是电阻电路, 可用已学的电阻电路方法求解。因此, 学习本节内容时, 重点应放在求解三个要素的大思路上, 即正确画出相关的电阻电路。

其他电源激励下的一阶电路响应的三要素公式为

$$y(t) = y_p(t) + [y(0_+) - y_p(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

当电源为同频率的正弦电源时, 强迫响应 $y_p(t)$ 为正弦稳态响应, 可用相量法求解 (见第 7 章); 当电源为非正弦周期电源时, 强迫响应 $y_p(t)$ 为非正弦周期稳态响应, 可用谐波分析法确定 (见第 11 章)。

换路时刻在 $t = t_0$ 时, 相应的三要素公式变为

$$y(t) = y(\infty) + [y(t_{0+}) - y(\infty)]e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

$$y(t) = y_p(t) + [y(t_{0+}) - y_p(t_{0+})]e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

注: 这里的三要素法只能用于一阶电路。

【例 6-2】 图 6-2 (a) 所示电路在开关 S 动作前已工作很久, S 在 $t=0$ 时闭合。求 $t \geq 0$ 时的电容电压 $u_c(t)$ 。

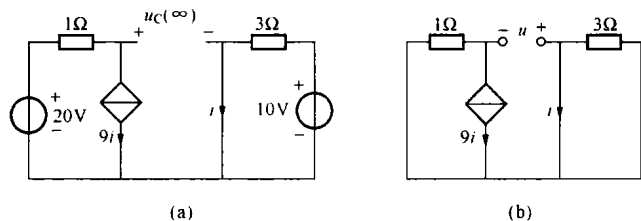


图 6-3 [例 6-2] 图

解 (1) 求 $u_c(0_+)$ 。由本书 [例 6-1] 得 $u_c(0_+) = 20\text{V}$ 。

(2) 求 $u_c(\infty)$ 。 $t = \infty$ 的电路如图 6-3 (a) 所示, 则有

$$i = \frac{10}{3} \text{ A}, u_c(\infty) = 20 - 9i = 20 - 9 \times \frac{10}{3} = -10 \text{ (V)}$$

(3) 求 τ 。求 R_0 的电路如图 6-3 (b) 所示。3 Ω 电阻相当于开路, 则

$$u = (9i + i) \times 1 = 10i$$

则

$$R_0 = \frac{u}{i} = 10\Omega, \tau = R_0 C = 10 \times 0.01 = 0.1 \text{ (s)}$$

所以

$$u_c(t) = u_c(\infty) + [u_c(0_+) - u_c(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = -10 + 30e^{-10t} \text{ V} \quad (t \geq 0)$$

注：如果所求的初始值不是初始状态，则需要作出 0_+ 时刻电路求解。

6.2.4 线性时不变动态电路的特性

本部分内容介绍线性时不变动态电路的几个重要特性：线性特性、微分特性和时不变性。

1. 线性特性

线性动态电路的叠加定理：

$$\text{全响应} = \text{零输入响应} + \text{零状态响应}$$

零输入响应是外加输入为零的情况下，电路的初始储能产生的响应，其模式与微分方程通解相似。零状态响应为零状态下外加输入单独作用产生的响应。零状态响应与输入之间存在线性关系（零状态线性），零输入响应与起始状态之间存在线性关系（零输入线性）。零状态响应与零输入响应仍可分别用经典法计算。

输入为 $\frac{df(t)}{dt}$ 时的零状态响应是输入为 $f(t)$ 时的零状态响应的导数（微分特性）。

学习时，要注意全响应不同分解方式的关系。

2. 时不变特性

时不变特性是时不变电路所特有的一种性质，这一性质可陈述为：对于线性时不变电路，若在输入 $f(t)$ 作用下产生的零状态响应为 $y_{zs}(t)$ ，则在时间上延迟了 t_0 的输入 $f(t-t_0)$ 作用下产生的零状态响应为 $y_{zs}(t-t_0)$ 。

6.2.5 单位阶跃响应与冲激响应

学习本节时，要熟练掌握单位阶跃函数和冲激函数的定义，见表 6-2。电路中出现阶跃函数或冲激函数就意味着电路出现换路。

表 6-2 阶跃函数和冲激函数的定义

名称	单位阶跃函数	单位延时阶跃函数	阶跃函数	单位冲激函数
定义	$\epsilon(t) = \begin{cases} 1 & (t \geq 0_+) \\ 0 & (t \leq 0_-) \end{cases}$	$\epsilon(t-t_0) = \begin{cases} 1 & (t \geq t_{0+}) \\ 0 & (t \leq t_{0-}) \end{cases}$	$\epsilon(-t) = \begin{cases} 1 & (t \leq 0_-) \\ 0 & (t \geq 0_+) \end{cases}$	$\begin{cases} \delta(t) = 0 & (t \leq 0_- \text{ 或 } t \geq 0_+) \\ \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$

用阶跃函数可方便地表示分段常数信号。单位冲激函数具有如下性质：

$$(1) \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \epsilon(t) \quad \text{或} \quad \delta(t) = \frac{d\epsilon(t)}{dt}。$$

$$(2) \text{若 } f(t) \text{ 在 } t=0 \text{ 处连续, 则 } f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)。$$

$$(3) \text{若 } f(t) \text{ 连续, 则 } \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau) d\tau = f(t) * \delta(t) = f(t) \text{ (筛分性)}。$$

根据性质 (2)，表达式中 $\delta(t)$ 前的系数应为常数，且有 $0 \cdot \delta(t) = 0$ 。

单位阶跃响应和冲激响应均为特殊的零状态响应。电路对单位阶跃输入的零状态响应称为（单位）阶跃响应，记作 $s(t)$ 。由于阶跃输入在 $t \geq 0_+$ 时为常数，所以，阶跃响应的求解方法和求电路在直流激励下的零状态响应的方法相同。

电路对单位冲激输入的零状态响应称为（单位）冲激响应，并用 $h(t)$ 表示。冲激响应与零输入响应具有相同的性质。电路中出现冲激函数时求初始状态必须考虑跃变。

冲激响应可按下列方法计算。

(1) 由阶跃响应求冲激响应。由微分特性可知, 电路的冲激响应是其阶跃响应的导数, 即

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

(2) 化为求零输入响应。求电路的冲激响应时, 电路存在跃变, 关键在于如何求出初始状态 $[u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)]$ 。

时域中化为零输入响应求冲激响应的一般步骤如下:

1) $t=0$ 时, 电压为有限值的电容视为短路, 电流为有限值的电感视为开路, 可得 $t=0$ 时求 $i_C(0)$ 和 $u_L(0)$ 的电路。求解这一电阻电路可求得 $i_C(0)$ 和 $u_L(0)$ 。

2) 利用公式

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} i_C d\tau, \quad i_L(0_+) = i_L(0_-) + \frac{1}{L} \int_{0_-}^{0_+} u_L d\tau$$

确定 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$ 。

3) 求解 0_+ 时刻电路确定初始值 (方法与前相同)。

4) 将电路中冲激电源置零, 求相应的零输入响应即为所求的冲激响应。

此外, 冲激响应还可以用复频域分析法求解 (见第 13 章)。

【例 6-3】 求图 6-4 所示电路中的冲激响应 $u_C(t)$ 及 $i(t)$ 。

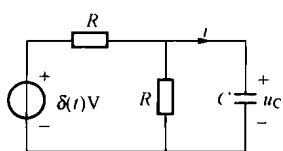


图 6-4 [例 6-3] 图

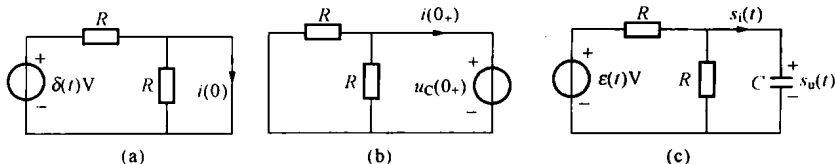


图 6-5 [例 6-3] 解图

解 方法 1: (1) 求 $u_C(0_+)$ 和 $i(0_+)$ 。

1) 求 $u_C(0_+)$ 。 $t=0$ 的电路如图 6-5 (a) 所示。因为

$$i(0) = \frac{\delta(t)}{R}$$

所以

$$u_C(0_+) = \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} \frac{\delta(\tau)}{R} d\tau = \frac{1}{RC}$$

2) 求 $i(0_+)$ 。 $t=0_+$ 的电路如图 6-5 (b) 所示。

$$i(0_+) = -\frac{u_C(0_+)}{\frac{R}{2}} = -\frac{2}{R^2 C}$$

(2) 求 $u_C(\infty)$ 和 $i(\infty)$ 。有

$$i(\infty) = 0, \quad u_C(\infty) = 0$$

(3) 求 τ 。因为

$$\tau = \frac{RC}{2}$$

所以

$$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{RC} e^{-\frac{2t}{RC}} \epsilon(t)$$

$$i(t) = i(\infty) + [i(0_+) - i(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + i(0) = -\frac{2}{R^2C}e^{-\frac{2t}{RC}}\epsilon(t) + \frac{1}{R}\delta(t)$$

方法2: 由单位阶跃响应求冲激响应。电路如图6-5(c)所示。因为 $s_u(0_-) = 0$, 所以

$$s_u(0_+) = s_u(0_-) = 0, s_i(0_+) = \frac{1}{R}A, s_u(\infty) = 0.5V, s_i(\infty) = 0, \tau = \frac{RC}{2}$$

所以

$$s_u(t) = s_u(\infty) + [s_u(0_+) - s_u(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 0.5(1 - e^{-\frac{2t}{RC}})\epsilon(t),$$

$$s_i(t) = s_i(\infty) + [s_i(0_+) - s_i(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{R}e^{-\frac{2t}{RC}}\epsilon(t)$$

因为 $\delta(t) = \frac{d\epsilon(t)}{dt}$, 所以

$$u_c(t) = \frac{ds_u(t)}{dt} = 0.5(1 - e^{-\frac{2t}{RC}})\delta(t) + \frac{1}{RC}e^{-\frac{2t}{RC}}\epsilon(t) = \frac{1}{RC}e^{-\frac{2t}{RC}}\epsilon(t)$$

$$i_c(t) = \frac{ds_i(t)}{dt} = \frac{1}{R}e^{-\frac{2t}{RC}}\delta(t) - \frac{2}{R^2C}e^{-\frac{2t}{RC}}\epsilon(t) = \frac{1}{R}\delta(t) - \frac{2}{R^2C}e^{-\frac{2t}{RC}}\epsilon(t)$$

注: ① 本题亦可用 $i(t) = \frac{du_c(t)}{dt}$ 求 $i(t)$; ② 由单位阶跃响应 $s(t)$ 求冲激响应 $h(t)$ 时, $s(t)$ 的表达式应乘以 $\epsilon(t)$ 。

6.2.6 求零状态响应的卷积积分法

设线性电路的冲激响应为 $h(t)$, 则电路对任一有始激励 $e(t)$ 的零状态响应 $r_{zs}(t)$ 为下列卷积积分

$$r_{zs}(t) = h(t) \otimes e(t) = \int_{0_-}^t h(t-\tau) e(\tau) d\tau$$

6.2.7 电路的状态方程和输出方程

1. 基本概念

电路中独立电容的电压和独立电感的电流可选为状态变量。以状态变量为电路变量建立的电路的一阶微分方程组称为电路的状态方程。其标准形式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

式中: \mathbf{x} 为状态变量列向量; $\dot{\mathbf{x}}$ 为状态变量列向量对时间的一阶导数; \mathbf{u} 为电路输入列向量; \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 为系数矩阵。 \mathbf{A} 的特征值 (即特征多项式 $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$ 的根) 为电路的固有频率。

输出方程为代数方程, 具有下列一般形式:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

式中: \mathbf{y} 为输出变量列向量; \mathbf{C} 和 \mathbf{D} 为系数矩阵。

2. 状态方程和输出方程的直观列写方法

(1) 状态方程的直观列写法步骤如下:

- 1) 选取所有的独立电容电压和独立电感电流作为状态变量。
- 2) 对每个独立的电容, 选择包含尽可能多的电感和电流源的节点或割集, 并依据 KCL 和电容的 VAR 列写节点方程; 对每个独立的电感, 选择包含尽可能多的电容和电压源的回路, 并依据 KVL 和电感的 VAR 列写回路方程。

3) 将上述方程中出现的非状态变量用状态变量和输入表示, 并从方程中消去, 然后整理成标准形。

将每个二端元件当作一条支路,上述步骤可借助树的概念进行。选择的树应包含所有电压源、尽可能多的电容、尽可能少的电感,并且不包含电流源。列写状态方程的步骤变为对含电容树支的基本割集列写 KCL 方程,对含电感连支的基本回路列写 KVL 方程,然后借助其他基本割集(非状态变量为树支变量)、基本回路(非状态变量为连支变量)将非状态变量用状态变量和输入表示并消去,最后将方程整理成标准形式。

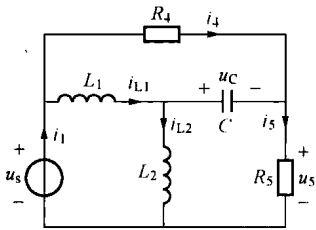


图 6-6 [例 6-4] 图

(2) 输出方程的列写方法分为两种情况: ① 输出为状态变量,此时令自身相等即可; ② 输出为非状态变量,此时将与非状态变量用状态变量和输入表示的方法相似。

【例 6-4】 试列写图 6-6 所示电路的状态方程; 若以 R_5 的电压 u_5 和电压源中的电流 i_1 为输出, 列出其输出方程。

解 选电感电流 i_{L1} 、 i_{L2} 和电容电压 u_C 为状态变量, 由 KCL 和 KVL 分别得

$$C \frac{du_C}{dt} = i_{L1} - i_{L2} \quad (1)$$

$$\begin{cases} L_1 \frac{di_{L1}}{dt} = -u_C + R_4 i_4 \\ L_2 \frac{di_{L2}}{dt} = u_C + R_5 i_5 \end{cases} \quad (2)$$

为了消去非状态变量 i_4 和 i_5 , 建立如下的补充方程

$$R_4 i_4 + R_5 i_5 = u_s \quad (3)$$

$$-i_4 + i_5 = i_{L1} - i_{L2} \quad (4)$$

联立式 (3) 和式 (4) 可得

$$i_4 = \frac{1}{R_4 + R_5} (u_s - R_5 i_{L1} + R_5 i_{L2})$$

$$i_5 = \frac{1}{R_4 + R_5} (u_s + R_4 i_{L1} - R_4 i_{L2})$$

将 i_4 和 i_5 代入式 (2) 整理所得方程与方程 (1) 构成了电路的状态方程, 其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \frac{di_{L1}}{dt} \\ \frac{di_{L2}}{dt} \\ \frac{du_C}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R_4 R_5}{L_1 (R_4 + R_5)} & \frac{R_4 R_5}{L_1 (R_4 + R_5)} & \frac{-1}{L_1} \\ \frac{R_4 R_5}{L_2 (R_4 + R_5)} & \frac{-R_4 R_5}{L_2 (R_4 + R_5)} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_4}{L_1 (R_4 + R_5)} \\ \frac{R_5}{L_2 (R_4 + R_5)} \\ 0 \end{bmatrix} u_s$$

由 KCL 和 KVL 分别得

$$i_1 = i_{L1} + i_4 = \frac{R_4}{R_4 + R_5} i_{L1} + \frac{R_5}{R_4 + R_5} i_{L2} + \frac{1}{R_4 + R_5} u_s$$

$$u_5 = R_5 i_5 = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} i_{L1} - \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} i_{L2} + \frac{R_5}{R_4 + R_5} u_s$$

输出方程的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ -u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_4}{R_4+R_5} & \frac{R_5}{R_4+R_5} & 0 \\ \frac{R_4 R_5}{R_4+R_5} & -\frac{R_4 R_5}{R_4+R_5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_4+R_5} \\ \frac{R_5}{R_4+R_5} \end{bmatrix} u_s$$

6.3 重点、难点与考点

重点与难点

本章的重点是动态电路方程的建立（一、二阶电路的微分方程、电路的状态方程）、直流一阶电路的三要素公式、零输入响应和零状态响应的概念、单位阶跃响应和冲激响应等。难点是动态电路方程的建立、含受控源的一阶电路和二阶电路的分析、冲激响应的确定。

考点

本章考试的重点和热点主要集中在列写动态电路的方程、直流一阶电路的三要素法。

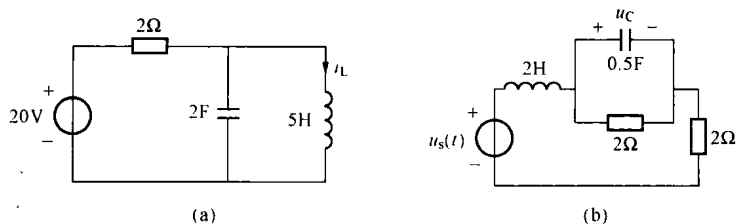
6.4 第6章习题选解

输入—输出方程

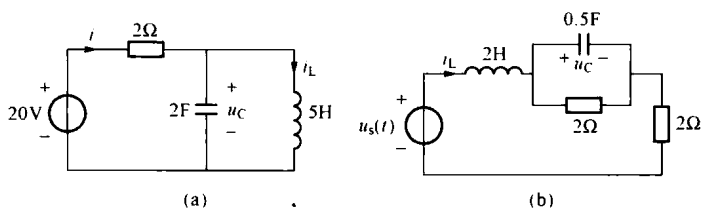
6-1 列写题 6-1 图所示各电路中以指定量为输出的输入—输出方程。

解 (a) 所用电压的参考方向如题 6-1 解图 (a) 所示。由 KVL 和元件的 VAR 得

$$u_C(t) = 5 \frac{di_L}{dt}$$



题 6-1 图



题 6-1 解图

由 KCL 和元件的 VAR 得

$$i(t) = i_L(t) + C \frac{du_C}{dt} = i_L(t) + 2 \frac{d}{dt} \left(5 \frac{di_L}{dt} \right) = i_L(t) + 10 \frac{d^2 i_L}{dt^2}$$

由 KVL 得

$$2i(t) + u_C(t) = 20$$

将上述 $i(t)$ 和 u_C 的表达式代入, 有

$$2 \left[i_L(t) + 10 \frac{d^2 i_L}{dt^2} \right] + 5 \frac{di_L}{dt} = 20$$

整理可得 $i_L(t)$ 为输出的输入—输出方程为

$$20 \frac{d^2 i_L}{dt^2} + 5 \frac{di_L}{dt} + 2i_L = 20$$

(b) 所用电量的参考方向如题 6-1 解图 (b) 所示。由 KVL 得

$$2 \frac{di_L}{dt} + u_C + 2i_L = u_s$$

由元件 VAR 和 KCL 得

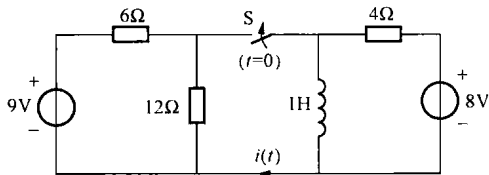
$$i_L = 0.5 \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{2}$$

代入前式, 整理得以 u_C 为输出的输入—输出方程为

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2 \frac{du_C}{dt} + 2u_C = u_s$$

初始值 (初始条件) 与直流稳态值

6-2 题 6-2 图所示电路中, 开关 S 动作前电路已处于稳态, $t=0$ 时开关 S 闭合。求 $i(0_+)$ 。

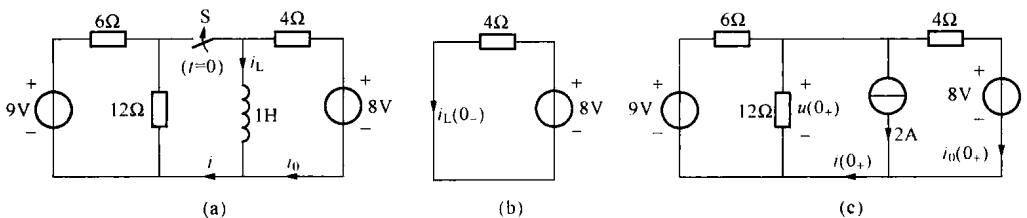


题 6-2 图

解 所用电流的参考方向如题 6-2 解图 (a) 所示。

(1) 求 $i_L(0_-)$ 。开关 S 闭合前, 电路处于直流稳态, 电感相当于短路, 所以 0_- 时刻电路如题 6-2 解图 (b) 所示, 则

$$i_L(0_-) = \frac{8}{4} = 2 \text{ (A)}$$



题 6-2 解图

(2) 求 $i_L(0_+)$ 。由换路定则得

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 2 \text{ A}$$

(3) 求 $i(0_+)$ 。将电感用电流为 2A 的电流源替代, 可得 0_+ 时刻电路如题 6-2 解图 (c) 所示。该电路的节点电压方程为

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right)u(0_+) = \frac{9}{6} + \frac{8}{4} - 2$$

解之得

$$u(0_+) = 3\text{V}$$

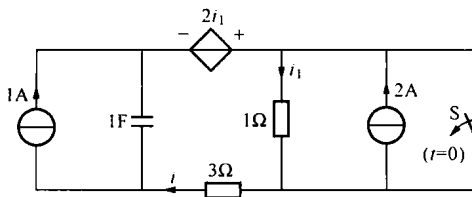
由欧姆定律得

$$i_0(0_+) = \frac{u(0_+) - 8}{4} = \frac{3 - 8}{4} = -1.25 \text{ (A)}$$

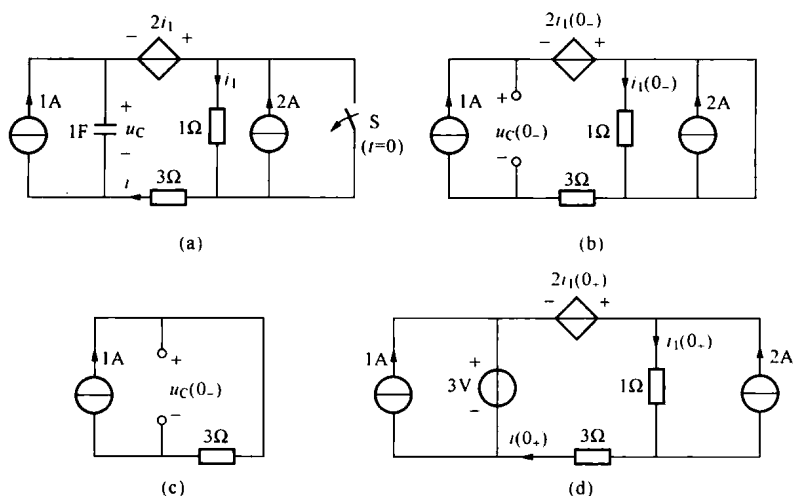
则由 KCL 得

$$i(0_+) = 2 + i_0(0_+) = 2 - 1.25 = 0.75 \text{ (A)}$$

6-3 题 6-3 图所示电路中, 开关 S 动作前处于稳态, $t=0$ 时开关 S 打开。求 $i(0_+)$ 。



题 6-3 图



题 6-3 解图

解 电容电压的参考方向如题 6-3 解图 (a) 所示。

(1) 求 $u_c(0_-)$ 。开关 S 动作前电路处于直流稳态, 电容相当于开路, 则 0_- 时刻电路如题 6-3 解图 (b) 所示。因为 $i_1(0_-) = 0$, 则 $2i_1(0_-) = 0$, 即受控电压源相当于短路, 题 6-3 解图 (b) 电路可等效为题 6-3 解图 (c)。

$$u_c(0_-) = 1 \times 3 = 3 \text{ (V)}$$

(2) 求 $u_c(0_+)$ 。由换路定则得

$$u_c(0_+) = u_c(0_-) = 3 \text{ (V)}$$

(3) 求 $i(0_+)$ 。将电容用电压为 3V 的电压源替代, 0_+ 时刻电路如题 6-3 解图 (d) 所示。由 KCL 得

$$i(0_+) = i_1(0_+) - 2$$

由 KVL 得

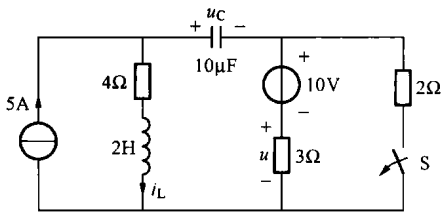
$$-2i_1(0_+) + 1 \times i_1(0_+) + 3 \times i(0_+) = 3$$

联立以上两式解得

$$i_1(0_+) = 4.5 \text{ A}$$

所以

$$i(0_+) = i_1(0_+) - 2 = 4.5 - 2 = 2.5 \text{ (A)}$$



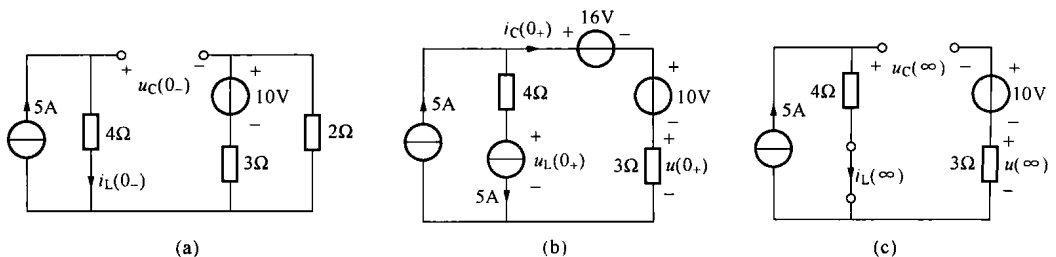
题 6-4 图

6-4 题 6-4 图所示电路在换路前已达稳态, $t=0$ 时开关 S 打开。试求: (1) 初始值 $i_L(0_+)$ 、 $u_C(0_+)$ 、 $u(0_+)$ 、 $\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0_+}$ 和 $\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+}$; (2) 稳态值 $i_L(\infty)$ 、 $u_C(\infty)$ 和 $u(\infty)$ 。

解 (1) 求初始值。

1) 求 $u_C(0_-)$ 和 $i_L(0_-)$ 。换路前电路处于直流稳态, 电容相当于开路, 电感相当于短路, 0_- 时刻电路如题 6-4 解图 (a) 所示。则

$$i_L(0_-) = 5 \text{ A}, \quad u_C(0_-) = 4 \times 5 - \frac{2}{3+2} \times 10 = 16 \text{ (V)}$$



题 6-4 解图

2) 求 $i_L(0_+)$ 和 $u_C(0_+)$ 。由换路定则得

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 16 \text{ V}, \quad i_L(0_+) = i_L(0_-) = 5 \text{ A}$$

3) 求 $u(0_+)$ 、 $\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0_+}$ 和 $\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+}$ 。将电容用电压为 $u_C(0_+)$ 的电压源替代, 电感用电流为 $i_L(0_+)$ 的电流源替代, 可得 0_+ 时刻电路如题 6-4 解图 (b) 所示。由 KCL 得

$$i_C(0_+) = 5 - 5 = 0$$

由 KVL 得

$$u_L(0_+) = -4 \times 5 + 16 + 10 = 6 \text{ (V)}$$

$$u(0_+) = 3i_C(0_+) = 0 \text{ (V)}$$

因为 $i_C = C \frac{du_C}{dt}$, $u_L = L \frac{di_L}{dt}$, 所以

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{i_C(0_+)}{C} = 0, \quad \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0_-} = \frac{u_L(0_-)}{L} = \frac{6}{2} = 3 \text{ (A/s)}$$

(2) 求稳态值。由于电路处于直流稳态，故电容相当于开路，电感相当于短路，稳态电路如题 6-4 解图 (c) 所示，则

$$i_L(\infty) = 5\text{A}, \quad u(\infty) = 0, \quad u_C(\infty) = 4i_L(\infty) - 10 = 20 - 10 = 10 \text{ (V)}$$

注：0₋时刻只求电容电压和电感电流。

经典分析法

6-5 电路如题 6-5 图所示， $t < 0$ 时电路处于稳态， $u_s(t) = \begin{cases} 6t \text{ V} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$ 。求 $t > 0$ 时

的电压 $u_C(t)$ 。

解 (1) 列写以 $u_C(t)$ 为输出的输入—输出方程。电路的节点电压方程为

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) u_C + C \frac{du_C}{dt} = \frac{1}{3} u_s$$

整理得以 $u_C(t)$ 为输出的输入—输出方程为

$$\frac{du_C}{dt} + 0.5u_C = 2t$$

且有

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = 0$$

(2) 求 $u_C(t)$ 。

1) 求齐次微分方程的通解 $u_{Ch}(t)$ 。 $u_{Ch}(t)$ 满足的齐次微分方程为

$$\frac{du_{Ch}}{dt} + 0.5u_{Ch} = 0$$

特征方程为

$$\lambda + 0.5 = 0$$

特征根为

$$\lambda = -0.5$$

则齐次微分方程的通解的形式为

$$u_{Ch}(t) = ke^{-0.5t}$$

2) 求非齐次微分方程的特解 $u_{Cp}(t)$ 。 $u_{Cp}(t)$ 满足的方程为

$$\frac{du_{Cp}}{dt} + 0.5u_{Cp} = 2t$$

令 $u_{Cp}(t) = At + B$ ，并将其代入上式可求得 $A = 4$ 、 $B = -8$ ，则

$$u_{Cp}(t) = 4t - 8$$

3) 求电压 $u_C(t)$ 。

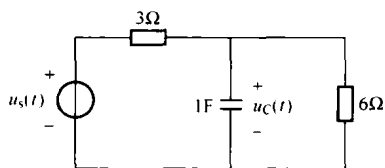
$$u_C(t) = u_{Ch}(t) + u_{Cp}(t) = ke^{-0.5t} + 4t - 8$$

由初始条件可求得待定系数 $k = 8$ ，所以

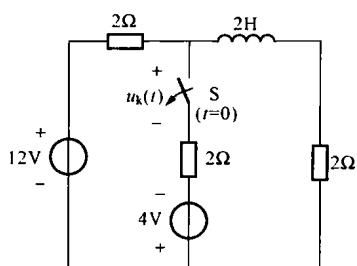
$$u_C(t) = 8e^{-0.5t} + 4t - 8 \text{ V} \quad (t > 0)$$

直流一阶电路的三要素法

6-6 题 6-6 图所示电路中开关 S 断开前处于稳态， $t = 0$ 时开关 S 断开，求 $t > 0$ 时开关两端电压 $u_k(t)$ 。



题 6-5 图



题 6-6 图

解 (1) 求 $u_k(0_+)$ 。

1) 求 $i_L(0_+)$ 。0₋时刻电路如题 6-6 解图 (a) 所示。此双节点电路的节点电压方程为

$$\frac{3}{2}u(0_-) = \frac{12}{2} - \frac{4}{2}$$

解之得

$$u(0_-) = \frac{8}{3} \text{ V}$$

所以

$$i_L(0_-) = \frac{u(0_-)}{2} = \frac{4}{3} \text{ (A)}$$

由换路定则得

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{4}{3} \text{ (A)}$$

2) 求 $u_k(0_+)$ 。0₊时刻电路如题 6-6 解图(b)所示。

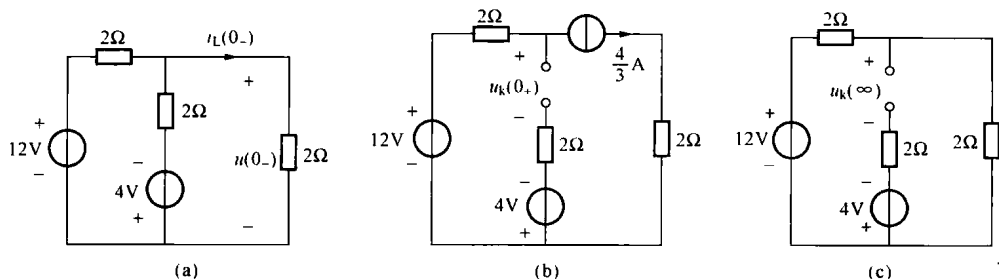
$$u_k(0_+) = -\frac{4}{3} \times 2 + 12 + 4 = \frac{40}{3} \text{ (V)}$$

(2) 求 $u_k(\infty)$ 。∞时刻电路如题 6-6 解图(c)所示。

$$u_k(\infty) = \frac{1}{2} \times 12 + 4 = 10 \text{ (V)}$$

(3) 求 τ 。因为 $R_0 = 2 + 2 = 4\Omega$ ，所以

$$\tau = \frac{L}{R_0} = 0.5 \text{ s}$$



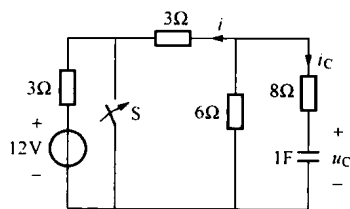
题 6-6 解图

(4) 求 $u_k(t)$ 。由三要素公式得

$$\begin{aligned} u_k(t) &= u_k(\infty) + [u_k(0_+) - u_k(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= 10 + \left(\frac{40}{3} - 10\right)e^{-2t} = 10 + \frac{10}{3}e^{-2t} \text{ (V)} \quad (t > 0) \end{aligned}$$

6-7 题 6-7 图所示电路中, 开关 S 原来是打开的, 电路处于稳态, 在 $t=0$ 时将开关 S 闭合, 求 $t>0$ 时的 $u_C(t)$ 、 $i_C(t)$ 及 $i(t)$ 。

解 (1) 求 $u_C(0_+)$ 、 $i_C(0_+)$ 和 $i(0_+)$ 。0₋时刻电路如



题 6-7 图

题 6-7 解图 (a) 所示。

$$u_C(0_-) = \frac{6}{3+3+6} \times 12 = 6 \text{ (V)}, \quad u_C(0_+) = u_C(0_-) = 6 \text{ V}$$

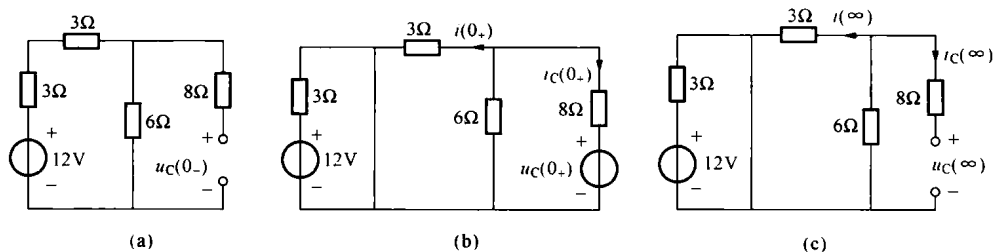
0_+ 时刻电路如题 6-7 解图 (b) 所示, 则

$$i_C(0_+) = -\frac{u_C(0_+)}{8+3//6} = -\frac{6}{8+2} = -0.6 \text{ (A)}$$

$$i(0_+) = -\frac{6}{3+6} \times i_C(0_+) = -\frac{6}{9} \times (-0.6) = 0.4 \text{ (A)}$$

(2) 求 $u_C(\infty)$ 、 $i_C(\infty)$ 和 $i(\infty)$ 。 ∞ 时刻电路如题 6-7 解图 (c) 所示。显然

$$u_C(\infty) = 0, \quad i_C(\infty) = 0, \quad i(\infty) = 0$$



题 6-7 解图

(3) 求 τ 。

$$R_0 = 8 + 3//6 = 10 \text{ (}\Omega\text{)}, \quad \tau = R_0 C = 10 \times 1 = 10 \text{ (s)}$$

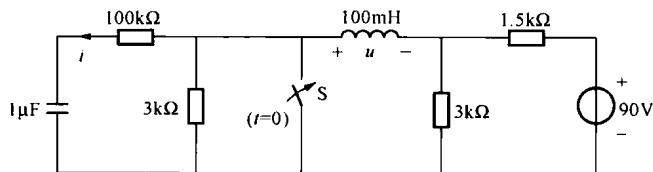
(4) 求响应。

$$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 6e^{-0.1t} \text{ V} \quad (t > 0)$$

$$i_C(t) = i_C(\infty) + [i_C(0_+) - i_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = -0.6e^{-0.1t} \text{ A} \quad (t > 0)$$

$$i(t) = i(\infty) + [i(0_+) - i(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 0.4e^{-0.1t} \text{ A} \quad (t > 0)$$

6-8 在题 6-8 图所示电路中, 已知 $t=0_-$ 时电路处于直流稳态, 求 $t>0$ 时的电流 $i(t)$ 和电压 $u(t)$ 。



题 6-8 图

解 (1) 求 $i(0_+)$ 和 $u(0_+)$ 。 0_- 时刻电路如题 6-8 解图 (a) 所示, 则有

$$u_C(0_-) = \frac{3//3}{1.5+3//3} \times 90 = 45 \text{ (V)}, \quad i_L(0_-) = -\frac{u_C(0_-)}{3 \times 10^3} = -\frac{45}{3 \times 10^3} = -15 \text{ (mA)}$$

由换路定则得

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 45 \text{ (V)}, \quad i_L(0_+) = i_L(0_-) = -15 \text{ (mA)}$$

0_+ 时刻电路如题 6-8 解图 (b) 所示, 则有

$$i(0_+) = -\frac{u_C(0_+)}{100 \times 10^3} = -\frac{45}{100 \times 10^3} = -0.45 \text{ (mA)}$$

$$i_1(0_+) = \frac{1.5}{3+1.5} \times i_L(0_+) + \frac{90}{(3+1.5) \times 10^3} = \frac{1}{3} \times (-15) + 20 = 15 \text{ (mA)}$$

所以

$$u(0_+) = -i_1(0_+) \times 3 \times 10^3 = -15 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^3 = -45 \text{ (V)}$$

(2) 求 $u(\infty)$ 和 $i(\infty)$ 。 ∞ 时刻电路如题 6-8 解图 (c) 所示。显然, $u(\infty)=0$, $i(\infty)=0$ 。

(3) 求 τ_C 和 τ_L 。因为 $R_{01}=100\text{k}\Omega$, 所以

$$\tau_C = R_{01}C = 100 \times 10^3 \times 10^{-6} = 0.1 \text{ (s)}$$

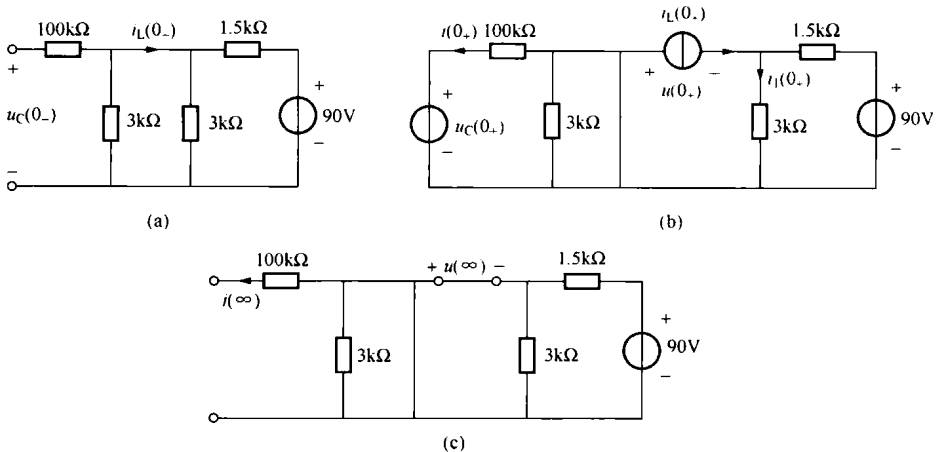
又因为 $R_{02} = (3//1.5) \times 10^3 = 1 \text{ (k}\Omega)$, 所以

$$\tau_L = \frac{L}{R_{02}} = \frac{100 \times 10^{-3}}{10^3} = 10^{-4} \text{ (s)}$$

(4) 求响应。由三要素公式得

$$u(t) = u(\infty) + [u(0_+) - u(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau_C}} = -45e^{-10^4 t} \text{ V} \quad (t > 0)$$

$$i(t) = i(\infty) + [i(0_+) - i(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau_L}} = -0.45e^{-10^4 t} \text{ mA} \quad (t > 0)$$



题 6-8 解图

6-9 题 6-9 图所示电路中, 已知 $i(0_-) = 0$, 求 $t > 0$ 时的电流 $i(t)$ 。

解 (1) 求 $i(0_+)$ 。因为 $i(0_-) = 0$, 所以

$$i(0_+) = i(0_-) = 0$$

(2) 求 $i(\infty)$ 。 ∞ 时刻电路如题 6-9 解图 (a) 所示。由 KVL 得

$$4i_1 + 10i_1 = 0 \Rightarrow i_1 = 0$$

所以

$$i(\infty) = 4 - i_1 = 4 \text{ (A)}$$

(3) 求 τ 。求 R_0 的电路如题 6-9 解图 (b) 所示。由 KVL 得

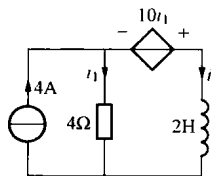
$$u = 10i_1 + 4i_1 = 14i_1 = 14i$$

则

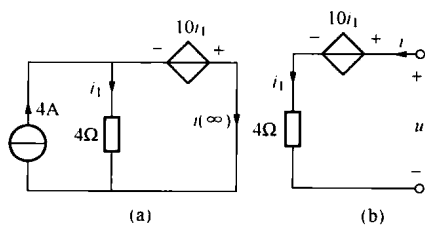
$$R_0 = \frac{u}{i} = 14\Omega, \quad \tau = \frac{L}{R_0} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} \text{ (s)}$$

所以

$$i(t) = i(\infty) + [i(0_+) - i(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 4(1 - e^{-7t}) \text{ A} \quad (t \geq 0)$$



题 6-9 图



题 6-9 解图

6-10 见 [例 6-2]。

6-11 电路如题 6-11 图所示, 开关动作前电路处于稳态, $t=0$ 时开关 S 闭合。求 $t>0$ 时的电流 $i(t)$ 。

解 所用电量的参考方向如题 6-11 解图 (a) 所示。由 KCL 得

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

当 $t>0$ 时, 电路可分成两个独立的一阶电路, 分别如题 6-11 解图 (b)、(c) 所示。

(1) 求 $i_1(0_-)$ 和 $i_2(0_+)$ 。

1) 求 $u_c(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$ 。0₋时刻电路如题 6-11 解图 (d) 所示, 则有

$$i_L(0_-) = \frac{30}{10+10+10} = 1 \text{ (A)}, \quad u_c(0_-) = (10+10) \times i_L(0_-) = 20 \times 1 = 20 \text{ (V)}$$

因此

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1 \text{ A}, \quad u_c(0_+) = u_c(0_-) = 20 \text{ V}$$

2) 求 $i_1(0_+)$ 和 $i_2(0_+)$ 。0₊时刻电路分别如题 6-11 解图 (e) 和 (f) 所示。由这两图分别得

$$i_1(0_+) = \frac{20}{10} = 2 \text{ (A)}, \quad i_2(0_+) = -0.5 \text{ A}$$

(2) 求 $i_1(\infty)$ 和 $i_2(\infty)$ 。∞时刻电路分别如题 6-11 解图 (g) 和 (h) 所示。由这两图分别得

$$i_1(\infty) = \frac{30}{10+10} = 1.5 \text{ (A)}, \quad i_2(\infty) = 0$$

(3) 求 τ_c 和 τ_L 。

$$\tau_c = R_1 C = (10 // 10) \times 0.5 = 2.5 \text{ (s)}, \quad \tau_L = \frac{L}{R_2} = \frac{1}{10 // 10} = 0.2 \text{ (s)}$$

(4) 求 $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$ 和 $i(t)$ 。由三要素公式得

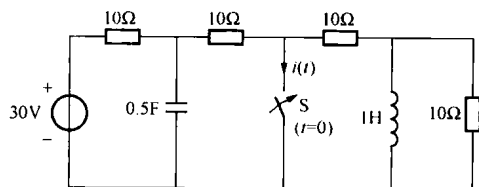
$$i_1(t) = i_1(\infty) + [i_1(0_+) - i_1(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau_c}} = 1.5 + (2 - 1.5)e^{-0.4t} = 1.5 + 0.5e^{-0.4t} \text{ (A)} \quad (t > 0)$$

$$i_2(t) = i_2(\infty) + [i_2(0_+) - i_2(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau_L}} = 0 + (-0.5 - 0)e^{-5t} = -0.5e^{-5t} \text{ (A)} \quad (t > 0)$$

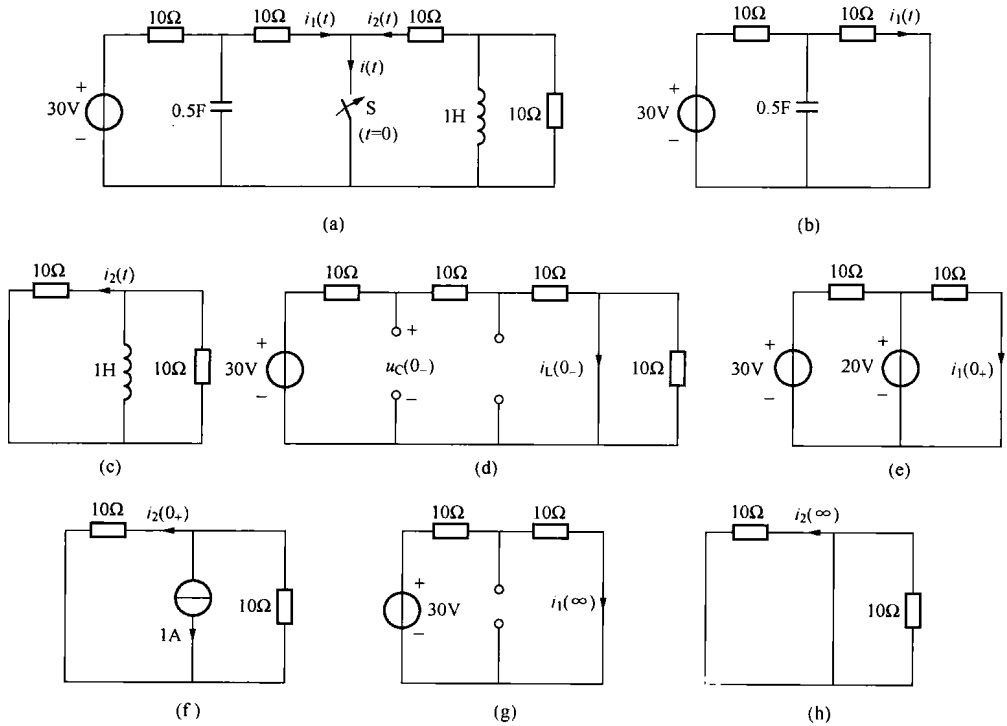
$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = 1.5 + 0.5e^{-0.4t} - 0.5e^{-5t} \text{ (A)} \quad (t > 0)$$

6-12 题 6-12 图所示电路中的开关 S 在 $t=0$ 时闭合, S 闭合前电路处于稳态。试求:

(1) $t>0$ 时的电流 $i(t)$; (2) $i(t)$ 中无暂态分量的条件。



题 6-11 图

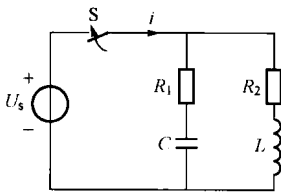


题 6-11 解图

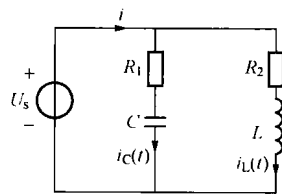
解 (1) $t > 0$ 时的电路如题 6-12 解图所示。由 KCL 得

$$i(t) = i_C(t) + i_L(t)$$

当 $t > 0$ 时, 电路可分成 RL 和 RC 两个独立的一阶电路。



题 6-12 图



题 6-12 解图

1) 求 $i_C(t)$ 。

$$i_C(0_+) = \frac{U_s}{R_1}, i_C(\infty) = 0, \tau_C = R_1 C$$

所以

$$i_C(t) = i_C(\infty) + [i_C(0_+) - i_C(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau_C}} = \frac{U_s}{R_1} e^{-\frac{t}{R_1 C}} \quad (t > 0)$$

2) 求 $i_L(t)$ 。

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0, i_L(\infty) = \frac{U_s}{R_2}, \tau_L = \frac{L}{R_2}$$

所以

$$i_L(t) = i_L(\infty) + [i_L(0_+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau_L}} = \frac{U_s}{R_2} - \frac{U_s}{R_2}e^{-\frac{R_2 t}{L}} \quad (t > 0)$$

因此

$$i(t) = i_C(t) + i_L(t) = \frac{U_s}{R_1}e^{-\frac{t}{R_1 C}} + \frac{U_s}{R_2} - \frac{U_s}{R_2}e^{-\frac{R_2 t}{L}} = \frac{U_s}{R_2} + \frac{U_s}{R_1}e^{-\frac{t}{R_1 C}} - \frac{U_s}{R_2}e^{-\frac{R_2 t}{L}} \quad (t > 0)$$

(2) 因为

$$i(t) = \frac{U_s}{R_2} + \frac{U_s}{R_1}e^{-\frac{t}{R_1 C}} - \frac{U_s}{R_2}e^{-\frac{R_2 t}{L}} \quad (t > 0)$$

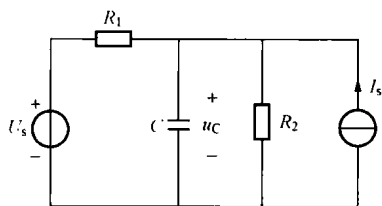
要使 $i(t)$ 中无暂态分量, 必有

$$\frac{U_s}{R_1}e^{-\frac{t}{R_1 C}} - \frac{U_s}{R_2}e^{-\frac{R_2 t}{L}} = 0$$

由此可得

$$R_1 = R_2 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

6-13 在题 6-13 图所示电路中, 初始状态保持不变, 电源在 $t=0$ 时作用于电路。已知当 $U_s=1\text{V}$, $I_s=0$ 时, $u_C(t)=2e^{-2t}+0.5\text{V}$ ($t \geq 0$); 当 $I_s=1\text{A}$, $U_s=0$ 时, $u_C(t)=0.5e^{-2t}+2\text{V}$ ($t \geq 0$)。试求: (1) R_1 、 R_2 和 C ; (2) $U_s=1\text{V}$, $I_s=1\text{A}$ 时电路的响应。



题 6-13 图

解 (1) 求 R_1 、 R_2 和 C 。因为当 $U_s=1\text{V}$, $I_s=0$ 时

$$u_C(t) = 2e^{-2t} + 0.5\text{V} \quad (t \geq 0)$$

所以

$$u_C(\infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}U_s = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times 1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \lim_{t \rightarrow \infty} u_C(t) = 0.5$$

即

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0.5 \quad (1)$$

又因为当 $I_s=1\text{A}$, $U_s=0$ 时

$$u_C(t) = 0.5e^{-2t} + 2\text{V} \quad (t \geq 0)$$

所以

$$u_C(\infty) = (R_1 // R_2)I_s = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \times 1 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \lim_{t \rightarrow \infty} u_C(t) = 2$$

即

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 2 \quad (2)$$

联立式 (1) 和式 (2) 解得

$$R_1 = R_2 = 4\Omega$$

因为 $\tau = R_0 C = (R_1 // R_2)C = (4 // 4)C = 0.5$, 所以

$$C = 0.25\text{F}$$

(2) 因为

$$u_C(0_+) = \lim_{t \rightarrow 0_+} u_C(t) = \lim_{t \rightarrow 0_+} (2e^{-2t} + 0.5) = 2.5 \text{ (V)},$$

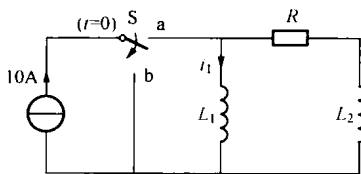
$$u_C(\infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_s + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I_s = \frac{1}{2} \times 1 + 2 \times 1 = 2.5 \text{ (V)}$$

$$\tau = R_0 C = (R_1 // R_2) C = (4 // 4) C = 0.5$$

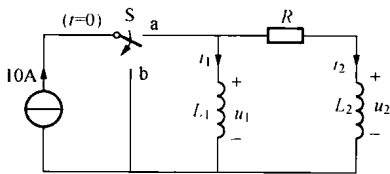
所以

$$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} = 2.5 + (2.5 - 2.5) e^{-2t} = 2.5 \text{ (V)}$$

* 6-14 电路如题 6-14 图所示。已知 $R=10\Omega$, $L_1=0.4\text{H}$, $L_2=0.6\text{H}$ 。求 $t>0$ 时的响应 $i_1(t)$ 。



题 6-14 图



题 6-14 解图

解 该电路为一阶电路，用三要素法求解。所用电压的参考方向如题 6-14 解图所示。

(1) 计算初始值。

$$i_1(0_-) = 10\text{A}, i_2(0_-) = 0$$

在 $t=0$ 时，两个电感电流发生跃变了，故用磁链守恒定律计算初始状态。对 R 、 L_1 和 L_2 构成的回路，应用 KVL 得

$$L_1 \frac{di_1}{dt} = Ri_2 + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

上式两边从 0_- 到 0_+ 对时间 t 取积分并整理得

$$L_1 i_1(0_+) - L_2 i_2(0_+) = L_1 i_1(0_-) - L_2 i_2(0_-) \quad (\text{磁链守恒定律})$$

$t=0_+$ 时，由 KCL 得

$$i_1(0_+) + i_2(0_+) = 0$$

将已知数据代入以上两式，联立解得

$$i_1(0_+) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} i_1(0_-) = 4\text{A}$$

(2) 稳态值

$$i_1(\infty) = 0$$

(3) 时间常数

$$\tau = \frac{L_1 + L_2}{R} = \frac{1}{10}\text{s}$$

因此

$$i_1(t) = i_1(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}} = 4e^{-10t} \text{ A} \quad (t > 0)$$

注：由于在 $t=0$ 时，电感电流发生跃变，因此， u_1 中含有冲激电压分量。若计算 u_1 ，须将 i_1 写成全时域表达式，即

$$i_1(t) = 4e^{-10t} \epsilon(t) + i_1(0_-) \epsilon(-t) \text{ A}$$

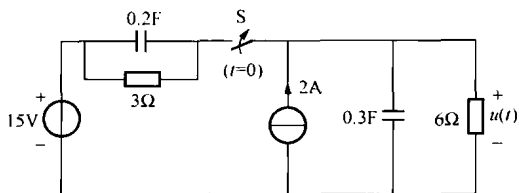
则

$$u_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} = -16e^{-10t} \epsilon(t) - 2.4\delta(t) \text{ V}$$

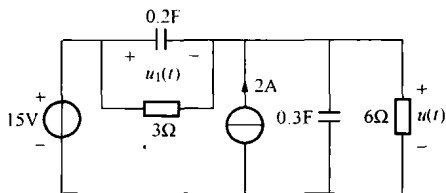
又由 KVL 知, u_2 中也含有冲激电压, 并且与 u_1 中的冲激电压相平衡。 u_2 计算如下

$$i_2(t) = -4e^{-10t}\epsilon(t) \text{ A}, \quad u_2(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} = 24e^{-10t}\epsilon(t) - 2.4\delta(t) \text{ V}$$

*** 6-15** 电路如题 6-15 图所示。 $t < 0$ 时电路处于稳态, $t = 0$ 时开关 S 闭合。求 S 闭合后的电压 $u(t)$ 。



题 6-15 图



题 6-15 解图

解 所用电压的参考方向如题 6-15 解图所示。

(1) 计算初始值。 $t = 0_-$ 时, 由原电路图可知, $u_1(0_-) = 0$, $u(0_-) = 2 \times 6 = 12$ (V)。开关闭合后, 电路如题 6-15 解图所示, 电容和电压源形成了纯电容回路。 $t = 0$ 时该回路中有冲激电流流过, 两个电容的电压均发生跃变。

用电荷守恒定律计算初始状态。对题 6-15 解图中含电容的节点, 应用 KCL 得

$$0.2 \frac{du_1}{dt} + \frac{u_1}{3} + 2 = \frac{u}{6} + 0.3 \frac{du}{dt}$$

上式两边从 0_- 到 0_+ 对时间 t 取积分并整理得

$$-0.2u_1(0_+) + 0.3u(0_+) = 0.3u(0_-) \quad (\text{电荷守恒定律})$$

$t = 0_+$ 时, 由 KVL 得

$$u_1(0_+) + u(0_+) = 15$$

联立以上两式解得

$$u_1(0_+) = \frac{3}{5} \times [15 - u(0_+)] = 1.8 \text{ (V)}, \quad u(0_+) = 15 - u_1(0_+) = 13.2 \text{ (V)}$$

(2) 计算稳态值和时间常数。由题 6-15 解图有

$$u(\infty) = \frac{6}{3+6} \times 15 + (3//6) \times 2 = 14 \text{ (V)}, \quad \tau = RC = (3//6) \times (0.2+0.3) = 1 \text{ (s)}$$

(3) 求响应 $u(t)$ 。由三要素公式得

$$u(t) = u(\infty) + [u(0_+) - u(\infty)]e^{-t/\tau} = 14 - 0.8e^{-t} \text{ V} \quad (t > 0)$$

注: 由于在 $t = 0$ 时, 电容电压发生跃变, 因此, 电容电流 i 中含有冲激电流分量。若计算 i , 须将 u 写成全时域表达式, 即

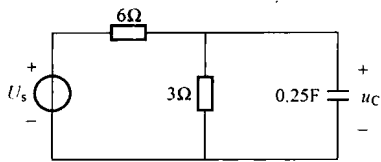
$$u(t) = (14 - 0.8e^{-t})\epsilon(t) + u(0_-)\epsilon(-t) \text{ V}$$

则

$$i(t) = 0.3 \frac{du}{dt} = 0.24e^{-t}\epsilon(t) + 0.36\delta(t) \text{ A}$$

零输入响应和零状态响应 (含单位阶跃响应与冲激响应)

6-16 电路如题 6-16 图所示。(1) 若 $U_s = 18\text{V}$, $u_c(0_-) = -6\text{V}$ 。求零输入响应 $u_{Czi}(t)$ 、



题 6-16 图

零状态响应 $u_{Czs}(t)$ 和全响应 $u_c(t)$; (2) 若 $U_s = 36V$, $u_c(0_-) = -3V$, 求全响应 $u_c(t)$ 。

解 (1) 1) 求零输入响应 $u_{Czi}(t)$ 。

$$u_c(0_+) = u_c(0_-) = -6V, u_c(\infty) = 0$$

$$\tau = R_0 C = (3//6) \times \frac{1}{4} = 0.5 \text{ (s)}$$

所以

$$u_{Czi}(t) = u_c(\infty) + [u_c(0_+) - u_c(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = -6e^{-2t} \text{ V } (t \geq 0)$$

2) 求零状态响应 $u_{Czs}(t)$ 。

$$u_c(0_+) = u_c(0_-) = 0, u_c(\infty) = \frac{3}{3+6} \times U_s = \frac{1}{3} \times 18 = 6 \text{ (V)}$$

$$\tau = R_0 C = (3//6) \times \frac{1}{4} = 0.5 \text{ (s)}$$

所以

$$u_{Czs}(t) = u_c(\infty) + [u_c(0_+) - u_c(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 6 - 6e^{-2t} \text{ V } (t \geq 0)$$

3) 求全响应 $u_c(t)$ 。

$$u_c(t) = u_{Czi}(t) + u_{Czs}(t) = 6 - 12e^{-2t} \text{ V } (t \geq 0)$$

(2) 由叠加定理、零输入线性和零状态线性得 $U_s = 36V$, $u_c(0_-) = -3V$ 时的全响应为

$$u_c(t) = 0.5u_{Czi}(t) + 2u_{Czs}(t) = -3e^{-2t} + 12 - 12e^{-2t} = 12 - 15e^{-2t} \text{ (V)} (t \geq 0)$$

6-17 电路如题 6-17 图所示, N0 为不含独立电源的电阻性网络。

(1) 已知当 $u_s(t) = 10\epsilon(t)$ V 作用时, 响应 $u(t) = 10 + 4e^{-t}$ V ($t > 0$), 当 $u_s(t) = 5\epsilon(t)$ V 作用时, 响应 $u(t) = 5 + 6e^{-t}$ V ($t > 0$)。求零输入响应。

(2) 已知 $u_s(t) = 10\epsilon(t)$ V, 当 $u_c(0_-) = 20V$ 时, 响应 $u(t) = 10 + 4e^{-t}$ V ($t > 0$); 当 $u_c(0_-) = 30V$ 时, 响应 $u(t) = 10 + 8e^{-t}$ V ($t > 0$)。求零状态响应。

解 (1) 设零输入响应为 $u_{zi}(t)$ 、输入 $u_s(t) = 10\epsilon(t)$ V 时的零状态响应为 $u_{zs}(t)$ 。根据题意, 由叠加定理和零状态线性得

$$\begin{cases} u_{zi}(t) + u_{zs}(t) = 10 + 4e^{-t} \\ u_{zi}(t) + 0.5u_{zs}(t) = 5 + 6e^{-t} \end{cases}$$

解之得零输入响应为

$$u_{zi}(t) = 8e^{-t} \text{ V } (t > 0)$$

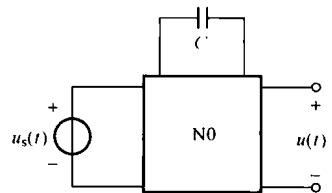
(2) 设零状态响应为 $u_{zs}(t)$, $u_c(0_-) = 20V$ 时的零输入响应为 $u_{zi}(t)$ 。根据题意, 由叠加定理和零输入线性得

$$\begin{cases} u_{zi}(t) + u_{zs}(t) = 10 + 4e^{-t} \\ 1.5u_{zi}(t) + u_{zs}(t) = 10 + 8e^{-t} \end{cases}$$

解之得零状态响应为

$$u_{zs}(t) = (10 - 4e^{-t})\epsilon(t) \text{ V}$$

6-18 题 6-18 图所示电路中, N 内部只含电源和电阻, $C = 2F$, 电路的零状态响应为



题 6-17 图

$$u_0(t) = 0.5 + 0.5e^{-0.25t} \text{ V} \quad (t \geq 0)$$

若把电路中的电容换以 2H 电感, 则输出端的零状态响应 $u_0(t)$ 将如何改变?

解 电路接 2F 电容时, 有

$$u_0(0_+) |_{2F} = u_0(0_+) = \lim_{t \rightarrow 0_-} u_0(t) = 1 \text{ V}$$

$$u_0(\infty) |_{2F} = u_0(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} u_0(t) = 0.5 \text{ V}$$

$$\tau_C = R_0 C = R_0 \times 2 = 4 \text{ (s)}$$

所以

$$R_0 = 2 \Omega$$

若把电路中的 2F 电容换以 2H 电感, 根据电感和电容在 $t=0_+$ 和 $t=\infty$ 时的特点可得

$$u_0(0_+) |_{2H} = u_0(\infty) |_{2F} = 0.5 \text{ V}, \quad u_0(\infty) |_{2H} = u_0(0_+) |_{2F} = 1 \text{ V}, \quad \tau_L = \frac{L}{R_0} = \frac{2}{2} = 1 \text{ (s)}$$

所以, 电路中的 2F 电容换以 2H 电感, 输出端的零状态响应 $u_0(t)$ 为

$$u_0(t) = u_0(\infty) |_{2H} + [u_0(0_+) |_{2H} - u_0(\infty) |_{2H}] e^{-\frac{t}{\tau_L}} = 1 + (0.5 - 1)e^{-t} = 1 - 0.5e^{-t} \text{ V} \quad (t > 0)$$

注: 本题利用了电感和电容的对偶性: 在直流稳态电路中, 电容相当于开路, 电感相当于短路; 零状态下, 在 $t=0_+$ 时刻, 电感相当于开路, 电容相当于短路。

6-19 题 6-19 图所示电路中, 已知 $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $C = 2 \text{ F}$, $g_m = 1.5 \text{ S}$ 。试求该电路的单位阶跃响应 $u_C(t)$ 。

解 (1) 求 $u_C(0_+)$ 。因为 $u_C(0_-) = 0$, 所以

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$$

(2) 求 $u_C(\infty)$ 。 ∞ 时刻电路如题 6-19 解图 (a) 所示, 则有

$$u_1(\infty) = 1 - 1.5u_1(\infty)$$

解之得

$$u_1(\infty) = 0.4 \text{ V}$$

所以

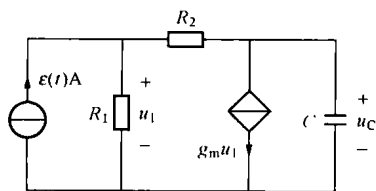
$$u_C(\infty) = -1.5u_1(\infty) \times 2 + u_1(\infty) = -2u_1(\infty) = -0.8 \text{ (V)}$$

(3) 求 τ 。求 R_0 的电路如题 6-19 解图 (b) 所示, 则有

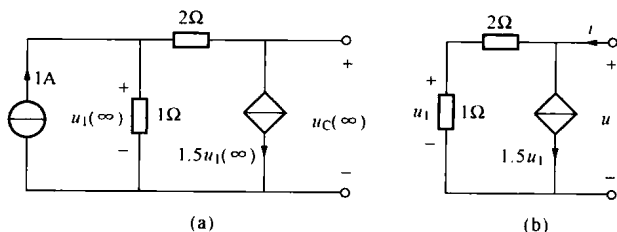
$$i = u_1 + 1.5u_1 = 2.5u_1, \quad u = u_1 + 2u_1 = 3u_1$$

所以

$$R_0 = \frac{u}{i} = \frac{3u_1}{2.5u_1} = 1.2 \text{ (}\Omega\text{)}, \quad \tau = R_0 C = 1.2 \times 2 = 2.4 \text{ (s)}$$



题 6-19 图



题 6-19 解图

(4) 求 $u_C(t)$ 。由三要素公式得

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = -0.8 + [0 - (-0.8)]e^{-\frac{t}{2.4}} \\ &= (-0.8 + 0.8e^{-\frac{3}{12}t})\epsilon(t) \text{ (V)} \end{aligned}$$

6-20 题 6-20 图所示电路中, 已知 $R_1=3\Omega$, $R_2=1.2\Omega$, $R_3=6\Omega$, $i_s(t)=8\epsilon(t)$ A, $u_{s1}=12\text{V}$, $u_{s2}(t)=24\epsilon(-t)$ V, $L=0.1\text{H}$ 。求 $t>0$ 时的电流 $i_2(t)$ 。

解 (1) 求 $i_2(0_+)$ 。

1) 求 $i_L(0_+)$ 。0- 时刻电路如题 6-20 解图 (a) 所示, 则有

$$\begin{aligned} i_L(0_-) &= \frac{24}{R_2 + R_1 // R_3} \times \frac{R_3}{R_1 + R_3} - \frac{12}{R_1 + R_2 // R_3} \\ &= \frac{24}{1.2 + 3 // 6} \times \frac{6}{3 + 6} - \frac{12}{3 + 1.2 // 6} \\ &= 5 - 3 = 2 \text{ (A)} \end{aligned}$$

所以

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 2 \text{ A}$$

2) 求 $i_2(0_+)$ 。0+ 时刻电路如题 6-20 解图 (b) 所示, 则有

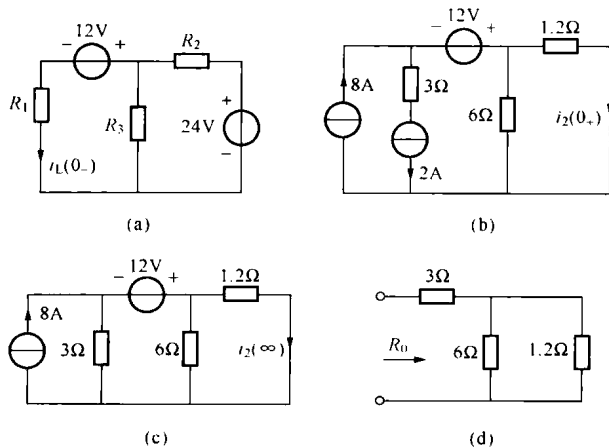
$$i_2(0_+) = \frac{6}{6 + 1.2} \times (8 - 2) = 5 \text{ (A)}$$

(2) 求 $i_2(\infty)$ 。∞时刻电路如题 6-20 解图 (c) 所示, 则有

$$i_2(\infty) = \frac{3 // 6}{3 // 6 + 1.2} \times 8 + \frac{12}{3 + 6 // 1.2} \times \frac{6}{6 + 1.2} = 5 + 2.5 = 7.5 \text{ (A)}$$

(3) 求 τ 。求 R_0 的电路如题 6-20 解图 (d) 所示, 则有

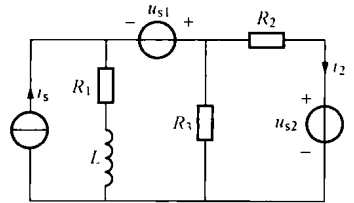
$$R_0 = 3 + 6 // 1.2 = 4 \text{ (}\Omega\text{)}, \tau = \frac{L}{R_0} = \frac{0.1}{4} = \frac{1}{40} \text{ (s)}$$



题 6-20 解图

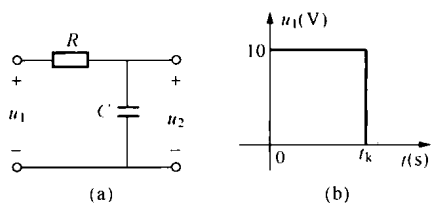
(4) 求 $i_2(t)$ 。由三要素公式得

$$i_2(t) = i_2(\infty) + [i_2(0_+) - i_2(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 7.5 + (5 - 7.5)e^{-40t} = 7.5 - 2.5e^{-40t} \text{ (A)} \quad (t > 0)$$



题 6-20 图

6-21 在题6-21图所示电路中,已知 $R=100\Omega$, $C=0.01\text{F}$, $u_2(0_-)=0$, $t_k=1\text{s}$ 。试用两种方法求电压 $u_2(t)$ 。



题6-21图

解 方法1: (1) $0 \leq t < t_k$ 时, 因为 $u_2(0_-)=0$,

所以

$$u_2(0_+) = u_2(0_-) = 0, \quad u_2(\infty) = 10\text{V}$$

$$\tau = RC = 100 \times 0.01 = 1 \text{ (s)}$$

所以

$$\begin{aligned} u_2(t) &= u_2(\infty) + [u_2(0_+) - u_2(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= 10 - 10e^{-t} \text{ V} \end{aligned}$$

(2) $t \geq 1\text{s}$ 时

$$u_2(1_-) = 10 - 10e^{-1} = 6.32 \text{ (V)}$$

$$u_2(\infty) = 0, \quad \tau = RC = 1\text{s}$$

所以

$$u_2(t) = u_2(\infty) + [u_2(1_+) - u_2(\infty)]e^{-\frac{t-1}{\tau}} = 6.32e^{-(t-1)} = 17.18e^{-t} \text{ V}$$

方法2: 由题6-21图(b)得

$$u_1(t) = 10\epsilon(t) - 10\epsilon(t-1) \text{ V}$$

(1) 首先求 $u_1'(t) = \epsilon(t)\text{V}$ 作用时产生的单位阶跃响应 $s(t)$ 。

$$s(0_+) = 0, \quad s(\infty) = 1\text{V}, \quad \tau = RC = 100 \times 0.01 = 1 \text{ (s)}$$

则单位阶跃响应 $s(t)$ 为

$$s(t) = s(\infty) + [s(0_+) - s(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = (1 - e^{-t})\epsilon(t) \text{ V}$$

(2) 求 $u_1(t)$ 作用时产生的零状态响应 $u_2(t)$ 。由线性时不变电路的线性特性和时不变特性得

$$u_2(t) = 10s(t) - 10s(t-t_k) = 10(1 - e^{-t})\epsilon(t) - 10[1 - e^{-(t-1)}]\epsilon(t-1) \text{ V}$$

注: 求分段常数信号作用下的零状态响应, 可以采用以下三步: ① 把分段常数信号用阶跃函数表示; ② 求单位阶跃响应; ③ 利用零状态响应的线性特性和时不变特性, 推导出分段常数信号作用下的零状态响应。

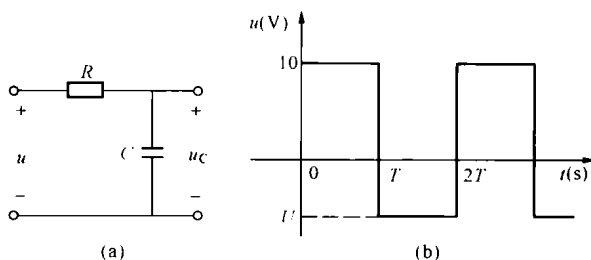
6-22 把正、负脉冲电压加在 RC 串联电路上, 如题6-22图所示(电路原为零状态), 脉冲宽度 $T=RC$ 。设正脉冲的幅度为 10V , 求负脉冲的幅度 U 为多大时才能使在负脉冲结束时 ($t=2T$) 的电容电压回到零状态。

解 (1) $0 \leq t < T$ 时, 因为 $u_c(0_-) = 0$, 所以

$$u_c(0_+) = u_c(0_-) = 0, \quad u_c(\infty) = 10\text{V}, \quad \tau = RC = T$$

因此

$$u_c(t) = u_c(\infty) + [u_c(0_+) - u_c(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 10 - 10e^{-\frac{t}{T}} \text{ V}$$



题6-22图

则

$$u_C(t)|_{t=T} = (10 - 10e^{-\frac{t}{\tau}})|_{t=T} = 10 - 10e^{-1} = 6.32 \text{ (V)}$$

(2) $T \leq t < 2T$ 时

$$u_C(T) = 6.32 \text{ V}, u_C(\infty) = U, \tau = RC = T$$

所以

$$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(T) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t-T}{\tau}} = U + (6.32 - U)e^{-\frac{t-T}{T}}$$

则

$$u_C(t)|_{t=2T} = U + (6.32 - U)e^{-\frac{2T-T}{T}} = 0$$

所以

$$U + (6.32 - U)e^{-1} = 0$$

因此

$$U = -3.68 \text{ V}$$

6-23 求题 6-23 图所示含理想运算放大器电路的零状态响应 $i_0(t)$ 。

解 方法 1: (1) 求电容电压 $u_C(t)$ 。 $u_C(t)$ 的参考方向如题 6-23 解图 (a) 所示。

1) 求 $u_C(0_+)$ 。因为 $u_C(0_-) = 0$, 所以

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$$

2) 求 $u_C(\infty)$ 。 $t = \infty$ 时的电路如题 6-23 解图 (b) 所示。由理想运放的虚短特性得

$$i_1(\infty) = \frac{1}{1} = 1 \text{ (A)}$$

由理想运放的虚断特性得

$$i_2(\infty) = i_1(\infty) = 1 \text{ A}$$

所以

$$u_C(\infty) = i_2(\infty) \times 30 = 30 \text{ (V)}$$

3) 求时间常数 τ 。求 R_0 的电路如题 6-23 解图 (c) 所示。由理想运放的虚短特性得

$$i_1 = 0$$

由理想运放的虚断特性得

$$i_2 = i_1 = 0$$

所以

$$R_0 = 30 + 70 = 100 \text{ (\Omega)}$$

则

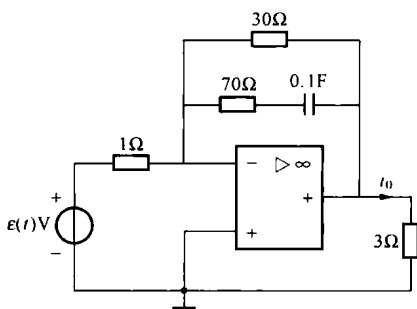
$$\tau = R_0 C = 100 \times 0.1 = 10 \text{ (s)}$$

因此

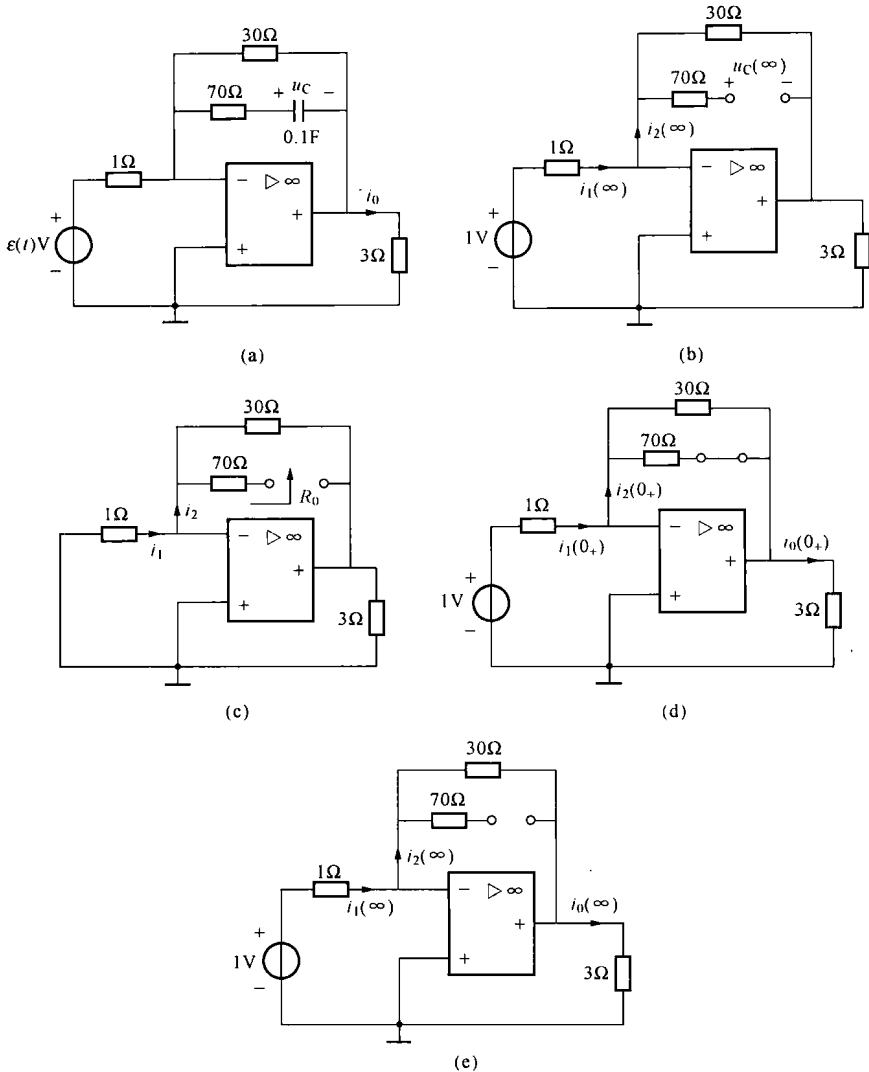
$$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 30(1 - e^{-0.1t})\epsilon(t) \text{ V}$$

(2) 求电流 $i_0(t)$ 。由题 6-23 解图 (a) 可求得

$$\begin{aligned} i_0(t) &= -\frac{70 \times 0.1 \frac{du_C}{dt} + u_C}{3} = -\frac{70 \times 0.1 \left[\frac{d}{dt} 30(1 - e^{-0.1t}) \right] + 30(1 - e^{-0.1t})}{3} \\ &= -\frac{21e^{-0.1t} + 30 - 30e^{-0.1t}}{3} = (-10 + 3e^{-0.1t})\epsilon(t) \text{ A} \end{aligned}$$



题 6-23 图



题 6-23 解图

方法 2: (1) 求 $i_0(0_+)$ 。因为 $u_C(0_-) = 0$, 所以 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$ 。 0_+ 时刻电路如题 6-23 解图 (d) 所示。由理想运放的虚短特性得

$$i_1(0_+) = \frac{1}{1} = 1 \text{ (A)}$$

由理想运放的虚断特性得

$$i_2(0_+) = i_1(0_+) = 1 \text{ A}$$

则

$$i_0(0_+) = -\frac{30//70}{3} i_2(0_+) = -7 \text{ (A)}$$

(2) 求 $i_0(\infty)$ 。 ∞ 时刻电路如题 6-23 解图 (e) 所示。由理想运放的虚短特性得

$$i_1(\infty) = \frac{1}{1} = 1 \text{ (A)}$$

由理想运放的虚断特性得

$$i_2(\infty) = i_1(\infty) = 1 \text{ A}$$

则

$$i_0(\infty) = -\frac{30}{3}i_2(\infty) = -10 \text{ (A)}$$

(3) 求时间常数 τ 。同 [方法 1]。

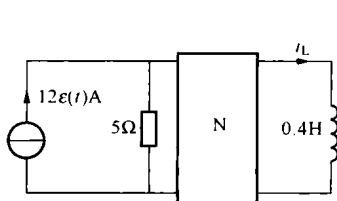
(4) 求 $i_0(t)$ 。由三要素公式得

$$i_0(t) = i_0(\infty) + [i_0(0_+) - i_0(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = (-10 + 3e^{-0.1t})\epsilon(t) \text{ A}$$

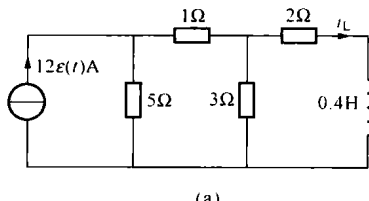
6-24 题 6-24 图所示电路中, 已知电阻网络 N 的电阻参数矩阵为

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \Omega$$

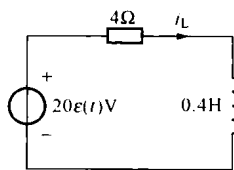
求电路的零状态响应 $i_L(t)$ 。



题 6-24 图



(a)



(b)

题 6-24 解图

解 方法 1: 由网络 N 的电阻参数可画出等效电路如题 6-24 解图 (a) 所示。应用戴维南定理可将图 (a) 电路等效为题 6-24 解图 (b)。所以

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0, i_L(\infty) = \frac{20}{4} = 5 \text{ (A)}, \tau = \frac{L}{R} = \frac{0.4}{4} = 0.1 \text{ (s)}$$

因此

$$i_L(t) = i_L(\infty) + [i_L(0_+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 5(1 - e^{-10t})\epsilon(t) \text{ A}$$

方法 2: 双口网络方程为

$$\begin{cases} u_1 = 4i_1 + 3i_2 \\ u_2 = 3i_1 + 5i_2 \end{cases}$$

输入口的方程为

$$u_1 = 5 \times [12\epsilon(t) - i_1] = 60\epsilon(t) - 5i_1$$

消去上式中的 u_1 和 i_1 可得

$$u_2 = 4i_2 + 20\epsilon(t)$$

由此可得原电路的等效电路如题 6-24 解图 (b) 所示。所以

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0, i_L(\infty) = \frac{20}{4} = 5 \text{ (A)}, \tau = \frac{L}{R} = \frac{0.4}{4} = 0.1 \text{ (s)}$$

因此

$$i_L(t) = i_L(\infty) + [i_L(0_+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 5(1 - e^{-10t})\epsilon(t) \text{ A}$$

6-25 题6-25图所示电路中,电容电压 $u_C(t)$ 和电阻电压 $u_R(t)$ 的单位阶跃响应分别为 $u_C(t) = (1 - e^{-t})\epsilon(t)$ V 和 $u_R(t) = (1 - 0.25e^{-t})\epsilon(t)$ V。试求 $u_C(0_-) = 2$ V、 $i_s(t) = 3\epsilon(t)$ A、 $t > 0$ 时的 $u_C(t)$ 和 $u_R(t)$ 。

解 方法1: 设 $u_R(t) = ai_s(t) + bu_C(t)$, 则由阶跃响应得

$$\begin{cases} b = 0.25 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

联立解得 $a = 0.75$, $b = 0.25$ 。所以

$$u_R(t) = 0.75i_s(t) + 0.25u_C(t)$$

由 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 2$ V 和 $i_s(t) = 3\epsilon(t)$ A 得

$$u_R(0_+) = 2.75$$
 V

根据单位阶跃响应及齐次特性得

$$u_C(\infty) = 3$$
 V, $u_R(\infty) = 3$ V, $\tau = 1$ s

代入三要素公式得

$$u_C(t) = 3 + (2 - 3)e^{-t} = 3 - e^{-t} \text{ (V)} \quad (t \geq 0)$$

$$u_R(t) = 3 + (2.75 - 3)e^{-t} = 3 - 0.25e^{-t} \text{ (V)} \quad (t > 0)$$

方法2: (1) 求零状态响应。根据零状态响应的齐次特性得

$$u_{Czs}(t) = 3(1 - e^{-t})\epsilon(t) \text{ V}, \quad u_{Rzs}(t) = 3(1 - 0.25e^{-t})\epsilon(t) \text{ V}$$

(2) 求零输入响应。因为 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 2$ V, 所以

$$u_{Czi}(t) = 2e^{-t} \text{ V} \quad (t > 0)$$

由线性电路的叠加性和齐次性得

$$s_R(t) = k_1 i_s(t) + k_2 s_C(t)$$

因为 $i_s(t) = \epsilon(t)$ 时, 单位阶跃响应为 $s_C(t) = (1 - e^{-t})\epsilon(t)$ 、 $s_R(t) = (1 - 0.25e^{-t})\epsilon(t)$, 所以

$$(1 - 0.25e^{-t})\epsilon(t) = k_1 \epsilon(t) + k_2 (1 - e^{-t})\epsilon(t)$$

解之得 $k_1 = 0.75$, $k_2 = 0.25$ 。因此

$$u_{Rzi}(t) = 0.25u_{Czi}(t) = 0.5e^{-t} \text{ V} \quad (t > 0)$$

(3) 求全响应。

$$u_C(t) = u_{Czs}(t) + u_{Czi}(t) = 3(1 - e^{-t}) + 2e^{-t} = 3 - e^{-t} \text{ V} \quad (t \geq 0)$$

$$u_R(t) = u_{Rzs}(t) + u_{Rzi}(t) = 3(1 - 0.25e^{-t}) + 0.5e^{-t} = 3 - 0.25e^{-t} \text{ V} \quad (t > 0)$$

6-26 见 [例6-2]。

6-27 电路如题6-27图所示, 试求冲激响应 $u_L(t)$ 。

解 设电感电流的参考方向如题6-27解图(a)所示。

(1) 求 $u_L(0_+)$ 。 $t = 0$ 的电路如题6-27解图(b)所示, 则有

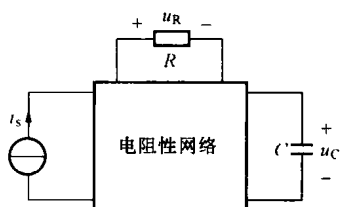
$$u_L(0) = 2\delta(t), \quad i_L(0_+) = \frac{1}{L} \int_{0_-}^{0_+} 2\delta(\tau) d\tau$$

$$= \frac{2}{L} = \frac{2}{4 \times 10^{-3}} = 500 \text{ (A)}$$

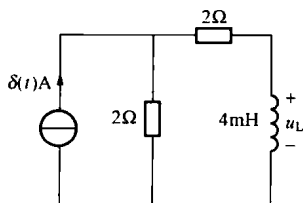
0_+ 时刻电路如题6-27解图(c)所示, 则有

$$u_L(0_+) = -(2 + 2) \times 500 = -2000 \text{ (V)}$$

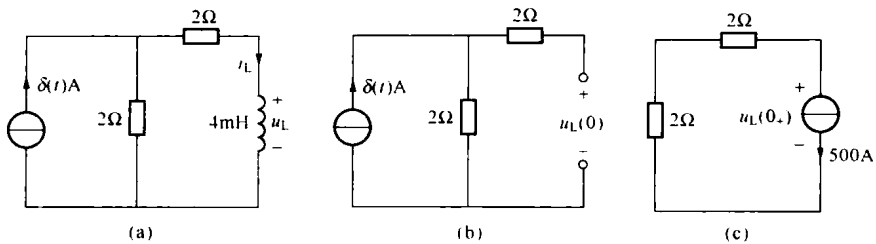
(2) 求 $u_L(\infty)$ 。



题6-25图



题6-27图



题 6-27 解图

$$u_L(\infty) = 0$$

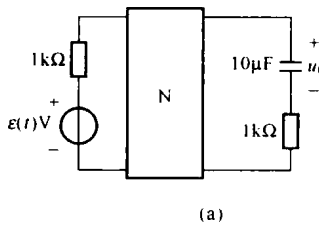
(3) 求 τ 。

$$\tau = \frac{L}{R_0} = \frac{4 \times 10^{-3}}{4} = 10^{-3} \text{ (s)}$$

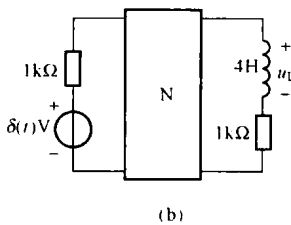
(4) 求 $u_L(t)$ 。由三要素公式并计及其冲激分量得

$$\begin{aligned} u_L(t) &= u_L(\infty) + [u_L(0_+) - u_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + u_L(0) \\ &= u_L(0) + u_L(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}\epsilon(t) = 2\delta(t) - 2000e^{-1000t}\epsilon(t) \text{ V} \end{aligned}$$

6-28 电路如题 6-28 图 (a) 所示, 图中 N 为线性无源电阻网络, 其零状态响应 $u_C(t) = \frac{2}{3}(1 - e^{-25t})\epsilon(t)$ V。现将题 6-28 图 (a) 中的单位阶跃电压源和电容分别改换为冲激电压源和电感, 如题 6-28 图 (b) 所示。试求题 6-28 图 (b) 中网络的零状态响应 $u_L(t)$ 。

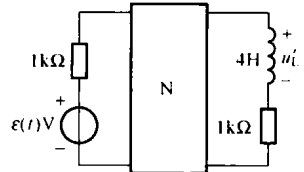


(a)



(b)

题 6-28 图



题 6-28 解图

解 (1) 求题 6-28 解图中电感端电压的零状态响应 $u_L'(t)$ 。电路接 $10\mu\text{F}$ 电容时, 有 $u_C(0_+) = \lim_{t \rightarrow 0_+} u_C(t) = 0$, $u_C(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} u_C(t) = \frac{2}{3}$ V, $\tau_C = R_0 C = R_0 \times 10 \times 10^{-6} = \frac{1}{25}$ (s)

所以

$$R_0 = 4\text{k}\Omega$$

若把电路中的 $10\mu\text{F}$ 电容换以 4H 电感, 如图 6-28 解图所示, 根据电感和电容在 $t=0_+$ 和 $t=\infty$ 时的特点可得

$$u_L'(0_+) = u_C(\infty) = \frac{2}{3} \text{ V}, u_L'(\infty) = u_C(0_-) = 0, \tau_L = \frac{L}{R_0} = \frac{4}{4 \times 10^3} = 1 \text{ (ms)}$$

所以, 电路中的 $10\mu\text{F}$ 电容换以 4H 电感, 电感两端电压的零状态响应 $u_L'(t)$ 为

$$u_L'(t) = u_L'(\infty) + [u_L'(0_+) - u_L'(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau_L}} = \frac{2}{3}e^{-1000t}\epsilon(t) \text{ V}$$

(2) 求 $\delta(t)$ 作用时产生的零状态响应 $u_L(t)$ 。 $\epsilon(t)$ 作用产生的零状态响应为

$$u_L'(t) = \frac{2}{3} e^{-1000t} \epsilon(t) \text{ V}$$

因为 $\delta(t) = \frac{d\epsilon(t)}{dt}$ ，所以根据微分特性， $\delta(t)$ 作用时产生的零状态响应 $u_L(t)$ 为

$$u_L(t) = \frac{du_L'}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{2}{3} e^{-1000t} \epsilon(t) \right] = \frac{2}{3} \delta(t) - \frac{2000}{3} e^{-1000t} \epsilon(t) \text{ V}$$

二阶电路的响应

6-29 为使题 6-29 图所示电路的零输入响应 $u_C(t)$ 为衰减振荡，求电阻 R 的取值范围。

分析 零输入响应为振荡还是非振荡，取决于电路的固有频率（即电路微分方程对应的特征根），故需建立电路以 u_C 为输出的微分方程；为使电路的零输入响应为衰减振荡，只要保证微分方程对应的特征根是实部为负的共轭复根即可。

解 所用电量参考方向如题 6-29 解图所示，由 KCL 和 R 、 C 的 VAR 得

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R} - i_L = 0$$

上式对时间求导得

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{du_C}{dt} - \frac{di_L}{dt} = 0 \quad (1)$$

由 KVL 和电感的 VAR 得

$$2 \frac{di_L}{dt} = u_s - u_C \quad (2)$$

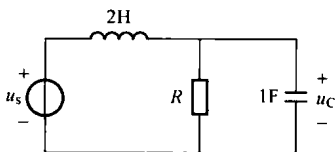
将式 (2) 代入式 (1) 消去变量 i_L ，即可得到以 u_C 为输出的微分方程

$$2 \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{2}{R} \frac{du_C}{dt} + u_C = u_s$$

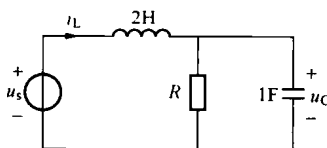
该微分方程对应的特征方程为

$$2p^2 + \frac{2}{R}p + 1 = 0$$

当 $\left(\frac{2}{R}\right)^2 - 4 \times 2 \times 1 < 0$ ，即 $R > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，其特征根是实部为负的共轭复根。此时电路的零输入响应为衰减振荡。



题 6-29 图



题 6-29 解图

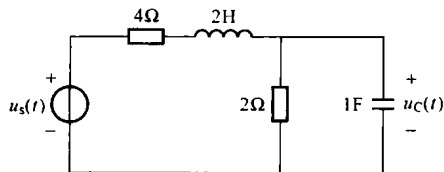
注：① 对于二阶电路，根据其微分方程所对应的特征根（或称固有频率）的形式，可判断电路零输入响应的性质；② 电路冲激响应的性质与零输入响应的判断方法相同。

6-30 电路如题 6-30 图所示。已知 $u_s(t) = 12\epsilon(t)$ V， $u_C(0_-) = 1$ V， $i_L(0_-) = 2$ A。(1) 列写以 $u_C(t)$ 为输出的输入—输出方程；(2) 求电压 $u_C(t)$ ，并指出 $u_C(t)$ 的自由分量和强制分量。

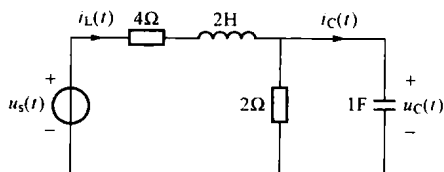
解 (1) 所用电量的参考方向如题 6-30 解图所示。

由 KVL 和元件的 VAR 得

$$4i_L(t) + 2 \frac{di_L}{dt} + u_C(t) = 12\epsilon(t)$$



题 6-30 图



题 6-30 解图

由 KCL 和元件的 VAR 有

$$i_L(t) = \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{2}$$

将此式代入前式得

$$2 \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{2} \right) \right] + 4 \left(\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{2} \right) + u_C(t) = 12\epsilon(t)$$

整理可得 $u_C(t)$ 的输入—输出方程为

$$2 \frac{d^2 u_C}{dt^2} + 5 \frac{du_C}{dt} + 3u_C = 12\epsilon(t)$$

该方程的初始条件分别为

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 1V, \quad \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{i_C(0_+)}{1} = i_L(0_+) - \frac{u_C(0_+)}{2} = 2 - \frac{1}{2} = 1.5 \text{ (V/s)}$$

(2) 求电压 $u_C(t)$ 。 $t > 0$ 时 $u_C(t)$ 满足的方程为

$$2 \frac{d^2 u_C}{dt^2} + 5 \frac{du_C}{dt} + 3u_C = 12$$

且初始条件为

$$u_C(0_+) = 1V, \quad \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+} = 1.5 \text{ (V/s)}$$

1) 求通解 $u_{Ch}(t)$ 。

$$2 \frac{d^2 u_C}{dt^2} + 5 \frac{du_C}{dt} + 3u_C = 0$$

特征方程为

$$2\lambda^2 + 5\lambda + 3 = 0$$

解之得

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -1.5$$

所以

$$u_{Ch}(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-1.5t}$$

2) 求特解 $u_{Cp}(t)$ 。令 $u_{Cp}(t) = C$, 将 $u_{Cp}(t) = C$ 代入 $t > 0$ 时 $u_C(t)$ 的微分方程, 得

$$u_{Cp}(t) = 4V$$

3) 求全响应 $u_C(t)$ 。

$$u_C(t) = u_{Ch}(t) + u_{Cp}(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-1.5t} + 4$$

将初始条件代入上式求得待定系数为

$$k_1 = -6, k_2 = 3$$

所以

$$u_C(t) = -6e^{-t} + 3e^{-1.5t} + 4 \text{ V} \quad (t \geq 0)$$

则自由分量为

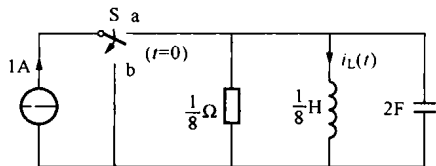
$$u_{Ch}(t) = -6e^{-t} + 3e^{-1.5t} \text{ V}$$

强制分量为

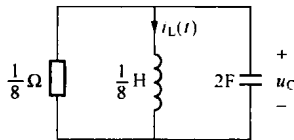
$$u_{Cp}(t) = 4 \text{ V}$$

6-31 题 6-31 图所示电路原已处于稳态, $t=0$ 时开关 S 由 a 打向 b。试求 $t \geq 0$ 时的电感电流 $i_L(t)$ 。

解 $t > 0$ 的电路如题 6-31 解图所示。该 RLC 并联电路为零输入电路, 故所求响应为零输入响应。



题 6-31 图



题 6-31 解图

(1) 建立以 $i_L(t)$ 为输出的输入—输出方程。由 KCL 和元件的 VAR 得

$$8u_C + i_L + 2 \frac{du_C}{dt} = 0$$

由 KVL 和元件的 VAR 有

$$u_C(t) = u_L(t) = \frac{1}{8} \frac{di_L}{dt}$$

将此式代入前式得

$$8 \times \left(\frac{1}{8} \frac{di_L}{dt} \right) + i_L + 2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{8} \frac{di_L}{dt} \right) = 0$$

整理可得 $i_L(t)$ 的输入—输出方程为

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 4 \frac{di_L}{dt} + 4i_L = 0$$

且初始条件为

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1 \text{ A}, \quad \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0_-} = \frac{u_L(0_+)}{L} = 8u_C(0_+) = 8u_C(0_-) = 0$$

(2) 求 $i_L(t)$ 。特征方程为

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

解之得

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -2$$

则

$$i_L(t) = (k_1 + k_2 t) e^{-2t}$$

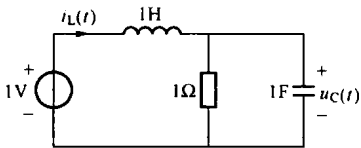
将初始条件代入上式可求得

$$k_1=1, k_2=2$$

所以

$$i_L(t)=(1+2t)e^{-2t} \text{ A} \quad (t \geq 0)$$

6-32 题 6-32 图所示电路中, $u_C(0_-)=1\text{V}$, $i_L(0_-)=2\text{A}$, 求 $t \geq 0$ 时的电容电压 $u_C(t)$ 。



题 6-32 图

解 以 $u_C(t)$ 为输出的电路微分方程为

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{du_C}{dt} + u_C = 1$$

初始值为

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 1\text{V}, i_L(0_+) = i_L(0_-) = 2\text{A}$$

$$u'_C(0_+) = i_C(0_+) = i_L(0_+) - u_C(0_+) = 2 - 1 = 1 \text{ (V/s)}$$

特征方程为

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

特征根为

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, \lambda_2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

则

$$u_C(t) = Ke^{-0.5t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \varphi\right) + 1$$

$$\frac{du_C(t)}{dt} = -0.5Ke^{-0.5t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \varphi\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}Ke^{-0.5t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \varphi\right)$$

由初始条件得

$$K \sin \varphi + 1 = 1$$

$$-0.5K \sin \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}K \cos \varphi = 1$$

联立求解得

$$K = \frac{2}{\sqrt{3}}, \varphi = 0$$

因此

$$u_C(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-0.5t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t + 1 = 1 + 1.15e^{-0.5t} \sin 0.866t \text{ V} \quad (t \geq 0)$$

6-33 题 6-33 图所示电路原已处于稳态。 $t=0$ 时开关 S 闭合。 分别求 $t \geq 0$ 时电容电压的零输入响应、零状态响应和全响应。

解 所用电流的参考方向如题 6-33 解图 (a) 所示。

(1) 求 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$ 。 因为 $t=0_-$ 时, 电路处于直流稳态, 电感短路, 电容开路, 所以

$$u_C(0_-) = 1\text{V}, i_L(0_-) = \frac{1}{4} = 0.25 \text{ (A)}$$

由换路定则得

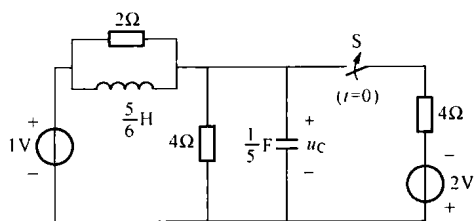
$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 1\text{V}$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{1}{4} = 0.25 \text{ (A)}$$

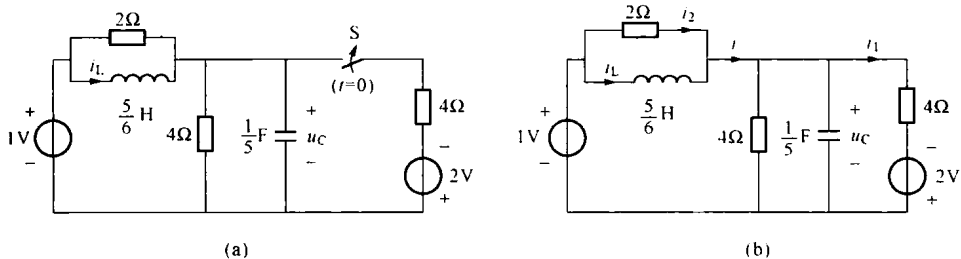
(2) 建立以 $u_C(t)$ 为输出的输入—输出方程。
 $t > 0$ 时的电路如题 6-33 解图 (b) 所示。由 KCL 和元件 VAR 得

$$i(t) = \frac{u_C}{4} + 0.2 \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C + 2}{4} = 0.2 \frac{du_C}{dt} + 0.5u_C + 0.5$$

$$i_2(t) = \frac{1 - u_C}{2} = 0.5 - 0.5u_C$$



题 6-33 图



题 6-33 解图 (一)

则

$$i_L(t) = i(t) - i_2(t) = 0.2 \frac{du_C}{dt} + 0.5u_C + 0.5 - (0.5 - 0.5u_C) = 0.2 \frac{du_C}{dt} + u_C \quad (1)$$

由 KVL 和元件的 VAR 得

$$\frac{5}{6} \frac{di_L}{dt} + u_C(t) = 1 \quad (2)$$

将式 (1) 代入式 (2) 有

$$\frac{5}{6} \left[\frac{d}{dt} \left(0.2 \frac{du_C}{dt} + u_C \right) \right] + u_C(t) = 1$$

整理可得 $u_C(t)$ 的输入—输出方程为

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 5 \frac{du_C}{dt} + 6u_C = 6$$

(3) 求零输入响应 $u_{Czi}(t)$ 。零输入响应 $u_{Czi}(t)$ 满足的方程为

$$\frac{d^2 u_{Czi}}{dt^2} + 5 \frac{du_{Czi}}{dt} + 6u_{Czi} = 0$$

且 $u_{Czi}(0_+) = 1\text{V}$ 。由题 6-33 解图 (c) 所示的 0_+ 时刻电路得

$$\left. \frac{du_{Czi}}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{i_C(0_+)}{0.2} = 5 \times \left(0.25 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = -3.75 \text{ (V/s)}$$

特征方程为

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

特征根为

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$$

所以

$$u_{Czi}(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-3t}$$

将初始条件代入上式求得待定系数为

$$k_1 = -0.75, k_2 = 1.75$$

因此

$$u_{Czi}(t) = -0.75e^{-2t} + 1.75e^{-3t} \text{ V} \quad (t \geq 0)$$

(4) 求零状态响应 $u_{Czs}(t)$ 。零状态响应 $u_{Czs}(t)$ 满足的方程为

$$\frac{d^2 u_{Czs}}{dt^2} + 5 \frac{du_{Czs}}{dt} + 6u_{zs} = 6$$

且 $u_{Czs}(0_+) = 0$ 。由题 6-33 解图 (d) 所示的 0_+ 时刻电路得

$$\left. \frac{du_{Czs}}{dt} \right|_{t=0_-} = \frac{i_{Cf}(0_+)}{0.2} = 5 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{4} \right) = 0$$

零状态响应 $u_{Czs}(t)$ 的形式为

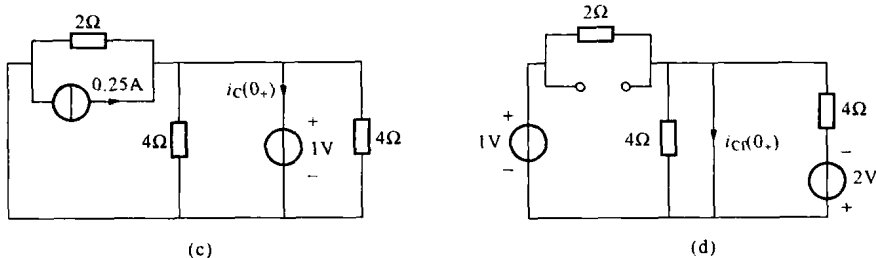
$$u_{Czs}(t) = k_3 e^{-2t} + k_4 e^{-3t} + 1$$

将初始条件代入上式求得待定系数为

$$k_3 = -3, k_4 = 2$$

所以

$$u_{Czs}(t) = -3e^{-2t} + 2e^{-3t} + 1 \text{ V} \quad (t \geq 0)$$



题 6-33 解图 (二)

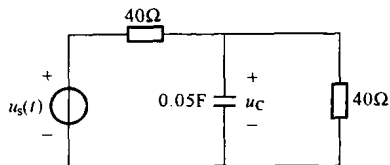
(5) 求全响应 $u_C(t)$ 。根据叠加定理有

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u_{Czi}(t) + u_{Czs}(t) = (-0.75e^{-2t} + 1.75e^{-3t}) + (-3e^{-2t} + 2e^{-3t} + 1) \\ &= -3.75e^{-2t} + 3.75e^{-3t} + 1 \text{ (V)} \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

零状态响应的卷积积分算法

6-34 题 6-34 图所示电路中, $u_s(t) = 15e^{-0.25t} \epsilon(t)$ V。试用卷积积分法计算电容电压的零状态响应 $u_C(t)$ 。

解 (1) 求冲激响应 $h(t)$ 。



题 6-34 图

1) 求单位阶跃响应 $s(t)$ 。令 $u_s(t) = \epsilon(t)$ V, 可求得三个要素分别为

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0, u_C(\infty) = \frac{40}{40+40} \times 1 = 0.5 \text{ (V)}$$

$$\tau = R_0 C = (40//40) \times 0.05 = 1 \text{ (s)}$$

由三要素公式得

$$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} = 0.5(1 - e^{-t}) \epsilon(t) \text{ V}$$

所以单位阶跃响应为

$$s(t) = 0.5(1 - e^{-t})\epsilon(t)$$

2) 求 $h(t)$ 。

$$h(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}[0.5(1 - e^{-t})\epsilon(t)] = 0.5e^{-t}\epsilon(t)$$

(2) 求电容电压的零状态响应 $u_C(t)$ 。因为 $u_s(t) = 15e^{-0.25t}\epsilon(t)$ V、 $h(t) = 0.5e^{-t}\epsilon(t)$ ，所以

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u_s(t) \otimes h(t) = \int_0^t u_s(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t 15e^{-0.25\tau} \times 0.5e^{-(t-\tau)} d\tau \\ &= 7.5e^{-t} \int_0^t e^{0.75\tau} d\tau = 10e^{-t} e^{0.75t} \Big|_0^t = 10(e^{-0.25t} - e^{-t})\epsilon(t) \text{ (V)} \end{aligned}$$

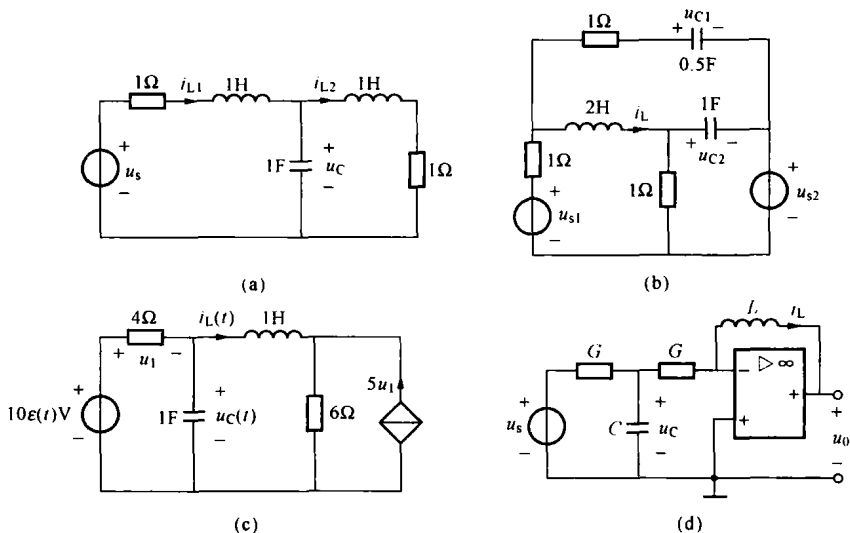
6-35 列写题 6-35 图所示各电路状态方程的矩阵形式。

解 (a) 选电容电压 $u_C(t)$ 和电感电流 $i_{L1}(t)$ 、 $i_{L2}(t)$ 为状态变量。由 KCL 得

$$\frac{du_C}{dt} = i_{L1}(t) - i_{L2}(t)$$

由 KVL 得

$$\frac{di_{L1}}{dt} = -u_C(t) - i_{L1}(t) + u_s(t), \quad \frac{di_{L2}}{dt} = u_C(t) - i_{L2}(t)$$

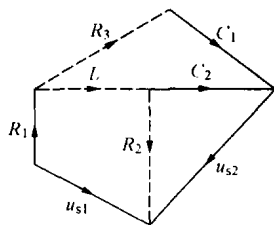


题 6-35 图

状态方程的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \frac{du_C}{dt} \\ \frac{di_{L1}}{dt} \\ \frac{di_{L2}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_s(t)$$

(b) 有向图如题 6-35 解图所示，实线为树支，虚线为连支。分别对含树支 C_1 、 C_2 的基本割集列写 KCL 方程，得



题 6-35 解图

$$C_1 \frac{du_{C1}}{dt} = i_{R3} \quad (1)$$

$$C_2 \frac{du_{C2}}{dt} = i_L - i_{R2} \quad (2)$$

对含连支 L 的基本回路列写 KVL 方程

$$\frac{di_L}{dt} = -u_{C2} - u_{s2} + u_{s1} - u_{R1} \quad (3)$$

为了消去上述方程中的非状态变量, 对含 R_2 、 R_3 的基本回路列写 KVL 方程, 对含 R_1 的基本割集列写 KCL 方程, 有

$$R_2 i_{R2} = u_{C2} + u_{s2} \quad (4)$$

$$u_{R1} + R_3 i_{R3} = u_{s1} - u_{s2} - u_{C1} \quad (5)$$

$$\frac{1}{R_1} u_{R1} - i_{R3} = i_L \quad (6)$$

由式 (4) 得

$$i_{R2} = \frac{1}{R_2} u_{C2} + \frac{1}{R_2} u_{s2} \quad (7)$$

联立式 (5) 和式 (6) 解得

$$u_{R1} = -\frac{R_1}{R_1 + R_3} u_{C1} + \frac{R_3}{R_1 + R_3} i_L + \frac{R_1}{R_1 + R_3} u_{s1} - \frac{R_1}{R_1 + R_3} u_{s2} \quad (8)$$

$$i_{R3} = -\frac{1}{R_1 + R_3} u_{C1} - \frac{R_1}{R_1 + R_3} i_L + \frac{1}{R_1 + R_3} u_{s1} - \frac{1}{R_1 + R_3} u_{s2} \quad (9)$$

将式 (7) ~ 式 (9) 代入式 (1) ~ 式 (3) 消去非状态变量, 代入已知数据整理得状态方程为

$$\begin{cases} \frac{du_{C1}}{dt} = -u_{C1} - i_L + u_{s1} - u_{s2} \\ \frac{du_{C2}}{dt} = -u_{C2} + i_L - u_{s2} \\ \frac{di_L}{dt} = 0.25u_{C1} - 0.5u_{C2} - 0.25i_L + 0.25u_{s1} - 0.25u_{s2} \end{cases}$$

矩阵形式的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \frac{du_{C1}}{dt} \\ \frac{du_{C2}}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0.25 & -0.5 & -0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0.25 & -0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{s1} \\ u_{s2} \end{bmatrix}$$

(c) 由 KCL 得

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{10\epsilon(t) - u_C(t)}{4} - i_L(t) = -\frac{1}{4}u_C(t) - i_L(t) + \frac{1}{4} \times 10\epsilon(t) \quad (1)$$

由 KVL 得

$$\frac{di_L}{dt} = u_C(t) - 6 \times (i_L + 5u_1) = u_C(t) - 6i_L(t) - 30u_1 \quad (2)$$

$$\text{而} \quad u_1 = 10\varepsilon(t) - u_C(t) \quad (3)$$

将式(3)代入式(2)整理得

$$\frac{di_L}{dt} = 31u_C(t) - 6i_L(t) - 30 \times 10\varepsilon(t) \quad (4)$$

由方程(1)和方程(4)可得状态方程的标准形式为

$$\begin{bmatrix} \frac{du_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25 & -1 \\ 31 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.25 \\ -30 \end{bmatrix} \times 10\varepsilon(t)$$

(d) 由 KVL 和元件 VAR 得

$$C \frac{du_C}{dt} = -i_L + G(u_s - u_C)$$

因为 $i_L = Gu_C$, 所以, 本题只有一个状态变量。因此, 状态方程为

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{G}{C}u_C - \frac{1}{C}i_L + \frac{G}{C}u_s = -\frac{2G}{C}u_C + \frac{G}{C}u_s$$

或者

$$\frac{di_L}{dt} = G \frac{du_C}{dt} = -\frac{2G}{C}i_L + \frac{G^2}{C}u_s$$

注: 当电路含有多口电阻元件时, 有可能造成某些电容电压和电感电流之间存在隐含的代数关系, 彼此不独立, 从而使电路的阶数降低, 状态变量减少。

6-36 见 [例 6-4]。

6.5 自测题及参考答案

1. 求图 1 所示电路中的单位阶跃响应 $i_L(t)$ 。
2. 求图 2 所示电路中的零状态响应 $i_C(t)$ 。

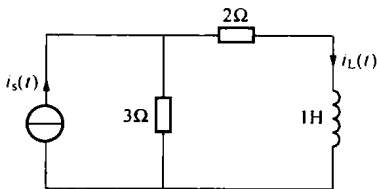


图 1

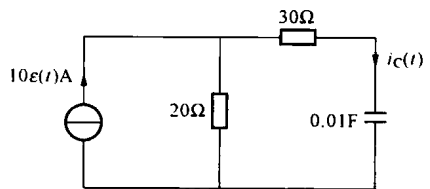


图 2

3. 求图 3 所示电路中的冲激响应 $u_C(t)$ 。
4. 图 4 所示电路原已稳定, $t=0$ 时开关 S 闭合, 求 $t>0$ 时的电流 $i(t)$ 。

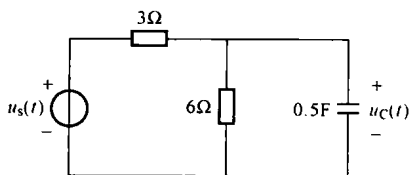


图 3

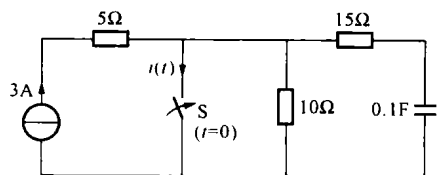


图 4

5. 图 5 所示电路原已稳定, $t=0$ 时开关 S 闭合, 求 $t>0$ 时的电流 $i(t)$ 。

6. 图 6 所示电路开关合在位置 1 已达稳态。 $t=0$ 时开关 S 由位置 1 合向位置 2。求 $t \geq 0$ 时电容电压 $u_C(t)$ 。

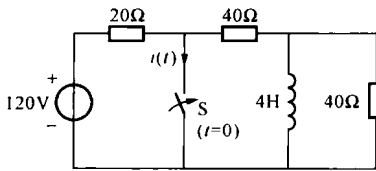


图 5

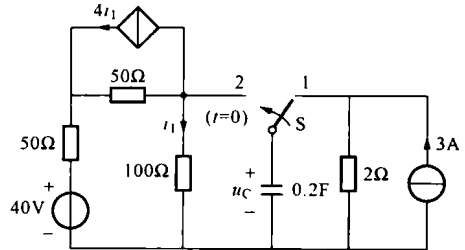


图 6

7. 电路如图 7 所示, $t=0$ 时开关 S 闭合, S 闭合前电路处于稳态。求 $t>0$ 时的电流 $i_L(t)$ 和 $i(t)$ 。

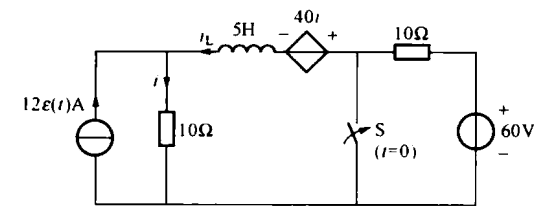


图 7

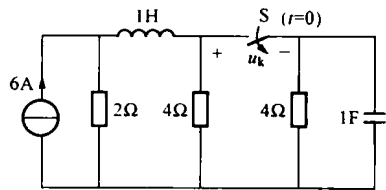


图 8

9. 电路如图 9 所示, 若已知 $u_C(0_-)=4\text{V}$, $i_L(0_-)=0$ 。求 $t \geq 0$ 时的电压 $u_C(t)$ 。

10. 列写图 10 所示电路的状态方程。

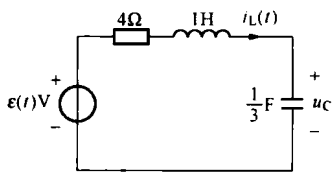


图 9

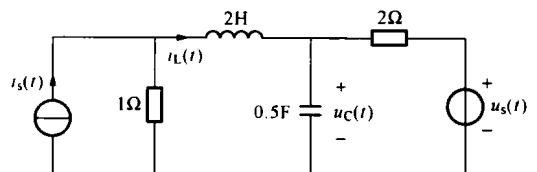


图 10

参考答案

1. $i_L(t) = (0.6 - 0.6e^{-5t})\epsilon(t)$ A

2. $i_C(t) = 4e^{-2t}\epsilon(t)$ A

3. $u_C(t) = \frac{2}{3}e^{-t}\epsilon(t)$ V

4. $i(t) = 3 + 2e^{-\frac{2}{3}t}$ A ($t \geq 0_+$)

5. $i(t) = 6 - e^{-5t}$ A ($t \geq 0_+$)

$$6. u_C(t) = 10 - 4e^{-0.2t} \text{ V} \quad (t \geq 0)$$

$$7. i_L(t) = -12 + 13e^{-10t} \text{ A} \quad (t \geq 0), \quad i(t) = 13e^{-10t} \text{ A} \quad (t \geq 0_-)$$

$$8. u_k(t) = 8 + 4e^{-6t} - 6e^{-0.25t} \text{ V} \quad (t > 0)$$

$$9. u_C(t) = 4.5e^{-t} - 1.5e^{-3t} + 1 \text{ V} \quad (t \geq 0)$$

$$10. \begin{bmatrix} \frac{du_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s(t) \\ i_s(t) \end{bmatrix}$$

第7章 正弦稳态电路的相量模型

7.1 本章知识结构图

第7章知识结构图如图7-1所示。

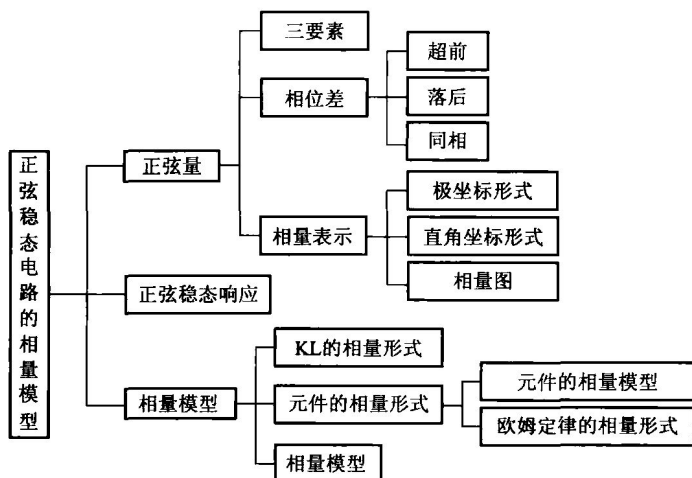


图7-1 第7章知识结构图

7.2 知识点归纳与学习指导

本章是相量分析法的基础，其作用与第1章相似。主要内容有正弦量及其相量表示、相量模型及其两类约束。

学习本章内容时，可与线性电阻电路两类约束类比进行，并充分注意二者的异同。电阻电路只涉及电压、电流的幅值，而相量分析法不仅涉及幅值，还涉及相角。

7.2.1 正弦量及其相量表示

1. 正弦稳态电路及正弦稳态响应

各支路电压和电流都是与电源同频率正弦量的电路称为正弦稳态电路或正弦交流电路，电路中的电压、电流统称为正弦稳态响应。电路在同频率正弦电源激励下，过渡过程结束后即进入正弦稳态电路。

2. 正弦量的三要素

大小和方向随时间按正弦规律变化的电压或电流统称正弦量。用正弦函数表示（也可以用余弦函数表示）的电流如下

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \phi)$$

其中，振幅（又称为最大值） I_m 、[角]频率 ω 、初相[位] ϕ （规定 $|\phi| \leq 180^\circ$ ）称为正弦量

的三要素。正弦量由其三要素确定。由于 $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ ，所以角频率 ω 这一要素又可以换成频率 f 或周期 T 。

正弦量的有效值为

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

故振幅 I_m 这一要素又可以换成有效值 I ，则有

$$i(t) = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \varphi)$$

两个同频率正弦量的相位差等于二者的初相之差。例如，设 $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$ 、 $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$ ，则电压与电流的相位差为

$$\theta = \varphi_u - \varphi_i$$

规定 $|\theta| \leq \pi$ ，即 $|\theta| \leq 180^\circ$ 。

$$\theta = \varphi_u - \varphi_i \begin{cases} > 0 & (u \text{ 超前 } i) \\ = 0 & (u \text{ 与 } i \text{ 同相}) \\ < 0 & (u \text{ 落后 } i) \end{cases}$$

特别地， $|\theta| = \pi$ 时，称 u 和 i 反相。

3. 正弦量的相量表示

(1) 相量。正弦稳态电路中的频率通常是已知的，这样，确定正弦量的三个要素变为两个，即振幅或有效值以及初相。二者合起来可用复数表示。一旦确定了这一复数，就可知道要求的两个要素，加上已知的频率，就可唯一地写出待求的正弦量。这一复数代表了正弦量，称其为相量。

设正弦电流

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi) = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \varphi)$$

对应的相量定义为

$$\text{振幅相量} \quad \dot{I}_m = I_m e^{j\varphi} \triangleq I_m \angle \varphi$$

$$\text{有效值相量} \quad \dot{I} = I e^{j\varphi} \triangleq I \angle \varphi$$

振幅相量也叫最大值相量，有效值相量通常简称相量，且有 $\dot{I}_m = \sqrt{2} \dot{I}$ 。

正弦量与相量之间的相互转化示例见主教材 [例 7-2] 和 [例 7-5]。

注：正弦量用余弦函数表示时可类似处理。但应注意的是，对于同一个问题，只能采用一种表示。

(2) 相量的表示。

相量常用的表示方法有下列三种：

1) 极坐标表示， $\dot{I} = I \angle \varphi$ 。

2) 直角坐标表示， $\dot{I} = I_r + jI_i$ （用 j 表示虚数因子，避免与电流 i 混淆）。

3) 相量图表示，如图 7-2 所示。有向线段的长度为相量 \dot{I} 的模值，有向线段与实轴正方向的夹角为相量 \dot{I} 的辐角。注意：从实轴正方向逆时针转到有向线段所量得的辐角取正值，而顺时针方向量得的辐角取负值。

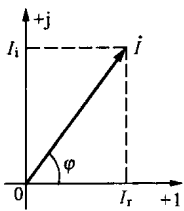


图 7-2 相量图

利用欧拉公式 $1/\angle\theta = \cos\theta + j\sin\theta$, 可得直角坐标表示和极坐标表示之间的转换公式:

由极坐标表示求直角坐标表示公式

$$I_r = I \cos\varphi, I_i = I \sin\varphi$$

从直角坐标表示求极坐标表示公式

$$I = \sqrt{I_r^2 + I_i^2}, \varphi = \arctan \frac{I_i}{I_r}$$

应该特别注意, φ 的取值范围是由 I_r 和 I_i 的正负符号来决定的:

- 1) 当 $I_r \geq 0, I_i \geq 0$ 时, $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$, $\varphi = \arctan \frac{I_i}{I_r} = \arctan \left| \frac{I_i}{I_r} \right|$;
- 2) 当 $I_r \geq 0, I_i \leq 0$ 时, $-90^\circ \leq \varphi \leq 0^\circ$, $\varphi = \arctan \frac{I_i}{I_r} = -\arctan \left| \frac{I_i}{I_r} \right|$;
- 3) 当 $I_r \leq 0, I_i \geq 0$ 时, $90^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$, $\varphi = \arctan \frac{I_i}{I_r} = 180^\circ - \arctan \left| \frac{I_i}{I_r} \right|$;
- 4) 当 $I_r \leq 0, I_i \leq 0$ 时, $-180^\circ \leq \varphi \leq -90^\circ$, $\varphi = \arctan \frac{I_i}{I_r} = -180^\circ + \arctan \left| \frac{I_i}{I_r} \right|$ 。

直角坐标表示和极坐标表示之间的转换示例见主教材 [例 7-3] 和 [例 7-4]。利用相量法可方便地求出线性微分方程的正弦形式特解。

正弦量的相量表示具有线性特性和微积分特性, 利用这些性质可以将正弦函数的和、差运算转换为复数的和、差运算, 将微分转换为复数的代数运算, 可有效地简化计算过程。

(3) 复数的运算。相量从数学上说就是复数, 因此, 复数的加减、乘除和取共轭运算以及直角坐标表示和极坐标表示之间的相互转换必须熟练掌握。

1) 加减运算。复数的加减运算采用复数的直角坐标表示进行: 实部相加减, 虚部相加减, 即

$$(a + jb) \pm (c + jd) = (a \pm c) + j(b \pm d)$$

2) 取共轭运算。取共轭运算分为直角坐标表示和极坐标表示两种形式

$$(a + jb)^* = a - jb \quad (\text{虚部乘以 } -1),$$

$$(a/\angle\theta)^* = a/\angle(-\theta) \quad (\text{辐角乘以 } -1)$$

3) 乘法运算。乘法运算分为直角坐标表示和极坐标表示两种形式

$$(a + jb) \times (c + jd) = (ac - bd) + j(ad + bc)$$

(先按实数运算规则相乘, 再分别合并实部和虚部)

$$a/\angle\theta_a \cdot b/\angle\theta_b = ab/\angle(\theta_a + \theta_b) \quad (\text{模值相乘, 辐角相加})$$

4) 除法运算。除法运算分为直角坐标表示和极坐标表示两种形式

$$\frac{a + jb}{c + jd} = \frac{(a + jb)(c + jd)^*}{(c + jd)(c + jd)^*} = \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

(分子分母先乘以分母的共轭, 再分成实部和虚部)

$$\frac{a/\angle\theta_a}{b/\angle\theta_b} = \frac{a}{b} / \angle(\theta_a - \theta_b) \quad (\text{模值相除, 辐角相减})$$

7.2.2 相量模型

1. 基尔霍夫定律的相量形式

$$\text{KCL: } \sum \dot{i} = 0 \text{ 或 } \sum \dot{I}_m = 0$$

$$\text{KVL: } \sum \dot{U} = 0 \text{ 或 } \sum \dot{U}_m = 0$$

注意：除了同类元件组成的电路外，有效值不满足基尔霍夫定律的相量形式。

2. 欧姆定律的相量形式

二端元件伏安关系的相量形式可用欧姆定律的相量形式统一表示为

$$\dot{U} = \dot{Z} \dot{I} \text{ 或者 } \dot{I} = \dot{Y} \dot{U}$$

式中： Z 称为元件阻抗； Y 称为元件导纳。

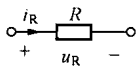
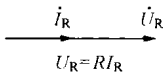
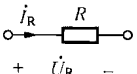
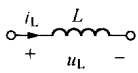
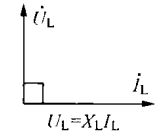
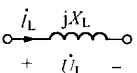
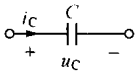
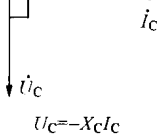
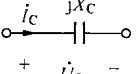
学习过程中必须牢记电阻、电感和电容的阻抗和导纳的表达式：

$$Z_R = R, Z_L = j\omega L, Z_C = -j \frac{1}{\omega C}$$

$$Y_G = G, Y_C = j\omega C, Y_L = \frac{1}{j\omega L}$$

二端元件伏安关系的相量形式及相量模型，见表7-1。

表7-1 二端元件伏安关系的相量形式及相量模型

元件	时域模型	VAR时域形式	VAR相量形式	相量图	相量模型
R		$u_R = Ri_R$	$\dot{U}_R = R\dot{I}_R$		
L		$u_L = L \frac{di_L}{dt}$	$\dot{U}_L = j\omega L \dot{I}_L = jX_L \dot{I}_L$ $X_L = \omega L$ 称为感抗		
C		$i_C = C \frac{du_C}{dt}$	$\dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_C = jX_C \dot{I}_C$ $X_C = -\frac{1}{\omega C}$ 称为容抗		

由时域方程得到相量方程的方法如下：将时域方程中已知正弦量变为相量， u 、 i 变为相量 \dot{U} 、 \dot{I} ，求导符号 $\frac{d}{dt}$ 变为 $j\omega$ ，求导次数变为 $j\omega$ 的次方即得相量方程。因此，线性电阻性元件只需要把电压、电流变为相量。

3. 相量模型

相量模型是一种运用相量能方便地对正弦稳态电路进行分析和计算的假想模型。它与原电路具有相同的拓扑结构，而且两个电路中的元件一一对应。将正弦稳态电路中每个元件用其相量模型替换便得电路的相量模型。

在相量模型中，各支路电压相量、电流相量既要服从KCL、KVL相量形式的约束，又要满足元件伏安关系相量形式的约束。这两类约束关系是分析相量模型的基本依据。由于它们与电阻电路的两类约束相似，其差别仅在于相量形式不直接用电压和电流表示，而用代表电压和电流的相量表示；不用电阻和电导，而用阻抗和导纳。故电阻电路的分析方法可推广到相量模型。

【例 7-1】 (1) 图 7-3 (a) 所示正弦稳态电路中, $i_s(t) = \sqrt{2} \cos 2t$ A。运用相量模型求电压 $u_1(t)$ 、 $u_2(t)$ 和 $u(t)$ 。(2) 图 7-3 (b) 所示正弦稳态电路中, $u_s(t) = 10\sqrt{2} \sin 5t$ V。运用相量模型求电流 $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$ 和 $i(t)$ 。

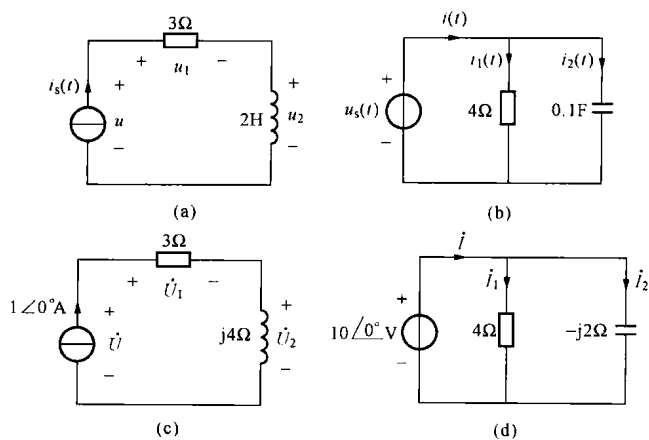


图 7-3 [例 7-1] 图

解 (1) 电路的相量模型如图 7-3 (c) 所示。由元件 VAR 的相量形式得

$$\dot{U}_1 = 3 \times 1 \angle 0^\circ = 3 \angle 0^\circ \text{ (V)}$$

$$\dot{U}_2 = j4 \times 1 \angle 0^\circ = 4 \angle 90^\circ \text{ (V)}$$

由 KVL 得

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 3 \angle 0^\circ + 4 \angle 90^\circ \\ &= 3 + j4 = 5 \angle 53.1^\circ \text{ (V)} \end{aligned}$$

所以

$$u_1(t) = 3\sqrt{2} \cos 2t \text{ V}$$

$$u_2(t) = 4\sqrt{2} \cos(2t + 90^\circ) \text{ V}$$

$$u(t) = 5\sqrt{2} \cos(2t + 53.1^\circ) \text{ V}$$

(2) 电路的相量模型如图 7-3 (d) 所示。由元件 VAR 的相量形式得

$$\dot{I}_1 = \frac{10 \angle 0^\circ}{4} = 2.5 \angle 0^\circ \text{ (A)}, \quad \dot{I}_2 = \frac{10 \angle 0^\circ}{-j2} = 5 \angle 90^\circ \text{ (A)}$$

由 KCL 得

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 2.5 \angle 0^\circ + 5 \angle 90^\circ = 5.59 \angle 63.4^\circ \text{ (A)}$$

所以

$$i_1(t) = 2.5\sqrt{2} \sin 5t \text{ A}, \quad i_2(t) = 5\sqrt{2} \sin(5t + 90^\circ) \text{ A}, \quad i(t) = 5.59\sqrt{2} \sin(5t + 63.4^\circ) \text{ A}$$

注：从方便角度出发，可采用正弦函数对应相量，也可采用余弦函数对应相量。

7.3 重点、难点与考点

重点与难点

本章的重点是正弦量的相量、两类约束的相量形式和相量模型以及元件的阻抗和导纳。

难点是相量的直角坐标表示转化为极坐标表示。

考点

本章内容是相量法的基础，均为考试的重点和热点。

7.4 第7章习题选解

正弦量

7-2 已知 $u_1(t) = 100\sin(5\pi t - 150^\circ)$ V, $i_1(t) = -30\sin(10\pi t - 45^\circ)$ A。(1) 定性地画出它们的波形；(2) 求各正弦量的最大值、有效值、频率和周期以及初相位；(3) 计算 $t=0$ 和 0.1 s 时各正弦量的瞬时值。

解 (1) 略。

(2) 因为 $i_1(t) = -30\sin(10\pi t - 45^\circ) = 30\sin(10\pi t + 135^\circ)$ A, 所以 u_1 、 i_1 最大值分别为

$$U_{1m} = 100\text{V}, I_{1m} = 30\text{A}$$

有效值分别为

$$U_1 = \frac{100}{\sqrt{2}} = 70.71\text{ (V)}, I_1 = \frac{30}{\sqrt{2}} = 21.21\text{ (A)}$$

频率分别为

$$f_1 = \frac{5\pi}{2\pi} = 2.5\text{ (Hz)}, f_2 = \frac{10\pi}{2\pi} = 5\text{ (Hz)}$$

周期分别为

$$T_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{1}{2.5} = 0.4\text{ (s)}, T_2 = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{5} = 0.2\text{ (s)}$$

初相位分别为

$$\varphi_1 = -150^\circ, \varphi_2 = 135^\circ$$

(3) $t=0$ 和 0.1 s 时各正弦量的瞬时值分别为

$$u_1(0) = 100\sin(-150^\circ) = -50\text{ (V)}, u_1(0.1) = 100\sin(5\pi \times 0.1 - 150^\circ) = -86.6\text{ (V)}$$

$$i_1(0) = 30\sin(135^\circ) = 21.21\text{ (A)}, i_1(0.1) = 30\sin(10\pi \times 0.1 + 135^\circ) = -21.21\text{ (A)}$$

7-3 求下列各小题中电压与电流之间的相位差，并指出其超前与滞后的关系：

$$(1) u_1(t) = \sqrt{2}U_1\sin(\omega t + 45^\circ)\text{ V}, i_1(t) = \sqrt{2}I_1\sin(\omega t - 24^\circ)\text{ A};$$

$$(2) u_2(t) = \sqrt{2}U_2\sin(\omega t + 36^\circ)\text{ V}, i_2(t) = -\sqrt{2}I_2\sin\omega t\text{ A};$$

$$(3) u_3(t) = U_{3m}\cos\omega t\text{ V}, i_3(t) = I_{3m}\sin\omega t\text{ A}.$$

解 (1) 因为 $\varphi_u = 45^\circ$, $\varphi_i = -24^\circ$, 所以，电压与电流之间的相位差为

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 45^\circ - (-24^\circ) = 69^\circ$$

因此， u_1 超前 $i_1 69^\circ$ 。

(2) 因为 $i_2(t) = -\sqrt{2}I_2\sin\omega t = \sqrt{2}I_2\sin(\omega t + 180^\circ)$ A, 则 $\varphi_u = 36^\circ$, $\varphi_i = 180^\circ$ 。所以，电压与电流之间的相位差为

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 36^\circ - 180^\circ = -144^\circ$$

因此， u_2 滞后 $i_2 144^\circ$ 。

(3) 因为 $u_3(t) = U_{3m} \cos \omega t = U_{3m} \sin(\omega t + 90^\circ)$ V, 则 $\varphi_u = 90^\circ$, $\varphi_i = 0^\circ$ 。所以, 电压与电流之间的相位差为

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 90^\circ - 0^\circ = 90^\circ$$

因此, u_3 超前 $i_3 90^\circ$ 。

相量

7-4 写出下列各正弦量的有效值相量和最大值相量(以 $1 \angle 0^\circ$ 代表 $\sin \omega t$)。

$$u_1(t) = 100 \sin(314t - 150^\circ) \text{ V}, u_2(t) = -311 \sin(314t + 23^\circ) \text{ V}$$

$$i_1(t) = 10\sqrt{2} \cos 100t \text{ A}, i_2(t) = -30 \cos(1000t - 80^\circ) \text{ A}$$

解 因为

$$u_2(t) = -311 \sin(314t + 23^\circ) = 220\sqrt{2} \sin(314t - 157^\circ) \text{ (V)}$$

$$i_1(t) = 10\sqrt{2} \cos 100t = 10\sqrt{2} \sin(100t + 90^\circ) \text{ (A)}$$

$$i_2(t) = -30 \cos(1000t - 80^\circ) = 30 \sin(1000t - 170^\circ) \text{ (A)}$$

所以, 有效值相量分别为

$$\dot{U}_1 = 50\sqrt{2} \angle -150^\circ \text{ V}, \dot{U}_2 = 220 \angle -157^\circ \text{ V}, \dot{I}_1 = 10 \angle 90^\circ \text{ A}, \dot{I}_2 = 15\sqrt{2} \angle -170^\circ \text{ A}$$

最大值相量分别为

$$\dot{U}_{1m} = 100 \angle -150^\circ \text{ V}, \dot{U}_{2m} = 311 \angle -157^\circ \text{ V}, \dot{I}_{1m} = 10\sqrt{2} \angle 90^\circ = 14.4 \angle 90^\circ \text{ A}, \dot{I}_{2m} = 30 \angle -170^\circ \text{ A}$$

7-5 (1) 把下列相量化为直角坐标形式:

$$1) \dot{U}_1 = 5 \angle -36.9^\circ \text{ V};$$

$$2) \dot{U}_{2m} = 22 \angle 120^\circ \text{ V};$$

$$3) \dot{I}_{3m} = 100 \angle 15^\circ \text{ A};$$

$$4) \dot{I}_4 = 80 \angle -150^\circ \text{ A};$$

$$5) \dot{U}_5 = 10 \angle 90^\circ \text{ V};$$

$$6) \dot{I}_6 = 14 \angle -90^\circ \text{ A};$$

$$7) \dot{I}_7 = 0.1 \angle 180^\circ \text{ A};$$

$$8) \dot{U}_8 = 220\sqrt{2} \angle -180^\circ \text{ V}$$

(2) 把下列相量化为极坐标形式:

$$1) 10 + j10;$$

$$2) 3 - j4;$$

$$3) -3 + j4;$$

$$4) -6 - j8$$

$$5) j5;$$

$$6) -j5;$$

$$7) -0.1;$$

$$8) 8$$

解 (1) 相量直角坐标形式为:

$$1) \dot{U}_1 = 5 \angle -36.9^\circ = 4 - j3 \text{ (V)};$$

$$2) \dot{U}_{2m} = 22 \angle 120^\circ = -11 + j19.05 \text{ (V)};$$

$$3) \dot{I}_{3m} = 100 \angle 15^\circ = 96.59 + j25.88 \text{ (A)};$$

$$4) \dot{I}_4 = 80 \angle -150^\circ = -69.28 - j40 \text{ (A)};$$

$$5) \dot{U}_5 = 10 \angle 90^\circ = j10 \text{ (V)};$$

$$6) \dot{I}_6 = 14 \angle -90^\circ = -j14 \text{ (A)};$$

$$7) \dot{I}_7 = 0.1 \angle 180^\circ = -0.1 \text{ (A)};$$

$$8) \dot{U}_8 = 220\sqrt{2} \angle -180^\circ = -220\sqrt{2} \text{ (V)}$$

(2) 相量极坐标形式为

$$1) 10 + j10 = 10\sqrt{2} \angle 45^\circ; \quad 2) 3 - j4 = 5 \angle -53.1^\circ; \quad 3) -3 + j4 = 5 \angle 126.9^\circ;$$

$$4) -6 - j8 = 10 \angle -126.9^\circ; \quad 5) j5 = 5 \angle 90^\circ;$$

$$6) -j5 = 5 \angle -90^\circ;$$

$$7) -0.1 = 0.1 \angle 180^\circ;$$

$$8) 8 = 8 \angle 0^\circ$$

注：相量由直角坐标形式转化为极坐标形式时，要注意辐角的取值。

7-6 写出下列相量代表的正弦量：

(1) $\dot{U}_1 = 6 - j8 \text{ V}$; (2) $\dot{I}_1 = 8 + j6 \text{ A}$; (3) $\dot{U}_{2m} = 10 \angle -36.9^\circ \text{ V}$; (4) $\dot{I}_{2m} = 5 \angle 15^\circ \text{ A}$

解 (1) 因为 $\dot{U}_1 = 6 - j8 = 10 \angle -53.1^\circ \text{ (V)}$ ，所以 $u_1(t) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t - 53.1^\circ) \text{ V}$

(2) 因为 $\dot{I}_1 = 8 + j6 = 10 \angle 36.9^\circ \text{ (A)}$ ，所以 $i_1(t) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t + 36.9^\circ) \text{ A}$

(3) $\dot{U}_{2m} = 10 \angle -36.9^\circ \text{ V}$ 对应的正弦量为 $u_2(t) = 10 \sin(\omega t - 36.9^\circ) \text{ V}$

(4) $\dot{I}_{2m} = 5 \angle 15^\circ \text{ A}$ 对应的正弦量为 $i_2(t) = 5 \sin(\omega t + 15^\circ) \text{ A}$

注：(1) 由相量写出相应的正弦量时，相量需要先写成极坐标形式。

(2) 由有效值相量写出正弦量时，振幅为有效值乘以 $\sqrt{2}$ ；而由振幅相量写出正弦量时，无需乘以 $\sqrt{2}$ 。

7-7 写出下列正弦量的相量，并画出相量图：

(1) $3\cos\omega t + 4\sin\omega t$; (2) $(4\sqrt{3} - 3)\sin(2t + 30^\circ) + (3\sqrt{3} - 4)\sin(2t + 60^\circ)$

解 (1) 令 $f_1(t) = 3\cos\omega t = 3\sin(\omega t + 90^\circ)$ 、 $f_2(t) = 4\sin\omega t$ ，则

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = 3\sin(\omega t + 90^\circ) + 4\sin\omega t$$

因为 $\dot{F}_{1m} = 3 \angle 90^\circ$ ， $\dot{F}_{2m} = 4 \angle 0^\circ$ ，所以

$$\dot{F}_m = \dot{F}_{1m} + \dot{F}_{2m} = j3 + 4 = 5 \angle 36.9^\circ$$

相量图如题 7-7 解图所示。

(2) 令 $f_1(t) = (4\sqrt{3} - 3)\sin(2t + 30^\circ)$ 、 $f_2(t) = (3\sqrt{3} - 4)\sin(2t + 60^\circ)$ ，则

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = (4\sqrt{3} - 3)\sin(2t + 30^\circ) + (3\sqrt{3} - 4)\sin(2t + 60^\circ)$$

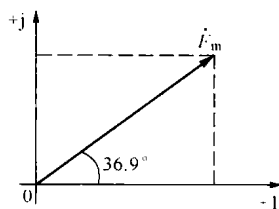
因为

$$\begin{aligned} \dot{F}_{1m} &= (4\sqrt{3} - 3) \angle 30^\circ = (4\sqrt{3} - 3) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2} \right) \\ &= 6 + j2\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2} - j \frac{3}{2} = 6 - \frac{3\sqrt{3}}{2} + j \left(2\sqrt{3} - \frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{F}_{2m} &= (3\sqrt{3} - 4) \angle 60^\circ = (3\sqrt{3} - 4) \times \left(\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} + j4.5 - 2 - j2\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - 2 + j(4.5 - 2\sqrt{3}) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \dot{F}_m &= \dot{F}_{1m} + \dot{F}_{2m} \\ &= 6 - \frac{3\sqrt{3}}{2} + j \left(2\sqrt{3} - \frac{3}{2} \right) + \frac{3\sqrt{3}}{2} - 2 + \\ &\quad j(4.5 - 2\sqrt{3}) \\ &= 4 + j3 = 5 \angle 36.9^\circ \end{aligned}$$



题 7-7 解图

相量图如题 7-7 解图所示。

注：利用相量可方便地求得同频正弦量的和与差。

7-8 试求下列微分方程的特解：

$$(1) \frac{d^2x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + 10x = \sin(2t + 45^\circ); \quad (2) \frac{d^3x}{dt^3} + 6 \frac{d^2x}{dt^2} + 11 \frac{dx}{dt} + 6x = \cos 2t$$

$$(3) \frac{d^2x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + x = 3\cos 3t + \sin 3t$$

解 (1) 对微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + 10x = \sin(2t + 45^\circ)$ 两边取相量得

$$[(j2)^2 + j2 \times 3 + 10] \dot{X}_m = 1 \angle 45^\circ$$

解之得

$$\dot{X}_m = \frac{1 \angle 45^\circ}{(j2)^2 + j2 \times 3 + 10} = \frac{1 \angle 45^\circ}{6 + j6} = \frac{1}{6\sqrt{2}} \angle 0^\circ$$

所以，该微分方程的特解为

$$x(t) = \frac{1}{6\sqrt{2}} \sin 2t$$

(2) 对微分方程 $\frac{d^3x}{dt^3} + 6 \frac{d^2x}{dt^2} + 11 \frac{dx}{dt} + 6x = \cos 2t$ 两边取相量得

$$[(j2)^3 + 6 \times (j2)^2 + 11 \times j2 + 6] \dot{X}_m = 1 \angle 0^\circ$$

解之得

$$\dot{X}_m = \frac{1 \angle 0^\circ}{(j2)^3 + 6 \times (j2)^2 + 11 \times j2 + 6} = \frac{1 \angle 0^\circ}{-18 + j14} = \frac{1 \angle 0^\circ}{22.8 \angle 142.13^\circ} = 0.044 \angle -142.13^\circ$$

所以，该微分方程的特解为

$$x(t) = 0.044 \cos(2t - 142.13^\circ)$$

(3) 微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + x = 3\cos 3t + \sin 3t$ 可改写为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + x = (\sin 3t)' + \sin 3t$$

对上式两边取相量得

$$[(j3)^2 + 4 \times j3 + 1] \dot{X}_m = j3 + 1$$

解之得

$$\dot{X}_m = \frac{j3 + 1}{(j3)^2 + 4 \times j3 + 1} = \frac{1 + j3}{-8 + j12} = 0.22 \angle -52.12^\circ$$

所以

$$x(t) = 0.22 \sin(3t - 52.12^\circ)$$

注：利用相量变换可方便地求得正弦激励下微分方程的通解。注意 $j\omega$ 不能是特征根。

7-9 已知二端元件的电压电流采用关联参考方向，若其瞬时值表达式为

$$(1) u(t) = 15 \cos(400t + 30^\circ) \text{ V}, i(t) = 3 \sin(400t + 30^\circ) \text{ A};$$

$$(2) u(t) = 8 \sin(500t + 50^\circ) \text{ V}, i(t) = 2 \sin(500t + 140^\circ) \text{ A};$$

$$(3) u(t) = 8 \cos(250t + 60^\circ) \text{ V}, i(t) = 5 \sin(250t + 150^\circ) \text{ A}.$$

试确定该元件是电阻、电感或电容，并确定其元件值。

解 (1) 因为 $u(t) = 15\cos(400t + 30^\circ) = 15\sin(400t + 120^\circ)$ (V)，故元件电压超前电流 90° 。因此，该元件是电感元件。

$$\dot{U}_m = 15 \angle 120^\circ \text{ V}, \dot{I}_m = 3 \angle 30^\circ \text{ A}$$

则元件阻抗为

$$Z = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{15 \angle 120^\circ}{3 \angle 30^\circ} = 5 \angle 90^\circ = j5 \text{ } (\Omega)$$

故其电感值为

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{5}{400} = 12.5 \text{ (mH)}$$

(2) 因为 $u(t) = 8\sin(500t + 50^\circ)$ V， $i(t) = 2\sin(500t + 140^\circ)$ A，故元件电压落后电流 90° 。因此，该元件是电容元件。

$$\dot{U}_m = 8 \angle 50^\circ \text{ V}, \dot{I}_m = 2 \angle 140^\circ \text{ A}$$

则元件阻抗为

$$Z = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{8 \angle 50^\circ}{2 \angle 140^\circ} = 4 \angle -90^\circ = -j4 \text{ } (\Omega)$$

所以，其电容值为

$$C = \frac{1}{\omega |X_C|} = \frac{1}{500 \times 4} = 500 \text{ } (\mu\text{F})$$

(3) 因为 $u(t) = 8\cos(250t + 60^\circ) = 8\sin(250t + 150^\circ)$ (V)，故元件电压与电流同相。因此，该元件是电阻元件。

$$\dot{U}_m = 8 \angle 150^\circ \text{ V}, \dot{I}_m = 5 \angle 150^\circ \text{ A}$$

则元件阻抗为

$$Z = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{8 \angle 150^\circ}{5 \angle 150^\circ} = 1.6 \angle 0^\circ = 1.6 \text{ } (\Omega)$$

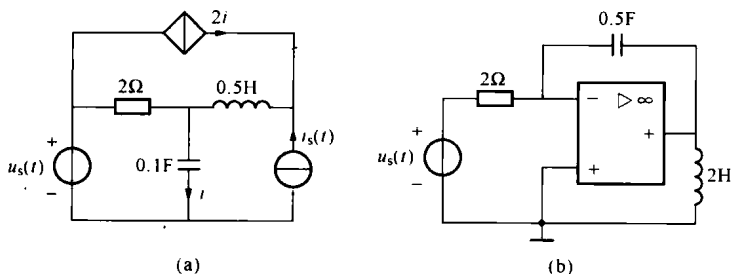
所以，其电阻值为

$$R = 1.6 \Omega$$

注：从方便角度出发，可采用有效值相量，也可采用振幅相量。

相量模型

7-10 画出题 7-10 图所示各电路的相量模型。其中， $u_s(t) = 10\sqrt{2}\sin 2t$ V， $i_s(t) = 15\sqrt{2}\cos(2t + 15^\circ)$ A。



题 7-10 图

解 (a) 因为 $i_s(t) = 15\sqrt{2} \cos(2t + 15^\circ) = 15\sqrt{2} \sin(2t + 105^\circ)$ (A), 所以

$$\dot{I}_s = 15 \angle 105^\circ \text{ A}, \dot{U}_s = 10 \angle 0^\circ \text{ A}$$

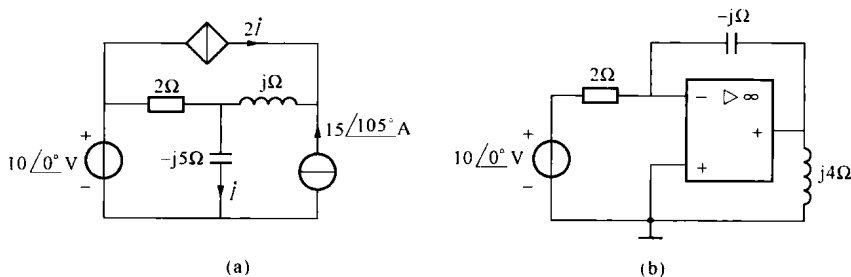
$$jX_L = j2 \times 0.5 = j(\Omega), jX_C = -j \frac{1}{2 \times 0.1} = -j5(\Omega)$$

因此, 相量模型如题 7-10 解图 (a) 所示。

(b) 因为 $u_s(t) = 10\sqrt{2} \sin 2t$ V, 所以

$$\dot{U}_s = 10 \angle 0^\circ \text{ A}, jX_L = j2 \times 2 = j4(\Omega), jX_C = -j \frac{1}{2 \times 0.5} = -j(\Omega)$$

因此, 相量模型如题 7-10 解图 (b) 所示。

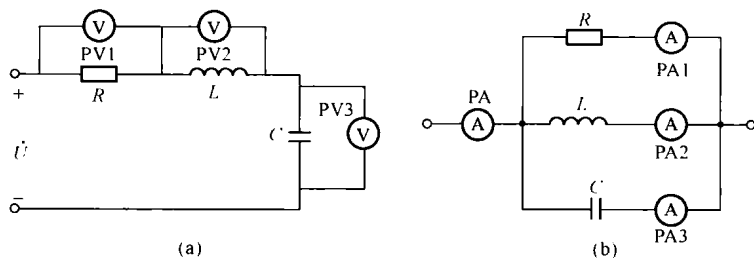


题 7-10 解图

7-11 见 [例 7-1]。

7-12 (1) 题 7-12 图 (a) 所示电路中, 电压表 PV1 的示数为 15V, 电压表 PV2 的示数为 80V, 电压表 PV3 的示数为 100V。求端电压的有效值。

(2) 题 7-12 图 (b) 所示电路中, 电流表 PA1 的示数为 5A, 电流表 PA2 的示数为 20A, 电流表 PA3 的示数为 25A。求电流表 PA 的示数。



题 7-12 图

解 (1) 所用电压的参考方向如题 7-12 解图 (a) 所示。选电流 \dot{I} 为参考相量, 即 $\dot{I} = I \angle 0^\circ$ A, 则有

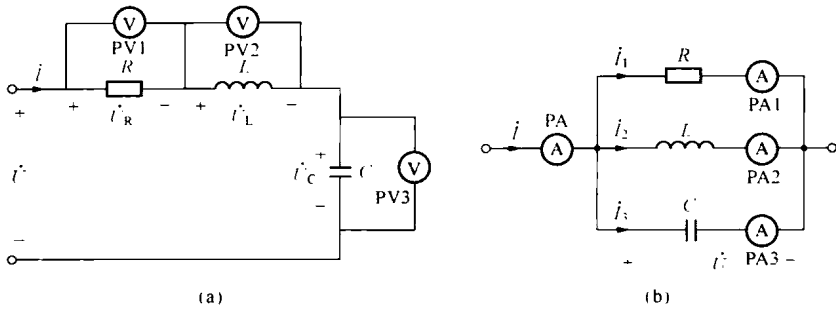
$$\dot{U}_R = 15 \angle 0^\circ \text{ V}, \dot{U}_L = j80 \text{ V}, \dot{U}_C = -j100 \text{ V}$$

由 KVL 得

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = 15 + j80 - j100 = 15 - j20 = 25 \angle -53.1^\circ \text{ (A)}$$

所以, $U = 25 \text{ V}$ 。

(2) 所用电压的参考方向如题 7-12 解图 (b) 所示。



题 7-12 解图

选电压 \dot{U} 为参考相量, 即 $\dot{U} = U \angle 0^\circ \text{ V}$, 所以

$$\dot{I}_R = 5 \angle 0^\circ \text{ A}, \dot{I}_L = -j20 \text{ A}, \dot{I}_C = j25 \text{ A}$$

由 KCL 得

$$\dot{i} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C = 5 \angle 0^\circ - j20 + j25 = 5 + j5 = 5\sqrt{2} \angle 45^\circ \text{ (A)}$$

故 $I = 5\sqrt{2} = 7.07 \text{ A}$.

注: 串联电路一般选择电流为参考相量; 并联电路一般选择电压为参考相量。

7.5 自测题及参考答案

1. 已知 3 个同频率正弦电流的相量分别为 $\dot{I}_1 = 50 \angle 60^\circ \text{ A}$, $\dot{I}_2 = -100 \angle 100^\circ \text{ A}$, $\dot{I}_{3m} = -100 + j100 \text{ A}$, 其频率为 1000 rad/s 。(1) 写出 3 个正弦电流的时域表达式; (2) 求 i_1 与 i_2 、 i_2 与 i_3 的相位差。

2. 正弦稳态电路如图 1 所示, 其中 $u_s(t) = 5\sqrt{2} \sin(100t + 30^\circ) \text{ V}$, $i_s(t) = 3\sqrt{2} \cos(100t - 60^\circ) \text{ A}$ 。画出其相量模型。

3. 图 2 所示正弦稳态电路中, 电阻、电感和电容的电压有效值分别为 20、80、100V。求图中电压 u 的有效值。

4. 图 3 所示正弦稳态电路中, 电流表 PA1、PA2 和 PA3 的示数分别为 4、6、9A。(1) 求图中电流表 PA 的示数; (2) 如果维持电流表 PA1 的示数不变, 而把电源的频率提高一倍, 再求电流表 PA 的示数。

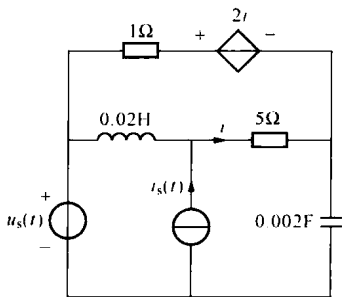


图 1

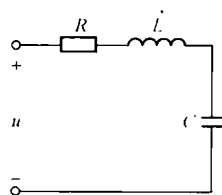


图 2

5. 图4所示正弦交流电路中, $u(t) = u_R(t) = 20\sin 2t$ V, $i(t) = 10\sin 2t$ V, $u_L(t) = 20\cos 2t$ V, 求电阻、电感和电容的参数值。

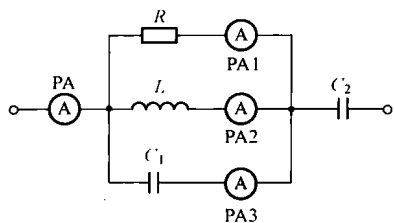


图3

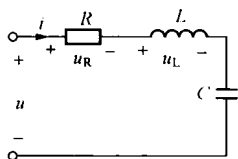


图4

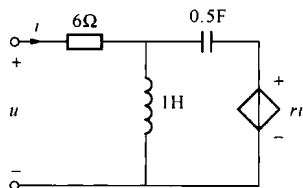


图5

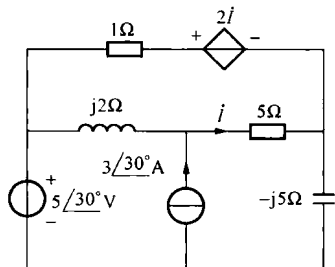
6. 正弦稳态电路如图5所示, 电源频率 $\omega = 2$ rad/s, 电压 u 落后电流 i 45° , 求受控源的控制系数 r 。

参考答案

1. (1) $i_1(t) = 50\sqrt{2} \sin(1000t + 60^\circ)$ A, $i_2(t) = 100\sqrt{2} \sin(1000t - 80^\circ)$ A, $i_3(t) = 100\sqrt{2} \sin(1000t + 135^\circ)$ A

(2) i_1 超前 i_2 140° , i_2 超前 i_3 145°

2.



3. 28.28V

4. 5A, 15.52A

5. 2Ω , 1H, 0.25F

6. -2Ω

第 8 章 正弦稳态电路的相量分析

8.1 本章知识结构图

第 8 章知识结构图如图 8-1 所示。

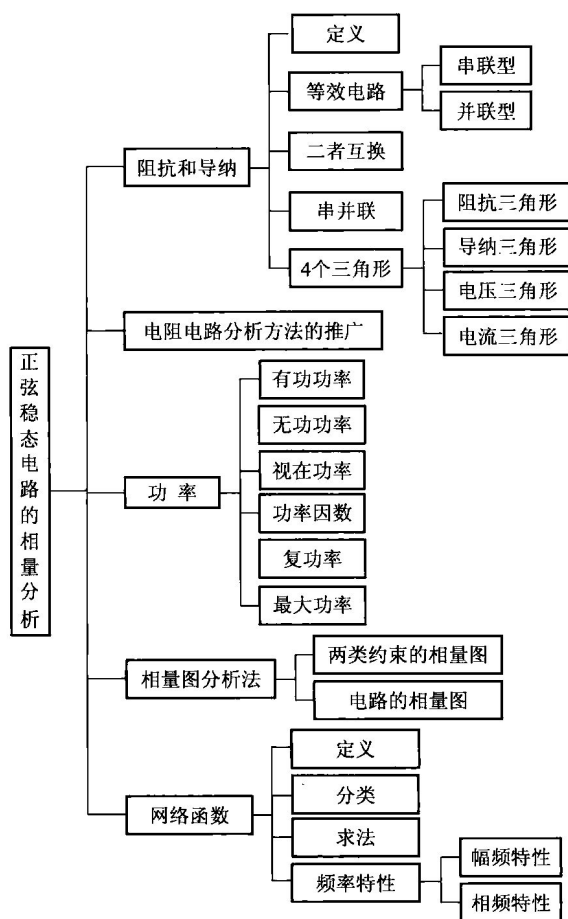


图 8-1 第 8 章知识结构图

8.2 知识点归纳与学习指导

由于正弦稳态电路相量模型的分析方法是电阻电路分析方法的推广，因此，学习正弦稳态电路的知识时，应重点放在二者的不同点上，如阻抗与导纳、功率、相量图、谐振等概念。

8.2.1 阻抗与导纳

1. 阻抗和导纳的定义

不含独立源的二端网络(见图8-2)的输入阻抗 Z 和输入导纳 Y 分别是输入电阻和输入电导概念的推广,定义为

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{i}}, Y = \frac{\dot{i}}{\dot{U}}$$

一般形式为

$$Z = |Z| \angle \theta_Z = R + jX, Y = |Y| \angle \theta_Y = G + jB$$

其中, $|Z| = U/I$, 阻抗角 $\theta_Z = \varphi_u - \varphi_i = \tan^{-1}(X/R)$; $|Y| = I/U$, 导纳角 $\theta_Y = \varphi_i - \varphi_u = \tan^{-1}(B/G)$ 。 R 和 X 分别为阻抗的电阻分量和电抗分量; G 和 B 为导纳的电导分量和电纳分量。阻抗和导纳、 G 和 R 、 B 和 X 分别是对偶量。

2. 阻抗和导纳的性质

阻抗和导纳的性质见表8-1。

表 8-1 阻抗和导纳的性质

阻抗或导纳	电路的性质		
	感性	电阻性	容性
$Z = R + jX$	$X > 0$	$X = 0$	$X < 0$
$Z = Z \angle \theta_Z$	$\theta_Z > 0$	$\theta_Z = 0$ 或 $\pm\pi$	$\theta_Z < 0$
$Y = G + jB$	$B < 0$	$B = 0$	$B > 0$
$Y = Y \angle \theta_Y$	$\theta_Y < 0$	$\theta_Y = 0$ 或 $\mp\pi$	$\theta_Y > 0$
u 与 i 之间的相位关系	u 超前 i	u 与 i 同相或反相	u 落后 i

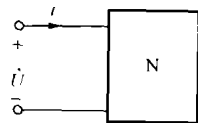


图 8-2 二端网络

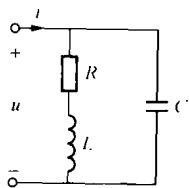


图 8-3 [例 8-1] 图

【例 8-1】 图 8-3 所示正弦稳态电路中, $R = 10\Omega$, $L = 10\text{mH}$, $C = 100\mu\text{F}$, $\omega = 10^3\text{rad/s}$ 。试问: (1) 全电路呈现容性还是感性? (2) 若电容 C 可变, 要使 u 与 i 同相, C 应为何值?

解 (1) 电感和电容的阻抗分别为

$$Z_L = j\omega L = j10^3 \times 10 \times 10^{-3} = j10 (\Omega)$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{10^3 \times 100 \times 10^{-6}} = -j10 (\Omega)$$

则电路总的阻抗为

$$Z = Z_C // (R + Z_L) = \frac{-j10 \times (10 + j10)}{-j10 + 10 + j10} = 10 - j10 (\Omega)$$

可见, $X = -10\Omega$, 故电路呈现容性。

(2) 为使 \dot{U} 与 \dot{i} 同相, 应使 Z 的虚部或导纳的虚部为零。由于电路总的导纳为

$$Y = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = j\omega C + \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j \left[\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right] = G + jB$$

令 $B = 0$, 即

$$\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = 0$$

解之得

$$C=50\mu\text{F}$$

3. 阻抗和导纳的等效互换

阻抗和导纳的两种一般等效电路如图 8-4 所示。根据网络呈现感性（或容性），电抗和电纳部分为一电感（或电容）。

对于同一二端网络， $Z=\frac{1}{Y}$ ， Z 和 Y 可以互等效转换：

$$|Y|=\frac{1}{|Z|}, \theta_Y=-\theta_Z; G=\frac{R}{R^2+X^2}, B=-\frac{X}{R^2+X^2}$$

或者

$$|Z|=\frac{1}{|Y|}, \theta_Z=-\theta_Y; R=\frac{G}{G^2+B^2}, X=-\frac{B}{G^2+B^2}$$

注意，两种等效电路中的 R 和 G 不是同一电阻，故 $G \neq \frac{1}{R}$ 。

阻抗和导纳的串并联可等效为一个阻抗或导纳，等效方法分别与电阻和电导类似。对于阻抗和导纳存在表 8-2 中的直角三角形关系。

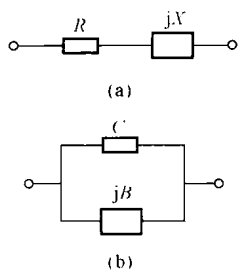


图 8-4 阻抗与导纳的等效电路

(a) 阻抗；(b) 导纳

表 8-2 阻抗和导纳的直角三角形关系

	表达式	等效电路	直角三角形
阻抗	$Z= Z \angle\theta_Z=R+jX$		 阻抗三角形 电压三角形
导纳	$Y= Y \angle\theta_Y=G+jB$		 导纳三角形 电流三角形

【例 8-2】 图 8-5 (a) 所示正弦交流电路中，已知电流表 PA 的示数为 2A，电压表 PV1 的示数为 17V，PV2 的示数为 10V。求电源电压的有效值。

解 电路的相量模型如图 8-5 (b) 所示。

$$U_{4\Omega}=2 \times 4=8 \text{ (V)}, U_{3\Omega}=2 \times 3=6 \text{ (V)}$$

由电压三角形得

$$U_L=\sqrt{U_1^2-U_{4\Omega}^2}=\sqrt{17^2-8^2}=15 \text{ (V)}, U_C=\sqrt{U_2^2-U_{3\Omega}^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8 \text{ (V)}$$

以电流 \dot{I} 为参考相量，即 $\dot{I}=2\angle 0^\circ$ A，则

$$\dot{U}_s=\dot{U}_{4\Omega}+\dot{U}_{3\Omega}+\dot{U}_L+\dot{U}_C=8+6+j15-j8=14+j7=15.65\angle 26.57^\circ \text{ (V)}$$

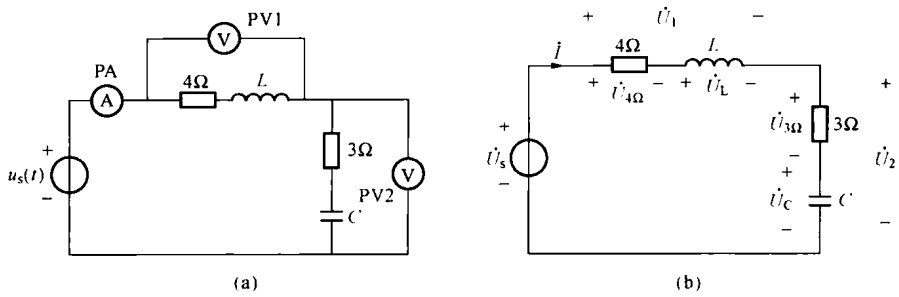


图 8-5 [例 8-2] 图

或者由电压三角形得

$$U_s = \sqrt{(U_{4\Omega} + U_{3\Omega})^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{(8+6)^2 + (15-8)^2} = 15.65 \text{ (V)}$$

所以, 电源电压的有效值为 15.65V。

8.2.2 正弦稳态电路中的功率

1. 瞬时功率

设二端网络 N 的端口电压、电流分别为

$$u(t) = \sqrt{2}U\sin(\omega t + \varphi_u), \quad i(t) = \sqrt{2}I\sin(\omega t + \varphi_i)$$

则二端网络 N 的瞬时功率为

$$\begin{aligned} p(t) &= ui = 2UI\sin(\omega t + \varphi_u)\sin(\omega t + \varphi_i) \\ &= UI\cos\theta[1 - \cos(2\omega t + 2\varphi_i)] + UI\sin\theta\sin(2\omega t + 2\varphi_i) \end{aligned}$$

式中: θ 表示电压超前电流的相位, $\theta = \varphi_u - \varphi_i$; U 和 I 为电压和电流的有效值。

其中, $UI\cos\theta[1 - \cos(2\omega t + 2\varphi_i)]$ 为瞬时有功功率分量, $UI\sin\theta\sin(2\omega t + 2\varphi_i)$ 为瞬时无功功率分量。

2. 有功功率和无功功率

电路中的有功功率 (也称为平均功率) 和无功功率是分别守恒的。有功功率和无功功率的公式见表 8-3。

表 8-3 有功和无功的功率公式

	主单位	一般公式	R	L	C	$Z=R+jX$	$Y=G+jB$
P	W	$P=UI\cos\theta$	$U_R I_R = R I_R^2$ $= \frac{U_R^2}{R}$	0	0	$ Z I^2 \cos\theta_Z = R I^2$	$ Y U^2 \cos\theta_Y = G U^2$
Q	var	$Q=UI\sin\theta$	0	$U_L I_L = X_L I_L^2$ $= \frac{U_L^2}{X_L}$	$-U_C I_C$ $= X_C I_C^2 = \frac{U_C^2}{X_C}$	$ Z I^2 \sin\theta_Z = X I^2$	$- Y U^2 \sin\theta_Y = -B U^2$

二端线性电阻只涉及有功, 不涉及无功; 而二端线性电容和电感只有无功, 没有有功。并且电吸收无功, 电容发出无功。

有功功率可用功率表测量。在图 8-6 功率表图形符号中, ab 代表电流线圈, 用来测量

电流, cd 代表电压线圈, 用来测量电压。设电压 u_{cd} 和电流 i_{ab} 的相位差为 θ , 它们的有效值分别为 U_{cd} 和 I_{ab} , 则功率表的示数为

$$P = U_{cd} I_{ab} \cos\theta$$

3. 视在功率与功率因数

视在功率

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (\text{主单位: VA})$$

功率因数

$$\lambda = \cos\theta = \frac{P}{S}$$

功率因数 $\cos\theta$ 是正弦稳态电路功率计算中的一个重要参量。通过在感性负载两端并联合适的电容进行无功补偿, 可以提高整个电路的功率因数。对不含独立电源的二端网络而言, $\theta = \theta_z = -\theta_Y$ 。

$\cos\theta$ 是个偶函数, 其大小无法反映 θ 的正负, 即无法反映网络的性质。通常在给出 $\cos\theta$ 值的同时, 其后附加说明网络的性质, 如 $\cos\theta = 0.866$ (滞后或感性), 表示端口电流滞后端口电压 θ 角, 网络对外呈电感性, 即 $\theta > 0$ 。

4. 复功率

复功率 \tilde{S} 是一个可直接用电压相量和电流相量计算的量, 一般公式为

$$\tilde{S} = \dot{U} \dot{I}^* = UI \angle -\theta = S \angle -\theta = P + jQ \quad (\text{主单位: VA})$$

电路的复功率是守恒的。

【例 8-3】 分别求图 8-7 (a) 所示正弦稳态电路中三条支路吸收的复功率。

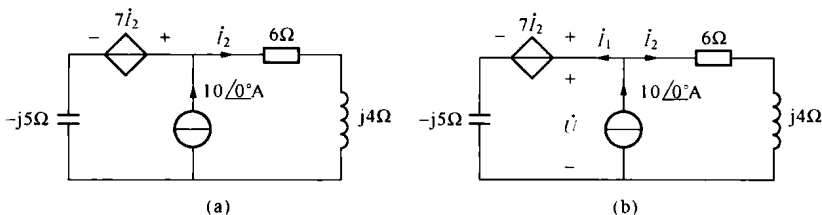


图 8-7 [例 8-3] 图

解 所用电量的参考方向如图 8-7 (b) 所示。由 KVL 得

$$(6 + j4) \times \dot{I}_2 + j5 \times (10 - \dot{I}_2) - 7\dot{I}_2 = 0$$

$$(1 + j)\dot{I}_2 = j50$$

所以

$$\dot{I}_2 = \frac{j50}{1 + j} = 25 + j25 = 25\sqrt{2} \angle 45^\circ \quad (\text{A})$$

由 KCL 得

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_s - \dot{I}_2 = 10 \angle 0^\circ - \dot{I}_2 = 10 - \dot{I}_2 = 10 - 25 - j25 = -15 - j25 \quad (\text{A})$$

则

$$\dot{U} = (6 + j4)\dot{I}_2 = (6 + j4) \times (25 + j25) = 50 + j250 \quad (\text{V})$$

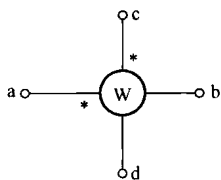


图 8-6 功率表图形符号

各支路吸收的复功率分别为

$$\tilde{S}_1 = \dot{U} \dot{i}_1^* = (50 + j250) \times (-15 + j25) = -7000 - j2500 \text{ (VA)}$$

$$\tilde{S}_2 = \dot{U} \dot{i}_2^* = (50 + j250) \times (25 - j25) = 7500 + j5000 \text{ (VA)}$$

$$\tilde{S}_s = -\dot{U} \dot{i}_s^* = -(50 + j250) \times 10 = -500 - j2500 \text{ (VA)}$$

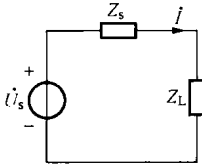


图 8-8 最大功率传递

5. 最大功率传递定理

设图 8-8 所示正弦稳态电路中的负载阻抗 $Z_L = |Z_L| \angle \theta_z = R_L + jX_L$, 最大功率传递分为 R_L 和 X_L 任意可调 ($|Z_L|$ 和 θ_z 任意可调) 与 R_L 和 X_L 可调, 但 X_L/R_L 保持恒定 ($|Z_L|$ 任意可调, θ_z 保持恒定) 两种情况。学习重点为 R_L 和 X_L 任意可调的情况。

对于图 8-8 所示电路中, 若负载阻抗 $Z_L = R_L + jX_L$ 任意可调, 则当 $Z_L = Z_s^*$ (共轭匹配) (即 $R_L = R_s$, $X_L = -X_s$) 时, 负载 Z_L 可获得最大功率, 且该最大功率为

$$P_{L\max} = \frac{U_s^2}{4R_s}$$

电阻电路的最大功率传递定理是正弦稳态电路最大功率传递定理的特例。与电阻电路相似, 求最大功率传输条件和负载上获得的最大功率, 一般需要结合戴维南定理进行求解。

8.2.3 正弦稳态电路的相量分析法

运用相量法可将电阻电路的各种分析方法, 如等效变换法、节点分析法、网孔分析法、回路分析法、叠加定理、戴维南定理等推广到正弦稳态电路的相量模型。其主要特点是这种方法所建立的电路方程为相量形式的复数代数方程。

相量分析法的基本步骤如下:

- (1) 由电路的时域模型画出相量模型;
- (2) 对相量模型进行分析;
- (3) 由待求量的相量写出其正弦量。

应用相量法求解正弦稳态电路时, 若已知条件只给出电压 (或电流) 的有效值而初相未知时, 通常要人为地选择一个电压或电流作为参考相量 (取其初相为零, 大小已知或未知均可)。

8.2.4 用相量图分析正弦稳态电路

相量图能够清晰直观地反映电路中各电压、电流之间的大小关系和相位关系, 体现了电路中的两类约束。对于某些单电源电路, 借助相量图分析, 可避免繁琐的复数运算, 使计算得到简化。这种借助相量图分析正弦稳态电路的方法称为相量图分析法。

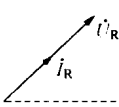
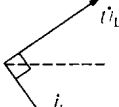
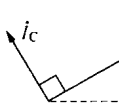
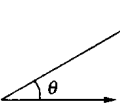
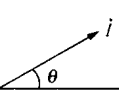
相量图分析法一般分为两步:

第一步: 结合已知条件画出电路的相量图。画电路的相量图时, 一般从离电源最远侧画起。首先根据最远侧两条支路为串联还是并联, 选择电压相量或电流相量作为参考相量; 然后, 以参考相量为基础, 根据常用的基本相量图, 相对电源由远及近逐条支路画出相关的电压相量和电流相量。相量图中的特殊角 (30° 、 45° 、 60° 、 90° 等)、特殊边 (平行、垂直、等边) 都应标出。

第二步: 由相量图所表示的几何关系, 利用初等几何、代数和三角知识求出未知量。学

习相量图分析法时,为了正确地作出相量图,必须熟练掌握 R 、 L 、 C 元件以及 RL 和 RC 串联、并联支路的相量图和 KCL、KVL 的相量图。元件的相量图见表 8-4。注意元件相量图是在关联参考方向下画出的。

表 8-4 元件的相量图

	R	L	C	RL 支路	RC 支路
相量图					
关系式	$U_R = RI_R$	$U_L = \omega LI_L$	$U_C = \frac{1}{\omega C} I_C$	串联 $U = \sqrt{R^2 + X^2} I$, $\theta = \arctan \frac{X}{R}$ 并联 $I = \sqrt{G^2 + B^2} U$, $\theta = \arctan \frac{B}{G}$	

KCL、KVL 的相量图可用平行四边形法则或者三角形法则作出,如 $\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$ 的相量图见图 8-9 所示;有时也用多边形法则,如 $\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3$ 的相量图见图 8-10。

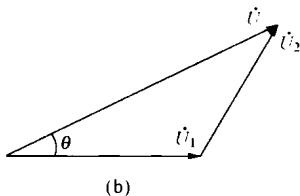
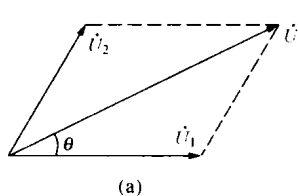


图 8-9 相量求和的相量图

(a) 平行四边形法则; (b) 三角形法则

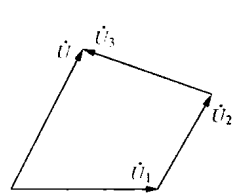


图 8-10 多边形法则

【例 8-4】 在图 8-11 (a) 所示正弦稳态电路中, $I_1 = 3A$, $I_2 = 5A$, $U = 65V$, $r = 4\Omega$, $\omega = 3000\text{rad/s}$, 且 u 与 i 同相。试求 R 、 L 和 C 。

解 设 \dot{U}_C 的参考方向如图 8-11 (b) 所示。以 \dot{U}_C 为参考相量, 即 $\dot{U}_C = U_C \angle 0^\circ$, 因为 \dot{U} 与 \dot{i} 同相, 所以, 电路并联部分的输入阻抗为一电阻。因此, \dot{U}_C 和 \dot{i} 同相。 \dot{I}_1 超前 $\dot{U}_C 90^\circ$, \dot{I}_2 滞后 \dot{U}_C , 且 \dot{i} 、 \dot{I}_1 和 \dot{I}_2 构成一个直角三角形, 电路的相量图如图 8-11 (c) 所示。

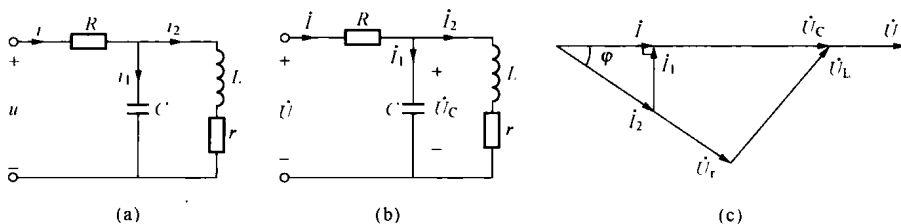


图 8-11 [例 8-4] 图

由图 8-11 (c) 得

$$I = \sqrt{I_2^2 - I_1^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ (A)}, \quad \varphi = \arcsin \frac{I_1}{I_2} = \arcsin \frac{3}{5} = 36.9^\circ$$

$$U_r = rI_2 = 4 \times 5 = 20 \text{ (V)}, \quad U_L = U_r \tan \varphi = 20 \tan 36.9^\circ = 15 \text{ (V)}$$

$$U_C = \sqrt{U_r^2 + U_L^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25 \text{ (V)}$$

所以

$$X_L = \frac{U_L}{I_2} = \frac{15}{5} = 3 \text{ } (\Omega), \quad L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{3}{3000} = 1 \text{ (mH)}$$

$$|X_C| = \frac{U_C}{I_1} = \frac{25}{3} \text{ } (\Omega), \quad C = \frac{1}{|X_C| \omega} = \frac{1}{\frac{25}{3} \times 3000} = 40 \text{ } (\mu\text{F})$$

又因为

$$U_R = U - U_C = 65 - 25 = 40 \text{ (V)}$$

所以

$$R = \frac{U_R}{I} = \frac{40}{4} = 10 \text{ } (\Omega)$$

8.2.5 正弦稳态电路的网络函数

1. 定义

在单一激励下的正弦稳态电路中，响应相量 \dot{R} 与激励相量 \dot{E} 之比定义为正弦稳态下的网络函数，即

$$H(j\omega) = \frac{\dot{R}}{\dot{E}}$$

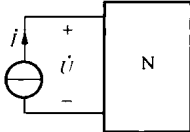
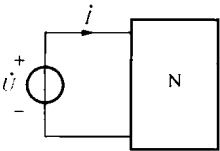
通过分析相量模型找出响应相量与激励相量之间的关系，代入上述定义式可求出网络函数。

2. 分类

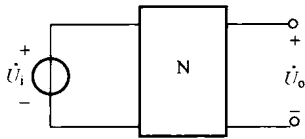
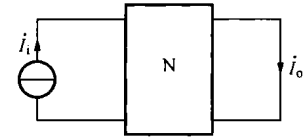
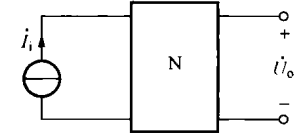
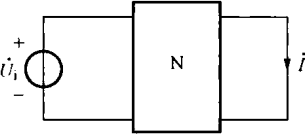
根据激励和响应是否位于同一端口，网络函数分两大类。再依据激励和响应是电压还是电流可进一步划分，见表 8-5。

表 8-5

网络函数的分类

名称		定义式
驱动点函数	激励和响应位于同一端口	 $Z(j\omega) = \frac{\dot{U}}{\dot{I}}$
		 $Y(j\omega) = \frac{\dot{I}}{\dot{U}}$

续表

名 称		定 义 式
转 移 函 数	激 励 和 响 应 位 于 不 同 的 端 口	 $A_u(j\omega) = \frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_i}$
		 $A_i(j\omega) = \frac{\dot{I}_o}{\dot{I}_i}$
		 $Z_T(j\omega) = \frac{\dot{U}_o}{\dot{I}_i}$
		 $Y_T(j\omega) = \frac{\dot{I}_o}{\dot{U}_i}$

3. 频率特性

网络函数一般是频率的复函数，可写成下面形式

$$H(j\omega) = H(\omega) / \theta(\omega)$$

其中， $H(\omega) = |\dot{R}| / |\dot{E}|$ ，称为幅频特性，反映网络函数的模与频率之间的关系。 $\theta(\omega) = \phi_{\dot{R}} - \phi_{\dot{E}}$ ，称为相频特性，反映网络函数的相角与频率的关系。同时有 $H(\omega) = H(-\omega)$ ， $\theta(\omega) = -\theta(-\omega)$ 。幅频特性和相频特性统称为频率特性。幅频特性和相频特性的曲线表示分别称为幅频特性曲线和相频特性曲线，二者统称为频率特性曲线。

幅频特性的幅值不小于其最大值的 $1/\sqrt{2}$ 的频率范围定义为电路的通频带，记作 BW。幅频特性的幅值下降到最大值的 $1/\sqrt{2}$ 时所对应的频率称为截止频率（亦称转折频率或者半功率点频率），记为 ω_c 。

【例 8-5】 求图 8-12 (a) 所示正弦稳态电路的电压转移函数 $\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}$ 的幅频特性和相频特性。其中 $R_1 = R_2 = 1\text{k}\Omega$ ， $C_1 = 1\mu\text{F}$ ， $C_2 = 0.01\mu\text{F}$ 。

解 所用电量的参考方向如图 8-12 (b) 所示。令

$$Y_1 = \frac{1}{R_1} + j\omega C_1, \quad Y_2 = \frac{1}{R_2} + j\omega C_2$$

由运放的虚短特性得

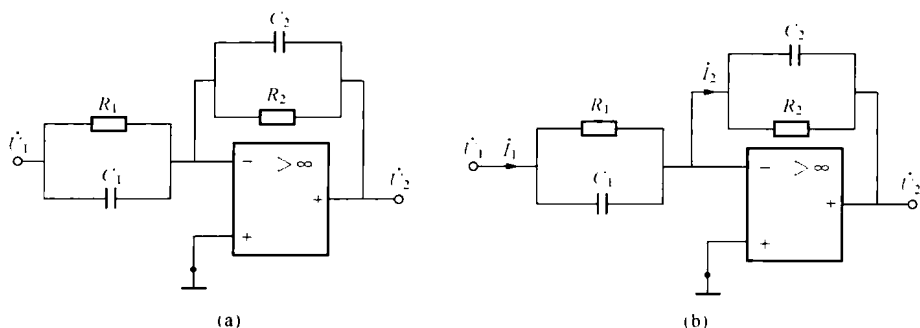


图 8-12 [例 8-5] 图

$$\dot{i}_1 = Y_1 \dot{U}_1 = \left(\frac{1}{R_1} + j\omega C_1 \right) \dot{U}_1, \quad \dot{i}_2 = -Y_2 \dot{U}_2 = -\left(\frac{1}{R_2} + j\omega C_2 \right) \dot{U}_2$$

利用运放的虚断特性得

$$\dot{i}_1 = \dot{i}_2$$

即

$$\left(\frac{1}{R_1} + j\omega C_1 \right) \dot{U}_1 = -\left(\frac{1}{R_2} + j\omega C_2 \right) \dot{U}_2$$

所以电压转移函数为

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = -\frac{\frac{1}{R_1} + j\omega C_1}{\frac{1}{R_2} + j\omega C_2} = -\frac{R_2 + j\omega C_1 R_1 R_2}{R_1 + j\omega C_2 R_1 R_2} = -\frac{1 + j10^{-3}\omega}{1 + j10^{-5}\omega} = -\frac{10^5 + j100\omega}{10^5 + j\omega}$$

则幅频特性为

$$\frac{U_2}{U_1} = \sqrt{\frac{10^{10} + 10^4 \omega^2}{10^{10} + \omega^2}} = 100 \sqrt{\frac{10^6 + \omega^2}{10^{10} + \omega^2}}$$

相频特性为

$$\begin{aligned} \theta(\omega) &= 180^\circ + \tan^{-1}\left(\frac{100\omega}{10^5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{10^5}\right) \\ &= 180^\circ + \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{10^3}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{10^5}\right) \end{aligned}$$

8.3 重点、难点与考点

重点与难点

本章的重点是相量模型的分析方法（电阻电路方法的推广）、正弦稳态电路的功率和相量图分析法。难点为功率的不同定义、相量图分析法以及网络函数。

考点

本章考试的重点和热点主要集中在正弦稳态电路的功率及相量模型的分析方法，有时也有相量图分析法。

8.4 第8章习题选解

阻抗与导纳

8-1 [提示] 求输入阻抗方法与求电阻电路输入电阻的方法类似。(a) 利用阻抗的串并联公式求得。(b) 将端口电压相量用端口电流相量表示, 代入定义式获得。

8-2 见 [例 8-1]。

8-3 题 8-3 图所示正弦稳态电路中, 已知 $u_a(t) = 10\sin(\omega t + 45^\circ)$ V, $u_b(t) = 5\sin(\omega t - 135^\circ)$ V, $\omega = 1000\text{rad/s}$, $|Z_C| = 10\Omega$ 。求负载阻抗 Z_L 。

解 因为 $u_a(t) = 10\sin(\omega t + 45^\circ)$ V, $u_b(t) = 5\sin(\omega t - 135^\circ)$ V, 所以

$$\dot{U}_{am} = 10 \angle 45^\circ \text{ V}, \dot{U}_{bm} = 5 \angle -135^\circ \text{ V}$$

又因为 $Z_C = -j10\Omega$, 所以

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_{bm}}{Z_C} = \frac{5 \angle -135^\circ}{-j10} = 0.5 \angle -45^\circ \text{ (A)}$$

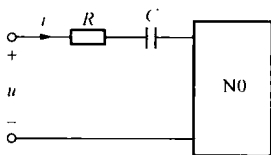
因此

$$Z_m = \frac{\dot{U}_{am}}{\dot{I}_m} = \frac{10 \angle 45^\circ}{0.5 \angle -45^\circ} = j20 \text{ (}\Omega\text{)}$$

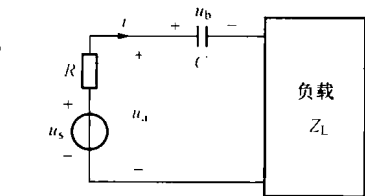
而 $Z_i = Z_C + Z_L$, 所以

$$Z_L = Z_m - Z_C = j20 - (-j10) = j30 \text{ (}\Omega\text{)}$$

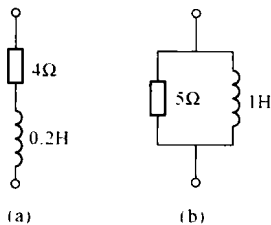
8-4 题 8-4 图所示正弦稳态电路中, N0 为不含独立电源的网络。已知 $R = 4\Omega$, $C = 0.01\text{F}$, $u(t) = 4\sqrt{2}\sin(10t + 15^\circ)$ V, $i(t) = 0.5\sin(10t + 60^\circ)$ A。求网络 N0 两种形式的最简等效电路及其元件参数值。



题 8-4 图



题 8-3 图



题 8-4 解图

解 因为 $u(t) = 4\sqrt{2}\sin(10t + 15^\circ)$ V, $i(t) = 0.5\sin(10t + 60^\circ)$ A, 所以

$$\dot{U} = 4 \angle 15^\circ \text{ V}, \dot{I} = \frac{0.5}{\sqrt{2}} \angle 60^\circ \text{ A}$$

则二端网络的总阻抗为

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{i}} = \frac{4 \angle 15^\circ}{\frac{0.5}{\sqrt{2}} \angle 60^\circ} = 8\sqrt{2} \angle -45^\circ = 8 - j8 \quad (\Omega)$$

而 RC 串联支路的阻抗为

$$Z_{RC} = 4 - j \frac{1}{\omega C} = 4 - j10 \quad (\Omega)$$

所以, 网络 N_0 的阻抗为

$$Z_0 = Z - Z_{RC} = 8 - j8 - (4 - j10) = 4 + j2 = R_0 + jX_0$$

即

$$R_0 = 4 \Omega, X_0 = 2 \Omega > 0$$

因此

$$L = \frac{X_0}{\omega} = \frac{2}{10} = 0.2 \quad (\text{H})$$

网络 N_0 的串联型最简等效电路如题 8-4 解图 (a) 所示。网络 N_0 的导纳为

$$Y_0 = \frac{1}{Z_0} = \frac{1}{4 + j2} = \frac{4 - j2}{20} = 0.2 - j0.1 = G_0 + jB_0$$

即

$$G_0 = 0.2 \text{ S}, B_0 = -0.1 \text{ S} < 0$$

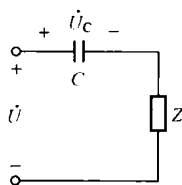
所以

$$L_0 = -\frac{1}{B_0 \omega} = -\frac{1}{-0.1 \times 10} = 1 \quad (\text{H})$$

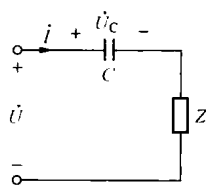
网络 N_0 的并联型最简等效电路如题 8-4 解图 (b) 所示。

8-5 题 8-5 图所示正弦稳态电路中, $U = 100 \text{ V}$, $U_C = 100\sqrt{3} \text{ V}$, $X_C = -100\sqrt{3} \Omega$ 。阻抗 Z 的阻抗角 $|\theta| = 60^\circ$ 。求阻抗 Z 和电路的输入阻抗 Z_i 。

解 设电流 \dot{i} 的参考方向如题 8-5 解图所示。因为 $X_C = -100\sqrt{3} \Omega$, $U_C = 100\sqrt{3} \text{ V}$, 所以



题 8-5 图



题 8-5 解图

$$I = \frac{U_C}{|X_C|} = \frac{100\sqrt{3}}{100\sqrt{3}} = 1 \quad (\text{A})$$

则

$$|Z_i| = \frac{U}{I} = \frac{100}{1} = 100 \quad (\Omega)$$

又因为 $U = 100 \text{ V} < U_C = 100\sqrt{3} \text{ V}$, 所以阻抗 Z 应为感性阻抗, 即

$$\theta = 60^\circ$$

设 $Z = |Z| \angle 60^\circ = |Z| \cos 60^\circ + j|Z| \sin 60^\circ = R + jX = R + j\sqrt{3}R$, 则

$$Z_i = Z + jX_C = R + j\sqrt{3}R - j100\sqrt{3} = R + j(\sqrt{3}R - 100\sqrt{3})$$

所以 $|Z_i|^2 = R^2 + (\sqrt{3}R - 100\sqrt{3})^2 = 100^2$
 即 $R^2 - 150R + 5000 = 0$
 解之得

$$R_1 = 100\Omega, X_1 = \sqrt{3}R_1 = 100\sqrt{3}\Omega$$

或者 $R_2 = 50\Omega, X_2 = \sqrt{3}R_2 = 50\sqrt{3}\Omega$
 所以

$$Z = R_1 + jX_1 = 100 + j100\sqrt{3}\Omega \text{ 或 } Z = R_2 + jX_2 = 50 + j50\sqrt{3}\Omega$$

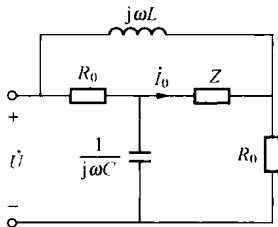
当 $Z = R_1 + jX_1 = 100 + j100\sqrt{3}\Omega$ 时, $Z_i = Z + jX_C = 100 + j100\sqrt{3} - j100\sqrt{3} = 100\Omega$ 。

当 $Z = R_2 + jX_2 = 50 + j50\sqrt{3}\Omega$ 时, $Z_i = Z + jX_C = 50 + j50\sqrt{3} - j100\sqrt{3} = 50 - j50\sqrt{3}\Omega$ 。

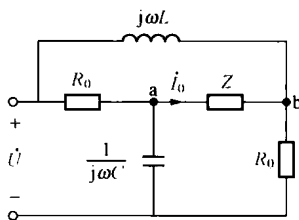
注: 相同性质的阻抗串联, 总电压的有效值一定大于每个阻抗电压的有效值; 容性阻抗和感性阻抗相串联, 总电压的有效值有可能小于某一阻抗电压的有效值。

8-6 题 8-6 图所示正弦稳态电路中, $L=1\text{H}$, $R_0=1\text{k}\Omega$, $Z=3+j5\Omega$ 。试求: (1) 当 $\dot{I}_0=0$ 时, C 值为多少? (2) 在 $\dot{I}_0=0$, 输入阻抗 Z_i 应为何值?

解 (1) 节点编号如题 8-6 解图所示。因为 $\dot{I}_0=0$, 所以 $\dot{U}_{ab}=0$, 说明 a、b 两点等电位, 电桥平衡, 所以



题 8-6 图



题 8-6 解图

$$R_0^2 = \frac{1}{j\omega C} \cdot j\omega L = \frac{L}{C}$$

则

$$C = \frac{L}{R_0^2} = \frac{1}{10^6} = 1 (\mu\text{F})$$

(2) 当 $\dot{I}_0=0$ 时, Z 支路可断开, 输入阻抗为

$$Z_i = \left(R_0 + \frac{1}{j\omega C}\right) // (R_0 + j\omega L) = \frac{R_0^2 + jR_0\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) + \frac{L}{C}}{2R_0 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

将 $R_0^2 = \frac{L}{C}$ 代入上式得

$$Z_i = \frac{R_0^2 + jR_0\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) + R_0^2}{2R_0 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = R_0 \frac{2R_0 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{2R_0 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = R_0 = 1 (\text{k}\Omega)$$

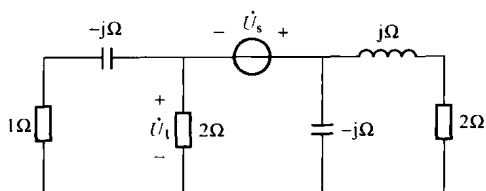
注：交流电桥的平衡条件与电阻电桥的平衡条件类似。

两类约束

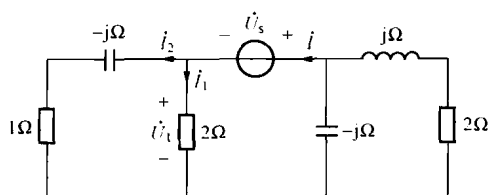
8-8 [提示] 以端口电压为参考相量，先求端口电流，再用分流公式求另外两个电流。

8-9 见 [例 8-2]。

8-10 电路如题 8-10 图所示，已知 $\dot{U}_1 = 4 \angle 0^\circ \text{ V}$ 。试求 \dot{U}_s 。



题 8-10 图



题 8-10 解图

解 所用电流的参考方向如题 8-10 解图所示。因为 $\dot{U}_1 = 4 \angle 0^\circ \text{ V}$ ，所以

$$\dot{i}_1 = \frac{\dot{U}_1}{2} = 2 \angle 0^\circ \text{ A}, \quad \dot{i}_2 = \frac{\dot{U}_1}{1-j} = \frac{4 \angle 0^\circ}{1-j} = 2 + j2 \text{ (A)}$$

由 KCL 得

$$\dot{i} = \dot{i}_1 + \dot{i}_2 = 2 + 2 + j2 = 4 + j2 = 4.47 \angle 26.57^\circ \text{ (A)}$$

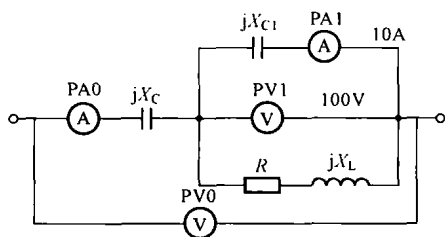
而

$$Z = (-j) // (2 + j) = 0.5 - j1 = 1.118 \angle -63.43^\circ \text{ (}\Omega\text{)}$$

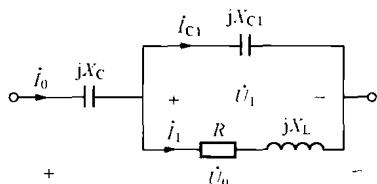
所以

$$\begin{aligned} \dot{U}_s &= -Z\dot{i} - \dot{U}_1 = -4.47 \angle 26.57^\circ \times 1.118 \angle -63.43^\circ - 4 \angle 0^\circ \\ &= -8 + j3 = 8.54 \angle 159.4^\circ \text{ (V)} \end{aligned}$$

8-11 题 8-11 图所示电路中， $X_C = -10\Omega$ ， $R = 5\Omega$ ， $X_L = 5\Omega$ 。求 PA0 的示数及 PV0 的示数。（各电表指示有效值）



题 8-11 图



题 8-11 解图

解 所用电压的参考方向如题 8-11 解图所示。以 \dot{U}_1 为参考相量，即 $\dot{U}_1 = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$ ，所以

$$\dot{I}_{C1} = j10A, \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{R + jX_L} = \frac{100 \angle 0^\circ}{5 + j5} = 10 - j10 \text{ (A)}$$

由 KCL 得

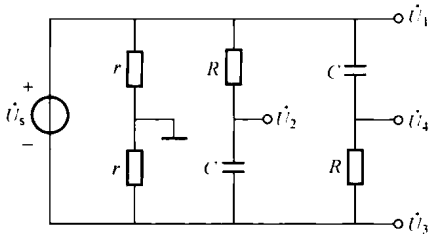
$$\dot{I}_0 = \dot{I}_{C1} + \dot{I}_1 = j10 + 10 - j10 = 10 \angle 0^\circ \text{ (A)}$$

所以

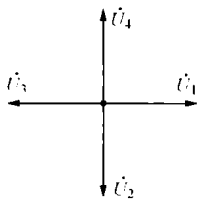
$$\dot{U}_0 = jX_C \dot{I}_0 + \dot{U}_1 = -j10 \times 10 + 100 \angle 0^\circ = 100 - j100 = 100\sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ (V)}$$

因此, 电流表 PA0 的示数为 10A, 电压表 PV0 的示数为 141.4V。

8-12 题 8-12 图所示为雷达显示器应用的移相电路。设 $\dot{U}_s = U_s \angle 0^\circ$, $R = \frac{1}{\omega C}$ 。试证明电压 \dot{U}_1 、 \dot{U}_2 、 \dot{U}_3 、 \dot{U}_4 (对地的电位) 的幅度相等、相位依次差 90° 。



题 8-12 图



题 8-12 解图

解 由分压公式得

$$\dot{U}_1 = \frac{r}{r+r} \dot{U}_s = \frac{1}{2} U_s \angle 0^\circ$$

则

$$\dot{U}_2 = -\frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} \dot{U}_s + \dot{U}_1 = -\frac{1}{1-j1} \dot{U}_s + \dot{U}_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1-j1}\right) \dot{U}_s = \frac{1}{2} U_s \angle -90^\circ$$

$$\dot{U}_3 = -\frac{1}{2} U_s \angle 0^\circ = \frac{1}{2} U_s \angle -180^\circ = \frac{1}{2} U_s \angle 180^\circ$$

$$\dot{U}_4 = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} \dot{U}_s + \dot{U}_3 = \frac{1}{1-j1} \dot{U}_s + \dot{U}_3 = \left(\frac{1}{1-j1} - \frac{1}{2}\right) \dot{U}_s = \frac{1}{2} U_s \angle 90^\circ$$

因此, 四个电压的幅度相等, 相位依次差 90° 。各电压的相量关系如题 8-12 解图所示。

功率

8-14 试求具有以下特点的有功功率 P 、无功功率 Q 和功率因数。

(1) $\dot{I} = 2 \angle 40^\circ \text{ A}$, $\dot{U} = 450 \angle 70^\circ \text{ V}$; (2) $\dot{I} = 1.5 \angle -20^\circ \text{ A}$, $Z = 5000 \angle 15^\circ \Omega$;

(3) $\dot{U} = 200 \angle 35^\circ \text{ V}$, $Z = 1500 \angle -15^\circ \Omega$; (4) $I = 5.2 \text{ A}$, $U = 220 \text{ V}$, $Q = 400 \text{ var}$;

(5) $\dot{I} = 10 \angle 40^\circ \text{ A}$, $U = 400 \text{ V}$, $\text{Re}[Z] = 25 \Omega$, $\theta_z > 0$

解 (1) 因为 $\tilde{S} = \dot{U} \dot{i}^* = 450 \angle 70^\circ \times 2 \angle -40^\circ = 900 \angle 30^\circ = 780 + j450$ (VA)

所以

$$P = 780 \text{ W}, Q = 450 \text{ var}, \cos\theta = \frac{P}{S} = \frac{780}{900} = 0.867 \text{ (感性)}$$

(2) 因为 $\dot{U} = Z\dot{i} = 5000 \angle 15^\circ \times 1.5 \angle -20^\circ = 7500 \angle -5^\circ$ (V)

$$\tilde{S} = \dot{U} \dot{i}^* = 7500 \angle -5^\circ \times 1.5 \angle 20^\circ = 11250 \angle 15^\circ = 10867 + j2912 \text{ (VA)}$$

所以

$$P = 10867 \text{ W}, Q = 2912 \text{ var}, \cos\theta = \frac{P}{S} = \frac{10867}{11250} = 0.966 \text{ (感性)}$$

(3) 因为 $\dot{i} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{200 \angle 35^\circ}{1500 \angle -15^\circ} = \frac{2}{15} \angle 50^\circ$ (A)

$$\tilde{S} = \dot{U} \dot{i}^* = 200 \angle 35^\circ \times \frac{2}{15} \angle -50^\circ = 26.67 \angle -15^\circ = 25.76 - j6.9 \text{ (VA)}$$

所以

$$P = 25.76 \text{ W}, Q = -6.9 \text{ var (容性)}, \cos\theta = \frac{P}{S} = \frac{25.76}{26.67} = 0.966 \text{ (容性)}$$

(4) 因为 $S = UI = 220 \times 5.2 = 1144$ (VA), 所以

$$P = \sqrt{S^2 - Q^2} = \sqrt{1144^2 - 400^2} = 1072 \text{ (W)}, \cos\theta = \frac{P}{S} = \frac{1072}{1144} = 0.937 \text{ (感性)}$$

(5) 因为 $S = UI = 400 \times 10 = 4000$ (VA), 所以

$$P = I^2 \operatorname{Re}[Z] = 10^2 \times 25 = 2500 \text{ (W)}, Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{4000^2 - 2500^2} = 3122 \text{ (var)}$$

$$\cos\theta = \frac{P}{S} = \frac{2500}{4000} = 0.625 \text{ (感性)}$$

8-15 求题 8-15 图所示正弦稳态电路中各元件的有功功率, 并验证有功功率守恒。

解 由 KCL 和元件 VAR 的相量形式得

$$\begin{cases} \frac{\dot{U}}{1-j} + \frac{\dot{U}}{j} - \dot{i} = 6 \angle 0^\circ \\ \dot{i} = \frac{\dot{U}}{1-j} \end{cases}$$

解之得

$$\dot{U} = 6 \angle 90^\circ \text{ V}, \dot{i} = 3\sqrt{2} \angle 135^\circ \text{ A}$$

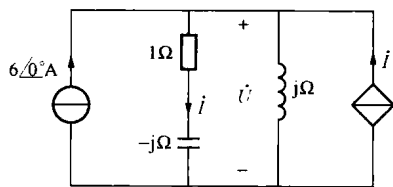
则各元件吸收的有功功率分别为

$$P_s = -UI_s \cos(90^\circ - 0^\circ) = -6 \times 6 \times 0 = 0, P_R = RI^2 = 1 \times (3\sqrt{2})^2 = 18 \text{ (W)}$$

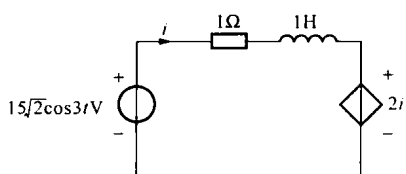
$$P_C = 0, P_L = 0, P_1 = -UI \cos(90^\circ - 135^\circ) = -6 \times 3\sqrt{2} \cos(-45^\circ) = -18 \text{ (W)}$$

显然, $P_R + P_L + P_C + P_1 + P_s = 0$, 即电路中的平均功率守恒。

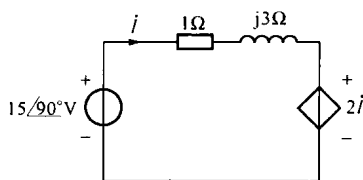
8-16 求题 8-16 图所示正弦稳态电路中各元件的无功功率, 并验证无功功率守恒。



题 8-15 图



题 8-16 图



题 8-16 解图

解 该电路的相量模型如题 8-16 解图所示。单回路电流方程的相量形式为

$$(1+j3)\dot{I} = 15\angle 90^\circ - 2\dot{I}$$

整理得

$$(3+j3)\dot{I} = 15\angle 90^\circ$$

解得

$$\dot{I} = \frac{15\angle 90^\circ}{3+j3} = \frac{5}{\sqrt{2}}\angle 45^\circ \text{ (A)}$$

则各元件吸收的无功功率分别为

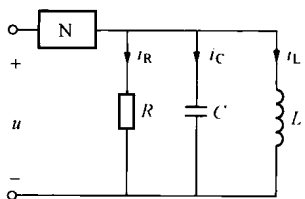
$$Q_s = -U_s I \sin\theta = -15 \times \frac{5}{\sqrt{2}} \times \sin(90^\circ - 45^\circ) = -37.5 \text{ (var)}, Q_R = 0$$

$$Q_L = X_L I^2 = 3 \times \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 = 37.5 \text{ (var)}, Q_{2I} = 2I \cdot I \sin 0^\circ = 0$$

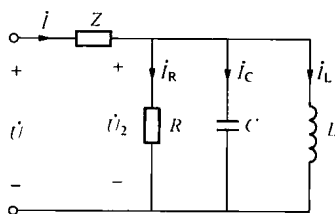
显然, $Q_s + Q_R + Q_L + Q_{2I} = 0$, 即电路中的无功功率守恒。

8-17 [提示] 应用倒推法, 直接根据两类约束的相量形式求解。本题电路消耗的功率即为电路中电阻消耗的功率, 由此可确定电阻值。

8-18 题 8-18 图所示正弦稳态电路中, 方框 N 部分的阻抗 $Z = (2+j2)\Omega$, 各电流的有效值分别为 $I_R = 5\text{A}$, $I_C = 8\text{A}$, $I_L = 3\text{A}$, 电路消耗的总功率为 200W 。求总电压 u 的有效值。



题 8-18 图



题 8-18 解图

解 相量模型如题 8-18 解图所示。以 \dot{U}_2 为参考相量, 即 $\dot{U}_2 = U_2\angle 0^\circ \text{ V}$, 则

$$\dot{I}_R = 5\angle 0^\circ \text{ A}, \dot{I}_L = -j3\text{A}, \dot{I}_C = j8\text{A}$$

由 KCL 得

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C = 5 - j3 + j8 = 5 + j5 = 5\sqrt{2}\angle 45^\circ \text{ (A)}$$

电路消耗的总功率为

$$P = I_R^2 \times R + I^2 \times 2 = 25R + 50 \times 2 = 200 \text{ (W)}$$

则

$$R = 4 \Omega$$

所以

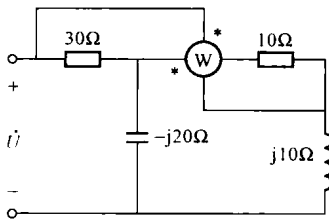
$$\dot{U}_2 = RI_R \angle 0^\circ = 20 \angle 0^\circ \text{ V}$$

由 KVL 得

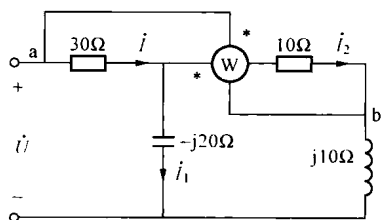
$$\dot{U} = Z\dot{I} + \dot{U}_2 = (2 + j2) \times 5\sqrt{2} \angle 45^\circ + 20 = 20 + j20 = 20\sqrt{2} \angle 45^\circ \text{ (V)}$$

所以, 总电压 u 的有效值为 28.28V。

8-19 已知题 8-19 图所示电路中 $U = 100\text{V}$, 求功率表的示数。



题 8-19 图



题 8-19 解图

解 所用电压的参考方向如题 8-19 解图所示。输入阻抗为

$$Z = 30 + (-j20) // (10 + j10) = 50 \text{ (}\Omega\text{)}$$

设 $\dot{U} = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$, 则

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{100 \angle 0^\circ}{50} = 2 \angle 0^\circ \text{ (A)}$$

$$\dot{i}_1 = \frac{10 + j10}{10 + j10 - j20} \times \dot{i} = \frac{10 + j10}{10 + j10 - j20} \times 2 \angle 0^\circ = 2 \angle 90^\circ \text{ (A)}$$

由 KCL 得

$$\dot{i}_2 = \dot{i} - \dot{i}_1 = 2 - j2 \text{ A}$$

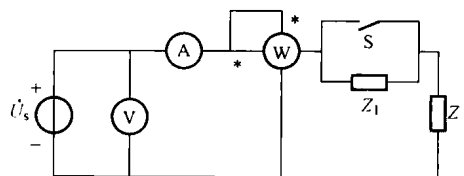
则

$$\dot{U}_{ab} = 30\dot{i} + 10\dot{i}_2 = 30 \times 2 \angle 0^\circ + 10 \times (2 - j2) = 80 - j20 \text{ V}$$

$$\dot{U}_{ab} \dot{i}_2^* = (80 - j20) \times (2 + j2) = 200 + j120 \text{ (VA)}$$

故功率表的示数为 $P = 200\text{W}$ 。

8-20 题 8-20 图所示正弦稳态电路中, 当开关 S 闭合时, 电压表示数为 220V, 电流表示数为 10A, 功率表示数为 1000W; 当开关 S 打开时, 各表示数依次为 220V, 12A 和 1600W。求阻抗 Z_1 (感性) 和 Z 。



题 8-20 图

解 方法 1: (1) 开关闭合时, 因为 $U =$

220V、 $I=10\text{A}$ 、 $P=1000\text{W}$ ，所以

$$|Z| = \frac{U}{I} = \frac{220}{10} = 22 \text{ } (\Omega), R = \frac{P}{I^2} = \frac{1000}{10^2} = 10 \text{ } (\Omega)$$

$$|X| = \sqrt{|Z|^2 - R^2} = \sqrt{22^2 - 10^2} = 19.60 \text{ } (\Omega)$$

由于开关打开后，电流增大，说明阻抗 Z_1 和 Z 性质相反，即 Z 为容性，因此 $X < 0$ ，则

$$Z = R + jX = 10 - j19.6 \text{ } \Omega$$

(2) 开关打开时，因为 $U=220\text{V}$ ， $I=12\text{A}$ ， $P=1600\text{W}$ ，所以

$$|Z_i| = \frac{U}{I} = \frac{220}{12} = 18.33 \text{ } (\Omega), R_i = R + R_1 = \frac{P}{I^2} = \frac{1600}{12^2} = 11.11 \text{ } (\Omega)$$

$$|X_i| = \sqrt{|Z_i|^2 - R_i^2} = \sqrt{18.33^2 - 11.11^2} = 14.58 \text{ } (\Omega)$$

电路的总阻抗为

$$Z_i = R_i \pm j|X_i| = 11.11 \pm j14.58 \text{ } \Omega$$

所以

$$Z_1 = Z_i - Z = 11.11 \pm j14.58 - (10 - j19.60)$$

即

$$Z_1 = 1.11 + j5.02 = 5.14 \angle 77.53^\circ \text{ } (\Omega) \text{ 或者 } Z_1 = 1.11 + j34.18 = 34.20 \angle 88.14^\circ \text{ } (\Omega)$$

方法2：(1) 开关闭合时，由 $P=UI\cos\theta$ 得

$$\cos\theta = \frac{P}{UI} = \frac{1000}{220 \times 10} = \frac{5}{11}, \theta = \arccos \frac{5}{11} = \pm 62.96^\circ$$

θ 为阻抗 Z 的阻抗角。由于开关打开后，电流增大，说明阻抗 Z_1 和 Z 性质相反，即 Z 为容性，因此 $\theta = -62.96^\circ$ ，则

$$Z = \frac{U}{I} \angle \theta = \frac{220}{10} \angle -62.96^\circ = 22 \angle -62.96^\circ = 10 - j19.60 \text{ } (\Omega)$$

(2) 开关打开时

$$P = 1600\text{W}, S = UI = 220 \times 12 = 2640 \text{ } (\text{VA})$$

$$|Q| = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{2640^2 - 1600^2} = 2099.90 \text{ } (\text{var})$$

则电路总的电阻和电抗分别为

$$R_i = \frac{P}{I^2} = \frac{1600}{12^2} = 11.11 \text{ } (\Omega), |X_i| = \frac{|Q|}{I^2} = \frac{2099.90}{12^2} = 14.58 \text{ } (\Omega)$$

电路的总阻抗为

$$Z_i = R_i \pm j|X_i| = 11.11 \pm j14.58 \text{ } \Omega$$

所以

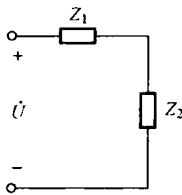
$$Z_1 = Z_i - Z = 11.11 \pm j14.58 - (10 - j19.60)$$

即

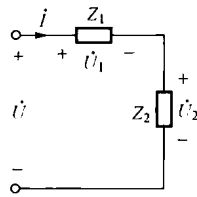
$$Z_1 = 1.11 + j5.02 = 5.14 \angle 77.53^\circ \text{ } (\Omega) \text{ 或者 } Z_1 = 1.11 + j34.18 = 34.20 \angle 88.14^\circ \text{ } (\Omega)$$

8-21 题8-21图所示电路中， $\dot{U} = 50 \angle 0^\circ \text{ V}$ ，每一阻抗部分消耗的功率均为 250W ，且电压的峰值为 100V 。试求：(1) 阻抗 Z_1 和 Z_2 ；(2) $\omega = 800\pi \text{ rad/s}$ 时电路可能含有的元件及其数值。

解 设电压、电流的参考方向如题 8-21 解图所示。



题 8-21 图



题 8-21 解图

(1) 因为 $P_1 = P_2 = 250\text{W}$, 且两阻抗流过同一电流, 所以

$$R_1 = R_2$$

又因为 $U_{1m} = U_{2m} = 100\text{V}$, 所以

$$U_1 = U_2 = 50\sqrt{2}\text{V}$$

则 $|Z_1| = |Z_2|$ 。由于 $|Z_1| = \sqrt{R_1^2 + X_1^2}$ 、 $|Z_2| = \sqrt{R_2^2 + X_2^2}$, 因此

$$|X_1| = |X_2|$$

因为 $U_1 = U_2 = 50\sqrt{2}\text{V} > U = 50\text{V}$, 所以 $X_1 = -X_2$, 则

$$Z = Z_1 + Z_2 = R_1 + jX_1 + R_2 + jX_2 = R_1 + R_2 = 2R_1$$

因此, \dot{U} 与 \dot{I} 同相。

$$P = UI \cos\theta = UI = P_1 + P_2 = 500 \text{ (W)}$$

而 $U = 50\text{V}$, 则

$$I = \frac{P}{U} = \frac{500}{50} = 10 \text{ (A)}$$

所以

$$R = R_1 + R_2 = 2R_1 = \frac{U}{I} = \frac{50}{10} = 5 \text{ (}\Omega\text{)}$$

$$R_1 = R_2 = 2.5\Omega, |Z_1| = |Z_2| = \frac{U_1}{I} = \frac{50\sqrt{2}}{10} = 5\sqrt{2} \text{ (}\Omega\text{)}$$

$$|X_1| = |X_2| = \sqrt{|Z_1|^2 - R_1^2} = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 - 2.5^2} = 6.6 \text{ (}\Omega\text{)}$$

因此

$$\begin{cases} Z_1 = 2.5 + j6.6 \Omega \\ Z_2 = 2.5 - j6.6 \Omega \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} Z_1 = 2.5 - j6.6 \Omega \\ Z_2 = 2.5 + j6.6 \Omega \end{cases}$$

(2) Z_1 和 Z_2 性质相反, 一个为感性, 另一个为容性。设阻抗的等效电路为串联型, 则

$$R_1 = R_2 = 2.5\Omega, L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{6.6}{800\pi} = 2.6 \text{ (mH)}, C = -\frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{800\pi \times 6.6} = 60.3 \text{ (}\mu\text{F)}$$

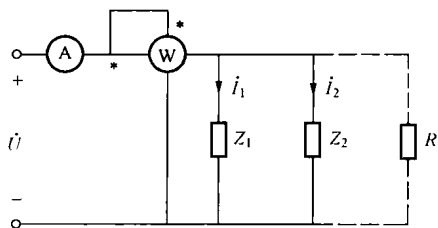
设阻抗的等效电路为并联型, 则

$$R'_1 = R'_2 = R + \frac{X^2}{R} = 19.92 \text{ (}\Omega\text{)}, X'_1 = X'_2 = X + \frac{R^2}{X} = \pm 7.55 \text{ (}\Omega\text{)}$$

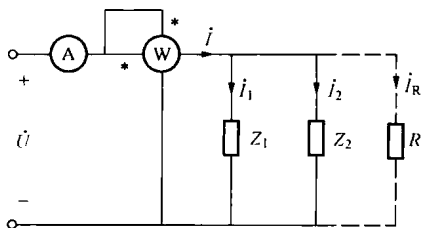
$$L = \frac{X'_L}{\omega} = \frac{7.55}{800\pi} = 3 \text{ (mH)}, C = -\frac{1}{\omega X'_C} = \frac{1}{800\pi \times 7.55} = 52.73 \text{ (}\mu\text{F)}$$

8-22 题 8-22 图所示正弦稳态电路中, 流经阻抗 Z_1 和 Z_2 的电流分别为 $I_1 = 10\text{A}$, $I_2 =$

20A, 其功率因数分别为 $\lambda_1 = \cos\theta_1 = 0.8$ ($\theta_1 < 0$), $\lambda_2 = \cos\theta_2 = 0.5$ ($\theta_2 > 0$), $U = 100\text{V}$, $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$ 。(1) 求电流表和功率表的示数以及电路的功率因数; (2) 若电源的额定电流为 30A, 则还能并联多大电阻? 并求并联电阻后功率表的示数和电路的功率因数; (3) 如使原电路的功率因数提高到 0.9, 需并联多大电容?



题 8-22 图



题 8-22 解图

解 所用电量的参考方向如题 8-22 解图所示。

(1) 以端电压 \dot{U} 为参考相量, 即 $\dot{U} = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$ 。因为 $\cos\theta_1 = 0.8$ ($\theta_1 < 0$), 所以 $\theta_1 = -36.9^\circ$; 因为 $\cos\theta_2 = 0.5$ ($\theta_2 > 0$), 所以 $\theta_2 = 60^\circ$ 。则支路电流相量分别为

$$\dot{I}_1 = 10 \angle -\theta_1 = 10 \angle 36.9^\circ = 8 + j6 \text{ (A)}, \quad \dot{I}_2 = 20 \angle -\theta_2 = 20 \angle -60^\circ = 10 - j17.32 \text{ (A)}$$

总电流相量为

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 8 + j6 + 10 - j17.32 = 18 - j11.32 = 21.264 \angle -32.17^\circ \text{ (A)}$$

即电流表的示数为 21.246 A。

功率表的示数为

$$P = UI \cos\theta = 100 \times 21.264 \times \cos(0^\circ + 32.17^\circ) \approx 1800 \text{ (W)}$$

电路的功率因数为

$$\cos\theta = \cos 32.17^\circ = 0.847$$

(2) 并联电阻 R 后总电流相量为

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_R = 18 - j11.32 + \frac{100 \angle 0^\circ}{R} = 18 + \frac{100}{R} - j11.32$$

由 $I = 30\text{A}$, 可得下列方程

$$30^2 = \left(18 + \frac{100}{R}\right)^2 + (11.32)^2$$

解之得

$$R = 10.22 \Omega$$

则

$$\dot{I} = 18 + \frac{100}{10.22} - j11.32 = 27.785 - j11.32 = 30 \angle -22.167^\circ \text{ (A)}$$

电路的功率因数为

$$\cos\theta = \cos 22.167^\circ = 0.926$$

功率表的示数为

$$P = UI \cos\theta = 100 \times 30 \times \cos(0^\circ + 22.167^\circ) \approx 2778 \text{ (W)}$$

(3) 原电路的功率因数 $\cos\theta=0.847$, 则

$$\tan\theta=0.628$$

现提高到 $\cos\theta'=0.9$, 则

$$\tan\theta'=0.484$$

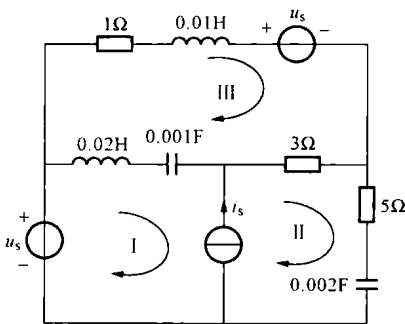
因此, 所需并联的电容为

$$C=\frac{P}{U^2\omega}(\tan\theta-\tan\theta')=\frac{1800}{100^2\times 10^3}\times(0.628-0.484)=25.92\ (\mu\text{F})$$

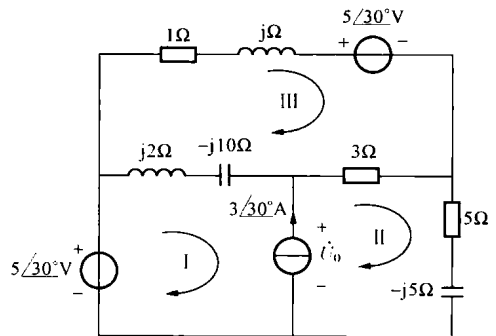
8-23 见 [例 8-3]。

相量分析 (网孔分析)

8-24 列写题 8-24 图所示正弦稳态电路网孔电流方程的相量形式。其中 $u_s(t)=5\sqrt{2}\sin(100t+30^\circ)\text{ V}$, $i_s(t)=3\sqrt{2}\cos(100t-60^\circ)\text{ A}$ 。



题 8-24 图



题 8-24 解图

解 因为 $i_s(t)=3\sqrt{2}\cos(100t-60^\circ)=3\sqrt{2}\sin(100t+30^\circ)\text{ (A)}$, 所以 $\dot{I}_s=3\angle 30^\circ\text{ A}$ 。

相量模型如题 8-24 解图所示。设电流源的端电压为 \dot{U}_0 , 则网孔电流方程的相量形式为

$$\begin{cases} (j2-j10)\dot{I}_{m1}-(j2-j10)\dot{I}_{m3}=-\dot{U}_0+5\angle 30^\circ \\ (3+5-j5)\dot{I}_{m2}-3\dot{I}_{m3}=\dot{U}_0 \\ -(j2-j10)\dot{I}_{m1}-3\dot{I}_{m2}+(1+3+j+j2-j10)\dot{I}_{m3}=-5\angle 30^\circ \end{cases}$$

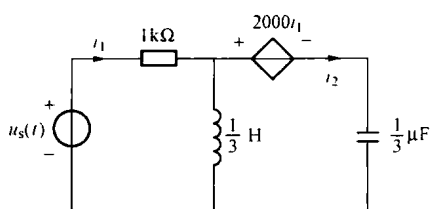
补充方程为

$$-\dot{I}_{m1}+\dot{I}_{m2}=3\angle 30^\circ$$

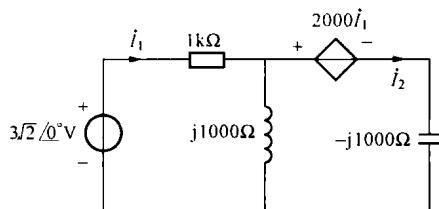
整理得

$$\begin{cases} -j8\dot{I}_{m1}+(8-j5)\dot{I}_{m2}-(3-j8)\dot{I}_{m3}=5\angle 30^\circ \\ j8\dot{I}_{m1}-3\dot{I}_{m2}+(4-j7)\dot{I}_{m3}=-5\angle 30^\circ \\ -\dot{I}_{m1}+\dot{I}_{m2}=3\angle 30^\circ \end{cases}$$

8-25 试用网孔法求题 8-25 图所示正弦稳态电路中的电流 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$ 。已知 $u_s(t)=6\sin 3000t\text{ V}$ 。



题 8-25 图



题 8-25 解图

解 $jX_L = j\omega L = j3000 \times \frac{1}{3} = j1000 \text{ } (\Omega)$, $jX_C = -j \frac{1}{\omega C} = -j \frac{1}{3000 \times \frac{1}{3} \times 10^{-6}} = -j1000 \text{ } (\Omega)$

相量模型如题 8-25 解图所示。网孔电流方程的相量形式为

$$\begin{cases} (1000 + j1000) \dot{I}_1 - j1000 \dot{I}_2 = 3\sqrt{2} \angle 0^\circ \\ -j1000 \dot{I}_1 + (j1000 - j1000) \dot{I}_2 = -2000 \dot{I}_1 \end{cases}$$

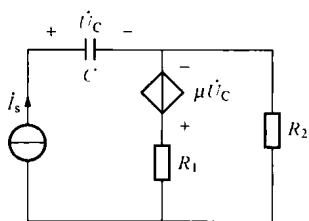
整理解得

$$\dot{I}_1 = 0, \dot{I}_2 = 3\sqrt{2} \angle 90^\circ \text{ mA}$$

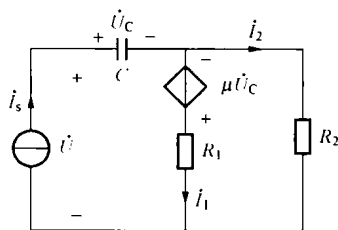
所以

$$i_1(t) = 0, i_2(t) = 6\sin(3000t + 90^\circ) \text{ mA}$$

8-26 题 8-26 图所示正弦稳态电路中, $I_s = 10\text{A}$, $\omega = 5000\text{rad/s}$, $R_1 = R_2 = 10\Omega$, $C = 10\mu\text{F}$, $\mu = 0.5$ 。用网孔法求各元件吸收的平均功率和无功功率。



题 8-26 图



题 8-26 解图

解 所用电量的参考方向如题 8-26 解图所示。以 \dot{I}_s 为参考相量, 即 $\dot{I}_s = 10 \angle 0^\circ \text{ A}$, 则

$$\dot{U}_C = -j \frac{1}{\omega C} \times \dot{I}_s = -j \frac{1}{5000 \times 10 \times 10^{-6}} \times 10 \angle 0^\circ = -j200 \text{ (V)}$$

电路的网孔电流方程为

$$\begin{cases} \dot{I}_s = 10 \angle 0^\circ \\ -10 \dot{I}_s + (10 + 10) \dot{I}_2 = -0.5 \dot{U}_C = j100 \end{cases}$$

解之得

$$\dot{I}_2 = 5 + j5 = 5\sqrt{2} \angle 45^\circ \text{ (A)}$$

由 KCL 得

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_s - \dot{I}_2 = 10 - (5 + j5) = 5 - j5 = 5\sqrt{2} \angle 45^\circ \text{ (A)}$$

由 KVL 得

$$\dot{U} = \dot{U}_C + R_2 \dot{I}_2 = -j200 + 10 \times (5 + j5) = 50 - j150 \text{ (V)}$$

所以, 各元件吸收的复功率分别为

$$\tilde{S}_{I_s} = -\dot{U} \dot{I}_s^* = -(50 - j150) \times 10 = -500 + j1500 \text{ (VA)}$$

$$\tilde{S}_C = \dot{U}_C \dot{I}_s^* = -j200 \times 10 = -j2000 \text{ (VA)}$$

$$\tilde{S}_{VCVS} = -\mu \dot{U}_C \dot{I}_1^* = j100 \times (5 + j5) = -500 + j500 \text{ (VA)}$$

$$\tilde{S}_{R1} = R_1 \dot{I}_1 \dot{I}_1^* = R_1 I_1^2 = 10 \times (5\sqrt{2})^2 = 500 \text{ (VA)}$$

$$\tilde{S}_{R2} = R_2 \dot{I}_2 \dot{I}_2^* = R_2 I_2^2 = 10 \times (5\sqrt{2})^2 = 500 \text{ (VA)}$$

因此, 各元件吸收的平均功率分别为

$$P_{I_s} = -500 \text{ W}, P_C = 0, P_{VCVS} = -500 \text{ W}, P_{R1} = 500 \text{ W}, P_{R2} = 500 \text{ W}$$

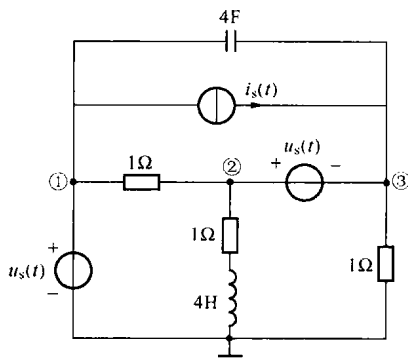
各元件吸收的无功功率分别为

$$Q_{I_s} = 1500 \text{ var}, Q_C = -2000 \text{ var}, Q_{VCVS} = 500 \text{ var}, Q_{R1} = 0, Q_{R2} = 0$$

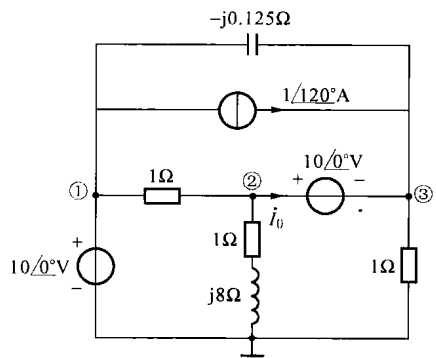
相量分析 (节点分析)

8-27 列写题 8-27 图所示正弦稳态电路节点电压方程的相量形式。其中 $u_s(t) = 10\sqrt{2} \sin 2t \text{ V}$, $i_s(t) = \sqrt{2} \cos(2t + 30^\circ) \text{ A}$ 。

解 因为 $i_s(t) = \sqrt{2} \cos(2t + 30^\circ) = \sqrt{2} \sin(2t + 120^\circ) \text{ (A)}$, 所以 $\dot{I}_s = 1 \angle 120^\circ \text{ A}$ 。设电压源的电流为 \dot{I}_0 , 则相量模型如题 8-27 解图所示。



题 8-27 图



题 8-27 解图

节点电压方程的相量形式为

$$\begin{cases} \dot{U}_{n1} = 10 \angle 0^\circ \\ -\dot{U}_{n1} + \left(1 + \frac{1}{1+j8}\right) \dot{U}_{n2} = -\dot{I}_0 \\ -j8\dot{U}_{n1} + (1+j8)\dot{U}_{n3} = 1 \angle 120^\circ + \dot{I}_0 \end{cases}$$

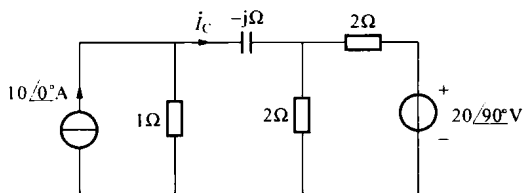
补充方程的相量形式为

$$\dot{U}_{n2} - \dot{U}_{n3} = 10 \angle 0^\circ$$

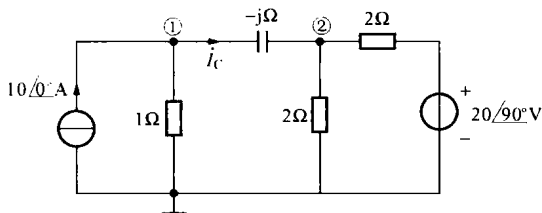
整理得

$$\begin{cases} \dot{U}_{n1} = 10 \angle 0^\circ \\ -(1+j8)\dot{U}_{n1} + \left(1 + \frac{1}{1+j8}\right)\dot{U}_{n2} + (1+j8)\dot{U}_{n3} = 1 \angle 20^\circ \\ \dot{U}_{n2} - \dot{U}_{n3} = 10 \angle 0^\circ \end{cases}$$

8-28 用节点法求题 8-28 图所示电路中流过电容的电流 \dot{i}_C 。



题 8-28 图



题 8-28 解图

解 节点编号如题 8-28 解图所示。节点电压方程的相量形式为

$$\begin{cases} (1+j)\dot{U}_{n1} - j\dot{U}_{n2} = 10 \angle 0^\circ \\ -j\dot{U}_{n1} + \left(j + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\dot{U}_{n2} = \frac{20 \angle 90^\circ}{2} \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} (1+j)\dot{U}_{n1} - j\dot{U}_{n2} = 10 \angle 0^\circ \\ -j\dot{U}_{n1} + (j+1)\dot{U}_{n2} = 10 \angle 90^\circ \end{cases}$$

联立解得

$$\dot{U}_{n1} = 4 + j2 \text{ V}, \quad \dot{U}_{n2} = 6 + j8 \text{ V}$$

所以

$$\dot{i}_C = \frac{\dot{U}_{n1} - \dot{U}_{n2}}{-j} = j(\dot{U}_{n1} - \dot{U}_{n2}) = 6 - j2 = 6.32 \angle -18.43^\circ \text{ (A)}$$

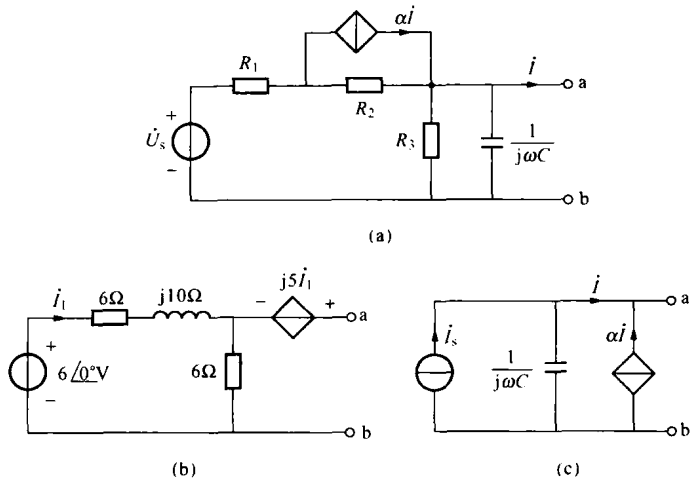
网络定理

8-29 [提示] 电压源单独作用时, $\dot{U}' = 6 \angle -126.9^\circ \text{ V}$; 电流源单独作用时, $\dot{U}'' = 9.6 \angle 53.1^\circ \text{ V}$ 。

8-30 求题 8-30 图所示各一端口的戴维南(诺顿)等效电路。

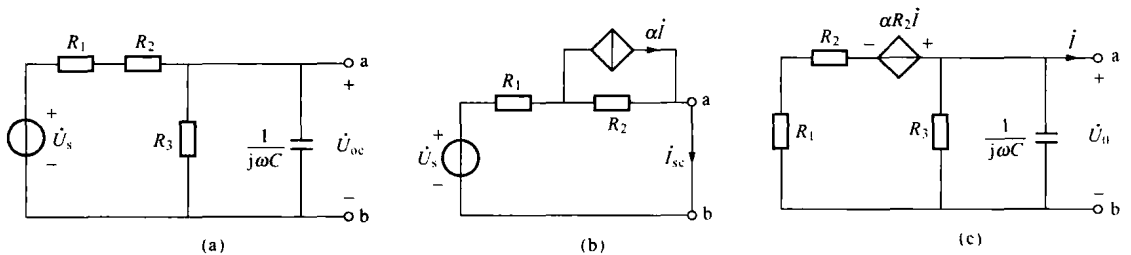
解 (1) 题 8-30 图 (a) 所示电路。

1) 求开路电压 \dot{U}_∞ 。因为端口开路, 所以 $\dot{i} = 0$, 则流控流源 $\alpha \dot{i} = 0$, 相当于开路。求



题 8-30 图

开路电压 \dot{U}_∞ 等效电路如题 8-30 解图 (a) 所示, 则



题 8-30 解图 (一)

$$Z_1 = R_3 // \left(\frac{1}{j\omega C} \right) = \frac{R_3}{1 + j\omega R_3 C}$$

所以

$$\dot{U}_\infty = \frac{Z_1}{Z_1 + R_1 + R_2} \cdot \dot{U}_s = \frac{\frac{R_3}{1 + j\omega R_3 C}}{\frac{R_3}{1 + j\omega R_3 C} + R_1 + R_2} \cdot \dot{U}_s = \frac{R_3 \dot{U}_s}{R_1 + R_2 + R_3 + j\omega R_3 C (R_1 + R_2)}$$

2) 求短路电流 \dot{I}_{sc} 。电阻 R_3 和电容 C 开路处理, 如题 8-30 解图 (b) 所示, 则

$$R_1 \dot{I}_{sc} + R_2 (1 - \alpha) \dot{I}_{sc} = \dot{U}_s$$

$$\dot{I}_{sc} = \frac{\dot{U}_s}{R_1 + R_2 (1 - \alpha)}$$

3) 求戴维南等效阻抗 Z_0 。等效电路如题 8-30 解图 (c) 所示, 则

$$\left(\frac{1}{R_3} + j\omega C + \frac{1}{R_1 + R_2} \right) \dot{U}_0 = \frac{\alpha R_2 \dot{I}}{R_1 + R_2} - \dot{I}$$

整理得

$$[R_1 + R_2 + R_3 + j\omega CR_3(R_1 + R_2)] \dot{U}_0 = - [R_1 + (1-\alpha)R_2] R_3 \dot{I}$$

所以

$$Z_0 = -\frac{\dot{U}_0}{\dot{I}} = \frac{[R_1 + (1-\alpha)R_2]R_3}{R_1 + R_2 + R_3 + j\omega CR_3(R_1 + R_2)}$$

或者

$$Z_0 = \frac{\dot{U}_{oc}}{\dot{I}_{sc}} = \frac{[R_1 + (1-\alpha)R_2]R_3}{R_1 + R_2 + R_3 + j\omega CR_3(R_1 + R_2)}$$

由以上结果分别可得戴维南和诺顿等效电路。

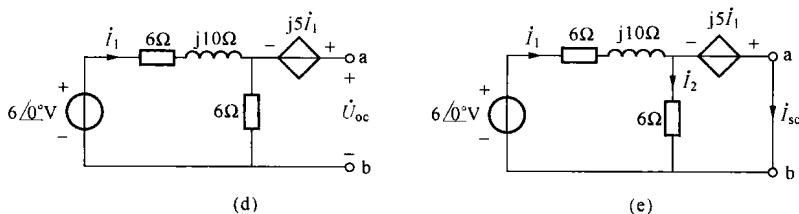
(2) 题 8-30 图 (b) 所示电路。

1) 求开路电压 \dot{U}_{oc} 。电路如题 8-30 解图 (d) 所示, 则

$$\dot{I}_1 = \frac{6 \angle 0^\circ}{6 + 6 + j10} = \frac{3 \angle 0^\circ}{6 + j5} \text{ (A)}$$

所以

$$\dot{U}_{oc} = j5\dot{I}_1 + 6\dot{I}_1 = (6 + j5)\dot{I}_1 = (6 + j5) \times \frac{3 \angle 0^\circ}{6 + j5} = 3 \angle 0^\circ \text{ (V)}$$



题 8-30 解图 (二)

2) 求戴维南等效阻抗 Z_0 。求短路电流的电路如题 8-30 解图 (e) 所示, 则

$$(6 + j10)\dot{I}_1 - j5\dot{I}_1 = 6 \angle 0^\circ$$

$$\dot{I}_1 = \frac{6}{6 + j5} \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = -\frac{j5\dot{I}_1}{6} = -\frac{j5}{6} \times \frac{6}{6 + j5} = -\frac{j5}{6 + j5} \text{ (A)}$$

则

$$\dot{I}_{sc} = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = \frac{6}{6 + j5} + \frac{j5}{6 + j5} = \frac{6 + j5}{6 + j5} = 1 \angle 0^\circ \text{ (A)}$$

所以

$$Z_0 = \frac{\dot{U}_{oc}}{\dot{I}_{sc}} = \frac{3 \angle 0^\circ}{1 \angle 0^\circ} = 3 \angle 0^\circ \Omega$$

由以上结果分别可得戴维南和诺顿等效电路。

(3) 题 8-30 图 (c) 所示电路。

1) 求短路电流 \dot{I}_{sc} 。电路如题 8-30 解图 (f) 所示, 则

$$\dot{I}_{sc} = \dot{I} + \alpha \dot{I} = (1 + \alpha) \dot{I} = (1 + \alpha) \dot{I}_s$$

2) 求开路电压 \dot{U}_{oc} 。电路如题 8-30 解图 (g) 所示。由 KCL 有

$$\dot{I} + \alpha \dot{I} = 0$$

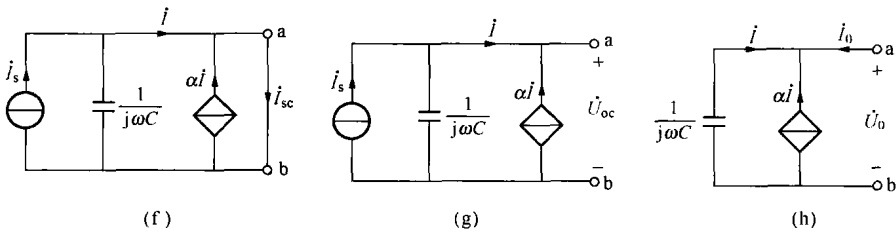
所以

$$\dot{I} = 0$$

则

$$\dot{U}_{oc} = \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_s$$

3) 求诺顿等效导纳 Y_0 。电路如题 8-30 解图 (h) 所示, 则



题 8-30 解图 (三)

$$\dot{I}_0 = -\dot{I} - \alpha \dot{I} = -(1 + \alpha) \dot{I}, \quad \dot{U}_0 = -\frac{1}{j\omega C} \dot{I}$$

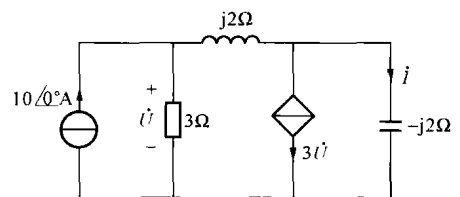
所以

$$Y_0 = \frac{\dot{I}_0}{\dot{U}_0} = j(1 + \alpha)\omega C$$

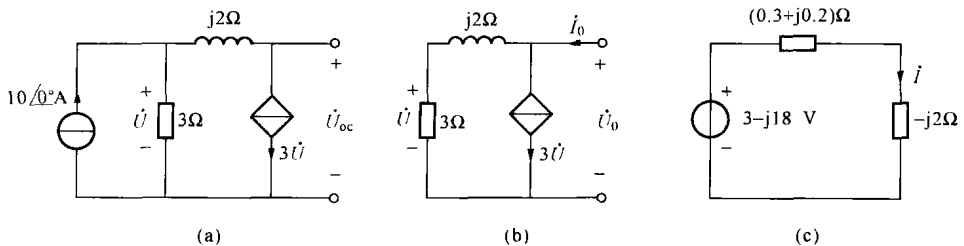
由以上结果分别可得戴维南和诺顿等效电路。

8-31 试用戴维南定理求题 8-31 图所示电路中的电流 \dot{I} 。

解 (1) 求 \dot{U}_{oc} 。电路如题 8-31 解图 (a) 所示, 则



题 8-31 图



题 8-31 解图

$$\frac{\dot{U}}{3} = 10 - 3\dot{U} \Rightarrow \dot{U} = 3 \angle 0^\circ \text{ V}$$

所以

$$\dot{U}_\alpha = -3\dot{U} \times j2 + \dot{U} = (1 - j6)\dot{U} = (1 - j6) \times 3 \angle 0^\circ = 3 - j18 \text{ (V)}$$

(2) 求 Z_{eq} 。电路如题 8-31 解图 (b) 所示, 则

$$\dot{U}_0 = \frac{\dot{U}}{3} \times (3 + j2) = \frac{3 + j2}{3}\dot{U}, \dot{I}_0 = 3\dot{U} + \frac{\dot{U}}{3} = \frac{10}{3}\dot{U}$$

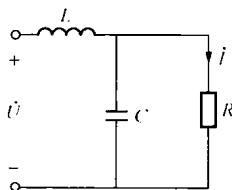
所以

$$Z_{\text{eq}} = \frac{\dot{U}_0}{\dot{I}_0} = 0.3 + j0.2 \Omega$$

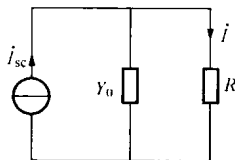
(3) 求电流 \dot{I} 。电路如题 8-31 解图 (c) 所示。

$$\dot{I} = \frac{3 - j18}{0.3 + j0.2 - j2} = \frac{3 - j18}{0.3 - j1.8} = 10 \angle 0^\circ \text{ (A)}$$

8-32 如果题 8-32 图所示正弦稳态电路中, 外加电压不变, R 改变时电流 I 保持不变, 问 L 和 C 应满足什么关系?



题 8-32 图



题 8-32 解图

解 将 R 所在支路抽出, 其余部分用其诺顿等效电路代替, 等效电路如题 8-32 解图所示, 则

$$\dot{i}_{\text{sc}} = \frac{\dot{U}}{j\omega L}, Y_0 = j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

外加电压不变, R 改变时电流 I 保持不变, 应有 $Y_0 = 0$, 即

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$$

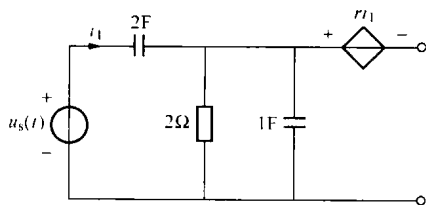
所以 L 和 C 应满足

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

8-33 求题 8-33 图所示含源二端网络能提供的最大功率。已知 $u_s(t) = 2\cos(0.5t + 120^\circ) \text{ V}$, $r = 1\Omega$ 。

解 因为 $u_s(t) = 2\cos(0.5t + 120^\circ) \text{ V}$, 所以

$$\dot{U}_s = \sqrt{2} \angle 120^\circ \text{ V}$$



题 8-33 图

(1) 求开路电压 \dot{U}_{oc} 。相量模型如题 8-33 解图 (a) 所示, 则

$$Z_1 = -j2 // 2 = \frac{-j2 \times 2}{-j2 + 2} = \frac{-j2}{1-j1} = 1-j1 \ (\Omega)$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\sqrt{2} \angle 120^\circ}{-j + Z_1} = \frac{\sqrt{2} \angle 120^\circ}{-j + 1-j} = \frac{\sqrt{2} \angle 120^\circ}{1-j2} = 0.6325 \angle -176.57^\circ \ (\text{A})$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_{oc} &= -\dot{I}_1 + Z_1 \dot{I}_1 = (-1 + Z_1) \dot{I}_1 = (-1 + 1-j) \dot{I}_1 = -j \dot{I}_1 \\ &= -j0.6325 \angle -176.57^\circ = 0.6325 \angle 93.43^\circ \ (\text{V}) \end{aligned}$$

(2) 求戴维南等效阻抗 Z_0 。相量模型如题 8-33 解图 (b) 所示, 该图可等效化简为题 8-33 解图 (c), 则

$$\dot{I}_2 = \frac{-(-j) \dot{I}_1}{Z_1} = \frac{j}{1-j} \dot{I}_1$$

$$\dot{I}_0 = -\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = -\dot{I}_1 + \frac{j}{1-j} \dot{I}_1 = \left(-1 + \frac{j}{1-j}\right) \dot{I}_1 = \frac{-3+j}{2} \dot{I}_1,$$

$$\dot{U}_0 = -\dot{I}_1 - \dot{I}_1(-j) = (-1+j) \dot{I}_1$$

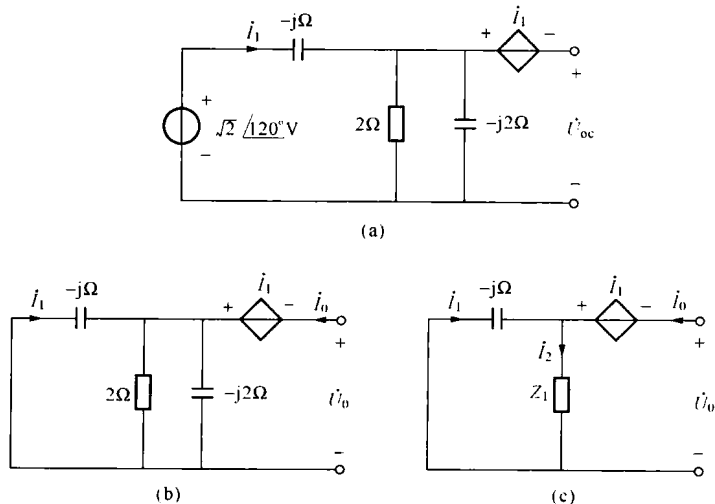
因此

$$Z_0 = \frac{\dot{U}_0}{\dot{I}_0} = \frac{-1+j}{\frac{-3+j}{2}} = 0.8-j0.4 \ (\Omega)$$

所以, 二端网络能提供的最大功率为

$$P_{\max} = \frac{U_{oc}^2}{4R_0} = \frac{0.6325^2}{4 \times 0.8} = 0.125 \ (\text{W})$$

注: 本题采用了余弦函数对应相量。



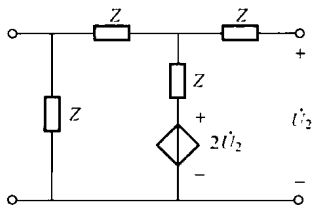
题 8-33 解图

8-34 [提示] 本题求短路电流 \dot{I}_{sc} 比较容易, $\dot{I}_{sc} = 4 \angle 2.15^\circ \ \text{A}$ 。将端口电压、电

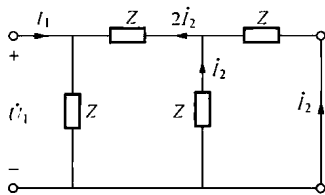
流用控制量表示, 代入输入阻抗定义式获得戴维南等效阻抗, 即

$$Z_0 = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{(1+j20)\dot{U}_1}{(-2.5+j10)\dot{U}_1} \approx 1.94 \angle -16.9^\circ = 1.856 - j0.564 (\Omega)$$

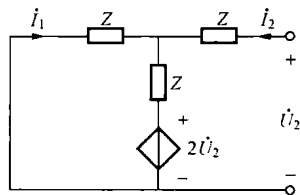
8-35 试用定义法求题 8-35 图所示双口网络的 Y 参数、T 参数和 H 参数。



题 8-35 图



(a)



(b)

题 8-35 解图 (一)

解 (1) 求双口网络的 Y 参数。

1) 求 Y_{11} 和 Y_{21} 。令 $\dot{U}_2=0$, VCVS 短路, 电路如题 8-35 解图 (a) 所示, 则

$$\dot{U}_1 = [Z // (Z + Z // Z)] \dot{I}_1 = \frac{3}{5} Z \dot{I}_1, \dot{U}_1 = -2 \dot{I}_2 Z - Z \dot{I}_2 = -3 Z \dot{I}_2$$

所以

$$Y_{11} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} = \frac{\dot{I}_1}{\frac{3}{5} Z \dot{I}_1} = \frac{5}{3Z}, Y_{21} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} = \frac{\dot{I}_2}{-3Z \dot{I}_2} = -\frac{1}{3Z}$$

2) 求 Y_{12} 和 Y_{22} 。令 $\dot{U}_1=0$, 电路如题 8-35 解图 (b) 所示。由 KVL 得

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = Z \dot{I}_2 - Z \dot{I}_1 \\ Z \dot{I}_1 + 2 \dot{U}_2 + (\dot{I}_1 + \dot{I}_2) Z = 0 \end{cases}$$

联立解得

$$\dot{I}_1 = -\frac{1}{Z} \dot{U}_2, \dot{I}_2 = 0$$

所以

$$Y_{12} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{U}_1=0} = -\frac{1}{Z}, Y_{22} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{U}_1=0} = 0$$

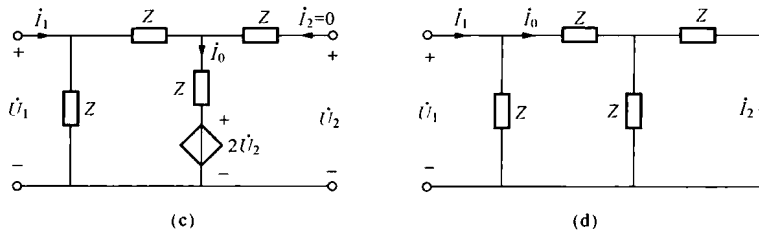
因此, 该双口网络的 Y 参数矩阵为

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3Z} & -\frac{1}{Z} \\ -\frac{1}{3Z} & 0 \end{bmatrix}$$

(2) 求双口网络的 T 参数。

1) 求 A 和 C。令 $\dot{I}_2=0$, 电路如题 8-35 解图 (c) 所示, 则

$$\dot{I}_0 = \frac{\dot{U}_2 - 2\dot{U}_2}{Z} = -\frac{\dot{U}_2}{Z}$$



题 8-35 解图 (二)

$$\dot{U}_1 = (Z+Z)\dot{I}_0 + 2\dot{U}_2 = 2Z\left(-\frac{\dot{U}_2}{Z}\right) + 2\dot{U}_2 = 0, \quad \dot{U}_2 = -Z\dot{I}_1$$

所以

$$A = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{i_2=0} = 0, \quad C = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{i_2=0} = \frac{\dot{I}_1}{-Z\dot{I}_1} = -\frac{1}{Z}$$

2) 求 B 和 D 。令 $\dot{U}_2 = 0$ ，电路如题 8-35 解图 (d) 所示，则

$$\dot{I}_0 = \frac{Z}{Z+(Z+Z//Z)} \times \dot{I}_1 = \frac{Z}{Z+1.5Z} \times \dot{I}_1 = \frac{2}{5}\dot{I}_1$$

$$\dot{I}_2 = -\frac{1}{2}\dot{I}_0 = -\frac{1}{5}\dot{I}_1, \quad \dot{U}_1 = (\dot{I}_1 - \dot{I}_0)Z = \left(\dot{I}_1 - \frac{2}{5}\dot{I}_1\right)Z = \frac{3}{5}Z\dot{I}_1$$

所以

$$B = \left. \frac{\dot{U}_1}{-\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_2=0} = \frac{\frac{3}{5}Z\dot{I}_1}{-\left(-\frac{1}{5}\dot{I}_1\right)} = 3Z, \quad D = \left. \frac{\dot{I}_1}{-\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_2=0} = \frac{\dot{I}_1}{-\left(-\frac{1}{5}\dot{I}_1\right)} = 5$$

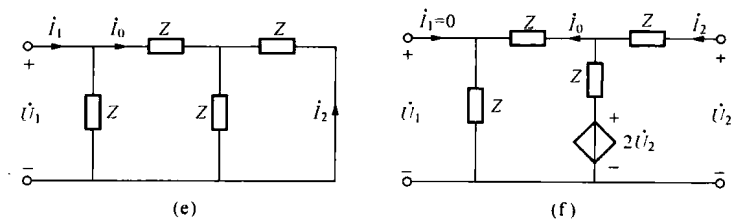
因此双口网络的 T 参数矩阵为

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 3Z \\ -\frac{1}{Z} & 5 \end{bmatrix}$$

(3) 求双口网络的 H 参数。

1) 求 h_{11} 和 h_{21} 。令 $\dot{U}_2 = 0$ ，电路如题 8-35 解图 (e) 所示，则

$$\dot{I}_0 = \frac{Z}{Z+(Z+Z//Z)} \times \dot{I}_1 = \frac{Z}{Z+1.5Z} \times \dot{I}_1 = \frac{2}{5}\dot{I}_1$$



题 8-35 解图 (三)

$$\dot{i}_2 = -\frac{1}{2}\dot{i}_0 = -\frac{1}{5}\dot{i}_1, \dot{U}_1 = (\dot{i}_1 - \dot{i}_0)Z = \left(\dot{i}_1 - \frac{2}{5}\dot{i}_1\right)Z = \frac{3}{5}Z\dot{i}_1$$

所以

$$h_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{i}_1} \right|_{\dot{u}_2=0} = \frac{\frac{3}{5}Z\dot{i}_1}{\dot{i}_1} = \frac{3}{5}Z, h_{21} = \left. \frac{\dot{i}_2}{\dot{i}_1} \right|_{\dot{u}_2=0} = \frac{-\frac{1}{5}\dot{i}_1}{\dot{i}_1} = -\frac{1}{5}$$

2) 求 h_{12} 和 h_{22} 。令 $\dot{I}_1 = 0$ ，电路如题 8-35 解图 (f) 所示。由 KVL 得

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = Z\dot{i}_2 + (Z+Z)\dot{i}_0 = Z\dot{i}_2 + 2Z\dot{i}_0 \\ \dot{U}_2 = Z\dot{i}_2 + (\dot{i}_2 - \dot{i}_0)Z + 2\dot{U}_2 \end{cases}$$

整理有

$$\begin{cases} Z\dot{i}_2 + 2Z\dot{i}_0 = \dot{U}_2 \\ 2Z\dot{i}_2 - Z\dot{i}_0 = -\dot{U}_2 \end{cases}$$

解之得

$$\dot{i}_0 = \frac{3}{5Z}\dot{U}_2, \dot{i}_2 = -\frac{1}{5Z}\dot{U}_2$$

所以

$$\dot{U}_1 = Z\dot{i}_0 = \frac{3}{5}\dot{U}_2$$

则

$$h_{12} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{i}_1=0} = \frac{3}{5}, h_{22} = \left. \frac{\dot{i}_2}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{i}_1=0} = -\frac{1}{5Z}$$

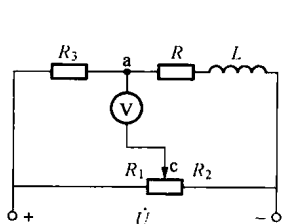
因此，双口网络的 H 参数矩阵为

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{3Z}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5Z} \end{bmatrix}$$

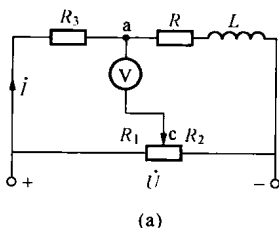
相量图

8-36 见 [例 8-4]。

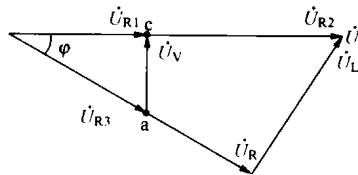
8-37 题 8-37 图所示电路可用来测定电感线圈的参数 R 和 L 。测定方法是调节电位器滑动端 (C 端)，使电压表示数最小，便可从已知参数中算出 R 和 L 之值。当 $U = 100\text{V}$ ， $f = 50\text{Hz}$ ， $R_3 = 6.5\Omega$ ，电位器调至 $R_1 = 5\Omega$ ， $R_2 = 15\Omega$ ，电压表的示数最小且为 30V 。试求待测电感线圈的参数 R 和 L 。



题 8-37 图



(a)



(b)

题 8-37 解图

解 设电流 \dot{I} 的参考方向如题 8-37 解图 (a) 所示。以 \dot{U} 为参考相量, 即 $\dot{U} = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$, 作出的电路相量图如题 8-37 解图 (b) 所示。

(1) 求电阻 R 。

$$U_{R_1} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U = \frac{5}{5 + 15} \times 100 = 25 \text{ (V)}$$

$$\varphi = \arctan \frac{U_V}{U_{R_1}} = \arctan \frac{30}{25} = 50.2^\circ, U_{R_3} = \sqrt{U_{R_1}^2 + U_V^2} = \sqrt{25^2 + 30^2} = 39.05 \text{ (V)}$$

所以

$$I = \frac{U_{R_3}}{R_3} = \frac{39.05}{6.5} = 6.01 \text{ (A)}, U_R = U \cos \varphi - U_{R_3} = 100 \cos 50.2^\circ - 39.05 = 24.96 \text{ (V)}$$

$$R = \frac{U_R}{I} = \frac{24.96}{6.01} = 4.15 \text{ (\Omega)}$$

(2) 求电感 L 。

$$U_L = U \sin \varphi = 100 \times \sin 50.2^\circ = 76.83 \text{ (V)}$$

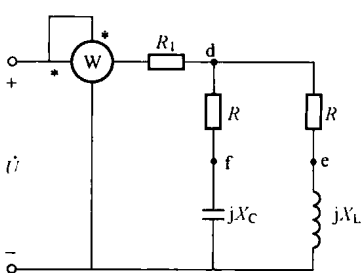
$$X_L = \frac{U_L}{I} = \frac{76.83}{6.01} = 12.78 \text{ (\Omega)}, L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{12.78}{314} = 40.7 \text{ (mH)}$$

8-38 题 8-38 图所示正弦稳态电路中, 已知 $U = 20\sqrt{3} \text{ V}$, $U_{df} = U_{de} = U_{fe}$, $R_1 = 10 \Omega$, 功率表示数 $P = 60 \text{ W}$ 。求 R 、 X_L 和 X_C 。

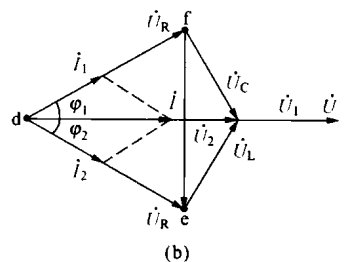
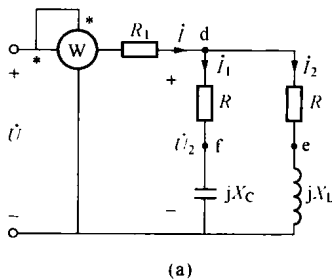
解 所用电压的参考方向如题 8-38 解图 (a) 所示。因为 $U_{df} = U_{de}$, 所以

$$I_1 = I_2, U_C = U_L, |\varphi_1| = |\varphi_2|$$

以电压 \dot{U}_2 为参考相量, 即 $\dot{U}_2 = U_2 \angle 0^\circ$, 作出电路的相量图如题 8-38 解图 (b) 所示。



题 8-38 图



题 8-38 解图

因为 $U_{df} = U_{de} = U_{fe}$, 所以 $\triangle fde$ 为等边三角形, 则 $|\varphi_1| = |\varphi_2| = 30^\circ$; 又因为 $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$, 所以, \dot{I} 与 \dot{U}_2 同相。而 $\dot{U} = \dot{U}_2 + R_1 \dot{I}$, 故 \dot{I} 与 \dot{U} 同相。因此, $P = UI \cos \theta = UI$, 则

$$I = \frac{P}{U} = \frac{60}{20\sqrt{3}} = \sqrt{3} \text{ (A)}$$

因为 \dot{I} 与 \dot{U} 和 \dot{U}_2 同相, 所以, 由 $\dot{U} = \dot{U}_2 + R_1 \dot{I}$ 可得

$$U = U_2 + R_1 I$$

则

$$U_2 = U - R_1 I = 20\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = 10\sqrt{3} \text{ (V)}, U_R = U_{df} = U_{de} = U_2 \cos 30^\circ = 10\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15 \text{ (V)}$$

$$U_C = U_L = U_2 \sin 30^\circ = 10\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 5\sqrt{3} \text{ (V)}$$

由于
而
所以

$$P = P_{R1} + I_1^2 R + I_2^2 R = P_{R1} + 2I_1^2 R = P_{R1} + 2P_R$$

$$P = 60 \text{ W}, P_{R1} = I^2 R = (\sqrt{3})^2 \times 10 = 30 \text{ (W)}$$

$$P_R = \frac{P - P_{R1}}{2} = \frac{60 - 30}{2} = 15 \text{ (W)}$$

因为 $P_R = I_1 U_{df} = I_2 U_{de}$, 所以

$$I_1 = I_2 = \frac{P_R}{U_{df}} = \frac{15}{15} = 1 \text{ (A)}$$

则

$$R = \frac{U_{df}}{I_1} = \frac{15}{1} = 15 \text{ (}\Omega\text{)}, X_C = -\frac{U_C}{I_1} = -\frac{5\sqrt{3}}{1} = -5\sqrt{3} \text{ (}\Omega\text{)}, X_L = \frac{U_L}{I_2} = \frac{5\sqrt{3}}{1} = 5\sqrt{3} \text{ (}\Omega\text{)}$$

网络函数

8-39 见 [例 8-5]。

8.5 自测题及参考答案

1. 图 1 所示正弦稳态电路中, 已知电流 $\dot{I}_2 = 10 \angle 0^\circ \text{ A}$ 。求: (1) 电流 \dot{I}_1 、 \dot{I} 和电压 \dot{U} ; (2) 电路吸收的有功功率 P 和无功功率 Q 。

2. 图 2 所示正弦稳态电路中, 已知 $R = 5 \Omega$, $X_L = 5 \Omega$, $X_C = -10 \Omega$, 电压表 PV1 的示数为 100V。求电压表 PV 的示数和电流表 PA 的示数。

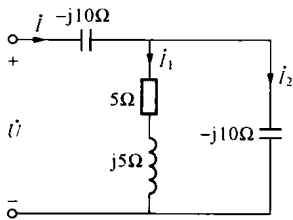


图 1

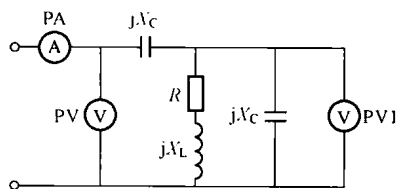


图 2

3. 图 3 所示正弦稳态电路中, $R_1 = R_2 = 10 \Omega$, $L = 0.25 \text{ H}$, $C = 10^{-3} \text{ F}$, 电压表的示数为 20V, 功率表的示数为 120W, 求电源发出的复功率 \tilde{S} 。

4. 求图 4 所示电路在 $\omega = 10 \text{ rad/s}$ 时 a、b 端的最简等效电路及元件参数值。

5. 图 5 所示正弦稳态电路中, 已知电源电压 $U = 220 \text{ V}$ 、 $f = 50 \text{ Hz}$, 若将电路的功率因数提高至 0.906, 求应在端口并联多大的电容 C 。

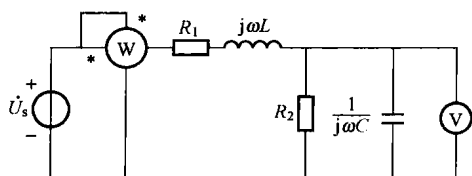


图 3

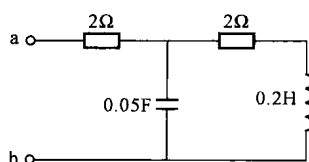


图 4

6. 图 6 所示稳态电路中, 所有电压源的角频率均为 $\omega=10^5 \text{ rad/s}$, 但它们的大小和相位均未给出。已知当 $R=1.5 \text{ k}\Omega$ 时, $\dot{I}=1 \angle 30^\circ \text{ A}$; $C=0.04 \mu\text{F}$, 其他参数如图 6 所示。求 $R=0.5 \text{ k}\Omega$ 时, 电流 \dot{I} 的值。

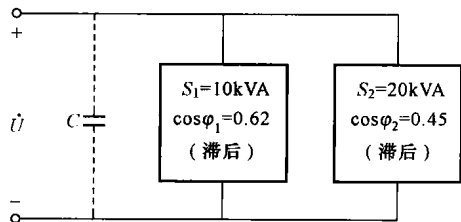


图 5

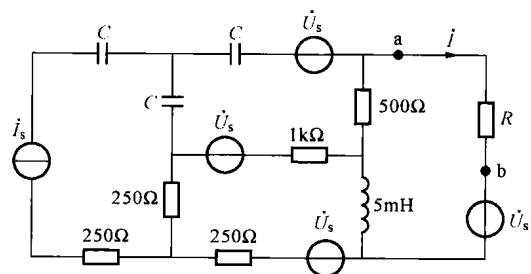


图 6

7. 图 7 所示正弦稳态电路中, $I_R=3 \text{ A}$, $I_L=5 \text{ A}$, $U_s=6 \text{ V}$, $\omega=10^3 \text{ rad/s}$, 且 \dot{U}_s 与 \dot{U}_C 之间的相位差为 90° 。求电路参数 R 、 L 和 C 。

8. 图 8 所示正弦稳态电路中, 已知端口电压 \dot{U} 与端口电流 \dot{I} 同相, 电路吸收的有功功率 $P=1500 \text{ W}$, 端口电压有效值 $U=150 \text{ V}$, 各支路电流的有效值满足 $I=I_L=I_C$ 。求电阻 R 及电抗 X_L 和 X_C 的值。

9. 图 9 所示正弦稳态电路中, 如果电阻 R 改变时电流 I 保持不变, L 、 C 应该满足什么条件?

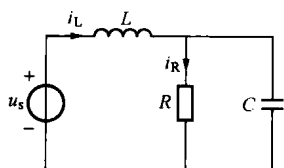


图 7

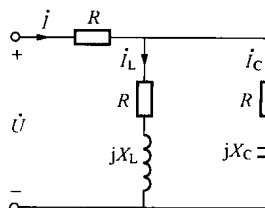


图 8

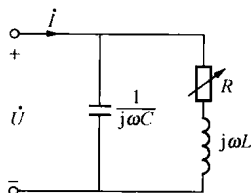


图 9

10. 图 10 所示正弦稳态电路中, 已知 $I_s=60 \text{ mA}$, $R=1 \text{ k}\Omega$, $C=1 \mu\text{F}$, 如果电源的角频率可变, 那么在什么频率时, 流经最右端电容 C 的电流 I_C 为最大? 并求此电流。

11. 图 11 所示正弦稳态电路中, $R_1=1 \Omega$, $R_2=2 \Omega$, $L=0.4 \text{ mH}$, $C=10^{-3} \text{ F}$, $\omega=10^3 \text{ rad/s}$, $\dot{U}_s=10 \angle -45^\circ \text{ V}$ 。若负载阻抗 Z_L 任意可调, 求 Z_L 可获得的最大功率 P_{max} 。

12. 图 12 所示正弦稳态电路中, 已知 Z_1 消耗的平均功率 (有功功率) 为 80 W , 功率因

数为 0.8 (感性); Z_2 消耗的平均功率为 30W, 功率因数为 0.6 (容性)。求并联后总阻抗的功率因数。

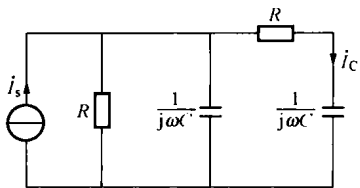


图 10

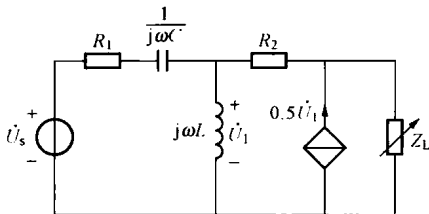


图 11

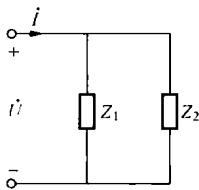


图 12

参考答案

1. (1) $\dot{I}_1 = 10\sqrt{2} \angle -135^\circ$ A, $\dot{I} = 10 \angle -90^\circ$ A, $\dot{U} = 100\sqrt{2} \angle -135^\circ$ V
- (2) 1kW, -1kvar
2. 141.4V, 10A
3. $120 + j160$ VA
4. 4Ω 电阻与 0.05F 电容串联
5. 1225.1μF
6. $2 \angle 30^\circ$ A
7. $\frac{8}{3} \Omega$, 2mH, 500μF
8. 5Ω, $5\sqrt{3} \Omega$, $-5\sqrt{3} \Omega$
9. $LC = \frac{1}{2\omega^2}$
10. 10^3 rad/s, 20mA
11. 6.25W
12. 0.984

第9章 谐振与互感

9.1 本章知识结构图

第9章知识结构图如图9-1所示。

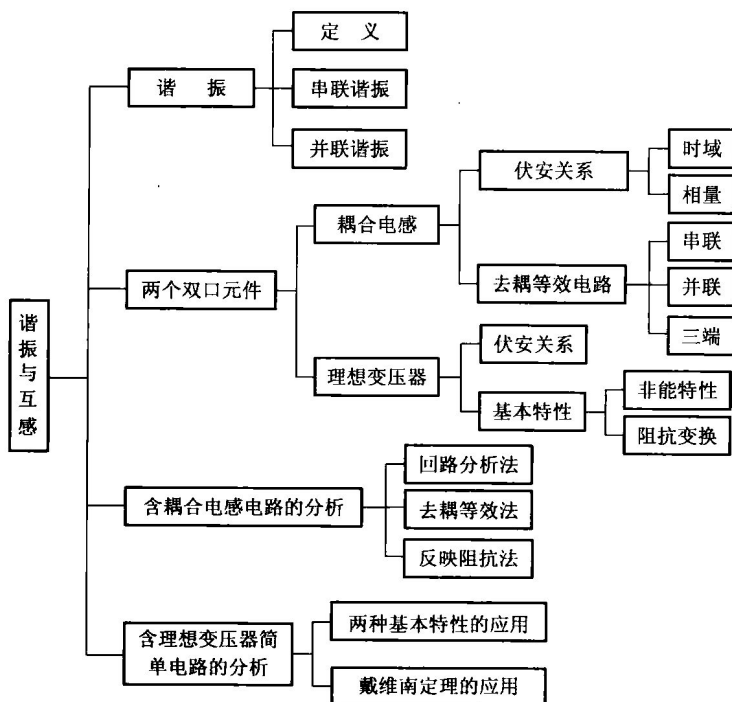


图9-1 第9章知识结构图

9.2 知识点归纳与学习指导

本章内容分为谐振电路与含互感的电路两大部分。

9.2.1 谐振

1. 谐振的概念

含有电感 L 和电容 C 且无独立源的二端网络，如果在某一频率下，端口电压与端口电流同相，则称该二端网络发生了谐振。谐振时，二端网络与外电路无能量交换，能量交换过程在二端网络中 L 与 C 之间进行。

谐振时，二端网络输入阻抗或导纳的虚部为零，即

$$\operatorname{Im}[Z_i]=0 \quad \text{或者} \quad \operatorname{Im}[Y_i]=0 \quad (\text{谐振条件})$$

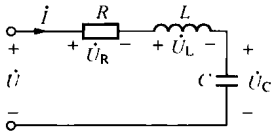
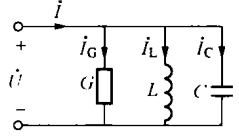
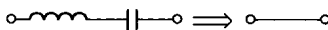
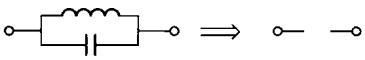
利用上述条件可确定网络的谐振频率。

常见的基本谐振电路分为串联谐振、并联谐振和耦合谐振三种。

2. 串联谐振和并联谐振

串联谐振和并联谐振电路的基本特性见表 9-1。

表 9-1 串联和并联谐振电路的基本特性

电路结构		
谐振形式	串联谐振	并联谐振
别名	电压谐振	电流谐振
谐振条件	$X_0 = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$	$B_0 = \omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} = 0$
谐振频率	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$
输入阻抗	$Z_0 = R$ (电阻性), $ Z(\omega) $ 最小	$Y_0 = G$ (呈电阻性), $ Y(\omega) $ 最小
谐振时电流和电压	U 一定, 谐振电流有效值 I_0 最大 $\dot{U}_R = \dot{U}, \dot{U}_L = jQ\dot{U}, \dot{U}_C = -jQ\dot{U}$	I 一定, 谐振电压有效值 U_0 最大 $\dot{i}_R = \dot{i}, \dot{i}_L = -jQ\dot{i}, \dot{i}_C = jQ\dot{i}$
对外特性		
品质因数	$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\rho}{R}$	$Q = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{\omega_0 LG} = \frac{1}{G} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{G\rho}$
特性阻抗	$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$	$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$
电磁总能量	$W(t) = CQ^2 U$	$W(t) = LQ^2 I^2$
通用曲线表达式	$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$	$\frac{U}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$
通频带宽度	$BW = \omega_0 / Q$	$BW = \omega_0 / Q$

【例 9-1】 图 9-2 (a) 所示正弦稳态电路中, $U=50\text{V}$, $R_1=10\Omega$, $R_2=15\Omega$, $L_1=0.5\text{mH}$, $L_2=0.1\text{mH}$, $C_1=0.2\mu\text{F}$, $C_2=1\mu\text{F}$, 电流表 PA2 的示数为零。求电流表 PA1、PA3 和功率表 PW 的示数。

解 因为电流表 PA2 的示数为零, 说明 L_2 、 C_2 并联分支发生并联谐振, 其谐振频率为

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = \frac{1}{\sqrt{0.1 \times 10^{-3} \times 10^{-6}}} = 10^5 \text{ (rad/s)}$$

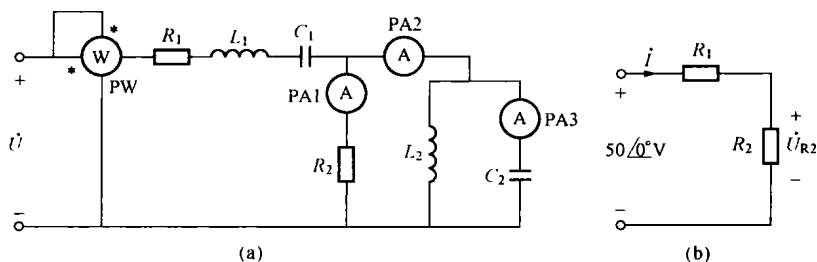


图 9-2 [例 9-1] 图

则

$$X_{L1} = \omega_0 L_1 = 10^5 \times 0.5 \times 10^{-3} = 50 \text{ } (\Omega), \quad X_{C1} = -\frac{1}{\omega_0 C_1} = -\frac{1}{10^5 \times 0.2 \times 10^{-6}} = -50 \text{ } (\Omega)$$

因为 $X_{L1} + X_{C1} = 0$, 说明 L_1 、 C_1 串联分支对 ω_0 发生串联谐振, 等效电路如图 9-1 (b) 所示。

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{R_1 + R_2} = \frac{50 \angle 0^\circ}{10 + 15} = 2 \angle 0^\circ \text{ (A)}$$

所以, 电流表 PA1 的示数为 2A。因此

$$P = (R_1 + R_2) I^2 = (10 + 15) \times 2^2 = 100 \text{ (W)}$$

则功率表 PW 的示数为 100W。

$$\dot{U}_{R2} = R_2 \dot{i} = 15 \times 2 \angle 0^\circ = 30 \angle 0^\circ \text{ (V)}$$

$$I_{C2} = \omega_0 C_2 U_{R2} = 10^5 \times 10^{-6} \times 30 = 3 \text{ (A)}$$

所以, 电流表 PA3 的示数为 2A。

3. 纯 LC 网络谐振频率的确定

纯 LC 网络中感性支路和容性支路的串联连接和并联连接可分别发生串联谐振和并联谐振。其谐振频率的确定方法如下:

方法 1: 先求出输入阻抗或输入导纳, 然后令其等于零可求出谐振频率。

方法 2: 谐振条件可变为

$$\text{感性支路的感抗} + \text{容性支路的容抗} = 0$$

利用上述条件可确定相应的谐振频率。

方法 3: 由于发生串联谐振时, 支路两端节点等电位, 因此, 两端节点可短接, 从而转换为求等效的并联谐振频率; 发生并联谐振时, 总支路电流为零, 感性支路和容性支路流过的电流相同, 因此, 可断开转化为求等效的串联谐振频率。

【例 9-2】 求图 9-3 (a) 所示电路的谐振频率。

解 方法 1: 该二端网络的输入阻抗为

$$Z = j\omega L_1 + \frac{j\omega L_2 \left(-j \frac{1}{\omega C}\right)}{j\omega L_2 - j \frac{1}{\omega C}} = j\omega L_1 - j \frac{\omega L_2}{\omega^2 L_2 C - 1} = j\omega \left[\frac{\omega^2 L_1 L_2 C - (L_1 + L_2)}{\omega^2 L_2 C - 1} \right]$$

令分子为零, 即 $\omega^2 L_1 L_2 C - (L_1 + L_2) = 0$, 则串联谐振频率为

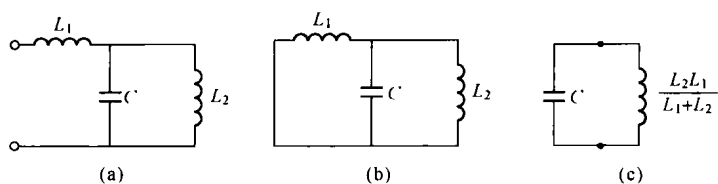


图 9-3 [例 9-2] 图

$$\omega_{0s} = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}}$$

令分母为零, 即 $\omega^2 L_2 C - 1 = 0$, 则并联谐振频率为

$$\omega_{0p} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}}$$

方法 2: L_2 和 C 的并联谐振频率为

$$\omega_{0p} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}}$$

令 L_2 和 C 并联的容抗与 L_1 的感抗之和为零, 即

$$\omega L_1 - \frac{1}{\omega C - \frac{1}{\omega L_2}} = \omega L_1 - \frac{\omega L_2}{\omega^2 L_2 C - 1} = \omega \frac{\omega^2 L_1 L_2 C - (L_1 + L_2)}{\omega^2 L_2 C - 1} = 0$$

则有 $\omega^2 L_1 L_2 C - (L_1 + L_2) = 0$, 故串联谐振频率为

$$\omega_{0s} = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}}$$

方法 3: L_2 和 C 的并联谐振频率为

$$\omega_{0p} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}}$$

发生串联谐振时二端网络端口相当于短路, 电路变为图 9-3 (b)。图中 L_1 和 L_2 并联合一, 如图 9-3 (c) 所示。则串联谐振频率为

$$\omega_{0s} = \frac{1}{\sqrt{(L_1 // L_2) C}} = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}}$$

9.2.2 耦合电感

1. 耦合电感的伏安关系

耦合电感又称互感, 是一种双口电感元件, 其电路符号如图 9-4 所示。图中, 打“*”的两个端子为同名端。在图 9-4 所示参考方向下, 耦合电感的伏安关系为

$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

耦合电感要用自感 L_1 、 L_2 和互感 M 三个参数来表征。耦合系数 $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$ ($0 \leq k \leq 1$)。

1)。 $k=1$ 时称为全耦合电感。

每个线圈除了自感电压 $L_1 \frac{di_1}{dt}$ 、 $L_2 \frac{di_2}{dt}$ 外，还有互感电压 $M \frac{di_2}{dt}$ 、 $M \frac{di_1}{dt}$ 。如果端口电压和电流采用关联参考方向，则式中的自感电压前总是带正号，而互感电压前则有正负两种可能。当两个电流从同名端流入时取正号，从异名端流入时取负号。列写伏安关系的一般规律如下：

- (1) 自感电压的正极性位于产生该电压的电流的流入端钮；
- (2) 互感电压的正极性位于产生该电压的电流流入端钮的同名端。

耦合电感的相量模型如图 9-5 所示。其伏安关系的相量形式为

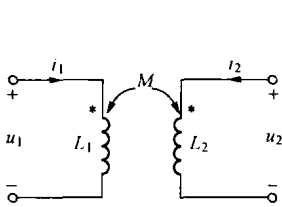


图 9-4 耦合电感的符号

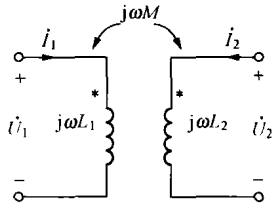


图 9-5 耦合电感的相量模型

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \end{cases}$$

学习过程中，正确计入互感电压是掌握耦合电感的关键。显然，直流稳态时，耦合电感的两个线圈均处于短路状态。

2. 耦合电感的等效电路

图 9-4 中耦合电感的含受控源一般等效电路如图 9-6 所示。

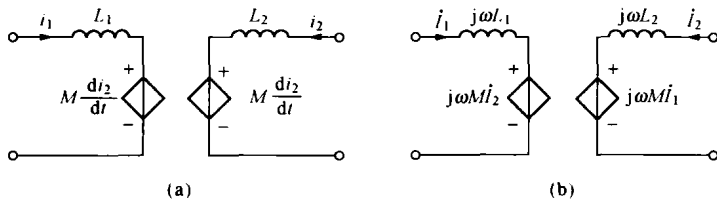


图 9-6 耦合电感的含受控源等效电路

(a) 时域电路；(b) 相量模型

外接端钮小于 4 的耦合电感可用去耦电路等效代替。

(1) 三端耦合电感。同名端相连和异名端相连的三端耦合电感的去耦等效电路分别如图 9-7 (a)、(b) 所示。

(2) 耦合电感的串联。耦合电感的串联对外等效为一个电感，如图 9-8 所示。等效电感值顺接为

$$L = L_1 + L_2 + 2M$$

反接为

$$L = L_1 + L_2 - 2M$$

把串联连接的耦合电感看成是端钮 3 悬空的三端耦合电感亦有上述结果。

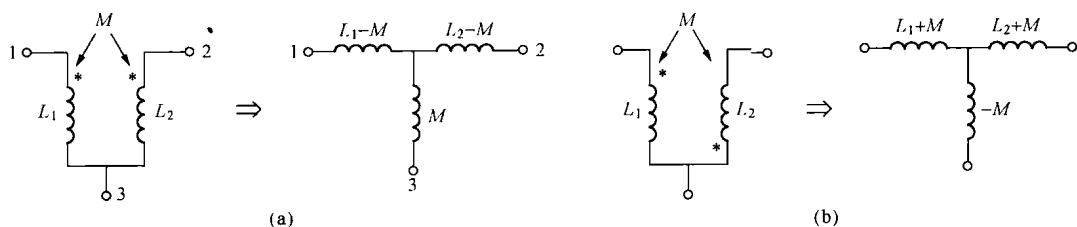


图 9-7 三端耦合电感及其去耦等效电路

(a) 同名端相连; (b) 异名端相连

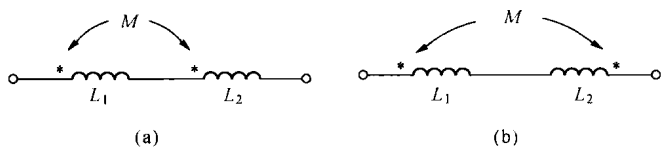


图 9-8 耦合电感的串联

(a) 顺接; (b) 反接

(3) 耦合电感的并联。耦合电感的并联 (见图 9-9) 对外等效为一个电感。耦合电感的并联可看成是三端耦合电感的端钮 1 和 2 连接在一起的一种特殊情况。

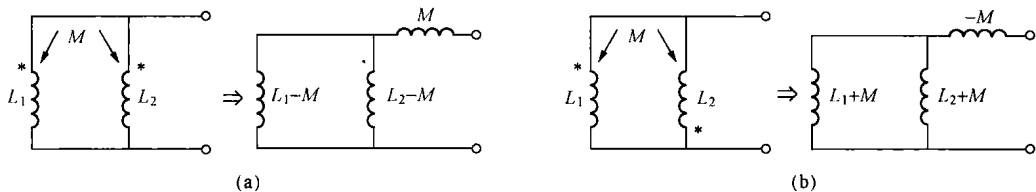


图 9-9 耦合电感的并联及其去耦等效电路

(a) 同名端相连; (b) 异名端相连

3. 含耦合电感电路的分析

(1) 回路分析法。因耦合电感的伏安关系为流控型，故采用回路分析法进行分析。这是分析含耦合电感电路的一般方法。列写回路电流方程时先不考虑互感建立方程，然后再正确计入互感电压。该方法的关键在于正确地计入互感电压。

【例 9-3】 图 9-10 (a) 所示正弦稳态电路中， $R=5\Omega$ ， $\omega L_1=3\Omega$ ， $\omega L_2=12\Omega$ ， $\omega M=6\Omega$ ， $\dot{U}=5\angle 0^\circ$ V。试求电流 \dot{I}_0 。

解 互感电压的方向如图 9-10 (b) 所示。以 \dot{I}_1 、 \dot{I}_0 为回路电流，则电路回路电流方程的相量形式为

$$\begin{cases} (R+j\omega L_1+j\omega L_2)\dot{I}_1-j\omega L_2\dot{I}_0-j\omega M\dot{I}_1+j\omega M\dot{I}_0-j\omega M\dot{I}_1=\dot{U} \\ -j\omega L_2\dot{I}_1+j\omega M\dot{I}_1+j\omega L_2\dot{I}_0=0 \end{cases}$$

整理得

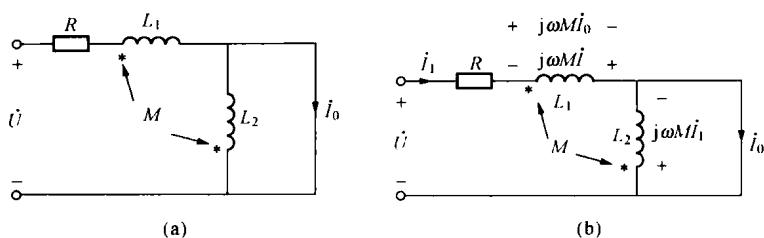


图 9-10 [例 9-3] 图

$$\begin{cases} (R+j\omega L_1+j\omega L_2-j2\omega M)\dot{I}_1+(j\omega M-j\omega L_2)\dot{I}_0=\dot{U} \\ (j\omega M-j\omega L_2)\dot{I}_1+j\omega L_2\dot{I}_0=0 \end{cases}$$

代入数值得

$$\begin{cases} (5+j3)\dot{I}_1-j6\dot{I}_0=5\angle 0^\circ \\ -j6\dot{I}_1+j12\dot{I}_0=0 \end{cases}$$

解之得

$$\dot{I}_0=0.5\angle 0^\circ \text{ A}$$

(2) 去耦分析法。去耦分析法又称为互感消去法，这一方法只适用于仅含三端和二端耦合电感的电路。先用去耦等效电路代替电路中的三端和二端耦合电感，然后再对获得的电路进行分析。

【例 9-4】 用去耦分析法重做 [例 9-3]。

解 去耦等效电路如图 9-11 (b) 所示。

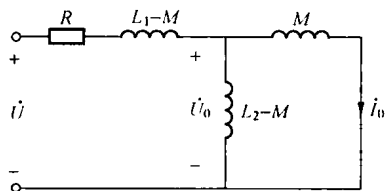


图 9-11 [例 9-4] 图

$$Z_1=R+j\omega(L_1-M)=5+j(3-6)=5-j3 \text{ (}\Omega\text{)}$$

$$Z_2=j\omega(L_2-M)=j(12-6)=j6 \text{ (}\Omega\text{)}, Z_3=j\omega M=j6 \text{ (}\Omega\text{)}$$

则

$$\dot{U}_0=\frac{Z_2//Z_3}{Z_1+Z_2//Z_3}\times\dot{U}=\frac{j3}{5-j3+j3}\times 5\angle 0^\circ=3\angle 90^\circ \text{ (V)}$$

所以

$$\dot{I}_0=\frac{\dot{U}_0}{Z_3}=\frac{3\angle 90^\circ}{j6}=0.5\angle 0^\circ \text{ (A)}$$

(3) 反映阻抗法。反映阻抗法只适用于空芯变压器的简化电路模型，即耦合电感两侧电路只有磁的联系，没有电的联系（无电流通路），如图 9-12 所示。

二次侧对一次侧的影响可用反映阻抗 Z_{ref} 等效，如图 9-13 (a) 所示。其中 $Z_{\text{ref}}=\frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}$ ， Z_{22} 为二次侧回路的自阻抗。反映阻抗的性质与 Z_{22} 相反，并且与同名端的位置无关。求二次侧回路的电量可用图 9-13 (b) 所示的等效电路求解。

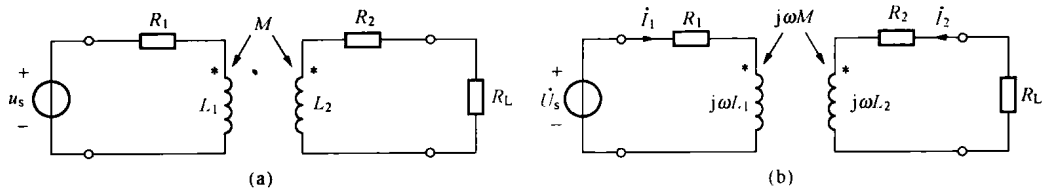


图 9-12 空芯变压器电路

(a) 时域电路；(b) 相量模型

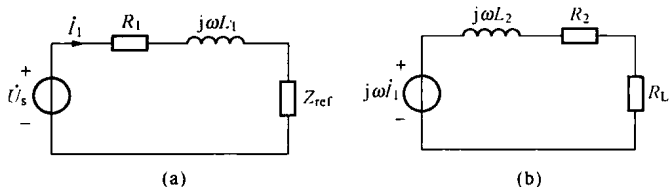


图 9-13 空芯变压器一次侧和二次侧的等效电路

(a) 一次侧；(b) 二次侧

9.2.3 理想变压器

1. 特性方程

理想变压器是一种双口电阻元件，电路符号如图 9-14 所示，其表征参数变比为 n 。变比 n 定义为两线圈的匝数比。理想变压器的 VAR 为

$$\begin{cases} u_1 = nu_2 \\ i_2 = -ni_1 \end{cases}$$

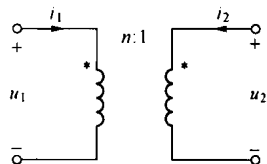


图 9-14 理想变压器

理想变压器一侧电压为零时，另一侧电压也必然为零；同样，一侧电流为零时，另一侧电流也必然为零。

列写 VAR 的一般规律为：

(1) 不论端口电流的参考方向如何，当两个端口电压参考方向的正极性位于同名端时，联系两个电压的方程中的变比 n 前取正号；否则取负号。

(2) 不论端口电压的参考方向如何，当两个端口电流的参考方向都是从同名端流入时，联系两个电流的方程中的变比 n 前取负号；否则取正号。

2. 两个重要基本特性

(1) 非能特性。理想变压器既不消耗能量，也不储存能量，它把输入到原边的能量同时全部由二次侧传送出去。这种既不消耗能量，也不储存能量的特性称为非能特性。

对于理想变压器这样的具有非能特性的多口元件，虽然总功率为零，但这并不意味着每个端口的功率也为零。也就是说，当某些端口的功率为正时，必然有另一些端口的功率为负。

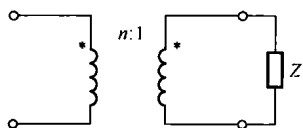


图 9-15 阻抗变换用图

(2) 阻抗变换特性。如图 9-15 所示，一次侧的输入阻抗为 $Z_i = n^2 Z$ 。阻抗变换公式与同名端的位置无关。

对于含理想变压器的简单电路，联合应用上述两个重要基本特性可简化电路计算；亦可利用戴维南定理求解。

注：理想变压器作为一个电路元件，既可以改变交流也

可以改变直流。但实际变压器是依据电磁感应工作的，只能改变交流，不能改变直流。

【例 9-5】 图 9-16 (a) 所示电路中， $R_L=4\Omega$ 。求：(1) 40V 正弦电压源提供的功率；(2) R_L 吸收的功率。

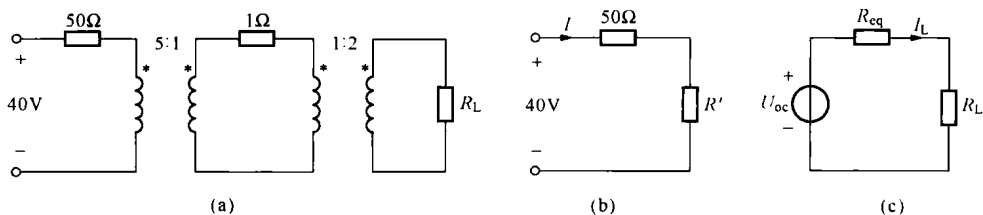


图 9-16 [例 9-5] 图

解 (1) 将原电路等效为图 9-16 (b)。

$$R' = \left(\frac{4}{2^2} + 1\right) \times 5^2 = 50 \text{ } (\Omega), \quad I = \frac{40}{50 + R'} = \frac{40}{50 + 50} = 0.4 \text{ (A)}$$

所以，40V 电压源提供的功率为

$$P_{40V} = 40I = 40 \times 0.4 = 16 \text{ (W)}$$

(2) 将 R_L 支路抽出，其余部分用其戴维南等效电路代替，电路如图 9-16 (c) 所示。其中

$$U_{oc} = \frac{1}{5} \times 40 \times 2 = 16 \text{ (V)}, \quad R_{eq} = \left(\frac{50}{5^2} + 1\right) \times 2^2 = 12 \text{ } (\Omega)$$

则

$$I_L = \frac{U_{oc}}{R_{eq} + R_L} = \frac{16}{12 + 4} = 1 \text{ (A)}$$

或者

$$I_L = \frac{1}{2} \times 5 \times I = \frac{1}{2} \times 5 \times 0.4 = 1 \text{ (A)}$$

所以 R_L 吸收的功率为

$$P_{RL} = I_L^2 \times R_L = 1 \times 4 = 4 \text{ (W)}$$

9.3 重点、难点与考点

重点与难点

本章的重点是串联谐振和并联谐振、含耦合电感电路的分析以及含理想变压器电路的分析。难点是含耦合电感电路的回路分析法中正确计入互感电压。

考点

本章考试的重点和热点主要集中在谐振、含耦合电感电路的分析（特别是去耦法）及含理想变压器简单电路的分析。

9.4 第9章习题选解

谐振

9-2 题 9-2 图所示电路中， $U=1V$ ，谐振频率 $f_0=1MHz$ ，谐振时电流 $I_0=1mA$ ，电

容两端电压为 100V。求：(1) 电路参数 R 、 L 和 C ；(2) 品质因数 Q ；(3) 通频带 BW 。

解 (1) 因为 $U=1V$ ，谐振时电流 $I_0=1mA$ ，所以

$$R = \frac{U}{I_0} = \frac{1}{10^{-3}} = 1 \text{ (k}\Omega\text{)}$$

因为 $f_0=1MHz$ ，所以

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi \times 10^6 \text{ (rad/s)}$$

又因为 $U_{C_0} = \frac{1}{\omega_0 C} I_0$ ，而 $U_{C_0}=100V$ ， $I_0=1mA$ ，所以

$$C = \frac{I_0}{U_{C_0} \omega_0} = \frac{10^{-3}}{100 \times 2\pi \times 10^6} = 1.59 \text{ (pF)}$$

谐振时， $U_{L_0}=U_{C_0}=100V$ ，而 $U_{L_0}=\omega_0 L I_0$ ，所以

$$L = \frac{U_{L_0}}{\omega_0 I_0} = \frac{100}{2\pi \times 10^6 \times 10^{-3}} = 15.9 \text{ (mH)}$$

(2) 因为 $U=1V$ ， $U_{C_0}=100V$ ，所以，品质因数 Q 为

$$Q = \frac{U_{C_0}}{U} = \frac{100}{1} = 100$$

(3) 通频带 BW 为

$$BW = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{2\pi \times 10^6}{100} = 2\pi \times 10^4 \text{ (rad/s)}$$

9-3 RLC 串联谐振电路的电源电压保持 1V 不变，当调节电源频率为 100kHz 时，电路发生谐振，回路电流为 100mA；当电源频率改变到 99kHz 时，回路电流为 70.7mA。求：(1) 回路的 Q 值；(2) R 、 L 和 C 之值。

解 (1) 求回路的 Q 值。因为谐振频率 $f_0=100kHz$ ，谐振时回路电流 $I_0=100mA$ ，而当电源频率改变到 99kHz 时，回路电流为 70.7mA，所以下限截止频率 $f_{dL}=99kHz$ 。则有

$$Q \left(\frac{f_{dL}}{f_0} - \frac{f_0}{f_{dL}} \right) = -1$$

代入已知数据得

$$Q \approx 50$$

(2) 求 R 、 L 和 C 之值。因为 $U=1V$ ， $I_0=100mA$ ，所以

$$R = \frac{U}{I_0} = \frac{1}{100 \times 10^{-3}} = 10 \text{ (}\Omega\text{)}$$

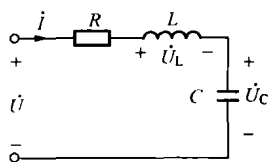
因为 $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$ ，所以

$$L = \frac{QR}{\omega_0} = \frac{50 \times 10}{2\pi \times 100 \times 10^3} = 0.796 \text{ (mH)}$$

又因为 $Q = \frac{1}{\omega_0 CR}$ ，所以

$$C = \frac{1}{\omega_0 QR} = \frac{1}{2\pi \times 100 \times 10^3 \times 50 \times 10} = 3.18 \times 10^{-9} \text{ (F)}$$

9-4 RLC 串联电路的端电压 $u(t) = 10\sqrt{2} \sin(2500t + 15^\circ) V$ ，当 $C=8\mu F$ 时，电路吸收的功率最大，且 $P_{\max}=100W$ 。求电感 L 、电阻 R 和电路的 Q 值。



题 9-2 图

解 因为 $u(t) = 10\sqrt{2} \sin(2500t + 15^\circ) \text{ V}$, 所以 $\dot{U} = 10 \angle 15^\circ \text{ V}$. 因为 $P = UI \cos\theta$, 而 $C = 8\mu\text{F}$ 时, 电路吸收的功率最大, 说明 $C = 8\mu\text{F}$ 时, 电压与电流同相, 电路发生串联谐振, 谐振频率为

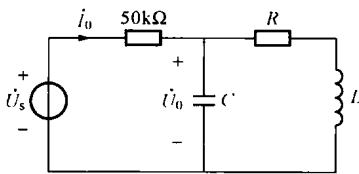
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

则
$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C} = \frac{1}{2500^2 \times 8 \times 10^{-6}} = 0.02 \text{ (H)}$$

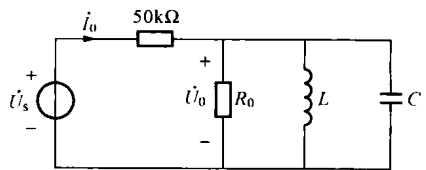
又因为谐振时, $U_R = U = 10\text{V}$, $P_R = P_{\max} = \frac{U^2}{R}$, 所以

$$R = \frac{U^2}{P_{\max}} = \frac{10^2}{10} = 1\Omega, \quad Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{2500 \times 0.02}{1} = 50$$

9-5 题 9-5 图所示电路中, $U_s = 100\text{V}$, 并联谐振回路的谐振频率为 10^6 rad/s , $Q = 100$, 且谐振时 R 吸收的功率为最大。试求: (1) R 、 L 和 C 之值; (2) 谐振时的电流 I_0 、电压 U_0 及谐振时电源发出的功率 P_0 。



题 9-5 图



题 9-5 解图

解 (1) 原电路可等效为题 9-5 解图所示的电路。因为谐振时 R 吸收的功率为最大, 所以并联谐振电路的谐振阻抗等于电源的内阻抗, 即

$$R_0 = \frac{L}{RC} = \frac{\rho^2}{R} = 5 \times 10^4 \text{ (}\Omega\text{)} \quad (1)$$

因为

$$Q = \frac{\omega_0 C}{G_0} = \omega_0 C R_0 = \omega_0 C \cdot \frac{L}{RC} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\rho}{R}$$

所以

$$\rho = QR = 100R \quad (2)$$

将式 (2) 代入式 (1) 得

$$R_0 = \frac{(QR)^2}{R} = Q^2 R = 5 \times 10^4$$

所以

$$R = \frac{5 \times 10^4}{Q^2} = \frac{5 \times 10^4}{100^2} = 5 \text{ (}\Omega\text{)}$$

因为 $Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R}$, 所以

$$L = \frac{QR}{\omega_0} = \frac{100 \times 5}{10^6} = 0.5 \text{ (mH)}, \quad C = \frac{1}{\omega_0 QR} = \frac{1}{10^6 \times 100 \times 5} = 2 \text{ (nF)}$$

(2) 谐振时, 题 9-5 解图中 LC 并联分支相当于开路, 则

$$I_0 = \frac{U_s}{50 \times 10^3 + R_0} = \frac{100}{50 \times 10^3 + 50 \times 10^3} = 1 \text{ (mA)}, U_0 = \frac{1}{2} \times U_s = 50 \text{ (V)}$$

$$P_0 = U_s I_0 = 100 \times 10^{-3} = 0.1 \text{ (W)}$$

9-6 见 [例 9-1]。

9-8 题 9-8 图所示电路中, $U=100\text{V}$, $I=1\text{A}$, $P=100\text{W}$, $P_1=50\text{W}$, $Q_1=50\text{var}$ 。试用谐振的概念求 U_1 和 U_2 。

解 因为 $P=100\text{W}$ 、 $P_1=50\text{W}$, 所以

$$P_2 = P - P_1 = 100 - 50 = 50 \text{ (W)}$$

$$R_1 = R_2 = \frac{P_1}{I^2} = \frac{50}{1} = 50 \text{ (}\Omega\text{)}, U_{R1} = U_{R2} = R_1 I = 50 \times 1 = 50 \text{ (V)}$$

又因为 $U_{R1} + U_{R2} = 100\text{V} = U$, 因此可以断言, 该电路发生了串联谐振, 即

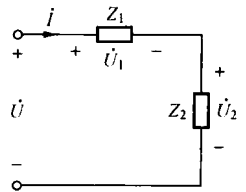
$$X_1 + X_2 = 0$$

由于 $Q_1 = 50\text{var}$, 所以

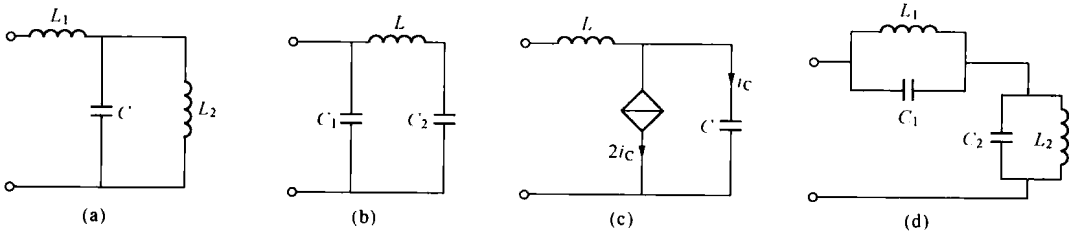
$$X_1 = \frac{Q_1}{I^2} = \frac{50}{1} = 50 \text{ (}\Omega\text{)}, X_2 = -X_1 = -50 \Omega,$$

$$U_1 = U_2 = \sqrt{R_1^2 + X_1^2} \times I = \sqrt{50^2 + 50^2} \times 1 = 50\sqrt{2} \text{ (V)}$$

9-9 求题 9-9 图所示各电路的谐振频率。



题 9-8 图



题 9-9 图

解 (a) 见 [例 9-2]。

(b) 串联谐振频率为

$$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{C_2 L}}$$

并联谐振频率为

$$\omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{(C_1 // C_2) L}} = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2 L}}$$

(c) 电路的相量模型如题 9-9 解图 (a) 所示。

方法 1: 因为

$$\dot{I} = \dot{I}_c + 2\dot{I}_c = 3\dot{I}_c$$

$$\dot{U} = j\omega L \dot{I} + \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_c = j\omega L 3\dot{I}_c + \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_c = j\left(3\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \dot{I}_c$$

所以

$$Z(j\omega) = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = j\left(3\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = jX(\omega)$$

谐振时, $\text{Im}[Z(j\omega_0)] = 0$, 即

$$X(\omega_0) = 3\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$$

解之得

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{3LC}}$$

方法 2: 电容与 CCCS 并联的端口伏安关系为

$$\dot{I} = \dot{I}_C + 2\dot{I}_C = 3\dot{I}_C = j3\omega C \dot{U}_C$$

故其可等效为 $3C$ 的电容, 如题 9-9 解图 (b)。因此, 电路的串联谐振频率为

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{3LC}}$$

(d) 并联谐振频率分别为

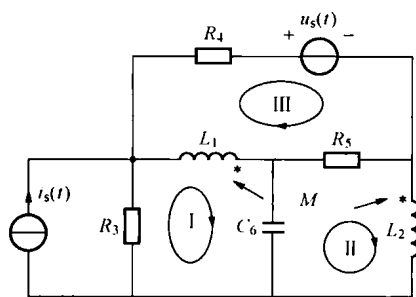
$$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{C_1 L_1}}, \quad \omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{C_2 L_2}}$$

串联谐振频率为

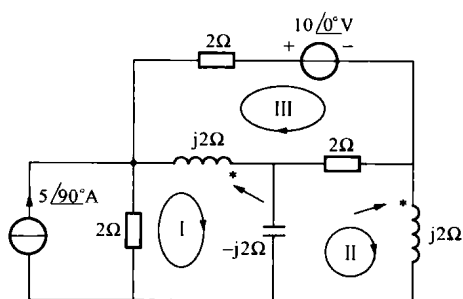
$$\omega_{03} = \frac{1}{\sqrt{(C_1 + C_2)(L_1 // L_2)}} = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 (C_1 + C_2)}}$$

互感电路的回路分析法

9-10 题 9-10 图所示正弦稳态电路中, $u_s(t) = 10\sqrt{2} \sin t$ V, $i_s(t) = 5\sqrt{2} \cos t$ A, $L_1 = L_2 = 2$ H, $M = 1$ H, $R_3 = R_4 = R_5 = 2\Omega$, $C_6 = 0.5$ F。试列写该电路的网孔电流相量方程。



题 9-10 图



题 9-10 解图

解 电路的相量模型如题 9-10 解图所示。则由网孔法得

$$\begin{cases} (2+j2-j2)\dot{I}_{m1} + j2\dot{I}_{m2} - j2\dot{I}_{m3} - j\dot{I}_{m2} = 2 \times 5 \angle 90^\circ \\ j2\dot{I}_{m1} + (2+j2-j2)\dot{I}_{m2} - 2\dot{I}_{m3} - j(\dot{I}_{m1} - \dot{I}_{m3}) = 0 \\ -j2\dot{I}_{m1} - 2\dot{I}_{m2} + (2+2+j2)\dot{I}_{m3} + j\dot{I}_{m2} = -10 \angle 0^\circ \end{cases}$$

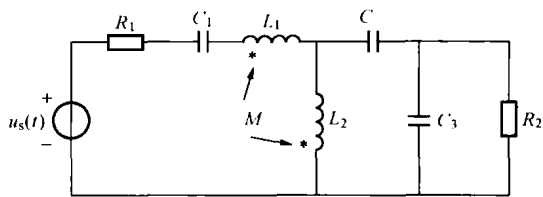
整理得网孔电流方程为

$$\begin{cases} 2\dot{I}_{m1} + j\dot{I}_{m2} - j2\dot{I}_{m3} = j10 \\ j\dot{I}_{m1} + 2\dot{I}_{m2} - (2-j)\dot{I}_{m3} = 0 \\ -j2\dot{I}_{m1} - (2-j)\dot{I}_{m2} + (4+j2)\dot{I}_{m3} = -10 \end{cases}$$

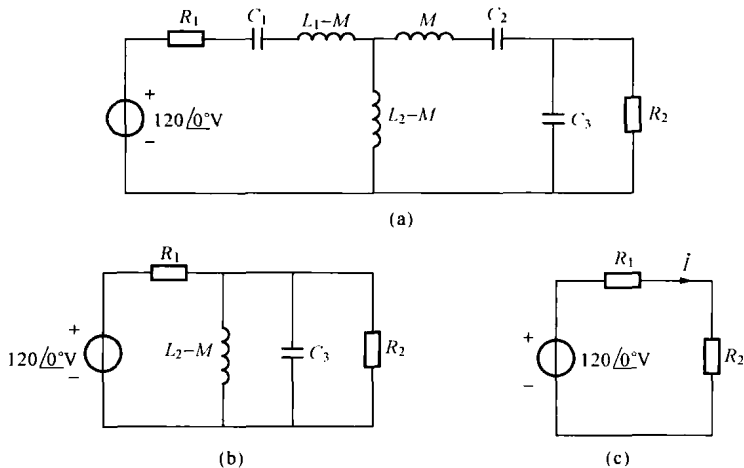
注：列写方程的关键是正确计入互感电压。应用回路（网孔）法时，两个电流从同名端流入互感电压取正，异名端流入取负。

互感电路的去耦分析法

9-11 题 9-11 图所示稳态电路中， $u_s(t) = 120\sqrt{2}\sin 10t$ V， $M = 1$ H， $L_1 = 2$ H， $L_2 = 3$ H， $C_1 = 0.01$ F， $C_2 = 0.01$ F， $C_3 = 0.005$ F， $R_1 = 10\Omega$ ， $R_2 = 30\Omega$ 。求电容 C_1 提供的无功功率和电阻 R_2 吸收的平均功率。



题 9-11 图



题 9-11 解图

解 消去互感的等效电路如题 9-11 解图 (a) 所示，则

$$X_1 = \omega(L_1 - M) = 10 \times (2 - 1) = 10\Omega, \quad X_2 = \omega(L_2 - M) = 10 \times (3 - 1) = 20(\Omega)$$

$$X_M = \omega M = 10 \times 1 = 10(\Omega)$$

$$X_{C1} = -\frac{1}{\omega C_1} = -\frac{1}{10 \times 0.01} = -10(\Omega), \quad X_{C2} = -\frac{1}{\omega C_2} = -\frac{1}{10 \times 0.01} = -10(\Omega)$$

$$X_{C3} = -\frac{1}{\omega C_3} = -\frac{1}{10 \times 0.005} = -20(\Omega)$$

因为 $X_1 + X_{C1} = 0$ ， $X_M + X_{C2} = 0$ ，所以 C_1 与 $L_1 - M$ 、 M 与 C_2 分别发生串联谐振，相当于短路，则题 9-11 解图 (a) 等效为题 9-11 解图 (b)。

因为 $X_2 + X_{C3} = 0$ ，所以 $L_2 - M$ 与 C_3 发生并联谐振，相当于开路，题 9-11 解图 (b) 进一步等效为题 9-11 解图 (c)，则

$$\dot{i} = \frac{120 \angle 0^\circ}{R_1 + R_2} = \frac{120 \angle 0^\circ}{10 + 30} = 3 \angle 0^\circ \text{ (A)}$$

电容 C_1 提供的无功功率为

$$Q_{C1} = |X_{C1}| I^2 = 10 \times 3^2 = 90 \text{ (var)}$$

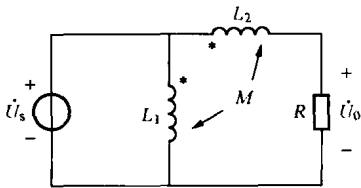
电阻 R_2 吸收的平均功率为

$$P_{R2} = R_2 I^2 = 30 \times 3^2 = 270 \text{ (W)}$$

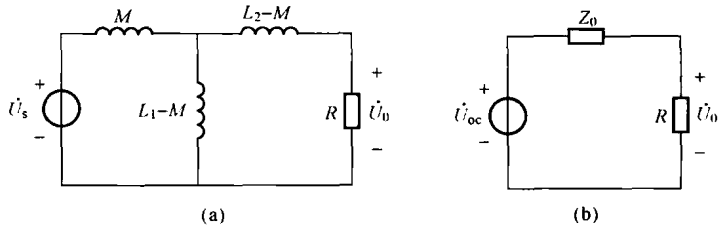
9-12 [提示] 以端口电压为参考相量, 去耦后求总阻抗 $Z = 4\sqrt{2} \angle 45^\circ \Omega$, 总电流 $\dot{I} = 15\sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ A}$ 。由分流公式求得两条支路电流 $\dot{I}_1 = 15 \angle 0^\circ \text{ A}$, $\dot{I}_2 = 15 \angle -90^\circ \text{ A}$, 最后用 $P = UI \cos\theta$ 求得功率。

9-13 题 9-13 图所示正弦稳态电路中, 如果 $L_1 L_2 = M^2$ 。试证明电阻上的电压 \dot{U}_0 与 R 的大小无关。

解 去耦等效电路如题 9-13 解图 (a) 所示。将 R 所在支路抽出, 其余部分用其戴维南等效电路代替, 电路如题 9-13 解图 (b) 所示。



题 9-13 图



题 9-13 解图

要证明电阻上的电压 \dot{U}_0 与 R 的大小无关, 只要证明从 R 两端看进去的戴维南等效阻抗 $Z_0 = 0$ 即可。

$$Z_0 = j\omega(L_2 - M) + j\omega M // [j\omega(L_1 - M)] = j\omega(L_2 - M) + \frac{j\omega M(L_1 - M)}{L_1} = j\omega \left(L_2 - \frac{M^2}{L_1} \right)$$

因为 $L_1 L_2 = M^2$, 即 $L_2 = \frac{M^2}{L_1}$, 则 $Z_0 = 0$ 。此时电阻 R 两端的电压 \dot{U}_0 为

$$\dot{U}_0 = \dot{U}_{oc} = \frac{j\omega(L_1 - M)}{j\omega M + j\omega(L_1 - M)} \cdot \dot{U}_s = \frac{L_1 - M}{L_1} \cdot \dot{U}_s$$

注: 元件与理想电压源并联时, 其端电压固定; 元件与理想电流源串联时, 其电流固定。

9-14 见 [例 9-3] 和 [例 9-4]。比较两种解法可以发现, 本题去耦法较回路法简单。

9-15 [提示] 先去耦求戴维南等效电路: $\dot{U}_{oc} = 450\sqrt{2} \angle -135^\circ \text{ V}$, $Z_{eq} = 405 + j405 \Omega$ 。再应用最大功率传递定理。

9-16 [提示] (1) 求去耦等效电路的输入阻抗, 令其虚部为零有 $M = 20 \text{ mH}$ 。(2) $\dot{I}_R = 44 \angle 0^\circ \text{ mA}$, $\dot{I}_1 = 66 \angle 0^\circ \text{ mA}$, $\dot{U}_{L1} = j\omega(L_1 + M)\dot{I}_R + (-j\omega M)\dot{I}_1 = 4.4 \angle 90^\circ \text{ V}$ 。

9-17 题 9-17 图所示稳态电路中, $u_s(t) = 90\sqrt{2}\sin(1000t + 15^\circ)$ V, $M = 2$ H, $L_1 = 5$ H, $L_2 = 8$ H, $C = 0.25\mu\text{F}$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 20\Omega$, $\alpha = 2$ 。求电压源提供的功率 P_s 。

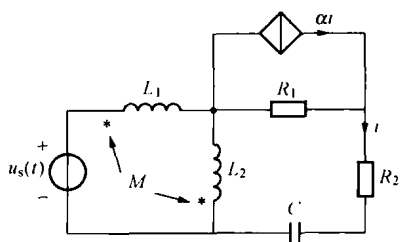
解 消去互感的电路如题 9-17 解图 (a) 所示。因为

$$\begin{aligned} u_{ab} &= (i - \alpha i)R_1 + R_2 i = -R_1 i + R_2 i = (R_2 - R_1) i \\ &= (20 - 10) i = 10i \end{aligned}$$

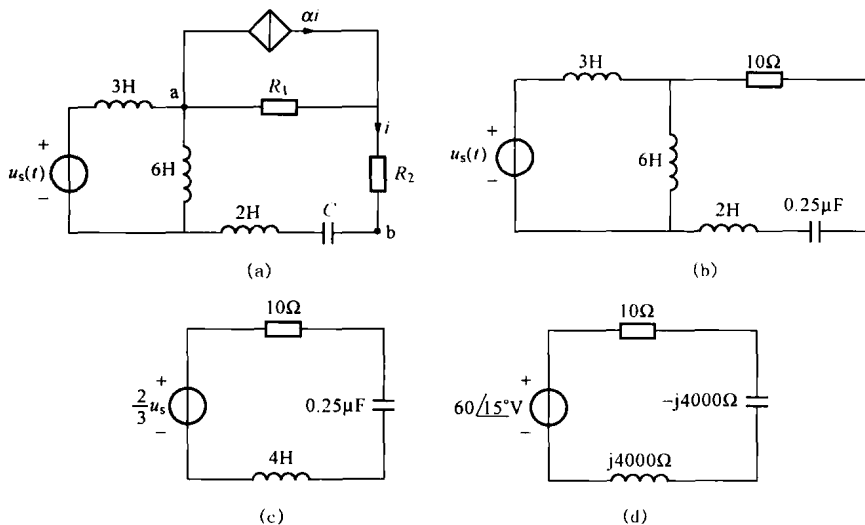
所以

$$R = \frac{u_{ab}}{i} = 10\Omega$$

则题 9-17 解图 (a) 可等效为题 9-17 解图 (b)。根据功率守恒定律, 电压源提供的功率等于题 9-17 解图 (b) 中 10Ω 电阻消耗的功率。再将题 9-17 解图 (b) 等效为题 9-17 解图 (c), 其相量模型如题 9-17 解图 (d) 所示。



题 9-17 图



题 9-17 解图

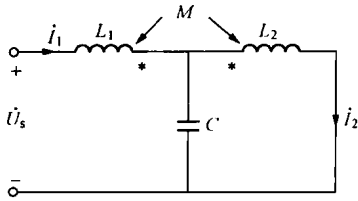
题 9-17 解图 (d) 所示电路中, L 与 C 串联支路发生串联谐振, 相当于短路。所以电源提供的功率为

$$P_s = \frac{60^2}{10} = 360 \text{ (W)}$$

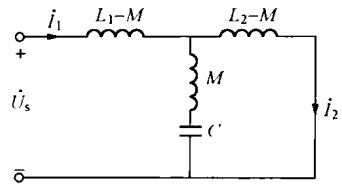
9-18 题 9-18 图所示电路中, L_1 、 L_2 、 M 、 C 都已给定, 电源频率可调。分别求使 $\dot{I}_1 = 0$ 和 $\dot{I}_2 = 0$ 的电源频率。

解 去耦等效电路如题 9-18 解图所示。要使 $\dot{I}_2 = 0$, M 、 C 串联支路应发生串联谐振, 相当于短路。所以, 使 $\dot{I}_2 = 0$ 的电源频率为

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{MC}}$$



题 9-18 图



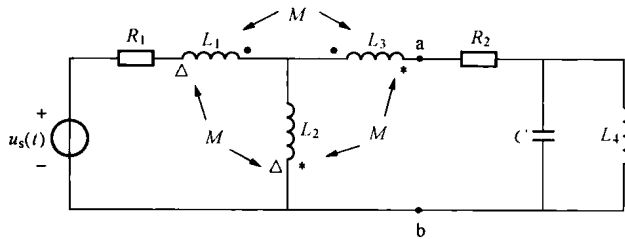
题 9-18 解图

要使 $\dot{I}_1=0$, MC 支路与 L_2-M 支路应发生并联谐振, 相当于开路。所以, 使 $\dot{I}_1=0$ 的电源频率为

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_2 C}}$$

9-19 [提示] 先去耦, 再按题 9-9 的方法求谐振频率。

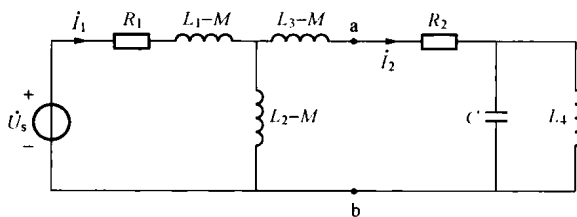
9-20 题 9-20 图所示正弦稳态电路中, $L_1=L_2=L_3=0.1\text{H}$, $M=0.04\text{H}$, $R_1=R_2=320\Omega$, $C=5\mu\text{F}$, $u_s(t)=10\sqrt{2}\sin 2\times 10^3 t\text{V}$ 。试求使 $C-L_4$ 发生谐振时 L_4 之值, 并计算此时的 $u_{ab}(t)$ 及电源发出的平均功率。



题 9-20 图

解 去耦等效电路如题 9-20 解图所示。因为 $\omega=2\times 10^3\text{rad/s}$, 要使 $C-L_4$ 发生谐振, 参数必须满足

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L_4 C}}$$



题 9-20 解图

故使 $C-L_4$ 发生谐振时 L_4 之值为

$$L_4 = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{(2\times 10^3)^2 \times 5\times 10^{-6}} = 0.05 \text{ (H)}$$

当 $C-L_4$ 谐振时, $\dot{I}_2=0$, 所以

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_s}{R_1 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)} = \frac{10 \angle 0^\circ}{320 + j240} = 0.025 \angle -36.9^\circ \text{ (A)}$$

$$\dot{U}_{ab} = j\omega(L_2 - M)\dot{I}_1 = j120 \times 0.025 \angle -36.9^\circ = 3 \angle 53.1^\circ \text{ (V)}$$

所以

$$u_{ab}(t) = 3\sqrt{2} \sin(2 \times 10^3 t + 53.1^\circ) \text{ V}$$

电源发出的平均功率为

$$P = U_s I_1 \cos\theta = 10 \times 0.025 \times \cos(0^\circ + 36.9^\circ) = 0.2 \text{ (W)}$$

互感电路的反映阻抗分析法

9-21 题 9-21 图所示电路中, 功率表的示数为 24W , $u_s(t) = 2\sqrt{2} \sin 10t \text{ V}$ 。试确定互感 M 的值。

解 二次侧总阻抗为

$$Z_{22} = 1.5 + j0.2 \times 10 = 1.5 + j2 \text{ (}\Omega\text{)}$$

二次侧反映到一次侧的阻抗为

$$Z_{\text{refl}} = \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}} = \frac{100M^2}{1.5 + j2} \text{ (}\Omega\text{)}$$

一次侧总的等效阻抗为

$$Z_1 = Z_{11} + Z_{\text{refl}} = -j + j + \frac{100M^2}{1.5 + j2} = 24M^2 - j32M^2 = 40M^2 \angle -53.1^\circ \text{ (}\Omega\text{)}$$

则一次侧电流为

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_s}{Z_1} = \frac{2 \angle 0^\circ}{40M^2 \angle -53.1^\circ} = \frac{1}{20M^2} \angle 53.1^\circ \text{ (A)}$$

$$P = I_1^2 R_1 = \left(\frac{1}{20M^2}\right)^2 \times 24M^2 = 24$$

解之得

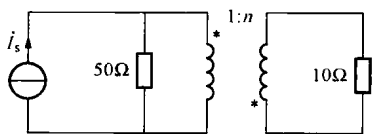
$$M = 50\text{mH}$$

理想变压器

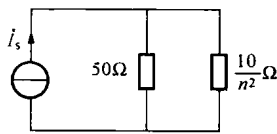
9-22 [提示] 利用理想变压器的阻抗变换特性求解。

9-23 见 [例 9-5]。

9-24 如果使题 9-24 图所示电路中 10Ω 电阻获得最大功率, 试确定理想变压器的变比 n 。



题 9-24 图



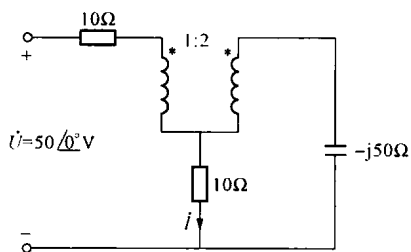
题 9-24 解图

解 利用理想变压器的阻抗变换特性将原电路等效为题 9-24 解图。要使 10Ω 电阻获得最大功率参数必须满足

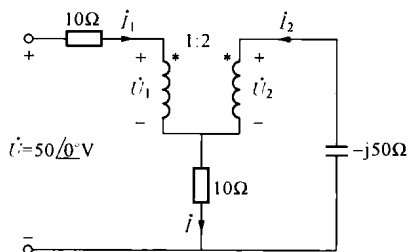
$$50 = \frac{10}{n^2}$$

即
$$n = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

9-25 求题 9-25 图所示电路中的电流 \dot{I} 。



题 9-25 图



题 9-25 解图

解 所用电量的参考方向如题 9-25 解图所示。以 \dot{I}_1 、 \dot{I}_2 为回路电流，回路电流方程为

$$\begin{cases} (10+10)\dot{I}_1 + 10\dot{I}_2 + \dot{U}_1 = 50 \angle 0^\circ \\ 10\dot{I}_1 + (10-j50)\dot{I}_2 + \dot{U}_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

理想变压器的 VAR 为

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = 2\dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 = -2\dot{I}_2 \end{cases} \quad (2)$$

将式 (2) 代入式 (1) 整理得

$$\begin{cases} -30\dot{I}_2 + 0.5\dot{U}_2 = 50 \angle 0^\circ \\ \dot{U}_2 = (10+j50)\dot{I}_2 \end{cases}$$

解之得

$$\dot{I}_2 = \sqrt{2} \angle -135^\circ \text{ A}$$

所以

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = -2\dot{I}_2 + \dot{I}_2 = -\dot{I}_2 = \sqrt{2} \angle 45^\circ \text{ (A)}$$

提高题

9-29 求题 9-29 图所示双口网络的 Π 型等效电路。

解 (1) 求双口网络的 Y 参数。所用电量的参考方向如题 9-29 解图 (a) 所示，则

$$Y_{11} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} = \frac{\dot{I}_1}{Z\dot{I}_1} = \frac{1}{Z}, \quad Y_{21} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} = \frac{-n\dot{I}_1}{\dot{U}_1} = -\frac{n}{Z}$$

$$Y_{12} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \Big|_{\dot{U}_1=0} = \frac{\dot{I}_1}{\frac{-Z\dot{I}_1}{n}} = -\frac{n}{Z}, \quad Y_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} \Big|_{\dot{U}_1=0} = \frac{n^2}{Z}$$

所以

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{Z} \begin{bmatrix} 1 & -n \\ -n & n^2 \end{bmatrix}$$

(2) 求 II 型等效电路。设 II 型等效电路如题 9-29 解图 (b) 所示。该图的 Y 参数矩阵为

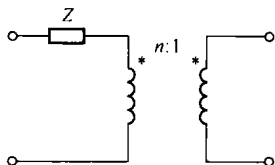
$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_a + Y_c & -Y_c \\ -Y_c & Y_b + Y_c \end{bmatrix}$$

题 9-29 解图 (a) 与题 9-29 解图 (b) 的电路等效, 参数必须满足

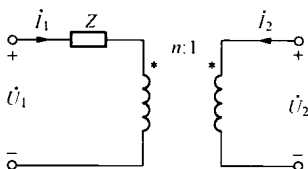
$$\begin{cases} Y_a + Y_c = \frac{1}{Z} \\ Y_c = \frac{n}{Z} \\ Y_b + Y_c = \frac{n^2}{Z} \end{cases}$$

解之得

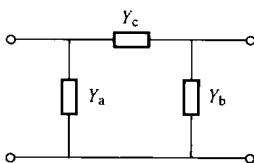
$$Y_a = \frac{1-n}{Z}, \quad Y_b = \frac{n(n-1)}{Z}, \quad Y_c = \frac{n}{Z}$$



题 9-29 图



(a)



(b)

题 9-29 解图

注: 本题亦可直接写出端口方程与 Y 参数方程对比获得 Y 参数。

9-30 [提示] 先去耦求戴维南等效电路, $\dot{U}_{\infty} = 60 \angle 90^\circ$ V, $Z_{\text{eq}} = 20 + j15 \Omega$; 再用最大功率传递定理求解。

9-31 题 9-31 图所示电路中, $i(0_-) = 0$, $u(0_-) = 4$ V。求 $t > 0$ 时的电流 $i(t)$ 。

解 原电路的等效电路如题 9-31 解图所示。其中 $L = 2 + 4 - 2 \times 2 = 2$ (H)。

(1) 建立以 $i(t)$ 为输出的输入—输出方程。由 KVL 和元件的 VAR 得

$$-u + 2 \frac{di}{dt} + 8i = 0$$

上式对时间求导有

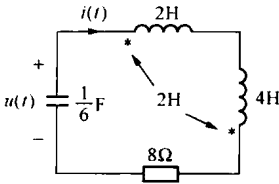
$$-\frac{du}{dt} + 2 \frac{d^2 i}{dt^2} + 8 \frac{di}{dt} = 0$$

因为 $i = -C \frac{du}{dt} = -\frac{1}{6} \frac{du}{dt}$, 所以

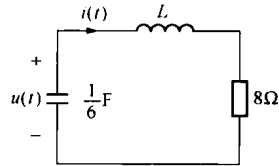
$$\frac{du}{dt} = -6i$$

则消去电压 u 可得

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 4 \frac{di}{dt} + 3i = 0$$



题 9-31 图



题 9-31 解图

(2) 求 $i(0_+)$ 和 $i'(0_+)$ 。因为 $i(0_-) = 0$, $u(0_-) = 4V$, 所以

$$i(0_+) = i(0_-) = 0, \quad u(0_+) = u(0_-) = 4V$$

因为 $u_L(0_+) = u(0_+) = 4V$, 而 $u_L(0_+) = Li'(0_+)$, 所以

$$i'(0_+) = \frac{u_L(0_+)}{L} = \frac{1}{2} \times 4 = 2 \text{ (A/s)}$$

(3) 求 $i(t)$ 。因为

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 4 \frac{di}{dt} + 3i = 0$$

$$i(0_+) = 0$$

$$i'(0_+) = 2$$

特征方程为

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

特征根为

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = -1$$

因此

$$i(t) = k_1 e^{-3t} + k_2 e^{-t}$$

由初始值可得

$$k_1 = -1, \quad k_2 = 1$$

所以

$$i(t) = e^{-t} - e^{-3t} \text{ A} \quad (t \geq 0)$$

注：本题所求为暂态响应，所用方法仍是第 6 章介绍的时域经典法。

9.5 自测题及参考答案

1. 图 1 所示正弦稳态电路中, $U_L = U_C = U_R = 10V$ 。求电源电压的有效值 U_s 。
2. 求图 2 所示正弦稳态电路中的电流 \dot{I} 。
3. 图 3 所示正弦稳态电路中, 若 $u_s(t) = 100\sqrt{2} \sin 5t \text{ V}$ 。求电流 $i(t)$ 。
4. 求图 4 所示正弦稳态电路中电流 \dot{I} 。

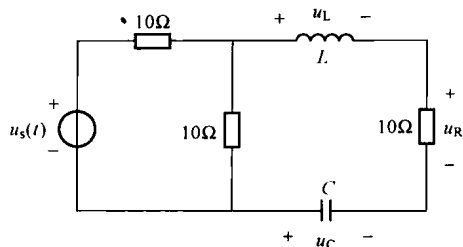


图 1

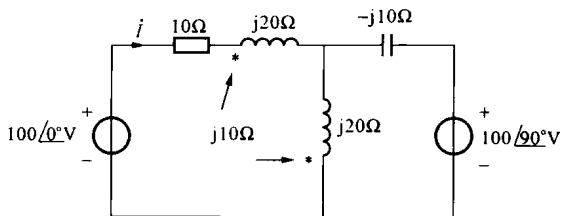


图 2

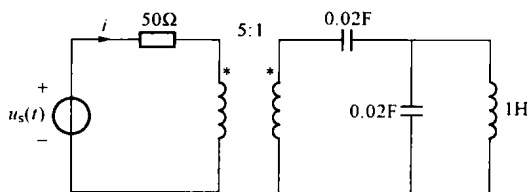


图 3

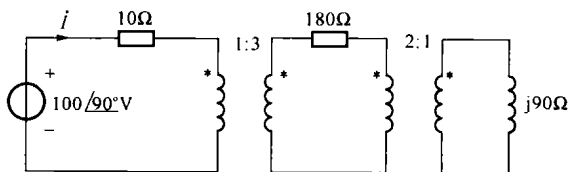


图 4

5. 图 5 所示正弦稳态电路中, 已知 $L_1 = 40\text{mH}$, $L_2 = 10\text{mH}$, $R_1 = R_2 = 5\Omega$, $u_s(t) = 100\sqrt{2}\sin 100t\text{ V}$ 。调节电容 C 使电路发生并联谐振, 求谐振时各电流表的示数及电容 C 的值。

6. 图 6 所示正弦稳态电路中, $u_s(t) = 100\sqrt{2}\sin\omega t\text{ V}$, $R = 60\Omega$, $M = 0.4\text{H}$, $C_1 = 250\mu\text{F}$, $L_1 = 1.2\text{H}$, $L_2 = 2\text{H}$, $L_3 = 1\text{H}$, $C_2 = 100\mu\text{F}$, 电流表 PA 的示数为零。求: (1) 电源的角频率 ω ; (2) 电流 $i(t)$ 和电流 $i_C(t)$; (3) 电源发出的有功功率 P 和无功功率 Q 。

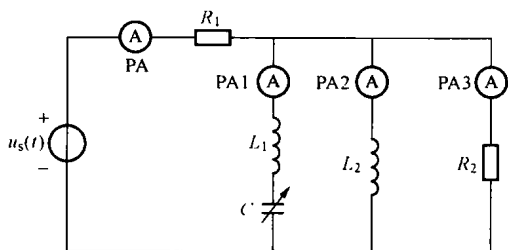


图 5

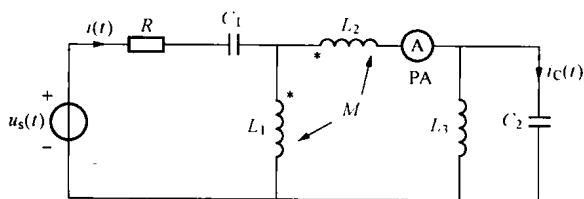


图 6

7. 图 7 所示正弦稳态电路中, 已知 $u_s(t) = 100\cos 10^3t\text{ V}$, 且 $u_s(t)$ 与 $i(t)$ 同相。求电容 C 和电流 $i(t)$ 。

8. 图 8 所示正弦稳态电路中, $C = 0.02\text{F}$, $L_1 = 3\text{H}$, $L_2 = 6\text{H}$, $M = 2\text{H}$, $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $u_s(t) = 20\sin 5t\text{ V}$ 。求: (1) 电流 $i(t)$; (2) 电路吸收的平均功率 P 和无功功率 Q 。

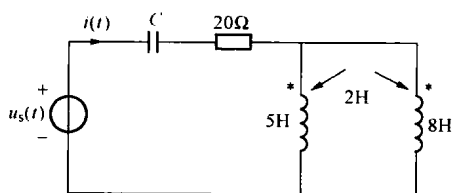


图 7

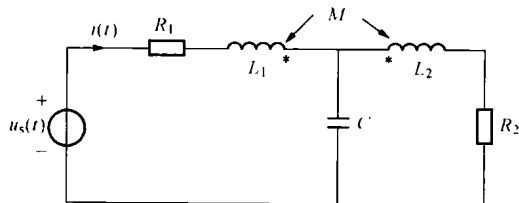


图 8

9. 图 9 所示正弦稳态电路中, $u_s(t) = 80\sqrt{2} \sin 1000t$ V, $C = 25\mu\text{F}$, $C_0 = 50\mu\text{F}$, $L = 0.06\text{H}$, $M = 0.02\text{H}$, $R = 40\Omega$ 。试求: (1) 电源提供的平均功率; (2) 电压 $u(t)$ 。

10. 图 10 所示正弦稳态电路中, 已知 $\omega = 10^4 \text{rad/s}$, $\dot{U}_s = 100 \angle 0^\circ$ V, $R = 100\Omega$, $L_1 = 20\text{mH}$, $L_2 = 60\text{mH}$, $M = 20\text{mH}$ 。求: (1) 调节电容 C , 使 R 获得最大功率, C 为多少? (2) 调节电容 C , 使 I 最小, C 为多少? I 为多少?

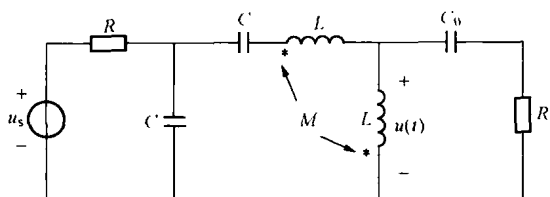


图 9

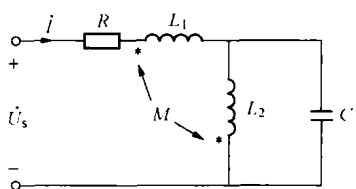


图 10

11. 图 11 所示正弦稳态电路中, $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $L_1 = 1\text{H}$, $L_2 = 2\text{H}$, $L_3 = 3\text{H}$, $C_3 = 3\text{F}$; $U_s = 10\text{V}$, $U_0 = 5\text{V}$, 电源提供的功率为 100W 。试确定电容电流的有效值和互感 M 的值。

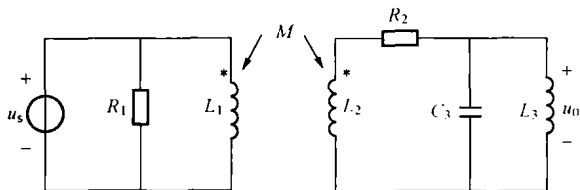


图 11

参考答案

- $U_s = 30\text{V}$
- $\dot{I} = 10 \angle -90^\circ$ A
- $i(t) = 2\sqrt{2} \sin 5t$ A
- $\dot{I} = 2 \angle 36.9^\circ$ A
- 电流表 PA, 10A; 电流表 PA3, 10A; 电流表 PA1, 50A; 电流表 PA2, 50A, 0.002F
- 100rad/s , $i(t) = \sqrt{2} \sin(100t - 53.1^\circ)$ A, $i_C(t) = 0.8\sqrt{2} \sin(100t + 129.6^\circ)$ A, 60W , 80var
- $0.25\mu\text{F}$, $5\cos 10^3 t$ A
- $2\sqrt{2} \sin(5t - 45^\circ)$ A, 20W , 20var
- 80W , $63.24 \sin(1000t - 26.57^\circ)$ V
- $0.5\mu\text{F}$, 100W ; $\frac{1}{6}\mu\text{F}$, 0
- 5A, 0.5H

第 10 章 三 相 电 路

10.1 本章知识结构图

第 10 章知识结构图如图 10-1 所示。

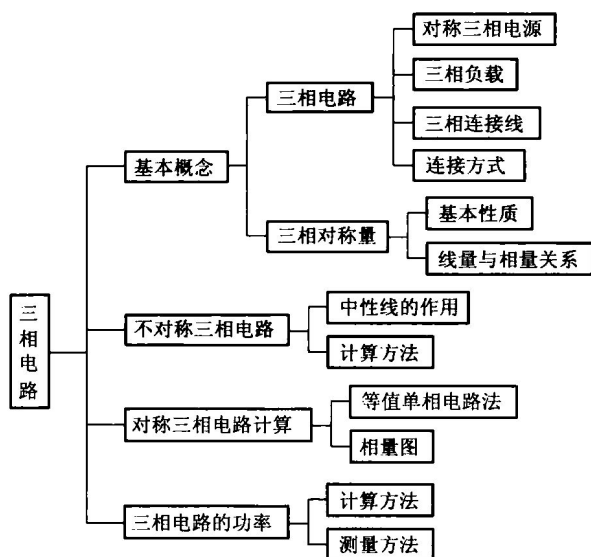


图 10-1 第 10 章知识结构图

10.2 知识点归纳与学习指导

本章介绍三相电路的基本概念，并讨论简单三相电路的分析计算。

10.2.1 三相电路的基本概念

1. 对称三相电源

三相制是由三组频率相同而相位互差 120° 的交流电源供电的交流系统。所谓三相电源一般是指由 3 个频率相同、幅值相等、相位依次相差 120° 的正弦电压按一定方式连接而成的电源，这组电压源称为对称三相电源，依次称为 A 相、B 相、C 相，分别记为 u_A 、 u_B 、 u_C ，它们的瞬时表达式为

$$u_A(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \varphi)$$

$$u_B(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \varphi - 120^\circ)$$

$$u_C(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \varphi + 120^\circ)$$

对应的相量为

$$\dot{U}_A = U \angle \varphi$$

$$\dot{U}_B = U \angle \varphi - 120^\circ$$

$$\dot{U}_C = U \angle \varphi + 120^\circ$$

频率相同、幅值相等、相位依次相差 120° 的 3 个正弦量称为三相对称量。任何一组三相对称量之和均为零。

相序是指三相电压经过同一量值（例如极大值）的先后次序。A 相超前于 B 相、B 相超前于 C 相的相序 A-B-C，称正序；B 相超前 A 相、C 相超前 B 相的相序 A-C-B，称为负序。三个正弦电压相等时称为零序。正序和负序分析方法相同，以正序为例说明。

三相电源有两种连接方式：一种为星形连接或 Y 连接，如图 10-2 (a) 所示，其中连接点 N 称为电源中性点；另一种为三角形连接或 Δ 连接，如图 10-2 (b) 所示。

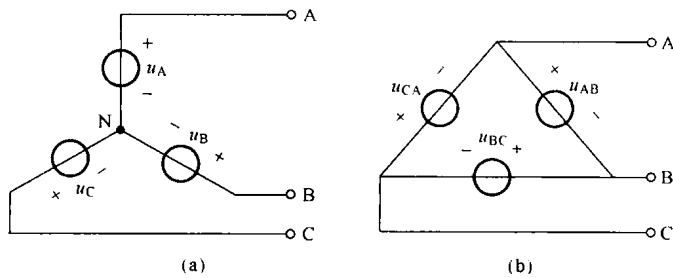


图 10-2 三相电源

(a) 星形连接；(b) 三角形连接

2. 三相负载

在三相电路中，负载由三部分所组成，每一部分称为负载的一相。如果三相负载各相完全相同，则称之为对称三相负载；否则为不对称三相负载。

三相负载有两种连接方式，星形连接（Y 连接）和三角形连接（ Δ 连接），分别如图 10-3 (a)、(b) 所示。其中星形负载中的连接点 N' 称为负载中性点。在对称情况下， $Z_A = Z_B = Z_C = Z_Y$ ， $Z_{AB} = Z_{BC} = Z_{CA} = Z_{\Delta}$ 。

3. 三相连接线

三相连接线的简化模型，如图 10-4 所示。端线阻抗 Z_l 可为零。

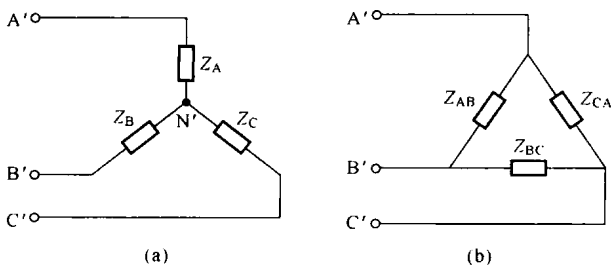


图 10-3 三相负载

(a) 星形连接；(b) 三角形连接

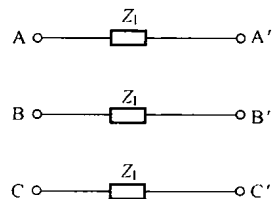


图 10-4 三相连接线

4. 三相电路

三相电路是由三相电源、三相连接线和三相负载连接而成的系统。根据电源和负载的连接方式不同,三相电路的连接方式可分为Y—Y连接、Y— Δ 连接、 Δ —Y连接、 Δ — Δ 连接和 Y_0 — Y_0 连接几种基本三相电路。 Y_0 — Y_0 连接属三相四线制,其他全为三相三线制。

三相电源、三相连接线和三相负载都是对称的三相电路,称为对称三相电路;否则为不对称三相电路。在三相电路中,电源(或负载)各相的电压称为相电压,流过各相的电流称为相电流;端线之间的电压称为线电压,流过各端线的电流称为线电流;流过中性线的电流称为中性线电流。

Y连接可采用三相三线制或三相四线制, Δ 连接只能采用三相三线制。

10.2.2 不对称三相电路

通常三相电源和三相连接线的不对称程度较小,一般可近似地当作对称来处理。三相电路的不对称主要是由三相负载引起的。

对于Y—Y连接的不对称三相电路,由于负载不对称会出现中性点位移(负载中性点与电源中性点不等电位),严重时导致负载设备不能正常工作。解决办法是采用 Y_0 — Y_0 连接三相电路,中性线的作用是强迫负载相电压对称。

不对称三相电路可按一般正弦稳态电路进行分析,如采用节点分析法分析。

10.2.3 对称三相电路

对称三相电路中的相电压、相电流、线电压和线电流分别均为三相对称量,且有:

(1) Y连接时,线电流等于相应的相电流;线电压有效值等于相电压有效值的 $\sqrt{3}$ 倍,即 $U_l = \sqrt{3}U_{ph}$,线电压在相位上超前相应的相电压 30° 。

(2) Δ 连接时,线电压等于相应的相电压;线电流有效值等于相电流有效值的 $\sqrt{3}$ 倍,即 $I_l = \sqrt{3}I_{ph}$,线电流在相位上落后相应的相电流 30° 。

因此,对称三相电路可归结为一相计算。

在端线阻抗不为零时,不论三相电源和负载为何种连接,均需等效变换为Y连接,此时各个中性点等电位,可合为一点,A相的单相等值电路如图10-5所示。注意,图中 \dot{I}_A 为线电流(Y连接时才是相电流), \dot{U}_A 和 $\dot{U}_{A'}$ 分别为Y连接的电源和负载A相相电压。由此根据实际连接方式确定A相相电流和相电压,再由对称性写出其他相电流、相电压和线电流、线电压。

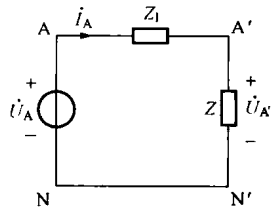


图10-5 A相单相等值电路

【例10-1】 图10-6(a)所示对称三相电路中,电源线电压 $U_l = 380\text{V}$,Y形负载的阻抗 $Z_Y = 8 + j6\ \Omega$, Δ 形负载的阻抗 $Z_\Delta = 24 + j18\ \Omega$,线路阻抗 $Z_l = 1 + j1\ \Omega$,中性线阻抗 $Z_N = 2 + j\ \Omega$ 。求负载的相电流、相电压及总的线电流。

解 (1) 由于对称,中性线阻抗 Z_N 不起作用,短路处理。将 Δ 形负载转换为Y形负载,以A相相电压 \dot{U}_A 为参考相量,即

$$\dot{U}_A = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ \text{ V} = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$$

A相的单相等值电路如图10-6(b)所示,则

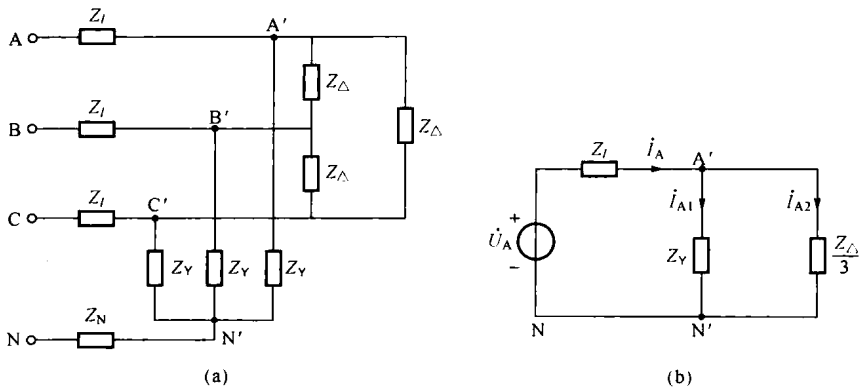


图 10-6 [例 10-1] 图

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{Z_l + Z_Y // \frac{Z_\Delta}{3}} = \frac{220 \angle 0^\circ}{1 + j + 4 + j3} = 34.4 \angle -38.7^\circ \text{ (A)}$$

$$\dot{I}_{A1} = \dot{I}_{A2} = \frac{1}{2} \dot{I}_A = 17.2 \angle -38.7^\circ \text{ (A)}$$

所以

$$\dot{U}_{A'N'} = \dot{I}_{A1} Z_Y = 17.2 \angle -38.7^\circ \times (8 + j6) = 172 \angle -1.8^\circ \text{ (V)}$$

$$\dot{I}_{A'B'} = \frac{\dot{I}_{A2}}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ = 9.93 \angle -8.7^\circ \text{ (A)}$$

$$\dot{U}_{A'B'} = \dot{I}_{A'B'} Z_\Delta = 9.93 \angle -8.7^\circ \times (24 + j18) = 9.93 \angle -8.7^\circ \times 30 \angle 36.9^\circ \approx 298 \angle 28.2^\circ \text{ (V)}$$

或者

$$\dot{U}_{A'B'} = \sqrt{3} \dot{U}_{A'N'} \angle 30^\circ = 298 \angle 28.2^\circ \text{ (V)}, \quad \dot{I}_{A'B'} = \frac{\dot{U}_{A'B'}}{Z_\Delta} = 9.93 \angle -8.7^\circ \text{ (A)}$$

因此, Y形负载的相电压为 172V、相电流为 17.2A, \$\Delta\$形负载的相电压为 298V、相电流为 9.93A, 总的线电流为 34.4A。

10.2.4 三相电路的功率

三相电路的功率为各相功率的总和。对称三相电路的瞬时功率为一常量, 其值等于平均功率。

1. 计算公式

对称三相电路中功率的计算公式分别为:

$$\text{有功功率} \quad P = 3P_{\text{ph}} = 3U_{\text{ph}} I_{\text{ph}} \cos\theta = \sqrt{3} U_l I_l \cos\theta$$

$$\text{无功功率} \quad Q = 3Q_{\text{ph}} = 3U_{\text{ph}} I_{\text{ph}} \sin\theta = \sqrt{3} U_l I_l \sin\theta$$

$$\text{视在功率} \quad S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{3} U_l I_l = 3U_{\text{ph}} I_{\text{ph}} = 3S_{\text{ph}}$$

$$\text{功率因数} \quad \cos\theta = \frac{P}{S} = \frac{P_{\text{ph}}}{S_{\text{ph}}}$$

其中, \$\theta\$ 为相电压超前相电流的角度。一相的有功和无功也可以按正弦稳态电路方法求解。

2. 测量方法

不论对称与否, 三相四线制用三瓦计法测量, 如图 10-7 所示。三相总功率为三个功率表示数之和, 即 $P=P_1+P_2+P_3$ 。在对称情况下, 三个功率表示数相等, 三相三线制用二瓦计法测量, 如图 10-8 所示。三相总功率为两个功率表示数之和, 即 $P=P_1+P_2$ 。在对称情况下

$$P_1=U_{AC}I_A\cos\theta_1=U_l I_l \cos(\theta-30^\circ), \quad P_2=U_{BC}I_B\cos\theta_2=U_l I_l \cos(\theta+30^\circ)$$

且有

$$Q=\sqrt{3}(P_1-P_2)$$

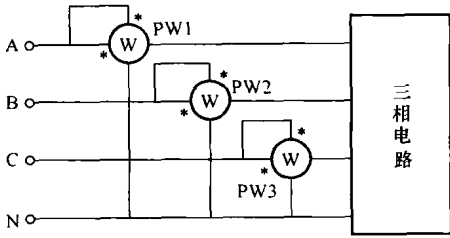


图 10-7 三瓦计法

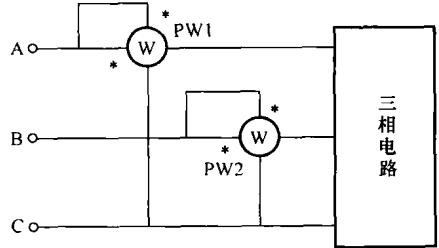


图 10-8 二瓦计法

【例 10-2】 某台电动机的功率为 2.5kW, 功率因数为 0.866, 对称三相电源的线电压为 380V, 如图 10-9 (a) 所示。求图中两个功率表的示数。

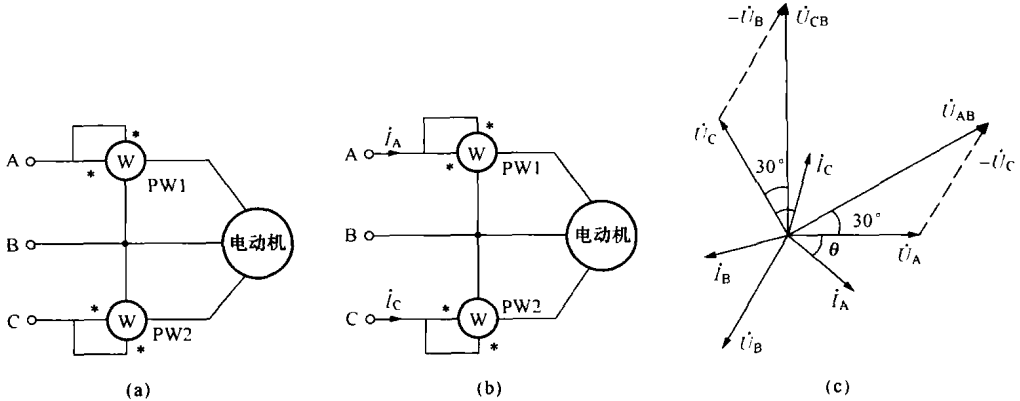


图 10-9 [例 10-2] 图

解 线电流为

$$I_l = \frac{P}{\sqrt{3}U_l \cos\theta} = \frac{2500}{\sqrt{3} \times 380 \times 0.866} \approx 4.39 \text{ (A)}$$

因为功率因数 $\lambda = \cos\theta = 0.866$, 所以

$$\theta = \cos^{-1}0.866 = 30^\circ$$

所用电量的参考方向如图 10-9 (b) 所示。将负载按星形连接对待, 以 \dot{U}_A 为参考相量, 作出电路的相量图如图 10-9 (c) 所示。由相量图可知, \dot{U}_{AB} 超前 \dot{i}_A 的角度为 $\theta+30^\circ$, \dot{U}_{CB} 超前 \dot{i}_C 的角度为 $\theta-30^\circ$ 。因此, 功率表 PW1 和 PW2 的示数分别为

$$P_1 = U_{AB} I_A \cos(30^\circ + \theta) = U_l I_l \cos(30^\circ + \theta) = 380 \times 4.39 \times \cos(30^\circ + 30^\circ) = 834.1 \text{ (W)}$$

$$P_2 = U_{CB} I_C \cos(\theta - 30^\circ) = U_l I_l \cos(\theta - 30^\circ) = 380 \times 4.39 \times \cos(30^\circ - 30^\circ) = 1668.2 \text{ (W)}$$

注: P_1 和 P_2 的公式可借助负载为星形连接的相量图得出。

10.3 重点、难点与考点

重点与难点

本章的重点是对称三相电路的分析以及三相电路的功率。难点为不对称三相电路的计算。

考点

本章考试的重点和热点主要集中在对称三相电路的分析以及三相电路的功率。

10.4 第10章习题选解

基本概念

10-3 题 10-3 图所示三角形连接的对称三相电路中, 电源线电压 $U_l = 380\text{V}$ 。若图中 m 点处发生断路, 求电压的有效值 U_{AN} 和 U_{BN} 。

解 以 \dot{U}_A 为参考相量, 即 $\dot{U}_A = \frac{380 \angle 0^\circ}{\sqrt{3}} = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$, 则

$$\dot{U}_{AB} = 380 \angle 30^\circ \text{ V}, \dot{U}_{CA} = 380 \angle 150^\circ \text{ V}, \dot{U}_{AC} = 380 \angle -30^\circ \text{ V}$$

所以, m 点处发生断路时

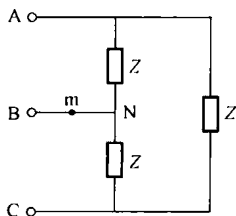
$$\dot{U}_{AN} = \frac{1}{2} \dot{U}_{AC} = 190 \angle -30^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_{BN} = -\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{AN} = -380 \angle 30^\circ + 190 \angle -30^\circ = -164.5 - j285 = 329 \angle -120^\circ \text{ (V)}$$

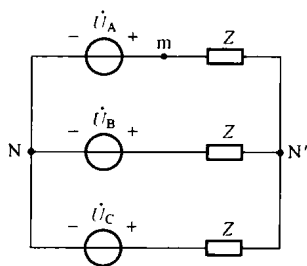
因此, 电压的有效值 U_{AN} 和 U_{BN} 分别为

$$U_{AN} = 190\text{V}, U_{BN} = 329\text{V}$$

10-4 题 10-4 图所示对称星形电路中, 电源相电压 $U_{ph} = 220\text{V}$ 。若图中 m 点处发生断路, 求电压 $\dot{U}_{N'N}$ 。



题 10-3 图



题 10-4 图

解 以 \dot{U}_A 为参考相量, 即 $\dot{U}_A = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$, 则

$$\dot{U}_B = 220 \angle -120^\circ \text{ V}, \dot{U}_C = 220 \angle 120^\circ \text{ V}, \dot{U}_{\text{BC}} = 380 \angle -90^\circ \text{ V}$$

所以

$$\dot{U}_{N'N} = \frac{1}{2} \dot{U}_{\text{BC}} + \dot{U}_C = 190 \angle -90^\circ + 220 \angle 120^\circ = -j190 - 110 + j190.5 \approx 110 \angle 180^\circ \text{ (V)}$$

不对称三相电路

10-5 某三相四线制三相电路，电源是对称的，相电压为 220V，中性线阻抗为零， $Z_A = Z_B = 48.4\Omega$ ， $Z_C = 242\Omega$ 。(1) 试求线电流 \dot{I}_A 、 \dot{I}_B 、 \dot{I}_C 和中性线电流 \dot{I}_N 。(2) 若将中性线断开，其他条件不变，求负载相电压。

解 (1) 有中性线。电路如题 10-5 解图 (a) 所示。因为中性线阻抗为零，所以 $\dot{U}_{N'N} = 0$ 。以 \dot{U}_A 为参考相量，即 $\dot{U}_A = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$ ，则

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{Z_A} = \frac{220 \angle 0^\circ}{48.4} \approx 4.55 \angle 0^\circ \text{ (A)}, \dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{Z_B} = \frac{220 \angle -120^\circ}{48.4} \approx 4.55 \angle -120^\circ \text{ (A)}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{Z_C} = \frac{220 \angle 120^\circ}{242} \approx 0.91 \angle 120^\circ \text{ (A)}$$

所以

$$\begin{aligned} \dot{I}_N &= \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 4.55 \angle 0^\circ + 4.55 \angle -120^\circ + 0.91 \angle 120^\circ \\ &= 1.82 - j3.152 = 3.64 \angle -60^\circ \text{ (A)} \end{aligned}$$

(2) 无中性线。电路如题 10-5 解图 (b) 所示。以 A 相电压为参考相量，即 $\dot{U}_A = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$ ，则

$$\dot{U}_B = \dot{U}_A \angle -120^\circ = 220 \angle -120^\circ \text{ V}, \dot{U}_C = \dot{U}_A \angle 120^\circ = 220 \angle 120^\circ \text{ V}$$

题 10-5 解图 (b) 的节点电压方程为

$$\left(\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_C} \right) \dot{U}_{N'N} = \frac{\dot{U}_A}{Z_A} + \frac{\dot{U}_B}{Z_B} + \frac{\dot{U}_C}{Z_C}$$

代入数值得

$$\left(\frac{1}{48.4} + \frac{1}{48.4} + \frac{1}{242} \right) \dot{U}_{N'N} = \frac{220 \angle 0^\circ}{48.4} + \frac{220 \angle -120^\circ}{48.4} + \frac{220 \angle 120^\circ}{242}$$

整理得

$$\frac{11}{242} \dot{U}_{N'N} \approx 3.64 \angle -60^\circ$$

则

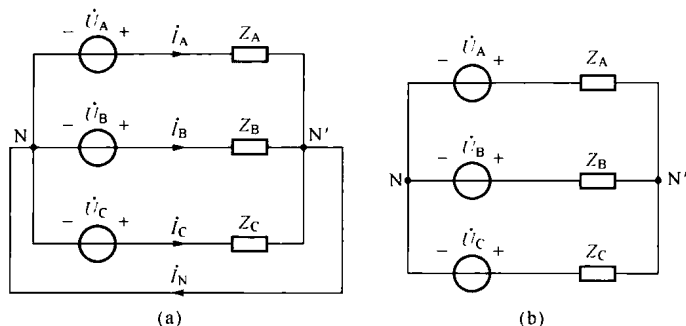
$$\dot{U}_{N'N} = 80.08 \angle -60^\circ \text{ V}$$

所以

$$\dot{U}_{\text{AN}'} = \dot{U}_A - \dot{U}_{N'N} = 220 \angle 0^\circ - 80.08 \angle -60^\circ = 179.96 + j69.35 = 192.86 \angle 21.07^\circ \text{ (V)}$$

$$\dot{U}_{\text{BN}'} = \dot{U}_B - \dot{U}_{N'N} = 220 \angle -120^\circ - 80.08 \angle -60^\circ = -150.04 - j121.18 = 192.86 \angle -141.07^\circ \text{ (V)}$$

$$\dot{U}_{CN'} = \dot{U}_C - \dot{U}_{N'N} = 220 \angle 120^\circ - 80.08 \angle -60^\circ = -150.04 + j259.88 = 300.08 \angle 120^\circ \text{ (V)}$$



题 10-5 解图

10-6 题 10-6 图所示电路中, 对称三相电源的线电压为 380V, $R = X_L = -X_C = 100\Omega$, $R_0 = 200\Omega$, $R_Y = 300\Omega$ 。求电阻 R_0 两端的电压。

解 方法 1: 用节点法求解。电源相电压 $U_{ph} = U_l / \sqrt{3} = 220\text{V}$, 以 \dot{U}_A 为参考相量, 即 $\dot{U}_A = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$, 则

$$\dot{U}_B = 220 \angle -120^\circ \text{ V}, \dot{U}_C = 220 \angle 120^\circ \text{ V}$$

以电源的中性点为参考节点, 节点 N1 和 N2 的节点电压方程分别为

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C + \frac{1}{R_0} \right) \dot{U}_{N1} - \frac{1}{R_0} \dot{U}_{N2} &= \frac{\dot{U}_A}{R} + \frac{\dot{U}_B}{j\omega L} + j\omega C \dot{U}_C \\ -\frac{1}{R_0} \dot{U}_{N1} + \left(\frac{3}{R_Y} + \frac{1}{R_0} \right) \dot{U}_{N2} &= \frac{1}{R_Y} (\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C) = 0 \end{aligned}$$

代入数据得

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{j100} + j\frac{1}{100} + \frac{1}{200} \right) \dot{U}_{N1} - \frac{1}{200} \dot{U}_{N2} &= \frac{220 \angle 0^\circ}{100} + \frac{220 \angle -120^\circ}{j100} + j\frac{220 \angle 120^\circ}{100} \\ -\frac{1}{200} \dot{U}_{N1} + \left(\frac{3}{300} + \frac{1}{200} \right) \dot{U}_{N2} &= 0 \end{aligned}$$

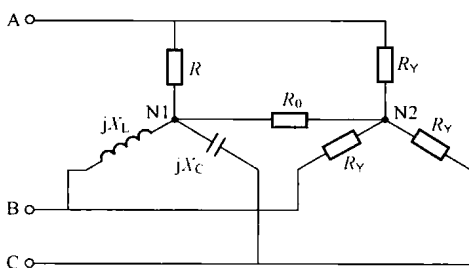
解之得

$$\dot{U}_{N1} = 120.8 \angle 180^\circ \text{ V}, \dot{U}_{N2} = 40.3 \angle 180^\circ \text{ V}$$

所以 R_0 两端的电压为

$$\dot{U}_{N1N2} = \dot{U}_{N1} - \dot{U}_{N2} = 80.5 \angle 180^\circ \text{ V}$$

方法 2: 用戴维南定理求解。电源相电压 $U_{ph} = U_l / \sqrt{3} = 220\text{V}$, 以 \dot{U}_A 为参考相量, 即 $\dot{U}_A = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$, 则



题 10-6 图

$$\dot{U}_B = 220 \angle -120^\circ \text{ V}, \dot{U}_C = 220 \angle 120^\circ \text{ V}$$

(1) 求 N1 与 N2 两点间的开路电压 \dot{U}_∞ 。R₀ 断开后，由于右边三相负载为对称负载，故 N2 与电源中性点 N 等电位，则 $\dot{U}_{N2} = 0$ (以电源中性点为参考点)。进而得节点 N1 的节点电压方程为

$$\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C\right)\dot{U}_{N1} = \frac{\dot{U}_A}{R} + \frac{\dot{U}_B}{j\omega L} + j\omega C\dot{U}_C$$

代入数据

$$\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{j100} + j\frac{1}{100}\right)\dot{U}_{N1} = \frac{220 \angle 0^\circ}{100} + \frac{220 \angle -120^\circ}{j100} + j\frac{220 \angle 120^\circ}{100}$$

解之得

$$\dot{U}_{N1} = 161 \angle 180^\circ \text{ V}$$

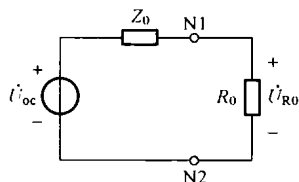
所以

$$\dot{U}_\infty = \dot{U}_{N1} - \dot{U}_{N2} = 161 \angle 180^\circ \text{ V}$$

(2) 求戴维南等效阻抗 Z_0 。将三相电压源置零，此时 LC 发生并联谐振，故从 N1、N2 两点看进去的戴维南等效阻抗 Z_0 为

$$Z_0 = R_Y/3 + R = 200 \text{ } (\Omega)$$

(3) 求电压 \dot{U}_{R_0} 。电路如题 10-6 解图所示。R₀ 电阻两端电压为



题 10-6 解图

$$\dot{U}_{R_0} = \frac{\dot{U}_\infty}{200+200} \times 200 = 80.5 \angle 180^\circ \text{ (V)}$$

10-7 题 10-7 图所示电路中，三相电源对称， $X_L = -X_C$ ，R 可调。证明 R 中的电流 \dot{I}_R 与 R 无关。

证明：取 \dot{U}_A 为参考相量，即 $\dot{U}_A = U \angle 0^\circ \text{ V}$ ，则

$$\dot{U}_B = U \angle -120^\circ \text{ V}, \dot{U}_C = U \angle -120^\circ \text{ V}, \dot{U}_{BC} = \sqrt{3}U \angle -90^\circ \text{ V}$$

(1) 求中性点电压 $\dot{U}_{N'N}$ 。

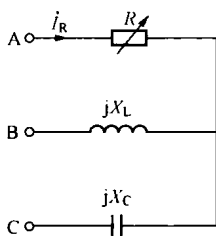
$$\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{jX_L} + \frac{1}{jX_C}\right)\dot{U}_{N'N} = \frac{\dot{U}_A}{R} + \frac{\dot{U}_B}{jX_L} + \frac{\dot{U}_C}{jX_C}$$

因为 $X_L = -X_C$ ，所以

$$\dot{U}_{N'N} = \dot{U}_A + \frac{R}{jX_L}(\dot{U}_B - \dot{U}_C) = U \angle 0^\circ + \frac{R}{jX_L} \times \sqrt{3}U \angle -90^\circ = \left(1 - \frac{\sqrt{3}R}{X_L}\right)U \angle 0^\circ \text{ (V)}$$

(2) 求电阻中的电流 \dot{I}_R ，即

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{U}_A - \dot{U}_{N'N}}{R} = \frac{1}{R} \left[U \angle 0^\circ - \left(1 - \frac{\sqrt{3}R}{X_L}\right)U \angle 0^\circ \right]$$



题 10-7 图

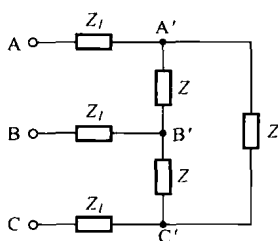
$$= \frac{1}{R} \left[U \angle 0^\circ - U \angle 0^\circ + \frac{\sqrt{3}R}{X_L} \cdot U \angle 0^\circ \right] = \frac{\sqrt{3}}{X_L} U \angle 0^\circ \quad (\text{A})$$

可见, 电阻 R 中的电流 \dot{I}_R 不随 R 的值改变, 即无论 R 为何值, 始终有 $I_R = \frac{\sqrt{3}U}{X_L}$ (除 $R = \infty$, 即 R 支路断开除外)。

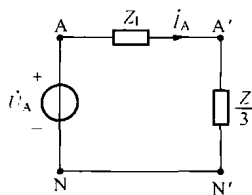
对称三相电路

10-9 对称三相电路如题 10-9 图所示, 已知负载阻抗 $Z = 19.2 + j14.4 \Omega$, 线阻抗 $Z_l = 3 + j4 \Omega$, 电源线电压为 380V。求负载端的线电压和线电流以及相电流。

解 以 A 相的相电压 \dot{U}_A 为参考相量, 即 $\dot{U}_A = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ = 220 \angle 0^\circ$ (A), A 相的单相等值电路如题 10-9 解图所示。则



题 10-9 图



题 10-9 解图

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{Z_l + \frac{Z}{3}} = \frac{220 \angle 0^\circ}{3 + j4 + 6.4 + j4.8} = \frac{220 \angle 0^\circ}{9.4 + j8.8} = 17.1 \angle -43.1^\circ \quad (\text{A})$$

所以

$$\dot{I}_{A'B'} = \frac{\dot{I}_A}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ = 9.87 \angle -13.1^\circ \quad (\text{A})$$

$$\dot{U}_{A'B'} = \dot{I}_{A'B'} Z = 9.87 \angle -13.1^\circ \times (19.2 + j14.4) \approx 236.9 \angle -23.77^\circ \quad (\text{V})$$

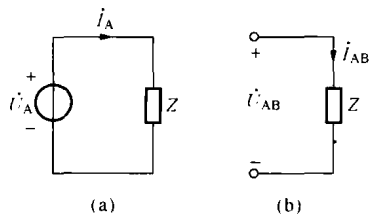
因此, 负载端的线电压为 236.9V、线电流为 17.1A 以及相电流为 9.87A。

10-10 见 [例 10-1]。

三相电路的功率

10-11 对称三相电源的线电压为 380V, 对称三相负载 $Z = 6 + j8 \Omega$, 线路阻抗忽略不计。求: (1) 三相负载星形连接时, 负载的相电流 I_{phY} 、线电流 I_{LY} 、三相有功功率 P_Y ; (2) 三相负载三角形连接时, 负载的相电流 $I_{ph\Delta}$ 、线电流 $I_{L\Delta}$ 、三相有功功率 P_Δ 。

解 (1) 三相负载为星形连接。因为 $U_l = 380\text{V}$, 所以



题 10-11 解图

$$\dot{U}_A = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$$

A相单相等值电路如题10-11解图(a)所示。

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{Z} = \frac{220 \angle 0^\circ}{6 + j8} = 22 \angle -53.1^\circ \text{ (A)}$$

所以

$$I_{\text{phY}} = I_{\text{rY}} = 22 \text{ A}$$

$$P_{\text{phY}} = \sqrt{3} U_{\text{rY}} I_{\text{rY}} \cos \theta = \sqrt{3} \times 380 \times 22 \times \cos 53.1^\circ = 8.694 \text{ (kW)}$$

(2) 负载为三角形连接。以 \dot{U}_{AB} 为参考相量，即 $\dot{U}_{\text{AB}} = 380 \angle 0^\circ \text{ V}$ 。AB相的等值电路如题10-11解图(b)所示。

$$\dot{I}_{\text{AB}} = \frac{\dot{U}_{\text{AB}}}{Z} = \frac{380 \angle 0^\circ}{6 + j8} = 38 \angle -53.1^\circ \text{ (A)}$$

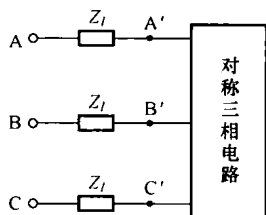
$$\dot{I}_A = \sqrt{3} \dot{I}_{\text{AB}} \angle -30^\circ = 38\sqrt{3} \angle -83.1^\circ = 65.82 \angle -83.1^\circ \text{ (A)}$$

所以

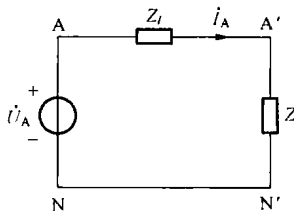
$$I_{\text{ph}\Delta} = 38 \text{ A}, I_{\text{L}\Delta} = 65.82 \text{ A}, P_{\Delta} = \sqrt{3} U_{\text{L}\Delta} I_{\text{L}\Delta} \cos \theta = \sqrt{3} \times 380 \times 65.82 \times \cos 53.1^\circ = 26 \text{ (kW)}$$

10-12 题10-12图所示对称三相电路中，已知负载端的线电压为380V，线电流为2A，负载的功率因数为0.8（感性），线路阻抗 $Z_{\text{L}} = 4 + j3 \Omega$ 。求：(1) 电源线电压 \dot{U}_{AB} 、 \dot{U}_{BC} 和 \dot{U}_{CA} ；(2) 电源提供的平均功率 P 、无功功率 Q 和视在功率 S 。

解 (1) A相单相等值电路如题10-12解图所示。



题10-12图



题10-12解图

令 $\dot{U}_{A'} = \frac{U_{\text{L}}}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$ ，因为 $I_{\text{A}} = 2 \text{ A}$ ， $\theta = \cos^{-1}(0.8) = 36.9^\circ$ ，所以

$$\dot{I}_A = 2 \angle -36.9^\circ \text{ A}$$

$$\dot{U}_A = Z_{\text{L}} \dot{I}_A + \dot{U}_{A'} = (4 + j3) \times 2 \angle -36.9^\circ + 220 \angle 0^\circ = 230 \angle 0^\circ \text{ (V)}$$

因此

$$\dot{U}_{\text{AB}} = \sqrt{3} \dot{U}_A \angle 30^\circ = \sqrt{3} \times 230 \angle 30^\circ = 398.4 \angle 30^\circ \text{ (V)}$$

$$\dot{U}_{\text{BC}} = \dot{U}_{\text{AB}} \angle -120^\circ = 398.4 \angle -90^\circ \text{ (V)}$$

$$\dot{U}_{\text{CA}} = \dot{U}_{\text{AB}} \angle 120^\circ = 398.4 \angle 150^\circ \text{ V}$$

(2) 电源提供的平均功率为

$$P = \sqrt{3}U_l I_l \cos\theta = \sqrt{3} \times 398.4 \times 2 \times \cos(0^\circ + 36.9^\circ) = 1104 \text{ (W)}$$

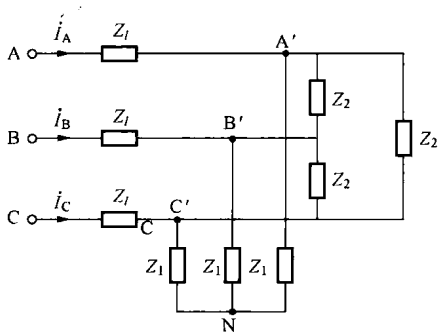
电源提供的无功功率为

$$Q = \sqrt{3}U_l I_l \sin\theta = \sqrt{3} \times 398.4 \times 2 \times \sin(0^\circ + 36.9^\circ) = 828.6 \text{ (var)}$$

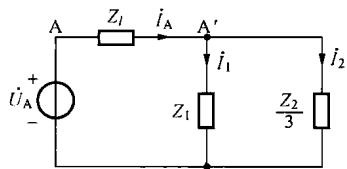
电源提供的视在功率为

$$S = \sqrt{3}U_l I_l = \sqrt{3} \times 398.4 \times 2 = 1380 \text{ (VA)}$$

10-13 题 10-13 图所示为对称三相电路, 已知负载端的线电压为 380V, $Z_1 = 16 + j12 \Omega$, $Z_2 = 60 \Omega$, 线路阻抗 $Z_l = 1 + j \Omega$ 。求: (1) 线电流 \dot{I}_A 、 \dot{I}_B 和 \dot{I}_C ; (2) 电源端线电压的有效值; (3) 电源提供的有功功率和无功功率。



题 10-13 图



题 10-13 解图

解 (1) A 相单相等值电路如题 10-13 解图所示。令 $\dot{U}_{A'} = \frac{U_l}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$, 则

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{A'}}{Z_1} = \frac{220 \angle 0^\circ}{16 + j12} = \frac{220 \angle 0^\circ}{20 \angle 36.9^\circ} = 11 \angle -36.9^\circ \text{ (A)}, \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{A'}}{\frac{Z_2}{3}} = \frac{220 \angle 0^\circ}{20} = 11 \angle 0^\circ \text{ (A)}$$

$$\dot{I}_A = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 11 \angle 0^\circ + 11 \angle -36.9^\circ = 11 + 8.8 - j6.6 = 19.8 - j6.6 = 20.87 \angle -18.4^\circ \text{ (A)}$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_A \angle -120^\circ = 20.87 \angle -138.4^\circ \text{ (A)}, \quad \dot{I}_C = \dot{I}_A \angle 120^\circ = 20.87 \angle 101.6^\circ \text{ (A)}$$

(2) 电源端相电压为

$$\begin{aligned} \dot{U}_A &= Z_l \dot{I}_A + \dot{U}_{A'} = (1 + j) \times 20.87 \angle -18.4^\circ + 220 \angle 0^\circ = 29.5 \angle 26.6^\circ + 220 \angle 0^\circ \\ &= 246.4 + j13.2 = 246.7 \angle 3.1^\circ \text{ (V)} \end{aligned}$$

所以

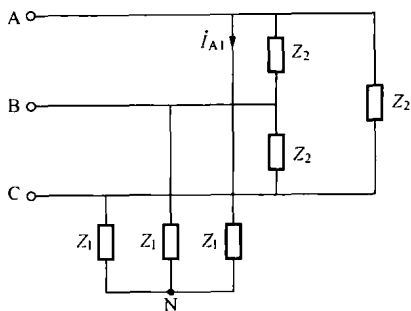
$$U_{\text{ph}} = 246.7 \text{ V}, \quad U_l = \sqrt{3}U_{\text{ph}} = 427.3 \text{ V}$$

(3) 电源提供的有功功率和无功功率分别为

$$P = \sqrt{3}U_l I_l \cos\theta = \sqrt{3} \times 427.3 \times 20.87 \cos(3.1^\circ + 18.4^\circ) = 14\,371 \text{ (W)}$$

$$Q = \sqrt{3}U_l I_l \sin\theta = \sqrt{3} \times 427.3 \times 20.87 \sin(3.1^\circ + 18.4^\circ) = 5661 \text{ (var)}$$

10-14 题 10-14 图所示为对称三相电路, 星形连接的负载阻抗 $Z_1 = 80 - j60 \Omega$, 三角形连接的负载阻抗 $Z_2 = 60 - j80 \Omega$, 若测得图中星形连接负载电流有效值 $I_{l1} = \sqrt{3} \text{ A}$, 试求三角形连接负载的三相总功率 P 。



题 10-14 图

解 因为 $Z_1 = 80 - j60 = 100 \angle -36.9^\circ (\Omega)$ 、
 $I_{l1} = \sqrt{3} \text{ A}$, 所以

$$I_{\text{ph1}} = I_{l1} = \sqrt{3} \text{ A}, U_A = |Z_1| I_{\text{ph1}} = 100\sqrt{3} \text{ V}$$

$$U_{AB} = \sqrt{3} U_A = 300 \text{ V}$$

因为 $Z_2 = 60 - j80 = 100 \angle -53.1^\circ \Omega$, 所以

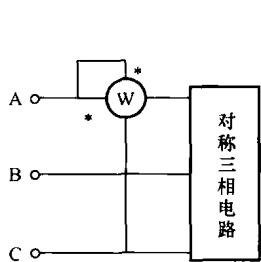
$$I_{\text{ph2}} = I_{AB} = \frac{U_{AB}}{|Z_2|} = \frac{300}{100} = 3 (\text{A})$$

因此, 三角形连接负载的三相总功率 P 为

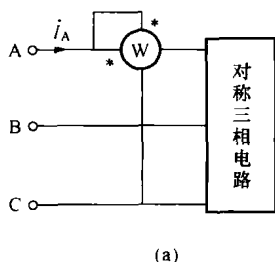
$$P = 3I_{\text{ph2}}^2 R_2 = 3 \times 3^2 \times 60 = 1620 (\text{W})$$

10-15 见 [例 10-2]。

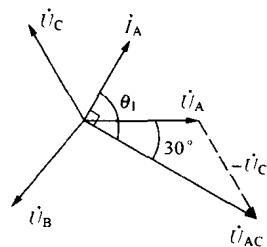
10-17 题 10-17 图所示对称三相电路中, 电源线电压 $U_l = 380 \text{ V}$, 线电流 $I_l = 2 \text{ A}$, 功率表示数为零, 求三相负载的总功率。



题 10-17 图



(a)



(b)

题 10-17 解图

解 设电流 \dot{I}_A 的参考方向如题 10-17 解图 (a) 所示。因为功率表的示数为零, 即

$$P_1 = U_{AC} I_A \cos \theta_1 = 0$$

则

$$\theta_1 = \pm 90^\circ$$

根据负载阻抗角 $|\theta_z| \leq 90^\circ$ 得, $\theta_1 = 90^\circ$ 。

以 \dot{U}_A 为参考相量, 即 $\dot{U}_A = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$, 画出电路的相量图如题 10-17 解图

(b) 所示。

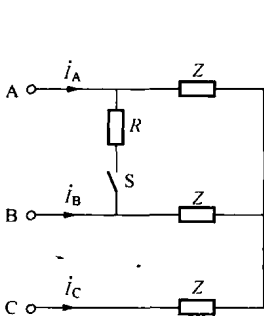
$$\dot{I}_A = 2 \angle 60^\circ \text{ A}$$

所以, 三相负载的总功率为

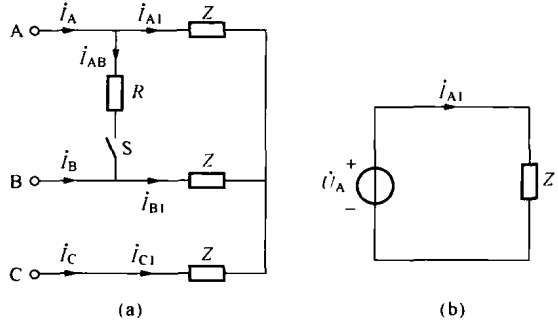
$$P = \sqrt{3} U_l I_l \cos 60^\circ = \sqrt{3} \times 380 \times 2 \times 0.5 = 658.2 (\text{W})$$

综合题

10-19 题 10-19 图所示电路中, 对称三相电源的线电压为 380V, 对称负载阻抗 $Z=60+j80\ \Omega$, $R=190\ \Omega$ 。试求开关 S 闭合和断开时的线电流 \dot{I}_A 、 \dot{I}_B 和 \dot{I}_C 。



题 10-19 图



题 10-19 解图

解 所用电压的参考方向如题 10-19 解图 (a) 所示。

(1) S 断开时。令 $\dot{U}_A = \frac{U_l}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ = 220 \angle 0^\circ$ V, A 相单相等值电路如题 10-19 解图 (b) 所示。

$$\dot{i}_{A1} = \frac{\dot{U}_A}{Z} = \frac{220 \angle 0^\circ}{60+j80} = 2.2 \angle -53.1^\circ \text{ (A)}, \quad \dot{i}_{B1} = \dot{i}_{A1} \angle -120^\circ = 2.2 \angle -173.1^\circ \text{ (A)}$$

$$\dot{i}_{C1} = \dot{i}_{A1} \angle 120^\circ = 2.2 \angle 66.9^\circ \text{ (A)}$$

所以

$$\dot{I}_A = \dot{i}_{A1} = 2.2 \angle -53.1^\circ \text{ A}, \quad \dot{I}_B = \dot{i}_{B1} = 2.2 \angle -173.1^\circ \text{ A}, \quad \dot{I}_C = \dot{i}_{C1} = 2.2 \angle 66.9^\circ \text{ A}$$

(2) S 闭合时。因为 $\dot{U}_A = 220 \angle 0^\circ$ V, 所以

$$\dot{U}_{AB} = \sqrt{3} \dot{U}_A \angle 30^\circ = 380 \angle 30^\circ \text{ V}, \quad \dot{i}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{R} = \frac{380 \angle 30^\circ}{190} = 2 \angle 30^\circ \text{ (A)}$$

则

$$\dot{I}_A = \dot{i}_{A1} + \dot{i}_{AB} = 2.2 \angle -53.1^\circ + 2 \angle 30^\circ = 3.15 \angle -14^\circ \text{ (A)}$$

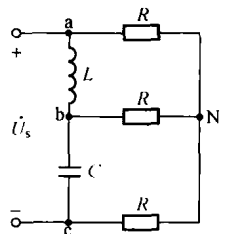
$$\dot{I}_B = \dot{i}_{B1} - \dot{i}_{AB} = 2.2 \angle -173.1^\circ - 2 \angle 30^\circ = 4.1 \angle -162.1^\circ \text{ (A)}, \quad \dot{I}_C = \dot{i}_{C1} = 2.2 \angle 66.9^\circ \text{ A}$$

10-20 题 10-20 图所示电路为从单相电源获得对称三相电压的电路。外施工频正弦电压的有效值为 U_s , 负载电阻 $R=20\ \Omega$ 。求使负载上得到对称三相电流所需的 L 和 C 之值。

解 对节点 b, 由 KCL 得

$$\frac{\dot{U}_{ab}}{jX_L} - \frac{\dot{U}_{bc}}{jX_C} - \frac{\dot{U}_{bN}}{R} = 0$$

设 \dot{U}_{aN} 、 \dot{U}_{bN} 、 \dot{U}_{cN} 构成对称三相电压, 则



题 10-20 图

$$\dot{U}_{aN}=U\angle 0^\circ, \dot{U}_{bN}=U\angle -120^\circ, \dot{U}_{cN}=U\angle 120^\circ$$

所以

$$\dot{U}_{ab}=\sqrt{3}\dot{U}_{aN}\angle 30^\circ=\sqrt{3}U\angle 30^\circ, \dot{U}_{bc}=\dot{U}_{ab}\angle -120^\circ=\sqrt{3}U\angle -90^\circ$$

则

$$\frac{\sqrt{3}U\angle 30^\circ}{jX_L}-\frac{\sqrt{3}U\angle -90^\circ}{jX_C}-\frac{U\angle -120^\circ}{R}=0$$

消去 U 得

$$\frac{\sqrt{3}\angle 30^\circ}{jX_L}-\frac{\sqrt{3}\angle -90^\circ}{jX_C}-\frac{\angle -120^\circ}{R}=0$$

将其实部和虚部展开后, 令其虚部和实部分别为零, 有

$$\begin{cases} \frac{3}{2X_L}-\frac{\sqrt{3}}{2R}=0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2X_L}+\frac{\sqrt{3}}{X_C}+\frac{1}{2R}=0 \end{cases}$$

解之得

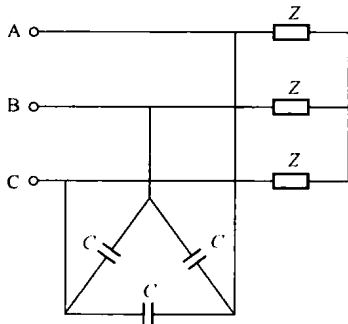
$$X_L=\sqrt{3}R=34.6(\Omega), X_C=-\sqrt{3}R=-34.6(\Omega)$$

因此

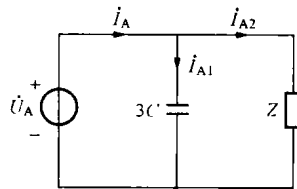
$$L=\frac{X_L}{\omega}=\frac{34.6}{314}=110(\text{mH}), C=\frac{1}{|X_C|\omega}=\frac{1}{34.6\times 314}=91.9(\mu\text{F})$$

10-21 题 10-21 图所示对称三相电路的线电压为 380V, 频率 $f=50\text{Hz}$, 三相对称负载阻抗 $Z=30+j40\Omega$, 欲使功率因数提高到 0.9 (滞后), 接入一组电容。求每相电容的电容量。

解 将三角形连接的电容转换为星形连接的电容, 且以 A 相电压 \dot{U}_A 为参考相量, 即 $\dot{U}_A=\frac{380}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ\text{V}$, A 相的单相等值电路如题 10-21 解图所示。



题 10-21 图



题 10-21 解图

(1) 未接电容时

$$\dot{I}_A=\dot{I}_{A2}=\frac{220\angle 0^\circ}{30+j40}=4.4\angle -53.1^\circ\text{A}, \theta_1=53.1^\circ$$

三相负载吸收的有功功率和无功功率分别为

$$P = 3U_{\text{ph}} I_{\text{ph}} \cos\theta_1 = 3 \times 220 \times 4.4 \times \cos 53.1^\circ = 1742.4 \text{ (W)}, Q = P \tan\theta_1$$

(2) 接入电容后, 三相负载吸收的有功功率和无功功率不变, 即

$$P = 1742.4 \text{ W}, Q = P \tan\theta_1$$

电源提供的无功为

$$Q_s = P \tan\theta_2$$

且

$$\theta_2 = \cos^{-1} 0.9 = 25.84^\circ$$

电容提供的无功为

$$Q_C = 3\omega(3C)U_{\text{ph}}^2 = 3\omega CU_l^2$$

根据电路无功功率守恒得

$$Q = Q_s + Q_C$$

即

$$P \tan\theta_1 = P \tan\theta_2 + 3\omega CU_l^2$$

则

$$C = \frac{P}{3\omega U_l^2} (\tan\theta_1 - \tan\theta_2) = \frac{1742.4}{3 \times 314 \times 380^2} \times (\tan 53.1^\circ - \tan 25.84^\circ) = 10.86 \text{ } (\mu\text{F})$$

10.5 自测题及参考答案

1. 图 1 所示对称三相电路中, 已知线电压 $\dot{U}_{AC} = 380 \angle -30^\circ \text{ V}$, 星形连接的负载阻抗 $Z = 55 \angle -30^\circ \Omega$, 求线电流 \dot{i}_A 。

2. 图 2 所示对称三相电路中, 已知电源线电压 $\dot{U}_{AB} = 300 \angle 30^\circ \text{ V}$, 负载阻抗 $Z = 80 + j60 \Omega$ 。求三相负载吸收的有功功率 P 。

3. 图 3 所示对称三相电路中, 已知电源线电压为 300 V , 负载阻抗 $Z = 8 + j6 \Omega$ 。求线电流 \dot{i}_A 。

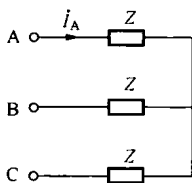


图 1

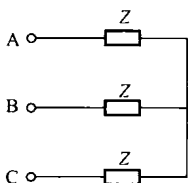


图 2

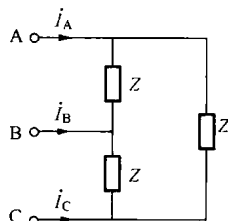


图 3

4. 图 4 所示对称三相电路中, 已知电源线电压 $\dot{U}_{AB} = 380 \angle 30^\circ \text{ V}$, 负载阻抗 $Z = 15 + j18 \Omega$, 线路阻抗 $Z_l = 1 + j2 \Omega$ 。求负载的相电流 $\dot{I}_{A'B'}$ 和负载的相电压 $\dot{U}_{B'C'}$ 。

5. 图 4 所示对称三相电路中, 电源线电压 $U_l = 300 \text{ V}$, 线路阻抗 $Z_l = 1 + j2 \Omega$, 三角形连接负载 $Z = 15 + j18 \Omega$ 。求三相电源提供的总功率 P 。

6. 图5所示三相电路中, 对称三相电源的相电压为200V, 单相负载 $Z=200\sqrt{3}/30^\circ \Omega$, 对称三相负载 $Z_\Delta=600/-36.9^\circ \Omega$, N 为对称三相负载, 其消耗的功率 $P_N=480\text{W}$, 负载功率因数 $\cos\theta=0.8$. 求: (1) 电流 I_A ; (2) 功率表 PW1 和 PW2 的示数.

7. 图6所示对称三相电路中, 已知电源的线电压为380V, 对称负载 $Z=6+j8 \Omega$, 试分别求三个功率表的示数.

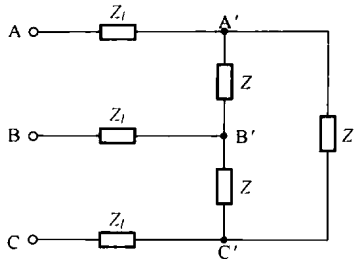


图4

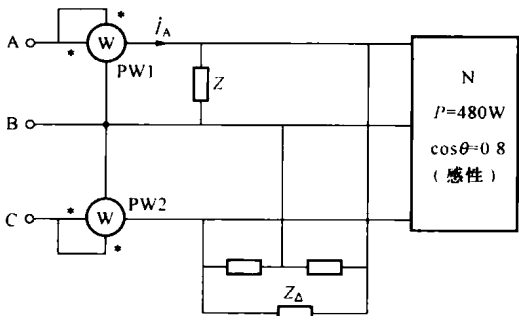


图5

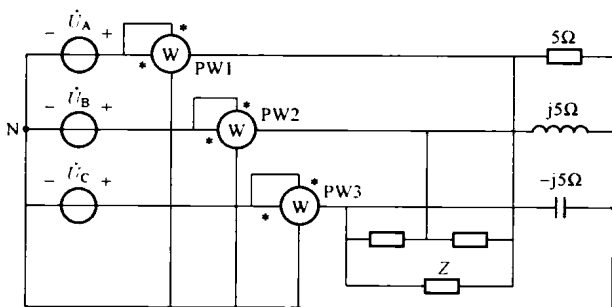


图6

参考答案

1. $4 \angle -30^\circ \text{ A}$
2. 720W
3. $52 \angle -66.9^\circ \text{ A}$
4. $\frac{22}{\sqrt{3}} \angle -23.1^\circ \text{ A}$, $297.6 \angle -92.9^\circ \text{ V}$
5. 5400W
6. 2.6A, $P_1=780\text{W}$, $P_2=480\text{W}$
7. $P_1=18\ 344\text{W}$, $P_2=8664\text{W}$, $P_3=8664\text{W}$ (注: 不同方法的结果会略有差别)

第 11 章 非正弦周期信号线性电路的稳态分析

11.1 本章知识结构图

第 11 章知识结构图如图 11-1 所示。

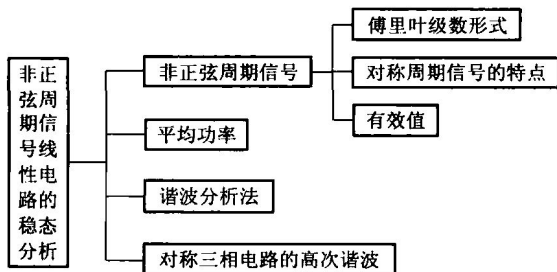


图 11-1 第 11 章知识结构图

11.2 知识点归纳与学习指导

本章介绍非正弦周期信号线性电路稳态分析的计算方法，重点为谐波分析法，它是叠加定理在非正弦周期信号线性电路稳态分析中的具体应用。

11.2.1 非正弦周期信号及其傅里叶级数

1. 非正弦周期信号

非正弦周期电压和电流都可用一个周期函数来表示，即

$$f(t) = f(t + kT)$$

式中： T 为周期函数 $f(t)$ 的周期，且 $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ 。

2. 非正弦周期信号的傅里叶级数

满足狄里赫利条件的非正弦周期信号可分解为下列三角函数形式的傅里叶级数

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega t + \theta_k)$$

其中， $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 。各个系数的计算公式如下

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \\ a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos k\omega t d(\omega t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos k\omega t d(\omega t) \\ b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin k\omega t d(\omega t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin k\omega t d(\omega t) \end{cases}$$

$$A_0 = a_0, A_{km} = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \theta_k = \arctan \frac{a_k}{b_k}$$

其中, 常数项 A_0 称为 $f(t)$ 的直流分量, 它是 $f(t)$ 在一个周期内的平均值; $A_{1m} \sin(\omega t + \theta_1)$ 称为 $f(t)$ 的基波或 1 次谐波; $A_{2m} \sin(2\omega t + \theta_2)$ 称为 $f(t)$ 的 2 次谐波等。2 次及 2 次以上的谐波统称为高次谐波。常把 k 为奇数的谐波称为奇次谐波, k 为偶数的谐波称为偶次谐波。

奇函数 [$f(t) = -f(-t)$] 只含奇函数类型的谐波, 即 $a_0 = 0, a_k = 0 (k=1, 2, 3, \dots)$; 偶函数 [$f(t) = f(-t)$] 只含直流分量和属于偶函数类型的谐波, 即 $b_k = 0 (k=1, 2, 3, \dots)$; 奇谐波函数 [$f(t) = -f(t \pm \frac{T}{2})$] 只有奇次谐波, 无直流分量和偶次谐波, 即 $a_0 = A_0 = 0, a_{2k} = b_{2k} = A_{2km} = 0 (k=1, 2, 3, \dots)$ 。偶谐波函数 [$f(t) = f(t \pm \frac{T}{2})$] 只含直流分量和偶次谐波, 无奇次谐波, 即 $a_{2k+1} = b_{2k+1} = A_{(2k+1)m} = 0 (k=0, 1, 2, \dots)$ 。

由于周期函数的各谐波幅值随着谐波次数的增高, 总趋势是逐渐减小的。因此, 在实际工程计算中, 只要取级数的前几项就能够近似表示原来的函数。

3. 非正弦周期信号的有效值

设非正弦周期电流 $i(t)$ 和电压 $u(t)$ 分别为

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \theta_{ik}), u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \sin(k\omega t + \theta_{uk})$$

则它们的有效值分别为

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} = \sqrt{I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k^2}, U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} = \sqrt{U_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k^2}$$

即有效值等于其直流分量的平方及各次谐波分量有效值的平方之和的平方根。

11.2.2 非正弦周期信号电路的平均功率

设图 11-2 中二端网络 N 的端口电压 $u(t)$ 和电流 $i(t)$ 为非正弦周期电压和电流, 则该二端网络吸收的平均功率为

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt = P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \theta_k$$

式中: $P_0 = U_0 I_0$ 为直流分量产生的功率; $P_k = U_k I_k \cos \theta_k$ 为 k 次谐波电压和电流产生的功率; $\theta_k = \theta_{uk} - \theta_{ik}$ 为 k 次谐波电压和电流的相位差。

非正弦周期信号电路的平均功率是各次谐波的平均功率及直流分量功率的总和。不同谐波的电压、电流只能构成瞬时功率, 不能构成平均功率。

对于线性电阻有

$$u_R = R i_R, U_R = R I_R, P_R = U_R I_R = R I_R^2 = U_R^2 / R$$

【例 11-1】 已知图 11-2 所示网络 N 的端电压和电流分别为

$$u(t) = 2\sqrt{2} \cos(t - 60^\circ) + \sqrt{2} \cos(2t + 45^\circ) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(3t - 60^\circ) \text{ V}$$

$$i(t) = 10\sqrt{2} \cos t + 5\sqrt{2} \cos(2t - 45^\circ) \text{ A}$$

试求: (1) 此网络 N 对基波呈现什么性质? (2) 2 次谐波的输入阻抗 Z_2 。(3) 网络 N 端口电压的有效值 U 及网络吸收的有功功率 P 。

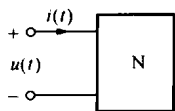


图 11-2 二端网络

$$\begin{aligned} \text{解 } u(t) &= 2\sqrt{2}\cos(t-60^\circ) + \sqrt{2}\cos(2t+45^\circ) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(3t-60^\circ) \\ &= u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) \\ i(t) &= 10\sqrt{2}\cos t + 5\sqrt{2}\cos(2t-45^\circ) = i_1(t) + i_2(t) \end{aligned}$$

(1) 因为 $u_1(t) = 2\sqrt{2}\cos(t-60^\circ)$ V, $i_1(t) = 10\sqrt{2}\cos t$ A, 所以

$$\dot{U}_1 = 2\angle -60^\circ \text{ V}, \dot{I}_1 = 10\angle 0^\circ \text{ A}, Z_1 = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{2\angle -60^\circ}{10\angle 0^\circ} = 0.2\angle -60^\circ = |Z_1|\angle \theta$$

因为 $\theta = -60^\circ < 0$, 所以此网络 N 对基波呈现容性。

(2) 因为 $u_2(t) = \sqrt{2}\cos(2t+45^\circ)$ V, $i_2(t) = 5\sqrt{2}\cos(2t-45^\circ)$ A, 所以

$$\dot{U}_2 = 1\angle 45^\circ \text{ V}, \dot{I}_2 = 5\angle -45^\circ \text{ A}, Z_2 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \frac{1\angle 45^\circ}{5\angle -45^\circ} = 0.2\angle 90^\circ = j0.2(\Omega)$$

$$(3) \quad U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0.5^2} = 2.29 \text{ (V)}$$

$$\begin{aligned} P &= U_1 I_1 \cos\theta_1 + U_2 I_2 \cos\theta_2 + U_3 I_3 \cos\theta_3 \\ &= 2 \times 10 \times \cos(-60^\circ) + 1 \times 5 \times \cos(45^\circ + 45^\circ) + 0 = 10 \text{ (W)} \end{aligned}$$

注: 谐波下的阻抗称为谐波阻抗。不同次的谐波阻抗一般是不同的。

11.2.3 非正弦周期信号电路的稳态分析——谐波分析法

对非正弦周期信号线性电路进行稳态分析的方法为谐波分析法。该方法的一般步骤为:

(1) 将非正弦周期输入信号(电源)按傅里叶级数展开,若题目已经展开(大多数题目属于此种情况),此步可以省略。

(2) 将电源按频率分组,分别计算直流分量和各次谐波分量单独作用产生的稳态响应。

当直流分量单独作用时,电感相当于短路,电容相当于开路,电路为一电阻性电路,可采用电阻电路的分析方法求出响应的直流分量。

当第 k 次谐波分量单独作用于电路时,电路相当于交流稳态电路。做出第 k 次谐波的相量模型,运用正弦稳态电路的相量分析法,求响应的第 k 次谐波分量。

(3) 由各次谐波的稳态响应相量写出其对应的时域函数,根据叠加定理,将响应的直流分量和各次谐波分量的时域函数叠加,写出响应的时域表达式。特别注意:不能将各次谐波分量响应的相量或有效值相加。

(4) 计算响应的有效值或求解功率。

使用谐波分析法时应注意以下几点:

(1) 不同频率的谐波分量相加时,不能采用相量相加,只能在时域中按瞬时值表达式叠加。

(2) 电感和电容的电抗随频率而变,因此,它们的谐波电抗对不同次的谐波是不同的。对 k 次谐波而言(此时的电路频率为 $k\omega$,而不是 ω), k 次谐波感抗 $X_{Lk} = k\omega L$,是基波感抗的 k 倍,而 k 次谐波容抗 $X_{Ck} = -\frac{1}{k\omega C}$ 是基波容抗的 $\frac{1}{k}$ 倍。

(3) 在非正弦周期稳态电路中,有时题目中给出的是电感和电容在某一次谐波(大多数是基波)的阻抗,这点在做题的过程中应特别注意。对于同时含有电感和电容的电路,注意

分析是否发生串联或并联谐振，以简化计算。

正确画出直流分量单独作用的电路和各次谐波分量单独作用的相量模型是本章基本功之一。

【例 11-2】 图 11-3 (a) 所示电路中，已知直流电流源 $I_s=4\text{A}$ ，正弦电压源 $u_s(t)=5\sqrt{2}\cos(t+30^\circ)\text{V}$ 。求：(1) 电流 $i(t)$ 及其有效值；(2) 电路消耗的平均功率 P 。

解 (1) 直流电流源 $I_s=4\text{A}$ 单独作用，电路如图 11-3 (b) 所示，则有

$$I_0 = -\frac{1}{3+1} \times 4 = -1(\text{A}), P_0 = (3//1) \times 4^2 = \frac{3 \times 1}{3+1} \times 16 = 12(\text{W})$$

(2) 正弦电压源 $u_s(t)=5\sqrt{2}\cos(t+30^\circ)\text{V}$ 单独作用，相量模型如图 11-3 (c) 所示。0.5F 电容与 2H 电感发生并联谐振，相当于开路，所以

$$\dot{i}_1 = \frac{5 \angle 30^\circ}{3+j5-j} = \frac{5 \angle 30^\circ}{3+j4} = 1 \angle -23.1^\circ (\text{A}), i_1(t) = \sqrt{2} \cos(t-23.1^\circ) \text{A}$$

$$P_1 = I_1^2 \times 3 = 1^2 \times 3 = 3(\text{W})$$

因此

$$i(t) = I_0 + i_1(t) = -1 + \sqrt{2} \cos(t-23.1^\circ) \text{A}$$

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}(\text{A}), P = P_0 + P_1 = 12 + 3 = 15(\text{W})$$

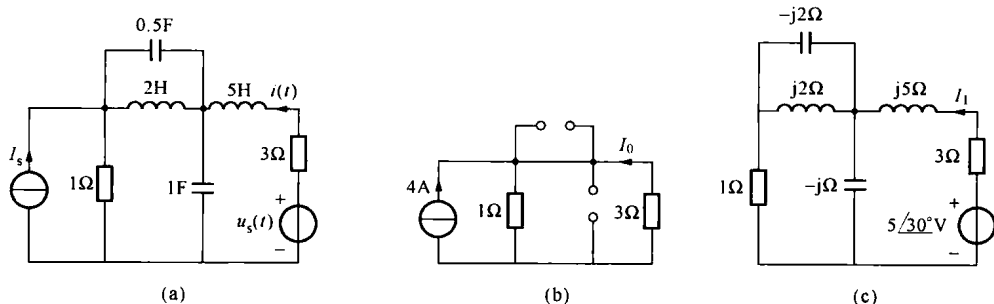


图 11-3 [例 11-2] 图

注：(1) 包含直流和多个频率的正弦信号电源的电路为非正弦周期信号电路。

(2) 本题属于正向求解问题，这类问题大多知道电路结构，元件参数，电源等条件，求解电路的电压、电流或者功率。基本的思路就是按照谐波分析法来求解，需要注意的是，电容和电感元件对于不同的谐波分量呈现出不同的阻抗。

【例 11-3】 图 11-4 所示电路中， $C_1=100\mu\text{F}$ ，直流电流源 $I_s=1\text{A}$ ，电压源 $u_s(t)=10+10\sqrt{2}\cos(1000t+30^\circ)+8\cos(2000t+45^\circ)\text{V}$ ，电流 $i(t)=\sqrt{2}\cos(1000t+30^\circ)\text{A}$ ，电阻 R 中流过的直流电流为 0.5A (方向如图 11-3 所示)。试求 R 、 L 、 C_2 和 R_3 的值及 R_3 上的电压 $u_{R3}(t)$ 。

解 由已知条件可知，电流 $i(t)$ 与电压源 $u_s(t)$ 中的基波分量同频同相，而 2 次谐波分量为零，说明 LC_1 支路对 $u_s(t)$ 中的基波频率发生串联谐振，而

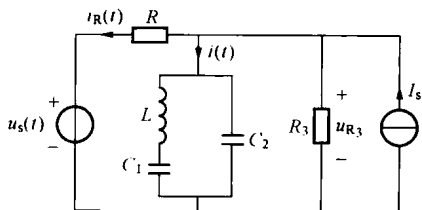


图 11-4 [例 11-3] 图

LC_1C_2 回路对 2 次谐波频率发生并联谐振。

因为 LC_1 支路对基波角频率 $\omega_1 = 10^3 \text{ rad/s}$ 发生串联谐振, 所以

$$L = \frac{1}{\omega_1^2 C_1} = \frac{1}{(10^3)^2 \times 10^{-4}} = 10 \text{ (mH)}$$

因为 LC_1C_2 回路对 2 次谐波角频率 $\omega_2 = 2 \times 10^3 \text{ rad/s}$ 发生并联谐振, 所以回路的等效电容为

$$C' = \frac{1}{\omega_2^2 L} = \frac{1}{(2 \times 10^3)^2 \times 10^{-2}} = 25 \text{ (}\mu\text{F)}$$

而

$$C' = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{10^{-4} C_2}{10^{-4} + C_2} = 25 \text{ (}\mu\text{F)}$$

解之得

$$C_2 = 33.3 \mu\text{F}$$

(1) 当 $u_s(t)$ 中基波分量 $u_{s1}(t)$ 单独作用时, L 、 C_1 支路发生串联谐振, 相当于短路, 其等效电路如图 11-5 (a) 所示。

$$u_{s1} = 10\sqrt{2} \cos(1000t + 30^\circ) \text{ V}, i(t) = \sqrt{2} \cos(1000t + 30^\circ) \text{ A}$$

所以

$$R = \frac{u_{s1}(t)}{i(t)} = 10 \Omega$$

此时原电路中的 R_3 被短路, 其电压分量 $u_{R31} = 0$ 。

(2) 当 $u_s(t)$ 中的直流分量 $U_{s0} = 10 \text{ V}$ 和直流电流源 $I_s = 1 \text{ A}$ 共同作用时, 电容 C_1 、 C_2 开路, 电路如图 11-5 (b) 所示。因为 $I_{R0} = 0.5 \text{ A}$, 所以

$$U_{R30} = R I_{R0} + U_{s0} = 10 \times 0.5 + 10 = 15 \text{ (V)}, I_{R30} = I_{s0} - I_{R0} = 1 - 0.5 = 0.5 \text{ (A)}$$

则

$$R_3 = \frac{U_{R30}}{I_{R30}} = \frac{15}{0.5} = 30 \text{ (}\Omega\text{)}$$

(3) 当 $u_s(t)$ 中的 2 次谐波分量单独作用时, 由于 L 、 C_1 、 C_2 回路发生并联谐振, 相当于开路, 电路如图 11-5 (c) 所示。图中 $u_{s2}(t) = 8 \cos(2000t + 45^\circ) \text{ V}$, 所以

$$u_{R32}(t) = \frac{R_3}{R_3 + R} \times u_{s2}(t) = \frac{30}{30 + 10} \times 8 \cos(2000t + 45^\circ) = 6 \cos(2000t + 45^\circ) \text{ V}$$

因此

$$u_{R32}(t) = U_{R30} + u_{R31}(t) + u_{R32}(t) = 5 + 6 \cos(2000t + 45^\circ) \text{ V}$$

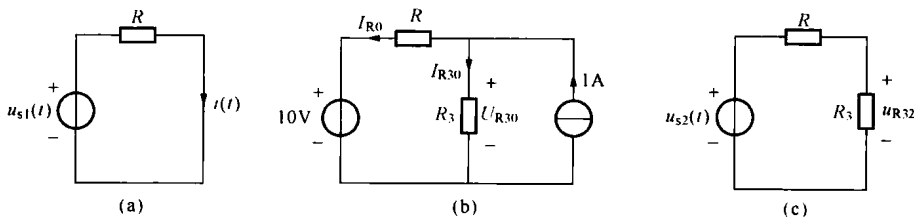


图 11-5 [例 11-3] 解图

注: 本题属于反向求解问题。这类问题大多已知电路的结构和电路中的一些电压、电

流（具体数值或比例关系）或者功率的情况等，求解电路的元件参数，如电阻、电感和电容等。

11.2.4 对称三相电路的高次谐波

1. 三相发电机输出电压的特点

三相发电机实际产生的电压含有一定的谐波分量，所以一般在对称三相电路中，电压和电流可能含有高次谐波。三个对称的非正弦周期相电压在时间上依次滞后 $1/3$ 周期，但变化规律相似。

三相发电机输出电压的表达式为

$$\begin{aligned} u_A &= \sqrt{2}U_1 \cos(\omega t + \psi_1) + \sqrt{2}U_3 \cos(3\omega t + \psi_3) + \sqrt{2}U_5 \cos(5\omega t + \psi_5) + \\ &\quad \sqrt{2}U_7 \cos(7\omega t + \psi_7) + \dots \\ u_B &= \sqrt{2}U_1 \cos(\omega t + \psi_1 - 120^\circ) + \sqrt{2}U_3 \cos(3\omega t + \psi_3) + \sqrt{2}U_5 \cos(5\omega t + \psi_5 + 120^\circ) + \\ &\quad \sqrt{2}U_7 \cos(7\omega t + \psi_7 - 120^\circ) + \dots \\ u_C &= \sqrt{2}U_1 \cos(\omega t + \psi_1 + 120^\circ) + \sqrt{2}U_3 \cos(3\omega t + \psi_3) + \sqrt{2}U_5 \cos(5\omega t + \psi_5 - 120^\circ) + \\ &\quad \sqrt{2}U_7 \cos(7\omega t + \psi_7 + 120^\circ) + \dots \end{aligned}$$

其中， $6k+1$ ($k=0, 1, 2, \dots$) 次谐波的相序为 A、B、C，即为正序，如基波、7 次、13 次和 19 次谐波等； $6k-1$ ($k=1, 2, 3, \dots$) 次谐波的相序为 A、C、B，即为负序，如 5 次、11 次和 17 次谐波等； $3k$ ($k=1, 2, 3, \dots$) 次谐波的相序为零序，即 A、B、C 三相同相位，如 3 次、9 次和 15 次谐波等。

注意：这里所说的正序、负序和零序的概念与不对称正弦三相电路中相应概念的异同。

2. 星形连接电源的线电压和相电压的关系

相电压中含有全部谐波分量，相电压的有效值为

$$U_{ph} = \sqrt{U_{ph1}^2 + U_{ph3}^2 + U_{ph5}^2 + \dots}$$

因零序分量相互抵消，线电压中不含零序对称组谐波分量，因此线电压的有效值为

$$U_l = \sqrt{U_{l1}^2 + U_{l5}^2 + U_{l7}^2 + \dots} = \sqrt{3} \sqrt{U_{ph1}^2 + U_{ph5}^2 + U_{ph7}^2 + \dots} < \sqrt{3} U_{ph}$$

3. 星形连接负载的线电压和相电压的关系

正序和负序组的谐波在电源中性点和负载中性点间产生的电压为零， $\dot{U}_{NN'} = 0$ 。此时分别按对称三相电路归结为单相等效电路，用相量法进行计算。

对于零序组分量：① 无中性线时，中性点间的电压的有效值只含有零序组分量，负载中不含有零序组分量，线电流中不含零序组分量。② 有中性线时，零序组分量的作用运用节点分析法进行分析，线电压中不含零序谐波分量。

4. 三角形连接中线电压和相电压的关系

电源回路中，正序、负序组对称电压之和为零；零序组沿回路电压之和不为零，回路中存在零序组的环流，并在电源内阻上产生零序分量，从而线电压中不含零序分量。

三角形电源侧线电压只含正序、负序组分量，线电压和相电压间关系为

$$U_l = \sqrt{3} \sqrt{U_{ph1}^2 + U_{ph5}^2 + U_{ph7}^2 + \dots}$$

三角形负载线电压只含正序、负序分量，线电压和相电压间关系与电源侧一致。

11.3 重点、难点与考点

重点与难点

本章的重点是非正弦周期信号电路的有效值、平均功率的计算方法及谐波分析法。难点是反向求解问题的分析计算。

考点

本章考试的重点和热点主要集中在谐波分析法（包括有效值和平均功率）。

11.4 第11章习题选解

非正弦周期信号的有效值、平均功率

11-2 见 [例 11-1]。

谐波分析法

11-3 题 11-3 图所示稳态电路中，已知 $u(t) = 10 + 100\sqrt{2} \cos(\omega t + 10^\circ) + 50\sqrt{2} \cos 3\omega t$ V, $R = 6\Omega$, $\omega L = 2\Omega$, $\frac{1}{\omega C} = 18\Omega$ 。试求电流 $i(t)$ 及电压表、电流表的示数。

解 (1) 直流分量单独作用。电感短路，电容开路，所以

$$I_0 = 0, U_{10} = 0$$

(2) 基波分量单独作用。相量模型如题 11-3 解图 (a) 所示。

$$\dot{I}_1 = \frac{100 \angle 10^\circ}{6 + j2 - j18} = \frac{100 \angle 10^\circ}{6 - j16} = 5.85 \angle 79^\circ \text{ (A)}$$

$$\dot{U}_{11} = \dot{I}_1 \times (6 + j2) = 5.85 \angle 79^\circ \times 6.325 \angle 18.43^\circ = 37 \angle 97.43^\circ \text{ (V)}$$

所以

$$i_1(t) = 5.85\sqrt{2} \cos(\omega t + 79^\circ) \text{ A}$$

(3) 3 次谐波分量单独作用。相量模型如题 11-3 解图 (b) 所示。

$$\dot{I}_3 = \frac{50 \angle 0^\circ}{6} = \frac{25}{3} \angle 0^\circ \text{ (A)}, i_3(t) = \frac{25}{3}\sqrt{2} \cos 3\omega t \text{ (A)}$$

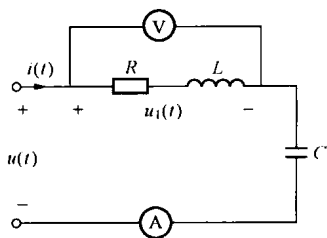
$$\dot{U}_{13} = \dot{I}_3 (6 + j6) = \frac{25}{3} \angle 0^\circ \times 6\sqrt{2} \angle 45^\circ = 50\sqrt{2} \angle 45^\circ \text{ (V)}$$

所以

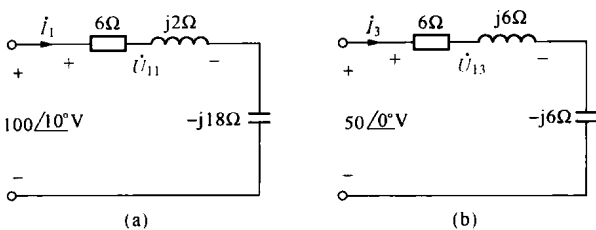
$$i(t) = I_0 + i_1(t) + i_3(t) = 5.85\sqrt{2} \cos(\omega t + 79^\circ) + \frac{25}{3}\sqrt{2} \cos 3\omega t \text{ A}$$

$$U_1 = \sqrt{U_{10}^2 + U_{11}^2 + U_{13}^2} = \sqrt{37^2 + (50\sqrt{2})^2} = 80 \text{ (V)}$$

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2} = \sqrt{5.85^2 + \left(\frac{25}{3}\right)^2} = 10.18 \text{ (A)}$$

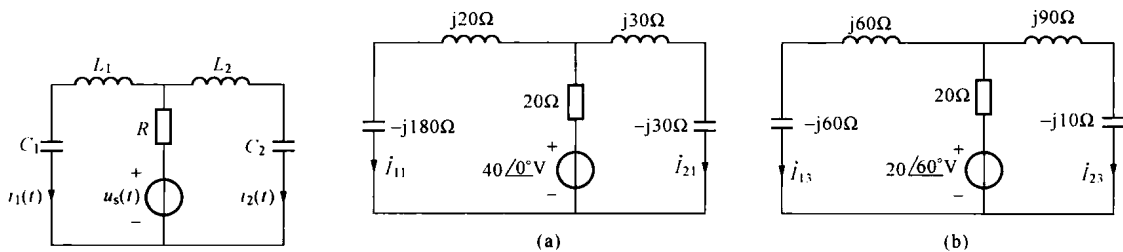


题 11-3 图



题 11-3 解图

11-4 题 11-4 图所示稳态电路中, 已知 $u_s(t) = 40\sqrt{2}\sin\omega t + 20\sqrt{2}\sin(3\omega t + 60^\circ)$ V, $\omega L_1 = 20\Omega$, $\omega L_2 = 30\Omega$, $\frac{1}{\omega C_1} = 180\Omega$, $\frac{1}{\omega C_2} = 30\Omega$, $R = 20\Omega$ 。试求电流 $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$ 和电源提供的功率 P 。



题 11-4 图

题 11-4 解图

解 (1) 基波分量单独作用。相量模型如题 11-4 解图 (a) 所示。 L_2 和 C_2 发生串联谐振, 所以

$$\dot{I}_{21} = \frac{40\angle 0^\circ}{20} = 2\angle 0^\circ \text{ (A)}, \dot{I}_{11} = 0$$

则

$$i_{11} = 0, i_{21}(t) = 2\sqrt{2}\sin\omega t \text{ A}, P_1 = I_{21}^2 \times 20 = 2^2 \times 20 = 80 \text{ (W)}$$

(2) 3 次谐波分量单独作用。相量模型如题 11-4 解图 (b) 所示。 L_1 和 C_1 发生串联谐振, 所以

$$\dot{I}_{13} = \frac{20\angle 60^\circ}{20} = 1\angle 60^\circ \text{ (A)}, \dot{I}_{23} = 0$$

则

$$i_{13}(t) = \sqrt{2}\sin(3\omega t + 60^\circ) \text{ A}, i_{23}(t) = 0, P_3 = I_{13}^2 \times 20 = 1^2 \times 20 = 20 \text{ (W)}$$

因此

$$i_1(t) = i_{11}(t) + i_{13}(t) = \sqrt{2}\sin(3\omega t + 60^\circ) \text{ A}, i_2(t) = i_{21}(t) + i_{23}(t) = 2\sqrt{2}\sin\omega t \text{ A}$$

$$P = P_1 + P_3 = 80 + 20 = 100 \text{ (W)}$$

11-5 题 11-5 图所示稳态电路中, $i_s(t) = 10 + 5\cos(2\omega_1 t + 30^\circ)$ A, $\omega_1 L = 50\Omega$, $\frac{1}{\omega_1 C} = 200\Omega$ 。求电压 $u_R(t)$ 和有效值 U_R 。

解 (1) 直流分量单独作用。电容开路, 电感短路, 电流 $i=0$, $5i=0$, 即流控压源短路, 电路如题 11-5 解图 (a) 所示。

$$U_{R0} = 10 \times 15 = 150 \text{ (V)}$$

(2) 2 次谐波分量单独作用。相量模型如题 11-5 解图 (b) 所示。LC 串联分支对二次谐波分量发生串联谐振, 相当于短路, 则

$$\dot{I}_{2m} = 5 \angle 30^\circ + \frac{5\dot{I}_{2m}}{15}$$

解之得

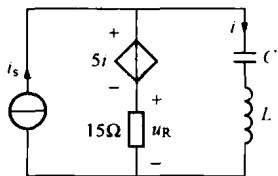
$$\dot{I}_{2m} = 7.5 \angle 30^\circ \text{ A}$$

$$\dot{U}_{R2m} = -5\dot{I}_{2m} = -37.5 \angle 30^\circ = 37.5 \angle -150^\circ \text{ (V)}, u_{R2}(t) = 37.5 \cos(2\omega_1 t - 150^\circ) \text{ V}$$

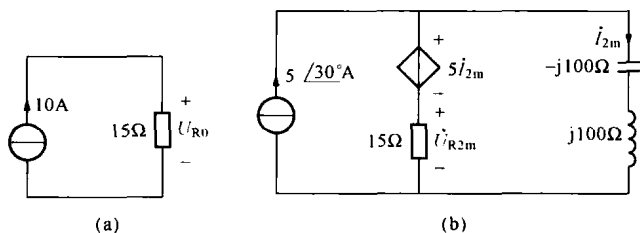
所以

$$u_R(t) = U_{R0} + u_{R2}(t) = 150 + 37.5 \cos(2\omega_1 t - 150^\circ) \text{ V}$$

$$U_R = \sqrt{U_{R0}^2 + U_{R2}^2} = \sqrt{150^2 + \frac{1}{2} \times (37.5)^2} = 152.33 \text{ (V)}$$



题 11-5 图



题 11-5 解图

11-6 见 [例 6-2]。

11-7 题 11-7 图所示稳态电路中, 已知 $u_s(t) = 18 + 20\sin\omega t \text{ V}$, $i_s(t) = 9\sin(3\omega t + 60^\circ) \text{ A}$, $\omega L_1 = 2\Omega$, $\omega L_2 = 3\Omega$, $\frac{1}{\omega C_1} = 18\Omega$, $R = 9\Omega$ 。求电流 $i_2(t)$ 。

解 (1) 电压源中直流分量单独作用。电路如题 11-7 解图 (a) 所示, 则有

$$I_{20} = \frac{18}{9} = 2 \text{ (A)}$$

(2) 电压源中基波分量单独作用。相量模型如题 11-7 解图 (b) 所示, 则有

$$Z' = (-j18) // j2 = j2.25 \text{ (}\Omega\text{)}$$

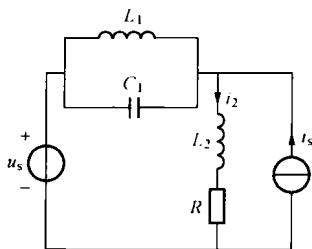
$$\dot{I}_{21m} = \frac{20 \angle 0^\circ}{9 + j3 + j2.25} = \frac{20 \angle 0^\circ}{9 + j5.25} = 1.92 \angle -30.3^\circ \text{ (A)}, i_{21}(t) = 1.92 \sin(\omega t - 30.3^\circ) \text{ A}$$

(3) 3 次谐波分量 [即电流源 $i_s(t)$] 单独作用。相量模型如题 11-7 解图 (c) 所示。电路发生并联谐振, 所以

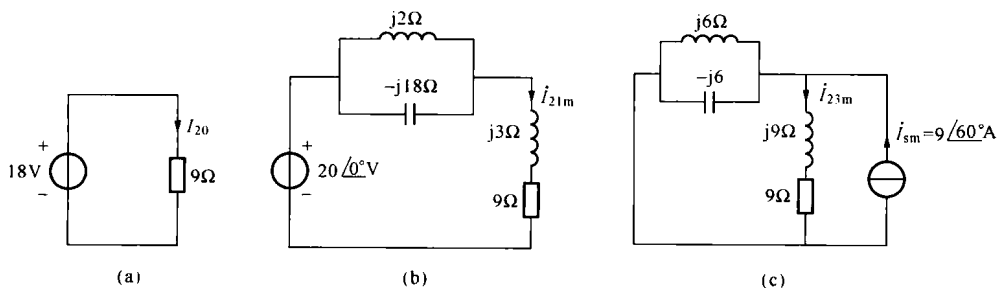
$$\dot{I}_{23m} = 9 \angle 60^\circ \text{ A}, i_{23}(t) = 9 \sin(3\omega t + 60^\circ) \text{ A}$$

因此

$$i_2(t) = I_{20} + i_{21}(t) + i_{23}(t) = 2 + 1.92 \sin(\omega t - 30.3^\circ) + 9 \sin(3\omega t + 60^\circ) \text{ A}$$

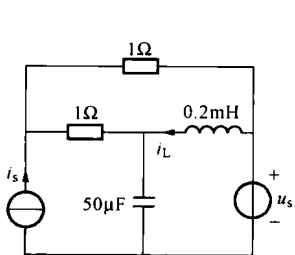


题 11-7 图

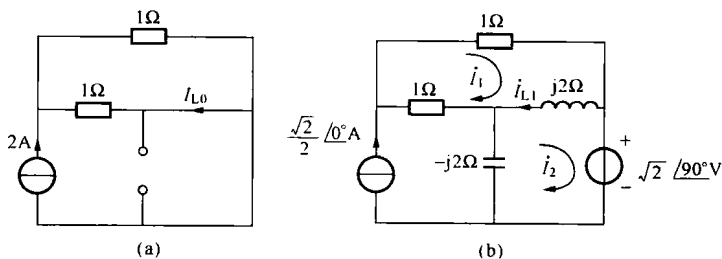


题 11-7 解图

11-8 题 11-8 图所示稳态电路中, $i_s(t) = 2 + \cos 10^4 t$ A, $u_s(t) = 2\cos(10^4 t + 90^\circ)$ V. 求电感电流 $i_L(t)$ 及两电源发出功率之和.



题 11-8 图



题 11-8 解图

解 (1) 电流源的直流分量单独作用。电路如题 11-8 解图 (a) 所示, 则有

$$I_{L0} = -\frac{1}{1+1} \times 2 = -1(\text{A}), P_0 = (1//1) \times 2^2 = 2(\text{W})$$

(2) 两个同频率的正弦电源共同作用。相量模型如题 11-8 解图 (b) 所示。网孔电流方程为

$$\begin{cases} (2+j2)\dot{I}_1 - j2\dot{I}_2 - 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ = 0 \\ -j2\dot{I}_1 + (j2-j2)\dot{I}_2 - (-j2) \times \frac{1}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ = -\sqrt{2} \angle 90^\circ \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} (2+j2)\dot{I}_1 - j2\dot{I}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ \\ -j2\dot{I}_1 = -2\sqrt{2}\angle 90^\circ \end{cases}$$

解之得

$$\dot{I}_1 = \sqrt{2}\angle 0^\circ \text{ A}, \dot{I}_2 = \sqrt{2} - j0.75\sqrt{2} \text{ A}$$

$$\dot{I}_{L1} = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = j0.75\sqrt{2} \text{ A}, i_{L1}(t) = 1.5\cos(10^4 t + 90^\circ) \text{ A}$$

$$P_1 = I_1^2 \times 1 + |\dot{I}_1 - \dot{I}_{s1}|^2 \times 1 = (\sqrt{2})^2 \times 1 + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \times 1 = 2.5 \text{ (W)}$$

故两电源发出的功率之和为

$$P = P_0 + P_1 = 2 + 2.5 = 4.5 \text{ (W)}$$

电感电流 $i_L(t)$ 为

$$i_L(t) = I_{L0} + i_{L1}(t) = -1 + 1.5\cos(10^4 t + 90^\circ) \text{ A}$$

11-9 见 [例 11-3]。

滤波

11-10 题 11-10 图所示电路为滤波电路，要求 $4\omega_1$ 的谐波电流全部传至负载，而基波电流无法到达负载。已知电容 $C=1\mu\text{F}$ 、 $\omega_1=1000\text{rad/s}$ 。试求电感 L_1 和 L_2 。

解 根据题意，该电路对 $4\omega_1$ 的谐波分量发生串联谐振，对基波分量发生并联谐振，则

$$4\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{C \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}}} = 4000 \quad (1)$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{CL_1}} = 1000 \quad (2)$$

因为 $C=1\mu\text{F}$ ，由式 (2) 得

$$L_1 = \frac{1}{\omega_1^2 C} = \frac{1}{1000^2 \times 10^{-6}} = 1 \text{ (H)}$$

由式 (1) 得

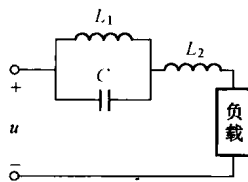
$$16\omega_1^2 = \frac{1}{C \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}}$$

即

$$16\omega_1^2 CL_1 L_2 = L_1 + L_2$$

将已知数据代入得

$$L_2 = \frac{L_1}{16\omega_1^2 CL_1 - 1} = \frac{1}{15} = 0.067 \text{ (H)}$$



题 11-10 图

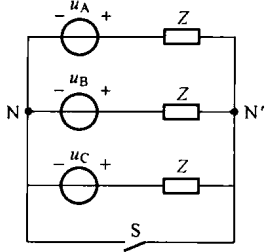
对称三相电路中的高次谐波

11-12 在题 11-12 图所示的对称三相电路中，电源 A 相电压 $u_A(t) = 100\sin\omega t + 40\sin 3\omega t \text{ V}$ ，负载的基波阻抗 $Z = R + j\omega L = 6 + j8 \Omega$ 。试求：(1) 开关 S 闭合时负载相电压、线电压、相电流及中性线电流的有效值；(2) 开关 S 打开时负载相电压、线电压、相电流及两中性点间电压的有效值。

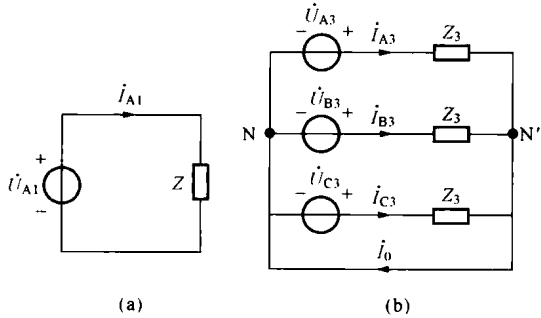
解 (1) S 闭合时。

1) 基波分量单独作用。单相等值电路如题 11-12 解图 (a) 所示, 则有

$$\dot{i}_{A1} = \frac{\dot{U}_{A1}}{Z} = \frac{\frac{100}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ}{6 + j8} = \frac{\frac{100}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ}{10 \angle 53.1^\circ} = \frac{10}{\sqrt{2}} \angle -53.1^\circ \text{ (A)}$$



题 11-12 图



题 11-12 解图

所以

$$i_{A1}(t) = 10 \sin(\omega t - 53.1^\circ) \text{ A}$$

2) 3 次谐波单独作用。相量模型如题 11-12 解图 (b) 所示。图中

$$\dot{U}_{A3} = \dot{U}_{B3} = \dot{U}_{C3} = \frac{40}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ \text{ (V)}, \dot{i}_{A3} = \dot{i}_{B3} = \dot{i}_{C3} = \frac{\dot{U}_{A3}}{Z_3} = \frac{\frac{40}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ}{6 + j24} \approx 1.14 \angle -75.96^\circ \text{ (A)}$$

$$\dot{i}_0 = 3\dot{i}_{A3} \approx 3.42 \angle -75.96^\circ \text{ (A)}$$

因此, 负载端相电压和线电压的有效值分别为

$$U_{ph} = \sqrt{\frac{1}{2} \times (100^2 + 40^2)} \approx 76.16 \text{ (V)}, U_l = \sqrt{3} \times \frac{100}{\sqrt{2}} \approx 122.5 \text{ (V)}$$

相电流和中线电流的有效值分别为

$$I_{ph} = \sqrt{\frac{10^2}{2} + 1.14^2} \approx 7.16 \text{ (A)}, I_0 = 3.42 \text{ A}$$

(2) S 打开时。

1) 基波分量单独作用时与 S 闭合时相同, 即

$$i_{A1}(t) = 10 \sin(\omega t - 53.1^\circ) \text{ A}$$

2) 3 次谐波单独作用。

$$\dot{I}_{A3} = \dot{I}_{B3} = \dot{I}_{C3} = 0$$

所以, S 打开时, 负载端相电压和线电压的有效值分别为

$$U_{ph} = U_{A1} = \frac{100}{\sqrt{2}} \approx 70.7 \text{ (V)}, U_l = \sqrt{3} \times \frac{100}{\sqrt{2}} \approx 122.5 \text{ (V)}$$

相电流的有效值为

$$I_{ph} = I_{A1} = \frac{10}{\sqrt{2}} \approx 7.07 \text{ (A)}$$

两中性点间电压的有效值为

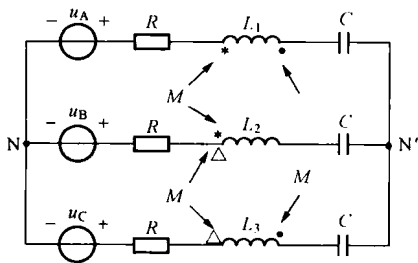
$$U_{N'N} = U_{A3} = \frac{40}{\sqrt{2}} \approx 28.28 \text{ (V)}$$

11-13 题 11-13 图所示电路中的电源为对称三相电源, A 相电压源的电压为

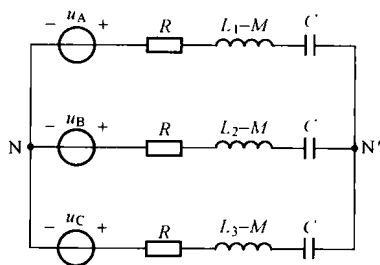
$$u_A(t) = 48\sqrt{2} \sin \omega t + 16\sqrt{2} \sin 3\omega t + 12\sqrt{2} \sin 5\omega t \text{ V}$$

且 $R=24\Omega$, $\omega L_1 = \omega L_2 = \omega L_3 = 2\Omega$, $\omega M = 1\Omega$, $\frac{1}{\omega C} = 25\Omega$ 。求线电流的有效值和三相电源提供的总功率。

解 去耦等效电路如题 11-13 解图所示。



题 11-13 图



题 11-13 解图

(1) 基波单独作用, $u_{A1}(t) = 48\sqrt{2} \sin \omega t \text{ V}$, $\dot{U}_{A1} = 48 \angle 0^\circ \text{ V}$ 。

$$\dot{I}_{A1} = \frac{48 \angle 0^\circ}{24 + j - j25} = \frac{48 \angle 0^\circ}{24 - j24} = \frac{48 \angle 0^\circ}{24\sqrt{2} \angle -45^\circ} = \sqrt{2} \angle 45^\circ \text{ (A)}$$

所以

$$i_{A1}(t) = 2 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ A}$$

(2) 3 次谐波单独作用, $u_{A3}(t) = 16\sqrt{2} \sin 3\omega t \text{ V}$, $\dot{U}_{A3} = 16 \angle 0^\circ \text{ V}$, 则 $\dot{I}_{A3} = 0$, 所以 $i_{A3}(t) = 0$ 。

(3) 5 次谐波单独作用, $u_{A5}(t) = 12\sqrt{2} \sin 5\omega t \text{ V}$, $\dot{U}_{A5} = 12 \angle 0^\circ \text{ V}$, 则

$$\dot{I}_{A5} = \frac{12 \angle 0^\circ}{24 + j5 - j5} = \frac{12 \angle 0^\circ}{24} = 0.5 \angle 0^\circ \text{ (A)}$$

所以

$$i_{A5}(t) = 0.5\sqrt{2} \sin 5\omega t \text{ A}$$

因此

$$i_A(t) = i_{A1}(t) + i_{A3}(t) + i_{A5}(t) = 2 \sin(\omega t + 45^\circ) + 0.5\sqrt{2} \sin 5\omega t \text{ A}$$

$$I_l = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 0.5^2} = 1.5 \text{ (A)}, P = 3RI_l^2 = 3 \times 24 \times 1.5^2 = 162 \text{ (W)}$$

11.5 自测题及参考答案

- 图 1 所示稳态电路中, $u_s(t) = 60 + 100\sqrt{2} \sin 1000t \text{ V}$ 。求电容电压的有效值 U_C 。
- 图 2 所示稳态电路中, $i_s(t) = 2 + 3\sqrt{2} \cos t + \sqrt{6} \sin 2t \text{ A}$ 。分别求功率表和电压表的示数。

3. 图 3 所示稳态电路中, $u_s(t) = 60 + 100\sqrt{2}\sin\omega t + 120\sqrt{2}\sin(3\omega t + 45^\circ)$ V, $\omega L_1 = 10\Omega$, $\frac{1}{\omega C_1} = 90\Omega$, $\omega L_2 = 30\Omega$, $\frac{1}{\omega C_2} = 30\Omega$, $R = 60\Omega$ 。求电流 $i(t)$ 。

4. 图 4 所示稳态电路中, $i_s(t) = 3 + 4.5\sin\omega t + 5\sqrt{2}\cos 2\omega t$ A, $R = 4\Omega$, $\frac{1}{\omega C_1} = 8\Omega$, $\frac{1}{\omega C_2} = 12\Omega$, $\omega L = 3\Omega$ 。求: (1) 电压 $u(t)$ 及其有效值; (2) 电阻 R 消耗的平均功率 P 。

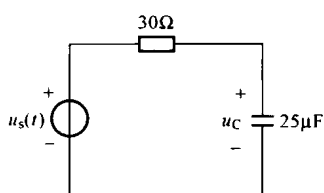


图 1

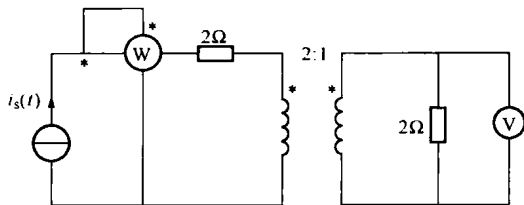


图 2

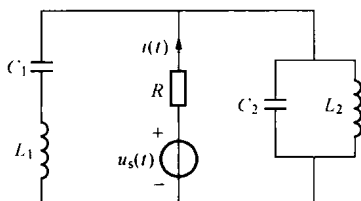


图 3

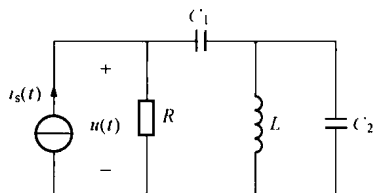


图 4

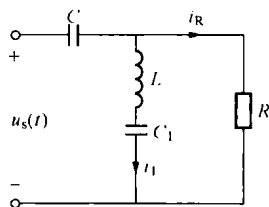


图 5

5. 图 5 所示稳态电路中, $u_s(t) = 50 + U_{1m}\cos\omega t + 30\sqrt{2}\cos 2\omega t$ V, $\omega = 10^3$ rad/s, $\omega L = 10\Omega$, $\frac{1}{\omega C_1} = 40\Omega$ 。且已知电流的有效值分别为 $I_1 = 5$ A, $I_R = 3$ A, 电路消耗的功率为 360 W。求 R 和 C 的值。

6. 图 6 所示稳态电路中, 已知 $\omega M = 2\Omega$, $\omega L_2 = 1.25\Omega$, $R = \frac{1}{\omega C} = \omega L_1 = 10\Omega$, $\omega L_3 = 10\Omega$, $u_s(t) = 10 + 20\sqrt{2}\sin\omega t + 10\sqrt{2}\sin 3\omega t$ V, $i_s(t) = 5\sqrt{2}\sin(\omega t - 90^\circ)$ A。求: (1) 电流 $i_1(t)$ 和电压 $u_C(t)$; (2) 电源 $u_s(t)$ 提供的平均功率。

7. 图 7 所示非正弦稳态对称三相电路中, A 相电源电压为 $u_{sA}(t) = \sqrt{2}U_1\sin\omega t + \sqrt{2}U_3\sin 3\omega t$ V, $\omega = 1$ rad/s, 功率表 PW 的示数为 18 W, 电压表 PV 的示数为 $9\sqrt{3}$ V (有效值), 电流表 PA1 和 PA2 的示数分别为 $\sqrt{3}$ A 和 $3\sqrt{2}$ A (有效值)。试确定 U_1 、 U_3 、 C 和 R_N 的值。

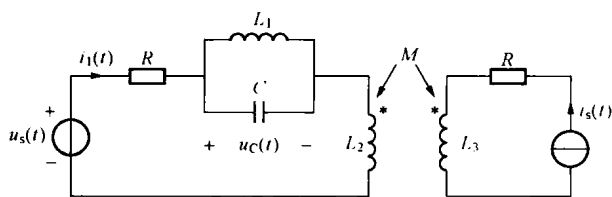


图 6

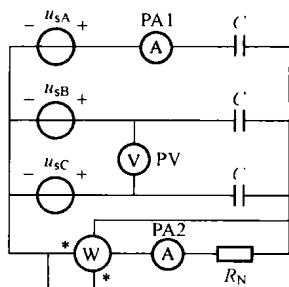


图 7

参考答案

1. 100V

2. 160W, 16V

3. $1 + \sqrt{2} \sin(\omega t + 53.1^\circ) + 2\sqrt{2} \sin(3\omega t + 45^\circ)$ A

4. $12 + 9\sqrt{2} \sin(\omega t - 45^\circ) + 20\sqrt{2} \cos 2\omega t$ V, 25V, 156.25W

5. 40Ω, 50μF

6. $1 + \sqrt{2} \sin 3\omega t$ A, $10\sqrt{2} \sin \omega t + 3.75\sqrt{2} \sin(3\omega t - 90^\circ)$ V, 20W

7. $U_1 = 9V$, $U_3 = 6V$, $\frac{1}{9}F$, 1Ω

第 12 章 简单非线性电路

12.1 本章知识结构图

第 12 章知识结构图如图 12-1 所示。

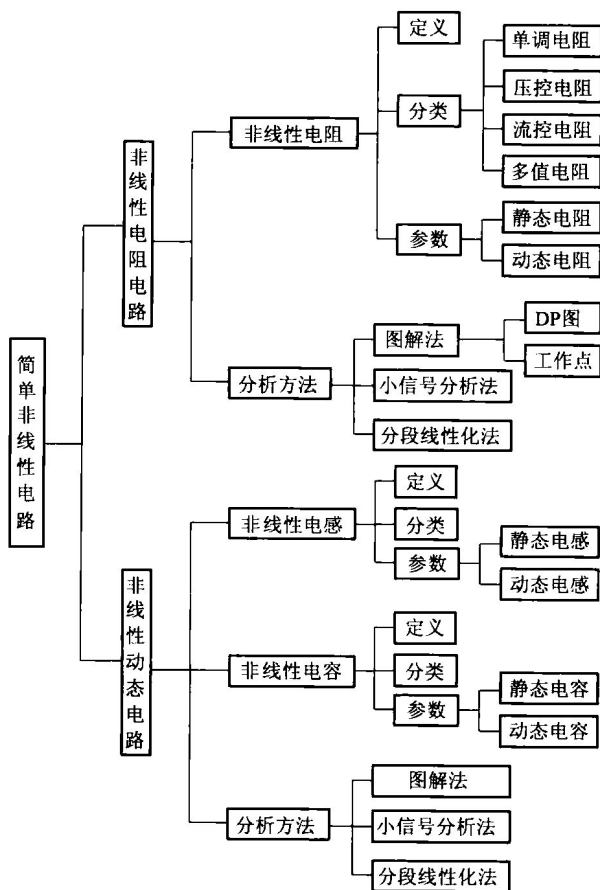


图 12-1 第 12 章知识结构图

12.2 知识点归纳与学习指导

本章介绍非线性电路的基本概念及其简单电路的分析计算方法，包括图解法、小信号分析法、分段线性化法等。

12.2.1 非线性元件

1. 非线性二端元件

非线性二端元件的汇总见表 12-1。

表 12-1 非线性二端元件

	非线性电阻	非线性电容	非线性电感
定义	不满足欧姆定律的电阻	不能用电压和电荷的线性齐次方程表征的电容	不能用电流和磁链的线性齐次方程表征的电感
分类	单调电阻、压控电阻、流控电阻、多值电阻	单调电容、压控电容、荷控电容、多值电容	单调电感、流控电感、链控电感、多值电感
静态参数	$R_s = \frac{u_Q}{i_Q}$	$C_s = \frac{q_Q}{u_Q}$	$L_s = \frac{\Psi_Q}{i_Q}$
动态参数	$R_d = \left. \frac{du}{di} \right _{(u_Q, i_Q)}$	$C_d = \left. \frac{dq}{du} \right _{(u_Q, q_Q)}$	$L_d = \left. \frac{d\Psi}{di} \right _{(i_Q, \Psi_Q)}$
备注	非线性元件的静态参数和动态参数一般都是相应电量的函数		

理想二极管是一种典型的多值电阻，其电路符号和伏安特性曲线分别如图 12-2 (a)、(b) 所示。理想二极管的 VAR 为

$$\begin{cases} u=0, i>0 & (\text{导通}) \\ i=0, u<0 & (\text{截止}) \end{cases}$$

对于图 12-3 所示的电路，当 $U_s > 0$ 时，理想二极管 VD 导通，相当于短路；当 $U_s < 0$ 时，理想二极管 VD 截止，相当于开路。

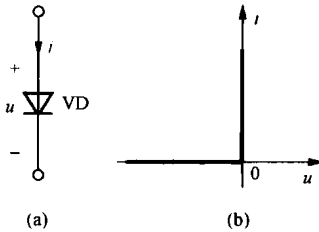


图 12-2 理想二极管

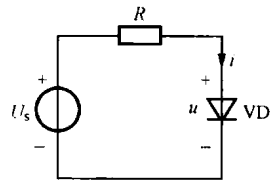


图 12-3 理想二极管电路

2. 运算放大器

第 5 章讨论了运算放大器的低频线性应用模型，这里讨论的是大信号低频应用非线性模型。有关运放的特点见主教材 5.2.6 的第 1 部分。运放的输出电压 u_o 与输入电压 u_d 之间的转移特性曲线如图 12-4 所示，其特性方程可表示为

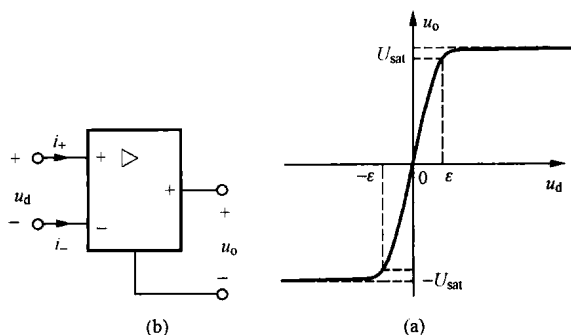
$$\begin{cases} i_+ = i_- = 0 \\ u_o = f(u_d) \end{cases}$$

在低频应用时，运算放大器相当于一个非线性电压控制电压源，是一个非线性电阻双口元件。

12.2.2 简单非线性电阻电路的分析

1. 非线性电阻电路的方程

非线性电阻电路的方程为非线性代数方程。对于压控型非线性电阻电路，可用节点法建

图 12-4 运放的符号及其 u_o-u_d 特性曲线

(a) 电路符号; (b) 转移特性

立其节点电压方程; 对于流控型非线性电阻电路, 可用回路 (网孔) 法建立其回路 (网孔) 电流方程。

2. 非线性电阻的串并联

表征电阻性二端网络端口伏安关系的特性曲线称为该二端网络的驱动点特性图, 简称 DP 图。与线性电阻一样, 非线性电阻二端网络可等效成一个非线性电阻。

(1) 对于两个非线性电阻串联的二端网络, 任一端口电流下的端口电压等于该电流下两个电阻电压之和。从图解的角度看, 这意味着把同一电流值下两条曲线上的电压相加。这样, 通过取一系列两个电阻共同允许的电流值, 可逐点求出其 DP 图。

(2) 对于两个非线性电阻并联, 同一电压下两条曲线上的电流相加, 通过取一系列两个电阻共同允许的电压值, 可逐点求出其 DP 图。

对于只含二端电阻和直流电源混联的二端网络, 只要重复应用电阻串联和并联的图解方法, 就可得到网络的 DP 图。二端网络的 DP 图可以看成是等效非线性电阻的 DP 图。这一方法称为曲线相加法。

【例 12-1】 画出图 12-5 (a) 电路的端口伏安特性曲线。(VD 为理想二极管)

解 方法 1: 电阻、理想二极管和电压源的特性曲线分别如图 12-5 (b) 中的曲线①、②和③所示。三个元件串联, 流过相同的电流。由于理想二极管的电流不大于零, 故它们共同允许的电流范围是电流 $i \leq 0$ 。取电阻和理想二极管特性曲线上对应的电压相加, 可得图 12-5 (c) 中的曲线④; 再将曲线④和电压源特性曲线上对应的电压相加即可求得电路的端口伏安特性曲线, 如图 12-5 (d) 所示。

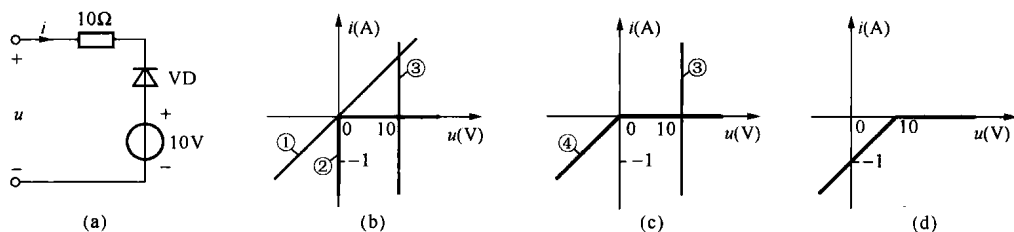


图 12-5 [例 12-1] 图

方法 2: 对于含理想二极管的简单非线性电路, 可通过判断理想二极管的工作状态进行求解。

当端口电压 $u < 10\text{V}$ 时, 理想二极管 VD 导通, 相当于短路。此时端口 VAR 为

$$u = 10i + 10$$

当 $u > 10\text{V}$ 时, 理想二极管 VD 截止, 相当于开路。此时端口 VAR 为

$$i = 0$$

综上可得图 12-5 (d) 所示的端口伏安特性曲线。

3. 非线性电阻电路的直流工作点

直流电阻电路的解称为该电路的直流工作点或者静态工作点, 简称工作点。确定直流工作点的过程称为直流分析。直流电阻电路会出现多个直流工作点。简单非线性电阻电路的工作点可由曲线相交法来确定。

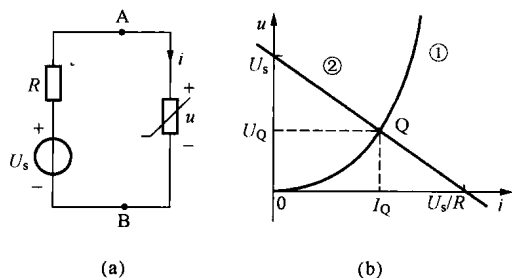


图 12-6 负载线法求工作点示例

例如, 对于图 12-6 (a) 所示结构的电阻电路, AB 左右两边两个二端网络在 $u-i$ 平面上的 DP 图分别如图 12-5 (b) 中的曲线①和曲线②所示, 两条曲线的交点 Q 便是所要求的工作点。

对于非线性电阻混联组成的电路, 可先应用非线性电阻的串并联化简方法将电路等效成图 12-6 (a) 所示结构的电路, 然后再用曲线相交法确定工作点。

对于单一非线性电阻电路, 一般先将非线性电阻以外的线性二端网络用戴维南等效电路代替, 求出非线性电阻的电压或电流, 然后再进一步求其他量。

(1) 当非线性电阻为理想二极管时, 可先确定理想二极管的工作状态。若处于导通状态, 则用短路线代替; 若处于截止状态, 则用开路线代替; 从而将非线性电路转化为线性电路进行分析。

(2) 当非线性电阻的特性方程为 $u = a + bi + ci^2$ 或 $i = a + bu + cu^2$ 时, 可用解析方法确定工作点。

(3) 当非线性电阻的特性曲线为分段线性化曲线时, 先用曲线相交法确定工作直线段, 然后写出该工作直线段的方程与戴维南等效电路方程联立求解。具体示例见主教材 [例 12-8]。

4. 非线性电阻电路的小信号分析法

小信号分析法是工程上分析非线性电路的一种极其重要的方法, 其使用前提是电路中的时变电源 (小信号电源) 幅值远远小于直流电源的幅值。小信号分析法的步骤如下:

- (1) 将小信号电源置零, 确定电路的直流工作点;
- (2) 求非线性电阻的小信号电阻或小信号电导;
- (3) 作出小信号等效电路并求扰动量。

小信号等效电路与原电路具有完全相同的电路结构, 其差别仅在于把原电路的直流电源置零, 非线性电阻用其直流工作点处的小信号电阻或小信号电导代替。

(4) 将直流工作点与扰动量相加即可得所求电压或电流。

【例 12-2】 图 12-7 (a) 所示电路中, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 1\Omega$, $U_s = 4\text{V}$, $u_s(t) = 0.01\cos t \text{ V}$, 非线性电阻 R_3 的特性方程为 $u_3 = 2i_3^2$ 。试用小信号分析法求电压 $u_0(t)$ 。

解 (1) 求直流工作点。将小信号电压源 $u_s(t)$ 置零, 根据理想运放的虚短特性可知, 电阻 R_2 中电流为零, 可开路处理, 得图 12-7 (b) 电路。利用理想运放的虚短、虚断特性分别有

$$I_1 = \frac{U_s}{R_1} = \frac{4}{2} = 2(\text{A}), I_3 = I_1 = 2\text{A}, U_3 = 2I_3^2 = 2 \times 2^2 = 8(\text{V})$$

(2) 确定小信号电阻。

$$R_d = \left. \frac{du}{di} \right|_Q = 4I_3 \Big|_{I_3=2} = 8(\Omega)$$

(3) 求扰动量。将直流电压源 U_s 置零, 非线性电阻用小信号电阻代替。根据理想运放的虚短特性可知, 电阻 R_1 中电流为零, 可开路处理, 得图 12-7 (c) 所示小信号等效电路。利用理想运放的虚短、虚断特性分别有

$$\Delta i_2 = \frac{u_s(t)}{R_2} = \frac{0.01 \cos t}{1} = 0.01 \cos t(\text{A}), \Delta i_3 = \Delta i_2 = 0.01 \cos t(\text{A})$$

$$\Delta u_3 = R_d \Delta i_3 = 8 \times 0.01 \cos t = 0.08 \cos t(\text{V})$$

(4) 求电压 $u_o(t)$ 。

$$u_o(t) = -u_3 = -U_3 - \Delta u_3 = -8 - 0.08 \cos t \text{ V}$$

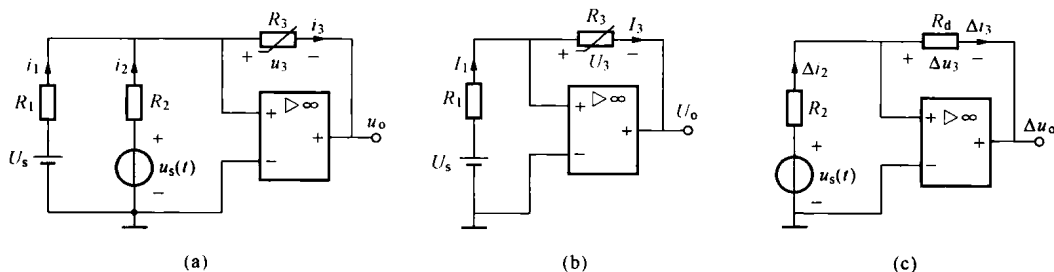


图 12-7 [例 12-2] 图

5. 分段线性化法

分段线性化法是目前分析非线性电路的一种最一般的解析法, 这种方法是先把电路中的每一个非线性元件的特性曲线用分段线性化特性曲线逼近, 然后再把非线性电路转化成一系列的线性电路进行分析。需要去除虚解。

采用分段线性化表示电阻的伏安特性曲线后, 每段折线都可用戴维南等效电路或诺顿等效电路替代, 如图 12-8 (a)、(b) 所示。

对于运算放大器, 其 $u_o \sim u_d$ 之间的转移特性曲线常用图 12-9 (a) 或 (b) 中的三段分段线性化特性曲线逼近。第①段称为负饱和区, 第②段称为线性区, 第③段称为正饱和区。

对于图 12-9 (a) 所示的特性曲线, 运放工作在负饱和区时, 可用如图 12-10 (a) 所示的等效电路替代; 工作在线性区时, 可用如图 12-10 (b) 所示的等效电路替代; 工作在正饱和区时, 可用如图 12-10 (c) 所示的等效电路替代。

对于图 12-9 (b) 所示的特性曲线, 运放工作在正、负饱和区的等效电路与图 12-10 (a)、(c) 相同。当运放工作在线性区时, 开环放大倍数为无穷大, 为理想运放。

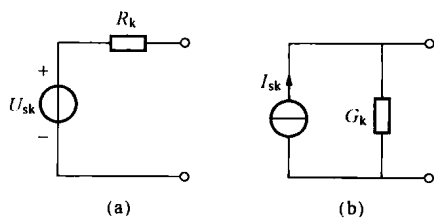


图 12-8 与第 k 段折线对应的等效电路

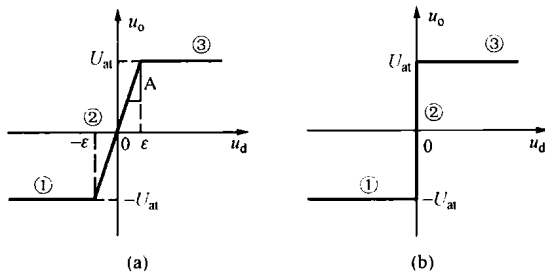


图 12-9 运放的两常用分段线性化特性曲线
(a) 有限增益模型; (b) 理想模型

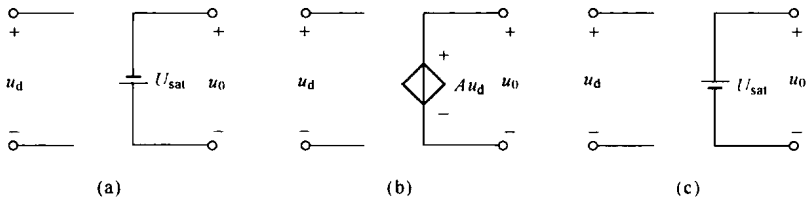


图 12-10 运放的有限增益分段线性化模型
(a) 负饱和区; (b) 线性区; (c) 正饱和区

12.2.3 简单非线性动态电路

非线性动态电路的方程为非线性微分方程。与线性动态电路类似，非线性动态电路的方程分为输入—输出方程和状态方程两类。

(1) 分析分段线性化一阶电路的一般步骤为：

- 1) 由所给定的初始状态在 DP 图上确定初始点；
- 2) 根据 DP 图和储能元件的 VAR 确定动态路径；
- 3) 画出动态路径各折线段所对应的等效电路，并应用一阶线性电路的分析方法进行求解。

(2) 非线性动态电路的小信号分析与非线性电阻电路的小信号分析具有相同的原理，其分析步骤如下：

- 1) 令小信号电源置零，电容开路，电感短路，求电路的平衡点（直流工作点）。
- 2) 求平衡点 Q 处的小信号动态参数。其计算式为

$$R_{dQ} = \left. \frac{du}{di} \right|_Q, L_{dQ} = \left. \frac{d\Psi}{di} \right|_Q, C_{dQ} = \left. \frac{dq}{du} \right|_Q$$

3) 作出小信号等效电路并求扰动量。小信号等效电路与原电路的结构完全相同，把原电路中的直流电源置零，非线性元件用其平衡点处的小信号动态参数代替就可得到相应的小信号等效电路。

- 4) 求所需的电压、电流。将平衡点的值与扰动量相加即为所求。

12.3 重点、难点与考点

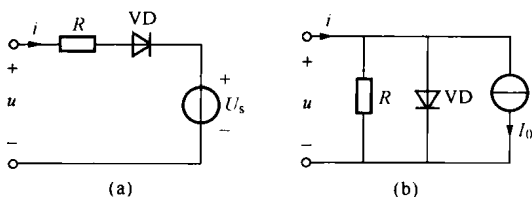
重点与难点

本章的重点是单一非线性电阻电路的分析、求非线性电阻混联二端网络的 DP 图及小信

$$\begin{cases} (G_1 + G_2)u_{n1} + 5(u_{n1} - u_{n2})^{\frac{1}{2}} - G_2 u_{n3} = 0 \\ -5(u_{n1} - u_{n2})^{\frac{1}{2}} + 10(u_{n2} - u_{n3})^{\frac{1}{2}} + 15u_{n2}^{\frac{2}{3}} = 0 \\ -G_2 u_{n1} + G_2 u_{n3} - 10(u_{n2} - u_{n3})^{\frac{1}{2}} = i_s \end{cases}$$

非线性二端网络的伏安特性曲线 (DP 图)

12-8 电路如题 12-8 图所示, VD 为理想二极管。(1) 求该电路的伏安特性曲线。(2) 如果将理想二极管反接, 则电路的伏安特性曲线如何变化?



题 12-8 图

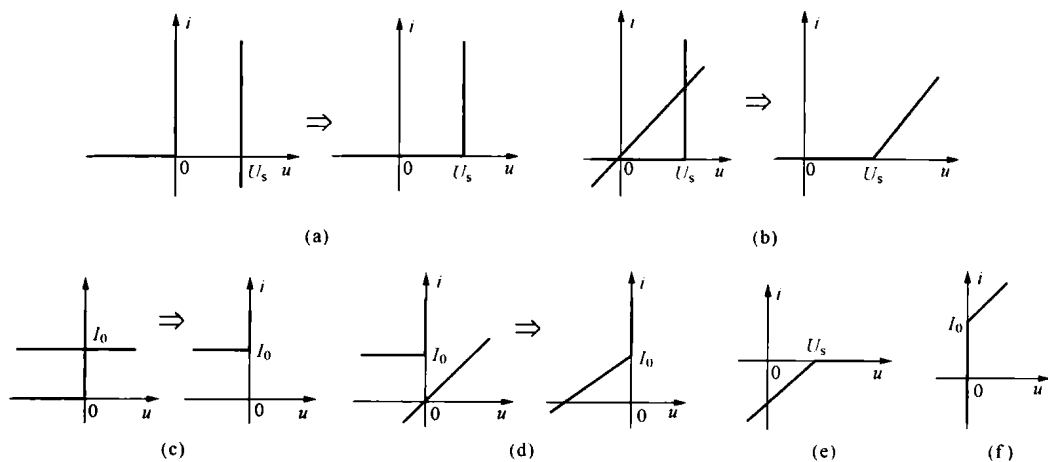
解 (1) (a) 理想二极管 VD 和电压源串联, 由图可知二者共同允许的电流范围为 $i \geq 0$, 取对应的电压值相加, 则可得二者串联的伏安特性曲线如题 12-8 解图 (a) 所示。电阻的特性曲线如图, 共同允许的电流范围为 $i \geq 0$, 取对应的电压值相加, 得如题 12-8 解图 (b) 所示的伏安特性曲线。

或者由题 12-8 图 (a) 可知, $u < U_s$ 时, 理想二极管 VD 截止, 相当于开路, 所以, $i = 0$; $u \geq U_s$ 时, 理想二极管 VD 导通, 相当于短路, 所以, $u = Ri + U_s$ 。相应的伏安特性曲线如题 12-8 解图 (b) 所示。

(b) 理想二极管 VD 和电流源并联, 由图可知二者共同允许的电压范围为 $u \leq 0$, 取对应的电流值相加, 则可得二者并联的伏安特性曲线如题 12-8 解图 (c) 所示。电阻的特性曲线如图, 共同允许的电压范围为 $u \leq 0$, 取对应的电流值相加, 得如题 12-8 解图 (d) 所示的伏安特性曲线。

或者由题 12-8 图 (b) 可知, $u < 0$ 时, 理想二极管 VD 截止, 相当于开路, 所以, $i = \frac{1}{R}u + I_0$; $u = 0$ 时, 理想二极管 VD 导通, 相当于短路, 所以, $u = 0, i \geq I_0$ 。相应的伏安特性曲线如题 12-8 解图 (d) 所示。

(2) [提示] 理想二极管反接后, 可类似求解。伏安特性曲线分别如题 12-8 解图 (e)、(f) 所示。



题 12-8 解图

直流工作点

12-9 题12-9图所示电路中,二极管为理想二极管。试分别求 $I_s = 6\text{mA}$ 和 $I_s = -6\text{mA}$ 两种情况下二极管中的电流 I_d 。

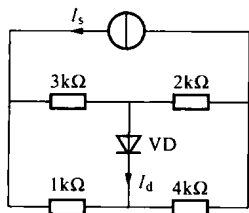
解 将二极管抽出,其他部分用其戴维南等效电路代替,电路如题12-9解图(a)所示。

(1) 求 U_{oc} 。电路如题12-9解图(b)所示,则有

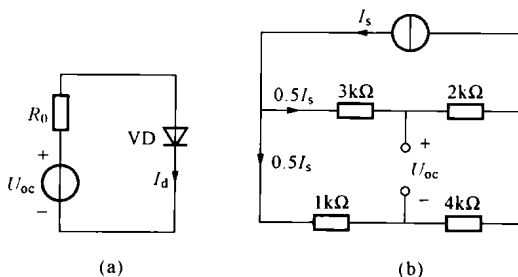
$$U_{oc} = -3000 \times 0.5I_s + 1000 \times 0.5I_s = -1000I_s$$

(2) 求 R_0 。

$$R_0 = \frac{(3+1) \times (4+2)}{3+1+4+2} = \frac{4 \times 6}{10} = 2.4 \text{ (k}\Omega\text{)}$$



题12-9图

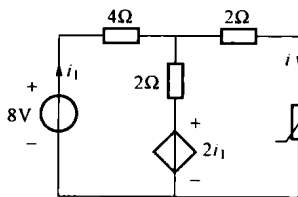


题12-9解图

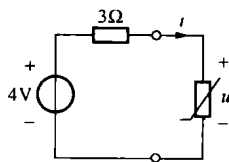
(3) 求 I_d 。在题12-9解图(a)中,当 $I_s = 6\text{mA}$ 时, $U_{oc} = -1000I_s = -6\text{V}$, 二极管 VD 截止, 所以 $I_d = 0$; 当 $I_s = -6\text{mA}$ 时, $U_{oc} = -1000I_s = 6\text{V}$, 所以二极管 VD 导通, 相当于短路, 则

$$I_d = \frac{U_{oc}}{R_0} = \frac{6}{2.4 \times 10^3} = 2.5 \text{ (mA)}$$

12-10 题12-10图所示电路中,已知非线性电阻的特性方程为 $u = i^2 (i > 0)$, 求电压 u 。



题12-10图



题12-10解图

[提示] 将非线性电阻以外的线性二端网络用其戴维南等效电路代替,如题12-10解图所示。

$$3i + u = 4, u = i^2$$

消去电压得

$$i^2 + 3i - 4 = 0$$

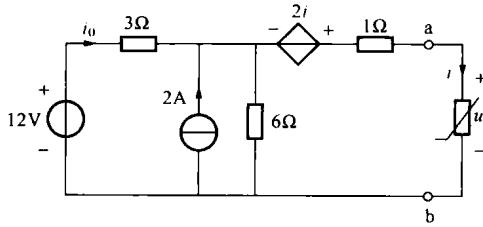
解得

$$i = -4\text{A (舍去)}, i = 1\text{A}$$

所以

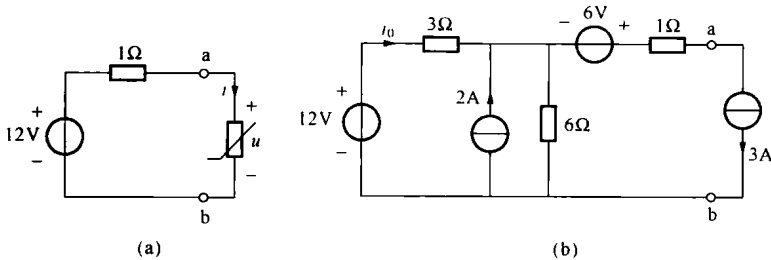
$$u = i^2 = 1\text{V}$$

12-11 题 12-11 图所示电路中, 非线性电阻的 VAR 为 $u = i^2 (i > 0)$, 式中电压和电流的单位分别为 V 和 A。求: (1) a、b 端的戴维南等效电路; (2) 电压 u 和电流 i ; (3) 电流 i_0 。



题 12-11 图

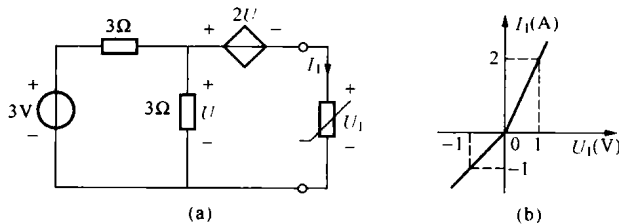
[提示] a、b 端的戴维南等效电路如题 12-11 解图 (a) 所示。由该等效电路可求得 $i = 3\text{A}$, $u = i^2 = 9\text{V}$ 。用电流为 3A 的电流源代替非线性电阻, 进而求电流 i_0 。电路如题 12-11 解图 (b) 所示。 $i_0 = 2\text{A}$ 。



题 12-11 解图

注: 如果非线性电阻没有 $i > 0$ 的限制, 电路的解将不唯一。解不唯一时, 不能应用替代定理, 只能直接用两类约束求解 i_0 。参见本章习题 12-13。

12-12 求题 12-12 图 (a) 所示电路中非线性电阻消耗的功率。图中非线性电阻的伏安特性曲线如题 12-12 图 (b) 所示。

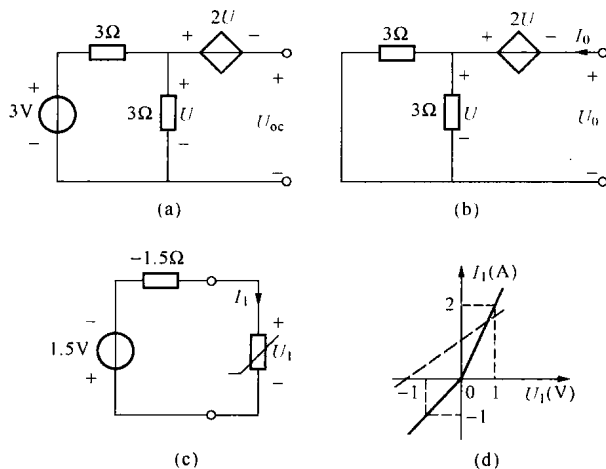


题 12-12 图

解 (1) 求非线性电阻抽出后二端网络的戴维南等效电路

1) 求开路电压 U_{oc} 。电路如题 12-12 解图 (a) 所示, 则

$$U = \frac{3}{3+3} \times 3 = 1.5 \text{ (V)}, U_{oc} = -2U + U = -U = -1.5 \text{ (V)}$$



题 12-12 解图

2) 求 R_{eq} 。电路如题 12-12 解图 (b) 所示, 则

$$I_0 = \frac{U}{3} + \frac{U}{3} = \frac{2}{3}U, U_0 = -2U + U = -U$$

$$R_{eq} = \frac{U_0}{I_0} = \frac{-U}{\frac{2}{3}U} = -1.5 \text{ (}\Omega\text{)}$$

(2) 求非线性电阻消耗的功率 P 。电路如题 12-12 解图 (c) 所示。

由图解法 [见图 12-12 解图 (d)] 可知, 非线性电阻工作在第 1 象限。则

$$\begin{cases} U_1 = 1.5I_1 - 1.5 \\ U_1 = 0.5I_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 1.5 \text{ A} \\ U_1 = 0.75 \text{ V} \end{cases}$$

所以, 非线性电阻消耗的功率为

$$P = U_1 \times I_1 = 0.75 \times 1.5 = 1.125 \text{ (W)}$$

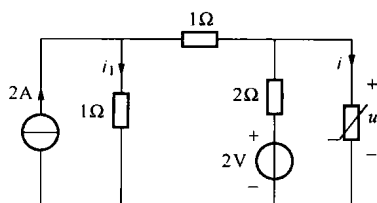
12-13 电路如题 12-13 图所示, 已知非线性电阻元件的伏安关系为 $u = i^2$ 。试求 u 、 i 和 i_1 。

[提示] (1) 将非线性电阻抽出其余部分用其戴维南等效电路 [见图 12-13 解图 (a)] 代替求非线性电阻的 u 和 i 。

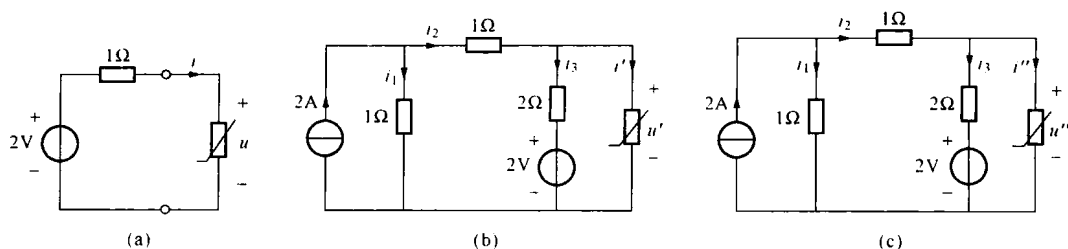
由题 12-13 解图 (a) 得 $i^2 + i - 2 = 0$, 其解为 $i' = -2 \text{ A}$ 和 $i'' = 1 \text{ A}$, 则 $u' = (i')^2|_{i'=-2\text{A}} = 4 \text{ V}$ 、 $u'' = (i'')^2|_{i''=1\text{A}} = 1 \text{ V}$ (多解)。

(2) 由于解不唯一, 不能应用替代定理, 只能直接用两类约束求解电流 i_1 。

1) 当 $u' = 4 \text{ V}$ 、 $i' = -2 \text{ A}$ 时, 电路如题 12-13 解图 (b) 所示, 则



题 12-13 图



题 12-13 解图

$$i_3 = \frac{u' - 2}{2} = \frac{4 - 2}{2} = 1(\text{A}), \quad i_2 = i_3 + i' = 1 - 2 = -1(\text{A})$$

$$i_1 = 2 - i_2 = 2 - (-1) = 3(\text{A})$$

2) 当 $u'' = 1\text{V}$ 、 $i'' = 1\text{A}$ 时, 电路如题 12-13 解图 (c) 所示。则

$$i_3 = \frac{u'' - 2}{2} = \frac{1 - 2}{2} = -0.5(\text{A}), \quad i_2 = i_3 + i' = -0.5 + 1 = 0.5(\text{A})$$

$$i_1 = 2 - i_2 = 2 - 0.5 = 1.5(\text{A})$$

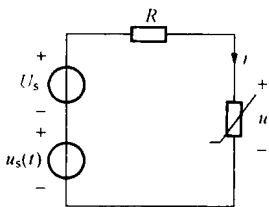
非线性电阻电路的小信号分析法

12-14 题 12-14 图所示电路中, $U_s = 20\text{V}$, $u_s(t) = 0.9\sin t \text{ V}$, $R = 1\Omega$, 非线性电阻的伏安关系为 $u = i^2 (i > 0)\text{V}$ 。求电路中的电流 $i(t)$ 。

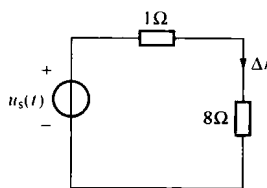
解 (1) 求电路的直流工作点。令 $u_s(t) = 0$, 由 KVL 得

$$i^2 + i - 20 = 0$$

解之得, $i = 4\text{A}$, 所以 $I_Q = 4\text{A}$ 。



题 12-14 图



题 12-14 解图

(2) 求动态电阻 R_{dQ} 。

$$R_{dQ} = \left. \frac{du}{di} \right|_Q = 2i \Big|_Q = 2 \times 4 = 8(\Omega)$$

(3) 求 Δi 。小信号等效电路如题 12-14 解图所示。

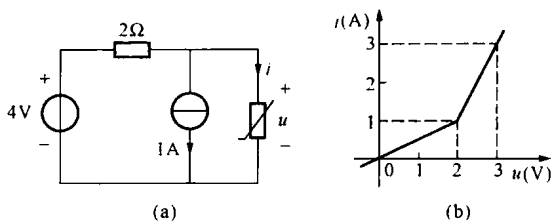
$$\Delta i = \frac{u_s}{1+8} = 0.1\sin t \text{ A}$$

(4) 求电流 $i(t)$ 。

$$i(t) = I_Q + \Delta i = 4 + 0.1\sin t \text{ A}$$

非线性电阻电路的分段线性化法

12-15 在题 12-15 图 (a) 所示的电路中, 非线性电阻的分段线性化特性曲线如题 12-15 图 (b) 所示, 用分段线性化法求非线性电阻的电流 i 。



题 12-15 图

解 由题 12-15 图 (b) 可以看出, i 轴可分为两个区: I 区 $i \leq 1A$, II 区 $i > 1A$ 。非线性电阻在各区的特性方程为

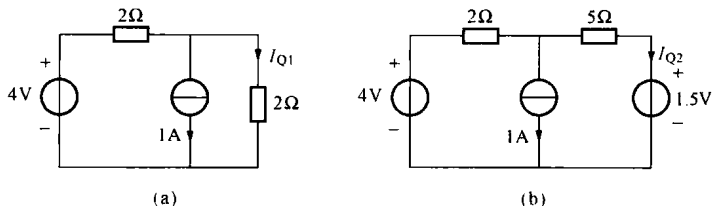
I 区: $u = 2i$

II 区: $u = 1.5 + 0.5i$

非线性电阻工作在两个区的等效电路分别如题 12-15 解图 (a)、(b) 所示。求解这两个电路分别可得

$$I_{Q1} = 0.5A, I_{Q2} = 0.2A$$

显然, $I_{Q1} = 0.5A$ 落在 I 区, 所以, 它是电路的真实解; 而 $I_{Q2} = 0.2A$ 并不落在 II 区, 故其不是电路的真实解。因此, 所求非线性电阻电流 $i = 0.5A$ 。



题 12-15 解图

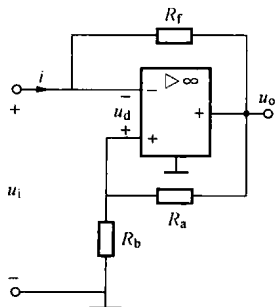
12-16 求题 12-16 图所示网络的 DP 图 (运放采用理想模型)。

解 (1) 运放工作在线性区时, $u_d = 0$, 则

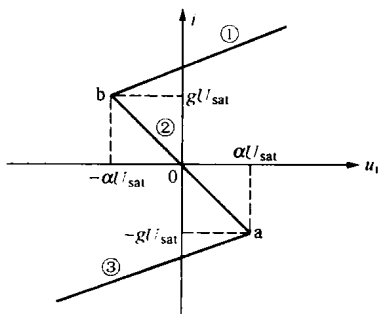
$$u_i = \frac{R_b}{R_a + R_b} u_o \triangleq \alpha u_o$$

式中, $\alpha = \frac{R_b}{R_a + R_b}$ 。根据 KVL 得

$$u_i = R_f i + u_o$$



题 12-16 图



题 12-16 解图

将 $u_o = \frac{1}{\alpha} u_i$ 代入上式可得

$$i = -\frac{R_a}{R_b R_f} u_i \triangleq R_2 u_i$$

式中, $R_2 = -\frac{R_a}{R_b R_f}$ 为负电阻。在线性区, $|u_o| < U_{\text{sat}}$, 由 $u_i = \alpha u_o$ 可知, 上式的使用范围是 $|u_i| < \alpha U_{\text{sat}}$ 。因此, 上式可用题 12-16 解图中的直线段②来表示, 图中 $g = \frac{R_a}{(R_a + R_b) R_f}$ 。该线段的斜率是负的, 即运放工作在线性区时输入电阻为负。

(2) 在正饱和区时, $u_o = U_{\text{sat}}$, 则

$$u_i = R_f i + u_o = R_f i + U_{\text{sat}}$$

$$i = \frac{1}{R_f} (u_i - U_{\text{sat}})$$

由于 $u_d = \alpha u_o - u_i = \alpha U_{\text{sat}} - u_i$, 且 $u_d > 0$, 故知上式的使用范围是 $u_i < \alpha U_{\text{sat}}$ 。因此, 该式可用题 12-16 解图中的直线段③来表示。该线段的斜率为正。

(3) 在负饱和区时, $u_o = -U_{\text{sat}}$, 则

$$u_i = R_f i + u_o = R_f i - U_{\text{sat}}$$

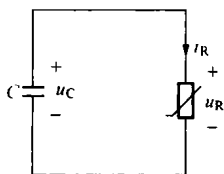
$$i = \frac{1}{R_f} (u_i + U_{\text{sat}})$$

由于 $u_d = \alpha u_o - u_i = -\alpha U_{\text{sat}} - u_i$, 并且 $u_d < 0$, 故知上式的使用范围是 $u_i > -\alpha U_{\text{sat}}$ 。对应的 DP 图如题 12-16 解图所示中的直线段①。所求二端网络的完整 DP 图如题 12-16 解图所示。

非线性动态电路

12-17 题 12-17 图所示动态电路中, 非线性压控电阻的伏安关系为 $i_R = a u_R + b u_R^2$ 。

(1) 列写以 u_C 为输出的微分方程; (2) 若电容的起始电压 $u_C(0^-) = U_0$, 求 $t \geq 0$ 时的电压 $u_C(t)$ 。



题 12-17 图

解 (1) 由电容的 VAR 和 KCL 得

$$i_R = -C \frac{du_C}{dt}$$

将非线性压控电阻的伏安关系 $i_R = a u_R + b u_R^2$ 和 KVL 方程 $u_R = u_C$ 代入, 得

$$C \frac{du_C}{dt} + a u_C + b u_C^2 = 0$$

上式即为所求的电路微分方程。

(2) 将上述电路微分方程两边除以 C 得

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{a}{C} u_C - \frac{b}{C} u_C^2$$

上述形式的状态方程称为伯努利方程。为求解此方程, 两边同除以 u_C^2 , 并整理得

$$\frac{1}{u_C^2} \frac{du_C}{dt} + \frac{a}{C} \frac{1}{u_C} = -\frac{b}{C}$$

或者写成

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u_C}\right) + \frac{a}{C} \frac{1}{u_C} = -\frac{b}{C}$$

令 $x = \frac{1}{u_C}$, 则上述方程变为

$$-\frac{dx}{dt} + \frac{a}{C}x = -\frac{b}{C}$$

该一阶线性微分方程的通解形式为

$$x = \frac{1}{u_C} = -\frac{b}{a} + Ke^{\frac{a}{C}t}$$

由已知条件 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$ 得

$$\frac{1}{U_0} = -\frac{b}{a} + K$$

所以

$$K = \frac{1}{U_0} + \frac{b}{a} = \frac{a + bU_0}{aU_0}$$

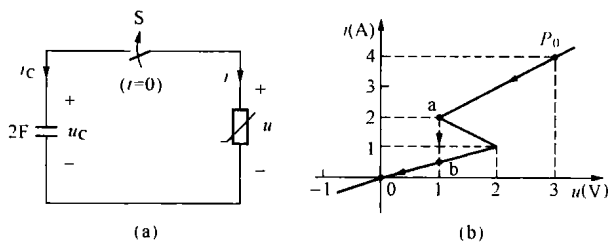
因此

$$\frac{1}{u_C} = -\frac{b}{a} + \frac{a + bU_0}{aU_0} e^{\frac{a}{C}t}$$

两边取倒数得

$$u_C(t) = \left(-\frac{b}{a} + \frac{a + bU_0}{aU_0} e^{\frac{a}{C}t} \right)^{-1}$$

12-18 电路如题 12-18 图 (a) 所示, $u_C(0_-) = 3\text{V}$, 非线性电阻的电压、电流关系如题 12-18 图 (b) 所示。求 $t > 0$ 时的 $u(t)$ 和 $i(t)$ 。



题 12-18 图

解 (1) 确定动态路径。由 $i_C = C \frac{du_C}{dt}$, $u_C = u$, $i_C = -i$ 得

$$i = -C \frac{du}{dt}$$

当 $i > 0$ 时, $\frac{du}{dt} < 0$, u 下降; $i < 0$ 时, u 增加。动态路径如题 12-18 图 (b) 所示, 原点为稳定平衡点。

(2) 分段计算暂态响应。

1) $P_0 \rightarrow a$ 段。该段的戴维南等效电路参数为 $U_{oc} = -1\text{V}$, $R_{eq} = R' = 1\Omega$ 。

$$u(0_+) = u_C(0_-) = 3\text{V}, u(\infty) = -1\text{V}, \tau = R'C = 1 \times 2 = 2 \text{ (s)}$$

其中 R' 是 P_0a 段的动态电阻。则有

$$\begin{cases} u(t) = -1 + 4e^{-\frac{t}{2}} \text{ V} \\ i(t) = -C \frac{du}{dt} = 4e^{-\frac{t}{2}} \text{ A} \end{cases} \quad (0 \leq t < t_a)$$

由 $u(t_a) = -1 + 4e^{-\frac{t_a}{2}} = 1 \text{ (V)}$, 得

$$t_a = 2 \ln 2 \approx 1.4 \text{ (s)}$$

2) $b \rightarrow 0$ 段。该段等效电路为一电阻 $R'' = 2\Omega$ 。

$$u(t_{a+}) = 1 \text{ V}, u(\infty) = 0, \tau = R''C = 2 \times 2 = 4 \text{ (s)}$$

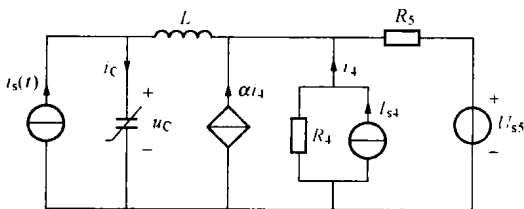
其中 R'' 是 $b0$ 段的动态电阻。则有

$$\begin{cases} u(t) = e^{-\frac{t-t_a}{4}} \text{ V} \\ i(t) = -C \frac{du}{dt} = 0.5e^{-\frac{t-t_a}{4}} \text{ A} \end{cases} \quad (t > t_a)$$

注: (1) 用分段线性化分析简单(一阶)非线性动态电路的步骤: ① 确定动态路径; ② 沿着动态路径, 对应每一段计算一个线性动态电路。

(2) 动态点会出现跳跃现象, 如本题从 a 到 b 的过程。跳跃是指电容电流而不是电容电压。

12-19 题 12-19 图所示稳态电路中, $i_s(t) = 2\sin(10^4 t + 30^\circ) \text{ mA}$, $I_{s4} = 2 \text{ A}$, $U_{s5} = 57 \text{ V}$, $R_4 = 6\Omega$, $R_5 = 3\Omega$, $\alpha = 3$, $L = 0.1 \text{ mH}$, 非线性电容的库伏特性为 $q = 13.5u^{\frac{1}{3}} \times 10^{-4}$ 。试求非线性电容上的电压 u_C 及其电流 i_C 。



题 12-19 图

解 (1) 求电路中电感右侧的戴维南等效电路。

1) 求 U_{oc} 。电路如题 12-19 解图 (a) 所示, 则有

$$i_4 = -\frac{U_{oc}}{6} + 2 = 2 - \frac{U_{oc}}{6}$$

$$U_{oc} = (3+1)i_4 \times 3 + 57 = 12 \times \left(2 - \frac{U_{oc}}{6}\right) + 57$$

解之得

$$U_{oc} = 27 \text{ V}$$

2) 求 R_0 。电路如题 12-19 解图 (b) 所示, 则有

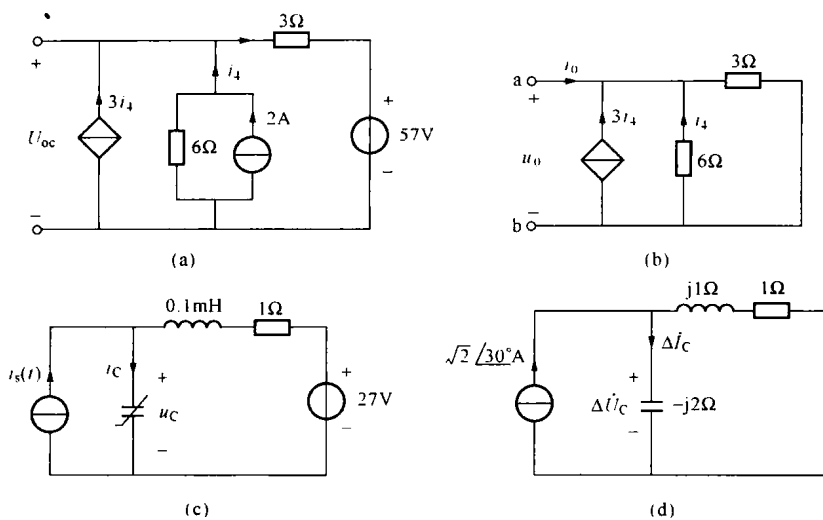
$$u_0 = -6i_1, i_0 = -3i_4 - i_4 - \frac{6i_4}{3} = -6i_4$$

所以

$$R_0 = \frac{u_0}{i_0} = 1\Omega$$

(2) 求非线性电容上的电压 u_C 及其电流 i_C 。将原电路中电感右侧部分用其戴维南等效

电路代替, 如题 12-19 解图 (c) 所示。



题 12-19 解图

1) 求工作点 U_{CQ} 。

$$U_{CQ} = 27\text{V}, I_{CQ} = 0$$

2) 求非线性电容在工作点处的动态电容。

$$C_d = \left. \frac{dq}{du_c} \right|_{u_c=U_{CQ}} = 13.5 \times \frac{1}{3} u_c^{-\frac{2}{3}} \times 10^{-4} \Big|_{u_c=27} = 50 \text{ (}\mu\text{F)}$$

3) 小信号等效电路的相量模型如题 12-19 解图 (d) 所示。

$$\Delta \dot{I}_c = \frac{1+j}{1+j-j2} \times \sqrt{2}/30^\circ = \frac{\sqrt{2}/45^\circ}{\sqrt{2}/-45^\circ} \times \sqrt{2}/30^\circ = \sqrt{2}/120^\circ \text{ (mA)}$$

$$\Delta \dot{U}_c = -j2\Delta \dot{I}_c = -j2 \times \sqrt{2}/120^\circ = -j2\sqrt{2}/120^\circ = 2\sqrt{2}/30^\circ \text{ (mV)}$$

则

$$\Delta i_c(t) = 2\sin(10^4 t + 120^\circ) \text{ mA}, \Delta u_c(t) = 4\sin(10^4 t + 30^\circ) \text{ mV}$$

4) 所求的非线性电容上的电压 u_c 及电流 i_c 分别为

$$i_c(t) = I_{CQ} + \Delta i_c(t) = 2\sin(10^4 t + 120^\circ) \text{ mA}$$

$$u_c(t) = U_{CQ} + \Delta u_c(t) = 27 + 4 \times 10^{-3} \sin(10^4 t + 30^\circ) \text{ V}$$

12.5 自测题及参考答案

1. 求非线性电阻 $u = 2i + \frac{1}{3}i^3$ 在 $i = 1\text{A}$ 时的动态电阻 R_d 。
2. 图 1 所示电路中, VD 为理想二极管。画出该电路的伏安特性曲线。
3. 图 2 所示电路中, 非线性电阻的 VAR 为 $u = i^2$, 式中电压和电流的单位分别为 V 和 A。求: (1) a、b 端的戴维南等效电路; (2) 电压 u 和电流 i 。

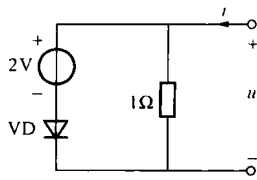


图 1

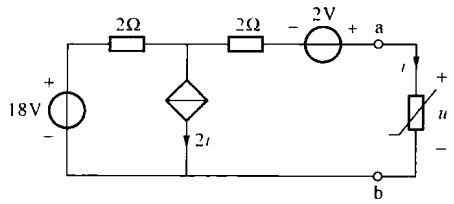


图 2

4. 图 3 所示电路中, 非线性电阻的 VAR 为 $u=i^2 (i>0)$ 。求: (1) 电压 u 和电流 i ; (2) 电流 i_1 。

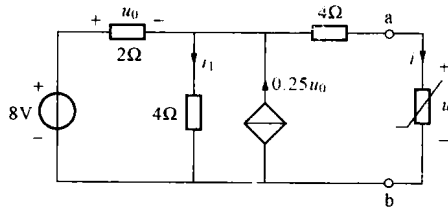


图 3

5. 图 4 所示电路中, VD 为理想二极管。求: (1) a、b 端的戴维南等效电路; (2) 电流 I 。

6. 图 5 所示电路中, 非线性电阻的特性方程为 $i=g(u)=\begin{cases} u^2 (u>0) \\ 0 (u<0) \end{cases}$, 信号源 $u_s(t)=2\cos\omega t$ mV, 求电路中的电压 $u(t)$ 和电流 $i(t)$ 。

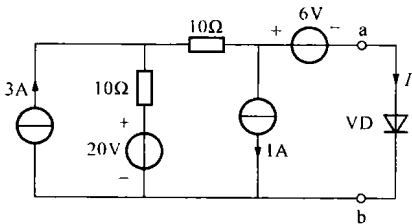


图 4

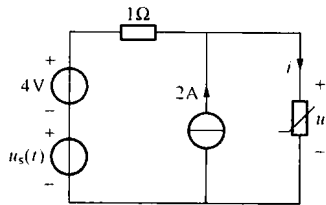


图 5

参考答案

1. 3Ω

$$2. u = \begin{cases} 2V & (i > 2A) \\ i & (i \leq 2A) \end{cases}$$

3. (1) 20V, 8Ω ; (2) 100V, $-10A$; 4V, 2A

4. (1) 1V, 1A; (2) 1.25A

5. (1) 24V, 20Ω ; (2) 1.2A

6. $2+0.4 \times 10^{-3} \cos\omega t$ V, $4+1.6 \times 10^{-3} \cos\omega t$ A

第 13 章 线性动态电路的复频域分析

13.1 本章知识结构图

第 13 章知识结构图如图 13-1 所示。

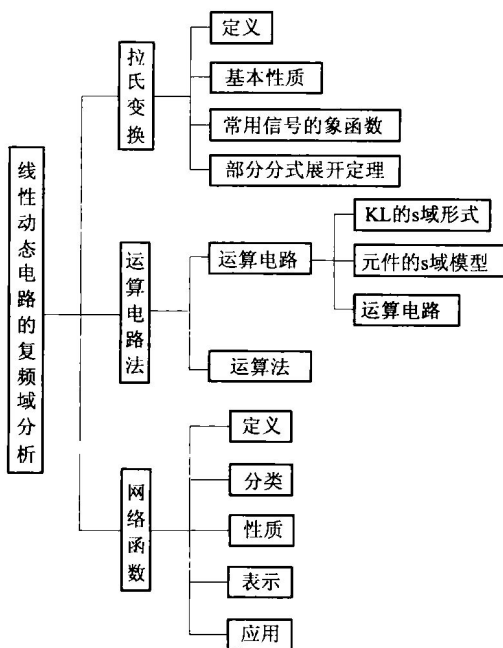


图 13-1 第 13 章知识结构图

13.2 知识点归纳与学习指导

本章主要由线性动态电路的运算电路分析法和网络函数两大部分内容组成。

13.2.1 拉氏变换

1. 拉氏变换的定义

拉普拉斯正变换
$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

拉普拉斯反变换
$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

其中， $F(s)$ 称为象函数， $f(t)$ 称为原函数，其定义域为 $[0, \infty]$ 。

2. 常用函数的象函数

常用函数的象函数见表 13-1。这些常用函数的象函数需要记忆。

表 13-1

常用函数的象函数

原函数	象函数	原函数	象函数
$\delta(t)$	1		
$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s}$	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$
$\frac{1}{n!}t^n$	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\frac{1}{n!}t^n e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s+\alpha)^{n+1}}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$e^{-\alpha t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$e^{-\alpha t}\cos\omega t$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$

3. 拉氏变换的性质

拉氏变换主要涉及的基本性质有唯一性质、线性性质、时域微分性质、时域积分性质、时域延迟性质、频域位移性质和卷积定理。时域延迟性质主要用于换路时刻不在 $t=0$ 的情况；掌握频域位移性质有助于记忆常用函数的象函数，表 13-1 中右部分的原函数为左部分的原函数乘以 $e^{-\alpha t}$ ，则右部分的象函数可由左部分的象函数频域位移得出。

将拉氏变换的线性性质和时域微分性质相结合可将线性常系数微分方程转化为代数方程。利用拉氏变换的性质可求出一些复杂原函数的象函数。

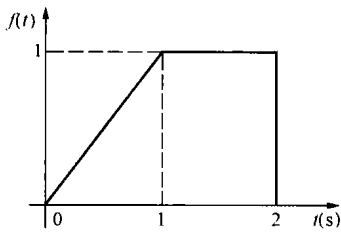


图 13-2 [例 13-1] 图

【例 13-1】 $f(t)$ 的波形如图 13-2 所示，求其象函数。

解 由图可得函数 $f(t)$ 的时域表达式为

$$\begin{aligned} f(t) &= t\varepsilon(t) - t\varepsilon(t-1) + \varepsilon(t-1) - \varepsilon(t-2) \\ &= t\varepsilon(t) - (t-1)\varepsilon(t-1) - \varepsilon(t-2) \end{aligned}$$

则根据拉氏变换的线性性质和时域延迟性质可得其象函数为

$$F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-s} - \frac{1}{s}e^{-2s}$$

4. 象函数的部分分式展开

用复频域分析法求解线性时不变动态电路时，几乎不用拉氏反变换定义式求象函数的原函数，而是借助象函数的部分分式展开定理使用查表的方法。用象函数的部分分式展开定理求原函数是本章的基本功之一，需要牢固掌握。

线性时不变动态电路的象函数通常为 s 的有理分式，即 s 的两个实系数多项式之比，如

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

部分分式展开定理适用于有理真分式。如果有理分式为假分式 ($m \geq n$)，则应先把有理假分式化为一个多项式与有理真分式之和，再对真分式进行部分分式展开。具体展开方式分为下列三种情况：

(1) $D(s)=0$ 的根为不等实根。则有

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{s-p_k}$$

式中各项留数由下式确定

$$A_k = (s-p_k)F(s) \Big|_{s=p_k}$$

则对应的原函数为

$$f(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t} \epsilon(t)$$

(2) $D(s)=0$ 的根中有重根。设 $s=p_l$ 为 l 阶重根, 其余 $(n-l)$ 个根均为单根, 则

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{(s-p_l)^l (s-p_{l+1}) \cdots (s-p_n)} = \sum_{k=1}^l \frac{A_k}{(s-p_l)^{l+1-k}} + \sum_{j=l+1}^n \frac{A_j}{s-p_j}$$

式中各项留数为

$$A_k = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} [(s-p_l)^l F(s)] \Big|_{s=p_l} \quad (k=1, 2, \cdots, l)$$

$$A_j = (s-p_j)F(s) \Big|_{s=p_j} \quad (j=l+1, l+2, \cdots, n)$$

则对应的原函数为

$$f(t) = \left[\sum_{k=1}^l \frac{A_k}{(l-k)!} t^{l-k} \right] e^{p_l t} + \sum_{j=l+1}^n A_j e^{p_j t}$$

(3) $D(s)=0$ 的根中有共轭复根。当 $D(s)=0$ 有共轭复根时, 虽然仍可按 (1) 和 (2) 中的方法进行, 但常用下列较为简便的方法。

设 $D(s)=0$ 有一对共轭单根 $s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega$ 。

1) 方法 1。

$$F(s) = \cdots + \left(\frac{K}{s+\alpha-j\omega} + \frac{K^*}{s+\alpha+j\omega} \right) + \cdots = \cdots + \left(\frac{|K| \angle \theta}{s+\alpha-j\omega} + \frac{|K| \angle (-\theta)}{s+\alpha+j\omega} \right) + \cdots$$

式中 K^* 为 K 的共轭, 则

$$f(t) = \cdots + 2|K| e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \theta) \epsilon(t) + \cdots$$

2) 方法 2。

$$F(s) = \cdots + \left(\frac{K}{s+\alpha-j\omega} + \frac{K^*}{s+\alpha+j\omega} \right) + \cdots = \cdots + \frac{A(s+\alpha) + B\omega}{(s+\alpha)^2 + \omega^2} + \cdots$$

则

$$f(t) = \cdots + (Ae^{-\alpha t} \cos \omega t + Be^{-\alpha t} \sin \omega t) + \cdots$$

【例 13-2】 求下列象函数的原函数:

$$(1) F(s) = \frac{s+4}{s^3+3s^2+2s}; \quad (2) F(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2(s+2)}; \quad (3) F(s) = \frac{s+2}{s^3+2s^2+2s}$$

$$\text{解} \quad (1) F(s) = \frac{s+4}{s^3+3s^2+2s} = \frac{s+4}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

$$A = sF(s) \Big|_{s=0} = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=0} = 2, \quad B = (s+1)F(s) \Big|_{s=-1} = \frac{s+4}{s(s+2)} \Big|_{s=-1} = -3$$

$$C = (s+2)F(s) \Big|_{s=-2} = \frac{s+4}{s(s+1)} \Big|_{s=-2} = 1$$

则

$$F(s) = \frac{2}{s} - \frac{3}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

取拉氏反变换, 得

$$f(t) = 2 - 3e^{-t} + e^{-2t} \quad (t > 0)$$

$$(2) \text{ 方法 1: } F(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{A}{(s+1)^2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

$$A = (s+1)^2 F(s) \Big|_{s=-1} = \frac{s+3}{s+2} \Big|_{s=-1} = 2,$$

$$B = \frac{d}{ds} [(s+1)^2 F(s)] \Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds} \left[\frac{s+3}{s+2} \right] \Big|_{s=-1} = \frac{-1}{(s+2)^2} \Big|_{s=-1} = -1$$

$$C = (s+2)F(s) \Big|_{s=-2} = \frac{s+3}{(s+1)^2} \Big|_{s=-2} = 1$$

则

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

所以

$$f(t) = (2t-1)e^{-t} + e^{-2t} \quad (t > 0)$$

$$\text{方法 2: } F(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{A}{(s+1)^2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

按方法 1 先确定 A 和 C, 得

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{B}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

上式不论 s 取何值, 等式都应该成立。可令 s 取合适值, 如 s=0, 代入上式得

$$\frac{3}{2} = 2 + B + \frac{1}{2}$$

所以, B=-1, 则

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

因此

$$f(t) = (2t-1)e^{-t} + e^{-2t} \quad (t > 0)$$

$$(3) \text{ 方法 1: } F(s) = \frac{s+2}{s^3+2s^2+2s} = \frac{s+2}{s(s^2+2s+2)} = \frac{1}{s} - \frac{0.5}{s+1-j} - \frac{0.5}{s+1+j}$$

所以

$$f(t) = 1 - e^{-t} \cos t \quad (t > 0)$$

$$\text{方法 2: } F(s) = \frac{s+2}{s^3+2s^2+2s} = \frac{s+2}{s(s^2+2s+2)} = \frac{1}{s} - \frac{0.5}{s+1-j} - \frac{0.5}{s+1+j} = \frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

则

$$f(t) = 1 - e^{-t} \cos t \quad (t > 0)$$

13.2.2 运算电路

1. 基尔霍夫定律的复频域形式

$$\text{KCL 的复频域形式} \quad \sum I(s) = 0$$

$$\text{KVL 的复频域形式} \quad \sum U(s) = 0$$

KCL 和 KVL 方程复频域形式的列写规律与时域相同。

2. 元件的复频域形式

(1) 电阻、电感和电容的 s 域模型见表 13-2。

表 13-2 二端电路元件的 s 域模型

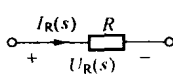
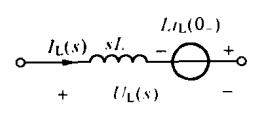
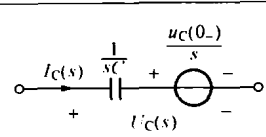
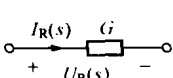
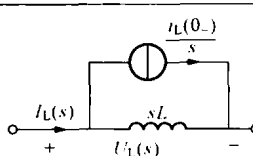
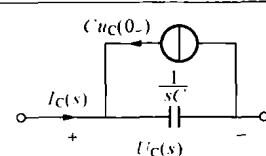
	电 阻	电 感	电 容
串联形式			
	$U_R(s) = RI_R(s)$	$U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0_-)$	$U_C(s) = \frac{1}{sC}I_C(s) + \frac{u_C(0_-)}{s}$
并联形式			
	$I_R(s) = GU_R(s)$	$I_L(s) = \frac{1}{sL}U_L(s) + \frac{i_L(0_-)}{s}$	$I_C(s) = sCU_C(s) - Cu_C(0_-)$

表 13-2 中, $\frac{1}{sC}$ 和 sL 分别称为电容和电感的复频率阻抗或运算阻抗; $\frac{u_C(0_-)}{s}$ 为附加电压源的电压, 它反映了电容起始状态在动态电路中的作用; $\frac{i_L(0_-)}{s}$ 为附加电流源的电流, 它反映了电感起始状态在电路中的作用。串联形式和并联形式的两种 s 域模型是相互等效的。

(2) 多口电阻元件。仅需将电压、电流的时间函数换成象函数即可。

(3) 独立电源。将已知时间函数用象函数表示。

(4) 耦合电感。三端或二端耦合电感在时域可先去耦, 再对每一个电感画复频域模型。图 13-3 (a) 中四端耦合电感的复频域模型如图 13-3 (b) 所示。注意, 复频域模型附加电源方向与同名端的位置和电流的方向有关。

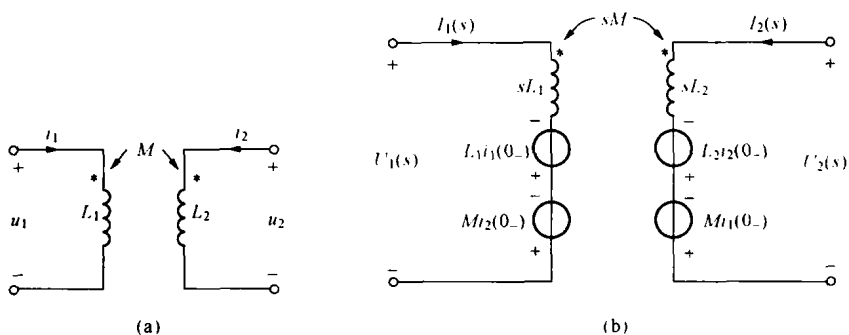


图 13-3 四端耦合电感及其复频域模型

3. 运算电路

运算电路又称为复频域模型, 是一种运用象函数能方便地对动态电路进行分析和计算的一种假想模型, 与原电路具有相同的拓扑结构。从原电路可按下列方法画出相应的运算电路: 把动态电路中的电压和电流用象函数表示, 参考方向保持不变; 电压源的电压和电流源

的电流分别变换为象函数，而电路符号不变；其他电路元件分别用 s 域模型替换。

运算电路中各支路电压、电流的象函数既服从基尔霍夫定律 s 域形式的约束，又满足元件伏安关系的 s 域形式。

正确画出运算电路是本章的基本功之一，必须牢固掌握。重点是电容和电感的 s 域模型。

4. 元件的运算阻抗和运算导纳

在零状态下，电阻、电感和电容的复频域方程可统一地写成下列形式：

表 13-3 二端元件的运算阻抗和运算导纳

元件名称	运算阻抗	运算导纳
电阻	$Z_R(s) = R$	$Y_R(s) = G$
电感	$Z_L(s) = sL$	$Y_L(s) = \frac{1}{sL}$
电容	$Z_C(s) = \frac{1}{sC}$	$Y_C(s) = sC$

$$U(s) = Z(s)I(s) \text{ 或 } I(s) = Y(s)U(s)$$

式中， $Z(s)$ 称为元件的复频率阻抗或运算阻抗； $Y(s)$ 称为元件的复频率导纳或运算导纳。各二端元件的运算阻抗和运算导纳见表 13-3。

由于运算电路与电阻电路之间的相似性，电阻电路的各种分析方法可推广到运算电路，只需将时域电压、电流换为电压、电流的象函数，电阻、电导换成运算阻抗、运算导纳。

13.2.3 线性动态电路的复频域分析法

复频域分析法不需要考虑电路是否存在电容电压和电感电流的跃变。有无跃变，分析过程完全相同。复频域分析法的一般步骤如下：

- (1) 求 $t=0_-$ 时刻的电容电压和电感电流；
- (2) 画出运算电路；
- (3) 求响应的象函数；
- (4) 将响应的象函数进行部分分式展开；
- (5) 求响应的时域形式。

【例 13-3】 图 13-4 (a) 所示电路在开关 S 打开前处于稳态， $t=0$ 时将开关 S 打开，试求 $t \geq 0$ 时的电感电流 $i_L(t)$ 及电容电压 $u_C(t)$ 。

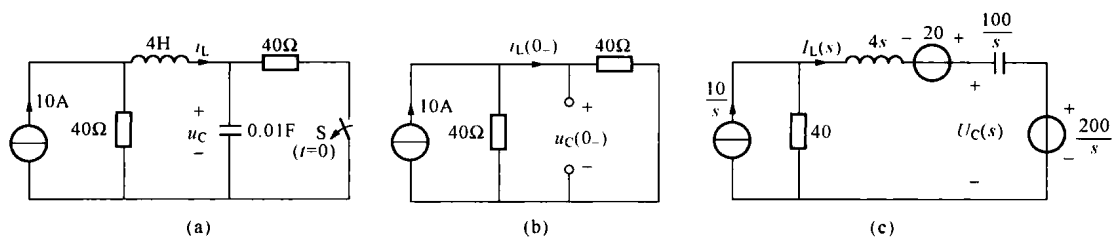


图 13-4 [例 13-3] 图

解 (1) 求 $i_L(0_-)$ 和 $u_C(0_-)$ 。 $t=0_-$ 的电路如图 13-3 (b) 所示，则

$$i_L(0_-) = \frac{1}{2} \times 10 = 5 \text{ (A)}, \quad u_C(0_-) = 40i_L(0_-) = 40 \times 5 = 200 \text{ (V)}$$

(2) 求 $I_L(s)$ 和 $U_C(s)$ 。运算电路如图 13-4 (c) 所示。由网孔分析法得

$$\left(40+4s+\frac{100}{s}\right)I_L(s)=\frac{400}{s}+20-\frac{200}{s}$$

则

$$I_L(s)=\frac{\frac{200}{s}+20}{40+4s+\frac{100}{s}}=\frac{5(s+10)}{(s+5)^2}=\frac{5}{s+5}+\frac{25}{(s+5)^2}$$

$$U_C(s)=\frac{100}{s}I_L(s)+\frac{200}{s}=\frac{500(s+10)}{s(s+5)^2}+\frac{200}{s}=\frac{400}{s}-\frac{200}{s+5}-\frac{500}{(s+5)^2}$$

(3) 求 $i_L(t)$ 和 $u_C(t)$ 。取拉氏反变换得

$$i_L(t)=5e^{-5t}(1+5t) \text{ A} \quad (t \geq 0), \quad u_C(t)=400-100e^{-5t}(2+5t) \text{ V} \quad (t \geq 0)$$

13.2.4 网络函数

1. 定义

网络函数 $H(s)$ 定义为电路的零状态响应 $y_{zs}(t)$ 的象函数 $Y_{zs}(s)$ 与输入激励 $e(t)$ 的象函数 $E(s)$ 的比值, 即

$$H(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{E(s)}$$

网络函数 $H(s)$ 是复频率 s 的函数, 它比正弦稳态下的网络函数 $H(j\omega)$ 有着更为丰富的内容。这是因为 $H(s)$ 把任意输入与零状态响应联系起来, 而 $H(j\omega)$ 只是等于输出相量与输入相量之比, 且对于有损耗的稳定电路有

$$H(j\omega)=H(s)|_{s=j\omega}$$

特别注意, 求网络函数时, 电路应为零状态。

2. 分类

网络函数分为驱动点函数 (即驱动点阻抗和驱动点导纳) 与转移函数 (即转移阻抗、转移导纳、电压转移函数和电流转移函数) 两大类型。

3. 性质

(1) 网络函数仅与电路的拓扑结构和元件参数有关, 而与外加输入无关。它反映了电路的固有动态性能。因此, 通过网络函数, 可以了解该电路在过渡过程中的暂态特性。

(2) 线性时不变电路的网络函数是 s 的实系数有理函数。

(3) 网络函数 $H(s)$ 为电路的冲激响应 $h(t)$ 的象函数。正如冲激响应 $h(t)$ 在时域中描述了网络的特性一样, 网络函数 $H(s)$ 在 s 域中描述了网络的特性。

(4) 网络函数的极点为对应电路变量的固有频率 (或自然频率)。

4. 网络函数的零点与极点

$H(s)$ 分母多项式的根称为网络函数的极点; 分子多项式的根称为网络函数的零点。线性时不变电路的零点和极点只能是实数或者共轭复数。

5. 网络函数的极零点图

网络函数的极点和零点在 s 平面上的位置分布图。

6. 求网络函数的方法

(1) 用定义式求。分析运算电路先找出 $Y_I(s)$ 和 $E(s)$ 二者的关系, 再代入 $H(s)=Y_{zs}(s)/U_E(s)$ 求得。

(2) 由冲激响应 $h(t)$ 求。

$$H(s) = \mathcal{L}[h(t)]$$

(3) 由网络函数的零、极点 (图) 来求。

$$H(s) = H_0 \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

(4) 由频域网络函数 $H(j\omega)$ 来求。

$$H(s) = H(j\omega) \Big|_{j\omega=s}$$

【例 13-4】 电路如图 13-5 (a) 所示。求网络函数 $H(s) = \frac{U(s)}{U_s(s)}$ 以及当 $u_s(t) = 100\sqrt{2} \cos 10t$ V 时的正弦稳态电压 $u(t)$ 。

解 (1) 求网络函数 $H(s) = \frac{U(s)}{U_s(s)}$ 。运算电路如图 13-5 (b) 所示。

$$Z(s) = 2 // \left(4 + \frac{10}{s} \right) = \frac{4s+10}{3s+5}, \quad U(s) = \frac{Z(s)}{Z(s)+10+0.5s} U_s(s)$$

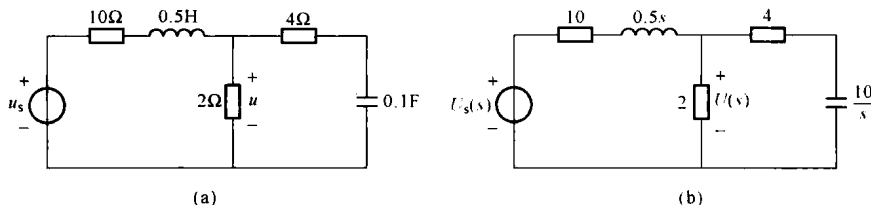


图 13-5 [例 13-3] 图

所以网络函数为

$$H(s) = \frac{U(s)}{U_s(s)} = \frac{Z(s)}{Z(s)+10+0.5s} = \frac{8s+20}{3s^2+73s+120}$$

(2) 求正弦稳态电压 $u(t)$ 。因为

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{j8\omega+20}{3(j\omega)^2+j73\omega+120}$$

所以

$$\begin{aligned} \dot{U} &= H(j\omega) \Big|_{\omega=10} \times 100 \angle 0^\circ = \frac{20+j80}{3 \times (j10)^2 + j73 \times 10 + 120} \times 100 \angle 0^\circ \\ &= \frac{20+j80}{-180+j730} \times 100 \angle 0^\circ = 10.97 \angle -27.89^\circ \text{ (V)} \end{aligned}$$

因此, 正弦稳态电压为

$$u(t) = 10.97\sqrt{2} \cos(10t - 27.89^\circ) \text{ V}$$

注: 求网络函数时, 电路取零状态。

13.3 重点、难点与考点

重点与难点

本章的重点是用复频域法分析线性动态电路和求网络函数。难点为灵活运用网络函数求

解问题。

考点

本章考试的重点和热点主要集中在用复频域法分析线性动态电路、求网络函数以及网络函数的应用。

13.4 第13章习题选解

拉氏变换

13-1 求下列各函数的象函数。

(1) $f(t) = 1 - e^{-2t}$; (2) $f(t) = 3\sin t + 2\cos t$; (3) $f(t) = \cos(2t + 45^\circ)$;

(4) $f(t) = e^{-2t} \cos t + e^{-2t}$; (5) $f(t) = e^{-t} \epsilon(t) + e^{-(t-1)} \epsilon(t-1) + \delta(t-2)$

解 (1)
$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} = \frac{2}{s(s+2)}$$

(2)
$$F(s) = \frac{3}{s^2+1} + \frac{2s}{s^2+1} = \frac{3+2s}{s^2+1}$$

(3) 因为 $f(t) = \cos(2t + 45^\circ) = \cos 45^\circ \cos 2t - \sin 45^\circ \sin 2t$, 所以

$$F(s) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{s}{s^2+4} - \frac{2}{s^2+4} \right) = \frac{s-2}{\sqrt{2}(s^2+4)}$$

(4)
$$F(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2+1} + \frac{1}{s+2} = \frac{2s^2+8s+9}{s^3+6s^2+13s+10}$$

(5)
$$F(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+1} e^{-s} + e^{-2s} = \frac{1}{s+1} (1 + e^{-s}) + e^{-2s}$$

13-2 求下列各象函数的原函数:

(1) $F(s) = \frac{2s+1}{s^2+5s+6}$; (2) $F(s) = \frac{s^3+5s^2+9s+7}{(s+1)(s+2)}$; (3) $F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)^2}$;

(4) $F(s) = \frac{s^2+6s+5}{s(s^2+4s+5)}$; (5) $F(s) = \frac{1+e^{-s}+e^{-2s}}{s^2+3s+2}$

解 (1) 根据部分分式展开定理

$$F(s) = \frac{2s+1}{s^2+5s+6} = \frac{2s+1}{(s+2)(s+3)} = \frac{k_1}{s+2} + \frac{k_2}{s+3}$$

其中

$$k_1 = (s+2)F(s) \Big|_{s=-2} = \frac{2s+1}{s+3} \Big|_{s=-2} = -3, \quad k_2 = (s+3)F(s) \Big|_{s=-3} = \frac{2s+1}{s+2} \Big|_{s=-3} = 5$$

则

$$F(s) = \frac{-3}{s+2} + \frac{5}{s+3}$$

取拉氏反变换(查表法)得

$$f(t) = 5e^{-3t} - 3e^{-2t} \quad (t > 0)$$

(2) 因为
$$F(s) = \frac{s^3+5s^2+9s+7}{(s+1)(s+2)} = s+2 + \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = s+2 + \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

所以
$$f(t) = \delta'(t) + 2\delta(t) + (2e^{-t} - e^{-2t})\epsilon(t)$$

(3) 根据部分分式展开定理

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{(s+2)^2} + \frac{k_3}{s+2}$$

其中

$$k_1 = (s+1)F(s) \Big|_{s=-1} = \frac{1}{(s+2)^2} \Big|_{s=-1} = 1, \quad k_2 = (s+2)^2 F(s) \Big|_{s=-2} = \frac{1}{s+1} \Big|_{s=-2} = -1$$

$$k_3 = \frac{d}{ds} [(s+2)^2 F(s)] \Big|_{s=-2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s+1} \right) \Big|_{s=-2} = -1$$

则

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+2)^2} - \frac{1}{s+2}$$

所以

$$f(t) = (e^{-t} - te^{-2t} - e^{-2t})\epsilon(t)$$

(4) 因为

$$F(s) = \frac{s^2 + 6s + 5}{s(s^2 + 4s + 5)} = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2 + 4s + 5} = \frac{1}{s} + \frac{2}{(s+2)^2 + 1}$$

所以

$$f(t) = (1 + 2e^{-2t} \sin t)\epsilon(t)$$

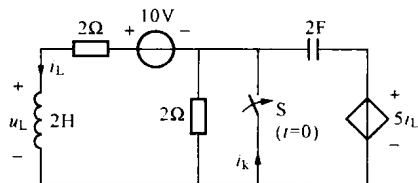
$$(5) F(s) = \frac{1 + e^{-s} + e^{-2s}}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} (1 + e^{-s} + e^{-2s}) = \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \right) (1 + e^{-s} + e^{-2s})$$

所以

$$f(t) = (e^{-t} - e^{-2t})\epsilon(t) + [e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)}]\epsilon(t-1) + [e^{-(t-2)} - e^{-2(t-2)}]\epsilon(t-2)$$

画运算电路

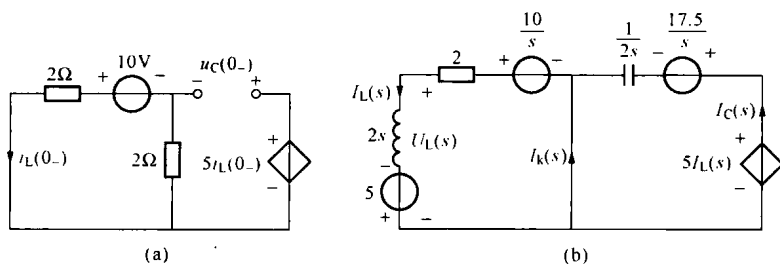
注：由于电感和电容都有两种运算电路模型，所以，运算电路不是唯一的，需要根据对运算电路采用的分析方法选择。正确画出运算电路是本章的基本功之一。



题 13-5 图

复频域分析法

13-5 题 13-5 图所示电路原已稳态，开关 S 在 $t=0$ 时闭合。试求 $t>0$ 时电感两端的电压 $u_L(t)$ 和流过开关的电流 $i_k(t)$ 。



题 13-5 解图

解 (1) 求 $i_L(0_-)$ 和 $u_C(0_-)$ 。 $t=0_-$ 的电路如题 13-5 解图(a)所示，则

$$i_L(0_-) = \frac{10}{2+2} = 2.5(\text{A}), u_C(0_-) = 5i_L(0_-) + 2i_L(0_-) = 17.5(\text{V})$$

(2) 求 $U_L(s)$ 和 $I_k(s)$ 。运算电路如题 13-5 解图(b)所示, 则有

$$I_L(s) = \frac{\frac{10}{s} + 5}{2s+2} = \frac{2.5s+5}{s(s+1)} = \frac{5}{s} - \frac{2.5}{s+1} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2s}I_C(s) = 5I_L(s) - \frac{17.5}{s} \quad (2)$$

将式 (1) 代入式 (2) 整理得

$$I_C(s) = \frac{15-10s}{s+1} = -10 + \frac{25}{s+1}$$

根据 KCL 有

$$I_k(s) = I_L(s) - I_C(s) = 10 + \frac{5}{s} - \frac{27.5}{s+1}$$

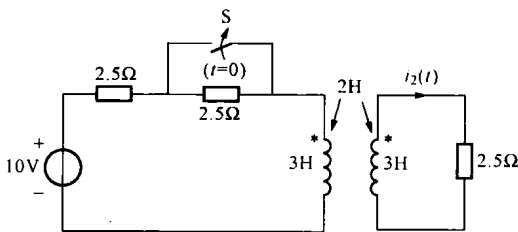
由 KVL 得

$$U_L(s) = 2sI_L(s) - 5 = \frac{5}{s+1}$$

(3) 求 $u_L(t)$ 和 $i_k(t)$ 。取拉氏反变换得

$$u_L(t) = 5e^{-t} \text{ V} \quad (t > 0), i_k(t) = 10\delta(t) + (5 - 27.5e^{-t})\epsilon(t) \text{ V}$$

13-6 题 13-6 图所示电路原已稳态, 开关 S 在 $t=0$ 时闭合开。试求 $t > 0$ 时的电流 $i_2(t)$ 。



题 13-6 图

解 电流 $i_1(t)$ 的参考方向如题 13-6 解图 (a) 所示。

方法 1: (1) 求 $i_1(0_-)$ 和 $i_2(0_-)$ 。因为 $t < 0$ 时电路已达稳态 (两个线圈均处于短路状态), 故由题 13-6 解图 (a) 得

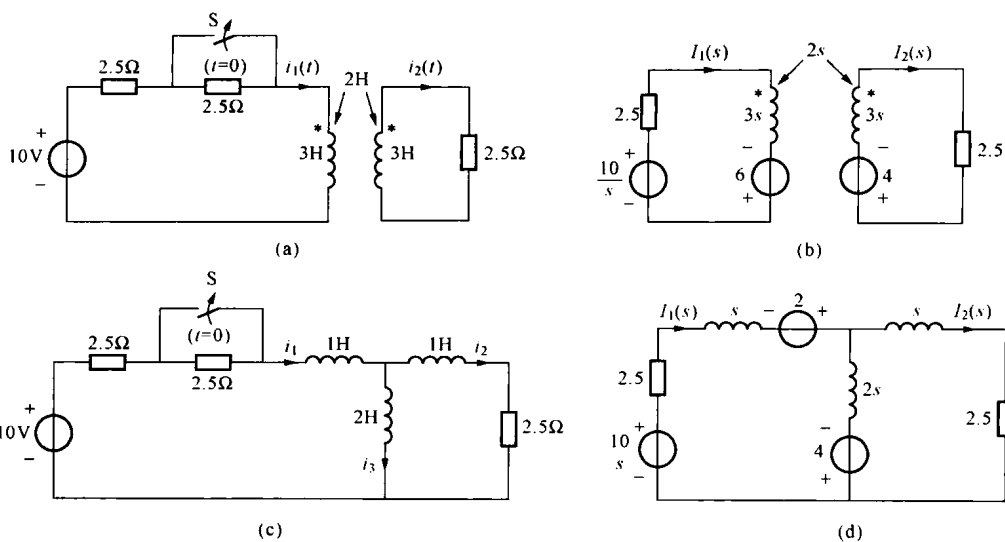
$$i_1(0_-) = \frac{10}{2.5+2.5} = 2\text{A}, i_2(0_-) = 0$$

(2) 求 $I_2(s)$ 。运算电路如题 13-6 解图 (b) 所示。由图可得 $I_1(s)$ 、 $I_2(s)$ 为变量的网孔电流方程为

$$\begin{cases} (2.5+3s)I_1(s) - 2sI_2(s) = \frac{10}{s} + 6 \\ -2sI_1(s) + (2.5+3s)I_2(s) = -4 \end{cases}$$

联立解得

$$I_2(s) = \frac{2}{s^2+3s+1.25} = \frac{1}{s+0.5} - \frac{1}{s+2.5}$$



题 13-6 解图

(3) 求 $i_2(t)$ 。

$$i_2(t) = e^{-0.5t} - e^{-2.5t} \text{ A} \quad (t \geq 0)$$

方法 2: 题 13-6 解图 (a) 的去耦等效电路如题 13-6 解图 (c) 所示。因为 $t < 0$ 时, 电路已达稳态, 由题 13-6 解图 (c) 得

$$i_1(0_-) = i_3(0_-) = \frac{10}{2.5 + 2.5} = 2(\text{A}), \quad i_2(0_-) = 0$$

$t > 0$ 时, 运算电路如题 13-6 解图 (d) 所示。由图可得以 $I_1(s)$ 、 $I_2(s)$ 为变量的网孔电流方程为

$$\begin{cases} (2.5 + s + 2s)I_1(s) - 2sI_2(s) = \frac{10}{s} + 2 + 4 \\ -2sI_1(s) + (2.5 + s + 2s)I_2(s) = -4 \end{cases}$$

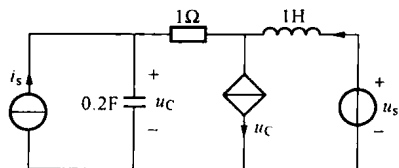
解之得

$$I_2(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 1.25} = \frac{1}{s + 0.5} - \frac{1}{s + 2.5}$$

所以

$$i_2(t) = e^{-0.5t} - e^{-2.5t} \text{ A} \quad (t \geq 0)$$

13-7 题 13-7 图所示电路中, $i_s(t) = 1.4\delta(t)$ A, $u_s(t) = 3 + 3\epsilon(t)$ V, $t < 0$ 时电路处于稳态。求 $t > 0$ 时的电容电压 $u_C(t)$ 。



题 13-7 图

解 (1) 求 $u_C(0_-)$ 和 $i_L(0_-)$ 。 $t = 0_-$ 的电路如题 13-7 解图 (a) 所示, 由该图得

$$u_C(0_-) = 3\text{V}, \quad i_L(0_-) = u_C(0_-) = 3\text{A}$$

(2) 求电容电压 $u_C(t)$ 。 $t > 0$ 时的运算电路如题 13-7 解图 (b) 所示, 则电路的节点电压方程为

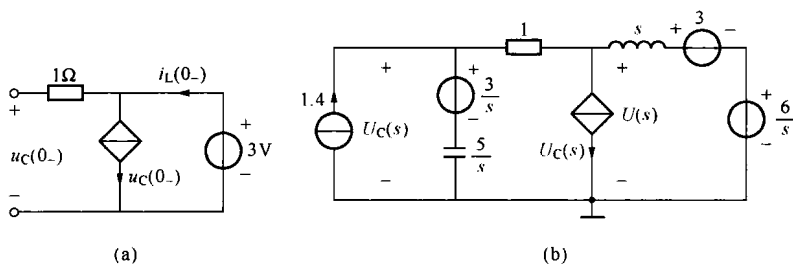
$$\begin{cases} \left(1 + \frac{s}{5}\right)U_C(s) - U(s) = 1.4 + \frac{3/s}{5/s} \\ -U_C(s) + \left(1 + \frac{1}{s}\right)U(s) = \frac{3 + 6/s}{s} - U_C(s) \end{cases}$$

解之得

$$U_C(s) = \frac{10s^2 + 25s + 30}{s(s+5)(s+1)} = \frac{6}{s} - \frac{3.75}{s+1} + \frac{7.75}{s+5}$$

所以

$$u_C(t) = 6 - 3.75e^{-t} + 7.75e^{-5t} \text{ V} \quad (t \geq 0)$$



题 13-7 解图

13-8 见 [例 13-3]。

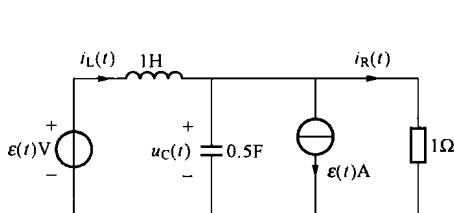
13-9 [提示] 求零状态响应时, $u_C(0_-) = 0$, $i_L(0_-) = 0$ 。由分流公式得 $I(s) = \frac{10}{(s+5)^2(s+6)}$ 。

13-10 [提示] $i_L(0_-) = 3\text{A}$, $u_C(0_-) = 6\text{V}$ 。由回路法得

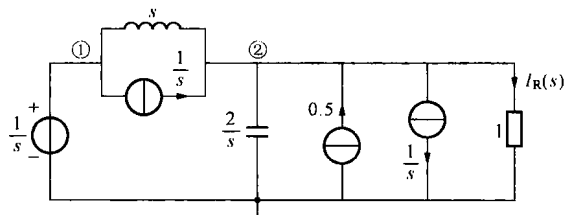
$$U_C(s) = \frac{6s-18}{s^2+2s+10} = \frac{6(s+1)-24}{(s+1)^2+3^2}$$

或者 $U_C(s) = \frac{6s-18}{(s+1-j3)(s+1+j3)} = \frac{5/\angle 53.1^\circ}{s+1-j3} + \frac{5/\angle -53.1^\circ}{s+1+j3}$

13-11 题 13-11 图所示电路中, $u_C(0_-) = 1\text{V}$, $i_L(0_-) = 1\text{A}$ 。试求 $t > 0$ 时的电流 $i_R(t)$ 。



题 13-11 图



题 13-11 解图

解 运算电路如题 13-11 解图所示。则节点电压方程的运算形式为

$$\begin{cases} U_{n1}(s) = \frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s}U_{n1}(s) + \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{2} + 1\right)U_{n2}(s) = \frac{1}{s} + 0.5 - \frac{1}{s} \end{cases}$$

解之得

$$U_{n2}(s) = \frac{s^2 + 2}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2 + 2s + 2} = \frac{1}{s} - \frac{2}{(s+1)^2 + 1}$$

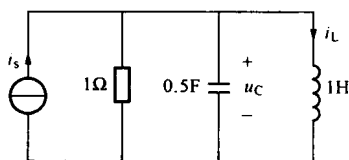
所以

$$I_R(s) = U_{n2}(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{(s+1)^2 + 1}$$

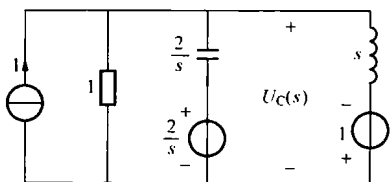
因此

$$i_R(t) = 1 - 2e^{-t} \sin t \text{ A} \quad (t > 0)$$

13-12 题 13-12 图所示电路中, 已知 $u_C(0_-) = 2\text{V}$, $i_L(0_-) = 1\text{V}$, $i_s(t) = \delta(t)\text{A}$ 。试求 $t > 0$ 时的电容电压 $u_C(t)$ 。



题 13-12 图



题 13-12 解图

解 运算电路如题 13-12 解图所示。电路的节点电压方程为

$$\left(1 + 0.5s + \frac{1}{s}\right)U_C(s) = 1 + 1 - \frac{1}{s}$$

解之得

$$U_C(s) = \frac{2(2s-1)}{s^2+2s+2} = \frac{3.61 \angle -56.31^\circ}{s+1-j1} + \frac{3.61 \angle -56.31^\circ}{s+1+j1}$$

则

$$u_C(t) = 7.22e^{-t} \cos(t + 56.31^\circ) \text{ V} \quad (t \geq 0)$$

或者

$$U_C(s) = \frac{2(2s-1)}{s^2+2s+2} = \frac{4(s+1)-6}{(s+1)^2+1}$$

因此

$$u_C(t) = e^{-t}(4\cos t - 6\sin t) = 7.22e^{-t} \cos(t + 56.31^\circ) \text{ V} \quad (t \geq 0)$$

13-13 [提示] 本题解法与题 13-6 类似, 差别在于起始状态的确定。 $t < 0$ 时电路处于正弦稳态, 故需用相量法求出 $\dot{I} = 2 \angle -45^\circ \text{ A}$, $i(t) = 2\sqrt{2} \cos(t - 45^\circ) \text{ A}$, 则 $i(0_-) = i(t)|_{t=0_-} = 2\text{A}$; 流过耦合电感两线圈的电流为其一半。

13-14 题 13-14 图 (a) 所示电路中, 已知 $R_1 = 6\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $L = 1\text{H}$, $\mu = 1$ 。求当 $u_s(t)$ 为题 13-14 图 (b) 所示的波形时电路的零状态响应 $i_L(t)$ 。

解 $t \geq 0$ 时运算电路如题 13-14 解图所示。设网孔电流分别为 $I_1(s)$ 和 $I_2(s)$, 则网孔电流方程为

$$\begin{cases} 9I_1(s) - 3I_2(s) = U_s(s) \\ -3I_1(s) + (3+s)I_2(s) = -U_L(s) \end{cases}$$

补充方程为

$$U_L(s) = sI_L(s) = sI_2(s)$$

联立解得

$$I_L(s) = I_2(s) = \frac{1}{6} \frac{U_s(s)}{s+1}$$

又因为 $u_s(t) = 12[\epsilon(t) - \epsilon(t-2)]$, 故

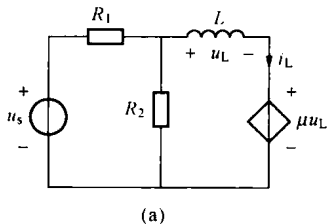
$$U_s(s) = \frac{12}{s}(1 - e^{-2s})$$

所以

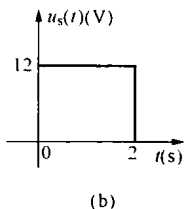
$$I_L(s) = \frac{1}{6} \frac{U_s(s)}{s+1} = \frac{2}{s(s+1)}(1 - e^{-2s}) = \left(\frac{2}{s} - \frac{2}{s+1}\right)(1 - e^{-2s})$$

因此

$$i_L(t) = 2(1 - e^{-t})\epsilon(t) - 2[1 - e^{-(t-2)}]\epsilon(t-2) \text{ A}$$

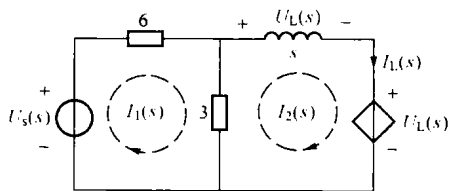


(a)



(b)

题 13-14 图



题 13-14 解图

网络函数

13-15 [提示] 求输入阻抗时, 电路处于零状态。画运算电路时, 电容和电感的 s 域模型不含等效电源。求运算电路输入阻抗的方法与电阻电路相同。

13-16 题 13-16 图所示电路中, 网络 N 为 RC 线性网络, 零输入响应 $u_{zi}(t) = -e^{-10t}\epsilon(t)$ V; 在激励为 $u_s(t) = 12\epsilon(t)$ V 作用时, 全响应 $u_o(t) = (6 - 3e^{-10t})\epsilon(t)$ V。现若将激励改为 $u_s(t) = 6e^{-5t}\epsilon(t)$ (原初始状态不变), 再求其全响应 $u_o(t)$ 。

解 (1) 求网络函数 $H(s)$ 。因为 $u_s(t) = 12\epsilon(t)$ V 时, 全响应 $u_o(t) = (6 - 3e^{-10t})\epsilon(t)$ V。设 $u_s(t) = 12\epsilon(t)$ V 时产生的零状态响应为 $u_{zsl}(t)$, 则

$$\begin{aligned} u_{zsl}(t) &= u_o(t) - u_{zi}(t) = (6 - 3e^{-10t})\epsilon(t) + e^{-10t}\epsilon(t) \\ &= (6 - 2e^{-10t})\epsilon(t) \end{aligned}$$

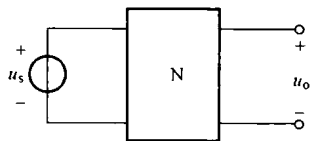
而 $u_s(t)$ 和 $u_{zsl}(t)$ 的象函数分别为

$$U_s(s) = \frac{12}{s}, \quad U_{zsl}(s) = \frac{6}{s} - \frac{2}{s+10} = \frac{4s+60}{s(s+10)}$$

所以, 网络函数 $H(s)$ 为

$$H(s) = \frac{U_{zsl}(s)}{U_s(s)} = \frac{4s+60}{s(s+10)} \cdot \frac{s}{12} = \frac{s+5}{3s+10}$$

(2) 先求激励改为 $u_s(t) = 6e^{-5t}\epsilon(t)$ 的零状态响应, 再求 (原初始状态不变) 全响应 $u_o(t)$ 。



题 13-16 图

因为 $u_s(t) = 6e^{-5t}\epsilon(t)$ 的象函数为 $U_s(s) = \mathcal{L}[u_s(t)] = \frac{6}{s+5}$, 所以, $u_s(t)$ 产生的零状态响应的象函数为

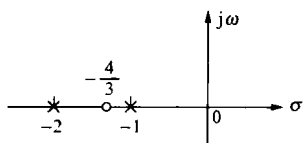
$$U_{zs}(s) = H(s)U_s(s) = \frac{1}{3} \frac{s+5}{s+10} \cdot \frac{6}{s+5} = \frac{2s+30}{(s+5)(s+10)} = \frac{4}{s+5} - \frac{2}{s+10}$$

则零状态响应 $u_{zs}(t)$ 为

$$u_{zs}(t) = (4e^{-5t} - 2e^{-10t})\epsilon(t)$$

因此, $u_s(t) = 6e^{-5t}\epsilon(t)$ V 时, 网络的全响应为

$$u_o(t) = u_{zi}(t) + u_{zs}(t) = -e^{-10t}\epsilon(t) + (4e^{-5t} - 2e^{-10t})\epsilon(t) = (4e^{-5t} - 3e^{-10t})\epsilon(t) \text{ V}$$



题 13-17 解图

13-17 某线性电路的冲激响应为 $h(t) = (e^{-t} + 2e^{-2t})\epsilon(t)$ 。试求: (1) 相应的网络函数 $H(s)$, 并绘出极零点图; (2) 电路的单位阶跃响应。

解 (1) 因为 $h(t) = (e^{-t} + 2e^{-2t})\epsilon(t)$, 所以网络函数 $H(s)$ 为

$$H(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2} = \frac{3s+4}{(s+1)(s+2)}$$

显然, $H(s)$ 有一个零点, $z_1 = -\frac{4}{3}$; 2 个极点, $p_1 = -1$, $p_2 = -2$ 。其极零点图如题 13-17 解图所示。

(2) 求电路的单位阶跃响应 $s(t)$ 。因为 $H(s) = \frac{3s+4}{(s+1)(s+2)}$, 所以

$$S(s) = \frac{1}{s} H(s) = \frac{3s+4}{s(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+1}$$

因此, 单位阶跃响应 $s(t)$ 为

$$s(t) = (2 - e^{-t} - e^{-2t})\epsilon(t)$$

13-18 题 13-18 图所示电路中, 当 $L = 2\text{H}$, $i_s(t) = \delta(t)$ A 时, 零状态响应为 $u(t) = 2e^{-t}\epsilon(t)$ V。求当 $L = L' = 4\text{H}$, $i_s(t) = i'_s(t) = 3e^{-2t}\epsilon(t)$ A 时的零状态响应 $u'(t)$ 。

解 (1) $L = 2\text{H}$ 时的网络函数为

$$H(s) = \frac{U(s)}{I_s(s)} = \frac{s+1}{1} = \frac{2}{s+1}$$

(2) 求 $u'(t)$ 。由 $H(s)$ 计算 $L' = 4\text{H}$ 时的网络函数。因为

$$H(s) = \frac{2}{s+1} = \frac{2}{\frac{2s}{2} + 1}$$

所以只要将 $H(s)$ 中的 $2s$ 写成 $4s$ 即得 $L' = 4\text{H}$ 时的网络函数 $H'(s)$, 即

$$H'(s) = \frac{2}{\frac{4s}{2} + 1} = \frac{2}{2s+1} = \frac{1}{s+0.5}$$

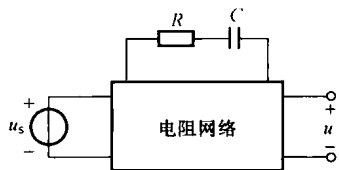
当 $L' = 4\text{H}$, $i'_s(t) = 3e^{-2t}\epsilon(t)$ A 时, 零状态响应的象函数为

$$U'(s) = H'(s)I'_s(s) = \frac{1}{s+0.5} \cdot \frac{3}{s+2} = \frac{2}{s+0.5} - \frac{2}{s+2}$$

所以

$$u'(t) = 2(e^{-0.5t} - e^{-2t})\epsilon(t) \text{ V}$$

13-19 题 13-19 图所示电路中, 已知当 $R=2\Omega$, $C=0.5\text{F}$, $u_s(t)=e^{-3t}\epsilon(t)$ V 时的零状态响应 $u(t)=(0.6e^{-3t}-0.1e^{-0.5t})\epsilon(t)$ V。现将 R 换成 1Ω 电阻, 将 C 换成 0.5H 电感, $u_s(t)$ 换成单位冲激电压源 $u_s(t)=\delta(t)$ V。求零状态响应 $u(t)$ 。



题 13-19 图

解 因为 $u_s(t)=e^{-3t}\epsilon(t)$, $u(t)=(0.6e^{-3t}-0.1e^{-0.5t})\epsilon(t)$ V,

所以

$$U_s(s) = \frac{1}{s+3}, U(s) = \frac{0.6}{s+3} - \frac{0.1}{s+0.5} = \frac{0.5s}{(s+3)(s+0.5)}$$

则

$$H(s) = \frac{U(s)}{U_s(s)} = \frac{0.5s}{s+0.5}$$

因为 $Z(s) = R + \frac{1}{sC} = 2 + \frac{2}{s}$, 而

$$H(s) = \frac{0.5s}{s+0.5} = \frac{0.5}{1 + \frac{0.5}{s}} = \frac{0.5}{0.25 \times \left(2 + \frac{2}{s}\right) + 0.5} = \frac{2}{\left(2 + \frac{2}{s}\right) + 2}$$

所以将 R 换成 1Ω 电阻, 将 C 换成 0.5H 电感时网络函数 $H'(s)$ 为

$$H'(s) = \frac{2}{(1+0.5s)+2} = \frac{2}{0.5s+3} = \frac{4}{s+6}$$

因此, 将 R 换成 1Ω 电阻, 将 C 换成 0.5H 电感, $u_s(t)$ 换成单位冲激电压源 $u_s(t)=\delta(t)$ V 的零状态响应 $u(t)$ 为

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}[H'(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s+6}\right] = 4e^{-6t}\epsilon(t) \text{ V}$$

13-20 见 [例 13-4]。

13-21 电路如题 13-21 图所示, 网络 N_0 为非含源线性网络。(1) 当 $u_1(t)=\delta(t)$ V, 零状态响应 $u_0(t)=\delta(t)+(e^{-t}-4e^{-2t})\epsilon(t)$ V, 求当 $u_1(t)=3\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t)$ V 时的正弦稳态响应电压 $u_0(t)$ 。

(2) 若已知 $H(j\omega) = \frac{\dot{U}_0}{\dot{U}_1} = \frac{j\omega}{-\omega^2 + j5\omega + 6}$, 求电路的冲激响应 $h(t)$ 。

解 (1) 求正弦稳态响应 $u_0(t)$ 。因为

$$u_1(t) = \delta(t) \text{ V}, u_0(t) = \delta(t) + (e^{-t} - 4e^{-2t})\epsilon(t) \text{ V}$$

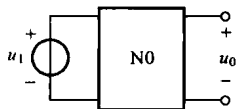
所以

$$U_1(s) = 1, U_0(s) = 1 + \frac{1}{s+1} - \frac{4}{s+2} = \frac{s^2}{s^2 + 3s + 2}$$

因此, 电路的网络函数 $H(s)$ 为

$$H(s) = \frac{U_0(s)}{U_1(s)} = \frac{s^2}{s^2 + 3s + 2}$$

则



题 13-21 图

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{(j\omega)^2}{(j\omega)^2 + j3\omega + 2}$$

所以, 当 $u_1(t) = 3\sqrt{2} \cos(\sqrt{2}t)$ V 时, 正弦稳态响应为

$$\dot{U}_0 = H(j\omega) \Big|_{\omega=\sqrt{2}} \times \dot{U}_1 = \frac{-(\sqrt{2})^2}{-(\sqrt{2})^2 + j3\sqrt{2} + 2} \times 3 = \sqrt{2} \angle 90^\circ \quad (\text{V})$$

则

$$u_0(t) = 2 \cos(\sqrt{2}t + 90^\circ) \text{ V}$$

(2) 求 $h(t)$ 。将已知的 $H(j\omega)$ 可写成

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + j5\omega + 6}$$

所以, 对应的复频域的网络函数为

$$H(s) = H(j\omega) \Big|_{j\omega=s} = \frac{s}{s^2 + 5s + 6} = \frac{-2}{s+2} + \frac{3}{s+3}$$

因此, 冲激响应 $h(t)$ 为

$$h(t) = (3e^{-3t} - 2e^{-2t})\epsilon(t) \text{ V}$$

13-22 某线性时不变电路的单位阶跃响应 $s(t) = (1 - e^{-2t})\epsilon(t)$, 欲使电路的零状态响应 $y_{zs}(t) = (1 - e^{-2t} + te^{-2t})\epsilon(t)$, 求该电路的输入信号 $f(t)$ 。

解 (1) 求电路的网络函数 $H(s)$ 。因为 $s(t) = (1 - e^{-2t})\epsilon(t)$, 所以

$$S(s) = \mathcal{L}[s(t)] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} = \frac{2}{s(s+2)}$$

故

$$H(s) = sS(s) = \frac{2}{s+2}$$

(2) 求电路的输入信号 $f(t)$ 。因为 $y_{zs}(t) = (1 - e^{-2t} + te^{-2t})\epsilon(t)$, 所以

$$Y_{zs}(s) = \mathcal{L}[y_{zs}(t)] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2} = \frac{3s+4}{s(s+2)^2}$$

故

$$F(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{H(s)} = \frac{3s+4}{s(s+2)^2} \cdot \frac{s+2}{2} = \frac{1.5s+2}{s(s+2)} = \frac{1}{s} + \frac{0.5}{s+2}$$

因此

$$f(t) = (1 + 0.5e^{-2t})\epsilon(t)$$

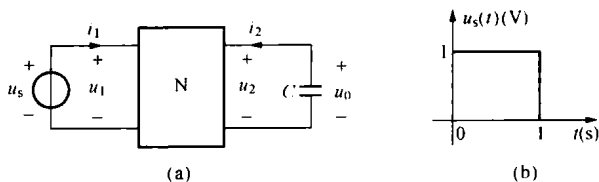
13-23 [提示] 先求电路的网络函数 $H(s)$, 再求单位阶跃响应。

13-24 题 13-24 图 (a) 中双口网络 N 的 Y 参数为

$$\mathbf{Y}(s) = \begin{bmatrix} 10 + \frac{4}{s} & -\frac{4}{s} \\ -\frac{4}{s} & 5 + \frac{4}{s} \end{bmatrix}$$

$u_s(t)$ 的波形如题 13-24 图 (b) 所示, $C=1\text{F}$ 。求: (1) 网络函数 $H(s) = \frac{U_0(s)}{U_s(s)}$; (2) 零状态响应 $u_0(t)$ 。

解 (1) 求网络函数 $H(s)$ 。双口网络 Y 参数方程及其端口外接电路 VAR 的运算形式



题 13-24 图

分别为

$$\begin{cases} I_1(s) = \frac{10s+4}{s}U_1(s) - \frac{4}{s}U_2(s) \\ I_2(s) = -\frac{4}{s}U_1(s) + \frac{5s+4}{s}U_2(s) \end{cases}, \begin{cases} U_1(s) = U_s(s) = \frac{1}{s}(1-e^{-s}) \\ U_2(s) = -\frac{1}{sC}I_2(s) = -\frac{1}{s}I_2(s) \end{cases}$$

对上述 4 个方程联立求解, 得

$$U_0(s) = \frac{4}{s^2+5s+4}U_s(s)$$

因此

$$H(s) = \frac{U_0(s)}{U_s(s)} = \frac{4}{s^2+5s+4}$$

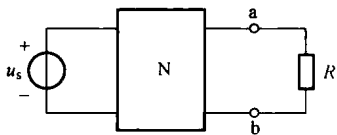
(2) 求零状态响应 $u_0(t)$ 。因为

$$\begin{aligned} U_0(s) &= \frac{4}{s^2+5s+4}U_s(s) = \frac{4}{s^2+5s+4} \cdot \frac{1}{s}(1-e^{-s}) = \frac{4}{s(s+1)(s+4)}(1-e^{-s}) \\ &= \left(\frac{1}{s} - \frac{\frac{4}{3}}{s+1} + \frac{\frac{1}{3}}{s+4} \right) (1-e^{-s}) \end{aligned}$$

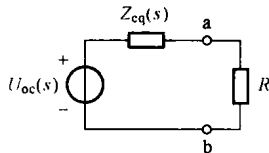
所以

$$u_0(t) = \left(1 - \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t} \right) \epsilon(t) - \left[1 - \frac{4}{3}e^{-(t-1)} + \frac{1}{3}e^{-4(t-1)} \right] \epsilon(t-1) \text{ V}$$

13-25 题 13-25 图所示电路中, N 为非含源的线性时不变网络。已知当 ab 端开路, 即 $R=\infty$ 时, 电压 $u_{ab}(t)$ 的冲激响应 $h_u(t) = 2e^{-2t}\epsilon(t)$ V; 当 ab 端口短路, 即 $R=0$ 时, 电流 $i_{ab}(t)$ 的单位阶跃响应 $s_i(t) = 0.5(1-e^{-4t})\epsilon(t)$ A。求当 $R=1\Omega$ 、 $u_s(t) = 18e^{-2t}\epsilon(t)$ V 时, 该电阻电压的零状态响应 $u_{ab}(t)$ 。



题 13-25 图



题 13-25 解图

解 将题 13-25 图所示电路中 ab 左侧部分用其戴维南等效电路代替, 电路如题 13-25 解图所示。根据题意, $R=\infty$ 时

$$H_u(s) = \mathcal{L}[h_u(t)] = \frac{2}{s+2}$$

当 $R=0$ 时

$$S_i(s) = \mathcal{L}[s_i(t)] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+4} \right) = \frac{2}{s(s+4)}$$

则 $H_i(s) = sS_i(s) = \frac{2}{s+4}$

所以 $Z_{\text{eq}}(s) = \frac{H_u(s)}{H_i(s)} = \frac{s+4}{s+2}$

当 $u_s(t) = 18e^{-2t}\epsilon(t)$ V 时, $U_s(s) = \mathcal{L}[u_s(t)] = \frac{18}{s+2}$, 则

$$U_{\infty}(s) = H_u(s)U_s(s) = \frac{2}{s+2} \times \frac{18}{s+2} = \frac{36}{(s+2)^2}$$

因此

$$U_{\text{ab}}(s) = \frac{R}{Z_{\text{eq}}(s)+R} \cdot U_{\infty}(s) = \frac{1}{\frac{s+4}{s+2}+1} \times \frac{36}{(s+2)^2} = \frac{18}{(s+2)(s+3)} = \frac{18}{s+2} - \frac{18}{s+3}$$

故得 $u_{\text{ab}}(t) = 18(e^{-2t} - e^{-3t})\epsilon(t)$ V

13.5 自测题及参考答案

1. 求下列各函数 $f(t)$ 的象函数 $F(s)$ 。

(1) $f(t) = 1 + 2t + 3e^{-4t}$; (2) $f(t) = 5\sin t + 4\cos t$

(3) $f(t) = e^{-t}\epsilon(t) + e^{-(t-2)}\epsilon(t-2) + \delta(t-1)$

2. 求下列各象函数 $F(s)$ 的原函数 $f(t)$ 。

(1) $F(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 11s + 9}{s^2 + 3s + 2}$; (2) $F(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2(s+2)}$

(3) $F(s) = \frac{s+3}{s^2+2s+5}$; (4) $F(s) = \frac{2+3e^{-s}}{s+1}$

3. 图 1 所示电路开关 S 动作前处于稳态, $t=0$ 时开关 S 打开。试用运算法求 $t>0$ 时电流 $i_L(t)$ 和电压 $u_o(t)$ 。

4. 图 2 所示电路在开关 S 闭合前处于稳态, $u_{C1}(0_-) = 0$ 。 $t=0$ 时将开关 S 闭合, 用运算法求 $t>0$ 时的电容电压 $u_{C2}(t)$ 。

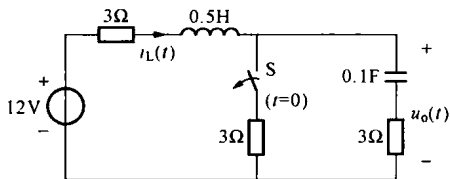


图 1

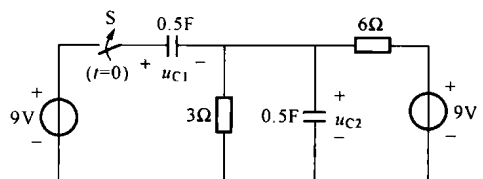


图 2

5. 图 3 所示电路开关 S 动作前已达稳态, $t=0$ 时开关 S 断开。用复频域分析法求电容电压 $u_C(t)$ 。

6. 求图 4 所示电路的网络函数 $H(s) = \frac{I_o(s)}{I_s(s)}$ 。

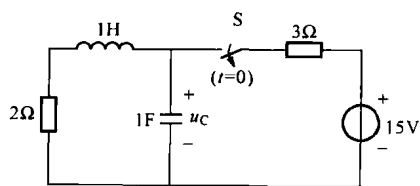


图 3

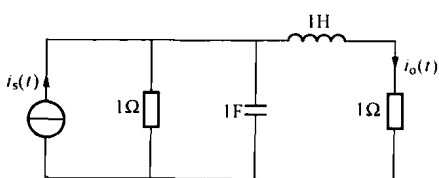


图 4

7. 图5所示电路中, N 为不含独立电源的线性时不变网络, $u_s(t)$ 为激励, $u(t)$ 为响应。已知其零输入响应为 $e^{-t} \text{ V}(t>0)$; 初始条件不变, $u_s(t)=\delta(t) \text{ V}$ 时的全响应为 $3e^{-t} \text{ V}(t>0)$ 。求: (1) $u_s(t)=5\epsilon(t-1) \text{ V}$ 时的全响应; (2) $u_s(t)=2\sqrt{2}\sin(t+30^\circ) \text{ V}$ 时的正弦稳态响应。

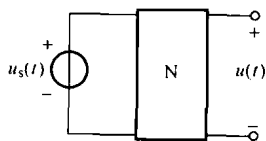


图 5

参考答案

- (1) $\frac{4s^2+6s+8}{s^2(s+4)}$; (2) $\frac{4s+5}{s^2+1}$; (3) $\frac{1+e^{-2s}}{s+1}+e^{-s}$
- (1) $\delta'(t)+2\delta(t)+(e^{-2t}+2e^{-t})\epsilon(t)$; (2) $(2t-1)e^{-t}+e^{-2t}$;
(3) $\sqrt{2}e^{-t}\cos(2t-45^\circ)$; (4) $2e^{-t}\epsilon(t)+3e^{-(t-1)}\epsilon(t-1)$
- $i_L(t)=e^{-10t}+e^{-2t} \text{ A}$; $u_o(t)=12+2e^{-10t}-2e^{-2t} \text{ V}$
- $3+3e^{-0.5t} \text{ V}$;
- $(6+3t)e^{-t} \text{ V}$;
- $\frac{1}{s^2+2s+2}$
- $e^{-t}\epsilon(t)+10[1-e^{-(t-1)}]\epsilon(t-1) \text{ V}$; $4\sin(t-15^\circ) \text{ V}$

第 14 章 电路代数方程的矩阵形式

14.1 本章知识结构图

第 14 章知识结构图如图 14-1 所示。

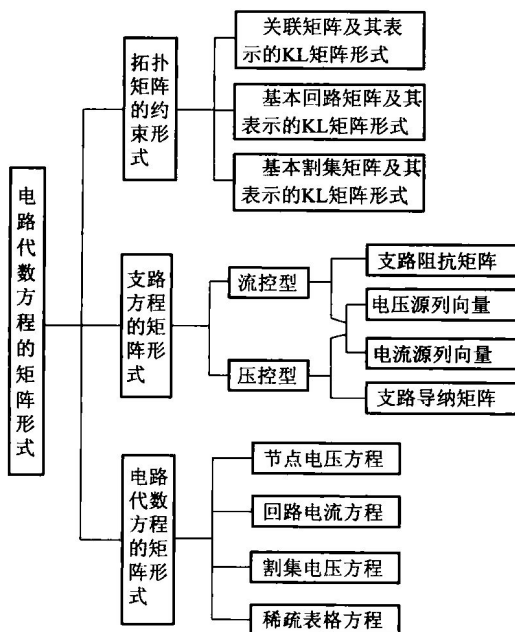


图 14-1 第 14 章知识结构图

14.2 知识点归纳与学习指导

本章讨论线性电路代数方程的矩阵形式。学习本章前，应首先复习第 3 章图论的基本知识内容，特别要掌握树、基本回路和基本割集的概念以及选取方法。

14.2.1 图的矩阵表示与基尔霍夫定律的矩阵形式

1. 图的矩阵表示

(1) 关联矩阵 A 。关联矩阵描述了有向图中支路和节点的关联性质（连接方式）。它的行对应于节点，列对应于支路。描述支路和所有节点关联性质的矩阵称为增广关联矩阵；描述支路和独立节点关联性质的矩阵称为降阶关联矩阵，简称关联矩阵。设 $A=[a_{ij}]$ ，则其任一元素 a_{ij} 定义如下：

$$a_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{表示支路 } j \text{ 和节点 } i \text{ 关联, 且它的方向为离开节点 (正向关联)} \\ -1 & \text{表示支路 } j \text{ 和节点 } i \text{ 关联, 且它的方向为指向节点 (反向关联)} \\ 0 & \text{表示支路 } j \text{ 和节点 } i \text{ 非关联} \end{cases}$$

(2) 基本回路矩阵 B_f 。基本回路矩阵描述了有向图中支路与基本回路的关联性质。它的行对应于回路, 列对应于支路。设 $B_f = [b_{ij}]$, 则其任一元素 b_{ij} 定义如下:

$$b_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{表示支路 } j \text{ 属于回路 } i, \text{ 且二者方向一致 (正向关联)} \\ -1 & \text{表示支路 } j \text{ 属于回路 } i, \text{ 且二者方向相反 (反向关联)} \\ 0 & \text{表示支路 } j \text{ 不属于回路 } i \end{cases}$$

(3) 基本割集矩阵 Q_f 。基本割集矩阵描述了有向图中支路与基本割集的关联性质。它的行对应于割集, 列对应于支路。设 $Q_f = [q_{ij}]$, 则其任一元素 q_{ij} 定义如下:

$$q_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{表示支路 } j \text{ 属于割集 } i, \text{ 且二者方向一致 (正向关联)} \\ -1 & \text{表示支路 } j \text{ 属于割集 } i, \text{ 且二者方向相反 (反向关联)} \\ 0 & \text{表示支路 } j \text{ 不属于割集 } i \end{cases}$$

学习过程中, 上述三个矩阵的列写规律需要记忆, 正确写出这三个矩阵是本章的基本功之一。找对基本回路和基本割集分别是正确列写基本回路矩阵和基本割集矩阵的前提。

(4) A 、 B_f 和 Q_f 之间的关系。若按先连支、后树支的顺序对支路编号, 并取基本回路和基本割集编号分别为连支和树支编号, 则

$$A = [A_l \quad A_t], \quad B_f = [1_l \quad B_t], \quad Q_f = [Q_l \quad 1_t]$$

式中: 1 为单位矩阵, 且有

$$B_t^T = -A_t^{-1}A_l, \quad Q_l = -B_t^T = A_t^{-1}A_l$$

【例 14-1】 电路的有向图如图 14-2 (a) 所示。以 1、2、3 支路为树支, 分别写出该有向图的关联矩阵 A 、基本回路矩阵 B_f 和基本割集矩阵 Q_f 。

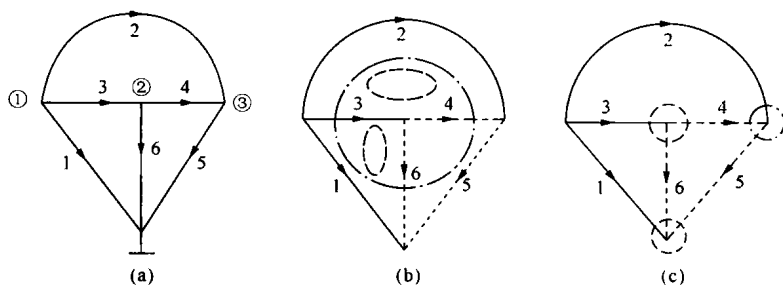


图 14-2 [例 14-1] 图

解 关联矩阵 A 为

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

基本回路如图 14-2 (b) 所示, 基本回路矩阵 B_f 为

$$\mathbf{B}_f = \begin{matrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

基本割集如图 14-2 (c) 所示, 基本割集矩阵 \mathbf{Q}_f 为

$$\mathbf{Q}_f = \begin{matrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2. 基尔霍夫定律的矩阵形式

关联矩阵、基本回路矩阵和基本割集矩阵表示的基尔霍夫定律的矩阵形式见表 14-1。

表 14-1 基尔霍夫定律的矩阵形式

表示矩阵	KCL 方程	KVL 方程	说 明
关联矩阵 \mathbf{A}	$\mathbf{A}\mathbf{i}_b = \mathbf{0}$	$\mathbf{u}_b = \mathbf{A}^T \mathbf{u}_n$	i_b 和 i_i 分别为支路电流列向量和连支电流列向量; u_b 、 u_n 和 u_i 分别为支路电压列向量、节点电压列向量和树支电压列向量
基本回路矩阵 \mathbf{B}_f	$\mathbf{i}_b = \mathbf{B}_f^T \mathbf{i}_l$	$\mathbf{B}_f \mathbf{u}_b = \mathbf{0}$	
基本割集矩阵 \mathbf{Q}_f	$\mathbf{Q}_f \mathbf{i}_b = \mathbf{0}$	$\mathbf{u}_b = \mathbf{Q}_f^T \mathbf{u}_i$	

由表 14-1 可知, 只有给出所有的树支电压或节点电压, 才能确定出所有的支路电压; 只有已知全部的连支电流, 才能确定所有的支路电流。

14.2.2 支路方程的矩阵形式

选取支路的方式主要有两种: 元件级支路 (元件的每个端口选作一条支路) 和复合支路 (又称为一般支路或标准支路)。

元件级支路方程的矩阵形式具有如下一般形式

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{i}}_b + \mathbf{N}\dot{\mathbf{u}}_b = \dot{\mathbf{U}}_s + \dot{\mathbf{I}}_s$$

它是由元件 VAR 按支路顺序直接罗列起来构成的, 列写方式较为简单。

复合支路由一个二端元件或多口元件的一个端口、电压源和电流源构成, 如图 14-3 所示。图中下标 k 表示第 k 条支路, \dot{U}_{sk} 和 \dot{I}_{sk} 分别表示独立电压源和独立电流源; \dot{U}_{dk} 和 \dot{I}_{dk} 分别表示受控电压源和受控电流源; Z_k (或 Y_k) 表示支路阻抗 (或导纳)。

图 14-3 中规定, 支路电压与支路电流采用关联参考方向, 但独立电源的方向均与支路电流方向相反。复合支路规定了一条支路最多可包含的元件及其连接方式, 但根据选用的分析方法, 可以允许一条支路缺少其中某些元件。但应该注意, 选择的分析方法不同, 允许缺少的元件是有所区别的。如果支路中没有独立电压源 (或电流源), 相当于电压源电压 (或电流源电流) 为零。

压控型支路方程的矩阵形式:

$$\dot{\mathbf{i}}_b = \mathbf{Y}_b \dot{\mathbf{U}}_b + \mathbf{Y}_b \dot{\mathbf{U}}_s - \dot{\mathbf{I}}_s$$

流控型支路方程的矩阵形式:

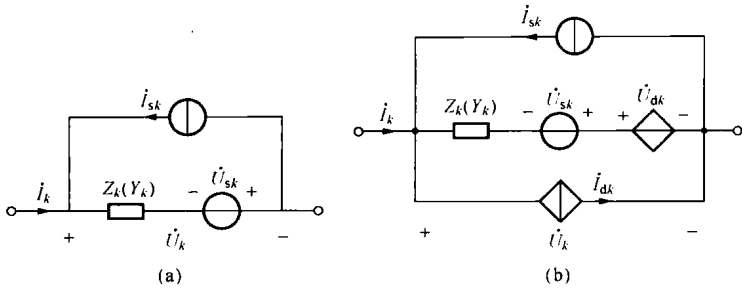


图 14-3 复合支路

(a) 无受控源；(b) 含受控源

$$\dot{U}_b = \mathbf{Z}_b \dot{\mathbf{I}}_b + \mathbf{Z}_b \dot{\mathbf{I}}_s - \dot{\mathbf{U}}_s$$

式中， \dot{U}_b 和 \dot{I}_b 分别为支路电压列向量和支路电流列向量； \dot{U}_s 和 \dot{I}_s 分别为支路电压源电压列向量和支路电流源电流列向量； \dot{U}_s 和 \dot{I}_s 的元素分别为相应支路的独立电压源电压（无独立电压源取 0）和独立电流源电流（无独立电流源取 0）。电源方向与复合支路规定的一致时，直接填入，相反时加负号填入。 \mathbf{Z}_b 和 \mathbf{Y}_b 分别称为支路阻抗矩阵和支路导纳矩阵，且有 $\mathbf{Y}_b = \mathbf{Z}_b^{-1}$ 。对于仅由二端元件组成的电路， \mathbf{Y}_b 和 \mathbf{Z}_b 均为一对角矩阵，其对角元素分别为相应支路的导纳和阻抗，即

$$\mathbf{Y}_b = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Y_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Y_b \end{bmatrix} = \text{diag}[Y_1 \ Y_2 \ \cdots \ Y_b], \mathbf{Z}_b = \text{diag}[Z_1 \ Z_2 \ \cdots \ Z_b]$$

如果电路含有受控源等多口元件，则 \mathbf{Z}_b 和 \mathbf{Y}_b 不再是对角矩阵。二端元件支路对应的行仍然只有对角元素不为 0，其值仍为相应支路的导纳和阻抗；含多口元件的支路对应的行出现非零的非对角元素，将独立源置零，写出该支路的 VAR 可填写相应的行元素。

【例 14-2】 电路及其有向图如图 14-4 所示，试写出该电路的支路阻抗矩阵 \mathbf{Z}_b ，支路导纳矩阵 \mathbf{Y}_b ，电压源列向量 \mathbf{U}_s 和电流源列向量 \mathbf{I}_s 。

解 支路电压源列向量和电流源列向量分别为

$$\mathbf{U}_s = [0 \ 5 \ 0 \ -6 \ 0 \ 0]^T, \mathbf{I}_s = [0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

本题只有第 1 条支路因有耦合需单独处理。该支路的流控型方程为

$$U_1 = 1 \times (I_1 + 3I) = I_1 + 3I_5$$

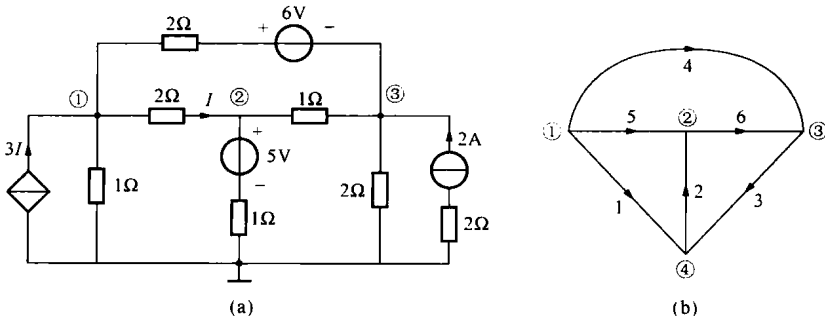


图 14-4 [例 14-2] 图

则支路阻抗矩阵为

$$\mathbf{Z}_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Omega$$

第 1 条支路的压控型方程为

$$I_1 = \frac{U_1}{1} - 3I = U_1 - 3 \times \frac{U_5}{2} = U_1 - 1.5U_5$$

所以，支路导纳矩阵为

$$\mathbf{Y}_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{S}$$

注意，与电流源串联的电阻为多余元件，短路处理。

14.2.3 电路代数方程的矩阵形式

(1) 节点电压方程的矩阵形式

$$\mathbf{A}\mathbf{Y}_b\mathbf{A}^T\dot{\mathbf{U}}_n = \mathbf{A}\dot{\mathbf{I}}_s - \mathbf{A}\mathbf{Y}_b\dot{\mathbf{U}}_s$$

节点导纳矩阵为 $\mathbf{Y}_n = \mathbf{A}\mathbf{Y}_b\mathbf{A}^T$ 。显然，只要写出 \mathbf{A} 、 \mathbf{Y}_b 、 $\dot{\mathbf{I}}_s$ 和 $\dot{\mathbf{U}}_s$ 四个矩阵，代入方程经过矩阵运算即可导出节点电压方程的矩阵形式。

(2) 回路电流方程的矩阵形式

$$\mathbf{B}_f\mathbf{Z}_b\mathbf{B}_f^T\dot{\mathbf{I}}_l = \mathbf{B}_f\dot{\mathbf{U}}_s - \mathbf{B}_f\mathbf{Z}_b\dot{\mathbf{I}}_s$$

回路阻抗矩阵为 $\mathbf{Z}_l = \mathbf{B}_f\mathbf{Z}_b\mathbf{B}_f^T$ 。显然，只要写出 \mathbf{B}_f 、 \mathbf{Z}_b 、 $\dot{\mathbf{U}}_s$ 和 $\dot{\mathbf{I}}_s$ 四个矩阵，代入方程经过矩阵运算即可导出回路电流方程的矩阵形式。

(3) 割集电压方程的矩阵形式。割集分析法，简称割集法，是一种以树支电压为电路变量建立电路方程进行分析计算的方法，相应的电路方程称为割集电压方程，其矩阵形式为

$$\mathbf{Q}_f\mathbf{Y}_b\mathbf{Q}_f^T\dot{\mathbf{U}}_t = \mathbf{Q}_f\dot{\mathbf{I}}_s - \mathbf{Q}_f\mathbf{Y}_b\dot{\mathbf{U}}_s$$

割集导纳矩阵为 $\mathbf{Y}_t = \mathbf{Q}_f\mathbf{Y}_b\mathbf{Q}_f^T$ 。显然，只要写出 \mathbf{Q}_f 、 \mathbf{Y}_b 、 $\dot{\mathbf{U}}_s$ 和 $\dot{\mathbf{I}}_s$ ，代入方程经过矩阵运算即可导出割集电压方程的矩阵形式。

(4) 稀疏表格方程。稀疏表格法是一种把电路的 KCL 方程、KVL 方程和支路方程全部罗列出来的方法。这一方法有多种不同的形式，常用的是使用元件级支路、以关联矩阵为基础的稀疏表格法。该方法将全部支路电流、支路电压和节点电压作为未知量来建立电路方程（称为稀疏表格方程），其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & -\mathbf{A}^T \\ \mathbf{M} & \mathbf{N} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{i}}_b \\ \dot{\mathbf{U}}_b \\ \dot{\mathbf{U}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{U}}_s + \dot{\mathbf{i}}_s \end{bmatrix}$$

列写稀疏表格方程的步骤为:

- 1) 画出电路的有向图, 选定参考点, 写出 (降阶) 关联矩阵 \mathbf{A} 。
- 2) 写出用 \mathbf{A} 表示的 KCL 方程和 KVL 方程的矩阵形式, 即

$$\text{KCL: } \mathbf{A}\dot{\mathbf{i}}_b = \mathbf{0}$$

$$\text{KVL: } \dot{\mathbf{U}}_b - \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{U}}_n = \mathbf{0}$$

- 3) 写出支路方程的矩阵形式, 即

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{i}}_b + \mathbf{N}\dot{\mathbf{U}}_b = \dot{\mathbf{U}}_s + \dot{\mathbf{i}}_s$$

- 4) 合并上述诸方程形成稀疏表格方程。

14.3 重点、难点与考点

重点与难点

本章的重点是节点电压方程的矩阵形式、回路电流方程的矩阵形式和割集电压方程的矩阵形式的列写。涉及关联矩阵、基本回路矩阵和基本割集矩阵以及支路电压源电压列向量、支路电流源电流列向量、支路阻抗矩阵和支路导纳矩阵等 7 个矩阵的列写。难点为基本回路矩阵和基本割集矩阵的列写以及含耦合支路时支路阻抗矩阵和支路导纳矩阵的列写。

考点

本章考试的重点和热点主要集中在列写节点电压方程的矩阵形式、基本回路矩阵和基本割集矩阵。

14.4 第 14 章习题选解

14-1 (1) 试写出题 14-1 图所示各拓扑图的关联矩阵 \mathbf{A} 。

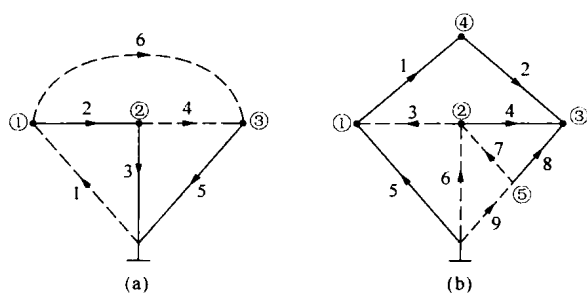
(2) 若已知一有向图的关联矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

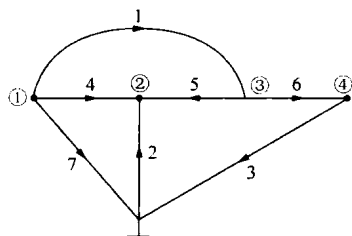
试画出此有向图。

解 (1) (a) 关联矩阵 \mathbf{A} 为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$



题 14-1 图



题 14-1 解图

(b) 关联矩阵 \mathbf{A} 为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(2) 由已知的关联矩阵 \mathbf{A} 可知, 此有向图具有 5 (行数+1) 个节点, 7 (列数) 条支路。支路 1、4、5、6 (列具有 2 个非零元素 1 和 -1) 连接在两个非参考节点之间, 如支路 1 连接在节点 1 和 3 之间, 方向由节点 1 指向节点 3; 支路 2、3、7 (列具有 1 个非零元) 与参考节点相连, 如支路 3 连接在节点 4 与参考节点之间, 方向由节点 4 指向参考节点。由此可得有向图如题 14-1 解图所示。

14-2 在题 14-1 图所示各有向图中, 实线为树。试分别写出它们的基本回路矩阵 \mathbf{B}_f 和基本割集矩阵 \mathbf{Q}_f 。

解 (a) 以支路 1、4、6 为连支的基本回路分别为

$$l_1(1, 2, 3), l_2(3, 4, 5), l_3(2, 3, 5, 6)$$

基本回路矩阵 \mathbf{B}_f 为

$$\mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

以支路 2、3、5 为树支的基本割集分别为

$$q_1(1, 2, 6), q_2(1, 3, 4, 6), q_3(4, 5, 6)$$

基本割集矩阵 \mathbf{Q}_f 为

$$\mathbf{Q}_f = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) 以支路 3、6、7、9 为连支的基本回路分别为

$$l_1(1, 2, 3, 4), l_2(1, 2, 4, 5, 6), l_3(4, 7, 8), l_4(1, 2, 5, 8, 9)$$

基本回路矩阵 \mathbf{B}_f 为

$$B_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

以支路 1、2、4、5、8 为树支的基本割集分别为

$$q_1(1,3,6,9), q_2(2,3,6,9), q_3(3,4,6,7), q_4(5,6,9), q_5(7,8,9)$$

基本割集矩阵 Q_f 为

$$Q_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

14-3 电路及其有向图分别如题 14-3 图 (a)、(b) 所示, 写出该电路的支路导纳矩阵

Y_b 、支路阻抗矩阵 Z_b 、支路电压源列向量 \dot{U}_s 和支路电流源列向量 \dot{i}_s 。

解 (1) 支路导纳矩阵为

$$Y_b = \text{diag} \left[j\omega C_1 \quad \frac{1}{R_2} \quad \frac{1}{R_3} \quad \frac{1}{R_4} \quad \frac{1}{R_5} \quad \frac{1}{j\omega L_6} \right]$$

(2) 支路阻抗矩阵为

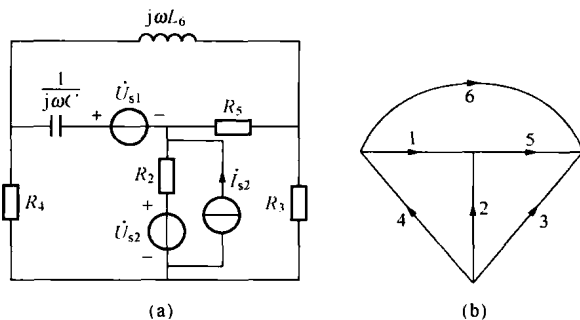
$$Z_b = \text{diag} \left[\frac{1}{j\omega C_1} \quad R_2 \quad R_3 \quad R_4 \quad R_5 \quad j\omega L_6 \right]$$

(3) 支路电压源列向量和支路电流源列向量分别为

$$\dot{U}_s = [-\dot{U}_{s1} \quad \dot{U}_{s2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$\dot{i}_s = [0 \quad -\dot{i}_{s2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

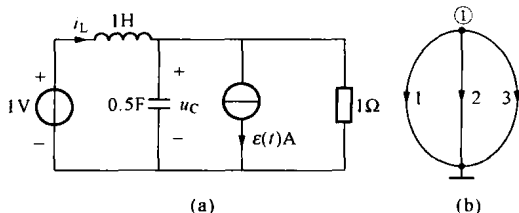
注: 对于二端元件组成的支路, 支路导纳矩阵和支路阻抗矩阵相应的对角元素分别为该支路的导纳和阻抗。



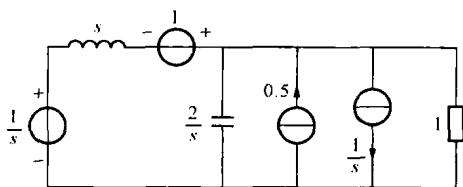
题 14-3 图

14-4 题 14-4 图 (a) 所示电路在 $t < 0$ 时已处于稳态, 其有向图如题

14-4 图 (b) 所示。试写出该电路对应的运算电路的关联矩阵、支路阻抗矩阵、支路导纳矩阵以及支路电压源列向量和支路电流源列向量。



题 14-4 图



题 14-4 解图

解 由 0_- 时刻电路可得 $u_C(0_-) = 1\text{V}$, $i_L(0_-) = 1/1 = 1(\text{A})$ 。运算电路如题 14-4 解图所示。关联矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

支路阻抗矩阵和支路导纳矩阵分别为

$$\mathbf{Z}_b = \text{diag}[s \quad 2/s \quad 1], \quad \mathbf{Y}_b = \text{diag}[1/s \quad 0.5s \quad 1]$$

支路电压源列向量和支路电流源列向量分别为

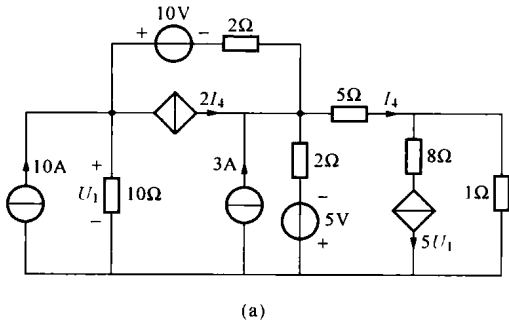
$$\mathbf{U}_s(s) = \begin{bmatrix} -\frac{s+1}{s} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{I}_s(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & -\frac{1}{s} \end{bmatrix}^T$$

注: 各个矩阵的列写方法与电阻电路相同。但应特别注意, 运算电路中的独立电源不仅包括外加独立电源, 也包括电容、电感初始储能的等效附加电源。

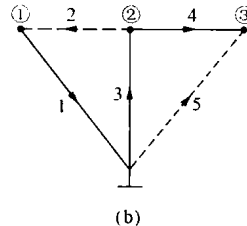
14-5 题 14-5 图 (a) 所示电路的有向图如题 14-5 图 (b) 所示, 实线为树支, 虚线为连支。试写出其关联矩阵 \mathbf{A} 、基本回路矩阵 \mathbf{B}_f 、基本割集矩阵 \mathbf{Q}_f 、支路电阻矩阵 \mathbf{R}_b 、支路电导矩阵 \mathbf{G}_b 以及支路电压源列向量 \mathbf{U}_s 和支路电流源列向量 \mathbf{I}_s 。

解 基本回路和基本割集分别如题 14-5 解图所示。有向图的关联矩阵 \mathbf{A} 、基本回路矩阵 \mathbf{B}_f 和基本割集矩阵 \mathbf{Q}_f 分别为

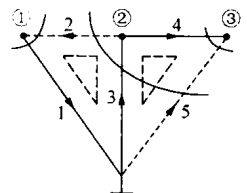
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



题 14-5 图



(b)



题 14-5 解图

支路电压源列向量 \mathbf{U}_s 和支路电流源列向量 \mathbf{I}_s 分别为

$$\mathbf{U}_s = [0 \quad 10 \quad -5 \quad 0 \quad 0]^T, \quad \mathbf{I}_s = [10 \quad 0 \quad -3 \quad 0 \quad 0]^T$$

为了写出支路电阻矩阵, 应将支路方程写成流控型, 即

$$U_2 = 2(I_2 + 2I_4) = 2I_2 + 4I_4$$

$$U_5 = 1 \times (5U_1 + I_5) = 5 \times 10I_1 + I_5 = 50I_1 + I_5$$

则支路电阻矩阵为

$$\mathbf{R}_b = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 50 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Omega$$

为了写出支路电导矩阵, 应将支路方程写成压控型, 即

$$I_2 = \frac{U_2}{2} - 2I_4 = 0.5U_2 - 2 \times \frac{U_4}{5} = 0.5U_2 - 0.4U_4$$

$$I_3 = -5U_1 + \frac{U_5}{1} = -5U_1 + U_5$$

则支路电导矩阵为

$$\mathbf{G}_b = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{S}$$

注: (1) 支路电阻矩阵和支路电导矩阵与电路中的独立电源无关, 故列写二者时可将独立源置零。

(2) 矩阵方程的右端项规定了复合支路中独立电源的方向。本例节点电压方程的矩阵形式为 $\mathbf{AG}_b \mathbf{A}^T \mathbf{U}_n = \mathbf{AI}_s - \mathbf{AG}_b \mathbf{U}_s$ 。若设节点电压方程的矩阵形式为

$$\mathbf{AG}_b \mathbf{A}^T \mathbf{U}_n = \mathbf{AI}_s + \mathbf{AG}_b \mathbf{U}_s$$

则独立电流源的方向与前一致, 独立电压源的方向与前相反, 此时支路电流源列向量 \mathbf{I}_s 同上, 而支路电压源列向量 \mathbf{U}_s 应变为 $\mathbf{U}_s = [0 \quad -10 \quad +5 \quad 0 \quad 0]^T$ 。

14-6 正弦稳态电路及其有向图分别如题 14-6 图 (a)、(b) 所示。试写出该电路的支路阻抗矩阵 \mathbf{Z}_b , 支路导纳矩阵 \mathbf{Y}_b , 支路电压源列向量 $\dot{\mathbf{U}}_s$ 和支路电流源列向量 $\dot{\mathbf{I}}_s$ 。

解 支路 3、4、5 的流控型支路伏安关系分别为

$$\dot{U}_3 = \frac{\dot{I}_3 + g \dot{U}_6}{G_3} = \frac{\dot{I}_3}{G_3} + \frac{g}{j\omega C_6 G_3} \dot{I}_6$$

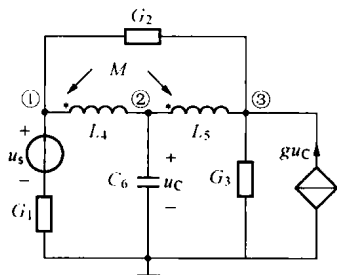
$$\dot{U}_4 = j\omega L_4 \dot{I}_4 + j\omega M \dot{I}_5$$

$$\dot{U}_5 = j\omega M \dot{I}_4 + j\omega L_5 \dot{I}_5$$

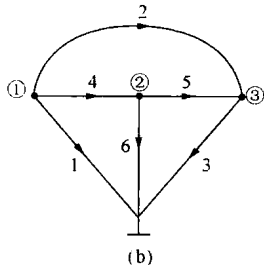
所以, 支路阻抗矩阵为

$$\mathbf{Z}_b = \begin{bmatrix} \frac{1}{G_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{G_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_3} & 0 & 0 & \frac{g}{j\omega C_6 G_3} \\ 0 & 0 & 0 & j\omega L_4 & j\omega M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j\omega M & j\omega L_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{j\omega C_6} \end{bmatrix}$$

支路 4 和 5 的压控型支路伏安关系为



(a)



(b)

题 14-6 图

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_4 \\ \dot{I}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L_4 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{U}_4 \\ \dot{U}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_5}{\Delta} & -\frac{M}{\Delta} \\ -\frac{M}{\Delta} & \frac{L_4}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_4 \\ \dot{U}_5 \end{bmatrix}$$

即

$$\dot{I}_4 = \frac{L_5}{\Delta} \dot{U}_4 - \frac{M}{\Delta} \dot{U}_5$$

$$\dot{I}_5 = -\frac{M}{\Delta} \dot{U}_4 + \frac{L_4}{\Delta} \dot{U}_5$$

$$\Delta = j\omega(L_4 L_5 - M^2)$$

支路3的压控型支路伏安关系为

$$\dot{I}_3 = G_3 \dot{U}_3 - g \dot{U}_6$$

所以,支路导纳矩阵为

$$\mathbf{Y}_b = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 & -g \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_5}{\Delta} & -\frac{M}{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{M}{\Delta} & \frac{L_4}{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j\omega C_6 \end{bmatrix}$$

支路电压源列向量 $\dot{\mathbf{U}}_s$ 和支路电流源列向量 $\dot{\mathbf{I}}_s$ 分别为

$$\dot{\mathbf{U}}_s = [-\dot{U}_s \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \dot{\mathbf{I}}_s = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

14-7 正弦稳态电路及其有向图分别如题14-7图(a)、(b)所示,试写出该电路相量形式的节点电压方程的矩阵形式。

解 关联矩阵和支路导纳矩阵分别为

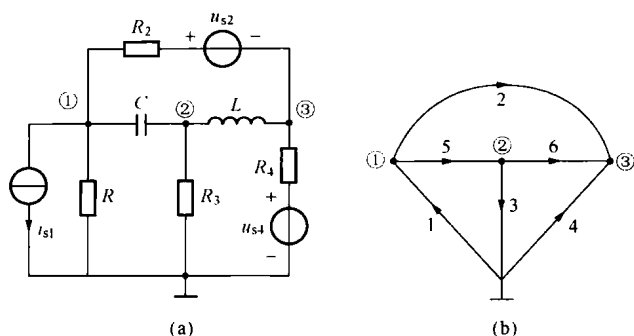
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_b = \text{diag} \left[\frac{1}{R_1} \quad \frac{1}{R_2} \quad \frac{1}{R_3} \quad \frac{1}{R_4} \quad j\omega C \quad \frac{1}{j\omega L} \right]$$

则节点导纳矩阵为

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{A} \mathbf{Y}_b \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + j\omega C & -j\omega C & -\frac{1}{R_2} \\ -j\omega C & \frac{1}{R_3} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} & -\frac{1}{j\omega L} \\ -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{j\omega L} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{j\omega L} \end{bmatrix}$$

支路电压源列向量和支路电流源列相量分别为



题 14-7 图

$$\dot{\mathbf{i}}_s = [\dot{i}_{s1} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad \dot{\mathbf{U}}_s = [0 \ -\dot{U}_{s2} \ 0 \ \dot{U}_{s4} \ 0 \ 0]^T$$

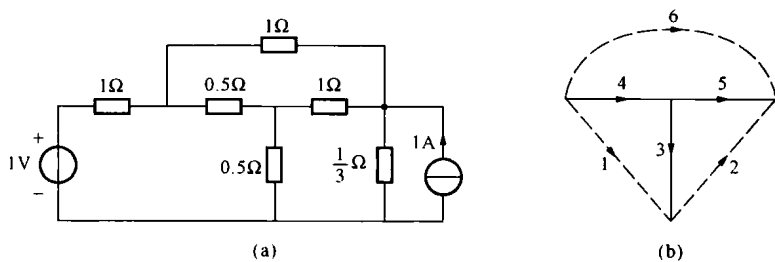
则

$$\mathbf{J}_n = \mathbf{A} \dot{\mathbf{i}}_s - \mathbf{A} \mathbf{Y}_b \dot{\mathbf{U}}_s = \left[-\dot{i}_{s1} + \frac{\dot{U}_{s2}}{R_2} \quad 0 \quad -\frac{\dot{U}_{s2}}{R_2} + \frac{\dot{U}_{s4}}{R_4} \right]^T$$

因此，矩阵形式的节点电压方程为

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + j\omega C & -j\omega C & -\frac{1}{R_2} \\ -j\omega C & \frac{1}{R_3} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} & -\frac{1}{j\omega L} \\ -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{j\omega L} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{j\omega L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{n1} \\ \dot{U}_{n2} \\ \dot{U}_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{i}_{s1} + \frac{\dot{U}_{s2}}{R_2} \\ 0 \\ -\frac{\dot{U}_{s2}}{R_2} + \frac{\dot{U}_{s4}}{R_4} \end{bmatrix}$$

14-8 电路及其有向图如题 14-8 图 (a)、(b) 所示，题 14-8 图 (b) 中实线为树支。试分别写出该电路回路电流方程和割集电压方程的矩阵形式。



题 14-8 图

解 (1) 列写电路回路电流方程的矩阵形式。基本回路矩阵为

$$\mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

支路阻抗矩阵为

$$\mathbf{Z}_b = \text{diag}\left[1 \quad \frac{1}{3} \quad 0.5 \quad 0.5 \quad 1 \quad 1\right]$$

则回路阻抗矩阵为

$$\mathbf{Z}_l = \mathbf{B}_f \mathbf{Z}_b \mathbf{B}_f^T = \begin{bmatrix} 2 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & \frac{11}{6} & 1 \\ 0.5 & 1 & 2.5 \end{bmatrix} \Omega$$

支路电压源列向量和支路电流源列向量分别为

$$\mathbf{U}_s = [-1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, \quad \mathbf{I}_s = [0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

则

$$\mathbf{E}_l = \mathbf{B}_f \mathbf{U}_s - \mathbf{B}_f \mathbf{Z}_b \mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}^T$$

因此, 回路电流方程的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 2 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & \frac{11}{6} & 1 \\ 0.5 & 1 & 2.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{l1} \\ I_{l2} \\ I_{l3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2) 列写电路割集电压方程的矩阵形式。基本割集矩阵为

$$\mathbf{Q}_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

支路导纳矩阵为

$$\mathbf{Y}_b = \text{diag}[1 \quad 3 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 1]$$

则割集导纳矩阵为

$$\mathbf{Y}_l = \mathbf{Q}_f \mathbf{Y}_b \mathbf{Q}_f^T = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{S}$$

支路电压源列向量和支路电流源列向量分别为

$$\mathbf{U}_s = [-1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, \quad \mathbf{I}_s = [0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

则

$$\mathbf{J}_l = \mathbf{Q}_f \mathbf{I}_s - \mathbf{Q}_f \mathbf{Y}_b \mathbf{U}_s = [2 \quad 1 \quad -1]^T$$

因此, 割集电压方程的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{c1} \\ U_{c2} \\ U_{c3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

14.5 自测题及参考答案

1. (1) 写出图 1 所示有向图的关联矩阵 \mathbf{A} ; (2) 若以支路 2、3、5 为树支, 分别写出其基本回路矩阵 \mathbf{B}_f 和基本割集矩阵 \mathbf{Q}_f 。

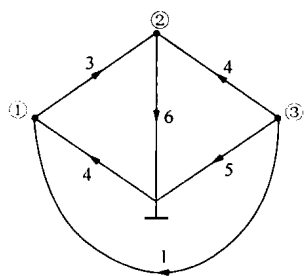
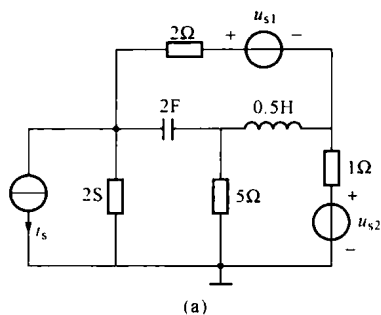
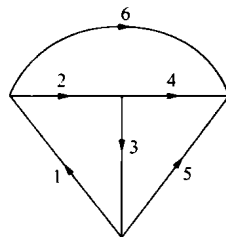


图 1



(a)



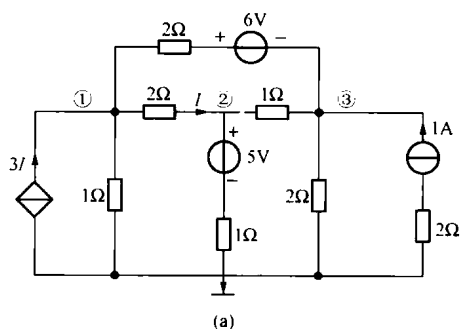
(b)

图 2

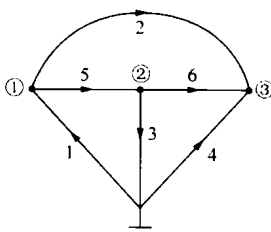
2. 正弦稳态电路及其有向图分别如图 2 (a) 和 (b) 所示, $u_{s1}(t) = 10\sqrt{2} \sin(2t + 30^\circ) \text{ V}$, $u_{s2}(t) = 5\sqrt{2} \sin(2t + 60^\circ) \text{ V}$, $i_s(t) = 3\sqrt{2} \sin(2t + 45^\circ) \text{ A}$ 。写出该电路的支路阻抗矩阵 \mathbf{Z}_b 、支路导纳矩阵 \mathbf{Y}_b 、支路电压源列向量 $\dot{\mathbf{U}}_s$ 和支路电流源列向量 $\dot{\mathbf{I}}_s$ 。

3. 电路及其有向图如图 3 所示, 试写出其关联矩阵 \mathbf{A} 、支路电导矩阵 \mathbf{G}_b 、电压源列向量 \mathbf{U}_s 和电流源列向量 \mathbf{I}_s 。(设节点电压方程的矩阵形式为 $\mathbf{AG}_b\mathbf{A}^T\mathbf{U}_n = \mathbf{AG}_b\mathbf{U}_s - \mathbf{AI}_s$)

4. 正弦稳态电路及其有向图分别如图 4 (a)、(b) 所示。 $u_s(t) = 10\sqrt{2} \sin(2t + 30^\circ) \text{ V}$, $i_s(t) = 3\sqrt{2} \sin(2t + 45^\circ) \text{ A}$ 。若以支路 1、2、4 为树支, 写出其基本回路矩阵 \mathbf{B}_f 、支路阻抗矩阵 \mathbf{Z}_b 、支路电压源列向量 $\dot{\mathbf{U}}_s$ 和支路电流源列向量 $\dot{\mathbf{I}}_s$ 。

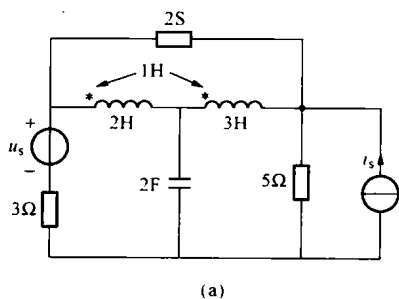


(a)

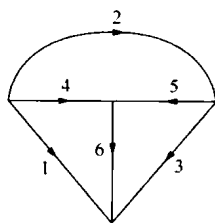


(b)

图 3



(a)



(b)

图 4

5. 图 5 (a) 所示动态电路的有向图如图 5 (b) 所示, $u_3(0_-)=2\text{V}$, $u_4(0_-)=0$, $i_5(0_-)=3\text{A}$, $i_6(0_-)=-5\text{A}$ 。若以支路 1、3、6 为树支, 试写出该电路对应的关联矩阵 \mathbf{A} 、基本回路矩阵 \mathbf{B}_f 、支路阻抗矩阵 $\mathbf{Z}_b(s)$ 、支路导纳矩阵 $\mathbf{Y}_b(s)$ 、支路电压源列向量 $\mathbf{U}_s(s)$ 和支路电流源列向量 $\mathbf{I}_s(s)$ 。其中 $R_1=1\Omega$, $R_2=0.25\Omega$, $C_3=2\text{F}$, $C_4=1\text{F}$, $L_5=4\text{H}$, $L_6=3\text{H}$, $i_s(t)=5\epsilon(t)\text{A}$ 。

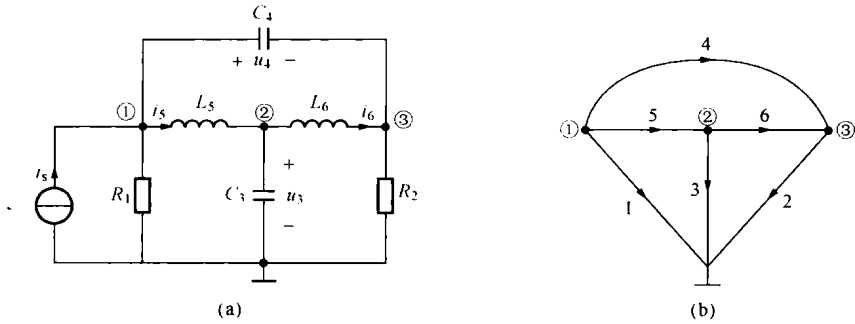


图 5

6. 正弦交流电路及其有向图分别如图 6 (a) 和 (b) 所示, 试写出该电路相量形式的节点电压方程的矩阵形式。

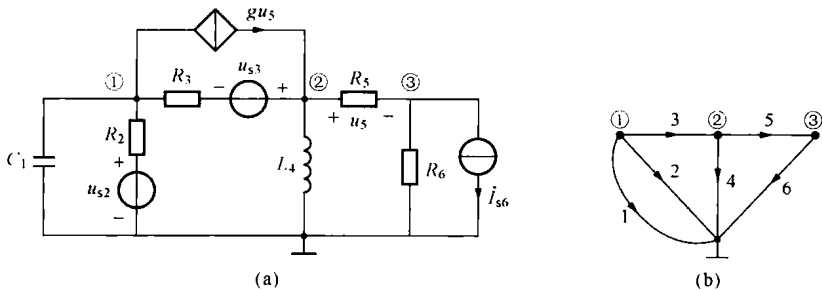


图 6

参考答案

$$1. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2. \mathbf{Z}_b = \text{diag}[0.5 \quad -j0.25 \quad 5 \quad j \quad 1 \quad 2] \Omega, \mathbf{Y}_b = \text{diag}[2 \quad j4 \quad 0.2 \quad -j \quad 1 \quad 0.5] \text{S}$$

$$\dot{\mathbf{U}}_s = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 5 \angle 60^\circ \quad -10 \angle 30^\circ]^T \text{V}, \dot{\mathbf{I}}_s = [3 \angle 45^\circ \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \text{A}$$

$$3. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{G}_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I}_s = [0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \mathbf{U}_s = [0 \ -5 \ 0 \ 6 \ 0 \ 0]^T$$

$$4. \mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Z}_b = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j4 & -j2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j2 & j6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -j0.25 \end{bmatrix} \Omega$$

$$\dot{\mathbf{U}}_s = [-10 \angle 30^\circ \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \text{V}, \dot{\mathbf{i}}_s = [0 \ 0 \ 3 \angle 45^\circ \ 0 \ 0 \ 0]^T \text{A}$$

$$5. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_s(s) = [0 \ 0 \ -\frac{2}{s} \ 0 \ 0 \ 0]^T, \mathbf{I}_s(s) = [\frac{5}{s} \ 0 \ 0 \ 0 \ -\frac{3}{s} \ \frac{5}{s}]^T$$

$$\mathbf{Y}_b(s) = \text{diag}[1 \ 4 \ 2s \ s \ \frac{1}{4s} \ \frac{1}{3s}], \mathbf{Z}_b(s) = \text{diag}[1 \ \frac{1}{4} \ \frac{1}{2s} \ \frac{1}{s} \ 4s \ 3s]$$

$$6. \begin{bmatrix} j\omega C_1 + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & g - \frac{1}{R_3} & -g \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{j\omega L_4} + \frac{1}{R_5} - g & g - \frac{1}{R_5} \\ 0 & -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{n1} \\ \dot{U}_{n2} \\ \dot{U}_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{U}_{s2}}{R_2} - \frac{\dot{U}_{s3}}{R_3} \\ \frac{\dot{U}_{s3}}{R_3} \\ -\dot{i}_{s6} \end{bmatrix}$$

第15章 分布参数电路

15.1 本章知识结构图

第15章知识结构图如图15-1所示。

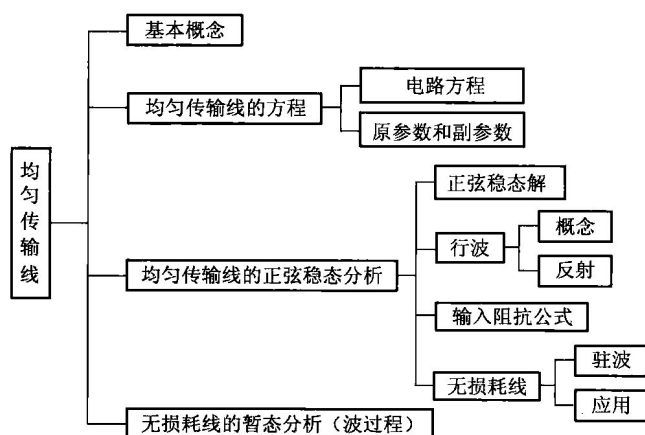


图 15-1 第15章知识结构图

15.2 知识点归纳与学习指导

本章讨论典型的分布参数电路——（二线）均匀传输线。

15.2.1 均匀传输线的方程

由于电路参数的分布性，均匀传输线上的电压 u 和电流 i 不仅是时间 t 的函数，而且还与距离 x 有关。这是分布电路与集总电路显著的区别。均匀传输线由下列偏微分方程（称为电报方程）描述：

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned}$$

式中： R_0 、 L_0 、 G_0 和 C_0 为均匀传输线单位长度的电阻、电感、电导和电容，统称为传输线的原始参数。

根据边界条件（传输线上某处 $x=x_0$ 的电流和电压，常见的是始端 $x=0$ 或终端 $x=l$ ， l 为线长）和初始条件（换路时刻的条件），可以求解上述方程组。

15.2.2 均匀传输线的正弦稳态解

1. 均匀传输线的相量方程

在正弦稳态之下，均匀传输线的相量方程为

$$\begin{aligned}-\frac{d\dot{U}}{dx} &= R_0 \dot{I} + j\omega L_0 \dot{I} = Z_0 \dot{I} \\ -\frac{d\dot{I}}{dx} &= G_0 \dot{U} + j\omega C_0 \dot{U} = Y_0 \dot{U}\end{aligned}$$

式中： \dot{U} 和 \dot{I} 分别表示 u 和 i 的相量，它们仅是距始端距离 x 的函数； $Z_0 = R_0 + j\omega L_0$ 和 $Y_0 = G_0 + j\omega C_0$ 分别为单位长度的串联阻抗和单位长度的并联导纳。

2. 均匀传输线的正弦稳态解

方程的通解为

$$\dot{U} = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x}, \quad \dot{I} = \frac{1}{Z_c}(Ae^{-\gamma x} - Be^{\gamma x})$$

式中： γ 称为传播常数， $\gamma = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta$ ，其中 α 称为衰减常数， β 为相位常数； Z_c 称为均匀传输线的特性阻抗， $Z_c = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = |Z_c| \angle \varphi$ 。 γ 和 Z_c 统称为传输线的副参数。

已知始端 ($x=0$) 的电压 \dot{U}_1 和电流 \dot{I}_1 时，线上距离始端 x 处的电压和电流分别为

$$\dot{U}(x) = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + Z_c \dot{I}_1)e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - Z_c \dot{I}_1)e^{\gamma x} = \dot{U}_1 \cosh(\gamma x) - Z_c \dot{I}_1 \sinh(\gamma x)$$

$$\dot{I}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{U}_1}{Z_c} + \dot{I}_1\right)e^{-\gamma x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{U}_1}{Z_c} - \dot{I}_1\right)e^{\gamma x} = \dot{I}_1 \cosh(\gamma x) - \frac{\dot{U}_1}{Z_c} \sinh(\gamma x)$$

已知终端 ($x=l$) 的电压 \dot{U}_2 和电流 \dot{I}_2 时，线上距离终端 x' 处的电压和电流分别为

$$\dot{U}(x') = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + Z_c \dot{I}_2)e^{\gamma x'} + \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - Z_c \dot{I}_2)e^{-\gamma x'} = \dot{U}_2 \cosh(\gamma x') + Z_c \dot{I}_2 \sinh(\gamma x')$$

$$\dot{I}(x') = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{U}_2}{Z_c} + \dot{I}_2\right)e^{\gamma x'} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{U}_2}{Z_c} - \dot{I}_2\right)e^{-\gamma x'} = \dot{I}_2 \cosh(\gamma x') + \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \sinh(\gamma x')$$

3. 均匀传输线的输入阻抗

均匀传输线上距离终端 x' 处向终端看入的输入阻抗为

$$Z_i(x') = \frac{\dot{U}(x')}{\dot{I}(x')} = Z_c \frac{Z_2 + Z_c \tanh \gamma x'}{Z_c + Z_2 \tanh \gamma x'}$$

15.2.3 均匀传输线的行波和波的反射

传输线上的电压和电流均可看作是入射波（正向行波：由始端向终端传播的波）和反射波（反向行波：由终端向始端传播的波）两种行波叠加的结果：

$$\dot{U} = \dot{U}^+ + \dot{U}^-, \quad \dot{I} = \dot{I}^+ - \dot{I}^-$$

其中，正向行波 $\dot{U}^+ = Ae^{-\gamma x} = A'e^{\gamma x'}$ ， $\dot{I}^+ = \dot{U}^+/Z_c$ ；反向行波 $\dot{U}^- = Be^{\gamma x} = B'e^{-\gamma x'}$ ， $\dot{I}^- = \dot{U}^-/Z_c$ 。

波的相位速度和波长分别为 $v_p = \frac{\omega}{\beta}$ 和 $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ 。

线上某处的反射系数 N 定义为该处电压（电流）反射波与电压（电流）入射波之

比, 即

$$N = \frac{\dot{U}^-}{\dot{U}^+} = \frac{\dot{I}^-}{\dot{I}^+} = \frac{Z_i - Z_c}{Z_i + Z_c} = N_2 e^{-2\gamma l}$$

式中: N_2 为终端处的反射系数, $N_2 = \frac{Z_2 - Z_c}{Z_2 + Z_c}$; Z_2 为传输线终端的负载阻抗。这表明, 反射是由不均匀点 (称为反射点) 引起的。

当 $Z_2 = Z_c$ 时, 称传输线工作于匹配状态。此时有:

- (1) $N_2 = 0$, $N = 0$, 线上无反射波存在;
- (2) 线上任一处的输入阻抗等于特性阻抗, $Z_i = Z_c$;
- (3) 传输到终端的功率称为自然功率。

半无限长的传输线上无反射波, 可认为与匹配的有限长传输线状态相同。

【例 15-1】 图 15-2 (a) 所示均匀传输线正弦稳态电路中, 电源两边的两段传输线完全相同, 线长为 l 、特性阻抗为 Z_c 、传播常数为 γ 。试求线上的电压和电流相量。

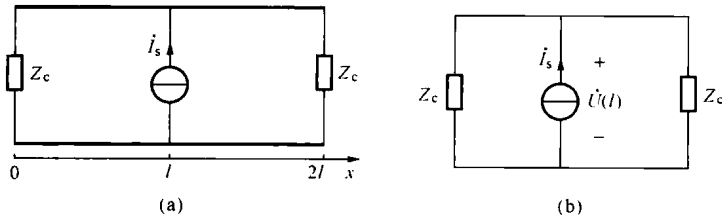


图 15-2 [例 15-1] 图

解 设线上电压的参考方向为上正下负, 电流的参考方向为 x 的正方向。当 $0 \leq x \leq l$ 时, 线上只有反向行波, 故

$$\dot{U}(x) = Ae^{\gamma x}, \quad \dot{I}(x) = -\frac{A}{Z_c} e^{\gamma x}$$

当 $l \leq x \leq 2l$ 时, 线上只有正向行波, 故

$$\dot{U}(x) = Be^{-\gamma x}, \quad \dot{I}(x) = \frac{B}{Z_c} e^{-\gamma x}$$

从电流源两端分别向两边二端网络看进去的输入阻抗均为 Z_c , 所以, $x=l$ 处的等效电路如图 15-2 (b) 所示。电流源两端的电压为

$$\dot{U}(l) = \frac{1}{2} Z_c \dot{I}_s$$

则 $A = \frac{1}{2} Z_c \dot{I}_s e^{-\gamma l}$ 、 $B = \frac{1}{2} Z_c \dot{I}_s e^{\gamma l}$, 因此

$$0 \leq x \leq l \text{ 时} \quad \dot{U}(x) = \frac{1}{2} Z_c \dot{I}_s e^{\gamma(x-l)}, \quad \dot{I}(x) = -\frac{1}{2} \dot{I}_s e^{\gamma(x-l)}$$

$$l \leq x \leq 2l \text{ 时} \quad \dot{U}(x) = \frac{1}{2} Z_c \dot{I}_s e^{\gamma(l-x)}, \quad \dot{I}(x) = \frac{1}{2} \dot{I}_s e^{\gamma(l-x)}$$

注: 本题为涉及均匀传输线的行波、输入阻抗、阻抗匹配和边界条件的综合概念性题目。

15.2.4 无损耗传输线

单位长度电阻 R_0 和单位长度电导 G_0 均为零的传输线称为无损耗传输线, 简称无损耗线。

无损耗线的传播常数 γ 和特性阻抗 Z_c 分别为

$$\gamma = j\omega \sqrt{L_0 C_0} = j\beta, \quad Z_c = \sqrt{L_0 / C_0}$$

1. 概述

学习本部分内容要利用下列公式

$$\sinh(j\beta x') = j\sin(\beta x'), \quad \cosh(j\beta x') = \cos(\beta x'), \quad \tanh(j\beta x') = j\tan(\beta x')$$

输入阻抗公式变为

$$Z_i = Z_c \frac{Z_2 + jZ_c \tan \frac{2\pi x'}{\lambda}}{Z_c + jZ_2 \tan \frac{2\pi x'}{\lambda}} = Z_c \frac{Z_2 + jZ_c \tan \frac{2\pi x'}{\lambda}}{Z_c + jZ_2 \tan \frac{2\pi x'}{\lambda}}$$

已知始端 ($x=0$) 的 \dot{U}_1 和 \dot{I}_1 时, 线上的电压和电流分别为

$$\dot{U} = \dot{U}_1 \cos \frac{2\pi x}{\lambda} - jZ_c \dot{I}_1 \sin \frac{2\pi x}{\lambda}, \quad \dot{I} = \dot{I}_1 \cos \frac{2\pi x}{\lambda} - j \frac{\dot{U}_1}{Z_c} \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$$

终端 ($x=l$) 的 \dot{U}_2 和 \dot{I}_2 已知时, 线上的电压和电流分别为

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \cos \frac{2\pi x'}{\lambda} + jZ_c \dot{I}_2 \sin \frac{2\pi x'}{\lambda}, \quad \dot{I} = \dot{I}_2 \cos \frac{2\pi x'}{\lambda} + j \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \sin \frac{2\pi x'}{\lambda}$$

【例 15-2】 两段特性阻抗分别为 $Z_{c1} = 75\Omega$ 、 $Z_{c2} = 50\Omega$ 的无损耗线连接的传输线如图 15-3 (a) 所示, 两段线的长度均为 0.125λ (λ 为线的工作波长)。已知终端所接负载 $Z_2 = 50 + j100\Omega$, 试求 $11'$ 端口的输入阻抗。

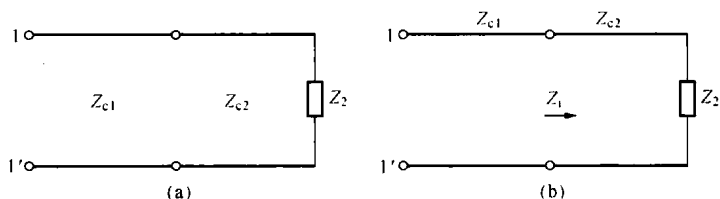


图 15-3 [例 15-2] 图

解 设第二条线始端的输入阻抗为 Z_i , 如图 15-3 (b) 所示, 则

$$\begin{aligned} Z_i &= Z_{c2} \frac{Z_2 + jZ_{c2} \tan\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)}{Z_{c2} + jZ_2 \tan\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)} = 50 \times \frac{50 + j100 + j50 \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{\lambda}{8}\right)}{50 + j(50 + j100) \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{\lambda}{8}\right)} \\ &= 50 - j100 = 111.8 \angle -63.43^\circ (\Omega) \\ Z_1 &= Z_{c1} \frac{Z_2 + jZ_{c1} \tan\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)}{Z_{c1} + jZ_2 \tan\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)} = 75 \times \frac{50 - j100 + j75 \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{\lambda}{8}\right)}{75 + j(50 - j100) \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{\lambda}{8}\right)} \end{aligned}$$

$$=16.98-j15.57=23.04 \angle -42.51^\circ (\Omega)$$

注：① 本章的公式都是针对单条传输线而言的，若为多条传输线，则需先转化为单条线，再使用相应的公式；② 等效变换的方法在传输线网络中仍然适用。

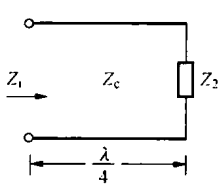
2. 驻波

终端开路或短路（包括接电容或电感）的无损耗线上的电压和电流均为驻波。电压的波腹和波节相距 $\frac{\lambda}{4}$ ，交替出现，它们恰好是电流的波节和波腹。

3. 无损耗线的应用

(1) 无损耗短路线的输入阻抗为 $Z_{sc} = jZ_c \tan \frac{2\pi}{\lambda} l$ 。当 $l < \frac{\lambda}{4}$ 时，无损耗短路线等效为电感。

(2) 无损耗开路线的输入阻抗为 $Z_{oc} = -jZ_c \cot \frac{2\pi}{\lambda} l$ 。当 $l < \frac{\lambda}{4}$ 时，无损耗开路线等效为电容。



(3) $\frac{\lambda}{4}$ 无损耗线可用作阻抗变换器。如图 15-4 所示，阻抗变换公式为

$$Z_1 = \frac{Z_c^2}{Z_2}$$

图 15-4 $\frac{\lambda}{4}$ 无损耗线

用作阻抗变换器

利用 $\frac{\lambda}{4}$ 无损耗线可实现阻抗匹配。

上述无损耗线应用中的 3 个阻抗公式都是无损耗线一般输入阻抗公式的特例。

15.2.5 无损耗传输线的波过程

1. 概述

像集中参数的动态电路一样，当出现换路时，传输线上将发生暂态过程，称为波过程。

无损耗线上的暂态电压和暂态电流仍然可看作是波速为 $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$ 的入射波和反射波两种行波叠加的结果：

$$u = u^+ + u^-, \quad i = i^+ - i^-$$

且有 $u^+ = z_c i^+$ ， $u^- = z_c i^-$ ，其中 $z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$ 称为波阻抗。

2. 波的反射与折射

(1) 波的反射。反射也是由不均匀点（反射点）引起的。显然，半无限长线上只有入射波，没有反射波。对于有限长线，在入射波尚未到达终端（反射点）之前，波过程与半无限长线的情况相同。

反射点的反射波可用下列的柏德生法则计算。

柏德生法则：当入射波沿无损耗线投射到反射点时，对该反射点而言，传入射波的无损耗线可等效为一个集中参数戴维南等效电路，其中电压源的电压等于反射点电压入射波的 2 倍，等效电阻等于无损耗线的波阻抗 z_c ，如图 15-5 所示。

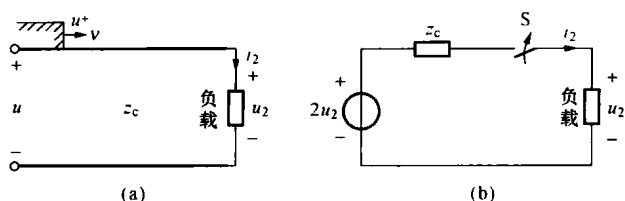


图 15-5 传输线网络及其等效电路

(a) 传输线网络; (b) 等效电路

当反射波抵达始端时,对始端来说又成了入射波。如果始端电源内阻 R_s 与波阻抗不相等,则在始端也会产生反射波,它为传输线的第二次入射波。第二次入射波再次向终端推进,到达终端后又一次产生反射,这样重复下去,就形成了多次反射。

(2) 波的折射。入射波行进到波阻抗不同的传输线连接处时,不仅会产生反射波,而且将有电压和电流行波进入到连接处以后的传输线。这种进入另一条传输线的波称为折射波或透射波。

折射波与入射波之比称为折射系数。电压折射系数和电流折射系数分别为

$$\rho_u = \frac{u_2^+}{u_1^+} = \frac{2z_{c2}}{z_{c2} + z_{c1}}, \quad \rho_i = \frac{i_2^+}{i_1^+} = \frac{2z_{c1}}{z_{c2} + z_{c1}}$$

电压和电流的折射波可用图 15-6 所示的等效电路计算。

波的折射有可能引起过电压现象,因此,在设计电器设备的绝缘水平时,必须考虑,以免遭受损坏。

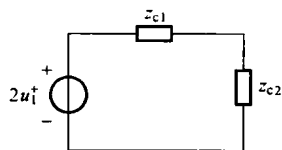


图 15-6 计算折射波的等效电路

15.3 重点、难点与考点

重点与难点

本章的重点是传输线上行波、匹配等基本概念、无损耗线上电压、电流的特点及无损耗线的应用。难点为波过程。

考点

本章考试的重点和热点主要集中在匹配、含无损耗线网络的正弦稳态分析,特别是输入阻抗公式的应用。

15.4 第 15 章习题选解

有损耗传输线的正弦稳态分析

15-1 有一长度为 150km 的均匀传输线,始端与 200V 直流电压源相连,终端短路。已知传输线每单位长度的参数为 $R_0 = 1\Omega/\text{km}$ 、 $G_0 = 5 \times 10^{-5}\text{S}/\text{km}$,试求终端的稳态电流 I_2 。

解 由于激励为直流电压源,达到稳态后沿线的电压都不随时间变化,所以,对应的传输线方程为

$$-\frac{dU}{dx} = R_0 I$$

$$-\frac{dI}{dx} = G_0 U$$

消去变量 I 可得

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = R_0 G_0 U$$

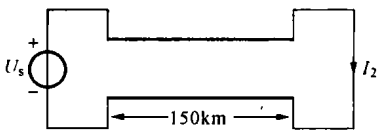
其解为

$$U = A_1 e^{-\alpha x} + A_2 e^{\alpha x}$$

其中 $\alpha = \sqrt{R_0 G_0} = \sqrt{50} \times 10^{-3} \text{ 1/km}$, A_1 和 A_2 由边界条件确定。如题 15-1 图所示, $x=0$ 处, $U=200\text{V}$; $x=l=150\text{km}$ 处, $U=0$, 于是有

$$A_1 + A_2 = 200$$

$$A_1 e^{-\alpha l} + A_2 e^{\alpha l} = 0$$



题 15-1 图

联立解得 $A_1 = 227.24$, $A_2 = -27.24$ 。因此

$$U = 227.24 e^{-\sqrt{50} \times 10^{-3} x} - 27.24 e^{\sqrt{50} \times 10^{-3} x} \text{ V}, \quad I_2 = \frac{1}{R_0} \left(-\frac{dU}{dx} \Big|_{x=l} \right) = 1.11 \text{ A}$$

15-3 一电缆的传播常数 $\gamma = 0.063 7 e^{j46.25^\circ} (\text{km})^{-1}$, 特性阻抗 $Z_c = 35.7 e^{-j11.8^\circ} \Omega$ 。电缆始端电压源电压 $u_s(t) = \sin 5000t \text{ V}$, 终端负载阻抗 $Z_2 = Z_c$ 。求沿线电压、电流分布函数 $u(x, t)$ 和 $i(x, t)$ 。若电缆长为 100km , 求信号由始端到终端的时间延迟。

解 本题为终端匹配的无反射线。传播常数 $\gamma = 0.063 7 e^{j46.25^\circ} = 0.044 + j0.046 (\text{km})^{-1}$, 则衰减常数 $\alpha = 0.044 (\text{km})^{-1}$, 相位常数 $\beta = 0.046 (\text{km})^{-1}$ 。始端电压振幅相量 $\dot{U}_{sm} = 1 \angle 0^\circ \text{ V}$, 距始端距离 x 处的电压、电流振幅相量分别为

$$\dot{U}_m = \dot{U}_{sm} e^{-\gamma x} = e^{-0.044x} e^{-j0.046x} = e^{-0.044x} \angle -0.046x \text{ V}$$

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{Z_c} = \frac{e^{-0.044x} \angle -0.046x}{35.7 \angle -11.8^\circ} = 0.028 e^{-0.044x} \angle (11.8^\circ - 0.046x) (\text{A})$$

则

$$u(x, t) = e^{-0.044x} \sin(5000t - 0.046x) \text{ V}, \quad i(x, t) = 28 e^{-0.044x} \sin(5000t - 0.046x + 11.8^\circ) \text{ mA}$$

相速 $v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{5000}{0.046} \approx 108\ 696 (\text{km/s})$, 则时间延迟为

$$\tau = \frac{l}{v_p} = \frac{100}{108\ 696} = 0.92 (\text{ms})$$

15-4 某 220kV 三相输电线路从发电厂经 240km 送电到一枢纽变电所。线路参数为 $R_0 = 0.08 \Omega/\text{km}$, $\omega L_0 = 0.4 \Omega/\text{km}$, $\omega C_0 = 2.8 \times 10^{-6} \text{ S/km}$, G_0 可以忽略不计。如果输送到终端的复功率为 $160 + j16 \text{ MVA}$, 终端电压为 195kV , 试计算始端的电压、电流、复功率和传输效率。

解 (1) 求特性阻抗和传播常数。单位长度的串联阻抗和并联导纳分别为

$$Z_0 = R_0 + j\omega L_0 = 0.08 + j0.4 = 0.408 \angle 78.69^\circ (\Omega/\text{km}),$$

$$Y_0 = j\omega C_0 = j2.8 \times 10^{-6} = 2.8 \times 10^{-6} \angle 90^\circ \text{ (S/km)}$$

则特性阻抗和传播常数分别为

$$Z_c = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{0.408 \angle 78.69^\circ}{2.8 \times 10^{-6} \angle 90^\circ}} = 381.73 \angle -5.66^\circ \text{ (\Omega)}$$

$$\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} = \sqrt{0.408 \angle 78.69^\circ \times 2.8 \times 10^{-6} \angle 90^\circ} = 1.069 \times 10^{-3} \angle 84.35^\circ \text{ (1/km)}$$

(2) 求终端电流。

$$\gamma l = 240 \times 1.069 \times 10^{-3} \angle 84.35^\circ = 0.257 \angle 84.35^\circ = 0.025 + j0.256$$

$$\cosh \gamma l = 0.968 \angle 0.385^\circ, \sinh \gamma l = 0.255 \angle 84.48^\circ$$

负载功率因数角为

$$\theta_2 = \tan^{-1} \left(\frac{16}{160} \right) = 5.71^\circ$$

则负载电流和相电压有效值为

$$I_2 = \frac{P_2}{\sqrt{3} U_{2l} \cos \theta_2} = \frac{160 \times 10^6}{\sqrt{3} \times 195 \times 10^3 \cos 5.71^\circ} = 0.476 \text{ (kA)}, U_2 = \frac{U_{2l}}{\sqrt{3}} = \frac{195}{\sqrt{3}} = 112.58 \text{ (kV)}$$

设 $\dot{U}_2 = U_2 \angle 0^\circ = 112.58 \angle 0^\circ \text{ kV}$ ，则负载电流为

$$\dot{I}_2 = 0.476 \angle -5.71^\circ \text{ kA}$$

(3) 求始端的电压与电流。因为

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_2 \cosh(\gamma l) + Z_c \dot{I}_2 \sinh(\gamma l) \\ &= 112.58 \angle 0^\circ \times 0.968 \angle 0.385^\circ + 0.476 \angle -5.71^\circ \\ &\quad \times 381.73 \angle -5.66^\circ \times 0.255 \angle 84.48^\circ \\ &= 122.44 + j45.06 = 130.47 \angle 20.20^\circ \text{ (kV)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{I}_2 \cosh(\gamma l) + \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \sinh(\gamma l) \\ &= 0.476 \angle -5.71^\circ \times 0.968 \angle 0.385^\circ + \frac{112.58 \angle 0^\circ}{381.73 \angle -5.66^\circ} \times 0.255 \angle 84.48^\circ \\ &= 0.459 + j0.032 = 0.460 \angle 4.00^\circ \text{ (kA)} \end{aligned}$$

所以始端电压、电流的有效值分别为

$$U_{1l} = \sqrt{3} U_1 = \sqrt{3} \times 130.47 = 225.98 \text{ (kV)}, I_1 = 0.460 \text{ kA}$$

(4) 求始端的复功率和传输效率

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= 3 \dot{U}_1 \dot{I}_1^* = 3 \times 130.47 \angle 20.20^\circ \times 0.460 \angle -4.00^\circ = 180.05 \angle 16.20^\circ \\ &= 172.90 + j50.23 \text{ (MVA)} \end{aligned}$$

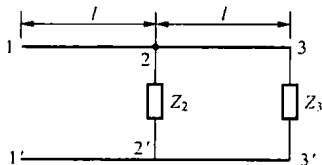
$$\eta = \frac{P_2}{P_1} \times 100\% = \frac{160}{172.90} \times 100\% = 92.54\%$$

注：三相电力系统中所说的电压是指线电压。

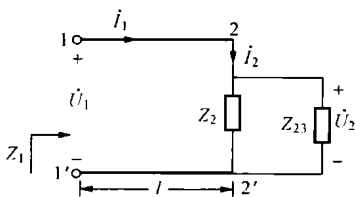
15-5 题 15-5 图所示电路中，两段均匀传输线长度均为 l ，在正弦稳态下，其特性阻抗为 Z_c ，传播系数为 γ ，已知 $Z_2 = Z_3 = Z_c$ ，求 $11'$ 端口的输入阻抗 Z_1 。

解 因为第二段传输线工作于匹配状态，从 $22'$ 端向 $33'$ 看去的输入阻抗 $Z_{23} = Z_c$ 。所以 $22'$ 端的总阻抗为

$$Z_{22} = Z_2 // Z_{23} = 0.5Z_c$$



题 15-5 图



题 15-5 解图

由于 $Z_{22} \neq Z_c$ ，故第一段传输线工作在非匹配状态。在题 15-5 解图的等效电路中， $1-1'$ 端口的输入阻抗为

$$Z_1 = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = Z_c \frac{Z_{22} + Z_c \operatorname{th} \gamma l}{Z_c + Z_{22} \operatorname{th} \gamma l}$$

把 $Z_{22} = 0.5Z_c$ 代入上式，整理得

$$Z_1 = Z_c \frac{1 + 2 \operatorname{th} \gamma l}{2 + \operatorname{th} \gamma l}$$

注：本题为求解均匀传输线输入阻抗的一般问题，包括了传输线与联接的阻抗匹配和不匹配两种情况，具有一定的代表性。

15-6 见 [例 15-1]。

无损耗线的稳态分析

15-8 见 [例 15-2]。

15-9 特性阻抗为 $Z_c = 50 \Omega$ 的同轴线终端连接的负载 $Z_2 = 50 + j100 \Omega$ ，试求终端的反射系数及离负载 2.5 cm 处的输入阻抗和反射系数。已知线的工作波长为 10 cm 。

解 终端的反射系数为

$$N_2 = \frac{Z_2 - Z_c}{Z_2 + Z_c} = \frac{50 + j100 - 50}{50 + j100 + 50} = 0.5 + j0.5 = \frac{\sqrt{2}}{2} \angle 45^\circ$$

离负载 2.5 cm 即离负载 $\frac{\lambda}{4}$ ，故离负载 2.5 cm 处的输入阻抗为

$$Z_i = \frac{Z_c^2}{Z_2} = \frac{50^2}{50 + j100} = 10 - j20 = 22.36 \angle -63.43^\circ (\Omega)$$

负载 2.5 cm 处的反射系数为

$$N = \frac{Z_i - Z_c}{Z_i + Z_c} = \frac{10 - j20 - 50}{10 - j20 + 50} = -0.5 - j0.5 = \frac{\sqrt{2}}{2} \angle -135^\circ$$

或者

$$N = N_2 e^{-j2\beta l} = N_2 e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \angle 45^\circ e^{-j180^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} \angle -135^\circ$$

15-10 一长度为 25m 的无损耗线, 其特性阻抗 $Z_c = 520\Omega$, 终端短路, 工作波长为 $\lambda = 60\text{m}$ 。若始端所加电压的有效值为 150V。试求其输入阻抗和始端电流的有效值。

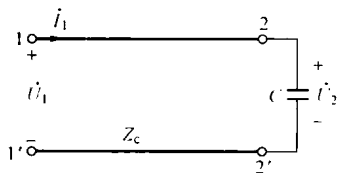
解 终端短路的无损耗线的输入阻抗为

$$Z_{sc} = jZ_c \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda}l\right) = j520 \tan\left(\frac{2\pi}{60} \times 25\right) = j520 \times (-0.577) \approx -j300 (\Omega)$$

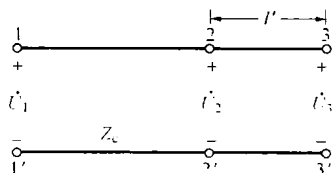
则始端电流为

$$I_1 = \frac{U_1}{|Z_{sc}|} = \frac{150}{300} = 0.5 (\text{A})$$

15-11 某均匀无损耗架空线, 其特性阻抗 $Z_c = 300\Omega$, 长度 $l = 15\text{m}$, 频率 $f = 5 \times 10^6 \text{Hz}$, 波速为光速, 终端 22' 接有电容元件 $C = 0.0613 \times 10^{-9} \text{F}$, 如题 15-11 图所示, 始端 11' 施加正弦电压 $\dot{U}_1 = 10 \angle 0^\circ \text{V}$, 求 22' 端口电压 \dot{U}_2 及 11' 端口入端阻抗 Z_i 。



题 15-11 图



题 15-11 解图

解 方法 1:

(1) 求输入阻抗 Z_i 。

解法 1: 相位常数和电容的容抗分别为

$$\beta = \frac{\omega}{v_p} = \frac{2\pi f}{v_p} = \frac{2\pi \times 5 \times 10^6}{3 \times 10^8} = \frac{\pi}{30}, \quad X_c = -\frac{1}{2\pi fC} \approx -520 (\Omega)$$

则无损耗线输入阻抗为

$$Z_i = Z_c \frac{Z_2 + jZ_c \tan \beta l}{Z_c + jZ_2 \tan \beta l} = 300 \times \frac{-j520 + j300 \tan \frac{\pi \times 15}{30}}{300 + j(-j520) \tan \frac{\pi \times 15}{30}} = j173 (\Omega)$$

解法 2: $\beta = \frac{\pi}{30}$, 则 $\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 60\text{m}$, 且 $l = 15\text{m} = \frac{\lambda}{4}$, 所以, 该无损耗线的长度正好为 $\frac{1}{4}$

波长, 输入阻抗可直接用 $\frac{\lambda}{4}$ 无损耗线的阻抗变换式计算。

$$Z_i = \frac{Z_c^2}{Z_2} = \frac{300^2}{-j520} = j173 (\Omega)$$

(2) 计算 \dot{U}_2 。设始端电压 $\dot{U}_1 = 10 \angle 0^\circ \text{V}$, 则

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_i} = \frac{10 \angle 0^\circ}{j173} = 0.058 \angle -90^\circ = -j0.058 (\text{A})$$

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 \cos \beta l - jZ_c \dot{I}_1 \sin \beta l = 10 \angle 0^\circ \cos \frac{\pi}{2} - j300 \times (-j0.058) \sin \frac{\pi}{2} = 17.4 \angle 180^\circ (\text{V})$$

方法 2: 此例为无损耗线终端连接不匹配的负载, 可以用长度小于 $\frac{\lambda}{4}$ 的无损耗开路线来等效代替 22' 终端的电容性元件。

相位常数和电容的容抗分别为

$$\beta = \frac{\omega}{v_p} = \frac{2\pi f}{v_p} = \frac{2\pi \times 5 \times 10^6}{3 \times 10^8} = \frac{\pi}{30}, \quad X_C = -\frac{1}{2\pi f C} = -520 \quad (\Omega)$$

根据终端开路的输入阻抗公式, 有 $jX_C = -jZ_c \cot \beta l'$, 代入数据得

$$-j520 = -j300 \cot \frac{\pi}{30} l'$$

所以, 代替电容的无损耗开路线的长度为 $l' = 5\text{m}$ 。

用无损耗开路线等效代替电容的等效电路如题 15-11 解图所示, 由无损耗线终端稳态解, 得

$$\dot{U}_{1oc} = \dot{U}_3 \cos \beta x = \dot{U}_3 \cos \beta (l + l')$$

则 33' 端终端的电压 \dot{U}_3 为

$$\dot{U}_3 = \frac{\dot{U}_{1oc}}{\cos \beta (l + l')} = \frac{10 \angle 0^\circ}{\cos \frac{2}{3} \pi} = 20 \angle 180^\circ \quad (\text{V})$$

同理, 可以求得终端 22' 电压 \dot{U}_2 为

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_3 \cos \beta l' = 20 \angle 180^\circ \times \cos \frac{\pi}{6} = 17.32 \angle 180^\circ \quad (\text{V})$$

此时, 11' 始端处电流为

$$\dot{i}_{1oc} = j \frac{\dot{U}_3}{Z_c} \sin \beta x = j \frac{-20}{300} \sin \frac{2}{3} \pi = 0.058 \angle -90^\circ \quad (\text{A})$$

因此, 输入阻抗为

$$Z_i = \frac{\dot{U}_{1oc}}{\dot{i}_{1oc}} = \frac{10 \angle 0^\circ}{0.058 \angle -90^\circ} = 172.41 \angle 90^\circ \quad (\Omega)$$

注: ① 求终端不匹配情况下无损耗线的输入阻抗需要用一般输入阻抗公式, 但当线长度为 $\lambda/4$ 时, 计算可以大大简化; ② 终端负载为纯电抗时, 可用一段长度小于 $\lambda/4$ 的无损耗线代替进行分析计算。

15-12 一长度为 200m 的无损耗架空线, 其原参数为 $L_0 = 2 \times 10^{-6} \text{H/m}$, $C_0 = 5.55 \times 10^{-12} \text{F/m}$, 波长 $\lambda = 60\text{m}$ 。试求终端接一个 $L = 10 \times 10^{-6} \text{H}$ 的电感时, 电压波和电流波距终端最近的波腹的位置。

$$\text{解 } f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{60} = 5 \times 10^6 \text{ (Hz)}, \quad X_L = 2\pi f L = 2\pi \times 5 \times 10^6 \times 10 \times 10^{-6} = 100\pi \quad (\Omega)$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{2 \times 10^{-6}}{5.55 \times 10^{-12}}} = 600 \quad (\Omega)$$

电感等价于长度小于 $\frac{\lambda}{4}$ 的无损耗短路线, 其输入阻抗为

$$Z_{sc} = jZ_c \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda}l\right)$$

则其长度为

$$l = \frac{\lambda}{2\pi} \tan^{-1}\left(\frac{X_L}{Z_c}\right) = \frac{60}{2\pi} \tan^{-1}\left(\frac{100\pi}{600}\right) = 4.606 \text{ (m)}$$

电压波距终端最近的波腹的位置为

$$d' = \frac{\lambda}{4} - l = \frac{60}{4} - 4.606 = 10.394 \text{ (m)}$$

电流波距终端最近的波腹的位置为

$$d'' = \frac{\lambda}{2} - l = \frac{60}{2} - 4.606 = 25.394 \text{ (m)}$$

15-13 终端开路的无损耗架空线的特性阻抗为 $Z_c = 400\Omega$ ，电源频率为 100MHz，若要使输入端相当于 100pF 的电容，问线长 l 最短应为多少？

解 电源频率 $f = 100\text{MHz}$ ，对应的波长 λ 为

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{100 \times 10^6} = 3 \text{ (m)}$$

根据无损耗开路线的输入阻抗公式，该段架空线的输入阻抗为

$$Z_i = -jZ_c \cot \beta l = -jZ_c \cot \frac{2\pi}{\lambda}l$$

100pF 电容的阻抗 Z_c 为

$$Z_c = -j \frac{1}{2\pi f C} = -j \frac{100}{2\pi} \text{ (}\Omega\text{)}$$

根据题意，有 $Z_i = Z_c$ ，即 $-jZ_c \cot \frac{2\pi}{\lambda}l = -j \frac{100}{2\pi}$ ，则

$$l = \frac{\lambda}{2\pi} \cot^{-1}\left(\frac{100}{2\pi Z_c}\right)$$

代入数据得

$$l = \frac{3}{2 \times 3.14} \cot^{-1}\left(\frac{100}{2 \times 3.14 \times 400}\right) = 0.731 \text{ (m)}$$

15-14 一同轴电缆的特性阻抗 $Z_c = 50\Omega$ ，终端短路，工作波长为 3m，工作频率为 100MHz，问此电缆最短长度应分别为多少才能使其输入阻抗相当于：(1) 一个 $0.25\mu\text{H}$ 的电感；(2) 一个 100pF 的电容。

解 终端短路的无损耗线的输入阻抗为

$$Z_{sc} = jZ_c \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda}l\right)$$

(1) $0.25\mu\text{H}$ 的电感的感抗为

$$X_L = 2\pi f L = 2\pi \times 10^8 \times 0.25 \times 10^{-6} = 50\pi \text{ (}\Omega\text{)}$$

应使 $Z_{sc} = jX_L$ ，即

$$50 \tan\left(\frac{2\pi}{3}l\right) = 50\pi$$

所以

$$l = \frac{3}{2\pi} \tan^{-1}\pi = \frac{3}{2\pi} \times 1.263 = 0.603 \text{ (m)}$$

(2) 100pF 电容的容抗为

$$X_C = -\frac{1}{2\pi fC} = -\frac{1}{2\pi \times 10^8 \times 10^{-10}} = -\frac{50}{\pi} (\Omega)$$

应使 $Z_{sc} = jX_C$, 即

$$50 \tan\left(\frac{2\pi}{3}l'\right) = -\frac{50}{\pi}$$

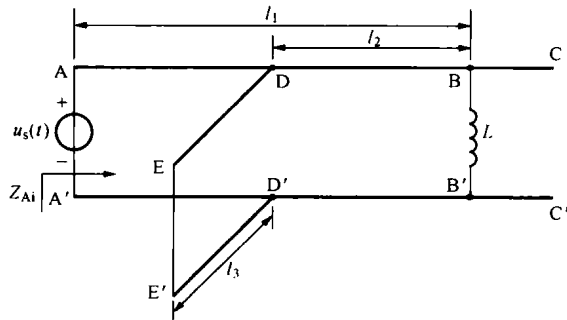
所以

$$\frac{2\pi}{3}l' = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\pi}\right) = -0.308 + n\pi$$

其中, n 为正整数。当 $n=1$ 时 l' 取得最小值, 则所求的最短长度为

$$l' = \frac{3}{2\pi} \times (-0.308 + \pi) = 1.353 \text{ (m)}$$

15-15 题 15-15 图所示的无损耗均匀传输线, AD、DB、DE 三条传输线的特性阻抗均为 $Z_{cl} = 400\Omega$, 其中, AB 线长 $l_1 = 10\text{m}$, BC 线段为无限长, 其特性阻抗 $Z_{c2} = 800\Omega$, BB' 端连接电感 $L = \frac{4}{\pi}\mu\text{H}$, EE' 端短路; 信号源 $u_s(t) = U\sin 2\pi \times 10^8 t \text{V}$ 。试求: 为使 AA' 端的输入阻抗 $Z_{Ai} = Z_{cl} = 400\Omega$, DB 段、DE 段的最短长度 l_2 、 l_3 各为多少?



题 15-15 图

解 方法 1: 因 BC 线无限长, 故其输入阻抗 $Z_{BC} = Z_{c2} = 800\Omega$ 。

电感的感抗为 $X_L = \omega L = 2\pi \times 10^8 \times \frac{4}{\pi} \times 10^{-6} = 800 (\Omega)$

则 $Z_{BB'} = Z_{BC} // jX_L = 400(1+j) \Omega$

DB 段最短长度 $l_2 = \frac{\lambda}{4}$, 所以 DB 线和 DE 线的输入阻抗分别为

$$Z_{DB} = \frac{Z_{cl}^2}{Z_{BB'}} = \frac{400^2}{400(1+j)} = \frac{400}{1+j} (\Omega), \quad Z_{DE} = jZ_{cl} \tan \frac{2\pi l_3}{\lambda}$$

要使 AA' 端的输入阻抗 $Z_{Ai} = Z_{cl}$, 应有 $\frac{1}{Z_{DB}} + \frac{1}{Z_{DE}} = \frac{1}{Z_{cl}}$, 即

$$\frac{1+j}{400} - j \frac{1}{400 \tan \frac{2\pi l_3}{\lambda}} = \frac{1}{400}$$

整理得

$$1+j \left[1 - \frac{1}{\tan \frac{2\pi l_3}{\lambda}} \right] = 1$$

所以, $\tan \frac{2\pi}{\lambda} l_3 = 1$, 则 $l_3 = \frac{1}{8} \lambda$ 。由于 $\lambda = \frac{3 \times 10^8}{10^8} = 3$ (m), 因此

$$l_2 = \frac{\lambda}{4} = \frac{3}{4} = 0.75 \text{ (m)}, l_3 = \frac{\lambda}{8} = \frac{3}{8} = 0.375 \text{ (m)}$$

方法 2: $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{10^8} = 3 \text{ m}$, 因 BC 线为无限长, 故其输入阻抗

$$Z_{\text{BC}} = Z_{c2} = 800 \Omega$$

电感的感抗和 DE 线的输入阻抗分别为

$$X_L = \omega L = 2\pi \times 10^8 \times \frac{4}{\pi} \times 10^{-6} = 800 \text{ } (\Omega), Z_{\text{DE}} = jZ_{c1} \tan \frac{2\pi}{\lambda} l_3 \text{ } (\Omega)$$

则 DB 线的等效负载阻抗为

$$Z_{\text{BB}'} = Z_{\text{BC}} // jX_L = 400(1+j)\Omega$$

DB 线的输入阻抗为

$$Z_{\text{DB}} = Z_{c1} \frac{Z_{\text{BB}'} + jZ_{c1} \tan \frac{2\pi}{\lambda} l_2}{Z_{c1} + jZ_{\text{BB}'} \tan \frac{2\pi}{\lambda} l_2} = Z_{c1} \frac{1+j(1+X_2)}{(1-X_2)+jX_2}$$

其中, $X_2 = \tan \frac{2\pi}{\lambda} l_2$ 。

$$Y_{\text{DB}} = \frac{1}{Z_{\text{DB}}} = \frac{1}{Z_{c1}} \frac{(1-X_2)+jX_2}{1+j(1+X_2)} = \frac{1}{Z_{c1}} \left[\frac{1+X_2^2}{1+(1+X_2)^2} - j \frac{1-X_2-X_2^2}{1+(1+X_2)^2} \right]$$

根据题意 $Y_{\text{DB}} + Y_{\text{DE}} = \frac{1}{Z_{c1}}$, 故 $\text{Re}[Y_{\text{DB}}] = \frac{1}{Z_{c1}}$, 即

$$\frac{1}{Z_{c1}} \cdot \frac{1+X_2^2}{1+(1+X_2)^2} = \frac{1}{Z_{c1}}$$

解之得

$$X_2 = -0.5 \text{ 或 } X_2 = \infty$$

为使 l_2 最短, 应取 $X_2 = \infty$, 则 $\frac{2\pi}{\lambda} l_2 = \frac{\pi}{2}$, 所以 $l_2 = \frac{\lambda}{4}$ 。另有 $\text{Im}[Y_{\text{DE}}] = \text{Im}[Y_{\text{DB}}] = -1/Z_{c1}$, 则 $\tan \frac{2\pi}{\lambda} l_3 = 1$, 所以 $l_3 = \frac{\lambda}{8}$ 。

15-16 题 15-16 图所示稳态电路中, 无损均匀传输线的长度为 $l=75 \text{ m}$, 特性阻抗 $Z_c=200 \Omega$, $R_2=400 \Omega$, 电源内阻 $R_s=100 \Omega$, 电压源为 $u_s(t)=200\sqrt{2} \sin 6 \times 10^6 \pi t \text{ V}$, 波速为光速, 求距始端 25m 处电压和电流。

解

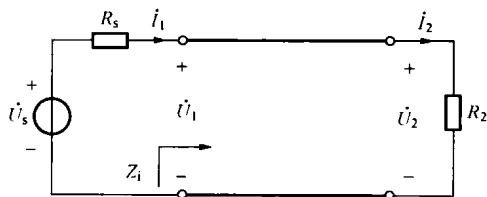
$$\beta l = \frac{\omega}{v_p} l = \frac{6 \times 10^6 \pi}{3 \times 10^8} \times 75 = \frac{3}{2} \pi$$

根据无损线的稳态解公式, 有

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \cos \beta l + jZ_c \dot{I}_2 \sin \beta l = -jZ_c \dot{I}_2$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 \cos \beta l + j \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \sin \beta l = -j \frac{\dot{U}_2}{Z_c} = -j \frac{R_2}{Z_c} \dot{I}_2$$

所以, 始端输入阻抗为



题 15-16 图

$$Z_i = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{Z_c^2}{R_2} = \frac{200^2}{400} = 100 \ (\Omega)$$

电压源电压相量为 $\dot{U}_s = 200 \angle 0^\circ$ V, 故传输线始端的电流、电压相量分别为

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_s}{R_s + Z_i} = \frac{200 \angle 0^\circ}{100 + 100} = 1 \angle 0^\circ \ (\text{A}), \quad \dot{U}_1 = Z_i \dot{I}_1 = 100 \times 1 \angle 0^\circ = 100 \angle 0^\circ \ (\text{V})$$

则无损耗线上电压和电流分别为

$$\dot{U} = \dot{U}_1 \cos \beta x - j Z_c \dot{I}_1 \sin \beta x, \quad \dot{I} = \dot{I}_1 \cos \beta x - j \frac{\dot{U}_1}{Z_c} \sin \beta x$$

$x = 25$ m 时, $\beta x = \frac{\pi}{2}$, 代入上式得

$$\dot{U} = -j Z_c \dot{I}_1 = -j 200 \times 1 = 200 \angle -90^\circ \ (\text{V}), \quad \dot{I} = -j \frac{\dot{U}_1}{Z_c} = -j \frac{100}{200} = 0.5 \angle -90^\circ \ (\text{A})$$

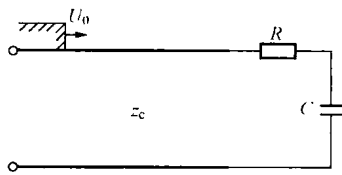
因此

$$u = 200\sqrt{2} \sin(6 \times 10^6 \pi t - 90^\circ) \text{ V}, \quad i = 0.5\sqrt{2} \sin(6 \times 10^6 \pi t - 90^\circ) \text{ A}$$

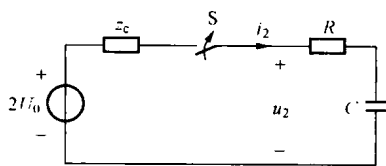
注: 对于连接负载的无损耗传输线, 求解传输线上电压和电流分布, 一般先求出传输线始端的输入阻抗, 进而求出始端的电压和电流, 然后再由无损耗传输线稳态解公式, 得到传输线上的电压和电流分布。

无损耗传输线的暂态分析

15-17 题 15-17 图所示均匀无损耗线, 其特性阻抗 $z_c = 300 \Omega$, 终端接有负载, $R = 200 \Omega$, $C = 1 \mu\text{F}$ 。一幅值为 $U_0 = 6 \text{ kV}$ 的矩形电压入射波从始端传来, 求入射波到达终端后产生的电压、电流的反射波。



题 15-17 图



题 15-17 解图

解 入射波电压和电流分别为

$$u_+ = U_0 = 6 \text{ kV}, \quad i_+ = \frac{u_+}{z_c} = 20 \text{ A}$$

相应的柏德生法则计算电路如题 15-17 解图所示。电路为一阶 RC 串联电路, 其时间常数为

$$\tau = (z_c + R)C = (300 + 200) \times 1 \times 10^{-6} = 0.5 \ (\text{ms})$$

所以, 终端电流为

$$i_2 = \frac{2U_0}{z_c + R} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{2 \times 6 \times 10^3}{300 + 200} e^{-2000t} = 24 e^{-2000t} \ (\text{A})$$

终端电压为

$$u_2 = 2U_0 - z_c i_2 = 12\ 000 - 7200 e^{-2000t} \ \text{V}$$

由终端的边界条件, 得终端的反射波电流 i_- 和反射波电压 u_- 分别为

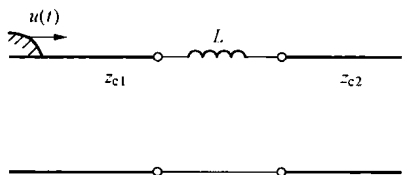
$$i_- = i_+ - i_2 = 20 - 24e^{-2000t} \text{ A}, \quad u_- = z_c i_- = 6000 - 7200e^{-2000t} \text{ V}$$

15-18 特性阻抗 $z_{c1} = 500\Omega$ 的均匀无损耗传输线上传播着一个电压波 $u(t) = 500(1 - e^{-25 \times 10^3 t}) \text{ kV}$, 该无损耗线经过 $L = 5 \text{ mH}$ 的电感与特性阻抗为 $z_{c2} = 300\Omega$ 的另一长线相连接, 如题 15-18 图所示。试求连接点处电压的反射波及透射波。

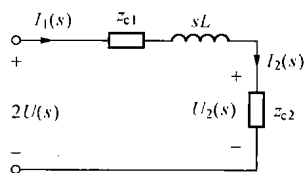
解 本题要求计算连接点的反射和透射情况, 因此应用柏德生法求解。由于入射波不是直流, 故用复频域法求解。

对应的复频域柏德生运算电路如题 15-18 解图所示, “电源” 的象函数为

$$U(s) = 500 \times 10^3 \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 25 \times 10^3} \right) = \frac{125 \times 10^8}{s(s + 25 \times 10^3)}$$



题 15-18 图



题 15-18 解图

总的运算阻抗为

$$Z(s) = z_{c1} + z_{c2} + sL = 800 + 5 \times 10^{-3} s$$

则

$$I_1(s) = \frac{2U(s)}{Z(s)} = \frac{5 \times 10^{12}}{s(s + 25 \times 10^3)(s + 160 \times 10^3)} = \frac{1250}{s} - \frac{1481}{s + 25 \times 10^3} + \frac{231}{s + 160 \times 10^3}$$

所以 $i_1(t) = 1250 - 1481e^{-25 \times 10^3 t} + 231e^{-160 \times 10^3 t} \text{ A}$

由电流连续性, 在连接点处透射波电流为

$$i_2(t) = i_1(t) = 1250 - 1481e^{-25 \times 10^3 t} + 231e^{-160 \times 10^3 t} \text{ A}$$

透射波电压为

$$u_2 = Z_{c2} i_2 = 375 - 444e^{-25 \times 10^3 t} + 69e^{-160 \times 10^3 t} \text{ kV}$$

入射波电流 i^+ 为

$$i^+ = \frac{u}{Z_{c1}} = 1000(1 - e^{-25 \times 10^3 t}) \text{ A}$$

根据连接点处的边界条件, 反射电流为

$$i^- = i^+ - i_2 = -250 + 481e^{-25 \times 10^3 t} - 231e^{-160 \times 10^3 t} \text{ A}$$

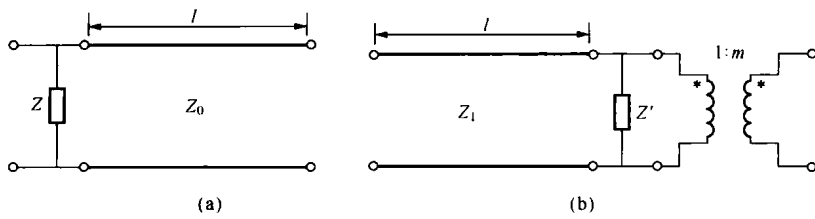
反射波电压 u^- 为

$$u^- = Z_{c1} i^- = -125 + 241e^{-25 \times 10^3 t} - 116e^{-160 \times 10^3 t} \text{ kV}$$

15-19 求题 15-19 图 (a)、(b) 所示的两个双口网络的等效条件。图中传输线为无损耗传输线。

[提示] 两个双口网络等效时, 它们的传输参数矩阵相等, 即

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh \gamma l & Z_0 \sinh \gamma l \\ \frac{1}{Z_0} \sinh \gamma l & \cosh \gamma l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma l & Z_1 \sinh \gamma l \\ \frac{1}{Z_1} \sinh \gamma l & \cosh \gamma l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z'} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$



题 15-19 图

由此得

$$Z_1 = Z_0 \frac{Z}{Z + pZ_0}, \quad Z' = Z_0 \frac{Z^2}{Z + pZ_0}, \quad m = \frac{Z + pZ_0}{Z}$$

式中, $p = \tanh \gamma l$ 。

15.5 自测题及参考答案

1. 线长为 l_1 的无损耗均匀传输线的特性阻抗 $Z_{c1} = 100\Omega$, 负载阻抗 $Z_2 = 400\Omega$ 。为了使 l_1 无损耗线上无反射波, 在其终端接上线长为 $\frac{\lambda}{4}$ 的无损耗线作阻抗变换器, 如图 1 所示。求线长为 $\frac{\lambda}{4}$ 的无损耗线的特性阻抗 Z_{c2} 。

2. $\frac{\lambda}{4}$ 无损耗线如图 2 所示, 其特性阻抗 $Z_c = 100\Omega$, $u_s(t) = 100\sqrt{2} \sin(\omega t - 36.9^\circ) \text{ V}$, 负载阻抗 $Z_2 = 200\Omega$ 。求负载阻抗吸收的平均功率 P 。

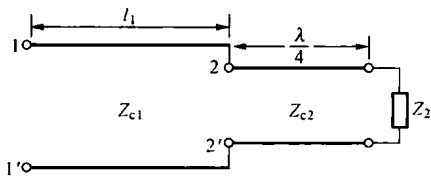


图 1

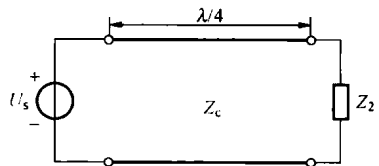


图 2

3. 已知三段无损耗均匀传输线 l_1 、 l_2 、 l_3 , 接线如图 3 所示。已知传输线的长度分别为 $l_1 = \frac{\lambda}{4}$ 和 $l_3 = \frac{\lambda}{8}$, 其特性阻抗分别为 $Z_{c1} = 200\Omega$ 、 $Z_{c2} = 400\Omega$ 、 $Z_{c3} = 400\Omega$, 电源电压 $u_s(t) = 200\sqrt{2} \sin \omega t \text{ V}$ 。求传输线 l_1 首端电流 i_1 。

4. 两段无损耗均匀传输线连接如图 4 所示。 $l_1 = 0.75\text{m}$, $l_2 = 1.5\text{m}$, 特性阻抗分别为 $Z_{c1} = 100\Omega$, $Z_{c2} = 400\Omega$, 电源电压 $u_s(t) = 100\sqrt{2} \sin 2 \times 10^8 \pi t \text{ V}$, 相速 $v_p = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, $R_s = 50\Omega$, $R_{L1} = R_{L2} = 400\Omega$ 。求两个负载各自消耗的功率。

5. 图 5 所示电路中, 无损耗均匀传输线的特性阻抗 $Z_c = 600\Omega$, 线长 $l = \lambda/3$ [λ 为信号源 $u_s(t)$ 的波长], $u_s(t) = 36\sqrt{2} \sin(\omega t - 30^\circ) \text{ V}$, $R_s = 300\Omega$, $R_2 = 600\Omega$ 。求终端负载 R_2 上的电压 $u_2(t)$ 和电流 $i_2(t)$ 。

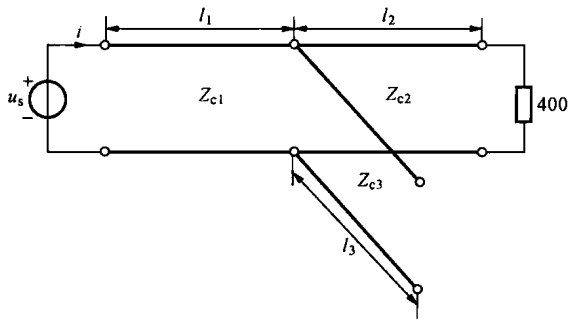


图 3

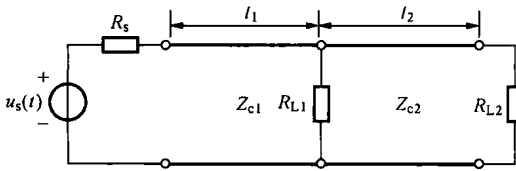


图 4

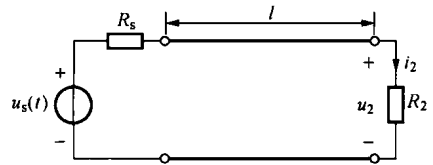


图 5

6. 一特性阻抗 $Z_c=400\Omega$ 的终端短路无损耗线，波速为光速，工作频率为 600MHz ，问此线最短长度应为多少才能实现一个 $L=0.01\text{mH}$ 的电感？

7. 一均匀无损耗线，其特性阻抗 $Z_c=300\Omega$ ，长度 $l=50\text{m}$ ，频率 $f=5\text{MHz}$ ，波速为光速。求终端接 $C=61.3\text{pF}$ 的电容时，电压波和电流波距终端最近的波腹的位置。

参考答案

1. 200Ω
2. 200W
3. $2\sin(\omega t - 45^\circ)\text{ A}$
4. 25W , 25W
5. $24\sqrt{2}\sin(\omega t - 150^\circ)\text{ V}$, $40\sqrt{2}\sin(\omega t - 150^\circ)\text{ mA}$
6. 0.124m
7. 电流波为 10m ；电压波为 25m

电工学学习辅导(附光盘)	苗松池
电工电子习题详解	李海
电路习题解析	郝静
电路理论基础学习指导	梁贵书
C语言程序设计习题解答与上机指导	梁栋
单片机原理及应用习题与实验指导书	王义军
自动控制原理学习辅导	杨平
自动控制原理习题精解及MATLAB实现	高军伟
自动控制原理习题集	孙建平
电机学习题解析	胡虔生
电力系统分析学习指导书	王葵
电力系统分析学习指导与习题	马士英
电力系统分析要点与习题(第二版)	韦钢
电力系统继电保护习题集	张保会
继电保护原理学习指导	刘学军
电力工程基础学习指导	温步瀛
MATLAB在电气工程中的应用实例	李维波
电气工程及其自动化专业英语学习指导	顾雪平
16/32位微机原理及接口技术实验指导书	刘淑平
电力专业英语基础学习指南	冯俊宝
电力电子技术习题集	李先允
工厂供电设计指导	刘学军
PLC应用技术要点与题解	弭洪涛

ISBN 978-7-5123-0655-4



9 787512 306554 >

定价: 38.00元