



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

国家精品课程教材

教育部高等学校电子电气基础课程教学指导分委员会推荐教材
电子信息学科基础课程系列教材

自动控制原理 习题解答

卢京潮 主编

赵 忠 刘慧英 袁冬莉 贾秋玲 编著

清华大学出版社



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

国家精品课程教材



教育部高等学校电子电气基础课程教学指导分委员会推荐教材
电子信息学科基础课程系列教材

自动控制原理 习题解答

卢京潮 主编

赵 忠 刘慧英 袁冬莉 贾秋玲 编著

清华大学出版社

北京

内 容 简 介

这本《自动控制原理习题解答》与卢京潮主编,清华大学出版社出版的《自动控制原理》教材配套使用,供任课教师在备课和批改作用时使用,也为读者提供参考。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

自动控制原理习题解答/卢京潮主编.--北京:清华大学出版社,2013.2

电子信息学科基础课程系列教材

ISBN 978-7-302-31042-6

I. ①自… II. ①卢… III. ①自动控制理论—高等学校—习题集 IV. ①TP13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 305014 号

责任编辑:文 怡

封面设计:常雪影

责任校对:李建庄

责任印制:宋 林

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社 总 机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 刷 者:清华大学印刷厂

装 订 者:三河市新茂装订有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm 印 张:13 字 数:320千字

版 次:2013年2月第1版 印 次:2013年2月第1次印刷

印 数:1~3000

定 价:25.00元

《电子信息学科基础课程系列教材》
编 审 委 员 会

主任委员

王志功(东南大学)

委员 (按姓氏笔画)

马旭东(东南大学)

王小海(浙江大学)

王 萍(天津大学)

刘宗行(重庆大学)

刘新元(北京大学)

张晓林(北京航空航天大学)

陈后金(北京交通大学)

郭宝龙(西安电子科技大学)

高上凯(清华大学)

徐淑华(青岛大学)

崔 翔(华北电力大学)

董在望(清华大学)

蒋宗礼(北京工业大学)

邓建国(西安交通大学)

王诗宓(清华大学)

王福昌(华中科技大学)

刘润华(中国石油大学)

张 石(东北大学)

沈连丰(东南大学)

郑宝玉(南京邮电大学)

柯亨玉(武汉大学)

高小榕(清华大学)

袁建生(清华大学)

傅丰林(西安电子科技大学)

曾孝平(重庆大学)

《电子信息学科基础课程系列教材》 丛书序

电子信息学科是当今世界上发展最快的学科,作为众多应用技术的理论基础,对人类文明的发展起着重要的作用。它包含诸如电子科学与技术、电子信息工程、通信工程和微波工程等一系列子学科,同时涉及计算机、自动化和生物电子等众多相关学科。对于这样一个庞大的体系,想要在学校将所有知识教给学生已不可能。以专业教育为主要目的的大学教育,必须对自己的学科知识体系进行必要的梳理。本系列丛书就是试图搭建一个电子信息学科的基础知识体系平台。

目前,中国电子信息类学科高等教育的教学中存在着如下问题:

- (1) 在课程设置和教学实践中,学科分立,课程分立,缺乏集成和贯通;
- (2) 部分知识缺乏前沿性,局部知识过细、过难,缺乏整体性和纲领性;
- (3) 教学与实践环节脱节,知识型教学多于研究型教学,所培养的电子信息学科人才不能很好地满足社会的需求。

在新世纪之初,积极总结我国电子信息类学科高等教育的经验,分析发展趋势,研究教学与实践模式,从而制定出一个完整的电子信息学科基础教程体系,是非常有意义的。

根据教育部高教司 2003 年 8 月 28 日发出的[2003]141 号文件,教育部高等学校电子信息与电气信息类基础课程教学指导分委员会(基础课分教指委)在 2004—2005 两年期间制定了“电路分析”、“信号与系统”、“电磁场”、“电子技术”和“电工学”5 个方向电子信息科学与电气信息类基础课程的教学基本要求。然而,这些教学要求基本上是按方向独立开展工作的,没有深入开展整个课程体系的研究,并且提出的是各课程最基本的教学要求,针对的是“2+X+Y”或者“211 工程”和“985 工程”之外的大学。

同一时期,清华大学出版社成立了“电子信息学科基础教程研究组”,历时 3 年,组织了各类教学研讨会,以各种方式和渠道对国内外一些大学的 EE(电子电气)专业的课程体系进行收集和研究,并在国内率先推出了关于电子信息学科基础课程的体系研究报告《电子信息学科基础教程 2004》。该成果得到教育部高等学校电子信息与电气学科教学指导委员会的高度评价,认为该成果“适应我国电子信息学科基础教学的需要,有较好的指导意义,达到了国内领先水平”,“对不同类型院校构建相关学科基础教学平台均有较好的参考价值”。

在此基础上,由我担任主编,筹建了“电子信息学科基础课程系列教材”编委会。编委会多次组织部分高校的教学名师、主讲教师和教育部高等学校教学指导委员会委员,进一步探讨和完善《电子信息学科基础教程 2004》研究成果,并组织编写了这套“电子信息学科基础课程系列教材”。

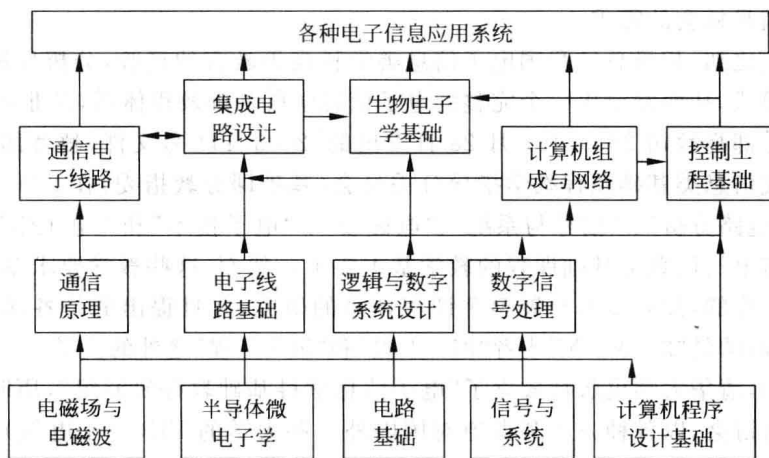
在教材的编写过程中,我们强调了“基础性、系统性、集成性、可行性”的编写原则,突出了以下特点:

- (1) 体现科学技术领域已经确立的新知识和新成果。
- (2) 学习国外先进教学经验,汇集国内最先进的教学成果。
- (3) 定位于国内重点院校,着重于理工结合。

(4) 建立在对教学计划和课程体系的研究基础之上,尽可能覆盖电子信息学科的全部基础。本丛书规划的 14 门课程,覆盖了电气信息类如下全部 7 个本科专业:

- 电子信息工程
- 通信工程
- 电子科学与技术
- 计算机科学与技术
- 自动化
- 电气工程与自动化
- 生物医学工程

(5) 课程体系整体设计,各课程知识点合理划分,前后衔接,避免各课程内容之间交叉重复,目标是使各门课程的知识点形成有机的整体,使学生能够在规定的课时数内,掌握必需的知识和技术。各课程之间的知识点关联如下图所示:



即力争将本科生的课程限定在有限的与精选的一套核心概念上,强调知识的广度。

(6) 以主教材为核心,配套出版习题解答、实验指导书、多媒体课件,提供全面的教学解决方案,实现多角度、多层面的人才培养模式。

(7) 由国内重点大学的精品课主讲教师、教学名师和教指委委员担任相关课程的设计和教材的编写,力争反映国内最先进的教改成果。

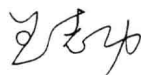
我国高等学校电子信息类专业的办学背景各不相同,教学和科研水平相差较大。本系列教材广泛听取了各方面的意见,汲取了国内优秀的教学成果,希望能为电子信息学科教学提供一份精心配备的搭配科学、营养全面的“套餐”,能为国内高等学校教学内容

和课程体系的改革发挥积极的作用。

然而,对于高等院校如何培养出既具有扎实的基本功,又富有挑战精神和创造意识的社会栋梁,以满足科学技术发展和国家建设发展的需要,还有许多值得思考和探索的问题。比如,如何为学生营造一个宽松的学习氛围?如何引导学生主动学习,超越自己?如何为学生打下宽厚的知识基础和培养某一领域的研究能力?如何增加工程方法训练,将扎实的基础和宽广的领域才能转化为工程实践中的创造力?如何激发学生深入探索的勇气?这些都需要我们教育工作者进行更深入的研究。

提高教学质量,深化教学改革,始终是高等学校的工作重点,需要所有关心我国高等教育事业人士的热心支持。在此,谨向所有参与本系列教材建设工作的同仁致以衷心的感谢!

本套教材可能会存在一些不当甚至谬误之处,欢迎广大的使用者提出批评和意见,以促进教材的进一步完善。



2008年1月

前言

这本《自动控制原理习题解答》与卢京潮主编,清华大学出版社出版的《自动控制原理》教材配套使用,供任课教师在备课和批改作业时使用,也为读者提供参考。

此次出版的《自动控制原理》教材是在原西北工业大学出版社出版的国家“十一五”规划教材的基础上经修订完成的。新教材保留了原教材的体系结构,在具体内容上做了一定的改动,习题也做了相应调整。

为了方便教学,在习题解答之后编入了课程学习进程表,供任课教师和读者参考。

各位读者若发现教材或习题解答中有错误和不妥之处,请及时记录,并转告编者,在此表示谢意。

联系人:卢京潮

电 话:029-88431302 (办公室)

13572239458 (手机)

Email: lujc0129@nwpu. edu. cn

编 者

2012年12月

第一部分 习题解答

第 1 章习题及解答	3
第 2 章习题及解答	12
第 3 章习题及解答	29
第 4 章习题及解答	55
第 5 章习题及解答	76
第 6 章习题及解答	126
第 7 章习题及解答	147
第 8 章习题及解答	171

第二部分 课程学习进程表



第一部分 习题解答

第1章 习题及解答



图 1-1 电动机电路



图 1-2 带开关的电动机电路

图 1-3 所示为电动机启动电路，图 1-4 所示为电动机停止电路，图 1-5 所示为电动机正反转控制电路。

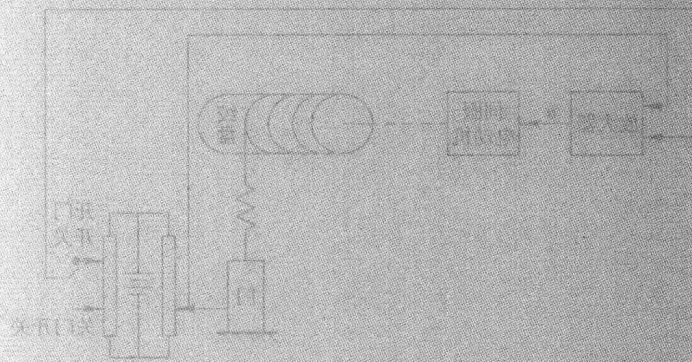


图 1-3 电动机启动控制电路

图 1-4 所示为电动机停止控制电路，图 1-5 所示为电动机正反转控制电路。图 1-6 所示为电动机正反转控制电路，图 1-7 所示为电动机正反转控制电路。

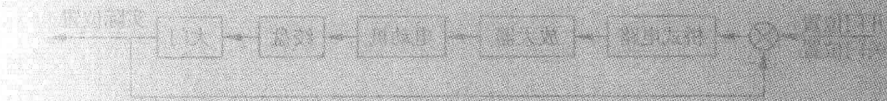


图 1-4 停止控制电路

1-1 根据图 1-15^注 所示的电动机速度控制系统工作原理图,完成:

- (1) 将 a, b 与 c, d 用线连接成负反馈状态;
- (2) 画出系统方框图。

解 (1) 负反馈连接方式为 $a \leftrightarrow d, b \leftrightarrow c$;

(2) 系统方框图如图解 1-1 所示。

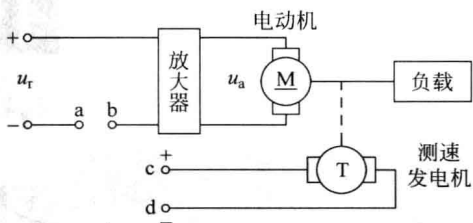
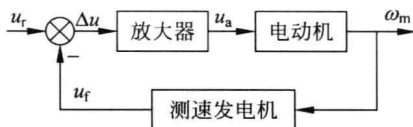


图 1-15 速度控制系统原理图



图解 1-1 速度控制系统方框图

1-2 图 1-16 是仓库大门自动控制系统原理示意图。试说明系统自动控制大门开、闭的工作原理,并画出系统方框图。

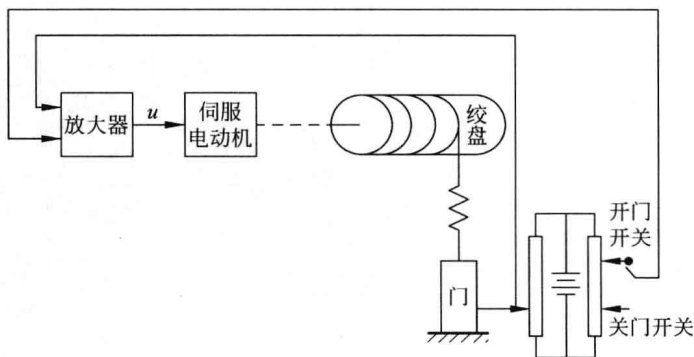
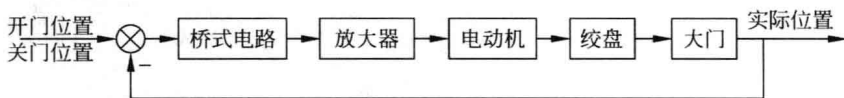


图 1-16 仓库大门自动开闭控制系统

解 当合上开门开关时,电桥会测量出开门位置与大门实际位置间对应的偏差电压,偏差电压经放大器放大后,驱动伺服电动机带动绞盘转动,将大门向上提起。与此同时,和大门连在一起的电刷也向上移动,直到桥式测量电路达到平衡,电动机停止转动,大门达到开启位置。反之,当合上关门开关时,电动机带动绞盘使大门关闭,从而可以实现大门远距离开闭自动控制。系统方框图如图解 1-2 所示。



图解 1-2

注 本书与《自动控制原理》(卢京潮主编,清华大学出版社出版)配套使用,图号对应该书的习题图号。

1-3 图 1-17 为工业炉温自动控制系统的工作原理图。分析系统的工作原理,指出被控对象、被控量和给定量,画出系统方框图。

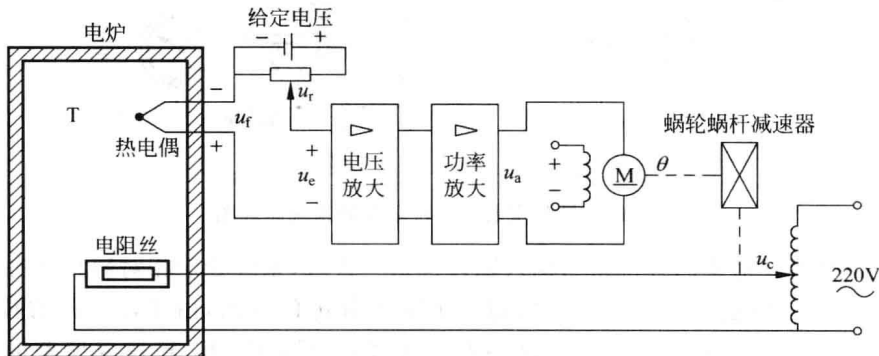
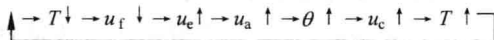


图 1-17 炉温自动控制系统原理图

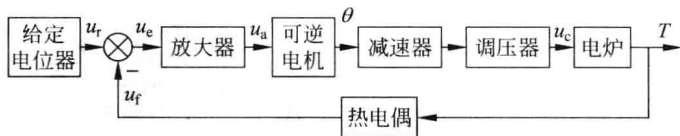
解 加热炉采用电加热方式运行,加热器所产生的热量与调压器电压 u_c 的平方成正比, u_c 增高,炉温就上升, u_c 的高低由调压器滑动触点的位置所控制,该触点由可逆直流电动机驱动。炉子的实际温度用热电偶测量,输出电压 u_f 。 u_f 作为系统的反馈电压与给定电压 u_r 进行比较,得出偏差电压 u_e ,经电压放大器、功率放大器放大成 u_a 后,作为控制电动机的电枢电压。

在正常情况下,炉温等于某个期望值 T ,热电偶的输出电压 u_f 正好等于给定电压 u_r 。此时, $u_e = u_r - u_f = 0$,故 $u_a = 0$,可逆电动机不转动,输出转角 $\theta = 0$,调压器的滑动触点停留在某个合适的位置上,使 u_c 保持一定的数值。这时,炉子散失的热量正好等于从加热器吸取的热量,形成稳定的热平衡状态,温度保持恒定。

当炉膛温度 T 由于某种原因突然下降(例如炉门打开造成的热量流失),则出现以下的控制过程,控制的结果是使炉膛温度回升,直至 T 的实际值等于期望值为止。



系统中,加热炉是被控对象,炉温是被控量,给定量是由给定电位器设定的电压 u_r (表征炉温的希望值)。系统方框图见图解 1-3。



图解 1-3

1-4 图 1-18 是控制导弹发射架方位的电位器式随动系统原理图。图中电位器 P_1 、 P_2 并联后跨接到同一电源 E_0 的两端,其滑臂分别与输入轴和输出轴相连接,组成方位角的给定元件和测量反馈元件。输入轴由手轮操纵;输出轴则由直流电动机经减速后带动,电动机采用电枢控制的方式工作。

试分析系统的工作原理,指出系统的被控对象、被控量和给定量,画出系统的方框图。

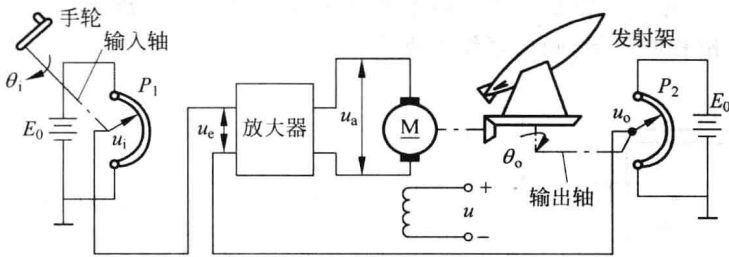
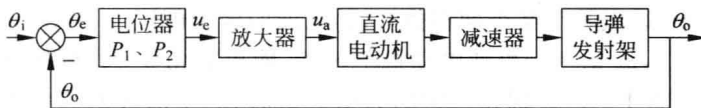


图 1-18 导弹发射架方位角控制系统原理图

解 当导弹发射架的方位角与输入轴方位角一致时,系统处于相对静止状态。

当摇动手轮使电位器 P_1 的滑臂转过一个输入角 θ_i 的瞬间,由于输出轴的转角 $\theta_o \neq \theta_i$,于是出现一个误差角 $\theta_e = \theta_i - \theta_o$,该误差角通过电位器 P_1 、 P_2 转换成偏差电压 $u_e = u_i - u_o$, u_e 经放大后驱动电动机转动,在驱动导弹发射架转动的同时,通过输出轴带动电位器 P_2 的滑臂转过一定的角度,直至 $\theta_o = \theta_i$ 时, $u_i = u_o$,偏差电压 $u_e = 0$,电动机停止转动。这时,导弹发射架停留在相应的方位角上。只要 $\theta_i \neq \theta_o$,偏差就会产生调节作用,控制的结果是消除偏差 θ_e ,使输出量 θ_o 严格地跟随输入量 θ_i 的变化而变化。

系统中,导弹发射架是被控对象,发射架方位角 θ_o 是被控量,通过手轮输入的角度 θ_i 是给定量。系统方框图如图解 1-4 所示。



图解 1-4

1-5 采用离心调速器的蒸汽机转速控制系统如图 1-19 所示。其工作原理是:蒸汽机在带动负载转动的同时,通过圆锥齿轮带动一对飞锤作水平旋转。飞锤通过铰链可带动套筒上下滑动,套筒内装有平衡弹簧,套筒上下滑动时可拨动杠杆,杠杆另一端通过连杆调节供汽阀门的开度。在蒸汽机正常运行时,飞锤旋转所产生的离心力与弹簧的反弹力相平衡,套筒保持某个高度,使阀门处于一个平衡位置。如果由于负载增大使蒸汽机

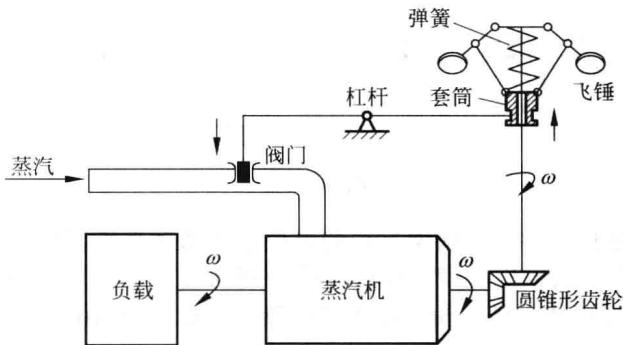


图 1-19 蒸汽机转速自动控制系统

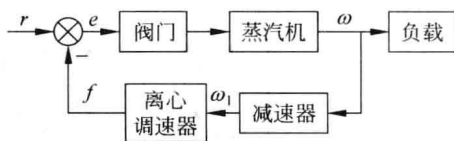
转速 ω 下降, 则飞锤因离心力减小而使套筒向下滑动, 并通过杠杆增大供汽阀门的开度, 从而使蒸汽机的转速回升。同理, 如果由于负载减小使蒸汽机的转速 ω 增加, 则飞锤因离心力增加而使套筒上滑, 并通过杠杆减小供汽阀门的开度, 迫使蒸汽机转速回落。这样, 离心调速器就能自动地抵制负载变化对转速的影响, 使蒸汽机的转速 ω 保持在某个期望值附近。

指出系统中的被控对象、被控量和给定量, 画出系统的方框图。

解 在本系统中, 蒸汽机是被控对象, 蒸汽机的转速 ω 是被控量, 给定量是设定的蒸汽机希望转速。离心调速器感受转速大小并转换成套筒的位移量, 经杠杆调节供汽阀门, 控制蒸汽机的转速, 从而构成闭环控制系统。

系统方框图如图解 1-5 所示。

1-6 摄像机角位置自动跟踪系统如图 1-20 所示。当光点显示器对准某个方向时, 摄像机自动跟踪并对准这个方向。试分析系统的工作原理, 指出被控对象、被控量及给定量, 画出系统方框图。



图解 1-5

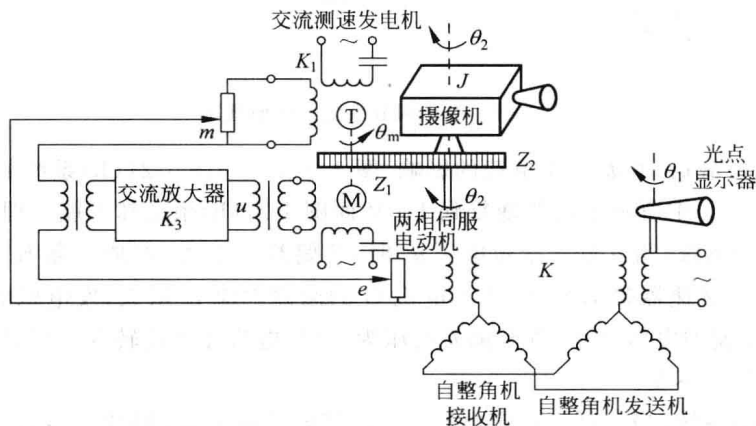
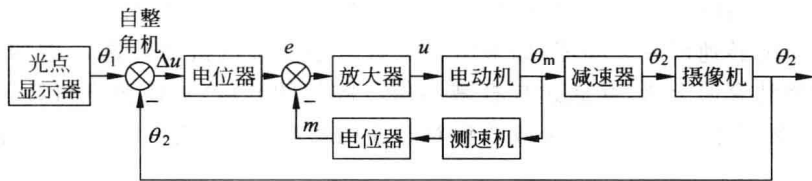


图 1-20 摄像机角位置随动系统原理图

解 控制系统的任务是使摄像机自动跟踪光点显示器指示的方向。

当摄像机方向角与光点显示器指示的方向一致时, $\theta_2 = \theta_1$, 自整角机输出 $e = 0$, 交流放大器输出电压 $u = 0$, 电动机静止, 摄像机保持原来的协调方向。当光点显示器转过一个角度, $\theta_2 \neq \theta_1$ 时, 自整角机输出与失谐角 $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$ 成比例的电压信号(其大小、极性反映了失谐角的幅值和方向), 经电位器后变成 e , 经放大器放大后驱动伺服电动机旋转, 并通过减速器带动摄像机跟踪光点显示器的指向, 使偏差减小, 直到摄像机与光点显示器指向重新达到一致时为止。测速发电机测量电动机转速, 进行速度反馈, 用以改善系统性能。

系统中, 摄像机是被控对象, 摄像机的方向角 θ_2 是被控量, 给定量是光点显示器指示的方向角 θ_1 。系统方框图如图解 1-6 所示。



图解 1-6

1-7 图 1-21(a)、图 1-21(b)所示的系统均为电压调节系统。假设空载时两系统发电机端电压均为 110V,试问带上负载后,图 1-21(a)、图 1-21(b)中哪个能保持 110V 不变,哪个电压会低于 110V? 为什么?

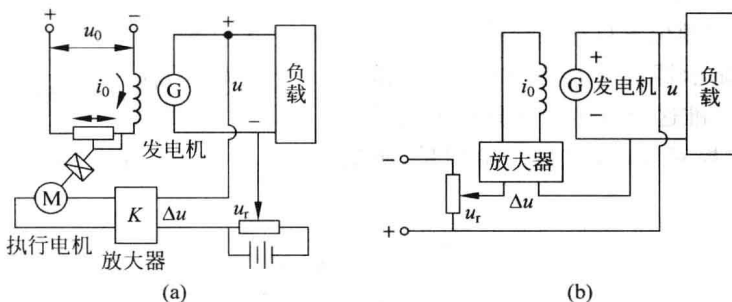


图 1-21 电压调节系统工作原理图

解 带上负载后,开始由于负载的影响,图 1-21(a)与图 1-21(b)系统的端电压都要下降,但图 1-21(a)中所示系统能恢复到 110V 而图 1-21(b)系统却不能。理由如下:

图 1-21(a)系统,当 u 低于给定电压 u_r 时,其偏差电压 Δu 经放大器 K 放大后,驱动电机 M 转动,经减速器带动电刷,使发电机 G 的激磁电流 i_0 增大,发电机的输出电压 u 会升高,从而使偏差电压减小,直至偏差电压为零时,电机才停止转动。因此,图 1-21(a)系统能保持 110V 不变。

图 1-21(b)系统,当 u 低于给定电压 u_r 时,其偏差电压 Δu 经放大器 K 后,直接使发电机激磁电流增 i_0 大,提高发电机的端电压 u ,使发电机 G 的端电压 u 回升,偏差电压减小,但不可能等于零,因为当偏差电压 $\Delta u=0$ 时, $i_0=0$,发电机就不能工作。即图 1-21(b)所示系统的稳态电压会低于 110V。

1-8 图 1-22 为水温控制系统示意图。冷水在热交换器中由通入的蒸汽加热,从而得到一定温度的热水。冷水流量变化用流量计测量。试绘制系统方框图,并说明为了保持热水温度为期望值,系统是如何工作的? 系统的被控对象和控制装置各是什么?

解 工作原理: 温度传感器不断测量交换器出口处的实际水温,并在温度控制器中与给定温度相比较,若低于给定温度,其偏差值使蒸汽阀门开大,进入热交换器的蒸汽量加大,热水温度升高,直至偏差为零。如果由于某种原因,冷水流量加大,则流量值由流量计测得,通过温度控制器,开大阀门,使蒸汽量增加,提前进行控制,实现按冷水流量进行顺馈补偿,保证热交换器出口的水温不发生大的波动。

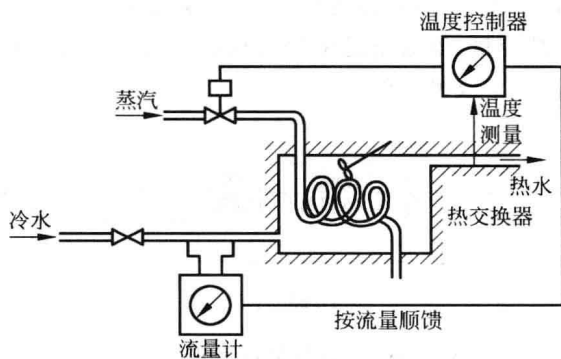
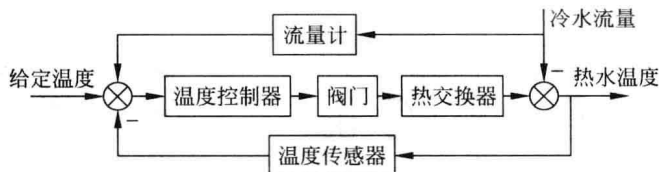


图 1-22 水温控制系统原理图

其中,热交换器是被控对象,实际热水温度为被控量,给定量(希望温度)在控制器中设定;冷水流量是干扰量。

系统方框图如图解 1-8 所示。这是一个按干扰补偿的复合控制系统。



图解 1-8

1-9 许多机器,像车床、铣床和磨床,都配有跟随器,用来复现模板的外形。图 1-23 就是这样一种跟随系统的原理图。在此系统中,刀具能在原料上复制模板的外形。试说明其工作原理,画出系统方框图。

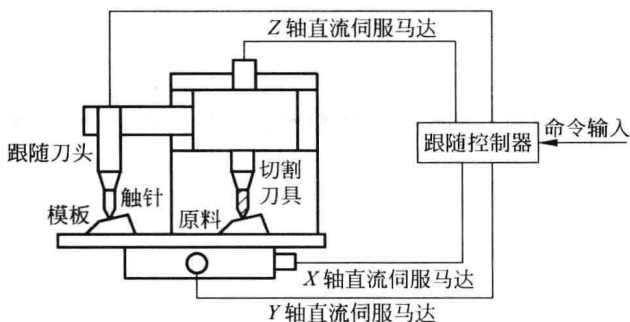
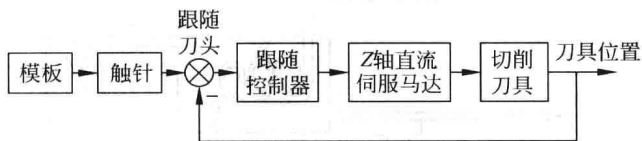


图 1-23 跟随系统原理图

解 模板与原料同时固定在工作台上。X、Y 轴直流伺服马达接受控制器的指令,按输入命令带动工作台做沿 X、Y 轴方向运动。模板随工作台移动时,触针会在模板表面滑动,跟随刀具中的位移传感器将触针感应到的反映模板表面形状的位移信号送到跟随控制器,控制器的输出驱动 Z 轴直流伺服马达带动切削刀具连同刀具架跟随触针运动,

当刀具位置与触针位置一致时,两者位置偏差为零,Z轴伺服马达停止。系统中,刀具是被控对象,刀具位置是被控量,给定量是由模板确定的触针位置。系统方框图如图解 1-9 所示。最终原料被切割加工成模板的形状。



图解 1-9

1-10 图 1-24(a)、图 1-24(b)所示均为调速系统。

(1) 分别画出图 1-24(a)、图 1-24(b)对应系统的方框图。给出图 1-24(a)所示系统正确的反馈连线方式。

(2) 指出在恒值输入条件下,图 1-24(a)、图 1-24(b)所示系统中哪个是有差系统,哪个是无差系统,说明其道理。

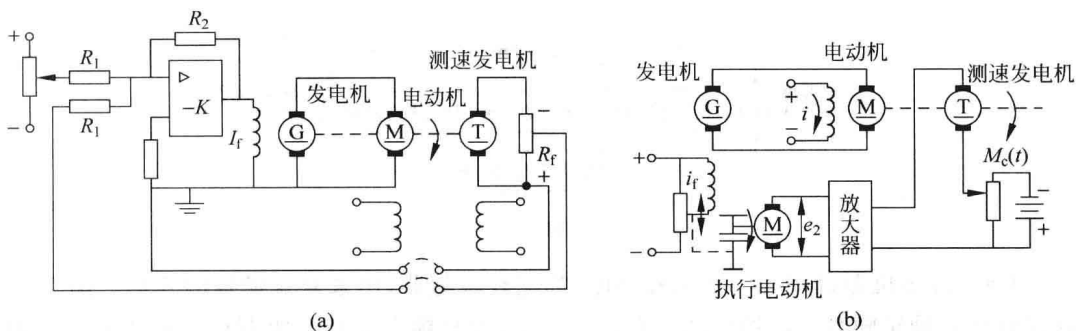
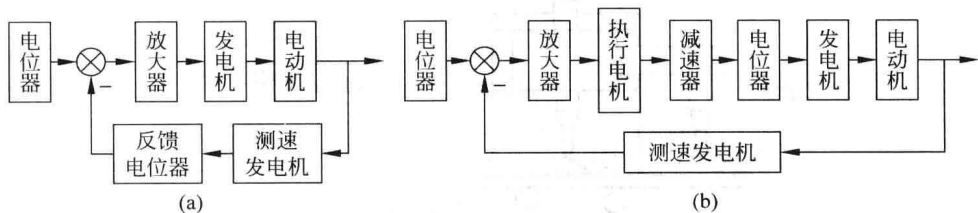


图 1-24 调速系统工作原理图

解 (1) 系统方框图如图解 1-10 所示。



图解 1-10

图 1-24(a)正确的反馈连接方式如图 1-24(a)中虚线所示。

(2) 图 1-24(a)所示的系统是有差系统,图 1-24(b)所示的系统是无差系统。

图 1-24(a)中,当给定恒值电压信号,系统运行达到稳态时,电动机转速的恒定是以发电机提供恒定电压为条件,对应发电机激磁绕组中电流一定是恒定值。这意味着放大器前端电压是非零的常值。因此,常值偏差电压存在是系统稳定工作的前提,故系统

有差。

图 1-24(b)中,给定恒定电压,电动机达到稳定转速时,对应发电机激磁绕组中的励磁电流恒定,这意味着执行电动机处于停转状态,放大器前端电压必然为 0,故系统无差。

1-11 图 1-25 为谷物湿度控制系统示意图。在谷物磨粉的生产过程中,有一个出粉最多的湿度,因此磨粉之前要给谷物加水以得到给定的湿度。图中,谷物用传送装置按一定流量通过加水点,加水量由自动阀门控制。加水过程中,谷物流量、加水前谷物湿度以及水压都是对谷物湿度控制的扰动作用。为了提高控制精度,系统中采用了谷物湿度的顺馈控制,试画出系统方框图。

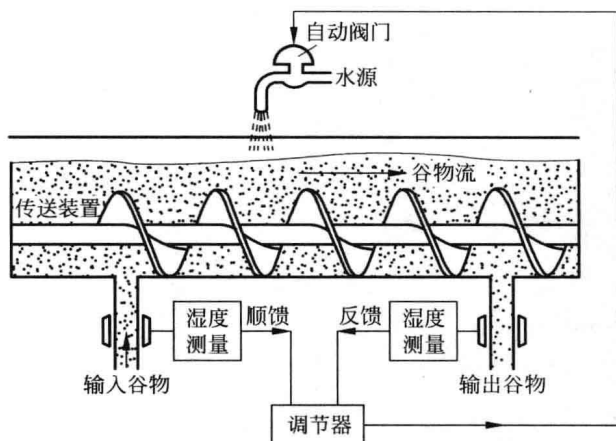
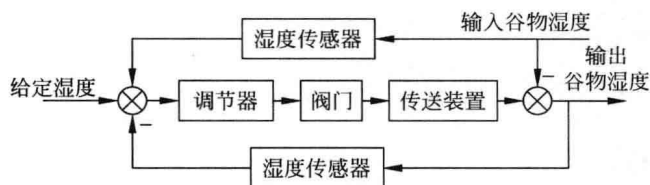


图 1-25 谷物湿度控制系统示意图

解 系统中,传送装置是被控对象;输出谷物湿度是被控量;希望的谷物湿度是给定量。系统方框图如图解 1-11 所示。这是一个按干扰补偿的复合控制系统。



图解 1-11

第2章

习题及解答

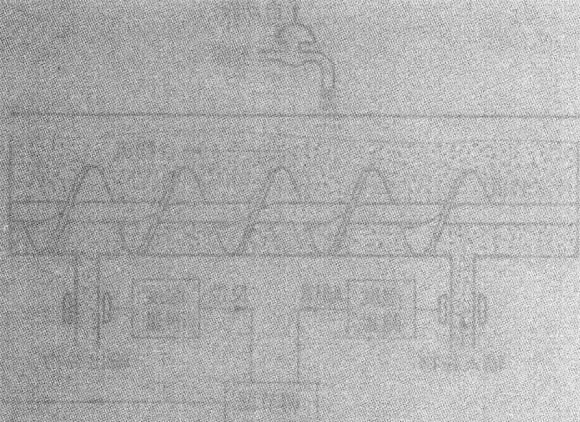


图 2-1 稳压管稳压电路示意图

在电路中，稳压管与负载电阻并联，稳压管的稳压值为 U_Z ，负载电阻为 R_L ，稳压管的正向电阻为 r_D ，稳压管的反向电阻为 r_Z ，稳压管的反向击穿电压为 U_{BZ} ，稳压管的反向漏电流为 I_{Z0} ，稳压管的反向击穿电压为 U_{BZ} ，稳压管的反向漏电流为 I_{Z0} 。

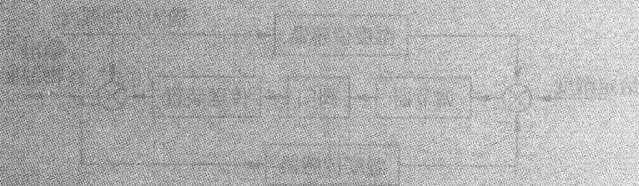


图 2-1 稳压管稳压电路示意图

2-1 建立图 2-32 所示各机械系统的微分方程(其中 $F(t)$ 为外力, $x(t)$ 、 $y(t)$ 为位移; k 为弹性系数, f 为阻尼系数, m 为质量; 忽略重力影响及滑块与地面的摩擦)。

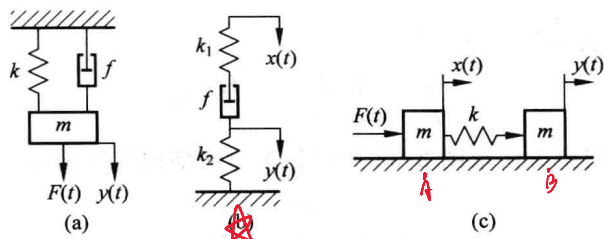


图 2-32 系统原理图

解 (a) 以平衡状态为基点, 对质块 m 进行受力分析(不再考虑重力影响), 如图解 2-1(a)所示。根据牛顿定理可写出

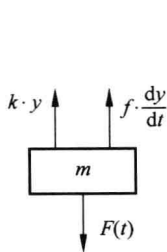
$$F(t) - ky(t) - f \frac{dy}{dt} = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

整理得

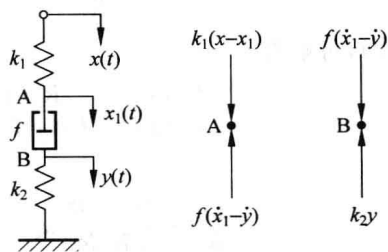
$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{f}{m} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{k}{m} y(t) = \frac{1}{m} F(t)$$

(b) 如图解 2-1(b)所示, 取 A、B 两点分别进行受力分析。对 A 点有

$$k_1(x - x_1) = f\left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dy}{dt}\right) \quad (1)$$



图解 2-1(a)



图解 2-1(b)

对 B 点有

$$f\left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dy}{dt}\right) = k_2 y \quad (2)$$

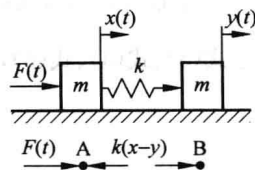
联立式(1)、式(2)可得

$$\frac{dy}{dt} + \frac{k_1 k_2}{f(k_1 + k_2)} y = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \frac{dx}{dt}$$

(c) 如图解 2-1(c)所示, 取 A、B 两点分别进行受力分析。

对 A 点有

$$F(t) - k(x - y) = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (3)$$



图解 2-1(c)

对 B 点有

$$k(x - y) = m \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (4)$$

联立式(3)、式(4)消去中间变量 x 可得

$$\frac{d^4 y}{dt^4} + \frac{2K}{m} \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{K}{m^2} F(t)$$

2-2 应用复数阻抗方法求图 2-33 所示各无源网络的传递函数。

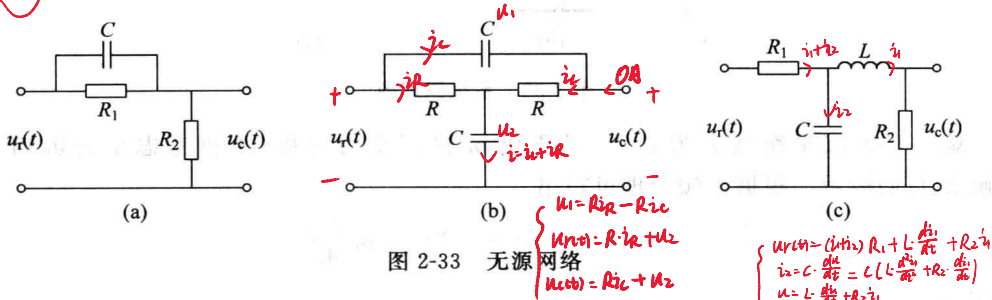


图 2-33 无源网络

解 (a) 应用复数阻抗概念可写出

$$U_r(s) = \frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{Cs}} I(s) + U_c(s) \quad (1)$$

$$I(s) = \frac{U_c(s)}{R_2} \quad (2)$$

联立式(1)、式(2), 可解得

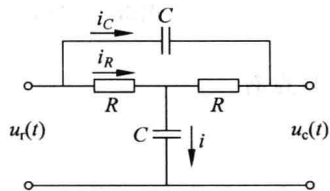
$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{R_2(1 + R_1Cs)}{R_1 + R_2 + R_1R_2Cs}$$

微分方程为

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2} u_c = \frac{du_r}{dt} + \frac{1}{CR_1} u_r$$

(b) 由图解 2-2(b) 可写出

$$\begin{cases} U_r(s) = RI_R(s) + [I_R(s) + I_C(s)] \frac{1}{Cs} & (3) \\ I_C(s) \frac{1}{Cs} = RI_R(s) - RI_C(s) & (4) \\ U_c(s) = I_C(s)R + [I_R(s) + I_C(s)] \frac{1}{Cs} & (5) \end{cases}$$



图解 2-2(b)

联立式(3)、式(4)、式(5), 消去中间变量 $I_C(s)$ 和 $I_R(s)$, 可得:

$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{R^2 C^2 s^2 + 2RCs + 1}{R^2 C^2 s^2 + 3RCs + 1}$$

微分方程为

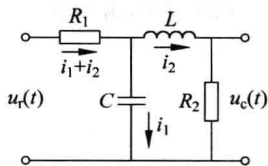
$$\frac{du_c^2}{dt^2} + \frac{3}{CR} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{C^2 R^2} u_c = \frac{du_r^2}{dt^2} + \frac{2}{CR} \frac{du_r}{dt} + \frac{1}{C^2 R^2} u_r$$

(c) 由图解 2-2(c)可写出

$$\begin{cases} U_r(s) = R_1 [I_1(s) + I_2(s)] + (Ls + R_2) I_2(s) & (6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{Cs} I_1(s) = (Ls + R_2) I_2(s) & (7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_c(s) = R_2 I_2(s) & (8) \end{cases}$$



图解 2-2(c)

联立式(6)、式(7)、式(8),消去中间变量 $I_1(s)$ 和 $I_2(s)$, 可得

$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{R_2}{R_1 LC s^2 + (L + R_1 R_2 C) s + (R_1 + R_2)}$$

微分方程为
$$\frac{du_c^2}{dt^2} + \frac{L + R_1 R_2 C}{R_1 LC} \frac{du_c}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 LC} u_c = \frac{R_2}{R_1 LC} u_r$$

2-3 证明图 2-34(a)所示的力学系统和图 2-34(b)所示的电路系统是相似系统(即有相同形式的数学模型)。

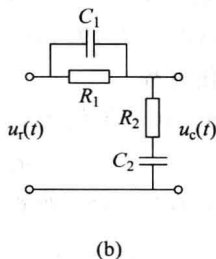
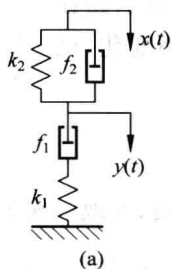


图 2-34 系统原理图

解

(a) 取 A、B 两点分别进行受力分析,如图解 2-3(a)所示。对 A 点有

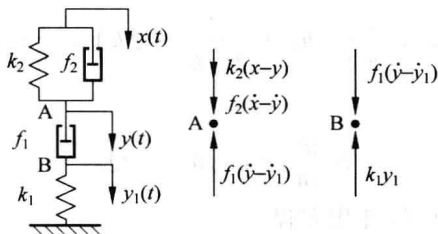
$$k_2(x - y) + f_2(\dot{x} - \dot{y}) = f_1(\dot{y} - \dot{y}_1) \quad (1)$$

对 B 点有

$$f_1(\dot{y} - \dot{y}_1) = k_1 y_1 \quad (2)$$

对式(1)、式(2)分别取拉普拉斯变换,消去中间变量 y_1 , 整理后得

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{f_1 f_2}{k_1 k_2} s^2 + \left(\frac{f_1}{k_1} + \frac{f_2}{k_2}\right) s + 1}{\frac{f_1 f_2}{k_1 k_2} s^2 + \left(\frac{f_1}{k_1} + \frac{f_2}{k_2} + \frac{f_2}{k_1}\right) s + 1}$$



图解 2-3(a)

(b) 由图可写出

$$\frac{U_c(s)}{R_2 + \frac{1}{C_2 s}} = \frac{U_r(s)}{R_2 + \frac{1}{C_2 s} + \frac{R_1 \cdot \frac{1}{C_1 s}}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}}}$$

整理得

$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2) s + 1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) s + 1}$$

比较两系统的传递函数,如果设 $R_1 = 1/k_1, R_2 = 1/k_2, C_1 = f_1, C_2 = f_2$, 则两系统的传递函数相同,所以两系统是相似的。

2-4 如图 2-35 所示,二极管是一个非线性元件,其电流

i_d 和电压 u_d 之间的关系为 $i_d = 10^{-14} (e^{u_d/0.026} - 1)$, 假设电路在工作点 $u(0) = 2.39V, i(0) = 2.19 \times 10^{-3} A$ 处做微小变化,试推导 $i_d = f(u_d)$ 的线性化方程。

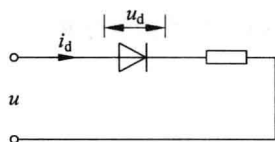


图 2-35 二极管电路

解 将 $i(0) = 2.19 \times 10^{-3} A$ 代入 $i_d = 10^{-14} (e^{u_d/0.026} - 1)$

解得

$$u_{d0} = 0.679V$$

将 $i_d = 10^{-14} (e^{u_d/0.026} - 1)$ 在 (u_{d0}, i_0) 处展开为泰勒级数,并取一次近似,有

$$i_d = i_0 + \Delta i_d = i_0 + 10^{-14} \cdot \frac{1}{0.026} \cdot e^{u_{d0}/0.026} \cdot \Delta u_d$$

$$\Delta i_d = 10^{-14} \cdot \frac{1}{0.026} \cdot e^{u_{d0}/0.026} \cdot \Delta u_d = 0.085 \cdot \Delta u_d$$

即在 (u_{d0}, i_0) 附近 $i_d = f(u_d)$ 的线性化方程为 $\Delta i_d = 0.085 \cdot \Delta u_d$ 。

2-5 假设某容器的液位高度 h 与液体流入量 Q_r 满足方程 $\frac{dh}{dt} + \frac{\alpha}{S} \sqrt{h} = \frac{1}{S} Q_r$, 式中 S

为液位容器的横截面积, α 为常数。若 h 与 Q_r 在其工作点 (Q_{r0}, h_0) 附近做微量变化,试导出 Δh 关于 ΔQ_r 的线性化方程。

解 将 \sqrt{h} 在 h_0 处展开为泰勒级数并取一次近似

$$\sqrt{h} = \sqrt{h_0} + \frac{d\sqrt{h}}{dt} \Big|_{h_0} \cdot \Delta h = \sqrt{h_0} + \frac{1}{2\sqrt{h_0}} \cdot \Delta h \quad (1)$$

代入原方程可得

$$\frac{d(h_0 + \Delta h)}{dt} + \frac{\alpha}{S} \left(\sqrt{h_0} + \frac{1}{2\sqrt{h_0}} \cdot \Delta h \right) = \frac{1}{S} (Q_{r0} + \Delta Q_r) \quad (2)$$

在平衡工作点处系统满足

$$S \frac{dh_0}{dt} + \alpha \sqrt{h_0} = Q_{r0} \quad (3)$$

式(2),式(3)相减可得 Δh 的线性化方程

$$S \frac{d\Delta h}{dt} + \frac{\alpha}{2\sqrt{h_0}} \Delta h = \Delta Q_r$$

2-6 图 2-36 是一个单摆运动的示意图。图中, l 为摆杆长度, θ 为摆角, 摆锤质量为 m 。试建立单摆系统的微分方程, 并将其线性化。

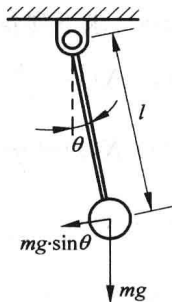


图 2-36 单摆系统

解 由图 2-36, 根据牛顿定律, 在不施加外力的情况下, 可写出单摆的运动方程:

$$ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgl \sin\theta = 0, \quad \text{即} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0$$

将上式中非线性项 $\sin\theta$ 在平衡点 $\theta_0 = 0$ 附近进行泰勒级数展开, 取一次近似有

$$\sin\theta = \sin\theta_0 + \left. \frac{d\sin\theta}{d\theta} \right|_{\theta_0} \cdot \Delta\theta = \sin\theta_0 + \cos\theta_0 \cdot \Delta\theta$$

将 $\theta_0 = 0$ 代入上式, 得 $\sin\theta - \sin\theta_0 = \Delta\theta$ 。代入原方程可得线性化后的单摆方程

$$\frac{d^2\Delta\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\Delta\theta = 0$$

2-7 求图 2-37 所示各信号 $x(t)$ 的像函数 $X(s)$ 。

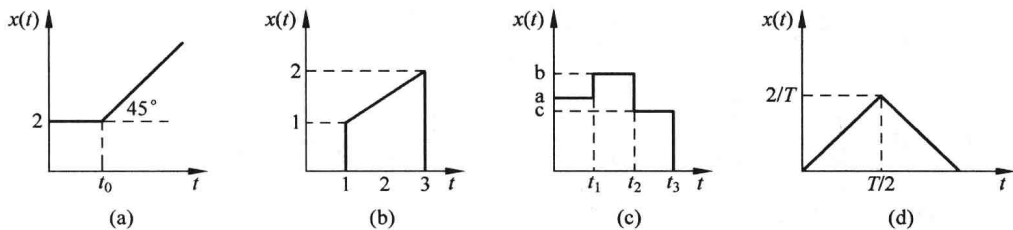


图 2-37 信号图

解

$$(a) \quad x(t) = 2 + (t - t_0)$$

$$X(s) = \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} e^{-t_0 s}$$

$$(b) \quad x(t) = 1 \cdot 1(t-1) + \frac{1}{2}(t-1) - 2 \cdot 1(t-3) - \frac{1}{2}(t-3)$$

$$X(s) = \frac{e^{-s}}{s^2} \left(s + \frac{1}{2} \right) - \frac{e^{-3s}}{s^2} \left(2s + \frac{1}{2} \right)$$

$$(c) \quad x(t) = a + (b-a)(t-t_1) - (b-c)(t-t_2) - c(t-t_3)$$

$$X(s) = \frac{1}{s} [a + (b-a)e^{-t_1 s} - (b-c)e^{-t_2 s} - ce^{-t_3 s}]$$

$$(d) \quad x(t) = \frac{4}{T^2} t - \frac{4}{T^2} \left(t - \frac{T}{2} \right) - \frac{4}{T^2} \left(t - \frac{T}{2} \right) + \frac{4}{T^2} (t - T)$$

$$X(s) = \frac{4}{T^2 s^2} (1 - 2e^{-\frac{T}{2}s} + e^{-Ts})$$

2-8 求下列各拉普拉斯变换式的原函数。

$$(1) X(s) = \frac{e^{-s}}{s-1}$$

$$(2) X(s) = \frac{2}{s^2+9}$$

$$(3) X(s) = \frac{1}{s(s+2)^3(s+3)}$$

$$(4) X(s) = \frac{s+1}{s(s^2+2s+2)}$$

解

$$(1) x(t) = e^{t-1}$$

$$(2) \text{原式} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{s^2+3^2}$$

$$x(t) = \frac{2}{3} \sin 3t$$

$$(3) \text{原式} = \frac{-1}{2(s+2)^3} + \frac{1}{4(s+2)^2} - \frac{3}{8(s+2)} + \frac{1}{24s} + \frac{1}{3(s+3)}$$

$$x(t) = \frac{-t^2}{4} e^{-2t} + \frac{t}{4} e^{-2t} - \frac{3}{8} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{-3t} + \frac{1}{24}$$

$$(4) \text{原式} = \frac{1}{2s} - \frac{\frac{1}{2}s}{s^2+2s+2} = \frac{1}{2s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(s+1)^2+1}$$

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-t} (\sin t - \cos t)$$

2-9 已知在零初始条件下,系统的单位阶跃响应为 $c(t) = 1 - 2e^{-2t} + e^{-t}$,试求系统的传递函数和脉冲响应。

解 单位阶跃输入时,有 $R(s) = \frac{1}{s}$,依题意

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+2} + \frac{1}{s+1} = \frac{3s+2}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{1}{s}$$

则

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{3s+2}{(s+1)(s+2)}$$

$$k(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+1} + \frac{4}{s+2}\right] = 4e^{-2t} - e^{-t}$$

2-10 已知系统传递函数 $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2}{s^2+3s+2}$,且初始条件为 $c(0) = -1, \dot{c}(0) = 0$,试求系统在输入 $r(t) = 1(t)$ 作用下的输出 $c(t)$ 。

解 系统的微分方程为

$$\frac{d^2 c(t)}{dt^2} + 3 \frac{dc(t)}{dt} + 2c(t) = 2r(t) \quad (1)$$

考虑初始条件,对式(1)进行拉普拉斯变换,得

$$s^2 C(s) + s + 3sC(s) + 3 + 2C(s) = \frac{2}{s} \quad (2)$$

$$C(s) = -\frac{s^2 + 3s - 2}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{1}{s} - \frac{4}{s+1} + \frac{2}{s+2}$$

所以

$$c(t) = 1 - 4e^{-t} + 2e^{-2t}$$

2-11 求图 2-38 所示各有源网络的传递函数 $\frac{U_c(s)}{U_r(s)}$ 。

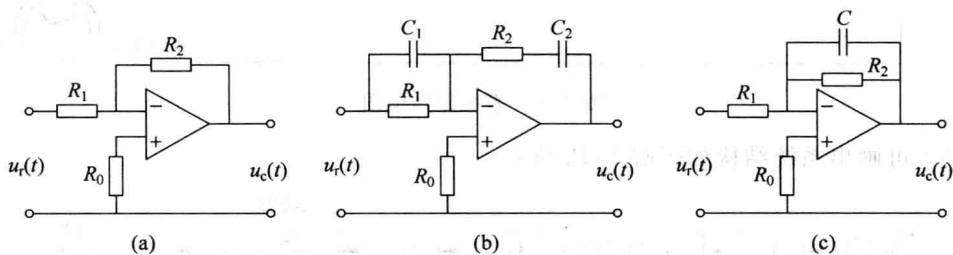


图 2-38 有源网络

解

(a) 根据运算放大器“虚地”概念,可写出

$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)} = -\frac{R_2}{R_1}$$

$$(b) \frac{U_c(s)}{U_r(s)} = -\frac{R_2 + \frac{1}{C_2 s}}{R_1 \cdot \frac{1}{C_1 s}} = -\frac{(1 + R_1 C_1 s)(1 + R_2 C_2 s)}{R_1 C_2 s}$$

$$\frac{R_2 \cdot \frac{1}{C_s}}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}}$$

$$(c) \frac{U_c(s)}{U_r(s)} = -\frac{R_2 + \frac{1}{C s}}{R_1} = -\frac{R_2}{R_1(1 + R_2 C s)}$$

2-12 某位置随动系统原理框图如图 2-39 所示,已知电位器最大工作角度 $Q_m = 330^\circ$,功率放大器放大系数为 k_3 。

- (1) 分别求出电位器的传递函数 k_0 ,第一级和第二级放大器的放大系数 k_1, k_2 ;
- (2) 画出系统的结构图;
- (3) 求系统的闭环传递函数 $Q_c(s)/Q_r(s)$ 。

解 (1) 电位器的传递函数

$$k_0 = \frac{E}{Q_m} = \frac{30}{330^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}} = \frac{180}{11\pi}$$

根据运算放大器的特性,可分别写出两级放大器的放大系数为

$$k_1 = -\frac{30 \times 10^3}{10 \times 10^3} = -3, \quad k_2 = -\frac{20 \times 10^3}{10 \times 10^3} = -2$$

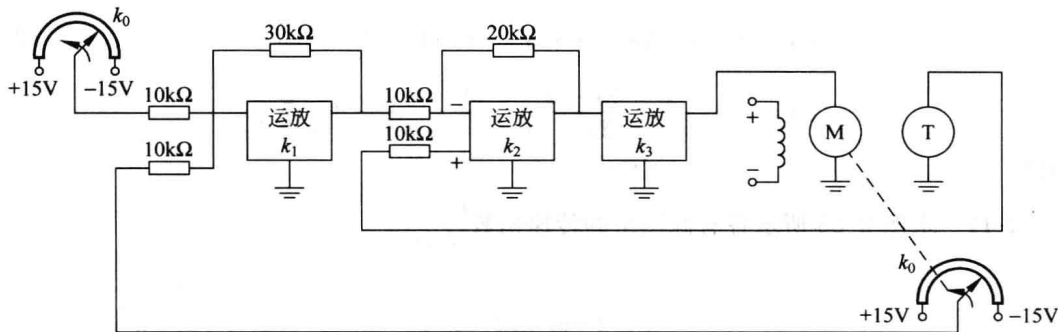
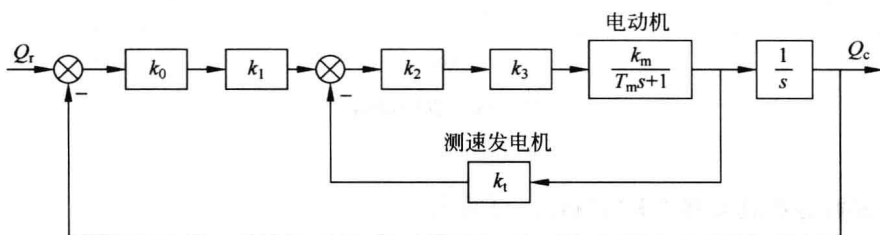


图 2-39 系统原理框图

(2) 可画出系统结构如图解 2-12 所示。



图解 2-12

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \frac{Q_c(s)}{Q_r(s)} &= \frac{k_0 k_1 k_2 k_3 k_m}{s(T_m s + 1)} \\
 &= \frac{1}{\frac{T_m}{k_0 k_1 k_2 k_3 k_m} s^2 + \frac{1 + k_2 k_3 k_m k_t}{k_0 k_1 k_2 k_3 k_m} s + 1}
 \end{aligned}$$

2-13 飞机俯仰角控制系统结构图如图 2-40 所示, 试求闭环传递函数 $\frac{Q_c(s)}{Q_r(s)}$ 。

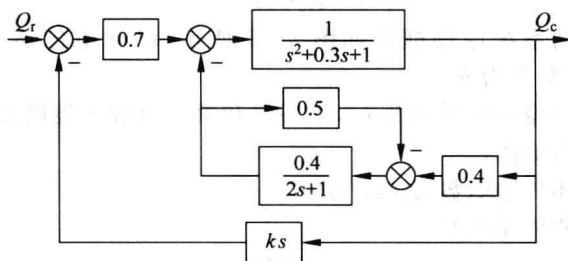


图 2-40 飞机俯仰角控制系统结构图

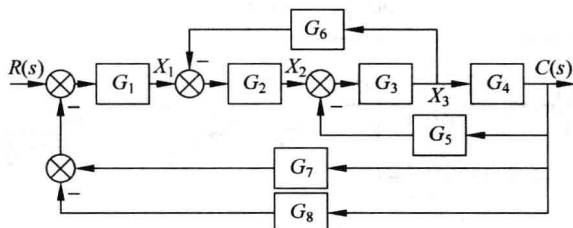
解 经结构图等效变换可得闭环系统的传递函数

$$\frac{Q_c(s)}{Q_r(s)} = \frac{0.7(s + 0.6)}{s^3 + (0.9 + 0.7K)s^2 + (1.18 + 0.42K)s + 0.68}$$

2-14 已知系统方程组如下,试绘制系统结构图,并求闭环传递函数 $\frac{C(s)}{R(s)}$ 。

$$\begin{cases} X_1(s) = G_1(s)R(s) - G_1(s)[G_7(s) - G_8(s)]C(s) \\ X_2(s) = G_2(s)[X_1(s) - G_6(s)X_3(s)] \\ X_3(s) = [X_2(s) - C(s)G_5(s)]G_3(s) \\ C(s) = G_4(s)X_3(s) \end{cases}$$

解 系统结构图如图解 2-14 所示。



图解 2-14

利用结构图等效化简或梅逊增益公式可求出系统的闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_2 G_3 G_6 + G_3 G_4 G_5 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_7 - G_1 G_2 G_3 G_4 G_8}$$

2-15 试用结构图等效化简的方法,求图 2-41 所示各系统的传递函数 $\frac{C(s)}{R(s)}$ 。

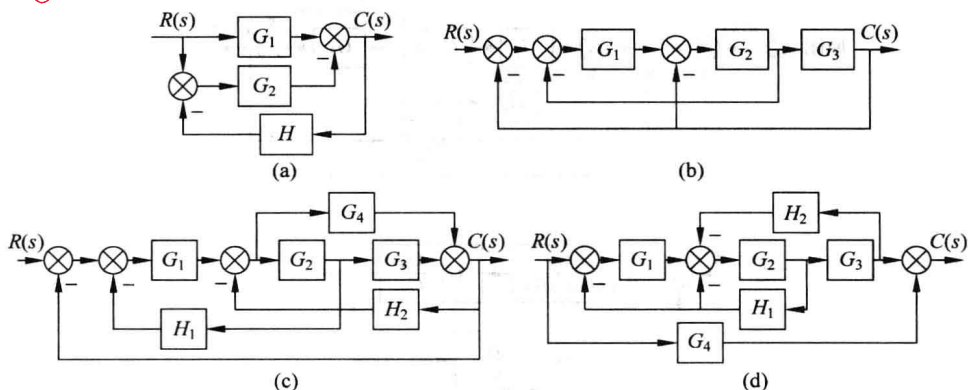
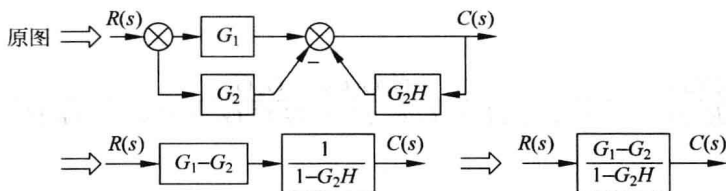


图 2-41 系统结构图

解 结构图的集效化简分别如图解 2-15(a)、(b)、(c)、(d)所示。

(a)

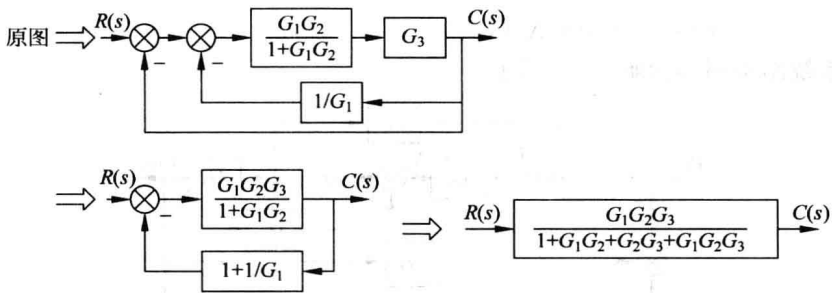


图解 2-15(a)

所以

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 - G_2}{1 - G_2 H}$$

(b)

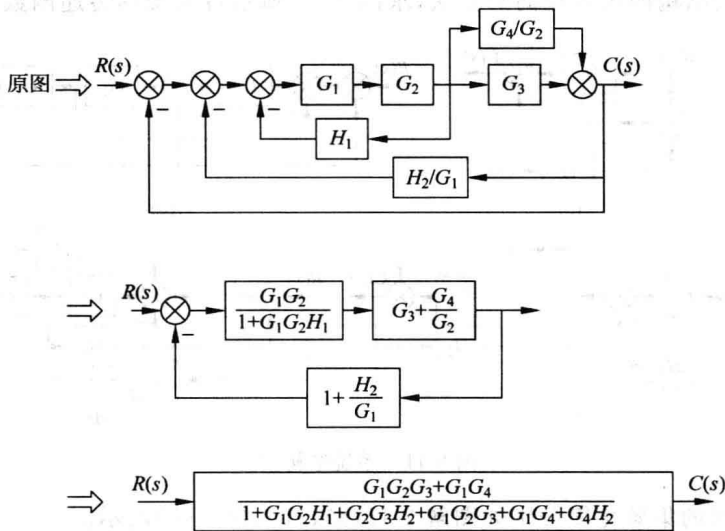


图解 2-15(b)

所以

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 + G_2 G_3 + G_1 G_2 G_3}$$

(c)

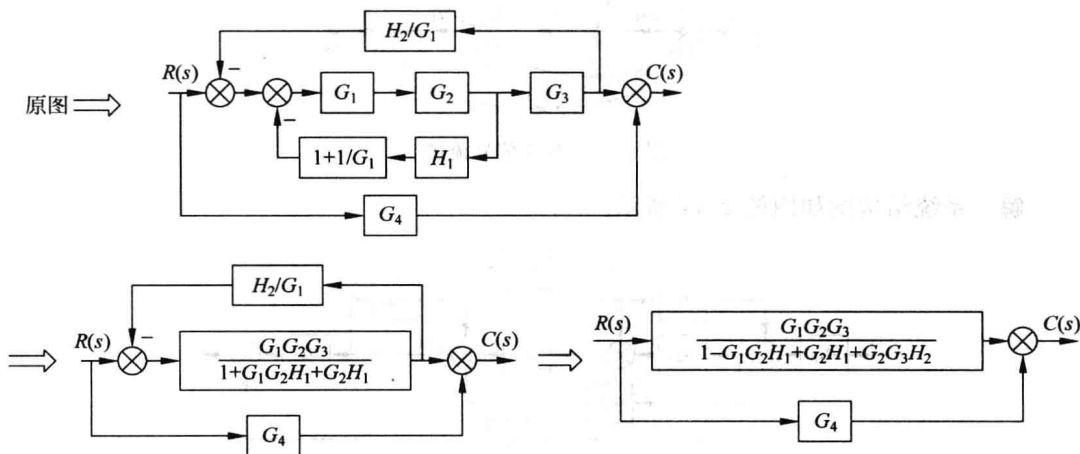


图解 2-15(c)

所以

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 + G_1 G_4}{1 + G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3 + G_1 G_4 + G_4 H_2}$$

(d)



图解 2-15(d)

所以

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_4 + \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 H_1 + G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2}$$

2-16 试绘制图 2-42 所示系统的信号流图, 求传递函数 $\frac{C(s)}{R(s)}$ 。

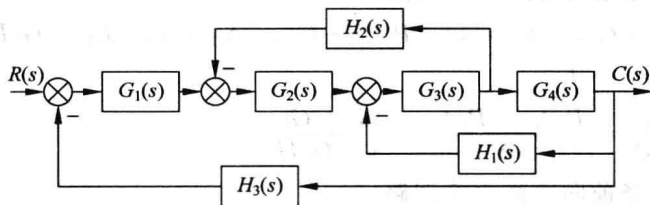
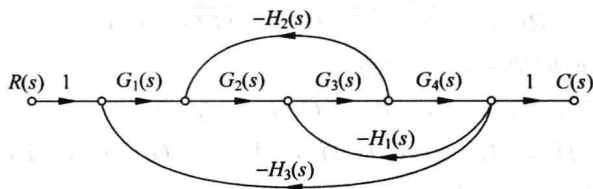


图 2-42 系统结构图

解 系统的信号流图如图解 2-16 所示。



图解 2-16

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_3 G_4 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_3}$$

2-17 绘制图 2-43 所示信号流图对应的系统结构图, 求传递函数 $\frac{X_5(s)}{X_1(s)}$ 。

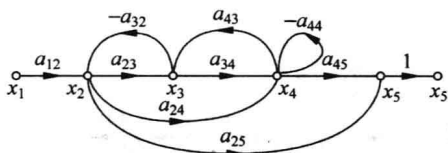
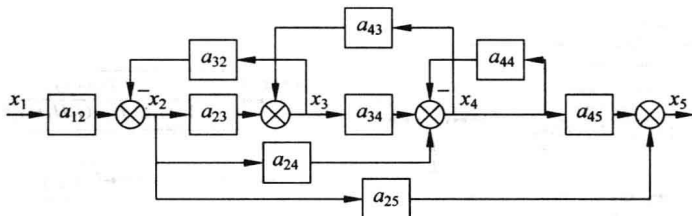


图 2-43 系统信号流图

解 系统结构图如图解 2-17 所示。



图解 2-17

$$\frac{X_5(s)}{X_1(s)} = \frac{a_{12}a_{23}a_{34}a_{45} + a_{12}a_{24}a_{45} + a_{12}a_{25}(1 - a_{34}a_{43} + a_{44})}{1 + a_{23}a_{32} + a_{44} - a_{34}a_{43} + a_{24}a_{43}a_{32} + a_{23}a_{32}a_{44}}$$

2-18 应用梅逊增益公式求题 2-15 中各结构图对应的闭环传递函数。

解

(a) 图中有 2 条前向通路, 1 个回路

$$P_1 = G_1, \quad \Delta_1 = 1, \quad P_2 = -G_2, \quad \Delta_2 = 1, \quad L_1 = G_2H, \\ \Delta = 1 - L_1$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1 - G_2}{1 - G_2H}$$

(b) 图中有 1 条前向通路, 3 个回路

$$P_1 = G_1G_2G_3, \quad \Delta_1 = 1, \quad L_1 = -G_1G_2, \\ L_2 = -G_2G_3, \quad L_3 = -G_1G_2G_3, \quad \Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3)$$

则有
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1G_2G_3}{1 + G_1G_2 + G_2G_3 + G_1G_2G_3}$$

(c) 图中有 2 条前向通路, 5 个回路

$$P_1 = G_1G_2G_3, \quad \Delta_1 = 1, \quad P_2 = G_1G_4, \quad \Delta_2 = 1, \\ L_1 = -G_1G_2H_1, \quad L_2 = -G_2G_3H_2, \quad L_3 = -G_1G_2G_3, \quad L_4 = -G_1G_4, \\ L_5 = -G_4H_2, \quad \Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5)$$

则有
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1G_2G_3 + G_1G_4}{1 + G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3 + G_1G_4 + G_4H_2}$$

(d) 图中有 2 条前向通路, 3 个回路

$$P_1 = G_1G_2G_3, \quad \Delta_1 = 1, \quad P_2 = G_4, \quad \Delta_2 = \Delta, \\ L_1 = -G_1G_2H_1, \quad L_2 = -G_2H_1, \quad L_3 = -G_2G_3H_2, \quad \Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3),$$

则有
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta} = P_2 + \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = G_4 + \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 H_1 + G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2}$$

2-19 应用梅逊增益公式求图 2-44 中各系统的闭环传递函数。

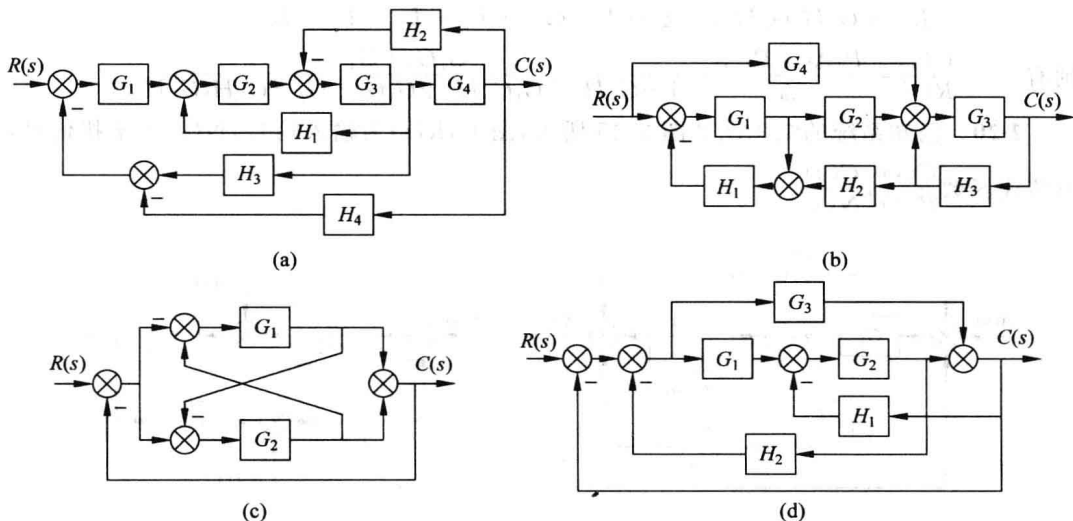


图 2-44 系统结构图

解

(a) 图中有 1 条前向通路, 4 个回路

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4, \quad \Delta_1 = 1$$

$$L_1 = G_2 G_3 H_1 \quad L_2 = -G_1 G_2 G_3 H_3, \quad L_3 = G_1 G_2 G_3 G_4 H_4,$$

$$L_4 = -G_3 G_4 H_2, \quad \Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4)$$

则有
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 - G_2 G_3 H_1 + G_1 G_2 G_3 H_3 - G_1 G_2 G_3 G_4 H_4 + G_3 G_4 H_2}$$

(b) 图中有 2 条前向通路, 3 个回路, 有 1 对互不接触回路

$$P_1 = G_1 G_2 G_3, \quad \Delta_1 = 1, \quad P_2 = G_3 G_4, \quad \Delta_2 = 1 - L_1 = 1 + G_1 H_1,$$

$$L_1 = -G_1 H_1, \quad L_2 = G_3 H_3, \quad L_3 = -G_1 G_2 G_3 H_1 H_2 H_3,$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1 L_2$$

则有
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 G_3 + G_3 G_4 (1 + G_1 H_1)}{1 + G_1 H_1 - G_3 H_3 + G_1 G_2 G_3 H_1 H_2 H_3 - G_1 H_1 G_3 H_3}$$

(c) 图中有 4 条前向通路, 5 个回路、

$$P_1 = -G_1, \quad P_2 = G_1 G_2, \quad P_3 = G_2, \quad P_4 = G_2 G_1,$$

$$L_1 = G_1, \quad L_2 = -G_1 G_2, \quad L_3 = -G_2, \quad L_4 = -G_2 G_1, \quad L_5 = -G_1 G_2,$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 1, \quad \Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4)$$

则有
$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + P_3 \Delta_3 + P_4 \Delta_4}{\Delta} \\ &= \frac{-G_1 + G_1 G_2 + G_2 + G_2 G_1}{1 - G_1 + G_1 G_2 + G_2 + G_2 G_1 + G_1 G_2} = \frac{2G_1 G_2 - G_1 + G_2}{1 - G_1 + G_2 + 3G_1 G_2} \end{aligned}$$

(d) 图中有 2 条前向通路, 5 个回路

$$P_1 = G_1 G_2, \quad \Delta_1 = 1, \quad P_2 = G_3, \quad \Delta_2 = 1,$$

$$L_1 = -G_2 H_1, \quad L_2 = -G_1 G_2 H_2, \quad L_3 = -G_1 G_2, \quad L_4 = -G_3,$$

$$L_5 = G_3 H_1 G_2 H_2, \quad \Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5)$$

则有
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 + G_3}{1 + G_2 H_1 + G_1 G_2 H_2 + G_1 G_2 + G_3 - G_3 H_1 G_2 H_2}$$

2-20 已知系统的结构图如图 2-45 所示, 图中, $R(s)$ 为输入信号, $N(s)$ 为干扰信号, 求传递函数 $\frac{C(s)}{R(s)}, \frac{C(s)}{N(s)}$ 。

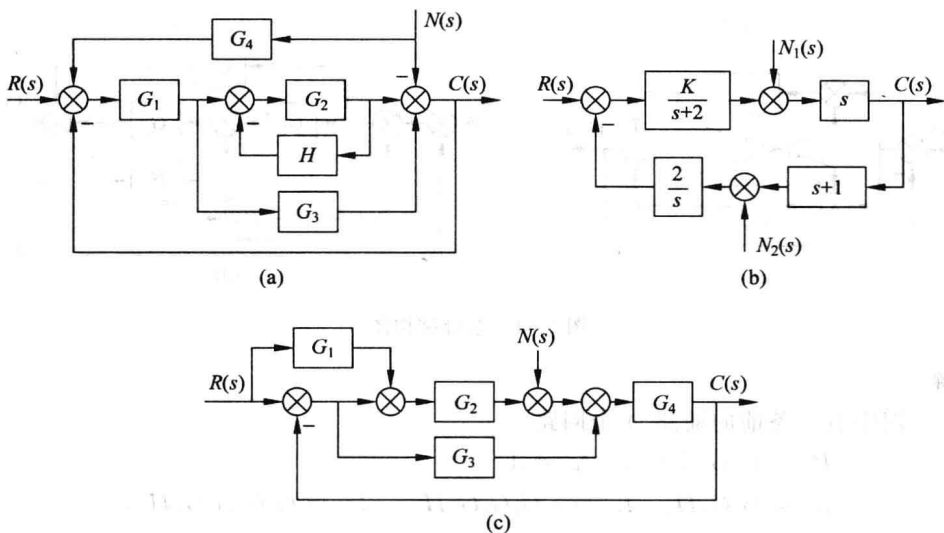


图 2-45 系统结构图

解 (a) 令 $N(s) = 0$, 求 $C(s)/R(s)$ 。图中有 2 条前向通路, 3 个回路, 有 1 对互不接触回路。

$$P_1 = G_1 G_2, \quad \Delta_1 = 1, \quad P_2 = G_1 G_3, \quad \Delta_2 = 1 - L_1 = 1 + G_2 H,$$

$$L_1 = -G_2 H, \quad L_2 = -G_1 G_2, \quad L_3 = -G_1 G_3,$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1 L_3$$

则有
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 + G_1 G_3 (1 + G_2 H)}{1 + G_2 H + G_1 G_2 + G_1 G_3 + G_1 G_2 G_3 H}$$

令 $R(s) = 0$, 求 $\frac{C(s)}{N(s)}$ 。有 3 条前向通路, 回路不变。

$$P_1 = -1, \quad \Delta_1 = 1 - L_1, \quad P_2 = G_4 G_1 G_2, \quad \Delta_2 = 1,$$

$$P_3 = G_4 G_1 G_3, \quad \Delta_3 = 1 - L_1,$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1 L_3$$

则有
$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + P_3 \Delta_3}{\Delta} = \frac{-1 - G_2 H + G_4 G_1 G_2 + G_4 G_1 G_3 (1 + G_2 H)}{1 + G_2 H + G_1 G_2 + G_1 G_3 + G_1 G_2 G_3 H}$$

(b) 令 $N_1(s)=0, N_2(s)=0$, 求 $\frac{C(s)}{R(s)}$ 。图中有 1 条前向通路, 1 个回路。

$$P_1 = \frac{Ks}{s+2}, \quad \Delta_1 = 1, \quad L_1 = -\frac{2K(s+1)}{s+2}, \quad \Delta = 1 - L_1$$

则有
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{Ks}{(2K+1)s+2(K+1)}$$

令 $R(s)=0, N_2(s)=0$, 求 $\frac{C(s)}{N_1(s)}$ 。图中有 1 条前向通路, 回路不变。

$$P_1 = s, \quad \Delta_1 = 1$$

则有
$$\frac{C(s)}{N_1(s)} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{s(s+2)}{(2K+1)s+2(K+1)}$$

令 $R(s)=0, N_1(s)=0$, 求 $\frac{C(s)}{N_2(s)}$ 。图中有 1 条前向通路, 回路不变。

$$P_1 = -\frac{2K}{s+2}, \quad \Delta_1 = 1$$

则有
$$\frac{C(s)}{N_2(s)} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{-2K}{(2K+1)s+2(K+1)}$$

(c) 令 $N(s)=0$, 求 $\frac{C(s)}{R(s)}$ 。图中有 3 条前向通路, 2 个回路。

$$P_1 = G_2 G_4, \quad \Delta_1 = 1, \quad P_2 = G_3 G_4, \quad \Delta_2 = 1, \quad P_3 = G_1 G_2 G_4, \quad \Delta_3 = 1,$$

$$L_1 = -G_2 G_4, \quad L_2 = -G_3 G_4, \quad \Delta = 1 - (L_1 + L_2)$$

则有
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + P_3 \Delta_3}{\Delta} = \frac{G_2 G_4 + G_3 G_4 + G_1 G_2 G_4}{1 + G_2 G_4 + G_3 G_4}$$

令 $R(s)=0$, 求 $\frac{C(s)}{N(s)}$ 。有 1 条前向通路, 回路不变。

$$P_1 = G_4, \quad \Delta_1 = 1$$

则有
$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_4}{1 + G_2 G_4 + G_3 G_4}$$

2-21 已知系统的结构图如图 2-46 所示。求当 $r(t)=n(t)=1(t)$ 同时作用时, 系统的输出 $c(t)$ 及偏差 $e(t)$ 。

解 (1) 求输出 $c(t)$

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{2}{s(s+5)}}{1 + \frac{4}{s(s+5)}} = \frac{2}{s(s+5)+4} = \frac{2}{(s+1)(s+4)}$$

$$\Phi_n(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = \frac{\frac{1}{s+5}}{1 + \frac{4}{s(s+5)}} = \frac{s}{(s+1)(s+4)}$$

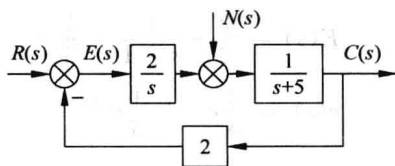


图 2-46 系统结构图

$$C(s) = \Phi(s)R(s) + \Phi_n(s)N(s) = \frac{s+2}{s(s+1)(s+4)} = \frac{C_0}{s} + \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{s+4}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+2}{s(s+1)(s+4)} = \frac{1}{2} \\ C_1 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \frac{s+2}{s(s+1)(s+4)} = -\frac{1}{3} \\ C_2 = \lim_{s \rightarrow -4} (s+4) \frac{s+2}{s(s+1)(s+4)} = -\frac{1}{6} \end{array} \right.$$

$$C(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{s+4}$$

$$c(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-4t}$$

(2) 求偏差 $e(t)$

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + \frac{4}{s(s+5)}} = \frac{s(s+5)}{s(s+5)+6} = \frac{s(s+5)}{(s+1)(s+4)}$$

$$\Phi_{en}(s) = \frac{E(s)}{N(s)} = \frac{\frac{-2}{s+5}}{1 + \frac{4}{s(s+5)}} = \frac{-2s}{(s+1)(s+4)}$$

$$E(s) = \Phi_e(s)R(s) + \Phi_{en}(s)N(s) = \frac{s^2+3s}{s(s+1)(s+4)} = \frac{C_0}{s} + \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{s+4}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(s+3)}{s(s+1)(s+4)} = 0 \\ C_1 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \frac{s(s+3)}{s(s+1)(s+4)} = \frac{2}{3} \\ C_2 = \lim_{s \rightarrow -4} (s+4) \frac{s(s+3)}{s(s+1)(s+4)} = \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

$$E(s) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+4}$$

$$e(t) = \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t}$$

第3章 习题及解答

3-1 已知系统脉冲响应

$$k(t) = 0.0125e^{-1.25t}$$

试求系统闭环传递函数 $\Phi(s)$ 。

解 $\Phi(s) = \mathcal{L}[k(t)] = 0.0125/(s+1.25)$

3-2 设某高阶系统可用一阶微分方程

$$T\dot{c}(t) + c(t) = \tau\dot{r}(t) + r(t)$$

近似描述,其中, $0 < (T-\tau) < 1$ 。试证系统的动态性能指标为

$$t_d = \left[0.693 + \ln\left(\frac{T-\tau}{T}\right) \right] T$$

$$t_r = 2.2T$$

$$t_s = \left[3 + \ln\left(\frac{T-\tau}{T}\right) \right] T$$

解 设单位阶跃输入 $R(s) = \frac{1}{s}$

当初始条件为 0 时有

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\tau s + 1}{Ts + 1}$$

所以

$$C(s) = \frac{\tau s + 1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{T-\tau}{Ts + 1}$$

$$C(t) = h(t) = 1 - \frac{T-\tau}{T} e^{-t/T}$$

(1) 当 $t=t_d$ 时

$$h(t) = 0.5 = 1 - \frac{T-\tau}{T} e^{-t_d/T}$$

则

$$\frac{1}{2} = \frac{T-\tau}{T} e^{-t_d/T}; \quad -\ln 2 = \ln\left(\frac{T-\tau}{T}\right) - \frac{t_d}{T}$$

所以

$$t_d = T \left[\ln 2 + \ln\left(\frac{T-\tau}{T}\right) \right]$$

(2) 求 t_r (即 $c(t)$ 从 0.1 到 0.9 所需时间)

当 $h(t) = 0.9 = 1 - \frac{T-\tau}{T} e^{-t_2/T}; \quad t_2 = T \left[\ln\left(\frac{T-\tau}{T}\right) - \ln 0.1 \right]$

当 $h(t) = 0.1 = 1 - \frac{T-\tau}{T} e^{-t_1/T}; \quad t_1 = T \left[\ln\left(\frac{T-\tau}{T}\right) - \ln 0.9 \right]$

则 $t_r = t_2 - t_1 = T \ln \frac{0.9}{0.1} = 2.2T$

(3) 求 t_s

$$h(t_s) = 0.95 = 1 - \frac{T-\tau}{T} e^{-t_s/T}$$

所以

$$t_s = T \left[\ln \frac{T-\tau}{T} - \ln 0.05 \right] = T \left[\ln \frac{T-\tau}{T} + \ln 20 \right] = T \left[3 + \ln \frac{T-\tau}{T} \right]$$

3-3 一阶系统结构图如图 3-46 所示。要求系统闭环增益 $K_{\Phi} = 2$, 调节时间 $t_s \leq 0.4 \text{ s}$, 试确定参数 K_1, K_2 的值。

解 由结构图写出闭环系统传递函数

$$\Phi(s) = \frac{\frac{K_1}{s}}{1 + \frac{K_1 K_2}{s}} = \frac{K_1}{s + K_1 K_2} = \frac{1}{\frac{s}{K_1 K_2} + 1}$$

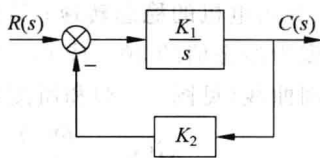


图 3-46 系统结构图

令闭环增益 $K_{\Phi} = \frac{1}{K_1 K_2} = 2$, 得 $K_2 = 0.5$ 。令调节时间 $t_s = 3T = \frac{3}{K_1 K_2} \leq 0.4$, 得 $K_1 \geq 15$ 。

3-4 在许多化学过程中, 反应槽内的温度要保持恒定, 图 3-47(a) 和图 3-47(b) 分别为开环和闭环温度控制系统结构图, 两种系统正常的 K 值为 1。

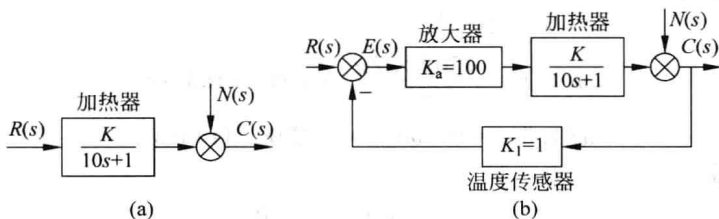


图 3-47 温度系统结构图

(1) 若 $r(t) = 1(t), n(t) = 0$, 求两种系统从开始反应至温度达到稳态温度值的 63.2% 各需多长时间。

(2) 当有阶跃扰动 $n(t) = 0.1$ 时, 求扰动对两种系统的温度的影响。

解 (1) 对图 3-47(a) 系统

$$G_a(s) = \frac{K}{10s + 1} = \frac{1}{10s + 1}, \quad \text{时间常数 } T = 10$$

所以 $h(T) = 0.632$, 图 3-47(a) 系统达到稳态温度值的 63.2% 需要 10 个单位时间; 对图 3-47(b) 系统

$$\Phi_b(s) = \frac{100}{10s + 101} = \frac{\frac{100}{101}}{\frac{10}{101}s + 1}, \quad \text{时间常数 } T = \frac{10}{101}$$

所以 $h(T) = 0.632$, 图 3-47(b) 系统达到稳态温度值的 63.2% 需要 0.099 个单位时间。

(2) 对图 3-47(a) 系统, $G_n(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = 1, n(t) = 0.1$ 时, 该扰动影响将一直保持。

对图 3-47(b) 系统, $\Phi_n(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = \frac{1}{1 + \frac{100}{10s + 1}} = \frac{10s + 1}{10s + 101}, n(t) = 0.1$ 时, 最终扰动

影响为 $0.1 \times \frac{1}{101} \approx 0.001$ 。

3-5 一种测定直流电动机传递函数的方法是给电枢加一定的电压, 保持励磁电流不

变,测出电机的稳态转速;另外要记录电动机从静止到速度为稳态值的 50% 或 63.2% 所需的时间,利用转速时间曲线(见图 3-48)和所测数据,并假设传递函数为

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{V(s)} = \frac{K}{s(s+a)}$$

可求得 K 和 a 的值。

若实测结果是:加 10V 电压可得 1200r/min 的稳态转速,而达到该值 50% 的时间为 1.2s,试求电动机的传递函数。

提示:注意 $\frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{K}{s+a}$, 其中 $\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$, 单位是 rad/s。

解 依题意有

$$v(t) = 10 \text{ (V)}$$

$$\omega(\infty) = \frac{1200 \times 2\pi}{60} = 40\pi \text{ (rad/s)} \quad (1)$$

$$\omega(1.2) = 0.5\omega(\infty) = 20\pi \text{ (rad/s)} \quad (2)$$

设系统传递函数

$$G_0(s) = \frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{K}{s+a}$$

应有

$$\omega(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s) \cdot V(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10}{s} \cdot \frac{K}{s+a} = \frac{10K}{a} = 40\pi \quad (3)$$

$$\omega(t) = \mathcal{L}^{-1}[G_0(s) \cdot V(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10K}{s(s+a)}\right] = \frac{10K}{a} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right] = \frac{10K}{a} [1 - e^{-at}]$$

由式(2),式(3)

$$\omega(1.2) = \frac{10K}{a} [1 - e^{-1.2a}] = 40\pi [1 - e^{-1.2a}] = 20\pi$$

得

$$1 - e^{-1.2a} = 0.5$$

解出

$$a = \frac{-\ln 0.5}{1.2} = 0.5776 \quad (4)$$

将式(4)代入式(3)得

$$K = 4\pi a = 7.2586$$

3-6 已知单位反馈系统的开环传递函数 $G(s) = \frac{4}{s(s+5)}$, 求单位阶跃响应 $h(t)$ 和调节时间 t_s 。

解 依题,系统闭环传递函数

$$\Phi(s) = \frac{4}{s^2 + 5s + 4} = \frac{4}{(s+1)(s+4)} = \frac{4}{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)} \begin{cases} T_1 = 1 \\ T_2 = 0.25 \end{cases}$$

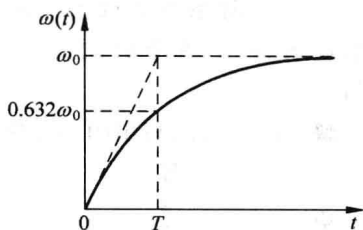


图 3-48 转速时间曲线

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{4}{s(s+1)(s+4)} = \frac{C_0}{s} + \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{s+4}$$

$$C_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi(s)R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{4}{(s+1)(s+4)} = 1$$

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \Phi(s)R(s) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{4}{s(s+4)} = -\frac{4}{3}$$

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow -4} (s+4) \Phi(s)R(s) = \lim_{s \rightarrow -4} \frac{4}{s(s+1)} = \frac{1}{3}$$

$$h(t) = 1 - \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t}$$

因为 $\frac{T_1}{T_2} = 4$, 所以 $t_s = \left(\frac{t_s}{T_1}\right)T_1 = 3.3T_1 = 3.3$ 。

3-7 设角速度指示随动系统结构图如图 3-49 所示, 其中 $T=0.1$ 。若要求系统单位阶跃响应无超调, 且调节时间尽可能短, 问开环增益 K 应取何值, 调节时间 t_s 是多少?

解 依题意应取 $\zeta=1$, 这时可设闭环极点为 $\lambda_{1,2} = -1/T_0$ 。写出系统闭环传递函数

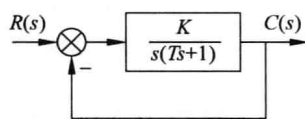


图 3-49 系统结构图

$$\Phi(s) = \frac{10K}{s^2 + 10s + 10K}$$

闭环特征多项式

$$D(s) = s^2 + 10s + 10K = \left(s + \frac{1}{T_0}\right)^2 = s^2 + \frac{2}{T_0}s + \left(\frac{1}{T_0}\right)^2$$

比较系数有

$$\begin{cases} \frac{2}{T_0} = 10 \\ \left(\frac{1}{T_0}\right)^2 = 10K \end{cases}$$

联立求解得

$$\begin{cases} T_0 = 0.2 \\ K = 2.5 \end{cases}$$

因此有

$$t_s = 4.75T_0 = 0.95s < 1s$$

3-8 给定典型二阶系统的设计指标: 超调量 $\sigma\% \leq 5\%$, 调节时间 $t_s < 3s$, 峰值时间 $t_p < 1s$, 试确定系统极点配置的区域, 以获得预期的响应特性。

解 依题

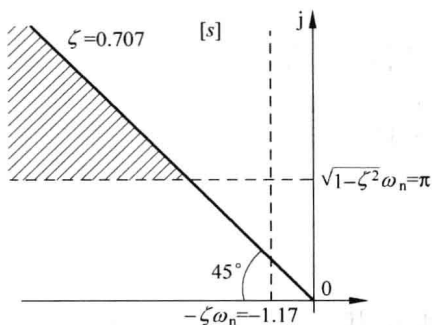
$$\sigma\% \leq 5\%, \Rightarrow \zeta \geq 0.707 (\beta \leq 45^\circ);$$

$$t_s = \frac{3.5}{\zeta\omega_n} < 3, \Rightarrow \zeta\omega_n > 1.17;$$

$$t_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n} < 1, \Rightarrow \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n > 3.14$$

综合以上条件,可画出满足要求的特征根区域如图解 3-8 所示。

3-9 电子心脏起搏器心律控制系统结构图如图 3-50 所示,其中模仿心脏的传递函数相当于一纯积分环节。



图解 3-8

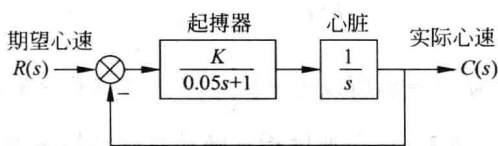


图 3-50 电子心脏起搏器系统

(1) 若 $\zeta=0.5$ 对应最佳响应,问起搏器增益 K 应取多大?

(2) 若期望心速为 60 次/min,并突然接通起搏器,问 1s 后实际心速为多少? 瞬时最大心速多大?

解 (1) 依题,系统传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{\frac{K}{0.05}}{s^2 + \frac{1}{0.05}s + \frac{K}{0.05}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{K}{0.05}} \\ \zeta = \frac{1}{0.05 \times 2\omega_n} \end{cases}$$

令 $\zeta=0.5$ 可解出 $\begin{cases} K=20 \\ \omega_n=20 \end{cases}$ 。

(2) 将 $t=1s$ 代入二阶系统阶跃响应公式

$$h(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t + \beta)$$

可得 $h(1)=1.000024$ 次/s=60.00145 次/min。

$\zeta=0.5$ 时,系统超调量 $\sigma\%=16.3\%$,最大心速为?

$$h(t_p) = 1 + 0.163 = 1.163 \text{ 次/s} = 69.78 \text{ 次/min}$$

3-10 机器人位置控制系统结构图如图 3-51 所示。试确定参数 K_1, K_2 值,使系统阶跃响应的峰值时间 $t_p=0.5s$,超调量 $\sigma\%=2\%$ 。

解 依题,系统传递函数为

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \frac{\frac{K_1}{s(s+1)}}{1 + \frac{K_1(K_2s+1)}{s(s+1)}} \\ &= \frac{K_1}{s^2 + (1+K_1K_2)s + K_1} = \frac{K_\phi \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \end{aligned}$$

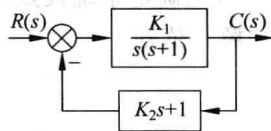


图 3-51 机器人位置控制系统

$$\text{由} \begin{cases} \sigma\% = e^{-\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.02 \\ t_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n} = 0.5 \end{cases} \quad \text{联立求解得} \begin{cases} \zeta = 0.78 \\ \omega_n = 10 \end{cases}$$

比较 $\Phi(s)$ 分母系数得

$$\begin{cases} K_1 = \omega_n^2 = 100 \\ K_2 = \frac{2\zeta\omega_n - 1}{K_1} = 0.146 \end{cases}$$

3-11 某典型二阶系统的单位阶跃响应如图 3-52 所示。试确定系统的闭环传递函数。

解 依题, 系统闭环传递函数形式应为

$$\Phi(s) = \frac{K_\Phi \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

由阶跃响应曲线有

$$h(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \Phi(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \Phi(s) \cdot \frac{1}{s} = K_\Phi = 2$$

$$\begin{cases} t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = 2 \\ \sigma\% = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2.5-2}{2} = 25\% \end{cases}$$

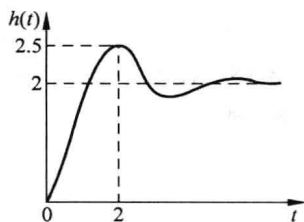


图 3-52 单位阶跃响应

联立求解得

$$\begin{cases} \zeta = 0.404 \\ \omega_n = 1.717 \end{cases}$$

所以有

$$\Phi(s) = \frac{2 \times 1.717^2}{s^2 + 2 \times 0.404 \times 1.717s + 1.717^2} = \frac{5.9}{s^2 + 1.39s + 2.95}$$

3-12 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{12.5}{s(0.2s+1)}$$

试求系统在误差初始条件 $e(0)=10, \dot{e}(0)=1$ 作用下的时间响应。

解 依题意, 系统闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{62.5}{s^2 + 5s + 62.5}$$

当 $r(t)=0$ 时, 系统微分方程为

$$c''(t) + 5c'(t) + 62.5c(t) = 0$$

考虑初始条件, 对微分方程进行拉普拉斯变换

$$[s^2 C(s) - sc(0) - c'(0)] + 5[sC(s) - c(0)] + 62.5C(s) = 0$$

整理得

$$(s^2 + 5s + 62.5)C(s) = (s+5)c(0) + c'(0) \quad (1)$$

对单位反馈系统有 $e(t) = r(t) - c(t)$, 所以

$$c(0) = r(0) - e(0) = 0 - 10 = -10$$

$$c'(0) = r'(0) - e'(0) = 0 - 1 = -1$$

将初始条件代入式(1)得

$$C(s) = \frac{-10s - 51}{s^2 + 5s + 62.5} = -\frac{10(s + 2.5) + 26}{(s + 2.5)^2 + 7.5^2}$$

$$= -10 \frac{(s + 2.5)}{(s + 2.5)^2 + 7.5^2} - 3.47 \frac{7.5}{(s + 2.5)^2 + 7.5^2}$$

$$c(t) = -10e^{-2.5t} \cos 7.5t - 3.47e^{-2.5t} \sin 7.5t = -10.6e^{-2.5t} \sin(7.5t + 70.8^\circ)$$

3-13 设图 3-53(a)所示系统的单位阶跃响应如图 3-53(b)所示。试确定系统参数 K_1, K_2 和 a 。

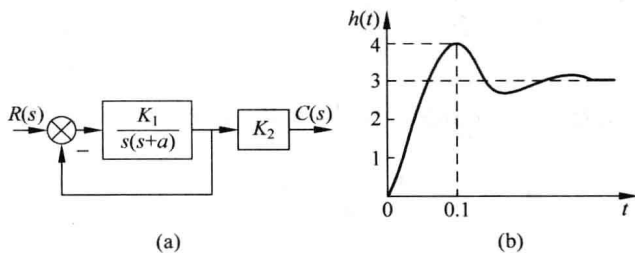


图 3-53 系统结构图及单位阶跃响应

解 由系统阶跃响应曲线有

$$\begin{cases} h(\infty) = 3 \\ t_p = 0.1 \\ \sigma\% = (4 - 3)/3 = 33.3\% \end{cases}$$

系统闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{K_1 K_2}{s^2 + as + K_1} = \frac{K_2 \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1)$$

$$\text{由} \begin{cases} t_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n} = 0.1 \\ \sigma\% = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 33.3\% \end{cases}, \text{联立求解得} \begin{cases} \zeta = 0.33 \\ \omega_n = 33.28 \end{cases} \text{。由式(1)有}$$

$$\begin{cases} K_1 = \omega_n^2 = 1108 \\ a = 2\zeta\omega_n = 22 \end{cases}$$

另外

$$h(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \Phi(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_1 K_2}{s^2 + as + K_1} = K_2 = 3$$

3-14 图 3-54 是电压测量系统,输入电压 $e_r(t)$ V,输出位移 $y(t)$ cm,放大器增益 $K=10$,丝杠每转螺距 1mm,电位计滑臂每移动 1cm 电压增量为 0.4V。当对电机加 10V 阶跃电压时(带负载)稳态转速为 1000r/min,达到该值 63.2%需要 0.5s。试画出系统方

框图, 求出传递函数 $Y(s)/E(s)$, 并求系统单位阶跃响应的峰值时间 t_p 、超调量 $\sigma\%$ 、调节时间 t_s 和稳态值 $h(\infty)$ 。

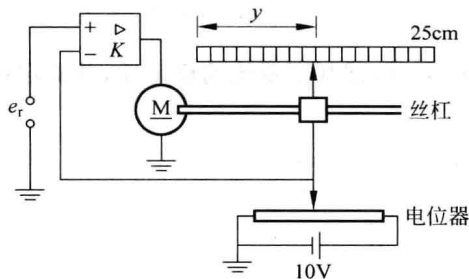


图 3-54 电压测量系统

解 依题意可列出环节传递函数如下。

比较点 $E(s) = E_r(s) - F(s) \quad V$

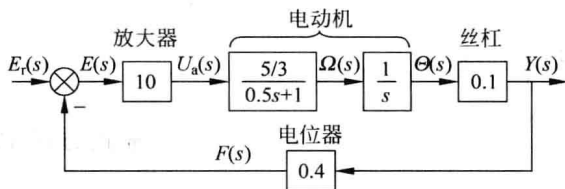
放大器 $\frac{U_a(s)}{E(s)} = K = 10$

电动机 $\frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{K_m}{T_m s + 1} = \frac{10 \times 60}{0.5s + 1} = \frac{5/3}{0.5s + 1} \quad r/s/V$

丝杠 $\frac{Y(s)}{\Theta(s)} = K_1 = 0.1 \quad cm/r$

电位器 $\frac{F(s)}{Y(s)} = K_2 = 0.4 \quad V/cm$

画出系统结构图如图解 3-14 所示。



图解 3-14

系统传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{E_r(s)} = \frac{10}{s^2 + 2s + \frac{4}{3}} \begin{cases} \omega_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \zeta = \frac{2}{2\omega_n} = 0.866 \end{cases}$$

所以

$$t_p = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n} = 5.44s$$

$$\sigma\% = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.433\%$$

$$t_s = \frac{3.5}{\zeta\omega_n} = 3.5s$$

$$h(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Phi(s) \cdot \frac{1}{s} = 2.5$$

3-15 已知系统的特征方程,试判别系统的稳定性,并确定在右半 s 平面根的个数及纯虚根。

(1) $D(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10 = 0$

(2) $D(s) = s^5 + 3s^4 + 12s^3 + 24s^2 + 32s + 48 = 0$

(3) $D(s) = s^5 + 2s^4 - s - 2 = 0$

(4) $D(s) = s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$

解 (1) $D(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10 = 0$

Routh	s^5	1	2	11
	s^4	2	4	10
	s^3	ϵ	6	
	s^2	$4\epsilon - 12/\epsilon$	10	
	s	6		
	s^0	10		

第一列元素变号两次,有 2 个正根。

(2) $D(s) = s^5 + 3s^4 + 12s^3 + 24s^2 + 32s + 48 = 0$

Routh	s^5	1	12	32	
	s^4	3	24	48	
	s^3	$\frac{3 \times 12 - 24}{3} = 4$	$\frac{32 \times 3 - 48}{3} = 16$	0	
	s^2	$\frac{4 \times 24 - 3 \times 16}{4} = 12$	48		
	s	$\frac{12 \times 16 - 4 \times 48}{12} = 0$	0		辅助方程 $12s^2 + 48 = 0$
	s	24			辅助方程求导 $24s = 0$
	s^0	48			

系统没有正根。对辅助方程求解,得到系统一对虚根 $s_{1,2} = \pm j2$ 。

(3) $D(s) = s^5 + 2s^4 - s - 2 = 0$

Routh	s^5	1	0	-1	
	s^4	2	0	-2	辅助方程 $2s^4 - 2 = 0$
	s^3	8	0		辅助方程求导 $8s^3 = 0$
	s^2	ϵ	-2		
	s	$16/\epsilon$			
	s^0	-2			

第一列元素变号一次,有 1 个正根;由辅助方程 $2s^4 - 2 = 0$ 可解出

$$2s^4 - 2 = 2(s+1)(s-1)(s+j)(s-j)$$

$$D(s) = s^5 + 2s^4 - s - 2 = (s+2)(s+1)(s-1)(s+j)(s-j)$$

$$(4) D(s) = s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$$

Routh	s^5	1	24	-25	
	s^4	2	48	-50	辅助方程 $2s^4 + 48s^2 - 50 = 0$
	s^3	8	96		辅助方程求导 $8s^3 + 96s = 0$
	s^2	24	-50		
	s	338/3			
	s^0	-50			

第一列元素变号一次,有1个正根;由辅助方程 $2s^4 + 48s^2 - 50 = 0$ 可解出

$$2s^4 + 48s^2 - 50 = 2(s+1)(s-1)(s+j5)(s-j5)$$

$$D(s) = s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = (s+2)(s+1)(s-1)(s+j5)(s-j5)$$

3-16 图 3-55 是某垂直起降飞机的高度控制系统结构图,试确定使系统稳定的 K 值范围。

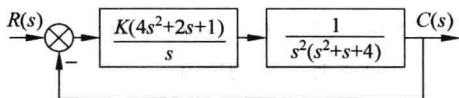


图 3-55 垂直起降飞机高度控制系统结构图

解 由结构图,系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(4s^2 + 2s + 1)}{s^3(s^2 + s + 4)} \begin{cases} \text{开环增益 } K_k = K/4 \\ \text{系统型别 } \nu = 3 \end{cases}$$

$$D(s) = s^5 + s^4 + 4s^3 + 4Ks^2 + 2Ks + K = 0$$

Routh	s^5	1	4	$2K$	
	s^4	1	$4K$	K	
	s^3	$4(1-K)$	K		$\Rightarrow K < 1$
	s^2	$\frac{(15-16K)K}{4(1-K)}$	K		$\Rightarrow K < \frac{15}{16} = 0.9375$
	s	$\frac{-32K^2 + 47K - 16}{15 - 16K}$			$\Rightarrow 0.536 < K < 0.933$
	s^0	K			$\Rightarrow K > 0$

所以使系统稳定的 K 值范围是 $0.536 < K < 0.933$ 。

3-17 单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s+3)(s+5)}$$

要求系统特征根的实部不大于-1,试确定开环增益的取值范围。

解 系统开环增益 $K_k = K/15$ 。特征方程为

$$D(s) = s^3 + 8s^2 + 15s + K = 0$$

做代换 $s=s'-1$ 有

$$D(s') = (s'-1)^3 + 8(s'-1)^2 + 15(s'-1) + K = s'^3 + 5s'^2 + 2s' + (K-8) = 0$$

Routh	s^3	1	2	
	s^2	5	$K-8$	
	s	$\frac{18-K}{5}$		$\Rightarrow K < 18$
	s^0	$K-8$		$\Rightarrow K > 8$

使系统稳定的开环增益范围为 $\frac{8}{15} < K_k = \frac{K}{15} < \frac{18}{15}$ 。

3-18 单位反馈系统的开环传递函数为

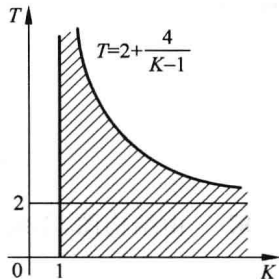
$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(Ts+1)(2s+1)}$$

试在满足 $T > 0, K > 1$ 的条件下, 确定使系统稳定的 T 和 K 的取值范围, 并以 T 和 K 为坐标画出使系统稳定的参数区域图。

解 特征方程为

$$D(s) = 2Ts^3 + (2+T)s^2 + (1+K)s + K = 0$$

Routh	s^3	$2T$	$1+K$	$\Rightarrow T > 0$
	s^2	$2+T$	K	$\Rightarrow T > -2$
	s	$1+K - \frac{2TK}{2+T}$		$\Rightarrow T < 2 + \frac{4}{K-1}$
	s^0	K		$\Rightarrow K > 0$



图解 3-18

综合所得条件, 当 $K > 1$ 时, 使系统稳定的参数取值范围如图解 3-18 中阴影部分所示。

3-19 图 3-56 所示是核反应堆石墨棒位置控制闭环系统, 其目的在于获得希望的辐射水平, 增益 4.4 就是石墨棒位置和辐射水平的变换系数, 辐射传感器的时间常数为 0.1s, 直流增益为 1, 设控制器传递函数 $G_c(s)=1$ 。

(1) 求使系统稳定的功率放大器增益 K 的取值范围;

(2) 设 $K=20$, 传感器的传递函数 $H(s) = \frac{1}{\tau s+1}$ (τ 不一定是 0.1), 求使系统稳定的 τ 的取值范围。

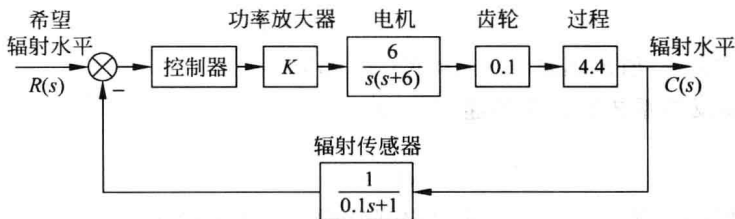


图 3-56 核反应堆石墨棒位置控制系统结构图

解 (1) 当控制器传递函数 $G_c(s)=1$ 时

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2.64K(0.1s+1)}{s(s+6)(0.1s+1)+2.64K}$$

$$D(s) = s(s+6)(s+10) + 26.4K = s^3 + 16s^2 + 60s + 26.4K = 0$$

Routh	s^3	1	60	
	s^2	16	26.4K	
	s^1	$\frac{960-26.4K}{16}$	0	$\rightarrow K < 36.36$
	s^0	26.4K		$\rightarrow K > 0$

所以, $0 < K < 36.36$ 。

(2) $K=20, H(s)=\frac{1}{\tau s+1}$ 时

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{52.8(\tau s+1)}{s(s+6)(\tau s+1)+52.8}$$

$$D(s) = s(s+6)(\tau s+1) + 52.8 = \tau s^3 + (6\tau+1)s^2 + 6s + 52.8 = 0$$

Routh	s^3	τ	6	
	s^2	$6\tau+1$	52.8	$\rightarrow \tau > -0.167$
	s^1	$\frac{6-16.8\tau}{6\tau+1}$	0	$\rightarrow \tau < 0.357$
	s^0	52.8		

所以, $0 < \tau < 0.357$ 。

3-20 图 3-57 是船舶横摇控制系统结构图,引入内环速度反馈是为了增加船只的阻尼。

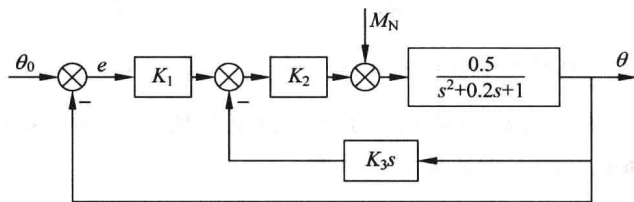


图 3-57 船舶横摇控制系统结构图

(1) 求海浪扰动力矩对船只倾斜角的传递函数 $\frac{\Theta(s)}{M_N(s)}$;

(2) 为保证 M_N 为单位阶跃时倾斜角 θ 的值不超过 0.1,且系统的阻尼比为 0.5,求 K_2, K_1 和 K_3 应满足的方程;

(3) 取 $K_2=1$ 时,确定满足(2)中指标的 K_1 和 K_3 值。

解 (1)

$$\frac{\Theta(s)}{M_N(s)} = \frac{\frac{0.5}{s^2+0.2s+1}}{1 + \frac{0.5K_2K_3s}{s^2+0.2s+1} + \frac{0.5K_1K_2}{s^2+0.2s+1}} = \frac{0.5}{s^2 + (0.2 + 0.5K_2K_3)s + (1 + 0.5K_1K_2)}$$

$$(2) \text{ 令 } \theta(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} M_N(s) \cdot \frac{\Theta(s)}{M_N(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{\Theta(s)}{M_N(s)} = \frac{0.5}{1+0.5K_1K_2} \leq 0.1$$

得 $K_1K_2 \geq 8$ 。由 $\frac{\Theta(s)}{M_N(s)}$ 有 $\begin{cases} \omega_n = \sqrt{1+0.5K_1K_2} \\ \zeta = \frac{0.2+0.5K_2K_3}{2\omega_n} = 0.5 \end{cases}$, 可得

$$0.2 + 0.5K_2K_3 = \sqrt{1+0.5K_1K_2}$$

(3) $K_2=1$ 时, $K_1 \geq 8, 0.2+0.5K_3 \geq \sqrt{5}$, 可解出 $K_3 \geq 4.072$ 。

3-21 温度计的传递函数为 $\frac{1}{Ts+1}$, 用其测量容器内的水温, 1min 才能显示出该温度的 98% 的数值。若加热容器使水温按 $10^\circ\text{C}/\text{min}$ 的速度匀速上升, 问温度计的稳态指示误差有多大?

解法一 依题意, 温度计闭环传递函数

$$\Phi(s) = \frac{1}{Ts+1}$$

由一阶系统阶跃响应特性可知, $h(4T) = 98\%$, 因此有 $4T = 1\text{min}$, 得出 $T = 0.25\text{min}$ 。

视温度计为单位反馈系统, 则开环传递函数为

$$G(s) = \frac{\Phi(s)}{1-\Phi(s)} = \frac{1}{Ts} \begin{cases} K = 1/T \\ v = 1 \end{cases}$$

用静态误差系数法, 当 $r(t) = 10 \cdot t$ 时, $e_{ss} = \frac{10}{K} = 10T = 2.5^\circ\text{C}$ 。

解法二 依题意, 系统误差定义为 $e(t) = r(t) - c(t)$, 应有

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = 1 - \frac{1}{Ts+1} = \frac{Ts}{Ts+1}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_e(s)R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Ts}{Ts+1} \cdot \frac{10}{s^2} = 10T = 2.5^\circ\text{C}$$

3-22 系统结构图如图 3-58 所示。试求局部反馈加入前、后系统的静态位置误差系数、静态速度误差系数和静态加速度误差系数。

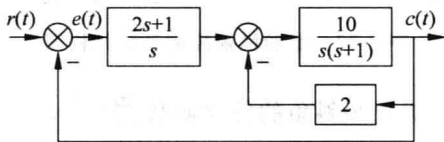


图 3-58 系统结构图

解 局部反馈加入前, 系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{10(2s+1)}{s^2(s+1)}$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \rightarrow \infty$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \rightarrow \infty$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = 10$$

局部反馈加入后,系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{2s+1}{s} \cdot \frac{\frac{10}{s(s+1)}}{1 + \frac{20}{s(s+1)}} = \frac{10(2s+1)}{s(s^2+s+20)}$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \rightarrow \infty$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 0.5$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = 0$$

3-23 已知单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{7(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$$

试分别求出当输入信号 $r(t)=1(t)$, t 和 t^2 时系统的稳态误差 $[e(t)=r(t)-c(t)]$ 。

解

$$G(s) = \frac{7(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)} \begin{cases} K=7/8 \\ v=1 \end{cases}$$

由静态误差系数法

$$r(t)=1(t) \text{ 时, } e_{ss}=0$$

$$r(t)=t \text{ 时, } e_{ss} = \frac{A}{K} = \frac{8}{7} = 1.14$$

$$r(t)=t^2 \text{ 时, } e_{ss} \rightarrow \infty$$

3-24 系统结构图如图 3-59 所示。已知 $r(t)=n_1(t)=n_2(t)=1(t)$, 试分别计算 $r(t)$, $n_1(t)$ 和 $n_2(t)$ 作用时的稳态误差, 并说明积分环节设置位置对减小输入和干扰作用下的稳态误差的影响。

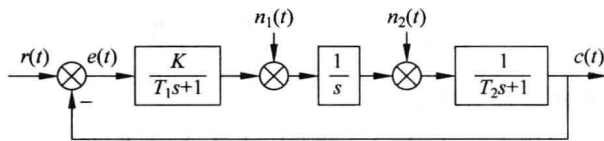


图 3-59 系统结构图

解

$$G(s) = \frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)} \begin{cases} K \\ v=1 \end{cases}$$

$$r(t)=1(t) \text{ 时, } e_{ssr}=0$$

$$\Phi_{en_1}(s) = \frac{E(s)}{N_1(s)} = \frac{-\frac{1}{s(T_2s+1)}}{1 + \frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}} = \frac{-(T_1s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1) + K}$$

$$n_1(t)=1(t) \text{ 时, } e_{ssn_1} = \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_{en_1}(s) N_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_{en_1}(s) \frac{1}{s} = -\frac{1}{K}$$

$$\Phi_{en_2}(s) = \frac{E(s)}{N_2(s)} = \frac{-\frac{1}{(T_2s+1)}}{1 + \frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}} = \frac{-s(T_1s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1) + K}$$

$$n_2(t) = 1(t) \text{ 时, } e_{ssn_2} = \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_{en_2}(s) N_2(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_{en_2}(s) \frac{1}{s} = 0$$

在反馈比较点到干扰作用点之间的前向通道中设置积分环节,可以同时减小由输入和干扰引起的稳态误差。

3-25 系统结构图如图 3-60 所示,要使系统对 $r(t)$ 而言是 II 型的,试确定参数 K_0 和 τ 的值。

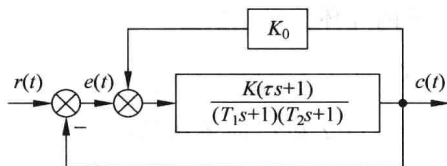


图 3-60 系统结构图

$$\begin{aligned} \text{解 } G(s) &= \frac{K(\tau s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \frac{K(\tau s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) - K_0 K(\tau s + 1)} \\ &= \frac{K(\tau s + 1)}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2 - K_0 K \tau)s + (1 - K_0 K)} \end{aligned}$$

$$\text{依题意应有 } \begin{cases} 1 - K_0 K = 0 \\ T_1 + T_2 - K_0 K \tau = 0 \end{cases} \quad \text{联立求解得 } \begin{cases} K_0 = 1/K \\ \tau = T_1 + T_2 \end{cases}$$

此时系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(T_1 + T_2)s + K}{T_1 T_2 s^2}$$

考虑系统的稳定性,系统特征方程为

$$D(s) = T_1 T_2 s^2 + K(T_1 + T_2)s + K = 0$$

当 $T_1, T_2, K > 0$ 时,系统稳定。

3-26 宇航员机动控制系统结构图如图 3-61 所示。其中,控制器可以用增益 K_2 来表示;宇航员及其装备的总转动惯量 $I = 25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。

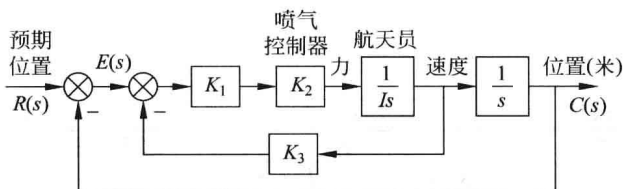


图 3-61 宇航员机动控制系统结构图

- (1) 当输入为斜坡信号 $r(t) = tm$ 时, 试确定 K_3 的取值, 使系统稳态误差 $e_{ss} = 1\text{cm}$;
 (2) 采用(1)中的 K_3 值, 试确定 K_1, K_2 的取值, 使系统超调量 $\sigma\%$ 限制在 10% 以内。

解 (1) 系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{C(s)}{E(s)} = \frac{K_1 K_2}{s(I s + K_1 K_2 K_3)} = \frac{\frac{K_1 K_2}{I}}{s\left(s + \frac{K_1 K_2 K_3}{I}\right)} \begin{cases} K = \frac{1}{K_3} \\ v = 1 \end{cases}$$

$r(t) = t$ 时, 令 $e_{ss} = \frac{1}{K} = K_3 = 0.01$, 可得 $K_3 = 0.01$ 。

(2) 系统闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_1 K_2}{I}}{s^2 + \frac{K_1 K_2 K_3}{I} s + \frac{K_1 K_2}{I}} \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{K_1 K_2}{I}} \\ \zeta = \frac{K_3 \sqrt{K_1 K_2}}{2\sqrt{I}} \end{cases}$$

由 $\sigma\% = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \leq 10\%$, 可解出 $\zeta \geq 0.592$ 。取 $\zeta = 0.6$ 进行设计。

将 $I = 25, K_3 = 0.01$ 代入 $\zeta = \frac{K_3 \sqrt{K_1 K_2}}{2\sqrt{I}} = 0.6$ 表达式, 可得

$$K_1 K_2 \geq 360000$$

3-27 大型天线伺服系统结构图如图 3-62 所示, 其中, $\zeta = 0.707, \omega_n = 15, \tau = 0.15\text{s}$ 。

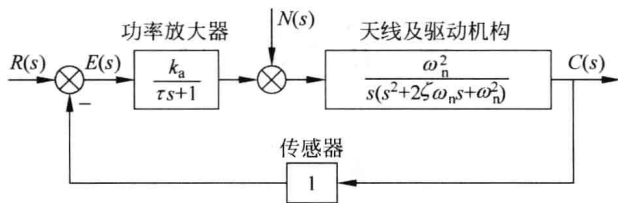


图 3-62 天线伺服系统结构图

(1) 当干扰 $n(t) = 10 \times 1(t)$, 输入 $r(t) = 0$ 时, 试确定能否调整 k_a 的值使系统的稳态误差小于 0.01° ?

(2) 当系统开环工作 ($k_a = 0$), 且输入 $r(t) = 0$ 时, 确定由干扰 $n(t) = 10 \times 1(t)$ 引起的系统稳态误差。

解 (1) 干扰作用下系统的误差传递函数为

$$\Phi_{en}(s) = \frac{E(s)}{N(s)} = \frac{-\omega_n^2(\tau s + 1)}{s(\tau s + 1)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) + K_a \omega_n^2}$$

$n(t) = 10 \cdot 1(t)$ 时, 令

$$e_{ssn} = \left| \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot N(s) \cdot \Phi_{en}(s) \right| = \left| \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{10}{s} \cdot \Phi_{en}(s) \right| = \frac{10}{K_a} \leq 0.01$$

得 $K_a \geq 1000$ 。

(2) 此时有

$$E(s) = -C(s) = \frac{-\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \cdot N(s) = \frac{-10\omega_n^2}{s^2(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

$$e_{ss} = e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \rightarrow -\infty$$

3-28 单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{25}{s(s+5)}$$

(1) 求各静态误差系数和 $r(t) = 1 + 2t + 0.5t^2$ 时的稳态误差 e_{ss} ;

(2) 问当输入作用 10s 时的动态误差是多少?

解 (1) $G(s) = \frac{25}{s(s+5)} \begin{cases} K=5 \\ v=1 \end{cases}$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{25}{s(s+5)} = \infty$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{25}{s+5} = 5$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{25s}{s+5} = 0$$

$r_1(t) = 1(t)$ 时

$$e_{ss1} = \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

$r_2(t) = 2t$ 时

$$e_{ss2} = \frac{A}{K_v} = \frac{2}{5} = 0.4$$

$r_3(t) = 0.5t^2$ 时

$$e_{ss3} = \frac{A}{K_a} = \frac{1}{0} = \infty$$

由叠加原理

$$e_{ss} = e_{ss1} + e_{ss2} + e_{ss3} = \infty$$

(2) 题意有

$$\Phi_e(s) = \frac{1}{1 + G(s)} = \frac{s(s+5)}{s^2 + 5s + 25}$$

用长除法可得 $\Phi_e(s) = C_0 + C_1s + C_2s^2 + C_3s^3 + \dots = 0.2s + 0.008s^3 + \dots$

$$C_0 = 0 \quad r(t) = 1 + 2t + 0.5t^2$$

$$C_1 = 0.2 \quad r'(t) = 2 + t$$

$$C_2 = 0 \quad r''(t) = 1$$

$$C_3 = 0.008 \quad r'''(t) = 0$$

$$\vdots \quad \vdots$$

所以

$$e_s(t) = C_0 r(t) + C_1 r'(t) + C_2 r''(t) + C_3 r'''(t) + \dots = 0.4 + 0.2t$$

$$e_s(10) = 2.4$$

3-29 已知单位反馈系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{5s + 200}{0.01s^3 + 0.502s^2 + 6s + 200}$$

输入 $r(t) = 5 + 20t + 10t^2$, 求动态误差表达式。

解 依题意

$$\Phi_e(s) = 1 - \Phi(s) = \frac{0.01s^3 + 0.502s^2 + s}{0.01s^3 + 0.502s^2 + 6s + 200}$$

用长除法可得

$$\begin{aligned}\Phi_e(s) &= C_0 + C_1s + C_2s^2 + C_3s^3 + \dots \\ &= 0.005s + 0.00236s^2 - 0.0000335s^3 + \dots\end{aligned}$$

所以

$$e_s(t) = 0.005(20 + 20t) + 0.00236 \times 20 = 0.1t + 0.1472$$

3-30 控制系统结构图如图 3-63 所示。其中 $K_1, K_2 > 0, \beta \geq 0$ 。试分析:

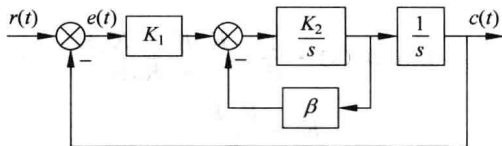


图 3-63 控制系统结构图

- (1) β 值变化(增大)对系统稳定性的影响;
- (2) β 值变化(增大)对动态性能($\sigma\%$, t_s)的影响;
- (3) β 值变化(增大)对 $r(t) = at$ 作用下稳态误差的影响。

解 系统开环传递函数为

$$G(s) = K_1 \frac{K_2}{s + \beta K_2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{K_1 K_2}{s(s + \beta K_2)} \begin{cases} K = K_1 / \beta \\ v = 1 \end{cases}$$

$$\Phi(s) = \frac{K_1 K_2}{s^2 + \beta K_2 s + K_1 K_2} \begin{cases} \omega_n = \sqrt{K_1 K_2} \\ \zeta = \frac{\beta K_2}{2 \sqrt{K_1 K_2}} = \frac{\beta}{2} \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} \end{cases}$$

$$D(s) = s^2 + \beta K_2 s + K_1 K_2$$

(1) 由 $D(s)$ 表达式可知, 当 $\beta = 0$ 时系统不稳定, $\beta > 0$ 时系统总是稳定的。

(2) 由 $\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} \beta$ 可知, $\beta \uparrow \begin{cases} \zeta \uparrow \rightarrow \sigma\% \downarrow \\ t_s = \frac{3.5}{\zeta \omega_n} = \frac{7}{\beta K_2} \downarrow \end{cases} (0 < \zeta < 1)$

(3) $\beta \uparrow \rightarrow e_{ss} = \frac{a}{K} = \frac{a\beta}{K_1} \uparrow$

3-31 设复合控制系统结构图如图 3-64 所示。确定 K_c , 使系统在 $r(t) = t$ 作用下无稳态误差。

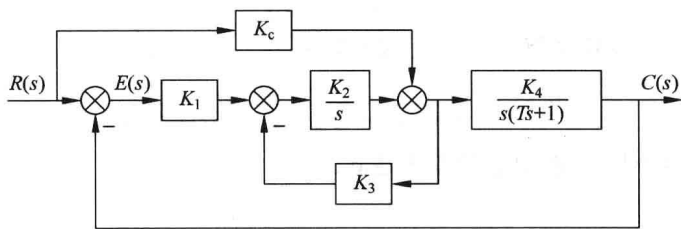


图 3-64 复合控制系统结构图

解 系统误差传递函数为

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{\left(1 + \frac{K_2 K_3}{s}\right) - \frac{K_4 K_c}{s(Ts+1)}}{1 + \frac{K_2 K_3}{s} + \frac{K_1 K_2 K_4}{s^2(Ts+1)}} = \frac{s[(s + K_2 K_3)(Ts + 1) - K_4 K_c]}{Ts^3 + (1 + TK_2 K_3)s^2 + K_2 K_3 s + K_1 K_2 K_4}$$

由劳斯判据, 当 T, K_1, K_2, K_3 和 K_4 均大于零, 且 $(1 + TK_2 K_3) K_3 > TK_1 K_4$ 时, 系统稳定。

$$\text{令 } e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_e(s) \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{K_2 K_3 - K_4 K_c}{K_1 K_2 K_4} = 0$$

得

$$K_c = \frac{K_2 K_3}{K_4}$$

3-32 已知控制系统结构图如图 3-65 所示, 试求:

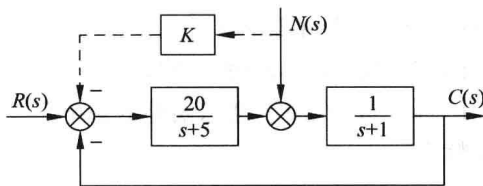


图 3-65 控制系统结构图

- (1) 按不加虚线所画的顺馈控制时, 系统在干扰作用下的传递函数 $\Phi_n(s)$;
- (2) 当干扰 $n(t) = \Delta \cdot 1(t)$ 时, 系统的稳态输出;
- (3) 若按加入虚线所画的顺馈控制时, 系统在干扰作用下的传递函数, 并求当 $n(t) = 1(t)$ 时使输出 $c(t)$ 稳态值为最小的适合 K 值。

解 (1) 无顺馈时, 系统误差传递函数为

$$\Phi_n(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = \frac{s+5}{(s+1)(s+5)+20} = \frac{s+5}{s^2+6s+25}$$

$$(2) c_n(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_n(s) \cdot N(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_n(s) \cdot \frac{\Delta}{s} = \frac{\Delta}{5}$$

(3) 有顺馈时, 系统误差传递函数为

$$\Phi_n(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = \frac{\frac{1}{s+1} \left[1 - \frac{20K}{s+25} \right]}{1 + \frac{20}{(s+1)(s+5)}} = \frac{s+5-20K}{s^2+6s+25}$$

令
$$c_n(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_n(s) \cdot N(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_n(s) \cdot \frac{\Delta}{s} = \Delta \left(\frac{5-20K}{25} \right) = 0$$

得
$$K = 0.25$$

3-33 设复合校正控制系统结构图如图 3-66 所示, 其中 $N(s)$ 为可量测扰动。若要求系统输出 $C(s)$ 完全不受 $N(s)$ 的影响, 且跟踪阶跃指令的稳态误差为零, 试确定前馈补偿装置 $G_{c1}(s)$ 和串联校正装置 $G_{c2}(s)$ 。

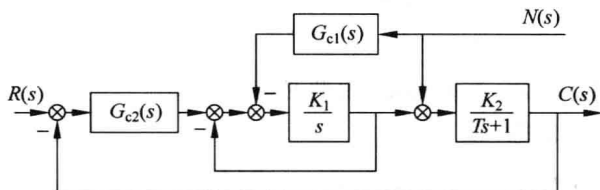


图 3-66 复合控制系统结构图

解 (1) 求 $G_{c1}(s)$ 。令

$$\begin{aligned} \Phi_n(s) &= \frac{C(s)}{N(s)} = \frac{\frac{K_2}{Ts+1} \left(1 + \frac{K_1}{s} \right) - \frac{K_1 K_2}{s(Ts+1)} G_{c1}(s)}{1 + \frac{K_1}{s} + \frac{K_1 K_2 G_{c2}(s)}{s(Ts+1)}} \\ &= \frac{K_2 [s + K_1 - K_1 G_{c1}(s)]}{s(Ts+1) + K_1(Ts+1) + K_1 K_2 G_{c2}(s)} = 0 \end{aligned}$$

得 $G_{c1}(s) = \frac{s + K_1}{K_1}$ 。

(2) 求 $G_{c2}(s)$ 。令

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 + \frac{K_1}{s}}{1 + \frac{K_1}{s} + \frac{K_1 K_2 G_{c2}(s)}{s(Ts+1)}} = \frac{(s + K_1)(Ts + 1)}{s(Ts + 1) + K_1(Ts + 1) + K_1 K_2 G_{c2}(s)}$$

当 $r(t) = 1(t)$ 作用时, 令 $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_e(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_1}{K_1 + K_1 K_2 G_{c2}(s)} = 0$

明显地, 取 $G_{c2}(s) = \frac{1}{s}$ 可以达到目的。

3-34 已知控制系统结构图如图 3-67(a) 所示, 其单位阶跃响应如图 3-67(b) 所示, 系统的稳态位置误差 $e_{ss} = 0$ 。试确定 K, v 和 T 的值。

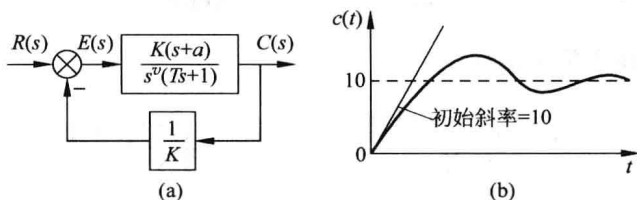


图 3-67 控制系统结构图及单位阶跃响应

$$\text{解 } G(s) = \frac{s+a}{s^v(Ts+1)} \begin{cases} K_k = a \\ v \text{ 待定} \end{cases}$$

由 $r(t)=1(t)$ 时, $e_{ss}=0$, 可以判定 $v \geq 1$ 。则

$$\Phi(s) = \frac{\frac{K(s+a)}{s^v(Ts+1)}}{1 + \frac{s+a}{s^v(Ts+1)}} = \frac{K(s+a)}{s^v(Ts+1) + s+a}$$

$$D(s) = Ts^{v+1} + s^v + s + a$$

系统单位阶跃响应收敛, 系统稳定, 因此必有: $v \leq 2$ 。

根据单位阶跃响应曲线, 有

$$h(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi(s) \cdot R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{K(s+a)}{s^v(Ts+1) + s+a} = K = 10$$

$$h'(0) = k(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \Phi(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{sK(s+a)}{s^v(Ts+1) + s+a} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Ks^2 + aKs}{Ts^{v+1} + s^v + s + a} = 10$$

当 $T \neq 0$ 时, 有

$$k(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Ks^2}{Ts^{v+1}} = 10$$

可得 $K=10, v=1, T=1$ 。

当 $T=0$ 时, 有

$$k(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Ks^2}{s^v} = 10$$

可得 $K=10, v=2, T=0$ 。

3-35 复合控制系统结构图如图 3-68 所示, 图中 K_1, K_2, T_1, T_2 均为大于零的常数。

- (1) 确定当闭环系统稳定时, 参数 K_1, K_2, T_1, T_2 应满足的条件;
- (2) 当输入 $r(t) = V_0 t$ 时, 选择校正装置 $G_c(s)$, 使得系统无稳态误差。

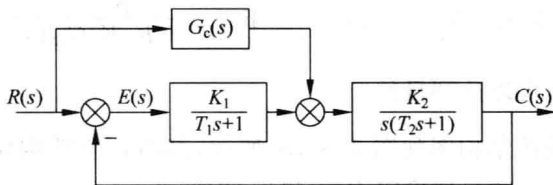


图 3-68 复合控制系统结构图

解 (1) 系统误差传递函数

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 - \frac{K_2}{s(T_2s+1)} G_c(s)}{1 + \frac{K_1 K_2}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}} = \frac{s(T_1s+1)(T_2s+1) - K_2 G_c(s)(T_1s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1) + K_1 K_2}$$

$$D(s) = T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2) s^2 + s + K_1 K_2$$

列劳斯表

$$\begin{array}{r} s^3 \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{array} \quad \begin{array}{l} T_1 T_2 \\ T_1 + T_2 \\ \frac{T_1 + T_2 - T_1 T_2 K_1 K_2}{T_1 + T_2} \\ K_1 K_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 \\ K_1 K_2 \\ 0 \end{array}$$

因 K_1, K_2, T_1, T_2 均大于零, 所以只要 $T_1 + T_2 > T_1 T_2 K_1 K_2$ 即可满足稳定条件。

$$\begin{aligned} (2) \text{ 令 } e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_e(s) \cdot R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{V_0}{s^2} \cdot \frac{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) - K_2 G_c(s)(T_1 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + K_1 K_2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{V_0}{K_1 K_2} \left[1 - K_2 \frac{G_c(s)}{s} \right] = 0 \end{aligned}$$

可得 $G_c(s) = s/K_2$

3-36 设复合控制系统结构图如图 3-69 所示。图中 $G_{c1}(s)$ 为前馈补偿装置的传递函数, $G_{c2}(s) = K'_1 s$ 为测速发电机及分压电位器的传递函数, $G_1(s)$ 和 $G_2(s)$ 为前向通路环节的传递函数, $N(s)$ 为可量测扰动。

如果 $G_1(s) = K_1, G_2(s) = 1/s^2$, 试确定 $G_{c1}(s), G_{c2}(s)$ 和 K_1 , 使系统输出量完全不受扰动的影响, 且单位阶跃响应的超调量 $\sigma\% = 25\%$, 峰值时间 $t_p = 2s$ 。

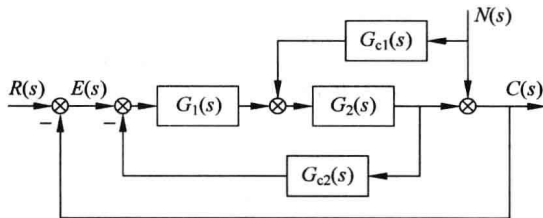


图 3-69 复合控制系统结构图

解 (1) 确定 $G_n(s)$ 。由梅逊公式

$$\Phi_n(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = \frac{(1 + G_1 G_2 G_{c2}) + G_{c1} G_2}{1 + G_1 G_2 G_{c2} + G_1 G_2} = \frac{s^2 + K_1 G_{c2}(s) + G_{c1}(s)}{s^2 + K_1 G_{c2}(s) + K_1} = 0$$

解得 $G_{c1}(s) = -[s^2 + K_1 G_{c2}(s)] = -s(s + K_1 K'_1)$

(2) 确定 K'_1 。由梅逊公式

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 G_{c2} + G_1 G_2} \\ &= \frac{K_1}{s^2 + K_1 K'_1 s + K_1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \end{aligned}$$

比较有 $K_1 = \omega_n^2, K_1 K'_1 = 2\zeta\omega_n$ 。由题目要求 $\sigma\% = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.25, t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = 2$ 。

可解得 $\zeta = 0.403, \omega_n = 1.72$ 。则 $K_1 = \omega_n^2 = 2.946, K'_1 = \frac{2\zeta\omega_n}{K_1} = 0.47$ 。有

$$G_{c1}(s) = -s(s + K_1 K'_1) = -s(s + 1.386)$$

$$G_{e2}(s) = K's = 0.47s$$

3-37 已知系统结构图如图 3-70 所示。

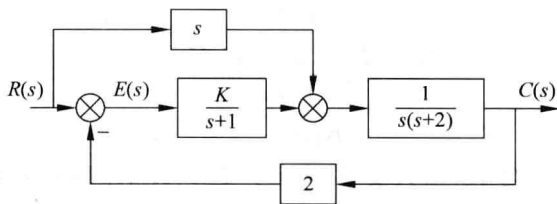


图 3-70 系统结构图

- (1) 求引起闭环系统临界稳定的 K 值和对应的振荡频率 ω ;
- (2) 当 $r(t) = t^2$ 时, 要使系统稳态误差 $e_{ss} \leq 0.5$, 试确定满足要求的 K 值范围。

解 (1) 由系统结构图

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 - \frac{2s}{s(s+2)}}{1 + \frac{2K}{s(s+1)(s+2)}} = \frac{s^2(s+1)}{s(s+1)(s+2) + 2K}$$

$$D(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + 2K$$

系统临界稳定时有 $D(j\omega) = 0$, 令

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[D(j\omega)] = -3\omega^2 + 2K = 0 \\ \operatorname{Im}[D(j\omega)] = -\omega^3 + 2\omega = 0 \end{cases} \quad \text{联立解出} \quad \begin{cases} K = 3 \\ \omega = \sqrt{2} \end{cases}$$

(2) 当 $r(t) = t^2$ 时, $R(s) = \frac{2}{s^3}$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot R(s) \cdot \Phi_e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{2}{s^3} \cdot \frac{s^2(s+1)}{s(s+1)(s+2) + 2K} = \frac{1}{K}$$

令 $e_{ss} = \frac{1}{K} \leq 0.5$, 有 $K \geq 2$, 综合系统稳定性要求, 得 $2 \leq K \leq 3$ 。

3-38 系统结构图如图 3-71 所示。已知系统单位阶跃响应的超调量 $\sigma\% = 16.3\%$, 峰值时间 $t_p = 1s$ 。

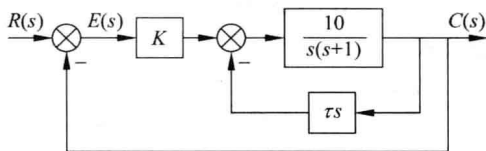


图 3-71 系统结构图

- (1) 求系统的开环传递函数 $G(s)$;
- (2) 求系统的闭环传递函数 $\Phi(s)$;
- (3) 根据已知的性能指标 $\sigma\%$ 、 t_p 确定系统参数 K 及 τ ;
- (4) 计算等速输入 $r(t) = 1.5t(^{\circ})/s$ 时系统的稳态误差。

$$\text{解 (1)} \quad G(s) = K \frac{\frac{10}{s(s+1)}}{1 + \frac{10\tau s}{s(s+1)}} = \frac{10K}{s(s+10\tau+1)}$$

$$(2) \quad \Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{10K}{s^2 + (10\tau+1)s + 10K} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$(3) \quad \text{由} \begin{cases} \sigma\% = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} = 16.3\% \\ t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = 1 \end{cases} \quad \text{联立解出} \quad \begin{cases} \xi = 0.5 \\ \omega_n = 3.63 \\ \tau = 0.263 \end{cases}$$

由(2) $10K = \omega_n^2 = 3.63^2 = 13.18$, 得出 $K = 1.318$ 。

$$(4) \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \frac{10K}{10\tau+1} = \frac{13.18}{10 \times 0.263 + 1} = 3.63$$

$$e_{ss} = \frac{A}{K_v} = \frac{1.5}{3.63} = 0.413$$

3-39 系统结构图如图 3-72 所示。试问：

(1) 为确保系统稳定, 如何取 K 值?

(2) 为使系统特征根全部位于 s 平面 $s = -1$ 的左侧, K 应取何值?

(3) 若 $r(t) = 2t + 2$ 时, 要求系统稳态误差 $e_{ss} \leq 0.25$, K 应取何值?

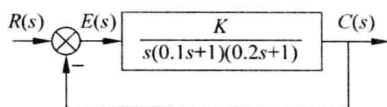


图 3-72 系统结构图

$$\text{解} \quad G(s) = \frac{50K}{s(s+10)(s+5)} \quad \begin{cases} K \\ v=1 \end{cases}$$

$$(1) \quad D(s) = s^3 + 15s^2 + 50s + 50K$$

Routh	s^3	1	50	
	s^2	15	$50K$	
	s^1	$\frac{50(15-K)}{15}$		$\rightarrow K < 15$
	s^0	$50K$		$\rightarrow K > 0$

系统稳定范围为 $0 < K < 15$ 。

(2) 在 $D(s)$ 中做平移变换: $s = s' - 1$

$$\begin{aligned} D(s') &= (s' - 1)^3 + 15(s' - 1)^2 + 50(s' - 1) + 50K \\ &= s'^3 + 12s'^2 + 23s' + (50K - 36) \end{aligned}$$

Routh	s'^3	1	23	
	s'^2	12	$50K - 36$	
	s'^1	$\frac{312 - 50K}{12}$		$\rightarrow K < \frac{312}{50} = 6.24$
	s'^0	$50K - 36$		$\rightarrow K > \frac{36}{50} = 0.72$

满足要求的范围是 $0.72 < K < 6.24$ 。

(3) 由静态误差系数法

当 $r(t) = 2t + 2$ 时, 令 $e_{ss} = \frac{2}{K} \leq 0.25$

得 $K \geq 8$ 。

综合考虑稳定性与稳态误差要求可得 $8 \leq K < 15$ 。

第4章 习题及解答

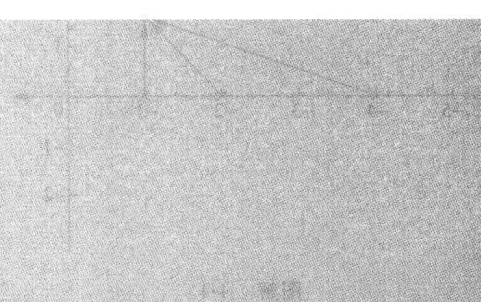


图 4-1

解 (1) 由题设知, $w_1 = 1, w_2 = 2, w_3 = 3$, 故

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

从而

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

故

$$A^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

从而

$$(A^{-1}B^{-1})^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3^n} \end{bmatrix}$$

故

$$x(n) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2^n} \\ \frac{1}{3^n} \end{bmatrix}$$

(2) 由题设知, $w_1 = 1, w_2 = 2, w_3 = 3$, 故

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

从而

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

故

$$A^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

从而

$$(A^{-1}B^{-1})^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3^n} \end{bmatrix}$$

故

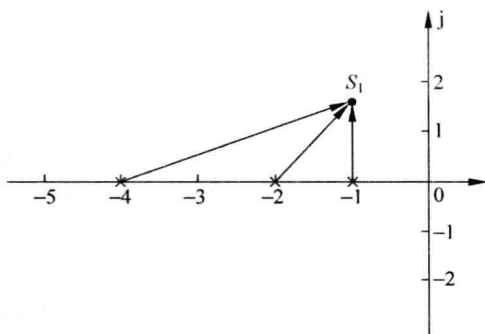
$$x(n) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2^n} \\ \frac{1}{3^n} \end{bmatrix}$$

4-1 系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K^*}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$

试证明点 $s_1 = -1 + j\sqrt{3}$ 在根轨迹上, 并求出相应的根轨迹增益 K^* 和开环增益 K 。

解 若点 s_1 在根轨迹上, 则点 s_1 应满足相角条件 $\angle G(s)H(s) = \pm(2k+1)\pi$, 零极点分布图如图解 4-1 所示。



图解 4-1

对于 $s = -1 + j\sqrt{3}$, 由相角条件

$$\angle G(s_1)H(s_1) =$$

$$0 - \angle(-1 + j\sqrt{3} + 1) - \angle(-1 + j\sqrt{3} + 2) - \angle(-1 + j\sqrt{3} + 4)$$

$$= 0 - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = -\pi$$

满足相角条件, 因此 $s_1 = -1 + j\sqrt{3}$ 在根轨迹上。将 s_1 代入幅值条件

$$|G(s_1)H(s_1)| = \frac{K^*}{|-1 + j\sqrt{3} + 1| \cdot |-1 + j\sqrt{3} + 2| \cdot |-1 + j\sqrt{3} + 4|} = 1$$

解出 $K^* = 12$, $K = \frac{K^*}{8} = \frac{3}{2}$

4-2 已知单位反馈系统的开环传递函数, 试概略绘出系统根轨迹。

(1) $G(s) = \frac{K}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}$;

(2) $G(s) = \frac{K^*(s+5)}{s(s+2)(s+3)}$;

(3) $G(s) = \frac{K(s+1)}{s(2s+1)}$ 。

解 (1) $G(s) = \frac{K}{s(0.2s+1)(0.5s+1)} = \frac{10K}{s(s+5)(s+2)}$

系统有三个开环极点: $p_1 = 0, p_2 = -2, p_3 = -5$

① 实轴上的根轨迹

$$(-\infty, -5], [-2, 0]$$

② 渐近线

$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{0-2-5}{3} = -\frac{7}{3} \\ \varphi_a = \frac{(2K+1)\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{3}, \pi \end{cases}$$

③ 分离点

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+5} + \frac{1}{d+2} = 0$$

解之得: $d_1 = -0.88, d_2 = -3.7863$ (舍去)。④ 与虚轴的交点: 特征方程为 $D(s) = s^3 + 7s^2 + 10s + 10K = 0$

$$\begin{cases} \text{Re}[D(j\omega)] = -7\omega^2 + 10K = 0 \\ \text{Im}[D(j\omega)] = -\omega^3 + 10\omega = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} \omega = \sqrt{10} \\ K = 7 \end{cases}$$

与虚轴的交点 $(0, \pm\sqrt{10}j)$ 。根轨迹如图解 4-2(a) 所示。

(2) 根轨迹绘制如下。

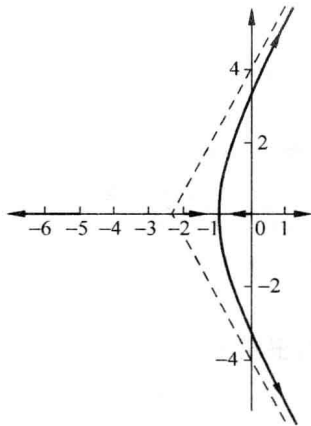
① 实轴上的根轨迹 $[-5, -3], [-2, 0]$

$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{0-2-3-(-5)}{2} = 0 \\ \varphi_a = \frac{(2K+1)\pi}{2} = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

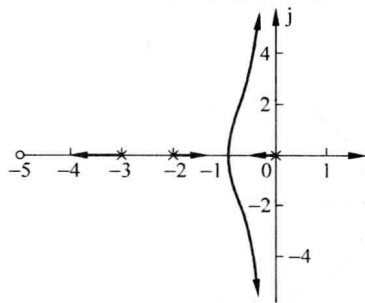
② 渐近线

③ 分离点

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+3} = \frac{1}{d+5}$$

用试探法可得 $d = -0.886$ 。根轨迹如图解 4-2(b) 所示。

图解 4-2(a)



图解 4-2(b)

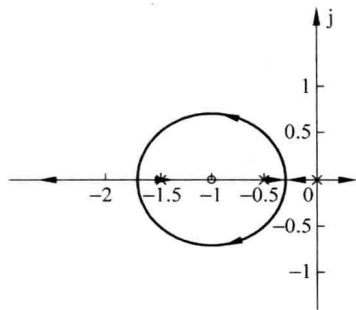
$$(3) G(s) = \frac{K(s+1)}{s(2s+1)} = \frac{K(s+1)}{2s\left(s+\frac{1}{2}\right)}$$

根轨迹绘制如下:

① 实轴上的根轨迹], $[-0.5, 0]$

② 分离点 $\frac{1}{d} + \frac{1}{d+0.5} = \frac{1}{d+1}$

解之得 $d_1 = -0.293, d_2 = -1.707$ 。根轨迹如图解 4-2(c)所示。



图解 4-2(c)

4-3 已知单位反馈系统的开环传递函数,试概略绘出相应的根轨迹。

(1) $G(s) = \frac{K^*(s+2)}{(s+1+j2)(s+1-j2)}$;

(2) $G(s) = \frac{K^*(s+20)}{s(s+10+j10)(s+10-j10)}$;

(3) $G(s)H(s) = \frac{K^*}{s(s^2+8s+20)}$;

(4) $G(s)H(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$ 。

解 (1) $G(s) = \frac{K^*(s+2)}{(s+1+j2)(s+1-j2)}$

根轨迹绘制如下:

① 实轴上的根轨迹 $(-\infty, -2]$

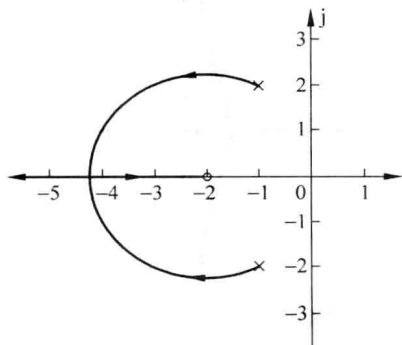
② 分离点 $\frac{1}{d+1+j2} + \frac{1}{d+1-j2} = \frac{1}{d+2}$

解之得: $d = -4.23$

③ 起始角

$$\theta_{p_1} = 180^\circ + 63.435^\circ - 90^\circ = 153.43^\circ$$

由对称性得另一起始角为 -153.43° 。



图解 4-3(a)

根轨迹如图解 4-3(a)所示。

(2) $G(s) = \frac{K^*(s+20)}{s(s+10+j10)(s+10-j10)}$

系统有三个开环极点和一个开环零点。根轨迹绘制如下:

① 实轴上的根轨迹 $[-20, 0]$

② 渐近线 $\begin{cases} \sigma_a = \frac{-10-10+20}{3-1} = 0 \\ \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{3-1} = \pm 90^\circ \end{cases}$

③ 起始角 $\theta = 180^\circ + 45^\circ - 90^\circ - 135^\circ = 0^\circ$ 根轨

迹如图解 4-3(b)所示。

$$(3) G(s)H(s) = \frac{K^*}{s(s^2 + 8s + 20)}$$

① 实轴上的根轨迹 $(-\infty, 0]$

② 渐近线

$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{0 + (-4 + j2) + (-4 - j2)}{3} = -\frac{8}{3} \\ \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{3}, \pi \end{cases}$$

③ 分离点 $\frac{1}{d} + \frac{1}{d+4+j2} + \frac{1}{d+4-j2} = 0$

解之得 $d_1 = -2, d_2 = -3.33$ 。

④ 与虚轴交点 $D(s) = s^3 + 8s^2 + 20s + K^*$

把 $s = j\omega$ 代入上方程, 整理, 令其实、虚部分别为零得:

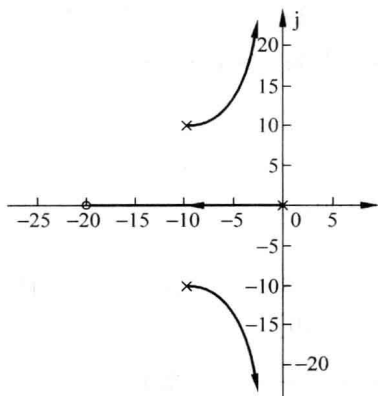
$$\begin{cases} \operatorname{Re}(D(j\omega)) = K^* - 8\omega^2 = 0 \\ \operatorname{Im}(D(j\omega)) = 20\omega - \omega^3 = 0 \end{cases}$$

解得

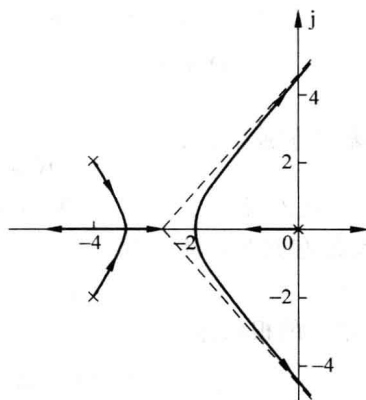
$$\begin{cases} \omega = 0 & \begin{cases} \omega = \pm 2\sqrt{5} \\ K^* = 0 \end{cases} \\ K^* = 0 & \begin{cases} K^* = 160 \end{cases} \end{cases}$$

⑤ 起始角 由相角条件 $\theta_{p_2} = -63^\circ, \theta_{p_3} = 63^\circ$ 。

根轨迹如图解 4-3(c)所示。



图解 4-3(b)



图解 4-3(c)

$$(4) G(s)H(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$$

系统有四个开环极点、一个开环零点。根轨迹绘制如下:

① 实轴上的根轨迹 $(-\infty, -3], [-2, 0]$

$$\textcircled{2} \text{ 渐近线} \begin{cases} \sigma_a = \frac{-3 + (-1 + j1) + (-1 - j1) - (-2)}{3} = -1 \\ \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{3}, \pi \end{cases}$$

③ 与虚轴交点 闭环特征方程为

$$D(s) = s(s+3)(s^2+2s+2) + K^*(s+2)$$

把 $s=j\omega$ 代入上方程, 令

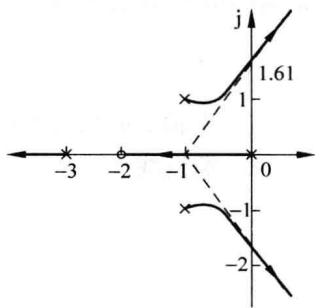
$$\begin{cases} \operatorname{Re}(D(j\omega)) = \omega^4 - 8\omega^2 + 2K^* = 0 \\ \operatorname{Im}(D(j\omega)) = (6 + K^*)\omega - 5\omega^3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} \omega = 0 & \begin{cases} \omega = \pm 1.61 \\ K^* = 0 \end{cases} \\ K^* = 0 & \begin{cases} K^* = 7.03 \end{cases} \end{cases}$$

④ 起始角

$$\theta_{p_3} = 180^\circ + 45^\circ - 90^\circ - 135^\circ - 26.57^\circ = -26.57^\circ$$

根轨迹如图解 4-3(d) 所示。



图解 4-3(d)

4-4 已知单位反馈系统的开环传递函数, 要求:

(1) 确定 $G(s) = \frac{K^*(s+z)}{s^2(s+10)(s+20)}$ 产生纯虚根为 $\pm j1$ 的 z 值和 K^* 值;

(2) 概略绘出 $G(s) = \frac{K^*}{s(s+1)(s+3.5)(s+3+j2)(s+3-j2)}$ 的闭环根轨迹图(要求确定根

轨迹的渐近线、分离点、与虚轴交点和起始角)。

解 (1) 闭环特征方程

$$D(s) = s^2(s+10)(s+20) + K^*(s+z) = s^4 + 30s^3 + 200s^2 + K^*s + K^*z = 0$$

有

$$D(j\omega) = (\omega^4 - 200\omega^2 + K^*z) + j(K^*\omega - 30\omega^3) = 0$$

$$\text{令实虚部分别等于零即} \begin{cases} \omega^4 - 200\omega^2 + K^*z = 0 \\ K^*\omega - 30\omega^3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{把 } \omega=1 \text{ 代入得} \quad K^*=30, z=199/30.$$

(2) 系统有五个开环极点:

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -1, \quad p_3 = -3.5, \quad p_4 = -3 + j2, \quad p_5 = -3 - j2$$

① 实轴上的根轨迹 $(-\infty, -3.5], [-1, 0]$

$$\textcircled{2} \text{ 渐近线} \begin{cases} \sigma_a = \frac{-1 - 3.5 + (-3 + j2) + (-3 - j2)}{5} = -2.1 \\ \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{5} = \pm \frac{\pi}{5}, \pm \frac{3\pi}{5}, \pi \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \text{ 分离点} \quad \frac{1}{d} + \frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+3.5} + \frac{1}{d+3-j2} + \frac{1}{d+3+j2} = 0$$

解得 $d_1 = -0.45, d_2 = -2.4$ (舍去), $d_{3,4} = -3.25 \pm j1.90$ (舍去)。

④ 与虚轴交点 闭环特征方程为

$$D(s) = s(s+1)(s+3.5)(s+3+j2)(s+3-j2) + K^* = 0$$

把 $s=j\omega$ 代入上方程,整理,令实虚部分别为零得

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(j\omega) = K^* + 10.5\omega^4 - 79.5\omega^2 = 0 \\ \operatorname{Im}(j\omega) = \omega^5 - 43.5\omega^3 + 45.5\omega = 0 \end{cases}$$

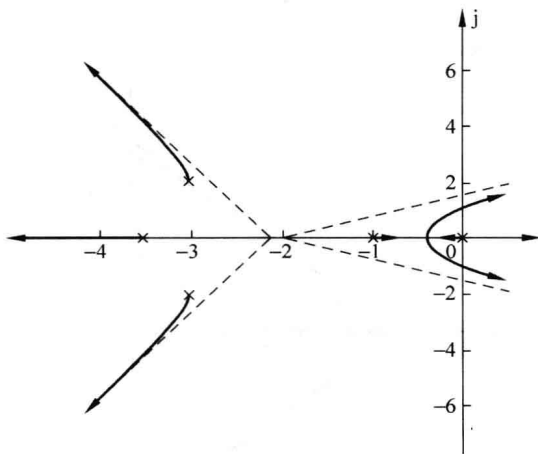
解得

$$\begin{cases} \omega = 0 \\ K^* = 0 \end{cases}, \begin{cases} \omega = \pm 1.02 \\ K^* = 71.90 \end{cases}, \begin{cases} \omega = \pm 6.52 \\ K^* = -15546.3 \end{cases} \quad (\text{舍去})$$

⑤ 起始角 根据法则七(相角条件),根轨迹的起始角为

$$\theta_{p_1} = 180^\circ - 75.96^\circ - 90^\circ - 135^\circ - 146.3^\circ = 92.74^\circ$$

由对称性得,另一起始角为 -92.74° ,根轨迹如图解 4-4 所示。



图解 4-4

4-5 已知控制系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K^*(s+2)}{(s^2+4s+9)^2}$$

试概略绘制系统根轨迹。

解 根轨迹绘制如下:

① 实轴上的根轨迹 $(-\infty, -2]$

② 渐近线

$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{2 \times (-2 - j\sqrt{5} - 2 + j\sqrt{5}) - (-2)}{3} = -2 \\ \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{3}, \quad \pi \end{cases}$$

③ 分离点
$$\frac{2}{d+2+j\sqrt{5}} + \frac{2}{d+2-j\sqrt{5}} = \frac{1}{d+2}$$

解之得 $d = -3.29$ $d = 0.71$ (舍去)。

④ 与虚轴交点 闭环特征方程为

$$D(s) = (s^2 + 4s + 9)^2 + K^*(s + 2) = 0$$

把 $s = j\omega$ 代入上方程, 令

$$\begin{cases} \text{Re}(D(j\omega)) = \omega^4 - 34\omega^2 + 81 + 2K^* = 0 \\ \text{Im}(D(j\omega)) = (72 + K^*)\omega - 8\omega^3 = 0 \end{cases}$$

解得

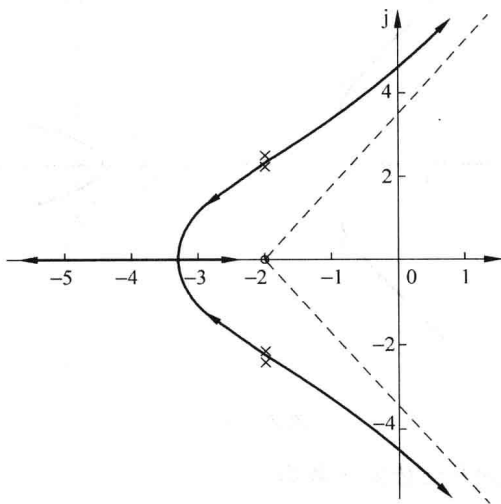
$$\begin{cases} \omega = \pm \sqrt{21} \\ K^* = 96 \end{cases}$$

⑤ 起始角 $90^\circ - (2\theta_{p_1} - 2 \times 90^\circ) = (2k+1)\pi$

解出

$$\theta_{p_1} = 45^\circ, \theta_{p_2} = -135^\circ$$

根轨迹如图解 4-5 所示。



图解 4-5

4-6 直升机静稳定性不好, 需要加控制装置改善性能。如图 4-23 所示是加入镇定控制回路的直升机俯仰控制系统结构图。直升机的动态特性可用传递函数 $G_0(s) = \frac{10(s+0.5)}{(s+1)(s-0.4)^2}$ 表示。

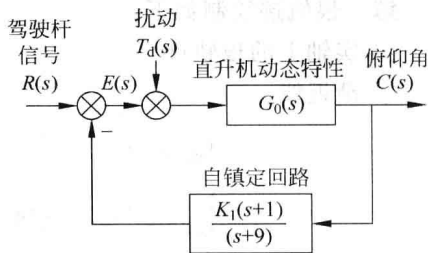


图 4-23 直升机俯仰控制系统结构图

(1) 画出俯仰控制系统的根轨迹。

(2) 当 $K_1 = 1.9$ 时, 确定对阵风扰动 $T_d(s) = 1/s$ 的稳态误差。

解 (1) 开环传递函数为

$$G(s) = G_0(s) \frac{K_1(s+1)}{(s+9)} = \frac{10K_1(s+0.5)}{(s+9)(s-0.4)^2}$$

根轨迹绘制如下:

- ① 实轴上的根轨迹 $[-9 -0.5]$;
- ② 渐近线

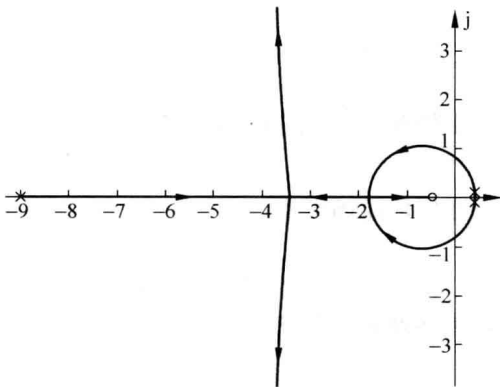
$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{0.4 \times 2 - 9 - (-0.5)}{2} = -3.85 \\ \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{3-1} = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- ③ 分离点 由

$$\frac{1}{d+0.5} = \frac{2}{d-0.4} + \frac{1}{d+9}$$

解得 $d_1 = -1.79, d_2 = -3.46$ 。

根轨迹如图解 4-6 所示。



图解 4-6

- (2) 稳态误差为

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \Phi_{en}(s) \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{-G_0 \cdot \frac{K_1(s+1)}{s+9}}{1 + G_0 \cdot \frac{K_1(s+1)}{s+9}} \cdot \frac{1}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-10K_1 \cdot (s+0.5)}{(s+9)(s-0.4)^2 + 10K_1(s+0.5)} \stackrel{K_1=1.9}{=} -0.868 \end{aligned}$$

4-7 单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(2s+1)}{(s+1)^2 \left(\frac{4}{7}s - 1 \right)}$$

试绘制系统根轨迹,并确定使系统稳定的 K 值范围。

解 根轨迹绘制如下:

- ① 实轴上的根轨迹 $[-0.5, 7/4]$

② 渐近线

$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{-1-1+7/4-(-0.5)}{2} = \frac{1}{4} \\ \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{2} = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

③ 与虚轴交点 闭环特征方程为

$$D(s) = \frac{4}{7}s^3 + \frac{1}{7}s^2 + \left(2K - \frac{10}{7}\right)s + K - 1 = 0$$

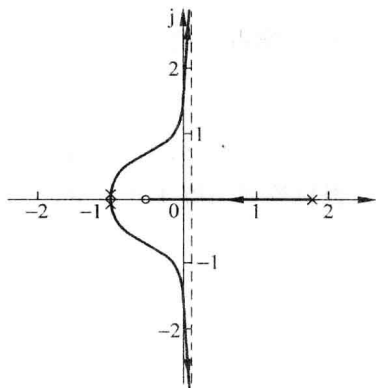
把 $s=j\omega$ 代入上方程, 令

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(D(j\omega)) = K - 1 - \frac{1}{7}\omega^2 = 0 \\ \operatorname{Im}(D(j\omega)) = \left(2K - \frac{10}{7}\right)\omega - \frac{4}{7}\omega^3 = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \omega = 0 \\ K = 1 \end{cases}, \begin{cases} \omega = \pm\sqrt{2} \\ K = \frac{9}{7} \end{cases}$$

根轨迹如图解 4-7 所示。由图解 4-7 可知使系统稳定的 K 值范围为 $1 < K < 9/7$ 。



图解 4-7

4-8 单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K^*(s^2 - 2s + 5)}{(s+2)(s-0.5)}$$

试绘制系统的根轨迹, 确定使系统稳定的 K 值范围。

解 根轨迹绘制如下:

① 实轴上的根轨迹 $[-2, 0.5]$

② 分离点 由

$$\frac{1}{d-0.5} + \frac{1}{d+2} = \frac{1}{d-1+j2} + \frac{1}{d-1-j2}$$

解得 $d_1 = -0.41$ 。

③ 与虚轴交点

$$D(s) = (s+2)(s-0.5) + K^*(s^2 + 2s + 5) = 0$$

把 $s=j\omega$ 代入上方程, 令

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(D(j\omega)) = -(1+K^*)\omega^2 + 5K^* - 1 = 0 \\ \operatorname{Im}(D(j\omega)) = (1.5 - 2K^*)\omega = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \omega = 0 \\ K^* = 0.2 \end{cases} \quad \begin{cases} \omega = \pm 1.25 \\ K^* = 0.75 \end{cases}$$

根轨迹如图解 4-8 所示。由图解 4-8 可知系统稳定的 K^* 值范围为 $0.2 < K^* < 0.75$; 又

$K=5K^*$, 所以系统稳定的 K 值范围为 $1 < K < 3.75$ 。

4-9 试绘出下列多项式方程的根轨迹。

(1) $s^3 + 2s^2 + 3s + Ks + 2K = 0$;

(2) $s^3 + 3s^2 + (K+2)s + 10K = 0$ 。

解 (1) $s^3 + 2s^2 + 3s + Ks + 2K = 0$

作等效开环传递函数 $G^*(s) = \frac{K(s+2)}{s^3 + 2s^2 + 3s}$ 。

根轨迹绘制如下:

① 实轴上的根轨迹: $[-2, 0]$

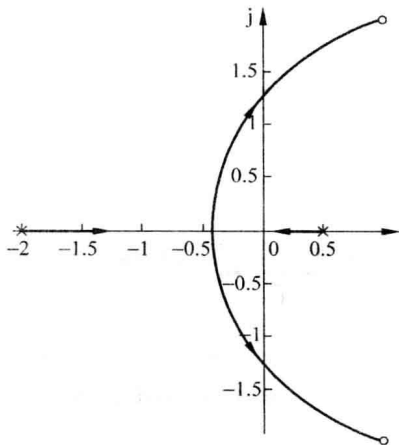
② 渐近线

$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{-1 + j\sqrt{2} + (-1 - j\sqrt{2}) - (-2)}{2} = 0 \\ \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{2} = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

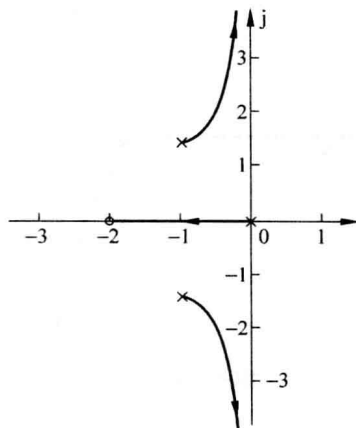
③ 起始角

$$\theta_{p_1} = 180^\circ + 54.74^\circ - 90^\circ - 125.26^\circ = 19.48^\circ$$

根轨迹如图解 4-9(a) 所示。



图解 4-8



图解 4-9(a)

(2) $s^3 + 3s^2 + (K+2)s + 10K = 0$

作等效开环传递函数 $G^*(s) = \frac{K(s+10)}{s^3 + 3s^2 + 2s}$ 。

根轨迹绘制如下:

① 实轴上的根轨迹 $[-10, -2], [-1, 0]$;

② 渐近线

$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{-1 - 2 - (-10)}{2} = 3.5 \\ \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{2} = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

③ 分离点
$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+2} = \frac{1}{d+10}$$

解得

$$d_1 = -0.4344, \quad d_2 = -14.4752(\text{舍}), \quad d_3 = -1.5904(\text{舍})$$

④ 与虚轴交点 闭环特征方程为

$$D(s) = s^3 + 3s^2 + (K+2)s + 10K = 0$$

把 $s=j\omega$ 代入上方程,整理,令实虚部分别为零得

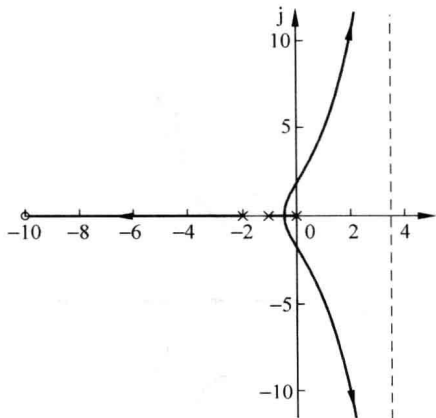
$$\begin{cases} \operatorname{Re}(D(j\omega)) = 10K - 3\omega^2 = 0 \\ \operatorname{Im}(D(j\omega)) = (K+2)\omega - \omega^3 = 0 \end{cases}$$

试根可得

$$\begin{cases} \omega = 0 & \omega = \pm 1.69 \\ K = 0 & K = \frac{6}{7} \end{cases}$$

根轨迹如图解 4-9(b)所示。

4-10 控制系统的结构如图 4-24 所示,试概略绘制其根轨迹。



图解 4-9(b)

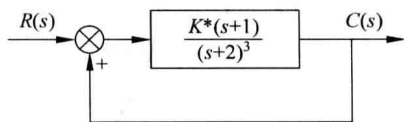


图 4-24 系统结构图

解 系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K^*(s+1)}{(s+2)^3}$$

此系统为正反馈系统,应绘零度根轨迹。

① 实轴上的根轨迹 $(-\infty, -2], [-1, +\infty)$

② 分离点
$$\frac{3}{d+2} = \frac{1}{d+1}$$

解得 $d = -0.5$ 。

③ 起始角 根据相角条件,

$$\sum_{i=1}^m \varphi_i - \sum_{j=1}^n \theta_j = 2k\pi$$

得 $\theta_{p_1} = 60^\circ, \theta_{p_2} = -60^\circ, \theta_{p_3} = 180^\circ$ 。

根轨迹如图解 4-10 所示。

4-11 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K^*(1-s)}{s(s+2)}$$

试绘制系统根轨迹, 并求出使系统产生重实根和纯虚根的 K^* 值。

解 由开环传递函数的表达式知需绘制 0° 根轨迹。

① 实轴上的根轨迹 $[-2, 0]$, $[1, +\infty)$;

② 分离点 $\frac{1}{d} + \frac{1}{d+2} = \frac{1}{d-1}$

解得 $d_1 = -0.732$, $d_2 = 2.732$ 。

将 $s = d_1 = -0.732$, $s = d_2 = 2.732$ 代入幅值条件得

$$K_{d_1}^* = 0.54, \quad K_{d_2}^* = 7.46$$

③ 与虚轴交点 闭环特征方程为

$$D(s) = s(s+2) + K^*(1-s) = 0$$

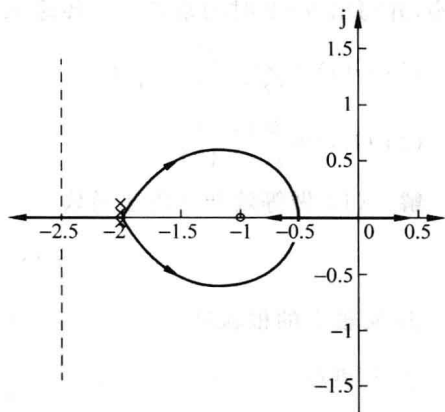
把 $s = j\omega$ 代入上方程, 整理, 令实虚部分别为零得

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(D(j\omega)) = -\omega^2 + K^* = 0 \\ \operatorname{Im}(D(j\omega)) = (2 - K^*)\omega = 0 \end{cases}$$

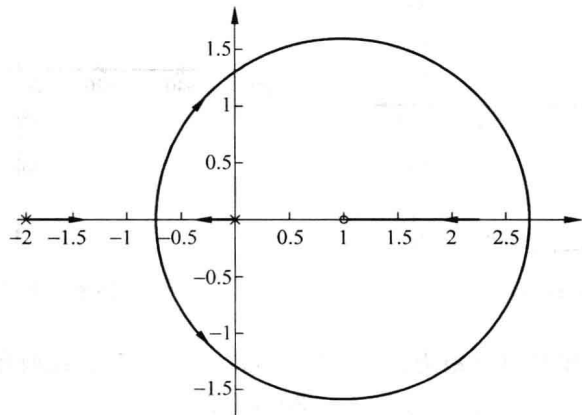
解得

$$\begin{cases} \omega = 0 & \omega = \pm 1.41 \\ K^* = 0 & K^* = 2 \end{cases}$$

根轨迹如图解 4-11 所示, 复平面上的根轨迹为以开环零点为圆心, 开环零点到分离点的距离为半径的圆。系统产生重实根的 K^* 为 0.54, 7.46, 产生纯虚根的 K^* 为 2。



图解 4-10



图解 4-11

4-12 已知单位反馈系统的开环传递函数,试绘制参数 b 从零变化到无穷大时的根轨迹,并写出 $b=2$ 时的系统闭环传递函数。

$$(1) G(s) = \frac{20}{(s+4)(s+b)};$$

$$(2) G(s) = \frac{30(s+b)}{s(s+10)}.$$

解 (1) 做等效开环传递函数

$$G^*(s) = \frac{b(s+4)}{s^2 + 4s + 20}$$

① 实轴上的根轨迹 $(-\infty, -4]$

$$\textcircled{2} \text{ 分离点 } \frac{1}{d+2+j4} + \frac{1}{d+2-j4} = \frac{1}{d+4}$$

解得 $d_1 = -0.472$ (舍去), $d_2 = -8.472$ 。

如图解 4-12(a) 所示,根轨迹为以开环零点为圆心,开环零点到开环极点的距离为半径的圆。当 $b=2$ 时,两个闭环特征根为 $\lambda_{1,2} = -3 \pm j4.24$ 。此时闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{20}{(s+3+j4.24)(s+3-j4.24)}$$

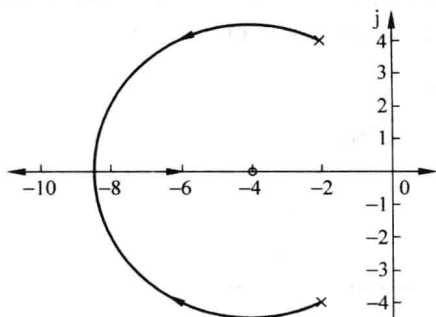
(2) 做等效开环传递函数 $G^*(s) = \frac{30b}{s(s+40)}$

① 实轴上的根轨迹 $[-40, 0]$

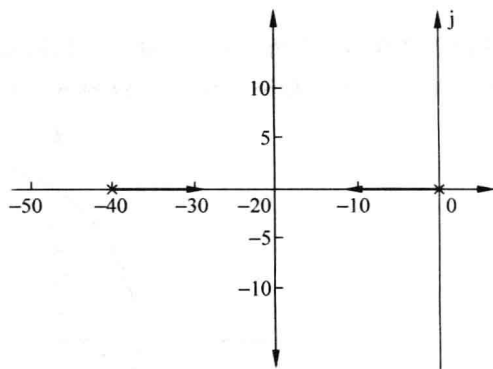
$$\textcircled{2} \text{ 分离点 } \frac{1}{d} + \frac{1}{d+40} = 0$$

解得 $d = -20$ 。

根轨迹如图解 4-12(b) 所示。



图解 4-12(a)



图解 4-12(b)

当 $b=2$ 时,两个闭环特征根为 $\lambda_1 = -38.44, \lambda_2 = -1.56$ 。此时闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{30(s+2)}{(s+1.56)(s+38.44)}$$

4-13 设一位置随动系统如图 4-25 所示。试

- (1) 绘制以 τ 为参数的根轨迹;
- (2) 求系统阻尼比 $\zeta=0.5$ 时的闭环传递函数。

解 (1) $G(s) = \frac{5(1+\tau s)}{s(5s+1)} = \frac{1+\tau s}{s(s+0.2)}$

$$D(s) = s^2 + 0.2s + 1 + \tau s = 0$$

作等效开环传递函数

$$G^*(s) = \frac{\tau s}{s^2 + 0.2s + 1} = \frac{\tau s}{(s + 0.1 - j0.975)(s + 0.1 + j0.975)}$$

以 τ 为参数的根轨迹如图解 4-13 所示。

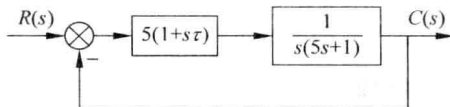
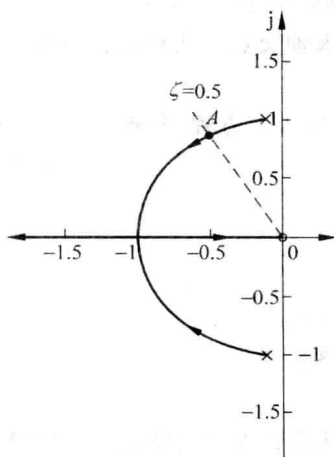


图 4-25 位置随动系统



图解 4-13

(2) $\zeta=0.5, \theta=60^\circ$ 。过坐标原点作一与负实轴成 60° 的射线, 交根轨迹于 A 点, 其坐标为 $-0.5 + j0.866$, 对应的 τ 值由幅值条件求得

$$\tau = \left| \frac{s^2 + 0.2s + 1}{s} \right|_{s=-0.5+j0.866} = 0.78$$

此时的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{1+0.78s}{(s+0.5+j0.866)(s+0.5-j0.866)}$$

4-14 已知系统结构图如图 4-26 所示, 试绘制时间常数 T 变化时系统的根轨迹, 并分析参数 T 的变化对系统动态性能的影响。

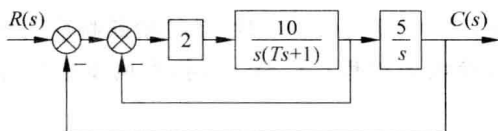


图 4-26 题 4-14 图

解

$$G(s) = \frac{100}{Ts^3 + s^2 + 20s}$$



作等效开环传递函数

$$G^*(s) = \frac{Ts^3}{s^2 + 20s + 100}$$

$\sum z_i = 0 \quad \sum p_i = 10$

根轨迹绘制如下:

① 实轴上的根轨迹

$$(-\infty, -10], [-10, 0]$$

$$\frac{T \cdot 27000}{400} = 1$$

② 分离点

$$\frac{3}{d} = \frac{2}{d+10}$$

$$(\sin \omega)^2 \quad T = \frac{4}{270} \rightarrow \lim_{\omega \rightarrow 20}$$

解得 $d = -30$ 。

根据幅值条件, 对应的 $T = 0.015$ 。

③ 虚轴交点 闭环特征方程为

$$D(s) = Ts^3 + s^2 + 20s + 100 = 0$$

把 $s = j\omega$ 代入上方程, 整理, 令实虚部分别为零得

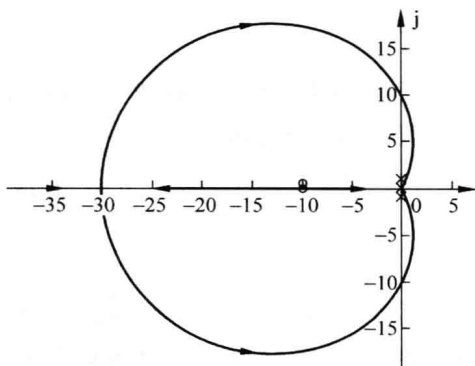
$$\begin{cases} \operatorname{Re}(D(j\omega)) = 100 - \omega^2 = 0 \\ \operatorname{Im}(D(j\omega)) = 20\omega - T\omega^3 = 0 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} \omega = \pm 10 \\ T = 0.2 \end{cases}$

④ 终止角

$$\theta_{p_1} = 60^\circ$$

参数 T 从零到无穷大变化时的根轨迹如图解 4-14 所示。



图解 4-14

从根轨迹图可以看出, 当 $0 < T \leq 0.015$ 时, 系统阶跃响应为单调收敛过程; $0.015 < T < 0.2$ 时, 阶跃响应为振荡收敛过程; $T > 0.2$ 时, 有两支根轨迹在 s 右半平面, 此时系统不稳定。

4-15 实系数特征方程

$$A(s) = s^3 + 5s^2 + (6 + a)s + a = 0$$

要使其根全为实数,试确定参数 a 的范围。

解 作等效开环传递函数

$$G(s) = \frac{a(s+1)}{s^3 + 5s^2 + 6s} = \frac{a(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$$

当 $a \geq 0$ 时,需绘制 180° 根轨迹。

$$\begin{aligned} \text{① 实轴上的根轨迹} & \quad [-3, -2], [-1, 0] \\ \text{② 渐近线} & \quad \begin{cases} \sigma_a = \frac{-2-3+1}{3-1} = -2 \\ \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{3-1} = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

③ 分离点

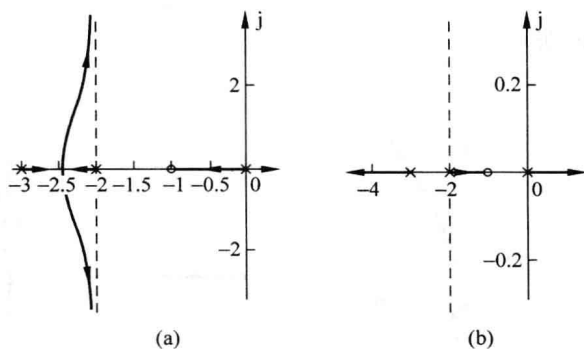
$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+3} = \frac{1}{d+1}$$

解得 $d = -2.47$ 。

分离点处的根轨迹增益可由幅值条件求得

$$K_d^* = \frac{|d| |d+2| |d+3|}{d+1} = 0.4147$$

根据以上计算,可绘制出系统根轨迹如图解 4-15 所示。由图解 4-15(a) 可以看出,当 $0 \leq a \leq 0.4147$ 时,多项式的根全为实数。



图解 4-15

当 $a < 0$ 时,需绘制 0° 根轨迹。实轴上的根轨迹区段为 $(-\infty, -3]$, $[-2, -1]$, $[0, \infty)$ 。

由图解 4-15(b) 可以看出,当 $a < 0$ 时,多项式的根全为实数。因此所求参数 a 的范围为 $0 \leq a \leq 0.4147$ 或 $a < 0$ 。

4-16 某单位反馈系统结构图如图 4-27 所示,试分别绘出控制器传递函数 $G_c(s)$ 为

- (1) $G_{c1}(s) = K^*$
- (2) $G_{c2}(s) = K^*(s+3)$
- (3) $G_{c3}(s) = K^*(s+1)$

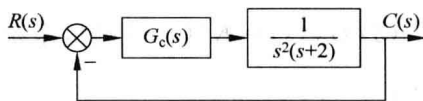


图 4-27 题 4-16 图

时系统的根轨迹,并讨论比例加微分控制器 $G_c(s) = K^*(s+z_c)$ 中,零点 $-z_c$ 的取值对系统稳定性的影响。

解 (1) $G_{c1}(s) = K^*$ 时,系统开环传递函数为 $G(s) = \frac{K^*}{s^2(s+2)}$ 。根轨迹绘制如下:

- ① 实轴上的根轨迹 $(-\infty, -2]$;
- ② 渐近线

$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3} \\ \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{3}, \pi \end{cases}$$

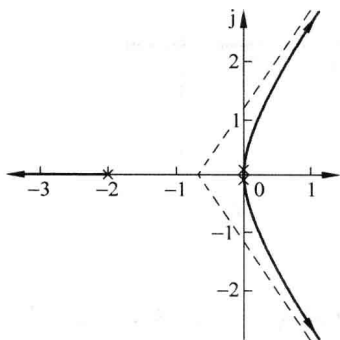
根轨迹如图解 4-16(a) 所示。

(2) $G_{c2}(s) = K^*(s+3)$ 时,系统开环传递函数为 $G(s) = \frac{K^*(s+3)}{s^2(s+2)}$ 。根轨迹绘制如下:

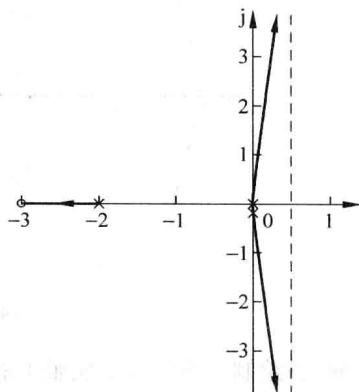
- ① 实轴上的根轨迹 $[-3, -2]$;
- ② 渐近线

$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{-2 - (-3)}{2} = \frac{1}{2} \\ \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{2} = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

根轨迹如图解 4-16(b) 所示。



图解 4-16(a)



图解 4-16(b)

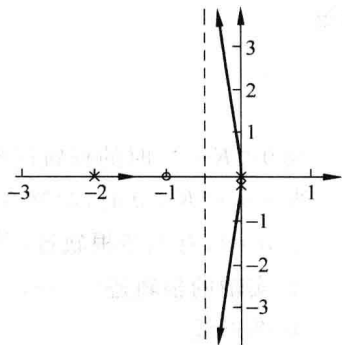
(3) $G_{c3}(s) = K^*(s+1)$ 时,系统开环传递函数为 $G(s) = \frac{K^*(s+1)}{s^2(s+2)}$ 。根轨迹绘制如下:

- ① 实轴上的根轨迹 $[-2, -1]$;
- ② 渐近线

$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{-2 - (-1)}{2} = -\frac{1}{2} \\ \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{2} = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

根轨迹如图解 4-16(c) 所示。

从根轨迹图中可以看出,比例加微分控制器 $G_c(s) = K^*(s+z_c)$ 的加入使根轨迹向左移动,且当 $|z_c| < |p|$ 时系统趋于稳定,附加开环零点越靠近虚轴这种趋势越强。



图解 4-16(c)

4-17 单位反馈系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(1+0.1s)}{s(s+1)(0.25s+1)^2}$$

(1) 绘制 $-\infty < K < \infty$ 时的根轨迹;

(2) 用主导极点法求出系统处于临界阻尼时的开环增益,并写出对应的闭环传递函数。

解 (1) 绘制系统根轨迹

$$G(s) = \frac{K(1+0.1s)}{s(s+1)(0.25s+1)^2} = \frac{K^*(s+10)}{s(s+1)(s+4)^2} \quad \begin{cases} K = \frac{10K^*}{16} \\ v = 1 \end{cases}$$

当 $0 < K < \infty$ 时,绘制 180° 根轨迹。

① $n=4$, 有四条根轨迹,其中三条趋于无穷远处;

② 实轴的根轨迹 $(-\infty, -10], [-1, 0]$;

③ 渐近线

$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{-1 - 4 \times 2 + 10}{4 - 1} = \frac{1}{3} \\ \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{4-1} = \pm \frac{\pi}{3}, \pi \end{cases}$$

④ 分离点

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+1} + \frac{2}{d+4} = \frac{1}{d+10}$$

用试探法求得

$$d_1 = -0.45, \quad d_2 = -2.25, \quad d_3 = -12.5$$

显然分离点是

$$d_1 = -0.45, \quad d_2 = -12.5$$

⑤ 虚轴交点 闭环特征方程为

$$D(s) = s^4 + 9s^3 + 24s^2 + (16 + K^*)s + 10K^* = 0$$

把 $s=j\omega$ 代入特征方程,整理并令实、虚部分别为零,得

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(D(j\omega)) = \omega^4 - 24\omega^2 + 10K^* = 0 \\ \operatorname{Im}(D(j\omega)) = -9\omega^3 + (16 + K^*)\omega = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \omega = \pm 1.53 \\ K^* = 5.07 \end{cases}$$

当 $0 < K < \infty$ 时的根轨迹如图解 4-17(a) 所示。

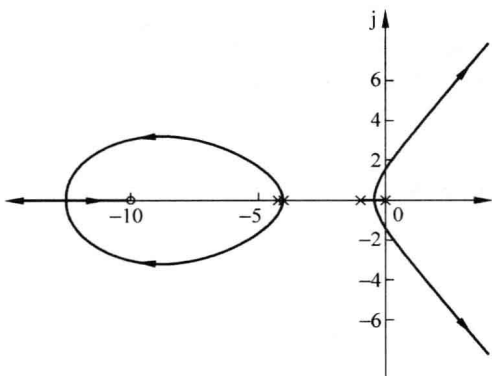
当 $-\infty < K < 0$ 时, 绘制 0° 根轨迹。

- ① $n=4$, 有四条根轨迹, 其中三条趋于无穷远处;
- ② 实轴的根轨迹 $(-10, -4]$, $[-4, -1]$, $[0, \infty)$;
- ③ 渐近线

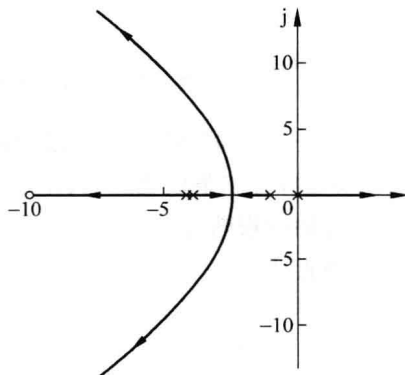
$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{-1 - 4 \times 2 + 10}{4 - 1} = \frac{1}{3} \\ \varphi_a = \frac{2k\pi}{4 - 1} = \pm \frac{2\pi}{3}, 0^\circ \end{cases}$$

- ④ 分离点 $d = -2.25$;

当 $-\infty < K < 0$ 时的根轨迹如图解 4-17(b) 所示。



图解 4-17(a)



图解 4-17(b)

(2) 求临界阻尼的开环增益

由于 $-\infty < K < 0$ 时, 系统不稳定, 因此不存在临界阻尼状态。 $0 < K < \infty$ 时, 根据主导极点的概念, 当系统的两个闭环主导极点 $\lambda_1 = \lambda_2 = -0.45$ 时系处于统临界阻尼状态。此时, 根轨迹增益可由幅值条件求得

$$K_d^* = \frac{|d| |d+1| |d+4|^2}{d+10} = 0.327, \quad K_d = \frac{K_d^*}{1.6} = 0.204$$

用长除法可将系统的特征方程化为

$$(s + 0.45)^2 (s^2 + 8.113s + 16.6) = 0$$

系统处于临界阻尼状态的闭环极点为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -0.45, \quad \lambda_{3,4} = -4.05 \pm j0.38$$

此时有

$$\Phi(s) = \frac{0.327(s+10)}{(s+0.45)^2(s+4.05-j0.38)(s+4.05+j0.38)}$$

显然,对于系统动态性能估算而言,闭环零点 $z=-10$ 及闭环极点 $\lambda_{3,4}$ 的影响可以忽略。保持闭环增益不变,将系统降阶为二阶,系统传递函数变为

$$\Phi(s) = \frac{0.2}{(s+0.45)^2}$$

第5章

习题及解答

5-1 试求图 5-76(a)、图 5-76(b) 所示网络的频率特性。

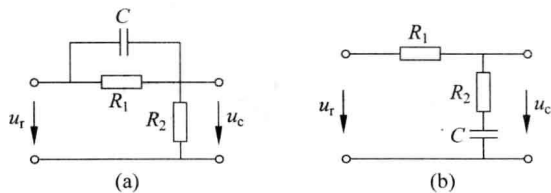


图 5-76 R-C 网络

解 (a) 依图有

$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1 \frac{1}{sC}}{R_1 + \frac{1}{sC}}} = \frac{K_1(\tau_1 s + 1)}{T_1 s + 1} \quad \begin{cases} K_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \\ \tau_1 = R_1 C \\ T_1 = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2} \end{cases}$$

$$G_a(j\omega) = \frac{U_c(j\omega)}{U_r(j\omega)} = \frac{R_2 + j\omega R_1 R_2 C}{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C} = \frac{K_1(1 + j\tau_1 \omega)}{1 + jT_1 \omega}$$

(b) 依图

$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{sC}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{sC}} = \frac{\tau_2 s + 1}{T_2 s + 1} \quad \begin{cases} \tau_2 = R_2 C \\ T_2 = (R_1 + R_2) C \end{cases}$$

$$G_b(j\omega) = \frac{U_c(j\omega)}{U_r(j\omega)} = \frac{1 + j\omega R_2 C}{1 + j\omega(R_1 + R_2)C} = \frac{1 + j\tau_2 \omega}{1 + jT_2 \omega}$$

5-2 某系统结构图如图 5-77 所示, 试根据频率特性的物理意义, 求下列输入信号作用时, 系统的稳态输出 $c_s(t)$ 和稳态误差 $e_s(t)$ 。

(1) $r(t) = \sin 2t$

(2) $r(t) = \sin(t + 30^\circ) - 2\cos(2t - 45^\circ)$

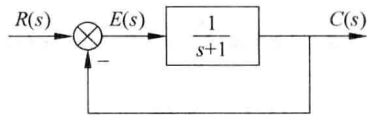


图 5-77 系统结构图

解 系统闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{1}{s+2}$$

频率特性为

$$\Phi(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 2} = \frac{2}{4 + \omega^2} + j \frac{-\omega}{4 + \omega^2}$$

幅频特性

$$|\Phi(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{4 + \omega^2}}$$

相频特性

$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{2}$$

系统误差传递函数

$$\Phi_e(s) = \frac{1}{1+G(s)} = \frac{s+1}{s+2}$$

则

$$|\Phi_e(j\omega)| = \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{4+\omega^2}}, \quad \varphi_e(j\omega) = \arctan\omega - \arctan \frac{\omega}{2}$$

(1) 当 $r(t) = \sin 2t$ 时, $\omega = 2, r_m = 1$

则

$$|\Phi_e(j\omega)|_{\omega=2} = \frac{1}{\sqrt{8}} = 0.35, \quad \varphi_e(j2) = -\arctan \frac{2}{2} = -45^\circ$$

$$|\Phi_e(j\omega)|_{\omega=2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}} = 0.79$$

$$\varphi_e(j2) = \arctan 2 - \arctan \frac{2}{2} = 63.4^\circ - 45^\circ = 18.4^\circ$$

$$c_s(t) = r_m |\Phi_e(j2)| \sin(2t + \varphi_e(j2)) = 0.35 \sin(2t - 45^\circ)$$

$$e_s(t) = r_m |\Phi_e(j2)| \sin(2t + \varphi_e(j2)) = 0.79 \sin(2t + 18.4^\circ)$$

(2) 当 $r(t) = \sin(t+30^\circ) - 2\cos(2t-45^\circ)$ 时

$$\begin{cases} \omega_1 = 1, & r_{m1} = 1 \\ \omega_2 = 2, & r_{m2} = 2 \end{cases}$$

则

$$|\Phi_e(j1)| = \frac{\sqrt{5}}{5} = 0.45 \quad \varphi_e(j1) = -\arctan \frac{1}{2} = -26.6^\circ$$

$$|\Phi_e(j1)| = \frac{\sqrt{10}}{5} = 0.63 \quad \varphi_e(j1) = \arctan \frac{1}{1} - \arctan \frac{1}{2} = 45^\circ - 26.6^\circ = 18.4^\circ$$

$$\begin{aligned} c_s(t) &= r_{m1} |\Phi_e(j1)| \cdot \sin[t+30^\circ + \varphi_e(j1)] - r_{m2} |\Phi_e(j2)| \cdot \cos[2t-45^\circ + \varphi_e(j2)] \\ &= 0.45 \sin(t+3.4^\circ) - 0.7 \cos(2t-90^\circ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_s(t) &= r_{m1} |\Phi_e(j1)| \cdot \sin[t+30^\circ + \varphi_e(j1)] - r_{m2} |\Phi_e(j2)| \cdot \cos[2t-45^\circ + \varphi_e(j2)] \\ &= 0.63 \sin(t+48.4^\circ) - 1.58 \cos(2t-26.6^\circ) \end{aligned}$$

5-3 若系统单位阶跃响应

$$h(t) = 1 - 1.8e^{-4t} + 0.8e^{-9t} \quad (t \geq 0)$$

试求系统频率特性。

解
$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1.8}{s+4} + \frac{0.8}{s+9} = \frac{36}{s(s+4)(s+9)}, \quad R(s) = \frac{1}{s}$$

则
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \Phi(s) = \frac{36}{(s+4)(s+9)}$$

频率特性为
$$\Phi(j\omega) = \frac{36}{(j\omega+4)(j\omega+9)}$$

5-4 绘制下列传递函数的幅相特性曲线:

(1) $G(s) = K/s$

(2) $G(s) = K/s^2$

(3) $G(s) = K/s^3$

解 (1)

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega} = \frac{K}{\omega} e^{-j(+\frac{\pi}{2})}$$

$$\omega = 0, \quad |G(j0)| \rightarrow \infty$$

$$\omega \rightarrow \infty, \quad |G(j\infty)| = 0$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

幅频特性如图解 5-4(a) 所示。

(2)
$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2} = \frac{K}{\omega^2} e^{-j(\pi)}$$

$$\omega = 0, \quad |G(j0)| \rightarrow \infty$$

$$\omega \rightarrow \infty, \quad |G(j\infty)| = 0$$

$$\varphi(\omega) = -\pi$$

幅频特性如图解 5-4(b) 所示。

(3)
$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^3} = \frac{K}{\omega^3} e^{-j(\frac{3\pi}{2})}$$

$$\omega = 0, \quad |G(j0)| \rightarrow \infty$$

$$\omega \rightarrow \infty, \quad |G(j\infty)| = 0$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{3\pi}{2}$$

幅频特性如图解 5-4(c) 所示。

5-5 已知系统开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{10}{s(2s+1)(s^2+0.5s+1)}$$

试分别计算当 $\omega=0.5$ 和 $\omega=2$ 时开环频率特性的幅值 $A(\omega)$ 和相角 $\varphi(\omega)$ 。

解

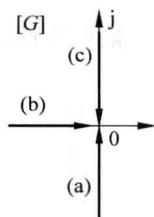
$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{10}{j\omega(1+j2\omega)(1-\omega^2+j0.5\omega)}$$

$$A(\omega) = \frac{10}{\omega \sqrt{1+(2\omega)^2} \sqrt{(1-\omega^2)^2+(0.5\omega)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan 2\omega - \arctan \frac{0.5\omega}{1-\omega^2}$$

计算可得

$$\begin{cases} A(0.5) = 17.8885 \\ \varphi(0.5) = -153.435^\circ \end{cases} \quad \begin{cases} A(2) = 0.3835 \\ \varphi(2) = -327.53^\circ \end{cases}$$



图解 5-4

5-6 试绘制下列传递函数的幅相特性曲线。

$$(1) G(s) = \frac{5}{(2s+1)(8s+1)}$$

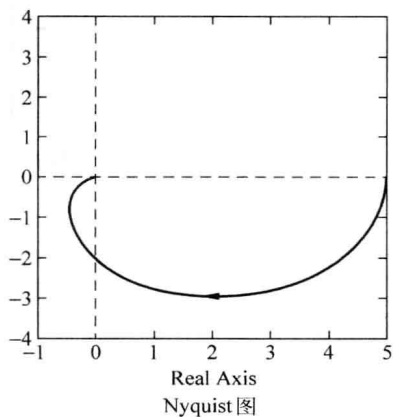
$$(2) G(s) = \frac{10(1+s)}{s^2}$$

解 (1) $|G(j\omega)| = \frac{5}{\sqrt{(1-16\omega^2)^2 + (10\omega)^2}}$
 $\angle G(j\omega) = -\arctan 2\omega - \arctan 8\omega = -\arctan \frac{10\omega}{1-16\omega^2}$

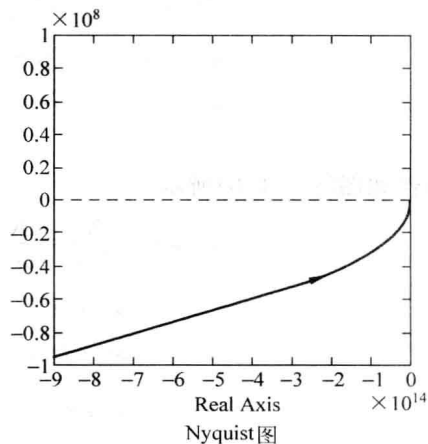
取 ω 为不同值进行计算并描点画图, 可以作出准确图形。

- 三个特殊点 ① $\omega=0$ 时, $|G(j\omega)|=5$, $\angle G(j\omega)=0^\circ$
 ② $\omega=0.25$ 时, $|G(j\omega)|=2$, $\angle G(j\omega)=-90^\circ$
 ③ $\omega=\infty$ 时, $|G(j\omega)|=0$, $\angle G(j\omega)=-180^\circ$

幅相特性曲线如图解 5-6(1) 所示。



图解 5-6(1)



图解 5-6(2)

$$(2) |G(j\omega)| = \frac{10\sqrt{1+\omega^2}}{\omega^2}$$

$$\angle G(j\omega) = \arctan \omega - 180^\circ$$

- 两个特殊点 ① $\omega=0$ 时, $|G(j\omega)|=\infty$, $\angle G(j\omega)=-180^\circ$
 ② $\omega=\infty$ 时, $|G(j\omega)|=0$, $\angle G(j\omega)=-90^\circ$

幅相特性曲线如图解 5-6(2) 所示。

5-7 已知系统开环传递函数

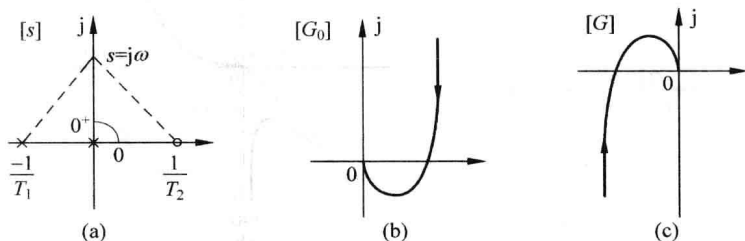
$$G(s) = \frac{K(-T_2s+1)}{s(T_1s+1)} \quad (K, T_1, T_2 > 0)$$

当 $\omega=1$ 时, $\angle G(j\omega)=-180^\circ$, $|G(j\omega)|=0.5$; 当输入为单位速度信号时, 系统的稳态误差为 1。试写出系统开环频率特性表达式 $G(j\omega)$ 。

解

$$G(s) = \frac{-K(T_2s-1)}{s(T_1s+1)}$$

先绘制 $G_0(s) = \frac{K(T_2s-1)}{s(T_1s+1)}$ 的幅相曲线, 然后顺时针转 180° 即可得到 $G(j\omega)$ 幅相曲线。 $G_0(s)$ 的零极点分布图及幅相曲线分别如图解 5-7(a)、图解 5-7(b) 所示。 $G(s)$ 的幅相曲线如图解 5-7(c) 所示。



图解 5-7

依题意有

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = K, \quad e_{ssv} = 1/K = 1, \quad \text{因此 } K = 1.$$

$$\angle G(j1) = -\arctan T_2 - 90^\circ - \arctan T_1 = -180^\circ$$

$$\arctan T_1 + \arctan T_2 = \arctan \frac{T_1 + T_2}{1 - T_1 T_2} = 90^\circ$$

$$T_1 T_2 = 1$$

另有

$$|G(j1)| = \left| \frac{(1-jT_2)(1-jT_1)}{1+T_1^2} \right| = \frac{|1-T_1T_2-j(T_1+T_2)|}{1+T_1^2} = \frac{T_1+T_2}{1+T_1^2} = 0.5$$

$$T_1^2 - 2T_2 + 1 - 2T_1 = T_1^2 - 2T_1 + 1 - 2/T_1 = 0$$

$$T_1^3 - 2T_1^2 + T_1 - 2 = (T_1^2 + 1)(T_1 - 2) = 0$$

可得

$$T_1 = 2, \quad T_2 = 1/T_1 = 0.5, \quad K = 1$$

所以

$$G(j\omega) = \frac{1-j0.5\omega}{j\omega(1+j2\omega)}$$

5-8 已知系统开环传递函数

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s^2+1)}$$

试概略绘制系统开环幅相特性曲线。

解 $G(j\omega)$ 的零极点分布图如图解 5-8(a) 所示。 $\omega=0 \rightarrow \infty$ 变化时, 有

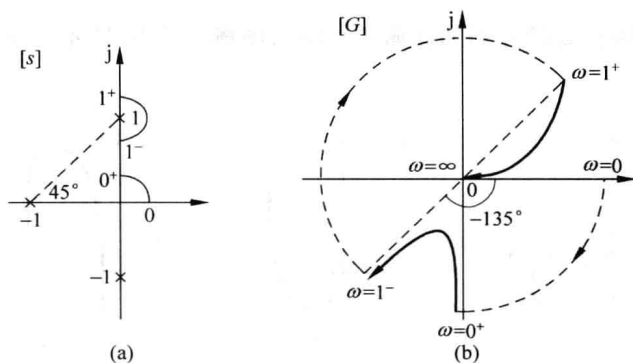
$$G(j0^+) = \infty \angle -90^\circ$$

$$G(j1^-) = \infty \angle -135^\circ$$

$$G(1^+) = \infty \angle -315^\circ$$

$$G(j\infty) = 0 \angle -360^\circ$$

分析 s 平面各零极点矢量随 $\omega = 0 \rightarrow \infty$ 的变化趋势, 可以绘出开环幅相曲线如图解 5-8(b) 所示。



图解 5-8

5-9 绘制下列传递函数的渐近对数幅频特性曲线。

(1) $G(s) = \frac{2}{(2s+1)(8s+1)}$;

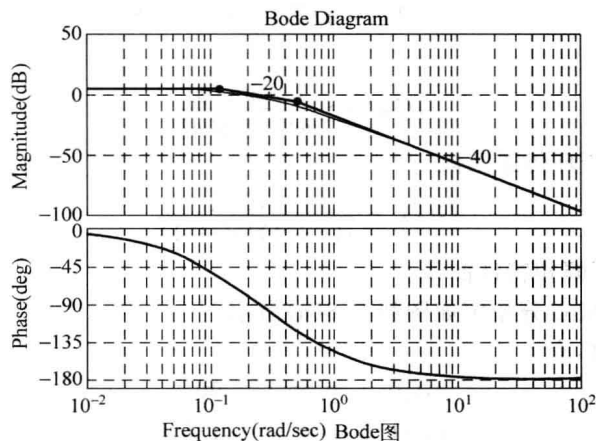
(2) $G(s) = \frac{200}{s^2(s+1)(10s+1)}$;

(3) $G(s) = \frac{40(s+0.5)}{s(s+0.2)(s^2+s+1)}$

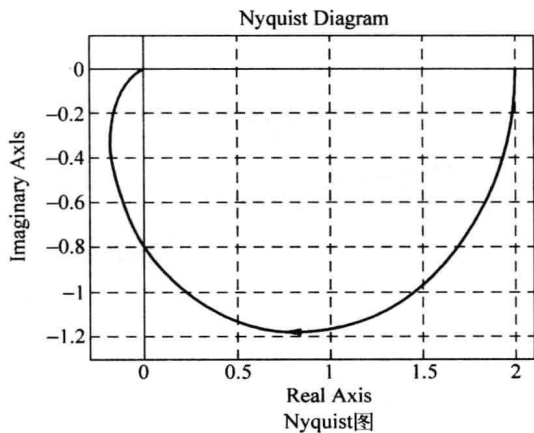
(4) $G(s) = \frac{20(3s+1)}{s^2(6s+1)(s^2+4s+25)(10s+1)}$

(5) $G(s) = \frac{8(s+0.1)}{s(s^2+s+1)(s^2+4s+25)}$

解 (1) $G(s) = \frac{2}{(2s+1)(8s+1)}$

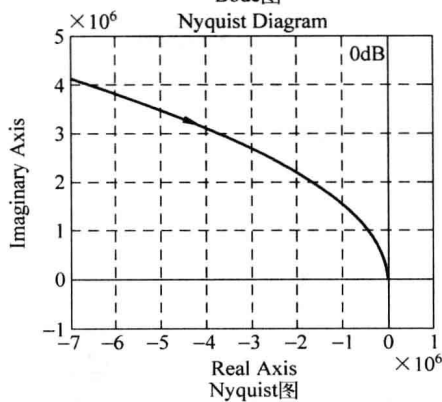
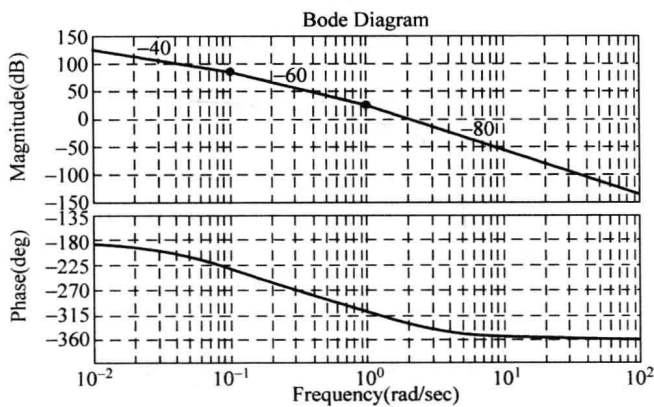


图解 5-9(1)



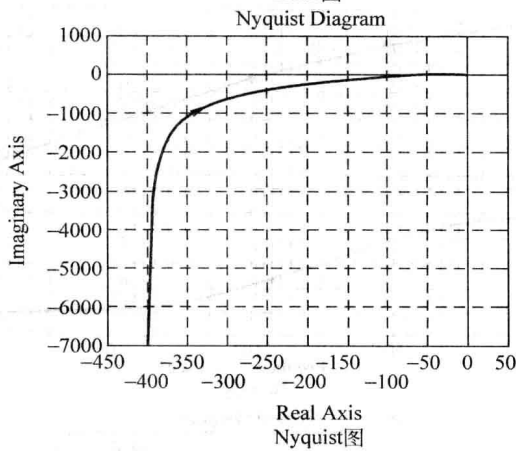
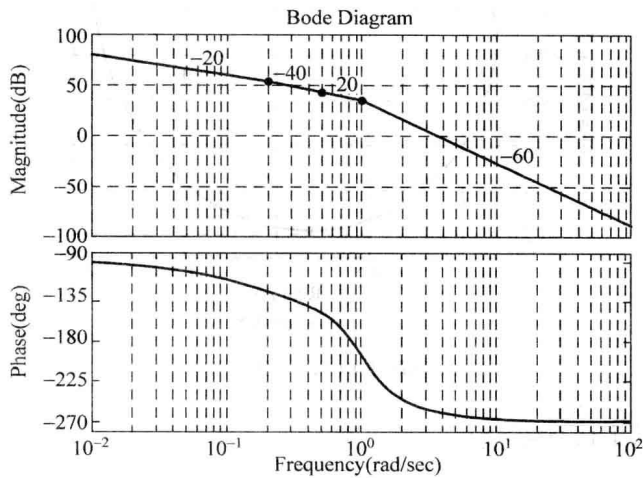
图解 5-9(1) (续)

$$(2) G(s) = \frac{200}{s^2(s+1)(10s+1)}$$



图解 5-9(2)

$$(3) G(s) = \frac{40(s+0.5)}{s(s+0.2)(s^2+s+1)} = \frac{100(2s+1)}{s\left(\frac{s}{0.2}+1\right)(s^2+s+1)}$$

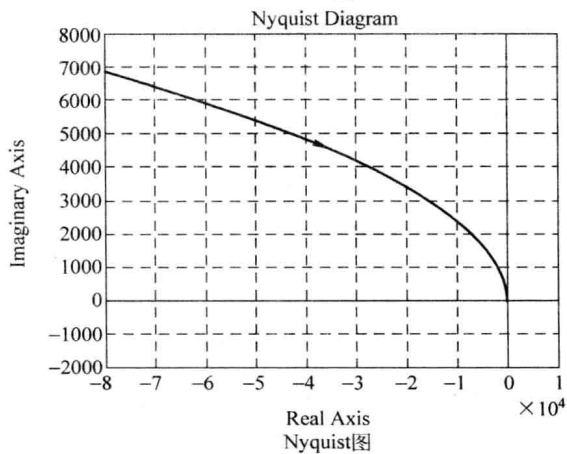
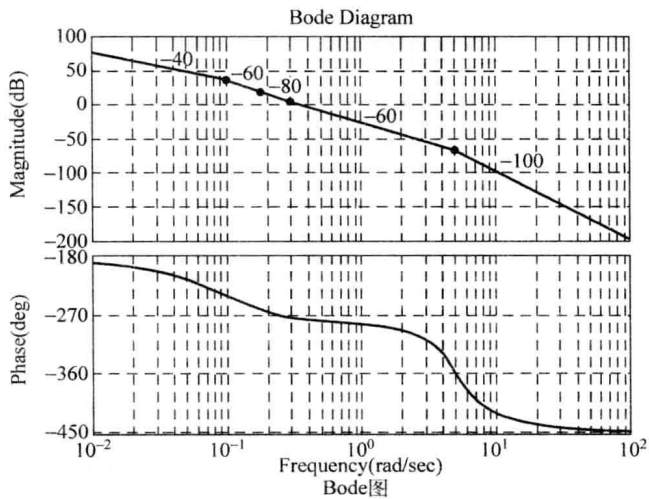


图解 5-9(3)

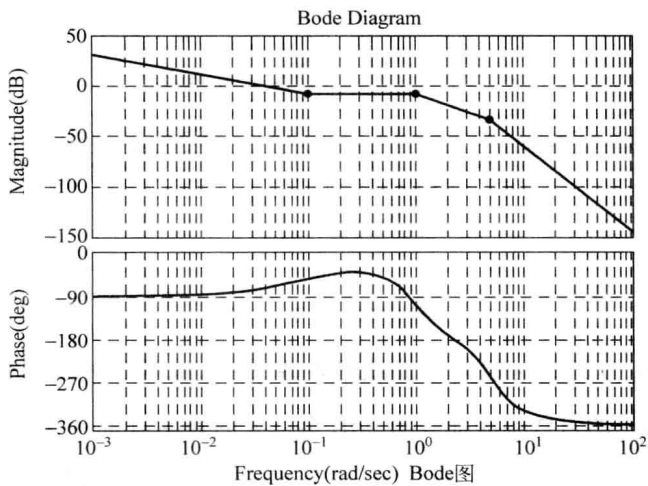
$$(4) G(s) = \frac{20(3s+1)}{s^2(6s+1)(s^2+4s+25)(10s+1)}$$

$$G(s) = \frac{\frac{20}{25}(3s+1)}{s^2(6s+1)\left[\left(\frac{s}{5}\right)^2 + \frac{4}{25}s+1\right](10s+1)}$$

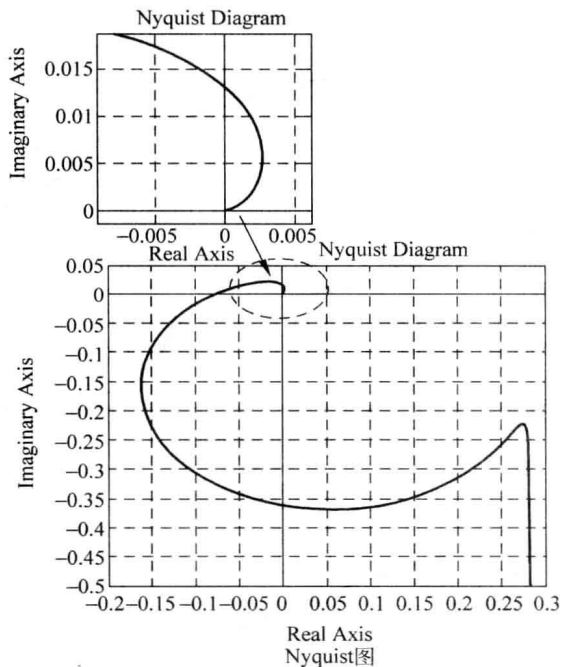
$$(5) G(s) = \frac{8(s+0.1)}{s(s^2+s+1)(s^2+4s+25)} = \frac{\frac{0.8}{25}\left(\frac{1}{0.1}s+1\right)}{s(s^2+s+1)\left[\left(\frac{1}{5}s\right)^2 + \frac{4}{25}s+1\right]}$$



图解 5-9(4)



图解 5-9(5)



图解 5-9(5) (续)

5-10 若传递函数

$$G(s) = \frac{K}{s^v} G_0(s)$$

式中, $G_0(s)$ 为 $G(s)$ 中除比例和积分两种环节外的部分。试证

$$\omega_1 = K^{\frac{1}{v}}$$

式中, ω_1 为近似对数幅频特性曲线最左端直线(或其延长线)与零分贝线交点的频率, 如图 5-78 所示。

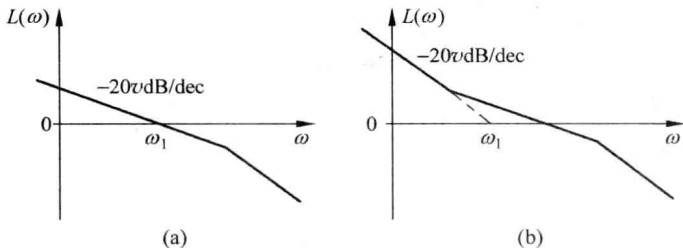


图 5-78 题 5-10 图

证 依题意, $G(s)$ 近似对数频率曲线最左端直线(或其延长线)对应的传递函数为 $\frac{K}{s^v}$ 。题意即要证明 $\frac{K}{s^v}$ 的对数幅频曲线与 0dB 交点处的频率值 $\omega_1 = K^{\frac{1}{v}}$ 。因此, 令

$$20 \lg \left| \frac{K}{(j\omega)^v} \right| = 0, \text{ 可得 } \frac{K}{\omega_1^v} = 1, \text{ 故 } \omega_1^v = K, \text{ 所以 } \omega_1 = K^{\frac{1}{v}}, \text{ 证毕。}$$

5-11 最小相角系统传递函数的近似对数幅频特性曲线分别如图 5-79 所示。试分别写出它们对应的传递函数。

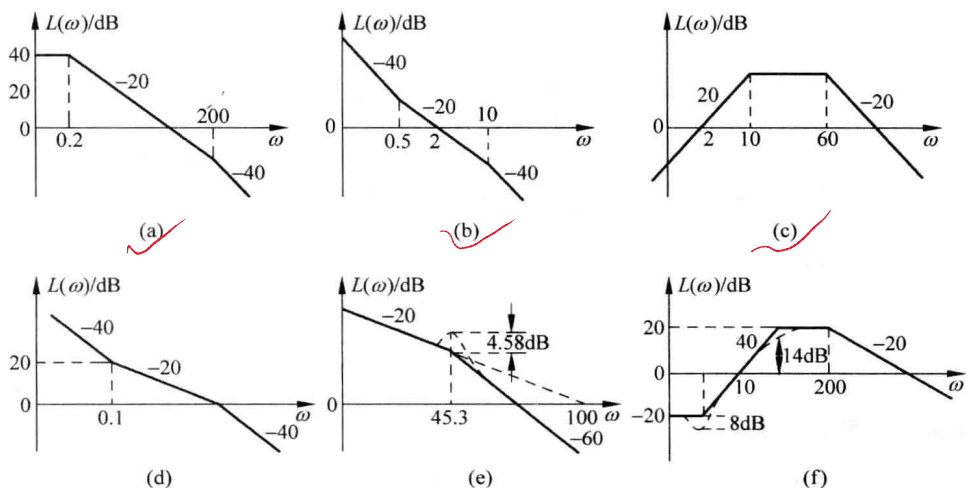


图 5-79 题 5-11 图

解 (a) 依图可写出

$$G(s) = \frac{100}{\left(\frac{s}{0.2} + 1\right)\left(\frac{s}{200} + 1\right)}$$

(b) 依图可写出

$$G(s) = \frac{K\left(\frac{s}{0.5} + 1\right)}{s^2\left(\frac{s}{10} + 1\right)} \quad K = \omega_0^2 = 0.5 \times 2 = 1$$

(c) 依图可写出

$$G(s) = \frac{K \cdot s}{\left(\frac{s}{10} + 1\right)\left(\frac{s}{60} + 1\right)} \quad 20\lg 2K = 0 \quad \left(K = \frac{1}{2}\right)$$

(d) 依图可写出

$$G(s) = \frac{K\left(\frac{s}{0.1} + 1\right)}{s^2(s+1)} \quad K = \omega_0^2 = 0.1 \times 1 = 0.1$$

(e) 依图可写出

$$G(s) = \frac{100}{s\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + 1\right)}$$

$$\omega_r = 45.3 = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}, \quad 20\lg M_r = 4.58$$

$$M_r = 10^{\frac{4.58}{20}} = 1.694 = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

整理得

$$\zeta^4 - \zeta^2 + 0.08708 = 0$$

解出

$$\zeta = 0.31$$

$$\omega_n = \frac{45.3}{\sqrt{1-2\zeta^2}} \Big|_{\zeta=0.31} = 50$$

$$G(s) = \frac{100}{s\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + 1\right)} = \frac{100}{s\left(\frac{s^2}{50^2} + 2 \times 0.31 \frac{s}{50} + 1\right)} = \frac{250000}{s(s^2 + 31s + 2500)}$$

(f) 依图可写出

$$G(s) = \frac{0.1\left(\frac{s^2}{\omega_1^2} + 2\zeta\frac{s}{\omega_1} + 1\right)}{\left(\frac{s}{\omega_2} + 1\right)^2\left(\frac{s}{200} + 1\right)}$$

求第一个转折频率 ω_1

$$40\lg\frac{10}{\omega_1} = 20, \quad \frac{10}{\omega_1} = 10^{\frac{20}{40}} = \sqrt{10}, \quad \omega_1 = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

求第二个转折频率 ω_2

$$\omega_2 = \frac{10^2}{\omega_1} = \frac{100}{\sqrt{10}} = 10\sqrt{10}$$

$$20\lg M_r = 8$$

$$M_r = 10^{\frac{8}{20}} = 2.512 = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

整理得

$$\zeta^4 - \zeta^2 + 0.03962 = 0$$

解出

$$\zeta = 0.2033$$

$$G(s) = \frac{0.1\left(\frac{s^2}{\omega_1^2} + 2\zeta\frac{s}{\omega_1} + 1\right)}{\left(\frac{s}{\omega_2} + 1\right)^2\left(\frac{s}{200} + 1\right)} = \frac{0.1\left(\frac{s^2}{\sqrt{10}^2} + 2 \times 0.2033 \frac{s}{\sqrt{10}} + 1\right)}{\left(\frac{s}{10\sqrt{10}} + 1\right)^2\left(\frac{s}{200} + 1\right)}$$

$$= \frac{2000(s^2 + 1.2858s + 10)}{(s^2 + 63.246s + 1000)(s + 200)}$$

5-12 已知 $G_1(s)$ 、 $G_2(s)$ 和 $G_3(s)$ 均为最小相角传递函数, 其近似对数幅频特性曲线如图 5-80 所示。试概略绘制传递函数

$$G_4(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)}$$

的对数幅频、对数相频和幅相特性曲线。

解 (1) 由 $L_1(\omega) = 20\lg K_1 = 45.11$ 可得

$$K_1 = 180$$

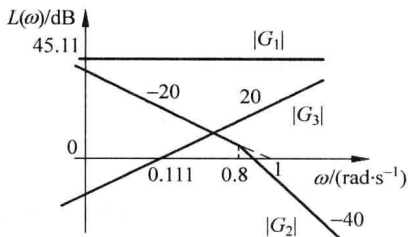


图 5-80 题 5-12 图

则

$$G_1(s) = K_1$$

$$(2) G_2(s) = \frac{K_2}{s\left(\frac{s}{0.8} + 1\right)}$$

$$20\lg K_2/\omega = 20\lg \frac{K_2}{1} = 0, \quad K_2 = 1$$

$$(3) L_3(\omega) = 20\lg \omega K_3 = 20\lg 0.111 K_3 = 0$$

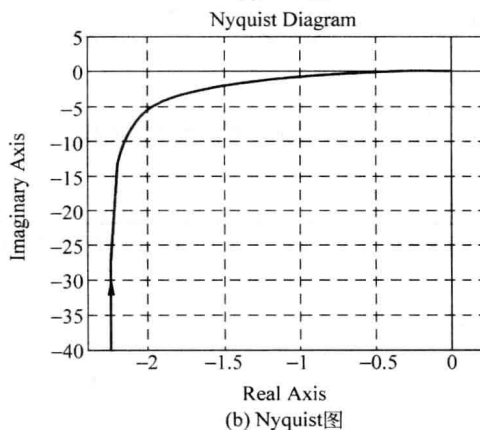
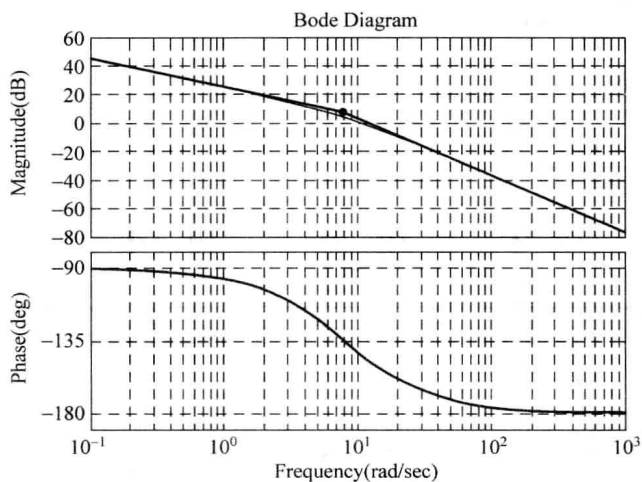
$$K_3 = \frac{1}{0.111} = 9, \quad G_3(s) = K_3 s = 9s$$

$$(4) G_4(s) = \frac{G_1 G_2}{1 + G_2 G_3}$$

将 G_1, G_2, G_3 代入得

$$G_4(s) = \frac{18}{s(0.125s + 1)}$$

对数频率特性曲线如图解 5-12(a)所示,幅相曲线如图解 5-12(b)所示。



图解 5-12

5-13 试根据奈奎斯特判据,判断图 5-81(1)~(10)所示曲线对应闭环系统的稳定性。已知曲线(1)~(10)对应的开环传递函数分别为(按自左至右顺序)。

$$(1) G(s) = \frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$$

$$(2) G(s) = \frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

$$(3) G(s) = \frac{K}{s^2(Ts+1)}$$

$$(4) G(s) = \frac{K(T_1s+1)}{s^2(T_2s+1)} \quad (T_1 > T_2)$$

$$(5) G(s) = \frac{K}{s^3}$$

$$(6) G(s) = \frac{K(T_1s+1)(T_2s+1)}{s^3}$$

$$(7) G(s) = \frac{K(T_5s+1)(T_6s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)(T_4s+1)}$$

$$(8) G(s) = \frac{K}{T_1s-1} \quad (K > 1)$$

$$(9) G(s) = \frac{K}{T_1s-1} \quad (K < 1)$$

$$(10) G(s) = \frac{K}{s(Ts-1)}$$

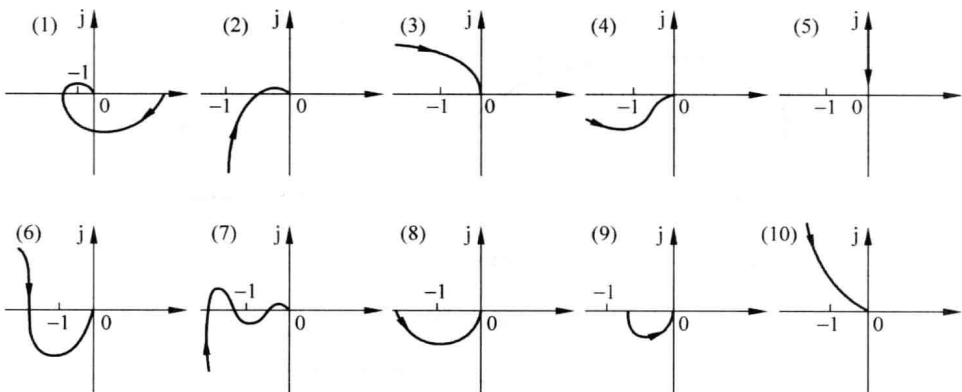


图 5-81 系统开环幅相特性曲线

解 5-13 题计算结果列表如下:

题号	开环传递函数	P	N	$Z = P - 2N$	闭环稳定性	备注
1	$G(s) = \frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$	0	-1	2	不稳定	
2	$G(s) = \frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$	0	0	0	稳定	

续表

题号	开环传递函数	P	N	$Z=P-2N$	闭环稳定性	备注
3	$G(s) = \frac{K}{s^2(Ts+1)}$	0	-1	2	不稳定	
4	$G(s) = \frac{K(T_1s+1)}{s^2(T_2s+1)} \quad (T_1 > T_2)$	0	0	0	稳定	
5	$G(s) = \frac{K}{s^3}$	0	-1	2	不稳定	
6	$G(s) = \frac{K(T_1s+1)(T_2s+1)}{s^3}$	0	0	0	稳定	
7	$G(s) = \frac{K(T_5s+1)(T_6s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)(T_4s+1)}$	0	0	0	稳定	
8	$G(s) = \frac{K}{T_1s-1} \quad (K > 1)$	1	1/2	0	稳定	
9	$G(s) = \frac{K}{T_1s-1} \quad (K < 1)$	1	0	1	不稳定	
10	$G(s) = \frac{K}{s(Ts-1)}$	1	-1/2	2	不稳定	

5-14 设开环幅相特性曲线如图 5-82 所示,其中 P 为开环传递函数在右半 s 平面的极点数, v 为积分环节个数,试判别闭环系统的稳定性。

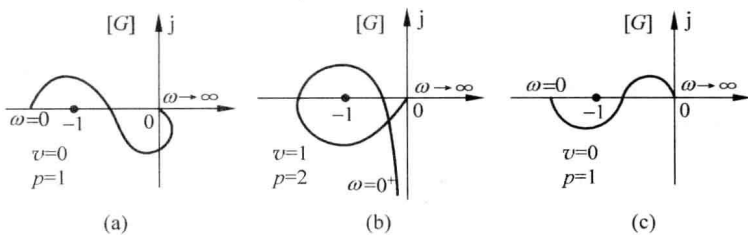


图 5-82 题 5-14 图

解

	P	N	$Z=P-2N$	稳定性
(a)	1	-1/2	2	不稳定
(b)	2	1	0	稳定
(c)	1	1/2	0	稳定

5-15 已知系统开环传递函数,试根据奈奎斯特判据,确定其闭环稳定的条件。

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)(s+1)}; \quad (K, T > 0)$$

- (1) 当 $T=2$ 时, K 值的范围;
- (2) 当 $K=10$ 时, T 值的范围;

(3) K, T 值的范围。

$$\text{解 } G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+j\omega)(1+jT\omega)} = \frac{-K[(1+T)\omega + j(1-T\omega^2)]}{\omega(1+\omega^2)(1+T^2\omega^2)} = X(\omega) + jY(\omega)$$

令 $Y(\omega) = 0$, 解出 $\omega = \frac{1}{\sqrt{T}}$, 代入 $X(\omega)$ 表达式并令其绝对值小于 1

$$\left| X\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right) \right| = \frac{KT}{1+T} < 1$$

得出 $0 < K < \frac{1+T}{T}$ 或 $0 < T < \frac{1}{K-1}$ 。

(1) $T=2$ 时, $0 < K < \frac{3}{2}$;

(2) $K=10$ 时, $0 < T < \frac{1}{9}$;

(3) K, T 值的范围如图解 5-15 中阴影部分所示。

5-16 已知系统开环传递函数

$$G(s) = \frac{10(s^2 - 2s + 5)}{(s+2)(s-0.5)}$$

试概略绘制幅相特性曲线, 并根据奈奎斯特判据判定闭环系统的稳定性。

解 作出系统开环零极点分布图如图解 5-16(a) 所示。

$G(j\omega)$ 的起点、终点为

$$G(j0) = 50 \angle 180^\circ$$

$$G(j\infty) = 10 \angle 0^\circ$$

$G(j\omega)$ 与实轴的交点

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{10(5 - \omega^2 - j2\omega)}{(2 + j\omega)(-0.5 + j\omega)} \\ &= \frac{10[-(5 - \omega^2)(1 + \omega^2) + 3\omega^2 + j\omega(-5.5 + 3.5\omega^2)]}{(1 + \omega^2)^2 + (1.5\omega)^2} \end{aligned}$$

令 $\text{Im}[G(j\omega)] = 0$ 可解出

$$\omega_0 = \sqrt{5.5/3.5} = 1.254$$

代入实部

$$\text{Re}[G(j\omega_0)] = -13.2$$

概略绘制幅相特性曲线如图解 5-16(b) 所示。根据奈奎斯特判据有

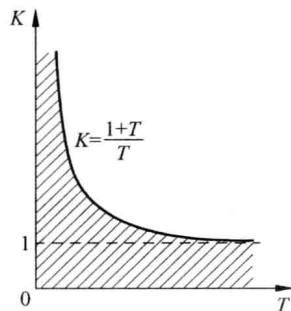
$$Z = P - 2N = 1 - 2\left(\frac{-1}{2}\right) = 2$$

所以闭环系统不稳定。

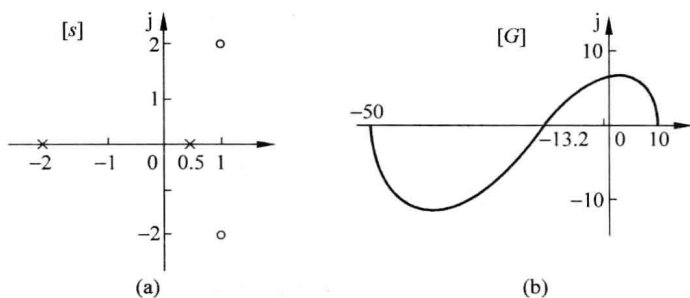
5-17 某系统的结构图和开环幅相特性曲线如图 5-83(a)、图 5-83(b) 所示。图中

$$G(s) = \frac{1}{s(1+s)^2}, \quad H(s) = \frac{s^3}{(s+1)^2}$$

试判断闭环系统稳定性, 并决定闭环特征方程正实部根个数。



图解 5-15



图解 5-16

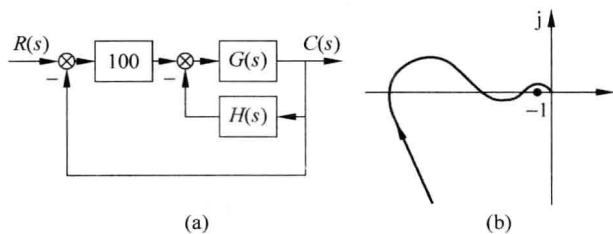


图 5-83 题 5-17 图

解 内回路开环传递函数： $G_0(s) = G(s)H(s) = \frac{s^2}{(s+1)^4}$

$$G(j0) = 0 \angle 0$$

$$G(j0^+) = 0 \angle 180^\circ$$

$$G(j\infty) = 0 \angle -180^\circ$$

大致画出 $G_0(j\omega)$ 的幅相曲线如图解 5-17 所示。可见 $G_0(j\omega)$ 不会包围 $(-1, j0)$ 点。所以

$$Z_0 = P_0 - 2N_0 = 0 - 2 \times 0 = 0$$

即内回路小闭环一定稳定。内回路小闭环极点(即开环极点)在右半 s 平面的个数为 0。

$$P = Z_0 = 0$$

由图 5-83(b)看出,系统开环频率特性包围 $(-1, j0)$ 点的圈数 $N = -1$ 。根据劳斯判据

$$Z = P - 2N = Z_1 - 2N = 0 - 2 \times (-1) = 2$$

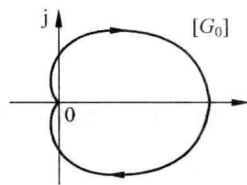
系统不稳定,有两个闭环极点在右半 s 平面。

5-18 已知系统开环传递函数

$$G(s) = \frac{10}{s(0.2s^2 + 0.8s - 1)}$$

试根据奈奎斯特判据确定闭环系统的稳定性。

解 作出系统开环零极点分布图如图解 5-18(a)所示。



图解 5-17

$$G(j\omega) = \frac{-10}{j\omega(1+j0.2\omega)(1-j\omega)} = \frac{-10[0.8\omega - j(1+0.2\omega^2)]}{\omega(1+\omega^2)(1+0.04\omega^2)}$$

$G(j\omega)$ 的起点、终点为

$$G(j0) = \infty \angle -180^\circ$$

$$G(j0^+) = \infty \angle -270^\circ$$

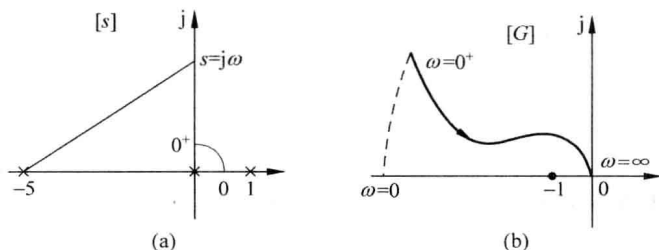
$$G(j\infty) = 0 \angle -270^\circ$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}[G(j\omega)] = -8$$

幅相特性曲线 $G(j\omega)$ 与负实轴无交点。由于惯性环节的时间常数 $T_1=0.2$, 小于不稳定惯性环节的时间常数 $T_2=1$, 故 $\varphi(\omega)$ 呈现先增大后减小的变化趋势。绘出幅相特性曲线如图解 5-18(b) 所示。根据奈奎斯特判据

$$Z = P - 2N = 1 - 2 \times \left(\frac{-1}{2}\right) = 2$$

表明闭环系统不稳定。



图解 5-18

5-19 已知单位反馈系统的开环传递函数, 试判断闭环系统的稳定性。

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)\left(\frac{s^2}{4} + 1\right)}$$

解 作出系统开环零极点分布图如图解 5-19(a) 所示。当 $\omega = 0 \rightarrow \infty$ 变化时, $G(j\omega)$ 的变化趋势

$$G(j0) = \infty \angle 0^\circ$$

$$G(j0^+) = \infty \angle -90^\circ$$

$$G(j2^-) = \infty \angle -153.4^\circ$$

$$G(j2^+) = \infty \angle -333.4^\circ$$

$$G(j\infty) = 0 \angle -360^\circ$$

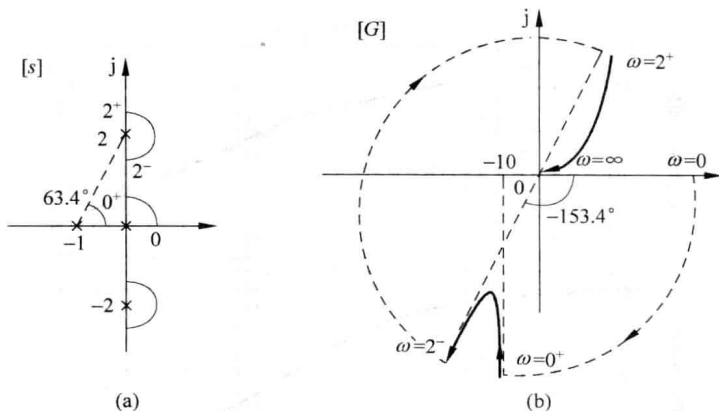
绘出幅相特性曲线 $G(j\omega)$ 如图解 5-19(b) 所示。根据奈奎斯特判据

$$Z = P - 2N = 0 - 2 \times (-1) = 2$$

表明闭环系统不稳定。

5-20 已知反馈系统, 其开环传递函数如下

$$(1) G(s) = \frac{100}{s(0.2s+1)}$$



图解 5-19

$$(2) G(s) = \frac{50}{(0.2s+1)(s+2)(s+0.5)}$$

$$(3) G(s) = \frac{10}{s(0.1s+1)(0.25s+1)}$$

$$(4) G(s) = \frac{100\left(\frac{s}{2}+1\right)}{s(s+1)\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\frac{s}{20}+1\right)}$$

试用奈奎斯特判据或对数稳定判据判断闭环系统的稳定性,并确定系统的相角裕度和幅值裕度。

解 (1) $G(s) = \frac{100}{s(0.2s+1)} = \frac{100}{s\left(\frac{s}{5}+1\right)}$

画 Bode 图得

$$\begin{cases} \omega_c = \sqrt{5 \times 100} = 22.36 \\ \omega_g = \infty \end{cases}$$

$$\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.2\omega_c = 12.6^\circ$$

$$h = \frac{1}{|G(\omega_g)|} = \infty$$

$$(2) G(s) = \frac{50}{(0.2s+1)(s+2)(s+0.5)} = \frac{50}{\left(\frac{s}{5}+1\right)\left(\frac{s}{2}+1\right)(2s+1)}$$

画 Bode 图判定稳定性

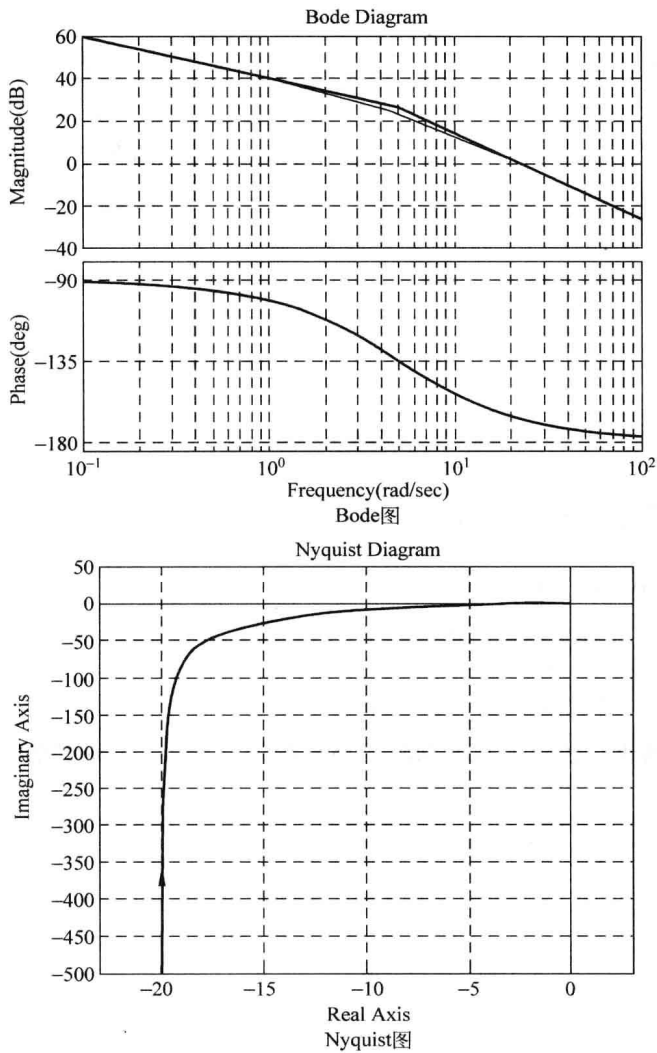
$$Z = P - 2N = 0 - 2 \times (-1) = 2 \quad \text{系统不稳定}$$

由 Bode 图得

$$\omega_c > 6$$

令

$$|G(j\omega)| = 1 \approx \frac{50}{\frac{\omega_c}{5} \cdot \frac{\omega_c}{2} \cdot 2\omega_c} \quad \text{解得} \quad \omega_c = 6.3$$



图解 5-20(1)

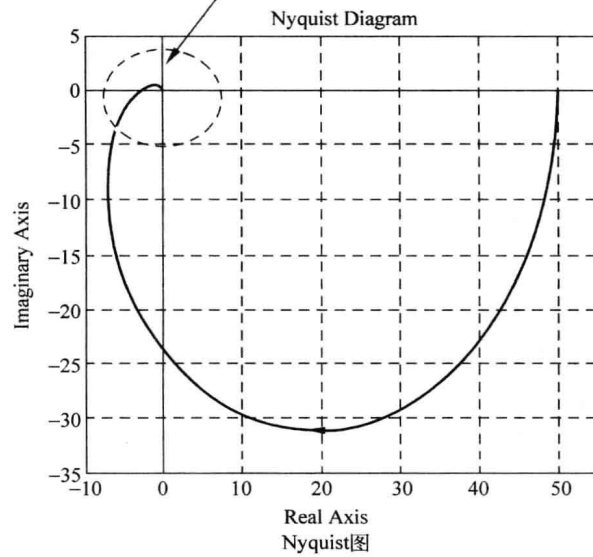
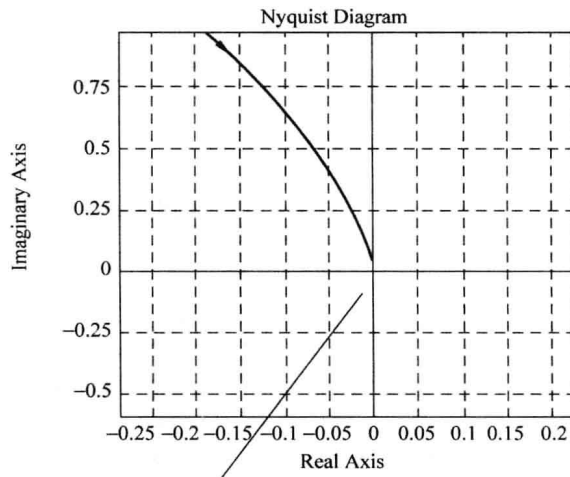
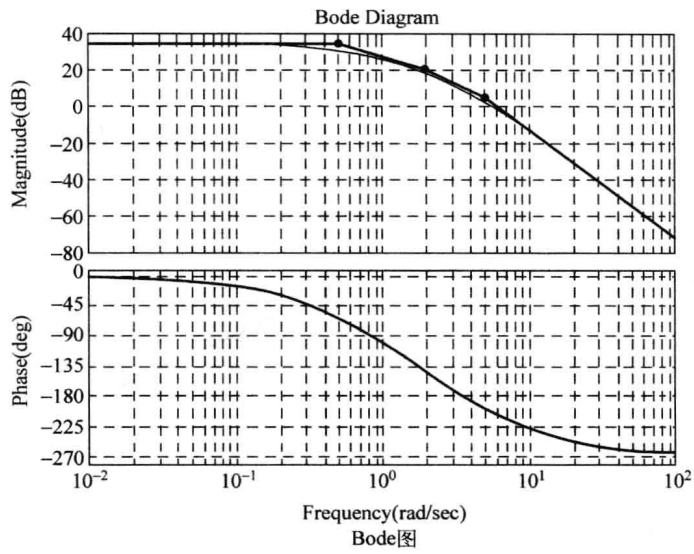
令

$$\angle G(j\omega_g) = \arctan \frac{\omega_g}{5} - \arctan \frac{\omega_g}{2} - \arctan 2\omega_g = -180^\circ \quad \text{解得} \quad \omega_g = 3.7$$

$$\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega) = 180^\circ - \arctan \frac{\omega_c}{5} - \arctan \frac{\omega_c}{2} - \arctan 2\omega_c = -29.4^\circ$$

$$h = \frac{1}{|G(\omega_g)|} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\omega_g}{5}\right)^2 + 1} \sqrt{\left(\frac{\omega_g}{2}\right)^2 + 1} \sqrt{(2\omega_g)^2 + 1}}{50} = 0.391$$

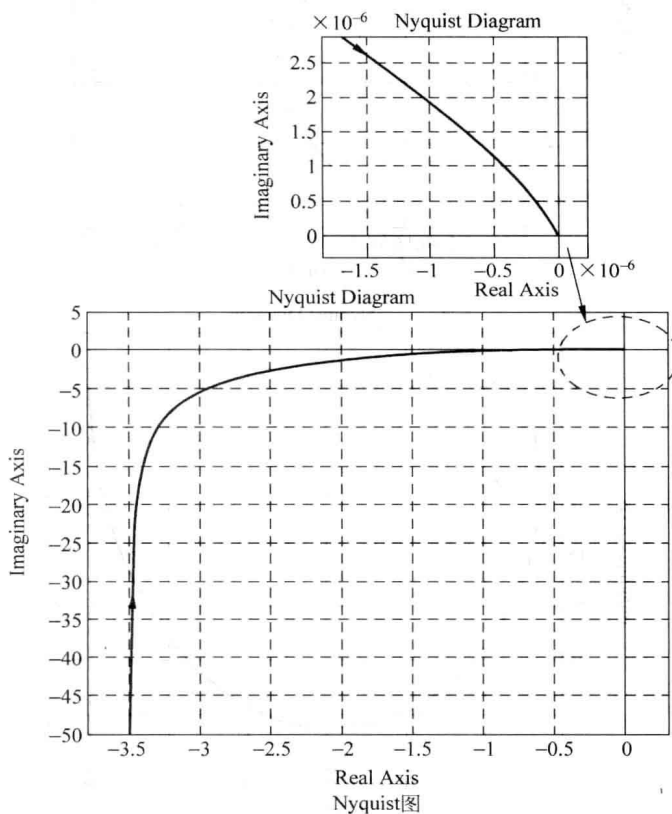
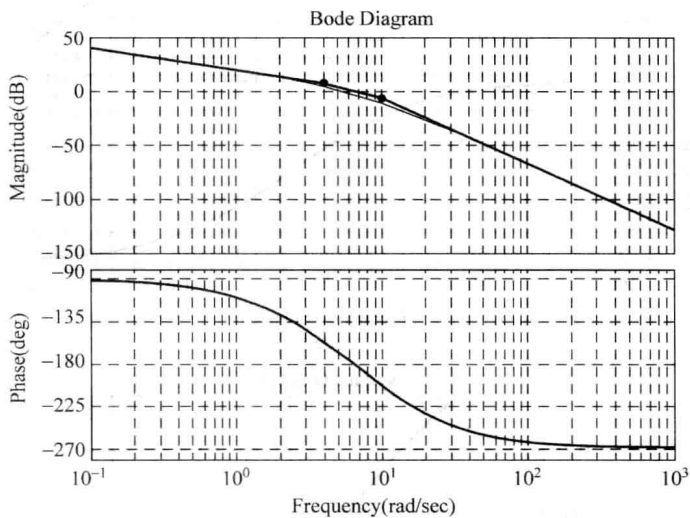
$$(3) G(s) = \frac{10}{s(0.1s+1)(0.25s+1)} = \frac{10}{s\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\frac{s}{4}+1\right)}$$



图解 5-20(2)

画 Bode 图得

$$\begin{cases} \omega_c = \sqrt{4 \times 10} = 6.325 \\ \omega_g = \sqrt{4 \times 10} = 6.325 \end{cases} \begin{cases} \gamma = 0^\circ \\ h = 1 \end{cases} \quad \text{系统临界稳定}$$



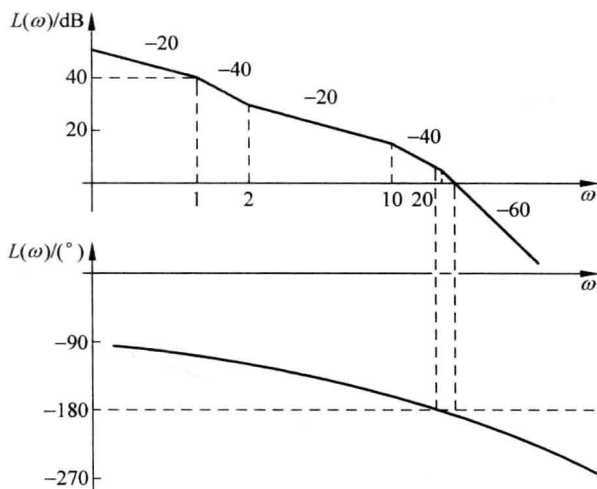
图解 5-20(3)

$$(4) G(s) = \frac{100 \left(\frac{s}{2} + 1 \right)}{s(s+1) \left(\frac{s}{10} + 1 \right) \left(\frac{s}{20} + 1 \right)}$$

画 Bode 图得

$$\begin{cases} \omega_c = 21.5 \\ \omega_g = 13.1 \\ \gamma = 180^\circ + \angle \varphi(\omega_c) = -24.8^\circ \\ h = 0.343 = -9.3(\text{dB}) \end{cases}$$

系统不稳定。



Bode图

图解 5-20(4)

5-21 设单位反馈控制系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{as + 1}{s^2}$$

试确定相角裕度为 45° 时的 a 值。

$$\text{解 } G(j\omega) = \frac{\sqrt{1+(a\omega)^2}}{\omega^2} \angle (\arctan a\omega - 180^\circ)$$

开环幅相曲线如图解 5-21 所示。以原点为圆心作单位圆, 在 A 点

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{1+a^2\omega_c^2}}{\omega_c^2} = 1$$

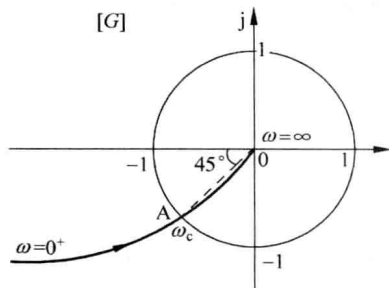
即

$$\omega_c^4 = a^2\omega_c^2 + 1 \quad (1)$$

要求相位裕度

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 45^\circ, \text{ 即}$$

$$\varphi(\omega_c) = \arctan a\omega_c - 180^\circ = 45^\circ - 180^\circ = -135^\circ$$



图解 5-21

所以

$$a\omega_c = 1 \quad (2)$$

联立求解(1)、(2)两式得: $\omega_c = 1.19, a = 0.84$ 。

5-22 在已知系统中

$$G(s) = \frac{10}{s(s-1)}, \quad H(s) = 1 + K_h s$$

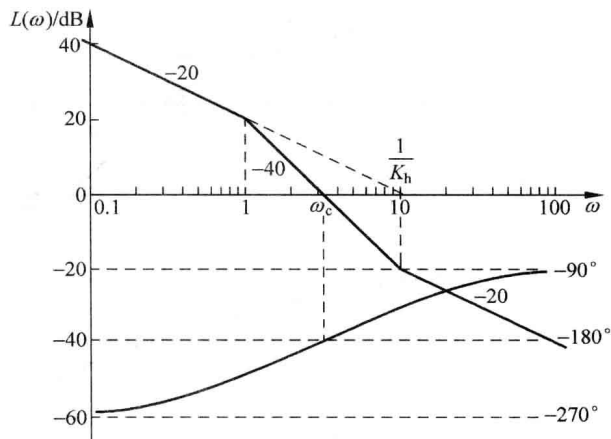
试确定闭环系统临界稳定时的 K_h 。

解 开环系统传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{10(1 + K_h s)}{s(s-1)}$$

解法(一)画波特图如图解 5-22 所示。

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{10(K_h j\omega + 1)}{j\omega(j\omega - 1)}$$



图解 5-22

临界稳定时 $\varphi(\omega_c) = -90^\circ - 180^\circ + \arctan\omega_c + \arctan K_h \omega_c = -180^\circ$

$$\arctan\omega_c + \arctan K_h \omega_c = 90^\circ$$

$$\frac{\omega_c + K_h \omega_c}{1 - \omega_c K_h \omega_c} = \infty$$

$$1 - K_h \omega_c^2 = 0$$

$$K_h = \frac{1}{\omega_c^2}$$

由 Bode 图知 $\omega_c = 3.16$, 所以 $K_h \approx 0.1$ 。

解法(二) $G(j\omega)H(j\omega) = \frac{10(1 + K_h j\omega)}{j\omega(j\omega - 1)} = u(\omega) + jv(\omega)$

$$u(\omega) = \frac{10\omega(1 + K_h)}{-\omega(\omega^2 + 1)}; \quad v(\omega) = \frac{10(K_h \omega^2 - 1)}{-\omega(\omega^2 + 1)}$$

令 $v(\omega) = 0$, 则 $10(K_h \omega^2 - 1) = 0$; 所以 $\omega^2 = 1/K_h$ 。 则

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{K_h}} \quad (1)$$

又令

$$u(\omega) = \frac{10\omega(1+K_h)}{-\omega(\omega^2+1)} = -1$$

代入式(1)得

$$10(1+K_h) = \left(\frac{1}{K_h} + 1\right)$$

$$10K_h^2 + 9K_h - 1 = 0$$

解出

$$K_h = \frac{-9 \pm \sqrt{121}}{20}$$

所以

$$K_h = \frac{1}{10}, \quad K_h = -1 (\text{舍去})$$

故当 $\omega = \sqrt{10}$, $K_h = 1/10$ 时, 系统临界稳定。

5-23 若单位反馈系统的开环传递函数 $G(s) = \frac{Ke^{-0.8s}}{s+1}$, 试确定使系统稳定的 K 的临界值。

解 因为

$$G(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega} e^{-j0.8\omega}$$

幅频特性为

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2}}$$

相频特性为

$$\varphi(\omega) = \angle e^{-j0.8\omega} + \angle \frac{1}{1+j\omega} = -0.8\omega + \arctan(-\omega)$$

求幅相特性通过 $(-1, j0)$ 点时的 K 值, 即

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2}} = 1 \quad (1)$$

$$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = -0.8\omega - \arctan\omega = -\pi \quad (2)$$

由式(2)

$$\arctan\omega = \pi - 0.8\omega$$

$$\tan(\arctan\omega) = \tan(\pi - 0.8\omega) = -\tan 0.8\omega$$

所以

$$\omega = -\tan 0.8\omega$$

代入式(1)

$$\frac{K}{\sqrt{1+[\tan(0.8\omega)]^2}} = 1$$

所以

$$K = \sqrt{1+[\tan(0.8\omega)]^2} = \sec 0.8\omega$$

解出

$$\omega_c = 2.45, \quad K = 2.65$$

5-24 设单位反馈系统的开环传递函数 $G(s) = \frac{5s^2 e^{-\tau s}}{(s+1)^4}$, 试确定闭环系统稳定的延迟时间 τ 的范围。

解 令

$$|G(j\omega)| = \frac{5\omega^2}{(1+\omega^2)^2} = 1 \quad (1)$$

$$\angle G(j\omega) = 180^\circ - \tau\omega \frac{180}{\pi} - 4\arctan\omega = -180^\circ \quad (2)$$

由式(1)

$$1 + \omega^2 = \sqrt{5}\omega$$

解得

$$\omega_1 = 1.618, \quad \omega_2 = 0.618(\text{舍去})$$

将 $\omega = 1.618$ 代入式(2)

$$\tau\omega \cdot \frac{180}{\pi} = 360^\circ - 4\arctan\omega$$

解得 $\tau = 1.3686$ 。当 $\tau < 1.3686$ 时, $G(j\omega)$ 不包围 $(-1, j0)$ 点, 所以 τ 的稳定范围是

$$0 < \tau < 1.3686$$

5-25 某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{10K_1}{s(0.1s+1)(s+1)}$, 当 $r(t) = 10t$ 时, 要求系统的速度稳态误差为 0.2, 试确定 K_1 并计算系统此时具有的相角裕度和幅值裕度, 说明系统能否达到精度要求。

解 系统开环传递函数 $G(s) = \frac{10K_1}{s(0.1s+1)(s+1)} \quad \begin{cases} K = 10K_1 \\ v = 1 \end{cases}$

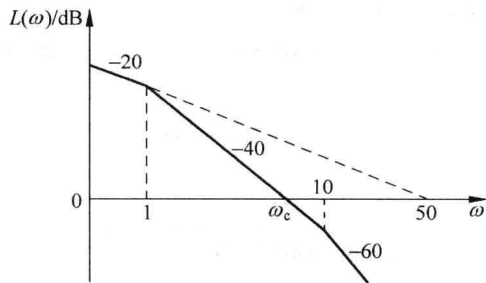
当 $r(t) = 10t$ 时

$$e_{ssv} = \frac{A}{K_v} = \frac{A}{K} = \frac{10}{10K_1} = \frac{1}{K_1} = 0.2$$

要求

$$K_1 = 5$$

绘制系统开环对数幅频曲线如图解 5-25 所示。



图解 5-25

系统截止频率

$$\omega_c = \sqrt{1 \times 50} = 7.07$$

相角裕度

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \frac{7.07}{1} - \arctan \frac{7.07}{10} = -27.2^\circ$$

系统不稳定,说明系统不能达到精度要求。由图可见,要使系统稳定,应有

$$\omega_c < \omega_g = \sqrt{1 \times 10} = 3.16$$

相应地有 $K = 10K_1 = \frac{\sqrt{10^2}}{1} = 10, K_1 = 1$, 因此有 $e_{ssv} > \frac{1}{K_1} = 1$ 。

5-26 某单位反馈的最小相角系统,其开环对数幅频特性如图 5-84 所示。要求

- (1) 写出系统开环传递函数;
- (2) 利用相角裕度判断系统的稳定性;
- (3) 将其对数幅频特性向右平移十倍频程,试讨论对系统性能的影响。

解 (1) 由图 5-84 可以写出系统开环传递函数如下:

$$G(s) = \frac{10}{s \left(\frac{s}{0.1} + 1 \right) \left(\frac{s}{20} + 1 \right)}$$

(2) 系统的开环相频特性为

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan \frac{\omega}{0.1} - \arctan \frac{\omega}{20}$$

截止频率

$$\omega_c = \sqrt{0.1 \times 10} = 1$$

相角裕度

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 2.85^\circ$$

故系统稳定。

(3) 将其对数幅频特性向右平移十倍频程后,可得系统新的开环传递函数

$$G(s) = \frac{100}{s(s+1) \left(\frac{s}{200} + 1 \right)}$$

其截止频率

$$\omega_{c1} = 10\omega_c = 10$$

而相角裕度

$$\gamma_1 = 180^\circ + \varphi(\omega_{c1}) = 2.85^\circ = \gamma$$

故系统稳定性不变。由时域指标估算公式可得

$$\sigma\% = 0.16 + 0.4 \left(\frac{1}{\sin\gamma} - 1 \right) = \sigma_1\%$$

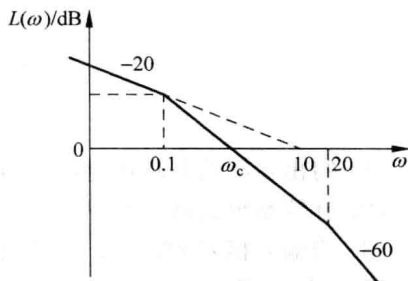


图 5-84 题 5-26 图

$$t_s = \frac{K_0 \pi}{\omega_c} = \frac{K_0 \pi}{10\omega_{c1}} = 0.1t_{s1}$$

所以,系统的超调量不变,调节时间缩短,动态响应加快。

5-27 某单位反馈的最小相角系统,其开环对数幅频特性曲线如图 5-85 所示。

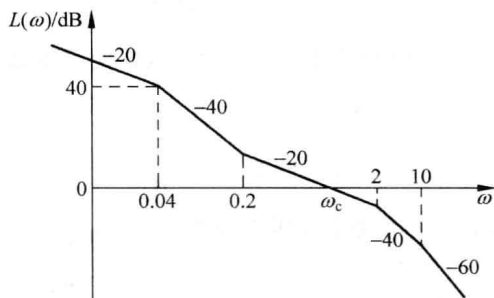


图 5-85 开环对数幅频特性

- (1) 写出系统的开环传递函数 $G(s)$ 。
- (2) 计算系统的截止频率 ω_c 和相角裕度 γ 。
- (3) 当输入信号 $r(t) = 1 + t/2$ 时,计算系统的稳态误差。

解 (1) 依图 5-85 可确定低频段频率特性

$$G_0(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$$

$$20 \lg |G_0(j\omega)|_{\omega=0.04} = 20 \lg \left| \frac{K}{0.04} \right| = 40$$

$$K = 0.04 \times 10^{\frac{40}{20}} = 4$$

$$G(s) = \frac{4 \left(\frac{s}{0.2} + 1 \right)}{s \left(\frac{s}{0.04} + 1 \right) \left(\frac{s}{2} + 1 \right) \left(\frac{s}{10} + 1 \right)} \quad \begin{cases} K = 4 \\ v = 1 \end{cases}$$

(2) 依图 5-85 有

$$|G(j\omega_c)| = \frac{4 \times \frac{\omega_c}{0.2}}{\omega_c \times \frac{\omega_c}{0.04} \times 1 \times 1} = \frac{0.8}{\omega_c} = 1, \quad \omega_c = 0.8$$

$$\gamma = 180^\circ + \arctan \frac{0.8}{0.2} - 90^\circ - \arctan \frac{0.8}{0.04} - \arctan \frac{0.8}{2} - \arctan \frac{0.8}{10} = 52.45^\circ$$

(3) 根据静态误差系数法

当 $r_1(t) = 1(t)$ 时, $e_{ssp} = 0$

当 $r_2(t) = t/2$ 时, $e_{ssv} = \frac{A}{K} = \frac{0.5}{4} = 0.125$

$$e_{ss} = e_{ssp} + e_{ssv} = 0 + 0.125 = 0.125$$

5-28 对于典型二阶系统,已知参数 $\omega_n = 3$, $\zeta = 0.7$,试确定截止频率 ω_c 和相角裕度 γ 。

解 依题意,可设系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)} = \frac{3^2}{s(s+2 \times 0.7 \times 3)} = \frac{2.143}{s\left(\frac{s}{4.2} + 1\right)}$$

绘制开环对数幅频特性曲线 $L(\omega)$ 如图解 5-28 所示,得

$$\omega_c = 2.143$$

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 63^\circ$$

5-29 对于典型二阶系统,已知 $\sigma\% = 15\%$, $t_s = 3s$, 试计算截止频率 ω_c 和相角裕度 γ 。

解 依题意,可设系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

依题

$$\begin{cases} \sigma\% = 15\% = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \\ t_s = 3 = 3.5/\zeta\omega_n \end{cases}$$

联立求解

$$\begin{cases} \zeta = 0.517 \\ \omega_n = 2.257 \end{cases}$$

有

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{2.257^2}{s(s+2 \times 0.517 \times 2.257)} \\ &= \frac{2.1824}{s\left(\frac{s}{2.333} + 1\right)} \end{aligned}$$

绘制开环对数幅频特性曲线 $L(\omega)$ 如图解 5-29 所示,得

$$\omega_c = 2.1824$$

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 46.9^\circ$$

5-30 某单位反馈系统,其开环传递函数

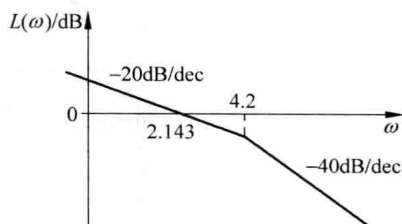
$$G(s) = \frac{16.7s}{(0.8s+1)(0.25s+1)(0.0625s+1)}$$

试应用尼柯尔斯图线,绘制闭环系统对数幅频特性和相频特性曲线。

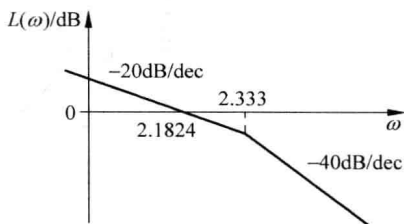
解 由 $G(s)$ 知, $20\lg 16.7 = 24.5\text{dB}$ 转折频率 $\omega_1 = \frac{1}{0.8} = 1.25$, $\omega_2 = \frac{1}{0.25} = 4$, $\omega_3 = \frac{1}{0.0625} = 16$

绘制开环对数频率特性曲线如图解 5-30(a)所示。应用尼柯尔斯图线得下表。

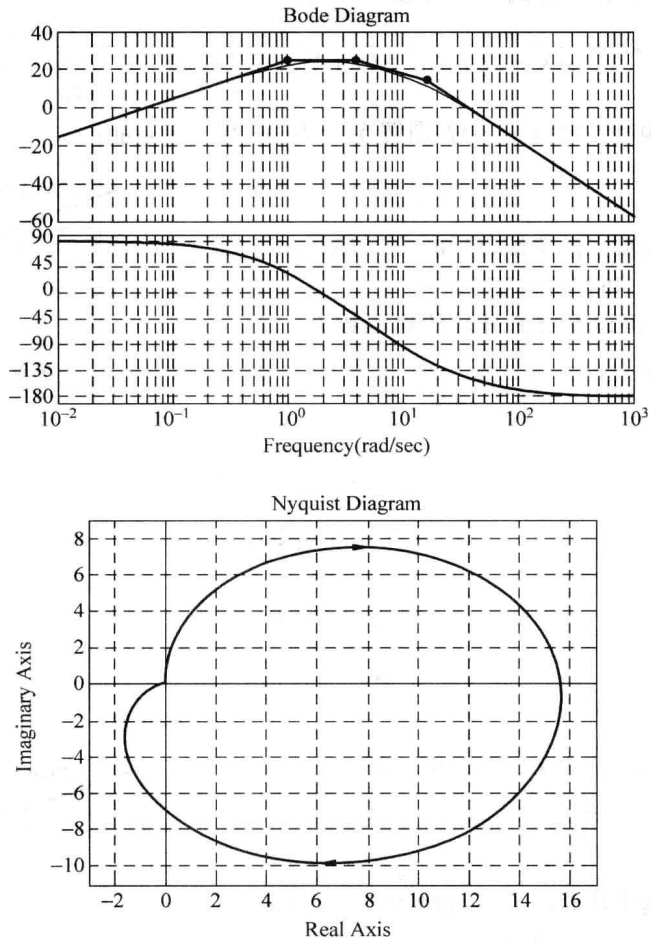
ω	0.01	0.05	0.1	0.3	0.6	3	10	20	30	40	50	60	70	80	100
$ G \text{dB}$	-15	-2	4	13	19	24	15	7	2	-3	-7	-10	-13	-16	-20
$\varphi(\omega)^\circ$	88	85	83	70	54	-23	-94	-127	-143	-151	-156	-160	-163	-164	-166
$M(\text{dB})$	-15	-4.5	-2	-0.75	-0.6	-0.5	0	1.8	4.3	2.3	-3.4	-7.5	-11	-16	-20
$\alpha(\omega)^\circ$	69	48	30	12	5	-1	-11	-28	-53	-110	-140	-152	-158	-162	-165



图解 5-28

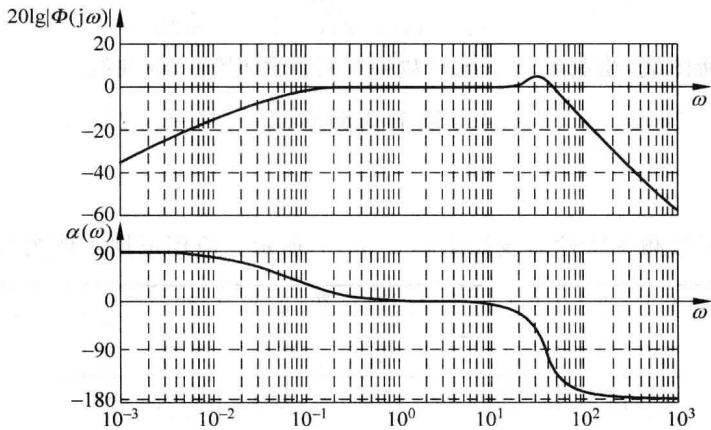


图解 5-29



图解 5-30(a)

由表中数据绘制闭环对数频率特性如图 5-30(b)所示。



图解 5-30(b)

5-31 某控制系统结构图如图 5-86 所示，
图中

$$G_1(s) = \frac{10(1+s)}{1+8s}, \quad G_2(s) = \frac{4.8}{s\left(1+\frac{s}{20}\right)}$$

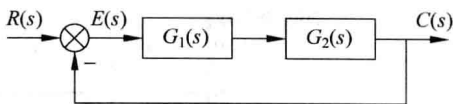


图 5-86 题 5-31 图

试按以下数据估算系统时域指标 $\sigma\%$ 和 t_s 。

- (1) γ 和 ω_c ;
- (2) M_r 和 ω_c ;
- (3) 闭环幅频特性曲线形状。

解 (1) $G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{48(1+s)}{s(1+8s)\left(1+\frac{s}{20}\right)}$

$$20\lg 48 = 33.6\text{dB}$$

$$\omega_1 = 1/8 = 0.125, \quad \omega_2 = 1, \quad \omega_3 = 20$$

所以 $\omega_c = 6, \quad \gamma \approx 65^\circ$

查图 5-56 得 $\sigma\% = 21\%, \quad t_s = \frac{6.6}{\omega_c} = 1.13\text{s}$

- (2) 根据 M_r, ω_c 估算性能指标。

当 $\omega = 5$ 时, $L(\omega) = 0, \varphi(\omega) = -111^\circ$ 。找出

$$M_r = \frac{1}{\sin r} = 1.103, \quad (r = 65^\circ), \quad \omega_c = 6$$

查图 5-61 得 $\sigma\% = 21\%, \quad t_s = 6.8/\omega_c = 1.13\text{s}$

- (3) 根据闭环幅频特性的形状

绘制开环对数频率特性, 利用 Nyquist 图线确定闭环对数频率特性, 列表如下:

ω	0.3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$L(\text{dB})$	36	18	9.5	5	3	0	-2	-4	-5	-7	-20
$\varphi(^\circ)$	-142.5	-130	-118.5	-114	-111	-111	-112.5	-115.5	-118.5	-124	-148
$M(\text{dB})$	0	0.68	1	1.05	0	1.1	-2.1	-3.3	-4	-5.5	-19.3

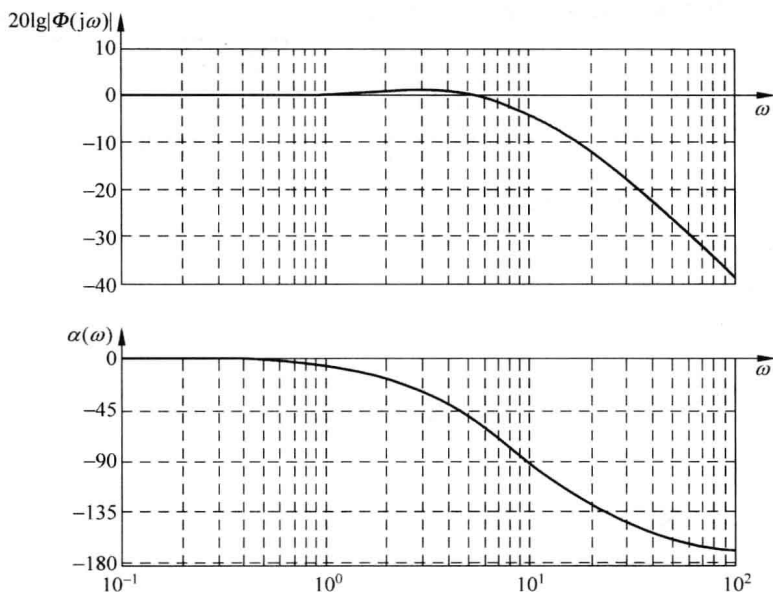
由表中数据绘制闭环对数频率特性如图解 5-31 所示。由图可以确定

$$\begin{cases} 20\lg M_r = 0.95\text{dB} \\ \omega_b = 8.9125 \\ M_r = 1.11558 \\ \omega_b = 8.9125 \end{cases}$$

代入教材中式(5-90)、式(5-91)可得

$$\sigma\% = [0.16 + 0.4(1.11558 - 1)] = 20.6\%$$

$$t_s = \frac{1.6\pi}{8.9125} [2 + 1.5(1.11558 - 1) + 2.5(1.11558 - 1)^2] = 1.2446$$



图解 5-31

5-32 已知控制系统结构图如图 5-87 所示。当输入 $r(t) = 2\sin t$ 时,系统的稳态输出 $c_s(t) = 4\sin(t - 45^\circ)$ 。试确定系统的参数 ζ, ω_n 。

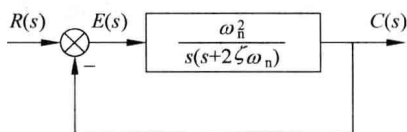


图 5-87 题 5-32 图

解 系统闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

令

$$|\Phi(j1)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - 1)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2}} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\angle\Phi(j1) = -\arctan \frac{2\zeta\omega_n}{\omega_n^2 - 1} = -45^\circ$$

联立求解可得 $\omega_n = 1.244, \zeta = 0.22$ 。

5-33 设单位反馈系统的开环传递函数 $G(s) = \frac{K}{s(s+0.2)}$, 试求使系统闭环幅频特性谐振峰值 $M_r = 1.5$ 的截止频率 ω_c 、 K 值和系统的稳定裕度。

解 系统开环传递函数为 $G(s) = \frac{K}{s(s+0.2)}$ $\begin{cases} K_k = K/0.2 = 5K \\ \nu = 1 \end{cases}$

$$\Phi(s) = \frac{K}{s(s+0.2) + K} = \frac{K}{s^2 + 0.2s + K} \begin{cases} \omega_n = \sqrt{K} \\ \zeta = 0.2/(2\sqrt{K}) = 0.1/\sqrt{K} \end{cases}$$

$$M_r = 1.5 = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1}{2\frac{0.1}{\sqrt{K}}\sqrt{1-\frac{0.01}{K}}} = \frac{K}{0.2\sqrt{K-0.01}}$$

$$K = 0.3\sqrt{K-0.01}$$

$$K^2 - 0.09K + 0.0009 = 0$$

解出

$$K = \begin{cases} 0.07854 (\zeta = 0.3568) \\ 0.01146 (\zeta = 0.9342) \quad \text{舍去} \end{cases}$$

$$K_k = 5K = 0.3927$$

绘制开环对数幅频曲线 $L(\omega)$ 如图解 5-33 所示, 有截止频率

$$\omega_c = \sqrt{0.2 \times 0.3927} = 0.28$$

相角裕度

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \frac{0.28}{0.2} = 35.54^\circ$$

因此得

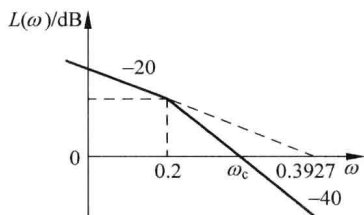
$$\omega_c = 0.28, \quad K = 0.07854, \quad \gamma = 35.54^\circ$$

5-34 对于高阶系统, 要求时域指标 $\sigma\% = 18\%$, $t_s = 0.05\text{s}$, 试将其转换成开环频域指标 (ω_c, γ) 。

解 查图 5-56 有

$$\begin{cases} \gamma = 75^\circ \\ t_s = \frac{6.25}{\omega_c} = 0.05 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma = 75^\circ \\ \omega_c = \frac{6.25}{0.05} = 125 \end{cases}$$

5-35 单位反馈系统的闭环对数幅频特性曲线如图 5-88 所示。若要求系统具有 30° 的相角裕度, 试计算开环增益应增大的倍数。



图解 5-33

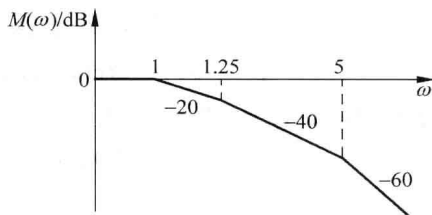


图 5-88 题 5-35 图

解 由图 5-88 写出闭环系统传递函数

$$\Phi(s) = \frac{1}{(s+1)\left(\frac{s}{1.25}+1\right)\left(\frac{s}{5}+1\right)}$$

系统等效开环传递函数

$$G(s) = \frac{\Phi(s)}{1 - \Phi(s)} = \frac{6.25}{s(s + 2.825)(s + 4.425)} = \frac{0.5}{s\left(\frac{s}{2.825} + 1\right)\left(\frac{s}{4.425} + 1\right)}$$

可知原系统开环增益 $K=0.5$ 。

$$\text{令相角裕度 } \gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_{c1}) = 90^\circ - \arctan \frac{\omega_{c1}}{2.825} - \arctan \frac{\omega_{c1}}{4.425} = 30^\circ$$

$$\text{有 } \frac{\frac{\omega_{c1}}{2.825} + \frac{\omega_{c1}}{4.425}}{1 - \frac{\omega_{c1}^2}{12.5}} = \tan 60^\circ = 1.732$$

整理可得

$$\omega_{c1}^2 + 4.186\omega_{c1} - 12.5 = 0$$

解出

$$\omega_{c1} = 2.02 = K_1$$

所以应增大的放大倍数为 $K_1/K = 2.02/0.5 = 4.04$ 倍。

5-36 设有单位反馈的火炮指挥仪伺服系统,其开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(0.2s + 1)(0.5s + 1)}$$

若要求系统最大输出速度为 $2(\text{r/min})$, 输出位置的允许误差小于 2° , 试求:

- (1) 确定满足上述指标的最小 K 值, 计算该 K 值下系统的相角裕度和幅值裕度;
- (2) 在前向通路中串接超前校正网络

$$G_c(s) = \frac{0.4s + 1}{0.08s + 1}$$

计算校正后系统的相角裕度和幅值裕度, 说明超前校正对系统动态性能的影响。

解 (1) 确定满足 $C_{\max} = 2(\text{r/min}) = 12^\circ/\text{s}$ 和 $e_{ss} \leq 2^\circ$ 的 K, γ, h 。

$$K = K_v = \frac{C_{\max}}{e_{ss}} \geq 6(1/\text{s}), \quad G(s) = \frac{6}{s(0.2s + 1)(0.5s + 1)}$$

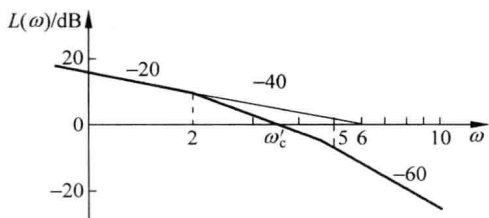
作系统对数幅频特性曲线如图解 5-36(a) 所示。由图可知

$$\omega'_c \approx \sqrt{2 \times 6} = 3.46$$

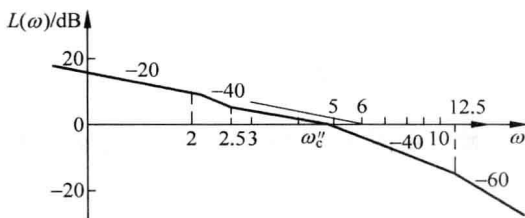
$$\gamma' = 90^\circ - \arctan 0.2\omega'_c - \arctan 0.5\omega'_c = -4.7^\circ$$

算出相角交界频率 $\omega'_g = \sqrt{2 \times 5} = 3.16$, 则

$$20 \lg h' = -1.339(\text{dB})$$



(a)



(b)

图解 5-36

(2) 超前校正后系统开环传递函数为

$$G_c(s)G(s) = \frac{6(0.4s + 1)}{s(0.08s + 1)(0.2s + 1)(0.5s + 1)}$$

作校正后系统对数幅频特性曲线如图解 5-36(b) 所示, 由图得

$$\frac{6}{\omega_c''} = \frac{2.5}{2}, \quad \omega_c'' = \frac{6 \times 2}{2.5} = 4.8$$

$$\gamma'' = 90^\circ + \arctan 0.4\omega_c'' - \arctan 0.2\omega_c'' - \arctan 0.08\omega_c'' - \arctan 0.5\omega_c'' = 20.3^\circ$$

算出 $\omega_g'' = 7.3$, $h'' = 2.371$, $20\lg h'' = 7.5\text{dB}$ 。

说明超前校正可以增加相角裕度, 从而减小超调量, 提高系统稳定性; 同时增大了截止频率, 缩短调节时间, 提高了系统的快速性。

5-37 设单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

试设计一串联超前校正装置, 使系统满足如下指标:

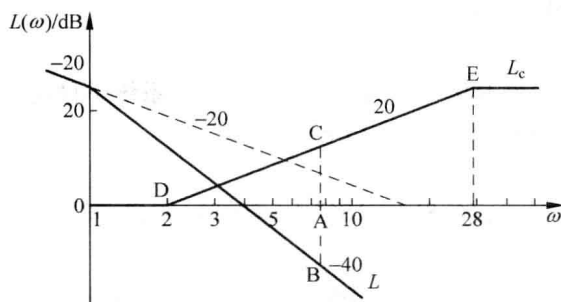
- (1) 在单位斜坡输入下的稳态误差 $e_{ss} < 1/15$;
- (2) 截止频率 $\omega_c \geq 7.5\text{rad/s}$;
- (3) 相角裕度 $\gamma \geq 45^\circ$ 。

解 依 e_{ss} 指标: $e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K} = \frac{1}{15}$

所以 $K = 15$

画未校正系统的开环对数幅频特性如图解 5-37 所示。依图可得

$$\omega_c = \sqrt{15} = 3.873$$



图解 5-37

校正前系统相角裕度

$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ + \angle G(j\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \omega_c \\ &= 90^\circ - \arctan 3.873 = 14.48^\circ \end{aligned}$$

定 $\omega_c'' = 7.5$, 作图得

$$b = 11.48\text{dB} \quad (\text{AB} = 11.5\text{dB})$$

作图使 $AC = AB = 11.5\text{dB}$, 过 C 点作 20dB/dec 直线交出 D 点 ($\omega_D = 2$), 令 $(DC = CE)$ 得 E 点 ($\omega_E = 28.125$)。这样得出超前校正环节传递函数:

$$G_c(s) = \frac{\frac{s}{2} + 1}{\frac{s}{28.125} + 1}$$

且有: $\omega_m = \omega_c'' = 7.5$ 。校正后系统开环传递函数为

$$G_c(s) \cdot G(s) = \frac{\frac{s}{2} + 1}{\frac{s}{28.125} + 1} \cdot \frac{15}{s(s+1)}$$

验算:在校正过程可保证 $e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{15}$; 且有

$$\omega_c'' = 7.5 (\text{rad/s})$$

$$\gamma'' = 180^\circ - \angle G_c(\omega_c'') G(\omega_c'')$$

$$= 180^\circ - 90^\circ + \arctan \frac{\omega_c''}{2} - \arctan \frac{\omega_c''}{28.125} - \arctan \omega_c'' = 67.732^\circ > 45^\circ$$

全部指标满足要求。

5-38 设单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.25s+1)}$$

要求校正后系统的静态速度误差系数 $K_v \geq 5 \text{rad/s}$, 相角裕度 $\gamma \geq 45^\circ$ 。试设计串联滞后校正装置。

解
$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)\left(\frac{s}{4}+1\right)} \quad (\text{I型系统})$$

取 $K = K_v = 5$, 则校正前

$$\omega_c = \sqrt{5} = 2.236$$

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = -5.12^\circ \quad (\text{系统不稳定})$$

采用串联滞后校正。试探 ω_c' , 使 $\gamma' = 45^\circ + 5^\circ = 50^\circ$ 。

取 $\omega_1 = 0.8$

$$\gamma(0.8) = 180^\circ + \varphi(0.8) = 40.03^\circ$$

取 $\omega_2 = 0.5$

$$\gamma(0.5) = 180^\circ + \varphi(0.5) = 56.3^\circ$$

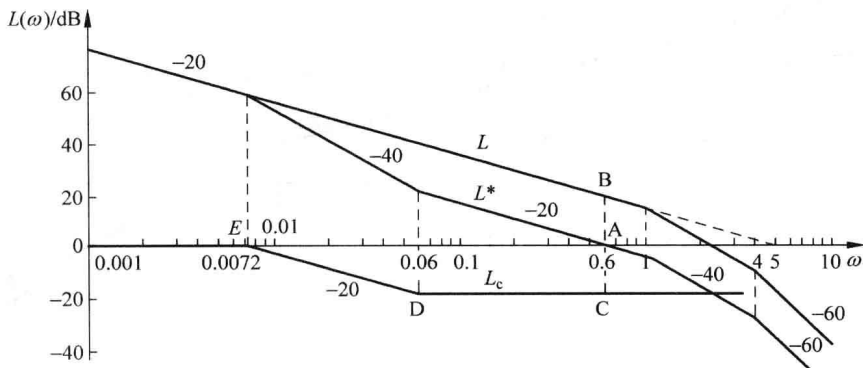
取 $\omega_3 = 0.6$

$$\gamma(0.6) = 180^\circ + \varphi(0.6) = 50.57^\circ$$

取 $\omega_c' = \omega_3 = 0.6$ 。过 $\omega_c' = 0.6$ 作 \overline{BC} , 使 $\overline{AC} = \overline{BA}$; 过 C 画水平线定出 D ($\omega_D = 0.1 \times \omega_c' = 0.06$); 过 D 作 -20dB/dec 线交 0dB 线于 E ($\omega_E = 0.0072$)。可以定出校正装置的传递函数

$$G_c(s) = \frac{\frac{s}{\omega_D} + 1}{\frac{s}{\omega_E} + 1} = \frac{\frac{s}{0.06} + 1}{\frac{s}{0.0072} + 1}$$

$$\text{校正后系统开环传递函数 } G_c(s) \cdot G(s) = \frac{5 \left(\frac{s}{0.06} + 1 \right)}{s(s+1) \left(\frac{s}{4} + 1 \right) \left(\frac{s}{0.0072} + 1 \right)}$$



图解 5-38

$$\text{验算} \quad \gamma' = 180^\circ + \angle G_c(j\omega_c') G(j\omega_c') = 45.56^\circ > 45^\circ$$

5-39 已知单位反馈系统的开环传递函数 $G(s) = \frac{0.5}{s(s+1)(0.1s+1)}$ 。给定指标为开环增益 $K=10$, 超调量 $\sigma\% \leq 25\%$, 调节时间 $t_s \leq 16.5\text{s}$, 试设计串联滞后校正装置。

解 将时域指标转换为频域指标

$$\begin{cases} \sigma\% < 25\% \\ t_s \leq 16.5 \end{cases} \xrightarrow{\text{查图 5-56}} \begin{cases} \gamma^* > 55^\circ \\ t_s = 7.75/\omega_c^* \end{cases} \begin{cases} \gamma^* > 55^\circ \\ \omega_c^* \geq 0.47 \end{cases}$$

校正前系统传递函数

$$G(s) = \frac{0.5}{s(s+1) \left(\frac{s}{10} + 1 \right)}$$

绘制校正前系统的开环对数幅频特性曲线 $L_o(\omega)$ 如图解 5-39 所示。由图得校正前

$$\begin{cases} \omega_{c0} = 0.5 \\ \gamma_0 = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.5 - \arctan \frac{0.5}{10} = 60.57^\circ \end{cases}$$

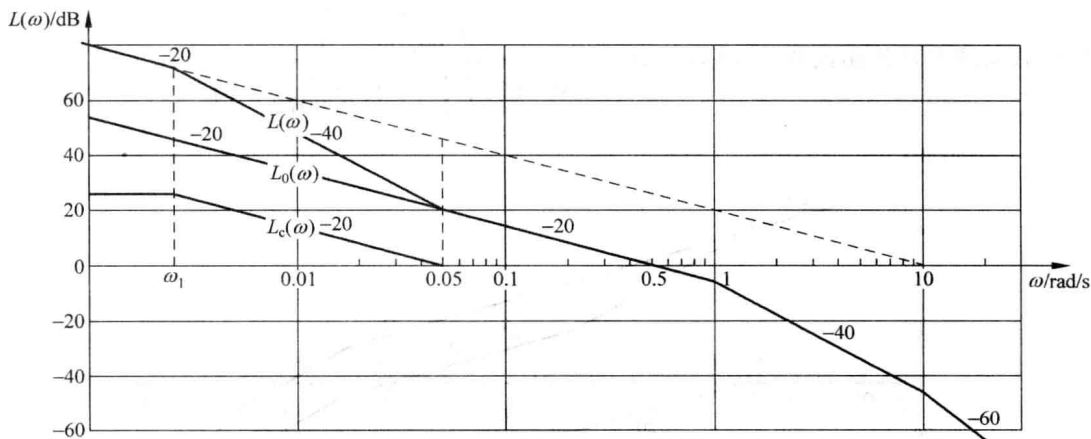
满足中频段要求, 只是开环增益 $K=0.5 < 10$, 采用滞后校正, 保持中频段, 抬高低频段。

在 $\omega = 0.1\omega_{c0} = 0.05$ 处向左边做斜率为 -20dB/dec 的直线, 确定 ω_1 使 $\frac{0.05}{\omega_1} = \frac{10}{0.5}$, 有

$$\omega_1 = \frac{0.05 \times 0.5}{10} = 0.0025$$

则可写出校正装置的传递函数

$$G_c(s) = \frac{20 \left(\frac{s}{0.05} + 1 \right)}{\frac{s}{0.0025} + 1}$$



图解 5-39

校正后系统的开环传递函数

$$G(s) = G_0(s)G_c(s) = \frac{10\left(\frac{s}{0.05} + 1\right)}{s(s+1)\left(\frac{s}{10} + 1\right)\left(\frac{s}{0.0025} + 1\right)}$$

$$\text{校正后} \begin{cases} K=10 \\ \omega_c=0.5=\omega_{c0} \\ \gamma=\gamma_0 + \arctan \frac{0.5}{0.05} - \arctan \frac{0.5}{0.0025} = 55.15^\circ > 55^\circ \end{cases}, \text{满足要求。}$$

5-40 已知单位反馈系统的开环传递函数 $G_0(s) = \frac{Ke^{-0.005s}}{s(0.01s+1)(0.1s+1)}$, 要求系统的相角裕度 $\gamma=45^\circ$, 输入 $r(t)=t$ 时的稳态误差 $e_{ss}=0.01$ 。试确定串联校正装置的传递函数。

解 校正前系统开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{Ke^{-0.005s}}{s\left(\frac{s}{10} + 1\right)\left(\frac{s}{100} + 1\right)}$$

$$e_{ss} \stackrel{r(t)=t}{=} \frac{1}{K} = 0.01 \Rightarrow K = 100$$

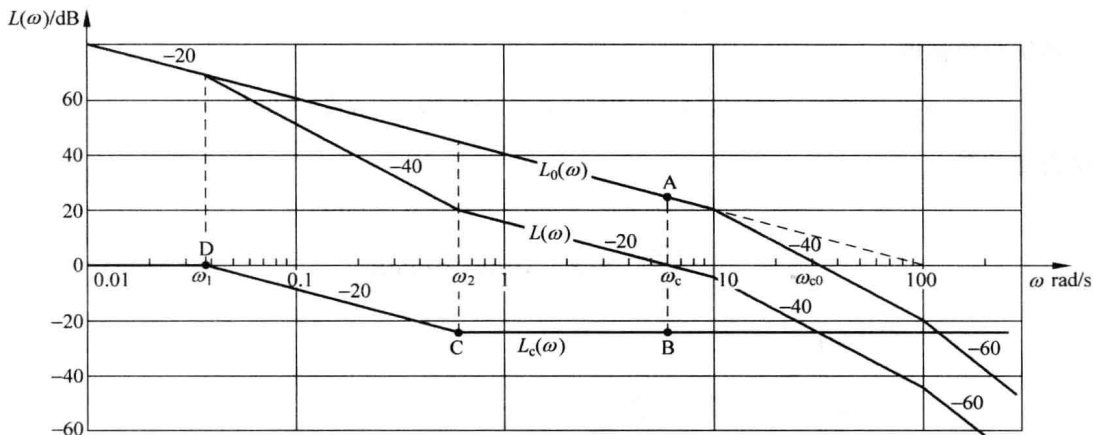
绘制校正前系统的开环对数幅频特性曲线 $L_0(\omega)$ 如图解 5-40 所示。

$$\text{校正前:} \begin{cases} \omega_{c0} = \sqrt{10 \times 100} = 31.6 \\ \gamma_0 = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \frac{31.6}{10} - \arctan \frac{31.6}{100} - 57.3 \times 0.005 \times 31.6 = -9.05^\circ \end{cases}$$

显然用超前校正不行。采用滞后校正

$$\varphi_0(\omega_c) = \gamma^* + 6^\circ = 45^\circ + 6^\circ = 51^\circ$$

$$\text{试探} \quad \gamma_0(6) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \frac{6}{10} - \arctan \frac{6}{100} - 57.3 \times 0.005 \times 6 = 53.88^\circ$$



图解 5-40

选择 $\omega_c = 6$ 进行设计, 在 $\omega_c = 6$ 处做垂线交 $L_0(\omega)$ 于 A, 在 A 的镜像点 B 做水平线左延至 C, 使 C 点频率 $\omega_2 = 0.1\omega_c = 0.6$, 过 C 向左作 -20dB/dec 线交 0dB 线于 D, D 点频率 $\omega_D = \frac{\omega_2 \omega_c}{K} = \frac{0.6 \times 6}{100} = 0.036$ 。可写出校正装置传递函数

$$G_c(s) = \frac{\frac{s}{\omega_2} + 1}{\frac{s}{\omega_1} + 1} = \frac{\frac{s}{0.6} + 1}{\frac{s}{0.036} + 1}$$

校正后系统开环传递函数为

$$G(s) = G_c(s)G_0(s) = \frac{100\left(\frac{s}{0.6} + 1\right)}{s\left(\frac{s}{10} + 1\right)\left(\frac{s}{100} + 1\right)\left(\frac{s}{0.036} + 1\right)}$$

$$\omega_c = 6$$

$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ + \arctan \frac{6}{0.6} - 90^\circ - \arctan \frac{6}{10} - \arctan \frac{6}{100} \\ &\quad - \arctan \frac{6}{0.036} - 57.3 \times 0.005 \times 6 = 51.6^\circ > 45^\circ \end{aligned}$$

满足要求。

5-41 设单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.25s+1)}$$

要求校正后系统的静态速度误差系数 $K_v \geq 5\text{rad/s}$, 截止频率 $\omega_c \geq 2\text{rad/s}$, 相角裕度 $\gamma \geq 45^\circ$, 试设计串联校正装置。

解 绘出校正前系统的对数幅频特性曲线如图解 5-41 所示。可以看出, 在 $\omega = 2$ 以后, 系统相角下降很快, 难以用超前校正补偿; 滞后校正也不能奏效, 故采用滞后-超前校正方式。根据题目要求, 取

$$\omega'_c = 2, \quad K = K_v = 5$$

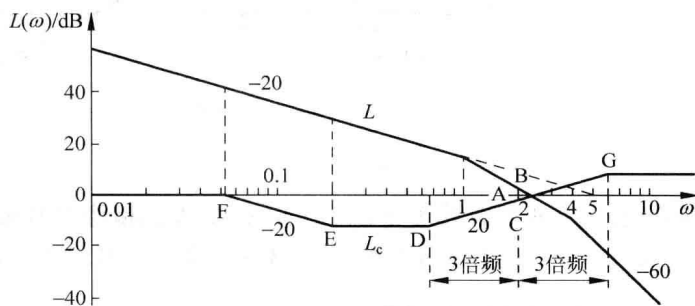
原系统相角裕度

$$\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega'_c) = 180^\circ - \arctan 2 - \arctan \frac{2}{4} - 90^\circ = 0^\circ$$

最大超前角

$$\varphi_m = \gamma'' - \gamma + 5^\circ = 45^\circ - 0^\circ + 5^\circ = 50^\circ$$

$$a = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} \approx 8, \quad 10 \lg a \approx 9 \text{ dB}$$



图解 5-41

过 $\omega'_c = 2$ 作 \overline{BC} , 使 $\overline{BA} = \overline{AC}$; 过 C 作 20 dB/dec 线并且左右延伸各 3 倍频程, 定出 D、G, 进而确定 E、F 点。各点对应的频率为

$$\omega^* = \frac{\omega'_c}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} = 2.5$$

$$\omega_E = 0.1 \omega'_c = 0.1 \times 2 = 0.2$$

$$\omega_F = \omega_E \frac{\omega_D}{\omega^*} = 0.2 \times \frac{0.67}{2.5} = 0.0536$$

$$\omega_G = \omega'_c \times 3 = 6$$

有

$$G_c(s) = \frac{\left(\frac{s}{0.2} + 1\right)\left(\frac{s}{0.67} + 1\right)}{\left(\frac{s}{0.0536} + 1\right)\left(\frac{s}{6} + 1\right)}$$

$$G_c(s)G(s) = \frac{5\left(\frac{s}{0.2} + 1\right)\left(\frac{s}{0.67} + 1\right)}{s(s+1)\left(\frac{s}{4} + 1\right)\left(\frac{s}{0.0536} + 1\right)\left(\frac{s}{6} + 1\right)}$$

验算 $\gamma = 180^\circ + G_c(j\omega'_c)G(j\omega'_c)$

$$= \arctan \frac{2}{0.2} + \arctan \frac{2}{0.67} - \arctan \frac{2}{0.0536} - \arctan \frac{2}{6} = 48.87^\circ > 45^\circ$$

5-42 单位反馈系统, 校正前系统的开环传递函数 $G_0(s) = \frac{2}{s(0.5s+1)}$, 采用串联校

正后系统的对数幅频特性曲线如图 5-89 所示。

- (1) 写出校正后系统的开环传递函数 $G(s)$;
- (2) 确定校正装置的传递函数,说明所用的校正方式(超前/滞后/滞后-超前);
- (3) 分别绘制校正装置以及校正前系统的对数幅频特性曲线;
- (4) 利用三频段理论说明采用如上校正装置后对系统性能的影响。

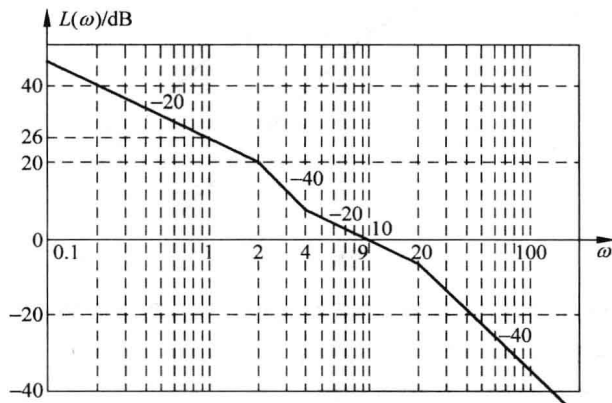


图 5-89 题 5-42 图

解 (1) 校正前系统的传递函数为

$$G_0(s) = \frac{2}{s\left(\frac{s}{2} + 1\right)}$$

依图 5-89,求校正后系统的开环增益

$$20\lg K = 26, \quad K = 10^{\frac{26}{20}} = 20$$

校正后系统的传递函数

$$G(s) = G_0(s)G_c(s) = \frac{20\left(\frac{s}{4} + 1\right)}{s\left(\frac{s}{2} + 1\right)\left(\frac{s}{20} + 1\right)}$$

(2) 校正装置的传递函数

$$G_c(s) = \frac{G(s)}{G_0(s)} = \frac{20\left(\frac{s}{4} + 1\right)}{s\left(\frac{s}{2} + 1\right)\left(\frac{s}{20} + 1\right)} \cdot \frac{s\left(\frac{s}{2} + 1\right)}{2} = \frac{10\left(\frac{s}{4} + 1\right)}{\frac{s}{20} + 1} \quad (\text{超前校正})$$

(3) $L_c(\omega)$ 、 $L_0(\omega)$ 曲线见图解 5-42。

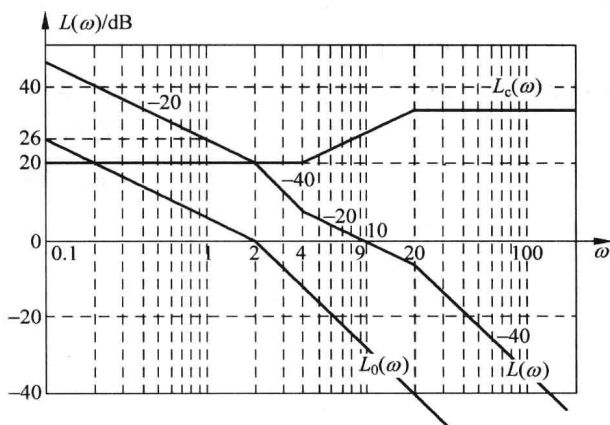
(4) 比较校正前、后系统的对数幅频特性曲线:

低频段抬高,校正后系统的稳态速度误差减小;

中频段 $L(\omega)$ 以 -20dB/dec 斜率穿越 0dB 线, $\gamma > \gamma_0$, 校正后系统超调量减小;

$\omega_c > \omega_{c0}$, 校正后系统调节时间减小;

高频段 $L(\omega)$ 高频段被抬高,校正后系统抗高频干扰的能力下降。



图解 5-42

5-43 已知一单位反馈控制系统,其被控对象 $G_0(s)$ 和串联校正装置 $G_c(s)$ 的对数幅频特性曲线分别如图 5-90(a)、图 5-90(b)和图 5-90(c)中 L_0 和 L_c 所示。要求:

- (1) 写出校正后各系统的开环传递函数;
- (2) 分析各 $G_c(s)$ 对系统的作用,并比较其优缺点。

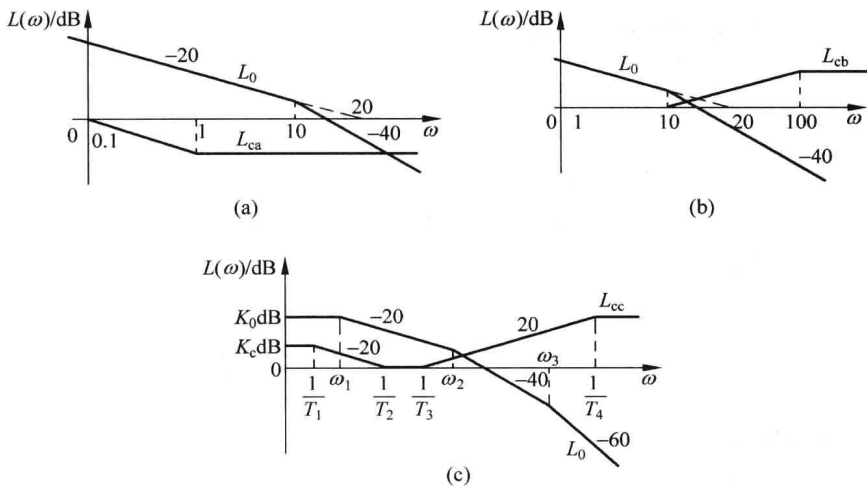


图 5-90 题 5-43 图

解 (a) 未校正系统开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{20}{s\left(\frac{s}{10} + 1\right)}$$

$$\omega_{c0} = \sqrt{10 \times 20} = 14.14$$

$$\gamma_0 = 180^\circ + \varphi_0(\omega_{c0}) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \frac{14.14}{10} = 35.26$$

采用滞后校正后

$$G_{c(a)}(s) = \frac{s+1}{10s+1}$$

$$G_{(a)}(s) = G_{c(a)}(s) \cdot G_0(s) = \frac{20(s+1)}{s\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\frac{s}{0.1}+1\right)}$$

画出校正后系统的开环对数幅频特性如图解 5-43(a) 所示。

有

$$\frac{20}{\omega_{ca}} = \frac{1}{0.1}, \quad \omega_{ca} = 2$$

$$\gamma_a = 180^\circ + \varphi_a(\omega_{ca}) = 55^\circ$$

可见

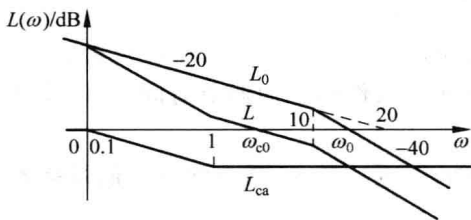
$$\begin{cases} \gamma_a = 55^\circ > \gamma_0 = 35.26^\circ & \text{稳定性增强, } \sigma\% \text{ 减小;} \\ \omega_{ca} = 2 < \omega_{c0} = 14.14 & \text{响应变慢;} \\ \text{高频段被压低} & \text{抗高频干扰能力增强。} \end{cases}$$

(b) 未校正系统频率指标同(a)。采用超前校正后

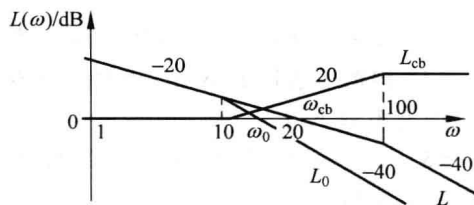
$$G_{c(b)}(s) = \frac{\frac{s}{10}+1}{\frac{s}{100}+1}$$

$$G_{(b)}(s) = G_{c(b)}(s) \cdot G_0(s) = \frac{\frac{s}{10}+1}{\frac{s}{100}+1} \cdot \frac{20}{s\left(\frac{s}{10}+1\right)} = \frac{20}{s\left(\frac{s}{100}+1\right)}$$

画出校正后系统的开环对数幅频特性如图解 5-43(b) 所示。



图解 5-43(a)



图解 5-43(b)

可见

$$\begin{cases} \omega_{cb} = 20 > \omega_{c0} = 14.14 & \text{响应速度加快;} \\ \gamma_b = 180^\circ + \varphi_b(\omega_{cb}) = 78.7^\circ > \gamma_0 = 35.26^\circ & \sigma\% \text{ 减小;} \\ \text{高频段被抬高} & \text{抗高频干扰能力下降。} \end{cases}$$

(c) 校正前系统的开环传递函数为

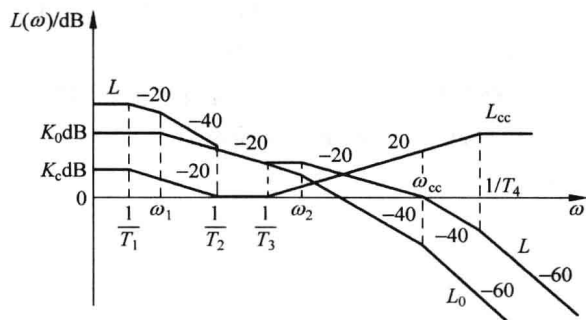
$$G_0(s) = \frac{10^{\frac{\kappa_0}{20}}}{\left(\frac{s}{\omega_1}+1\right)\left(\frac{s}{\omega_2}+1\right)\left(\frac{s}{\omega_3}+1\right)}$$

$$G_{c(c)}(s) = \frac{10^{\frac{K_c}{20}}(T_2s+1)(T_3s+1)}{(T_1s+1)(T_4s+1)}$$

$$G_{(c)}(s) = G_{c(c)}(s) \cdot G_0(s) = \frac{10^{\frac{K_0+K_c}{20}}(T_2s+1)(T_3s+1)}{(T_1s+1)(T_4s+1)\left(\frac{s}{\omega_1}+1\right)\left(\frac{s}{\omega_2}+1\right)\left(\frac{s}{\omega_3}+1\right)}$$

画出校正后系统的开环对数幅频特性如图解 5-43(c) 所示, 可见采用串联滞后-超前校正后

- 低频段被抬高 阶跃作用下的稳态误差减小;
- 中频段 $\omega_{cc} \uparrow, \gamma \uparrow$ 动态性能得到改善;
- 高频段被抬高 抗高频干扰的能力下降。



图解 5-43(c)

5-44 设单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{K}{s(s+3)(s+9)}$$

- (1) 如果要求系统在单位阶跃输入作用下的超调量 $\sigma\% = 20\%$, 试确定 K 值;
- (2) 根据所求得的 K 值, 求出系统在单位阶跃输入作用下的调节时间 t_s , 以及静态速度误差系数 K_v ;
- (3) 设计一串联校正装置, 使系统的 $K_v \geq 20, \sigma\% \leq 17\%, t_s$ 减小到校正前系统调节时间的一半以内。

解 (1) 由式(5-81) $\sigma = 0.16 + 0.4(M_r - 1)$

$$M_r = \frac{\sigma - 0.16}{0.4} + 1 = \frac{0.2 - 0.16}{0.4} + 1 = 1.1 \tag{1}$$

由式(5-92)
$$M_r = \frac{1}{\sin \gamma}$$

得
$$\gamma = \arcsin \frac{1}{M_r} = 65.4^\circ \tag{2}$$

又

$$\gamma = 180^\circ - \angle G(j\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \frac{\omega}{3} - \arctan \frac{\omega}{9} \tag{3}$$

式(2)、式(3)联立

$$\arctan \frac{\omega_c}{3} + \arctan \frac{\omega_c}{9} = 90^\circ - 65.4^\circ = 24.6^\circ$$

$$\tan 24.6^\circ \cdot [27 - \omega_c^2] = 12\omega_c$$

$$\omega_c^2 + 26.21\omega_c - 27 = 0$$

解出

$$\omega_c = 1, \quad (\omega_c = 2.72 \text{ 舍去})$$

由开环增益

$$K_0 = \frac{K}{3 \times 9} = \omega_c = 1$$

得

$$K = 27$$

(2) 依式(5-82)

$$t_s = \frac{[2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2]\pi}{\omega_c} = 6.76$$

依题有

$$K_v = K_0 = 1$$

(3) 依题要求

$$K_v = \frac{K}{27} \geq 20 \quad K \geq 540$$

$$\sigma\% \leq 0.17 \approx 0.16 \stackrel{(6-9)}{=} 0.16 + 0.4 \left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right)$$

则

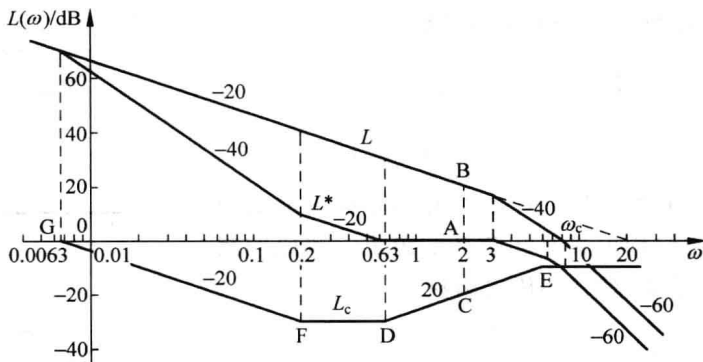
$$\gamma \approx 90^\circ$$

$$t'_s \leq \frac{t_s}{2} = \frac{6.67}{2} = 3.38$$

由第(2)步设计结果 $t_s = 6.67$ 对应于 $\omega_c = 1$ 。由频域时域的反比关系(ζ 一定时),应取

$$\omega'_c = 2\omega_c = 2(\text{rad/s})$$

作出 $K_v = 20$ 的原系统开环对数幅频特性曲线 $L(\omega)$ 如图解 5-44 所示。



图解 5-44

$$\omega_c = \sqrt{3 \times 20} = 7.75$$

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \frac{7.75}{3} - \arctan \frac{7.75}{9} = -19.55^\circ \quad (\text{系统不稳定})$$

在 $\omega'_c = 2$ 处, 原系统相角裕度

$$\gamma_2 = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \frac{2}{3} - \arctan \frac{2}{9} = 43.78^\circ$$

需采用滞后-超前校正方法。超前部分需提供超前角

$$\varphi_m = \gamma - \gamma_2 + 5^\circ = 90^\circ - 43.78^\circ + 5^\circ = 51.22^\circ$$

$$a = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} \approx 10 \quad 10 \lg a = 10$$

在 $\omega'_c = 2$ 处定出 C 使 $\overline{AB} = \overline{AC}$, 过 C 作 $+20\text{dB}/\text{dec}$ 直线 (D、E 相距 10 倍频, C 位于 D、E 的中点), 由点 D、E, 得

$$\omega_D = 0.63 \quad \omega_E = 6.3$$

定 F 点使 $\omega_F = 0.1 \times \omega'_c = 0.2$, 过 F 作 $-20\text{dB}/\text{dec}$ 斜率直线交频率轴于 G, 得 $\omega_G = 0.0063$

所以

$$G_c(s) = \frac{\left(\frac{s}{0.2} + 1\right)\left(\frac{s}{0.6} + 1\right)}{\left(\frac{s}{0.0063} + 1\right)\left(\frac{s}{6.3} + 1\right)}$$

$$G(s)G_c(s) = \frac{20\left(\frac{s}{0.2} + 1\right)\left(\frac{s}{0.6} + 1\right)}{s\left(\frac{s}{3} + 1\right)\left(\frac{s}{9} + 1\right)\left(\frac{s}{0.0063} + 1\right)\left(\frac{s}{6.3} + 1\right)}$$

验算

$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ + \arctan \frac{2}{0.2} + \arctan \frac{2}{0.63} - 90^\circ - \arctan \frac{2}{3} - \arctan \frac{2}{9} - \arctan \frac{2}{0.0063} - \arctan \frac{2}{6.3} \\ &= 180^\circ + 84.29^\circ + 72.52^\circ - 90^\circ - 33.69^\circ - 12.59^\circ - 89.82^\circ - 17.61^\circ = 93.15^\circ > 90^\circ \end{aligned}$$

查图 5-56 $\sigma\% \approx 15\%$

$$\frac{6.3}{\omega'_c} = \frac{6.3}{2} = 3.15 < 3.38 \quad (\text{符合要求})$$

得出满足要求的串联校正装置传递函数

$$G_c(s) = \frac{\left(\frac{s}{0.2} + 1\right)\left(\frac{s}{0.6} + 1\right)}{\left(\frac{s}{0.0063} + 1\right)\left(\frac{s}{6.3} + 1\right)}$$

5-45 图 5-91 所示为三种推荐的串联校正网络的对数幅频特性, 它们均由最小相角环节组成。若原控制系统为单位反馈系统, 其开环传递函数

$$G(s) = \frac{400}{s^2(0.01s + 1)}$$

试问:

(1) 这些校正网络中, 哪一种可使校正后系统的稳

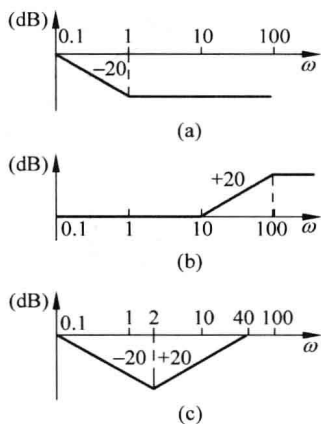


图 5-91 校正网络对数幅频特性

定程度最好?

(2) 为了将 12Hz 的正弦噪声削弱到原来的 1/10 左右, 确定应当采用哪种校正网络?

解 (1)

① 采用滞后校正时, 校正装置的传递函数为 $G_{ca}(s) = \frac{s+1}{10s+1}$

校正后系统开环传递函数为

$$G_{ca}(s) \cdot G(s) = \frac{400(s+1)}{s^2(0.01s+1)(10s+1)}$$

画出对数幅频特性曲线如图解 5-45 中曲线 L_a 所示。则

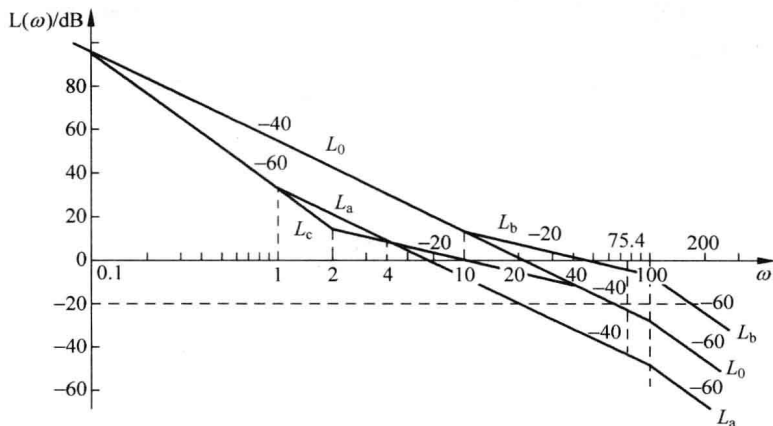
截止频率 $\omega_{ca} = \sqrt{4 \times 10} = 6.32$

相角裕度 $\gamma_a = 180^\circ + \varphi_a(\omega_{ca}) = -11.7^\circ$ (系统不稳定)

② 采用超前校正时, 校正装置的传递函数为 $G_{cb}(s) = \frac{0.1s+1}{0.01s+1}$

校正后系统开环传递函数为 $G_{cb}(s) \cdot G(s) = \frac{400(0.1s+1)}{s^2(0.01s+1)^2}$

画出对数幅频特性曲线如图解 5-45 中曲线 L_b 所示。



图解 5-45

截止频率

$$\omega_{cb} = \frac{\omega_0^2}{10} = \frac{20^2}{10} = 40$$

相角裕度

$$\gamma_b = 180^\circ + \varphi_b(\omega_{cb}) = 32.36^\circ$$

③ 采用滞后-超前校正时, 校正装置的传递函数为 $G_{cc}(s) = \frac{(0.5s+1)^2}{(10s+1)(0.025s+1)}$

校正后系统开环传递函数为 $G_{cc}(s) \cdot G(s) = \frac{400(0.5s+1)^2}{s^2(0.01s+1)(10s+1)(0.025s+1)}$

画出对数幅频特性曲线如图解 5-45 中曲线 L_c 所示。

截止频率

$$\omega_{cc} = \frac{\omega_0^2}{\omega_{cb}} = \frac{20^2}{40} = 10$$

相角裕度

$$\gamma_c = 180^\circ + \varphi_c(\omega_{cc}) = 48.21^\circ$$

可见,采用滞后校正时系统不稳定;采用滞后-超前校正时稳定程度最好,但响应速度比超前校正差一些。

(2) 确定使 12Hz 的正弦噪声削弱到原来的 1/10 左右的校正网络

$$f = 12\text{Hz 时, } \omega = 2\pi f = 75.4(\text{rad/s})$$

对于单位反馈系统,高频段的闭环幅频特性与开环幅频特性基本一致。从 Bode 图上看,在 $\omega = 75.4$ 处,有

$$L_c(75.4) = 20\lg \frac{1}{\alpha_c} = -23\text{dB}$$

衰减倍数 $\alpha_c = 10^{\frac{23}{20}} = 14.13 \approx 10$,可见,采用滞后-超前校正可以满足要求。

5-46 某系统的开环对数幅频特性曲线如图 5-92 所示。其中,虚线表示校正前的,实线表示校正后的。要求

- (1) 确定所用的是何种串联校正方式,写出校正装置的传递函数 $G_c(s)$;
- (2) 确定使校正后系统稳定的开环增益范围;
- (3) 当开环增益 $K=1$ 时,求校正后系统的相角裕度 γ 和幅值裕度 h 。

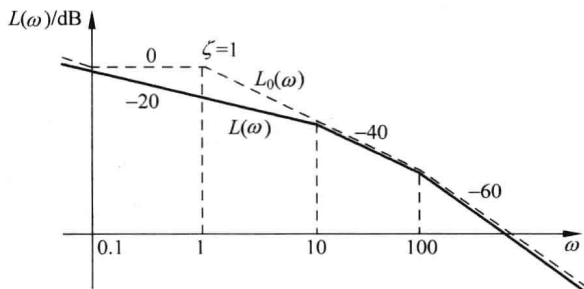
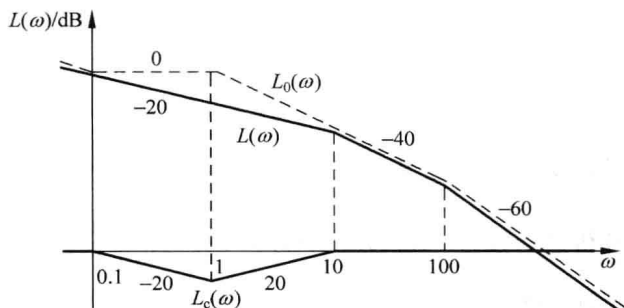


图 5-92 系统开环对数幅频特性

解 (1) 由系统校正前、后开环对数幅频特性曲线可得校正装置的对数幅频特性曲线 $L_c(\omega) = L(\omega) - L_0(\omega)$,如图解 5-46 所示。



图解 5-46

从而可得

$$G_c(s) = \frac{(s+1)^2}{(10s+1)(0.1s+1)}$$

所用的是串联滞后-超前校正方式。

(2) 由图 5-92 中实线可写出校正后系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{K}{s(0.1s+1)(0.01s+1)}$$

校正后系统闭环特征方程为

$$D(s) = s^3 + 110s^2 + 1000s + 1000K = 0$$

列劳斯表

s^3	1	1000	
s^2	110	1000K	
s^1	$(11000 - 1000K)/110$		$\rightarrow K < 110$
s^0	1000K		$\rightarrow K > 0$

所以有 $0 < K < 110$ 。

(3) 当 $K=1$ 时, 由图 5-92 可看出

$$\begin{cases} \omega_c = 1 \\ \omega_g = \sqrt{10 \times 100} = 31.6 \\ \gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 83.72^\circ \\ h = 1/|G(j\omega_g)| = 109.8 \end{cases}$$

所以有

第 6 章

习题及解答

6-1 试求下列函数的 z 变换

$$(1) e(t) = a^{\frac{t}{T}}$$

$$(2) e(t) = t^2 e^{-3t}$$

$$(3) E(s) = \frac{s+1}{s^2}$$

$$(4) E(s) = \frac{s+3}{s^2(s+1)(s+2)}$$

解 (1) $E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$

$$(2) \mathcal{Z}[t^2] = \frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$$

由移位定理

$$\mathcal{Z}[t^2 e^{-3t}] = \frac{T^2 z e^{3T} (z e^{3T} + 1)}{(z e^{3T} - 1)^3} = \frac{T^2 z e^{-3T} (z + e^{-3T})}{(z - e^{-3T})^3}$$

$$(3) E(s) = \frac{s+1}{s^2} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

$$E(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$(4) E(s) = \frac{c_0}{s} + \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+2}$$

$$c_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{3}{2}$$

$$c_1 = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{s+3}{s(s+2)} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$c_2 = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{s+3}{s(s+1)} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3/2}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1/2}{s+2}$$

$$E(z) = \frac{3z}{2(z-1)} - \frac{2z}{z-e^{-T}} + \frac{z}{2(z-e^{-2T})}$$

6-2 试分别用幂级数法、部分分式法和留数法求下列函数的 z 反变换。

$$(1) E(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-2)}$$

$$(2) E(z) = \frac{-3+z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$$

解 (1) $E(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-2)}$

① 级数求和法：用长除法可得

$$E(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-2)} = \frac{10z}{z^2 - 3z + 2} = 10z^{-1} + 30z^{-2} + 70z^{-3} + \dots$$

$$e^*(t) = 10\delta(t-T) + 30\delta(t-2T) + 70\delta(t-3T) + \dots$$

② 部分分式法

$$\frac{E(z)}{z} = \frac{-10}{(z-1)(z-2)} = \frac{-10}{z-1} + \frac{10}{z-2}$$

$$E(z) = \frac{-10z}{(z-1)} + \frac{10z}{(z-2)}$$

$$e(nT) = -10 \times 1 + 10 \times 2^n = 10(2^n - 1)$$

③ 留数法

$$\text{Res} [E(z) \cdot z^{n-1}]_{z=1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{10z^n}{z-2} = -10$$

$$\text{Res} [E(z) \cdot z^{n-1}]_{z=2} = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{10z^n}{z-1} = 10 \times 2^n$$

$$e(nT) = -10 \times 1 + 10 \times 2^n = 10(2^n - 1)$$

$$e^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 10(2^n - 1)\delta(t - nT)$$

$$(2) E(z) = \frac{-3 + z^{-1}}{1 - 2z + z^{-2}} = \frac{z(-3z + 1)}{z^2 - 2z + 1} = \frac{z(-3z + 1)}{(z-1)^2}$$

① 级数求和法：用长除法可得

$$E(z) = \frac{-3z^2 + z}{z^2 - 2z + 1} = -3 - 5z^{-1} - 7z^{-2} - 9z^{-3} - \dots$$

$$e^*(t) = -3\delta(t) - 5\delta(t - T) - 7\delta(t - 2T) - 9\delta(t - 3T) - \dots$$

② 部分分式法

$$\frac{E(z)}{z} = \frac{1 - 3z}{(z-1)^2} = \frac{-2}{(z-1)^2} - \frac{3}{z-1}$$

$$E(z) = \frac{-2z}{(z-1)^2} - \frac{3z}{z-1}$$

$$e(t) = \frac{-2}{T}t - 3 \times 1(t)$$

$$e^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{-2}{T}nT - 3 \right] \delta(t - nT) = \sum_{n=0}^{\infty} (-2n - 3)\delta(t - nT)$$

③ 留数法

$$\begin{aligned} e(nT) &= \text{Res} [E(z) \cdot z^{n-1}]_{z=1} = \frac{1}{1!} \lim_{s \rightarrow 1} \frac{d}{dz} [(-3z^2 + z) \cdot z^{n-1}] \\ &= \lim_{s \rightarrow 1} [-3(n+1)z^n + nz^{n-1}] = -2n - 3 \end{aligned}$$

$$e^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-2n - 3)\delta(t - nT)$$

6-3 试确定下列函数的初值和终值。

$$(1) E(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$(2) E(z) = \frac{0.792z^2}{(z-1)(z^2 - 0.416z + 0.208)}$$

$$\text{解 (1) } e(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = 0$$

$$e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \infty$$

$$(2) e(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} E(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{0.792z^2}{(z-1)(z^2-0.416z+0.208)} = 0$$

$$e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{0.792z^2}{z^2-0.416z+0.208} = 1$$

6-4 已知差分方程为

$$c(k) - 4c(k+1) + c(k+2) = 0$$

初始条件为 $c(0)=0, c(1)=1$ 。试用迭代法求输出序列 $c(k), k=0,1,2,3,4$ 。

解 依题有

$$c(k+2) = 4c(k+1) - c(k)$$

$$c(0) = 0, \quad c(1) = 1$$

$$c(2) = 4 \times 1 - 0 = 4$$

$$c(3) = 4 \times 4 - 1 = 15$$

$$c(4) = 4 \times 15 - 4 = 56$$

6-5 试用 z 变换法求解下列差分方程：

$$(1) c(k+2) - 6c(k+1) + 8c(k) = r(k)$$

$$r(k) = 1(k), \quad c(k) = 0 \quad (k \leq 0)$$

$$(2) c(k+2) + 2c(k+1) + c(k) = r(k)$$

$$c(0) = c(1) = 0 \quad r(n) = n, \quad (n=0,1,2,\dots)$$

$$(3) c(k+3) + 6c(k+2) + 11c(k+1) + 6c(k) = 0$$

$$c(0) = c(1) = 1, \quad c(2) = 0$$

解

(1) 令 $t = -T$, 代入原方程可得 $c(T) = 0$ 。对差分方程两端取 z 变换, 整理得

$$C(z) = \frac{1}{z^2 - 6z + 8} R(z) = \frac{1}{(z-2)(z-4)} \cdot \frac{z}{z-1}$$

$$\frac{C(z)}{z} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{z-4}$$

$$C(z) = \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{z-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{z}{z-4}$$

$$c(nT) = \frac{1}{3} \times 1^n - \frac{1}{2} \times 2^n + \frac{1}{6} \times 4^n$$

(2) 对差分方程两端取 z 变换, 整理得

$$C(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 1} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z+1)^2 (z-1)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Res} [C(z) \cdot z^{n-1}]_{z \rightarrow 1} &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{(z+1)^2} \cdot z^{n-1} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^n}{(z+1)^2} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} [nz^{n-1}(z+1)^{-2} - 2(z+1)^{-3} \cdot z^n] = n2^{n-2} - 2 \cdot 2^{-3} = \frac{n-1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Res} [C(z) \cdot z^{n-1}]_{z \rightarrow -1} &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{(z-1)^2} \cdot z^{n-1} \right] = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^n}{(z-1)^2} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} [nz^{n-1}(z-1)^{-2} - 2(z-1)^{-3} \cdot z^n] = (-1)^{n-1} \frac{n-1}{4} \end{aligned}$$

$$c(nT) = \frac{n-1}{4} [1 + (-1)^{n-1}]$$

$$c^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{n-1}{4} [1 + (-1)^{n-1}] \right\} \delta(t - nT)$$

(3) 对差分方程两端取 z 变换得

$$\begin{aligned} [z^3 C(z) - z^3 c(0) - z^2 c(1) - zc(2)] + 6[z^2 C(z) - z^2 c(0) - zc(1)] \\ + 11[zc(z) - zc(0)] + 6C(z) = 0 \end{aligned}$$

代入初始条件整理得

$$(z^3 + 6z^2 + 11z + 6) \cdot C(z) = z^3 + 7z^2 + 17z$$

$$C(z) = \frac{z^3 + 7z^2 + 17z}{z^3 + 6z^2 + 11z + 6}$$

$$\frac{C(z)}{z} = \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{z+1} - 7 \cdot \frac{1}{z+2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{z+3}$$

$$c(n) = \frac{11}{2}(-1)^n - 7(-2)^n + \frac{5}{2}(-3)^n = (-1)^n \left[\frac{11}{2} - 7 \times 2^n + \frac{5}{2} \times 3^n \right]$$

6-6 试由以下差分方程确定脉冲传递函数。

$$c(n+2) - (1 + e^{-0.5T})c(n+1) + e^{-0.5T}c(n) = (1 - e^{-0.5T})r(n+1)$$

解 对上式实行 z 变换, 并设所有初始条件为 0 得

$$z^2 C(z) - (1 + e^{-0.5T})zC(z) + e^{-0.5T}C(z) = (1 - e^{-0.5T})z \cdot R(z)$$

根据定义有

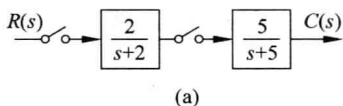
$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{z(1 - e^{-0.5T})}{z^2 - (1 + e^{-0.5T})z + e^{-0.5T}}$$

6-7 设开环离散系统分别如图 6-33(a)、图 6-33(b)、图 6-33(c) 所示, 试求各开环脉冲传递函数 $G(z)$ 。

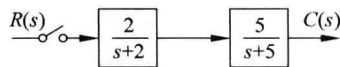
$$\text{解 (a)} \quad \mathcal{Z} \left[\frac{2}{s+2} \right] = \frac{2z}{z - e^{-2T}}$$

$$\mathcal{Z} \left[\frac{5}{s+5} \right] = \frac{5z}{z - e^{-5T}}$$

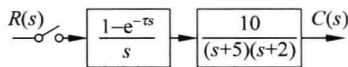
$$G(z) = \mathcal{Z} \left[\frac{2}{s+2} \right] \cdot \mathcal{Z} \left[\frac{5}{s+5} \right] = \frac{10z^2}{(z - e^{-2T})(z - e^{-5T})}$$



(a)



(b)



(c)

图 6-33 题 6-7 图

$$(b) \mathcal{Z}\left[\frac{2}{s+2} \cdot \frac{5}{s+5}\right] = \mathcal{Z}\left[\frac{10}{3} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{s+5}\right] = \frac{10}{3} \cdot \frac{z(e^{-2T} - e^{-5T})}{(z - e^{-2T})(z - e^{-5T})}$$

$$G(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{2}{s+2} \cdot \frac{5}{s+5}\right] = \frac{10}{3} \cdot \frac{z(e^{-2T} - e^{-5T})}{(z - e^{-2T})(z - e^{-5T})}$$

$$(c) \mathcal{Z}\left[\frac{(1 - e^{-Ts})}{s} \cdot \frac{10}{(s+2)(s+5)}\right] = 10(1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s(s+2)(s+5)}\right]$$

$$= \frac{10(z-1)}{z} \mathcal{Z}\left[\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{s+2} + \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{s+5}\right]$$

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \left[\frac{z}{z-1} - \frac{5}{3} \frac{z}{z - e^{-2T}} + \frac{2}{3} \frac{z}{z - e^{-5T}} \right]$$

$$= 1 - \frac{5}{3} \frac{z-1}{z - e^{-2T}} + \frac{2}{3} \frac{z-1}{z - e^{-5T}}$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{5}{3}e^{-2T} + \frac{2}{3}e^{-5T}\right)z + \frac{2}{3}e^{-2T} - \frac{5}{3}e^{-5T} + e^{-7T}}{(z - e^{-2T})(z - e^{-5T})}$$

6-8 试求图 6-34 所示各闭环离散系统的脉冲传递函数 $\Phi(z)$ 或输出 z 变换 $C(z)$ 。

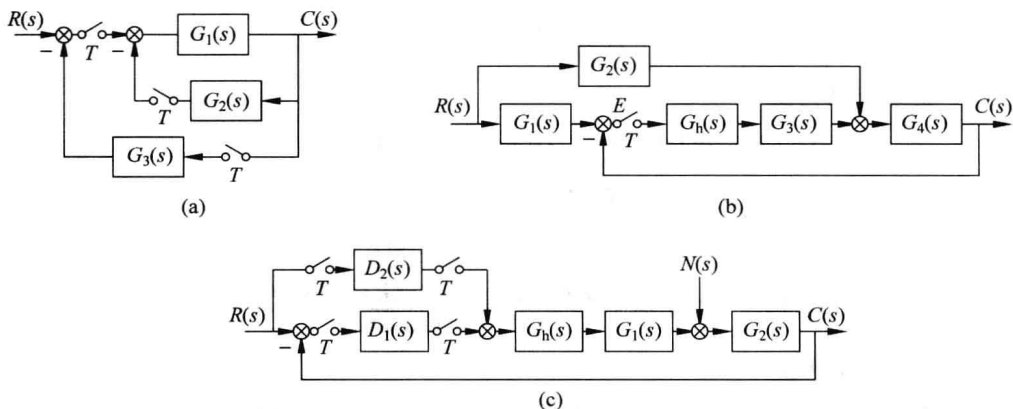
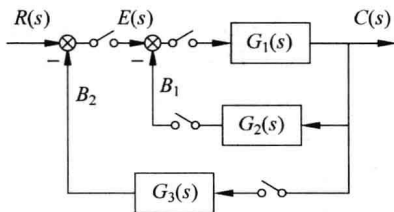


图 6-34 题 6-8 图

解 (a) 将原系统结构图等效变换为图解 6-8(a) 所示。



图解 6-8(a)

$$\begin{aligned}
 C(z) &= G_1(z)[E(z) - B_1(z)] \\
 \left. \begin{aligned}
 B_1(z) &= G_1G_2(z)[E(z) - B_1(z)] \\
 [1 + G_1G_2(z)] \cdot B_1(z) &= G_1G_2(z)E(z) \\
 \text{所以 } B_1(z) &= \frac{G_1G_2(z)}{1 + G_1G_2(z)}E(z)
 \end{aligned} \right\} \\
 &= G_1(z) \left[1 - \frac{G_1G_2(z)}{1 + G_1G_2(z)} \right] \cdot E(z) = \frac{G_1(z)}{1 + G_1G_2(z)}E(z) \\
 \left. \begin{aligned}
 E(z) &= R(z) - B_2(z) \\
 B_2(z) &= G_3(z) \cdot C(z) \\
 &= R(z) - G_3(z) \cdot C(z)
 \end{aligned} \right\} \\
 C(z) &= \frac{G_1(z)}{1 + G_1G_2(z)} \cdot [R(z) - G_3(z) \cdot C(z)] \\
 [1 + G_1G_2(z)]C(z) &= G_1(z) \cdot [R(z) - G_3(z) \cdot C(z)] \\
 [1 + G_1G_2(z) + G_1(z)G_3(z)]C(z) &= G_1(z) \cdot R(z) \\
 \Phi(z) = \frac{C(z)}{R(z)} &= \frac{G_1(z)}{1 + G_1G_2(z) + G_1(z)G_3(z)}
 \end{aligned}$$

(b) 由系统结构图

$$\begin{aligned}
 C(z) &= RG_2G_4(z) + E(z)G_hG_3G_4(z) \\
 \downarrow E(z) &= RG_1(z) - C(z) \\
 &= RG_2G_4(z) + G_hG_3G_4(z)[RG_1(z) - C(z)] \\
 \text{所以 } C(z) &= \frac{RG_2G_4(z) + G_hG_3G_4(z)RG_1(z)}{1 + G_hG_3G_4(z)}
 \end{aligned}$$

(c) 由系统结构图

$$\begin{aligned}
 C(z) &= NG_2(z) + R(z) \cdot D_2(z) \cdot G_hG_1G_2(z) + E(z) \cdot D_1(z) \cdot G_hG_1G_2(z) \\
 \downarrow E(z) &= R(z) - C(z) \\
 &= NG_2(z) + R(z) \cdot D_2(z) \cdot G_hG_1G_2(z) + D_1(z) \cdot G_hG_1G_2(z) \cdot [R(z) - C(z)] \\
 C(z) &= \frac{NG_2(z) + R(z) \cdot D_2(z) \cdot G_hG_1G_2(z) + D_1(z) \cdot G_hG_1G_2(z) \cdot R(z)}{1 + D_1(z) \cdot G_hG_1G_2(z)} \\
 &= \frac{NG_2(z) + [D_1(z) + D_2(z)] \cdot G_hG_1G_2(z) \cdot R(z)}{1 + D_1(z) \cdot G_hG_1G_2(z)}
 \end{aligned}$$

6-9 试判断下列系统的稳定性

(1) 已知离散系统的特征方程为

$$D(z) = (z + 1)(z + 0.5)(z + 2) = 0$$

(2) 已知闭环离散系统的特征方程为

$$D(z) = z^4 + 0.2z^3 + z^2 + 0.36z + 0.8 = 0$$

(注:要求用朱利判据)

(3) 已知误差采样的单位反馈离散系统,采样周期 $T=1(s)$,开环传递函数

$$G(s) = \frac{22.57}{s^2(s+1)}$$

解 (1) 系统特征根模值

$|\lambda_1| = |-1| = 1$, $|\lambda_2| = |-0.5| = 0.5$, $|\lambda_3| = |-2| = 2 > 1$
有特征根落在单位圆之外,系统不稳定。

$$(2) \quad D(z) = z^4 + 0.2z^3 + z^2 + 0.36z + 0.8 = 0$$

用朱利稳定判据($n=4$)

	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4
1	0.8	0.36	1	0.2	1
2	1	0.2	1	0.36	0.8
3	-0.36	0.088	-0.2	-0.2	
4	-0.2	-0.2	0.088	-0.36	
5	0.0896	-0.07168	0.0896		

$$D(1) = 3.36 > 0, \quad D(-1) = 2.24 > 0$$

$$|a_0| = 0.8 < |a_4| = 1, \quad |b_0| = 0.36 > |b_3| = 0.2$$

$$|c_0| = 0.896 = |c_2| = 0.0896$$

所以,系统不稳定。

$$(3) \quad G(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{22.57}{s^2(s+1)}\right] = \mathcal{Z}\left[\frac{22.57}{s^2} - \frac{22.57}{s} + \frac{22.57}{s+1}\right]$$

$$= 22.57 \left[\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-1}} \right] = \frac{22.57z[e^{-1}z + (1-2e^{-1})]}{(z-1)^2(1-e^{-1})}$$

$$D(z) = (z-1)^2(z-e^{-1}) + 22.57z[e^{-1}z + (1-2e^{-1})]$$

$$= z^3 + 5.9z^2 + 7.9z - 0.368$$

用朱利稳定判据($n=3$)

	z_0	z_1	z_2	z_3
1	-0.368	7.9	5.9	1
2	1	5.9	7.9	-0.368
3	-0.865	8.81	10.07	

$$D(1) = 14.432 > 0, \quad D(-1) = -3.368 < 0$$

$$|a_0| = 0.368 < |a_3| = 1$$

$$|b_0| = 0.865 < |b_2| = 10.07 \quad (\text{系统不稳定})$$

6-10 离散系统结构图如图 6-35 所示，
采样周期 $T=0.07\text{s}$ 。

- (1) 求闭环脉冲传递函数；
- (2) 判断系统稳定性；
- (3) 计算单位阶跃响应前 5 拍的值和终值。

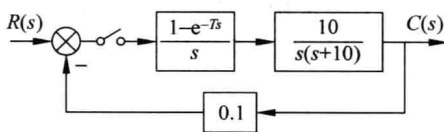


图 6-35 题 6-10 图

解 (1) 设

$$\begin{aligned} G_0(z) &= \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{10}{s(s+10)}\right] = \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z}\left[\frac{10}{s^2(s+10)}\right] \\ &= \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{10} \frac{1}{s} + \frac{1}{10} \frac{1}{s+10}\right] \\ &= \frac{z-1}{z} \cdot \left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{1}{10} \frac{z}{z-1} + \frac{1}{10} \frac{z}{z-e^{-10T}}\right] \\ &= \left[\frac{T}{z-1} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \frac{z-1}{z-e^{-10T}}\right] = \frac{1}{10} \left[\frac{(10T-1+e^{-10T})z+1-(1+10T)e^{-10T}}{(z-1)(z-e^{-10T})}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{\mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{10}{s(s+10)}\right]}{1+\mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{1}{s(s+10)}\right]} \\ &= \frac{10 \times \frac{(10T-1+e^{-10T})z+1-(1+10T)e^{-10T}}{(z-1)(z-e^{-10T})}}{100 + \frac{(10T-1+e^{-10T})z+1-(1+10T)e^{-10T}}{(z-1)(z-e^{-10T})}} \\ &= \frac{10 \times [(10T-1+e^{-10T})z+1-(1+10T)e^{-10T}]}{100(z-1)(z-e^{-10T}) + (10T-1+e^{-10T})z+1-(1+10T)e^{-10T}} \\ &= \frac{10[0.1966z+0.1558]}{100[z^2-1.4966z+0.4966] + [0.1966z+0.1558]} \\ &= \frac{0.01966z+0.01558}{z^2-1.4946z+0.4981} \end{aligned}$$

$$(2) D(z) = z^2 - 1.4946z + 0.4981 = 0$$

解根得： $z_1=0.99293, z_2=0.50169$ ，故系统稳定。

(3) 由 $\Phi(z)$ 可得

$$(z^2 - 1.4946z + 0.4981)C(z) = (0.01966z + 0.01558)R(z)$$

系统差分方程为

$$c(k) - 1.4946c(k-1) + 0.4981c(k-2) = 0.01966r(k-1) + 0.01558r(k-2)$$

有：

$$c(0) = 1.4946c(k-1) - 0.4981c(k-2) + 0.01966r(k-1) + 0.01558r(k-2)$$

$$c(1) = 1.4946c(0) - 0.4981c(-1) + 0.01966r(0) + 0.01558r(-1) = 0.01966$$

$$c(2) = 1.4946c(1) - 0.4981c(0) + 0.01966r(1) + 0.01558r(0) = 0.06462$$

$$c(3) = 1.4946c(2) - 0.4981c(1) + 0.01966r(2) + 0.01558r(1) = 0.12203$$

$$c(4) = 1.4946c(3) - 0.4981c(2) + 0.01966r(3) + 0.01558r(2) = 0.18543$$

$$c(5) = 1.4946c(4) - 0.4981c(3) + 0.01966r(4) + 0.01558r(3) = 0.25161$$

$$c^*(t) = 0.01966\delta(t-T) + 0.06462\delta(t-2T) + 0.12203\delta(t-3T)$$

$$+ 0.18543\delta(t-4T) + 0.25161\delta(t-5T) + \dots$$

$$\text{终值: } c(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)\Phi(z)R(z) = 10$$

6-11 设离散系统如图 6-36 所示, 采样周期 $T=1\text{s}$, 其中 $G_h(s)$ 为零阶保持器, 而

$$G(s) = \frac{K}{s(0.2s+1)}$$

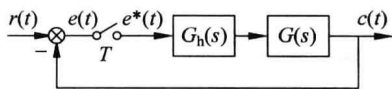


图 6-36 题 6-11 图

要求:

- (1) 当 $K=5$ 时, 分别在 w 域和 z 域中分析系统的稳定性;
- (2) 确定使系统稳定的 K 值范围。

解 (1)

$$G_h G(z) = (1-z^{-1}) \cdot \mathcal{Z}\left[\frac{K}{s^2(0.2s+1)}\right] = K \frac{z-1}{z} \left[\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{(1-e^{-5T})}{5(z-1)(1-e^{-5T})} \right]$$

$$= K \left[\frac{1}{z-1} - \frac{1-e^{-5T}}{5(z-e^{-5T})} \right] = K \left[\frac{\frac{4+e^{-5T}}{5}z + \frac{1-e^{-5T}}{5} - e^{-5T}}{(z-1)(z-e^{-5T})} \right]$$

$$D(z) = (z-1)(z-e^{-5T}) + K \left[\frac{4+e^{-5T}}{5}z + \frac{1-e^{-5T}}{5} - e^{-5T} \right]$$

$$= z^2 + \left[-(1+e^{-5T}) + K \left(\frac{4+e^{-5T}}{5} \right) \right] z + \left[e^{-5T} + K \frac{1-6e^{-5T}}{5} \right]$$

当 $K=5$ 时

$$D(z) = z^2 + 3z + 0.9663 = 0$$

解根得

$$\lambda_1 = -2.633, \quad \lambda_2 = -0.367 \quad (\text{系统不稳定})$$

以 $z = \frac{w+1}{w-1}$ 代入 $D(z)$ 并整理得

$$D(w) = w^2 + 0.01357w - 0.208$$

$D(w)$ 中有系数小于零, 不满足系统稳定的必要条件。

(2) 当 K 为变量时

$$D(z) = z^2 + (0.80135K - 1.006738)z + (0.1919K + 0.006738)$$

以 $z = \frac{w+1}{w-1}$ 代入并整理得

$$D(w) = 0.9933Kw^2 + (1.9865 - 0.3838K)w + (2.0135 - 0.60945K)$$

由劳斯判据可得系统稳定的 K 值范围为

$$0 < K < 3.304$$

6-12 如图 6-37 所示离散系统, 其中, ZOH 为零阶保持器, 周期 $T=1\text{s}$, 且

$$e_2(k) = e_2(k-1) + e_1(k)$$

试确定系统稳定时的 K 值范围。

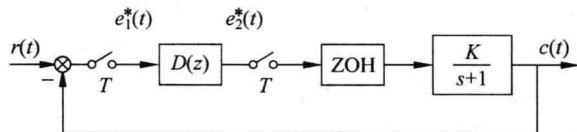


图 6-37 题 6-12 图

解 由于

$$e_2(k) = e_2(k-1) + e_1(k)$$

$$E_2(z) = z^{-1}E_2(z) + E_1(z)$$

则
$$D(z) = \frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

广义对象脉冲传递函数

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z}\left[\frac{(1-e^{-Ts})K}{s(s+1)}\right] = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{K}{s(s+1)}\right] \\ &= (1-z^{-1})\left[\frac{(1-e^{-1})Kz}{(z-1)(z-e^{-1})}\right] = \frac{0.632K}{z-0.368} \end{aligned}$$

开环脉冲传递函数为

$$D(z)G(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \cdot \frac{0.632K}{z-0.368} = \frac{0.632Kz}{(z-1)(z-0.368)}$$

闭环特征方程

$$1 + D(z)G(z) = z^2 + (0.632K - 1.368)z + 0.368 = 0$$

进行 w 变换, 令 $z = \frac{1+w}{1-w}$, 化简后得

$$(2.736 - 0.632K)w^2 + 1.264w + 0.632K = 0$$

列出劳斯表如下

w^2	$2.736 - 0.632K$	$0.632K$
w^1	1.264	0
w^0	$0.632K$	

若系统稳定, 必须满足 $2.736 - 0.632K > 0, K > 0$

即 $0 < K < 4.329$

6-13 已知离散系统结构图如图 6-38 所示, 试求 $T=1s$ 及 $T=0.5s$ 时, 求系统临界稳定的 K 值, 并讨论采样周期 T 对稳定性的影响。

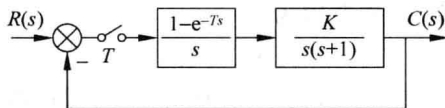


图 6-38 题 6-13 图

解 开环脉冲传递函数

$$G(z) = \frac{z-1}{z} K \cdot \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s^2(s+1)} \right]$$

$$= K \frac{(T-1+e^{-T})z+1-(T+1)e^{-T}}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

$$D(z) = (z-1)(z-e^{-T}) + K(T-1+e^{-T})z + K[1-(T+1)e^{-T}]$$

$$= z^2 + [K(T-1+e^{-T}) - (1+e^{-T})]z + K[1-(T+1)e^{-T}] + e^{-T} = 0$$

由朱利稳定判据

$$\begin{cases} D(1) = KT(1-e^{-T}) > 0 \\ D(-1) = 2(1+e^{-T}) + K[2(1-e^{-T}) - T(1+e^{-T})] > 0 \\ |K[1-(T+1)e^{-T}] + e^{-T}| < 1 \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} K > 0, T > 0 \\ K < \frac{2(1+e^{-T})}{T(1+e^{-T}) - 2(1-e^{-T})} \\ \frac{-(1+e^{-T})}{1-(T+1)e^{-T}} < K < \frac{1-e^{-T}}{1-(T+1)e^{-T}} \end{cases}$$

综合有

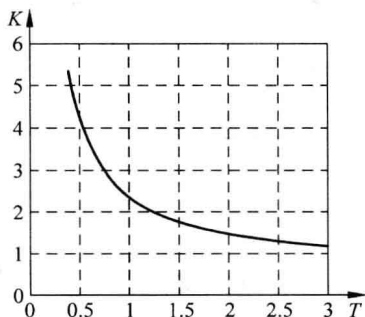
$$T > 0, \quad 0 < K < \frac{1-e^{-T}}{1-(T+1)e^{-T}}$$

当 $T=1\text{s}$ 时, K 值的稳定范围为 $0 < K < 2.3922$

当 $T=0.5\text{s}$ 时, K 值的稳定范围为 $0 < K < 4.362$

绘出使系统稳定的参数区域边界(如图解 6-13 所示),可以看出采样周期越小,系统稳定性越好,使系统稳定的 K 值范围就越宽。

6-14 如图 6-39 所示的采样控制系统,要求在 $r(t)=t$ 作用下的稳态误差 $e_{ss} = 0.25T$,试确定放大系数 K 及系统稳定时 T 的取值范围。



图解 6-13

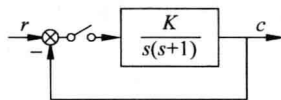


图 6-39 题 6-14 图

解 $G(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{K}{s(s+1)}\right] = K\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right] = K\left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}}\right] = \frac{Kz(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$

因为

$$E(z) = \frac{1}{1+G(z)}R(z) = \frac{(z-1)(z-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T}) + Kz(1-e^{-T})} \cdot \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

所以

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \frac{(z-1)(z-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T}) + Kz(1-e^{-T})} \cdot \frac{Tz}{(z-1)^2} = 0.25T$$

由上式求得 $K=4$ 。

该系统的特征方程为

$$\begin{aligned} D(z) &= (z-1)(z-e^{-T}) + 4z(1-e^{-T}) \\ &= z^2 + (3-5e^{-T})z + e^{-T} = 0 \end{aligned}$$

令 $z = \frac{1+w}{1-w}$ 代入上式得

$$4(1-e^{-T})w^2 + 2(1-e^{-T})w + 6e^{-T} - 2 = 0$$

列出劳斯表如下

w^2	$4(1-e^{-T})$	$6e^{-T}-2$
w^1	$2(1-e^{-T})$	0
w^0	$6e^{-T}-2$	

系统若要稳定,则劳斯表的第一列系数必须全部为正值,即有

$$\begin{aligned} 1-e^{-T} &> 0, \quad T > 0 \\ 6e^{-T}-2 &> 0, \quad T < \ln 3 \end{aligned}$$

即有

$$\begin{cases} K=4 \\ T < \ln 3 = 1.0986 \end{cases}$$

6-15 设离散系统如图 6-40 所示,其中,采样周期 $T=0.2s, K=10, r(t)=1+t+t^2/2$, 试用终值定理计算系统的稳态误差 $e^*(\infty)$ 。

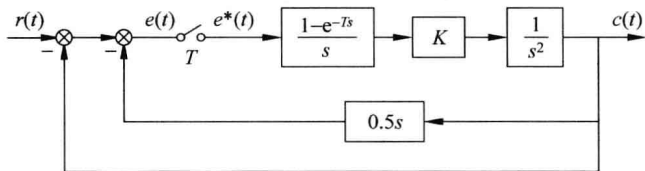


图 6-40 题 6-15 图

解 系统开环脉冲传递函数为

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{10(1+0.5s)}{s^2}\right] = (1-z^{-1}) \mathcal{Z}\left[\frac{10(1+0.5s)}{s^3}\right] \\ &= (1-z^{-1}) \left[\frac{5T^2(z+1)z}{(z-1)^3} + \frac{5Tz}{(z-1)^2}\right] \end{aligned}$$

将 $T=0.2$ 代入并整理得

$$G(z) = \frac{1.2z - 0.8}{(z-1)^2}$$

$$\Phi_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1+G(z)} = \frac{(z-1)^2}{(z-1)^2 + 1.2z - 0.8} = \frac{z^2 - 2z + 1}{z^2 - 0.8z + 0.2}$$

$$R(z) = \mathcal{Z}\left[1 + t + \frac{t^2}{2}\right] = \left[\frac{z}{z-1} + \frac{0.2z}{(z-1)^2} + \frac{0.04z(z+1)}{2(z-1)^3}\right]$$

$$e^*(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})\Phi_e(z)R(z)$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \left[1 + \frac{0.2}{z-1} + \frac{0.04(z+1)}{2(z-1)^2}\right] \left[\frac{(z-1)^2}{z^2 - 0.8z + 0.2}\right] = 0.1$$

6-16 设离散系统如图 6-41 所示,其中 $T=0.1\text{s}$, $K=1$,试求静态误差系数 K_p 、 K_v 、 K_a ,并求系统在 $r(t)=t$ 作用下的稳态误差 $e^*(\infty)$ 。

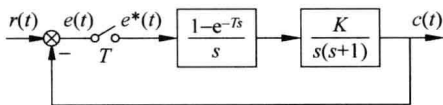


图 6-41 题 6-16 图

解 系统开环脉冲传递函数为

$$G(z) = (1-z^{-1}) \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right] = (1-z^{-1}) \left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(1-e^{-T})z}{(z-1)(z-e^{-T})}\right]$$

将 $T=0.1$ 代入并整理得

$$G(z) = \frac{0.005(z+0.9)}{(z-1)(z-0.905)}$$

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} [G(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{0.005(z+0.9)}{(z-1)(z-0.905)}\right] = \infty$$

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{0.005(z+0.9)}{(z-1)(z-0.905)} = 0.1$$

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 \frac{0.005(z+0.9)}{(z-1)(z-0.905)} = 0$$

$$e^*(\infty) = \frac{T}{K_v} = 1$$

6-17 已知离散系统如图 6-42 所示,其中,ZOH 为零阶保持器, $T=0.25\text{s}$ 。

- (1) $r(t)=2+t$ 时,欲使稳态误差小于 0.1,试求 K 值;
- (2) 求系统的单位阶跃响应序列。

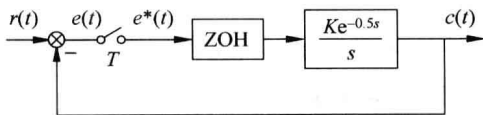


图 6-42 题 6-17 图

解 首先验证系统的稳定性

$$G(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{Ke^{-0.5s}}{s} = \frac{K(1 - e^{-Ts})e^{-2Ts}}{s^2}$$

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[\frac{Ke^{-2Ts}}{s^2}\right] = \frac{z-1}{z} \cdot \frac{KTz}{(z-1)^2} z^{-2} = \frac{KTz^{-2}}{z-1}$$

$$\Phi(z) = \frac{KTz^{-2}}{z-1+KTz^{-2}} = \frac{KT}{z^3 - z^2 + KT}$$

$$D(z) = z^3 - z^2 + KT$$

$$\text{Jury: } D(1) = 1 - 1 + KT > 0 \Rightarrow K > 0 \quad \text{①}$$

$$D(-1) = -1 - 1 + KT < 0 \Rightarrow K < \frac{2}{T} < 8 \quad \text{②}$$

w^3	KT	0	-1	1
w^2	1	-1	0	KT
w^1	$-1 + K^2 T^2$	1	$-KT$	
w^0	$-KT$	1	$-1 + K^2 T^2$	

$$\begin{cases} KT < 1 \Rightarrow K < \frac{1}{T} = 4 \\ 1 - K^2 T^2 > KT \end{cases} \quad \text{③}$$

$$K^2 T^2 + KT - 1 < 0 \quad \text{④}$$

解出 $-1.618 < KT < 0.618$

综合①②③④, K 稳定的范围为

$$0 < K < 2.47$$

使稳态误差为 0.1 时的 K 值

$$R(z) = \mathcal{Z}[2 \cdot 1(t) + t] = \frac{2z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

系统是 I 型系统, 阶跃输入下的稳态误差为零, 斜坡输入下的稳态误差为常值

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z) = KT$$

$$e_{ss} = \frac{T}{K_v} = \frac{1}{K} < 0.1$$

所以 $K > 10$

由于 $K > 10$ 时不稳定, 不能使 $e_{ss} < 0.1$ 。

$$(2) C(z) = \Phi(z)R(z) = \frac{KTz}{z^4 - 2z^3 + z^2 + KTz - KT}$$

用长除可以得出

$$c * (t) = KT\delta(t-3T) + 2KT\delta(t-4T) + 3KT\delta(t-5T) + KT(KT-4)\delta(t-6T) \dots$$

6-18 已知校正装置的传递函数为

$$D(s) = \frac{\tau s + 1}{T_1 s + 1}$$

试分别用不同的离散化方法确定数字控制器的脉冲传递函数 $D(z)$ 。

解

(1) 一阶差分近似法

$$D(z) = \left. \frac{\tau s + 1}{T_1 s + 1} \right|_{s = \frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{\tau \frac{1-z^{-1}}{T} + 1}{T_1 \frac{1-z^{-1}}{T} + 1} = \frac{\tau(1-z^{-1}) + T}{T_1(1-z^{-1}) + T} = \frac{(\tau + T) - \tau z^{-1}}{(T_1 + T) - T_1 z^{-1}}$$

(2) 阶跃响应不变法

$$\begin{aligned} D(z) &= \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{\tau s + 1}{T_1 s + 1} \right] = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{\tau s + 1}{s(T_1 s + 1)} \right] = \frac{\tau}{T_1} \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{s + \frac{1}{\tau}}{s \left(s + \frac{1}{T_1} \right)} \right] \\ &= \frac{\tau}{T_1} \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{T_1}{\tau} \frac{1}{s} + \left(1 - \frac{T_1}{\tau} \right) \frac{1}{s + \frac{1}{T_1}} \right] = \frac{\tau}{T_1} \frac{z-1}{z} \left[\frac{T_1}{\tau} \frac{z-1}{z-1} + \left(1 - \frac{T_1}{\tau} \right) \frac{z}{z - e^{-\frac{T}{T_1}}} \right] \\ &= 1 + \left(\frac{\tau}{T_1} - 1 \right) \frac{z-1}{z - e^{-\frac{T}{T_1}}} = \frac{\frac{\tau}{T_1} z + \left(1 - \frac{\tau}{T_1} - e^{-\frac{T}{T_1}} \right)}{z - e^{-\frac{T}{T_1}}} = \frac{\frac{\tau}{T_1} + \left(1 - \frac{\tau}{T_1} - e^{-\frac{T}{T_1}} \right) z^{-1}}{1 - e^{-\frac{T}{T_1}} z^{-1}} \end{aligned}$$

(3) 根匹配法

$$\text{分子 } s + \frac{1}{\tau} \Rightarrow z - e^{-\frac{T}{\tau}}, \text{分母 } s + \frac{1}{T_1} \Rightarrow z - e^{-\frac{T}{T_1}}$$

$$D(s) = \frac{\tau s + 1}{T_1 s + 1} = \frac{\tau}{T_1} \frac{s + \frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{T_1}} \Rightarrow D(z) = K_z \frac{1 - e^{-\frac{T}{\tau}} z^{-1}}{1 - e^{-\frac{T}{T_1}} z^{-1}}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\tau s + 1}{T_1 s + 1} = \lim_{z \rightarrow 1} K_z \frac{z - e^{-\frac{T}{\tau}}}{z - e^{-\frac{T}{T_1}}}, \Rightarrow K_z = \frac{1 - e^{-\frac{T}{T_1}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}$$

$$D(z) = \frac{1 - e^{-\frac{T}{T_1}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{T}{\tau}} z^{-1}}{1 - e^{-\frac{T}{T_1}} z^{-1}}$$

(4) 双线性变换法

$$\begin{aligned} D(z) &= \left. \frac{\tau s + 1}{T_1 s + 1} \right|_{s = \frac{2z-1}{z+1}} = \frac{\frac{2\tau z - 1}{z+1} + 1}{\frac{2T_1 z - 1}{z+1} + 1} = \frac{2\tau(z-1) + T(z+1)}{2T_1(z-1) + T(z+1)} \\ &= \frac{(2\tau + T)z + T - 2\tau}{(2T_1 + T)z + T - 2T_1} = \frac{(2\tau + T) + (T - 2\tau)z^{-1}}{(2T_1 + T) + (T - 2T_1)z^{-1}} \end{aligned}$$

6-19 某计算机控制系统结构图如图 6-43 所示, 采样周期 $T=0.2s$ 。要求阶跃输入时系统的稳态误差为 0, 当 $r(t)=t$ 时, $e^*(\infty)=0.1$; 调节时间 $t_s < 3.5$, 超调量 $\sigma\% < 22\%$ 。试用模拟化方法设计数字控制器 $D(z)$ 。

解 将时域指标转换为频域指标

$$\begin{cases} \sigma\% < 22\% \\ t_s < 3.5 \end{cases} \xrightarrow{\text{查图 5-52}} \begin{cases} \gamma^* > 45^\circ \\ t_s = 7/\omega_c^* < 3.5 \end{cases}, \begin{cases} \gamma^* > 45^\circ \\ \omega_c^* > 2 \end{cases}$$

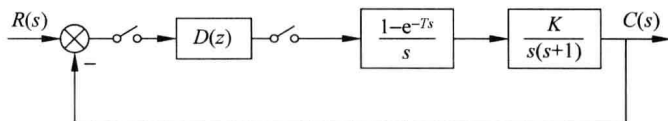


图 6-43 题 6-19 图

零阶保持器一次近似等效

$$\frac{1 - e^{-Ts}}{s} = \frac{T}{\frac{T}{2}s + 1}$$

考虑经采样后离散信号的频谱与原连续信号频谱在幅值上相差 $1/T$ 倍, 取

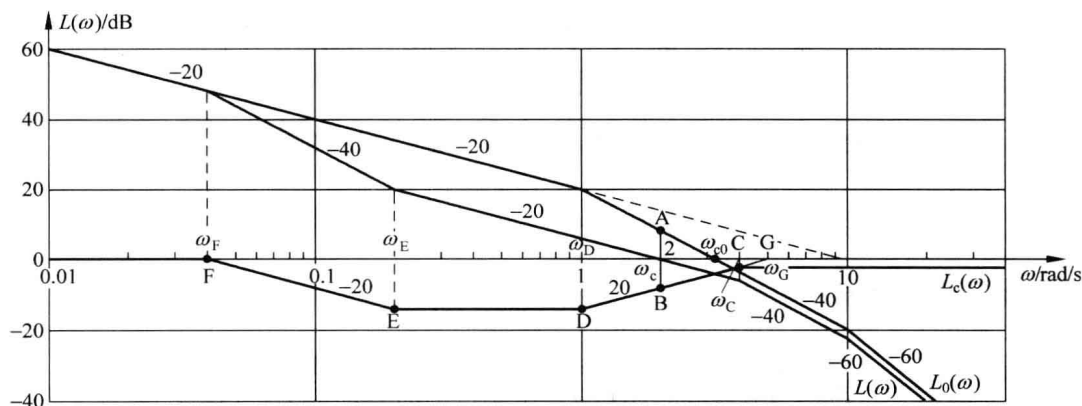
$$G_h(s) = \frac{1}{\frac{T}{2}s + 1} = \frac{1}{0.1s + 1}$$

考虑了零阶保持器的影响之后, 未校正系统的开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{K}{s(s+1)\left(\frac{s}{10} + 1\right)}$$

$$e_{ss}^{r(t)=t} = \frac{1}{K} = 0.1 \Rightarrow K = 10$$

绘制校正前系统的开环对数幅频特性曲线如图解 6-19 所示。



图解 6-19

$$\omega_0 = \sqrt{1 \times 10} = 3.16 > \omega_c^* = 2$$

$$\gamma_0 = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \frac{3.16}{1} - \arctan \frac{3.16}{10} = 0^\circ < \gamma^* = 45^\circ$$

在 $\omega_c^* = 2$ 处, 原系统的相角裕度

$$\gamma_0(2) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \frac{2}{1} - \arctan \frac{2}{10} = 15.26^\circ < \gamma^* = 45^\circ$$

所以用滞后校正达不到目的。显然, 用超前校正也不行, 故采用滞后-超前校正。选择

$$\omega_c = \omega_c^* = 2$$

$$\varphi_m = \gamma^* - \gamma_0(\omega_c) + 6^\circ = 45^\circ - 15.26^\circ + 6^\circ = 35.74^\circ$$

$$a = \frac{1 + \sin \varphi_m}{11 \sin \varphi_m} = 3.81 \approx 4 \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{4} = 2$$

在 $\omega_c = 2$ 处做垂线交 $L_0(\omega)$ 于 A, 在 A 的镜像点 B 做斜率为 $+20\text{dB/dec}$ 的直线, 分别在 $\omega_c = 2$ 左右 2 倍频处确定 C、D 点, 并分别向两边作水平线(如图解 6-19 所示)。在 D 点左边确定 E 点使 $\omega_E = 0.1\omega_c = 0.2$, 过 E 点做斜率为 -20dB/dec 的直线交 0dB 线于 F 点。A、B、C、D 点的频率可以计算如下

$$\omega_C = 2\omega_c = 2 \times 2 = 4$$

$$\omega_D = \frac{\omega_c}{2} = 2/2 = 1$$

$$\omega_E = 0.1\omega_c = 0.1 \times 2 = 0.2$$

将 BC 线延长, 交于 0dB 线于 G 点, G 点频率 $\omega_G = \frac{\omega_C^2}{\omega_c} = \frac{3.16^2}{2} = 5$

则有

$$\omega_F = \frac{\omega_E \omega_D}{\omega_G} = \frac{0.2 \times 1}{5} = 0.04$$

写出校正装置的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{\left(\frac{s}{\omega_E} + 1\right)\left(\frac{s}{\omega_D} + 1\right)}{\left(\frac{s}{\omega_F} + 1\right)\left(\frac{s}{\omega_C} + 1\right)} = \frac{\left(\frac{s}{0.2} + 1\right)(s + 1)}{\left(\frac{s}{0.04} + 1\right)\left(\frac{s}{4} + 1\right)}$$

校正后系统的开环传递函数为

$$G(s) = G_0(s)G_c(s) = \frac{10\left(\frac{s}{0.2} + 1\right)}{s\left(\frac{s}{10} + 1\right)\left(\frac{s}{0.04} + 1\right)\left(\frac{s}{4} + 1\right)}$$

验算校正后系统的指标

$$\omega_c = 2 = \omega_c^*$$

$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ + \arctan \frac{2}{0.2} - 90^\circ - \arctan \frac{2}{10} - \arctan \frac{2}{0.04} - \arctan \frac{2}{4} \\ &= 47.56^\circ > 45^\circ = \gamma^* \end{aligned}$$

满足指标要求。下面将 $G_c(s)$ 离散化为 $D(z)$ 。

$$\begin{aligned} D(z) &= G_c(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{Tz+1}=\frac{10(z-1)}{z+1}} = \frac{\left[\frac{10(z-1)}{0.2(z+1)} + 1\right]\left[\frac{10(z-1)}{z+1} + 1\right]}{\left[\frac{10(z-1)}{0.04(z+1)} + 1\right]\left[\frac{10(z-1)}{4(z+1)} + 1\right]} \\ &= \frac{[50(z-1) + (z+1)][10(z-1) + (z+1)]}{[250(z-1) + (z+1)][2.5(z-1) + (z+1)]} = \frac{(51z-49)(11z+9)}{(251z+249)(3.5z+1.5)} \\ &= 0.6386 \frac{(z-0.96078)(z+0.81818)}{(z-0.99203)(z-0.42857)} = 0.6386 \cdot \frac{z^2 - 1.77896z + 0.78609}{z^2 - 1.4206z + 0.42515} \end{aligned}$$

$$= 0.6386 \cdot \frac{1 - 1.77896z^{-1} + 0.78609z^{-2}}{1 - 1.4206z^{-1} + 0.42515z^{-2}}$$

6-20 数字控制器的脉冲传递函数为

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{0.383(1 - 0.368z^{-1})(1 - 0.587z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 + 0.592z^{-1})}$$

写出相应的差分方程形式, 求出其单位脉冲响应序列。

解

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{0.383(1 - 0.955z^{-1} + 0.216z^{-2})}{1 - 0.408z^{-1} - 0.592z^{-2}} \\ &= \frac{0.383 - 0.366z^{-1} + 0.0827z^{-2}}{1 - 0.408z^{-1} - 0.592z^{-2}} \end{aligned}$$

$$(1 - 0.408z^{-1} - 0.592z^{-2})U(z) = (0.383 - 0.366z^{-1} + 0.0827z^{-2})E(z)$$

差分方程为

$$u(k) - 0.408u(k-1) - 0.592u(k-2) = 0.383e(k) - 0.366e(k-1) + 0.0827e(k-2)$$

$$D(z) = \frac{0.383(z - 0.368)(z - 0.587)}{(z - 1)(z + 0.592)}$$

$$u(nT) = \operatorname{Res}_{z=1} [D(z)E(z)z^{n-1}] + \operatorname{Res}_{z=-0.592} [D(z)E(z)z^{n-1}]$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{0.383(z - 0.368)(z - 0.587)}{(z + 0.592)} z^{n-1} \right] \\ &\quad + \lim_{z \rightarrow -0.592} \left[\frac{0.383(z - 0.368)(z - 0.587)}{(z - 1)} z^{n-1} \right] \\ &= 0.0628 - 0.2723(-0.592)^{n-1} \\ &= 0.0628 + 0.46(-0.592)^n \end{aligned}$$

$$u^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT)\delta(t - nT) = \sum_{n=0}^{\infty} [0.0628 + 0.46(-0.592)^n]\delta(t - nT)$$

脉冲响应序列

$$u^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [0.0628 + 0.46(-0.592)^n] \cdot \delta(t - nT)$$

6-21 已知离散系统如图 6-44 所示。其中采样周期 $T=1\text{s}$, 连续部分传递函数

$$G_0(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

试求当 $r(t)=1(t)$ 时, 系统无稳态误差, 且过渡过程在最少拍内结束的数字控制器 $D(z)$ 。

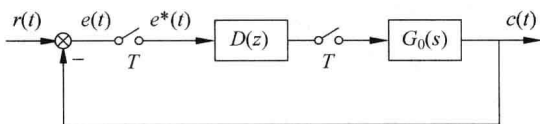


图 6-44 题 6-21 图

解

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[G_0(s)] &= \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right] = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right] = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-1}} \\ &= \frac{0.63z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0.37z^{-1})}\end{aligned}$$

查教材中表 6-3 有 $[r(t)=1(t)]$

$$D(z) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})G_0(z)} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1}) \frac{0.63z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0.37z^{-1})}} = \frac{1-0.37z^{-1}}{0.63}$$

6-22 设离散系统如图 6-45 所示,其中,采样周期 $T=1\text{s}$ 。试求当 $r(t)=R_0 1(t)+R_1 t$ 时,系统无稳态误差,且过渡过程在最少拍内结束的 $D(z)$ 。

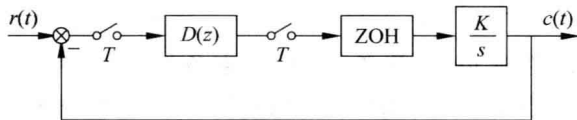


图 6-45 题 6-22 图

解 系统开环脉冲传递函数为

$$G(z) = (1-z^{-1}) \cdot \mathcal{Z}\left[\frac{K}{s^2}\right] = \frac{K}{z-1}$$

$$R(z) = \frac{R_0 z}{z-1} + \frac{R_1 z}{(z-1)^2}$$

令

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \Phi_e(z) \left[\frac{R_0 z}{z-1} + \frac{R_1 z}{(z-1)^2} \right] = 0$$

可求得

$$\Phi_e(z) = (1-z^{-1})^2$$

则

$$\Phi(z) = 1 - \Phi_e(z) = 2z^{-1} - z^{-2}$$

$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)\Phi_e(z)} = \frac{(2-z^{-1})z^{-1}}{\frac{K}{z-1}(1-z^{-1})^2} = \frac{2-z^{-1}}{K(1-z^{-1})}$$

6-23 已知离散系统如图 6-46 所示,其中,采样周期 $T=1\text{s}$,要求设计一个数字控制器 $D(z)$,使系统在斜坡输入下,调节时间为最短,并且在采样时刻没有稳态误差。

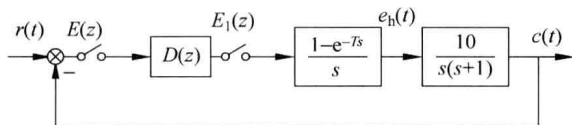


图 6-46 题 6-23 图

解 根据课本中表 6-3(最少拍无静差系统设计结果),有

输入信号 $r(t)$	要求的 $\Phi_e(z)$	要求的 $\Phi(z)$	消除偏差所需时间 t_s
$1(t)$	$1-z^{-1}$	z^{-1}	T
t	$(1-z^{-1})^2$	$2z^{-1}-z^{-2}$	$2T$
$t^2/2$	$(1-z^{-1})^3$	$3z^{-1}-3z^{-2}+z^{-3}$	$3T$

由表,对于斜坡输入信号,最少拍系统闭环脉冲传递函数应该为

$$\Phi(z) = 2z^{-1} - z^{-2} = z^{-1}(2 - z^{-1})$$

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^2$$

广义对象的脉冲传递函数为

$$G(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{10(1 - e^{-Ts})}{s^2(s+1)}\right] = \frac{3.68z^{-1}(1 + 0.718z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0.368z^{-1})}$$

根据 $D(z)$ 可实现性对 $\Phi(z)$ 及 $\Phi_e(z)$ 的约束条件, $D(z)$ 中 $z=1$ 的极点应包含在 $\Phi_e(z)$ 的零点之中,这一点 $\Phi_e(z)$ 已满足,不必改变, $C(z)$ 中包含的延迟因子 z^{-1} ,也已包含在 $\Phi(z)$ 之中,且 $n-m=2-1=1$,所以按表 6-3 设计的 $D(z)$ 是可以实现的。即

$$D(z) = \frac{0.543(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.368z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 + 0.718z^{-1})}$$

第7章

习题及解答

7-1 设一阶非线性系统的微分方程为

$$\dot{x} = -x + x^3$$

试确定系统有几个平衡状态,分析平衡状态的稳定性,并绘出系统的相轨迹。

解 令 $\dot{x} = 0$ 得

$$-x + x^3 = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1) = 0$$

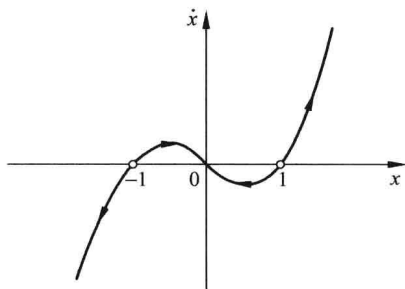
系统平衡状态

$$x_e = 0, -1, +1$$

其中 $x_e = 0$ 稳定的平衡状态;

$x_e = -1, +1$ 不稳定平衡状态。

计算列表,画出相轨迹如图解 7-1 所示。



图解 7-1

x	-2	-1	$-1/\sqrt{3}$	0	$1/\sqrt{3}$	1	2
\dot{x}	-6	0	0.385	0	-0.385	0	6
\ddot{x}	11	2	0	-1	0	2	11

可见:当 $|x(0)| < 1$ 时,系统最终收敛到稳定的平衡状态;当 $|x(0)| > 1$ 时,系统发散; $x(0) < -1$ 时, $x(t) \rightarrow -\infty$; $x(0) > 1$ 时, $x(t) \rightarrow \infty$ 。

注:系统为一阶,故其相轨迹只有一条,不可能在整个 $\dot{x} \sim x$ 平面上任意分布。

7-2 已知非线性系统的微分方程为

(1) $\ddot{x} + (3\dot{x} - 0.5)\dot{x} + x + x^2 = 0$;

(2) $\ddot{x} + x\dot{x} + x = 0$;

(3) $\ddot{x} + \sin x = 0$ 。

试求系统的奇点,并概略绘制奇点附近的相轨迹图。

解 (1) 由原方程得

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) = -(3\dot{x} - 0.5)\dot{x} - x - x^2 = -3\dot{x}^2 + 0.5\dot{x} - x - x^2$$

令

$$\ddot{x} = \dot{x} = 0$$

得

$$x + x^2 = x(x + 1) = 0$$

解出奇点 $x_e = 0, -1$ 。

在奇点处线性化处理。在 $x_e = 0$ 处

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \left. \frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial x} \right|_{x=0} \cdot x + \left. \frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \right|_{x=0} \cdot \dot{x} \\ &= (-1 - 2x) \Big|_{x=\dot{x}=0} \cdot x + (-6\dot{x} + 0.5) \Big|_{x=\dot{x}=0} \cdot \dot{x} = -x + 0.5\dot{x} \end{aligned}$$

即

$$\ddot{x} - 0.5\dot{x} + x = 0$$

特征方程及特征根

$$s_{1,2} = \frac{0.5 \pm \sqrt{0.5^2 - 4}}{2} = 0.25 \pm j0.984 \quad (\text{不稳定的焦点})$$

在 $x_e = -1$ 处

$$\ddot{x} = (-1 - 2x) \Big|_{\substack{x=-1 \\ \dot{x}=0}} \cdot x + (-6\dot{x} + 0.5) \Big|_{\substack{x=-1 \\ \dot{x}=0}} \cdot \dot{x} = x + 0.5\dot{x}$$

即

$$\ddot{x} - 0.5\dot{x} - x = 0$$

特征根

$$s_{1,2} = \frac{0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + 4}}{2} = \begin{cases} 1.218 \\ -0.718 \end{cases} \quad (\text{鞍点})$$

概略画出奇点附近的相轨迹如图解 7-2(1) 所示。

(2) 由原方程

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) = -x\dot{x} - x$$

令 $\ddot{x} = \dot{x} = 0$ 得奇点 $x_e = 0$, 在奇点处线性化

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=\dot{x}=0} \cdot x + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \Big|_{x=\dot{x}=0} \cdot \dot{x} \\ &= (-\dot{x} - 1) \Big|_{x=\dot{x}=0} \cdot x - x \Big|_{x=\dot{x}=0} \cdot \dot{x} \end{aligned}$$

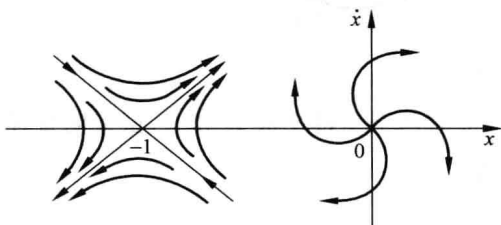
得

$$\ddot{x} = -x$$

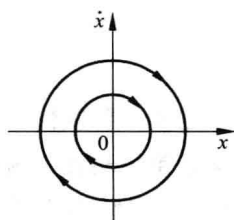
即

$$\ddot{x} + x = 0$$

特征根 $s_{1,2} = \pm j$ 。奇点 $x_e = 0$ (中心点) 处的相轨迹如图解 7-2(2) 所示。



图解 7-2(1)



图解 7-2(2)

(3) 求平衡点, 令 $\ddot{x} = \dot{x} = 0$ 得 $\sin x = 0$

平衡点 $x_e = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)。

将原方程在平衡点附近展开为泰勒级数, 取线性项。设

$$F(x) = \ddot{x} + \sin x = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}} \Big|_{\ddot{x}_e} \Delta \ddot{x} + \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x_e} \Delta x = 0$$

$$\Delta \ddot{x} + \cos x_e \cdot \Delta x = 0$$

$$\begin{cases} \Delta \ddot{x} + \Delta x = 0 & x_e = 2k\pi \\ \Delta \ddot{x} - \Delta x = 0 & x_e = (2k+1)\pi \end{cases} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

特征方程及特征根

k 为偶数时 $s^2 + 1 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \pm j$ (中心点)

k 为奇数时 $s^2 - 1 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \pm 1$ (鞍点)

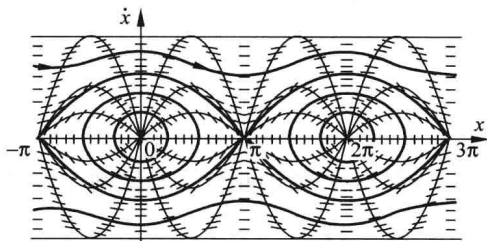
用等倾斜线法作相平面

$$\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} + \sin x = \dot{x} \cdot \alpha + \sin x = 0$$

$$\dot{x} = \frac{1}{\alpha} \sin x$$

α	-2	-1	-1/2	-1/4	0	1/4	1/2	1	2
$-1/\alpha$	1/2	1	2	4	∞	-4	-2	-1	-1/2

作出系统相平面图如图解 7-2(3)所示。



图解 7-2(3)

7-3 已知二阶线性系统 $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$ 有两个实特征根 s_1 和 s_2 , 试证明直线 $\dot{x} = s_1 x$ 和 $\dot{x} = s_2 x$ 是系统相轨迹场中的两根相轨迹。

证明 s_1 为根, 则应有

$$s_1^2 + as_1 + b = 0$$

由 $\dot{x} = s_1 x$ 可得

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= s_1 x, & \frac{dx}{x} &= s_1 dt, & \ln x &= s_1 t, \\ x &= e^{s_1 t}, & \dot{x} &= s_1 e^{s_1 t}, & \ddot{x} &= s_1^2 e^{s_1 t}, \\ \ddot{x} + a\dot{x} + bx &= s_1^2 e^{s_1 t} + as_1 e^{s_1 t} + b e^{s_1 t} \\ &= (s_1^2 + as_1 + b)e^{s_1 t} \stackrel{(1)}{=} 0 \end{aligned}$$

证毕。同理可证明 $\dot{x} = s_2 x$ 的情形。

7-4 试确定下列方程的奇点及其类型, 并用等倾斜线法绘制相平面图。

(1) $\ddot{x} + \dot{x} + |x| = 0$;

$$(2) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

解 (1) 系统方程为

$$\begin{cases} \text{I: } \ddot{x} + \dot{x} + x = 0 (x > 0) \\ \text{II: } \ddot{x} + \dot{x} - x = 0 (x < 0) \end{cases}$$

令 $\ddot{x}_1 = \dot{x}_1 = 0$, 得平衡点 $x_e = 0$ 。

系统特征方程及特征根

$$\begin{cases} \text{I: } s^2 + s + 1 = 0 & s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{稳定的焦点}) \\ \text{II: } s^2 + s - 1 = 0 & s_{1,2} = -1.618, +0.618 \quad (\text{鞍点}) \end{cases}$$

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) = -\dot{x} - |x|, \quad \frac{d\dot{x}}{dx} \dot{x} = -\dot{x} - |x|$$

$$\alpha = \frac{d\dot{x}}{dx} = -1 - \frac{|x|}{\dot{x}}, \quad \dot{x} = \frac{-1}{1+\alpha} |x| = \beta |x|$$

$$\begin{cases} \text{I: } \alpha = -1 - \frac{1}{\beta} & (x > 0) \\ \text{II: } \alpha = \frac{1}{\beta} - 1 & (x < 0) \end{cases}$$

计算列表

β	$-\infty$	-3	-1	$-1/3$	0	$1/3$	1	3	∞
$x > 0: \alpha = -1 - 1/\beta$	-1	$-2/3$	0	2	$-\infty$	-4	-2	$-4/3$	-1
$x < 0: \alpha = -1 + 1/\beta$	-1	$-4/3$	-2	-4	∞	2	0	$-2/3$	-1

用等倾斜线法绘制系统相平面图如图解 7-4(1)

所示。

(2)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

由式①

$$x_2 = \dot{x}_1 - x_1$$

式③代入式②

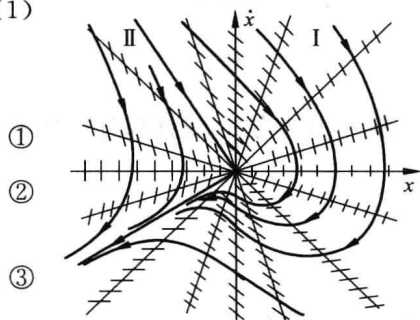
$$(\ddot{x}_1 - \dot{x}_1) = 2x_1 + (\dot{x}_1 - x_1)$$

即

$$\ddot{x}_1 - 2\dot{x}_1 - x_1 = 0 \quad (4)$$

令

$$\ddot{x}_1 = \dot{x}_1 = 0$$



图解 7-4(1)

得平衡点 $x_e=0$ 。

由式④得特征方程及特征根为

$$s^2 - 2s - 1 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \begin{cases} 2.414 \\ -0.414 \end{cases} \quad (\text{鞍点})$$

画相轨迹,由④式

$$\ddot{x}_1 = \dot{x}_1 \frac{d\dot{x}_1}{dx} = \dot{x}_1 \alpha = 2\dot{x}_1 + x_1$$

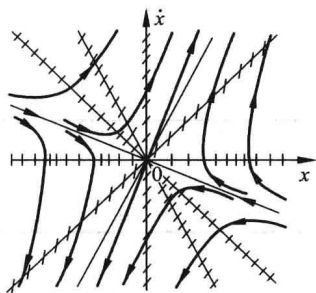
$$\dot{x}_1 = \frac{x_1}{\alpha - 2}$$

计算列表

α	2	2.5	3	∞	1	1.5	2
$\beta=1/(\alpha-2)$	∞	2	1	0	-1	-2	∞

用等倾斜线法绘制系统相平面图如图解 7-4(2)所示。

7-5 非线性系统的结构图如图 7-38 所示。系统开始是静止的,输入信号 $r(t)=4 \times 1(t)$,试写出开关线方程,确定奇点的位置和类型,画出该系统的相平面图,并分析系统的运动特点。



图解 7-4(2)

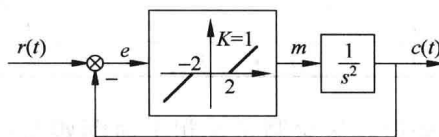


图 7-38 题 7-5 图

解 由结构图,线性部分传递函数为

$$\frac{C(s)}{M(s)} = \frac{1}{s^2}$$

得

$$\ddot{c}(t) = m(t) \tag{①}$$

由非线性环节有

$$m(t) = \begin{cases} 0 & |e| \leq 2 & \text{I} \\ e(t) - 2 & e > 2 & \text{II} \\ e(t) + 2 & e < -2 & \text{III} \end{cases} \tag{②}$$

由综合点得

$$c(t) = r(t) - e(t) = 4 - e(t) \tag{③}$$

将式③、式②代入式①得

$$\ddot{e}(t) = \begin{cases} 0 & |e| \leq 2 \quad \text{I} \\ 2 - e(t) & e > 2 \quad \text{II} \\ -2 - e(t) & e < -2 \quad \text{III} \end{cases}$$

开关线方程为 $e(t) = \pm 2$

$$\text{I: } \ddot{e}(t) = 0 \quad \dot{e} = c \quad (\text{常数})$$

$$\text{II: } \ddot{e} + e - 2 = 0$$

令 $\ddot{e} = \dot{e} = 0$ 得奇点 $e_0^{\text{II}} = 2$

特征方程及特征根

$$s^2 + 1 = 0, \quad s_{1,2} = \pm j \quad (\text{中心点})$$

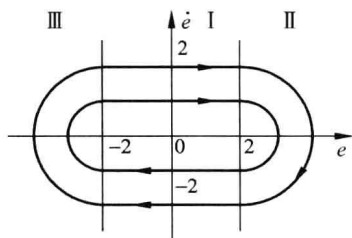
$$\text{III: } \ddot{e} + e + 2 = 0$$

令 $\ddot{e} = \dot{e} = 0$ 得奇点 $e_0^{\text{III}} = -2$

特征方程及特征根

$$s^2 + 1 = 0, \quad s_{1,2} = \pm j \quad (\text{中心点})$$

绘出系统相轨迹如图解 7-5 所示, 可看出系统运动呈现周期振荡状态。



图解 7-5

7-6 某控制系统采用非线性反馈改善系统性能, 系统结构图如图 7-39 所示。试绘制系统单位阶跃响应的相轨迹图。

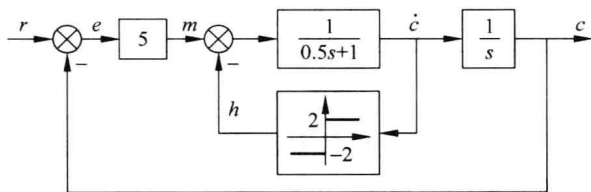


图 7-39 题 7-6 图

解 由系统结构图有

$$\frac{sC(s)}{U(s)} = \frac{1}{0.5s+1} \quad 0.5\dot{c} + c = u$$

$$u = \begin{cases} 5e - 2 & \dot{c} > 0 \quad \text{I} \\ 5e + 2 & \dot{c} < 0 \quad \text{II} \end{cases} \quad \text{①}$$

因为

$$\begin{cases} e = r - c = 1 - c \\ \dot{e} = -\dot{c} \\ \ddot{e} = -\ddot{c} \end{cases} \quad \text{②}$$

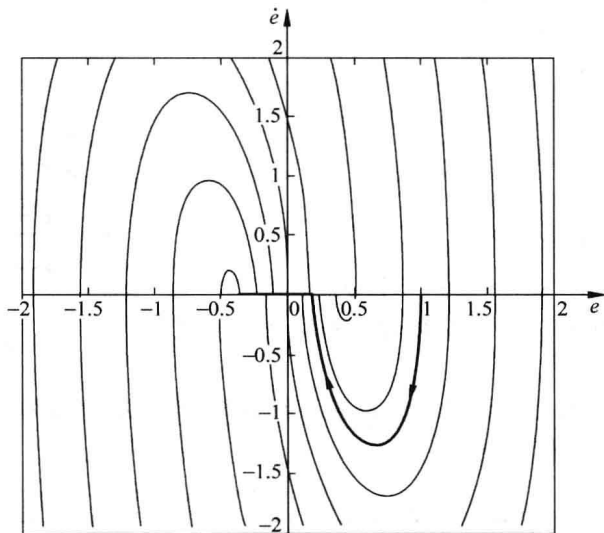
$$0.5\dot{c} + c = \begin{cases} 5e - 2 & \dot{c} > 0 \quad \text{I} \\ 5e + 2 & \dot{c} < 0 \quad \text{II} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{e} + 2\dot{e} + 10e - 4 = 0 & \dot{e} < 0 & \text{I} & \begin{cases} e_{\text{I}} = 0.4 \end{cases} \\ \ddot{e} + 2\dot{e} + 10e + 4 = 0 & \dot{e} > 0 & \text{II} & \begin{cases} e_{\text{II}} = -0.4 \end{cases} \end{cases}$$

特征方程与特征根

$$s^2 + 2s + 10 = 0 \quad s_{1,2} = -1 \pm j3 \text{ (稳定的焦点)}$$

概略绘制系统相轨迹,如图解 7-6 所示。可见系统阶跃响应过程是收敛的,稳态误差 $e_{ss} \in [-0.4, 0.4]$ 。



图解 7-6

7-7 已知具有理想继电器的非线性系统如图 7-40 所示。试用相平面法分析:

- (1) $T_d = 0$ 时系统的运动;
- (2) $T_d = 0.5$ 时系统的运动,并说明比例-微分控制对改善系统性能的作用;
- (3) $T_d = 2$ 时系统的运动特点。

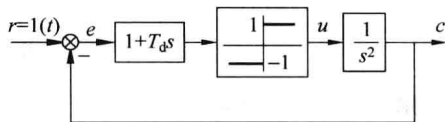


图 7-40 题 7-7 图

解 依结构图,线性部分微分方程为

$$\ddot{c} = u \tag{1}$$

非线性部分方程为

$$u = \begin{cases} 1 & e + T_d \dot{e} > 0 \\ -1 & e + T_d \dot{e} < 0 \end{cases} \tag{2}$$

开关线方程

$$\dot{e} = \frac{-1}{T_d} e$$

由综合口

$$c = r - e = 1 - e \tag{3}$$

式③、式②代入式①并整理得

$$\ddot{e} = \begin{cases} -1 & e + T_d \dot{e} > 0 \quad \text{I} \\ +1 & e + T_d \dot{e} < 0 \quad \text{II} \end{cases}$$

在 I 区

$$\ddot{e} = \dot{e} \frac{d\dot{e}}{de} = -1$$

解出

$$\dot{e}^2 = -2e \quad (e > 0) \quad (\text{抛物线})$$

同理在 II 区可得

$$\dot{e}^2 = 2e \quad (e < 0) \quad (\text{抛物线})$$

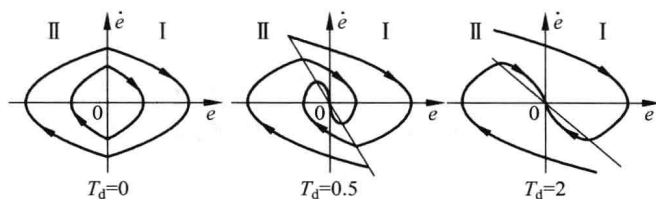
开关线方程分别为

$$T_d = 0 \text{ 时, } e = 0;$$

$$T_d = 0.5 \text{ 时, } \dot{e} = -2e;$$

$$T_d = 2 \text{ 时, } \dot{e} = -0.5$$

概略作出相平面图如图解 7-7 所示。



图解 7-7

由相平面图可见：加入比例微分控制可以改善系统的稳定性；当微分作用增强时，系统振荡性减小，响应加快。

7-8 非线性系统结构图如图 7-41 所示，其中，非线性特性参数 $a = 0.5$, $K = 8$ 。要求：

- (1) 当开关打开时，绘制初始条件为 $e(0) = 2, \dot{e}(0) = 0$ 的相轨迹；
- (2) 当开关闭合时，绘制相同初始条件的相轨迹，并说明测速反馈的作用。

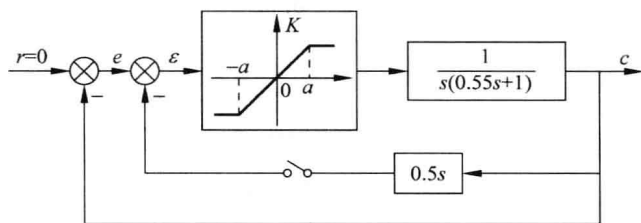


图 7-41 题 7-8 图

解 (1) 开关打开时

① 线性部分

$$G_0(s) = \frac{C(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(0.55s + 1)}$$

$$0.55\ddot{c} + \dot{c} = u$$

② 非线性部分

$$u = \begin{cases} 4 & e > 0.5 \\ 8e & |e| \leq 0.5 \\ -4 & e < -0.5 \end{cases}$$

③ 反馈口

$$e = -c, \quad \dot{e} = -\dot{c}, \quad \ddot{e} = -\ddot{c}$$

④ 综合有

$$0.55\ddot{e} + \dot{e} = -u = \begin{cases} -4 & e > 0.5 & \text{(I)} \\ -8e & |e| \leq 0.5 & \text{(II)} \\ 4 & e < -0.5 & \text{(III)} \end{cases}$$

开关线

$$e = \pm 0.5$$

I 区

$$0.55\ddot{e} + \dot{e} = -4, \quad (\text{特殊相轨迹: } \dot{e} = -4)$$

III 区

$$0.55\ddot{e} + \dot{e} = 4, \quad (\text{特殊相轨迹: } \dot{e} = 4)$$

II 区

$$0.55\ddot{e} + \dot{e} + 8e = 0$$

特征方程

$$0.55s^2 + s + 8 = 0$$

特征根

$$s_{1,2} = -0.91 \pm j3.704 \quad (\text{稳定的焦点})$$

绘制初始条件($e_0 = 2, \dot{e}_0 = 0$)的相轨迹如图解 7-8(a)所示。

(2) 开关闭合时

① 线性部分

$$\begin{cases} 0.55\ddot{c} + \dot{c} = u \\ \epsilon = e - 0.5\dot{c} \end{cases}$$

② 非线性部分

$$u = \begin{cases} 4 & e - 0.5\dot{c} > 0.5 \\ 8(e - 0.5\dot{c}) & |e - 0.5\dot{c}| \leq 0.5 \\ -4 & e - 0.5\dot{c} < -0.5 \end{cases}$$

③ 反馈口

$$e = -c, \quad \dot{e} = -\dot{c}, \quad \ddot{e} = -\ddot{c}$$

④ 综合有

$$0.55\ddot{e} + \dot{e} = -u = \begin{cases} -4 & e + 0.5\dot{e} > 0.5 \\ -8(e + 0.5\dot{e}) & |e + 0.5\dot{e}| \leq 0.5 \\ 4 & e + 0.5\dot{e} < -0.5 \end{cases}$$

开关线

$$|e + 0.5\dot{e}| = 0.5 \Rightarrow \begin{cases} \dot{e} = -2e + 1 \\ \dot{e} = -2e - 1 \end{cases}$$

I 区 $0.55\ddot{e} + \dot{e} = -4$, (特殊相轨迹: $\dot{e} = -4$)III 区 $0.55\ddot{e} + \dot{e} = 4$, (特殊相轨迹: $\dot{e} = 4$)II 区 $0.55\ddot{e} + 5\dot{e} + 8e = 0$

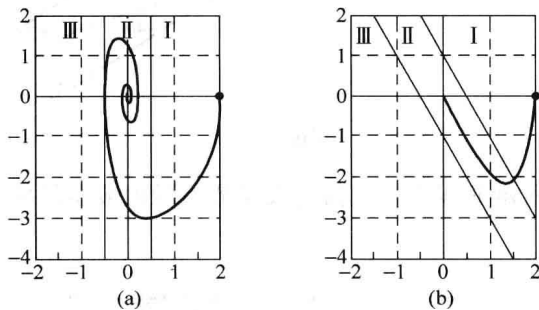
特征方程

$$0.55s^2 + 5s + 8 = 0$$

特征根

$$\begin{cases} s_1 = -2.054 \\ s_2 = -7.037 \end{cases} \quad (\text{稳定的节点})$$

绘制初始条件($e_0 = 2, \dot{e}_0 = 0$)的相轨迹如图解 7-8(b)所示。可见,测速反馈有利于系统运动的收敛。



图解 7-8

7-9 试推导非线性特性 $y = x^3$ 的描述函数。解 $y(t) = A^3 \sin^3 \omega t$

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} A^3 \sin^4 \omega t \cdot d\omega t = \frac{4A^3}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} (1 - \cos 2\omega t)^2 \cdot d\omega t \\ &= \frac{A^3}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos 2\omega t + \cos^2 2\omega t) \cdot d\omega t = \frac{A^3}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} \right] - \frac{A^3}{\pi} [\sin 2\omega t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\quad + \frac{A^3}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 4\omega t + 1}{2} \cdot d\omega t \\ &= \frac{A^3}{2} - 0 + \frac{A^3}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4\omega t \cdot d\omega t + \frac{A^3}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega t = \frac{3A^3}{4} \end{aligned}$$

$$N(A) = \frac{B_1}{A} + j \frac{A_1}{A} = \frac{3A^2}{4}$$

7-10 三个非线性系统的非线性环节一样,线性部分分别为

$$(1) G(s) = \frac{1}{s(0.1s+1)}$$

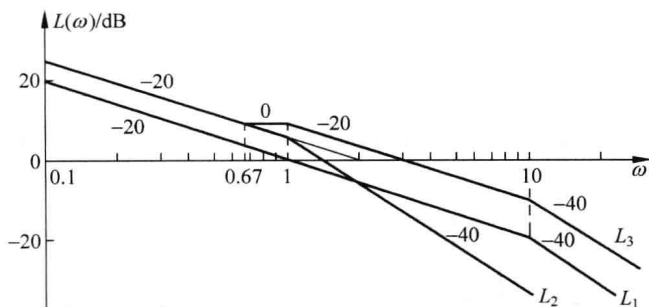
$$(2) G(s) = \frac{2}{s(s+1)}$$

$$(3) G(s) = \frac{2(1.5s+1)}{s(s+1)(0.1s+1)}$$

试问用描述函数法分析时,哪个系统分析的准确度高?

解 线性部分低通滤波特性越好,描述函数法分析结果的准确程度越高。分别作出三个系统线性部分的对数幅频特性曲线如图解 7-10 所示。

由对数幅频特性曲线可见, L_2 的高频段衰减较快,低通滤波特性较好,所以系统(2)的描述函数法分析结果的准确程度较高。



图解 7-10

7-11 将图 7-42 所示非线性系统简化成环节串联的典型结构图形式,并写出线性部分的传递函数。

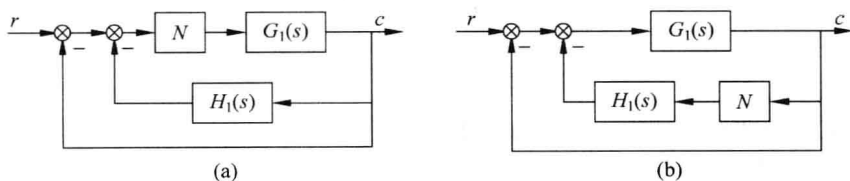


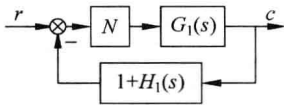
图 7-42 题 7-11 图

解 (a) 将系统结构图等效变换为图解 7-11(a)的形式。

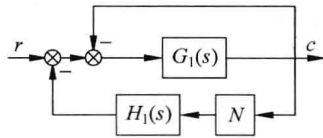
$$G(s) = G_1(s)[1 + H_1(s)]$$

(b) 将系统结构图等效变换为图解 7-11(b)的形式。

$$G(s) = H_1(s) \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)}$$



图解 7-11(a)



图解 7-11(b)

7-12 判断图 7-43 中所示各系统是否稳定； $-1/N(A)$ 与 $G(j\omega)$ 两曲线的交点是否为自振点。

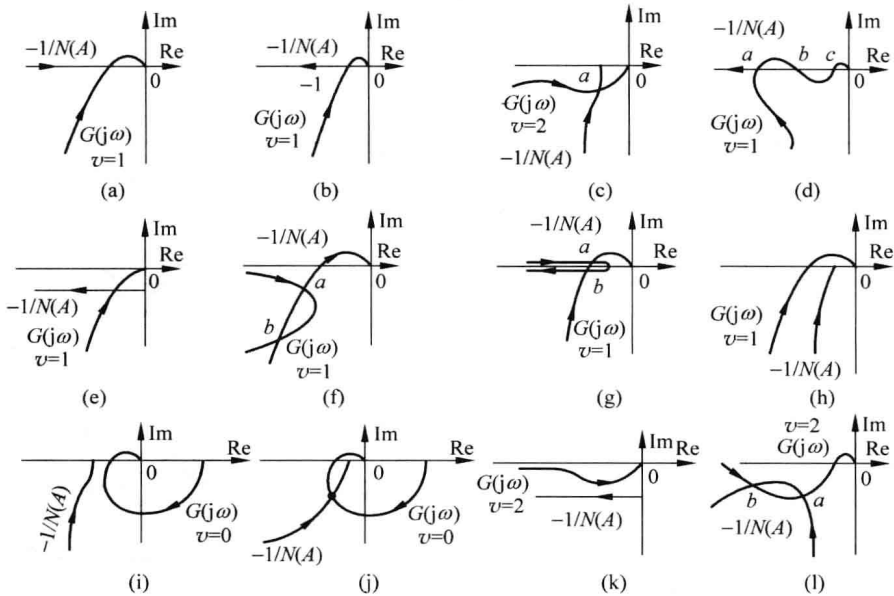


图 7-43 自振分析

- | | |
|--------------------|-----------------|
| 解 (a) 不是 | (g) a 点不是, b 点是 |
| (b) 是 | (h) 系统不稳定 |
| (c) 是 | (i) 系统稳定 |
| (d) a, c 点是, b 点不是 | (j) 不是 |
| (e) 是 | (k) 系统不稳定 |
| (f) a 点不是, b 点是 | (l) a 点是, b 点不是 |

7-13 非线性控制系统的结构图如图 7-44(a) 所示, 其中线性部分的幅相特性曲线如图 7-44(b) 所示, 非线性特性示于图 7-44(c)~图 7-44(g)。试应用描述函数法分析含图 7-44(c)~图 7-44(g) 所示典型非线性特性的系统稳定性。

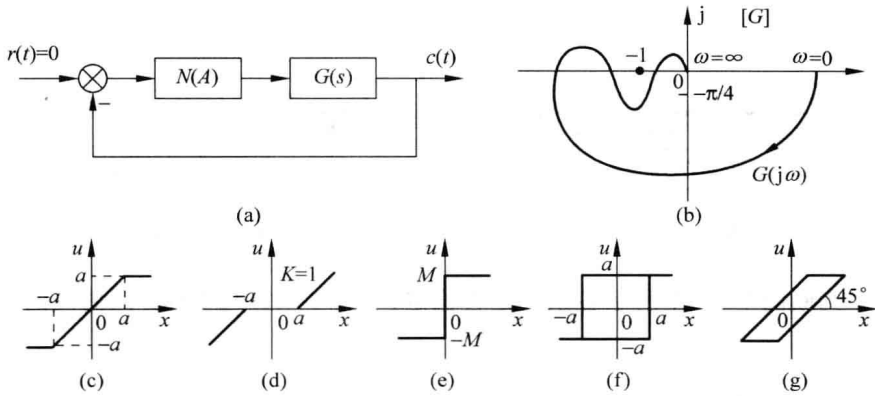


图 7-44 稳定性分析

解

标号	自振点	非自振点	使系统稳定的 A 值范围	自振的 A 值范围	图 示
(c)	β	α	(a, α)	$(\alpha, \infty) \Rightarrow \beta$	
(d)	β	α	(a, α)	$(\alpha, \infty) \Rightarrow \beta$	
(e)	α, γ	β	/	$(0, \beta) \Rightarrow \alpha$ $(\beta, \infty) \Rightarrow \gamma$	
(f)	α, γ	β	/	$(0, \beta) \Rightarrow \alpha$ $(\beta, \infty) \Rightarrow \gamma$	
(g)	β	α	(a, α)	$(\alpha, \infty) \Rightarrow \beta$	

7-14 某非线性控制系统的结构图如图 7-45 所示,其中 $G_c(s)$ 为线性校正环节的传递函数。若取 $G_c(s) = \frac{a\tau s + 1}{\tau s + 1}$, 试分析:

- (1) $0 < a < 1$
- (2) $a > 1$

时系统的稳定性。

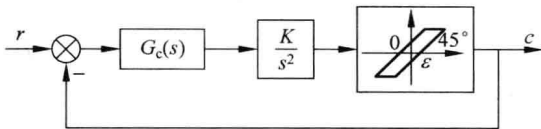
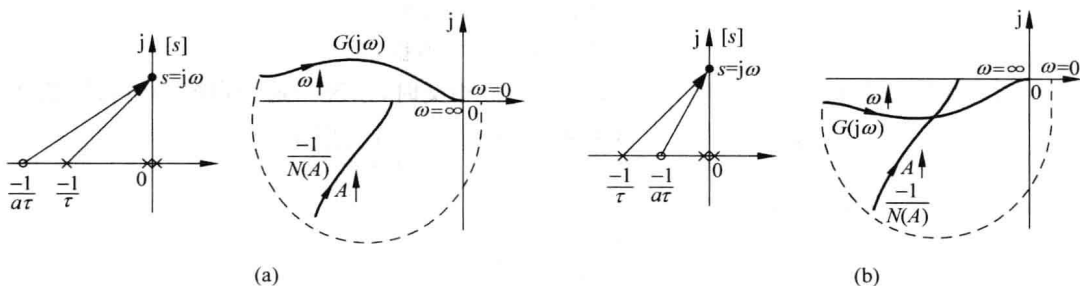


图 7-45 题 7-14 图

解 线性部分的传递函数为 $G(s) = \frac{K}{s^2} G_c(s) = \frac{K(a\tau s + 1)}{s^2(\tau s + 1)}$

(1) $0 < a < 1$ 时, 绘出 $G(j\omega)$ 曲线和 $\frac{-1}{N(A)}$ 曲线(示意)如图解 7-14(a) 所示。 $\frac{-1}{N(A)}$ 被 $G(j\omega)$ 曲线所包围, 故非线性系统不稳定。



图解 7-14

(2) $a > 1$ 时: 绘出 $G(j\omega)$ 曲线和 $\frac{-1}{N(A)}$ 曲线如图解 7-14(b) 所示。显然, $\frac{-1}{N(A)}$ 与 $G(j\omega)$ 的交点是自振点, 非线性系统自由响应最终会自振。

7-15 已知非线性系统的结构图如图 7-46 所示。图中非线性环节的描述函数为

$$N(A) = \frac{A+6}{A+2} \quad (A > 0)$$

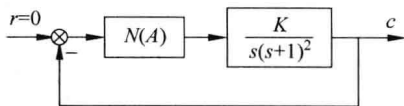


图 7-46 题 7-15 图

试用描述函数法确定:

- (1) 使该非线性系统稳定、不稳定以及产生周期运动时, 线性部分的 K 值范围;
- (2) 判断周期运动的稳定性, 并计算稳定周期运动的振幅和频率。

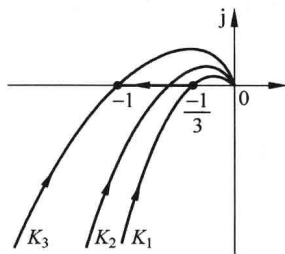
解 (1)

$$\frac{-1}{N(A)} = \frac{-(A+2)}{A+6}$$

$$\frac{-1}{N(0)} = \frac{-1}{3}, \quad \frac{-1}{N(\infty)} = -1$$

$$\frac{dN(A)}{dA} = \frac{-4}{(A+2)^2} < 0$$

$N(A)$ 单调降, $-1/N(A)$ 也为单调降函数。画出负倒描述函数曲线 $-1/N(A)$ 和 $G(j\omega)$ 曲线如图解 7-15 所示,可看出,当 K 从小到大变化时,系统会由稳定变为自振,最终不稳定。



图解 7-15

求使 $\text{Im}[G(j\omega)] = 0$ 的 ω 值。令

$$\angle G(j\omega) = -90^\circ - 2\arctan\omega = -180^\circ$$

得

$$\arctan\omega = 45^\circ, \quad \omega = 1$$

令

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{\omega=1} &= \frac{K}{\omega \sqrt{\omega^2 + 1}} \Big|_{\omega=1} \\ &= \frac{K}{2} = \begin{cases} \frac{1}{3} & \rightarrow K_1 = \frac{2}{3} \\ 1 & \rightarrow K_3 = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

可得出 K 值与系统稳定性之间的关系为

$$\begin{array}{ccccccc} K & 0 & \longrightarrow & 2/3 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & \infty \\ & & & \text{稳定} & & \text{自振} & & \text{不稳定} \end{array}$$

(2) 由图解 7-15 可见,当 $-1/N(A)$ 和 $G(j\omega)$ 相交时,系统一定会自振。由自振条件

$$N(A)G(j\omega) \Big|_{\omega=1} = \frac{A+6}{A+2} \cdot \frac{-K}{2} = \frac{-(A+6)K}{2(A+2)} = -1$$

$$(A+6)K = 2A+4$$

解出

$$\begin{cases} A = \frac{6K-4}{2-K} \\ \omega = 1 \end{cases} \quad \left(\frac{2}{3} < K < 2 \right)$$

7-16 具有滞环继电特性的非线性控制系统如图 7-47 所示,其中 $M=1, h=1$ 。

(1) 当 $T=0.5$ 时,分析系统的稳定性,若存在自振,确定自振参数;

(2) 讨论 T 对自振的影响。

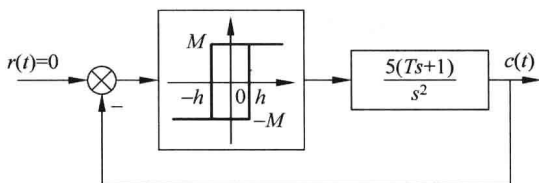


图 7-47 题 7-16 图

解 具有滞环继电特性的描述函数为

$$N(A) = \frac{4M}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A}\right)^2} - j \frac{4hM}{\pi A^2}, \quad A > h$$

代入 $M=1, h=1$, 有

$$N(A) = \frac{4}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{A}\right)^2} - j \frac{4}{\pi A^2}$$

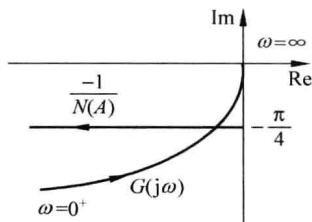
$$-\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi A \left(\sqrt{1 - \left(\frac{1}{A}\right)^2} + j \frac{1}{A}\right)}{4 \left(\sqrt{1 - \left(\frac{1}{A}\right)^2} - j \frac{1}{A}\right) \left(\sqrt{1 - \left(\frac{1}{A}\right)^2} + j \frac{1}{A}\right)} = -\frac{\pi}{4} \sqrt{A^2 - 1} - j \frac{\pi}{4}$$

其负倒描述函数 $-1/N(A)$ 曲线如图解 7-46 所示, $G(j\omega)$ 曲线位于第三象限, 两曲线必然有交点, 且该交点是自振点。

$$G(s) = \frac{5(Ts + 1)}{s^2}$$

$$G(j\omega) = -\frac{5}{\omega^2} - j \frac{5T}{\omega}$$

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)}$$



图解 7-46

根据虚部相等, 有

$$-j \frac{5T}{\omega} = -j \frac{\pi}{4}$$

$$\omega = \frac{20T}{\pi}$$

自振角频率随 T 增大而增大, 当 $T=0.5$ 时, $\omega=3.18$ 。

根据实部相等, 有

$$-\frac{5}{\left(\frac{20T}{\pi}\right)^2} = -\frac{\pi}{4} \sqrt{A^2 - 1}$$

解出非线性输入端振幅为

$$A = \sqrt{\frac{\pi^2}{400T^4} + 1}$$

当 $T=0.5$ 时, $A=1.18$ 。自振振幅随 T 增大而减小。

7-17 非线性系统如图 7-48 所示, 试用描述函数法分析周期运动的稳定性, 并确定系统输出信号振荡的振幅和频率。

解 将系统结构图等效变换为图解 7-17。

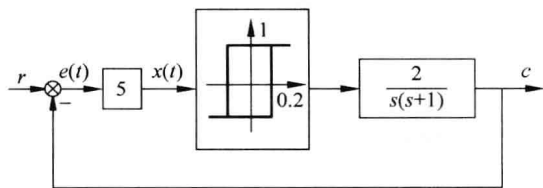
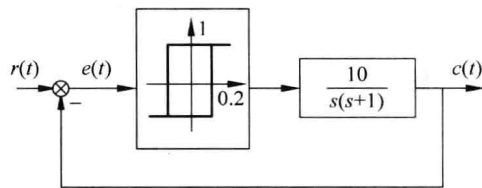


图 7-48 题 7-17 图



图解 7-17

$$G(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j\omega + 1)} = \frac{-10}{\omega^2 + 1} - j \frac{10}{\omega(\omega^2 + 1)}$$

$$N(A) = \frac{4}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{0.2}{A}\right)^2} - j \frac{4 \times 0.2}{\pi A^2}$$

$$= \frac{4}{\pi A} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{0.2}{A}\right)^2} - j \frac{0.2}{A} \right]$$

$$\frac{-1}{N(A)} = \frac{-\pi A}{4} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.2}{A}\right)^2} - j \frac{0.2}{A}} = \frac{-\pi A}{4} \sqrt{1 - \left(\frac{0.2}{A}\right)^2} - j \frac{0.2\pi}{4}$$

令 $G(j\omega)$ 与 $-1/N(A)$ 的实部、虚部分别相等得

$$\frac{10}{\omega^2 + 1} = \frac{\pi A}{4} \sqrt{1 - \left(\frac{0.2}{A}\right)^2}$$

$$\frac{10}{\omega(\omega^2 + 1)} = \frac{0.2\pi}{4} = 0.157$$

两式联立求解得 $\omega = 3.91, A = 0.806$ 。

由图 7-48, $r(t) = 0$ 时, 有 $c(t) = -e(t) = \frac{1}{5}x(t)$, 所以 $c(t)$ 的振幅为 $\frac{0.806}{5} = 0.161$ 。

7-18 某非线性控制系统的结构图如图 7-49 所示, 其中, 线性部分的传递函数

$$G(s) = \frac{K e^{-0.1s}}{s(0.1s + 1)}$$

试用描述函数法判定 $K = 0.1$ 时系统的稳定性, 并确定不使系统产生自振的参数 K 的取值范围。

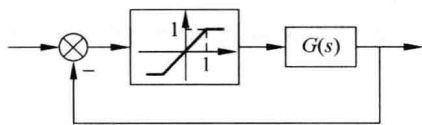
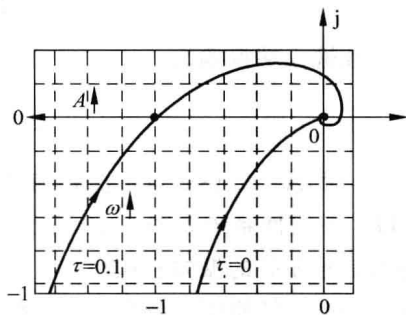


图 7-49 题 7-18 图



图解 7-18

解

$$\varphi(\omega_g) = -0.1\omega - \frac{\pi}{2} - \arctan 0.1\omega = -\pi$$

$$\arctan 0.1\omega = \frac{\pi}{2} - 0.1\omega$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - 0.1\omega\right) = \cot 0.1\omega = 0.1\omega$$

试根得

$$0.1\omega = 0.8603 \quad \omega = 8.603$$

令

$$|G(j\omega_g)| = \frac{K}{\omega_g \sqrt{(0.1\omega_g)^2 + 1}} = 1$$

$$K_0 = \omega_g \sqrt{(0.1\omega_g)^2 + 1} = 11.35$$

可见,使系统稳定的 K 值范围为 $0 < K < K_0 = 11.35$ 。故 $K=0.1$ 时系统稳定。

7-19 用描述函数法分析图 7-50 所示系统的稳定性,并判断系统是否存在自振。若存在自振,求出自振振幅和自振频率 ($M > h$)。

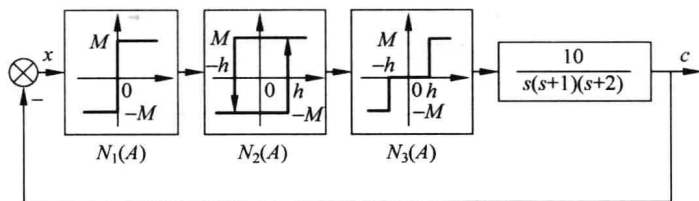
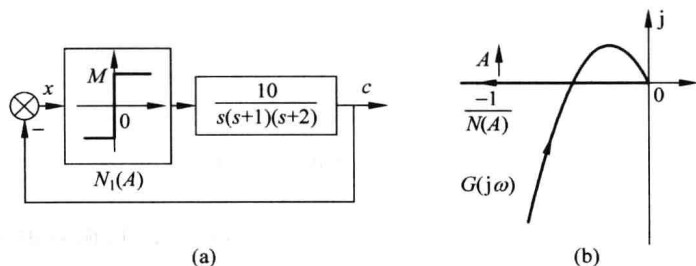


图 7-50 题 7-19 图

解 因为 $M > h$, 所以当 $x = -c > 0$ 时 $N_1(A)$ 环节输出为 $M > h$, $N_2(A)$ 环节输出也为 $M > h$ 。同样 $N_3(A)$ 输出也是 M ; 当 $x < 0$ 时情况类似。所以实际上 $N_2(A)$ 和 $N_3(A)$ 不起作用,系统可等效为如图解 7-19(a) 的形式。



图解 7-19

画出 $-1/N(A)$ 和 $G(j\omega)$ 曲线如图解 7-19(b) 所示。可见系统一定自振。由自振条件

$$N_1(A) \cdot G(j\omega) = -1$$

即

$$\frac{4M}{\pi A} \cdot \frac{10}{j\omega(1+j\omega)(2+j\omega)} = -1$$

$$\frac{40M}{\pi A} = -j\omega(1+j\omega)(2+j\omega) = 3\omega^2 - j\omega(2-\omega^2)$$

比较实部、虚部有

$$\begin{cases} \frac{40M}{\pi A} = 3\omega^2 \\ \omega(2 - \omega^2) = 0 \end{cases}$$

解出

$$\begin{cases} A = 2.12M \\ \omega = \sqrt{2} \end{cases}$$

7-20 试用描述函数法说明图 7-51 所示系统必然存在自振,并确定输出信号 c 的自振振幅和频率,分别画出信号 c 、 x 、 y 的稳态波形。

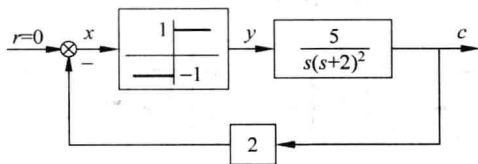


图 7-51 题 7-20 图

解 $N(A) = \frac{4}{\pi A}, \frac{-1}{N(A)} = \frac{-\pi A}{4}$

绘出 $-1/N(A)$ 和 $G(j\omega)$ 曲线如图解 7-20(a) 所示,可见 D 点是自振点,系统一定会自振。由自振条件可得

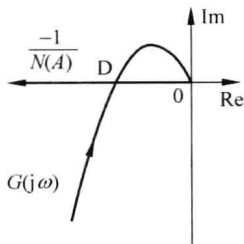
$$N(A) = \frac{-1}{G(j\omega)}$$

即

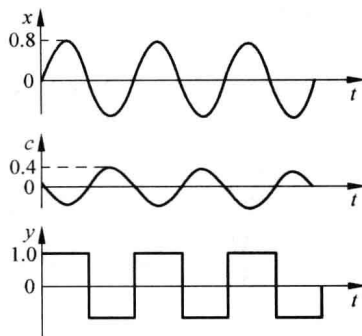
$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi A} &= \frac{-j\omega(j\omega + 2)^2}{10} \\ &= \frac{4\omega^2}{10} - \frac{j\omega(4 - \omega^2)}{10} \end{aligned}$$

令虚部为零解出 $\omega = 2$,代入实部得 $A = 0.796$,则输出信号的自振幅值为: $A_c = A/2 = 0.398$ 。

画出 c 、 x 、 y 点的信号稳态波形,如图解 7-20(b) 所示。



图解 7-20(a)



图解 7-20(b)

7-21 试用描述函数法和相平面法分别研究图 7-52 所示系统的周期运动,从而说明应用描述函数法所做的基本假定的意义。

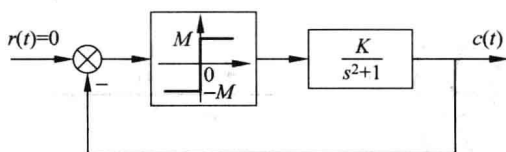


图 7-52 题 7-21 图

解 (1) 相平面法

① 线性部分

$$G(s) = \frac{C(s)}{U(s)} = \frac{K}{s^2 + 1}$$

$$\ddot{c} + c = Ku$$

② 非线性部分

$$u = \begin{cases} M & e > 0 \\ -M & e < 0 \end{cases}$$

③ 反馈口

$$e = -c, \quad \dot{e} = -\dot{c}, \quad \ddot{e} = -\ddot{c}$$

④ 综合有

$$\ddot{e} + e = -Ku = \begin{cases} -KM & e > 0 \quad (\text{I}) \\ KM & e < 0 \quad (\text{II}) \end{cases}$$

开关线

$$e = 0$$

I 区

$$\ddot{e} + e = -KM, \quad \text{平衡点: } e_{01} = -KM$$

II 区

$$\ddot{e} + e = KM, \quad \text{平衡点: } e_{01} = KM$$

特征方程

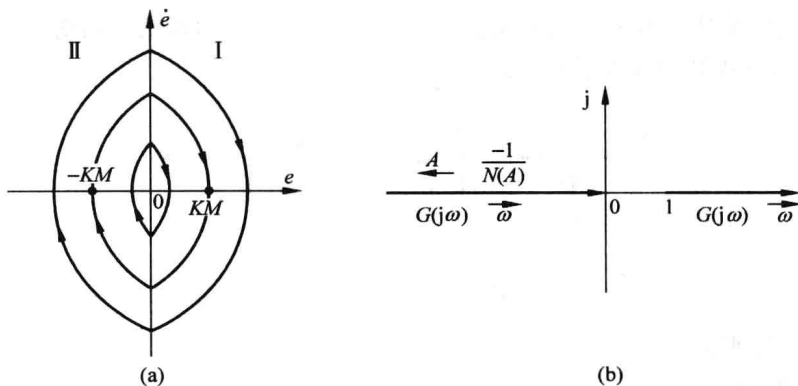
$$s^2 + 1 = 0$$

特征根

$$s_{1,2} = \pm j \quad (\text{中心点})$$

绘制初始条件($e_0=2, \dot{e}_0=0$)的相轨迹如图解 7-21(a)所示。可见,系统自由响应是周期运动,周期运动的幅值、频率由初始条件确定。

(2) 描述函数法: 分别绘出系统线性部分的幅相曲线和负倒描述函数曲线如图解 7-21(b)所示。可见两条曲线在负实轴上重叠,只是方向相反。这表明系统可能以任意有限的幅值做周期运动(幅值越大,频率越小),不好断定系统是否稳定或者自振。由于该题中线性部分的低通滤波特性不好,导致用描述函数法得不出明确的答案。



图解 7-21

7-22 试分别用描述函数法和相平面法分析图 7-53 所示非线性系统的稳定性及自振

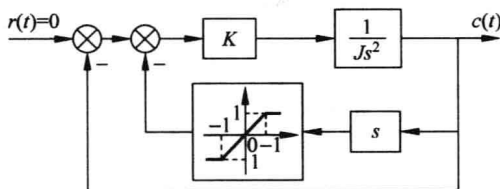


图 7-53 题 7-22 图

解 (1) 描述函数法

首先将系统结构图化为非线性环节和线性环节串联的标准形式,如图解 7-22(a)所示。

$$D(A, s) = 1 + K \frac{1}{Js^2} sN(A) + K \frac{1}{Js^2} = 1 + \frac{K}{Js^2} + \frac{K}{Js} N(A) = 0$$

$$\frac{K}{Js} N(A) = - \left(1 + \frac{K}{Js^2} \right)$$

$$\frac{K}{Js} N(A) = -1$$

$$\frac{sK}{Js^2 + K} N(A) = -1$$

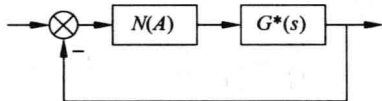
$$G^*(s) = \frac{sK}{Js^2 + K}$$

$$G^*(j\omega) = \frac{j\omega K}{s^2 + K - J\omega^2}$$

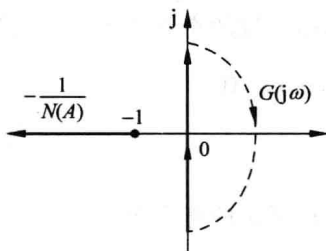
显然:
$$\begin{cases} G^*(j0) = 0 \angle +90^\circ, & G^*(j\infty) = 0 \\ G^*(j\sqrt{\frac{K}{J}}^-) = \infty \angle +90^\circ, & G^*(j\sqrt{\frac{K}{J}}^+) = -\infty \angle -90^\circ \end{cases}$$

线性部分 $G(s)$ 的幅相曲线如图解 7-22(b)所示。非线性环节的描述函数为

$$N(A) = \frac{2}{\pi} \left[\arcsin \frac{1}{A} + \frac{1}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{A} \right)^2} \right] \quad A \geq 1$$



图解 7-22(a)



图解 7-22(b)

其负倒描述函数为

$$-\frac{1}{N(A)} = \frac{\pi}{2 \left[\arcsin \frac{1}{A} + \frac{1}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{A}\right)^2} \right]} \quad A \geq 1$$

显然

$$A = 1, \quad -\frac{1}{N(A)} = -1$$

$$A = \infty, \quad -\frac{1}{N(A)} = -\infty$$

绘出 $-1/N(A)$ 曲线如图解 7-22(b) 所示。可见 $G(j\omega)$ 曲线不包围 $-1/N(A)$ 曲线且与之不相交, 故系统稳定。

(2) 相平面法

线性部分对应的系统方程为

$$J\ddot{c} + Kc = Ku$$

非线性环节方程为

$$u = \begin{cases} -1 & e < -1 & \text{(I)} \\ e & |e| \leq 1 & \text{(II)} \\ 1 & e > 1 & \text{(III)} \end{cases}$$

比较点处有

$$e = r - c = -c, \quad \dot{e} = -\dot{c}, \quad \ddot{e} = -\ddot{c}$$

整理上述关系后可得

$$J\ddot{e} + Ke = \begin{cases} 0 & e < -1 & \text{(I)} \\ -Ke & |e| \leq 1 & \text{(II)} \\ 0 & e > 1 & \text{(III)} \end{cases}$$

开关线为

$$e = \pm 1$$

在 (I)、(III) 区域, 有

$$\frac{d\dot{e}}{de} = -\frac{Ke}{J\dot{e}}$$

令 $\frac{d\dot{e}}{de} = \frac{0}{0}$, 得系统的奇点为 $(0,0)$ 。特征根 $\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{K}{J}}$, 奇点 $(0,0)$ 为中心点。

在(II)区域, 有

$$\frac{d\dot{e}}{de} = -\frac{Ke + K\dot{e}}{J\dot{e}}$$

令 $\frac{d\dot{e}}{de} = \frac{0}{0}$, 得系统的奇点为 $(0,0)$ 。特征根 $\lambda_{3,4} = -\frac{K}{2J} \pm \frac{1}{2J}\sqrt{K^2 - 4JK}$ 。若 $K \geq 4J$, 奇点 $(0,0)$ 为稳定的节点; 若 $K < 4J$, 奇点 $(0,0)$ 为稳定的焦点。

第 8 章 习题及解答

8-1 已知电枢控制的直流伺服电机的微分方程组及传递函数为

$$u_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + E_b$$

$$E_b = K_b \frac{d\theta_m}{dt}$$

$$M_m = C_m i_a$$

$$M_m = J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + f_m \frac{d\theta_m}{dt}$$

$$\frac{\Theta_m(s)}{U_a(s)} = \frac{C_m}{s[L_a J_m s^2 + (L_a f_m + J_m R_a)s + (R_a f_m + K_b C_m)]}$$

(1) 设状态变量 $x_1 = \theta_m, x_2 = \dot{\theta}_m, x_3 = \ddot{\theta}_m$, 输出量 $y = \theta_m$, 试建立其动态方程;

(2) 设状态变量 $\bar{x}_1 = i_a, \bar{x}_2 = \theta_m, \bar{x}_3 = \dot{\theta}_m$ 及 $y = \theta_m$, 试建立其动态方程。

解 (1) 由题意可知

$$\begin{cases} x_1 = \theta_m \\ x_2 = \dot{x}_1 = \dot{\theta}_m \\ x_3 = \dot{x}_2 = \ddot{\theta}_m \\ y = \theta_m = x_1 \end{cases}$$

由已知

$$\begin{cases} u_a = R_a i_a + L_a \ddot{i}_a + E_b \\ E_b = K_b \dot{\theta}_m \\ M_m = C_m i_a \\ M_m = J_m \ddot{\theta}_m + f_m \dot{\theta}_m \end{cases}$$

可推导出

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -\frac{f_m L_a + J_m R_a}{L_a J_m} x_3 - \frac{R_a f_m + K_b C_m}{L_a J_m} x_2 + \frac{C_m}{L_a J_m} u_a \\ y = x_1 \end{cases}$$

由上式, 可列动态方程如下

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{R_a f_m + K_b C_m}{L_a J_m} & -\frac{L_a f_m + J_m R_a}{L_a J_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{C_m}{L_a J_m} \end{bmatrix} u_a$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(2) 由题意可知: $\bar{x}_1 = i_a, \bar{x}_2 = \theta_m, \bar{x}_3 = \dot{\theta}_m, y = \theta_m$

$$\text{可推导出} \begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \dot{i}_a = -\frac{R_a}{L_a} i_a - \frac{K_b}{L_a} \dot{\theta}_m + \frac{1}{L_a} u_a = -\frac{R_a}{L_a} \bar{x}_1 - \frac{K_b}{L_a} \bar{x}_3 + \frac{1}{L_a} u_a \\ \dot{\bar{x}}_2 = \dot{\theta}_m = \bar{x}_3 \\ \dot{\bar{x}}_3 = \ddot{\theta}_m = \frac{C_m}{J_m} i_a - \frac{f_m}{J_m} \dot{\theta}_m = \frac{C_m}{J_m} \bar{x}_1 - \frac{f_m}{J_m} \bar{x}_3 \\ y = \theta_m = \bar{x}_2 \end{cases}$$

可列动态方程如下

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \\ \dot{\bar{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & 0 & -\frac{K_b}{L_a} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{C_m}{J_m} & 0 & -\frac{f_m}{J_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_a \quad y = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix}$$

由

$$\begin{cases} x_1 = \theta_m \\ x_2 = \dot{\theta}_m \\ x_3 = \ddot{\theta}_m \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} \bar{x}_1 = i_a \\ \bar{x}_2 = \theta_m \\ \bar{x}_3 = \dot{\theta}_m \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x_1 = \bar{x}_2 = \theta_m \\ x_2 = \bar{x}_3 = \dot{\theta}_m \\ x_3 = \ddot{\theta}_m = \frac{C_m}{J_m} i_a - \frac{f_m}{J_m} \dot{\theta}_m = \frac{C_m}{J_m} \bar{x}_1 - \frac{f_m}{J_m} \bar{x}_3 \end{cases}$$

由上式可得变换矩阵为 $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{C_m}{J_m} & 0 & -\frac{f_m}{J_m} \end{bmatrix}$

8-2 设系统微分方程为 $\ddot{y} + 6\dot{y} + 11y = 6u$ 。式中 u 和 y 分别为系统输入、输出量。试列写可控标准型(即矩阵 A 为友矩阵)及可观测标准型(即矩阵 A 为友矩阵转置)状态空间表达式,并画出状态变量图。

解 由题意可得

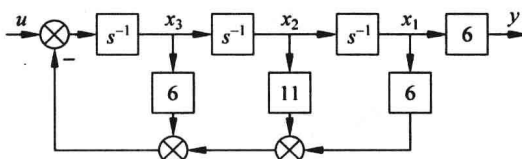
$$\frac{y}{u} = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

可控标准型

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [6 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

状态变量图如图解 8-2(1)所示。



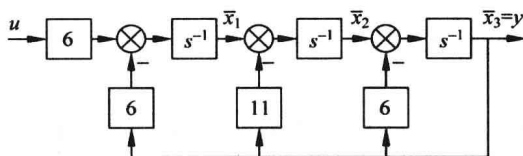
图解 8-2(1)

由方程得可观测标准型

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \\ \dot{\bar{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix}$$

状态变量图如图解 8-2(2)所示。



图解 8-2(2)

8-3 已知系统结构图如图 8-31 所示,其状态变量为 x_1, x_2, x_3 。试求动态方程,并画出状态变量图。

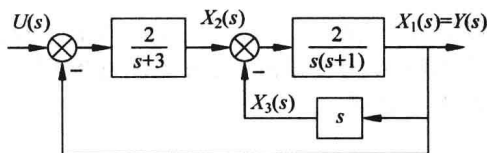


图 8-31 题 8-3 图

由结构图可得

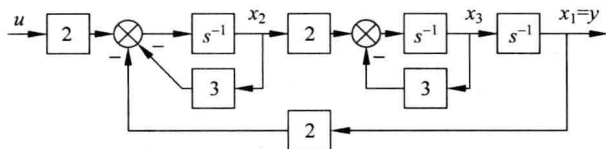
$$\begin{cases} \frac{x_1}{x_2 - x_3} = \frac{2}{s(s+1)} & \Rightarrow s^2 x_1 + s x_1 = 2x_2 - 2x_3 & \text{即 } \ddot{x}_1 + \dot{x}_1 = 2x_2 - 2x_3 \\ \frac{x_3}{x_1} = s & \Rightarrow s x_1 = x_3 & \text{即 } \dot{x}_1 = x_3 \\ \frac{x_2}{u - x_1} = \frac{2}{s+3} & \Rightarrow s x_2 = -2x_1 - 3x_2 + 2u & \text{即 } \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + 2u \end{cases}$$

由上述三式,可列动态方程如下

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

状态变量图如图解 8-3 所示。



图解 8-3

8-4 已知系统传递函数 $G(s) = \frac{s^2 + 6s + 8}{s^2 + 4s + 3}$, 试列写可控标准型、可观测标准型、对角型动态方程, 并画出状态变量图。

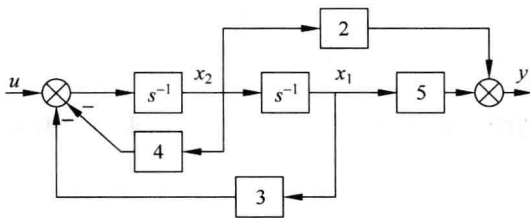
解

(1) 可控标准型

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + u$$

状态变量图如图解 8-4(1) 所示。



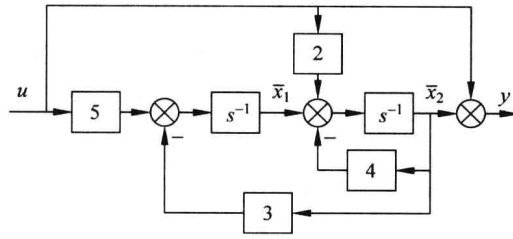
图解 8-4(1)

(2) 可观测标准型

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + u$$

状态变量图如图解 8-4(2) 所示。



图解 8-4(2)

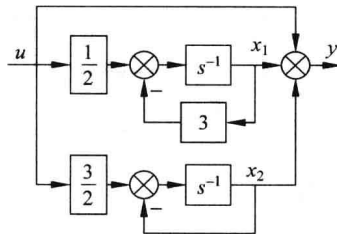
$$(3) G(s) = \frac{s^2 + 6s + 8}{s^2 + 4s + 3} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{s+3} + \frac{\frac{3}{2}}{s+1}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} u$$

由上式可得对角型

$$y = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + u$$

状态变量图如图解 8-4(3) 所示。



图解 8-4(3)

8-5 已知系统传递函数 $G(s) = \frac{5}{(s+1)^2(s+2)}$, 试求约当型动态方程, 并画出状态变量图。

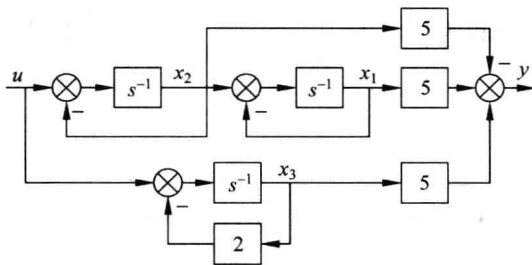
$$\text{解 } G(s) = \frac{5}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{5}{(s+1)^2} - \frac{5}{s+1} + \frac{5}{s+2}$$

由上式, 可得约当型动态方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [5 \quad -5 \quad 5] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

状态变量图如图解 8-5 所示。



图解 8-5

8-6 已知双输入-双输出系统状态方程和输出方程分别为

$$\dot{x}_1 = x_2 + u_1$$

$$\dot{x}_2 = x_3 + 2u_1 - u_2$$

$$\dot{x}_3 = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + 2u_2$$

$$y_1 = x_1 - x_2$$

$$y_2 = 2x_1 + x_2 - x_3$$

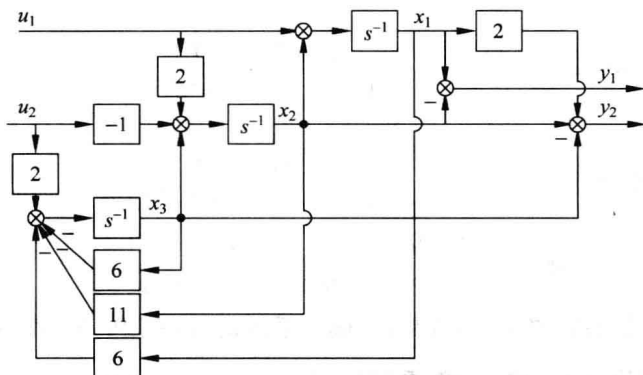
试写出矩阵形式的动态方程,并画出系统的状态变量图。

解 由题中给定方程可列写出动态方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

状态变量图如图解 8-6 所示。



图解 8-6

8-7 已知系统动态方程为
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \ 0 \ 1] \mathbf{x} \end{cases}$$
, 试求系统的传递函数 $G(s)$ 。

解

$$\begin{aligned} G(s) &= \mathbf{c}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \mathbf{b} = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 2 & s+3 & 0 \\ 1 & -1 & s-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^3 - 7s - 6} [-s - 5 \quad s - 1 \quad s^2 + 3s + 2] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{2s^2 + 7s + 3}{s^3 - 7s - 6} \end{aligned}$$

8-8 已知系统矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 至少用两种方法求状态转移矩阵。

解 (1) 级数法

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2 t^2 + \dots + \\ &= \begin{bmatrix} 1 - t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^4 + \dots & 0 \\ 0 & 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^4 + \dots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(2) 拉普拉斯变换法

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

8-9 已知矩阵 $\Phi_1(t) = \begin{bmatrix} 6e^{-t} - 5e^{-2t} & 4e^{-t} - 4e^{-2t} \\ -3e^{-t} + 3e^{-2t} & -2e^{-t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix}$

和 $\Phi_2(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$

判断 Φ_1 、 Φ_2 是否为状态转移矩阵, 若是, 则确定系统的状态矩阵 \mathbf{A} ; 若不是, 请说明理由。

解 转移矩阵应满足: $\dot{\Phi} = \mathbf{A}\Phi, \Phi(0) = \mathbf{I}$

$$\Phi_1(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} \quad \Phi_2(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

假设 $\Phi_1(t), \Phi_2(t)$ 为转移矩阵则

$$A_1 = \dot{\Phi}_1(t) \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} -6e^{-t} + 10e^{-2t} & -4e^{-t} + 8e^{-2t} \\ 3e^{-t} - 6e^{-2t} & 2e^{-t} - 6e^{-2t} \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \dot{\Phi}_2(t) \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \\ 2e^{-t} - 4e^{-2t} & e^{-t} - 4e^{-2t} \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

则

$$A_1 \Phi_1(t) = \begin{bmatrix} 12e^{-t} - 8e^{-2t} & 8e^{-t} - 4e^{-2t} \\ -9e^{-t} + 8e^{-2t} & -6e^{-t} + 4e^{-2t} \end{bmatrix} \neq \dot{\Phi}_1(t)$$

$$A_2 \Phi_2(t) = \begin{bmatrix} -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \\ 2e^{-t} - 4e^{-2t} & e^{-t} - 4e^{-2t} \end{bmatrix} = \dot{\Phi}_2(t) = \Phi_2(t) A_2$$

所以 $\Phi_1(t)$ 不是转移矩阵, $\Phi_2(t)$ 是转移矩阵, 其状态阵为 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ 。

8-10 试求状态方程 $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$ 的解。

解 由题意可得

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \\ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 \end{cases}$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s+2 & 0 \\ 0 & 0 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{x}_0$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} \mathbf{x}_0$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \mathbf{x}_0$$

8-11 已知系统状态方程为 $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$, 初始条件为 $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$ 。

试求系统在单位阶跃输入作用下的响应。

解 此题为求非齐次状态方程的解,对于非齐次状态方程。

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{b}u(\tau)d\tau$$

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ s-1 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{1}{(s-1)^2} & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{t-\tau} & 0 \\ (t-\tau)e^{t-\tau} & e^{t-\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} -1 + 2e^t \\ 2te^t \end{bmatrix}$$

8-12 已知差分方程 $y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k) = 2u(k+1) + 3u(k)$, 并且 $y(0) = 0, y(1) = 1$, 试列写可控标准型离散动态方程, 并求出 $\mathbf{u}(k) = \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 时的系统响应。

解 由差分方程可得离散动态方程如下

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{H} \cdot u(k) \\ y(k) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [3 \quad 2]$$

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{x}(0) + \mathbf{H} \cdot u(0) = 0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y(1) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(1) = [3 \quad 2] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2$$

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{x}(1) + \mathbf{H} \cdot u(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$y(2) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(2) = [3 \quad 2] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = -1$$

8-13 已知连续系统动态方程为 $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = [1 \quad 0] \mathbf{x}$, 设采样周期 $T = 1\text{s}$, 试求离散化动态方程。

解

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s-2 \end{bmatrix}^{-1} = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s-2)} \\ 0 & \frac{1}{s-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(e^{2t} - 1) \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(T=1) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(e^2 - 1) \\ 0 & e^2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 3.19 \\ 0 & 7.39 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}(T=1) = \int_0^T \Phi(\tau) \mathbf{B} d\tau = \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(e^{2\tau} - 1) \\ 0 & e^{2\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} e^{2\tau} - \tau \right) \\ \frac{1}{2} e^{2\tau} \end{bmatrix} \Big|_0^1 = \begin{bmatrix} 1.347 \\ 3.195 \end{bmatrix}$$

8-14 试用李雅普诺夫第二法判断 $\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$, $\dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2$ 平衡状态的稳定性。

解 平衡点为 $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \end{cases}$, 构造 $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$, 则

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1(-x_1 + x_2) + 2x_2(2x_1 - 3x_2) \\ &= -2x_1^2 + 6x_1x_2 - 6x_2^2 \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

判定 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 性质

$$\begin{cases} -2 < 0 \\ \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 12 - 9 = 3 > 0 \end{cases}$$

$\dot{V}(\mathbf{x})$ 负定, 因此平衡状态是大范围一致渐近稳定的。

8-15 已知系统状态方程为 $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, 求当矩阵 $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$

时, 矩阵 \mathbf{P} 的值; 若选 \mathbf{Q} 为正半定矩阵, 求对应的 \mathbf{P} 矩阵的值, 并判断系统的稳定性。

解
令

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q} = -\mathbf{I} \\ & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

解得

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} -4 & 8 & -12 \\ 8 & 6 & -13 \\ -12 & -13 & 44 \end{bmatrix}$$

主子行列式

$$-4 < 0$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 8 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = -24 - 64 = -88 < 0$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 8 & -12 \\ 8 & 6 & -13 \\ -12 & -13 & 44 \end{vmatrix} = -1564 < 0$$

因此不定。

选

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则 $\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = -x_2^2$, 为负半定。

由等式 $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$ 解得

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

为正半定。

判定系统稳定性

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s-2 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & s+1 \end{vmatrix} = (s+2)(s+1)^2$$

三个特征值分别为: $-2, -1, -1$ 。因此系统稳定。

8-16 设线性定常离散系统状态方程为 $\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K}{2} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k), K > 0$, 试求使

系统渐近稳定的 K 值范围。

解 令 $\Phi^T \mathbf{P} \Phi - \mathbf{P} = -\mathbf{Q} = -\mathbf{I}$

即

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{k}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K}{2} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解得

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8+K^2}{4-K^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{4-K^2} \end{bmatrix}$$

若要满足题意,需令 $\begin{cases} K > 0 \\ K^2 < 4 \end{cases}$ 。因此,渐近稳定的条件为 $0 < K < 2$ 。

8-17 试判断下列系统的状态可控性:

$$(1) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u;$$

$$(2) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u;$$

$$(3) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix};$$

$$(4) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u;$$

$$(5) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_1 & \\ & & & \lambda_1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u;$$

$$(6) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & 1 & \\ & & \lambda_1 & \\ & & & \lambda_1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_0.$$

解

$$(1) P_c = [B : AB : A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\text{rank } P_c = 2 < n = 3$ 该系统不可控

$$(2) P_c = [B : AB : A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\text{rank } P_c = 2 < n = 3$ 该系统不可控。

$$(3) P_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

rank $P_c = 3 = n$ 该系统可控。

$$(4) P_c = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 16 \\ 2 & -8 & 32 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

rank $P_c = 2 < n = 3$ 该系统不可控。

$$(5) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$P_c = [\mathbf{B} : \mathbf{AB} : \mathbf{A}^2\mathbf{B} : \mathbf{A}^3\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2\lambda_1 & 3\lambda_1 \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 \end{bmatrix}$$

矩阵不满秩,该系统不可控。

$$(6) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$P_c = [\mathbf{B} : \mathbf{AB} : \mathbf{A}^2\mathbf{B} : \mathbf{A}^3\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3\lambda_1 \\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & 3\lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 \end{bmatrix}$$

矩阵不满秩,该系统不可控。

8-18 设系统状态方程为 $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix} u$, 并设系统状态可控, 试求 a, b 。

解

$$P_c = [\mathbf{B} : \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & ab - 1 \end{bmatrix}$$

令 $|P_c| = ab - 1 - b^2 \neq 0 \Rightarrow a \neq b + \frac{1}{b}$ 时, 即可满足可控性条件。

8-19 设系统传递函数 $G(s) = \frac{s+a}{s^3+7s^2+14s+8}$, 并设系统状态可控、可观测, 试求 a 值。

解

$$G(s) = \frac{s+a}{s^3+7s^2+14s+8} = \frac{s+a}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$

① 采用可控标准型, 不论 a 为何值, 系统总可控。

② 在任意三阶实现情况下可控, 则 $a \neq 1, 2, 4$ 。

8-20 试判断下列系统的可观性:

(1)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u;$$

$$y = [1 \quad 1 \quad 0] \mathbf{x}$$

(2)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x};$$

$$y = [1 \quad 1 \quad 1] \mathbf{x}$$

(3)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x};$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

(4)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

$$y = [0 \quad 1 \quad 1] \mathbf{x}$$

解

$$(1) \mathbf{P}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rank } \mathbf{P}_c = 3 = n$ 该系统可观。

$$(2) \mathbf{P}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 13 & 1 \end{bmatrix}$$

$\text{rank } \mathbf{P}_c = 3 = n$ 该系统可观。

(3) 该形式为约当标准型, 直接判定, 该系统可观。

(4) 该形式为约当标准型, 直接判定, 该系统不可观。

8-21 试确定使系统 $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mathbf{x}$, $y = [1 \quad -1] \mathbf{x}$ 可观测的 a, b 。

解

$$\mathbf{P}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a & 1-b \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{P}_c| = 1 - b + a \neq 0$$

 即 $b \neq a + 1$ 时, 系统可观。

8-22 已知系统动态方程各矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

试用传递函数矩阵判断系统的可控性和可观测性。

解

$$(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s-1 & -3 & -2 \\ 0 & s-4 & -2 \\ 0 & 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{(s-1)^2(s-4)} \begin{bmatrix} (s-1)(s-4) & 3(s-1) & 2(s-1) \\ 0 & (s-1)^2 & 2(s-1) \\ 0 & 0 & (s-1)(s-4) \end{bmatrix}$$

判断可控性

$$(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} s-4 & 3 & 2 \\ 0 & s-1 & 2 \\ 0 & 0 & s-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-1)(s-4)} \begin{bmatrix} 2 & s-4 \\ 2 & 0 \\ s-4 & 0 \end{bmatrix}$$

令

$$a_1 [2 \quad s-4] + a_2 [2 \quad 0] + a_3 [s-4 \quad 0] = 0$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

 所以 $(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}$ 中三行向量线性无关, 因此该系统可控。

判断可观性

$$\mathbf{C}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-4 & 3 & 2 \\ 0 & s-1 & 2 \\ 0 & 0 & s-4 \end{bmatrix} \frac{1}{(s-1)(s-4)}$$

$$= \frac{1}{(s-1)(s-4)} \begin{bmatrix} s-4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & s-4 \end{bmatrix}$$

$$\text{令 } a_1 \begin{bmatrix} s-4 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 2 \\ s-4 \end{bmatrix} = 0$$

 解得 $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ 。

 所以, $\mathbf{C}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}$ 中三行向量线性无关, 因此该系统可观测。

8-23 已知矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 试求 \mathbf{A} 的特征方程、特征值和特征向量, 并求出

变换矩阵,将 A 约当化。

解

$$(1) D(s) = |s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ -1 & 0 & 0 & s \end{vmatrix} = s^4 - 1$$

$$(2) \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1 \quad \lambda_{3,4} = \pm j$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & j & \\ & & & -j \end{bmatrix}$$

$$(3) \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ j \\ -1 \\ -j \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -j \\ -1 \\ j \end{bmatrix}$$

对角化变换矩阵

$$\mathbf{P} = [\mathbf{P}_1 \quad \mathbf{P}_2 \quad \mathbf{P}_3 \quad \mathbf{P}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & j & -j \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -j & j \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}\Lambda = \mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & j & -j \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -j & j \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

所以 \mathbf{P} 可使 \mathbf{A} 对角化。

8-24 将状态方程 $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$ 化为可控标准型。

解

$$\mathbf{P}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

所以, $\text{rank } \mathbf{P}_c = 2$, 可控, 可化为可控标准型。

$$\mathbf{P}_c^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

取 $\mathbf{P}_1 = \frac{1}{8} [-1 \quad 1]$, 则

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_1 \mathbf{A} \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

验证

$$\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$PB = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

验证完毕。

故可控标准型实现对应的 A, B 阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

8-25 已知系统传递函数为 $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{s^2+3s+2}$, 试分别写出系统可控、不可观测, 可观测、不可控, 不可控、不可观测的动态方程。

解

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{s^2+3s+2} = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)}$$

传递函数有零极点对消, 因此不可控或不可观。

可控、不可观方程

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 1] \mathbf{x} \end{aligned}$$

可观测、不可控方程

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [0 \quad 1] \mathbf{x} \\ \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{0}{s+1} + \frac{1}{s+2} \end{aligned}$$

不可控、不可观测方程

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [0 \quad 1] \mathbf{x} \end{aligned}$$

8-26 已知系统动态方程各矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [-4 \quad -3 \quad 1 \quad 1]$$

试求可控子系统和不可控子系统的动态方程。

解

$$P_c = [\mathbf{b} : A\mathbf{b} : A^2\mathbf{b} : A^3\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 11 & 47 & 191 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } P_c = 2$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{T} &= \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 27 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 27 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{TAT}^{-1} &= \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 27 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 27 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 0 & -108 & -75 & -16 \\ 27 & 135 & 21 & -2 \\ 0 & 0 & 81 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 54 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{Tb} &= \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 27 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 27 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 27 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{cT}^{-1} &= [-4 \quad -3 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [1 \quad 10 \quad -4 \quad -3]
 \end{aligned}$$

所以,可控子系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_c = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 0 & -108 \\ 27 & 135 \end{bmatrix} x_c + \frac{1}{27} \begin{bmatrix} -75 & -16 \\ 21 & -2 \end{bmatrix} x_c + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y_c = [1 \quad 10] x_c \end{cases}$$

不可控子系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_{\bar{c}} = \begin{bmatrix} 3 & \frac{2}{3} \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x_{\bar{c}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} x_{\bar{c}} \\ y_{\bar{c}} = [-4 \quad -3] x_{\bar{c}} \end{cases}$$

8-27 系统动态方程各矩阵同题 8-26,试求可观测子系统和不可观测子系统的动态方程。

解 利用 9-26 的对偶关系实现。

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 0 & 27 & 0 & 0 \\ -108 & 135 & 0 & 0 \\ -75 & 21 & 81 & 0 \\ -16 & -2 & 18 & 54 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{c}} = \mathbf{b}^T = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

可观子系统

$$\begin{cases} \dot{x}_o = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 0 & 27 \\ -108 & 135 \end{bmatrix} x_o + \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} u \\ y_o = [1 \ 0] x_o \end{cases}$$

不可观子系统

$$\begin{cases} \dot{x}_{\bar{o}} = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} -75 & 21 \\ -16 & -2 \end{bmatrix} x_{\bar{o}} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} x_{\bar{o}} + \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix} u \\ y_{\bar{o}} = 0 \end{cases}$$

8-28 设系统状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 10 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} u$$

说明可否用状态反馈任意配置闭环极点,若可以,则求状态反馈矩阵,使闭环极点位于 -10 , $-1 \pm j\sqrt{3}$,并画出状态变量图。

解

$$P_c = [b \ : \ Ab \ : \ A^2b] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 90 \\ 10 & 100 & 990 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } P_c = 3 = n,$$

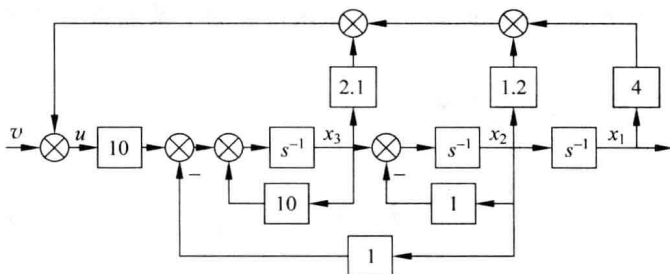
$$|sI - (A - bk)| = (s + 10)(s + 1 + j\sqrt{3})(s + 1 - j\sqrt{3})$$

$$\left| \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} [k_1 \ k_2 \ k_3] \right\} \right| = s^3 + 12s^2 + 24s + 40$$

$$s^3 + (10k_3 - 9)s^2 + (10k_3 + 10k_2 - 9)s + 10k_1 = s^3 + 12s^2 + 24s + 40$$

$$\begin{cases} k_1 = 4 \\ k_2 = 1.2 \\ k_3 = 2.1 \end{cases}$$

状态变量图如图解 8-28 所示。



图解 8-28

8-29 设系统状态方程为 $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = [1 \quad 0] x$, 试设计全维状态观测器, 使其极点位于 $-r, -2r (r > 0)$, 并画出状态变量图。

解

$$P_c = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } P_c = 2 = n$$

可观, 可设计全维状态观测器。

观测器系统阵

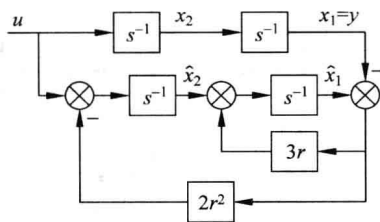
$$A - Hc = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} -h_0 & 1 \\ -h_1 & 0 \end{bmatrix}$$

令

$$|sI - (A - Hc)| = \begin{vmatrix} s + h_0 & -1 \\ h_1 & s \end{vmatrix} = s^2 + h_0 s + h_1 = (s + r)(s + 2r) = s^2 + 3rs + 2r^2$$

$$\text{解得} \begin{cases} h_0 = 3r \\ h_1 = 2r^2 \end{cases}$$

状态变量图如图解 8-29 所示。



图解 8-29

8-30 设系统传递函数为 $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-2)(s+3)}$, 判断能否利用状态反馈矩阵将传递函数变为 $\frac{s-1}{(s+2)(s+3)}$, 若有可能, 求出一个满足的状态反馈矩阵 K , 并画出状态变量图。

提示: 状态反馈不改变原传递函数零点。

解 能。

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-2)(s+3)} = \frac{s^2 + s - 2}{s^3 + 2s^2 - 5s - 6}$$

上式无零极点对消, 因此可控, 可任意配置极点。

用可控标准型实现: $\dot{x} = Ax + bu; y = cx$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [-2 \quad 1 \quad 1]$$

为使传递函数变为 $\frac{s-1}{(s+2)(s+3)}$, 需配置极点, 使得

$$D(s) = (s+2)^2(s+3) = s^3 + 7s^2 + 16s + 12$$

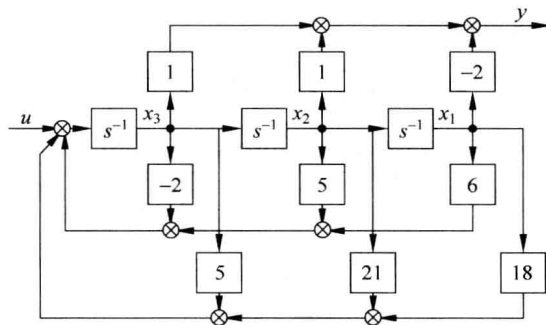
令

$$\mathbf{A} - \mathbf{bk} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 - k_1 & 5 - k_2 & -2 - k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 12 & -16 & -7 \end{bmatrix}$$

解得

$$\begin{cases} k_1 = 18 \\ k_2 = 21 \\ k_3 = 5 \end{cases}$$

配置极点后出现零极点对消, 系统不可观。但传递函数只描述外部特性, 故可达到目的。
状态变量图如图解 8-30 所示。



图解 8-30

第二部分 课程学习进程表 (80学时)

序	月日	周	教学内容	作业		备注
				必做题	选做	
1			控制系统一般概念(1.1~1.5)	1-1~1-4		
2			控制系统一般概念(1.4~1.8)	1-7,1-10,1-11		
3			2.1~2.2 时域模型, L 变换复习	2-1~2-4	2-5,2-6	
4			L 反变换复习, 2.3.1 传递函数	2-7~2-10		
5			2.3.2~2.3.4 元部件传函, 典型环节	2-11,2-12		
6			2.4 结构图及等效变换	2-14,2-15		
7			2.5 梅逊公式, 2.6 闭环传递函数	2-16~2-19	2-20,2-21	
8			3.1~3.3 一阶, 二阶过阻尼动态指标	3-1~3-4,3-6		
9			3.3.3 二阶欠阻尼系统动态指标	3-8~3-11	3-13	
10			3.3.4 改善性能的措施, 3.4 高阶系统			
11			3.5 稳定性分析	3-15~3-17	3-18	
12			3.6 稳态误差计算(静态误差)	3-22,3-23,3-25	3-26	
13			3.6 动态误差, 3.7 时域校正, 第3章小结	3-29,3-30,3-33,3-37, 3-39		
14			4.1 根轨迹概念, 4.2 法则 1~3	4-1		
15			4.2 法则 4~8	4-2,4-3	4-4,4-8	
16			4.3 广义根轨迹	4-9~4-12		
17			4.4 性能分析, 第4章小结	4-13~4-16	4-17,4-18	
18			5.1 频率特性基本概念	5-1~5-3		
19			5.2 幅相曲线(典型环节, 开环系统)	5-4~5-7	5-8	
20			5.3 对数频率特性(典型环节)	5-9		
21			5.3 开环系统对数频率特性	5-10~5-12		
22			5.4 奈奎斯特判据(1)	5-13~5-16	5-17~5-19	
23			5.4 奈奎斯特判据(2), 5.5 稳定裕度	5-20~5-22	5-23,5-24	
24			5.6 利用开环频率特性分析系统的性能	5-25~5-28	5-29	
25			5.7 闭环频率特性曲线的绘制 5.8 利用闭环频率特性分析系统的性能	5-31(1),(2)~5-34	5-35	
26			5.9.1 超前校正	5-36,5-37		
27			5.9.2 滞后校正	5-38,5-39	5-40	
28			5.9.3 滞后-超前校正, 5.9.4 PID 校正	5-41,5-42,5-45		
29			第4、第5章小结	5-43,5-44,5-46		
30			6.1~6.2 离散系统, 信号采样与保持	/		
31			6.3 z 变换理论	6-1~6-3		
32			6.4 离散系统的数学模型	6-5,6-7,6-8		
33			6.5 稳定性分析	6-10~6-12	6-13	
34			6.6 稳态误差计算, 6.7 动态性能分析	6-14~6-16	6-17	
35			6.8 模拟化校正, 6.9 数字校正, 总结	6-18~6-21		
36			7.1 非线性概念, 7.2 相平面法(1)	7-1,7-2(1),(2),7-3	7-4	
37			7.2 相平面法(2)		7-5~7-8	
38			7.3 描述函数法(1)	7-9,7-10		
39			7.3 描述函数法(2), 7.4 非线性利用	7-11~7-14,7-17	7-19,7-20	
40			课程总复习		附录 C	

本书特色

- 本书是《自动控制原理》（卢京潮主编，清华大学出版社出版）的配套用书。
- 本书对主教材中习题进行了详细的分析与解答，方便读者学习。
- 书后编排了课程学习进程表，供任课教师和读者参考。

作者简介

卢京潮，工学博士，教授，博士生导师，自动控制原理国家级精品课程负责人，陕西省教学名师。

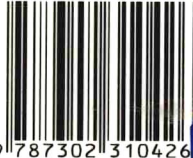
长期从事自动控制原理、系统辨识、模糊控制理论及应用等课程的教学工作。主编出版过普通高等教育“十一五”国家级规划教材《自动控制原理》，参与过《计算机控制系统》，《先进控制理论与方法导论》等教材的编写。主持过多项陕西省和西北工业大学教改项目以及国家自然科学基金、部级科研项目。在重要国际会议和期刊发表教学和科研论文数十篇。

清华大学出版社数字出版网站

WQBook  

www.wqbook.com

ISBN 978-7-302-31042-6



9 787302 310426

定价：25.00元

[General Information]

书名=自动控制原理习题解答

页数=195

SS号=13245937