

高等学校教材

建筑力学

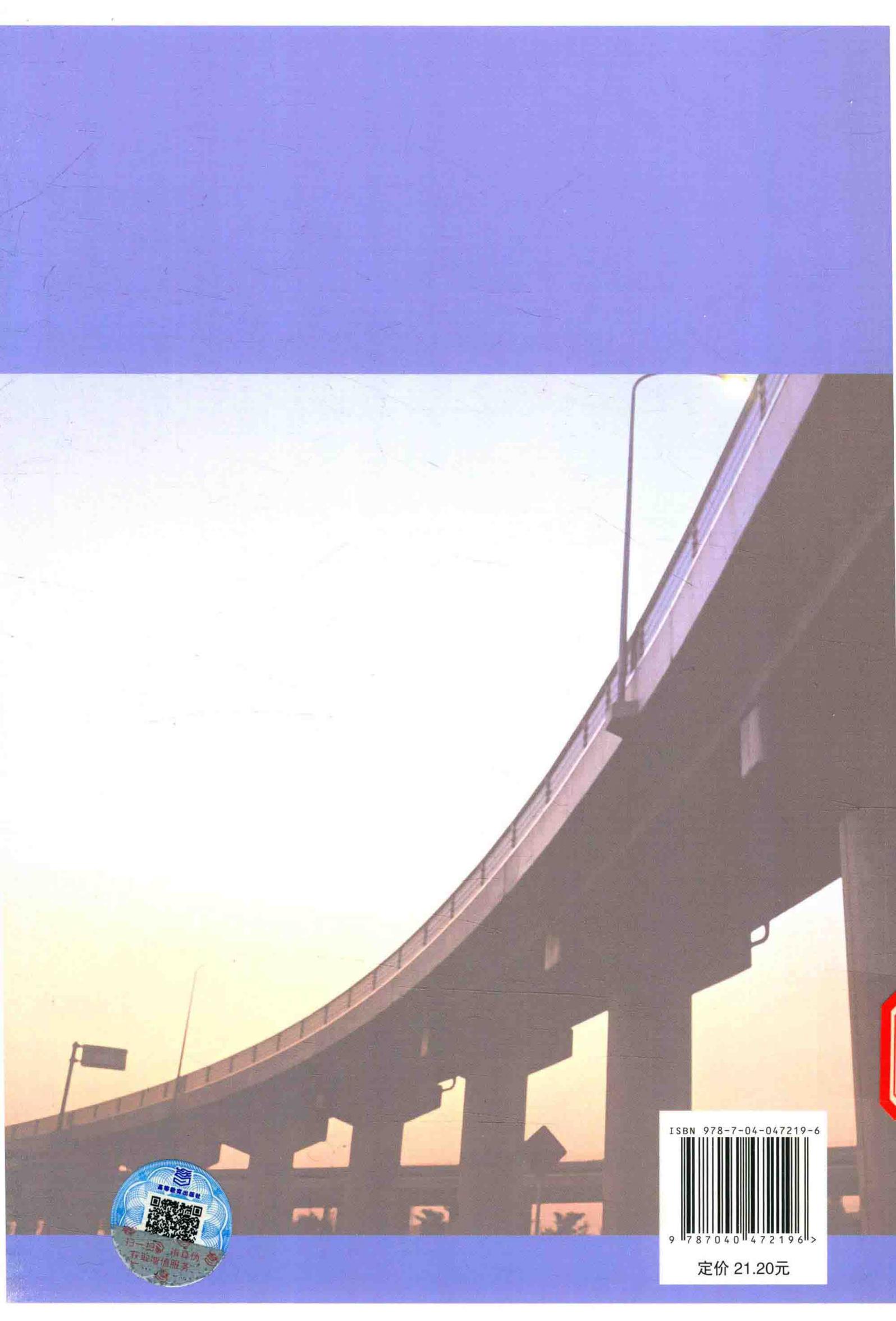
第三分册

结构力学

第5版

李家宝 洪范文 罗建辉 主编
罗建辉 汪梦甫 修订

高等教育出版社



ISBN 978-7-04-047219-6



9 787040 472196 >

定价 21.20元

高等学校教材

建筑力学 第三分册

结构力学 第5版

李家宝 洪范文 罗建辉 主 编
罗建辉 汪梦甫 修 订

高等教育出版社·北京

内容提要

本套建筑力学共分三册,本书为第三分册《结构力学》。本书是在第4版(普通高等教育“十一五”国家级规划教材)的基础上,根据2012年教育部高等学校力学教学指导委员会力学基础课程教学指导分委员会制定的《高等学校理工科非力学专业力学基础课程教学基本要求》修订而成的。本次修订字斟句酌,力求准确,反映学科新发展。

全书主要内容有:绪论,几何组成分析,静定结构的内力分析,静定结构的位移计算,力法,位移法和力矩分配法,结构的计算简图和简化分析,并附有思考题和习题。

本书第2版曾获国家教委第二届高等学校优秀教材二等奖,第4版为普通高等教育“十一五”国家级规划教材。全书内容少而精,论述严谨,文字简练,联系实际,便于教学。

本书适用于高等学校建筑学、城市规划、给水排水工程、工程管理等土建、水利类本科非结构专业的教学,也可用作土建类专业其他层次的教材,还可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

建筑力学.第三分册,结构力学 / 李家宝,洪范文,罗建辉主编.--5版.--北京:高等教育出版社,2017.2

ISBN 978-7-04-047219-6

I. ①建… II. ①李… ②洪… ③罗… III. ①建筑力学-高等学校-教材②结构力学-高等学校-教材 IV.

①TU311②O342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 009441 号

策划编辑 水渊
插图绘制 杜晓丹

责任编辑 水渊
责任校对 杨凤玲

封面设计 李小璐
责任印制 尤静

版式设计 马敬茹

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 三河市华润印刷有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 10.75
字 数 240千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>
<http://www.hepmall.com>
<http://www.hepmall.cn>
版 次 1980年3月第1版
2017年2月第5版
印 次 2017年2月第1次印刷
定 价 21.20元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物料号 47219-00

第 5 版前言

本套建筑力学共分三册,本书为第三分册《结构力学》。本书是在第 4 版(普通高等教育“十一五”国家级规划教材)的基础上,根据 2012 年教育部高等学校力学教学指导委员会力学基础课程教学指导分委员会制定的《高等学校理工科非力学专业力学基础课程教学基本要求》修订而成。

这次修订在保持前版教材特色的基础上注意进一步加强对结构力学基本原理和基本方法的论述和训练,对少数章节进行了不同程度的改写。修订中字斟句酌,力求准确,删去了个别不完善的表达。结合学科新发展和教学改革的经验,对第 4 章进行了较大幅度的改写。考虑到互等定理不属于基本要求(B 类)的内容,将互等定理一节删去,有关位移互等、约束力互等的概念分别放在第 5 章、第 6 章给出简要的阐述。书中以“*”注明的章节,仍为适应不同专业需要的选学内容。

这一版的主编为李家宝、洪范文、罗建辉。修订工作由罗建辉主持。参加修订工作的有罗建辉(第 1 至 5 章)、汪梦甫(第 6、7 章)。

由于编者水平所限,书中不足之处,望读者多加指正。

编 者

2016 年 12 月

第 4 版前言

本套建筑力学为普通高等教育“十一五”国家级规划教材,共分三册,本书为第三分册《结构力学》(第 4 版),是在第 3 版的基础上,根据 2004 年教育部高等学校非力学类专业力学基础课程教学指导分委员会通过的《结构力学课程教学基本要求(B 类)》修订的。

这次修订在保持前版教材特色的基础上,除注意加强对结构力学基本原理和基本方法的论述和训练,突出常用结构的受力分析和受力特性,注意静定结构和超静定结构的综合论述和小结外,删去和调整了部分章节,进一步对内容进行了提炼和精简,以更好适应当前教学的需要。书中以“*”号注明的章节,仍为适应不同需要的选学内容。

本次修订工作是在李家宝、洪范文主持下进行的,参加修订工作的有洪范文(第一章)、童桦(第二、三、四章)、刘兴彦(第五、六章)、李家宝(第七章),最后由李家宝、洪范文定稿。

本修订版请东南大学单建教授审阅,审阅中提出的许多宝贵意见,对本书帮助极大。在修订过程中,我们还得到了湖南大学教务处和教材代办站的大力支持,谨此表示真诚的谢意。

由于编者水平所限,书中不足之处,恳请专家、读者不吝指正。

编者

2005 年 8 月

第3版前言

本书是在建筑力学第三分册《结构力学》(第2版)的基础上,根据1995年国家教委审定的高等工业学校土建、水利类非结构专业“结构力学课程教学基本要求”(少学时)进行修订的。

这次修订在保持前版教材特色的基础上注意进一步加强对结构力学基本原理和基本方法的论述和训练,在个别章节删去了少量内容,适当增补了加强基本训练的思考题和习题;突出常用结构的受力分析和受力特性,注意静定结构和超静定结构的综合论述和小结。本书使用了国家标准(GB 3100~3102—93)《量和单位》。书中以“*”号注明的章节,仍为适应不同专业需要的选学内容。

本次修订工作是在李家宝、洪范文主持下进行的,参加修订工作的有李家宝(第一、十章)、汪梦甫(第六、七、八、九章)、童桦(第二、三、四、五章),最后由李家宝、洪范文定稿。衷心感谢湖南大学结构力学教研室王兰生教授、李存权教授对这次修订工作的关心与支持,他们提供了非常宝贵的具体修改意见,还参与了一些修订工作。

由于编者水平所限,书中不足之处,望读者多加指正。

编者

1998年3月

第2版前言

本书是在第1版的基础上,参照1986年10月高等学校工科结构力学课程教学指导小组制订的给水排水、建筑学、建筑材料等非结构专业的结构力学课程教学基本要求进行修订的。

修订时,注意到下列几点:

1. 本书第1版的主要内容基本符合本课程教学基本要求(50~60学时),故修订时保持不变。

2. 为了便于教与学,对静定结构的内力计算、力法和位移法三章,在教学方法方面作了一些修改和补充。在结构的位移计算中,对虚功原理不作严格论证,只在讲清虚功的基础上,说明虚功原理的意义,然后着重介绍单位荷载法及其应用。

3. 结构力学课程教学基本要求指出,各校可根据专业需要增加“结构矩阵分析”或其他有关内容。这次修订,对第九章在保持第一版特点的基础上进行了改写,并附有平面刚架分析程序。此外,为了适应不同专业、不同要求和不同学时的需要,对第一版中有关影响线和内力包络图等内容仍然保留。这些选学内容均在标题前以“*”号注明。

4. 从培养学生自学能力和分析能力的要求出发,以及为了贯彻理论联系实际的原则,这次修订增加了第十章“结构的计算简图和简化分析”。

5. 各章的习题作了适当调整,并增加了思考题,习题后附有答案,以便于自学参考。

这次修订由湖南大学李家宝担任主编,参加编写工作的有:李家宝(第一、四、十章)、王兰生(第六、七、八、九章)、李存权(第二、三、五章)。

本书由西安冶金建筑学院王荫长教授、南京工学院单炳梓教授审阅。

由于编者水平所限,恳请读者对书中存在的问题和不足之处多加批评指正。

编者

1988年1月

第 1 版前言

按 1977 年 11 月高等学校工科力学教材会议制定的教材建设规划,湖南大学、哈尔滨建筑工程学院、重庆建筑工程学院三院校为土建类的建筑学、给水排水、建筑材料、采暖通风等专业编写了这套中学时的建筑力学教材。本教材共分三个分册:第一分册——理论力学,第二分册——材料力学,第三分册——结构力学。为了便于选用本教材,在编写时我们既注意了这三部分内容的相互联系和配合,又保持了各自相对的独立性和理论的系统性。

本书是建筑力学的第三分册——结构力学。在编写过程中注意贯彻辩证唯物主义观点和理论联系实际的原则,力求做到内容精炼,由浅入深,便于自学。在介绍结构力学的基本计算原理和计算方法的基础上,适当写了一部分与现代结构力学发展相适应的新内容,为读者今后继续学习和掌握新方法、新技术提供必要的结构力学基础知识。

全部讲授完本书的内容约需 80~90 学时。采用本教材时,可根据各专业的不同要求和学时数对内容酌情取舍。第九章的内容如果没有时间讲授,可留作自学,或者根据实际情况另作专题讲授。在每章书后均附有一定数量的习题,可根据需要全做或选做。

本书由天津大学(主审)、北京工业大学(主审)、西安冶金建筑学院、武汉建筑材料工业学院、清华大学、重庆建筑工程学院、北京建筑工程学院、同济大学等院校的部分结构力学教师审阅。

本书由湖南大学主编,参加编写工作的有:湖南大学李家宝(第一、四、五、六、七章)、王兰生(第二、三、八章)、哈尔滨建筑工程学院范乃文(第九章)。由于编者水平有限,希望使用本书的教师和读者对书中的缺点和错误予以批评指正。

编 者

1978 年 12 月

本书符号表说明

本书贯彻执行国家技术监督局发布的国家标准(GB 3100~3102—93)《量和单位》,在实施国家标准的过程中,为保证国家标准和现有惯例的衔接,本书在以下三方面做了认真的考虑,现做如下说明,请读者注意。

1. 国家标准规范的物理量的名称和符号,按国家标准使用,注重量的物量属性。如,旧称剪应变 γ ,现改称切应变;又如,各种力(包括荷载、约束力和内力)都用 F 作为主符号,而将其特性以下标(上标)表示等。

2. 对于在结构力学中广泛使用的广义力(包括力与力偶)和广义位移(包括线位移与角位移),为了体现其广义性(有时还有未知性),兼顾全书叙述的统一和表达的简洁、完整,本书仍沿用 X (多余力), R 和 r (约束力)、 Δ 和 δ (位移)、 c (支座位移)等广义物理量。至于上述物理量在具体问题中对应的量和相应单位,则视具体问题而定。

3. 在结构力学力法、位移法和位移计算中普遍应用的单位力 $\bar{X}=1$ 和 $F_p=1$ 等及单位位移 $\bar{Z}=1$ 和 $\Delta=1$ 等,按照国家标准,这些物理量应由数值和单位符号的乘积组成,其表达式为 $A = \{A\} \cdot [A]$,式中 A 为该物理量的符号, $[A]$ 为其某一种单位的符号, $\{A\}$ 是以 $[A]$ 为单位时该量的数值。据此,如单位广义力的规定写法应为 $\{\bar{X}\}=1$,即采用某一力的单位时该力的数值为1。为了书写方便,均简记为 $\bar{X}=1$,其余的单位量与此类同。

主要符号表

A	面积	M	力矩、力偶、力偶矩、弯矩
c	广义支座位移	M^F	固端弯矩
C	弯矩传递系数	q	均布荷载集度
d	节间长度	r, R	广义约束力
E	弹性模量	S	静矩(截面一次矩)、转动刚度
f	拱高	u	水平位移
F_P	荷载、作用力	v	竖向位移、挠度
F_H	水平推力	V	虚应变能
F_{Ax}, F_{Ay}	A 处支座(约束)力	W	功、虚功
F_N	轴力	X	广义多余力
F_N^L, F_N^R	截面左、右的轴力	Z	广义未知位移
F_Q	剪力	γ	切应变
F_Q^L, F_Q^R	截面左、右的剪力	δ, Δ	广义位移
F_Q^F	固端剪力	ε	线应变
G	切变模量	θ	角位移、转角
i	线刚度	κ	曲率
I	惯性矩(截面二次矩)	μ	力矩分配系数
l	长度、跨度	φ	转角、角位移

目 录

第 1 章 绪论	1	§ 5-2 力法的典型方程	74
§ 1-1 杆件结构力学的研究对象和任务	1	§ 5-3 用力法计算超静定刚架	78
§ 1-2 杆件结构的计算简图	3	§ 5-4 对称性的利用	81
§ 1-3 杆件结构的类型	6	§ 5-5 等截面单跨超静定梁的杆端 内力	87
§ 1-4 荷载的分类	8	思考题	95
第 2 章 几何组成分析	9	习题	95
§ 2-1 几何组成分析的目的和概念	9	习题部分答案	98
§ 2-2 几何不变体系的简单组成规则	10	第 6 章 位移法和力矩分配法	99
§ 2-3 几何组成分析示例	13	§ 6-1 位移法的基本概念	99
§ 2-4 静定结构和超静定结构	14	§ 6-2 位移法基本未知量的确定	103
思考题	15	§ 6-3 位移法的计算步骤和示例	105
习题	15	§ 6-4 位移法的典型方程	109
习题部分答案	17	§ 6-5 力矩分配法的基本概念	113
第 3 章 静定结构的内力分析	18	§ 6-6 用力矩分配法计算连续梁和无结 点线位移刚架	119
§ 3-1 杆件内力计算	18	§ 6-7 超静定结构的受力和变形 特点	125
§ 3-2 静定梁	19	思考题	128
§ 3-3 静定刚架	22	习题	128
§ 3-4 三铰拱	30	习题部分答案	131
§ 3-5 静定桁架	37	* 第 7 章 结构的计算简图和简化分析	132
§ 3-6 静定结构的内力分析和受力特点	42	§ 7-1 概述	132
思考题	44	§ 7-2 将空间结构分解为平面结构	135
习题	45	§ 7-3 将板壳结构简化为交叉体系	137
习题部分答案	48	§ 7-4 将结构分解为基本部分和附属 部分	140
第 4 章 静定结构的位移计算	50	§ 7-5 忽略次要变形	142
§ 4-1 结构位移和虚功的概念	50	索引	145
§ 4-2 变形体系的虚功原理和单位荷载法	53	主要参考文献	147
§ 4-3 静定结构由荷载引起的位移	57	Synopsis	148
§ 4-4 图乘法	62	Contents	149
思考题	68	主编简介	
习题	68		
习题部分答案	70		
第 5 章 力法	71		
§ 5-1 力法的基本概念	71		

§ 1-1 杆件结构力学的研究对象和任务

土木工程中的各类建筑物和构筑物,例如房屋(图 1-1 至图 1-4)、桥梁(图 1-5)、水池(图 1-6)、挡土墙(图 1-7)等,在使用过程中,都要承受各种荷载的作用。建筑物中承受、传递荷载而起骨架作用的部分,可称为结构。图 1-1 所示由屋架、柱子、吊车梁、屋面构件及基础等组成的工业厂房的空间骨架就是结构的典型示例。

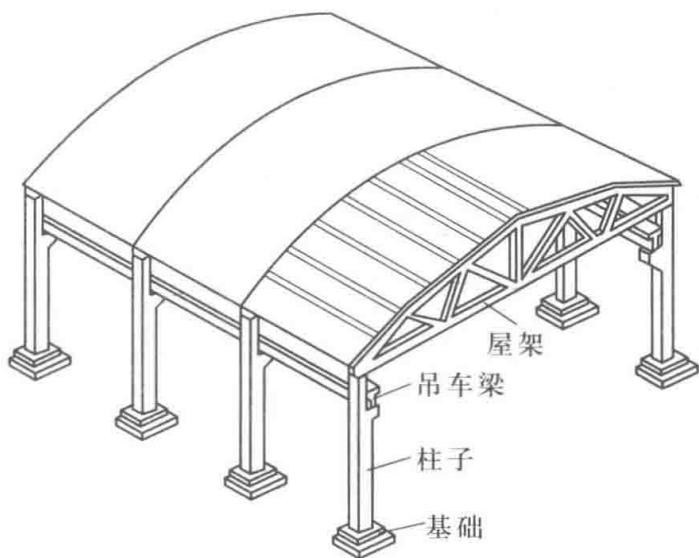


图 1-1



图 1-2

结构的类型是多种多样的,就几何特征区分,有杆件结构(图 1-1)、板壳结构(图 1-3 壳体屋盖、图 1-4 折板屋面和图 1-6 水池)和实体结构(图 1-7)三类。杆件的基本特征是它的长度远大于其他两个方向的尺度——截面的宽度和高度,杆件结构便是由若干这种杆件所组成的。板壳结构是厚度远小于其他两个尺度的结构。实体结构是指三个方向的尺度大约为同一量级的结构,例如挡土墙(图 1-7)、堤坝、块式基础等。

依照空间特征区分,杆件结构可分为平面杆件结构和空间杆件结构两类。凡组成结构的所有杆件的轴线都位于同一平面,并且荷载也作用于该平面内的结构,称为平面杆件结构。否则,便是空间结构。严格来说,实际的结构都是空间结构,不过在进行计算时,常可根据其实际受力情况的特点,将它分解为若干平面结构进行分析,以使计算简化(见 § 7-2)。但需注意,并非所有情况都能这样处理,有些是必须作为空间结构来研究的。本书的研究对象只限于平面杆件结构。

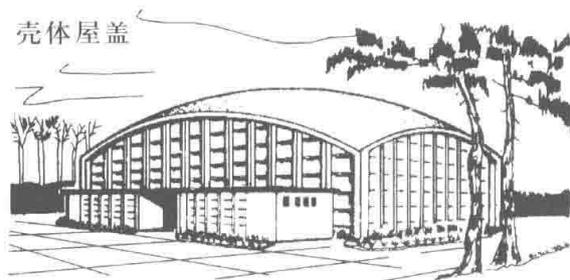


图 1-3

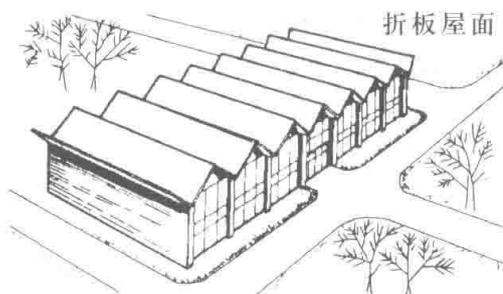


图 1-4

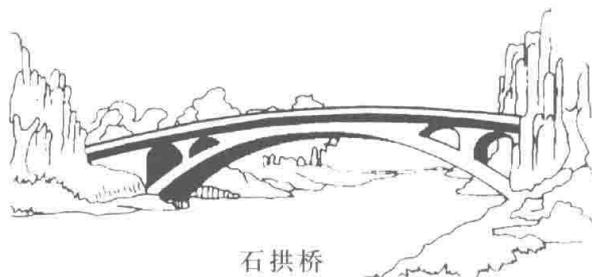
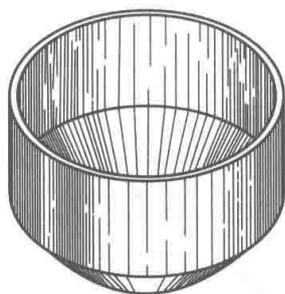
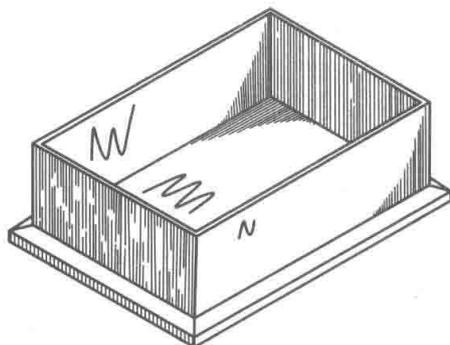


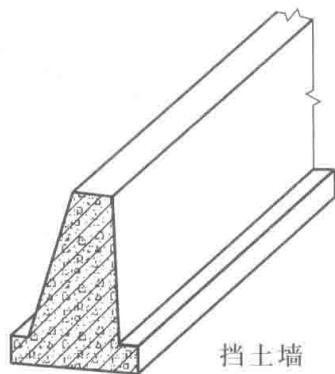
图 1-5



(a) 圆形水池



(b) 矩形水池



挡土墙

图 1-6

图 1-7

杆件结构力学的任务是研究结构的组成规律和合理形式,以及结构在外因作用下的强度、刚度和稳定性的计算原理和计算方法。研究组成规律的目的在于保证结构各部分不致发生相对运动,使它能承受荷载并维持平衡。进行强度和稳定性计算的目的在于保证结构的安全并使之符合经济的要求。计算刚度的目的在于保证结构不致发生过大的、在实用上不能容许的位移。研究结构的合理形式是为了有效地利用材料,使其受力性能得到充分发挥。上述强度、刚度和稳定性的计算,不仅在设计结构时需要进行,而且当已有结构所承受的荷载情况改变时,也应加以核算,以判明是否需要采取加固措施。

结构力学与材料力学的基本区别在于,后者主要是研究材料的强度和单根杆件的强度、刚度和稳定性的计算,而结构力学的研究对象是由杆件所组成的体系。根据土建、水利类除土木工程、水利水电工程之外的其他相关专业对本课程的教学要求,本书对结构的稳定性问题未作讨论。

本书主要介绍结构力学中最基本的计算原理和计算方法,这些内容是解决一般常用结构的

静力计算问题所必需的,也是进一步学习和掌握其他现代结构分析方法的基础。

§ 1-2 杆件结构的计算简图

对结构进行力学分析之前,必须先将实际结构加以简化,分清结构受力、变形的主次,抓住主要矛盾,忽略一些次要因素,进行科学抽象,用一个简化了的理想模型来代替实际结构。这种在结构计算中用以代替实际结构,并能反映结构主要受力和变形特点的理想模型,称为结构的计算简图。

确定结构的计算简图时,通常包括杆件的简化、支座的简化和结点的简化等方面的内容。

一、杆件的简化

根据杆件受力后的变形特点,各种杆件在计算简图中均用其轴线来代替。等截面直杆的轴线是一直线,曲杆是一曲线。变截面杆件也都近似地以直线或曲线来代替。

二、支座的简化和分类

将结构与基础或其他支承物联系,并用以固定结构位置的装置称为支座。在建筑结构中,从支座对结构位移的约束作用来看,常用的计算简图可分为三类。

1. 活动铰支座(图 1-8)

这种支座的构造简图可用图 1-8a 所示方式表示,它对结构的约束作用是只阻止结构上的 A 点沿垂直于支承平面方向移动,结构既可绕铰 A 转动,又可沿着与支承平面平行的方向移动。因此,当不考虑支承平面上的摩擦力时,活动铰支座的约束力将通过铰 A 的中心并与支承平面垂直,其作用点和方向是确定的,只是大小未知,可用 F_{Ay} 来表示。根据上述特点,这种支座在计算简图中可用一根链杆来表示(图 1-8b),因为与该链杆相连的结构不仅可绕铰 A 转动,而且当链杆绕铰 B 作微小转动时,结构也可在垂直于链杆的方向做微小移动。显然,链杆 AB 的内力即代表该支座的约束力。

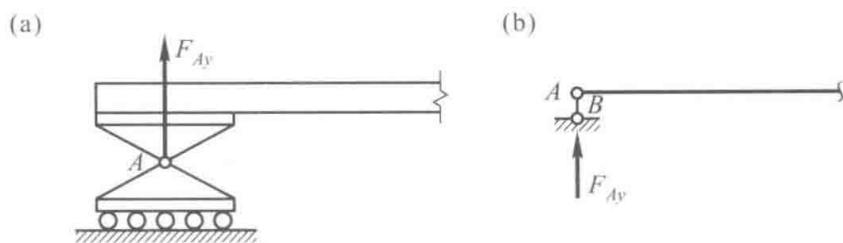


图 1-8

在实际结构中,凡符合或近似地符合上述约束条件的支承装置,都可取成活动铰支座。

2. 固定铰支座(图 1-9)

这种支座的构造简图可用图 1-9a 所示方式表示,它的约束作用是不允许结构上的 A 点发生任何移动,而只能绕铰 A 转动。因此,固定铰支座的约束力将通过铰 A 的中心,但其方向和大小都是未知的,可以用两个沿确定方向的未知约束力 F_{Ax} 和 F_{Ay} 表示。这种支座在计算简图中常用交于 A 点的两根链杆表示(图 1-9b、c)。

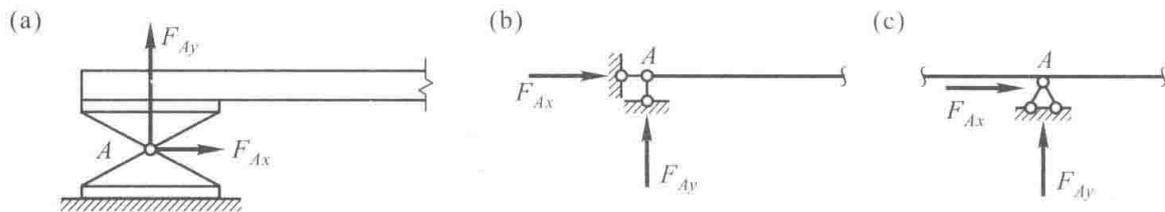


图 1-9

在实际结构中,凡属不能移动而可做微小转动的支承情况,都可视为固定铰支座。例如插入钢筋混凝土杯形基础中的柱子,当用沥青麻丝填缝时,则柱的下端便可视为固定铰支座。

3. 固定支座(图 1-10)

这种支座不允许结构发生任何移动和转动,它的约束力的大小、方向和作用点都是未知的。因此,可以用水平和竖向的约束力 F_x 和 F_y 及约束力偶 M 来表示(图 1-10a)。固定支座也可用三根既不全平行又不全交于一点的链杆表示(图 1-10b),显然,这时三根链杆的内力是与这种支座的三个约束力等效的,因为若将两根水平链杆的内力均向杆件截面的中心平移后,便可合成为一个沿杆轴作用的水平约束力 F_x 和一个约束力偶 M 。在计算简图中这种支座也可采用图 1-10c 所示的图形表示。

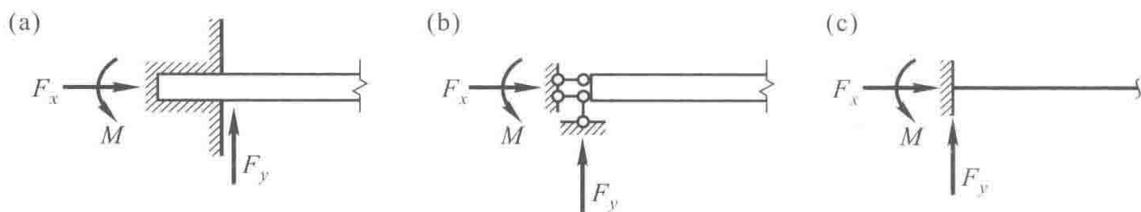


图 1-10

在实际结构中,凡嵌入墙身的杆件,其嵌入部分有足够的长度,以致使杆端不能有任何移动和转动时,该端就可视为固定支座。又如插入杯形基础中的柱子,如果用细石混凝土填缝,则柱的下端一般也看作固定支座。

此外,在结构分析中,有时还会用到图 1-11 所示的支座,它由两根平行的链杆表示,被约束的杆端不能转动,但可以沿一个方向移动。其支座约束力为沿杆轴作用的水平力 F_x 和一个约束力偶 M 。这种支座称为定向支座。

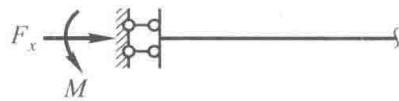


图 1-11

三、结点的简化

在杆件结构中,几根杆件相互联结处称为结点。根据结构的受力特点和结点的构造情况,在计算中常将其简化为以下两种类型。

1. 铰结点(图 1-12)

铰结点的特点是它所联结的各杆件在结点处不能发生相对位移,但都可以绕结点自由转动。例如图 1-12a 所示木屋架的端结点,它的构造情况大致符合上述约束的要求,故其计算简图如图 1-12b 所示,其中两杆之间的夹角 α 是可以改变的。在实际结构中,如果一根杆件只受轴力,根据其受力特点,则此杆两端可视为用铰结点与结构的其他部分相联(参见图 1-15)。

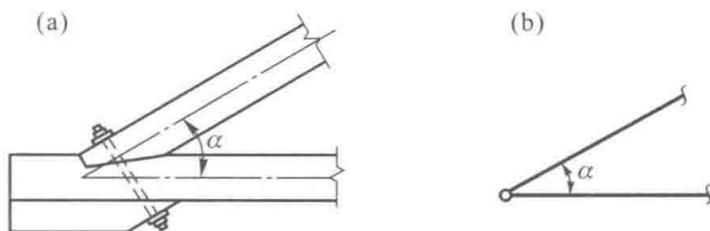


图 1-12

2. 刚结点(图 1-13)

刚结点的特点是,它所联结的各杆件在结点处既不能发生相对位移,也不能发生相对转动。例如,图 1-13a 所示钢筋混凝土结构的某一结点,它的构造是三根杆件之间用钢筋联成整体并用混凝土浇筑在一起,这种结点的变形情况基本符合上述特点,故可视为刚结点,其计算简图如图 1-13b 所示。

有时还会遇到铰结点和刚结点在一起形成的组合结点。例如,在图 1-14 中 A 、 B 为刚结点, C 为铰结点, D 则为组合结点。组合结点 D 应视为 BD 、 ED 、 CD 三杆在此结点相联,其中 BD 与 ED 两杆是刚性联结,杆 CD 与其他两杆则由铰联结。组合结点处的铰又称为不完全铰。

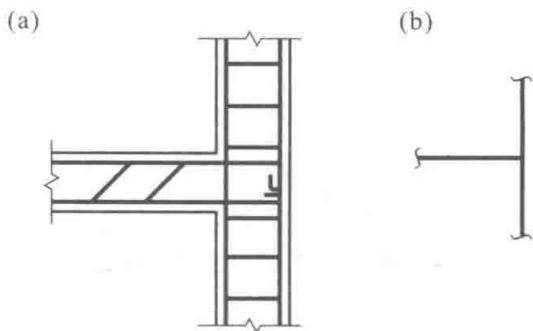


图 1-13

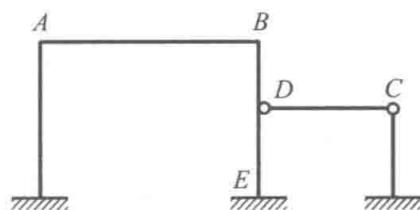


图 1-14

综上所述,只有根据结构的支座和结点的实际构造情况分析其受力和变形特点,才能合理确定各支座和结点的类别。

四、计算简图示例

下面用一个简例说明选取计算简图的方法和原则。在第 7 章中将对此做进一步说明。

图 1-15a 所示为工业建筑中采用的一种桁架式组合吊车梁,横梁 AB 和竖杆 CD 由钢筋混凝土做成,但杆 CD 的截面面积比梁 AB 的截面面积小很多,斜杆 AD 、 BD 则为 16 Mn 圆钢。吊车梁两端由柱子上的牛腿支承。

支座简化方面,由于吊车梁两端的预埋钢板仅通过较短的焊缝与柱子牛腿上的预埋钢板相连接,这种构造对吊车梁支承端的转动不能起多大的约束作用,

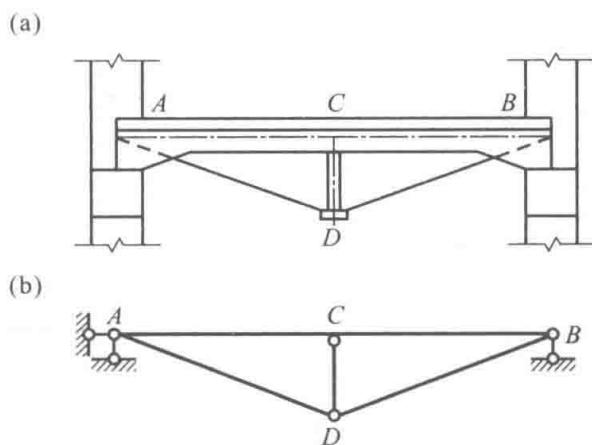


图 1-15

又考虑到梁的受力情况和计算的简便,所以梁的一端可简化为固定铰支座而另一端可简化为活动铰支座。

结点简化方面,因 AB 是一根整体的钢筋混凝土梁,截面抗弯刚度较大,故在计算简图中可取为连续杆,而竖杆 CD 和钢拉杆 AD 、 BD 与横梁 AB 相比,截面的抗弯刚度小得多,它们主要是承受轴力,所以杆件 CD 、 AD 、 BD 的两端都可看作是铰结,其中铰 C 联在横梁 AB 的下方。

最后,用各杆件的轴线代替各杆件,则得图 1-15b 所示的计算简图。图中 A 、 B 、 D 为铰结点, C 为组合结点。这个计算简图,保证了主要横梁 AB 的受力性能(有弯矩、剪力和轴力);对其余三杆,保留了主要内力为轴力这一特点,而忽略了较小的弯矩和剪力的影响;对于支座,保留了主要的竖向支承作用,忽略了对微弱转动的约束。实践证明,分析时选取这样的计算简图是合理的,它既反映了结构的变形和受力特点,又能使计算比较简单。

用计算简图代替实际结构进行计算,虽然存在着一定的差异,但这是一种科学的抽象。在力学计算中,突出结构最本质的属性,忽略一些次要因素,这样就能更深入地了解问题的实质,认识事物的内在规律。恰当选取实际结构的计算简图,是一个比较复杂的问题,不仅要掌握选取的原则,而且需要较多的实践经验。对一些新型结构,往往还要通过反复试验和实践才能获得比较合理的计算简图。不过,对于常用的结构,前人已积累了许多经验,可以直接采用那些已为实践验证的计算简图。计算简图选定之后,在做结构设计时,还应采取相应的构造措施,尽量使结构实际的内力分布和变形特点与计算简图的情况相符。

在实际工作中,根据不同情况,同一结构可以分别采用不同的计算简图。例如,在初步设计杆件截面时,常先采用一个较简单而较粗略的计算简图,而在最后计算时,再采用一个较复杂但较精确的计算简图。较为精确的计算简图,可通过放弃某些简化假定,或者代以较为符合实际情况的设置而获得,但是计算工作就要复杂得多。由于在工程设计中广泛使用计算机,所以许多复杂但又较为精确的计算简图已被更多采用。

§ 1-3 杆件结构的类型

平面杆件结构,根据其组成特征和受力特点,主要有如下几种类型。

1. 梁

梁是一种受弯杆件,可以是单跨的(图 1-16a、c),也可以是多跨的(图 1-16b、d)。

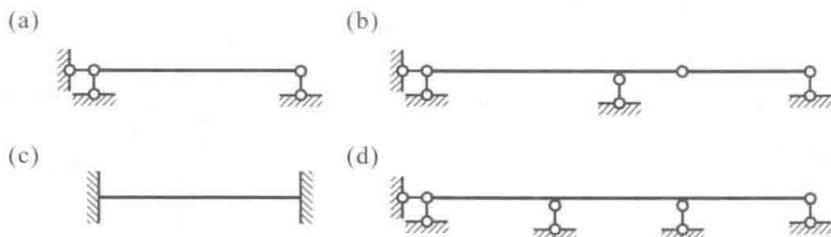


图 1-16

2. 拱

拱是轴线为曲线,且在竖向荷载作用下支座会产生水平约束力的杆件结构(图 1-17)。这种水平约束力将使拱的弯矩远小于跨度、荷载及支承情况相同的梁的弯矩。

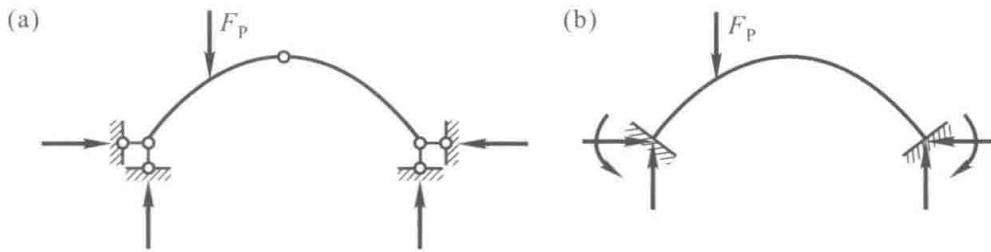


图 1-17

3. 刚架

刚架是由梁和柱组成的结构(图 1-18),各杆件主要受弯。刚架的结点主要是刚结点,也可以有部分铰结点或组合结点。

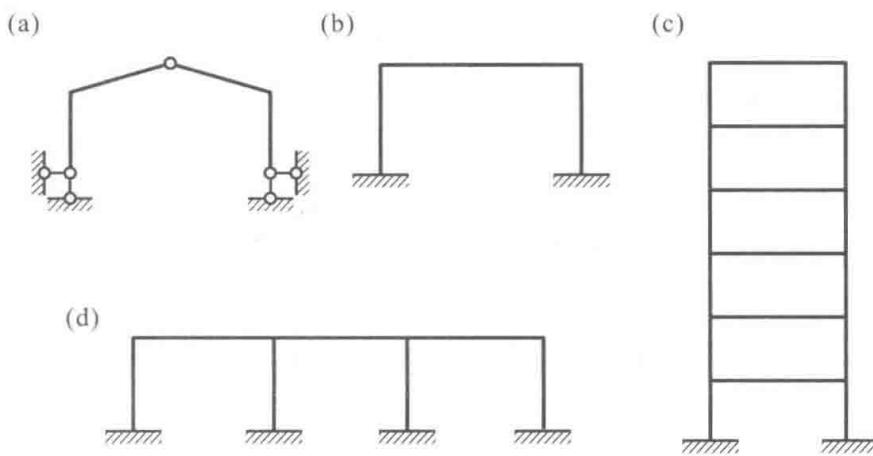


图 1-18

4. 桁架

桁架是由若干杆件在端点用铰联结而成的结构(图 1-19)。桁架各杆的轴线都是直线,当仅受作用于结点的荷载时,各杆只产生轴力。

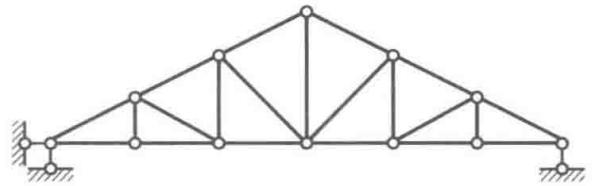


图 1-19

5. 组合结构

在这种结构中(图 1-20),有些杆件只承受轴力,而另一些杆件则同时承受弯矩、剪力和轴力。

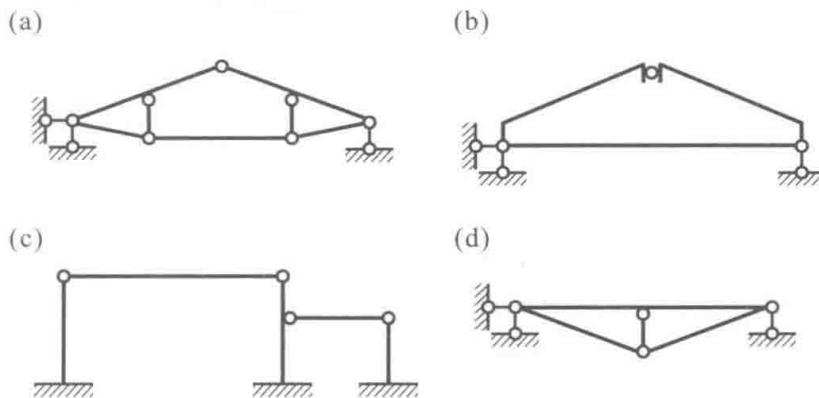


图 1-20

§ 1-4 荷载的分类

荷载是作用在结构上的主动力。按荷载作用的范围和分布情况,通常将其简化为分布荷载和集中荷载。分布荷载是指连续分布在结构某一部分上的荷载,它又可分为均布荷载和非均布荷载。当分布荷载的集度各处相同时称为均布荷载,例如等截面杆件的自重即可简化为沿杆长作用的均布荷载。当分布荷载的集度各处不相同称为非均布荷载,例如作用在池壁上的水压力和作用在挡土墙上的土压力,均可简化为集度按直线变化的非均布荷载(又称线分布荷载)。集中荷载是指作用在结构上某一点处的荷载,当实际结构上分布荷载的受载区域尺寸远小于结构的尺寸时,为了计算简便,即可将此区域内分布荷载的总和视为作用在区域内某一点上的集中荷载。

作用于结构上的荷载,按其作用时间的久暂可以分为恒载和活载两类。恒载是指永久作用在结构上的荷载,如自重、结构上固定设备的重量等。活载是指暂时作用在结构上且位置可以变动的荷载,如结构上临时设备、人群和移动吊车的重量,以及风力、雪重、水压力等。

根据荷载作用的性质,又可分为静力荷载和动力荷载。静力荷载是指逐渐增加、不致使结构产生显著冲击或振动,因而可略去惯性力影响的荷载。恒载和上述大多数活载都可视为静力荷载。动力荷载是指作用在结构上,对结构产生显著冲击或引起其振动的荷载,在这类荷载作用下,结构将会发生不容忽视的加速度。例如,动力机械的振动、爆炸冲击、地震等所引起的荷载就是动力荷载。本书只讨论结构在静力荷载作用下的计算问题。

荷载的性质和大小,应按有关设计规范或经过调查研究后审慎确定。

应该指出,结构除承受荷载外,还可能受到其他外在因素的作用,如温度改变、支座位移等,这些因素也会对结构的内力和变形产生影响。

§ 2-1 几何组成分析的目的和概念

杆件结构是由若干杆件互相联结所组成的体系,将其与地基联结成一体,用来承受荷载的作用。当不考虑各杆件本身的变形时,结构应能保持其原有几何形状和位置不变,即不考虑材料的应变时,组成结构的各个杆件之间以及整个结构与地面之间,应不致发生相对运动。

体系受到任意荷载作用后,在不考虑材料应变的条件下,若能保持其几何形状和位置不变,则称为几何不变体系,如图 2-1a 所示即为这类体系的一个例子。可是,另有一类体系,如图 2-1b 所示的例子,尽管只受到很小的荷载 F_P 作用,也将引起几何形状的改变,这类体系称为几何可变体系。显然,常规的土木工程结构不能采用几何可变体系,而只能采用几何不变体系。

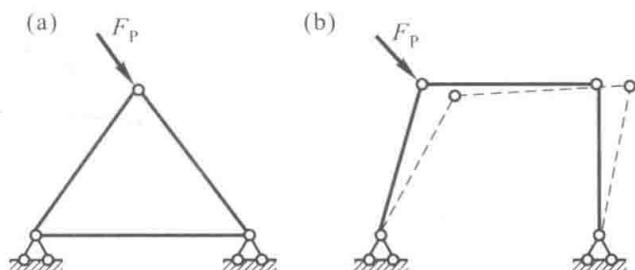


图 2-1

体系的上述区别在于它们的几何组成不同。分析体系的几何组成,以确定它们属于哪一类体系,称为体系的几何组成分析。做这种分析的目的在于:判别某一体系是否几何不变,从而决定它能否作为结构;研究几何不变体系的组成规则,以保证所设计的结构能承受荷载并维持平衡;同时,也为正确区分静定结构和超静定结构以及进行结构的内力计算打下必要的基础。

本章只讨论平面杆件体系的几何组成分析,其主要的相关概念如下。

一、自由度

体系的自由度是指该体系运动时,用来确定其位置所需独立坐标的数目。平面内的某一动点 A ,其位置要由两个坐标 x 和 y 来确定(图 2-2a),所以一个点的自由度等于 2,即点在平面内可以做两种相互独立的运动,通常用平行于坐标轴的两种移动来描述。

二、刚片

对平面体系做几何组成分析时,由于不考虑材料的应变,所以认为各个构件没有变形。于

是,可以把一根杆件、一根链杆或体系中已经判定为几何不变的某个部分看作一个平面刚体,简称为刚片。一个刚片在平面内运动时,其位置将由它上面任一点 A 的坐标 x, y 和过 A 点的任一直线 AB 的倾角 φ 来确定(图 2-2b)。因此,一个刚片在平面内的自由度等于 3,即刚片在平面内不但可以自由移动,而且还可以自由转动。

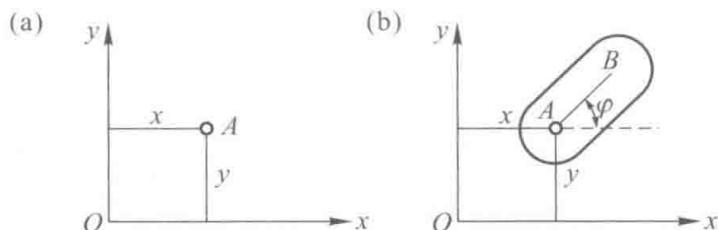


图 2-2

三、约束

约束是指限制杆件或体系运动的各种装置。对刚片加以约束,它的自由度一般将会减少,凡能减少一个自由度的装置称为一个约束。例如,用一根链杆将刚片与基础相联(图 2-3a),则刚片将不能沿链杆方向移动,因而减少了一个自由度,故一根链杆为一个约束。如果在刚片与基础之间再加一根链杆(图 2-3b),则刚片又减少了一个自由度。此时,它就只能绕 A 点转动而丧失了自由移动的可能,即减少了两个自由度。

用一个铰把两个刚片 I 和 II 在 A 点联结起来(图 2-3c),那么对刚片 I 而言,其位置可由 A 点的坐标 x, y 和 AB 的倾角 φ_1 来确定,因此它仍有 3 个自由度。在刚片 I 的位置被确定后,因为刚片 II 与刚片 I 在 A 点以铰联结,所以刚片 II 只能绕 A 点做相对转动,即刚片 II 只保留了独立的相对转角 φ_2 。由刚片 I、II 所组成的体系在平面内的自由度为 4,而两个独立的刚片在平面内的自由度总数应为 $2 \times 3 = 6$ 。因此,用一个铰将两个刚片联结起来后,就使自由度的总数减少了两个。这种联结两个刚片的铰称为单铰。由上述可见,一个单铰相当于两个约束,也相当于两根链杆的约束作用(图 2-3b)。

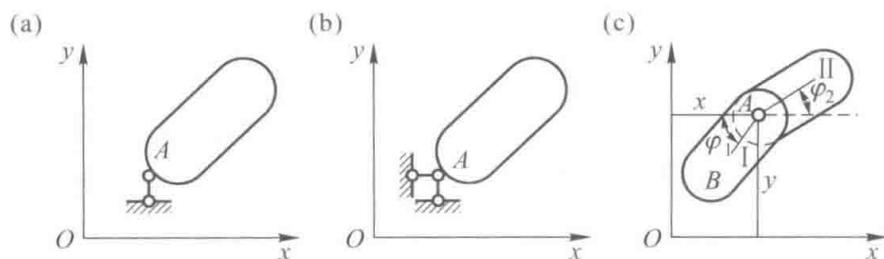


图 2-3

§ 2-2 几何不变体系的简单组成规则

为了确定平面体系是否几何不变,须研究几何不变体系的组成方式。现就三种常见的基本情况来分析平面几何不变体系的简单组成规则。

一、两刚片的组成规则

平面中两个独立的刚片,共有 6 个自由度,如果将它们组成为一个刚片,则只有 3 个自由度。由此可知,在两刚片之间至少应该用 3 个约束相联,才可能组成为一个几何不变的体系。下面讨论这些约束应怎样布置才能达到这一目的。

如图 2-4a 所示,若刚片 I 和 II 用两根不平行的链杆 AB 和 CD 联结。为了分析两刚片间的相对运动,设刚片 I 固定不动,刚片 II 将可绕 AB 与 CD 两杆延长线的交点 O 转动;反之,若设刚片 II 固定不动,则刚片 I 也将绕 O 点转动。 O 点称为刚片 I 和 II 的相对转动瞬心。上述情况等效于在 O 点用单铰把刚片 I 和 II 相联。这个铰的位置在两链杆轴线的交点上,但在两刚片相对转动后,其位置将随之改变。因此,这种铰与一般的铰不同,称为虚铰。

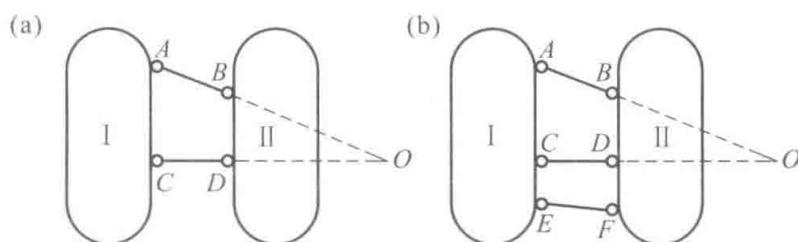


图 2-4

为了制止刚片 I 和 II 发生相对运动,还需要加上一根链杆 EF (图 2-4b)。如果链杆 EF 的延长线不通过 O 点,则刚片 I 和 II 之间就不可能再发生相对运动。这时,所组成的体系是几何不变的。于是,得出第一个组成规则:两刚片用不全交于一点也不全平行的三根链杆相联结,则所组成的体系是几何不变的。

二、三刚片的组成规则

平面中三个独立的刚片,共有 9 个自由度,而组成为一个刚片后便只有 3 个自由度。由此可见,在三个刚片之间至少应加入 6 个约束,才可能将三个刚片组成为一个几何不变的体系。

为了确定这六个约束的布置原则,今考察图 2-5a,其中刚片 I、II、III 用不在同一直线上的 A 、 B 、 C 三个铰两两相联,这一情况如同用三条线段 AB 、 BC 、 CA 作一三角形。由平面几何知识可知,用三条定长的线段只能作出一个形状和大小都一定的三角形,也就是说,由此得出的三角形是几何不变的。于是,得出第二个组成规则:三刚片用不在同一直线上的 3 个铰两两相联,则所组成的体系是几何不变的。

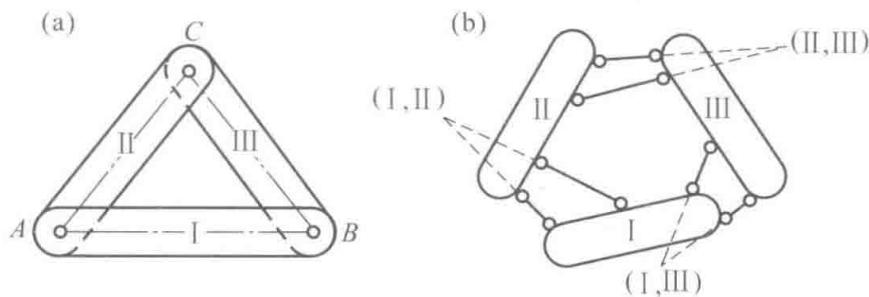


图 2-5

图 2-5a 中任一个铰可以换为由两根链杆所组成的虚铰, 得出如图 2-5b 所示三个虚铰不在同一直线上的体系。显然, 这种体系也是几何不变的。

三、二元体规则

如将图 2-5a 中的刚片 I 与 II 看作链杆, 就得到如图 2-6 所示的体系, 显然它是几何不变的。这种由两根不共线的链杆联结一个新结点的装置 (例如图 2-6 中的 $B-A-C$) 称为二元体。由上节已知, 一个结点的自由度等于 2, 用两根不在同一直线上的链杆相联, 其约束数也等于 2。所以, 增加一个二元体对体系的实际自由度并无影响。于是, 得出第三个组成规则: 在一原有体系上增加或撤去一个二元体, 则该体系的几何组成性质不会改变。因此, 在分析体系的几何组成时, 宜先将二元体撤除, 再对剩余部分进行分析, 所得结论就是原体系几何组成分析的结论。

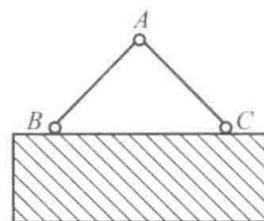


图 2-6

根据上述简单规则, 可逐步组成更为一般的几何不变体系, 也可用这些规则来判别给定体系是否几何不变, 具体示例见下节。值得指出, 在上述三个组成规则中, 都提出了一些限制条件。如果不能满足这些条件, 将会出现下述情况。

如图 2-7a 所示的两个刚片用三根链杆相联, 链杆的延长线全交于 O 点, 此时, 两个刚片可以绕 O 点做相对转动, 但在发生一微小转动后, 三根链杆就不再全交于一点, 从而将不会继续发生相对运动。这种在某一瞬时可以产生微小运动的体系, 称为瞬变体系。又如图 2-7b 所示的两个刚片用三根互相平行但不等长的链杆相联, 此时两个刚片可以沿着与链杆垂直的方向发生相对移动, 但在发生一微小移动后, 此三根链杆就不再互相平行, 故这种体系也是瞬变体系。应该注意, 若三链杆等长并且是从其中一个刚片沿同一方向引出时 (图 2-7c), 则在两刚片发生一相对运动后, 此三根链杆仍互相平行, 故运动将继续发生, 这样的体系就是几何可变体系。

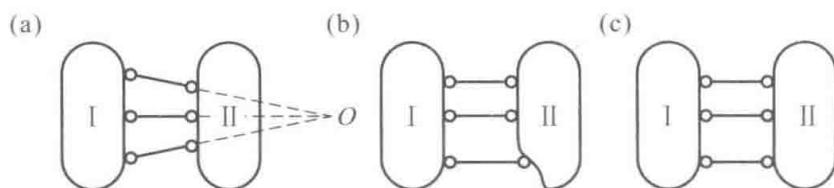


图 2-7

如三个刚片用位于一直线上的三个铰两两相联 (图 2-8), 此时 C 点同时位于以 AC 和 BC 为半径的两个圆弧上, 故 C 点可沿其公切线做微小的移动。不过在发生一微小移动后, 三个铰就不再位于一直线上, 运动也就不再继续, 故此体系是一个瞬变体系。图 2-9 所示体系也是瞬变体系。

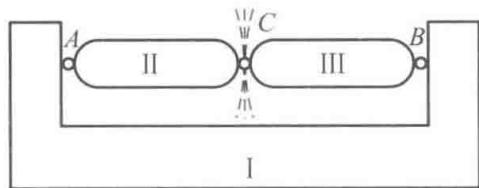


图 2-8

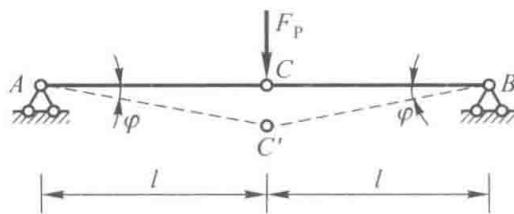


图 2-9

在工程中决不能采用瞬变体系。对于接近它的体系,也应避免。

在几何不变体系的组成规则中,指明了最低限度的约束数目。按照这些规则组成的体系称为无多余约束的几何不变体系。如果体系中的约束数目少于规定的数目,则体系是几何可变的(图 2-10a)。如果体系中的约束比规则中所要求的多,则按规则组成有多余约束的几何不变体系。例如,图 2-10b 所示体系,AB 部分以固定支座 A 与地基联结已构成一几何不变体系,支座 B 处的两根链杆对保证体系的几何不变性来说是多余的,称为多余约束,故该体系是具有两个多余约束的几何不变体系。

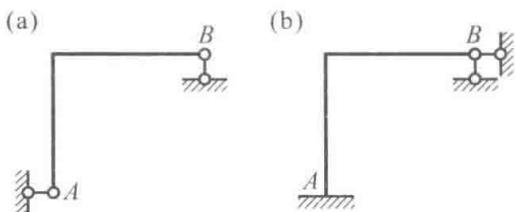


图 2-10

§ 2-3 几何组成分析示例

几何组成分析的依据通常是前述的三个规则,由于不考虑材料的应变,分析时可将基础(或地基)视为一刚片,也可把体系中的一根杆件、一根链杆或某些几何不变部分视为一刚片,还可以根据规则三先将体系中的二元体逐一撤除以使分析简化。

[例 2-1] 试对图 2-11 所示铰结链杆体系做几何组成分析。

解:在此体系中,ABC 是从一个基本铰结三角形 BFG 开始,按规则三依次增加 5 个二元体所组成,故它是一几何不变部分。同理, ADE 也是一几何不变部分。把 ABC、ADE 视为刚片 I 和 II,链杆 CD 作为刚片 III。此时,刚片 I 和 II 用铰 A 相联,刚片 II 和 III 用铰 D 相联,刚片 III 和 I 用铰 C 相联。此三铰 A、D 和 C 不在同一直线上,所以 ABE 为一几何不变部分。将 ABE 视为一刚片,将基础视为另一刚片,该两刚片用既不全交于一点又不全平行的三根链杆相联,故知此体系是几何不变的,且无多余约束。

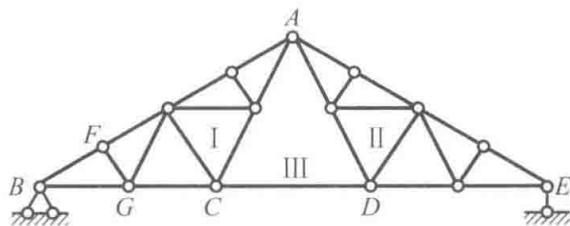


图 2-11

[例 2-2] 试对图 2-12 所示体系进行几何组成分析。

解:首先在基础上依次增加 A-C-B 和 C-D-B 两个二元体,并将所得部分视为一刚片;再将 EF 部分视为另一刚片。该两刚片通过链杆 ED 和 F 处两根水平链杆相联,而这三根链杆既不全交于一点又不全平行,故该体系是几何不变的,且无多余约束。

[例 2-3] 试对图 2-13 所示体系进行几何组成分析。

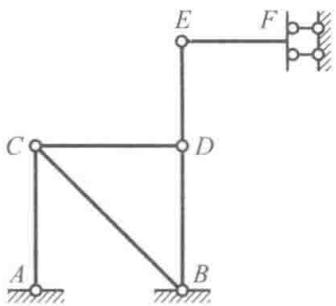


图 2-12

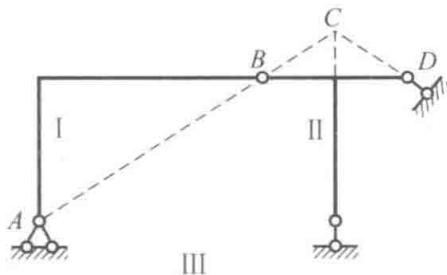


图 2-13

解:将 AB 、 BED 和基础分别作为刚片 I、II、III。刚片 I 和 II 用铰 B 相联;刚片 I 和 III 用铰 A 相联;刚片 II 和 III 用虚铰 C (D 和 E 两处支座链杆的交点)相联。因 A 、 B 、 C 三铰在一直线上,故该体系为瞬变体系。

[例 2-4] 试对图 2-14 所示体系进行几何组成分析。

解:杆 AB 与基础通过三根既不全交于一点又不全平行的链杆相联,成为一几何不变部分,再增加 $A-C-E$ 和 $B-D-F$ 两个二元体。此外,又添上了一根链杆 CD ,故此体系为具有一个多余约束的几何不变体系。

[例 2-5] 试对图 2-15 所示体系进行几何组成分析。

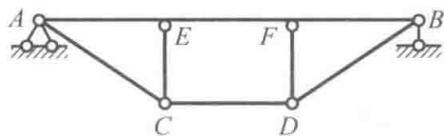


图 2-14

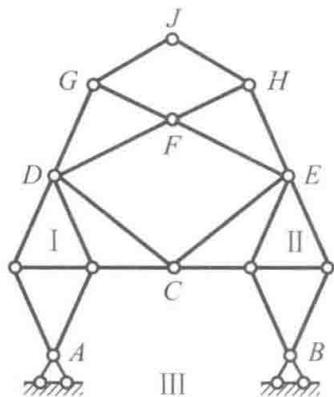


图 2-15

解:根据规则三,先依次撤除二元体 $G-J-H$ 、 $D-G-F$ 、 $F-H-E$ 、 $D-F-E$ 使体系简化。再分析剩下部分的几何组成,将 ADC 和 CEB 分别视为刚片 I 和 II,基础视为刚 III。此三刚片分别用铰 C 、 B 、 A 两两相联,且三铰不在同一直线上,故知该体系是无多余约束的几何不变体系。

§ 2-4 静定结构和超静定结构

前已述及,用来作为结构的杆件体系必须是几何不变的,而几何不变体系又可分为无多余约束的(例 2-1、例 2-2、例 2-5)和有多余约束的(例 2-4)两类。后者的约束数目除满足几何不变的要求外尚有多余。例如,图 2-16a 所示连续梁,如果将 C 、 D 两支座链杆去掉(图 2-16b),剩下的支座链杆恰好满足两刚片联结的要求,所以它有两个多余约束。又如图 2-17a 所示加劲梁,若将链杆 ab 去掉(图 2-17b),则它就成为无多余约束的几何不变体系,故此加劲梁具有一个多余约束。

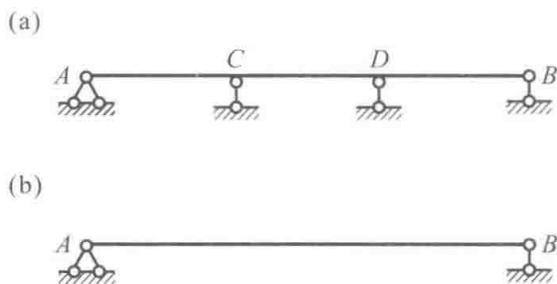


图 2-16

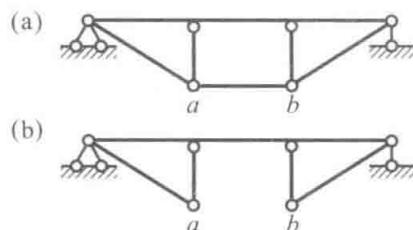


图 2-17

对于无多余约束的结构,如图 2-18 所示的简支梁,它的全部约束力和内力都可由静力平衡条件求得,这类结构称为静定结构。但是,对于具有多余约束的结构,却不能只依靠静力平衡条件求得其全部约束力和内力。如图 2-19 所示的连续梁,其支座约束力共有 5 个,而静力平衡条件只有三个,因而仅利用三个静力平衡条件无法求得其全部约束力,从而也就不能求出它的全部内力,这类结构称为超静定结构。

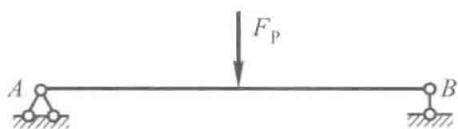


图 2-18

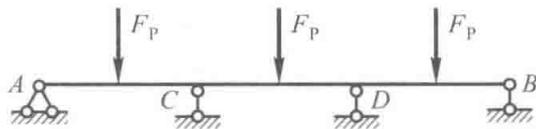


图 2-19

思考题

1. 几何可变体系、几何瞬变体系为什么不能作为结构? 试举例说明。
2. 何谓单铰、虚铰? 体系中任何两根链杆是否都相当于在其交点处的一个虚铰?
3. 图 2-20a 中 $B-A-C$ 是否为二元体? 图 2-20b 中 $B-D-C$ 能否看成是二元体?

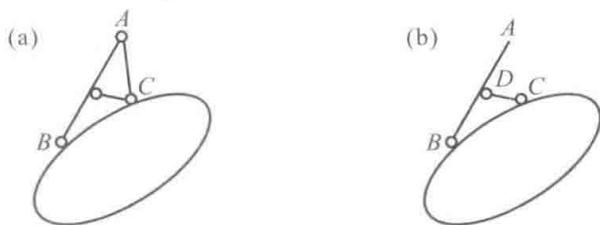


图 2-20

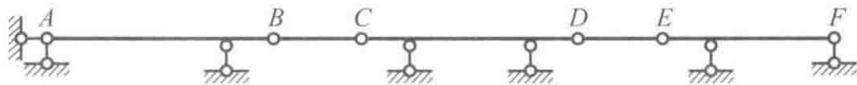
4. 瞬变体系与几何可变体系各有何特征? 如何鉴别瞬变体系?
5. 在进行几何组成分析时,应注意体系的哪些特点,才能使分析得到简化?
6. 对例 2-3 所示体系,试用两刚片相联的规则一进行分析。通过与例 2-3 解答对比的启发,你能得到什么结论?

(提示:其中两端铰接的折杆 AB ,在几何组成分析时,可视为通过 A 、 B 两铰心的链杆。)

7. 什么是多余约束? 如何确定多余约束的个数?

习题

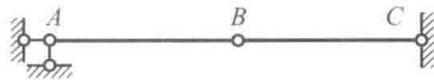
2-1~2-16 试对图示体系做几何组成分析。如果是具有多余约束的几何不变体系,则须指出其多余约束的数目。



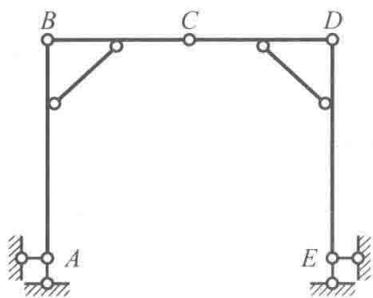
题 2-1 图



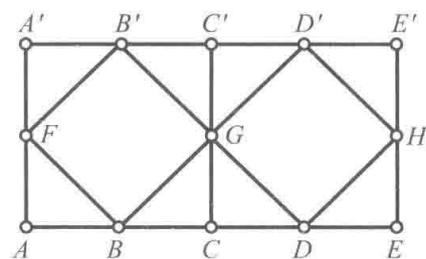
题 2-2 图



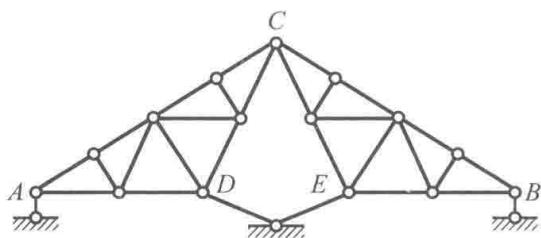
题 2-3 图



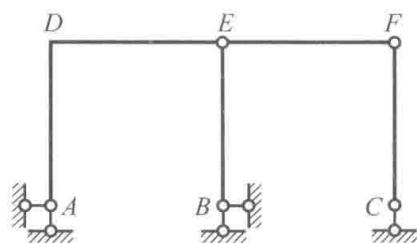
题 2-4 图



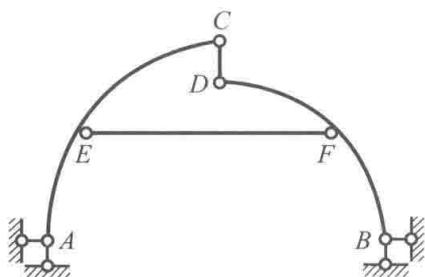
题 2-5 图



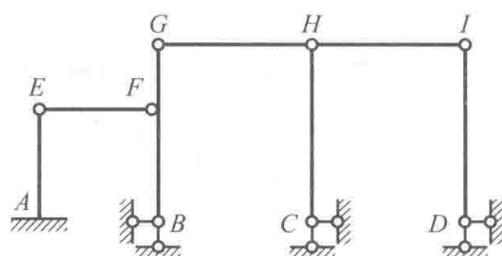
题 2-6 图



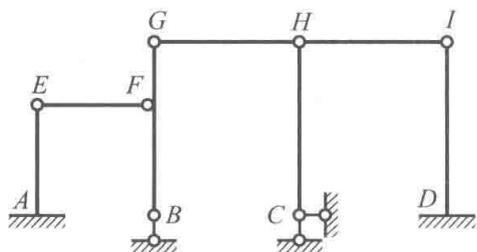
题 2-7 图



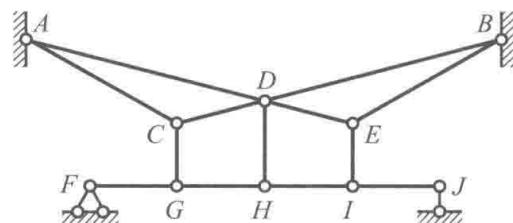
题 2-8 图



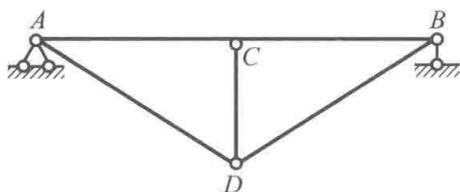
题 2-9 图



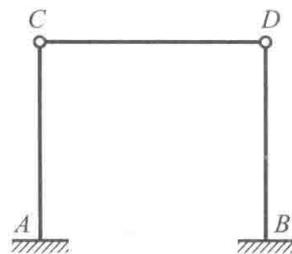
题 2-10 图



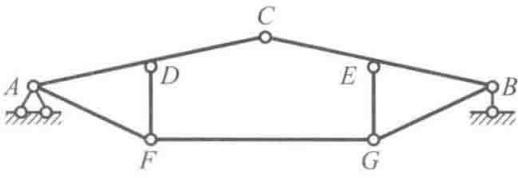
题 2-11 图



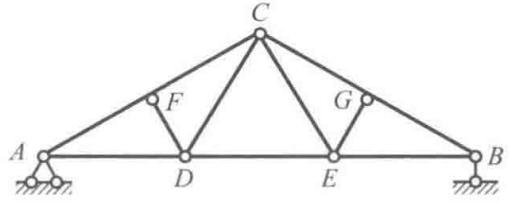
题 2-12 图



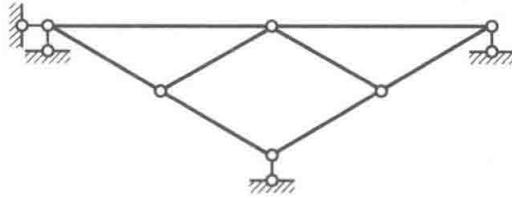
题 2-13 图



题 2-14 图



题 2-15 图



题 2-16 图

习题部分答案

2-1、2-2、2-4、2-6、2-8、2-9、2-10、2-11、2-14 均为无多余约束的几何不变体系。

2-12、2-13 为具有一个多余约束的几何不变体系。

2-15 为具有两个多余约束的几何不变体系。

2-3、2-16 为瞬变体系。

2-5、2-7 为几何可变体系。

第3章

静定结构的内力分析

§ 3-1 杆件内力计算

一、杆件内力符号规定

杆件的轴力 F_N 以拉力为正, 压力为负; 杆件的剪力 F_Q 以使该截面所在的隔离体有顺时针转动趋势时为正, 反之为负; 水平杆件的弯矩 M 以使杆件下侧纤维受拉时为正, 反之为负。

二、计算杆件内力的截面法

用假想截面将杆件截开, 以截开后受力情况较简单部分为研究对象, 由所取隔离体的平衡条件求得内力: 轴力等于截面一侧所有外力 (包括荷载和约束力) 在垂直于截面方向投影的代数和; 剪力等于截面一侧所有外力在平行于截面方向投影的代数和; 弯矩等于截面一侧所有外力对截面形心力矩的代数和。

三、直杆平衡的微分方程

$$\frac{dF_Q(x)}{dx} = -q(x), \quad \frac{dM(x)}{dx} = F_Q(x), \quad \frac{d^2M(x)}{dx^2} = -q(x)$$

式中 $q(x)$ 为横向分布荷载集度, x 为杆件轴向坐标, $q(x)$ 和 x 正向符合左手系。其几何意义是: 剪力图上某点处切线斜率等于该点处的横向荷载集度, 但符号相反; 弯矩图上某点处切线斜率等于该点处的剪力; 弯矩图在某点处的二阶导数等于该点的横向荷载集度, 但符号相反。直杆内力图的形状特征见表 3-1。

表 3-1 直杆内力图的形状特征

	集中力作用点	集中力偶作用点	均布荷载作用区段	无横向荷载作用区段	铰结处
剪力图	有突变	无变化	斜直线	水平线	无影响
弯矩图	有转折	有突变	二次抛物线	一般为斜直线	为零

§ 3-2 静定梁

一、单跨静定梁

单跨静定梁,特别是简支梁,是受弯结构受力分析的基础,应该熟练掌握。为加快内力图作图速度,本节将介绍分段一定点—连线的作图方法和弯矩图绘制的区段叠加法。

以图 3-1 所示简支伸臂梁为例。绘制内力图时,首先根据荷载分布情况,以 C 、 D 、 E 、 F 、 B 为分点,将梁 AG 分为六段。对于内力图为直线的区段,只要定出该段两端内力值的竖标顶点,然后以直线连接即得该段的内力图。但对均布荷载作用的 DE 区段,其弯矩图的曲线段,只有在定出两端点的竖标后再采用区段叠加法,才能准确绘出其图形。

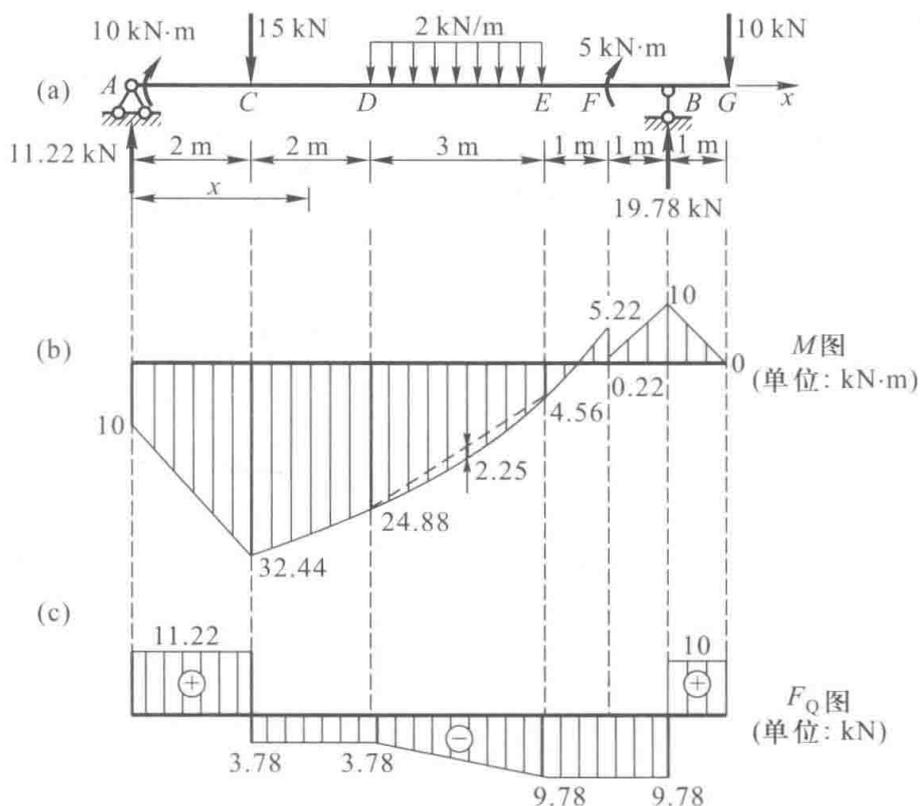


图 3-1

图 3-2a 为某一受均布荷载作用的杆段 ik , 图 3-2b 为具有同样跨度、两端受集中力偶和同一均布荷载作用的简支梁。因为荷载相同,所以它们有同样的微分关系 $\frac{d^2 M}{dx^2} = -q$, 积分两次后可得

$$M(x) = -\frac{q}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

式中 C_1 、 C_2 为两个待定常数。利用 $x=0$ 时, $M=M_{ik}$; $x=l$ 时, $M=M_{ki}$, 可以求得 C_1 、 C_2 。上述边界条件不但适用于图 3-2a 所示的杆段 ik , 而且也适用于图 3-2b 所示的简支梁。由此可知, 杆段 ik 的弯矩方程与简支梁的弯矩方程完全相同, 弯矩图也相同。对于简支梁, 其弯矩图等于图 3-2c

和图 3-2d 所示两个弯矩图的叠加。图 3-2c 为两端力偶 M_{ik} 和 M_{ki} 作用下的弯矩图,图 3-2d 为均布荷载 q 作用下的弯矩图。叠加方法可按下述步骤进行:首先用虚线画出两个杆端力偶作用下的弯矩图,也就是图 3-2e 中的虚线,再过杆段中点作杆轴的垂线交虚线于 c 点,然后从 c 点在垂线上沿荷载 q 的指向量取长度等于 $\frac{1}{8}ql^2$ 的线段 cd ,最后用光滑曲线将 a 、 d 、 b 三点连接,此曲线与基线所围成的图形(图 3-2e)即为叠加后简支梁的弯矩图。另将其用于图 3-2a 所示杆段,这就是以后会经常用到的区段叠加法,图 3-1b 中 DE 区段的弯矩图即由此作出。

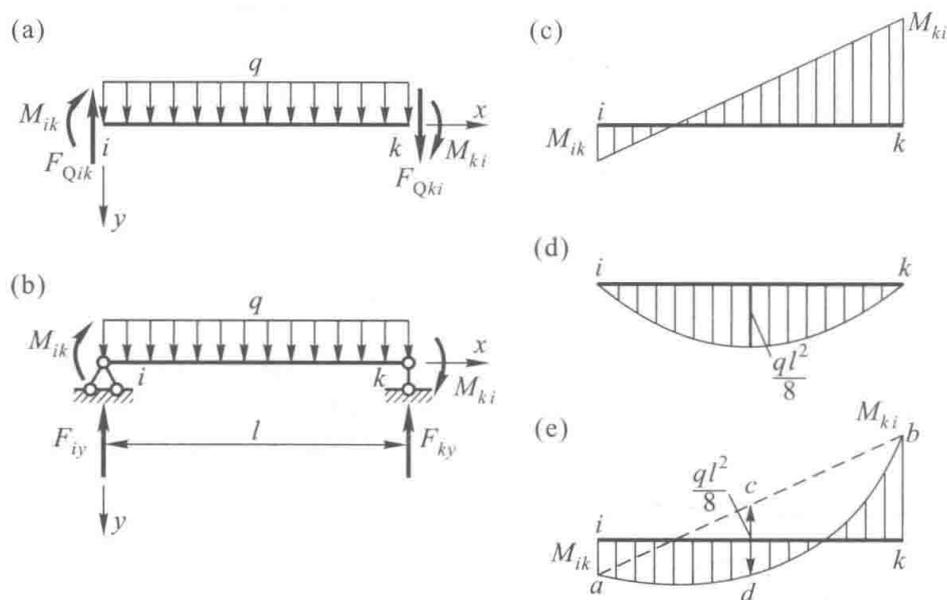


图 3-2

二、多跨静定梁

多跨静定梁是工程中比较常见的结构,它的基本组成形式为图 3-3 所示的两种类型。图 3-3a 所示是在伸臂梁 AC 上依次增加 CE 、 EF 两根梁。图 3-3b 所示是在 AC 和 DF 两根伸臂梁上再增加一小悬跨 CD 。通过几何组成分析可知,它们都是几何不变且无多余约束的体系,所以均为静定结构。

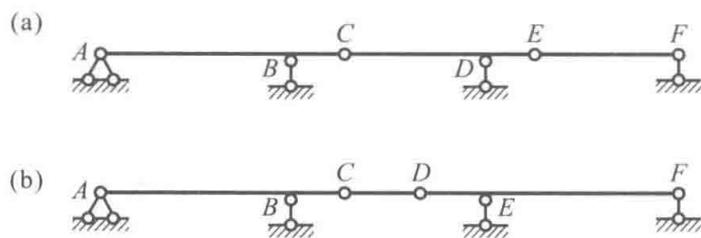


图 3-3

根据多跨静定梁的几何组成规律,可以将它的各部分区分为基本部分和附属部分。例如,图 3-3a 所示的梁中, AC 通过三根既不全平行也不全交于一点的链杆与基础联结,所以它是几何不变的。梁 CE 是通过铰 C 和支座链杆 D 联结在梁 AC 和基础上;梁 EF 又是通过铰 E 和支座链杆 F 联结在梁 CE 和基础上。由此可知,梁 AC 直接与基础组成一几何不变部分,它

的几何不变性不受 CE 和 EF 影响,故称梁 AC 为该多跨静定梁的基本部分。而梁 CE 要依靠梁 AC 才能保证其几何不变性,故称梁 CE 为梁 AC 的附属部分。同理,梁 EF 相对于 AC 和 CE 组成的几何不变部分来说,也是附属部分,而 AC 和 CE 组成的部分,相对于梁 EF 来说,则是基本部分。

上述组成顺序可用图 3-4a 来表示。这种图形称为层次图。通过层次图可以看出力的传递过程。例如,作用在最上面的附属部分 EF 上的荷载 F_{P3} 不但使梁 EF 受力,而且还会通过铰 E 将力传给梁 CE ,再通过铰 C 传给梁 AC 。同样,荷载 F_{P2} 能使梁 CE 和梁 AC 受力,但它不会传给梁 EF 。因此, F_{P2} 的作用对梁 EF 的内力无影响。同理,作用在基本部分梁 AC 上的荷载 F_{P1} ,只在梁 AC 上引起内力和约束力,而对附属部分 CE 和 EF 都不会产生影响。总之,作用在附属部分上的荷载,将使它本身与支承它的基本部分产生约束力和内力,而作用在基本部分上的荷载则对附属部分没有影响。因此,计算多跨静定梁时,应先从附属部分开始,按几何组成的顺序逆向进行。例如,对图 3-3a 所示多跨静定梁,应先取梁 EF 计算,再依次考虑梁 CE 和梁 AC 。这样,每一步都是单跨静定梁的计算问题,用前述方法即可解决。

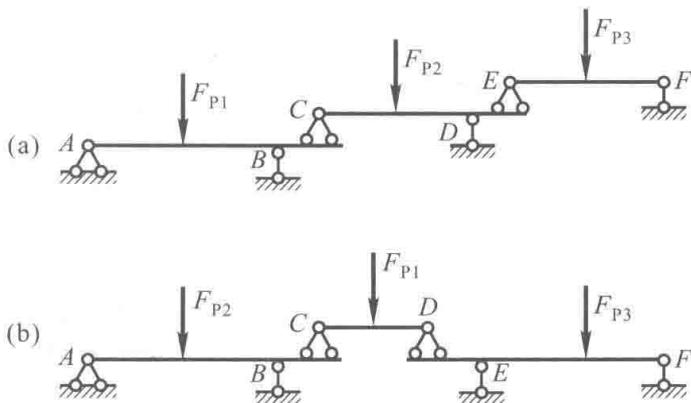


图 3-4

对图 3-3b 所示的梁,如果仅承受竖向荷载作用,则不但梁 AC 能独立承受荷载维持平衡,梁 DF 也能这样。这时,梁 AC 和梁 DF 都可视为基本部分。其层次图如图 3-4b 所示,由层次图可知,对该梁的计算应从附属部分梁 CD 开始,然后再分别计算梁 AC 与梁 DF 。

上述先附属部分后基本部分的计算原则,也适用于由基本部分和附属部分组成的其他类型的结构。

下面举例说明多跨静定梁的计算方法。图 3-5a 所示多跨静定梁,由于仅受竖向荷载作用,故 AB 和 CE 均为基本部分,其层次图如图 3-5b 所示。各梁的隔离体示于图 3-5c 中。

从附属部分 BC 开始,依次求出联结各梁的铰的竖向约束力和支座约束力。铰 C 处的水平约束力为 F_{Cx} ,由 CE 梁的平衡条件可知其值为零,并由此得知 F_{Bx} 也等于零。求出各约束力和支座约束力后,便可分别绘出各梁的内力图。将各梁的内力图置于同一基线上,则得出该多跨静定梁的内力图如图 3-5d、e 所示。

FG 、 GD 两个区段内的剪力 F_Q 是同一常数,由微分关系 $\frac{dM}{dx} = F_Q$,可知这两区段内的弯矩图形有相同的斜率。因此,弯矩图中 FG 与 GD 两段的斜直线相互平行。同理,因为在 H 左、右相邻截面上的剪力 F_Q 相等,所以弯矩图中 HE 区段内的直线与 DH 区段内的曲线在 H 点相切。

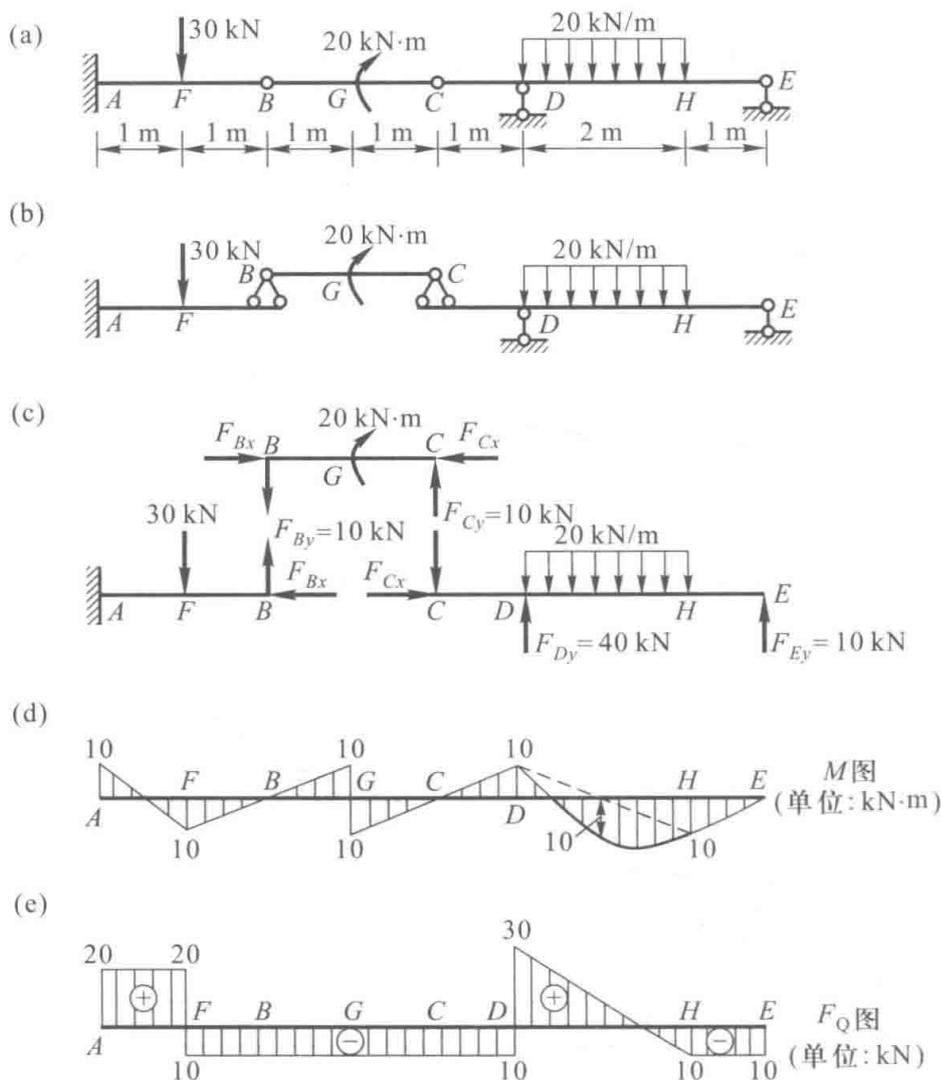


图 3-5

§ 3-3 静定刚架

平面刚架是由梁和柱组成的平面结构。如图 3-6a 所示为站台上用的“T”形刚架,它由两根横梁和一根立柱组成。梁与柱的联结处在构造上为刚性联结,这种结点即为刚结点,具有刚结点是刚架的特点。图 3-6a 所示刚架柱子的下端用细石混凝土填缝而嵌固于杯形基础中,可看作是固定支座。又因横梁倾斜坡度不大,可近似地以水平直杆代替,故其计算简图如图 3-6b 所示。刚架受荷载作用后的变形图如图 3-6c 所示,汇交于刚结点 A 的各杆端都转动了同一角度 φ_A 。

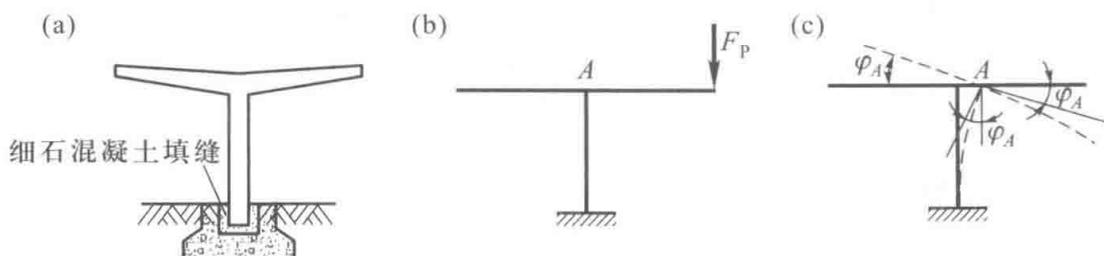


图 3-6

刚架的内力,是指构成刚架各杆件垂直于杆轴截面上的弯矩 M 、剪力 F_Q 和轴力 F_N 。在计算静定刚架时,通常先由整体或某些部分的平衡条件,求出各支座约束力和各铰结处的约束力,然后再逐杆绘制内力图。图 3-7a 为另一静定刚架,由横梁 CD 和立柱 AC 组成,其中结点 C 为刚结点,将其立柱 AC 在 C 点的下邻截面处截断,并截断支座 A 的链杆,即可得其隔离体。将此隔离体与相应的简支梁比较(图 3-7b),并注意轴力对弯矩和剪力不产生影响,则不难看出,二者的弯矩、剪力相同。由此可见,上节绘制梁内力图的方法同样也适用于立柱。刚架杆件中一般有轴力,这是它们与梁的主要区别。应该指出,当荷载与杆轴垂直时,杆件的轴力沿杆轴无变化。本例中柱 AC 只受垂直于轴线的集中力作用,所以 AC 中的轴力为常数,只要将它任一截面的轴力求得,便可绘出其轴力图。

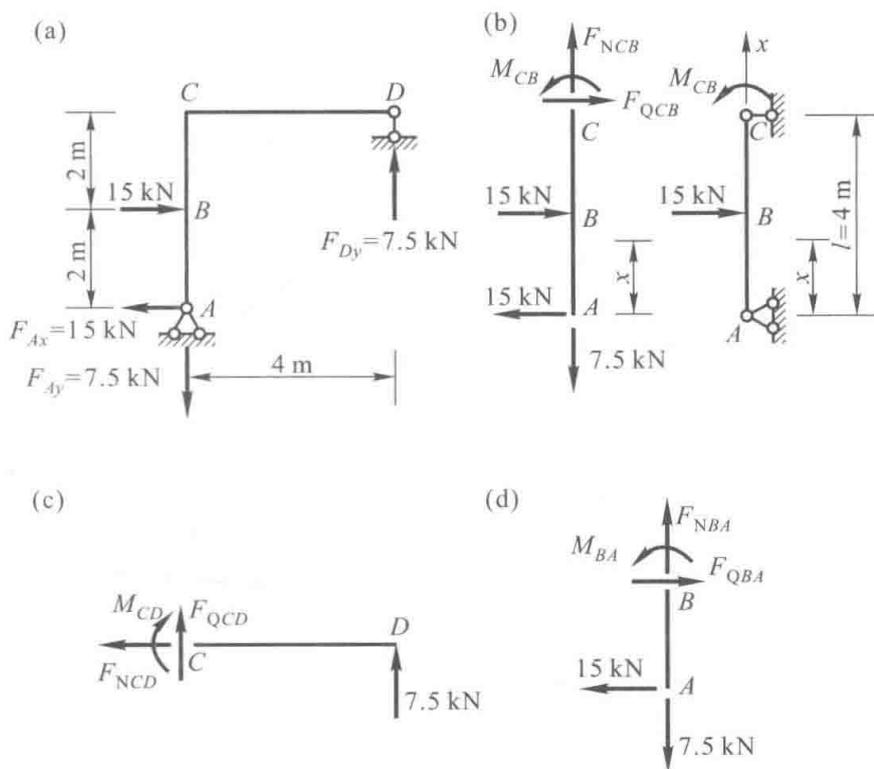


图 3-7

计算图 3-7a 所示刚架的过程如下。

一、求支座约束力

通过整体平衡,先求出各支座约束力,由

$$\sum M_A = 0, \quad 15\text{ kN} \times 2\text{ m} - F_{Dy} \times 4\text{ m} = 0$$

得 $F_{Dy} = 7.5\text{ kN}$

由 $\sum F_y = 0, \quad -F_{Ay} + 7.5\text{ kN} = 0$

得 $F_{Ay} = 7.5\text{ kN}$

再由 $\sum F_x = 0, \quad -F_{Ax} + 15\text{ kN} = 0$

得 $F_{Ax} = 15\text{ kN}$

然后,根据其他平衡条件进行校核。例如,由 $\sum M_D = 0$, 即 $-7.5\text{ kN} \times 4\text{ m} + 15\text{ kN} \times 4\text{ m} - 15\text{ kN} \times 2\text{ m} = 0$, 得知约束力计算无误。

二、绘制内力图

1. 弯矩图

根据各杆的荷载情况分段绘图,即对于无荷载区段,只需定出两控制截面的弯矩值,即可连成直线图形;对于受均布荷载作用的区段,则可利用区段叠加法进行叠加。通常规定将弯矩图绘在纤维受拉的一边。

由图 3-7a 所示刚架的荷载情况,可知其弯矩图应分为 AB 、 BC 和 CD 三段来绘制。这三段都是无荷载区段,故取 A 、 B 、 C 、 D 为控制截面。为了使内力表达清晰,在内力符号的右下方以两个下标表明内力所属杆件(或杆段),且用前一个下标表示该内力所属杆端。例如,杆段 BC 的 B 端弯矩用 M_{BC} 表示,而 C 端的弯矩则用 M_{CB} 表示。各控制截面弯矩计算如下:

A 端为铰,所以

$$M_{AB} = 0$$

截取图 3-7d 所示隔离体,由 $\sum M_B = 0$ 可求得

$$M_{BA} = 30 \text{ kN} \cdot \text{m} \text{ (右侧受拉)}$$

截取图 3-7b 所示隔离体,由 $\sum M_C = 0$ 可求得

$$M_{CB} = 30 \text{ kN} \cdot \text{m} \text{ (右侧受拉)}$$

截取图 3-7c 所示隔离体,由 $\sum M_C = 0$ 可求得

$$M_{CD} = 30 \text{ kN} \cdot \text{m} \text{ (下边受拉)}$$

$$M_{DC} = 0$$

此外,注意到 $M_{BC} = M_{BA} = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。于是,由上述控制截面的弯矩值,即可绘出图 3-10a 所示的弯矩图。

弯矩图作出后,应进行校核。为此,可取各刚结点来检验其是否满足力矩平衡条件。例如,取结点 C 为隔离体(图 3-8),并写出其力矩平衡方程为

$$\sum M_C = 0, \quad 30 \text{ kN} \cdot \text{m} - 30 \text{ kN} \cdot \text{m} = 0$$

可见计算无误。

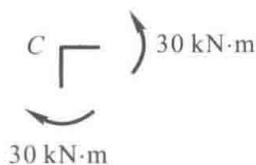


图 3-8

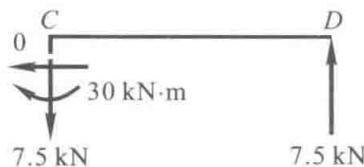


图 3-9

2. 剪力图

剪力仍规定以使隔离体有顺时针方向转动趋势时为正。在图 3-7 中所示的剪力都假设为正向。现因本例的三个区段都为无荷载区段,故各区段的剪力分别为一常数。只需求出其中某一截面的剪力值便可作出剪力图。对于水平杆件,正剪力一般绘在杆轴的上侧,并注明正号。对于竖杆和斜杆,正、负剪力可分绘于杆件两侧,并注明符号。

分别由图 3-7b、c、d 所示隔离体,即可求得

$$F_{QCB} = 0, \quad F_{QCD} = -7.5 \text{ kN}, \quad F_{QBA} = 15 \text{ kN}$$

绘出剪力图如图 3-10b 所示。

3. 轴力图

一般规定轴力以拉力为正,本例中两杆的轴力都为常数,由图 3-7b、c、d 所示隔离体可分别求得

$$F_{NCB} = 7.5 \text{ kN}, \quad F_{NCD} = 0, \quad F_{NBA} = 7.5 \text{ kN}$$

对于水平杆件,正号的轴力一般绘在杆件的上侧,并注明正号。对于竖杆和斜杆,正、负轴力可分绘于杆件两侧,并注明符号。图 3-10c 所示即为刚架的轴力图。

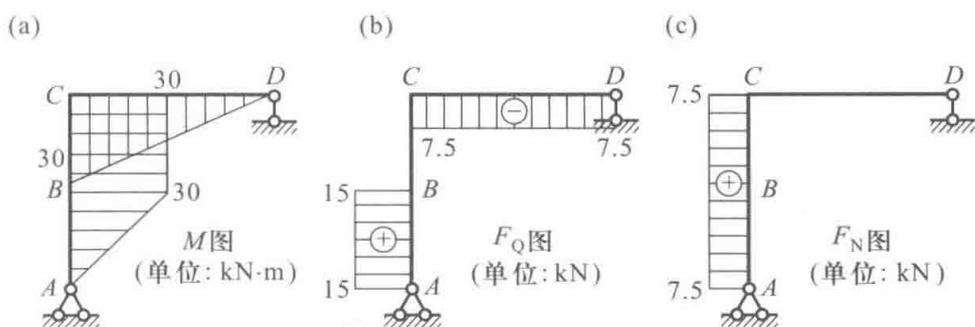


图 3-10

为了校核所作剪力图和轴力图的正确性,可用任一截面截取刚架的某一部分,检验其平衡条件 $\sum F_x = 0$ 和 $\sum F_y = 0$ 是否得到满足。例如,可截取如图 3-9 所示隔离体,由

$$\sum F_x = 0, \quad 0 = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad -7.5 \text{ kN} + 7.5 \text{ kN} = 0$$

可知所得剪力图和轴力图无误。

为了便于读者进一步掌握上述内力图的绘制方法,下面再举两例加以说明。

[例 3-1] 试作图 3-11a 所示刚架的内力图。

解:1. 求支座约束力

$$\text{由 } \sum M_E = 0, \quad F_{Ay} \times 4 \text{ m} + 5 \text{ kN} \times 2 \text{ m} - 16 \text{ kN/m} \times 5 \text{ m} \times 1.5 \text{ m} = 0$$

$$F_{Ay} = 27.5 \text{ kN}$$

$$\text{由 } \sum F_y = 0, \quad F_{Ey} + 27.5 \text{ kN} - 16 \text{ kN/m} \times 5 \text{ m} = 0$$

$$F_{Ey} = 52.5 \text{ kN}$$

$$\text{由 } \sum F_x = 0, \quad 5 \text{ kN} - F_{Ex} = 0$$

$$F_{Ex} = 5 \text{ kN}$$

再由 $\sum M_A = 0$ 进行校核,有

$$5 \text{ kN} \times 2 \text{ m} + 16 \text{ kN/m} \times 5 \text{ m} \times 2.5 \text{ m} - 52.5 \text{ kN} \times 4 \text{ m} = 0$$

故知对约束力的计算无误。

2. 绘制内力图

(1) 弯矩图

为了计算方便,暂规定弯矩的符号以使刚架内侧纤维受拉为正,悬臂 DF 部分则以使下边纤维受拉为正。根据荷载情况可知,弯矩图应分为 AB 、 BC 、 CD 、 DE 和 DF 五段来绘制。各段控制

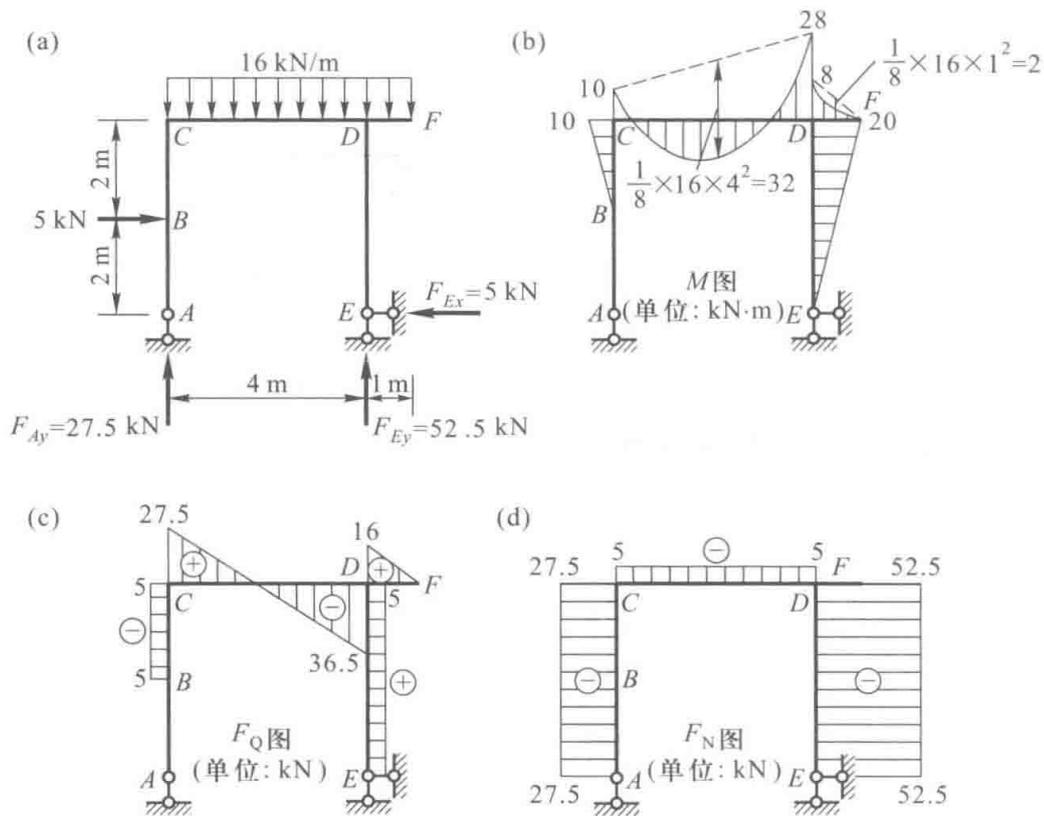


图 3-11

截面的弯矩,可截取隔离体由平衡条件求得,也可根据某一截面上的弯矩等于该截面任一侧所有外力对其形心力矩的代数和,直接得出各控制截面上的弯矩。先从刚架的左侧开始,可知

$$M_{AB} = M_{BA} = M_{BC} = 0$$

$$M_{CB} = -5 \text{ kN} \times 2 \text{ m} = -10 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CD} = -5 \text{ kN} \times 2 \text{ m} = -10 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

计算 M_{DE} 、 M_{DF} 、 M_{DC} 时,取截面以右部分考虑较简便,于是有

$$M_{DE} = -5 \text{ kN} \times 4 \text{ m} = -20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{DF} = -\frac{1}{2} \times 16 \text{ kN/m} \times (1 \text{ m})^2 = -8 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{DC} = -\frac{1}{2} \times 16 \text{ kN/m} \times (1 \text{ m})^2 - 5 \text{ kN} \times 4 \text{ m} = -28 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{ED} = 0, \quad M_{FD} = 0$$

悬臂部分左端的弯矩 M_{DF} 为负,说明悬臂上侧受拉。其他杆端弯矩为负,说明杆件的外侧受拉。

求得上述各控制截面的弯矩值后,便可绘制弯矩图。根据荷载分布情况可知该刚架的弯矩图除 CD 、 DF 段外,其余各段的弯矩图都为直线,连接两端竖标即得。至于 CD 、 DF 段的弯矩图,可利用区段叠加法来绘制。整个刚架的弯矩图如图 3-11b 所示,其中杆 CD 中段内侧受拉。

为了校核弯矩图,可取结点 D 为隔离体,检验它是否满足 $\sum M_D = 0$ 这一平衡条件。由图 3-12 可知

$$8 \text{ kN} \cdot \text{m} + 20 \text{ kN} \cdot \text{m} - 28 \text{ kN} \cdot \text{m} = 0$$

对其他刚结点,也可按同样方法进行校核,并可证实所得的弯矩图无误。

(2) 剪力图

各段控制截面上的剪力,等于该截面任一侧的全部外力在截面方向上投影的代数和,从而可作出剪力图,如图 3-11c 所示。

(3) 轴力图

杆件中任一截面上的轴力,等于该截面任一侧的全部外力在垂直于截面方向上投影的代数和,于是可作出如图 3-11d 所示的轴力图。

最后,取结点 D 来检验其剪力和轴力是否满足 $\sum F_x=0$ 和 $\sum F_y=0$ 两个平衡条件。由图 3-13 有

$$5 \text{ kN} - 5 \text{ kN} = 0$$

$$52.5 \text{ kN} - 36.5 \text{ kN} - 16 \text{ kN} = 0$$

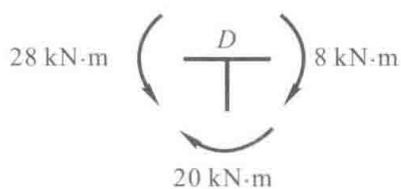


图 3-12

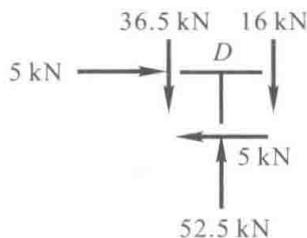


图 3-13

可知所得剪力图 and 轴力图无误。

[例 3-2] 试作图 3-14a 所示三铰刚架的内力图。

解:1. 计算约束力,由

$$\sum M_B = 0, F_{Ay} \times 8 \text{ m} - 20 \text{ kN/m} \times 4 \text{ m} \times 6 \text{ m} = 0$$

$$F_{Ay} = 60 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0, F_{By} + 60 \text{ kN} - 20 \text{ kN/m} \times 4 \text{ m} = 0$$

$$F_{By} = 20 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$F_{Ax} = F_{Bx}$$

取部分结构为隔离体(图 3-15a),由其平衡条件求水平约束力

$$\sum M_C = 0, F_{Bx} \times 8 \text{ m} - 20 \text{ kN} \times 4 \text{ m} = 0$$

$$F_{Bx} = 10 \text{ kN}$$

$$F_{Ax} = 10 \text{ kN}$$

为了校核约束力,取另一部分为隔离体(图 3-15b),根据 $\sum M_C = 0$ 检验如下

$$60 \text{ kN} \times 4 \text{ m} - 10 \text{ kN} \times 8 \text{ m} - 20 \text{ kN/m} \times 4 \text{ m} \times 2 \text{ m} = 0$$

故知约束力计算无误。

2. 绘制内力图

根据荷载情况,可分为 AD 、 DC 、 CE 和 EB 四段,分别计算出各段控制截面的内力,即可作出如图 3-14b、c 和 d 所示的弯矩图、剪力图 and 轴力图。对于 AD 和 EB 段仿照前例不难求得有关内力,现对倾斜段 DC 和 CE 控制截面上的内力计算说明如下。

(1) 求 DC 段控制截面的内力

取图 3-16a 所示隔离体,由 $\sum M_D = 0$,有

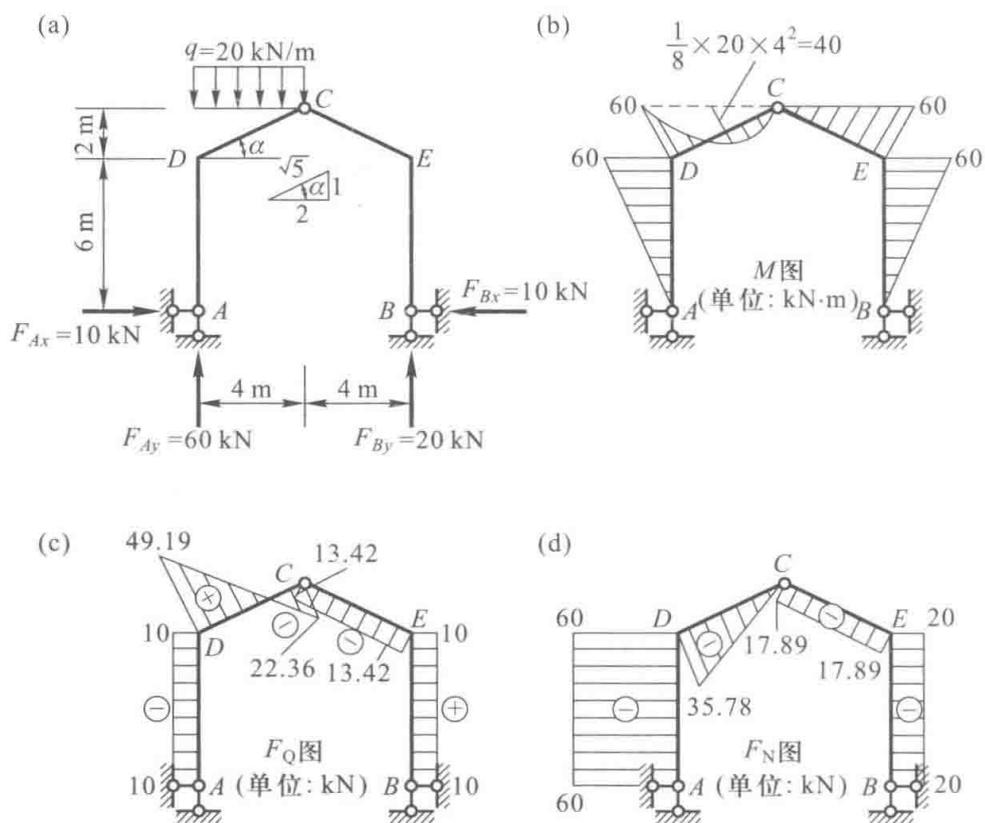


图 3-14

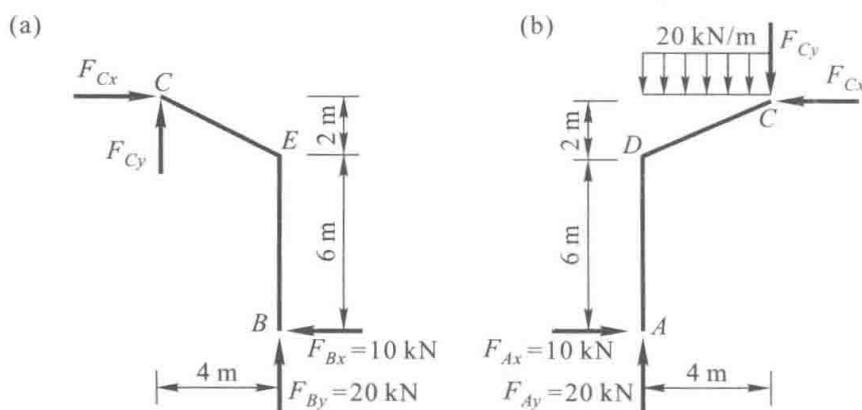


图 3-15

$$M_{DC} - 10 \text{ kN} \times 6 \text{ m} = 0$$

故

$$M_{DC} = 60 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

为了便于计算,取 $Dn\tau$ 坐标系,列投影方程。由 $\sum F_n = 0$, 有

$$F_{NDC} + 10 \text{ kN} \cdot \cos \alpha + 60 \text{ kN} \cdot \sin \alpha = 0$$

即

$$F_{NDC} + 10 \text{ kN} \times \frac{2}{\sqrt{5}} + 60 \text{ kN} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = 0$$

得

$$F_{NDC} = -16\sqrt{5} \text{ kN} = -35.78 \text{ kN}$$

由

$$\sum F_\tau = 0, \quad -F_{QDC} + 60 \text{ kN} \cdot \cos \alpha - 10 \text{ kN} \cdot \sin \alpha = 0$$

可得

$$F_{QDC} = 22\sqrt{5} \text{ kN} = 49.19 \text{ kN}$$

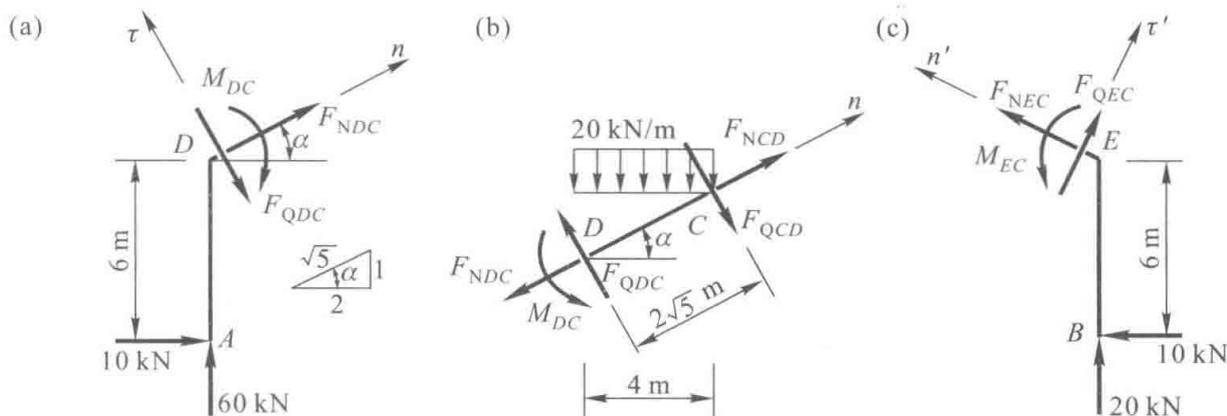


图 3-16

再取 DC 为隔离体(图 3-16b), 由 $\sum M_D = 0$, 有

$$-60 \text{ kN} \cdot \text{m} + \frac{1}{2} \times 20 \text{ kN/m} \times (4 \text{ m})^2 + F_{QCD} \times 2\sqrt{5} \text{ m} = 0$$

得
$$F_{QCD} = -10\sqrt{5} \text{ kN} = -22.36 \text{ kN}$$

由
$$\sum F_n = 0, \quad F_{NCD} - 20 \text{ kN/m} \times 4 \text{ m} \cdot \sin \alpha - F_{NDC} = 0$$

即
$$F_{NCD} - 20 \text{ kN/m} \times 4 \text{ m} \times \frac{1}{\sqrt{5}} - (-16\sqrt{5} \text{ kN}) = 0$$

得
$$F_{NCD} = 0$$

此外, 因 C 端为铰, 故 $M_{CD} = 0$ 。

(2) 求 CE 段控制截面的内力

取图 3-16c 所示隔离体, 由 $\sum M_E = 0$, 有

$$-M_{EC} + 10 \text{ kN} \times 6 \text{ m} = 0$$

得
$$M_{EC} = 60 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

同理, 取 $En'\tau'$ 坐标系, 列出投影方程, 由 $\sum F_{n'} = 0$, 有

$$F_{NEC} + 10 \text{ kN} \cdot \cos \alpha + 20 \text{ kN} \cdot \sin \alpha = 0$$

即
$$F_{NEC} + 10 \text{ kN} \times \frac{2}{\sqrt{5}} + 20 \text{ kN} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = 0$$

得
$$F_{NEC} = -8\sqrt{5} \text{ kN} = -17.89 \text{ kN}$$

由 $\sum F_{\tau'} = 0$, 有
$$F_{QEC} - 10 \text{ kN} \cdot \sin \alpha + 20 \text{ kN} \cdot \cos \alpha = 0$$

可得
$$F_{QEC} = -6\sqrt{5} \text{ kN} = -13.42 \text{ kN}$$

注意到该段为无荷载区段, 故剪力和轴力分别为一常数, 即 $F_{QCE} = F_{QEC} = -13.42 \text{ kN}$, $F_{NCE} = F_{NEC} = -17.89 \text{ kN}$ 。

求得上述两倾斜杆段有关控制截面的内力后, 即可作出相应的内力图。 DC 段的弯矩图, 等于相应斜筒支梁在端弯矩 $M_{DC} = 60 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 作用下的弯矩图(图 3-14b 中杆 DC 上的虚线), 叠加水平均布荷载作用下的弯矩图。具体叠加方法与均布荷载作用下水平杆件的区段叠加法相同, 只需注意竖标应与杆轴 DC 垂直, 且叠加值应按斜杆的水平投影长度计算。

§ 3-4 三铰拱

一、概述

拱结构是应用比较广泛的结构形式之一。在房屋建筑中,屋面承重结构也可采用拱结构(图 3-17)。拱结构的计算简图通常有三种,图 3-18a 和图 3-18b 所示无铰拱和两铰拱是超静定的,图 3-18c 所示三铰拱是静定的。在本节中将只讨论三铰拱的计算。

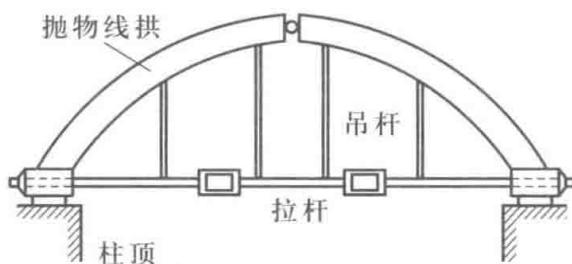


图 3-17



图 3-18

拱结构的特点是杆轴为曲线,而且在竖向荷载作用下支座产生水平约束力。这种水平约束力又称为水平推力,或简称推力。拱结构与梁结构的区别,不仅在于外形不同,更重要的还在于在竖向荷载作用下是否产生水平推力。例如,图 3-19 所示的两个结构,虽然它们的杆轴都是曲线,但图 3-19a 所示结构在竖向荷载作用下不产生水平推力,其弯矩与同跨度、同荷载的相应简支梁的弯矩相同,所以这种结构不是拱结构而是曲梁。但图 3-19b 所示结构,两端都有水平支座链杆,在竖向荷载作用下将产生水平推力,所以属于拱结构。由于水平推力的存在,拱中各截面的弯矩将比相应的曲梁或简支梁的弯矩要小,并且会使整个拱体主要承受压力。因此,拱结构可采用抗压强度较高而抗拉强度较低的砖、石、混凝土等材料来建造。

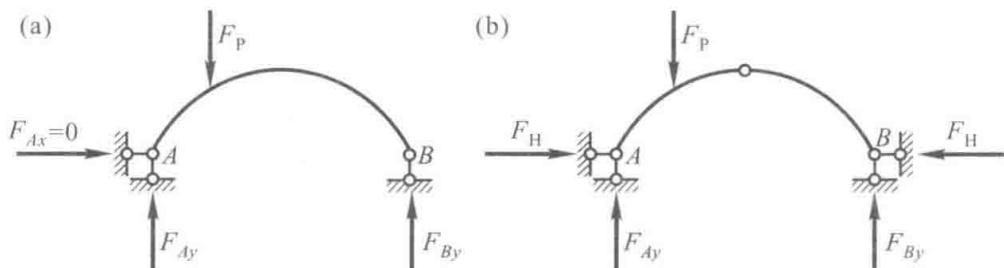


图 3-19

拱结构(图 3-20a)最高的一点称为拱顶,三铰拱的中间铰通常安置在拱顶处。拱的两端与支座联结处称为拱趾,或者称为拱脚。两拱趾在同一水平线上的拱称为平拱,否则为斜拱。

两个拱趾间的水平距离 l 称为跨度。拱顶到两拱趾连线的竖向距离 f 称为拱高, 或者称为拱矢。拱高与跨度之比 f/l 称为高跨比或矢跨比。由后面分析可知, 拱的主要力学性能与高跨比有关。

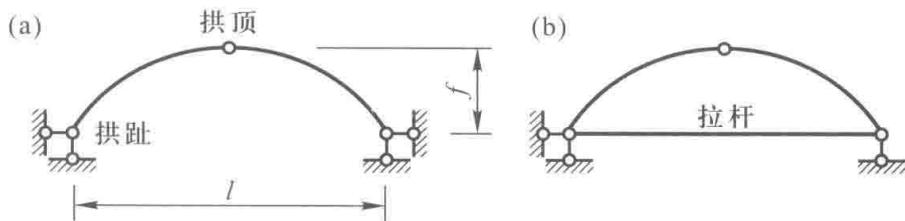


图 3-20

用作屋面承重结构的三铰拱, 常用两支座之间设置的水平拉杆代替一根水平支座链杆(图 3-20b), 以拉杆产生的拉力代替推力的作用, 使竖向荷载作用下支座只产生竖向约束力, 故称为具有拉杆的拱, 或者简称为拉杆拱。但是, 这种结构的内部受力情况与三铰拱完全相同, 其优点在于消除了推力对支承结构(例如砖墙)的影响。图 3-17 所示的装配式钢筋混凝土三铰拱就是拉杆拱的实例, 设置吊杆只为了减少拉杆的挠度, 在分析拱的内力时可以不考虑。拉杆拱的计算简图如图 3-20b 所示。

二、三铰拱的计算

三铰拱为静定结构, 其全部约束力和内力都可由静力平衡方程算出。为了说明三铰拱的计算方法, 现以图 3-21a 所示在竖向荷载作用下的平拱为例, 导出其计算公式。

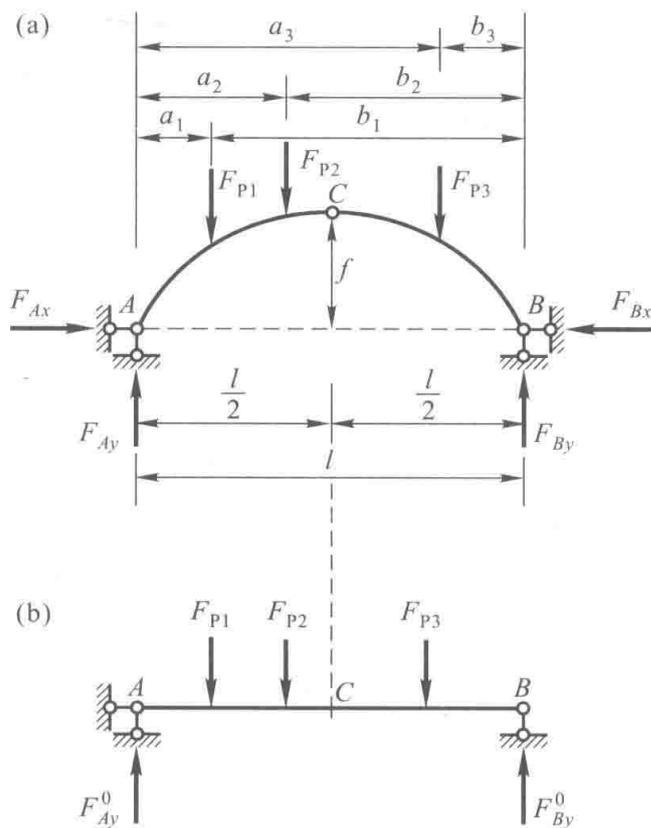


图 3-21

1. 支座约束力的计算公式

三铰拱的两端都是固定铰支座,因此有四个未知约束力,故需列四个平衡方程进行解算。除了三铰拱整体平衡的三个方程之外,还可利用中间铰不能抵抗弯矩的特性(即弯矩 $M_C=0$)建立一个补充方程。

首先,考虑三铰拱的整体平衡,由 $\sum M_B=0$,有

$$F_{Ay}l - F_{P1}b_1 - F_{P2}b_2 - F_{P3}b_3 = 0$$

可得左支座竖向约束力

$$F_{Ay} = \frac{F_{P1}b_1 + F_{P2}b_2 + F_{P3}b_3}{l} \quad (a)$$

同理,由 $\sum M_A=0$ 可得右支座竖向约束力

$$F_{By} = \frac{F_{P1}a_1 + F_{P2}a_2 + F_{P3}a_3}{l} \quad (b)$$

由 $\sum F_x=0$,可知水平推力 F_H 为

$$F_H = F_{Ax} = F_{Bx}$$

再考虑 $M_C=0$ 的条件,取左半拱上所有外力对 C 点的力矩来计算,则由 $\sum M_C=0$,有

$$F_{Ay} \frac{l}{2} - F_{P1} \left(\frac{l}{2} - a_1 \right) - F_{P2} \left(\frac{l}{2} - a_2 \right) - F_{Ax} f = 0$$

所以

$$F_H = F_{Ax} = F_{Bx} = \frac{F_{Ay} \frac{l}{2} - F_{P1} \left(\frac{l}{2} - a_1 \right) - F_{P2} \left(\frac{l}{2} - a_2 \right)}{f} \quad (c)$$

式(a)和式(b)右边的值,等于图3-21b所示相应简支梁的支座约束力 F_{Ay}^0 和 F_{By}^0 。式(c)右边的分子,等于相应简支梁与拱中间铰位置相对应的截面 C 的弯矩 M_C^0 。由此可得

$$F_{Ay} = F_{Ay}^0 \quad (3-1)$$

$$F_{By} = F_{By}^0 \quad (3-2)$$

$$F_H = F_{Ax} = F_{Bx} = \frac{M_C^0}{f} \quad (3-3)$$

由式(3-3)可知,推力 F_H 之值只与三个铰的位置有关,而与各铰间拱轴的形状无关,也就是说,它与拱的高跨比 f/l 有关。当荷载和拱的跨度不变时,推力 F_H 将与拱高 f 成反比。

2. 内力的计算公式

计算内力时,应注意拱轴为曲线这一特点,所取截面应与拱轴正交,即与拱轴的切线垂直(图3-22a)。任一截面 K 的位置取决于该截面形心的坐标 x_K, y_K ,以及该处拱轴切线的水平倾角 φ_K 。截面 K 的内力可以分解为弯矩 M_K 、剪力 F_{QK} 和轴力 F_{NK} ,其中 F_{QK} 沿截面方向,即沿拱轴法线方向作用,轴力 F_{NK} 沿垂直于截面的方向,即沿拱轴切线方向作用。

(1) 弯矩的计算公式

弯矩的符号规定以使拱内侧纤维受拉为正,反之为负。取 AK 段为隔离体(图3-22b),由 $\sum M_K=0$,有

$$F_{Ay}x_K - F_{P1}(x_K - a_1) - F_H y_K - M_K = 0$$

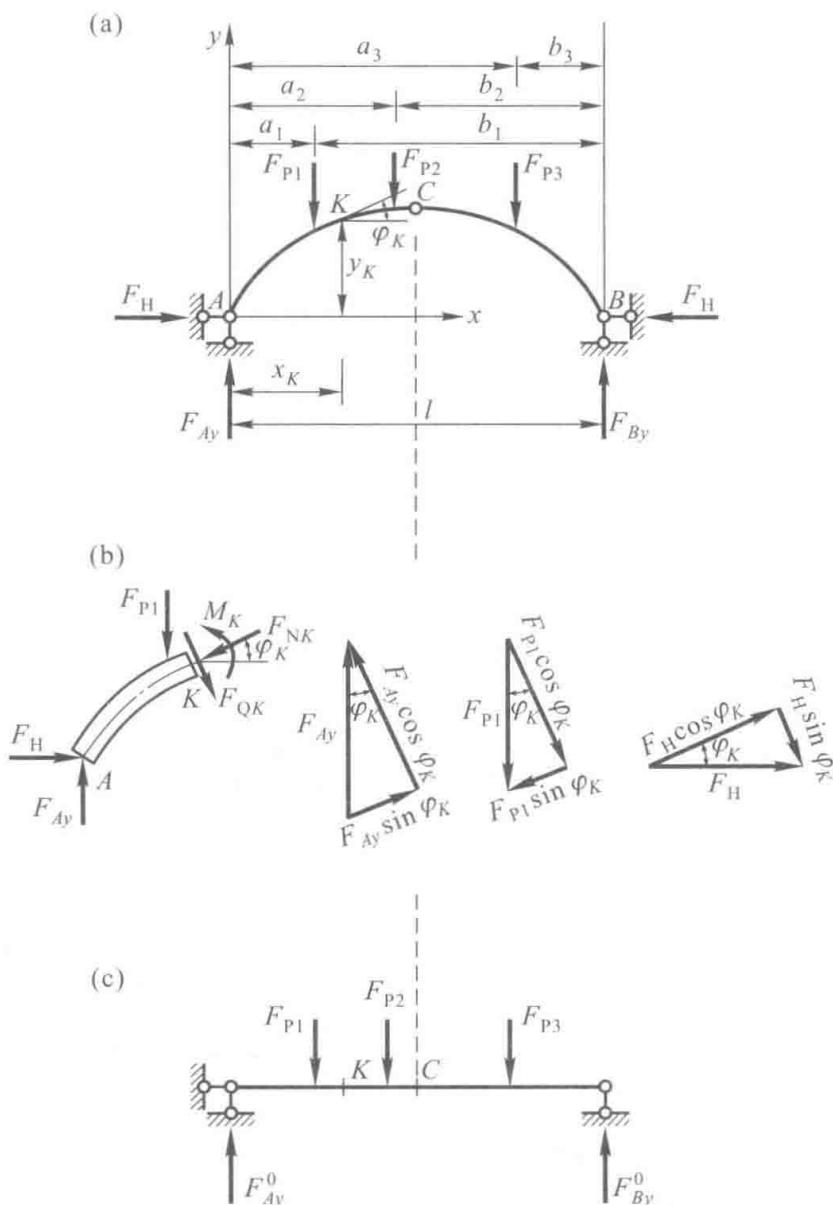


图 3-22

求得截面 K 的弯矩

$$M_K = [F_{Ay}x_K - F_{P1}(x_K - a_1)] - F_H y_K$$

根据 $F_{Ay} = F_{Ay}^0$, 可见式中方括号之值等于相应简支梁(图 3-22c)截面 K 的弯矩 M_K^0 , 所以上式可改写为

$$M_K = M_K^0 - F_H y_K \tag{3-4}$$

即拱内任一截面的弯矩, 等于相应简支梁对应截面的弯矩减去由于拱的推力 F_H 所引起的弯矩 $F_H y_K$ 。由此可知, 因推力的存在, 三铰拱中的弯矩比相应简支梁的弯矩小。

(2) 剪力的计算公式

剪力的符号仍然规定以使截面一侧的隔离体有顺时针方向转动趋势时为正, 反之为负。取 AK 段为隔离体, 将其上各力向截面方向投影(图 3-22b), 由平衡条件

$$F_{QK} - F_{Ay} \cos \varphi_K + F_{P1} \cos \varphi_K + F_H \sin \varphi_K = 0$$

$$F_{QK} = (F_{Ay} - F_{P1}) \cos \varphi_K - F_H \sin \varphi_K$$

得

式中 $(F_{Ay}-F_{P1})$ 等于相应简支梁在截面 K 处的剪力 F_{QK}^0 ,于是上式可改写为

$$F_{QK} = F_{QK}^0 \cos \varphi_K - F_H \sin \varphi_K \quad (3-5)$$

(3) 轴力的计算公式

因拱轴通常受压,所以规定使截面受压时轴力为正,反之为负。取 AK 段为隔离体,将其上各力向垂直于截面的方向投影(图3-22b),由平衡条件

$$F_{NK} - F_{Ay} \sin \varphi_K + F_{P1} \sin \varphi_K - F_H \cos \varphi_K = 0$$

$$\text{得} \quad F_{NK} = (F_{Ay} - F_{P1}) \sin \varphi_K + F_H \cos \varphi_K$$

$$\text{即} \quad F_{NK} = F_{QK}^0 \sin \varphi_K + F_H \cos \varphi_K \quad (3-6)$$

利用上述公式,不难求得竖向荷载作用下任一截面的内力,从而作出三铰拱的内力图。对于非竖向荷载或斜拱等其他情况,应根据平衡条件直接计算。

[例3-3] 试绘制图3-23a所示三铰拱的内力图。其拱轴为一抛物线,当坐标原点选在左支座时,拱轴方程由下式表达

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$$

解:先求支座约束力,根据式(3-1)、(3-2)、(3-3)可得

$$F_{Ay} = F_{Ay}^0 = \frac{100 \text{ kN} \times 9 \text{ m} + 20 \text{ kN/m} \times 6 \text{ m} \times 3 \text{ m}}{12 \text{ m}} = 105 \text{ kN}$$

$$F_{By} = F_{By}^0 = \frac{100 \text{ kN} \times 3 \text{ m} + 20 \text{ kN/m} \times 6 \text{ m} \times 9 \text{ m}}{12 \text{ m}} = 115 \text{ kN}$$

$$F_H = \frac{M_C^0}{f} = \frac{105 \text{ kN} \times 6 \text{ m} - 100 \text{ kN} \times 3 \text{ m}}{4 \text{ m}} = 82.5 \text{ kN}$$

约束力求出后,即可根据式(3-4)、(3-5)、(3-6)计算内力并绘制内力图。为此,将拱跨分成8等分,列表(表3-2)算出各截面的内力值并以竖标表示,再用光滑曲线将各竖标顶点相连,即可绘制弯矩、剪力和轴力图,如图3-23c、d、e所示。这些内力图是以水平线为基线绘制的。图3-23b为相应简支梁的弯矩图。

现以截面1(离左支座1.5 m处)和截面2(离左支座3.0 m处)的内力计算为例,对表3-2说明如下。

在截面1,有 $x_1 = 1.5 \text{ m}$,由拱轴方程可求得

$$y_1 = \frac{4f}{l^2} x_1(l-x_1) = \frac{4 \times 4 \text{ m}}{(12 \text{ m})^2} \times 1.5 \text{ m} \times (12 \text{ m} - 1.5 \text{ m}) = 1.75 \text{ m}$$

截面1处的切线斜率为

$$\tan \varphi_1 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_1 = \frac{4f}{l^2} (l-2x_1) = \frac{4 \times 4 \text{ m}}{(12 \text{ m})^2} \times (12 \text{ m} - 2 \times 1.5 \text{ m}) = 1$$

于是

$$\sin \varphi_1 = \frac{\tan \varphi_1}{\sqrt{1+\tan^2 \varphi_1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \varphi_1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

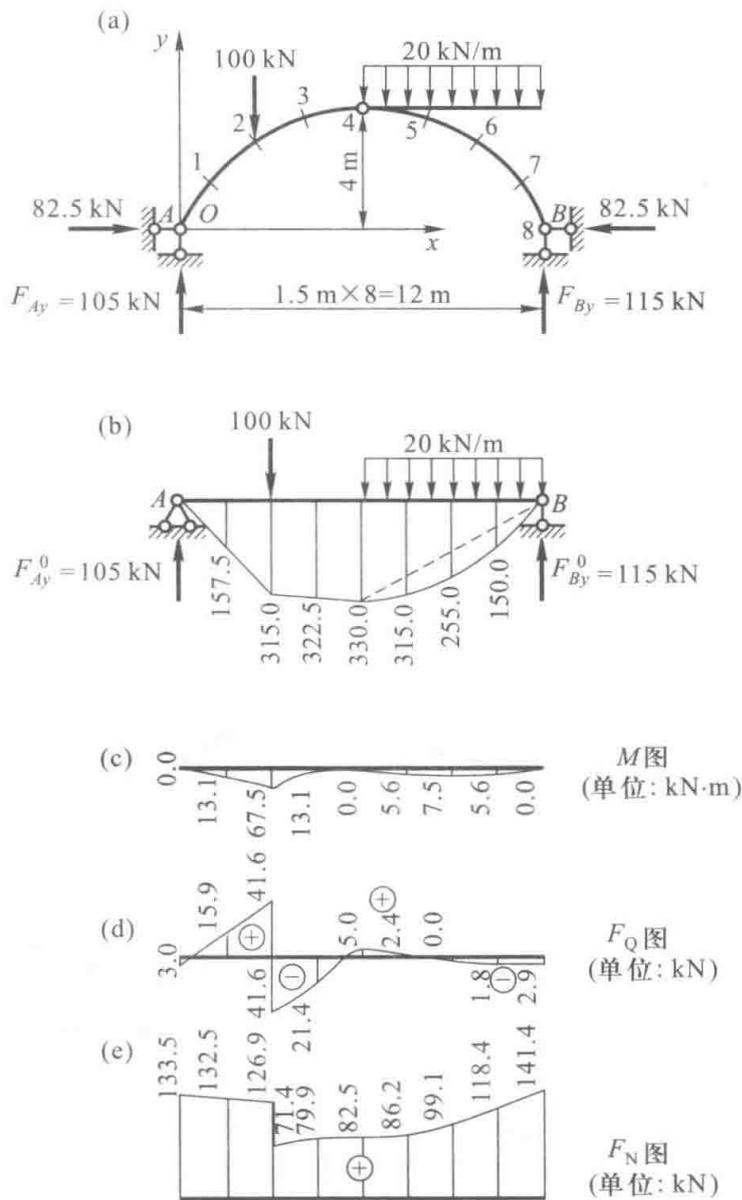


图 3-23

表 3-2 三铰拱内力的计算

拱轴分点	y/m	tan φ _K	sin φ _K	cos φ _K	F _{QK} ⁰ /kN	M/(kN·m)			F _{QK} /kN			F _{NK} /kN		
						M _K ⁰	-F _H y _K	M _K	F _{QK} ⁰ cos φ _K	-F _H sin φ _K	F _{QK}	F _{QK} ⁰ sin φ _K	F _H cos φ _K	F _{NK}
0	0	1.333	0.800	0.599	105.0	0	0	0	63.0	-66.0	-3.0	84.0	49.5	133.5
1	1.75	1.000	0.707	0.707	105.0	157.5	-144.4	13.1	74.2	-58.3	15.9	74.2	58.3	132.5
2 _K ^L	3.00	0.667	0.555	0.832	105.0	315.0	-247.5	67.5	87.4	-45.8	41.6	58.3	68.6	126.9
					5.0	71.4	79.9	21.4	4.2	-41.6	2.8	71.4	141.4	
3	3.75	0.333	0.316	0.948	5.0	322.5	-309.4	13.1	4.7	-26.1	-21.4	1.6	78.3	79.9
4	4.00	0	0	1.000	5.0	330.0	-330.0	0	5.0	0	5.0	0	82.5	82.5
5	3.75	-0.333	-0.316	0.948	-25.0	315.0	-309.4	5.6	-23.7	26.1	2.4	7.9	78.3	86.2
6	3.00	-0.667	-0.555	0.832	-55.0	255.0	-247.5	7.5	-45.8	45.8	0	30.5	68.6	99.1
7	1.75	-1.000	-0.707	0.707	-85.0	150.0	-144.4	5.6	-60.1	58.3	-1.8	60.1	58.3	118.4
8	0	-1.333	-0.800	0.599	-115.0	0	0	0	-68.9	66.0	-2.9	92.0	49.5	141.5

根据式(3-4)、(3-5)、(3-6)求得该截面的弯矩、剪力和轴力分别为

$$M_1 = M_1^0 - F_H y_1 = 105 \text{ kN} \times 1.5 \text{ m} - 82.5 \text{ kN} \times 1.75 \text{ m} = 13.1 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$F_{Q1} = F_{Q1}^0 \cos \varphi_1 - F_H \sin \varphi_1 = 105 \text{ kN} \times 0.707 - 82.5 \text{ kN} \times 0.707 = 15.9 \text{ kN}$$

$$F_{N1} = F_{Q1}^0 \sin \varphi_1 + F_H \cos \varphi_1 = 105 \text{ kN} \times 0.707 + 82.5 \text{ kN} \times 0.707 = 132.5 \text{ kN}$$

截面2因有集中荷载作用,该截面两边的剪力和轴力不相等,此处 F_Q 、 F_N 图将发生突变。现计算该截面内力如下

$$M_2 = M_2^0 - F_H y_2 = 105 \text{ kN} \times 3 \text{ m} - 82.5 \text{ kN} \times 3 \text{ m} = 67.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$F_{Q2}^L = F_{Q2}^{0L} \cos \varphi_2 - F_H \sin \varphi_2 = 105 \text{ kN} \times 0.832 - 82.5 \text{ kN} \times 0.555 = 41.6 \text{ kN}$$

$$F_{Q2}^R = F_{Q2}^{0R} \cos \varphi_2 - F_H \sin \varphi_2 = 5.0 \text{ kN} \times 0.832 - 82.5 \text{ kN} \times 0.555 = -41.6 \text{ kN}$$

$$F_{N2}^L = F_{Q2}^{0L} \sin \varphi_2 + F_H \cos \varphi_2 = 105 \text{ kN} \times 0.555 + 82.5 \text{ kN} \times 0.832 = 126.9 \text{ kN}$$

$$F_{N2}^R = F_{Q2}^{0R} \sin \varphi_2 + F_H \cos \varphi_2 = 5.0 \text{ kN} \times 0.555 + 82.5 \text{ kN} \times 0.832 = 71.4 \text{ kN}$$

其他各截面内力的计算与以上类似。

三、拱的合理轴线

对于三铰拱来说,在一般情况下,拱受弯矩、剪力和轴力作用,截面处于偏心受压状态,其正应力分布不均匀。但是,在给定荷载作用下,可以选取一根适当的拱轴线,使拱上各截面只承受轴力,而弯矩为零。此时,任一截面上正应力分布将是均匀的,因而拱体材料能够得到充分的利用,这样的拱轴线称为合理轴线。

由式(3-4),任意截面 K 的弯矩为

$$M_K = M_K^0 - F_H y_K$$

当拱的跨度和荷载已知时,相应简支梁的弯矩 M_K^0 不随拱轴线改变,而 $-F_H y_K$ 则与拱轴线有关(注意:前已指出推力 F_H 的数值只与三个铰的位置有关,而与各铰间的轴线形状无关)。因此,可以在三个铰之间恰当地选择拱的轴线形式,使拱中各截面的弯矩 M 都为零。

为了求出合理轴线方程,由式(3-4)根据各截面弯矩都为零的条件应有

$$M = M^0 - F_H y = 0$$

故

$$y = \frac{M^0}{F_H} \quad (3-7)$$

由式(3-7)可知:合理轴线的坐标 y 与相应简支梁的弯矩竖标成正比,当平拱所受竖向荷载为已知时,只需求出相应简支梁的弯矩方程,然后除以推力 F_H ,便可得到拱的合理轴线方程。

[例 3-4] 试求图 3-24a 所示对称三铰拱在均布荷载 q 作用下的合理轴线。

解:作出相应简支梁,如图 3-24b 所示,其弯矩方程为

$$M^0 = \frac{1}{2} q l x - \frac{1}{2} q x^2 = \frac{1}{2} q x (l - x)$$

从式(3-3)求得

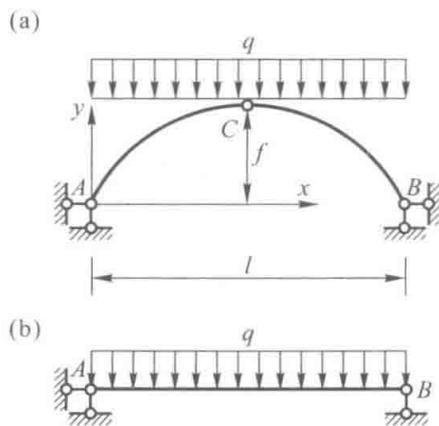


图 3-24

$$F_H = \frac{M_c^0}{f} = \frac{\frac{1}{8}ql^2}{f} = \frac{ql^2}{8f}$$

由式(3-7)得到合理轴线方程为

$$y = \frac{\frac{1}{2}qx(l-x)}{\frac{ql^2}{8f}} = \frac{4f}{l^2}x(l-x)$$

由此可见,在满跨竖向均布荷载作用下,三铰拱的合理轴线是一根抛物线。房屋建筑中拱的轴线常采用抛物线。

§ 3-5 静定桁架

一、概述

桁架结构在土木工程中应用很广泛。特别是在大跨度结构中,桁架更是一种重要的结构形式。图 3-25a、c 所示钢筋混凝土屋架和钢木屋架就属于桁架,武汉长江大桥和南京长江大桥的主体结构也是桁架结构。

桁架的形式、桁架杆件之间的联结方式及采用的材料是多种多样的。在分析桁架时,必须选取既能反映其本质又便于计算的简图。科学实验和理论分析的结果表明,各种桁架有着共同的特性:由于在结点荷载作用下,桁架中各杆的内力主要是轴力,而弯矩和剪力很小,可以忽略不计,因而联结各杆件的结点所起作用 and 铰结点是接近的。这样,图 3-25a、c 所示桁架的计算简图可分别用图 3-25b、d 表示。这种计算简图引用了下列假定:

(1) 各杆在两端用绝对光滑而无摩擦的理想铰相互联结。

(2) 各杆的轴线都绝对平直且处于同一平面内,并通过铰的中心。

(3) 荷载和支座约束力作用在结点上,并且都位于桁架所在的平面内。

在上述理想情况下,桁架各杆均为两端铰结的直杆,仅在两端受约束力作用,故只产生轴力。这类杆件也称为二力杆,在轴向受拉或受压时,由于截面上的应力均匀分布且同时达到极限,故材料能得到充分利用。

实际的桁架常不能完全符合上述理想情况。例如,桁架的结点具有一定的刚性,有些杆件在结点处可能连续不断,或者各杆之间的夹角几乎不可能变动。另外,各杆轴无法绝对平直,结点上各杆的轴线也不一定全交于一点,或者荷载并不都作用在结点上等。因此,桁架中某

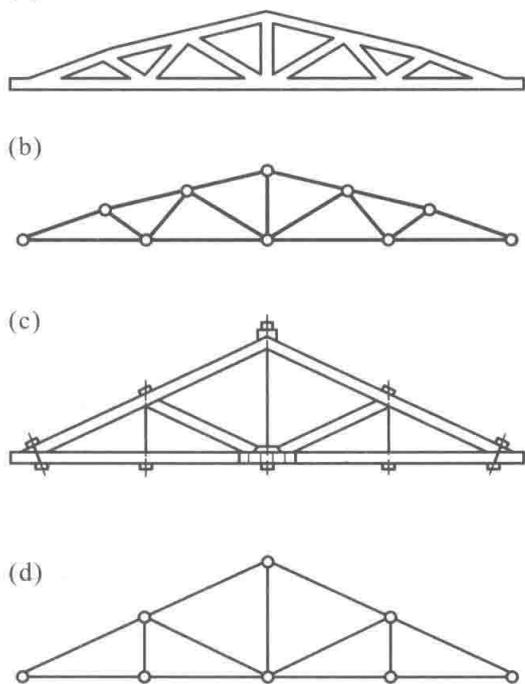


图 3-25

些杆件必将发生弯曲而产生不均匀分布的应力,并不能如理想情况只产生均匀分布的应力。通常把按理想情况计算出来的内力称为主内力,由于理想情况不能完全实现而产生的附加内力称为次内力。本节只限于讨论桁架的主内力。

常用的桁架一般按下列两种方式组成:

(1) 由基础或由一个基本铰结三角形开始,依次增加二元体组成桁架(图 3-26a、b),这样的桁架称为简单桁架。

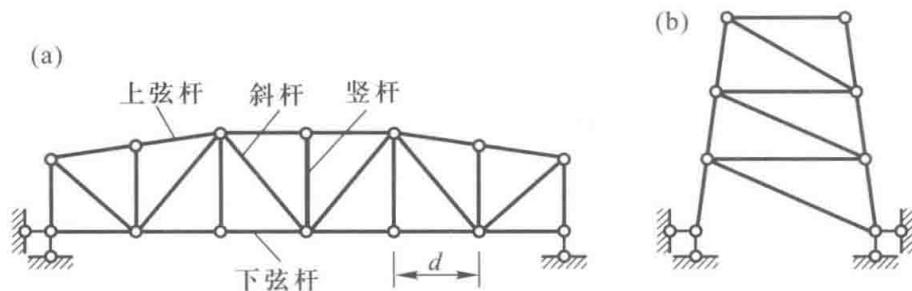


图 3-26

(2) 由几个简单桁架按照几何不变体系的简单组成规则联成一个桁架(图 3-27)。这样的桁架称为联合桁架,其中把简单桁架联结在一起的杆件,称为联合杆。

桁架的杆件,依其所在位置不同,可分为弦杆和腹杆两类。如图 3-26a 所示,弦杆是指桁架上、下外围的杆件,上边的杆件称为上弦杆,下边的杆件称为下弦杆。桁架上弦杆和下弦杆之间的杆件称为腹杆。腹杆又分为竖杆和斜杆。弦杆上相邻两结点之间的区间称为节间,其距离 d 称为节间长度。

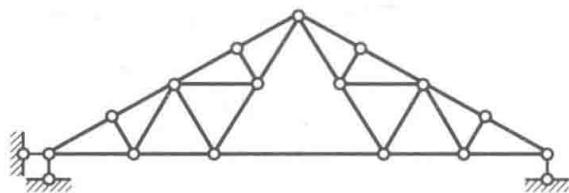


图 3-27

二、计算桁架内力的方法

1. 结点法

结点法是取桁架的结点为隔离体,利用结点的静力平衡条件来计算杆件的内力或支座约束力。因为桁架的各杆只承受轴力,作用于任一结点的各力组成一个平面汇交力系,所以可就每个结点列出两个平衡方程进行解算。

在实际计算中为简便起见,应尽量使作用于所取结点的未知力不超过两个。在简单桁架中,实现这一点并不困难,因为简单桁架是由基础或由一个基本铰结三角形开始,依次增加二元体组成,其最后一个结点只包含两根杆件。分析时,可先由整体平衡条件求出它的约束力,然后再从最后一个结点开始,依次考虑各结点的平衡,即可使每个结点出现的未知内力不超过两个,从而直接求出各杆的内力。

[例 3-5] 试用结点法解算图 3-28a 所示桁架中各杆的内力。

解: 首先求出支座约束力。以整个桁架为隔离体,由 $\sum M_g = 0$ 得

$$(F_{1y} - 10 \text{ kN}) \times 8 \text{ m} - 20 \text{ kN} \times 6 \text{ m} - 10 \text{ kN} \times 4 \text{ m} = 0$$

$$F_{1y} = 30 \text{ kN}$$

再由 $\sum F_y = 0$ 得

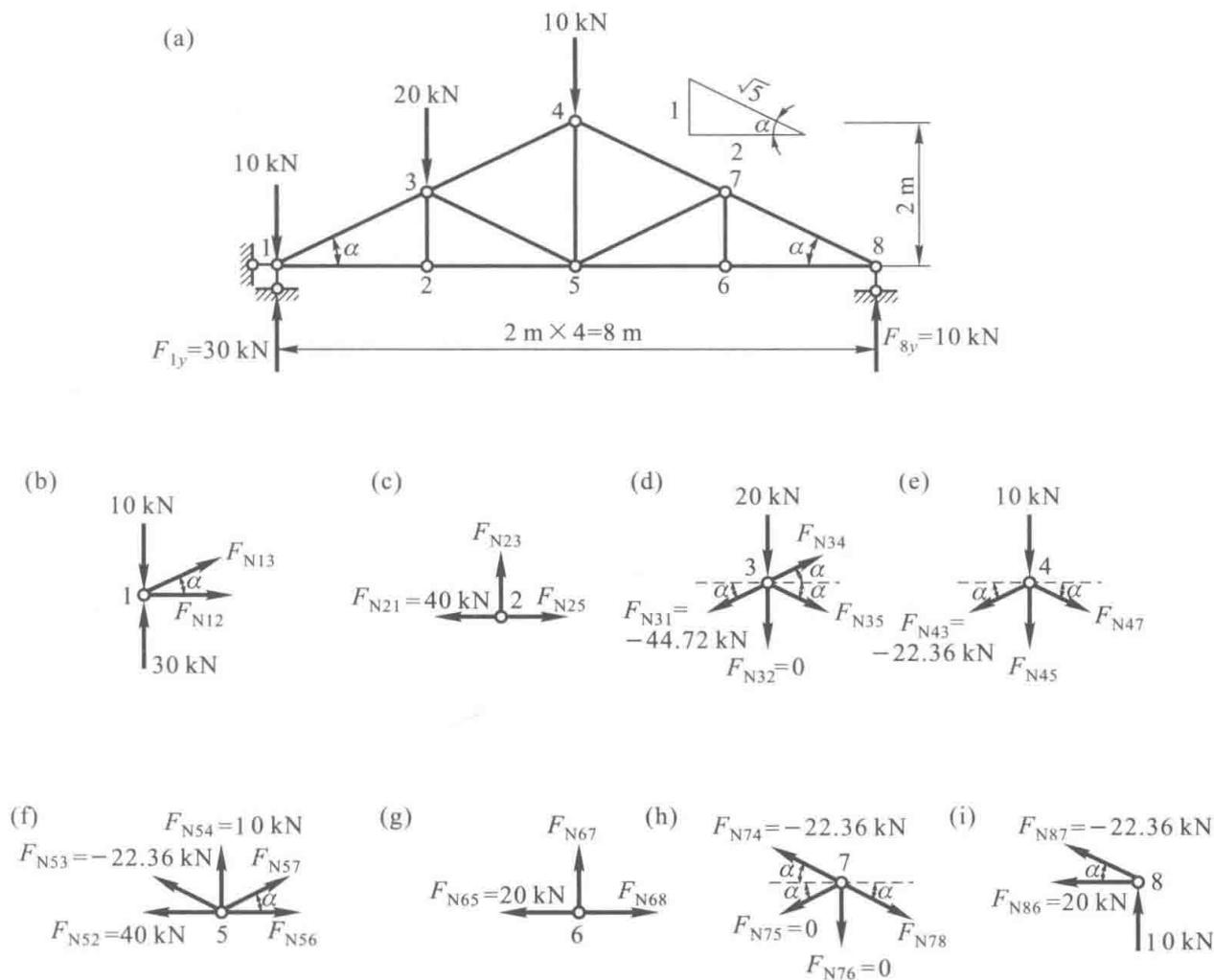


图 3-28

$$30 \text{ kN} - 10 \text{ kN} - 20 \text{ kN} - 10 \text{ kN} + F_{8y} = 0$$

$$F_{8y} = 10 \text{ kN}$$

求出约束力后,可截取结点解算各杆的内力。最初遇到只包含两个未知力的结点有 1 和 8 两个结点,现在从结点 1 开始,然后依 2,3,4…次序进行解算。在计算时,通常假定杆件内力为拉力,如所得结果为负,则为压力。

(1) 取结点 1 为隔离体(图 3-28b)。由 $\sum F_y = 0$ 得

$$F_{N13} \times \frac{1}{\sqrt{5}} - 10 \text{ kN} + 30 \text{ kN} = 0$$

$$F_{N13} = -44.72 \text{ kN}$$

再由 $\sum F_x = 0$ 得

$$F_{N13} \times \frac{2}{\sqrt{5}} + F_{N12} = 0$$

$$F_{N12} = -F_{N13} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = 40 \text{ kN}$$

(2) 取结点 2 为隔离体(图 3-28c)。

$$\sum F_y = 0, \quad F_{N23} = 0$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{N25} - F_{N21} = 0$$

得

$$F_{N25} = F_{N21} = 40 \text{ kN}$$

(3) 取结点 3 为隔离体(图 3-28d)。

$$\sum F_x = 0, \quad -F_{N31} \times \frac{2}{\sqrt{5}} + F_{N34} \times \frac{2}{\sqrt{5}} + F_{N35} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad -20 \text{ kN} + F_{N34} \times \frac{1}{\sqrt{5}} - F_{N35} \times \frac{1}{\sqrt{5}} - F_{N31} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = 0$$

求解联立方程,可得

$$F_{N34} = -22.36 \text{ kN}, \quad F_{N35} = -22.36 \text{ kN}$$

(4) 取结点 4 为隔离体(图 3-28e)。由 $\sum F_x = 0$ 得

$$F_{N47} = -22.36 \text{ kN}$$

再由 $\sum F_y = 0$ 得

$$F_{N45} = 10 \text{ kN}$$

(5) 取结点 5 为隔离体(图 3-28f)。由 $\sum F_y = 0$ 得

$$F_{N57} = 0$$

再由 $\sum F_x = 0$ 得

$$F_{N56} = 20 \text{ kN}$$

(6) 取结点 6 为隔离体(图 3-28g)。由 $\sum F_y = 0$ 得

$$F_{N67} = 0$$

再由 $\sum F_x = 0$ 得

$$F_{N68} = 20 \text{ kN}$$

(7) 取结点 7 为隔离体(图 3-28h)。由 $\sum F_x = 0$ 得

$$F_{N78} = -22.36 \text{ kN}$$

至此,桁架中各杆件的内力都已求得。最后,可根据结点 8 的隔离体(图 3-28i)是否满足平衡条件进行校核。此时有

$$\sum F_x = 0, \quad -(-22.36 \text{ kN}) \times \frac{2}{\sqrt{5}} - 20 \text{ kN} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad -22.36 \text{ kN} \times \frac{1}{\sqrt{5}} + 10 \text{ kN} = 0$$

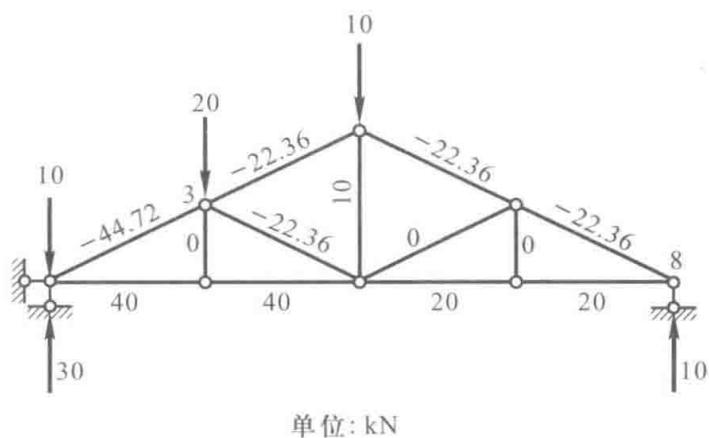
故知计算结果无误。为了清晰起见,将此桁架各杆的内力标注在图 3-29 中。

桁架中内力为零的杆件称为零杆。如上例中的 23、67、57 三杆件就是零杆,出现零杆的情况可归结如下:

(1) 两杆汇交结点上无荷载作用时(图 3-30a),该两杆的内力都等于零。

(2) 三杆汇交结点上无荷载作用时(图 3-30b),如果其中有两杆在一直线上,则另一杆必为零杆。

上述结论不难由结点平衡条件得到证实。在分析桁架时,可先利用上述原则找出零杆,这样可使计算工作简化。但应注意,零杆的判断与荷载状况有关。



单位: kN

图 3-29

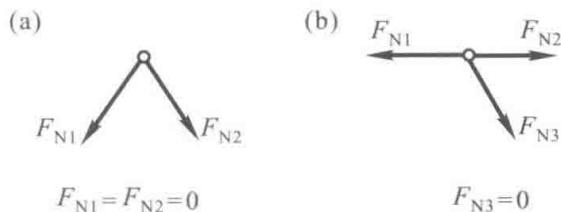


图 3-30

2. 截面法

除结点法外,另一种分析桁架的基本方法是截面法。这种方法是用一截面,截取桁架中两个或两个结点的某一部分为隔离体,再以静力平衡方程求出未知杆件的内力。作用于隔离体上的力系为平面一般力系。只要未知力数目不多于三个,则可把截面上的全部内力求出。

[例 3-6] 试求图 3-31a 所示桁架(与例 3-5 同)中 25、34、35 三杆的内力。

解:首先求出支座约束力。由例 3-5 已得

$$F_{1y} = 30 \text{ kN}, \quad F_{8y} = 10 \text{ kN}$$

然后设想用截面 I-I 将 34、35、25 三杆截断,取桁架左边部分为隔离体(图 3-31b)。为求得 F_{N25} ,可取 F_{N34} 和 F_{N35} 两未知力的交点 3 为矩心,由 $\sum M_3 = 0$ 得

$$(30 \text{ kN} - 10 \text{ kN}) \times 2 \text{ m} - F_{N25} \times 1 \text{ m} = 0$$

则

$$F_{N25} = 40 \text{ kN}$$

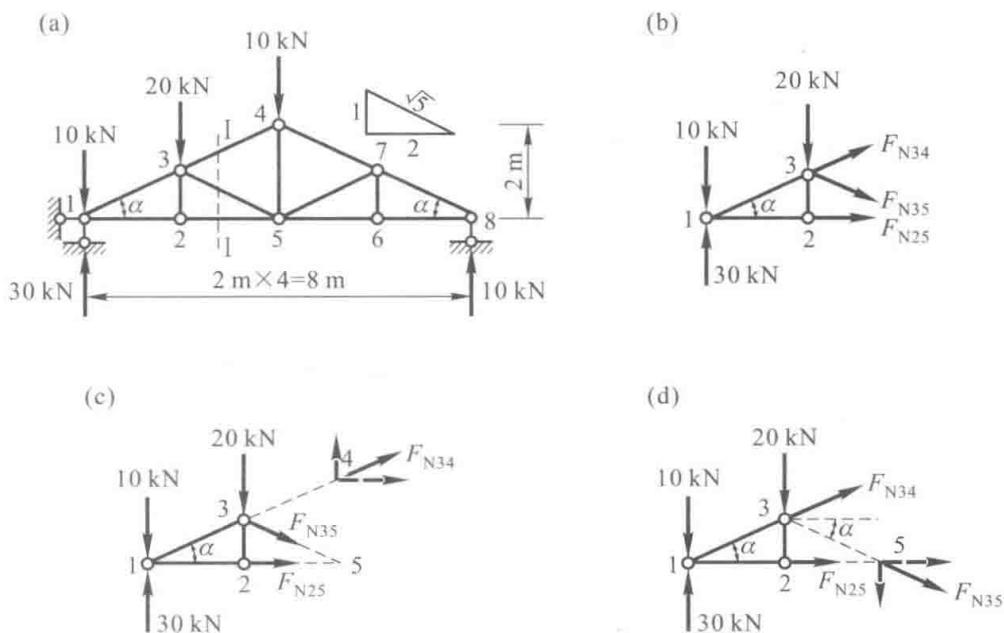


图 3-31

为了求得 F_{N34} ,可取 F_{N35} 和 F_{N25} 两力的交点 5 为矩心,不过,这时需要算出 F_{N34} 的力臂。为此,可将 F_{N34} 沿其作用线移到点 4(图 3-31c)并分解为水平与竖向两分力。因竖向分力通过矩

的最小几何不变部分。因此,只在粗线所示的杆件中产生内力,而约束力和其他杆件的内力都等于零。

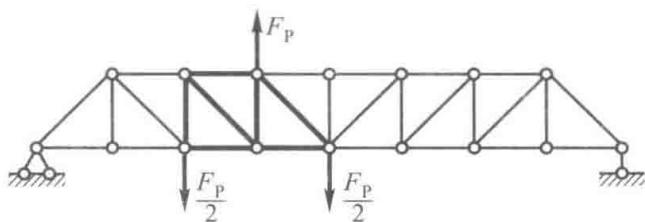


图 3-34

(5) 两个力系向同一点简化,如果合力相等,合力矩也相等,则该两个力系静力等效。静力等效的两个力系分别作用在同一静定结构上,只会使两力系共同占有的几何不变部分产生不同的内力,而结构中其他部分的受力情况则相同。例如,图 3-35a、b 中所示的两个力系是静力等效的,它们对梁的影响,在 ik 范围内的内力不同,而在 ik 以外的内力和约束力是相同的。对于这一特性可做如下说明。如果在图 3-35a 所示的情况下再叠加一平衡力系,则得到图 3-35c 所示的情况。根据前述平衡力系作用下的特性可知,图 3-35c 与图 3-35a 的受力情况只在 ik 段内不相同。若在图 3-35c 中把作用在上边的力 F_P 与作用在下边的两个大小为 $\frac{F_P}{2}$ 的力组成的平衡力系去掉,也不影响 ik 段以外的受力情况,这样就得到图 3-35b 所示的情况。由此可知,图 3-35a 与图 3-35b 中的梁只在 ik 段内受力情况有所不同。

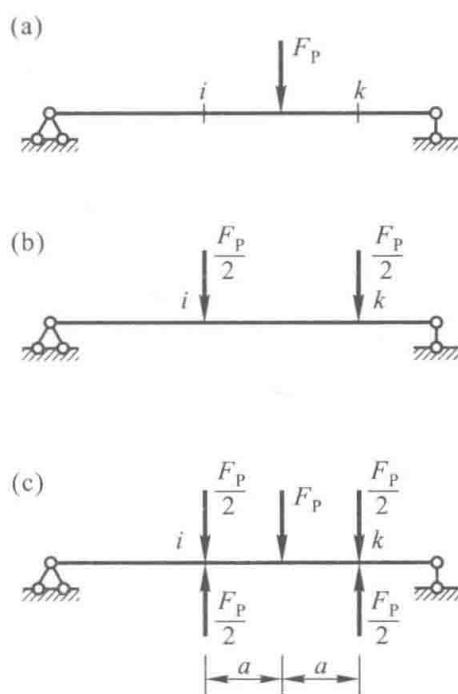


图 3-35

二、静定结构的受力分析

隔离体分析是受力分析的基础。先从结构中截取隔离体,将未知的约束力和内力暴露出来,使其成为隔离体上的外力,而后应用平衡方程计算支座约束力和内力。

当作用在隔离体上的力系为平面汇交力系时,利用两个独立的平衡条件,可求解两个未知量;若为平面一般力系,则有三个独立的平衡条件,可求解三个未知力。

三、常用静定结构的受力特点

在工程中,静定结构的典型形式为梁、拱、刚架、桁架和组合结构。

1. 梁

包括简支梁、悬臂梁、伸臂梁和多跨静定梁。它们均由受弯杆件组成。由于弯曲变形引起的正应力在截面上分布不均匀,使材料强度得不到充分利用,故当跨度较大时,一般不宜采用梁作为承重结构。简支梁多用于小跨度结构。在同样跨度并承受同样荷载的情况下,悬臂梁的最大弯矩和最大挠度值都远大于简支梁,因此悬臂梁只宜用于跨度很小的承重结构,如雨篷、挑廊、阳

台等。在多跨静定梁中,由于伸臂的设置,使支座处截面产生了负弯矩,它将使跨中的正弯矩数值减小,所以多跨静定梁较相应的多跨简支梁节省材料,但构造较为复杂。

2. 刚架

与轴线一般为水平直线的梁不同,刚架通常由轴线方向分别为水平、竖直和斜向的若干梁(柱)以刚结点联结而成。组成刚架的各杆也是受弯杆件,除需考虑轴力外,其内力计算和内力图绘制与梁类似。刚架除可越过一定跨度外,还能形成多跨和多层的空间,常用于门架、站台和房屋框架等。

3. 三铰拱和三铰刚架

两者均属有推力的结构。由于水平推力的作用,可以使杆件截面的弯矩值减小。三铰拱在给定荷载作用下,若恰当地选用拱轴,可使整个拱体主要承受压力,便于用抗压强度较高而抗拉强度较低的砖、石、混凝土等材料建造。三铰刚架的各杆件为受弯构件,有较大的使用空间,常用作餐厅、场馆、车间等建筑物的承重结构。

4. 桁架

桁架中的杆件都是二力杆,在结点荷载作用下,各杆都只产生轴力,处于轴向拉、压状态,杆件截面上的正应力分布均匀,能充分利用材料的强度。因此,桁架比梁能跨越更大的空间。

5. 组合结构

这类结构中包含有受力性质完全不同的两类杆件:受弯杆和二力杆。在组合结构中,利用二力杆的受力特点,能较充分地利用材料强度,并从加劲的角度出发,改善受弯杆的受力状态,如图3-36所示的加劲梁。计算中应先算二力杆,再算受弯杆,并注意二力杆汇交结点 D 、 E 和二力杆与受弯杆汇交结点 A 、 C 、 F 、 G 之间在内力分析上的区别。

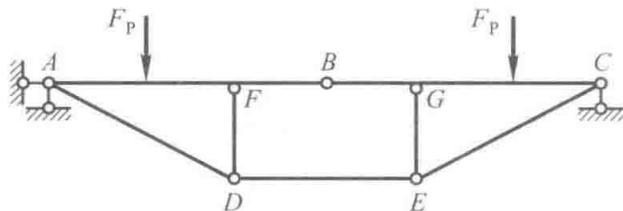


图 3-36

在实际工程中,以梁和刚架做承重结构时,一般跨度不宜过大,三铰拱、三铰刚架和组合结构可用于跨度较大的结构,桁架则常用于跨度更大的结构。不同结构形式,均有其各自的适用范围,在选择结构形式时,除从受力状态方面考虑外,还应进行全面的分析和比较,才能获得最佳的方案。

思考题

1. 结构的基本部分与附属部分是如何划分的? 荷载作用在结构的基本部分上时,附属部分是否引起内力? 若荷载作用在附属部分时,是否所有基本部分都会引起内力?
2. 在荷载作用下,刚架的弯矩图在刚结点处有何特点?
3. 能否不通过计算,直接画出图3-37所示结构的弯矩图?
4. 作图3-38所示伸臂梁的弯矩图,不求约束力而以 AB 、 BD 两区段作图时, AB 段可否用区段叠加法进行绘制? 应该如何进行?

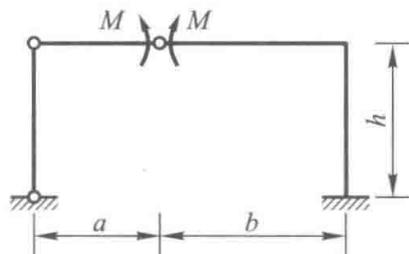


图 3-37

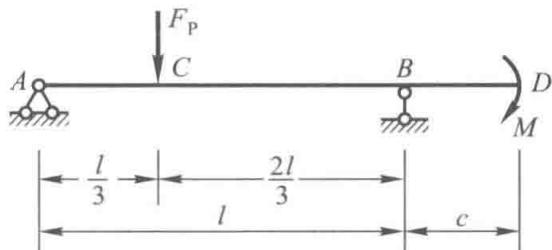
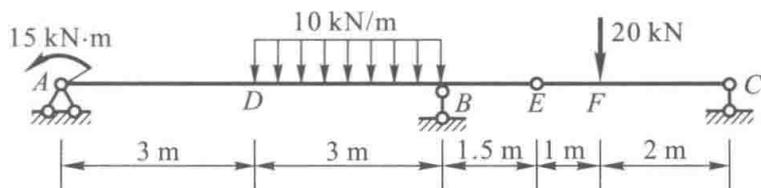


图 3-38

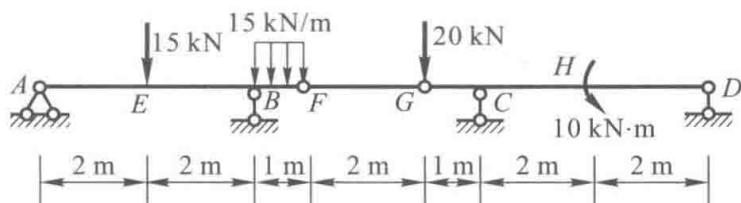
5. 绘制三铰拱内力图与绘制静定梁和静定刚架内力图时,所采用的方法有何不同? 为什么会有这些差别?
6. 用结点法计算桁架内力时,一般都利用投影平衡方程,当作用于结点的两个未知力都为斜向时,采用力矩平衡方程是否可能更为简便? 如考虑图 3-28 所示桁架中结点 3 的平衡时,应如何列出力矩平衡方程?
(提示:隔离体上的斜向未知力可沿其作用线移动,并沿水平和竖直方向分解。)
7. 在静定结构的受力分析中,通常按结构几何组成相反的顺序进行,解算时力求用一个平衡条件求出一个未知力。试结合实际问题对这些分析要领加以说明。

习 题

3-1~3-2 试作图示多跨静定梁的 M 、 F_Q 图。

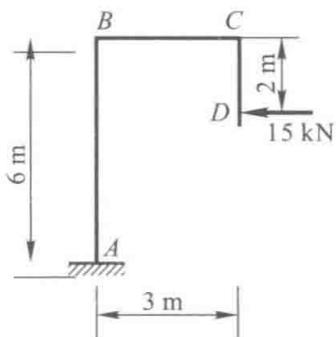


题 3-1 图

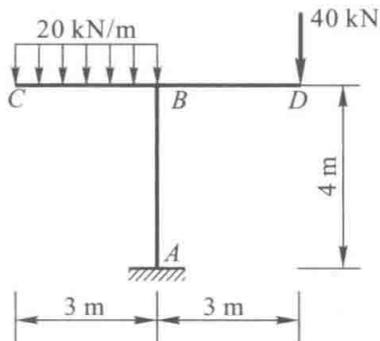


题 3-2 图

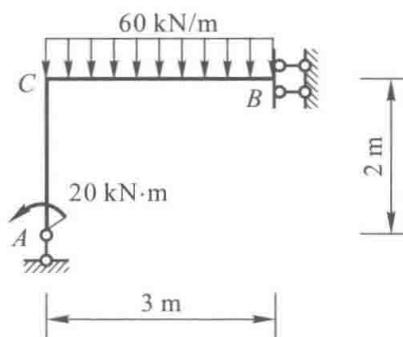
3-3~3-15 试作图示刚架的内力 (M 、 F_Q 、 F_N) 图,并校核所得结果。



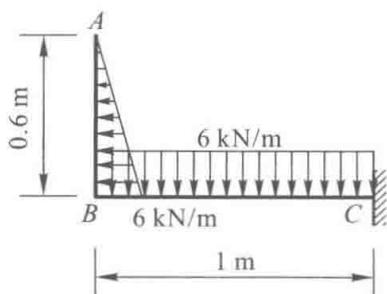
题 3-3 图



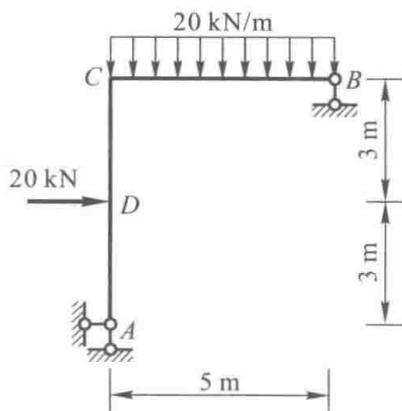
题 3-4 图



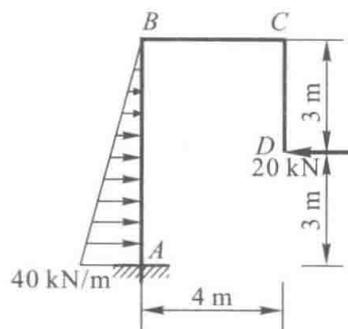
题 3-5 图



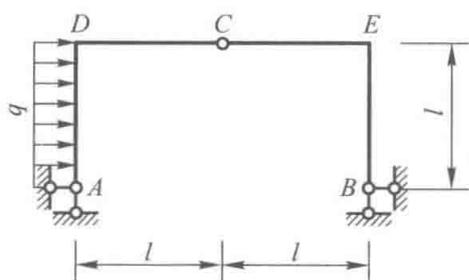
题 3-6 图



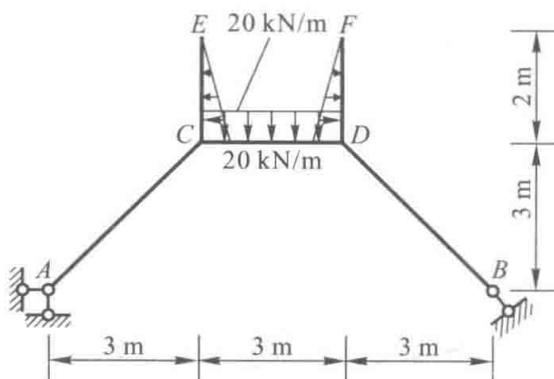
题 3-7 图



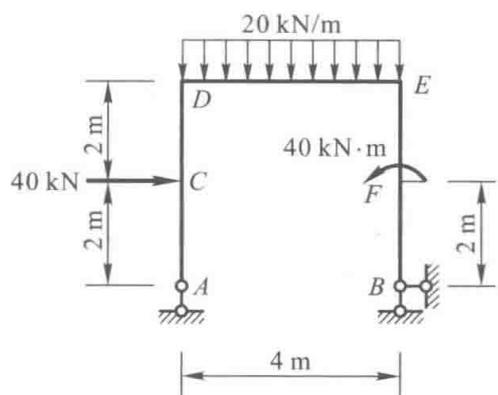
题 3-8 图



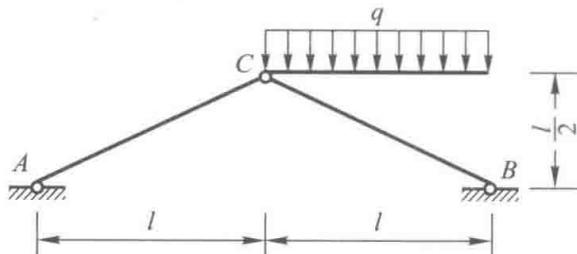
题 3-9 图



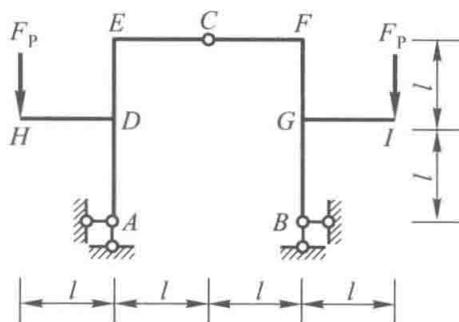
题 3-10 图



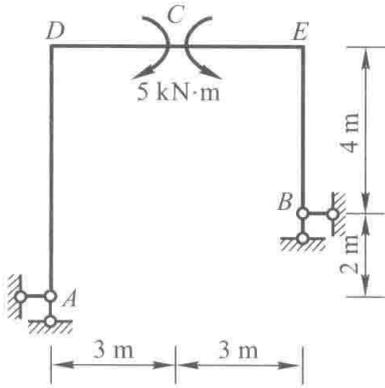
题 3-11 图



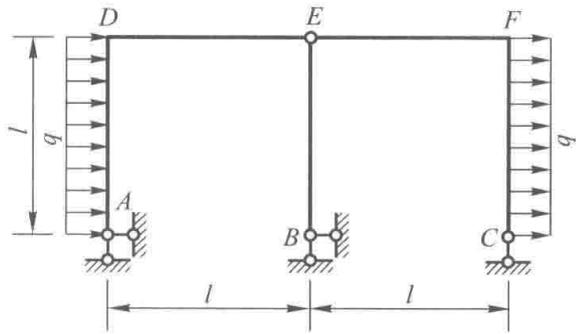
题 3-12 图



题 3-13 图



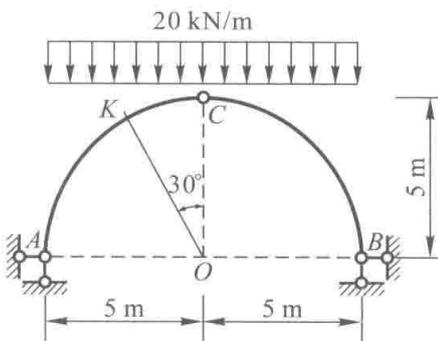
题 3-14 图



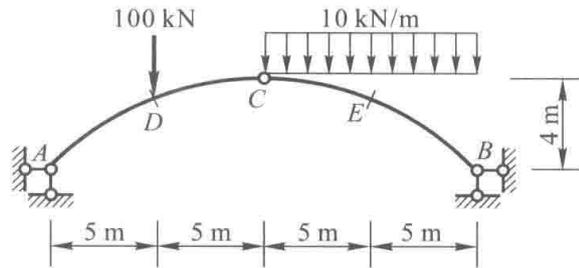
题 3-15 图

3-16 试求图示圆弧三铰拱的支座约束力,并求截面 K 的内力。

3-17 试求图示抛物线三铰拱的支座约束力,并求截面 D 和 E 的内力。

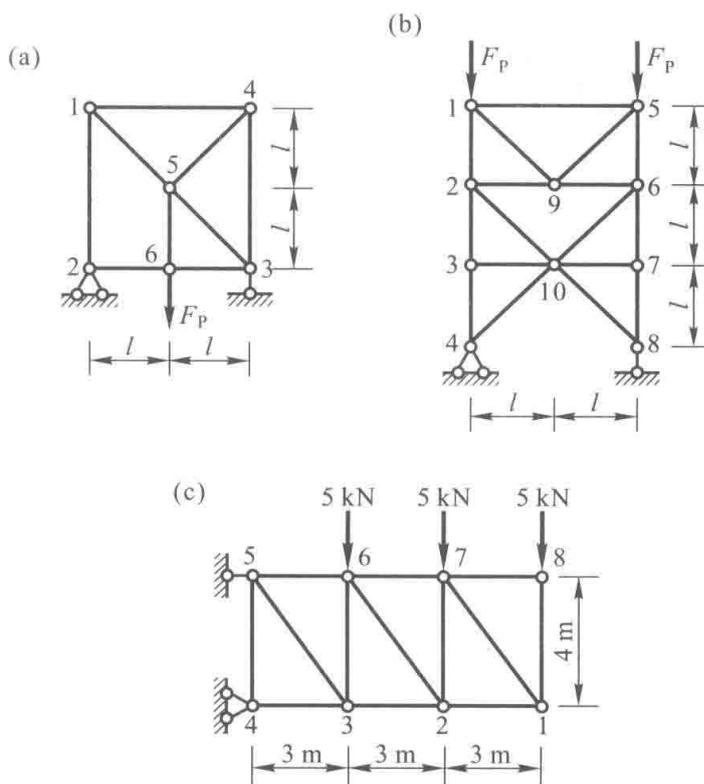


题 3-16 图



题 3-17 图

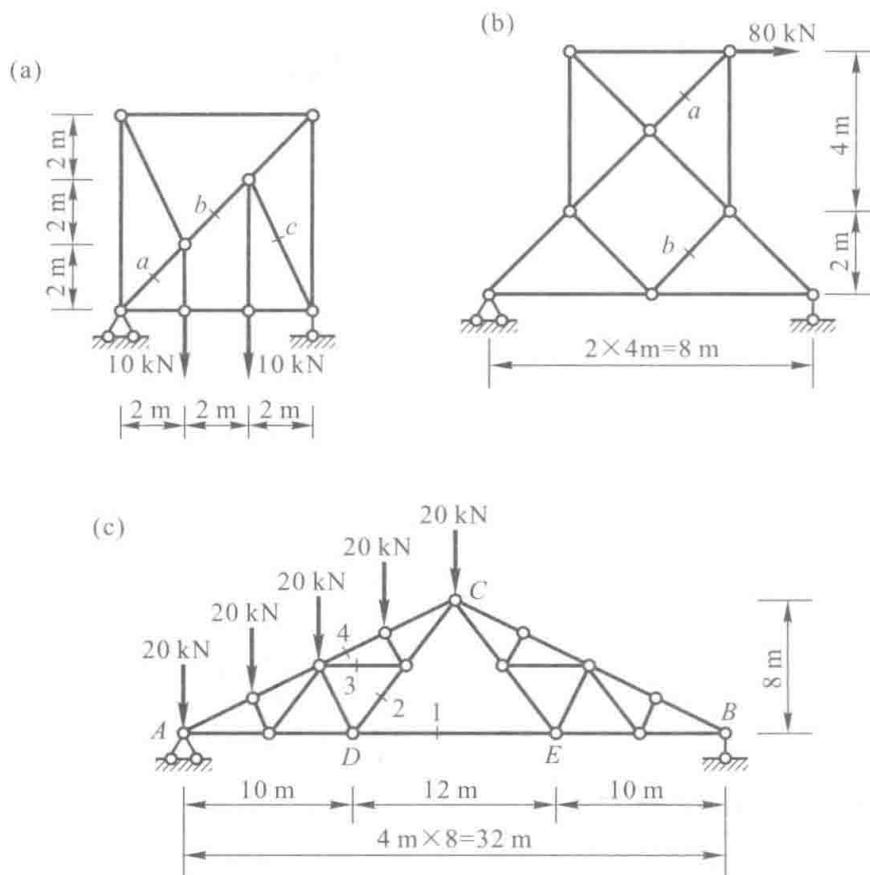
3-18 试用结点法计算图示桁架中各杆的内力。



题 3-18 图

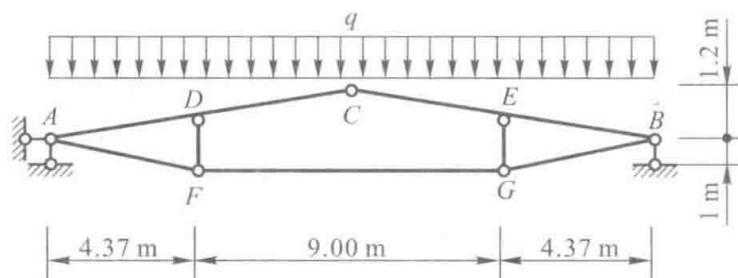
3-19 试用截面法求题 3-18c 中杆 23、62、67 的内力。

3-20 试用较简捷的方法计算图示桁架中指定杆件的内力。



题 3-20 图

3-21 图示组合屋架承受均布荷载 $q=20 \text{ kN/m}$ 作用,试求二力杆的轴力,并绘出梁式杆的弯矩图。



题 3-21 图

习题部分答案

3-1 $M_D = 5 \text{ kN} \cdot \text{m}$

3-2 $M_H^R = -15 \text{ kN} \cdot \text{m}, M_E = 11.25 \text{ kN} \cdot \text{m}$

3-3 $M_{AB} = 60 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (右侧受拉)

3-4 $M_{AB} = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (左侧受拉)

3-5 $M_{BC} = 250 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (下边受拉), $M_{CA} = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (左侧受拉)

3-6 $M_{CB} = 3.36 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (上边受拉)

3-7 $M_{CA} = 60 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (右侧受拉)

3-8 $M_{AB} = 180 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (左侧受拉)

3-9 $M_{DA} = ql^2/4$ (右侧受拉)

3-10 $M_{CD} = 40/3 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (上边受拉)

3-11 $M_{ED} = 120 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (上边受拉), $M_{FB} = 80 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (右侧受拉)

3-13 $M_{DA} = \frac{F_P l}{2}$ (右侧受拉), $M_{EC} = 0$

3-14 $M_{DA} = 6 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (左侧受拉), $M_{CE} = 5 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (上边受拉)

3-15 $M_{DA} = \frac{3}{2} ql^2$ (右侧受拉), $M_{FE} = \frac{1}{2} ql^2$ (下边受拉)

3-16 $M_K = -29 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $F_{QK} = 18.3 \text{ kN}$, $F_{NK} = 68.3 \text{ kN}$

3-17 $M_D = 125 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $F_{QD}^L = 46.4 \text{ kN}$, $F_{QD}^R = -46.4 \text{ kN}$, $F_{ND}^L = 153.2 \text{ kN}$, $F_{ND}^R = 116.1 \text{ kN}$, $M_E = 0$, $F_{QE} = 0$, $F_{NE} = 134.7 \text{ kN}$

3-18 (a) $F_{N51} = F_{N54} = \frac{\sqrt{2}}{2} F_P$, $F_{N14} = -\frac{1}{2} F_P$; (b) $F_{N12} = F_{N23} = F_{N34} = F_{N56} = F_{N67} = F_{N78} = -F_P$; (c) $F_{N67} = 3.75 \text{ kN}$, $F_{N62} = 12.5 \text{ kN}$, $F_{N23} = -11.25 \text{ kN}$

3-20 (a) $F_{Nc} = -\frac{10\sqrt{5}}{3} \text{ kN}$; (b) $F_{Na} = 56.569 \text{ kN}$, $F_{Nb} = -20\sqrt{2} \text{ kN}$; (c) $F_{N1} = 50 \text{ kN}$, $F_{N2} = 40 \text{ kN}$, $F_{N3} = 20 \text{ kN}$, $F_{N4} = -105 \text{ kN}$

3-21 $F_{NFG} = 358 \text{ kN}$, $F_{NAF} = 367 \text{ kN}$, $F_{NFD} = -81.9 \text{ kN}$, $M_{DC} = 15.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (下边受拉)

(提示:先用截面法将杆 FG 的内力、铰 C 处的约束力求出。)

第 4 章

静定结构的位移计算

§ 4-1 结构位移和虚功的概念

一、结构位移

结构在荷载作用下会产生内力,同时因应力作用使材料产生应变,以致结构发生变形。由于变形,结构上各点的位置将会改变。杆件结构中杆件的横截面除移动外,还将发生转动。这些移动和转动统称为结构的位移。此外,结构在其他因素如温度改变、支座位移等的影响下,也都会发生位移。

例如,图 4-1a 所示简支梁,在荷载作用下梁的形状由直变弯,如图 4-1b 所示。这时,横截面 $m-m$ 的形心 C 移动了一个距离 CC' ,称为 C 点的线位移。同时,截面 $m-m$ 还转动了一个角度 φ_C ,称为截面 C 的角位移或转角。

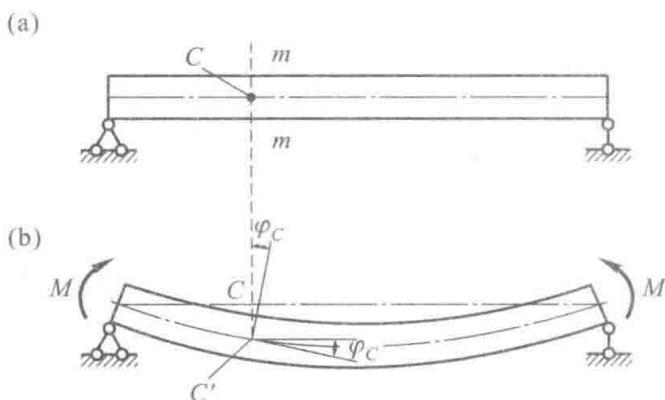


图 4-1

又如图 4-2a 所示结构,在荷载作用下发生如图中虚线所示的变形。此时, C 点移至 C' ,即 C 点的线位移为 CC' 。若将 CC' 沿水平和竖向分解(图 4-2b),则分量 $C''C'$ 和 CC'' 分别称为 C 点的水平位移和竖向位移。同样,截面 C 还转动了一个角度 φ_C ,这就是截面 C 的角位移。

在结构设计中,除了要考虑结构的强度外,还要计算结构的位移以验算其刚度。验算刚度的目的,是保证结构在使用过程中不发生过大的位移。

计算结构位移的另一个重要目的,是为超静定结构的计算打下基础。在计算超静定结构的约束力和内力时,除利用静力平衡条件外,还必须考虑结构的位移条件。这样,位移的计算就成为解算超静定结构时必然会遇到的问题。

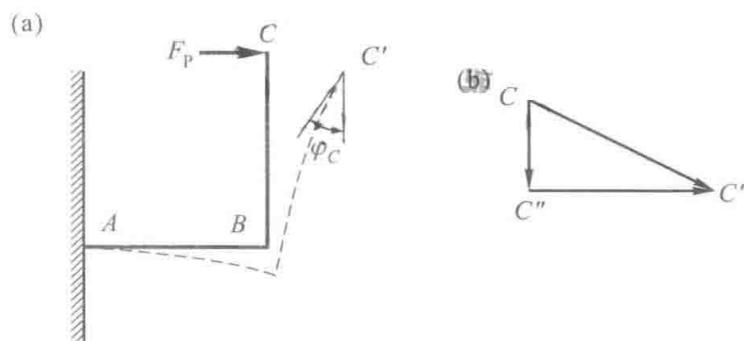


图 4-2

此外,在结构的制作、架设等过程中,常需预先知道结构位移后的位置,以便采取一定的施工措施,因而也需要计算其位移。

本章所研究的是线性变形体系位移的计算。所谓线性变形体系是指位移与荷载成比例的结构体系,荷载对这种体系的影响可以叠加,而且当荷载全部撤除后,由荷载引起的位移也完全消失。这样的体系,应力与应变的关系符合胡克定律,且变形应是微小的,在计算结构的约束力和内力时,可认为结构的几何形状和尺寸,以及荷载的位置和方向保持不变。

二、刚体体系的虚功原理

在上一章,详细地讨论了静力分析的基本方法,选取隔离体,建立平衡方程求解。在本节,首先回顾静力分析的另一个普遍方法,应用虚功原理求解。

对于具有理想约束的刚体体系,其虚功原理可以表述如下:

设体系上作用给定的平衡力系,又设体系上发生可能位移(又称虚位移),即符合约束条件的无限小刚体体系位移,则主动力在可能位移上所做的虚功之和 W 恒等于零,即

$$W=0$$

式中

$$W = \sum F\Delta$$

F 为广义力,可以是力,力偶等。 Δ 为与广义力 F 相对应的广义位移。例如,与力相对应的位移为线位移,与力偶相对应的广义位移为角位移。

这里有两个彼此无关的状态,一个是体系上作用的平衡力系,另一个是体系上发生的可能位移。功前面加了一个“虚”字,只是用以强调做功的两个要素 F 和 Δ 彼此独立无关,特别是 Δ 与 F 没有因果关系。

理想约束是指约束力在可能位移上所做的功恒等于零的那种约束。光滑铰结和刚性链杆都属于理想约束。

下面将应用虚功原理来求解静定结构的内力。静定结构是几何不变体系,不可能发生刚体位移。因此,在应用虚功原理求内力时,要解除与内力相对应的约束,把静定结构变成具有一个可变自由度的机构。

对于图 4-3 所示静定结构,要求用虚功原理求截面 D 的弯矩。

首先,将截面 D 与弯矩相对应的相对转动约束解除,即将截面 D 由刚性联结变成铰结。相对转动约束解除,代之以一对大小相等、方向相反的弯矩 M_D ,如图 4-4a 所示。弯矩 M_D 在相对

转动约束解除后,由内力变成了主动力。对于图 4-4a 所示机构,所受的外力、约束力和弯矩 M_D 组成了一组平衡力系。

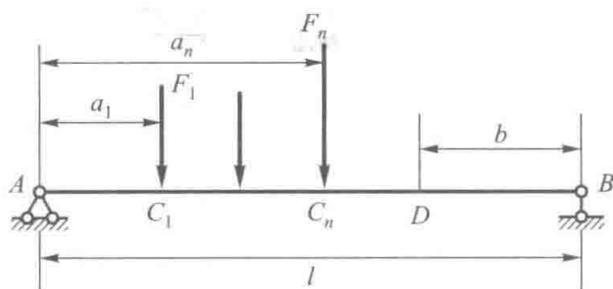


图 4-3

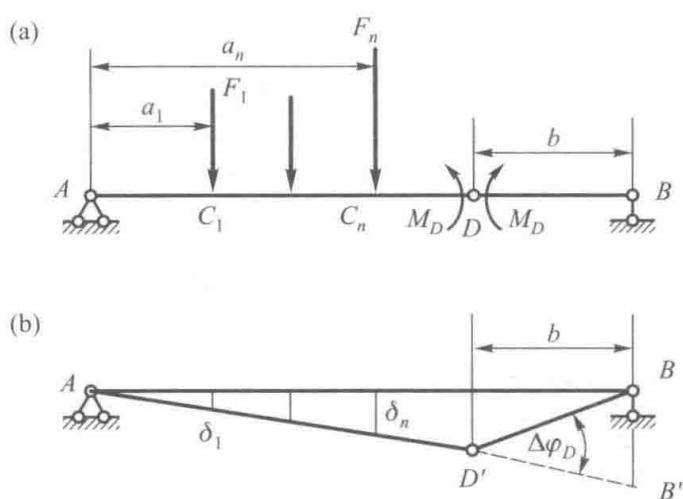


图 4-4

为了应用虚功原理,令图 4-4a 所示机构在截面 D 产生相对转动 $\Delta\varphi_D$, 机构的可能位移图如图 4-4b 所示。由几何分析得

$$BB' = b\Delta\varphi_D, \quad \delta_i = \frac{a_i}{l}b\Delta\varphi_D, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

由虚功原理,图 4-4a 所示主动力系在图 4-4b 所示可能位移上所做的虚功之和为零,即

$$\sum_{i=1}^n F_i \delta_i - M_D \Delta\varphi_D = 0 \quad (4-1a)$$

将 δ_i 代入上式得

$$M_D = \frac{b}{l} \sum_{i=1}^n F_i a_i$$

上述求解的特点就是应用虚功原理,将求解静力平衡的问题,转化为几何分析问题。同时,亦可应用虚功原理,将几何分析问题转化为求解静力平衡的问题。下节提到的单位荷载法就属于这方面的应用。

虚功方程(4-1a)可以表示为一般的形式:

$$W - \sum F_i \Delta\delta_i = 0 \quad (4-1b)$$

式中, W 为静定结构上所有外力在可能位移上做的虚功之和。在给定的某一截面上, F_i 为一对大小相等、方向相反的广义内力, $\Delta\delta_i$ 为与广义内力 F_i 相对应的广义相对位移。对于杆系结

构, F_i 和 $\Delta\delta_i$ 有下列三种对应关系:

(1) 如图 4-5a 所示, 将截面与弯矩相对应的相对转动约束解除, 即将截面由刚性联结变成铰结, 代之以一对大小相等、方向相反的弯矩 M 。铰结机构产生相对转动 $\Delta\varphi$ 。

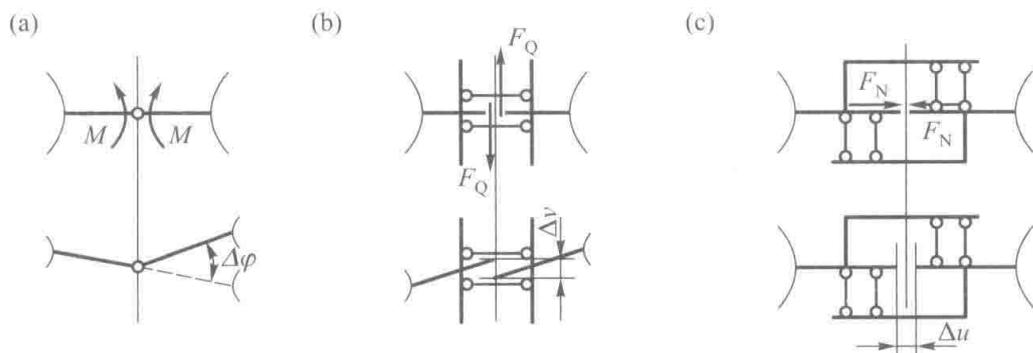


图 4-5 内力与相对位移机构

(2) 如图 4-5b 所示, 将截面与剪力相对应的横向相对移动约束解除, 即将截面由刚性联结变成横向的相对定向滑动联结, 代之以一对大小相等、方向相反的剪力 F_Q 。相对定向滑动机构产生横向的相对位移 Δv 。

(3) 如图 4-5c 所示, 将截面与轴力相对应的轴向相对移动约束解除, 即将截面由刚性联结变成轴向的相对定向滑动联结, 代之以一对大小相等、方向相反的轴力 F_N 。相对定向滑动机构产生轴向的相对位移 Δu 。

图中内力和相对位移的方向与材料力学规定的方向一致, 均为正方向。

§ 4-2 变形体系的虚功原理和单位荷载法

一、变形体系的虚功原理

本节要将刚体体系的虚功方程(4-1b)推广到变形结构体系, 建立变形体系的虚功原理。为此, 对于变形杆件结构, 首先要构造两个彼此无关的状态, 一个是结构上作用的平衡力系, 另一个是结构上发生的可能位移。

对于图 4-6a 所示杆件结构, 在荷载的作用下处于平衡状态, 结构在支座处产生支座约束力, 结构杆件上各点 x 处对应的截面产生弯矩 $M(x)$ 、剪力 $F_Q(x)$ 、轴力 $F_N(x)$ 。结构所受的荷载、支座约束力和各个截面的内力, 组成了一组平衡力系。

对于同一个结构, 杆件上各点 x 处对应的截面产生了线位移和角位移, x 处对应的微段 dx 产生了相对变形, 组成了一组可能位移如图 4-6b 所示。这种位移和变形一般是由于荷载、支座位移以及温度变化等因素作用产生的。但这里强调可能位移是一种符合约束条件的微小连续变形状态, 而不会去特别关注产生这种位移状态的原因。特别要说明的是这种位移状态与图 4-6a 所示杆件结构受力状态没有因果关系的联系。

x 处对应的微段 dx 产生了三种相对变形: 与弯矩 $M(x)$ 对应的相对转动 $d\varphi$ 如图 4-7a 所示, 与剪力 $F_Q(x)$ 对应的横向的相对位移 dv 如图 4-7b 所示, 与轴力 $F_N(x)$ 对应的轴向的相对位移 du 如图 4-7c 所示。

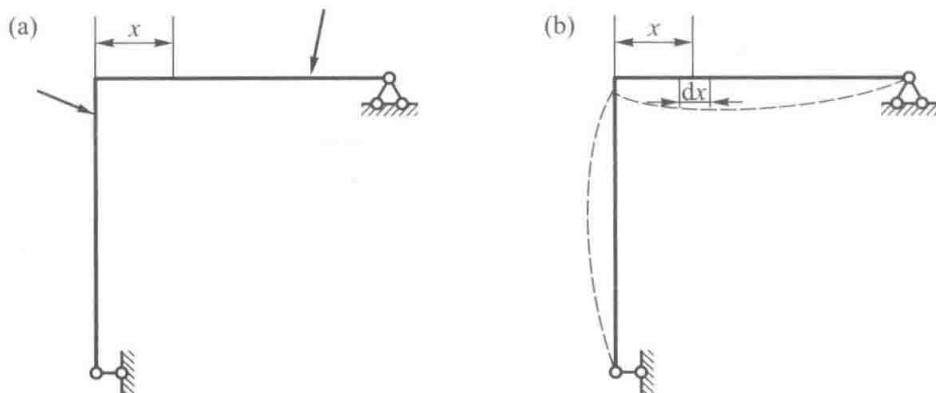
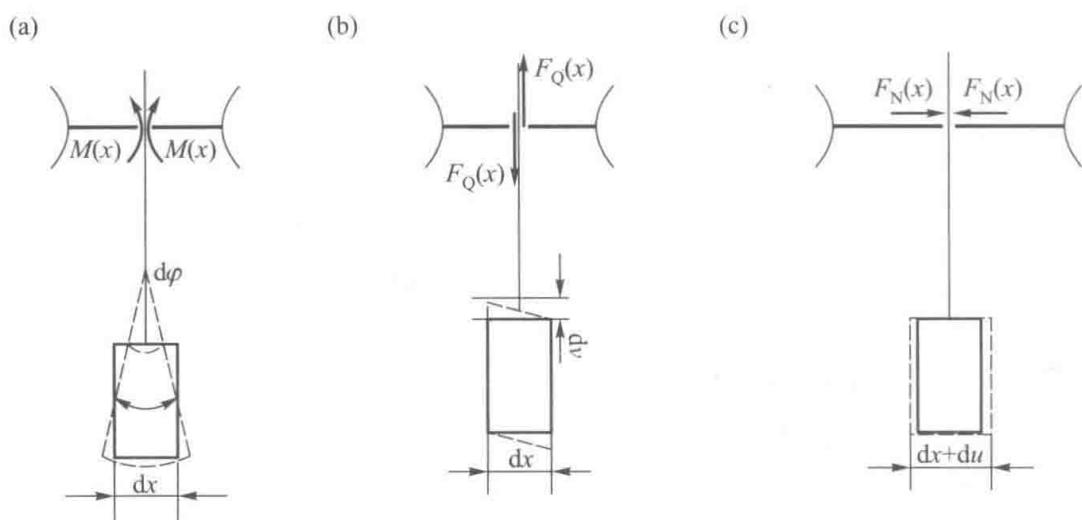


图 4-6 平衡力系状态和可能位移状态

图 4-7 x 处截面的内力与微段的相对变形

广义相对位移 $d\varphi$ 、 dv 、 du 分别对应于虚功方程(4-1b)中的 $\Delta\varphi$ 、 Δv 、 Δu 。不同的是,如图 4-5 所示的 $\Delta\varphi$ 、 Δv 、 Δu 是在对应的截面处跳跃变化的,而 $d\varphi$ 、 dv 、 du 是在包含对应截面的微段 dx 上连续变化的。令微段 dx 趋于零,但广义相对位移 $d\varphi$ 、 dv 、 du 依然存在,这相当于在 x 处对应的截面发生了跳跃变化的 $d\varphi$ 、 dv 、 du 。

于是,直接引用刚体体系的虚功方程(4-1b)得

$$dW - M(x) d\varphi - F_Q(x) dv - F_N(x) du = 0$$

式中, dW 为结构上所有外力在 x 处对应截面的广义相对位移,即 $d\varphi$ 、 dv 、 du 引起的可能位移上所做的虚功之和。上式对杆件上的每一个截面都成立。将上式沿杆长方向积分,然后对结构的所有杆件求和,得整个变形体系的虚功方程

$$W = V \quad (4-2)$$

式中

$$W = \sum \int dW$$

$$V = \sum \int M(x) d\varphi + \sum \int F_Q(x) dv + \sum \int F_N(x) du$$

至此,已经完成了变形体系虚功方程的证明。所谓的变形体系虚功原理,就是对于变形体系虚功方程(4-2)成立的说明。变形体虚功原理的表述为:设变形体系在外力的作用下处于平衡

状态(平衡力系),又该变形体系上发生可能位移,即符合约束条件的微小连续变形,则外力在可能位移上所做的虚功之和 W 恒等于内力在可能相对位移上所做的虚功之和 V ,即虚应变能。

二、单位荷载法

利用虚功方程(4-2)即可导出计算杆件结构位移的单位荷载法。

图 4-8a 所示为某一结构,由于荷载 F_{P1} 和 F_{P2} 、支座 A 的位移 c_1 和 c_2 等各种因素的作用而发生如图中虚线所示的变形,这一状态称为结构的实际状态。现要求出实际状态中 D 点的水平位移 Δ ,所以应将此实际状态作为结构的可能位移状态。

为了利用虚功方程求得 D 点的水平位移,应选取如图 4-8b 所示虚设的力状态,即在该结构 D 点处沿水平方向加上一个单位荷载 $F_p = 1$ ^①。这时,虚设力状态中 A 处的支座约束力为 \bar{R}_1 、 \bar{R}_2 , B 处的约束力为 \bar{F}_{By} ,结构在单位力和各支座约束力的作用下维持平衡,其内力用 \bar{M} 、 \bar{F}_N 、 \bar{F}_Q 来表示。由于结构的力状态是虚设的,故称为平衡力系虚拟状态。虚拟状态的外力(包括约束力)对可能位移,即实际状态的位移所做的总外力虚功为

$$W = 1 \cdot \Delta + \bar{R}_1 c_1 + \bar{R}_2 c_2$$

一般可写为

$$W = \Delta + \sum \bar{R}c$$

式中 \bar{R} ^② 表示虚拟状态中的广义支座约束力, c 表示实际状态中的广义支座位移, $\sum \bar{R}c$ 表示支座约束力所做虚功之和。

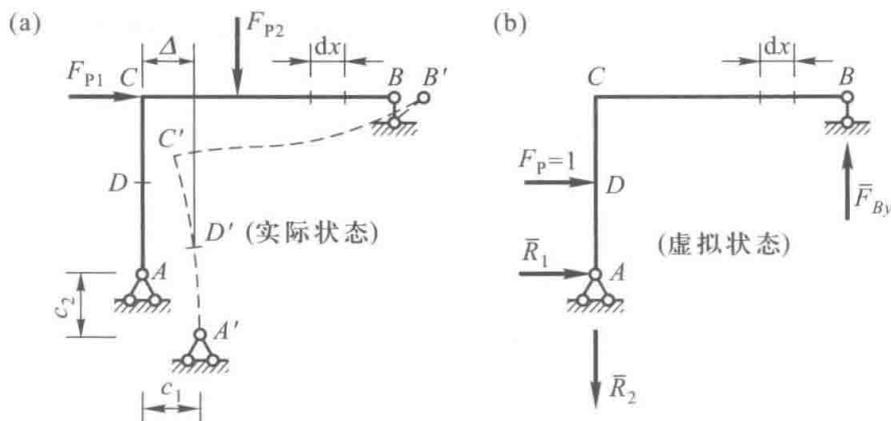


图 4-8

由杆件结构的虚功方程(4-2)可得

$$\Delta + \sum \bar{R}c = \sum \int \bar{M}d\varphi + \sum \int \bar{F}_N du + \sum \int \bar{F}_Q dv$$

即

$$\Delta = \sum \int \bar{M}d\varphi + \sum \int \bar{F}_N du + \sum \int \bar{F}_Q dv - \sum \bar{R}c \quad (4-3)$$

① 这里的单位荷载 $F_p = 1$ 属于单位物理量,其使用见本书符号表说明第 3 点对单位量的说明。以下类同。

② 这里的支座约束力 R 和支座位移 c 分别属广义力和广义位移,其使用见本书符号表说明第 2 点对广义物理量的说明。以下类同。

这种通过虚设单位广义力作用的力状态,利用虚功方程求位移的方法,称为单位荷载法。这种方法将几何分析的问题转化成为了静力平衡问题。式(4-3)适用于任何材料制作、任何外因影响的杆件结构,因此是杆件结构位移计算的一般公式。

如果结构只受支座位移的影响,则式(4-3)可简化成如下形式:

$$\Delta = -\sum \bar{R}c \quad (4-4)$$

这是因为在静定结构中,支座移动和转动并不使结构产生内力和变形,结构只会发生刚体运动,虚拟状态内力在实际状态变形上产生的虚应变能为零。

应用单位荷载法,每次只能求得一个位移。在计算时,虚拟单位荷载的指向可以任意假定,若按式(4-3)计算出来的结果为正,则表示实际位移的方向与虚拟单位荷载的方向相同,否则相反。这是因为公式中左边的 Δ ,实际上为虚拟单位荷载所做的虚功,若计算结果为负,则表示该项虚功为负,即位移的方向与虚拟单位荷载的方向相反。

单位荷载法不仅可用来计算结构的线位移,而且可用来计算其他性质的位移。式(4-3)中拟求位移 Δ 可以理解成为广义位移,它可以是线位移,角位移,也可以是某两个截面之间的广义相对位移。虚设单位力应该理解为与 Δ 相对应的广义单位力。现列举以下几种典型的虚拟状态。

当求结构某两点 A 、 B 沿其连线方向的相对线位移时,可在该两点沿其连线加上两个方向相反的单位荷载(图4-9a、b)。

当求梁或刚架某一截面 K 的角位移时,可在该截面处施加一个单位力偶(图4-9c);但求桁架中某一杆件 i 的角位移时,则应加一个由两个集中力构成的单位力偶(图4-9d),其中每一个集中力为 $\frac{1}{l_i}$,分别作用于该杆的两端并与该杆垂直,这里的 l_i 为杆件 i 的长度。

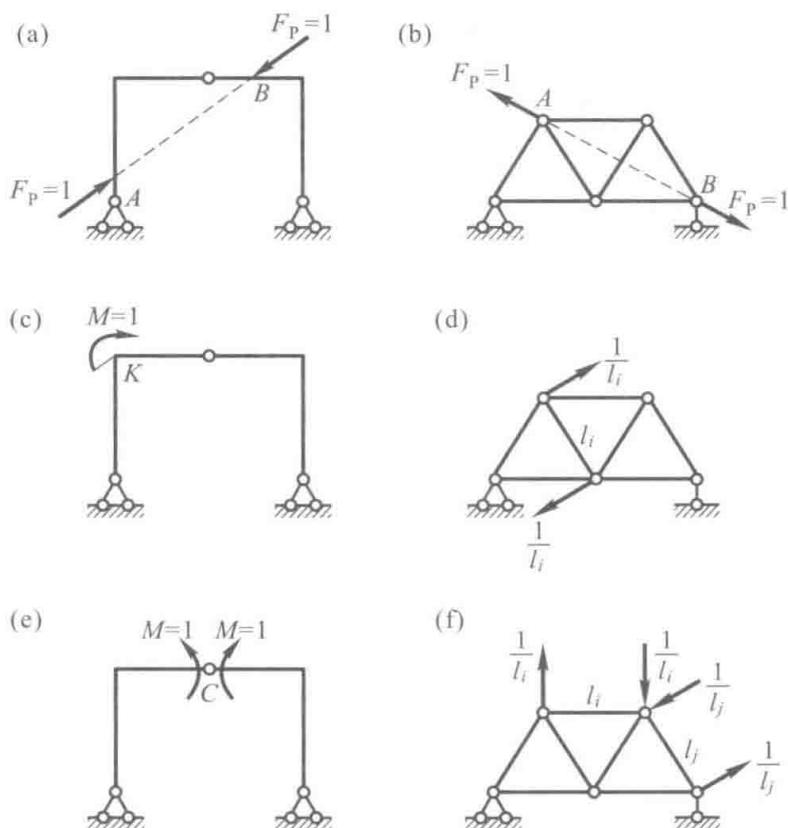


图 4-9

当求梁或刚架上两个截面的相对角位移时,可在这两个截面施加两个方向相反的单位力偶,例如图 4-9e 所示为求铰 C 处左右两侧截面相对角位移的虚拟状态;当求桁架中两根杆件的相对角位移时,则应加两个方向相反的单位力偶,例如图 4-9f 所示为求 i, j 两杆相对转角的虚拟状态。

§ 4-3 静定结构由荷载引起的位移

如果结构只受到荷载作用,以 M_p, F_{NP}, F_{QP} 表示结构实际状态的内力,则在实际状态下微段的变形分别为

$$\left. \begin{aligned} d\varphi &= \kappa dx = \frac{M_p}{EI} dx \\ du &= \varepsilon dx = \frac{F_{NP}}{EA} dx \\ dv &= \gamma dx = \frac{kF_{QP}}{GA} dx \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

式中, EI, EA 和 GA 分别是杆件的抗弯、抗拉和抗剪刚度; k 为截面的切应力分布不均匀系数,它只与截面的形状有关,当截面为矩形时, $k = 1.2$ 。将式 (a) 代入式 (4-3), 并注意到无支座移动 (即 $c = 0$), 得

$$\Delta = \sum \int_l \frac{\bar{M}M_p}{EI} dx + \sum \int_l \frac{\bar{F}_N F_{NP}}{EA} dx + \sum \int_l \frac{k\bar{F}_Q F_{QP}}{GA} dx \quad (4-5)$$

式中, $\bar{M}, \bar{F}_N, \bar{F}_Q$ 代表虚拟状态下由于单位荷载所产生的内力。在静定结构中,上述内力均可通过静力平衡条件求得,故不难利用式 (4-5) 求出相应的位移。

对梁和刚架,轴向变形和剪切变形的影响甚小,可以略去,其位移的计算只考虑弯曲变形一项已足够精确。这样,式 (4-5) 可简化为

$$\Delta = \sum \int_l \frac{\bar{M}M_p}{EI} dx \quad (4-6)$$

在一般的实体拱中,其位移的计算只考虑弯曲变形一项的影响已足够精确。但在扁平拱中,除弯曲外,有时尚需考虑轴向变形对位移的影响。

桁架只有轴力的作用,且每一杆件的内力及截面都沿杆长 l 不变,故其位移的计算公式成为

$$\Delta = \sum \frac{\bar{F}_N F_{NP} l}{EA} \quad (4-7)$$

应该指出,在计算由于内力所引起的变形时,没有考虑杆件的曲率对变形的影响,因此只有对直杆才准确,应用于曲杆计算则是近似的。不过,在常用结构中,例如拱结构或具有曲杆的刚架等,其曲率对变形的影响都很微小,可以略去不计。

[例 4-1] 试求图 4-10a 所示等截面简支梁中点 C 的竖向位移 Δ_{cv} 。已知 $EI = \text{常数}$ 。

解: 在 C 点加一竖向单位荷载作为虚拟状态 (图 4-10b), 分别求出实际荷载和单位荷载作用下梁的弯矩。设以 A 为坐标原点, 则当 $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$ 时, 有

$$\bar{M} = \frac{1}{2}x, \quad M_p = \frac{q}{2}(lx - x^2)$$

因为对称,所以由式(4-6)得

$$\Delta_{CV} = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{EI} \times \frac{x}{2} \times \frac{q}{2}(lx - x^2) dx = \frac{q}{2EI} \int_0^{\frac{l}{2}} (lx^2 - x^3) dx = \frac{5ql^4}{384EI} (\downarrow)$$

计算结果为正,说明 C 点竖向位移的方向与虚拟单位荷载的方向相同,即向下。

[例 4-2] 试求图 4-11a 所示阶梯形柱柱顶 B 的水平位移 Δ_{BH} 。

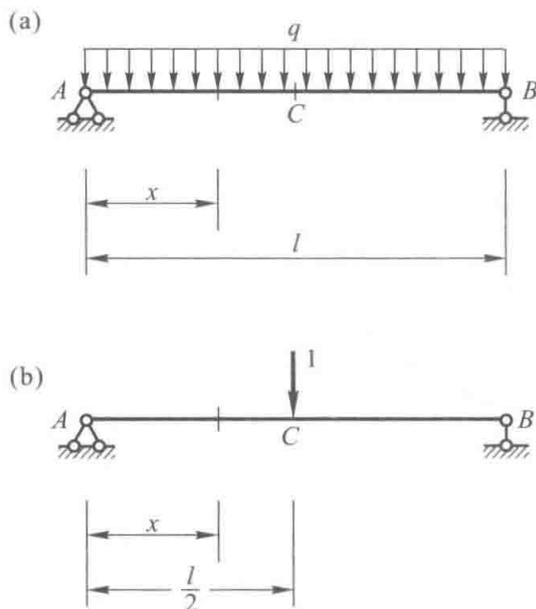


图 4-10

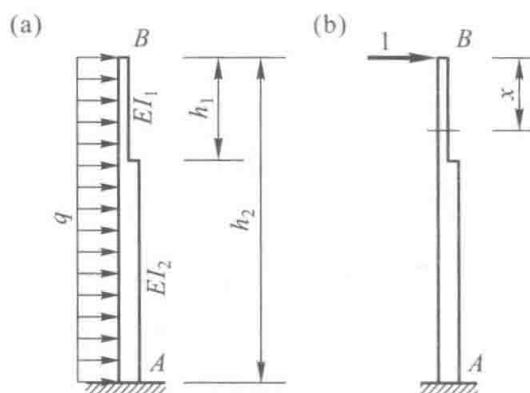


图 4-11

解:因所求位移是柱顶的水平位移,所以在 B 点加一水平单位荷载作为虚拟状态(图 4-11b)。设以 B 为坐标原点,暂规定弯矩以使柱的左侧受拉为正,则有

$$\bar{M} = x, \quad M_p = \frac{q}{2}x^2$$

因该柱上、下两段的抗弯刚度不同,所以将以上 \bar{M} 和 M_p 代入式(4-6)求位移时,应分段进行积分,于是得

$$\begin{aligned} \Delta_{BH} &= \frac{1}{EI_1} \int_0^{h_1} x \cdot \frac{qx^2}{2} dx + \frac{1}{EI_2} \int_{h_1}^{h_2} x \cdot \frac{qx^2}{2} dx \\ &= \frac{qh_1^4}{8EI_1} + \frac{q(h_2^4 - h_1^4)}{8EI_2} = \frac{q}{8E} \left(\frac{h_1^4}{I_1} + \frac{h_2^4 - h_1^4}{I_2} \right) (\rightarrow) \end{aligned}$$

结果为正,表示 B 点水平位移向右。

[例 4-3] 试求图 4-12a 所示刚架 C 端的水平位移 Δ_{CH} 和角位移 φ_C 。已知 EI 为一常数。

解:略去轴向变形和剪切变形的影响,只计算弯曲变形一项。在荷载作用下,弯矩如图 4-12b 所示。

(1) 求 C 端的水平位移时,可在 C 点加上一水平单位荷载作为虚拟状态,其方向取为向左,如图 4-12c 所示。

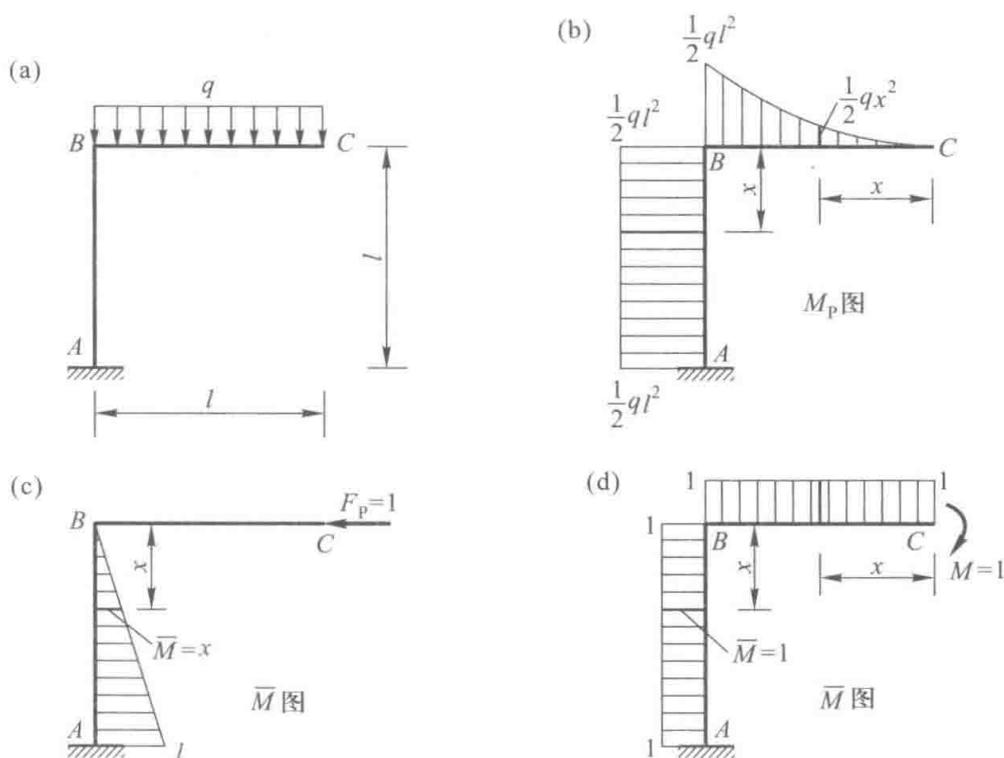


图 4-12

两种状态的弯矩假定以内侧受拉为正,分别为

$$\text{横梁 } BC \text{ 上} \quad \bar{M} = 0, \quad M_p = -\frac{1}{2}qx^2$$

$$\text{竖柱 } AB \text{ 上} \quad \bar{M} = x, \quad M_p = -\frac{1}{2}ql^2$$

代入式(4-6),得 C 端水平位移为

$$\Delta_{CH} = \sum \int_l \frac{\bar{M}M_p}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^l x \left(-\frac{1}{2}ql^2 \right) dx = -\frac{ql^4}{4EI} \quad (\rightarrow)$$

计算结果为负,表示实际位移与所设虚拟单位荷载的方向相反,即向右。

(2) 求 C 端的角位移时,可在 C 点加一单位力偶作为虚拟状态,其方向设为顺时针方向,如图 4-12d 所示。

两种状态的弯矩分别为

$$\text{横梁 } BC \text{ 上} \quad \bar{M} = -1, \quad M_p = -\frac{1}{2}qx^2$$

$$\text{竖柱 } AB \text{ 上} \quad \bar{M} = -1, \quad M_p = -\frac{1}{2}ql^2$$

代入式(4-6),得 C 端角位移为

$$\varphi_C = \frac{1}{EI} \int_0^l (-1) \left(-\frac{1}{2}qx^2 \right) dx + \frac{1}{EI} \int_0^l (-1) \left(-\frac{1}{2}ql^2 \right) dx = \frac{2ql^3}{3EI} \quad (2)$$

计算结果为正,表示 C 端转动的方向与虚拟力偶的方向相同,即为顺时针方向转动。

[例 4-4] 试求图 4-13a 所示圆弧形曲杆 B 点的竖向位移, I 及 A 都为常数。曲率的影响忽略不计。

解:在与 OB 成 θ 角的截面 K 上,各内力如图 4-13b 所示,其值为

$$M_P = F_P r \sin \theta, \quad F_{QP} = F_P \cos \theta, \quad F_{NP} = F_P \sin \theta$$

当求 B 点的竖向位移时,虚拟状态应在 B 点加一向下的单位荷载,因此只需在图 4-13a 中令 $F_P = 1$ 即可,相应内力为

$$\bar{M} = r \sin \theta, \quad \bar{F}_Q = \cos \theta, \quad \bar{F}_N = \sin \theta$$

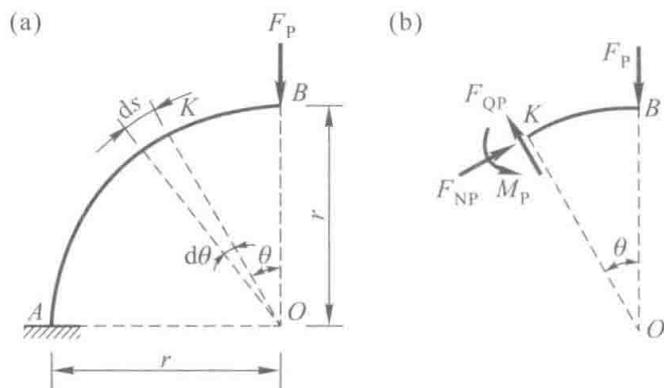


图 4-13

利用式(4-5)计算位移时,对于曲杆应令 $dx = ds$,由图 4-13a 知 $ds = r d\theta$,所以有

$$\begin{aligned} \Delta_{BV} &= \int_B^A \frac{\bar{M} M_P}{EI} ds + k \int_B^A \frac{\bar{F}_Q F_{QP}}{GA} ds + \int_B^A \frac{\bar{F}_N F_{NP}}{EA} ds \\ &= \frac{F_P r^3}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta + k \frac{F_P r}{GA} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta + \frac{F_P r}{EA} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} \left[\frac{F_P r^3}{EI} + k \frac{F_P r}{GA} + \frac{F_P r}{EA} \right] (\downarrow) \end{aligned}$$

若截面为矩形($b \cdot h$),则 $k = 1.2$ 。

$$I = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} A h^2, \quad A = \frac{12I}{h^2}$$

另外,设 $G = 0.4E$,于是

$$\Delta_{BV} = \frac{\pi F_P r^3}{4EI} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{h}{r} \right)^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{r} \right)^2 \right] = \frac{\pi F_P r^3}{4EI} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{r} \right)^2 \right] (\downarrow)$$

截面高度 h 一般远较 r 为小,因此上式方括号中第二项远小于 1,由此可见剪切变形及轴向变形的影响甚微,因而在受弯杆件中通常只计算弯曲变形一项的影响。

[例 4-5] 试求图 4-14a 所示木桁架(与例题 3-5 同)下弦中间结点 5 的挠度。设各杆的截面面积均为 $A = 0.12 \text{ m} \times 0.12 \text{ m} = 0.0144 \text{ m}^2$, $E = 850 \times 10^7 \text{ Pa}$ 。

解:虚拟状态如图 4-14b 所示。实际状态和虚拟状态所产生的杆件内力均列在表 4-1 中,根据式(4-7),可得所求结点 5 的挠度为

$$\Delta_{5V} = \frac{(125\sqrt{5} + 260) \text{ kN} \cdot \text{m}}{850 \times 10^4 \text{ kN/m}^2 \times 0.0144 \text{ m}^2} = 0.0044 \text{ m} = 0.44 \text{ cm} (\downarrow)$$

正号表示结点 5 的挠度向下。

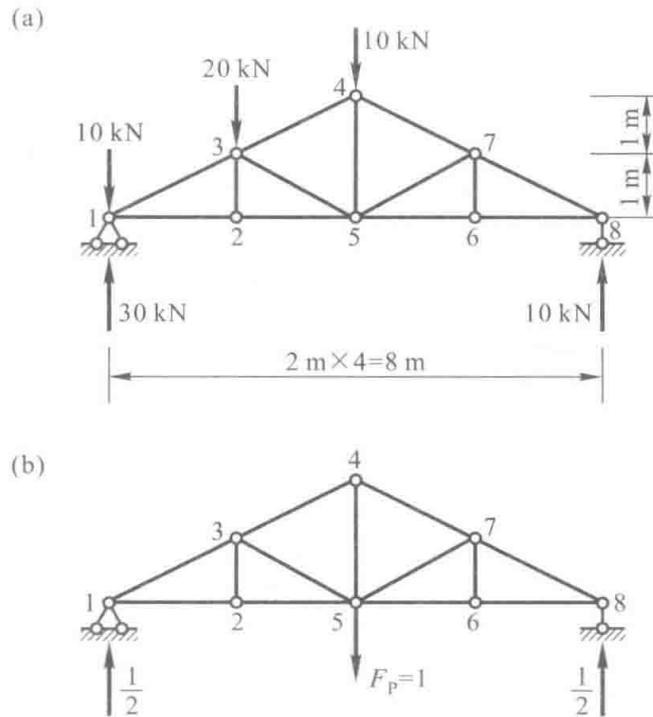


图 4-14

表 4-1 例 4-5 的计算表

杆件		l/m	\bar{F}_N	F_{NP}/kN	$\bar{F}_N F_{NP} l / (kN \cdot m)$
上弦	1-3	$\sqrt{5}$	$-0.5\sqrt{5}$	$-20\sqrt{5}$	$50\sqrt{5}$
	3-4	$\sqrt{5}$	$-0.5\sqrt{5}$	$-10\sqrt{5}$	$25\sqrt{5}$
	4-7	$\sqrt{5}$	$-0.5\sqrt{5}$	$-10\sqrt{5}$	$25\sqrt{5}$
	7-8	$\sqrt{5}$	$-0.5\sqrt{5}$	$-10\sqrt{5}$	$25\sqrt{5}$
下弦	1-2	2	1	40	80
	2-5	2	1	40	80
	5-6	2	1	20	40
	6-8	2	1	20	40
竖杆	2-3	1	0	0	0
	4-5	2	1	10	20
	6-7	1	0	0	0
斜杆	3-5	$\sqrt{5}$	0	$-10\sqrt{5}$	0
	5-7	$\sqrt{5}$	0	0	0
					$\Sigma 125\sqrt{5} + 260$

§ 4-4 图乘法

在求梁和刚架结构的位移时,将遇到如下的积分式

$$\Delta = \sum \int_l \frac{\bar{M}M_p dx}{EI}$$

如果结构各杆段同时满足下述三个条件,则其中的积分式可通过 \bar{M} 和 M_p 两个弯矩图逐段相乘的方法求得解答。这三个条件是:第一,杆段的 EI 为常数;第二,杆轴线为直线;第三,各杆段的 \bar{M} 图和 M_p 图中至少有一个为直线图形。对于等截面直杆,前两个条件恒可满足,至于第三个条件,虽然 M_p 图在受到分布荷载作用时将成为曲线图形,但其 \bar{M} 图却总是由直线段组成,只要分段考虑就可得到满足。

现以图 4-15 所示杆段的两个弯矩图做以下说明,假设其中 \bar{M} 图为直线,而 M_p 图为任何形状,并取

$$\bar{M} = x \tan \alpha + b$$

代入积分式,则有

$$\begin{aligned} \int_l \frac{\bar{M}M_p dx}{EI} &= \frac{1}{EI} (\tan \alpha \int_l x M_p dx + b \int_l M_p dx) \\ &= \frac{1}{EI} (\tan \alpha \int_l x dA_p + b \int_l dA_p) \end{aligned}$$

式中, dA_p 表示 M_p 图的微分面积,故积分 $\int_l dA_p$ 为 M_p 图的面积 A_p ,而积分 $\int_l x dA_p$ 表示 M_p 图的总面积 A_p 对于 $O_1 O_2$ 轴的静矩,并可表示为

$$\int_l x dA_p = A_p x_c$$

式中, x_c 是 M_p 图的形心到 $O_1 O_2$ 轴的距离。因此,得

$$\int_l \frac{\bar{M}M_p dx}{EI} = \frac{1}{EI} A_p (x_c \tan \alpha + b)$$

又因 $x_c \tan \alpha + b = y_c$ 为 \bar{M} 图中与 M_p 图形心 C 相对应的竖标,故得

$$\int_l \frac{\bar{M}M_p dx}{EI} = \frac{1}{EI} A_p y_c \quad (4-8)$$

由此可见,当上述三个条件同时满足时,积分式 $\int_l \frac{\bar{M}M_p dx}{EI}$ 之值就等于 M_p 图(任何形状图形)的面积 A_p 乘以与其形心相应的 \bar{M} 图(直线图形)上的竖标 y_c ,再除以 EI 。所得结果以 A_p 与 y_c 在基线的同一侧时为正,否则为负。这就是图乘法。应当注意, y_c 必须从直线图形上取得。当 \bar{M} 图的图形由若干段直线组成时,就应该分段图乘。如对图 4-16 所示情况,有

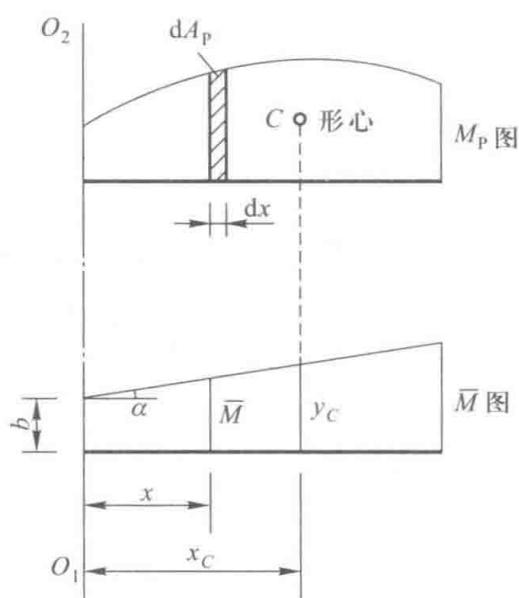


图 4-15

$$\sum \int_l \frac{\bar{M}M_p dx}{EI} = \frac{1}{EI}(A_{p1}y_1 + A_{p2}y_2 + A_{p3}y_3)$$

进行图乘时,如遇到弯矩图的形心位置或面积不便于确定的情况,应将该图形分解为几个易于确定形心位置和面积的部分,并将这些部分与另一图形分别相乘,然后再将所得结果相加,即得两图相乘之值。

例如,图 4-17 所示的两个梯形相乘时,可不必找出梯形的形心,而将其中一个梯形(设为 M_p 图的 $ABDC$)分解为两个三角形 ADC 和 ABD ,并分别以 M'_p 和 M''_p 表示任一截面的弯矩 M_p 在这两个三角形中所含的竖标,将 $M_p = M'_p + M''_p$ 代入计算位移的积分式中,使得

$$\int_l \frac{\bar{M}M_p dx}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\int_l \bar{M} M'_p dx + \int_l \bar{M} M''_p dx \right)$$

上式表明可将三角形 ABD 和 ADC 分别与 \bar{M} 图相乘,再将所得结果相加后除以 EI ,即得所求位移。按上述方法处理,有

$$\int_l \frac{\bar{M}M_p dx}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{al}{2}y_a + \frac{bl}{2}y_b \right)$$

式中

$$y_a = \frac{2}{3}c + \frac{1}{3}d, \quad y_b = \frac{1}{3}c + \frac{2}{3}d$$

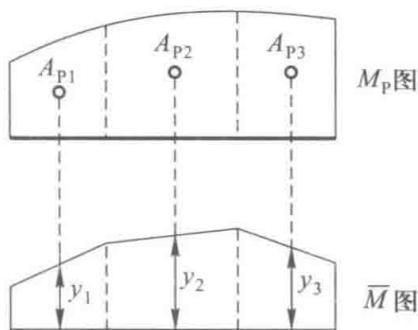


图 4-16

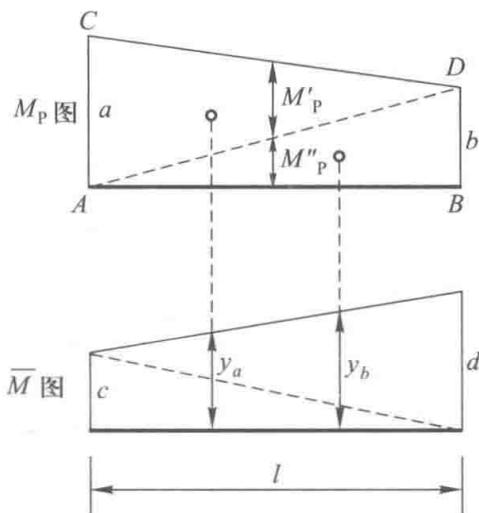


图 4-17

又如图 4-18 所示两个图形都呈直线变化,但均含有不同符号的两部分,在进行图乘时,可将其中一个图形(设为 M_p 图)分解为 ABC 和 ABD 两个三角形,由于原图形任一截面的竖标 M_p 等于这两部分所含竖标 M'_p 和 M''_p 的代数和,故可按上述方法同样处理得

$$\int_l \frac{\bar{M}M_p dx}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{al}{2}y_a + \frac{bl}{2}y_b \right)$$

式中

$$y_a = \frac{2}{3}c - \frac{1}{3}d, \quad y_b = \frac{2}{3}d - \frac{1}{3}c$$

对于图 4-19a 所示某一均布荷载作用区段的 M_p 图, 可根据第 3 章中所阐述过的区段叠加法, 将 M_p 图看作是由两端弯矩竖标所连成的梯形 $ABDC$ (当有一端为零时则为三角形), 与相应简支梁在均布荷载作用下的弯矩图叠加而成, 后者即虚线 CD 与曲线之间所包含的部分, 但应注意一定要作为基线下方的图形来决定符号。这样, 可将 M_p 图分解为上述两个图形, 并分别与 \bar{M} 图相乘, 然后求代数和, 即可得出结果

$$\int_l \frac{\bar{M} M_p dx}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\frac{al}{2} \left(\frac{2}{3}c + \frac{1}{3}d \right) + \frac{bl}{2} \left(\frac{1}{3}c + \frac{2}{3}d \right) - \frac{2}{3}l \times \frac{1}{8}ql^2 \times \frac{1}{2}(c+d) \right]$$

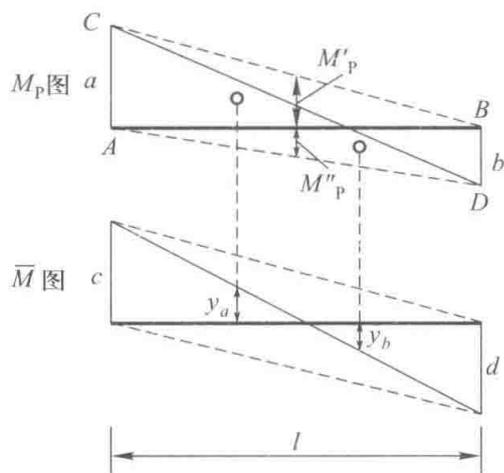


图 4-18

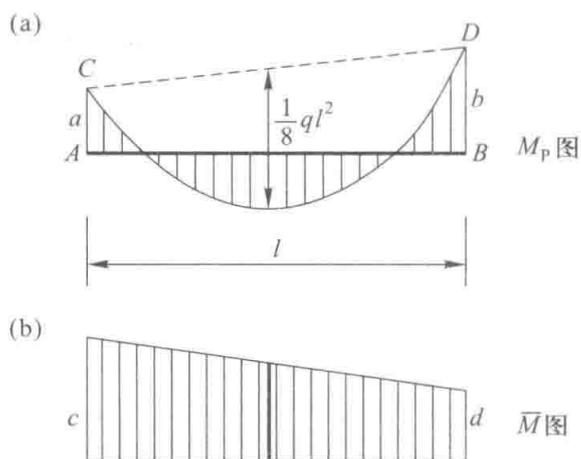


图 4-19

为了计算方便, 现将常见的二次和三次标准抛物线图形的面积及其形心位置表示于图 4-20 中。所谓标准抛物线图形是指含有顶点在内且顶点处的切线与基线平行的图形。弯矩图为标准抛物线图形时, 在顶点处应有 $\frac{dM}{dx} = 0$, 即顶点处截面的剪力为零。

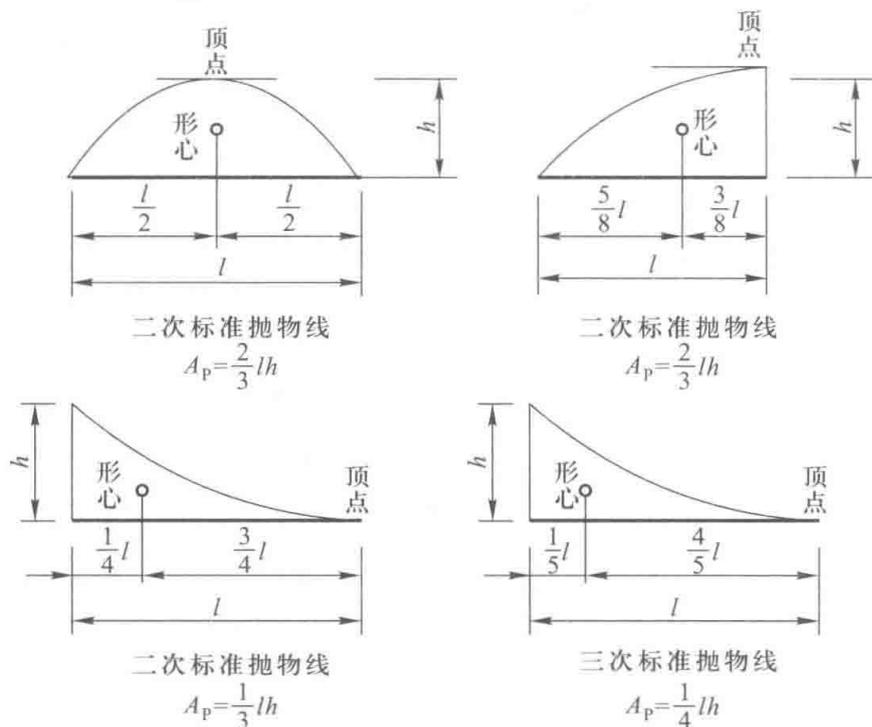


图 4-20

[例 4-6] 试求图 4-21a 所示简支梁 A 端的角位移 φ_A 和中点 C 的竖向位移 Δ_{CV} 。EI 为常数。

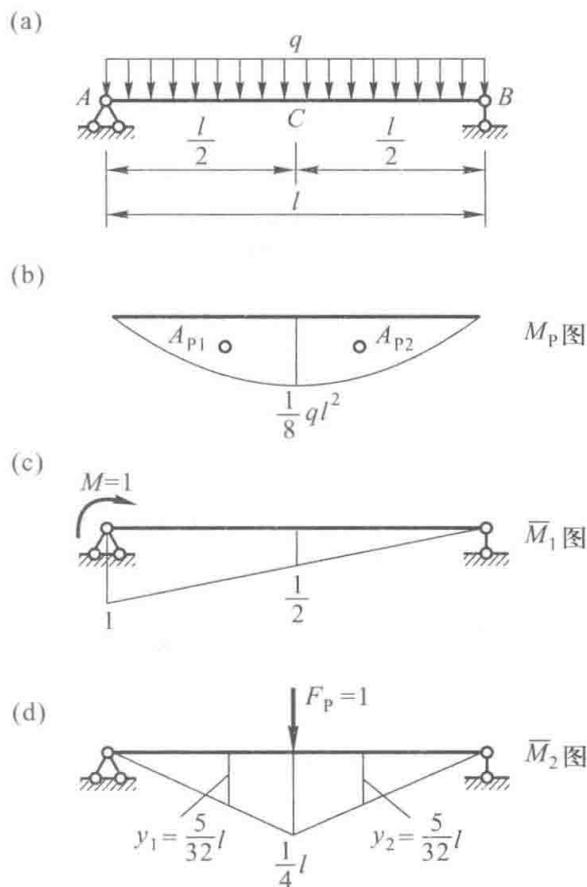


图 4-21

解: 荷载作用下的弯矩图和两个单位弯矩图分别如图 4-21b、c、d 所示。

将图 4-21b 与图 4-21c 相乘, 则得

$$\varphi_A = \frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3} l \times \frac{ql^2}{8} \right) \times \frac{1}{2} = \frac{ql^3}{24EI} \quad (\curvearrowright)$$

将图 4-21b 与图 4-21d 相乘, 则得

$$\Delta_{CV} = \frac{1}{EI} (A_{p1} y_1 + A_{p2} y_2) = \frac{2}{EI} \left(\frac{2}{3} \times \frac{l}{2} \times \frac{ql^2}{8} \right) \times \frac{5}{32} l = \frac{5ql^4}{384EI} \quad (\downarrow)$$

[例 4-7] 试求图 4-22a 所示刚架 C 点的水平位移 Δ_{CH} 。EI 为常数。

解: 作出 M_p 图和 \bar{M} 图, 分别如图 4-22b、c 所示。因为 \bar{M} 图中的 BC 段没有弯矩, 故只需在 AB 段进行图乘。由于 \bar{M} 图和 M_p 图在 AB 段都是直线图形, 为简便起见, 也可在计算较为简单的 \bar{M} 图上取面积, 而在 M_p 图上取相应的竖标, 则

$$\Delta_{CH} = \frac{1}{EI} \times \frac{1}{2} \times 4 \text{ m} \times 4 \text{ m} \times \left(\frac{1}{3} \times 80 \text{ kN} \cdot \text{m} + \frac{2}{3} \times 160 \text{ kN} \cdot \text{m} \right) = \frac{1\ 067 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \quad (\rightarrow)$$

[例 4-8] 试求图 4-23a 所示伸臂梁 A 端的角位移 φ_A 及 C 端的竖向位移 Δ_{CV} 。EI = $5 \times 10^4 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$ 。

解: 先作出 M_p 图及两个 \bar{M} 图, 分别如图 4-23b、c、d 所示。将图 4-23b 与图 4-23c 相乘, 则得

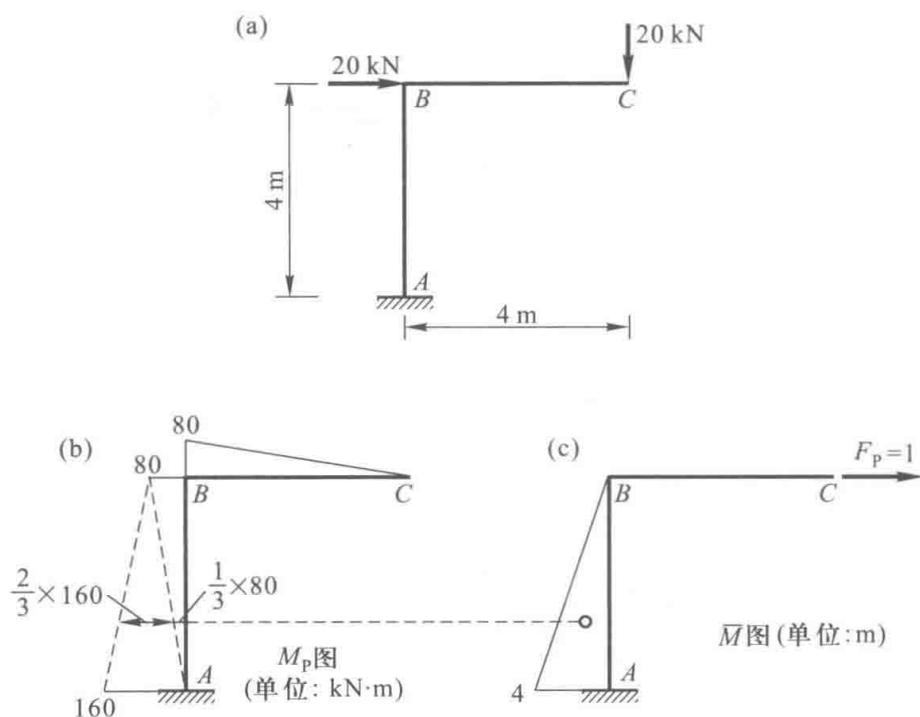


图 4-22

$$\varphi_A = -\frac{1}{5 \times 10^4 \text{ kN} \cdot \text{m}^2} \times \frac{1}{2} \times 48 \text{ kN} \cdot \text{m} \times 6 \text{ m} \times \frac{1}{3} \times 1 = -9.6 \times 10^{-4} \text{ rad} (\uparrow)$$

其中最初的负号是因为相乘的两个图形不在基线的同侧。最后结果中的负号则表示 φ_A 的实际方向与 $M=1$ 的方向相反, 即 φ_A 是逆时针方向的。

为了计算 Δ_{CV} 值, 需将图 4-23b 与图 4-23d 相乘。此时, AB 区段计算并无任何困难, 而对承受均布荷载的 BC 区段, 则可将 M_p 图看作是由 B 、 C 两端弯矩竖标所连成的三角形图形, 与相应简支梁在均布荷载作用下的标准抛物线图形 (即图 4-23b 中的虚线与曲线之间所包含的面积) 叠加而成。将上述两图形分别与图 4-23d 的相应部分相乘, 可得

$$\begin{aligned} \Delta_{CV} &= \frac{1}{5 \times 10^4 \text{ kN} \cdot \text{m}^2} \times \left[\left(\frac{1}{2} \times 48 \text{ kN} \cdot \text{m} \times 6 \text{ m} \times \frac{2}{3} \times 1.5 \text{ m} \right) + \left(\frac{1}{2} \times 48 \text{ kN} \cdot \text{m} \times 1.5 \text{ m} \times \frac{2}{3} \times 1.5 \text{ m} - \frac{2}{3} \times 4.5 \text{ kN} \cdot \text{m} \times 1.5 \text{ m} \times \frac{1.5}{2} \text{ m} \right) \right] \\ &= 2.88 \times 10^{-3} \text{ m} + 0.6525 \times 10^{-3} \text{ m} \\ &= 3.5325 \times 10^{-3} \text{ m} \\ &\approx 3.5 \times 10^{-3} \text{ m} = 3.5 \text{ mm} (\downarrow) \end{aligned}$$

[例 4-9] 试求图 4-24a 所示刚架 C 、 D 两点之间的相对水平位移 $\Delta_{(C-D)H}$ 。各杆抗弯刚度均为 EI 。

解: 先作出 M_p 图 (图 4-24b), 其中 AC 、 BD 两杆的弯矩图是三次标准抛物线图形。

因为要计算 C 、 D 两点之间的相对水平位移, 须沿两点连线加上一对方向相反的单位荷载作为虚拟状态, 并绘出 \bar{M} 图 (图 4-24c)。将图 4-24b 与图 4-24c 相乘, 得

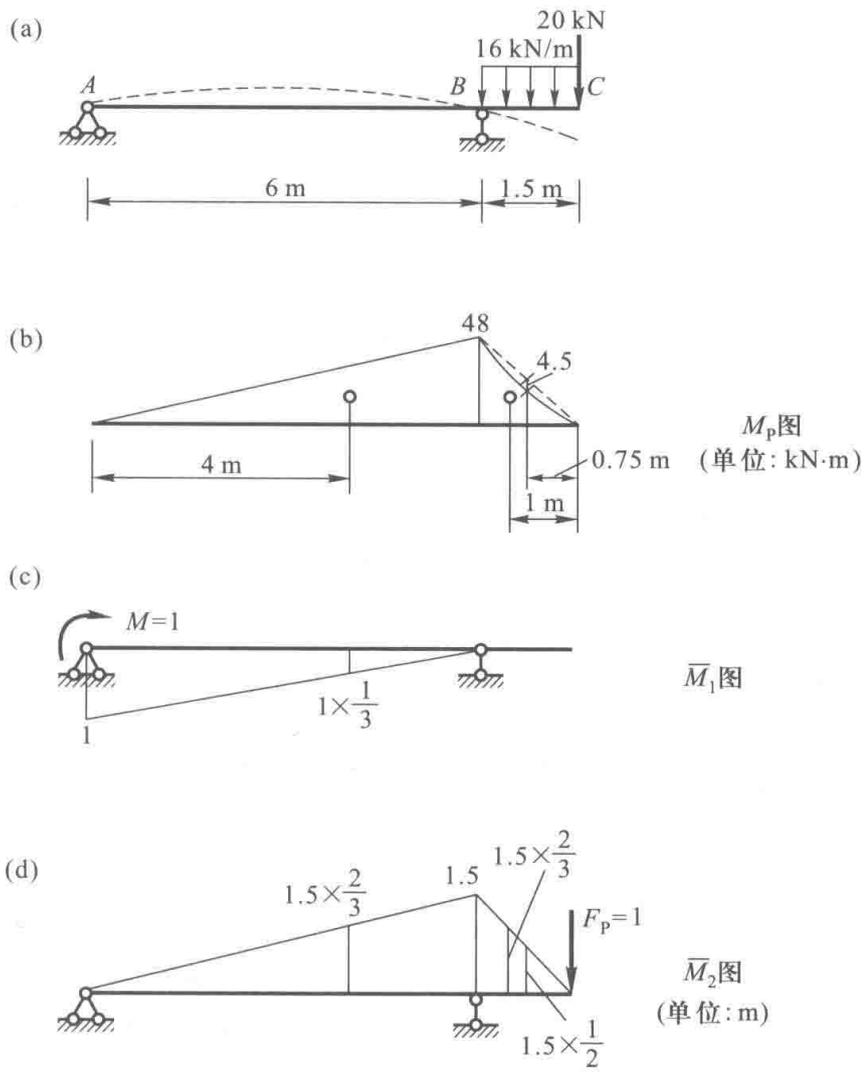


图 4-23

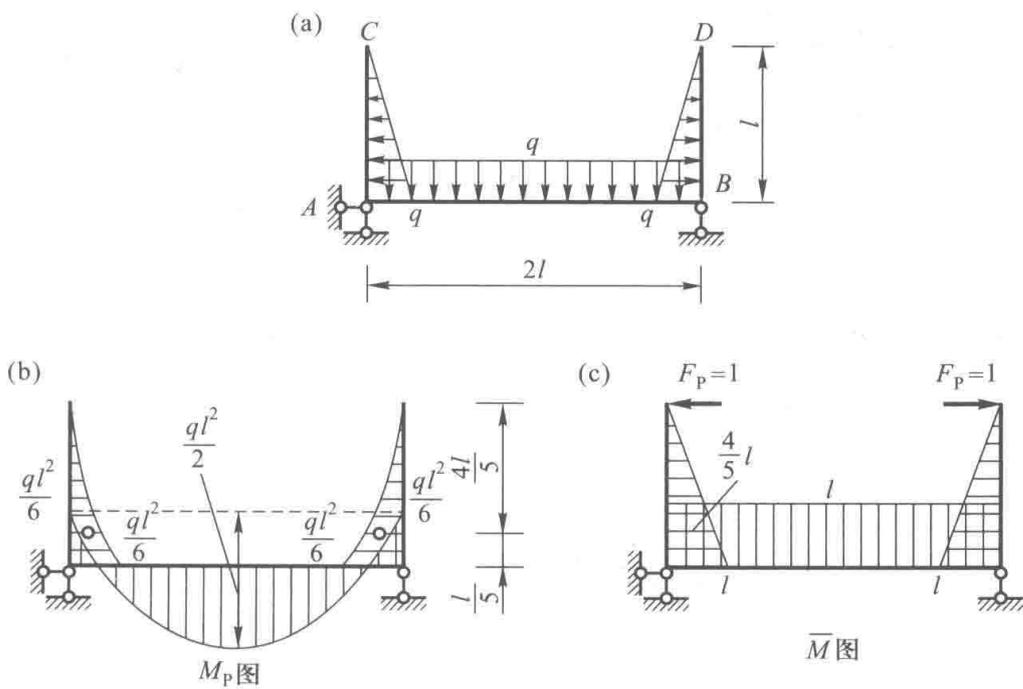


图 4-24

$$\begin{aligned}\Delta_{(C-D)H} &= \frac{2}{EI} \left(\frac{1}{4} l \times \frac{ql^2}{6} \right) \times \frac{4l}{5} + \frac{1}{EI} \left(2l \times \frac{ql^2}{6} \right) \cdot l - \frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3} \times 2l \times \frac{ql^2}{2} \right) \cdot l \\ &= \frac{1}{EI} \left(\frac{ql^4}{15} + \frac{ql^4}{3} - \frac{2ql^4}{3} \right) = -\frac{4ql^4}{15EI} \quad (\rightarrow \leftarrow)\end{aligned}$$

计算结果是负值,说明 C 、 D 两点实际的相对水平位移与虚拟力的指向相反,即 C 、 D 两点是相互靠近而不是远离。

思考题

1. 用式(4-6) $\Delta = \sum \int_l \frac{\bar{M}M_p dx}{EI}$ 计算梁和刚架的位移,需先列出 \bar{M} 和 M_p 的表达式,在同一区段内写这两个弯矩表达式时,可否将坐标原点分别取在不同的位置? 为什么?

2. 例 4-8 中求 C 端的竖向位移时,其中 BC 段的图乘(图 4-25)若分别按下面两种算式计算,哪种正确? 试述其理由。

$$(1) \frac{1}{5 \times 10^4 \text{ kN} \cdot \text{m}^2} \times \left(\frac{1}{3} \times 48 \text{ kN} \cdot \text{m} \times 1.5 \text{ m} \right) \times \left(\frac{3}{4} \times 1.5 \text{ m} \right)$$

$$(2) \frac{1}{5 \times 10^4 \text{ kN} \cdot \text{m}^2} \times \left\{ \left[\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 16 \text{ kN/m} \times (1.5 \text{ m})^2 \times 1.5 \text{ m} \right] \times \left(\frac{3}{4} \times 1.5 \text{ m} \right) + \left(\frac{1}{2} \times 20 \text{ kN} \times 1.5 \text{ m} \times 1.5 \text{ m} \right) \times \left(\frac{2}{3} \times 1.5 \text{ m} \right) \right\}$$

3. 用单位荷载法求图 4-26 所示斜简支梁中点 C 的竖向线位移和垂直于杆轴方向的线位移,应如何分别选取虚拟状态? 利用图乘法计算这两个线位移(只考虑弯曲变形的影响)应如何进行? 试将它们与相应水平简支梁中点挠度值比较,看有何不同?

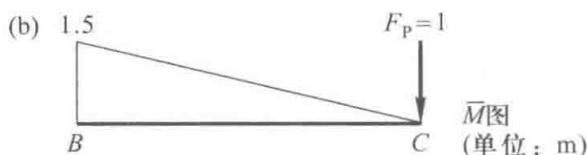
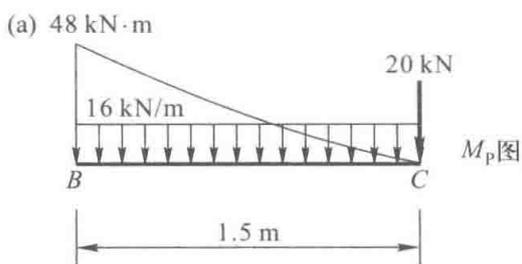


图 4-25

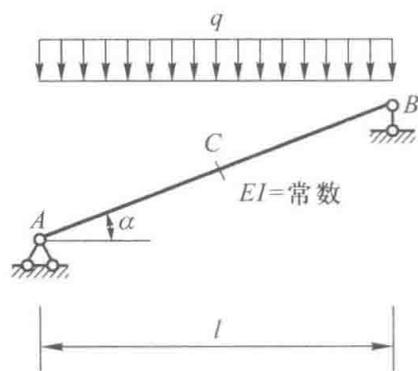
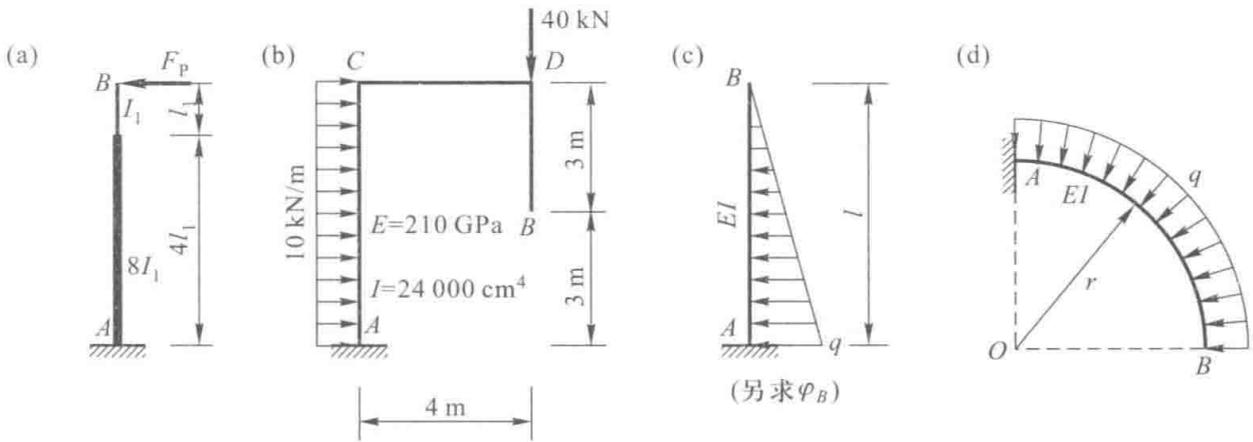


图 4-26

4. 求桁架中某一杆件的角位移时,应在该杆加一个单位力偶(图 4-9d)作为虚拟状态。构成单位力偶的每一个集中力必为 $\frac{1}{l_i}$, 分别作用于该杆的两端且必须与该杆垂直。试问为什么?

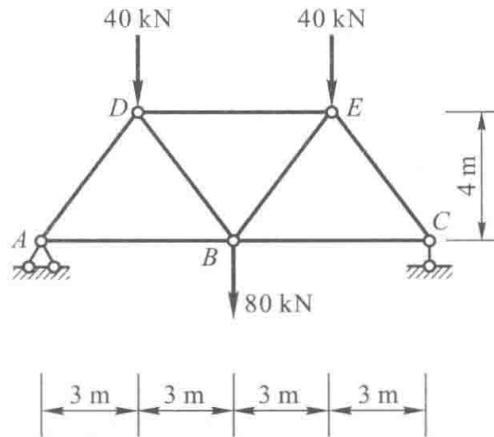
习题

4-1 试求图示结构 B 点的水平位移。



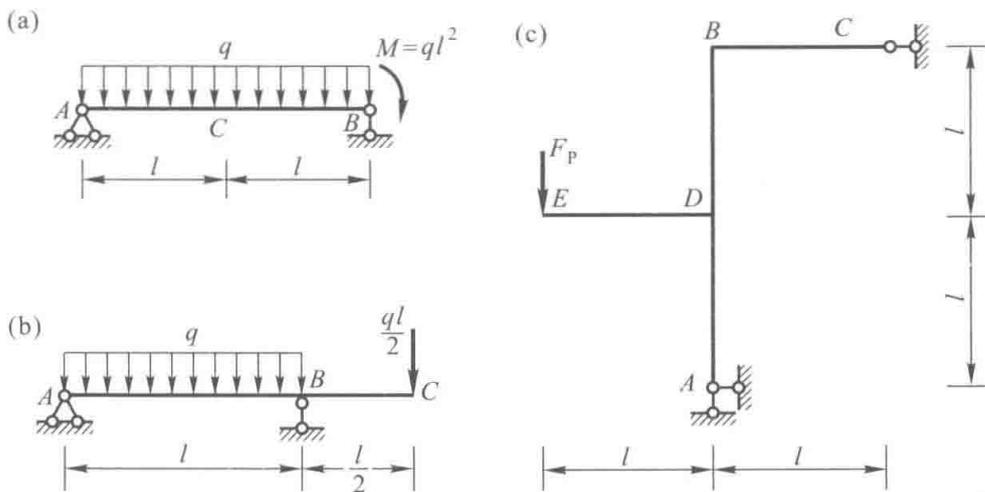
题 4-1 图

4-2 试求图示桁架结点 B 的竖向位移。已知桁架各杆的 $EA=21 \times 10^4$ kN。



题 4-2 图

4-3 试用图乘法求图示结构中 B 处的转角和 C 处的竖向位移。EI=常数。

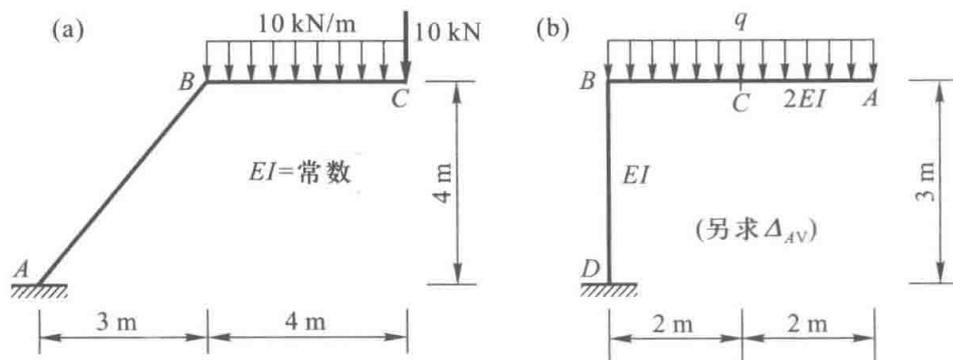


题 4-3 图

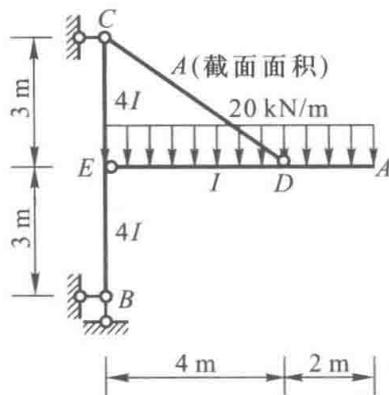
4-4 试求图示结构 C 点的竖向位移。

4-5 试求题 3-10 所示结构 E、F 两点间的相对水平线位移 $\Delta_{(E-F)H}$ 。EI=常数。

4-6 试求图示结构 A 点的竖向位移。已知 $E=210$ GPa, $A=12 \times 10^{-4}$ m², $I=36 \times 10^{-6}$ m⁴。



题 4-4 图



题 4-6 图

习题部分答案

$$4-1 \quad (a) \Delta_{BH} = \frac{11F_P l_1^3}{2EI_1} (\leftarrow); \quad (b) \Delta_{BH} = 0.833 \text{ cm} (\leftarrow); \quad (c) \Delta_{BH} = \frac{ql^4}{30EI} (\leftarrow), \varphi_B = \frac{ql^3}{24EI} (\uparrow);$$

$$(d) \Delta_{BH} = \frac{qr^4}{2EI} (\leftarrow)$$

$$4-2 \quad \Delta_{BV} = 0.768 \text{ cm} (\downarrow)$$

$$4-3 \quad (a) \varphi_B = \frac{ql^3}{3EI} (\curvearrowright), \Delta_{CV} = \frac{ql^4}{24EI} (\uparrow); \quad (b) \varphi_B = \frac{ql^3}{24EI} (\curvearrowright), \Delta_{CV} = \frac{ql^4}{24EI} (\downarrow); \quad (c) \varphi_B = \frac{F_P l^2}{12EI} (\curvearrowright),$$

$$\Delta_{CV} = \frac{F_P l^3}{12EI} (\downarrow)$$

$$4-4 \quad (a) \Delta_{CV} = \frac{18\,250 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{3EI} (\downarrow); \quad (b) \Delta_{CV} = \frac{53.67q}{EI} (\downarrow), \Delta_{AV} = \frac{112q}{EI} (\downarrow)$$

$$4-5 \quad \Delta_{(E-F)H} = \frac{34}{3EI} (\longleftrightarrow)$$

$$4-6 \quad \Delta_{AV} = 4.84 \text{ cm} (\downarrow)$$

§ 5-1 力法的基本概念

超静定结构是工程中常用的一类结构,前已述及,其约束力和内力只凭静力平衡条件是无法确定,或者是不能全部确定的。例如图 5-1a 所示的连续梁,它的水平约束力虽可由静力平衡条件求出,但其竖向约束力只凭静力平衡条件却无法确定,因此也就不能进一步求出其全部内力。又如图 5-1b 所示的加劲梁,虽然它的约束力可由静力平衡条件求得,但却不能确定杆件的内力。因此,这两个结构都是超静定结构。

分析这两个结构的几何组成,可知它们都具有多余约束。多余约束上所发生的力称为多余力。如图 5-1a 的连续梁,可认为 B 处支座链杆是多余约束,其多余力为 F_{By} (图 5-1c)。又如图 5-1b 中的加劲梁,可认为其中的杆 BD 是多余约束,其多余力为该杆的轴力 F_N (图 5-1d)。超静定结构在去掉多余约束后,就成为静定结构。

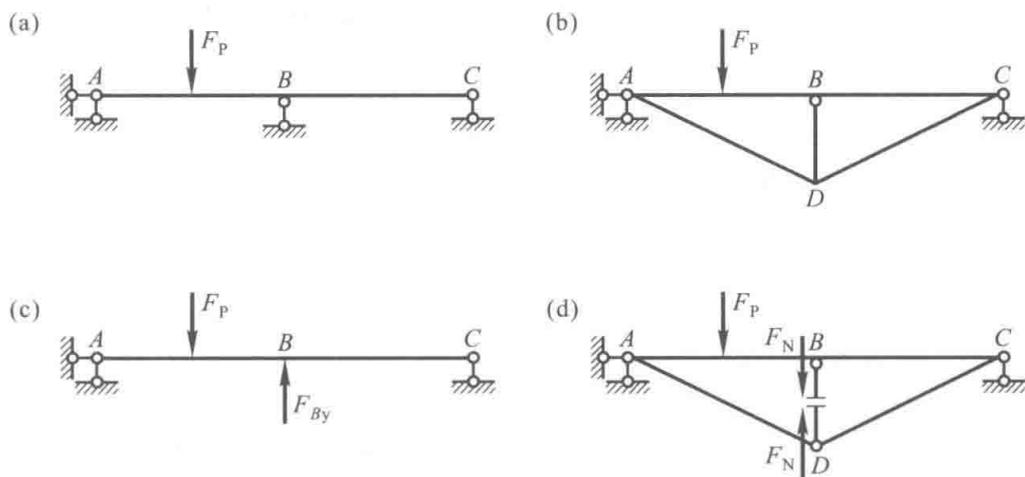


图 5-1

常见的超静定结构类型有:超静定梁(图 5-2),超静定刚架(图 5-3),超静定桁架(图 5-4),超静定拱(图 5-5),超静定组合结构(图 5-6)和铰结排架(图 5-7)等。

超静定结构最基本的计算方法有两种,即力法和位移法,此外还有各种派生出来的方法,如力矩分配法就是由位移法派生出来的。这些计算方法将在本章和下一章中分别介绍。

在掌握静定结构内力和位移计算的基础上,下面寻求分析超静定结构的方法。

设有如图 5-8a 所示一端固定另一端铰支的梁,它是具有一个多余约束的超静定结构。如果以右支座链杆作为多余约束,在去掉该约束后,得到一个静定结构,则该静定结构称为力法的

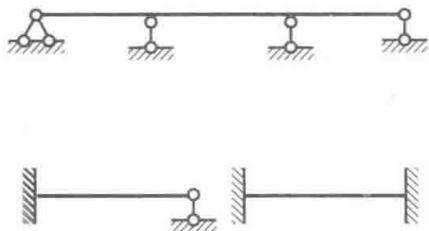


图 5-2

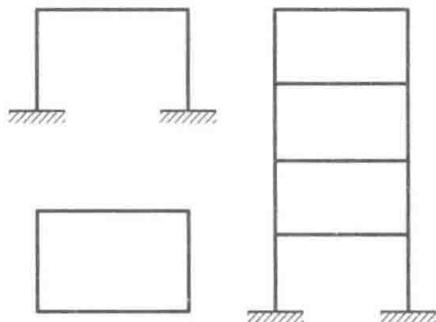


图 5-3

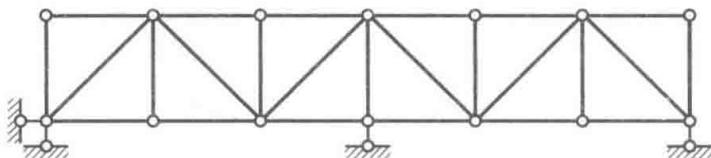
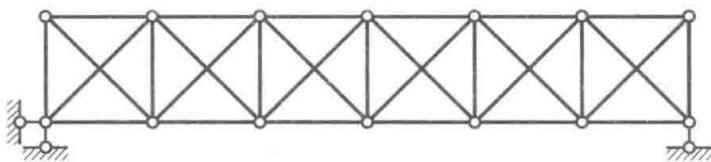


图 5-4



图 5-5

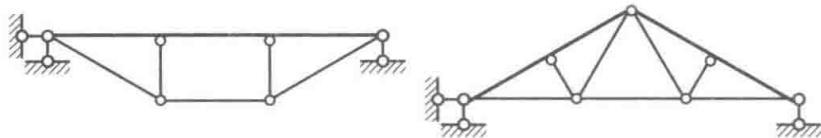


图 5-6

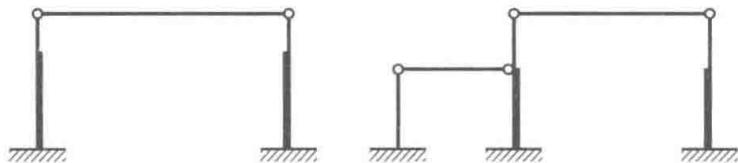


图 5-7

基本结构。在基本结构上,若以多余力 X_1 代替所去约束的作用,并将原有荷载 q 作用上去,则得到如图 5-8b 所示的同时受荷载 q 和多余力 X_1 作用的体系,该体系称为力法的基本体系。在基本体系上的原有荷载 q 是已知的,而多余力 X_1 是未知的。因此,只要能设法先求出多余力 X_1 ,则原结构的计算问题即可在静定的基本结构上来解决。显然,如果单从平衡条件来考虑,则 X_1 可取任何数值,基本体系都可以维持平衡,但相应的约束力、内力和位移就会各有不同,因而 B 点就可能发生大小和方向各不相同的竖向位移。为了确定 X_1 ,就必须考虑位移条件。注意到原结

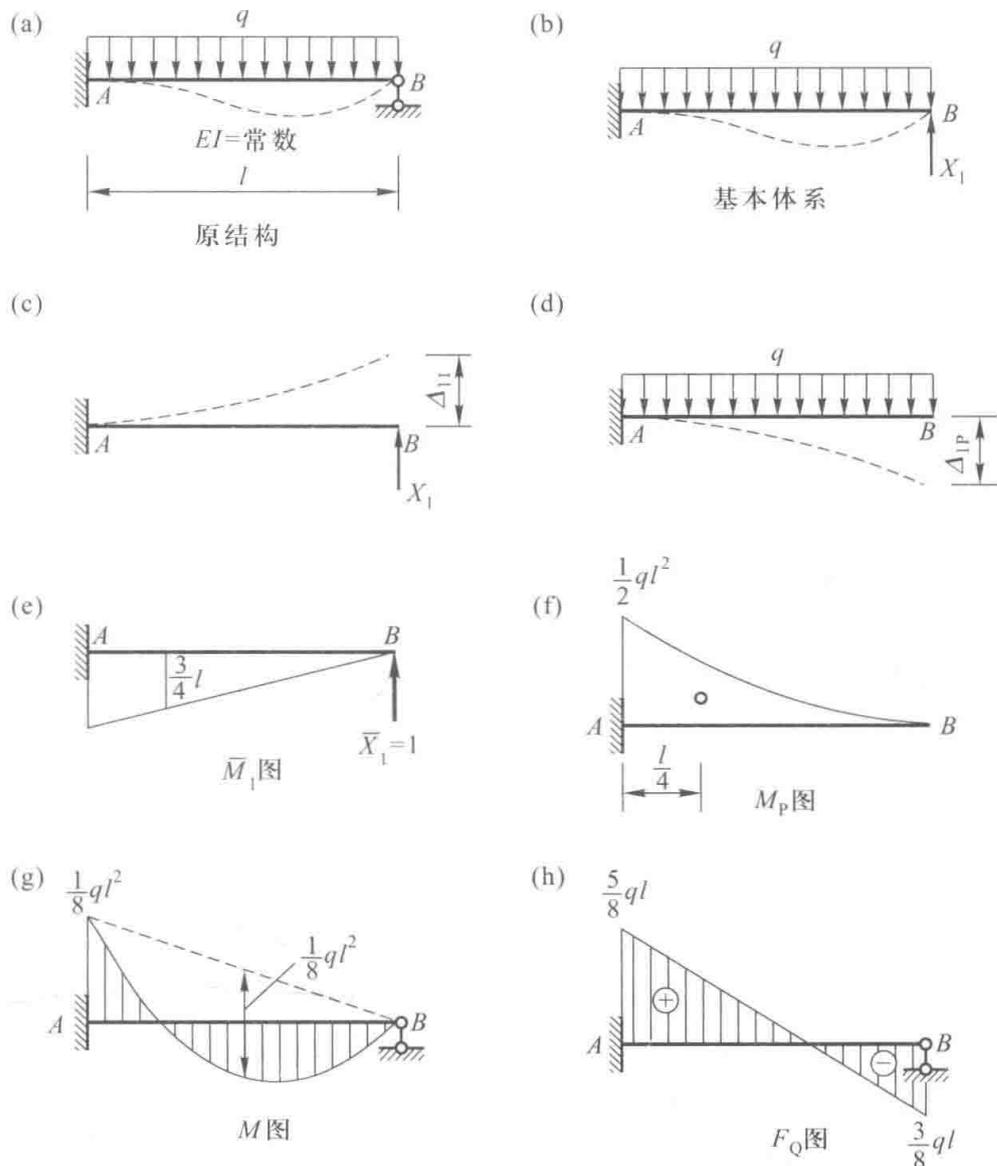


图 5-8

构支座 \$B\$ 处受竖向链杆约束,其竖向位移应为零。因此,只有当 \$X_1\$ 的数值恰与原结构 \$B\$ 支座链杆的实际约束力相等时,才能使基本结构在 \$q\$ 和 \$X_1\$ 共同作用下 \$B\$ 点的竖向位移(即沿 \$X_1\$ 方向的位移) \$\Delta_1\$ 等于零。所以,用来确定 \$X_1\$ 的位移条件是:在原有荷载和多余力共同作用下,基本体系上去掉多余约束处的位移应与原结构中相应的位移相等。由上述可见,为了唯一确定超静定结构的约束力和内力,就必须同时考虑静力平衡条件和位移条件。

若令 \$\Delta_{11}\$ 及 \$\Delta_{1P}\$ 分别表示基本结构在多余力 \$X_1\$ 及荷载 \$q\$ 单独作用时, \$B\$ 点沿 \$X_1\$ 方向的位移(图 5-8c、d),其符号都以沿 \$X_1\$ 方向为正。根据叠加原理及 \$\Delta_1 = 0\$, 有

$$\Delta_{11} + \Delta_{1P} = 0$$

再令 \$\delta_{11}\$ 表示 \$X_1\$ 为单位力 \$\bar{X}_1 = 1\$ 时, \$B\$ 点沿 \$X_1\$ 方向产生的位移,则 \$\Delta_{11} = \delta_{11} X_1\$, 于是上式可写成

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0 \quad (5-1)$$

由于 \$\delta_{11}\$ 和 \$\Delta_{1P}\$ 都是静定的基本结构在已知外力作用下的位移,均可按第 4 章所述方法求得,于是多余力即可由式(5-1)确定。若采用图乘法计算 \$\delta_{11}\$ 及 \$\Delta_{1P}\$,先分别绘出 \$\bar{X}_1 = 1\$ 和荷载 \$q\$ 单独作用

在基本结构上的弯矩图 \bar{M}_1 (图 5-8e) 和 M_p (图 5-8f), 然后求得

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \times \frac{l^2}{2} \times \frac{2l}{3} = \frac{l^3}{3EI}$$

$$\Delta_{1P} = -\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{3} \times l \times \frac{ql^2}{2} \right) \times \frac{3}{4} l = -\frac{ql^4}{8EI}$$

则由式(5-1), 有

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{ql^4}{8EI} \times \frac{3EI}{l^3} = \frac{3}{8} ql$$

多余力 X_1 求得后, 就与计算悬臂梁一样, 完全可用静力平衡条件来确定其约束力和内力。

例如, A 端的弯矩(以下侧受拉为正)为

$$M_{AB} = X_1 l - ql \times \frac{l}{2} = \frac{3}{8} ql^2 - \frac{1}{2} ql^2 = -\frac{1}{8} ql^2$$

最后弯矩图和剪力图如图 5-8g、h 所示。

以上所述计算超静定结构的方法称为力法。它的基本特点就是以多余力作为基本未知量, 并根据基本体系上相应的位移条件将多余力首先求出, 以后计算即与静定结构无异。力法用来分析各种类型的超静定结构。

§ 5-2 力法的典型方程

由上节所述基本概念不难理解, 在用力法计算超静定结构时, 首先应确定多余约束的数目, 亦即多余力的数目。这个数目表示: 除静力平衡方程之外, 尚需补充多少个反映位移条件的方程才能求解全部多余力, 进而确定该结构的内力。通常将多余约束或多余力的数目称为结构的超静定次数。

确定超静定次数的方法是, 去掉结构的多余约束, 使原结构成为一个静定的基本结构, 则所去掉约束的总数即为结构的超静定次数。下面以具体实例加以说明。

图 5-9a 所示结构, 如果将链杆 CD 切断(图 5-9b), 则原结构就成为静定结构, 因为一根链杆相当于一个约束, 所以这个结构是具有一个多余约束的一次超静定结构。

去掉多余约束使超静定结构成为静定结构, 可以有多种不同的方式。例如图 5-10a 所示单跨梁, 可以把 B 支座链杆去掉使结构成为静定的悬臂梁(5-10b), 也可以在原结构的固定支座 A 处, 将阻止转动的约束去掉, 使之成为固定铰支座, 得到如图 5-10c 所示的简支梁, 这时与所去约束相对应的多余力则是固定端截面的弯矩。对于同一个超静定结构, 由于去掉多余约束的方式不同, 因而得到的基本结构也不同, 但是所去多余约束的数目, 应该是一样的。图 5-10a 所示结构, 虽然有图 5-10b 和图 5-10c 两种不同的基本结构, 但都只有一个多余约束, 是一次超静定结构。

图 5-11a 所示刚架, 可将 A、B 两固定支座改成固定铰支座, 得到图 5-11b 所示的三铰刚架, 所以是两次超静定的。也可去掉中间铰 C, 而得图 5-11c 所示的静定结构。所以去掉一个联结两刚片的单铰, 相当于去掉两个约束, 即阻止铰结处两侧截面发生相对水平位移和相对竖向位移的约束。

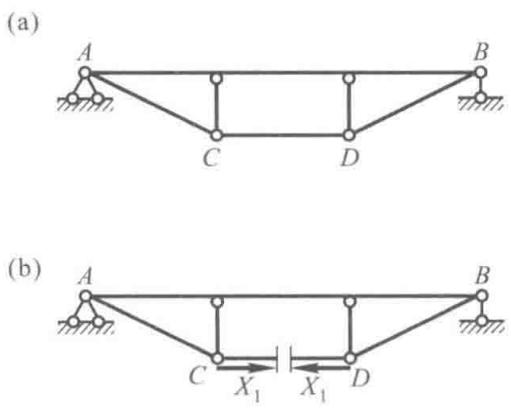


图 5-9

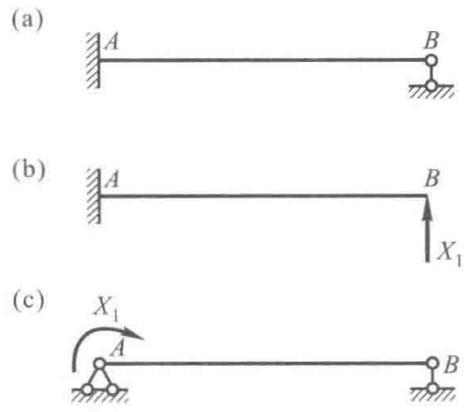


图 5-10

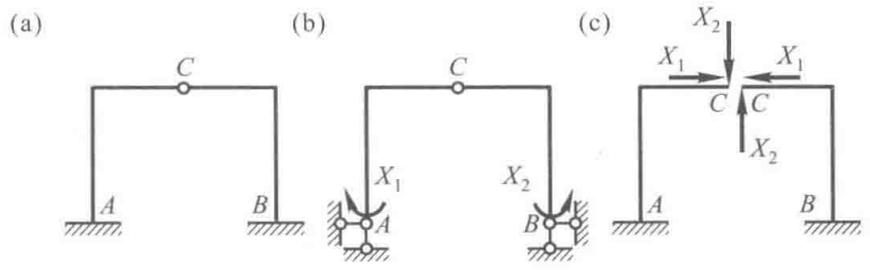


图 5-11

图 5-12a 所示刚架,若将 B 端固定支座撤去,则得图 5-12b 所示悬臂刚架,所以是三次超静定的。如果将原结构从横梁中间切断,则得图 5-12c 所示两个悬臂刚架,所以将一梁式杆切断,就相当于去掉 3 个约束,即阻止切口两侧截面发生相对水平位移、相对竖向位移和相对转角的约束。当然还可将原结构横梁的中点及两支座处改成铰结,得到如图 5-12d 所示三铰刚架。所以凡将受弯杆件某处改成铰结,也相当于去掉一个约束,即阻止该处两侧截面发生相对转角的约束。

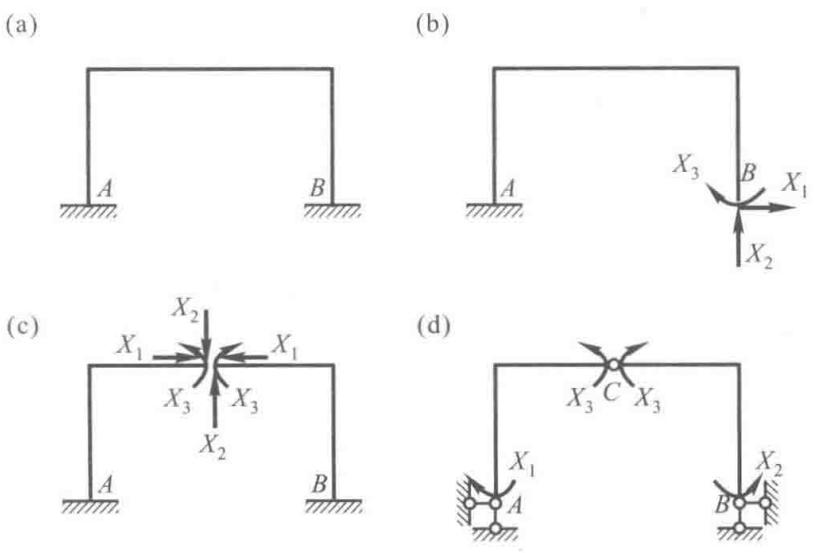


图 5-12

由上可知,从结构去掉多余约束的方式,通常有如下几种:

- (1) 切断一根链杆,或者撤去一个链杆支座,相当于去掉 1 个约束。

- (2) 将一固定支座改成固定铰支座,或者将受弯杆件某处改成铰结,相当于去掉 1 个约束。
 (3) 去掉一个联结两刚片的铰,或者撤去一个固定铰支座,相当于去掉 2 个约束。
 (4) 将一梁式杆切断,或者撤去一个固定支座,相当于去掉 3 个约束。

应用上述去掉约束的基本方式,可以确定任何结构的超静定次数。例如图 5-13a 所示结构,将它从中间切开,就成为图 5-13b 所示的静定结构,由于切断了原结构的两根梁式杆,所以相当于去掉 6 个约束,故结构是六次超静定的。值得指出,在图 5-13a 所示的刚架中,对于由 CD 、 DF 、 FE 、 EC 四根杆件刚性联结起来的封闭框格,必须将它从某一截面处切开,才能确定这一部分结构的内力。不能认为将图 5-13a 所示结构撤去一个固定支座以后就成为静定的基本结构,因为这时去掉的约束只有 3 个,而 $CDFE$ 部分的内力仍无法由静力平衡条件确定。

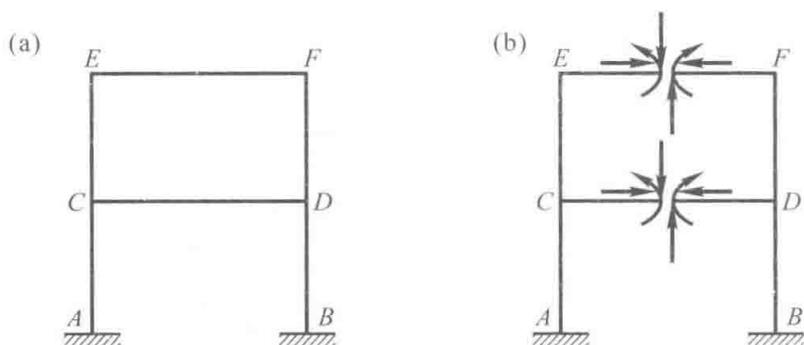


图 5-13

由于去掉多余约束的方式不同,同一结构的基本结构就会有不同的形式,但应注意,得到的基本结构必须是几何不变的。为了保证其几何不变性,有时某些约束是不能去掉的。这样的约束,可以称之为必要约束。例如,图 5-14 所示的连续梁,其水平支座链杆就不能去掉,否则将成为几何可变体系。又如图 5-15 所示两铰拱,其任一竖向支座链杆也绝对不能去掉,否则将成为瞬变体系。

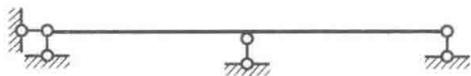


图 5-14

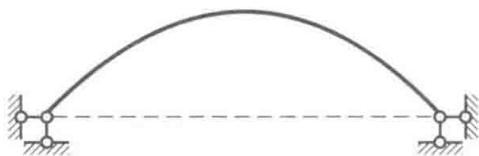


图 5-15

用力法解算超静定结构的关键,在于根据位移条件建立力法方程以求解多余力。下面拟通过一个三次超静定刚架说明如何建立力法方程。

图 5-16a 所示刚架为三次超静定结构,分析时必须去掉它的三个多余约束。设去掉固定支座 B ,并以相应的多余力 X_1 、 X_2 和 X_3 代替所去约束的作用,得到图 5-16b 所示的基本体系。在原结构中,由于 B 端为固定端,所以没有任何位移。因此,承受荷载 F_{p1} 、 F_{p2} 和三个多余力 X_1 、 X_2 、 X_3 作用的基本结构上,也必须保证同样的位移条件,即 B 点沿 X_1 方向的位移(水平位移) Δ_1 、沿 X_2 方向的位移(竖向位移) Δ_2 和沿 X_3 方向的位移(角位移) Δ_3 都应等于零,即

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 0, \quad \Delta_3 = 0$$

令 δ_{11} 、 δ_{21} 和 δ_{31} 分别表示当 $\bar{X}_1 = 1$ 单独作用时,基本结构上 B 点沿 X_1 、 X_2 和 X_3 方向的位移

(图 5-16c); δ_{12} 、 δ_{22} 、 δ_{32} 分别表示当 $\bar{X}_2=1$ 单独作用时, 基本结构上 B 点沿 X_1 、 X_2 和 X_3 方向的位移(图 5-16d); δ_{13} 、 δ_{23} 和 δ_{33} 分别表示当 $\bar{X}_3=1$ 单独作用时, 基本结构上 B 点沿 X_1 、 X_2 和 X_3 方向的位移(图 5-16e); Δ_{1P} 、 Δ_{2P} 和 Δ_{3P} 分别表示当荷载(F_{P1} 和 F_{P2})单独作用时, 基本结构上 B 点沿 X_1 、 X_2 和 X_3 方向的位移(图 5-16f)。根据叠加原理, 位移条件可写成:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= 0 & \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \Delta_2 &= 0 & \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} &= 0 \\ \Delta_3 &= 0 & \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

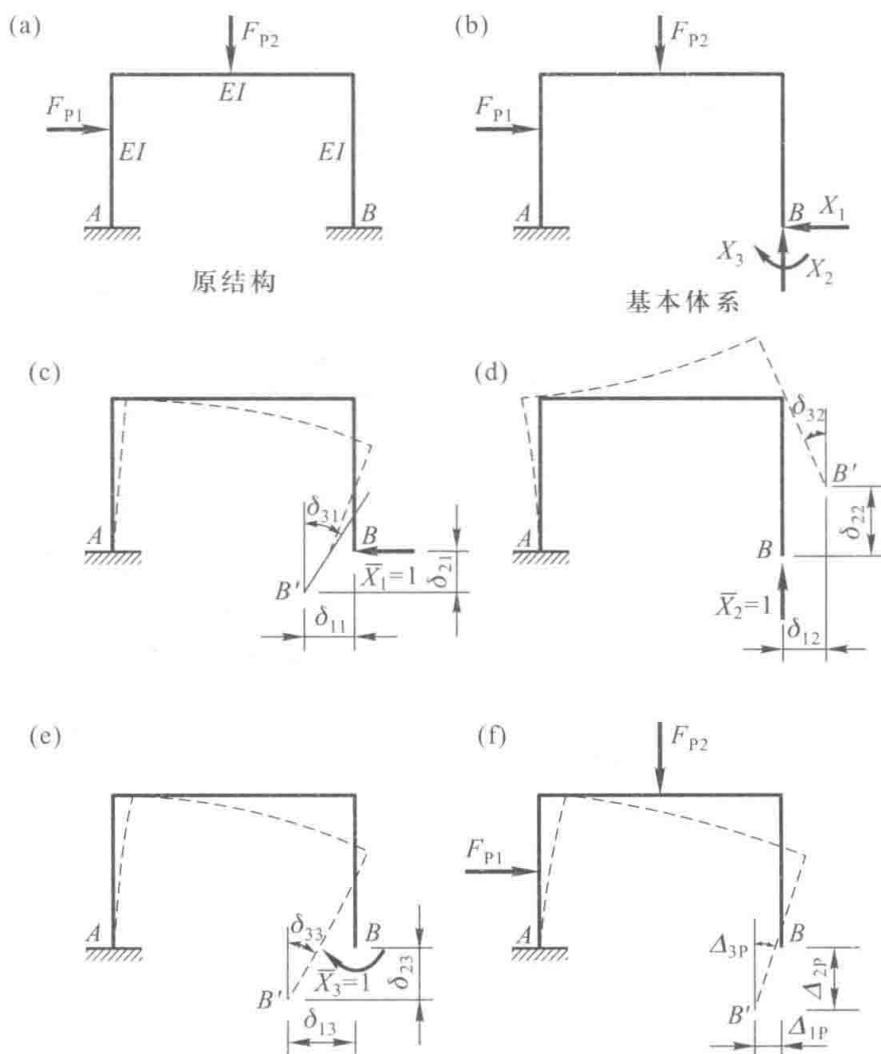


图 5-16

这就是根据位移条件建立的求解多余力 X_1 、 X_2 和 X_3 的方程组, 其物理意义为: 在基本体系中, 由于全部多余力和已知荷载的作用, 在去掉多余约束处(即 B 点)的位移应与原结构中相应的位移相等。在上列方程中, 主斜线(从左上方的 δ_{11} 至右下方的 δ_{33})上的系数 δ_{ii} 称为主系数, 其余的系数 δ_{ik} 称为副系数, Δ_{iP} 则称为自由项。所有系数和自由项, 都是基本结构中去掉多余约束处沿某一多余力方向的位移, 因而可根据求位移的方法得到, 并规定与所设多余力方向一致时为正。所以, 主系数总是正的, 且不会等于零, 而副系数则可能为正、为负或为零。副系数有互等关系, 即

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

上述互等关系以及 $\delta_{ii} > 0$ 将在下节给予说明。系数和自由项求得后, 即可解算以上方程组以

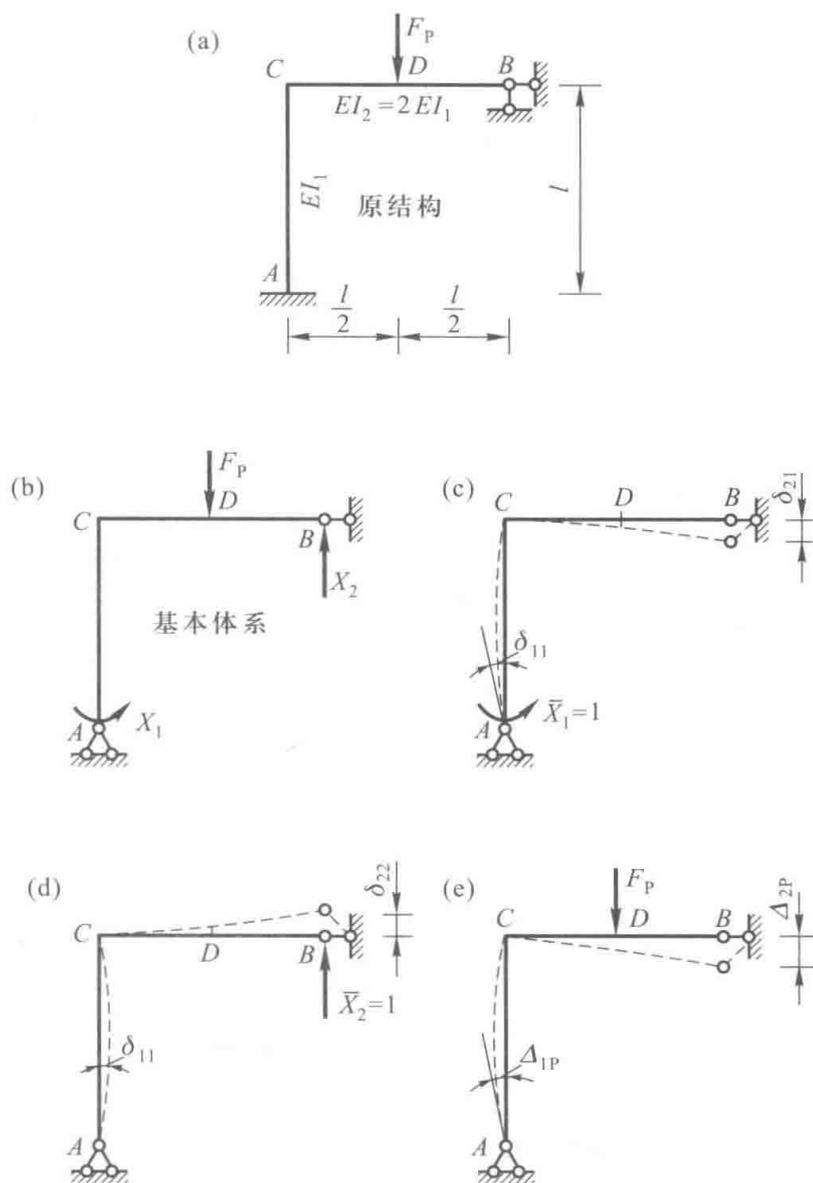


图 5-17

$$-\frac{1}{6}X_1 + \frac{l}{2}X_2 - \frac{7F_P l}{32} = 0$$

联立解得

$$X_1 = -\frac{3}{80}F_P l, \quad X_2 = \frac{17}{40}F_P$$

多余力求得后,最后弯矩图可按叠加原理由下式计算

$$M = X_1 \bar{M}_1 + X_2 \bar{M}_2 + M_P$$

例如,杆 AC C 端的弯矩为(设使 C 端外侧受拉的弯矩为正)

$$M_{CA} = \left(-\frac{3}{80}F_P l\right) \times 0 + \left(\frac{17}{40}F_P\right) (-l) + \frac{F_P l}{2} = \frac{3}{40}F_P l$$

根据基本结构上荷载和各多余力作用的情况,应将刚架的弯矩图分为三段,分别计算出各段控制截面的弯矩值后,即可作出最后弯矩图如图 5-18d 所示。至于剪力图和轴力图,在多余力求得后,不难按绘制静定结构内力图的方法作出,分别示于图 5-18e、f 中。

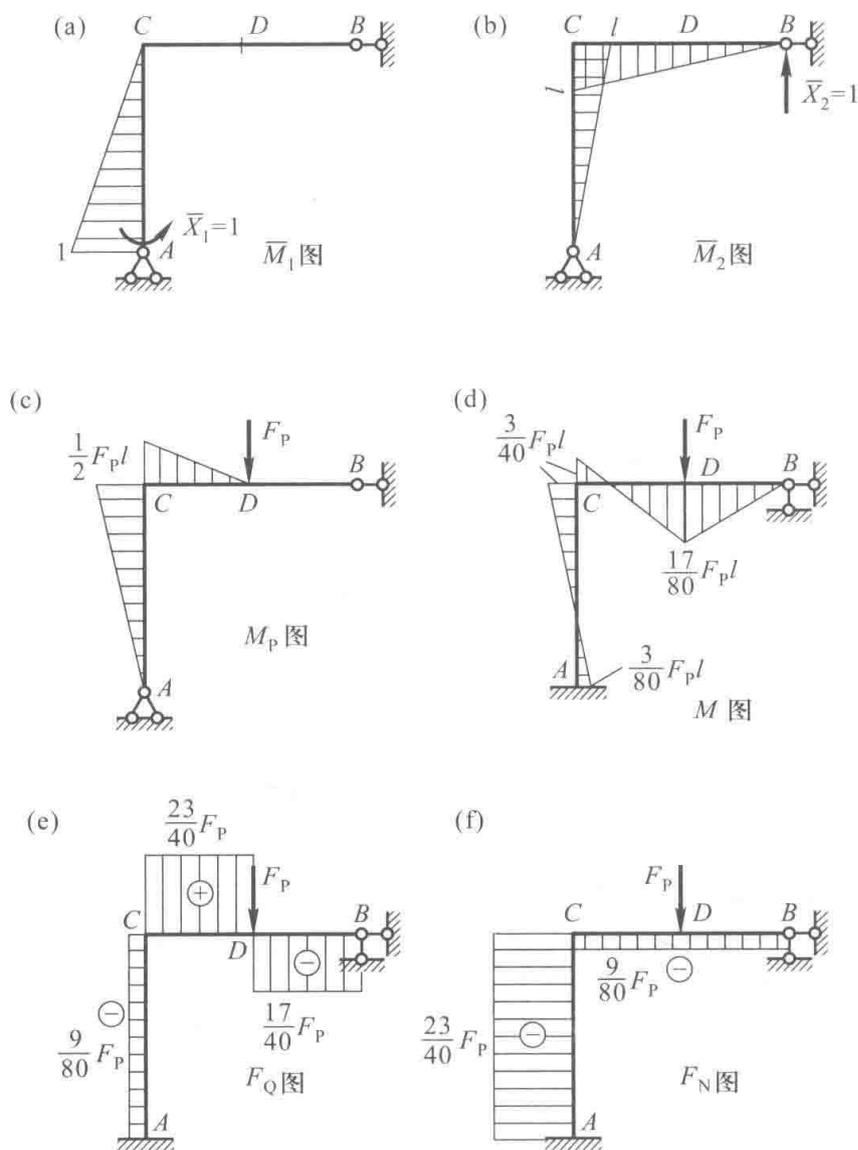


图 5-18

由此例子可以看出,在荷载作用下,如果结构各杆的弹性模量 E 相同(即采用同一种材料),则结构的内力只与各杆惯性矩的比值有关。当各杆所用材料不同时,结构的内力就与各杆的抗弯刚度 EI 的比值有关。这是超静定结构的一个重要特性。由于这一特性,在计算荷载作用下的结构内力时,为了简便起见,各杆件的刚度可采用其比值。

将力法计算超静定结构的步骤归纳如下:

- (1) 确定基本未知量数目。
- (2) 去掉结构的多余约束得到静定的基本结构,并以多余力代替相应多余约束的作用。
- (3) 根据基本结构在多余力和原有荷载共同作用下,多余力作用点沿其方向的位移应与原结构中相应多余约束处的位移相同的条件,建立力法典型方程。为求解此方程,需要
 - ① 作出基本结构的单位内力图和荷载内力图(或列出内力表达式)。
 - ② 按照求位移的方法计算系数和自由项。
- (4) 解典型方程,求出各多余力。
- (5) 多余力确定后,即可按分析静定结构的方法绘出原结构的内力图,也称最后内力图。
- (6) 校核。

对最后内力图进行校核可分两步。第一步是静力平衡校核,就是取结点或结构的某一部分为隔离体,检查它们是否平衡。但这种校核不能发现建立和解算典型方程时的问题。因为正确的单位弯矩图和荷载弯矩图是满足平衡条件的,将 \bar{M}_1 图与多余力相乘后与 M_p 图叠加,不论多余力正确与否,其结果仍然会满足平衡条件。

第二步是位移条件的校核。为此,首先讨论超静定结构的位移计算问题。由于图 5-17a 所示超静定结构的位移与图 5-17b 所示基本体系的位移相等,因此可将超静定结构的位移计算在其基本体系上进行。例如欲计算原结构(图 5-17a)梁 CB 中点的竖向位移,便可转换为求图 5-17b 所示基本体系梁 CB 中点 D 的位移。根据计算位移的单位荷载法,只要将虚拟力作用于基本结构即得计算位移的虚拟状态(图 5-19)。由于基本结构是静定的,虚拟状态中的弯矩图可根据平衡条件绘出,而图 5-17b 所示基本体系的弯矩图就是已示于图 5-18d 中原结构的弯矩图,因此只要将图 5-19 和图 5-18d 所示两弯矩图进行图乘,便得所求位移。即

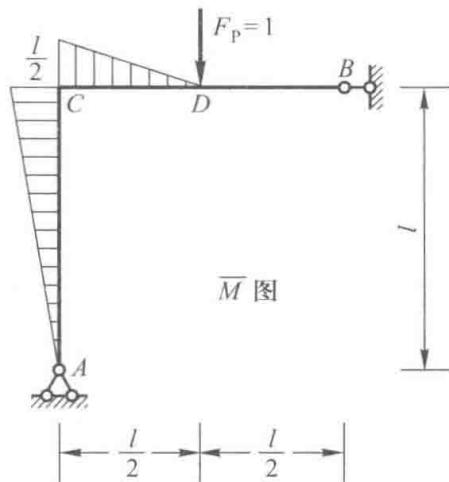


图 5-19

$$\begin{aligned} \Delta_{Dv} &= \frac{1}{2EI_1} \times \frac{1}{2} \times \frac{l}{2} \times \frac{l}{2} \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{40} F_p l - \frac{1}{3} \times \frac{17}{80} F_p l \right) + \\ &\quad \frac{1}{EI_1} \times \frac{1}{2} \times \frac{l}{2} \times l \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{40} F_p l - \frac{1}{3} \times \frac{3}{80} F_p l \right) \\ &= \frac{31 F_p l^3}{3840 EI_1} = 0.00807 \frac{F_p l^3}{EI_1} (\downarrow) \end{aligned}$$

上述方法的优点在于虚拟状态是静定的,所以计算比较简便。超静定结构用力法计算绘出最后内力图后,也可用这种方法计算超静定结构的任一已知位移,以进行位移条件的校核。例如图 5-17a 所示刚架的支座 A 是固定支座,其角位移应等于零,利用这一条件即可校核所求得的最内力图。图 5-17a 所示刚架支座 A 的角位移等于图 5-17b 所示基本体系中截面 A 的角位移,而计算该位移时,只要将虚拟力 $M=1$ 作用于基本结构的截面 A ,便得到如图 5-18a 所示的虚拟状态,再对图 5-18a 与图 5-18d 进行图乘,如果图 5-18d 所示最后弯矩图正确,则必有 $\varphi_A=0$,现算得

$$\varphi_A = \frac{1}{EI_1} \times \frac{1}{2} l \times 1 \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{3}{40} F_p l - \frac{2}{3} \times \frac{3}{80} F_p l \right) = 0$$

由此可知该位移条件得到满足,这也就是建立力法方程的第一个位移条件。除此以外,还需校核 B 点的竖向位移是否为零,若这第二个位移条件也能满足,则证明最后弯矩图(图 5-18d)无误。

§ 5-4 对称性的利用

工程中常有一类结构称为对称结构,它们不仅杆件轴线所构成的几何图形对称,而且杆件的刚度及支承情况也对称。例如图 5-20a、b 所示的刚架就是两个对称结构,平分对称结构的中线称为对称轴。现根据对称结构的特点研究它们的简化计算方法。

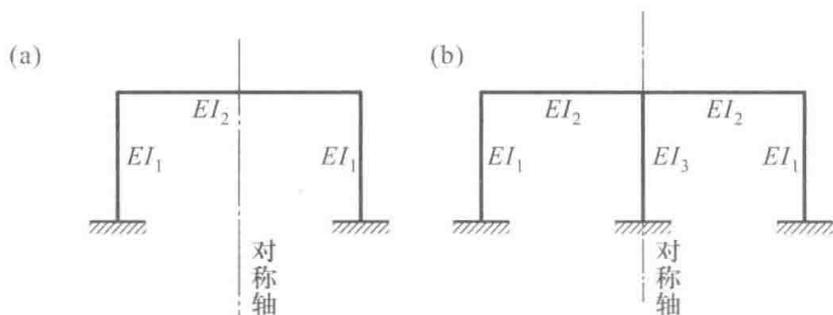


图 5-20

作用在对称结构上的荷载,有两种特殊的情况。例如图 5-21 所示对称刚架,若将左半部分绕对称轴转 180° ,则与右半部分结构重合。如果左右两部分上所受荷载的作用线重合,且其大小和方向都相同(图 5-21a、b),则这种荷载称为正对称荷载;如果左右两部分上所受荷载的作用线互相重合且其大小相同,但方向恰好相反(图 5-21c、d),则这种荷载称为反对称荷载。

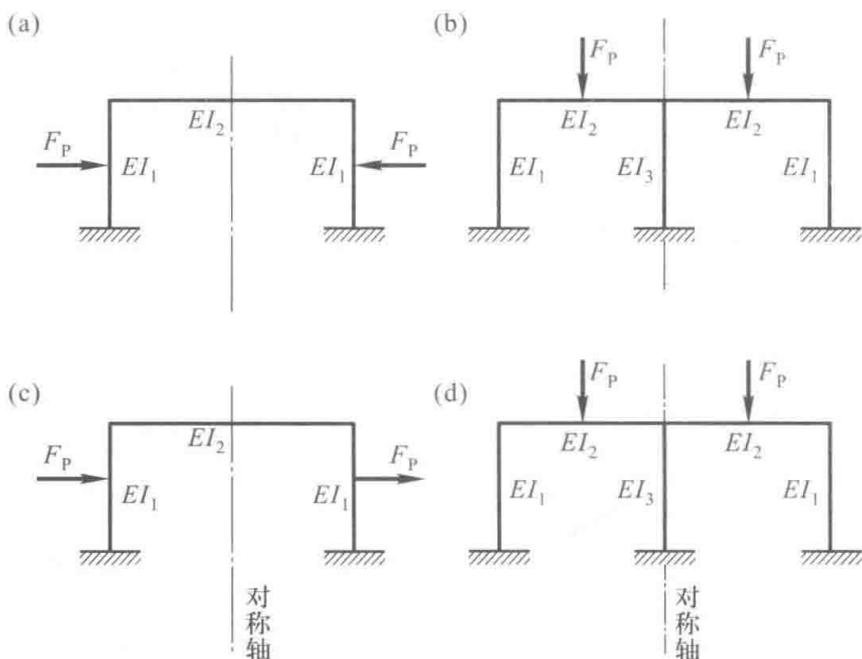


图 5-21

下面讨论图 5-22a 所示对称结构受正对称荷载作用时的受力和变形特点,并由此得出简化计算方法。将刚架从 CD 的中点截面 K 处切开,并代以相应的多余力 X_1 、 X_2 、 X_3 ,得到如图 5-22b 所示的基本体系。因为原结构中杆 CD 是连续的,所以 K 左右两侧截面没有左右和上下的相对移动,也没有相对转动。按此位移条件,可写出力法典型方程为

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \Delta_{2P} &= 0 \\ \delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \Delta_{3P} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

方程的系数和自由项都代表基本结构 K 处两侧截面的相对位移,例如在 $\bar{X}_1 = 1$ 单独作用下,基本结构的变形如图 5-23 虚线所示, δ_{11} 为两侧截面的相对水平位移, δ_{31} 为两侧截面的相对转角, δ_{21} (两侧截面的相对竖向位移)为零,图中没有画出。

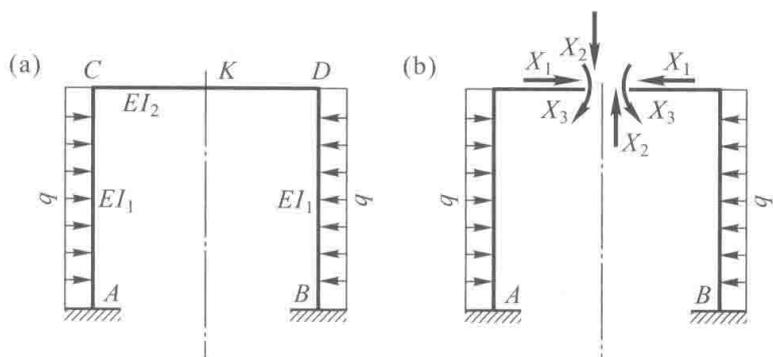


图 5-22

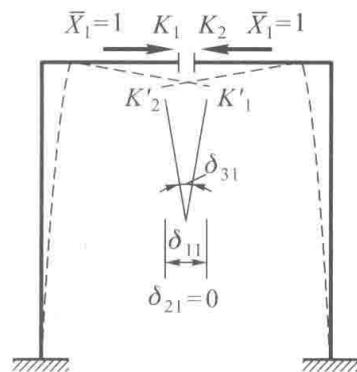


图 5-23

为了计算系数和自由项,分别绘出单位弯矩图和荷载弯矩图,如图 5-24 所示。因为 \bar{X}_1 和 \bar{X}_3 是正对称的力, \bar{M}_1 和 \bar{M}_3 图是正对称图形,而 \bar{X}_2 是反对称的力, \bar{M}_2 图是反对称图形,且杆件的刚度对称,所以图乘计算系数时,其结果必然是

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 0$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = 0$$

由于 M_p 图是正对称图形,故 $\Delta_{2p} = 0$ 。这样,典型方程简化为

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} &= 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} &= 0 \\ \delta_{22}X_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

由方程组的第三式,可得 $X_2 = 0$,由第一、二两式可解出 X_1 和 X_3 。

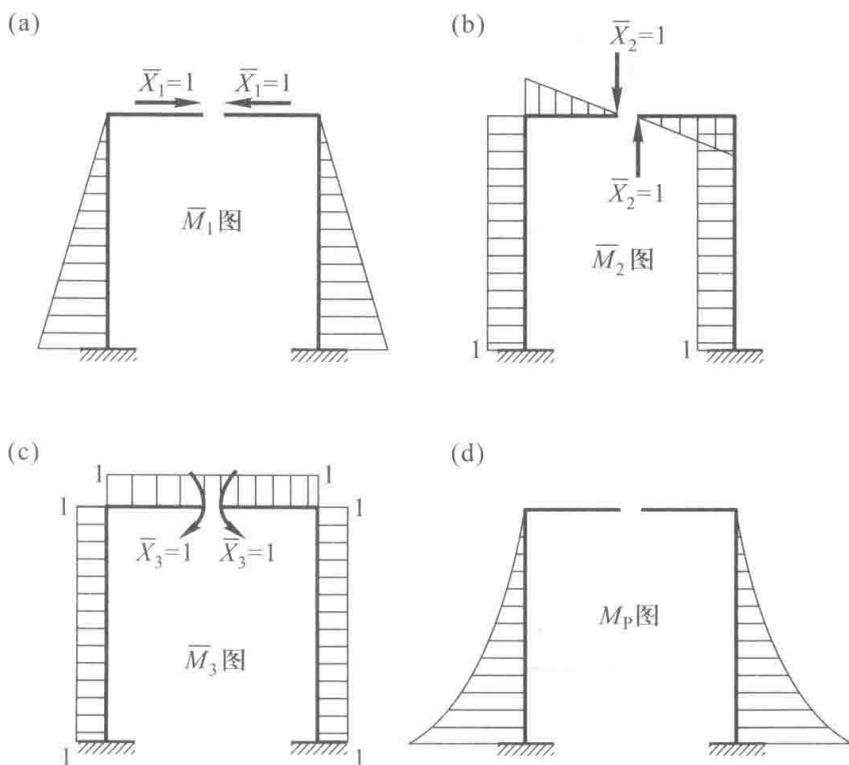


图 5-24

根据上述分析可知,如果从对称超静定结构的对称轴处去掉多余约束,选取对称的基本结构,则可使某些副系数为零,从而令力法的计算得到简化。如果荷载是正对称的,则对称基本体系上的反对称多余力为零,作用在对称基本结构上的荷载和多余力都是正对称的,故结构的受力和变形状态也是正对称的,不会产生反对称的内力和位移。如果荷载是反对称的,则基本结构上的 M_p 图也是反对称的,将它与正对称的 \bar{M}_1 、 \bar{M}_3 (图 5-24a、c) 图乘时,求得的自由项 Δ_{1p} 、 Δ_{3p} 必等于零,但此时 \bar{M}_2 、 M_p 图图乘所得的 $\Delta_{2p} \neq 0$,方程简化为

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 &= 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{33}X_3 &= 0 \\ \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

解方程求得正对称的多余力为零,基本结构只受反对称荷载和多余力的作用,结构中的内力将呈反对称分布,变形也必然是反对称的。据此,可得如下结论:对称结构在正对称荷载作用下,其内力和变形都是正对称的;而反对称荷载作用下,其内力和变形都是反对称的。

利用这一结论,可使对称结构的计算得到很大简化。如在分析对称刚架时,可取半个刚架来进行计算。下面就正、反对称荷载作用下的奇数跨和偶数跨刚架加以说明。

图 5-25a 所示对称刚架,在正对称荷载作用下,其变形和内力呈正对称分布。位于对称轴上的截面 C 不能发生转动和水平移动,只会发生竖向移动;该截面的内力只有弯矩和轴力,不存在剪力。这种情况如同截面 C 受到可以用一个定向支座形象表示的约束,若把右半部分刚架弃去,则得到图 5-25c 所示的半刚架。定向支座约束了截面 C 的转动和水平移动,而允许产生竖向移动;它能产生约束力矩和水平约束力,但无竖向约束力,它使截面 C 受到的约束与原来的情况完全相同。因此,图 5-25c 所示刚架与图 5-25a 中左半刚架受力和变形的情况完全相同。

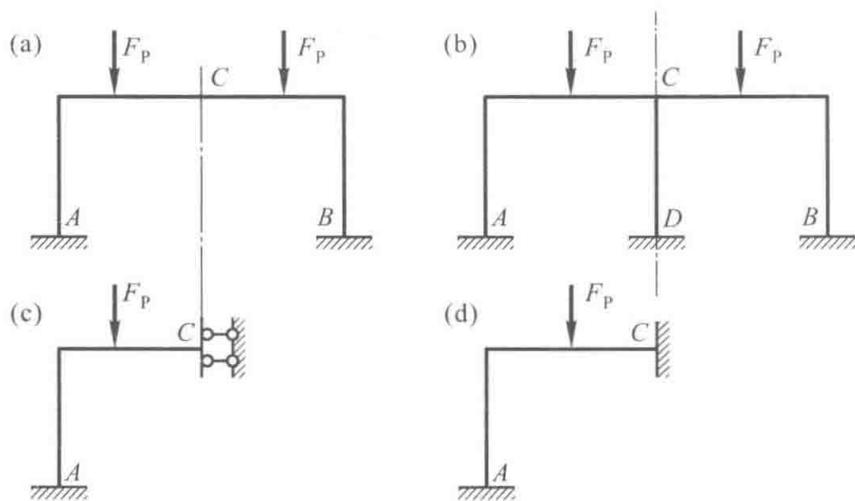


图 5-25

图 5-25b 所示对称刚架,在正对称荷载作用下,只可能发生正对称的内力和变形,因此柱 CD 只有轴向变形,而不可能有弯曲和剪切变形。由于刚架分析中一般不考虑杆件轴向变形的影响,对称轴上的 C 截面如同固定支座一样不可能发生任何位移,故可得到图 5-25d 所示半刚架。而柱 CD 的轴力即等于图 5-25d 中支座 C 竖向约束力的 2 倍。

图 5-26a 所示对称刚架在反对称荷载作用下,位于对称轴的 C 截面由前述可知只有剪力,

不存在弯矩和轴力。同时,由于刚架对称轴上只存在反对称位移,所以 C 截面可以左右移动和转动,但不会产生竖向位移。因此,截取半刚架时可在该处用一根竖向链杆代替原有的约束作用(图 5-26b)。

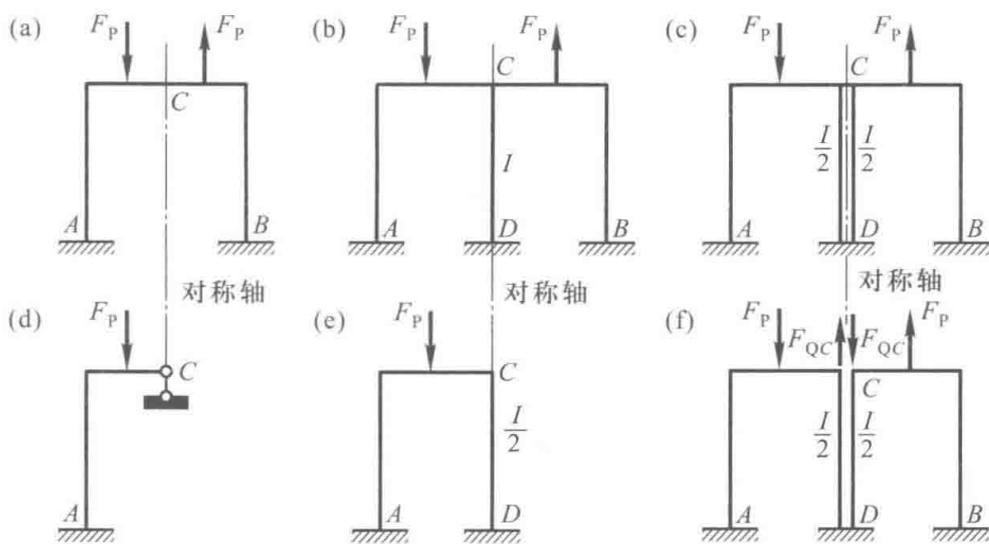


图 5-26

图 5-26c 所示对称刚架,在反对称荷载作用下,内力和变形都是反对称的。为取出半刚架,设想将处于对称轴位置的竖柱用两根惯性矩各为 $\frac{I}{2}$ 的柱代替(图 5-26e),再将梁沿对称轴切开。由于荷载是反对称的,截面上只有剪力 F_{QC} (图 5-26f),剪力仅分别在左右柱中产生拉力和压力,而求原柱的内力时,应将两柱的内力叠加,故剪力 F_{QC} 对原结构的内力和变形无影响。于是,可将其略去而取出如图 5-26d 所示的半刚架。

计算出半刚架的内力后,另一半刚架的内力利用对称性即不难确定。若对称刚架受任意荷载(图 5-27a)作用,则可先将其分解为正对称和反对称两组(图 5-27b、c),然后利用上述方法分别取半刚架计算,最后再将两者叠加,即得原结构的内力。

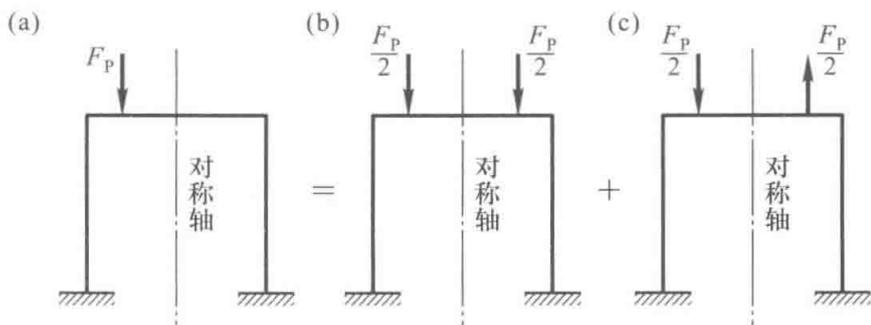


图 5-27

[例 5-1] 图 5-28a 所示结构, $EI = \text{常数}$, 试作弯矩图。

解: 以过圆心的水平和竖向直线作为该结构的两根对称轴,利用对称性可取结构的四分之一来计算,即为图 5-28b 所示的一次超静定结构,图 5-28c 为其基本体系,力法典型方程为

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

曲杆结构通常可忽略曲率,位移计算也只考虑弯曲变形的影响。由图 5-28d、e 可知

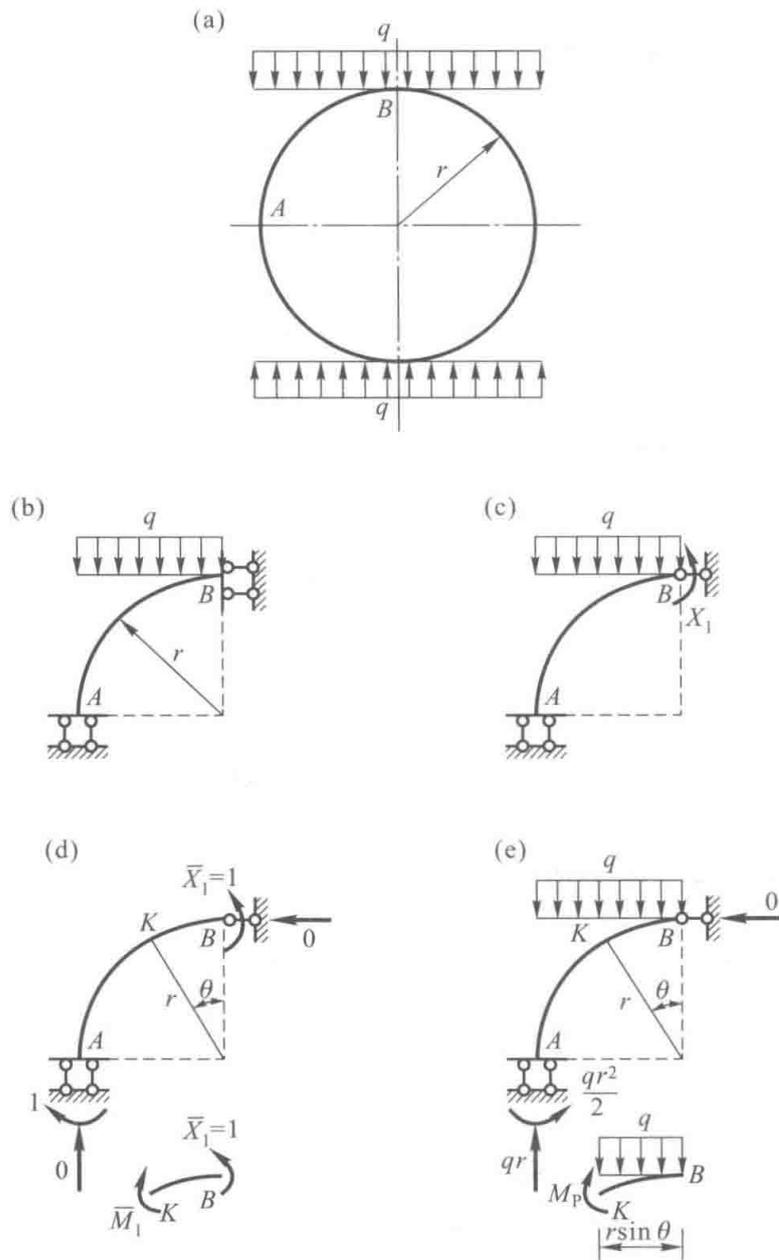


图 5-28

$$\bar{M}_1 = 1, \quad M_p = -\frac{qr^2 \sin^2 \theta}{2}$$

注意 $ds = r d\theta$, 有

$$\delta_{11} = \int_l \frac{\bar{M}_1^2 ds}{EI} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1^2}{EI} r d\theta = \frac{\pi r}{2EI}$$

$$\Delta_{1p} = \int_l \frac{\bar{M}_1 M_p ds}{EI} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{EI} \times \left(-\frac{qr^2 \sin^2 \theta}{2} \right) r d\theta = -\frac{qr^3}{2EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = -\frac{q\pi r^3}{8EI}$$

所以

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{q\pi r^3}{8EI} \times \frac{2EI}{\pi r} = \frac{qr^2}{4}$$

按 $M = X_1 \bar{M}_1 + M_p = \frac{qr^2}{4} - \frac{qr^2 \sin^2 \theta}{2}$ 可作出结构的弯矩图, 如图 5-29 所示。

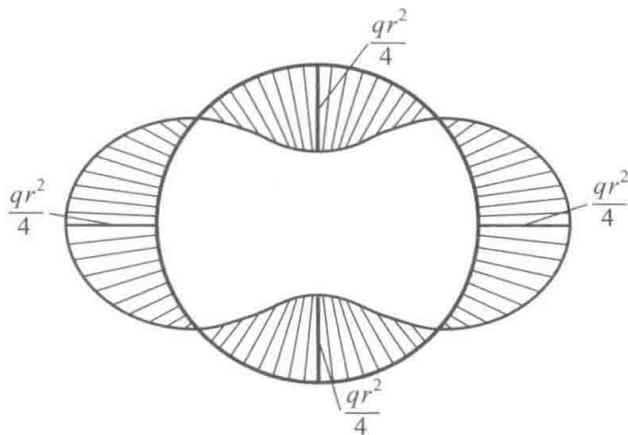


图 5-29

§ 5-5 等截面单跨超静定梁的杆端内力

下一章位移法和力矩分配法的计算过程中,需要用到单跨超静定梁受荷载作用以及杆端发生位移时的杆端内力,这些内力可用力法求得。

为了表述明确和计算方便,在位移法和力矩分配法中,除沿用带两个下标的内力符号外,还对它们的正向采用如下的规定:对杆端而言,弯矩以顺时针方向为正;对结点或支座而言,则以逆时针方向为正。在图 5-30 所示荷载作用下,杆端弯矩的实际方向如图,其 A 端弯矩 M_{AB} ,对杆端为逆时针方向,对支座为顺时针方向,按规定为负值;而 B 端弯矩 M_{BA} 的实际方向按规定为正值。显然,这里弯矩所采用的符号规定与材料力学不同,应加注意。杆端剪力符号规定不变。

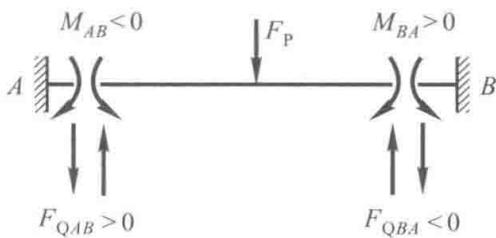


图 5-30

单跨超静定梁仅由于荷载作用所产生的杆端弯矩,通常称为固端弯矩,并以 M_{AB}^F 和 M_{BA}^F 表示,相应的杆端剪力称为固端剪力,以 F_{QAB}^F 和 F_{QBA}^F 表示。

今后主要遇到图 5-31 所示的三种类型的等截面单跨超静定梁。下面着重讨论两端固定梁杆端内力的计算。

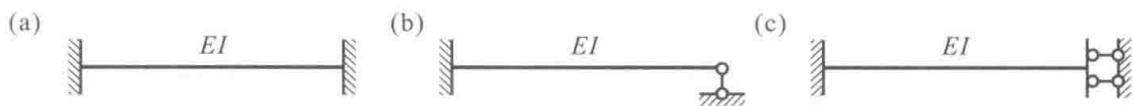


图 5-31

先考虑荷载产生的固端内力。图 5-32a 为受竖向集中荷载作用的两端固定梁,这是三次超静定结构,去掉固定支座 B 得到图 5-32b 所示的悬臂梁,以其为基本结构,用多余力 X_1 、 X_2 和 X_3 代替所去约束的作用。由于受弯直杆轴向变形相对弯曲变形是次要的,通常不予考虑,即认为受弯直杆变形后两端之间的距离保持不变(称为受弯直杆假定),因此可略去 X_3 不计,而只就沿 X_1 和 X_2 方向的位移条件建立力法方程。

原结构 B 点处不可能发生转角和竖向位移,故力法典型方程为

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

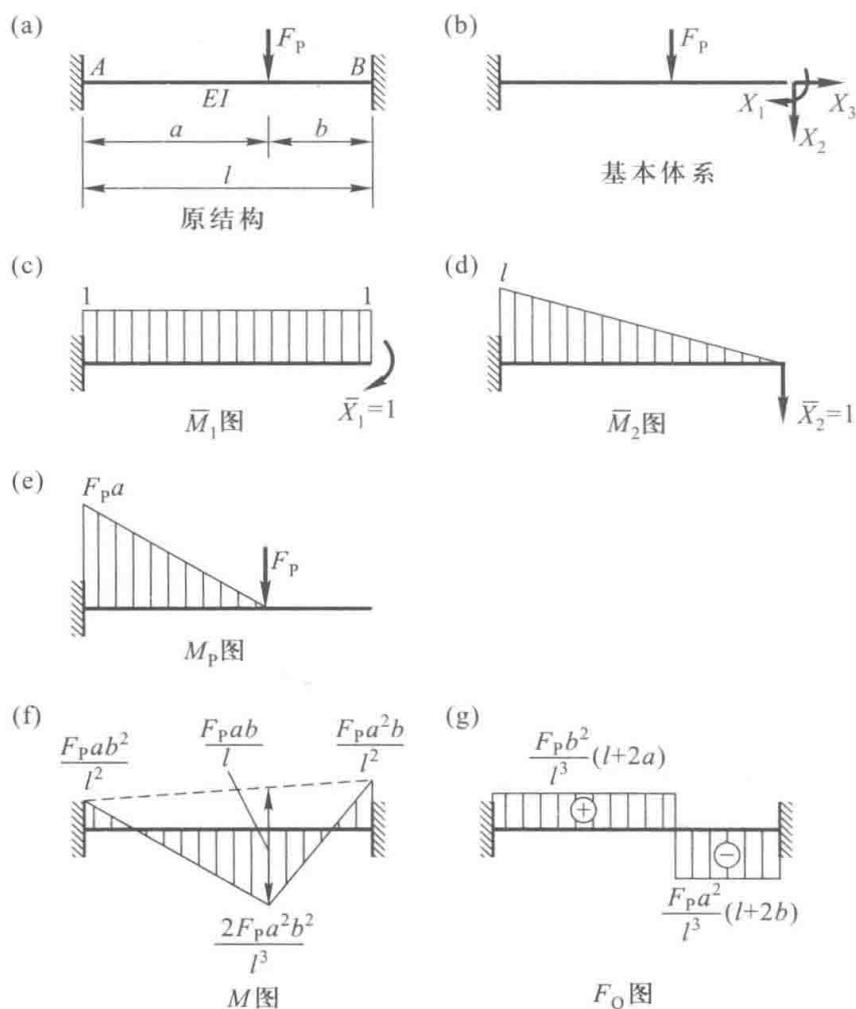


图 5-32

作出单位弯矩图 \bar{M}_1 、 \bar{M}_2 (图 5-32c、d) 和荷载弯矩图 M_P (图 5-32e), 用图乘法算得

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \times 1 \cdot l \times 1 = \frac{l}{EI}, \quad \delta_{22} = \frac{1}{EI} \times \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \times \frac{2l}{3} = \frac{l^3}{3EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \times \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \times 1 = \frac{l^2}{2EI}$$

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EI} \times \frac{F_P a^2}{2} \times 1 = \frac{F_P a^2}{2EI}$$

$$\Delta_{2P} = \frac{1}{EI} \times \frac{F_P a^2}{2} \left(b + \frac{2}{3}a \right) = \frac{F_P a^2}{6EI} (3b + 2a)$$

将以上系数和自由项代入方程, 整理得

$$\left. \begin{aligned} lX_1 + \frac{l^2}{2}X_2 + \frac{F_P a^2}{2} &= 0 \\ \frac{l^2}{2}X_1 + \frac{l^3}{3}X_2 + \frac{F_P a^2}{6}(3b + 2a) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

解联立方程组,得

$$X_1 = \frac{F_P a^2 b}{l^2}, \quad X_2 = -\frac{F_P a^2 (l+2b)}{l^3}$$

即梁 AB 的 B 端弯矩和剪力为

$$M_{BA} = \frac{F_P a^2 b}{l^2}, \quad F_{QBA} = -\frac{F_P a^2 (l+2b)}{l^3}$$

由静力平衡条件可求得 A 端的弯矩和剪力为

$$M_{AB} = -\frac{F_P a b^2}{l^2}, \quad F_{QAB} = \frac{F_P b^2 (l+2a)}{l^3}$$

最后弯矩图和剪力图如图 5-32f、g 所示。

下面考虑支座位移的影响。图 5-33a 所示等截面两端固定梁,固定端 A 顺时针转动角度 φ_A , 同样计算其支座约束力并作弯矩图和剪力图。取图 5-33b 所示的基本体系,可写出力法典型方程为

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1c} &= 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2c} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

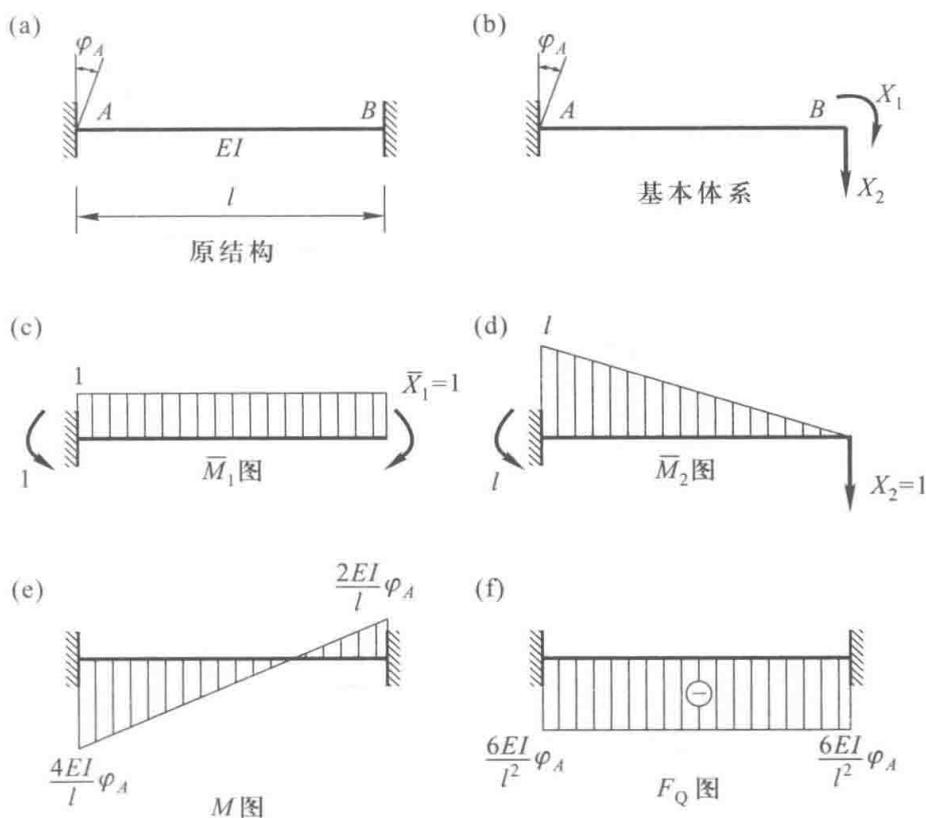


图 5-33

作单位弯矩图 \bar{M}_1 、 \bar{M}_2 (图 5-33c、d), 各系数与前相同。 Δ_{1c} 、 Δ_{2c} 分别为基本结构在支座 A 转动 φ_A 后, B 点沿 X_1 方向的转角和沿 X_2 方向的竖向位移。按式(4-4)计算得

$$\begin{aligned} \Delta_{1c} &= -\sum \bar{R}c = -(-1 \cdot \varphi_A) = \varphi_A \\ \Delta_{2c} &= -\sum \bar{R}c = -(-l \cdot \varphi_A) = l\varphi_A \end{aligned}$$

将所有系数和自由项代入典型方程,可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{l}{EI}X_1 + \frac{l^2}{2EI}X_2 + \varphi_A &= 0 \\ \frac{l^2}{2EI}X_1 + \frac{l^3}{3EI}X_2 + l\varphi_A &= 0 \end{aligned} \right\}$$

解得

$$X_1 = \frac{2EI}{l}\varphi_A, \quad X_2 = -\frac{6EI}{l^2}\varphi_A$$

即

$$M_{BA} = \frac{2EI}{l}\varphi_A, \quad F_{QBA} = -\frac{6EI}{l^2}\varphi_A$$

由静力平衡条件得

$$M_{AB} = \frac{4EI}{l}\varphi_A, \quad F_{QAB} = -\frac{6EI}{l^2}\varphi_A$$

最后弯矩图和剪力图如图 5-33e、f 所示。

等截面两端固定梁两支座在垂直于梁轴方向发生相对线位移 Δ_{AB} (图 5-34a), 可看作支座 A 向上或支座 B 向下发生竖向位移 Δ_{AB} 。同样可用力法进行计算, 并可作出其弯矩图和剪力图如图 5-34b、c 所示。需要注意的是, 不同于荷载作用下超静定结构的计算, 因支座位移产生的内力与杆件刚度的绝对值有关。

对于一端固定另一端铰支以及一端固定另一端定向支承的等截面梁, 同样可用力法计算其杆端力。为了便于应用, 现将等截面梁在常见的外因 (荷载作用、支座转动和支座移动) 影响下的杆端内力列于表 5-1 中。

一端固定另一端定向支承的等截面梁, 也可以利用对称性将其视为两端固定梁的一半, 从而转变为后者的计算问题。例如图 5-35a 所示 A 端固定 B 端定向支承的等截面梁, A 端发生单位转角。图 5-35b 为抗弯刚度 EI 与前者相同, 但跨度为前者两倍的两端固定梁, 两端发生正对称的单位转角。由对称性从图 5-35b 所示梁中取出一半, 就得到图 5-35a 所示的梁。图 5-35b 所示两端固定梁的杆端弯矩可由表 5-1 得出

$$M_{AA'} = 4 \times \frac{EI}{2l} - 2 \times \frac{EI}{2l} = \frac{EI}{l} = i_{AB}$$

式中, $i_{AB} = \frac{EI}{l}$ 是杆 AB 抗弯刚度与其跨度之比, 称为杆 AB 的线抗弯刚度或者简称线刚度。梁 AA' 的弯矩图如图 5-35c 所示, 故图 5-35a 所示的一端固定另一端定向支承的等截面梁的杆端弯矩为

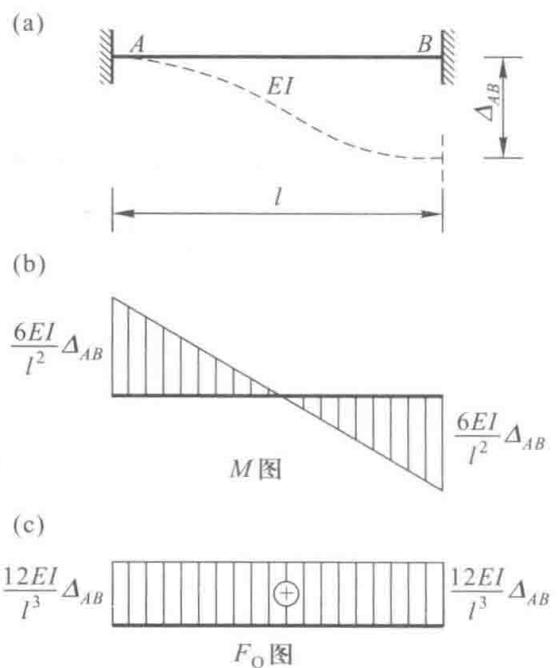


图 5-34

$$M_{AB} = i_{AB} = \frac{EI}{l}, \quad M_{BA} = -i_{AB} = -\frac{EI}{l}$$

这种梁在其他外因影响下的杆端力,均可仿此求得,不再赘述。

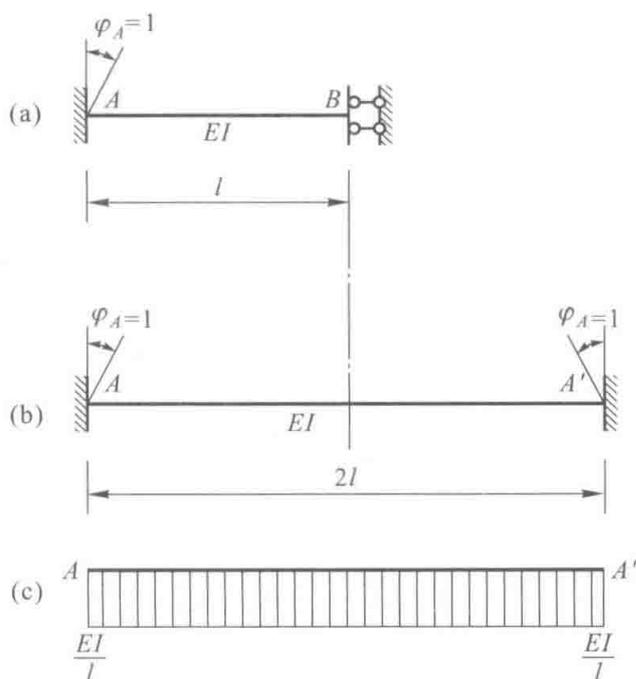
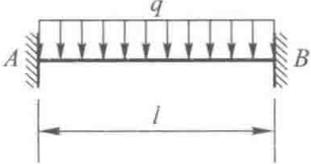
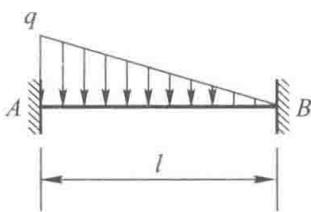
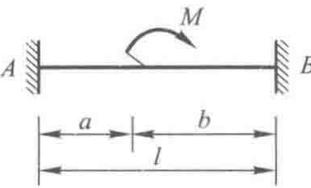
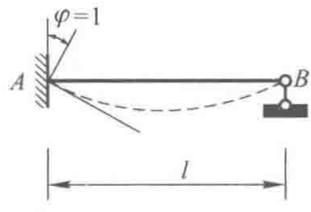
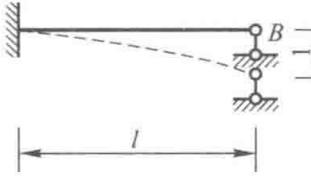
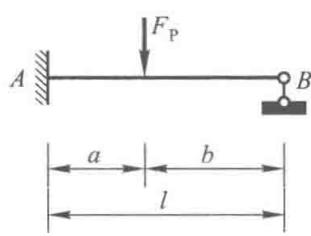


图 5-35

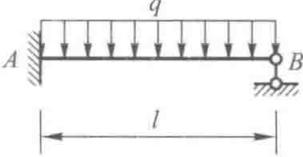
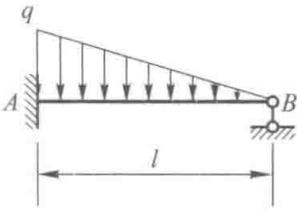
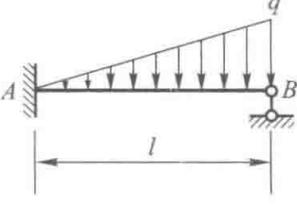
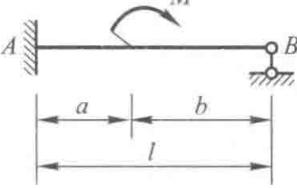
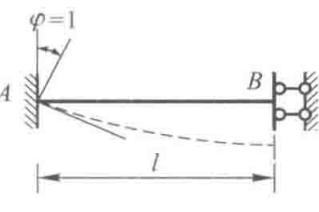
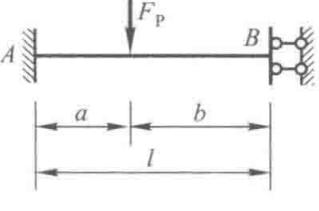
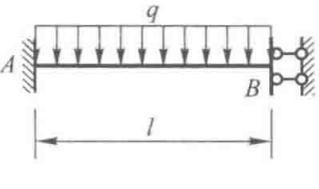
表 5-1 等截面单跨超静定梁的杆端弯矩和剪力

编号	梁的简图	弯矩		剪力	
		M_{AB}	M_{BA}	F_{QAB}	F_{QBA}
1		$\frac{4EI}{l} = 4i$	$\frac{2EI}{l} = 2i$	$-\frac{6EI}{l^2} = -6\frac{i}{l}$	$-\frac{6EI}{l^2} = -6\frac{i}{l}$
2		$-\frac{6EI}{l^2} = -6\frac{i}{l}$	$-\frac{6EI}{l^2} = -6\frac{i}{l}$	$12\frac{EI}{l^3} = 12\frac{i}{l^2}$	$12\frac{EI}{l^3} = 12\frac{i}{l^2}$
3		$-\frac{F_P ab^2}{l^2}$	$\frac{F_P a^2 b}{l^2}$	$\frac{F_P b^2 (l+2a)}{l^3}$	$-\frac{F_P a^2 (l+2b)}{l^3}$

续表

编号	梁的简图	弯矩		剪力	
		M_{AB}	M_{BA}	F_{QAB}	F_{QBA}
4		$-\frac{1}{12}ql^2$	$\frac{1}{12}ql^2$	$\frac{1}{2}ql$	$-\frac{1}{2}ql$
5		$-\frac{1}{20}ql^2$	$\frac{1}{30}ql^2$	$\frac{7}{20}ql$	$-\frac{3}{20}ql$
6		$\frac{b(3a-l)}{l^2}M$	$\frac{a(3b-l)}{l^2}M$	$-\frac{6ab}{l^3}M$	$-\frac{6ab}{l^3}M$
7		$\frac{3EI}{l} = 3i$		$-\frac{3EI}{l^2} = -3\frac{i}{l}$	$-\frac{3EI}{l^2} = -3\frac{i}{l}$
8		$-\frac{3EI}{l^2} = -3\frac{i}{l}$		$\frac{3EI}{l^3} = 3\frac{i}{l^2}$	$\frac{3EI}{l^3} = 3\frac{i}{l^2}$
9		$-\frac{F_P ab(l+b)}{2l^2}$		$\frac{F_P b(3l^2-b^2)}{2l^3}$	$-\frac{F_P a^2(2l+b)}{2l^3}$

续表

编号	梁的简图	弯矩		剪力	
		M_{AB}	M_{BA}	F_{QAB}	F_{QBA}
10		$-\frac{1}{8}ql^2$		$\frac{5}{8}ql$	$-\frac{3}{8}ql$
11		$-\frac{1}{15}ql^2$		$\frac{4}{10}ql$	$-\frac{1}{10}ql$
12		$-\frac{7}{120}ql^2$		$\frac{9}{40}ql$	$-\frac{11}{40}ql$
13		$\frac{l^2-3b^2}{2l^2}M$		$-\frac{3(l^2-b^2)}{2l^3}M$	$-\frac{3(l^2-b^2)}{2l^3}M$
14		$\frac{EI}{l}=i$	$-\frac{EI}{l}=-i$		
15		$-\frac{F_p a(l+b)}{2l}$	$-\frac{F_p a^2}{2l}$	F_p	
16		$-\frac{1}{3}ql^2$	$-\frac{1}{6}ql^2$	ql	

注:表中 EI 为等截面梁的抗弯刚度, $i=\frac{EI}{l}$ 为线抗弯刚度。

当单跨超静定梁受到荷载以及支座移动和转动的共同作用时,其杆端力可根据叠加原理,由表 5-1 中相应各栏的杆端力值叠加而得。

图 5-36a 所示两端固定的等截面梁,其杆端弯矩和剪力为

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= 4i\varphi_A + 2i\varphi_B - 6i \frac{\Delta_{AB}}{l} + M_{AB}^F \\ M_{BA} &= 2i\varphi_A + 4i\varphi_B - 6i \frac{\Delta_{AB}}{l} + M_{BA}^F \end{aligned} \right\} \quad (5-3)$$

$$\left. \begin{aligned} F_{QAB} &= -6 \frac{i}{l} \varphi_A - 6 \frac{i}{l} \varphi_B + 12 \frac{i}{l} \cdot \frac{\Delta_{AB}}{l} + F_{QAB}^F \\ F_{QBA} &= -6 \frac{i}{l} \varphi_A - 6 \frac{i}{l} \varphi_B + 12 \frac{i}{l} \cdot \frac{\Delta_{AB}}{l} + F_{QBA}^F \end{aligned} \right\} \quad (5-4)$$

图 5-36b 所示 A 端固定 B 端铰支的等截面梁,其杆端弯矩和剪力为

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= 3i\varphi_A - 3i \frac{\Delta_{AB}}{l} + M_{AB}^F \\ M_{BA} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-5)$$

$$\left. \begin{aligned} F_{QAB} &= -3 \frac{i}{l} \varphi_A + 3 \frac{i}{l} \cdot \frac{\Delta_{AB}}{l} + F_{QAB}^F \\ F_{QBA} &= -3 \frac{i}{l} \varphi_A + 3 \frac{i}{l} \cdot \frac{\Delta_{AB}}{l} + F_{QBA}^F \end{aligned} \right\} \quad (5-6)$$

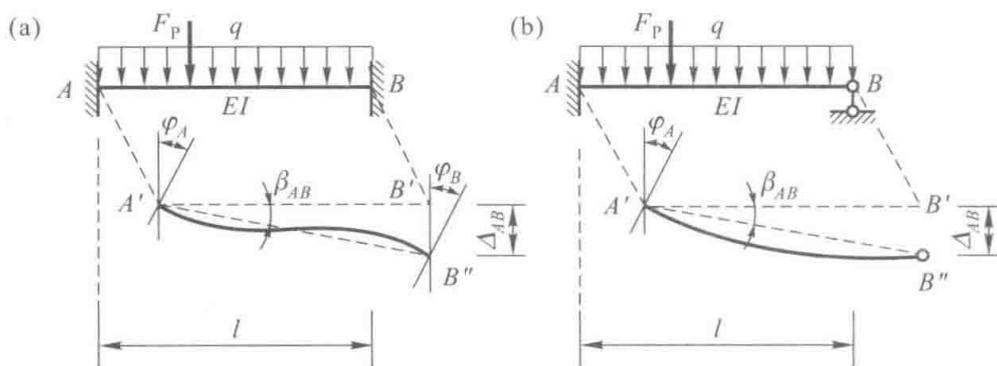


图 5-36

式(5-3)~(5-6)常称为等截面直杆的转角位移方程。它表达了杆端内力与所受荷载及两端位移间的关系。式中杆件两端相对线位移 Δ_{AB} 与杆长 l 的比值

$$\beta_{AB} = \frac{\Delta_{AB}}{l}$$

称为杆件 AB 的弦转角。其中 φ_A 、 φ_B 的符号都规定以顺时针方向转动为正,而 Δ_{AB} 则以使整个杆件顺时针转动,即弦转角以顺时针方向转动时为正。图 5-36 中的 φ_A 、 φ_B 、 Δ_{AB} 或 β_{AB} 都为正向。

上述转角位移方程虽然针对单跨等截面梁导出,但它所表示的杆端力与杆端位移及荷载之间的关系,对结构中任何等截面受弯直杆都是适用的,下一章的位移法将用到这一概念。

思考题

1. 图 5-37b、c 都可作为用力法计算图 5-37a 所示超静定结构的基本体系。试问用这两种基本体系计算时，其位移条件各是什么？并分别写出其力法典型方程。

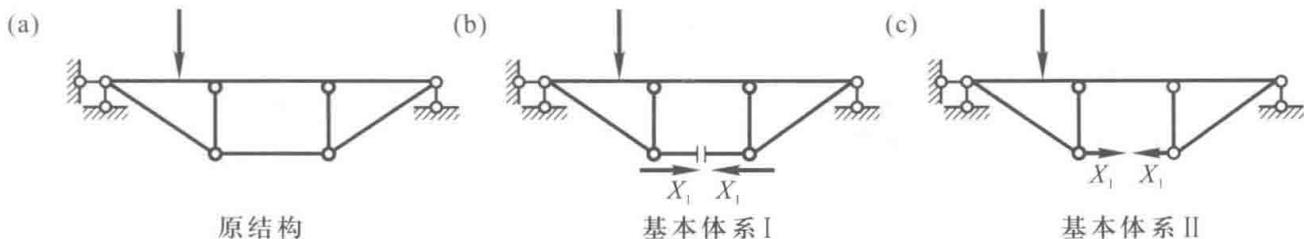


图 5-37

2. 试为图 5-38 所示连续梁选取计算最为简便的力法基本结构。

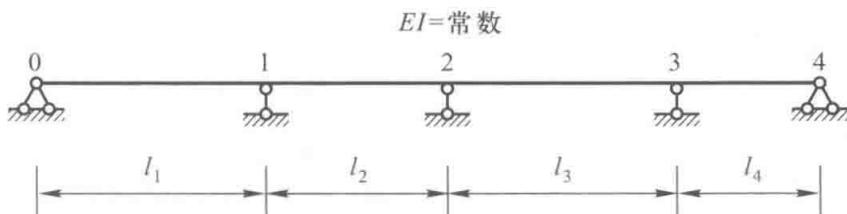


图 5-38

3. 欲使力法解算超静定结构的工作得到简化，应该从哪些方面去考虑？

4. 试问图 5-39 所示连续梁的弯矩图轮廓是否正确？为什么？

(提示：计算梁任一截面的两侧相对转角。)

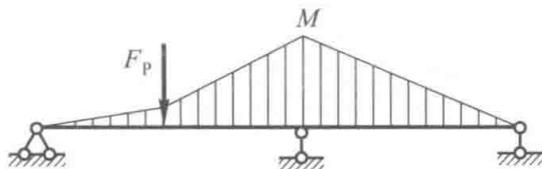
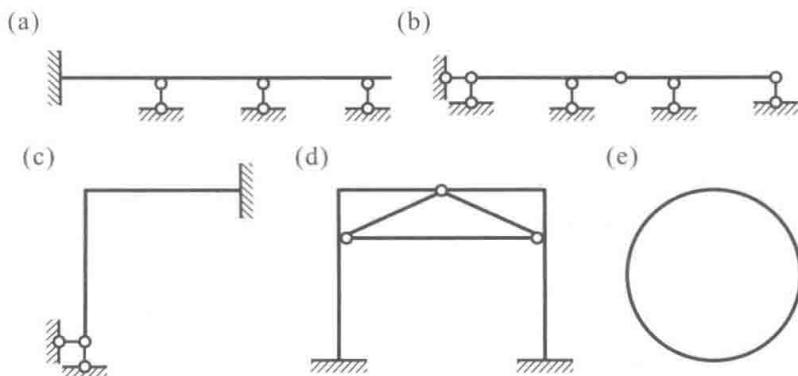


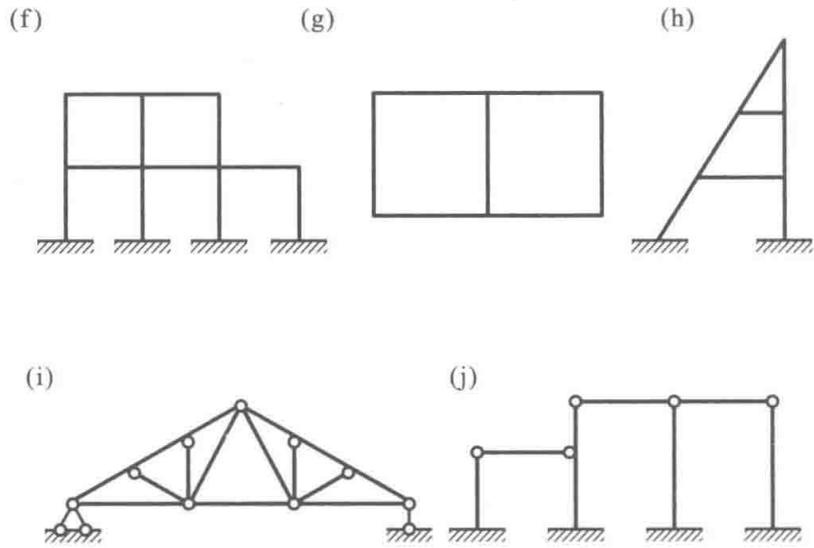
图 5-39

5. 超静定结构在支座位移作用下，其内力与各杆件的刚度有什么关系？

习题

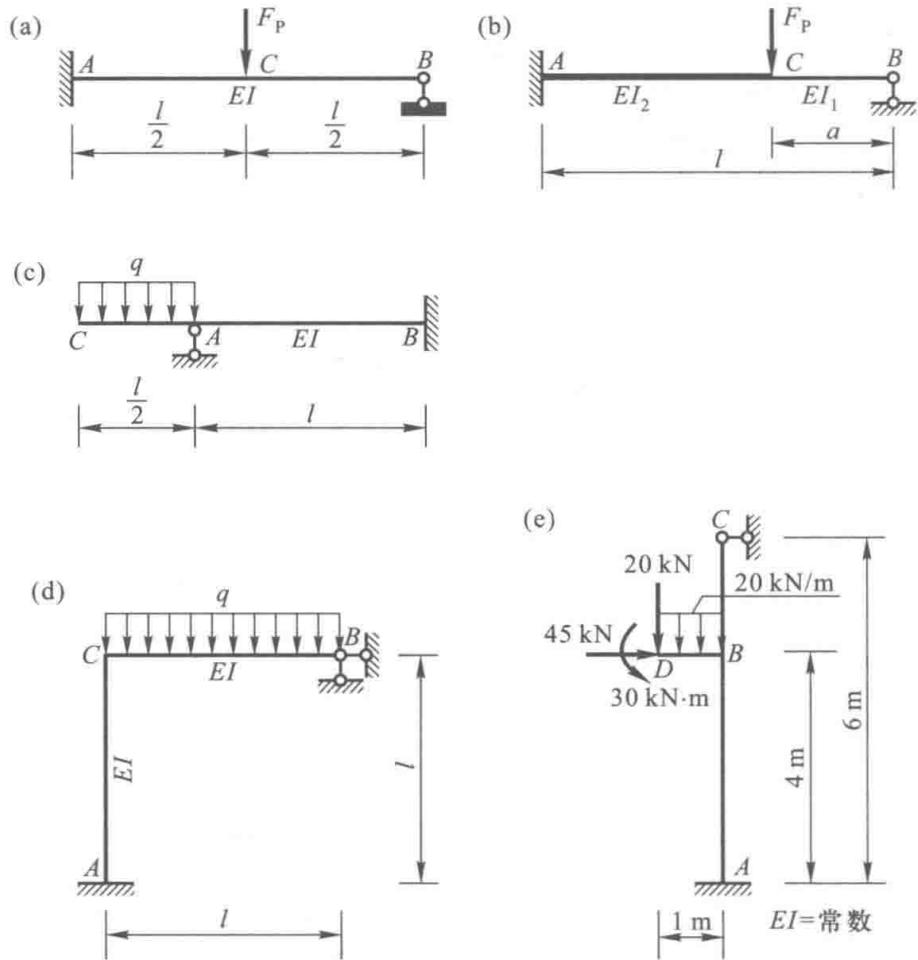
5-1 试确定图示结构的超静定次数。





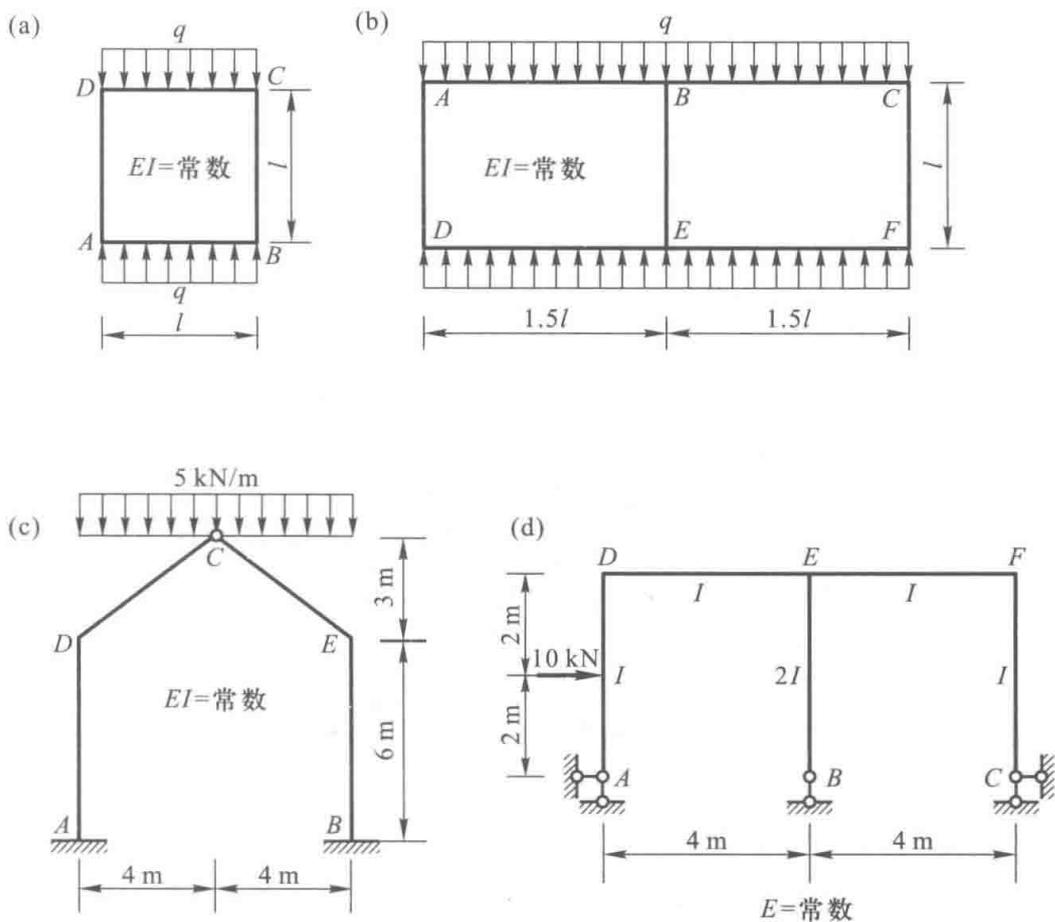
题 5-1 图

5-2 试用力法计算下列结构,并绘出弯矩图。



题 5-2 图

5-3 试利用可能简便的方法计算图示对称结构的内力,并绘出弯矩图。

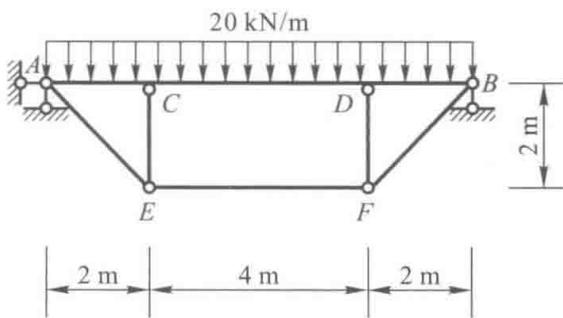


题 5-3 图

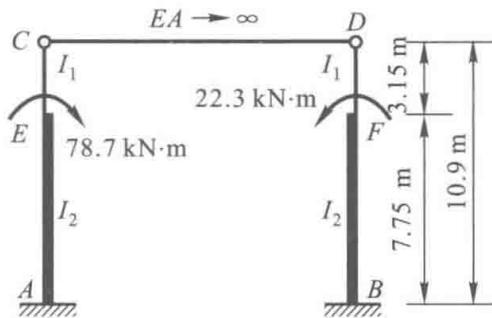
5-4 试用力法计算图示组合结构中各链杆的轴力,并绘出横梁的弯矩图。已知横梁的 $EI = 10^4 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$, 链杆的 $E_1 A_1 = 15 \times 10^4 \text{ kN}$ 。

(提示: AB 杆为受弯杆件, 只需考虑弯曲变形的影响, 其余各杆均为二力杆, 只受轴向变形的影响。)

5-5 试用力法计算图示铰接排架, 绘出其弯矩图, 并计算 C 点的水平位移。已知: $I_2/I_1 = 5.77, I_2 = 12.3 \times 10^{-3} \text{ m}^4, E = 25.5 \text{ GPa}$ 。



题 5-4 图

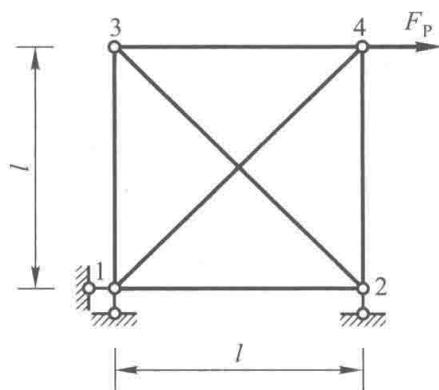


题 5-5 图

5-6 试用力法计算图示桁架, 各杆 $EA = \text{常数}$ 。

5-7 试求题 5-2 图 a 中 C 点的竖向位移。

5-8 试求题 5-2 图 d 中 C 截面的转角 φ_C 。



题 5-6 图

习题部分答案

$$5-2 \quad (a) M_{AB} = \frac{3}{16} F_P l (\text{上边受拉}); (b) F_{By} = \frac{F_P}{2} \cdot \frac{2l^3 - 3l^2 a + a^3}{l^3 - \left(1 - \frac{I_2}{I_1}\right) a^3}; (c) M_{BA} = \frac{ql^2}{16} (\text{下边受拉}); (d) M_{AC} = \frac{ql^2}{28}$$

(右侧受拉), $F_{By} = \frac{3}{7} ql (\uparrow)$, $F_{Bx} = \frac{3}{28} ql (\leftarrow)$; (e) $M_{AB} = 60 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (左侧受拉)

$$5-3 \quad (a) M_{AB} = \frac{ql^2}{24} (\text{下边受拉}); (b) M_{AB} = \frac{9}{112} ql^2 (\text{上边受拉}), M_{BA} = \frac{27}{112} ql^2 (\text{上边受拉}); (c) M_{AD} =$$

$17.51 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (右侧受拉), $M_{DA} = 20.83 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (左侧受拉); (d) $M_{DE} = -\frac{55}{7} \text{ kN} \cdot \text{m}$ (下边受拉)

$$5-4 \quad F_{NEF} = 67.3 \text{ kN}, M_C = 14.6 \text{ kN} \cdot \text{m} (\text{上边受拉})$$

$$5-5 \quad M_{EA} = 60.7 \text{ kN} \cdot \text{m} (\text{左侧受拉}), M_{FB} = 4.3 \text{ kN} \cdot \text{m} (\text{右侧受拉}), \Delta_{CH} = 0.49 \text{ cm} (\rightarrow)$$

$$5-6 \quad F_{N34} = 0.396 F_P, F_{N24} = -0.604 F_P, F_{N14} = 0.854 F_P, F_{N23} = -0.560 F_P$$

$$5-7 \quad \Delta_{CV} = \frac{7F_P l^3}{768EI} (\downarrow)$$

$$5-8 \quad \varphi_C = \frac{ql^3}{56EI} (\curvearrowright)$$

§ 6-1 位移法的基本概念

位移法是分析超静定结构最基本且历史最悠久的方法。它以结构的多余力作为基本未知量，按照位移条件首先将其求出，然后据以求出结构的其他约束力、内力和位移。由于在外因作用下，结构的内力和位移之间恒具有一定的关系，因此也可以把结构的某些位移作为基本未知量，首先求出位移，然后再据以确定结构的内力。这样的方法称为位移法。

图 6-1a 所示两跨等截面连续梁，在荷载作用下发生如图中虚线所示的变形。该连续梁可

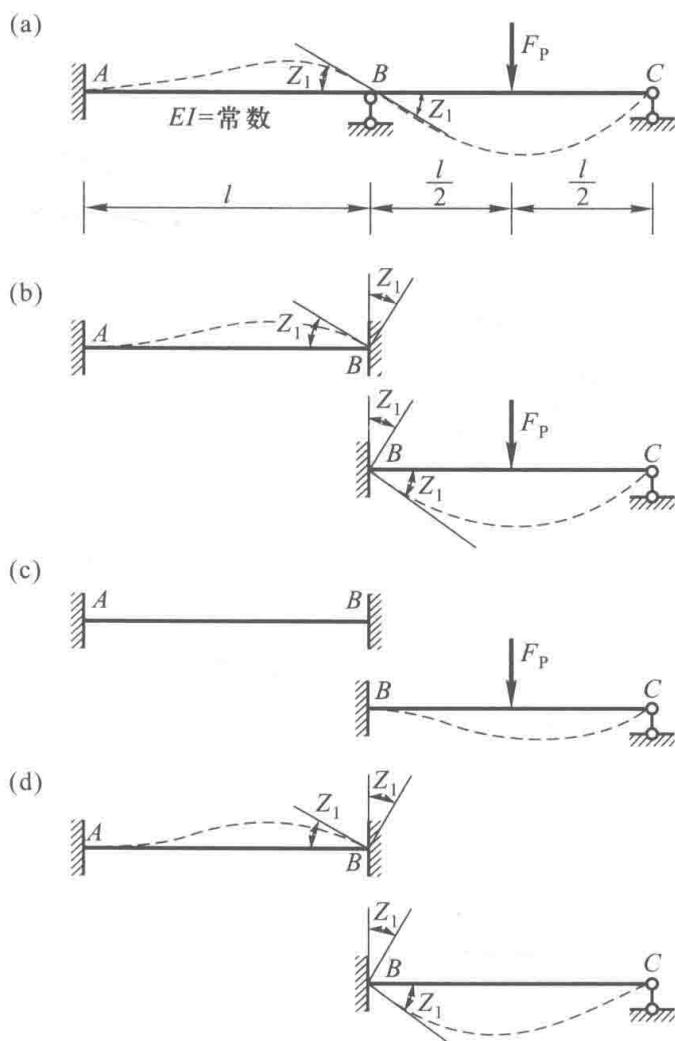


图 6-1

看成由 AB 、 BC 两根杆件在 B 端刚性联结组成, 结点 B 可视为刚结点。因为不考虑受弯杆件的轴向变形, 且有竖向链杆支承, 故结点 B 无水平线位移和竖向线位移, 只有角位移产生。设其角位移为 Z_1 。汇交于该结点两杆的杆端在变形后将发生相同的转角, 即杆 AB 的 B 端和杆 BC 的 B 端均转动 Z_1 。

分别考察 AB 、 BC 两杆, 它们的变形情况如图 6-1b 所示, 其中杆 AB 相当于两端固定梁在固定端 B 发生转角 Z_1 ; 杆 BC 相当于左端固定右端铰支的单跨梁受荷载 F_P 作用, 且固定端 B 也发生转角 Z_1 。根据叠加原理, 图 6-1b 还可分解为图 6-1c、d 所示两种情况。根据对超静定单跨梁的分析, 按转角位移方程式 (5-3)、(5-5) 或查表 5-1, 即可写出 AB 、 BC 两杆的杆端弯矩如下

$$M_{AB} = \frac{2EI}{l}Z_1, \quad M_{BA} = \frac{4EI}{l}Z_1$$

$$M_{BC} = \frac{3EI}{l}Z_1 - \frac{3}{16}F_P l, \quad M_{CB} = 0$$

式中, M_{BC} 的第二项 $-\frac{3}{16}F_P l$ 为图 6-1c 中的梁 BC 当 B 端支座无位移时, 仅由荷载作用产生的弯矩, 这就是固端弯矩 M_{BC}^F 。

若能确定两杆的杆端弯矩, 则杆件的内力可由平衡条件求得。而在上述杆端弯矩的表达式中, 固端弯矩可根据已知荷载直接查表得出, 只有转角 Z_1 是未知量。假设结点 B 转动任意角度 (即 Z_1 无论取何数值), 虽然汇交于结点 B 的各杆杆端仍有相同转角, 结构的变形保持协调, 但各杆端产生的弯矩就不一定满足结点 B 的力矩平衡条件, 从而出现不符合结构实际的变形和受力情况。因此, 必须根据结点 B 的力矩平衡条件 (图 6-2), 确定角位移 Z_1 的大小。

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

将杆端弯矩代入上式, 得

$$\left(\frac{4EI}{l} + \frac{3EI}{l}\right)Z_1 - \frac{3}{16}F_P l = 0$$

所以

$$Z_1 = \frac{3F_P l^2}{112EI}$$

再将 Z_1 代回杆端弯矩的表达式, 即可求得各杆端弯矩为

$$M_{AB} = \frac{2EI}{l} \times \frac{3F_P l^2}{112EI} = \frac{3}{56}F_P l$$

$$M_{BA} = \frac{4EI}{l} \times \frac{3F_P l^2}{112EI} = \frac{3}{28}F_P l$$

$$M_{BC} = \frac{3EI}{l} \times \frac{3F_P l^2}{112EI} - \frac{3}{16}F_P l = \frac{9}{112}F_P l - \frac{3}{16}F_P l = -\frac{3}{28}F_P l$$

$$M_{CB} = 0$$

最后利用图 6-3a 所示隔离体, 由平衡条件求出杆端剪力和支座约束力, 杆端剪力也可利用式 (5-4)、(5-6) 直接算出, 原结构的弯矩图和剪力图如图 6-3b、c 所示。

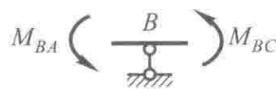


图 6-2

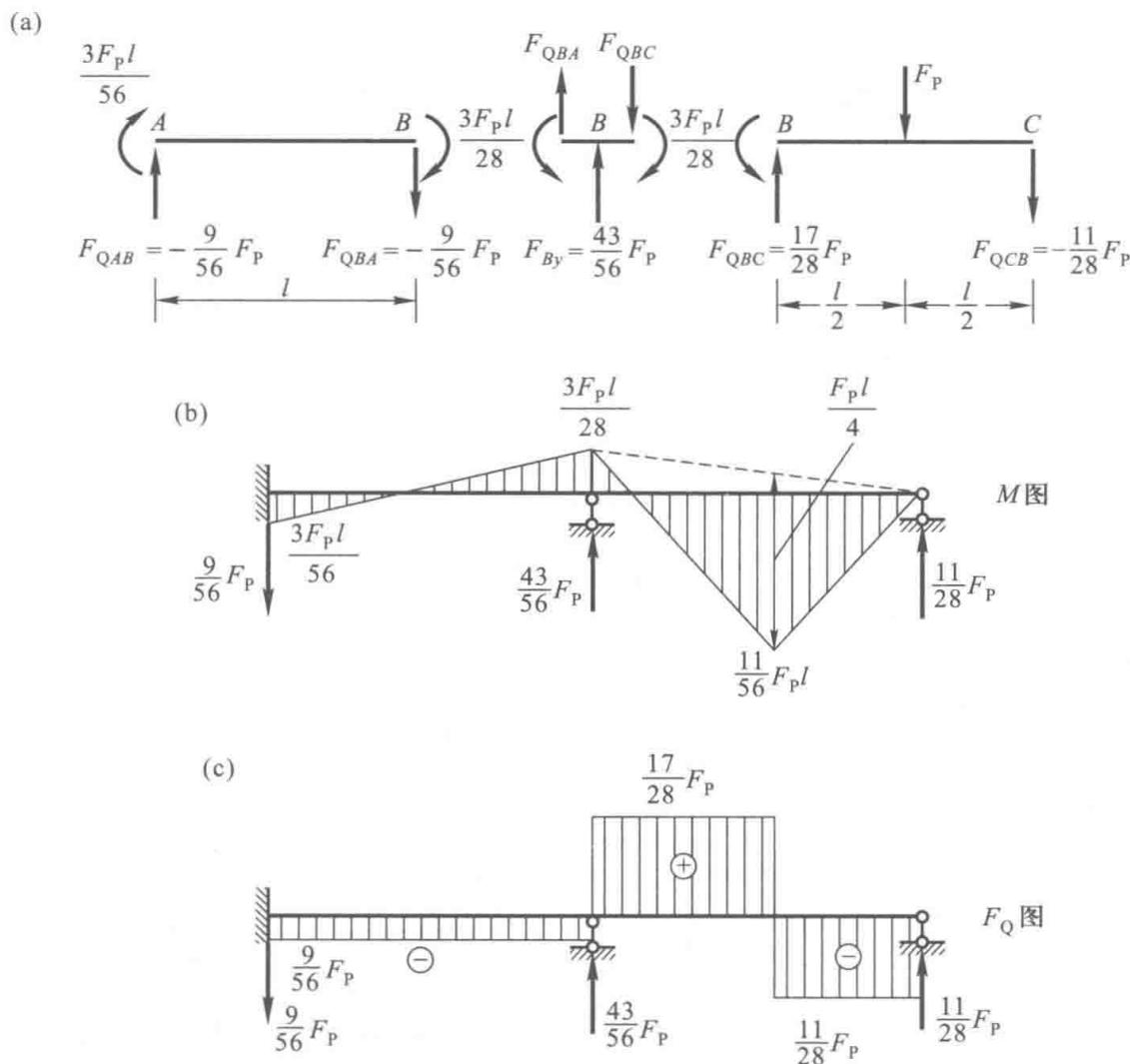


图 6-3

又如图 6-4a 所示刚架, 结点 1 为刚结点。在荷载 q 作用下, 结构将发生如图中虚线所示的变形, 汇交于结点 1 的两杆在 1 端将产生相同的转角 Z_1 。由于支座 2、3 都不能移动, 根据受弯直杆假定, 结点 1 与 2、3 两点之间的距离又保持不变, 于是结点 1 也就不能发生线位移。这样, 图 6-4a 中杆 12 和 13 的变形情况就分别与图 6-4b、c 所示的单跨梁相同。因此, 只要以单跨梁为基础就可写出各杆端的弯矩表达式, 再利用结点 1 的力矩平衡条件, 即可求得结点 1 的角位移。

一般情况下, 结构的若干结点可能同时发生转角和线位移。如图 6-5a 所示刚架, C 、 D 两刚结点除分别发生转角 Z_1 和 Z_2 外, 还会产生同一水平线位移 Z_3 。只有同时求出 Z_1 、 Z_2 和 Z_3 这三个基本未知量, 才能确定全部杆端弯矩和剪力。这些结点位移仍由结构的平衡条件确定。求解时, 可先取结点 C 和 D (图 6-5b) 为隔离体, 由 $\sum M_C = 0$ 和 $\sum M_D = 0$ 得

$$M_{CA} + M_{CD} = 0, \quad M_{DC} + M_{DB} = 0$$

再截取结构发生水平线位移的部分为隔离体, 列出力的投影平衡方程。即截开柱顶并取柱顶以上横梁 CD 部分 (图 6-5c), 由 $\sum F_x = 0$ 得

$$F_P - F_{QCA} - F_{QDB} = 0$$

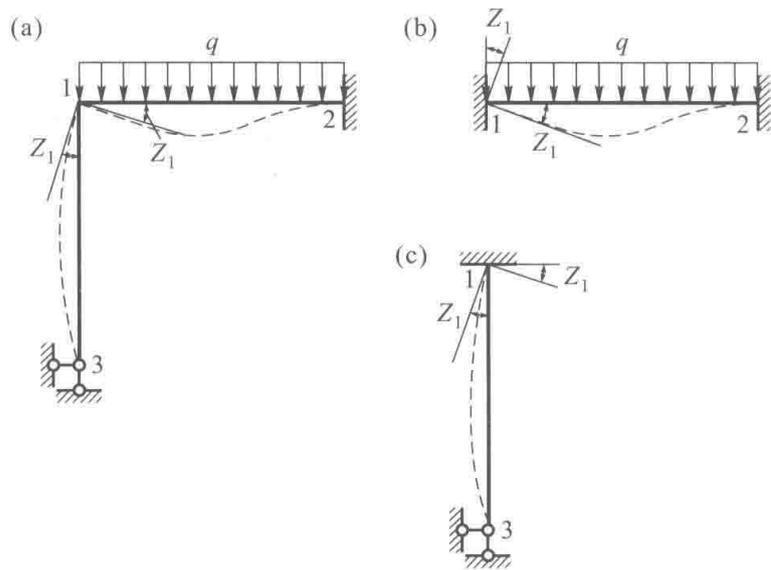


图 6-4

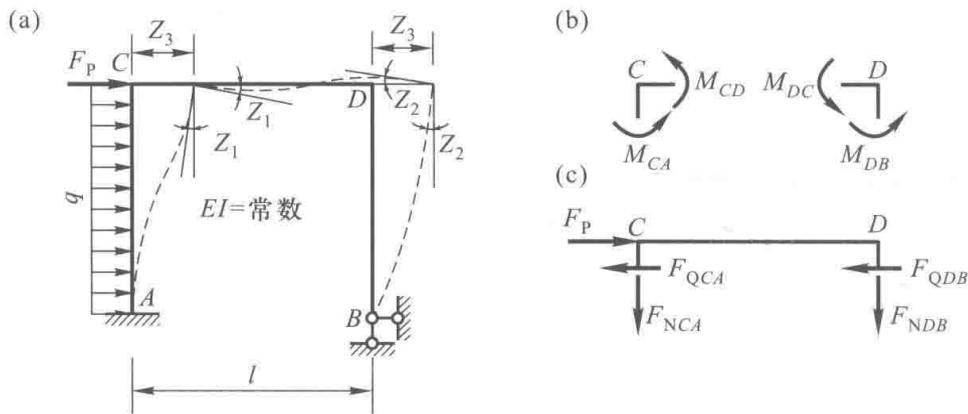


图 6-5

将杆端弯矩 M_{CA} 、 M_{CD} 、 M_{DC} 、 M_{DB} 和杆端剪力 F_{QCA} 、 F_{QDB} 的表达式分别代入上述平衡方程,即可求解 Z_1 、 Z_2 、 Z_3 ,使问题得到解决。

综上所述,位移法以结构的结点位移(转角和线位移)作为基本未知量求解。若有 n 个刚结点,则有 n 个转角未知量,相应以刚结点建立 n 个力矩平衡方程;若有 m 个独立的结点线位移未知量,则需考虑某些横梁(包括柱端)部分的平衡建立 m 个投影平衡方程。将结点位移求出后,便可以确定结构的内力。位移法计算原理的思路如下:

(1) 把结构在非支座结点处拆开,将各杆视为相应的单跨超静定梁。使这些梁承受原有荷载,并在杆端发生与实际情况相同的位移,据此写出各杆杆端内力的表达式。

(2) 将各杆件组合成原结构。此时,除考虑结构的变形协调,即各杆的杆端位移与连接该杆的结点位移相等外,还应考虑刚结点的力矩平衡条件及结构某些部分的投影平衡条件(一般为横梁部分的剪力平衡条件)。利用与基本未知量数量相同的方程求解未知结点位移,这些方程称为位移法基本方程。

由于上述分析以单根杆件的分析为基础,因此必须事先知道其杆端力与杆端位移以及所受荷载之间的关系,而这种关系可从表 5-1 或等截面直杆转角位移方程获得。如果能将一些其他

类型杆件(如变截面直杆、曲杆、甚至折杆等)的转角位移方程求得,同样也能用位移法求解由这些杆件组成的超静定结构。

§ 6-2 位移法基本未知量的确定

位移法以结构结点的独立角位移和线位移作为基本未知量,因此用位移法计算梁和刚架一类超静定结构时,必须先确定这些独立的结点位移。

一、角位移

位移法以单跨超静定梁作为计算的基础。由于可以从刚结点把结构离散为杆件,且相应各杆端的转角都等于该刚结点的转角,而每个刚结点都可能发生角位移,所以角位移基本未知量就是刚结点的转角,其数目等于刚结点的总数。例如图 6-6a 所示刚架,有 B 、 C 两个刚结点,故有 2 个角位移未知量;图 6-6b 所示刚架,结点 B 为组合结点,它的左、右各有一个刚结点,故有 2 个角位移未知量。值得说明的是,在图 6-6b 中伸臂 CD 部分是静定的,其内力可根据静力平衡条件确定。若将伸臂 CD 去掉,则杆件 BC 就变成 B 端固定 C 端铰支的单跨超静定梁。因此,确定位移法基本未知量时,可将结构的静定部分去掉。

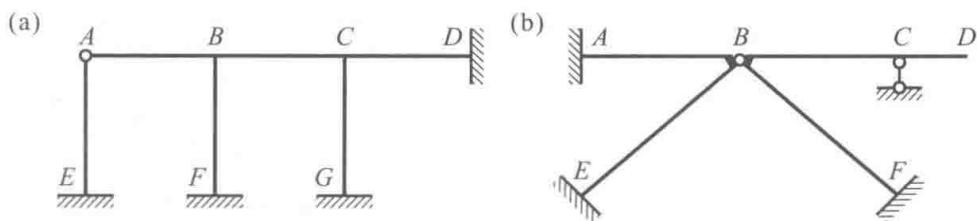


图 6-6

二、线位移

由于点在平面内具有两个运动自由度,故每个结点如不受约束都有两个线位移。但受弯直杆假定使其两端之间的距离保持不变,这就为每根受弯直杆提供了相当于刚性链杆的约束。因此,计算结点线位移个数时,可先把所有的受弯直杆视为刚性链杆,同时把所有的刚结点和固定支座改为铰结点和固定铰支座,从而使刚架变成一个铰结体系。然后,再分析该铰结体系的几何组成,凡是可动的结点,用增设附加链杆的方法使其不动,最后当铰结体系成为几何不变体系时,所需增设附加链杆的总数即为结点独立线位移的个数。例如图 6-7a 所示刚架,改成铰结体系后,只需增设两根附加链杆就能变成几何不变(图 6-7b),故有 2 个独立线位移。图 6-8a 所示刚

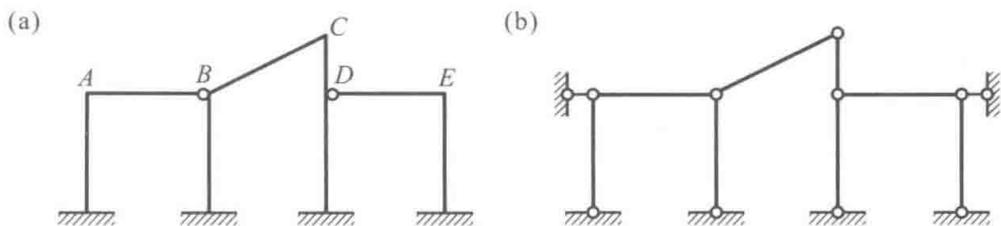


图 6-7

架,改成铰结体系后,只需增设一根附加链杆就能变成几何不变,如图 6-8b 所示,故只有 1 个独立线位移。其中,刚结点 B 上的悬臂 BC 是静定的,其内力可根据静力平衡条件确定,计算线位移个数时同样可以把它去掉。

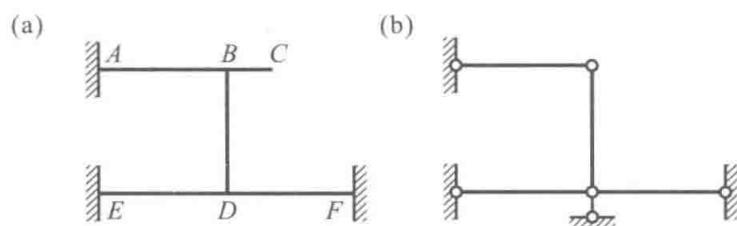


图 6-8

三、位移法基本未知量的确定

在位移法中,基本未知量数目应等于结构结点的独立角位移和线位移二者数目之和。例如,图 6-7a 所示刚架,有 $A、B、C、D、E$ 共 5 个刚结点,即有 5 个角位移,由图 6-7b 可知,刚架有 2 个独立线位移,故总共有 7 个基本未知量。图 6-8a 所示刚架,有 $B、D$ 共 2 个刚结点,即有 2 个角位移,由图 6-8b 可知结构有 1 个独立线位移,故该结构总共有 3 个基本未知量。

对图 6-9a 所示排架,将其变成铰结体系后,需要增加两根附加链杆的约束,才能成为几何不变体系,如图 6-9b 所示,故有 2 个独立线位移。确定角位移时,要注意柱 $2B$ 上的结点 3 是一个组合结点,杆件 $2B$ 应视为由 23 和 $3B$ 两杆在 3 处刚性联结而成,故结点 3 处有一个转角,因此该排架的位移法基本未知量共有 3 个。

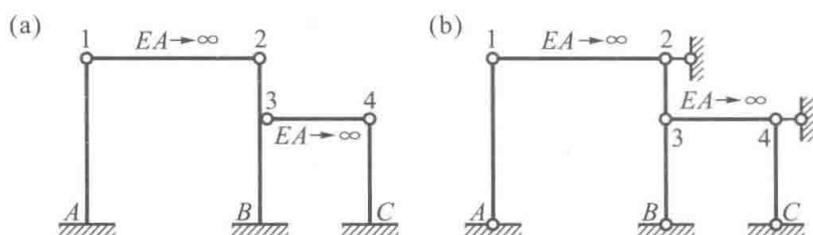


图 6-9

应当注意,上面决定独立线位移的方法,都是以不计杆件轴向变形为前提的。如果需要考虑杆件轴向变形的影响,就不能再把受弯直杆当作刚性链杆。在这种情况下,除支座外的每个结点都有两个线位移。例如,图 6-10a 所示刚架,杆 CD 是一根只承受轴力的二力杆,必须考虑轴向变形的影响,在把刚架变成铰结体系计算结点线位移时(图 6-10b),不应将该杆当作刚性链杆,而应将其撤去,此时刚架有 3 个独立的结点线位移,再加上 4 个刚结点的角位移,总共 7 个基本未知量。

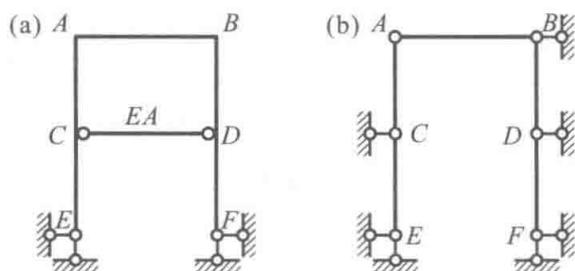


图 6-10

§ 6-3 位移法的计算步骤和示例

综上,位移法的计算步骤可归纳如下:

- (1) 确定位移基本未知量并绘出示意图,图中应标出结构承受的荷载和独立结点位移。
- (2) 根据转角位移方程(或表 5-1),并考虑变形协调条件,写出用基本未知量表示的各杆杆端弯矩和剪力的表达式。
- (3) 利用刚结点的力矩平衡条件和结构中某部分的投影平衡条件(通常为横梁部分的剪力平衡条件),建立求解基本未知量的位移法方程。
- (4) 解方程,求出各基本未知量。
- (5) 将基本未知量代回所得的杆端内力表达式,求出各杆杆端内力。
- (6) 根据杆端内力,利用平衡条件作内力图。
- (7) 校核结构的各刚结点是否满足力矩平衡条件,结构某些部分是否满足剪力平衡条件。如都得到满足,则说明计算无误。

[例 6-1] 试用位移法计算图 6-11a 所示刚架。

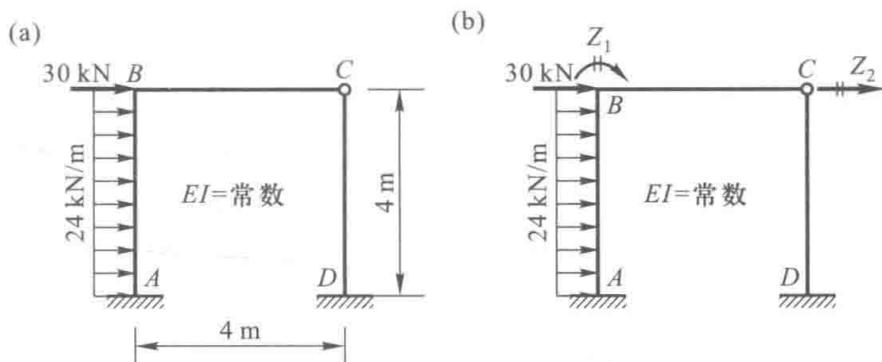


图 6-11

解:基本未知量为刚结点 B 的角位移 Z_1 和横梁 BC 的水平线位移 Z_2 ,并分别用 \curvearrowright 和 \rightarrow 的符号表示(图 6-11b)。

利用表 5-1 写出各杆杆端内力如下(其中 $i = \frac{EI}{4 \text{ m}}$)

$$M_{AB} = 2iZ_1 - \frac{6}{4 \text{ m}}iZ_2 - \frac{1}{12} \times 24 \text{ kN/m} \times (4 \text{ m})^2 = 2iZ_1 - \frac{3}{2 \text{ m}}iZ_2 - 32 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BA} = 4iZ_1 - \frac{6}{4 \text{ m}}iZ_2 + \frac{1}{12} \times 24 \text{ kN/m} \times (4 \text{ m})^2 = 4iZ_1 - \frac{3}{2 \text{ m}}iZ_2 + 32 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BC} = 3iZ_1, \quad M_{CB} = M_{CD} = 0, \quad M_{DC} = -\frac{3i}{4 \text{ m}}Z_2$$

$$F_{QAB} = -\frac{6i}{4 \text{ m}}Z_1 + \frac{12i}{(4 \text{ m})^2}Z_2 + \frac{1}{2} \times 24 \text{ kN/m} \times 4 \text{ m} = -\frac{3i}{2 \text{ m}}Z_1 + \frac{3i}{4 \text{ m}^2}Z_2 + 48 \text{ kN}$$

$$F_{QBA} = -\frac{6i}{4 \text{ m}}Z_1 + \frac{12i}{(4 \text{ m})^2}Z_2 - \frac{1}{2} \times 24 \text{ kN/m} \times 4 \text{ m} = -\frac{3i}{2 \text{ m}}Z_1 + \frac{3i}{4 \text{ m}^2}Z_2 - 48 \text{ kN}$$

$$F_{QBC} = -\frac{3i}{4\text{ m}}Z_1, \quad F_{QCB} = -\frac{3i}{4\text{ m}}Z_1$$

$$F_{QCD} = \frac{3i}{(4\text{ m})^2}Z_2 = \frac{3i}{16\text{ m}^2}Z_2, \quad F_{QDC} = \frac{3i}{(4\text{ m})^2}Z_2 = \frac{3i}{16\text{ m}^2}Z_2$$

从原结构中取出如图 6-12a、b 所示的两个隔离体,由图 6-12a 的平衡条件 $\sum M_B = 0$ 得

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

由图 6-12b 的平衡条件 $\sum F_x = 0$ 得

$$F_{QBA} + F_{QCD} - 30\text{ kN} = 0$$

将相关杆端内力的表达式代入,整理后得

$$\left. \begin{aligned} 7iZ_1 - \frac{3i}{2\text{ m}}Z_2 + 32\text{ kN} \cdot \text{m} &= 0 \\ -\frac{3i}{2\text{ m}}Z_1 + \frac{15i}{16\text{ m}^2}Z_2 - 78\text{ kN} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

解得 $Z_1 = \frac{464\text{ kN} \cdot \text{m}}{23i}, \quad Z_2 = \frac{2\ 656\text{ kN} \cdot \text{m}^2}{23i}$

将 Z_1 、 Z_2 的结果代回杆端内力表达式,算得

$$\begin{aligned} M_{AB} &= -164.87\text{ kN} \cdot \text{m}, & M_{BA} &= -60.52\text{ kN} \cdot \text{m}, & M_{BC} &= 60.52\text{ kN} \cdot \text{m} \\ M_{CB} &= 0, & M_{CD} &= 0, & M_{DC} &= -86.61\text{ kN} \cdot \text{m} \\ F_{QAB} &= 104.35\text{ kN}, & F_{QBA} &= 8.35\text{ kN}, & F_{QBC} &= -15.13\text{ kN} \\ F_{QCB} &= -15.13\text{ kN}, & F_{QCD} &= 21.65\text{ kN}, & F_{QDC} &= 21.65\text{ kN} \end{aligned}$$

再由结点的平衡条件即可求得各杆的轴力。刚架的 M 、 F_Q 、 F_N 图如图 6-13a、b、c 所示。

分别取图 6-13d、e 所示隔离体,可知 $\sum M_B = 0$ 及 $\sum F_x = 0$ 的平衡条件都能满足,故知计算无误。

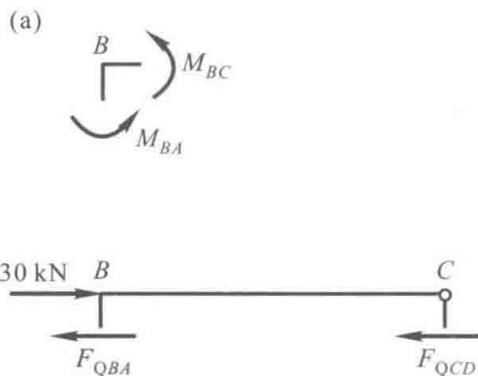


图 6-12

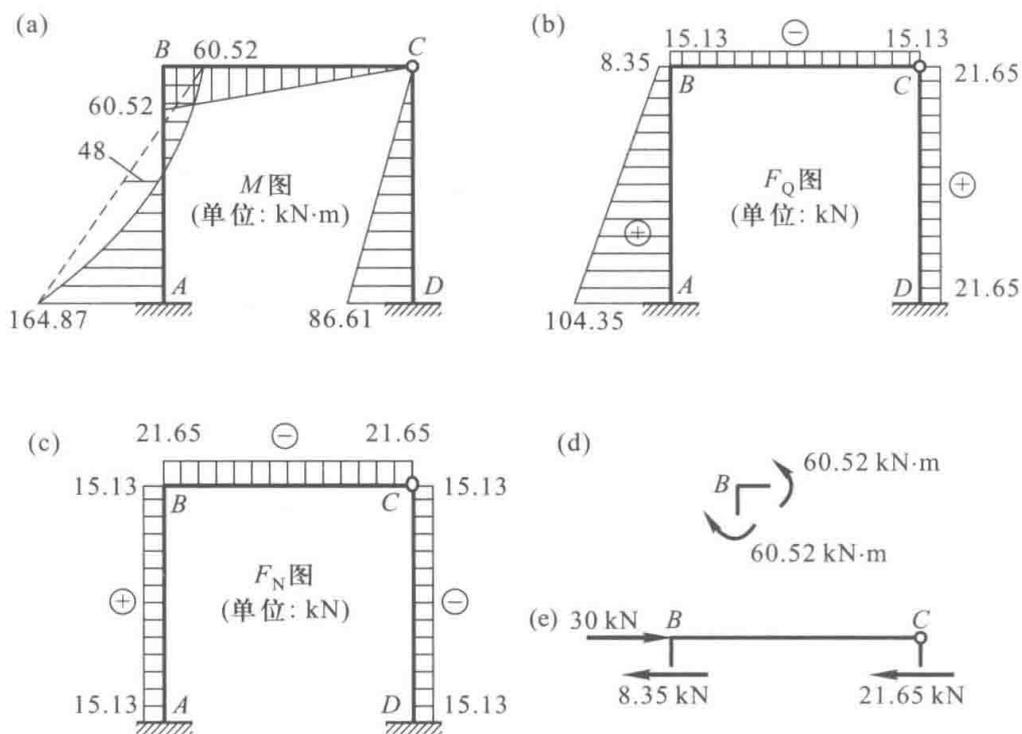


图 6-13

[例 6-2] 图 6-14a 所示刚架的支座 A 下沉 Δ , 试用位移法计算此刚架并绘制内力图。
 $EI = \text{常数}$ 。

解: 基本未知量为结点 C 的角位移 Z_1 (图 6-14b)。利用表 5-1 写出各杆杆端内力如下

$$M_{AC} = \frac{2EI}{l}Z_1, \quad F_{QAC} = -\frac{6EI}{l^2}Z_1$$

$$M_{CA} = \frac{4EI}{l}Z_1, \quad F_{QCA} = -\frac{6EI}{l^2}Z_1$$

$$M_{CB} = \frac{3EI}{l}Z_1 + \frac{3EI}{l^2}\Delta, \quad F_{QCB} = -\frac{3EI}{l^2}Z_1 - \frac{3EI}{l^3}\Delta,$$

$$M_{BC} = 0, \quad F_{QBC} = -\frac{3EI}{l^2}Z_1 - \frac{3EI}{l^3}\Delta$$

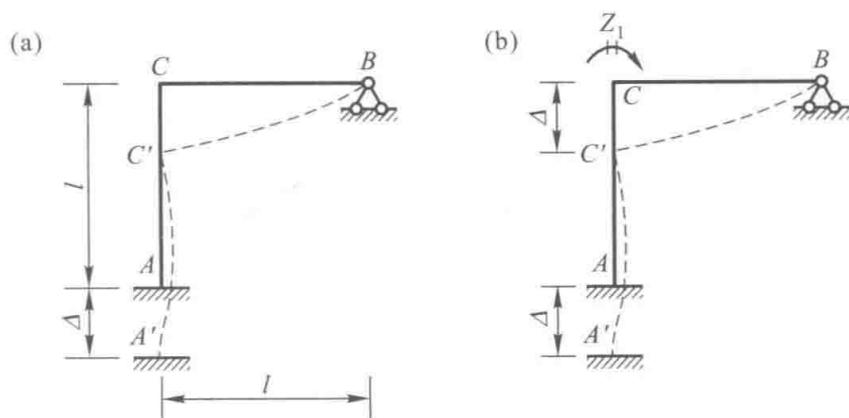


图 6-14

由结点 C 的力矩平衡条件 $M_{CA} + M_{CB} = 0$ 得

$$\frac{4EI}{l}Z_1 + \frac{3EI}{l}Z_1 + \frac{3EI}{l^2}\Delta = 0$$

解得

$$Z_1 = -\frac{3}{7l}\Delta$$

将其代回原杆端内力表达式, 算得

$$M_{AC} = -\frac{6EI}{7l^2}\Delta, \quad F_{QAC} = \frac{18EI}{7l^3}\Delta$$

$$M_{CA} = -\frac{12EI}{7l^2}\Delta, \quad F_{QCA} = \frac{18EI}{7l^3}\Delta$$

$$M_{CB} = \frac{12EI}{7l^2}\Delta, \quad F_{QCB} = -\frac{12EI}{7l^3}\Delta$$

$$M_{BC} = 0, \quad F_{QBC} = -\frac{12EI}{7l^3}\Delta$$

再由结点 C 的平衡条件 $\sum F_x = 0$ 、 $\sum F_y = 0$ 求得

$$F_{NAC} = \frac{12EI}{7l^3}\Delta, \quad F_{NBC} = \frac{18EI}{7l^3}\Delta$$

刚架的内力图如图 6-15a、b、c 所示。

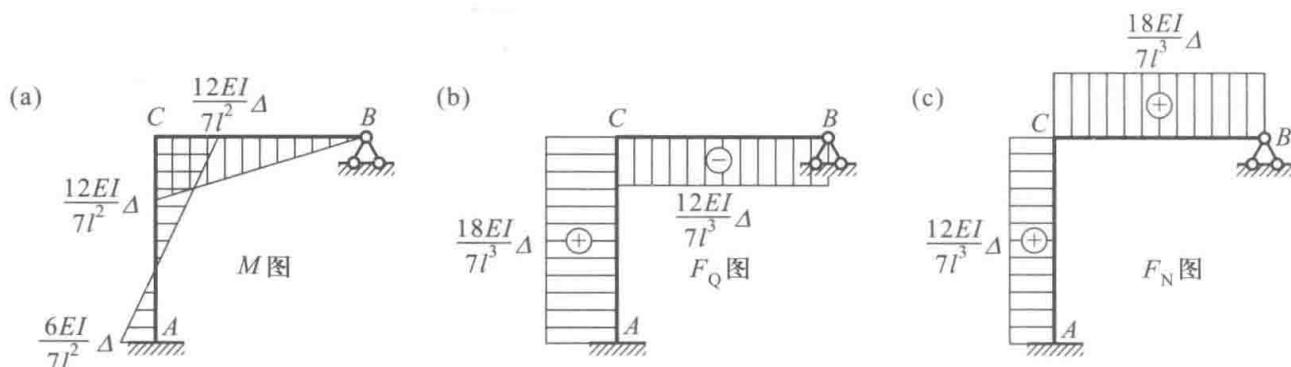


图 6-15

[例 6-3] 利用两端固定梁的转角位移方程, 试用位移法计算图 6-16a 所示的连续梁。

解: 由两端固定梁的转角位移方程可知, 其杆端力与杆件两端的角位移有关。在图 6-16a 所示连续梁中, 杆 BC 受荷载 \$F_P\$ 作用后, 在 B 端和 C 端均发生角位移, 若分别用 \$Z_1\$ 和 \$Z_2\$ 表示, 则其杆端力与 \$Z_1\$ 和 \$Z_2\$ 均有关。根据题意, 除取结点 B 的角位移 \$Z_1\$ 为基本未知量外, 还应将 C 端的角位移 \$Z_2\$ 作为基本未知量 (图 6-16b)。

利用表 5-1 写出各杆的杆端内力如下 (其中 \$i = \frac{EI}{l}\$)

$$\begin{aligned} M_{AB} &= 2iZ_1, & M_{BA} &= 4iZ_1 \\ M_{BC} &= 4iZ_1 + 2iZ_2 - \frac{1}{8}F_P l, & M_{CB} &= 2iZ_1 + 4iZ_2 + \frac{1}{8}F_P l, \\ F_{QAB} &= -\frac{6i}{l}Z_1, & F_{QBA} &= -\frac{6i}{l}Z_1 \\ F_{QCB} &= -\frac{6i}{l}Z_1 - \frac{6i}{l}Z_2 + \frac{F_P}{2}, & F_{QBC} &= -\frac{6i}{l}Z_1 - \frac{6i}{l}Z_2 - \frac{F_P}{2} \end{aligned}$$

由图 6-17a、b 所示隔离体的力矩平衡条件 \$\sum M_B = 0\$、\$\sum M_C = 0\$ 得

$$\left. \begin{aligned} M_{BA} + M_{BC} &= 0 \\ M_{CB} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

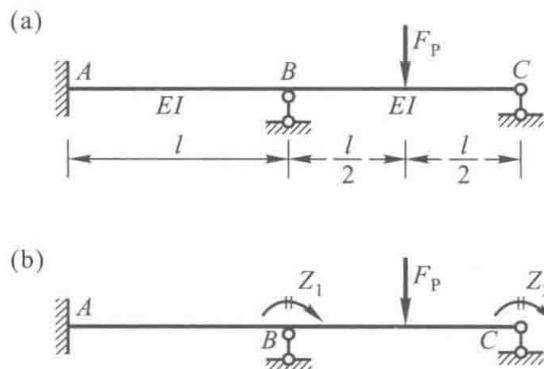


图 6-16

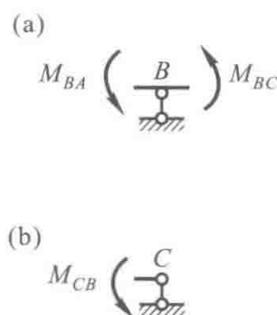


图 6-17

将相关杆端内力表达式代入并整理,可得

$$\left. \begin{aligned} 8iZ_1 + 2iZ_2 - \frac{1}{8}F_P l &= 0 \\ 2iZ_1 + 4iZ_2 + \frac{1}{8}F_P l &= 0 \end{aligned} \right\}$$

解此可得

$$Z_1 = \frac{3F_P l}{112i}, \quad Z_2 = -\frac{5F_P l}{112i}$$

将 Z_1 、 Z_2 之值代回各杆端内力表达式,算得

$$\begin{aligned} M_{AB} &= \frac{3F_P l}{56}, & M_{BA} &= \frac{3F_P l}{28}, & M_{BC} &= -\frac{3F_P l}{28}, & M_{CB} &= 0 \\ F_{QAB} &= -\frac{9}{56}F_P, & F_{QBA} &= -\frac{9}{56}F_P, & F_{QBC} &= \frac{17}{28}F_P, & F_{QCB} &= -\frac{11}{28}F_P \end{aligned}$$

本例即图 6-1a 所示连续梁,两种计算结果完全一致,只是所采用的基本未知量有所不同。在图 6-1 中,取杆 AB 为两端固定梁,而杆 BC 为 B 端固定 C 端铰支的梁,相应的基本未知量只有结点 B 的角位移;本例把杆 AB 和杆 BC 均取为两端固定梁,相应的基本未知量比前者多一个,增加了杆 BC C 端的角位移 Z_2 。事实上,因 C 端为铰结,所以有 $M_{CB} = 0$,即 $2iZ_1 + 4iZ_2 + \frac{F_P l}{8} = 0$,故 Z_2 总可用 Z_1 来表示,即 Z_2 不是独立的未知转角。对于手算,当然宜按前一种未知量少的方法分析;但对于电算,则因后一种方法将各杆统一视为两端固定梁,便于编写计算程序而被采用。

§ 6-4 位移法的典型方程

以上属于直接利用平衡条件建立位移法基本方程的原理和步骤,下面将以图 6-18a 所示的例 6-1 为例,说明建立位移法基本方程的另一途径。

由前面已知该刚架的基本未知量为结点 B 的角位移和横梁 BC 的水平线位移。为使原结构的各杆都成为单跨超静定梁,可在刚结点 B 加一个控制该结点转动但不控制移动的约束,这种约束称为附加刚臂,并用“ ∇ ”表示。再在结点 C 加一个控制该结点沿水平方向移动,但不能控制其转动的附加链杆。附加刚臂和附加链杆统称为附加约束,它使结构中刚结点的转动和所有结点的移动都受到控制,从而得到图 6-18b 所示的结构。分析其中每一杆件两端的约束情况,可知杆 AB 如同两端固定的单跨梁,杆 BC 、 CD 则如同一端固定另一端铰支的单跨梁。这也就是把整个结构转化为一个由若干单跨超静定梁组成的组合体系,称为位移法的基本结构。

如果使基本结构承受与原结构相同的荷载,并使结点 B 处的附加刚臂转动 Z_1 ,结点 C 处的附加链杆发生水平线位移 Z_2 ,得到位移法的基本体系如图 6-18c 所示。则基本体系各杆的变形和受力情况与原结构中相应各杆(图 6-18d)完全一致。

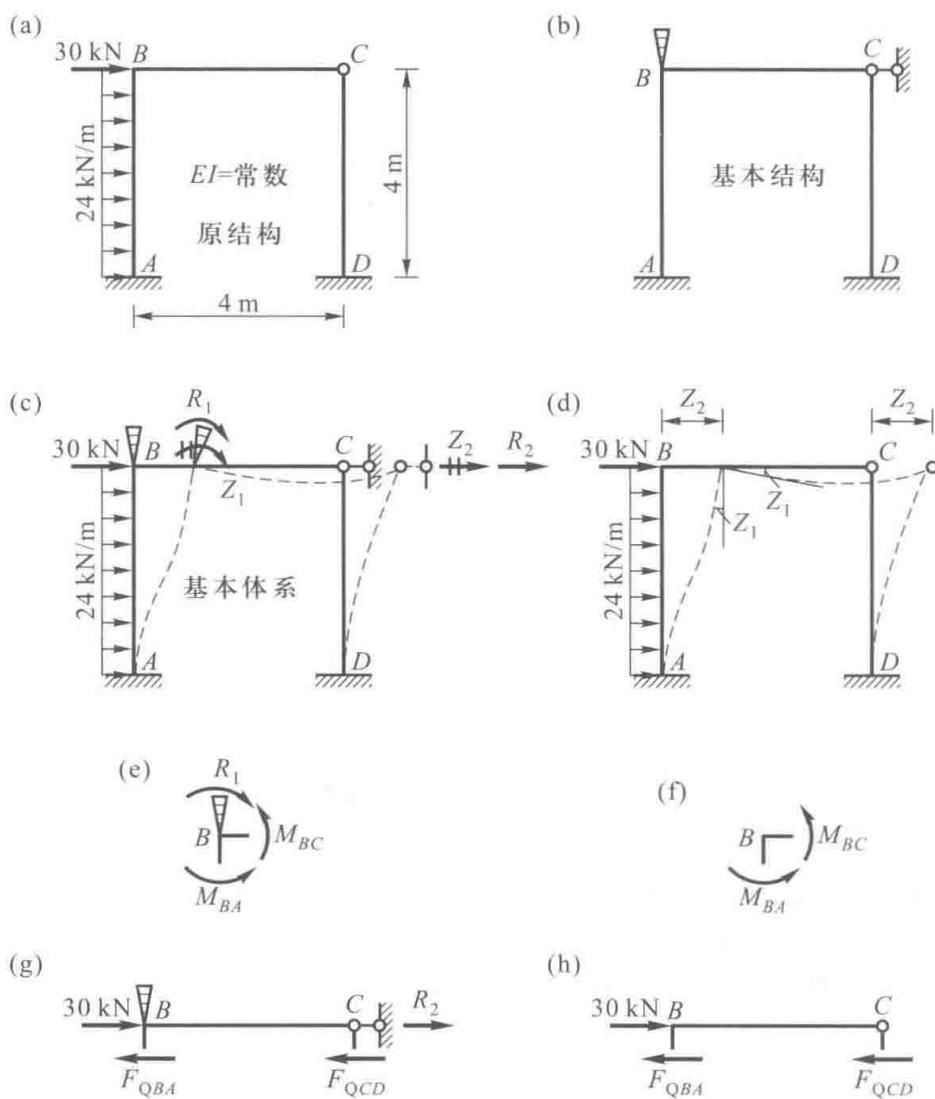


图 6-18

进一步考察图 6-18c 所示基本体系, 设附加刚臂上的约束力偶为 R_1 , 附加链杆上的约束力为 R_2 。从图 6-18c 中截取如图 6-18e、g 所示的两个隔离体, 由平衡条件可得

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= M_{BA} + M_{BC} \\ R_2 &= F_{QBA} + F_{QCD} - 30 \text{ kN} \end{aligned} \right\}$$

同样从图 6-18d 中截取如图 6-18f、h 所示的两个隔离体, 由其平衡条件可知

$$\left. \begin{aligned} M_{BA} + M_{BC} &= 0 \\ F_{QBA} + F_{QCD} - 30 \text{ kN} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

因而基本体系上附加约束的约束力偶和约束力应等于零, 即 $R_1 = 0, R_2 = 0$ 。这一条件等价于平衡条件, 根据它可以来建立位移法方程。图 6-18c 所示基本体系的受力情况, 可视为由图 6-19a、b、c 三种情况叠加而成, 故有

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= R_{11} + R_{12} + R_{1P} = 0 \\ R_2 &= R_{21} + R_{22} + R_{2P} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{a})$$

式中, R_{11} 、 R_{21} 为附加刚臂单独转动 Z_1 时, 分别在附加刚臂和附加链杆中引起的约束力偶和约束

力(图 6-19a); R_{12} 、 R_{22} 为附加链杆单独移动 Z_2 时, 分别引起的约束力偶和约束力(图 6-19b); R_{1P} 、 R_{2P} 为荷载单独作用时, 分别引起的约束力偶和约束力(图 6-19c)。在 R_{ij} 、 R_{iP} 的两个下标中, 第一个下标表示该约束力偶或约束力的作用位置, 第二个下标表示产生该约束力偶或约束力的原因(荷载或其他外因)。

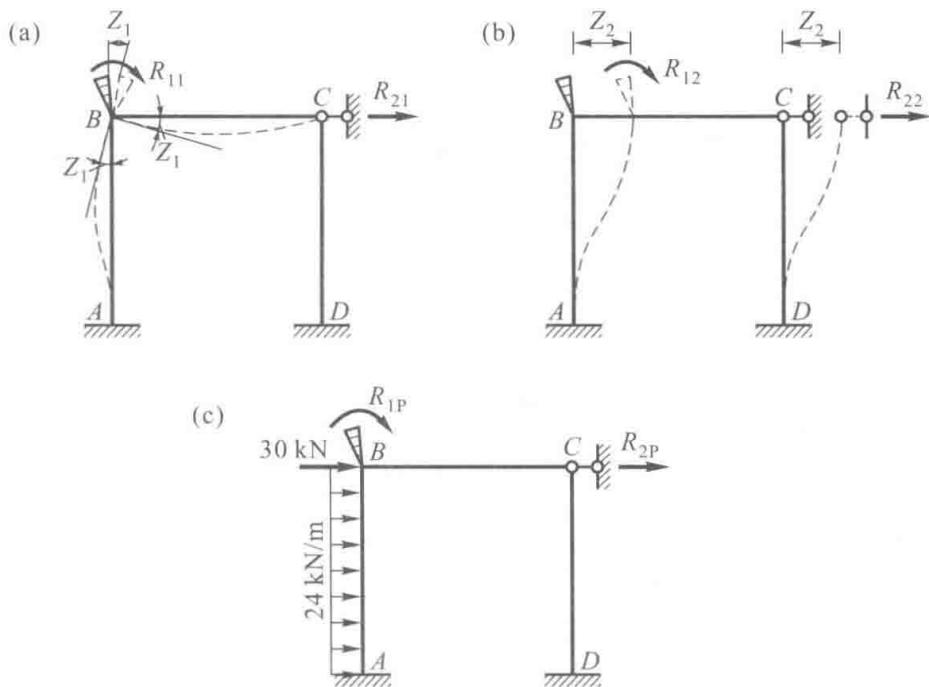


图 6-19

设基本结构由于附加刚臂单独发生单位角位移 $\bar{Z}_1 = 1$, 附加链杆单独发生单位水平位移 $\bar{Z}_2 = 1$ 时, 附加刚臂中产生的约束力偶分别为 r_{11} 和 r_{12} , 附加链杆中产生的约束力分别为 r_{21} 和 r_{22} , 则式(a)可写成

$$\left. \begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} &= 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

这就是位移法基本方程的另一种形式, 称为位移法典型方程。式(b)中的系数 r_{11} 也可理解为在位移法基本结构中, 当附加刚臂顺时针转动单位角度 $\bar{Z}_1 = 1$ 而附加链杆不动时, 在该附加刚臂上所需施加的力偶(图 6-20a); r_{12} 可理解为只是附加链杆向右移动单位位移 $\bar{Z}_2 = 1$ 而附加刚臂不动时, 在附加刚臂上所需施加的力偶(图 6-20b), 如此等。

对于具有 n 个独立结点位移的结构, 共有 n 个基本未知量, 为控制所有结点位移便需要加入 n 个附加约束, 根据每一个附加约束上约束力应等于零的条件, 可建立 n 个方程, 即

$$\left. \begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \cdots + r_{1i}Z_i + \cdots + r_{1n}Z_n + R_{1P} &= 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \cdots + r_{2i}Z_i + \cdots + r_{2n}Z_n + R_{2P} &= 0 \\ \cdots \cdots \cdots & \\ r_{i1}Z_1 + r_{i2}Z_2 + \cdots + r_{ii}Z_i + \cdots + r_{in}Z_n + R_{iP} &= 0 \\ \cdots \cdots \cdots & \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \cdots + r_{ni}Z_i + \cdots + r_{nn}Z_n + R_{nP} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-1)$$

式中, r_{ij} 称为约束力系数, 其中 r_{ii} 称为主系数, $r_{ij} (i \neq j)$ 称为副系数, R_{iP} 称为自由项。系数和自由项的符号以其方向与所属附加约束假设位移方向一致者为正。由此可知, 主系数恒为正值, 且不会等于零。而副系数和自由项则可能为正、为负或为零, 这一性质和力法类似。

为了求出方程(b)中的系数和自由项, 可借助表 5-1 或转角位移方程, 绘出基本结构分别在附加约束发生单位位移以及原有荷载单独作用下的弯矩图, 如图 6-20a、b、c 所示。然后, 在图中分别取刚结点 B 为隔离体, 由力矩平衡条件 $\sum M_B = 0$ 求得 $r_{11} = 7i, r_{12} = -\frac{3i}{2m}, R_{1P} = 32 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 它们均为附加刚臂上的约束力偶。再分别截断各柱顶, 取出柱顶以上横梁 BC 为隔离体, 由投影平衡方程 $\sum F_x = 0$, 求得 $r_{21} = -\frac{3i}{2m}, r_{22} = \frac{15i}{16m^2}, R_{2P} = -78 \text{ kN}$, 它们均为附加链杆上的约束力。

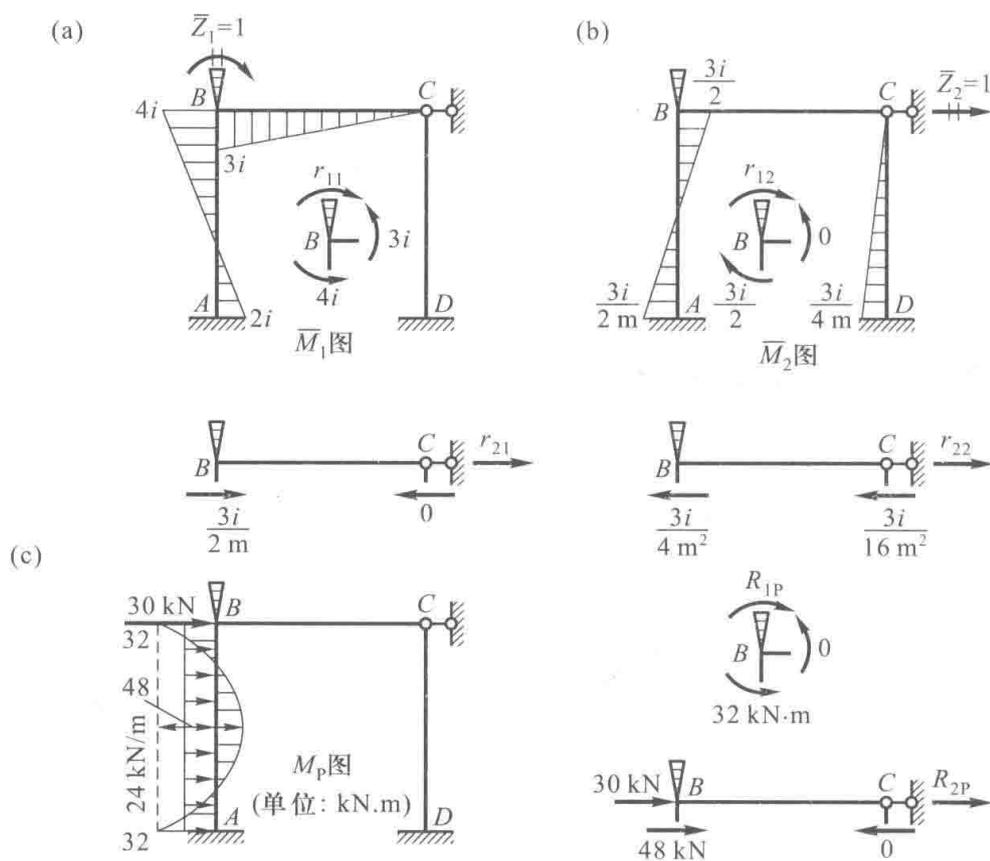


图 6-20

通过对两端固定梁 AB 查表计算知 $r_{21} = r_{12}$ 。 r_{21} 的物理意义为 $\bar{Z}_1 = 1, \bar{Z}_2 = 0$ 时, 梁 B 端在 \bar{Z}_2 方向附加链杆上产生的约束力。 r_{12} 的物理意义为 $\bar{Z}_2 = 1, \bar{Z}_1 = 0$ 时, 梁 B 端在 \bar{Z}_1 方向附加刚臂上产生的弯矩。读者可以自行思考, 类似的讨论对于表 5-1 中的基本超静梁都成立, 所以在式(6-1)中 $r_{ij} = r_{ji}$ 是普遍成立的结论。

将以上系数及自由项代入位移法典型方程(b), 得

$$\left. \begin{aligned} 7iZ_1 - \frac{3i}{2m}Z_2 + 32 \text{ kN} \cdot \text{m} &= 0 \\ -\frac{3i}{2m}Z_1 + \frac{15i}{16m^2}Z_2 - 78 \text{ kN} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

与例 6-1 得出的位移法基本方程相同。解方程求得结点位移 Z_1 、 Z_2 ，最后弯矩图可按叠加原理由下式计算

$$M = Z_1 \bar{M}_1 + Z_2 \bar{M}_2 + M_p$$

例如杆 AB 的 A 端弯矩为(符号按转角位移方程的正向规定)

$$\begin{aligned} M_{AB} &= \frac{464 \text{ kN} \cdot \text{m}}{23i} \times 2i + \frac{2 \ 656 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{23i} \times \left(-\frac{3i}{2 \text{ m}} \right) + (-32 \text{ kN} \cdot \text{m}) \\ &= -164.87 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

最后弯矩图与图 6-13a 相同。再截取杆件为隔离体利用平衡条件求杆端剪力,截取结点为隔离体利用平衡条件求各杆轴力,即可画出剪力图及轴力图(图 6-13b、c)。

综上所述,以位移法基本体系替代原结构进行求解的步骤可归纳如下:

(1) 在原结构上加入附加约束,阻止刚结点的转动和各结点的移动,从而得出一个由若干单跨超静定梁构成的组合体系作为基本结构。

(2) 使基本结构承受与原结构同样的荷载,并令各附加约束发生与原结构相同的位移,根据基本体系各附加约束上的约束力偶或约束力为零的条件,建立位移法典型方程。为解方程需要:

- ① 分别绘出基本结构由第 i 个附加约束发生单位位移时的 \bar{M}_i 图和原有荷载作用下的 M_p 图;
- ② 利用平衡条件求出各系数及自由项。

(3) 解算位移法典型方程,求出结点位移基本未知量。

(4) 按叠加原理绘制最后弯矩图,再由平衡条件求出各杆杆端剪力和轴力,作出剪力图和轴力图。

最后,将采用基本体系的位移法与力法做一比较,以加深理解。

(1) 利用力法或位移法计算超静定结构时,必须同时考虑静力平衡条件和变形协调条件,才能确定结构的受力与变形状态。

(2) 力法以多余力作为基本未知量,其数目等于结构多余约束的数目(即超静定次数)。位移法以结点独立位移作为基本未知量,其数目与结构的超静定次数无关。

(3) 力法的基本结构是从原结构中去掉多余约束后得到的静定结构。位移法的基本结构则是在原结构中加入附加约束,以控制结点独立位移后所得的单跨超静定梁的组合体。基本结构都要承受原结构所受荷载,并发生与原结构相同的变形(位移)。

(4) 力法求解基本未知量的方程根据原结构的位移条件建立,体现了结构的变形协调。位移法求解基本未知量的方程根据原结构的平衡条件建立,体现了结构的静力平衡。

力法典型方程中的系数表示广义单位力在力法基本结构上所引起的某种广义位移,常称为柔度系数。位移法典型方程中的系数表示发生广义单位位移时在位移法基本结构的某附加约束上产生的广义力,称为刚度系数。因此,力法又称为柔度法,位移法又称为刚度法。

§ 6-5 力矩分配法的基本概念

力矩分配法源于位移法,主要用于连续梁和无结点线位移刚架的计算,其特点是不需要建立和解算联立方程,而是采用列表方式或在计算简图下方直接求杆端弯矩。由于计算过程按照重

复步骤进行,结果逐渐接近真实解答,所以属渐近法。力矩分配法物理意义清楚,便于掌握且适合手算,故仍是工程计算的常用方法。

力矩分配法中杆端弯矩的符号规定,仍与位移法相同。以下先说明相关概念,再介绍计算原理。

一、转动刚度 S

图 6-21a 所示杆件 AB ,使 A 端转动角 $\varphi=1$ 时所需施加的力偶矩称为杆 AB 在 A 端的转动刚度,并用 S_{AB} 表示,其中第一个下标代表施力端或称近端,第二个下标代表远端。由于杆件受力情况只与所承受荷载和杆端位移有关,杆 AB 的变形和受力与图 6-21b 所示两端固定梁当 A 端转动角 $\varphi=1$ 时情况相同,故杆 AB 的转动刚度 S_{AB} 等于图 6-21b 中 A 端的弯矩 M_{AB} ,而由表 5-1 可知 $M_{AB}=4i$ 。因此 $S_{AB}=4i$ 。当远端支承不同时,等截面直杆施力端转动刚度 S_{AB} 的数值见表 6-1 所示。

显然,等截面直杆的转动刚度与该杆线刚度和远端支承情况有关。杆件线刚度越大(即 EI 越大或 l 越小),欲使杆端转动单位角度所需施加的力偶就越大。杆端的转动刚度即表示杆端抵抗转动的能力。

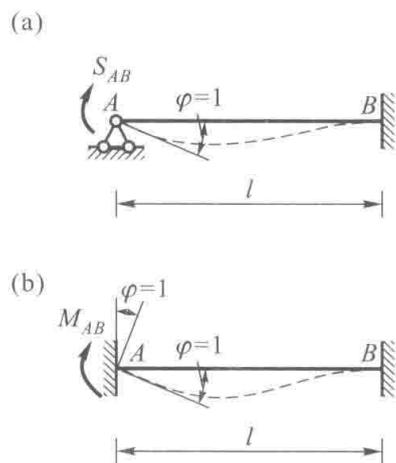
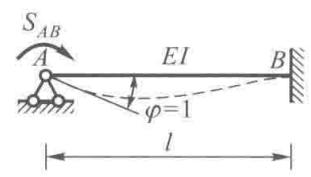
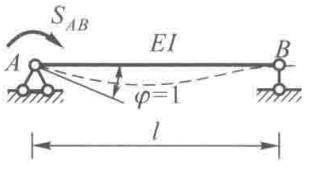
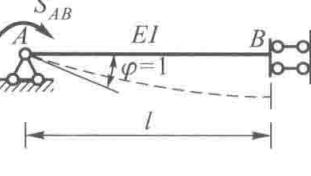


图 6-21

表 6-1 等截面直杆的杆端转动刚度

简图	A 端转动刚度	说明
	$S_{AB} = \frac{4EI}{l} = 4i$	远端固定
	$S_{AB} = \frac{3EI}{l} = 3i$	远端铰支
	$S_{AB} = \frac{EI}{l} = i$	远端定向支承

二、分配系数 μ

图 6-22a 所示由等截面杆件组成的刚架,只有一个刚结点转动而没有移动。当外力偶 M 作用于结点 1 时,刚架发生虚线所示的变形,各杆在 1 端均发生转角 φ_1 ,由转动刚度定义,有

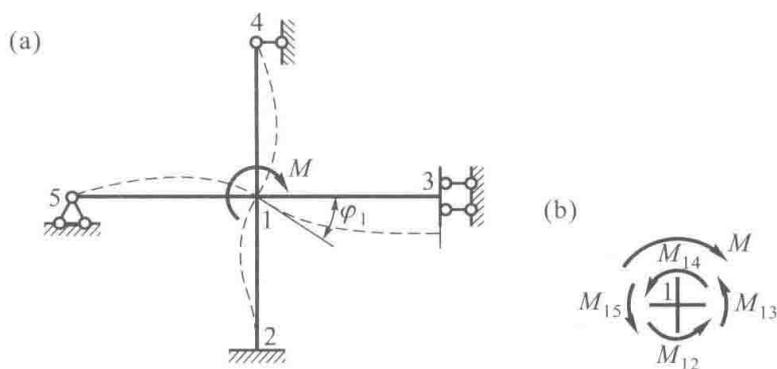


图 6-22

$$M_{1i} = S_{1i} \varphi_1 \quad (i = 2, 3, 4, 5) \quad (a)$$

式中, $S_{12} = 4i_{12}$, $S_{13} = i_{13}$, $S_{14} = 3i_{14}$, $S_{15} = 3i_{15}$ 。

根据结点 1(图 6-22b)的力矩平衡条件,得

$$M = M_{12} + M_{13} + M_{14} + M_{15} = (S_{12} + S_{13} + S_{14} + S_{15}) \varphi_1 = \varphi_1 \sum_{(1)} S$$

式中, $\sum_{(1)} S$ 为汇交于结点 1 的各杆件在 1 端的转动刚度之和。则

$$\varphi_1 = \frac{M}{\sum_{(1)} S}$$

将 φ_1 代回式(a),得

$$M_{1i} = \frac{S_{1i}}{\sum_{(1)} S} M = \mu_{1i} M \quad (6-2)$$

式中, $\mu_{1i} = \frac{S_{1i}}{\sum_{(1)} S}$ 称为汇交于结点 1 各杆在近端的分配系数, 下标 i 为各杆之远端。

显然, 汇交于同一结点各杆端的分配系数之和应等于 1, 即

$$\sum_{(1)} \mu_{1i} = \frac{1}{\sum_{(1)} S} (S_{12} + S_{13} + S_{14} + S_{15}) = 1$$

由上述可见, 加于结点 1 的外力偶矩 M 可按各杆杆端的分配系数, 分配给相应的近端。所得近端弯矩 M_{1i} 称为分配弯矩。

三、传递系数 C

在图 6-22a 中, 当外力偶 M 加于结点 1 并发生转角 φ_1 时, 各杆的近端和远端都将产生弯矩。由表 5-1 知远端弯矩分别为

$$M_{21} = 2i_{12}\varphi_1, \quad M_{31} = -i_{13}\varphi_1, \quad M_{41} = 0, \quad M_{51} = 0$$

远端弯矩与近端弯矩的比值称为由近端向远端的传递系数, 用 C_{1i} 表示, 而将远端弯矩称为传递弯矩。例如, 对杆 12 而言, 其传递系数和传递弯矩分别为

$$C_{12} = \frac{M_{21}}{M_{12}} = \frac{1}{2}, \quad M_{21} = C_{12}M_{12} = \frac{1}{2} \times 4i_{12}\varphi_1 = 2i_{12}\varphi_1$$

一般传递弯矩按下式计算

$$M_{i1} = C_{1i}M_{1i} \quad (6-3)$$

传递系数 C 随远端的支承情况而异。等截面直杆不同的传递系数分别为远端固定, $C = \frac{1}{2}$; 远端定向支承, $C = -1$; 远端铰支, $C = 0$ 。

综上所述, 对于图 6-22a 所示只有一个刚结点的结构, 刚结点受一力偶 M 作用产生角位移, 则其解算过程分为两步: 首先, 按各杆的分配系数求出近端的分配弯矩, 称为分配过程; 其次, 将近端弯矩乘以传递系数便得到远端的传递弯矩, 称为传递过程。经过分配和传递求出各杆的杆端弯矩, 这就是力矩分配法。

承受一般荷载作用且只有一个刚结点的结构, 也可用力矩分配法进行计算。如图 6-23a 所示连续梁, 在荷载作用下变形如图中虚线所示。计算时, 首先在结点 B 加附加刚臂, 使其不能转动, 于是得到一个由单跨超静定梁组成的基本结构。将原结构的荷载作用在基本结构上 (图 6-23b), 杆件 AB 的杆端产生固端弯矩 M_{AB}^F 和 M_{BA}^F , BC 跨因无荷载作用, 故 $M_{BC}^F = 0$ 。在基本结构的结点 B 处, 各杆的固端弯矩不能平衡, 故附加刚臂必产生约束力偶 M_B^F , 其值可由图 6-23b 所示结点 B 的力矩平衡条件求得

$$M_B^F = M_{BA}^F + M_{BC}^F$$

式中, 力偶 M_B^F 称为结点 B 上的不平衡力偶, 它等于汇交于该结点各杆端的固端弯矩之代数和, 以顺时针方向为正。

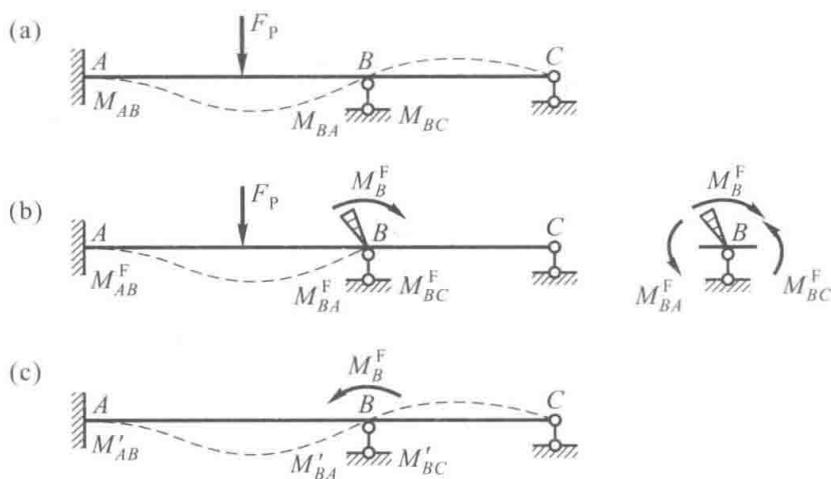


图 6-23

连续梁的结点 B 原来没有刚臂, 也没有约束力偶 M_B^F 。因此, 图 6-23b 的杆端弯矩并不是结构实际的弯矩, 必须对此结果修正。为此须放松结点 B 处的刚臂, 以消除约束力偶 M_B^F 的作用, 使梁回复到原来状态 (图 6-23a)。这一过程相当于在结点 B 加一个其值等于约束力偶 M_B^F , 但方向相反的外力偶 (图 6-23c)。将图 6-23b 和图 6-23c 所示两种情况叠加, 就消去了约束力偶, 即消除了刚臂的约束作用, 回到图 6-23a 所示原结构的实际情况, 两者杆端弯矩叠加得到的才是正确解答。

图 6-23c 中各杆端弯矩可按前述方法求得, 即近端的分配弯矩按式 (6-2) 计算, 远端的传递

弯矩按式(6-3)计算。但应注意,在计算时须将式(6-2)中的 M 代之以 $-M_B^F$,即 M 值等于不平衡力偶的反号。

[例 6-4] 试用力矩分配法计算图 6-24a 所示的两跨连续梁,绘出梁的弯矩图和剪力图,并计算各支座约束力。

解:计算通常在梁的下方列表进行。先对相关内容做如下说明。

(1) 计算结点 B 处各杆端的分配系数。

$$S_{BA} = 3 \times \frac{2EI}{12 \text{ m}} = 0.5EI/\text{m}, \quad S_{BC} = 4 \times \frac{EI}{8 \text{ m}} = 0.5EI/\text{m}$$

所以

$$\mu_{BA} = \frac{S_{BA}}{S_{BA} + S_{BC}} = \frac{0.5EI/\text{m}}{(0.5+0.5)EI/\text{m}} = 0.5$$

$$\mu_{BC} = \frac{S_{BC}}{S_{BA} + S_{BC}} = \frac{0.5EI/\text{m}}{(0.5+0.5)EI/\text{m}} = 0.5$$

且

$$\mu_{BA} + \mu_{BC} = 0.5 + 0.5 = 1$$

将计算无误的分配系数记在图 6-24a 第(1)栏内。

(2) 按表 5-1 计算固端弯矩。

刚结点 B 不转动,各杆成为单跨超静定梁,有

$$M_{AB}^F = 0$$

$$M_{BA}^F = \frac{1}{8}ql^2 = \frac{1}{8} \times 10 \text{ kN/m} \times (12 \text{ m})^2 = 180 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BC}^F = -\frac{1}{8}F_P l = -\frac{1}{8} \times 100 \text{ kN} \times 8 \text{ m} = -100 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CB}^F = \frac{1}{8}F_P l = \frac{1}{8} \times 100 \text{ kN} \times 8 \text{ m} = 100 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

将各固端弯矩记在图 6-24a 的第(2)栏内,并得出结点 B 的不平衡力偶为

$$M_B^F = M_{BA}^F + M_{BC}^F = 80 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(3) 计算分配弯矩与传递弯矩。

分配弯矩为

$$M_{BA} = \mu_{BA}(-M_B^F) = 0.5 \times (-80 \text{ kN} \cdot \text{m}) = -40 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BC} = \mu_{BC}(-M_B^F) = 0.5 \times (-80 \text{ kN} \cdot \text{m}) = -40 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

传递弯矩为

$$M_{CB} = C_{BC}M_{BC} = \frac{1}{2} \times (-40 \text{ kN} \cdot \text{m}) = -20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{AB} = C_{BA}M_{BA} = 0 \times (-40 \text{ kN} \cdot \text{m}) = 0$$

将它们记在图 6-24a 的第(3)栏内,并在结点 B 的分配弯矩下划一横线,表示该结点已经平衡。

从分配弯矩向传递弯矩划一水平箭头,表示弯矩传递方向。

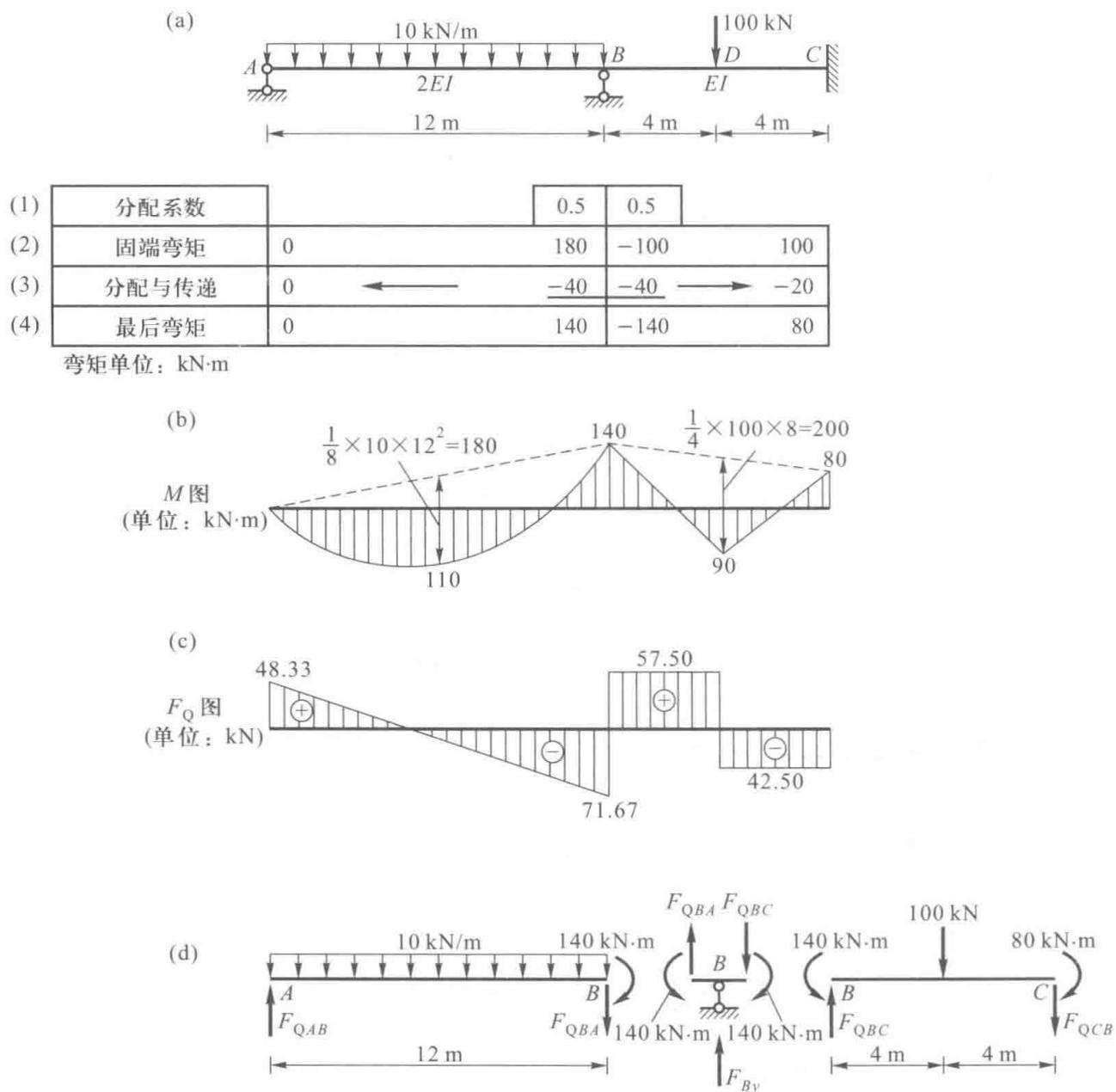


图 6-24

(4) 计算杆端最后弯矩。

将以上结果相加,即得最后弯矩,记在图 6-24a 的第(4)栏内。由 $140 \text{ kN} \cdot \text{m} + (-140 \text{ kN} \cdot \text{m}) = 0$ 可知满足结点 B 的力矩平衡条件 $\sum M_B = 0$ 。

(5) 根据各杆杆端的最后弯矩即可利用区段叠加法作出连续梁的弯矩图,如图 6-24b 所示。

(6) 由图 6-24d 所示隔离体的平衡条件,可算得各杆的杆端剪力和梁的支座约束力。

$$F_{QAB} = 48.33 \text{ kN}, \quad F_{QBA} = -71.67 \text{ kN}$$

$$F_{QBC} = 57.50 \text{ kN}, \quad F_{QCB} = -42.50 \text{ kN}$$

$$F_{Ay} = 48.33 \text{ kN}(\uparrow), \quad F_{By} = 129.17 \text{ kN}(\uparrow)$$

$$F_{Cy} = 42.50 \text{ kN}(\uparrow)$$

剪力图如图 6-24c 所示。

[例 6-5] 试用力矩分配法计算图 6-25 所示刚架的各杆端弯矩。

解: 计算各杆端分配系数

$$\mu_{AB} = \frac{3 \times 2}{3 \times 2 + 4 \times 2 + 4 \times 1.5} = 0.3$$

$$\mu_{AD} = \frac{4 \times 2}{3 \times 2 + 4 \times 2 + 4 \times 1.5} = 0.4$$

$$\mu_{AC} = \frac{4 \times 1.5}{3 \times 2 + 4 \times 2 + 4 \times 1.5} = 0.3$$

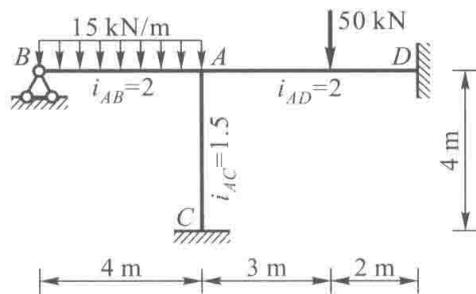


图 6-25

按表 5-1 计算各杆固端弯矩

$$M_{AB}^F = \frac{1}{8} \times 15 \text{ kN/m} \times (4 \text{ m})^2 = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{AD}^F = -\frac{50 \text{ kN} \times 3 \text{ m} \times (2 \text{ m})^2}{(5 \text{ m})^2} = -24 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{DA}^F = \frac{50 \text{ kN} \times (3 \text{ m})^2 \times 2 \text{ m}^2}{(5 \text{ m})^2} = 36 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

力矩分配法计算刚架一般列表进行, 如表 6-2 所示。

表 6-2 杆端弯矩的计算

结 点	B	A			D	C
杆 端	BA	AB	AC	AD	DA	CA
分配系数		0.3	0.3	0.4		
固端弯矩	0	30	0	-24	36	0
分配弯矩和传递弯矩	0	-1.80	-1.80	-2.40	-1.20	-0.90
最后弯矩	0	28.20	-1.80	-26.40	34.80	-0.90

注: 表中弯矩单位为 $\text{kN} \cdot \text{m}$ 。

§ 6-6 用力矩分配法计算连续梁和无结点线位移刚架

以上是用力矩分配法计算只有一个结点转角时的基本概念。对于具有多个结点转角但无结点线位移(简称无侧移)的结构, 只需依次对各结点使用上述方法便可求解, 即先将所有刚结点固定, 然后将各刚结点轮流放松, 具体每次只放松一个结点, 其他结点暂时固定。这个过程也就是把各刚结点的不平衡力偶轮流进行分配与传递, 直到传递弯矩小到可略去时为止。这种计算体现了渐近法的特点, 下面以具体示例说明。

图 6-26 所示三跨等截面连续梁, 在荷载作用下, 两个中间结点 B、C 将发生转角, 设想用附加刚臂使结点 B 和 C 不能转动(以下称为固定), 利用三根单跨超静定梁求得各杆的固端弯矩如下

$$M_{AB}^F = 0, \quad M_{BA}^F = 0$$

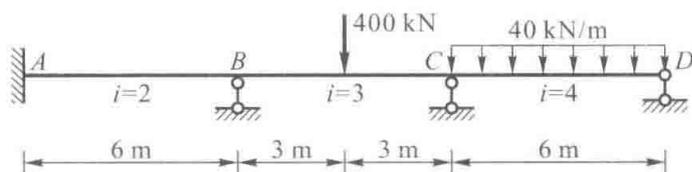
$$M_{BC}^F = -\frac{1}{8} \times 400 \text{ kN} \times 6 \text{ m} = -300 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CB}^F = \frac{1}{8} \times 400 \text{ kN} \times 6 \text{ m} = 300 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CD}^F = -\frac{1}{8} \times 40 \text{ kN/m} \times (6 \text{ m})^2 = -180 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad M_{DC}^F = 0$$

B、C 两结点的不平衡力偶分别为

$$M_B^F = -300 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad M_C^F = 120 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



分配系数		0.4	0.6	0.5	0.5	
固端弯矩	0	0	-300	300	-180	0
B 一次分配与传递	60 ←	120	180 →	90		
C 一次分配与传递			-52.5 ←	-105	-105	
B 二次分配与传递	10.5 ←	21.0	31.5 →	15.75		
C 二次分配与传递			-3.94 ←	-7.88	-7.88	
B 三次分配与传递	0.79 ←	1.58	2.36 →	1.18		
C 三次分配与传递			-0.30 ←	-0.59	-0.59	
B 四次分配与传递	0.06 ←	0.12	0.18 →	0.09		
C 四次分配与传递			-0.02 ←	-0.04	-0.04	
B 五次分配		0.01	0.01			
最后弯矩	71.35	142.71	-142.71	293.51	-293.51	0

弯矩单位: kN·m

图 6-26

为了消除这两个不平衡力偶, 设先放松结点 B, 而结点 C 仍为固定。此时, ABC 部分即可利用上节所述分配和传递的办法进行计算。为此, 需求出汇交于结点 B 的各杆端的分配系数

$$\mu_{BA} = \frac{4 \times 2}{4 \times 2 + 4 \times 3} = 0.4, \quad \mu_{BC} = \frac{4 \times 3}{4 \times 2 + 4 \times 3} = 0.6$$

将不平衡力偶 M_B^F 反号后进行分配, 相当于放松结点 B, 求得其各杆端的分配弯矩

$$M_{BA} = 0.4 \times 300 \text{ kN} \cdot \text{m} = 120 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BC} = 0.6 \times 300 \text{ kN} \cdot \text{m} = 180 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

再求出远端 A、C 的传递弯矩

$$M_{AB} = \frac{1}{2} \times 120 \text{ kN} \cdot \text{m} = 60 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CB} = \frac{1}{2} \times 180 \text{ kN} \cdot \text{m} = 90 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

这样,就完成了结点 B 的第一次分配和传递,将求得的分配弯矩和传递弯矩记入图 6-26 所示表格的第三行。在分配弯矩下面绘一横线,表示结点 B 暂时得到平衡。但结点 C 仍然存在不平衡力偶,其数值等于原荷载作用下的不平衡力偶再加上由于放松结点 B 而传来的弯矩,故结点 C 上的不平衡力偶为 $120 \text{ kN} \cdot \text{m} + 90 \text{ kN} \cdot \text{m} = 210 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。为消去这一不平衡力偶,需将结点 B 重新固定并放松结点 C ,在 BCD 部分进行分配和传递。汇交于结点 C 各杆端的分配系数为

$$\mu_{CB} = \frac{4 \times 3}{4 \times 3 + 3 \times 4} = 0.5, \quad \mu_{CD} = \frac{3 \times 4}{4 \times 3 + 3 \times 4} = 0.5$$

近端的分配弯矩为

$$M_{CB} = 0.5 \times (-210 \text{ kN} \cdot \text{m}) = -105 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CD} = 0.5 \times (-210 \text{ kN} \cdot \text{m}) = -105 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

远端的传递弯矩为

$$M_{BC} = \frac{1}{2} \times (-105 \text{ kN} \cdot \text{m}) = -52.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{DC} = 0 \times (-105 \text{ kN} \cdot \text{m}) = 0$$

上述数字都记在表格中的第四行,分配弯矩值下面绘一横线,表示此时结点 C 也得到暂时平衡。至此,完成了力矩分配法第一个循环(或称为第一轮)的计算。然而结点 B 上又有了新的不平衡力偶($-52.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$),也需要反号进行分配、传递,不过其绝对值已比前一次($-300 \text{ kN} \cdot \text{m}$)小了许多。依次继续在结点 B 和 C 间进行计算,则传递弯矩会愈来愈小。经过若干轮后小到可以略去不计时,便可停止进行,结构已经非常接近真实的平衡状态了。将各次计算结果都一一记在图 6-26 的表格中,为简明起见,进程中的数字“0”省略。再把每一杆端历次的分配弯矩、传递弯矩和固端弯矩相加便得到最后弯矩。这一计算方法同样可用于无结点线位移的刚架。

为使力矩分配法计算时收敛较快,通常宜从不平衡力偶绝对值较大的结点开始分配。其计算步骤可归纳如下:

(1) 在各结点按杆端的转动刚度 S_{ik} 计算其分配系数 μ_{ik} ,并确定传递系数 C_{ik} 。

(2) 计算各杆的固端弯矩 M_{ik}^F ,求出各结点的不平衡力偶 M_i^F 。

(3) 依次放松各结点以使弯矩平衡。每平衡一个结点时,按分配系数将不平衡力偶反号分配至近端,然后将分配弯矩乘以传递系数传至远端。将此步骤重复运用,直至杆端的传递弯矩小到可以略去时,把计算停止在分配弯矩上。

(4) 将各杆端的固端弯矩与历次的分配弯矩和传递弯矩相加,即得最后弯矩。

[例 6-6] 试用力矩分配法计算图 6-27a 所示等截面连续梁的各杆端弯矩,并作弯矩图、剪力图。 EI =常数。

解:此梁的悬臂 EF 为一静定部分,根据静力平衡条件可得 $M_{EF} = -40 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $F_{QEF} = 20 \text{ kN}$ 。若将该悬臂去掉,而将 M_{EF} 、 F_{QEF} 作为外力作用于结点 E 的右侧(图 6-27b),则结点 E 作为铰支端考虑。计算各分配系数时,应有

$$\mu_{DC} = \frac{4 \times \frac{EI}{6 \text{ m}}}{4 \times \frac{EI}{6 \text{ m}} + 3 \times \frac{EI}{4 \text{ m}}} = 0.471, \quad \mu_{DE} = \frac{3 \times \frac{EI}{4 \text{ m}}}{4 \times \frac{EI}{6 \text{ m}} + 3 \times \frac{EI}{4 \text{ m}}} = 0.529$$

计算固端弯矩时,杆 DE 相当于 D 端固定 E 端铰支的单跨梁,作用在 E 端的竖向集中力由支座承受,在梁内不引起内力,在 E 处力偶的作用下,由表 5-1 可得杆 DE 的固端弯矩为

$$M_{ED}^F = 40 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad M_{DE}^F = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

全部计算过程列于图 6-27 中,最后弯矩图和剪力图如图 6-27c、d 所示。

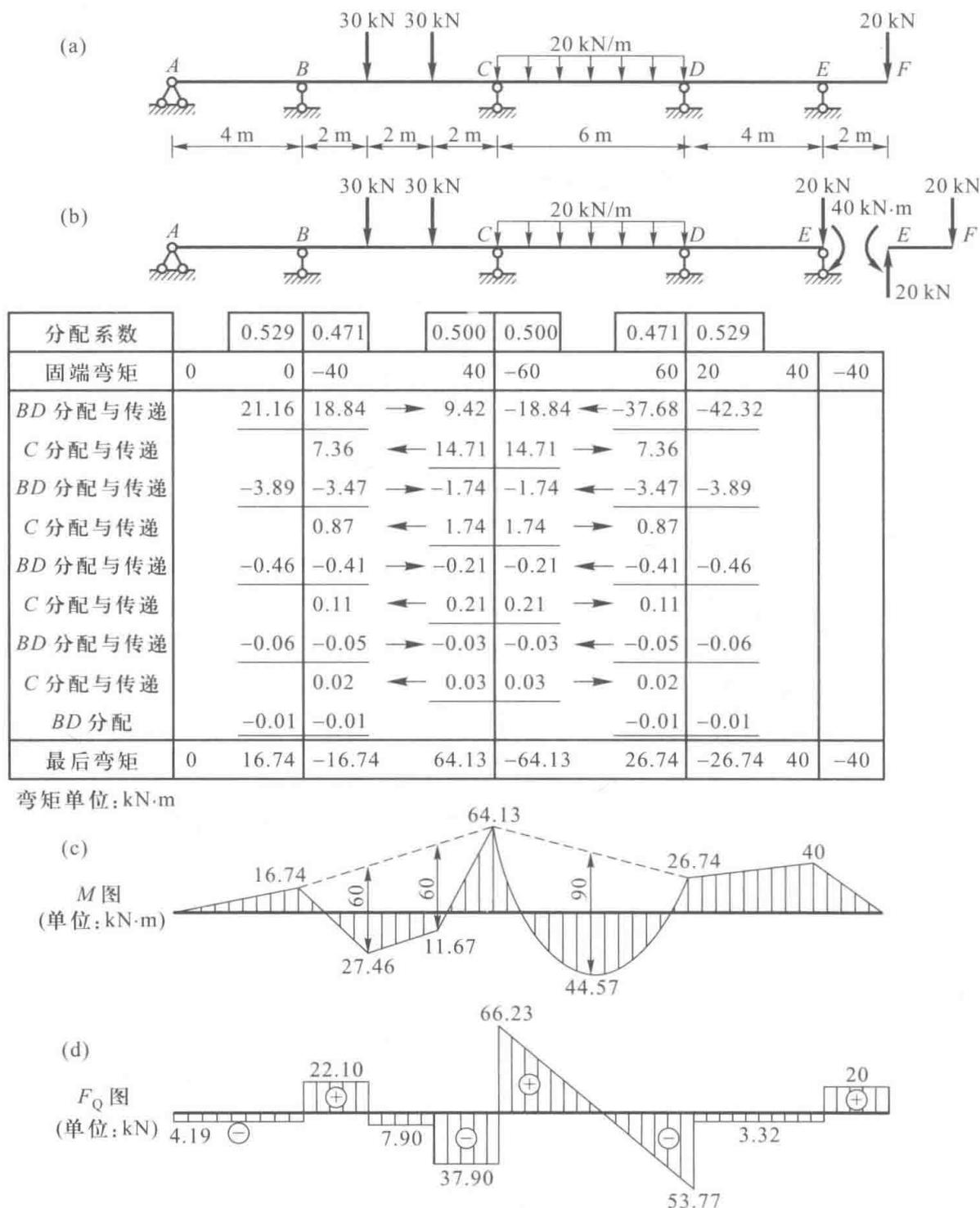


图 6-27

[例 6-7] 试用力矩分配法计算图 6-28a 所示刚架,并绘出其弯矩图。 EI = 常数。

解:该刚架具有两根对称轴,荷载也关于这两根轴正对称,可取结构的四分之一计算(图 6-28b)。

计算分配系数

$$\mu_{AB} = \frac{4 \times \frac{EI}{4 \text{ m}}}{4 \times \frac{EI}{4 \text{ m}} + \frac{EI}{1.5 \text{ m}}} = 0.6, \quad \mu_{AG} = \frac{\frac{EI}{1.5 \text{ m}}}{4 \times \frac{EI}{4 \text{ m}} + \frac{EI}{1.5 \text{ m}}} = 0.4$$

计算固端弯矩

$$M_{GA}^F = \frac{1}{6} \times 30 \text{ kN/m} \times (1.5 \text{ m})^2 = 11.25 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{AG}^F = \frac{1}{3} \times 30 \text{ kN/m} \times (1.5 \text{ m})^2 = 22.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{AB}^F = -\frac{1}{12} \times 30 \text{ kN/m} \times (4 \text{ m})^2 = -40 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BA}^F = \frac{1}{12} \times 30 \text{ kN/m} \times (4 \text{ m})^2 = 40 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

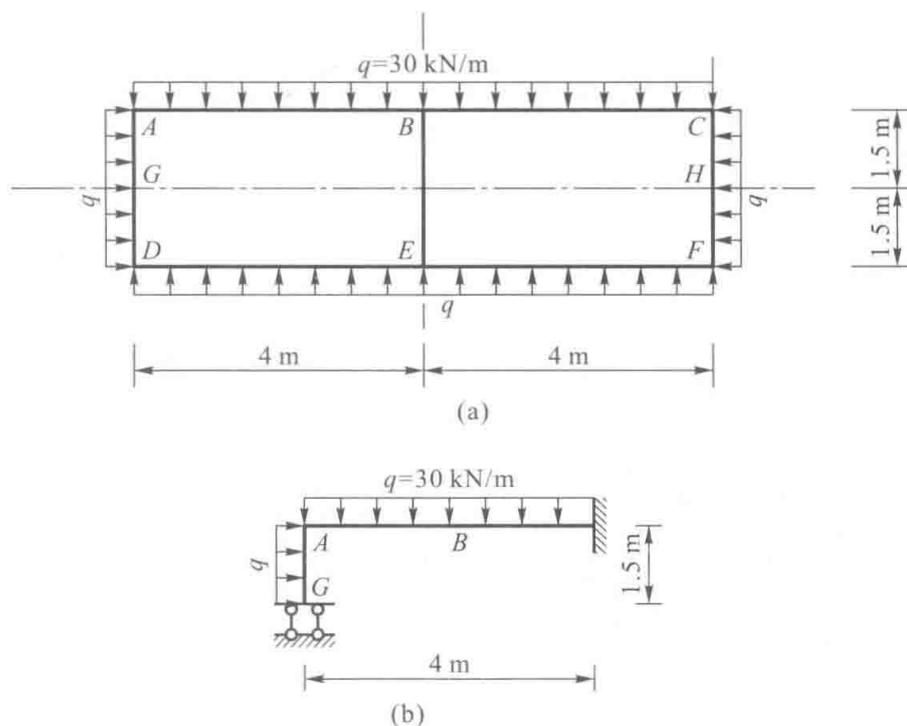


图 6-28

力矩分配法的计算过程见表 6-3, 绘出的弯矩图如图 6-29 所示。

表 6-3 杆端弯矩的计算

杆 端	GA	AG	AB	BA
分配系数		0.4	0.6	
固端弯矩	11.25	22.50	-40.00	40.00
分配与传递	-7.00	7.00	10.50	5.25
最后弯矩	4.25	29.50	-29.50	45.25

注:表中弯矩单位为 $\text{kN} \cdot \text{m}$ 。

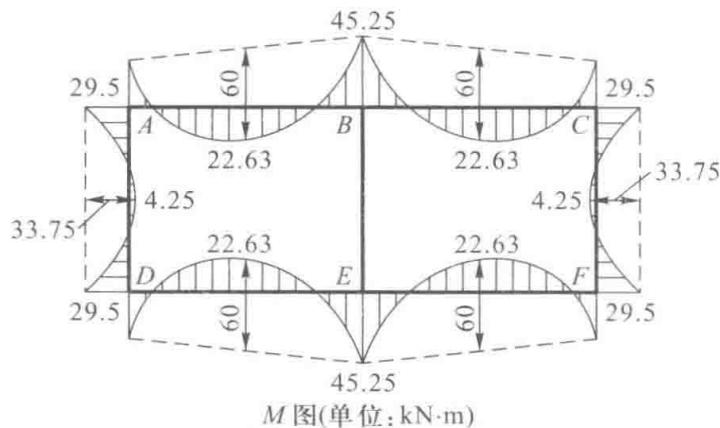
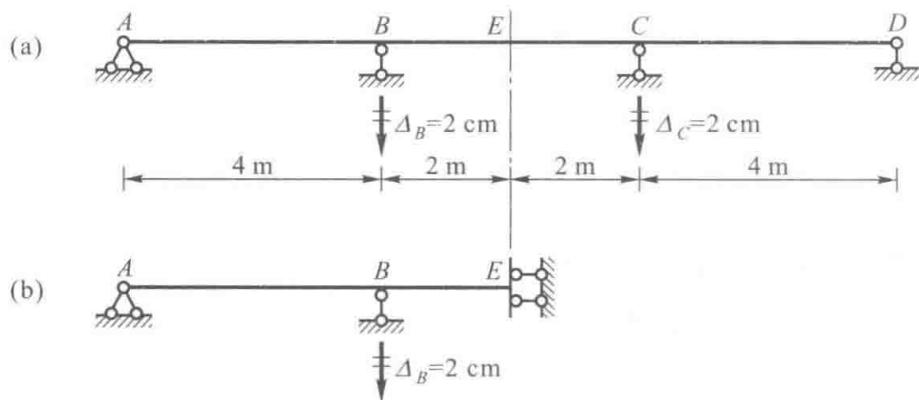


图 6-29

[例 6-8] 图 6-30a 所示对称的等截面连续梁, 支座 B 、 C 都向下发生 2cm 的线位移。试用力矩分配法计算该结构, 并作出其弯矩图。已知 $E=200\text{ GPa}$, $I=4\times 10^{-4}\text{ m}^4$ 。



分配系数		0.6	0.4	
固端弯矩	0	-300	0	0
分配与传递		180	120	-120
最后弯矩	0	-120	120	-120

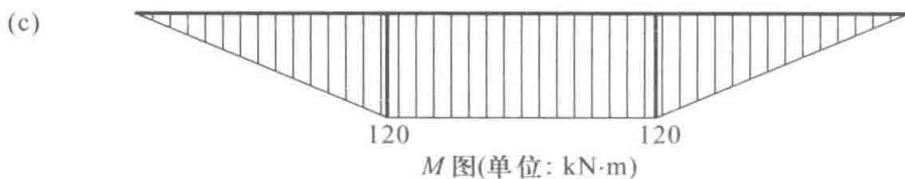
弯矩单位: $\text{kN}\cdot\text{m}$ 

图 6-30

解: 由于结构对称, 外因也正对称, 故可取结构的一半(图 6-30b)进行分析。

分配系数为

$$\mu_{BA} = \frac{3 \times \frac{EI}{4\text{ m}}}{3 \times \frac{EI}{4\text{ m}} + \frac{EI}{2\text{ m}}} = 0.6, \quad \mu_{BE} = \frac{\frac{EI}{2\text{ m}}}{3 \times \frac{EI}{4\text{ m}} + \frac{EI}{2\text{ m}}} = 0.4$$

当结点 B 被固定时,由于 B 支座沉陷在杆端引起的固端弯矩为

$$M_{BA}^F = -\frac{3EI}{l^2}\Delta = -\frac{3 \times 200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2 \times 4 \times 10^{-4} \text{ m}^4}{(4 \text{ m})^2} \times 2 \times 10^{-2} \text{ m} = -300 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{AB}^F = 0, \quad M_{BE}^F = 0, \quad M_{EB}^F = 0$$

其余计算见图 6-30b,弯矩图如图 6-30c 所示。

§ 6-7 超静定结构的受力和变形特点

一、超静定结构的特性

1. 超静定结构具有多余约束

从几何组成看,多余约束的存在是超静定结构有别于静定结构的主要特征。由于多余约束作用有相应的多余力,因此超静定结构的约束力和内力仅凭静力平衡条件不能确定,只有在考虑变形协调条件后,才能得到唯一的解答。

2. 超静定结构在撤除多余约束后,仍可维持几何不变

静定结构是几何不变且无多余约束的体系,只要撤除任何一个约束,它就成为几何可变的机构,从而失去承载能力。如图 6-31a 所示的静定桁架,若任意一根杆件(如杆 AB)破坏,结构即成为几何可变体系。

超静定结构则不然,当撤除部分或全部多余约束后,它仍为几何不变体系。例如,图 6-31b 所示超静定桁架,若任意一根杆件(如杆 AB)被破坏,它仍为几何不变体系,还有一定的承载能力。

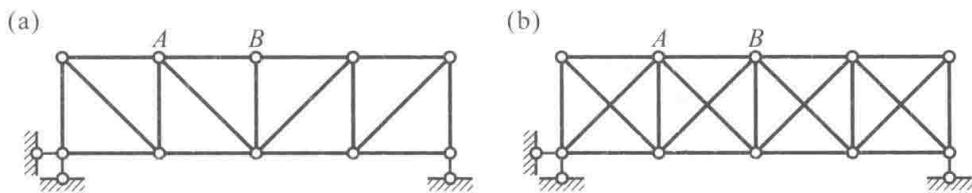


图 6-31

3. 超静定结构的内力和变形分布比较均匀

在荷载、跨度和刚度相同的情况下,可以从受力和变形两个方面,对单跨超静定梁(图 6-32a)与相应简支梁(图 6-32b)进行比较。受力方面,简支梁的各截面都承受正弯矩,梁下缘纤维受拉。超静定梁由于多余约束的存在,内力发生相应变化,梁上出现了弯矩为零的 C 、 D 两点, CD 范围内梁承受正弯矩,下缘纤维受拉;而 CD 范围外,梁承受负弯矩,上缘纤维受拉。超静定梁弯矩分布较相应的简支梁均匀,且其绝对值也较相应简支梁小。变形方面,参考弯矩图可画出两根梁的变形曲线,大致如图中虚线所示。简支梁因在全梁范围内下缘受拉,故变形曲线下凸。超静定梁 CD 范围内下缘受拉,故变形曲线下凸,而在 CD 范围外曲线上凸,变形和位移均小于前者。梁轴线上弯矩为零的点称为反弯点,变形曲线中对应下凸和上凸相连的拐点。将图 6-32a 与图 6-32b 比较,可以看出超静定梁弯矩分布较均匀,最大内力一般小于静定结构相应数值,变形也较小。

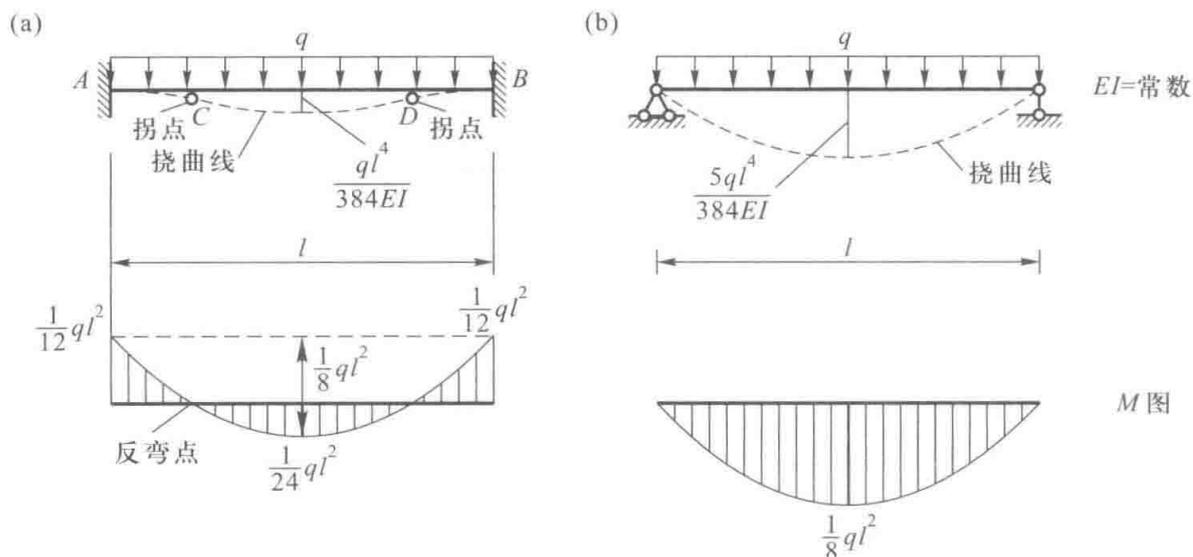


图 6-32

再如图 6-33a 所示三跨连续梁,从弯矩图和变形曲线可以看出,由于两个边跨的支承作用,中跨荷载 F_P 所产生的弯矩和变形都比较均匀。但对图 6-33b 所示的多跨静定梁,当承受同样的中跨荷载时,两个边跨由于中间铰的存在不能起到支承作用,所以弯矩和变形的分布就远没有图 6-33a 所示均匀。一般来说,由于超静定结构各部分的相互支承,它受力和变形的整体性更强,这种特性从结构设计角度来说是有利的。

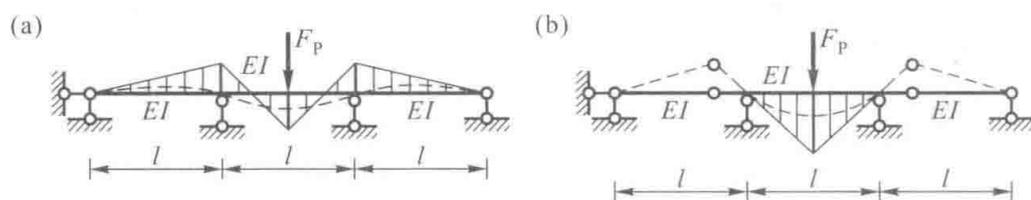


图 6-33

4. 超静定结构在荷载作用下的约束力和内力,仅与各杆刚度的相对值有关

静定结构的内力和约束力按静力平衡条件即可确定,其值与所用材料性质和截面尺寸无关。超静定结构的内力与结构的材料性质和截面尺寸有关。在荷载作用下,超静定结构的内力取决于各杆刚度的相对比值,而与其绝对值无关。故设计超静定结构时,需根据经验或参考同类结构的已有资料预先假设截面尺寸,定出各杆刚度比值,才能进行内力计算。然后,根据内力计算结果重新选择截面尺寸,若计算得出截面与预先假设截面相差悬殊,则需进行必要的调整。

根据这个特点,可以通过改变各杆刚度比值的方法,达到合理调整内力的目的。图 6-34a 为一次超静定刚架,用力法或位移法可求得横梁两端截面的弯矩绝对值为

$$M_c = M_d = \frac{ql^2}{4(2m+3)}$$

式中, $m = \frac{i_1}{i_2}$, $i_1 = \frac{E_1 I_1}{l}$, $i_2 = \frac{E_2 I_2}{h}$ 。绘出弯矩图如图 6-34b 所示。显然,这一端弯矩与梁柱线刚度比值 m 有关。当立柱短而粗,横梁细而长,即 $m \rightarrow 0$ 时,横梁两端类似固定端,其弯矩值接近

$\frac{1}{12}ql^2$, 跨中弯矩趋于 $\frac{1}{24}ql^2$ (图 6-34c)。反之, 当立柱细而长, 横梁短而粗, 即 $m \rightarrow \infty$ 时, 横梁近似

于两端铰结的简支梁, 端弯矩趋于零, 跨中弯矩接近于 $\frac{1}{8}ql^2$ (图 6-34d)。上述两种内力分布都

不够理想。若适当调整梁柱的截面尺寸(即改变梁柱的线刚度比值 m), 就有可能改善弯矩的分布, 使横梁跨中弯矩与立柱柱顶弯矩大体相等, 这样的内力状态比较合理。

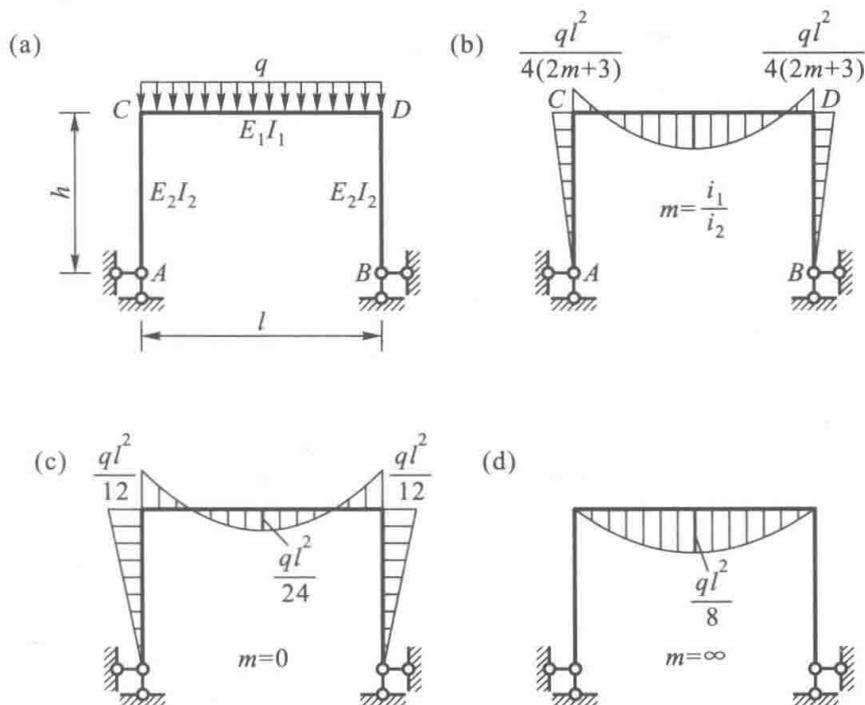


图 6-34

5. 超静定结构在温度变化和支座位移时产生的内力与各杆刚度的绝对值有关

除荷载外, 其他因素如温度变化、支座位移等均不会导致静定结构产生内力。但超静定结构由于存在多余约束, 当结构受到外因影响发生变形时, 会受到多余约束的限制而相应产生内力, 且内力的大小与各杆刚度的绝对值有关。

超静定结构的这一特性, 在一定条件下会带来不利影响, 例如连续梁可能由于地基不均匀沉降而产生过大的附加内力。但在另外的情况下又可能成为有利的方面, 例如可以通过改变支座高度来调整连续梁的内力, 使其得到更合理的分布。为了提高结构对温度变化和支座位移的抵抗能力, 靠增大截面尺寸不是有效的措施, 工程中常采用分缝的办法, 减少它们的影响。

二、计算超静定结构的基本方法

力法和位移法是计算超静定结构的基本方法, 但通常都需要建立和求解联立方程, 其基本未知量的多少往往是影响计算工作量的主要因素。一般说来, 凡多余约束多而结点位移少的结构, 采用位移法要比力法简便, 反之则力法优于位移法。此外, 由于单跨超静定梁的计算成果易于查找, 所以在计算典型方程的系数和自由项时, 位移法比力法要简单一些。

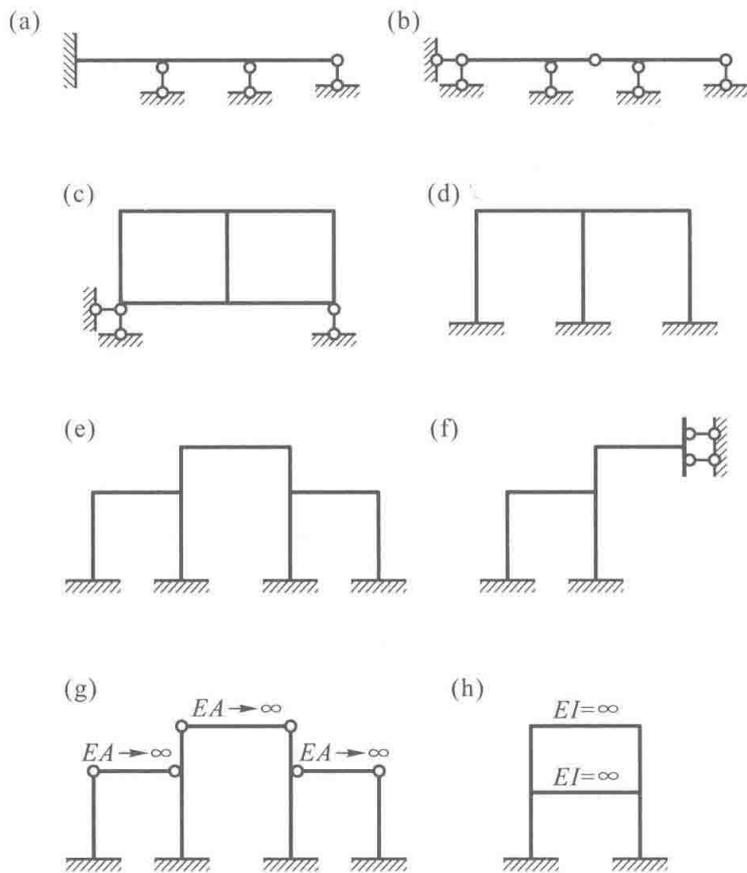
力矩分配法是位移法的变体, 它不必建立和解算联立方程, 能够直接计算杆端弯矩, 且适于手算。在计算机被广泛应用的今天, 力矩分配法仍有一定的实用价值。

思考题

1. 位移法的基本思路是什么? 为什么可以说位移法是建立在力法的基础之上?
2. 位移法的典型方程是平衡方程, 那么位移法是否可以只用平衡条件求解? 位移法满足了结构的位移条件(包括支承条件和变形协调条件)没有? 力法又是怎样满足结构的位移条件和平衡条件的?
3. 在什么条件下, 独立的结点线位移数目等于使相应铰结体系成为几何不变体系时所需添加的最少链杆数?
4. 对照建立位移法基本方程的两种不同途径, 说明其相互间的内在联系与不同之点。
5. 力法与位移法在原理与步骤上有何异同? 试将二者从基本未知量、基本结构、基本体系、典型方程、系数和自由项的含义和求法等方面做一全面比较。
6. 在什么情况下, 求超静定结构内力时可采用各杆刚度的相对值? 求结点位移时能否也采用各杆刚度的相对值?
7. 试证明: 无侧移(即无结点线位移)刚架只承受结点集中荷载时, 弯矩为零。
8. 什么是转动刚度? 什么是分配系数? 为什么汇交于同一刚结点各杆的分配系数之和等于1?
9. 什么是不平衡力偶? 如何计算不平衡力偶? 为什么要将它反号才能进行分配?
10. 试就图 6-26 中的计算过程, 说明结点 B 经过几次放松才消除了不平衡力偶。每次放松是否使该结点转动了同样大小的角度? 转动的方向是否相同?
11. 力矩分配法的计算过程中, 若仅是传递弯矩有误, 杆端最后弯矩能否满足结点的力矩平衡条件? 为什么?

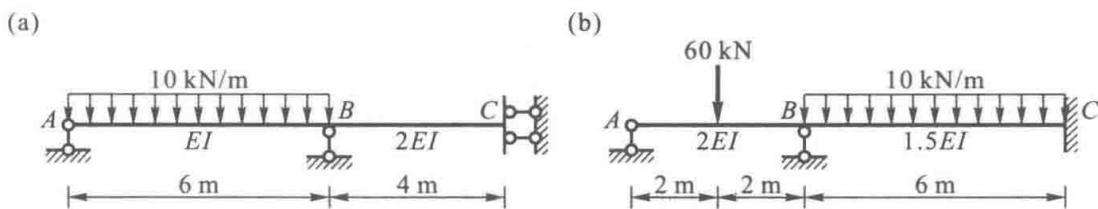
习题

6-1 试确定下列结构用位移法计算时的基本未知量。



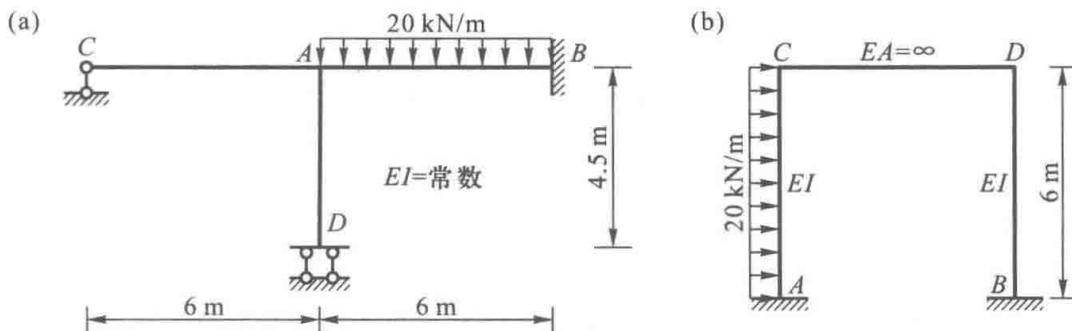
题 6-1 图

6-2 试用位移法计算图示连续梁,并绘出其弯矩图和剪力图。



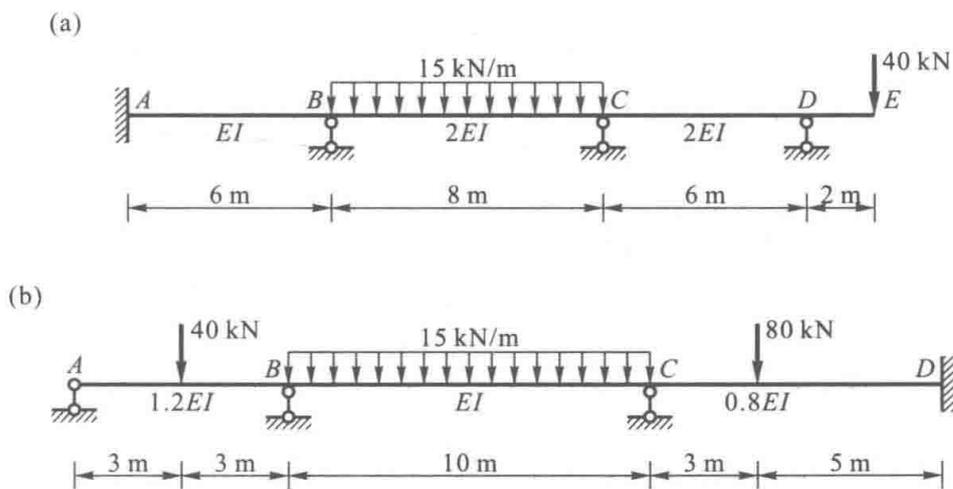
题 6-2 图

6-3 试用位移法计算图示结构,并绘出其弯矩图和剪力图。



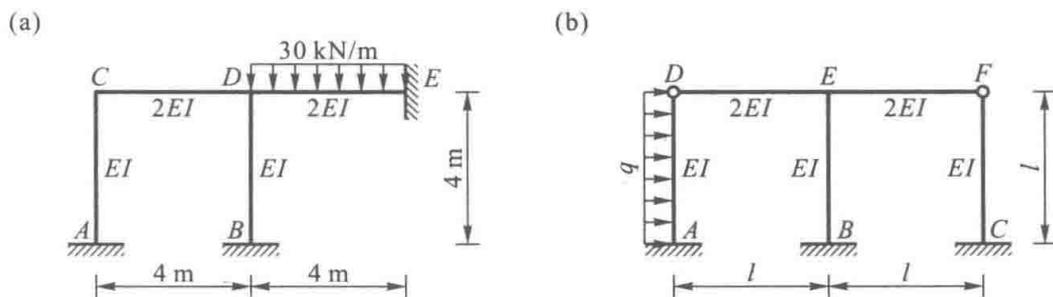
题 6-3 图

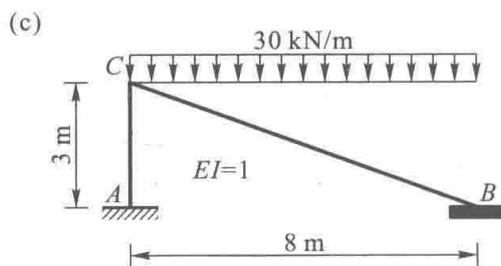
6-4 试用位移法计算图示连续梁,并绘出其弯矩图。



题 6-4 图

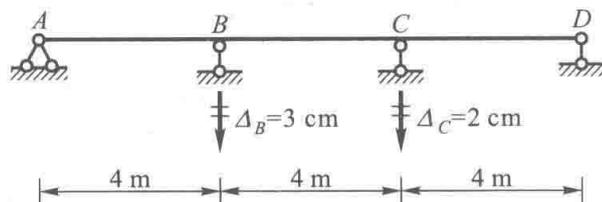
6-5 试用位移法计算图示刚架,并绘出其内力图。





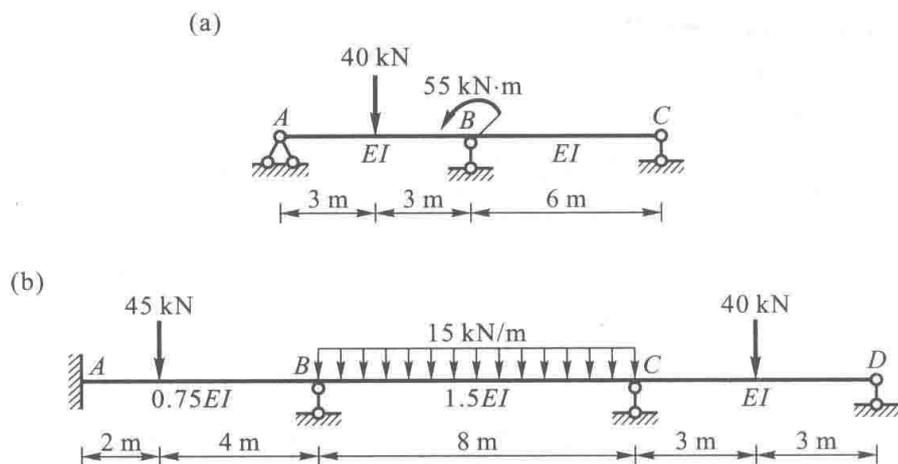
题 6-5 图

6-6 试用位移法计算图示等截面连续梁,梁的抗弯刚度 $EI=17\,500\text{ kN}\cdot\text{m}^2$, 支座 B 下沉 3 cm , 支座 C 下沉 2 cm , 绘出梁的弯矩图。



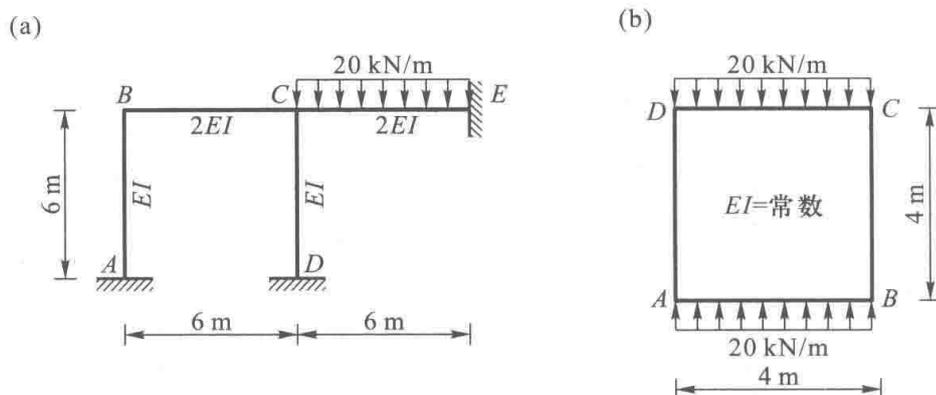
题 6-6 图

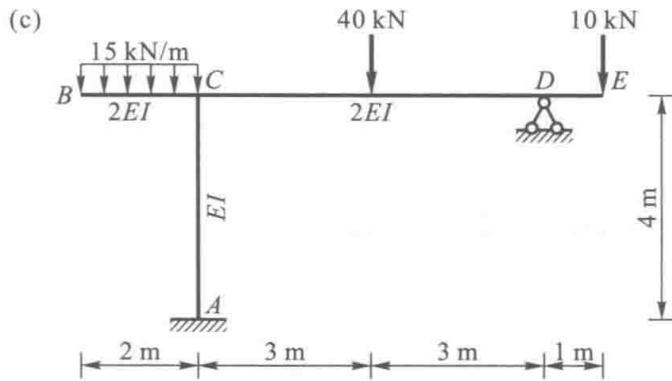
6-7 试用力矩分配法计算图示连续梁,绘出弯矩图和剪力图,并求支座 B 的约束力。



题 6-7 图

6-8 试用力矩分配法计算图示刚架,并绘出弯矩图。





题 6-8 图

6-9 用力矩分配法计算题 5-3b 和题 6-6。

习题部分答案

6-2 (a) $M_{BA} = 22.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$; (b) $M_{BA} = 36.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$

6-3 (a) $M_{AB} = -31.2 \text{ kN} \cdot \text{m}$; (b) $M_{AC} = -225 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $F_{QAC} = 97.5 \text{ kN}$

6-4 (a) $M_{BA} = 47.6 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_{CB} = 37.8 \text{ kN} \cdot \text{m}$; (b) $M_{BA} = 100.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_{CD} = -118.6 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_{DC} = 43.8 \text{ kN} \cdot \text{m}$

6-5 (a) $M_{DE} = -\frac{160}{7} \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_{ED} = \frac{340}{7} \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_{BD} = \frac{30}{7} \text{ kN} \cdot \text{m}$; (b) $M_{AD} = -\frac{11}{56} ql^2$, $M_{BE} = -\frac{1}{8} ql^2$, $M_{CF} =$

$-\frac{1}{14} ql^2$; (c) $M_{AC} = 59.2 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $F_{Ax} = 59.2 \text{ kN} (\rightarrow)$, $M_{BC} = 180.79 \text{ kN} \cdot \text{m}$

6-6 $M_{BA} = -65.625 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_{CD} = 0$

6-7 (a) $M_{BA} = -5 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_{BC} = -50 \text{ kN} \cdot \text{m}$; (b) $M_{AB} = -24.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_{CD} = -68.3 \text{ kN} \cdot \text{m}$

6-8 (a) $M_{BA} = -4.3 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_{CD} = 12.9 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_{EC} = 72.8 \text{ kN} \cdot \text{m}$; (b) $M_{AB} = 13.33 \text{ kN} \cdot \text{m}$;

(c) $M_{CA} = 5 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_{DC} = 10 \text{ kN} \cdot \text{m}$

*第7章

结构的计算简图和简化分析

§ 7-1 概述

结构设计主要涉及结构力学以下两个方面:将实际结构简化为理想的力学模型,即选取计算简图;对选取的计算简图进行力学分析,即计算内力、位移等。

前面各章主要介绍对结构进行力学分析的原理和方法,选取计算简图的基本知识只在第1章进行了扼要介绍。为加深对选取计算简图原则和方法的理解,并使读者掌握某些复杂杆件结构和非杆件结构的简化分析,本章将对结构的计算简图和简化分析做较深入的讨论,强化力学分析与工程实际之间的联系。选取计算简图的原则可归纳为:

- (1) 尽可能正确反映实际结构的主要工作性能,使计算结果可靠。
- (2) 必须抓住主要矛盾,忽略次要因素,力求计算简便。

前者是指选取计算简图时要从实际出发,全面考虑结构的整体布置和构造情况,了解结构的受力状态。后者是指对影响结构受力的诸多因素,要分清主次。选定计算简图的过程,是对结构的整体布置、实际构造以及受力状态进行分析和简化的过程,是分析矛盾、突出主要方面的过程。选择计算简图虽有一般的规律可循,但因影响计算简图的因素很多,所以应用中要特别注意灵活性。

实际结构往往比较复杂,通常由许多构件通过不同方式互相联结组成。对各种约束进行合理简化,是确定简图的主要问题,为此需要分析各种约束的特点。分析证明,决定约束性质的主要因素是结构各部分刚度的比值,即结构各部分的相对刚度,这是需要经常用到的重要概念。

以下先对杆件、支座和结点的简化做进一步论述,以便从不同方面讨论如何对实际结构进行简化和简化计算。

一、杆件的简化

杆件结构在用杆轴线代替杆件本身时,除曲杆需用曲线表示外,一般对微弯、微折或变截面的杆件,仍可用直线近似表示。

图 7-1a 所示排架的两个柱子都是阶梯形的变截面杆件,上柱和下柱的轴线不在同一直线上。为简化计算,根据柱顶的联结情况,可选用下柱轴线或上柱轴线作为全柱的轴线。当上柱柱顶为铰结并视横梁刚度为无穷大时(图 7-1b),因柱上荷载使柱子产生的内力与排架的跨度无关,所以取下柱轴线作为全柱的轴线;而当柱顶为刚结,柱的内力与屋面受力有关时,排架跨度取上柱轴线之间的距离,故应以上柱轴线作为全柱的轴线。

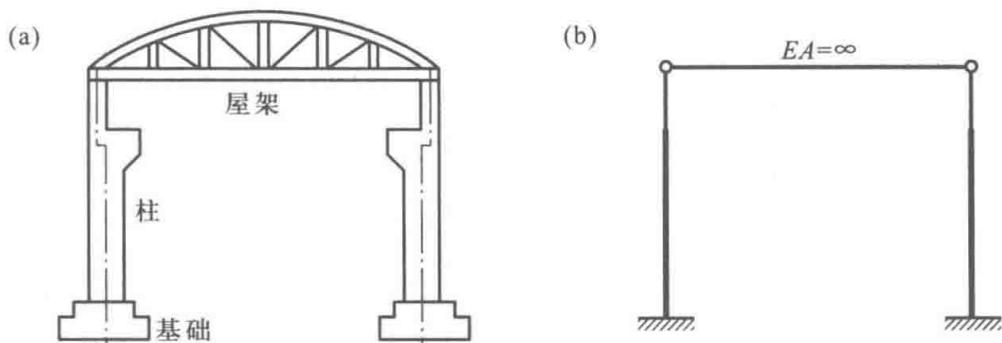


图 7-1

图 7-2a 所示刚架的杆件是变截面的,柱截面形心的连线虽为直线但方向并非竖直,梁截面形心的连线则不是直线。为简化计算,柱子的轴线可简化为通过柱底截面形心的竖向直线,横梁的轴线则近似以过横梁顶点截面形心,且平行于梁上缘的直线表示(图 7-2b)。值得注意的是,按以上简化求得的杆件内力,若非杆件实际截面形心处的内力,必须在将其转化为截面形心处的内力后(图 7-2c),才能按公式计算应力。

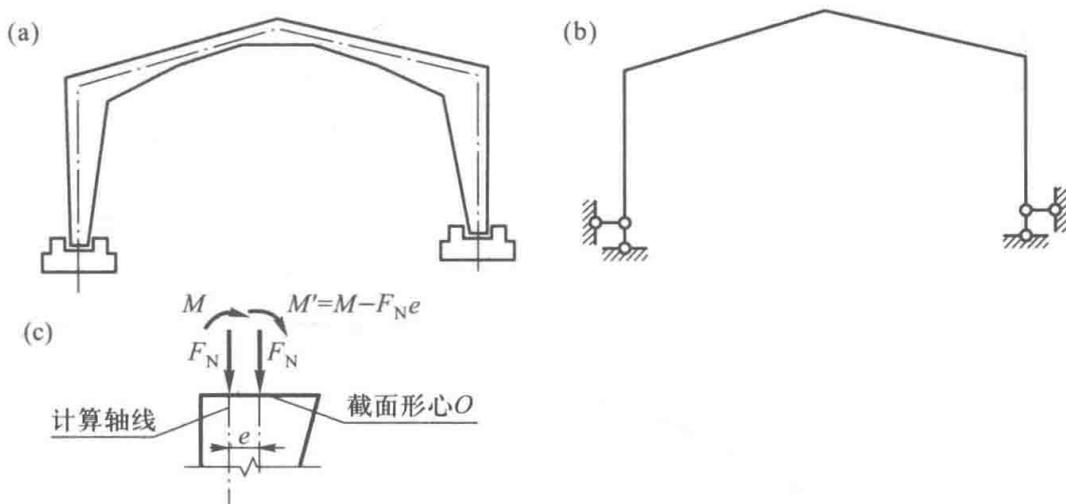


图 7-2

当结构某部分的刚度远大于其他部分时,常将此部分用一根刚性杆件代替,以简化计算。例如图 7-1a 所示排架,它的计算可分为两部分——屋架和柱。屋架在屋面荷载作用下,可按简支桁架计算,然后再叠加柱上水平荷载通过柱顶传给桁架下弦杆的轴力,即可得到屋架部分的内力。至于柱的计算,除由屋面荷载传来的压力外,主要承受作用于柱上的风荷载和吊车荷载。在考虑这部分荷载对柱的影响时,屋架仅起到在柱顶传递水平力的作用,相当于两端铰结的二力杆。由于屋架在水平方向的刚度远大于柱发生侧移的刚度,故计算柱的内力时,可将屋架简化为刚度无限大的直杆,其计算简图如 7-1b 所示。

又如图 7-3a 所示具有贮仓的刚架,由于贮仓部分的刚度很大(图 7-3b),为简化计算,可视此部分的刚度为无穷大,其计算简图如图 7-3c 所示。

二、支承的简化

结构的支座,除可简化为第一章所列举的四种刚性支座——活动铰支座、固定铰支座、固定

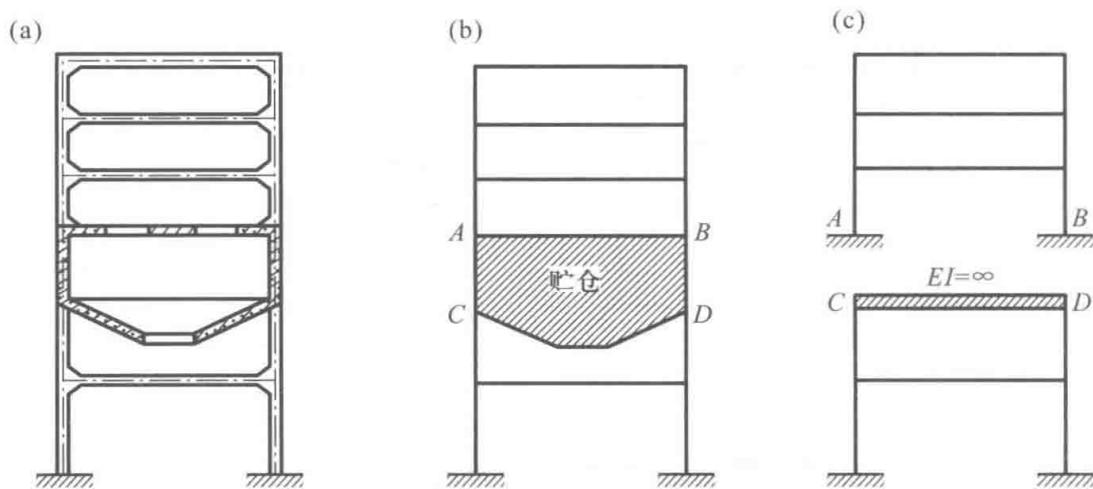


图 7-3

支座和定向支座外,还可简化为弹性支座。结构在荷载作用下,弹性支座既产生约束力又发生位移,且约束力与相应位移的比值保持不变。这个比值就是弹性支座的刚度系数,即支承发生单位位移所需的力。当支承刚度远大于或小于结构刚度时,支座视其具体情况简化为刚性支座是适宜的。但是,当支承刚度与结构刚度相近时,则将支座简化成弹性支座为宜。

为对结构的某一部分进行受力分析,常可将其从结构中单独取出,并将与它相邻的其余部分看作对该部分的弹性支承,支座的刚度则取决于相邻部分的刚度。当相邻部分的刚度远大于或小于所考虑部分的刚度时,这种支承还可进一步简化为理想的刚性支座。这样的处理方法,在结构计算中经常遇到,具体分析见后。

三、结点的简化

选取计算简图时,常将结构若干杆件交汇成的结合区简化为结点。结点通常分为铰结点和刚结点两种理想情况,以及由二者联合形成的组合结点。

结点的简化,除考虑结点的实际构造、杆件的受力特点以及杆件之间的相对刚度外,还应注意所得计算简图的几何组成特性。例如图 7-4a、b 所示钢筋混凝土结构,都只承受结点荷载。对于图 7-4a 所示结构,若将其所有结点取为铰结点,则得到铰结桁架的计算简图(图 7-4c),即

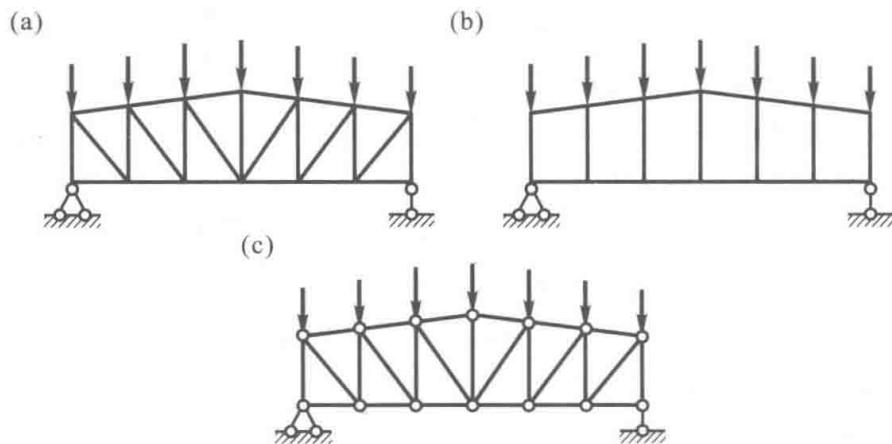


图 7-4

能保证其几何不变性。然而,对于图 7-4b 所示结构,如果将所有结点取为铰结点,就将成为几何可变体系,不能用作结构。由以上分析,可以发现桁架和刚架的又一个区别:桁架的几何不变性只依赖于杆件的合理布置,不必依靠结点的刚性实现;而刚架的几何不变性则不能离开结点的刚性。工程中的木屋架,由于结点的刚性难以得到保证,所以其计算简图多为桁架。

§ 7-2 将空间结构分解为平面结构

一、取平面单元计算

(1) 单层厂房(图 1-1)是一个空间结构,其平面布置如图 7-5 所示,它的横向是若干个由基础、柱子和屋架组成的排架(图 7-1a),排架沿厂房纵向一般按 6 m 等间距排列,各排架之间用纵向构件如屋面板、吊车梁、纵向支撑等相联。作用在厂房上的恒载和风、雪等荷载,一般沿纵向均匀分布。因此,可以取图 7-5 中阴影线所示部分作为计算单元,按排架(图 7-1b)进行计算。

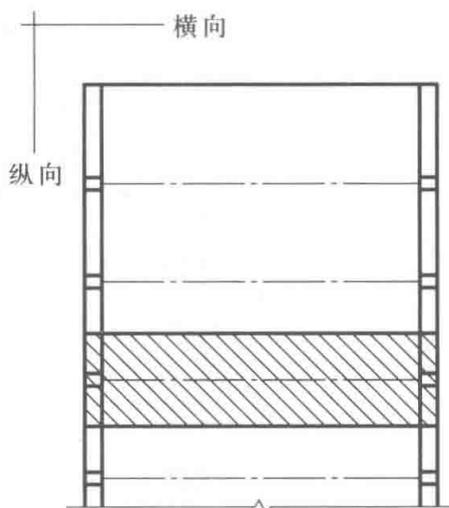


图 7-5

这样的简化,反映了厂房结构的主要受力特点,故常被采用。但当厂房结构的屋面刚度较大,而两端设置山墙时,结构整体刚性较强,如果仍按上述方法计算,则将引起较大误差。因此,更为精确的方法是考虑厂房结构的空间整体作用。

一般说来,如果空间结构包含多个平面单元,各平面单元间又存在空间联系,只要平面单元本身的刚度大而空间联系的刚度小,就可从空间结构中取出平面单元按平面结构计算。

(2) 图 7-6a 为多跨多层房屋的柱网平面布置,梁与柱组成空间刚架体系。从抵抗侧移来看,结构的横向刚度较小而纵向刚度较大。为保证结构的承载能力,通常取横向刚架(图 7-6b)进行计算,承受竖向荷载和横向水平荷载(风载和地震力)的作用。对纵向刚架(图 7-6c)一般只验算地震力的影响,由于迎风面积小而抵抗的柱子多,故纵向风载产生的内力可以忽略。

(3) 对于较长的隧道或者压力水管,因其横向截面的几何形状和尺寸相同,所受荷载沿纵向不变,故可用两个相邻的横截面取出一个单元按平面结构计算。例如,图 7-7a 和图 7-8a 是从隧洞衬砌和压力水管中取出的平面单元,图 7-7b 和图 7-8b 分别是其计算简图。

二、沿纵向和横向分别按平面结构计算

图 7-9 所示为水利工程中的钢筋混凝土 U 形渡槽,槽身两端简支在支墩或支架上(图 7-9a),横截面如图 7-9b 所示。槽身顶部沿纵向以间距 a 设置横杆,槽身底部做成平面放置在支墩上。U 形渡槽是一个柱形薄壳结构,设计时常用简化方法,设泊松比 $\mu = 0$,将其沿纵向和横向分别按平面结构计算。

沿纵向将整个槽身看作支承在支墩上的 U 形截面简支梁,梁上承受均布荷载(包括水重和自重),计算简图如图 7-9c 所示。由此可算出横截面内力,进行纵向配筋。

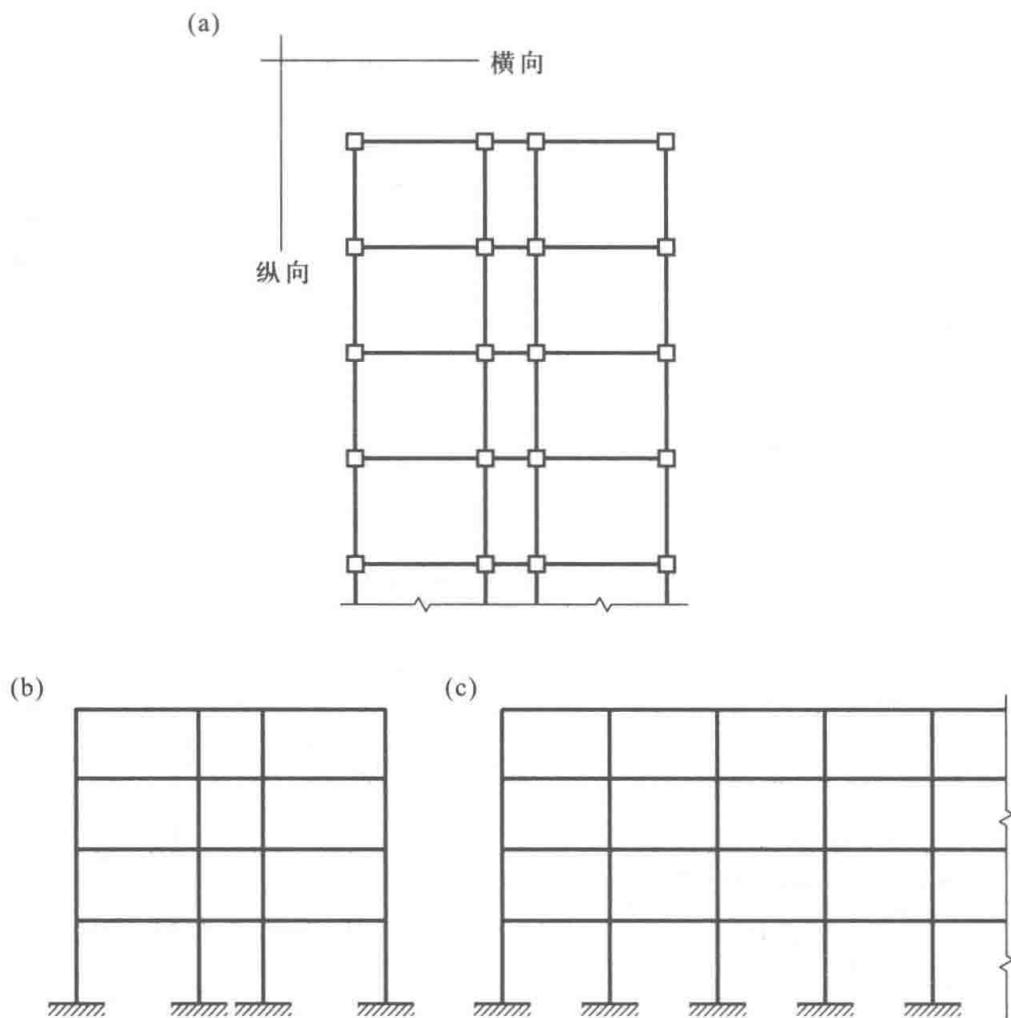


图 7-6

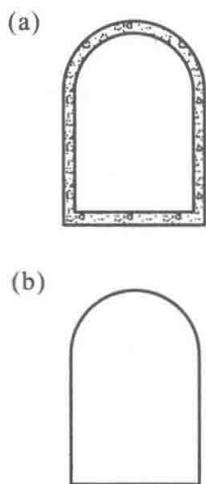


图 7-7

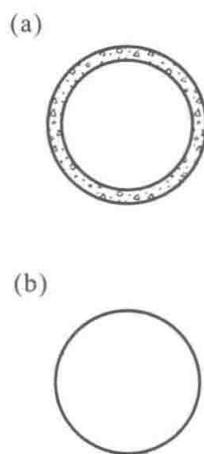


图 7-8

沿横向用两个横截面 I - I 和 II - II 截取一段槽身作为计算单元,计算简图如图 7-9d 所示,这是一个顶部有横杆的 U 形曲杆结构。计算单元上的作用力除水压力和自重(图中只画出了水压力)外,还有计算单元两端横截面上的切应力。分析时将两截面的切应力简化合成为图 7-9d 所示的力,其大小为两截面切应力合力之差,沿切线方向作用。用力法可算出曲杆的内力,据此进行环向配筋。

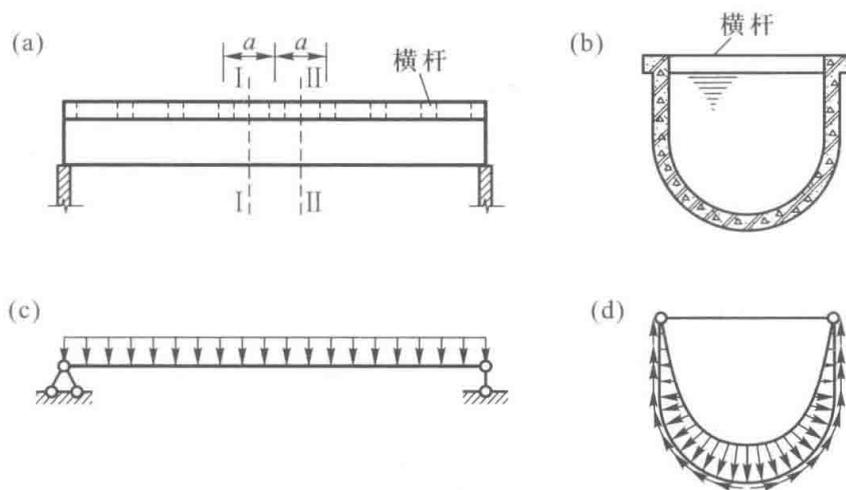


图 7-9

在给水处理工程的构筑物中,一些较大的过水槽也可仿此进行纵向和横向分析。

§ 7-3 将板壳结构简化为交叉体系

工程中的交叉梁系是一种常见的交叉体系,板壳结构有时可简化为交叉梁系进行分析。板壳结构是一种薄壁结构,又称为面结构。其平分厚度的面称为中面,板的中面为平面,壳的中面为曲面。土木工程中常采用板壳作为屋盖和楼盖的承重结构,水池等构筑物也都属于板壳结构。现仅就薄板做一分析。

一、矩形薄板的简化计算

图 7-10a 表示四边简支的矩形板,边长为 l_1 和 l_2 , 承受垂直于板面的均布横向荷载 q 。现用图中虚线所示的交叉梁系作为该板的计算简图,板所受荷载由交叉梁系沿两个方向传到支座。

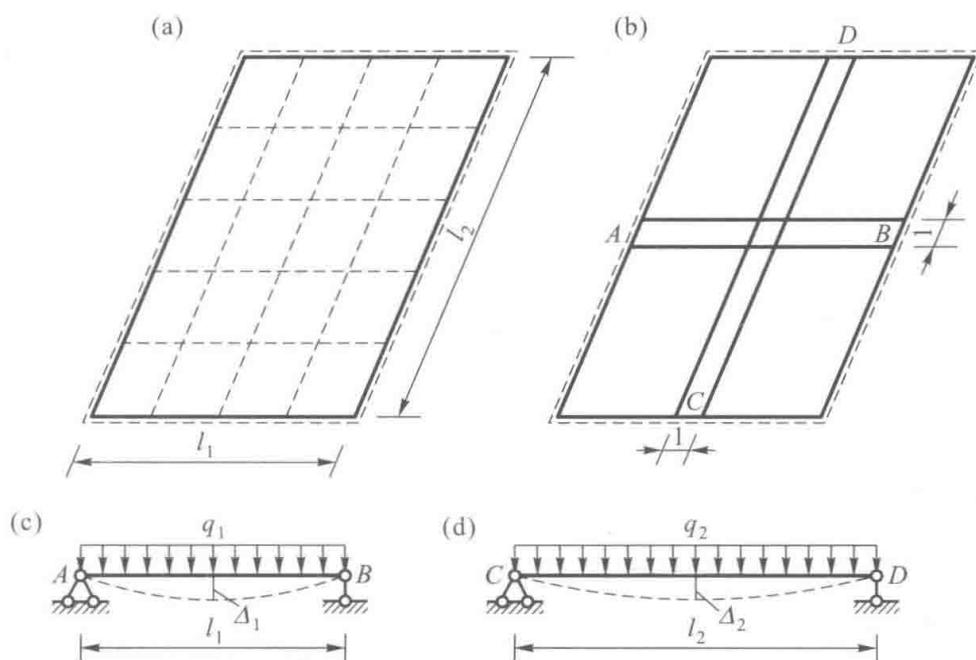


图 7-10

从板的中间部分取出交叉的两根梁 AB 和 CD (图 7-10b), 近似于承受均布荷载的简支梁。以 q_1 和 q_2 分别表示梁 AB 和 CD 所承受的荷载集度, 且 $q_1 + q_2 = q$; 以 I_1 和 I_2 分别表示梁 AB 和 CD 截面的惯性矩。两根梁跨中的挠度 (图 7-10c 和 d) 分别为

$$\Delta_1 = \frac{5q_1 l_1^4}{384EI_1}, \quad \Delta_2 = \frac{5q_2 l_2^4}{384EI_2} \quad (\text{a})$$

因两根梁的交叉处挠度应相等, 即 $\Delta_1 = \Delta_2$, 若 $I_1 = I_2$, 则由式 (a) 得

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{l_2^4}{l_1^4}$$

当 $l_2/l_1 > 2$ 时, $q_1 > 16q_2$, 即荷载 q 的 94% 以上将沿短边方向传递。设计中可近似认为荷载只沿短向传递, 长的方向不起作用。

从 $\Delta_1 = \Delta_2$ 分析刚度的影响, 可得

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{EI_1/l_1^4}{EI_2/l_2^4}$$

式中, $\frac{EI_1}{l_1^4}$ 和 $\frac{EI_2}{l_2^4}$ 反映了两个方向弯曲刚度的影响, 如果 $\frac{EI_1}{l_1^4} > \frac{EI_2}{l_2^4}$, 则 $q_1 > q_2$ 。由此得知, 荷载将沿刚度大的方向传递。如果两个方向的刚度相近, 则荷载为双向传递; 如果两个方向的刚度相差悬殊, 则荷载主要沿刚度大的方向传递。

根据以上分析, 设计中可把四边支承的矩形板分为两类:

- (1) 单向板。长边与短边之比大于 2, 板上荷载沿一个方向 (短边) 传至支座。
- (2) 双向板。长边与短边之比等于或小于 2, 板上荷载沿两个方向传至支座。

单向板可取单位宽度的板条作为计算单元, 按梁计算。双向板的分析属于弹性力学的薄板小挠度弯曲问题, 设计中采用编制成的表格计算其最大挠度和内力。

二、矩形水池池壁的简化计算

对于高为 h , 长边为 a , 短边为 b 的矩形水池, 设计中可根据池壁的长高比, 取不同的计算简图。现以单格矩形水池为例说明如下。

1. 双向板式水池

图 7-11 所示水池, 当池壁长高比为 $2.0 \geq \frac{a}{h} \geq 0.5, 2.0 \geq \frac{b}{h} \geq 0.5$ 时, 池壁将沿竖直和水平两个方向传力, 各池壁都应按双向板计算。这种池壁称为双向板式池壁, 工程中小容量贮水池、普通快滤池等均属这种情况。

2. 浅池

图 7-12a 所示水池, 当 $\frac{a}{h} > 3.0, \frac{b}{h} > 3.0$ 时, 壁上所受荷载主要沿竖向 (短边) 传递, 故可取单位宽度的竖条作为计算单元。因为底板刚度较池壁大得多, 所以计算简图是下端固定的竖向悬臂梁 (图 7-12c), 如果水池有顶盖, 则计算简图为下端固定上端铰支的单跨梁 (图 7-12d)。这种池壁称为挡土 (水) 墙式池

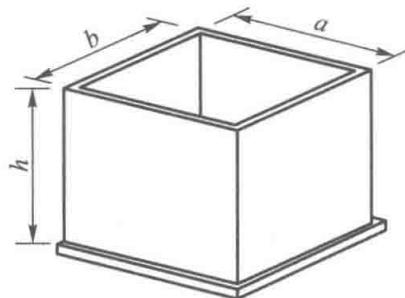


图 7-11

壁。大容量的矩形贮水池、平流沉淀池等属于这种情况。

图 7-12b 所示水池, 当 $\frac{a}{h} > 3.0, 2.0 \geq \frac{b}{h} \geq 0.5$ 时, 其短向池壁 (如 $ABDC$) 按双向板计算, 长向池壁 (如 $ACGF$) 按挡土墙式池壁计算。

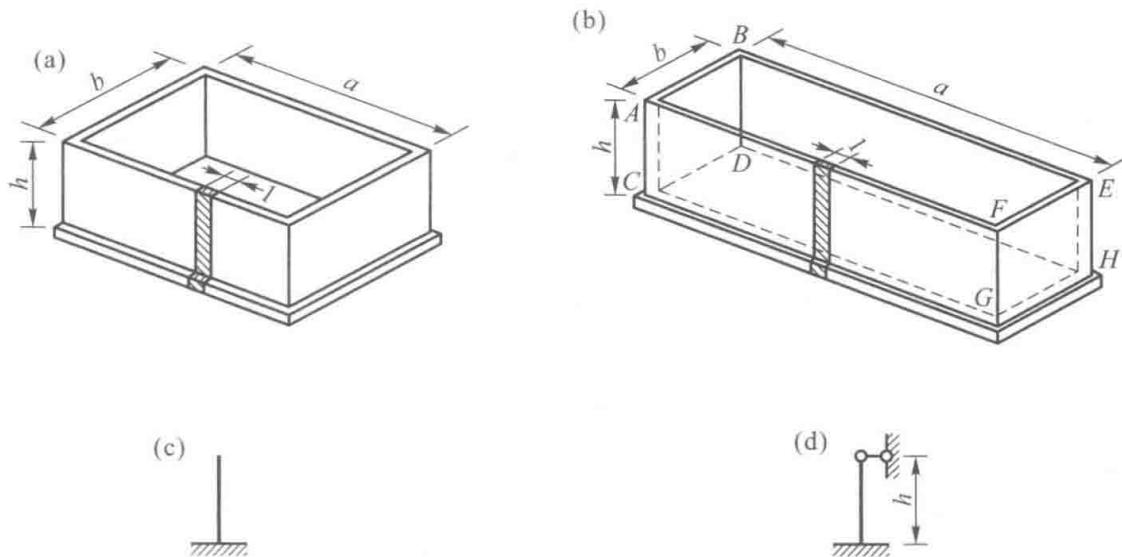


图 7-12

3. 深池

图 7-13a 所示水池, 当 $\frac{a}{h} < 0.5, \frac{b}{h} < 0.5$ 时, 池壁上主要沿水平方向 (短边) 传力。此时, 池高大于 $2a$ 的部分可截取单位高度的板带作为计算单元, 其计算简图是水平封闭刚架 (图 7-13b), 这种池壁称为水平刚架式池壁, 主要出现在矩形给水井和较深的矩形地下泵房中。池高小于 $2a$ 的下部应按双向板式池壁计算。

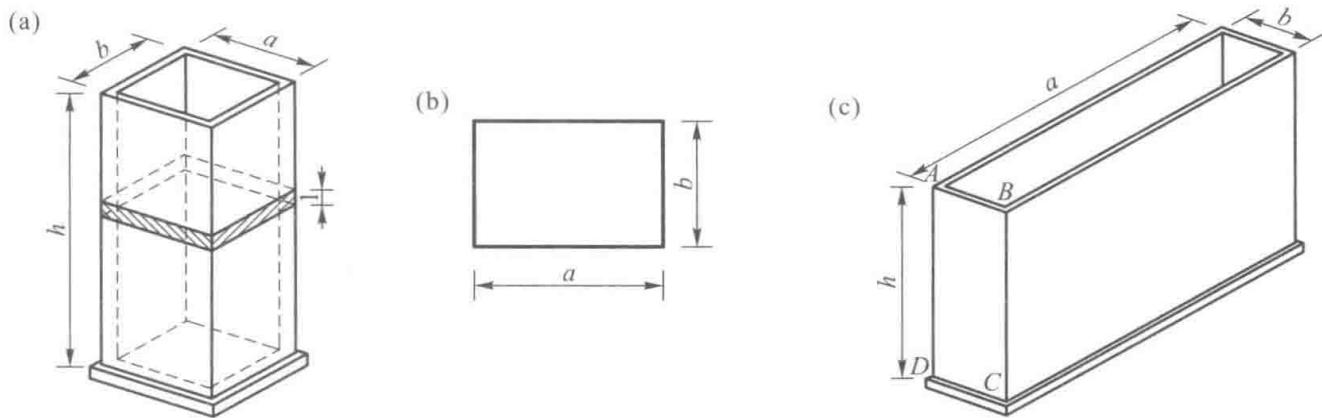


图 7-13

图 7-13c 所示水池, 当 $\frac{b}{h} < 0.5$ 而 $\frac{a}{h} > 0.5$ 时, 不能再按水平刚架计算。对于 $\frac{b}{h} < 0.5$ 的一面 (如 $ABCD$) 可按水平方向传力的单向板计算, 而较长的一面则需根据 $\frac{a}{h}$ 的具体数值按双向板式或挡土墙式池壁计算。

§ 7-4 将结构分解为基本部分和附属部分

超静定结构各部分间互为弹性支承,如果结构一部分刚度很大,而另一部分刚度很小,则可近似把刚度大的部分视为基本部分,把刚度小的部分视为附属部分。当荷载只作用在刚度大的部分时,刚度小的部分产生的内力很小,可略去不计。当荷载只作用在刚度小的部分时,刚度大的部分变形很小,可近似将它看作刚度小的部分的刚性支承。基本部分与附属部分的刚度相差越大,这种近似处理的结果就越精确。举例说明如下。

(1) 图 7-14a 所示两跨连续梁,若跨 AB 的线刚度比跨 BC 的线刚度大得多,则可将 AB 视为基本部分, BC 视为附属部分。当荷载只作用于跨 AB 时,跨 BC 的内力可忽略不计,跨 AB 可按图 7-14b 所示简图近似计算。当荷载只作用在跨 BC 内(图 7-14c),因跨 AB 变形很小,故跨 BC 可按左端固定右端铰支的单跨梁(图 7-14d)计算,在求得左端 B 的支座约束力后,再将其反向作用于跨 AB 的右端(图 7-14e),用以计算跨 AB 的内力。这种简化,只要 $\frac{i_1}{i_2} \geq 20$,其结果的误差将在 5% 以内,其中 $i_1 = EI_1/l_1$, $i_2 = EI_2/l_2$ 。

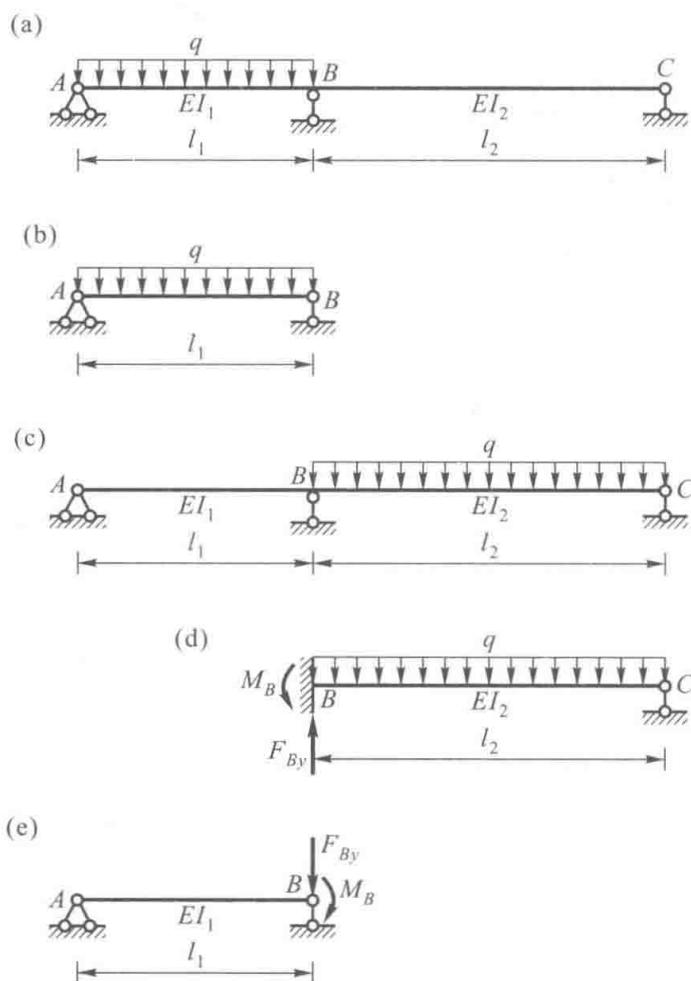


图 7-14

(2) 图 7-15a 所示厂房排架,右跨为主跨,左跨为附跨,如果主跨排架柱的刚度比附跨柱的刚度大得多,则可将主跨和附跨分开计算。首先计算附跨,这时主跨被当作附跨的刚性支承,若

忽略 C 点的线位移,将其作为附跨的固定铰支座,得到图 7-15b 所示的计算简图。在荷载 q 的作用下,求得附跨的内力和支座 C 处的约束力 F_{Cx} 、 F_{Cy} 。然后计算主跨(图 7-15c),主跨除承受本身荷载 F_P 外,还应在 C 点承受附跨传来的力 F_{Cx} 、 F_{Cy} ,再求主跨内力。

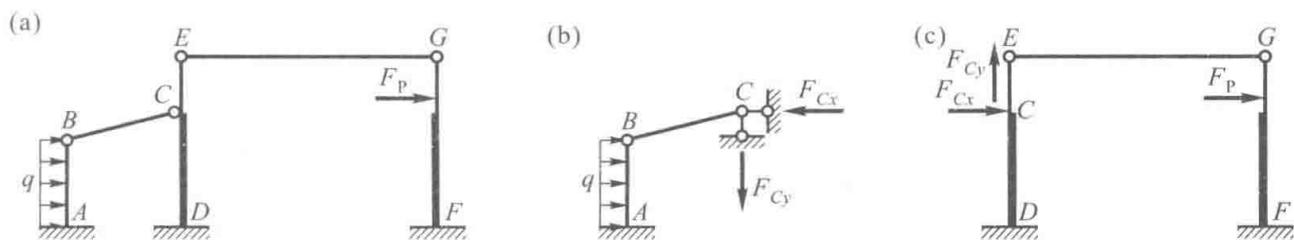


图 7-15

(3) 图 7-16a 所示由板、梁、柱组成的结构体系,称为肋形梁板结构,常用作房屋结构的屋盖、楼盖以及水池的顶盖。如果采用混凝土现场浇筑,板、梁、柱将形成一个整体。分析时考虑板的刚度比次梁小,次梁的刚度又比主梁小,因此可将板看作次梁的附属部分,再把板和次梁看作主梁的附属部分。将整个体系分解为板、次梁和主梁几类构件,然后分别进行计算。

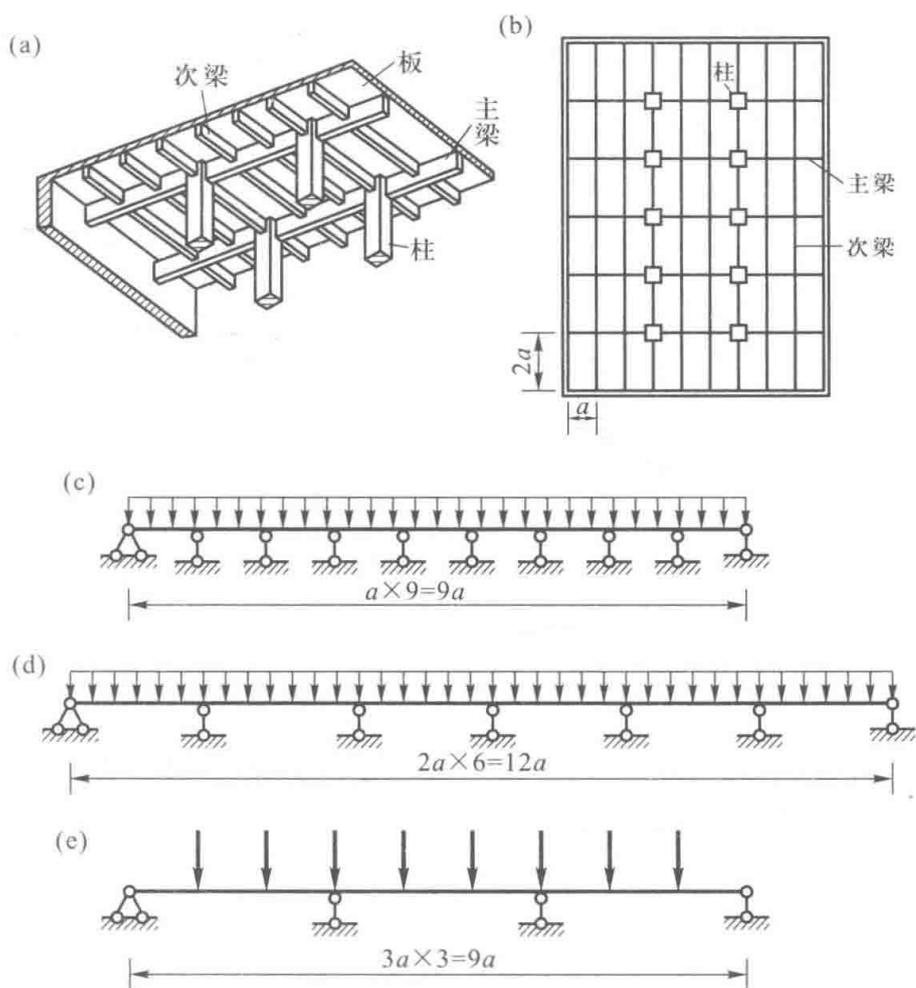


图 7-16

① 板。根据图 7-16b 的结构布置可知,板可按单向板计算,板上的荷载主要沿短跨方向传给次梁。因次梁是板的基本部分,可将其当作板的刚性支承,忽略次梁较小的抗扭刚度后,可把支承简化为链杆支座。据此,板的计算简图可取为以次梁为支承的连续梁(图 7-16c),梁取为单

位宽度的板带,它承受的荷载通常按均布荷载考虑。

② 次梁。分析次梁时,板作为附属部分只传递荷载,不起约束作用。而主梁是次梁的基本部分,将它看作次梁的刚性支承,忽略主梁的抗扭刚度后,次梁的计算简图可取为以主梁为支承的连续梁(图 7-16d)。所受荷载包括板传来的荷载和次梁的自重,按均布荷载考虑。

③ 主梁。板和次梁都是主梁的附属部分,只起传递荷载的作用。主梁所受荷载主要是由次梁传来的集中力,主梁的自重则近似化为在次梁位置作用的集中荷载。因主梁与柱属整体浇筑,故其内力按刚架计算较为合理。如果柱的抗弯刚度比主梁的抗弯刚度小得多,则可将柱看作主梁的铰支座,主梁仍可按连续梁计算(图 7-16e)。

实际计算表明,只要主梁线刚度与次梁线刚度的比值大于 8,则计算精度已能满足设计要求。

§ 7-5 忽略次要变形

将结构在荷载作用下产生的变形,区分为主要变形和次要变形,并将次要变形略去不计,这是对结构进行简化分析的又一有效途径。以前各章已多处采用过这一简化方法。例如,在计算梁和刚架的位移时,常略去剪切变形和轴向变形,而只考虑弯曲变形的影响,从而使计算大为简化。下面再从几个方面做进一步说明。

一、在局部荷载作用下忽略连续梁和无侧移刚架的远处变形

(1) 图 7-17a、b、c 分别表示每跨跨度和截面都相同的两跨、三跨、四跨连续梁在左端 A 作用单位力偶时的弯矩图。由图可见,相邻支点弯矩的传递系数约为 $\frac{1}{4}$,经两次传递后,弯矩已降至原值的 7% 左右。这说明,荷载对两跨以外的影响已经很小,可以忽略不计。因此,对于任意跨数的连续梁,如果仅有一跨承受荷载,就只需取出该跨和它左、右两边各两跨的五跨连续梁计算即可。

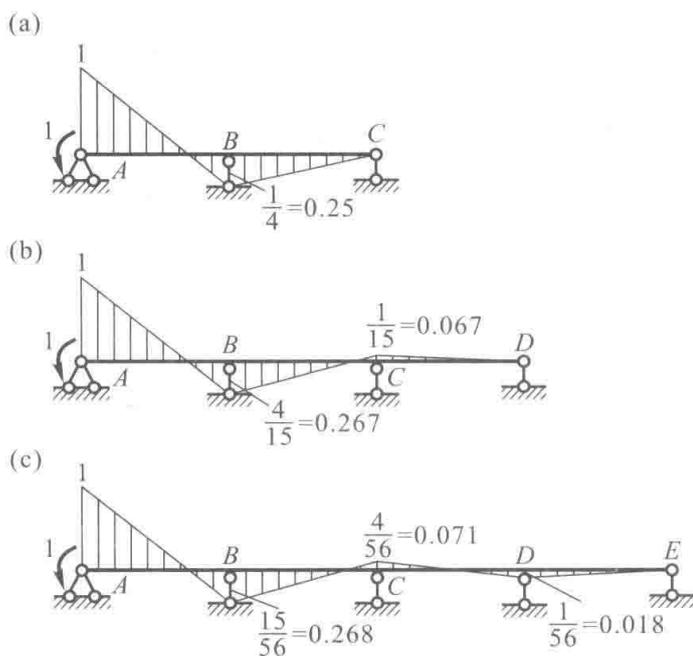


图 7-17

(2) 图 7-18a 为多跨多层无侧移刚架, 只在梁 AB 上局部承受荷载。由于远处变形迅速减小, 故可只取梁 AB 及其相邻各梁柱部分(图 7-18b) 做近似计算。考虑图 7-18b 所示双十字刚架中, 各梁柱的远端结点有一定转动而非固定支座, 可将除 AB 外其余各杆的线刚度都乘以 0.9, 并将传递系数由 $\frac{1}{2}$ 改为 $\frac{1}{3}$, 以做修正。

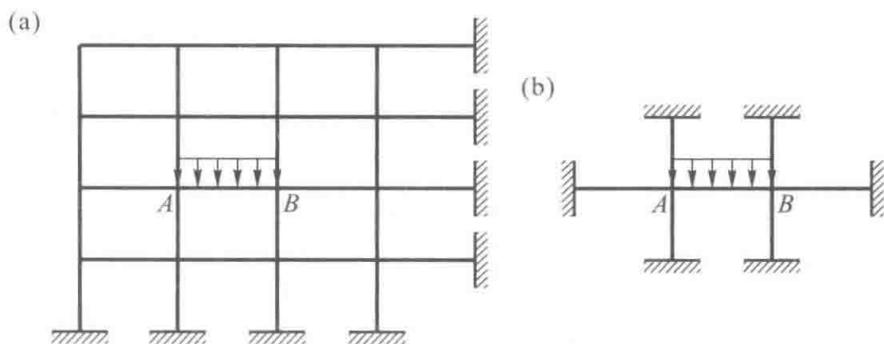


图 7-18

二、在竖向荷载作用下忽略刚架的侧移

有侧移刚架在竖向荷载作用下的侧移值一般较小, 可以略去不计。于是, 原刚架可简化成无结点线位移的刚架, 采用力矩分配法计算。一般说来, 凡刚架跨数较多, 接近对称, 或者横梁的相对刚度较大, 在竖向荷载作用下, 常可略去刚架侧移的影响。

对承受竖向荷载的多跨多层刚架, 工程上常采用分层计算法。例如图 7-19a 所示刚架, 可分为图 7-19b 所示的三个刚架, 分别用力矩分配法计算。除底层外, 其余各层的柱子都分属于相邻两层刚架, 其弯矩应由该两层刚架计算结果的叠加得出。此外, 同样将除底层外其余各层柱的线刚度乘以折减系数 0.9, 相应传递系数由 $\frac{1}{2}$ 改为 $\frac{1}{3}$, 以做修正。

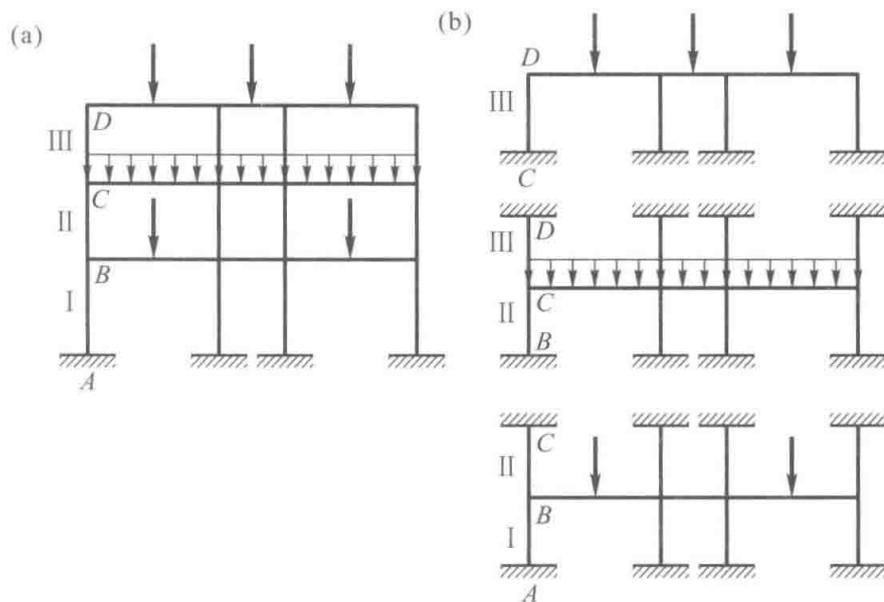


图 7-19

分层计算法所得的杆端弯矩,在各刚结点上是不平衡的,但误差一般不大,可对各结点的不平衡力偶做一次分配,但不再传递。

三、在水平荷载作用下忽略刚架的结点转角

承受水平结点荷载的多跨多层刚架(图 7-20a),如果横梁的刚度比立柱的刚度大得多,则刚架的特点是:结点的侧移为主要位移,而结点的转角是次要位移,各杆的剪力沿杆长不变,其弯矩图都是直线。工程上常采用反弯点法对此做近似计算,其基本精神是:不计结点转角这一次要位移,只考虑横梁的水平移动时,根据转角位移方程可知,各层立柱上下两端的弯矩都相等,于是反弯点(弯矩为零)位于各柱的中点,只要能将各柱剪力求出,则各柱端弯矩不难得到。

至于各柱的剪力,可利用位移法只考虑线位移基本未知量的情况,以包含横梁的部分结构为隔离体(图 7-20b),用剪力平衡条件建立方程后求得,这里不再赘述。

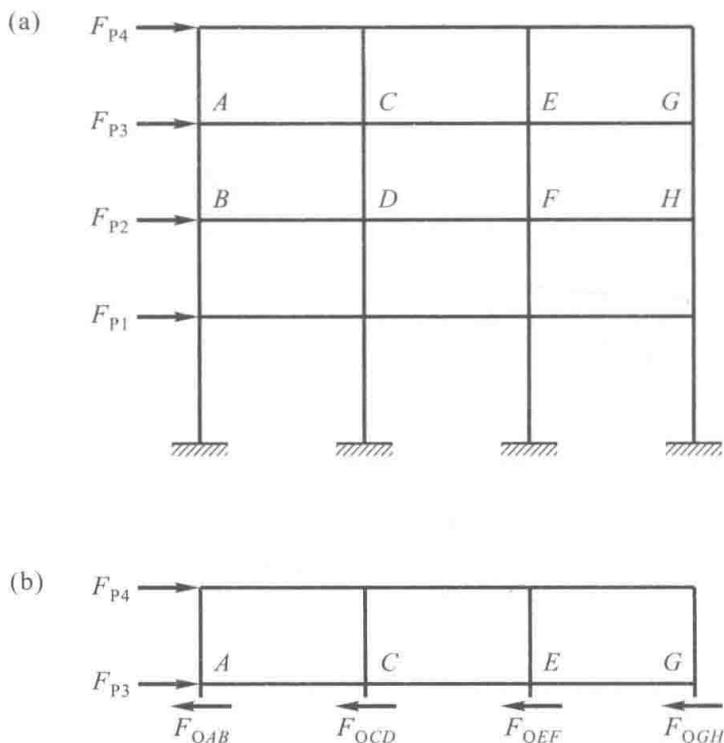


图 7-20

索引

(按汉语音字母排序)

B

不平衡力偶(out of balance couple moment) 127

C

层次图(laminar superposition diagram) 23
超静定次数(degree of indeterminacy) 83
超静定结构(statically indeterminate structure) 17
传递弯矩(carry-over bending moment) 126
传递系数(carry-over factor) 126
次内力(secondary internal force) 40

D

单铰(single hinge) 11
单位荷载法(unit load method) 59
动力荷载(dynamic load) 8
对称结构(symmetric structure) 91
多余力(redundant force) 80
多余约束(redundant restraint) 14

E

二力杆(tielink) 39

F

反弯点(inflexion point) 137
分配系数(distribution factor) 126
分配弯矩(distribution bending moment) 126
腹杆(web member) 40
附加刚臂(additive rigid arm) 120
附加链杆(additive bar) 120
附属部分(accessory part) 22
副系数(secondary coefficient) 87

G

刚度法(stiffness method) 124
刚度系数(stiffness coefficient) 124
刚片(rigid member) 11
刚性支座(rigid support) 146
高跨比(ratio of height to span) 33
拱顶(vault) 33
拱高(arch height) 33
拱趾(arch toe) 33
固端剪力(fixed-end shearing force) 97
固端弯矩(fixed-end moment) 97
广义力(generalized force) 55
广义位移(generalized displacement) 55

H

合理(拱)轴线(optimal center line of the arch) 38
恒载(dead load) 8
活载(live load) 8

J

基本部分(fundamental part) 22
基本结构(primary structure) 82
基本体系(primary system) 82
几何不变体系(geometrically unchangeable system) 10
几何可变体系(geometrically changeable system) 10
几何组成分析(analysis of geometrical stability) 10
简单桁架(simple truss) 40
角位移(rotation displacement) 53
节间(interval) 40
静定结构(statically determinate structure) 16
静力荷载(static load) 8

K

跨度 (span) 53

L

拉杆拱 (arch with tension bar) 33
 力法 (force method) 83
 力法典型方程 (canonical equations of force method) 87
 力矩分配法 (moment distribution method) 124
 力状态 (forcing state) 56
 联合桁架 (combined truss) 40
 零杆 (member without force) 43

P

平拱 (flat arch) 33

R

柔度法 (flexibility method) 124
 柔度系数 (flexibility coefficient) 124

S

上弦杆 (upper chord member) 40
 实际状态 (real state) 58
 竖杆 (vertical member) 40
 瞬变体系 (instantaneously changeable system) 13

T

弹性支座 (elastic support) 146
 图形相乘法 (method of graph multiplication) 66
 推力 (thrust) 32

W

外力虚功 (virtual work of external force) 56
 位移 (displacement) 53

位移法 (displacement method) 109
 位移法典型方程 (canonical equations of displacement method) 121
 位移状态 (displacement state) 56

X

下弦杆 (lower chord member) 40
 弦杆 (chord member) 40
 线刚度 (linear stiffness) 101
 线位移 (translation displacement) 53
 弦转角 (chord rotation) 104
 相对转动瞬心 (instantaneous center in relative rotation) 12
 斜杆 (skew bar) 40
 斜拱 (skew arch) 33
 虚功 (virtual work) 56
 虚功方程 (virtual work equation) 58
 虚功原理 (principle of virtual work) 57
 虚应变能 (virtual strain energy) 56
 虚铰 (virtual hinge) 12
 虚力原理 (principle of virtual force) 58
 虚拟状态 (dummy state) 58
 虚位移原理 (principle of virtual displacement) 58

Y

约束 (constraint) 11

Z

主内力 (principal internal forces) 40
 主系数 (principal coefficient) 87
 转动刚度 (rotational stiffness) 124
 转角位移方程 (slope-deflection equation) 104
 自由度 (degree of freedom) 10
 自由项 (freedom term) 87

主要参考文献

- [1] 杨蕪康,李家宝,洪范文,等.结构力学(上册)[M].6版.北京:高等教育出版社,2016.
- [2] 龙驭球,包世华,袁驷,等.结构力学 I ——基本教程[M].3版.北京:高等教育出版社,2012.

Synopsis

This book is a meticulous and painstaking revision on the basis of *structural mechanics* (third edition), the third volume of *Construction Mechanics*. The contents of the book are arranged according to the *Structural Mechanics Curriculum Requirements (Level B)* set by The Ministry of Education's National Advisory Sub-Committee of Fundamental Mechanics Teaching for Non-mechanics Major College Students.

The book consists of Introduction, Geometrical Composition Analysis, Internal Force Analysis of Statically Determinate Structures, Displacement Calculation of Statically Determinate Structures, Force Method, Displacement Method and Moment Distribution Method, Nomographic Charts and Reduced Analysis of Structures, as well as some exercises and questions for thought in each part. While conserving the features of the former editions, the new book puts more emphasis on the fundamental principles and elementary methods of structure mechanics, giving prominence to mechanical features and qualitative analysis of structures, and setting great store by training students' practical ability.

This book's second edition was rewarded in 1992 the Second Prize of Excellent Teaching Material for Colleges and Universities by the Ministry of Education. The contents in this book are intended to be literally concise, technically precise, logically coherent and practically available. The book is supposed to be a four-year-program textbook for students pursuing such non-mechanics majors as Architecture, Urban Planning, Water Supply and Drainage Engineering, Engineering Management, etc., and serve as a reference book for engineers and technicians concerned.

Contents

Chapter 1 Introduction

- § 1-1 The main objectives and contents of the course
- § 1-2 Computing models of Bar Structure
- § 1-3 Types of Bar Structure
- § 1-4 Load Classification

Chapter 2 Geometrical Composition Analysis

- § 2-1 Definition and objectives of geometrical composition analysis
- § 2-2 Simple composition rules for geometrical invariant system
- § 2-3 Examples of geometrical composition analysis
- § 2-4 Statically determinate and indeterminate Structures

Questions for thought

Exercises

Part of the keys to the exercises

Chapter 3 Internal Force Analysis of Statically Determinate Structure

- § 3-1 Bar internal force calculation
- § 3-2 Statically determinate beam
- § 3-3 Statically determinate frame
- § 3-4 Three-hinged arch
- § 3-5 Statically determinate truss
- § 3-6 Basic properties and internal force analysis of statically determinate structure

Questions for thought

Exercises

Part of the keys to the exercises

Chapter 4 Calculation of Statically Determinate Structural Displacement

- § 4-1 Definition of structural displacement

and virtual work

- § 4-2 Principle of virtual work for deformable body and Unit load method
- § 4-3 Displacement caused by loading
- § 4-4 Method of graph multiplication

Questions for thought

Exercises

Part of the keys to the exercises

Chapter 5 Force Method

- § 5-1 Definition of force method
- § 5-2 Typical equation of force method
- § 5-3 Force method for statically indeterminate frame
- § 5-4 Application of symmetry
- § 5-5 Internal force at bar end in uniform-section single-stride statically indeterminate beam

Questions for thought

Exercises

Part of the keys to the exercises

Chapter 6 Displacement Method and Moment Distribution Method

- § 6-1 Definition of displacement method
- § 6-2 Determination of unknown quantity for displacement method
- § 6-3 Calculation steps and examples of displacement method
- § 6-4 Typical equation of displacement method
- § 6-5 Definition of moment distribution method
- § 6-6 Continuous beam and non-node linear displacement frame calculation with moment distribution method
- § 6-7 Internal force analysis and deformation characteristics of statically indetermi-

nate structure

Questions for thought

Exercises

Part of the keys to the exercises

*** Chapter 7 Nomographic Chart and Reductive Analysis of Structure**

§ 7-1 General description

§ 7-2 Decomposition of space structure into plane structure

§ 7-3 Reduction of plate-shell structure into

cross system

§ 7-4 Decomposition of structure into fundamental parts and accessory parts

§ 7-5 Ignoring of lesser deformation

References

Index

Synopsis

Contents

A Brief Introduction to the author

主编简介



李家宝,1932年生,广西桂林人,湖南大学教授,曾任湖南大学副校长。1955年于中南土木建筑学院本科毕业,1962年于清华大学研究生毕业。

长期从事结构力学、弹性力学等课程的教学和科研工作,共出版教材和著作十几种。其中,由高等教育出版社出版的建筑力学第三分册《结构力学》(第2版)于1992年获国家教委第二届高等学校优秀教材二等奖,由高等教育出版社出版的《结构力学》(第3版)于1998年获国家机械工业局科学技术进步三等奖,“工科结构力学教学研究与教材建设”于1989年获优秀教学成果国家级优秀奖。

Images have been losslessly embedded. Information about the original file can be found in PDF attachments. Some stats (more in the PDF attachments):

```
{
  "filename": "MTQyNDI5NDQuemlw",
  "filename_decoded": "14242944.zip",
  "filesize": 16637645,
  "md5": "468e946ded258de461e9c6a53bf01c82",
  "header_md5": "658eec09a622b83ca8bab35aa77050a1",
  "sha1": "982c233e7a4badb833c840f80aa6876e98b0bbd5",
  "sha256": "501a5746232a0d9e1468dfe3609863cb92b501d702f8582d46caaf093b8217b9",
  "crc32": 1275023603,
  "zip_password": "",
  "uncompressed_size": 22665850,
  "pdg_dir_name": "\u255c\u00bf\u2553\u25a0\u2534\u00aa\u2564\u00ba \u2561\u250c\u255a\u00b2\u2556\u2553\u2593\u00df\u255c\u00df\u2563\u2563\u2534\u00aa\u2564\u00ba \u2561\u250c5\u2591\u00b5_14242944",
  "pdg_main_pages_found": 151,
  "pdg_main_pages_max": 151,
  "total_pages": 163,
  "total_pixels": 965878000,
  "pdf_generation_missing_pages": false
}
```