~~1.(1) $xy=\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{2}x^2\ 2y-5x=0$~~

变量分离方程 $\frac{dy}{dx}=f(x)\varphi(y)$

① $\varphi(y)=0$ $\frac{dy}{\varphi(y)}=f(x)dx$

$\int\frac{1}{\varphi(y)}dy=\int f(x)dx$ $G(x)=F(x)+C$

② $\varphi(y_i)=0$ $y\equiv y_i$ 是解

求特解：求出C 代入原通解

$\frac{dy}{dx}=p(x)y$ 通解 $y=ce^{\int p(x)dx}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$ $\frac{y}{x}=u$ 零次齐次式

① $\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$

a) $c_1=c_2=0$ $\frac{dy}{dx}=\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}}=g(\frac{y}{x})$

b) $\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}=0$ $\frac{dy}{dx}=f(a_2x+b_2y)$

令 $u=a_2x+b_2y$

$\frac{du}{dx}=a_2+b_2\frac{dy}{dx}=a_2+b_2f(u)$

c) $\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\neq0$

$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}\Rightarrow(\alpha,\beta)\neq(0,0)$

$\begin{cases}X=x-\alpha\\Y=y-\beta\end{cases}$ $\frac{dY}{dX}=\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}=g(\frac{Y}{X})$

$\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$ $u=ax+by+c$

$yf(xy)dx+xg(xy)dy=0$ $u=xy$

$x^2\frac{dy}{dx}=f(xy)$ $u=xy$

$\frac{dy}{dx}=xf(\frac{y}{x^2})$ $u\Rightarrow\frac{y}{x^2}$

$\frac{dy}{dx}=p(x)y+Q(x)$

$\Rightarrow y=c(x)e^{\int p(x)dx}$ 代入上式 $\Rightarrow\frac{dc(x)}{dx}$ 积分 $\Rightarrow c(x)$

∴ (1)通解 $y=e^{\int p(x)dx}\left(\int Q(x)e^{-\int p(x)dx}dx+\tilde{C}\right)$

伯努利方程

$\frac{dy}{dx}=p(x)y+Q(x)y^n$ $p(x)\cdot zy+Q(x)$ 接右下

1° 变量变换 $z=y^{1-n}$、$\frac{dz}{dx}=(1-n)p(x)z+(1-n)Q(x)$

2° 解线性方程 3° 变量还原

恰当方程 $M(x,y)$和$N(x,y)$在矩形区R中连续且一阶偏导
$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$. 恰当方程充要条件 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$

$d(xy)=xdy+ydx=0$ $d(\int f(x)dx+\int g(y)dy)=f(x)dx+g(y)dy=0$

$d(x^3y+xy^2)=(3x^2y+y^2)dx+(x^3+2xy)dy=0$

通解 $\int M(x,y)dx+\int[N-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx]dy=C$. C为常数

求解：(1) 不定积分：①是恰当方程 ② $u(x,y)=\int M(x,y)dx+\varphi(y)$

③ $\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$ 求$\varphi(y)$ ④ $u(x)=\int Mdx+\varphi(y)=C$

(2) 分项凑微分 $d(\ )=0$ $(\ )=C$

$ydx+xdy=d(xy)$ $\frac{ydx-xdy}{xy}=d(\ln|\frac{x}{y}|)$

$\frac{ydx-ydx}{y^2}=d(\frac{x}{y})$ $\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=d(\arctan\frac{x}{y})$

$\frac{-ydx+xdy}{x^2}=d(\frac{y}{x})$ $\frac{ydx-xdy}{x^2-y^2}=\frac{1}{2}d(\ln|\frac{x-y}{x+y}|)$

(3) 线积分法

$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}M(x,y)dx+N(x,y)dy$

$=\int_{x_0}^{x}M(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}N(x,y)dy=C$

$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0$. $\mu(x,y)$ 积分因子

只与x有关 $\frac{(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})}{N}=\psi(x)$ $\mu(x)=e^{\int\psi(x)dx}$

只与y有关 $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\varphi(x)$ $\mu(x)=e^{\int\varphi(x)dx}$

求 $x''+x=\underbrace{\frac{1}{\cos t}}_{=f(t)}$ 的通解、齐次方程基本解组为 $\cos t$. $\sin t$.

$\begin{cases}C_1'(t)x_1+x_2\cdot C_2'(t)+\cdots x_nC_n'(t)=0\\ \vdots\\ C_1'(t)x_1^{(n-1)}+\cdots\cdots+x_n^{(n-1)}C_n'(t)=f(t)\end{cases}$

$\Rightarrow C_1'(t)$. $C_2'(t)\Rightarrow C_1(t)$. $C_2(t)=t+C_2$

∴ $x(t)=C_1(t)\cdot x_1+C_2(t)x_2+\cdots$

非齐次 $tx''-x'=t^2$

⇓ $tx''-x'=0$

齐次 $\frac{x''}{x'}=\frac{1}{t}$

⇓

x $x'=C_1t\Rightarrow x=C_1t^2+C_2$

$x'=\begin{bmatrix}3&5\\-5&3\end{bmatrix}x$

$A=\begin{bmatrix}3&5\\-5&3\end{bmatrix}$ 特征方程 $\det(\lambda E-A)=\begin{bmatrix}\lambda-3&-5\\5&\lambda-3\end{bmatrix}=\lambda^2-6\lambda+34=0 \Rightarrow \lambda_1=3+5i$

$\lambda_2=3-5i$

对$\lambda_1=3+5i$ 对应的特征向量 $u=(u_1,u_2)^T$ 满足 $(\lambda E-A)u=\begin{bmatrix}5i&-5\\5&5i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}=0$

$\Rightarrow u=\alpha\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$. $\alpha\neq0$

$\lambda_2=3-5i$ $\quad v=(v_1,v_2)^T$ 满足 $(\lambda E-A)u=\begin{bmatrix}-5i&-5\\5&-5i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}=0$

$\Rightarrow v=\beta\begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix}$ $\beta\neq0$

$x'=\begin{bmatrix}3&5\\-5&3\end{bmatrix}x$ 的解为

$x_1=e^{3+5i}\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$ $\quad x_2=e^{3-5i}\begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix}$

$x_1=e^{(3+5i)t}\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}=e^{3t}(\cos5t+i\sin5t)\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}=e^{3t}\begin{bmatrix}\cos5t+i\sin5t\\-\sin5t+i\cos5t\end{bmatrix}$

$=e^{3t}\begin{bmatrix}\cos5t\\-\sin5t\end{bmatrix}+ie^{3t}\begin{bmatrix}\sin5t\\\cos5t\end{bmatrix}$

故可得实解 $\tilde{x}_1=e^{3t}\begin{bmatrix}\cos5t\\-\sin5t\end{bmatrix}$ $\quad \tilde{x}_2=e^{3t}\begin{bmatrix}\sin5t\\\cos5t\end{bmatrix}$

若实系数线性齐次方程组有复数 $x(t)=u(t)+iv(t)$

则其实部 $u(t)$ 和虚部 $v(t)$ 都是 $x'=Ax$ 的解

基解矩阵的计算方法

$A\Rightarrow\lambda_i\Rightarrow v_i$

$\Phi(t)=[e^{\lambda_1 t}v_1, e^{\lambda_2 t}v_2,\cdots e^{\lambda_n t}v_n]$

$-\infty<t<\infty$

是常系数线性微分方程组 $x'=Ax$ 的一个基解矩阵

标准基解矩阵 $\exp At=\Phi(t)\cdot\Phi^{-1}(0)$

任意特解 $\varphi(t)=\exp At\cdot C$

令 $t=0\Rightarrow C=\varphi(0)$

计算 $x'=Ax$ 的通解

① 算特征值 λ_i

② 算 ~~方程~~ 向量 v_i

③ 基解矩阵 $\Phi(t)$

④ 通解 $\varphi(t)=\Phi(t)\cdot C$

将初值问题 $x''+2x'-8tx=e^t$

$x(0)=1 \quad x'(0)=-4$ 化为与之等价的一阶微分方程组

令设 $x_1(t)=x \quad x_2(t)=x'$

$x_2'=x''=-2x_2+8tx_1+e^t$

$$\begin{cases} x_1'= x_2 \\ x_2'=8tx_1-2x_2+e^t \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8t & -2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

n阶线性微分方程 → n个一阶线性微分方程组.构成方程组

$A(t)$是$n\times n$阶矩阵函数. $f(t)$是n维列向量 $a\le t\le b$上连续的. 且对$\forall t_0\in[a,b]$及任一n维常向量 $\eta=(\eta_1,\eta_2\cdots\eta_n)^T$ 初值问题

$$\begin{cases} x'=A(t)x+f(t) \\ x(t_0)=\eta \end{cases}$$

在区间 $a\le t\le b$上存在唯一解 $x=\varphi(t)$

函数向量组线性相关与无关

不全为0的系数使 $\sum C_i x_m(t)=0 \Rightarrow$ 相关

全为0的系数 $=0 \Rightarrow$ 无关

$$C_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$-\infty<t<\infty \qquad \begin{vmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{vmatrix}=$ ___ $\quad \therefore$ 线性 $C_1 . C_2 . C_3$ 一样

$x_1(t)、x_2(t)\cdots x_n(t)$在 $a\le t\le b$ 线性相关 则

Wronsky 行列式 $W(t)\equiv 0 \quad a\le t\le b$

$$x_1(t)=\begin{pmatrix}x_{11}(t)\\ \vdots \\ x_{n1}(t)\end{pmatrix} \quad \hookrightarrow \begin{vmatrix}x_{11}(t)&\cdots&x_{1n}(t)\\ \vdots&&\vdots\\ x_{n1}(t)&\cdots&x_{nn}(t)\end{vmatrix}$$

$\frac{dx}{dt}=A(t)\cdot x$: 线性相关 $\Leftrightarrow W(t)\equiv 0$

若 $W(t_0)\ne 0 \Rightarrow$ 线性无关

(某一点) $W(t)\ne 0 \Leftrightarrow x_1(t)\cdots x_n(t)$是n个解

线性无关 $\Rightarrow W(t)\ne 0 \quad a\le t\le b$

$\frac{dx}{dt}=A(t)\cdot x$: 存在n个线性无关的解

1. $x_1(t) \quad x_2(t)\cdots x_n(t)$ 是(5.15) n个线性无关的解

(1) $x(t)=\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t)$ 是通解

(2) $x(t)$ 均可表示为 $x_1(t),x_2(t)\cdots x_n(t)$的线性组合

2、线性无关解的最大个数等于n

n个线性无关解 $x_1(t)、x_2(t)\cdots x_n(t)$为基本解组

注: 基本解组不唯一.

所有解的集合构成一个n维线性空间

矩阵的列[a,b]是 $\frac{dx}{dt}=A(t)\cdot x$ 的线性无关解组

则称该解矩阵是基解矩阵

基本解组 $\varphi_1(t)\cdots\varphi_n(t)$为列构成的矩阵$\Phi(t)=[\varphi_1(t)\cdots\varphi_n(t)]$

验证是基解矩阵. 首先代入成立 ⇒ 解矩阵

计算 $\det\Phi(t)=|\Phi(t)|=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=1\times4-2\times3\ne0 \quad \therefore$ 是基解矩阵

① C是非奇异 $n\times n$ $\Phi(t)$基解矩阵 则$\Phi(t)\cdot C$ 是基解矩阵

② $\Psi(t)$ $\Phi(t)$基解矩阵, $\Psi(t)=\Phi(t)\cdot C$ C非奇异

$\Phi(t)=\begin{bmatrix}e^t & e^{3t}\\ -e^t & e^{3t}\end{bmatrix}$ 是 $x'=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}x$ 基解矩阵. 并求其通解.

$\varphi_1(t)=$ ↓ $\quad$ ↓$\varphi_2(t)$ $\qquad \varphi_1'(t)=\begin{bmatrix}e^t\\-e^t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^t\\-e^t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\varphi_1(t)$

因此 $\varphi_1(t)$ $\varphi_2(t)$是解 即$\Phi(t)$为解矩阵

又$\because \det\Phi(t)=2e^{4t}\ne0$

故$\Phi(t)$是基解矩阵. 其通解 $x=\Phi(t)\cdot C=[\ ]\begin{bmatrix}C_1\\C_2\end{bmatrix}=$

$\Phi(t)$是 $\frac{dx}{dt}=A(t)x$ 的基解矩阵

$\bar\varphi(t)$是 $\frac{dx}{dt}=A(t)x+f(t)$ 的某一解

$\varphi(t)=\Phi(t)C+\bar\varphi(t)$ $\quad$ C是确定的常数列向量

$\frac{dx}{dt}=A(t)\cdot x+f(t)$

$\phi(t)=\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)f(s)\,ds,\ t_0\ t\in[a,b]$

~~1.(1) $xy=\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{2}x^2\ 2y-5x=0$~~

变量分离方程 $\frac{dy}{dx}=f(x)\varphi(y)$

① $\varphi(y)\neq0$ $\quad \frac{dy}{\varphi(y)}=f(x)dx$

$\int\frac{1}{\varphi(y)}dy=\int f(x)dx \quad G(x)=F(x)+C$

② $\varphi(y_i)=0$ $\quad y\equiv y_i$ 是解

求特解：求出C 代入原通解

$\frac{dy}{dx}=P(x)y$ 通解 $y=ce^{\int P(x)dx}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x} \quad \frac{y}{x}=u$ 零次齐次式

① $\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$

a) $c_1=c_2=0 \quad \frac{dy}{dx}=\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}}=g(\frac{y}{x})$

b) $\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}=0 \quad \frac{dy}{dx}=f(a_2x+b_2y)$

令 $u=a_2x+b_2y$

$\frac{du}{dx}=a_2+b_2\frac{dy}{dx}=a_2+b_2f(u)$

c) $\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\neq0$

$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases} \Rightarrow(\alpha,\beta)\neq(0,0)$

$\begin{cases}X=x-\alpha\\Y=y-\beta\end{cases} \quad \frac{dY}{dX}=\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}=g(\frac{Y}{X})$

$\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c) \quad u=ax+by+c$

$yf(xy)dx+xg(xy)dy=0 \quad u=xy$

$x^2\frac{dy}{dx}=f(xy) \quad u=xy$

$\frac{dy}{dx}=xf(\frac{y}{x^2}) \quad u\Rightarrow\frac{y}{x^2}$

$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)$

$\Rightarrow y=c(x)e^{\int P(x)dx}$ 代入上式 $\Rightarrow \frac{dc(x)}{dx}\xrightarrow{\text{积分}}c(x)$

$\therefore$ (1)通解 $y=e^{\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx+\tilde{C}\right)$

伯努利方程

$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)y^n \qquad P(x)\cdot zy+Q(x)$ 接左下

1° 变量变换 $z=y^{1-n}$、$\frac{dz}{dx}=(1-n)P(x)z+(1-n)Q(x)$

2° 解线性方程 3° 变量还原

恰当方程 $M(x,y)$和$N(x,y)$在矩形区R中连续且一阶偏导 ✓

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$. 恰当方程充要条件 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$

$d(xy)=xdy+ydx=0 \quad d(\int f(x)dx+\int g(y)dy)=f(x)dx+g(y)dy=0$

$d(x^3y+xy^2)=(3x^2y+y^2)dx+(x^3+2xy)dy=0$

通解 $\int M(x,y)dx+\int[N-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx]dy=C$. C为常数

求解：(1) 不定积分：① 是恰当方程 ② $u(x,y)=\int M(x,y)dx+\varphi(y)$

③ $\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$ 求$\varphi(y)$ ④ $u(x)=\int Mdx+\varphi(y)=C$

(2) 分项凑微分. $d(\quad)=0 \rightarrow (\quad)=C$

$ydx+xdy=d(xy) \qquad \frac{ydx-xdy}{xy}=d(\ln|\frac{x}{y}|)$

$\frac{ydx-ydx}{y^2}=d(\frac{x}{y}) \qquad \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=d(\arctan\frac{x}{y})$

$\frac{-ydx+xdy}{x^2}=d(\frac{y}{x}) \qquad \frac{ydx-xdy}{x^2-y^2}=\frac{1}{2}d(\ln|\frac{x-y}{x+y}|)$

(3) 线积分法

$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}M(x,y)dx+N(x,y)dy$

$=\int_{x_0}^{x}M(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}N(x,y)dy=C$

$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0$. $\mu(x,y)$ 积分因子

只与x有关 $\frac{(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})}{N}=\psi(x) \quad \mu(x)=e^{\int\psi(x)dx}$

只与y有关 $\frac{(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})}{-M}=\varphi(x) \quad \mu(x)=e^{\int\varphi(x)dx}$

求 $x''+x=\underset{=f(t)}{\frac{1}{\cos t}}$ 的通解、齐次方程基本解组为 cost. sint.

$\begin{cases}C_1'(t)x_1+x_2C_2'(t)+\cdots x_nC_n'(t)=0\\ \vdots\\ C_1'(t)x_1^{(n-1)}+\cdots\cdots+x_n^{(n-1)}C_n'(t)=f(t)\end{cases}$

$\Rightarrow C_1'(t).\ C_2'(t)\Rightarrow C_1(t).\ C_2(t)=t+C_2$

$\therefore$通解 $x(t)=C_1(t)\cdot x_1+C_2(t)x_2+\cdots$

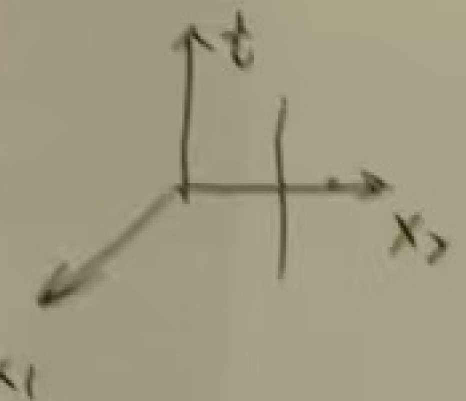
非齐次 $tx''-x'=t^2$

$\Downarrow \quad tx''-x'=0$

齐次 $\frac{x''}{x'}=\frac{1}{t}$

$\Downarrow$

$x \quad x'=C_1t\Rightarrow x=C_1t^2+C_2$



$t\in(-\infty,+\infty)$

$x(t)=x_0$

定常解

奇点(平衡点)

0　1　$y=-x$

-2　-3　$y=x'$

-1　1

-2　-4

$\frac{dx}{dt}=f(x)$　~~$f(x)=0$~~　$\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -2 & -3-\lambda\end{vmatrix}$

x_0是 的奇点的充要条件 $f(x_0)=0$

奇点对应平衡位置，即静止不动的状态

$-\lambda(-3-\lambda)+2$
$=\lambda^2+3\lambda+2=0$　$\lambda=-1$　$\lambda=-2$

1) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=ax+by\\ \frac{dy}{dt}=cx+dy\end{cases}$　坐标原点奇点

若 $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\neq0$ 奇点唯一

$\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{bmatrix}$

特征方程 $\begin{vmatrix}a-\lambda & b\\ c & d-\lambda\end{vmatrix}$

线性变换 不改变奇点的位置，不引起相平面上轨线性态的改变，而且奇点类型也保持不变 (5.1-13)

2.12)

同号相异实根

$\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix}$　$\frac{d\xi}{dt}=\lambda_1\xi$　$\frac{d\eta}{dt}=\lambda_2\eta$

$\xi(t)=Ae^{\lambda_1 t}$　$\eta(t)=Be^{\lambda_2 t}$ (λ_1,λ_2特根)

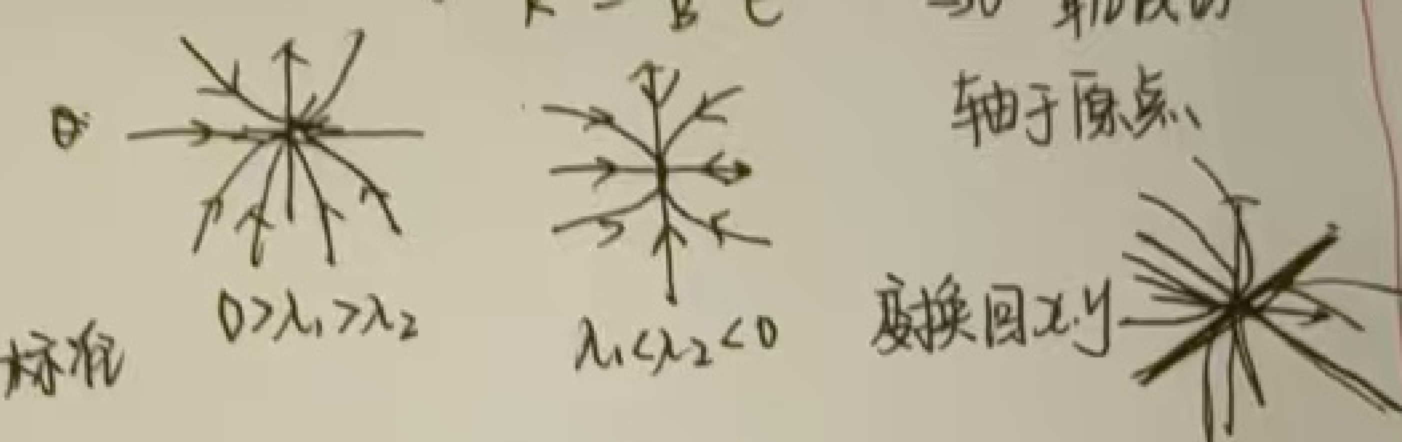
① $\lambda_1<0$ $\lambda_2<0$，零解渐稳定

② $B=0$时 ξ左右半轴轨线

③ $A=0$ η上下

④ $A\cdot B\neq0$　$\lambda_1>\lambda_2$时 $k=\frac{\eta(t)}{\xi(t)}=\frac{B}{A}e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}\to0$

$\lambda_1<\lambda_2$时 $k=\frac{A}{B}e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\to0$ 轨线切η轴于原点



除两条轨线外，其余轨线均同一方向切于原点，称此类奇点为结点。

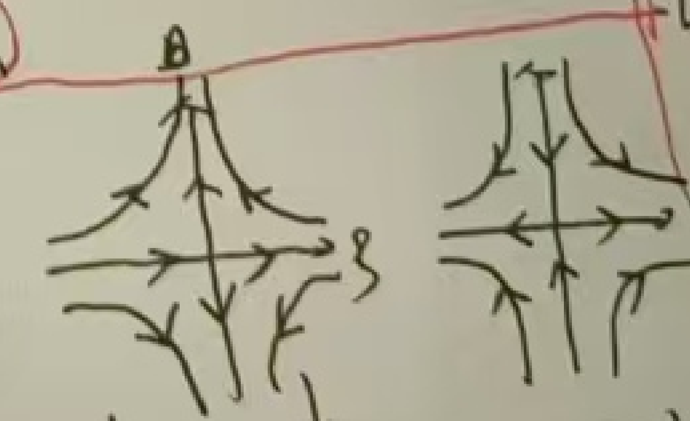
① 当$\lambda_1<0$ $\lambda_2<0$ ⇒ 稳定结点 (渐零解)

② $\lambda_1>0$ $\lambda_2>0$ 轨线当$t\to-\infty$时趋于原点，称奇点为不稳定结点

异号实根

$\frac{d\xi}{dt}=\lambda_1\xi$　$\frac{d\eta}{dt}=\lambda_2\eta$

$\xi(t)=Ae^{\lambda_1 t}$　$\eta(t)=Be^{\lambda_2 t}$



①当 $B=0$ 时 ξ轴左右半轴为轨线

$A=0$时 η上下半轴

② λ_1 λ_2符号相异 其中一轴趋于原点 另一轴远离原点

鞍点 不稳定

~~$A\neq B$~~ $A\cdot B\neq0$　$\lambda_1<0<\lambda_2$ $t\to+\infty$ $\xi(t)\to0$ $\eta(t)\to\infty$

$\lambda_1>0>\lambda_2$ $t\to+\infty$ $\xi(t)\to\infty$ $\eta(t)\to0$

重根

$\frac{d\xi}{dt}=\lambda\xi+\eta$　$\frac{d\eta}{dt}=\lambda\eta$　$\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$

(1) $\xi(t)=(At+B)e^{\lambda t}$　$\eta(t)=Ae^{\lambda t}$

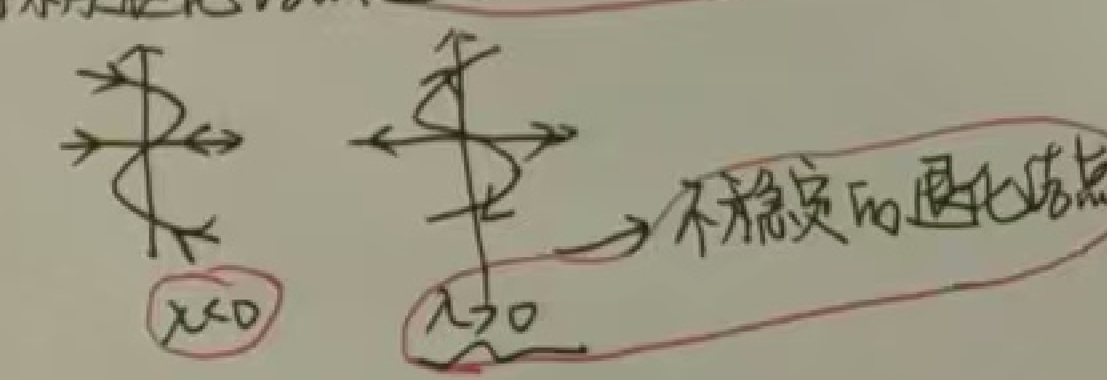
① $\lambda<0$　$t\to+\infty$　$\xi(t)\to0$　$\eta(t)\to0$ 零解稳

② $A=0$ ξ左右半轴

$A\neq0$　$\frac{\eta(t)}{\xi(t)}=\frac{A}{At+B}\to0$

$t=-\frac{B}{A}$ $\xi(t)=0$ 越过η轴切ξ轴于原点，

称为退化结点，退化的稳定结点

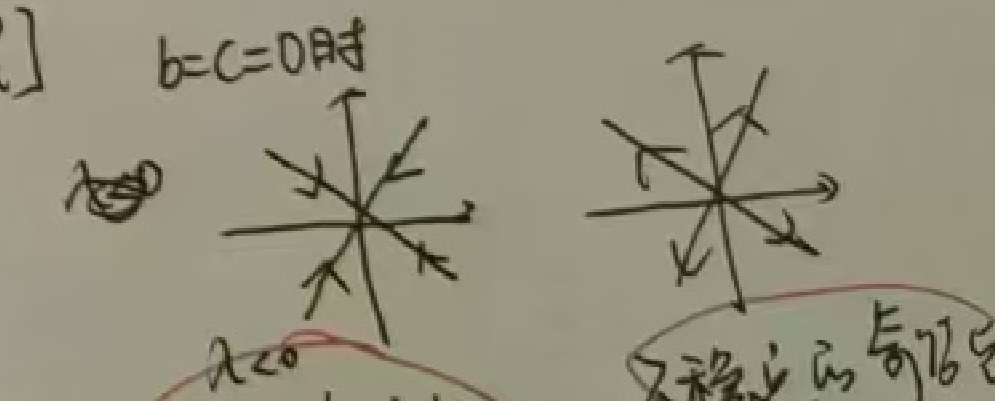


~~情况~~ $\frac{dx}{dt}=\lambda x$　$\frac{dy}{dt}=\lambda y$　$\lambda=a=d$

(2) 解 $x(t)=Ae^{\lambda t}$　$y(t)=Be^{\lambda t}$

$\therefore y=\frac{B}{A}x$ 为半射线

$\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$　$b=c=0$时



n阶常系数齐线性方程

$$L(x)=\frac{d^n(x)}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}(x)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_nx=0$$

① 特征方程 $\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$

②
(a) 实单根 λ_k、方程有解 $e^{\lambda_k t}$

(b) $m>1$ 重.实根 λ_k. 方程有 m个解

$e^{\lambda_k t}, te^{\lambda_k t}, t^2e^{\lambda_k t}, \cdots t^{m-1}e^{\lambda_k t}$

(c) 重数是1的共轭复数 $\alpha\pm\beta i$. 方程有两个如下形式的解 $e^{\alpha t}\cos\beta t$, $e^{\alpha t}\sin\beta t$

(d) $m>1$ 重 共轭复数 $\alpha\pm\beta i$. 方程有2m个如下解

$e^{\alpha t}\cos\beta t, te^{\alpha t}\cos\beta t, \cdots t^{m-1}e^{\alpha t}\cos\beta t$

$e^{\alpha t}\sin\beta t, te^{\alpha t}\sin\beta t, \cdots t^{m-1}e^{\alpha t}\sin\beta t$

③ 写出基本解组和通解.

eg. $\frac{d^4x}{dt^4}+2\frac{d^2x}{dt^2}+x=0$ 的通解

非齐次线性微分方程. $L(x)=f(t)$

1. $f(t)=(b_0t^m+b_1t^{m-1}+\cdots+b_m)e^{\lambda t}$

(1) $\lambda=0$ 特解: $\tilde{x}(t)=B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_m$

$$\begin{cases}B_0a_n=b_0\\ B_1a_n+mB_0a_{n-1}=b_1\\ \vdots\\ B_ma_n+\cdots=b_n\end{cases}$$

① 0不是特征根. $(a_n\neq0)$.

$\Rightarrow B_i$ 可唯一确定、$\tilde{x}(t)=B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_m$

② 0是对应的k重根

$\tilde{x}(t)=t^k(\gamma_0t^m+\gamma_1t^{m-1}+\cdots+\gamma_m)$

(2) $\lambda\neq0$.

$$\tilde{x}(t)=\begin{cases}(B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_m)e^{\lambda t}, & \lambda\text{不是特征根}\\ t^k(B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_m)e^{\lambda t}, & \lambda\text{是k重特征根}\end{cases}$$

2. $f(t)=(A(t)\cos\beta t+B(t)\sin\beta t)e^{\alpha t}$ 单根0次方

当 $\alpha\pm\beta i$ 是方程的k重根时. 方程特解

$\tilde{x}(t)=t^k[P(t)\cos\beta t+Q(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$

其中. $P(t)$. $Q(t)$ 是次数为m的多项式

通解 = 齐的 $C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}+t^k(B_0t^m\cdots)e^{\lambda t}$ 之和