



普通高等教育“十二五”规划教材



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

工程流体力学

(第四版)

孔 珑 主编



中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

工程流体力学（第四版）

孔 珑

泵与风机（第四版）

何 川

工程热力学

华永明

传热分析与计算

李友荣

锅炉原理（第三版）

周强泰

锅炉课程设计

赵伶玲

汽轮机原理

黄树红

汽轮机课程设计

张燕平

热力发电厂（第二版）

郑体宽

热力发电厂课程设计（第二版）

黄新元

自动控制原理（第二版）

巨林仓

电厂热工过程自动控制

王建国

热工测量及仪表（第四版）

朱小良

热工控制系统

谷俊杰

动力工程测试技术

黄素逸

工程燃烧学

冉景煜

热电冷联产原理与技术

葛 斌

现代发电厂概论（第三版）

文 锋

能源科学导论

黄素逸

能源监测与评价

黄素逸

热能与动力工程专业英语（第三版）

阎维平



关注我,关注更多好书



中国电力出版社教材中心

教材网址 <http://jc.cepp.sgcc.com.cn>

服务热线 010-63412706 63412548

ISBN 978-7-5123-5231-5



9 787512 135231 >

定价: 34.00 元



普通高等教育“十二五”



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

工程流体力学

(第四版)

主编 孔 珑
主审 叶大均



中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

内 容 提 要

本教材共十章。内容包括概述, 流体及其物理性质, 流体静力学, 流体运动学和流体动力学基础, 相似原理和量纲分析, 管内流动和水力计算、液体出流, 气体的一维流动, 理想流体的有旋流动和无旋流动, 黏性流体绕过物体的流动, 气体的二维流动。各章均有一定数量的例题和习题。

本教材为高等学校能源动力类专业及其相近专业流体力学课程的教材, 亦可作为有关设计部门和工厂技术人员的参考书。

图书在版编目 (CIP) 数据

工程流体力学 / 孔珑主编. —4 版. —北京: 中国电力出版社, 2014.2

普通高等教育“十二五”规划教材 普通高等教育“十一五”国家级规划教材

ISBN 978-7-5123-5231-5

I. ①工… II. ①孔… III. ①工程力学—流体力学—高等学校—教材 IV. ①TB126

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 280196 号

中国电力出版社出版、发行

(北京市东城区北京站西街 19 号 100005 <http://www.cepp.sgcc.com.cn>)

北京市同江印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

1979 年 12 月第一版

2014 年 2 月第四版 2014 年 2 月北京第二十五次印刷

787 毫米×1092 毫米 16 开本 19 印张 461 千字

定价 34.00 元

敬告读者

本书封底贴有防伪标签, 刮开涂层可查询真伪

本书如有印装质量问题, 我社发行部负责退换

版权专有 翻印必究

前 言

本教材修订的主要依据是：①教育部高等学校力学教学指导委员会力学基础课程教学指导分委员会 2008 年 10 月公布的《工程流体力学课程教学基本要求》（能源动力类）。②使用本教材院校的师生对教材的意见和建议。《工程流体力学课程教学基本要求》（能源动力类）规定的教学内容，本教材都可以涵盖，并有一定可供不同层次院校选教的内容。根据已经征得有关院校师生对教材的意见和建议以及我们的教学实践经验，这次修订，教材内容与本教材（第三版）基本相同，稍有补充：例如潜体和浮体平衡的稳定、圆球和圆柱体阻力系数的单列和补充、某些基本理论和方程物理概念阐述的完善、补充例题和例题完善等；教材体系也与本教材（第三版）基本相同，即前七章讨论流体力学的基本概念、基本理论、基本方程和流体的一维流动，后三章讨论流体的二、三维流动，其中也有小段落的调整和归并。这样的安排，既符合由浅入深、先易后难的认识发展规律，又可使学生较早接触与工程实际密切相关的流体力学问题，也便于不同需要的相近专业选用。本教材已经二十四次印刷，累计印数已经超过十四万册，这说明本教材得到了许多院校同行们的认可。这次修订，除上述两方面外，在文字阐述方面有较多的调整、增补和精炼，力求表述确切、论理严谨、逻辑条理、简洁通顺。

本教材的编写：山东大学孔珑教授编写第一、二、五、六、七、十章，田名振教授编写第三章，蔡国琰教授编写第四章，东北电力学院薛祖绳教授编写第八、九章；其中三、八、九章的编者和编者代理人已委托主编代为修订；孔珑担任主编。清华大学叶大均教授担任主审，他仔细审查了书稿，提出了宝贵意见和建议，使教材的质量得到进一步提高；有关院校和我校的流体力学教师，对教材的修订也提出了宝贵意见和建议，在此一并表示由衷的谢忱。

限于我们的水平，教材中可能会有不足和不妥之处，恳切欢迎读者指正。

编 者

2013 年 10 月于山东大学

第二版前言

本教材是根据能源部高等学校热能动力类专业教学委员会流体力学及泵与风机教学组第二次扩大会议（1989年）审定的电厂热能动力工程专业《工程流体力学》修订大纲、在原山东工学院、东北电力学院合编《工程流体力学》的基础上修订而成的。

这次修订，根据专业需要和使用该教材十余年来的教学实践，对教材的内容和体系都做了一些必要的调整。在内容方面，与原教材相比，主要的调整有：比较全面系统地阐述了积分形式的基本方程及其应用，适当地充实了相似原理和量纲分析、气体一维流动的内容；其他各章也增添了一些内容，例如毛细压强的导出，正压流体的势函数，拉格朗日法，圆管中紊流沿程损失系数的导出，液体的出流，直接水击和间接水击及气穴和气蚀的概念，理想流体流动的定解条件，边界层的控制，气流折转角的计算等。与此同时，对某些重复的或不需要单独阐述的内容，进行了归并，例如理想流体一维流动的欧拉方程、伯努利方程等；对某些宜在专业课中阐述或偏于专门的内容，进行了删节，例如叶型上的压强分布，管箱的声振计算，绕翼型近声速和超声速流动的定性分析等；考虑到电子计算机的应用已较普遍，所用计算机语言不一，删去了原教材中用 ALGOL60 语言编制的计算程序，由使用本教材的师生自行处理。在体系方面，将原教材的七章调整为九章；相似原理和量纲分析单独成章，放在基本方程之后和一维流动之前，以加强流体力学实验研究的理论基础，为后面讨论有关流体力学问题的实验研究做好准备；气体的一维流动也单独成章，提前到管流损失和水力计算之后，使工程应用最为广泛的一维流动集中在教材的前面，而在工程应用上更深入一步的二、三维流动集中在教材的最后三章。这样，既符合由浅入深、先易后难的认识发展规律，又可使学生较早接触与专业工程实际密切相关的流体力学问题，也便于不同需要的相近专业选用。其他章节有些内容的位置也做了调整，例如将作用在流体上的力前移到绪论中，将黏性流体总流的伯努利方程前移到基本方程中，将管道入口段中的流动前移到管流损失中，将环形管道中、二平行平板间的层流流动和流体动力润滑后移到纳维-斯托克斯方程之后去讨论等。此外，对于教材中各物理量的名称、单位和符号，也都按《中华人民共和国国家标准 量和单位》和流体力学及泵与风机教学组第二次扩大会议统一的意见进行了订正。

这次修订，孔珑编写引言、第一、四、五、六、九章，田名振编写第二章，蔡国琰编写第三章，薛祖绳编写第七、八章。孔珑担任主编，王文琪担任主审。

这本教材从出版至今已经 11 年。在此期间，使用过该教材的兄弟院校同行们曾在有关会议上或以书信的形式提出过一些宝贵意见和建议；山东工业大学流体力学教研室曾经组织试讲和讨论过教材的重点章节，提出过一些宝贵意见和建议；本教材的主审对修订书稿又提出了许多宝贵意见和建议，这都使书稿的质量得以不断的提高。山东工业大学流体力学教研室的同志和研究生还帮助誊清了书稿。在此一并表示由衷的谢忱。

限于我们的水平，教材中可能会有不足和不妥之处，恳切欢迎读者指正。

编者

1990年11月

第三版前言

本教材第一版是根据 1978 年水利电力部组织制订的高等学校电厂热能动力专业“流体力学”教材编写大纲编写的，1979 年 12 月出版。使用本教材的院校中，不仅有热能动力类专业，还有不少非热能动力类专业，在使用过程中对本教材均给予一致好评。该教材于 1987 年获高等学校水利电力类专业优秀教材一等奖，1988 年获全国高等学校优秀教材奖。

本教材第二版是根据 1989 年能源部高等学校热能动力类专业教学委员会流体力学及泵与风机教学组第二次扩大会议审定的电厂热能动力工程专业“工程流体力学”修订大纲，在本教材第一版的基础上修订而成的，1992 年 11 月出版。这次修订，根据热能动力类专业及其相近专业的教学需要和使用该教材十余年来的教学实践，对教材内容和体系都做了一些必要的调整（见第二版序言和教材）；教材由原来的七章调整为九章。这样修订的《工程流体力学》，得到许多院校同行们的认可，教材的累计发行量已经超过十万册。这说明，该教材不仅能更好地适应热能动力类专业的教学需要，而且也能满足相近专业对教材内容选用的需求，进一步增强了它的教学适用性。

基于上述原因，并根据教育部高等学校非专业类基础力学教学指导分委员会 2004 年制定的“工程流体力学课程教学基本要求”和多年教学实践，本次修订，除将引言的内容适当扩充改为绪论，列为第一章（其他章号顺延）外，对教材内容和体系只做一些必要的删节、增补和调整，不做大的变动；同时对概念、理论的阐述是否准确无误、是否具有逻辑性和条理性，用例命题是否适当合用、是否结合工程实际，文句表述是否确切、简洁通顺，图表是否正确、清晰，图文是否密切配合，以及物理量的名称、符号、单位是否符合法定计量单位——国家标准等，进行审查、修订。

本教材的编写：山东大学孔珑教授编写第一、二、五、六、七、十章，田名振教授编写第三章，蔡国琰教授编写第四章，东北电力学院薛祖绳教授编写第八、九章；其中第三、八、九章的编者和编者代理人已委托主编代作修订；孔珑担任主编。清华大学叶大均教授担任主审，他仔细审查了书稿，提出了许多宝贵的意见和建议，使教材的质量得到进一步提高。山东大学的流体力学教师，对教材的修订也提出了宝贵意见。在此一并表示由衷的谢忱。

限于我们的水平，教材中可能会有不足和不妥之处，恳切欢迎读者指正。

编者

2006 年 8 月于山东大学

目 录

前言	
第二版前言	
第三版前言	
第一章 概述	1
第一节 流体力学的研究内容和研究方法	1
第二节 流体力学在工程技术中的地位	1
第三节 流体力学在教学计划中的地位	2
第四节 工程流体力学内容简介	2
第二章 流体及其物理性质	4
第一节 流体的定义和特征	4
第二节 流体作为连续介质的假设	4
第三节 作用在流体上的力 表面力 质量力	5
第四节 流体的密度	6
第五节 流体的压缩性和膨胀性	8
第六节 流体的黏性	10
第七节 液体的表面性质	16
习题	18
第三章 流体静力学	20
第一节 流体静压强及其特性	20
第二节 流体平衡方程式	21
第三节 重力场中流体的平衡 帕斯卡原理	23
第四节 液柱式测压计	27
第五节 液体的相对平衡	31
第六节 静止液体作用在平面上的总压力	36
第七节 静止液体作用在曲面上的总压力	38
第八节 静止液体作用在潜体和浮体上的浮力 潜体和浮体平衡的稳定	42
习题	46
第四章 流体运动学和流体动力学基础	52
第一节 流体运动的描述方法	52
第二节 流动的分类	54
第三节 迹线 流线	56
第四节 流管 流束 流量 水力半径	57
第五节 系统 控制体 输运公式	58
第六节 连续方程	60

第七节	动量方程 动量矩方程	61
第八节	能量方程	66
第九节	伯努利方程及其应用	68
第十节	沿流线主法线方向压强和速度的变化	71
第十一节	黏性流体总流的伯努利方程	72
	习题	73
第五章	相似原理和量纲分析	79
第一节	流动的力学相似	79
第二节	动力相似准则	81
第三节	流动相似条件	85
第四节	近似的模型试验	86
第五节	量纲分析法	89
	习题	95
第六章	管内流动和水力计算 液体出流	97
第一节	管内流动的能量损失	97
第二节	黏性流体的两种流动状态	98
第三节	管道进口段黏性流体的流动	100
第四节	圆管中流体的层流流动	100
第五节	黏性流体的紊流流动	103
第六节	沿程损失的实验研究	110
第七节	非圆形管道沿程损失的计算	114
第八节	局部损失	115
第九节	各类管流的水力计算	120
第十节	几种常用的技术装置	127
第十一节	液体出流	131
第十二节	水击现象	141
第十三节	气穴和气蚀简介	144
	习题	145
第七章	气体的一维流动	151
第一节	微弱压强波的一维传播 声速 马赫数	151
第二节	气流的特定状态和参考速度 速度系数	153
第三节	正激波	157
第四节	变截面管流	165
第五节	等截面摩擦管流	174
第六节	等截面换热管流	183
	习题	187
第八章	理想流体的有旋流动和无旋流动	190
第一节	微分形式的连续方程	190
第二节	流体微团运动分解	191
第三节	理想流体运动方程 定解条件	194

第四节	理想流体运动方程的积分	197
第五节	涡线 涡管 涡束 涡通量	199
第六节	速度环量 斯托克斯定理	200
第七节	汤姆孙定理 亥姆霍兹定理	202
第八节	平面涡流	204
第九节	速度势 流函数 流网	206
第十节	几种简单的平面势流	209
第十一节	简单平面势流的叠加	212
第十二节	均匀等速流绕过圆柱体的平面流动	214
第十三节	均匀等速流绕过圆柱体有环流的平面流动	217
第十四节	叶栅的库塔—儒可夫斯基公式	219
第十五节	库塔条件	222
	习题	224
第九章	黏性流体绕过物体的流动	226
第一节	黏性流体微分形式的运动方程(纳维—斯托克斯方程)	226
第二节	不可压缩黏性流体的层流流动	232
第三节	边界层的基本概念	240
第四节	层流边界层微分方程	242
第五节	边界层动量积分关系式	244
第六节	边界层的位移厚度和动量损失厚度	245
第七节	平板边界层的近似计算	246
第八节	曲面边界层的分离现象	251
第九节	物体阻力 自由沉降速度	255
第十节	自由淹没射流	260
	习题	262
第十章	气体的二维流动	265
第一节	微弱压强波在空间的传播 马赫锥	265
第二节	微弱压强波 气流折转角	267
第三节	斜激波	272
第四节	激波的反射和相交	276
第五节	激波与边界层的相互干扰	279
	习题	280
附录 A	与流体力学有关的我国法定计量单位	282
附录 B	可压缩流参数表	284
	参考文献	293

第一章 概 述

第一节 流体力学的研究内容和研究方法

流体力学是力学的一个重要分支。它以流体为研究对象，是研究流体平衡和运动规律的科学。流体力学内容包括流体静力学、流体运动学、流体动力学。流体静力学研究在外力作用下流体平衡的条件及压强分布规律；流体运动学研究在给定条件下流体运动的特征和规律，但不涉及运动发生和变化的原因；流体动力学研究在外力作用下流体的运动规律，以及流体与固体间的相互作用。

流体力学的研究方法，概括起来有三种：

(1) 理论分析方法。进行步骤一般为：分析影响实际流动的各种因素，抓住主要因素，建立流体力学模型；建立描写该模型流动规律的封闭方程组以及与之相应的边界条件和初始条件；解析方程组；将所得答案与实际流动相比较，以确定解的精确度，或进行某些修正。该方法推导严谨，答案精确，但只局限于比较简单的理论模型，对于复杂的流动则无能为力。

(2) 实验研究方法。分析影响实际流动的各种因素，抓住主要因素，根据相似原理设计实验模型；通过实验测定有关相似准则数中的物理量；将实验数据整理成相似准则数，并通过对实验数据的拟合找出准则方程式，以便推广应用于相似的流动。该方法更加接近实际，实验结果可靠；其可靠程度取决于实验模型符合实际的程度以及测量、拟合的精确度。影响实际流动的因素越多，模型实验越难实现；如果只能按主要影响因素设计实验模型，实验结果只是近似的。另外，像大气环流、碳酸岩油田的渗流等无法在实验室内进行实验研究，只能进行观察、实测。

(3) 数值计算方法。按照理论分析方法的第一、二步确定数学模型；合理选用计算方法；编制计算程序，上机计算；分析计算结果，以确定是否符合精确度要求。该方法的优点是，过去许多用解析方法不能求解的问题，在电子计算机上用数值计算可以得到近似解。从一定意义上讲，它是理论分析方法的延伸和拓展。此外，在电子计算机上用数值计算方法还可模拟流体力学实验，并可对多个实验方案进行比较和优选，从而大大节省实验研究的时间和经费。特别对某些无法进行实验或实验耗资巨大的工程领域，数值计算更能显现其突出的优越性。但数值计算方法也有它的局限性，它的数学模型的确立必须以理论分析和实验研究为基础，而且往往难以包括实际流动的所有影响因素。

由上述可知，这三种方法各有利弊，相辅相成。理论指导实验研究和数值计算，使它们进行得富有成效，少出偏差；实验用来检验理论分析和数值计算结果的正确性，提供建立理论模型和研究流动规律的依据；数值计算可以弥补理论分析和实验研究的不足，对复杂的流体力学问题进行既快又省的计算分析。这三种方法的结合应用，必将进一步促进流体力学的快速发展。

第二节 流体力学在工程技术中的地位

流体力学在许多工业技术中有着广泛的应用。水利工程的建设、造船工业的发展是同水

静力学的建立和水动力学的发展密切相关的。航空工业中各种飞机和飞行器的设计都要依据空气动力学和气体动力学的基本原理。在电力工业中,不论是水电站、火电站,还是核电站、地热电站,它们的工作介质都是流体,所有动力设备的设计都必须以流体力学基本规律为基础。机械工业中的润滑、冷却、液压传动、气力输送以及液压和气动控制问题的解决,都必须应用流体力学的理论。在冶金工业中,也会遇到像气体在炉内的流动、液态金属在炉内或铸模内的流动以及冷却、通风等流体力学问题。化学工业中的流体力学问题则更多,因为大部分化学工艺流程都是伴随有化学反应、传质、传热的流动过程。石油工业中也有大量的流体力学问题,例如油、水、气的渗流问题,油、气的自喷、抽吸和输送问题,以及原油中多种产品的提炼、分离,等等。土木建筑中的给水排水、采暖通风是流体力学问题,海洋中的波浪、环流、潮汐以及大气中的气旋、环流和季风等都是流体力学问题。人体的循环系统也是流体系统,因此像人工心脏、心肺机、助呼吸器等的设计都要依据流体力学的基本原理。这样看来,流体力学确是许多工业技术部门必须应用和研究的一门重要学科。

第三节 流体力学在教学计划中的地位

高等学校能源动力类专业为能源工业与动力工业培养德、智、体全面发展的高级工程技术人才。流体力学是培养他们必备的专业技术基础课程。以热能与动力工程专业中的热电厂为例,它的各种热力设备,诸如风机、水泵、锅炉、汽轮机、凝汽器、冷却塔、烟囱等,它们的工作介质都是流体,如空气、水、汽、油、烟气等;地热电站还要用低沸点的流体丙酮、氯乙烷、氟里昂等;磁流体发电还会遇到热等离子体等。因此,热能与动力工程技术人员只有切实地了解和掌握流体在各种热力设备中的流动规律,才能熟悉和掌握这些设备的性能和运行规律,也才能在电力生产中充分发挥这些设备的效能,更好地为社会主义现代化建设服务。流体力学和热力学、传热学是热能与动力工程专业必修的主要专业技术基础课程。

本教材不可能讲述所有这些流体在各种热能与动力设备中的特殊流动规律,而只能讲述它们基本的共同的流动规律。在学习本课程时,应着重掌握流体力学的基本概念、基本原理、基本计算方法和实验技能。为学好后继课程,为进一步研究流体在热能与动力设备中的特殊流动规律以及特殊流体(如两相流体、等离子体等)的流动,为从事热能与动力工程事业,打下坚实的基础。

第四节 工程流体力学内容简介

本教材共分十章。第一章概述,简述流体力学的研究内容、研究方法,它在工程技术、教学计划中的地位等。第二章流体及其物理性质,主要讨论流体的特征及其连续介质假设,作用在流体上的力,流体的主要物理性质。第三章流体静力学,主要讨论流体静压强及其特性,在外力作用下流体平衡的条件和压强分布规律,液柱式测压计,静止流体作用在物体上总压力的计算等。第四章流体运动学和流体动力学基础,主要讨论流体运动的描述方法,流体运动学的某些基本概念,建立系统、控制体的概念和输运公式,并应用输运公式导出流体力学中十分重要的适用于控制体的积分形式的连续方程、动量方程和动量矩方程、能量方程等。前四章是全书的基础。第五章相似原理和量纲分析,主要讨论流动的力学相似、相似准则和相似条件,模型试验方法以及量纲分析法。它们是流体力学试验研究的理论基础。第六

章管内流动和水力计算 液体出流, 主要讨论液体在管道内的流动状态、速度分布、能量损失和各类管流的水力计算, 以及液体出流等。第七章气体的一维流动, 主要讨论微弱压强波的一维传播, 气流的特定状态, 正激波, 以及一维定常的变截面管流、等截面绝热摩擦管流和等温摩擦管流、等截面换热管流。这两章的内容是能源动力工程中最常遇到的各类管流的计算问题。第八章理想流体的有旋流动和无旋流动, 主要讨论理想流体微分形式的基本方程, 流体微团运动分解, 有旋流动的基本定理, 二维势流以及叶栅、叶型绕流的升力计算等。第九章黏性流体绕过物体的流动, 主要讨论黏性流体微分形式的运动方程及其应用, 边界层的概念、近似计算和分离现象, 分析绕流阻力产生的原因、后果以及减阻方法等。第十章气体的二维流动, 主要讨论微弱压强波在空间的传播, 气体二维定常流动中的微弱压强波与斜激波及其气流参数的计算, 激波的反射、相交及其与边界层相互干扰的定性分析。最后三章主要阐述理想流体、黏性流体和可压缩流体的二维流动, 但基本方程、基本定理都是按三维流动推导的。这样, 便加强了理论基础, 为进一步分析和研究工程实际中更复杂的流动问题奠定了必要的基础。

本教材采用我国法定计量单位。国际单位制 (SI) 是我国法定计量单位的基础。特将与流体力学有关的 SI 单位与公制工程单位的对照和换算关系列于附录 A 表 A-1, SI 词头列于表 A-2, 以供需要时查阅。

第二章 流体及其物理性质

本章主要讨论流体及其特征，流体的连续介质假设，作用在流体上的力，流体的密度、压缩性和膨胀性、黏性、液体的表面性质，以及它们在工程技术中的应用。

第一节 流体的定义和特征

通常说能流动的物质为流体。从力学的特征讲，流体是一种受任何微小剪切力作用都能连续变形的物质。只要这种力继续作用，即使力的大小没有变化，流体仍将继续变形（流动）；只有当外力停止作用时，变形才会停止。固体则不同，当受到剪切力作用时，固体仅产生一定程度的变形，只要作用力保持不变，固体的变形也就不再变化。由此可见，流体与固体不同，流体具有容易变形（流动）的特征，这就是流体的流动性。

流体按其集态的不同又可分为液体和气体。气体是比液体更易变形（流动）的物质，因为气体的分子分布比液体要稀疏得多。在相同的外界条件下，气体分子与液体分子相比，大小并无显著差异，但气体所占的体积可以达到相同质量液体体积的约 10^3 倍。可见，气体的分子距很大（与约为 $2.5 \times 10^{-10} \text{m}$ 的分子直径相比），分子间的吸引力是微不足道的。因而，气体的分子除去跟器壁和自身相互碰撞外，可以自由运动，故气体极易变形（流动），而且总是充满它能够达到的全部空间。液体的分子距较小，分子间的吸引力较大，在周围分子的作用下，液体分子能够作没有一定方向和没有固定周期的无规则振动，同时也能够在其他分子间移动，但不能像气体分子那样自由运动，所以，液体的流动性不如气体。此外，一定质量的液体具有一定的体积，并取容器的形状，不像气体那样能够充满全部空间。当液体和气体接触时便会出现液体和气体间的交界面，这种交界面称为液体的自由表面。

第二节 流体作为连续介质的假设

众所周知，任何流体都是由无数分子组成的，分子与分子间有空隙，这就是说，从微观角度看，流体并不是连续分布的物质。但是，流体力学并不研究微观的分子运动，而只研究流体的宏观机械运动。在研究流体的宏观运动中，所取的最小的流体微元是体积为无穷小的流体微团（或称流体质点）。流体微团虽小，但却包含着为数甚多的分子。在工程上， 1mm^3 是很小的体积，但它在标准状态（ 0°C ， 101325Pa ）下所包含的气体分子的数目约有 2.7×10^{16} 个，而包含的水分子的数目约有 3.4×10^{19} 个。可见，流体分子及其间的空隙都是极其微小的。在研究流体运动时，只要所取的流体微团包含有足够多的分子，使各物理量的统计平均值有意义，就可以不去研究无数分子的瞬时状态（这是分子动力学的研究内容），而只研究描述流体运动的某些宏观属性（例如密度、速度、压强、温度、黏度、热力学能等）。这就是说，可以不去考虑分子间存在的空隙，而把流体视为由无数连续分布的流体微团所组成的连续介质，这就是流体的连续介质假设。

既然在流体力学中把流体作为连续介质来处理，那么表征流体属性的密度、速度、压强、温度等物理量一般在空间也应该是连续分布的。因为，如果流体内某点（即该点的流体微团）

的属性发生了变化,则分子运动所产生的扩散作用或流体微团紊乱运动所进行的质量、动量和热量交换,必然引起它周围流体的同一属性也发生变化,而这种变化在空间上和时间上必然是逐渐地连续地进行的。当然,例外的情况也有,例如超声速气流中出现激波时,激波前后的流体参数将发生突变,这将在可压缩流体的流动中加以讨论。由此可以认为:除个别情况外,对于流体的连续流动,表征流体属性的各种物理量应该是空间和时间的单值连续可微函数,这样就有可能利用微分方程等数学工具去研究流体的平衡和运动的规律了。

顺便提及,把流体作为连续介质来处理,对于大部分工程技术问题都是正确的,但对于某些特殊问题则是不适用的。例如,当分子的自由行程和所涉及的最小有效尺寸可以相比拟时(如火箭在高空非常稀薄的气体中飞行以及高真空技术等),必须舍弃宏观的连续介质的研究方法,而代之以微观的分子动力学研究方法。

第三节 作用在流体上的力 表面力 质量力

为了研究流体的宏观运动,可先分析一下作用在处于运动状态的流体上的力。这些力分为两类:表面力和质量力。

一、表面力

表面力即作用在所取流体分离体表面上的力。这种力通常指的是分离体以外的流体通过接触面作用在分离体上的力。

如果在流动的流体中任取体积为 V 、表面积为 A 的流体作为分离体 C ,则分离体以外的流体通过接触面必定对分离体以内的流体有作用力。如图 2-1 所示,在分离体表面的 b 点取微小面积 δA ,作用在它上面的表面力为 $\delta \vec{F}$ 。一般情况下, $\delta \vec{F}$ 可以分解为沿法线方向 \vec{n} 的法向力 $\delta \vec{F}_n$ 和沿切线方向 $\vec{\tau}$ 的切向力 $\delta \vec{F}_\tau$ 。以微小面积 δA 除表面力并取极限,便可求得作用在 b 点单位面积上的表面力:

$$\vec{p}_n = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{F}}{\delta A} \quad (2-1)$$

称为应力,单位为 Pa。通常 \vec{p}_n 与 \vec{n} 的方向不一致,它的大小不仅与 b 点的位置有关,而且还与作用面的方位和时间 t 有关,即 $\vec{p}_n = f(x, y, z, \vec{n}, t)$ 。作用在 b 点单位面积上的法向力和切向力分别为

$$\vec{p}_{nn} = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{F}_n}{\delta A} = \frac{d\vec{F}_n}{dA} \quad (2-2)$$

$$\vec{p}_{n\tau} = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{F}_\tau}{\delta A} = \frac{d\vec{F}_\tau}{dA} \quad (2-3)$$

分别称为法向应力和切向应力。它们是研究流体流动时经常遇到的两种应力。

在液体与异相物质接触的自由表面上还有表面张力,它是一种特殊类型的表面力,它主要是由液体内的分子对处于表面层的分子的吸引而产生的。详见本章第七节。

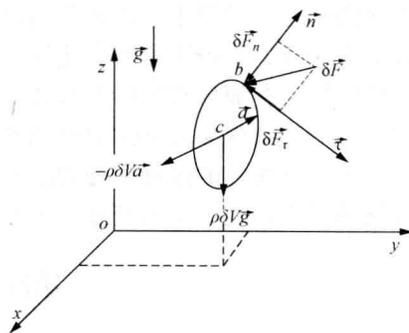


图 2-1 作用在流体上的表面力和质量力

二、质量力 (体积力)

质量力即某种力场作用在流体的全部质点 (全部体积) 上的力, 是和流体的质量成正比的力, 例如, 重力场中地球对流体全部质点的引力作用所产生的重力, 磁场和电场对磁性物质和带电物质所产生的磁力和电动力等。如图 2-1 所示, 在分离体的 C 点, 取一微小体积 δV , 如微小体积的平均密度用 ρ 表示, 则重力场作用在它上面的质量力可表示为 $\rho\delta V\vec{g}$ 。对所有其他微小体积均可这样表示。

当应用达朗伯 (J. Le. R. D'Alembert) 原理去研究流体的加速运动时, 虚加在流体质点上的惯性力也属于质量力。这种力, 在直线加速运动中只有沿直线的惯性力; 在一般曲线运动中则有切向惯性力和离心惯性力; 在相对运动中, 当牵连运动为转动时, 还可能有力哥氏惯性力。如图 2-1 所示, 若微小体积的平均绝对加速度为 \vec{a} 时, 则虚加在微小体积上的惯性力可表示为 $-\rho\delta V\vec{a}$ 。对所有其他微小体积均可这样表示。

如果用 \vec{f} 表示作用在单位质量流体上的质量力矢量, 用 f_x, f_y, f_z 表示它沿直角坐标轴的分力, 用 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 表示直角坐标轴上的单位矢量, 则

$$\vec{f} = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z\vec{k}$$

在研究流体的宏观运动时, 最常遇到的流体属性是流体的压强、密度和黏度。不论是在各种管道的流动计算中, 还是在绕过物体的流动计算中, 它们都是要用到的主要物理量。在研究深水作业、水击现象和高速气流的流动时, 必须考虑流体可压缩的属性, 即流体的压缩性与膨胀性。在液体与气体及液体与固体之间有交界面时 (如液滴的形成, 小股液体射流, 毛细管中的毛细现象), 液体的表面性质必须加以考虑。在气蚀等现象中还会用到饱和蒸汽压强, 在可压缩流体的流动中还会用到热力学能、熵等, 由于这些物理量在热力学中已经作了较详细的讨论, 这里不再赘述。下面将分别讨论以上经常遇到的一些流体属性。

第四节 流体的密度

一、流体的密度

流体的密度是流体的重要属性之一, 它表征流体在空间某点质量的密集程度。如流体中围绕着某点的体积为 δV , 其中流体的质量为 δm , 则比值 $\delta m/\delta V$ 为体积 δV 内流体的平均密度。令 $\delta V \rightarrow 0$ 而取该比值的极限, 便可得到该点处的流体密度, 即

$$\rho = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\delta m}{\delta V} = \frac{dm}{dV} \quad (2-4)$$

ρ 表示流体单位体积内所具有的质量, 单位为 kg/m^3 。

必须指出, 正如在流体的连续介质假设中所讨论的那样, 这里数学上的 $\delta V \rightarrow 0$, 从物理上应理解为体积缩小为无穷小的流体微团, 它的体积同被考察的流体体积相比是完全可以忽略不计的; 但它必须包含足够多的分子, 而不失去把流体当做连续介质来处理的基础。以后遇到的类似情况都应该这样去理解。

假如流体是均匀的流体, 显然流体的密度为

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (2-4a)$$

式中: m 为流体的质量 (kg); V 为流体的体积 (m^3)。

表 2-1 列出了在标准大气压下几种常用流体的密度, 表 2-2 列出了在标准大气压和不同

温度下的水、空气和水银的密度。

表 2-1 常用流体的密度

流体名称	温度 (°C)	密度 (kg/m ³)	备注
蒸馏水	4	1000	
海水	15	1020~1030	
普通汽油	15	700~750	
重油	15	880~890	
润滑油	15	890~920	
酒精	15	790~800	
水银	0	13600	
熔化生铁	1200	7000	
空气	0	1.293	
氧	0	1.429	
氮	0	1.251	
氢	0	0.0899	
一氧化碳	0	1.250	
二氧化碳	0	1.976	
二氧化硫	0	2.927	
水蒸气	0	0.804	为便于计算而推算到 0°C

表 2-2 不同温度下的水、空气和水银密度 (kg/m³)

流体名称	温度 (°C)						
	0	10	20	40	60	80	100
水	999.87	999.73	998.23	992.24	983.24	971.83	958.38
空气	1.293	1.247	1.205	1.128	1.060	1.000	0.9465
水银	13600	13570	13550	13500	13450	13400	13350

二、流体的相对密度

流体的相对密度通常是指某流体的密度 ρ_f 与 4°C 时水的密度 ρ_w 的比值, 用 d 表示, 即

$$d = \rho_f / \rho_w \quad (2-5)$$

式中: ρ_f 为流体的密度 (kg/m³); ρ_w 为 4°C 时水的密度 (kg/m³)。

三、流体的比体积

流体密度的倒数称为比体积, 即单位质量的流体所占有的体积, 用 v 表示, 单位为 m³/kg, 即

$$v = 1/\rho \quad (2-6)$$

四、混合气体的密度

混合气体的密度可按各组份气体所占体积百分数计算, 计算式如下:

$$\rho = \rho_1\alpha_1 + \rho_2\alpha_2 + \cdots + \rho_n\alpha_n = \sum_{i=1}^n \rho_i\alpha_i \quad (2-7)$$

式中: $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ 为混合气体中各组份气体的密度 (kg/m³); $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为混合气体中各组份气体所占的体积百分数。

【例 2-1】 已经测得锅炉烟气各组分气体的体积百分数分别为： $\alpha_{\text{CO}_2}=13.6\%$ ， $\alpha_{\text{SO}_2}=0.4\%$ ， $\alpha_{\text{O}_2}=4.2\%$ ， $\alpha_{\text{N}_2}=75.6\%$ ， $\alpha_{\text{H}_2\text{O}}=6.2\%$ ，试求烟气的密度。

【解】 由表 2-1 查得标准状态下的 $\rho_{\text{CO}_2}=1.976\text{kg/m}^3$ ， $\rho_{\text{SO}_2}=2.927\text{kg/m}^3$ ， $\rho_{\text{O}_2}=1.429\text{kg/m}^3$ ， $\rho_{\text{N}_2}=1.251\text{kg/m}^3$ ， $\rho_{\text{H}_2\text{O}}=0.804\text{kg/m}^3$ 。将已知数据代入式 (2-7)，得烟气在标准状态下的密度： $\rho=1.976\times 0.136+2.927\times 0.004+1.429\times 0.042+1.251\times 0.756+0.804\times 0.062=1.336(\text{kg/m}^3)$

第五节 流体的压缩性和膨胀性

随着压强的增高，体积便缩小；随着温度的升高，体积便膨胀，这是所有流体的共同属性，即流体的压缩性和膨胀性。

一、流体的压缩性和膨胀性

流体的压缩性用单位压强所引起的体积变化率表示，称为压缩系数，以 κ 表示。当温度不变时，压缩系数由下式确定：

$$\kappa = -\frac{\delta V/V}{\delta p} \quad (2-8)$$

式中： δp 为压强的增量， $\delta V/V$ 为流体相应的体积变化率。由于压强增大，体积缩小， δp 与 δV 异号，故在等式的右侧加一负号。 κ 的单位为 m^2/N 。式 (2-8) 表明，对于同样的压强增量， κ 值大的流体，其体积变化率大，较易压缩； κ 值小的流体，其体积变化率小，较难压缩。

压缩系数的倒数为体积模量，用 K 表示：

$$K = \frac{1}{\kappa} = -\frac{\delta p}{\delta V/V} \quad (2-9)$$

工程上常用体积模量去衡量流体压缩性的大小。显然， K 值大的流体的压缩性小， K 值小的流体的压缩性大。 K 的单位与压强相同，为 Pa。

在一定温度下水的体积模量与压强的关系列于表 2-3。由表中可见，水的 K 值很大，即它的压缩性很小。通常在工程计算中近似地取水的 $K=2.0\text{GPa}$ 。

表 2-3 水的体积模量 (GPa)

温度 (°C)	压强 (MPa)				
	0.490	0.981	1.961	3.923	7.845
0	1.85	1.86	1.88	1.91	1.94
5	1.89	1.91	1.93	1.97	2.03
10	1.91	1.93	1.97	2.01	2.08
15	1.93	1.96	1.99	2.05	2.13
20	1.94	1.98	2.02	2.08	2.17

流体的膨胀性用单位温升所引起的体积变化率表示，称为体胀系数，以 α_V 表示。当压强不变时，体胀系数由下式确定：

$$\alpha_V = \frac{\delta V/V}{\delta T} \quad (2-10)$$

式中： δT (或 δt) 为温度的增量， $\delta V/V$ 为流体相应的体积变化率。由于温度升高，体积膨胀，故 δT 与 δV 同号。 α_V 的单位为 $1/\text{K}$ 或 $1/^\circ\text{C}$ 。流体的体胀系数在工程计算中有时也会用到。在一定压强作用下水的体胀系数与温度的关系列于表 2-4。

表 2-4

水的体胀系数

(1/°C)

压强 (MPa)	温度 (°C)				
	1~10	10~20	40~50	60~70	90~100
0.0981	14×10^{-6}	150×10^{-6}	422×10^{-6}	556×10^{-6}	719×10^{-6}
9.807	43×10^{-6}	165×10^{-6}	422×10^{-6}	548×10^{-6}	704×10^{-6}
19.61	72×10^{-6}	183×10^{-6}	426×10^{-6}	539×10^{-6}	
49.03	149×10^{-6}	236×10^{-6}	429×10^{-6}	523×10^{-6}	661×10^{-6}
88.26	229×10^{-6}	289×10^{-6}	437×10^{-6}	514×10^{-6}	621×10^{-6}

由表 2-4 可以看出, 当温度低于 50°C 时, 水的体胀系数 α_V 随压强的增加而增大; 当温度高于 50°C 时, α_V 却随压强的增加而减小。

一般情况下, 需要同时考虑压强和温度对气体体积和密度变化的影响。完全气体^①的状态方程为

$$p\nu=RT \quad (2-11a)$$

$$p/\rho=RT \quad (2-11b)$$

式中: p 为气体的绝对压强 (Pa); ν 为气体的比体积 (m^3/kg); ρ 为气体的密度 (kg/m^3); T 为气体的热力学温度 (K); R 为气体常数 [$\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$]。常用气体的气体常数等物性参数列于表 2-5。状态方程说明, 气体的比体积与绝对压强成反比, 而与热力学温度成正比。

表 2-5

常用气体的物性参数表

(101325Pa, 20°C)

气 体	千摩质量 M (kg/kmol)	气体常数 R [J/(kg · K)]	比定压 热容 c_p [J/(kg · K)]	比定容 热容 c_v [J/(kg · K)]	比热 比 γ	密度 ρ (kg/m ³)	动力黏度 μ (Pa · s)	运动黏度 ν (m ² /s)
氢 (He)	4.003	2077	5192	3115	1.667	0.1660	0.197×10^{-4}	118.0×10^{-6}
氢 (H ₂)	2.016	4124	14180	10060	1.410	0.0839	0.090×10^{-4}	107.0×10^{-6}
氧 (O ₂)	32.00	259.8	6600	471.1	1.401	1.330	0.200×10^{-4}	15.00×10^{-6}
氮 (N ₂)	28.01	296.8	1032	734.8	1.404	1.160	0.176×10^{-4}	15.20×10^{-6}
空气	28.96	287.1	1005	717.2	1.400	1.205	0.180×10^{-4}	14.90×10^{-6}
一氧化碳 (CO)	28.01	296.8	1032	734.7	1.404	1.160	0.182×10^{-4}	15.70×10^{-6}
二氧化碳 (CO ₂)	44.01	188.9	814.7	621.2	1.304	1.840	0.148×10^{-4}	8.000×10^{-6}
沼气 (CH ₄)	16.04	518.3	2191	167.2	1.310	0.668	0.134×10^{-4}	20.00×10^{-6}

【例 2-2】 在厚壁圆筒中受到压缩的水, 当压强为 1MPa 时, 其体积为 1000cm³, 当压强增至 5MPa 时, 其体积变为 998cm³, 求水的体积模量 K 。

【解】 将上述实测数据代入式 (2-9), 可得

$$K = -\frac{\delta p}{\delta V/V} = -\frac{5-1}{(998-1000)/1000} = 2000(\text{MPa}) = 2(\text{GPa})$$

二、可压缩流体和不可压缩流体

由上述可知, 流体的压缩性是流体的基本属性, 任何流体都是可以压缩的, 只是可压缩的程序不同而已。例如, 水的压缩性比较小, 通常每增加 0.1MPa, 其体积变化率不到 1/10000。其他液体的压缩性一般也是比较小的。气体的压缩性比较大。像等温过程中完全气体的体积

^① 热力学中的理想气体在这里称为完全气体, 以便与无黏性的理想流体相区分。

同绝对压强成反比。压强增大一倍, 体积便要缩小一半, 足见气体的压缩性之大。

在工程实际问题中是否考虑流体的压缩性, 要视具体情况而定。通常把液体视为不可压缩流体, 即忽略在一般工程中没有多大影响的微小的体积变化, 而把液体的密度视为常量。这样处理问题, 可使工程计算大为简化。但是, 在水击现象、水下爆炸等问题中, 都是把水作为可压缩流体来处理的。因为水的压缩性虽然很小, 但在这类问题中却是不能忽视的。通常把气体作为可压缩流体来处理, 特别是在流速较高、压强变化较大的场合, 它们的体积变化是不容忽视的, 必须把它们的密度视为变量。但是, 在流速不高、压强变化较小的场合, 便可忽略压缩性的影响, 把气体视为不可压缩流体。例如, 在标准状态下, 当空气的流速等于 102 m/s 时, 不考虑压缩性所引起的计算值相对误差约等于 2.3% (详见第七章第二节), 这在工程计算中一般是可以忽略不计的。这样, 对不可压缩流体得出的各种运动规律便可直接应用到这类气体的流动研究中。锅炉尾部烟道的风速只有 10~20m/s, 压强的变化只有几百帕、最多几千帕左右。因此, 完全可以把烟气当做不可压缩流体来处理。

第六节 流体的黏性

一、流体的黏性 牛顿内摩擦定律

实际流体都是有黏性的。流体的黏性是指流体微团间发生相对滑移时产生切向阻力的性质。黏性形成流体的内摩擦, 黏性使流体黏附于它所接触的固体表面。为了理解流体的黏性, 取两块相互平行的平板进行黏性流体内摩擦实验。假设它们相距 h , 其间充满流体, 上板以速度 v 沿 x 轴方向运动, 下板静止不动, 如图 2-2 所示。由于黏性流体将黏附于它所接触的固体表面, 所以与上板接触的流体将以速度 v 运动, 而与下板接触的流体静止不动, 它们中间的流体均作平行于板的运动, 其运动速度均匀地由下板的零变化到上板的 v 。可见, 各流层之间都有相对运动, 因而必定产生切向阻力。若要维持这种运动, 必须在上板上施加以与摩擦阻力 F 大小相等而方向相反的切向力 F' 。实验证明, 流体内摩擦阻力的大小与速度 v 成正比, 与接触面积 A 成正比, 而与两板间的距离 h 成反比, 由此可写成以下关系式:

$$F = \mu A v / h \quad (2-12)$$

式中: μ 称为流体的动力黏度 ($\text{Pa} \cdot \text{s}$), 简称黏度。它是与流体的种类、温度和压强有关的比例系数, 在一定温度和压强下, 它是个常数。

单位面积上的切向阻力称为切向应力, 用 τ 表示:

$$\tau = \mu v / h \quad (2-13)$$

式中: v/h 表示在垂直于流速方向上单位长度的速度增量, 即流速在其法线方向上的变化率, 称为速度梯度。显然, 在上述特殊情况下, 速度梯度是个常数。

如图 2-3 所示, 通常流体流动的速度分布并不按直线变化。如果坐标为 y 处的流速为 v_x , 坐标为 $y+\delta y$ 处的流速为 $v_x+\delta v_x$, 则厚度为 δy 的微薄流层的平均速度梯度为 $\delta v_x/\delta y$ 。将它代入式 (2-13), 并取 $\delta y \rightarrow 0$ 时的极限, 可得坐标 y 处的切向应力与速度梯度的关系式, 即牛顿 (I. Newton) 内摩擦定律, 又称牛顿切向应力公式:

$$\tau = \mu \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{\delta v_x}{\delta y} = \mu \frac{dv_x}{dy} \quad (2-14)$$

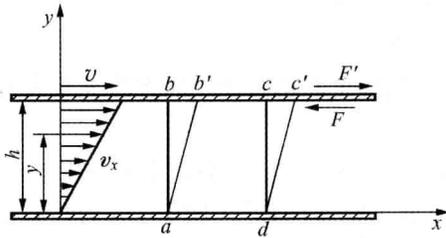


图 2-2 黏性流体内摩擦实验示意

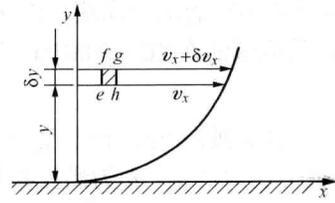


图 2-3 黏性流体的速度分布示意

即作用在层面上的切向应力与速度梯度成正比，其比例系数为流体的动力黏度。同样的流体，其速度梯度大的，切向应力大，能量损失也大；其速度梯度小的，切向应力小，能量损失也小。没有速度梯度，切向应力为零，流体的黏性作用表现不出来。流体处于静止状态或以相同速度的流动，都属于这种情况。

速度梯度的大小表示流速在其法线方向上变化率的大小，也表示流体微团角变形速度的大小，这可证明如下：在运动流体中取出一正方形的流体微小平面，如图 2-3 中阴影线所示。由于流层上、下的流速不相等，经过微小的时间间隔 δt 之后，原来为正方形的流体微小平面 $efgh$ 变成菱形 $e'f'g'h'$ ，原来的直角 $\angle hef$ 变成锐角 $\angle h'e'f'$ ，角度减小了 $\delta\varphi$ ，如图 2-4 所示。于是，角变形速度 $d\varphi/dt$ 可由几何关系推求如下：

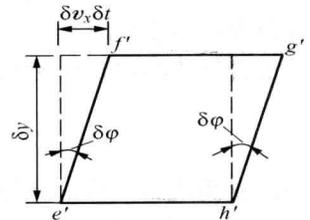


图 2-4 流体微小平面的变形

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta\varphi}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta v_x \delta t / \delta y}{\delta t} = \frac{dv_x}{dy}$$

对于速度梯度为常数的情况，经过 t 时间后的角变形示意，见图 2-2。

在流体力学中还常引用动力黏度与密度的比值，称为运动黏度，用 ν 表示，单位为 m^2/s ，即

$$\nu = \mu / \rho \quad (2-15)$$

流体的黏度与温度和压强有关。

温度对流体黏度的影响很大。液体的黏度随温度上升而减小，气体的黏度随温度上升而增大，这就是说，温度对这两类流体黏度的影响趋向正好相反，这是由于形成流体黏性的主要因素不同。如前所述，气体分子间的空隙比液体要大近千倍，因而液体分子间的吸引力比气体大得多。分子间的吸引力是形成液体黏性的主要因素。当温度升高时，分子间的空隙增大，吸引力减小，液体的黏度降低。气体分子间的吸引力微不足道，气体分子作混乱运动时在不同流速的流层间所进行的动量交换是形成气体黏性的主要因素。温度越高，气体分子的混乱运动越强烈，动量交换越频繁，气体的黏度越大。

普通的压强对流体的黏度几乎没有什么影响，可以认为，流体的黏度只随温度变化。例如，气体在低于几百个千帕的压强作用下，便可认为它们的黏度基本上与压强无关。多数液体的黏度也是如此。但是，在高压作用下，气体和液体的黏度均随压强的升高而增大。例如，水在 10GPa 压强作用下的黏度可以增大到水在 0.1MPa 压强作用下的黏度的两倍。

水的动力黏度随温度变化的近似经验关系式为

$$\mu = \mu_0 / (1 + 0.0337t + 0.000221t^2) \quad (2-16)$$

式中: μ_0 为水在 0°C 的动力黏度 ($\text{Pa} \cdot \text{s}$); t 为水的摄氏温度 ($^\circ\text{C}$)。

矿物油系机械油在 $20 \sim 50\text{MPa}$ 范围内的动力黏度随温度和压强变化的经验关系式为

$$\mu = \mu_0 e^{\alpha p - \beta(t-t_0)} \quad (2-17)$$

式中: μ 为计示压强 p (Pa) 和温度 t ($^\circ\text{C}$) 时的动力黏度 ($\text{Pa} \cdot \text{s}$); μ_0 为它在大气压下 t_0 (可取 0 、 15 、 20°C) 时的值; α 为黏压指数, 机械油通常取 $(2 \sim 3) \times 10^{-8}$ ($1/\text{Pa}$); β 为黏温指数, 机械油通常取 $(1.8 \sim 3.6) \times 10^{-3}$ ($1/^\circ\text{C}$)。

气体的动力黏度随温度的变化可近似地采用苏士兰 (Sutherland) 关系式:

$$\mu = \mu_0 \frac{273 + S}{T + S} \left(\frac{T}{273} \right)^{3/2} \quad (2-18)$$

式中: μ_0 为气体在 0°C 的动力黏度 ($\text{Pa} \cdot \text{s}$); T 为气体的热力学温度 (K); S 为依气体种类而定的苏士兰常数 (K)。式 (2-18) 只适用于压强不太高的场合。水蒸气的动力黏度随温度和压强而变, 压强稍高, 式 (2-18) 便不适用了。

混合气体的动力黏度可用下列近似关系式计算:

$$\mu = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i M_i^{1/2} \mu_i \right) / \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i M_i^{1/2} \right) \quad (2-19)$$

式中: α_i 为混合气体 i 组分气体所占的体积百分数; M_i 为混合气体 i 组分气体的分子量; μ_i 为混合气体 i 组分气体的动力黏度。

常用气体在标准状态下的黏度、分子量 M 和苏士兰常数 S 列于表 2-6。在 101325Pa 压强下水和空气的黏度与温度的关系列于表 2-7 和表 2-8。某些常用气体和液体的动力黏度 μ 和运动黏度 ν 随温度的变化曲线见图 2-5 和图 2-6。

表 2-6 常用气体的黏度、分子量 M 和苏士兰常数 S (标准状态下)

流体名称	$\mu_0 \times 10^6$ ($\text{Pa} \cdot \text{s}$)	$\nu_0 \times 10^6$ (m^2/s)	M	S (K)	备注
空气	17.09	13.20	28.96	111	
氧	19.20	13.40	32.00	125	
氮	16.60	13.30	28.02	104	
氢	8.40	93.50	2.016	71	
一氧化碳	16.80	13.50	28.01	100	
二氧化碳	13.80	6.98	44.01	254	
二氧化硫	11.60	3.97	64.06	306	
水蒸气	8.93	11.12	18.01	961	为便于计算而推算到 0°C

表 2-7 水的黏度与温度的关系 (101325Pa 压强下)

温度 ($^\circ\text{C}$)	$\mu \times 10^3$ ($\text{Pa} \cdot \text{s}$)	$\nu \times 10^6$ (m^2/s)	温度 ($^\circ\text{C}$)	$\mu \times 10^3$ ($\text{Pa} \cdot \text{s}$)	$\nu \times 10^6$ (m^2/s)
0	1.792	1.792	40	0.656	0.661
5	1.519	1.519	45	0.599	0.605
10	1.308	1.308	50	0.549	0.556
15	1.140	1.141	60	0.469	0.477
20	1.005	1.007	70	0.406	0.415
25	0.894	0.897	80	0.357	0.367
30	0.801	0.804	90	0.317	0.328
35	0.723	0.727	100	0.284	0.296

表 2-8 空气的黏度与温度的关系 (101325Pa 压强下)

温度 (°C)	$\mu \times 10^6$ (Pa·s)	$\nu_0 \times 10^6$ (m ² /s)	温度 (°C)	$\mu \times 10^6$ (Pa·s)	$\nu_0 \times 10^6$ (m ² /s)
0	17.09	13.20	260	28.06	42.40
20	18.08	15.00	280	28.77	45.10
40	19.04	16.90	300	29.46	48.10
60	19.97	18.80	320	30.14	50.70
80	20.88	20.90	340	30.80	53.50
100	21.75	23.00	360	31.46	56.50
120	22.60	25.20	380	32.12	59.50
140	23.44	27.40	400	32.77	62.50
160	24.25	29.80	420	33.40	65.60
180	25.05	32.20	440	34.02	68.80
200	25.82	34.60	460	34.63	72.00
220	26.58	37.10	480	35.23	75.20
240	27.33	39.70	500	35.83	78.50

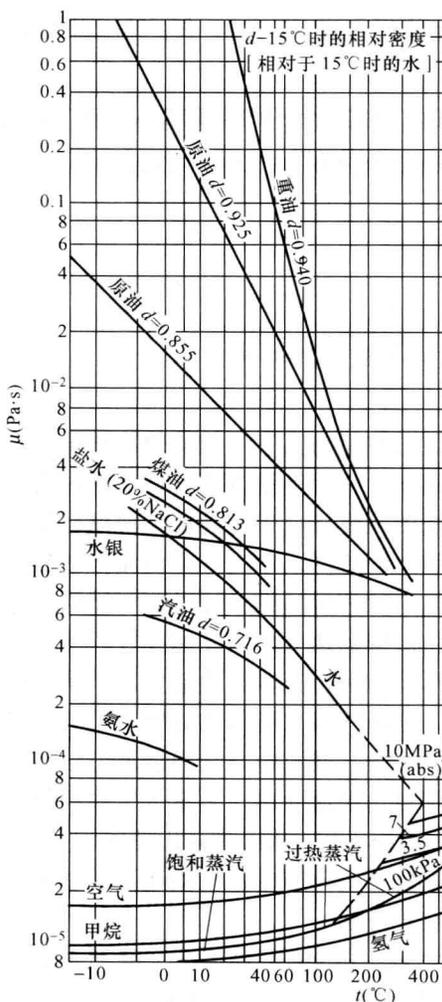


图 2-5 流体的动力黏度曲线

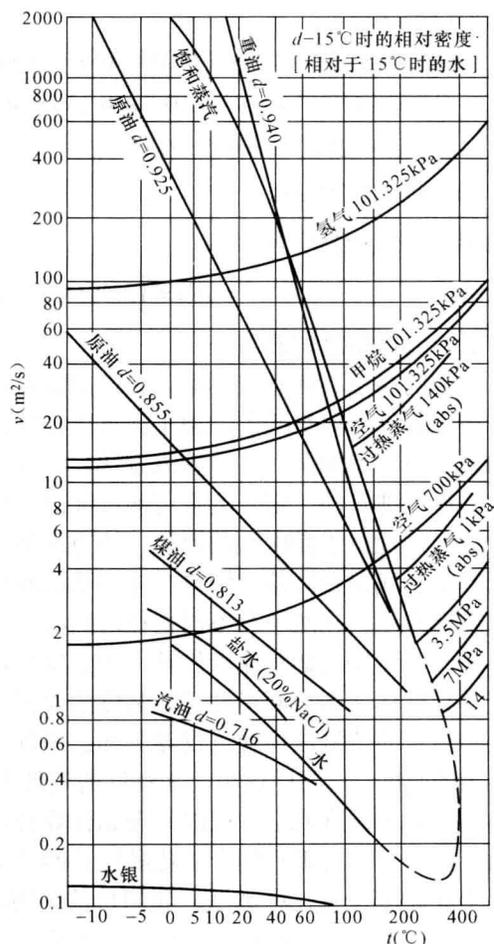


图 2-6 流体的运动黏度曲线

【例 2-3】汽缸的内径 $D=152.6\text{mm}$ ，活塞的直径 $d=152.4\text{mm}$ 、长 $l=304.8\text{mm}$ ，如图 2-7 所示。已知润滑油的运动黏度 $\nu=9.144\times 10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$ ，密度 $\rho=920\text{kg}/\text{m}^3$ ，活塞的运动速度 $v=6\text{m}/\text{s}$ ，试求克服摩擦阻力所消耗的功率。

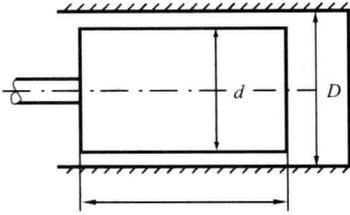


图 2-7 汽缸与活塞

【解】由于附着在汽缸上的润滑油速度为零，附着在活塞上的润滑油速度为 $6\text{m}/\text{s}$ ，汽缸与活塞间的间隙 δ 很小，油层内的速度分布可按直线计算，故油层内的速度梯度为 $\frac{dv_x}{dy} = \frac{v}{\delta}$ 。作用在活塞上的摩擦阻力及其消耗的功率分别为

$$F_{\text{Df}} = \tau A = \rho \nu \frac{v}{\delta} \times \pi dl = 920 \times 9.144 \times 10^{-5} \times \frac{6\pi \times 152.4 \times 10^{-3} \times 304.8 \times 10^{-3}}{(152.6 - 152.4) \times 10^{-3} / 2} = 736.6 \text{ (N)}$$

$$P = F_{\text{Df}} v = 736.6 \times 6 = 4420 \text{ (W)} = 4.42 \text{ (kW)}$$

【例 2-4】试计算 [例 2-1] 所述烟气在标准状态下的动力黏度和运动黏度。

【解】将由表 2-6 查得的各组分气体的 μ_0 和 M 值代入式 (2-19)，得到在标准状态下烟气的动力黏度：

$$\begin{aligned} \mu &= [0.136 \times (44)^{1/2} \times 14.8 + 0.004 \times (64)^{1/2} \times 11.6 + 0.042 \times (32)^{1/2} \times 19.2 + 0.756 \times (28)^{1/2} \times 17.6 \\ &\quad + 0.062 \times (18)^{1/2} \times 8.93] \times 10^{-6} \times [0.136 \times (44)^{1/2} + 0.004 \times (64)^{1/2} + 0.042 \times (32)^{1/2} \\ &\quad + 0.756 \times (28)^{1/2} + 0.062 \times (18)^{1/2}]^{-1} \\ &= 15.85 \times 10^{-6} \text{ (Pa} \cdot \text{s)} \end{aligned}$$

烟气的运动黏度为

$$\nu = \mu / \rho = 15.85 \times 10^{-6} / 1.336 = 11.86 \times 10^{-6} \text{ (m}^2/\text{s)}$$

二、流体黏度的测量

流体的黏度不能直接测量，它们的数值往往是通过测量与其有关的其他物理量，再由有关方程进行计算而得到的。由于计算所根据的方程不同，因而测量方法有许多种，所要测量的物理量也不尽相同。例如管流方法，即让待测黏度的流体，以一定的流量流过已知管径的细管，再在细管的一定长度上用测压计测出这段管道上的压降，从而计算出流体的黏度。落球方法，一般用于黏度大的流体，该方法是，使已知直径和质量的小球沿盛有试验液体的玻璃圆管中心线铅直降落，测量小球在试验液体中自由沉降的速度，由此速度计算该液体的黏度。旋转方法，在两个有不同直径的同心圆筒的环形间隙中，充以试验液体，其中一圆筒固定，另一圆筒以已知角速度旋转，测定出旋转力矩，便可计算出流体的黏度。工业上最常用测定各种液体（例如润滑油等）黏度的仪器是工业黏度计。其测定方法为泄流方法，使已知温度和体积的待测液体通过仪器下部已知管径的短管自由泄流而出，测定规定体积的液体全部流出的时间，与同样体积已知黏度的液体的泄流时间相比较，从而推求出待测液体的黏度。上述几种流体黏度测定方法的原理和计算公式将在以后有关章节中，在叙述有关基本理论时适当予以介绍。这里只简介工业黏度计的结构及其实验方法。

工业黏度计有几种类型。我国目前采用的是恩格勒（Engler）黏度计（欧洲大陆的一些国家，如德国，采用这种黏度计，英国采用 Redwood 黏度计，美国采用 Saybolt 黏度计，它们的原理都是一样的），其测定结果为恩氏度，用 $^{\circ}\text{E}$ 表示，其结构见图 2-8。测定实验方法如

下：先用木制针阀将锥形短管的通道关闭，把 220cm^3 的蒸馏水注入储液罐 1，开启水箱 2 中的电加热器，加热水箱中的水，以便加热储液罐中的蒸馏水，使其温度达到 20°C ，并保持不变；然后迅速提起针阀，使蒸馏水经锥形通道泄入长颈瓶 4 至容积为 200cm^3 ，记录所需的时间 t ；之后用同样的程序测定待测液体流出 200cm^3 所需的时间 t' （待测液体的温度应为给定的温度）。待测液体在给定温度下的恩氏度为

$$^\circ\text{E} = t'/t \quad (2-20)$$

待测液体在给定温度下的运动黏度可按下式由已测得的恩氏度求出：

$$\nu = 0.0731^\circ\text{E} - 0.0631/^\circ\text{E} \quad (\text{cm}^2/\text{s}) \quad (2-21)$$

三、牛顿流体和非牛顿流体

凡作用在流体上的切向应力与它所引起的角变形速度（速度梯度）之间的关系符合牛顿内摩擦定律的流体，称为牛顿流体，如图 2-9 中的 A 线所示。凡作用在流体上的切向应力与它所引起的角变形速度之间的关系不符合牛顿内摩擦定律的流体称为非牛顿流体。非牛顿流体的切向应力与角变形速度之间的关系一般表示为

$$\tau = \eta \left(\frac{dv_x}{dy} \right)^n + k \quad (2-22)$$

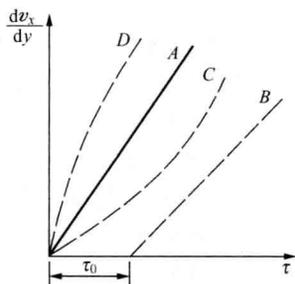


图 2-9 牛顿流体和非牛顿流体的图示

式中： η 为表观黏度，它是切向应力或角变形速度的函数； n 为指数； k 为常数。

非牛顿流体有几种类型。图 2-9 中的 B 线代表理想塑性体，在产生连续变形前有一屈服应力 τ_0 ，应力大于屈服应力后，应力与角变形速度之间存在线性关系（这相当于 $\eta = \mu$ ， $k = \tau_0$ ， $n = 1$ ）。牙膏的变形便有这种类似的性质。曲线 C 代表拟塑性体，它的表观黏度（ η ）随着角变形速度的增长而降低，黏土浆和纸浆都属于这类流体。曲线 D 代表胀流型流体，它的表观黏度随角变形速度的增长而增大。此外，还有大部分具有触变现象的胶状液体，静止时它很黏稠，甚至像凝固了一样，但它的表观黏度却随着角变形速度的增长而降低，例如油漆和油墨便是如此。图中纵坐标轴代表理想流体，横坐标轴代表弹性固体。

本书只讨论牛顿流体。这里简单地介绍一下非牛顿流体，是为了强调牛顿内摩擦定律式 (2-14) 的适用范围。牛顿内摩擦定律只适用于牛顿流体，而不适用于非牛顿流体。非牛顿流体是非牛顿流体力学的研究对象，它的研究对化工、石油、冶金、建筑、水利、轻工、食品等工业部门是重要的。

四、黏性流体和理想流体

如前所述，实际流体都是有黏性的，都是黏性流体。不具有黏性的流体称为理想流体，

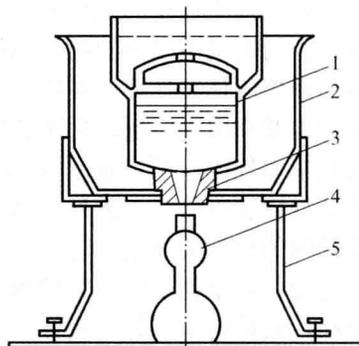


图 2-8 恩格勒黏度计

1—储液罐；2—水箱；3—锥形短管；4—长颈瓶；5—支架

这是客观世界上并不存在的假想的流体。在流体力学中引入理想流体的概念,是因为在实际流体的黏性作用表现不出来的场合(像在静止流体中或均匀等速流动的流体中),完全可以把实际流体当理想流体来处理。在许多场合,想求得黏性流体流动的精确解是很困难的。对某些黏性不起主要作用的问题,先不计黏性的影响,使问题的分析大为简化,从而有利于掌握流体流动的基本规律。至于黏性的影响,则可根据试验引进必要的修正系数,对由理想流体得出的流动规律加以修正。此外,即使是对于黏性为主要影响因素的实际流动问题,先研究不计黏性影响的理想流体的流动,而后引入黏性影响,再研究黏性流体流动的更为复杂的情况,也是符合认识事物由简到繁的规律的。基于以上诸点,在流体力学中,总是先研究理想流体的流动,而后再研究黏性流体的流动。

第七节 液体的表面性质

如前所述,当液体与气体及液体与固体有界面,即当出现液体的自由表面时,液体的表面性质必须加以考虑。在流体力学中,重要的是液体的表面张力以及由表面张力引起的毛细现象。

一、表面张力

如前所述,液体的分子间是有吸引力的。液体分子吸引力的作用范围很小,在以 $3\sim 4$ 倍平均分子距为半径的球形范围内,称该球形范围为“影响球”。“影响球”的半径 r 一般在 $10^8\sim 10^6\text{cm}$ 之间。若某分子距自由液面的距离大于或等于“影响球”的半径 r (如图2-10中的A、B所示),则在“影响球”内的液体分子对该分子的吸引力恰好相互平衡。若该分子距自由液面的距离小于“影响球”的半径 r (如图2-10中的C所示),则由于“影响球”在自由表面上面的部分没有液体分子(比如说是气体分子),“影响球”内的分子对该分子的吸引力便不能相互平衡,而构成一个合力,此合力从自由表面向下作用在该分子上。当某分子处于自由表面上时(如图2-10中D所示),向下的合力达到最大值。厚度小于“影响球”半径的液面下的薄层称为表面层。表面层内的所有液体分子均受有向下的吸引力,从而把表面层紧紧地拉向液体内部。

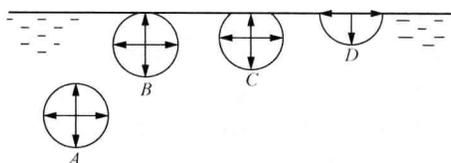


图2-10 近液面的分子受到的吸引力

由于表面层中的液体分子都受到指向液体内部的拉力作用,所以任何液体分子在进入表面层时都必须反抗这种力的作用,即都必须给这些分子以机械功。这就是说,伴随着自由表面的形成,必须输入机械功,而这些机械功将以自由表面能的形式被储存起来。因此,自由表面的增加意味着自由表面能的增加;相反,自由表面的减少意味着自由表面能的减小,即它要向周围施放能量。当自由表面收缩时,在收缩的方向上必定有力对自由表面做负功,即作用力的方向与收缩的方向相反,这种力必定是拉力,它使自由表面处于拉伸状态。把单位长度上的这种拉力定义为表面张力,用 σ 表示,单位为 N/m 。

所有液体的表面张力随着温度的上升而下降。在液体中添加某些有机溶液或盐类,可改变液体的表面张力。例如,把少量的肥皂或去污剂的溶液加入水中,可以显著地降低水的表面张力,而把食盐溶液加入水中,却可提高水的表面张力。两种不相溶液体分界面上的张力通常称为交界面张力。几种普通液体在 20°C 与空气接触时的表面张力列于表2-9。

任何系统都趋向于处在势能最小的稳定平衡状态。因此，一定量的液体在表面张力的影响下总是取自由表面能为最小时的形状。例如，一滴液体，如无别的力的影响，对于给定的体积必定取面积为最小的球形。

表 2-9 普通液体的表面张力 (20℃, 与空气接触)

液体名称	表面张力 σ (N/m)	液体名称	表面张力 σ (N/m)
酒精 (乙醇)	0.0223	原油	0.0233~0.0379
苯	0.0289	水	0.0731
四氯化碳	0.0267	水银: 在空气中	0.5137
煤油	0.0233~0.0321	在水中	0.3926
润滑油	0.0350~0.0379	在真空中	0.4857

二、毛细现象

如前所述，液体分子间的吸引力较大，在分子吸引力的作用下，液体分子相互制约，形成一体，不能轻易地跑掉。这种吸引力称为内聚力。当液体同固体壁面接触时，液体分子和固体分子之间也有吸引力，这种吸引力称为附着力。

当液体与固体壁面接触时，若液体的内聚力小于它同固体间的附着力，液体将附着、湿润该固体壁面，并沿固体壁面向外伸展，例如，把水倒在玻璃上便是这种情况；与此相反，若液体的内聚力大于它同固体间的附着力，液体自身将抱成一团，并不湿润该固体壁面，例如，把水银倒在玻璃上，水银便始终保持椭球形状，而不会湿润玻璃壁面。水不湿润石蜡或油腻的壁面，这是由于水的内聚力大于它同石蜡或油腻壁面之间的附着力。液体与固体壁面接触时内聚力和附着力的这种关系，可以用来解释毛细管中液面的上升或下降现象。如图 2-11 (a) 所示，当玻璃管插入水（或其他能湿润管壁的液体）中时，由于水的内聚力小于水同玻璃之间的附着力，水将湿润它，并沿壁面向外伸展，致使水面向上弯曲，水的表面张力将使液体上升。如图 2-11 (b) 所示，当玻璃管插入水银（或其他不湿润管壁的液体）中时，由于水银的内聚力大于水银同玻璃之间的附着力，水银将不湿润它，水银面向下弯曲，表面张力将使液体下降。

事实上，液面为曲面时的表面张力必将造成曲面两侧的压强差。因为液体曲面与固体壁面接触处的表面张力有自曲面向内的合力，要平衡这一合力，凹面的压强必须高于凸面的压强。这种由表面张力引起的附加压强称为毛细压强（或弯曲压强）。如图 2-12 所示，若液体曲面是边长为 δS_1 和 δS_2 的矩形，在互相垂直的两平面内的曲率半径为 R_1 和 R_2 ，作用在两 δS_1 边上的 $\sigma\delta S_1$ 一对力之间的夹角为 $\delta\beta$ ，作用在两 δS_2 边上的 $\sigma\delta S_2$ 一对力之间的夹角为 $\delta\alpha$ ，作用在曲面凹面和凸面的压强分别为 p_1 和 p_2 ，则沿曲面法线方向的平衡方程为

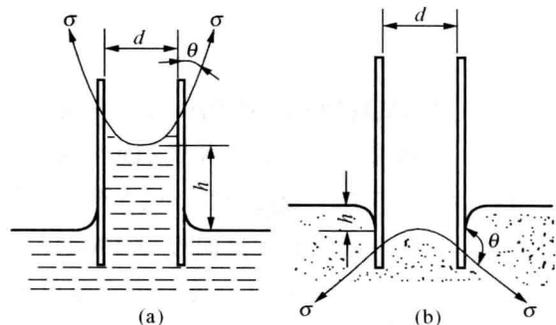


图 2-11 毛细管中液体的上升和下降现象

(a) 水上升; (b) 水银下降

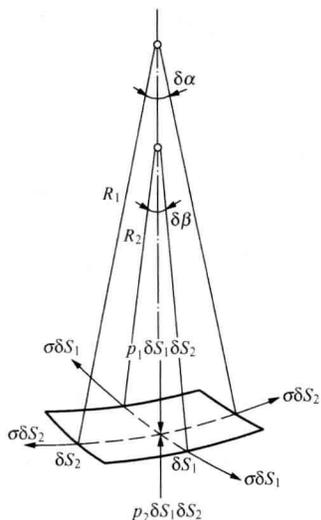


图 2-12 弯曲液面上的表面张力和压强

$$(p_1 - p_2)\delta S_1\delta S_2 = 2\sigma\left(\delta S_2 \frac{\delta\alpha}{2} + \delta S_1 \frac{\delta\beta}{2}\right)$$

由于 $\delta\alpha = \delta S_1/R_1$, $\delta\beta = \delta S_2/R_2$, 代入上式, 可得曲面的凹面高于凸面的压强差为

$$p_1 - p_2 = \Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad (2-23)$$

例如球形液滴, 由于 $R_1 = R_2 = R$, 故滴内高于滴外的压强差 $\Delta p = 2\sigma/R$; 又如肥皂泡, 由于有内、外两个自由表面, 故泡内高于泡外的压强差 $\Delta p = 4\sigma/R$ 。

毛细管中液柱的上升或下降的高度可由式(2-23)求出, 也可由引起毛细压强的表面张力直接求出。如图 2-11 所示, 假设液面与固体壁面的接触角为 θ , 沿管壁圆周上的表面张力将拉液柱向上(或向下)直到表面张力的合力与上升(或下降)液柱的重力相等, 即

$$\pi d \sigma \cos\theta = \rho g h \pi d^2 / 4$$

$$h = \frac{4\sigma \cos\theta}{\rho g d} \quad (2-24)$$

可见, 液柱上升或下降的高度与管径成反比, 并与液体种类、管子材料、液面上气体(或不相容的液体)的种类以及温度有关。在空气中, 20°C 的水与洁净的玻璃的接触角 $\theta = 0^\circ$, 水银与洁净的玻璃的接触角 $\theta = 139^\circ$ 。通常对于水, 当玻璃管的内径大于 20mm , 对于水银, 大于 12mm 时, 毛细现象的影响可以忽略不计。

在多数工程实际问题中, 由于固体边界足够大, 同其他一些作用力相比, 表面张力是可以忽略不计的。但是, 对于某些液柱式测压计等小尺寸的仪器, 小尺寸的模型试验, 液体薄膜沿固体壁面的流动, 液滴和气泡的形成, 液体射流的破碎等, 则必须考虑表面张力的作用, 否则, 将得到与事实不相符合的错误结果。

习 题

- 2-1 已知某种物质的密度 $\rho = 2.94 \text{ g/cm}^3$, 试求它的相对密度 d 。 [2.94]
- 2-2 已知某厂 1 号炉水平烟道中烟气组分的百分数为 $\alpha_{\text{CO}_2} = 13.5\%$, $\alpha_{\text{SO}_2} = 0.3\%$, $\alpha_{\text{O}_2} = 5.2\%$, $\alpha_{\text{N}_2} = 76\%$, $\alpha_{\text{H}_2\text{O}} = 5\%$, 试求烟气的密度。 [1.341 kg/m³]
- 2-3 上题中烟气的实测温度 $t = 170^\circ\text{C}$, 实测静计示压强 $p_e = 1432\text{Pa}$, 当地大气压强 $p_a = 100858\text{Pa}$ 。试求工作状态下烟气的密度和运动黏度。 [0.8109 kg/cm³, 2.869 × 10⁻⁵ m²/s]
- 2-4 当压强增量为 50000Pa 时, 某种液体的密度增长 0.02% 。试求该液体的体积模量。 [2.50 × 10⁸ Pa]
- 2-5 绝对压强为 $3.923 \times 10^5\text{Pa}$ 的空氣的等温体积模量和等熵体积模量各等于多少? [3.923 × 10⁵ Pa, 5.492 × 10⁵ Pa]
- 2-6 充满石油的油槽内的压强为 $4.9033 \times 10^5\text{Pa}$, 今由槽中排出石油 40kg , 使槽内压强降

到 $9.8067 \times 10^4 \text{Pa}$ ，设石油的体积模量 $K=1.32 \times 10^9 \text{Pa}$ 。试求油槽的体积。 [153m³]

2-7 流量为 $50 \text{m}^3/\text{h}$ 、温度为 70°C 的水流入热水锅炉，经加热后水温升到 90°C ，而水的体胀系数 $\alpha_V=0.00064 \text{1}/^\circ\text{C}$ ，问从锅炉中每小时流出多少立方米的水？ [50.64m³/h]

2-8 压缩机压缩空气，绝对压强从 $9.8067 \times 10^4 \text{Pa}$ 升高到 $5.8840 \times 10^5 \text{Pa}$ 。温度从 20°C 升高到 78°C ，问空气体积减小了多少？ [80%]

2-9 动力黏度为 $2.9 \times 10^{-4} \text{Pa} \cdot \text{s}$ 、密度为 $678 \text{kg}/\text{m}^3$ 的油，其运动黏度等于多少？ [4.28×10⁻⁷m²/s]

2-10 设空气在 0°C 时的运动黏度 $\nu_0=13.2 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ 、密度 $\rho_0=1.29 \text{kg}/\text{m}^3$ 。试求在 150°C 时空气的动力黏度。 [23.62×10⁻⁶Pa·s]

2-11 借恩氏黏度计测得石油的黏度为 8.5°E ，如石油的密度 $\rho=850 \text{kg}/\text{m}^3$ 。求石油的动力黏度。 [0.05218Pa·s]

2-12 一平板距离另一固定平板 0.5mm ，两板间充满流体，上板在每平方米有 2N 的力作用下以 $0.25 \text{m}/\text{s}$ 的速度移动，求该流体的黏度。 [0.004Pa·s]

2-13 已知动力滑动轴承的轴直径 $d=0.2 \text{m}$ ，转速 $n=2830 \text{r}/\text{min}$ ，轴承内径 $D=0.2016 \text{m}$ ，宽度 $l=0.3 \text{m}$ ，润滑油的动力黏度 $\mu=0.245 \text{Pa} \cdot \text{s}$ ，试求克服摩擦阻力所消耗的功率。 [50.7W]

2-14 一重 500N 的飞轮的回转半径为 30cm ，由于轴套间流体黏性的影响，当飞轮以 $600 \text{r}/\text{min}$ 旋转时，它的角减速度为 $0.02 \text{rad}/\text{s}^2$ 。已知轴套的长度为 5cm ，轴的直径为 2cm 以及它们之间的间隙为 0.05mm 。试求流体的黏度。 [0.2325Pa·s]

2-15 直径为 5.00cm 的活塞在直径为 5.01cm 的缸体内运动。当润滑油的温度由 0°C 升高到 120°C 时，求推动活塞所需的力减少的百分数。用图 2-5 中相对密度 $d=0.855$ 的原油的黏度进行计算。 [86.81%]

2-16 内径为 10mm 的开口玻璃管插入温度为 20°C 的水中，已知水与玻璃的接触角 $\theta=10^\circ$ 。试求水在管中上升的高度。 [0.294cm]

2-17 内径 8mm 的开口玻璃管插入 20°C 的水银中。已知水银与玻璃管的接触角约为 140° ，试求水银在管中下降的高度。 [1.36mm]

第三章 流体静力学

通常把地球选作惯性参考坐标系。当流体相对于惯性参考坐标系没有运动时，称流体处于静止（或平衡）状态。当流体相对于某非惯性参考坐标系没有运动，而相对于惯性参考坐标系有运动时，称流体处于相对静止（或相对平衡）状态。流体处于静止或相对静止状态时，切向应力等于零，流体不呈现黏性，作用在流体上的表面力只有静压强。流体静力学得出的结论对理想流体和黏性流体均适用。

本章主要讨论流体静压强及其特性，在外力作用下流体平衡的条件和压强分布规律，液柱式测压计，静止流体作用在平面、曲面、潜体、浮体上总压力的计算等，以及它们在工程技术中的应用。

第一节 流体静压强及其特性

当流体处于静止或相对静止状态时，作用在流体上的应力中，切向应力等于零，只有法向应力，即应力处处与其作用面垂直。下面将要阐明流体静压强就是负的法向应力，即

$$\bar{p}_{nm} = \frac{d\bar{F}_n}{dA} = -p\bar{n} \quad (3-1)$$

静压强的单位为 Pa。

流体静压强有两个重要特性：

特性一：流体静压强的方向沿作用面的内法线方向。

这一特性可直接由流体的性质加以说明。由第一章已知，流体具有流动性，流体受任何微小剪切力作用都将连续变形。这就是说，若有剪切力作用，流体便要变形（流动）；流体要保持静止状态，就不能有剪切力作用。一般情况下流体在拉力作用下也将产生流动；流体要保持静止状态，就不能有拉力作用（液体表面层除外）。因此，流体处于静止或相对静止状态时，既不能有剪切力作用，又不能有拉力作用（液体表面层除外），唯一的作用便是沿作用面内法线方向的压强作用。

根据这一特性可知，静止流体对固体壁面的压强恒垂直和指向壁面。图 3-1 (a) 所示为槽形容器壁上的静压强，图 3-1 (b) 所示为圆形容器壁所受的内压强和外压强。

特性二：静止流体中任一点流体静压强的大小与其作用面在空间的方位无关，只是该点坐标的连续函数，也就是说，静止流体中任一点上不论来自何方的静压强均相等。

为了证明这一特性，在静止的流体中任取一点 A ，以 A 为直角坐标系的原点，取边长各为 δx 、 δy 和 δz 的微小四面体 $ABCD$ ，如图 3-2 所示。假设作用在 $\triangle ABD$ 、 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCD$ 四个平面上的平均流体静压强分别为 p_x 、 p_y 、 p_z 和 p_n ，它们的方向分别为各自作用面的内法线方向，则作用在各面上的流体总静压力应等于各面上的平均静压强与该作用面面积的乘积，即 $p_x \times \delta y \delta z / 2$ 、 $p_y \times \delta z \delta x / 2$ 、 $p_z \times \delta x \delta y / 2$ 及 $p_n \times \triangle BCD$ 。假设用 ρ 代表微小四面体的平均密度，用 f_x 、 f_y 、 f_z 代表作用在微小四面体单位质量流体上的质量力的分力，而微小四面体的体积为 $\delta x \delta y \delta z / 6$ ，则微小四面体的质量力在 x 、 y 、 z 方向的分力分别为 $f_x \rho \delta x \delta y \delta z / 6$ 、 $f_y \rho \delta x \delta y \delta z / 6$ 、 $f_z \rho \delta x \delta y \delta z / 6$ 。若微小四面体在表面力和质量力作用下处于平衡状态，则 x 方向的

平衡方程式为

$$p_x \times \frac{1}{2} \delta y \delta z - p_n \times \triangle BCD \times \cos(\widehat{p_n, x}) + f_x \rho \times \frac{1}{6} \delta x \delta y \delta z = 0$$

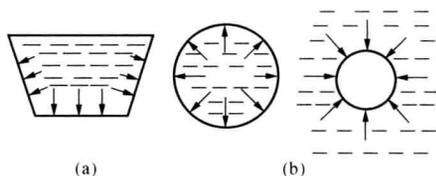


图 3-1 流体静压强恒垂直于器壁

(a) 槽形容器; (b) 圆形容器

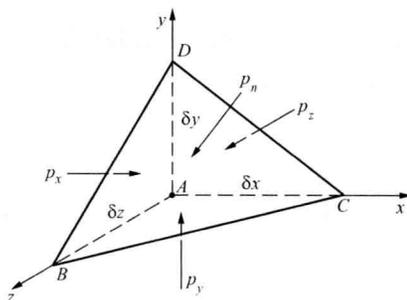


图 3-2 微小四面体

由于 $\triangle BCD \times \cos(\widehat{p_n, x})$ 是 $\triangle BCD$ 在垂直面 Ayz 上的投影, 并等于 $\delta y \delta z / 2$, 故上式可化简为

$$p_x - p_n + f_x \rho \times \frac{1}{3} \delta x = 0$$

取 $\delta x, \delta y, \delta z \rightarrow 0$ 时的极限, 并略去无穷小项, 得 A 点处流体的

$$p_x = p_n$$

同理可证

$$p_y = p_n, \quad p_z = p_n$$

即

$$p_x = p_y = p_z = p_n$$

这就证明了, 静止流体中任一点流体静压强的大小与其作用面在空间的方位无关。但是, 不同空间点的静压强可以是不相等的, 即流体静压强是空间坐标的连续函数:

$$p = f(x, y, z)$$

第二节 流体平衡方程式

一、平衡方程式

为了解析地探求流体平衡的规律, 在静止流体中取边长为 $\delta x, \delta y, \delta z$ 的微小平行六面体, 如图 3-3 所示。其中心点为 $a(x, y, z)$, 该点的静压强为 p 。由于静压强是点的坐标的连续函数, 故过 a 点平行于 ox 轴的直线与六面体左右两端面交点 b, c 的静压强, 按泰勒

(G. I. Taylor) 级数展开并略去二阶以上微小量后, 分别为 $p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2}$ 和 $p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2}$, 并视

它们为两端面上的平均静压强。假设 ρ 为六面体的平均密度, f_x, f_y, f_z 为作用在六面体内单位质量流体上的质量力沿坐标轴的分力, 则六面体内的流体沿 x 方向的平衡方程式为

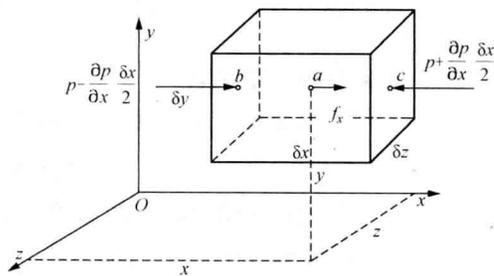


图 3-3 微小平行六面体及 x 方向的受力

$$f_x \rho \delta x \delta y \delta z + \left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z = 0$$

或

$$f_x \rho \delta x \delta y \delta z - \frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z = 0$$

以微小六面体的质量 $\delta m = \rho \delta x \delta y \delta z$ 通除上式, 并取 δx 、 δy 、 $\delta z \rightarrow 0$ 时的极限, 得 a 点处流体沿 x 方向的平衡方程式为

$$\left. \begin{aligned} f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-2)$$

同理可得

这就是流体平衡方程式, 它是欧拉 (Leonard Euler) 在 1755 年首先提出的, 故又称流体平衡的欧拉方程。该方程的意义是: 在静止的流体中, 当微小六面体以 a 点为极限时, 作用在该点单位质量流体上的质量力与静压强的合力相平衡。由于推导过程中对作用在流体上的质量力和流体密度均未加限制, 所以, 该方程组对不可压缩流体和可压缩流体的静止和相对静止状态都是适用的。它是流体静力学最基本的方程组, 流体静力学的其他计算公式都是以此方程组为基础导出的。

二、压强差公式 等压面

流体静压强是空间坐标的连续函数, 它的全微分为

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

将式 (3-2) 中的 $\frac{\partial p}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial p}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial p}{\partial z}$ 代入上式, 得

$$dp = \rho (f_x dx + f_y dy + f_z dz) \quad (3-3)$$

此式称为压强差公式。它表明: 当点的坐标增量为 dx 、 dy 、 dz 时, 相应的流体静压强增加 dp , 压强的增量决定于质量力。

在流场中, 压强相等的各点组成的面称为等压面, 在等压面上 $dp=0$ 。由式 (3-3) 得

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz = 0 \quad (3-4)$$

它的矢量形式为

$$\vec{f} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (3-4a)$$

这是等压面的微分方程式。该式说明, 作用于静止流体中任一点的质量力必垂直于通过该点的等压面。

三、平衡条件 势函数

对于不可压缩流体, $\rho = \text{常数}$, 可将式 (3-3) 写成

$$d(p/\rho) = f_x dx + f_y dy + f_z dz \quad (3-3a)$$

式 (3-3a) 的左边是全微分, 它的右边也必须全微分。由高等数学已知: 该式右边成为某一个函数全微分的必要且充分的条件是

$$\frac{\partial f_y}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f_z}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial f_x}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial x} = 0 \quad (3-5)$$

它的矢量形式为
$$\nabla \times \vec{f} = \text{rot} \vec{f} = 0 \quad (3-5a)$$

式中: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ 是微分算子符号。设用 $-\pi(x, y, z)$ 代表这一函数, 则有

$$f_x = -\frac{\partial \pi}{\partial x}, \quad f_y = -\frac{\partial \pi}{\partial y}, \quad f_z = -\frac{\partial \pi}{\partial z} \quad (3-6)$$

它的矢量形式为
$$\vec{f} = -\nabla \pi = -\text{grad} \pi \quad (3-6a)$$

高等数学的这些结果证明, 若要使不可压缩流体处于平衡状态, 则作用在它上面的质量力必须有势, $-\pi(x, y, z)$ 就是质量力的势函数。势函数相等的诸点组成的面称为等势面, 有势函数存在的质量力称为有势力。由式 (3-6a) 已知, 有势的质量力矢等于势函数的负梯度, 它必垂直于等势面, 并指向势函数减少的方向。将式 (3-6) 代入式 (3-3a), 积分之并取积分常数为零, 得

$$\pi = -p/\rho \quad (3-7)$$

即势函数与压强异号。由式 (3-7) 和式 (3-4a) 可知, 质量力不仅垂直于等压面, 而且指向压强增大的方向; 在势力场中等势面与等压面重合。由于重力符合式 (3-5) 的条件, 重力是有势的质量力。

对于流体的密度只随压强变化的正压流场, 即等密度面与等压面平行的流场 (其流体简称为正压流体, 该二面不平行的流场称为斜压流场), $\rho = \rho(p)$, 可将式 (3-3) 写成

$$d \int \frac{dp}{\rho} = f_x dx + f_y dy + f_z dz \quad (3-3b)$$

式 (3-3b) 的左边是全微分, 它的右边也必须全微分。按照与上述同样的分析, 可得式 (3-5) 和式 (3-6)。同样可证明, 若要使正压流场中的流体处于平衡状态, 则作用在它上面的质量力必须有势。将式 (3-6) 代入式 (3-3b) 并积分之, 可得

$$\pi = - \int \frac{dp}{\rho(p)} \quad (3-8)$$

倘若是完全气体的等温流动, 将状态方程式 $\rho = p/RT_1$ 代入式 (3-8) 并完成积分, 则得

$$\pi = -RT_1 \ln p \quad (3-9)$$

倘若是完全气体的等熵流动, 将等熵过程关系式 $\rho = cp^{1/\gamma}$ 代入式 (3-8) 并完成积分, 则得

$$\pi = -\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} \quad (3-10)$$

第三节 重力场中流体的平衡 帕斯卡原理

一、流体静力学基本方程式

自然界或工程实际中经常遇到的是, 作用在流体上的质量力只有重力的情况。如图 3-4 所示, 取水平基准面为 oxy , z 轴铅直向上, 则单位质量力的分力为

$$f_x=0, \quad f_y=0, \quad f_z=-g$$

代入式 (3-3), 得

$$dp = -\rho g dz$$

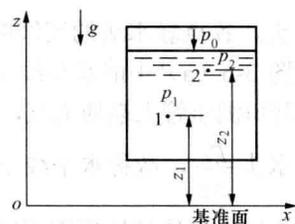


图 3-4 流体静力学基本方程式用图

或

$$dz + \frac{dp}{\rho g} = 0$$

对于均质的不可压缩流体, 积分上式后得

$$z + \frac{p}{\rho g} = C \quad (3-11)$$

式中 C 为积分常数, 由边界条件确定。将重力场的势函数代入式 (3-6), 同样可得此式。在静止流体中任取位标为 z_1 、压强为 p_1 的点 1 和位标为 z_2 、压强为 p_2 的点 2, 可将式 (3-11) 写成

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \quad (3-11a)$$

式 (3-11)、式 (3-11a) 称为流体静力学基本方程式。下面讨论它的物理意义和几何意义。

1. 物理意义

式 (3-11) 第一项 z 代表单位重量流体的^①位势能; 第二项 $\frac{p}{\rho g}$ 代表压强所做的功。如图

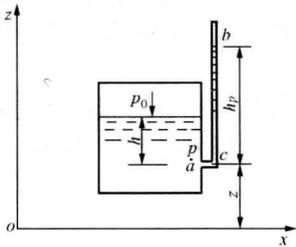


图 3-5 闭口测压管中液柱的上升高度

3-5 所示, 当把已被抽成完全真空的闭口测压管 bc 连接到容器上具有压强 p 的 a 点时, 容器内的液体将在压强 p 和完全真空 (绝对零压) 之间的压差作用下在测压管中上升一定的高度。毫无疑问, 在液柱上升的过程中, 压差克服液柱的重力做了功, 从而增加了液柱的位势能, 为此也称 $\frac{p}{\rho g}$ 为单位重量流体的压强势能。它的大

小恰好等于用上述方法测得的液柱高度 h_p , 这可证明如下: 将式 (3-11a) 应用于 a 、 b 两点, 有

$$z + \frac{p}{\rho g} = z + h_p$$

故

$$h_p = \frac{p}{\rho g}$$

位势能与压强势能之和称总势能。流体静力学基本方程式的物理意义是, 在重力作用下的连续均质不可压缩静止流体中, 各点单位重量流体的总势能保持不变。

2. 几何意义

单位重量流体所具有的能量也可以用液柱高度来表示, 并称为水头。如图 3-6 所示, 静止流体中任意 1、2 两点的位标和静压强均不相同。点所在位置到基准面的高度 z 叫位置水头; 压强作用下在完全真空的测压管中测得的高度 $\frac{p}{\rho g}$ 叫压强水头。位置水头与压强水头的和称

静水头, 各点静水头的连线叫静水头线。式 (3-11a) 表明, 静止流体中各点的静水头相等, 所以图 3-6 (a) 中静水头线 $A-A$ 为水平线。测量静水头一般用开口测压管, 如图 3-6 (b) 所示。开口测压管上端通大气, 它测得的压强水头比完全真空测压管测得的压强水头低一个大气压强水头 $\frac{p_a}{\rho g}$, 故称水平线 $A'-A'$ 为计示静水头线。流体静力学基本方程式的几何意义是, 在

重力作用下的连续均质不可压缩静止流体中, 静水头线和计示静水头线均为水平线。

^① 单位重量流体现一般称为单位重力作用下流体, 本书仍沿袭单位重量流体的说法。

对图 3-5 中淹深为 h 的某点 a 和自由液面上的某点列静力学基本方程式：

$$z + \frac{p}{\rho g} = (z + h) + \frac{p_0}{\rho g}$$

故
$$p = p_0 + \rho gh \tag{3-12}$$

此式是在重力作用下有自由表面的均质不可压缩静止流体中的压强计算公式。它表明静止流体中任一点的静压强由两部分组成：一部分是自由表面上的压强 p_0 ，另一部分是深度为 h 、密度为 ρ 的流体所产生的压强 ρgh 。这说明，静止流体中任意点都受到自由表面压强 p_0 的相同作用，自由表面压强 p_0 的任何变化，都会引起流体中所有流体质点压强的同样变化。对于这种压强在流体中的传递现象，法国人帕斯卡（Blaise Pascal）归纳为帕斯卡原理：施于在重力作用下不可压缩流体表面上的压强，将以同一数值沿各个方向传递到流体中的所有流体质点。水压机、增压油缸等液压传动装置的工作原理和设计都是以此原理为基础的。

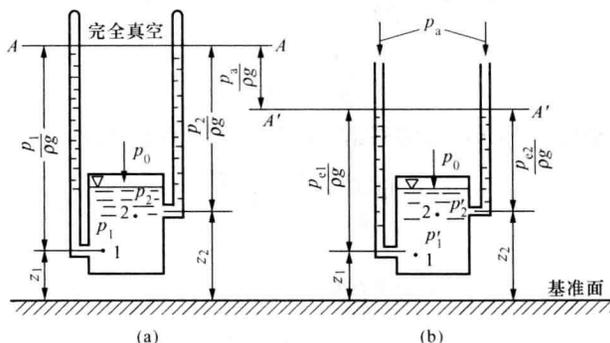


图 3-6 静止流体的静水头线

(a) 完全真空测压管；(b) 开口测压管

式 (3-12) 还说明，深度相同的诸点压强都相等，这便是等压面。可见，在重力作用下不可压缩静止流体中的等高面为等压面，自由表面亦是等压面。在以后的流体静压强的计算中经常用到这一特性。

二、标准大气的压强分布

以此为例讨论可压缩流体平衡时压强分布规律的求法。

从海平面到 11000m 的空间为标准大气的对流层，层内气温随高度增加而递减，递减率近似等于常数，即 $\beta = -0.0065\text{K/m}$ 。如果已知海平面的气温 $T_1 = 288.15\text{K}$ ，压强 $p_1 = 101325\text{Pa}$ ，参考坐标系的 z 轴向上，层内气温随高度的变化规律为

$$T = T_1 + \beta z$$

层内气压随高度的变化规律可推求如下：已知

$$f_x = f_y = 0, f_z = -g$$

由完全气体状态方程得

$$\rho = \frac{p}{R(T_1 + \beta z)}$$

将它们代入压强差公式 (3-3)，得

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g dz}{R(T_1 + \beta z)}$$

取积分限为 $0 \rightarrow z$ ， $p_1 \rightarrow p$ ，积分上式，得

$$\ln \frac{p}{p_1} = -\frac{g}{\beta R} \ln \left(1 + \frac{\beta z}{T_1} \right)$$

也即

$$p = p_1 \left(1 + \frac{\beta z}{T_1} \right)^{-\frac{g}{\beta R}} \quad (3-13)$$

或

$$p = 101325 \left(1 - \frac{z}{44331} \right)^{5.255} \quad (3-13a)$$

可见, 在对流层内气压只是高度 z 的函数。由状态方程可知, 层内气体的密度也只是高度 z 的函数。这样, 便可求得层内气压与密度的关系为 $p/\rho^n = \text{常数}$, 其中 $n=1.235$ 。

从高 11000m 到 20100m 的空间为标准大气的同温层, 层内的气温几乎不变, 其近似值 $T_2=216.7\text{K}$ 。该层内气体的密度随气压成正比地变化, 而层内气压随高度的变化规律可推求如下: 将已知的 $f_x=f_y=0$ 、 $f_z=-g$ 以及 $\rho = \frac{p}{RT_2}$ 代入式 (3-3), 得

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g dz}{RT_2}$$

如果已知 $z_2=11000\text{m}$ 处的气压 $p_2=22638\text{Pa}$, 并取积分限为 $z_2 \rightarrow z$, $p_2 \rightarrow p$, 积分上式, 得

$$\ln \frac{p}{p_2} = \frac{g(z_2 - z)}{RT_2}$$

也即

$$p = p_2 e^{\frac{g(z_2 - z)}{RT_2}} \quad (3-14)$$

或

$$p = 22638 e^{\frac{11000 - z}{6344}} \quad (3-14a)$$

这就是标准大气同温层内气压的变化规律。将重力场的势函数代入式 (3-9), 同样可得此式。

三、绝对压强 计示压强

压强由于计量基准的不同又区分为绝对压强和计示压强。

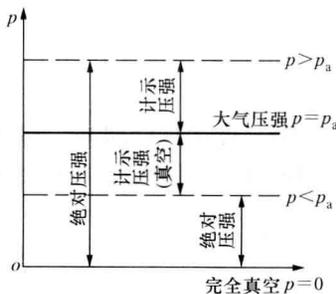


图 3-7 绝对压强、大气压强、计示压强的相互关系

(1) 绝对压强。以完全真空为基准计量的压强。当图 3-5 中液面上的压强就是大气压强时, 即 $p_0=p_a$, 则由式 (3-12) 求得的 a 点的绝对压强为

$$p = p_a + \rho g h \quad (3-12a)$$

(2) 计示压强。以当地大气压强为基准计量的压强, 用 p_e 代表。在上述情况下 a 点的计示压强为

$$p_e = p - p_a = \rho g h \quad (3-15)$$

绝对压强总是正的, 而计示压强则可正可负, 这决定于流体中某点处的绝对压强是大于还是小于当地大气压强 (见图 3-7)。绝对压强小于当地大气压强的负计示压强又称真空, 用 p_v 代表, 即

$$p_v = p_a - p = -p_e \quad (3-15a)$$

如用液柱高来表示, 则有

$$h_v = \frac{p_v}{\rho g} = -\frac{p_a - p}{\rho g} \quad (3-15b)$$

当流体的绝对压强值为零时，其状态为完全真空，这在理论上是可以分析的，但在实际上把容器抽成完全真空是很难办到的。特别是当容器中盛有液体时，只要压强低于液体的饱和压强，液体便要开始汽化，压强便不会再下降。

物理学、工程热力学以及本教材的基本定律中都采用绝对压强，而用以测量压强的仪表多是与大气相通的（例如下面将介绍的液柱式测压计）或是处于大气压强的环境中的（例如各种金属压强计），因此实际测量的是绝对压强与大气压强之差，这点在使用时要特别注意。

以往流体静压强的计量单位有许多种。为了便于换算，特将常遇到的几种压强单位及其换算系数列于表 3-1 中。

表 3-1 压强单位及其换算系数

帕斯卡 Pa	工程大气压 kgf/cm ²	标准大气压 atm	巴 bar	米水柱 mH ₂ O	毫米汞柱 mmHg
1	1.01972×10 ⁻⁵	9.86923×10 ⁻⁶	10 ⁻⁵	1.01972×10 ⁻⁴	7.50064×10 ⁻³
9.80665×10 ⁴	1	9.67841×10 ⁻¹	9.80665×10 ⁻¹	10	7.35561×10 ²
1.01325×10 ⁵	1.03323	1	1.01325	1.03323×10	7.60×10 ²
10 ⁵	1.01972	9.86923×10 ⁻¹	1	1.01972×10	7.50064×10 ²
9.80665×10 ³	10 ⁻¹	9.67841×10 ⁻²	9.80665×10 ⁻²	1	7.35561×10
1.33322×10 ²	1.35951×10 ⁻³	1.31579×10 ⁻³	1.33322×10 ⁻³	1.35951×10 ⁻²	1

第四节 液柱式测压计

常见的测量压强的仪器有液柱式测压计，金属压强计和电测式仪表等。液柱式测压计的测压原理是以流体静力学基本方程式为依据的。下面介绍几种常见的液柱式测压计。

1. 测压管

如图 3-8 所示，测压管是一种结构简单的液柱式测压计。它是一根直径均匀的玻璃管，直接连在需要测量压强的容器上。为了减轻毛细管作用的影响，玻璃管的内径一般应不小于 10mm。图 (a) 所示为测量容器中 A 点液体的计示压强，即

$$p_e = \rho gh$$

图 (b) 所示为测量容器中气体的真空，即

$$p_v = \rho gh$$

这种测压管的优点是结构简单，测量准确；缺点是只能测量较小的压强。

2. U 形管测压计

当被测容器内流体的压强较大时，采用 U 形管测压计，如图 3-9 所示。被测流体的密度为 ρ_1 ，U 形管中的液体（一般用水、酒精或水银）密度为 ρ_2 。图 (a) 所示为测量高于大气压强的计示压强。令被测流体与 U 形管中液体交界面为 1，过 1 引水平线与右支管交于 2，由于 1、2 两点在连续均质流体的等压面上，故 $p_1 = p_2$ ，根据流体静压强的计算公式

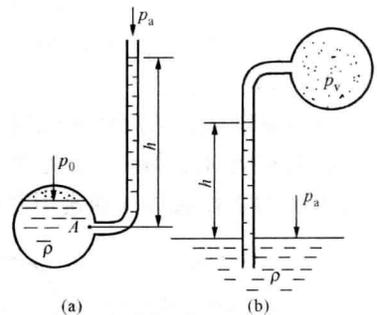


图 3-8 测压管

(a) 测计示压强；(b) 测真空

(3-12) 有

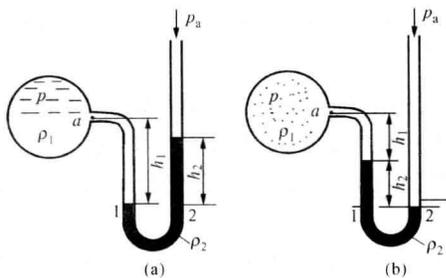


图 3-9 U 形管测压计

(a) 测计示压强; (b) 测真空

$$p_1 = p + \rho_1 g h_1$$

$$p_2 = p_a + \rho_2 g h_2$$

由二式相等得
$$p = p_a + \rho_2 g h_2 - \rho_1 g h_1 \quad (3-16)$$

计示压强为
$$p_e = p - p_a = \rho_2 g h_2 - \rho_1 g h_1 \quad (3-16a)$$

图 (b) 所示为测量小于大气压强的真空, 其计算方法与上面相似, 求得的绝对压强为

$$p = p_a - \rho_2 g h_2 - \rho_1 g h_1 \quad (3-17)$$

真空为
$$p_v = p_a - p = \rho_2 g h_2 + \rho_1 g h_1 \quad (3-17a)$$

当被测流体是气体时, 由于气体密度小, $\rho_1 g h_1$

可忽略不计。

3. U 形管压差计

工程技术中经常要测量同一容器两个不同位置的压强差或不同容器的压强差, 这时采用图 3-10 所示的 U 形管压差计极其方便。

已知两个容器中 A、B 两点的位置高度一样, 两容器中流体的密度均为 ρ_1 , U 形管中液体的密度为 ρ_2 。由于 1、2 两点在等压面上, 所以 $p_1 = p_2$ 。从图中看出:

$$p_1 = p_A + \rho_1 g h_1, \quad p_2 = p_B + \rho_1 g h_2 + \rho_2 g h$$

所以

$$p_A + \rho_1 g h_1 = p_B + \rho_1 g h_2 + \rho_2 g h$$

A、B 两点的压强差为

$$\Delta p = p_A - p_B = \rho_2 g h + \rho_1 g h_2 - \rho_1 g h_1 = (\rho_2 - \rho_1) g h \quad (3-18)$$

当被测流体是气体时, 由于气体密度小, $\rho_1 g h$ 可忽略不计。

4. 倾斜微压计

当测量较微小的流体压强时, 为了提高测量精确度, 往往采用倾斜微压计, 如图 3-11 所示。截面积为 A_1 、倾斜角 α 可调的玻璃管与一宽广容器相连通, 该容器的截面积为 A_2 , 内充密度为 ρ 的工作液体 (通常用密度 $\rho = 810 \text{ kg/m}^3$ 的酒精)。

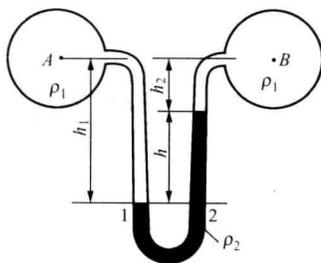


图 3-10 U 形管差压计

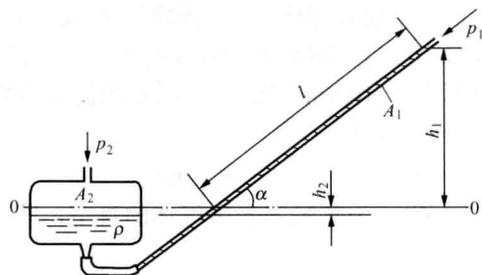


图 3-11 倾斜微压计

当微压计未感受压差时, 斜管入口压强 p_1 与宽广容器入口压强 p_2 相等, 容器与斜管内的液面平齐 (0-0)。当微压计感受压差时, 比如 $p_2 > p_1$, 斜管中的液面将上升 l 长度, 斜管中液面的上升高度为 $h_1 = l \sin \alpha$; 宽广容器中的液面下降 h_2 。由于容器中液体下降的体积与斜管中液体上升的体积相等, 所以 $h_2 = l A_1 / A_2$ 。这样, 微压计中两液面的实际高度差为

$$h = h_1 + h_2 = l(\sin\alpha + A_1/A_2)$$

被测的压强差为

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho gh = \rho g(\sin\alpha + A_1/A_2)l = kl \tag{3-19}$$

式中 $k = \rho g(\sin\alpha + A_1/A_2)$ 为微压计系数，不同的 α 角对应着不同的 k 值。为了计算测量结果方便，国产 Y-61 型倾斜微压计将与五种测量角度 α 相对应的 k 值 (0.2、0.3、0.4、0.6 和 0.8) 刻在微压计的弧形支架上。在已定 k 值的情况下，根据倾斜管的液体柱长度读数 l 就可由式 (3-19) 求得压强差。

当倾斜管开口通大气时，测得的 p_2 为计示压强；当容器开口通大气时，测得的 p_1 为负计示压强（真空）。

5. 补偿式微压计

这是一种更精确的测量微小压强或压强差的仪器，常用于要求较高的试验测定，亦用来校准普通的倾斜微压计，其工作原理如图 3-12 所示。盛有液体的环状水匣 1 通过软管 5 和观测筒 2 相连，水匣在长螺杆 4 上的位置可以上下调节，观测筒内有水准头 3。测压前调节水匣的位置，使水准头与液面在一条水平线上，如图 (a) 所示。当被测压强 p 作用于观测筒液面上时，观测筒内的液面下降。为了测出压强 p ，可调节水匣使之向上移动，同时，观测筒内的液面也将跟着上升，直至观测筒内的液面回到原来的位置，如图 (b) 所示。根据水匣液面上升的高度 Δh 即可求出压强 p ：

$$p = p_a + \rho g \Delta h \tag{3-20}$$

或

$$p_e = \rho g \Delta h \tag{3-20a}$$

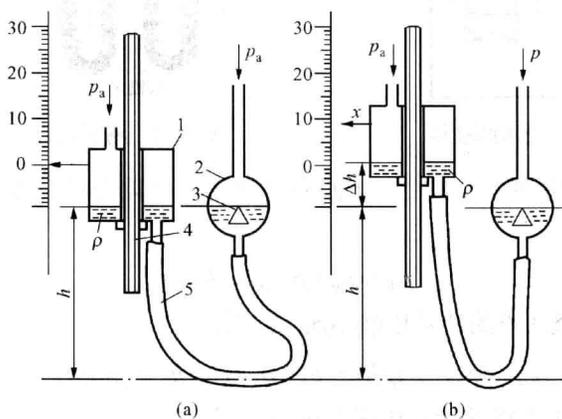


图 3-12 补偿式微压计工作原理示意

(a) 测压前；(b) 测压时

1—水匣；2—观测筒；3—水准头；4—螺杆；5—软管

由于水匣、观测筒和软管的容积是固定的，装在其中的液体的容积也是固定的，因此，当观测筒内的液面维持原状时，水匣的液面与水匣的相对位置也是不变的。所以，水匣的位移就是其中液面的升高值，即

$$x - 0 = \Delta h$$

在补偿式微压计的长螺杆 4 的上端，安装有分格为 100 的分度盘，螺杆的螺距为 1mm，所以，

补偿式微压计的最小分辨率为 $1\text{mmH}_2\text{O}$, 相当于 0.0980665Pa 。

【例 3-1】 如图 3-13 所示, 有一直径 $d=12\text{cm}$ 的圆柱体, 质量 $m=5.1\text{kg}$ 。在力 $F=100\text{N}$ 的作用下, 当淹深 $h=0.5\text{m}$ 时, 处于静止状态, 求测压管中水柱的高度 H 。

【解】 圆柱体底面上各点所受到的计示压强为

$$p_e = \frac{F + mg}{\pi d^2 / 4} = \frac{100 + 5.1 \times 9.807}{0.7854 \times (0.12)^2} = 13263 \text{ (Pa)}$$

由计示压强计算公式 (3-15) 可知

$$p_e = \rho g (H + h)$$

$$\text{所以 } H = \frac{p_e}{\rho g} - h = \frac{13263}{1000 \times 9.807} - 0.5 = 0.8254 \text{ (m)}$$

【例 3-2】 图 3-14 所示为测压装置。假设容器 A 中水面上的计示压强 $p_e = 2.45 \times 10^4 \text{Pa}$, $h=500\text{mm}$, $h_1=200\text{mm}$, $h_2=100\text{mm}$, $h_3=300\text{mm}$, 水的密度 $\rho_1=1000\text{kg/m}^3$, 酒精的密度 $\rho_2=800\text{kg/m}^3$, 水银的密度 $\rho_3=13600\text{kg/m}^3$, 试求容器 B 中气体的计示压强。

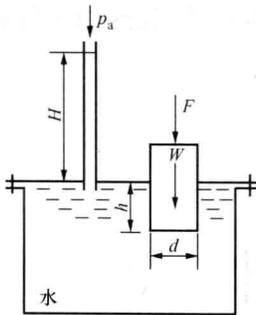


图 3-13 受压圆柱体

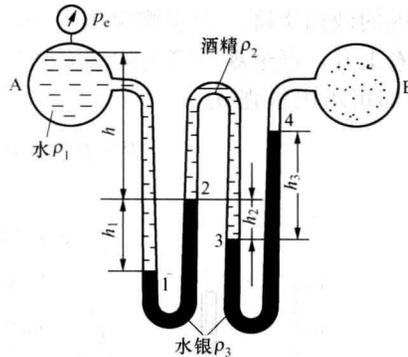


图 3-14 测压装置

【解】 标出如图所示的 1、2、3、4 四个交界面, 即四个等压面。在水中 1 点的计示压强为

$$p_{1e} = p_e + \rho_1 g (h + h_1)$$

酒精中 2 点的计示压强比 1 点的计示压强小 $\rho_3 g h_1$, 即

$$p_{2e} = p_{1e} - \rho_3 g h_1 = p_e + \rho_1 g (h + h_1) - \rho_3 g h_1$$

酒精中 3 点的计示压强比 2 点的计示压强大 $\rho_2 g h_2$, 即

$$p_{3e} = p_{2e} + \rho_2 g h_2 = p_e + \rho_1 g (h + h_1) - \rho_3 g h_1 + \rho_2 g h_2$$

4 点的计示压强比 3 点的计示压强小 $\rho_3 g h_3$, 即

$$p_{4e} = p_{3e} - \rho_3 g h_3 = p_e + \rho_1 g (h + h_1) - \rho_3 g h_1 + \rho_2 g h_2 - \rho_3 g h_3$$

由于气体密度很小, 故容器 B 中气体的计示压强 p_{Be} 即为 4 点的计示压强, 代入数值, 得

$$p_{Be} = p_{4e} = 2.45 \times 10^4 + 1000 \times 9.807 (0.5 + 0.2) + 800 \times 9.807 \times 0.1 - 13600 \times 9.807 (0.2 + 0.3) = -34538 \text{ (Pa)}$$

容器中的计示压强为负值说明该容器处于真空状态。

【例 3-3】 如图 3-15 所示，两圆筒用管子连接，内充水银，第一个圆筒的直径 $d_1=45\text{cm}$ ，其活塞上受力 $F_1=3197\text{N}$ ，密封气体的计示压强 $p_e=9810\text{Pa}$ ；第二个圆筒的直径 $d_2=30\text{cm}$ ，其活塞上受力 $F_2=4945.5\text{N}$ ，开口通大气。若不计活塞质量，求平衡状态时两活塞的高度差 h 。水银的密度 $\rho=13600\text{kg/m}^3$ 。

【解】 外力 F_1 和 F_2 在两活塞底面流体中产生的压强分别为

$$p_1 = \frac{F_1}{\pi d_1^2/4} = \frac{3197}{0.7854 \times 0.45^2} = 20101(\text{Pa})$$

$$p_2 = \frac{F_2}{\pi d_2^2/4} = \frac{4945.5}{0.7854 \times 0.3^2} = 69964(\text{Pa})$$

由于 $a-a$ 是等压面，第一个活塞上部密封气体的压强是计示压强，而第二个活塞上的大气压强不必计入，于是有

$$p_e + p_1 + \rho g h = p_2$$

故

$$h = \frac{p_2 - p_e - p_1}{\rho g} = \frac{69964 - 9810 - 20101}{13600 \times 9.807} = 0.3(\text{m})$$

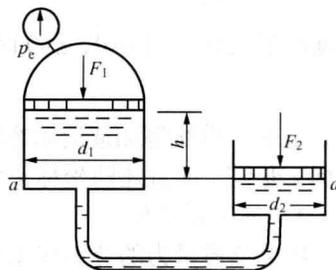


图 3-15 求两活塞高度差

第五节 液体的相对平衡

在前几节中讨论了作用在流体上的质量力只有重力时流体的平衡。下面分别讨论水平直线等加速运动容器中和等角速旋转容器中液体的相对平衡。

一、水平直线等加速运动容器中液体的相对平衡

图 3-16 所示为装着液体在水平轨道上以等加速度 a 自左向右运动的罐车，液面上气体的压强为 p_0 。罐车的等加速运动必然带动其中的液体也作等加速运动，液体与罐车达到相对平衡后，液面与水平面便形成倾斜角 α 。把参考坐标系选在罐车上，坐标原点取在液面不变化的中心点 o ， z 轴铅直向上， x 轴沿水平加速度方向。当应用达朗伯原理去分析液体对非惯性参考坐标系 oxz 的相对平衡时，作用在液体某质点 m 上的质量力，除了铅直向下的重力外，还要虚加上一个大小等于液体质点的质量乘加速度、方向与加速度方向相反的惯性力，所以作用在单位质量液体上的

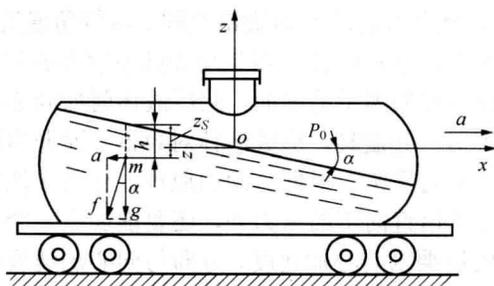


图 3-16 水平直线等加速运动容器中液体的相对平衡

质量力为

$$f_x = -a, f_y = 0, f_z = -g$$

1. 流体静压强分布规律

将单位质量力的分力代入压强差公式 (3-3)，得

$$dp = \rho(-adx - gdz)$$

积分上式, 得

$$p = -\rho(ax + gz) + C$$

根据边界条件: 当 $x=0$ 、 $z=0$ 时, $p=p_0$, 代入上式, 得 $C=p_0$ 于是

$$p = p_0 - \rho(ax + gz) \quad (3-21)$$

这就是水平直线等加速运动容器中液体的静压强分布。公式表明, 压强 p 不仅随质点的铅直坐标 z 变化, 而且还随坐标 x 变化。

2. 等压面方程

将单位质量力的分力代入等压面微分方程式 (3-4), 得

$$adx + gdz = 0$$

积分上式, 得

$$ax + gz = C \quad (3-22)$$

这就是等压面方程。水平直线等加速运动容器中液体的等压面是斜平面。不同的常数 C 代表不同的等压面, 故等压面是一簇平行的斜面。由式 (3-22) 可得等压面对 x 方向的倾斜角为

$$\alpha = -\arctan(a/g) \quad (3-23)$$

可见, 等压面与质量力的合力相互垂直。

在自由液面上, 当 $x=0$ 、 $z=0$ 时, 积分常数 $C=0$; 如果令自由液面上某点的铅直坐标为 z_s , 则自由液面方程为

$$ax + gz_s = 0 \quad (3-24)$$

或

$$z_s = -ax/g \quad (3-24a)$$

将式 (3-24) 代入流体静压强分布公式 (3-21), 得

$$p = p_0 + \rho g(z_s - z) = p_0 + \rho g h \quad (3-21a)$$

可以看出, 水平直线等加速运动容器中液体的静压强公式 (3-21a) 与静止流体中的静压强公式 (3-12) 完全相同, 即液体内任一点的静压强等于自由液面上的压强加上深度为 h 、密度为 ρ 的液体所产生的压强。

二、等角速旋转容器中液体的相对平衡

如图 3-17 所示, 盛有液体的容器绕铅直轴 z 以等角速度 ω 旋转。由于液体有黏性, 液体便被容器带动而随着容器旋转。当旋转稳定后, 液面呈现如图示的曲面。此后液体就如同刚体一样保持原状随同容器一起旋转, 形成液体对容器 (即非惯性参考坐标系 $oxyz$) 的相对平衡。根据达朗伯原理, 作用在液体质点上的质量力, 除了铅直向下的重力外, 还要虚加上一个大小等于液体质点的质量乘以向心加速度、方向与向心加速度相反的离心惯性力。

在液体中任取某质点 m , m 点到旋转轴的半径为 r , 高度为 z 。从图上可知: $x = r \cos \alpha$; $y = r \sin \alpha$, 则作用在单位质量液体上的质量力为

$$f_x = \omega^2 r \cos \alpha = \omega^2 x$$

$$f_y = \omega^2 r \sin \alpha = \omega^2 y$$

$$f_z = -g$$

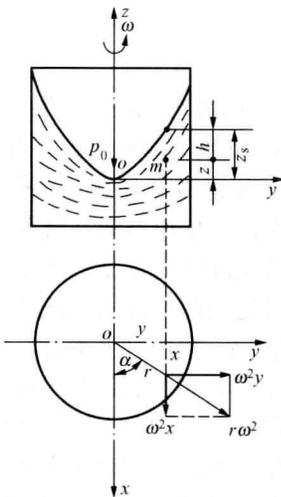


图 3-17 等角速旋转容器中液体的相对平衡

1. 流体静压强分布规律

将单位质量力的分力代入压强差公式 (3-3), 得

$$dp = \rho(\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz)$$

积分上式, 得

$$p = \rho \left(\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - gz \right) + C$$

或

$$p = \rho g \left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} - z \right) + C \quad (3-25)$$

根据边界条件: 当 $r=0$ 、 $z=0$ 时, $p=p_0$, 可得 $C=p_0$, 故

$$p = p_0 + \rho g \left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} - z \right) \quad (3-26)$$

这就是等角速旋转运动容器中液体的静压强分布。公式表明, 在同一高度上, 液体因旋转而产生的压强与旋转角速度的平方和质点所在半径的平方成正比。

2. 等压面方程

将单位质量力的分力代入等压面微分方程式 (3-4), 得

$$\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz = 0$$

积分上式, 得

$$\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - gz = C$$

或

$$\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz = C \quad (3-27)$$

此方程是抛物面方程。不同的常数 C 代表不同的等压面, 故等角速旋转容器中液体相对平衡时, 等压面是一簇绕 z 轴的旋转抛物面。

在自由液面上, 当 $r=0$ 、 $z=0$ 时, 可得积分常数 $C=0$, 如果令 z_s 为自由液面上某点的铅直坐标, 则自由液面方程为

$$\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz_s = 0$$

或

$$z_s = \frac{\omega^2 r^2}{2g} \quad (3-27a)$$

此式说明, 自由液面上某点的铅直坐标与旋转角速度的平方和质点所在半径的平方成正比。

将式 (3-27a) 代入式 (3-26), 可得

$$p = p_0 + \rho g(z_s - z) = p_0 + \rho g h \quad (3-26a)$$

可以看出, 绕铅直轴等角速旋转容器中液体的静压强公式 (3-26a) 与静止流体中静压强公式 (3-12) 完全相同, 即液体中任一点的静压强等于自由液面上的压强加上深度为 h 、密度为 ρ 的液体所产生的压强。

下面分析两个实例:

(1) 如图 3-18 所示, 半径为 R 、中心开口并通大气的圆筒内装满液体。当圆筒绕铅直轴 z 以等角速度 ω 旋转时, 液体虽借离心惯性向外甩, 但由于受容器顶盖的限制, 液面并不能形成旋转抛物面。此时因边界条件同推导式 (3-26) 时一样, 故液体各点的静压强分布

仍为

$$p = p_a + \rho g \left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} - z \right)$$

作用在顶盖上各点的计示压强仍按抛物面规律分布, 如图中箭头所示。顶盖中心点 o 处的流体静压强 $p = p_a$, 顶盖边缘点 B 处的流体静压强 $p = p_a + \rho \frac{\omega^2 R^2}{2}$ 。可见, 边缘点 B 处的流体静压强最大。旋转角速度 ω 越高, 边缘处的流体静压强越大。离心铸造机和其他离心机械就是根据这一原理设计的。

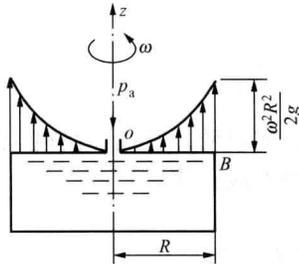


图 3-18 顶盖中心开口的容器

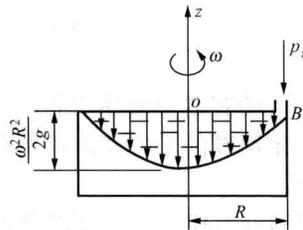


图 3-19 顶盖边缘开口的容器

(2) 如图 3-19 所示, 半径为 R 、边缘开口并通大气的圆筒内装满液体。当圆筒绕铅直轴 z 以等角速度 ω 旋转时, 液体虽借离心惯性向外甩, 但由于在容器内部产生真空而把液体吸住, 以致液体跑不出去。此时边界条件为: 当 $r=R, z=0$ 时, $p=p_a$, 由式 (3-25) 得积分常数 $C = p_a - \rho \omega^2 R^2 / 2$, 代入式 (3-25), 得

$$p = p_a - \rho g \left[\frac{\omega^2 (R^2 - r^2)}{2g} + z \right]$$

可见, 尽管液面没有形成旋转抛物面, 但作用在顶盖上各点的流体静压强仍按抛物面规律分布。顶盖边缘 B 点的流体静压强 $p = p_a$, 顶盖中心 o 点的流体静压强为

$$p = p_a - \rho \frac{\omega^2 R^2}{2}$$

顶盖中心 o 点处的真空为

$$p_v = p_a - p = \rho \frac{\omega^2 R^2}{2}$$

可见, 旋转角速度 ω 越高, 中心处的真空越大。离心水泵和离心风机都是利用中心处形成的真空把水或空气吸入壳体, 再借助叶轮旋转所产生的离心惯性增大能量后, 由出口输出。

还应指出, 实际上许多工程设备是绕水平轴作等角速旋转的。但是, 在转速相当高的情况下, 由于离心惯性力远远大于重力, 用上述绕铅直轴旋转的理论去解决绕水平轴旋转的问题, 还是足够精确的。只有在转速比较低时, 才需要将绕水平轴与绕铅直轴旋转的问题区别开来。至于绕水平轴作等角速旋转时流体静压强的计算公式, 由于其推导过程与上述类似, 不再赘述。

【例 3-4】 油轮的前、后舱装有相同的油，液位分别为 h_1 和 h_2 ，前舱长 l_1 ，后舱长 l_2 ，前、后舱的宽度均为 b ，如图 3-20 所示。试问在前、后舱隔板上的总压力等于零，即隔板前、后油的深度相同时，油轮的等加速度 a 应该是多少？

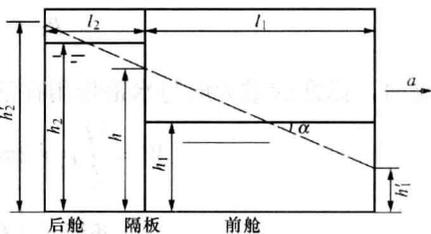


图 3-20 求油轮加速度的示意图

【解】 当船不动时，由于 $h_2 > h_1$ ，船舱的隔板受到的总压力方向是朝前的。如果油轮以加速度 a 前进，恰使前、后舱的液面形成连续的倾斜面（如图中虚线所示），倾斜面与水平面的夹角为 α ，由式 (3-23) 有

$$\tan\alpha = \frac{a}{g} = \frac{h - h_1'}{l_1} = \frac{h_2' - h}{l_2} \quad (a)$$

因为静止时与等加速运动时油的体积是不变的，所以有以下关系式：

$$l_1 b (h_1 - h_1') = l_1 b (h - h_1') / 2$$

或

$$h_1' = 2h_1 - h \quad (b)$$

$$l_2 b (h_2 - h) = l_2 b (h_2' - h) / 2$$

或

$$h_2' = 2h_2 - h \quad (c)$$

将式 (b) 和式 (c) 代入式 (a)，可求出隔板处的液位为

$$h = \frac{h_2 l_1 + h_1 l_2}{l_1 + l_2} \quad (d)$$

联解式 (a)、式 (b) 和式 (d)，即可求得所需加速度

$$a = 2g \left[\frac{h_2 l_1 + h_1 l_2}{l_1 (l_1 + l_2)} - \frac{h_1}{l_1} \right]$$

【例 3-5】 如图 3-21 所示，液体转速计由直径为 d_1 的中心圆筒和重力为 W 的活塞及与其联动的两根直径为 d_2 的细管组成，内装水银。细管中心线距圆筒中心轴的距离为 R 。当转速计的转速变化时，活塞带动指针上、下移动。试推导活塞位移 h 与转速 n 之间的关系式。

【解】 (1) 转速计静止不动时，细管与圆筒中的液位差 a 是由于活塞的重力所致，即

$$W = \rho g \frac{\pi}{4} d_1^2 a$$

$$a = \frac{W}{\rho g \pi d_1^2 / 4} \quad (e)$$

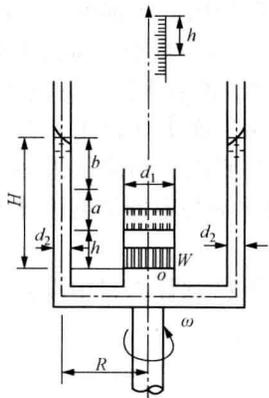


图 3-21 液体转速计

(2) 当转速计以角速度 ω 旋转时，活塞带动指针下降 h ，两细管液面上升 b ，根据圆筒中下降的体积与两细管中上升的体积相等，得

$$\frac{\pi}{4} d_2^2 \times 2b = \frac{\pi}{4} d_1^2 h$$

$$b = \frac{d_1^2}{2d_2^2} h \quad (f)$$

(3) 取活塞底面中心为坐标原点， z 轴向上。根据等角速旋转容器中压强分布公式 (3-25)，当 $r=R, z=H$ 时， $p_e=0$ (计示压强)， $C = \rho g [H - \omega^2 R^2 / (2g)]$ ，故有

$$p_e = \rho g \left[\frac{\omega^2 (r^2 - R^2)}{2g} + H - z \right]$$

这时, 活塞的重力应与水银作用在活塞底面上的压强的合力相等, 故有

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{d_1/2} p_e \times 2\pi r dr = 2\pi\rho g \int_0^{d_1/2} \left[\frac{\omega^2}{2g} (r^2 - R^2) + H \right] r dr \\ &= \frac{\pi d_1^2}{4} \rho g \left[\frac{\omega^2}{2g} \left(\frac{d_1^2}{8} - R^2 \right) + H \right] \end{aligned}$$

或

$$\frac{W}{\frac{\pi}{4} d_1^2 \rho g} = \frac{\omega^2}{2g} \left(\frac{d_1^2}{8} - R^2 \right) + H = \frac{\omega^2}{2g} \left(\frac{d_1^2}{8} - R^2 \right) + a + b + h$$

将式 (e)、式 (f) 代入上式, 得

$$h = \frac{1}{2g} \frac{R^2 - d_1^2/8}{1 + d_1^2/(2d_2^2)} \omega^2$$

而 $\omega = \pi n/30$, 故有

$$n = \frac{30}{\pi} \left\{ \frac{2gh[1 + d_1^2/(2d_2^2)]}{R^2 - d_1^2/8} \right\}^{1/2}$$

第六节 静止液体作用在平面上的总压力

以上几节讨论了静止或相对静止液体中流体静压强的分布规律。在工程技术中, 例如水箱、油柜、水闸、闸阀、挡水墙等的设计, 都会遇到静止液体作用在固体壁面上总压力的计算问题。本节将先讨论静止液体作用在水平壁面上的总压力。如果容器的底面面积为 A , 所盛液体的密度为 ρ , 液深为 h , 液面上和容器外均为大气压强 p_a , 则仅由液体产生的作用在底面上的总压力为

$$F_p = p_e A = \rho g h A$$

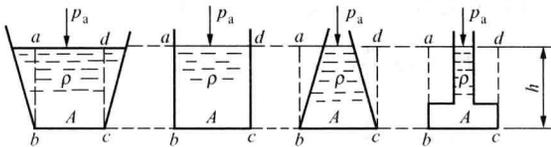


图 3-22 底面相同而形状不同的几种容器

可见, 仅由液体产生的作用在水平平面上的总压力只与液体的密度、平面面积和液深有关。图 3-22 所示为形状不同而底面面积均为 A 的四个容器, 若装入同一种液体, 其液深亦相同, 自由液面上均作用着大气压强, 则液体作用在底面上的总压力必然

相等, 而与容器的形状无关。这就是说, 液体作用在容器上的总压力不应与容器所盛液体的重力相混淆。

注意, 倘若自由液面上的压强与容器外环境的大气压强不相等。则必须计入自由液面上计示压强对容器壁的作用。以后讨论的有关总压力的计算都要注意这一点。

下面讨论一般情况下静止液体作用在平面上的总压力。

设在静止液体中有一与水平方向的倾斜角为 α 、形状任意的平面, 其面积为 A , 液面上和斜平面外侧均为大气压强。参考坐标系如图 3-23 所示, x 、 y 轴取在平面上, z 轴垂直于平面, 由于平面上各点的液深不同, 因而各点的流体静压强亦不相同, 但它们的方向均垂直指向平面 A , 组成一平行力系。求总压力的问题便成为平行力系的合成问题。

一、总压力的大小

在平面 A 上取一微元面积 dA ，其淹深为 h ，到 oy 轴的距离为 x ，液体作用在微元面积上压强的合力为

$$dF_p = p_c dA = \rho g h dA = \rho g x \sin \alpha dA$$

沿面积 A 积分，得作用在平面 A 上的总压力为

$$F_p = \iint_A dF_p = \rho g \sin \alpha \iint_A x dA$$

式中： $\iint_A x dA = x_c A$ 为平面 A 对 oy 轴的面积矩； x_c 为平面形心 c 的 x 坐标。设 h_c 为形心 c 的淹深，则

$$F_p = \rho g \sin \alpha x_c A = \rho g h_c A \tag{3-28}$$

即液体作用在平面上的总压力等于以平面面积为底、以平面形心淹深为高的液柱的重力。根据这一结论，作用在图 3-22 四种容器底面上的总压力都可以用体积为 $abcd$ 的液体重力表示，故它们是彼此相等的。

二、总压力的作用点

总压力的作用线与平面的交点为总压力的作用点，也叫压力中心，以 D 点表示在图 3-23 中。由合力矩定理知，总压力 F_p 对 oy 轴之矩等于各微元面积上压强的合力对 oy 轴之矩的代数和，即

$$F_p x_D = \iint_A dF_p x$$

或

$$\rho g \sin \alpha x_c A x_D = \rho g \sin \alpha \iint_A x^2 dA$$

式中： $\iint_A x^2 dA = I_y$ 为平面 A 对 oy 轴的惯性矩，故

$$x_D = I_y / (x_c A) \tag{3-29}$$

根据惯性矩平行移轴定理 $I_y = I_{cy} + x_c^2 A$ ，可将平面 A 对 oy 轴的惯性矩 I_y 换算成对通过平面形心 c 而且平行于 oy 轴的轴线的惯性矩 I_{cy} ，代入式 (3-29)，得

$$x_D = x_c + I_{cy} / (x_c A) \tag{3-29a}$$

由于 $I_{cy} / (x_c A)$ 恒为正值，故 $x_D > x_c$ 。即压力中心 D 总在平面形心 c 的下方，间距为 $I_{cy} / (x_c A)$ 。按照同样的方法可得

$$y_D = I_{xy} / (x_c A) = y_c + I_{cxy} / (x_c A) \tag{3-30}$$

式中： y_c 为平面形心 c 的 y 坐标， I_{xy} 、 I_{cxy} 分别为平面对 oxy 坐标系的惯性积、平面对通过形心平行于该坐标系的二轴的惯性积。

若通过形心的两轴中有任何一轴是该平面的对称轴，则 $I_{cxy} = 0$ ，压力中心便在通过形心而平行于 x 轴的直线上。工程中遇到的许多平面都是对称的，因而可以不去计算 y_D 。许多虽非完全对称的平面，也常常可以分成几个规则的面积去计算。

【例 3-6】 如图 3-24 所示，一矩形闸门两面受到

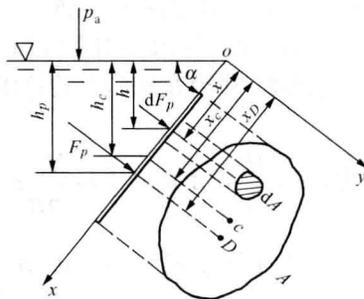


图 3-23 倾斜平面上的液体总压力

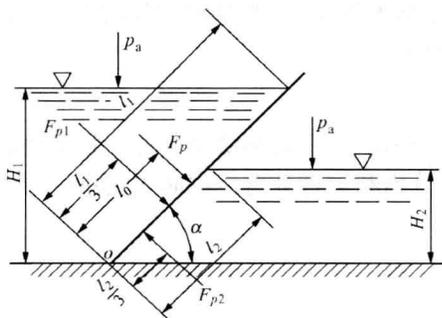


图 3-24 两面受压的闸门

水的压力, 左边水深 $H_1=4.5\text{m}$, 右边水深 $H_2=2.5\text{m}$, 闸门与水平面成 $\alpha=45^\circ$ 倾斜角, 假设闸门的宽度 $b=1\text{m}$ 。试求作用在闸门上的总压力及其作用点。

【解】 作用在闸门上的总压力为左右两边液体总压力之差, 即

$$F_p = F_{p1} - F_{p2}$$

因为 $h_{c1} = \frac{H_1}{2}$, $A_1 = bl_1 = b \frac{H_1}{\sin\alpha}$; $h_{c2} = \frac{H_2}{2}$, $A_2 = bl_2 = b \frac{H_2}{\sin\alpha}$, 所以

$$\begin{aligned} F_p &= \rho g h_{c1} A_1 - \rho g h_{c2} A_2 = \frac{\rho g b H_1^2}{2 \sin\alpha} - \frac{\rho g b H_2^2}{2 \sin\alpha} = \frac{9807 \times 1 \times 4.5^2}{2 \times 0.7071} - \frac{9807 \times 1 \times 2.5^2}{2 \times 0.7071} \\ &= 140427 - 43342 = 97085 \text{ (N)} \end{aligned}$$

由于矩形平面的压力中心的坐标为

$$x_D = x_c + \frac{I_{cy}}{x_c A} = \frac{l}{2} + \frac{bl^3/12}{(l/2)dl} = \frac{2}{3}l$$

根据合力矩定理, 对通过 o 点垂直于图面的轴取矩, 得

$$F_p l_0 = F_{p1} \frac{l_1}{3} - F_{p2} \frac{l_2}{3} = F_{p1} \frac{H_1}{3 \sin\alpha} - F_{p2} \frac{H_2}{3 \sin\alpha}$$

所以

$$l_0 = \frac{F_{p1} H_1 - F_{p2} H_2}{3 F_p \sin\alpha} = \frac{140427 \times 4.5 - 43342 \times 2.5}{3 \times 97085 \times 0.7071} = 2.542 \text{ (m)}$$

这就是作用在闸门上的总压力的作用点距闸门下端的距离。

第七节 静止液体作用在曲面上的总压力

在工程技术中, 例如各类圆柱形容器、储油罐、球形压力罐、水塔、弧形闸门等的设计, 都会遇到静止液体作用在曲面上总压力的计算问题。由于作用在曲面上各点的流体静压强都垂直于容器壁, 这就形成了复杂的空间力系。求总压力的问题便成为空间力系的合成问题。

工程中用得最多的是二维曲面, 三维曲面与二维曲面的计算方法类似, 所以下面研究静止液体作用在二维曲面上的总压力。

设有一承受液体压强的二维曲面, 其面积为 A 。若参考坐标系的 y 轴与此二维曲面的母线平行, 则曲面在 oxz 平面上的投影便成为曲线 ab , 如图 3-25 所示。若在曲面 ab 上任意点取一微元面积 dA , 它的淹深为 h , 则仅液体作用在它上面的总压力为

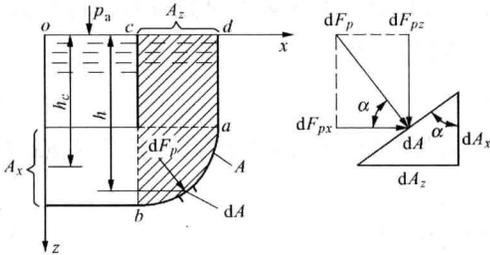


图 3-25 二维曲面上的液体总压力

$$dF_p = \rho g h dA$$

为了进行计算, 需要将 dF_p 分解为水平与铅直两个微元分力, 并将此两微元分力在整个面积 A 上积分, 这样便可求得作用在曲面上的总压力的水平分力和铅直分力, 进而求出总压力的大小、方向及作用点。

一、总压力的大小和方向

1. 总压力的水平分力

设 α 为微元面积 dA 的法线与 x 轴的夹角, 则微元水平分力为

$$dF_{px} = \rho g h dA \cos \alpha$$

由图 3-25 知, $dA \cos \alpha = dA_x$, 故总压力的水平分力

$$F_{px} = \rho g \iint_{A_x} h dA_x$$

式中, $\iint_{A_x} h dA_x = h_c A_x$ 为面积 A 在 oyz 坐标面上的投影面积 A_x 对 y 轴的面积矩, 故上式成为

$$F_{px} = \rho g h_c A_x \tag{3-31}$$

意即, 液体作用在曲面上总压力的水平分力等于液体作用在该曲面对铅直坐标面 oyz 的投影面 A_x 上的总压力。同液体作用在平面上的总压力一样, 水平分力 F_{px} 的作用线通过 A_x 的压力中心。

2. 总压力的铅直分力

由于微元铅直分力 $dF_{pz} = \rho g h dA \sin \alpha$, 由图 3-25 可知, $dA \sin \alpha = dA_z$, 故总压力的铅直分力

$$F_{pz} = \rho g \iint_{A_z} h dA_z$$

式中, $\iint_{A_z} h dA_z = V_p$ 为曲面 ab 上的液柱体积 $abcd$ (图 3-25 中的阴影部分), 这样一个体积称为压力体。用压力体表示, 上式成为

$$F_{pz} = \rho g V_p \tag{3-32}$$

意即液体作用在曲面上总压力的铅直分力等于压力体的液体重力, 它的作用线通过压力体的重心。

3. 总压力

总压力的大小为

$$F_p = (F_{px}^2 + F_{pz}^2)^{1/2} \tag{3-33}$$

总压力与铅直线间的夹角由下式确定:

$$\tan \theta = F_{px} / F_{pz} \tag{3-34}$$

二、总压力的作用点

由于总压力的铅直分力 F_{pz} 的作用线通过压力体的重心而指向受压面, 水平分力 F_{px} 的作用线通过 A_x 的压力中心而指向受压面, 故总压力的作用线必通过这两条作用线的交点 D' 且与铅直线成 θ 角, 如图 3-26 所示, 这条总压力的作用线与曲面的交点 D 就是总压力在曲面上的作用点。

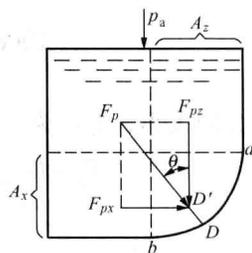


图 3-26 总压力在曲面上的作用点

三、压力体

如前所述, 压力体是个纯数学概念, 与体内有无液体无关。在图 3-27 中有两个形状、尺寸和淹深完全相同的曲面 ab 与 $a'b'$, 只是 ab 的凹面向着液体, 而 $a'b'$ 的凸面向着液体。由于液体的静压强只与淹深有关, 故作用在 ab 面和 $a'b'$ 面上对应点 m 和 m' 的流体静压强的大小皆相等, 由流体静压强的铅直分力积分而得到的总压力的铅直分力的大小也必然相等。从压力体来看, 这两个压力体的体积是完全相等的, 即

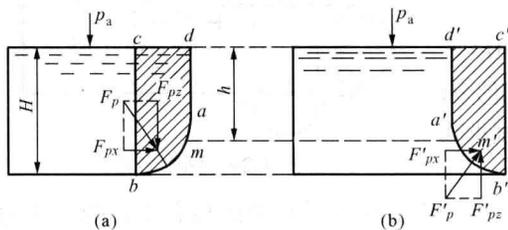


图 3-27 压力体

$V_{abcd}=V_{a'b'c'd'}$ 。但是这两个铅直分力的方向却相反,图(a)所示压力体 $abcd$ 中充满液体,曲面 ab 受自上而下的总压力铅直分力作用,即 F_{pz} 的方向向下;图(b)所示压力体 $a'b'c'd'$ 中没有液体,曲面 $a'b'$ 受自下而上的总压力铅直分力的作用,即 F_{pz} 方向向上。由此可见,对于压力体的理解应当是,液体作用在曲面上的总压力的铅直分力的大小恰好等于压力体的液体重力,但并非作用在曲面上的一定是它上面压力体的液体重力。

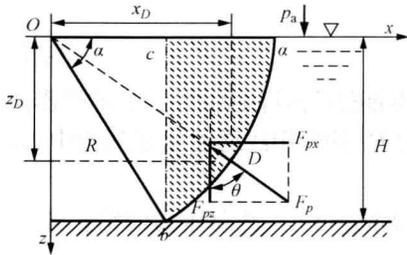


图 3-28 扇形闸门

【例 3-7】 有一圆柱扇形闸门,圆柱的半径 $R=6\text{m}$,闸门宽度 $B=6\text{m}$,闸门关闭时水深 $H=5.196\text{m}$, $\alpha=60^\circ$,求作用在闸门曲面 ab 上的总压力。

【解】 如图 3-28 所示,将圆柱扇形闸门垂直于母线的后侧面取作 oxz 坐标平面, y 轴向前。已知闸门淹没部分在 oyz 坐标面上的投影面积 $A_x=BH$,其形心的淹深 $h_c=H/2$,代入式(3-31)得

$$\begin{aligned} F_{px} &= \rho g h_c A_x = \frac{1}{2} \rho g B H^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 1000 \times 9.807 \times 6 \times 5.196^2 = 794320(\text{N}) \end{aligned}$$

由于曲面 ab 上的压力体 $V_p=BA_{abc}$,而面积 A_{abc} 为扇形面积 $A_{aob}=\frac{\pi R^2}{360^\circ}$ 与三角形面积 $A_{cob}=H^2/(2\tan\alpha)$ 之差,代入式(3-32)得

$$\begin{aligned} F_{pz} &= \rho g V_p = \rho g B A_{abc} = \rho g B \left(\frac{\pi R^2}{360^\circ} - \frac{H^2}{2\tan\alpha} \right) \\ &= 1000 \times 9.807 \times 6 \left[\frac{\pi \times 60^\circ}{360^\circ} \times 6^2 - \frac{5.196^2}{2 \tan 60^\circ} \right] = 650544(\text{N}) \end{aligned}$$

故总压力的大小、方向为

$$\begin{aligned} F_p &= (F_{px}^2 + F_{pz}^2)^{1/2} = (794320^2 + 650544^2)^{1/2} = 1026719(\text{N}) \\ \tan\theta &= F_{px}/F_{pz} = 794320/650544 = 1.221 \\ \theta &= 50.68^\circ = 50^\circ 41' \end{aligned}$$

由于作用在闸门上水的压强都垂直于圆柱壁面,指向通过坐标原点的母线,故总压力的作用线也必指向它。总压力在壁面上作用点 D 的坐标为

$$x_D = R \sin\theta = 6 \times \sin 50.68^\circ = 6 \times 0.7736 = 4.642(\text{m})$$

$$y_D = B/2 = 6/2 = 3(\text{m})$$

$$z_D = R \cos\theta = 6 \times \cos 50.68^\circ = 6 \times 0.6337 = 3.802(\text{m})$$

【例 3-8】 如图 3-29 所示的储水容器,其壁面上有三个半球形的盖。设 $d=0.5\text{m}$, $h=1.5\text{m}$, $H=2.5\text{m}$ 。试求作用在每个盖上的液体总压力。

【解】 底盖上总压力的水平分力为零,这是因为,作用在盖子左半部与右半部的总压力的水平分力相等,而方向相反。底盖上的总压力等于总压力的铅直分力,用下式计算:

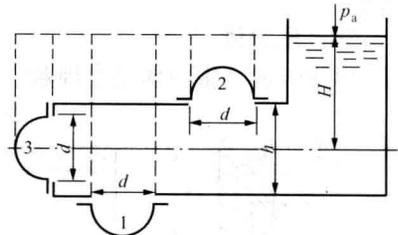


图 3-29 储水容器

$$\begin{aligned}
 F_{pz1} &= \rho g V_{p1} = \rho g \left[\frac{\pi d^2}{4} \left(H + \frac{h}{2} \right) + \frac{\pi d^3}{12} \right] \\
 &= 9807 \left[\frac{\pi \times 0.5^2}{4} (2.5 + 0.75) + \frac{\pi \times 0.5^3}{12} \right] \\
 &= 6579 \text{ (N)}
 \end{aligned}$$

顶盖上总压力的水平分力亦为零，总压力等于总压力的铅直分力：

$$\begin{aligned}
 F_{pz2} &= \rho g V_{p2} = \rho g \left[\frac{\pi d^2}{4} \left(H - \frac{h}{2} \right) - \frac{\pi d^3}{12} \right] \\
 &= 9807 \left[\frac{\pi \times 0.5^2}{4} (2.5 - 0.75) - \frac{\pi \times 0.5^3}{12} \right] \\
 &= 3049 \text{ (N)}
 \end{aligned}$$

侧盖上总压力的水平分力为

$$F_{px3} = \rho g h_c A_x = \rho g H \frac{\pi d^2}{4} = 9807 \times 2.5 \frac{\pi \times 0.5^2}{4} = 4814 \text{ (N)}$$

总压力的铅直分力应等于盖之下半部与上半部的压力体之差的水重，亦即半球体积之水重：

$$F_{pz3} = \rho g \frac{\pi d^3}{12} = 9807 \times \frac{\pi \times 0.5^3}{12} = 321 \text{ (N)}$$

故侧盖上总压力的大小与方向为

$$F_p = (F_{px3}^2 + F_{pz3}^2)^{1/2} = (4814^2 + 321^2)^{1/2} = 4825 \text{ (N)}$$

$$\tan \theta = F_{px3} / F_{pz3} = 4814 / 321 = 15$$

$$\theta = 86^\circ 11'$$

因为总压力的作用线一定与盖的球面相垂直，故一定通过球心。

【例 3-9】 如图 3-30 所示，一高 $H_0=0.7\text{m}$ 、半径 $R=0.4\text{m}$ 、内装 $V=0.25\text{m}^3$ 水的圆筒以等角速度 $\omega=10\text{rad/s}$ 绕铅直轴旋转。圆筒中心开孔通大气，顶盖的质量 $m=5\text{kg}$ 。试确定作用在顶盖螺栓上的力。

【解】 先求出圆筒中没有水的那部分空间体积的大小：

$$V_0 = \pi R^2 H_0 - V = \pi \times 0.4^2 \times 0.7 - 0.25 = 0.1019 \text{ (m}^3\text{)}$$

圆筒以角速度 ω 旋转后，将形成如图所示的旋转抛物面的等压面。令 h_0 为抛物面顶点到顶盖的高度， r_0 为抛物面与顶盖相交圆周的半径。空体积旋转后成为高为 h_0 、半径为 r_0 的旋转抛物体，其体积等于半径为 r_0 、高为 h_0 的圆柱体体积之半，即

$$\frac{1}{2} \pi r_0^2 h_0 = V_0 = 0.1019 \text{ (m}^3\text{)} \quad (\text{a})$$

$$\text{由式 (3-27a)} \quad h_0 = \frac{\omega^2 r_0^2}{2g} = \frac{10^2 \times r_0^2}{2 \times 9.807} \quad (\text{b})$$

联立求解式 (a)、(b)，得 $h_0=0.5751 \text{ (m)}$ ， $r_0=0.3359 \text{ (m)}$

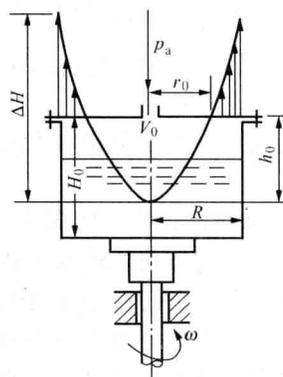


图 3-30 旋转容器

作用在顶盖上的计示压强按式(3-26)计算,则作用在顶盖上的总压力为

$$\begin{aligned} F_{pz} &= \int_0^R p_c dA = \int_0^R \rho g \left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} - h_0 \right) 2\pi r dr \\ &= \frac{\pi \rho \omega^2}{4} (R^4 - r_0^4) - \pi \rho g h_0 (R^2 - r_0^2) \\ &= \frac{\pi \times 1000 \times 10^2}{4} (0.4^4 - 0.3359^4) - \pi \times 9807 \times 0.5751 (0.4^2 - 0.3359^2) \\ &= 175 \text{ (N)} \end{aligned}$$

故螺栓所受的力

$$F = F_{pz} - mg = 175 - 49 = 126 \text{ (N)}$$

第八节 静止液体作用在潜体和浮体上的浮力 潜体和浮体平衡的稳定

在工程技术中,例如船舶、潜艇、水下构筑物、淹没在液体中的各类阀体、各类浮子的设计,都会遇到静止液体作用在它们上浮力的计算问题。

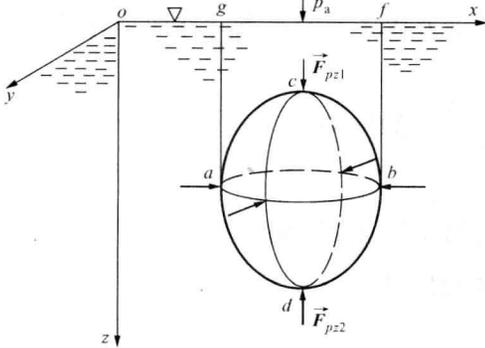


图 3-31 液体作用在淹没物体上的浮力

一、静止液体作用在潜体和浮体上的浮力

如图 3-31 所示,有一物体淹没在静止的液体中,在物体的外轮廓上做无数铅直的切线,这些切线将物体表面分为上下两部分。由式(3-32)可知,液体作用在上部分表面上的总压力的铅直分力 F_{pz1} 等于压力体 $acbfhg$ 的液体重力,方向铅直向下,即

$$F_{pz1} = \rho g V_{acbfhg}$$

液体作用在下部分表面上的总压力的铅直分力

F_{pz2} 等于压力体 V_{adbfg} 的液体重力,方向铅直向上,即

$$F_{pz2} = -\rho g V_{adbfg}$$

液体作用在整个物体上的总压力的铅直分力 F_{pz} 为 F_{pz1} 与 F_{pz2} 之和,即

$$F_{pz} = F_{pz1} + F_{pz2} = \rho g (V_{acbfhg} - V_{adbfg}) = -\rho g V_{adbc}$$

F_{pz} 为负,说明方向向上。

在物体的外轮廓上做无数条平行于 x 轴的水平切线,这些切线将物体表面分为左右两部分。由于它们在 oyz 坐标平面上的投影面积相等,故由式(3-31)知,作用在它们上面的总压力的水平分力大小相等。但作用在左侧表面上的水平分力方向向右,而作用在右侧表面上的水平分力方向向左,即它们的方向相反,故沿 x 方向水平分力的合力为零。按照同样的方法可以证明,沿 y 方向(或其他水平方向)水平分力的合力亦为零。

综上所述,液体作用在淹没物体上总压力的大小等于物体所排开液体的重力,方向铅垂向上,称它为浮力。这就是阿基米德原理。浮力的作用点称为浮心,浮心就在所排开液体体积的形心。如果用 F_B 代表浮力,其值为

$$F_B = |F_{pz}| = \rho g V_{adbc} \quad (3-35)$$

用 W 代表物体的重量, 则物体在液体中的沉浮有三种状态: $F_B > W$, 物体浮出液体表面, 称为浮体; $F_B = W$, 物体在液体中随遇平衡, 称为潜体; $F_B < W$, 物体下沉, 直至液体底部, 称为沉体。

【例 3-10】 如图 3-32 所示, 在一盛汽油的容器底上有一直径 $d_2=2\text{cm}$ 的圆阀, 该阀用曳绳系于直径 $d_1=10\text{cm}$ 的圆柱形浮子上。设浮子及圆阀的总质量 $m=0.1\text{kg}$, 汽油密度 $\rho=749.5\text{kg/m}^3$, 曳绳长度 $l=15\text{cm}$ 。试求汽油液面达到什么高度时圆阀开启。

【解】 设油面距圆阀高度为 H 时圆阀开启, 此时圆阀上所受汽油的总压力加上浮子与圆阀的重力应与浮子所产生的浮力相等。如果用 F_B 代表浮子的浮力, 用 F_p 代表汽油作用在圆阀上的总压力, 则

$$F_B = mg + F_p$$

因为 $F_B = \rho g h \frac{\pi d_1^2}{4}$, $h = H - l$, $F_p = \rho g H \frac{\pi d_2^2}{4}$, 代入上式有

$$\rho g (H - l) \frac{\pi d_1^2}{4} = mg + \rho g H \frac{\pi d_2^2}{4}$$

所以

$$\begin{aligned} H &= \frac{4mg}{\rho g \pi (d_1^2 - d_2^2)} + \frac{d_1^2 l}{d_1^2 - d_2^2} \\ &= \frac{4 \times 0.9807}{749.5 \times 9.807 \pi (0.1^2 - 0.02^2)} + \frac{0.1^2 \times 0.15}{0.1^2 - 0.02^2} \\ &= 0.1739(\text{m}) \end{aligned}$$

【例 3-11】 图 3-33 所示为汽油发动机化油器的浮子室, 用它可以自动调节供油量。试根据浮子室油面不变以及在孔口开启瞬时球形浮子淹没一半的条件来设计浮子的直径 d_1 。假设 $a=50\text{mm}$, $b=15\text{mm}$, $d_2=5\text{mm}$, 浮子质量 $m_1=0.02\text{kg}$, 针阀质量 $m_2=0.01\text{kg}$, 汽油密度 $\rho=699.5\text{kg/m}^3$, 针阀上汽油计示压强 $p_c=3.92 \times 10^4 \text{Pa}$, 杠杆的质量忽略不计。

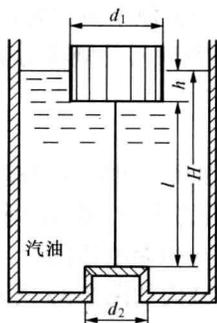


图 3-32 浮子与圆阀

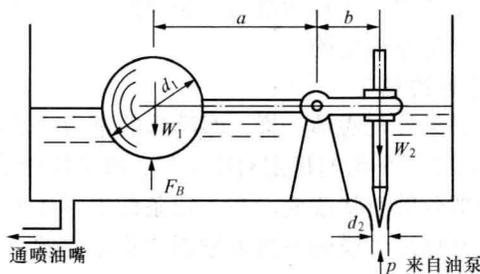


图 3-33 化油器浮子室

【解】 用 F_B 代表浮子的浮力, 用 F_p 代表作用在针阀上的总压力。对杠杆铰链的力矩平衡方程式为

$$(F_B - m_1 g) a - (F_p - m_2 g) b = 0$$

所以

$$F_B = (F_p - m_2 g) \frac{b}{a} + m_1 g$$

由于

$$F_p = p_c \frac{\pi d_2^2}{4} = 3.92 \times 10^4 \times \frac{\pi \times 0.005^2}{4} = 0.7697 \text{ (N)}$$

代入上式得
$$F_B = (0.7697 - 0.09807) \frac{0.015}{0.05} + 0.1961 = 0.3976 \text{ (N)}$$

由于浮力 $F_B = \frac{\pi d_1^3}{12} \rho g$, 所以浮子的直径

$$d_1 = \left(\frac{12 F_B}{\pi \rho g} \right)^{1/3} = \left(\frac{12 \times 0.3976}{\pi \times 699.5 \times 9.807} \right)^{1/3} = 0.06049 \text{ (m)}$$

二、潜体和浮体平衡的稳定

潜体和浮体除了平衡问题以外, 还有更重要的稳定问题; 稳定问题是潜艇、舰船安全运行的首要问题。

1. 潜体平衡的稳定

已知潜体的 $W = F_B$, 如果潜体的重力与液体的浮力又作用在同一铅垂线上, 即重心 C 与浮心 B 在同一铅垂线上, 它将处于平衡状态。当有外来干扰时, 其平衡是否稳定取决于重心与浮心的相对位置。下面讨论对称潜体横向小角度倾斜的稳定问题, 潜体的横截面如图 3-34

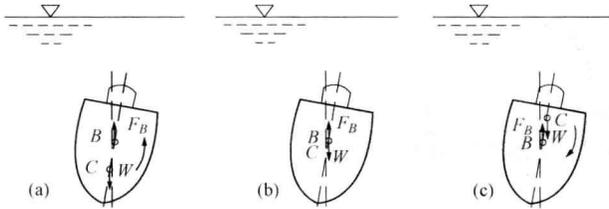


图 3-34 潜体平衡的稳定

所示。

如图 3-34 (a) 所示, 潜体的重心在浮心之下, 潜体受干扰偏离原平衡位置, 干扰解除后, 它的重力和液体的浮力不作用在同一铅垂线上, 它们组成与横倾反向的复原力偶, 使潜体恢复原来的平衡状态。其平衡是稳定的。

如图 3-34 (b) 所示, 潜体的重心与浮心重合, 潜体受任何干扰偏离原平衡位置, 干扰解除后, 它的重力和液体的浮力始终作用在同一铅垂线上, 相互平衡, 其平衡是随遇的 (中性的)。

如图 3-34 (c) 所示, 潜体的重心在浮心之上, 潜体受干扰偏离原平衡位置, 干扰解除后, 它的重力与液体的浮力不作用在同一铅垂线上, 它们组成与横倾同向的倾覆力偶, 使潜体继续倾覆。其平衡是不稳定的。

2. 浮体平衡的稳定

浮体的平衡条件与潜体一样, 即浮体的重力与液体的浮力相等, 重心 C 与浮心 B 在同一铅垂线上。但是它们平衡的稳定有所不同; 当浮体的重心在浮心之上时 (船舶运输多数如此), 由于浮体淹没部分的形状改变, 在一定条件下浮体的平衡仍然可以是稳定的。

下面讨论对称浮体横向小角度倾斜的稳定问题, 浮体的横截面如图 3-35 所示。浮体与水面接触的线称为水线, 浮体正位平衡时水线 (图中虚线所示) 包围的面积称为浮面, 垂直于浮面并通过重心 C 的直线称为浮轴。当浮体的重量不变、只顺时针倾斜小角度 θ 时, 浮体淹

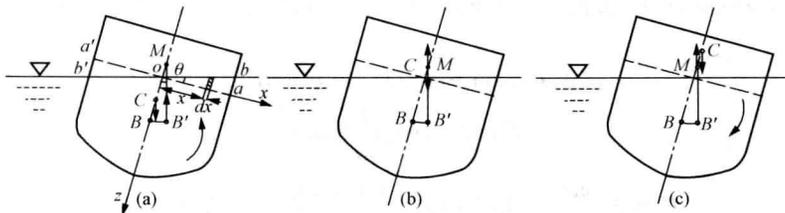


图 3-35 浮体平衡的稳定

没部分的体积不变,淹没部分的形状由图 3-35 中浮面以下的部分变成倾斜后水线以下的部分,浮心也由 B 变到了 B' 。经 B' 点作铅垂线,交浮轴于 M 点,称为定倾中心(稳心),原浮心 B 至 M 点的距离称为定倾高度 \overline{BM} ,原浮心 B 至重心 C 点的距离称为偏心距 \overline{BC} 。

如图 3-35 (a) 所示,浮体的重心在浮心之上,但在稳心之下, $\overline{BM} > \overline{BC}$ 。浮体受干扰偏离原平衡位置,干扰解除后,它的重力和液体的浮力不作用在同一铅垂线上,它们组成与横倾反向的复原力偶,使浮体恢复原来的平衡状态。其平衡是稳定的。

如图 3-35 (b) 所示,浮体的重心与稳心重合, $\overline{BM} = \overline{BC}$ 。浮体受任何干扰偏离原平衡位置,干扰解除后,它的重力和液体的浮力始终作用在同一铅垂线上,相互平衡,其平衡是随遇的(中性的)。

如图 3-35 (c) 所示,浮体的重心在稳心之上, $\overline{BM} < \overline{BC}$ 。浮体受干扰偏离原平衡位置,干扰解除后,它的重力与液体的浮力不作用在同一铅垂线上,它们组成与横倾同向的倾覆力偶,使浮体继续倾覆。其平衡是不稳定的。

可见,浮体平衡的稳定条件为 $\overline{BM} \geq \overline{BC}$; 要应用它,须先推求定倾高度。如图 3-35 (a) 所示,将浮体的横截面取作 oxz 坐标平面。由于浮体的重量不变,液体浮力的大小不变,浮体的淹没(排水)体积 V 不变,浮体顺时针横倾后新增的淹没体积必定等于另一侧丢失的淹没体积。浮体顺时针横倾后的液体浮力可表示为

$$F_{B'} = F_B + F_{B_{sub}} - F_{B_{sub}'}$$

或
$$\rho g V = \rho g V + \rho g \int_0^{b/2} x \tan \theta dx - \rho g \int_0^{-b/2} x \tan \theta dx$$

式中: l 为 x 处的浮面长度; b 为横截面宽度。

根据合力之矩定理: 合力对某轴之矩等于各分力对该轴之矩的代数和。上式对浮轴上的浮心 B 取矩, 得

$$V \cdot \overline{BM} \sin \theta = V \cdot 0 + \int_0^{b/2} x^2 \tan \theta dx - \int_0^{-b/2} x^2 \tan \theta dx = \tan \theta \int_{-b/2}^{b/2} x^2 dx = \tan \theta \int_A x^2 dA$$

$$\overline{BM} = \frac{I_o}{V \cos \theta} \tag{3-36}$$

式中: $\int_A x^2 dA = I_o$ 为浮面对浮面纵轴的惯性矩。

当 $\theta < 15^\circ$ 时, $\cos \theta \approx 1$,

$$\overline{BM} \approx \frac{I_o}{V} \tag{3-36a}$$

即: 定倾高度等于浮体的浮面对浮面纵轴的惯性矩除以浮体的淹没体积。以上分析只限于横向小倾角的情况(船舶运输多数如此), 定倾高度几乎不变。如果不是横向小倾角的情况, 定倾高度将随横倾角而变; θ 角越大, 定倾高度越高, 抵抗横倾的能力越强, 但同时浮体的摇摆周期缩短, 浮体摇摆加剧, 又对船舶的运行不利。(如有需要, 可参阅《船舶原理》)

【例 3-12】 如图 3-36 所示, 直径 $d=1.8\text{m}$ 、高 $h=1.2\text{m}$ 、重量 $W_1=10\text{kN}$ 的圆柱形浮标设置在沿海航道上, 浮标上放置重物 $W_2=2\text{kN}$, 浮标重心位于底边以上 $h_1=0.45\text{m}$, 海水密度 $\rho=1025\text{kgm}^{-3}$ 。

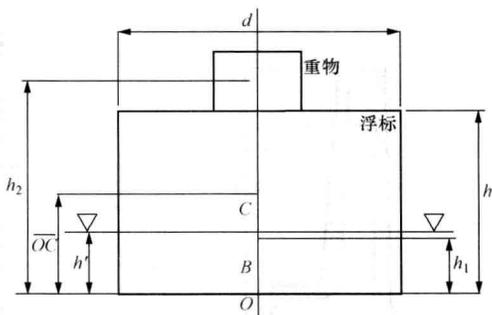


图 3-36 浮动与重物组合体 (例 3-12)

为了保证组合体稳定,重物重心的高度 h_2 最大可为多少?

【解】 设以浮标底边为基线。组合体的淹深 h' 和浮心高度 \overline{OB} 可推求如下:

$$W_1 + W_2 = \frac{\pi}{4} d^2 h' \rho g$$

$$h' = \frac{4(W_1 + W_2)}{\pi d^2 \rho g} = \frac{4(10 + 2)10^3}{\pi \times 1.8^2 \times 1025 \times 9.807} = 0.4691(\text{m})$$

$$\overline{OB} = h'/2 = 0.2346(\text{m})$$

保持组合体稳定的最低要求为组合体的重心 C 位于定倾中心 M , 即偏心距 \overline{BC} 等于定倾高度 \overline{BM} 。由式 (3-36a) 可得

$$\overline{BC} = \overline{BM} = \frac{I_o}{V} = \frac{\pi d^4 / (64)}{\pi d^2 h' / 4} = \frac{d^2}{16h'} = \frac{1.8^2}{16 \times 0.4691} = 0.4317(\text{m})$$

组合体的重心到基线的高度

$$\overline{OC} = \overline{OB} + \overline{BC} = 0.2346 + 0.4317 = 0.6663(\text{m})$$

根据重心坐标之普遍公式有

$$(W_1 + W_2)\overline{OC} = W_1 \times h_1 + W_2 \times h_2$$

$$h_2 = \frac{(W_1 + W_2)\overline{OC} - W_1 h_1}{W_2} = \frac{(10 + 2) \times 0.6663 - 10 \times 0.45}{2} = 1.748(\text{m})$$

这就是重物重心的最大容许高度。

习 题

3-1 如图 3-37 所示,烟囱高 $H=20\text{m}$, 烟气温度 $t_s=300^\circ\text{C}$, 压强 p_s , 试确定引起火炉中烟气自动流通的压强差。烟气密度可按式计算: $\rho_s = (1.25 - 0.0027t_s) \text{ kg/m}^3$, 空气的密度 $\rho_a = 1.29 \text{ kg/m}^3$ 。 [166.7Pa]

3-2 图 3-38 所示为一直煤气管。为求管中静止煤气的密度,在高度差 $H=20\text{m}$ 的两个截面装 U 形管测压计,内装水。已知管外空气的密度 $\rho_a = 1.28 \text{ kg/m}^3$, 测压计读数 $h_1=100\text{mm}$, $h_2=115\text{mm}$ 。与水相比, U 形管中气柱的影响可以忽略。求管内煤气的密度。 [0.53 kg/m³]

3-3 如图 3-39 所示, U 形管压差计水银面高度差 $h=15\text{cm}$ 。求充满水的 A、B 两容器内的压强差。 [18533Pa]

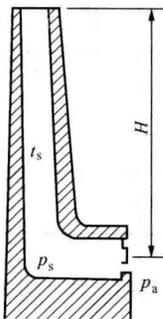


图 3-37 习题 3-1 示意图

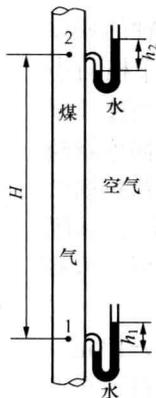


图 3-38 习题 3-2 示意图

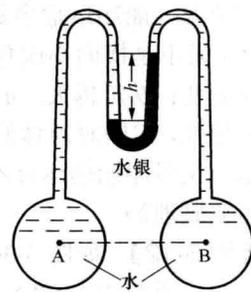


图 3-39 习题 3-3 示意图

3-4 如图 3-40 所示, U 形管压差计与容器 A 连接, 已知 $h_1=0.25\text{m}$, $h_2=1.61\text{m}$, $h_3=1\text{m}$ 。求容器 A 中水的绝对压强和真空。 [33310Pa, 68015Pa]

3-5 如图 3-41 所示, 在盛有油和水圆柱形容器的盖上加荷载 $F=5788\text{N}$, 已知 $h_1=30\text{cm}$, $h_2=50\text{cm}$, $d=0.4\text{m}$, 油的密度 $\rho_{oi}=800\text{kg/m}^3$, 水银的密度 $\rho_{Hg}=13600\text{kg/m}^3$, 求 U 形管中水银柱的高度差 H 。 [0.4m]

3-6 如图 3-42 所示, 两根盛有水银的 U 形测压管与盛有水的密封容器连接。若上面测压管的水银液面距自由液面的深度 $h_1=60\text{cm}$, 水银柱高 $h_2=25\text{cm}$, 下面测压管的水银柱高 $h_3=30\text{cm}$, $\rho_{Hg}=13600\text{kg/m}^3$, 试求下面测压管水银面距自由液面的深度 h_4 。 [1.28m]

3-7 如图 3-43 所示, 一封闭容器内盛有油和水, 油层厚 $h_1=30\text{cm}$, 油的密度 $\rho_{oi}=800\text{kg/m}^3$, 盛有水银的 U 形测压管的液面距水面的深度 $h_2=50\text{cm}$, 水银柱的高度低于油面 $h=40\text{cm}$ 。试求油面上的计示压强。 [46088Pa]

3-8 如图 3-44 所示, 处于平衡状态的水压机, 其大活塞上受力 $F_1=4905\text{N}$, 杠杆柄上作用力 $F_2=147\text{N}$, 杠杆臂 $a=15\text{mm}$, $b=75\text{cm}$ 。若小活塞直径 $d_1=5\text{cm}$, 不计活塞的高度差及其质量, 计及摩擦力的校正系数 $\eta=0.9$, 求大活塞直径 d_2 。 [12.43cm]

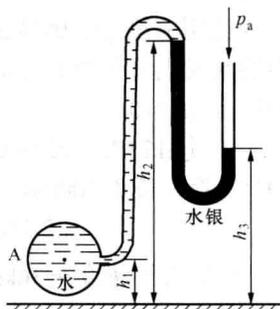


图 3-40 习题 3-4 示意图

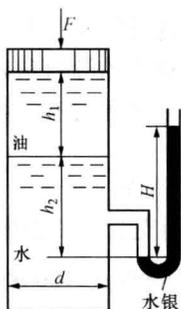


图 3-41 习题 3-5 示意图

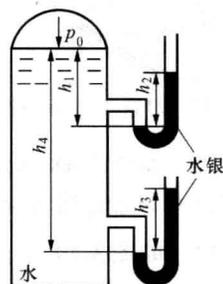


图 3-42 习题 3-6 示意图

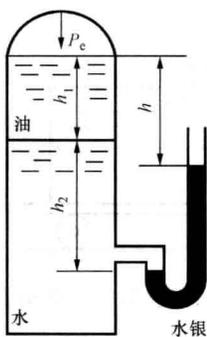


图 3-43 习题 3-7 示意图

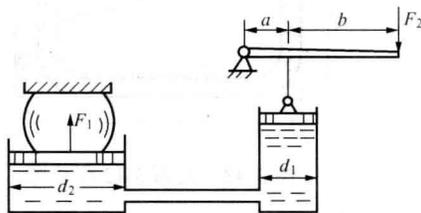


图 3-44 习题 3-8 示意图

3-9 图 3-45 所示为双液式微压计, A、B 两杯的直径均为 $d_1=50\text{mm}$, 用 U 形管连接, U 形管直径 $d_2=5\text{mm}$, A 杯盛有酒精, 密度 $\rho_1=870\text{kg/m}^3$, B 杯盛有煤油, 密度 $\rho_2=830\text{kg/m}^3$ 。当两杯上的压强差 $\Delta p=0$ 时, 酒精煤油的分界面在 $o-o$ 线上。试求当两种液体的分界面上升到 $o'-o'$ 位置、 $h=280\text{mm}$ 时 Δp 等于多少? [156.7Pa]

3-10 试按复式水银测压计 (图 3-46) 的读数算出锅炉中水面上蒸汽的绝对压强 p 。已知: $H=3\text{m}$, $h_1=1.4\text{m}$, $h_2=2.5\text{m}$, $h_3=1.2\text{m}$, $h_4=2.3\text{m}$, 水银的密度 $\rho_{Hg}=13600\text{kg/m}^3$ 。

[366284Pa]

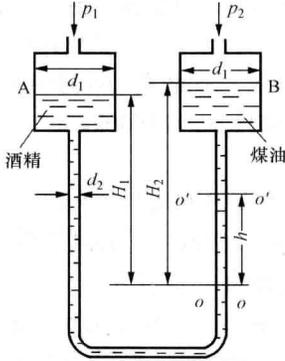


图 3-45 习题 3-9 示意图

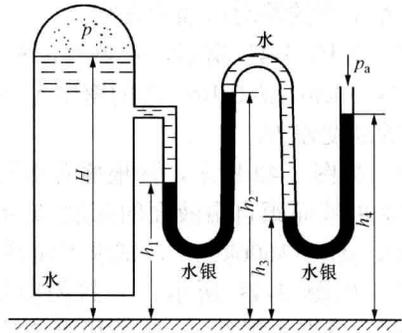


图 3-46 习题 3-10 示意图

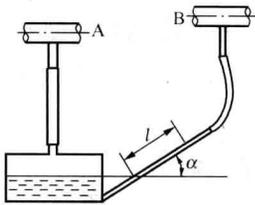


图 3-47 习题 3-11 示意图

3-11 如图 3-47 所示, 用倾斜微压计测量通风管道 A、B 的压强差。倾斜微压计内酒精的密度 $\rho=810\text{kg/m}^3$, 玻璃管的倾斜角 $\alpha=45^\circ$, 管中酒精上升 $l=20\text{cm}$, 二通风管道的压强差等于多少? 若二通风管道的压强差不变, 微压计内改用密度 $\rho_w=998\text{kg/m}^3$ 的水, 玻璃管的倾斜角 $\alpha=30^\circ$, 管中的水又上升多少? 近似计算, 可取玻璃管与宽广容器的截面积比 $A_1/A_2 \approx 0$ 。

[1123Pa; 22.96cm]

3-12 如图 3-48 所示, 直线行驶的汽车上放置一内装液体的 U 形管, 长 $l=500\text{mm}$ 。试确定当汽车以加速度 $a=0.5\text{m/s}^2$ 行驶时两支管中的液面高度差。

[2.55cm]

3-13 如图 3-49 所示, 油罐车内装着密度 $\rho=1000\text{kg/m}^3$ 的液体, 以水平直线速度 $v=36\text{km/h}$ 行驶, 油罐车的尺寸为 $D=2\text{m}$, $h=0.3\text{m}$, $l=4\text{m}$ 。车在某一时刻开始减速运动, 经 100m 距离后完全停下。若为均匀制动, 求作用在侧面 A 上的力多大?

[46308N]

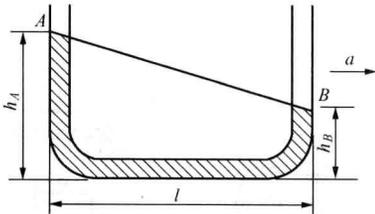


图 3-48 习题 3-12 示意图

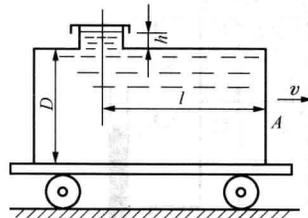


图 3-49 习题 3-13 示意图

3-14 如图 3-50 所示, 一正方形容器, 底面积为 $b \times b=200 \times 200\text{mm}^2$, 质量 $m_1=4\text{kg}$ 。当它装水的高度 $h=150\text{mm}$ 时, 在 $m_2=25\text{kg}$ 的载荷作用下沿平面滑动。若容器的底与平面间的摩擦系数 $C_f=0.3$, 试求不使水溢出时容器的最小高度 H 是多少?

[0.213m]

3-15 图 3-51 所示为一等加速向下运动的盛水容器, 水深 $h=2\text{m}$, 加速度 $a=4.9\text{m/s}^2$ 。试确定: (1) 容器底部的流体绝对静压强; (2) 加速度为何值时容器底部所受压强为大气压强? (3) 加速度为何值时容器底部的绝对静压强等于零?

[提示: 对本题 $f_x=0$, $f_y=0$, $f_z=a-g$, 由积分压强差公式 (3-3) 得 $p=p_a+\rho gh(1-a/g)$]

[111138Pa, 9.80665m/s², 60.4692m/s²]

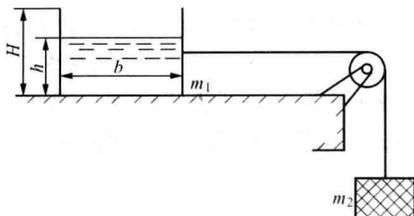


图 3-50 习题 3-14 示意图

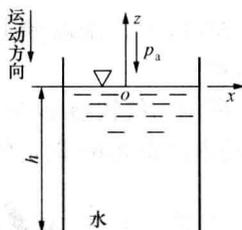


图 3-51 习题 3-15 示意图

3-16 图 3-52 所示为一圆柱形容器，直径 $d=300\text{mm}$ ，高 $H=500\text{mm}$ ，容器内装水，水深 $h_1=300\text{mm}$ ，使容器绕铅直轴作等角速旋转。(1) 试确定水正好不溢出时的转速 n_1 ；(2) 求刚好露出容器底面时的转速 n_2 ；这时容器停止旋转，水静止后的深度 h_2 等于多少？

[178.7r/min, 199.7r/min, 0.25m]

3-17 如图 3-53 所示，为了提高铸件的质量，用离心铸造机铸造车轮。已知铁水密度 $\rho=7138\text{kg/m}^3$ ，车轮尺寸 $h=200\text{mm}$ ， $d=900\text{mm}$ ，下箱由基座支承，上箱及其砂重为 10kN 。求转速 $n=600\text{r/min}$ 时车轮边缘处的计示压强和螺栓群 A-A 所受的总拉力。[2864kPa, 905kN]

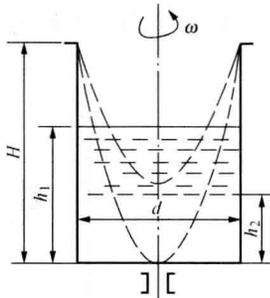


图 3-52 习题 3-16 示意图

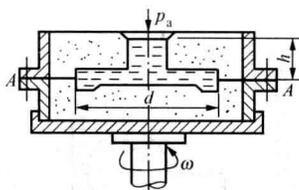


图 3-53 习题 3-17 示意图

3-18 如图 3-54 所示，一圆柱形容器，直径 $d=1.2\text{m}$ ，充满水，并绕铅直轴等角速度旋转。在顶盖上 $r_0=0.43\text{m}$ 处安装一开口测压管，管中的水位 $h=0.5\text{m}$ 。问此容器的转速 n 为多少时顶盖所受的静水总压力为零？[427 r/min]

3-19 如图 3-55 所示，圆柱形容器的直径 $d=600\text{mm}$ ，高 $H=500\text{mm}$ ，盛水至 $h=400\text{mm}$ ，余下的容积盛满密度 $\rho=800\text{kg/m}^3$ 的油，容器顶盖中心有一小孔与大气相通。若此容器绕其主轴旋转，问转速 n 多大时油面开始接触到底板？求此时顶盖和底板上的最大和最小计示压强 [提示：油水分界面为等压面]。[157r/min; 11270Pa, 0; 16173Pa, 3922Pa]

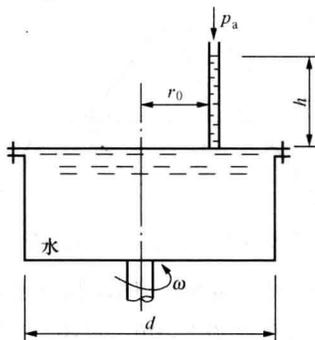


图 3-54 习题 3-18 示意图

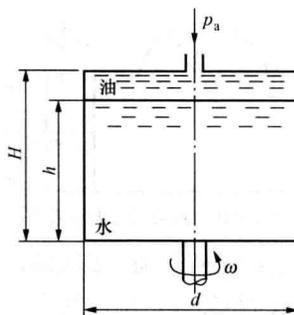


图 3-55 习题 3-19 示意图

3-20 如图 3-56 所示, 求斜壁上圆形闸门上的总压力及压力中心。已知闸门直径 $d=0.5\text{m}$, $a=1\text{m}$, $\alpha=60^\circ$ 。 [2083N, 1.263m]

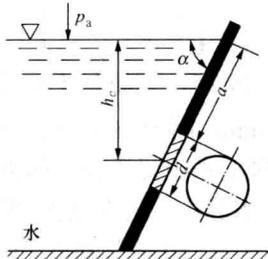


图 3-56 习题 3-20 示意图

3-21 图 3-57 所示为绕铰链 O 转动的倾斜角 $\alpha=60^\circ$ 的自动开启式水闸, 当水闸一侧的水位 $H=2\text{m}$, 另一侧的水位 $h=0.4\text{m}$ 时, 闸门自动开启, 试求铰链至水闸下端的距离 x 。 [0.8m]

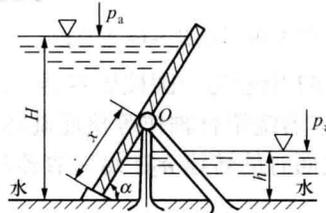


图 3-57 习题 3-21 示意图

3-22 水作用在图 3-58 所示 $3/4$ 圆柱面 $ABCD$ 上, 画出 (a)、(b)、(c) 三种开口测压管液面位置 $\nabla 1$ 、 $\nabla 2$ 、 $\nabla 3$ 情况的压力体及总压力垂直分力的作用方向。

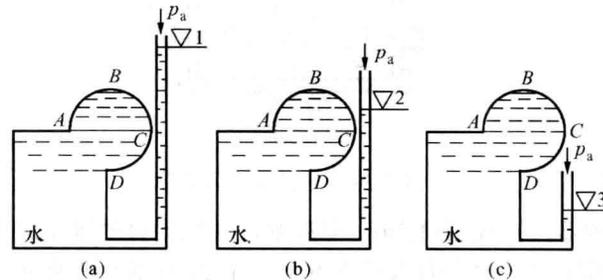


图 3-58 习题 3-22 示意图

3-23 图 3-59 为盛水的球体, 直径 $d=2\text{m}$, 球体下部固定不动, 求作用于螺栓上的力。 [10264 N]

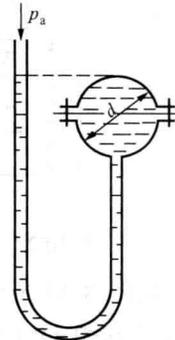


图 3-59 习题 3-23 示意图

3-24 图 3-60 所示为一储水设备, 在 C 点测得绝对压强 $p=196120\text{Pa}$, $h=2\text{m}$, $R=1\text{m}$, 求作用于半球 AB 的总压力。 [256.72kN]

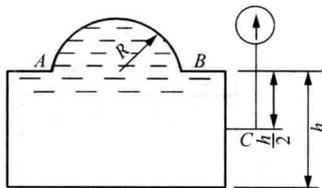


图 3-60 习题 3-24 示意图

3-25 图 3-61 所示为一扇形闸门, 宽度 $B=1\text{m}$, $\alpha=45^\circ$ 。水头 $H=3\text{m}$ 。求水对闸门的作用力的大小及方向。 [45570N, $75^\circ 30'$]

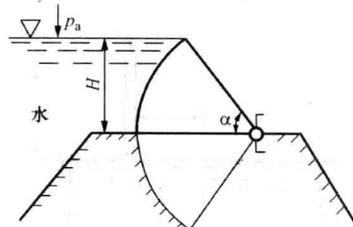


图 3-61 习题 3-25 示意图

3-26 图 3-62 所示为一扇形闸门, 半径 $R=7.5\text{m}$, 挡着深度 $h=4.8\text{m}$ 的水, 其圆心角 $\alpha=43^\circ$, 旋转轴距渠底 $H=5.8\text{m}$, 闸门的水平投影 $CB=a=2.7\text{m}$, 闸门宽度 $B=6.4\text{m}$ 。试求作用在闸门上的总压力的大小和压力中心。 [894603N, 4.41m]

3-27 如图 3-63 所示, 盛有水的容器底部有圆孔口, 用空心金属球体封闭, 该球体的重量 $W=2.452\text{N}$, 半径 $r=4\text{cm}$, 孔口直径 $d=5\text{cm}$, 水深 $H=20\text{cm}$ 。试求提起该球体所需之最小力 F 。 [3.762N]

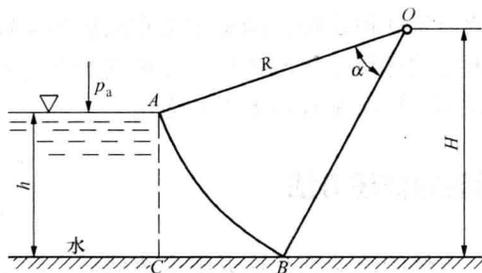


图 3-62 习题 3-26 示意图

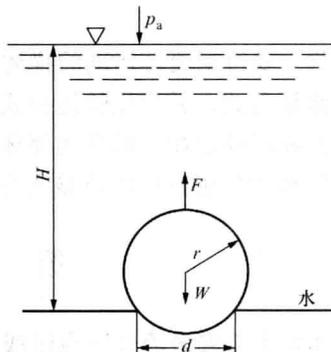


图 3-63 习题 3-27 示意图

3-28 如图 3-64 所示, 汽油箱底部有锥阀, 其尺寸为 $d_1=100\text{mm}$, $d_2=50\text{mm}$, $d_3=25\text{mm}$, $a=100\text{mm}$, $b=50\text{mm}$, 汽油密度 $\rho=830\text{kg/m}^3$, 略去阀芯自重和运动时的摩擦阻力。试确定: (1) 当压强表读数为 $9.806 \times 10^3\text{Pa}$ 时, 提升阀芯所需的初始力 F ; (2) $F=0$ 时箱中空气的计示压强 p_e 等于多少? [12.64N, 1221Pa]

3-29 如图 3-65 所示, 直径 $d=1\text{m}$, 高 $H=1.5\text{m}$ 的圆柱形容器内充满密度 $\rho=900\text{kg/m}^3$ 的液体, 顶盖中心开孔通大气。若容器绕中心轴以 $n=50\text{ r/min}$ 的转速旋转, 求容器的上盖、底面和侧面所受的液体总压力。

[1209N, 11602N, 45686N]

3-30 如图 3-66 所示, 转动桥梁支承于直径 $d=3.4\text{m}$ 的圆形浮筒上, 浮筒漂浮于直径 $d_1=3.6\text{m}$ 的室内。试确定: (1) 无外载荷而只有桥梁和浮筒自身的重力 $W=29.43 \times 10^4\text{N}$ 时, 浮筒沉没在水中的深度 H ; (2) 当桥梁的外载荷 $F=9.81 \times 10^4\text{N}$ 时, 桥梁的沉没深度 h 。 [3.307m, 0.12m]

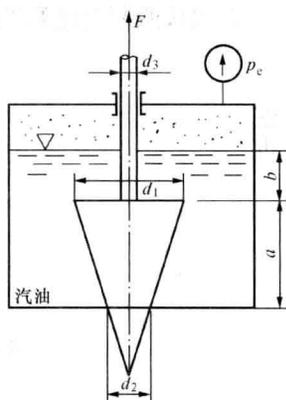


图 3-64 习题 3-28 示意图

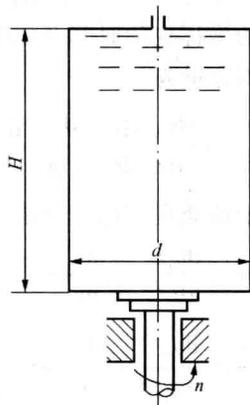


图 3-65 习题 3-29 示意图

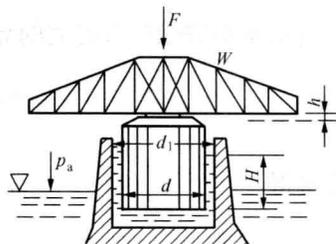


图 3-66 习题 3-30 示意图

3-31 一钢筋混凝土沉箱, 长 6m 、宽 5m 、高 5m 、底厚 0.5m 、侧壁厚 0.3m , 钢筋混凝土的密度 $\rho_1=2400\text{kgm}^{-3}$, 海水的密度 $\rho_2=1025\text{kgm}^{-3}$, 沉箱在海面上漂浮是否稳定?

[偏心距 $\overline{BC}=0.20\text{m}$, 定倾高度 $\overline{BM}=0.62\text{m}$, $\overline{BM} > \overline{BC}$, 沉箱的漂浮是稳定的]

第四章 流体运动学和流体动力学基础

本章主要讨论流体运动的描述方法，流体运动学的基本概念，建立系统、控制体的概念和输运公式，并应用输运公式将物质系统的质量守恒定律、动量定理和动量矩定理以及能量守恒和转换定律，转换为流体力学中十分重要的适用于控制体的积分形式的连续方程、动量方程和动量矩方程以及能量方程，并举例说明它们在工程技术中的应用。

第一节 流体运动的描述方法

流体是由无限多流体质点组成的连续介质，流体的流动则是这无限多流体质点运动的综合。充满运动流体的空间称为流场。由于着眼点的不同，有两种流体运动的描述方法。

一、欧拉方法

它是广泛应用的方法。它着眼于流场中所有空间点上流动参数随时间的变化，即研究表征流场内流体流动特性的各种物理量的矢量场与标量场，例如速度场、压强场、密度场、温度场等，并将这些物理量表示为坐标 x 、 y 、 z 和时间 t 的函数：

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_x(x, y, z, t) \\ v_y &= v_y(x, y, z, t) \\ v_z &= v_z(x, y, z, t) \end{aligned} \right\} \quad (4-1)$$

$$p = p(x, y, z, t) \quad (4-2)$$

$$\rho = \rho(x, y, z, t) \quad (4-3)$$

$$T = T(x, y, z, t) \quad (4-4)$$

下面讨论，流体质点的加速度在欧拉方法中是如何表示的。式(4-1)是欧拉方法的三个速度分量表达式，分别对时间求导数，便可得到三个加速度分量表达式。应该注意，这些速度是坐标和时间的函数，而运动质点的坐标也随时间变化的。因此，必须按照复合函数的求导法则去推求加速度。加速度 x 方向的分量为

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

由于运动质点的坐标对时间的导数等于该质点的速度分量，故

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ a_y &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ a_z &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (4-5)$$

同理可得

用加速度矢量 \vec{a} 和速度矢量 \vec{v} 来表示，为

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \quad (4-5a)$$

由此可见,用欧拉方法来描述流体的运动时,加速度由两部分组成:第一部分 $\partial\vec{v}/\partial t$,表示在某固定点上流体质点的速度变化率,称为当地加速度;第二部分 $(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$,表示该流体质点所在空间位置的变化引起的速度变化率,称为迁移加速度。

用欧拉方法求流体质点其他物理量时间变化率的一般式子为

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla \quad (4-6)$$

式中: $\frac{d}{dt}$ 为全导数,也称随体导数,表示对时间求导数时要考虑到质点本身的运动; $\frac{\partial}{\partial t}$ 为当地导数; $\vec{v}\cdot\nabla$ 为迁移导数。例如密度的随体导数为

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial\rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial\rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial\rho}{\partial z} \quad \text{或} \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\rho$$

二、拉格朗日方法

它着眼于流场中每个流体质点流动参数随时间的变化,综合所有流体质点的运动便可得到整个流体的运动规律。和质点动力学一样,这种方法通过建立流体质点的运动方程来描述所有流体质点的运动规律,如流体质点的运动轨迹、速度和加速度等。

如果 a 、 b 、 c 代表起始时刻 t_0 流场中流体质点的坐标, a 、 b 、 c 的不同值代表不同的流体质点, t 为时间变量,则流体质点的运动方程为

$$\left. \begin{aligned} x &= x(a, b, c, t) \\ y &= y(a, b, c, t) \\ z &= z(a, b, c, t) \end{aligned} \right\} \quad (4-7)$$

当给定 a 、 b 、 c 时,式(4-7)代表给定的流体质点的运动轨迹;当给定 t 时,式(4-7)代表各流体质点 t 时刻所处的位置。流体质点的速度为

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x(a, b, c, t)}{\partial t} \\ v &= \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y(a, b, c, t)}{\partial t} \\ w &= \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z(a, b, c, t)}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (4-8)$$

流体质点加速度为

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial^2 x(a, b, c, t)}{\partial t^2} \\ a_y &= \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial^2 y(a, b, c, t)}{\partial t^2} \\ a_z &= \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial^2 z(a, b, c, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (4-9)$$

在流体动力学的计算和研究中,除个别问题外,实际上很少应用拉格朗日方法,原因是建立方程及其数学求解困难。

由上述可见,随体导数式(4-6)将按拉格朗日方法求流体质点流动参数的时间变化率转换为按欧拉方法去计算。

第二节 流动的分类

流体力学是随着生产力的不断发展向前发展的。从公元前 200 多年为解决浮体问题建立了阿基米德原理, 逐渐发展到当代为发展宇宙航行解决了一系列高超声速气体动力学问题, 人们对流体力学问题的研究同人类对客观世界的认识规律一样, 从简到繁, 从易到难。这就需要对影响实际流动的许多复杂因素加以分析, 并根据不同的实际问题抓住起本质作用的主要因素, 在允许的精确度范围内忽略次要因素, 尽量把问题简化。为了便于研究, 应将流动分类, 因为不同的流动类型有着不同的研究方法。在本节范围内, 通常把所要讨论的问题分成如下几类:

(1) 按照流体性质分为理想流体的流动和黏性流体的流动, 不可压缩流体的流动和可压缩流体的流动等;

(2) 按照运动状态分为定常流动和非定常流动, 有旋流动和无旋流动, 层流流动和紊流流动, 亚声速流动和超声速流动等;

(3) 按照流动空间的坐标变量数分为一维流动、二维流动和三维流动。

关于理想流体的流动、黏性流体的流动、不可压缩流体的流动、可压缩流体的流动的一些概念, 已在第二章中有所阐述; 本节只讨论定常流动和非定常流动以及一维、二维、三维流动的概念, 其余如有旋、无旋、层流、紊流、亚声速、超声速等概念将在以后有关章节中分别加以阐述。

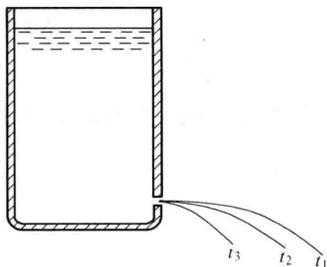


图 4-1 储液容器内液面下降时不同时刻的泄流轨迹

一、定常流动和非定常流动

图 4-1 所示为一储液容器, 在其侧壁开一小孔, 液体从小孔向外泄出。如果设法使容器内的液面高度保持不变 (如连续往容器内注入适量的液体), 那么所观察到的从孔口泄出的泄流轨迹是不变的。这说明孔口处的流速以及泄流内部各空间点的流速不随时间变化。流动参量不随时间变化的流动称为定常流动。但是, 在泄流内部不同位置流体质点的流速则是不同的, 它是空间坐标的函数。

如果不往容器里添加液体, 显然, 随着液体从小孔向外泄流, 容器内液面不断下降, 从小孔流出来的泄流轨迹逐渐向下弯曲。图 4-1 表示的是 t_1 、 t_2 、 t_3 时刻的轨迹形状。这说明, 泄流内部流速的大小和方向随时间变化。流动参量随时间变化的流动称为非定常流动。

如果流动参量非常缓慢地随时间变化, 那么在较短的时间间隔内, 可以近似地把这种流动作为定常流动来处理。仍以孔口泄流为例, 设容器的直径很大, 流出小孔很小, 则液面下降十分缓慢, 泄流轨迹变化也很慢。在较短时间间隔内研究这种流动时, 可近似地视它为定常流动, 称为准定常流动。

定常流动或非定常流动的确定与参考坐标系的选择有关。例如, 船在静止的水中等速直线行驶, 岸上的人 (参考坐标系固连在岸上) 看来, 船两侧的水流是非定常的; 船上的人 (参照坐标系固连在船上) 看来, 船两侧的水流是定常的, 即相当于船不动, 水流从远处以与船行同样大小的速度向船流过来。

对于定常流动, 欧拉表达式 (4-1) ~ 式 (4-4) 简化为

$$\left. \begin{aligned} \bar{v} &= \bar{v}(x, y, z) \\ \rho &= \rho(x, y, z) \\ \rho &= \rho(x, y, z) \\ T &= T(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (4-10)$$

这说明, 定常流动流场内的速度、压强、密度等参量只是坐标的函数, 与时间无关。

二、一维流动、二维流动与三维流动

一般的流动都是在三维空间内的流动, 流动参量是三个坐标的函数。例如在笛卡儿坐标系中, 如果速度、压强等参量是 x 、 y 、 z 三个坐标的函数, 便称这种流动为三维流动。依此类推, 流动参量是两个坐标的函数的流动, 称为二维流动; 是一个坐标的函数的流动, 称为一维流动。显然, 坐标变量数越少, 解算越简单。对于工程技术问题, 在保证一定精确度的条件下尽可能降低函数的维数, 以简化解算。

例如图 4-2 所示为一带维度圆管内黏性流体的流动, 流体质点的速度既是半径 r 的函数, 又是沿轴线距离 x 的函数, 即

$$v_x = f(r, x)$$

这是二维流动。如果选用截面的速度平均值 v_{xa} , 则有

$$v_{xa} = f(x)$$

这是一维流动问题。

图 4-3 所示为机翼绕流问题。如果机翼的长度 (翼展) 比宽度 (翼弦) 大得多 (即展弦比大), 则机翼两端的影响可以忽略不计, 即可将机翼视为无限长。这样, 机翼周围的流动便只与翼型所在平面的坐标 x 、 y 有关, 其流速为

$$\bar{v} = f(x, y)\vec{i} + g(x, y)\vec{j}$$

这是二维流动。如图 4-4 所示, 如果机翼的展弦比小, 必须考虑翼端影响, 则流速应由 x 、 y 、 z 三个坐标来确定, 即

$$\bar{v} = f(x, y, z)\vec{i} + g(x, y, z)\vec{j} + h(x, y, z)\vec{k}$$

这样的机翼绕流是三维流动。

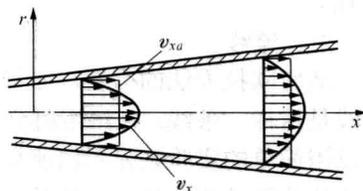


图 4-2 管内流动速度分布图

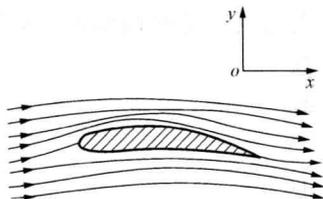


图 4-3 绕过机翼的二维流动

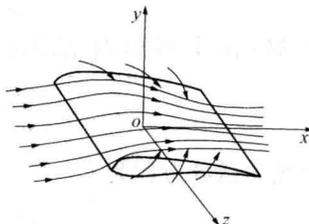


图 4-4 有限翼展的机翼绕流

第三节 迹线 流线

一、迹线

流体质点的运动轨迹称为迹线。从式(4-7)消去时间 t , 即得迹线方程。将不易扩散的染料滴一滴到水流中, 便可看到染了色的流体质点的运动迹线, 并可用摄影机将它拍下来。通过迹线可以看出, 流体质点是作直线运动还是做曲线运动, 它的运动途径在流场中是如何变化的。这是拉格朗日方法研究的内容。

如果流体流动是以欧拉变数给出的, 将欧拉变数转换为拉格朗日变数便可得到迹线方程。

二、流线

适应欧拉方法的需要, 必须引入流线的概念, 流线可以形象地描绘流场内的流动状态。流线是这样一条线: 在给定时刻, 流线上每个点的流体速度矢量都与它相切, 如图 4-5 所示。可以用简单的实验来显示出流场中的流线。例如, 在油槽中流体带着油沫一起运动, 可以认为流体的运动和油沫的运动是一致的, 用照相机便可拍得流线分布的图形。因为在很短的曝光时间内, 油沫的位移很小, 在照片上留下的是很小的线段, 它们的方向可以代表这一短瞬油沫运动速度的方向。因此, 这些小线段前后相接所形成的曲线就是流线。图 4-6 就是在油槽中拍下来的照片, 它显示了绕过翼型流动的流线分布图形。

流线的数学表达式可推导如下: 设流线上某点 $M(x, y, z)$ 处的速度为 \vec{v} , 它在坐标轴上的投影为 v_x 、 v_y 、 v_z , 于是, 速度与坐标轴夹角的方向余弦为

$$\cos(\widehat{\vec{v}, x}) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(\widehat{\vec{v}, y}) = \frac{v_y}{v}, \quad \cos(\widehat{\vec{v}, z}) = \frac{v_z}{v}$$

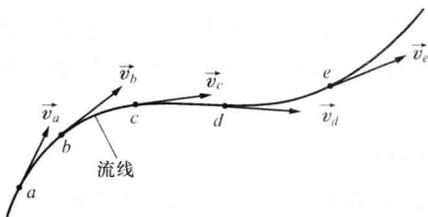


图 4-5 流线

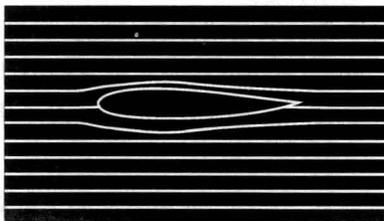


图 4-6 绕过翼型流动的流线

该点流线微元 ds 的切线 ($\vec{\tau}$) 与坐标轴夹角的方向余弦为

$$\cos(\widehat{\vec{\tau}, x}) = \frac{dx}{ds}, \quad \cos(\widehat{\vec{\tau}, y}) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(\widehat{\vec{\tau}, z}) = \frac{dz}{ds}$$

由于流线上 M 点的切线和 M 点的速度矢量相重合, 对应的方向余弦应该相等, 所以

$$\frac{v_x}{v} = \frac{dx}{ds}, \quad \frac{v_y}{v} = \frac{dy}{ds}, \quad \frac{v_z}{v} = \frac{dz}{ds}$$

由此得到流线的微分方程为

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)} \quad (4-11)$$

式(4-11)可写成两个微分方程的方程组。由于流线总是指某一时刻的, 故可取 t 作为参变量; 式(4-11)对 x 、 y 、 z 积分, 便可得到两个曲面方程, 这两个曲面的交线就是流线。

非定常流动时,任意流体质点总有自己的确定的迹线,而流场内通过任意一点的流线在不同时刻可能有不同的形状,因而一般说来迹线和流线不重合。如果是定常流动,式(4-11)中不含 t ,积分后得到的流线与时间无关,即流线的形状始终不变;任意流体质点又必定沿其确定的流线运动,这时迹线和流线重合。

一般讲,通过空间一个点在给定时刻只能作一条流线,因为在同一点上不可能同时有几个流动方向,所以流线一般不能相交。只有在流场内速度为零或为无穷大的那些点,流线可以相交,因为在这些点上不会出现不同流动方向的问题。速度为零的点称为驻点,速度为无穷大的点称为奇点。

第四节 流管 流束 流量 水力半径

一、流管 流束 缓变流 急变流

在流场内作本身不是流线又不相交的封闭曲线,通过该曲线上各点的流线所构成的管状表面称为流管;图4-7所示为由封闭曲线 C 所规定的流管。流管内的流体称为流束。因为流动速度总是与流线相切,垂直于流线的速度分量为零,流体不能穿过流管流进或流出,流管内的流束就像在真实管子内的流动一样。在定常流动情况下,流线形状不随时间而变,流管的形状及位置也不随时间而变。微小截面(δA)的流束称为微小流束,微小流束的极限为截面积无穷小(dA)的微元流束,即流线。截面为有限值的流束称为总流,日常见到的管道、渠道中流动的流体都是总流。总流横截面各点的流速不一定相等,也不一定都垂直于截面。处处与流线相垂直的流束截面称为有效截面。

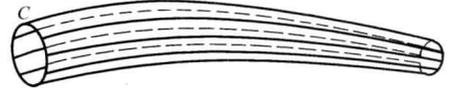


图4-7 流管

流束内流线间的夹角很小、流线曲率半径很大的近乎平行直线的流动称为缓变流,不符合上述条件的流动称为急变流。如图3-8所示,流体在直管道中的流动为缓变流,而经过弯管、阀门等管件的流动为急变流。

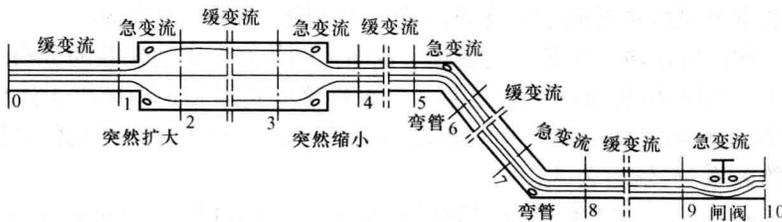


图4-8 缓变流与急变流示意

二、流量 平均流速

单位时间流经某截面的流体量称为流量。流量分为体积流量 q_V (单位为 m^3/s)和质量流量 q_m (单位为 kg/s),它们的计算公式分别为

$$q_V = \iint_A \vec{v} \cdot d\vec{A} = \iint_A v \cos(\vec{v}, \hat{n}) dA \quad (4-12)$$

$$q_m = \iint_A \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = \iint_A \rho v \cos(\vec{v}, \hat{n}) dA \quad (4-13)$$

式中: \vec{v} 为流体流经微元截面的速度矢量, $d\vec{A}$ 为微元截面矢量, $\cos(\vec{v}, \hat{n})$ 为速度矢量与微元截面法线间的夹角余弦, ρ 为流体的密度。

在工程实际中, 为了简化计算而引用平均流速, 它等于体积流量除以有效截面积, 即

$$v_a = q_V / A \quad (4-14)$$

如果总流轴线方向的速度分量远大于其他方向的分量, 引用平均流速可将这类问题转化为一维流动, 使计算大为简化。

三、湿周 水力半径

在总流的有效截面上, 流体同固体边界接触部分的周长称为湿周, 用 χ 代表, 见图 4-9。

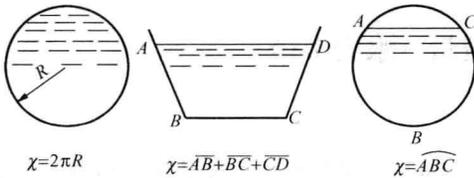


图 4-9 湿周

总流的有效截面积与湿周之比称为水力半径, 用 R_h 代表:

$$R_h = \frac{A}{\chi} \quad (4-15)$$

水力半径与圆截面的半径是不同的概念, 不能混淆。如半径为 r 的圆管内充满流体, 其水力半径为

$$R_h = \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2}$$

显然水力半径不等于圆管半径。

在非圆截面管道和渠道的水力计算中经常用到湿周和水力半径。

第五节 系统 控制体 输运公式

系统是一团流体质点的集合。在运动过程中, 尽管系统的形状和位置不断地变化, 但始终包含着这团流体质点, 有确定的质量。

控制体是指流场中某一确定的空间区域, 它的形状是根据流体流动情况和边界位置选定的, 它对选定的参考坐标系是固定不变的。这个区域的周界称为控制面。

如前所述, 欧拉方法研究的是选定流场(也即控制体)中流动参数的分布与变化。物理学的定律和定理, 则是按物质系统建立的。要想将这些定律和定理应用于流体力学, 就必须建立系统的物理量随时间的变化率与控制体内这种物理量随时间的变化率和经过控制面的净通量之间的关系——输运公式。

如图 4-10 (a) 所示, 实线代表选定的控制体周界, 虚线代表在 t 时刻与控制体重合的流体系统, 它们的体积都为 V , 图中用 Π 表示。如图 4-10 (b) 所示, 在 $t+\delta t$ 时刻, 控制体的位置和形状不变, 其体积 V 可用图中的 $I+\Pi'$ 表示; 流体系统的位置和形状均发生了变化, 体积变为 V' , 图中用 $\Pi'+III$ 表示。 Π' 是系统在 $t+\delta t$ 时刻所占有的空间与 t 时刻所占有的空间相重合的部分。

设 N 代表在 t 时刻该系统内流体所具有的某种物理量(如质量、动量等), η 代表单位质量流体所具有的这种物理量, $N = \iiint_V \eta \rho dV$ 。在 t 时刻流体系统所具有的某种物理量的时间变化率为

$$\frac{dN}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \eta \rho dV = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(\iiint_{V'} \eta \rho dV)_{t+\delta t} - (\iiint_V \eta \rho dV)_t}{\delta t} \quad (\text{a})$$

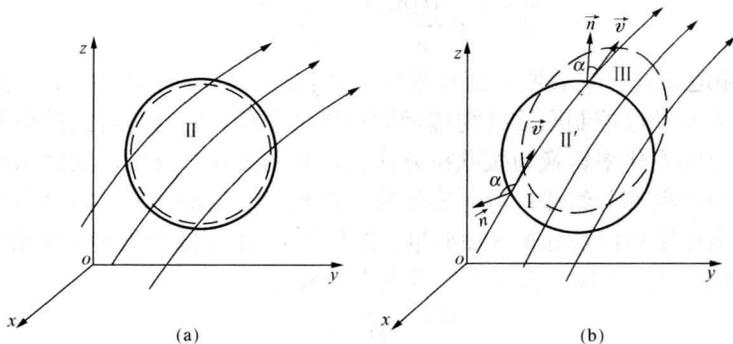


图 4-10 流场中的系统与控制体

式中下标 t 或 $t+\delta t$ 表示对该时刻的值求体积分。如果改用图中的数码, 可将式 (a) 写成

$$\frac{dN}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\iiint_{II'} \eta \rho dV_{t+\delta t} - \iiint_{II'} \eta \rho dV_t}{\delta t} + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\iiint_{III} \eta \rho dV_{t+\delta t} - \iiint_I \eta \rho dV_t}{\delta t} \quad (\text{b})$$

当 $\delta t \rightarrow 0$ 时, $II' \rightarrow II$, $III \rightarrow 0$, 即在 t 时刻流体系统与控制体重合。若用 CV 代表控制体体积, 则有 $II=V(t)=CV$, 式 (b) 右端第一项成为

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\iiint_{II'} \eta \rho dV_{t+\delta t} - \iiint_{II'} \eta \rho dV_t}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \eta \rho dV \quad (\text{c})$$

从图 4-10 (b) 可以看出, 体积分 $\iiint_{III} \eta \rho dV_{t+\delta t}$ 是在 δt 时间内流出控制体的流体所具有的物理量, 它可以用同样时间经过控制面流出的这种物理量的面积分来表示。于是 t 时刻单位时间流出控制体的流体所具有的物理量为

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\iiint_{III} \eta \rho dV_{t+\delta t}}{\delta t} = \iint_{CS_2} \eta \rho v \cos \alpha dA = \iint_{CS_2} \eta \rho v_n dA \quad (\text{d})$$

式中: CS_2 代表控制面中流出部分的面积; v_n 为沿控制面上微元面积外法线方向的速度分量。

同理, t 时刻单位时间流入控制体的流体所具有的物理量为

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\iiint_I \eta \rho dV_t}{\delta t} = \iint_{CS_1} \eta \rho v \cos \alpha dA = - \iint_{CS_1} \eta \rho v_n dA \quad (\text{e})$$

式中: CS_1 代表控制面中流入部分的面积; 最右端积分号前加负号是因为在流入面上速度矢量 \vec{v} 的方向与外法线方向之间的夹角 α 总是大于 90° , v_n 总是负值。由于 CS_1 上的面积分与 CS_2 上的面积分可以合并为整个控制面 CS 上的面积分, 将式 (c)、(d)、(e) 代入式 (b) 得

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{cv} \eta \rho dV + \iint_{cs} \eta \rho v_n dA \quad (4-16)$$

或

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{cv} \eta \rho dV + \iint_{cs} \eta \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} \quad (4-16a)$$

式(4-16)称为输运公式。它表明,流体系统某种物理量的时间变化率等于控制体内这种物理量的时间变化率与经过控制面这种物理量的净通量之和。它就是将按拉格朗日方法求流体系统内物理量的时间变化率转换为按欧拉方法去计算的公式。可见,流体系统某种物理量对时间的随体导数也由两部分组成:等号右端第一项相当于当地导数,等号右端第二项相当于迁移导数。这些物理量可以是标量(如质量、能量等),也可以是矢量(如动量、动量矩等)。

对于定常流动,式(4-16)右端第一项为零,故有

$$\frac{dN}{dt} = \iint_{cs} \eta \rho v_n dA \quad (4-17)$$

可见,定常流动时流体系统某种物理量的时间变化率只与通过控制面的流动有关,与控制体内的流动状态无关。

第六节 连续方程

在工程实际中,经常会遇到流体的速度、密度和通道有效截面之间的计算问题,这要用到连续方程。前已述及,流体为连续介质,在流场内流体质点连续地充满整个空间,在流动过程中流体质点互相衔接、没有空隙。这样,便可应用输运公式由流体系统的质量守恒定律导出适用于控制体内流体的连续方程。

如果 η 代表单位质量流体的质量,即 $\eta=1$,则 $N=\iiint_V \rho dV=m$,代表流体系统的质量。

由于流体系统的质量不随时间变化,故 $\frac{dm}{dt}=\frac{dN}{dt}=0$,代入式(4-16)得

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{cv} \rho dV + \iint_{cs} \rho v_n dA = 0 \quad (4-18)$$

这就是积分形式的连续方程。它表明,控制体内流体质量的时间变化率与经过控制面流体质量的净通量之和等于零。

对于定常流动,式(4-18)左端第一项等于零,故有

$$\iint_{cs} \rho v_n dA = 0 \quad (4-19)$$

即定常流动时经过控制面流体质量的净通量等于零。

对于定常管流,取管道的有效截面 A_1 、 A_2 及其间的管壁为控制面,由式(4-19)可得

$$\iint_{A_1} \rho v_{n1} dA = \iint_{A_2} \rho v_{n2} dA \quad (4-20)$$

如果截面上的密度可以视为常量,引用截面上的平均流速 v_{1a} 、 v_{2a} ,由式(4-20)得

$$\rho_1 v_{1a} A_1 = \rho_2 v_{2a} A_2 \quad (4-21)$$

或

$$\rho v_a A = \text{常数} \quad (4-21a)$$

式(4-20)、式(4-21)表明,定常流动时通过管流任意有效截面的质量流量是常量。

如果流体又是不可压缩的,密度是常数,由式(4-21a)可得

$$v_a A = \text{常数} \quad (4-22)$$

即不可压缩流体沿管流的体积流量是常量。对于同一根管子内的流动,管径粗的,截面上的平均流速低;管径细的,截面上的平均流速高。

第七节 动量方程 动量矩方程

在工程实际中,经常会遇到流体与固体边界相互作用的计算问题,这要用到动量方程和动量矩方程。应用输运公式可由流体系统的动量定理、动量矩定理导出适用于控制体内流体的动量方程、动量矩定理。它们较多地用于惯性坐标系,有时用于非惯性坐标系。

一、惯性坐标系中的动量方程与动量矩方程

1. 动量方程

如果 η 代表单位质量流体的动量,即 $\eta = \vec{v}$,则 $N = \iiint_V \rho \vec{v} dV$,代表流体系统的动量。代入式(4-16)得

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \vec{v} dV = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \rho \vec{v} dV + \iint_{CS} \rho v_n \vec{v} dA \quad (a)$$

根据动量定理,流体系统动量的时间变化率等于作用在流体系统上外力的矢量和,即

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \vec{v} dV = \iiint_V \rho \vec{f} dV + \iint_A \vec{p}_n dA \quad (b)$$

式中: \vec{f} 为作用在单位质量流体上的质量力; \vec{p}_n 为作用在的微元截面 dA 上的表面应力。由于 t 时刻流体系统与控制体重合,将式(a)代入式(b),得

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \rho \vec{v} dV + \iint_{CS} \rho v_n \vec{v} dA = \iiint_{CV} \rho \vec{f} dV + \iint_{CS} \vec{p}_n dA \quad (4-23)$$

这就是惯性坐标系中积分形式的动量方程。它表明,控制体内流体动量的时间变化率与经过控制面流体动量净通量的矢量和等于作用在控制体内流体上外力的矢量和。

对于定常流动,式(4-23)左端第一项等于零,故有

$$\iint_{CS} \rho v_n \vec{v} dA = \iiint_{CV} \rho \vec{f} dV + \iint_{CS} \vec{p}_n dA \quad (4-24)$$

即定常流动时,经过控制面流体动量的净通量矢量等于作用在控制体内流体上外力的矢量和,与控制体内的流动状态无关。

2. 定常管流的动量方程

式(4-24)右端第一项是作用在控制体上质量力的合力,可用 \vec{F}_f 表示;右端第二项是作用在控制面上表面力的合力,可用 \vec{F}_{p_n} 表示。由于在管壁上 $v_n = 0$,沿壁面的积分等于零,式(4-24)左端只有流入截面 A_1 与流出截面 A_2 上的积分有值,故定常管流的动量方程为

$$\iint_{A_2} \vec{v}_2 \rho v_2 dA - \iint_{A_1} \vec{v}_1 \rho v_1 dA = \vec{F}_f + \vec{F}_{p_n} \quad (4-25)$$

一般讲,截面上的密度可近似地视为常量,但是必须考虑速度在截面上的变化。如果流经截面 A 流体的动量值用按截面平均速度 v_a 计算的动量值代替,则有

$$\iint_A \rho v^2 dA = \beta \rho v_a^2 A \quad (4-26)$$

式中

$$\beta = \frac{1}{A} \iint_A \left(\frac{v}{v_a} \right)^2 dA \quad (4-26a)$$

称为动量修正系数。于是,式(4-25)沿笛卡儿坐标的分量形式转换为

$$\left. \begin{aligned} \rho q_V (\beta_2 v_{2ax} - \beta_1 v_{1ax}) &= F_{fx} + F_{p_n x} \\ \rho q_V (\beta_2 v_{2ay} - \beta_1 v_{1ay}) &= F_{fy} + F_{p_n y} \\ \rho q_V (\beta_2 v_{2az} - \beta_1 v_{1az}) &= F_{fz} + F_{p_n z} \end{aligned} \right\} \quad (4-27)$$

假如有效截面上的密度与速度均为常量, $\beta=1$, 式(4-27)简化为

$$\left. \begin{aligned} \rho q_V (v_{2x} - v_{1x}) &= F_{fx} + F_{p_n x} \\ \rho q_V (v_{2y} - v_{1y}) &= F_{fy} + F_{p_n y} \\ \rho q_V (v_{2z} - v_{1z}) &= F_{fz} + F_{p_n z} \end{aligned} \right\} \quad (4-28)$$

管流的动量方程常用于求解作用在管道上的动水反力等问题。由式(4-28)看出,定常管流动量方程的计算,只涉及管道中两个截面的流动参数,与控制体内的流动状态无关。因此,

它可用于控制体内存在参数间断面的情况。

动量方程是一个矢量方程,应用它的投影方程比较方便。使用时应注意适当地选择控制面,完整地表达出作用在控制体和控制面上的外力,要注意流动方向和投影的正负等。

【例 4-1】 图 4-11 中叶片以匀速 v_e 沿 x 方向运动,截面积为 A_0 的一股水流沿叶片切线方向射入叶片,并沿叶片流动,最后从叶片出口处流出。设水流经过叶片时截面积不变,因而流速的大小不变(等于 v_r),只是方向改变。已知 $A_0=0.001\text{m}^2$, $v_0=120\text{m/s}$, $v_e=60\text{m/s}$,出口速度方向与水平线夹角 $\theta=10^\circ$ 。求水流对叶片的反作用力以及对叶片所做的功率。

【解】 假设坐标系 oxy 与叶片相固连,对这个坐标系来讲,流动是定常的。取图中虚线所示的控制面。流进截面①和流出截面②的流体的相对速度均为 $v_r=v_0-v_e$, F_x 和 F_y 为叶片对流体的作用力。

应用动量方程得

$$-F_x = \rho v_r A_0 (-v_r \cos \theta - v_r) = -\rho (v_0 - v_e)^2 A_0 (\cos \theta + 1)$$

即

$$F_x = \rho (v_0 - v_e)^2 A_0 (\cos \theta + 1)$$

$$= 1000 \times (120 - 60)^2 \times 0.001 \times (\cos 10^\circ + 1) = 7146 \text{ (N)}$$

$$F_y = \rho (v_0 - v_e)^2 A_0 \sin 10^\circ = 1000 \times (120 - 60)^2 \times 0.001 \times \sin 10^\circ = 625 \text{ (N)}$$

流体对叶片的反作用力的 x 分量为 7146 N, 方向为 x 轴正方向; y 分量为 625 N, 方向为 y 轴的负方向。

对叶片所做的功率为

$$P = F_x v_e = 7146 \times 60 = 428760 \text{ (N} \cdot \text{m/s)} = 428.76 \text{ (kW)}$$

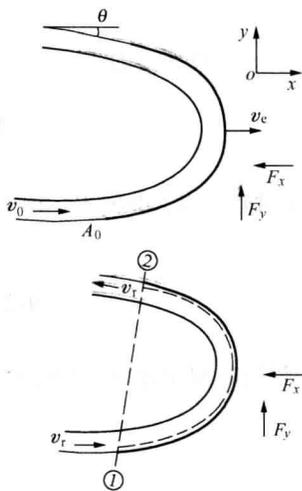


图 4-11 射流作用在可动叶片上图

3. 动量矩方程。

如果 η 代表单位质量流体的动量矩, 即 $\eta = \vec{r} \times \vec{v}$, 则 $N = \iiint_V \vec{r} \times \vec{v} \rho dV$, 代表流体系统的动量矩。代入式 (4-16) 得

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \vec{r} \times \vec{v} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \vec{r} \times \vec{v} \rho dV + \iint_{CS} \vec{r} \times \vec{v} \rho v_n dA \quad (c)$$

根据动量矩定理, 流体系统动量矩的时间变化率等于作用在流体系统上外力矩的矢量和, 即

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \vec{r} \times \vec{v} \rho dV = \iiint_V \vec{r} \times \vec{f} \rho dV + \iint_A \vec{r} \times \vec{p}_n dA \quad (d)$$

由于 t 时刻流体系统与控制体重合, 将式 (c) 代入式 (d) 得

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \vec{r} \times \vec{v} \rho dV + \iint_{CS} \vec{r} \times \vec{v} \rho v_n dA = \iiint_{CV} \vec{r} \times \vec{f} \rho dV + \iint_{CS} \vec{r} \times \vec{p}_n dA \quad (4-29)$$

这就是惯性坐标系中积分形式的动量矩方程。它表明, 控制体内流体动量矩的时间变化率与经过控制面流体动量矩净通量的矢量和等于作用在控制体内流体上外力矩的矢量和。

对于定常流动, 式 (4-29) 左端第一项等于零, 故有

$$\iint_{CS} \vec{r} \times \vec{v} \rho v_n dA = \iiint_{CV} \vec{r} \times \vec{f} \rho dV + \iint_{CS} \vec{r} \times \vec{p}_n dA \quad (4-30)$$

即定常流动时, 经过控制面流体动量矩的净通量矢量等于作用在控制体内流体上外力矩的矢量和, 与控制体内的流动状态无关。

4. 叶轮机械基本方程式

图 4-12 为离心式泵或风机叶轮的示意图, 流体从叶轮的内圈入口流入, 经叶道于外圈出口流出; 选取图中的虚线为控制面, 选取叶轮旋转轴为 z 轴。当流经叶轮的流量 q_V 和叶轮的角速度 ω 都不变时, 叶轮内流体的流动是定常的。假设叶轮流道由无限多个弯成弧形的可忽略边缘影响的直立薄板构成, 这样流道内的流动便简化为沿着叶片而垂直于 z 轴的平面流动。同离心惯性力相比, 重力的影响可以忽略不计, 流体在叶轮入口和出口的速度将沿周向均匀分布, 则流体相对于各自流道的流动都是相同的一维流动。这样, 无论是从固连于叶轮的相对(非惯性)坐标系中去, 还是从固连于机座的绝对(惯性)坐标系中去, 流动都是定常的。现取绝对坐标系作为参考坐标系。设叶轮内、外圈的半径和面积分别为 r_1 、 r_2 和 A_1 、 A_2 ; 流体在叶轮入口以及出口的绝对速度、牵连速度、相对速度与绝对速度沿切线和法线方向的分速度分别为 v_1 、 v_{1e} 、 v_{1r} 与 $v_{1\tau}$ 、 v_{1n} 以及 v_2 、 v_{2e} 、 v_{2r} 与 $v_{2\tau}$ 、 v_{2n} 。由于流动都在与旋转轴相垂直的叶轮平面内, 动量矩矢量的方向沿旋转轴, 故式 (4-30) 左端成为

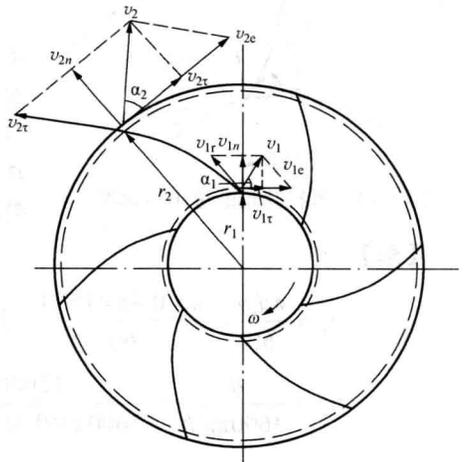


图 4-12 离心泵叶轮流道内的流动图

$$\left[\iint_{CS} \rho(\vec{r} \times \vec{v}) v_n dA \right]_z = \iint_{A_2} \rho v_{2r} r_2 \cos \alpha_2 v_{2n} dA - \iint_{A_1} \rho v_{1r} r_1 \cos \alpha_1 v_{1n} dA$$

$$= \rho v_{2r} r_2 \cos \alpha_2 v_{2n} A_2 - \rho v_{1r} r_1 \cos \alpha_1 v_{1n} A_1 = \rho q_V (r_2 v_{2r} - r_1 v_{1r}) \quad (e)$$

由于对称性,作用在控制体内流体上的重力对旋转轴的力矩之和等于零;由于流体在进口、出口的速度分布均匀,在进口、出口无切向应力,只有沿径向的法向应力,它们对旋转轴的力矩也为零。这样,作用在控制体内流体上的外力矩便只有旋转轴传给叶轮的力矩 M_z ,故式(4-30)右端成为

$$\left[\iiint_{CV} \vec{r} \times \vec{f} \rho dV + \iint_{CS} \vec{r} \times \vec{p}_n dA \right]_z = M_z \quad (f)$$

将式(e)、(f)代入式(4-30)得

$$M_z = \rho q_V (r_2 v_{2r} - r_1 v_{1r}) \quad (4-31)$$

作用给流体的功率为

$$P = M_z \omega = \rho q_V (v_{2c} v_{2r} - v_{1c} v_{1r}) \quad (4-32)$$

单位重量流体所获得的能量为

$$H = \frac{1}{g} (v_{2c} v_{2r} - v_{1c} v_{1r}) \quad (4-33)$$

这就是涡轮机械的基本方程式。单位量流体所获得的能量 H 是反映涡轮机械基本性能的一个特征量,在水泵、水轮机、风机、油泵等的实验和计算中称为水头或压头。它随流量 q_V 的变化曲线 ($H-q_V$) 是涡轮机械性能分析和设计中的重要性能曲线。式(4-33)计算的是它的理论值,须经实验修正得到它的实际值。

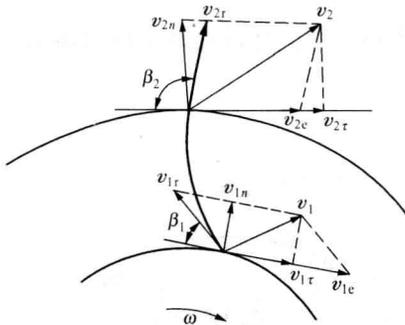


图 4-13 风机叶轮的进出口速度

【例 4-2】 已知离心式通风机叶轮(图 4-13)的转速为 1500r/min, 内径 $d_1=480\text{mm}$, 入口角 $\beta_1=60^\circ$, 入口宽度 $b_1=105\text{mm}$; 外径 $d_2=600\text{mm}$, 出口角 $\beta_2=120^\circ$, 出口宽度 $b_2=84\text{mm}$; 流量 $q_V=12000\text{m}^3/\text{h}$, 空气密度 $\rho=1.20\text{kg}/\text{m}^3$ 。试求叶轮入口及出口处的牵连速度、相对速度和绝对速度, 并求叶轮产生的理论压强。

【解】

$$v_{1c} = \frac{\pi d_1 n}{60} = \frac{\pi \times 0.48 \times 1500}{60} = 37.7 \text{ (m/s)}$$

$$v_{1n} = \frac{q_V}{3600 \pi d_1 b_1} = \frac{12000}{3600 \pi \times 0.48 \times 0.105} = 21 \text{ (m/s)}$$

$$v_{1r} = \frac{v_{1n}}{\sin \beta_1} = \frac{21}{0.866} = 24.3 \text{ (m/s)}$$

$$v_{1r} = v_{1c} - v_{1r} \cos \beta_1 = 37.7 - 24.3 \times 0.5 = 25.5 \text{ (m/s)}$$

$$v_1 = (v_{1n}^2 + v_{2r}^2)^{1/2} = (21^2 + 25.5^2)^{1/2} = 33 \text{ (m/s)}$$

$$v_{2e} = \frac{\pi d_2 n}{60} = \frac{\pi \times 0.6 \times 1500}{60} = 47.1 \text{ (m/s)}$$

$$v_{2n} = \frac{q_v}{3600 \pi d_2 b_2} = \frac{12000}{3600 \pi \times 0.6 \times 0.084} = 21 \text{ (m/s)}$$

$$v_{2r} = \frac{v_{2n}}{\sin(180^\circ - \beta_2)} = \frac{21}{0.866} = 24.3 \text{ (m/s)}$$

$$v_{2r} = v_{2e} + v_{2r} \cos 60^\circ = 47.1 + 24.3 \times 0.5 = 59.3 \text{ (m/s)}$$

$$v_2 = (v_{2n}^2 + v_{2r}^2)^{1/2} = (21^2 + 59.3^2)^{1/2} = 63 \text{ (m/s)}$$

经叶轮单位重量空气获得的能量为

$$H = \frac{1}{g}(v_{2e} v_{2r} - v_{1e} v_{1r}) = \frac{1}{9.807}(47.1 \times 59.3 - 37.7 \times 25.5) = 187 \text{ (m 空气柱)}$$

叶轮产生的理论压强为

$$p = \rho g H = 1.2 \times 9.807 \times 187 = 2201 \text{ (Pa)}$$

二、旋转坐标系中的动量方程与动量矩方程

在研究涡轮机械中流体的流动时，常采用固连于叶轮旋转轴的非惯性坐标系，动量用相对速度 \vec{v}_r 来表示，质点的加速度也用相对加速度 \vec{a}_r 来表示。

假设坐标系绕旋转轴以等角速度 ω 旋转，由理论力学已知：运动质点的绝对加速度 \vec{a} 是相对加速度 \vec{a}_r 、牵连加速度 \vec{a}_e 与哥氏加速度 \vec{a}_g 的矢量和，其中 $\vec{a}_e = d\vec{v}_r/dt$ ， $\vec{a}_e = -\omega^2 \vec{r}$ ， $\vec{a}_g = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$ 。

在惯性坐标系中，流体系统动量的时间变化率为

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \vec{v} dV = \iiint_V \frac{d\vec{v}}{dt} \rho dV + \iiint_V \vec{v} \frac{d}{dt} (\rho dV)$$

根据质量守恒定律
$$\frac{d}{dt} (\rho dV) = \frac{d}{dt} (dm) = 0$$

上式成为
$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \vec{v} dV = \iiint_V \frac{d\vec{v}}{dt} \rho dV \quad (\text{g})$$

绝对加速度
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_r}{dt} - \omega^2 \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r \quad (\text{h})$$

将式 (g)、(h) 代入动量方程式 (b)，经整理后得

$$\iiint_{CV} \rho \frac{d\vec{v}_r}{dt} dV = \iiint_{CV} \rho (\vec{f} + \omega^2 \vec{r} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r) dV + \iint_{CS} \vec{p}_n dA \quad (4-34)$$

或
$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \rho \vec{v}_r dV + \iint_{CS} \rho \vec{v}_r v_m dA = \iiint_{CV} \rho (\vec{f} + \omega^2 \vec{r} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r) dV + \iint_{CS} \vec{p}_n dA \quad (4-34a)$$

这就是等角速度旋转坐标系中的动量方程。它与惯性坐标系中动量方程 (4-23) 的区别在于用相对速度代替了绝对速度，质量力中增加了两项惯性力。

用同样的方法可以导出等角速度旋转坐标系中的动量矩方程：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \vec{r} \times \rho \vec{v}_r dV + \iint_{CS} \vec{r} \times \rho \vec{v}_r v_m dA \\ = \iiint_{CV} \vec{r} \times (\vec{f} + \omega^2 \vec{r} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r) \rho dV + \iint_{CS} \vec{r} \times \vec{p}_n dA \end{aligned} \quad (4-35)$$

【例 4-3】 水平放置的双臂式洒水器俯视图如图 4-14 所示, 水自转轴处的竖管流进, 经左、右臂由短喷嘴 a 、 b 流出。已知喷嘴的出口截面面积 $A_a=A_b=A=1\text{cm}^2$, 体积流量 $q_{Va}=q_{Vb}=q_V=2.8\times 10^{-4}\text{m}^3/\text{s}$, 臂长 $r_a=0.3\text{m}$, $r_b=0.2\text{m}$ 。若忽略损失, 试求洒水器的转速和喷嘴出口水流的绝对速度。

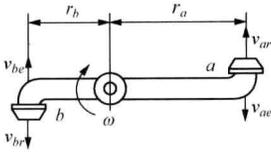


图 4-14 双臂式洒水器

【解】 设圆柱坐标系固连于洒水器转轴, oz 轴垂直图面向外, 洒水器的转速为 ω , 相对速度沿切线方向。选取洒水器转臂壁面和二喷嘴出口截面内的体积为控制体。由于水相对于旋转坐标系的流动是定常的, 式 (4-35) 左端第一项为零; 转臂进口的流速水平向外, 对转轴的动量矩均为零; 故经过控制面动量矩的净通量矢量为

$$\iint_{CS} \vec{r} \times \vec{v}_r \rho v_m dA = \iint_{A_a} \vec{r} \times \vec{v}_r \rho v_m dA + \iint_{A_b} \vec{r} \times \vec{v}_r \rho v_m dA = \rho q_V (r_a v_{ar} + r_b v_{br}) \vec{k} \quad (i)$$

作用在控制体内流体上的重力与转轴平行, 没有力矩; 离心惯性力通过转轴, 没有力矩; 作用在转臂进口截面的压强左右对称, 合力矩为零; 出口截面的计示压强为零, 没有力矩; 科氏惯性力对转轴的合力矩矢量为

$$\begin{aligned} -2 \iiint_{CV} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{v}_r) \rho dV &= 2\rho\omega \iiint_{CV} r v_r dV \vec{k} = 2\rho\omega q_V \left(\int_0^{r_a} r dr + \int_0^{r_b} r dr \right) \vec{k} \\ &= \rho q_V (r_a^2 + r_b^2) \omega \vec{k} \end{aligned} \quad (j)$$

将式 (i)、(j) 代入式 (3-35), 得

$$\omega = \frac{r_a v_{ar} + r_b v_{br}}{r_a^2 + r_b^2} = \frac{r_a + r_b}{r_a^2 + r_b^2} \frac{q_V}{A} = \frac{0.3\text{m} + 0.2\text{m}}{(0.3\text{m})^2 + (0.2\text{m})^2} \frac{2.8 \times 10^{-4} \text{m}^3/\text{s}}{10^{-4} \text{m}^2} = 10.77 \text{ (rad/s)}$$

喷嘴出口水流的绝对速度:

$$\begin{aligned} v_a &= v_{ar} + (-v_{ae}) = v_{ar} - r_a \omega = 2.8\text{m/s} - 0.3\text{m} \times 10.77\text{rad/s} = -0.431 \text{ (m/s)} \\ v_b &= v_{br} + (-v_{be}) = v_{br} - r_b \omega = 2.8\text{m/s} - 0.2\text{m} \times 10.77\text{rad/s} = 0.646 \text{ (m/s)} \end{aligned}$$

第八节 能量方程

在工程实际中, 经常会遇到流体在流动过程中能量形态转变以及与外界进行热交换的计算问题, 这要用到能量方程。应用输运公式可由流体系统的能量守恒和转换定律导出适用于控制体内流体的能量方程。

如果 η 代表以热力学能和动能表示的单位质量流体的能量, 即 $\eta = u + \frac{v^2}{2}$, 则 $N =$

$\iiint_V \left(u + \frac{v^2}{2} \right) \rho dV$, 代表流体系统的能量。代入式 (4-6) 得

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) dV = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) dV + \iint_{CS} \rho v_n \left(u + \frac{v^2}{2} \right) dA \quad (a)$$

根据能量守恒和转换定律, 流体系统能量的时间变化率等于作用在系统上质量力和表面力的功率以及与外界换热率之和; 该换热率可以通过控制面传导给系统的, 也可以是热辐射或内热源传输给系统的, 用 \dot{Q} 代表, 即

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) dV = \iiint_V \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV + \iint_A \vec{p}_n \cdot \vec{v} dA + \dot{Q} \quad (b)$$

由于 t 时刻流体系统与控制体重合, 将式 (a) 代入式 (b) 得

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) dV + \iint_{CS} \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) v_n dA = \iiint_{CV} \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV + \iint_{CS} \vec{p}_n \cdot \vec{v} dA + \dot{Q} \quad (4-36)$$

这就是积分形式的能量方程。它表明, 控制体内流体能量的时间变化率与经过控制面流体能量净通量之和等于作用在控制体内流体上质量力、表面力的功率以及与外界的传热率之和。

对于比热容不变的完全气体, 热力学能可以表示为比定容热容与温度的乘积, 即 $u = c_v T$, 代入式 (4-36) 得

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \rho \left(c_v T + \frac{v^2}{2} \right) dV + \iint_{CS} \rho \left(c_v T + \frac{v^2}{2} \right) v_n dA = \iiint_{CV} \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV + \iint_{CS} \vec{p}_n \cdot \vec{v} dA + \dot{Q} \quad (4-37)$$

定常流动时, 式 (4-36)、式 (4-37) 左端第一项为零。

对于重力作用下的绝能流动。由于重力对单位质量流体做的正功等于流体位势能 gz 的减少, 可将重力对单位质量流体做的功代之以流体的位势能 gz 移入单位质量流体的能量, 即

$\eta = u + \frac{v^2}{2} + gz$; 绝能流, 不与外界交换能量, 故式 (4-36) 转变为

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \rho \left(u + \frac{v^2}{2} + gz \right) dV + \iint_{CS} \rho v_n \left(u + \frac{v^2}{2} + gz \right) dA = \iint_{CS} \vec{p}_n \cdot \vec{v} dA \quad (4-38)$$

$$\text{或} \quad \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \rho \left(u + \frac{v^2}{2} + gz \right) dV + \iint_{CS} \rho v_n \left(u + \frac{v^2}{2} + gz \right) dA = \iint_{CS} \vec{p}_m \cdot \vec{v} dA + \iint_{CS} \vec{\tau} \cdot \vec{v} dA \quad (4-38a)$$

它们是重力作用下绝能流积分形式的能量方程。式 (4-38a) 中已将表面应力 \vec{p}_n 分解为垂直于表面的法向应力 \vec{p}_m 和相切于表面的切向应力 $\vec{\tau}$ 。

对于重力作用下的绝能管流。选取管壁与流进、流出两个有效截面构成控制面。作为一种近似 (将在第八章中讨论), 可取 $\vec{p}_m = -p\vec{n}$, 式中 p 是流体的压强, \vec{n} 是微元表面外法线的单位矢量。若属理想流体, $\vec{\tau} = 0$; 若属黏性流体, 在管壁上 $\vec{v} = 0$, 在有效截面上 $\vec{\tau} \perp \vec{v}$, 均为 $\vec{\tau} \cdot \vec{v} = 0$, 即整个控制面上的切向应力的功率等于零。在管壁上 $v_n = 0$, 式 (4-38a) 左端第二项和右端第一项只在流进、流出有效截面 A_1 、 A_2 上有值, 有效截面上 $\vec{v}_n = v$ 。将上述各项代入式 (4-38a) 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \rho \left(u + \frac{v^2}{2} + gz \right) dV + \iint_{A_2} \rho v_n \left(u + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) dA \\ - \iint_{A_1} \rho v_n \left(u + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) dA = 0 \end{aligned} \quad (4-39)$$

对于重力作用下的定常绝能管流, 式 (4-39) 简化为

$$\iint_{A_2} \rho v \left(u + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) dA - \iint_{A_1} \rho v \left(u + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) dA = 0 \quad (4-40)$$

这就是重力作用下定常绝能管流积分形式的能量方程。

应当指出, 上述在控制面上切向应力做功等于零, 并不意味着流体内部的切向应力不做功。当控制体内黏性流体间有相对运动时, 切向应力的摩擦功会导致机械能的损失, 并转化为热。在与外界无热量交换的情况下, 这种热会引起流体温度的变化, 从而使流体的热力学能等物理量发生变化。

第九节 伯努利方程及其应用

对于在重力作用下不可压缩理想流体的定常一维绝能流, 由于没有损失, 与外界又没有能量交换, 流体的温度和热力学能不变。如取微元流管作为控制体, 式 (4-40) 对微元截面的积分便是被积函数本身, 即

$$\frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho_1} \quad (4-41)$$

或

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \text{常数} \quad (4-41a)$$

这就是在重力作用下不可压缩理想流体定常一维绝能流的能量方程, 是伯努利 (Daniel Bernoulli) 于 1738 年首先提出的, 定名为伯努利方程。该方程表明, 不可压缩理想流体在重力场中作定常流动时, 沿流线单位质量流体的动能、位势能和压强势能之和等于常数。但是, 沿不同流线这个常数值通常是不相同的, 所以伯努利方程只能应用于一条流线上的不同点, 这是应用伯努利方程时应该加以注意的。

对于单位重量流体, 伯努利方程写成

$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = H \quad (4-42)$$

式中: $v^2/(2g)$ 为单位重量流体的动能, 称为速度水头。式 (4-42) 表明, 不可压缩理想流体在重力场中作定常流动时, 沿流线单位重量流体的速度水头、位置水头与压强水头之和等于常数; 总水头线为平行于基准线的水平线, 如图 4-15 所示。

如果上述流动是在同一水平面内, 或者与其他流动参量相比坐标 z 的变化可以忽略不计, 式 (4-42) 简化为

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C \quad (4-43)$$

即沿流线单位质量流体的动能和压强势能之和等于常数; 在流动中降低压强可提高流速。对于液体来讲, 当压强下降到饱和压强以下, 液体汽化, 生成

气泡, 称为气穴 (空泡) 现象, 这时式 (4-43) 不再适用。

下面举例说明伯努利方程在工程实际中的应用。

一、皮托管

皮托 (Henri Pitot) 在 1773 年首次用一根两端开口弯成直角的玻璃管 (图 4-16) 测量了塞纳河的流速, 该管称为皮托管。弯管一端在水中面向来流, 中心点 A 的淹深为 H_0 ; 另一端在水外铅直向上, 管内液面上升到高出水面 h 。点 A 的流速为零, 是驻点, 驻点压强 (总压强) 等于玻璃管内单位面积液柱的重力, 即 $p_A = \rho g(H_0 + h)$; 在驻点同一流线上游选一未受

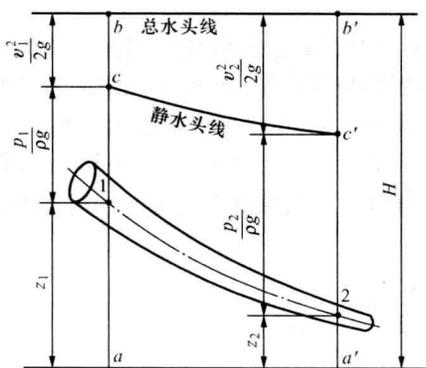


图 4-15 沿流线的位置水头、压强水头、速度水头和总水头

扰动的点 B ，其流速为 v_B ，静压强 $p_B = \rho g H_0$ 。将式 (4-43) 应用于点 B 、 A 得

$$\frac{v_B^2}{2} + \frac{p_B}{\rho} = \frac{p_A}{\rho} \quad \text{或} \quad \frac{\rho v_B^2}{2} = p_A - p_B$$

式中 $\rho v_B^2/2$ 等于总压强与静压强之差，称为动压强。将 p_A 、 p_B 的等式代入上式得

$$v_B = [2(p_A - p_B)/\rho]^{1/2} = (2gh)^{1/2} \quad (4-44)$$

事实上，在点 A 测得的驻点压强与未受扰动的点 B 的总压强是相同的，在点 B 测得的静压强同样可以代表点 A 的静压强。因此，只要测得某点的总压强和静压强，就可按式 (4-44) 求得该点的流速。应该指出，这里的静压强并非静止流体中的压强，而是流动流体中的压强，称它为静压强只是用以区别动压强。

在测定封闭管道内流体的静压强时，如果流体的静压强沿管道横截面的变化可以忽略不计（例如气体在直管道内流动或液体在直径不大的直管内流动），则可以在管壁上开一小孔，安装测压管（图 4-17）；当流体的静压强沿管道横截面的变化不能忽略时，便可用直角静压管

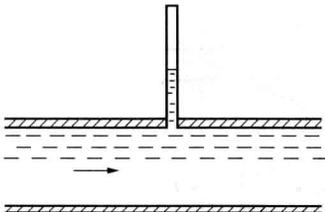


图 4-17 测管道内流体的静压

测量。其外形同皮托管相仿，只是直角弯管的迎流端不开孔，而在迎流端之后的适当距离沿圆周开设静压孔，以测量流体的静压强。

在工程实际中，多用如图 4-18 所示的皮托—静压管或动压管，它是将静压管包围在皮托管的外面，在总压孔之后适当距离的外壁上沿圆周开设静压孔。使用时将总压孔的通路和静压孔的通路分别连接于压差计的两端，压差计给出总压强和静压强的差值，由式 (4-44) 算得测点的流速。

二、文丘里管

文丘里 (G.B.Venturi) 管用于管道中的流量测量，它由收缩段和扩张段组成，两段结合处称为喉部，如图 4-19 所示。设在文丘里管进口直管段的截面 1 和喉部截面 2 的截面积、流速、压强分别为 A_1 、 v_1 、 p_1 和 A_2 、 v_2 、 p_2 ，根据伯努利方程

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho}$$

根据连续方程

$$v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2$$

联立求解以上两式，得

$$v_2 = \left[\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho} \right]^{1/2} \left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2} \right)^{-1/2}$$

通过文丘里管的体积流量为

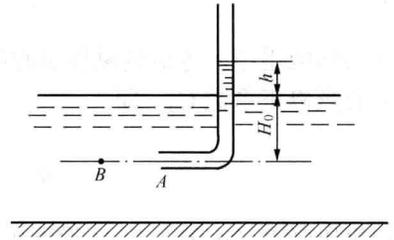


图 4-16 皮托管测河水流速

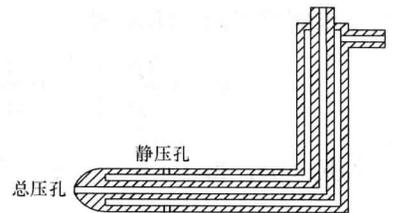


图 4-18 动压管

$$q_v = A_2 \left[\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho} \right]^{1/2} \left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2} \right)^{-1/2} \quad (4-45)$$

在实际应用中, 考虑到黏性引起的截面上速度分布的不均匀以及流动中的能量损失, 还应乘上流量修正系数 C_q , 即

$$q_v = C_q A_2 \left[\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho} \right]^{1/2} \left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2} \right)^{-1/2} \quad (4-46)$$

如果压强差 $(p_1 - p_2)$ 用 U 形管压差计中液面高度差 h 来表示, 则有

$$p_1 - p_2 = (\rho' - \rho)gh$$

式中: ρ 是被测液体的密度; ρ' 为 U 形管中液体的密度。代入式 (4-46) 得

$$q_v = C_q A_2 \left[\frac{2(\rho' - \rho)gh}{\rho} \right]^{1/2} \left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2} \right)^{-1/2} \quad (4-46a)$$

【例 4-4】 管端装喷嘴的管件如图 4-20 所示。相对密度为 0.85 的油经喷嘴射出, 管道截面 1 的直径 $d_1=10\text{cm}$, 计强示压为 $p_{1e}=7 \times 10^5 \text{Pa}$, 喷嘴出口截面 2 的直径 $d_2=4\text{cm}$, 如果忽略摩擦, 而且不计重力, 求喷嘴对管道的作用力。

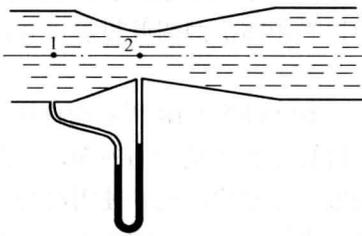


图 4-19 文丘里管

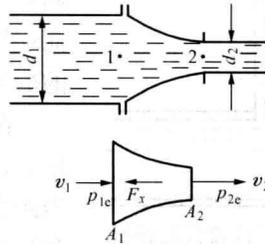


图 4-20 管端装喷嘴的管件

【解】 设 A 代表截面积, F_x 代表喷嘴壁面作用在喷嘴内流体上表面力的合力。由于位标 $z_1=z_2$, 喷嘴出口的计强示压 $p_{2e}=0$, 故应用伯努利方程于同一流线上的 1、2 两点, 有

$$\frac{v_2^2}{2} = \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_{1e}}{\rho} \quad (a)$$

应用连续方程于截面 1、2 有

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \quad (b)$$

联立求解式 (a)、(b), 得

$$v_2 = \left(\frac{2p_{1e}}{\rho} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2} \right)^{-1/2} = \left(\frac{2 \times 7 \times 10^5}{0.85 \times 10^3} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{0.04^4}{0.1^4} \right)^{-1/2} = 41.1 (\text{m/s})$$

代入式 (b), 得

$$v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2 = \left(\frac{0.04}{0.1} \right)^2 \times 41.1 = 6.58 (\text{m/s})$$

应用动量方程于截面 1、2, 有

$$\rho A_2 v_2^2 - \rho A_1 v_1^2 = p_{1e} A_1 - F_x$$

$$F_x = p_{1e} A_1 + \rho A_1 \left(v_1^2 - \frac{A_2}{A_1} v_2^2 \right)$$

$$= 7 \times 10^5 \times \frac{\pi}{4} \times 0.1^2 + 0.85 \times 10^3 \times \frac{\pi}{4} \times 0.1^2 \left[6.58^2 - \left(\frac{0.04}{0.1} \right)^2 \times 41.1^2 \right] = 3982 \text{ (N)}$$

喷嘴对管子的作用力与 F_x 大小相等方向相反。

第十节 沿流线主法线方向压强和速度的变化

伯努利方程 (4-41a) 表达了在重力场中不可压缩理想流体沿流线压强和速度的变化规律。现在讨论垂直于流线方向的压强和速度变化。参看图 4-21, 在流线 BB' 的 M 点上取一柱形微小流体质团, 柱轴与流线上 M 点的主法线重合, 柱体的两个端面与柱轴相垂直, 端面面积为 δA , 柱体长为 δr , M 点的曲率半径为 r 。柱体在流线主法线方向所受的力是: 端面压力 $-p\delta A$ 与 $(p+\delta p)\delta A$, 重力在主法线方向的分量 $\delta W \cos \theta$ 。柱体侧面的表面力在主法线方向无分量。柱体在 M 点法线方向的加速度为 v^2/r 。根据牛顿第二定律

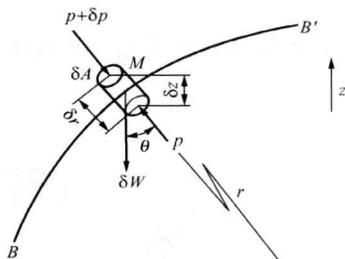


图 4-21 微小流体质团沿弯曲线主法线方向的受力分析

$$\rho \delta r \delta A \frac{v^2}{r} = (p + \delta p) \delta A - p \delta A + \delta W \cos \theta$$

由于 $\cos \theta = \frac{\partial z}{\partial r}$, $\delta W = \rho g \delta r \delta A$, 代入上式, 并取 $\delta A \rightarrow 0$ 、 $\delta r \rightarrow 0$ 时的极限, 得 M 点的流动参数关系:

$$\frac{v^2}{gr} = \frac{\partial}{\partial r} \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) \quad (\text{a})$$

式之所以能将 ρ 移入导数式内, 是因为不可压缩流体的密度等于常数。另一方面, 在伯努利常数对所有流线具有同一值的条件下, 伯努利常数沿 r 方向不变, 因此它对 r 的导数等于零, 即

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} \right) = 0$$

或

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) = -\frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial r} \quad (\text{b})$$

由式 (a)、(b) 得

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0$$

积分后得

$$v = \frac{C}{r} \quad (4-47)$$

式中: C 是沿径向的积分常数, 一般来讲它是沿流线方向不同位置 S 的函数。由此可见, 在弯曲流线主法线方向上, 速度随距曲率中心距离的减小而增加, 所以在弯曲管道中, 内侧的速度高, 外侧的速度低 (见图 4-22)。

对于水平面内的流动, 或者重力势变化的影响可以忽略不计, 则沿流线主法线方向的压强梯度可由式 (a) 给出:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{v^2}{r} \quad (\text{c})$$

将式 (4-47) 代入式 (c) 并积分, 得出

$$p = C_1 - \rho \frac{C}{2r^2} \quad (4-48)$$

式中: C_1 是沿径向的积分常数。由此可见, 在弯曲流线主法线方向上压强随距曲率中心的距离的增加而增加, 所以在弯曲管道中的流动, 内侧的压强低, 外侧的压强高 (图 4-22)。

对于直线流动, 即 $r \rightarrow \infty$, 由式 (a) 得

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) = 0$$

设 1 和 2 是流线的某一垂直线上的任意两点 (图 4-23), 由式 (3-11a)

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g}$$

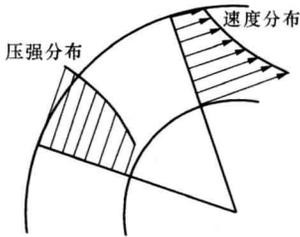


图 4-22 弯曲管道中压强和速度分布示意

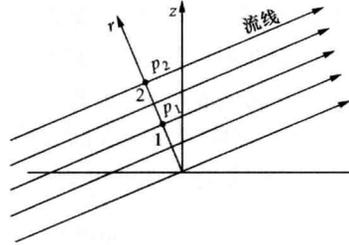


图 4-23 直线流动中垂直于流线方向上的压强分布示意

它表明, 直线流动时沿垂直于流线方向的压强分布服从于静力学基本方程式。

对于不计重力影响的直线流动, 在式 (c) 中令 $r \rightarrow \infty$, 得

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (4-49)$$

它表明, 不计重力影响的直线流动, 沿流线法向的压强梯度为零, 即没有压强差。所以在上述条件下, 在直管管壁内 (图 4-16) 测得的静压强也就是该截面上任意一点的静压强。

第十一节 黏性流体总流的伯努利方程

前已述及, 截面为有限值的流速为总流, 并已导出重力作用下定常绝能管流的能量方程 (4-40)。将式 (4-40) 写成

$$\iint_{A_2} \rho g v \left(\frac{u}{g} + \frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} \right) dA - \iint_{A_1} \rho g v \left(\frac{u}{g} + \frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} \right) dA = 0 \quad (4-40a)$$

由式 (3-11a) 已知, 在缓变流截面上 $z + \frac{p}{\rho g} = \text{常数}$, 故

$$\iint_A \rho g v \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) dA = \rho g q_v \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) \quad (a)$$

对于不可压缩黏性流体动能项的积分为

$$\iint_A \rho g v \frac{v^2}{2g} dA = \frac{1}{A} \iint_A \left(\frac{v}{v_a} \right)^3 dA \left(\rho g q_v \frac{v_a^2}{2g} \right) = \alpha \left(\rho g q_v \frac{v_a^2}{2g} \right) \quad (b)$$

$$\alpha = \frac{1}{A} \iint_A \left(\frac{v}{v_a} \right)^3 dA \quad (4-50)$$

式中： α 为总流的动能修正系数。由截面 A_1 至截面 A_2 平均单位重量流体的热力学能增量为

$$\frac{1}{\rho g q_v} \left(\iint_{A_2} \rho g v \frac{u}{g} dA - \iint_{A_1} \rho g v \frac{u}{g} dA \right) = \frac{1}{\rho g q_v} \int \rho (u_2 - u_1) dq_v = h_w \quad (4-51)$$

式中： h_w 为由截面 A_1 至截面 A_2 平均单位重量流体的能量损失。这是因为对于不可压缩黏性流体的绝能流来讲，流体内部切向应力所做的摩擦功将耗损流体的机械能，转化为热能，使流体的热力学能增加。将式(a)、式(b)、式(4-51)代入式(4-40a)，并通除以 $\rho g q_v$ ，得

$$\frac{\alpha_1 v_{1a}^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{\alpha_2 v_{2a}^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + h_w \quad (4-52)$$

这就是重力作用下不可压缩黏性流体总流的伯努利方程，它适用于该流动的任意二缓变流截面，不必顾及它们之间有无急变流存在。由式(4-52)可以看出，为了克服黏性阻力，总流的机械能是逐渐减小的，总水头线是逐渐降低的，如图4-24中实线所示。

总流的动能修正系数可按照所取有效截面上的速度分布规律由式(4-50)求得，它的数值恒大于1。在工业管道通常流动的条件下 $\alpha=1.01\sim 1.10$ ；流动的紊乱程度越大， α 越接近1。因此，在设计工业管道时，通常均近似地取 $\alpha=1$ ，且以 v 代表管流的平均流速。

【例4-5】离心水泵的体积流量 $q_v=20\text{ m}^3/\text{h}$ ，安装高度 $h_s=5.5\text{ m}$ ，吸水管内径 $d_2=100\text{ mm}$ ，吸水管的总损失 $h_w=0.25\text{ m}$ （水柱高度），水池的面积足够大，求水泵进水口2—2处的真空（图4-25）。

【解】选择池面1—1、进水口2—2为二缓变流截面。假设池面就是坐标 z 的基准面，则 $z_1=0$ ；池面的绝对压强为大气压，即 $p_1=p_a$ ；由于池面足够大，可视 $v_1=0$ 。假设进水口2—2处的真空度为 p_v ，则该处的绝对压强为 $p_2=p_a-p_v$ 。

进水管内水流速度为

$$v_2 = \frac{q_v}{\pi d_2^2 / 4} = \frac{20 \times 4}{3600 \times \pi \times 0.1^2} = 0.71(\text{m/s})$$

进水口的坐标 $z_2=h_s=5.5\text{ m}$ ，水的密度 $\rho=1000\text{ kg/m}^3$ ，取 $\alpha=1$ ，将已知数据代入式(4-52)，得

$$\frac{p_a}{9807} = 5.5 + \frac{p_a - p_v}{9807} + \frac{(0.71)^2}{19.6} + 0.25$$

$$p_v = 9807 \times (5.5 + 0.0267 + 0.25) = 56642(\text{Pa})$$

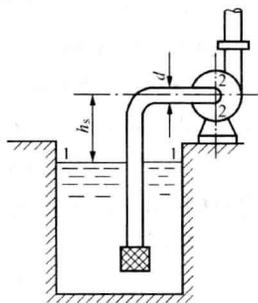


图4-25 离心泵抽水示意

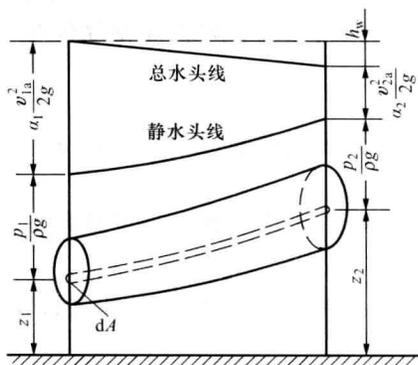


图4-24 总流的水头线



习 题

4-1 已知绕过圆柱体的平面流动的速度分布规律为

$$\vec{v} = v_{\infty} \left[1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right] \cos \theta \vec{i}_r - v_{\infty} \left[1 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right] \sin \theta \vec{i}_{\theta}$$

试求: (1) 驻点位置; (2) 柱面上 ($r=r_0$) 的最大速度位置; (3) 画出直线 $\theta=\pi/2$, $r \geq r_0$ 时的速度分布图。

注: \vec{i}_r 和 \vec{i}_{θ} 为极坐标的两个坐标单位矢量。 θ 从右侧水平线计起逆时针方向为正, v_{∞} 、 r_0 为常数。
[$r=r_0$, $\theta=0, \pi$; $\theta=\pi/2$]

4-2 已知平面流动的速度分布规律为

$$\vec{v} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j}$$

式中 Γ 为常数。求流线方程并画出若干条流线。

[$x^2 + y^2 = \text{常数}$]

4-3 已知两平行平板间平面流动的速度为

$$v_x = \frac{k}{2\mu} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right), \quad v_y = 0$$

式中 k 、 μ 为常数, b 为两平板之间的距离。试给出速度分布图。

4-4 已知流场的速度分布为

$$v = xy^2 \vec{i} - \frac{1}{3} y^3 \vec{j} + xy \vec{k}$$

(1) 问属几维流动? (2) 求 $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ 点的加速度。

[二维流动; $a_x=16/3$, $a_y=32/3$, $a_z=16/3$]

4-5 已知流场的速度分布为

$$\vec{v} = x^2 y \vec{i} - 3y \vec{j} + 2z^2 \vec{k}$$

(1) 问属几维流动? (2) 求 $(x, y, z) = (3, 1, 2)$ 点的加速度。

[三维流动; $a_x=27$, $a_y=9$, $a_z=64$]

4-6 已知流场的速度分布为

$$\vec{v} = (4x^3 + 2y + xy) \vec{i} + (3x - y^3 + z) \vec{j}$$

(1) 问属几维流动? (2) 求 $(x, y, z) = (2, 2, 3)$ 点的加速度。

[三维流动; $a_x=2004$, $a_y=108$]

4-7 有一输油管道, 在内径为 20cm 的截面上流速为 2m/s, 求另一内径为 5cm 截面上的流速以及管道内的质量流量。已知油的相对密度为 0.85。
[32m/s; 53.4kg/s]

4-8 在一内径为 5cm 的管道中, 流动的空气质量流量为 0.5kg/s, 在某一截面上压强为 $5 \times 10^5 \text{Pa}$, 温度为 100°C 。求在该截面上的气流平均速度。
[54.5m/s]

4-9 长 3cm 的锥形喷嘴, 其两端内径分别为 8cm 和 2cm, 流量为 $0.01 \text{ m}^3/\text{s}$, 流体无黏性且不可压缩。试导出沿喷嘴轴向的速度表达式, x 距离从大内径一端的端面计起。

$$\left[v = \frac{0.01}{\pi(4-x)^2} \right]$$

4-10 已知流场内的速度分布为

$$\vec{v} = \frac{4x}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{4y}{x^2 + y^2} \vec{j}$$

求证通过任意一个以原点为圆心的同心圆的流量都是相等的 (z 方向取单位长度)。

提示: 流场速度用极坐标表示。

4-11 由空气预热器经两条管道送往锅炉喷燃器的空气质量流量 $q_m=8000\text{kg/h}$, 气温 400°C , 管道截面尺寸均为 $400\text{mm}\times 600\text{mm}$ 。已知标准状态 (0°C , 101325Pa) 空气的密度 $\rho_0=1.29\text{kg/m}^3$, 求输气管道中空气的平均流速。 [8.85m/s]

4-12 比体积 $v=0.3816\text{m}^3/\text{kg}$ 的汽轮机废汽沿一直径 $d_0=100\text{mm}$ 的输气管进入主管, 质量流量 $q_m=2000\text{kg/h}$, 然后沿主管上的另两支管输送给用户。已知用户的需用流量分别为 $q_{m1}=500\text{kg/h}$, $q_{m2}=1500\text{kg/h}$, 管内流速均为 25m/s 。求输气管中蒸汽的平均流速及两支管的直径 d_1 和 d_2 (见图 4-26)。 [27m/s; 0.052m; 0.09m]

4-13 如图 4-27 所示直立圆管管径为 10mm , 一端装有直径为 5mm 的喷嘴, 喷嘴中心离圆管截面①处的高度为 3.6m , 从喷嘴排入大气的水流出口速度为 18m/s 。不计摩擦损失, 计算截面①处所需的计示压强。 [$1.87\times 10^5\text{Pa}$]

4-14 忽略损失, 求图 4-28 所示文丘里管内的流量。 [$0.0361\text{m}^3/\text{s}$]

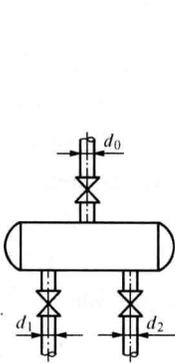


图 4-26 习题 4-12 示意图

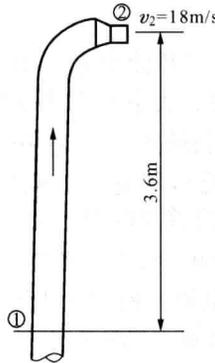


图 4-27 习题 4-13 示意图

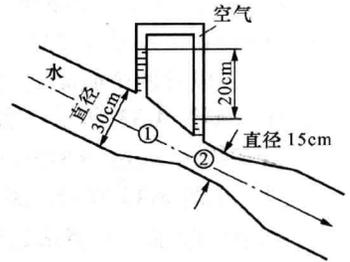


图 4-28 习题 4-14 示意图

4-15 图 4-29 所示为一文丘里管和压强计, 试推导体积流量和压强计读数之间的关系式。

$$q_v = \frac{\pi}{4} \left\{ \frac{2gH[(\rho_m/\rho) - 1]}{(1/d_2^4) - (1/d_1^4)} \right\}^{1/2}$$

4-16 按图 4-30 所示的条件求当 $H=30\text{cm}$ 时的流速 v 。 [1.085m/s]

4-17 输水管中水的计示压强为 $6.865\times 10^5\text{Pa}$, 假设法兰盘接头之间的填料破损, 形成一个面积 $A=2\text{mm}^2$ 的穿孔, 求该输水管一昼夜所漏损的水量。 [6.4m^3]

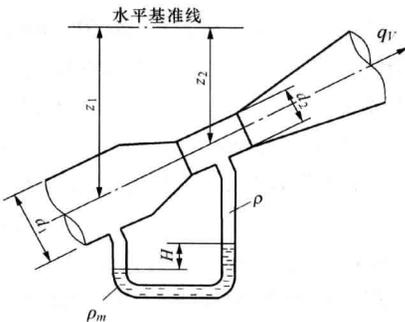


图 4-29 习题 4-15 示意图

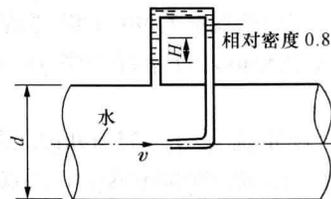


图 4-30 习题 4-16 示意图

4-18 如图 4-31 所示, 敞口水池中的水沿一截面变化的管道排出, 质量流量 $q_m=14\text{kg/s}$ 。

若 $d_1=100\text{mm}$, $d_2=75\text{mm}$, $d_3=50\text{mm}$, 不计损失。求所需的水头 H 以及第二段管段中央 M 点的压强, 并绘制测压管水头线。 [2.59m; $2.04 \times 10^4 \text{ Pa}$]

4-19 如图 4-32 所示, 水从井 A 利用虹吸管引到井 B 中, 设已知体积流量 $q_V=100\text{m}^3/\text{h}$, $H_1=3\text{m}$, $z=6\text{m}$, 不计虹吸管中的水头损失。试求虹吸管的管径 d 及上端管中的负计示压强值 p_c 。 [0.068m; $5.89 \times 10^4 \text{ Pa}$]

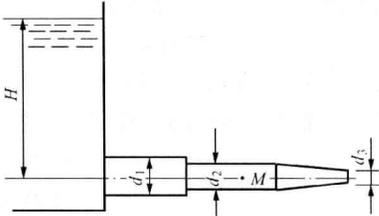


图 4-31 习题 4-18 示意图

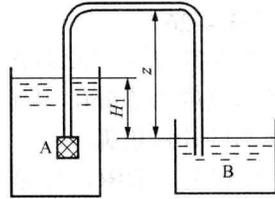


图 4-32 习题 4-19 示意图

4-20 送风管道的截面积 $A_1=1\text{m}^2$, 体积流量 $q_{V1}=108000 \text{ m}^3/\text{h}$, 静压 $p_1=0.267\text{N}/\text{cm}^2$, 风温 $t_1=28^\circ\text{C}$ 。管道经过一段路程以及弯管、大小节收缩段等管子件后, 截面积 $A_2=0.64\text{m}^2$, 静压 $p_2=0.133 \text{ N}/\text{cm}^2$, 风温 $t_2=24^\circ\text{C}$ 。当地测得的大气压 $p_a=101325\text{Pa}$, 求截面 A_2 处的质量流量 q_{m2} , 体积流量 q_{V2} 以及两个截面上的平均流速 v_1 和 v_2 。 [36.11kg/s; $29.99\text{m}^3/\text{s}$; $46.86\text{m}/\text{s}$; $30\text{m}/\text{s}$]

4-21 如图 4-33 所示, 水沿渐缩管道垂直向上流动, 已知 $d_1=30\text{cm}$, $d_2=20\text{cm}$, 计示压强 $p_{1c}=19.6\text{N}/\text{cm}^2$, $p_{2c}=9.81\text{N}/\text{cm}^2$, $h=2\text{m}$ 。若不计摩擦损失, 试计算其流量。 [0.439m³/s]

4-22 如图 4-34 所示, 离心式水泵借一内径 $d=150\text{mm}$ 的吸水管以 $q_V=60\text{m}^3/\text{h}$ 的流量从一敞口水槽中吸水, 并将水送至压力水箱。设装在水泵与吸水管接头上的真空计指示出负压值为 39997Pa 。水力损失不计, 试求水泵的吸水高度 H_s 。 [4.02m]

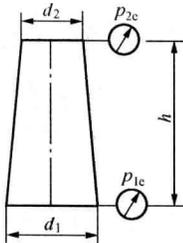


图 4-33 习题 4-21 示意图

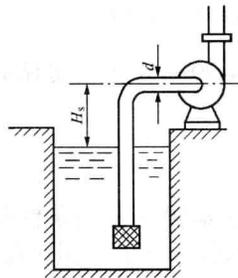


图 4-34 习题 4-22 示意图

4-23 离心式风机借集流器从大气中吸取空气。其测压装置为一从直径 $d=200\text{mm}$ 圆柱形管道上接出的、下端插入水槽中的玻璃管。若水在玻璃管中的上升高度 $H=250\text{mm}$, 求风机每秒钟吸取的空气量 q_V , 空气的密度 $\rho=1.29\text{kg}/\text{m}^3$ (见图 4-35)。 [1.935m³/s]

4-24 连续管系中的 90° 渐缩弯管放在水平面上, 管径 $d_1=15\text{cm}$, $d_2=7.5\text{cm}$, 入口处水的平均流速 $v_1=2.5\text{m}/\text{s}$, 计示静压强 $p_{1c}=6.86 \times 10^4 \text{ Pa}$ 。如不计能量损失, 试求支撑弯管在其位置所需的水平力。 [259.4N]

4-25 额定流量 $q_m=35.69\text{kg}/\text{s}$ 的过热蒸汽, 压强 $p=981\text{N}/\text{cm}^2$, 温度 $t=510^\circ\text{C}$ (对应的蒸汽比体积 $v=0.03067\text{m}^3/\text{kg}$), 经 $\phi 273 \times 23\text{mm}$ 的主蒸汽管道铅垂向下, 再经 90° 弯管转向水平方向流动。如不计能量损失, 试求蒸汽作用给弯管的水平力。 [3.98 $\times 10^5 \text{ N}$]

4-26 如图 4-36 所示, 相对密度为 0.83 的油水平射向直立的平板, 已知 $v_0=20\text{m}/\text{s}$, 求支撑平板所需的力 F 。 [652N]

4-27 标准状态的空气从喷嘴里射出, 吹到与之成直角的壁面上, 壁面上装有测压计, 测压计读数高于大气压 466.6Pa 。求空气离开喷嘴时的速度。 [19m/s]

4-28 水龙头与压力箱连接, 压强 170kPa , 水龙头的入流速度可忽略不计。水龙头往大气中喷水, 设水柱成单根流线, 忽略空气阻力, 估计水流离出口能达到的最大高度。

[17.3m]

4-29 如图 4-37 所示, 一股射流以速度 v_0 水平射到倾斜光滑平板上, 体积流量为 q_{v0} 。求沿板面向两侧的分流流量 q_{v1} 与 q_{v2} 的表达式, 以及流体对板面的作用力。忽略流体撞击的损失和重力影响, 射流的压强分布在分流前后都没有变化。

$$\left[q_{v1} = \frac{1 + \cos \theta}{2} q_{v0}; \quad q_{v2} = \frac{1 - \cos \theta}{2} q_{v0}; \quad F = -\rho q_{v0} v_0 \sin \theta \right]$$

4-30 如图 4-37 所示, 如果沿下侧流动的流量为流体总流量的 45%, 问平板倾斜角 θ 多大? [84°15']

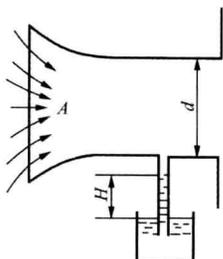


图 4-35 习题 4-23 示意图

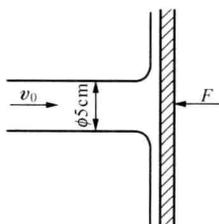


图 4-36 习题 4-26 示意图

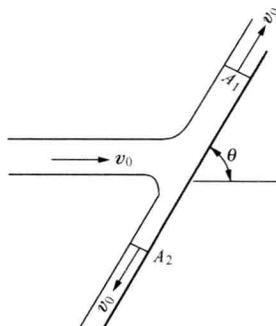


图 4-37 习题 4-29、4-30 示意图

4-31 如图 4-38 所示, 平板向着射流以等速 v 运动, 导出使平板运动所需功率的表达式。

$$\left[\rho \frac{q_v}{v_0} v (v_0 + v)^2 \sin^2 \theta \right]$$

4-32 如图 4-39 所示, 射流以绝对速度 v_0 流入叶片。假如射流的绝对速度偏转 120° , 求叶片出口边角度 θ 。 [151.3°]

4-33 图 4-40 中水泵叶轮的内径 $d_1=20\text{cm}$, 外径 $d_2=40\text{cm}$, 叶片宽度 $b=4\text{cm}$, 水在叶轮入口处沿径向流入, 在出口处与径向成 30° 角的方向流出, 质量流量 $q_m=81.58\text{kg/s}$ 。试求水在叶轮入口与出口处的流速 v_1 与 v_2 。 [3.25m/s; 1.875m/s]

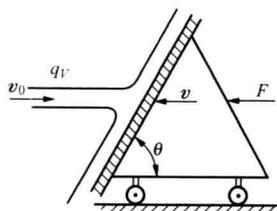


图 4-38 习题 4-31 示意图

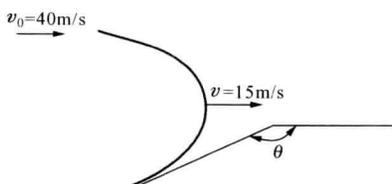


图 4-39 习题 4-32 示意图

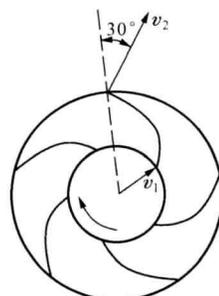


图 4-40 习题 4-33 示意图

4-34 图 4-41 中的风机叶轮的内径 $d_1=12.5\text{cm}$, 外径 $d_2=30\text{cm}$, 叶片宽度 $b=2.5\text{cm}$, 转速 $n=1725\text{r/min}$, 体积流量 $q_V=372\text{m}^3/\text{h}$ 。空气在叶片入口处沿径向流入, 绝对压强 $p_1=9.7\times 10^4\text{Pa}$, 气温 $t_1=20^\circ\text{C}$, 叶片出口方向与叶轮外缘切线方向的夹角 $\beta_2=30^\circ$ 。假设流体是理想不可压缩流体: (1) 画出入口处的速度图, 并计算叶片的入口角 β_1 ; (2) 画出出口处的速度图, 并计算出口速度 v_2 ; (3) 求所需的扭矩 M_z 。 [43°; 20m/s; 0.348N·m]

4-35 图 4-42 所示为一有对称臂的洒水器, 设总体积流量为 $5.6\times 10^{-4}\text{m}^3/\text{s}$, 喷嘴面积为 0.93cm^2 , 不计摩擦。求它的角速度 ω 。如不让他转动, 应施加多大扭矩? [8.52rad/s; 0.3N·m]

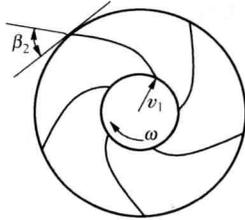


图 4-41 习题 4-34 示意图

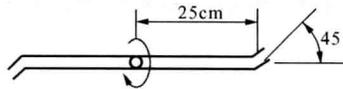


图 4-42 习题 4-35 示意图

第五章 相似原理和量纲分析

理性认识依赖于感性认识，流体力学理论的检验和发展依赖于流体力学试验。结合工程需要的流体力学试验一般很难在实物（原型）上进行。而是利用有关试验装置（例如风洞、水洞、水池等）在按一定比例尺（一般为缩尺）制作的模型上进行。如何选定制作模型的比例尺并保证经模型的流动与经原型的流体力学相似，又如何将模型试验结果推广应用到原型上去，这是模型试验前必须解决的问题。即使有些试验可以在实物上进行，也有如何将在特定条件下得到的试验结果推广应用到同类相似流动中去的问题。人们经过长期的科学试验，终于探索和总结出了指导模型试验的理论，即相似原理。

以相似原理为基础的模型试验方法在流体力学中有着广泛的应用。例如，通过飞机模型在风洞中的试验去探索飞机的气动特性，通过舰船模型在试验池中的试验去研究舰船的阻力特性，通过推进器模型在水洞中的试验去研究推进器的动力特性，通过锅炉的水模型试验去研究炉内的气动特性，等等。该方法不仅在流体力学中有着广泛的应用，且也广泛地应用于传热、传质以及其他复杂物理化学过程内部规律的探索。在这一章里，主要讨论流动的力学相似、相似准则和相似条件，模型试验方法以及量纲分析法。

第一节 流动的力学相似

相似的概念首先出现在几何学里，如两个三角形相似时，对应边的比例相等。流动的力学相似是几何相似概念在流体力学中的推广和发展，它指的是两个流场的力学相似，即在流动空间的各对应点上和各对应时刻，表征流动过程的所有物理量各自互成一定比例。表征流动过程的物理量按其性质主要有三类，即表征流场几何形状的，表征流体微团运动状态的和表征流体微团动力性质的，因此，流动的力学相似主要包括流场的几何相似、运动相似和动力相似。现在分别讨论如下，并以上标“'”表示模型的物理量。

一、几何相似

几何相似是指模型与原型的全部对应线性长度的比例相等，即

$$\frac{l'}{l} = k_l \quad (5-1)$$

式中： k_l 为长度比例尺。线性长度也称特征长度，可以是翼型的翼弦长 b （见图5-1）、圆柱的直径 d 、管道的长度 l 、管壁绝对粗糙度 ε 等。

只要模型与原型的全部对应线性长度的比例相等，则它们的夹角必相等，例如图5-1中的 $\beta' = \beta$ 。

由于几何相似，模型与原型的对应面积、对应体积也必分别互成一定比例，即

$$k_A = \frac{A'}{A} = \frac{l'^2}{l^2} = k_l^2 \quad (5-2)$$

$$k_V = \frac{V'}{V} = \frac{l'^3}{l^3} = k_l^3 \quad (5-3)$$

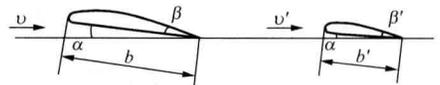


图 5-1 几何相似

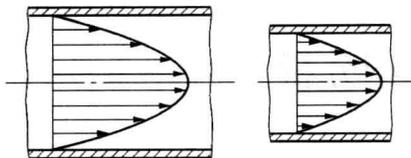


图 5-2 速度场相似

二、运动相似

运动相似是指模型与原型的流场所有对应点上、对应时刻的流速方向相同而流速大小的比例相等,即它们的速度场相似(见图 5-2):

$$\frac{v'}{v} = k_v \quad (5-4)$$

式中: k_v 为速度比例尺。

由于流场的几何相似是运动相似的前提条件,因此甚易证明,模型与原型流场中流体微团经过对应路程所需要的时间也必互成一定比例,即

$$\text{时间比例尺} \quad k_t = \frac{t'}{t} = \frac{l'/v'}{l/v} = \frac{k_l}{k_v} \quad (5-5)$$

由几何相似和运动相似还可导出用 k_l 、 k_v 表示的有关运动学量的比例尺如下:

$$\text{加速度比例尺} \quad k_a = \frac{a'}{a} = \frac{v'/t'}{v/t} = \frac{k_v}{k_t} = \frac{k_v^2}{k_l} \quad (5-6)$$

$$\text{体积流量比例尺} \quad k_{q_v} = \frac{q'_v}{q_v} = \frac{l'^3/t'}{l^3/t} = \frac{k_l^3}{k_t} = k_l^2 k_v \quad (5-7)$$

$$\text{运动黏度比例尺} \quad k_\nu = \frac{\nu'}{\nu} = \frac{l'^2/t'}{l^2/t} = \frac{k_l^2}{k_t} = k_l k_v \quad (5-8)$$

$$\text{角速度比例尺} \quad k_\omega = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{v'/l'}{v/l} = \frac{k_v}{k_l} \quad (5-9)$$

可见,只要确定了模型与原型的长度比例尺和速度比例尺,便可由它们确定所有运动学量的比例尺。

三、动力相似

动力相似是指模型与原型的流场所有对应点作用在流体微团上的各种力彼此方向相同,而它们大小的比例相等,即它们的动力场相似(见图 5-3):

$$\frac{F'_p}{F_p} = \frac{F'_\tau}{F_\tau} = \frac{W'}{W} = \frac{F'_i}{F_i} = k_F \quad (5-10)$$

式中: F_p 、 F_τ 、 W 和 F_i 分别为总压力、切向力、重力和惯性力, k_F 为力的比例尺;图 5-3 中的 m 和 \vec{a} 分别为流体微团的质量和加速度。

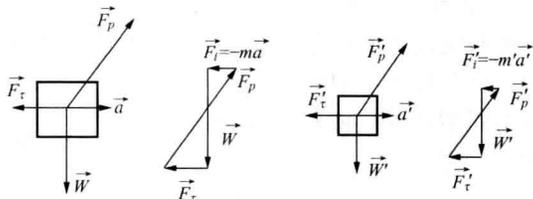


图 5-3 动力相似

由流场的几何相似、运动相似和动力相似甚易证明模型与原型流场的密度也必互成一定比例,即

$$\text{密度比例尺} \quad k_\rho = \frac{\rho'}{\rho} = \frac{F'_i / (a'V')}{F_i / (aV)} = \frac{k_F}{k_a k_v} = \frac{k_F}{k_l^2 k_v^2} \quad (5-11)$$

由于两个流场的密度比例尺常常是已知的或者是已经选定的, 故做流体力学的模型试验时, 经常选取 k_ρ 、 k_l 、 k_v 作基本比例尺, 即选取 ρ 、 l 、 v 作为独立的基本变量, 于是可导出用 k_ρ 、 k_l 和 k_v 表示的有关动力学的比例尺如下:

$$\text{力的比例尺} \quad k_F = k k_l^2 k_v^2 \quad (5-11a)$$

$$\text{力矩 (功、能) 比例尺} \quad k_M = \frac{M'}{M} = \frac{F'l'}{Fl} = k_F k_l = k_\rho k_l^3 k_v^2 \quad (5-12)$$

$$\text{压强 (应力) 比例尺} \quad k_p = \frac{p'}{p} = \frac{F'_p / A'}{F_p / A} = \frac{k_F}{k_A} = k_\rho k_v^2 \quad (5-13)$$

$$\text{功率比例尺} \quad k_P = \frac{P'}{P} = \frac{F'v'}{Fv} = k_F k_v = k_\rho k_l^2 k_v^3 \quad (5-14)$$

$$\text{动力黏度比例尺} \quad k_\mu = \frac{\mu'}{\mu} = \frac{\rho'v'}{\rho v} = k_\rho k_v = k_\rho k_l k_v \quad (5-15)$$

可见, 只要确定了模型与原型的长度比例尺、速度比例尺和密度比例尺, 便可由它们确定所有动力学量的比例尺。

有了以上关于几何学量、运动学量和动力学的三组比例尺 (又称相似倍数), 模型与原型流场之间各物理量的相似换算就很方便了。

以上三种相似是互相联系的。流场的几何相似是力学相似的前提条件, 动力相似是决定运动相似的主导因素, 而运动相似则是几何相似和动力相似的表现。因此, 模型与原型流场的几何相似、运动相似和动力相似是两个流场完全相似的重要特征。

其他还有温度相似、浓度相似等在传热、扩散等问题的模拟试验中会用到, 这里不作讨论。

第二节 动力相似准则

众所周知, 任何系统的机械运动都必须服从牛顿第二定律 $\bar{F} = m\bar{a}$ 。对模型与原型流场中的流体微团应用牛顿第二定律, 再按照动力相似, 各种力大小的比例相等, 可得

$$\frac{F'}{F} = \frac{\rho'V'dv'/dt'}{\rho Vdv/dt}$$

将上式中各物理量之比换成对应的比例尺, 可得式 (5-11) 的另一表示式

$$\frac{k_F}{k_\rho k_l^2 k_v^2} = 1 \quad (5-11b)$$

$$\text{也可写成} \quad \frac{F'}{\rho'l'^2v'^2} = \frac{F}{\rho l^2 v^2} \quad (5-16)$$

$$\text{令} \quad \frac{F}{\rho l^2 v^2} = Ne \quad (5-17)$$

Ne 称为牛顿 (I. Newton) 数, 它是作用力与惯性力的比值, 是无量纲数。由式 (5-16) 可知, 模型与原型的流场动力相似, 它们的牛顿数必定相等, 即 $Ne' = Ne$; 反之亦然。这便是由牛顿第二定律引出的牛顿相似准则。

作用在流场上的力有各种性质的力, 诸如重力、黏滞力、总压力、弹性力、表面张力等。不论是何种性质的力, 要保证两种流场的动力相似, 它们都要服从牛顿相似准则, 也即符合式(5-11b)和式(5-16)的关系。于是, 可以导出在单项力作用下的相似准则如下。

一、重力相似准则

在重力作用下相似的流动, 其重力场必须相似。作用在二流场流体微团上的重力之比可以表示为

$$k_F = \frac{W'}{W} = \frac{\rho' V' g'}{\rho V g} = k_\rho k_l^3 k_g$$

式中: k_g 为重力加速度比例尺。将上式代入式(5-11b), 得

$$\frac{k_v}{(k_l k_g)^{1/2}} = 1 \quad (5-18)$$

也可写成

$$\frac{v'}{(g'l')^{1/2}} = \frac{v}{(gl)^{1/2}} \quad (5-19)$$

令

$$\frac{v}{(gl)^{1/2}} = Fr \quad (5-20)$$

Fr 称为弗劳德(W. Froude)数, 它是惯性力与重力的比值。二流动的重力作用相似, 它们的弗劳德数必定相等, 即 $Fr' = Fr$; 反之亦然。这便是重力相似准则, 又称弗劳德准则。由此可知, 重力作用相似的流场, 有关物理量的比例尺要受式(5-18)的制约, 不能全部任意选择。由于在重力场中 $g'=g$, $k_g=1$, 故有

$$k_v = k_l^{1/2} \quad (a)$$

二、黏滞力相似准则

在黏滞力作用下相似的流动, 其黏滞力场必须相似。作用在二流场流体微团上的黏滞力之比可以表示为

$$k_F = \frac{F'_\mu}{F_\mu} = \frac{\mu'(dv'_x/dy')A'}{\mu(dv_x/dy)A} = k_\mu k_v k_l$$

代入式(5-11b), 得

$$\frac{k_\rho k_v k_l}{k_\mu} = 1, \quad \frac{k_v k_l}{k_\mu} = 1 \quad (5-21)$$

也可写成

$$\frac{\rho' v' l'}{\mu'} = \frac{\rho v l}{\mu}, \quad \frac{v' l'}{v} = \frac{v l}{\nu} \quad (5-22)$$

令

$$\frac{\rho v l}{\mu} = \frac{v l}{\nu} = Re \quad (5-23)$$

Re 称为雷诺(O. Reynolds)数, 它是惯性力与黏滞力的比值。二流动的黏滞力作用相似, 它们的雷诺数必定相等, 即 $Re' = Re$; 反之亦然。这便是黏滞力相似准则, 又称雷诺准则。由此可知, 黏滞力作用相似的流场, 有关物理量的比例尺要受式(5-21)的制约, 不能全部任意选择。例如, 当模型与原型用同一种流体时, $k_\rho = k_\mu = 1$ 故有

$$k_v = 1/k_l \quad (b)$$

三、压力相似准则

在压力作用下相似的流动, 其压力场必须相似。作用在二流场流体微团上的总压力之比可以表示为

$$k_F = \frac{F'_p}{F_p} = \frac{p'A'}{pA} = k_p k_l^2$$

代入式 (5-11b), 得

$$\frac{k_p}{k_p k_v^2} = 1 \quad (5-24)$$

也可写成

$$\frac{p'}{\rho'v'^2} = \frac{p}{\rho v^2} \quad (5-25)$$

令

$$\frac{p}{\rho v^2} = Eu \quad (5-26)$$

Eu 称为欧拉 (L. Euler) 数, 它是总压力与惯性力的比值。二流动的压力作用相似, 它们的欧拉数必定相等, 即 $Eu' = Eu$; 反之亦然。这便是压力相似准则, 又称欧拉准则。欧拉数中的压强 p 也可用压差 Δp 来代替, 这时

$$\text{欧拉数} \quad Eu = \frac{\Delta p}{\rho v^2} \quad (5-27)$$

$$\text{欧拉相似准则} \quad \frac{\Delta p'}{\rho'v'^2} = \frac{\Delta p}{\rho v^2} \quad (5-28)$$

四、非定常性相似准则

对于非定常流动的模式试验, 必须保证模型与原型的流动随时间的变化相似。由当地加速度引起的惯性力之比可以表示为

$$k_F = \frac{F'_u}{F_u} = \frac{\rho'V'\partial v'_x/\partial t'}{\rho V\partial v_x/\partial t} = k_p k_l^3 k_v k_t^{-1}$$

代入式 (5-11b), 得

$$\frac{k_l}{k_v k_t} = 1 \quad (5-29)$$

也可写成

$$\frac{l'}{v't'} = \frac{l}{vt} \quad (5-30)$$

令

$$\frac{l}{vt} = Sr \quad (5-31)$$

Sr 称为斯特劳哈尔 (V. Strouhal) 数, 也称谐时数。它是当地惯性力与迁移惯性力的比值。二非定常流动相似, 它们的斯特劳哈尔数必定相等, 即 $Sr' = Sr$; 反之亦然。这便是非定常性相似准则, 又称斯特劳哈尔准则或谐时性准则。

倘若非定常流是流体的波动或振荡, 其频率为 f , 则

$$\text{斯特劳哈尔数} \quad Sr = \frac{lf}{v} \quad (5-31a)$$

$$\text{斯特劳哈尔准则} \quad \frac{l'f'}{v'} = \frac{lf}{v} \quad (5-30a)$$

五、弹性力相似准则

对于可压缩流的模式试验, 要保证流动相似, 由压缩引起的弹性力场必须相似。作用在二流场流体微团上的弹性力之比可以表示为

$$k_F = \frac{F'_e}{F_e} = \frac{dp'A'}{dpA} = \frac{K'A'dV'/V'}{KAdV/V} = k_K k_l^2$$

式中: K 为体积模量; k_K 为体积模量比例尺。将上式代入式 (5-11b), 得

$$\frac{k_\rho k_v^2}{k_\kappa} = 1 \quad (5-32)$$

也可写成

$$\frac{\rho' v'^2}{K'} = \frac{\rho v^2}{K} \quad (5-33)$$

令

$$\frac{\rho v^2}{K} = Ca \quad (5-34)$$

Ca 称为柯西 (B. A. L. Cauchy) 数, 它是惯性力与弹性力的比值。二流动的弹性力作用相似, 它们的柯西数必定相等, 即 $Ca' = Ca$; 反之亦然。这便是弹性力相似准则, 又称柯西准则。

对于气体, 宜将柯西准则转换为马赫准则。由于 $K/\rho = c^2$ (c 为声速), 故弹性力的比例尺又可表示为 $k_F = k_c^2 k_\rho k_l^2$, 代入式 (5-11b), 得

$$\frac{k_v}{k_c} = 1 \quad (5-35)$$

也可写成

$$\frac{v'}{c'} = \frac{v}{c} \quad (5-36)$$

令

$$\frac{v}{c} = Ma \quad (5-37)$$

Ma 称为马赫 (L. Mach) 数, 它仍是惯性力与弹性力的比值。二流动的弹性力作用相似, 它们的马赫数必定相等, 即 $Ma' = Ma$; 反之亦然。这仍是弹性力相似准则, 又称马赫准则。

六、表面张力相似准则

在表面张力作用下相似的流动, 其表面张力场必须相似。作用在二流场流体微团上的张力之比可以表示为

$$k_F = \frac{F'_\sigma}{F_\sigma} = \frac{\sigma' l'}{\sigma l} = k_\sigma k_l$$

式中: σ 为表面张力; k_σ 为表面张力比例尺。将上式代入式 (5-11b), 得

$$\frac{k_\rho k_l k_v^2}{k_\sigma} = 1 \quad (5-38)$$

也可写成

$$\frac{\rho' v'^2 l'}{\sigma'} = \frac{\rho v^2 l}{\sigma} \quad (5-39)$$

令

$$\frac{\rho v^2 l}{\sigma} = We \quad (5-40)$$

We 称为韦伯 (M. Weber) 数, 它是惯性力与张力的比值。二流动的表面张力作用相似, 它们的韦伯数必定相等, 即 $We' = We$; 反之亦然。这便是表面张力相似准则, 又称韦伯准则。

上述的牛顿数、弗劳德数、雷诺数、欧拉数、斯特劳哈尔数、柯西数、马赫数、韦伯数统称为相似准则数。

我们知道, 牛顿第二定律所表述的是形式最简单的最基本的运动微分方程。根据该方程可导出在各种性质单项力作用下的相似准则数。在实际流动中, 作用在流体微团上的力往往不是单项力, 而是多项力, 这时牛顿第二定律中的力代表的便是多项力的合力。显然, 流体微团在多项力作用下的运动微分方程将是比较复杂的, 但实质上它仍是牛顿第二定律的具体表达式。因此, 如果已经有了某种流动的运动微分方程, 令方程中的有关力项与惯性力项相

比，同样可以导出相关的相似准则数。

第三节 流动相似条件

相似条件系指保证流动相似的必要和充分条件。这些条件正是模型试验必须遵守的。综合以上两节的讨论，可以表述如下：

(1) 相似的流动都属于同一类的流动，它们都应相同的微分方程组所描述，这是流动相似的第一个条件。

(2) 服从相同微分方程组的同类流动有无数个，从这无数同类流动中单一地划分出某一具体流动的条件是它的单值条件。单值条件包括几何条件、边界条件（进口、出口的速度分布等）、物性条件（密度、黏度等）；对于非定常流动，还有初始条件（初瞬时速度分布等）。若二流动的单值条件相同，则由相同微分方程组得到的解是同一个，即它们是相同的流动；若二流动的单值条件相似，则由相同微分方程组得到的解是相似的，即它们是相似的流动。单值条件相似是流动相似的第二个条件。

(3) 由单值条件中的物理量所组成的相似准则数相等是流动相似的第三个条件。

综上所述，可将相似条件概述为：凡属同一类的流动，当单值条件相似而且由单值条件中的物理量所组成的相似准则数相等时，这些流动必定相似。这是保证流动相似的必要和充分条件，是前面讨论的几何相似、运动相似和动力相似的概括和发展，是设计模型、组织模型试验及在模型与原型各物理量之间进行换算的理论根据。

由于单值条件是从无数同类流动中单一地划分出某一具体流动的条件，因此，单值条件中的各物理量称为定性量，即决定性质的量。由定性量组成的相似准则数称为定性准则数；包含被决定量的相似准则数称为非定性准则数。例如，在工程上常见的不可压缩黏性流体的定常流动中，密度 ρ 、特征长度 l 、流速 v 、黏度 μ 、重力加速度 g 等都是定性量，由它们组成的雷诺数 Re 、弗劳德数 Fr 便是定性准则数；压强 p 与流速 v 总是以一定的关系式互相联系着，知道了流速分布，便确定了压强分布，压强是被决定量，包含有压强（或压差）的欧拉数 Eu 便是非定性准则数。

相似条件解决了模型实验中必须解决的下列问题：

(1) 应根据单值条件相似和由单值条件中的物理量所组成的相似准则数相等的原则去设计模型，选择模型中的流动介质。

(2) 试验过程中应测定各相似准则数中所包含的应予测定的一切物理量，并把它们整理成相似准则数。

(3) 用与试验数据相拟合的方法找出相似准则数之间的函数关系，即准则方程式。该准则方程式便可推广应用到原型及其他相似流动中去，有关物理量可按各自的比例尺进行换算。

【例 5-1】 如图 5-4 所示，当通过油池底部的管道向外输油时，如果池内油深太小，会形成达于油面的旋涡，并将空气吸入输油管。为了防止这种情况的发生，需要通过模型试验去确定油面开始出现旋涡的最小油深 h_{\min} 。已知输油管内径 $d=250\text{mm}$ ，油的流量 $q_V=0.14\text{m}^3/\text{s}$ ，运动黏度 $\nu=7.5\times 10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$ 。倘若选取的长度比例尺 $k_l=1/5$ ，为了保证流动相似，模型输出管的内径、模型内液体的流

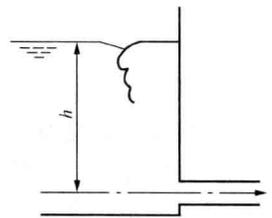


图 5-4 油池模型

量和运动黏度应等于多少? 在模型上测得 $h'_{\min}=60\text{mm}$, 油池的最小油深 h_{\min} 应等于多少?

【解】 这是不可压缩黏性流体的流动问题, 必须同时考虑重力和黏滞力的作用。因此, 为了保证流动相似, 必须按照弗劳德数和雷诺数分别同时相等去选择模型内液体的流速和运动黏度。

按长度比例尺得模型输出管内径:

$$d' = k_l d = 250/5 = 50 (\text{mm})$$

在重力场中 $g' = g$, 由弗劳德数相等可得模型内液体的流速和流量为

$$v' = \left(\frac{h'}{h}\right)^{1/2}, v = \left(\frac{1}{5}\right)^{1/2} v$$

$$q'_v = \frac{\pi}{4} d'^2 v' = \frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{5}\right)^2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{1/2} v = \left(\frac{1}{5}\right)^{5/2} q_v = \frac{0.14}{55.9} = 0.0025 (\text{m}^3/\text{s})$$

由雷诺数相等可得模型内液体的运动黏度为

$$v' = \frac{v' d'}{v d} v = \left(\frac{1}{5}\right)^{3/2} v = \frac{7.5 \times 10^{-5}}{11.18} = 6.708 \times 10^{-6} (\text{m}^2/\text{s})$$

已知模型上的 $h'_{\min}=60\text{mm}$, 则油池的最小油深为

$$h_{\min} = h'_{\min} / k_l = 5 \times 60 = 300 (\text{mm})$$

【例 5-2】 两种密度和动力黏度相等的液体从几何相似的喷嘴中喷出。一种液体的表面张力为 0.04409N/m , 出口流束直径为 7.5cm , 流速为 12.5m/s , 在离喷嘴 12m 处破裂成雾滴; 另一液体的表面张力为 0.07348N/m 。如果二流动相似, 另一液体的出口流束直径、流速、破裂成雾滴的距离应为多少?

【解】 流束的破裂受黏滞力和表面张力的共同作用, 要保证二流动相似, 它们的雷诺数和韦伯数必须相等, 即

$$\frac{\rho' v' l'}{\mu'} = \frac{\rho v l}{\mu}, \quad \frac{\rho' v'^2 l'}{\sigma'} = \frac{\rho v^2 l}{\sigma}$$

或

$$k_v k_l = 1, k_v^2 k_l = k_\sigma$$

故有

$$k_v = k_\sigma = 0.07348 / 0.04409 = 1.667$$

$$k_l = 1/k_v = 1/1.667 = 0.6$$

另一流束的出口直径、流速和破裂成雾滴的距离分别为

$$d' = k_l d = 0.6 \times 7.5 = 4.5 (\text{cm})$$

$$v' = k_v v = 1.667 \times 12.5 = 20.83 (\text{m/s})$$

$$l' = k_l l = 0.6 \times 12 = 7.2 (\text{m})$$

第四节 近似的模型试验

从以上的讨论可以看出, 在重力场中不可压缩黏性流体的定常流动有两个定性准则数, 即弗劳德数和雷诺数。要使模型与原型流场的弗劳德数相等, 必有 $k_v = k_l^{1/2}$; 如果模型与原型中的流体相同, 要使雷诺数相等, 必有 $k_v = 1/k_l$, 这便同第一个要求相矛盾。解决这一矛盾的办法可以是, 在模型与原型中用运动黏度不一样的流体, 像在例 5-1 中那样, 模型中液体的运动黏度只有原型中油液的 $1/11.18$ 。倘若长度比例尺再缩小, 例如 $k_l = 1/10$, 则 $k_v = 1/31.62$,

即模型中流体的运动黏度只有原型中流体的 $1/31.62$ 。通常这是很难办到的。

由此可见, 当定性准则数有两个时, 模型中流体运动黏度的选择要受模型尺寸选择的制约, 通常很难同时达到要求; 定性准则数越多, 模型试验的设计越困难, 甚至根本无法进行。为了解决这方面的矛盾, 工程上常常采用近似的模型试验方法, 即在设计模型和组织模型试验时, 在与流动过程有关的定性准则中考虑那些对流动过程起主导作用的定性准则, 而忽略那些对过程影响较小的定性准则, 达到二流动的近似相似。例如, 无压的明渠流动及其他水工建筑物中的流动, 对流动状态起主导作用的是重力, 而不是黏滞力, 便可忽略雷诺准则, 而只考虑弗劳德准则。这样, 模型尺寸和流体的选择就自由了。又如, 有压的黏性管流及其他有压的内流(流体机械、液压机械内的流动等), 对流动起主导作用的是黏滞力, 而不是重力, 便可忽略弗劳德准则, 而只考虑雷诺准则。此外, 在第六章中将要讨论到有压黏性管流中的一种特殊现象, 即当雷诺数大到一定数值时, 继续提高雷诺数, 管内流体的紊流程度及速度剖面几乎不再变化, 沿程能量损失系数也不再变化, 雷诺准则已失去判别相似的作用。这种状态称为自模化状态, 自模化状态的雷诺数范围为自模化区。在自模化区内, 阻力的主要部分是紊动阻力而不是黏滞阻力。二流动的紊动阻力之比为

$$k_F = \frac{F'_t}{F_t} = \frac{\rho'^{1/2} (dv'_x/dy')^2 A'}{\rho l^2 (dv_x/dy)^2 A} = k_\rho k_l^2 k_v^2$$

此式与牛顿相似准则式(5-11b)完全一样, 即它们自动满足动力相似, 没有独自の相似准则, 这便说明, 它们自动模化了。既然流动已经自动模化, 在选定基本比例尺后, 其他物理量均可按力学相似的有关比例尺进行换算。

【例 5-3】 图 5-5 所示为弧形闸门放水时的情形。已知水深 $h=6\text{m}$, 模型闸门是按长度比例尺 $k_l=1/20$ 制作的, 试验时的开度与原型的相同。试求流动相似时模型闸门前的水深。在模型上测得收缩截面的平均流速 $v'=2.0\text{m/s}$, 流量 $q_V'=30\text{L/s}$, 水作用在闸门上的力

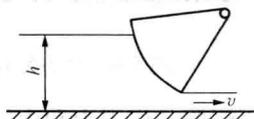


图 5-5 弧形闸门

$F'=92\text{N}$, 绕闸门轴的力矩 $M'=110\text{N}\cdot\text{m}$ 。试求原型上收缩截面的平均流速、流量以及作用在闸门上的力和力矩。

【解】 按长度比例尺, 模型闸门前的水深

$$h' = k_l h = 6/20 = 0.3 \text{ (m)}$$

水在重力作用下由闸门下出流, 要使流动相似, 弗劳德数必须相等。由此可得 $k_v = k_l^{1/2}$ 。于是, 原型上的待求量可按有关比例尺计算如下:

$$\text{收缩截面的平均流速} \quad v = \frac{v'}{k_v} = \frac{v'}{k_l^{1/2}} = 20^{1/2} \times 2.0 = 8.944 \text{ (m/s)}$$

$$\text{流量} \quad q_V = \frac{q_V'}{k_q} = \frac{q_V'}{k_l^{5/2}} = 20^{5/2} \times 0.03 = 53.67 \text{ (m}^3\text{/s)}$$

$$\text{作用在闸门上的力} \quad F = \frac{F'}{k_F} = \frac{F'}{k_l^3} = 20^3 \times 92 = 7.360 \times 10^5 \text{ (N)}$$

$$\text{力矩} \quad M = \frac{M'}{k_M} = \frac{M'}{k_l^4} = 20^4 \times 110 = 1.760 \times 10^7 \text{ (N}\cdot\text{m)}$$

【例 5-4】 为了探索用输油管道上的一段弯管的压强降去计量油的流量, 进行了水模拟试验。选取的长度比例尺 $k_l=1/5$ 。已知输油管内径 $d=100\text{mm}$, 油的流量 $q_V=20\text{L/s}$, 运动黏度

$\nu=0.625 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$, 密度 $\rho=720 \text{kg}/\text{m}^3$, 水的运动黏度 $\nu'=1.0 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$, 密度 $\rho'=998 \text{kg}/\text{m}^3$ 。为了保证流动相似, 试求水的流量。如果测得在该流量下模型弯管的压强降 $\Delta p'=1.177 \times 10^4 \text{Pa}$, 试求原型弯管在对应流量下的压强降。

【解】 这是黏性有压管流, 要使流动相似, 雷诺数必须相等。由式 (5-21) 和式 (5-7) 可得

$$k_v = \frac{k_\nu}{k_l} = \frac{1.0 \times 10^{-6}}{0.625 \times 10^{-6}} \times 5 = 8$$

$$k_q = k_l^2 k_v = k_l k_\nu$$

$$q_v' = k_l k_\nu q_v = \frac{1}{5} \times \frac{1.0 \times 10^{-6}}{0.625 \times 10^{-6}} \times 0.020 = 0.0064 \text{ (m}^3/\text{s)} = 6.4 \text{ (L/s)}$$

由欧拉数相等可得

$$\Delta p = \frac{\rho}{\rho'} \frac{v^2}{v'^2} \Delta p' = \frac{720}{998} \times \left(\frac{1}{8}\right)^2 \times 1.177 \times 10^4 = 132.7 \text{ (Pa)}$$

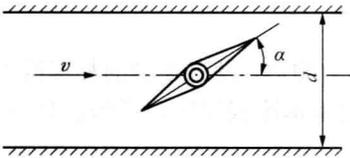


图 5-6 例 5-5 示意图

【例 5-5】 输水管道的内径 $d=1.5 \text{m}$, 内装蝶阀 (见图 5-6)。当蝶阀开度为 α 、输送流量 $q_v=4.0 \text{m}^3/\text{s}$ 时, 流动已进入自模化区。利用空气进行模拟试验, 选用的长度比例尺 $k_l=1/7.5$ 。为了保证模型内的流动也进入自模化区, 模型蝶阀在相同开度下的输送流量 $q_v'=1.6 \text{m}^3/\text{s}$ 。试验时测得经过蝶阀的压强降 $\Delta p'=2697 \text{Pa}$, 气流作用在蝶阀上的力 $F'=137 \text{N}$, 绕阀轴的力矩 $M'=2.94 \text{N} \cdot \text{m}$ 。试求原型对应的

压强降、作用力和力矩。已知 20°C 时水的密度 $\rho=998.2 \text{kg}/\text{m}^3$, 黏度 $\mu=1.005 \times 10^{-3} \text{Pa} \cdot \text{s}$, 20°C 时空气的密度 $\rho'=1.205 \text{kg}/\text{m}^3$, 黏度 $\mu'=1.83 \times 10^{-5} \text{Pa} \cdot \text{s}$, 声速 $c'=343.1 \text{m/s}$ 。

【解】 这是黏性有压管流。原型中的流速和雷诺数分别为

$$v = \frac{4q_v}{\pi d^2} = \frac{4 \times 4}{\pi (1.5)^2} = 2.264 \text{ (m/s)}$$

$$Re = \frac{\rho v d}{\mu} = \frac{998.2 \times 2.264 \times 1.5}{1.005 \times 10^{-3}} = 3.373 \times 10^6$$

模型中的流速和雷诺数分别为

$$v' = \frac{4q_v'}{\pi d'^2} = \frac{4 \times 1.6}{\pi (0.20)^2} = 50.93 \text{ (m/s)}$$

$$Re' = \frac{\rho' v' d'}{\mu'} = \frac{1.205 \times 50.93 \times 0.20}{1.83 \times 10^{-5}} = 6.707 \times 10^5$$

通常均已进入自模化区。模型中气流的马赫数为

$$Ma' = \frac{v'}{c'} = \frac{50.93}{343.1} = 0.1484 < 0.30$$

可以不考虑气体压缩性的影响。由于 $k_l=1/7.5$, $k_\rho=0.001207$, $k_\nu=22.50$, 故由式 (5-29)、式 (5-11a)、式 (5-12) 可得

$$\Delta p = \frac{\Delta p'}{k_\rho k_\nu^2} = \frac{2697}{0.001207 \times 22.50^2} = 4416 \text{ (Pa)}$$

$$F = \frac{F'}{k_\rho k_l^2 k_v^2} = \frac{137}{0.001207 \times (1/7.5)^2 \times 22.50^2} = 1.261 \times 10^4 \text{ (N)}$$

$$M = \frac{M'}{k_\rho k_l^3 k_v^2} = \frac{2.94}{0.001207 \times (1/7.5)^3 \times 22.50^2} = 2030 \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

第五节 量纲分析法

量纲分析是研究自然现象物理量量纲之间固有联系的理论。通过量纲分析，可以导出这些现象的相似准则数；即使对无法建立数学物理模型的复杂现象，也不例外。在流体力学的试验研究中，量纲分析不仅为导出流动相似条件提供了另一有效途径，而且使那些目前还无法建立数学力学模型的复杂流动问题，可以通过试验探索它们的运动规律。相似原理和量纲分析是流体力学试验研究的理论基础。

一、物理方程量纲一致性原则

物理量单位的种类叫量纲，用符号 dim 表示。例如，小时、分、秒是时间的不同单位，但它们同属时间的单位，它们的量纲为 T ；米、厘米、毫米同属长度的单位，它们的量纲为 L ；吨、千克、克同属质量的单位，它们的量纲为 M 。

物理量的量纲分为基本量纲（独立量纲）和导出量纲（非独立量纲）。通常流体力学中取长度、时间和质量的量纲 L 、 T 、 M 为基本量纲；在与温度有关的流体力学问题中，还要增加温度的量纲 Θ 为基本量纲。流体力学中常遇到的用基本量纲表示的导出量纲有：速度 $\text{dim}v = LT^{-1}$ ，加速度 $\text{dim}a = LT^{-2}$ ，密度 $\text{dim}\rho = ML^{-3}$ ，力 $\text{dim}F = MLT^{-2}$ ，压强 $\text{dim}p = ML^{-1}T^{-2}$ ，表面张力 $\text{dim}\sigma = MT^{-2}$ ，体积模量 $\text{dim}K = ML^{-1}T^{-2}$ ，动力黏度 $\text{dim}\mu = ML^{-1}T^{-1}$ ，运动黏度 $\text{dim}\nu = L^2T^{-1}$ ，比热容 $\text{dim}c_p = \text{dim}c_v = L^2T^{-2}\Theta^{-1}$ ，气体常数 $\text{dim}R = L^2T^{-2}\Theta^{-1}$ 。

自然界中的一切物理过程都可以用物理方程来表示。任何一个物理方程中各项的量纲必定相同，用量纲表示的物理方程必定是齐次的，这便是物理方程量纲一致性原则。既然物理方程中各项的量纲相同，那么，用物理方程中的任何一项去通除整个方程，便可将该方程化为无量纲方程。例如，伯努利方程 (4-44)：

$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{\rho}{\rho g} = H$$

每一项的量纲都是 L 。如果用 H 通除整个方程，该方程转化为无量纲方程

$$\frac{v^2}{2gH} + \frac{z}{H} + \frac{\rho}{\rho gH} = 1$$

量纲分析法正是依据物理方程量纲一致性原则，从量纲分析入手，找出流动过程的相似准则数，并借助试验找出这些相似准则数之间的函数关系，即准则方程式。准则方程式就是无量纲的物理方程，是用相似准则数表示的物理方程。根据相似原理，可以将准则方程式直接应用到原型及其他相似流动中去。这就是说，用量纲分析法，结合试验研究，不仅可以找出尚无物理方程表示的复杂流动过程的流动规律，而且找出的还是同一类相似流动的普遍规律。因此，量纲分析法是探索流动规律的重要方法。常用的量纲分析法有瑞利法和 π 定理。

二、瑞利法

瑞利 (Rayleigh) 法表述：如果一个物理过程涉及的物理量为 y ， x_1 、 x_2 、 \dots 、 x_n ，它们

之间的待定函数一般可表示为

$$y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

由于各物理量的量纲只能由基本量纲的积和商导出, 因此上式右端可以写成这些物理量的某种幂次之积:

$$y=kx_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n} \quad (5-41)$$

式中: k 为无量纲系数, 由试验确定; a_1, a_2, \dots, a_n 为待定指数。式(5-41)可用基本量纲表示为

$$L^\alpha T^\beta M^\gamma = (L^{\alpha_1} T^{\beta_1} M^{\gamma_1})^{a_1} (L^{\alpha_2} T^{\beta_2} M^{\gamma_2})^{a_2} \cdots (L^{\alpha_n} T^{\beta_n} M^{\gamma_n})^{a_n}$$

根据物理方程量纲一致性原则, 由等式两端基本量纲 L、T、M 的指数可得

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n$$

$$\beta = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \cdots + a_n\beta_n$$

$$\gamma = a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + \cdots + a_n\gamma_n$$

n 个指数有三个代数方程, 只有三个指数是独立的, 其余 $n-3$ 个指数需用独立的指数来表示。

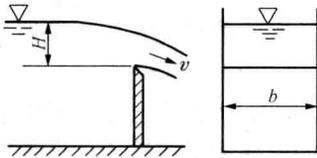


图 5-7 矩形堰

根据流动条件求得这些指数, 代入式(5-41), 便可得到上述物理量的函数关系式。

【例 5-6】 已知矩形堰流(见图 5-7)的流量 q_V 主要与堰上水头 H 、堰宽 b 和重力加速度 g 有关, 试用瑞利法导出矩形堰流流量的表达式。

【解】 按照瑞利法可以写出:

$$q_V = kb^{\alpha_1} g^{\alpha_2} H^{\alpha_3} \quad (a)$$

如果用基本量纲表示方程中各物理量的量纲, 则有

$$L^3 T^{-1} = L^{\alpha_1} (L T^{-2})^{\alpha_2} L^{\alpha_3}$$

根据物理方程量纲一致性原则, 由等式两端基本量纲 L、T 的指数可得

$$3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$-1 = -2\alpha_2$$

联立求解以上二式, 可得 $\alpha_2 = 1/2$; $\alpha_1 + \alpha_3 = 5/2$ 。由实验已知, 流量与堰宽成正比, 故 $\alpha_1 = 1$, 于是 $\alpha_3 = 3/2$ 。将它们代入式(a), 并令 $C_q = k(g)^{1/2}$, 得

$$q_V = C_q b H^{3/2} \quad (5-42)$$

式中: C_q 为堰流流量系数, 由实验确定。

【例 5-7】 不可压缩黏性流体在粗糙管内定常流动时, 沿管道的压强降 Δp 与管道长度 l 、内径 d 、绝对粗糙度 ε 、平均流速 v 、流体的密度 ρ 和动力黏度 μ 有关。试用瑞利法导出压强降的表达式。

【解】 按照瑞利法可以写出:

$$\Delta p = kl^{a_1} d^{a_2} \varepsilon^{a_3} v^{a_4} \rho^{a_5} \mu^{a_6} \quad (b)$$

如果用基本量纲表示方程中的各物理量, 则有

$$ML^{-1}T^{-2} = L^{a_1} L^{a_2} L^{a_3} (LT^{-1})^{a_4} (ML^{-3})^{a_5} (ML^{-1}T^{-1})^{a_6}$$

根据物理方程量纲一致性原则, 由等式两端基本量纲 L、T、M 的指数可得

$$-1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 3a_5 - a_6$$

$$-2 = -a_4 - a_6$$

$$1 = a_5 + a_6$$

六个指数有三个代数方程，只有三个指数是独立的、待定的。例如取 a_1 , a_3 和 a_6 为待定指数，则联立求解以上三式，可得

$$a_4 = 2 - a_6$$

$$a_5 = 1 - a_6$$

$$a_2 = -a_1 - a_3 - a_6$$

代入式 (b)，可得

$$\Delta p = k \left(\frac{l}{d} \right)^{a_1} \left(\frac{\varepsilon}{d} \right)^{a_3} \left(\frac{\mu}{\rho v d} \right)^{a_6} \rho v^2 \quad (\text{c})$$

由于沿管道的压强降是随管长线性增加的，故 $a_1=1$ ，式 (c) 右侧第一个无量纲量为管道的长径比，第二个无量纲量为相对粗糙度，第三个无量纲量为相似准则数 $1/Re$ 。于是可将式 (c) 写成

$$\Delta p = f \left(Re, \frac{\varepsilon}{d} \right) \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2} \quad (\text{d})$$

令 $\lambda = f \left(Re, \frac{\varepsilon}{d} \right)$ ，称沿程能量损失系数，由实验确定，则式 (d) 成为

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2} \quad (5-43)$$

这就是不可压缩黏性流体定常管流的压强降表达式。令 $h_f = \Delta p / (\rho g)$ ，其单位重量流体的沿程能量损失系数为

$$h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \quad (5-44)$$

这就是著名的达西—魏斯巴赫 (Darcy-Weisbach) 公式。

由以上例题的分析可以看出，对于变量较少的简单流动问题，用瑞利法可以方便地直接求出结果；对于变量较多的复杂流动问题，比如说有 n 个变量。由于按照基本量纲只能列出三个代数方程，只有三个指数是独立的、待定的，这样便出现了待定指数的选取问题，这是瑞利法的一个缺点。下面将要讨论的 π 定理便没有这方面的缺点，它是改进了的量纲分析法。

三、 π 定理

量纲分析法中更为普遍的方法是著名的 π 定理，又称白金汉定理，它是白金汉 (E. Buckingham) 于 1915 年提出的，应用广泛。

π 定理表述：如果一个物理过程涉及 n 个物理量和 m 个基本量纲，则这个物理过程可以用由 n 个物理量组成的 $n-m$ 个无量纲量 (相似准则数) 的函数关系来描述，这些无量纲量用 π_i ($i=1, 2, \dots, n-m$) 来表示。

倘若物理过程的方程式为

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

在这 n 个物理量中有 m 个基本量纲，则物理方程式可以转化为无量纲物理方程式 (准则方程

式):

$$f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}) = 0 \quad (5-45)$$

式中无量纲量 π_i 可以导出如下: 倘若基本量纲是 L, T, M 三个, 则可以从 n 个物理量中选取三个既包含上述基本量纲、又互为独立的量, 作为基本量。如果这三个基本量是 x_{n-2}, x_{n-1}, x_n , 则其他物理量均可用三个基本量的某种幂次与无量纲量 π_i 的乘积来表示, 即

$$x_i = \pi_i x_{n-2}^{a_i} x_{n-1}^{b_i} x_n^{c_i} \quad (5-46)$$

于是

$$\pi_i = \frac{x_i}{x_{n-2}^{a_i} x_{n-1}^{b_i} x_n^{c_i}} \quad (5-46a)$$

根据物理方程量纲一致性原则便可确定待定指数 a_i, b_i, c_i , 从而也就确定了 π_i 。由式 (5-46a) 可以看出, 无量纲量 π_i 实际上是按基本量变小了 $(x_{n-2}^{a_i} x_{n-1}^{b_i} x_n^{c_i})$ 倍的原来的物理量, 而其中的 $\pi_{n-2}, \pi_{n-1}, \pi_n$ 都等于 1。因而, 可以用对应的无量纲量代替基本量以外的物理量, 将原物理方程式转化为

$$f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-3}, 1, 1, 1) = 0$$

常数 1 可以不写入。倘若基本量纲又是 m 个, 则转化的无量纲方程式便是方程式 (5-45)。这样, 便把原来有 n 个物理量的物理方程式转化成了只有 $n-m$ 个无量纲量的准则方程式, 变量减少了 m 个, 这给模型试验和试验数据的整理带来很大方便。

π 定理中的无量纲量就是相似准则数 (包括几何相似等)。 π_i 的倒数、幂次方, 它与任何常数的和、差、乘积, 它与另外的无量纲量的和、差、乘积都仍然是无量纲量, 是新的相似准则数。

在准则方程式 (5-45) 的 $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}$ 中, 那些由单值条件的物理量组成的定性准则数用 $\pi_{d_1}, \pi_{d_2}, \dots, \pi_{d_i}$ 表示, 而包含被决定量的非定性准则数用 $\pi_{F_{i+1}}, \dots, \pi_{F_{n-m}}$ 表示。定性准则数是决定物理过程的准则数, 当它们确定之后, 过程即被确定, 非定性准则数也随之被确定。因此, 也可将方程 (5-45) 写成

$$\pi_{F_i} = f_i(\pi_{d_1}, \pi_{d_2}, \dots, \pi_{d_i}) \quad (5-45a)$$

任一非定性准则数可表示为定性准则数的函数。

对于三个基本量 x_{n-2}, x_{n-1}, x_n 要包含基本量纲, 容易识别; 是否互相独立, 则可根据它们的指数行列式的性质去判断。它们的量纲可用基本量纲表示为

$$\dim x_{n-2} = L^{a_1} T^{b_1} M^{c_1}$$

$$\dim x_{n-1} = L^{a_2} T^{b_2} M^{c_2}$$

$$\dim x_n = L^{a_3} T^{b_3} M^{c_3}$$

其指数行列式为

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}$$

由行列式的性质知, $\Delta \neq 0$, 基本量互相独立; $\Delta = 0$, 它们则不独立。如第一节所述, 流体力学经常选取特征长度 l 、流速 v 和流体密度 ρ 作为基本量, 它们已包含基本量纲 L, T, M , 它们用基本量纲表示时的指数行列式为

$$\begin{array}{c} d \quad v \quad \rho \\ \text{L} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right. = -1 \\ \text{T} \\ \text{M} \end{array}$$

可见，它们互相独立。它们分别是有代表性的几何学量、运动学量和动力学量，有了这三种基本量的比例尺，便可导出所有几何学量、运动学量和动力学量的比例尺。当然，也可以选取其他物理量作为基本量，只要它们符合既包含基本量纲又互为独立的条件。如果基本量纲是 m 个，同样可用此法去判断选取的基本量是否互相独立，它们的列式是 m 阶的。

【例 5-8】 仍以不可压缩黏性流体在粗糙管内的定常流动为例，用 π 定理导出压强降的表达式。

【解】 根据与压强降有关的物理量可以写出物理方程：

$$F(\Delta p, \mu, l, \varepsilon, d, v, \rho) = 0$$

物理方程中有 7 个物理量，选取 d 、 v 、 ρ 作为基本量，可以组成 4 ($=7-3$) 个无量纲量，它们是

$$\pi_1 = \frac{\Delta p}{d^{a_1} v^{b_1} \rho^{c_1}}, \quad \pi_2 = \frac{\mu}{d^{a_2} v^{b_2} \rho^{c_2}}$$

$$\pi_3 = \frac{l}{d^{a_3} v^{b_3} \rho^{c_3}}, \quad \pi_4 = \frac{\varepsilon}{d^{a_4} v^{b_4} \rho^{c_4}}$$

用基本量纲表示 π_1 中的各物理量，得

$$\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2} = \text{L}^{a_1} (\text{LT}^{-1})^{b_1} (\text{ML}^{-3})^{c_1}$$

根据物理方程量纲一致性原则，由等式两端基本量纲 L、T、M 的指数可得

$$\begin{aligned} -1 &= a_1 + b_1 - 3c_1 \\ -2 &= -b_1 \\ 1 &= c_1 \end{aligned}$$

解得 $a_1=0$ ， $b_1=2$ ， $c_1=1$ ，故有

$$\pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho v^2} = Eu$$

用基本量纲表示 π_2 中的各物理量，得

$$\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1} = \text{L}^{a_2} (\text{LT}^{-1})^{b_2} (\text{ML}^{-3})^{c_2}$$

根据量纲一致性原则得 $a_2=1$ ， $b_2=1$ ， $c_2=1$ ，故有

$$\pi_2 = \frac{\mu}{\rho v d} = \frac{1}{Re}$$

用基本量纲表示 π_3 和 π_4 中的各物理量，得

$$\text{L} = \text{L}^{a_{3,4}} (\text{LT}^{-1})^{b_{3,4}} (\text{ML}^{-3})^{c_{3,4}}$$

根据量纲一致性原则得 $a_{3,4}=1$ ， $b_{3,4}=0$ ， $c_{3,4}=0$ ，故有

$$\pi_3 = \frac{l}{d}, \quad \pi_4 = \frac{\varepsilon}{d}$$

将所有 π 值代入式 (5-45a)，并依 [例 5-6] 同样的理由将 l/d 提出，可得

$$\Delta p = f \left(Re, \frac{\varepsilon}{d} \right) \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2} = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2}$$

同用瑞利法导出的结果完全一样, 但用 π 定理推导时不出现待定指数的选取问题。

【例 5-9】翼型的阻力 F_D 与翼型的翼弦 b 、翼展 l 、冲角 α 、翼型与空气的相对速度 v 、空气的密度 ρ 、动力黏度 μ 和体积模量 K 有关。试用 π 定理导出翼型阻力的表达式。

【解】根据与阻力有关的物理量可以写出物理方程。

$$F(F_D, \mu, K, l, \alpha, b, v, \rho) = 0$$

选取 b 、 v 、 ρ 作基本变量, 可组成的无量纲量为

$$\pi_1 = \frac{F_D}{b^a v^b \rho^c}, \quad \pi_2 = \frac{\mu}{b^{a_2} v^{b_2} \rho^{c_2}}$$

$$\pi_3 = \frac{K}{b^{a_3} v^{b_3} \rho^{c_3}}, \quad \pi_4 = \frac{l}{b^{a_4} v^{b_4} \rho^{c_4}}, \quad \pi_5 = \alpha$$

用基本量纲表示 π_1 、 π_2 、 π_3 、 π_4 ($\pi_5 = \alpha$ 已经是无量纲量) 中的各物理量, 得

$$\text{MLT}^{-2} = \text{L}^{a_1} (\text{LT}^{-1})^{b_1} (\text{ML}^{-3})^{c_1}$$

$$\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1} = \text{L}^{a_2} (\text{LT}^{-1})^{b_2} (\text{ML}^{-3})^{c_2}$$

$$\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2} = \text{L}^{a_3} (\text{LT}^{-1})^{b_3} (\text{ML}^{-3})^{c_3}$$

$$\text{L} = \text{L}^{a_4} (\text{LT}^{-1})^{b_4} (\text{ML}^{-3})^{c_4}$$

根据量纲一致性原则得

$$a_1=2, \quad b_1=2, \quad c_1=1$$

$$a_2=1, \quad b_2=1, \quad c_2=1$$

$$a_3=0, \quad b_3=2, \quad c_3=1$$

$$a_4=1, \quad b_4=0, \quad c_4=0$$

故有

$$\pi_1 = \frac{F_D}{\rho v^2 b^2}, \quad \pi_2 = \frac{\mu}{\rho v b} = \frac{1}{Re}$$

$$\pi_3 = \frac{K}{\rho v^2} = \frac{c^2}{v^2} = \frac{1}{Ma^2}, \quad \pi_4 = \frac{l}{b}$$

由于 $\pi_1/\pi_4 = F_D/(\rho v^2 bl)$ 仍是无量纲量。将所有 π 值代入式(5-45a), 得翼型阻力的表达式

$$F_D = f(Re, Ma, \alpha) \frac{\rho v^2}{2} bl = C_D \frac{\rho v^2}{2} A \quad (5-47)$$

或

$$C_D = \frac{F_D}{A \rho v^2 / 2} \quad (5-47a)$$

称为翼型的阻力系数: $C_D = f(Re, Ma, \alpha)$, 由试验确定; 当 $Ma < 0.3$ 时, 可以不考虑压缩性的影响, $C_D = f(Re, \alpha)$; 对于圆柱体的绕流问题, 不存在 α 的影响, $C_D = f(Re)$ 。

应用量纲分析法去探索流动规律时, 还要注意以下几点:

(1) 必须知道流动过程所包含的全部物理量, 不应缺少其中的任何一个, 否则, 会得到不全面的甚至是错误的结果。

(2) 在表征流动过程的函数关系式中存在无量纲常数时, 量纲分析法不能给出它们的具体数值, 只能由试验来确定。

(3) 量纲分析法不能区别量纲相同而意义不同的物理量。例如, 流函数 ψ 、速度势 ϕ 、速度环量 Γ 与运动黏度 ν 等。遇到这类问题时, 应加倍小心。

习 题

5-1 试导出用基本量纲 L, T, M 表示的体积流量 q_V 、质量流量 q_m 、角速度 ω 、力矩 M 、功 W 、功率 P 的量纲。

5-2 如图 5-8 所示, 用模型研究溢流堰的流动, 采用长度比例尺 $k_l=1/20$ 。(1) 已知原型堰上水头 $h=3\text{m}$, 试求模型的堰上水头;(2) 测得模型上的流量 $q_V'=0.19\text{m}^3/\text{s}$, 试求原型上的流量;(3) 测得模型堰顶的计示压强 $p_e'=-1960\text{Pa}$, 试求原型堰顶的计示压强。
[0.15m, 399.9m³/s, -39200Pa]

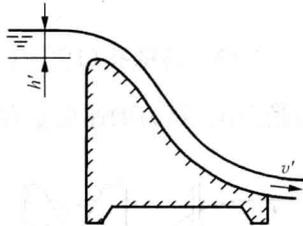


图 5-8 溢流堰

5-3 有一内径 $d=200\text{mm}$ 的圆管, 输送运动黏度 $\nu=4.0\times 10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$ 的油, 其流量 $q_V=0.12\text{m}^3/\text{s}$ 。若用内径 $d'=50\text{mm}$ 的圆管并分别用 20°C 的水和 20°C 的空气作模型试验, 试求流动相似时模型管内应有的流量。

[7.553 $\times 10^{-4}\text{m}^3/\text{s}$, 1.139 $\times 10^{-2}\text{m}^3/\text{s}$]

5-4 将一高层建筑物的几何相似模型放在开口风洞中吹风, 风速为 $v'=10\text{m/s}$, 测得模型迎风面点 1 处的计示压强 $p_{1e}'=980\text{Pa}$, 背风面点 2 处的计示压强 $p_{2e}'=-49\text{Pa}$ 。试求建筑物在 $v=30\text{m/s}$ 强风作用下对应点的计示压强。
[8820Pa, -441Pa]

5-5 长度比例尺 $k_l=1/40$ 的船模, 当牵引速度 $v'=0.54\text{m/s}$ 时, 测得波阻 $F_w'=1.1\text{N}$ 。如不计黏性影响, 试求原型船的速度、波阻及消耗的功率。
[3.415m/s, 70400N, 240.4kW]

5-6 长度比例尺 $k_l=1/225$ 的模型水库, 开闸后完全放空库水的时间是 4min。试求原型水库放空库水的时间。
[60min]

5-7 新设计的汽车高 1.5m, 最大行驶速度为 108km/h, 拟在风洞中进行模型试验。已知风洞试验段的最大风速为 45m/s, 试求模型的高度。在该风速下测得模型的风阻力为 1500N, 试求原型在最大行驶速度时的风阻。
[1.0m, 1500N]

5-8 在管道内以 $v=20\text{m/s}$ 的速度输送密度 $\rho=1.86\text{kg/m}^3$ 、运动黏度 $\nu=1.3\times 10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$ 的天然气, 为了预测沿管道的压强降, 采用水模型试验。取长度比例尺 $k_l=1/10$, 已知水的密度 $\rho'=998\text{kg/m}^3$ 、运动黏度 $\nu'=1.007\times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$ 。为保证流动相似, 模型内水的流速应等于多少? 已经测得模型每 0.1m 管长的压强降 $\Delta p'=1000\text{Pa}$, 天然气管道每米的压强降等于多少?
[15.49m/s, 3.106Pa]

5-9 烟气在 600°C 的热处理炉中的流动情况拟用水模型来进行研究。已知烟气的运动黏度 $\nu=9.0\times 10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$, 长度比例尺 $k_l=1/10$, 水温为 10°C , 试求速度比例尺。
[0.1453]

5-10 某飞机的机翼弦长 $b=1500\text{mm}$, 在气压 $p_a=10^5\text{Pa}$ 、气温 $t=10^\circ\text{C}$ 的大气中以 $v=180\text{km/h}$ 的速度飞行, 拟在风洞中用模型试验测定翼型阻力, 采用长度比例尺 $k_l=1/3$ 。(a) 如果用开口风洞, 已知试验段的气压 $p_a'=101325\text{Pa}$, 气温 $t'=25^\circ\text{C}$, 试验段的风速应等于多少? 这样的试验有什么问题?(b) 如果用压力风洞, 试验段的气压 $p_a''=1\text{MPa}$, 气温 $t''=30^\circ\text{C}$, $\mu''=1.854\times 10^{-5}\text{Pa}\cdot\text{s}$, 试验段的风速应等于多少?
[165m/s, 16.17m/s]

5-11 低压轴流风机的叶轮直径 $d=0.4\text{m}$, 转速 $n=1400\text{r/min}$, 流量 $q_V=1.39\text{m}^3/\text{s}$, 全压 $p_{Te}=128\text{Pa}$, 效率 $\eta=70\%$, 空气密度 $\rho=1.20\text{kg/m}^3$ 。问消耗的功率 P 等于多少? 在保证流动相似和假定风机效率 η 不变的情况下, 试确定作下列三种变动情况下的 q_V' 、 p_{Te}' 和 P' 值: ① n 变为 2800r/min; ② 风机相似放大, d' 变为 0.8m; ③ ρ' 变为 1.29kg/m^3 。

[254W ① $2.78\text{m}^3/\text{s}$, 512Pa , 2033.4W ; ② $11.12\text{m}^3/\text{s}$, 512Pa , 8133.5W ; ③ $1.39\text{m}^3/\text{s}$, 137.6Pa , 273.2W]

5-12 流体通过水平毛细管的流量 q_V 与管径 d 、动力黏度 μ 、压强梯度 $\Delta p/l$ 有关, 试导出流量的表达式。

$$\left[q_V = k \frac{d^4 \Delta p}{\mu l} \right]$$

5-13 薄壁孔口出流的流速 v 与孔口直径 d 、孔口上水头 H 、流体密度 ρ 、动力黏度 μ 、表面张力 σ 、重力加速度 g 有关。试导出孔口出流速度的表达式。

$$\left[v = f\left(\frac{d}{H}, Re, We\right)(2gH)^{1/2} \right]$$

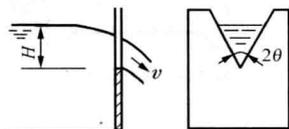


图 5-9 三角形堰

5-14 小球在不可压缩黏性流体中运动的阻力 F_D 与小球的直径 d 、等速运动的速度 v 、流体的密度 ρ 、动力黏度 μ 有关, 试导出阻力的表达式。

$$\left[F_D = f(Re) \frac{\pi d^2 \rho v^2}{4 \cdot 2} \right]$$

5-15 通过图 5-9 所示三角形堰的流量 q_V 与堰上水头 H 、槽口的半顶角 θ 、重力加速度 g 、液体的密度 ρ 、动力黏度 μ 、表面张力 σ 有关。试导出流量的表达式。

$$\left[q_V = f(Re, We, \theta)(gH)^{1/2} H^2 \right]$$

5-16 流体通过孔板流量计的流量 q_V 与孔板前后的压差 Δp 、管道的内径 d_1 、管内流速 v 、孔板的孔径 d 、流体的密度 ρ 、动力黏度 μ 有关。试导出流量 q_V 的表达式。

$$\left[q_V = f\left[\frac{d}{d_1}, Re, \frac{1}{v}\left(\frac{\Delta p}{\rho}\right)^{1/2}\right] \frac{\pi}{4} d_1^2 \left(\frac{2\Delta p}{\rho}\right)^{1/2} \right]$$

5-17 水轮机的功率 P 与叶轮直径 d 、叶片宽度 b 、转速 n 、有效水头 H 、水的密度 ρ 、动力黏度 μ 、重力加速度 g 有关。试导出水轮机功率的表达式。

$$\left[P = f\left[\frac{d}{b}, \frac{\rho d^2 n}{\mu}, \frac{dn}{(gH)^{1/2}}\right] \rho n^3 d^5 \right]$$

第六章 管内流动和水力计算 液体出流

第四章讨论了流体运动学和流体动力学基础，特别是工程上最常用到的管道内流动的连续方程、动量方程和能量方程，这就为讨论管内流动和水力计算、液体出流奠定了基础。本章主要讨论液体在管道内的流动状态、速度分布、能量损失和各类管流的水力计算，以及液体出流等。

第一节 管内流动的能量损失

实际流体都是有黏性的。黏性流体流经固体壁面时，紧贴固体壁面的流体质点将黏附在固体壁面上，它们与固体壁面的相对速度等于零，这点与理想流体大不相同。既然流体质点要黏附在固体壁面上，受固体壁面的影响，在固体壁面和流体的主流之间必定有一个由固体壁面的速度过渡到主流速度的流速变化区域；倘若固体壁面是静止不动的，则要有一个由零到主流速度 v 的流速变化区域。由此可见，在同样的通道中流动的理想流体和黏性流体，它们沿截面的速度分布是不相同的。对于流速分布不均匀的黏性流体，在流动的垂直方向上出现速度梯度，在相对运动着的流层之间必定存在切向应力，形成阻力。要克服阻力，维持黏性流体的流动，就要消耗机械能。消耗掉的这部分机械能将不可逆地转化为热能。可见，黏性流体在管内流动时，其机械能必定逐渐减少。这种能量损失可以分为以下两类。

一、沿程能量损失

简称沿程损失，是发生在缓变流整个流程中的能量损失，是由流体的黏滞力造成的损失。这种损失的大小与流体的流动状态，即是层流还是紊流（在下节中详细讨论），有着密切的联系。通常管道流动中单位重量流体的沿程损失用第五章已经导出的达西-魏斯巴赫公式(5-44)计算，即

$$h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$$

式中的沿程损失系数与流体的黏度、流速、管道的内径以及管壁粗糙度等有关，由实验确定。由式(5-44)可以看出，在同样的条件下，管道越长，损失的能量越大，这是沿程损失的特征，式(5-44)将在第四、五、六节中进一步加以分析。

二、局部能量损失

简称局部损失，是发生在流动状态急剧变化的急变流中的能量损失，是在管件附近的局部范围内主要由流体微团的碰撞、流体中产生的旋涡等造成的损失。通常，管流中单位重量流体的局部能量损失表示为

$$h_j = \zeta \frac{v^2}{2g} \quad (6-1)$$

式中： ζ 为局部损失系数，是一个无量纲系数，由实验确定。

多数工程管道系统有许多直管段，这些直管段用管件（例如变径管、接头、阀门等）连接，整个管道的能量损失是分段计算出的能量损失的叠加，即

$$h_w = \sum h_f + \sum h_j \quad (6-2)$$

关于管流的能量损失, 除少数问题可以用理论分析方法加以计算外, 多数实际问题要依靠实验研究所得的结果。这是由于多数实际问题现象复杂, 数学分析遇到极大的困难。

第二节 黏性流体的两种流动状态

英国物理学家雷诺 (Osborne Reynolds) 在 1883 年发表的论著中, 不仅通过实验肯定了层流和紊流两种流动状态, 而且测定了流动损失与这两种流动状态的关系。雷诺实验的装置如图 6-1 所示。

当管 2 中的水流速度较低时, 如果拧开颜色水瓶下的阀门, 便可看到一条明晰的细小的着色流束, 此流束不与周围的水相混, 如图 6-2 (a) 所示。如果将细管 5 的出口移至管 2 进口的其他位置, 看到的仍然是一条明晰的细小的着色流束。由此可以判断, 管 2 内的整个流场呈一簇互相平行的流线, 这种流动状态称为层流 (或片流)。当管 2 内的流速逐渐增大时, 开始阶段着色流束仍呈清晰的细线, 流动状态仍没发生变化。当流速增大到一定数值, 着色流束开始振荡, 处于不稳定状态, 如图 6-2 (b) 所示。如果流速再稍增加, 振荡的流束便会突然破裂, 着色流束在进口段的一定距离内消失, 而与周围的流体相混, 颜色扩散至整个玻璃管内, 如图 6-2 (c) 所示。这时流体质点作复杂的无规则的运动。这种流动状态称为紊流 (或湍流)。由层流过渡到紊流的速度极限值称为上临界速度, 用 v'_{cr} 代表。继续增大流速, 将进一步增加流动的紊乱程度。

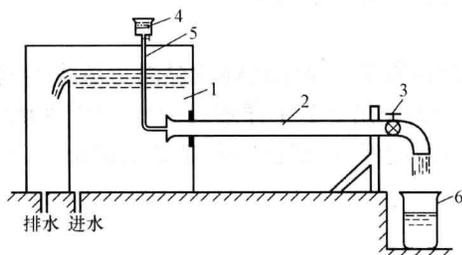


图 6-1 雷诺实验装置

1—水箱; 2—玻璃管; 3—阀门; 4—颜色水瓶; 5—细管; 6—量筒

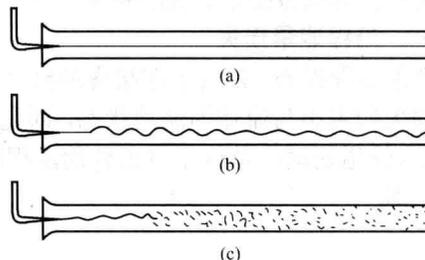


图 6-2 雷诺实验显示的流动状态

(a) 层流; (b) 层流至紊流的过渡状态; (c) 紊流

如果实验按相反的步骤进行, 管内流速自高于上临界速度逐渐降低, 则会发现, 当流速降低到比上临界速度 v'_{cr} 更低的、称为下临界速度的 v_{cr} 时, 处于紊流状态的流动便会稳定地转变为层流状态, 着色流束重新成为一条明晰的细小的直线。

由雷诺实验可以看出, 黏性流体存在两种流动状态——层流与紊流。当流速超过上临界速度 v'_{cr} 时, 层流转变为紊流; 当流速低于下临界速度 v_{cr} 时, 紊流转变为层流; 当流速介于上、下临界速度之间时, 流体的流动状态可能是层流也可能是紊流, 与实验的起始状态有无扰动等因素有关。

雷诺曾经用图 6-3 (a) 所示的简单装置测定了沿程损失 h_f 随流速 v 变化的规律, 从而看出沿程损失与流动状态之间的关系。当流速由低到升高时, 实验点沿 $OABCD$ 线移动; 当流速由高到低降低时, 实验点沿 $DCAO$ 线移动, 见图 6-3 (b)。如果用对数坐标整理上述实验结果, 便可得到如图 6-3 (c) 所示的对应的直线变化。对数坐标上的直线方程式为

$$\lg h_f = \lg k + m \lg v$$

由此可得

$$h_f = kv^m$$

式中： k 为系数； m 为指数，均由实验确定。

实验指出：

(1) 当 $v < v_{cr}$ 时， $m_1 = 1$ ，即层流中的沿程损失与平均流速的一次方成正比，这将在第四节中进一步证明。

(2) 当 $v > v'_{cr}$ 时， $m_2 = 1.75 \sim 2$ ，即紊流中的沿程损失与平均流速的 1.75~2 次方成正比。

可见，沿程损失与流动状态有关。因此，要计算各种流体通道的沿程损失，必须先判别流体的流动状态。

实验发现，仅靠临界速度来判别流体的流动状态是很不方便的，因为随着流体的黏度、密度以及流道线性尺寸的不同，临界速度也不同。由第五章动力相似准则的讨论已知，要保证在黏滞力作用下的流动相似，二流动的雷诺数必须相等。雷诺数见式 (5-23)，正是上述诸变量的无量纲综合量，是判别流体流动状态的准则数。对于直径为 d 的圆截面管道

$$Re = \frac{\rho v d}{\mu} = \frac{v d}{\nu} \quad (6-3)$$

对应于临界流速的雷诺数

$$Re_{cr} = \frac{\rho v_{cr} d}{\mu} = \frac{v_{cr} d}{\nu} \quad (6-4)$$

称为临界雷诺数。实验结果指出，不论流体的性质和管道如何变化，下临界雷诺数 $Re_{cr} = 2320$ ，上临界雷诺数可达 $Re'_{cr} = 13800$ ，甚至更高些；上临界雷诺数与实验的环境条件和流动的起始状态有关。当 $Re < Re_{cr}$ 时，流动为层流；当 $Re > Re'_{cr}$ 时，流动为紊流；当 $Re_{cr} < Re < Re'_{cr}$ 时，可能是层流，也可能是紊流，处于极不稳定的状态。这时，即使小心实验，可以保持层流，但只要稍有扰动，层流瞬即被破坏而转变为紊流。因此，上临界雷诺数在工程上没有实用意义，通常将下临界雷诺数 Re_{cr} 作为判别层流和紊流的准则数，而且工程上一般取圆管的临界雷诺数 $Re_{cr} = 2000$ 。当 $Re \leq 2000$ 时，流动为层流；当 $Re > 2000$ 时，即认为流动为紊流。

【例 6-1】 水在内径 $d = 100\text{mm}$ 的管中流动，流速 $v = 0.5\text{m/s}$ ，水的运动黏度 $\nu = 1 \times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$ 。试问水在管中呈何种流动状态？倘若管中的流体是油，流速不变，但运动黏度 $\nu = 31 \times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$ 。试问油在管中又呈何种流动状态？

【解】 水的雷诺数

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{0.5 \times 0.1}{1 \times 10^{-6}} = 5 \times 10^4 > 2000$$

水在管中呈紊流状态。

油的雷诺数

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{0.5 \times 0.1}{31 \times 10^{-6}} = 1610 < 2000$$

油在管中呈层流状态。

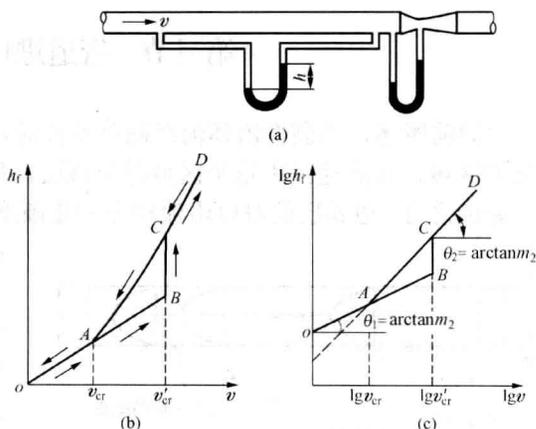


图 6-3 测定沿程损失的装置，沿程损失与速度的关系示意图

第三节 管道进口段黏性流体的流动

如前所述,当黏性流体流经固体壁面时,在固体壁面与流体主流之间必定有一个流速变化的区域,在高速流中这个区域是个薄层,称为边界层。边界层中流体的流动状态也有层流与紊流之分。边界层的厚度沿流动方向逐渐增长,而且紊流边界层比层流边界层增长得快(将在第九章中详细讨论)。

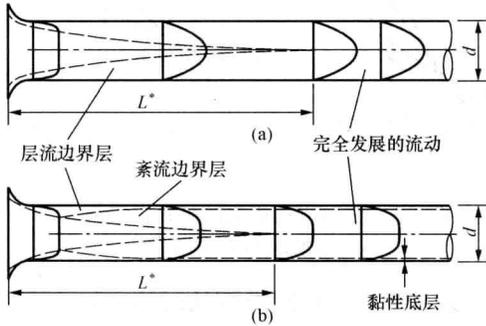


图 6-4 圆管进口段的流动

的流动是速度分布不断变化的非均匀流动,进口段以后的流动则是各个截面速度分布均相同的均匀流动。

当流动的雷诺数低于临界值时,整个进口段的流动为层流,如图 6-4 (a) 所示。根据实验,它的进口段长度为

$$L^* \approx 0.058dRe \quad (6-5)$$

当 $Re=2000$ 时, $L^* \approx 116d$ 。若不断提高管道进口处的流速,使雷诺数超过临界值,则进口段内某处的边界层即由层流转变为紊流,如图 6-4 (b) 所示。随着雷诺数的增大,转变位置向着进口移动。由于紊流边界层厚度的增长比层流边界层的快,因此紊流的进口段要短些,而且它的长度很少依赖于雷诺数的大小,而与来流受扰动的程度有关;扰动越大,进口段长度越短。紊流进口段长度 $L^* = (25 \sim 40)d$ 。

本章以下所讲的沿程损失系数的计算公式,只适用于管内充分发展的流动,不适用于速度分布不断变化的管道进口段内的流动。

第四节 圆管中流体的层流流动

通过倾斜角为 θ 的圆截面直管道的不可压缩黏性流体的定常层流流动,如图 6-5 所示。由于是直线流动,由第四章已知,在任一横截面上 $(p+\rho gh)$ 都是常数,即在同一横截面的所有点上压力和重力的共同作用都是一样的。这样,圆管中的流速分布便是轴对称的。现在取半径为 r 、长度为 δl 的圆柱体作为分析对象,由于流动是等速的,故该圆柱体在重力、两端面的总压力和圆柱侧面的黏滞力作用下处于平衡状态,于是

$$\pi r^2 p - \pi r^2 \left(p + \frac{\partial p}{\partial l} \delta l \right) - 2\pi r \delta l \tau - \pi r^2 \delta l \rho g \sin \theta = 0$$

以 $\delta h / \delta l$ 代 $\sin \theta$, 用圆柱体的体积 $\pi r^2 \delta l$ 通除上式, 并取 $\delta l \rightarrow 0$ 时的极限, 可得 l 处横截面上的

切向应力分布为

$$\tau = -\frac{r}{2} \frac{d}{dl} (p + \rho gh) \quad (6-6)$$

可见,黏性流体在圆管中作层流流动时,同一截面上切向应力的大小与半径成正比。图 6-5 中所表示的切向应力是内层流体作用在外层流体上的。式 (6-6) 对黏性流体在圆管中的紊流流动同样适用。

由于黏性流体在管壁上的流速等于零,管轴上的流速最大,故在半径方向上的速度梯度为负。为保证切向应力的值为正(因切向应力的方向在列平衡方

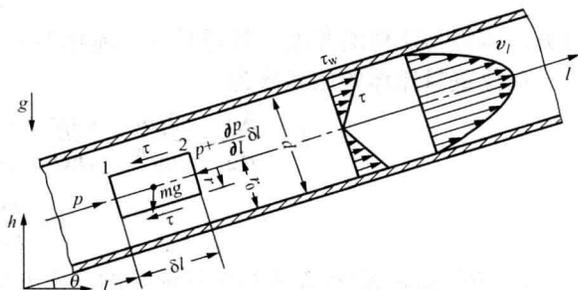


图 6-5 圆管中流体的层流流动

程时已经考虑),取 $\tau = -\mu \frac{dv_l}{dr}$ 代入式 (6-6), 得

$$dv_l = \frac{1}{2\mu} \frac{d}{dl} (p + \rho gh) r dr$$

对 r 积分, 得

$$v_l = \frac{1}{4\mu} \frac{d}{dl} (p + \rho gh) r^2 + C$$

当 $r=r_0$ 时, $v_l=0$, $C = -\frac{r_0^2}{4\mu} \frac{d}{dl} (p + \rho gh)$, 代入上式, 得

$$v_l = -\frac{r_0^2 - r^2}{4\mu} \frac{d}{dl} (p + \rho gh) \quad (6-7)$$

可见,黏性流体在圆管中作层流流动时,流速的分布规律为旋转抛物面,如图 6-5 所示。在管轴上的最大流速为

$$v_{l\max} = -\frac{r_0^2}{4\mu} \frac{d}{dl} (p + \rho gh) \quad (6-8)$$

由于旋转抛物体的体积恰好等于它的外切圆柱体体积的一半,因此,平均流速等于最大流速的一半,即

$$v = \frac{1}{2} v_{l\max} = -\frac{r_0^2}{8\mu} \frac{d}{dl} (p + \rho gh) \quad (6-9)$$

圆管中的流量

$$q_V = \int_0^{r_0} 2\pi r v_l dr = \pi r_0^2 v = -\frac{\pi r_0^4}{8\mu} \frac{d}{dl} (p + \rho gh) \quad (6-10)$$

对于水平放置的圆管, h 不变, $dp/dl = -\Delta p/l$, 式 (6-10) 简化为

$$q_V = \frac{\pi d^4 \Delta p}{128 \mu l} \quad (6-11)$$

称为哈根-泊肃叶 (Hagen-Poiseuille) 公式。第一章第六节所讲测定流体黏度的管流方

法根据的就是该式, 即测定有关物理量, 依据该式算出流体的黏度。单位体积流体的压强降为

$$\Delta p = \frac{128\mu q_v l}{\pi d^4} \quad (6-11a)$$

可见, 压降与流体的黏度、管道长度、流体的流量成正比, 而与管道内径的四次方成反比。单位重量流体的压强降为

$$h_f = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{32\mu l v}{\rho g d^2} = \frac{64\mu l v^2}{\rho v d^2} = \frac{64 l v^2}{Re d} = \lambda \frac{l v^2}{d}$$

式中
$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (6-12)$$

可见, 层流流动的沿程损失与平均流速的一次方成正比, 沿程损失系数 λ 仅与雷诺数 Re 有关, 而与管道壁面粗糙与否无关。这一结论已为实验所证实。

将式 (6-7)、式 (6-9) 代入式 (4-50) 得动能修正系数

$$\alpha = \frac{1}{A} \iint_A \left(\frac{v_i}{v}\right)^3 dA = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} \left\{ 2 \left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \right] \right\}^3 \times 2\pi r dr = 2$$

这说明, 在圆管中黏性流体作层流流动时的实际动能等于按平均流速计算的动能的两倍。将式 (6-7)、式 (6-9) 代入式 (4-26a), 得动量修正系数

$$\beta = \frac{1}{A} \iint_A \left(\frac{v_i}{v}\right)^2 dA = \frac{8}{r_0^6} \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2)^2 r dr = \frac{4}{3}$$

在这里顺便推导一个后面章节将要用到的公式。对水平放置的圆管, 当 $r=r_0$ 时, 由式 (6-6) 可得

$$\tau_w = \frac{r_0 \Delta p}{2l} \quad (6-13)$$

将压强降公式 (5-43) 代入式 (6-13), 得

$$\tau_w = \frac{\lambda}{8} \rho v^2 \quad (6-14)$$

显然, 式 (6-13)、式 (6-14) 对于圆管中黏性流体的层流和紊流流动都适用。

【例 6-2】 水平放置的毛细管黏度计, 内径 $d=0.50\text{mm}$, 两测点间的管长 $L=1.0\text{m}$, 液体的密度 $\rho=999\text{kg/m}^3$, 当液体的流量 $q_v=880\text{mm}^3/\text{s}$ 时, 两测点间的压降 $\Delta p=1.0\text{MPa}$, 试求该液体的黏度。

【解】 假定流动为充分发展的层流, 则由式 (6-11) 得

$$\mu = \frac{\pi d^4 \Delta p}{128 L q_v} = \frac{\pi (0.5 \times 10^{-3})^4 \times 1.0 \times 10^6}{128 \times 1.0 \times 880 \times 10^{-9}} = 1.743 \times 10^{-3} (\text{Pa} \cdot \text{s})$$

由于
$$Re = \frac{4 q_v \rho}{\pi d \mu} = \frac{4 (880 \times 10^{-9}) \times 999}{\pi (0.5 \times 10^{-3}) \times (1.743 \times 10^{-3})} = 1284 < 2000$$

说明, 层流的假定是对的, 计算成立。

【例 6-3】 图 6-6 所示为内径 20mm 的倾斜放置的圆管, 其中流过密度 $\rho=815.7\text{kg/m}^3$ 、

黏度 $\mu=0.04\text{Pa}\cdot\text{s}$ 的流体, 已知截面 1 处的压强 $p_1=9.806\times 10^4\text{Pa}$, 截面 2 处的压强 $p_2=19.612\times 10^4\text{Pa}$ 。试确定流体在管中的流动方向, 并计算流量和雷诺数。

【解】 为了确定流动方向, 需要计算截面 1 和 2 处流体总机械能的大小。由于等截面的管道在 1 和 2 处的流速相等, 即它们的动能相等, 因而流动的方向决定于该两处压强势能与位势能之和的大小。

在截面 1 处 $(p+\rho gh)_1=9.806\times 10^4+815.7\times 9.807\times 2=114.06\times 10^3(\text{Pa})$

在截面 2 处 $(p+\rho gh)_2=19.612\times 10^4+0=196.12\times 10^3(\text{Pa})$

由于 $(p+\rho gh)_2>(p+\rho gh)_1$, 故流体自截面 2 流向截面 1。根据式 (6-10), 流量为
假设流动为层流, 根据式 (6-10)

$$\text{流量 } q_v = \frac{\pi \times 0.01^4}{8 \times 0.04} \left[-\frac{114060 - 196120}{6} \right] = 0.00134 (\text{m}^3/\text{s})$$

$$\text{平均流速 } v = \frac{0.00134}{\pi \times 0.01^2} = 4.25 (\text{m/s})$$

$$\text{雷诺数 } Re = \frac{\rho v d}{\mu} = \frac{815.7 \times 4.25 \times 0.02}{0.04} = 1735$$

由于 $Re < 2000$, 以上计算成立。倘若 $Re > 2000$, 流动为紊流, 以上计算不成立。

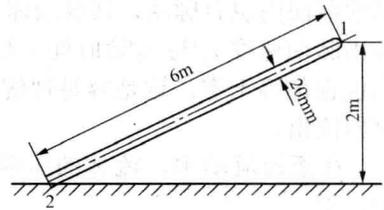


图 6-6 倾斜圆管中的流体流动

第五节 黏性流体的紊流流动

一、紊流流动 时均速度和脉动速度

由雷诺实验已知, 当流动由层流转变为紊流时, 流体质点作复杂的无规律运动。如果把与水的相对密度相同的粒子放入水中, 便可看到这些小粒子从管道进口到管道出口将描绘出非常复杂的轨迹, 而且不同瞬时通过空间同一点的粒子轨迹也是不断变化的, 表征流体流动特征的速度、压强等也在随时变化。所以说, 这种瞬息变化的紊流流动实质上是非定常流动。用热线测速仪测出的管道中某点瞬时轴向速度 v_{xi} 随时间 t 的变化如图 6-7 所示。在时间间隔 Δt 内轴向速度的平均值称为时均速度, 用 v_x 代表:

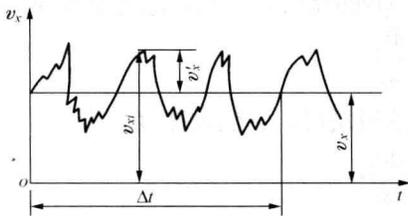


图 6-7 瞬时轴向速度与时均速度

$$v_x = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} v_{xi} dt$$

如图所示, 时均速度等于瞬时速度曲线在 Δt 间隔中的平均高度。只要能够测绘出瞬时速度随时间的变化曲线, 不论这种曲线的形状多么复杂, 都可以用求积仪量出在 Δt 间隔中曲线下的面积, 从而按上式求出时均速度 v_x 。对于等截面管道中流量不变的流动, 只要所取的时间间隔 Δt 不过短, 则时均速度 v_x 便为常数。显然, 瞬时速度

$$v_{xi} = v_x + v'_x$$

式中: v'_x 为瞬时速度与时均速度之差, 称为脉动速度, 它的时均值等于零。

在紊流流动中, 流体质点的速度不仅沿轴向在时均速度附近有脉动, 而且在垂直于管

轴的截面内也有脉动,其脉动速度的水平与铅直分量用 v_y' 与 v_z' 表示。用热线测速仪同样可测出脉动速度 v_y' 与 v_z' 随时间 t 的变化曲线,其曲线形状与图 6-7 中的曲线类似,它们的时均值也都等于零。这是容易理解的,因为流体的主流是沿管轴流动,并没有流体从管道的侧面流出。

在紊流流动中,流体的压强也处于脉动状态,瞬时压强等于时均压强与脉动压强之和,即

$$p_i = \bar{p} + p'$$

在紊流流动中,流体的瞬时速度和瞬时压强都是随时变化的,如果通常用紊流的瞬时速度和瞬时压强去研究紊流运动,步骤极为繁复。而且从工程应用的角度看,通常情况下也无此必要。例如研究管道内的流体流动,关心的是流体主流的速度分布、压强分布以及能量损失等,而并不关心其中每个流体质点如何运动。所谓流体主流的速度和压强,指的正是时均速度和时均压强,而且普通测速管(例如动压管等)和普通测压计(例如压强表、液柱式测压计等)能够测量的也正是速度和压强的时间平均值。所以,通常情况下都是用流动参数的时均值去描述和研究流体的紊流流动,这样便使问题大为简化。空间各点时均速度不随时间改变的紊流流动也简称为定常流动,确切地讲是时均定常流动。但是,对于紊流机理的研究和某些工程应用问题却必须考虑紊流中流体质点的复杂脉动运动。

二、紊流中的切向应力 普朗特混合长(度)

在黏性流体的层流流动中,切向应力表现为由内摩擦引起的摩擦切向应力。在黏性流体的紊流流动中,除去层流之间相对滑移引起的摩擦切向应力 τ_v 之外,还由于流体质点作复杂无规律的运动,在层流之间必然引起动量交换,增加能量损失,从而出现紊流附加切向应力或脉动切向应力 τ_t ,故紊流中的切向应力 τ 可表示为

$$\tau = \tau_v + \tau_t = (\mu + \mu_t) \frac{dv_x}{dy} \quad (6-15)$$

普朗特(L. Prandtl)认为,与气体分子的运动要经过一段自由行程相类似,流体微团在和其他流体微团碰撞之前也要经过一段路程 l 。图 6-8 所示为某紊流流动中的时均速度分布曲线。当速度为 $v_x(y-l)$ 流层中的微团向上脉动到速度为 $v_x(y)$ 的流层时,它们的速度差为

$$\Delta v_{x1} = v_x(y) - v_x(y-l) \approx l \frac{dv_x}{dy}$$

当速度为 $v_x(y+l)$ 流层中的微团向下脉动到速度为 $v_x(y)$ 的流层时,它们的速度差为

$$\Delta v_{x2} = v_x(y+l) - v_x(y) \approx l \frac{dv_x}{dy}$$

可以认为,上述速度差便是 y 处流层的纵向脉动速度,其绝对值的时均值为

$$\overline{|v_x'|} = \frac{1}{2}(\Delta v_{x1} + \Delta v_{x2}) = l \frac{dv_x}{dy}$$

此外,可以想见,当同时进入中间流层的来自上面的微团在左、来自下面的微团在右时,它们将以 $2v_x'$ 的速度相互碰撞,受撞的微团向侧面散开,如图 6-9(a) 所示;反之,倘若来自上面的微团在右、来自下面的微团在左,它们将以 $2v_x'$ 的速度分开,而周围的流体将补充进来,如图 6-9(b) 所示。这就是说,横向脉动速度 v_y' 与纵向脉动速度 v_x' 应为同一数量级,即

$$\overline{|v_y'|} = C_1 \overline{|v_x'|} = C_1 l \frac{dv_x}{dy}$$

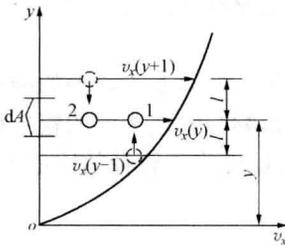


图 6-8 混合长与脉动速度

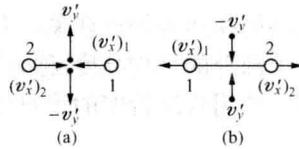


图 6-9 微团运动示意

如果在二流层间取微元面 dA ，则由于横向脉动，单位时间经过 dA 进入中间流层的流体所引起的动量变化值为 $-\rho v_y' dA v_x'$ (采用负号是因为，当 $v_y' > 0$ 时， $v_x' < 0$ ，而当 $v_y' < 0$ 时， $v_x' > 0$)。根据动量定理，两流层在 dA 上的相互作用力 $F = -\rho v_y' dA v_x'$ ，以 dA 通除此式，并取时均值，得脉动切向应力为

$$\tau_t = -\overline{\rho v_x' v_y'} \quad (6-16)$$

如果再取 $\overline{v_x' v_y'} = -C_2 \overline{|v_x'| \cdot |v_y'|} = -C_1 C_2 l^2 \left(\frac{dv_x}{dy} \right)^2$ ，代入式 (6-16)，把常数并入未知的 l ，并注意到切向应力的方向应由时均速度梯度表示，可得

$$\tau_t = \rho l^2 \left| \frac{dv_x}{dy} \right| \frac{dv_x}{dy} \quad (6-16a)$$

普朗特将如上定义的长度 l 称为混合长度。式 (6-16a) 说明，脉动切向应力与混合长度和时均速度梯度乘积的平方成正比。它的作用方向始终是在使速度分布更趋均匀的方向上。与式 (6-15) 相比可得

$$\mu_t = \rho l^2 \left| \frac{dv_x}{dy} \right| \quad (6-17)$$

但 μ_t 与 μ 不同，它不是流体的属性，它只决定于流体的密度、时均速度梯度和混合长度。

三、圆管中紊流的速度分布和沿程损失

1. 圆管中紊流的区划 黏性底层 水力光滑与水力粗糙

图 6-10 为圆管中平均流速相等时层流与紊流的速度分布示意，可见紊流的速度（指时均速度，下同）分布不同于层流。紊流中由于横向脉动在流层间进行的动量交换，致使管流中间部分的速度分布比较平坦，速度梯度较小。靠近管壁由于紊流脉动受到限制，黏滞力的作用显现；在紧贴管壁很薄的流层中紊流脉动消失，黏滞力的阻滞作用使流速急剧下降，速度分布比较陡峭，速度梯度大。这一流体薄层称为黏性底层，用 δ 代表它的厚度。可见，紊流流动分为三部分，即紧靠壁面的黏性底层部分，紊流充分发展的中间部分以及由黏性底层到紊流充分发展的过渡部分。过渡部分很薄，一般不单独考虑，而将它和中间部分合在一起统称为紊流部分。黏性底层中的切向应力决定于式 (6-15) 中的第一项；紊流部

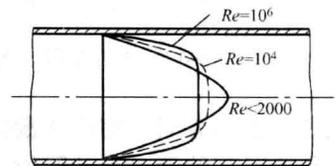


图 6-10 圆管中紊流与层流的速度剖面

分中的切向应力虽然决定于该式的两项,但第二项直到接近壁面都比第一项大得多,因而第一项可以忽略不计。

黏性底层的厚度 δ 很薄,通常只有几分之一毫米。但是,它对紊流流动的能量损失以及流体与壁面间的换热等物理现象却有着重要的影响。这种影响与管道壁面的粗糙程度有关。管壁粗糙凸出部分的平均高度 ϵ 称为管壁绝对粗糙度,绝对粗糙度与管径的比值 ϵ/d 称为管壁相对粗糙度。常用管道管壁的绝对粗糙度 ϵ 列于表6-1。

表 6-1 管道管壁绝对粗糙度

管壁情况		绝对粗糙度 ϵ (mm)	管壁情况		绝对粗糙度 ϵ (mm)
金属材料	干净的、整体的黄铜管、铜管、铅管	0.0015~0.01	非金属材料	干净的玻璃管	0.0015~0.01
	新的仔细浇成的无缝钢管	0.04~0.17		橡皮软管	0.01~0.03
	在煤气管路上使用一年后的钢管	0.12		极粗糙的、内涂橡胶的软管	0.20~0.30
	在普通条件下浇成的钢管	0.19		水管	0.25~1.25
	使用数年后的整体钢管	0.19		陶土排水管	0.45~6.0
	涂柏油的钢管	0.12~0.21		涂有珐琅质的排水管	0.25~6.0
	精制镀锌的钢管	0.25		纯水泥的表面	0.25~1.25
	具有浇成并且很好整平的接头之新铸铁管	0.31		涂有珐琅质的砖	0.45~3.0
	钢板制成的管道及很好整平的水泥管	0.33		水泥浆砌砌体	0.80~6.0
	普通的镀锌钢管	0.39		混凝土槽	0.80~9.0
	普通的新铸铁管	0.25~0.42		用水泥的普通块石砌体	6.0~17.0
	不太仔细浇成的新的或干净的铸铁管	0.45		刨平木板制成的水槽	0.25~2.0
	粗陋镀锌钢管	0.50		非刨平木板制成的木槽	0.45~3.0
	旧的生锈钢管	0.60		钉有平板条的木板制成的木槽	0.80~4.0
	污秽的金属管	0.75~0.90			

当 $\delta > \epsilon$ 时,黏性底层完全淹没了管壁的粗糙凸出部分,见图6-11(a)。这时黏性底层以外的紊流区域完全感受不到管壁粗糙度的影响,流体好像在完全光滑的管子中流动一样。这种情况的管内流动称作“水力光滑”,这种管道简称“光滑管”。

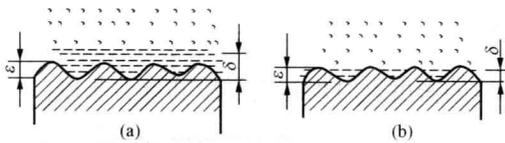


图 6-11 水力光滑与水力粗糙

当 $\delta < \epsilon$ 时,管壁的粗糙凸出部分有一部分或大部暴露在紊流区中,见图6-11(b)。流体

流过凸出部分时,将产生漩涡,造成新的能量损失,管壁粗糙度将对紊流流动产生影响。这种情况下的管内流动称为“水力粗糙”,这种管道简称为“粗糙管”。

实验证明,黏性底层的厚度随雷诺数的改变而变化。因此,同样一根管子流动的雷诺数不同时,它会处于“水力光滑”或“水力粗糙”的不同流动状态。计算黏性底层厚度 δ 的经验公式为

$$\delta = \frac{34.2d}{Re^{0.875}} \text{ (mm)} \quad (6-18)$$

或

$$\delta = \frac{32.8d}{Re\lambda^{1/2}} \text{ (mm)} \quad (6-19)$$

式中: d 为管道直径 (mm); Re 为雷诺数; λ 为沿程损失系数。

由上述分析可知, 管壁粗糙度对流动能量损失的影响只有在流动处于水力粗糙状态时才会显现出来。

2. 圆管中紊流的速度分布

下面应用混合长的概念推导紊流流过平壁面和圆管时的速度分布。首先讨论紊流流过光滑平壁面的情况。为了便于导出近似的速度分布公式, 假设在整个区域内 $\tau = \tau_w = \text{常数}$ 。当从壁面起算的距离 $y \leq \delta$ 时, 黏性底层中的切向应力可表示为

$$\tau = \mu \frac{v_x}{y} \quad \text{或} \quad \frac{\tau}{\rho} = \nu \frac{v_x}{y} \quad (6-20)$$

$$\text{令} \quad v_* = (\tau_w / \rho)^{1/2} \quad (6-21)$$

v_* 具有速度的量纲, 称为切向应力速度, 也称摩擦速度。将式 (6-14) 代入式 (6-21), 得

$$v_* = (\lambda/8)^{1/2} v \quad (6-21a)$$

在假设切向应力为常数的条件下, 切向应力速度也为常数。将式 (6-21) 代入式 (6-20), 得

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{y v_*}{\nu} \quad (6-22)$$

当 $y > \delta$ 时, 紊流部分的切向应力值可表示为

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{dv_x}{dy} \right)^2$$

普朗特根据观察进一步假设, 混合长不受黏性影响, 并与离壁面的距离 y 成正比, 即 $l = ky$ 。代入上式, 可得

$$\frac{dv_x}{v_*} = \frac{1}{k} \frac{dy}{y}$$

$$\text{积分得} \quad \frac{v_x}{v_*} = \frac{1}{k} \ln y + C \quad (6-23)$$

假设黏性底层与紊流分界处的流速用 v_{xb} 代表, 即当 $y = \delta$ 时, $v_x = v_{xb}$, 则由式 (6-22) 得

$$\delta = \frac{v_{xb} \nu}{v_* v_*}$$

由式 (6-23) 得

$$C = \frac{v_{xb}}{v_*} - \frac{1}{k} \ln \delta$$

将 C 和 δ 代入式 (6-23), 得

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{y v_*}{\nu} + \frac{v_{xb}}{v_*} - \frac{1}{k} \ln \frac{v_{xb}}{v_*}$$

$$\text{或} \quad \frac{v_x}{v_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{y v_*}{\nu} + C_1 \quad (6-24)$$

在高雷诺数时, 式 (6-23) 和式 (6-24) 与观察的结果十分符合。即使是切向应力 τ 随 y 变化的情况, 上述两式也是它们速度分布的良好近似式。这是因为速度变化的绝大部分发生在邻近壁面处, 在那里实际上可以把切向应力视为常数。

式(6-23)也可作为光滑圆管中紊流速度分布的近似公式,这是因为实际观测的管内流动 v_x/v_* 与 $\lg(yv_*/\nu)$ 的关系曲线虽对沿平壁面流动的关系曲线有所偏离,但也很接近于一根直线。尼古拉兹(J. Nikuradse)由水力光滑管实验得出 $k=0.40$, $C_1=5.5$,代入式(6-24),并将自然对数换算成以10为底的对数,得

$$\frac{v_x}{v_*} = 5.75 \lg \frac{yv_*}{\nu} + 5.5 \quad (6-24a)$$

当 $y=r_0$ (圆管的内半径) 时,由式(6-24a)、式(6-24)可得管轴处的最大流速和 y 处的流速为

$$v_{x \max} = v_* \left(5.75 \lg \frac{r_0 v_*}{\nu} + 5.5 \right) \quad (6-25)$$

$$v_x = v_{x \max} + \frac{v_*}{k} \ln \frac{y}{r_0}$$

于是,平均流速

$$\begin{aligned} v &= \frac{q_v}{\pi r_0^2} = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} v_x (r_0 - y) dy \\ &= 2 \int_0^1 \left(v_{x \max} + \frac{v_*}{k} \ln \frac{y}{r_0} \right) \left(1 - \frac{y}{r_0} \right) d \left(\frac{y}{r_0} \right) \\ &= v_{x \max} - 3.75 v_* \end{aligned}$$

将式(6-25)代入,并引用式(6-21a)得

$$v = v_* \left(5.75 \lg \frac{r_0 v_*}{\nu} + 1.75 \right) = v_* \left(5.75 \lg \frac{Re \lambda^{1/2}}{4 \times 2^{1/2}} + 1.75 \right) \quad (6-26)$$

在 $y=\delta$ 处,即在式(6-22)和式(6-24a)代表的直线和曲线的交点上 $\delta v_*/\nu=11.6$,再引用式(6-21a),便可导出计算黏性底层厚度 δ 的半经验公式(6-19)。

计算光滑管紊流速度还有一个更为方便的指数方程,它是式(6-24a)的近似式,即

$$\frac{v_x}{v_{x \max}} = \left(\frac{y}{r_0} \right)^n \quad (6-27)$$

指数 n 随雷诺数 Re 而变,见表6-2。当 $Re=1.1 \times 10^5$ 时, $n=1/7$,这就是常用的由布拉休斯(H. Blasius)导出的1/7次方规律。按式(6-27)可求得平均流速

$$\begin{aligned} v &= 2v_{x \max} \int_0^1 \left(\frac{y}{r_0} \right)^n \left(1 - \frac{y}{r_0} \right) d \left(\frac{y}{r_0} \right) = \frac{2v_{x \max}}{(n+1)(n+2)} \\ \frac{v}{v_{x \max}} &= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \end{aligned} \quad (6-28)$$

表6-2中列出了平均流速 v 与最大流速 $v_{x \max}$ 的比值。有了这些比值,便可用测定管轴处最大流速的办法求出平均流速,进而求出流量。这是求管道平均流速和流量的简便方法之一。

表 6-2 Re 和 n 、 $v/v_{x\max}$ 的关系

Re	4.0×10^3	2.3×10^4	1.1×10^5	1.1×10^6	$(2.0 \sim 3.2) \times 10^6$
n	1/6.0	1/6.6	1/7.0	1/8.8	1/10
$v/v_{x\max}$	0.7912	0.8073	0.8167	0.8497	0.8658

对于紊流流过粗糙壁面的情况，式 (6-23) 仍然适用。假设在 $y=\varphi\varepsilon$ 处 $v_x=v_{xb}$ (φ 为由管壁粗糙性质确定的形状系数)，则由式 (6-23) 可得

$$C = \frac{v_{xb}}{v_*} = \frac{1}{k} \ln(\varphi\varepsilon)$$

代入式 (6-23)，得

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{y}{\varepsilon} + \frac{v_{xb}}{v_*} - \frac{1}{k} \ln \varphi$$

或

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{y}{\varepsilon} + C_2 \quad (6-29)$$

尼克拉兹由水力粗糙管实验得出 $k=0.40$ ， $C_2=8.48$ ，代入式 (6-29)，并将自然对数换算成以 10 为底的对数，得

$$\frac{v_x}{v_*} = 5.75 \lg \frac{y}{\varepsilon} + 8.48 \quad (6-29a)$$

按照由速度的对数规律求紊流光滑管最大流速和平均流速同样的方法，可得紊流粗糙管的最大流速和平均流速为

$$v_{x\max} = v_* \left(5.75 \lg \frac{r_0}{\varepsilon} + 8.48 \right) \quad (6-30)$$

$$v = v_* \left(5.75 \lg \frac{r_0}{\varepsilon} + 4.75 \right) \quad (6-31)$$

3. 圆管中紊流的沿程损失

将式 (6-26) 代入式 (6-21a)，可得紊流光滑管沿程损失系数的计算公式为

$$\frac{1}{\lambda^{1/2}} = 2.03 \lg(Re\lambda^{1/2}) - 0.91$$

根据实验修正后得

$$\frac{1}{\lambda^{1/2}} = 2 \lg(Re\lambda^{1/2}) - 0.8 \quad (6-32)$$

将式 (6-31) 代入式 (6-21a)，可得紊流粗糙管沿程损失系数的计算公式为

$$\frac{1}{\lambda^{1/2}} = 2.03 \lg \frac{d}{2\varepsilon} + 1.67$$

根据实验修正后得

$$\frac{1}{\lambda^{1/2}} = 2 \lg \frac{d}{2\varepsilon} + 1.74 \quad (6-33)$$

第六节 沿程损失的实验研究

由上两节的讨论已知, 不论流体是层流流动, 还是紊流流动, 它们的沿程损失均按式 (5-44) 进行计算, 问题在于它们的沿程损失系数如何决定。层流沿程损失系数已经用分析方法推导出来, 并为实验所证实; 紊流沿程损失系数的计算公式, 则是人们在实验的基础上提出某些假设, 导出速度分布和沿程损失的理论公式, 再根据实验进行修正而得出的半经验公式, 或是根据实验归纳出来的经验公式。下面将介绍尼古拉兹的实验和对工业管道比较实用的莫迪 (L. F. Moody) 曲线图以及有关计算公式。

一、尼古拉兹实验

尼古拉兹对不同管径不同流量的管流进行了实验。为了实验管壁粗糙度对流动损失的影响, 他把不同粒径的均匀砂粒分别粘贴到管道内壁上, 进行了一系列的实验。实验的范围很广, 雷诺数 $Re=500\sim 10^6$, 相对粗糙度 $\varepsilon/d=1/1014\sim 1/30$ 。对数坐标中的尼古拉兹实验曲线如图 6-12 所示, 分为五个区域。

1. 层流区

$Re < 2320$ 为层流区。管壁的相对粗糙度对沿程损失系数没有影响, 所有实验点均落到直线 ab 上, 沿程损失系数只与雷诺数有关, 按式 (6-12) 计算。

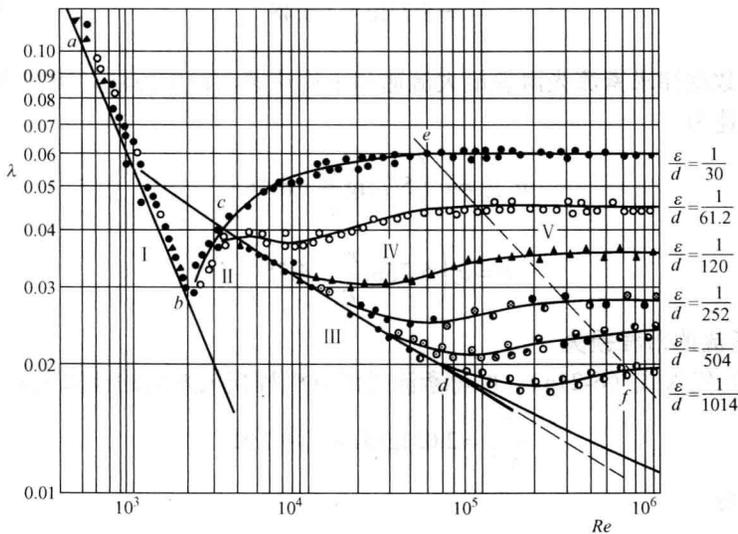


图 6-12 尼古拉兹实验曲线

2. 过渡区

$2320 < Re < 4000$ 为层流向紊流过渡的不稳定区域, 可能是层流, 也可能是紊流, 实验点比较分散, 如图中的区域 II 所示。

3. 紊流光滑管区

$4000 < Re < 26.98(d/\varepsilon)^{8/7}$ 为紊流光滑管区。各种不同相对粗糙度管流的实验点都落到倾斜线 cd 上, 只是它们在该线上所占区段的大小不同。可见, 沿程损失系数与相对粗糙度无关, 只与雷诺数有关。对于 $4 \times 10^3 < Re < 10^5$ 范围内的一段倾斜线, 勃拉休斯的计算公

式为

$$\lambda = \frac{0.3164}{Re^{0.25}} \quad (6-34)$$

当将式(6-34)代入式(5-44)去计算沿程损失时。甚易证明 h_f 与 $v^{1.75}$ 成正比, 故紊流光滑管区又称 1.75 次方阻力区。

当 $10^5 < Re < 3 \times 10^6$ 时, 尼古拉兹的计算公式为

$$\lambda = 0.0032 + 0.221 Re^{-0.237} \quad (6-35)$$

紊流光滑管的沿程损失系数也可按卡门—普朗特 (Kármán-Prandtl) 公式(6-32)计算。

4. 紊流粗糙管过渡区

$26.98(d/\epsilon)^{8/7} < Re < 2308(d/\epsilon)^{0.85}$ 为紊流粗糙管过渡区。随着雷诺数 Re 的增大, 紊流流动的黏性底层逐渐减薄, 原先为水力光滑的管子相继变为水力粗糙管, 因而脱离光滑管线段 cd , 进入粗糙管过渡区 IV。图中相对粗糙度大的管子首先离开 cd 线, 而且随着雷诺数的增大, 沿程损失系数也增大。可见, 这一区域的沿程损失系数与相对粗糙度和雷诺数有关, 可按洛巴耶夫 (Б. Н. Лобаев) 的公式计算, 即

$$\frac{1}{\lambda^{1/2}} = 1.42 \left[\lg \left(Re \frac{d}{\epsilon} \right) \right] = 1.42 \left[\lg \left(1.273 \frac{q_v}{v\epsilon} \right) \right] \quad (6-36)$$

5. 紊流粗糙管平方阻力区

$2308(d/\epsilon)^{0.85} < Re$ 为紊流粗糙管平方阻力区。随着雷诺数的增大, 流动进入完全紊流粗糙管区, 流动能量的损失主要决定于脉动运动, 黏性的影响可以忽略不计。因此沿程损失系数与雷诺数无关, 只与相对粗糙度有关, 如图中区域 V 所示。在这一区域内流动的能量损失与流速的平方成正比, 故称为平方阻力区。紊流粗糙管过渡区 IV 与紊流粗糙管平方阻力区 V 以图中虚线 ef 为分界线, 这条分界线的雷诺数为

$$Re_b = 2308(d/\epsilon)^{0.85} \quad (6-37)$$

平方阻力区的沿程损失系数可按尼古拉兹公式(6-33)计算。

尼古拉兹实验揭示了管内流动能量损失的规律, 给出了沿程损失系数以相对粗糙度为参变量而随雷诺数的变化曲线。这样, 就为这类管道的沿程损失的计算提供了可靠的实验基础。但是, 尼古拉兹实验曲线是在人工均匀砂粒管道内实验得出的, 然而工业管道内壁的粗糙度则是自然的, 非均匀凹凸不平的。因此, 要把尼古拉兹实验曲线应用于工业管道, 就必须用实验方法去确定工业管道的与人工均匀粗糙度等值的绝对粗糙度 ϵ 。

二、莫迪图

莫迪提供的图 6-13 对计算新工业管道的沿程损失系数是很方便的。该图按对数坐标绘制, 表示沿程损失系数与相对粗糙度和雷诺数之间的函数关系。绘制该图中紊流过渡区部分的基础是柯列布茹克 (C. F. Colebrook) 公式:

$$\frac{1}{\lambda^{1/2}} = -2 \lg \frac{\epsilon}{3.71d} + \frac{2.51}{Re \lambda^{1/2}} = 1.74 - 2 \lg \left(\frac{2\epsilon}{d} + \frac{18.7}{Re \lambda^{1/2}} \right) \quad (6-38)$$

该式是综合紊流光滑管的式(6-32)和紊流粗糙管的式(6-33)而得出的经验公式。该图也分为五个区域,即层流区、临界区(相当于尼古拉兹曲线的过渡区)、光滑管区、过渡区(相当于尼古拉兹曲线的紊流粗糙管过渡区)、完全紊流粗糙管区(相当于尼古拉兹曲线的紊流粗糙管平方阻力区)。皮高(R. J. S. Pigott)推荐的过渡区与完全紊流粗糙管区之间分界线的雷诺数为

$$Re_b = 3500(d/\varepsilon) \quad (6-39)$$

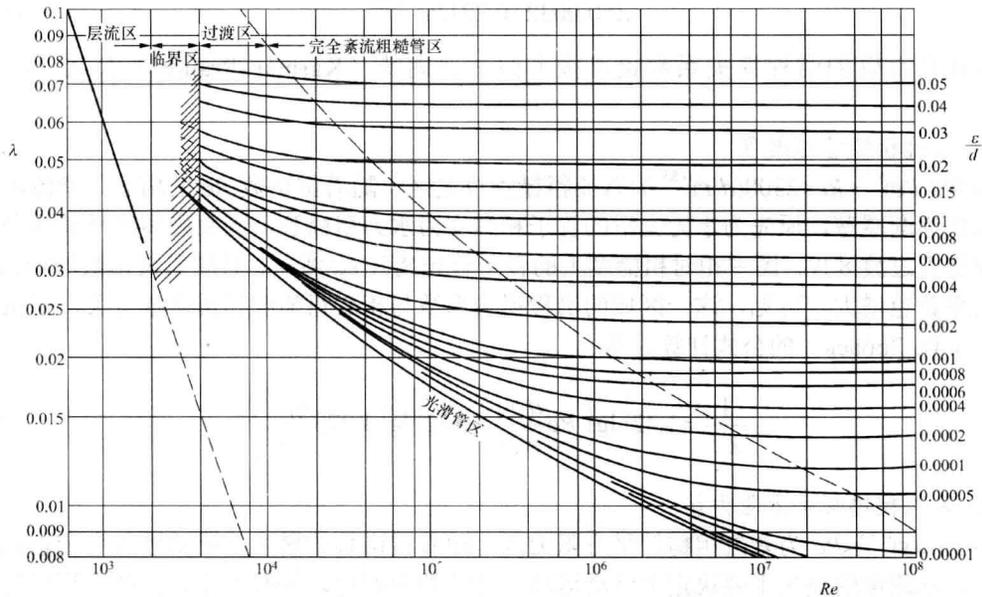


图 6-13 莫迪图

【例 6-4】 体积流量 $q_V = 1000 \text{ m}^3/\text{h}$, 运动黏度 $\nu = 2.5 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 的油流经直径 $d = 200 \text{ mm}$ 、长 $l = 300 \text{ m}$ 、绝对粗糙度 $\varepsilon = 0.4 \text{ mm}$ 的铸铁管道, 试求单位重量流体的能量损失 h_f 。

【解】 油在管道内的平均流速为

$$v = \frac{4q_V}{\pi d^2} = \frac{4}{\pi \times 0.2^2} \times \frac{1000}{3600} = 8.84 \text{ (m/s)}$$

雷诺数

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{8.84 \times 0.2}{2.5 \times 10^{-6}} = 708000$$

而

$$2308(d/\varepsilon)^{0.85} = 2308(200/0.4)^{0.85} = 458000 < Re$$

所以流动处于紊流粗糙管平方阻力区, 沿程损失系数为

$$\lambda = \left(2 \lg \frac{d}{2\varepsilon} + 1.74 \right)^{-2} = \left(2 \lg 250 + 1.74 \right)^{-2} = 0.0234$$

代入达西公式(5-44), 得

$$h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = 0.0234 \times \frac{300}{0.2} \times \frac{(8.84)^2}{2 \times 9.807} = 140 \text{ (m)}$$

倘若应用莫迪图, 则甚易根据 $Re = 708000$ 和 $\varepsilon/d = 0.002$ 从图查得 $\lambda = 0.0238$, 代入达西公式

可得 $h_f=142\text{m}$ ，与按尼古拉兹公式求出的结果基本相符。虽然两图在紊流粗糙管过渡区的差别较大，然而应用莫迪图进行计算，要简便得多，且更符合工业管道的实际情况。以下将主要应用莫迪图或式 (6-38) 与式 (6-33) 进行工业管道的流动计算。

由上例可以看出，在已知管道尺寸 d 、 l 、 ε ，流体性质 ν 和流量 q_v 的条件下，容易求得水头损失 h_f ；只需算出 Re 、 ε/d ，由莫迪图查得 λ ，代入达西公式 (5-44) 即可。

【例 6-5】 15°C 的水流经直径 $d=300\text{mm}$ 、长 $l=300\text{m}$ 、绝对粗糙度 $\varepsilon=3\text{mm}$ 的铆接钢管，已知水头损失 $h_f=6\text{m}$ 。试求水的流量 q_v 。

【解】 管道的相对粗糙度 $\varepsilon/d=0.01$ 。由莫迪图试取 $\lambda=0.038$ 。将已知数据代入式 (5-44)，并稍加整理，得

$$v = \left(\frac{2gh_f d}{\lambda l} \right) = \left(\frac{2 \times 9.807 \times 6 \times 0.3}{0.038 \times 300} \right)^{1/2} = 1.760 \text{ (m/s)}$$

由于 15°C 水的运动黏度 $\nu=1.13 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ ，于是

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{1.76 \times 0.3}{1.13 \times 10^{-6}} = 467000$$

根据 Re 与 ε/d 由莫迪图适巧查得 $\lambda=0.038$ ，且流动处于平方阻力区， λ 不随 Re 而变，故水的流量为

$$q_v = Av = (\pi \times 0.3^2 / 4) \times 1.76 = 0.1245 \text{ (m}^3/\text{s)}$$

假如根据 Re 与 ε/d 由莫迪图查得的 λ 与试选的 λ 值不相符合，则应以查得的 λ 为改进值，再按上述步骤进行计算，直至最后由莫迪图查得的 λ 值与改进的 λ 值相符合为止。可见，已知管道尺寸 d 、 l 、 ε ，流体性质 ν 和水头损失 h_f 的条件下，要求通过管道的流量 q_v ，需采用试算的方法。

【例 6-6】 体积流量 $q_v=1000\text{m}^3/\text{h}$ 、运动黏度 $\nu=1 \times 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$ 的油流经长度 $l=200\text{m}$ 、绝对粗糙度 $\varepsilon=0.046\text{mm}$ 的新低碳钢管道，允许的最大水头损失 $h_f=20\text{m}$ ，试确定该管道的直径 d 。

【解】 将 $v = \frac{4q_v}{\pi d^2}$ 代入达西公式，并稍加整理，得

$$d^5 = \frac{8lq_v^2}{\pi^2 g h_f} \lambda = \frac{8 \times 200 \times (1000/3600)^2}{\pi^2 \times 9.807 \times 20} \lambda = 0.0642 \lambda \quad (\text{a})$$

将以 q_v 表示的 v 代入 Re 的公式，得

$$Re = \frac{4q_v}{\pi \nu} \frac{1}{d} = \frac{4 \times (1000/3600)}{\pi \times 1 \times 10^{-5}} \frac{1}{d} = \frac{35400}{d} \quad (\text{b})$$

试取 $\lambda=0.02$ 并代入式 (a)，得 $d=0.264\text{m}$ ，代入式 (b)，得 $Re=134000$ ，而 $\varepsilon/d=0.00017$ ，于是由图 6-13 查得 $\lambda=0.016$ 。以查得的 λ 为改进值，重复上述计算，得 $d=0.253\text{m}$ ， $Re=140000$ ， $\varepsilon/d=0.000182$ ，于是 $\lambda=0.0158$ 。再以 $\lambda=0.0158$ 重复上述计算，得 $d=0.252\text{m}$ ， $Re=140500$ ， $\varepsilon/d=0.000183$ ，于是 $\lambda=0.0158$ ，所以 $d=252\text{mm}$ 。由于 $h_f=20\text{m}$ 是最大允许水头损失，故该管道应取公称直径 $d=300\text{mm}$ 的管子。

由上例可以看出，在已知管道长度 l 和绝对粗糙度 ε 、流体性质 ν 、液体流量 q_v 、最大允许水头损失 h_f 的条件下，要决定管道的直径 d ，也需采用试算的方法，这是由于未知数有三

个, 即 d 、 v 与 λ , 而可应用的方程只有达西公式和雷诺数的表示式, 因而必须借助于莫迪图, 通过试算, 逐步接近, 以求解之。

第七节 非圆形管道沿程损失的计算

输送流体的管道不一定是圆形截面。电厂中的空气和烟气管道大都是矩形截面, 一般的通风管道也以矩形的居多。有些场合会遇到圆环形管道。在锅炉或其他换热器中还会遇到沿管束流动的更为复杂的情况。对于这些非圆形管道沿程损失计算公式(5-44)和雷诺数计算公式(6-3)仍然可以应用, 但要把公式中的直径 d 用当量直径 D 来代替。当量直径的计算涉及第四章已经讲过的有效截面、湿周和水力半径等几个概念。

根据式(4-15), 充满流体的圆管直径可表示为

$$d = \frac{\pi d^2}{\pi d} = \frac{4A}{\chi} = 4R_h$$

与圆形管道相类比, 非圆形管道的当量直径 D 也可用 4 倍过水截面 A 与湿周 χ 之比, 即 4 倍水力半径 R_h 表示:

$$D = 4A/\chi = 4R_h \quad (6-40)$$

图 6-14 中几种非圆形管道的当量直径为

充满流体的矩形管道 $D = \frac{4hb}{2(h+b)} = \frac{2hb}{h+b}$

充满流体的圆环形管道 $D = \frac{4(\pi d_2^2/4 - \pi d_1^2/4)}{\pi d_1 + \pi d_2} = d_2 - d_1$

充满流体的管束 $D = \frac{4(S_1 S_2 - \pi d^2/4)}{\pi d} = \frac{4S_1 S_2}{\pi d} - d$

流体在非圆形管道中流动的雷诺数为

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{v D}{\nu} \quad (6-41)$$

流体在非圆形管道中的沿程损失为

$$h_f = \lambda \frac{l}{D} \frac{v^2}{2g} \quad (6-42)$$

应当指出, 当应用当量直径对非圆形管道进行计算时, 截面形状越接近圆形, 其误差越小; 离圆形越远, 其误差越大, 这是非圆形截面的切向应力沿固体壁面分布不均匀造成的。例如矩形截面管道内流速的等速线如图 6-15 所示, 各边中点的速度梯度最高, 因而切向应力最大; 角上的速度梯度最低, 因而切向应力最小。所以, 在应用当量直径进行计算时, 矩形截面的长边最大不应超过短边的 8 倍。圆环形截面的大直径至少要大于小直径的三倍。三角形截面、椭圆形截面均可应用当量直径进行计算。但是, 不规则形状的截面不能应用当量直径进行计算。

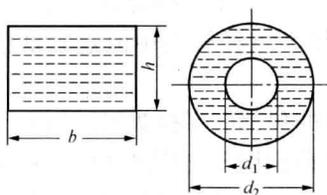


图 6-14 几种非圆形管道的截面

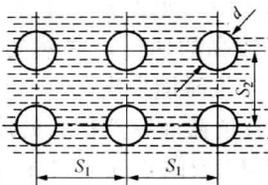


图 6-15 矩形截面管道的等速线

【例 6-7】用镀锌钢板制成的矩形风道，截面积 $A=0.3 \times 0.5 \text{ m}^2$ 、长 $l=30 \text{ m}$ ，风道内风速 $v=14 \text{ m/s}$ ，风温 $t=34^\circ\text{C}$ ，试求沿程损失 h_f 。风道入口截面 1 处的风压 $p_{1e}=980.7 \text{ Pa}$ ，风道出口截面 2 比截面 1 的位置高 10 m ，求截面 2 处的风压 p_{2e} 。

【解】风道的当量直径

$$D = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2 \times 0.3 \times 0.5}{0.3 + 0.5} = 0.375 \text{ (m)}$$

34°C 空气的运动黏度 $\nu=1.63 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ，雷诺数为

$$Re = \frac{vD}{\nu} = \frac{14 \times 0.375}{1.63 \times 10^{-5}} = 322000$$

由于镀锌钢板的绝对粗糙度 $\varepsilon=0.15 \text{ mm}$ ，故相对粗糙度为

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.15}{375} = 0.0004$$

由图 6-13 查得 $\lambda=0.0176$ ，故沿程损失为

$$h_f = 0.0176 \times \frac{30}{0.375} \times \frac{14^2}{2 \times 9.807} = 14.1 \text{ (m)}$$

由于等截面管道中动能没有变化， 34°C 空气的密度 $\rho=1.14 \text{ kg/m}^3$ ，故由式 (4-52) 求得截面 2 处的风压：

$$\begin{aligned} p_{2e} &= p_{1e} - \rho g(z_2 - z_1) - \rho g h_f \\ &= 980.7 - 1.14 \times 9.807 \times 10 - 1.14 \times 9.807 \times 14.1 = 711 \text{ (Pa)} \end{aligned}$$

第八节 局部损失

流体在管道中流动时能量损失不仅有沿长度方向的沿程能量损失，而且还有出现在局部管段的局部能量损失。局部能量损失主要是由流体的相互碰撞和形成旋涡等原因造成的，可用速度头按式 (6-1) 计算，可见局部损失的计算问题归结为寻求局部损失系数 ζ 的问题。局部损失系数除少数管件可用分析方法求得外，大部分管件都是由实验测定的。下面分别介绍几种常用管件的局部损失。

一、管道截面突然扩大

如图 6-16 所示，流体从小直径的管道流往大直径的管道，由于流体有惯性，它不可能按照管道的形状突然扩大，而是离开小管后逐渐地扩大，因此，便在管壁拐角与流束之间形成旋涡，旋涡靠主流束带动着旋转，主流束把能量传递给旋涡，旋涡又将得到的能量消耗在旋

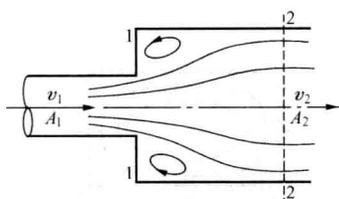


图 6-16 管道截面突然扩大

转运动中, 变成热而散逸。另外, 从小直径管道中流出的流体有较高的速度, 必然要碰撞大直径管道中流速较低的流体, 产生碰撞损失。

管道截面突然扩大处流体的局部能量损失可以用分析方法推算。取图 6-16 中 1-1、2-2 截面以及它们之间的管壁为控制面, 通过计算流体流过控制面的能量变化和动量变化, 求出损失的能量, 根据连续方程有

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1, \quad v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2 \quad (a)$$

根据动量方程有

$$p_1 A_1 - p_2 A_2 + p(A_2 - A_1) = \rho q_1 (v_2 - v_1)$$

式中 $p(A_2 - A_1)$ 是作用于扩大管凸肩圆环上的压力, 实验证明 $p = p_1$, 上式成为

$$p_1 - p_2 = \rho v_2 (v_2 - v_1) \quad (b)$$

对截面 1-1、2-2 列出能量方程 (取动能修正系数 $\alpha = 1$)

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_j$$

于是

$$h_j = \frac{1}{\rho g} (p_1 - p_2) + \frac{1}{2g} (v_1^2 - v_2^2)$$

将式 (a)、(b) 代入上式, 经整理得

$$h_j = \frac{1}{2g} (v_1 - v_2)^2 = \frac{v_1^2}{2g} \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 = \frac{v_2^2}{2g} \left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right)^2 \quad (6-43)$$

意即, 管道截面突然扩大的能量损失等于损失速度 $(v_1 - v_2)$ 的速度头。

式中

$$\zeta_1 = (1 - A_1 / A_2)^2 \quad (6-44a)$$

为按小截面流速计算的局部损失系数。

$$\zeta_2 = (A_2 / A_1 - 1)^2 \quad (6-44b)$$

为按大截面流速计算的局部损失系数。

如图 6-17 所示, 当管道与大面积的水池相连时, $A_2 \gg A_1$, 由式 (6-43)、式 (6-44a) 可知, 管道出口的能量损失 $h_0 \approx v_1^2 / (2g)$, $\zeta_0 \approx 1$, 即管道中水流的速度头完全消散于池水之中。

二、管道截面突然缩小

如图 6-18 所示, 流体从大直径管道流往小直径管道时, 流线必须弯曲, 流束必定收缩。当流体进入小直径管道后, 由于流体有惯性, 流体将继续收缩直至称为缩颈的最小截面 A_c , 而后又逐渐扩大, 直至充满整个小直径截面 A_2 。在缩颈附近的流束与管壁之间有一充满小旋涡的低压区。在大直径截面与小直径截面连接的凸肩处, 也有旋涡形成。所有旋涡运动都要消耗能量; 在流线弯曲、流体的加速和减速过程中, 流体质点碰撞、速度分布变化等也都造成能量损失。由于流体沿突然缩小管道的流动是先收缩后扩展, 它的能量损失应由两部分组成。参照式 (6-43), 可将该损失表示为

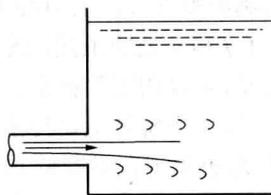


图 6-17 管道出口损失

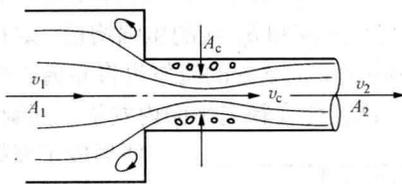


图 6-18 管道截面突然缩小

$$h_j = \zeta \frac{v_2^2}{2g} = \zeta_c \frac{v_c^2}{2g} + \frac{(v_c - v_2)^2}{2g} \quad (6-45)$$

令 $C_c = A_c/A_2$, 称为流束的收缩系数。根据连续方程 $A_c v_c = A_2 v_2$, 由式 (6-45) 可得

$$\zeta = \frac{\zeta_c}{C_c^2} + \left(\frac{1}{C_c} - 1 \right)^2 \quad (6-46)$$

根据实验, 当 $A_2/A_1=0.01$ 时, $\zeta=0.5$, $C_c=0.618$, 于是 $(1/C_c-1)^2=0.382$, $\zeta/C_c^2=0.118$, $\zeta_c=0.045$, 足见其收缩损失很小; 当 $A_2/A_1=1$ 时, 为等直管道, 没有收缩与扩展, 故 $\zeta_c/C_c^2=0$ 。假设 ζ_c/C_c^2 随着直径比由 0.118 线性地减小到 0, 由式 (6-46) 便可求得截面突然缩小管道的局部损失系数的近似值。收缩系数和局部损失系数的实测值列于表 6-3。

如图 6-19 所示, 大面积的水池与管道相连时, $A_1 \gg A_2$, $A_2/A_1 \approx 0$, 管道截面突然缩小的问题变化为管道进口的问题。由实验已知, 管道进口的能量损失系数 $\zeta_i=0.5$ 。

三、弯管

流体在弯管中流动的损失由三部分组成: 一部分是切向应力产生的沿程损失, 特别是在流动方向改变、流速分布变化中产生的这种损失; 另一部分是形成的旋涡产生的损失; 第三部分是由二次流形成的双螺旋流动产生的损失。

第四章已经讨论过理想流体沿弯管流动时速度分布和压强分布的变化情况。这种变化将增加切向应力产生的沿程损失。

当流体沿弯管流动时, 弯管外侧的压强高, 内侧的压强低。如图 6-20 所示, 在弯管前直管段的截面 AA' 处压强是均一的。流体流入弯管后, 外侧由 A 到 B 的流动为增压过程 (压强梯度为正), B 点压强最高, 从 B 到 D' 压强逐渐下降; 内侧由 A 到 C 的流动为减压过程 (压强梯度为负), C 点压强最低, 从 C 到 D 压强逐渐上升, 直至流入直管段的截面 DD' 处, 流体的压强又趋于均一。在 AB 和 CD 这两段增压过程中, 都有可能因边界层能量被黏滞力消耗而出现边界层分离^①, 形成旋涡, 造成损失。

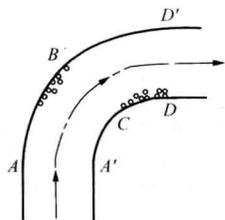


图 6-20 弯管中边界层的分离

二次流形成双螺旋流动的现象, 可由图 6-21 所示矩形弯管内的流动予以分析。靠近上壁面 ef 和下壁面 hg 的流体因黏滞力作用而流速降低, 由上、下壁至

① 关于边界层分离的概念, 将在第九章中讨论。

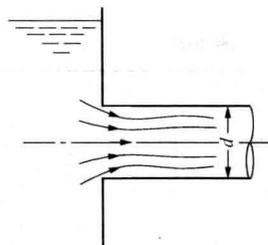


图 6-19 管道进口损失

中心线 bc 流速将逐渐增高。流体在弯管中流动时，流速高的离心惯性大，沿中心线 cb 的压强增量将大于沿 ef 和 hg 线的压强增量。这样， b 处的压强将大于 f 和 g 处的压强，流体将自 b 处流向 f 和 g 处，而 c 处的流体也将靠离心惯性不断地往 b 处流动， c 处的压强将小于 e 和 h 处的压强，二次流便在径向平面内发生，其旋转方向如图中所示。这两个旋转运动与主流相结合，

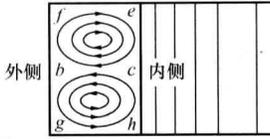


图 6-21 弯管截面上的双旋涡

便形成了双螺旋流动。同样的情形也出现在沿圆截面弯管的流动中，并可往下游延续 $50\sim 75d$ （管径）的距离。双螺旋流动必然在主流之外增加了局部流速，从而增加了能量损失。

弯管的局部损失按式（6-1）进行计算。局部损失系数 ζ 随弯管的总弯角 θ 、弯管管径与弯管中心线的曲率半径之比 d/R 而变，它的数值列于表 6-3。

以上讨论的都是单个管件的局部损失。当两个管件非常靠近时，它们相互影响，因此如果把两个管件的局部损失相叠加，则常较实际的损失为大，据此去计算管道系统所需的动力，自然是偏于安全的。如果要较精确地确定两相邻管件的能量损失，则应通过实验去测定它们总的压强降，而不应简单叠加。

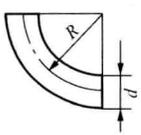
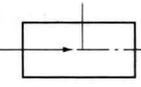
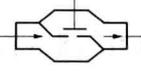
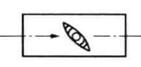
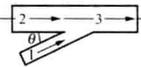
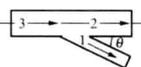
在管道系统的设计计算中，常常按损失能量相等的观点把管件的局部损失换算成等值长度的沿程损失。用 l_e 代表等值长度，令式（6-1）与式（5-44）相等，便可得到

$$l_e = \zeta d / \lambda \tag{6-47}$$

表 6-3 局部损失系数

类型	示意图	局部损失系数 ζ											
		A_2/A_1	0.01	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
截面突然缩小		C_c	0.618	0.632	0.644	0.659	0.676	0.696	0.717	0.744	0.784	0.890	1.0
		ζ_2	0.50	0.469	0.431	0.387	0.343	0.298	0.257	0.212	0.161	0.079	0
截面突然扩大		A_1/A_2	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0
		ζ_1	0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1
		ζ_2	0	0.0123	0.0625	0.184	0.444	1	2.25	5.44	16	81	∞
渐缩管		$\zeta_2 = \frac{\lambda}{8 \sin \frac{\theta}{2}} \left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right]$											
渐扩管		$\zeta_2 = \frac{\lambda}{8 \sin \frac{\theta}{2}} \left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right] + K \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)$											
		当 $A_1/A_2 = \frac{1}{4}$ 时											
		θ	2	4	6	8	10	12	14	16	20	25	
	K	0.022	0.048	0.072	0.103	0.138	0.177	0.221	0.270	0.386	0.645		
折管		$\zeta = 0.946 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + 2.047 \sin 4 \left(\frac{\theta}{2} \right)$											
		当 $d > 30\text{cm}$ 时，随着 d 的增大 ζ 相应减小											
		θ°	20	40	60	80	90	100	120	140			
	ζ	0.064	0.139	0.364	0.740	0.985	1.260	1.861	2.431				

续表

类型	示意图	局部损失系数 ζ												
90°弯管		$\zeta_{90^\circ} = 0.131 + 0.163(d/R)^{3.5}$												
		d/R	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
		ζ	0.131	0.132	0.133	0.137	0.145	0.157	0.177	0.204	0.241	0.291	0.355	0.434
		当 $\theta < 90^\circ$ 时, $\zeta = \zeta_{90^\circ} \frac{\theta^\circ}{90^\circ}$												
闸阀		开度 (%)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100		
		ζ	60	16	6.5	3.2	1.8	1.1	0.60	0.30	0.18	0.1		
球阀		开度 (%)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100		
		ζ	85	24	12	7.5	5.7	4.8	4.4	4.1	4.0	3.9		
蝶阀		开度 (%)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100		
		ζ	200	65	26	16	8.3	4	1.8	0.85	0.48	0.3		
分支管道		$q = q_{v1} / q_{v3} \quad m = A_1 / A_3 \quad n = d_1 / d_3$												
		ζ_{13}	$-0.92(1-q)^2 - q^2 [(1.2 - n^{\frac{1}{2}})(\cos \theta / m - 1) + 0.8(1 - 1/m^2) - (1 - m) \cos \theta / m] + (2 - m)q(1 - q)$											
		ζ_{23}	$0.03(1-q)^2 - q^2 [1 + (1.62 - n^{\frac{1}{2}})(\cos \theta / m - 1) - 0.38(1 - m)] + (2 - m)q(1 - q)$											
		ζ_{31}	$-0.95(1-q)^2 - q^2 [1.3 \cot(180 - \theta) / 2 - 0.3 + (0.4 - 0.1m) / m^2] \times [1 - 0.9(n/m)^{\frac{1}{2}}] - 0.4q(1-q)(1 + 1/m) \cot(180 - \theta) / 2$											
		ζ_{32}	$-0.03(1-q)^2 - 0.35q^2 + 0.2q(1-q)$											

【例 6-8】 图 6-22 为水轮机工作轮与蜗壳间的密封装置纵剖面示意图。密封装置中线处的直径 $d=4\text{m}$ ，径向间隙 $b=2\text{mm}$ ，间隙的纵长均为 $l_2=50\text{mm}$ ，各间隙之间有等长的扩大沟槽。假设密封装置进口与出口的压差 $p_1-p_2=264.2\text{kPa}$ ，密封油的密度 $\rho=896\text{kg/m}^3$ 。取进口局部损失系数 $\zeta_i=0.5$ ，出口局部损失系数 $\zeta_o=1$ ，沿程损失系数 $\lambda=0.03$ ，试求密封装置的漏损流量。如果密封装置的扩大沟槽也改成同样的间隙，其漏损流量又为多少？

【解】 间隙为环形通道，当量直径为

$$D = d_2 - d_1 = 2b$$

对间隙的进口与出口列伯努利方程，得

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + \left(4\lambda \frac{l_2}{D} + 4\zeta_i + 4\zeta_o \right) \frac{v^2}{2g}$$

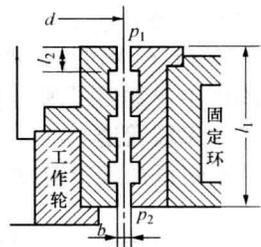


图 6-22 密封装置

对于有扩大沟槽的装置,漏流速度为

$$v = \left\{ \frac{2g[(p_1 - p_2)/(\rho g) + (z_1 - z_2)]}{4\lambda_2/D + 4\zeta_i + 4\zeta_o} \right\}^{1/2} = \left[\frac{2 \times 9.807 \times (30 + 0.35)}{4 \times 0.03 \times 0.05 / 0.004 + 4 \times 0.5 + 4 \times 1} \right]^{1/2} = 8.9 \text{ (m/s)}$$

漏损流量 $q_v = \pi dbv = \pi \times 4 \times 0.002 \times 8.9 = 0.223 \text{ (m}^3/\text{s)}$

对于无扩大沟槽的装置,漏流速度为

$$v = \left\{ \frac{2g[(p_1 - p_2)/(\rho g) + (z_1 - z_2)]}{7\lambda_2/D + \zeta_i + \zeta_o} \right\}^{1/2} + \left[\frac{2 \times 9.807 \times (30 + 0.35)}{7 \times 0.03 \times 0.05 / 0.004 + 0.5 + 1} \right]^{1/2} = 12 \text{ (m/s)}$$

漏损流量 $q_v = \pi \times 4 \times 0.002 \times 12 = 0.302 \text{ (m}^3/\text{s)}$

可见,有扩大沟槽的装置比无扩大沟槽的装置的漏损流量小,即利用局部阻力,减小了漏损流量。

第九节 各类管流的水力计算

当使用电子计算机进行管流的水力计算时,可以应用柯列布茹克公式(6-38)和尼古拉兹公式(6-33)。乌得(Don J. Wood)将柯列布茹克公式发展成为如下的沿程损失系数的显示关系式:

$$\lambda = a + bRe^{-c} \quad (6-38a)$$

式中: $a = 0.094k^{0.225} + 0.53k$; $b = 88k^{0.44}$; $c = 1.62k^{0.134}$; $k = \epsilon/d$ 为相对粗糙度。对于 $Re > 10^4$ 和 $10^{-5} < k < 0.04$ 范围内的计算,式(6-38a)与式(6-38)的计算结果十分接近,而式(6-38a)对于编制计算机程序更为方便。

一、简单管道

管径和管壁粗糙度均相同的一根管子或这样的数段管子串联在一起的管道系统称为简单管道。简单管道有三类计算问题:①已知 q_v 、 l 、 d 、 v 、 ϵ , 求 h_f ; ②已知 h_f 、 l 、 d 、 v 、 ϵ , 求 q_v ; ③已知 h_f 、 q_v 、 l 、 v 、 ϵ , 求 d 。这三类计算问题是求解更复杂管道问题的基础。正如在例6-4~例6-6中讨论过的那样,这三类计算问题,应用达西-魏斯巴赫公式、连续方程和莫迪图均可由已知诸量求出未知量,不再赘述。

二、串联管道

由不同直径或粗糙度的数段管子串联在一起的管道称为串联管道。通过串联管道各管段的流量是相同的,串联管道的损失应等于各管段损失的总和。通常在已知管道尺寸和粗糙度以及流体性质的条件下,串联管道有两类计算问题:①已知流过串联管道的流量 q_v , 求所需要的总水头 H ; ②已知总水头 H , 求通过的流量 q_v 。

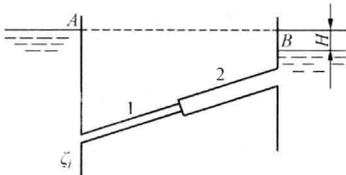


图 6-23 串联管道

图6-23所示为由两段不同直径的管子串联起来的串联管道。若对A和B两截面列伯努利方程式,把各项损失考

虑进去,则有

$$H = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g} + \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} + \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

式中符号的下标 1、2 分别代表两段不同的管子。根据连续方程有

$$v_1 d_1^2 = v_2 d_2^2$$

从以上两式消去 v_2 , 得

$$H = \frac{v_1^2}{2g} \left\{ \zeta_1 + \frac{\lambda_1 l_1}{d_1} + \left[1 - \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2 \right]^2 + \frac{\lambda_2 l_2}{d_2} \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 + \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 \right\}$$

通常, 管道的尺寸、粗糙度和局部损失系数是已知的, 于是上式可表示为

$$H = \frac{v_1^2}{2g} (c_0 + c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2)$$

式中 c_0 , c_1 , c_2 是由管道尺寸和局部损失系数确定的已知数。对于串联管道的第一类计算问题, 流量已经给定, 管道内的平均流速和雷诺数便可计算出来, 再根据管壁粗糙度从莫迪图上查到对应的损失系数, 代入上式后便可求出所需的总水头。对于串联管道的第二类计算问题, 总水头已经给定, 但由于式中的 v_1 , λ_1 , λ_2 均是未知数, 计算要麻烦一些。这要先假设 λ_1 与 λ_2 的值。代入上式, 求出对应的 v_1 、 v_2 , 再求出对应的雷诺数, 根据雷诺数和管壁粗糙度在莫迪图上查到新的 λ_1 与 λ_2 ; 用新的值再重复上述计算, 直到求出的同最新拟设的沿程损失系数的差别在允许误差范围之内为止, 这时的 v_1 便是所要求的管道 1 中的流速, 对应的流量即可求出。由于沿程损失系数随雷诺数的变化较小, 试算的解可以较快地收敛到最后的结果。串联管道的第二类计算问题也可用图解法求解, 即假设几个 q_v 值, 依次求出对应的 H 值, 在 $H-q_v$ 图上画出这些点并连成如图 6-24 所示的圆滑曲线, 从图上便可由已知的 H 值求出对应的 q_v 值。

对于有不同直径或粗糙度的数段管子连接成的串联管道, 也可用上述同样的方法进行计算。

【例 6-9】 已知图 6-23 所示串联管道的 $\zeta_1=0.5$, $l_1=300\text{m}$, $d_1=0.6\text{m}$, $\varepsilon_1=0.0015\text{m}$, $l_2=240\text{m}$, $d_2=0.9\text{m}$, $\varepsilon_2=0.0003\text{m}$, $v=1 \times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$, $H=6\text{m}$, 求通过该管道的流量 q_v 。

【解】 将已知数据代入 H 的表示式, 得

$$6 = \frac{v_1^2}{2g} \left\{ 0.5 + \lambda_1 \left(\frac{300}{0.6} \right) + \left[1 - \left(\frac{0.6}{0.9} \right)^2 \right]^2 + \lambda_2 \left(\frac{240}{0.9} \right) \left(\frac{0.6}{0.9} \right)^4 + \left(\frac{0.6}{0.9} \right)^4 \right\}$$

或

$$6 = \frac{v_1^2}{2g} (1.01 + 500\lambda_1 + 52.6\lambda_2)$$

由于 $\varepsilon_1/d_1=0.0025$, $\varepsilon_2/d_2=0.00033$, 参照莫迪图试取 $\lambda_1=0.025$, $\lambda_2=0.015$, 代入上式可得

$$v_2=2.87\text{m/s}$$

由连续方程可得

$$v_2 = v_1 (d_1/d_2)^2 = 1.28\text{m/s}$$

于是

$$Re_1 = \frac{2.87 \times 0.6}{1 \times 10^{-6}} = 1.72 \times 10^6$$

$$Re_2 = \frac{1.28 \times 0.9}{1 \times 10^{-6}} = 1.15 \times 10^6$$

由莫迪图得 $\lambda_1=0.025$, $\lambda_2=0.016$ 。据此求得新的 $v_1=2.86\text{m/s}$, $q_V=0.7854 \times 0.6^2 \times 2.86=0.808 \text{ (m}^3/\text{s)}$ 。

三、并联管道

在某处分成几路、到下游某处又汇成一路的管道称为并联管道,如图 6-25 所示。与串联管道的情况不同,并联管道的损失等于各分管道的损失,并联管道的总流量等于各分管道流量的总和。在分析并联管道问题时,通常把局部损失按式(6-47)换算成沿程损失的等值长度,再加到它所在的分管道上去。在已知管道尺寸和粗糙度以及流体性质的条件下,并联管道也有两类计算问题:①已知 A 和 B 点的静水头线高度,即 $z+p/(\rho g)$,求总流量 q_V ;②已知总流量 q_V ,求各分管道中的流量及能量损失。事实上,并联管道的第一类计算问题就相当于简单管道的第二类计算问题,因为知道了 A 点和 B 点间的能量损失,便可按照简单管道的第二类计算问题去推求各分管道内的流量,各分管道流量的总和便是总流量 q_V 。对于并联管道的第二类计算问题,由于只知道总流量,管道的损失和各分管道的流量都是不知道的,因而它的计算是比较复杂的,其计算步骤如下:

(1) 根据管径、长度和管壁粗糙度假设一通过管 1 的流量 q'_{V1} ;

(2) 由 q'_{V1} 求出管 1 的损失 h'_{f1} ;

(3) 由 h'_{f1} 求通过管 2 和管 3 的流量 q'_{V2} 和 q'_{V3} ;

(4) 假设总流量 q_V 按 q'_{V1} 、 q'_{V2} 与 q'_{V3} 的比例分配给各分管道,则各分管道的计算流量应分别为

$$q_{V1} = \frac{q'_{V1}}{\sum q'_V} q_V, \quad q_{V2} = \frac{q'_{V2}}{\sum q'_V} q_V, \quad q_{V3} = \frac{q'_{V3}}{\sum q'_V} q_V$$

(5) 用计算流量 q_{V1} 、 q_{V2} 、 q_{V3} 去求 h_{f1} 、 h_{f2} 、 h_{f3} 以核对流量分配的正确性。倘若求得的各分管道的损失差别在允许的误差范围内,则 q_{V1} 、 q_{V2} 、 q_{V3} 便是合理的流量分配, h_{f1} 是并联管道的能量损失。倘若求得的各分管道的损失的差别超过允许误差范围,则应以 q_{V1} 为新的假设流量,重复上述计算,直到符合规定的精确度要求为止。对于分管道多于三个的并联管道,同样可用上述步骤去进行计算。

【例 6-10】 在图 6-25 所示并联管道中, $l_1=900\text{m}$, $d_1=0.3\text{m}$, $\varepsilon_1=0.0003\text{m}$; $l_2=600\text{m}$, $d_2=0.2\text{m}$, $\varepsilon_2=0.00003\text{m}$; $l_3=1200\text{m}$, $d_3=0.4\text{m}$, $\varepsilon_3=0.000024\text{m}$; $\nu=1 \times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$, $\rho=998\text{kg}/\text{m}^3$, $p_A=9.807 \times 10^5\text{Pa}$, $Z_A=Z_B=20\text{m}$, 假设总流量 $q_V=0.4\text{m}^3/\text{s}$ 。求每个分支管道的流量 q_{V1} 、 q_{V2} 、 q_{V3} 和 B 点的压强 p_B 。

【解】 由于管道很长,局部损失换算成的等值长度与管长相比很小,可以忽略不计。为了提高计算精确度,将按式(6-38a)计算紊流过渡区的沿程损失系数。

对于管 1, 试取 $q_{V1}'=0.1\text{m}^3/\text{s}$, 则 $v_1'=1.415\text{m/s}$, $Re_1'=424413$ 。由于 $k_1=\varepsilon_1/d_1=0.001$, $Re_1' < Re_{b1}=3.5 \times 10^6$, 则 $a_1=0.0204$, $b_1=4.212$, $c_1=0.642$, $\lambda_1'=0.02143$

$$h'_{f1} = 0.02143 \times \frac{900}{0.3} \times \frac{1.415^2}{2 \times 9.807} = 6.563 \text{ (m)}$$

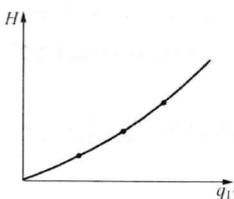


图 6-24 $H-q_V$ 曲线

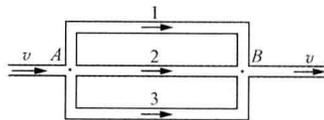


图 6-25 并联管道

对于管 2

$$\lambda'_2 \times \frac{600}{0.2} \times \frac{v_2'^2}{2 \times 9.807} = 6.563$$

由于 $k_2 = \varepsilon_2/d_2 = 0.00015$, 则 $a_2 = 0.01304$, $b_2 = 1.828$, $c_2 = 0.4979$ 。试取 $\lambda_2' = 0.016$, 则 $v_2' = 1.638 \text{ m/s}$, $Re_2' = 327524 < Re_{b2} = 2.333 \times 10^7$, $\lambda_2'' = 0.01632$ 。以 λ_2'' 为试取值, 则 $v_2'' = 1.621 \text{ m/s}$, $Re_2'' = 324279$, $\lambda_2''' = 0.01634$ 。故有

$$q_{v2}' = \frac{\pi}{4} \times 0.2^2 \times 1.621 = 0.0509 \text{ (m}^3/\text{s)}$$

对于管 3

$$\lambda'_3 \times \frac{1200}{0.4} \times \frac{v_3'^2}{2 \times 9.807} = 6.563$$

由于 $k_3 = \varepsilon_3/d_3 = 0.00006$, 则 $a_3 = 0.01058$, $b_3 = 1.221$, $C_3 = 0.4403$ 。试取 $\lambda_3' = 0.014$, 则 $v_3' = 1.75 \text{ m/s}$, $Re_3' = 700276 < Re_{b3} = 5.833 \times 10^7$, $\lambda_3'' = 0.01384$ 。以 λ_3'' 为试取值, 则 $v_3'' = 1.76 \text{ m/s}$, $Re_3'' = 704346$, $\lambda_3''' = 0.01383$ 。故有

$$q_{v3}' = \frac{\pi}{4} \times 0.4^2 \times 1.76 = 0.2212 \text{ (m}^3/\text{s)}$$

$$\Sigma q_v' = 0.1 + 0.0509 + 0.2212 = 0.3721 \text{ (m}^3/\text{s)}$$

给定流量的分配为

$$q_{v1} = \frac{0.1}{0.3721} \times 0.4 = 0.1075 \text{ (m}^3/\text{s)}$$

$$q_{v2} = \frac{0.0509}{0.3721} \times 0.4 = 0.0547 \text{ (m}^3/\text{s)}$$

$$q_{v3} = \frac{0.2212}{0.3721} \times 0.4 = 0.2378 \text{ (m}^3/\text{s)}$$

$$v_1 = 1.521 \text{ (m/s)}, Re_1 = 456244, \lambda_1 = 0.02138, h_{f1} = 7.565 \text{ (m)}$$

$$v_2 = 1.741 \text{ (m/s)}, Re_2 = 348231, \lambda_2 = 0.01622, h_{f2} = 7.521 \text{ (m)}$$

$$v_3 = 1.892 \text{ (m/s)}, Re_3 = 756941, \lambda_3 = 0.01373, h_{f3} = 7.517 \text{ (m)}$$

h_{f1} 、 h_{f2} 和 h_{f3} 之间的最大误差不超过 1%, 这在工程上是允许的。可取平均损失水头 ($h_f = 7.534 \text{ m}$) 作为计算的依据。由于

$$z_A + \frac{p_A}{\rho g} = z_B + \frac{p_B}{\rho g} + h_f$$

故

$$\begin{aligned} p_B &= p_A - \rho g h_f = 9.807 \times 10^5 - 998 \times 9.807 \times 7.534 \\ &= 9.070 \times 10^5 \text{ (Pa)} \end{aligned}$$

四、分支管道

管道系统中有分叉支管的称为分支管道。图 6-26 所示为一简单分支管道, 通常管道的尺寸、粗糙度和流体的性质是已知的, 若给出各容器液面的高度或静水头线高度 $z + p/(\rho g)$, 便可求出通过各管道的流量。各管道的沿程损失仍按达西-魏斯巴赫公式计算, 同时必须满足连续方程, 即流入和流出管道汇合处的流量必须相等, 所以有式

$$q_{v1} = q_{v2} + q_{v3} \text{ 或 } q_{v1} + q_{v2} = q_{v3}$$

若管道汇合处的静水头线高度在中间容器液面高度以上, 流体将流入中间容器; 若比中间容器液面高度低, 流体将从中间容器流出。

对这类问题的计算, 可以试选一管道汇合处静水头线高度 $z_J + p_J/(\rho g)$, 据此求出 q_{V1} 、 q_{V2} 和 q_{V3} 。倘若它们满足连续方程, 则问题已经解决。倘若流入管道汇合处的流量太大, 则应提高管道汇合处的静水头线高度, 因为这样可以减小流入的流量而增加流出的流量。倘若流入管道汇合处的流量太小, 自然应该适当降低它的静水头线高度。局部损失可换算成等值长度, 加到该管道长度上去。对于很长的管道系统, 通常局部损失可以忽略不计。

假如在分支管道系统中还安装着泵, 如图 6-27 所示, 用泵把液体从一个容器抽送到另外两个容器中去。当泵的特性已知时, 其计算步骤如下:

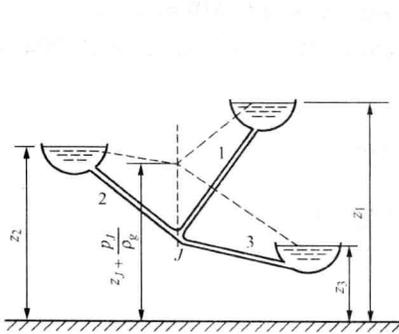


图 6-26 分支管道

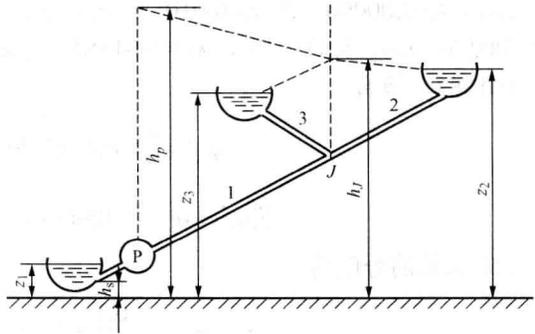


图 6-27 装有泵的三容器相连

- (1) 假设一通过泵的流量;
- (2) 计算泵吸入边的静水头线高度;
- (3) 由泵的特性曲线找到与假设流量相对应的泵所产生的压头, 并与吸入边静水头线高度相加, 以得到泵压出边的静水头线高度;
- (4) 计算由泵到管道汇合处 J 的损失, 以确定 J 处的静水头线高度;
- (5) 若流入和流出 J 处的流量相等, 问题已经解决; 倘若流入 J 处的流量太大(或太小), 则应减小(或增加)通过泵的流量, 并重复以上计算。

为了较快地得到问题的解答, 还可以利用作图法, 即画出 J 处的几个静水头线高度与对应的流入和流出流量的两条曲线, 曲线的交点便是问题的解答。

【例 6-11】 在图 6-27 所示的分支管道系统中, 已知 $l_1=1000\text{m}$, $d_1=1\text{m}$, $\varepsilon_1=0.0002\text{m}$, $z_1=5\text{m}$; $l_2=600\text{m}$, $d_2=0.5\text{m}$, $\varepsilon_2=0.0001\text{m}$, $z_2=30\text{m}$; $l_3=800\text{m}$, $d_3=0.6\text{m}$, $\varepsilon_3=0.0005\text{m}$, $z_3=25\text{m}$; $\nu=1 \times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$ 。泵的特性数据为, 当流量 q_V 为 0、1、2、 $3\text{m}^3/\text{s}$ 时, 对应的压头 H 为 42、40、35、 25m 。试求分支管道中的流量 q_{V1} 、 q_{V2} 、 q_{V3} 。

【解】 泵的 H_p-q_V 曲线可以近似地表示为

$$H_p = a_0 + a_1 q_V + a_2 q_V^2 + a_3 q_V^3$$

根据泵的特性数据可以确定上述三次方程的具体形式为

$$H_p = 42 - \frac{7}{6} q_V - \frac{1}{2} q_V^2 - \frac{1}{3} q_V^3$$

假设静水头线高度在泵的吸入边用 h_s 表示, 在泵的压出边用 h_p 代表, 在管道汇合处用 h_J 代表, $h_J + v_J^2/(2g)$ 用 h_{JT} 代表, 并按式 (6-38a) 计算紊流过渡区的沿程损失系数。

试取 $q_{V1}'=1.5\text{m}^3/\text{s}$, 则 $v_1'=1.91\text{m/s}$, $h_s'=z_1-v_1'^2/(2g)=4.814\text{m}$, $H_P'=38\text{m}$, $h_P'=h_s'+H_P'=42.81\text{m}$ 。

对于管 1, $k_1=\varepsilon_1/d_1=0.0002$, 则 $a_1=0.01394$, $b_1=2.075$, $c_1=0.5174$ 。 $Re_1'=1910000 < Re_{b1}=1.75 \times 10^7$, $\lambda_1'=0.01511$, $h_{f1}'=2.81\text{m}$, $h_j'=h_P'-h_{f1}'=40\text{m}$, $h_{JT}'=40.19\text{m}$ 。

$$\text{对于管 2} \quad h_{JT}' - z_2 = 10.19 = \lambda_2' \frac{l_2}{d_2} \frac{v_2'^2}{2g}$$

由于 $k_2=\varepsilon_2/d_2=0.0002$, 则 $a_2=0.01394$, $b_2=2.075$, $c_1=0.5174$ 。试取 $\lambda_2'=0.015$, 则 $v_2'=3.332\text{m/s}$, $Re_2'=1666081 < Re_{b2}=1.75 \times 10^7$, $\lambda_2''=0.01519$, 故 $q_{V2}'=0.6542\text{m}^3/\text{s}$ 。

$$\text{对于管 3} \quad h_{JT}' - z_3 = 15.19 = \lambda_3' \frac{l_3}{d_3} \frac{v_3'^2}{2g}$$

由于 $k_3=\varepsilon_3/d_3=0.00083$, 则 $a_3=0.01949$, $b_3=7.171$, $c_3=0.6261$ 。试取 $\lambda_3'=0.02$, 则 $v_3'=3.342\text{m/s}$, $Re_3'=2005492 < Re_{b3}=4.217 \times 10^6$, $\lambda_3''=0.0203$, 故 $q_{V2}'=0.9449\text{m}^3/\text{s}$ 。

$$q_{V2}'+q_{V3}'=1.599 > 1.5=q_{V1}'$$

再试取 $q_{V1}''=1.55\text{m}^3/\text{s}$, 则 $v_1''=1.974\text{m/s}$, $h_s''=4.80\text{m}$, $H_P''=37.75\text{m}$, $h_P''=42.55\text{m}$ 。

对于管 1 $Re_1''=1974000 < Re_{b1}$, $\lambda_1''=0.01509$, $h_{f1}''=2.998\text{m}$, $h_j''=39.55\text{m}$, $h_{JT}''=39.75\text{m}$

$$\text{对于管 2} \quad h_{JT}'' - z_2 = 9.75 = \lambda_2'' \frac{l_2}{d_2} \frac{v_2''^2}{2g}$$

试取 $\lambda_2''=0.0152$, 则 $v_2''=3.238\text{m/s}$, $Re_2''=1618956 < Re_{b2}$, $\lambda_2'''=0.01521$, 故 $q_{V2}''=0.6358\text{m}^3/\text{s}$ 。

$$\text{对于管 3} \quad h_{JT}'' - z_3 = 14.75 = \lambda_3'' \frac{l_3}{d_3} \frac{v_3''^2}{2g}$$

试取 $\lambda_3''=0.0203$, 则 $v_3''=3.269\text{m/s}$, $Re_3''=1961576 < Re_{b3}$, $\lambda_3'''=0.02031$, 故 $q_{V3}''=0.9243\text{m}^3/\text{s}$ 。

$$q_{V2}''+q_{V3}''=1.56 \approx 1.55=q_{V1}''$$

最大误差不超过 1%, 工程上是允许的。按 $q_{V1}=1.555\text{m}^3/\text{s}$, $q_{V2}=0.6338\text{m}^3/\text{s}$, $q_{V3}=0.9213\text{m}^3/\text{s}$ 分配将更接近实际。

对以上例题和更为复杂的算题, 均可用计算机求解。

五、管网

由若干管道环路相连接、在结点处流出的流量来自几个环路的管道系统称为管网, 如图 6-28 所示。管网的水力计算一般是很复杂的, 需用试算法来求解。管网的水力计算必须满足以下两条:

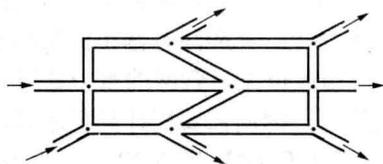


图 6-28 管网

(1) 流入结点的流量应等于流出结点的流量。如果取流出的流量为正, 流入的流量为负, 则任一结点处流量的代数和等于零, 即

$$\sum q_V = 0 \quad (a)$$

(2) 在任一环路中, 由某一结点沿两个方向到另一个结点的能量损失应相等。如果取逆时针方向流动的损失为正, 顺时针方向流动的损失为负, 则任一环路能量损失的代数和等于零, 即

$$\sum h_f = 0 \quad (b)$$

各管道的沿程损失按达西-魏斯巴赫公式计算, 并可用体积流量表示为

$$h_f = \left(\frac{8\lambda l}{\pi^2 g d^5} \right) q_V^2 = \xi q_V^2 \quad (6-48)$$

局部损失仍换算成等值长度后加到该管道长度上去。对于很长的管道系统,局部损失可以忽略不计。

管网的水力计算可按如下步骤进行:

(1) 根据对管网的分析和式 (a), 预选各管道流体的流动方向和流量。如果管径也是待定的话, 还应合理选择各管道的管径。

(2) 计算各管道的能量损失, 并检查环路中的能量损失是否满足式 (b)。

(3) 如果不满足式 (b), 则按满足式 (b) 的要求引入修正流量 Δq_v , 并利用式 (6-48) 求出修正流量。如图 6-29 (a) 所示的简单环路, 引入修正流量 Δq_v 应使

$$\xi(q_v + \Delta q_v)^2 - \xi'(q_v' - \Delta q_v)^2 = 0$$

与 q_v 相比, Δq_v 一般很小, 故略去 Δq_v 的二次方项, 得

$$\Delta q_v = -\frac{\xi q_v^2 - \xi' q_v'^2}{2(\xi q_v + \xi' q_v')}$$

对比较复杂的环路修正流量为

$$\Delta q_v = -\frac{\sum \xi q_v^2}{2 \sum \xi q_v} \quad (6-49)$$

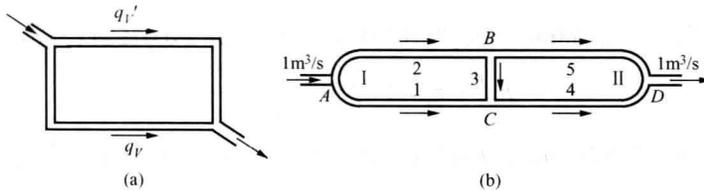


图 6-29 管网示例

(4) 以修正后的流量为新的预选流量, 重复上述计算, 直至修正流量很小, 达到精确度要求为止。并注意修正流量时各个环路之间的相互影响。

由此可见, 管网的水力计算比上述几类管道的水力计算还要复杂, 常常需要反复进行迭代计算, 因而需要用计算机求解。

【例 6-12】 图 6-29 (b) 所示为由两个环路组成的简单管网, 已知 $l_1=1000\text{m}$, $d_1=0.5\text{m}$, $\varepsilon_1=0.00005\text{m}$; $l_2=1000\text{m}$, $d_2=0.4\text{m}$, $\varepsilon_2=0.00004\text{m}$; $l_3=100\text{m}$, $d_3=0.4\text{m}$, $\varepsilon_3=0.00004\text{m}$; $l_4=1000\text{m}$, $d_4=0.5\text{m}$, $\varepsilon_4=0.00005\text{m}$; $l_5=1000\text{m}$, $d_5=0.3\text{m}$, $\varepsilon_5=0.000042\text{m}$; 管网进口 A 和出口 D 处水的流量为 $1\text{m}^3/\text{s}$ 。忽略局部损失, 并假定全部流动处于紊流粗糙管区, 试求经各管道的流量。

【解】 由于 $\varepsilon_1/d_1=\varepsilon_2/d_2=\varepsilon_3/d_3=\varepsilon_4/d_4=0.0001$, 故由莫迪图取 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0.012$, 由式 (6-48) 可得 $\xi_1=\xi_4=31.7$, $\xi_2=96.8$, $\xi_3=9.7$; 由于 $\varepsilon_5/d_5=0.00014$, 故取 $\lambda_5=0.013$, 由式 (6-48) 可得 $\xi_5=442$ 。

假设沿环路水的流动方向如图 6-29 (b) 所示, 则由式 (6-49) 可得二环路的修正流量为

$$(\Delta q_{v1})_{i+1} = -\frac{\xi_1(q_{v1})_i^2 - \xi_2(q_{v2})_i^2 - \xi_3(q_{v3})_i^2}{2[\xi_1(q_{v1})_i + \xi_2(q_{v2})_i + \xi_3(q_{v3})_i]} \quad (c)$$

$$(\Delta q_{v i})_{i+1} = -\frac{\xi_3(q_{v3}^2)_i + \xi_4(q_{v4}^2)_i - \xi_5(q_{v5}^2)_i}{2[\xi_3(q_{v3})_i + \xi_4(q_{v4})_i + \xi_5(q_{v5})_i]} \quad (d)$$

如果初次试取流经各管道的流量为 $(q_{v1})_0=0.5\text{m}^3/\text{s}$, $(q_{v2})_0=0.5\text{m}^3/\text{s}$, $(q_{v3})_0=0.4\text{m}^3/\text{s}$, $(q_{v4})_0=0.9\text{m}^3/\text{s}$, $(q_{v5})_0=0.1\text{m}^3/\text{s}$, 则按管网水力计算步骤计算的结果列于下表。

i	q_{v1}	q_{v2}	q_{v3}	q_{v4}	q_{v5}	式 (c)	Δq_{v1}	式 (d)	Δq_{v11}
0	0.5	0.5	0.4	0.9	0.1	-17.8/136	0.13	22.8/153	-0.15
1	0.63	0.37	0.12	0.75	0.25	-0.81/114	0.01	-9.65/271	0.04
2	0.64	0.36	0.15	0.79	0.21	0.22/114	0.00	0.51/239	0.00

可见, 在上述简化条件下, 对于 $0.01\text{m}^3/\text{s}$ 的精确度要求, 只经过两次迭代试算, 便得到合理的流量分配为 $q_{v1}=0.64\text{m}^3/\text{s}$, $q_{v2}=0.36\text{m}^3/\text{s}$, $q_{v3}=0.15\text{m}^3/\text{s}$, $q_{v4}=0.79\text{m}^3/\text{s}$, $q_{v5}=0.21\text{m}^3/\text{s}$ 。

第十节 几种常用的技术装置

一、集流器测风装置

它是风机实验中常用的测量流量的装置, 如图 6-30 所示。该装置前端为一圆弧形或圆锥形进口, 长度约为 $d/2$, 称为集流器。接在集流器上的为一直径同风机进口直径相等的等直风筒。在风筒进口内 $d/2$ 处沿圆周四等分地安置四个静压测点, 并将它们连通一起接到 U 形管测压计上。在静压测点后约 $d/2$ 处安置整流网 (或整流格)。实验时, 取集流器前视流速等于零的某截面为 0—0, 取静压测点所在截面为 1—1, 该截面的压强 p_e 可由 U 形管测压计测得。集流器的损失系数用 ζ_c 代表, 风筒进口至静压测点管段的损失系数用 ζ_d 代表, 对 0—0 和 1—1 截面列总流的伯努利方程 (取 $\alpha=1$), 可得

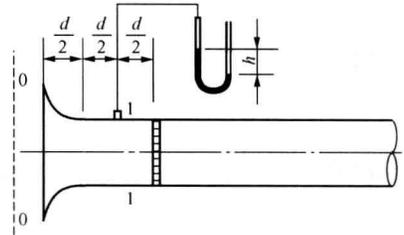


图 6-30 集流器测风装置

$$0 = -\frac{p_e}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + (\zeta_c + \zeta_d) \frac{v^2}{2g}$$

所以

$$v = \frac{1}{(1 + \zeta_c + \zeta_d)^{1/2}} \left(\frac{2p_e}{\rho} \right)^{1/2} = C_v \left(\frac{2p_e}{\rho} \right)^{1/2} \quad (6-50)$$

式中, $C_v=(1+\zeta_c+\zeta_d)^{-1/2}$, 称为集流器的速度系数, 可以通过实测有关数据由式 (6-50) 求得。锥顶角为 60° 的圆锥形集流器, $C_v=0.98$; 圆弧形集流器, $C_v=0.99$ 。知道了集流器的速度系数 C_v , 便可从实际测得的静压值和风温按式 (6-50) 求得风筒的风速, 再乘以风筒的截面积, 便求得了通过风筒的流量。

【例 6-13】 风筒的直径 $d=400\text{mm}$, 集流器为 60° 圆锥形, 实验时测得的静压 $p_e=58.84\text{Pa}$, 风温 $t=20^\circ\text{C}$ 。求通过风筒的流速 v 和体积流量 q_v 。

【解】 已知速度系数 $C_v=0.98$, 20°C 空气的密度 $\rho=1.205\text{kg}/\text{m}^3$ 。将已知数据代入式 (6-50), 得

$$v = 0.98 \left(\frac{2 \times 58.84}{1.205} \right)^{1/2} = 9.685 \text{ (m/s)}$$

$$q_V = (\pi \times 0.4^2 / 4) \times 9.685 = 1.217 \text{ (m}^3/\text{s)} = 4381 \text{ (m}^3/\text{h)}$$

二、虹吸管

如图 6-31 所示, 液体由管道从较高液位的一端经过高出液面的管段自动流向较低液位的另一端的现象称为虹吸现象, 所用的管道称为虹吸管。充满液体的虹吸管之所以能够引液自流是由于 2—3 管段中的液体借重力往下流动时, 会在 2 截面处形成一定的真空, 从而把 1 管段中的液体吸上来。显然, 该处的真空越高, 吸上高度也越大。但是 2 截面处的压强最低不能低到该液体在其所处温度下的饱和压强, 否则液体将要汽化, 破坏真空, 从而也就破坏了虹吸作用。为保险计, 吸水虹吸管的吸水高度 h 一般不超过 7m (虽然计算结果可以达到比这还要高一些的数值)。

假设管内流速为 v , 2 截面处的压强为 p_2 , 其真空液柱高为 $(p_a - p_2) / (\rho g) = h_v$; 虹吸管总长为 l , 内径为 d , 沿程损失系数为 λ , 局部损失系数用 $\sum \zeta$ 代表; 1—2 管段的管长用 l_1 代表, 局部损失系数用 $\sum \zeta_1$ 代表, 则对上、下游液面列伯努利方程 (取 $\alpha=1$), 得

$$\frac{p_a}{\rho g} = -H + \frac{p_a}{\rho g} + \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta \right) \frac{v^2}{2g}$$

所以流速
$$v = \left(\frac{2gH}{\lambda l/d + \sum \zeta} \right)^{1/2} \quad (6-51)$$

体积流量
$$q_V = \frac{\pi}{4} d^2 \left(\frac{2gH}{\lambda l/d + \sum \zeta} \right)^{1/2} \quad (6-52)$$

对 1 和 2 截面列伯努利方程 (取 $\alpha=1$), 得

$$\frac{p_a}{\rho g} = h + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + \left(\lambda \frac{l_1}{d} + \sum \zeta_1 \right) \frac{v^2}{2g}$$

所以
$$\frac{(p_a - p_2)}{\rho g} = h_v = h + \left(1 + \lambda \frac{l_1}{d} + \sum \zeta_1 \right) \frac{v^2}{2g} = h + \frac{1 + \lambda l_1/d + \sum \zeta_1}{\lambda l/d + \sum \zeta} H \quad (6-53)$$

若已知液体在所处温度下的饱和压强 p_s , 便可由式 (6-53) 求得允许的吸水高度:

$$h < \frac{p_a - p_s}{\rho g} - \left(1 + \lambda \frac{l_1}{d} + \sum \zeta_1 \right) \frac{v^2}{2g} = \frac{p_a - p_s}{\rho g} - \frac{1 + \lambda l_1/d + \sum \zeta_1}{\lambda l/d + \sum \zeta} H \quad (6-54)$$

【例 6-14】 利用图 6-32 所示虹吸管将水由 I 池引向 II 池。已知管径 $d=100\text{mm}$, 虹吸管总长 $l=20\text{m}$, B 点以前的管段长 $l_1=8\text{m}$, 虹吸管的最高点 B 离上游水面的高度 $h=4\text{m}$, 二水面水位高差 $H=5\text{m}$ 。设沿程损失系数 $\lambda=0.04$, 虹吸管进口局部损失系数 $\zeta_1=0.8$, 出口局部损失系数 $\zeta_0=1$, 弯头的局部损失系数 $\zeta_b=0.9$ 。求引水流量 q_V 和 B 点的真空液柱高 h_v 。假设当地的大气压强 $p_a=10\text{N/cm}^2$, 水温 $t=20^\circ\text{C}$, 水的密度 $\rho=998\text{kg/m}^3$, 水的饱和压强 $p_s=0.242\text{N/cm}^2$, 试问吸水高度 h 不能超过多少米?

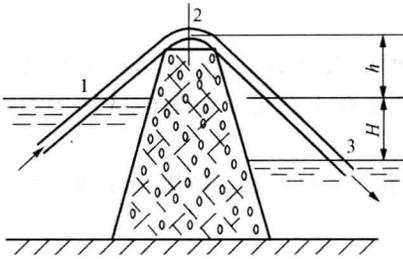


图 6-31 分析虹吸现象用图

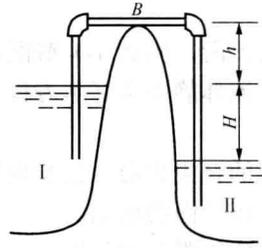


图 6-32 虹吸管

【解】 将已知数据代入式 (6-52), 得引水流量为

$$q_v = \frac{\pi}{4} (0.1)^2 \left[\frac{2 \times 9.807 \times 5}{0.04 \times 20 / 0.1 + (0.8 + 2 \times 0.9 + 1)} \right]^{1/2}$$

$$= 0.0228 (\text{m}^3/\text{s}) = 82 (\text{m}^3/\text{h})$$

代入式 (6-53), 得 B 点的真空水柱高为

$$h_v = 4 + \frac{1 + 0.04 \times 8 / 0.1 + (0.8 + 0.9)}{0.04 \times 20 / 0.1 + (0.8 + 2 \times 0.9 + 1)} \times 5 = 6.54 (\text{m})$$

这就是该虹吸管实际能够达到的吸水高度。

将有关数据代入式 (6-54), 得

$$h < \frac{(10 - 0.242) \times 10^4}{998 \times 9.807} - \frac{1 + 0.04 \times 8 / 0.1 + (0.8 + 0.9)}{0.04 \times 20 / 0.1 + (0.8 + 2 \times 0.9 + 1)} \times 5 = 7.44 (\text{m})$$

这说明, 该虹吸管的吸水高度 6.54m 小于开始汽化的吸水高度, 虹吸作用不会被破坏。

三、薄壁堰

液体越过障壁漫溢的流动称为堰流, 如图 6-33 所示。堰流在水利工程上有着广泛应用; 由于堰流越过堰顶的体积流量与堰顶的淹深有关, 所以也常用薄壁堰来测量流量。薄壁堰按障壁缺口形式可以分为矩形堰与三角形 (V 形) 堰; 矩形堰又可分为 $b < B$ 的缩流堰与 $b = B$ 的平流堰, 如图 6-34 所示。薄壁堰由铅直安置的光滑平板制成, 板的上端为尖锐的堰顶, 见图 6-33。由于液流的不断加速, 液流的自由表面约在堰的上游 $(3 \sim 4)H$ 处即开始下降。当液流漫越堰顶而形成下表面时, 由于流体有惯性, 流线将略微上挑, 形成收缩形的水舌。对于缩流堰, 漫溢的液流不仅有铅直方向的收缩, 而且还有水平方向的收缩。由此可见, 堰流的流形是相当复杂的, 无法得到它严格的分析解, 因而, 只能在大大简化的基础上求出它的近似解, 而后再通过实验测定修正系数, 加以修正。

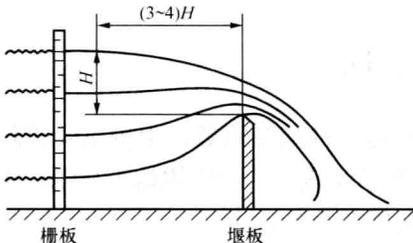


图 6-33 堰流

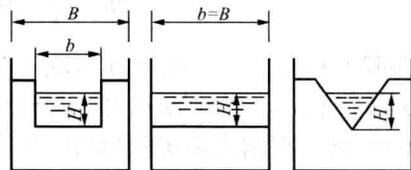


图 6-34 薄壁堰的缺口形式

魏斯巴赫 (Julius Weisbach) 把矩形堰流假设为如图 6-35 所示的理想化流形, 其主要简化假设为:

(1) 堰板上游, 例如 1-1 截面, 所有流体质点的速度大小是均匀的, 方向是平行的, 压强分布服从于流体静力学基本方程式(这一条件可以通过在上游安置如图 6-33 所示的栅板来达到)。

(2) 液流的自由表面直到堰板平面 2-2 都保持水平, 而且通过堰板平面时所有流体质点都作垂直于该平面的运动。

(3) 水舌的压强为大气压。

(4) 不计黏滞力和表面张力的影响。

在这些假设的基础上, 对 1-1 和 2-2 截面应用伯努利方程, 有

$$z_1 + \frac{p_{1e}}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$v_2 = (2g)^{1/2} \left(H - z_2 + \frac{v_1^2}{2g} \right)^{1/2}$$

可见, v_2 随 z_2 而变。通过图 6-35 所示高度为 dz_2 、宽度为 b 的微元矩形面积的流量为 $v_2 b dz_2$, 于是越过堰顶的理想总流量为

$$q_{\text{rid}} = b \int_0^H v_2 dz_2 = \frac{2}{3} b \times (2g)^{1/2} \left[\left(H + \frac{v_1^2}{2g} \right)^{3/2} - \left(\frac{v_1^2}{2g} \right)^{3/2} \right] \quad (6-55)$$

同 H 相比, $v_1^2/(2g)$ 常常是很小的, 可以略去不计, 于是式 (6-55) 简化为

$$q_{\text{rid}} = \frac{2}{3} b (2g)^{1/2} H^{3/2} \quad (6-55a)$$

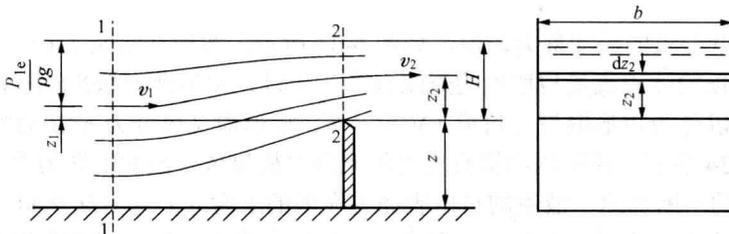


图 6-35 堰流的理想流形

但是, 实际流体有黏性, 液流流过堰板有能量损失, 再考虑到液流自由表面的下降、水舌的收缩等因素的影响, 实际的总流量必定低于理想总流量。因此, 上式必须乘以小于 1 的修正系数 C_w 。于是, 实际总流量可表示为

$$q_v = \frac{2}{3} C_w (2g)^{1/2} b H^{3/2} = C_q b H^{3/2} \quad (6-56)$$

与式 (5-42) 相同。式中 $C_q = 2C_w(2g)^{1/2}/3$, 称为矩形堰流的流量系数, 由校正实验测定。当 b 、 H 以 m 计, q_v 以 m^3/s 计时, $C_q = 1.9 \sim 2.2$ 。对于测量水流量的斜切锐边矩形堰, 瑞布珂 (Th. Rehbock) 根据大量实验归纳出计算修正系数 C_w 的经验公式为

$$C_w = 0.605 + 0.08 \frac{H}{z} + \frac{1}{1000H} \quad (6-57)$$

可见，在通常情况下，影响修正系数的主要是堰板的高度和淹深。但当淹深很小时，必须考虑黏滞力和表面张力的影响，式（6-57）不能应用。

对于图 6-36 所示的三角形（V 形）堰，在与矩形堰同样的假设条件下，按照同样的步骤可得

$$q_{vd} = \frac{8}{15} (2g)^{1/2} H^{5/2} \tan \frac{\theta}{2} \quad (6-58)$$

同理，式（6-58）应用于实际流体时也应乘以修正系数 C_w' ，于是实际总流量为

$$q_v = \frac{8}{15} C_w' (2g)^{1/2} H^{5/2} \tan \frac{\theta}{2} = C_q' H^{5/2} \tan \frac{\theta}{2} \quad (6-59)$$

式中： $C_q' = 8C_w' (2g)^{1/2} / 15$ 称为三角形堰流的流量系数，由校正实验测定。对于 $B \geq 4b$ 的有斜切锐边的三角形堰，当 H 以 m 计、 q_v 以 m^3/s 计时， $C_q' \approx 1.4$ 。蓝兹（A. T. Lenz）根据大量实验归纳出计算直角（ $\theta=90^\circ$ ）三角形堰修正系数 C_w' 的经验公式为

$$C_w' = 0.56 + \frac{0.70}{Re^{0.165} We^{0.170}} \quad (6-60)$$

式（6-60）的应用范围为：雷诺数 $Re = H(gH)^{1/2} / \nu > 300$ ，韦伯数 $We = \rho g H^2 / \sigma > 300$ ， $H > 6\text{cm}$ 。当淹深很小时，式（6-60）不能应用。

第十一节 液体出流

在工程实际中经常会遇到液体经孔口和管嘴出流的问题。例如储液容器的泄空，孔板等节流装置的出流，水闸闸孔的出流，采煤水枪和消防龙头的出流等。

孔口有薄壁孔口和厚壁孔口之分。 d 代表孔口直径， s 代表容器壁厚或孔口锐缘厚度， $s/d < 1/2$ 的，称为薄壁孔口，如图 6-37（a）所示； $2 < s/d \leq 4$ 的，称为厚壁孔口。外伸管嘴（一般 $s/d = 3 \sim 4$ ）实际上就是厚壁孔口，如图 6-37（b）所示。

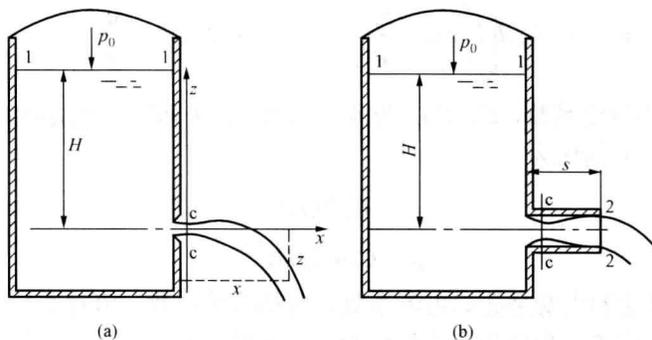


图 6-37 薄壁孔口和管嘴出流

孔口有小孔口与大孔口之分。下面即将讨论，液体出流的速度决定于孔口处的计示静水

头 $H + (p_0 - p_a)/(\rho g)$ 。工程上通常当 $[H + (p_0 - p_a)/(\rho g)]/d > 10$ 时, 认为孔口截面上各点的计示静水头差异很小, 可以忽略各点速度的差异, 称为小孔口; 当 $[H + (p_0 - p_a)/(\rho g)]/d \leq 10$ 时, 必须计及上述差异, 称为大孔口。

液体的出流有自由出流和淹没出流之分。液体通过孔口流入大气的, 称为自由出流, 如图 6-37 所示; 液体通过孔口流入液体空间的, 称为淹没出流, 如图 6-38 所示孔板流量计孔口的出流。

本节主要讨论薄壁孔口和管嘴定常出流的基本概念和流动规律, 分析由实验确定的表征出流性能の出流系数, 并简要介绍薄壁孔口的非定常出流。

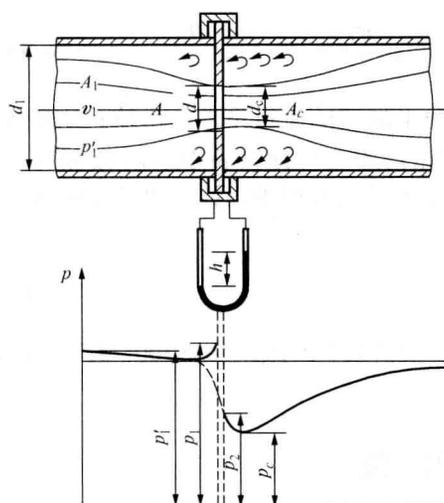


图 6-38 孔板流量计

一、薄壁孔口定常出流

1. 薄壁小孔口定常出流

如图 6-37 (a) 所示, 当液体经孔口自由出流时, 由于流线不能突然折转, 出流流束的截面将逐渐收缩, 在离孔口约 $d/2$ 的 $c-c$ 处收缩到最小截面 (缩颈)。这里流线近似平行, 可以视为缓变流截面。缩颈收缩的程度用收缩系数 C_c 表示, 它等于缩颈的截面积 A_c 与孔口的截面积 A 之比, 即 $C_c = A_c/A$ 。孔口截面积与容器的 1-1 截面积 A_1 之比用 m 代表, 即 $m = A/A_1$ 。已知孔口中心线以上的液深为 H , 液面压强为 p_0 。对于小孔口的定常出流, $A_1 \gg A$, $v_1 = 0$, 于是对截面 1-1 和 $c-c$ 列总流的伯努利方程 (取 $\alpha = 1$), 有

$$H + \frac{p_0}{\rho g} = \frac{v_c^2}{2g} + \frac{p_a}{\rho g} + \zeta \frac{v_c^2}{2g}$$

$$\text{缩颈处平均流速} \quad v_c = \frac{1}{(1+\zeta)^{1/2}} \left[2 \left(gH + \frac{p_0 - p_a}{\rho} \right) \right]^{1/2} = C_v \left[2 \left(gH + \frac{\Delta p}{\rho} \right) \right]^{1/2} \quad (6-61)$$

$$\text{孔口出流流量} \quad q_V = C_v C_c A \left[2 \left(gH + \frac{\Delta p}{\rho} \right) \right]^{1/2} = C_q A \left[2 \left(gH + \frac{\Delta p}{\rho} \right) \right]^{1/2} \quad (6-62)$$

式中, $C_v = (1+\zeta)^{-1/2}$ 为流速系数, $C_q = C_v C_c$ 为流量系数。倘若容器上面是敞口的, 即 $p_0 = p_a$, 则式 (6-61)、式 (6-62) 简化为

$$v_c = C_v (2gH)^{1/2} \quad (6-63)$$

$$q_V = C_q A (2gH)^{1/2} \quad (6-64)$$

表征孔口出流性能的主要是孔口出流系数, 包括收缩系数、流速系数和流量系数。

(1) 收缩系数: 它表示出流流束收缩的程度。实验证明, 在一定范围内侧壁离孔口的距离将影响流束的收缩和出流流量。

全部收缩: 出流流束的全部周界都发生收缩。如图 6-39 中的孔口 1, 各边离侧壁的距离均大于孔口边长的 3 倍以上, 侧壁对流束的收缩没有影响, 称之为完善收缩。完善收缩的收

缩系数 C_c 随雷诺数 $Re=(2gH)^{1/2}d/\nu$ 变化的实验曲线如图 6-40 所示, 当 $Re \geq 10^5$ 时, $C_c=0.62 \sim 0.63$ (较小的孔口取较大的值)。如图 6-39 中的孔口 2, 有的边离侧壁的距离小于孔口边长的 3 倍, 在这一边流束的收缩受侧壁的影响而减弱, 称之为非完善收缩。其收缩系数可按下式估算:

$$C_c = 0.63 + 0.37(A/A')^2 \quad (6-65)$$

式中: A' 为孔口所在壁面的湿润面积。非完善收缩的流量系数将比完善收缩的大。

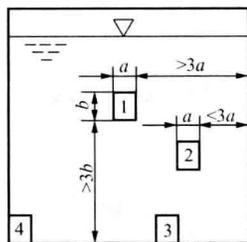


图 6-39 侧壁对出流流束收缩的影响

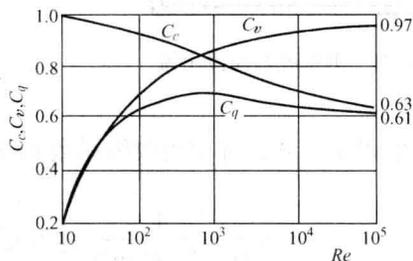


图 6-40 薄壁孔口的出流系数

部分收缩: 出流流束的周界只有部分发生收缩。如图 6-39 中的孔口 3、4, 其周界沿侧壁的部分无收缩。部分收缩的收缩系数可按式 (6-66) 估算:

$$C_c = 0.63(1 + kl/\chi) \quad (6-66)$$

式中: l 为无收缩周界的长度; χ 为孔口的周长; k 为孔口的形状系数 (圆孔口 $k=0.13$)。

(2) 流速系数: $(2gH)^{1/2}=v_0$ 是理想流体薄壁小孔口的出流流速公式, 由此式和式 (6-63) 可知, 流速系数 $C_v=v_c/v_0$ 是实际流速与理想流速之比。局部损失越大, 流速系数和实际流速越小。根据式 (6-61) 也可得出同样的结论。流速系数可通过对孔口出流流束的实测求得。如图 6-37 (a) 所示 (仍假设 $p_0=p_a$), 流束射入大气, 流体微团的运动方程为

$$x = v_c t, y = gt^2/2$$

消去 t , 得 $v_c = x[g/(2y)]^{1/2}$; 代入式 (6-63), 得

$$C_v = \frac{x}{2} \left(\frac{1}{Hy} \right)^{1/2} \quad (6-67)$$

测得 H 、 x 和 y , 由式 (6-67) 便可求得 C_v 的实验值。流速系数随雷诺数的变化如图 6-40 所示。当 $Re \geq 10^5$ 时, $C_v=0.97$ 。由流速系数的定义式得局部损失系数为

$$\zeta = 1/C_v^2 - 1 \quad (6-68)$$

将 $C_v=0.97$ 代入, 得 $\zeta=0.06$ 。

(3) 流量系数: $A(2gH)^{1/2}=q_{v0}$ 是理想流体薄壁小孔口的出流流量公式, 由此式和式 (6-64) 可知, 流量系数 $C_q=q_v/q_{v0}$, 是实际流量与理想流量之比。通过实验测得 H 、 A 和 q_v , 代入式 (6-64), 便可求得 C_q 的实验值。流量系数随雷诺数的变化如图 6-40 所示。当 $Re \geq 10^5$ 时, $C_q=0.61 \sim 0.62$ 。

通过实验求得 C_v 、 C_q 后, 按式 (6-69) 求得收缩系数的实验值:

$$C_c = C_q/C_v \quad (6-69)$$

如图 6-41 所示, 当液体经孔口淹没出流时, 按照与上述同样的分析可得薄壁小孔口定常淹没出流的流速和流量计算公式, 仍为式 (6-61)、式 (6-62); 当 $p_0=p_a$ 时, 则仍为式 (6-63)、

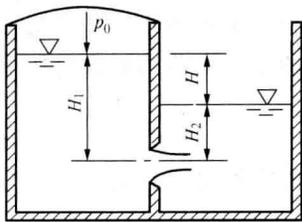


图 6-41 薄壁孔口淹没出流

(6-64)。而且, 流速系数 C_v 和流量系数 C_q 的数值也相同, 只是这里的 H 为两液面的高度差。

2. 薄壁大孔口定常出流

对于大孔口定常自由出流, $v_1 \neq 0$, H 应保持不变。对图 5-37 (a) 中的截面 1-1 和 c-c 列连续方程和总流伯努利方程 (取 $\alpha=1$) 有

$$A_1 v_1 = A_c v_c$$

$$H + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} = \frac{v_c^2}{2g} + \frac{p_a}{\rho g} + \zeta \frac{v_c^2}{2g}$$

联立求解以上二式, 并引用收缩系数 C_c 和面积比 m , 得

$$v_c = \frac{1}{(1 + \zeta - C_c^2 m^2)^{1/2}} \left[2 \left(gH + \frac{p_0 - p_a}{\rho} \right) \right]^{1/2} = C_v \left[2 \left(gH + \frac{\Delta p}{\rho} \right) \right]^{1/2} \quad (6-70)$$

$$q_v = C_v C_c A \left[2 \left(gH + \frac{\Delta p}{\rho} \right) \right]^{1/2} = C_q A \left[2 \left(gH + \frac{\Delta p}{\rho} \right) \right]^{1/2} \quad (6-71)$$

式中: $C_v = (1 + \zeta - C_c^2 m^2)^{-1/2}$ 为薄壁大孔口出流的流速系数, $C_q = C_v C_c$, 为流量系数。由式 (6-61)、式 (6-62) 与式 (6-70)、式 (6-71) 的比较可以看出, 大孔口与小孔口出流流速和流量的计算公式形式上完全相同 [大孔口的收缩系数同样按式 (6-65) 进行估算], 它们的差别主要在于出流系数不同。

对于液体经大孔口的淹没出流, 流速和流量的计算公式仍为式 (6-70)、式 (6-71), 其中 H 为两液面的高度差。

孔板流量计是电厂中测量给水和蒸汽流量常用的节流装置。孔板由不锈钢制成, 孔板的圆孔与管道同心。用它测定流体流量的基本原理是: 由于在管道中安置了孔板, 流束在孔板前方一定距离处开始收缩, 在孔板后某距离处达到最小截面 (缩颈), 接着逐渐扩大到整个管道截面, 如图 6-38 所示。随着流束的收缩, 流速增大, 静压下降。流体通过孔板时, 有能量损失, 而且这种损失随着流速的增大而增大。当管道内的流量变化时, 孔板前后便会产生不同的压降 Δp , 借助于测量孔板前后的压降, 便可计算出流量来。

经孔板的流动属于薄壁大孔口淹没出流。对照式 (6-70)、式 (6-71), 由于管道流动中没有自由液面的高度差, 故 $H=0$; 其中的 Δp 也不是自由液面上的压强与大气压强之差, 而应是图 6-38 所示管道中截面 A_1 与缩颈截面 A_c 处的压强之差 $p_1' - p_c$ 。但是, 实际孔板的取压位置并不在截面 A_1 与 A_c 处, 而是在靠近孔板的两侧 (见图 6-38), 实际测得的压强 p_1 与 p_2 同截面 A_1 与 A_c 处的压强 p_1' 与 p_c 不一样。再考虑管道粗糙度与孔板圆孔进口边缘不尖锐度等因素的影响。当用实测的 p_1 与 p_2 代替 p_1' 与 p_c 时, 应当用系数 ξ 加以修正, 即

$$v_c = \frac{\xi}{(1 + \zeta - C_c^2 m^2)^{1/2}} \left(\frac{2\Delta p}{\rho} \right)^{1/2} = C_v \left[\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho} \right]^{1/2} \quad (6-72)$$

$$q_v = C_v C_c A \left(\frac{2\Delta p}{\rho} \right)^{1/2} = C_q A \left[\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho} \right]^{1/2} \quad (6-73)$$

式中： $C_v = \xi / (1 + \zeta - C_c^2 m^2)^{1/2}$ 为孔板的流速系数， $C_q = C_v C_c$ 为孔板的流量系数，它们是孔板的面积比 m 和雷诺数 $Re (=v_1 d_1 / \nu)$ 的函数，由实验求出。标准孔板的流量系数 C_q 列于表 6-4，表中 Re_l 为极限雷诺数。由实验已知，对于给定的标准孔板的 m 值， C_q 随 Re 的增大而减小，当 $Re \geq Re_l$ 时， C_q 不再随 Re 变化，而等于常数。表中所列均系这些常数值。如果管流的 $Re < Re_l$ ，则查得的 C_q 应乘以黏度修正系数 K_μ ； K_μ 可按实际工况计算的 Re 和 m 从图 6-42 中查得。非表内所列管径或 m 值的 C_q ，可按内插法推算。

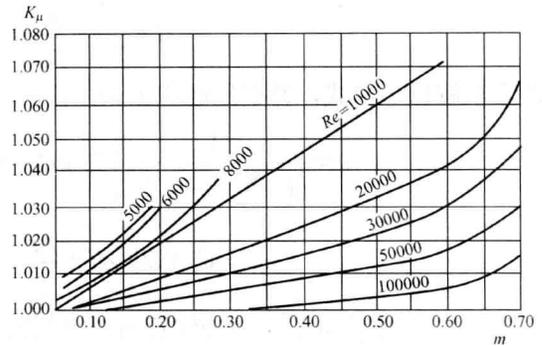


图 6-42 标准孔板的黏度修正系数

表 6-4 标准孔板的流量系数 C_q

m	管径 d_1 (mm)				
	50	100	200	≥ 300	Re_l
0.05	0.6128	0.6092	0.6043	0.6010	2.3×10^4
0.10	0.6162	0.6117	0.6069	0.6034	3.0×10^4
0.15	0.6220	0.6171	0.6119	0.6086	4.5×10^4
0.20	0.6293	0.6238	0.6183	0.6150	5.7×10^4
0.25	0.6387	0.6327	0.6269	0.6240	7.5×10^4
0.30	0.6492	0.6428	0.6368	0.6340	9.3×10^4
0.35	0.6607	0.6541	0.6479	0.6450	11.0×10^4
0.40	0.6764	0.6695	0.6631	0.6600	13.0×10^4
0.45	0.6934	0.6859	0.6794	0.6760	16.0×10^4
0.50	0.7134	0.7056	0.6987	0.6950	18.5×10^4
0.55	0.7355	0.7272	0.7201	0.7160	21.0×10^4
0.60	0.7610	0.7523	0.7447	0.7400	24.0×10^4
0.65	0.7909	0.7815	0.7733	0.7680	27.0×10^4
0.70	0.8270	0.8870	0.8079	0.8020	30.0×10^4

注 已考虑入口边缘不尖锐度以及管道粗糙度的修正

二、外伸管嘴（厚壁孔口）定常出流

如图 6-37 (b) 所示，当液体经外伸锐缘管嘴自由出流时，由于流线不能突然折转，流束将收缩，并在截面 $c-c$ 处出现缩颈，而后流束又逐渐扩展，充满整个管嘴。由于流束的收缩发生在管嘴内，在收缩的流束与管壁之间将形成一小的旋涡区。整个管嘴的能量损失分成三部分：进口损失，用局部损失系数 ζ_1 表示；缩颈后的扩大损失，可按突然扩大计算，用局部损失系数 ζ_2 表示；管嘴后半段的沿程损失，可用等值局部损失系数 $\zeta_e = \lambda S' / d$ 表示， S' 为管嘴后半段的长度， d 为管嘴的内径。仍以 A 代表管嘴的截面积，以 v 代表出流平均速度，则对截面 1-1 和 2-2 列连续方程和总流伯努利方程（取 $\alpha=1$ ），有

$$A_1 v_1 = A v$$

$$H + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} = \frac{v^2}{2g} + \frac{p_a}{\rho g} + \sum \zeta \frac{v^2}{2g}$$

联立求解以上二式, 并引用面积比 m , 得

$$v = \frac{1}{(1 + \sum \zeta - m^2)^{1/2}} \left[2 \left(gH + \frac{p_0 - p_a}{\rho} \right) \right]^{1/2} = C_v \left[2 \left(gH + \frac{\Delta p}{\rho} \right) \right]^{1/2} \quad (6-74)$$

$$q_v = C_v A \left[2 \left(gH + \frac{\Delta p}{\rho} \right) \right]^{1/2} = C_q A \left[2 \left(gH + \frac{\Delta p}{\rho} \right) \right]^{1/2} \quad (6-75)$$

式中: $C_v = (1 + \sum \zeta - m^2)^{-1/2}$ 为外伸管嘴出流的流速系数; $C_q = C_v$, 是由于这里没有外收缩, 收缩系数 $C_c = 1$, 故流量系数等于流速系数。外伸管嘴出流流速和流量的计算公式形式上与前面的对应公式完全相同, 它们的差别仍然在于出流系数的不同。

对于厚壁小孔口, $m^2 \approx 0$, $C_v \approx 1/(1 + \sum \zeta)^{1/2}$ 。 $\sum \zeta$ 中的 ζ_1 可按能量损失相等的原则由缩颈前液流的收缩损失 $\zeta_c \frac{v^2}{2}$ 换算得出, 如果取 $\zeta_c = 0.06$, 则有

$$\zeta_1 = \zeta \left(\frac{v_c}{v} \right)^2 = \zeta \left(\frac{A}{A_c} \right)^2 = \frac{0.06}{(0.63)^2} = 0.15$$

突然扩大的损失系数为

$$\zeta_2 = \left(\frac{A}{A_c} - 1 \right)^2 = \left(\frac{1}{0.63} - 1 \right)^2 = 0.34$$

如果取 $\lambda = 0.02$, $s'/d = 2$, 则等值局部损失系数为

$$\zeta_c = \lambda \frac{s'}{d} = 0.02 \times 2 = 0.04$$

$\sum \zeta = 0.53$, 结合实测取 $\sum \zeta = 0.5$, 则厚壁小孔口出流的流速系数

$$C_v = \frac{1}{(1 + \sum \zeta)^{1/2}} = \frac{1}{(1 + 0.5)^{1/2}} = 0.82$$

它也是流量系数的数值, 比薄壁小孔口出流的流量系数 0.61~0.62 大。这就是说, 在相同条件下, 尽管经厚壁小孔口的能量损失比经薄壁小孔口的能量损失大, 但经厚壁小孔口出流的流量却等于经薄壁小孔口出流流量的 1.3 倍多。对这一物理现象分析如下: 对图 6-37 (b) 的截面 1-1 和 c-c 列总流的伯努利方程 (取 $\alpha = 1$) 为

$$H + \frac{p_0}{\rho g} = \frac{v_c^2}{2g} + \frac{p_c}{\rho g} + \zeta \frac{v_c^2}{2g} = \frac{p_c}{\rho g} + (1 + \zeta) \frac{v_c^2}{2g}$$

将 $v_c^2 = \left(\frac{q_v}{A_c} \right)^2 = \left(\frac{C_q A}{A_c} \right)^2 \times 2 \left(gH + \frac{p_0 - p_a}{\rho g} \right)$ 代入上式, 得

$$p_c = \rho g H + p_0 - (1 + \zeta) (C_q A / A_c)^2 (\rho g H + p_0 - p_a)$$

将 $\zeta = 0.06$ 、 $C_q = 0.82$ 、 $A_c/A = 0.63$ 、 $p_0 = p_a + p_c$ 代入上式, 得

$$p_c = p_a - 0.79(\rho g H + p_c) \quad (6-76)$$

可见, 缩颈处的压强低于大气压强, 处于真空状态。正是该处真空的抽吸作用使流量增大。

要保持管嘴内的真空，一是管嘴长度不能太短（一般取 $s/d=3\sim 4$ ），太短将使流束未及充分扩展便流出管外，大气将在流束与管壁间流入管内，破坏真空；二是缩颈处的压强 p_c 不能低于液体的饱和压强 p_s ，否则，在缩颈附近的漩涡区将出现气穴，产生大量气泡，不仅破坏管嘴内的真空，而且破坏管嘴内的正常流动。根据 $p_c > p_s$ 的要求，由式（6-76）可得保持管嘴内真空的条件为

$$\rho g H + p_c < 1.26(p_a - p_s) \quad (6-77)$$

当 $p_0 = p_a$ ($p_c = 0$) 时

$$H < 1.26(p_a - p_s) / (\rho g) \quad (6-78)$$

三、各种管嘴的出流系数

工业上根据使用目的和要求的不同，还常采用如图 6-43 所示的其他形式的管嘴。它们的流速和流量的计算公式形式上都是相同的，只是它们的出流系数不同，出流系数的实验值见表 6-5。为了便于比较，图、表中均有薄壁孔口，而且所有孔口和管嘴的进口截面面积都等于 A ，所有出流系数都是对应于出口截面流动参数的数值。

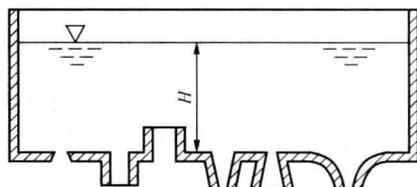


图 6-43 孔口与管嘴

表 6-5

孔口与管嘴的出流系数

名称	损失系数 ζ	收缩系数 C_c	流速系数 C_v	流量系数 C_q
薄壁孔口	0.06	0.63	0.97	0.61
外伸管嘴 (厚壁孔口)	0.5	1	0.82	0.82
内伸管嘴	1	1	0.71	0.71
收缩管嘴 ($\theta=13^\circ\sim 14^\circ$)	0.09	0.98	0.96	0.95
扩张管嘴 ($\theta=5^\circ\sim 7^\circ$)	4	1	0.45	0.45
流线型管嘴	0.04	1	0.98	0.98

下面简要介绍其他几种形式管嘴的出流特性，供选用时参考。

(1) 内伸管嘴：其出流情况与外伸管嘴差不多，但在进口处扰动较大，损失大于外伸管嘴，相应的流速系数、流量系数均小于外伸管嘴。这种管嘴多用于外形需要平整、隐蔽的地方。

(2) 收缩管嘴：这种管嘴的流束除有管内收缩外，还有出口外收缩，但在内收缩后不需要充分扩张，因而总损失较小，相应的流速系数、流量系数均较大。这种管嘴出口截面较小，出流速度虽高，但出流流量并不大。这种管嘴的出流系数均随收缩锥顶角 θ 而变，流速系数随 θ 的增大而增大，当 $\theta=13^\circ\sim 14^\circ$ 时流速系数达最大值，而后便随 θ 的增大而减小。这种管嘴多用于需要较大出流速度的场所，如消防、水力采煤、水力喷砂和冲击式水轮机等。

(3) 扩张管嘴：这种管嘴的扩张损失较大，因而总损失较大，相应的流速系数较小。这种管嘴的真空比外伸管嘴还大，因而抽吸作用较大。虽然流量系数只有 0.45（换算到进口截面的流量系数将很大），但由于出口截面积大，实际流量将是这几种管嘴中最大的。这种管嘴的出流系数均随扩张锥顶角 θ 而变。 $\theta \leq 7^\circ$ 时，流束附着壁面，管嘴内的真空得以保持； $\theta > 7^\circ$ 时，流束脱离壁面，大气将在管壁与流束间流入管嘴，破坏真空。这种管嘴多用于需要低流速大流量的场所，如水轮机尾水管、喷射水泵、文丘里流量计等。

(4) 流线形喷嘴: 这种喷嘴的流束既没有内收缩, 也没有外收缩, 流动损失最小, 相应的流速系数、流量系数最大。但是, 这种管嘴没有真空抽吸作用, 实际流量并不很大。另外, 由于管嘴为流线形, 加工困难, 所以实际较少采用。

【例 6-15】 如 6-44 所示, 薄壁容器侧壁上有一小孔口, 其直径 $d=20\text{mm}$, 孔口中心线以上水深 $H=5\text{m}$, 试求孔口的出流流速 v_c 和流量 q_v 。倘若在孔口上外接一长 $l=8d$ 的短管, 取短管进口损失系数 $\zeta=0.5$, 沿程损失系数 $\lambda=0.02$, 试求短管的出流流速 v' 和流量 q_v' 。

【解】 已知薄壁小孔口的 $C_v=0.97$, $C_q=0.61$, 故由式 (6-63)、式 (6-64) 得

$$v_c = C_v(2gH)^{1/2} = 0.97(2 \times 9.807 \times 5)^{1/2} = 9.6 \text{ (m/s)}$$

$$q_v = C_q A(2gH)^{1/2} = 0.61(\pi \times 0.02^2 / 4)(2 \times 9.807 \times 5)^{1/2} = 0.0019 \text{ (m}^3/\text{s)}$$

对于短管 $C'_v = (1 + \zeta + \lambda l/d)^{-1/2} = (1 + 0.5 + 0.02 \times 8)^{-1/2} = 0.776$

故由式 (6-74)、式 (6-75) 得

$$v' = C'_v(2gH)^{1/2} = 0.776(2 \times 9.807 \times 5)^{1/2} = 7.7 \text{ (m/s)}$$

$$q'_v = C'_q A(2gH)^{1/2} = 0.776(\pi \times 0.02^2 / 4)(2 \times 9.807 \times 5)^{1/2} = 0.0024 \text{ (m}^3/\text{s)}$$

可见, 装接短管的出流流量是孔口出流流量的 1.27 倍, 但比装接外伸管嘴的出流流量小。

【例 6-16】 图 6-45 所示两水箱中间的隔板上有一直径 $d_0=80\text{mm}$ 的薄壁小孔口, 水箱底部装有外伸管嘴, 它们的内径分别为 $d_1=60\text{mm}$, $d_2=70\text{mm}$ 。如果将流量 $q_v=60\text{L/S}$ 的水连续地注入左侧水箱, 试求在定常出流时两水箱的液深 H_1 、 H_2 和出流流量 q_{v1} 、 q_{v2} 。

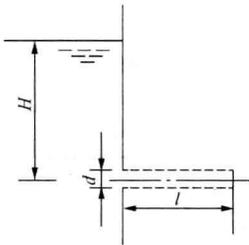


图 6-44 孔口与短管出流的比较用图

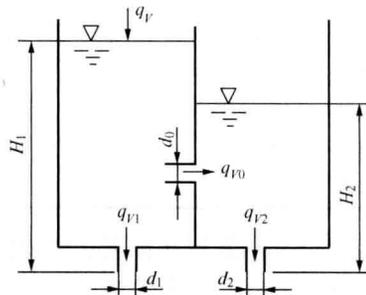


图 6-45 水箱管嘴出流

【解】 根据连续方程和式 (6-64)、式 (6-75) 有

$$q_v = q_{v1} + q_{v2} \quad (\text{a})$$

$$q_{v0} = q_{v2} \quad (\text{b})$$

$$q_{v0} = C_{q0} A_0 [2g(H_1 - H_2)]^{1/2} \quad (\text{c})$$

$$q_{v1} = C_{q1} A_1 (2gH_1)^{1/2} \quad (\text{d})$$

$$q_{v2} = C_{q2} A_2 (2gH_2)^{1/2} \quad (\text{e})$$

将式 (c)、(e) 代入式 (b), 得

$$H_1 = \left[1 + \left(\frac{C_{q2} A_2}{C_{q0} A_0} \right)^2 \right] H_2 = \left[1 + \left(\frac{C_{q2}}{C_{q0}} \right)^2 \left(\frac{d_2}{d_0} \right)^4 \right] H_2 \quad (\text{f})$$

代入式 (d) 后, 再连同式 (e) 一起代入式 (a), 得

$$H_2 = \frac{q_V^2}{2g} \left\{ C_{q1} A_1 \left[1 + \left(\frac{C_{q2} A_2}{C_{q0} A_0} \right)^2 \right]^{1/2} + C_{q2} A_2 \right\}^{-2}$$

$$= \frac{8q_V^2}{g\pi^2} \left\{ C_{q1} d_1^2 \left[1 + \left(\frac{C_{q2}}{C_{q0}} \right)^2 \left(\frac{d_2}{d_0} \right)^4 \right]^{1/2} + C_{q2} d_2^2 \right\}^{-2}$$

取 $C_{q1}=C_{q2}=0.82$, $C_{q0}=0.61$, 连同已知数据代入上式, 得

$$H_2 = \frac{8 \times 0.06^2}{9.807\pi^2} \left\{ 0.82 \times 0.06^2 \left[1 + \left(\frac{0.82}{0.61} \right)^2 \left(\frac{0.07}{0.08} \right)^4 \right]^{1/2} + 0.82 \times 0.07^2 \right\}^{-2} = 4.367 \text{ (m)}$$

代入式 (f), 得

$$H_1 = \left[1 + \left(\frac{0.82}{0.61} \right)^2 \left(\frac{0.07}{0.08} \right)^4 \right] 4.376 = 8.993 \text{ (m)}$$

代入式 (d)、(e), 得

$$q_{V1} = 0.82(\pi \times 0.06^2 / 4)(2 \times 9.807 \times 8.993)^{1/2} = 0.0308 \text{ (m}^3/\text{s)}$$

$$q_{V2} = 0.82(\pi \times 0.07^2 / 4) \times (2 \times 9.807 \times 4.376)^{1/2} = 0.0292 \text{ (m}^3/\text{s)}$$

由式 (a) 可以看出, 上述计算是正确的。

四、薄壁孔口非定常出流

在工程上还会遇到薄壁孔口非定常出流问题, 例如盛液容器的放空或充满, 容器中液位的变化形成变水头作用下的孔口出流问题; 又如各类液体缓冲器和阻尼减振装置, 液体经阻尼孔由缸体的一侧流入另一侧, 形成变压强作用下的孔口出流问题。这些都是孔口的非定常出流问题。但是当孔口面积远小于容器的截面积时, 由于液体的升降或压强的变化缓慢, 惯性力可以忽略不计。这样, 在 dt 微元时段内, 可以认为水头或压强不变, 而按准定常流来处理。

图 6-46 所示为一变截面容器, 横截面积 A_1 是位标 z 的函数; 容器底部开有薄壁孔口, 截面积为 A 。现在讨论工程上常遇到的泄流时间计算问题。假设某瞬时 t 容器内的液位为 z , 此时孔口出流流量 $q_V=C_q A(2gz)^{1/2}$; 在 dt 时间内, 出流液位下降了 dz 。由于出流的液体体积应等于容器中液体下降的体积, 故有

$$C_q A(2gz)^{1/2} dt = -A_1(z) dz$$

等号右端加负号, 是因为当 dt 为正时 dz 为负。由上式的积分可以求出液位由 H_1 降至 H_2 所需的时间:

$$t = \int_0^t dt = \frac{1}{C_q A(2g)^{1/2}} \int_{H_1}^{H_2} -A_1(z)(z)^{-1/2} dz \quad (6-79)$$

对于等截面容器, $A_1(z)=A_1$, 完成式 (6-79) 的积分, 得

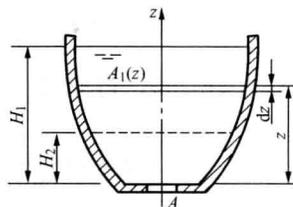


图 6-46 变水头孔口出流

$$t = \frac{2A_1}{C_q A} \left[\left(\frac{H_1}{2g} \right)^{1/2} - \left(\frac{H_2}{2g} \right)^{1/2} \right] \quad (6-80)$$

令式(6-80)中的 $H_2=0$, $H_1=H$, 则得液深为 H 的等截面容器的放空时间为

$$t = \frac{2A_1}{C_q A} \left(\frac{H}{2g} \right)^{1/2} = \frac{2A_1 H}{C_q A (2gH)^{1/2}} \quad (6-81)$$

式中, $A_1 H = V$ 为等截面液柱的体积, $C_q A (2gH)^{1/2} = q_V$ 为在水头 H 作用下的出流流量。可见, 等截面容器中液体的放空时间等于在恒定的初始水头作用下放出同样体积液体所需时间的 2 倍。

倘若容器上安装的不是薄壁孔口, 而是其他类型的管嘴或短管, 上述各式仍然适用, 只是流量系数应选用各自的数值。

倘若是液体充满容器, 如图 6-47 的右侧容器所示, 采用图中的参考坐标时, 上述各式仍然适用(即按上述方法分析和计算, 其结果完全相同)。

【例 6-17】 图 6-48 所示为直径 4m 的球罐, 球体内装满某种液体, 液体经底部直径为 100mm 的外伸管嘴向外出流。试求球罐内的液体放出一半和全部放空时所需要的时间 t_1 和 t_2 。

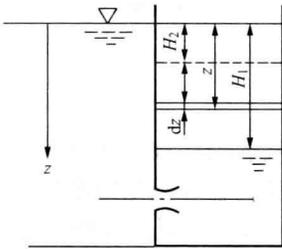


图 6-47 容器的充满

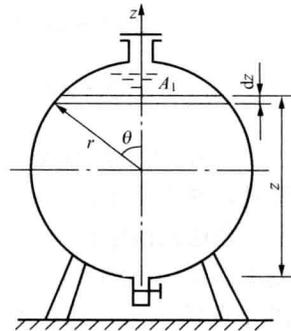


图 6-48 球罐

【解】 由图可得

$$z = r + r \cos \theta, \quad dz = -r \sin \theta d\theta, \quad A_1(z) = \pi r^2 \sin^2 \theta$$

代入式(6-79), 得放出一半液体所需的时间为

$$t_1 = \frac{1}{C_q A (2g)^{1/2}} \int_{2r}^r A_1(z) (z)^{-1/2} dz = \frac{\pi r^{5/2}}{C_q A (2g)^{1/2}} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 \theta}{(1 + \cos \theta)^{1/2}} d\theta$$

由于

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 \theta}{(1 + \cos \theta)^{1/2}} d\theta = [-2 \sin^2 \theta (1 + \cos \theta)^{1/2}]_0^{\pi/2} + 4 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos \theta)^{1/2} \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$= -2 + 4 \left\{ \left[-\frac{2}{3} \cos \theta (1 + \cos \theta)^{3/2} \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{2}{3} (1 + \cos \theta)^{3/2} \sin \theta d\theta \right\}$$

$$= -2 + \frac{2^{9/2}}{3} - \frac{8}{3} \left[-\frac{2}{5} (1 + \cos \theta)^{5/2} \right]_0^{\pi/2} = -2 + \frac{2^{9/2}}{3} + \frac{16}{15} (1 - 2^{5/2}) = 0.5752$$

故
$$t_1 = \frac{4 \times 2^{5/2}}{0.82 \times 0.1^2 (2 \times 9.807)^{1/2}} \times 0.5752 = 358.4(\text{s})$$

全部放空的时间
$$t_2 = \frac{\pi r^{5/2}}{C_q A (2g)^{1/2}} \int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta}{(1 + \cos \theta)^{1/2}} d\theta$$

由于
$$\int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta}{(1 + \cos \theta)^{1/2}} d\theta = \frac{2^{9/2}}{3} - \frac{16}{15} \times 2^{5/2} = 1.509$$

故
$$t_2 = \frac{4 \times 2^{5/2}}{0.82 \times 0.1^2 (2 \times 9.807)^{1/2}} \times 1.509 = 940.2(\text{s})$$

可见，球罐中的液体全部放空的时间是只放出其上面一半的时间的 2.6 倍多。

第十二节 水 击 现 象

工业水管中流动着有一定压强的水，当管道中的阀门迅速关闭时，水受阻而流速突然变小，水的惯性使局部压强突然升高。这种突然升高的压强首先出现在紧贴阀门上游的一层流体中，而后迅速地向上传播，并在一定条件下反射回来，产生往复波动而引起管道振动。当管中出现水击时，常常会听到一种轰轰的振动声，就是这种水流波动和管道振动的结果。在各种泵的运行过程中，某些意外的原因使泵突然停止运转，以致液体的流速突然变化，在管道中也会出现这种水击现象。

水击现象的出现将影响管道系统的正常流动和水泵的正常运转，压强很高的水击还可能造成管道和管件破裂。通过慢关阀门或装置安全阀等措施，可防止水击现象的出现或阻止水击的发展。但水击也有它可以利用的一面，例如水锤泵（水锤扬水机）便是利用水击能量泵水的一例。

一、水击现象的描述

下面以连接在水池上的排水管道为例分析水击的全过程。假设水管的长度为 l ，直径为 d ，截面积为 A ，管道内水的正常流速为 v 。忽略摩擦损失，但考虑水的可压缩性和管道的变形。当水管末端的闸阀突然关闭时（ $t=0$ ），首先，紧贴阀门上游的一层流体，由于受阀门所阻，流速突变为零，而这层流体受后面流来的未变流速的流体的压缩，其压强突增了 p_h （称为水击压强），静水头便由高度 H 突变为 $H+h$ ；管道受压变形，截面积扩大了 δA 。这种压缩必然一层一层地向上游传播，形成压缩波（压强波的一种），其传播速度用 c 代表，如图 6-49（a）所示。当压缩波达到管道进口时（ $t=l/c$ ），整个管道内流体处于静止状态，并处在压强 $p+p_h$ （或水头 $H+h$ ）的作用之下，流体的动能转变为压缩流体的和管道变形的弹性能。

管道内流体的压强为 $p+p_h$ ，而管道进口以外的压强为 p ，这就出现了不平衡的条件，管道内的流体不能保持静止状态，流体便从进口端开始以 v 的速度倒流入池内。倒流使管内流体的压强降低到 p （或水头 H ），原先被压缩的流体得到膨胀，管道截面也恢复到 A 。这种压强的降低也是一层一层地向下游传播的，形成膨胀波（压强波的一种），其传播的速度也是 c ，如图 6-49（b）所示。当 $t=2l/c$ 时，传播到阀门，这时整个管道内的流体以 v 的速度往池内倒

流, 压强恢复正常。

由于阀门是关闭的, 流体的继续倒流必然引起阀门左面的压强进一步降低, 直到靠近阀门的一层流体停止倒流, 这时压强降低到 $p-p_h$ (或水头 $H-h$)。低压使流体更加膨胀、管道收缩。这种膨胀也是一层一层地以速度 c 向上游传播。膨胀波所到之处, 倒流停止, 如图 6-49 (c) 所示。当 $t=3l/c$ 时, 膨胀波传到管道进口, 这时整个管道内的流体再次处于静止状态, 而压强为 $p-p_h$ 。

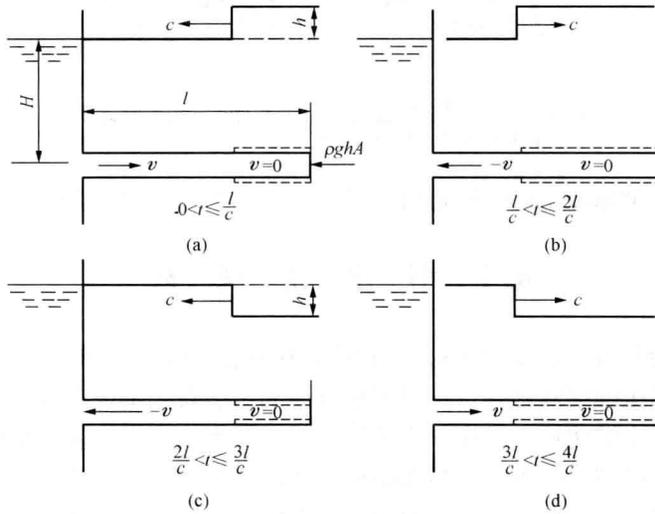


图 6-49 阀门突然关闭时水击现象的全过程

管道内流体的压强为 $p-p_h$, 而管道进口以外流体的压强为 p , 又出现不平衡的条件, 管道内的流体仍不能保持静止状态, 流体便从进口端开始以 v 的速度再次流入, 其压强又上升到 p , 原先更加膨胀的流体得到压缩, 压缩波以 c 的速度向下游传播, 如图 6-49 (d) 所示。当 $t=4l/c$ 时, 传播到阀门, 这时整个管道内流体的流动状态恢复到阀门关闭前的状态, 完成一个循环。

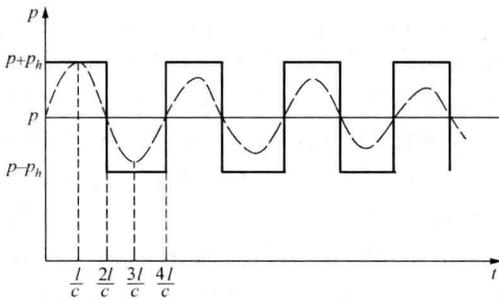


图 6-50 闸阀处压强随时间的变化

这样, 每经过 $4l/c$, 便重复一次水击的全过程, 流体中的压缩波与膨胀波往复传播; 与它们的传播相适应, 管道也在一胀一缩地振动。如此循环往复, 形成轰轰的振动声。由于实际流体有黏性, 流体和管材又不是完全弹性的, 因此它们在压缩、膨胀和变形的过程中都要消耗能量, 以致上述波动和振动的强度将逐渐衰减, 直到完全消失。图 6-50 所示为上述情况下闸阀处压强随时间的变化。

二、水击压强

假如突然把正在流着流体的管道阀门关闭, 经过 δt 的时间后, 压缩波向左传播了 $c\delta t$ 一段距离, 如图 6-51 所示。在该管段中, 原来以速度 v 向右流动的流体的流速变为零, 原来为 p 的压强升高到 $p+p_h$, 管道的截面积则由 A 扩大到 $A+\delta A$ 。由于可以认为, 新增环面上的力是相互平衡的, 故作用在该管段内流体上的诸力沿管轴的合力为

$$-(p+p_h)A+pA = -p_hA$$

该管段内流体的质量应等于该管段内原有流体的质量加上上游补充进来的流体质量, 即

$$\rho c \delta t A + \rho v \delta t A = \rho A (c+v) \delta t$$

式中: ρ 为正常流动时流体的密度。根据动量方程有

$$-p_h A = \rho A (c+v) \delta t (0-v) / \delta t = -\rho A (c+v)v$$

$$p_h = \rho (c+v)v \quad (6-82)$$

由于 $v \ll c$, 故式 (6-82) 可改写为

$$p_h = \rho c v \quad (6-82a)$$

假设压缩波在水管中的传播速度 $c \approx 1000 \text{m/s}$, 管内水的流速 $v=1 \text{m/s}$, 当阀门突然关闭时, 水击压强 $p_h \approx 10^6 \text{Pa}$, 相当于 9.87 个标准大气压。可见, 水击所引起的压强增量是相当可观的。

三、压强波的传播速度

根据质量不灭定律, 压缩波经过管段内流体质量的增量应当等于上游来流补充进去的质量, 即

$$(\rho + \delta\rho)(A + \delta A)c \delta t - \rho A c \delta t = \rho A v \delta t$$

略去高阶微量, 得

$$v = c \left(\frac{\delta\rho}{\rho} + \frac{\delta A}{A} \right)$$

$$\frac{\delta A}{A} = \frac{(d + \delta d)^2 - d^2}{d^2} = 2 \frac{\delta d}{d}$$

其中也略去了高阶微量。代入上式, 得

$$v = c \left(\frac{\delta\rho}{\rho} + 2 \frac{\delta d}{d} \right) \quad (a)$$

由第二章的式 (2-9) 知, 流体的体积模量

$$K = \frac{\delta p}{\delta V/V} = \rho \frac{\delta p}{\delta\rho}, \quad \frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\delta p}{K}$$

在水击中则应为

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{p_h}{K} \quad (b)$$

如果 s 代表管壁厚度, 由材料力学已知:

$$\text{管壁的切向正应力} \quad \sigma = \frac{d}{2s} p_h$$

$$\text{管壁的切向线应变} \quad \varepsilon = \frac{\pi(d + \delta d) - \pi d}{\pi d} = \frac{\delta d}{d}$$

代入虎克定律 $\sigma = E\varepsilon$, 得

$$\frac{\delta d}{d} = \frac{p_h d}{2Es} \quad (c)$$

式中: E 为管壁的弹性模量。将式 (b)、(c) 代入式 (a), 得

$$v = c \left(\frac{1}{K} + \frac{d}{Es} \right) p_h \quad (d)$$

将式 (d) 代入式 (6-82a), 消去 p_h , 得压强波的传播速度为

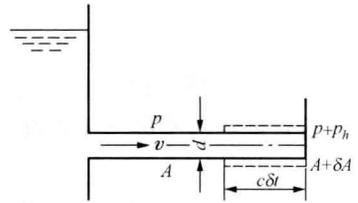


图 6-51 水击压强的计算用图

$$c = \left[\frac{K/\rho}{1 + Kd/(Es)} \right]^{1/2} = \frac{c_0}{[1 + Kd/(Es)]^{1/2}} \quad (6-83)$$

对膨胀波的传播,也可导出同样的结果。

若管壁绝对刚硬(无弹性), $E \rightarrow \infty$, 则

$$c = c_0 = (K/\rho)^{1/2} \quad (6-84)$$

这是牛顿关于压强波在无界流体中的传播速度。例如压强波在无界水中的传播速度近似地等于

$$c_0 = (2 \times 10^9 / 998)^{1/2} \approx 1420 \text{ (m/s)}$$

当考虑管壁的变形时,压强波的传播速度慢了 $[1 + Kd/(Es)]^{-1/2}$ 倍。

四、直接水击和间接水击 减弱水击的措施

前面讨论的是阀门突然关闭的情形。实际上,阀门不可能突然完全关闭,而是在一定时间内逐渐关闭。这样管内的流速也是由 v 逐渐变到零,压强也是由 p 逐渐增高到 $p + p_h$, 如图 6-52 中的斜线 1、2 所示。如果将阀门在一定时间内的逐渐关闭视为在相同时间内的无数个连续的微小突然关闭,则与之对应的自然是无数个连续的微小速度降低和微小压强增高。每个微小压强增高都将形成一道微弱压缩波,以波速 c 向上游传播;当该波到达管道进口时,又反射为膨胀波,以波速 c 传播回来。显然第一道膨胀波到达阀门的时间应为 $2l/c$ 。这样,阀门的逐渐关闭将形成无数道向上游传播的微弱压缩波阵,它们将在管道进口反射为向下游传播的膨胀波阵,并与后来的微弱压缩波相交;当它们到达阀门时还将反射为压强更低的膨胀波。可见,这类水击波的计算是相当复杂的。根据专业要求,可不进行这方面的讨论,但必须了解直接水击和间接水击的概念。

直接水击:阀门关闭的时间 $t_s < 2l/c$, 即第一道反射的膨胀波还没到达阀门时阀门已经完全关闭,阀门处将产生最大的水击压强 p_h 。这种水击称为直接水击。

间接水击:阀门关闭的时间 $t_s > 2l/c$, 即反射的膨胀波陆续到达阀门时阀门还没完全关闭,阀门处的压强将达不到最大水击压强 p_h , 而只能达到某一水击压强 p_h' , 如图 6-52 所示。阀门关闭时间 t_s 比 $2l/c$ 大得越多,阀门处的水击压强越低。这种水击称为间接水击。

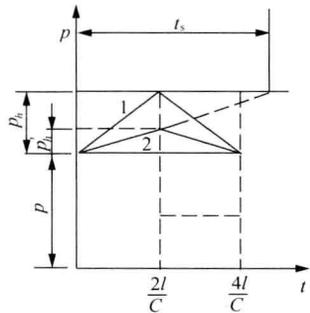


图 6-52 阀门逐渐关闭时阀门处的压强变化

减弱水击的措施有:

- (1) 避免直接水击,在可能时尽量延长间接水击时的阀门关闭时间;
- (2) 采用过载保护,在可能产生水击的管道中设置蓄能器、调压塔或安全阀等以缓冲水击压强;
- (3) 可能时减低管内流速,缩短管长,使用弹性好的管道等。

第十三节 气穴和气蚀简介

一、气穴

如前所述,在离心水泵的进水口,虹吸管的最高管段和外伸管嘴流束的缩颈处,都会形成一定的真空,即该处的绝对压强低于大气压强。而且随着流速的增高,压强将进一步降低。

当压强降低到空气分离压 p_g 时, 原先以气核形式 (肉眼看不见) 溶解在液体中的气体便开始游离出来, 膨胀成小气泡; 当压强继续降低到液体在其温度下的饱和压强 p_s 时, 液体开始汽化, 产生大量的小气泡, 并继续产生更多的小气泡。它们将汇集成较大的气泡, 泡内充满着蒸汽和游离气体。这种由于压强降低而产生气泡的现象前已述及, 称为气穴 (空泡) 现象。

二、气蚀

气泡被液流带走。当液流流到下游高压区时, 气泡内的蒸汽迅速凝结, 气泡突然溃灭。气泡溃灭的时间很短, 只有几百分之一秒, 而产生的冲击力却很大, 气泡溃灭处的局部压强高达几个甚至几十兆帕, 局部温度也急剧上升。大量气泡的连续溃灭将产生强烈的噪声和振动, 严重影响液体的正常流动和流体机械的正常工作; 气泡连续溃灭处的固体壁面也将在这种局部压强和局部温度的反复作用下发生剥蚀, 这种现象称为气蚀。剥蚀严重的流体机械将无法继续工作。气蚀机理是尚在研究中的问题。主要说法有二: ①认为气泡突然溃灭时, 周围的流体快速冲向气泡空间, 它们的动量在极短的时间内变为零, 因而产生很大的冲击力, 该冲击力反复作用在壁面上, 形成剥蚀; ②认为气泡在高压区突然溃灭时, 将产生压强冲击波, 此冲击波反复作用在壁面上, 形成剥蚀。很可能这两种情况都存在。

三、气穴系数

气穴系数是判断气穴的标准。如果易发生气穴处液流的绝对压强为 p 、密度为 ρ 、截面平均流速为 v 、液体的饱和压强为 p_s , 则气穴系数 σ 被定义为

$$\sigma = \frac{p - p_s}{\rho v^2 / 2} \quad (6-85)$$

显然, 液流的压强越低或液体的饱和压强越高 (液温越高), 气穴系数越小, 发生气穴的可能性越大。当 σ 减小到某一数值 σ_f 时, 开始出现气穴, 便称 σ_f 为初生气穴系数 (或临界气穴系数)。初生气穴系数的大小与液体的种类、液体中溶解气体的多少和液体的温度等因素有关, 由实验确定。

一般情况下, 水中溶解的气体不超过 2%, 人们常常认为当 $p=p_s$ 时开始出现气穴, 即初生气穴系数 $\sigma_f=0$ 。因此, 像离心水泵进水口和虹吸管最高管段的压强均应高于液体在该温度下的饱和压强, 以防气穴和气蚀的发生。油中溶解的气体可达 6%~12%, 因此当 $p=p_g$ 时便会出现气穴, 而 $p_g>p_s$, 根据实验一般要取初生气穴系数 $\sigma_f=0.4$ 。例如, 对于油压系统中的节流孔口, 当 $\sigma>0.4$ 时, 不会出现气穴; 当 $\sigma\leq 0.4$ 时, 一般便会出现节流孔口气穴。

习 题

6-1 半径为 r_0 的管中流动是层流, 流速恰好等于管内平均流速的地方与管轴之间的距离 r 等于多大? [0.707r₀]

6-2 沿直径 $d=200\text{mm}$ 的管道输送润滑油, 流量 $q_m=9000\text{kg/h}$, 润滑油的密度 $\rho=900\text{kg/m}^3$, 运动黏度冬季为 $\nu=0.0001092\text{m}^2/\text{s}$, 夏季为 $\nu=0.0000355\text{m}^2/\text{s}$ 。试分别判断冬、夏两季润滑油在管中的流动状态。 [Re: 162, 496]

6-3 图 6-53 所示为蒸汽轮机的凝汽器, 它有 400 条管径 $d=20\text{mm}$ 的黄铜管, 在这些管子中循环地流着冷却水。为了保证更迅速地散热, 管内需要形成稳定的紊流 ($Re=33000$),

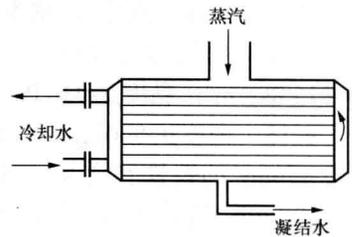


图 6-53 习题 6-3 示意图

试求温度 10°C 的冷却水的流量。

[135.6kg/s]

6-4 欲使镀锌铁管内雷诺数 $Re=3.5\times 10^5$ 的流动是水力光滑的, 管子的直径至少要等于多大?

[0.311m]

6-5 用水在直径为 30cm 的水平管道上做沿程损失实验, 在相距 120m 的两点用水银压差计(上面为水)测得水银柱高度差为 33cm, 已知流量为 $0.23\text{m}^3/\text{s}$, 问沿程损失系数等于多少?

[0.0193]

6-6 当 $Re=10^5$ 时, 直径多大的镀锌铁管的沿程损失系数与 30cm 直径铸铁管的相同?

[0.242m]

6-7 运动黏度 $\nu=4\times 10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$ 的流体在直径 $d=1\text{cm}$ 的管内以 $v=4\text{m/s}$ 的速度流动, 求每米管长上的沿程损失。

[5.22m 流体柱/m]

6-8 喷泉的喷嘴为一截头圆锥体, 其长度 $l=0.5\text{m}$, 两端的直径 $d_1=40\text{mm}$, $d_2=20\text{mm}$, 竖直装置。若将计示压强 $p_{1c}=9.807\times 10^4\text{Pa}$ 的水引入喷嘴, 喷嘴的能量损失 $h_w=1.6\text{m}$ (水柱), 不计空气阻力, 试求喷出的流量 q_V 和射流上升的高度 H 。

[0.004m³/s, 8.44m]

6-9 输油管的直径 $d=150\text{mm}$, 长 $l=5000\text{m}$, 出口端比进口端高 $h=10\text{m}$, 输送油的流量 $q_m=15489\text{kg/h}$, 油的密度 $\rho=859.4\text{kg/m}^3$, 进口端的油压 $p_i=49\times 10^4\text{Pa}$, 沿程损失系数 $\lambda=0.03$, 试求出口端的油压 p_o 。

[3.712 $\times 10^5$ Pa]

6-10 水管直径 $d=250\text{mm}$, 长度 $l=300\text{m}$, 绝对粗糙度 $\varepsilon=0.25\text{mm}$, 已知流量 $q_V=95\text{L/s}$, 运动黏度 $\nu=0.000001\text{m}^2/\text{s}$, 试求沿程损失为多少米水柱。

[4.582m 水柱]

6-11 加热炉消耗 $q_m=300\text{kg/h}$ 的重油, 重油的密度 $\rho=880\text{kg/m}^3$, 运动黏度 $\nu=0.000025\text{m}^2/\text{s}$ 。如图 6-54 所示, 压力油箱位于喷油器轴线以上 $h=8\text{m}$ 处, 而输油管的直径 $d=25\text{mm}$, 长度 $l=30\text{m}$ 。求喷油器前重油的计示压强?

[62504Pa]

6-12 发动机润滑油的用量 $q_V=0.4\text{cm}^3/\text{s}$, 油从压力油箱经一输油管供给(见图 6-55), 输油管的长度 $l=5\text{m}$, 直径 $d=6\text{mm}$ 。油的密度 $\rho=820\text{kg/m}^3$, 运动黏度 $\nu=0.000015\text{m}^2/\text{s}$ 。设输油管终端压强等于大气压强, 求压力油箱所需的位置高度 h 。

[0.09621m]

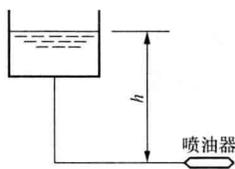


图 6-54 习题 6-11 示意图

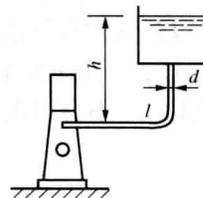


图 6-55 习题 6-12 示意图

6-13 15°C 的空气流过直径长度 $l=200\text{m}$ 、 $d=1.25\text{m}$ 、绝对粗糙度 $\varepsilon=1\text{mm}$ 的管道, 已知沿程损失 $h_f=8\text{cm}$ (水柱), 试求空气的流量 q_V 。

[25.24m³/s]

6-14 用长度 $l=15\text{m}$ 、直径 $d=12\text{mm}$ 的低碳钢排油管排出油箱中的油。已知油的密度 $\rho=815.8\text{kg/m}^3$, 黏度 $\mu=0.01\text{Pa}\cdot\text{s}$, 油面比管道出口高出 $H=2\text{m}$, 求油的流量。

[54.29L/s]

6-15 密度 $\rho=860\text{kg/m}^3$ 、运动黏度 $\nu=5\times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$ 的轻柴油通过长 $l=150\text{m}$ 、绝对粗糙度 $\varepsilon=0.45\text{mm}$ 的铸铁管道从一油池被输送到油库内。出油端比吸入端高 $H=25\text{m}$, 要求流量 $q_m=10^5\text{kg/h}$, 假设油泵能够产生的压强 $p_i=3.43\times 10^5\text{Pa}$, 只计沿程损失, 试求必需的管道直径。

[0.1111m]

6-16 用新铸铁管输送 25°C 的水, 流量 $q_V=300\text{L/s}$, 在长度 $l=1000\text{m}$ 的管道上沿程损失为

$h_f=2\text{m}$ (水柱), 试求必需的管道直径。 [0.5757m]

6-17 已知油的密度 $\rho=800\text{kg/m}^3$, 黏度 $\mu=0.069\text{Pa}\cdot\text{s}$, 在图 6-56 所示连接两容器的光滑管中流动, 已知 $H=3\text{m}$ 。当计及沿程和局部损失时, 管内的流量为多少? [0.2559 m^3/s]

6-18 假设在 6-17 题的管道中安装一阀门, 当调整阀门使得管内流量减小到原流量的一半时, 问阀门的局部损失系数 ζ 等于多少? 按该管道换算的等值长度 l_e 等于多少? [12.89, 109m]

6-19 如图 6-57 所示, 运动黏度 $\nu=0.00000151\text{m}^2/\text{s}$ 、流量 $q_V=15\text{m}^3/\text{h}$ 的水在管径 $d=50\text{mm}$, 绝对粗糙度 $\varepsilon=0.2\text{mm}$ 的 90° 弯管中流动, 已知水银压差计连接点之间的距离 $l=0.8\text{m}$, 差压计中水银面高度差 $h=20\text{mm}$, 试求弯管的损失系数。 [0.618]

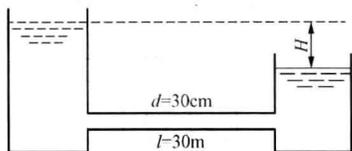


图 6-56 习题 6-17 示意图

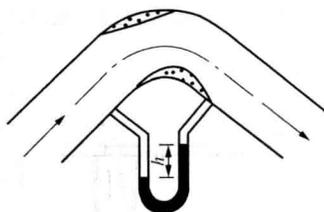


图 6-57 习题 6-19 示意图

6-20 图 6-58 所示为管径由 $d_1=50\text{mm}$ 突然扩大到 $d_2=100\text{mm}$ 的管道, 流过流量 $q_V=16\text{m}^3/\text{h}$ 的水。在截面改变处插入内充四氯化碳 ($\rho=1600\text{kg/m}^3$) 的压差计, 读得的液面高度差 $h=173\text{mm}$ 。试求管径突然扩大处的损失系数, 并把求得的结果与按理论计算的结果相比较。 [0.5404, 理论值 0.5625]

6-21 自鼓风机站供给高炉车间的空气量 $q_V=120000\text{m}^3/\text{h}$, 空气温度 $t=20^\circ\text{C}$, 运动黏度 $\nu=0.0000157\text{m}^2/\text{s}$; 输气管总长 $l=120\text{m}$ 、绝对粗糙度 $\varepsilon=0.5\text{mm}$, 其中有五个弯曲半径 $R_1=2.6\text{m}$ 的弯曲处、四个弯曲半径 $R_2=1.3\text{m}$ 的弯曲处, 还有两个局部损失系数 $\zeta=2.5$ 闸阀; 已知输气管中空气的流速 $v=25\text{m/s}$, 热风炉进口处的计示压强 $p_{ie}=156896\text{Pa}$, 试求输气管的直径 d 和鼓风机出口处的计示压强 p_{oe} 。 [1.3m, 160016Pa]

6-22 如图 6-59 所示, 在三路管状空气预热器中, 将流量 $q_m=5816\text{kg/h}$ 的空气从 $t_1=20^\circ\text{C}$ 加热到 $t_2=160^\circ\text{C}$ 。预热器高 $H=4\text{m}$, 预热器管系的损失系数 $\zeta=6$ (对管内平均流速而言), 管系的截面积 $A_1=0.4\text{m}^2$, 连接箱的截面积 $A_2=0.8\text{m}^2$, 管径与拐弯处曲率半径的比值 $d/R=1$ 。若不计沿程损失, 试按空气的平均温度计算流经预热器的总压降 Δp 。 [169.7Pa]

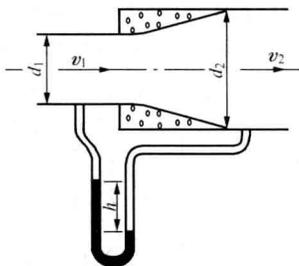


图 6-58 习题 6-20 示意图

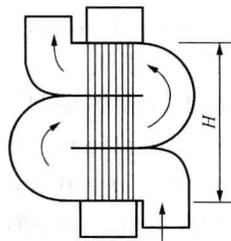


图 6-59 习题 6-22 示意图

6-23 容器中的水经过锐边进口流入图 6-60 所示可用于测试新阀门压强降的管系。钢管的内径均为 50mm , 绝对粗糙度为 0.04mm ; 90° 弯管的管径与弯管中心线的曲率半径之比为

0.1. 当水泵的流量稳定在 $12\text{m}^3/\text{h}$ 时, 水银压差计的示数为 150mm , 试求: 经过阀门的压强降; 阀门的局部损失系数; 阀门前的计示压强; 水泵供给水的功率。

[18535Pa, 12.86, 13358Pa, 109.9W]

6-24 图 6-61 所示为某中压锅炉的过热器。已知无缝钢管的内径 $d=35\text{mm}$ 、绝对粗糙度 $\varepsilon=0.08\text{mm}$, 在总长 $L=24\text{m}$ 的管道上有 13 个弯头, 每个弯头的局部损失系数 $\zeta=0.2$, 进口局部损失系数 $\zeta_i=0.7$, 出口局部损失系数 $\zeta_o=1.1$, 蒸汽的流量 $q_V=0.026\text{m}^3/\text{s}$, 温度 $t=423^\circ\text{C}$, 运动黏度 $\nu=1.98\times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$, 密度 $\rho=12.8\text{kg}/\text{m}^3$, 过热器出口的蒸汽压强 $p_2=3.923\times 10^6\text{Pa}$, 试求过热器进口的蒸汽压强 p_1 。

[4.022×10⁶Pa]

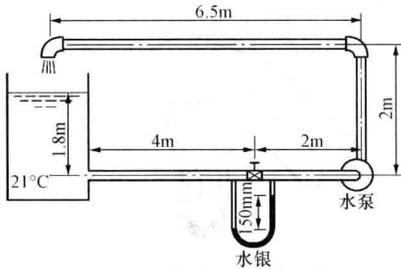


图 6-60 习题 6-23 示意图

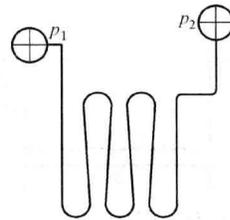


图 6-61 习题 6-24 示意图

6-25 往车间送水的输水管道由两管段串联而成, 管壁的绝对粗糙度都为 $\varepsilon=0.5\text{mm}$, 第一管段的长度 $l_1=800\text{m}$ 、直径 $d_1=150\text{mm}$, 第二管段的长度 $l_2=600\text{m}$ 、直径 $d_2=125\text{mm}$ 。设压力水塔具有的水头为 $H=20\text{m}$, 不计局部损失, 试求在阀门全开时的最大可能流量 q_V 。

[17L/s]

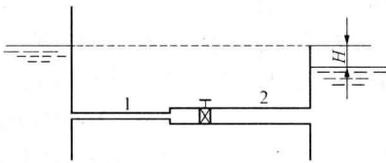


图 6-62 习题 6-26 示意图

6-26 两个容器用两段新的低碳钢管连接起来 (见图 6-62), 已知, $l_1=30\text{m}$, $d_1=20\text{cm}$, $l_2=60\text{m}$, $d_2=30\text{cm}$, 管 1 为锐边进口, 管 2 上阀门的损失系数 $\zeta=3.5$, 当流量 $q_V=0.2\text{m}^3/\text{s}$ 时, 试求必需的总水头 H 。

[11.08m]

6-27 在两个容器之间用两根并联的管道连接起来, 管道都是铸铁管, $l_1=2500\text{m}$, $d_1=1.2\text{m}$, $l_2=2000\text{m}$, $d_2=1\text{m}$, $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0.00045\text{m}$, 已知两容器间的总水头 $H=3.6\text{m}$, 试求

[2.795m³/s]

20°C 的水的总流量 q_V 。

6-28 在总流量为 $q_V=25\text{L}/\text{s}$ 的输水管中, 接入两个并联管道, 已知 $l_1=500\text{m}$, $d_1=10\text{cm}$, $\varepsilon_1=0.2\text{mm}$, $l_2=900\text{m}$, $d_2=15\text{cm}$, $\varepsilon_2=0.5\text{mm}$ 。试求沿此并联管道的流量分配以及在并联管道进口和出口间的水头损失。

[8.49L/s, 16.51L/s, 7.58m]

6-29 图 6-63 所示为物料烘干器的并联蛇形管, 粗管 1 长 $L_1=8\text{m}$, 内径 $d_1=25\text{mm}$, 绝对粗糙度 $\varepsilon_1=0.25\text{mm}$; 细管 2 长 $L_2=14\text{m}$, 内径 $d_2=10\text{mm}$, 绝对粗糙度 $\varepsilon_2=0.11\text{mm}$; 粗管和细管的管件形成的局部损失系数分别为 $\Sigma\zeta_1=4.2$ 和 $\Sigma\zeta_2=5.2$ 。蒸汽的流量 $q_m=0.01\text{kg}/\text{s}$, 温度 $t=180^\circ\text{C}$, 平均的密度 $\rho=5\text{kg}/\text{m}^3$ 、动力黏度 $\mu=15.1\times 10^{-6}\text{Pa}\cdot\text{s}$, 不计压缩性, 试求粗管、细管的流量 q_{m1} 、 q_{m2} 和压降 Δp 。

[0.00926kg/s, 0.00074kg/s, 608.3Pa]

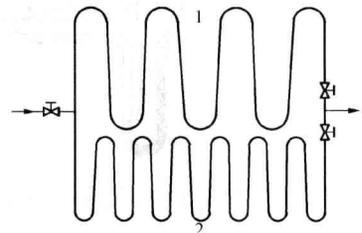


图 6-63 习题 6-29 示意图

6-30 已知图 6-64 所示系统 $l=1200\text{m}$, $d=0.6\text{m}$, $\varepsilon=0.5\text{mm}$, $H=12\text{m}$, 水泵特性如下表所列, 试求通过的流量 q_V 。

$H_p(\text{m})$	23.8	21	18	15	12	9	6
$q_V(\text{m}^3/\text{s})$	0.01	0.07	0.106	0.134	0.154	0.166	0.168
$\eta(\%)$	0	54	70	80	73	60	40

[0.1539m³/s]

6-31 如图 6-65 所示的分支管道系统, 已知 $l_1=300\text{m}$, $d_1=0.3\text{m}$, $\varepsilon_1=1.5\text{mm}$, $z_1=15\text{m}$; $l_2=300\text{m}$, $d_2=0.3\text{m}$, $\varepsilon_2=1.5\text{mm}$; $l_3=300\text{m}$, $d_3=0.2\text{m}$, $\varepsilon_3=0.5\text{mm}$, $z_3=24\text{m}$; $l_4=900\text{m}$, $d_4=0.2\text{m}$, $\varepsilon_4=0.5\text{m}$, $z_4=30\text{m}$; 水泵安装在地面上, 水泵特性与习题 6-30 的相同, 求进入第 3、4 容器的流量 q_{V3} 、 q_{V4} 和汇合处 J 的静水头线高度 h_{J0} 。

[0.06053m³/s, 0.01515m³/s, 31.39m]

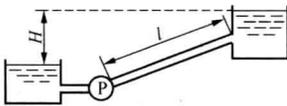


图 6-64 习题 6-30 示意图

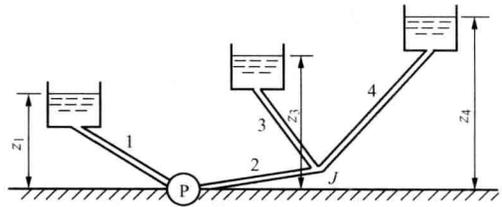


图 6-65 习题 6-31 示意图

6-32 如图 6-66 所示之管网, 已知管长 $AB=AC=150\text{m}$, $BD=CE=250\text{m}$, $AD=AE=DF=EF=300\text{m}$, 管径均为 0.4m , F 点的计示压强为 50kPa , 取沿程损失系数 $\lambda=0.03$ 。忽略局部损失, 试确定各管的流量和 A 、 B 、 C 点的压强。

[0.009m³/s, 0.009m³/s, 0.209m³/s, 0.209m³/s, 0.191m³/s, 0.191m³/s, 0.1m³/s, 0.1m³/s; 83.11kPa, 83.06kPa, 83.06kPa]

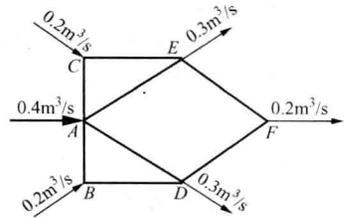


图 6-66 习题 6-32 示意图

6-33 用虹吸管将油从容器中引出。虹吸管由两根 $d_1=10\text{cm}$ 的光滑管用靠得很近的回转弯管连接而成, 管的长度和安装位置如图 6-67 所示, 管的末端 A 连接一长 $l=15\text{cm}$ 、出口直径 $d_2=5\text{cm}$ 的喷嘴, 它的损失可按 $0.1v_2^2/(2g)$ 计算。油的密度 $\rho=800\text{kg/m}^3$, 黏度 $\mu=0.01\text{Pa}\cdot\text{s}$; 试求通过该虹吸管的流量 q_V 及 A 、 B 两点的计示压强 p_{Ae} 、 p_{Be} 。

[13.59L/s, 18707Pa, -19329Pa]

6-34 离心式水泵把车间中的凝结水以 $q_V=50\text{m}^3/\text{h}$ 的流量吸送到锅炉房, 水温 $t=60^\circ\text{C}$; 水泵吸水管的总长 $l=6\text{m}$, 直径 $d=100\text{mm}$, 具有两个弯曲半径 $R=200\text{mm}$ 的 90° 弯曲处和一损失系数 $\zeta=2.5$ 的进水阀。沿程损失系数 $\lambda=0.028$ 。按照规定的条件, 水泵进口处的压强应比饱和压强高 $1.96\times 10^4\text{Pa}$, 水在 60°C 时的饱和压强 $p_s=1.96\times 10^4\text{Pa}$ (绝对)。设大气压强 $p_a=1.013\times 10^5\text{Pa}$ 。试求水泵在水面以上的最大容许安装高度 h_s 。

[5.566m]

6-35 有一封闭大水箱, 经直径 $d=12.5\text{mm}$ 的薄壁小孔口定常出流, 已知水头 $H=1.8\text{m}$, 流量 $q_V=1.5\text{L/s}$, 流量系数 $C_q=0.6$, 试求液面上气体的计示压强。

[1.899×10⁵Pa]

6-36 薄壁容器上锐缘小孔口的直径 $d=7.5\text{mm}$, 孔口中心线以上水头 $H=1.2\text{m}$, 出流流量 $q_m=8\text{kg/min}$ 。当流束的横向射程 $x=1.25\text{m}$ 时, $z=0.35\text{m}$ 。试求孔口的流速系数、流量系数、收缩系数和损失系数。

[0.964, 0.621, 0.645, 0.076]

6-37 如图 6-68 所示, 密度为 900kg/m^3 的油从直径 2cm 的孔口射出, 射到口外挡板上的

冲击力为 20N, 已知孔口前油液的计示压强为 45000Pa, 出流流量为 2.29L/s。试求孔口出流的流速系数、流量系数和收缩系数。 [0.970, 0.729, 0.752]

6-38 如图 6-69 所示, 水箱侧壁上安装一缩放管嘴, 其喉部直径 $d=4\text{cm}$ 。已知 $H=3\text{m}$, 大气压强 $p_a=10.33\text{m}$ (水柱), 喉部压强 $p_c=2.5\text{m}$ (水柱)。管嘴收缩部分的损失忽略不计, 渐扩部分的损失按从 d 突扩至 d_1 时损失的 20% 计算。试求水在喉部的流速 v_c 、流量 q_V 以及出口的流速 v_1 和截面直径 d_1 。 [14.85m/s, 0.0183m³/s, 6.84m/s, 5.84cm]

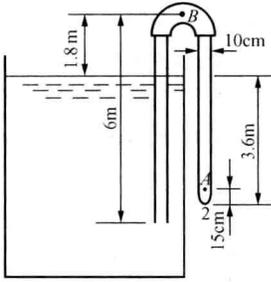


图 6-67 习题 6-33 示意图

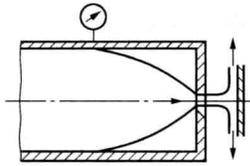


图 6-68 习题 6-37 示意图

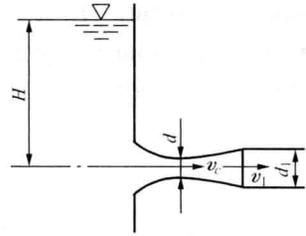


图 6-69 习题 6-38 示意图

6-39 如图 6-70 所示, 水箱中恒定水深 $H=5\text{m}$, 铅直管直径 $d=20\text{cm}$ 。已知 $p_a=1.013\times 10^5\text{Pa}$, $p_{s20}=2340\text{Pa}$, $p_{s60}=20000\text{Pa}$ 。如果忽略损失, 为了不使直管进口处出现气穴, 试求水温分别为 20°C 和 60°C 时的最大允许管长和最大理论流量。 [10.11m, 0.541m³/s; 8.43m, 0.510m³/s]

6-40 图 6-71 所示为装满水的锥台形容器, 其 $d_1=1\text{m}$, $d_2=2\text{m}$, $H=2\text{m}$, 顶盖通大气, 底部中心有一直径 $d=2.5\text{cm}$ 的小孔口, 其流量系数 $C_q=0.60$ 。试求通过小孔口将水放空所需要的时间。 [4883s]

6-41 如图 6-72 所示, 用直径为 d 的管道连接起来的截面积分别为 A_1 和 A_2 的两柱形容器, 液体从左侧容器流向右侧容器, 试求两容器液位差从 H_1 变到 H_2 时所需要的时间。

$$\left[\frac{8A_1A_2(\sum\zeta + \lambda l/d)^{1/2}}{\pi d^2(2g)(A_1 + A_2)} (H_1^{1/2} - H_2^{1/2}) \right]$$

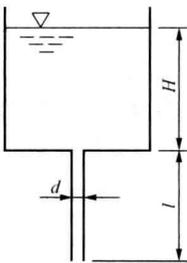


图 6-70 习题 6-39 示意图

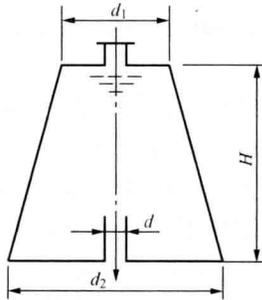


图 6-71 习题 6-40 示意图

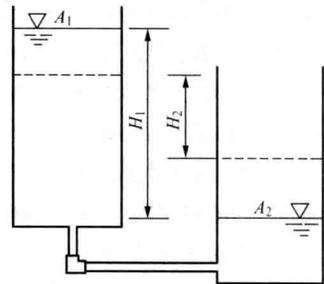


图 6-72 习题 6-41 示意图

第七章 气体的一维流动

在前几章中,除少数问题(例如水击)外,我们都假定流体是不可压缩的,把流体的密度视为常量。这样,简化了许多流动问题的分析和计算。

如前所述,对于通常情况下的液体流动和流速不高、压强变化较小的气体流动,这样的简化是可行的。但是,当气体流速较高时,气体的可压缩性将明显地影响着它的热力学和动力学特性;不可压缩性假设将对实际情况一定程度的偏离,流速越高,这种偏离越大;特别是超过声速的流动,其整个流场的流谱都与低于声速的流动不同。这就是说,对于较高流速的气体流动,必须视密度为变量,按可压缩流来研究。

本章将主要讨论完全气体一维定常流动的基本规律。所谓气体的一维定常流动是指,必须计及流动气体的压缩性,在每个截面上每项流动参数都是同一个值(工程上一般是指截面平均值),这些参数只随一个坐标变量变化,不随时间变化。这种流动在工程上遇到最多的是管道内气体的高速流动。高速管流的中心线可以是直线,也可以是曲线,但曲率应当不大。中心线是直线的,可以是等截面的直管道,如各类气体的输送管道,也可以是截面无急剧变化的变截面直管道,如引射器的直喷管,亚声速和超声速风洞的喷管和扩压器以及喷气发动机的尾喷管等。中心线是曲线的,可以是等截面的弯管道,也可以是截面无急剧变化的变截面弯管道,如斜切喷管、叶栅流道等。把高速管流当做一维流来处理,自然未考虑每个截面内流动状态的细节。但是,这样处理却反映了对工程应用重要的高速管流的主要面貌和规律。

一般情况下,影响管道内气体流动的因素是很多的,例如截面的连续变化、黏性作用、能量效应(与外界换热、燃烧、水汽凝结等)、流量变化(注入或引出)以及化学反应等。但是,在各类实际管流中,各类因素的影响是有主有次的。例如超声速喷管中高温气体的流动,截面是变化的,气体有黏性,流动中有热量损失。但是,喷管的尺寸短小,流速很高,以致气体在喷管内形成的边界层很薄,黏性对流动的影响较小;气流与管壁接触的时间很短,散失的热量占总能量的百分比也很小。这样,便可忽略黏性和传热等次要因素,考虑截面变化这个主要因素,按等熵流找出流动状态随截面变化的规律。而后,在此基础上再考虑次要因素,加以必要的修正。这种方法也是进行科学研究探索未知世界的主要方法。

基于以上分析,根据能源动力类专业教学要求,本章主要讨论微弱压强波的一维传播,气流的特定状态,正激波,以及一维定常的变截面管流、等截面绝热摩擦管流和等温摩擦管流、等截面换热管流。

第一节 微弱压强波的一维传播 声速 马赫数

一、微弱压强波的一维传播

图 7-1 所示直圆管内充满着压强为 p_1 、密度为 ρ_1 、温度为 T_1 的静止气体。倘若管内的活塞突然以微元速度 dv 向右运动(假设以向右的方向为正),它将首先压缩紧靠活塞右侧的一层气体,这层气体受压后,接着又压缩它下一层的气体,这样一层一层地依次传下去,便在管内形成一道以速度 c 向右传播的微弱压缩波。波后气体的压强 $p_2 (=p_1+dp)$ 、密度 $\rho_2 = (\rho_1+$

$d\rho$)、温度 $T_2 (=T_1+dT)$ 均较波前气体的有微量升高, 且以和活塞同样的微元速度 dv 向右运动, 如图 7-1 (a) 所示。倘若管内的活塞突然以微元速度 dv 向左运动, 它将首先使紧靠活塞右侧的一层气体膨胀, 而后也是一层一层地依次传下去, 在管内形成一道以速度 c 向右传播的微弱膨胀波。波后气体的压强 p'_2 、密度 ρ'_2 、温度 T'_2 均较波前气体的有微量降低 (即增量均为负值), 且以和活塞同样的微元速度向左运动, 如图 7-1 (b) 所示。

为了推求微弱压强波在圆管中的传播速度 c , 选用与微弱压强波一起运动的相对坐标系作为参考坐标系。对于该参考坐标系, 上述流动便转化为定常的了, 如图 7-2 所示。

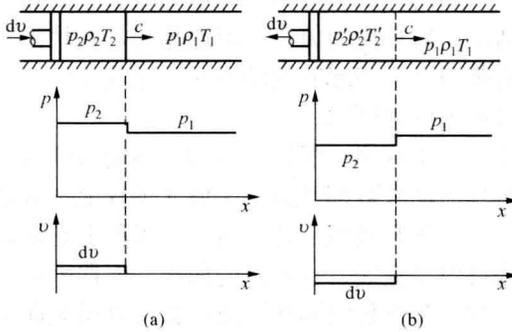


图 7-1 微弱压强波的一维传播
(a) 活塞右移; (b) 活塞左移

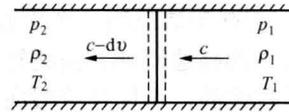


图 7-2 推导传播速度 c 用图

取图中虚线及其间管壁为控制体, 则由连续方程 (4-22) 得

$$(\rho_1+d\rho)(c-dv)A-\rho_1cA=0$$

略去二阶微量, 得

$$cd\rho=\rho_1dv \tag{a}$$

由动量方程 (4-28) 得

$$\rho_1cA[(c-dv)-c]=[p_1-(p_1+d\rho)]A$$

即

$$\rho_1cdv=-dp \tag{b}$$

由式 (a) 和式 (b) 得

$$c=\left(\frac{d\rho}{dp}\right)_s^{-1/2} \tag{7-1}$$

意即微弱压强波的传播速度等于密度对压强的导数的负二分之一次方。这是微弱压强波传播速度微分形式的计算式, 对微弱压缩波、膨胀波都适用。由于经过微弱压强波, 气流的压强、密度、温度和速度的变化都是无穷小量, 而且传播过程进行得相当迅速, 因而完全可以忽略黏性作用和传热, 把微弱扰动的传播过程视为等熵过程。

二、声速

声速即声音传播的速度。声音是由微弱压缩波和微弱膨胀波交替组成的, 它的传播速度同样由式 (7-1) 确定。所以声速可作为微弱压强波传播速度的统称。

在气体流动中, 流速低于声速的亚声速流动和流速高于声速的超声速流动便是以声速为准来划分的。在气体动力学中声速是重要的气流参数。

对于流体, 当有微弱的压强扰动时, 由式 (2-9) 可得流体的体积模量:

$$K = -\frac{dp}{dV/V} = \rho \left(\frac{d\rho}{d\rho} \right)^{-1}$$

将上式中的 $d\rho/d\rho$ 代入式 (7-1), 得

$$c = (K/\rho)^{1/2} \quad (7-1a)$$

对于完全气体, 由等熵过程关系式 $p/\rho^\gamma = \text{常数}$ 以及状态方程 $p = \rho RT$ 可得 $d\rho/d\rho = \rho(\gamma p)^{-1} = (\gamma p T)^{-1}$, 代入式 (7-1), 得

$$c = (\gamma p / \rho)^{1/2} = (\gamma RT)^{1/2} \quad (7-1b)$$

对于空气, $\gamma = 1.4$, $R = 287.1 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$, 代入式 (7-1b), 得空气中的声速

$$c = 20.05 T^{1/2} \quad (7-1c)$$

海平面上标准大气的温度为 288.2 K , 对应的声速为 340.3 m/s 。标准大气表中的声速数值便是按式 (7-1b) 计算出来的。

综上所述, 可以看出:

(1) 流体中的声速是状态参数的函数。在相同介质中, 如果各个点以及各个瞬时流体的状态参数都不相同, 则各个点以及各个瞬时的声速也都不相同。对于一般流动, 声速随点的坐标和时间的变化而变化; 对于定常流动, 声速仅随点的坐标变化而变化。提到声速, 指的都是当地声速。

(2) 在相同温度下, 不同介质中有不同的声速。在可压缩性大的流体中, 声速低, 微弱压强波传播得慢; 在可压缩性小的流体中, 声速高, 微弱压强波传播得快。例如 20°C 空气中的声速为 343.2 m/s , 而 20°C 水中的声速却为 1478 m/s , 等于空气中声速的 4 倍多。

(3) 在同一气体中, 声速随着气体温度的升高而增高, 并与气体热力学温度的平方根成比例。

三、马赫数

气体在某点的流速与当地声速之比定义为该点气流的马赫数, 用 Ma 代表, 即

$$Ma = v/c \quad (7-2)$$

马赫数是个无量纲速度。对于完全气体

$$Ma^2 = \frac{v^2}{\gamma RT} \quad (7-2a)$$

由物理学气体分子运动论已知, 气体分子的平均平动动能与热力学温度成正比。式 (7-2a) 表明, 马赫数代表的是气体的宏观运动动能与气体分子运动动能之比。在气体流动的分析和计算中, 将以马赫数作为判断气体压缩性影响大小和划分高速流类型的标准: $Ma < 1$, 亚声速流; $Ma = 1$, 声速流 (在 $Ma = 1$ 附近有亚声速流, 又有超声速流, 称跨声速流); $Ma > 1$, 超声速流, 而 $Ma^2 > 10$, 高超声速流。

第二节 气流的特定状态和参考速度 速度系数

一、滞止状态

在气体流动中, 为了描述流场中某点的状态, 常常给出该点气流的压强 p 、密度 ρ 和温度 T 等。这些参数在气体动力学中称为静参数。如果按照一定的过程将气流速度滞止到零, 这

时的压强 p_T 、密度 ρ_T 和温度 T_T 等便称为滞止参数或总参数, 这是流场中实际存在的滞止参数。另外, 为了分析和计算方便, 常常设想让气流速度等熵地滞止到零而得到与每点的静参数相对应的滞止参数, 并以此作为参考状态; 显然, 这样的滞止状态是与气体的实际流动过程无关的。

对于气体的一维定常绝能流, 可以不计重力的作用, 用一维流的质量流量通除式 (4-40), 可得

$$u_1 + \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} = u_2 + \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} \quad (7-3)$$

或用焓表示为

$$h + v^2/2 = h_T \quad (7-3a)$$

式中: h_T 为滞止焓, 在绝能流中是个常数。式 (7-3a) 表明, 沿流管焓代表的分子无规则运动的能量与宏观运动的动能之和为一常数。

对于比热容为常数的完全气体, 式 (7-3a) 成为

$$T + \frac{1}{2c_p} v^2 = T_T \quad (7-4)$$

滞止温度 T_T 在绝能流中也是个常数。对于绝能流, 不论过程等熵与否, 以上两式都适用。对应于滞止温度 T_T 有一个滞止声速:

$$c_T = (\gamma RT_T)^{1/2} \quad (7-5)$$

它在绝能流中同样是个常数, 是常用的参考速度。

注意到 $c_p = \gamma R / (\gamma - 1)$, $\gamma RT = c^2$, $Ma^2 = v^2 / c^2$, 可得

$$\frac{T_T}{T} = \frac{c_T^2}{c^2} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \quad (7-6)$$

由等熵过程关系式 $p_T/p = (\rho_T/\rho)^\gamma = (T_T/T)^{\gamma/(\gamma-1)}$ 得

$$\frac{p_T}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (7-7)$$

$$\frac{\rho_T}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right)^{1/(\gamma-1)} \quad (7-8)$$

可见, 随着马赫数的增大, 绝能等熵流的温度、声速、压强和密度都将降低。

有了求总静压强比的式 (7-7), 便可以进一步分析不考虑气体的压缩性会带来多大的误差。当马赫数不大时, 可以引用牛顿二项式定理将式 (7-7) 展成级数, 即

$$\frac{p_T}{p} = 1 + \frac{\gamma}{2} Ma^2 + \frac{\gamma}{8} Ma^4 + \frac{(2-\gamma)\gamma}{48} Ma^6 + \dots$$

$$= 1 + \frac{\gamma}{2} Ma^2 \left(1 + \frac{1}{4} Ma^2 + \frac{2-\gamma}{24} Ma^4 + \dots \right)$$

或

$$p_T - p = \frac{1}{2} \rho v^2 \varepsilon_p \quad (7-9)$$

式中

$$\varepsilon_p = 1 + \frac{1}{4} Ma^2 + \frac{2-\gamma}{24} Ma^4 + \dots \quad (7-10)$$

称为压缩性因子。显然, 压缩性因子随马赫数的增大而增大。当 $Ma=0$ 时, $\varepsilon_p=1$, 式 (7-9) 成为不可压缩流的动压表示式。对于 $\gamma=1.4$ 的气体, 当 $Ma=0.3$ 时, $\varepsilon_p=1.023$, 即不可压缩性假设将给动压带来 2.3% 的误差, 这在工程上是允许的。一般情况下要在 $Ma \leq 0.3$ 时, 才可以

忽略压缩性影响。

二、极限状态

极限状态是指，随着气体的膨胀、加速，绝能流分子无规则运动的动能全部转换成宏观运动的动能，气流的静温和静压均降低到零，气流速度达到极限速度 v_{\max} 。 v_{\max} 是气流膨胀到完全真空所能达到的最大速度。由式 (7-4) 得

$$v_{\max} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} RT_T \right)^{1/2} \quad (7-11)$$

v_{\max} 仅是理论上的极限值，因为真实气体在达到该速度之前就已经液化了。对于给定的气体，极限速度只决定于总温，在绝能流中是个常数，常被用作参考速度。

对式 (7-4) 稍加变换，可得

$$\frac{1}{\gamma-1} c^2 + \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{\gamma-1} c_T^2 = \frac{1}{2} v_{\max}^2 \quad (7-12)$$

可见，在绝能流动中，沿管流单位质量气体所具有的总能量等于极限速度的速度头。

三、临界状态

将式 (7-12) 画在如图 7-3 所示 $c-v$ 状态平面上，可以看出，当气流速度被滞止到零时，当地声速上升到滞止声速 c_T ；当气流速度被加速到极限速度 v_{\max} 时，当地声速下降到零。因此，在气流速度由小变大和当地声速由大变小的过程中，必定会出现气流速度恰好等于当地声速的状态，即 $Ma=1$ 的状态，该状态便是临界状态。临界状态下的气流参数称为临界参数，出现临界状态的截面称为临界截面。临界状态用下标 cr 代表。

在临界状态， $v_{cr}=c_{cr}$ ，由式 (7-12) 可得

$$c_{cr} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{1/2} c_T = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^{1/2} v_{\max} \quad (7-13)$$

或

$$c_{cr} = (\gamma RT_{cr})^{1/2} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} RT_T \right)^{1/2} \quad (7-13a)$$

可见，对于给定的气体，临界声速只决定于总温，在绝能流中它是常数，在气体动力学中它是重要的参考速度。

令式 (7-6) ~ 式 (7-8) 中的 $Ma=1$ ，可得临界参数与滞止参数之比

$$\frac{T_{cr}}{T_T} = \frac{c_{cr}^2}{c_T^2} = \frac{2}{\gamma+1} \quad (7-14)$$

$$\frac{p_{cr}}{p_T} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (7-15)$$

$$\frac{\rho_{cr}}{\rho_T} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{1/(\gamma-1)} \quad (7-16)$$

可以看出，对于一定气体的绝能等熵流，各临界参数均保持不变，它们与对应滞止参数的比值是常数。例如，对于 $\gamma=1.4$ 的气体， $T_{cr}/T_T=c_{cr}^2/c_T^2=0.8333$ ， $p_{cr}/p_T=0.5283$ ， $\rho_{cr}/\rho_T=0.6339$ 。

应该指出，通常要注意区别当地声速 c 与临界声速 c_{cr} ；当地声速是气体所处状态下实际存在的声速，而临界声速则是与气流所处状态相对应的临界状态下的声速。然而，当 $Ma=1$

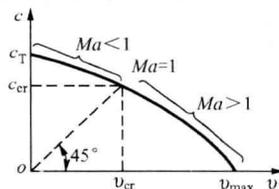


图 7-3 状态平面图

时,当地声速便是临界声速。对于气体的某种实际流动状态,有与之相对应的滞止参数,也有与之相对应的临界参数。

四、速度系数

气流速度与临界声速之比定义为速度系数,用 M_* 代表,即

$$M_* = v/c_{cr} \quad (7-17)$$

它是与马赫数相类似的另一个无量纲速度。引用它的好处有:①在绝能流中 c_{cr} 是个常数,这样在由 M_* 求 v 时,只需用 M_* 乘常数 c_{cr} 就可以了。而由 Ma 求 v 时,则要先逐个求出当地的 c , 然后才能逐个求出 v , 比用 M_* 去求要麻烦许多。②在绝能流中,当 $v \rightarrow v_{max}$ 时, $c \rightarrow 0$, $Ma \rightarrow \infty$, 在图上无法绘出 $v \rightarrow v_{max}$ 附近的情况。如果用 M_* , 则无上述困难,因为当 $v = v_{max}$ 时:

$$M_{*max} = \frac{v_{max}}{c_{cr}} = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)^{1/2} \quad (7-18)$$

为一定量。例如对于 $\gamma=1.4$ 的气体, $M_{*max}=2.4495$ 。

M_* 与 Ma 之间有确定的对应关系。将式(7-13)中的 c_T 代入式(7-12),并通除以 v^2 , 可得

$$\frac{1}{\gamma-1} \frac{1}{Ma^2} + \frac{1}{2} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \frac{1}{M_*^2} \quad (7-19a)$$

$$Ma^2 = \frac{2M_*^2}{(\gamma+1) - (\gamma-1)M_*^2} \quad (7-19b)$$

M_* 与 Ma 的上述关系如图 7-4 中曲线所示。可见,同马赫数一样,速度系数也是划分气体高速流类型的标准: $Ma < 1$ 时, $M_* < 1$, 亚声速流; $Ma = 1$ 时, $M_* = 1$, 声速流; $Ma > 1$ 时, $M_* > 1$, 超声速流。

将式(7-19b)代入式(7-6)~式(7-8),可得用速度系数表示的静总参数比为

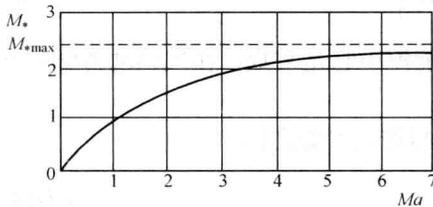


图 7-4 M_* 与 Ma 的关系曲线

$$\frac{T}{T_T} = \frac{c^2}{c_T^2} = 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} M_*^2 \quad (7-20)$$

$$\frac{p}{p_T} = \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} M_*^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (7-21)$$

$$\frac{\rho}{\rho_T} = \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} M_*^2 \right)^{1/(\gamma-1)} \quad (7-22)$$

可见,对于绝能等熵流,随着速度系数的增大,气流的温度、声速、压强和密度都将降低。这也与这些参数随马赫数的变化趋向相同。

由上述可见,绝能等熵流的总静(静总)参数比只决定于气体的比热比和马赫数(速度系数)。对于给定的气体,可按马赫数(速度系数)预先算出,列成数表,供计算时查用,以提高计算效率。对于 $\gamma=1.4$ 的气体,等熵气流参数比列于附录 B 表 B-1。

【例 7-1】 视在无摩擦的渐缩管道中流动的空气为 $\gamma=1.4$ 的完全气体,在管道位置 1 处的平均流速为 152.4m/s , 气温为 333.3K , 气压为 $2.086 \times 10^5 \text{Pa}$, 在管道的出口 2 处达到临界

状态。试计算出口 2 处气流的温度、压强、密度和平均流速。

【解】 位置 1 处空气流的声速、马赫数为

$$c_1 = (\gamma RT_1)^{1/2} = (1.4 \times 287.1 \times 333.3)^{1/2} = 366.0 \text{ (m/s)}$$

$$Ma_1 = v_1 / c_1 = 152.4 / 366.0 = 0.4164$$

可将有关数据代入式 (7-6)、式 (7-7)，算得位置 1 处空气流的总温、总压；为提高计算效率，也可由附录 B 表 B-1 按马赫数 $Ma_1=0.4164$ 用内插法查得它们的静总参数比： $T/T_1=0.9665$ ， $p/p_1=0.8875$ 。再将已知数据代入上述参数比和式 (2-11b)，得

$$T_1 = 333.3 / 0.9665 = 344.9 \text{ (K)}$$

$$p_1 = 2.086 \times 10^5 / 0.8875 = 2.350 \times 10^5 \text{ (Pa)}$$

$$\rho_1 = p_1 / (RT_1) = 2.350 \times 10^5 / (287 \times 344.9) = 2.374 \text{ (kg/m}^3\text{)}$$

出口 2 处气流已达临界状态，已知 $T_{cr}/T_1=0.8333$ 、 $p_{cr}/p_1=0.5283$ 、 $\rho_{cr}/\rho_1=0.6339$ ，将已知数据代入上述参数比和式 (7-1b)，得

$$T_2 = T_{cr} = 0.8333 \times 344.9 = 287.4 \text{ (K)}$$

$$p_2 = p_{cr} = 0.5283 \times 2.350 \times 10^5 = 1.242 \times 10^5 \text{ (Pa)}$$

$$\rho_2 = \rho_{cr} = 0.6339 \times 2.374 = 1.505 \text{ (kg/m}^3\text{)}$$

$$v_2 = c_{cr} = (\gamma R T_{cr})^{1/2} = (1.4 \times 287 \times 287.4)^{1/2} = 339.8 \text{ (m/s)}$$

第三节 正 激 波

与前面讨论的等熵流动、微弱压强波的传播不同，当超声速气流流过大障碍物（或超声速飞机、炮弹和火箭等在空中飞行）时，气流在障碍物前将受到急剧的压缩，它的压强、温度和密度都将突跃地升高，而速度则突变地降低。这种使流动参数发生突跃变化的强压缩波称为激波。激波是超声速气流中经常出现的重要物理现象。例如，各种超声速飞行器飞行时，超声速气流绕过叶片、叶栅或其他物体流动时，超声速风洞启动时，都必定会出现激波；缩放喷管在非设计工况运行时，在喷管的超声速流中也可能出现激波。原子弹、氢弹爆炸时产生的破坏力很大的高压强锋面是激波，又称冲击波；煤粉在煤粉炉中爆燃时产生的高压强火焰锋面同样是激波，所以煤粉炉上要设防爆门，以防炸裂炉膛。平常当超声速飞机飞过时，我们会听到与普通飞机不一样的一掠而过的较强声震，那是超声速飞机引发的激波经过空气层大大衰减后的声震锋面。

一、激波的分类

按照激波的形状及其与气流方向之间的夹角，可以将激波分为：

(1) 正激波：波面与气流方向相垂直的平面激波，如图 7-5 (a) 所示。正激波在超声速风洞启动过程中总是要出现的，在非设计工况下运行的缩放喷管的超声速段以及其他超声速管流中也都可能出现。

(2) 斜激波：波面与气流方向不垂直的平面激波，如图 7-5 (b) 所示。当超声速气流流过顶角不大 ($\delta < \delta_{\max}$) 的二维尖劈时，在尖劈的前缘将产生上、下两道激波角小于 90° 的平面激波。在超声速气流绕叶片或叶栅流动时，斜激波总是要出现的，在缩放喷管及其他超声速管流出口外的激波中也可能会出现。

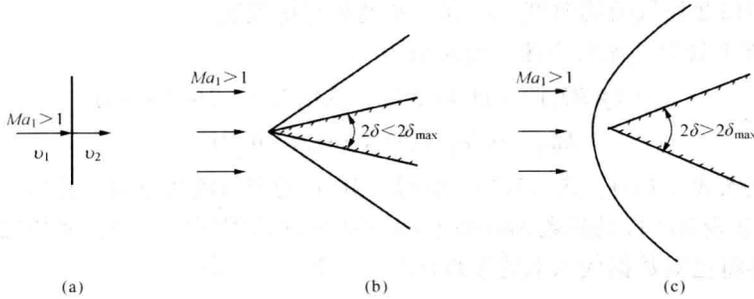


图 7-5 激波

(a) 正激波; (b) 斜激波; (c) 曲激波

(3) 曲激波: 波形是弯曲的, 如图 7-5 (c) 所示。当超声速气流流过顶角较大 ($\delta > \delta_{max}$) 的二维尖劈或其他钝头物体时, 由于它们的前头推挤着一些气体, 形成高压, 以致激波不能依附于劈尖或其他物体的头部而成为脱体的曲激波。在各种钝头物体作超声速飞行或超声速气流绕过它们流动时, 脱体曲激波都会出现。即使是尖头的流线型体, 例如超声速飞机的菱形机翼或超声速汽轮机具有尖前缘的叶片等, 只要条件具备, 同样会产生脱体曲激波 (将在第十章中讨论)。脱体曲激波的中间部分与来流方向垂直, 是正激波; 沿着波向外延伸的是强度逐渐减弱的斜激波系。脱体曲激波的计算是很复杂的, 已经超出了本教材的范围。

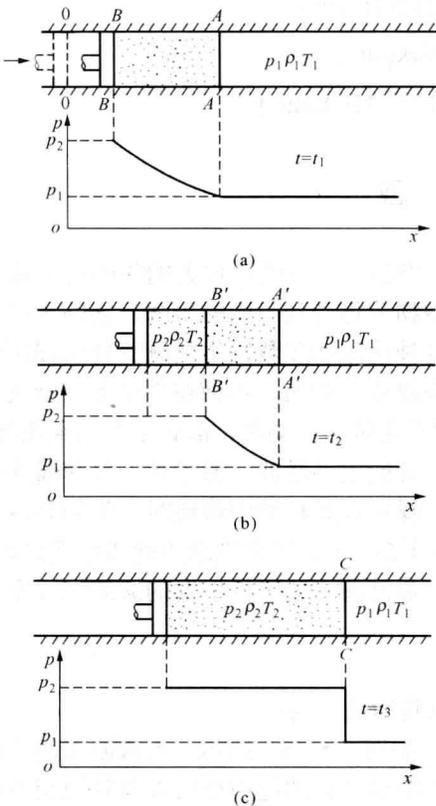


图 7-6 激波的形成过程

本章只讨论正激波。

二、激波的形成和厚度

下面举一个简单的例子来说明激波的形成过程。设有一根很长的等截面直管, 管内充满静止的气体, 流动参数用下标“1”代表。在管子的左端有一个活塞, 在 $0 \rightarrow t_1$ 的一小段时间内, 活塞的速度由零加速到 v_g 。活塞的连续加速, 必将产生无数的微弱压缩波, 依次向右传播, 压缩活塞右面的气体。在 $0 \rightarrow t_1$ 这段时间内, 被无数微弱压缩波连续压缩的气体如图 7-6 (a) 中 $AA-BB$ 所示。显然, 从第一道微弱压缩波到达的 AA 至经无数道微弱压缩波压缩过的 BB , 流动参数是连续变化的, 即流速由 $0 \rightarrow v_g$, 压强由 $p_1 \rightarrow p_2$, 等等。所以说, $AA-BB$ 是个过渡区。微弱压缩波是以当地声速向前传播的, 同一气体经过微弱压缩波的压缩同没有经过微弱压缩波的压缩, 其当地声速和流速都是不相同的。后一道微弱压缩波是在前一道微弱压缩波后的流场中传播, 所以, 后面的微弱压缩波总比它前面的微弱压缩波传播得快, 这一点, 从下面的分析中

可以看得很清楚:

	波前的当地声速	波后的流速	波传播的绝对速度	波后的压强	波后的温度
第一道波	c_1	dv_{g1}	c_1	p_1+dp	T_1+dT_1
	^	^	^	^	^
第二道波	c_1'	$dv_{g1}+dv_{g2}$	$c_1'+dv_{g1}$	p_1+2dp	$T_1+dT_1+dT_2$
	^	^	^	^	^
第三道波	c_1''	$dv_{g1}+dv_{g2}+dv_{g3}$	$c_1''+dv_{g1}+dv_{g2}$	p_1+3dp	$T_1+dT_1+dT_2+dT_3$
	^	^	^	^	^
...

可见，后面的微弱压缩波总比它前面的跑得快。这样，到某一瞬时 t_2 ，过渡区将比 t_1 瞬时的缩短，即 $A'B' < AB$ ，压强曲线变陡。而 $B'B'$ 波后的气流参数变为 p_2 、 ρ_2 、 T_2 和 v_{g2} ，见图 7-66 (b)。倘若 $t=t_3$ 时所有后面的微弱压缩波都赶上了最前面的微弱压缩波， $B'B'$ 与 $A'A'$ 重合而成 CC ，过渡区缩短成一个面，则压强曲线变成了一条竖直线，即经过 CC 压强由 p_1 突变成 p_2 ，其他流动参数都作突跃式的变化，见图 7-6 (c)。这种突跃的压缩或强压缩波便是激波，激波是无数微弱压缩波相交而叠加的结果。

关于激波的厚度，在工程上通常把激波视为没有厚度的流动参数的突跃面或间断面，也称作强突跃面或强间断面，图 7-6 (c) 中的 CC 便是。但是，既然经过激波流动参数要发生突跃的变化，而激波的厚度又果真等于零的话，那么，流动参数的变化率岂不都成了无穷大，这是不可能的。实际上，只要速度梯度很大，即使黏性系数很小，黏滞应力也会达到可观的数值，而黏滞力的作用，必将消除速度的不连续，使之成为连续变化。对于温度的变化也是一样，只要温度梯度很大，即使导热系数很小，热流密度也会达到可观的数值，而导热效应必将消除温度的不连续，使之成为连续变化。另外，气体经过激波，温度突增，而一定的温度对应于气体分子的一定平均热力学能，即分子的移动、转动和振动（后两种运动存在于多原子的气体分子中）动能之和。从分子运动论可知，分子是借碰撞传递动能达到新的平衡的。因而，从能量传递的观点来看，经过激波与温度突增相对应的动能传递也必须在一定的时间和距离内完成。综上所述可得结论，实际上激波是有厚度的，流动参数是连续变化的。实测表明激波的厚度非常小。例如在标准大气中，当来流马赫数等于 2 时，激波的厚度约为 $2.54 \times 10^{-4} \text{mm}$ 。在上述条件下，分子的平均自由行程是 $7.0 \times 10^{-5} \text{mm}$ ，即激波的厚度只有几个分子的平均自由行程。此外，激波的厚度还随马赫数的增大而迅速减小，这说明激波的厚度确实非常小。从研究气体宏观运动的角度看，完全可以忽略激波的厚度，在大多数实际计算中将激波作为间断面来处理。

三、正激波的传播速度 蓝金—许贡纽公式

仍以活塞在等径直长管中的加速运动在静止气体中所形成的激波为例，来说明激波在气体中的传播规律。如图 7-7 所示，设在某瞬时 t ，激波以 v_s 的速度推进到 2-2 截面，又经 δt 时间推进到 1-1 截面，两截面间的距离用 δx 表示。取 1-1、2-2 两截面和它们之间的管壁为控制面，如图 6-7 中虚线所示。显然

$$\delta x = v_s(\delta t), \quad v_s = \delta x / \delta t$$

经过激波，流动参数的变化是突跃式的，激波是个间断面，所以要采用积分形式的基本方程。经过激波，流体的质量是守恒的，故将连续方程式 (4-18) 应用于图示控制体，得

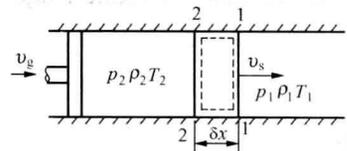


图 7-7 正激波的传播

$$\frac{(\rho_2 - \rho_1)A(\delta x)}{\delta t} + (-\rho_2 A v_g) = 0$$

将 $v_s = \delta x / \delta t$ 代入后, 得

$$(\rho_2 - \rho_1)v_s - \rho_2 v_g = 0 \quad (a)$$

将动量方程式(4-24)应用于图7-7所示控制体, 得

$$\frac{\rho_2 A(\delta x)v_g}{\delta t} + (-\rho_2 A v_g^2) = -(p_1 - p_2)A$$

或

$$\rho_2 v_s v_g - \rho_2 v_g^2 = p_2 - p_1 \quad (b)$$

联立求解式(a)与式(b), 得

$$v_s = \left(\frac{\rho_2 p_2 - p_1}{\rho_1 p_2 - \rho_1} \right)^{1/2} = \frac{c_1}{\gamma^{1/2}} \left(\frac{\frac{p_2}{p_1} - 1}{\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1} \right)^{1/2} \quad (7-23)$$

$$v_g = \left[\frac{(p_2 - p_1)(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 \rho_2} \right]^{1/2} = \frac{c_1}{\gamma^{1/2}} \left[\frac{\left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right)}{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \right]^{1/2} \quad (7-24)$$

从以上两式看, 好像激波的传播速度和波后气流的速度不仅决定于压强突跃(即激波的强度), 还决定于密度突跃。其实, 它们只决定于压强突跃, 因为密度突跃也决定于压强突跃。将能量方程式(4-38)应用于图7-7所示控制体, 得

$$\frac{[\rho_2(u_2 + v_g^2/2) - \rho_1 u_1]A(\delta x)}{\delta t} + [-\rho_2(u_2 + v_g^2/2)v_g A] = -(-p_2 v_g A)$$

或

$$(\rho_2 u_2 - \rho_1 u_1 + \rho_2 v_g^2/2)v_s - \rho_2(u_2 + v_g^2/2)v_g = p_2 v_g$$

由式(a)可得 $\rho_2(v_s - v_g) = \rho_1 v_s$, 代入上式, 得

$$\rho_1(u_2 - u_1 + v_g^2/2)v_s = p_2 v_g \quad (c)$$

将式(7-23)、式(7-24)和 $u = p / [(\gamma - 1)\rho]$ 代入式(c), 经过适当整理, 便可得到完全气体的蓝金-许贡纽(Rankine-Hugoniot)公式:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{p_2}{p_1} + 1 \right) \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} + \frac{p_2}{p_1} \right)^{-1} \quad (7-25)$$

或

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{-1} \quad (7-26)$$

可见, 经过激波, 气流的密度突跃与压强突跃有一一对应的关系, 可以想见, 气流的温度突跃与压强突跃也有一一对应的关系。为了证明这一点, 只需将气体状态方程应用于激波前后的气体, 便可得到

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p_2}{p_1} + \frac{p_2^2}{p_1^2} \right) \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p_2}{p_1} + 1 \right)^{-1} \quad (7-27)$$

可见, 经过激波的密度突跃和温度突跃都只决定于压强突跃。这样, 如果已知气流在波前的 p_1 、 ρ_1 、 T_1 和 p_2/p_1 , 便可由式 (7-25)、式 (7-27) 以及式 (7-23)、式 (7-24) 求得气流在波后的 ρ_2 、 T_2 以及激波的传播速度 v_s 和波后气流的速度 v_g 。

为了看清突跃压缩与等熵压缩的区别, 特将在这两种压缩中 ρ_2/ρ_1 和 T_2/T_1 随 p_2/p_1 的

变化曲线分别绘于图 7-8 (a)、(b)。由图中可以看出, 在同一压强比 p_2/p_1 下, 突跃压缩的温度比大于等熵压缩的。而且由式 (7-25) 可以看出, 当 $p_2/p_1 \rightarrow \infty$ 时, $\rho_2/\rho_1 \rightarrow (\gamma+1)/(\gamma-1)$, 意即图 7-8 (a) 中的突跃压缩曲线将以 $(\gamma+1)/(\gamma-1)$ 为渐近线。例如 $\gamma=1.4$ 的气体, 无论波后的压强增加到多么高, 其密度的增加也不可能超过 6 倍。这是因为, 气流通过激波时, 部分动能不可逆地变为热能, 气流受到剧烈加热, 温度增高, 从而使压强突跃引起的密度突跃受到了限制。

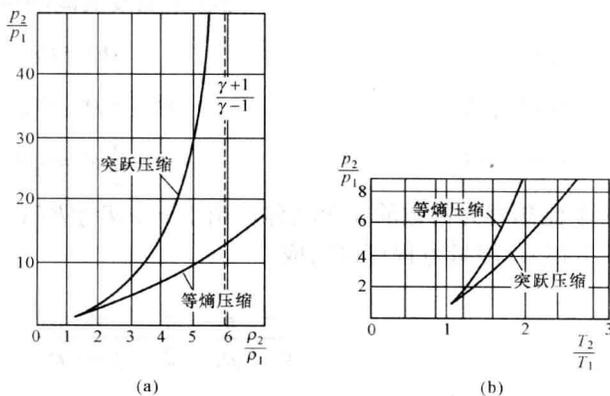


图 7-8 突跃压缩与等熵压缩的比较

【例 7-2】 设长管中静止空气的参数 $p_1=1.013 \times 10^5 \text{Pa}$, $T_1=288 \text{K}$, $\gamma=1.4$ 。用活寒压缩气体以产生激波, 波后的压强 $p_2=1.1143 \times 10^5 \text{Pa}$ 。求 ρ_2 、 T_2 、 c_2 以及 v_s 、 v_g 。

【解】 由于

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{1.013 \times 10^5}{287.1 \times 288} = 1.225 \text{ (kg/m}^3\text{)}$$

由式 (7-25) 得

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{6 \times 1.1 + 1}{1.1 + 6} = 1.070$$

$$\rho_2 = 1.070 \times 1.225 = 1.311 \text{ (kg/m}^3\text{)}$$

由式 (7-27) 得

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{6 \times 1.1 + 1.1^2}{6 \times 1.1 + 1} = 1.0276$$

$$T_2 = 1.0276 \times 288 = 296.0 \text{ (K)}$$

由式 (7-1b) 得

$$c_1 = (1.4 \times 287.1 \times 288)^{1/2} = 340.2 \text{ (m/s)}$$

$$c_2 = (1.4 \times 287.1 \times 296)^{1/2} = 344.9 \text{ (m/s)}$$

由式 (7-23)、式 (7-24) 得

$$v_s = c_1 \left(\frac{1.07}{1.4} \times \frac{1.1-1}{1.07-1} \right)^{1/2} = 1.0449 c_1 = 355.6 \text{ (m/s)}$$

$$v_g = c_1 \left(\frac{1.1-1}{1.4} \times \frac{1.07-1}{1.07} \right)^{1/2} = 0.06836 c_1 = 23.26 \text{ (m/s)}$$

由计算结果可以看出: ①激波相对于波前气体的传播速度 v_s 是大于声速 c_1 的, 而它相对于波

后气体的传播速度 $v_s - v_g = 332.3 \text{ m/s}$ 是小于声速 c_2 的。②只要活塞以 $0.06836c_1$ 的速度向前推进,便可保持强度 $p_2/p_1 = 1.1$ 的激波。

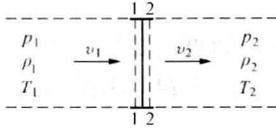


图 7-9 推导正激波前后气流参数关系用图

四、正激波前后气流参数的关系 波阻的概念

在形成正激波的空间取出如图 7-9 所示的等直径管,将参考坐标系固连在激波上;这样,激波是驻止的,气流成了定常的流动。已知波前来流的气流参数为 v_1 、 p_1 、 ρ_1 、 T_1 和 s_1 ,经过激波变为 v_2 、 p_2 、 ρ_2 、 T_2 和 s_2 。选取激波两侧的 1-1、2-2 平面及其间的流管组成控制面,可以列出

$$\text{连续方程} \quad \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \quad (\text{d})$$

$$\text{动量方程} \quad \rho_2 v_2^2 - \rho_1 v_1^2 = p_1 - p_2 \quad (\text{e})$$

$$\text{能量方程} \quad h_1 + \frac{1}{2} v_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} v_2^2 \quad (\text{f})$$

对于比热容为常数的完全气体,由于 $h = c_p T = \gamma RT / (\gamma - 1) = \gamma p / [(\gamma - 1)\rho]$,再引用式(7-12)、式(7-13),能量方程可以写成

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} c_{\text{cr}}^2 \quad (\text{g})$$

为了用波前马赫数 Ma 表示波前波后气流参数之间的关系式,先用式(d)去除式(e),得

$$v_1 - v_2 = \frac{p_2}{\rho_2 v_2} - \frac{p_1}{\rho_1 v_1} \quad (\text{h})$$

由式(g)得

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} c_{\text{cr}}^2 - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} v^2$$

将这一关系式代入式(h),得

$$v_1 - v_2 = (v_1 - v_2) \left(\frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{c_{\text{cr}}^2}{v_1 v_2} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \right)$$

这个方程有两个答案,其一是 $v_1 = v_2$,代表没有激波的情况;另一是 $\frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{c_{\text{cr}}^2}{v_1 v_2} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} = 1$,即

$$v_1 v_2 = c_{\text{cr}}^2 \quad (7-28)$$

或

$$M_{*1} M_{*2} = 1 \quad (7-28a)$$

这是著名的普朗特激波公式。它建立了正激波前后气流速度之间的关系,即正激波前、后速度系数的乘积等于 1。由于正激波前来流的速度为超声速,即 $M_{*1} > 1$,根据式(7-28a)必有 $M_{*2} < 1$,即正激波后气流速度必为亚声速。而且 M_{*1} 较 1 大得越多,则 M_{*2} 较 1 小得越多;反之, M_{*1} 越接近于 1,则 M_{*2} 也越接近于 1;特别是当 $M_{*1} = 1$ 时, $M_{*2} = 1$,激波就不存在了。可见,正激波后的气流永远为亚声速流。

由式(7-28)、式(7-19a)和式(d)得

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{M_{*1}^2} = \frac{2 + (\gamma - 1)Ma_1^2}{(\gamma + 1)Ma_1^2} \quad (7-29)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = M_{*1}^2 = \frac{(\gamma+1)Ma_1^2}{2+(\gamma-1)Ma_1^2} \quad (7-30)$$

为了推导压强比公式，由式 (e)、式 (d) 和式 (7-1b) 可得

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \gamma Ma_1^2 \left(1 - \frac{v_2}{v_1} \right)$$

将式 (7-29)、式 (7-19b) 代入，得

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma+1)M_{*1}^2 - (\gamma-1)}{(\gamma+1) - (\gamma-1)M_{*1}^2} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} Ma_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \quad (7-31)$$

有了密度比和压强比，根据完全气体的状态方程便可求得温度比：

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{M_{*1}^2} \frac{(\gamma+1)M_{*1}^2 - (\gamma-1)}{(\gamma+1) - (\gamma-1)M_{*1}^2} = \frac{2+(\gamma-1)Ma_1^2}{(\gamma+1)Ma_1^2} \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} Ma_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \quad (7-32)$$

为了推导正激波前后马赫数之间的关系式，只需将式 (7-19a) 代入式 (7-28a)，便可得到

$$Ma_2^2 = \frac{2+(\gamma-1)Ma_1^2}{2\gamma Ma_1^2 - (\gamma-1)} \quad (7-33)$$

根据式 (7-21)、式 (7-7) 和式 (7-31) 可得激波后与激波前的总压比：

$$\begin{aligned} \frac{p_{T2}}{p_{T1}} &= (M_{*1}^2)^{\gamma/(\gamma-1)} \left[\frac{(\gamma+1) - (\gamma-1)M_{*1}^2}{(\gamma+1)M_{*1}^2 - (\gamma-1)} \right]^{-1/(\gamma-1)} \\ &= \left[\frac{(\gamma+1)Ma_1^2}{2+(\gamma-1)Ma_1^2} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} Ma_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^{-1/(\gamma-1)} \end{aligned} \quad (7-34)$$

从以上各式可以看出，正激波前后气流参数比都只决定于波前的无量纲速度 $Ma_1(M_{*1})$ 以及完全气体的比热比 γ 。对于 $\gamma=1.4$ 的气体，正激波前后气流参数值列于附录 B 表 B-2。由式 (7-31) 还可看出，由于 $(\gamma-1)/(\gamma+1)$ 是个很小的常数，标志激波强度的压强比几乎与波前马赫数的平方成正比。这就是说，来流马赫数的高低同样是激波强弱的重要标志。来流马赫数越高，突跃变化越大，激波越强；反之亦然。

以上只推导了经过激波气流参数突跃变化的计算公式，尚未涉及经过激波气流的能量损失问题。由于经过激波气流参数的突跃变化是在极短的距离内用极短的时间迅速完成的，因而可以认为该过程是绝热的，气流的总能量是没有损失的，即总焓不变。但是，正如前面已经分析过的，在突跃压缩过程中，由于黏性作用和导热效应的存在，不可逆的能量转化和传递是存在的，气流的做功能力必定下降，标志这种不可逆损失的熵则要增加。这就是说，突跃压缩是绝热非等熵过程。由工程热力学可知，单位质量流体的熵增可表示为

$$ds = \frac{\delta Q}{T} = \frac{dh}{T} - \frac{dp}{\rho T} = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p}$$

由过程的起点 1 到终点 2 积分上式，即

$$\int_{s_1}^{s_2} ds = c_p \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} - R \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p}$$

得

$$\Delta s = s_2 - s_1 = R \ln \left[\left(\frac{p_1}{p_2} \right) \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \right] \quad (7-35)$$

由于 $p_{T1}/p_1 = (T_{T1}/T_1)^{\gamma/(\gamma-1)}$ ， $p_{T2}/p_2 = (T_{T2}/T_2)^{\gamma/(\gamma-1)}$ ，式 (7-35) 成为

$$\Delta s = -R \ln \left[\left(\frac{p_{T2}}{p_{T1}} \right) \left(\frac{T_{T1}}{T_{T2}} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \right] \quad (7-35a)$$

如果流动是绝能的, 则 $T_{T1}=T_{T2}$, 式(7-35a)成为

$$\Delta s = -R \ln(p_{T2}/p_{T1}) \quad (7-36)$$

将 $R=(\gamma-1)c_v$ 和式(7-34)代入式(7-36), 得

$$\begin{aligned} \frac{\Delta s}{c_v} &= \ln \left\{ (M_{*1}^2)^{-\gamma} \left[\frac{(\gamma+1)M_{*1}^2 - (\gamma-1)}{(\gamma+1) - (\gamma-1)M_{*1}^2} \right] \right\} \\ &= \ln \left\{ \left[\frac{2 + (\gamma-1)Ma_1^2}{(\gamma+1)Ma_1^2} \right]^\gamma \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} Ma_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \right\} \end{aligned} \quad (7-36a)$$

这就是经过激波的熵增公式。可以证明, 随着超声速来流马赫数 Ma_1 的增大, 经过激波的熵增也逐渐增大。这说明来流马赫数 Ma 越大, 即激波强度越强, 经过激波, 机械能的损失越大, 总压比越小。

经过激波气流的熵值增加这一规律, 可以用来证明绝热的突跃压缩过程(激波)的方向必定是由 $M_{*1} > 1 \rightarrow M_{*2} < 1$, 即超声速气流经突跃变化成为亚声速气流。这时, 将大于1的 M_{*1} 代入式(7-36a), Δs 将为正, 即经绝热的非等熵过程熵值增加, 这完全符合热力学第二定律; 反之, 倘若设想亚声速气流经突跃变化成为超声速气流, 即过程的方向是由 $M_{*1} < 1 \rightarrow M_{*2} > 1$, 这时, 将小于1的 M_{*1} 代入式(7-36a), Δs 将为负, 即经绝热的非等熵过程熵值减小, 这违背热力学第二定律, 因而这样的过程事实上是不存在的。

这种机械能的损失, 也可以从另一个角度去理解。例如, 在等直径长管中形成激波, 要维持激波的强度和继续压缩波前的气体, 顶着高压气体的活塞必须以 v_g 速度前进。这样, 就必须有力作用在活塞上, 以克服波后高压气体对活塞的阻力。当超声速气流绕物体流动时, 必定会出现激波。气流经过激波, 速度降低, 动量减小, 熵值增加, 因而必有作用在气流上与来流方向相反的力, 即阻滞气流的力。另一方面, 对于引起激波的物体, 也必然受到与上述作用力大小相等、与来流方向相同的反作用力, 即气流作用在物体上的阻力。这种阻力是因激波的存在而产生的, 故称波阻。它是区别于摩擦阻力和压差阻力的另一种阻力。波阻的大小决定于激波的强度, 激波愈强, 波阻愈大; 反之亦然。

【例 7-3】 有一暂冲式超声速风洞, 其缩放喷管进口空气流的总压 $p_T=1.52 \times 10^6 \text{Pa}$, 总温 $T_T=500\text{K}$, 空气沿喷管作等熵流动, 至出口时气流的马赫数 $Ma_1=3.9376$ ($M_{*1}=2.13$)。倘若恰巧在喷管出口截面出现正激波, 试求激波前后的压强、温度、密度、速度以及总压比、熵增和波后马赫数。

【解】 已知激波前气流的总压、总温, 由式(2-11b)可得它的总密度

$$\rho_T = p_T / (RT_T) = 1.52 \times 10^6 / (287.1 \times 500) = 10.59 \text{ (kg/m}^3\text{)}$$

由附录 B 表 B-1 按马赫数 $Ma_1=3.9376$ 用内插法可得静总参数比: $p/p_1=0.00715$, $T/T_1=0.2439$, $\rho/\rho_1=0.0294$ 。将已知数据代入上述参数比和式(7-2)、式(7-1b), 得波前气流参数:

$$p_1 = 0.00715 \times 1.52 \times 10^6 = 1.087 \times 10^4 \text{ (Pa)}$$

$$T_1 = 0.2439 \times 500 = 122.0 \text{ (K)}$$

$$\rho_1 = 0.0294 \times 10.59 = 0.3113 \text{ (kg/m}^3\text{)}$$

$$v_1 = Ma_1(\gamma RT_1)^{1/2} = 3.9376(1.4 \times 287.1 \times 122)^{1/2} = 872.0 \text{ (m/s)}$$

由附录 B 表 B-2 按马赫数 $Ma_1=3.9376$ 用内插法可得激波前后气流参数比: $p_2/p_1=17.95$, $T_2/T_1=3.956$, $\rho_2/\rho_1=4.533$, $p_{T2}/p_{T1}=0.1480$ 。将已知数据代入上述参数比和式 (7-36), 得波后气流参数和熵增:

$$p_2=17.95 \times 1.087 \times 10^4 = 1.951 \times 10^5 (\text{Pa})$$

$$T_2=3.956 \times 122=482.6(\text{K})$$

$$\rho_2=4.533 \times 0.3113=1.411(\text{kg/m}^3)$$

$$v_2=872/4.533=192.4(\text{m/s})$$

$$\Delta s = -287.1 \ln(0.148) = 548.5 [\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})]$$

由表 B-2 按马赫数 $Ma_1=3.9376$ 用内插法又得波后气流马赫数 $Ma_2=0.4370$ 。

第四节 变截面管流

本节讨论管道截面变化对气体流动的影响。在这里只讨论定比热容完全气体的一维定常绝能等熵流, 即假设气体流动中与外界没有热、功和质量交换, 也不考虑黏性的影响。当有激波出现时, 非等熵的激波过程应当另作考虑。

一、气流速度与通道截面的关系

设气流是一维定常绝能等熵流, 取连续方程式 (4-21a) 的对数的微分, 得

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (\text{a})$$

对于非黏性气体沿微元流管的定常流动, 已知经过 dx 距离, 气体流速由 v 变为 $v+dv$, 压强由 p 变为 $p+dp$, 质量力可以不计, 将式 (4-25) 应用于该流动, 可得微分形式的动量方程:

$$\rho v dv = -dp \quad (\text{b})$$

引入声速公式, 可得

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho}{p} v dv = -\gamma Ma^2 \frac{dv}{v} \quad (\text{b}')$$

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho} \quad (\text{c})$$

取完全气体状态方程的对数的微分, 得

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (\text{d})$$

联立求解式 (a)、式 (b')、式 (c) 和式 (d), 可得

$$\frac{dA}{A} = (Ma^2 - 1) \frac{dv}{v} \quad (\text{e})$$

$$\frac{dp}{p} = -\gamma Ma^2 \frac{dv}{v} \quad (\text{f})$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -Ma^2 \frac{dv}{v} \quad (\text{g})$$

$$\frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) Ma^2 \frac{dv}{v} \quad (\text{h})$$

由式 (f)、式 (g)、式 (h) 可以看出, 对于一维定常绝能等熵流, 不论是亚声速还是超声速, 气流的加速必然伴随着气体压强、密度和温度的降低, 即气流经历的是膨胀过程; 反之, 气流的减速必然伴随着气体压强、密度和温度的升高, 即气流经历的是压缩过程。还可看出, 气流参数的相对变化都与马赫数有关, 这是因为, 在压强不断变化的流动过程中, 气体的密度也不断变化, 而马赫数又与密度对压强的变化率密切相关。以上四个方程是一维定常绝能等熵流必须服从的基本规律。下面按功用的不同分喷管和扩压器两种情况进行讨论。

1. 喷管

喷管的功用是使高温高压气体的能量经降压加速转换为高速气流的动能, 以便利用它去做功或满足某些特殊需要。由于 $dv/v > 0$ 时, $dp/p < 0$, $d\rho/\rho < 0$, $dT/T < 0$, 即气流在喷管中经历的是降压加速的膨胀过程。由式 (e) 可以看出, 喷管截面积的相对变化趋向不仅与速度的相对变化趋向有关, 而且也与马赫数的大小有关。当 $dv/v > 0$ 时, 如果 $Ma < 1$, 则 $dA/A < 0$; 如果 $Ma > 1$, 则 $dA/A > 0$; 如果 $Ma = 1$, 则 $dA/A = 0$ 。这就是说, 超声速喷管亚声速段的截面积应该逐渐缩小,

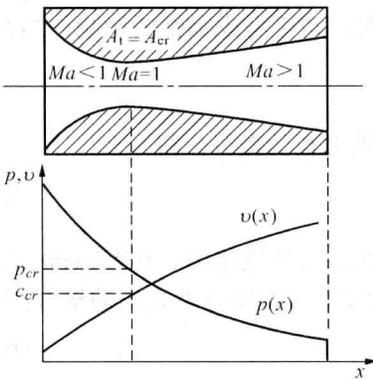


图 7-10 缩放喷管

超声速段的截面积应该逐渐扩大, 而临界截面处的截面积不变。显然, 临界截面应是超声速喷管的最小截面, 称为喷管的喉部, 如图 7-10 中 A_1 所示。由此可见, 用喷管得到超声速气流的条件, 除去必须保证在喷管的进口和出口有足以产生超声速气流的压强差之外, 还必须具备适合于气流不断降压膨胀加速的管道截面变化, 即管道要先逐渐收缩, 使亚声速流逐渐加速, 在喉部达到声速, 而后管道便逐渐扩张, 使气流继续加速成超声速流。这种缩放形的超声速喷管是瑞典工程师拉瓦尔 (C. G. P. de Laval) 于 19 世纪末发明的, 所以又叫拉瓦尔喷管。收缩形喷管的出口气流速度最高只能达到当地声速。

超声速喷管的截面随马赫数必须这样变化的物理实质由式 (g) 看得很清楚。当 $Ma < 1$ 时, $-d\rho/\rho < dv/v$, 即密度的相对减小量 (比体积的相对增大量) 还小于速度的相对增大量, 管道截面必须相应地减小才能适应降压膨胀加速的需要。当 $Ma > 1$ 时, $-d\rho/\rho > dv/v$, 即密度的相对减小量 (比体积的相对增大量) 大于速度的相对增大量, 管道截面必须相应地扩大才能适应降压膨胀加速的需要。当 $Ma = 1$ 时, $-d\rho/\rho = dv/v$, 即密度的相对减小量 (比体积的相对增大量) 等于速度的相对增大量, 临界截面应该不变。

2. 扩压器

扩压器的功用是通过减速增压使高速气流的动能转换为气体的压强势能和热力学能, 以满足增压和节能的需要。由于 $dv/v < 0$ 时, $dp/p > 0$, $d\rho/\rho > 0$, $dT/T > 0$, 即气流在扩压器中经历的是减速增压的压缩过程。由式 (e) 可以看出, 当 $dv/v < 0$ 时, 如果 $Ma > 1$, 则 $dA/A < 0$; 如果 $Ma < 1$, 则 $dA/A > 0$; 如果 $Ma = 1$, 则 $dA/A = 0$ 。这就是说, 对于超声速扩压器, 超声速段的截面应该逐渐缩小, 亚声速段的截面应该逐渐扩大, 而临界截面应该不变。这样, 从截面的变化趋向看, 超声速扩压器是超声速喷管的逆转。但是, 扩压器内的减速增压过程并不简单地等于喷管内降压加速过程的逆转, 这是因为在扩压器中伴随着减速过程的是逆压梯度, 实际存在的边界层会迅速增厚起来。如果在亚声速段的渐扩管道中减速过急 (管道张角过大),

便会导致边界层分离而形成旋涡（见第九章），使主流离开壁面。在超声段的渐缩管道中往往会出现激波，激波使边界层急剧增厚，也常伴随有流动分离。这就是说，气体在扩压器中的流动要比在喷管中更为复杂，因而对于超声速扩压器的设计和应用，应当更加小心。

二、喷管流动的计算和分析

工业上使用的喷管有两种：一种是能获得亚声速流或声速流的收缩喷管；另一种是能获得超声速流的缩放喷管。

(一) 收缩喷管

收缩喷管如图 7-11 (a) 所示。这种喷管广泛应用于蒸汽或燃气轮机、校正风洞（或叶栅风洞），引射器以及涡轮喷气发动机等动力和试验装置中。

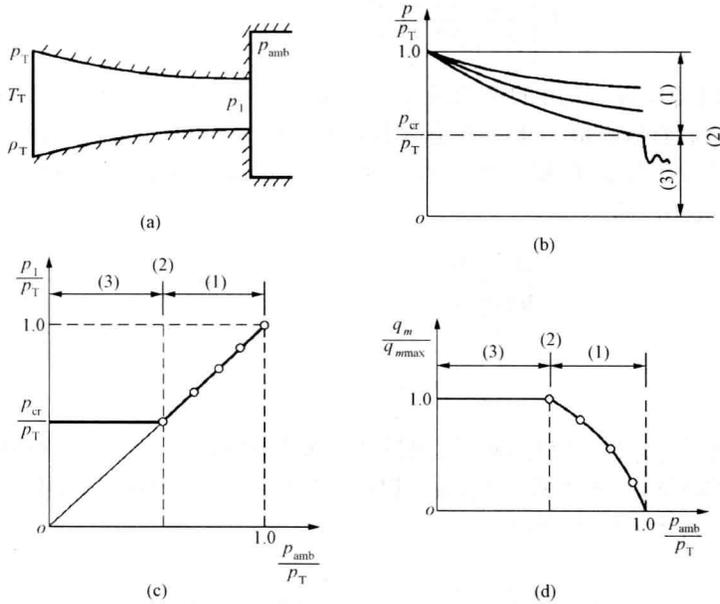


图 7-11 收缩喷管及其变工况流动

1. 出口的流速和流量

假设喷管进口的气流参数都用它们对应的滞止参数表示，喷管出口处的气流参数用下标 1 代表，则喷管中绝能流的能量方程为式 (7-3a)。对于比热容为常数的完全气体，该式转化为

$$c_p T_1 + v_1^2 / 2 = c_p T_T$$

喷管出口的气流速度

$$v_1 = [2c_p (T_T - T_1)]^{1/2} = \left[\frac{2\gamma}{\gamma-1} RT_T \left(1 - \frac{T_1}{T_T} \right) \right]^{1/2} \tag{7-37}$$

引用等熵过程关系式和状态方程，式 (7-37) 成为

$$v_1 = \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma-1} RT_T \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_T} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_T}{\rho_T} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_T} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2} \tag{7-37a}$$

可见，对于给定的气体，在收缩喷管出口气流未达到临界状态之前，进口气流的总焓（总温）

越高, 或者出口气流的压强对滞止压强比越小, 则出口气流的速度越高。由上一段的分析可知, 收缩喷管出口气流速度最高可达当地声速, 即出口气流处于临界状态。

通过喷管的质量流量为

$$q_m = A_1 \rho_1 v_1 = A_1 \rho_T (p_1 / p_T)^{1/\gamma} v_1$$

将式 (7-37a) 代入上式, 得

$$\begin{aligned} q_m &= A_1 \rho_T \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_T}{\rho_T} \left[\left(\frac{p_1}{p_T} \right)^{2/\gamma} - \left(\frac{p_1}{p_T} \right)^{(\gamma+1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2} \\ &= A_1 \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_T^2}{RT_T} \left[\left(\frac{p_1}{p_T} \right)^{2/\gamma} - \left(\frac{p_1}{p_T} \right)^{(\gamma+1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (7-38)$$

由式 (7-38) 可以看出, q_m 是 p_1 的连续函数, 而且当 $p_1=0$ (如前所述, 与之对应的气流速度为 v_{\max} , 只是理论上的极限值, 实际上是达不到的) 和 $p_1=p_T$ 时, q_m 都等于零。由此推论, 在 $0 < p_1 < p_T$ 的范围内必有 q_m 的极限值。为了推求流量的最大值 $q_{m\max}$, 取式 (7-38) 对 p_1 的导数, 并令 $dq_m/dp_1=0$, 即

$$\frac{d}{dp_1} \left[\left(\frac{p_1}{p_T} \right)^{2/\gamma} - \left(\frac{p_1}{p_T} \right)^{(\gamma+1)/\gamma} \right] = 0$$

得

$$p_1 = p_T \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} = p_{cr}$$

意即 p_1 等于临界压强 p_{cr} 时, 收缩喷管的流量达到最大值 $q_{m\max}$, 这时喷管出口气流达临界状态 $Ma=M^*=1$ 。将临界压强代入式 (7-37a) 和式 (7-38), 可得收缩喷管出口气流的临界速度和临界流量 (也即最大流量) 分别为

$$v_{1cr} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{p_T}{\rho_T} \right)^{1/2} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} RT_T \right)^{1/2} = c_{cr} \quad (7-13b)$$

$$q_{mcr} = A_1 \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{0.5(\gamma+1)/(\gamma-1)} (\gamma p_T \rho_T)^{1/2} \quad (7-39)$$

由此可见, 对于给定的气体, 收缩喷管出口的临界速度决定于进口气流的滞止参数, 经过喷管的最大流量决定于进口气流的滞止参数和出口截面积。

2. 变工况流动分析

喷管并不总是在设计工况下工作的, 当喷管进口的总压或喷管出口的环境背压发生变化时, 喷管便会在变动的工况下工作。下面将讨论常见的环境背压变化引起的喷管变工况流动。为此, 必须先弄清楚喷管出口气流压强 p_1 与环境背压 p_{amb} 的关系。由本章第一节已知, 微弱压强波是以当地声速传播的。当喷管出口的气流速度为亚声速时, 由于微弱压强波的传播速度大于气流速度, 压强扰动可以逆流向上游传播。这时必有 $p_1=p_{amb}$, 直至 $p_1=p_{amb}=p_{cr}$, $v_{1cr}=c_{cr}$, 喷管出口气流处于临界状态。如果 p_{amb} 再降低, 由于微弱压强波的传播速度等于出口气流的临界速度, 压强扰动已不能逆流上传, 喷管出口气流压强保持 $p_1=p_{cr}$, 而不受 p_{amb} 的影响。

根据临界压强比 p_{cr}/p_T 可以将收缩喷管的变工况流动分为以下三种流动状态:

(1) $p_{amb}/p_T > p_{cr}/p_T$ 时为亚临界流动: 这时喷管内的流动都是亚声速, $Ma(M^*) < 1$, $p_1=p_{amb}$;

随着 p_{amb} 的降低, $v_1(Ma_1)$ 将增高, q_m 将增大, 如图 7-11 (b)、(c)、(d) 中 (1) 所示。气体在喷管内得到完全膨胀。

(2) $p_{\text{amb}}/p_T = p_{\text{cr}}/p_T$ 时为临界流动: 这时喷管内为亚声速流, 但出口截面的气流达临界状态, $Ma_1 = M^*_1 = 1$, $p_1 = p_{\text{cr}} = p_{\text{amb}}$, $q_m/q_{m\text{max}} = 1$, 如图 7-11 (b)、(c)、(d) 中 (2) 所示。气体在喷管内仍可得到完全膨胀。

(3) $p_{\text{amb}}/p_T < p_{\text{cr}}/p_T$ 时为超临界流动: 这时整个喷管的气体流动与临界流动完全一样, $Ma_1 = M^*_1 = 1$, $p_1 = p_{\text{cr}} > p_{\text{amb}}$, $q_m/q_{m\text{max}} = 1$, 如图 7-11 (b)、(c)、(d) 中 (3) 所示。由于出口的气流压强高于环境背压, 气体在喷管内没有完全膨胀, 流出喷管后将膨胀, 称为膨胀不足。

顺便提及, 气流在收缩喷管出口已经达到临界状态之后, 虽然背压 p_{amb} 继续降低, 却不能使出口流速和流量再增加, 称为流动壅塞。壅塞现象的产生就是由于管道内出现了限制流量的声速截面, 该截面流量已达最大值, 更大的流量无论如何也通不过, 流动便壅塞了。

【例 7-4】 图 7-11 所示收缩喷管从大气中吸气, 其出口的环境背压由真空泵抽气形成, 当背压 $p_{\text{amb}} = 8000\text{Pa}$ 时, 通过收缩喷管的流量 $q_m = 0.18\text{kg/s}$ 。已知大气压强 $p_a = 1.01325 \times 10^5\text{Pa}$, 大气温度 $T_a = 293\text{K}$ 。试分析喷管内气流处于何种流动状态, 并求喷管出口截面直径。

【解】 由于压强比

$$\frac{p_{\text{amb}}}{p_T} = \frac{p_{\text{amb}}}{p_a} = \frac{8000}{101325} = 0.07895 < 0.5283 = \frac{p_{\text{cr}}}{p_T}$$

所以气流处于超临界流动状态, 这时通过喷管的流量 q_m 即为临界流量 $q_{m\text{cr}}$, 故由式 (7-39) 可得喷管出口截面直径为

$$\begin{aligned} d_1 &= \left(\frac{4q_{m\text{cr}}}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{-0.25(\gamma+1)/(\gamma-1)} (\gamma p_T \rho_T)^{-1/4} = \left(\frac{4q_{m\text{cr}} R^{1/2} T_a^{1/2}}{\pi \gamma^{1/2} p_a} \right)^{1/2} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{-0.25(\gamma+1)/(\gamma-1)} \\ &= \left(\frac{4 \times 0.18 \times 287.1^{1/2} 293^{1/2}}{\pi \times 1.4^{1/2} \times 101325} \right)^{1/2} \left(\frac{2}{1.4+1} \right)^{-0.25(1.4+1)/(1.4-1)} = 0.03095(\text{m}) \end{aligned}$$

顺便提及, 实际喷管的出口截面直径不应小于此数, 因为考虑实际流体的黏性, 还应按边界的位移厚度 δ_1 (见第九章) 进行修正, 适当予以加大。

(二) 缩放喷管

这种超声速喷管广泛应用于高参数蒸汽或燃气涡轮机、超声速风洞、引射器以及喷气飞机和火箭等动力和试验装置中。

1. 出口流速和流量 面积比公式

假设喷管进口的气流参数都用它们对应的滞止参数表示, 喷管出口处的气流参数用下标 1 代表。由于这里讨论的仍然是喷管内气流的绝能等熵流, 如果喷管内的气流又是在设计工况下得到完全膨胀的正常流动, 则喷管出口的气流速度仍按式 (7-37a) 计算, 通过喷管的质量流量可以按式 (7-38) 计算, 也可按式 (7-39) 计算, 但其中的截面积必须代之以喉部截面积 $A_t = A_{\text{cr}}$, 即

$$q_{m\text{cr}} = A_t \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{0.5(\gamma+1)/(\gamma-1)} (\gamma p_T \rho_T)^{1/2} \quad (7-39a)$$

因为通过喷管的流量就是喉部能通过的流量的最大值。

喷管的截面积随无量纲速度的变化规律可以由连续方程求得。根据连续方程

$$\frac{A}{A_1} = \frac{A}{A_{cr}} = \frac{\rho_{cr} c_{cr}}{\rho v}$$

将式(7-13)、式(7-16)、式(7-37)以及等熵过程关系式 $\rho/\rho_T=(p/p_T)^{1/\gamma}$ 代入上式,得

$$\frac{A}{A_{cr}} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/(\gamma-1)} \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)^{-1/2} \left[\left(\frac{p}{p_T}\right)^{2/\gamma} - \left(\frac{p}{p_T}\right)^{(\gamma+1)/\gamma} \right]^{-1/2} \quad (7-40)$$

将式(7-7)代入式(7-40),得

$$\frac{A}{A_{cr}} = \frac{1}{Ma} \left(\frac{2}{\gamma+1} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} Ma^2 \right)^{0.5(\gamma+1)/(\gamma-1)} = \frac{1}{M_*} \left(\frac{\gamma+1}{2} - \frac{\gamma-1}{2} M_*^2 \right)^{-1/(\gamma-1)} \quad (7-41)$$

这就是缩放喷管的面积比公式。面积比与压强比、马赫数的关系曲线示于图7-12。可见,要得到某一马赫数的超声速气流,所需的面积比是唯一的,而与这个面积比相对应的压强比也是唯一的。这就是说,要利用缩放喷管得到某一马赫数的超声速气流,不仅要具备必要的几何条件,而且同时要具备必要的压强条件,缺一不可。

2. 变工况流动分析

喷管的尺寸总是根据气流在设计工况压强比下可以正常膨胀的条件确定的,但喷管并不都是在设计工况下工作的。当压强比改变时,气流的流动情况也将随之改变。正如在讨论收缩喷管时那样,我们将讨论常见的环境背压变化引起的变工况流动。

在缩放喷管的变工况流动中,划界的压强比有三个:

(1) 设计工况下气流在喷管中作正常完全膨胀时出口截面的压强比。

$$\frac{p_1}{p_T} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_1^2 \right)^{-\gamma/(\gamma-1)} \quad (7-7a)$$

由于设计工况喷管出口气流压强应等于环境背压,即 $p_1=p_{amb}$,故沿喷管气流的压强比 p/p_T 和马赫数 Ma 的变化曲线如图7-13(b)、(c)中的 abc 和(2)所示,这是气流作正常膨胀的流动状态。喷管出口截面和喉部的压强比以及流量比如图7-13(d)、(e)、(f)中的点2所示。按照给定的面积比 A_1/A_{cr} 由式(7-41)、式(7-7a)便可求得马赫数 Ma_1 和压强比 p_1/p_T 。

(2) 气流在喷管中作正常膨胀、但在出口截面产生正激波时波后的压强比。

在喷管中作正常膨胀加速的气流,到达出口截面时,已经成为压强为 p_1 的超声速气流,经过正激波,压强由波前的 p_1 跃升为波后的 p_2 ,以适应高背压的环境条件,让气流以波后的亚声速顺利地流出。若用 p_2/p_T 代表第二个划界的压强比,则由式(7-7a)、式(7-31)得

$$\frac{p_2}{p_T} = \frac{p_1}{p_T} \frac{p_2}{p_1} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_1^2 \right)^{-\gamma/(\gamma-1)} \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} Ma_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \quad (7-42)$$

这是喷管在非设计工况工作时可能遇到的一种流动状态。气流的压强比 p/p_T 和马赫数 Ma 沿喷管的变化如图7-13(b)、(c)中 $abcd$ 和(4)所示。喷管出口截面和喉部的压强比以及流量比如图7-13(d)、(e)、(f)中的点4所示。将已经求得的 Ma_1 代入式(7-42),便可求得压强比 p_2/p_T 。

(3) 喷管中的气流恰在喉部达到声速、其余全为亚声速时出口截面的压强比。

如果用 Ma_1' 代表这种流动状态气流在出口截面亚声速的马赫数,并用 p_3/p_T 代表该压强比,显然

$$\frac{p_3}{p_T} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_1'^2 \right)^{-\gamma/(\gamma-1)} \quad (7-7b)$$

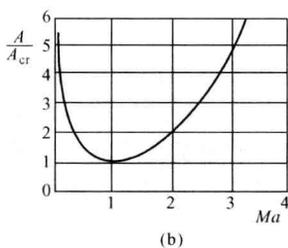
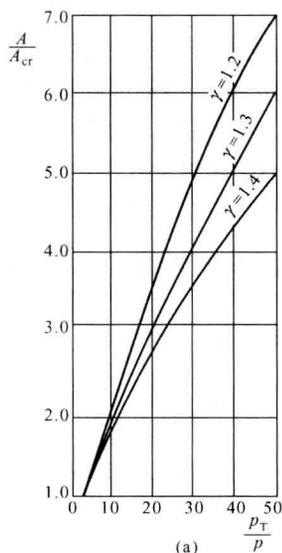


图 7-12 面积比与压强比、马赫数的关系曲线

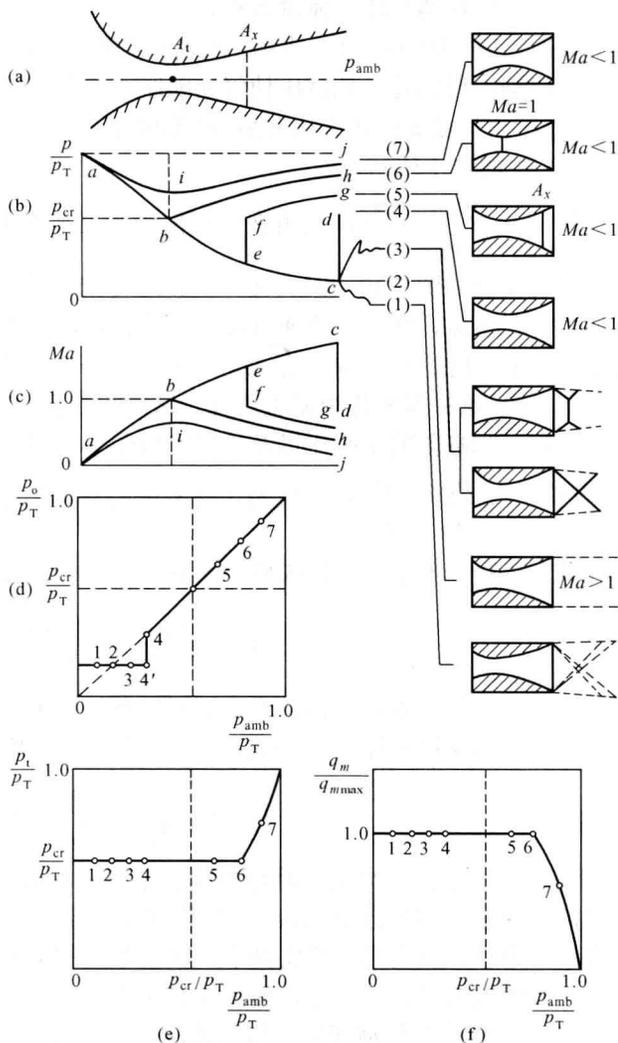


图 7-13 缩放喷管及其变工况流动

这是喷管在非设计工况工作时可能遇到的又一种流动状态。气流的压强比 p/p_T 和马赫数 Ma 沿喷管的变化如图 7-13 (b)、(c) 中 abh 和 (6) 所示。喷管出口截面和喉部的压强比以及流量比如图 7-13 (d)、(e)、(f) 中的点 6 所示。按照给定的面积比 A_1/A_{cr} 由式 (7-41)、式 (7-7b) 便可求得亚声速的 Ma_1' 以及与之对应的压强比 p_3/p_T 。

综上所述可以看出，三个划界的压强比都决定于面积比 A_1/A_{cr} 。这三个压强比代表着三种流动状态。以这三个压强比为界，可以把缩放喷管中气流的变工况流动划分为四个区段，它们代表着四种类型的流动状态：

(1) $\frac{p_{amb}}{p_T} < \frac{p_1}{p_T}$: 气流在喷管内作正常的降压膨胀, 其压强比 p/p_T 和马赫数 Ma 沿喷管

的变化仍如图 7-13 (b)、(c) 中的曲线 abc 所示。由于气流在喷管出口截面的压强 p_1 高于环境背压 p_{amb} , 所以超声速气流流出喷管后, 将在出口外以膨胀波的形式继续膨胀(第十章讨论), 如图 7-13 (b) 中 (1) 所示。这种现象称为膨胀不足。但是, 低背压并不会影响喷管内的气体流动, 原因是, 低背压使气流膨胀的这种连续的微弱压强波不能在超声流中逆流向上传播。喷管出口截面的压强比 p_0/p_T 和喉部的压强比 p/p_T 以及流量比 q_m/q_{mmax} 如图 7-13 (d)、(e)、(f) 中的点 1 所示。

(2) $\frac{p_1}{p_T} < \frac{p_{amb}}{p_T} < \frac{p_2}{p_T}$: 气流在喷管内仍作正常的降压膨胀, 其压强比 p/p_T 和马赫数 Ma

沿喷管的变化仍如图 7-13 (b)、(c) 中的曲线 abc 所示。由于气流在喷管出口截面的压强 p_1 低于环境背压 p_{amb} , 所以超声速气流流出喷管后, 将受到高背压的压缩, 而形成喷管出口外激波系(第十章讨论)。气流经过激波, 压强跃升, 以适应高背压的环境条件, 如图 7-13 (b) 中 (3) 所示。这种现象称为膨胀过度。这种喷管出口外激波系并不影响气流在管内的流动, 喷管出口截面和喉部的压强比以及流量比如图 7-13 (d)、(e)、(f) 中的点 3 所示。

(3) $\frac{p_2}{p_T} < \frac{p_{amb}}{p_T} < \frac{p_3}{p_T}$: 如果超声速来流的马赫数为 Ma_1 , 则当形成正激波时, 激波强度

p_2/p_1 由式 (7-31) 表示。由该式可得来流速度 v_1 与激波强度的关系式为

$$v_1 = c_1 \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{p_2}{p_1} \right)^{1/2}$$

当背压 p_{amb} 大于气流在喷管出口产生正激波所达到的压强 p_2 时, 由高背压 p_{amb} 形成的激波相对于波前流体的传播速度 v_s 可由式 (7-23) 和式 (7-25) 求得

$$v_s = c_1 \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{p_{amb}}{p_1} \right)^{1/2}$$

当正激波后的压强 p_2 正好等于环境背压 p_{amb} 时, $v_1 = v_s$, 激波稳定在喷管出口处; 当背压 p_{amb} 大于出口正激波后的压强 p_2 时, 将出现瞬时的 $v_s > v_1$, 激波将向上游(管内)移动。但是, 随着激波的内移, 波前马赫数将减小, 激波强度将减弱, 激波的传播速度将降低, 气流的压强将由经过激波的跃升以及亚声速流在扩张段中的继续增压来达到与背压相等。激波内移到某截面 A_x , 当激波的传播速度又与来流速度相等时, 便又稳定下来。

这种在喷管的扩张段出现正激波的流动状态以及气流的压强比和马赫数沿喷管的变化如图 7-13 (b)、(c) 中的 $abefg$ 和 (5) 所示, 即先按曲线 abe 降压加速, 经激波由 e 跃变至 f , 再按曲线 fg 减速增压直至出口。其喷管出口截面和喉部的压强比以及流量比如图 7-13 (d)、(e)、(f) 中的点 5 所示。

管内出现正激波的截面 A_x 可以按背压 p_{amb} 算出来。假设波前来流的速度系数用 M_{*x} 代表, 出口截面气流的速度系数和静、总压强分别用 M_{*1} 和 p_1^* 、 p_T^* 代表, 显然应有 $p_1^* = p_{amb}$ 。由于经过出口截面的流量等于经过临界截面的流量, 故由式 (7-38) 和式 (7-39a) 的相等可得 p_T^* , 从而也就得到了经过激波的总压比 p_T^*/p_T ; 代入式 (7-34), 可得激波前来流的无量纲速度 $M_{*x}(Ma_x)$; 再代入式 (7-41), 可得激波所在截面 A_x 。这样, 激波强度及其在喷管扩张段中的位置便完全确定了。

(4) $\frac{p_3}{p_T} < \frac{p_{amb}}{p_T} < 1$: 这时喉部也达不到声速了, 管内全部是亚声速流, 超声速喷管已经

变成了文丘里管。这时的出口截面气流压强必等于环境背压, 出口截面气流速度不再决定于面积比, 而决定于压强比 p_{amb}/p_T 。随着背压 p_{amb} 的提高, 速度将降低; 反之亦然。这种流动状态及其压强比、马赫数和流量比如图 7-13 (a) 中的曲线 ajj 以及 (7) 和 (e)、(f) 中的点 7 所示。倘若进一步增大 p_{amb} , 使 $p_{amb}=p_T$, 管内气体便不流动了。

【例 7-5】 已知大容器内的过热蒸汽参数为 $p_T=2.94 \times 10^6 \text{ Pa}$, $T_T=773 \text{ K}$, $\gamma=1.30$, $R=462 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$, 拟用喷管使过热蒸汽的能量转换成高速气流的动能。如果喷管出口的环境背压 $p_{amb}=9.8 \times 10^5 \text{ Pa}$, 试分析应采用何种形式的喷管? 若不计蒸汽流过喷管的损失, 试求蒸汽的临界流速、出口流速和马赫数。欲使通过喷管的流量 $q_m=8.5 \text{ kg/s}$, 试求喷管喉部和出口截面的直径。

【解】 由式 (7-15) 可得蒸汽的临界压强

$$p_{cr} = p_T \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} = 2.94 \times 10^6 \left(\frac{2}{1.3+1} \right)^{1.3/(1.3-1)} = 1.604 \times 10^6 \text{ (Pa)} > p_{amb}$$

故应采用缩放喷管。这时喷管出口的气流压强决定于环境压强, $p_1=p_{amb}$, 故由式 (7-13a)、式 (7-37a) 和式 (7-7) 可以求得蒸汽流经喷管喉部的临界流速、出口流速和马赫数分别为

$$v_{cr} = c_{cr} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} RT_T \right)^{1/2} = \left(\frac{2 \times 1.3}{1.3+1} \times 462 \times 773 \right)^{1/2} = 635.4 \text{ (m/s)}$$

$$v_1 = \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma+1} RT_T \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_T} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{2 \times 1.3}{1.3+1} \times 462 \times 773 \left[1 - \left(\frac{9.8 \times 10^5}{2.94 \times 10^6} \right)^{(1.3-1)/1.3} \right] \right\}^{1/2} = 823.5 \text{ (m/s)}$$

$$Ma_1 = \left(\frac{2}{\gamma-1} \right)^{1/2} \left[\left(\frac{p_T}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right]^{1/2} = \left(\frac{2}{1.3-1} \right)^{1/2} \left[\left(\frac{2.94 \times 10^6}{9.8 \times 10^5} \right)^{(1.3-1)/1.3} - 1 \right]^{1/2} = 1.387$$

由式 (7-39a) 和式 (7-40) 可以求得喷管喉部和出口截面的直径分别为

$$d_{cr} = \left(\frac{4q_{mcr} R^{1/2} T_T^{1/2}}{\pi \gamma^{1/2} p_T} \right)^{1/2} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{-0.25(\gamma+1)/(\gamma-1)}$$

$$= \left(\frac{4 \times 8.5 \times 462^{1/2} \times 773^{1/2}}{\pi \times 1.3^{1/2} \times 2.94 \times 10^6} \right)^{1/2} \left(\frac{2}{1.3+1} \right)^{-0.25(1.3+1)/(1.3-1)} = 0.05742 \text{ (m)}$$

$$d_1 = d_{cr} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{0.5/(\gamma-1)} \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)^{-1/4} \left[\left(\frac{p_T}{p_1} \right)^{2/\gamma} - \left(\frac{p_T}{p_1} \right)^{(\gamma+1)/\gamma} \right]^{-1/4}$$

$$\times \left(\frac{1.3+1}{1.3-1} \right)^{-1/4} \left[\left(\frac{9.8 \times 10^5}{2.94 \times 10^6} \right)^{2/1.3} - \left(\frac{9.8 \times 10^5}{2.94 \times 10^6} \right)^{(1.3+1)/1.3} \right]^{-1/4} = 0.06063 \text{ (m)}$$

【例 7-6】 图 7-14 为一暂冲式超声速风洞示意图。已知缩放喷管喉部截面积 $A_t=0.01972 \text{ m}^2$, 出口截面积 $A_1=0.20 \text{ m}^2$, 进口的总压 $p_T=20.265 \times 10^5 \text{ Pa}$, 总温 $T_T=500 \text{ K}$, 求划分变工况流动四个区段的三个压强值。如果使喷管出口环境背压 $p_{amb}=4.053 \times 10^5 \text{ Pa}$, 那么激波应出现在哪个截面上?

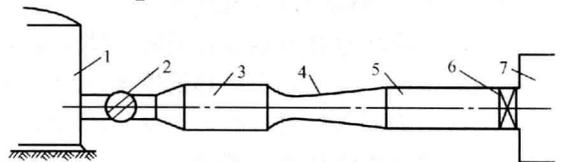


图 7-14 暂冲式超声速风洞示意图

1—储气罐; 2—恒压阀; 3—稳定段; 4—缩放喷管;

5—试验段; 6—阀门; 7—真空箱

【解】 当缩放喷管内气体在设计工况作正常膨胀加速时。由式 (7-41)

$$\frac{0.20}{0.01972} = \frac{1}{M_{*1}} \left(\frac{1.4+1}{2} - \frac{1.4+1}{2} M_{*1}^2 \right)^{-1/(1.4-1)}$$

得 $M_{*1}=2.13$, $M_{*1}'=0.0626$; 将 M_{*1} 代入式 (7-21), 得

$$p_1 = 20.265 \times 10^5 \left[1 - \frac{1.4-1}{1.4+1} \times 2.13^2 \right]^{1.4/(1.4-1)} = 1.451 \times 10^4 \text{ (Pa)}$$

当气流在喷管出口截面出现正激波时, 将 M_{*1} 代入式 (7-31), 得

$$p_2 = 1.451 \times 10^4 \frac{(1.4+1) \times 2.13^2 - (1.4-1)}{(1.4+1) - (1.4-1) \times 2.13^2} = 2.60 \times 10^5 \text{ (Pa)}$$

当气流仅在喷管喉部出现声速、其余全为亚声速时, 将 M_{*1}' 代入式 (7-21), 得

$$p_3 = 20.265 \times 10^5 \left[1 - \frac{1.4-1}{1.4+1} \times 0.0626^2 \right]^{1.4/(1.4-1)} = 20.22 \times 10^5 \text{ (Pa)}$$

当背压 $p_{\text{amb}}=4.053 \times 10^5 \text{ Pa}$, 由于 $p_2 < p_{\text{amb}} < p_3$, 故必在喷管扩张段出现激波。由式 (7-38)、式 (7-39a) 得流量关系

$$0.2 \left\{ \frac{2 \times 1.4}{1.4-1} \times \frac{(p_T'')^2}{287.1 \times 500} \left[\left(\frac{4.053 \times 10^5}{p_T''} \right)^{2/1.4} - \left(\frac{4.053 \times 10^5}{p_T''} \right)^{(1.4+1)/1.4} \right] \right\}^{1/2}$$

$$= 0.01972 \left(\frac{2}{1.4+1} \right)^{0.5(1.4+1)/(1.4-1)} \times \left(\frac{1.4}{287.1 \times 500} \right)^{1/2} \times 20.265 \times 10^5$$

得 $p_T''=4.286 \times 10^5 \text{ Pa}$ 。于是, 总压比 $p_T''/p_T=0.2115$, 代入式 (7-34):

$$0.2115 = (M_{*x}^2)^{1.4/(1.4-1)} \times \left[\frac{(1.4+1) - (1.4-1)M_{*x}^2}{(1.4+1)M_{*x}^2 - (1.4-1)} \right]^{-1/(1.4-1)}$$

得 $M_{*x}=2.065$, 代入式 (7-41), 得激波出现在

$$A_x = \frac{0.01972}{2.065} \times \left[\frac{1.4+1}{2} - \frac{1.4-1}{2} \times 2.065^2 \right]^{-1/(1.4-1)} = 0.1345 \text{ (m}^2\text{)}$$

的截面上。

第五节 等截面摩擦管流

气体在等截面管道内的流动是许多工程领域中的重要问题, 诸如气体在动力装置的各类通道中的流动, 化工设备中各类气体的输送和流动, 煤气、天然气在长管道中的流动以及高真空技术中气体沿管道的流动等。

本节讨论摩擦对等截面管道内气体定常流动的影响, 拟分两方面: 其一, 管道比较短、又有保温措施, 流动属于绝热的摩擦过程, 即等截面绝热摩擦管流; 其二, 管道非常长, 有足够的接触面积与外界进行热交换, 流动属于等温的摩擦过程, 即等截面等温摩擦管流。

一、等截面绝热摩擦管流

1. 范诺线

对于等截面管道中的一维定常绝能流, 其连续方程为

$$\rho v = q_m / A = \text{常数}$$

式中 ρv 称为密流。上式表明, 沿管道气体的密流不变。能量方程为

$$h + v^2/2 = h_0 = \text{常数}$$

即沿管道气体的总焓不变。合并以上二式, 得

$$h = h_0 - \frac{q_m^2}{2\rho^2 A^2} \quad (\text{a})$$

式中 h_0 、 q_m 和 A 都是给定的常数。由热力学已知, 气体的状态方程为

$$h = h(s, \rho) \text{ 或 } s = s(h, \rho) \quad (\text{b})$$

由式 (a)、式 (b) 消去 ρ , 可得方程

$$h = h(s) \quad (\text{c})$$

即气体的焓与熵的函数关系。给气体的密流 q_m/A 以不同的值, 便可求出不同的 (h, s) 曲线, 称为范诺 (Fanno) 线, 如图 7-15 所示。由上述可见, 范诺线是焓熵图上满足等截面管流的连续方程、绝能流的能量方程和气体状态方程的诸点的连线。在范诺线上, 气流的总焓和密流均保持不变。等截面绝热摩擦管流满足上述方程和条件, 因而, 可以用范诺线来描述绝热摩擦管流的流动情况。在以上的讨论中并没有规定是什么气体, 因而, 范诺线对完全气体和非完全气体都是适用的。

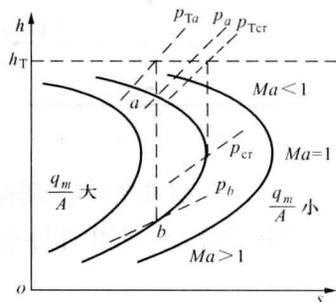


图 7-15 范诺线

为了定性地分析清楚绝热摩擦管流中气流参数的变化趋向, 这里引入微分形式的连续方程、能量方程和完全气体的焓和熵:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} = 0 \quad (\text{d})$$

$$dh + v dv = 0 \quad (\text{e})$$

$$dh = c_p dT \quad (\text{f})$$

$$ds = c_v \frac{dT}{T} - R \frac{d\rho}{\rho} \quad (\text{g})$$

假定气体的比热容为常数, 联立求解以上四式, 可得

$$\begin{aligned} ds &= c_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v} = c_v \frac{dT}{T} - c_v \frac{\gamma RT}{v^2} \frac{dh}{h} \\ &= c_v \left(1 - \frac{1}{Ma^2} \right) \frac{dh}{h} = \frac{R}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{1}{Ma^2} \right) \frac{dT}{T} \end{aligned} \quad (\text{h})$$

由式 (h) 可以看出 (见图 7-15): 当 $Ma < 1$ 时, dh 与 ds 异号, 在焓熵图上曲线的斜率 dh/ds 为负, 这指的是曲线的上半支, 它代表的是亚声速流; 当 $Ma > 1$ 时, dh 与 ds 同号, 在焓熵图上曲线的斜率 dh/ds 为正, 这指的是曲线的下半支, 它代表的是超声速流; 当 $Ma = 1$ 时, $ds = 0$, 在焓熵图上曲线的斜率 $dh/ds \rightarrow \infty$, 即曲线在该点的切线垂直于 s 轴, 所以该点是最大熵值 s_{\max} 点, 它代表声速流的临界状态。热力学第二定律已经阐明, 在绝能流中熵值是不能减小的。因此, 绝热摩擦管流流动状态的变化必沿范诺线而趋向右方, 对于亚声速流, 摩擦消耗有用的机械能, 使熵值增加, 马赫数将增大, 最大到 $Ma = 1$, 而气流的焓、温度、压强和总压强都要降低; 对于超声速流, 摩擦同样使熵值增加, 马赫数将减小, 最小到 $Ma = 1$, 而气流的

焓、温度、压强虽然升高,但总压强仍然是降低的。这就是说,摩擦的作用使亚声速流和超声速流最终达到的极限状态都是 $Ma=1$ 的临界状态,由亚声速流连续地变化为超声速流或由超声速流连续地变化为亚声速流都是不可能的。临界压强 p_{cr} 在这里又称为极限压强。

2. 绝热摩擦管流的计算

在等截面摩擦管流中取图 7-16 中虚线所示轴向长度为 dx 的控制体,壁面对气体的切向应力为 τ_w 。取完全气体状态方程的对数的微分,得

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (i)$$

已知管道的截面积为 A , 圆管的直径和非圆形截面管道的当量直径都可表示为 $D=4A/\chi$ (χ 为湿周长)。如果用 $dA_w=4Adx/D$ 表示与控制体相接触的湿壁面面积,则对控制体内的流体列动量方程,得

$$-dpA - \tau_w dA_w = \rho v A dv$$

代入 dA_w 后,得

$$\rho v dv + dp + 4\tau_w dx/D = 0 \quad (j)$$

对于摩擦管流,一般用摩擦系数来表征摩擦作用。摩擦系数 C_f 的定义式为

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho v^2/2} \quad (7-43)$$

在同式 (6-14) 的比较中可知 $C_f = \lambda/4$ 。将式 (7-43) 中的 τ_w 代入式 (j), 通除以 ρv^2 , 并引入 $\gamma p/\rho = c^2$ 和 $v/c = Ma$, 得

$$\frac{dv}{v} + \frac{1}{\gamma Ma^2} \frac{dp}{p} + \frac{4C_f}{2} \frac{dx}{D} = 0 \quad (j')$$

将式 (f) 代入式 (e) 后, 通除以 $c_p T$, 并引入 $\gamma p/\rho = c^2$ 和 $v/c = Ma$, 得

$$\frac{dT}{T} + (\gamma - 1) Ma^2 \frac{dv}{v} = 0 \quad (e')$$

从式 (d)、式 (e')、式 (i) 和式 (j') 中消去 dp/p 、 $d\rho/\rho$ 、 dT/T , 得

$$\frac{dv}{v} = \frac{\gamma Ma^2}{2(1 - Ma^2)} \times 4C_f \frac{dx}{D} \quad (7-44)$$

由此可见摩擦的作用, 当 $Ma < 1$ 时, $dv > 0$, 使亚声速气流加速; 当 $Ma > 1$ 时, $dv < 0$, 使超声速气流减速。这就是说, 无论是亚声速气流还是超声速气流, 摩擦的作用都相当于使管道的截面减小。

为了导出速度沿管长变化的关系式, 先按式 (7-17) 和式 (7-19b) 将式 (7-44) 写成

$$\frac{dM_*}{M_*} = \frac{\gamma}{\gamma + 1 - M_*^2} \times 4C_f \frac{dx}{D}$$

在截面 1 和 2 间的积分式为

$$\int_{M_{*1}}^{M_{*2}} \left(\frac{1}{M_*^2} - 1 \right) \frac{dM_*}{M_*} = \frac{4\gamma}{\gamma + 1} \int_0^L C_f \frac{dx}{D}$$

完成积分, 得

$$\left(\frac{1}{M_{*1}^2} - \frac{1}{M_{*2}^2} \right) - \ln \frac{M_{*2}^2}{M_{*1}^2} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \times 4\bar{C}_f \frac{L}{D} \quad (7-45)$$

$$\text{式中} \quad \bar{C}_f = \frac{1}{L} \int_0^L C_f dx \quad (7-46)$$

为按长度 L 平均的摩擦系数。对于绝热的亚声速完全发展的紊流，戴斯勒 (R. G. Deissler) 的理论分析以及基南 (J. H. Keenan) 和诺伊曼 (E. P. Neumann) 的实验测量都说明，在马赫数从 $0 \sim 1$ 的范围内，气体的压缩性对摩擦系数的影响几乎是忽略的，不可压缩流的摩擦系数计算公式可以一直用到 $Ma=1$ 。对于绝热的超声速流，在发生壅塞之前允许的极限管长 L_{cr}/D 是如此之短，以致实际上流动决不能接近充分发展的状态。这时的摩擦系数不仅包含壁面切向应力的影响，而且还包含由于速度分布不断变化而进行着的动量交换的影响，因此，便把根据实验用一维流公式算出的管道摩擦系数称为表观摩擦系数。基南和诺伊曼的实验结果是，对于相对管长， $L/D=10 \sim 50$ 的管道，在马赫数 $Ma=1.2 \sim 3$ 、管流雷诺数 $Re=25000 \sim 700000$ 的范围内，平均表观摩擦系数 $\bar{C}_f=0.002 \sim 0.003$ 。对于中等长度的管道可取 $\bar{C}_f=0.0025$ 。

按式 (7-19a) 将 M_*^2 换成 Ma^2 ，则式 (7-45) 成为

$$\frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{Ma_1^2} - \frac{1}{Ma_2^2} \right) + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \left[\frac{Ma_1^2}{Ma_2^2} \frac{2+(\gamma-1)Ma_2^2}{2+(\gamma-1)Ma_1^2} \right] = 4\bar{C}_f \frac{L}{D} \quad (7-45a)$$

式 (7-45) 和式 (7-45a) 中的 $4\bar{C}_f L/D$ 是等截面绝热摩擦管流的特征参数，它的大小直接影响管内气体的流动状态。

其他流动参数间的关系，可以由式 (7-44) 和式 (d)、式 (j')、式 (e') 求得的 $d\rho/\rho$ 、 dp/p 、 dT/T 的积分求得，也可根据相距管长 L 的截面 1 和 2 上的无量纲速度利用一些基本关系式求得。根据等截面管流的连续方程可得密度比与速度比：

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{M_{*1}}{M_{*2}} = \frac{Ma_1}{Ma_2} \left[\frac{2+(\gamma-1)Ma_2^2}{2+(\gamma-1)Ma_1^2} \right]^{1/2} \quad (7-47)$$

由于在绝能流中 $T_{T1}=T_{T2}=T_T$ ，故由静总温度比可得温度比

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(\gamma+1) - (\gamma-1)M_{*2}^2}{(\gamma+1) - (\gamma-1)M_{*1}^2} = \frac{2+(\gamma-1)Ma_1^2}{2+(\gamma-1)Ma_2^2} \quad (7-48)$$

根据完全气体的状态方程，并利用式 (7-47)、式 (7-48) 可得压强比：

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{M_{*1}}{M_{*2}} \frac{(\gamma+1) - (\gamma-1)M_{*2}^2}{(\gamma+1) - (\gamma-1)M_{*1}^2} = \frac{Ma_1}{Ma_2} \left[\frac{2+(\gamma-1)Ma_1^2}{2+(\gamma-1)Ma_2^2} \right]^{1/2} \quad (7-49)$$

由静总压强比和式 (7-49) 可得总压比：

$$\frac{p_{T2}}{p_{T1}} = \frac{M_{*1}}{M_{*2}} \left[\frac{(\gamma+1) - (\gamma-1)M_{*1}^2}{(\gamma+1) - (\gamma-1)M_{*2}^2} \right]^{1/(\gamma-1)} = \frac{Ma_1}{Ma_2} \left[\frac{2+(\gamma-1)Ma_2^2}{2+(\gamma-1)Ma_1^2} \right]^{0.5(\gamma+1)/(\gamma-1)} \quad (7-50)$$

代入式 (7-36)，可得熵增：

$$\begin{aligned} \frac{s_2 - s_1}{R} &= \ln \left\{ \frac{M_{*2}}{M_{*1}} \left[\frac{(\gamma+1) - (\gamma-1)M_{*2}^2}{(\gamma+1) - (\gamma-1)M_{*1}^2} \right]^{1/(\gamma-1)} \right\} \\ &= \ln \left\{ \frac{Ma_2}{Ma_1} \left[\frac{2+(\gamma-1)Ma_1^2}{2+(\gamma-1)Ma_2^2} \right]^{0.5(\gamma+1)/(\gamma-1)} \right\} \end{aligned} \quad (7-51)$$

利用上面导出的式(7-45)~式(7-51)就可以进行等截面绝热摩擦管流的计算。计算中应当注意的问题是,截面1和2之间的实际管长 L 不应超过由 $M_{*1}(Ma_1)$ 发展到极限状态 $M_{*2}=Ma_2=1$ 时的极限管长 L_{cr} (又称最大管长)。为了正确地进行计算,应导出计算极限管长的公式。由于不论是亚声速气流还是超声速气流,它们的极限状态都是临界状态,因而令 $M_{*2}=Ma_2=1$, $L=L_{cr}$,并去掉进口气流参数的下标1,便可由式(7-45)得

$$\frac{1}{M_*^2} - 1 + \ln M_*^2 = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \times 4\bar{C}_f \frac{L_{cr}}{D} \quad (7-52)$$

$$\frac{1-Ma^2}{\gamma Ma^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \frac{(\gamma+1)Ma^2}{2+(\gamma-1)Ma^2} = 4\bar{C}_f \frac{L_{cr}}{D} \quad (7-52a)$$

按照同样的方法,甚易由式(7-47)~式(7-51)求得与极限管长相对应的极限状态和进口的流动参数比与熵增:

$$\frac{\rho_{cr}}{\rho} = \frac{v}{v_{cr}} = M_* = Ma \left[\frac{\gamma+1}{2+(\gamma-1)Ma^2} \right]^{1/2} \quad (7-53)$$

$$\frac{T_{cr}}{T} = \frac{2}{(\gamma+1) - (\gamma-1)M_*^2} = \frac{2+(\gamma-1)Ma^2}{\gamma+1} \quad (7-54)$$

$$\frac{p_{cr}}{p} = \frac{2M_*}{(\gamma+1) - (\gamma-1)M_*^2} = Ma \left[\frac{2+(\gamma-1)Ma^2}{\gamma+1} \right]^{1/2} \quad (7-55)$$

$$\frac{p_{Tcr}}{p_T} = M_* \left(\frac{\gamma+1}{2} - \frac{\gamma-1}{2} M_*^2 \right)^{1/(\gamma-1)} = Ma \left[\frac{\gamma+1}{2+(\gamma-1)Ma^2} \right]^{0.5(\gamma+1)/(\gamma-1)} \quad (7-56)$$

$$\begin{aligned} \frac{s_{cr} - s}{R} &= \ln \left\{ \frac{1}{M_*} \left[\frac{2}{(\gamma+1) - (\gamma-1)M_*^2} \right]^{1/(\gamma-1)} \right\} \\ &= \ln \left\{ \frac{1}{Ma} \left[\frac{2+(\gamma-1)Ma^2}{\gamma+1} \right]^{0.5(\gamma+1)/(\gamma-1)} \right\} \end{aligned} \quad (7-57)$$

对于 $\gamma=1.4$ 的气体,将式(7-52)的函数关系绘成曲线,如图7-17所示。可以清楚地看出,对于亚声速气流,随着 $M_* \rightarrow 0$, $L_{cr}/D \rightarrow \infty$;

对于超声速气流,如果取 $\bar{C}_f=0.0025$,则随着 $M_* \rightarrow M_{*max}=2.4495$, $L_{cr}/D \rightarrow 82.15$ 。这说明,由于摩擦作用,超声速气流的总压损失是严重的,极限管长甚短,以致在发生壅塞之前流动不可能达到充分发展的状态。对于 $\gamma=1.4$ 的气体,等截面绝热摩擦管流的极限状态与进口的流动参数比列于附录B表B-3。

3. 摩擦造成的壅塞现象

从以上分析可知,摩擦的作用是使气流向临界状态靠近。对应于每个给定的进口无量纲速度

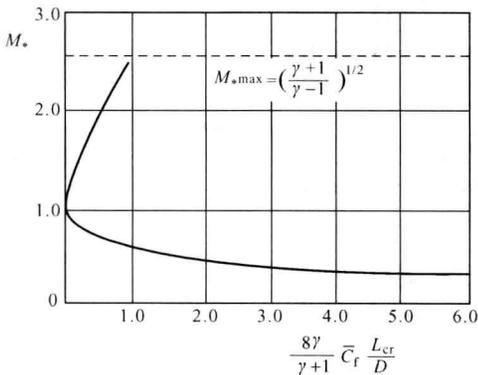


图 7-17 极限管长与速度系数的关系曲线

(M_* 、 Ma) 都有确定的极限管长 L_{cr} 。实际管长超过极限管长, 即 $L > L_{cr}$ 时, 即使出口的背压足够低, 流动也将出现壅塞现象, 因为极限管长处的气流速度已达到声速, 密流 $\rho_{cr}v_{cr}$ 已达到最大值。而大于极限管长的管段的摩擦作用将使气流的总压继续降低, 原先在极限管长时能够通过的流量, 这时便通不过了, 发生了壅塞。这就是摩擦造成的壅塞现象。壅塞将使气流的压强增高, 对流动形成扰动, 迫使气流作相应的能够流得过去的调整。如何调整, 将依气流是亚声速的还是超声速的而有所不同。

对于亚声速气流, 由于壅塞引起的压强增高扰动可以逆流往上传播。直至管道的进口, 从而在进口发生溢流, 减小通过管道的流量, 同时也就减小了进口的气流速度。这样, 对应的极限管长加长, 临界截面往后移动, 直至后移到出口为止。这时, 出口的气流必处于临界状态, 进口的 $M_*(Ma)$ 按实际管长由式 (7-52)、式 (7-52a) 确定。

对于超声速气流, 壅塞所引起的压强增高将在超声速气流中形成激波。当实际管长超过极限管长不多时, 激波位于管内, 进口的 $M_*(Ma)$ 没有变, 流量也没有变。激波之后是亚声速气流, 而亚声速气流因摩擦造成的总压损失比超声速气流要小得多, 可以通过更长的管段才达到临界状态。这样, 便可将临界截面往后移动到出口, 从而使进口流量能够从出口顺利通过, 而不需要减小流量, 进行调整。激波的位置可根据气流在出口达到临界状态的条件来确定。由于实际气体的黏性作用, 加之超声速摩擦管流几乎全处于速度剖面不断变化的进口段中, 实际的激波结构是复杂的。但作为一种近似, 仍可把它当做一道正激波来处理。壅塞越严重, 激波的位置越靠前, 激波也越强。壅塞十分严重时, 激波会被推移到进口截面, 这时, 给定的管长正好等于 $1/M_*$ 对应的亚声速气流的极限管长。如果给定的管长还大于此数, 则激波将被推出进口之外, 气流在进口之前发生溢流, 减小流量, 进行调整。

【例 7-7】 压强为 $3.667 \times 10^5 \text{ Pa}$ 、温度为 360 K 的空气流以 $Ma=0.3$ 的速度流进内径为 5 cm 的等截面直管道, 其平均摩擦系数 $\bar{C}_f=0.005$ 。试求管道进口的气流速度、极限管长以及极限状态下气流的压强、温度和速度。

【解】 管道进口的气流速度

$$v = Ma(\gamma RT)^{1/2} = 0.3 \times (1.4 \times 287.1 \times 360)^{1/2} = 114.1 \text{ (m/s)}$$

由附录 B 表 B-3 按马赫数 $Ma_1=0.3$ 可以查得: $4\bar{C}_f L_{cr}/D = 5.2992$, $p/p_{cr} = 3.6190$, $T/T_{cr} = 1.1788$, $v/v_{cr} = 0.32572$ 。将已知数据代入上述参数比, 得极限管长、临界压强、临界温度、临界速度:

$$L_{cr} = 5.2992 \times 0.05 / (4 \times 0.005) = 13.25 \text{ (m)}$$

$$p_{cr} = 3.667 \times 10^5 / 3.619 = 1.013 \times 10^5 \text{ (Pa)}$$

$$T_{cr} = 360 / 1.1788 = 305.4 \text{ (K)}$$

$$v_{cr} = 114.1 / 0.32572 = 350.3 \text{ (m/s)}$$

【例 7-8】 已知流进等直管进口的空气流速度系数 $M_{*1}=1.75$, 平均表观摩擦系数 $\bar{C}_f = 0.0012$, $L/D=107$ 。试问流动会不会发生壅塞? 如果会发生, 激波出现在什么位置? 管内气流的速度和总压将怎样变化?

【解】 对应于 $M_{*1}=1.75$ 的极限管长:

$$\begin{aligned} \frac{L_{cr}}{D} &= \frac{1.4+1}{8 \times 1.4 \times 0.0012} \left[\frac{1}{1.75^2} - 1 + \ln 1.75^2 \right] \\ &= 79.6 < 107 = \frac{L}{D} \end{aligned}$$

所以,会发生壅塞。为了判断会不会形成进口截面激波,以 $M_{*1}'=1/M_{*1}=0.5714$ 代入式 (7-52),求得 $L_{cr}'/D=171>107=L/D$,所以,尚不会形成进口截面激波,激波出现在距离进口为 L_x 的截面上。为了求得激波的位置和强度,从进口至激波前以及从激波后至出口列出式 (7-45):

$$\frac{1}{1.75^2} - \frac{1}{M_{*x}^2} - \ln\left(\frac{M_{*x}}{1.75}\right)^2 = \frac{8 \times 1.4}{1.4+1} \times 0.0012 \left(\frac{L_x}{D}\right)$$

$$(M_{*x}^2 - 1) - \ln M_{*x}^2 = \frac{8 \times 1.4}{1.4+1} \times 0.0012 \left(107 - \frac{L_x}{D}\right)$$

联立求解以上二式,可得 $L_x/D=37.9$, $M_{*x}=1.468$ 。波后的速度系数 $M_{*x}'=1/M_{*x}=0.6812$ 。气流速度系数沿管道的变化如图 7-18 (b) 所示。

将 M_{*1} 、 M_{*x} 、 M_{*x}' 和 $M_{*2}=1$ 分别代入式 (7-50)、式 (7-56) 可得总压比:

$$\frac{p_{Tx}}{p_{T1}} = \frac{1.75}{1.468} \times \left[\frac{(1.4+1) - (1.4-1) \times 1.75^2}{(1.4+1) - (1.4-1) \times 1.468^2} \right]^{1/(1.4-1)} = 0.6082$$

$$\frac{p_{Tx}'}{p_{T1}} = \frac{1.75}{0.6812} \times \left[\frac{(1.4+1) - (1.4-1) \times 1.75^2}{(1.4+1) - (1.4-1) \times 0.6812^2} \right]^{1/(1.4-1)} = 0.5269$$

$$\frac{p_{Tcr}}{p_{T1}} = 1.75 \times \left[\frac{1.4+1}{2} - \frac{1.4-1}{2} \times 1.75^2 \right]^{1/(1.4-1)} = 0.4630$$

总压比沿管道的变化如图 7-18 (c) 所示。可见,如无激波,当 $L_{cr}/D=79.59$ 时,总压比便下降到 0.4630。实际流动中有激波,在激波处总压比虽由 0.6082 突降为 0.5269,但波后是亚声速流,其摩擦损失较小,直到出口才降到 0.4630。

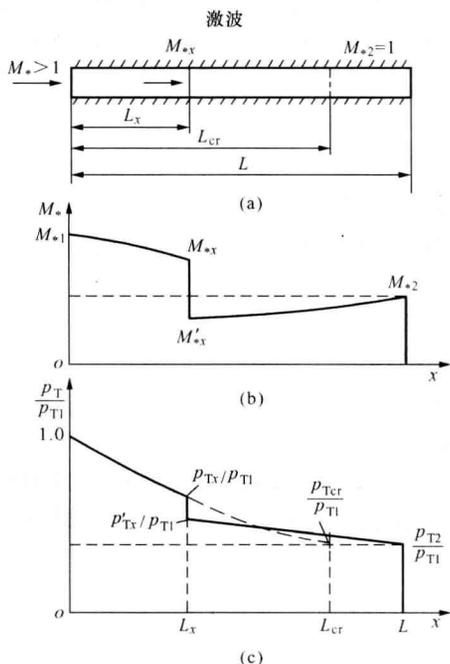


图 7-18 超声速流的摩擦壅塞

完全气体状态方程的对数的微分为

二、等截面等温摩擦管流

如前所述,天然气的远距离输送、城市燃气工程等属于等温摩擦管流。气体在管内的流速虽然较低,但摩擦作用的距离很长,压强的变化便很大。例如,某输送天然气的管道长 90km,管道进口的压强为 $1.765 \times 10^6 \text{Pa}$,出口的压强为 $1.079 \times 10^6 \text{Pa}$,压强差为 $6.860 \times 10^5 \text{Pa}$ 。气体是在可与气体压强相比拟的压强差作用下沿管道流动,其压缩性便不容忽视了。

1. 等温摩擦管流的计算

分析方法与绝热摩擦管流的相同。连续方程、动量方程仍是本节的式 (d)、式 (j'); 所不同的,在等温流动中静温是个常数,总温沿管流变化。由于 $dT=0$,对于完全气体,微分形式的能量方程为

$$v dv = c_p dT_T = \delta q \quad (k)$$

当地总温的变化是热交换大小和方向的直接量度。

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} \quad (1)$$

而 $Ma = v/(\gamma RT)^{1/2}$ 的对数的微分为

$$\frac{dMa}{Ma} = \frac{dv}{v} \quad (m)$$

联解式 (d)、式 (j')、式 (1)、式 (m)，可得

$$\frac{dv}{v} = \frac{dMa}{Ma} = -\frac{dp}{p} = -\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\gamma Ma^2}{2(1-\gamma Ma^2)} 4C_f \frac{dx}{D} \quad (n)$$

$T_T = T[1 + (\gamma - 1) Ma^2/2]$ 的对数的微分为

$$\frac{dT_T}{T_T} = \frac{2(\gamma - 1) Ma^2}{2 + (\gamma - 1) Ma^2} \frac{dMa}{Ma}$$

将 dMa/Ma 代入上式，得

$$\frac{dT_T}{T_T} = \frac{\gamma(\gamma - 1) Ma^4}{(1 - \gamma Ma^2)[2 + (\gamma - 1) Ma^2]} 4C_f \frac{dx}{D} \quad (o)$$

由式 (n)、式 (o) 可以看出，流动参数的变化趋向取决于 γMa^2 是大于 1 还是小于 1。正像 $Ma=1$ 代表等截面绝热摩擦管流的极限一样， $\gamma^{-1/2}$ 代表着等截面等温摩擦管流的极限；当 $Ma < \gamma^{-1/2}$ 时，热量是加给气流的，而当 $Ma > \gamma^{-1/2}$ 时，热量则要从气流中放出来。如果取积分限为 $Ma \rightarrow \gamma^{-1/2}$ ， $0 \rightarrow L_{*t}$ ，则式 (n) 的积分式为

$$\int_{Ma^2}^{\gamma^{-1/2}} \frac{1 - \gamma Ma^2}{\gamma Ma^4} dMa^2 = \int_0^{L_{*t}} 4C_f \frac{dx}{D}$$

$$\text{完成积分，得} \quad \frac{1 - \gamma Ma^2}{\gamma Ma^2} + \ln(\gamma Ma^2) = 4C_f \frac{L_{*t}}{D} \quad (7-58)$$

如果 $Ma = \gamma^{-1/2}$ 时的气流参数都用下标 “*t” 代表，则由 $Ma = v/(\gamma RT)^{1/2}$ 和 $\gamma^{-1/2} = v_{*t}/(\gamma RT)^{1/2}$ 以及 $\rho v = \rho_{*t} v_{*t}$ 和 $p/\rho = p_{*t}/\rho_{*t}$ ，可得

$$\frac{v}{v_{*t}} = \frac{\rho_{*t}}{\rho} = \frac{p_{*t}}{p} = \gamma^{1/2} Ma \quad (7-59)$$

由于 $\frac{T_T}{T_{T*}} = \frac{T[2 + (\gamma - 1) Ma^2]}{T_{*t}[2 + (\gamma - 1)/\gamma]}$ ，而 $T = T_{*t}$ ，故

$$\frac{T_T}{T_{T*}} = \frac{2\gamma}{3\gamma - 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right) \quad (7-60)$$

由于 $\frac{p_T}{p_{T*}} = \frac{p[2 + (\gamma - 1) Ma^2]^{\gamma/(\gamma - 1)}}{p_{*t}[2 + (\gamma - 1)/\gamma]^{\gamma/(\gamma - 1)}}$ ，将式 (7-59) 代入，得

$$\frac{p_T}{p_{T*}} = \frac{1}{\gamma^{1/2} Ma} \left[\frac{2\gamma}{3\gamma - 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right) \right]^{\gamma/(\gamma - 1)} \quad (7-61)$$

在等温条件下对式 (g) 积分，并利用式 (7-59) 可得

$$s_{*t} - s = R \ln(\gamma^{1/2} Ma) \quad (7-62)$$

2. 低马赫数时的关系式

远距离输送采用的气流马赫数非常低，以致总压强降实际上就等于静压强降。对于这种

情形,如果能找到联系 p_2/p_1 、 $4\bar{C}_f L/D$ 和 Ma_1 的直接关系式,将是很有用的。如果仍用下标 1 和 2 分别代表长度为 L 的管道进口和出口处的状态,则根据式(7-58)可得

$$4\bar{C}_f \frac{L}{D} = \left(4\bar{C}_f \frac{L_{*1}}{D}\right)_1 - \left(4\bar{C}_f \frac{L_{*1}}{D}\right)_2 = \frac{1-\gamma Ma_1^2}{\gamma Ma_1^2} - \frac{1-\gamma Ma_2^2}{\gamma Ma_2^2} + \ln\left(\frac{Ma_1}{Ma_2}\right)^2$$

再根据式(7-59)可得 $p_1/p_2 = Ma_2/Ma_1$, 将由此式得到的 Ma_2 代入上式,整理后得

$$4\bar{C}_f \frac{L}{D} = \frac{1-(p_2/p_1)^2}{\gamma Ma_1^2} - \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 \quad (7-63)$$

当压强降相当小时,如果将式(7-63)的右端展成相对压强降 $(p_1-p_2)/p_1$ 的幂级数,使用时则更为方便。保留相对压强降的二次项,得适合于低压强降的近似式

$$4\bar{C}_f \frac{L}{D} \approx \frac{2}{\gamma Ma_1^2} \left(\frac{p_1-p_2}{p_1}\right) \left[(1-\gamma Ma_1^2) - \left(\frac{1+\gamma Ma_1^2}{2}\right) \left(\frac{p_1-p_2}{p_1}\right) \right] \quad (7-64)$$

如果令式(7-64)方括号内的式子等于 1,则上式便是常用的不可压缩流压强降公式。由此可见,只有当 γMa_1^2 和 $(p_1-p_2)/p_1$ 与 1 相比小得微不足道时,才能把气体在长管道内的流动近似地当做不可压缩流。由式(7-64)可以解得相对压强降

$$\frac{p_1-p_2}{p_1} = \frac{1-\gamma Ma_1^2}{1+\gamma Ma_1^2} - \left[\left(\frac{1-\gamma Ma_1^2}{1+\gamma Ma_1^2}\right)^2 - \frac{\gamma Ma_1^2}{1+\gamma Ma_1^2} \left(4\bar{C}_f \frac{L}{D}\right) \right]^{1/2} \quad (7-65)$$

3. 摩擦壅塞

由式(7-58)已知,对于每个给定的马赫数 Ma_1 ,都有一个等温摩擦管流的极限长度 L_{*1} ,当实际管长 $L > L_{*1}$ 时,同样会出现与绝热摩擦管流相类似的壅塞现象。

值得指出的是,当 $Ma = \gamma^{-1/2}$ 时,式(o)、式(k)表明,单位长度的换热量为无穷大。因此,这个极限是理论上的,在物理上是不真实的。此外,当亚声速等温流趋近于极限马赫数 $\gamma^{-1/2}$ 时,全部流动参数沿管长的变化很快,除非有目的地进行换热,否则,流动过程则更接近于绝热流,而不是等温流。

【例 7-9】 有一输送天然气的管道,内径为 1.2m,长 60km,天然气在管道进口的马赫数为 0.05,压强为 $19.6 \times 10^5 \text{Pa}$,在管道出口的压强为 $9.8 \times 10^5 \text{Pa}$ 。已知流动为有摩擦的等温流动,天然气的比热比为 1.25,试求管道的平均表观摩擦系数和出口气流的马赫数。如果用近似公式去计算相对压强降,其相对误差有多少?

【解】 由式(7-63)得平均表观摩擦系数

$$\begin{aligned} \bar{C}_f &= \frac{D}{4L} \left[\frac{1-(p_2/p_1)^2}{\gamma Ma_1^2} - \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 \right] \\ &= \frac{1.2}{4 \times 60000} \left[\frac{1-(9.8 \times 10^5)^2 / (19.6 \times 10^5)^2}{1.25 \times 0.05^2} - \ln\left(\frac{19.6 \times 10^5}{9.8 \times 10^5}\right)^2 \right] = 0.001193 \end{aligned}$$

由式(7-59)可得出口气流的马赫数

$$Ma_2 = Ma_1 \frac{p_1}{p_2} = 0.05 \times \frac{19.6 \times 10^5}{9.8 \times 10^5} = 0.10$$

由式(7-65)可得相对压强降的近似值

$$\frac{p_1 - p_2}{p_1} = \frac{1 - 1.25 \times 0.05^2}{1 + 1.25 \times 0.05^2} - \left[\left(\frac{1 - 1.25 \times 0.05^2}{1 + 1.25 \times 0.05^2} \right)^2 - \frac{1.25 \times 0.05^2}{1 + 1.25 \times 0.05^2} \left(4 \times 0.001193 \times \frac{60000}{1.2} \right) \right]^{1/2}$$

$$= 0.4982$$

故用近似公式去计算相对压强降，其相对误差为 $(0.5 - 0.4982)/0.5 = 0.359\%$ ，是很小的。

第六节 等截面换热管流

工程实际中有热量交换的气体流动是很多的。例如，气体在燃烧室中因燃料的燃烧而获得大量的热能；在锅炉的过热器中，干蒸汽在流动中继续被加热；向高温气流中喷水时，水的蒸发使气流冷却；在高速风洞中，具有一定湿度的空气因水汽凝结放出潜热而被加热等。实际上，气体在流动过程中进行换热的同时，总是有摩擦作用的；喷油燃烧、水汽凝结也都会改变气体的流量和化学成分。但是，如果管道不长（例如燃烧室），换热量很大，摩擦效应很小，摩擦的影响便可忽略不计；燃油和水汽的量与气体的流量相比都小得很多，在初步近似计算中也完全可以忽略。因此，本节将要讨论的定比热容非黏性完全气体等截面定常管流的滞止温度变化过程（纯 T_T 变化过程）虽然是近似的，但由于抓住了主要影响因素，所得的结论十分清晰，在工程上是很有用的。

一、瑞利线

等截面管道中非黏性气体定常流动的连续方程为

$$\rho v = q_m / A = \text{常数}$$

动量方程为

$$p + \rho v^2 = F / A = \text{常数}$$

式中 $F = (p + \rho v^2) A$ 称为气流冲量。上式说明沿管道单位面积的气流冲量不变。合并以上二式，得

$$p + \frac{1}{\rho} \left(\frac{q_m}{A} \right)^2 = \frac{F}{A} \quad (\text{a})$$

由热力学已知，气体的状态方程又可表示为

$$h = h(p, \rho) \quad \text{或} \quad s = s(p, \rho) \quad (\text{b})$$

由于 h 、 s 都是 p 、 ρ 的函数，对应于一个给定的气流冲量值，利用式 (a)、式 (b) 便可作出气流的一条 (h 、 s) 曲线，称为瑞利线，如图 7-19 所示。由上述可见，瑞利线是焓熵图上满足等截面管流的连续方程、无摩擦流的动量方程和气体状态方程的诸点连线；在瑞利线上，单位面积的气流冲量和密流均保持不变。等截面无摩擦的换热管流是满足上述方程和条件的，因而，可以用瑞利线来描述等截面换热管流的流动情况。在以上的讨论中并没有规定是什么气体，因而，瑞利线对完全气体和非完全气体都是适用的。

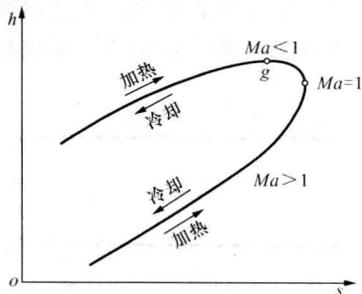


图 7-19 瑞利线

为了定性地分析清楚换热管流中气流参数的变化趋向，可引入微分形式的连续方程、动量方程、完全气体的状态方程和熵的关系式：

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} = 0 \quad (c)$$

$$dp + \rho v dv = 0, \quad \frac{dp}{p} + \gamma Ma^2 \frac{dv}{v} = 0 \quad (d)$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (e)$$

$$ds = c_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v} \quad (f)$$

假定气体的比热容为常数, 由式(c)、式(d)、式(e)、式(f)的联立求解可得

$$ds = c_v \frac{\gamma(1 - Ma^2) dT}{1 - \gamma Ma^2 T} = c_v \frac{\gamma(1 - Ma^2) dh}{1 - \gamma Ma^2 h}$$

由上式可以看出(见图 7-19): 当 $Ma < 1$ 时, 如果又有 $\gamma Ma^2 < 1$, 则 dh 与 ds 同号, 在焓熵图上曲线的斜率 dh/ds 为正; 如果 $\gamma Ma^2 = 1$, 则 $dh/ds = 0$, 意即曲线在该点的切线平行于 s 轴; 如果 $\gamma Ma^2 > 1$, 则 dh 与 ds 异号, dh/ds 为负, 这正是曲线的上半支, 它代表的是亚声速流。当 $Ma > 1$ 时, dh 与 ds 同号, 曲线的斜率 dh/ds 为正, 这正是曲线的下半支, 它代表的是超声速流。当 $Ma = 1$ 时, $ds = 0$, 曲线的斜率 $dh/ds \rightarrow \infty$, 即曲线在该点的切线垂直于 s 轴, 所以该点是最大熵值 s_{\max} 点, 它代表的是声速流的临界状态。

如果把式(a)写成微分形式, 可得

$$\left(\frac{d\rho}{\rho}\right)^{-1} = \left(\frac{q_m}{\rho A}\right)^2 = v^2, \quad \left(\frac{d\rho}{\rho}\right)^{-1/2} = v$$

这就是说, $(d\rho/\rho)^{-1/2}$ 并不都代表声速, 只有在压强和密度的变化符合等熵过程的情况下, 它才代表当地声速。该条件在瑞利线的最大熵值点是满足的, 在该点气流速度达到当地声速, $Ma = 1$ 。

由热力学已知, 加入热量相当于熵值增加, 而放出热量相当于熵值减小。因此, 对于亚声速气流, 加热则马赫数增大, 冷却则马赫数减小; 对于超声速气流, 加热则马赫数减小, 冷却则马赫数增大。加热好比摩擦, 它总是使马赫数趋近于 1, 而冷却则总是使马赫数向离开 1 的方向变化。因而, 单纯加热不可能使亚声速气流连续地变成超声速气流, 也不可能使超声速气流连续地变成亚声速气流。理论上好像可以先对亚声速气流加热, 使之加速到声速, 然后立即使气流放热, 使之继续加速为超声速; 或者反过来, 先对超声速气流加热, 使之减速到声速, 然后立即使气流放热, 使之继续减速为亚声速。但是, 实际上尚不存在这种热力管道。在亚声速分支上有个 $Ma = 1/\gamma^{1/2}$ 的 g 点, 这点的焓值也即温度最高, 在 g 点到临界点的范围内加热时, 气流的温度反而降低。

二、换热管流的计算

如图 7-20 所示, 从管道的截面 1 到截面 2 单位质量气体与外界交换的热量为 δQ , 则换热管流的能量方程是

$$\delta Q = c_p(T_{T2} - T_{T1}) \quad (7-66)$$

由于可将气流冲量写成 $F = q_m \left(\frac{p}{\rho v} + v \right)$, 其中 $\frac{p}{\rho} = RT_T \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} M_*^2 \right)$, $v = M_* \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} RT_T \right)^{1/2}$ 。

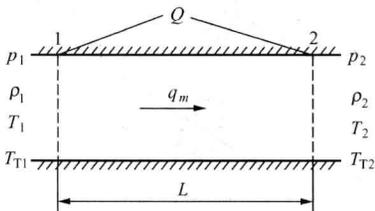


图 7-20 换热管流用图

代入并整理, 得

$$\frac{F}{q_m} = \frac{1 + M_*^2}{M_*} \left(\frac{\gamma + 1}{2\gamma} RT_T \right)^{1/2}$$

应用于截面 1、2, 得

$$\frac{1 + M_{*1}^2}{M_{*1}} \left(\frac{\gamma + 1}{2\gamma} RT_{T1} \right)^{1/2} = \frac{1 + M_{*2}^2}{M_{*2}} \left(\frac{\gamma + 1}{2\gamma} RT_{T2} \right)^{1/2}$$

或

$$\frac{T_{T2}}{T_{T1}} = \left(\frac{M_{*2}^2 (1 + M_{*1}^2)}{M_{*1}^2 (1 + M_{*2}^2)} \right)^2 = \frac{Ma_2^2 (1 + \gamma Ma_1^2)^2}{Ma_1^2 (1 + \gamma Ma_2^2)^2} \frac{2 + (\gamma - 1) Ma_2^2}{2 + (\gamma - 1) Ma_1^2} \quad (7-67)$$

由连续方程得

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{M_{*2}}{M_{*1}} \left(\frac{T_{T2}}{T_{T1}} \right)^{1/2}$$

将式 (7-67) 代入上式, 得

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{M_{*2}^2 (1 + M_{*1}^2)}{M_{*1}^2 (1 + M_{*2}^2)} = \frac{Ma_2^2 (1 + \gamma Ma_1^2)}{Ma_1^2 (1 + \gamma Ma_2^2)} \quad (7-68)$$

由静总温度比和式 (7-67) 可得

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{M_{*2} (1 + M_{*1}^2)}{M_{*1} (1 + M_{*2}^2)} \right)^2 \frac{(\gamma + 1) - (\gamma - 1) M_{*2}^2}{(\gamma + 1) - (\gamma - 1) M_{*1}^2} = \frac{Ma_2^2 (1 + \gamma Ma_1^2)}{Ma_1^2 (1 + \gamma Ma_2^2)} \quad (7-69)$$

由完全气体状态方程和式 (7-68)、式 (7-69) 可得

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + M_{*1}^2}{1 + M_{*2}^2} \frac{(\gamma + 1) - (\gamma - 1) M_{*2}^2}{(\gamma + 1) - (\gamma - 1) M_{*1}^2} = \frac{1 + \gamma Ma_1^2}{1 + \gamma Ma_2^2} \quad (7-70)$$

由静总压强比和式 (7-70) 得

$$\frac{p_{T2}}{p_{T1}} = \frac{1 + M_{*1}^2}{1 + M_{*2}^2} \left[\frac{(\gamma + 1) - (\gamma - 1) M_{*1}^2}{(\gamma + 1) - (\gamma - 1) M_{*2}^2} \right]^{1/(\gamma-1)} = \frac{1 + \gamma Ma_1^2}{1 + \gamma Ma_2^2} \left[\frac{2 + (\gamma - 1) Ma_2^2}{2 + (\gamma - 1) Ma_1^2} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (7-71)$$

由式 (7-35a)、式 (7-67)、式 (7-71) 得

$$\begin{aligned} \frac{s_2 - s_1}{R} &= \ln \left\{ \left(\frac{M_{*2}}{M_{*1}} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)} \left(\frac{1 + M_{*1}^2}{1 + M_{*2}^2} \right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \left[\frac{(\gamma + 1) - (\gamma - 1) M_{*2}^2}{(\gamma + 1) - (\gamma - 1) M_{*1}^2} \right]^{1/(\gamma-1)} \right\} \\ &= \ln \left[\left(\frac{Ma_2}{Ma_1} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)} \left(\frac{1 + \gamma Ma_1^2}{1 + \gamma Ma_2^2} \right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \right] \end{aligned} \quad (7-72)$$

利用式 (7-66) ~ 式 (7-72) 便可进行等截面换热管流的计算。计算中应当注意的是, 截面 1 和 2 之间的实际加热量不应超过由 $M_{*1}(Ma_1)$ 发展到临界状态时的加热量。为了正确地进行计算, 应导出临界加热量的计算式。为此, 令式 (7-67) 中的 $M_{*2}=Ma_2=1$, $T_{T2}=T_{Tcr}$, 并去掉进口气流参数的下标 1, 可得临界总温与进口总温比

$$\frac{T_{Tcr}}{T_T} = \left(\frac{1 + M_*^2}{M_*} \right)^2 = \frac{1}{(\gamma + 1) Ma^2} \frac{(1 + \gamma Ma^2)^2}{2 + (\gamma - 1) Ma^2} \quad (7-73)$$

代入式 (7-66) 可得单位质量气体的临界加热量

$$\delta Q_{cr} = c_p T_T \left[\left(\frac{1 + M_*^2}{M_*} \right)^2 - 1 \right] = c_p T_T \left[\frac{1}{(\gamma+1)Ma^2} \frac{(1 + \gamma Ma^2)^2}{2 + (\gamma-1)Ma^2} - 1 \right] \quad (7-74)$$

按照同样的方法, 甚易由式 (7-68) ~ 式 (7-72) 求得与临界加热量相对应的临界状态和进口的流动参数比与熵增:

$$\frac{v_{cr}}{v} = \frac{\rho}{\rho_{cr}} = \frac{1 + M_*^2}{M_*^2} = \frac{1 + \gamma Ma^2}{(\gamma+1)Ma^2} \quad (7-75)$$

$$\frac{T_{cr}}{T} = \left(\frac{1 + M_*^2}{2} \right)^2 \frac{2}{(\gamma+1) - (\gamma-1)M_*^2} = \left[\frac{1 + \gamma Ma^2}{(\gamma+1)Ma^2} \right]^2 \quad (7-76)$$

$$\frac{p_{cr}}{p} = \frac{1 + M_*^2}{(\gamma+1) - (\gamma-1)M_*^2} = \frac{1 + \gamma Ma^2}{\gamma+1} \quad (7-77)$$

$$\frac{p_{Tcr}}{p_T} = \frac{1 + M_*^2}{2} \left[\frac{(\gamma+1) - (\gamma-1)M_*^2}{2} \right]^{-1/(\gamma-1)} = \frac{(\gamma+1)^{1/(\gamma-1)} (1 + \gamma Ma^2)}{[2 + (\gamma-1)Ma^2]^{\gamma/(\gamma-1)}} \quad (7-78)$$

$$\begin{aligned} \frac{s_{cr} - s}{R} &= \ln \left\{ \left(\frac{1}{M_*} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)} \left[\frac{2^{-\gamma} (1 + M_*^2)^{\gamma+1}}{(\gamma+1) - (\gamma-1)M_*^2} \right]^{1/(\gamma-1)} \right\} \\ &= \ln \left[\left(\frac{1}{Ma} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)} \left(\frac{1 + \gamma Ma^2}{\gamma+1} \right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \right] \end{aligned} \quad (7-79)$$

三、加热造成的壅塞现象

如前所述, 对于给定了进口截面总温和速度的气流, 加热量有个临界值。当加热量超过临界加热量时, 流动就会发生壅塞, 这是因为, 过多的热量将使总压进一步降低, 使总温进一步提高。原先在临界状态下能够通过的流量在这种状态下便通不过了, 造成了气流的壅塞。壅塞将使管内气流压强升高。对于亚声速气流, 压强升高的扰动可逆流往上传播, 一直传播到进口, 迫使气流的流速和流量减小, 进口截面的无量纲速度一直要减小到出口截面的无量纲速度等于 1、流量能够顺利通过为止。这时, 实际的加热量便是对应于调整后的进口截面无量纲速度的临界加热量。对于超声速气流, 压强升高的扰动将在气流中形成激波。激波一旦形成, 总压损失会增大, 从而进一步加重了气流的壅塞, 势必将激波推向上游。而被推至上游的激波更强, 总压损失更大, 气流的壅塞更严重。这样发展下去, 势必将激波迅速推出进口, 使进口截面气流的速度改变, 从而使对应于该速度的流量能够顺利通过。由此可见, 超声速加热管发生壅塞时, 激波不可能停留在管内, 必然位于进口截面之前, 这一点是与绝热摩擦管流不相同的。

综上所述, 对于给定的进口气流总温和无量纲速度, 有一个临界加热量, 加热量超过它, 便要发生气流的壅塞。换言之, 对于给定的进口气流总温和加热量, 亚声速气流有一个最大的进口无量纲速度, 超过它, 气流便要壅塞; 超声速气流有一个最小的进口无量纲速度, 小于它, 气流也要壅塞, 并形成进口外激波。

【例 7-10】 空气与燃料的气态混合物以 $v_1=62.1\text{m/s}$ 的速度进入发动机的燃烧室, 其温度 $T_1=323\text{K}$, 压强 $p_1=0.4 \times 10^5\text{Pa}$, 混合气的反应热 $\delta Q=1088\text{kJ/kg}$ 。假设可以近似地把燃烧室当做等截面加热管, 混合气燃烧过程中的平均比定压热容 $c_p=1088\text{J/(kg} \cdot \text{K)}$, 气体常数 $R=287.4\text{J/(kg} \cdot \text{K)}$, 比热比 $\gamma=1.33$ 。试求燃烧室出口截面对应的气流参数和临界加热量。

【解】 由已知的气流参数可以求出进口截面气流的其他参数为

$$c_1 = (\gamma R T_1)^{1/2} = (1.33 \times 287.4 \times 323)^{1/2} = 351.4 \text{ (m/s)}$$

$$Ma_1 = \frac{v_1}{c_1} = \frac{62.1}{351.4} = 0.1767 \quad M_{*1} = 0.1902$$

$$T_{T1} = T_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_1^2 \right) = 323 \left[1 + \frac{1.33-1}{2} \times 0.1767^2 \right] = 324.7 \text{ (K)}$$

出口截面燃气的气流参数为

$$T_{T2} = T_{T1} + \frac{\delta Q}{c_p} = 324.7 + \frac{1088}{1.088} = 1324.7 \text{ (K)}$$

由式 (7-67)

$$\frac{M_{*2}}{0.1902} \frac{1 + (0.1902)^2}{1 + M_{*2}^2} = \left(\frac{1324.7}{324.7} \right)^{1/2}$$

可得

$$M_{*2} = 0.4438 \quad Ma_2 = 0.4170$$

$$v_2 = v_1 \left(\frac{M_{*2}}{M_{*1}} \right)^2 \frac{1 + M_{*1}^2}{1 + M_{*2}^2} = 62.1 \left(\frac{0.4438}{0.1902} \right)^2 \frac{1 + 0.1902^2}{1 + 0.4438^2} = 292.7 \text{ (m/s)}$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{Ma_2}{Ma_1} \frac{1 + \gamma Ma_1^2}{1 + \gamma Ma_2^2} \right)^2 = 323 \left(\frac{0.417}{0.1767} \times \frac{1 + 1.33 \times 0.1767^2}{1 + 1.33 \times 0.417^2} \right)^2 = 1287 \text{ (K)}$$

$$p_2 = p_1 \left(\frac{1 + \gamma Ma_1^2}{1 + \gamma Ma_2^2} \right) = 0.4 \times 10^5 \left(\frac{1 + 1.33 \times 0.1767^2}{1 + 1.33 \times 0.417^2} \right) = 0.3384 \times 10^5 \text{ (Pa)}$$

与进口气流参数相对应的临界加热量为

$$\begin{aligned} \delta Q_{cr} &= c_p T_1 \left[\left(\frac{1 + M_{*1}^2}{M_{*1}} \right)^2 - 1 \right] \\ &= 1088 \times 324.7 \left[\left(\frac{1}{0.1902} \times \frac{1 + 0.1902^2}{2} \right)^2 - 1 \right] = 2.268 \times 10^6 \text{ (J/kg)} \end{aligned}$$



习 题

7-1 45°C 氢气中的声速为多少? [1354m/s]

7-2 飞机在 20000m 高空 (-56.5°C) 中以 2400km/h 的速度飞行, 试求相对于飞机的气流马赫数。 [2.25]

7-3 二氧化碳气体作等熵流动, 在流场中第一点上的温度为 60°C, 速度为 14.8m/s, 在同一流线第二点上的温度为 30°C, 试求第二点上的速度为多少? [227m/s]

7-4 在上题中若第一点上的压强为 101.5kPa, 其他条件保持不变, 试求在同一流线第二点上的压强为多少? [65.9kPa]

7-5 已知进入动叶片的过热蒸汽温度为 430°C, 压强为 5000kPa, 气体常数为 461.5J/(kg · K), 比热比 $\gamma=1.329$, 速度为 525m/s, 试求在动叶片前过热蒸汽的滞止温度和滞止压强。

[7484 kPa, 777 K]

7-6 已知正激波后空气流的参数为 $p_2=360\text{kPa}$ 、 $v_2=210\text{m/s}$ 、 $t_2=50^\circ\text{C}$ ，试求激波前的马赫数。 [1.968]

7-7 空气流在管道中形成正激波，已知激波前的马赫数为 2.5、压强为 30kPa 、温度为 25°C ，试求激波后的马赫数、压强、温度和速度。 [0.513, 214kPa , 638K , 261m/s]

7-8 如图 7-21 所示，假定皮托管前为正激波，激波后为可逆的绝热流动，试证皮托管中的压强公式为

$$p_{T2} = p_\infty \left(\frac{\gamma+1}{2} Ma^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} Ma^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^{-1/(\gamma-1)}$$

7-9 $Ma_1=1.2$ 、 $t=460^\circ\text{C}$ 、 $\gamma=1.33$ 的燃气流在图 7-22 所示叶片前驻点上的温升等于多少？ [174.2K]

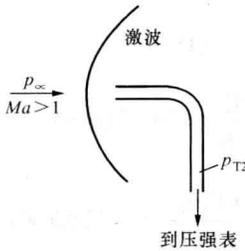


图 7-21 习题 7-8 图



图 7-22 习题 7-9 图

7-10 超声速过热蒸汽通过正激波时，密度最大能增加多少倍？ [7.06]

7-11 已知空气在喷管进口处的压强 $p_1=108\text{kPa}$ ，温度 $t=280^\circ\text{C}$ ，速度 $v_1=205\text{m/s}$ ，试求其临界速度。 [438.4m/s]

7-12 已知容器中空气的温度为 25°C ，压强为 50kPa ，空气流从出口截面直径为 10cm 的渐缩喷管中排出，试求在等熵条件下外界压强为 30 、 20 和 10kPa 时，出口截面处的速度和温度各为多少？ [285.1m/s, 315.7m/s, 315.7m/s; 257.5kPa, 248.2kPa, 248.2kPa]

7-13 喷管前蒸汽的滞止参数为 $p_T=1180\text{kPa}$ ， $t_T=300^\circ\text{C}$ ，喷管出口的环境压强 $p_{\text{amb}}=294\text{kPa}$ ，试问应采用什么形式的喷管？已知蒸汽流量为 $q_m=12\text{kg/s}$ ，在绝热无摩擦的理想情况下，喷管出口的截面积应为多大？ [0.0099m²]

7-14 设计 $Ma=3.5$ 的超声速喷管，其出口截面直径为 200mm ，出口气流的压强为 7kPa ，温度为 -85°C ，试计算喷管的喉部直径、气流的总压和总温。 [0.0768m, 533.9kPa, 648.6K]

7-15 计算题 7-14 给定条件下 Ma 为 1.5、2.0、2.5 处截面的直径。

[0.083m, 0.10m, 0.125m]

7-16 试求题 7-13 中正激波内移到喷管喉部时的出口压强。 [970.4kPa]

7-17 一缩放喷管的喉部截面积为出口截面积之半，来流的总压为 140kPa ，出口外的环境背压为 100kPa 。试证明气流在管内必形成激波，并求出口截面的气流总压、激波前后的马赫数以及激波所在截面与喉部截面的面积比。 [111.6kPa, 1.835, 0.6089, 1.478]

7-18 空气流以 $Ma_1=0.4$ 的速度流入和以 $Ma_2=0.8$ 的速度流出绝热等截面直管道。试问在管道的什么截面上 $Ma=0.6$ ？ [0.813L]

7-19 氮气在内径为 20cm 、平均表观摩擦系数 $\bar{C}_f=0.00625$ 的等截面管道中作绝热流动，

在管道进口处的参数为 $p=300\text{kPa}$ 、 $t=40^\circ\text{C}$ 、 $v=550\text{m/s}$ 。求管道的极限长度以及出口处的压强、温度和速度。 [1.16m, 505.3kPa, 382.1K, 398.6m/s]

7-20 压强为 10^5Pa 、温度为 288.5K 的空气以 $Ma_1=3$ 的速度流进内径为 10cm 的等截面直管道，其平均表观摩擦系数为 0.003 ，试求极限管长，并求 $Ma_2=2$ 处的管长及其对应的气流速度、温度和压强。 [4.351m; 2.542m, 848.9m/s, 448.8K, $1.871\times 10^5\text{Pa}$]

7-21 一喉部截面直径为 1.5cm 的缩放喷管将超声速的空气流供给长 21cm 、直径为 3.0cm 的直管。已知喷管进口空气的总压为 700kPa ，总温为 670K ，空气在直管出口的速度系数为 1.82 ，设空气沿喷管作正常的等熵流动，沿直管作绝热流动，试求这段直管的平均表观摩擦系数以及空气流在直管出口的静压、静温和经管道的流量。

[0.003, 27.24kPa, 273K, 0.2025kg/s]

7-22 压强为 $3.5\times 10^5\text{Pa}$ 、温度为 300K 的沼气以 0.09kg/s 的流量流过 600m 长的管道，其压强降至 $1.4\times 10^5\text{Pa}$ 。已知平均表观摩擦系数为 0.004 ，沼气的气体常数为 $518.3\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ ，比热比为 1.32 。倘若流动是等温的，试确定管径。 [0.045m]

7-23 用长 65km ，内径 92cm 的管道输送分子量 18 、比热比 1.3 的天然气，上游泵站送出高压气的计示压强为 $5.884\times 10^5\text{Pa}$ ，下游储气罐中的计示压强为 $6.669\times 10^4\text{Pa}$ ；假定沿管道天然气的温度是 21°C ，表观摩擦系数为 0.005 ，试求最大流量。（天然气的流量一般用 $9.80665\times 10^4\text{Pa}$ 、常温 21°C 状态下的 m^3/d 来表示） [546115 m^3/d]

7-24 空气无摩擦地流过一内径 $D=0.30\text{m}$ 的圆管，在管道进口 $T=300\text{K}$ ， $p=2.0\times 10^5\text{Pa}$ ， $Ma=0.2$ 。试计算：（1）使流动壅塞必需的传热量；（2）在该状态下出口的静温、总温、静压、总压和流速。 [1447kJ/kg, 1453K, 1744K, $8.8\times 10^4\text{Pa}$, $1.666\times 10^5\text{Pa}$, 764.1m/s]

7-25 大型容器中 $\gamma=1.4$ 、 $c_p=1004.8\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ 、 $p=4.8\times 10^5\text{Pa}$ 、 $T=320\text{K}$ 的空气，经内径为 0.075m 的管道排入压强为 $1.013\times 10^5\text{Pa}$ 的大气，如果有 $\delta Q=335\text{kJ/kg}$ 的热量传给了气体，试计算：（1）管道进口和出口的气流马赫数；（2）进口和出口的 T 、 p 、 ρ 、 v ；（3）质量流量。

[0.3777, 1; 311.1K, 544.5K, $4.349\times 10^5\text{Pa}$, $2.174\times 10^5\text{Pa}$, $4.871\text{kg}/\text{m}^3$, $1.391\text{kg}/\text{m}^3$,
133.5m/s, 467.7m/s; 2.874kg/s]

第八章 理想流体的有旋流动和无旋流动

前几章重点讨论了流体的一维流动，为解决工程实际中大量的一维流动问题奠定了基础。但在许多工程实际中，流动参数不仅在流动方向上发生变化，而且在垂直于流向的横截面上也发生变化。流动参数可能是二个坐标的函数，即二维流动，例如平面流动、轴对称流动；也可能是三个坐标的函数，即三维流动。要研究此类问题，就要用多维流的分析方法。本章主要讨论理想流体微分形式的基本方程，流体微团运动分析，有旋流动的基本定理，二维势流以及叶栅、叶型绕流的升力计算等，为解决工程实际中类似的问题提供理论依据，也为进一步研究黏性流体多维流动奠定必要的基础。

第一节 微分形式的连续方程

如图 8-1 所示，在流场中任取一边长 δx 、 δy 、 δz 的平行六面体微小流体质团。在 t 瞬时，它的形心坐标为 x 、 y 、 z ，经过形心的流体质点速度分量为 u_x 、 v_y 、 v_z ，密度为 ρ 。质团六个平面中心的速度分量和密度已经分别按泰勒级数展开并略去高于一阶的微量后得到，示于图 8-1，并视它们为各自平面的平均值。现以该平行六面体为控制体，并将式 (4-18) 应用于该控制体：沿 x 方向从左面单位时间流入控制体的流体质量为

$$\left(\rho - \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\delta x}{2}\right) \left(v_x - \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\delta x}{2}\right) \delta y \delta z$$

从右面单位时间流出控制体的流体质量为

$$\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\delta x}{2}\right) \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\delta x}{2}\right) \delta y \delta z$$

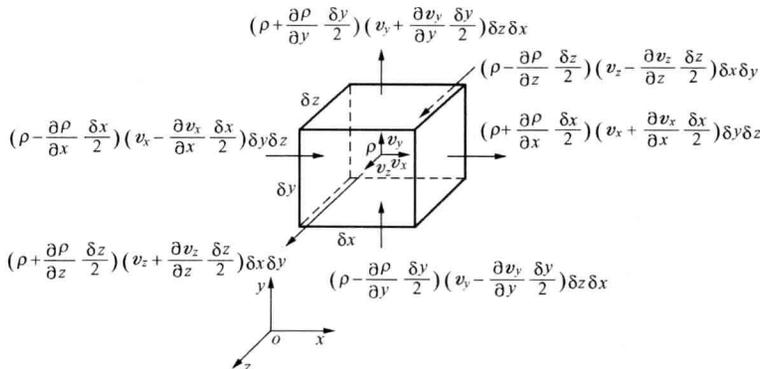


图 8-1 推导微分形式的连续方程用图

于是，沿 x 方向单位时间流出与流入控制体的流体质量之差为

$$\left(\rho \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta x + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} \delta x\right) \delta y \delta z = \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) \delta x \delta y \delta z$$

同理可得, 沿 y 方向和沿 z 方向单位时间流出与流入控制体的流体质量之差分别为

$$\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y)\delta x\delta y\delta z \quad \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)\delta x\delta y\delta z$$

故流过控制面的流体质量净通量为

$$\iint_{CS} \rho v_n dA = \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) \right] \delta x\delta y\delta z \quad (a)$$

与其对应的单位时间控制体内流体质量的变化为

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \rho dV = \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x\delta y\delta z \quad (b)$$

将式 (a)、式 (b) 代入式 (4-18), 通除以平行六面体的体积 $\delta x\delta y\delta z$, 并取 $\delta x \rightarrow 0$ 、 $\delta y \rightarrow 0$ 、 $\delta z \rightarrow 0$ 时的极限, 得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad (8-1)$$

它的矢量形式为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (8-1a)$$

这就是可压缩流体三维非定常流动微分形式的连续方程。它表明, 流场内某点单位体积流体质量的时间变化率与经过该点单位体积流体质量的净通量之和等于零。它与式 (4-18) 的物理意义类同, 区别在于式 (4-18) 是对有限控制体的流体, 这里是对微元控制体的流体, 即微元质团——流体质点。由于微元质团是在流场中任意选取的, 故它适用于整个流场。

对于可压缩流体的定常流动, $\partial \rho / \partial t = 0$, 式 (8-1)、式 (8-1a) 简化为

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad (8-2)$$

或

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (8-2a)$$

对于不可压缩流体的定常流动与非定常流动, 由于 $\rho = \text{常数}$, 式 (8-1)、式 (8-1a) 简化为

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (8-3)$$

或

$$\nabla \cdot \vec{v} = \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (8-3a)$$

对于可压缩流体和不可压缩流体的二维 (平面) 定常流动, 式 (8-2)、式 (8-3) 简化为

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) = 0 \quad (8-4)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (8-5)$$

第二节 流体微团运动分解

如图 8-2 所示, 在流场中任取一边长 δx 、 δy 、 δz 的平行六面体微小流体质团。在 t 瞬时, 点 $A(x, y, z)$ 的速度分量为 v_x 、 v_y 、 v_z ; 与点 A 相距微小矢径 $\delta \vec{r}$ 的点 $M(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$

的速度, 可以利用泰勒级数展开式, 并略去高于一阶的微量, 得

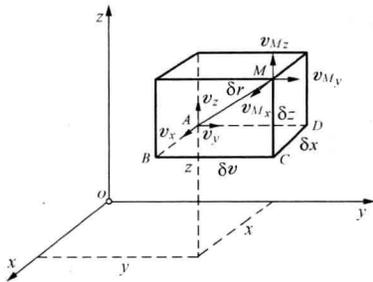


图 8-2 平行六面体微小流体质团

$$\left. \begin{aligned} v_{Mx} &= v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v_x}{\partial z} \delta z \\ v_{My} &= v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v_y}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v_y}{\partial z} \delta z \\ v_{Mz} &= v_z + \frac{\partial v_z}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v_z}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v_z}{\partial z} \delta z \end{aligned} \right\} \quad (8-6)$$

如果在式(8-6)的第一式右端加入两组等于零的项:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v_y}{\partial x} \delta y - \frac{1}{2} \frac{\partial v_y}{\partial x} \delta y \quad \text{和} \quad \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial x} \delta z - \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial x} \delta z, \quad \text{其值不变。经过}$$

简单组合, 可将式(8-6)的第一式写成

$$\left. \begin{aligned} v_{Mx} &= v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \delta y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \delta z \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \delta y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \delta z \\ \text{同理} \quad v_{My} &= v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} \delta y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \delta x \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \delta x \\ v_{Mz} &= v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} \delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \delta y \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \delta y \end{aligned} \right\} \quad (8-6a)$$

$$\text{如果令} \quad \dot{\gamma}_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \quad \dot{\gamma}_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \quad \dot{\gamma}_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (8-7)$$

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (8-8)$$

便可将式(8-6a)写成

$$\left. \begin{aligned} v_{Mx} &= v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta x + (\dot{\gamma}_z \delta y + \dot{\gamma}_y \delta z) + (\omega_y \delta z - \omega_z \delta y) \\ v_{My} &= v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} \delta y + (\dot{\gamma}_x \delta z + \dot{\gamma}_z \delta x) + (\omega_z \delta x - \omega_x \delta z) \\ v_{Mz} &= v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} \delta z + (\dot{\gamma}_y \delta x + \dot{\gamma}_x \delta y) + (\omega_x \delta y - \omega_y \delta x) \end{aligned} \right\} \quad (8-6b)$$

下面我们以上述微小流体质团底面 ABCD 的平面运动为例, 来分析式(8-6a)右端各项

的物理意义。如图 8-3 所示, 在 oxy 坐标面内 t 瞬时矩形 $ABCD$ 各角点的速度为

$$\begin{aligned} \text{点 } A: & \quad v_x \quad v_y \\ \text{点 } B: & \quad v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta x \quad v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} \delta x \\ \text{点 } D: & \quad v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \delta y \quad v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} \delta y \\ \text{点 } C: & \quad v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \delta y \\ & \quad v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v_y}{\partial y} \delta y \end{aligned}$$

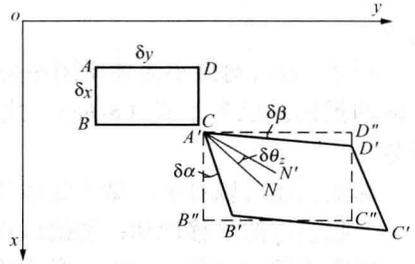


图 8-3 微小流体质团平面运动分析

到 $t + \delta t$ 瞬时, 矩形运动并变形为平行四边形 $A'B'C'D'$ 。可以认为, 整个图形跟随点 A 作牵连运动, 又对它作相对运动; 相对运动一般既有变形运动, 又有旋转运动。

(1) 平移运动: 牵连运动为移动, 移动速度就是上述各式中的 v_x 、 v_y 。

(2) 变形运动: 可视矩形 $ABCD$ 经线变形先变形成矩形 $A'B''C''D''$, 再经角变形最终变形成平行四边形 $A'B'C'D'$ 。

1) 线变形运动: 点 B 在跟随点 A 作移动的同时, 还以速度差 $\frac{\partial v_x}{\partial x} \delta x$ 沿 x 方向对点 A 做相对运动; 经 δt 时间, δx 伸长了 $\frac{\partial v_x}{\partial x} \delta x \delta t$, AB 变成了 $A'B''$ 。单位时间单位长度的伸长 (或缩短) 量称为线应变速度。上述伸长量除以 $\delta x \delta t$, 并取 $\delta t \rightarrow 0$ 时的极限, 便得 t 瞬时线段 AB 的线应变速度为 $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ 。同理, 线段 AD 的线应变速度为 $\frac{\partial v_y}{\partial y}$ 。

2) 角变形运动: 点 B 对点 A 还以速度差 $\frac{\partial v_y}{\partial x} \delta x$ 沿 y 方向作角变形运动; 经 δt 时间, 点 B 较点 A 横向多移动了 $\frac{\partial v_y}{\partial x} \delta x \delta t$, 线段 $A'B''$ 逆时针旋转了微小角度 $\delta \alpha = \frac{\partial v_y}{\partial x} \delta t$, 最终变成了 $A'B'$ 。同理, 线段 $A'D''$ 也因两端的速度差 $\frac{\partial v_x}{\partial y} \delta y$ 而顺时针旋转了微小角度 $\delta \beta = \frac{\partial v_x}{\partial y} \delta t$, 最终变成了 $A'D'$ 。单位时间直角的变化量定义为角变形速度, 或称剪切变形速度。直角的变化量为 $\delta \alpha + \delta \beta$, 将它们代表的变量代入, 除以 δt , 并取 $\delta t \rightarrow 0$ 时的极限, 便得 t 瞬时矩形的角变形速度为 $\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}$ 。如以 $2\dot{\gamma}_z$ 代表它, 则 $\dot{\gamma}_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$, 即式 (8-7) 的第三式; 它是

单位时间两直角边剪切变形的平均值, 即角变形速度之半。

(3) 旋转运动: 矩形在运动、变形过程中有无旋转, 可以用某夹角的等分角线是否旋转来确定。例如 $\angle D''A'B''$ 的平分线为 $A'N$, $\angle D'A'B'$ 的平分线为 $A'N'$, 它们之间的夹角 $\delta \theta_z = \left(\frac{\pi}{4} - \delta \beta \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \delta \alpha - \delta \beta \right) = \frac{1}{2} (\delta \alpha - \delta \beta)$ 。将 $\delta \alpha$ 、 $\delta \beta$ 代表的变量代入, 除以 δt , 并取 $\delta t \rightarrow 0$ 时的极限, 便得 t 瞬时 $\angle DAB$ 的平分线的旋转角速度, 也即矩形的旋转角速度为

$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$, 即式 (8-8) 的第三式; 它是单位时间两直角边旋转角度代数和的平均值。

同理, 也可对微小流体质团在另两个坐标面中的运动作出同样的分析, 得出同样的结果, 对应的投影式已列于式 (8-6a)、式 (8-7)、式 (8-8)。显然, 它们都是点的坐标和时间的函数。

综上所述可以看出, 微小流体质团的运动一般可以分解为三部分: ①随质团中某点 (基点) 一起前进的平移运动; ②绕该点的旋转运动; ③含有线变形和角变形的变形运动。这便是亥姆霍兹的运动分解定理。微小流体质团的维长趋于零的极限是流体微团, 这也是流体微团的运动分解定理。

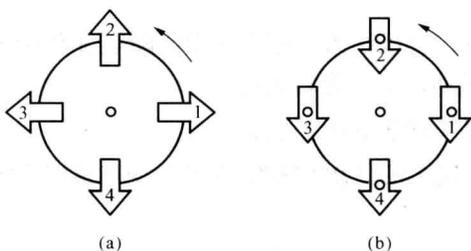


图 8-4 流体微团的运动轨迹

(a) 有旋流动; (b) 无旋流动

根据流体微团是否旋转可将流体的流动分为两大类: 有旋流动和无旋流动。流体微团的旋转角速度不等于零的流动称为有旋流动; 流体微团的旋转角速度等于零的流动称为无旋流动。在无旋流动中, 流体微团的旋转角速度 $\bar{\omega} = 0$ 或 $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$, 即

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (8-9)$$

应该注意, 有旋流动和无旋流动仅由流体微团本身是否旋转来确定, 与它的运动轨迹无关, 如图 8-4 (a)、(b) 所示。

第三节 理想流体运动方程 定解条件

一、理想流体运动方程

如图 8-5 所示, 在流场中任取一边长 δx 、 δy 、 δz 的平行六面体微小流体质团。在 t 瞬时, 它的形心坐标为 x 、 y 、 z , 经过形心的流体质点速度分量为 v_x 、 v_y 、 v_z , 密度为 ρ , 压强为 p , 作用在单位质量流体上的质量力分量为 f_x 、 f_y 、 f_z 。现以该平行六面体为控制体, 并将式

(4-23) 应用于该控制体。沿 x 方向从左面单位时间流入控制体的流体动量为

$$\left(\rho v_x \bar{v} - \frac{\partial(\rho v_x \bar{v})}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z$$

从右面单位时间流出控制体的流体动量为

$$\left(\rho v_x \bar{v} + \frac{\partial(\rho v_x \bar{v})}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z$$

沿 x 方向单位时间流出与流入控制体的流体动量之差为

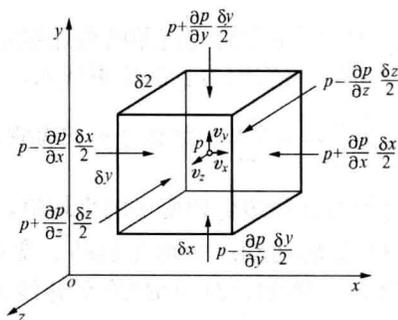


图 8-5 推导理想流体运动微分方程用图

$$\left(\rho v_x \bar{v} + \frac{\partial(\rho v_x \bar{v})}{\partial x} \frac{\delta x}{2}\right) \delta y \delta z - \left(\rho v_x \bar{v} - \frac{\partial(\rho v_x \bar{v})}{\partial x} \frac{\delta x}{2}\right) \delta y \delta z = \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x \bar{v}) \delta x \delta y \delta z$$

同理可得沿 y 方向和沿 z 方向单位时间流出与流入控制体的流体动量之差分别为

$$\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y \bar{v}) \delta x \delta y \delta z, \quad \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z \bar{v}) \delta x \delta y \delta z$$

因此, 经过控制面流体动量的净通量为

$$\iint_{cs} \rho v_n \bar{v} dA = \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z \bar{v}) \right] \delta x \delta y \delta z \quad (a)$$

与其对应的控制体内单位时间流体质量的变化为

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{cv} \rho \bar{v} dV = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{v}) \delta x \delta y \delta z \quad (b)$$

如果以形心处的密度 ρ 作为平行六面体内流体的平均密度, 则作用在控制体内流体上的质量力为

$$\iiint_{cv} \rho \bar{f} dV = \rho(f_x \bar{i} + f_y \bar{j} + f_z \bar{k}) \delta x \delta y \delta z = \rho \bar{f} \delta x \delta y \delta z \quad (c)$$

对于理想流体, $\bar{p}_n = -p\bar{n}$ 。于是, 由图 8-5 可得沿 x 方向压强的合力为

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2}\right) \delta y \delta z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2}\right) \delta z = -\frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z$$

同理可得沿 y 方向和沿 z 方向压强的合力分别为

$$-\frac{\partial p}{\partial y} \delta x \delta y \delta z, \quad -\frac{\partial p}{\partial z} \delta x \delta y \delta z$$

因此, 作用在控制面上压强的合力为

$$\iint_{cs} \bar{p}_n dA = -\iint_{cs} p \bar{n} dA = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \bar{k}\right) \delta x \delta y \delta z = -\nabla p \delta x \delta y \delta z \quad (d)$$

将式 (a)、式 (b)、式 (c)、式 (d) 代入式 (4-23), 通除以平行六面体的体积 $\delta x \delta y \delta z$, 并取 $\delta x \rightarrow 0$ 、 $\delta y \rightarrow 0$ 、 $\delta z \rightarrow 0$ 时的极限, 得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{v}) + \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z \bar{v}) \right] = \rho(f_x \bar{i} + f_y \bar{j} + f_z \bar{k}) - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \bar{k} \right)$$

将等式左端展开, 并引用式 (8-1), 上式成为

$$\left. \begin{aligned} \text{或} \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} &= (f_x \bar{i} + f_y \bar{j} + f_z \bar{k}) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \bar{k} \right) \\ \frac{d\bar{v}}{dt} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} &= \bar{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p \end{aligned} \right\} \quad (8-10)$$

这就是理想流体微分形式的运动方程, 又称流体运动的欧拉方程。它表明, 流场内某点单位质量流体的当地加速度与迁移加速度之和等于作用在它上面的重力与压力之和。由于推导过程中对流体的密度没有任何限制, 它对不可压缩流体和可压缩流体均适用。显然, 若 $v_x = v_y = v_z = 0$, 则流体运动的欧拉方程转变为流体平衡的欧拉方程。

式 (8-10) 在笛卡儿坐标系中的投影式为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (8-11)$$

为了能从运动微分方程中直观地判定流动是有旋还是无旋, 在式(8-11)的第一式左端同时加减 $v_y \partial v_y / \partial x$ 、 $v_z \partial v_z / \partial x$, 得

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + v_y \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + v_z \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

引用式(8-8), 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} \right) + 2(\omega_y v_z - \omega_z v_y) &= f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \text{同理得} \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v^2}{2} \right) + 2(\omega_z v_x - \omega_x v_z) &= f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v^2}{2} \right) + 2(\omega_x v_y - \omega_y v_x) &= f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (8-12)$$

$$\text{它的矢量形式为} \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}) = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (8-12a)$$

称为兰姆(H.Lamb)方程。它是理想流体微分形式运动方程的另一表示式。倘若方程中的 $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$, 流动是无旋的; 否则, 便是有旋的。

如果作用在流体上的质量力有势, 即式(3-6)成立; 流场又是正压的, 可以定义一个压强函数

$$P_F = \int dp / \rho \quad (8-13)$$

$$\text{它对坐标的偏导数为} \quad \frac{\partial P_F}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial P_F}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial P_F}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

将它们代入式(8-12), 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + 2(\omega_y v_z - \omega_z v_y) &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\pi + P_F + \frac{v^2}{2} \right) \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + 2(\omega_z v_x - \omega_x v_z) &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(\pi + P_F + \frac{v^2}{2} \right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + 2(\omega_x v_y - \omega_y v_x) &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(\pi + P_F + \frac{v^2}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (8-14)$$

$$\text{它的矢量形式为} \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}) = -\nabla \left(\pi + P_F + \frac{v^2}{2} \right) \quad (8-14a)$$

这是理想正压流体在有势的质量力作用下的兰姆方程。

二、定解条件

理想流体的任何运动必须满足连续方程式(8-1)和运动方程式(8-11)。在这四个方程

中,通常质量力是已知量,未知量为 u_x 、 u_y 、 u_z 、 p 、 ρ 五个,还需补充一个方程,方程组才封闭,才能求解。对于不可压缩流体,密度等于常数,可以补充 $\rho=\text{常数}$;对于可压缩流体中的正压流体,密度仅随压强变化,可以补充 $\rho=\rho(p)$;对于可压缩流体中的非正压流体,密度随压强和温度变化,又多了一个变量 T ,除需补充物态方程外,还要有能量方程。但满足基本方程组的解有无穷多,要得到给定流动的确解,必须给出它的定解条件,包括起始条件和边界条件。

1. 起始条件

起始条件是指在起始瞬时 ($t=0$) 方程组的解应当满足的条件,即起始瞬时流场中的流动参数分布:

$$u_x=u_x(x, y, z), u_y=u_y(x, y, z), u_z=u_z(x, y, z)$$

$$p=p(x, y, z), \rho=\rho(x, y, z), T=T(x, y, z)$$

它们是研究非定常流动必不可少的定解条件;对于定常流动,由于流场中的流动参数分布不变,则不必给出。

2. 边界条件

边界条件是指方程组的解在流场边界上应当满足的条件。边界可以是固体的,也可以是流体的;条件可以是运动学的、动力学的,也可以是热力学的。形式多种多样,需按实际问题具体分析。今举常见的几种:

(1) 固体壁面。理想流体沿固体壁面流动时,既不能穿过它,也不能脱离它,壁面上流体质点的法向速度 v_{ln} 应等于对应点上壁面的法向速度 v_{bn} , 即

$$v_{ln}=v_{bn}$$

壁面静止不动

$$v_{ln}=0$$

流体与固壁的相互作用力也必沿壁面的法线方向。

(2) 流体交界面。两种流体应当互不渗透。在它们交界面的同一点上,法向速度应当相等,两侧的温度通常也是连续的,即

$$v_{1n}=v_{2n}, T_1=T_2$$

对于曲面交界面,曲面两侧的压强应当满足条件式 (2-23), 即

$$p_1 - p_2 = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

对于平面交界面, $R_1=R_2 \rightarrow \infty$

$$p_1=p_2$$

对于自由表面

$$p=p_{\text{amb}}$$

对于接触大气的自由表面

$$p=p_a$$

(3) 无穷远处。一般给定该处流体的速流 v_∞ 、压强 p_∞ 和密度 ρ_∞ 。

(4) 流道进、出口处。此处的条件需视具体情况而定,一般给出该处截面上的速度分布。

第四节 理想流体运动方程的积分

一、欧拉积分

若理想正压流体在有势的质量力作用下作定常无旋流动,式 (8-14) 的左端等于零;该

方程组的三式分别乘以在流场中任取的微元线段 $d\vec{l}$ 的投影 dx 、 dy 、 dz ，并相加，得

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\pi + P_F + \frac{v^2}{2}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\pi + P_F + \frac{v^2}{2}\right)dy + \frac{\partial}{\partial z}\left(\pi + P_F + \frac{v^2}{2}\right)dz = 0$$

即
$$d\left(\pi + P_F + \frac{v^2}{2}\right) = 0$$

积分后得
$$\pi + P_F + \frac{v^2}{2} = C \quad (8-15)$$

称为欧拉积分。该式说明，理想正压流体在有势的质量力作用下作定常无旋流动时，单位质量流体的质量力位势能 π 、压强势能 P_F 、动能 $v^2/2$ 之和在流场中保持不变，它们可以互相转换。

二、伯努利积分

若理想正压流体在有势的质量力作用下作定常有旋流动，式(8-14)左端第一项等于零。由于定常流动的流线与迹线重合，在流场中沿流线所取有向微元线段 $d\vec{l}$ 的三个投影可以表示为 $dx=v_x dt$ ， $dy=v_y dt$ ， $dz=v_z dt$ 。依次用它们的右、左端分别乘上述方程组三式的左、右端，得

$$\left. \begin{aligned} 2(\omega_y v_z - \omega_z v_y)v_x dt &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\pi + P_F + \frac{v^2}{2}\right)dx \\ 2(\omega_z v_x - \omega_x v_z)v_y dt &= -\frac{\partial}{\partial y}\left(\pi + P_F + \frac{v^2}{2}\right)dy \\ 2(\omega_x v_y - \omega_y v_x)v_z dt &= -\frac{\partial}{\partial z}\left(\pi + P_F + \frac{v^2}{2}\right)dz \end{aligned} \right\}$$

三式相加后得
$$d\left(\pi + P_F + \frac{v^2}{2}\right) = 0$$

积分后得
$$\pi + P_F + \frac{v^2}{2} = C \quad (8-16)$$

称为伯努利积分。该式说明，理想正压流体在有势的质量力作用下作定常有旋流动时，单位质量流体的质量力位势能 π 、压强势能 P_F 、动能 $v^2/2$ 之和沿同一流线保持不变，它们可以互相转换。一般情况下，沿不同流线积分常数值不一样。

对于理想不可压缩重力流体，若取坐标轴 z 铅直向上，则有 $\pi=gz$ ， $P_F=p/\rho$ ，代入式(8-15)、式(8-16)，便得到已经导出的伯努利方程式(4-41a)。如果流动无旋，单位质量流体的位势能、压强势能、动能之和在流场中保持不变；如果流动有旋，这三项之和沿同一流线保持不变。

对于完全气体的绝热流动，质量力的作用可忽略不计，由等熵过程关系式 $\rho = C'p^{1/\gamma}$ ，可得

$$P_F = \int \frac{dp}{C'p^{1/\gamma}} = \frac{1}{C'} \frac{p^{1-1/\gamma}}{1-1/\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}$$

代入式(8-15)、式(8-16)，得

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = C \quad (8-17)$$

这是非黏性完全气体一维定常绝热流动的能量方程，也即第七章第三节的式 (g)。如果流动无旋，单位质量气体的压强势能、动能之和在流场中保持不变；如果流动有旋，这两项之和沿同一流线保持不变。

第五节 涡线 涡管 涡束 涡通量

在有旋流动流场的全部或局部区域中连续地充满着绕自身轴线旋转的流体微团，形成了用角速度 $\vec{\omega}(x, y, z, t)$ 表示的涡量场（或称角速度场）。如同在速度场中引进流线、流管、流束和流量一样，在涡量场中引进涡线、涡管、涡束和涡通量。

一、涡线 涡管 涡束

涡线是这样一条曲线：在给定瞬时，涡线上每个点的流体角速度矢量 $\vec{\omega}$ 都与它相切；涡线就是该线上诸流体微团的瞬时转动轴线，如图 8-6 所示。在非定常流动中，涡线的形状和位置随时变化；只有在定常流动中，涡线的形状和位置才保持不变。涡线的微分方程为

$$\frac{dx}{\omega_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{\omega_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{\omega_z(x, y, z, t)} \quad (8-18)$$

式中 t 为参变量。

在给定瞬时，在涡量场中任取一不是涡线的封闭曲线，通过封闭曲线上每一点作涡线，这些涡线形成一个管状表面，称为涡管，如图 8-7 所示。涡管中充满旋转运动的流体，称为涡束。

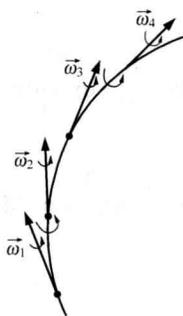


图 8-6 涡线

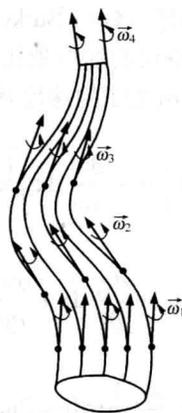


图 8-7 涡管

二、涡通量

旋转角速度的值 ω 与垂直于角速度方向的微元涡管横截面积 dA 的乘积的两倍称为微元涡管的涡通量（也称涡管强度） dJ ，即

$$dJ = 2\omega dA \quad (8-19)$$

有限截面涡管的涡通量(涡管强度)可表示为沿涡管横截面的如下积分:

$$J = 2 \iint_A \omega_n dA \quad (8-20)$$

式中, ω_n 是微元涡管的旋转角速度沿涡管横截面法线方向的分量。

第六节 速度环量 斯托克斯定理

一、速度环量

流体的流量和流体质点的速度可利用伯努利方程通过测量压强差来计算,但涡通量和流体微闭的角速度不能直接测得。根据实际观察发现,在有旋流动中流体环绕某一核心旋转,涡通量越大,旋转速度越快,旋转范围越扩大。因此可以推测,涡通量与环绕核心的流体速度分布有密切关系。为了解决这个问题,引进速度环量 Γ 的概念;它定义为:速度在某一封闭周线切线上的分量沿该封闭周线的线积分,即

$$\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{s} = \oint (v_x dx + v_y dy + v_z dz) \quad (8-21)$$

速度环量是标量,它的正负号不仅与速度的方向有关,而且与线积分的绕行方向有关。为统一起见,特规定沿封闭周线绕行的正方向为逆时针方向,即封闭周线所包围的面积总在前进方向的左侧;被包围面积的法线的正方向应与绕行的正方向形成右手螺旋系统。

二、斯托克斯定理

在涡量场中,沿任意封闭周线的速度环量等于通过该周线所包围面积的涡通量,即

$$\Gamma_K = \oint_K \vec{v} \cdot d\vec{s} = 2 \iint_A \omega_n dA \quad (8-22)$$

为了证明斯托克斯(G. G. Stokes)定理,先在坐标面 oxy 上取一边长为 dx 、 dy 的微元矩形周线 $ABCD$,各角点的速度如图 8-8 所示。由于可按平均速度计算各微元线段上的速度环量,故沿封闭周线 $ABCD$ 的速度环量为

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{1}{2} \left[v_x + \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) \right] dx + \frac{1}{2} \left[\left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx \right) + \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \right) \right] dy \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[\left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy \right) + \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy \right) \right] dx - \frac{1}{2} \left[\left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \right) + v_y \right] dy \\ &= \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx dy = 2\omega_z dA = dJ \end{aligned}$$

即沿微元封闭周线的速度环量等于通过该周线所包围面积的涡通量。这就证明了微元封闭周线的斯托克斯定理。

推广到图 8-9 所示的任意有限封闭周线 K 。张于该周线上的可以是平面,见图(a);也可以是曲面,见图(b)。用互相正交的两组直线将平面和曲面划分成无数个微元封闭周线,如图 8-9 所示。微元封闭周线包围的面积为微元面积,可以视为平面。这样,便可将微元封

闭周线的斯托克斯定理应用于每个微元封闭周线, 有 $d\Gamma_i = dJ_i$ ($i=1, 2, 3, \dots$); 综合所有微元封闭周线, 得 $\sum d\Gamma_i = \sum dJ_i$ ($i=1, 2, 3, \dots$)。由于周线 K 内各微元线段速度的线积分都要计算两次, 而绕行方向相反, 它们线积分之和为零, 故有 $\sum d\Gamma_i = \Gamma_K = \oint_K \vec{v} \cdot d\vec{s}$, 而 $\sum dJ_i = 2 \iint_A \omega_n dA$, 所以 $\Gamma_K = \oint_K \vec{v} \cdot d\vec{s} = 2 \iint_A \omega_n dA$, 即沿有限封闭周线的速度环量等于通过此周线所张曲面的涡通量。这就证明了有限封闭周线的斯托克斯定理。

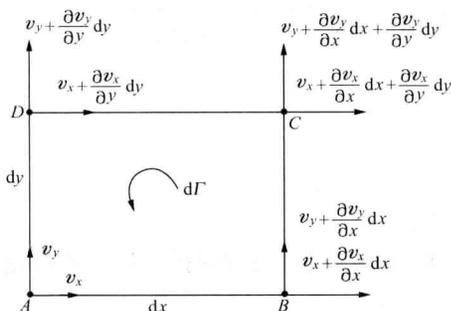


图 8-8 证明微元封闭周线斯托克斯定理用图

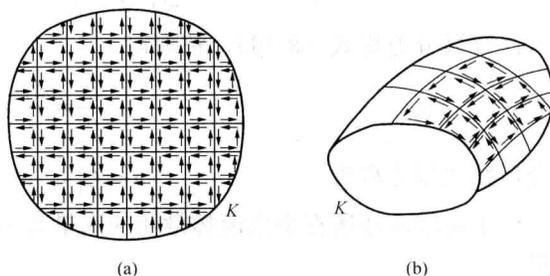


图 8-9 证明有限封闭周线斯托克斯定理用图

必须注意, 斯托克斯定理应用区域的限制条件: 区域内任意封闭周线都能连续地收缩成一点而不越出流体的边界。这种区域称为单连通区域, 上述有限封闭周线便是。不符合上述限制条件的区域, 称为多连通区域。例如图 8-10 的封闭周线 K 内有一翼型剖面, 便是双连通区域; 封闭周线内有多个固体剖面, 便是多连通区域。在多连通区域, 由于被积函数 (包括它的导数) 有不连续或无定义的区域 (固体剖面), 便不能直接应用斯托克斯定理。

如果在图 8-10 中用无限靠近的线段 AB 和 $A'B'$ 将外、内周线 K 、 K_1 隔断, 重新组成封闭周线 $ABK_1B'A'KA$, 它包围的区域就变成了单连通区域。沿此周线的速度环量为

$$\Gamma_{ABK_1B'A'KA} = \Gamma_{AB} + \Gamma_{BK_1B'} + \Gamma_{B'A'} + \Gamma_{A'KA}$$

由于沿线段 AB 与 $A'B'$ 的切线速度线积分大小相等, 方向相反, 即 $\Gamma_{AB} + \Gamma_{A'B'} = 0$, 而沿内封闭周线的速度环量 $\Gamma_{BK_1B'} = -\Gamma_{K_1}$, 沿外封闭周线的速度环量 $\Gamma_{A'KA} = \Gamma_K$, 故得双连通区域的斯托克斯定理:

$$\Gamma_K - \Gamma_{K_1} = 2 \iint_A \omega_n dA \quad (8-23)$$

倘若在外封闭周线之内有 n 个固体剖面, 则式 (8-23) 扩展成

$$\Gamma_K - \sum_{i=1}^n \Gamma_{K_i} = 2 \iint_A \omega_n dA \quad (8-24)$$

即沿外封闭周线的速度环量与沿内封闭周线速度环量总和之差等于通过多连通区域的涡通

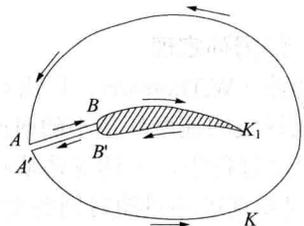


图 8-10 双连通区域变成单连通区域

量。此即多连通区域的斯托克斯定理。

【例 8-1】 已知理想流体定常流动的速度分布为 $v_x = a(y^2 + z^2)^{1/2}$, $v_y = v_z = 0$, 试求涡线方程与沿封闭周线 $x^2 + y^2 = b^2$ ($z=0$) 的速度环量, a 、 b 为常数。

【解】 按已知速度由式 (8-8) 得旋转角速度的分量为

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = 0$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = \frac{az}{2(y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\frac{ay}{2(y^2 + z^2)^{3/2}}$$

代入涡线微分方程式 (8-18), 整理得

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{z} = -\frac{dz}{y}$$

积分后得涡线方程为

$$x = C_1, \quad y^2 + z^2 = C_2$$

由于封闭周线所在平面流体微团的涡量为 $\omega_x = \omega_y = 0$, $\omega_z = -a/2$, 故由斯托克斯定理得速度环量

$$\Gamma = 2 \iint_A \omega_n dA = 2\omega_z A = -\pi ab^2$$

第七节 汤姆孙定理 亥姆霍兹定理

一、汤姆孙定理

汤姆孙 (W.Thomson) 提出: 理想正压流体在有势的质量力作用下沿任何由流体质点组成的封闭周线的速度环量不随时间变化。

在流动过程中, 上述流体质点线可以移动、变形, 但组成该线的流体质点不变。故由式 (8-21) 可得速度环量随时间的变化率为

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint (v_x dx + v_y dy + v_z dz) = \oint \left[v_x \frac{d}{dt}(dx) + v_y \frac{d}{dt}(dy) + v_z \frac{d}{dt}(dz) \right] + \oint \left(\frac{dv_x}{dt} dx + \frac{dv_y}{dt} dy + \frac{dv_z}{dt} dz \right) \quad (a)$$

式 (a) 等号右端第一项转变为

$$\begin{aligned} \oint \left[v_x \frac{d}{dt}(dx) + v_y \frac{d}{dt}(dy) + v_z \frac{d}{dt}(dz) \right] &= \oint (v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z) \\ &= \oint \left[d\left(\frac{v_x^2}{2}\right) + d\left(\frac{v_y^2}{2}\right) + d\left(\frac{v_z^2}{2}\right) \right] = \oint d\left(\frac{v^2}{2}\right) \end{aligned} \quad (b)$$

引用式 (4-5)、式 (8-11)、式 (3-6)、式 (8-13), 式 (b) 等号右端第二项转变为

$$\begin{aligned} \oint \left(\frac{dv_x}{dt} dx + \frac{dv_y}{dt} dy + \frac{dv_z}{dt} dz \right) \\ = \oint \left[\left(f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx + \left(f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right) dy + \left(f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right) dz \right] \end{aligned}$$

$$= \oint \left[(f_x dx + f_y dy + f_z dz) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) \right] = \oint (-d\pi - dP_F) \quad (c)$$

将式 (d)、式 (c) 代入式 (a) 得

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint \left[d \left(\frac{v^2}{2} \right) - d\pi - dP_F \right] = \oint d \left(\frac{v^2}{2} - \pi - P_F \right) = 0 \quad (8-25)$$

这是因为前已假定, v , π 和 P_F 都是 x 、 y 、 z 和 t 的单值连续函数, 所以沿封闭周线的积分等于零, 即速度环量不随时间变化, 这就证明了汤姆孙定理。

汤姆孙定理和斯托克斯定理说明: 理想正压流体在有势的质量力作用下, 速度环量和旋涡都是不能自行产生或自行消失的。这是由于理想流体没有黏性, 不存在切向应力, 不能传递旋转运动, 既不能使不旋转的流体微团产生旋转, 也不能使已旋转的流体微团停止旋转。由此可知, 流场中原来有旋涡和速度环量的, 永远有旋涡和保持原有的环量; 原来没有旋涡和速度环量的, 就永远没有旋涡和环量。例如, 理想流体从静止状态开始运动, 由于在静止时流场中每一条封闭周线的速度环量都等于零, 而且没有旋涡, 所以在流动中环量仍然等于零, 没有旋涡。如果从静止开始流动后, 由于某种原因某瞬间流场中产生了旋涡, 有了速度环量, 根据汤姆孙定理, 在同一瞬间必然会产生一个与此环量大小相等而方向相反的旋涡, 以保持流场的总环量等于零。本章第十五节依此说明理想流体从静止开始绕流叶片叶型时速度环量的产生。

二、亥姆霍兹定理

亥姆霍兹 (H.L.F.Von Helmholtz) 提出了关于理想流体有旋流动的三个旋涡定理, 这些定理说明了旋涡的基本性质。

亥姆霍兹第一定理: 在同一瞬间涡管各截面上的涡通量都相同。

如图 8-11 所示, 在涡管上任取两个截面 A 和 B , 在他们之间的涡管表面上取两条无限邻近的线 AB 和 $A'B'$ 。由于在封闭周线 $ABB'A'A$ 所包围的涡管表面内没有涡线穿过, 所以根据斯托克斯定理, 沿这条封闭周线的速度环量等于零; 沿 AB 和 $B'A$ 两条线的切向速度线积分大小相等, 方向相反, 互相抵消, 故有

$$\Gamma_{ABB'A'A} = \Gamma_{AB} + \Gamma_{BB'} + \Gamma_{B'A'} + \Gamma_{A'A} = \Gamma_{BB'} + \Gamma_{A'A} = 0$$

即

$$-\Gamma_{A'A} = \Gamma_{BB'}; \quad \Gamma_{AA'} = \Gamma_{BB'}$$

意即沿包围涡管任一截面封闭周线的速度环量都相等。根据斯托克斯定理, 这些速度环量都等于穿过封闭周线所包围截面的涡通量, 故在涡管各截面上的涡通量都相等, 即

$$2 \iint_A \omega_n dA = \text{常数}$$

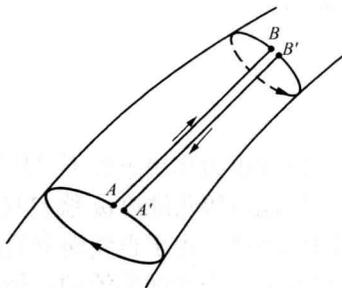


图 8-11 证明亥姆霍兹第一定理用图

该定理说明涡管不可能在流体中终止, 因为如果涡管的截面缩小到零, 则角速度将趋于无穷大, 这是不可能的。所以涡管在流体中既不能开始, 也不能终止, 只能是自成封闭的涡圈, 或在边界 (即容器壁面或自由表面) 上开始、终止, 如图 8-12 所示。例如, 吸烟者吐出的圆形烟环、水中的旋涡和龙卷风等都是该定理所表述的自然现象。但是, 实际流体有黏性, 涡管的强度随时间会有变化, 如吐出的烟环和水中形成的旋涡经过不长的时间便

会消失。

亥姆霍兹第二定理 (涡管守恒定理): 理想正压流体在有势的质量力作用下, 涡管永远保持为由相同流体质点组成的涡管。

在涡管的表面上任意取由流体质点组成的封闭周线 K , 如图 8-13 所示。由于开始时没有涡线穿过周线 K 所包围的面积, 所以由斯托克斯定理可知, 沿周线 K 的速度环量等于零; 根据汤姆孙定理, 速度环量不能自生自灭, 所以沿周线 K 的速度环量永远为零。因此, 涡管表面上任何封闭周线所包围的面积中永远没有涡线通过, 也就是说, 在某一时刻构成涡管的流体质点永远在涡管上, 即涡管永远为涡管, 但涡管的形状随时间可能有变化。

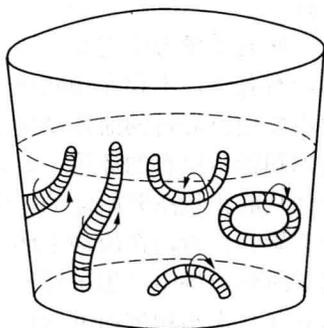


图 8-12 涡管在流体中存在的形状



图 8-13 证明亥姆霍兹第二定理用图

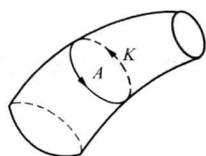


图 8-14 证明亥姆霍兹第三定理用图

亥姆霍兹第三定理 (涡管强度守恒定理): 在有势质量力作用下的理想正压流体中, 任何涡管的强度都不随时间变化, 永远保持定值。

如图 8-14 所示, 围绕涡管的截面 A 取一封闭的流体质点周线 K 。根据亥姆霍兹第二定理, 涡管始终由相同的流体质点组成; 根据汤姆孙定理, 沿涡管表面周线 K 的速度环量保持不变; 再根据斯托克斯定理, 通过涡管的涡通量也保持不变, 即涡管强度不随时间变化。

第八节 平面涡流

设在重力作用下的不可压缩理想流体中, 有一无限长、涡通量为 J 的铅直涡束, 它像刚体一样地以等角速度 ω 绕自身轴旋转。涡束周围的流体受涡束的诱导将绕涡束轴作对应的等速圆周运动。由于直线涡束无限长, 与涡束轴垂直的所有平面上的流动情况都一样, 故可只研究其中一个平面的流动, 如图 8-15 (a) 所示。该流动可分为: 涡束内的流动, 称为涡核区, 为有旋流动, 其半径为 r_b ; 涡束外的流动, 称为环流区, 为无旋流动, 这是由于速度环量和旋涡都不能自行产生。

环流区: 根据斯托克斯定理, 沿任何圆周流线的速度环量为

$$\Gamma = 2\pi r v_\theta = J \quad (r \geq r_b)$$

故环流区的速度分布为

$$v_r = 0, \quad v_\theta = v = \Gamma / (2\pi r) \quad (r \geq r_b) \quad (8-26)$$

在该区水平平面内，对半径 r 处和无穷远处列伯努利方程

$$p + \rho v^2/2 = p_\infty \quad (\text{a})$$

将式 (8-26) 代入式 (a)，得环流区的压强分布为

$$p = p_\infty - \frac{\rho v^2}{2} = p_\infty - \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi^2 r^2} \quad (\text{8-27})$$

可见，在环流区随着半径的减小，流速升高而压强降低，见图 8-15 (b)；在与涡核交界处，流速达该区的最高值，而压强则是该区的最低值，即

$$v_b = \Gamma / (2\pi r_b)$$

$$p_b = p_\infty - \frac{\rho v_b^2}{2} = p_\infty - \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi^2 r_b^2} \quad (\text{b})$$

由式 (8-27) 可知，平面涡流确实存在像刚体一样以等角速度绕自身轴旋转的涡核；因为，假设环流区可以延伸到中心，则 $p = -\infty$ ，实际上这是不可能的。

涡核区：涡束的速度分布为

$$v_r = 0 \quad v_\theta = v = r\omega \quad (r \leq r_b) \quad (\text{8-28})$$

由于该区为有旋流动，伯努利方程的积分常数随流线而变，故由欧拉方程推求压强分布更为方便。平面定常流动的欧拉方程为

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

将区内任一点的速度 $v_x = -\omega y$ ， $v_y = \omega x$ 代入上式，得

$$\omega^2 x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \omega^2 y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

用 dx 和 dy 分别乘以上二式，相加后得

$$\omega^2 (x dx + y dy) = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right)$$

或

$$dp = \rho \omega^2 d(x^2 + y^2)/2$$

积分得

$$p = \frac{1}{2} \rho \omega^2 (x^2 + y^2) + C = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 + C = \frac{1}{2} \rho v^2 + C$$

与环流区交界处， $r = r_b$ ， $p = p_b$ ， $v = v_b = r_b \omega$ ，代入上式，得积分常数

$$C = p_b - \frac{1}{2} \rho v_b^2 = p_\infty - \rho v_b^2$$

将积分常数代回原式，得涡核区的压强分布为

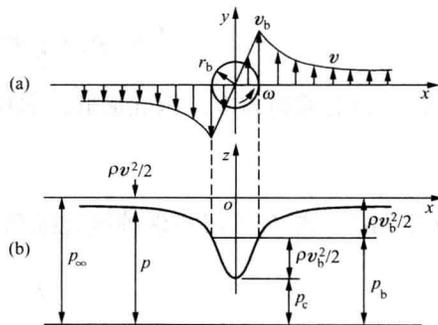


图 8-15 平面涡流

$$p = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho v^2 - \rho v_b^2 = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 - \rho \omega^2 r_b^2 \quad (8-29)$$

涡核中心的流速为零, 压强最低; 涡核中心的压强

$$p_c = p_{\infty} - \rho v_b^2 \quad (c)$$

由式 (b)、式 (c) 可得涡核区边缘至涡核中心的压强降

$$p_b - p_c = \frac{1}{2} \rho v_b^2 = p_{\infty} - p_b$$

可见, 涡核区和环流区的压强降相等, 都等于以它们交界处的速度计算的动压头。由于涡核区的压强比环流区的低, 而涡核区又很小, 径向压强梯度很大, 故有向涡核中心的抽吸作用; 涡旋越强, 这种作用越大, 龙卷风是极强的涡旋, 所以有很大的破坏力。在工程实际中, 也有许多与涡流有关的装置, 如锅炉中的旋风燃烧室、离心式除尘器、离心式喷油嘴、离心式超声波发生器、离心式泵和风机等。

第九节 速度势 流函数 流网

一、速度势

在无旋流动中, 流体微团的角速度等于零, 都要满足式 (8-9) 的条件。由高等数学已知, 式 (8-9) 是 $v_x dx + v_y dy + v_z dz$ 成为某一函数 $\varphi(x, y, z, t)$ 全微分的必要且充分的条件。称 $\varphi(x, y, z, t)$ 为速度势函数, 简称速度势; 称无旋流动为有势流动, 简称势流。当研究流动参数分布时, 总是指某瞬时的, 因此可以将时间 t 作为参变量。故有

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = v_x dx + v_y dy + v_z dz$$

于是

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (8-30)$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} = \text{grad } \varphi = \nabla \varphi \quad (8-31)$$

即无旋流动中流体的速度等于速度势的梯度。这与有势质量力与力场势函数的关系相类似。这样, 速度势对任何方向的偏导数都等于速度在该方向的分量。如图 8-16 所示, 速度势对任意方向 s 的偏导数等于速度在 s 方向的分量, 即

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{ds} = v_x \cos(\hat{s}, \hat{x}) + v_y \cos(\hat{s}, \hat{y}) + v_z \cos(\hat{s}, \hat{z}) = v_s \quad (8-32)$$

于是, 在图 8-17 柱坐标系中的速度分量为

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad v_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (8-33)$$

在有势流动中沿任一曲线 AB 切向速度的线积分可写成

$$\Gamma_{AB} = \int_A^B \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_A^B (v_x dx + v_y dy + v_z dz)$$

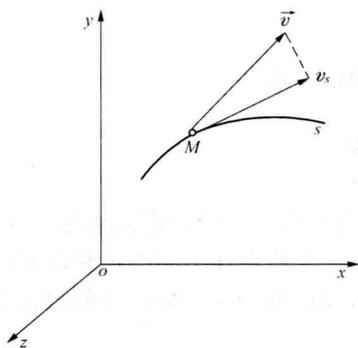


图 8-16 推导流速与速度势的关系用图

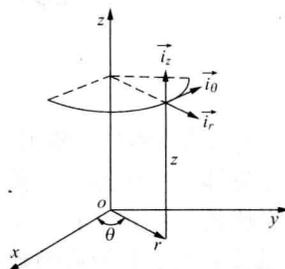


图 8-17 柱坐标系

将式 (8-30) 代入上式, 得

$$\Gamma_{AB} = \int_A^B \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right) = \int_A^B d\varphi = \varphi_B - \varphi_A \quad (8-34)$$

由此可知, 在有势流动中沿曲线 AB 的切向速度线积分等于终点 B 与起点 A 的速度势之差。如果速度势是单值的, 则该线积分与其起点至终点的曲线形状无关。可见, 该线积分与速度势的关系可以同理论力学中功与位势的关系相比拟。在有势流动中, 如果速度势是单值的和连续的, 则沿任一封闭周线的速度环量等于零。

将式 (8-30) 代入不可压缩流体的连续方程 (8-3), 得

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \nabla^2 \varphi = 0 \quad (8-35)$$

式中 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 为拉普拉斯 (P. S. Laplace) 算子。在高等数学里式 (8-35) 称为拉

普拉斯方程, 即在不可压缩流体的有势流动中, 速度势满足拉普拉斯方程。凡是满足拉普拉斯方程的函数称为调和函数。对于柱坐标系, 拉普拉斯方程为

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (8-36)$$

这样, 求解不可压缩流体无旋流动问题, 便归纳为根据起始条件和边界条件求解拉普拉斯方程问题。把解得的速度势 φ 代入式 (8-30) 或式 (8-33), 便可得到速度的三个分量, 再根据伯努利方程 (4-43) 便可求得压强分布。可见, 速度势的引入, 使原来需要四个方程联立求解的问题, 转变为只解一个拉普拉斯方程, 使求解过程大为简化。

二、流函数

对于不可压缩流体的平面流动, 可将其连续方程式 (8-5) 写成

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y}$$

平面流动的流线微分方程为

$$v_x dy - v_y dx = 0 \quad (a)$$

由高等数学已知,式(8-5)是式(a)成为某一函数 $\psi(x, y)$ 全微分的必要且充分的条件,即

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy = -v_y dx + v_x dy \quad (b)$$

于是

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (8-37)$$

将式(8-37)代入式(8-5),便可证明它们总是满足连续方程的(轴对称流动也一样),即只要是不可压缩流体的二维流动,就必然存在流函数,不管流体是理想的还是黏性的,流动是有旋的还是无旋的。由式(a)、式(b)可知,在流线上 $d\psi=0$, $\psi=\text{常数}$;每条流线有各自的常数值。所以称 $\psi(x, y)$ 为流函数。

对于不可压缩流体的平面流动,用极坐标表示的连续方程、流函数的微分和速度分量分别为

$$\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (8-5a)$$

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r} dr + \frac{\partial\psi}{\partial \theta} d\theta = -v_\theta dr + v_r r d\theta \quad (c)$$

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} \quad (8-38)$$

流函数的物理意义是,平面流动中两条流线间单位厚度通过的体积流量等于两条流线上的流函数之差。现证明如下:如图8-18所示,在垂直于流线的 AB 曲线上取一微元线段 dl ,假定垂直于运动平面 oxy 的高度等于1,则通

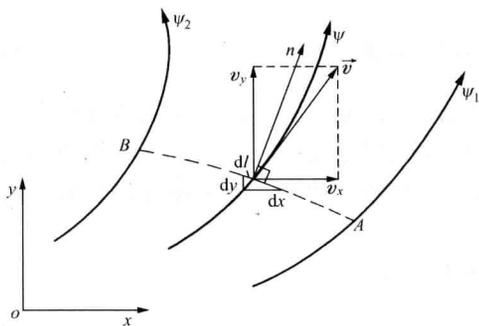


图 8-18 说明流函数物理意义用图

过 AB 上流函数为 ψ_1 的流线和流函数为 ψ_2 的流线间的体积流量为

$$q_v = \int_A^B v_n dl = \int_A^B [v_x \cos(\hat{n}, x) + v_y \cos(\hat{n}, y)] dl = \int_A^B (v_x dy - v_y dx) = \int_A^B d\psi = \psi_2 - \psi_1 \quad (8-39)$$

由于流线上各点的流函数都是同一常数,故由式(8-39)可知,沿流线全长两流线间的流量保持不变。

如果上述流动又是无旋的,则将式(8-37)代入式(8-9)的第三式,得

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \nabla^2\psi = 0 \quad (8-40)$$

对于柱坐标系

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (8-41)$$

即不可压缩流体二维无旋流动的流函数满足拉普拉斯方程,也是调和函数。

三、流网

在不可压缩流体的平面无旋流动中,同时存在速度势和流函数,它们的关系由

$$v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

可得
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (8-42)$$

这是两簇曲线的正交性条件，即等势线簇和流线簇互相正交。在平面上它们构成处处正交的网格，称为流网，如图 8-19 所示。

【例 8-2】 已知平面势流的速度势函数 $\varphi=4(x^2-y^2)$ ，试求速度与流函数的表示式。

【解】 由式 (8-30) 得速度分量

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 8x, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -8y$$

合速度及其与 x 轴的夹角为

$$v = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2} = 8(x^2 + y^2)^{1/2} \quad \theta = \arctan(v_y/v_x) = \arctan(-y/x)$$

由式 (8-37) 知
$$v_x = 8x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

积分后得
$$\psi = 8xy + f(x)$$

由于 $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 8y + f'(x) = -v_y = 8y$ ，即 $f'(x) = 0, f(x) = C$ 。又由于取 $C=0$ ，并不影响流动的流谱，最后得代表一簇双曲线流线的流函数

$$\psi = 8xy$$

【例 8-3】 已知流场的滞止压强为 101000Pa，流体的密度为 1.19kg/m^3 ，平面势流的速度势函数 $\varphi = (x^2 - y^2) \text{ m}^2/\text{s}$ ，试求点 (2, 1.5) 处的速度与压强。

【解】 由式 (8-30) 和已知数据得

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x = 2 \times 2 = 4(\text{m/s}) \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2y = -2 \times 1.5 = -3(\text{m/s})$$

合速度
$$v = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2} = [4^2 + (-3)^2]^{1/2} = 5(\text{m/s})$$

由伯努利方程式 (4-43) 得

$$p = p_T - \rho v^2 / 2 = 101000 - 1.19 \times 5^2 / 2 = 100985(\text{Pa})$$

第十节 几种简单的平面势流

一、均匀等速流

流速的大小和方向沿流线不变的流动为均匀流；若诸流线平行，流速相等，便是均匀等速流。例如 $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} = v_{x0} \vec{i} + v_{y0} \vec{j}$ ，其中 v_{x0} 、 v_{y0} 为常数，便是这样的流动。

由于
$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = v_{x0} dx + v_{y0} dy$$

积分得
$$\varphi = v_{x0} x + v_{y0} y \quad (8-43)$$

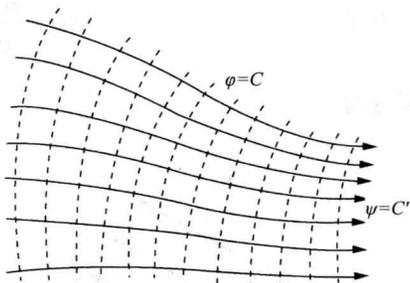


图 8-19 流网

又由于

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v_{y0} dx + v_{x0} dy$$

积分得

$$\psi = -v_{y0}x + v_{x0}y \quad (8-44)$$

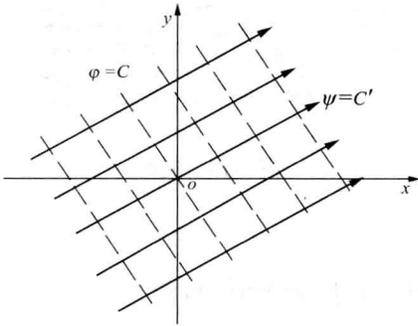


图 8-20 均匀等速流

式 (8-43)、式 (8-44) 的积分常数均取为零 (下同), 这并不影响对流动的计算。图 8-20 中的实线为流线, 虚线为等势线, 它们是相互垂直的两簇直线。由于流场中各点的速度都相同, 流动无旋; 由式 (4-43) 可得

$$gz + p/\rho = \text{常数}$$

如果均匀等速流是在水平面上, 或者重力的影响可以忽略不计 (例如气体作等速直线流动), 则

$$p = \text{常数}$$

即在流场中处处压强都相同。

二、源流和汇流

设在无限平面上流体从一点沿径向直线均匀地向各方流出, 这种流动称为源流, 这个点称为源点, 见图 8-21 (a)。若流体沿径向直线均匀地从各方流入一点, 这种流动称为汇流, 这个点称为汇点, 见图 8-21 (b)。显然在这些流动中, 从源点流出和向汇点流入都只有径向速度 v_r 。将极坐标的原点作为源点 (或汇点), 则

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \quad (a)$$

根据流动的连续性条件, 不可压缩流体通过任一圆柱面的流量 q_v 都应该相等, 所以, 通过半径为 r 的单位长度圆柱面流出或流入的流量为

$$2\pi r v_r \times 1 = \pm q_v = \text{常数}$$

由此得

$$v_r = \pm \frac{q_v}{2\pi r} \quad (8-45)$$

对于源流, v_r 与 r 同向, q_v 前取正号; 对于汇流, v_r 与 r 反向, q_v 前取负号。由式 (a) 已知, ϕ 只是 r 的函数, 故有

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} dr = v_r dr = \pm \frac{q_v}{2\pi} \frac{dr}{r}$$

积分得

$$\phi = \pm \frac{q_v}{2\pi} \ln r \quad (8-46)$$

当 $r=0$ 时, 速度势 ϕ 和速度 v_r 都变成无穷大, 源点或汇点是奇点。所以, 速度 v_r 和速度势 ϕ 的表达式 (8-45)、式 (8-46) 只有在源点或汇点以外才能应用。根据式 (8-38):

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

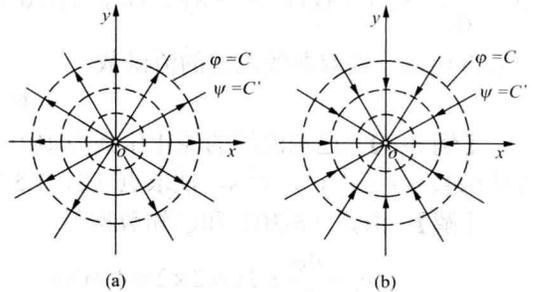


图 8-21 源流和汇流

(a) 源流; (b) 汇流

可见, ψ 只是 θ 的函数, 故有
$$d\psi = v_r r d\theta = \pm \frac{q_v}{2\pi} d\theta$$

积分得
$$\psi = \pm \frac{q_v}{2\pi} \theta \quad (8-47)$$

等势线 ($\varphi = \text{常数}$, 即 $r = \text{常数}$) 是半径不同的同心圆, 流线 ($\psi = \text{常数}$, 即 $\theta = \text{常数}$) 是极角不同的径线, 等势线与流线成正交。

如果平面 oxy 是无限水平面, 则可列伯努利方程

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v_r^2}{2} = \frac{p_\infty}{\rho}$$

式中, p_∞ 为在 $r \rightarrow \infty$ 处的流体压强, 该处速度为 $v_r = \pm \frac{q_v}{2\pi r} = 0$ 。将式 (8-45) 代入上式, 得

$$p = p_\infty - \frac{q_v^2 \rho}{8\pi^2 r^2} \quad (8-48)$$

可见, 压强随着半径的减小而降低。零压强处的半径 $r_0 = [q_v^2 \rho / (8\pi^2 p_\infty)]^{1/2}$ 。实际上, 由于绝对压强不能等于零, 只能接近于零, 故上述各式的适用范围应为 $r > r_0$ 。图 8-22 为 $r > r_0$ 时汇流沿半径的压强分布。

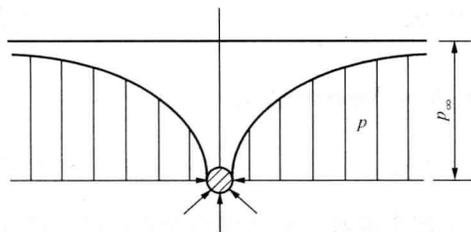


图 8-22 沿半径的压强分布

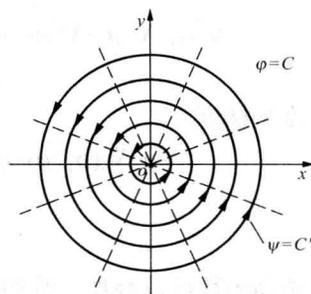


图 8-23 势涡

三、势涡

若平面涡流的涡束半径 $r_b \rightarrow 0$, 则涡束变为一条直涡线, 平面上的涡核区缩为一点, 称为涡点, 这样的流动称为势涡或自由涡流, 如图 8-23 所示。涡点以外势流区的速度分布仍为式 (8-26)。由式 (8-33) 得

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (8-49)$$

当 $r \rightarrow 0$ 时, 流速趋于无穷大, 所以涡点是奇点。式 (8-49) 只适用于涡点以外的区域。由于 φ 只是 θ 的函数, 故有

$$d\varphi = v_\theta r d\theta = \frac{\Gamma}{2\pi} d\theta$$

积分得
$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (8-50)$$

由式 (8-38) 得
$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0, \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

可见, ψ 只是 r 的函数, 故有
$$d\psi = -v_\theta dr = -\frac{\Gamma}{2\pi} dr$$

积分得
$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (8-51)$$

等势线 ($\theta = \text{常数}$) 为不同极角的径线, 流线 ($r = \text{常数}$) 为不同半径的同心圆。若 $\Gamma > 0$, 环流逆时针方向旋转, 如图 8-23 所示; 若 $\Gamma < 0$, 环流顺时针方向旋转。

涡点以外势流区的压强分布仍为式 (8-27)。零压强处的半径 $r_0 = [\rho\Gamma^2 / (8\pi^2 p_\infty)]^{1/2}$ 。上述各式的适用范围应为 $r > r_0$, 理由同上。

介绍以上几种简单的平面势流, 重要的不是它们能代表怎样的实际流动, 而在于它们是势流的基本单元; 将几种基本单元组合在一起, 可以形成许多有重要意义的复杂流动。

第十一节 简单平面势流的叠加

速度势是满足拉普拉斯方程的调和函数, 而拉普拉斯方程又是线性的, 所以由几个速度势叠加成的新速度势仍然是满足拉普拉斯方程的调和函数, 这是由于

$$\begin{aligned} \nabla^2\varphi_1 + \nabla^2\varphi_2 + \nabla^2\varphi_3 + \cdots + \nabla^2\varphi_n &= \nabla^2(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \cdots + \varphi_n) = \nabla^2\varphi = 0 \\ \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \cdots + \varphi_n \end{aligned} \quad (8-52)$$

同理
$$\begin{aligned} \nabla^2\psi_1 + \nabla^2\psi_2 + \nabla^2\psi_3 + \cdots + \nabla^2\psi_n &= \nabla^2(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \cdots + \psi_n) = \nabla^2\psi = 0 \\ \psi &= \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \cdots + \psi_n \end{aligned} \quad (8-53)$$

叠加成的速度势梯度

$$\nabla\varphi = \nabla(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \cdots + \varphi_n) = \nabla\varphi_1 + \nabla\varphi_2 + \nabla\varphi_3 + \cdots + \nabla\varphi_n$$

即
$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \cdots + \vec{v}_n \quad (8-54)$$

这就证明: 调和函数可以叠加, 叠加成的新函数仍是调和函数, 流动仍然无旋; 叠加成新平面势流的速度矢等于原先的平面势流速度的矢量和。

一、汇流与势涡叠加——螺旋流

在旋风燃烧室、离心式喷油嘴和离心式除尘器等设备中, 流体自外沿圆周切向进入, 又从中央不断流出。这样的流动类似于汇流与势涡的叠加。设环流为逆时针方向, 由式 (8-46)、式 (8-50) 以及式 (8-47)、式 (8-51) 的叠加得组合流动的速度势和流函数为

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi}(q_v \ln r - \Gamma\theta) \quad (8-55)$$

$$\psi = -\frac{1}{2\pi}(q_v\theta - \Gamma \ln r) \quad (8-56)$$

令以上二式等于常数, 便可得到等势线和流线分别为

$$r = Ce^{\Gamma\theta/q_v}, \quad r = C'e^{-q_v\theta/\Gamma}$$

这是两簇相互正交的对数螺旋线, 故称这种流动为螺旋流, 如图 8-24 所示。其速度分布为

$$v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{q_v}{2\pi r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (8-57)$$

合速度
$$v = (v_r^2 + v_\theta^2)^{1/2} = \left(\frac{q_v^2 + \Gamma^2}{4\pi^2 r^2} \right)^{1/2}$$

代入第八节式 (a), 得
$$p = p_\infty - \frac{\rho(q_v^2 + \Gamma^2)}{8\pi^2 r^2} \quad (8-58)$$

上述各式的适用范围应为 $r > r_0 = [\rho(q_v^2 + \Gamma^2)/(8\pi^2 p_\infty)]^{1/2}$, 理由同上。

离心泵、离心风机等外壳中的流动则类似于源流与势涡的叠加, 是另一类螺旋流, 如图 8-25 所示。图中粗实线是外壳的轮廓线。

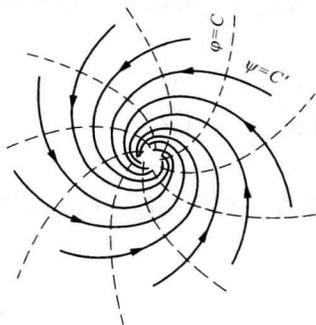


图 8-24 螺旋流

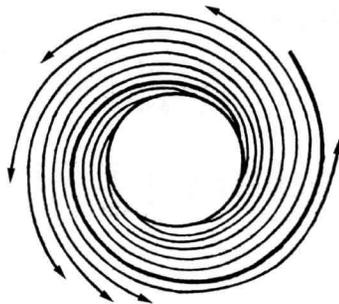


图 8-25 风机外壳中的流动

二、源流与汇流叠加 偶极子流

流量均为 q_v 的位于点 $A(-a, 0)$ 的源流和位于点 $B(a, 0)$ 的汇流叠加。由式 (8-46)、式 (8-47) 可得组合流动的速度势和流函数为

$$\phi = \frac{q_v}{2\pi} (\ln r_A - \ln r_B) = \frac{q_v}{2\pi} \ln \frac{r_A}{r_B} = \frac{q_v}{4\pi} \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \quad (8-59)$$

$$\psi = \frac{q_v}{2\pi} (\theta_A - \theta_B) = -\frac{q_v}{2\pi} \theta_p = \frac{q_v}{2\pi} \arctan \frac{-2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \quad (8-60)$$

这是由于

$$r_A = [(x+a)^2 + y^2]^{1/2}, \quad r_B = [(x-a)^2 + y^2]^{1/2}$$

$$\tan(\theta_A - \theta_B) = \frac{\tan \theta_A - \tan \theta_B}{1 + \tan \theta_A \tan \theta_B} = \frac{y/(x+a) - y/(x-a)}{1 + [y/(x+a)][y/(x-a)]} = \frac{-2ay}{x^2 + y^2 - a^2}$$

式中 θ_p 是动点 P 至源点 A 、汇点 B 的连线之间的夹角。在流线上 $\psi = \text{常数}$, 即 $\theta_p = \text{常数}$; 这就是说, 流线是经过源点和汇点的圆簇, 如图 8-26 所示。

当源点和汇点无限接近, $a \rightarrow 0$ 时, 流量同时无限增大, 以使 $\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ q_v \rightarrow \infty}} q_v \cdot 2a = M$ 趋于有限值,

这样的流动称为偶极子流。 M 为偶极子矩, 也称偶极子流强度, 是矢量, 由源点指向汇点。由高等数学已知, 当 ε 为微量时, $\ln(1+\varepsilon) = \varepsilon - \varepsilon^2/2 + \varepsilon^3/3 \dots \approx \varepsilon$, 故由式 (8-59)、式 (8-60) 可得偶极子流的速度势和流函数为

$$\varphi = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ q_V \rightarrow \infty}} \left\{ \frac{q_V}{4\pi} \ln \left[1 + \frac{4xa}{(x-a)^2 + y^2} \right] \right\} = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ q_V \rightarrow \infty}} \left[\frac{q_V}{4\pi} \frac{4xa}{(x-a)^2 + y^2} \right]$$

即
$$\varphi = \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{M \cos \theta}{2\pi r} \quad (8-61)$$

$$\psi = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ q_V \rightarrow \infty}} \left(\frac{q_V}{2\pi} \arctan \frac{-2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right) = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ q_V \rightarrow \infty}} \left(\frac{q_V}{2\pi} \frac{-2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right)$$

即
$$\psi = -\frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{M \sin \theta}{2\pi r} \quad (8-62)$$

令式 (8-61) 的第一等式等于常数 C 、式 (8-62) 的第一等式等于常数 C' ，得等势线方程、流线方程分别为

$$\left(x - \frac{M}{4\pi C} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{M}{4\pi C} \right)^2, \quad x^2 + \left(y + \frac{M}{4\pi C'} \right)^2 = \left(\frac{M}{4\pi C'} \right)^2$$

可见，等势线是圆心在 $\left(\frac{M}{4\pi C}, 0 \right)$ 、半径为 $\left| \frac{M}{4\pi C} \right|$ 且与 y 轴在原点相切的圆簇，如图 8-27 中

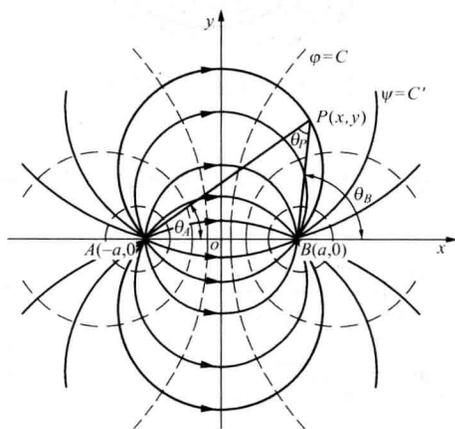


图 8-26 源流和汇流的叠加

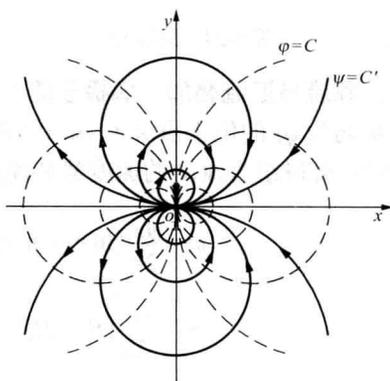


图 8-27 偶极子流

虚线所示；流线是圆心在 $\left(0, -\frac{M}{4\pi C'} \right)$ 、半径为 $\left| \frac{M}{4\pi C'} \right|$ 且与 x 轴在原点相切的圆簇，如图 8-27

中实线所示。偶极子流的速度为

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{M \cos \theta}{2\pi r^2}, \quad v_\theta = \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = -\frac{M \sin \theta}{2\pi r^2} \quad (8-63)$$

第十二节 均匀等速流绕过圆柱体的平面流动

图 8-28 所示是沿 x 轴正向速度为 v_∞ 的均匀等速流与沿 x 轴正向强度为 M 的偶极子流的

叠加。由式(8-46)、式(8-47)、式(8-61)、式(8-62)可得组合流动的速度势和流函数为

$$\varphi = \left(v_{\infty} + \frac{M}{2\pi r^2} \right) r \cos \theta \quad (8-64)$$

$$\psi = \left(v_{\infty} - \frac{M}{2\pi r^2} \right) r \sin \theta \quad (8-65)$$

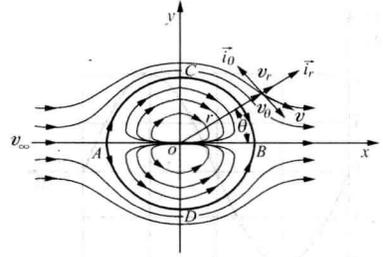


图 8-28 均匀等速流和偶极子流的叠加

故流线方程为 $\left(v_{\infty} - \frac{M}{2\pi r^2} \right) r \sin \theta = C'$

取不同的常数值 C' ，可得如图 8-28 所示的流谱。当 $C'=0$ 时，得零流线方程为

$$\left(v_{\infty} - \frac{M}{2\pi r_0^2} \right) r_0 \sin \theta = 0$$

即

$$r_0 = [M/(2\pi v_{\infty})]^{1/2}, \quad \theta = 0, \pi$$

可见，零流线为以坐标原点为圆心、 $r_0 = [M/(2\pi v_{\infty})]^{1/2}$ 为半径的圆和点 B 、 A 以外的 x 轴；即零流线自 x 轴的负端至点 A ，分成两股，沿上、下两个半圆周至点 B ，重新汇合，直至 x 轴的正端。由于流体不能穿过流线，零流线的圆可以代之以圆柱体的横截面。这样，以上二式的适用范围应为 $r \geq r_0$ ，而且应有 $M = 2\pi r_0^2 v_{\infty}$ 。将 M 代入式(8-64)、式(8-65)，该组合流动的速度势和流函数又可表示为

$$\varphi = v_{\infty} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) r \cos \theta \quad (r \geq r_0) \quad (8-64a)$$

$$\psi = v_{\infty} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) r \sin \theta \quad (r \geq r_0) \quad (8-65a)$$

组合流动的速度

$$\left. \begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} = v_{\infty} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos \theta \\ v_{\theta} &= \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = -v_{\infty} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (8-66)$$

在无穷远处， $r \rightarrow \infty$ ， $v_r = v_{\infty} \cos \theta$ ， $v_{\theta} = -v_{\infty} \sin \theta$ ， $v = (v_r^2 + v_{\theta}^2)^{1/2} = v_{\infty}$ ，是速度为 v_{∞} 的均匀等速流。在零流线上速度分布

$$v_r = 0, \quad v_{\theta} = -2v_{\infty} \sin \theta \quad (8-67)$$

速度按正弦规律分布，在 $\theta=180^\circ$ 的点 A 和 $\theta=0^\circ$ 的点 B ， $v_{\theta}=0$ ，它们分别是前驻点和后驻点；在 $\theta=\pm 90^\circ$ 的上、下顶点 C 、 D ， $|v_{\theta}|=2v_{\infty}$ ，速度达最大值，如图 8-29 所示。

沿包围零流线圆的封闭周线的速度环量

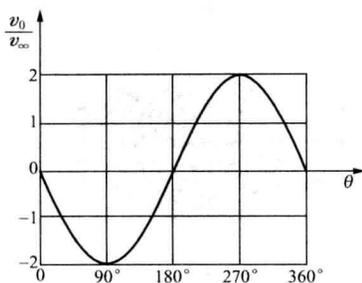


图 8-29 圆柱面上的速度分布曲线图

$$\Gamma = \oint v_{\theta} ds = -v_{\infty} r \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \oint \sin \theta d\theta = 0$$

以上分析表明, $r \geq r_0$ 的上述组合流动就是均匀等速流绕圆柱体的平面流动。

对圆柱面上任一点和无穷远处列伯努利方程

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \frac{p_{\infty}}{\rho} + \frac{v_{\infty}^2}{2}$$

将式 (8-67) 代入上式, 得圆柱面上的压强分布为

$$p = p_{\infty} + \rho v_{\infty}^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) / 2 \quad (8-68)$$

工程上通常以无量纲压强系数表示压强的作用, 它的定义为

$$C_p = \frac{p - p_{\infty}}{\rho v_{\infty}^2 / 2} = 1 - \left(\frac{v}{v_{\infty}} \right)^2 \quad (8-69)$$

将式 (8-68) 代入式 (8-69), 得圆柱面上的压强系数

$$C_p = 1 - 4 \sin^2 \theta \quad (8-70)$$

可见, 沿圆柱面的压强系数既与圆柱体的半径无关, 也与无穷远处的速度和压强无关, 它只是坐标 θ 的函数, 这便是引入压强系数的方便所在。具有这样特性的压强系数, 也可推广应用到其他形状的物体 (例如机翼的翼型和叶片的叶型等) 上去。按式 (8-70) 计算的理论压强系数曲线如图 8-30 中的实曲线 1 所示。在圆柱面的前驻点 A 和后驻点 B 上, $C_p = 1$, $p_A = p_B = p_{\infty} + \rho v_{\infty}^2 / 2$, 压强达到最高值; 在圆柱面的上、下顶点 C 、 D , $C_p = -3$, $p_C = p_D = p_{\infty} - 3 \rho v_{\infty}^2 / 2$, 压强达到最低值; 压强分布对称于圆柱面的中心。压强分布的这种对称性, 必然导致流体作用在圆柱面上的总压力等于零。这一结论, 可以推广到理想流体均匀等速流绕过任意形状柱体无环流无分离的平面流动。总压力等于零的结论可证明如下: 如图 8-31 所示, 在单位长度的圆柱面上取微元弧段 $ds = r_0 d\theta$, 作用在它上面的微元总压力 $dF = pr_0 d\theta$, 方向如图中所示; 微元总压力沿 x 、 y 轴的分力为 $dF_x = -pr_0 \cos \theta d\theta$, $dF_y = -pr_0 \sin \theta d\theta$ 。总压力平行于来流方向的分力称为阻力, 用 F_D 代表; 垂直于来流方向的分力称为升力, 用 F_L 表示。故将式 (8-68) 代入以上二式, 并沿圆柱面积分, 得阻力、升力为

$$F_D = F_x = - \int_0^{2\pi} r_0 \left[p_{\infty} + \rho v_{\infty}^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) / 2 \right] \cos \theta d\theta = 0$$

$$F_L = F_y = - \int_0^{2\pi} r_0 \left[p_{\infty} + \rho v_{\infty}^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) / 2 \right] \sin \theta d\theta = 0$$

计算结果是, 理想流体均匀等速流绕圆柱体的平面流动, 作用在圆柱面上既无升力, 也无阻力。但实验证明, 即使黏性很小的流体, 当它们绕流圆柱体或其他物体时, 都要产生阻力。图 8-30 中的点画曲线 2 是 $Re = 6.70 \times 10^5$ (超临界) 的实验结果, 虚曲线 3 是 $Re = 1.68 \times 10^5$ (亚临界) 的实验结果, 它们与理论计算的差异很大。这就是有名的“达朗伯疑题”。理论计算与实验结果不相符合的原因, 将在第九章中阐述。

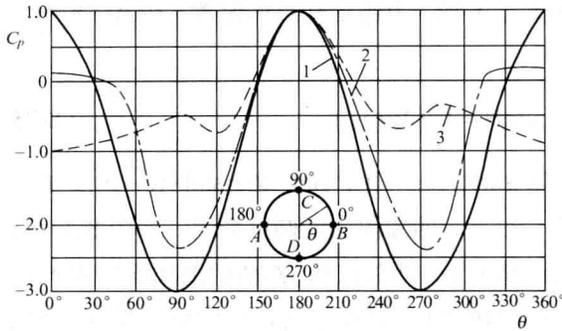


图 8-30 圆柱面上的压强系数分布曲线

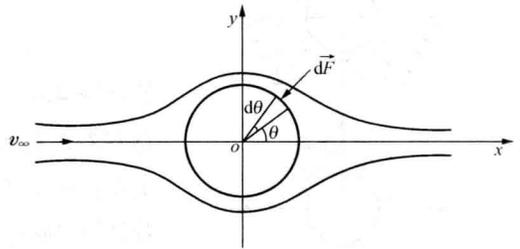


图 8-31 推导理想流体对圆柱体的作用力的用图

第十三节 均匀等速流绕过圆柱体有环流的平面流动

如果再将纯环流叠加在上述流动上,便可得到均匀等速流绕过圆柱体有环流的平面流动,如图 8-32 所示。由式 (8-64a)、式 (8-65a)、式 (8-50)、式 (8-51) 可得组合流动的速度势、流函数和流速为

$$\varphi = v_{\infty} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) r \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (8-71)$$

$$\psi = v_{\infty} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) r \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (8-72)$$

$$\left. \begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} = v_{\infty} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos \theta \\ v_{\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -v_{\infty} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{aligned} \right\} \quad (8-73)$$

由式 (8-72) 可得, $r = r_0$, $\psi = -\Gamma \ln r_0 / (2\pi) = \text{常数}$, 即 $r = r_0$ 的圆周是一条流线; 在该流线上, 速度

$$v_r = 0, \quad v_{\theta} = -2v_{\infty} \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0} \quad (8-74)$$

符合流体既不穿过又不脱离圆流线的绕流条件, 可以代之以圆柱面。由式 (8-73) 可得, $r \rightarrow \infty$, $v_r = v_{\infty} \cos \theta$, $v_{\theta} = -v_{\infty} \sin \theta$, $v = (v_r^2 + v_{\theta}^2)^{1/2} = v_{\infty}$, 仍是速度为 v_{∞} 的均匀等速流, 满足在无穷远处的边界条件。以上分析表明, $r \geq r_0$ 的上述组合流动就是均匀等速流绕过圆柱体有环流的平面流动。

当叠加环流的 $\Gamma < 0$ 时, 在圆柱体的上部环流的速度方向与均匀等速流绕过圆柱体的速度方向相同, 而在下部则相反。叠加的结果在上部形成速度增高的区域, 而在下部形成速度降低的区域。这样, 就破坏了流线对 x 轴的对称性, 使驻点 A

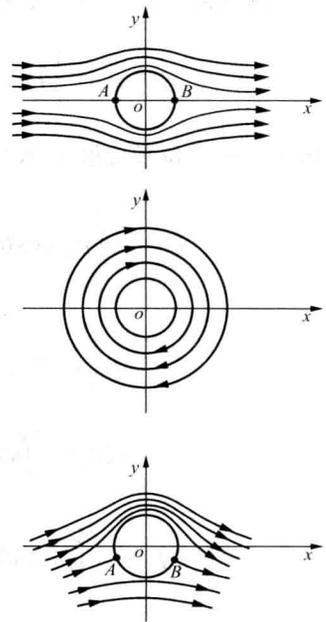


图 8-32 均匀等速流、偶极子和纯环流的叠加

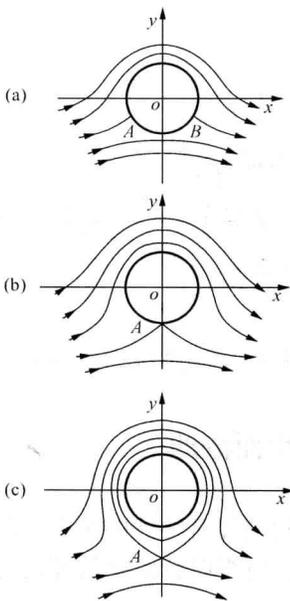


图 8-33 均匀等速流绕过圆柱体有环流流动的驻点

和 B 向下移, 离开了 x 轴。为确定驻点的位置, 令式 (8-74) 中的 $v_\theta=0$, 得

$$\sin\theta = \Gamma / (4\pi r_0 v_\infty) \quad (8-75)$$

若 $|\Gamma| < 4\pi r_0 v_\infty$, 则 $|\sin\theta| < 1$, 由于 $\sin(-\theta) = \sin[-(\pi-\theta)]$, 两驻点左右对称地位于第三、四象限内的圆柱面上, 如图 8-33 (a) 所示; 在 v_∞ 不变的情况下, 两驻点随 $|\Gamma|$ 值的增加而同步下移。若 $|\Gamma| = 4\pi r_0 v_\infty$, 则 $|\sin\theta| = 1$, 这就是说, 两个驻点重合, 位于圆柱面的最下端, 如图 8-33 (b) 所示。若 $|\Gamma| > 4\pi r_0 v_\infty$, 则 $|\sin\theta| > 1$, 说明驻点已脱离圆柱面, 沿 y 轴下移到相应位置。

由式 (8-73) 的 $v_r=0$ 、 $v_\theta=0$, 可以确定两个位于 y 轴上的驻点, 一个在圆柱体内(无效解), 另一个是在圆柱体外的自由驻点 A , 如图 8-33 (c) 所示。这样, 流场便由经过驻点 A 的闭合流线划分为内、外两个区域。外部区域是均匀等速流绕过圆柱体有环流的流动, 而闭合流线和圆柱体之间则是非圆形流线的闭合环流。倘若叠加的环流 $\Gamma > 0$, 驻点的位置与上面讨论的情况正好相差 180° 。

对圆柱面上任一点和无穷远处列伯努利方程, 得圆柱面上的压强分布为

$$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho v_\infty^2 - \frac{1}{2}\rho(v_r^2 + v_\theta^2) = p_\infty + \frac{1}{2}\rho \left[v_\infty^2 - \left(-2v_\infty \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0} \right)^2 \right] \quad (8-76)$$

流体作用在单位长度圆柱体上的阻力和升力为

$$\begin{aligned} F_D = F_x &= - \int_0^{2\pi} p r_0 \cos\theta d\theta = - \int_0^{2\pi} \left\{ p_\infty + \frac{1}{2}\rho \left[v_\infty^2 - \left(-2v_\infty \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0} \right)^2 \right] \right\} r_0 \cos\theta d\theta \\ &= -r_0 \left(p_\infty + \frac{1}{2}\rho v_\infty^2 - \frac{\rho\Gamma^2}{8\pi^2 r_0^2} \right) \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta - \frac{\rho v_\infty \Gamma}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin\theta \cos\theta d\theta \\ &\quad + 2r_0 \rho v_\infty^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \cos\theta d\theta = 0 \end{aligned} \quad (8-77)$$

$$\begin{aligned} F_L = F_y &= - \int_0^{2\pi} p r_0 \sin\theta d\theta = - \int_0^{2\pi} \left\{ p_\infty + \frac{1}{2}\rho \left[v_\infty^2 - \left(-2v_\infty \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0} \right)^2 \right] \right\} r_0 \sin\theta d\theta \\ &= -r_0 \left(p_\infty + \frac{1}{2}\rho v_\infty^2 - \frac{\rho\Gamma^2}{8\pi^2 r_0^2} \right) \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta - \frac{\rho v_\infty \Gamma}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta \\ &\quad + 2r_0 \rho v_\infty^2 \int_0^{2\pi} \sin^3\theta d\theta = -\frac{\rho v_\infty \Gamma}{\pi} \left[-\frac{1}{2}\cos\theta \sin\theta + \frac{1}{2}\theta \right]_0^{2\pi} = -\rho v_\infty \Gamma \end{aligned} \quad (8-78)$$

式(8-78)称为库塔—儒可夫斯基(Kutta-Joukowski)升力公式。在理想流体均匀等速流绕过圆柱体有环流的流动中,在垂直与来流的方向上,流体作用在单位长度圆柱体上升力的大小等于流体密度、来流速度和速度环量三者的乘积,升力的方向由来流速度矢量 \vec{v}_∞ 沿反速度环流的方向旋转 90° 来确定,如图8-34所示。库塔—儒可夫斯基升力公式也可推广应用于理想流体均匀等速流绕过任意形状柱体(例如机翼等)有环流无分离的平面流动。

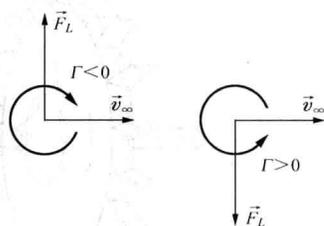


图 8-34 升力的方向

在自然界与工程实际中,常会遇到有关升力的问题。例如,鸟类借助翅膀的升力在空中飞翔,球类借助前进中的旋转产生的升力沿弧线运动,飞机借助机翼的升力远距离飞行,汽轮机、燃气轮机、水轮机、水泵、风机、压气机等流体机械的叶轮借助叶片的升力做功等。

第十四节 叶栅的库塔—儒可夫斯基公式

汽轮机等流体机械的叶片与飞机机翼的截面形状称为叶型(或翼型),叶型一般都是圆头尖尾的流线型,如图8-35所示。与叶型有关的主要参数有:①叶型的周线称为型线;②叶型内切圆心连线称为叶型的中线;③叶型的中线与型线的两个交点分别称为前缘点和后缘点,这两点的连线称为叶弦,叶弦的长度称为弦长 b ;④中线与叶弦之间的距离称为弯度 f ;⑤无穷远来流速度 v_∞ 的方向与叶弦之间的夹角称为冲角 α ,冲角在叶弦以下的为正,在叶弦以上的为负,叶型的升力为零时的冲角称为零升力角 α_0 ,如图8-36所示。

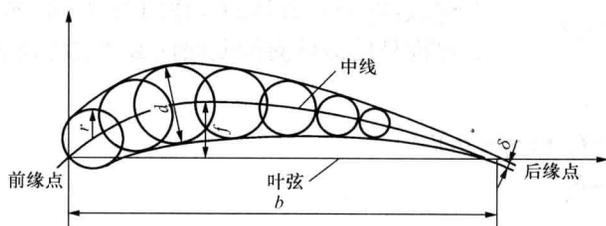


图 8-35 叶型

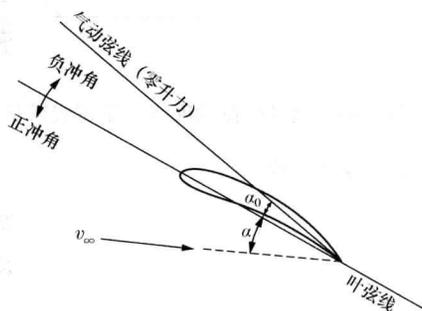


图 8-36 叶型的冲角

环列叶栅由叶型相同的叶片以相等的间距在某一旋转面上排列而成,如图8-37所示。当叶栅的平均直径 d (指叶片半高处的直径)与叶片高度 h 之比 $d/h > 10 \sim 15$ 时,可近似地将叶栅视为排列在一个平面上,称为平面叶栅,如图8-38所示。与叶栅有关的主要参数有:①叶栅的叶片间距称为栅距 l ;②连接各叶型前缘点的线与后缘点的线称为额线;③气流在叶栅进口的速度 v_1 与额线的夹角称为进气角 β_1 ,出口速度 v_2 与额线的夹角称为出气角 β_2 ,如图8-39所示。

可以认为,叶栅中围绕每一个叶型的流动都是相同的。在平面叶栅中选择如图8-39虚线 $ABCD$ 所示的控制面,它由两条平行于叶栅额线、长度等于栅距 l 的线段和两条相同的流线

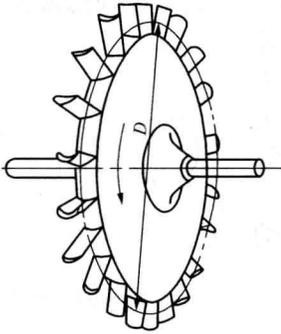


图 8-37 环列叶栅

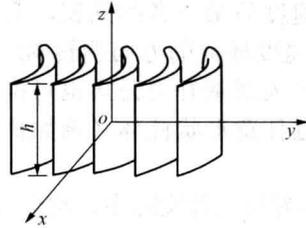


图 8-38 平面叶栅

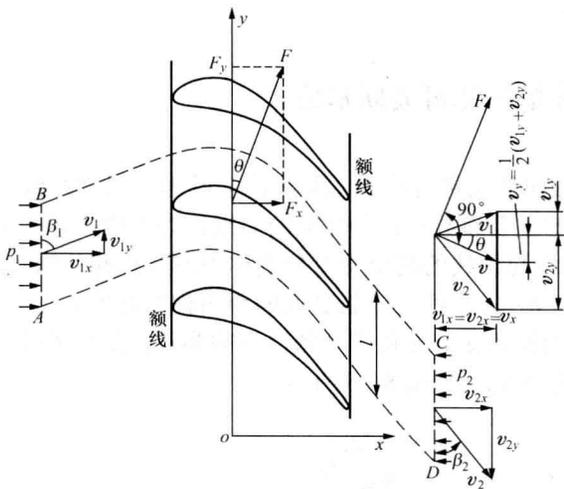


图 8-39 推导叶栅的库塔—儒可夫斯基公式用图

组成。两条线段 AB 和 CD 都远离叶栅，可以认为每条线段上的速度和压强都各自保持均匀一致的常数：在 AB 线上各点的速度为 v_1 ，与额线成 β_1 角，压强为 p_1 ；在 CD 线上各点的速度为 v_2 ，与额线成 β_2 角，压强为 p_2 。两条相距一个栅距 l 的相同流线 AD 和 BC 在通道中的位置完全相同，两条流线上的压强分布应完全一样，分别作用在它们上压强的合力恰好大小相等、指向相反，互相平衡。设控制面内流体作用于叶型（单位高度的叶片）的合力为 F ，其分量为轴向作用力 F_x 和周向作用力 F_y 。则作用在控制面内流体上的合力 R 由两部分组成：叶型对流体的反作用力 $-F_x$ 和 $-F_y$ ；控制面外的流体对控制面内流体的作用力

$(p_1 - p_2) l \times 1$ ，故

$$R_x = -F_x + (p_1 - p_2)l$$

$$R_y = -F_y$$

每秒流进（或流出）控制面的流体质量为

$$q_m = \rho v_{1x} l \times 1 = \rho v_{2x} l \times 1$$

故

$$v_{1x} = v_{2x} = v_x$$

根据动量方程式 (4-28) 有

$$R_x = -F_x + (p_1 - p_2)l = \rho v_x l (v_{2x} - v_{1x}) = 0$$

$$R_y = -F_y = \rho v_x l (v_{2y} - v_{1y})$$

即

$$\left. \begin{aligned} F_x &= (p_1 - p_2)l \\ F_y &= \rho v_x l (v_{1y} - v_{2y}) \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

由于沿流线 AD 和 CB 的速度线积分大小相等而方向相反，互相抵消，所以绕封闭周线 $ADCBA$ 的速度环量 Γ 的大小为

$$\begin{aligned}\Gamma &= \Gamma_{ADCBA} = \Gamma_{AD} + \Gamma_{DC} + \Gamma_{CB} + \Gamma_{BA} = \Gamma_{DC} + \Gamma_{BA} \\ &= l(v_{2y} - v_{1y})\end{aligned}\quad (b)$$

为了便于分析, 引入几何平均速度 $\bar{v} = (\bar{v}_1 + \bar{v}_2)/2$, 其分量为

$$v_x = (v_{1x} + v_{2x})/2 = v_{1x} = v_{2x}, \quad v_y = (v_{1y} + v_{2y})/2 \quad (c)$$

引用式 (c), 由伯努利方程式 (4-43) 得

$$p_1 - p_2 = \rho(v_2^2 - v_1^2)/2 = \rho(v_{2y}^2 - v_{1y}^2)/2 = \rho(v_{2y} - v_{1y})v_y$$

将式 (b) 代入上式, 得

$$p_1 - p_2 = \rho v_y \Gamma / l \quad (d)$$

将式 (b)、式 (d) 代入式 (a), 得

$$F_x = \rho v_x \Gamma, \quad F_y = -\rho v_y \Gamma \quad (8-79)$$

或
$$F = (F_x^2 + F_y^2)^{1/2} = \rho v \Gamma, \quad \tan \theta = |F_x|/|F_y| = |v_x|/|v_y| \quad (8-79a)$$

式 (8-79) 就是叶栅的库塔—儒可夫斯基公式。该式说明, 理想不可压缩流体绕过叶栅作定常无旋流动时, 流体作用在叶栅每个叶片单位高度上的合力大小等于流体密度、几何平均速度和绕叶型的速度环量三者的乘积, 合力的方向为几何平均速度矢量沿反速度环量的方向旋转 90° 。

对于孤立叶型的绕流, 可以认为两个相邻叶型的距离 (即栅距 l) 趋于无穷大。在这种情况下, 速度环量 $\Gamma = l(v_{2y} - v_{1y})$ 仍保持有限值, 则 $v_{2y} - v_{1y}$ 必定趋近于零, 而按无穷远处的边界条件应有 $v_{1y} = v_{2y} = 0, v_1 = v_2 = v_\infty$, 即孤立叶型前后足够远处的速度完全相同。于是由式 (8-79) 可得

$$F_D = F_x = 0 \quad F_L = F_y = -\rho v_\infty \Gamma \quad (8-80)$$

与式 (8-77)、式 (8-78) 完全一样。根据理论计算, 绕儒可夫斯基翼型 (一种理论翼型) 的速度环量为

$$\Gamma = -\pi v_\infty b \sin(\alpha - \alpha_0)$$

式中, b 为翼型弦长, 代入式 (8-80), 得流体作用在儒可夫斯基翼型上的升力为

$$F_L = \pi \rho v_\infty^2 b \sin(\alpha - \alpha_0) \quad (8-81)$$

引入升力系数

$$C_L = \frac{F_L}{A \rho v_\infty^2 / 2} \quad (8-82)$$

将式 (8-81) 代入式 (8-82), 取 $A = b \times 1$, 得儒可夫斯基翼型的升力系数为

$$C_L = 2\pi \sin(\alpha - \alpha_0) \quad (8-83)$$

对于小冲角, 可取 $\sin(\alpha - \alpha_0) = \alpha - \alpha_0$, 式 (8-83) 简化为

$$C_L = 2\pi(\alpha - \alpha_0) \quad (8-84)$$

可见, 小冲角时该翼型的升力系数随着冲角按斜率为 2π 的直线变化, 如图 8-40 中虚线所示。

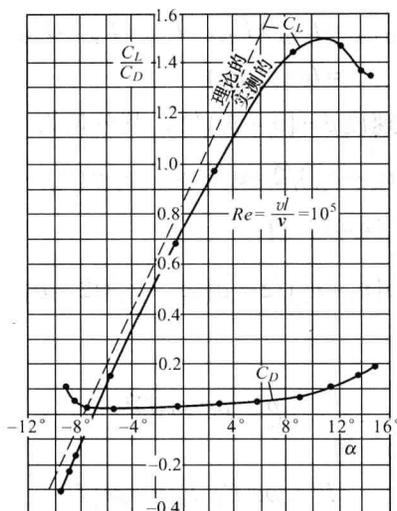


图 8-40 儒可夫斯基翼型的升力系数和阻力系数

库塔—儒可夫斯基公式可以用来解释飞机产生升力的原因，也可以解释涡轮机、泵、风机和压气机等叶栅中受到流体作用力的工作原理。但该公式只说明了作用力与速度环量之间的关系，至于速度环量是怎样产生的以及怎样确定速度环量的大小，将在下节中加以讨论。

第十五节 库塔条件

如图 8-41 (a) 所示，在无穷远处流速为 v_∞ 的均匀等速流以一定的冲角流向翼型，在翼型的前驻点分成两股，沿翼型的上、下表面流过。如果沿下表面的一股气流能绕过后缘点，在上表面的后驻点处与沿上表面流动的一股气流重新会合，那么，与均匀等速流绕过圆柱体一样，对翼型既没有升力，也没有阻力。但是，当理想流体绕流尖后缘点时，由于该点的曲率半径接近于零，后缘点的气流速度将会很大，而压强将会很低。当下表面的气流绕过后缘点流向上表面的后驻点时，由于气体是由低压区流向高压区，气流必然会发生分离。为了使流体在后缘点不发生分离，可减小冲角，使后驻点与后缘点重合，流体就能平滑地流过后缘点，不发生分离（图 8-42）。符合于这个条件的冲角只有一个，这个冲角（一般是负值）便是零升力角 α_0 。另外，也可以将均匀等速流绕过翼型的平面流动 [图 8-41 (a)] 和一个纯环流 [图 8-41 (b)] 叠加；纯环流的环量为负值 ($\Gamma < 0$)，叠加结果，后驻点向后缘点移动。一定有一个速度环量，其大小正好使后驻点后移到后缘点上，如图 8-41 (c) 所示。这时，沿翼型上、下表面流来的流体在后缘处会合，以有限的速度平滑地流去，这就是库塔条件，又是儒可夫斯基假设。

现在研究绕翼型是否有环流存在，它是怎样产生的？在流动开始时，理想不可压缩流体为无环流的无旋流。设想在流场中作一包围翼型的、延伸到足够远的封闭周线，则沿该周线的速度环量等于零。根据汤姆孙定理，在流动过程中沿该周线的速度环量应始终等于零。当流动开始不久，由于沿下表面流动的流体绕流后缘点 A 时，流速很高，压强很低，故在向压强高的后驻点 B 流动时，流动与上表面分离，形成如图 8-43 (a) 中所示的逆时针方向的旋涡；根据汤姆孙定理，沿封闭周线的总环量应等于零，故绕翼型也必然同时形成一个与旋涡强度相等、转向相反的速度环量，而后驻点 B 也向后缘点 A 作相应的移动；这一过程继续进行，直到 B 点移到后缘点 A 为止，如图 8-43 (b) 所示。这样形成的脱离翼型

被流体带向下游的旋涡称为起动涡 (J), 见图 8-44。绕翼型形成的速度环量使叶型上部区域的速度增加, 压强减小, 而使下部区域的速度减小, 压强增加, 结果上下的压强差对翼型产生了升力。因此, 在均匀等速流绕过翼型有环流的流动中, 可以利用库塔平滑流动条件来确定库塔—儒可夫斯基升力公式中的未知速度环量值, 从而解决了求升力的问题。满足库塔条件的速度环量值与叶型的几何特性、来流速度和冲角有关系, 这种关系除少数理论翼型 (例如儒可夫斯基翼型) 可以从理论上给出外, 大多数的实际翼型只能根据实验得到。若在起动涡形成后, 立即停止流动, 绕翼型的速度环流便会迅速脱落, 形成与速度环量强度相等、转向相同的旋涡, 称为停止涡。实验可以显现强度相等转向相反的起动涡和停止涡组成的涡偶, 如图 8-45 所示。

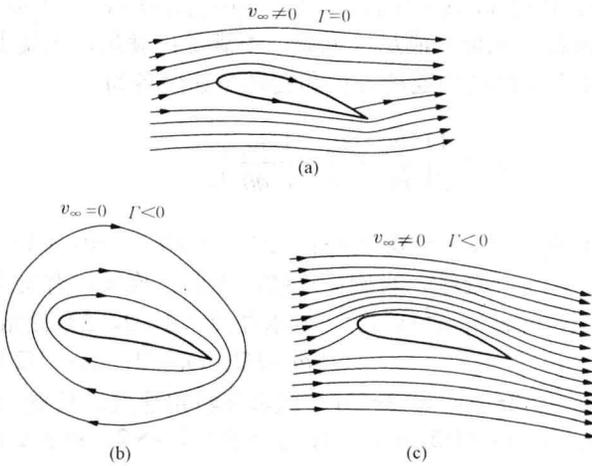


图 8-41 均匀等速流绕过翼型的流动和纯环流的叠加

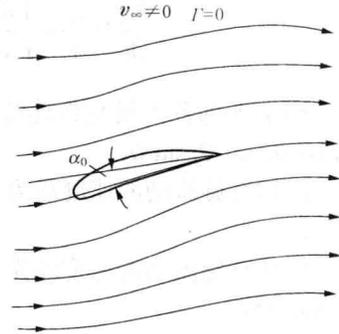


图 8-42 在零冲角下流体平滑地流过翼型后缘点

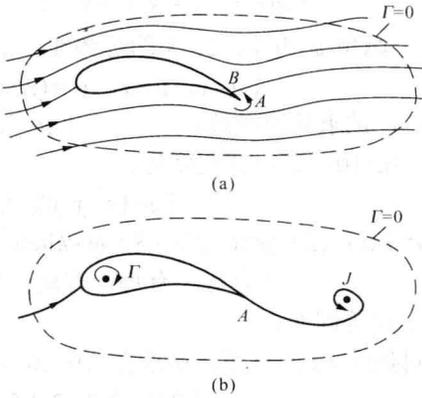


图 8-43 起动涡与绕翼型环流的产生

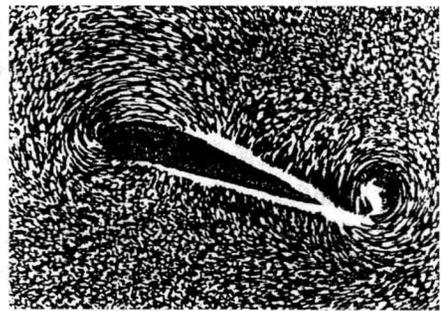


图 8-44 起动涡照片

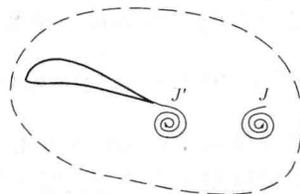


图 8-45 起动涡与停止涡



习 题

8-1 试确定下列各流场中的速度是否满足不可压缩流体的连续性条件: (1) $v_x=kx$, $v_y=-ky$; (2) $v_x=k(x^2+xy-y^2)$, $v_y=k(x^2+y^2)$; (3) $v_x=k\sin(xy)$, $v_y=-k\sin(xy)$; (4) $v_x=k\ln(xy)$, $v_y=ky/x$ 。
[满足; 不满足; 不满足; 满足]

8-2 在不可压缩流体的三维流动中, 已知 $u_x=x^2+y^2+x+y+2$ 和 $u_y=y^2+2yz$, 试用连续方程推导出 u_z 的表达式。
[$u_z=-z^2-2(x+y)z-z$]

8-3 下列各流场中哪几个满足连续性条件? 它们是有旋流动还是无旋流动? (1) $v_x=k$, $v_y=0$; (2) $v_x=kx/(x^2+y^2)$, $v_y=ky/(x^2+y^2)$; (3) $v_x=x^2+2xy$, $v_y=y^2+2xy$; (4) $v_x=y+z$, $v_y=z+x$, $v_z=x+y$ 。
[满足, 无旋; 满足, 无旋; 不满足; 满足, 无旋]

8-4 试证明极坐标表示的不可压缩流体平面流动的连续方程和旋转角速度各为

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right)$$

8-5 确定下列各流场是否连续? 是否有旋? (1) $v_r=0$, $v_\theta=k$; (2) $v_r=-k/r$, $v_\theta=0$; (3) $v_r=2r\sin\theta\cos\theta$, $v_\theta=-2r\sin^2\theta$ 。
[连续, 有旋; 连续, 无旋; 连续, 有旋]

8-6 已知有旋流动的速度场为 $u_x=x+y$, $u_y=y+z$, $u_z=x^2+y^2+z^2$ 。试求在点 (2, 2, 2) 处角速度的分量。
[$\omega_x=3/2$; $\omega_y=-2$; $\omega_z=-1/2$]

8-7 已知有旋流动的速度场为 $u_x=2y+3z$, $u_y=2z+3x$, $u_z=2x+3y$ 。试求旋转角速度、角变形速度和涡线方程。
[$\omega_x=\omega_y=\omega_z=1/2$, $\omega=3^{1/2}/2$; $\dot{\gamma}_x=\dot{\gamma}_y=\dot{\gamma}_z=5/2$; $x=y=z$]

8-8 试证明不可压缩流体平面流动: $u_x=2xy+x$, $u_y=x^2-y^2-z$ 能满足连续方程, 是一个有势流动, 并求出速度势。
[$\varphi=x^2/2+x^2y-y^2/2-y^3/3$]

8-9 已知速度势 $\varphi=xy$, 试求速度分量和流函数, 画出 φ 为 1、2、3 的等势线。证明等势线和流线是互相正交的。
[$v_x=y$, $v_y=x$, $\psi=(y^2-x^2)/2$]

8-10 不可压缩流体平面流动的速度势 $\psi=x^2-y^2+x$, 试求其流函数。
[$\psi=2xy+y$]

8-11 不可压缩流体平面流动的流函数 $\psi=xy+2x-3y+10$, 试求其速度势。

$$[\varphi=(x^2-y^2)/2-3x-2y]$$

8-12 下列各流函数是否都是有势流动? (1) $\psi=kxy$; (2) $\psi=x^2-y^2$; (3) $\psi=k\ln xy^2$; (4) $\psi=k(1-1/r^2)r\sin\theta$ 。
[有势; 有势; 有旋; 有势]

8-13 试证明下列两个流场 $\varphi=x^2+x-y^2$; $\psi=2xy+y$ 是等价的:

8-14 有位于 (1, 0) 和 (-1, 0) 两点具有相同强度 4π 的点源, 试求在 (0, 0), (0, 1), (0, -1) 和 (1, 1) 处的速度。
[0,0;0,2;0,-2;4/5,12/5]

8-15 将速度为 v_∞ 平行于 x 轴的均匀等速流和在原点 o 、强度为 q_V 的点源叠加而成如图 8-46 所示的绕平面半体的流动, 试求它的速度势和流函数, 并证明平面半体的外形方程为 $r=q_V(\pi-\theta)/(2\pi v_\infty \sin\theta)$, 它的宽度等于 q_V/v_∞ 。
[$\varphi=v_\infty x + \frac{q_V}{2\pi} \ln(x^2+y^2)^{1/2}$, $\psi=v_\infty y + \frac{q_V}{2\pi} \theta$]

8-16 长 50m、直径 1.2m 的圆柱体以 90r/min 的角速度绕其轴旋转, 密度 $\rho=1.205\text{kg/m}^3$ 的空气流以 80km/h 的速度沿与圆柱体轴相垂直的方向绕流圆柱体, 假设环流与圆柱体之间没有滑动, 试求速度环量、升力和驻点的位置。

[$21.3\text{m}^2/\text{s}$; 28500N ; 0.6m , $187^\circ18'$; 0.6m , $352^\circ42'$]

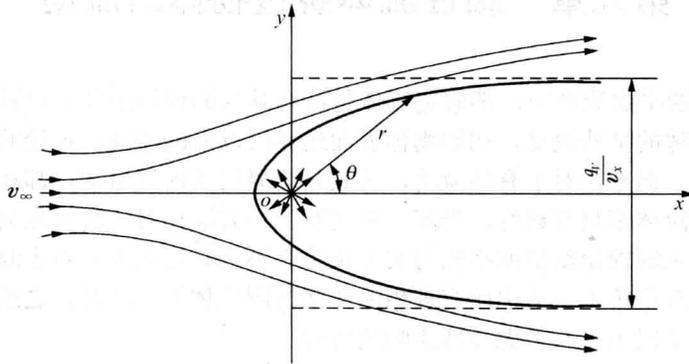


图 8-46 习题 8-15 图

第九章 黏性流体绕过物体的流动

在上一章研究的平面流动中，都假定流体是没有黏性的理想流体。在这一假定下，对于一些黏性很小的流体的某些流动，例如物体表面边界层以外的流动，理论研究结果与实际观察的现象相当一致。但是，对于有些流动，尤其是边界层以内的流动，却相差很大。这主要是由于，一切实体流体都具有黏性，当流体层间发生相对运动时，会产生切向应力。因此，由理想流体推导出来的理论结果就必然与实际现象有不相符合之处，对于黏性很大的流体则相差得更大。在第八章第十二节中研究理想流体绕过圆柱体的流动时，之所以得出没有阻力的达朗伯疑题，就是因为没有考虑黏性影响的缘故。

在自然界和工程实际中，存在着大量的流体绕过物体流动的问题（简称绕流问题），例如飞机在空中飞行，船舶在海洋中航行，河水流过桥墩，在汽轮机、泵和压气机中流体绕过叶栅流动，在锅炉中烟气和空气横向流过受热面管束，煤粉颗粒和尘埃在空气中运动，等等。在实际流体绕流中，黏性的存在产生了阻力，为了克服阻力就要消耗一部分能量。本章主要讨论黏性流体微分形式的运动方程及其应用，边界层的概念、近似计算和分离现象，分析绕流阻力产生的原因、后果以及减阻方法等。

第一节 黏性流体微分形式的运动方程 (纳维—斯托克斯方程)

在运动着的黏性流体中任取一边长 δx 、 δy 、 δz 的平行六面体微小流体质团。在 t 瞬时，其形心 M 的坐标为 x 、 y 、 z ，经过形心的流体质点速度分量为 v_x 、 v_y 、 v_z ，密度为 ρ ；作用在质团六个平面中心的法向应力 p_{ii} 和切向应力 τ_{ij} 如图9-1所示，并视它们为各自平面的平均值。这些应力的第一个下标表示作用面的法线方向，第二个下标表示应力的方向。作用在单位质量流体上的质量力分量为 f_x 、 f_y 、 f_z ，现以该平行六面体为控制体，并将式(4-23)应用于该控制体。黏性流体与理想流体的差别在于有无黏性，体现在运动方程上仅为作用在流体上的表面力不同，即式(4-23)右端的第二项不同。由图9-1可得沿 x 方向法向应力与切向应力的合力为

$$-p_{xx}\delta y\delta z + \left(p_{xx} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x}\delta x\right)\delta y\delta z - \tau_{yx}\delta z\delta x + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\delta y\right)\delta z\delta x$$

$$- \tau_{zx}\delta x\delta y + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\delta z\right)\delta x\delta y = \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)\delta x\delta y\delta z$$

同理可得沿 y 方向和沿 z 方向法向应力与切向应力的合力分别为

$$\left(\frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right)\delta x\delta y\delta z \quad \left(\frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\right)\delta x\delta y\delta z$$

因此，作用在控制面上法向应力与切向应力的合力为

$$\iint_{CS} \bar{p}_n dA = \left[\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) \bar{k} \right] \delta x \delta y \delta z$$

将第八章第三节的式 (a)、式 (b)、式 (c) 和上式代入式 (4-23)，通除以平行六面体的体积 $\delta x \delta y \delta z$ ，取 $\delta x \rightarrow 0$ 、 $\delta y \rightarrow 0$ 、 $\delta z \rightarrow 0$ 时的极限，并同样将等式左端展开，引用式 (8-1) 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} &= (f_x \bar{i} + f_y \bar{j} + f_z \bar{k}) \\ + \frac{1}{\rho} &\left[\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) \bar{k} \right] \end{aligned} \quad (9-1)$$

这是以应力表示的黏性流体微分形式的运动方程。它在笛卡儿坐标系中的投影式为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= f_x + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= f_y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= f_z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9-1a)$$

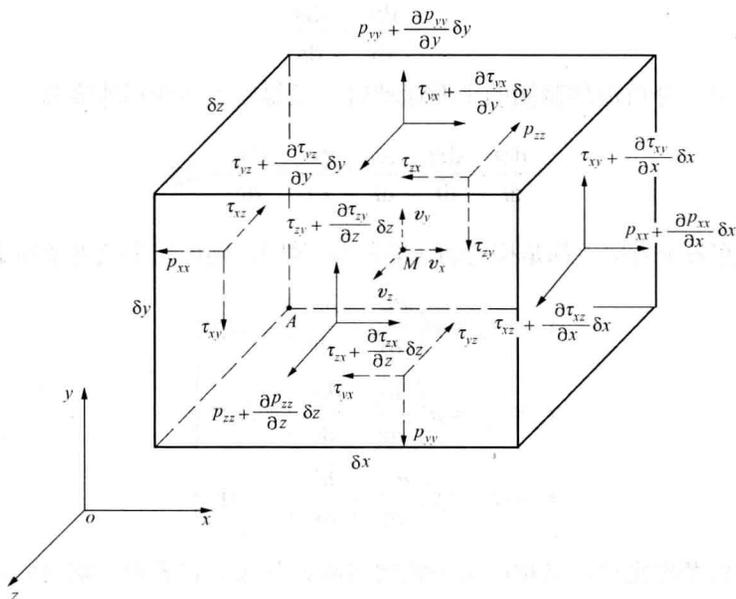


图 9-1 推导黏性流体运动方程用图

该方程组加上连续方程，共有四个方程。通常方程组中三个质量力分量和密度是已知的，

而三个速度分量和九个应力是未知的,上述方程组尚无法求解。为了求解,还须补充应力与变形速度之间的关系式。

首先研究切向应力的补充关系式。根据达朗伯原理,作用在微小流体质团上的所有外力(包括惯性力)对通过形心 M 并与 z 轴平行的轴的力矩之和等于零。法向应力的合力平行或通过该轴,对该轴无矩;根据合力之矩定理,质量力、垂直于转轴的平面上的切向应力、移动惯性力对该轴无矩;离心惯性力通过该轴,也无矩;作用在六面体上、下平面和两个侧面上的切向应力对该轴有矩;由角加速度引起的切向惯性力对该轴有矩。如以 ε_{jz} 代表质团绕该轴的角加速度分量,则平衡方程为

$$\left[\tau_{xy} + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \delta x \right) \right] \delta y \delta z \frac{\delta x}{2} - \left[\tau_{yx} + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \delta y \right) \right] \delta x \delta z \frac{\delta y}{2} - \rho \delta x \delta y \delta z \frac{\delta x^2 + \delta y^2}{12} \varepsilon_{jz} = 0$$

以质团的体积 $\delta x \delta y \delta z$ 通除上式,并取 $\delta x \rightarrow 0$ 、 $\delta y \rightarrow 0$ 、 $\delta z \rightarrow 0$ 时的极限,略去无穷小项,得

$$\text{同理可得} \quad \left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} \end{aligned} \right\} \quad (9-2)$$

即二相邻正交截面上的切向应力互等。这样,在六个切向应力中,只有三个是独立的。

在第二章第六节中已经指出过,当黏性层间发生相对运动时,流体黏性引起的切向应力可按牛顿内摩擦定律式(2-14)求得,即

$$\tau = \mu \frac{dv_x}{dy}$$

而速度梯度又等于流体微团的角变形速度,即

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{d\varphi}{dt}$$

在第八章第二节中,分析流体微团的平面运动时,又得出了角变形速度为

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} = 2\dot{\gamma}_z$$

假若流体的黏度在各个方向上都是相同的(即各向同性),则根据牛顿内摩擦定律,可得

$$\text{同理可得} \quad \left. \begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = 2\mu \dot{\gamma}_z \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = 2\mu \dot{\gamma}_x \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = 2\mu \dot{\gamma}_y \end{aligned} \right\} \quad (9-3)$$

这就是广义牛顿内摩擦定律,又称广义牛顿切向应力公式。它表明,切向应力等于动力黏度和角变形速度的乘积。

现在研究法向应力的补充关系式。在静止的流体和运动的理想流体中,法向应力都表现为压强。而在运动的黏性流体中,由于流体微团有线应变速度,便产生了附加法向应力,致使法向

应力与压强不同。在此不作推导，对不可压缩黏性流体的导出结果为

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ p_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ p_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (9-4)$$

这就是法向应力的计算式。由此可见，在黏性流体中同一点任意三个互相垂直的法向应力是不相等的，它们的总和

$$p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = -3p + 2\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$$

根据不可压缩流体的连续方程 (8-3)，上式等号右边第二项为零，故得

$$p = -\frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) \quad (9-5)$$

这说明三个互相垂直的法向应力的算术平均值恰好等于理想流体的压强。

现在将切向应力、法向应力的关系式 (9-3)、式 (9-4) 代入式 (9-1a) 第一式，得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ &= f_x + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(-p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right] \right\} \\ &= f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

根据不可压缩流体连续方程式 (8-3)，上式等号右边第四项为零，故得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\ \text{同理} \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9-6a)$$

写成矢量形式为

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{f} + \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v} \quad (9-6)$$

这是不可压缩黏性流体微分形式的运动方程，又称纳维—斯托克斯 (Navier-Stokes) 方程。如果是理想流体，运动黏度等于零，上述方程简化为流体运动的欧拉方程；如果加速度又为零，则进一步简化为流体平衡的欧拉方程。可见，方程 (9-6) 是不可压缩流体的普遍运动方程。

式 (9-6)、式 (8-3) 共有四个方程，原则上可以求解不可压缩黏性流体运动的四个未知量： v_x 、 v_y 、 v_z 、 p 。但是，实际上由于流体流动现象很复杂，要利用这四个方程去求解一般

不可压缩黏性流体的运动问题,在数学上还是很困难的。所以,求解纳维—斯托克斯方程,仍然是流体力学的一项重要任务。许多层流问题,如圆管中的层流、平行平面间的层流以及同心圆环间的层流等,都可以应用纳维—斯托克斯方程求出精确解。此外,对于润滑问题、边界层问题等,也可以应用该方程求出一些近似解。近年来应用纳维—斯托克斯方程去求解紊流问题,也取得了一定的进展。

在求解许多实际流动问题时,用柱坐标系 (r, θ, z) 和球坐标系 (r, θ, β) 比用笛卡儿坐标系 (x, y, z) 更为方便,例如黏性流体绕过圆柱体和球体的流动。

式 (9-6) 在柱坐标系中的投影式为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} &= f_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ &+ v \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} &= f_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ &+ v \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \\ &+ v \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9-6b)$$

不可压缩流体的连续方程为

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (9-7)$$

法向应力和切向应力的公式分别为

$$\left. \begin{aligned} p_{rr} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \\ p_{\theta\theta} &= -p + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) \\ p_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (9-8)$$

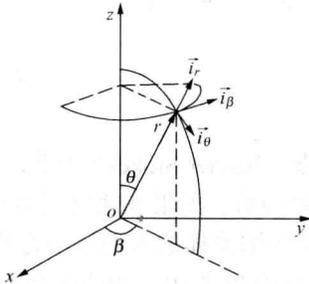


图 9-2 球坐标系

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} &= \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \\ \tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} &= \mu \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \\ \tau_{zr} = \tau_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9-9)$$

式 (9-6) 在球坐标系 (见图 9-2) 中的投影式为

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\beta}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \beta} - \frac{v_\theta^2 + v_\beta^2}{r} = f_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\
 & + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \beta^2} - \frac{2v_\theta}{r^2} \right. \\
 & \left. - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2v_\theta \cot \theta}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\beta}{\partial \beta} \right) \\
 & \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\beta}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \beta} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\beta^2 \cot \theta}{r} = f_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\
 & + \nu \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \beta^2} \right. \\
 & \left. + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\beta}{\partial \beta} \right) \\
 & \frac{\partial v_\beta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\beta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\beta}{\partial \theta} + \frac{v_\beta}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\beta}{\partial \beta} + \frac{v_\beta v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\beta \cot \theta}{r} \\
 & = f_\beta - \frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \beta} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_\beta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_\beta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_\beta}{\partial \theta} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial \beta^2} - \frac{v_\beta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \beta} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \beta} \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (9-6c)$$

不可压缩流体的连续方程为

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\beta}{\partial \beta} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} = 0 \quad (9-10)$$

法向应力和切向应力的公式分别为

$$\left. \begin{aligned}
 p_{rr} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \\
 p_{\theta\theta} &= -p + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) \\
 p_{\beta\beta} &= -p + 2\mu \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\beta}{\partial \beta} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (9-11)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} &= \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_r}{r} \right) \\
 \tau_{\theta\beta} = \tau_{\beta\theta} &= \mu \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \beta} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\beta}{\partial \theta} - \frac{v_\beta \cot \theta}{r} \right) \\
 \tau_{r\beta} = \tau_{\beta r} &= \mu \left(\frac{\partial v_\beta}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \beta} - \frac{v_\beta}{r} \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (9-12)$$

第二节 不可压缩黏性流体的层流流动

一、平行平板间流体的定常层流流动

不可压缩黏性流体在倾斜的平行平板间作定常层流流动,如图 9-3 (a) 所示。若平板长度为无限大,且固定不动,流体沿 x 轴方向流动, y 轴垂直于平板, z 轴水平,则 $v_y = v_z = 0$, $\frac{\partial}{\partial z} = 0$; 又由连续方程式 (8-3) 得 $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$, 故得 $v_x = v_x(y)$ 。对于定常流动 $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ 。如果质量力仅有重力,则式 (9-6a) 成为

$$f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0, \quad f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

式中: $f_x = g \sin \alpha = -g \frac{\partial h}{\partial x}$, $f_y = -g \cos \alpha = -g \frac{\partial h}{\partial y}$, 代入上式, 得

$$\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} (p + \rho gh), \quad \frac{\partial}{\partial y} (p + \rho gh) = 0$$

由此可知 $p + \rho gh$ 只是 x 的函数, 于是得

$$\mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} = \frac{d}{dx} (p + \rho gh) \quad (a)$$

式 (a) 对 y 积分, 得

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{d}{dx} (p + \rho gh) \right] y + C_1 \quad (b)$$

式 (b) 对 y 积分, 得

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \left[\frac{d}{dx} (p + \rho gh) \right] y^2 + C_1 y + C_2 \quad (9-13)$$

由边界条件: 当 $y = 0$ 和 $y = b$ 时, $v_x = 0$, 可确定积分常数:

$$C_1 = -\frac{b}{2\mu} \frac{d}{dx} (p + \rho gh), \quad C_2 = 0$$

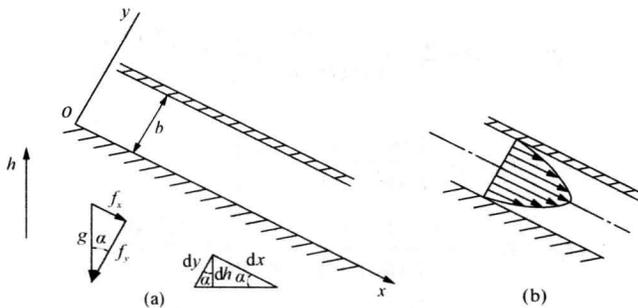


图 9-3 平行平板间流体的层流流动

代入式 (9-13), 得

$$v_x = -\frac{1}{2\mu} \frac{d}{dx} (p + \rho gh)(b-y)y \quad (9-13a)$$

可见, 两块平行平板间由总势能梯度引起的层流流动的速度分布为抛物线, 如图 9-3 (b) 所示, 流向沿总势能降低的方向。如果平板水平放置, 流动由压强梯度引起, 称为平面泊肃叶流动。

若下板不动, 上板以等速 U 沿流动方向作平行运动, 其边界条件为 $y=0, v_x=0$; $y=b, v_x=U$ 。代入式 (9-13), 得

$$C_1 = \frac{U}{b} - \frac{b}{2\mu} \frac{d}{dx} (p + \rho gh), \quad C_2 = 0$$

于是得速度分布:

$$v_x = \frac{U}{b} y - \frac{1}{2\mu} \frac{d}{dx} (p + \rho gh)(b-y)y \quad (9-13b)$$

称为平直库埃特 (Couette) 流动。它由两部分组成: 速度分布为一条直线的简单剪切流动, 如图 2-2 所示; 速度分布为抛物线的两块固定平行平板间的层流流动, 如图 9-3 (b) 所示。

【例 9-1】 图 9-4 所示为一收集水面油污的皮带输送装置。已知该装置的倾斜角 $\theta = 30^\circ$, 皮带的定常速度 $U = 1.5 \text{ m/s}$, 油污的动力黏度 $\mu = 8 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, 密度 $\rho = 850.4 \text{ kg/m}^3$, 油层的厚度 $b = 1.5 \text{ mm}$ 。试求该装置单位宽度所能输送的流量。油层多厚时皮带输送的流量最大?

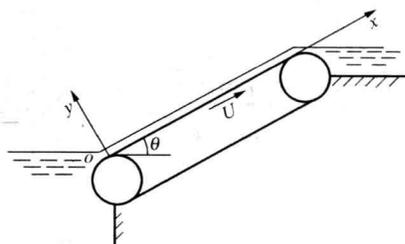


图 9-4 收集油污的皮带输送装置

【解】 油层是靠黏性作用和皮带的带动向上运动的, 不是靠压差推动的, 故由式 (b)、式 (9-13) 得

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dy} &= \frac{\rho g}{\mu} y \sin \theta + C_1 \\ v_x &= \frac{\rho g}{2\mu} y^2 \sin \theta + C_1 y + C_2 \end{aligned} \quad (c)$$

边界条件为: 当 $y=b$ 时, $\tau=0$, 即 $\frac{dv_x}{dy}=0$; 当 $y=0$ 时, $v_x=U$ 。分别代入式 (c) 后, 得

$$C_1 = -\frac{\rho g}{\mu} b \sin \theta, \quad C_2 = U$$

代入式 (c), 得

$$v_x = U - \frac{\rho g}{\mu} \left(by - \frac{y^2}{2} \right) \sin \theta$$

皮带单位宽度所能输送的流量

$$q'_v = \int_0^b v_x dy = Ub - \frac{\rho g b^3}{3\mu} \sin \theta$$

皮带每米宽输送的流量为

$$q'_v = 1.5 \times 1.5 \times 10^{-3} - \frac{850.4 \times 9.807 \times (1.5 \times 10^{-3})^3}{3 \times 8 \times 10^{-3}} \times 0.5 = 1.664 \times 10^{-3} \text{ (m}^3/\text{s)}$$

为了推求油层多厚时皮带输送的流量最大, 令 $dq_v'/db = 0$, 得到对应于最大流量的油层厚度和流量分别为

$$b' = \left(\frac{\mu U}{\rho g \sin \theta} \right)^{1/2}, \quad q_{v \max}' = \frac{2}{3} \times \left(\frac{\mu}{\rho g \sin \theta} \right)^{1/2} U^{3/2}$$

代入已知数据, 得对应于最大流量的油层厚度为

$$b' = \left(\frac{1.5 \times 8 \times 10^{-3}}{850.4 \times 9.807 \times 0.5} \right)^{1/2} = 1.7 \times 10^{-3} \text{ (m)}$$

皮带每米宽输送的最大流量为

$$q_{v \max}' = \frac{2}{3} \times \left(\frac{8 \times 10^{-3}}{850.4 \times 9.807 \times 0.5} \right)^{1/2} \times 1.5^{3/2} = 1.7 \times 10^{-3} \text{ (m}^3/\text{s)}$$

二、流体动力润滑

流体动力润滑轴承是各类有转动部件的机器设备中常见的重要部件。这里只对流体动力

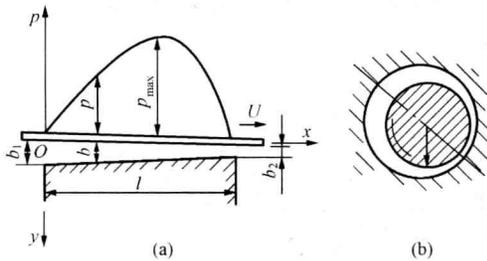


图 9-5 滑动轴承和径向滑动轴承示意

润滑理论作一简要的介绍, 推导出润滑理论基础中的一维雷诺方程。图 9-5 (a) 所示为滑动轴承, 图 9-5 (b) 所示为径向滑动轴承。滑动轴承是由被润滑油分开的两块稍微倾斜、有相对运动的平板组成, 在平板间的楔形间隙中形成具有一定液体动压的油膜。例如图 9-5 (a) 中的两块平板, 下平板静止, 上平板以等速 U 运动, 带动间隙中的油膜作缓慢流动。液体在流入逐渐缩小的间隙时, 会产生如图中曲线所示

的压强分布, 以支持轴承的载荷。径向滑动轴承除接触面是曲面外, 力的传递作用与滑动轴承是相同的。

现在讨论滑动轴承楔形间隙中不可压缩黏性流体的定常流动。为了使问题得到简化, 作如下假设: 在垂直于图面方向, 滑动轴承的端面没有液体流出, 这相当于假设轴承宽度为无限大, 可以将油膜流动作为 oxy 平面上的二维流动来处理; 间隙 b 与平板的长度 l 相比非常小, 以致 v_y 与 v_x 相比可以略去; v_x 在 x 方向的变化比在 y 方向的变化小得多, 即 $\frac{\partial v_x}{\partial x} \ll \frac{\partial v_x}{\partial y}$, 可以略去 $\frac{\partial v_x}{\partial x}$, 于是 $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$, 可以略去 $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$; 不考虑重力作用, 即 $f_x = f_y = 0$ 。对于定常流动 $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, 于是式 (9-6a) 和式 (8-3) 成为

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

可见 $p = p(x)$ 和 $v_x = v_x(y)$, 于是得

$$\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{dp}{dx} \quad (d)$$

对式 (d) 进行积分, 得

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + C_1 y + C_2 \quad (9-14)$$

根据边界条件：当 $y=0$ 时， $v_x=U$ ；当 $y=b$ 时， $v_x=0$ ，可确定积分常数：

$$C_1 = -\frac{U}{b} \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} b \quad C_2 = U$$

代入式 (9-14)，得

$$v_x = U \left(1 - \frac{y}{b} \right) + \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(y-b) \quad (9-14a)$$

通过单位宽度楔形流道的流量为

$$q_v' = \int_0^b v_x dy = \frac{bU}{2} - \frac{b^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} \quad (9-15)$$

由于通过楔形流道任一截面的流量都是不变的，即 $\frac{dq_v'}{dx} = 0$ ，将式 (9-15) 代入后，得

$$\frac{d}{dx} \left(b^3 \frac{dp}{dx} \right) = 6\mu U \frac{db}{dx} \quad (9-16)$$

这就是一维流动的雷诺方程，是研究流体动力润滑的基本微分方程。

令 $\alpha = \frac{b_1 - b_2}{l}$ 表示斜块倾斜角的正切，于是间隙 $b = b_1 - \alpha x$ ，代入式 (9-15)，得

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\mu U}{(b_1 - \alpha x)^2} - \frac{12\mu q_v'}{(b_1 - \alpha x)^3}$$

上式对 x 进行积分，得

$$p = \frac{6\mu U}{\alpha(b_1 - \alpha x)} - \frac{6\mu q_v'}{\alpha(b_1 + \alpha x)^2} + C \quad (e)$$

式中流量 q_v' 和积分常数 C 都是未知量。根据边界条件：当 $x=0$ 时， $p=0$ 和当 $x=l$ 时， $p=0$ ，

代入上式，解得

$$q_v' = \frac{Ub_1 b_2}{b_1 + b_2}, \quad C = -\frac{6\mu U}{\alpha(b_1 - b_2)}$$

代入式 (e)，得

$$p = \frac{6\mu U x (b - b_2)}{b^2 (b_1 + b_2)} \quad (9-17)$$

由于在 $0 < x < l$ 的范围内 $b > b_2$ ，故压强 p 始终为正。沿轴承长度的压强分布示意图 9-5 (a) 上方的曲线。

滑动轴承单位宽度油膜所能产生的总支承力为

$$F_p = \int_0^l p dx = \frac{6\mu U l^2}{(b_1 + b_2)^2} \left(\ln \frac{b_1}{b_2} - 2 \frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2} \right) \quad (9-18)$$

由于液体作用在平板上的切向应力

$$\begin{aligned}\tau_w &= -\mu \left(\frac{dv_x}{dy} \right)_{y=0} = \frac{\mu U}{b} + \frac{b}{2} \frac{dp}{dx} \\ &= \frac{4\mu U}{b_1 - \alpha x} - \frac{6\mu q_v'}{(b_1 - \alpha x)^2} = \frac{4\mu U}{b_1 - \alpha x} - \frac{6\mu U}{(b_1 - \alpha x)^2} \frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2}\end{aligned}$$

故油膜作用在平板单位宽度上的总阻力为

$$F_D = \int_0^l \tau_w dx = \frac{2\mu U l}{b_1 - b_2} \left(21 \ln \frac{b_1}{b_2} - 3 \frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2} \right) \quad (9-19)$$

以 b_1 为变量, 当 $\frac{dF_p}{db_1} = 0$ 时, 得 $b_1 = 2.2b_2$, 这时支承力 F_p 有最大值:

$$F_p' = 0.16 \frac{\mu U l^2}{b_2^2}$$

对应的阻力为

$$F_D' = 0.75 \frac{\mu U l}{b_2}$$

最大总支承力与总阻力之比为

$$\frac{F_p'}{F_D'} = 0.21 \frac{l}{b_2}$$

这个比值可以是很大的, 因为 b_2 比起 l 来是很小的。

三、环形管道中流体的定常层流流动

不可压缩黏性流体在外径 r_1 、内径 r_2 、直长的环形管道中作定常层流流动, 如图 9-6 所示。可以认为, 流动是轴对称的, 故采用柱坐标系, 取管轴为 z 轴; 故有 $v_r = v_\theta = 0, \frac{\partial v_z}{\partial \theta} = 0$ 。由连续方程式 (9-7) 得

$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$, 故有 $v_z = v_z(r)$ 。对于定常流动

$\frac{\partial}{\partial t} = 0$ 。如果质量力仅有重力, 则式 (9-6b)

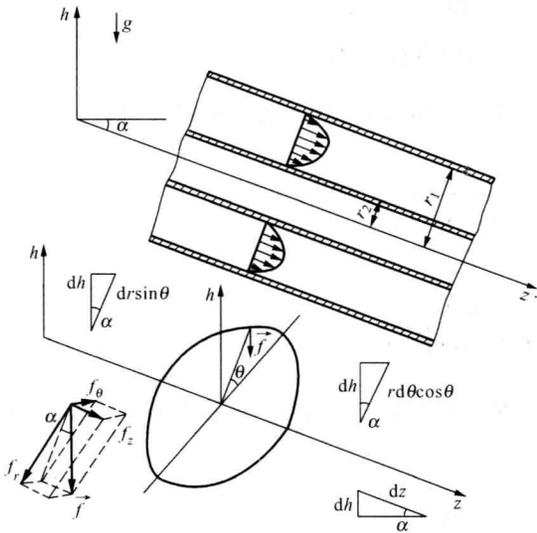


图 9-6 环形管道中流体的定常层流流动

成为

$$f_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad f_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \quad f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = 0$$

假设 α 角为 z 轴与其铅垂平面内水平线之间的夹角, θ 角为管道横截面内自水平线量起的角度 (图 9-6), 则单位质量流体的质量力为 $f_r = -g \cos \alpha \sin \theta = -g \frac{\partial h}{\partial r}$, $f_\theta = -g \cos \alpha \cos \theta = -g \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta}$, $f_z = g \sin \alpha = -g \frac{\partial h}{\partial z}$, 代入上式, 得

$$\frac{\partial}{\partial r}(p + \rho gh) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta}(p + \rho gh) = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} (p + \rho gh)$$

由前二式可知, $p + \rho gh$ 只是 z 的函数, 于是得

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{d}{dz} (p + \rho gh) \quad (f)$$

式 (f) 对 r 积分两次, 得

$$v_z = \frac{1}{4\mu} \left[\frac{d}{dz} (p + \rho gh) \right] r^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad (9-20)$$

由边界条件: 当 $r = r_1$ 和 $r = r_2$ 时, $v_z = 0$, 可确定积分常数:

$$C_1 = -\frac{1}{4\mu} \frac{d}{dz} (p + \rho gh) \frac{r_1^2 - r_2^2}{\ln(r_1/r_2)}$$

$$C_2 = -\frac{1}{4\mu} \frac{d}{dz} (p + \rho gh) \left[r_1^2 - \frac{r_1^2 - r_2^2}{\ln(r_1/r_2)} \ln r_1 \right]$$

代入式 (9-20), 得

$$v_z = -\frac{1}{4\mu} \frac{d}{dz} (p + \rho gh) \left[(r_1^2 - r^2) + \frac{r_1^2 - r_2^2}{\ln(r_1/r_2)} \ln \frac{r}{r_1} \right] \quad (9-20a)$$

流过环形管道的流量为

$$q_v = 2\pi \int_{r_2}^{r_1} v_z r dr = -\frac{\pi}{8\mu} \frac{d}{dz} (p + \rho gh) \left[(r_1^4 - r_2^4) - \frac{(r_1^2 - r_2^2)^2}{\ln(r_1/r_2)} \right] \quad (9-21a)$$

若半径为 r_2 的同心圆管 (或心轴) 以等速 U 沿管轴 z 方向运动, 如在柱塞泵中所遇到的那样, 则边界条件成为 $r = r_1$ 时, $v_z = 0$; $r = r_2$ 时, $v_z = U$ 。代入式 (9-20), 得

$$C_1 = -\frac{1}{4\mu} \frac{d}{dz} (p + \rho gh) \frac{r_1^2 - r_2^2}{\ln(r_1/r_2)} - \frac{U}{\ln(r_1/r_2)}$$

$$C_2 = -\frac{1}{4\mu} \frac{d}{dz} (p + \rho gh) \left[r_1^2 - \frac{r_1^2 - r_2^2}{\ln(r_1/r_2)} \ln r_1 \right] + \frac{U}{\ln(r_1/r_2)} \ln r_1$$

于是得速度分布:

$$v_z = -\frac{1}{4\mu} \frac{d}{dz} (p + \rho gh) \left[(r_1^2 - r^2) + \frac{r_1^2 - r_2^2}{\ln(r_1/r_2)} \ln \frac{r}{r_1} \right] - \frac{U}{\ln(r_1/r_2)} \ln \frac{r}{r_1} \quad (9-20b)$$

流过环形管道的流量为

$$q_v = 2\pi \int_{r_2}^{r_1} v_z r dr = -\frac{\pi}{8\mu} \frac{d}{dz} (p + \rho gh) \left[(r_1^4 - r_2^4) - \frac{(r_1^2 - r_2^2)^2}{\ln(r_1/r_2)} \right]$$

$$- \pi r_2^2 U + \frac{\pi(r_1^2 - r_2^2)U}{2 \ln(r_1/r_2)} \quad (9-21b)$$

沿固定环形管道的流动是上述流动的特殊情况, 即 $U=0$ 时的情况。

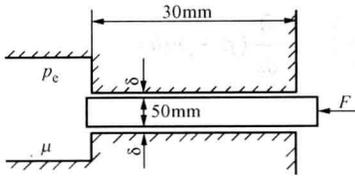


图 9-7 油缸与柱塞

【例 9-2】油缸内油的计示压强 $p_c = 29.418 \times 10^4 \text{ Pa}$ 、黏度 $\mu = 0.1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ，柱塞的直径 $d = 50 \text{ mm}$ ，柱塞与套筒间的径向间隙 $\delta = 0.05 \text{ mm}$ ，套筒的长度 $l = 300 \text{ mm}$ 。设以力 F 推着柱塞使其保持不动，求油的漏损流量 q_V 和力 F 的大小（图 9-7）。

【解】柱塞与套筒间隙中压强降的数值为

$$-\frac{dp_c}{dl} = -\frac{0 - 29.418 \times 10^4}{0.3} = 980.6 \times 10^3 \text{ (Pa/m)}$$

环形流道的外半径 $r_1 = 25 + 0.05 = 25.05 \text{ mm}$ ，环形流道的内半径 $r_2 = 25 \text{ mm}$ 。将已知数据代入式 (9-21a)，得

$$\begin{aligned} q_V &= \frac{\pi}{8 \times 0.1} \times 980600 \times \left[0.02505^4 - 0.025^4 - \frac{(0.02505^2 - 0.025^2)^2}{\ln(0.02505/0.025)} \right] \\ &= 1.60 \times 10^{-8} \text{ m}^3/\text{s} = 0.016 \text{ (cm}^3/\text{s)} \end{aligned}$$

式 (9-20a) 对 r 取导数，得

$$\begin{aligned} \frac{dv_z}{dr} &= -\frac{1}{4\mu} \frac{d}{dl} (p_c + \rho gh) \left[-2r + \frac{r_1^2 - r_2^2}{\ln(r_1/r_2)} \frac{1}{r} \right] \\ \tau_{rz} &= -\mu \left(\frac{dv_z}{dr} \right)_{r=r_2} = -\frac{1}{4} \times \frac{d}{dl} (p_c + \rho gh) \left[2r_2 - \frac{r_1^2 - r_2^2}{\ln(r_1/r_2)} \frac{1}{r_2} \right] \\ &= -\frac{1}{4} \times 980600 \times \left(0.05 - \frac{0.02505^2 - 0.025^2}{\ln(0.02505/0.025)} \times \frac{1}{0.025} \right) \\ &= 24.52 \text{ (Pa)} \end{aligned}$$

推力 F 应与柱塞两端面的压强差和流体作用在柱塞侧面的黏滞力相平衡，故

$$\begin{aligned} F &= \frac{\pi}{4} \times 0.05^2 \times 29.418 \times 10^4 + \pi \times 0.05 \times 0.3 \times 24.52 \\ &= 577.6 + 1.155 = 578.8 \text{ (N)} \end{aligned}$$

四、黏性流体绕过圆球小雷诺数的定常层流流动

在工程实际和自然界中，经常会遇到固体微粒、液体微滴在流体中的缓慢运动；例如煤粉、油滴在炉膛气流中的运动，烟尘在烟道废气中的运动，微细液滴在汽包蒸气中的运动，浮尘、雾滴在空气中的运动，固体微粒在液体中的运动等。这类运动的主要特征是：微粒、微滴的尺寸很小（通常近似地视它们为微小圆球），它们与流体的相对运动速度很小，所以相对运动的雷诺数非常小（通常称 $Re = v_\infty d/\nu \ll 1$ 的流动为蠕流）；惯性力比黏滞力要小得多，可以略去；重力也比黏滞力小，流体的浮力还在减小它的作用，也可略去。流体对圆球的绕流是轴对称的，采用的是球坐标系，如图 9-8 所示。这样， $v_r = v_r(r, \theta)$ ， $v_\theta = v_\theta(r, \theta)$ ， $v_\phi = 0$ ， $p = p(r, \theta)$ ， $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$ ；纳维—斯托克斯方程式 (9-6c) 和连续方程式 (9-10) 简化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= \mu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2 \cot \theta}{r^2} v_\theta \right) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} &= \mu \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9-22)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} = 0 \quad (9-23)$$

在球面上和无穷远处的边界条件为

$$r=r_0 \quad v_r(r_0, \theta) = 0, \quad v_\theta(r_0, \theta) = 0$$

$$r \rightarrow \infty \quad v_r(\infty, \theta) = v_\infty \cos \theta, \quad v_\theta(\infty, \theta) = -v_\infty \sin \theta, \quad p(\infty, \theta) = p_\infty$$

为了用分离变量法求解上述微分方程组, 参照边界条件, 预设

$$v_r = f_1(r) \cos \theta, \quad v_\theta = -f_2(r) \sin \theta, \quad p = p_\infty + \mu f_3(r) \cos \theta \quad (g)$$

将式 (g) 代入式 (9-22)、式 (9-23), 得

$$\left. \begin{aligned} f_3' &= f_1'' + \frac{2}{r} f_1' - \frac{4(f_1 - f_2)}{r^2} \\ \frac{f_3}{r} &= f_2'' + \frac{2}{r} f_2' + \frac{2(f_1 - f_2)}{r^2} \\ f_1' + \frac{2(f_1 - f_2)}{r^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

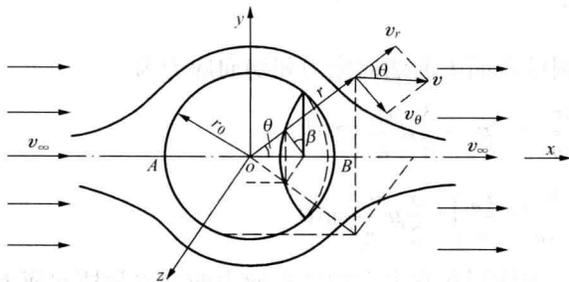


图 9-8 黏性流体绕过圆球小雷诺数的定常层流流动

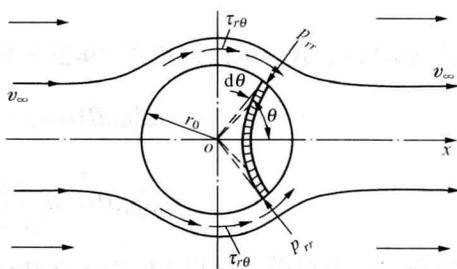


图 9-9 推导黏性流体作用在圆球上的阻力用图

将上述边界条件代入式 (g), 得预设函数的边值为

$$f_1(r_0) = f_2(r_0) = 0, \quad f_1(\infty) = f_2(\infty) = v_\infty, \quad f_3(\infty) = 0$$

由式 (h) 的第三式得

$$f_2 = \frac{1}{2} f_1' r + f_1 \quad (i)$$

对 r 连续求导数, 得

$$f_2' = \frac{1}{2} f_1'' r + \frac{3}{2} f_1', \quad f_2'' = \frac{1}{2} f_1''' r + 2 f_1''$$

代入式 (h) 的第二式, 得

$$f_3 = \frac{1}{2} f_1''' r^2 + 3 f_1'' r + 2 f_1' \quad (j)$$

对 r 求导数, 得

$$f_3' = \frac{1}{2} f_1'''' r^2 + 4 f_1''' r + 5 f_1''$$

代入式 (h) 的第一式, 得

$$r^3 f_1'''' + 8 r^2 f_1''' + 8 r f_1'' - 8 f_1' = 0 \quad (k)$$

式 (k) 的特解为

$$f_1 = r^k$$

代入式 (k), 得

$$k(k-1)(k-2)(k-3) + 8k(k-1)(k-2) + 8k(k-1) - 8k = 0$$

并解得 $k = -3, -1, 0, 2$, 则式 (k) 的一般解为

$$f_1 = \frac{A}{r^3} + \frac{B}{r} + C + Dr^2$$

式中: A 、 B 、 C 、 D 为积分常数。将 f_1 及其导数代入式 (i)、式 (j), 得

$$f_2 = -\frac{A}{2r^3} + \frac{B}{2r} + C + 2Dr^2, \quad f_3 = \frac{B}{r^2} + 10Dr$$

根据预设函数的边值可以确定 $A = r_0^3 v_\infty / 2$, $B = -3r_0 v_\infty / 2$, $C = v_\infty$, $D = 0$ 。进而确定

$$f_1 = \frac{r_0^3}{2r^3} v_\infty - \frac{3r_0}{2r} v_\infty + v_\infty, \quad f_2 = -\frac{r_0^3}{4r^3} v_\infty - \frac{3r_0}{4r} v_\infty + v_\infty, \quad f_3 = -\frac{3r_0}{2r^2} v_\infty$$

代入式 (g), 得方程式 (9-22)、式 (9-23) 的解为

$$\left. \begin{aligned} v_r(r, \theta) &= v_\infty \cos \theta \left[1 - \frac{3}{2} \frac{r_0}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{r} \right)^3 \right] \\ v_\theta(r, \theta) &= v_\infty \sin \theta \left[1 - \frac{3}{4} \frac{r_0}{r} - \frac{1}{4} \left(\frac{r_0}{r} \right)^3 \right] \\ p(r, \theta) &= p_\infty - \frac{3}{2} \mu \frac{r_0}{r^2} v_\infty \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (9-24)$$

由式 (9-11)、式 (9-12) 和式 (9-24) 可得圆球壁面上的法向应力和切向应力为

$$p_{rr}(r_0, \theta) = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} = -p_\infty + \frac{3}{2} \mu \frac{v_\infty}{r_0} \cos \theta$$

$$\tau_{r\theta}(r_0, \theta) = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) = \frac{3}{2} \mu \frac{v_\infty}{r_0} \sin \theta$$

在球面上取带形微元面积 $dA = 2\pi r_0 \sin \theta \times r_0 d\theta$, 求作用在它上面的法向应力的合力和切向应力的合力在来流方向的投影, 并在整个球面上积分, 便可得到作用在圆球上的阻力:

$$\begin{aligned} F_D &= \iint_A p_{rr}(r_0, \theta) \cos \theta dA + \iint_A \tau_{r\theta}(r_0, \theta) \sin \theta dA \\ &= \int_0^\pi \left(-p_\infty + \frac{3}{2} \frac{\mu}{r_0} v_\infty \cos \theta \right) 2\pi r_0^2 \sin \theta \cos \theta d\theta + \int_0^\pi \left(\frac{3}{2} \mu \frac{v_\infty}{r_0} \sin \theta \right) 2\pi r_0^2 \sin^2 \theta d\theta \\ &= 3\pi \mu r_0 v_\infty \left(\int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta + \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \right) = 6\pi \mu r_0 v_\infty = 3\pi \mu d v_\infty \end{aligned} \quad (9-25)$$

这就是圆球的斯托克斯阻力公式, 是斯托克斯 1851 年提出的。无量纲阻力系数

$$C_D = \frac{F_D}{\pi r_0^2 \times \rho v_\infty^2 / 2} = \frac{6\pi \mu r_0 v_\infty}{\pi r_0^2 \times \rho v_\infty^2 / 2} = \frac{24}{v_\infty d / \nu} = \frac{24}{Re} \quad (9-26)$$

此式是在 $Re \ll 1$ 的前提下导出的, 但实测表明, 直到 $Re \leq 1$, 按式 (9-26) 计算的阻力系数与实验值的差值仍在工程应用的精确度要求之内。

第三节 边界层的基本概念

现在来研究黏性流体在大雷诺数下平滑地绕流某静止物体 (例如机翼的翼型, 图 9-10) 的情况。在紧靠物体表面的薄层内, 流速将由物体表面上的零值迅速地增加到与来流速度

v_∞ 同数量级的大小,这种在大雷诺数下紧靠物体表面流速从零急剧增加到与来流速度相同数量级的薄层称为边界层。在边界层内,流体在物体表面法线方向上的速度梯度很大,即使黏度很小的流体,表现出的黏滞力也较大,决不能忽略。所以,边界层内的流体有相当大的涡通量。当边界层内的有旋流离开物体而流入下游时,在物体后形成尾涡区域。在边界层外,速度梯度很小,即使黏度较大的流体,黏滞力也很小,可以忽略不计。所以可以认为,在边界层外的流动是无旋的势流。

由此可见,当黏性流体绕过物体流动时,可以将物体外面的流场划分为两个区域:在边界层和尾涡区域内,必须考虑流体的黏滞力,应当视为黏性流体的有旋流动;在边界层和尾涡区以外的区域内,黏滞力很小,可以视为理想流体的无旋流动。实际上,边界层内、外区域并没有明显的分界面,在实际应用中规定:沿固体壁面外法线速度达到势流速度的99%处的距离为边界层的厚度,用 δ 代表,见图9-10。图中虚线表示边界层的外边界,实线表示流线。解决绕物体大雷诺数流动的近似方法是以边界层理论为基础的。

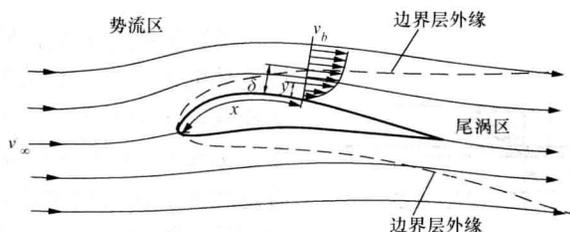


图9-10 机翼翼型上的边界层

用微型测速管直接测量紧靠机翼表面附近的流速得知,边界层很薄,边界层的厚度通常仅为弦长的几百分之一。例如在汽轮机叶片出汽边上,边界层最大厚度一般为零点几毫米。从图9-10中可以看出,在前驻点 o 处,流体速度为零,边界层的厚度等于零,然后沿着流动方向逐渐增厚;为了清晰起见,图9-10上将边界层的尺寸放大了。另外,边界层的外边界和流线并不重合,流线伸入边界层内,这是由于层外的流体质点不断地进入边界层。

综上所述,边界层的主要特征有:①与物体的特征长度相比,边界层的厚度很小;②边界层沿流体流动方向逐渐增厚,其外边界不与流线重合;③沿壁面法线方向边界层内的速度梯度很大;④在边界层内黏滞力与惯性力属同一数量级;⑤沿壁面法线方向边界层内各点的压强相等,都等于主流在边界层外边界对应点上的压强;⑥边界层内流体的流动也有层流和紊流两种流动状态。

判别边界层内的流动是层流还是紊流的准则数仍是雷诺数,其特征长度是离物体前缘点的距离 x ,特征速度取边界层外边界对应点的速度 v_b ,即 $Re_x = \frac{v_b x}{\nu}$ 。例如平板边界层内的流动,由

层流转变为紊流的临界雷诺数 $Re_{x_{cr}} = 3.2 \times 10^5 \sim 3 \times 10^6$,转捩点位标为 $x_{cr} = (3.2 \times 10^5 \sim 3 \times 10^6) \nu / v_b$,它们的数值与来流的紊流度、壁面的粗糙度等有关;增大来流的紊流度、壁面的粗糙度,将会降低发生边界层转捩的临界雷诺数。例如机翼前端的边界层很薄,不大的粗糙凸出就会穿过边界层,导致层流变为紊流。

边界层内的流动全部是层流的,称为层流边界层;边界层内的流动起始是层流,而后转变为紊流的,称为混合边界层。图9-11所示为平板的混合边界层:在平板的前段,边界层总是呈层流状态;随着 Re_x 数值的增大,边界层内的流动处于从层流向紊流逐渐过渡的不稳定

状态； Re_x 增大到一定数值，层流边界层转变为紊流边界层，但在紊流边界层与壁面之间还有一层极薄的黏性底层。由于紊流边界层内有流体微团的横向脉动，它的厚度比层流边界层的厚度增长得快。

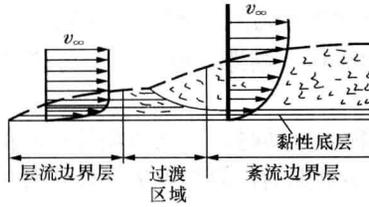


图 9-11 平板的混合边界层

第四节 层流边界层微分方程

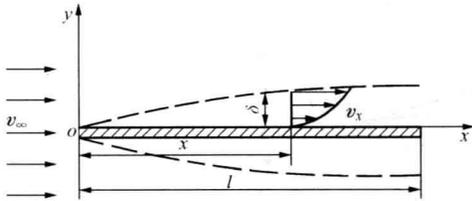


图 9-12 推导层流边界层微分方程用图

现在根据边界层的特征，利用不可压缩黏性流体的运动微方程来研究边界层内流体的运动规律。为简单起见，只讨论流体沿平板的平面定常流动， x 轴与壁面重合，如图 9-12 所示。假定边界层内为层流流动，忽略质量力，则不可压缩黏性流体平面定常流动的运动方程和连续方程为

$$\left. \begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9-27)$$

可以利用边界层厚度很薄的特征，来比较方程组（9-27）中各项的数量级，权衡主次，忽略次要项，这样便可大大简化该方程组。

边界层的厚度 δ 与平板的长度 l 相比较是很小的，即 $\delta \ll l$ 或 $\delta/l = \delta' \ll 1$ ，而 y 的数值限制在边界层内，即 $0 \leq y \leq \delta$ ；在边界层内， x 与 l 、 y 与 δ 以及 v_x 与 v_∞ 是同一数量级， p 具有 ρv_∞^2 的数量级。如果符号“ \sim ”表示数量级相同，引入无量纲物理量：

$$x' = \frac{x}{l} \sim 1, \quad y' = \frac{y}{l} \sim \delta', \quad v'_x = \frac{v_x}{v_\infty} \sim 1, \quad v'_y = \frac{v_y}{v_\infty} \sim \delta', \quad p' = \frac{p}{\rho v_\infty^2} \sim 1$$

据此可得

$$\frac{\partial v'_x}{\partial x'} \sim 1, \quad \frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2} \sim 1, \quad \frac{\partial v'_x}{\partial y'} \sim \frac{1}{\delta'}, \quad \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2} \sim \frac{1}{\delta'^2}, \quad \frac{\partial p'}{\partial x} \sim 1, \quad \frac{\partial p'}{\partial y'} \sim \frac{1}{\delta'}$$

由无量纲化的连续方程可得 $\frac{\partial v'_y}{\partial y'} = -\frac{\partial v'_x}{\partial x'} \sim 1$ ，故有上面引入的第四个无量纲物理量的数量级。

由此可得

$$\frac{\partial v'_y}{\partial x'} \sim \delta', \quad \frac{\partial^2 v'_y}{\partial x'^2} \sim \delta', \quad \frac{\partial v'_y}{\partial y'} \sim 1, \quad \frac{\partial^2 v'_y}{\partial y'^2} \sim \frac{1}{\delta'}$$

将它们代入方程组 (9-27), 得无量纲化方程组及对应项下面的数量级:

$$\left. \begin{aligned} v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y'} &= -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re_l} \left(\frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2} \right) \\ 1 \cdot 1 & \quad \delta' \cdot \frac{1}{\delta'} & 1 & (\delta')^2 & 1 & \frac{1}{\delta'^2} \\ v'_x \frac{\partial v'_y}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_y}{\partial y'} &= -\frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{Re_l} \left(\frac{\partial^2 v'_y}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'_y}{\partial y'^2} \right) \\ 1 \cdot \delta' & \quad \delta' \cdot 1 & \frac{1}{\delta'} & (\delta')^2 & \delta' & \frac{1}{\delta'} \\ \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + \frac{\partial v'_y}{\partial y'} &= 0 \\ 1 & & 1 & & & \end{aligned} \right\} \quad (9-27a)$$

式中 $Re_l = v_\infty l / \nu$ 。在边界层内黏滞力和惯性力为同一数量级, 故必须取 $1/Re_l \sim \delta'^2$, 即 $\delta' \sim 1/Re_l^{1/2}$ 。这表明, 雷诺数越大, 边界层的相对厚度越薄。

在式 (9-27a) 中, 将数量级比 1 小的各项全部略去, 再恢复为有量纲的形式, 可得层流边界层微分方程组为

$$\left. \begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9-28)$$

称为普朗特边界层微分方程, 是普朗特在 1904 年提出的。由该方程的第二式知, 边界层内任一横截面各点的压强 p 与 y 无关, 都等于该横截面外边界上的压强 p_b , 可由主流的势流按伯努利方程求得, 即

$$p + \rho v_b^2 / 2 = \text{常数}$$

上式对 x 求导数, 得

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = v_b \frac{dv_b}{dx} \quad (a)$$

用式 (a) 置换式 (9-28) 第一式中的压强项, 得

$$\left. \begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= v_b \frac{dv_b}{dx} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9-28a)$$

边界条件: 当 $y=0$ 时, $u_x=v_y=0$; 当 $y=\delta$ 时, $u_x=v_b$, 对于沿平板的流动 $v_b=v_\infty$ 。

方程组 (9-28) 是在物体壁面为平面的假设下得到的。对于曲面物体, 只要壁面上任何点的

曲率半径远大于该点边界层的厚度(例如机翼翼型和叶片叶型),该方程组仍然适用,并具有足够的精确度。这时,宜用曲线坐标, x 轴沿物体曲面, y 轴垂直于曲面,如图9-10所示。

第五节 边界层动量积分关系式

虽然层流边界层微分方程(9-28)比一般的黏性流体运动方程要简单些,但是,即使对最简单的物体外形,该方程的求解仍是很复杂的。冯·卡门(T.von Kármán)在1912年提出了

边界层动量积分关系式,它是定常流动积分形式的动量方程在边界层流动中的应用。该关系式是比较简便的边界层流动近似计算方法,已经得到广泛应用。

在不可压缩黏性流体沿壁面的二维边界层定常流动中,取一单位宽度的微元控制体 $ABDC$,如图9-13所示。其中 AB 和 CD 垂直于壁面,相距 dx , AC 为边界层的外边界。现将动量方程式(4-24)应用于控制体内的流体。单位时间经过 CD 面流出的动量与经过 AB 、 AC 面流入的动量之差,即沿 x 方向经过控制面的流体动量净通量为

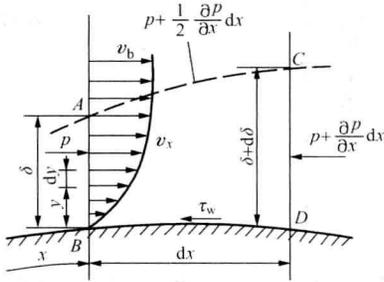


图9-13 推导边界层动量积分关系式用图

$$\begin{aligned} & \left[\int_0^{\delta} \rho v_x^2 dy + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta} \rho v_x^2 dy \right) dx \right] - \int_0^{\delta} \rho v_x^2 dy - v_b \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta} \rho v_x dy \right) dx \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta} \rho v_x^2 dy \right) dx - v_b \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta} \rho v_x dy \right) dx \end{aligned}$$

作用在 AB 、 AC 、 CD 面上压强的合力与壁面黏性应力的合力在 x 方向投影的代数和为

$$p\delta - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) (\delta + d\delta) + \left(p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) d\delta - \tau_w dx$$

略去二阶微量,得

$$-\delta \frac{\partial p}{\partial x} dx - \tau_w dx$$

代入式(4-24),通除以 dx ,得

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho v_x^2 dy - v_b \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho v_x dy = -\delta \frac{\partial p}{\partial x} - \tau_w$$

由上述已知: $\delta = \delta(x)$, $p = p(x)$,在给定截面上 $v_x = v_x(y)$,故以上两个积分都是 x 的函数,即

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho v_x^2 dy - v_b \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho v_x dy = -\delta \frac{dp}{dx} - \tau_w \quad (9-29)$$

这就是边界层动量积分关系式,也称边界层动量积分方程。由于对流动和壁面切向应力未作任何限定,对层流边界层、紊流边界层都适用。由于已知流体的密度 ρ ,边界层外边界上的速度 $v_b = v_b(x)$ 可以用实测或解势流的方法求得,并可根据伯努利方程求出 dp/dx ,关系式中的未知数还有 v_x 、 τ_w 和 δ 三个。因此,还需补充两个关系式,才能与该方程联立求解。通常补充边界层内的速度分布 $v_x = v_x(y/\delta)$ 和壁面切向应力 $\tau_w = \tau_w(\delta)$ 。显然,选择的边界层速度分布函数越接近实际,计算精确度越高。

第六节 边界层的位移厚度和动量损失厚度

在本章第三节定义了边界层的厚度 δ 。在实际计算中,特别是曲面边界层的计算,常用到位移厚度 δ_1 和动量损失厚度 δ_2 ,并把这两个假定厚度作为边界层的特征。

如图 9-14 所示,设物体壁上某点 p 处的边界层厚度为 δ , 在垂直与纸面方向上取单位宽度, 则经过该面流入边界层的流量为 $\int_0^\delta \rho v_x dy$; 如果以主流在边界层外边界对应点

上的速度 v_b 流入该面, 其流量为 $\int_0^\delta \rho v_b dy$ 。后者减去前者便是边界层内因黏性减速而减少的流量, 如图 9-14 中阴影面积所示。这部分流体被挤入主流, 使主流增加了厚度为 δ_1 的一层流体, 故称 δ_1 为位移厚度或排挤厚度。由

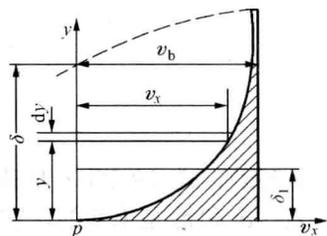


图 9-14 边界层的位移厚度

$$\rho v_b \delta_1 = \int_0^\delta \rho v_b dy - \int_0^\delta \rho v_x dy$$

可得

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{v_x}{v_b} \right) dy \quad (9-30)$$

由于在边界层外 $\frac{v}{v_b} \approx 1$, $\int_\delta^\infty \left(1 - \frac{v_x}{v_b} \right) dy \approx 0$, 故也可将式 (9-30) 写成

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{v_x}{v_b} \right) dy \quad (9-30a)$$

位移厚度对于流动方向要求严格的流道设计具有重要的意义。例如风洞喷管, 为保证其出口气流的平直性, 必须将喷管壁面按 δ_1 值向外扩大, 以修正位移厚度的影响。

单位时间经过该面流入边界层的流体动量为 $\int_0^\delta \rho v_x^2 dy$; 如果以主流在边界层外边界对应点上的速度 v_b 流入该面, 其动量为 $v_b \int_0^\delta \rho v_x dy$ 。后者减去前者便是边界层内因黏性减速而减少的动量, 它相当于以速度 v_b 流入单位宽度、厚度为 δ_2 的面积上的动量, 故称 δ_2 为动量损失厚度。由

$$\rho v_b^2 \delta_2 = v_b \int_0^\delta \rho v_x dy - \int_0^\delta \rho v_x^2 dy$$

可得

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{v_x}{v_b} \left(1 - \frac{v_x}{v_b} \right) dy \quad (9-31)$$

同理也可将它写成

$$\delta_2 = \int_0^\infty \frac{v_x}{v_b} \left(1 - \frac{v_x}{v_b} \right) dy \quad (9-31a)$$

由第四节式 (a) 可得

$$\delta \frac{dp}{dx} = -\rho \frac{dv_b}{dx} \int_0^\delta v_b dy$$

而

$$v_b \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho v_x dy = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho v_b v_x dy - \frac{dv_b}{dx} \int_0^{\delta} \rho v_x dy$$

将以上二式代入式 (9-29), 得

$$\rho \frac{dv_b}{dx} \int_0^{\delta} (v_b - v_x) dy + \rho \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} v_x (v_b - v_x) dy = \tau_w \quad (9-29a)$$

将式 (9-30)、式 (9-31) 代入式 (9-29a), 得

或

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{d}{dx} (v_b^2 \delta_2) + \rho \delta_1 v_b \frac{dv_b}{dx} &= \tau_w \\ \frac{d\delta_2}{dx} + (2\delta_2 + \delta_1) \frac{1}{v_b} \frac{dv_b}{dx} &= \frac{\tau_w}{\rho v_b^2} \end{aligned} \right\} \quad (9-29b)$$

式 (9-29a)、式 (9-29b) 是动量积分关系式的另几种表示式。式 (9-29b) 中的 v_b 算是已知的, δ_1 、 δ_2 和 τ_w 是未知的, 它们都决定于边界层内的速度分布; 在计算曲面边界层时, 应用该式比较方便。

第七节 平板边界层的近似计算

在工程实际中, 大都采用边界层的动量积分关系式 (9-29) 对边界层进行近似计算。方法比较简单, 所得的结果也有足够的精确度。

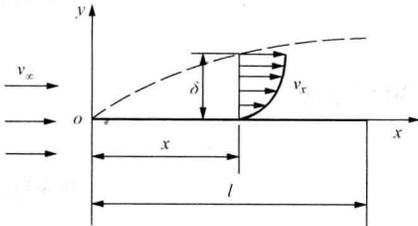


图 9-15 平板上的层流边界层

一、平板层流边界层的近似计算

均匀来流速度为 v_∞ 的不可压缩黏性流体纵向流过长 l 、宽 b 的极薄平板, 在平板上形成边界层。取平板的前缘点 o 为坐标原点, x 轴沿着平板 (即平行于 v_∞), y 轴垂直于平板, 如图 9-15 所示。因为顺来流方向放置的是极薄的平板, 可以认为不引起流动的改变。故在边界层外边界上 $v_b = v_\infty$, $dv_b/dx = 0$, 动量积分关系式 (9-29b) 的第一方程简化为

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho v_b^2} \quad (9-29b')$$

式中 δ_2 和 τ_w 都取决于边界层的速度分布, 为此选取

$$\frac{v_x}{v_\infty} = a_0 + a_1 \frac{y}{\delta} + a_2 \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 + a_3 \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 + a_4 \left(\frac{y}{\delta} \right)^4 \quad (a)$$

式中: a_0 、 a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 为待定系数, 由边界层条件确定。

(1) 在板面上: $y=0$, $u_x=u_y=0$, 由式 (a) 可得 $a_0=0$; $dv_b/dx=0$, 由第四节式 (a) 可得 $dp/dx=0$, 代入式 (9-28) 的第一式, 得 $\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0$, 由式 (a) 对 y 的二阶导数可得 $a_2=0$ 。

(2) 在边界层外边界上: $y=\delta$, $u_x=v_\infty$, $\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0$, 由式 (a) 及其对 y 的一、二阶导数可得

$$1 = a_1 + a_3 + a_4$$

$$0 = a_1 + 3a_3 + 4a_4$$

$$0 = a_3 + 2a_4$$

联解以上三式, 得 $a_1=2$, $a_3=-2$, $a_4=1$ 。于是, 平板层流边界层的速度分布为

$$\frac{v_x}{v_\infty} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4 \quad (9-32)$$

将式 (9-32) 代入式 (9-31), 得

$$\delta_2 = \int_0^\delta \left[2\left(\frac{y}{\delta}\right) - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4 \right] \left[1 - 2\left(\frac{y}{\delta}\right) + 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^4 \right] dy = \frac{37}{315} \delta \quad (b)$$

将式 (9-32) 代入牛顿切向应力公式 (2-14) 得

$$\tau_w = \mu \left(\frac{dv_x}{dy} \right)_{y=0} = \frac{2\mu}{\delta} v_\infty \quad (c)$$

将式 (b)、式 (c) 代入式 (9-29b'), 得

$$\frac{37}{315} \frac{d\delta}{dx} = \frac{2\nu}{v_\infty} \frac{1}{\delta} \quad \delta d\delta = \frac{630}{37} \frac{\nu}{v_\infty} dx$$

积分得

$$\delta^2 = \frac{1260}{37} \frac{\nu x}{v_\infty} + C$$

当 $x=0$ 时, $\delta=0$, 得 $C=0$, 故得平板层流边界层的厚度

$$\delta = 5.84 \left(\frac{\nu x}{v_\infty} \right)^{1/2} = 5.84 x Re_x^{-1/2} \quad (9-33)$$

可见, δ 随 x 的增大而增厚, 随 v_∞ 的增高而减薄。将式 (9-32)、式 (9-33) 代入式 (9-30)、式 (b)、式 (c), 得位移厚度、动量损失厚度、切向应力分别为

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left[1 - 2\left(\frac{y}{\delta}\right) + 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^4 \right] dy = 0.3\delta = 1.752 \left(\frac{\nu x}{v_\infty} \right)^{1/2} = 1.752 x Re_x^{-1/2} \quad (9-34)$$

$$\delta_2 = \frac{37}{315} \delta = 0.686 \left(\frac{\nu x}{v_\infty} \right)^{1/2} = 0.686 x Re_x^{-1/2} \quad (9-35)$$

$$\tau_w = 0.343 \rho v_\infty^2 \left(\frac{\nu}{v_\infty x} \right)^{1/2} = 0.343 \rho v_\infty^2 Re_x^{-1/2} \quad (9-36)$$

作用在平板单侧表面上的摩擦阻力、摩擦阻力系数分别为

$$F_{Df} = b \int_0^l \tau_w dx = 0.343 b (\mu \rho v_\infty^3)^{1/2} \int_0^l \frac{dx}{x^{1/2}} = 0.686 b (\mu \rho l v_\infty^3)^{1/2} = 0.686 b l \rho v_\infty^2 Re_l^{-1/2} \quad (9-37)$$

$$C_{Df} = \frac{F_{Df}}{b l \rho v_\infty^2 / 2} = 1.372 Re_l^{-1/2} \quad (9-38)$$

式中 $Re_l = \rho l v_\infty / \mu$ 为以平板长度和来流速度计算的雷诺数。

二、平板紊流边界层的近似计算

在上一段, 平板层流边界层的近似计算是以层流边界层微分方程和牛顿内摩擦定律为基

础的, 它们不能用于紊流边界层。普朗特曾经假定: 沿平板边界层内的紊流流动与圆管内的紊流流动相同。当 $Re_x = v_x x / \nu < 10^6$ 时, 该假定与实验相符。这样, 便可借用圆管紊流流动的有关关系式去设定平板紊流边界层内的速度分布和切向应力。这时, 圆管中心线上的最大速度 $v_{x\max}$ 相当于平板紊流边界层外边界上的速度 v_∞ , 圆管半径 r 相当于边界层厚度 δ , 并且假定平板边界层从前缘起就是紊流。为此取平板紊流边界层内速度分布

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \quad (9-39)$$

和壁面切向应力式 (6-14) $\tau_w = \frac{\lambda}{8} \rho v^2$

式中的沿程损失系数在 $4000 \leq Re \leq 10^5$ 范围内为式 (6-34a):

$$\lambda = \frac{0.3164}{Re^{0.25}} = \frac{0.3164}{(2v\delta/\nu)^{1/4}}$$

当速度分布为 1/7 次方时, 由表 6-2 得平均速度 $v = 0.8167v_{x\max} = 0.8167v_\infty$; 将 λ 、 v 代入式 (6-14), 得式 (6-14a):

$$\tau_w = 0.02333 \rho v_\infty^2 \left(\frac{v}{v_\infty \delta}\right)^{1/4}$$

将式 (9-39) 代入式 (9-31), 得

$$\delta_2 = \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right] dy = \frac{7}{72} \delta \quad (d)$$

将式 (d)、式 (6-14a) 代入式 (9-29b'), 得

$$\frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} = 0.02333 \left(\frac{v}{v_\infty \delta}\right)^{1/4} \quad \delta^{1/4} d\delta = 0.2400 \left(\frac{v}{v_\infty}\right)^{1/4} dx$$

积分后得 $\delta = 0.3817 \left(\frac{v}{v_\infty x}\right)^{1/5} x + C$

当 $x=0$ 时, $\delta=0$, 得 $C=0$, 故得平板紊流边界的厚度

$$\delta = 0.3817 \left(\frac{v}{v_\infty x}\right)^{1/5} x = 0.3817 x Re_x^{-1/5} \quad (9-40)$$

将式 (9-39)、式 (9-40) 代入式 (9-30)、式 (d)、式 (6-14a), 得位移厚度、动量损失厚度、切向应力分别为

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right] dy = 0.125\delta = 0.04771x \left(\frac{v}{v_\infty x}\right)^{1/5} = 0.04771x Re_x^{-1/5} \quad (9-41)$$

$$\delta_2 = 0.03711x \left(\frac{v}{v_\infty x}\right)^{1/5} = 0.03711x Re_x^{-1/5} \quad (9-42)$$

$$\tau_w = 0.02968 \rho v_\infty^2 \left(\frac{v}{v_\infty x}\right)^{1/5} = 0.02968 \rho v_\infty^2 Re_x^{-1/5} \quad (9-43)$$

作用在平板单侧表面上的摩擦阻力、摩擦阻力系数分别为

$$F_{\text{Dr}} = b \int_0^l \tau_w dx = 0.02968b\rho v_\infty^2 \left(\frac{v}{v_\infty}\right)^{1/5} \int_0^l x^{-1/5} dx$$

$$= 0.03710bl\rho v_\infty^2 \left(\frac{v}{v_\infty l}\right)^{1/5} = 0.03710bl\rho v_\infty^2 Re_l^{-1/5} \quad (9-44)$$

$$C_{\text{Dr}} = \frac{F_{\text{Dr}}}{bl\rho v_\infty^2/2} = 0.07420 Re_l^{-1/5} \quad (9-45)$$

此式与实验测量结果相当吻合。由于平板紊流边界层的补充关系式是借用圆管紊流流动的。实验证明，上述计算结果的适用范围为 $5 \times 10^5 \leq Re_l \leq 10^7$ 。当 $Re_l > 10^7$ 时，紊流边界层的速度分布更符合对数规律：

$$\frac{v_x}{v_*} = 5.85 \lg \frac{y v_*}{\nu} + 5.56 \quad (9-46)$$

按该式计算的平板紊流边界层摩擦阻力系数随雷诺数的变化如图 9-16 中的曲线 4，普朗特—施利希廷 (H.Schlichting) 根据该曲线得出经验公式

$$C_{\text{Dr}} = 0.455 (\lg Re_l)^{-2.58} \quad (9-47)$$

它的适用范围可以达到 $Re_l \leq 10^9$ 。后来，舒尔兹—格鲁诺 (Schultz—Grunow) 对平板紊流边界层进行了极其细致的实测，发现边界层内靠外侧部分的速度分布偏离对数规律，他们根据大量实测结果给出了平板紊流边界层摩擦阻力系数的内插公式：

$$C_{\text{Dr}} = 0.427 (\lg Re_l - 0.407)^{-2.64} \quad (9-48)$$

代表它的曲线是图 9-16 中的曲线 5，比曲线 4 的偏离小。

平板边界层各种摩擦阻力系数随雷诺数的变化示于图 9-16。

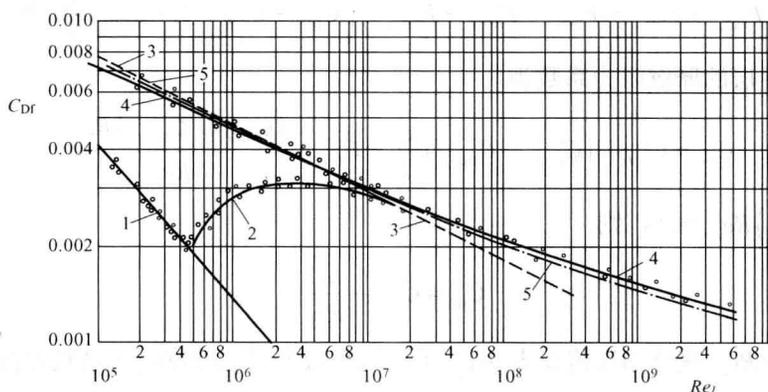


图 9-16 平板边界层的摩擦阻力系数

层流：1— $C_{\text{Dr}}=1.328Re_l^{-1/2}$ ，布拉休斯；层流—紊流的过渡：2— $C_{\text{Dr}}=0.455 (\lg Re_l)^{-2.58}-ARe_l^{-1}$ ；紊流：3— $C_{\text{Dr}}=0.074Re_l^{-1/5}$ ，普朗特；4— $C_{\text{Dr}}=0.455(\lg Re_l)^{-2.58}$ ，普朗特—施利希廷；5— $C_{\text{Dr}}=0.427(\lg Re_l-0.407)^{-2.64}$ ，舒尔兹—格鲁诺

下面分析紊流边界层与层流边界层的主要差别：

(1) 沿平板壁面法向，紊流边界层的速度比层流边界层的速度增长得快，即紊流边界层的速度分布曲线比层流边界层的要饱满得多，这是由于紊流边界层内有流体微团的横向脉

动, 流体的平均动量比层流的大, 因而不易分离;

(2) 沿平板壁面紊流边界层的厚度比层流边界层的厚度增长得快, 这仍然是由于紊流边界层内有流体微团的横向脉动, 促使其厚度迅速增长; 在计算式中, 紊流边界层的厚度与 $x^{4/5}$ 成正比, 层流边界层的厚度与 $x^{1/2}$ 成正比;

(3) 由图 9-16 可以看出, 不论是层流边界层还是紊流边界层, 它们的摩擦阻力系数都随雷诺数的增大而减小, 层流边界层的比紊流边界层的减小得快, 而且在相同雷诺数下紊流边界层的比层流边界层的大得多, 这仍然是由于紊流边界层内有流体微团的横向脉动, 致使产生更大的摩擦阻力。

三、平板混合边界层的近似计算

由本章第三节已知, 边界层内的流动状态主要由雷诺数决定。当雷诺数增大到某一临界值时, 边界层由层流转变为紊流, 成为混合边界层, 即平板前端是层流边界层, 后部是紊流边界层, 在层流转变为紊流边界层之间有一个过渡区。在大雷诺数下可以看成在某一截面上层流突然转变为紊流。

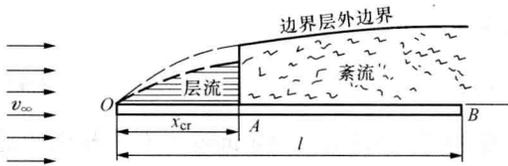


图 9-17 平板的混合边界层

由于混合边界层内的流动情况十分复杂, 为了简化计算, 在研究平板混合边界层的摩擦阻力时, 假设:

(1) 如图 9-17 所示, 在平板的 A 点层流边界层突然转变为紊流边界层;

(2) 紊流边界层的厚度变化、层内速度和切向应力的分布都从前缘点 O 开始计算。

用 F_{Df} 代表混合边界层的总摩擦阻力, F_{DfL} 代表层流边界层的总摩擦阻力, F_{DfT} 代表紊流边界层的总摩擦阻力, 根据这两个假设, 用下列方法去计算平板混合边界层的总摩擦阻力。

$$F_{Df} = F_{DfT, AB} + F_{DfL, OA} = F_{DfT, OB} - F_{DfT, OA} + F_{DfL, OA} = \left(C_{DfT} - C_{DfT, x_{cr}} \frac{x_{cr}}{l} + C_{DfL, x_{cr}} \frac{x_{cr}}{l} \right) bl \frac{\rho v_{\infty}^2}{2}$$

故平板混合边界层的摩擦阻力系数为

$$C_{Df} = C_{DfT} - \left(C_{DfT, x_{cr}} - C_{DfL, x_{cr}} \right) \frac{x_{cr}}{l} = C_{DfT} - \frac{\left(C_{DfT, x_{cr}} - C_{DfL, x_{cr}} \right) Re_{x_{cr}}}{Re_l}$$

令 $\left(C_{DfT, x_{cr}} - C_{DfL, x_{cr}} \right) Re_{x_{cr}} = A$, 则

$$C_{Df} = C_{DfT} - \frac{A}{Re_l} \quad (9-49)$$

A 随临界雷诺数 $Re_{x_{cr}}$ 变化的数值见表 9-1。平板混合边界层的摩擦阻力系数可按式 (9-49) 计算, A 的数值从表 9-1 中选取, 例如

$$\text{当 } 5 \times 10^5 \leq Re_l \leq 10^7 \text{ 时} \quad C_{Df} = \frac{0.0742}{Re_l^{0.2}} - \frac{A}{Re_l} \quad (9-49a)$$

$$\text{当 } 5 \times 10^5 \leq Re_l \leq 10^9 \text{ 时} \quad C_{Df} = \frac{0.455}{(\lg Re_l)^{2.58}} - \frac{A}{Re_l} \quad (9-49b)$$

由上节的分析已知, 层流边界层的摩擦阻力系数远小于紊流边界层的摩擦阻力系数, 因此增长层流段, 便可减小混合边界层的摩擦阻力。

表 9-1 A 随 Re_{x_c} 变化的数值

Re_{x_c}	3×10^5	5×10^5	10^6	3×10^6
A	1050	1700	3300	8700

第八节 曲面边界层的分离现象

如前所述,当不可压缩黏性流体纵向流过平板时,在边界层外边界上沿平板方向的速度是相同的,而且整个流场和边界层内的压强都保持不变。当黏性流体流经曲面物体时,边界层外边界上沿曲面方向的速度 v 是改变的,所以曲面边界层内的压强也将同样发生变化,对边界层内的流动将产生影响。曲面边界层的计算是很复杂的,这里不准备讨论它,这一节将分析曲面边界层的分离现象及其工程应用重要的卡门涡街。

一、面边界层的分离现象

如图 9-18 所示,黏性流体以均匀等速 v_∞ 定常地绕过曲壁面流动。沿上表面的流速先升高,一直升高到曲面上的某一点 M 而后降低。由伯努利方程可知,相应的压强先降低 ($dp/dx < 0$),而后再升高 ($dp/dx > 0$)。 M 点处边界层外边界上的速度最高,压强最低。沿曲面各点法向的速度剖面和压强变化曲线如图 9-18 所示。图中实线表示流线,虚线表示边界层的外边界。

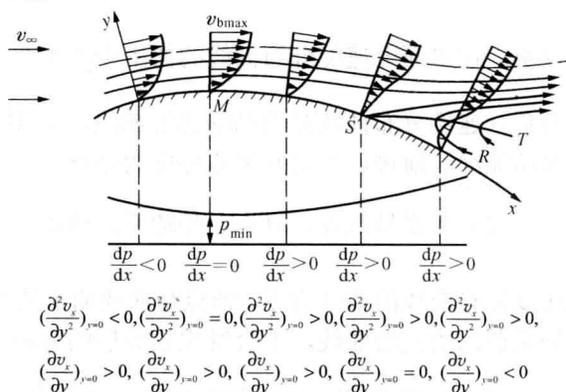


图 9-18 曲面边界层分离的形成示意

首先从流体在边界层内流动的物理过程

来说明曲面边界层的分离现象。当黏性流体流经曲面时,边界层内的流体微团被黏滞力阻滞,动能损耗,逐渐减速。越靠近物体壁面的流体微团,受黏滞力的阻滞作用越大,动能损耗越大,减速也越甚。在曲面的降压加速段中,由于流体的部分压强势能转变为流体的动能,故流体微团虽然受到黏滞力的阻滞作用,但仍有足够的动能使它继续前进。但是,在曲面的升压减速段中,流体的动能不仅要部分地转变为压强势能,而且还要继续损耗于黏滞阻力,这就使流体微团的动能损耗加大,流速迅速降低,边界层不断增厚。当流体流到曲面的某一点 S 时,靠近物体壁面的流体微团的动能已被消耗尽,这部分流体微团便停滞不前。跟着而来的流体微团也将同样停滞下来,以致越来越多地被停滞的流体微团在物体壁面和主流之间堆积起来。与此同时,在 S 点之后,压强的继续升高将使部分流体微团被迫反方向逆流,并迅速向外扩展,造成边界层的分离。在 ST 线上一系列流体微团的切向速度等于零, S 点称为边界层的分离点。分离时形成的旋涡,不断地被主流带走,在物体后部形成尾涡区。在渐缩渐扩管的渐扩段中,或其他形式的渐扩管中,也同样有可能出现边界层的分离现象。

下面从边界层理论来分析边界层内的速度分布,以便更明确曲面边界层分离的原因。假定曲面边界层为层流,而且边界层的厚度远小于曲面的曲率半径。这样便可将按平板推导的层流边界层微分方程应用于曲面边界层。在曲面上, $y=0$, $u_x=0$, $v_y=0$, 由式 (9-28) 的第一方程得

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \frac{dp}{dx}$$

即壁面附近速度梯度(即切向应力)随 y 的变化率决定于沿流动方向的压强梯度。又由于边界层外边界上的切向应力很小,在主流区则认为它趋于零,切向应力(即速度梯度)随 y 的变化率为负,即

$$\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right)_{y=\delta} < 0$$

这说明,在边界层外边界速度分布曲线的曲率中心在曲线的左侧。根据曲面绕流的流速和压强的变化,可将曲面边界层内的流动划分为三种情况。

(1) 压强降低区,从边界层起点至 M 点,外边界流速升高, $\frac{dp}{dx} < 0$, $\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right)_{y=0} < 0$, 这

说明:在壁面上速度分布曲线的曲率中心也在曲线的左侧,速度梯度 $\frac{\partial v_x}{\partial y} (> 0)$ 随 y 的变化率为负,速度分布曲线是前凸的光滑曲线,如图 9-19 (a) 所示;靠近壁面的流体质点有足够的动能继续前进,不会发生边界层的分离。

(2) 压强最低点, M 点,外边界流速最高, $\frac{dp}{dx} = 0$, $\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0$, 这说明:在壁面上

速度分布曲线的曲率为零,该点是曲线曲率的转折点(拐点),但整个边界层的速度分布曲线仍是前凸的光滑曲线,不会发生边界层的分离。

(3) 压强升高区, M 点的下游,外边界流速降低: $\frac{dp}{dx} > 0$, $\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right)_{y=0} > 0$, 这说明:在

壁面上速度分布曲线的曲率中心在曲线的右侧,速度梯度随 y 的变化率为正;从壁面到边界层外边界速度分布曲线的曲率中心由曲线的右侧转到它的左侧,曲率为零的转折点已经上移到曲线中间的某处,转折点以下的曲线是前凹的,转折点以上的曲线是前凸的,如图 9-19 (b) 所示。这时,如果壁面附近的流体质点还有动能,它们便继续前进,直至它们的动能被黏滯力和逆压梯度力消耗尽,在壁面上出现 $\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} = 0$ 的点 S' ,它附近的流体质点便停滞不前,

该点便是边界层的分离点。随着 x 的增长便会出现 $\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} < 0$,壁面附近的流体出现逆流,

形成边界层的分离。

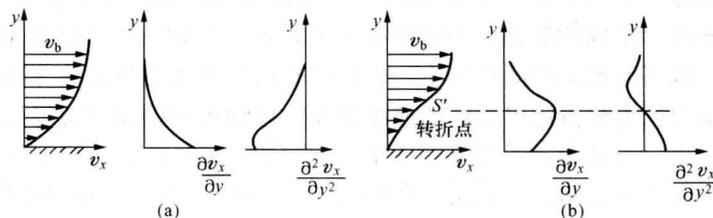


图 9-19 边界层内的速度分布

从以上的分析中可得如下结论：黏性流体在压强降低区内流动（加速流动）时，不会出现边界层分离，只有在压强升高区内流动（减速流动）时，才有可能出现分离，形成旋涡。尤其在主流的减速足够大的情况下，边界层的分离就一定会发生。例如，在圆柱体和球体这样的钝头体的后半部分，当流速足够大时，便会发生边界层的分离，这是由于在钝头体的后半部分有急剧的压强升高区、主流减速加剧的缘故。

二、绕过圆柱体的流动 卡门涡街

为了进一步说明边界层分离这一重要现象，可考察黏性流体绕过圆柱体的流动情况。将一个圆柱体放在静止的流体中，然后流体以相当于几个雷诺数 ($Re=v_\infty d/\nu$) 的很低的速度 v_∞ 绕流它。在开始瞬间与理想流体绕流圆柱体一样，流体在前驻点速度为零，而后沿圆柱体左右两侧流过，流动在圆柱体的前半部分是降压，速度逐渐增大到最大值，在后半部分是升压，速度逐渐下降，到后驻点重新等于零 [图 9-20 (a)]。以后逐渐增大来流速度，也即增大雷诺数，使圆柱体后半部分的压强梯度增加，以致引起边界层的分离 [图 9-20 (b)]。随着来流雷诺数的不断增加，圆柱体后半部分边界层中的流体微团受到更大的阻滞，分离点 S 一直向前移动。当雷诺数增加到大约 40 时，在圆柱体的后面便产生一对旋转方向相反的对称旋涡 [图 9-20 (c)]。雷诺数超过 40 后，对称旋涡不断增长并出现摆动，直到 $Re \approx 60$ 时，这对不稳定的对称旋涡分裂，最后形成几乎稳定的、非对称性的、多少有些规则的、旋转方向相反的交替旋涡，称为卡门涡街 [图 9-20 (d)]。它以比来流速度 v_∞ 小得多的速度 v_x 运动。图 9-21 所示为流体以不同雷诺数绕过圆柱体的流动情况，从中可以清楚地看出圆柱体后面的尾流中一对旋涡的形成过程。图 9-22 所示为在椭圆柱体后形成的卡门涡街。对有规则的卡门涡街，只能在 $Re=60 \sim 5000$ 的范围内观察到，而且在大多数情况下涡街是不稳定的。卡门证明，当 $Re \approx 150$ 时，圆柱体后的卡门涡街只有在两列旋涡之间的距离 h 与同列中相邻旋涡的间距 l 之比为 0.2806 的情况下才是稳定的。图 9-23 所示为卡门涡街的流谱。根据动量定理对图 9-23 所示的卡门涡街进行理论计算，得到作用在单位长度圆柱体上的阻力为

$$F_D = \rho v_\infty^2 h \left[2.83 \frac{v_x}{v_\infty} - 1.12 \left(\frac{v_x}{v_\infty} \right)^2 \right] \quad (9-50)$$

式中的速度比 v_x/v_∞ 可通过实验测得。

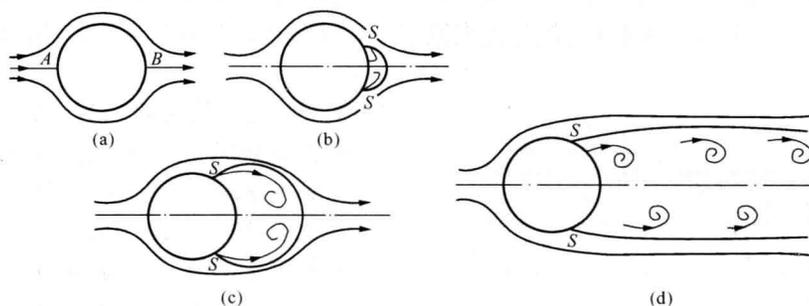


图 9-20 卡门涡街形成示意图

圆柱体后尾流的流动状态在小雷诺数时是层流，在较大雷诺数时形成卡门涡街。随着雷诺数的增加 ($150 < Re < 300$)，在尾流中出现流体微团的横向运动，层流状态过渡为紊流状态。到 $Re \approx 300$ 时，整个尾流区成为紊流，旋涡不断消失在紊流中。

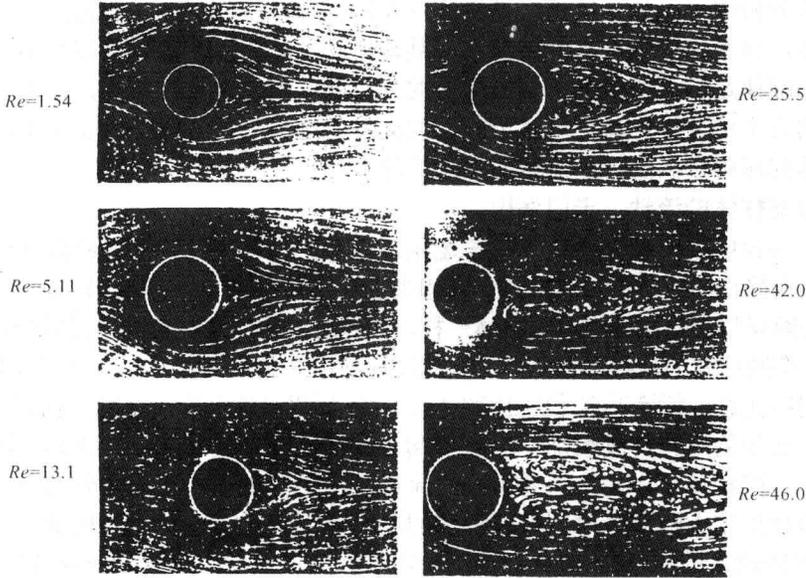


图 9-21 流体以不同雷诺数绕过圆柱体的流动情况

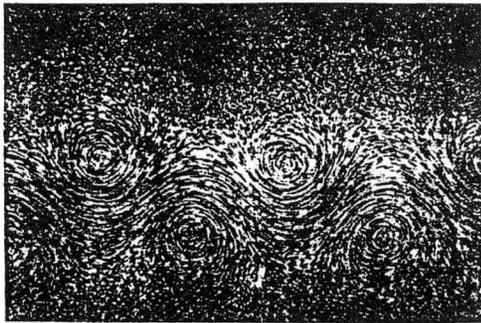


图 9-22 椭圆柱体后的卡门涡街

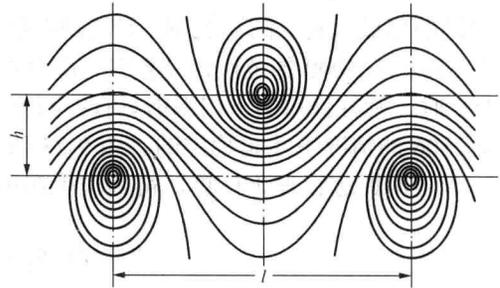


图 9-23 卡门涡街流谱

在圆柱体后尾流的卡门涡街中，两列旋转方向相反的旋涡周期性地均匀交替脱落，有一定的脱落频率。旋涡的脱落频率 f 与流体的来流速度 v_∞ 成正比，与圆柱体的直径 d 成反比，即

$$f = Sr v_\infty / d \tag{9-51}$$

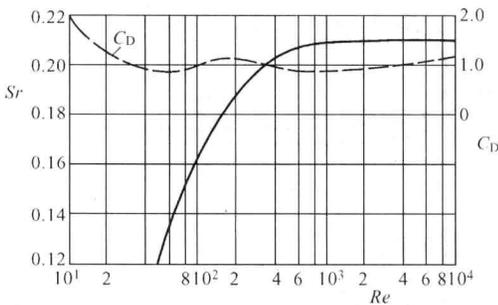


图 9-24 绕流圆柱体 Sr 与 Re 的关系曲线

式中的 Sr 为斯特劳哈尔数，它只与雷诺数有关。根据罗斯柯 (A. Roshko) 1954 年的实验结果， Sr 与 Re 之间的关系如图 9-24 中实线所示。在大雷诺数 ($Re > 1000$) 时，斯特劳哈尔数近似地等于常数，即 $Sr = 0.21$ 。

根据卡门涡街的上述性质可制成卡门涡街流量计。在管道内以与流体流动相垂直的方向插入一根圆柱体测杆，在测杆下游产生卡门涡街。在 $Re = 10^3 \sim 1.5 \times 10^5$ 范围内，斯特劳哈尔数基本上等于常数，测得了旋涡的脱落频率，便可由式 (9-51) 求得流速，从而可确定管道内流体的流量。这里，测定流量的问题归

结为测定卡门涡街脱落频率的问题，而频率的测量方法有热敏电阻丝法、超声波束法等，这里不作介绍。

旋涡自圆柱体后部周期性地交替脱落，会对圆柱体形成交变的横向作用力。这是因为旋涡正在形成的一侧的绕流情况恶化，边界层的分离点前移，分离点之后流体的压强大致等于分离点的压强，致使这一侧的总压力较低；而旋涡脱落的一侧的绕流情况改善，沿圆柱体后部的流体压强逐渐升高，致使这一侧的总压力较高，它们的合力方向总是自旋涡脱落的一侧指向旋涡形成中的一侧。随着旋涡从圆柱体上周期性地交替脱落，这种合力交替地作用在圆柱体上，形成对圆柱体的横向交变负荷，其交变频率与旋涡的脱落频率相等。交变的横向作用力会使圆柱体发生横向振动，特别是当作用力的交变频率与圆柱体的固有频率相等时，会使圆柱体共振，产生大振幅的振动和很大的内应力，影响圆柱体的正常工作，甚至会使圆柱体破坏。如果旋涡自圆柱体后部周期性地交替脱落是在气体中，则会引起声响效应，风吹电线发出的呜呜声便是常见的例子。在管式空气预热器中，空气横向绕流管束所形成的卡门涡街，会引起管箱中气柱的振动。特别是当旋涡自圆柱体后部周期性地交替脱落的频率与管箱的声学驻波振动频率相等时，会引起强烈的声学驻波振动，产生很大的噪声，甚至将管箱振鼓、破裂，破坏性很大。解决办法只能是合理设计管箱。

第九节 物体阻力 自由沉降速度

一、物体阻力

1. 物体阻力

在讨论不可压缩理想流体的均匀等速流绕过圆柱体无环流的平面流动时，曾经得出结论：流体作用在圆柱体上的压强的合力等于零。倘若无分离地绕流任一无限长的物体，也可得到同样的结论。显然，这结论是和实际不相符的。事实上，即使黏性很小的流体绕流物体时，物体总是受到压强和切向应力的作用。这些力的合力 F 可分解为平行于来流方向的阻力 F_D 与垂直于来流方向的升力 F_L 。阻力是由绕流物体的流体产生切向应力和压强差造成的，故阻力可分为摩擦阻力和压差阻力。

摩擦阻力是黏性直接作用的结果。当黏性流体绕流物体时，流体对物体表面作用有切向应力，由切向应力形成摩擦阻力；摩擦阻力是作用在物体表面的切向应力在来流方向上分力的总和。压差阻力是黏性间接作用的结果。当黏性流体绕流物体（比如圆柱体）时，如果在压强升高的区域内边界层发生分离，形成旋涡，从分离点开始圆柱体后部的流体压强大致接近于分离点的压强，不能恢复到理想流体绕流圆柱体时应有的压强数值（见图 8-30），这样就破坏了作用在圆柱体上压强的对称性，产生圆柱体前后的压强差，形成压差阻力；压差阻力是作用在物体表面的压强在来流方向上分力的总和。旋涡所携带的能量也将在整个尾涡区中被消耗而变成热，最后散逸掉。压差阻力的大小与物体的形状有很大的关系，所以又称形状阻力。摩擦阻力与压差阻力之和称为物体阻力。对物体阻力的形成过程，虽然从物理观点看完全清楚，但是要从理论上来确定一个任意形状物体的阻力，还是十分困难的；目前，都是用实验测定它们的阻力。

图 9-25 和图 9-26 给出了圆球和圆盘以及无限长圆柱体的阻力系数与雷诺数的关系曲线。图中指出，对于直径不同的圆球或圆柱体，在不同雷诺数下测得的阻力系数点都排在各自的一条曲线上。在小雷诺数情况下，边界层是层流，边界层的分离点在物体最大截面的附近，

并且在物体后面形成较宽的尾涡区，从而产生很大的压差阻力。当雷诺数增加到在边界层分离以前、边界层已由层流变为紊流时，由于在紊流中流体微团相互掺混，发生强烈的动量交换，分离点将向后移动一大段，尾涡区变窄，从而使阻力系数显著降低。该现象将流动划分为亚临界流动和超临界流动。对于圆球（见图 9-25），在 $Re \approx 3 \times 10^5$ 时，阻力系数从大约 0.44 急剧下降到 0.1 以下。对于圆柱体（见图 9-26），从 $Re \approx 2 \times 10^5$ 开始，到 $Re \approx 5 \times 10^5$ ，阻力系数从大约 1.2 急剧下降到 0.3。这种阻力的突然降低确实是由于边界层内层流转变为紊流的结果。普朗特曾用下面的实验证实了这一现象。他在紧靠圆球上层流分离点稍前面套一圈金属丝，人工地把层流边界层转变为紊流边界层，结果在雷诺数小于 3×10^5 的亚临界时，阻力显著降低。这时，分离点从原来在圆球前驻点后约 80° 处向后移到约 $110^\circ \sim 120^\circ$ 。在超临界范围内，由于阻力大大减小，物体表面上的压强分布更加接近于理想流体的压强分布，如图 8-30 所示。

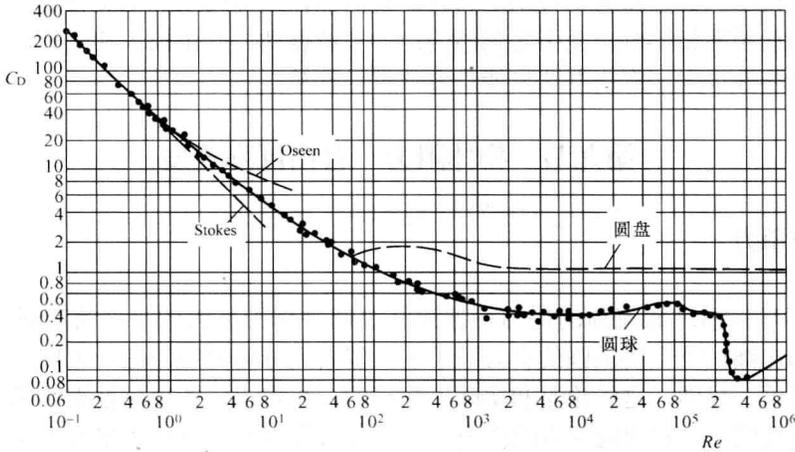


图 9-25 圆球和圆盘的阻力系数与雷诺数的关系曲线

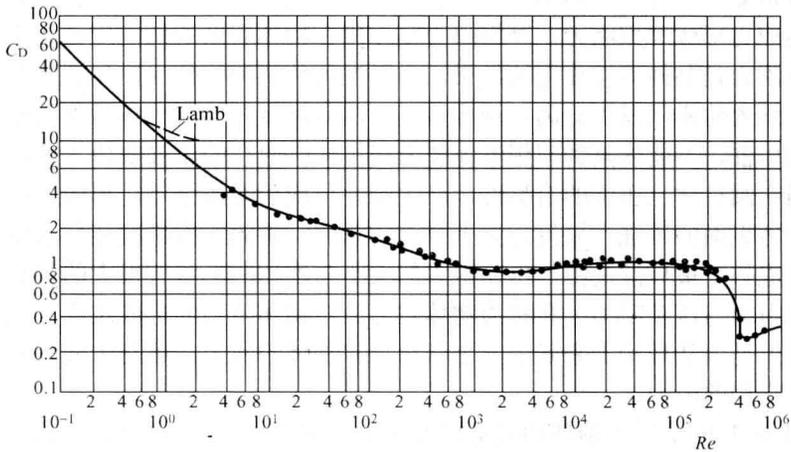


图 9-26 圆柱体的阻力系数与雷诺数的关系曲线

2. 阻力系数

众多学者对黏性流体绕流物体阻力系数的计算进行了分析, 提出一些半经验关系式或经验关系式, 现择要简介如下:

(1) 圆球的阻力系数。如前所述, 对于黏性流体绕过圆球的定常层流流动, 斯托克斯在略去惯性平方项和重力的情况下求得圆球的阻力公式 (9-25) 和阻力系数式 (9-26), 按工程应用的精度要求它们的适用范围: $Re \leq 1$ 。

奥森 (Ossen) 在部分考虑惯性平方项的情况下求得比式 (9-26) 稍有改进的圆球阻力系数

$$C_D = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{3}{16} Re \right) \quad (9-52)$$

适用范围: $Re \leq 5$ 。

克莱契柯 (Klyachko) 和普特内木 (Putnam) 提出了与圆球阻力实验曲线吻合较好的圆球阻力系数

$$C_D = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{1}{16} Re^{2/3} \right) \quad (9-53)$$

适用范围: $1 < Re < 10^3$ 。另有比式 (9-53) 更简单、实用的圆球阻力系数

$$C_D = 13 Re^{-1/2} \quad (9-54)$$

适用范围: $10 < Re < 10^3$ 。在 $10^3 < Re < 2 \times 10^5$ 范围内, 圆球的阻力系数在 0.43~0.47 之间, 可取

$$C_D \approx 0.45 \quad (9-55)$$

(2) 圆柱体的阻力系数。对于黏性流体绕过圆柱体的定常层流流动, 斯托克斯在略去惯性平方项和重力的情况下进行过分析, 由于导得的结果不能同时满足圆柱面与无穷远的边界条件, 成为斯托克斯佯谬。

奥森在部分考虑惯性平方项的情况下求得圆柱体阻力系数

$$C_D = \frac{8\pi}{Re [\ln(8/Re) - 0.0772]} \quad (9-56)$$

在 $Re \leq 1$ 的范围内, 该式的计算与实验结果相符。

怀特 (white) 依据圆柱体阻力实验曲线提出的圆柱体阻力系数经验关系式

$$C_D = 1 + 10 Re^{-2/3} \quad (9-57)$$

适用范围: $1 < Re < 2 \times 10^5$ 。

下面讨论绕流儒可夫斯基翼型的升力系数 C_L 与阻力系数 C_D 。图 8-40 中的实线是 $Re = v_\infty l / \nu$ (l 为翼弦长) 时对该翼型的实测结果。实测的升力系数比理论上的略低些, 在冲角 $-10^\circ \sim 10^\circ$ 部分, 实测曲线接近斜率为 2π 的直线。随着 α 的增大, 斜率逐渐减小, 到了临界冲角 ($\alpha \approx 11^\circ$) 升力系数达到最大值。以后, 冲角继续增大, 升力系数反而减小。这时, 流体在翼型上表面形成较大的扩压区, 以致引起边界层的分离。随着冲角的增大, 分离点向前移动, 在翼型上表面的大部分及其后面形成很大的尾涡区, 使翼型上、下表面的压差减小, 因此升力和升力系数都急剧下降。最大升力系数的相应点称为失速点, 因为超过该点飞机和涡轮机的性能均将恶化。再看翼型的阻力系数与冲角的关系。当冲角较小时, 翼型前后的压差很小, 总的阻力中摩擦阻力是主要的, 阻力和阻力系数变化不大。当冲角增大到接近失速点时, 阻力系数才迅速上升, 这是由于边界层分离, 产生很大的尾涡区, 翼型前后的压强差急剧增加,

产生了很大的压差阻力。

在风洞中可以测定任何实际翼型在不同冲角下的升力和阻力,也可绘出与图 8-40 相似的升力系数和阻力系数与冲角的关系曲线。

【例 9-3】 速度 $v_\infty=8\text{m/s}$ 、密度 $\rho=1.25\text{kg/m}^3$ 、运动黏度 $\nu=1.4\times 10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$ 的风横向吹过直径 $d=1.25\text{m}$ 的烟筒,烟筒的高度远大于它的直径,试确定风作用在单位高度烟筒上的气动力。

【解】 由已知条件可得雷诺数

$$Re = \frac{v_\infty d}{\nu} = \frac{8 \times 1.25}{1.4 \times 10^{-5}} = 7.143 \times 10^5$$

由图 9-26 查得 $C_D=0.3$ 。由式 (5-47) 得风作用在单位高度烟筒上的气动力

$$F_D = C_D \frac{\rho v_\infty^2}{2} A = 0.3 \times \frac{1.25 \times 8^2}{2} \times 1.25 = 15 \text{ (N/m)}$$

3. 减阻方法

层流边界层产生的物体表面的切向应力比紊流的小得多。为了减小摩擦阻力,应该使物体上的层流边界层尽可能长,也就是使层流边界层转变为紊流边界层的转捩点尽可能往后推移。我们知道,加速流动比减速流动容易使边界层保持层流,因此,为了减小高速飞机翼上的摩擦阻力,在航空工业上采用一种“层流型”的翼型,就是将翼型的最大速度点尽可能向后移,这可以通过将翼型的最大厚度点尽可能向后移来实现。但是,对这种翼型机翼表面的光滑度要求很高,否则粗糙表面会使边界层保持不了层流。

要减小压差阻力,必须采用产生尽可能小的尾涡区的物体外形,也就是使边界层的分离点尽量向后推移。由于边界层分离点的位置与边界层内压强升高区的压强梯度直接有关,所以物体的外形应使流经物体表面压强升高区的流体压强梯度尽可能小些。圆头尖尾流线型的物体就具有这种外形,例如涡轮机的叶片叶型和机翼翼型都是这样。对具有流线型外形物体的绕流,在小冲角大雷诺数的情况下,实际上可以认为它不发生边界层分离。根据尼古拉兹 1929 年对渐扩管的实验,只有半张角在 3.5° 以上才出现边界层分离。因此可以减小扩张角,以防止边界层分离。

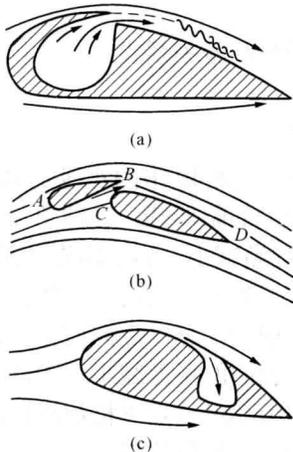


图 9-27 边界层的控制

另外,还可用控制边界层的方法来防止边界层分离,以减小阻力。图 9-27 (a) 所示,为用特殊的压缩机从机翼内部射出流体,使边界层内已经减速的流体获得能量,以推迟或防止边界层分离。图 9-27 (b) 为开缝机翼,机翼 CD 前有一小的前缘缝翼 AB ,主流的部分流体经翼缝射向机翼的上表面,将尚未分离的缝翼边界层带入主流,同时从 C 点形成新的边界层;在适当条件下,边界层可以延伸到后缘点 D ,而不分离。图 9-27 (c) 所示,为利用缝隙抽吸的方法将边界层内已经减速的流体吸入机翼内,并在缝隙后的机翼上表面形成新的边界层,以防止边界层的分离;如缝隙布置适当,还可使层流边界层的转捩点向下游推移,减小摩擦阻力。

二、自由沉降速度

现在来研究圆球在静止流体中的自由沉降。直径为 d 的圆球从静止开始在静止流体中自由沉降,在重力的作用下沉降的速度逐渐增大,同时圆球受

到的流体阻力也逐渐增大。当作用在圆球上的重力 W 与作用在圆球上的流体的浮力 F_B 、流体的阻力 F_D 达到平衡，即

$$W = F_B + F_D$$

时，圆球在流体中将以等速度 v_f 自由沉降。这一极限速度 v_f 称为圆球的自由沉降速度。第二章第六节所讲测量流体黏度的落球方法，即用测量小球在实验液体中的自由沉降速度，再按下面介绍的关系式计算液体的黏度。将圆球的重力 $W = \frac{1}{6}\pi d^3 g \rho_s$ 、流体的浮力 $F_B = \frac{1}{6}\pi d^3 g \rho$ 和流体的阻力 $F_D = C_D \times \frac{1}{4}\pi d^2 \times \frac{\rho v_f^2}{2}$ 代入上式，得

$$v_f = \left(\frac{4gd}{3C_D} \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right)^{1/2} \quad (9-58)$$

将有关圆球沉降时雷诺数对应的阻力系数代入式 (9-58)，便可得到圆球的自由沉降速度。例如当 $Re \leq 1$ 时，将式 (9-26) 代入式 (9-58)，得

$$v_f = \frac{1}{18} \frac{g}{\nu} \frac{\rho_s - \rho}{\rho} d^2 \quad (9-59)$$

当 $Re = 10 \sim 1000$ 时，将式 (9-54) 代入式 (9-58)，得

$$v_f = \left(\frac{4}{39} \frac{g}{\nu^{1/2}} \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right)^{2/3} d \quad (9-60)$$

当 $Re = 1000 \sim 2 \times 10^5$ 时，将式 (9-55) 代入式 (9-58)，得

$$v_f = \left(2.963gd \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right)^{1/2} \quad (9-61)$$

圆球在气体中沉降时，由于气体的密度 ρ 比圆球的密度 ρ_s 小得多，故可从 v_f 算式的密度差值中略去气体的密度。

如果圆球被以速度 v 垂直上升的流体带走，则圆球的绝对速度为

$$v_{ab} = v - v_f$$

因此，当 $v = v_f$ 时，圆球的绝对速度 $v_{ab} = 0$ ，即圆球悬浮在流体中静止不动，这时流体的上升速度 v 称为圆球的悬浮速度。当流体的上升速度大于圆球的自由沉降速度时，圆球将被带走。

【例 9-4】 在煤粉炉炉膛内的不均匀流场中，烟气流最小的上升速度 $v = 0.45 \text{ m/s}$ ，烟气的平均温度 $t = 1300^\circ\text{C}$ ，在该温度下烟气的运动黏度 $\nu = 234 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ，煤的密度 $\rho_s = 1120 \text{ kg/m}^3$ 。试计算这样流速的烟气能带走多大直径的煤粉颗粒？

【解】 由于煤粉颗粒的直径 d 是个未知数，不能确定 Re ，所以只能先假定 Re 的范围，例如 $Re < 1$ ，应用式 (9-59) 求出 d ，然后再验算 Re 是否与假定的相符。如果相符，则计算的结果就是需求的数值；如果不符，则需重算。烟气在标准状态下的密度 $\rho_0 = 1.34 \text{ kg/m}^3$ ， 1300°C 烟气的密度为

$$\rho = 1.34 \times \frac{273}{273 + 1300} = 0.2326 \text{ (kg/m}^3\text{)}$$

代入式 (9-59), 并略去密度差值中气体的密度, 得

$$d = \left(\frac{18\rho v v}{g\rho_s} \right)^{1/2} = \left(\frac{18 \times 0.2326 \times 234 \times 10^{-6} \times 0.45}{9.807 \times 1120} \right)^{1/2} = 0.2 \times 10^{-3} (\text{m}) = 200 (\mu\text{m})$$

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{0.45 \times 0.2 \times 10^{-3}}{234 \times 10^{-6}} = 0.385 < 1$$

计算结果与原来关于雷诺数的假定相符, 计算成立。上升速度为 0.45m/s 的烟气流能带走直径小于 200 μm 的煤粉颗粒。

第十节 自由淹没射流

在日常生活和生产中人们经常遇到射流现象, 例如, 自来水龙头射出一束水, 喷气式歼击机尾部喷管喷出一股高速气流, 从烟囱冒出烟气以及锅炉喷燃器向炉膛喷射燃料气流等。这些喷射出的一股流体的流动都称为射流。由于流体脱离了原来限制它流向的管子, 在充满流体的空间中继续扩散流动, 故称这种射流为自由射流。

自由射流一般都是紊流。现在来观察流体从喷管喷射到温度和密度均与射流相同的静止流体中的情况。由于射流是紊流流动, 流体不但沿喷管轴线方向运动, 而且还发生剧烈的横向运动, 所以射流与静止流体不断地互相掺混, 进行质量和动量交换, 从而带动着周围原来静止的流体一起向前运动。离喷口越远, 被射流带动的质量越多, 射流的宽度 (2b) 越宽 (横截面逐渐增大), 射流呈喇叭形的扩散状, 如图 9-28 所示。同时, 射流将一部分动量传递给带入的流体, 因而射流的速度逐渐降低。最后射流的动量全部消失在空间流体中, 射流也在静止流体中淹没了, 所以又称它为自由淹没射流。

根据自由淹没射流的特性, 可把整个射流划分为若干区域, 如图 9-29 所示。

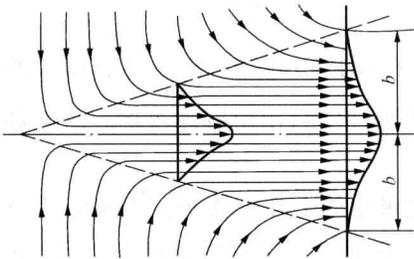


图 9-28 由孔口射出的自由射流

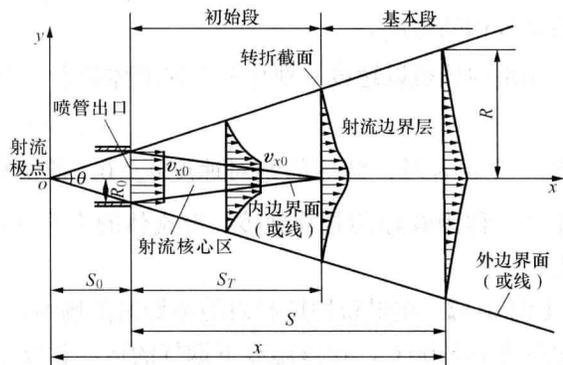


图 9-29 自由淹没射流的速度分布

假定流体以超过临界速度的初速 v_{x0} 均匀地从喷管出口流出, 为紊流流动。在流动中周围流体不断掺入, 射流的宽度逐渐增大, 保持射流初速 v_{x0} 的区域 (称为射流核心区) 逐渐缩小。在离开喷管出口一定距离以后, 保持初速 v_{x0} 的射流核心区消失。射流核心区完全消失的横截面称为转折截面, 其离开喷管出口的距离用 S_T 代表。在喷管出口与转折截面之间的射流段称为初始段, 射流核心区就在初始段中。在转折截面以后的射流段称为基本段, 在基本段中轴

向流速逐渐减小,最后到零。射流与静止流体的交界面(流速为零)称为外边界面(或线),轴向流速还保持初速 v_{x0} 的边界面(流速为 v_{x0})称为内边界面(或线)。在内、外边界面之间的区域称为射流边界层,在转折截面以后整个射流都变成射流边界层。射流外边界线的交点 o 称为射流极点,它的位置在喷管内。外边界线之间的夹角 θ 称为射流极角,也称为射流扩散角。

射流边界层有如下基本特征:①射流边界层的宽度小于射流的长度;②在射流边界层的任何横截面上,横向分速 v_y 远比纵向(轴向)分速 v_x 为小,可近似地认为,射流速度就等于它的纵向分速;③射流边界层各横截面上的压强是近似不变的,由于周围静止流体的压强各处都相同,所以可以认为,整个射流区内的压强都一样,温度、密度都相同;④射流边界层的内、外边界线都是直线。

根据上述特征,单位时间沿 x 方向各横截面的动量保持不变,即

$$\iint_A \rho v_x^2 dA = \rho_0 v_{x0}^2 A_0 = \text{常数} \quad (9-62)$$

式中: ρ 为 dA 处的流体密度; ρ_0 、 A_0 为喷管出口的流体密度、截面积。

一、轴对称射流

从圆形截面喷管或孔口喷出的射流属轴对称射流,如图 9-29 所示。如果流体从半径为 R_0 的喷管以速度 v_{x0} 射出,由于射流的密度不变,故由式(9-62)得

$$2\pi \int_0^R v_x^2 r dr = \pi R_0^2 v_{x0}^2, \quad 2 \int_0^{R/R_0} \left(\frac{v_x}{v_{x0}}\right)^2 \frac{r}{R_0} d\left(\frac{r}{R_0}\right) = 1$$

由于 $\frac{r}{R_0} = \frac{r}{R} \frac{R}{R_0}$, $\frac{v_x}{v_{x0}} = \frac{v_x}{v_{xm}} \frac{v_{xm}}{v_{x0}}$; R 和中心线轴向速度 v_{xm} 只是 x 的函数,与截面上的半径 r 无关,上式又可写成

$$2 \left(\frac{v_{xm}}{v_{x0}}\right)^2 \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \int_0^1 \left(\frac{v_x}{v_{xm}}\right)^2 \frac{r}{R} d\left(\frac{r}{R}\right) = 1$$

根据射流理论, $\int_0^1 \left(\frac{v_x}{v_{xm}}\right)^2 \frac{r}{R} d\left(\frac{r}{R}\right) = 0.0464$, 代入上式,得

$$\frac{R}{R_0} = 3.28 \frac{v_{x0}}{v_{xm}}$$

在转折截面上 $v_{xm} = v_{x0}$, 故转折截面的半径 $R = 3.28R_0$ 。由于射流的外边界线是直线,即射流半径 R 与到射流极点的距离 x 成正比;根据阿布拉莫维奇(Г.Н.Абрамович)的研究,引入反映喷管形式的系数 α ($=0.07 \sim 0.08$),取 $R = 3.4\alpha x$, 代入上式,得

$$\frac{v_{xm}}{v_{x0}} = \frac{0.966}{\alpha x / R_0} = \frac{0.966}{\alpha S / R_0 + 0.294} \quad (9-63)$$

这是由于 $\frac{\alpha x}{R_0} = \frac{\alpha(S+S_0)}{R_0}$, 而 $\frac{\alpha S_0}{R_0} = \frac{\alpha x}{R} = \frac{1}{3.4} = 0.294$ 。在转折截面上 $v_{xm} = v_{x0}$, 代入式(9-63), 可得转折截面至射流极点的距离为

$$x_T = 0.966 R_0 / \alpha \quad (9-64)$$

由于 $\tan(\theta/2) = R/x = 3.4\alpha$, 故轴对称射流的扩散角 $\theta = 26.8^\circ \sim 30.4^\circ$ 。

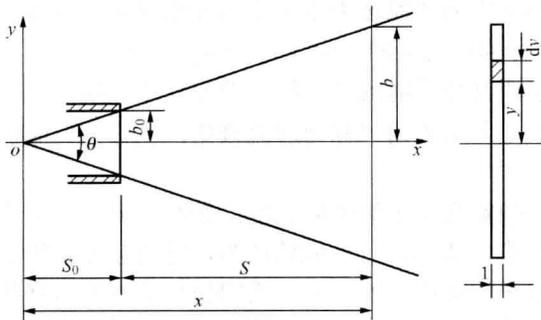


图 9-30 平面射流

二、平面射流

从扁长方形截面孔口或缝隙喷出的射流属平面射流,如图 9-30 所示。如果流体从厚度为 1、高为 $2b_0$ 的长方形孔口以速度 v_{x0} 射出,由于射流的密度不变,故由式 (9-62) 得

$$2 \int_0^b v_x^2 dy = 2b_0 v_{x0}^2$$

$$\left(\frac{v_{xm}}{v_{x0}}\right)^2 \frac{b}{b_0} \int_0^1 \left(\frac{v_x}{v_{xm}}\right)^2 d\left(\frac{y}{b}\right) = 1$$

根据射流理论, $\int_0^1 \left(\frac{v_x}{v_{xm}}\right)^2 d\left(\frac{y}{b}\right) = 0.2847$, 代入上式, 得

$$\frac{v_{xm}}{v_{x0}} = \frac{1.874}{(b/b_0)^{1/2}}$$

在转折截面上 $v_{xm}=v_{x0}$, 故转折截面的半高度 $b=3.512b_0$ 。根据阿布拉莫维奇的研究, 扁长方形截面孔口的系数 $\alpha=0.10\sim 0.11$, $b=2.4\alpha x$, 代入上式, 得

$$\frac{v_{xm}}{v_{x0}} = \frac{1.21}{(\alpha x/b_0)^{1/2}} = \frac{1.21}{(\alpha S/b_0 + 0.417)^{1/2}} \quad (9-65)$$

这是由于 $\frac{\alpha x}{b_0} = \frac{\alpha(S+S_0)}{b_0}$, 而 $\frac{\alpha S_0}{b_0} = \frac{\alpha x}{b} = \frac{1}{2.4} = 0.417$ 。在转折截面上 $v_{xm}=v_{x0}$, 代入式 (9-65), 可得转折截面至射流极点的距离为

$$x_T = 1.46b_0/\alpha \quad (9-66)$$

由于 $\tan(\theta/2) = b/x = 2.4\alpha$, 故平面射流的扩散角 $\theta=27^\circ\sim 30^\circ$ 。

研究不同形式的射流喷口, 要分析它们的射流特性, 尤其是它们的射出能力, 即射流离开出口后在一定距离内保持较大中心线轴向速度 v_{xm} 的能力。由分析式 (9-63)、式 (9-65) 可得结论: ①无论哪种射流, 提高射流初速度 v_{x0} 和增大出口尺寸 R_0 或 b_0 , 都会增加射流的射出能力; ②在射流初速度和出口尺寸相同的条件下, 扁长方形截面的射流要比圆形截面的射流具有较大的射出能力, 这是由于扁长方形截面射流的 v_{xm} 的降低与距离 x 的平方根成反比, 而圆形截面射流的 v_{xm} 的降低与距离 x 成反比。这就是说, 在射出相同的距离上, 扁长方形截面射流的 v_{xm} 高于圆形截面射流的。结合工程应用, 比如锅炉喷燃器, 扁长方形截面射流的射出距离长, 可以射到炉膛深处, 增加火焰内部的扰动; 圆形截面射流的射出距离短, 容易被其他气流卷吸, 增加气流的掺混。根据这些特性, 按照炉膛内燃烧的要求, 便可对锅炉喷燃器的一、二、三次风进行选型、设计和布置。



习 题

9-1 图 9-31 所示为间距 $a=1.5\text{mm}$ 的二平板沿相反方向运动, $U_1=2$ $U_2=2\text{m/s}$, 计示压强 $p_{e1}=p_{e2}=9.806\times 10^4\text{Pa}$, 油的黏度 $\mu=0.49\text{Pa}\cdot\text{s}$, 求作用在每块平板上的切向应力。

[980Pa]

9-2 沿倾斜平面均匀流下薄液层, 试用图 9-32 所示的自由体去证明: (1) 流层内的速度分布为 $v_x = \frac{\rho g}{2\mu} (b^2 - s^2) \sin\theta$; (2) 单位宽度上的流量为 $q'_v = \frac{\rho g}{3\mu} b^3 \sin\theta$ 。

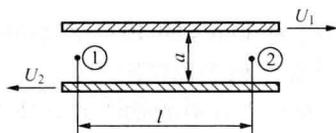


图 9-31 习题 9-1 图

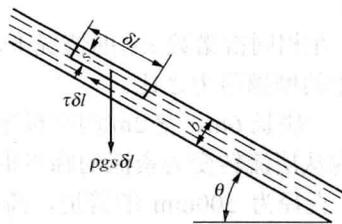


图 9-32 习题 9-2 图

9-3 图 9-33 所示斜楔形滑块以 $U=1.2\text{m/s}$ 的速度运动, 假设滑块的宽度为 300mm , 且在宽度的方向 (垂直纸面方向) 没有油流出, 油的黏度 $\mu=0.784\text{Pa}\cdot\text{s}$, 试求滑块能够支承的载荷和滑块的阻力。 [1.504×10⁶N, 1181N]

9-4 试求作用在图 9-33 所示滑块上的最大压强和作用位置, 并求作用在滑块上的压力中心。 [5.648×10⁷Pa, 0.1125m, 0.0911m]

9-5 两个同心圆管, 外管半径为 $2r_1$, 内管半径为 $2r_2$, 各以角速度 ω_1 和 ω_2 同向旋转。试证明两圆管间的速度分布为

$$v_\theta = \frac{1}{r_1^2 - r_2^2} \left[r(r_1^2 \omega_1 - r_2^2 \omega_2) - \frac{r_1^2 r_2^2}{r} (\omega_1 - \omega_2) \right]$$

9-6 在图 9-7 中, 假设柱塞以 $U=0.6\text{m/s}$ 的速度向油缸方向运动, 试求柱塞带入油缸内油的流量, 并求作用在柱塞上的切向应力和总力 F 。

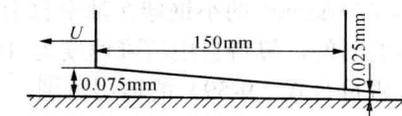


图 9-33 习题 9-3 图

$$[2.33 \times 10^{-6} \text{m}^3/\text{s}, 1226 \text{Pa}, 635.4 \text{N}]$$

9-7 油的相对密度 $d=0.85$, 黏度 $\mu=3 \times 10^{-3} \text{Pa}\cdot\text{s}$, 流过 $r_1=15\text{cm}$ 、 $r_2=7.5\text{cm}$ 的圆环形管道。若管道水平放置时每米管长的压强降为 196Pa 。试求 (1) 油的流量; (2) 外管壁上的切向应力; (3) 作用在每米内管上的轴向力。 [1.636m³/s, 6.747Pa, 4.03N/m]

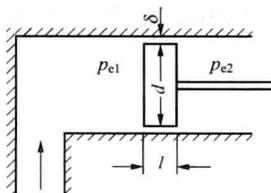


图 9-34 液压部件习题 9-8 图

9-8 图 9-34 所示为液压部件, 控制阀长度 $l=15\text{mm}$ 、直径 $d=25\text{mm}$, 阀与缸体之间的径向间隙 $\delta=0.005\text{mm}$, 油液的压强在阀的左侧为 $p_{e1}=20\text{MPa}$, 右侧为 $p_{e2}=1\text{MPa}$, 试确定间隙中的漏油量。 [57.6mm³/s]

9-9 温度为 25°C 的空气, 以 30m/s 的速度纵向绕流一块极薄的平板, 压强为大气压强, 试计算离平板前缘 200mm 处边界层的厚度为多少? [1.92 mm]

9-10 温度为 20°C 、密度为 925kg/m^3 、运动黏度为 $7.9 \times 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$ 的油流, 以 60cm/s 的速度纵向绕流一长 50cm 、宽 15cm 的薄平板, 试求总摩擦阻力和边界层厚度。在 20°C 时油的 $\nu=7.9 \times 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$ 。 [0.556N, 47.4mm]

9-11 平板层流边界层内速度分布规律为 $\frac{v_x}{v_\infty} = 2\frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$, 试求边界层厚度、摩擦阻力系数与雷诺数的关系式。 [$\delta = 5.48 \text{Re}_x^{-1/2}$, $C_{\text{Df}} = 1.46 \text{Re}_l^{-1/2}$]

9-12 若平板层流边界层内的速度分布为正弦曲线 $u_x = v_\infty \sin\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right)$, 试求 δ 、 C_{Df} 与 Re 之间的关系式。
 $[\delta = 4.79xRe_x^{-1/2}, C_{Df} = 1.31Re_l^{-1/2}]$

9-13 根据边界层内紊流速度分布的指数规律 $u_x/v_\infty = (y/\delta)^{1/9}$ 和 $\lambda = 0.185Re^{-1/2}$, 试求紊流边界层厚度 δ 。
 $[0.259xRe_x^{-1/6}]$

9-14 在相同雷诺数 Re_l 的情况下, 试求 20°C 的水和 30°C 的空气各平行流过长度为 l 的平板时产生的摩擦阻力之比。
 $[3.36]$

9-15 一块长 6m、宽 2m 的平板平行静止地安放在速度为 60m/s 的 40°C 空气流中, 在平板边界层内从层流转变为紊流的临界雷诺数 $Re_x = 10^6$ 。试计算平板的摩擦阻力。
 $[69.2N]$

9-16 直径为 500mm 的管道, 流过 30°C 的空气, 在垂直于管道的轴线方向插入直径为 10mm 的卡门涡街流量计, 测得旋涡的脱落频率为 105 (1/s), 试求管道的空气流量。
 $[0.98m^3/s]$

9-17 已知汽车的行驶速度为 60km/h, 垂直于运动方向的投影面积为 $2m^2$, 阻力系数为 0.3, 静止空气的温度为 0°C, 试求汽车克服空气阻力所作的功率。
 $[1.797 kW]$

9-18 在风洞中, 温度为 20°C 的空气以 10m/s 的风速垂直吹向直径为 50cm 的圆盘, 试求作用在圆盘上的力。
 $[13N]$

9-19 将密度 $\rho = 899.4kg/m^3$ 的透平油放在有刻度的玻璃量筒内, 让直径 3mm、密度 $\rho_s = 7791kg/m^3$ 的小钢球在油中自由降落, 用秒表测得等速降落的钢球通过量筒上两个刻度之间的时间, 算得自由沉降速度为 11cm/s, 试按式 (9-59) 求出油的黏度, 并验算一下雷诺数是否符合式 (9-59) 的适用范围。
 $[0.3072Pa \cdot s]$

9-20 某采暖沸腾炉的料层温度为 1000°C, 烟气的运动黏度 $\nu = 1.67 \times 10^{-6} m^2/s$, 料层内燃料的颗粒密度为 $2294kg/m^3$, 平均粒径为 1.68mm。试问通过料层最小需要多大风速, 才能使颗粒处于悬浮状态?
 $[19.2 m/s]$

9-21 某台 220t/h 锅炉的一次风喷燃器的喷管采用圆形截面, 出口直径为 500mm, 出口风速为 30m/s, 求距离风口 2m、2.5m 和 5m 处的中心风速。若喷管采用的是扁形截面, 出口宽度为 500mm, 则距离风口同上三个距离处的中心风速各为多少? 要使扁形截面射流得到与圆形截面射流同样的三个中心风速, 则各离开风口多少距离?

$[30m/s, 26.5m/s, 15.3m/s; 30m/s, 29.5m/s, 22.4m/s; 2.25m, 3.32m; 11.8m]$

第十章 气体的二维流动

在能源与动力工程中遇到的气体流动问题，除一维流动外，还有多维流动问题：诸如气体在喷管出口外的流动，在斜切喷管斜切部分中的非设计工况流动，气体绕涡轮机叶片特别是长叶片的流动，燃气在炉膛内的流动等。根据专业教学基本要求，本章主要讨论微弱压强波在空间的传播，气体二维定常流动中的微弱压强波与斜激波及其气流参数的计算，激波反射和相交的定性分析等，为气体二维定常复杂流场的计算，为进一步研究气体的多维流动奠定基础。

第一节 微弱压强波在空间的传播 马赫锥

由第七章已知，微弱压强波是以当地声速相对于气体传播的。在那里，由于有管壁的限制，压强波只沿管道作一维传播。如果在空间的某一点有一个扰动源，在没有任何限制的情况下，它对匀态静止气体的扰动将用当地声速以球面波的形式向四面八方传播。为了能够比较形象地说明传播情况，假设在空间有一个不动的扰动源，每隔一秒发出一次微弱扰动，现在分析前四秒钟微弱压强波在匀态气体中的传播情况。由于气体是流动，还是不流动，是亚声速流动，还是超声速流动，压强波在空间的传播情况不同，所以讨论以下四种情况。

1. 气体静止不动 ($v=0$)

到四秒末压强波向四面八方传播的情况如图 10-1 (a) 所示。压强波是以扰动源为中心的同心球面，球面压强波沿径向向外传播的绝对速度是当地的声速 c 。如果不考虑微弱压强波在传播过程中可能有的极微量损失，随着时间的延续，扰动将传遍整个流场，即微弱压强波在静止气体中的传播是无界的。

2. 气流为亚声速的均匀等速流 ($v < c$ ，自左向右流动)

到四秒末球面压强波的传播情况如图 10-1 (b) 所示。压强波相对于气流的传播速度仍然是 c ，但是，成为压强波的牵连运动的气体流动却把它们带向下游，而且不同瞬时发出的压强波被带向下游的距离不同。这样，压强波在顺流和逆流方向上的传播就不对称了。压强波在各个方向的绝对传播速度是沿球面径向向外的声速与气流速度的几何和。如果取气流的方向为正方向，则压强波在球心连线顺流方向的绝对传播速度为 $v+c$ ，而在逆流方向则为 $v-c < 0$ 。这说明，扰动仍能逆流传播。如果不考虑微弱压强波在传播过程中可能有的极微量损失，随着时间的延续，扰动将传遍整个流场，即微弱压强波在亚声速气流中的传播也是无界的。

3. 气流恰为声速的均匀等速流 ($v=c$ ，自左向右流动)

到四秒末球面压强波的传播情况如图 10-1 (c) 所示。压强波相对于气流的传播速度仍然是 c ，而作为牵连运动的气流却以同样大小的速度把它们带向下游。这样，压强波在球心连线顺流方向的绝对传播速度为 $v+c=2c$ ，而在逆流方向则为 $v-c=0$ ，即压强波向上游的绝对传播速度为零。这说明，压强波已不能逆流向上游传播。随着时间的延续，球面波不断向外扩大，但无论它扩到多么大，也只能影响扰动源下游的半个空间，扰动源上游的半个空间则始终不受影响。这就是说，受扰区（又称影响区）与无扰区（又称寂静区）之间有个分界面，这个分界面就是以扰动源为公切点的球面波阵的公切面，称为马赫锥。所以说，在声速流中，

微弱压强波的传播是有界的，界限就是马赫锥

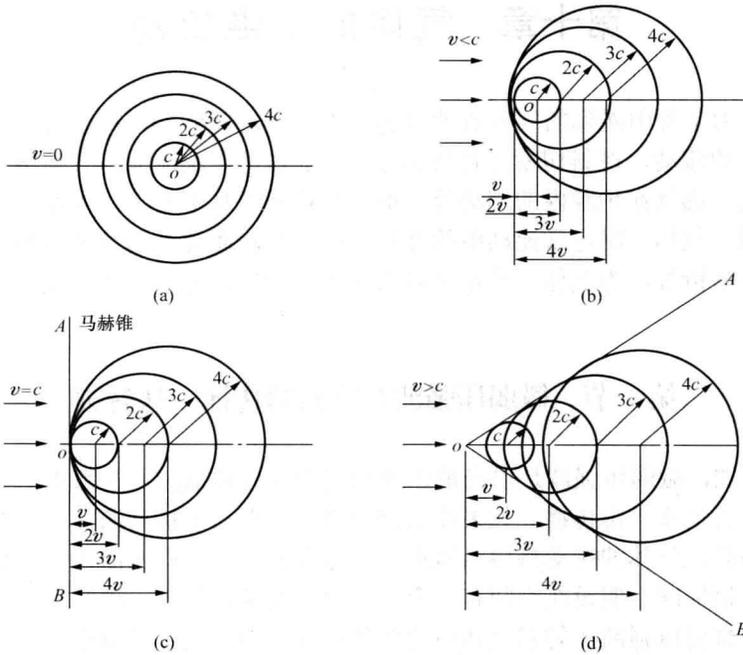


图 10-1 微弱压强波在匀态气体中的传播

4. 气流为超声速的均匀等速流 ($v > c$, 自左向右流动)

到四秒末球面压强波的传播情况如图 10-1 (d) 所示。压强波相对于气流的传播速度仍然是 c ，而作为牵连运动的气流却以大于它们的速度把它们带向下游。这样，压强波在球心连线顺流方向的绝对传播速度为 $v+c > 2c$ ，而在逆流方向则为 $v-c > 0$ ，即沿球心连线压强波在逆流方向的绝对传播速度也是沿着气流方向的，压强波被气流带向扰动源的下游。随着时间的延续，无论压强波如何扩展，扰动所能影响的区域只局限在球面波阵的包络圆锥面内。这个包络圆锥面就是已经提到的马赫锥。马赫锥以内为受扰区，马赫锥以外为无扰区。所以说，在超声速流中，微弱压强波的传播是有界的，界限就是马赫锥。马赫锥的半顶角，即圆锥母线与来流速度方向之间的夹角，称为马赫角，用 α 代表：

$$\sin \alpha = \frac{c}{v} = \frac{1}{Ma}, \quad \alpha = \sin^{-1} \left(\frac{1}{Ma} \right) \quad (10-1)$$

即马赫角的大小决定于气流马赫数。马赫数越大，马赫角越小；反之亦然。当 $Ma=1$ 时， $\alpha=90^\circ$ ，达到马赫锥的极限位置，即图 10-1 (c) 中 AOB 公切面。当 $Ma < 1$ 时，微弱压强波的传播已无界，根本不存在马赫锥，式 (10-1) 已无意义。

在超声速的均匀等速流中，微弱压强波阵形成的马赫锥的母线都是直线，这是因为，不论用哪个球面压强波去计算它的半顶角，其数值都一样。如果把均匀等速流的速度 v 分解为垂直于马赫锥面和沿着马赫锥面的分速度 v_n 和 v_t ，则

$$v_n = v \sin \alpha = c$$

即气流垂直于马赫锥面向内的分速度与微弱压强波向外传播的速度大小相等而方向相反，即微弱压强波垂直于马赫锥面的绝对传播速度等于零。所以，马赫锥在气流中稳定不动；微弱压

强波将沿着马赫锥面以 v_r 的速度向下游传播。

倘若产生微弱扰动的是一根无限长的直扰动线，则微弱扰动将以圆柱面压强波的形式以当地声速向外传播。投影到与扰动线相垂直的平面上，便是以声速向外传播的扰动圆，这便是微弱扰动传播的二维问题。对于在空间不动的这种扰动线，当来流的速度 $v=0$ 、 $v<c$ 、 $v=c$ 、 $v>c$ 时，同样会出现类似于图 10-1 所示的微弱压强波的四种传播情况。这时，原来的马赫锥成为马赫线（也称马赫波）；顺着气流方向看，称 OA 为左伸马赫线， OB 为右伸马赫线。

倘若气流是非均匀等速的超声速流，流线是弯曲的，流动参数也是不均匀的。则当一个微弱扰动发出后，它不仅随气流沿着弯曲的路线向下游运动，而且它相对于气流的传播速度也随当地的声速而异。这样，受扰区与无扰区的分界面就不再是母线为直线的圆锥面，而是如图 10-2 所示的某种尖锥曲面。马赫角仍按当地马赫数由式 (10-1) 确定。

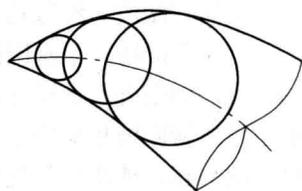


图 10-2 尖锥曲面

如果微弱扰动源以亚声速、声速或超声速在匀态静止气体中运动，则微弱压强波相对于扰动源的传播，同样会出现图 10-1 (b)、(c) 或 (d) 所示的情况。对于以亚声速运动的扰动源，由于微弱压强波的传播速度大于扰动源的运动速度，微弱压强波会超越扰动源向前传播，扰动可以传遍整个流场，即扰动的传播无界。对于以超声速运动的扰动源，由于微弱压强波的传播速度小于扰动源的运动速度，微弱压强波的传播总是落后于扰动源。这样，便形成了以扰动源为顶点的马赫锥，锥内为受扰区，锥外为无扰区；即扰动的传播有界，界限是同扰动源一起运动的马赫锥。这一结论也适用于它的极限情况，即以声速运动的扰动源。

综上所述可以看出，扰动源与气流的相对速度是亚声速还是超声速，微弱压强波在空间的传播大不相同：前者，微弱压强波可以逆流向上游传播，扰动的传播无界；后者，微弱压强波不能逆流向上游传播，扰动的传播有界，界限就是马赫锥（线）。由于它们的流动图谱不一样，它们的解法也有原则的区别。

第二节 微弱压强波 气流折转角

一、膨胀波

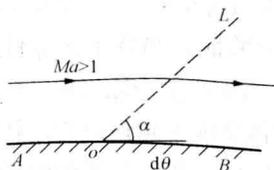


图 10-3 膨胀波

如图 10-3 所示，超声速的均匀等速流沿着在 O 点向外折转一微元角度 $d\theta$ 的壁面 AOB 流动， O 点就是扰动源，沿 AO 流动的超声速气流经过 O 点将产生一道马赫波 OL ，它与来流方向之间的夹角按式 (10-1) 应为 $\alpha = \sin^{-1}(1/Ma)$ 。气流经过马赫波 OL 也将向外折转一微元角度 $d\theta$ ，以适应平行于壁面 OB 流动的边界条件要求。折转后的气流通流截面比原先的通流截面

加大了。由第七章的讨论已知，随着通流截面有微量的增大，超声速气流将有微量加速，而压强、密度和温度都将有微量的降低。可见，气流经过马赫波的变化过程是个膨胀过程，所以称它为膨胀波。

倘若超声速均匀等速流沿着有若干个微元外折转角的凸壁面 $AO_1O_2\cdots O_nB$ 流动（见图 10-4），在壁面的每一折转处都要产生一道膨胀波，这些膨胀波分别用 O_1L_1 、 O_2L_2 、 \cdots 、 O_nL_n 代表，

它们与各自的波前气流方向之间的夹角分别用 α_1 、 α_2 、 \dots 、 α_n 代表。由于经过膨胀波气流加速降温, 故有

$$Ma_1 < Ma_2 < \dots < Ma_n$$

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n$$

这样, 每经过一道膨胀波, 气流便向外折转一个微元角度, 再加上马赫角又逐渐减小, 以致后面的膨胀波对 x 轴的倾角都比它前面的小, 往下游延伸的膨胀波系是逐渐发散的。

超声速气流绕外凸曲壁面的流动, 可以视为沿无数微元外折转的流动, 这样就有无数道向外散发的膨胀波。经过这无数道膨胀波, 流动参数将经过连续的变化而达到有一定量的变化, 气流也将折转一个有限的角度。在极限情况下, 设想让曲壁面缩短成一条线(图 10-5 中的 O 点), 则绕外凸曲壁面的流动就变成了绕有一定外折转角的折壁面的流动, 发自曲壁面的那无数道膨胀波也集中于壁面折转处, 组成一扇形膨胀波区, 如图 10-5 所示。原先沿 AO 壁面流动的超声速均匀等速流经过扇形膨胀波区, 逐渐折转加速, 流动参数也随之连续变化, 最后成为沿 OB 壁面流动的超声速均匀等速流, 气流参数也都有了一定量的变化。这样的平面流动被称为绕凸钝角(外钝角)的超声速流动或普朗特-迈耶流动。这种扇形膨胀波被称为简单波或普朗特-迈耶波。

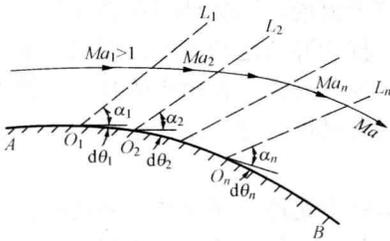


图 10-4 多个微元外折转壁面上的膨胀波

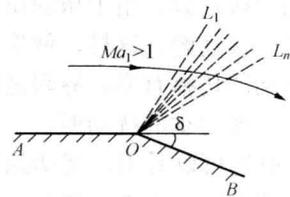


图 10-5 左伸扇形膨胀波

以上关于普朗特-迈耶流动的分析, 只着重分析了使超声速气流得以膨胀加速的壁面几何条件。不言而喻, 与此同时自然也要具备能够降压膨胀的压强条件。对于无界的超声速气流绕物体的外部流动问题, 一般总是具备这种条件的。但是, 对于气体的内部流动问题, 则要视具体情况而定。对于如图 10-6 所示涡轮机的斜切喷管, 能不能形成以 A 为中心的膨胀波区, 则要由喷管出口外背压的高低来决定。例如图 10-6 (a) 所示的收缩喷管, 当背压 p_{amb} 等于最小截面 AB 处的临界压强 p_{cr} 时, 气流离开最小截面 AB 后不再膨胀; 当背压 p_{amb} 低于最小截面的临界压强 p_{cr} 时, 气流离开最小截面 AB 之后, 将形成以 A 为中心的膨胀波区。经膨胀波区气流降压、加速、偏转, 直至压强与背压相等, 气流则由声速流变成了超声速流, 其方向也要偏离喷管轴线一定角度, 如图 10-6 (b) 所示。对于如图 10-6 (c) 所示的缩放喷管, 也有类似的情况, 即当背压 p_{amb} 等于喷管正常运行时截面 AB 处的额定压强 p_1 时, 气流离开 AB 截面之后, 不再膨胀; 当背压 p_{amb} 低于额定压强 p_1 时, 气流离开截面 AB 之后, 将形成以 A 为中心的膨胀波区, 经膨胀波区气流降压、加速、偏转, 直至压强与背压相等, 气流除速度增高外, 其方向也要偏离喷管轴线一定角度, 如图 10-6 (d) 所示。对于直的二维收缩喷管和缩放喷管(见图 7-11、图 7-13), 如果仍以 AB 表示出口截面, 当环境背压分别低于它们出口的临界压强和额定压强时, 都将形成以 A 和 B 为中心的出口外膨胀波系, 这便是图 7-11

(b) 中的 (3) 和图 7-13 (b) 中的 (1) 所表示的情况。

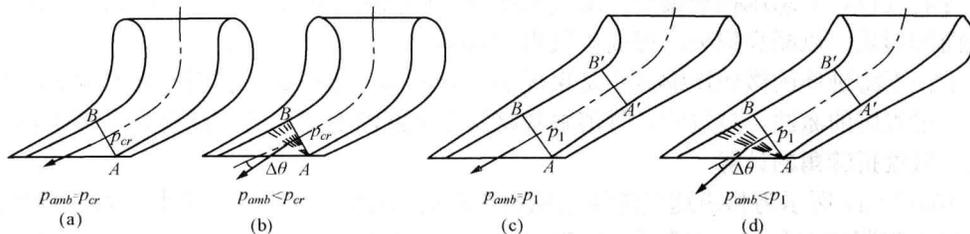


图 10-6 斜切喷管

二、微弱压缩波

如图 10-7 所示, 超声速均匀等速流沿内凹壁面 AOB 流动, 壁面在 O 点向内折转一微元角度 $d\theta$ 。这样, O 点就是一个扰动源, 超声速气流经过 O 点将产生一道马赫波 OL , 气流越过它将内折转一微元角度 $d\theta$ (是逆时针折转, 为正), 与壁面 OB 平行。随着通流截面有微量的减小, 超声速气流的速度将有微量的降低, 而气流的压强、密度和温度均有微量的升高。可见, 超声速气流沿内折转一微元角度 $d\theta$ 的内凹壁面流动时产生的马赫波是微弱压缩波。气流越过微弱压缩波的流动为等熵的压缩过程。

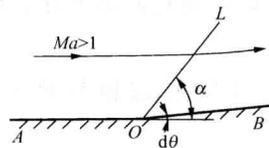


图 10-7 微弱压缩波

如果超声速气流沿着在 $O_1O_2\cdots O_n$ 点分别内折转微元角度 $d\theta_1$ 、 $d\theta_2$ 、 \cdots 、 $d\theta_n$ 的内凹壁面流动, 如图 10-8 所示, 则超声速气流经过每一个扰动点, 都要产生一道微弱压缩波。气流越过这一系列的微弱压缩波时, 其速度逐渐降低, 而压强、密度和温度逐渐升高, 气流的马赫数逐渐减小, 而马赫角逐渐增大, 即

$$Ma_1 > Ma_2 > \cdots > Ma_n$$

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$$

再加上气流接连向内折转, 往下游延伸的微弱压缩波系是逐渐聚拢的。

如图 10-9 所示, 超声速气流沿内凹曲壁面的流动相当于沿无限多微元内折转壁面的流动, 在内凹曲壁面的每一点都将产生一道微弱压缩波, 这无限多微弱压缩波组成连续的等熵压缩波区。气流经过每道微弱压缩波, 都内折转微元角度, 流动参数都有微量的变化; 经过整个压缩波区, 气流的折转角和参数值都将发生有限量的变化。

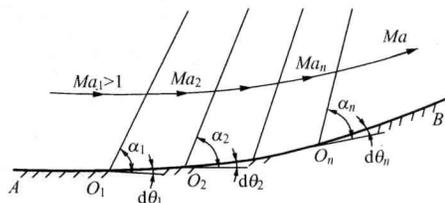


图 10-8 多个微元内折转壁面上的微弱压缩波

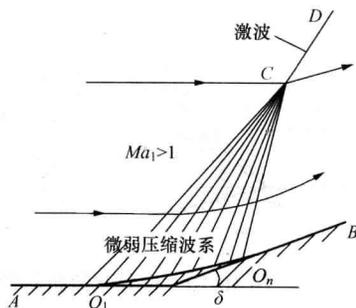


图 10-9 内凹曲壁面上的微弱压缩波系

超声速飞机扩压进气道的内壁有时便设计成内凹曲壁面的形式。这样, 气流的减速增压接近于等熵过程, 其总压损失最小。压气机中超声速级的叶栅剖面, 有一段也往往设计成内凹曲壁面的形式, 以减少损失, 提高压气机的效率。

由于往下游延伸的微弱压缩波系是聚拢的, 延伸到一定距离, 它们便开始相交, 直至聚集成有一定程度的激波。越过它, 气流参数将发生突跃的变化, 压缩过程是非等熵的。

三、气流折转角的计算

图 10-10 (a) 所示为超声速气流绕凸钝角的流动, 扇形膨胀波区由无数左伸马赫线组成。现在从扇形膨胀波中任取一条膨胀波 OL_i 来分析经过它气流速度大小和方向的变化。如图 10-10 (b) 所示, 膨胀波 OL_i 与波前流速方向之间的夹角为马赫角 α 。为了导出气流折转角, 沿 OL_i 取紧邻两侧封闭周线 $abcd$ 表示的控制体; 波前的气流速度为 v , 波后的气流速度 $v' = v + dv$, 将它们沿平行于和垂直于 OL_i 的方向分解, 则连续方程为

$$\rho v_n = \rho' v'_n$$

由于作用在 ad 和 bc 面上的压强相等, 故沿 OL_i 方向的动量方程为

$$\rho' v'_n v'_\tau - \rho v_n v_\tau = 0$$

$$v_\tau = v'_\tau \tag{10-2}$$

即超声速气流越过膨胀波时, 平行于波面的分速度保持不变, 气流速度的变化由垂直于波面的分速度变化来确定。

按照惯例, 仍规定气流的方向角 (气流速度的方向与 x 轴正向之间的夹角) 反时针方向为正, 顺时针方向为负, 则由式 (10-2) 可得

$$v \cos \alpha = (v + dv) \cos (\alpha - d\theta)$$

式中, $\cos (\alpha - d\theta) = \cos \alpha \cos d\theta + \sin \alpha \sin d\theta \approx \cos \alpha + d\theta \sin \alpha$, 代入上式得

$$d\theta = -\frac{1}{\tan \alpha} \frac{dv}{v} \tag{a}$$

此式表明, 越过左伸膨胀波, 气流速度的相对增量与气流方向角的增量异号。

图 10-11 所示为超声速气流绕凸钝角流动时由无数右伸马赫线组成的扇形膨胀波, 按照上述同样的方法可以证明

$$d\theta = \frac{1}{\tan \alpha} \frac{dv}{v} \tag{b}$$

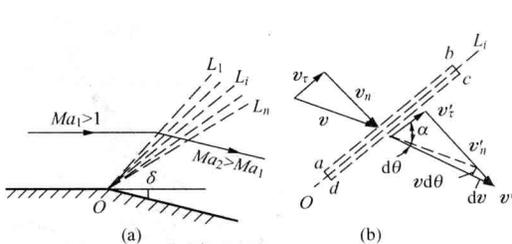


图 10-10 推导气流折转角用图

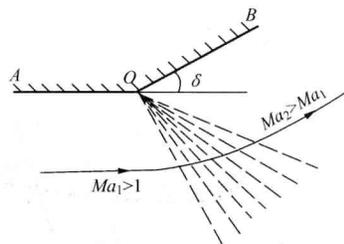


图 10-11 右伸扇形膨胀波

意即越过右伸膨胀波, 气流速度的相对增量与气流方向角的增量同号。合并式 (a)、式 (b), 得

$$d\theta = \mp \frac{1}{\tan \alpha} \frac{dv}{v} \quad (10-3)$$

负号属于越过左伸膨胀波的流动，正号属于越过右伸膨胀波的流动。

由于 $dv/v = dM_*/M_*$, $\tan \alpha = 1/(Ma^2 - 1)^{1/2} = \left[\left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} M_*^2 \right) / (M_*^2 - 1) \right]^{1/2}$, 代入式 (10-3), 得

$$d\theta = \mp \left[\frac{(\gamma+1)(M_*^2 - 1)}{(\gamma+1) - (\gamma-1)M_*^2} \right]^{1/2} \frac{dM_*}{M_*}$$

完成对上式的积分, 得

$$\theta = \mp \left\{ \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)^{1/2} \arctan \left[\frac{(\gamma-1)(M_*^2 - 1)}{(\gamma+1) - (\gamma-1)M_*^2} \right]^{1/2} - \arctan \left[\frac{(\gamma+1)(M_*^2 - 1)}{(\gamma+1) - (\gamma-1)M_*^2} \right]^{1/2} \right\} + \theta_0 \quad (10-4)$$

$$\theta = \mp \nu(M_*) + \theta_0$$

如用马赫数表示, 则为

$$\theta = \mp \left\{ \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)^{1/2} \arctan \left[\frac{\gamma-1}{\gamma+1} (Ma^2 - 1) \right]^{1/2} - \arctan (Ma^2 - 1)^{1/2} \right\} + \theta_0 \quad (10-5)$$

$$\theta = \mp \nu(Ma) + \theta_0$$

式中, θ_0 为积分常数, 由气流的已知马赫数 Ma (或速度系数 M_*) 和对应的气流方向角 θ 确定。特别是, 当 $M_* = 1$ ($Ma = 1$) 时, 假设气流的起始方向角 $\theta = 0$ (图 10-12), 则积分常数 $\theta_0 = 0$, 因此

$$\theta = \mp \nu(M_*) = \mp \nu(Ma) \quad (10-6)$$

式中 $\nu(M_*)$ 或 $\nu(Ma)$ 称普朗特—迈耶角。它表示当气流由声速膨胀加速到超声速时, 气流应有的折转角。

当 $M_* = 1$ ($Ma = 1$) 时, $\nu = 0$;

$$\text{当 } M_* = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)^{1/2} \text{ (} Ma \rightarrow \infty \text{)} \text{ 时, } \nu_{\max} = \frac{\pi}{2} \left[\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)^{1/2} - 1 \right]$$

这是最大的普朗特—迈耶角。当 $\gamma = 1.4$ 时, $\nu_{\max} = 130^\circ 27'$; 当 $\gamma = 1.3$ (例如过热蒸汽) 时, $\nu_{\max} = 159^\circ 12'$ 。它只是理论上的最大值, 因为随着气流的不断加速, 气温将不断降低, 当气温降低到它的液化温度 (空气为 81k) 时, 气体将凝结液化, 上述论证便都不适用了。

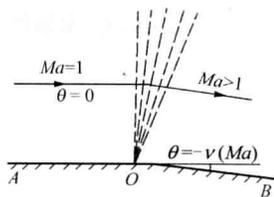


图 10-12 讨论普朗特—迈耶角用图

【例 10-1】 图 10-6 (d) 所示斜切喷管截面 AB 处的气流速度系数 $M_{*1} = 1.628$ ($Ma_1 = 1.989$), 压强 $p_1 = 5.782 \times 10^6 \text{ Pa}$, 喷管外环境背压 $p_{\text{amb}} = 4.9 \times 10^6 \text{ Pa}$, 已知气体的比热比 $\gamma = 1.4$, 试求气流经膨胀波区后的无量纲速度、气流折转角以及膨胀波区起始和最终马赫线的马赫角。

【解】 经膨胀波区后气流压强要降低到环境背压, 而

$$\frac{p_2}{p_T} = \frac{p_{\text{amb}}}{p_T} = \frac{p_{\text{amb}}}{p_1} \frac{p_1}{p_T}$$

将式 (7-21) 和已知数据代入上式:

$$\left(1 - \frac{1.4-1}{1.4+1} M_{*2}^2\right)^{1.4/(1.4-1)} = \frac{4.9 \times 10^6}{5.782 \times 10^6} \left(1 - \frac{1.4-1}{1.4+1} \times 1.628^2\right)^{1.4/(1.4-1)}$$

得 $M_{*2}=1.679$ ($Ma_2=2.105$)。由式(10-6)可得经膨胀波区气流的折转角为

$$\begin{aligned} \Delta \theta &= \theta_1 - \theta_2 = \nu(Ma_2) - \nu(Ma_1) \\ &= \left(\frac{1.4+1}{1.4-1}\right)^{1/2} \arctan \left[\frac{1.4-1}{1.4+1} (2.105^2 - 1) \right]^{1/2} - \arctan(2.105^2 - 1)^{1/2} \\ &\quad - \left(\frac{1.4+1}{1.4-1}\right)^{1/2} \arctan \left[\frac{1.4-1}{1.4+1} (1.989^2 - 1) \right]^{1/2} + \arctan(1.989^2 - 1)^{1/2} = 3.155^\circ = 3^\circ 9' \end{aligned}$$

扇形膨胀波起始和最终马赫线的马赫角分别为

$$\alpha_1 = \arcsin(1/Ma_1) = \arcsin(1/1.989) = 30.18^\circ = 30^\circ 11'$$

$$\alpha_2 = \arcsin(1/Ma_2) = \arcsin(1/2.105) = 28.36^\circ = 28^\circ 22'$$

第三节 斜 激 波

在本章第二节曾经讨论过,当超声速气流沿内凹曲壁面流动时,无数微弱压缩波延伸相交,聚集而成激波。在极限情况下,设想让图 10-9 中的曲壁面缩短成如图 10-13 中 O 点所表示的垂直于图面的一条线,则超声速气流沿内凹曲壁面的流动就变成了沿有一定内折转角的折壁面的流动。当内折转角不大时,聚集而成的激波变成发自 O 点的斜激波。它与来流方向之间的夹角 β 称激波角。超声速气流经过该激波将内折转 δ 角,流动参数也都有突跃的变化。为了导出斜激波前后气流参数的关系,沿激波取紧邻两侧虚线所表示的控制体;将激波前后的气流速度分别分解为平行于波面的分速 $v_{1\tau}$ 、 $v_{2\tau}$ 和垂直于波面的分速 v_{1n} 、 v_{2n} ;控制体垂直于波面的两端面上压强分布完全相同而方向相反,它们的合力等于零;将积分形式的连续方程、动量方程和能量方程应用于该控制体,可得

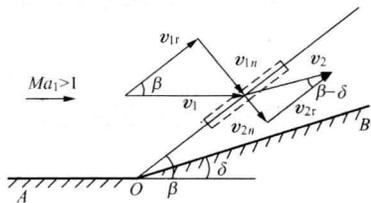


图 10-13 斜激波

(a)

$$\rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n} \quad (a)$$

$$\rho_2 v_{2n} v_{2\tau} - \rho_1 v_{1n} v_{1\tau} = 0 \quad v_{2\tau} = v_{1\tau} = v_\tau \quad (b)$$

$$\rho_2 v_{2n}^2 - \rho_1 v_{1n}^2 = p_1 - p_2 \quad (c)$$

$$h_1 + v_1^2 / 2 = h_2 + v_2^2 / 2 \quad (d)$$

式(b)说明,气流越过斜激波时,切向分速保持不变。但是气流越过斜激波必须折转 δ 角而与物面平行,既然切向分速保持不变,法向分速必有突跃的变化,即由 v_{1n} 突变为 v_{2n} 。式(c)说明,用法向分速表示的垂直于波面的动量方程与正激波的相同。就速度场而论,完全可以把斜激波视为法向分速的正激波与切向分速的叠加。斜激波前后气流参数的关系,可以像正激波那样由联立求解上述基本方程导出,也可以根据上述结论利用正激波前后气流参数的关系简便地导出。以 v_{1n} 、 v_{2n} 和法向分速的马赫数

$$Ma_{1n} = \frac{v_{1n}}{c_1} = \frac{v_1 \sin \beta}{c_1} = Ma_1 \sin \beta$$

分别代替式(7-29)~式(7-32)中的 v_1 、 v_2 和 Ma_1 , 可得斜激波前后对应的气流参数比:

$$\frac{v_{2n}}{v_{1n}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{2 + (\gamma - 1)Ma_1^2 \sin^2 \beta}{(\gamma + 1)Ma_1^2 \sin^2 \beta} \quad (10-7)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} Ma_1^2 \sin^2 \beta - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad (10-8)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2 + (\gamma - 1)Ma_1^2 \sin^2 \beta}{(\gamma + 1)Ma_1^2 \sin^2 \beta} \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} Ma_1^2 \sin^2 \beta - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) \quad (10-9)$$

由于气流经过激波的突跃压缩是绝热的，总温保持不变，由式(7-6)可得

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2/T_T}{T_1/T_T} = \frac{2 + (\gamma - 1)Ma_1^2}{2 + (\gamma - 1)Ma_2^2}$$

代入式(10-9)，得

$$Ma_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1)Ma_1^2}{2\gamma Ma_1^2 \sin^2 \beta - (\gamma - 1)} + \frac{2Ma_1^2 \cos^2 \beta}{2 + (\gamma - 1)Ma_1^2 \sin^2 \beta} \quad (10-10)$$

由完全气体状态方程和等熵过程关系式可得总压比

$$\frac{p_{T2}}{p_{T1}} = \frac{\rho_{T2} T_T}{\rho_{T1} T_T} = \frac{\rho_2 (p_{T2}/p_2)^{1/\gamma}}{\rho_1 (p_{T1}/p_1)^{1/\gamma}} \quad \frac{p_{T2}}{p_{T1}} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{1/(\gamma-1)}$$

将式(10-7)、式(10-8)代入上式，得

$$\frac{p_{T2}}{p_{T1}} = \left[\frac{(\gamma + 1)Ma_1^2 \sin^2 \beta}{2 + (\gamma - 1)Ma_1^2 \sin^2 \beta} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} Ma_1^2 \sin^2 \beta - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^{-1/(\gamma-1)} \quad (10-11)$$

代入式(7-36)，并引用 $R = (\gamma - 1)c_v$ ，得

$$\frac{\Delta s}{c_v} = \ln \left\{ \left[\frac{2 + (\gamma - 1)Ma_1^2 \sin^2 \beta}{(\gamma + 1)Ma_1^2 \sin^2 \beta} \right]^\gamma \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} Ma_1^2 \sin^2 \beta - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) \right\} \quad (10-12)$$

根据激波的性质应有 $p_2/p_1 > 1$ ，由式(10-8)得

$$\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{v_{1n}^2}{c_1^2} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} > 1$$

即

$$v_{1n} > c_1$$

这说明，形成斜激波的气流条件是来流的法向分速必须超声速。

综观上述诸式，要计算斜激波前后的参数比，除了要知道气体的比热比 γ 和来流马赫数 Ma_1 之外，还必须知道激波角 β 。而激波角 β 常常是被决定的，它决定于来流马赫数 Ma_1 和气流必需的折转角 δ 。因此，要进行斜激波的计算，还必须找出 β 、 Ma_1 和 δ 三者之间的关系。为此，参看图 10-13，已知 $v_{1\tau} = v_{2\tau}$ ，可得

$$\frac{v_{2n}}{v_{1n}} = \frac{\tan(\beta - \delta)}{\tan\beta} \quad (e)$$

由三角学已知

$$\tan(\beta - \delta) = \frac{\tan\beta - \tan\delta}{1 + \tan\beta \tan\delta}$$

将此式和式(10-7)代入式(e)，得

$$\tan\delta = \frac{(Ma_1^2 \sin^2 \beta - 1) \cot \beta}{Ma_1^2 [(\gamma + 1)/2 - \sin^2 \beta] + 1} \quad (10-13)$$

由式 (10-7) ~ 式 (10-11) 和式 (10-13) 可以看出, 对于给定的完全气体, 只要已知 Ma_1 和 β (或 δ), 便可求出 v_{2n}/v_{1n} 、 ρ_2/ρ_1 、 p_2/p_1 、 T_2/T_1 、 p_{T2}/p_{T1} 、 Ma_2 和 δ (或 β)。或者更概括些说, 只要已知这九个物理量和比值中的任意两个, 便可由上述诸式求出其余的七个, 即在这九个物理量和比值中, 只有两个是独立的。

图 10-14 是对 $\gamma=1.4$ 的气体按上述有关公式绘制的图线, 它们都以 Ma_1 为自变量, 以 δ 为参变量, 这些图统称为激波图线。由图 10-14 (a) 和式 (10-13) 可以看出以下几点:

(1) 有两种情况, 气流的折转角 δ 等于零: 当 $Ma_1^2 \sin^2 \beta - 1 = 0$, 即 $\sin \beta = 1/Ma_1 = \sin \alpha$ 时, 激波角等于马赫角, 激波蜕变成马赫波, 如图 10-14 (a) 中最下面的曲线所示; 当 $\cot \beta = 0$, 即 $\beta = \pi/2 = 90^\circ$ 时, 波面与来流方向相垂直, 成为正激波, 如图 10-14 (a) 中最上面的水平线所示。

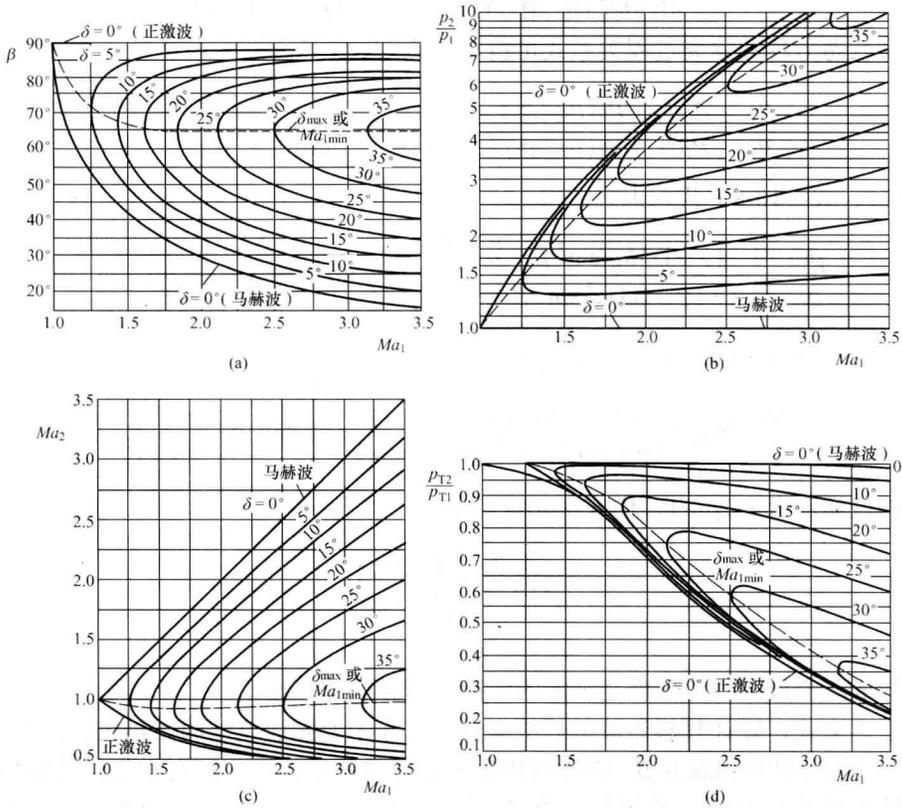


图 10-14 激波图线

(2) δ_{\max} 或 $Ma_{1\min}$ 线。对应于每个给定的气流折转角, β 随 Ma_1 的变化曲线左端都有一个顶点, 与这个顶点相对应的是给定的 δ 和一定的 Ma_1 。对于这个对应的 Ma_1 来讲, 给定的 δ 是马赫数为 Ma_1 的超声速气流经过激波所能折转的最大角度 δ_{\max} ; 对于这个给定的 δ 来讲, 对应的 Ma_1 是超声速气流通过激波能够折转 δ 时所必需的最小马赫数 $Ma_{1\min}$ 。把所有这些顶点连接起来, 便是图中虚线所表示的 δ_{\max} 或 $Ma_{1\min}$ 线。当物面的内折转角 $\delta < \delta_{\max}$ (对应于来流马赫数 Ma_1 的) 时, 或者当 $Ma_1 > Ma_{1\min}$ (对应于给定的折转角 δ 的) 时, 超声速气流将进

行正常的折转, 形成附体的斜激波, 如图 10-13 所示。相反, 当 $\delta > \delta_{\max}$ (对应于 Ma_1) 或 $Ma_1 < Ma_{1\min}$ (对应于 δ) 时, 在激波图线上根本找不到这样的对应点。这就是说, 超声速气流已经不能按斜激波进行正常折转, 而必定形成脱体的曲激波, 如图 7-5 (c) 所示。可见, 产生脱体曲激波的条件就是 $\delta > \delta_{\max}$ (对应于 Ma_1) 或 $Ma_1 < Ma_{1\min}$ (对应于 δ)。

(3) 对于给定的 Ma_1 和 $\delta (< \delta_{\max})$, 在图 10-14 (a) 上都有两个 β 值, 即 δ_{\max} 或 $Ma_{1\min}$ 线把激波图线分成了上、下两个部分, 小 β 值对应的是弱激波, 大 β 值对应的是强激波; 实际情况是哪种激波出现, 要视具体条件而定。对于只给出几何边界条件而无压强条件规定的外部流动和内部流动, 实际上出现的一定是弱激波。实际观察的情况确是如此。这样, 在由 Ma_1 和 δ 自图 10-14 (a) 求 β 时, 取弱激波对应的值; 同样, 自图 10-14 (b)、(c)、(d) 求 p_2/p_1 、 Ma_2 、 p_{T2}/p_{T1} 时, 也要取弱激波对应的值。对于有高压强比条件规定的外部流动和内部流动, 例如有高背压的喷管出口射流或有几何边界条件和强压强突跃的通道内的流动等, 都可能出现强激波, 这要根据条件去具体分析。如果根据压强条件出现的是强激波, 则可根据 Ma_1 和 p_2/p_1 自图 10-14 (b) 求得对应的 δ 值。不言而喻, 自图 10-14 (a)、(c)、(d) 求 β 、 Ma_2 、 p_{T2}/p_{T1} 时, 也要取强激波对应的值。

综上所述可以看出, 要在二维或三维的气体流动中形成激波, 仅有超声速的气流条件还不够, 还要具备几何边界条件或自由边界的压强条件。图 10-15 所示为由自由边界的压强条件产生的激波。当二维喷管外的环境背压 p_{amb} 高于喷管出口气流的压强 p_1 , 但还不是太高时, 要把气流的压强提高到等于背压而顺利地流出, 在 A、B 两处必将产生两道平面斜激波 AC 和 BC。

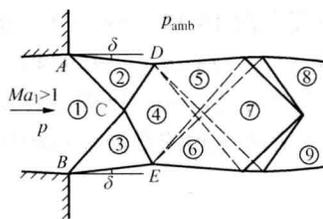


图 10-15 二维缩放喷管出口的斜激波

【例 10-2】 在 $Ma_1=2.0$ 的超声速空气流里, 有一顶角为 20° ($\delta=10^\circ$) 的尖劈对准来流, 试求激波角、波后马赫数以及压强比、密度比、温度比和总压比。

【解】 根据前面的分析, 这里是仅由几何边界条件形成的激波, 是弱激波, 因而在查图计算时, 只取与弱激波对应的值。

按 $Ma_1=2.0$ 、 $\delta=10^\circ$ 查图 10-14, 或代入式 (10-13), 即

$$\tan 10^\circ = \frac{(2^2 \times \sin^2 \beta - 1) \cot \beta}{2^2 \left[(1.4 + 1)/2 - \sin^2 \beta \right] + 1}$$

得 $\beta=39.31^\circ$ 。再将 Ma_1 和 β 分别代入式 (10-10)、式 (10-8)、式 (10-7)、式 (10-11), 得

$$Ma_2 = \left[\frac{2 + (1.4 - 1) \times 2^2}{2 \times 1.4 \times 2^2 \times 0.6335^2 - (1.4 - 1)} + \frac{2 \times 2^2 \times 0.7737^2}{2 + (1.4 - 1) \times 2^2 \times 0.6335^2} \right]^{1/2} = 1.641$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2 \times 1.4}{1.4 + 1} \times 2^2 \times 0.6335^2 - \frac{1.4 - 1}{1.4 + 1} = 1.706$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(1.4 + 1) \times 2^2 \times 0.6335^2}{2 + (1.4 - 1) \times 2^2 \times 0.6335^2} = 1.458$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1.706}{1.458} = 1.170$$

$$\frac{p_{T2}}{p_{T1}} = 1.458^{1.4/(1.4-1)} \times 1.706^{-1/(1.4-1)} = 0.9845$$

由计算结果可以看出, 在这里斜激波后的马赫数 Ma_2 大于 1, 即斜激波后仍为超声速流。这种情况从图 10-14 (c) 中也可以看得很清楚: 在弱激波范围内, 除去 δ_{\max} 点附近很小的区域以外, 波后都是超声速流, Ma_2 随 Ma_1 的增大而增大。在强激波范围内, 波后都是亚声速, Ma_2 将随 Ma_1 的增大而减小。

【例 10-3】 图 10-15 所示二维缩放喷管出口的超声速空气流 $Ma_1=1.5$, $p_1=4.221 \times 10^4$ Pa, 喷管出口外的背压 $p_{\text{amb}}=1.013 \times 10^5$ Pa。试求气流射出后边界流线的内折转角 δ 、激波角 β 、波后马赫数 Ma_2 和总压比 p_{T2}/p_{T1} 。

【解】 根据题意自由边界上的压强条件是给定的。出口处的超声速气流受高背压 (相对于 p_1) 的影响将出现激波, 越过激波的气流压强应为 $p_2=p_3=p_{\text{amb}}$, 以满足出口外的压强条件, 这就决定了激波前后的压强比为

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_3}{p_1} = \frac{p_{\text{amb}}}{p_1} = \frac{1.013 \times 10^5}{4.221 \times 10^4} = 2.4$$

按 Ma_1 和 p_2/p_1 查图 10-14 (b)、(a) 或由式 (10-8)、式 (10-13) 可得 $\delta=6.875^\circ$, $\beta=81.43^\circ$; 按 Ma_1 和 δ 查图 10-14 (c)、(d) 或将 Ma_1 和 β 代入式 (10-10)、式 (10-11) 可得 $Ma_2=0.7336$, $(p_{T2}/p_{T1}) = (p_{T3}/p_{T1}) = 0.9349$ 。

由此可见, 在由压强条件决定激波时, 出现的激波是弱激波还是强激波, 完全由来流马赫数和所应达到的激波前后的压强比来决定。激波是强的, 便按强的计算; 是弱的, 便按弱的计算。

第四节 激波的反射和相交

前面讨论的只是气流经过一道正激波或斜激波时参数的变化情况, 实际流场要比这种情况复杂。一般而论, 只要流场中有激波存在, 往往都要出现激波的反射和相交, 或激波和微弱压强波的相交。这样, 流场中便不是简单的一道波, 而是包含着波的反射和相交的复杂波系。例如, 超声速飞行器飞行时的流场, 超声速气流绕过叶片或叶栅流动时的流场, 超声速风洞模型实验时的流场以及超声速喷管非设计工况运行时的射流流场等, 都是复杂的波系。下面只对几种激波的反射和相交进行定性的分析。

一、激波在平直壁面上的反射

如图 10-16 所示, 在超声速风洞中做二维菱形翼型的实验, 翼型放在风洞实验段的中心线上, 翼弦平行于来流, 由于流场对翼型上下对称, 只分析它的上半个流场。在这里只分析翼型前缘处产生的斜激波在风洞壁上的反射。 $Ma_1 (M_{*1}) > 1$ 的超声速气流受折转角为 δ_1 的壁面 AB 的约束, 在翼型的前缘必定产生一道平面斜激波。该激波抵达平直壁面时, 可能产生不同的两种反射。

1. 正常反射

正常反射, 又称规则反射。当①区气流 $Ma_1 (M_{*1}) > 1$ 而 $\delta_1 < \delta_{1\max}$ (对应于 Ma_1 或 M_{*1}) 时, 在翼型前缘产生平面斜激波 AN , 激波角为 $\beta_{1,2}$, 如图 10-16 所示。气流经过激波进入②区时, 要逆时针折转 δ_1 角, 马赫数减小为 Ma_2 , 而压强却由 p_1 跃升为 p_2 。如果 $Ma_2 > 1$, 而且 $\delta'_1 < \delta_{2\max}$ (对应于 Ma_2), 则当激波 AN 到达平直壁面时, 出现正常反射, 反射成平面斜激波 NQ , 激波角为 $\beta_{2,3}$ 。气流经过激波进入③区时, 要顺时针折转 δ'_1 角 (与 δ 大小相等), 与壁面平行, 马赫数再次减小为 Ma_3 , 而压强又一次跃升为 p_3 。由于 $Ma_1 \neq Ma_2$, 在气流折转角相等的情况下,

激波角 $\beta_{1-2} \neq \beta_{2-3}$ ，因而，在通常情况下激波的入射角 β_{1-2} 不等于激波的反射角 $\beta_{2-3} - \delta'_1$ 。

由图 10-16 还可看出，气流由①区到③区经过压强的两次跃升，唯独沿洞壁流动的气体，其压强的两次跃升集中为一次，但总跃升量应该是一样的，即由 p_1 跃升为 p_3 。

2. 非正常反射

非正常反射，又称不规则反射或马赫反射。这种情况出现在①区的超声速气流越过第一道激波进入②区时，流速已经偏低，以致气流需要顺时针折转的 $\delta'_1 > \delta_{2\max}$ （对应于 Ma_2 ），或者说②区气流的马赫数 $Ma_2 < Ma_{2\min}$ （对应于 δ_1 ）。这时便不能形成正常反射，而要形成马赫反射，即图 10-17 中表示的三叉波系（又称 λ 波）。在翼型的前缘仍然是一道平面斜激波 AN' ，但它已不能延伸到洞壁，而洞壁的边界条件规定气流必须与洞壁平行，因而延伸到洞壁的激波只能是正激波；而且出现正激波的位置也不在正常反射时的 N 点，而是被推到它前面的 R 点，这实际上形成了“脱体”曲激波。激波 $N'R$ 凹向来流，在 N' 点与斜激波 AN' 衔接并相切。由于气流越过激波 $N'R$ 的压强跃升大于越过激波 AN' 的，这样又必然要诱发一道反射激波 $N'Q$ ，使气流再越过它与上面的气流达到压强相等。但流速一般都不相等，因而在 N' 点通常还会出现流向一致流速不相等的接触线 $N'T$ ，它是速度的不连续线，是涡线，也称它为滑动线。

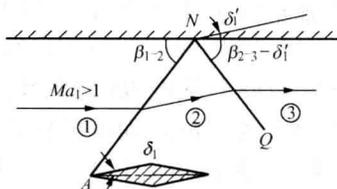


图 10-16 激波在平直壁面上的正常反射

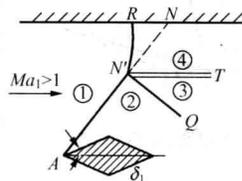


图 10-17 激波在平直壁面上的非正常反射

二、异侧激波的相交

激波和激波的相交有同侧的相交和异侧的相交两种情况，而异侧激波的相交又分正常相交和非正常相交。

1. 正常相交

正常相交，又称规则相交。当①区 $Ma_1 (M_{*1}) > 1$ 的超声速气流进入对称的二维进气道，如果唇口角 $\delta_1 < \delta_{1\max}$ （对应于 Ma_1 或 M_{*1} ），则超声速气流在 A 、 B 两点分别产生两道斜激波 AC 和 BC ，如图 10-18 所示。①区气流经 AC 、 BC 波进入②、③区时，要分别顺时针、逆时针折转 δ_1 角，马赫数减小为 $Ma_2 = Ma_3$ ，而压强却由 p_1 跃升为 $p_2 = p_3$ 。如果 $Ma_2 = Ma_3 > 1$ ，而且 $\Delta\theta_{2-4} = \Delta\theta_{3-4} < \delta_{2\max} = \delta_{3\max}$ （对应于 Ma_2 和 Ma_3 ），则当激波 AC 和 BC 相遇时，出现正常相交，并因②、③区气流方向不一致而诱发两道新的激波 CD 和 CE 。图 7-13 (b) 中 (3) 的下图表示的便是这种正常相交。

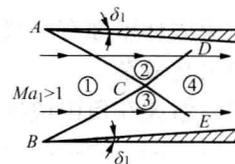


图 10-18 异侧激波的正常相交

2. 非正常相交

非正常相交，又称不规则相交或马赫相交。这种情况出现在 $Ma_1 (M_{*1}) > 1$ ，但 Ma_1 还不够大，越过激波 AC 、 BC 进入②、③区的气流速度均偏低，以致气流需要折转的 $\Delta\theta_{2-4} = \Delta\theta_{3-4} > \delta_{2\max} = \delta_{3\max}$ 或者说 $Ma_2 = Ma_3 < Ma_{2\min} = Ma_{3\min}$ ，这时便不能形成正常相交，而要形成马赫相交，如图 10-19 (a) 所示。图 7-13 (b) 中 (3) 的上图便是这种马赫相交。顺便提及，如

果超声速气流的 Ma_1 比形成马赫相交时的还要小或者 δ_1 再增大, 则马赫相交也形成不了, 而形成如图 10-19 (b) 所示的凹向来流的曲激波, 波后已是亚声速流动。如果超声速气流的 Ma_1 再减小, 以致 $Ma_1 < Ma_{1min}$ (对应于 δ_1) 或管道内部压强很高, 则可以出现如图 10-19 (c) 所示的离开唇口的脱体曲激波。

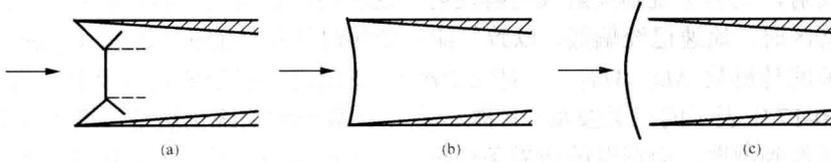


图 10-19 异侧激波的非正常相交

三、同侧激波相交

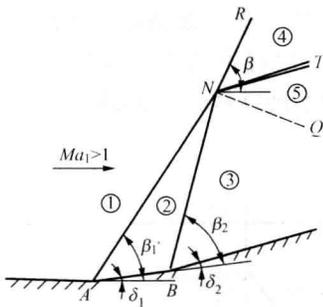


图 10-20 同侧激波相交

如图 10-20 所示, 设壁面在 A 点内折转 δ_1 角, 在 B 点内折转 δ_2 角, 当 Ma_1 (M_{*1}) > 1 的超声速气流流经 A 点时, 如果 $\delta_1 < \delta_{1max}$ (对应于 Ma_1 或 M_{*1}), 将在该点产生一道斜激波 AN 。①区气流经 AN 进入②区时, 要逆时针折转 δ_1 角, 马赫数减小为 Ma_2 , 而压强则由 p_1 跃升为 p_2 。如果②区气流的 $Ma_2 > 1$, 而且 $\delta_2 < \delta_{2max}$ (对应于 Ma_2), 气流流经 B 点时又将产生另一道斜激波 BN 。②区气流经 BN 进入③区时, 要逆时针折转 δ_2 角, 马赫数减小为 Ma_3 , 而压强跃升为 p_3 。由于 $Ma_2 < Ma_1$, 故 $\beta_2 + \delta_1 > \beta_1$, 二激波相交于 N 点, 并合并成一条斜激波 NR 。①区气流经 NR 进入④区时, 要逆时针折转 δ 角, 马赫数减小为 Ma_4 , 压强跃升为 p_4 。通常④区和③区气流的压强不相等, 流向也不一致, 势必诱发一道弱压缩波或膨胀波 NQ , 从而使④区和⑤区气流的压强相等和流向一致。通常在④区和⑤区之间还会存在一条滑动线 NT 。

如果固体壁面有二级以上的内折转, 则可按上述方法依次分析下去, 只是激波相交和反射愈来愈复杂。

四、激波在自由边界上的反射

如图 10-15 所示, 当喷管出口超声速气流的压强 p_1 低于环境背压 p_{amb} 时, 便会在 A 、 B 两处产生激波, 气流越过激波, 将压强提高到等于背压后顺利地流出。如果气流的速度足够高或气流的压强与背压的压差不很大, 即气流的折转角 δ 还不太大, 以致 $Ma_2 = Ma_3$ 都还大于 Ma_{min} (对应于两股气流在④区相遇时必须折转的 δ 角), 便会出现正常相交, 并诱发 CD 和 CE 两道平面斜激波, 经过它们进入④区的两股气流应当压强相等和流向一致。原来 $p_2 = p_3 = p_{amb}$, 当②区气流经激波 CD 和③区气流经激波 CE 进入④区时, 它们的压强都跃升到 p_4 。由于 $p_4 > p_{amb}$, 所以当激波 CD 和 CE 到达压强较低的自由边界时, 必反射为扇形膨胀波, 经过该膨胀波系, 气流的压强再回降到环境背压值, 即 $p_5 = p_6 = p_{amb}$ 。按照同样的分析可知, 膨胀波到达自由边界后必反射为微弱压缩波。如果不考虑黏性的影响, 这种膨胀波系和压缩波系的交替将继续下去, 射流的边界呈波纹状。但是, 实际气体是有黏性的, 射流将与环境的气体不断地进行质量和动量交换, 从而使射流逐渐扩大而流速降低, 所以射流离开喷管出口一定距离后, 这些波系便逐渐消失了。

第五节 激波与边界层的相互干扰

下面简单介绍几种激波与边界层相互干扰的现象。

一、激波入射到层流边界层上

图 10-21 所示为超声速气流中的斜激波射到平板层流边界层上的情况。激波后的压强急剧升高，升高的压强使边界层增厚，并通过边界层内的亚声速区逆流向上游传播，结果使激波前边界层内的压强也升高，边界层也增厚。增厚的边界层迫使气流在激波前内折转，形成一系列的微弱压缩波，并延伸相交成反射激波。过了入射点边界层减薄，减薄的边界层诱使气流外折转，形成膨胀波系。在边界层增厚部分的下游，气流方向需平行于壁面，这种情况又迫使气流内折转，再次形成微弱压缩波系，并延伸相交成第二条反射激波。在第二条反射激波后的边界层往往变成紊流边界层。在入射点前后边界层隆起部分下面，常因逆压梯度形成缓慢回流的分离区。

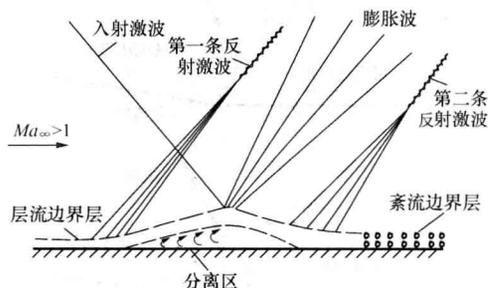


图 10-21 激波与平板层流边界层的相互干扰

二、激波入射到紊流边界层上

由于紊流边界层薄，通道狭窄，压强逆流上传的距离短，以致由边界层增厚所形成的反射激波没有提前多少，很像就在入射点上，如图 10-22 (a) 所示。倘若边界层内有少量气流分离，分离区使气流在入射点上游产生一道反射激波，致使激波图呈紧贴边界层的叉形，如图 10-22 (b) 所示。

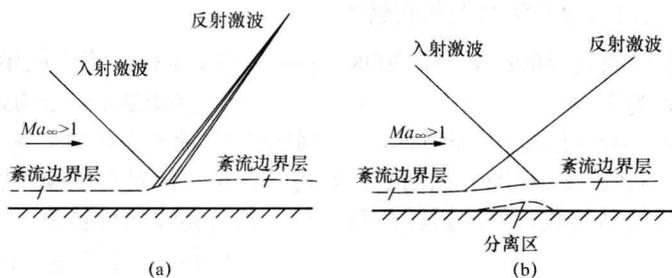


图 10-22 激波与平板紊流边界层的相互干扰

三、物面内折转处激波与边界层的干扰

图 10-23 所示为超声速气流沿内折转物面流动的情况。因高压逆流上传，边界层在折转点前便增厚了，主流的折转早于折转点，以致形成微弱压缩波系，并延伸相交成激波。由于层流边界层的增厚大于紊流边界层，因此在层流边界层内壁面内折转处附近常发生气流分离，并在其下游一段距离处变成紊流边界层。

四、尖劈前缘边界层对激波的影响

超声速气流绕流尖劈时，如果折转角 $\delta < \delta_{\max}$ ，在劈尖要产生附体斜激波。但实际上尖劈

上有边界层, 它还稍许往劈尖前伸了一点, 见图 10-24。边界层使劈尖锐化了, 以致那里形成的是脱体曲激波。曲激波又将很快被边界层弯曲所形成的膨胀波系削弱成斜激波。这一变化范围不大, 对整个流场基本上没有什么影响。但是, 如果利用尖劈去测量气流指向或马赫数的话, 那么测孔不可以太靠近劈尖。

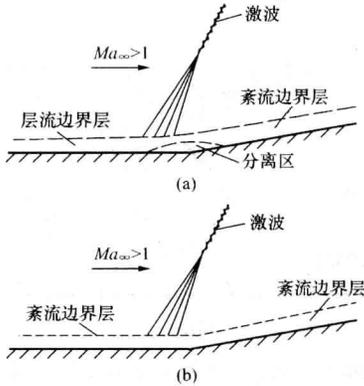


图 10-23 物面内折转处的激波与边界层的干扰

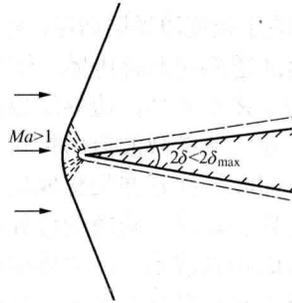


图 10-24 尖劈前缘边界层对激波的影响

习 题

10-1 $Ma_1=1.0$ 的空气流绕外钝角加速到 $Ma_2=2.25$, 问此外钝角折转了多少度? 起迄马赫线的马赫角多大? [33.13°; 90°, 26.4°]

10-2 二氧化碳超声速流从高压区流入低压区的最大气流折转角为多少? [166.82°]

10-3 超声速空气流在喷管出口截面的 $Ma_1=2.0$, $p_1=2.026 \times 10^5 \text{Pa}$, 出口外的环境背压 $p_{amb}=1.013 \times 10^5 \text{Pa}$ 。求出口边界流线的折转角。 [11.49°]

10-4 超声速空气流 $v_1=500 \text{m/s}$, $T_1=300 \text{K}$, $p_1=1.013 \times 10^5 \text{Pa}$, 绕外钝角折转 $\delta=15^\circ$ 后, 其速度、温度和压强各为多少? [608.2m/s, 240.6K, $4.668 \times 10^4 \text{Pa}$]

10-5 如图 10-6 (b) 所示之渐缩喷管, 进口截面空气流的总压强, $p_T=2.30 \times 10^5 \text{Pa}$, 出口的环境压强 $p_{amb}=1.127 \times 10^5 \text{Pa}$, 试判断在斜切部分空气流是否继续膨胀加速, 并求空气流出喷管斜切部分时的马赫数、气流折转角和最后一条马赫线的马赫角。

[继续膨胀加速; 1.062, 40', 70°15']

10-6 如图 10-13 所示, 已知空气来流的 $Ma_1=3.0$, $p_1=1.0133 \times 10^5 \text{Pa}$, $T_1=300 \text{K}$, 壁面的内折转角 $\delta=15^\circ$, 试求激波后气流的压强、密度、温度、马赫数和总压比。

[$2.824 \times 10^5 \text{Pa}$, 2.393kg/m^3 , 413.1K, 2.271, 0.8813]

10-7 空气以 650m/s 的超声速绕流半角 $\delta=18^\circ$ 的楔形物体, 已知激波角 $\beta=51^\circ$, 试求激波后的流速和经过激波的熵增。 [487.7m/s, 23.18J/(kg · K)]

10-8 $\gamma=1.4$ 的气体以超声速流过半顶角 $\delta=10^\circ$ 的楔形物体, 从纹影照片上测得楔形物顶点斜激波的激波角 $\beta=45^\circ$, 并测得激波前的总温 $T_1=288 \text{K}$, 试求波前来流的马赫数和流速。

[1.767, 471.6m/s]

10-9 如图 10-16 所示, 如果超声速风洞实验段的 $Ma_1=2.5$, 半顶角 $\delta=8^\circ$ 的尖劈产生的头

激波在洞壁上能否形成正常反射？并求 Ma_2 、 Ma_3 和 p_3/p_1 。

[能形成正常反射；2.169, 1.870; 2.612]

10-10 已知一缩放喷管出口与喉部的面积比 $A/A_{cr}=2$ ，空气流在进口的总压 $p_T=400\text{kPa}$ ，出口的环境背压 $p_{amb}=50\text{kPa}$ ，试分析在喷管出口会不会形成斜激波？并求激波角和气流的内折转角。
[会形成； 31.04° , 4.878°]

附录 A 与流体力学有关的我国法定计量单位

表 A-1 SI 单位与公制工程单位对照换算表

量的名称	SI 单位			公制工程单位			1 公制工程单位换成 SI 单位时应乘的系数	备注
	类别	名称	符号		名称	用公制基本单位表示的关系式		
			中文	国际				
长度	基本单位	米		m	米	m	9.80665	在公制工程单位中为导出单位
质量		千克 (公斤)		kg	工程质量单位	$m^{-1} \cdot kgf \cdot s^2$		
时间		秒		s	秒	s		
热力学温度		开尔文		K	摄氏温度 (°C)			
平面角	辅助单位	弧度		rad	弧度			
立体角		球面度		sr	球面度			
力	导出单位	牛顿		N	公斤力 (千克力)	kgf	9.80665	在公制工程单位中为基本单位
力矩		牛顿米		N·m	公斤力米	kgf·m	9.80665	
压力 (压强)、应力		帕斯卡		Pa	公斤力每平方米	kgf·m ⁻²	9.80665	
表面张力		牛顿每米		N/m	公斤力每米	kgf·m ⁻¹	9.80665	
密度		千克每立方米		kg/m ³	工程质量单位每立方米	$m^{-4} \cdot kgf \cdot s^2$	9.80665	
动力黏度		帕斯卡秒		Pa·s	公斤力秒每平方米	kgf·s·m ⁻²	9.80665	
能、功、热量		焦耳		J	公斤力米	kgf·m	9.80665	
功率	瓦特		W	公斤力米每秒	kgf·m·s ⁻¹	9.80665		
热容、焓	焦耳每开尔文		J/K	千卡每度	kcal·K ⁻¹	4186.8	1kcal=426.93kgf·m	
比热容、比焓	焦耳每千克开尔文		J/(kg·K)	千卡每公斤度	kcal·kg ⁻¹ ·K ⁻¹	4186.8		

续表

量的名称	SI 单位				公制工程单位		I 公制工程单位换成 SI 单位时应乘的系数	备注
	类别	名称	符号		名称	用公制基本单位表示的关系式		
			中文	国际				
比能		焦/千克	J/kg	$m^2 \cdot s^{-2}$	千卡每公斤	$kcal \cdot kg^{-1}$	4186.8	
热导率 (导热系数)		瓦/(米·开)	W/(m·K)	$m \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot K^{-1}$	千卡每米秒度	$kcal \cdot m^{-1} \cdot s^{-1} \cdot K^{-1}$	4.1868	
面积		米 ²	m^2	m^2	平方米	m^2		
体积		米 ³	m^3	m^3	立方米	m^3		
比体积	导出单位	米 ³ /千克	m^3/kg	$m^3 \cdot kg^{-1}$	立方米每公斤力	$m^3 \cdot kgf^{-1}$		
速度		米/秒	m/s	$m \cdot s^{-1}$	米每秒	$m \cdot s^{-1}$		
加速度		米/秒 ²	m/s^2	$m \cdot s^{-2}$	米每秒平方	$m \cdot s^{-2}$		
角速度		弧度/秒	rad/s		弧度每秒			
角加速度		弧度/秒 ²	rad/s^2		弧度每秒平方			
频率		赫	Hz	s^{-1}	赫兹	s^{-1}		

SI 词头

表 A-2

因数	词头名称	符号		因数	词头名称	符号	
		中文	国际			中文	国际
10^{18}	艾可萨 (exa)	艾	E	10^{-1}	分 (déci)	分	d
10^{15}	拍它 (peta)	拍	P	10^{-2}	厘 (centi)	厘	c
10^{12}	太拉 (tétra)	太	T	10^{-3}	毫 (milli)	毫	m
10^9	吉咖 (giga)	吉	G	10^{-6}	微 (micro)	微	μ
10^6	兆 (mega)	兆	M	10^{-9}	纳诺 (nano)	纳	n
10^3	千 (kilo)	千	k	10^{-12}	皮可 (pico)	皮	p
10^2	百 (hecto)	百	h	10^{-15}	飞母托 (femto)	飞	f
10^1	十 (déca)	十	da	10^{-18}	阿托 (atto)	阿	a

附录 B 可压缩流参数表

表 B-1

等熵气流参数表 ($\gamma=1.4$)

Ma	p/p_T	ρ/ρ_T	T/T_T	M^*	Ma	p/p_T	ρ/ρ_T	T/T_T	M^*
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.50	0.8430	0.8852	0.9524	0.5345
0.01	0.9999	1.0000	1.0000	0.0110	0.51	0.8374	0.8809	0.9506	0.5447
0.02	0.9997	0.9998	0.9999	0.0219	0.52	0.8317	0.8766	0.9487	0.5548
0.03	0.9994	0.9996	0.9998	0.0329	0.53	0.8259	0.8723	0.9468	0.5649
0.04	0.9989	0.9992	0.9997	0.0438	0.54	0.8201	0.8679	0.9449	0.5750
0.05	0.9983	0.9988	0.9995	0.0548	0.55	0.8142	0.8634	0.9430	0.5851
0.06	0.9975	0.9982	0.9993	0.0657	0.56	0.8082	0.8589	0.9410	0.5951
0.07	0.9966	0.9976	0.9990	0.0766	0.57	0.8022	0.8544	0.9390	0.6051
0.08	0.9955	0.9968	0.9987	0.0876	0.58	0.7962	0.8498	0.9370	0.6150
0.09	0.9944	0.9960	0.9984	0.0985	0.59	0.7901	0.8451	0.9349	0.6249
0.10	0.9930	0.9950	0.9980	0.1094	0.60	0.7840	0.8405	0.9328	0.6348
0.11	0.9916	0.9940	0.9976	0.1204	0.61	0.7778	0.8357	0.9307	0.6447
0.12	0.9900	0.9928	0.9971	0.1313	0.62	0.7716	0.8310	0.9286	0.6545
0.13	0.9883	0.9916	0.9966	0.1422	0.63	0.7654	0.8262	0.9265	0.6643
0.14	0.9864	0.9903	0.9961	0.1531	0.64	0.7591	0.8213	0.9243	0.6740
0.15	0.9844	0.9888	0.9955	0.1639	0.65	0.7528	0.8164	0.9221	0.6837
0.16	0.9823	0.9873	0.9949	0.1748	0.66	0.7465	0.8115	0.9199	0.6934
0.17	0.9800	0.9857	0.9943	0.1857	0.67	0.7401	0.8066	0.9176	0.7031
0.18	0.9776	0.9840	0.9936	0.1965	0.68	0.7338	0.8016	0.9154	0.7127
0.19	0.9751	0.9822	0.9928	0.2074	0.69	0.7274	0.7966	0.9131	0.7223
0.20	0.9725	0.9803	0.9921	0.2182	0.70	0.7209	0.7916	0.9108	0.7318
0.21	0.9697	0.9783	0.9913	0.2290	0.71	0.7145	0.7865	0.9084	0.7413
0.22	0.9668	0.9762	0.9904	0.2398	0.72	0.7080	0.7814	0.9061	0.7508
0.23	0.9638	0.9740	0.9895	0.2506	0.73	0.7016	0.7763	0.9037	0.7602
0.24	0.9607	0.9718	0.9886	0.2614	0.74	0.6951	0.7712	0.9013	0.7696
0.25	0.9575	0.9694	0.9877	0.2722	0.75	0.6886	0.7660	0.8989	0.7789
0.26	0.9541	0.9670	0.9867	0.2829	0.76	0.6821	0.7609	0.8964	0.7883
0.27	0.9506	0.9645	0.9856	0.2936	0.77	0.6756	0.7557	0.8940	0.7975
0.28	0.9470	0.9619	0.9846	0.3043	0.78	0.6691	0.7505	0.8915	0.8068
0.29	0.9433	0.9592	0.9835	0.3150	0.79	0.6625	0.7452	0.8890	0.8156
0.30	0.9395	0.9564	0.9823	0.3257	0.80	0.6560	0.7400	0.8865	0.8251
0.31	0.9355	0.9535	0.9811	0.3364	0.81	0.6495	0.7347	0.8840	0.8343
0.32	0.9315	0.9506	0.9799	0.3470	0.82	0.6430	0.7295	0.8815	0.8433
0.33	0.9274	0.9476	0.9787	0.3576	0.83	0.6365	0.7242	0.8789	0.8524
0.34	0.9231	0.9445	0.9774	0.3682	0.84	0.6300	0.7189	0.8763	0.8614
0.35	0.9188	0.9413	0.9761	0.3788	0.85	0.6235	0.7136	0.8737	0.8704
0.36	0.9143	0.9380	0.9747	0.3893	0.86	0.6170	0.7083	0.8711	0.8793
0.37	0.9098	0.9347	0.9733	0.3999	0.87	0.6106	0.7030	0.8685	0.8882
0.38	0.9052	0.9313	0.9719	0.4104	0.88	0.6041	0.7977	0.8659	0.8970
0.39	0.9004	0.9278	0.9705	0.4209	0.89	0.5977	0.7924	0.8622	0.9058
0.40	0.8956	0.9243	0.9690	0.4313	0.90	0.5913	0.6870	0.8606	0.9146
0.41	0.8907	0.9207	0.9675	0.4418	0.91	0.5849	0.6817	0.8579	0.9233
0.42	0.8857	0.9170	0.9659	0.4522	0.92	0.5785	0.6764	0.8552	0.9320
0.43	0.8807	0.9132	0.9643	0.4626	0.93	0.5722	0.6711	0.8525	0.9407
0.44	0.8755	0.9094	0.9627	0.4729	0.94	0.5658	0.6658	0.8498	0.9493
0.45	0.8703	0.9055	0.9611	0.4833	0.95	0.5595	0.6604	0.8471	0.9578
0.46	0.8650	0.9016	0.9594	0.4936	0.96	0.5532	0.6551	0.8444	0.9663
0.47	0.8596	0.8976	0.9577	0.5038	0.97	0.5469	0.6498	0.8416	0.9748
0.48	0.8541	0.8935	0.9560	0.5141	0.98	0.5407	0.6445	0.8389	0.9833
0.49	0.8486	0.8894	0.9542	0.5243	0.99	0.5345	0.6392	0.8361	0.9917

续表

Ma	p/p_T	ρ/ρ_T	T/T_T	M^*	Ma	p/p_T	ρ/ρ_T	T/T_T	M^*
1.00	0.5283	0.6339	0.8333	1.0000	1.55	0.2533	0.3750	0.6755	1.3955
1.01	0.5221	0.6287	0.8306	1.0083	1.56	0.2496	0.3711	0.6726	1.4016
1.02	0.5160	0.6234	0.8278	1.0166	1.57	0.2459	0.3672	0.6698	1.4076
1.03	0.5099	0.6181	0.8250	1.0248	1.58	0.2423	0.3633	0.6670	1.4135
1.04	0.5039	0.6129	0.8222	1.0330	1.59	0.2388	0.3595	0.6642	1.4195
1.05	0.4979	0.6077	0.8193	1.0411	1.60	0.2353	0.3557	0.6614	1.4254
1.06	0.4919	0.6024	0.8165	1.0492	1.61	0.2318	0.3520	0.6586	1.4313
1.07	0.4860	0.5972	0.8137	1.0573	1.62	0.2284	0.3483	0.6558	1.4371
1.08	0.4801	0.5926	0.8108	1.0653	1.63	0.2250	0.3446	0.6530	1.4429
1.09	0.4742	0.5869	0.8080	1.0733	1.64	0.2217	0.3409	0.6502	1.4487
1.10	0.4684	0.5817	0.8052	1.0812	1.65	0.2184	0.3373	0.6475	1.4544
1.11	0.4626	0.5766	0.8023	1.0891	1.66	0.2152	0.3337	0.6447	1.4601
1.12	0.4568	0.5714	0.7994	1.0970	1.67	0.2120	0.3302	0.6419	1.4657
1.13	0.4511	0.5663	0.7966	1.1048	1.68	0.2088	0.3266	0.6392	1.4713
1.14	0.4455	0.5612	0.7937	1.1126	1.69	0.2057	0.3232	0.6365	1.4769
1.15	0.4398	0.5562	0.7908	1.1203	1.70	0.2026	0.3197	0.6337	1.4825
1.16	0.4343	0.5511	0.7880	1.1280	1.71	0.1996	0.3163	0.6310	1.4880
1.17	0.4287	0.5461	0.7851	1.1356	1.72	0.1966	0.3129	0.6283	1.4935
1.18	0.4232	0.5411	0.7822	1.1432	1.73	0.1936	0.3095	0.6256	1.4989
1.19	0.4178	0.5361	0.7793	1.1508	1.74	0.1907	0.3062	0.6229	1.5043
1.20	0.4124	0.5311	0.7764	1.1583	1.75	0.1878	0.3029	0.6202	1.5097
1.21	0.4070	0.5262	0.7735	1.1658	1.76	0.1850	0.2996	0.6175	1.5150
1.22	0.4017	0.5213	0.7706	1.1732	1.77	0.1822	0.2964	0.6148	1.5203
1.23	0.3965	0.5164	0.7677	1.1806	1.78	0.1794	0.2931	0.6121	1.5256
1.24	0.3912	0.5115	0.7648	1.1879	1.79	0.1767	0.2900	0.6096	1.5308
1.25	0.3861	0.5067	0.7619	1.1952	1.80	0.1740	0.2868	0.6068	1.5360
1.26	0.3809	0.5019	0.7590	1.2025	1.81	0.1714	0.2837	0.6042	1.5412
1.27	0.3759	0.4971	0.7561	1.2097	1.82	0.1688	0.2806	0.6015	1.5463
1.28	0.3708	0.4923	0.7532	1.2169	1.83	0.1662	0.2776	0.5989	1.5514
1.29	0.3659	0.4876	0.7503	1.2240	1.84	0.1637	0.2745	0.5963	1.5564
1.30	0.3609	0.4823	0.7474	1.2311	1.85	0.1612	0.2715	0.5937	1.5614
1.31	0.3560	0.4782	0.7445	1.2382	1.86	0.1587	0.2686	0.5911	1.5664
1.32	0.3512	0.4736	0.7416	1.2452	1.87	0.1563	0.2656	0.5885	1.5714
1.33	0.3464	0.4690	0.7387	1.2522	1.88	0.1539	0.2627	0.5859	1.5763
1.34	0.3417	0.4644	0.7358	1.2591	1.89	0.1516	0.2598	0.5833	1.5812
1.35	0.3370	0.4598	0.7329	1.2660	1.90	0.1492	0.2570	0.5807	1.5861
1.36	0.3323	0.4553	0.7300	1.2728	1.91	0.1470	0.2542	0.5782	1.5909
1.37	0.3277	0.4508	0.7271	1.2797	1.92	0.1447	0.2514	0.5756	1.5957
1.38	0.3232	0.4463	0.7242	1.2865	1.93	0.1425	0.2486	0.5731	1.6005
1.39	0.3187	0.4418	0.7213	1.2932	1.94	0.1403	0.2459	0.5705	1.6052
1.40	0.3142	0.4374	0.7184	1.2999	1.95	0.1381	0.2432	0.5680	1.6099
1.41	0.3098	0.4330	0.7155	1.3065	1.96	0.1360	0.2405	0.5655	1.6146
1.42	0.3055	0.4287	0.7126	1.3131	1.97	0.1339	0.2378	0.5629	1.6193
1.43	0.3012	0.4244	0.7097	1.3197	1.98	0.1318	0.2352	0.5605	1.6239
1.44	0.2969	0.4201	0.7069	1.3262	1.99	0.1298	0.2326	0.5580	1.6285
1.45	0.2927	0.4158	0.7040	1.3327	2.00	0.1278	0.2301	0.5556	1.6330
1.46	0.2886	0.4116	0.7011	1.3392	2.01	0.1258	0.2275	0.5531	1.6375
1.47	0.2845	0.4074	0.6982	1.3456	2.02	0.1239	0.2250	0.5506	1.6420
1.48	0.2804	0.4032	0.6954	1.3520	2.03	0.1220	0.2225	0.5482	1.6465
1.49	0.2764	0.3991	0.6925	1.3583	2.04	0.1201	0.2206	0.5458	1.6509
1.50	0.2724	0.3950	0.6897	1.3646	2.05	0.1182	0.2176	0.5433	1.6553
1.51	0.2685	0.3909	0.6868	1.3708	2.06	0.1164	0.2152	0.5409	1.6597
1.52	0.2646	0.3869	0.6840	1.3770	2.07	0.1146	0.2128	0.5385	1.6640
1.53	0.2608	0.3829	0.6811	1.3832	2.08	0.1128	0.2105	0.5361	1.6683
1.54	0.2570	0.3789	0.6783	1.3894	2.09	0.1111	0.2081	0.5337	1.6726

续表

Ma	p/p_T	ρ/ρ_T	T/T_T	M^*	Ma	p/p_T	ρ/ρ_T	T/T_T	M^*
2.10	0.1094	0.2058	0.5314	1.6769	2.65	0.0464	0.1115	0.4159	1.8721
2.11	0.1077	0.2035	0.5290	1.6811	2.66	0.0457	0.1103	0.4141	1.8750
2.12	0.1060	0.2013	0.5266	1.6853	2.67	0.0450	0.1091	0.4122	1.8779
2.13	0.1043	0.1990	0.5243	1.6895	2.68	0.0443	0.1079	0.4104	1.8808
2.14	0.1027	0.1968	0.5219	1.6936	2.69	0.0436	0.1067	0.4086	1.8837
2.15	0.1011	0.1946	0.5196	1.6977	2.70	0.0430	0.1056	0.4068	1.8865
2.16	0.0996	0.1925	0.5173	1.7018	2.71	0.0423	0.1044	0.4051	1.8894
2.17	0.0980	0.1903	0.5150	1.7059	2.72	0.0417	0.1033	0.4033	1.8922
2.18	0.0965	0.1882	0.5127	1.7099	2.73	0.0410	0.1022	0.4015	1.8950
2.19	0.0950	0.1861	0.5104	1.7139	2.74	0.0404	0.1010	0.3998	1.8978
2.20	0.0935	0.1841	0.5081	1.7179	2.75	0.0398	0.0999	0.3980	1.9005
2.21	0.0921	0.1820	0.5059	1.7219	2.76	0.0392	0.0989	0.3963	1.9032
2.22	0.0906	0.1800	0.5036	1.7258	2.77	0.0386	0.0978	0.3945	1.9060
2.23	0.0892	0.1780	0.5014	1.7297	2.78	0.0380	0.0967	0.3928	1.9087
2.24	0.0878	0.1760	0.4991	1.7336	2.79	0.0374	0.0957	0.3911	1.9114
2.25	0.0865	0.1740	0.4959	1.7374	2.80	0.0369	0.0946	0.3894	1.9140
2.26	0.0851	0.1721	0.4947	1.7412	2.81	0.0363	0.0936	0.3877	1.9167
2.27	0.0838	0.1702	0.4925	1.7450	2.82	0.0357	0.0926	0.3860	1.9193
2.28	0.0825	0.1683	0.4903	1.7488	2.83	0.0352	0.0916	0.3844	1.9220
2.29	0.0812	0.1664	0.4881	1.7520	2.84	0.0347	0.0906	0.3827	1.9246
2.30	0.0800	0.1646	0.4859	1.7563	2.85	0.0342	0.0896	0.3810	1.9271
2.31	0.0787	0.1628	0.4837	1.7600	2.86	0.0336	0.0887	0.3794	1.9297
2.32	0.0775	0.1610	0.4816	1.7637	2.87	0.0331	0.0877	0.3777	1.9322
2.33	0.0763	0.1592	0.4794	1.7673	2.88	0.0326	0.0867	0.3761	1.9348
2.34	0.0751	0.1574	0.4773	1.7709	2.89	0.0321	0.0858	0.3745	1.9373
2.35	0.0740	0.1556	0.4752	1.7745	2.90	0.0317	0.0849	0.3729	1.9398
2.36	0.0728	0.1539	0.4732	1.7781	2.91	0.0312	0.0840	0.3713	1.9423
2.37	0.0717	0.1522	0.4710	1.7817	2.92	0.0307	0.0831	0.3697	1.9448
2.38	0.0706	0.1506	0.4689	1.7852	2.93	0.0303	0.0822	0.3681	1.9472
2.39	0.0695	0.1489	0.4668	1.7887	2.94	0.0298	0.0813	0.3665	1.9497
2.40	0.0684	0.1472	0.4647	1.7922	2.95	0.0294	0.0804	0.3649	1.9521
2.41	0.0673	0.1456	0.4626	1.7957	2.96	0.0289	0.0796	0.3633	1.9545
2.42	0.0663	0.1440	0.4606	1.7991	2.97	0.0285	0.0787	0.3618	1.9569
2.43	0.0653	0.1424	0.4585	1.8025	2.98	0.0281	0.0779	0.3602	1.9593
2.44	0.0643	0.1408	0.4565	1.8059	2.99	0.0276	0.0771	0.3587	1.9616
2.45	0.0633	0.1392	0.4544	1.8093	3.00	0.0272	0.0762	0.3571	1.9640
2.46	0.0623	0.1377	0.4524	1.8126	3.10	0.0235	0.0685	0.3422	1.9866
2.47	0.0613	0.1362	0.4504	1.8159	3.20	0.0202	0.0617	0.3281	2.0079
2.48	0.0604	0.1347	0.4484	1.8192	3.30	0.0175	0.0555	0.3147	2.0279
2.49	0.0595	0.1332	0.4464	1.8225	3.40	0.0151	0.0501	0.3019	2.0466
2.50	0.0585	0.1317	0.4444	1.8258	3.50	0.0131	0.0452	0.2899	2.0642
2.51	0.0576	0.1302	0.4425	1.8290	3.60	0.0114	0.0409	0.2784	2.0808
2.52	0.0567	0.1288	0.4405	1.8322	3.70	0.0099	0.0370	0.2675	2.0964
2.53	0.0559	0.1274	0.4386	1.8354	3.80	0.0086	0.0336	0.2572	2.1111
2.54	0.0550	0.1260	0.4366	1.8386	3.90	0.0075	0.0304	0.2474	2.1250
2.55	0.0542	0.1246	0.4347	1.8417	4.00	0.00658	0.0277	0.2381	2.1381
2.56	0.0533	0.1232	0.4328	1.8448	4.10	0.00577	0.0252	0.2293	2.1505
2.57	0.0525	0.1219	0.4309	1.8479	4.20	0.00506	0.0229	0.2209	2.1622
2.58	0.0517	0.1205	0.4289	1.8510	4.30	0.00445	0.0209	0.2129	2.1732
2.59	0.0509	0.1192	0.4271	1.8541	4.40	0.00392	0.0191	0.2053	2.1837
2.60	0.0501	0.1179	0.4252	1.8572	4.50	0.00346	0.0175	0.1980	2.1936
2.61	0.0494	0.1166	0.4233	1.8602	4.60	0.00305	0.0160	0.1911	2.2030
2.62	0.0486	0.1153	0.4214	1.8632	4.70	0.00270	0.0146	0.1846	2.2119
2.63	0.0478	0.1140	0.4196	1.8662	4.80	0.00240	0.0134	0.1783	2.2204
2.64	0.0471	0.1128	0.4177	1.8692	4.90	0.00213	0.0123	0.1724	2.2284

续表

Ma	p/p_T	ρ/ρ_T	T/T_T	M^*	Ma	p/p_T	ρ/ρ_T	T/T_T	M^*
5.00	0.00189	0.0113	0.1667	2.2361	9.00	0.474×10^{-4}	0.815×10^{-3}	0.0581	2.3772
6.00	0.633×10^{-3}	0.519×10^{-2}	0.1220	2.2953	10.00	0.236×10^{-4}	0.495×10^{-3}	0.0476	2.3904
7.00	0.242×10^{-3}	0.261×10^{-2}	0.0926	2.3333					
8.00	0.102×10^{-3}	0.141×10^{-2}	0.0725	2.3591	∞	0	0	∞	2.4495

表 B-2

正激波前后气流参数表 ($\gamma=1.4$)

Ma_1	Ma_2	p_2/p_1	v_1/v_2 ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_{T2}/p_{T1}	p_{T2}/p_1
1.00	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.8929
1.01	0.99013	1.02345	1.01669	1.00665	0.99999	1.9152
1.02	0.98052	1.04713	1.03344	1.01325	0.99998	1.9379
1.03	0.97115	1.07105	1.05024	1.01981	0.99997	1.9610
1.04	0.96202	1.09520	1.06709	1.02634	0.99994	1.9845
1.05	0.95312	1.1196	1.08398	1.03284	0.99987	2.0083
1.06	0.94444	1.1442	1.10092	1.03931	0.99976	2.0325
1.07	0.93598	1.1690	1.11790	1.04575	0.99962	2.0570
1.08	0.92772	1.1941	1.13492	1.05217	0.99944	2.0819
1.09	0.91965	1.2194	1.15199	1.05856	0.99921	2.1072
1.10	0.91177	1.2450	1.1691	1.06494	0.99892	2.1328
1.11	0.90408	1.2708	1.1862	1.07130	0.99858	2.1588
1.12	0.89656	1.2968	1.2034	1.07764	0.99820	2.1851
1.13	0.88922	1.3230	1.2206	1.08396	0.99776	2.2118
1.14	0.88204	1.3495	1.2378	1.09027	0.99726	2.2338
1.15	0.87502	1.3762	1.2550	1.09657	0.99669	2.2661
1.16	0.86816	1.4032	1.2723	1.10287	0.99605	2.2937
1.17	0.86145	1.4304	1.2896	1.10916	0.99534	2.3217
1.18	0.85488	1.4578	1.3069	1.11544	0.99455	2.3499
1.19	0.84846	1.4854	1.3243	1.12172	0.99371	2.3786
1.20	0.84217	1.5138	1.3416	1.1280	0.99280	2.4075
1.21	0.83601	1.5414	1.3590	1.1343	0.99180	2.4367
1.22	0.82998	1.5698	1.3764	1.1405	0.99073	2.4662
1.23	0.82408	1.5984	1.3938	1.1468	0.98957	2.4961
1.24	0.81830	1.6272	1.4112	1.1531	0.98835	2.5263
1.25	0.81264	1.6562	1.4286	1.1594	0.98706	2.5568
1.26	0.80709	1.6855	1.4460	1.1657	0.98568	2.5876
1.27	0.80165	1.7150	1.4634	1.1720	0.98422	2.6187
1.28	0.79631	1.7448	1.4808	1.1782	0.98268	2.6500
1.29	0.79108	1.7748	1.4983	1.1843	0.98106	2.6816
1.30	0.78596	1.8050	1.5157	1.1909	0.97935	2.7135
1.31	0.78093	1.8354	1.5331	1.1972	0.97758	2.7457
1.32	0.77600	1.8661	1.5505	1.2035	0.97574	2.7783
1.33	0.77116	1.8970	1.5680	1.2099	0.97382	2.8112
1.34	0.76641	1.9282	1.5854	1.2162	0.97181	2.8444
1.35	0.76175	1.9596	1.6028	1.2226	0.96972	2.8778
1.36	0.75718	1.9912	1.6202	1.2290	0.96756	2.9115
1.37	0.75269	2.0230	1.6376	1.2354	0.96534	2.9455
1.38	0.74828	2.0551	1.6550	1.2418	0.96304	2.9798
1.39	0.74396	2.0874	1.6723	1.2482	0.96065	3.0144

续表

Ma_1	Ma_2	p_2/p_1	$\frac{v_1/v_2}{\rho_2/\rho_1}$	T_2/T_1	p_{T2}/p_{T1}	p_{T2}/p_1
1.40	0.73971	2.1200	1.6806	1.2547	0.95819	3.0493
1.41	0.73554	2.1528	1.7070	1.2612	0.95566	3.0844
1.42	0.73144	2.1858	1.7243	1.2676	0.95306	3.1198
1.43	0.72741	2.2190	1.7416	1.2742	0.95039	3.1555
1.44	0.72345	2.2525	1.7589	1.2807	0.94765	3.1915
1.45	0.71956	2.2862	1.7761	1.2872	0.94483	3.2278
1.46	0.71574	2.3202	1.7934	1.2938	0.94196	3.2643
1.47	0.71198	2.3544	1.8106	1.3004	0.93901	3.3011
1.48	0.70829	2.3888	1.8278	1.3070	0.93600	3.3382
1.49	0.70466	2.4234	1.8449	1.3136	0.93392	3.3756
1.50	0.70109	2.4583	1.8621	1.3202	0.92978	3.4133
1.51	0.69758	2.4934	1.8792	1.3269	0.92658	3.4512
1.52	0.69413	2.5288	1.8962	1.3336	0.92331	3.4894
1.53	0.69073	2.5644	1.9133	1.3403	0.91999	3.5279
1.54	0.68739	2.6003	1.9303	1.3470	0.91662	3.5667
1.55	0.68410	2.6363	1.9473	1.3538	0.91319	3.6058
1.56	0.68086	2.6725	1.9643	1.3606	0.90970	3.6451
1.57	0.67768	2.7090	1.9812	1.3674	0.90615	3.6847
1.58	0.67455	2.7458	1.9981	1.3742	0.90255	3.7245
1.59	0.67147	2.7828	2.0149	1.3811	0.89889	3.7645
1.60	0.66844	2.8201	2.0317	1.3880	0.89520	3.8049
1.61	0.66545	2.8575	2.0485	1.3949	0.89144	3.8456
1.62	0.66251	2.8951	2.0652	1.4018	0.88764	3.8866
1.63	0.65962	2.9330	2.0820	1.4088	0.88380	3.9278
1.64	0.65677	2.9712	2.0986	1.4158	0.87992	3.9693
1.65	0.65396	3.0096	2.1152	1.4228	0.87598	4.0111
1.66	0.65119	3.0482	2.1318	1.4298	0.87201	4.0531
1.67	0.64847	3.0870	2.1484	1.4369	0.86800	4.0954
1.68	0.64579	3.1261	2.1649	1.4440	0.86396	4.1379
1.69	0.64315	3.1654	2.1813	1.4512	0.85987	4.1807
1.70	0.64055	3.2050	2.1977	1.4583	0.85573	4.2238
1.71	0.63798	3.2448	2.2141	1.4655	0.85155	4.2672
1.72	0.63545	3.2848	2.2304	1.4727	0.84735	4.3108
1.73	0.63296	3.3250	2.2467	1.4800	0.84312	4.3547
1.74	0.63051	3.3655	2.2629	1.4873	0.83886	4.3989
1.75	0.62809	3.4062	2.2791	1.4946	0.83456	4.4433
1.76	0.62570	3.4472	2.2952	1.5019	0.83024	4.4880
1.77	0.62335	3.4884	2.3113	1.5093	0.82589	4.5330
1.78	0.62104	3.5298	2.3273	1.5167	0.82152	4.5783
1.79	0.61875	3.5714	2.3433	1.5241	0.81711	4.6238
1.80	0.61650	3.6133	2.3592	1.5316	0.81268	4.6695
1.81	0.61428	3.6554	2.3751	1.5391	0.80823	4.7155
1.82	0.61209	3.6978	2.3909	1.5466	0.80376	4.7618
1.83	0.60993	3.7404	2.4067	1.5542	0.79926	4.8083
1.84	0.60780	3.7832	2.4224	1.5617	0.79474	4.8551
1.85	0.60570	3.8262	2.4381	1.5694	0.79021	4.9022
1.86	0.60363	3.8695	2.4537	1.5770	0.78567	4.9498
1.87	0.60159	3.9130	2.4693	1.5847	0.78112	4.9974
1.88	0.59957	3.9568	2.4848	1.5924	0.77656	5.0453
1.89	0.59758	4.0008	2.5003	1.6001	0.77197	5.0934

续表

Ma_1	Ma_2	p_2/p_1	$\frac{v_1/v_2}{\rho_2/\rho_1}$	T_2/T_1	p_{T2}/p_{T1}	p_{T2}/p_1
1.90	0.59562	4.0450	2.5157	1.6079	0.76735	5.1417
1.91	0.59368	4.0894	2.5310	1.6157	0.76273	5.1904
1.92	0.59177	4.1341	2.5463	1.6236	0.75812	5.2394
1.93	0.58988	4.1790	2.5615	1.6314	0.75347	5.2886
1.94	0.58802	4.2242	3.5767	1.6394	0.74883	5.3381
1.95	0.58618	4.2696	2.5919	1.6473	0.74418	5.3878
1.96	0.58437	4.3152	2.6070	1.6553	0.73954	5.4378
1.97	0.58258	4.3610	2.6220	1.6633	0.73487	5.4880
1.98	0.58081	4.4071	2.6369	1.6713	0.73021	5.5385
1.99	0.57907	4.4534	2.6518	1.6794	0.72554	5.5894
2.00	0.57735	4.5000	2.6666	1.6875	0.72088	5.6405
2.01	0.57565	4.5468	2.6814	1.6956	0.71619	5.6913
2.02	0.57397	4.5938	2.6962	1.7038	0.71152	5.7134
2.03	0.57231	4.6411	2.7109	1.7120	0.70686	5.7952
2.04	0.57068	4.6886	2.7255	1.7203	0.70218	5.8473
2.05	0.56907	4.7363	2.7400	1.7286	0.69752	5.8997
2.06	0.56747	4.7842	2.7545	1.7369	0.69284	5.9523
2.07	0.56589	4.8324	2.7690	1.7452	0.68817	6.0052
2.08	0.56433	4.8808	2.7834	1.7536	0.68351	6.0584
2.09	0.56280	4.9295	2.7977	1.7620	0.67886	6.1118
2.10	0.56128	4.9784	2.8119	1.7704	0.67422	6.1655
2.11	0.55978	5.0275	2.8261	1.7789	0.66957	6.2194
2.12	0.55830	5.0768	2.8403	1.7874	0.66492	6.2736
2.13	0.55683	5.1264	2.8543	1.7960	0.66020	6.3280
2.14	0.55538	5.1762	2.8683	1.8046	0.65567	6.3827
2.15	0.55395	5.2262	2.8823	1.8132	0.65105	6.4377
2.16	0.55254	5.2765	2.8962	1.8219	0.64644	6.4929
2.17	0.55114	5.3270	2.9100	1.8306	0.64185	6.5484
2.18	0.54976	5.3778	2.9238	1.8393	0.63728	6.6042
2.19	0.54841	5.4288	2.9376	1.8481	0.63270	6.6602
2.20	0.54706	5.4800	2.9512	1.8569	0.62812	6.7163
2.21	0.54572	5.5314	2.9648	1.8657	0.62358	6.7730
2.22	0.54440	5.5831	2.9783	1.8746	0.61905	6.8299
2.23	0.54310	5.6350	2.9918	1.8835	0.61453	6.8869
2.24	0.54182	5.6872	3.0052	1.8924	0.61002	6.9442
2.25	0.54055	5.7396	3.0186	1.9014	0.60554	7.0018
2.26	0.53929	5.7922	3.0319	1.9104	0.60106	7.0597
2.27	0.53805	5.8451	3.0452	1.9194	0.59659	7.1178
2.28	0.53683	5.8982	3.0584	1.9285	0.59214	7.1762
2.29	0.53561	5.9515	3.0715	1.9376	0.58772	7.2348
2.30	0.53441	6.0050	3.0846	1.9468	0.58331	7.2937
2.31	0.53322	6.0588	3.0976	1.9560	0.57891	7.3529
2.32	0.53205	6.1128	3.1105	1.9652	0.57452	7.4123
2.33	0.53089	6.1670	3.1234	1.9745	0.57015	7.4720
2.34	0.52974	6.2215	3.1362	1.9838	0.56580	7.5319
2.35	0.52861	6.2762	3.1490	1.9931	0.56148	7.5920
2.36	0.52749	6.3312	3.1617	2.0025	0.55717	7.6524
2.37	0.52638	6.3864	3.1743	2.0119	0.55288	7.7131
2.38	0.52528	6.4418	3.1869	2.0213	0.54862	7.7741
2.39	0.52419	6.4974	3.1994	2.0308	0.54438	7.8354

续表

Ma_1	Ma_2	p_2/p_1	v_1/v_2 ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_{T2}/p_{T1}	p_{T2}/p_1
2.40	0.52312	6.5533	3.2119	2.0403	0.54015	7.8969
2.41	0.52206	6.6094	3.2243	2.0499	0.53594	7.9587
2.42	0.52100	6.6058	3.2366	2.0595	0.53175	8.0207
2.43	0.51996	6.7224	3.2489	2.0691	0.52758	8.0830
2.44	0.51894	6.7792	3.2611	2.0788	0.52344	8.1455
2.45	0.51792	6.8362	3.2733	2.0885	0.51932	8.2083
2.46	0.51691	6.8935	3.2854	2.0982	0.51521	8.2714
2.47	0.51592	6.9510	3.2975	2.1080	0.51112	8.3347
2.48	0.51493	7.0088	3.3095	2.1178	0.50706	8.3983
2.49	0.51395	7.0668	3.3214	2.1276	0.50303	8.4622
2.50	0.51299	7.1250	3.3333	2.1375	0.49902	8.5262
2.51	0.51204	7.1834	3.3451	2.1474	0.49502	8.5904
2.52	0.51109	7.2421	3.3569	2.1574	0.49104	8.6549
2.53	0.51015	7.3010	3.3686	2.1674	0.48709	8.7198
2.54	0.50923	7.3602	3.3802	2.1774	0.48317	8.7850
2.55	0.50831	7.4196	3.3918	2.1875	0.47927	8.8505
2.56	0.50740	7.4792	3.4034	2.1976	0.47540	8.9162
2.57	0.50651	7.5391	3.4149	2.2077	0.47155	8.9821
2.58	0.50562	7.5992	3.4263	2.2179	0.46772	9.0482
2.59	0.50474	7.6595	3.4376	2.2281	0.46391	9.1146
2.60	0.50387	7.7200	3.4489	2.2383	0.46012	9.1813
2.61	0.50301	7.7808	3.4602	2.2486	0.45636	9.2481
2.62	0.50216	7.8418	3.4714	2.2589	0.45262	9.3154
2.63	0.50132	7.9030	3.4825	2.2693	0.44891	9.3829
2.64	0.50048	7.9645	3.4936	2.2797	0.44522	9.4507
2.65	0.49965	8.0262	3.5047	2.2901	0.44155	9.5187
2.66	0.49883	8.0882	3.5157	2.3006	0.43791	9.5869
2.67	0.49802	8.1504	3.5266	2.3111	0.43429	9.6553
2.68	0.49722	8.2128	3.5374	2.3217	0.43070	9.7241
2.69	0.49642	8.2754	3.5482	2.3323	0.42713	9.7932
2.70	0.49563	8.3383	3.5590	2.3429	0.42359	9.8625
2.71	0.49485	8.4014	3.5697	2.3536	0.42007	9.9320
2.72	0.49408	8.4648	3.5803	2.3643	0.41657	10.0017
2.73	0.49332	8.5284	3.5909	2.3750	0.41310	10.0718
2.74	0.49256	8.5922	3.6014	2.3858	0.40965	10.1421
2.75	0.49181	8.6562	3.6119	2.3966	0.40622	10.212
2.76	0.49107	8.7205	3.6224	2.4074	0.40282	10.283
2.77	0.49033	8.7850	3.6328	2.4183	0.39945	10.354
2.78	0.48960	8.8497	3.6431	2.4292	0.39610	10.426
2.79	0.48888	8.9147	3.6533	2.4402	0.39276	10.498
2.80	0.48817	8.9800	3.6635	2.4512	0.38946	10.569
2.81	0.48746	9.0454	3.6737	2.4622	0.38618	10.641
2.82	0.48676	9.1111	3.6838	2.4733	0.38293	10.714
2.83	0.48607	9.1770	3.6939	2.4844	0.37970	10.787
2.84	0.48538	9.2432	3.7039	2.4955	0.37649	10.860
2.85	0.48470	9.3096	3.7139	2.5067	0.37330	10.933
2.86	0.48402	9.3762	3.7238	2.5179	0.37013	11.006
2.87	0.48334	9.4431	3.7336	2.5292	0.36700	11.080
2.88	0.48268	9.5102	3.7434	2.5405	0.36389	11.154
2.89	0.48203	9.5775	3.7532	2.5518	0.36080	11.228

续表

Ma_1	Ma_2	p_2/p_1	$\frac{v_1/v_2}{\rho_2/\rho_1}$	T_2/T_1	p_{T2}/p_{T1}	p_{r2}/p_{r1}
2.90	0.48138	9.6450	3.7629	2.5632	0.35773	11.302
2.91	0.48074	9.7127	3.7725	2.5746	0.35469	11.377
2.92	0.48010	9.7808	3.7821	2.5860	0.35167	11.452
2.93	0.47946	9.8491	3.7917	2.5975	0.34867	11.527
2.94	0.47883	9.9176	3.8012	2.6090	0.34570	11.603
2.95	0.47821	9.9863	3.8106	2.6206	0.34275	11.679
2.96	0.47760	10.055	3.8200	2.6322	0.33982	11.755
2.97	0.47699	10.124	3.8294	2.6438	0.33692	11.831
2.98	0.47638	10.194	3.8387	2.6555	0.33404	11.907
2.99	0.47578	10.263	3.8479	2.6672	0.33118	11.984
3.00	0.47519	10.333	3.8571	2.6790	0.32834	12.061
3.50	0.45115	14.125	4.2608	3.3150	0.21295	16.242
4.00	0.43496	18.500	4.5714	4.0469	0.13876	21.068
4.50	0.42355	23.458	4.8119	4.8751	0.09170	26.539
5.00	0.41523	29.000	5.0000	5.8000	0.06172	32.654
6.00	0.40416	41.833	5.2683	7.9405	0.02965	46.815
7.00	0.39736	57.000	5.4444	10.469	0.01535	63.552
8.00	0.39289	74.500	5.5652	13.387	0.00849	82.865
9.00	0.38980	94.333	5.6512	16.693	0.00496	104.753
10.00	0.38757	116.500	5.7143	20.388	0.00304	129.217
∞	0.37796	∞	6.0000	∞	0	∞

表 B-3

等截面绝热摩擦管流参数表 ($\gamma=1.4$)

Ma	T/T_{cr}	p/p_{cr}	p_T/p_{Tcr}	$\frac{v/v_{cr}}{\rho_{cr}/\rho}$	$4\bar{c}_f \frac{L_{cr}}{D}$
0.00	1.2000	∞	∞	0.00000	∞
0.05	1.1994	21.903	11.5914	0.05476	280.02
0.10	1.1976	10.9435	5.8218	0.10943	66.922
0.15	1.1946	7.2866	3.9103	0.16395	27.932
0.20	1.1905	5.4555	2.9635	0.21822	14.533
0.25	1.1852	4.3546	2.4027	0.27217	8.4834
0.30	1.1788	3.6190	2.0351	0.32572	5.2992
0.35	1.1713	3.0922	1.7780	0.37880	3.4525
0.40	1.1628	2.6958	1.5901	0.43133	2.3085
0.45	1.1533	2.3865	1.4486	0.48326	1.5664
0.50	1.1429	2.1381	1.3399	0.53453	1.06908
0.55	1.1315	1.9341	1.2549	0.58506	0.72805
0.60	1.1194	1.7634	1.1882	0.63481	0.49081
0.65	1.10650	1.6183	1.1356	0.68374	0.32460
0.70	1.09290	1.4934	1.09436	0.73179	0.20814
0.75	1.07856	1.3848	1.06242	0.77893	0.12728
0.80	1.06383	1.2892	1.03823	0.82514	0.07229
0.85	1.04849	1.2047	1.02067	0.87037	0.03632
0.90	1.03270	1.12913	1.00887	0.91459	0.014513
0.95	1.01652	1.06129	1.00215	0.95782	0.003280
1.00	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0
1.05	0.98320	0.94435	1.00203	1.04115	0.002712
1.10	0.96618	0.89359	1.00793	1.08124	0.009933
1.15	0.94899	0.84710	1.01746	1.1203	0.02053
1.20	0.93168	0.80436	1.03044	1.1583	0.03364
1.25	0.91429	0.76495	1.04676	1.1952	0.04858
1.30	0.89686	0.72848	1.06630	1.2311	0.06483
1.35	0.87944	0.69466	1.08904	1.2660	0.08199
1.40	0.86207	0.66320	1.1149	1.2995	0.09974
1.45	0.84477	0.63387	1.1440	1.3327	0.11782

续表

Ma	T/T_{cr}	p/p_{cr}	p_T/p_{Tcr}	v/v_{cr} ρ_{cr}/ρ	$4\bar{C}_f \frac{L_{cr}}{D}$
1.50	0.82759	0.60648	1.1762	1.3646	0.13605
1.55	0.81054	0.58084	1.2116	1.3955	0.15427
1.60	0.79365	0.56679	1.2502	1.4254	0.17236
1.65	0.77695	0.53421	1.2922	1.4544	0.19022
1.70	0.76046	0.51297	1.3876	1.4825	0.20780
1.75	0.74419	0.49295	1.3865	1.5097	0.22504
1.80	0.72816	0.47407	1.4390	1.5300	0.24189
1.85	0.71238	0.45623	1.4952	1.5614	0.25832
1.90	0.69686	0.43936	1.5552	1.5861	0.27433
1.95	0.68162	0.42339	1.6193	1.6099	0.28989
2.00	0.66667	0.40825	1.6875	1.6330	0.30499
2.05	0.65200	0.39389	1.7600	1.6553	0.31965
2.10	0.63762	0.38024	1.8369	1.6769	0.33385
2.15	0.62354	0.36728	1.9185	1.6977	0.34760
2.20	0.60976	0.35494	2.0050	1.7179	0.36091
2.25	0.59627	0.34319	2.0964	1.7374	0.37378
2.30	0.58309	0.33200	2.1931	1.7563	0.38623
2.35	0.57021	0.32133	2.2953	1.7745	0.39826
2.40	0.55762	0.31114	2.4031	1.7922	0.40989
2.45	0.54533	0.30141	2.5168	1.8092	0.42113
2.50	0.53333	0.29212	2.6367	1.8257	0.43197
2.55	0.52163	0.28323	2.7630	1.8417	0.44247
2.60	0.51020	0.27473	2.8960	1.8571	0.45259
2.65	0.49906	0.26658	3.0359	1.8721	0.46237
2.70	0.48820	0.25878	3.1830	1.8865	0.47182
2.75	0.47761	0.25131	3.3376	1.9005	0.48065
2.80	0.46729	0.24414	3.5001	1.9140	0.48976
2.85	0.45723	0.23726	3.6707	1.9271	0.49828
2.90	0.44743	0.23066	3.8498	1.9398	0.50651
2.95	0.43788	0.22431	4.0376	1.9521	0.51447
3.00	0.42857	0.21822	4.2346	1.9640	0.52216
3.50	0.34783	0.16850	6.7896	2.0642	0.58643
4.00	0.28571	0.13363	10.719	2.1381	0.63306
4.50	0.23762	0.10833	16.562	2.1936	0.66764
5.00	0.20000	0.08944	25.000	2.2361	0.69381
6.00	0.14634	0.06376	53.180	2.2953	0.72987
7.00	0.11111	0.04762	104.14	2.3333	0.75281
8.00	0.08696	0.03686	190.11	2.3591	0.76820
9.00	0.06977	0.02935	327.19	2.3772	0.77898
10.00	0.05714	0.02390	535.94	2.3905	0.78683
∞	0	0	∞	2.4495	0.82153

参 考 文 献

- [1] [美] B. S. Massey. Mechanics of Fluids. 5th Edition. New York: Van Nostrand Reinhold (UK) Co. Ltd., 1983.
- [2] [美] V. L. Streeter and E. B. Wylie. Fluid Mechanics. Eighth Edition. McGraw-Hill Bk. Co., 1985.
- [3] [美] J. K. Vennard and R. L. Street. Elementary Fluid Mechanics. Sixth Edition. New York: Wiley, 1982.
- [4] [英] D. J. Tritton. Physical Fluid Mechanics. Second Edition. London: Clarendon Pr., 1988.
- [5] [美] R. L. Daugherty, J. B. Franzini and E. J. Finnemore. Fluid Mechanics with Engineering Applications. Eighth Edition. New York: McGraw-Hill Bk. Co., 1985.
- [6] [德] L. Prandtl. Essentials of Fluid Dynamics., First ed. London: Hafner Publishing Company, 1952.
- [7] [德] L. Prandtl and O. G. Tietjens. Applied Hydro-and Aeromechanics. First Edition. New Dover Edition. New York: Dover Publications. Inc., 1957.
- [8] [德] L. Prandtl and O. G. Tietjens. Fundamentals of Hydro-and Aeromechanics. New Dover Edition. New York: Dover Publication. Inc., 1957.
- [9] [美] R. W. Fox and A. T. McDonald. Introduction to Fluid Mechanics. Second Edition. New York: Wiley, 1973.
- [10] [美] D. G. Shepherd. Elements of Fluid Mechanics. First Edition. New York: Harcourt, Brace & World, 1965.
- [11] [美] A. H. Shapiro. The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow. First Edition. New York: The Ronald Press Company, Vol. I, 1953, Vol. II, 1954.
- [12] [德] W. Kaufman. Technische Hydro-und Aeromechanik, Dritte Verbesserte Auflage. Berlin: Springer-Verly, 1963.
- [13] [德] H. Schlichting und E. Truckenbrodt. Aerodynamik des Flugzeuges. Zweite Auflage. Berlin: Springer-Verlag, 1967.
- [14] [德] H. Schlichting, Boundary Layer Theory, Seventh Edition. New York: McGraw-Hill BK. Co. 1979.
- [15] [苏] Л. Г. Лойцянский. Механика Жидкости и Газы. Третье Издание. Москва: Физматгиз, 1978.
- [16] [美] J. W. 戴莱, D. R. F. 哈里曼著. 流体动力学. 郭子中, 陈玉璞, 等译. 北京: 人民教育出版社, 1983.
- [17] [苏] Н. С. 阿尔然尼可夫, В. Н. 马尔采夫著. 空气动力学. 张炳暄等译. 北京: 高等教育出版社, 1960.
- [18] [德] L. 普朗特, К. 奥斯瓦提奇, К. 维格哈特著. 流体力学概论. 郭永怀, 陆士嘉译. 北京: 科学出版社, 1981.
- [19] 西安交通大学流体力学教研室, 江宏俊. 流体力学: 上、下册. 北京: 高等教育出版社, 1985.
- [20] 清华大学工程力学系. 流体力学基础. 北京: 机械工业出版社. 上册 1980, 下册 1982.
- [21] 张也影. 流体力学. 北京: 高等教育出版社, 1986.
- [22] 孔珑. 可压缩流体动力学. 北京: 水利电力出版社, 1991.
- [23] 夏震寰. 现代水力学. 北京: 高等教育出版社, 1990.