

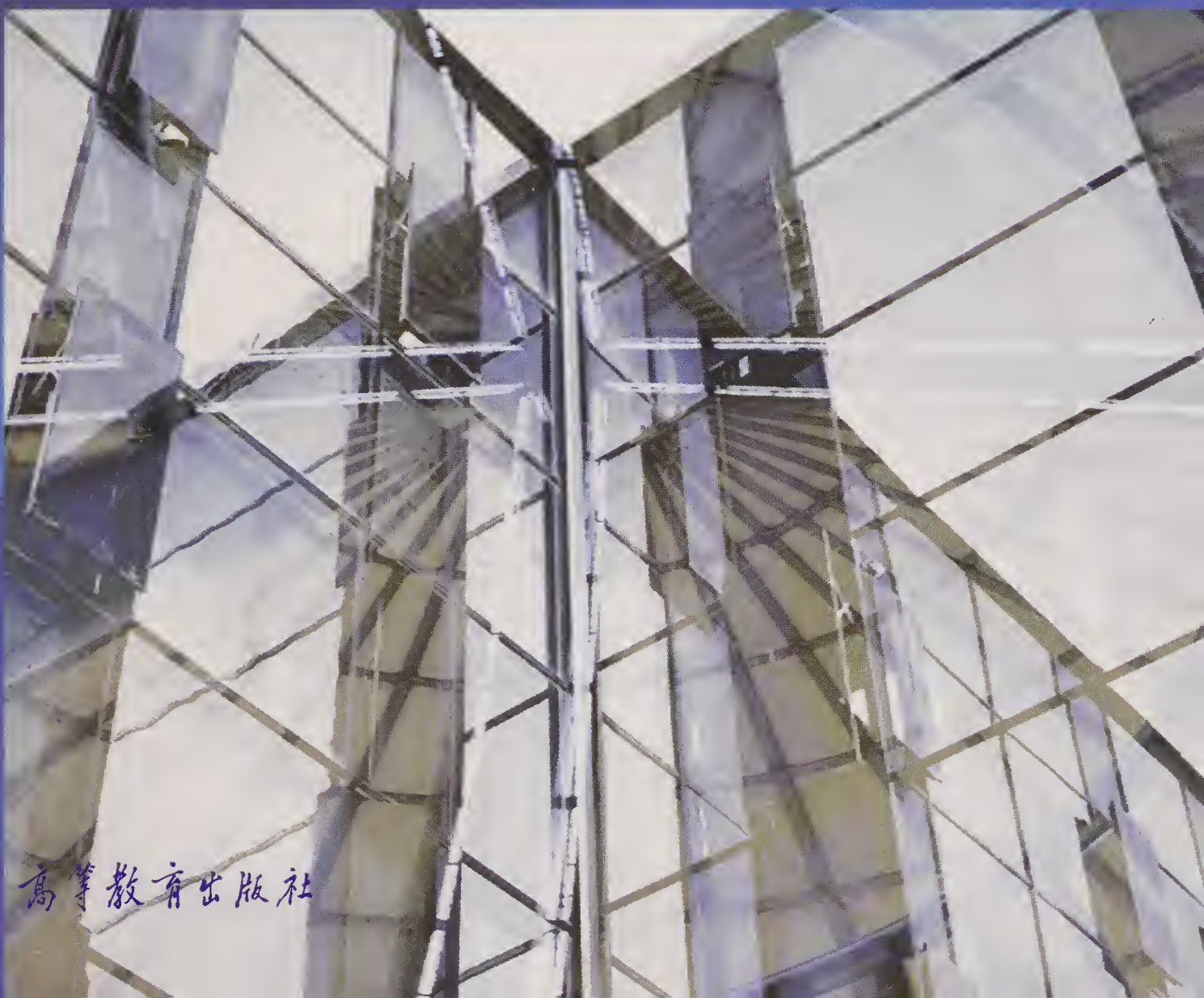


普通高等教育“十一五”国家级规划教材

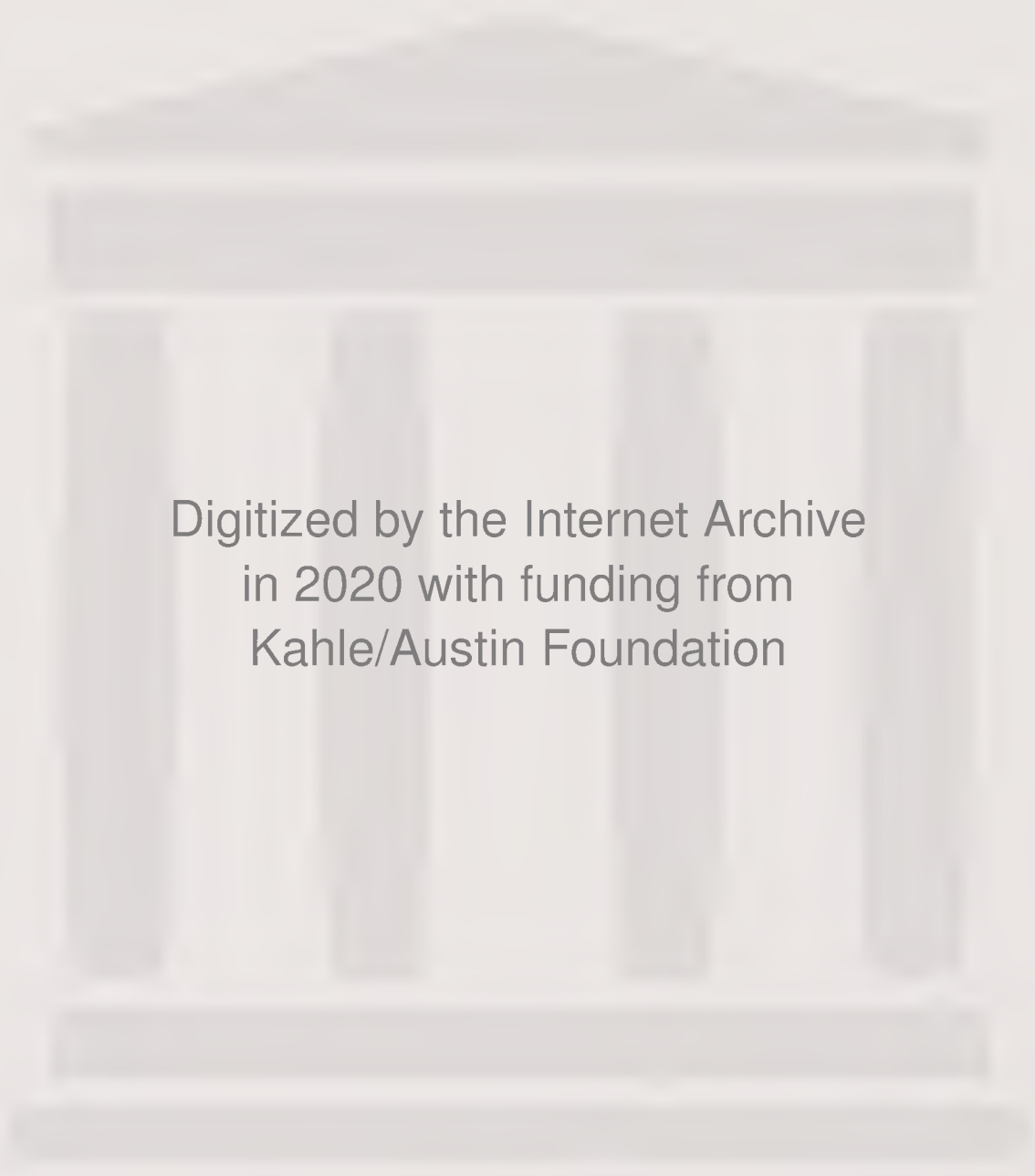
高等数学

(本科少学时类型) (第四版) 下册

同济大学数学系 编



高等教育出版社



Digitized by the Internet Archive
in 2020 with funding from
Kahle/Austin Foundation



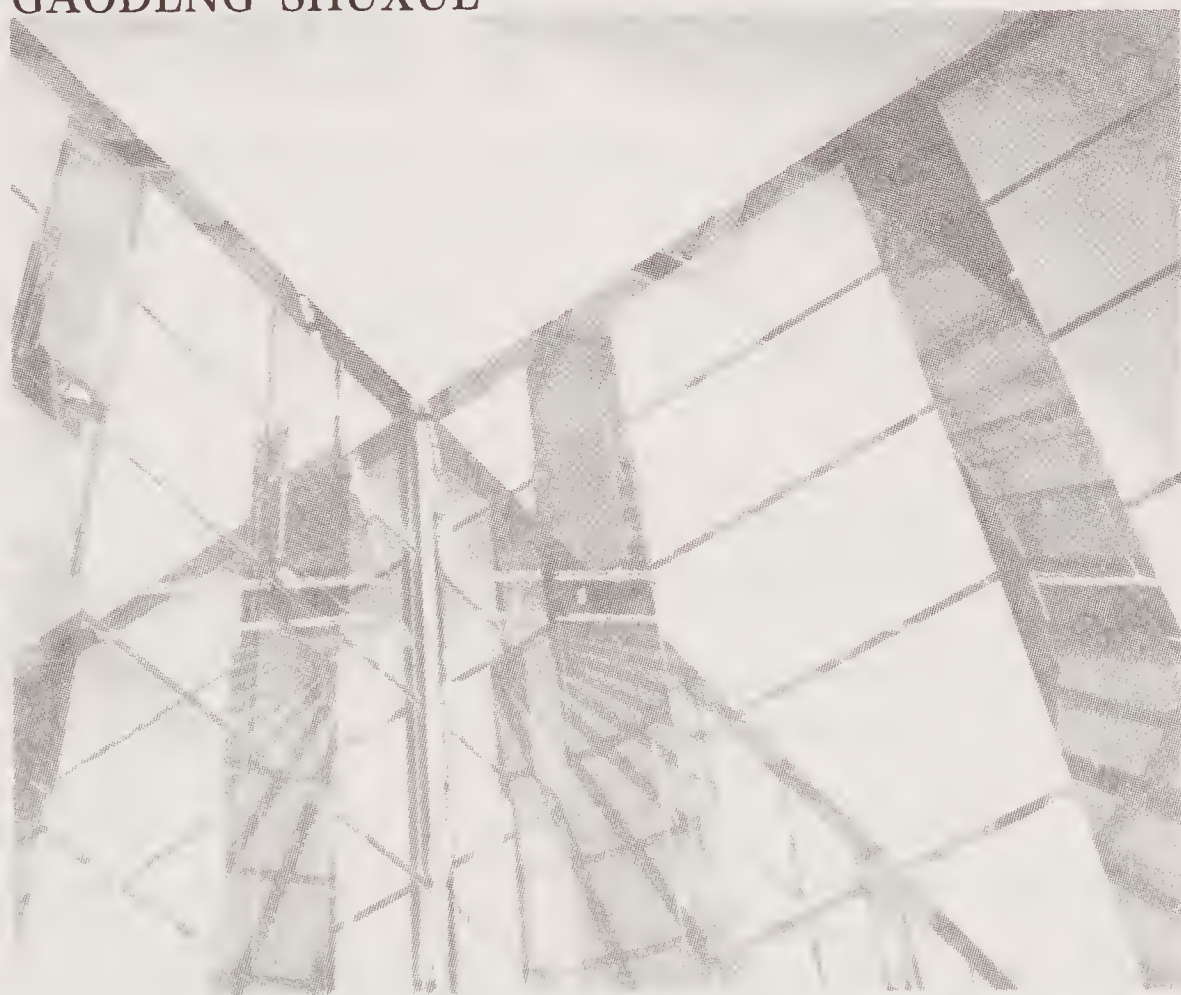
普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等数学

(本科少学时类型) (第四版) 下册

同济大学数学系 编

GAODENG SHUXUE



高等教育出版社·北京

内容提要

本书结构严谨，语言平实，易教易学，分上、下两册出版。上册 6 章，内容为函数与极限、一元函数微积分学、微分方程；下册 4 章，内容为向量代数与空间解析几何、多元函数微积分学、无穷级数。本书第四版修订的主要依据是最近正式公布的工科类本科微积分课程教学基本要求，并充分考虑本科少学时类型和专科的微积分课程教学实际，恰当把握理论深度，突出微积分中实用的分析和计算方法，着重基本知识的掌握和基本技能的训练，注意与中学数学教学的衔接。在大部分目的后面配置了与每一目内容紧密结合的基本概念题或简单计算题，在每章的后面配置了用于阶段复习的章复习题，便于学生及时消化和掌握所学内容。本书可作为本科少学时和专科的高等数学教材或参考书。

图书在版编目(C I P)数据

高等数学. 下册 / 同济大学数学系编. -- 4 版. --
北京 : 高等教育出版社, 2015.8 (2016.6 重印)
本科少学时类型
ISBN 978-7-04-043118-6

I. ①高… II. ①同… III. ①高等数学 - 高等学校 -
教材 IV. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第134900号

策划编辑	于丽娜	责任编辑	蒋 青	封面设计	王 睢	版式设计	范晓红
插图绘制	邓 超	责任校对	胡美萍	责任印制	韩 刚		

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印 刷	涿州市星河印刷有限公司		http://www.landraco.com.cn
开 本	850mm×1168mm 1/32	版 次	1978 年 3 月第 1 版
印 张	8.125		2015 年 8 月第 4 版
字 数	200 千字	印 次	2016 年 6 月第 2 次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	16.00 元
咨询电话	400-810-0598		

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 43118-00

目 录

第七章 向量代数与空间解析几何	1
第一节 向量及其线性运算	1
一、向量的概念	1
二、向量的加减法	3
三、向量与数的乘法	5
习题 7 - 1	8
第二节 点的坐标与向量的坐标	8
一、空间直角坐标系	8
二、利用坐标作向量的线性运算	11
三、向量的模、两点间的距离	13
四、向量的方向角与方向余弦	14
五、向量的投影	16
习题 7 - 2	17
第三节 数量积 · 向量积 · * 混合积	18
一、两向量的数量积	18
二、两向量的向量积	21
* 三、向量的混合积	25
习题 7 - 3	27
第四节 平面及其方程	28
一、点的轨迹 · 方程的概念	28
二、平面的点法式方程	29

三、平面的一般方程	31
四、两平面的夹角	33
习题 7-4	35
第五节 空间直线及其方程	36
一、空间直线的一般方程	36
二、空间直线的点向式方程与参数方程	37
三、两直线的夹角	39
四、直线与平面的夹角	40
五、综合举例	42
习题 7-5	45
第六节 曲面及其方程	46
一、柱面	46
二、旋转曲面	48
三、二次曲面	50
习题 7-6	55
第七节 空间曲线及其方程	56
一、空间曲线的一般方程	56
二、空间曲线的参数方程	57
三、空间曲线在坐标面上的投影	59
习题 7-7	62
第七章复习题	62
第八章 多元函数微分法及其应用	65
第一节 多元函数的基本概念	65
一、多元函数的概念·区域	65
二、多元函数的极限	70
三、多元函数的连续性	72
习题 8-1	74

第二节 偏导数	75
一、偏导数的定义及其算法	75
二、高阶偏导数	80
习题 8-2	83
第三节 全微分	84
习题 8-3	90
第四节 多元复合函数的求导法则	91
习题 8-4	97
第五节 隐函数的求导公式	98
习题 8-5	102
第六节 多元函数微分法的几何应用举例	102
一、空间曲线的切线与法平面	102
二、曲面的切平面与法线	104
习题 8-6	108
第七节 多元函数的极值及其求法	109
一、多元函数的极值及最大值、最小值	109
二、条件极值	113
习题 8-7	116
第八章复习题	117
第九章 重积分及曲线积分	119
第一节 二重积分的概念与性质	119
一、曲顶柱体的体积与二重积分	119
二、二重积分的性质	122
习题 9-1	124
第二节 二重积分的计算法	125
一、利用直角坐标计算二重积分	125
二、利用极坐标计算二重积分	133
习题 9-2	138

第三节 二重积分的应用	141
一、曲面的面积	141
二、平面薄片的质心	144
三、平面薄片的转动惯量	146
习题 9-3	147
* 第四节 三重积分	148
一、三重积分的概念	148
二、三重积分的计算法	149
* 习题 9-4	155
* 第五节 对弧长的曲线积分	155
一、对弧长的曲线积分的概念	156
二、对弧长的曲线积分的计算法	158
* 习题 9-5	161
* 第六节 对坐标的曲线积分	162
一、对坐标的曲线积分的概念	162
二、对坐标的曲线积分的计算法	165
* 习题 9-6	169
* 第七节 格林公式及其应用	170
一、格林公式	170
二、平面上曲线积分与路径无关的条件	173
* 习题 9-7	177
第九章复习题	179
第十章 无穷级数	182
第一节 常数项级数的概念与性质	182
一、常数项级数的定义	182
二、级数的性质	185
习题 10-1	188

第二节 常数项级数的审敛法	189
一、正项级数及其审敛法	190
二、交错级数及其审敛法	196
三、绝对收敛与条件收敛	198
习题 10 - 2	201
第三节 幂级数	202
一、函数项级数的一般概念	202
二、幂级数及其收敛区间	203
三、幂级数的运算	208
习题 10 - 3	210
第四节 函数展开成幂级数	210
习题 10 - 4	217
* 第五节 幂级数在近似计算中的应用	217
* 习题 10 - 5	222
第十章复习题	222
附录 二阶和三阶行列式简介	225
思考题答案	231
习题答案	236

第七章

向量代数与空间解析几何

在这一章里,我们先引进向量的概念,介绍向量的一些运算,然后以向量为工具讨论空间的平面和直线,最后介绍二次曲面和空间曲线的部分内容.

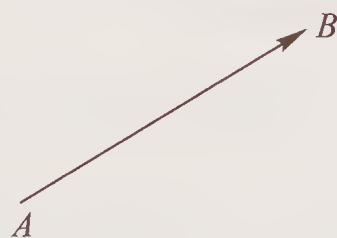
第一节 向量及其线性运算

一、向量的概念

客观世界中有这样一类量,它们既有大小,又有方向,例如位移、速度、加速度、力、力矩等,这一类量称为向量(也称矢量).

数学上常用有向线段来表示向量,有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向.

以 A 为起点、 B 为终点的有向线段所表示的向量记作 $\overrightarrow{AB}$ (图 7-1). 有时也用一个黑体字母,或为便于书写,在字母上面加箭头来



表示向量,例如 $\mathbf{a}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{F}$ 或 $\vec{a}, \vec{r}, \vec{v}, \vec{F}$ 等.

图 7-1

在实际问题中,有些向量与其起点有关(例如质点的运动速度与该质点的位置有关,一个力与该力的作用点的位置有关),有些向量与其起点无关. 由于一切向量的共性是它们都有大小和方向,因此数学上只研究与起点无关的向量,并称这种向量为自由向量(以后简称为向量),即只考虑向量的大小和方向,而不论它的起点在什么地方. 当遇到与起点有关的向量

时,可在一般原则下做特别处理.

由于我们只讨论自由向量,所以如果两个向量 a 和 b 的大小相等,且方向相同,我们就说向量 a 和 b 是相等的,记作 $a = b$. 这就是说,经过平行移动后能完全重合的向量是相等的.

向量的大小叫做向量的模. 向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$, a , $\vec{a}$ 的模依次记作 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$, $|a|$, $|\vec{a}|$. 模等于 1 的向量叫做单位向量. 模等于零的向量叫做零向量,记作 0 或 $\vec{0}$. 零向量的起点和终点重合,它的方向可以看作是任意的.

设有两个非零向量 a, b , 任取空间一点 O , 作 $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{OB} = b$, 规定不超过 π 的 $\angle AOB$ (设 $\varphi = \angle AOB, 0 \leq \varphi \leq \pi$) 称为向量 a 与 b 的夹角 (图 7-2), 记作 $(\widehat{a, b})$ 或 $(\widehat{b, a})$, 即 $(\widehat{a, b}) = \varphi$. 如果向量 a 与 b 中有一个是零向量, 规定它们的夹角可在区间 $[0, \pi]$ 上任意取值.

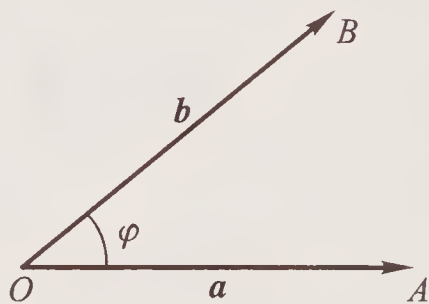


图 7-2

如果两个向量 a 与 b 的夹角为零或 π , 就称这两个向量平行, 记作 $a \parallel b$. 由于零向量与另一向量的夹角可以在区间 $[0, \pi]$ 上任意取值, 因此可以认为零向量与任何向量都平行.

如果 $(\widehat{a, b}) = \frac{\pi}{2}$, 就称向量 a 与 b 垂直, 记作 $a \perp b$. 由于零向量与另一向量的夹角可以在区间 $[0, \pi]$ 上任意取值, 因此可以认为零向量与任何向量都垂直.

当两个平行向量的起点放在同一点时, 它们的终点和公共起点应在一条直线上, 因此, 两向量平行, 又称两向量共线.

类似还有向量共面的概念. 设有 k ($k \geq 3$) 个向量, 当把它们的起点放在同一点时, 如果 k 个终点和公共起点在一个平面上, 就称这 k 个向量共面.

思考题 1 如果两个向量 a 与 b 的模相等, 那么 a 与 b 是否相等呢? 如

果两个向量 a 与 b 相等,那么 a 与 b 是否平行呢?

二、向量的加减法

向量的加法运算规定如下:

设有两个向量 a 与 b ,任取一点 A ,作 $\overrightarrow{AB} = a$,再以 B 为起点,作 $\overrightarrow{BC} = b$,连接 AC (图 7-3),那么向量 $\overrightarrow{AC} = c$ 称为向量 a 与 b 的和,记作 $a + b$,即

$$c = a + b.$$

上述作出两向量之和的方法叫做向量相加的三角形法则.

向量相加的三角形法则的实际背景是力学上求合力或合速度的平行四边形法则:当向量 a 与 b 不平行时,作 $\overrightarrow{AB} = a$, $\overrightarrow{AD} = b$,以 AB, AD 为边作一平行四边形 $ABCD$,连接对角线 AC (图 7-4),向量 $\overrightarrow{AC}$ 即等于向量 a 与 b 的和.显然,这个和向量就是按三角形法则得出的 $a + b$.

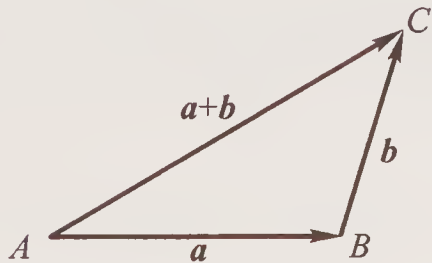


图 7-3

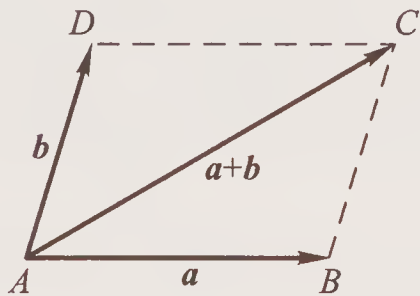


图 7-4

向量的加法符合下列运算规律:

- (1) 交换律 $a + b = b + a$;
- (2) 结合律 $(a + b) + c = a + (b + c)$.

这是因为,按向量加法的规定(三角形法则),从图 7-4 可见:

$$a + b = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = c,$$

$$b + a = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} = c,$$

所以向量的加法符合交换律.又如图 7-5 所示,

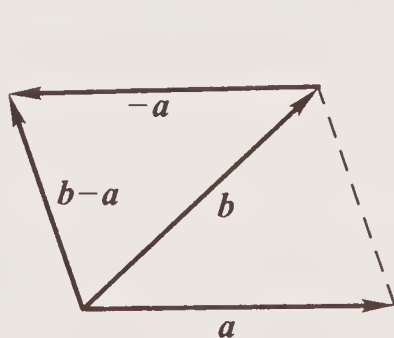
$$\begin{aligned}
 (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} \\
 &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}, \\
 \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) &= \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) \\
 &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD},
 \end{aligned}$$

所以向量的加法符合结合律.

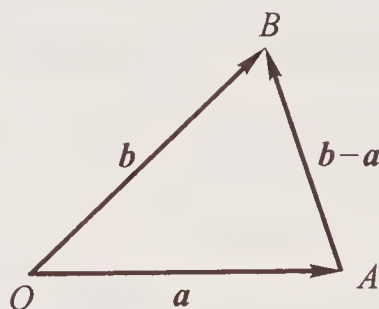
设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量, 与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的负向量, 记作 $-\boldsymbol{a}$. 由此, 规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差

$$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{a}).$$

即把向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上, 便得 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ (图 7-6(a)).



(a)



(b)

图 7-6

特别地, 当 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$ 时, 有

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}.$$

显然, 任给向量 $\overrightarrow{AB}$ 及点 O , 有

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

因此, 若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O , 则从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 所引向量 $\overrightarrow{AB}$ 便是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ (图 7-6(b)).

由于三角形两边之和大于第三边, 故有

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| \quad \text{及} \quad |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|,$$

其中等号在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向或反向时成立.

思考题 2 如图 7-7 所示, 若记 $\overrightarrow{AB} = a$, $\overrightarrow{BC} = b$, $\overrightarrow{DC} = c$, $\overrightarrow{AD} = d$, 试将 a 用 b, c, d 表示出来.

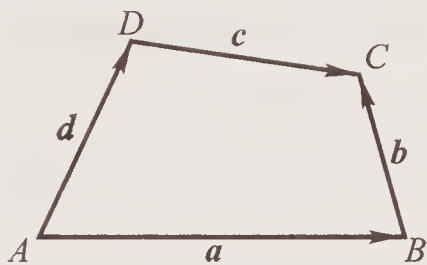


图 7-7

三、向量与数的乘法

向量 a 与实数 λ 的乘积记作 λa , 规定 λa 是一个向量, 它的模

$$|\lambda a| = |\lambda| |a|,$$

它的方向: 当 $\lambda > 0$ 时与 a 相同, 当 $\lambda < 0$ 时与 a 相反.

当 $\lambda = 0$ 时, $|\lambda a| = 0$, 即 λa 为零向量, 这时它的方向可以是任意的.

特别地, 当 $\lambda = \pm 1$ 时, 有

$$1a = a, \quad (-1)a = -a.$$

向量与数的乘积符合下列运算规律:

(1) 结合律 $\lambda(\mu a) = \mu(\lambda a) = (\lambda\mu)a.$

这是因为, 由向量与数的乘积的规定可知, 向量 $\lambda(\mu a)$, $\mu(\lambda a)$, $(\lambda\mu)a$ 都是平行的向量, 它们的方向也是相同的, 而且

$$|\lambda(\mu a)| = |\mu(\lambda a)| = |(\lambda\mu)a| = |\lambda\mu| |a|,$$

所以

$$\lambda(\mu a) = \mu(\lambda a) = (\lambda\mu)a.$$

(2) 分配律 $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a,$

$$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b.$$

这个规律同样可以按向量与数的乘积的规定来证明, 这里从略了.

向量相加及数乘向量统称为向量的线性运算.

例 在平行四边形 $ABCD$ 中, 设 $\overrightarrow{AB} = a$, $\overrightarrow{AD} = b$. 试用 a 和 b 表示向量 $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$, 这里 M 是平行四边形对角线的交点 (图 7-8).

解 由于平行四边形的对角线互相平分,所以

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC} = 2 \overrightarrow{AM},$$

即

$$-(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = 2 \overrightarrow{MA},$$

于是

$$\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}).$$

因为 $\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MA}$, 所以 $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$.

又因 $-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{BD} = 2 \overrightarrow{MD}$, 所以 $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$.

由于 $\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MD}$, 所以 $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$.

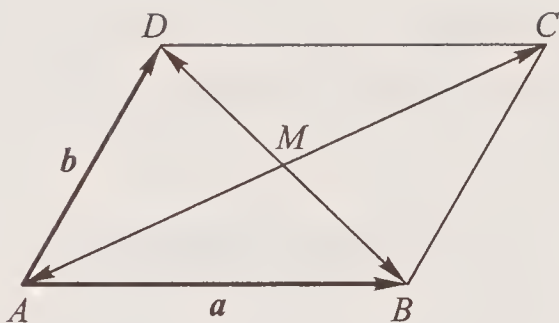


图 7-8

前面已经讲过,模等于 1 的向量叫做单位向量. 通常用 $\boldsymbol{e}_a$ 表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量. 按照向量与数的乘积的规定, 由于 $|\boldsymbol{a}| > 0$, 所以 $|\boldsymbol{a}| \boldsymbol{e}_a$ 与 $\boldsymbol{e}_a$ 的方向相同, 即 $|\boldsymbol{a}| \boldsymbol{e}_a$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同. 又因 $|\boldsymbol{a}| \boldsymbol{e}_a$ 的模是

$$|\boldsymbol{a}| |\boldsymbol{e}_a| = |\boldsymbol{a}| \cdot 1 = |\boldsymbol{a}|,$$

即 $|\boldsymbol{a}| \boldsymbol{e}_a$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的模也相同, 因此,

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \boldsymbol{e}_a.$$

此式表明,任何一个非零向量可由该向量的模(即向量的大小)与该向量同方向的单位向量表示为数乘向量的形式,这也就反映出了向量具有大小及方向的属性. 我们规定,当 $\lambda \neq 0$ 时, $\frac{\boldsymbol{a}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \boldsymbol{a}$.

由此,上式又可写成

$$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \boldsymbol{e}_a.$$

这表示一个非零向量除以它的模就得到与原向量同方向的单位向量.

由于向量 λa 与 a 平行, 因此我们常用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系. 即有

定理 设向量 $a \neq 0$, 那么向量 b 平行于 a 的充要条件是: 存在唯一的实数 λ , 使 $b = \lambda a$.

证 条件的充分性是显然的, 下面证明条件的必要性.

设 $b \parallel a$. 取 $|\lambda| = \frac{|b|}{|a|}$, 当 b 与 a 同向时 λ 取正值, 当 b 与 a 反向时 λ 取负值, 即有 $b = \lambda a$. 这是因为此时 b 与 λa 同向, 且

$$|\lambda a| = |\lambda| |a| = \frac{|b|}{|a|} |a| = |b|.$$

再证数 λ 的唯一性. 设 $b = \lambda a$, 又设 $b = \mu a$, 两式相减, 便得

$$(\lambda - \mu)a = 0,$$

即 $|\lambda - \mu| |a| = 0$. 因 $|a| \neq 0$, 故 $|\lambda - \mu| = 0$, 亦即 $\lambda = \mu$.

上述定理是建立数轴的理论依据. 我们知道, 给定一个点、一个方向及单位长度, 就确定了一条数轴. 由于一个单位向量既确定了方向又确定了单位长度, 因此, 只要给定一个点及一个单位向量, 就确定了一条数轴. 设点 O 及单

位向量 i 确定了数轴 Ox (图 7-9), 并约定单位向量 i 所指的方向为数轴 Ox 的正向, 与 i 方向相反的方向



图 7-9

为 Ox 的负向. 对于数轴上任一点 P , 对应一个向量 $\overrightarrow{OP}$, 由于 $\overrightarrow{OP} \parallel i$, 根据上述定理, 必有唯一的实数 x , 使 $\overrightarrow{OP} = xi$, 并知 $\overrightarrow{OP}$ 与实数 x 一一对应. 如果用符号“ $\longleftrightarrow$ ”表示一一对应关系, 则上述一一对应关系可表示为

$$\text{点 } P \longleftrightarrow \text{向量 } \overrightarrow{OP} = xi \longleftrightarrow \text{实数 } x,$$

从而数轴上的点 P 与实数 x 有一一对应的关系, 据此, 定义实数 x 为数轴上点 P 的坐标.

由此可知, 数轴上点 P 的坐标为 x 的充要条件是 $\overrightarrow{OP} = xi$.

思考题 3 在三角形 ABC 的边 BC 上插入一点 D , 使 $|\overrightarrow{BD}| = 2|\overrightarrow{DC}|$, 试

以 $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{AC} = c$ 表示向量 $\overrightarrow{AD}$.

习题 7-1

1. 设 $u = a + b - 2c, v = -a - 3b + c$. 试用 a, b, c 来表示 $2u - 3v$.
2. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分, 试用向量证明: 它是平行四边形.
3. 把 $\triangle ABC$ 的 BC 边五等分, 设分点依次为 D_1, D_2, D_3, D_4 , 再把各分点与点 A 连接, 试以 $\overrightarrow{AB} = c, \overrightarrow{BC} = a$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}, \overrightarrow{D_2A}, \overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$.
4. 用向量的方法证明: 梯形两腰中点的连线平行于底边且其长度等于两底边长度和的一半.

第二节 点的坐标与向量的坐标

一、空间直角坐标系

在空间取定一点 O 和三个两两垂直的单位向量 i, j, k , 就确定了三条都以 O 为原点的两两垂直的数轴, 依次记为 x 轴(横轴)、 y 轴(纵轴)、 z 轴(竖轴), 统称为坐标轴, 它们组成一个空间直角坐标系, 称为 $Oxyz$ 坐标系(图 7-10).

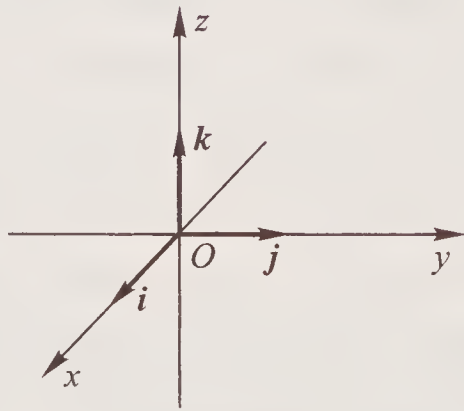


图 7-10

建立空间直角坐标系时, 习惯上取右手系, 即 x, y, z 三条轴的方向符合右手规则, 这就是: 以右手握住 z 轴, 当右手的四个手指从正

向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向正向 y 轴时, 大拇指的指向就是 z 轴的正向, 如图 7-11 所示.

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面, 这样定出的三个平面统称为坐标面. x 轴及 y 轴所确定的坐标面叫做 xOy 面, 另

两个由 y 轴及 z 轴和由 z 轴及 x 轴所确定的坐标面,分别叫做 yOz 面及 zOx 面. 三个坐标面把空间分成八个部分,每一部分叫做卦限. 由 x 轴、 y 轴与 z 轴正半轴确定的那个卦限叫做第一卦限,其他第二、第三、第四卦限,在 xOy 面的上方,按逆时针方向确定. 第五至第八卦限,在 xOy 面的下方,由第一卦限之下的第五卦限,按逆时针方向确定,这八个卦限分别用数字 I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII 表示(图 7-12).

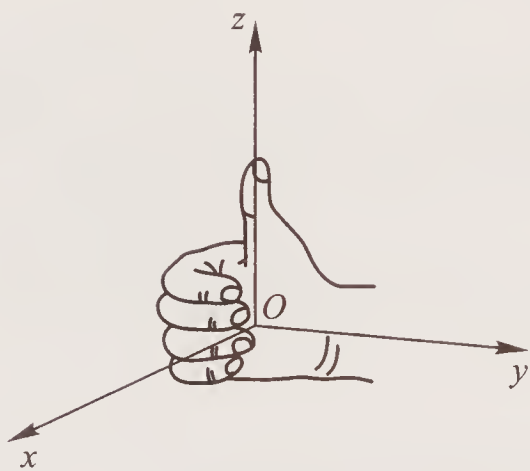


图 7-11

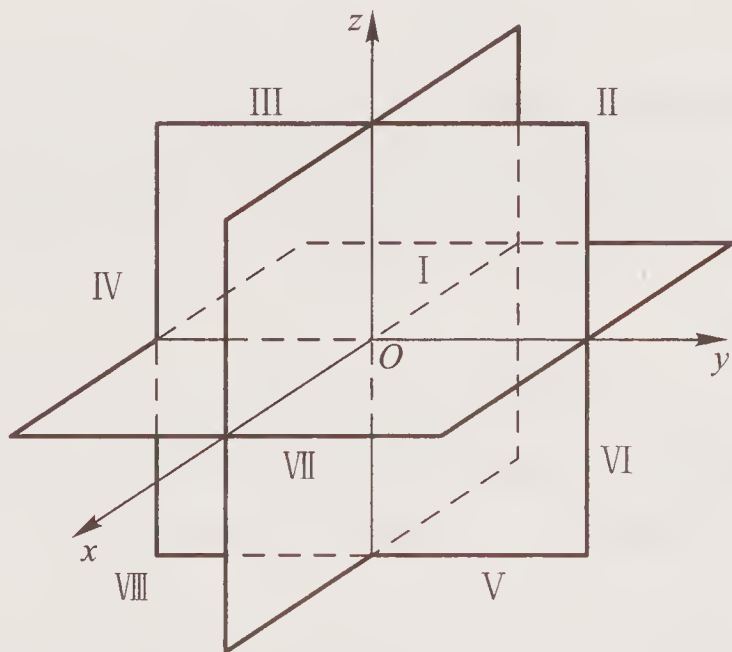


图 7-12

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中,任给向量 $\boldsymbol{r}$,将 $\boldsymbol{r}$ 平行移动后,使得 $\boldsymbol{r}$ 的起点位于原点 O ,此时 $\boldsymbol{r}$ 的终点记为 M ,则 $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$. 以 OM 为对角线、三条坐标轴为棱作出长方体 $RHMK - OPNQ$,点 P, Q, R 分别称为点 M 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的投影点. 如图 7-13 所示,有

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}.$$

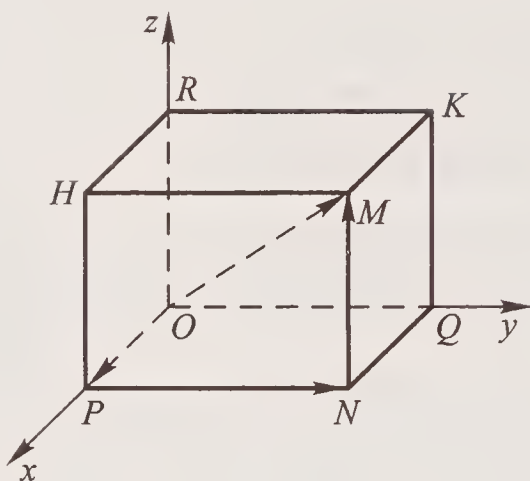


图 7-13

设点 P, Q, R 在三条坐标轴上的坐标分别为 x, y, z , 则

$$\overrightarrow{OP} = xi, \quad \overrightarrow{OQ} = yj, \quad \overrightarrow{OR} = zk,$$

于是

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = xi + yj + zk.$$

显然, 给定向量 $\boldsymbol{r}$, 就确定了点 M 及 $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$ 三个向量, 进而确定了 x, y, z 三个有序数; 反之, 给定三个有序数 x, y, z , 也就确定了向量 $\boldsymbol{r}$ 和点 M . 于是点 M 、向量 $\boldsymbol{r}$ 与三个有序数 x, y, z 之间有一一对应的关系

$$M \longleftrightarrow \boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = xi + yj + zk \longleftrightarrow (x, y, z),$$

据此, 定义: 有序数 x, y, z 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在坐标系 $Oxyz$ 中的坐标, 记作 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$; 有序数 x, y, z 也称为点 M 在坐标系 $Oxyz$ 中的坐标, 记作 $M(x, y, z)$.

向量 $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于原点 O 的向径. 上述定义表明, 一个点与该点的向径有相同的坐标. 记号 (x, y, z) 既表示点 M , 又表示向量 $\overrightarrow{OM}$.

向量坐标的定义表明, 若

$$\boldsymbol{r} = xi + yj + zk, \quad (1)$$

则

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z). \quad (2)$$

即

$$xi + yj + zk = (x, y, z). \quad (3)$$

上列(1)式称为向量 r 的坐标分解式, (2)式称为向量 r 的坐标表示式. 坐标 x, y, z 又称为向量 r 在三个坐标轴上的分量, 而向量 xi, yj, zk 称为向量 r 在三个坐标轴上的分向量.

由于向量与其坐标一一对应, 因此两个向量相等的充要条件是其坐标对应相等.

思考题 1 设点 $O(0,0,0), A(1,2,0), B(2,4,0)$, 试在空间直角坐标系中画出向量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{AB}$, 并问 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 是否相等?

二、利用坐标作向量的线性运算

设

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z),$$

即

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}.$$

利用向量加法的交换律与结合律以及向量与数的乘法的结合律与分配律, 有

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x) \mathbf{i} + (a_y + b_y) \mathbf{j} + (a_z + b_z) \mathbf{k},$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x - b_x) \mathbf{i} + (a_y - b_y) \mathbf{j} + (a_z - b_z) \mathbf{k},$$

$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_x) \mathbf{i} + (\lambda a_y) \mathbf{j} + (\lambda a_z) \mathbf{k} \quad (\lambda \text{ 为数}),$$

即

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z),$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z),$$

$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

由此可见, 对向量进行加、减及与数相乘, 只需对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算就行了.

上节定理指出, 当向量 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ 时, 向量 $\mathbf{b} // \mathbf{a}$ 相当于 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$, 按坐标表示式即为

$$(b_x, b_y, b_z) = \lambda (a_x, a_y, a_z),$$

这也就相当于向量 $\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$ 对应的坐标成比例:

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}. \quad (4)$$

例 1 设点 M_1 的坐标为 (x_1, y_1, z_1) , 点 M_2 的坐标为 (x_2, y_2, z_2) , 求向量 $\overrightarrow{M_1 M_2}$ 的坐标表示式.

解 由于 $\overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$, 而向量

$$\overrightarrow{OM_2} = (x_2, y_2, z_2), \quad \overrightarrow{OM_1} = (x_1, y_1, z_1),$$

故向量 $\overrightarrow{M_1 M_2}$ 的坐标表示式为

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

即向量 $\overrightarrow{M_1 M_2}$ 的坐标等于终点 M_2 的坐标减去起点 M_1 的对应坐标.

例 2 已知两点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$ 以及实数 $\lambda \neq -1$, 在直线 AB 上求点 M , 使

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}.$$

解 由于 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$, 代入关系式 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$, 即有

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}),$$

解得

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1 + \lambda} (\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}).$$

以 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 的坐标 (即点 A 、点 B 的坐标) 代入, 可得

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1 + \lambda} [(x_1, y_1, z_1) + \lambda (x_2, y_2, z_2)]$$

① 当 a_x, a_y, a_z 有一个为零, 例如 $a_x = 0, a_y, a_z \neq 0$, 这时 (4) 式应理解为

$$\begin{cases} b_x = 0, \\ \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}; \end{cases}$$

当 a_x, a_y, a_z 有两个为零, 例如 $a_x = a_y = 0, a_z \neq 0$, 这时 (4) 式应理解为

$$\begin{cases} b_x = 0, \\ b_y = 0. \end{cases}$$

$$= \left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \right),$$

这也是点 M 的坐标.

本例中的点 M 叫做有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的 λ 分点. 特别地, 当 $\lambda = 1$ 时, 得线段 AB 的中点为 $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

通过本例, 读者应注意: 一方面, 由于点 M 与向量 $\overrightarrow{OM}$ 有相同的坐标, 因此, 求点 M 的坐标, 就是求向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标. 另一方面, 由于记号 (x, y, z) 既可表示向量 $\overrightarrow{OM}$, 又可表示点 M , 在几何中向量与点是两个不同的概念, 不可混淆. 因此, 在看到记号 (x, y, z) 时, 需从上下文去认清它究竟是表示向量还是表示点. 当 (x, y, z) 表示向量时, 可对它进行运算, 当 (x, y, z) 表示点时, 就不能进行运算.

思考题 2 设 $\triangle ABC$ 的三个顶点坐标依次为 $A(0, 0, 0)$, $B(1, 2, 0)$, $C(1, 0, 2)$, D 是 BC 的中点, 求向量 $\overrightarrow{AD}$.

三、向量的模、两点间的距离

设向量 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, 作 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$, 按图 7-13, 有

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR},$$

得

$$|\boldsymbol{r}| = |OM| = \sqrt{|OP|^2 + |OQ|^2 + |OR|^2}.$$

由 $\overrightarrow{OP} = xi$, $\overrightarrow{OQ} = yj$, $\overrightarrow{OR} = zk$, 有

$$|OP| = |x|, |OQ| = |y|, |OR| = |z|,$$

于是

$$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

设有点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 及点 $B(x_2, y_2, z_2)$, 则点 A 与点 B 的距离 $|AB|$ 就是向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模. 由

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

有

$$|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

例 3 求证:以 $M_1(4, 3, 1)$, $M_2(7, 1, 2)$, $M_3(5, 2, 3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

解 因为

$$|M_1M_2|^2 = (7 - 4)^2 + (1 - 3)^2 + (2 - 1)^2 = 14,$$

$$|M_2M_3|^2 = (5 - 7)^2 + (2 - 1)^2 + (3 - 2)^2 = 6,$$

$$|M_3M_1|^2 = (4 - 5)^2 + (3 - 2)^2 + (1 - 3)^2 = 6,$$

可知 $|M_2M_3| = |M_3M_1|$, 所以 $\triangle M_1M_2M_3$ 为等腰三角形.

例 4 在 z 轴上求与点 $A(-4, 1, 7)$ 和点 $B(3, 5, -2)$ 等距离的点.

解 因为所求的点 M 在 z 轴上, 所以设该点为 $M(0, 0, z)$. 依题意有

$$|MA| = |MB|,$$

即

$$\begin{aligned} & \sqrt{(-4 - 0)^2 + (1 - 0)^2 + (7 - z)^2} \\ &= \sqrt{(3 - 0)^2 + (5 - 0)^2 + (-2 - z)^2}. \end{aligned}$$

两边平方, 解得

$$z = \frac{14}{9},$$

因此, 所求的点为 $M\left(0, 0, \frac{14}{9}\right)$.

思考题 3 已知两点 $A(4, 0, 5)$ 和 $B(7, 1, 3)$, 求方向和 $\overrightarrow{AB}$ 相同的单位向量.

四、向量的方向角与方向余弦

如图 7-14 所示, 非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴、 y 轴、 z 轴的正向所成的夹角, 即与单位向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 所成的夹角 α, β, γ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向角 ($0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$), 方向角的余弦 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向

余弦. 方向角或方向余弦完全确定了向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向.

设 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$, P, Q, R 分别为 M 点在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的投影点, 则 P, Q, R 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的坐标分别为 a_x, a_y, a_z , 又 $|\overrightarrow{OM}| = |\boldsymbol{a}|$, 于是得到

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},$$

$$\cos \gamma = \frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|},$$

其中 $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

由于方向余弦满足关系式

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

且有

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|} (a_x, a_y, a_z) = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|} \boldsymbol{a},$$

所以以向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为坐标的向量就是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量, 即有

$$\boldsymbol{e}_a = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

当向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表达式给出后, 它的模和方向角就确定了; 反之, 当 $\boldsymbol{a}$ 的模和方向角已知时, 它的三个坐标也确定了:

$$a_x = |\boldsymbol{a}| \cos \alpha, \quad a_y = |\boldsymbol{a}| \cos \beta, \quad a_z = |\boldsymbol{a}| \cos \gamma. \quad (5)$$

例 5 已知两点 $A(2, 2, \sqrt{2})$ 和 $B(1, 3, 0)$, 求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模、方向余弦和方向角.

$$\text{解 } \overrightarrow{AB} = (1 - 2, 3 - 2, 0 - \sqrt{2}) = (-1, 1, -\sqrt{2}),$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1 + 1 + 2} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \cos \beta = \frac{1}{2}, \quad \cos \gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

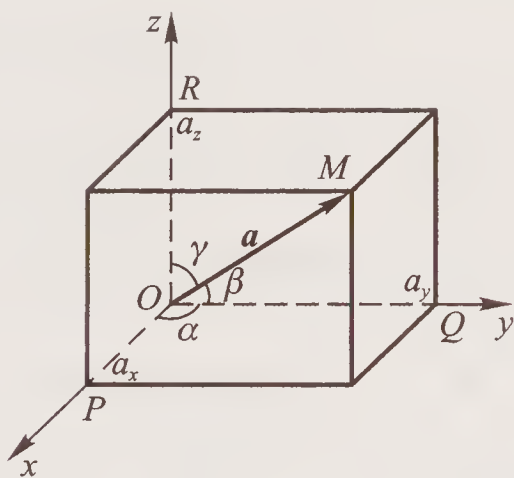


图 7-14

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}, \quad \beta = \frac{\pi}{3}, \quad \gamma = \frac{3\pi}{4}.$$

例 6 设点 A 位于第 I 卦限, 其向径的模 $|\overrightarrow{OA}| = 6$, 且向径 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴、 y 轴的夹角依次为 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{4}$, 求点 A 的坐标.

解 $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}$, 由关系式 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, 得

$$\cos^2 \gamma = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

由点 A 在第一卦限, 知 $\cos \gamma > 0$, 故

$$\cos \gamma = \frac{1}{2}.$$

于是

$$\overrightarrow{OA} = 6 \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right) = (3, 3\sqrt{2}, 3),$$

这也就是点 A 的坐标.

思考题 4 设 $\alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{\pi}{4}, \gamma = \frac{\pi}{3}$, 问 α, β, γ 能否成为一个向量的三个方向角?

五、向量的投影

设向量 $a = \overrightarrow{OM}, b = \overrightarrow{ON}, b \neq 0$, 且 $(\hat{a}, \hat{b}) = \varphi$. 过点 M 作平面垂直于 b 所在的直线并交该直线于点 M' (图 7-15), 则称有向线段 $\overrightarrow{OM'}$ 为向量 a 在向量 b 上的投影向量. 易知 $\overrightarrow{OM'} = (|\overrightarrow{OM}| \cos \varphi) e_b = (|a| \cos \varphi) e_b$. 称上式中的数 $|a| \cos \varphi$ 为向量 a 在向量 b 上的投影, 并记作 $\text{Prj}_b a$.

当 $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ 时, $\text{Prj}_b a$ 等于 a 在 b 上的投

影向量 $\overrightarrow{OM'}$ 的长度; 当 $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$ 时, $\text{Prj}_b a$

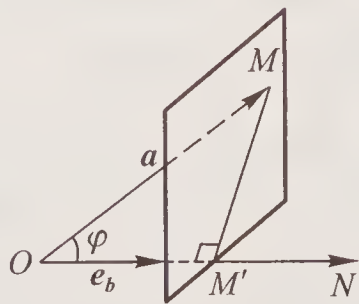


图 7-15

是该投影向量长度的相反数;当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时, $\text{Prj}_b \mathbf{a}$ 等于零.

如果向量 $\mathbf{b}$ 位于数轴 Ou 上(Ou 的正向与 $\mathbf{b}$ 同向),则称此投影为向量 $\mathbf{a}$ 在 Ou 轴上的投影,并记作 $\text{Prj}_u \mathbf{a}$.

按此定义并与(5)式比较,可知向量 $\mathbf{a}$ 的坐标即为 $\mathbf{a}$ 在三个坐标轴上的投影:

$$a_x = \text{Prj}_x \mathbf{a}, \quad a_y = \text{Prj}_y \mathbf{a}, \quad a_z = \text{Prj}_z \mathbf{a}.$$

例 7 设立方体的一条对角线为 OM ,一条棱为 OA ,且 $|OA| = a$,求 $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OM}$ 上的投影 $\text{Prj}_{\overrightarrow{OM}} \overrightarrow{OA}$.

解 如图 7-16 所示,记 $\angle MOA = \varphi$,有

$$\cos \varphi = \frac{|OA|}{|OM|} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

于是

$$\text{Prj}_{\overrightarrow{OM}} \overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OA}| \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

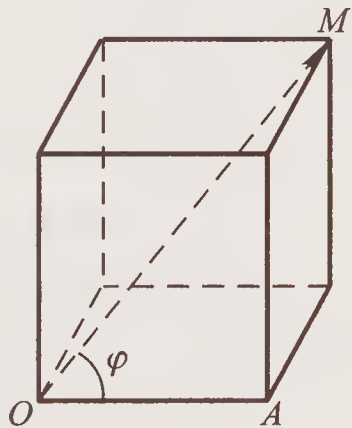


图 7-16

思考题 5 已知向量 $\mathbf{r}$ 与各坐标轴正向成相等的锐角,如果 $|\mathbf{r}| = 2\sqrt{3}$,求 $\mathbf{r}$ 在各坐标轴上的投影和 $\mathbf{r}$ 的坐标.

习题 7-2

1. 在空间直角坐标系中,指出下列各点在哪个卦限?

$$A(1, -2, 3), \quad B(2, 3, -4), \quad C(2, -3, -4), \quad D(-2, -3, 1).$$

2. 自点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线,写出各垂足的坐标.

3. 过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面,问在它们上面的点的坐标各有什么特点?

4. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上,其底面的中心在坐标原点,底面的顶点在 x 轴和 y 轴上,求它各顶点的坐标.

5. 已知两点 $M_1(0, 1, 2)$ 和 $M_2(1, -1, 0)$. 试用坐标表示式表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 及 $-2\overrightarrow{M_1M_2}$.

6. 设 $A(1, 2, -3), B(2, -3, 5)$ 为平行四边形相邻两个顶点, 而 $M(1, 1, 1)$ 为对角线的交点, 求其余两顶点的坐标.

7. 试确定 m 和 n 的值, 使向量 $\boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b} = m\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ 平行.

8. 已知三点 $A(1, -1, 3), B(-2, 0, 5), C(4, -2, 1)$, 问这三点是否在同一直线上.

9. 在 yOz 面上, 求与三点 $A(3, 1, 2), B(4, -2, -2)$ 和 $C(0, 5, 1)$ 等距离的点.

10. 试证明: 以三点 $A(4, 1, 9), B(10, -1, 6), C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

11. 已知两点 $A(-1, 2, -4)$ 和 $B(6, -2, z)$, 而 $|\overrightarrow{AB}| = 9$, 求 z 的值.

12. 求点 $M(4, -3, 5)$ 到各坐标轴的距离.

13. 求平行于向量 $\boldsymbol{a} = (6, 7, -6)$ 的单位向量.

14. 设已知两点 $M_1(4, \sqrt{2}, 1)$ 和 $M_2(3, 0, 2)$. 计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

15. 设向量的方向余弦分别满足 (1) $\cos \alpha = 0$; (2) $\cos \beta = 1$; (3) $\cos \alpha = \cos \beta = 0$, 问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何?

16. 设向量 $\boldsymbol{r}$ 的模是 4, 它与轴 u 的夹角是 $\frac{\pi}{3}$, 求 $\boldsymbol{r}$ 在轴 u 上的投影.

17. 设 $\boldsymbol{m} = 3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}, \boldsymbol{n} = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k}, \boldsymbol{p} = 5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$. 求向量 $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{m} + 3\boldsymbol{n} - \boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

第三节 数量积 · 向量积 · * 混合积

一、两向量的数量积

如果某物体在恒力 $\boldsymbol{f}$ 的作用下沿直线从点 M_0 移动至点 M , 用 $\boldsymbol{s}$ 表示物体的位移 $\overrightarrow{M_0M}$, 那么力 $\boldsymbol{f}$ 所做的功是

$$W = |\boldsymbol{f}| |\boldsymbol{s}| \cos \theta,$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角 (图 7-17). 由此实际背景出发, 我们来定义向量的一种乘法运算.

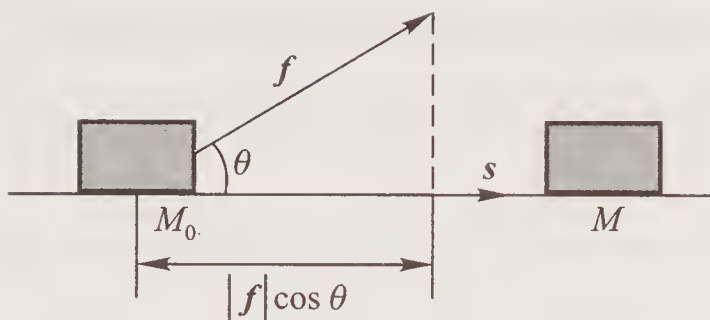


图 7-17

设 a 与 b 是两个向量, $\theta = (\hat{a}, \hat{b})$, 规定向量 a 与 b 的数量积 (记作 $a \cdot b$) 是由下式确定的一个数:

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \theta. \quad (1)$$

向量的数量积也叫点积. 按数量积的定义, 力 f 所做的功就可以表达为 $W = f \cdot s$.

显然, 对任何向量 a , 有 $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$, $a \cdot a = |a|^2$.

当 $a \neq 0$ 时, (1) 式中的因子 $|b| \cos \theta$ 即为向量 b 在向量 a 上的投影 $\text{Prj}_a b$, 因此 (1) 式可写作

$$a \cdot b = |a| \text{Prj}_a b,$$

由此得

$$\text{Prj}_a b = \frac{a \cdot b}{|a|} = e_a \cdot b.$$

上式表明, b 在 a 上的投影就是 b 与 e_a 的数量积.

下面推导数量积的坐标表示式.

如果把 a, b 看成三角形的两边, 那么 $a - b$ 就是第三边 (图 7-18).

根据余弦定理得

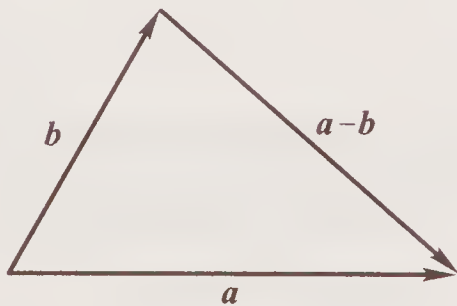


图 7-18

$$|a| |b| \cos \theta = \frac{1}{2} (|a|^2 + |a|^2 - |a-b|^2) \text{ ①},$$

① 只要注意到 $\theta=0$ 时, $|a-b| = ||a| - |b||$; $\theta=\pi$ 时, $|a-b| = |a| + |b|$, 就容易证明此式当 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 时也成立.

设 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则上式可写成

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta &= \frac{1}{2} \{ (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) + (b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - \\ &\quad [(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2] \} \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \end{aligned}$$

于是得到

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x, a_y, a_z) \cdot (b_x, b_y, b_z) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

即两向量的数量积等于两向量对应坐标的乘积之和.

利用数量积的坐标表示式容易证得, 数量积符合下列运算规律:

- (1) 交换律 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$.
- (2) 分配律 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$.
- (3) 关于数乘的结合律 $(\lambda \mathbf{a}) \cdot (\mu \mathbf{b}) = \lambda \mu (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$, λ, μ 为数.

由于 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$, 所以当 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 都不是零向量时, 有

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}.$$

以数量积的坐标表示式及向量的模的坐标表示式代入上式, 就得

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

这就是两向量夹角余弦的坐标表示式.

对于两个非零向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, 如果 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, 那么 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$; 反之, 如果 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 那么 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

这是因为如果 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, 由于 $|\mathbf{a}| \neq 0, |\mathbf{b}| \neq 0$, 所以 $\cos \theta = 0$, 从而 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 即 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$; 反之, 如果 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 那么 $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\cos \theta = 0$, 于是 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = 0$.

由于可以认为零向量与任何向量都垂直, 因此, 上述结论可叙述为: 向量 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ 的充要条件是 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 用坐标表示时, 则上述结论又可表示为: 若 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

例 1 已知三点 $M(1, 1, 1)$, $A(2, 2, 1)$ 和 $B(2, 1, 2)$, 求 $\angle AMB$.

解 作向量 $\overrightarrow{MA}$ 及 $\overrightarrow{MB}$, $\angle AMB$ 就是向量 $\overrightarrow{MA}$ 与 $\overrightarrow{MB}$ 的夹角. 这里, $\overrightarrow{MA} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{MB} = (1, 0, 1)$, 从而

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 1 = 1,$$

$$|\overrightarrow{MA}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2},$$

$$|\overrightarrow{MB}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

代入两向量夹角余弦的表达式, 得

$$\cos \angle AMB = \frac{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}| |\overrightarrow{MB}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

由此得

$$\angle AMB = \frac{\pi}{3}.$$

思考题 1 向量 $\boldsymbol{a} = (1, 2, 2)$ 与 $\boldsymbol{b} = (2, 1, -2)$ 是否垂直?

思考题 2 设非零向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$, 证明: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ 垂直.

二、两向量的向量积

在研究物体转动问题时, 不但要考虑这物体所受的力, 还要分析这些力所产生的力矩. 下面就举一个简单的例子来说明表达力矩的方法.

设 O 为一根杠杆 L 的支点, 有一个力 $\boldsymbol{F}$ 作用于这杠杆上 P 点处. $\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角为 θ (图 7-19). 由力学规定, 力 $\boldsymbol{F}$ 对支点 O 的力矩是一向量 $\boldsymbol{M}$, 它的模

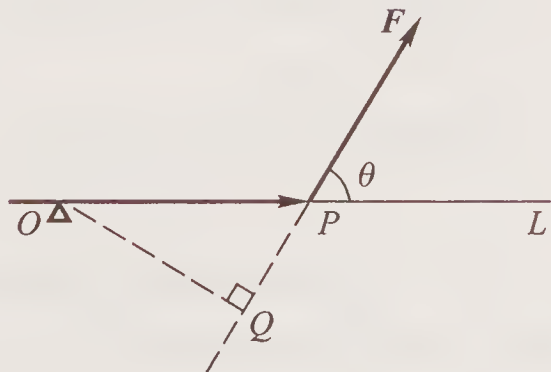


图 7-19

$$|M| = |OQ| |F| = |\overrightarrow{OP}| |F| \sin \theta,$$

而 M 的方向垂直于 $\overrightarrow{OP}$ 与 F 所决定的平面, M 的方向是按右手规则从 $\overrightarrow{OP}$ 以不超过 π 的角转向 F 来确定的, 即当右手的四个手指从 $\overrightarrow{OP}$ 以不超过 π 的角转向 F 握拳时, 大拇指的指向就是 M 的方向(图 7-20).

这种由两个已知向量按上面的规则来确定另一个向量的情况, 在其他力学和物理问题中也会遇到. 于是从中抽象出两个向量向量积的概念.

设向量 c 由两个向量 a 与 b 按下列方式定出:

c 的模 $|c| = |a| |b| \sin \theta$, 其中 θ 为 a, b 间的夹角; c 的方向垂直于 a 与 b 所决定的平面(即 c 既垂直于 a , 又垂直于 b), c 的方向按右手规则从 a 转向 b 来确定(图 7-21). 那么, 向量 c 叫做向量 a 与 b 的向量积, 记作 $a \times b$, 即

$$c = a \times b.$$

两个向量的向量积也叫做叉积. 按此定义, 上面的力矩 M 等于 $\overrightarrow{OP}$ 与 F 的向量积, 即

$$M = \overrightarrow{OP} \times F.$$

由向量积的定义可以推得:

(1) $a \times a = 0$.

这是因为夹角 $\theta = 0$, 所以

$$|a \times a| = |a|^2 \sin 0 = 0.$$

(2) 对于两个非零向量 a, b , 如果 $a \times b = 0$, 那么 $a \parallel b$; 反之, 如果 $a \parallel b$, 那么 $a \times b = 0$.

这是因为如果 $a \times b = 0$, 由于 $|a| \neq 0, |b| \neq 0$, 故必有

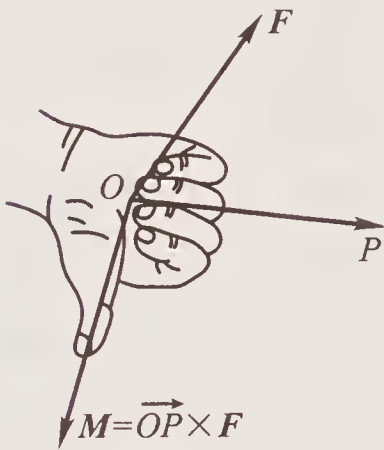


图 7-20

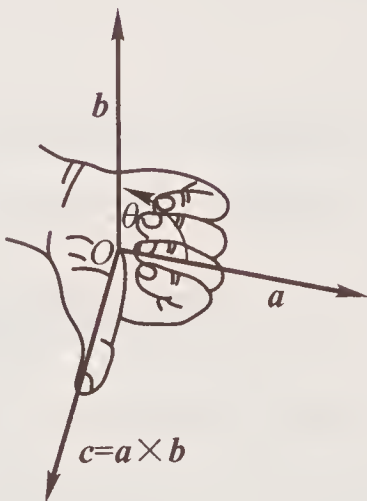


图 7-21

$\sin \theta = 0$, 于是 $\theta = 0$ 或 π , 即 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$; 反之, 如果 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$, 那么 $\theta = 0$ 或 π , 于是 $\sin \theta = 0$, 从而 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 0$, 即 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

由于可以认为零向量与任何向量都平行, 因此, 上述结论可叙述为: 向量 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$ 的充要条件是 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

向量积符合下列运算规律:

(1) 反交换律 $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

这是因为按右手规则从 $\mathbf{b}$ 转向 $\mathbf{a}$ 定出的方向恰好与按右手规则从 $\mathbf{a}$ 转向 $\mathbf{b}$ 定出的方向相反. 它表明交换律对向量积不成立.

(2) 分配律 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

(3) 关于数乘的结合律:

$$(\lambda \mathbf{a}) \times (\mu \mathbf{b}) = \lambda \mu (\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \lambda, \mu \text{ 为数.}$$

这两个规律这里不予证明.

下面来推导向量积的坐标表示式.

设 $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$, 那么, 按上述运算规律, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\ &= a_x \mathbf{i} \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) + a_y \mathbf{j} \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) + \\ &\quad a_z \mathbf{k} \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\ &= a_x b_x (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + a_x b_y (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + a_x b_z (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + \\ &\quad a_y b_x (\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + a_y b_y (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + a_y b_z (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + \\ &\quad a_z b_x (\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + a_z b_y (\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + a_z b_z (\mathbf{k} \times \mathbf{k}). \end{aligned}$$

由于 $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$, 所以

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}.$$

用行列式记号表示, 即

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \mathbf{k}, \quad (2)$$

或

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (3)$$

将(3)式中的三阶行列式按第一行展开,即得(2)式.

两向量的向量积有如下的几何意义:

(i) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 的模 由于 $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}| |\boldsymbol{b}| \sin \theta = |\boldsymbol{a}| h$ ($h = |\boldsymbol{b}| \sin \theta$), 从图 7-22 可以看出, $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ 表示以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

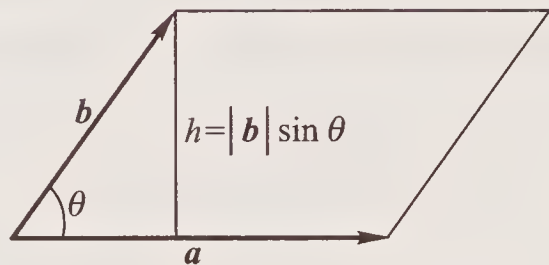


图 7-22

(ii) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 的方向 由定义知, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 与一切既平行于 $\boldsymbol{a}$ 又平行于 $\boldsymbol{b}$ 的平面相垂直.

向量积的几何意义在空间解析几何中有着重要的应用.

例 2 设平面 Π 过空间三点 $A(1, 0, 0)$, $B(3, 1, -1)$, $C(2, -1, 2)$, 求一个垂直于平面 Π 的向量 $\boldsymbol{n}$.

解 $\overrightarrow{AB} = (3-1, 1-0, -1-0) = (2, 1, -1)$,

$\overrightarrow{AC} = (2-1, -1-0, 2-0) = (1, -1, 2)$,

易见 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 不共线且它们均位于平面 Π 内, 因而 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ 垂直于平面 Π , 故可取

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} \\ &= \boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

例 3 已知三角形 ABC 的顶点分别是 $A(1, 2, 3)$, $B(3, 4, 5)$ 和 $C(2, 4, 7)$, 求三角形 ABC 的面积.

解 根据向量积的定义, 可知三角形 ABC 的面积

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin \angle A = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

由于 $\overrightarrow{AB} = (2, 2, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 2, 4)$, 因此

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4i - 6j + 2k,$$

于是

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |4i - 6j + 2k| = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{14}.$$

思考题 3 利用向量积的运算规律证明: $(a - b) \times (a + b) = 2a \times b$.

* 三、向量的混合积

设已知三个向量 a, b 和 c . 如果先作两向量 a 和 b 的向量积 $a \times b$, 把所得到的向量与第三个向量 c 再作数量积 $(a \times b) \cdot c$, 这样得到的数量叫做三向量 a, b, c 的混合积, 记作 $[a \ b \ c]$.

下面来推导三向量的混合积的坐标表示式.

设 $a = (a_x, a_y, a_z)$, $b = (b_x, b_y, b_z)$, $c = (c_x, c_y, c_z)$, 因为

$$\begin{aligned} a \times b &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} k, \end{aligned}$$

再按两向量的数量积的坐标表示式, 使得

$$\begin{aligned} [a \ b \ c] &= (a \times b) \cdot c \\ &= c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

或

$$[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

混合积有这样的几何意义:如果把向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 看作一个平行六面体的相邻三棱,则 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ 是该平行六面体的底面积. 而 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 垂直于 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 所在的底面,若以 φ 表示向量 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{c}$ 的夹角,则当 $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $|\mathbf{c}| \cos \varphi$ 就是该平行六面体的高 h (图 7-23), 于是

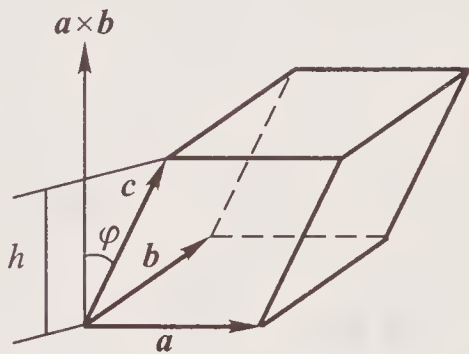


图 7-23

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| |\mathbf{c}| \cos \varphi = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| h = V,$$

V 表示平行六面体的体积. 显然, 当 $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$ 时, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = -V$. 由此可见, 混合积 $[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}]$ 的绝对值是以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为相邻三棱的平行六面体的体积, 即

$$V = |[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}]|.$$

我们常用三向量的混合积是否为零来判断三向量是否共面. 由于三向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 不共面等同于能以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为棱构成平行六面体, 而由上述混合积的几何意义可知, 这又等同于此平行六面体体积 $|[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}]| \neq 0$, 即混合积 $[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] \neq 0$. 于是得: 三向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 不共面的充要条件是混合积 $[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] \neq 0$. 这结论也叙述为: 三向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面的充要条件是混合积 $[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] = 0$.

例 4 求以点 $A(1, 1, 1), B(3, 4, 4), C(3, 5, 5)$ 和 $D(2, 4, 7)$ 为顶点的四面体 $ABCD$ 的体积.

解 由立体几何知道, 四面体 $ABCD$ 的体积是以 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ 为相邻三棱的平行六面体体积的六分之一, 利用混合积的几何意义, 即有

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}|,$$

而 $\overrightarrow{AB} = (2, 3, 3)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 4, 4)$, $\overrightarrow{AD} = (1, 3, 6)$, 于是

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 6,$$

故

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \times 6 = 1.$$

习题 7-3

1. 设 $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, 求:

(1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 及 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$; (2) $(-2\mathbf{a}) \cdot 3\mathbf{b}$ 及 $\mathbf{a} \times 2\mathbf{b}$; (3) $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角的余弦.

2. 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为单位向量, 且满足 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 求 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$.

3. 已知 $M_1(1, -1, 2)$, $M_2(3, 3, 1)$ 和 $M_3(3, 1, 3)$. 求与 $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量.

4. 设质量为 100 kg 的物体从点 $M_1(3, 1, 8)$ 沿直线移动到点 $M_2(1, 4, 2)$, 计算重力所做的功(坐标系长度单位为 m, 重力方向为 z 轴负方向).

5. 在杠杆上支点 O 的一侧与点 O 的距离为 x_1 的点 P_1 处, 有一与 $\overrightarrow{OP_1}$ 成角 θ_1 的力 $\mathbf{F}_1$ 作用着; 在 O 的另一侧与点 O 的距离为 x_2 的点 P_2 处, 有一与 $\overrightarrow{OP_2}$ 成角 θ_2 的力 $\mathbf{F}_2$ 作用着(图 7-24). 问 $\theta_1, \theta_2, x_1, x_2, |\mathbf{F}_1|, |\mathbf{F}_2|$ 符合怎样的条件才能使杠杆保持平衡?

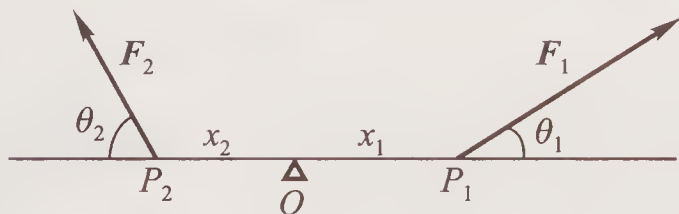


图 7-24

6. 求向量 $\mathbf{a} = (4, -3, 4)$ 在向量 $\mathbf{b} = (2, 2, 1)$ 的方向上的投影.

7. 设 $\mathbf{a} = (3, 5, -2)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 4)$, 问 λ 与 μ 有怎样的关系, 能使得 $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ 与 z 轴垂直?

8. 试用向量证明:直径所对的圆周角是直角.

9. 已知向量 $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{c} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, 计算:

(1) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b}$; (2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})$; (3) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

10. 已知 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{i} + 3\mathbf{k}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, 求 $\triangle OAB$ 的面积.

* 11. 已知 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$, 试利用行列式的性质证明:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}.$$

12. 试用向量积的坐标表示证明不等式:

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \geq |a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3|,$$

其中 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ 为任意实数, 并指出等号成立的条件.

第四节 平面及其方程

一、点的轨迹·方程的概念

像在平面解析几何中把平面曲线当作动点的轨迹一样, 在空间解析几何中, 任何曲面或曲线都看作点的几何轨迹. 在这样的意义下, 如果曲面 S 与三元方程

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

有下述关系:

(1) 曲面 S 上任一点的坐标都满足方程(1);

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标都不满足方程(1),

那么, 方程(1)就叫做曲面 S 的方程, 而曲面 S 就叫做方程(1)的图形(图 7-25).

例如, 空间中到一定点 P 的距离为定值 a 的点的轨迹叫做球面, 点 P 叫做该球面的中心, 定值 a 叫做该球

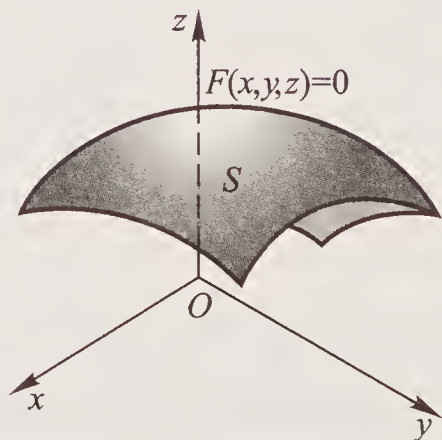


图 7-25

面的半径. 特别地, 中心位于坐标系原点 O , 半径为 a 的球面上任意点 (x, y, z) 所满足的三元方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

这个方程就是该球面的方程.

空间曲线可以看作两个曲面的交线. 设

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{和} \quad G(x, y, z) = 0$$

是两个曲面的方程, 它们的交线为 C (图 7-26). 因为曲线 C 上的任何点的坐标应同时满足这两个曲面的方程, 所以应满足方程组

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

反过来, 如果点 M 不在曲线 C 上, 那么它不可能同时在两个曲面上, 所以它的坐标不满足方程组 (2). 因此, 方程组 (2) 便是 空间曲线 C 的方程, 而曲线 C 便是 方程组 (2) 的图形.

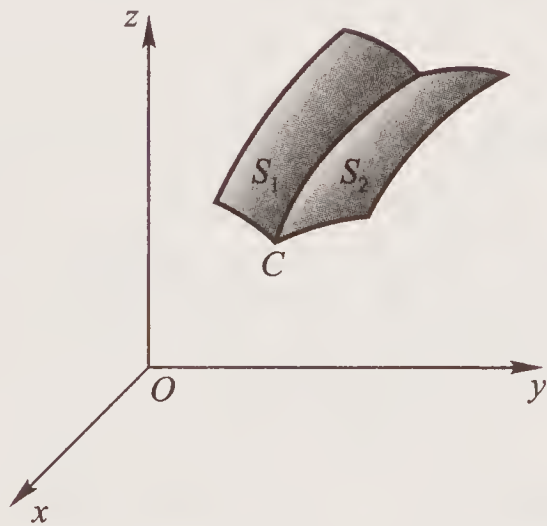


图 7-26

本节讨论最简单的曲面——平面及其方程, 下节将讨论最简单的空间曲线——空间直线及其方程.

思考题 1 如果曲线上的点到 z 轴的距离为常数 a , 试写出该曲面的方程.

二、平面的点法式方程

如果一非零向量垂直于一平面, 这向量就叫做该平面的法向量. 容易知道, 平面上的任一向量均与该平面的法向量垂直.

因为过空间一点可以作而且只能作一平面垂直于一已知直线, 所以当平面 Π 上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和它的一个法向量 $\mathbf{n} = (A, B, C)$ 为已知时, 平面 Π 的位置就完全确定了. 下面来建立平面 Π 的方程.

设 $M(x, y, z)$ 是平面 Π 上的任一点(图 7-27), 那么向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 必与平面 Π 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直, 即它们的数量积等于零

$$\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0.$$

由于 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$, $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, 所以有

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

(3)

这就是平面 Π 上任一点 M 的坐标 x, y, z 所满足的方程.

反过来, 如果 $M(x, y, z)$ 不在平面 Π 上, 那么向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与法向量 $\boldsymbol{n}$ 不垂直, 从而 $\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} \neq 0$, 即不在平面 Π 上的点 M 的坐标 x, y, z 不满足方程(3).

由此可知, 平面 Π 上的任一点的坐标 x, y, z 都满足方程(3); 不在平面 Π 上的点的坐标都不满足方程(3). 因此, 方程(3)就是平面 Π 的方程, 而平面 Π 就是方程(3)的图形. 由于方程(3)是由平面 Π 上的一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 及它的一个法向量 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ 确定的, 所以方程(3)叫做平面的点法式方程.

例 1 求过点 $(2, -3, 0)$ 且以 $\boldsymbol{n} = (1, -2, 3)$ 为法向量的平面的方程.

解 根据平面的点法式方程(3), 得所求平面的方程为

$$(x - 2) - 2(y + 3) + 3z = 0,$$

即

$$x - 2y + 3z - 8 = 0.$$

例 2 求过三点 $M_1(2, -1, 4)$, $M_2(-1, 3, -2)$ 和 $M_3(0, 2, 3)$ 的平面的方程.

解 先找出这平面的法向量 $\boldsymbol{n}$. 由于向量 $\boldsymbol{n}$ 与向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ 都垂直, 而 $\overrightarrow{M_1M_2} = (-3, 4, -6)$, $\overrightarrow{M_1M_3} = (-2, 3, -1)$, 所以

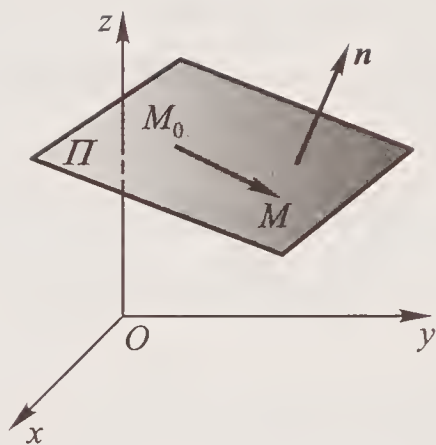


图 7-27

可取它们的向量积为 $\boldsymbol{n}$,

$$\boldsymbol{n} = \overrightarrow{M_1 M_2} \times \overrightarrow{M_1 M_3} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 14\boldsymbol{i} + 9\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k},$$

根据平面的点法式方程(3),得所求平面的方程为

$$14(x-2) + 9(y+1) - (z-4) = 0,$$

即

$$14x + 9y - z - 15 = 0.$$

思考题 2 试写出 xOy 坐标面的法向量和它的方程.

三、平面的一般方程

由于平面的点法式方程(3)是 x, y, z 的一次方程,而任一平面都可以用它上面的一点及它的法向量来确定,所以任一平面都可以用三元一次方程来表示.

反过来,设有三元一次方程

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (4)$$

我们任取满足该方程的一组数 x_0, y_0, z_0 , 即

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

把上述两等式相减,可得与方程(4)同解的方程

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

把它和平面的点法式方程(3)作比较,可以知道它是通过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且以 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ 为法向量的平面方程. 由此可知,任一三元一次方程(4)的图形总是一个平面. 方程(4)称为平面的一般方程,其中 x, y, z 的系数就是该平面的一个法向量 $\boldsymbol{n}$ 的坐标,即 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$.

例如,方程

$$3x - 4y + z - 9 = 0$$

表示一个平面, $\boldsymbol{n} = (3, -4, 1)$ 是该平面的一个法向量.

对于一些特殊的三元一次方程,应该熟悉它们的图形的特点.

当 $D=0$ 时, 方程(4)成为 $Ax + By + Cz = 0$, 它表示一个通过原点的平面.

当 $A=0$ 时, 方程(4)成为 $By + Cz + D = 0$, 法向量 $\boldsymbol{n} = (0, B, C)$ 垂直于 x 轴, 方程表示一个平行于 x 轴的平面. 同样, 方程 $Ax + Cz + D = 0$ 和 $Ax + By + D = 0$ 分别表示一个平行于 y 轴和 z 轴的平面.

当 $A=B=0$ 时, 方程(4)成为 $Cz + D = 0$ 或 $z = -\frac{D}{C}$, 法向量 $\boldsymbol{n} = (0, 0, C)$ 同时垂直 x 轴和 y 轴, 方程表示一个平行于 xOy 面的平面. 同样, 方程 $Ax + D = 0$ 和 $By + D = 0$ 分别表示一个平行于 yOz 面和 xOz 面的平面.

例 3 求通过 x 轴和点 $(4, -3, -1)$ 的平面的方程.

解 由于平面通过 x 轴, 从而它的法向量垂直于 x 轴, 于是法向量在 x 轴上的投影为零, 即 $A=0$; 又由平面通过 x 轴, 它必通过原点, 于是 $D=0$. 因此可设这平面的方程为

$$By + Cz = 0.$$

又因这平面通过点 $(4, -3, -1)$, 所以有

$$-3B - C = 0,$$

即

$$C = -3B.$$

以此代入所设方程并除以 B ($B \neq 0$), 便得所求的平面方程为

$$y - 3z = 0.$$

例 4 设一平面与 x, y, z 轴的交点依次为 $P(a, 0, 0), Q(0, b, 0), R(0, 0, c)$ (图 7-28), 求这平面的方程 (其中 $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$).

解 设所求平面的方程为

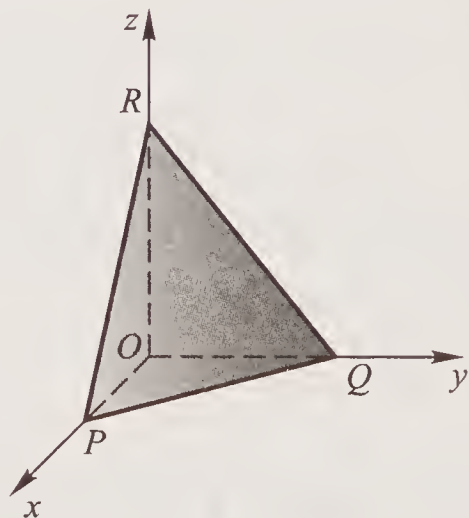


图 7-28

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (4)$$

因为 $P(a, 0, 0), Q(0, b, 0), R(0, 0, c)$ 三点都在这平面上, 所以点 P, Q, R 的坐标都满足方程(4), 即有

$$\begin{cases} aA + D = 0, \\ bB + D = 0, \\ cC + D = 0, \end{cases}$$

得 $A = -\frac{D}{a}, B = -\frac{D}{b}, C = -\frac{D}{c}$. 以此代入(4)并除以 D ($D \neq 0$),

便得所求的平面方程为

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (5)$$

方程(5)叫做平面的截距式方程, 而 a, b, c 依次叫做平面在 x, y, z 轴上的截距.

思考题 3 求过点 $A(1, 0, 0), B(0, 2, 0)$ 且平行于 z 轴的平面方程.

四、两平面的夹角

两平面的法向量的夹角(通常指锐角)称为两平面的夹角.

设平面 Π_1 和 Π_2 的法向量依次为 $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ 和 $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, 那么平面 Π_1 和 Π_2 的夹角 θ (图 7-29) 应是 $(\widehat{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2})$ 和 $(-\widehat{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2}) = \pi - (\widehat{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2})$ 两者中的锐角, 因此, $\cos \theta = |\cos(\widehat{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2})|$. 按两向量夹角余弦的坐标表示式, 平面 Π_1 和平面 Π_2 的夹角 θ 可由

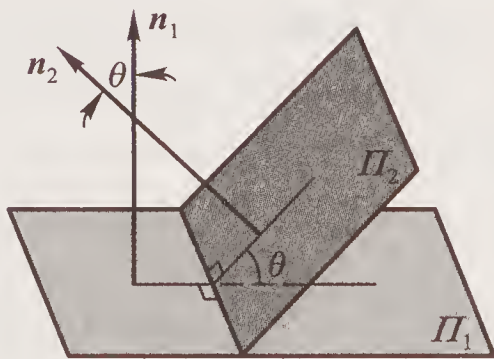


图 7-29

$$\cos \theta = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (6)$$

来确定.

从两向量垂直、平行的充要条件立即推得下列结论:

Π_1, Π_2 互相垂直相当于 $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$,

Π_1, Π_2 互相平行或重合相当于 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

例 5 求两平面 $x - y + 2z - 6 = 0$ 和 $2x + y + z - 5 = 0$ 的夹角.

解 由公式(6)有

$$\cos \theta = \frac{|1 \times 2 + (-1) \times 1 + 2 \times 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2},$$

因此,所求夹角 $\theta = \frac{\pi}{3}$.

例 6 一平面通过两点 $M_1(1, 1, 1)$ 和 $M_2(0, 1, -1)$ 且垂直于平面 $x + y + z = 0$, 求它的方程.

解 设所求平面的法向量为 $\boldsymbol{n}$, 因 $\overrightarrow{M_1M_2} = (-1, 0, -2)$ 在所求平面上, 必有 $\boldsymbol{n} \perp \overrightarrow{M_1M_2}$. 又因所求的平面垂直于已知平面 $x + y + z = 0$, 即必有 $\boldsymbol{n} \perp (1, 1, 1)$, 故可取

$$\boldsymbol{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times (1, 1, 1) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}.$$

由平面的点法式方程可知, 所求平面方程为

$$2(x - 1) - (y - 1) - (z - 1) = 0.$$

即

$$2x - y - z = 0.$$

例 7 设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是平面 $\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$ 外一点, 求 P_0 到这平面的距离 (图 7-30).

解 在平面 Π 上任取一点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, 并作一法向量 $\boldsymbol{n}$, 由图 7-30, 并考虑到 $\overrightarrow{P_1P_0}$ 与 $\boldsymbol{n}$

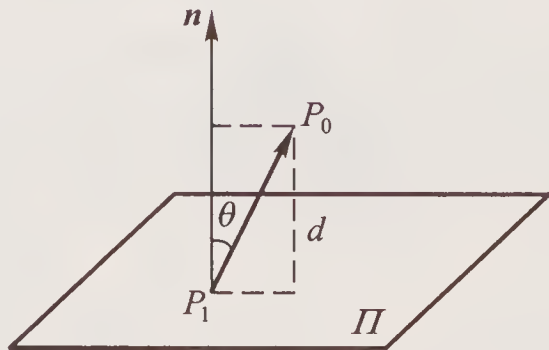


图 7-30

的夹角也可能是钝角,得所求的距离

$$d = |\text{Prj}_n \overrightarrow{P_1 P_0}| = |\overrightarrow{P_1 P_0}| |\cos \theta|,$$

其中 θ 是 $\overrightarrow{P_1 P_0}$ 与平面 Π 的法向量的夹角,从而

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_1 P_0} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}.$$

由于

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1 P_0} \cdot \mathbf{n} &= (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1) \cdot (A, B, C) \\ &= Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1), \end{aligned}$$

而 $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, 即 $Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D$, 故 $\overrightarrow{P_1 P_0} \cdot \mathbf{n} = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$.

由此得点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离公式

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (7)$$

例如,求点 $(2, 1, 1)$ 到平面 $x + y - z + 1 = 0$ 的距离,可利用公式(7)得

$$d = \frac{|1 \times 2 + 1 \times 1 - 1 \times 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

思考题 4 求平面 $2x - 2y + z + 5 = 0$ 与 xOy 坐标面的夹角的余弦.

思考题 5 试写出两个平行平面 $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ 和 $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ 间的距离公式.

习题 7-4

1. 与定点 $A(x_0, y_0, z_0)$ 的距离为定值 a 的点的轨迹称为球面,试建立它的方程.

2. 方程 $x^2 + y^2 = a^2$ 表示怎样的曲面?

3. 求过点 $(3, 0, -1)$ 且与平面 $3x - 7y + 5z - 12 = 0$ 平行的平面方程.

4. 求过点 $M_0(2, 9, -6)$ 且与连接坐标原点及点 M_0 的线段 OM_0 垂直的平面方程.

5. 求过 $(1, 1, -1)$, $(-2, -2, 2)$ 和 $(1, -1, 2)$ 三点的平面方程.
6. 一平面过点 $(1, 0, -1)$ 且平行于向量 $\mathbf{a} = (2, 1, 1)$ 和 $\mathbf{b} = (1, -1, 0)$, 试求这平面方程.
7. 求三平面 $x + 3y + z = 1$, $2x - y - z = 0$, $-x + 2y + 2z = 3$ 的交点.
8. 分别按下列条件求平面方程:
 - (1) 平行于 xOz 面且经过点 $(2, -5, 3)$;
 - (2) 通过 z 轴和点 $(-3, 1, -2)$;
 - (3) 平行于 x 轴且经过两点 $(4, 0, -2)$ 和 $(5, 1, 7)$.
9. 求点 $(1, 2, 1)$ 到平面 $x + 2y + 2z - 10 = 0$ 的距离.

第五节 空间直线及其方程

一、空间直线的一般方程

空间直线 L 可以看作是两个平面 Π_1 和 Π_2 的交线(图7-31). 如果两个相交的平面 Π_1 和 Π_2 的方程分别为 $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ 和 $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, 那么直线 L 上的任一点的坐标应同时满足这两个平面的方程, 即应满足方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

反过来, 如果点 M 不在直线 L 上, 那么它不可能同时在平面 Π_1 和 Π_2 上, 所以它的坐标不满足方程组(1). 因此, 直线 L 可以用方程组(1)来表示. 方程组(1)叫做空间直线的一般方程.

通过空间一直线 L 的平面有无限多个, 只要在这无限多个平面中任意选取两个, 把它们的方程联立起来, 所得的方程组就表示空间直线 L .

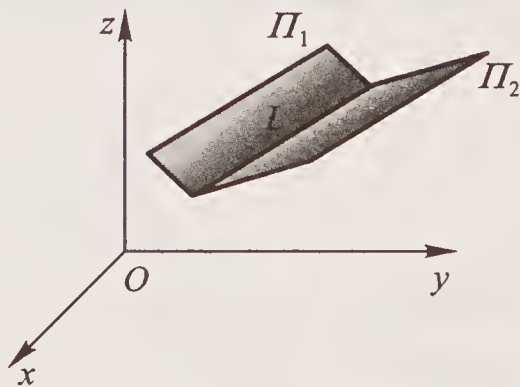


图 7-31

二、空间直线的点向式方程与参数方程

如果一个非零向量 s 平行于一条已知直线,那么 s 就叫做这条直线的方向向量.容易知道,直线上任一向量都平行于该直线的方向向量.

由于过空间一点可作而且只能作一条直线平行于一已知直线,所以当直线 L 上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和它的一方向向量 $s = (m, n, p)$ 为已知时,直线 L 的位置就完全确定了.下面来建立这直线的方程.

设点 $M(x, y, z)$ 是直线 L 上的任一点,那么向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 L 的方向向量 s 平行(图 7-32).所以两向量的对应坐标成比例,由于 $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, $s = (m, n, p)$,从而有

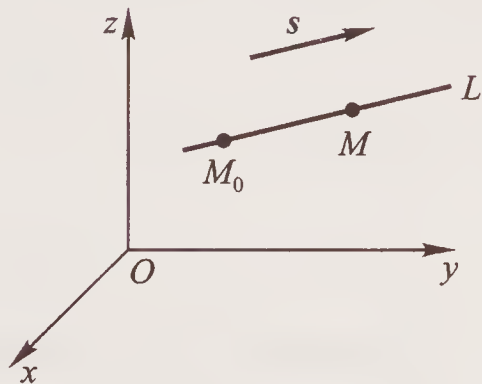


图 7-32

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad (2)$$

① 当 m, n, p 中有一个为零,例如 $m = 0$,而 $n, p \neq 0$ 时,方程依然写成 $\frac{x - x_0}{0} =$

$\frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$,此方程应理解为

$$\begin{cases} x - x_0 = 0, \\ \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}; \end{cases}$$

当 m, n, p 中有两个为零,例如 $m = n = 0$,而 $p \neq 0$ 时,方程依然写成 $\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{0} =$

$\frac{z - z_0}{p}$,此方程应理解为

$$\begin{cases} x - x_0 = 0, \\ y - y_0 = 0. \end{cases}$$

反过来,如果点 M 不在直线 L 上,那么由于 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 s 不平行,这两向量的对应坐标就不成比例. 因此方程组(2)就是直线 L 的方程,叫做直线的点向式方程或对称式方程.

例 1 求过两点 $M_1(3, 4, -7)$ 和 $M_2(2, 7, -6)$ 的直线的点向式方程.

解 可取直线的方向向量为

$$s = \overrightarrow{M_1M_2} = (-1, 3, 1),$$

从而由方程(2)可得所求直线的点向式方程

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+7}{1}.$$

或

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-7}{3} = \frac{z+6}{1}.$$

由直线的点向式方程容易导出直线的参数方程. 如果设

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} = t,$$

那么

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \quad (3)$$

方程组(3)就是直线的参数方程.

直线的三种方程在应用上各有方便之处,因此需掌握它们相互转化的方法. 上面已经指出,由直线的点向式方程容易导出参数方程,反之,由参数方程显然能直接写出点向式方程. 要把点向式方程转化为一般方程也很方便,这只要把点向式方程的连等式(2)写成两个方程

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}, \\ \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} n(x - x_0) - m(y - y_0) = 0, \\ p(y - y_0) - n(z - z_0) = 0, \end{cases}$$

便是直线的一般方程.

把直线的一般方程转化为点向式方程稍微麻烦,下面通过例子来说明这一转化的方法.

例 2 用点向式方程表示直线

$$\begin{cases} x + y + z + 2 = 0, \\ 2x - y + 3z + 10 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

解 先找出这直线上的一点 (x_0, y_0, z_0) . 例如, 可以取 $x_0 = 0$, 代入方程组(4), 得

$$\begin{cases} y + z = -2, \\ y - 3z = 10. \end{cases}$$

解这个二元一次方程组, 得

$$y_0 = 1, \quad z_0 = -3,$$

即 $(0, 1, -3)$ 是这直线上的一点.

再找出这直线的方向向量 s . 由于两平面的交线与这两平面的法向量 $n_1 = (1, 1, 1)$, $n_2 = (2, -1, 3)$ 都垂直, 所以可取

$$s = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4i - j - 3k.$$

因此, 所给直线的点向式方程为

$$\frac{x}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{-3}.$$

思考题 1 试将空间直角坐标系中的 z 轴分别用直线的一般方程和点向式方程表示出来.

三、两直线的夹角

两直线的方向向量的夹角(通常指锐角)叫做两直线的夹角.

设直线 L_1 和 L_2 的方向向量依次为 $s_1 = (m_1, n_1, p_1)$ 和 $s_2 = (m_2, n_2, p_2)$, 那么 L_1 和 L_2 的夹角 φ 应是 $(\widehat{s_1, s_2})$ 和 $(-\widehat{s_1, s_2}) = \pi - (\widehat{s_1, s_2})$ 两者中的锐角, 因此 $\cos \varphi = |\cos(\widehat{s_1, s_2})|$. 按两向量夹角的余弦公式, 直线 L_1 和直线 L_2 的夹角 φ 可由

$$\cos \varphi = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \quad (5)$$

来确定.

从两向量垂直、平行的充要条件立即推得下列结论:

两直线 L_1, L_2 互相垂直相当于 $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$,

两直线 L_1, L_2 互相平行或重合相当于 $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

例 3 求直线 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z+3}{1}$ 和 $L_2: \frac{x}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{-1}$ 的夹角.

解 直线 L_1 的方向向量为 $s_1 = (1, -4, 1)$, 直线 L_2 的方向向量为 $s_2 = (2, -2, -1)$. 设直线 L_1 和 L_2 的夹角为 φ , 那么由公式 (5) 有

$$\cos \varphi = \frac{|1 \times 2 + (-4) \times (-2) + 1 \times (-1)|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以

$$\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

思考题 2 验证: 直线 $\begin{cases} x=1, \\ y=2 \end{cases}$ 平行于 z 轴.

四、直线与平面的夹角

当直线与平面不垂直时, 直线和它在平面上的投影直线的夹角 φ ($0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$) 称为 直线与平面的夹角 (图 7-33), 当直线与平

面垂直时,规定直线与平面的夹角为 $\frac{\pi}{2}$.

设直线的方向向量为 $s = (m, n, p)$, 平面的法向量为 $n = (A, B, C)$, 直线与平面的夹角为 φ , 那么 $\varphi = \left| \frac{\pi}{2} - (\widehat{s, n}) \right|$,

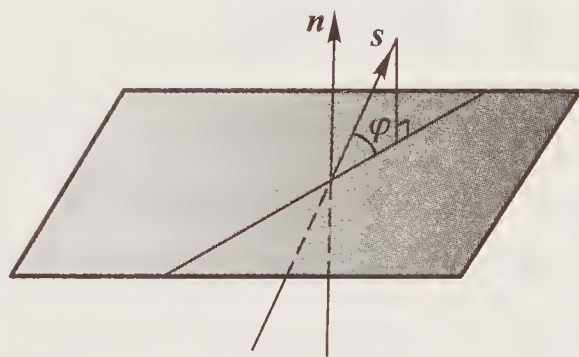


图 7-33

因此 $\sin \varphi = |\cos(\widehat{s, n})|$. 按两向量夹角余弦的坐标表示式, 有

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (6)$$

因为直线与平面垂直相当于直线的方向向量与平面的法向量平行, 所以, 直线与平面垂直相当于

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

因为直线与平面平行或直线在平面上相当于直线的方向向量与平面的法向量垂直, 所以, 直线与平面平行或直线在平面上相当于

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

例 4 求过点 $(1, -2, 4)$ 且与平面 $2x - 3y + z - 4 = 0$ 垂直的直线的方程.

解 因为所求直线垂直于已知平面, 所以可以取已知平面的法向量 $(2, -3, 1)$ 作为所求直线的方向向量. 由此可得所求直线的方程为

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{1}.$$

思考题 3 验证: 直线 $\begin{cases} x+y=0, \\ z=1 \end{cases}$ 与 xOy 坐标面平行.

五、综合举例

例 5 求与两平面 $x - 4z = 3$ 和 $2x - y - 5z = 1$ 的交线平行且过点 $(-3, 2, 5)$ 的直线的方程.

解一 因为所求直线与两平面的交线平行, 也就是直线的方向向量 s 一定同时与两平面的法向量 n_1, n_2 垂直, 所以可以取

$$s = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -(4i + 3j + k),$$

因此所求直线的方程为

$$\frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-5}{1}.$$

解二 过点 $(-3, 2, 5)$ 且与平面 $x - 4z = 3$ 平行的平面的方程为

$$(x+3) - 4(z-5) = 0,$$

即

$$x - 4z = -23.$$

过点 $(-3, 2, 5)$ 且与平面 $2x - y - 5z = 1$ 平行的平面的方程为

$$2(x+3) - (y-2) - 5(z-5) = 0,$$

即

$$2x - y - 5z = -33.$$

所求直线是上述两平面的交线, 故它的方程为

$$\begin{cases} x - 4z = -23, \\ 2x - y - 5z = -33. \end{cases}$$

例 6 求直线 $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x + y + z - 6 = 0$

的交点.

解 所给直线的参数方程为

$$x = 2 + t, \quad y = 3 + t, \quad z = 4 + 2t,$$

代入平面方程中,得

$$2(2+t) + (3+t) + (4+2t) - 6 = 0.$$

解上列方程,得 $t = -1$. 把求得的 t 值代入直线的参数方程中,即得所求交点的坐标为

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 2.$$

例 7 求过点 $A(2, 1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程.

解一 过点 A 且垂直于直线 L 的平面 Π 的方程为

$$3(x-2) + 2(y-1) - (z-3) = 0. \quad (7)$$

再求直线 L 与平面 Π 的交点. 因直线 L 的参数方程为

$$x = -1 + 3t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = -t. \quad (8)$$

把(8)代入(7)中,求得 $t = \frac{3}{7}$, 从而求得交点为 $\left(\frac{2}{7}, \frac{13}{7}, -\frac{3}{7}\right)$.

以点 $(2, 1, 3)$ 为起点, 点 $\left(\frac{2}{7}, \frac{13}{7}, -\frac{3}{7}\right)$ 为终点的向量

$$\left(\frac{2}{7} - 2, \frac{13}{7} - 1, -\frac{3}{7} - 3\right) = -\frac{6}{7}(2, -1, 4)$$

是所求直线的方向向量, 故所求直线的方程为

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{4}.$$

*** 解二** 过点 A 且垂直于直线 L 的平面 Π 的方程为

$$3x + 2y - z - 5 = 0.$$

再求通过点 A 和直线 L 的平面 Π_1 的方程. 因 $s = (3, 2, -1)$ 是 L 的方向向量, 点 $B(-1, 1, 0) \in L$, 故动点 $M(x, y, z) \in \Pi_1$ 的充要条件是 $\overrightarrow{BM} = (x+1, y-1, z)$, $s, \overrightarrow{BA} = (3, 0, 3)$ 这三个向量共面, 由此便得 Π_1 的方程为

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$6(x+1) - 12(y-1) - 6z = 0 \quad \text{或} \quad x - 2y - z + 3 = 0.$$

因所求直线为 Π 与 Π_1 的交线, 故所求直线方程为

$$\begin{cases} 3x + 2y - z - 5 = 0, \\ x - 2y - z + 3 = 0. \end{cases}$$

下面我们来介绍平面束的方程, 有时用平面束的方程解题比较方便.

设直线 L 的一般方程为

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, & (9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, & (10) \end{cases}$$

其中系数 A_1, B_1, C_1 与 A_2, B_2, C_2 不成比例. 我们建立三元一次方程

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \quad (11)$$

其中 λ 为任意常数. 因为 A_1, B_1, C_1 与 A_2, B_2, C_2 不成比例, 所以对于任何一个 λ 值, 方程 (11) 的系数: $A_1 + \lambda A_2, B_1 + \lambda B_2, C_1 + \lambda C_2$ 不全为零, 从而方程 (11) 表示一个平面; 若一点在直线 L 上, 则点的坐标必同时满足方程 (9) 和 (10), 因而也满足方程 (11), 故方程 (11) 表示通过直线 L 的平面, 且对应于不同的 λ 值, 方程 (11) 表示通过直线 L 的不同的平面. 反之, 通过直线 L 的任何平面 (除平面 (10) 外) 都包含在方程 (11) 所表示的一族平面内. 通过定直线的所有平面的全体称为 平面束, 而方程 (11) 就作为通过直线 L 的 平面束的方程 (实际上, 方程 (11) 表示缺少一个平面的平面束).

例 8 求直线 $L: \begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$ 在平面 $\Pi: x + y + z = 0$ 上的投影直线的方程.

解 设过直线 L 的平面束的方程为

$$(x + y - z - 1) + \lambda(x - y + z + 1) = 0,$$

即

$$(1 + \lambda)x + (1 - \lambda)y + (-1 + \lambda)z + (-1 + \lambda) = 0, \quad (12)$$

其中 λ 为待定常数. 这平面与平面 Π 垂直的条件是

$$(1 + \lambda) \cdot 1 + (1 - \lambda) \cdot 1 + (-1 + \lambda) \cdot 1 = 0,$$

即

$$\lambda + 1 = 0,$$

由此得

$$\lambda = -1.$$

代入(12)式,得到平面束中与 Π 垂直的平面(称为直线 L 的投影平面)的方程为

$$2y - 2z - 2 = 0,$$

即

$$y - z - 1 = 0.$$

所以投影直线的方程为

$$\begin{cases} y - z - 1 = 0, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

习题 7-5

1. 求过点 $(4, -1, 3)$ 且平行于直线 $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{5}$ 的直线方程.

2. 求过两点 $M_1(3, -2, 1)$ 和 $M_2(-1, 0, 2)$ 的直线方程.

3. 用点向式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x - y + z = 1, \\ 2x + y + z = 4. \end{cases}$$

4. 求过点 $(2, 0, -3)$ 且与直线

$$\begin{cases} x - 2y + 4z - 7 = 0, \\ 3x + 5y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

垂直的平面方程.

5. 求直线 $\begin{cases} 5x - 3y + 3z - 9 = 0, \\ 3x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$ 与直线 $\begin{cases} 2x + 2y - z + 23 = 0, \\ 3x + 8y + z - 18 = 0 \end{cases}$ 的夹角的

余弦.

6. 证明: 直线 $\begin{cases} x + 2y - z = 7, \\ -2x + y + z = 7 \end{cases}$ 与直线 $\begin{cases} 3x + 6y - 3z = 8, \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$ 平行.

7. 求过点 $(0, 2, 4)$ 且与两平面 $x + 2z = 1$ 和 $y - 3z = 2$ 平行的直线方程.

8. 求过点 $(3, 1, -2)$ 且通过直线 $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$ 的平面方程.

9. 求直线 $\begin{cases} x + y + 3z = 0, \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ 与平面 $x - y - z + 1 = 0$ 的夹角.

10. 试确定下列各组中的直线与平面间的关系:

$$(1) \frac{x+3}{-2} = \frac{y+4}{-7} = \frac{z}{3} \text{ 与 } 4x - 2y - 2z = 3;$$

$$(2) \frac{x}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{7} \text{ 与 } 3x - 2y + 7z = 8;$$

$$(3) \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-4} \text{ 与 } x + y + z = 3.$$

11. 求过点 $(1, 2, 1)$ 且与两直线

$$\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0, \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

平行的平面方程.

12. 求点 $(-1, 2, 0)$ 在平面 $x + 2y - z + 1 = 0$ 上的投影.

13. 求点 $P(3, -1, 2)$ 到直线 $\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ 2x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$ 的距离.

14. 设 M_0 是直线 L 外一点, M 是直线 L 上任意一点, 且直线 L 的方向向量为 s , 试证: 点 M_0 到直线 L 的距离为

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M} \times s|}{|s|}.$$

* 15. 求直线 $\begin{cases} 2x - 4y + z = 0, \\ 3x - y - 2z - 9 = 0 \end{cases}$ 在平面 $4x - y + z = 1$ 上的投影直线的方程.

第六节 曲面及其方程

在第四节中我们已经介绍了曲面方程的概念, 在空间解析几何中关于曲面的讨论常围绕两个基本问题:

(1) 已知曲面的形状, 建立这曲面的方程;

(2) 已知一个三元方程, 研究这方程的图形.

本节中建立柱面和旋转曲面的方程是基本问题(1)的例子, 对三元二次方程的图形的讨论是基本问题(2)的例子.

一、柱面

平行于定直线并沿定平面曲线 C 移动的直线所形成的曲面

叫做柱面,定曲线 C 叫做柱面的准线,平行于定直线的动直线叫做柱面的母线.

设柱面(图 7-34)的母线平行于 z 轴,准线 C 是 xOy 平面上的一条曲线,其方程为 $F(x, y) = 0$. 由于在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中,点 $M(x, y, z)$ 位于柱面上的充要条件就是它在 xOy 面上的

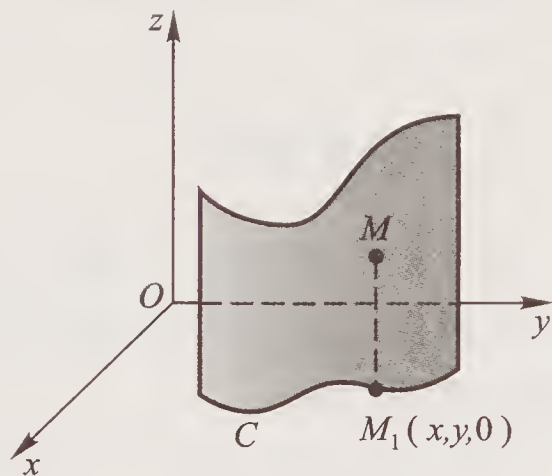


图 7-34

投影点 $M_1(x, y, 0)$ 位于准线 C 上,即 x, y 满足方程 $F(x, y) = 0$,因此柱面方程也就是

$$F(x, y) = 0.$$

一般地,不完全三元方程(即 x, y, z 不同时出现的方程)在空间直角坐标系中表示柱面. 只含 x, y 而缺 z 的方程 $F(x, y) = 0$ 表示母线平行于 z 轴的柱面,其准线为 xOy 面上的曲线 $F(x, y) = 0$. 只含 x, z 而缺 y 的方程 $G(x, z) = 0$ 与只含 y, z 而缺 x 的方程 $H(y, z) = 0$ 则分别表示母线平行于 y 轴和 x 轴的柱面.

例如, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 表示母线平行于 z 轴的椭圆柱面(图 7-35

(a)), $x^2 = 2pz$ 表示母线平行于 y 轴的抛物柱面(图 7-35(b)).

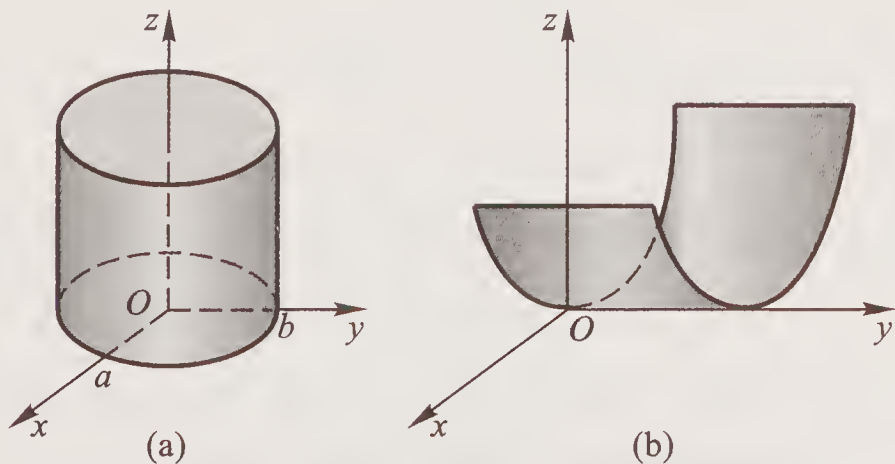


图 7-35

思考题 1 如果曲线上的点到 z 轴的距离是常数 a , 试问该曲面是柱面吗? 为什么?

二、旋转曲面

以一条平面曲线 C 绕其平面上的一条定直线旋转一周所成的曲面叫做旋转曲面, 旋转曲线称为旋转曲面的母线, 而定直线叫做旋转曲面的轴.

设在 yOz 坐标面上有一已知曲线 C , 它的方程为

$$f(y, z) = 0,$$

把这曲线绕 z 轴旋转一周, 就得到一个以 z 轴为轴的旋转曲面(图 7-36).

它的方程可以求得如下:

设 $M(x, y, z)$ 是旋转曲面上的任意一点, 则点 M 必位于由曲线 C 上一点 $M_1(0, y_1, z_1)$ 绕 z 轴旋转一周而得的圆周上, 因此这两点的竖坐标相等, 即 $z = z_1$, 且点 M 到 z 轴的距离与 M_1 到 z 轴距离相等, 即

$$\sqrt{x^2 + y^2} = |y_1|,$$

又由于 $M_1(0, y_1, z_1)$ 在曲线 C 上, 因此有

$$f(y_1, z_1) = 0, \quad (1)$$

将 $z_1 = z, y_1 = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$ 代入(1)式, 就有

$$f(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0,$$

这就是曲面上任意一点的坐标所满足的方程, 亦即所求旋转曲面的方程.

由此可知, 在曲线 C 的方程 $f(y, z) = 0$ 中将 y 改成 $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$, 便得曲线 C 绕 z 轴旋转所成的旋转曲面的方程.

例如, 在 yOz 坐标面上的圆 $y^2 + z^2 = a^2$ 绕 z 轴旋转一周所得

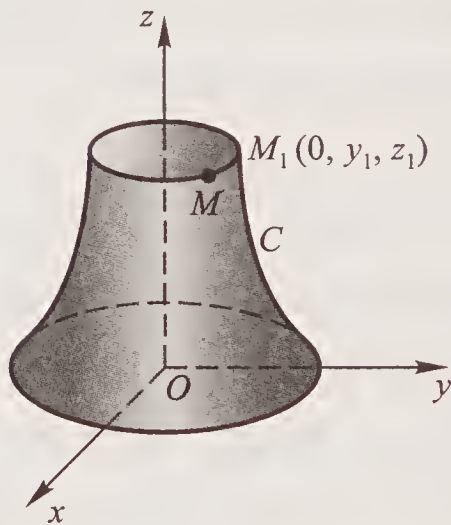


图 7-36

的旋转曲面的方程为

$$(\pm \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = a^2,$$

即

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

这就是中心在原点,半径为 a 的球面方程.

同理,曲线 C 绕 y 轴旋转所成的旋转曲面的方程为

$$f(y, \pm \sqrt{x^2 + z^2}) = 0.$$

例 1 直线 L 绕另一条与 L 相交的直线旋转一周,所得旋转曲面叫做圆锥面. 两直线的交点叫做圆锥面的顶点,两直线的夹角 α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) 叫做圆锥面的半顶角. 试建立顶点在坐标原点 O ,旋转轴为 z 轴,半顶角为 α 的圆锥面(图 7-37)的方程.

解 在 yOz 坐标面上,直线 L 的方程为

$$z = y \cot \alpha,$$

因为旋转轴为 z 轴,所以只要将上列方程中的 y 改成 $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$,便得到这圆锥面的方程

$$z = \pm \sqrt{x^2 + y^2} \cot \alpha$$

或

$$z^2 = a^2 (x^2 + y^2),$$

其中 $a = \cot \alpha$.

例 2 将 xOz 坐标面上的双曲线

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

绕 z 轴旋转一周,求所生成的旋转曲面的方程.

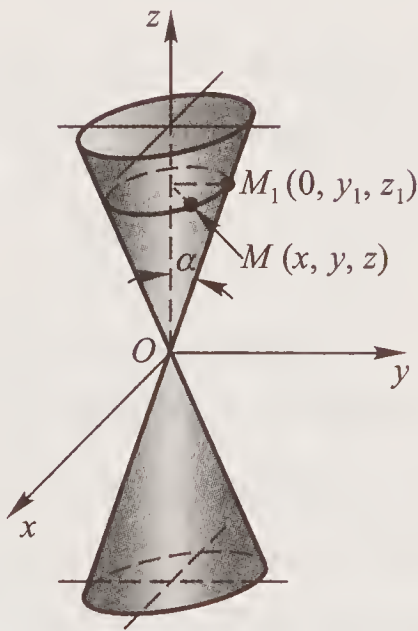


图 7-37

解 绕 z 轴旋转所成的旋转曲面称为旋转单叶双曲面(图7-38), 其方程为

$$\frac{(\pm \sqrt{x^2 + y^2})^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

即

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

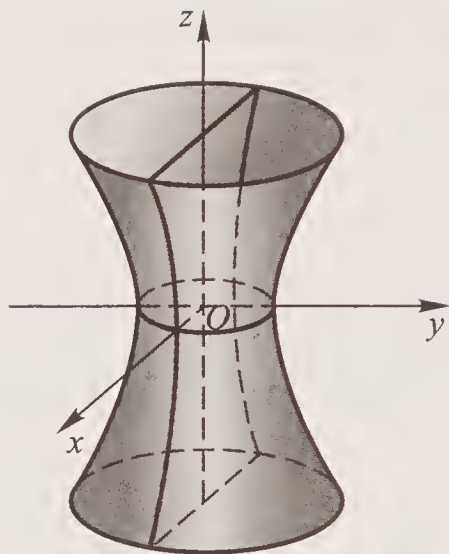


图 7-38

思考题 2 将 xOz 坐标面上的圆 $x^2 + z^2 = 9$ 绕 x 轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.

三、二次曲面

与平面解析几何中规定的二次曲线相类似, 我们把三元二次方程所表示的曲面称为二次曲面. 下面将讨论其中的六种标准方程, 我们将根据方程来研究它们的图形, 采用的方法是用平行于坐标面的平面与二次曲面相截, 考察各截痕^①的位置和形状, 然后对那些截痕加以综合, 得出曲面的全貌, 这种方法叫做截痕法.

1. 椭球面

方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0) \quad (2)$$

表示的曲面叫做椭球面. 下面我们根据所给出的方程, 用截痕法来考察椭球面的形状.

由方程(2)可知

$$\frac{x^2}{a^2} \leq 1, \quad \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad \frac{z^2}{c^2} \leq 1,$$

即

^① 截痕是指平面和曲面的交线.

$$|x| \leq a, \quad |y| \leq b, \quad |z| \leq c,$$

这说明椭球面包含在由平面 $x = \pm a, y = \pm b, z = \pm c$ 围成的长方体内.

先用 xOy 坐标面 ($z=0$) 与椭球面相截, 考察截痕的位置和形状. 由于截痕是在平面 $z=0$ 上的, 截痕上任意一点的坐标应为 $M(x, y, 0)$; 又由于截痕在椭球面上, 由方程(2)可知点 $M(x, y, 0)$ 满足 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. 所以, 椭球面上的这条截痕是平面 $z=0$ 上的椭圆.

再用平行于 xOy 坐标面的平面 $z=h$ ($0 < |h| < c$) 与椭球面相截. 由于截痕是在平面 $z=h$ 上的, 截痕上任意一点的坐标应为 $M(x, y, h)$; 又由于截痕在椭球面上, 由方程(2)可知点 $M(x, y, h)$ 满足 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}$. 所以, 椭球面上的这条截痕也是平面 $z=h$ 上的椭圆.

特别地, 如果用平面 $z=c$ 与该曲面相截, 则截痕上的任意一点应为 (x, y, c) , 并满足 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$, 从而 $x = y = 0$, 即截痕只有一点 $(0, 0, c)$; 同样平面 $z = -c$ 与该曲面相截所得截痕为点 $(0, 0, -c)$.

当 $|h|$ 由 0 变到 c 时, 椭圆由大变小, 最后缩成一点 $(0, 0, \pm c)$. 同样地, 用平行于 zOx 坐标面或 yOz 坐标面的平面去截这个曲面, 也有类似的结果. 如果连续地取这样的截痕, 那么可以想象, 这些截痕就组成了一张如图 7-39 所示的椭球面.

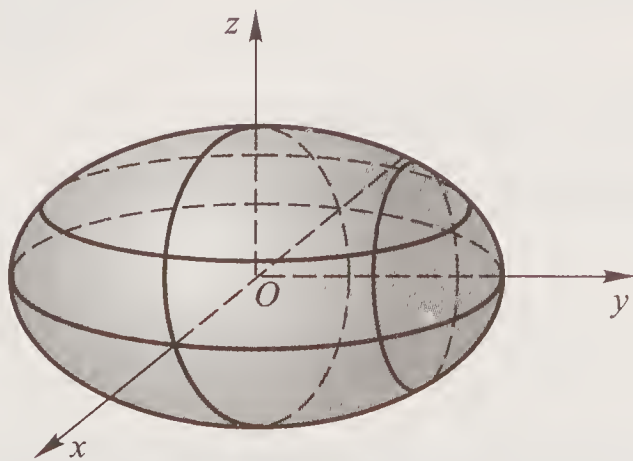


图 7-39

在椭球面方程(2)中, a, b, c 按其大小, 分别叫做椭球面的长半轴、中半轴、短半轴. 如果有两个半轴相等, 如 $a = b$, 方程表示的是由 yOz 平面上的椭圆 $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 绕 z 轴旋转而成的旋转椭球面.

如果 $a = b = c$, 则方程 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 表示一个球面.

2. 抛物面

抛物面分椭圆抛物面与双曲抛物面两种.

(1) 方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z \quad (a > 0, b > 0)$$

所表示的曲面叫做椭圆抛物面. 现在来考察它的形状.

与椭球面的讨论类似, 用平行于 xOy 坐标面的平面 $z = h$ ($h > 0$) 与椭圆抛物面相截, 则截痕是平面 $z = h$ 上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = h$. 用 xOy 坐标面 ($z = 0$) 与该曲面相截, 则截痕是原点 $O(0, 0, 0)$, 这个点叫做椭圆抛物面的顶点.

如果用平行于 zOx 坐标面的平面 $y = k$ ($k \in \mathbf{R}$) 与椭圆抛物面相截, 则截痕是平面 $y = k$ 上的抛物线 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} = z$. 用平行于 yOz 坐标面的平面与椭圆抛物面相截, 也有类似的结果.

综合以上分析, 由截痕组成的椭圆抛物面的形状如图 7-40 所示.

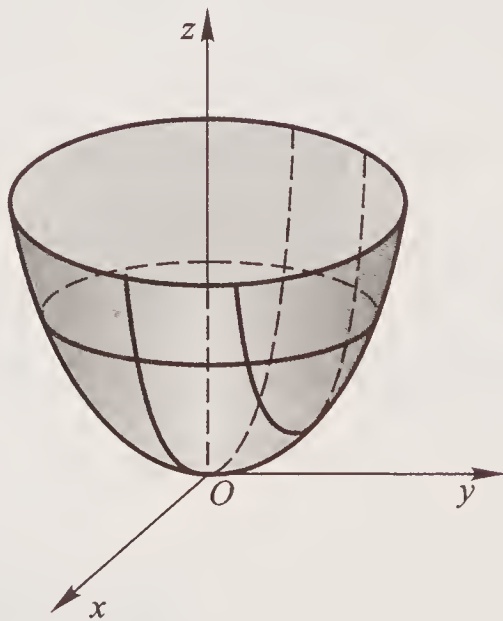


图 7-40

(2) 方程

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z \quad (a > 0, b > 0)$$

所表示的曲面叫做双曲抛物面. 考察这个方程所表示的双曲抛物

面的形状.

用平行于 xOy 坐标面的平面 $z = h$ ($h \neq 0$) 与双曲抛物面相截, 则截痕是平面 $z = h$ 上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = h$. 当 $h > 0$ 时, 双曲线的实轴平行于 x 轴; 当 $h < 0$ 时, 双曲线的实轴平行于 y 轴.

特别地, 如果用 xOy 坐标面 ($z = 0$) 与该曲面相截, 则截痕是 xOy 坐标面上的两条相交于原点的直线 $y = \pm \frac{b}{a}x$.

如果用平行于 yOz 坐标面的平面 $x = l$ ($l \in \mathbf{R}$) 与双曲抛物面相截, 则截痕是平面 $x = l$ 上的抛物线 $\frac{l^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$. 用平行于 yOz 坐标面的平面 $y = k$ ($k \in \mathbf{R}$) 与双曲抛物面相截, 则截痕是平面 $y = k$ 上的抛物线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} = z$.

综合以上分析, 由截痕组成的双曲抛物面的形状如图 7-41 所示. 因其形状与马鞍相似, 故也称为马鞍面.

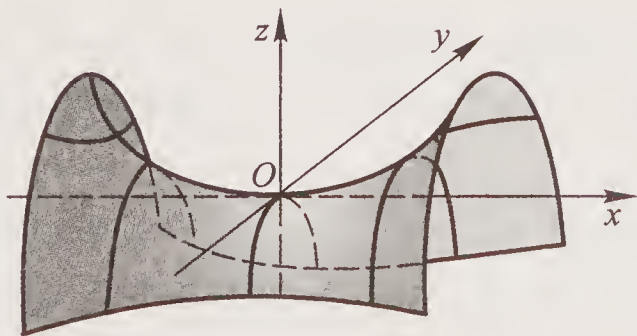


图 7-41

3. 双曲面

双曲面分单叶双曲面与双叶双曲面两种.

(1) 方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$$

所表示的曲面叫做单叶双曲面. 用截痕法所得结果如下表所示:

平面	截痕
xOy 坐标面及平行于它的平面	椭圆
zOx 坐标面及平行于它的平面	两条相交直线或双曲线
yOz 坐标面及平行于它的平面	两条相交直线或双曲线

单叶双曲面的形状如图 7 - 42 所示.

(2) 方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$$

所表示的曲面叫做双叶双曲面. 用截痕法所得结果如下表所示:

平面	截痕
xOy 坐标面及平行于它的平面	无截痕、一点或椭圆
zOx 坐标面及平行于它的平面	双曲线
yOz 坐标面及平行于它的平面	双曲线

双叶双曲面的形状如图 7 - 43 所示.

4. 椭圆锥面

方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$$

所表示的曲面叫做椭圆锥面. 用截痕法所得结果如下表所示:

平面	截痕
xOy 坐标面及平行于它的平面	一点或椭圆
zOx 坐标面及平行于它的平面	两条相交直线或双曲线
yOz 坐标面及平行于它的平面	两条相交直线或双曲线

椭圆锥面的形状如图 7 - 44 所示.

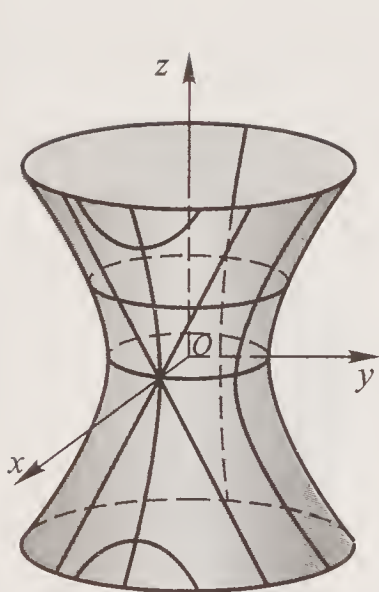


图 7-42

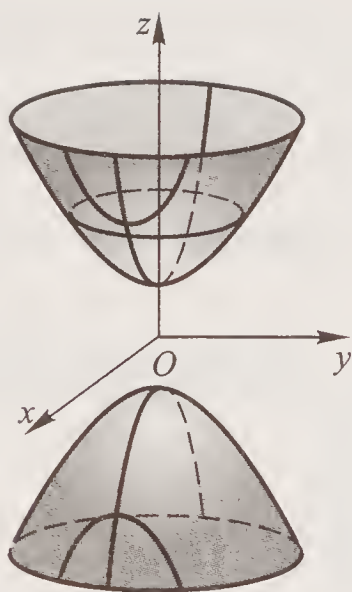


图 7-43

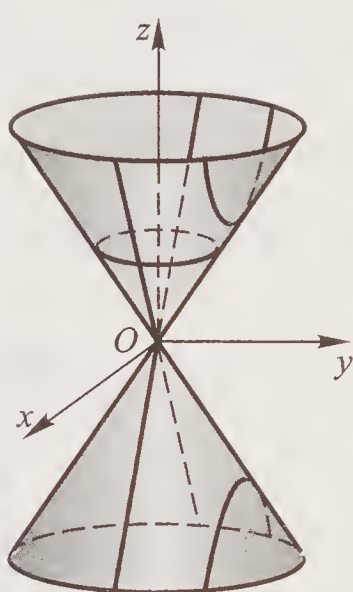


图 7-44

思考题 3 画出下列曲面在第一卦限内的图形：

(1) $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$; (2) $z = x^2 + y^2$.

习题 7-6

1. 指出下列方程在平面解析几何中和在空间解析几何中分别表示什么图形：

(1) $x = 2$; (2) $y = x + 1$; (3) $x^2 + y^2 = 4$; (4) $x^2 - y^2 = 1$.

2. 将 xOz 坐标面上的抛物线 $z^2 = 5x$ 绕 x 轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.

3. 将 xOy 坐标面上的双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ 绕 x 轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.

4. 说明下列旋转曲面是怎样形成的：

(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$; (2) $x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$;
(3) $x^2 - y^2 - z^2 = 1$; (4) $(z - a)^2 = x^2 + y^2$.

5. 画出下列方程所表示的曲面：

(1) $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$; (2) $z = \frac{x^2 + y^2}{2}$;
(3) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$; (4) $z = x^2$.

6. 画出下列各曲面所围成的立体的图形：

- (1) 平面 $x=0, y=0, z=0, 3x+4y+2z-12=0$;
 (2) 平面 $z=1$ 及抛物面 $z=x^2+y^2$;
 (3) 平面 $y=0, z=0, z=1$ 及圆柱面 $y=\sqrt{1-x^2}$;
 (4) 圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及旋转抛物面 $z=2-x^2-y^2$.

第七节 空间曲线及其方程

一、空间曲线的一般方程

在第四节中我们已经指出,空间曲线总可看作两个曲面的交线,曲面 $F(x, y, z)=0$ 与 $G(x, y, z)=0$ 的交线 C 可以用方程组

$$\begin{cases} F(x, y, z)=0, \\ G(x, y, z)=0 \end{cases} \quad (1)$$

来表示. 方程组(1)称为曲线 C 的一般方程.

例 1 方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 2x + 3z = 6 \end{cases}$$

表示怎样的曲线?

解 方程组中第一个方程表示母线平行于 z 轴的圆柱面,其准线是 xOy 面上的圆,圆心在原点 O ,半径为 1. 方程组中第二个方程表示一个平行于 y 轴的平面,方程组就表示上述平面与圆柱面的交线,如图 7-45 所示.

例 2 方程组

$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \\ \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \end{cases}$$

表示怎样的曲线?

解 方程组中第一个方程表示球心在坐标原点 O ,半径为 a 的上半球面. 第二个方程表示母线平行于 z 轴的圆柱面,它的准线

是 xOy 面上的圆, 这圆的圆心在点 $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, 半径为 $\frac{a}{2}$. 方程组就表示上述半球面与圆柱面的交线, 如图 7-46 所示.

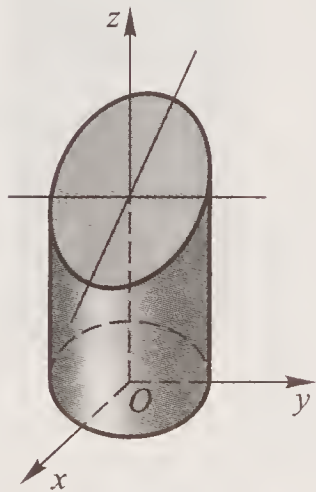


图 7-45

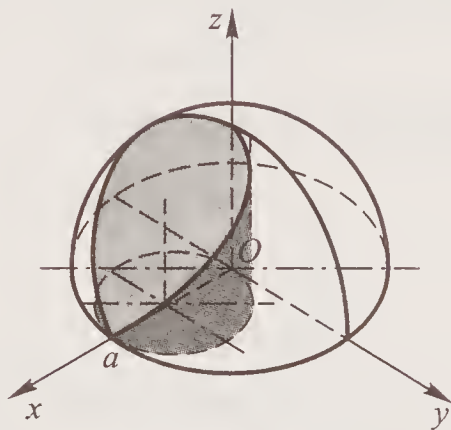


图 7-46

二、空间曲线的参数方程

空间曲线 C 的方程除了一般方程之外, 也可以用参数形式表示, 只要将 C 上动点的坐标 x, y, z 表示为参数 t 的函数:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \quad (2)$$

当给定 $t = t_1$ 时, 就得到 C 上的一个点 (x_1, y_1, z_1) , 随着 t 的变动便可得曲线 C 上的全部点. 方程组(2)叫做空间曲线的参数方程.

例 3 如果空间一点 M 在圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 上以角速率 ω 绕 z 轴旋转, 同时又以线速率 v 沿平行于 z 轴的正方向上升(其中 ω, v 都是常数), 那么点 M 构成的图形叫做螺旋线. 试建立其参数方程.

解 取时间 t 为参数. 设当 $t = 0$ 时, 动点位于 x 轴上的一点 $A(a, 0, 0)$ 处. 经过时间 t , 动点由 A 运动到 $M(x, y, z)$ (图 7-47). 记 M 在 xOy 面上的投影为 M' , M' 的坐标为 $(x, y, 0)$. 由于动点在圆柱面上以角速率 ω 绕 z 轴旋转, 所以经过时间 t , $\angle AOM' = \omega t$. 从而

$$x = |OM'| \cos \angle AOM' = a \cos \omega t,$$

$$y = |OM'| \sin \angle AOM' = a \sin \omega t.$$

由于动点同时以线速率 v 沿平行于 z 轴的正方向上升, 所以

$$z = M'M = vt.$$

因此螺旋线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a \cos \omega t, \\ y = a \sin \omega t, \\ z = vt. \end{cases}$$

也可以用其他变量作参数. 例如, 令 $\theta = \omega t$, 则螺旋线的参数方程可写为

$$\begin{cases} x = a \cos \theta, \\ y = a \sin \theta, \\ z = b\theta. \end{cases}$$

这里 $b = \frac{v}{\omega}$, 而参数为 θ .

螺旋线是一种常用的曲线. 例如, 平头螺丝钉的外缘曲线就是螺旋线. 当我们拧紧平头螺丝钉时, 它的外缘曲线上的任一点 M , 一方面绕螺丝钉的轴旋转, 另一方面又沿平行于轴线的方向前进, 点 M 就走出一段螺旋线.

螺旋线有一个重要性质: 当 θ 从 θ_0 变到 $\theta_0 + \alpha$ 时, z 由 $b\theta_0$ 变到 $b\theta_0 + b\alpha$. 这说明当 OM' 转过角 α 时, 点 M 沿螺旋线上升了高度 $b\alpha$, 即上升的高度与 OM' 转过的角度成正比. 特别是, 当 OM' 转过一周, 即 $\alpha = 2\pi$ 时, 点 M 就上升固定的高度 $h = 2\pi b$. 这个高度 $h = 2\pi b$ 在工程技术上叫做螺距.

例 4 求例 2 中的曲线的参数方程.

解 例 2 中的曲线有一般方程

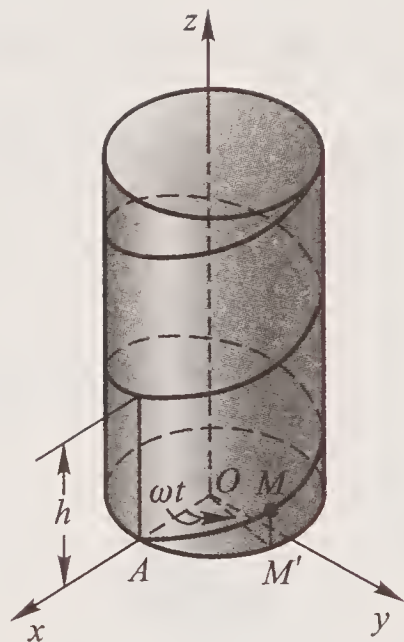


图 7-47

$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \\ \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2. \end{cases}$$

把第二个方程看作 xOy 平面上的圆, 可取圆心角为参数, 写出圆周的参数方程

$$x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos \theta, \quad y = \frac{a}{2} \sin \theta.$$

代入球面方程, 得

$$z = \sqrt{a^2 - ax} = a \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} = a \sin \frac{\theta}{2}.$$

于是所求曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2}(1 + \cos \theta), \\ y = \frac{a}{2} \sin \theta, \\ z = a \sin \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi).$$

三、空间曲线在坐标面上的投影

已知空间曲线 C 和平面 Π (图 7-48), 从 C 上各点向平面 Π 作垂线, 垂足所构成的曲线 C_1 称为曲线 C 在平面 Π 上的投影曲线. 准线为曲线 C 而母线垂直于 Π 的柱面称为曲线 C 关于平面 Π 的投影柱面. 投影曲线 C_1 就是投影柱面与 Π 的交线. 特殊地, 以曲线 C 为准线、母线平行于 z 轴 (即垂直于 xOy 平面) 的柱面称为曲线 C 关于 xOy 面的投影柱面, 此投影柱面与 xOy 面的交线称为曲线 C

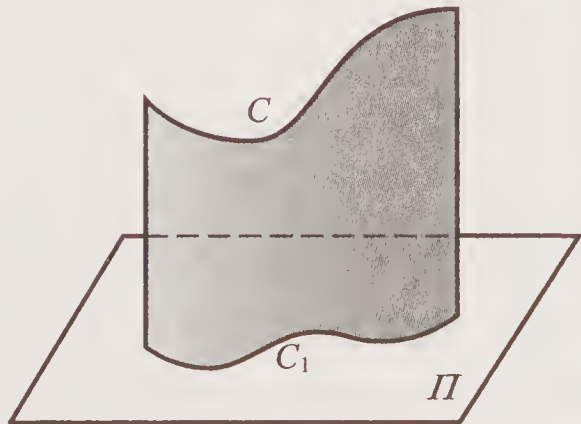


图 7-48

在 xOy 面上的投影曲线,或简称投影.

设空间曲线 C 的一般方程为

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

在这个方程组中消去 z , 就得到一个不含变量 z 的方程

$$H(x, y) = 0. \quad (4)$$

它表示一个母线平行于 z 轴的柱面. 由于方程 (4) 是由方程组 (3) 消去 z 而得到的, 因此, 当 x, y, z 满足方程组 (3) 时, 前两个变量 x, y 必定满足方程 (4). 这说明曲线 C 上的所有点都在由方程 (4) 所表示的柱面上, 即此柱面必定包含曲线 C . 也就是说, 方程 (4) 所表示的柱面必定包含空间曲线 C 关于 xOy 平面的投影柱面. 而方程

$$\begin{cases} H(x, y) = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

所表示的曲线必定包含空间曲线 C 在 xOy 面上的投影.

同理, 消去方程组 (3) 中的变量 x 或 y , 再分别和 $x = 0$ 或 $y = 0$ 联立, 我们就可得到包含曲线 C 在 yOz 面或 xOz 面上的投影的曲线方程

$$\begin{cases} R(y, z) = 0, \\ x = 0, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} T(x, z) = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

例 5 已知两球面的方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad (5)$$

和

$$x^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1, \quad (6)$$

求它们的交线 C 在 xOy 面上的投影方程.

解 先求包含交线 C 而母线平行于 z 轴的柱面方程. 这要从方程 (5)、(6) 消去 z , 为此先从 (5) 式减去 (6) 式并化简, 得到

$$y + z = 1.$$

再以 $z = 1 - y$ 代入方程 (5), 即得所求的柱面方程为

$$x^2 + 2y^2 - 2y = 0.$$

容易看出,这就是交线 C 关于 xOy 面的投影柱面方程,于是交线 C 在 xOy 面上的投影方程是

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

例 6 设一个立体由上半球面 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 和锥面 $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ 所围成(图 7-49),求此立体在 xOy 面上的投影区域^①.

解 半球面和锥面的交线为

$$C: \begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \\ z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}. \end{cases}$$

由上列方程组消去 z ,得到 $x^2 + y^2 = 1$. 这是一个母线平行于 z 轴的圆柱面,容易看出,这恰好是交线 C 关于 xOy 面的投影柱面,因此交线 C 在 xOy 面上的投影曲线为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

这是 xOy 面上的一个圆,于是所求立体在 xOy 面上的投影,就是该圆在 xOy 面上所围的部分: $x^2 + y^2 \leq 1$.

思考题 1 画出下列曲线在第一卦限内的图形:

$$(1) \begin{cases} x = 1, \\ y = 2; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \\ x - y = 0. \end{cases}$$

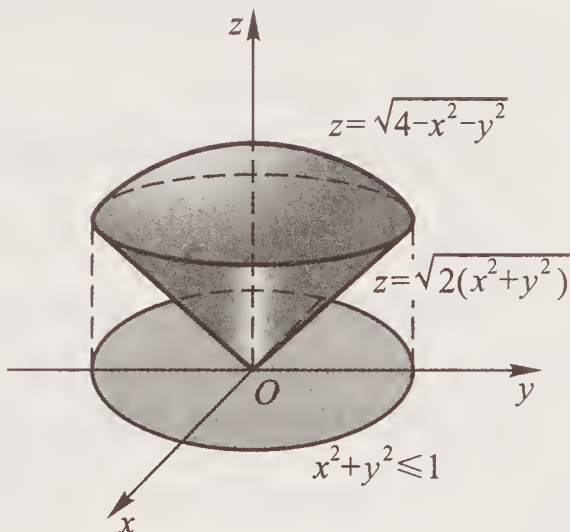


图 7-49

^① 立体在坐标面上的投影区域是指该立体内的所有点在该坐标面上的投影点所组成的平面点集.

习题 7-7

1. 指出下列方程所表示的曲线:

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x = 3; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36, \\ y = 1; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x^2 - 4y^2 + z^2 = 25, \\ x = -3; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} y^2 + z^2 - 4x + 8 = 0, \\ y = 4. \end{cases}$$

2. 将下列曲线的一般方程化为参数方程:

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ y = x; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4, \\ z = 0. \end{cases}$$

3. 分别求母线平行于 x 轴及 y 轴而且通过曲线 $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x^2 + z^2 - y^2 = 0 \end{cases}$ 的柱面方程.

面方程.

4. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 与平面 $x + z = 1$ 的交线在 xOy 面上的投影的方程.

第七章复习题

一、概念复习

1. 点 (a, b, c) 关于 xOy 坐标面、 yOz 坐标面、 zOx 坐标面、 x 轴、 y 轴、 z 轴和原点的对称点坐标依次为 _____、_____、_____、_____、_____、_____和_____.

2. 设数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 不全为零, 使 $\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 三个向量 _____.

3. 设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 为三个两两垂直的单位向量, $\mathbf{a} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{e}_1}) = \alpha$, 那么

x_1 可用数量积表示为 $x_1 =$ _____;

x_1 可用投影表示为 $x_1 =$ _____;

x_1 可用方向余弦表示为 $x_1 =$ _____.

4. 设 $\mathbf{a} = (2, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (4, -1, 10)$, $\mathbf{c} = \mathbf{b} - \lambda \mathbf{a}$, 且 $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$, 则 $\lambda =$ _____.
5. 设 $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$, $|\mathbf{c}| = 5$, 且 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 则 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}| =$ _____.
6. 直线 $\begin{cases} x = 1, \\ 2y + 3z = 4 \end{cases}$ 的点向式方程为 _____.
7. 直线 $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ 在 xOy 面上的投影直线的方程为 _____.
8. 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y), \\ z = g(x, y) \end{cases}$ 关于 xOy 面的投影柱面的方程为 _____.

二、综合练习

1. 在 y 轴上求与点 $A(1, -3, 7)$ 和点 $B(5, 7, -5)$ 等距离的点.
2. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(3, 2, -1)$, $B(5, -4, 7)$ 和 $C(-1, 1, 2)$, 求从顶点 C 所引中线的长度.
3. 设 $\triangle ABC$ 的三边 $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$, 三边中点依次为 D, E, F , 试用向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 表示 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF}$, 并证明:
- $$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \mathbf{0}.$$
4. 设 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$, $\mathbf{a} = (3, -5, 8)$, $\mathbf{b} = (-1, 1, z)$, 求 z .
5. 设 $|\mathbf{a}| = \sqrt{3}$, $|\mathbf{b}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{a}}, \widehat{\mathbf{b}}) = \frac{\pi}{6}$, 求向量 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 的夹角.
6. 设 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{a} + 3\mathbf{b} \perp 7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$, $\mathbf{a} - 4\mathbf{b} \perp 7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, 求 $(\widehat{\mathbf{a}}, \widehat{\mathbf{b}})$.
7. 设 $\mathbf{a} = (2, -1, -2)$, $\mathbf{b} = (1, 1, z)$, 问 z 为何值时 $(\widehat{\mathbf{a}}, \widehat{\mathbf{b}})$ 最小? 并求出此最小值.
8. 设 $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{a}}, \widehat{\mathbf{b}}) = \frac{\pi}{6}$, 求以 $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ 为边的平行四边形的面积.

9. 设 $\mathbf{a} = (2, -3, 1)$, $\mathbf{b} = (1, -2, 3)$, $\mathbf{c} = (2, 1, 2)$, 向量 $\mathbf{r}$ 满足 $\mathbf{r} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{r} \perp \mathbf{b}$, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{c} = 42$, 求 $\mathbf{r}$.

10. 一平面与三条坐标轴分别交于 A, B 和 C (图 7-50), 试用向量积证明:

$$S_{\triangle ABC}^2 = S_{\triangle OAB}^2 + S_{\triangle OBC}^2 + S_{\triangle OCA}^2,$$

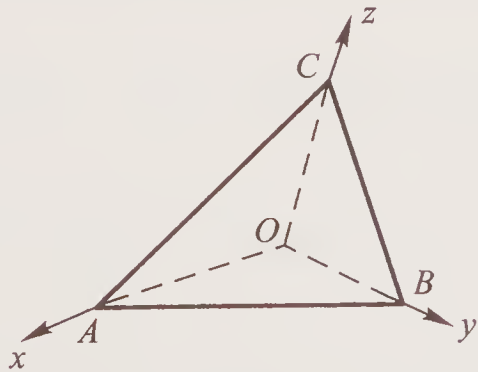


图 7-50

其中 $S_{\triangle ABC}$, $S_{\triangle OAB}$, $S_{\triangle OBC}$ 和 $S_{\triangle OCA}$ 分别表示 $\triangle ABC$, $\triangle OAB$, $\triangle OBC$ 和 $\triangle OCA$ 的面积.

11. 已知动点 $M(x, y, z)$ 到 xOy 平面的距离与点 M 到点 $(1, -1, 2)$ 的距离相等, 求点 M 的轨迹的方程.

12. 指出下列旋转曲面的一条母线和旋转轴:

$$(1) \quad z = 2(x^2 + y^2); \quad (2) \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1;$$

$$(3) \quad z^2 = 3(x^2 + y^2); \quad (4) \quad x^2 - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1.$$

13. 求通过点 $A(3, 0, 0)$ 和 $B(0, 0, 1)$ 且与 xOy 面成 $\frac{\pi}{3}$ 角的平面方程.

14. 设一平面垂直于平面 $z = 0$, 并通过从点 $(1, -1, 1)$ 到直线 $\begin{cases} y - z + 1 = 0, \\ x = 0 \end{cases}$ 的垂线, 求此平面的方程.

15. 求过点 $(-1, 0, 4)$, 且平行于平面 $3x - 4y + z - 10 = 0$, 又与直线 $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$ 相交的直线方程.

16. 已知点 $A(1, 0, 0)$ 及点 $B(0, 2, 1)$, 试在 z 轴上求一点 C , 使 $\triangle ABC$ 的面积最小.

17. 求曲线 $\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2, \\ z = (x-1)^2 + (y-1)^2 \end{cases}$ 在 xOy 坐标面上的投影曲线的方程.

18. 求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与柱面 $z^2 = 2x$ 所围立体在 xOy 坐标面上的投影区域.

第八章

多元函数微分法及其应用

上册中讨论的函数都只有一个自变量,这种只含一个自变量的函数叫做一元函数.但无论在理论上还是在实践中,经常遇到的许多量的变化并不是由单个因素决定的,而是受到多个因素的影响,这就提出了多元函数以及多元函数的微分和积分问题.本章将在一元函数微分学的基础上,讨论多元函数的微分法及其应用.讨论中以二元函数为主,这是因为从一元函数到二元函数会产生新的问题和不同的结果,而从二元函数到二元以上的多元函数则可以类推.

第一节 多元函数的基本概念

一、多元函数的概念·区域

1. 多元函数概念

在很多自然现象以及实际问题中,经常会遇到多个变量之间的依赖关系,举例如下:

例 1 圆柱体的体积 V 和它的底半径 r 、高 h 之间具有关系

$$V = \pi r^2 h.$$

这里,当 r, h 在一定范围($r > 0, h > 0$)内取定一对数值(r, h)时, V 就有唯一确定的值与之对应.

例 2 一定量的理想气体的压强 p 、体积 V 和绝对温度 T 之间具有关系

$$p = \frac{RT}{V},$$

其中 R 为常数. 这里, 当 V, T 在一定范围 ($V > 0, T > T_0$) 内取定一对数值 (V, T) 时, p 就有唯一确定的值与之对应.

上面两个例子的具体意义虽各不相同, 但它们却有共同的性质, 抽出这些共性就可得出以下二元函数的定义.

定义 1 设有变量 x, y 和 z . 如果当变量 x, y 在一定范围内任意取定一对值 (x, y) 时, 变量 z 按照一定的法则 f , 总有唯一确定的数值和这对值对应, 则称这个对应法则 f 为 x, y 的二元函数. 变量 x, y 叫做自变量, 而变量 z 叫做因变量. 自变量 x, y 的变化范围叫做函数的定义域.

与自变量 x, y 的一对值 (x, y) 对应的因变量 z 的值记作 $f(x, y)$, 称为二元函数 f 在 (x, y) 处的函数值. 与一元函数的情形相仿, 习惯上也常用函数值记号 $f(x, y)$ 或 $z = f(x, y)$ 来表示 x, y 的二元函数 f , 并通常也称 z 为 x, y 的函数.

类似地, 可以定义三元函数 $u = f(x, y, z)$ 以及三元以上的函数.

在定义 1 中, 我们把自变量 x, y 排了序, 使它们所取的值成为有序数组 (x, y) . 这样, 自变量 x, y 的每一对值就对应 xOy 平面上的一个点 $P(x, y)$, 于是函数

$$z = f(x, y)$$

可看作平面上点 P 的函数, 并简记为 $z = f(P)$. 类似地, 可用空间内的点 $P(x, y, z)$ 来表示有序数组 (x, y, z) , 于是三元函数

$$u = f(x, y, z)$$

也就可看作空间内的点 P 的函数, 并简记为 $u = f(P)$, 等等.

如果对于点 $P(x, y)$, 函数 $z = f(x, y)$ 有确定的值和它对应, 就说函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 处有定义. 函数的定义域也就是使函数有定义的点的全体所构成的点集. 因此, 二元函数

$$z = f(x, y)$$

的定义域是 xOy 平面上的点集. 类似地, 三元函数 $z = f(x, y, z)$ 的定义域是空间内的点集.

关于函数的定义域, 与一元函数相类似, 我们做如下约定: 在讨论用算式表示的多元函数时, 就以使这个算式有意义的自变量的值所确定的点集为这个函数的定义域, 有时也称为函数的自然定义域. 自然定义域一般不特别标出. 例如, 函数

$$z = \ln(x + y)$$

的定义域为适合 $x + y > 0$ 的点 (x, y) 的全体, 即平面点集

$$\{(x, y) \mid x + y > 0\}$$

(图 8-1). 又如, 函数

$$z = \arcsin(x^2 + y^2)$$

的定义域为适合

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

的点 (x, y) 的全体, 即平面点集 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ (图 8-2).

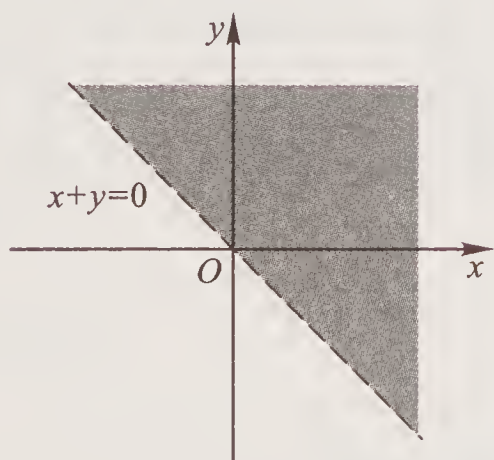


图 8-1

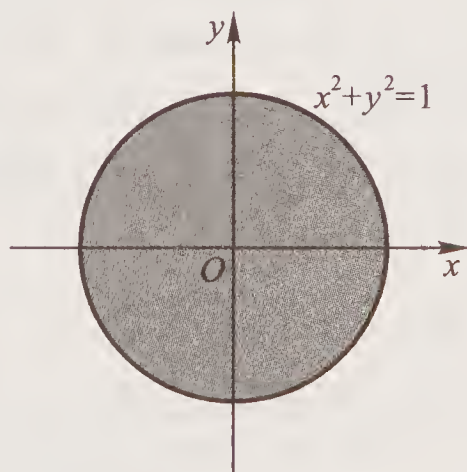


图 8-2

我们曾利用平面直角坐标系来表示一元函数 $y = f(x)$ 的图形, 一般说来, 它是平面上的一条曲线. 对于二元函数 $z = f(x, y)$, 我们可以利用空间直角坐标系来表示它的图形. 设函数

$$z = f(x, y)$$

的定义域是 xOy 坐标面上某一点集 D . 对于 D 上每一点 $P(x, y)$, 在空间可以作出一点 $M(x, y, f(x, y))$ 与它对应. 当点 $P(x, y)$ 在 D

上变动时,点 $M(x, y, f(x, y))$ 就相应地在空间变动,一般说来,它的轨迹是一个曲面(图 8-3). 这个曲面就称为 二元函数 $z = f(x, y)$ 的图形. 因此,二元函数可用曲面作为它的几何表示.

例如,由空间解析几何知道,线性函数

$$z = ax + by + c$$

的图形是一个平面,而函数

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

的图形是中心在原点、半径为 a 的上半球面.

2. 区域

在一元函数的讨论中,邻域及区间是经常用到的概念. 类似地,讨论多元函数时,经常用到邻域及区域概念. 邻域及区域都是符合一定条件的点集. 为简单和直观起见,我们就平面点集来说明邻域和区域的概念,同时也要涉及其他一些有关概念.

设 $\delta > 0$, 与点 $P_0(x_0, y_0)$ 距离小于 δ 的点 $P(x, y)$ 的全体,称为点 P_0 的 δ 邻域,记作 $U(P_0, \delta)$, 即

$$U(P_0, \delta) = \{P \mid |PP_0| < \delta\},$$

也就是

$$U(P_0, \delta) = \{(x, y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}.$$

从图形上看, $U(P_0, \delta)$ 就是以点 $P_0(x_0, y_0)$ 为中心、 δ 为半径的圆内部的点 $P(x, y)$ 的全体.

如果不需要强调邻域半径 δ , 则用 $U(P_0)$ 表示 P_0 的 δ 邻域.

设 E 是平面上的一个点集, P 是平面上的一个点.

如果存在点 P 的一个邻域 $U(P)$, 使 $U(P) \subset E$, 则称 P 为 E

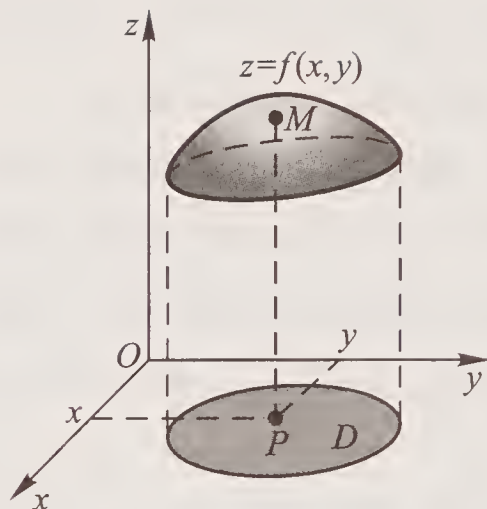


图 8-3

的内点(图 8-4). 显然, 若 P 是 E 的内点, 则 $P \in E$.

如果点集 E 的点都是它的内点, 则称 E 为开集. 例如, 点集

$$E_1 = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$$

中每个点都是 E_1 的内点, 故 E_1 为开集.

如果点 P 的任何一个邻域中既有属于 E 的点, 也有不属于 E 的点 (P 本身可以属于 E , 也可以不属于 E), 则称 P 为 E 的边界点(图 8-5). E 的边界点的全体称为 E 的边界. 例如, 在上例中, E_1 的边界是圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 和 $x^2 + y^2 = 4$.

设 D 是开集, 如果对于 D 内的任何两点, 都可以用完全位于 D 内的折线连接起来, 则称开集 D 是连通的.

连通的开集称为区域或开区域. 例如,

$$\{(x, y) \mid x + y > 0\}, \quad \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$$

都是区域.

区域连同它的边界一起, 称为闭区域. 例如,

$$\{(x, y) \mid x + y \geq 0\}, \quad \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

都是闭区域.

对于点集 E , 如果存在正数 K , 使 E 的任一点 P 与某一固定点 A 间的距离 $|AP|$ 不超过 K , 即对任一 $P \in E$,

$$|AP| \leq K$$

成立, 则称 E 为有界点集, 否则称为无界点集. 例如,

$$\{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

是有界闭区域, $\{(x, y) \mid x + y > 0\}$ 是无界区域.



图 8-4

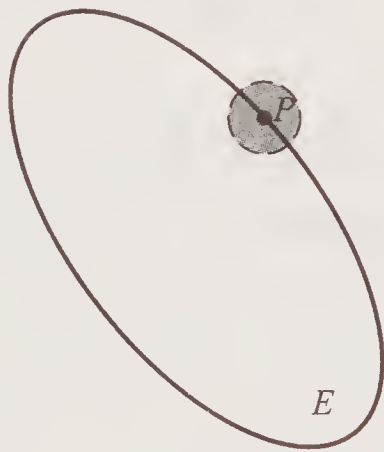


图 8-5

思考题 1 求下列函数的定义域,并指出定义域是开区域还是闭区域,或两者都不是:

$$(1) z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}; \quad (2) z = \ln(1-x^2-y^2);$$

$$(3) z = \frac{\sqrt{y-x^2}}{x^2 + (y-1)^2}.$$

二、多元函数的极限

如果动点 $P(x, y)$ 与定点 $P_0(x_0, y_0)$ 之间的距离趋于零,就称动点 $P(x, y)$ 趋于定点 $P_0(x_0, y_0)$,记作 $P \rightarrow P_0$ 或 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$.

下面来讨论二元函数 $z = f(x, y)$ 当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时的极限,其中点 $P_0(x_0, y_0)$ 是 $f(x, y)$ 的某个定义区域^①的内点或边界点.与一元函数的极限概念类似,如果在 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 的过程中,对应的函数值 $f(x, y)$ 无限接近于一个确定的常数 A ,就称 A 是函数 $f(x, y)$ 当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时的极限,并记作

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A,$$

或

$$f(x, y) \rightarrow A \quad ((x, y) \rightarrow (x_0, y_0)).$$

为了区别于一元函数的极限,把二元函数的极限叫做二重极限.

例如,设 $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$. 由于

$$0 \leq \left| (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right| = |x^2 + y^2| \cdot \left| \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right| \leq x^2 + y^2,$$

因此当点 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, 即 $x^2 + y^2 \rightarrow 0$ 时,必然有

$$\left| (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right| \rightarrow 0,$$

即 $(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \rightarrow 0$, 从而有

^① 函数 $f(x, y)$ 的定义区域是指包含在 $f(x, y)$ 的定义域内的区域.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = 0.$$

以上二重极限的概念也可用“ $\varepsilon - \delta$ ”语言描述如下:

定义 2 设函数 $f(x, y)$ 的定义域为 D , 点 $P_0(x_0, y_0)$ 是 $f(x, y)$ 的某个定义区域的内点或边界点. 如果存在常数 A , 使得对于任意给定的正数 ε (不论它多么小), 总存在正数 δ , 只要 D 内的点 $P(x, y)$ 适合不等式

$$0 < |PP_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta,$$

对应的函数值 $f(x, y)$ 就都满足不等式

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon,$$

那么就称常数 A 为函数 $f(x, y)$ 当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时的极限, 记作

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = A.$$

必须注意, 所谓二重极限存在, 是指 $P(x, y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0, y_0)$ 时, 函数都趋于同一个数值 A . 因此, 如果 $P(x, y)$ 以某一特殊方式, 例如, 沿着一条定直线或定曲线趋于 $P_0(x_0, y_0)$ 时, 即使函数无限接近于某一确定值, 我们还不能由此断定函数的极限存在. 但是, 如果当 $P(x, y)$ 以不同方式趋于 $P_0(x_0, y_0)$ 时, 函数趋于不同的值, 那么就可以断定这函数当 $P \rightarrow P_0$ 时的极限不存在. 下面用例子来说明这种情形. 考察函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{当 } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{当 } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

显然, 当点 $P(x, y)$ 沿 x 轴 (即固定 $y = 0$) 趋于点 $(0, 0)$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0,$$

但是, 当点 $P(x, y)$ 沿直线 $y = x$ 趋于点 $(0, 0)$ 时, 有

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = x \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2},$$

可见, 当 $P(x, y)$ 以不同方式趋于点 $(0, 0)$ 时, $f(x, y)$ 趋于不同的值, 故 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ 不存在.

以上关于二元函数的极限的概念, 可相应地推广到一般的 n

元函数 $u = f(P)$ 即 $u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 上去.

关于多元函数的极限运算,有与一元函数类似的运算法则.

例 3 求 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin(xy)}{x}$.

解 记 $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{x}$, 则 $P_0(0, 2)$ 为 $f(x, y)$ 的定义区域 $D_1 = \{(x, y) \mid x > 0\}$ 或 $D_2 = \{(x, y) \mid x < 0\}$ 的边界点. 由于在 $P_0(0, 2)$ 的充分小的邻域内 $y \neq 0$, 故有

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin(xy)}{x} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \left[\frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y \right] \\ &= \lim_{xy \rightarrow 0} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{y \rightarrow 2} y = 1 \cdot 2 = 2. \end{aligned}$$

三、多元函数的连续性

与一元函数的情形一样,利用多元函数的极限就可以说明多元函数在一点处连续的概念.

定义 3 设函数 $f(x, y)$ 在区域或闭区域 D 内有定义, $P_0(x_0, y_0) \in D$. 如果

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

则称函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 连续.

如果函数 $f(x, y)$ 在区域(或闭区域) D 的每一点连续,那么就称函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续,或者称 $f(x, y)$ 是 D 上的连续函数.

以上关于二元函数的连续性概念,可相应地推广到一般的 n 元函数上去.

与闭区间上一元连续函数的性质相类似,在有界闭区域上的多元连续函数也有如下性质:

性质 1(最大值和最小值定理) 在有界闭区域 D 上的多元连续函数 $f(P)$, 在该区域上至少取得它的最大值和最小值各一次.

这就是说,在 D 上至少有一点 P_1 及一点 P_2 ,使得 $f(P_1)$ 为最大值而 $f(P_2)$ 为最小值:

$$f(P_2) \leq f(P) \leq f(P_1) \quad (P \in D).$$

性质 2 (介值定理) 在有界闭区域 D 上的多元连续函数 $f(P)$,如果取得两个不同的函数值,则它在该区域上取得介于这两个值之间的任何值至少一次.特殊地,如果 μ 是在函数的最小值 m 和最大值 M 之间的一个数,则在 D 上至少有一点 Q ,使得

$$f(Q) = \mu.$$

我们指出,一元函数中关于极限的运算法则,对于多元函数仍然适用.根据极限运算法则,可以证明多元连续函数的和、差、积均为连续函数;在分母不为零处,连续函数的商也是连续函数;多元连续函数的复合函数也是连续函数.

与一元初等函数相类似,多元初等函数也是可由一个式子表示的多元函数,而这个式子是由常数及具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成的.例如

$$\frac{x + x^2 - y^2}{1 + x^2}, \quad \sin(x + y), \quad e^{xy} \cdot \ln(1 + x^2 + y^2)$$

等都是多元初等函数.

根据上面指出的连续函数的和、差、积、商的连续性,连续函数的复合函数的连续性以及基本初等函数的连续性,我们进一步可得如下结论:

一切多元初等函数在其定义区域内是连续的.

由以上结论,如果 $f(P)$ 是多元初等函数, P_0 是 $f(P)$ 的某个定义区域内的一点,则 $f(P)$ 在点 P_0 连续,从而有

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0).$$

例 4 求 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}.$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy+1-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)} \\
 &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{\sqrt{xy+1}+1} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

以上运算的最后一步用到了二元函数 $\frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}$ 在点 $(0,0)$ 的连续性.

$$\text{思考题 2} \quad \text{试说明 } f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & \text{当 } x^2+y^2 \neq 0, \\ 1, & \text{当 } x^2+y^2 = 0 \end{cases} \text{ 在整个 } xOy$$

平面上是连续的.

习题 8-1

1. 已知函数

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy \tan \frac{x}{y},$$

试求 $f(tx, ty)$.

2. 试证: 函数

$$F(x,y) = \ln x \cdot \ln y$$

满足关系式

$$F(xy, uv) = F(x, u) + F(x, v) + F(y, u) + F(y, v).$$

3. 已知函数

$$f(u, v, w) = u^w + w^{u+v},$$

试求 $f(x+y, x-y, xy)$.

4. 求下列各函数的定义域:

$$(1) \quad z = \ln(y^2 - 2x + 1);$$

$$(2) \quad u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

5. 求下列各极限:

$$(1) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{1-xy}{x^2+y^2};$$

$$(2) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2+y^2};$$

$$(3) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$(4) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{2 - \sqrt{xy+4}}.$$

6. 证明: 当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时, 函数 $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ 不存在极限.

第二节 偏 导 数

一、偏导数的定义及其计算法

大家知道, 一元函数的导数定义为函数增量与自变量增量之比当自变量增量趋于零时的极限, 它刻画了函数在一点处的变化率. 对于多元函数来说, 由于自变量个数的增多, 函数关系就更为复杂, 但是仍然可以考虑函数对于某一个自变量的变化率, 也就是在其中一个自变量发生变化, 而其余自变量都保持不变的情形下, 考虑函数对于该自变量的变化率. 例如, 由物理学知, 一定量理想气体的体积 V 、压强 p 与绝对温度 T 之间存在着某种联系. 我们可以考察在等温条件下 (即将 T 视为常数) 体积对于压强的变化率, 也可以分析在等压条件下 (即将 p 视为常数) 体积对于温度的变化率. 由多元函数对某一个自变量的变化率就引出了多元函数的偏导数的概念.

定义 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内有定义, 当 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时, 函数相应地有增量

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称此极限为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处 对 x 的偏导数, 记作 $f_x(x_0, y_0)$, 即

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}. \quad (1)$$

$f_x(x_0, y_0)$ 也常记作 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}$, $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}$ 或 $\left. z_x \right|_{(x_0, y_0)}$.

类似地,函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数 $f_y(x_0,y_0)$ 定义为

$$f_y(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0,y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}, \quad (2)$$

$f_y(x_0,y_0)$ 也常记作 $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(x_0,y_0)}$, $\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0,y_0)}$, 或 $z_y \Big|_{(x_0,y_0)}$.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内的每一点 (x,y) 处对 x 的偏导数都存在,那么 D 内的每个点 (x,y) ,对应着 $z=f(x,y)$ 在该点处对 x 的偏导数,这样就在 D 内定义了一个新的函数,这函数称为 $z=f(x,y)$ 对 x 的偏导函数,记作 $f_x(x,y)$.

在(1)式中把 x_0 换成 x , y_0 换成 y , 便得函数 $z=f(x,y)$ 对 x 的偏导函数的定义式

$$f_x(x,y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

$f_x(x,y)$ 也可记作 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ 或 z_x . ①

类似地,可得函数 $z=f(x,y)$ 对 y 的偏导函数(记作 $f_y(x,y)$)的定义式

$$f_y(x,y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y},$$

$f_y(x,y)$ 也可记作 $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 或 z_y .

偏导函数也简称为偏导数.

由偏导数的概念可知, $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 显然就是偏导函数 $f_x(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的函数值, $f_y(x_0,y_0)$ 就是偏导函数 $f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的函数值.

由偏导数的定义可知,求 $z=f(x,y)$ 的偏导数并不需要新的方

① 偏导数记号 z_x, f_x 也记成 z'_x, f'_x . 下面高阶偏导数的记号也有类似的情形.

法,只要应用一元函数求导法就可以了.求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 时,只要把 y 看作常量

而对 x 求导数;求 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 时,则只要把 x 看作常量而对 y 求导数.

偏导数的概念可以推广到二元以上的函数.例如,三元函数

$$w = f(x, y, z)$$

对 x 的偏导数定义为

$$f_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}.$$

实际上,这是把函数 $w = f(x, y, z)$ 中的 y 和 z 看作常量而对 x 求导数.它的求法也还是一元函数的求导问题.

例 1 求 $z = x^2 + 3xy + y^2$ 在点 $(1, 2)$ 处的偏导数.

解 把 y 看作常量对 x 求导数,得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y;$$

把 x 看作常量对 y 求导数,得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y.$$

将 $x = 1, y = 2$ 代入上面的结果,就得

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,2)} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8,$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,2)} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7.$$

例 2 求 $z = x^2 \sin 2y$ 的偏导数.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 \cos 2y.$

例 3 设 $z = x^y$ ($x > 0, x \neq 1, y$ 为任意实数). 求证:

$$\frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \frac{\partial z}{\partial y} = 2z.$$

证 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$, 所以

$$\frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y} y x^{y-1} + \frac{1}{\ln x} x^y \ln x = x^y + x^y = 2x^y.$$

例 4 求 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 的偏导数.

解 把 y 和 z 都看作常量对 x 求导数, 得

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r},$$

类似地, 有

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

例 5 已知理想气体的状态方程 $pV = RT$ (R 为常量), 求证:

$$\frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = -1.$$

证 因为

$$p = \frac{RT}{V}, \quad \frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{RT}{V^2};$$

$$V = \frac{RT}{p}, \quad \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{R}{p};$$

$$T = \frac{pV}{R}, \quad \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{V}{R},$$

所以

$$\frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{RT}{V^2} \cdot \frac{R}{p} \cdot \frac{V}{R} = -\frac{RT}{pV} = -1.$$

我们知道, 对一元函数来说, $\frac{dy}{dx}$ 可看作函数的微分 dy 与自变

量的微分 dx 之商. 而上式表明, 偏导数的记号 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 是一个整体记

号, 其中的横线没有相除的意义.

二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的偏导数有下述几何意义:

设 $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 为曲面 $z = f(x, y)$ 上的一点, 过 M_0 作平面 $y = y_0$ 截此曲面得一曲线, 此曲线在平面 $y = y_0$ 上的方程为 $z = f(x, y_0)$, 而偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$ 即为一元函数 $f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 处的导数:

$$\left. \frac{d}{dx} f(x, y_0) \right|_{x=x_0},$$

由一元函数导数的几何意义可知, 这个导数表示了该曲线在点 M_0 处的切线 M_0T_x 对 x 轴的斜率(图 8-6). 同样, 偏导数 $f'_y(x_0, y_0)$ 的几何意义是: 曲面 $z = f(x, y)$ 被平面 $x = x_0$ 所截得的曲线在点 M_0 处的切线 M_0T_y 对 y 轴的斜率.

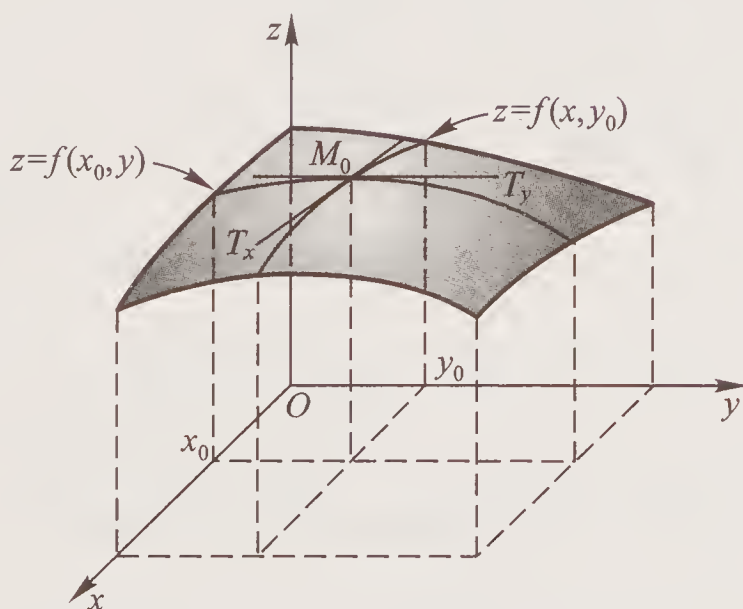


图 8-6

我们知道, 如果一元函数在某点具有导数, 则它在该点必定连续. 但对于多元函数来说, 即使它在某点的各个偏导数都存在, 也不能保证它在该点连续. 例如, 函数

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{当 } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{当 } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在点 $(0, 0)$ 处对 x 的偏导数为

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x,0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0,$$

同样有

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0,0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

但是我们在第一节中已经知道,这函数当 $(x,y) \rightarrow (0,0)$ 时的极限不存在,因此这函数在点 $(0,0)$ 处不连续.

思考题 1 求下列函数的偏导数:

$$(1) z = x^3 y - y^3 x; \quad (2) z = (1 + xy)^y.$$

思考题 2 一圆锥的底面半径为 r , 高为 h , 体积为 V . 求:

- (1) 当 h 保持不变时, V 关于 r 的变化率;
- (2) 当 r 保持不变时, V 对于 h 的变化率.

二、高阶偏导数

设函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内具有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y).$$

这两个偏导数在 D 内都是 x, y 的函数. 如果这两个函数的偏导数也存在, 则称这两个函数的偏导数为原来函数 $z = f(x, y)$ 的二阶偏导数. 依照对变量求导的次序不同而有下列四个二阶偏导数.

(1) $f(x, y)$ 对 x 的二阶偏导数, 记作 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, f_{xx}(x, y)$ 或 z_{xx} , 由下

式定义

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} (\text{或 } f_{xx}(x, y), z_{xx}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \textcircled{1}.$$

① 记号 $\frac{\partial}{\partial x}$ 可看作是一个求偏导的运算记号, 即对它后面的函数求关于 x 的偏导

数. 记号 $\frac{\partial}{\partial y}$ 也与此类似.

类似地,其他三个二阶偏导数的记号和定义分别为:

(2) $f(x, y)$ 对 x, y 的二阶混合偏导数:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} (\text{或 } f_{xy}(x, y), z_{xy}) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right).$$

(3) $f(x, y)$ 对 y, x 的二阶混合偏导数:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} (\text{或 } f_{yx}(x, y), z_{yx}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

(4) $f(x, y)$ 对 y 的二阶偏导数:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} (\text{或 } f_{yy}(x, y), z_{yy}) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

如果二阶偏导数也具有偏导数,则所得偏导数称为原来函数的三阶偏导数,如此等等.一般地, $z = f(x, y)$ 的 $n - 1$ 阶偏导数的偏导数称为 $z = f(x, y)$ 的 n 阶偏导数.二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数.

例 6 设 $z = x^3 y^2 - 3xy^3 - xy + 1$, 求

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad \text{及} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}.$$

$$\text{解} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^2 - 3y^3 - y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y - 9xy^2 - x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6x^2 y - 9y^2 - 1,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2 y - 9y^2 - 1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3 - 18xy;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 6y^2.$$

我们看到例 6 中两个二阶混合偏导数相等,即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

这不是偶然的.事实上有下述定理.

定理 如果函数 $z = f(x, y)$ 的两个二阶混合偏导数

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \text{及} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

在区域 D 内连续, 那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等.

换句话说, 二阶混合偏导数在连续条件下与求偏导的次序无关. 这个定理的证明从略.

例 6 中两个二阶混合偏导数均为多项式函数, 它们在整个 xOy 面上都是连续的, 因此它们必定相等.

上述定理还可推广到更高阶的混合偏导数的情形. 对此有下列结论: 如果函数 $z = f(x, y)$ 的直到某阶为止的一切偏导数在区域 D 内都存在且连续, 那么所出现的同阶混合偏导数均与求偏导次序无关. 例如, 在连续条件下,

$$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}.$$

上式表示, 只要对 x 求偏导两次, 对 y 求偏导一次, 不论求偏导次序如何, 结果是一样的.

对于二元以上的函数, 也可以类似地定义高阶偏导数, 而且高阶混合偏导数在偏导数连续的条件也与求偏导的次序无关.

例 7 验证: 函数 $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

证 因为 $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$, 所以

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{x}{x^2 + y^2}, & \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{y}{x^2 + y^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{(x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{(x^2 + y^2) - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

因此

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

例 8 设 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 证明: 函数 $u = \frac{1}{r}$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

证 $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3},$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x}{r^4} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}.$$

由函数关于自变量的对称性^①, 只需在上式中将 x 换成 y , x 换成 z 就可分别得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}.$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} \\ &= -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0. \end{aligned}$$

例 7 和例 8 中的两个方程都叫做拉普拉斯 (Laplace) 方程, 它在研究热传导、流体运动等问题中有着重要的应用.

思考题 3 设 $f(x, y) = g(x) + h(y)$, 其中 $g(x)$ 和 $h(y)$ 均二阶可导, 求 f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} .

习题 8-2

1. 求下列函数的偏导数:

^① 若当函数表达式中任何两个自变量对调时, 函数表达式保持不变, 则称函数关于自变量具有对称性.

$$(1) s = \frac{u^2 + v^2}{uv};$$

$$(2) z = \sqrt{\ln(xy)};$$

$$(3) z = \sin(xy) + \cos^2(xy);$$

$$(4) z = \ln \tan \frac{x}{y};$$

$$(5) u = x^{\frac{y}{z}};$$

$$(6) u = \arctan(x - y)^z.$$

$$2. \text{ 设 } T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \text{ 求证: } l \frac{\partial T}{\partial l} + g \frac{\partial T}{\partial g} = 0.$$

$$3. \text{ 设 } z = e^{-\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)}, \text{ 求证: } x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 2z.$$

$$4. \text{ 设 } f(x, y) = x + (y - 1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}}, \text{ 求 } f_x(x, 1).$$

$$5. \text{ 曲线 } \begin{cases} z = \frac{x^2 + y^2}{4} \\ y = 4 \end{cases}, \text{ 在点 } (2, 4, 5) \text{ 处的切线与正向 } x \text{ 轴所成的倾角是}$$

多少?

6. 一质点沿着上半球面 $z = \sqrt{29 - x^2 - y^2}$ 与平面 $y = 3$ 的交线运动. 问在点 $(4, 3, 2)$ 处, z 关于 x 的变化率是多少?

$$7. \text{ 求下列函数的 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \text{ 和 } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}:$$

$$(1) z = x^4 + y^4 - 4x^2y^2;$$

$$(2) z = \arctan \frac{y}{x};$$

$$(3) z = y^x.$$

8. 设 $f(x, y, z) = xy^2 + yz^2 + zx^2$, 求 $f_{xx}(0, 0, 1)$, $f_{xz}(1, 0, 2)$, $f_{yz}(0, -1, 0)$ 及 $f_{zzx}(2, 0, 1)$.

$$9. \text{ 设 } z = x \ln(xy), \text{ 求 } \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \text{ 及 } \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}.$$

10. 验证:

$$(1) y = e^{-kn^2t} \sin nx \text{ 满足 } \frac{\partial y}{\partial t} = k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2};$$

$$(2) r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ 满足 } \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r}.$$

第三节 全微分

对于一元函数 $y = f(x)$, 在第二章第七节中曾讨论过用自变

量增量的线性函数 $A\Delta x$ 近似代替函数增量 Δy 的问题. 现在对于二元函数来讨论类似的问题.

设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内有定义, 点 $P(x_0, y_0) \in D$. 当自变量 x 取得增量 Δx , 自变量 y 取得增量 Δy 时, 得到点 $P'(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, 假设点 P' 也属于 D . 函数在点 P 及点 P' 处的函数值之差 $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ 称为函数在点 P 对应于自变量增量 $\Delta x, \Delta y$ 的全增量, 记作 Δz , 即

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0). \quad (1)$$

例如, 设一圆柱体的底半径为 r , 高为 h , 当底半径和高各自获得增量 Δr 和 Δh 时, 为了了解圆柱体体积 V 的改变量, 就要计算如下的全增量:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \pi(r + \Delta r)^2(h + \Delta h) - \pi r^2 h \\ &= 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h + 2\pi r \Delta r \Delta h + \pi h (\Delta r)^2 + \pi (\Delta r)^2 \Delta h. \end{aligned}$$

一般说来, 多元函数全增量的计算是比较复杂的. 但是从上面这个例子可以看到, 当 $|\Delta r|$ 与 $|\Delta h|$ 很小时, 圆柱体体积的全增量 ΔV 可以用 $2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h$ 来近似表示, 它是自变量增量 Δr 与 Δh 的线性函数(这里 r, h 视为常数), 而由此产生的误差的每一项均是 Δr 和 Δh 的二次或三次函数, 故当 Δr 和 Δh 趋于零时, 误差趋于零的速度要比 $2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h$ 趋于零的速度快得多. 也就是说, 这种近似的精确度是比较高的. 多元函数的全增量在局部范围存在线性近似表达式, 这条性质引出了多元函数的可微性概念.

定义 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 的全增量

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

可表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \quad (2)$$

其中 A, B 不依赖于 $\Delta x, \Delta y$ 而仅与 x_0, y_0 有关,

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 是可微的, 而 $A\Delta x + B\Delta y$ 称为函

数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的全微分, 记作 dz , 即

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

由(2)式可知, 如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微, 则当 $\rho \rightarrow 0$ 时(当然同时有 $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$), 就有 $\Delta z \rightarrow 0$, 于是由(1)式得

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} [f(x_0, y_0) + \Delta z] = f(x_0, y_0),$$

从而函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续. 因此, 如果函数在点 (x_0, y_0) 处不连续, 则函数在该点一定不可微.

下面我们证明: 如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微, 那么函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的偏导数 $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$ 必存在, 并且

$$A = f_x(x_0, y_0), \quad B = f_y(x_0, y_0),$$

从而函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的全微分为

$$dz = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y. \quad (3)$$

事实上, 若函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微, 那么(2)式对任意的 Δx 和 Δy 都成立, 于是对 $\Delta y = 0$ 也应成立, 这时 $\rho = |\Delta x|$, 所以(2)式成为

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = A \cdot \Delta x + o(|\Delta x|).$$

上式两边除以 Δx , 再令 $\Delta x \rightarrow 0$ 取极限, 就得

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = A.$$

这就证明了偏导数 $f_x(x_0, y_0)$ 存在, 且等于 A . 同样可证 $B = f_y(x_0, y_0)$.

从以上讨论可得如下的重要结论:

如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微, 则它必在该点连续并存在偏导数 $f_x(x_0, y_0)$ 和 $f_y(x_0, y_0)$.

我们知道, 一元函数在某点的导数存在是微分存在的充要条件. 但对于二元函数来说, 情形就不同了. 当二元函数的两个偏导数都存在时, 虽然能形式地写出

$$f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y,$$

但它与 Δz 之差并不一定是 ρ 的高阶无穷小, 因此它不一定是函数的全微分. 换句话说, 偏导数存在只是全微分存在的必要条件而不是充分条件. 例如, 在第二节中已看到, 函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{当 } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{当 } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在点 $(0, 0)$ 的两个偏导数都存在: $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$, 但这函数在点 $(0, 0)$ 处不连续, 因此在该点是不可微的, 也就是说, $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处不存在全微分.

但是, 如果再假定函数的各个偏导数连续, 则可保证全微分存在, 即有下面的定理.

定理 如果函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续, 则函数在该点的全微分存在.

这个定理的证明从略.

习惯上, 我们将自变量的增量 $\Delta x, \Delta y$ 分别记作 dx, dy , 并分别称为自变量 x, y 的微分. 这样, 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的全微分就可写为

$$dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy. \quad (4)$$

如果函数在一个区域 D 内各点处都可微, 就称这函数在 D 内可微, 其在任意点 (x, y) 的全微分为

$$dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy, \quad (5)$$

或

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

以上关于二元函数全微分的定义、全微分存在的必要条件和充分条件以及全微分存在时的表达式等, 可以完全类似地推广到三元和三元以上的多元函数. 例如, 如果函数

$$w = f(x, y, z)$$

的全微分存在, 那么必定有

$$dw = f_x(x, y, z) dx + f_y(x, y, z) dy + f_z(x, y, z) dz,$$

或

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz.$$

例 1 求函数 $z = x^2 y + y^2$ 的全微分.

解 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$, 所以

$$dz = 2xy dx + (x^2 + 2y) dy.$$

例 2 计算函数 $z = e^{xy}$ 在点 $(2, 1)$ 处的全微分.

解 因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= ye^{xy}, & \frac{\partial z}{\partial y} &= xe^{xy}, \\ \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(2,1)} &= e^2, & \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(2,1)} &= 2e^2, \end{aligned}$$

所以

$$dz \Big|_{(2,1)} = e^2 dx + 2e^2 dy.$$

例 3 求函数 $w = x + \sin \frac{y}{2} + e^{yz}$ 的全微分.

解 因为

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{2} \cos \frac{y}{2} + ze^{yz}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = ye^{yz},$$

所以

$$dw = dx + \left(\frac{1}{2} \cos \frac{y}{2} + ze^{yz} \right) dy + ye^{yz} dz.$$

由二元函数的全微分的定义以及全微分存在的充分条件可知, 当二元函数 $z = f(x, y)$ 的两个偏导数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续, 并且 $|\Delta x|$, $|\Delta y|$ 都较小时, 就有近似等式

$$\Delta z \approx dz = f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y. \quad (6)$$

上式也可写成

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y.$$

若令 $x = x_0 + \Delta x, y = y_0 + \Delta y$, 则上式又可写作

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (7)$$

与一元函数的情形相类似, 我们可以利用(6)式或(7)式对二元函数作近似计算.

在本节开头的引例中, 我们得出了当 r, h 各自获得增量 $\Delta r, \Delta h$ 时, 圆柱体体积 $V = \pi r^2 h$ 的增量 ΔV 的近似表达式

$$\Delta V \approx 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h,$$

可以看到, 上式右端即为

$$\frac{\partial V}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial V}{\partial h} \Delta h = dV,$$

因此这个近似等式就是(6)式所表示的结果.

例 4 计算 $1.04^{2.02}$ 的近似值.

解 设函数 $f(x, y) = x^y$. 显然, 要计算的值就是该函数在

$$x = 1.04, y = 2.02$$

时的函数值 $f(1.04, 2.02)$.

取 $x_0 = 1, y_0 = 2$, 则 $x - x_0 = 0.04, y - y_0 = 0.02$. 由于

$$f(1, 2) = 1,$$

$$f_x(x, y) = yx^{y-1}, \quad f_y(x, y) = x^y \ln x,$$

$$f_x(1, 2) = 2, \quad f_y(1, 2) = 0,$$

所以, 应用公式(7)便有

$$1.04^{2.02} \approx 1 + 2 \times 0.04 + 0 \times 0.12 = 1.08.$$

例 5 设电阻 R 由两个电阻 R_1, R_2 并联而成, $R_1 > R_2$. 问哪个电阻的变化对并联电阻 R 的影响较大?

解 由电学知, $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, 即

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

由于

$$\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R_2(R_1 + R_2) - R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2},$$

$$\frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R_1(R_1 + R_2) - R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2}.$$

因此有

$$\Delta R \approx dR = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} \Delta R_1 + \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2} \Delta R_2,$$

因为 $R_1 > R_2$, 所以 ΔR_2 前面的系数比 ΔR_1 前面的系数大. 这说明如果 R_1, R_2 有同样大小的改变量 $\Delta R_1 = \Delta R_2$, 那么 ΔR_2 对 ΔR 的影响要大于 ΔR_1 对 ΔR 的影响, 即较小电阻的变化对并联电阻 R 的影响较大. 或者说, 并联电阻 R 对较小电阻的改变更为敏感.

思考题 1 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微的必要条件是什么? 充分条件是什么?

思考题 2 计算 $z = x^\alpha y^\beta$ 在点 $(1, 1)$ 处的全微分, 并由此证明: 在 $(1, 1)$ 的邻近, $x^\alpha y^\beta \approx 1 + \alpha(x - 1) + \beta(y - 1)$.

习题 8-3

1. 求下列函数的全微分:

$$(1) z = xy + \frac{x}{y}; \quad (2) z = e^{\frac{y}{x}};$$

$$(3) z = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad (4) w = x^{yz}.$$

2. 求函数 $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$ 当 $x = 1, y = 2$ 时的全微分.

3. 求函数 $z = \frac{y}{x}$ 当 $x = 2, y = 1, \Delta x = 0.1, \Delta y = -0.2$ 时的全增量和全微分.

4. 求函数 $z = e^{xy}$ 当 $x = 1, y = 1, \Delta x = 0.15, \Delta y = 0.1$ 时的全微分.

5. 计算 $\sqrt{1.02^3 + 1.97^3}$ 的近似值.

6. 计算 $1.97^{1.05}$ 的近似值. ($\ln 2 \approx 0.693$.)

第四节 多元复合函数的求导法则

我们在上册中已经学习了一元复合函数求导的链式法则: 如果函数 $x = g(t)$ 在点 t 可导, 函数 $y = f(x)$ 在对应点 x 可导, 则复合函数 $y = f(g(t))$ 在点 t 可导, 且有

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

现在将这一重要法则推广到多元复合函数.

多元复合函数的求导法则在不同的函数复合情况下, 表达形式有所不同, 下面归纳成两种典型情形加以讨论.

情形 1——复合函数的中间变量均为同一自变量的一元函数的情形

如果函数 $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ 都在点 x 可导, 函数 $z = f(u, v)$ 在对应点 (u, v) 具有连续偏导数, 则复合而成的一元函数 $z = f[\varphi(x), \psi(x)]$ 在点 x 可导, 且有

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx}. \quad (1)$$

事实上, 设 x 取得增量 Δx , 则 u 和 v 相应取得增量 Δu 和 Δv , 由于 $z = f(u, v)$ 可微, 故知 z 的全增量

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial z}{\partial v} \Delta v + o(\rho),$$

其中 $\rho = \sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}$.

将上式两端同除以 Δx , 得

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{o(\rho)}{\Delta x},$$

并令 $\Delta x \rightarrow 0$, 则有

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} \rightarrow \frac{du}{dx}, \quad \frac{\Delta v}{\Delta x} \rightarrow \frac{dv}{dx},$$

并可证明

$$\frac{o(\rho)}{\Delta x} \rightarrow 0,$$

从而得

$$\frac{dz}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx}.$$

复合而成的一元函数 $z = f[\varphi(x), \psi(x)]$ 的导数 $\frac{dz}{dx}$ 叫做全导数, (1) 式也称为全导数公式.

用同样的证明方法, 可把 (1) 式推广到复合函数的中间变量多于两个的情形. 例如, 设

$$z = f(u, v, w), \quad u = \varphi(x), \quad v = \psi(x), \quad w = \omega(x)$$

复合而得一元函数

$$z = f[\varphi(x), \psi(x), \omega(x)],$$

则在类似的条件下, 有以下的全导数公式:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{dw}{dx}. \quad (2)$$

例 1 设 $z = u^2 v + 3uv^4$, $u = e^x$, $v = \sin x$, 求全导数 $\frac{dz}{dx}$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \frac{dz}{dx} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx} \\ &= (2uv + 3v^4) e^x + (u^2 + 12uv^3) \cos x \\ &= (2e^x \sin x + 3\sin^4 x) e^x + (e^{2x} + 12e^x \sin^3 x) \cos x. \end{aligned}$$

这里最终将 $\frac{dz}{dx}$ 表示成了 x 的函数, 但对于某些目的来说, 这一步并非总是需要的. 例如, 为了计算 $\frac{dz}{dx}$ 在 $x = 0$ 处的值, 只需注意到 $x = 0$ 时, $u = 1$, $v = 0$, 则由倒数第二步即可得

$$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=0} = 0 \cdot e^0 + 1 \cdot \cos 0 = 1.$$

例 2 设 $z = u^v$ ($u > 0, u \neq 1$), 而 $u = u(x)$ 及 $v = v(x)$ 均可导,

根据复合函数求导法则,复合函数 $z = u(x)^{v(x)}$ 可导,其导数为

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx} \\ &= vu^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx} = u^v \left(\frac{v}{u} \frac{du}{dx} + \ln u \frac{dv}{dx} \right).\end{aligned}$$

以上结果在上册中曾用对数求导法获得.

情形 2——复合函数的中间变量均为同样几个自变量的多元函数的情形

如果函数 $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ 都在点 (x, y) 具有对 x 及对 y 的偏导数,函数 $z = f(u, v)$ 在对应点 (u, v) 具有连续偏导数,则复合函数 $z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$ 在点 (x, y) 的两个偏导数存在,且有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (4)$$

事实上,这里求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 时, y 看作常量,因此这时中间变量 u 及 v 可看作为 x 的一元函数而应用(1)式. 但由于

$$z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$$

以及

$$u = \varphi(x, y) \quad \text{和} \quad v = \psi(x, y)$$

都是 x, y 的二元函数,所以应把(1)式中的记号 d 改成记号 ∂ , 这样便由(1)式得(3)式. 同理,由(1)式可得(4)式.

类似地,设 $z = f(u, v, w)$ 具有连续偏导数,而

$$u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y), \quad w = \omega(x, y)$$

都具有偏导数,则复合函数

$$z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y), \omega(x, y)]$$

有对自变量 x, y 的偏导数,且

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (6)$$

例 3 设 $z = e^u \sin v$, 而 $u = xy, v = x + y$, 求

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{和} \quad \frac{\partial z}{\partial y}.$$

解 由公式(3)及(4)得

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= e^u \sin v \cdot y + e^u \cos v \cdot 1 \\ &= e^{xy} [y \sin(x+y) + \cos(x+y)], \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= e^u \sin v \cdot x + e^u \cos v \cdot 1 \\ &= e^{xy} [x \sin(x+y) + \cos(x+y)]. \end{aligned}$$

例 4 设 $z = f(x^2 - y^2, y^2 - x^2)$, f 具有连续偏导数, 证明:

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

证 题中给出的 $f(x^2 - y^2, y^2 - x^2)$ 是复合函数的一种记法, 其中间变量没有明显写出. 为了便于应用求导公式, 先令

$$u = x^2 - y^2, \quad v = y^2 - x^2,$$

于是复合函数 $z = f(x^2 - y^2, y^2 - x^2)$ 由 $z = f(u, v)$, $u = x^2 - y^2$, $v = y^2 - x^2$ 复合而成. 按公式(3)和(4), 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 2x \frac{\partial z}{\partial u} - 2x \frac{\partial z}{\partial v} = 2x \left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \right), \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = -2y \frac{\partial z}{\partial u} + 2y \frac{\partial z}{\partial v} = 2y \left(\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \right). \end{aligned}$$

所以

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy \left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \right) + 2xy \left(\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \right) = 0.$$

在复合函数求导时,有时会遇到复合函数的某些中间变量是多元函数,而另一些中间变量是一元函数的情形.这时只要把一元函数也看作是多元函数,只是某些自变量没有出现而已.这样,公式(3)和(4)依然适用,如下例所示.

例 5 设 $z = \arcsin xy, x = se^t, y = t^2$, 求 $\frac{\partial z}{\partial s}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial t}$.

解 注意到中间变量 y 只是 t 的函数,所以 $\frac{\partial y}{\partial s} = 0, \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{dy}{dt}$, 于是由公式(3)和(4)可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}} e^t = \frac{t^2 e^t}{\sqrt{1-s^2 t^4 e^{2t}}}, \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}} \cdot se^t + \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}} \cdot 2t = \frac{(t+2)ste^t}{\sqrt{1-s^2 t^4 e^{2t}}}.\end{aligned}$$

例 6 设 $z = e^{x^2+y^2+w^2}, w = x^2 \sin y$. 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 可用公式(5)和(6)求解. 在本例中,变量 x 和 y 既是复合函数的自变量,又是中间变量,为避免使用公式时出现记号的混淆,先引入记号 $f(x, y, w)$, 令

$$z = f(x, y, w) = e^{x^2+y^2+w^2},$$

于是由公式(5)得(注意这时公式(5)中的 $u = x, v = y$):

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2+w^2} + 2we^{x^2+y^2+w^2} \cdot 2x \sin y \\ &= 2x(1 + 2x^2 \sin^2 y) e^{x^2+y^2+x^4 \sin^2 y},\end{aligned}$$

在上式中,要注意等式两端的 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 是不同的. 左端的 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 是在复合后的函数 $z = f(x, y, x^2 \sin y)$ 中把 y 看作常数而对 x 的偏导数,右端的 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 是在未经复合的函数 $z = f(x, y, w)$ 中,把 y 和 w 看作常数

而对 x 的偏导数.

再由公式(6)可求得

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2+w^2} + 2we^{x^2+y^2+w^2} \cdot x^2 \cos y \\ &= 2(y + x^4 \sin y \cos y) e^{x^2+y^2+x^4 \sin^2 y},\end{aligned}$$

式中的 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 也有类似的区别.

最后再看一个求多元复合函数的高阶偏导数的例.

例 7 设 $w = f(x + y + z, xyz)$, f 具有二阶连续偏导数, 求

$$\frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{和} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}.$$

解 令 $u = x + y + z, v = xyz$, 则 $w = f(u, v)$. 为表达简便起见, 引入以下记号

$$f'_1(u, v) = f_u(u, v), \quad f''_{12}(u, v) = f_{uv}(u, v),$$

这里下标 1 表示对第一个变量 u 求偏导数, 下标 2 表示对第二个变量 v 求偏导数, 同理有 f'_2, f''_{11}, f''_{22} , 等等.

因所给函数由 $w = f(u, v)$ 及 $u = x + y + z, v = xyz$ 复合而成, 根据复合函数求导法则, 有

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= f'_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f'_2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = f'_1 + yzf'_2, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(f'_1 + yzf'_2) = \frac{\partial f'_1}{\partial z} + yf'_2 + yz \frac{\partial f'_2}{\partial z}.\end{aligned}$$

求 $\frac{\partial f'_1}{\partial z}$ 及 $\frac{\partial f'_2}{\partial z}$ 时, 应注意 f'_1 及 f'_2 是与 f 有同样结构的复合函数, 因此根据复合

函数求导法则, 有

$$\begin{aligned}\frac{\partial f'_1}{\partial z} &= f''_{11} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + f''_{12} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = f''_{11} + xyf''_{12}, \\ \frac{\partial f'_2}{\partial z} &= f''_{21} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + f''_{22} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = f''_{21} + xyf''_{22}.\end{aligned}$$

于是

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = f''_{11} + xyf''_{12} + yf'_2 + yzf''_{21} + xy^2zf''_{22}$$

$$=f_{11}''+y(x+z)f_{12}''+xy^2zf_{22}''+yf_2'.$$

最后一步利用了 $f_{12}''=f_{21}''$, 这是因为 f 具有二阶连续偏导数, 所以这两个混合偏导数相等.

思考题 1 在求 $y=x^{\sin x} (x>0)$ 的导数时, 有同学用幂函数求导公式得 $y'=\sin x \cdot x^{\sin x-1}$; 有同学用指数函数求导公式得 $y'=x^{\sin x} \cdot \ln x \cdot \cos x$. 这两个结果都不对, 但它们的和却给出正确结果: $y'=\sin x \cdot x^{\sin x-1}+x^{\sin x} \cdot \ln x \cdot \cos x$. 试用全导数公式解释这个结果. 又, 此结果适用于一般幂指函数 $u(x)^{v(x)} (u(x)>0)$ 的求导吗?

思考题 2 设 $z=f(u, v), u=xy, v=x+y$, 且 $f_u(2, 3)=2, f_v(2, 3)=1$. 求 $(x, y)=(1, 2)$ 处的 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

习题 8-4

1. 设 $z=e^{u-2v}$, 而 $u=\sin x, v=x^3$, 求 $\frac{dz}{dx}$.

2. 设 $z=\arcsin(x-y)$, 而 $x=3t, y=4t^3$, 求 $\frac{dz}{dt}$.

3. 设 $z=u^2v-uv^2$, 而 $u=x\cos y, v=x\sin y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

4. 设 $z=u^2\ln v$, 而 $u=\frac{x}{y}, v=3x-2y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

5. 设 $u=x^4y+y^2z^3, x=rse^t, y=rs^2e^{-t}, z=r^2s\sin t$, 求 $\frac{\partial u}{\partial s}$ 在点 $(r, s, t)=(2, 1, 0)$ 处的值.

6. 设 $z=\arctan(xy)$, 而 $y=e^x$, 求 $\frac{dz}{dx}$.

7. 设函数 $z=\arctan\frac{x}{y}$, 而 $x=u+v, y=u-v$, 验证:

$$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u-v}{u^2+v^2}.$$

8. 求下列函数的一阶偏导数(其中 f 具有一阶连续偏导数):

$$(1) w=f(x^2-y^2, e^{xy});$$

$$(2) w=f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right);$$

$$(3) \quad w = f(x, xy, xyz).$$

9. 设 $z = xy + xF(u)$, 而 $u = \frac{y}{x}$, $F(u)$ 为可导函数, 证明:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + xy.$$

10. 设 $z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$, 其中 $f(u)$ 为可导函数, 验证:

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

11. 求下列函数的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ (其中 f 具有二阶连续偏导数):

$$(1) \quad z = f\left(x, \frac{x}{y}\right);$$

$$(2) \quad z = f(xy^2, x^2y).$$

12. 设 $u = f(x, y)$ 具有一阶连续偏导数, 而 $x = \frac{s - \sqrt{3}t}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}s + t}{2}$, 证明:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2.$$

13. 设有一圆柱体, 它的底半径以 0.1 cm/s 的速率在增大, 而高度以 0.2 cm/s 的速率在减少. 试求当底半径为 100 cm , 高为 120 cm 时,

(1) 圆柱体体积的变化率; (2) 圆柱体表面积的变化率.

第五节 隐函数的求导公式

在第二章第五节中我们已经提出了隐函数的概念, 并且指出了不经过显化直接由方程

$$F(x, y) = 0 \quad (1)$$

求出它所确定的隐函数的导数的方法. 但那时所讲的隐函数的微分法, 是在方程(1)能确定一个一元函数 $y = f(x)$, 且这函数可导的前提下进行的. 然而形如(1)式的方程并不一定都能够确定一元函数 $y = f(x)$, 例如, 方程

$$x^2 + y^2 + 1 = 0,$$

由于 x, y 无论取什么实数都不满足这方程, 从而这方程不能确定

任何实函数 $y=f(x)$. 这说明在施行隐函数求导法前, 必须明确两个问题: 一是在什么条件下, 方程(1)可以确定隐函数 $y=f(x)$; 二是如果能够确定隐函数的话, 这函数是否可导. 显然, 这两个问题的答案均与(1)式左端的二元函数 $F(x, y)$ 有关. 下面叙述一个定理, 这定理告诉我们, 当 $F(x, y)$ 满足什么条件时, 就保证(1)式能确定一个函数 $y=f(x)$, 并且这函数可导, 此外还给出求这函数的导数的公式.

隐函数存在定理 1 设函数 $F(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 的某一邻域内具有连续的偏导数, 且

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

则方程 $F(x, y) = 0$ 在 (x_0, y_0) 的某一邻域内能唯一确定一个可导且具有连续导数的函数 $y=f(x)$, 它满足条件 $y_0=f(x_0)$, 且有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}. \quad (2)$$

公式(2)就是隐函数的求导公式.

这个定理的证明略去. 现仅就公式(2)在定理结论的其余部分已经证得的前提下作如下推导:

将方程(1)所确定的函数 $y=f(x)$ 代入(1), 得恒等式

$$F[x, f(x)] \equiv 0.$$

上式左端可以看作是 x 的一个复合函数, 现在求这个函数的全导数. 由于恒等式两端求导后仍然恒等, 即得

$$F_x + F_y \frac{dy}{dx} = 0.$$

由于 F_y 连续, 且 $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, 所以存在点 (x_0, y_0) 的一个邻域, 在这个邻域内 $F_y \neq 0$, 于是得

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

(2)式右端一般同时含 x 和 y , 其中 y 是由方程(1)所确定的隐函数 $y=f(x)$.

例 1 求由方程 $x^2 + y^2 - 1 = 0$ 所确定的隐函数 $y = f(x)$ 的一阶与二阶导数.

解 这里 $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1, F_x = 2x, F_y = 2y$. 由公式(2)得

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

注意上式中的 y 是 x 的函数, 再次求导得

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} \\ &= -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3}.\end{aligned}$$

与定理 1 一样, 我们同样可以从三元函数 $F(x, y, z)$ 的性质, 来断定由方程

$$F(x, y, z) = 0 \quad (3)$$

所确定的二元函数 $z = f(x, y)$ 的存在性以及这个函数的性质. 这就是下面的定理.

隐函数存在定理 2 设函数 $F(x, y, z)$ 在点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的某一邻域内具有连续的偏导数, 且

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

则方程 $F(x, y, z) = 0$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 的某一邻域内能唯一确定一个具有连续偏导数的函数 $z = f(x, y)$, 它满足条件 $z_0 = f(x_0, y_0)$, 且有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}. \quad (4)$$

与定理 1 的情况类似, 我们仅对公式(4)作如下推导. 因为

$$F[x, y, f(x, y)] \equiv 0,$$

且上列恒等式左端的函数满足复合函数求导法则的条件, 故对上式两端分别对 x 和 y 求偏导数, 得

$$F_x + F_z \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad F_y + F_z \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

由于 F_z 连续, 且 $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, 所以存在点 (x_0, y_0, z_0) 的一个邻域, 在这个邻域内 $F_z \neq 0$, 于是得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

例 2 设 $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 这里 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4z$, 则 $F_x = 2x$, $F_z = 2z - 4$. 应用公式(4), 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{2-z}.$$

为求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, 在上式两端再一次对 x 求偏导数, 注意 z 是 x, y 的函数, 得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(2-z) + x \frac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)^2} = \frac{(2-z) + x \cdot \frac{x}{2-z}}{(2-z)^2} = \frac{(2-z)^2 + x^2}{(2-z)^3}.$$

例 3 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与平面 $x = \frac{2}{3}$ 的交线 L 在点 $A\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 和 $B\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ 处的切线对 y 轴的斜率.

解 由偏导数的几何意义, 本题即求由方程 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所确定的隐函数 $z = z(x, y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 在 A, B 两点处的值.

令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, 则由公式(4)得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}.$$

所以 L 在 A 点的切线对 y 轴的斜率为 $-\frac{y}{z} \Big|_{(y,z)=(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})} = -\frac{1}{2}$, 而 L 在 B 点的切线对 y 轴的斜率为 $-\frac{y}{z} \Big|_{(y,z)=(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})} = \frac{1}{2}$.

思考题 1 设 $x^2y^3 + \cos y = 0$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

思考题 2 设 $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$ 和 $z = z(x, y)$ 都是由方程 $F(x, y, z) = 0$ 所确定的隐函数, 则 $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} =$ _____.

习题 8-5

1. 设 $\sin y + e^x - xy^2 = 0$, 求 $\frac{dy}{dx}$.
2. 设 $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.
3. 设 $x + 2y + z - 2\sqrt{xyz} = 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.
4. 设 $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.
5. 设 $2\sin(x + 2y - 3z) = x + 2y - 3z$, 证明: $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.
6. 设 $e^z - xyz = 0$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
7. 设 $z^3 - 3xyz = a^3$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

第六节 多元函数微分法的几何应用举例

一、空间曲线的切线与法平面

设空间曲线 Γ 的参数方程为

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \omega(t), \quad (1)$$

这里假定(1)式中的三个函数都可导, 且导数不同时为零.

考虑曲线 Γ 上对应于 $t = t_0$ 的一点 $M(x_0, y_0, z_0)$. 为了求得该点处的切线方程, 先在 Γ 上取对应于

$$t = t_0 + \Delta t$$

的邻近一点

$$M'(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z).$$

曲线的割线 MM' 的方程是

$$\frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{\Delta y} = \frac{z - z_0}{\Delta z}.$$

当 M' 沿着 Γ 趋于 M 时, 割线 MM' 趋于一极限位置, 此极限位置上的直线 MT 就是曲线 Γ 在点 M 的切线 (图 8-7). 用 Δt 除上式各分母, 得

$$\frac{\frac{x - x_0}{\Delta x}}{\frac{\Delta t}{\Delta t}} = \frac{\frac{y - y_0}{\Delta y}}{\frac{\Delta t}{\Delta t}} = \frac{\frac{z - z_0}{\Delta z}}{\frac{\Delta t}{\Delta t}}.$$

令 $M' \rightarrow M$ (这时 $\Delta t \rightarrow 0$), 通过对上式取极限, 即得曲线 Γ 在点 M 的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z - z_0}{\omega'(t_0)}. \quad (2)$$

从(2)式可以看到, 由参数方程(1)给定的空间曲线 Γ 在对应于 $t = t_0$ 的点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 处的切线的方向向量(记作 τ)是

$$\tau = (\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0)).$$

通过切点而与切线垂直的平面称为曲线在该点的法平面. 由平面的点法式方程即可得曲线 Γ 在点 M 的法平面方程为

$$\varphi'(t_0)(x - x_0) + \psi'(t_0)(y - y_0) + \omega'(t_0)(z - z_0) = 0. \quad (3)$$

例 1 求曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 在点 $(1, 1, 1)$ 的切线方程及法平面方程.

解 因为 $x'_t = 1, y'_t = 2t, z'_t = 3t^2$, 而点 $(1, 1, 1)$ 所对应的参数 $t = 1$, 所以

$$x'_t \big|_{t=1} = 1, \quad y'_t \big|_{t=1} = 2, \quad z'_t \big|_{t=1} = 3.$$

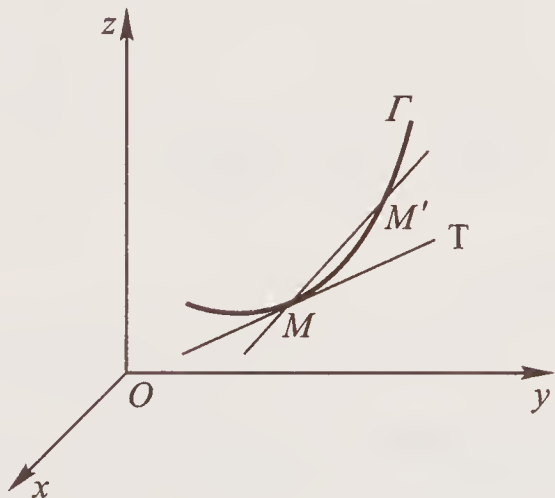


图 8-7

于是,切线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3},$$

法平面方程为

$$(x-1) + 2(y-1) + 3(z-1) = 0,$$

即

$$x + 2y + 3z = 6.$$

例 2 证明:螺旋线 $\Gamma: \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \\ z = bt \end{cases}$ 上各点处的切线与 z 轴夹

成定角.

证 设 Γ 上任一点 M 的坐标为 $(a \cos t_0, a \sin t_0, bt_0)$, 则点 M 处的切线的方向向量为 $\tau = (-a \sin t_0, a \cos t_0, b)$. 于是,切线与 z 轴之间夹角 φ 的余弦为(第七章第五节公式(5)):

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{|\tau \cdot k|}{|\tau| |k|} = \frac{|(a \cos t_0, a \sin t_0, b) \cdot (0, 0, 1)|}{\sqrt{(-a \sin t_0)^2 + (a \cos t_0)^2 + b^2} \cdot 1} \\ &= \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \end{aligned}$$

可见 $\cos \varphi$ 与 t_0 无关,即与点 M 的位置无关,所以 Γ 上各点处的切线与 z 轴夹成定角.

二、曲面的切平面与法线

先讨论由隐式给出的曲面方程

$$F(x, y, z) = 0 \quad (4)$$

的情形,然后把由显式给出的曲面方程 $z = f(x, y)$ 作为隐式方程的特殊情形处理.

设曲面 Σ 由方程(4)给出, $M(x_0, y_0, z_0)$ 是曲面 Σ 上的一点, 并设函数 $F(x, y, z)$ 的偏导数在该点连续且不同时为零. 现在来证明,在曲面 Σ 上通过点 M 且在该点处具有切线的一切曲线,

它们在点 M 的切线都在同一个平面上. 为此, 在曲面 Σ 上过点 M 任意引一条曲线 Γ (图 8-8), 假定曲线 Γ 的参数方程为

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), & y &= \psi(t), \\ z &= \omega(t), \end{aligned} \quad (5)$$

$t = t_0$ 对应于点 $M(x_0, y_0, z_0)$, $\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0)$ 存在且不全为零. 由上一目知道, 这曲线 Γ 在点 M 具有切线, 且

$$\tau = (\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$$

是该切线的方向向量. 因为曲线 Γ 位于曲面 Σ 上, 所以有恒等式

$$F(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \equiv 0.$$

又因为 $F(x, y, z)$ 的偏导数在点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 处连续, 且 $\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0)$ 存在, 所以这恒等式左端的复合函数在 $t = t_0$ 时有全导数, 于是

$$\left. \frac{dF}{dt} \right|_{t=t_0} = 0,$$

即

$$\begin{aligned} F_x(x_0, y_0, z_0)\varphi'(t_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)\psi'(t_0) + \\ F_z(x_0, y_0, z_0)\omega'(t_0) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

如果引入向量

$$\mathbf{n} = (F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)),$$

那么(6)式表示

$$\mathbf{n} \perp \tau.$$

因为曲线(5)是曲面 Σ 上过点 M 的任意一条曲线, 而 $\mathbf{n}$ 为一定向量, 所以这就证明了曲面 Σ 上通过点 M 的一切曲线在点 M

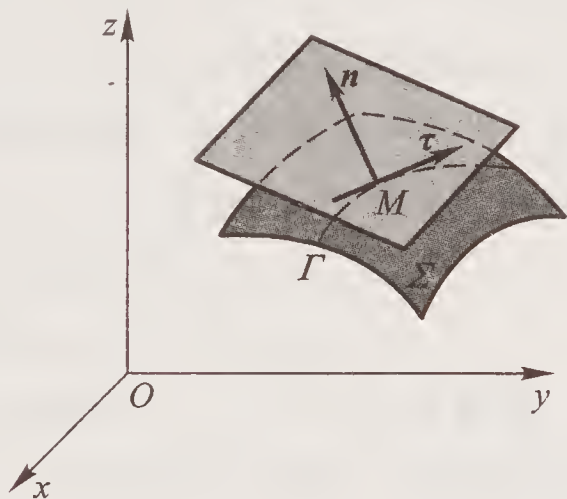


图 8-8

的切线都与同一向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直,也就是说,这些切线都位于过 M 点且以 $\boldsymbol{n}$ 为法向量的同一平面上(图 8-8). 这个平面就称为曲面在点 M 的切平面. $\boldsymbol{n}$ 是这切平面的一个法向量. 由平面的点法式方程即得切平面的方程为

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \quad (7)$$

通过点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 而垂直于切平面(7)的直线叫做曲面在该点的法线. $\boldsymbol{n}$ 就是该法线的一个方向向量,而法线方程为

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}. \quad (8)$$

现在来考虑曲面方程由显式

$$z = f(x, y) \quad (9)$$

给出的情形. 令

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z,$$

则方程(9)成为隐式方程 $F(x, y, z) = 0$. 由于

$$F_x(x, y, z) = f_x(x, y),$$

$$F_y(x, y, z) = f_y(x, y),$$

$$F_z(x, y, z) = -1.$$

于是,当函数 $f(x, y)$ 的偏导数 $f_x(x, y)$ 及 $f_y(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续时,则得曲面(9)在点 $M(x_0, y_0, z_0)$ (其中 $z_0 = f(x_0, y_0)$) 的切平面的一个法向量为

$$\boldsymbol{n} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1),$$

而切平面方程为

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0), \quad (10)$$

法线方程为

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (11)$$

例 3 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ 在点 $(1, 2, 3)$ 处的切平面及法线方程.

解 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14,$

$$F_x(x, y, z) = 2x, \quad F_y(x, y, z) = 2y, \quad F_z(x, y, z) = 2z.$$

$$F_x(1, 2, 3) = 2, \quad F_y(1, 2, 3) = 4, \quad F_z(1, 2, 3) = 6.$$

所以在点 $(1, 2, 3)$ 处, $\boldsymbol{n} = (2, 4, 6)$ 是切平面的一个法向量. 由 (7) 式得此球面在点 $(1, 2, 3)$ 处的切平面方程为

$$2(x-1) + 4(y-2) + 6(z-3) = 0,$$

即

$$x + 2y + 3z - 14 = 0.$$

由 (8) 式得法线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3},$$

即

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}.$$

由此可见, 法线经过原点 (即球心).

例 4 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2 - 1$ 在点 $(2, 1, 4)$ 处的切平面及法线方程.

解 $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1,$

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = 2y; \quad f_x(2, 1) = 4, \quad f_y(2, 1) = 2.$$

所以在点 $(2, 1, 4)$ 处, $\boldsymbol{n} = (4, 2, -1)$ 是切平面的一个法向量. 则由 (10) 式得所求切平面方程为

$$z - 4 = 4(x - 2) + 2(y - 1),$$

即

$$4x + 2y - z - 6 = 0.$$

由 (11) 式得法线方程为

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{-1}.$$

由本章第三节公式 (7), 若函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微, 则在 (x_0, y_0) 的邻近, 有近似公式

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

而由本节公式(10), $z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$ 是曲面 $z = f(x, y)$ 在点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 处的切平面, 因此以上近似公式表明: 可微函数 $z = f(x, y)$ 的图形(曲面)在点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 的邻近, 可用它在该点的切平面近似代替. 这是二元可微函数的一个几何特性.

思考题 1 写出曲线 $x = \frac{t}{1+t}, y = \frac{1+t}{t}, z = t^2$ 在对应于 $t = 1$ 的点处的切线及法平面方程.

思考题 2 写出曲面 $e^z - z + xy = 3$ 在点 $(2, 1, 0)$ 处的切平面及法线方程.

习题 8-6

1. 求曲线 $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4 \sin \frac{t}{2}$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2} - 1, 1, 2\sqrt{2}\right)$ 处的切线及法平面方程.

2. 求出曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 上的点, 使在该点的切线平行于平面 $x + 2y + z = 4$.

3. 求曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 36$ 在点 $(1, 2, 3)$ 处的切平面及法线方程.

4. 求椭球面 $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 上平行于平面 $x - y + 2z = 0$ 的切平面方程.

5. 在曲面 $z = xy$ 上求一点, 使这点处的法线垂直于平面

$$x + 3y + z + 9 = 0,$$

并写出这法线的方程.

6. 证明: 椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面方程可写

作以下形式: $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1$; 而椭圆抛物面 $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处

的切平面可写作以下形式: $\frac{z + z_0}{2} = \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2}$.

第七节 多元函数的极值及其求法

一、多元函数的极值及最大值、最小值

在实际问题中,常会遇到多元函数的最大值、最小值问题. 与一元函数相类似,多元函数的最大值、最小值与极大值、极小值有密切联系,因此先来讨论多元函数的极值问题,讨论时以二元函数为主.

定义 设点 (x_0, y_0) 是函数 $z = f(x, y)$ 的定义域的内点. 如果存在 (x_0, y_0) 的某个邻域使得对于该邻域内异于 (x_0, y_0) 的任一点 (x, y) ,都有

$$f(x, y) < f(x_0, y_0),$$

则称函数在点 (x_0, y_0) 有极大值 $f(x_0, y_0)$;如果都有

$$f(x, y) > f(x_0, y_0),$$

则称函数在点 (x_0, y_0) 有极小值 $f(x_0, y_0)$. 极大值和极小值统称为极值. 使函数取得极值的点称为极值点.

类似地,可定义三元函数 $w = f(x, y, z)$ 的极大值和极小值.

例如,容易判断,函数 $z = 3x^2 + 4y^2$ 在点 $(0, 0)$ 处有极小值0, 函数 $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ 在点 $(0, 0)$ 处有极大值1, 而函数 $z = xy$ 在点 $(0, 0)$ 处既不取得极大值也不取得极小值.

多元函数的极值问题,一般可以利用偏导数来解决. 下面两个定理是关于二元函数极值问题的结论.

定理 1 (必要条件) 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 具有偏导数,且在点 (x_0, y_0) 处有极值,则在该点的偏导数必然为零:

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证 不妨设 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处有极大值. 依极大值的定义,在点 (x_0, y_0) 的某邻域内异于 (x_0, y_0) 的点 (x, y) 都适合不

等式

$$f(x, y) < f(x_0, y_0).$$

特殊地,在该邻域内取 $y = y_0$ 而 $x \neq x_0$ 的点,则应成立不等式

$$f(x, y_0) < f(x_0, y_0).$$

这表明一元函数 $f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 处取得极大值,因而必有

$$f'_x(x_0, y_0) = 0.$$

类似地,可证

$$f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

从几何上看,这时如果曲面 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处有切平面,则切平面方程为

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0,$$

即切平面是平行于 xOy 坐标面的平面 $z = z_0$.

仿照一元函数,凡是能使 $f'_x(x, y) = 0, f'_y(x, y) = 0$ 同时成立的点 (x_0, y_0) 称为函数 $z = f(x, y)$ 的驻点. 从定理 1 可知,具有偏导数的函数的极值点一定是驻点. 但反之函数的驻点不一定是极值点,例如,点 $(0, 0)$ 是函数 $z = xy$ 的驻点,但函数在该点并无极值.

怎样判定一个驻点是不是极值点呢? 下面的定理回答了这个问题.

定理 2 (充分条件) 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内具有一阶及二阶连续偏导数,又 $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$, 记

$$f''_{xx}(x_0, y_0) = A, \quad f''_{xy}(x_0, y_0) = B, \quad f''_{yy}(x_0, y_0) = C,$$

则 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处是否取得极值的条件如下:

(i) $AC - B^2 > 0$ 时具有极值,且当 $A < 0$ 时有极大值,当 $A > 0$ 时有极小值;

(ii) $AC - B^2 < 0$ 时没有极值;

(iii) $AC - B^2 = 0$ 时可能有极值,也可能没有极值,需另行讨论.

这个定理的证明从略.

利用定理 1 和定理 2, 我们把具有二阶连续偏导数的函数 $z = f(x, y)$ 的极值的求法叙述如下:

第一步 解方程组

$$f_x(x, y) = 0, \quad f_y(x, y) = 0,$$

求得一切实数解, 即可求得一切驻点.

第二步 对于每个驻点 (x_0, y_0) , 求出二阶偏导数的值 A, B 和 C .

第三步 定出 $AC - B^2$ 的符号, 按定理 2 的结论判定 $f(x_0, y_0)$ 是不是极值, 是极大值还是极小值.

例 1 求函数 $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值.

解 先解方程组

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 3x^2 + 6x - 9 = 0, \\ f_y(x, y) = -3y^2 + 6y = 0, \end{cases}$$

求得驻点为 $(1, 0), (1, 2), (-3, 0), (-3, 2)$.

再求出二阶偏导数:

$$f_{xx}(x, y) = 6x + 6, \quad f_{xy}(x, y) = 0, \quad f_{yy}(x, y) = -6y + 6.$$

在点 $(1, 0)$ 处, $A = 12, B = 0, C = 6, AC - B^2 = 12 \cdot 6 > 0$, 又 $A > 0$, 所以函数在 $(1, 0)$ 处有极小值 $f(1, 0) = -5$;

在点 $(1, 2)$ 处, $A = 12, B = 0, C = -6, AC - B^2 = 12 \cdot (-6) < 0$, 所以函数在点 $(1, 2)$ 处无极值;

在点 $(-3, 0)$ 处, $A = -12, B = 0, C = 6, AC - B^2 = (-12) \cdot 6 < 0$, 所以函数在点 $(-3, 0)$ 处无极值;

在点 $(-3, 2)$ 处, $A = -12, B = 0, C = -6, AC - B^2 = (-12) \cdot (-6) > 0$, 又 $A < 0$, 所以函数在 $(-3, 2)$ 处有极大值 $f(-3, 2) = 31$.

与一元函数相类似, 我们可以利用函数的极值来求函数的最大值和最小值. 在第一节中我们已经指出, 如果 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则 $f(x, y)$ 在 D 上必定能取得最大值和最小值. 这种使函数取得最大值或最小值的点既可能在 D 的内

部,也可能在 D 的边界上. 我们假定,函数在 D 内可微且只有有限个驻点,这时如果函数在 D 的内部取得最大值(最小值),那么这个最大值(最小值)也是函数的极大值(极小值). 因此,在上述假定下,可得如下的求函数的最大值和最小值的一般方法:求出函数 $f(x, y)$ 在 D 内的所有驻点处的函数值及在 D 的边界上的最大值和最小值,然后比较这些值,其中最大的就是函数在 D 上的最大值,最小的就是函数在 D 上的最小值. 但这种做法,由于要求出 $f(x, y)$ 在 D 的边界上的最大值和最小值,所以往往相当复杂. 在通常遇到的实际问题中,如果根据问题的性质,知道函数 $f(x, y)$ 的最大值(最小值)一定在区域 D 的内部取得,且函数在 D 内只有一个驻点,那么据此就可以肯定该驻点处的函数值就是函数 $f(x, y)$ 在 D 上的最大值(最小值).

例 2 要用铁板做一个体积为 2 m^3 的有盖长方体水箱,问当长、宽、高各取怎样的尺寸时,才能使用料最省.

解 设水箱的长为 $x \text{ m}$, 宽为 $y \text{ m}$, 则其高应为 $\frac{2}{xy} \text{ m}$. 此水箱所用材料的面积为

$$A = 2 \left(xy + y \cdot \frac{2}{xy} + x \cdot \frac{2}{xy} \right),$$

即

$$A = 2 \left(xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} \right) \quad (x > 0, y > 0).$$

可见材料面积 A 是 x 和 y 的二元函数. 令

$$A_x = 2 \left(y - \frac{2}{x^2} \right) = 0, \quad A_y = 2 \left(x - \frac{2}{y^2} \right) = 0.$$

解这方程组,得

$$x = \sqrt[3]{2}, \quad y = \sqrt[3]{2}.$$

根据题意可知,水箱所用材料面积的最小值一定存在,并在区

域 $D: x > 0, y > 0$ 内取得. 又, 函数在 D 内只有唯一的驻点 $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$, 因此可断定, 当 $x = \sqrt[3]{2}, y = \sqrt[3]{2}$ 时, A 取得最小值. 就是说, 当水箱的长为 $\sqrt[3]{2}$ m、宽为 $\sqrt[3]{2}$ m、高为

$$\frac{2}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2} (\text{m})$$

时, 做水箱所用的材料最省.

从这个例子还可看出, 在体积一定的长方体中, 以立方体的表面积为最小.

思考题 1 求函数 $f(x, y) = 4(x - y) - x^2 - y^2$ 的极值.

思考题 2 设 $z = f(x, y)$ 的全微分为 $dz = ydx + xdy$, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处 _____ . (有极大值, 有极小值或没有极值.)

二、条件极值

上面所讨论的函数极值问题, 函数的自变量可以在定义域内自由取值, 并没有什么限制条件, 所以有时候称为无条件极值. 但在实际问题中, 有时会遇到对函数的自变量还有附加条件 (称为约束条件) 的极值问题. 例如, 求表面积为 a^2 而体积为最大的长方体的体积问题. 设长方体的三棱的长为 x, y, z , 则体积 $V = xyz$. 又因假定表面积为 a^2 , 所以自变量 x, y, z 还必须满足约束条件 $2(xy + yz + xz) = a^2$. 像这种对自变量有约束条件的极值称为条件极值. 对于有些实际问题, 可以把条件极值化为无条件极值, 然后利用第一目中的方法加以解决. 例如上述问题, 可由条件 $2(xy + yz + xz) = a^2$, 将 z 表示成 x, y 的函数

$$z = \frac{a^2 - 2xy}{2(x + y)}.$$

再把它代入 $V = xyz$ 中, 于是问题就化为求

$$V = \frac{xy}{2} \left(\frac{a^2 - 2xy}{x + y} \right)$$

的无条件极值. 例 2 也是属于把条件极值化为无条件极值的

例子.

但在很多情形下,将条件极值化为无条件极值并不这样简单.我们另有一种直接寻求条件极值的方法,可以不必先把问题化为无条件极值,这就是下面所述的拉格朗日乘数法.

拉格朗日乘数法 要找函数 $z=f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的可能极值点,可以先构成如下的辅助函数(称为拉格朗日函数):

$$L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),$$

其中 λ 为某一常数(称为拉格朗日乘数),分别求出 $L(x,y)$ 对 x 与 y 的一阶偏导数,令它们为零,然后与约束条件联立起来:

$$\begin{cases} f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0, \\ f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0, \\ \varphi(x,y)=0. \end{cases} \quad (1)$$

由这方程组解出 x,y 及 λ ,则其中 x,y 就是函数 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的可能极值点的坐标.

这个方法的证明从略.

这个方法可以推广到自变量多于两个的情形.例如,要求函数 $u=f(x,y,z)$ 在约束条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 下的极值.可以先作拉格朗日函数

$$L(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z),$$

求其一阶偏导数,令它们为零,然后与约束条件联立起来求解.这样得出的 (x,y,z) 就是可能的条件极值点.

至于如何确定所求得的点是否为极值点,在实际问题中往往可根据问题本身的性质来判定.

例 3 求表面积为 a^2 而体积为最大的长方体的体积.

解 设长方体的三棱长为 x,y,z ,则问题就是在约束条件

$$\varphi(x,y,z)=2xy+2yz+2xz-a^2=0 \quad (2)$$

下,求函数

$$V = xyz \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$$

的最大值. 构成拉格朗日函数

$$L(x, y, z) = xyz + \lambda(2xy + 2yz + 2xz - a^2),$$

分别求其对 x, y, z 的偏导数, 令它们为零, 得到

$$\begin{cases} yz + 2\lambda(y + z) = 0, \\ xz + 2\lambda(x + z) = 0, \\ xy + 2\lambda(y + x) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

再与(2)联立求解.

因 x, y, z 都不等于零, 所以由(3)可得

$$\frac{x}{y} = \frac{x+z}{y+z}, \quad \frac{y}{z} = \frac{x+y}{x+z}.$$

由以上两式解得

$$x = y = z.$$

将此代入(2)式, 便得

$$x = y = z = \frac{\sqrt{6}}{6}a,$$

这是唯一可能的极值点. 因为由问题本身可知最大值一定存在, 所以最大值就在这个可能的极值点处取得. 也就是说, 表面积为 a^2

的长方体中, 以棱长为 $\frac{\sqrt{6}}{6}a$ 的正方体的体积为最大, 最大体

$$\text{积 } V = \frac{\sqrt{6}}{36}a^3.$$

例 4 求从原点到曲面 $(x-y)^2 - z^2 = 1$ 的距离.

解 曲面外一点到曲面的距离是指从该点到曲面上各点的距离的最小值. 从原点到曲面上一点 (x, y, z) 的距离为 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 由于此距离与函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 同时取得最小值, 故为方便起见, 我们就在约束条件 $(x-y)^2 - z^2 - 1 = 0$ 下, 求 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 的最小值. 作拉格朗日函数

$$L(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda[(x-y)^2 - z^2 - 1].$$

求解方程组

$$\begin{cases} L_x = 2x + 2\lambda(x - y) = 0, \\ L_y = 2y - 2\lambda(x - y) = 0, \\ L_z = 2z - 2\lambda z = 0, \\ (x - y)^2 - z^2 = 1. \end{cases}$$

由第三个方程得 $z = 0$ 或 $\lambda = 1$.

当 $\lambda = 1$ 时, 由前两个方程可得 $x = y = 0$, 代入最后一个方程得 $z^2 = -1$, 故 z 无实数解.

由 $z = 0$, 从最后一个方程得 $(x - y)^2 = 1$. 又由前两个方程可得 $y = -x$. 从而解得 $x = \pm \frac{1}{2}, y = \mp \frac{1}{2}$. 从而得两个可能的条件极值点 $M_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ 和 $M_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$. 于是, 从原点到此曲面的距离必是 $|OM_1|$ 和 $|OM_2|$ 的较小者, 而 $|OM_1| = |OM_2| = \sqrt{\left(\pm \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\mp \frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故所求的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

思考题 3 试用拉格朗日乘数法解决以下问题: 设直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ($a, b > 0$) 通过点 $(1, 2)$. 当 a, b 取何值时, 这直线与 x 轴和 y 轴所围成的三角形的面积最小?

习题 8-7

1. 求函数 $f(x, y) = (6x - x^2)(4y - y^2)$ 的极值.
2. 求函数 $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$ 的极值.
3. 从斜边之长为 l 的一切直角三角形中, 求有最大周长的直角三角形.
4. 要造一个体积等于定数 k 的长方体无盖水池, 应如何选择水池的尺寸, 方可使它的表面积最小.
5. 求内接于半径为 a 的球且有最大体积的长方体.

第八章复习题

一、概念复习

1. 填空题:

(1) 如果点 $P(x, y)$ 以不同的方式趋于 $P_0(x_0, y_0)$ 时, $f(x, y)$ 趋于不同的常数, 则函数 $f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 处的二重极限_____.

(2) 函数 $f(x, y) = \frac{\sqrt{y-x^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域是_____, 且

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0, \frac{1}{2})} f(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 选择题:

(1) 函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处存在偏导数是函数在该点可微分的()条件, 是函数在该点连续的()条件.

- (A) 充分而不必要 (B) 必要而不充分
(C) 必要且充分 (D) 既不必要又不充分

(2) 函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{当 } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{当 } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 处().

- (A) 连续但不存在偏导数 (B) 存在偏导数但不连续
(C) 既不连续又不存在偏导数 (D) 既连续又存在偏导数

(3) 设函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某邻域内有定义, 且 $f_x(0, 0) = 3$, $f_y(0, 0) = -1$, 则有().

- (A) $dz|_{(0,0)} = 3dx - dy$
(B) 曲面 $z = f(x, y)$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的一个法向量为 $(3, -1, 1)$
(C) 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y), \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的一个切向量为 $(1, 0, 3)$
(D) 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y), \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的一个切向量为 $(3, 0, 1)$

(4) 下面四个函数中, 函数()在点 $(0, 0)$ 处不取得极值但点 $(0, 0)$ 是它的驻点, 函数()在点 $(0, 0)$ 处取得极值但在该点处的偏导数不存在.

(A) $f(x, y) = xy$

(B) $f(x, y) = x^2 + y^2$

(C) $f(x, y) = -(x^2 + y^2)$

(D) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

二、综合练习

$$1. \text{ 设 } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{当 } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{当 } x^2 + y^2 = 0. \end{cases} \text{ 求 } f_x(x, y), f_y(x, y).$$

2. 求下列函数的一阶和二阶偏导数:

(1) $z = \ln(x + y^2);$

(2) $z = \int_1^{xy} e^{t^2} dt.$

3. 求函数 $z = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ 当 $x = 2, y = 1, \Delta x = 0.01, \Delta y = 0.03$ 时的全增量和全

微分.

4. 设 $z = xf(x^2 + y^2)$, 其中函数 $f(u)$ 具有一阶连续导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

5. 求下列函数的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, 其中 f 具有二阶连续偏导数:

(1) $z = f(\sin x, e^{x+y});$

(2) $z = f(u, x, y), u = xe^y.$

6. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $x^y + y^z + z^x = 1$ 确定, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

7. 设曲线 Γ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ 与平面 $z = 2$ 的交线.

(1) 写出 Γ 的参数方程;

(2) 求出 Γ 在点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right)$ 处的切线方程.

8. 试证: 曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a} (a > 0)$ 上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a .

9. 设点 $P(x_1, y_1, z_1)$ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 外的一点, 若 $Q(x_2, y_2,$

$z_2)$ 为椭球面上离 P 最近的一点, 试用拉格朗日乘数法证明: PQ 是椭球面在点 Q 处的法线.

第九章

重积分及曲线积分

本章为多元函数积分学. 在一元函数积分学中我们已经知道, 定积分是某种特定形式的和的极限, 把这种和的极限的概念推广到定义在某个区域或某段曲线上的多元函数的情形, 便得到重积分及曲线积分的概念.

第一节 二重积分的概念与性质

一、曲顶柱体的体积与二重积分

设有一立体, 它的底是 xOy 平面上的有界闭区域 D , 它的侧面是以 D 的边界曲线为准线而母线平行于 z 轴的柱面, 它的顶是曲面 $z=f(x,y)$, 这里 $f(x,y) \geq 0$ 且在 D 上连续 (图 9-1). 这种立体称为曲顶柱体. 现在来讨论它的体积.

我们知道, 平顶柱体的高是不变的, 它的体积可以用公式

$$\text{体积} = \text{高} \times \text{底面积}$$

来计算. 关于曲顶柱体, 当点 (x,y) 在闭区域 D 上变动时, 高 $f(x,y)$ 是个变量, 因此它的体积不能直接用这个公式来计算. 我们在第五章中讨论过求曲边梯形的面积的问题, 不难想到, 那里所采用的办法, 可以用来解决目前

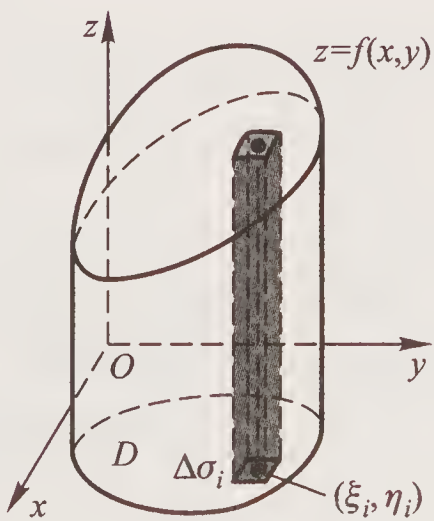


图 9-1

的问题.

我们用一曲线网把闭区域 D 分成 n 个小闭区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n,$$

小闭区域 $\Delta\sigma_i$ 的面积也记作 $\Delta\sigma_i$. 以这些小闭区域的边界曲线为准线, 作母线平行于 z 轴的柱面, 这些柱面把曲顶柱体分为 n 个细条曲顶柱体. 设以小闭区域 $\Delta\sigma_i$ 为底的细条曲顶柱体的体积为 ΔV_i , 则曲顶柱体的体积为

$$V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i.$$

当小闭区域 $\Delta\sigma_i$ 的直径^①很小时, 由于 $f(x, y)$ 连续, $f(x, y)$ 在 $\Delta\sigma_i$ 上的变化很小, 可以近似地看作常数. 即若任意取点 $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta\sigma_i$, 则以 $\Delta\sigma_i$ 为底的细条曲顶柱体可近似地看作以 $f(\xi_i, \eta_i)$ 为高的平顶柱体 (图 9-1), 于是有

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

所以

$$V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

令 n 个小闭区域的直径中的最大值 (记作 λ) 趋于零, 这时得到的极限值

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

便是所求曲顶柱体的体积.

撇开上述问题中的几何特性, 一般地研究这种和的极限, 可得下述定义:

定义 设 $f(x, y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数. 将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_i, \cdots, \Delta\sigma_n,$$

① 有界闭区域的直径是指该区域中任意两点间距离的最大值.

其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小闭区域, 也表示它的面积. 在每个小闭区域 $\Delta\sigma_i$ 中任取一点 (ξ_i, η_i) , 作乘积 $f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 并作和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$. 如果当各个小闭区域的直径中的最大值 λ 趋于零时, 和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$ 的极限总存在, 且与闭区域 D 的分法及点 (ξ_i, η_i) 的取法无关, 那么称此极限为函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上的二重积分, 记作 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 即

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i, \quad (1)$$

其中 $f(x, y)$ 称为被积函数, $f(x, y) d\sigma$ 称为被积表达式, $d\sigma$ 称为面积元素, x 与 y 称为积分变量, D 称为积分区域.

在二重积分记号 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 中, 面积元素 $d\sigma$ 象征着和式中的 $\Delta\sigma_i$. 因为二重积分定义中对闭区域 D 的划分是任意的, 如果在直角坐标系中用平行于坐标轴的直线网来划分闭区域 D , 那么除了含有闭区域 D 的边界点的一些小闭区域外, 绝大多数小闭区域都是矩形. 设矩形小闭区域 $\Delta\sigma_i$ 的边长为 Δx_j 和 Δy_k , 则 $\Delta\sigma_i = \Delta x_j \Delta y_k$. 因此, 在直角坐标系中, 也把面积元素 $d\sigma$ 记作 $dx dy$, 而把二重积分记作

$$\iint_D f(x, y) dx dy,$$

其中 $dx dy$ 称为直角坐标系中的面积元素.

这里我们要指出, 当函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续时, (1) 式右端的和的极限必定存在, 也就是说, 函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上的二重积分必定存在. 我们总假定函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 所以 $f(x, y)$ 在 D 上的二重积分总是存在的, 以后就不再每次加以说明.

由二重积分的定义, 可见本目开始时讨论的曲顶柱体的体积

V 是曲顶上点的竖坐标 $f(x, y)$ 在底 D 上的二重积分, 即

$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma.$$

二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 有如下的几何解释: 如果 $f(x, y) \geq 0$, 被积函数 $f(x, y)$ 可解释为曲顶柱体顶上的点 $(x, y, f(x, y))$ 的竖坐标, 也就是曲顶柱体底面上的点 (x, y) 处的高, 所以二重积分的几何意义就是曲顶柱体的体积. 如果 $f(x, y) \leq 0$, 柱体在 xOy 面的下方, 二重积分就等于柱体体积的负值. 如果 $f(x, y)$ 在 D 的某些部分区域上是正的, 而在其余部分区域上是负的, 那么二重积分就等于 xOy 面上方的柱体体积减去 xOy 面下方的柱体体积所得之差.

思考题 1 设有平面薄片, 占有 xOy 面上的闭区域 D , 它在点 (x, y) 处的面密度为 $\mu(x, y)$, 这里 $\mu(x, y) > 0$ 且在 D 上连续. 试用二重积分表示该薄片的质量.

二、二重积分的性质

比较定积分与二重积分的定义可以联想到, 二重积分与定积分有类似的性质, 现叙述于下.

性质 1 函数和(或差)的二重积分等于各个函数的二重积分的和(或差). 例如

$$\iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)] d\sigma = \iint_D f(x, y) d\sigma \pm \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

性质 2 被积函数的常数因子可以提到二重积分号的外面, 即

$$\iint_D kf(x, y) d\sigma = k \iint_D f(x, y) d\sigma \quad (k \text{ 为常数}).$$

性质 3 如果闭区域 D 被有限条曲线分为有限个部分区域, 那么在 D 上的二重积分等于在各部分区域上的二重积分的和. 例如, 当 D 分为两个闭区域 D_1 与 D_2 时, 有

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma.$$

这个性质表示二重积分对于积分区域具有可加性.

性质 4 如果在闭区域 D 上 $f(x, y) = 1$, σ 为 D 的面积, 那么

$$\sigma = \iint_D 1 \cdot d\sigma = \iint_D d\sigma.$$

这性质的几何意义是很明显的, 因为高为 1 的平顶柱体的体积在数值上等于柱体的底面积.

性质 5 如果在闭区域 D 上 $f(x, y) \leq g(x, y)$, 那么

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

特殊地, 由于

$$-|f(x, y)| \leq f(x, y) \leq |f(x, y)|,$$

可得不等式

$$\left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma.$$

性质 6 设 M, m 分别是 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上的最大值和最小值, σ 是 D 的面积, 则有对二重积分估值的不等式

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M\sigma.$$

事实上, 因为 $m \leq f(x, y) \leq M$, 所以, 由性质 5 有

$$\iint_D m d\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D M d\sigma,$$

再应用性质 2 和性质 4, 便得所要证明的不等式.

性质 7 (二重积分的中值定理) 设 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续, σ 是 D 的面积, 则在 D 上至少存在一点 (ξ, η) , 使下式成立:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \sigma.$$

证 把性质 6 中的不等式各边除以 σ , 有

$$m \leq \frac{1}{\sigma} \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M.$$

这表明,确定的数值 $\frac{1}{\sigma} \iint_D f(x, y) d\sigma$ 介于函数 $f(x, y)$ 的最小值 m 与最大值 M 之间. 根据有界闭区域上连续函数的介值定理,在 D 上至少存在一点 (ξ, η) ,使得函数在该点的值与这个确定的数值相等,即

$$\frac{1}{\sigma} \iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta).$$

上式两端各乘 σ ,就得所要证明的公式.

思考题 2 比较下列二重积分的大小:

(1) $\iint_D (x+y)^2 d\sigma$ 与 $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$, 其中 D 由直线 $x+y=1$ 与 x 轴、 y 轴围成;

(2) $\iint_D \ln(x^2+y^2) d\sigma$ 与 $\iint_D [\ln(x^2+y^2)]^2 d\sigma$, 其中 D 是介于两个圆 $x^2+y^2=4$ 和 $x^2+y^2=9$ 之间的圆环.

思考题 3 试确定 xOy 平面上的有界闭区域 D ,使得二重积分 $\iint_D \left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}\right) dx dy$ 的值为最大.

习题 9-1

1. 设 $I_1 = \iint_{D_1} (x^2+y^2)^3 d\sigma$, 其中 D_1 是矩形闭区域 $-1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2$,

$I_2 = \iint_{D_2} (x^2+y^2)^3 d\sigma$, 其中 D_2 是矩形闭区域 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$. 试利用二重积分的几何意义说明 I_1 与 I_2 之间的关系.

2. 估计下列积分的值:

(1) $I = \iint_D xy(x+y) d\sigma$, 其中 D 是矩形闭区域 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$;

(2) $I = \iint_D \sin^2 x \sin^2 y d\sigma$, 其中 D 是矩形闭区域 $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$;

(3) $I = \iint_D (x + y + 1) d\sigma$, 其中 D 是矩形闭区域 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$;

(4) $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, 其中 D 是圆形闭区域 $x^2 + y^2 \leq 4$.

第二节 二重积分的计算法

相对于重积分来说,定积分也可称为单积分.下面介绍二重积分的计算法,这种方法是把二重积分化为两次单积分来计算.

一、利用直角坐标计算二重积分

我们从几何直观来说明二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 的计算方法,在

讨论中假定 $f(x, y) \geq 0$.

如果积分区域 D 在直线 $x = a$ 与 $x = b$ 之间,且平行于 y 轴的直线 $x = c$ ($a < c < b$) 穿过连续曲线 $y = \varphi_1(x)$ 进入 D 的内部,再从连续曲线 $y = \varphi_2(x)$ 穿出. 这样的积分区域 D 可以用不等式组

$$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \quad a \leq x \leq b$$

来表示(图 9-2),它有如下特点:穿过 D 的内部平行于 y 轴的直线与 D 的边界的交点不多于两个. 通常称具有这样特点的区域 D 为 X 型区域.

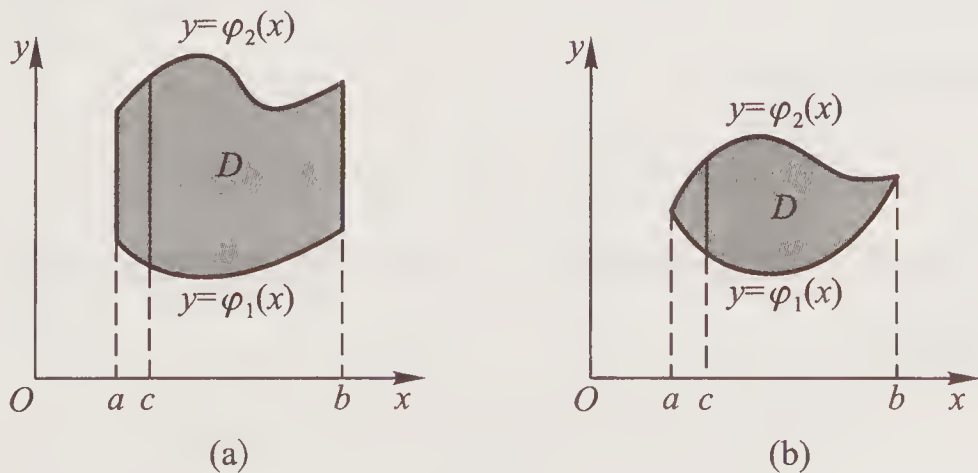


图 9-2

按照二重积分的几何意义, $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 的值等于以 D 为底、以曲面 $z = f(x, y)$ 为顶的曲顶柱体(图 9-3)的体积. 我们可以应用第五章中计算“平行截面面积为已知的立体的体积”的方法, 来计算这个曲顶柱体的体积.

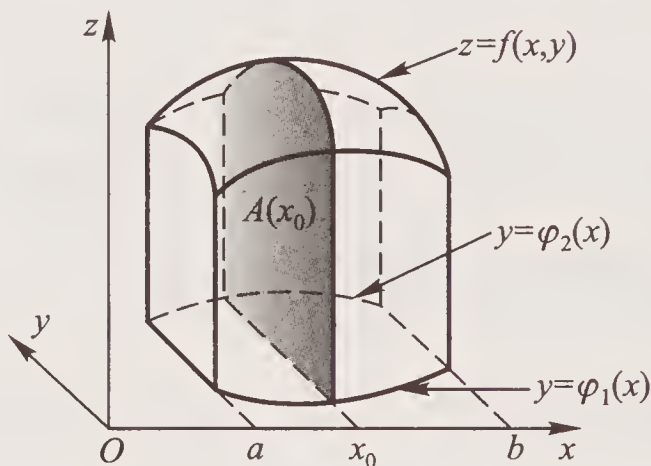


图 9-3

先计算截面面积. 为此, 在区间 $[a, b]$ 中任意取定一点 x_0 , 作平行于 yOz 面的平面 $x = x_0$, 此平面截曲顶柱体所得截面是一个以区间 $[\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)]$ 为底、曲线 $z = f(x_0, y)$ 为曲边的曲边梯形(图 9-3 中阴影部分), 所以这截面的面积可表示为如下的定积分:

$$A(x_0) = \int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y) dy.$$

一般地, 过区间 $[a, b]$ 上任一点 x 且平行于 yOz 面的平面截曲顶柱体所得截面的面积为

$$A(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

于是, 应用计算平行截面面积为已知的立体的体积的方法, 得曲顶柱体的体积为

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

这个体积也就是所求的二重积分, 从而有

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

上式右端是一个先对 y 、再对 x 的二次积分. 就是说, 先把 x 看作常数, 把 $f(x, y)$ 只看作 y 的函数, 并对 y 计算从 $\varphi_1(x)$ 到 $\varphi_2(x)$ 的定积分; 然后把算得的结果 (是 x 的函数) 再对 x 计算从 a 到 b 的定积分. 这个先对 y 、再对 x 的二次积分也常记作

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy,$$

从而将二重积分化为先对 y 、再对 x 的二次积分的公式写作

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (1)$$

在上述讨论中, 我们假定 $f(x, y) \geq 0$. 但实际上公式 (1) 的成立并不受此条件限制.

类似地, 如果积分区域 D 在直线 $y = c$ 与 $y = d$ 之间, 且平行于 x 轴的直线 $y = h$ ($c < h < d$) 穿过连续曲线 $x = \psi_1(y)$ 进入 D 的内部, 再从连续曲线 $x = \psi_2(y)$ 穿出. 这样的积分区域 D 可以用不等式组

$$\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), \quad c \leq y \leq d$$

来表示 (图 9-4), 它有如下特点: 穿过 D 的内部平行于 x 轴的直线与 D 的边界的交点不多于两个. 通常称具有这样特点的区域 D 为 Y 型区域. 此时有

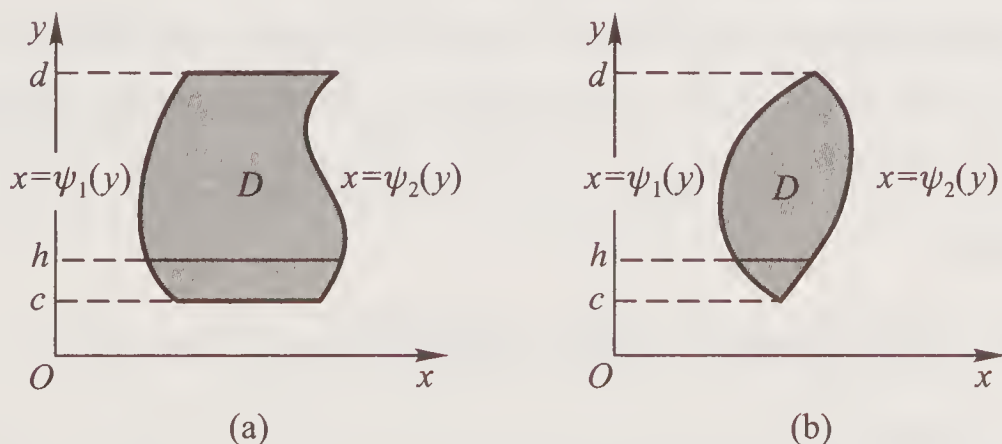


图 9-4

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx. \quad (2)$$

这就是把二重积分化为先对 x 、再对 y 的二次积分的公式.

如果积分区域 D 既可用不等式 $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$, $a \leq x \leq b$ 表示,也可用不等式 $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$, $c \leq y \leq d$ 表示,那么由公式(1)及(2),有

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx, \quad (3)$$

这是因为上式左、右两端等于同一个二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$.

如前所述,应用公式(1)(或公式(2))时,积分区域 D 必须满足这样的条件:穿过闭区域 D 内部且平行于 y 轴(或 x 轴)的直线与 D 的边界相交不多于两点. 如果

积分区域 D 如图 9-5 那样,不具备上述条件,对于这种情形,我们可以把 D 分成几个部分区域,使每个部分区域满足上述条件. 例如,在图 9-5 中,把 D 分成三个部分区域,每个部分区域都是 X 型区域,因此,每个部分区域上的二重

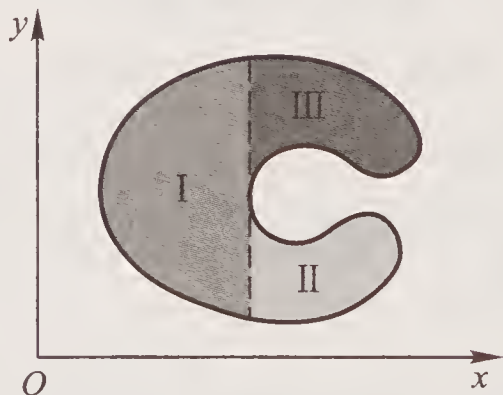


图 9-5

积分,都可应用公式(1),各部分区域上的二重积分求得后,它们的和就是闭区域 D 上的二重积分.

二重积分化为二次积分时,确定积分限是一个关键. 积分限是根据积分区域 D 确定的,通常先画出 D 的图形,然后根据图形的特性选择应用公式(1)或(2),并定出相应的积分限. 下面举几个例子来说明.

例 1 计算 $\iint_D xy d\sigma$, 其中 D 是由直线 $y=1$, $x=2$ 及 $y=x$ 所围成的三角形闭区域.

解一 首先画出闭区域 D 如图 9-6(a). D 上的点的横坐标

的变化范围是区间 $[1, 2]$. 在区间 $[1, 2]$ 上任意取定一个 x 值, 过点 $(x, 0)$ 作平行于 y 轴的直线, 这条直线与 D 的下方边界的交点的纵坐标是 $y = 1$, 与 D 的上方边界的交点的纵坐标是 $y = x$, 即 y 从1变到 x , 因此闭区域 D 是一个 X 型区域, 可用不等式表示为 $1 \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2$. 利用公式(1)得

$$\begin{aligned} \iint_D xy d\sigma &= \int_1^2 dx \int_1^x xy dy = \int_1^2 \left[\frac{1}{2} xy^2 \right]_1^x dx \\ &= \int_1^2 \frac{1}{2} (x^3 - x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^2 \right]_1^2 = \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

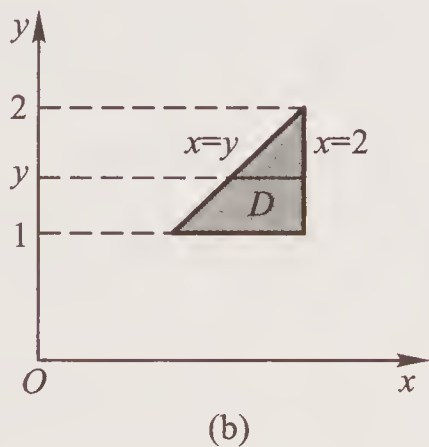
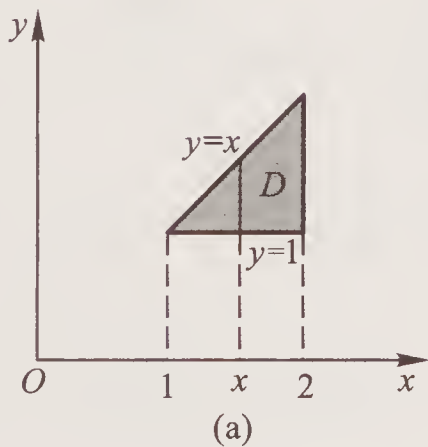


图 9-6

解二 如图 9-6(b). 闭区域 D 上的点的纵坐标的变化范围是区间 $[1, 2]$. 在区间 $[1, 2]$ 上任意取定一个 y 值, 过点 $(0, y)$ 作平行于 x 轴的直线, 这条直线与 D 的左方边界的交点的横坐标是 $x = y$, 与 D 的右方边界的交点的横坐标是 $x = 2$, 即 x 从 y 变到2, 因此闭区域 D 也可看作是一个 Y 型区域, 并可用不等式表示为 $y \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2$. 利用公式(2)得

$$\begin{aligned} \iint_D xy d\sigma &= \int_1^2 dy \int_y^2 xy dx = \int_1^2 \left[\frac{1}{2} x^2 y \right]_y^2 dy \\ &= \int_1^2 \left(2y - \frac{1}{2} y^3 \right) dy = \left[y^2 - \frac{1}{8} y^4 \right]_1^2 = \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

例 2 计算 $\iint_D (x + 2y) d\sigma$, 其中 D 是由抛物线 $y = 2x^2$ 及 $y = 1 +$

x^2 所围成的区域.

解 画出积分区域 D 如图 9-7 所示. 解联立方程组 $y = 2x^2$, $y = 1 + x^2$, 求得两抛物线的交点为 $(1, 2)$ 和 $(-1, 2)$. 由于过 D 内某些点而平行于 x 轴的直线与 D 的边界的交点多于两个, 即 D 不是 Y 型区域, 因此如果选用公式(2)来进行计算, 需要先把 D 分成几个部分区域后分别计算, 增加了计算量. 但由于 D 是 X 型区域, 并可用不等式表示为 $2x^2 \leq y \leq 1 + x^2$, $-1 \leq x \leq 1$, 故用公式(1)计算比较方便, 得

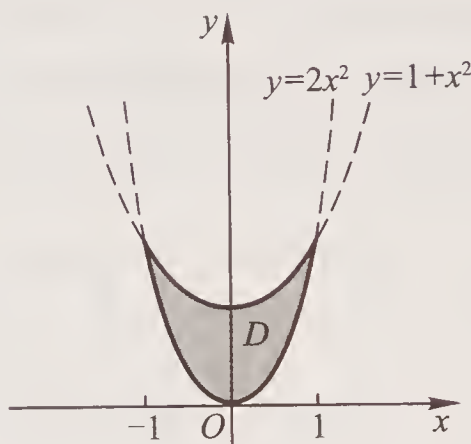


图 9-7

$$\begin{aligned} \iint_D (x + 2y) d\sigma &= \int_{-1}^1 dx \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y) dy \\ &= \int_{-1}^1 (-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1) dx = \frac{32}{15}. \end{aligned}$$

例 3 计算 $\iint_D xy d\sigma$, 其中 D 是由抛物线 $y^2 = x$ 及直线 $y = x - 2$ 所围成的闭区域.

解 画出闭区域 D 如图 9-8(a) 所示. 利用公式(2), 有

$$\begin{aligned} \iint_D xy d\sigma &= \int_{-1}^2 dy \int_{y^2}^{y+2} xy dx = \int_{-1}^2 \left[\frac{1}{2} x^2 y \right]_{y^2}^{y+2} dy \\ &= \int_{-1}^2 \frac{1}{2} [y(y+2)^2 - y^5] dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^2 (4y + 4y^2 + y^3 - y^5) dy \\ &= \frac{1}{2} \left[2y^2 + \frac{4}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{6}y^6 \right]_{-1}^2 = \frac{45}{8}. \end{aligned}$$

如果用公式(1)来计算, 那么由于在区间 $[0, 1]$ 及 $[1, 4]$ 上函数 $\varphi_1(x)$ 的表达式不一样, 所以要用经过交点 $(1, -1)$ 且平行 y 轴

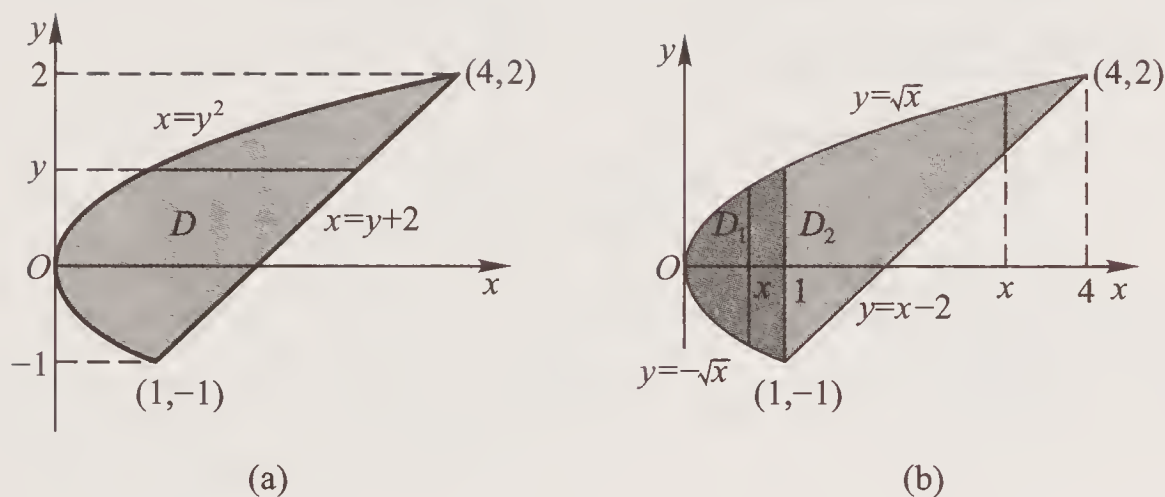


图 9-8

的直线 $x=1$ 把闭区域 D 分成 D_1 和 D_2 两部分(图 9-8(b)), 其中

$$D_1: -\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1; \quad D_2: x-2 \leq y \leq \sqrt{x}, 1 \leq x \leq 4.$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_D xy d\sigma &= \iint_{D_1} xy d\sigma + \iint_{D_2} xy d\sigma \\ &= \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy dy + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} xy dy. \end{aligned}$$

显然, 本例用公式(2)计算较为方便.

在把二重积分化为二次积分时, 究竟是取先对 y 、后对 x 的积分次序, 还是取先对 x 、后对 y 的积分次序, 即选用公式(1)还是选用公式(2), 从以上几个例子来看, 这主要由积分区域 D 的特点来定. 总的原则是尽量避免对 D 进行划分. 不过, 这也不能绝对化, 还要兼顾被积函数的表达式. 请看下例.

例 4 计算 $I = \iint_D \frac{y \sin(x-1)}{x-1} d\sigma$, 其中积分区域 D 与例 3 中的 D 相同.

解 根据积分区域 D 的特点, 选用公式(2)(图 9-8(a)), 有

$$I = \int_{-1}^2 dy \int_{y^2}^{y+2} \frac{y \sin(x-1)}{x-1} dx,$$

但由于被积函数对 x 的积分求不出,故无法计算.

现应用公式(1)(图 9-8(b)),有

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{y \sin(x-1)}{x-1} dy + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} \frac{y \sin(x-1)}{x-1} dy \\
 &= 0 + \int_1^4 \frac{1}{2} [x - (x-2)^2] \frac{\sin(x-1)}{x-1} dx \\
 &= \int_1^4 \frac{1}{2} (-x^2 + 5x - 4) \frac{\sin(x-1)}{x-1} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_1^4 (4-x) \sin(x-1) dx \\
 &= \frac{1}{2} [- (4-x) \cos(x-1) - \sin(x-1)]_1^4 = \frac{1}{2} (3 - \sin 3).
 \end{aligned}$$

例 5 设 Ω 由平面 $z=0$, $y=x$, 抛物柱面 $y=x^2$ 和椭圆抛物面 $z=x^2+3y^2$ 所围成, 求 Ω 的体积.

解 这是个曲顶柱体, 其顶为 $z=x^2+3y^2$, 底为 xOy 面上由直线 $y=x$ 和抛物线 $y=x^2$ 所围成的有界闭区域 D (图 9-9), 即

$$D: x^2 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1,$$

因此, 所求 Ω 的体积为

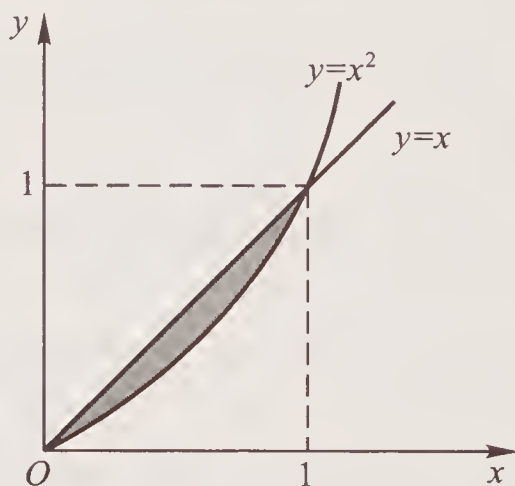


图 9-9

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_D (x^2 + 3y^2) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2 + 3y^2) dy \\
 &= \int_0^1 [x^2 y + y^3]_{x^2}^x dx = \int_0^1 [2x^3 - (x^4 + x^6)] dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{7} x^7 \right]_0^1 = \frac{11}{70}.
 \end{aligned}$$

思考题 1 设 D 由 $x=2$, $y=2x$, $y=5$ 所围成, 则

$$\iint_D 6x^2 y dx dy = \int_{\square} dy \int_2^{\square} 6x^2 y dx = \int_{\square} \text{————} dy.$$

思考题 2 设 D 为以 $(0,0), (3,0), (0,4)$ 为顶点的三角形区域, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_{\square} dx \int_0^{\square} f(x, y) dy = \int_0^{\square} dy \int_0^{\square} f(x, y) dx.$$

二、利用极坐标计算二重积分

有些二重积分, 其积分区域的边界曲线用极坐标方程来表示比较方便, 或被积函数用极坐标变量 ρ, φ 来表达比较简单, 这时, 就可考虑用极坐标来计算它.

按二重积分的定义,

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i,$$

下面来研究这个和的极限在极坐标系中的形式.

假定从极点 O 出发且穿过闭区域 D 内部的射线与 D 的边界曲线相交不多于两点. 我们用以极点为中心的一族同心圆: $\rho = \text{常数}$, 以及从极点出发的一族射线: $\varphi = \text{常数}$, 把闭区域 D 分成 n 个小闭区域 (图 9-10). 除了含有闭区域 D 的边界点的一些小闭区域外, 小闭区域的面积 $\Delta\sigma_i$ 可计算如下:

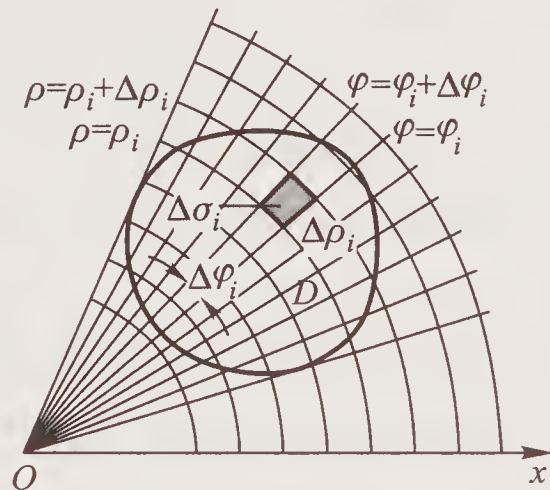


图 9-10

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_i &= \frac{1}{2}(\rho_i + \Delta\rho_i)^2 \Delta\varphi_i - \frac{1}{2}\rho_i^2 \Delta\varphi_i \\ &= \frac{1}{2}(2\rho_i + \Delta\rho_i) \Delta\rho_i \Delta\varphi_i \\ &= \left(\rho_i + \frac{1}{2}\Delta\rho_i\right) \Delta\rho_i \Delta\varphi_i = \bar{\rho}_i \Delta\rho_i \Delta\varphi_i, \end{aligned}$$

其中 $\bar{\rho}_i = \left(\rho_i + \frac{1}{2}\Delta\rho_i\right)$ 表示相邻两圆弧半径的平均值. 在这小闭区

域内取圆周 $\rho = \bar{\rho}_i$ 上的一点 $(\bar{\rho}_i, \bar{\varphi}_i)$, 设该点的直角坐标为 (ξ_i, η_i) , 则有 $\xi_i = \bar{\rho}_i \cos \bar{\varphi}_i, \eta_i = \bar{\rho}_i \sin \bar{\varphi}_i$. 于是

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{\rho}_i \cos \bar{\varphi}_i, \bar{\rho}_i \sin \bar{\varphi}_i) \bar{\rho}_i \Delta \rho_i \Delta \varphi_i,$$

即

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi.$$

由于在直角坐标系中 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 常记作 $\iint_D f(x, y) dx dy$, 所以上式又可写成

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi. \quad (4)$$

这就是二重积分的积分变量从直角坐标变换为极坐标的变换公式, 其中 $\rho d\rho d\varphi$ 称为极坐标系中的面积元素.

公式(4)表明, 要把二重积分的积分变量从直角坐标变换成极坐标, 只要把被积函数中的 x, y 分别换成 $\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi$, 并把直角坐标系中的面积元素 $dx dy$ 换成极坐标系中的面积元素 $\rho d\rho d\varphi$ 就行了.

极坐标系中的二重积分, 同样可以化为二次积分来计算.

设闭区域 D 可以用不等式

$$\rho_1(\varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi), \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta$$

来表示(图 9-11), 其中函数 $\rho_1(\varphi), \rho_2(\varphi)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续.

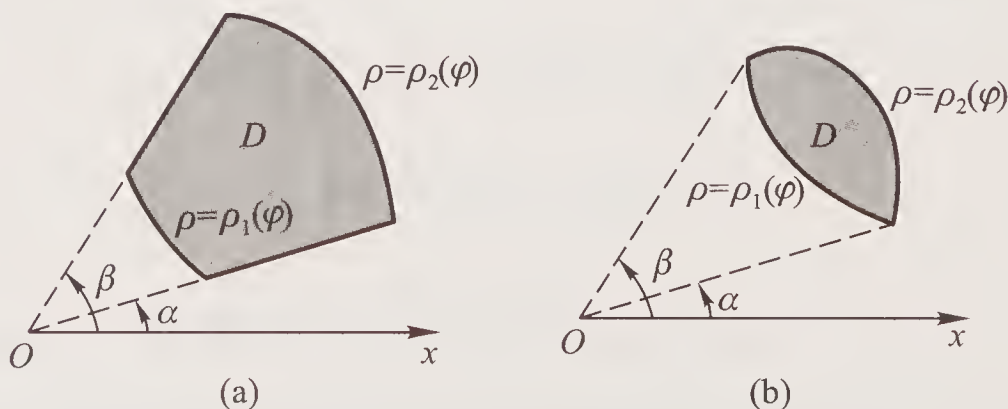


图 9-11

在区间 $[\alpha, \beta]$ 上任意取定一个 φ 值,对应于这个 φ 值,闭区域 D 上的点(图9-12中这些点组成线段 EF)的极径 ρ 从 $\rho_1(\varphi)$ 变到 $\rho_2(\varphi)$,于是先以 ρ 为积分变量,在区间 $[\rho_1(\varphi), \rho_2(\varphi)]$ 上作积分 $\int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$,得到一个 φ 的函数 $F(\varphi)$. 又由 φ 的变化范围是区间 $[\alpha, \beta]$,于是再以 φ 为积分变量,作积分 $\int_{\alpha}^{\beta} F(\varphi) d\varphi$. 这样就得出极坐标系中的二重积分为二次积分的公式为

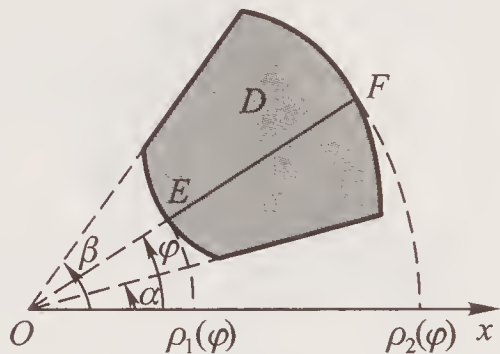


图 9-12

$$\begin{aligned} & \iint_D f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \end{aligned} \quad (5)$$

如果积分区域 D 是图9-13所示的曲边扇形(即极点位于 D 的边界上),那么可以把它看作是图9-11(a)中当 $\rho_1(\varphi) = 0$, $\rho_2(\varphi) = \rho(\varphi)$ 时的特例. 这时闭区域 D 可以用不等式

$$0 \leq \rho \leq \rho(\varphi), \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta$$

来表示,而公式(5)成为

$$\iint_D f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho.$$

如果积分区域 D 如图9-14所示,极点在 D 的内部,那么可以把它看作是图9-13中当 $\alpha = 0, \beta = 2\pi$ 时的特例. 这时 D 可以用不等式

$$0 \leq \rho \leq \rho(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

来表示,而公式(5)成为

$$\iint_D f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho.$$

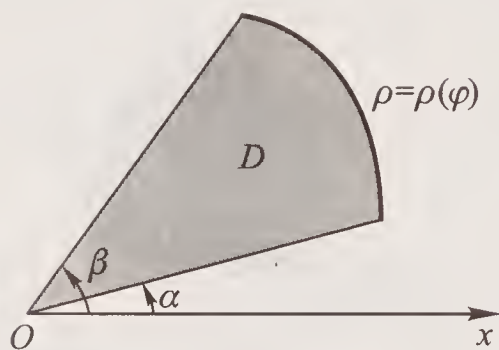


图 9-13

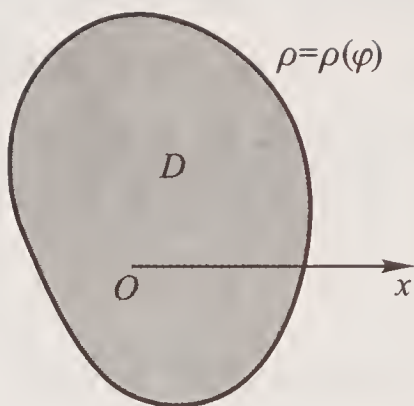


图 9-14

例 6 试导出用极坐标计算图 9-13 所示曲边扇形 D 的面积公式.

解 设 D 的面积为 σ , 则 $\sigma = \iint_D dx dy$. 由公式(4), 有

$$\sigma = \iint_D \rho d\rho d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

曲边扇形的面积在上册第五章第四节已用定积分得出, 现在用重积分导出了相同的结果.

例 7 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$, 其中闭区域 D 为 $x^2 + y^2 \leq a^2$.

解 在极坐标系中, D 可表示为

$$0 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

由公式(4)及(5), 有

$$\begin{aligned} \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy &= \iint_D e^{-\rho^2} \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a e^{-\rho^2} \rho d\rho \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right]_0^a d\varphi \\ &= \frac{1}{2} (1 - e^{-a^2}) \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \pi (1 - e^{-a^2}). \end{aligned}$$

本例如果用直角坐标计算, 由于 e^{-x^2} 和 e^{-y^2} 的原函数均非初

等函数,所以无法算出.

例 8 设 Ω 由上半球面 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 和圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围成(图 9-15),求 Ω 的体积.

解 联立方程 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 和 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$,消去 z 得到两个曲面的交线在 xOy 面上的投影曲线为 $x^2 + y^2 = 1$,从而 Ω 在 xOy 面上的投影区域 D 为圆域

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

于是所求 Ω 的体积可看作以 $z =$

$\sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 为顶、 D 为底的曲顶柱体

的体积减去以 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 为顶、 D 为底的曲顶柱体的体积之差.

根据二重积分的几何意义可知,所求 Ω 的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \sqrt{2 - x^2 - y^2} dx dy - \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\ &= \iint_D (\sqrt{2 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy, \end{aligned}$$

在极坐标系中, D 可表示为

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

因此

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (\sqrt{2 - \rho^2} - \rho) \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho \sqrt{2 - \rho^2} - \rho^2) d\rho \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{3}(2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\rho^3 \right]_0^1 = \frac{4(\sqrt{2} - 1)}{3}\pi. \end{aligned}$$

思考题 3 设 D 为由 $x^2 + y^2 = 9$ 和 $x^2 + y^2 = 16$ 所围成的环形区域,则

$$\iint_D \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^\square d\varphi \int_3^\square \underline{\hspace{2cm}} d\rho.$$

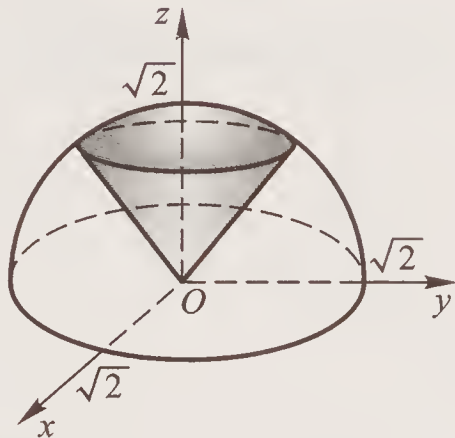


图 9-15

习题 9-2

1. 画出积分区域,并计算下列二重积分:

(1) $\iint_D (x^2 + y^2) d\sigma$, 其中 D 是矩形闭区域: $|x| \leq 1, |y| \leq 1$;

(2) $\iint_D (x^3 + 3x^2y + y^3) d\sigma$, 其中 D 是矩形闭区域: $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$;

(3) $\iint_D (3x + 2y) d\sigma$, 其中 D 是由两坐标轴及直线 $x + y = 2$ 所围成的闭

区域;

(4) $\iint_D x \cos(x + y) d\sigma$, 其中 D 是顶点分别为 $(0, 0), (\pi, 0)$ 及 (π, π) 的三

角形闭区域;

(5) $\iint_D (1 + x) \sin y d\sigma$, 其中 D 是顶点分别为 $(0, 0), (1, 0), (1, 2)$ 及 $(0,$

1) 的梯形闭区域;

(6) $\iint_D (x^2 + y^2 - x) d\sigma$, 其中 D 是由直线 $y = 2, y = x$ 及 $y = 2x$ 所围成的

闭区域;

(7) $\iint_D (x^2 - y^2) d\sigma$, 其中 D 是闭区域: $0 \leq y \leq \sin x, 0 \leq x \leq \pi$;

(8) $\iint_D x \sqrt{y} d\sigma$, 其中 D 是由两条抛物线 $y = \sqrt{x}$ 和 $y = x^2$ 所围成的闭区域;

(9) $\iint_D xy^2 d\sigma$, 其中 D 是半圆形闭区域: $x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0$;

(10) $\iint_D e^{x+y} d\sigma$, 其中 D 是闭区域: $|x| + |y| \leq 1$.

2. 化二重积分

$$I = \iint_D f(x, y) d\sigma$$

为二次积分(分别列出对两个变量积分次序不同的两个二次积分),其中积分区域 D 是:

(1) 由直线 $y = x$ 及抛物线 $y^2 = 4x$ 所围成的闭区域;

(2) 半圆形闭区域: $x^2 + y^2 \leq r^2, y \geq 0$;

(3) 由直线 $y = x, x = 2$ 及双曲线 $y = \frac{1}{x} (x > 0)$ 所围成的闭区域.

3. 如果二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 的被积函数 $f(x, y)$ 是两个函数 $f_1(x)$ 及 $f_2(y)$ 的乘积, 积分区域 D 为 $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, 试证: 这个二重积分等于两个单积分的乘积, 即

$$\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dx dy = \left[\int_a^b f_1(x) dx \right] \cdot \left[\int_c^d f_2(y) dy \right].$$

4. 交换积分次序, 证明:

$$\int_0^a dy \int_0^y f(x) dx = \int_0^a (a - x) f(x) dx.$$

5. 设 $a < b$, 证明:

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx.$$

6. 改换下列二次积分的积分次序:

$$(1) \int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx; \quad (2) \int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx;$$

$$(3) \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx; \quad (4) \int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy.$$

7. 计算由四个平面 $x = 0, y = 0, x = 1$ 及 $y = 1$ 所围成的柱体被平面 $z = 0$ 及 $2x + 3y + z = 6$ 截得的立体的体积.

8. 求由平面 $x = 0, y = 0$ 及 $x + y = 1$ 所围成的柱体被平面 $z = 0$ 及抛物面 $x^2 + y^2 = 6 - z$ 截得的立体的体积.

9. 画出积分区域, 把积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 化为极坐标形式的二次积分, 其中积分区域 D 是:

$$\begin{aligned} (1) \quad x^2 + y^2 \leq a^2 \quad (a > 0); & \quad (2) \quad x^2 + y^2 \leq 2x; \\ (3) \quad 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq x \leq 1; & \quad (4) \quad x^2 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

10. 化下列二次积分为极坐标形式的二次积分:

$$(1) \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy; \quad (2) \int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy;$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy; \quad (4) \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy.$$

11. 把下列积分化为极坐标形式, 并计算积分值:

$$(1) \int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2 + y^2) dx;$$

$$(2) \int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2 + y^2) dy;$$

$$(3) \int_0^a dx \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} dy;$$

$$(4) \int_0^1 dx \int_{x^2}^x \sqrt{x^2 + y^2} dy.$$

12. 利用极坐标计算下列各题:

$$(1) \iint_D e^{x^2+y^2} d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 是圆形闭区域 } x^2 + y^2 \leq 4;$$

$$(2) \iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 是由圆周 } x^2 + y^2 = 1 \text{ 围成的在第一象限}$$

内的闭区域;

$$(3) \iint_D \arctan \frac{y}{x} d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 是由圆周 } x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4 \text{ 及直线 } y = 0,$$

$y = x$ 所围成的在第一象限内的闭区域.

13. 选用适当的坐标计算下列各题:

$$(1) \iint_D \frac{x^2}{y^2} d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 由直线 } x = 2, y = x \text{ 及曲线 } xy = 1 \text{ 所围成};$$

$$(2) \iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 是由圆周 } x^2 + y^2 = 1 \text{ 围成的在第一象限}$$

内的闭区域;

$$(3) \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 由直线 } y = x, y = x + a, y = a \text{ 及 } y = 3a \text{ (} a > 0 \text{)}$$

所围成;

$$(4) \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 是环形闭区域: } a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2.$$

14. 设平面薄片所占的闭区域 D 由螺线 $\rho = 2\varphi$ $\left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$ 与直线 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 所围成, 它的面密度为 $\mu(x, y) = x^2 + y^2$, 求这薄片的质量 (图 9-16).

15. 求由平面 $y = 0, y = kx$ ($k > 0$), $z = 0$ 及球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 所围成的在第一卦限内的立体的体积 (图 9-17, 其中 $\alpha = \arctan k$).

16. 计算以 xOy 面上的闭区域 $x^2 + y^2 \leq ax$ 为底, 而以曲面 $z = x^2 + y^2$ 为顶的曲顶柱体的体积.

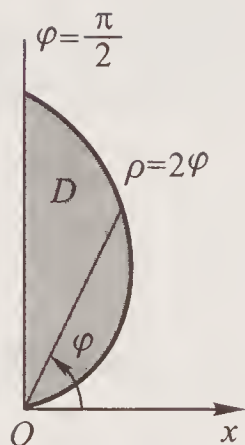


图 9-16

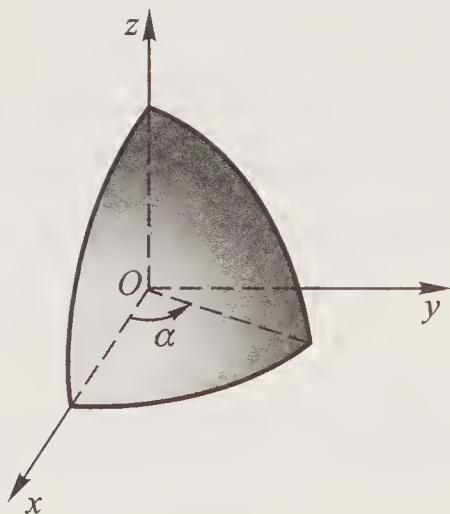


图 9-17

第三节 二重积分的应用

在前面的讨论和习题中,我们已用二重积分计算了曲顶柱体的体积和平面薄片的质量.本节中我们将把定积分应用中的元素法推广到二重积分的应用中,讨论二重积分的一些其他应用.

一、曲面的面积

设曲面 S 由方程 $z=f(x,y)$ 给出, D 为曲面 S 在 xOy 面上的投影区域,函数 $f(x,y)$ 在 D 上具有连续偏导数 $f_x(x,y)$ 及 $f_y(x,y)$.

我们来计算曲面 S 的面积 A .

在闭区域 D 上任取一直径很小的闭区域 $d\sigma$ (它的面积也记作 $d\sigma$),在小闭区域 $d\sigma$ 内取一点 $P(x,y)$,对应地曲面上有一点 $M(x,y,f(x,y))$,曲面 S 在点 M 的切平面设为 T (图 9-18).以小闭区域 $d\sigma$ 的边界为准线作母线平行于 z 轴

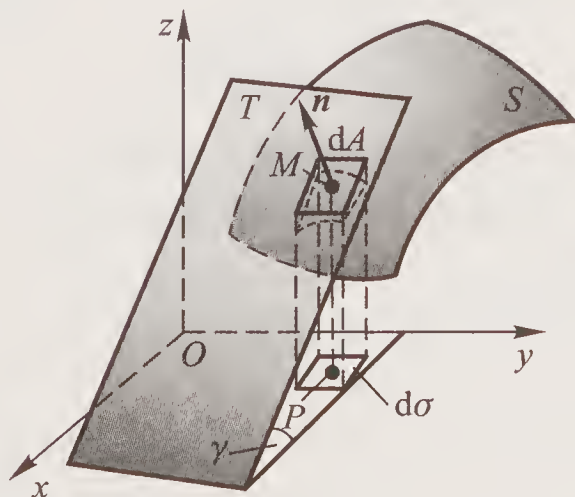


图 9-18

的柱面,这柱面在曲面 S 上截下一小片曲面,在切平面 T 上截下一小片平面. 由于 $d\sigma$ 的直径很小,小片切平面的面积 dA 可以近似代替相应那小片曲面的面积. 设曲面 S 在点 M 处的法向量 $\boldsymbol{n}$ (方向朝上)与 z 轴正向的夹角为 γ ,则

$$dA = \frac{d\sigma}{\cos \gamma} \quad ①$$

由第八章第六节知,曲面 $z = f(x, y)$ 在点 M 处方向朝上的法向量为

$$\boldsymbol{n} = (-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1),$$

因此

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}},$$

于是

① 设两平面 Π_1, Π_2 的夹角为 θ , Π_1 上的闭区域 D 在 Π_2 上的投影区域为 D_0 , 则 D 的面积 A 与 D_0 的面积 σ 之间有下列关系:

$$A = \frac{\sigma}{\cos \theta}.$$

事实上,先假定 D 是矩形闭区域,且其一边平行于两平面的交线 l ,边长为 a ,另一边长为 b (图 9-19),则 D_0 也是矩形闭区域,且边长分别为 a 及 $b \cos \theta$,从而 $\sigma = ab \cos \theta = A \cos \theta$,即

$$A = \frac{\sigma}{\cos \theta}.$$

在一般情况,可把 D 分成上述类型的 m 个小矩形闭区域(不计靠边界的不规则部分),则小矩形闭区域的面积 A_i 与其投影区域的面积 σ_i 满足 $A_i =$

$$\frac{\sigma_i}{\cos \theta} \quad (i = 1, 2, \dots, m), \text{ 从而 } \sum_{i=1}^m A_i =$$

$$\frac{1}{\cos \theta} \sum_{i=1}^m \sigma_i. \text{ 使各小闭区域的直径中的最大者趋于零,取极限便得 } A = \frac{\sigma}{\cos \theta}.$$

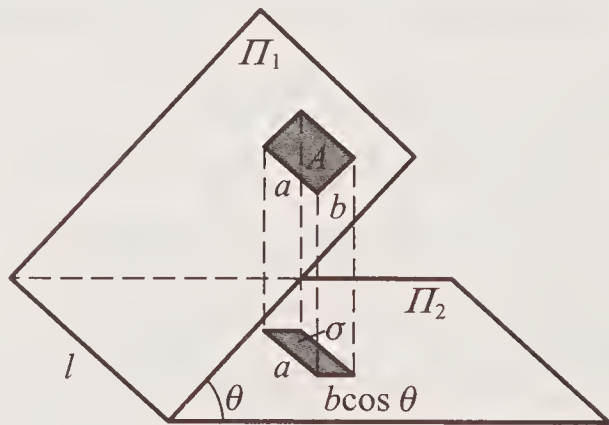


图 9-19

$$dA = \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} d\sigma.$$

这就是曲面 S 的面积元素, 以它为被积表达式在闭区域 D 上积分, 得

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} d\sigma,$$

或写作

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

这就是计算曲面面积的公式.

若曲面的方程为 $x = g(y, z)$ 或 $y = h(z, x)$, 则可分别把曲面投影到 yOz 面上(投影区域记作 D_{yz})或 zOx 面上(投影区域记作 D_{zx}), 类似地可得

$$A = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz,$$

或

$$A = \iint_{D_{zx}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} dz dx.$$

例 1 求半径为 a , 高为 H ($0 < H < a$) 的球冠面积.

解 如图 9-20 建立坐标系, 使球心位于原点, z 轴为球冠的对称轴, 则球冠的方程为

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

球面与 $z = a - H$ 的交线在 xOy 面上的投影为圆周

$$x^2 + y^2 = a^2 - (a - H)^2 = 2aH - H^2,$$

该圆周所围成的圆形区域

$$x^2 + y^2 \leq 2aH - H^2$$

就是球冠在 xOy 面上的投影区域 D . 由

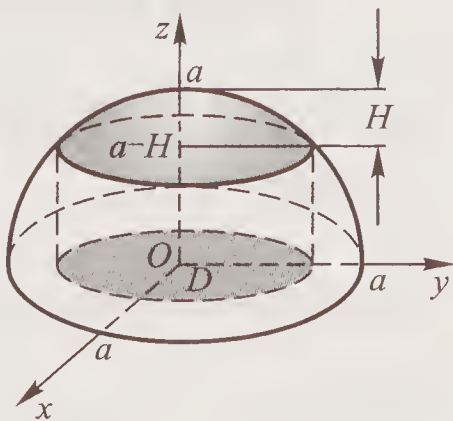


图 9-20

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

得

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

于是,所求的球冠面积为

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy,$$

利用极坐标,得

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2aH-H^2}} \frac{a\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} d\rho \\ &= 2\pi \left[-a \sqrt{a^2 - \rho^2} \right]_0^{\sqrt{2aH-H^2}} = 2\pi aH. \end{aligned}$$

当球冠的高度 $H = a$ 时得到半球面的面积为 $2\pi a^2$, 因此球面面积为 $4\pi a^2$.

思考题 1 试写出旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 在任一点处的法向量, 并计算抛物面含在圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 内的曲面面积.

二、平面薄片的质心

设 xOy 面上有 n 个质点, 分别位于 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 处, 质量分别为 $m_1, m_2, \dots, m_n$. 由力学知道, 该质点系关于 x 轴和 y 轴的静矩分别为 $M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i$ 和 $M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i$, 该质点系的质心坐标为

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

其中 $M = \sum_{i=1}^n m_i$ 为该质点系的总质量.

设有一薄片,占有 xOy 面上的闭区域 D ,在点 (x,y) 处的面密度为 $\mu(x,y)$. 假定 $\mu(x,y)$ 在 D 上连续,现在要求该薄片的质心的坐标.

在闭区域 D 上任取一直径很小的闭区域 $d\sigma$ (它的面积也记作 $d\sigma$), (x,y) 是小闭区域 $d\sigma$ 中的一个点. 由于小闭区域 $d\sigma$ 的直径很小,而 $\mu(x,y)$ 在 D 上连续,所以薄片中相应于小闭区域 $d\sigma$ 的部分的质量近似于

$$dM = \mu(x,y) d\sigma.$$

这部分质量又可近似地看作集中在点 (x,y) 处,于是可分别写出平面薄片关于 x 轴, y 轴的静矩元素 dM_x, dM_y 为

$$dM_x = y dM = y \mu(x,y) d\sigma, \quad dM_y = x dM = x \mu(x,y) d\sigma.$$

以这些元素为被积表达式在闭区域 D 上积分,便得

$$M = \iint_D \mu(x,y) d\sigma, \quad M_x = \iint_D y \mu(x,y) d\sigma, \quad M_y = \iint_D x \mu(x,y) d\sigma.$$

于是平面薄片的质心的坐标为

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D x \mu(x,y) d\sigma}{\iint_D \mu(x,y) d\sigma}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D y \mu(x,y) d\sigma}{\iint_D \mu(x,y) d\sigma}. \quad (1)$$

如果薄片是均匀的,即面密度 μ 为常量,则上式中可把 μ 提到积分号外面并从分子、分母中约去,这样便得均匀薄片的质心坐标为

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_D x d\sigma, \quad \bar{y} = \frac{1}{A} \iint_D y d\sigma, \quad (2)$$

其中 $A = \iint_D d\sigma$ 为闭区域 D 的面积. 这时薄片的质心完全由闭区域 D 的形状所决定,因此,均匀薄片的质心称为该薄片所占平面图形的形心.

例 2 设 D 为两圆 $\rho = 2\sin \varphi$ 和 $\rho = 4\sin \varphi$ 之间的闭区域,求

D 的形心(图 9-21).

解 因为闭区域 D 对称于 y 轴, 所以形心 $C(\bar{x}, \bar{y})$ 必在 y 轴上, 即 $\bar{x} = 0$.

再按公式

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \iint_D y d\sigma$$

来计算 $\bar{y}$. 由于 D 位于两圆之间, 两圆的半径分别为 1 和 2, 因此它的面积等于两圆面积之差, 即 $A = 3\pi$. 再利用极坐标计算积分

$$\begin{aligned} \iint_D y d\sigma &= \iint_D \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi = \int_0^\pi d\varphi \int_{2\sin \varphi}^{4\sin \varphi} \rho^2 \sin \varphi d\rho \\ &= \frac{56}{3} \int_0^\pi \sin^4 \varphi d\varphi = 7\pi. \end{aligned}$$

于是

$$\bar{y} = \frac{7\pi}{3\pi} = \frac{7}{3}.$$

故所求形心为 $C\left(0, \frac{7}{3}\right)$.

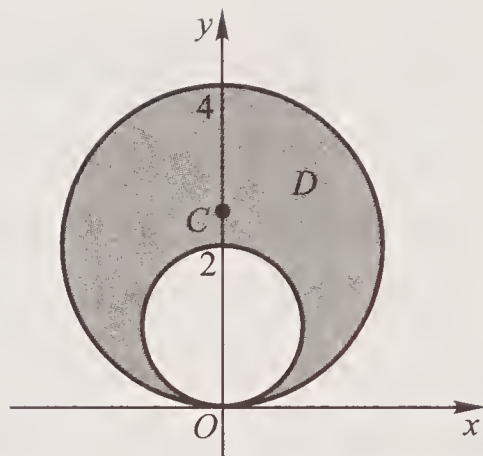


图 9-21

三、平面薄片的转动惯量

由力学知道, 位于点 (x, y) 处质量为 m 的质点对于 x 轴和 y 轴的转动惯量分别为

$$I_x = y^2 m \quad \text{和} \quad I_y = x^2 m.$$

而一质点系的转动惯量为各个质点的转动惯量之和.

设有一薄片, 占有 xOy 面上的闭区域 D , 在点 (x, y) 处的面密度为 $\mu(x, y)$, 且 $\mu(x, y)$ 在 D 上连续. 现在要求该薄片的转动惯量 I_x 和 I_y .

应用元素法. 在闭区域 D 上任取一直径很小的闭区域 $d\sigma$ (它的面积也记作 $d\sigma$), 再取点 $(x, y) \in d\sigma$, 则薄片相应于小闭

区域 $d\sigma$ 部分的质量近似等于 $dM = \mu(x, y) d\sigma$. 把这小片近似地看作位于 (x, y) 的质点, 即可得对于 x 轴和 y 轴的转动惯量的元素

$$dI_x = y^2 \mu(x, y) d\sigma \quad \text{和} \quad dI_y = x^2 \mu(x, y) d\sigma,$$

以这些元素为被积表达式在闭区域 D 上积分, 便得

$$I_x = \iint_D y^2 \mu(x, y) d\sigma, \quad I_y = \iint_D x^2 \mu(x, y) d\sigma.$$

例 3 求半径为 a 的均匀半圆薄片(面密度为常数 μ) 对于其直径边的转动惯量.

解 取坐标系如图 9-22 所示, 则薄片所占闭区域 D 可表示为

$$x^2 + y^2 \leq a^2, \quad y \geq 0.$$

而所求的转动惯量即是对于 x 轴的转动惯量 I_x . 因此

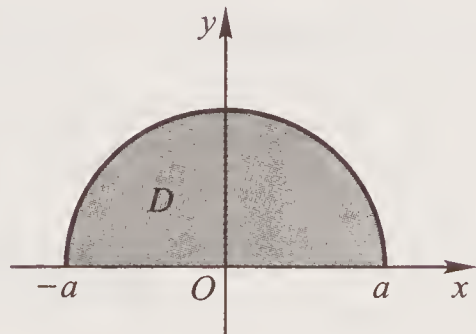


图 9-22

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D \mu y^2 d\sigma = \mu \iint_D \rho^3 \sin^2 \varphi d\rho d\varphi \\ &= \mu \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^a \rho^3 d\rho = \mu \frac{\pi}{2} \frac{a^4}{4} = \frac{1}{8} \mu \pi a^4 = \frac{1}{4} M a^2, \end{aligned}$$

其中 $M = \frac{1}{2} \mu \pi a^2$ 为半圆薄片的质量.

思考题 2 写出平面区域 D 的形心的计算公式, 并由此计算椭圆 $\frac{x^2}{4} +$

$\frac{y^2}{9} \leq 1$ 在第一象限部分图形的形心.

习题 9-3

1. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 含在圆柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 内部的那部分面积.
2. 求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $z^2 = 2x$ 所割下部分的面积.
3. 求平面 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ 被三坐标面所割出部分的面积.

4. 求闭区域 D 的形心, D 分别是:

(1) 由 $y = \sqrt{2px}$, $x = x_0$ 及 $y = 0$ 所围成的闭区域;

(2) 半椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, y \geq 0$.

5. 设平面薄片所占的闭区域 D 由抛物线 $y = x^2$ 及直线 $y = x$ 所围成, 它在点 (x, y) 处的面密度 $\mu(x, y) = x^2 y$, 求此薄片的质心.

6. 设有一等腰直角三角形的薄片, 腰长为 a , 各点处的面密度等于该点到直角顶点距离的平方, 求这薄片的质心.

7. 设均匀薄片(面密度 $\mu = 1$)所占闭区域 D 如下, 求指定的转动惯量:

(1) D 由抛物线 $y^2 = \frac{9}{2}x$ 与直线 $x = 2$ 所围成, 求 I_x 及 I_y ;

(2) $D: 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$, 求 I_x 及 I_y .

* 第四节 三重积分

一、三重积分的概念

二重积分作为和的极限的概念, 可以很自然地推广到三重积分.

定义 设 Ω 为空间有界闭区域, 函数 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上有界. 将 Ω 任意分成 n 个小闭区域

$$\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n,$$

其中 ΔV_i 表示第 i 个小闭区域, 同时也表示它的体积. 在每个小闭区域 ΔV_i 中任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) , 作乘积 $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 并作和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$. 如果当各小闭区域的直径^①

中的最大值 λ 趋于零时, 和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$ 的极限总存在, 且

① 空间有界闭区域的直径是指该区域中任意两点间距离的最大值.

与闭区域 Ω 的分法及点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的取法无关, 则称此极限为函数 $f(x, y, z)$ 在闭区域 Ω 上的三重积分, 记作 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$, 即

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i, \quad (1)$$

其中 dV 称为体积元素. 在直角坐标系中, 体积元素 dV 也记作 $dx dy dz$, 称为直角坐标系中的体积元素, 而把三重积分记作

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz.$$

当函数 $f(x, y, z)$ 在闭区域 Ω 上连续时, (1) 式右端的和的极限必定存在, 也就是函数 $f(x, y, z)$ 在闭区域 Ω 上的三重积分必定存在. 以后我们总假定函数 $f(x, y, z)$ 在闭区域 Ω 上是连续的. 关于二重积分的一些术语, 例如被积函数、积分区域等, 都可相应地用于三重积分, 三重积分的性质也与二重积分的性质类似, 这里不再重复.

如果 $\mu(x, y, z)$ 表示物体在点 (x, y, z) 处的密度, Ω 是该物体所占的空间闭区域, 则 $\sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$ 是该物体质量 M 的近似值, 这个和当 $\lambda \rightarrow 0$ 时的极限便是该物体的质量 M , 即

$$M = \iiint_{\Omega} \mu(x, y, z) dV.$$

二、三重积分的计算法

三重积分可化为三次积分来计算, 下面我们直接给出三重积分化为三次积分的方法.

假设平行于 z 轴且穿过闭区域 Ω 内部的直线与 Ω 的边界曲面 S 相交不多于两点. 把闭区域 Ω 投影到 xOy 面上, 投影区域记作 D (图 9-23). 以 D 的边界为准线作母线平行于 z 轴的柱面 H , 这柱面把边界曲面 S 分割成三部分: 下曲面 S_1 、上曲面 S_2 及侧面 (即 S 与 H 的公共部分), 设 S_1 及 S_2 的方程分别为

$$S_1: z = z_1(x, y),$$

$$S_2: z = z_2(x, y),$$

其中 $z_1(x, y)$ 及 $z_2(x, y)$ 都是 D 上的连续函数, 且 $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$. 过 D 内任一点 (x, y) 作平行于 z 轴的直线, 这直线通过下曲面 S_1 穿入 Ω 内, 然后通过上曲面 S_2 穿出 Ω 外, 穿入点及穿出点的竖坐标分别为 $z_1(x, y)$ 及 $z_2(x, y)$. 于是闭区域 Ω 可表示为

$$z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), \quad (x, y) \in D.$$

先把 x, y 看作定值, 把 $f(x, y, z)$ 只看作 z 的函数, 在区间 $[z_1(x, y), z_2(x, y)]$ 上对 z 积分, 积分的结果是 x, y 的函数, 记为 $F(x, y)$, 即

$$F(x, y) = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

然后计算 $F(x, y)$ 在投影区域 D 上的二重积分, 便得所求的三重积分. 即

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iint_D F(x, y) d\sigma = \iint_D \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] d\sigma.$$

上式常记作

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (2)$$

如果投影区域 D 可用不等式

$$y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \quad a \leq x \leq b$$

来表示, 由 (2) 式可得

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (3)$$

公式 (3) 把三重积分化为先对 z 、次对 y 、最后对 x 的三次积分.

如果平行于 x 轴或 y 轴且穿过闭区域 Ω 内部的直线与 Ω 的

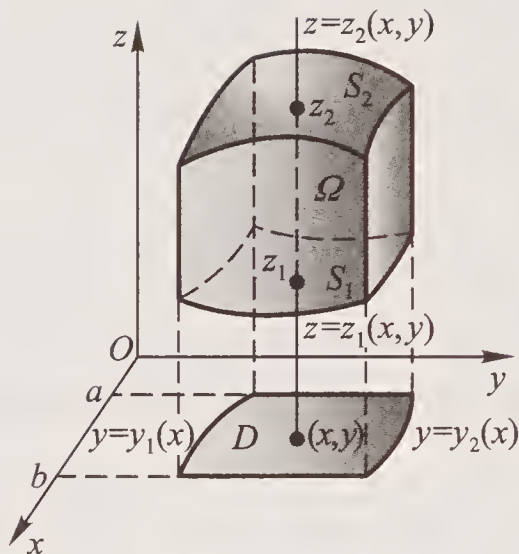


图 9-23

边界曲面 S 相交不多于两点,那么也可把 Ω 投影到 yOz 面或 zOx 面上,便可把三重积分化为按其他顺序的三次积分. 如果平行于坐标轴且穿过闭区域 Ω 内部的直线与边界曲面 S 的交点多于两点,那么也可像处理二重积分中的类似问题那样,把 Ω 分成若干个部分区域,使每个部分区域上的三重积分可化为相应的三次积分,而 Ω 上的三重积分即为各部分区域上的三重积分之和.

例 1 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$, 其中 Ω 为三个坐标面及平面 $x + 2y + z = 1$ 所围成的闭区域.

解 积分区域 Ω 如图 9-24 所示. 将 Ω 投影到 xOy 面上,得投影区域 D 为三角形 OAB , 直线 OA, OB 及 AB 的方程依次为 $y = 0, x = 0$ 及 $x + 2y = 1$. 于是投影区域 D 可表示为

$$0 \leq y \leq \frac{1-x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

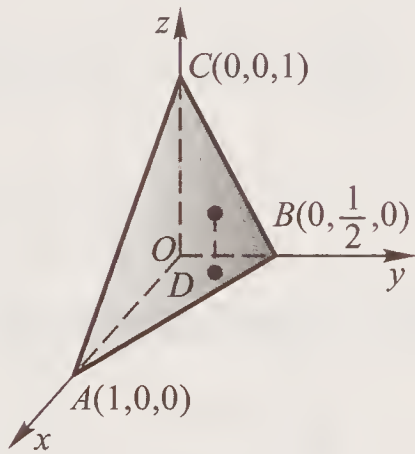


图 9-24

在 D 内任取一点 (x, y) , 过此点作平行于 z 轴的直线, 该直线通过平面 $z = 0$ 穿入 Ω 内, 再通过平面 $z = 1 - x - 2y$ 穿出 Ω . 于是闭区域 Ω 可表示为

$$0 \leq z \leq 1 - x - 2y, \quad 0 \leq y \leq \frac{1-x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

由公式(3)得

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} x dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} dy \int_0^{1-x-2y} x dz \\ &= \int_0^1 x dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} (1-x-2y) dy \\ &= \int_0^1 x \left[\frac{(1-x)^2}{2} - \left(\frac{1-x}{2} \right)^2 \right] dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 x(1-x)^2 dx = \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

对于公式(2)中的二重积分,我们亦可利用极坐标来计算.

例 2 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 为半球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0$.

解 把 Ω 投影到 xOy 面上,得投影区域 D 为 $x^2 + y^2 \leq a^2$, 即 Ω 可表示为

$$0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in D,$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dx dy dz &= \iint_D dx dy \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} z dz \\ &= \iint_D \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_0^{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \iint_D \frac{a^2 - x^2 - y^2}{2} dx dy \end{aligned}$$

上式右端利用极坐标,得

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dx dy dz &= \iint_D \frac{a^2 - \rho^2}{2} \cdot \rho d\rho d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a (a^2 \rho - \rho^3) d\rho \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{1}{2} a^2 \rho^2 - \frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^a = \frac{1}{4} \pi a^4. \end{aligned}$$

一般地,如果(2)式中的 D 在极坐标系中可表示为

$$\rho_1(\varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi), \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta,$$

则

$$\begin{aligned} &\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} d\rho \int_{z_1(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)}^{z_2(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)} \rho f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) dz. \quad (4) \end{aligned}$$

设点 P 的直角坐标为 (x, y, z) , 如果

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z, \end{cases}$$

则称 (ρ, φ, z) 为点 P 的柱面坐标, 而(4)式就是把三重积分化为柱面坐标的三次积分的公式.

上一节利用元素法把平面薄片的质心和转动惯量表示成了二重积分, 同样利用元素法可得:

设物体占有空间区域 Ω , 在点 (x, y, z) 处的密度为 $\mu(x, y, z)$, 则其质心坐标 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 为

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} x \mu(x, y, z) dV,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} y \mu(x, y, z) dV,$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} z \mu(x, y, z) dV.$$

如果物体是均匀的, 即 $\mu(x, y, z)$ 为常数时, 质心也称为形心, 其坐标 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 为

$$\bar{x} = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} x dV, \quad \bar{y} = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} y dV, \quad \bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} z dV,$$

其中 $V = \iiint_{\Omega} dV$ 为物体的体积.

物体关于 x 轴、 y 轴和 z 轴的转动惯量(分别记作 I_x 、 I_y 和 I_z)为

$$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \mu(x, y, z) dV,$$

$$I_y = \iiint_{\Omega} (z^2 + x^2) \mu(x, y, z) dV,$$

$$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \mu(x, y, z) dV,$$

其中 $M = \iiint_{\Omega} \mu(x, y, z) dV$ 为物体的质量.

例3 闭区域 Ω 由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及 $z = 2 - x^2 - y^2$ 所围成, 求 Ω 的形心的坐标.

解 Ω 是以 z 轴为旋转轴的旋转体, 故形心必在 z 轴上, 即 $\bar{x} = \bar{y} = 0$, 而 $\bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} z dV$.

两个曲面的交线的方程是

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ z = 2 - x^2 - y^2, \end{cases}$$

消去 z 得 $x^2 + y^2 = 1$, 于是得 Ω 在 xOy 面上的投影区域 D 为 $x^2 + y^2 \leq 1$ (图 9-25). 对任一 $(x, y) \in D$, $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$.

于是

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dV = \iint_D dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2-x^2-y^2} dz \\ &= \iint_D (2 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy. \end{aligned}$$

利用极坐标计算上面这个二重积分, 得

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (2 - \rho^2 - \rho) \rho d\rho = \frac{5}{6} \pi.$$

又

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dV &= \iint_D dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2-x^2-y^2} z dz \\ &= \frac{1}{2} \iint_D [(2 - x^2 - y^2)^2 - (\sqrt{x^2 + y^2})^2] dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 [(2 - \rho^2)^2 - \rho^2] \rho d\rho = \frac{11}{12} \pi, \end{aligned}$$

因此 $\bar{z} = \frac{11}{12} \pi / \frac{5}{6} \pi = \frac{11}{10}$, 从而形心为

$$\left(0, 0, \frac{11}{10}\right).$$

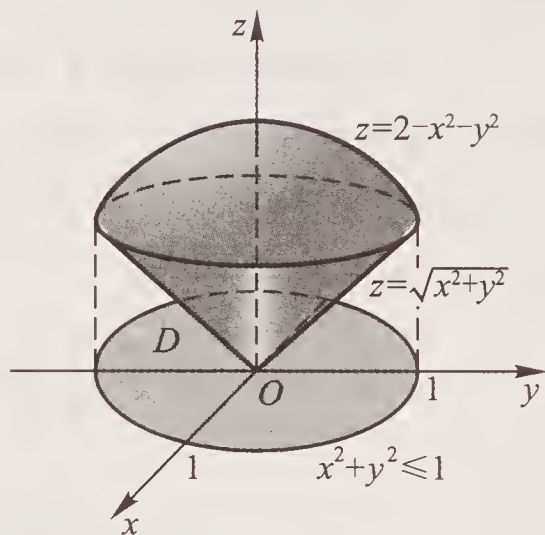


图 9-25

* 习题 9-4

1. 化三重积分 $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 为三次积分, 其中积分区域 Ω 分

别是:

(1) 由旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 及平面 $z = 1$ 所围成的在第一卦限内的闭区域;

(2) 由抛物面 $z = x^2 + 2y^2$ 及抛物柱面 $z = 2 - x^2$ 围成的闭区域.

2. 设有一物体, 占有空间闭区域 $\Omega: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$, 在点 (x, y, z) 处的密度为 $\mu(x, y, z) = x + y + z$, 求该物体的质量.

3. 计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} xy^2 z^3 dV$, 其中 Ω 由平面 $y = x, x = 1, z = 0$ 及曲面 $z = xy$ 围成;

(2) $\iiint_{\Omega} \frac{dV}{(1 + x + y + z)^3}$, 其中 Ω 是由平面 $x = 0, y = 0, z = 0$ 及 $x + y + z =$

1 所围成的四面体;

(3) $\iiint_{\Omega} xz dV$, 其中 Ω 由平面 $z = 0, z = y, y = 1$ 及抛物柱面 $y = x^2$ 围成;

(4) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dV$, 其中 Ω 由旋转抛物面 $x^2 + y^2 = 2z$ 及平面 $z = 2$

围成.

4. 利用三重积分计算下列由各组旋转曲面所围成的旋转体的体积:

(1) $z = 6 - x^2 - y^2$ 及 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

(2) $z = \sqrt{5 - x^2 - y^2}$ 及 $x^2 + y^2 = 4z$.

5. 利用三重积分计算下列由各组曲面所围成的闭区域的形心:

(1) $z^2 = x^2 + y^2$ 及 $z = 1$;

(2) $x = 0, y = 0, z = 0, x + y = a (a > 0)$ 及 $z = x^2 + y^2$.

* 第五节 对弧长的曲线积分

把定积分的概念推广到定义在平面曲线上的二元函数上去, 即可得(平面)曲线积分的概念.

一、对弧长的曲线积分的概念

我们从讨论曲线形构件的质量这一实例出发,引入对弧长的曲线积分的概念.

假设某曲线形构件所占的位置为 xOy 面上的一段曲线弧 L , 它的两个端点是 A, B (图 9-26), 并设构件的线密度为 $\mu(x, y)$, $(x, y) \in L$, 现在来计算这构件的质量 M .

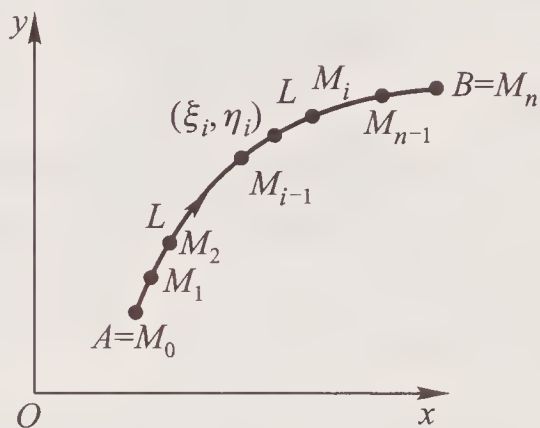


图 9-26

如果构件的线密度是常量, 那么构件的质量就等于它的线密度与长度之积. 然而当线密度是变量时, 这方法就不适用了, 而要用定积分的思想方法来解决. 我们用 L 上的点 $A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_n = B$ 把 L 分成 n 个小弧段, 在线密度 $\mu(x, y)$ 是连续函数的条件下, 可在小弧段 $\overline{M_{i-1}M_i}$ 上任取一点 (ξ_i, η_i) , 并以 $\mu(\xi_i, \eta_i)$ 代替这小段构件上各点处的密度, 从而得到该小段构件的质量的近似值 $\mu(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$, 其中 Δs_i 表示 $\overline{M_{i-1}M_i}$ 的长度 ($i = 1, 2, \dots, n$). 于是整个曲线形构件的质量

$$M \approx \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i.$$

用 λ 表示 n 个小弧段的最大长度, 即 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta s_i\}$. 令 $\lambda \rightarrow 0$, 取上式右端的极限, 就得到整个构件质量的精确值

$$M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i.$$

这类和式的极限在研究其他问题时还会遇到, 故引入如下定义.

定义 设 L 是 xOy 面上的一条以 A, B 为端点的光滑曲线弧^①, 函数 $f(x, y)$ 在 L 上有界. 在 L 上任意插入一个点列 $A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, M_n = B$, 把 L 分成 n 个小弧段. 设第 i 个小弧段的长度为 Δs_i , (ξ_i, η_i) 为第 i 个小弧段上任意取定的一点 ($i = 1, 2, \dots, n$), 作和

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i,$$

记 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta s_i\}$, 如果当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$ 的极限总存在, 且与曲线弧 L 的分法及点 (ξ_i, η_i) 的取法无关, 则称此极限为 函数 $f(x, y)$ 在平面曲线 L 上对弧长的曲线积分, 记作

$\int_L f(x, y) ds$, 即

$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i, \quad (1)$$

其中 $f(x, y)$ 称为被积函数, $f(x, y) ds$ 称为被积表达式, L 称为积分弧段, ds 称为弧长元素. 对弧长的曲线积分也称为第一类曲线积分.

如果 L 是分段光滑的, 即 L 是由有限多条光滑曲线弧连接而成, 则规定 $f(x, y)$ 在 L 上的曲线积分等于 $f(x, y)$ 在各光滑曲线段上的曲线积分之和. 若 L 是闭曲线, 则曲线积分的积分号常写作 $\oint_L$.

与定积分存在的条件相类似, 当函数 $f(x, y)$ 在积分弧段 L 上连续时, 对弧长的曲线积分 $\int_L f(x, y) ds$ 存在 (以下总假定 $f(x, y)$ 在 L 上连续). 由此, 当曲线形构件的线密度 $\mu(x, y)$ 在 L 上连续

① 光滑曲线是指曲线上每一点处都有切线, 且当切点沿曲线移动时, 切线随之连续转动.

时,本节开始时讨论的曲线形构件的质量 $M = \int_L \mu(x, y) ds$. 显然,当被积函数为常数 1 时, $\int_L ds$ 等于 L 的长度.

由对弧长的曲线积分的定义可知,对弧长的曲线积分与定积分有类似的性质,比如有

(1) 对任意的常数 α, β , 有

$$\int_L [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] ds = \alpha \int_L f(x, y) ds + \beta \int_L g(x, y) ds.$$

(2) 设 $L = \widehat{AB}$, 点 $C \in \widehat{AB}$, 则

$$\int_{\widehat{AB}} f(x, y) ds = \int_{\widehat{AC}} f(x, y) ds + \int_{\widehat{CB}} f(x, y) ds.$$

(3) 设 M 为 $|f(x, y)|$ 在 L 上的最大值, l 为 L 的长度, 则有

$$\left| \int_L f(x, y) ds \right| \leq \int_L |f(x, y)| ds \leq Ml.$$

二、对弧长的曲线积分的计算法

对弧长的曲线积分可以化为定积分来计算. 设积分弧段 L 由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

给出, 其中函数 $\varphi(t), \psi(t)$ 在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上具有连续导数, 且 $\varphi'(t), \psi'(t)$ 不同时为零 (这些条件相当于假设 L 是光滑曲线弧), $f(x, y)$ 在 L 上连续, 则有如下的计算公式:

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (\alpha < \beta). \quad (2)$$

公式(2)的推导从略.

公式(2)表明, 计算对弧长的曲线积分 $\int_L f(x, y) ds$ 时, 只要把 x, y, ds 依次换为 $\varphi(t), \psi(t), \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$, 然后从 α 到 β 作定积

分就可以了. 这里要注意, 定积分的下限 α 一定要小于定积分的上限 β .

例 1 计算 $\int_L \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} ds$,

其中 L 为上半圆弧 $x^2 + y^2 = ax, y \geq 0$ (图 9-27).

解 L 的极坐标方程为 $\rho = a \cos \varphi$ ($0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$), 以 φ 为参数, 可得 L 的参数方程

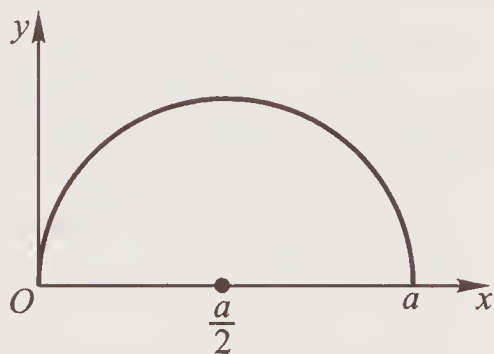


图 9-27

$$\begin{cases} x = a \cos^2 \varphi, \\ y = a \cos \varphi \sin \varphi \end{cases} \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

于是

$$\begin{aligned} \int_L \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |a \sin \varphi| \sqrt{(-a \sin 2\varphi)^2 + (a \cos 2\varphi)^2} d\varphi \\ &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi = a^2. \end{aligned}$$

当曲线 L 由方程

$$y = \psi(x), \quad a \leq x \leq b$$

给出时, 相当于给出参数方程

$$\begin{cases} x = x, \\ y = \psi(x), \end{cases} \quad a \leq x \leq b,$$

于是公式(2)变为

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f[x, \psi(x)] \sqrt{1 + \psi'^2(x)} dx. \quad (3)$$

类似地, 当 L 由方程

$$x = \varphi(y), \quad c \leq y \leq d$$

给出时, 公式(2)变为

$$\int_L f(x, y) ds = \int_c^d f[\varphi(y), y] \sqrt{\varphi'^2(y) + 1} dy. \quad (4)$$

例 2 计算 $\oint_L \sqrt{y} ds$, 其中 L 为抛物线 $y = x^2$, 直线 $x = 1$ 及 x 轴所围成的曲边三角形的整个边界.

解 如图 9-28 所示, $L = \overline{OA} + \overline{AB} + \widehat{OB}$ ①, 分别写出方程为

$$\overline{OA}: y = 0, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$\overline{AB}: x = 1, \quad 0 \leq y \leq 1;$$

$$\widehat{OB}: y = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

于是

$$\int_{\overline{OA}} \sqrt{y} ds = \int_{\overline{OA}} 0 \cdot ds = 0,$$

$$\int_{\overline{AB}} \sqrt{y} ds = \int_0^1 \sqrt{y} \cdot \sqrt{1+0} dy = \int_0^1 \sqrt{y} dy = \frac{2}{3},$$

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{OB}} \sqrt{y} ds &= \int_0^1 \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1+(2x)^2} dx = \int_0^1 x \sqrt{1+4x^2} dx \\ &= \left[\frac{1}{12} (1+4x^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

因此

$$\oint_L \sqrt{y} ds = 0 + \frac{2}{3} + \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1) = \frac{1}{12} (5\sqrt{5} + 7).$$

例 3 计算半径为 R 、中心角为 2α 的圆弧关于它的对称轴的转动惯量(设线密度 $\mu = 1$).

解 取坐标系如图 9-29 所示, 则所求转动惯量即为 L 关于 x 轴的转动惯量 I_x .

我们用元素法列出 I_x 的积分表达式, 然后计算积分.

在 L 上取相近两点 $M(x, y)$ 及 $M'(x+dx, y+dy)$, 设 $\widehat{MM'}$ 的长

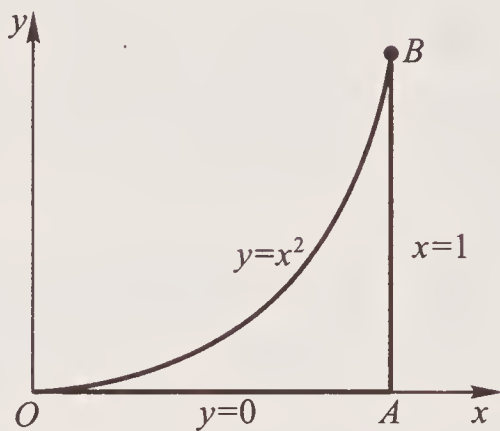


图 9-28

① 记号 $L = \overline{OA} + \overline{AB} + \widehat{OB}$ 表示 L 由 $\overline{OA}$, $\overline{AB}$ 和 $\widehat{OB}$ 三段组成, 以下类似记号意义相同.

度为 ds , 则它的质量 $dm = \mu ds$, 把它看作位于点 $M(x, y)$ 的质点, 则它对 x 轴的转动惯量为

$$dI_x = y^2 dm = \mu y^2 ds,$$

于是

$$I_x = \int_L \mu y^2 ds = \int_L y^2 ds.$$

取 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi, \\ y = R \sin \varphi, \end{cases} \quad -\alpha \leq \varphi \leq \alpha,$$

则得

$$\begin{aligned} I_x &= \int_L y^2 ds = \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \sin^2 \varphi \cdot R d\varphi \\ &= \frac{R^3}{2} \left[\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right]_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{2} R^3 (2\alpha - \sin 2\alpha). \end{aligned}$$

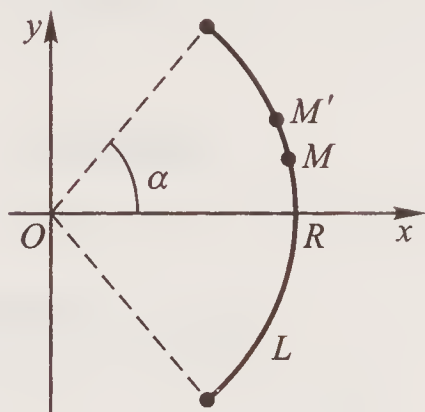


图 9-29

* 习题 9-5

1. 计算下列曲线积分(其中 $a > 0$):

(1) $\oint_L (x^2 + y^2)^2 ds$, 其中 L 为圆周 $x = a \cos \varphi, y = a \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$;

(2) $\int_L (x + y) ds$, 其中 L 为连接 $(1, 0)$ 与 $(0, 1)$ 两点的直线段;

(3) $\oint_L x ds$, 其中 L 为由直线 $y = x$ 及抛物线 $y = x^2$ 所围成的区域的整个边界;

(4) $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$, 直线 $y = x$ 及 x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界;

(5) $\int_L y^2 ds$, 其中 L 为摆线的一拱

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi;$$

(6) $\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} ds$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = ax$.

2. 求半径为 a , 中心角为 2α 的均匀圆弧的形心.

3. 设 L 为圆周 $x^2 + y^2 = 2ax (a > 0)$, 它的线密度为 $\mu = x + a$, 求 L 关于 x 轴及关于 y 轴的转动惯量 I_x 及 I_y .

* 第六节 对坐标的曲线积分

一、对坐标的曲线积分的概念

我们从讨论变力沿曲线所做的功这一实际问题出发, 引入对坐标的曲线积分的概念. 设在 xOy 面上一个质点在变力 $\mathbf{F}(x, y)$ 的作用下, 从点 A 沿光滑曲线 L 移动到 B , 已知

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j},$$

其中函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 L 上连续. 要计算质点在移动过程中变力 $\mathbf{F}(x, y)$ 所做的功 (图 9-30).

我们知道, 如果力 $\mathbf{F}$ 是恒力, 且质点沿直线从 A 移动到 B , 那么恒力 $\mathbf{F}$ 所做的功等于向量 $\mathbf{F}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的数量积, 即

$$W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

现在 $\mathbf{F}$ 是变力, 且质点沿曲线 L 移动, 功 W 不能按以上公式计算, 而要用定积分的思想方法来解决.

我们在 L 上自 A 至 B 依次取分点

$$M_0 = A, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, M_n = B,$$

把 L 分成 n 个小弧段, 设分点 M_i 的坐标为 (x_i, y_i) ($i = 0, 1, \dots, n$). 取其中一个有向小弧段 $\overline{M_{i-1}M_i}$ 来分析. 由于 $\overline{M_{i-1}M_i}$ 光滑且很短, 可以用有向线段 $\overrightarrow{M_{i-1}M_i} = \Delta x_i \mathbf{i} + \Delta y_i \mathbf{j}$ 来近似代替, 其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 是向量 $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$ 在 x 轴上的投影, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ 是 $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$ 在 y 轴上的投影. 又由于函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 L 上连续, 故在小弧

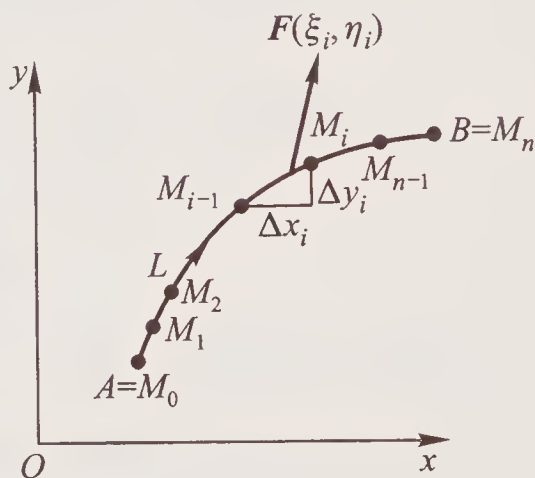


图 9-30

段 $\overline{M_{i-1}M_i}$ 上变力 $F(x, y)$ 变化不大, 可以用 $\overline{M_{i-1}M_i}$ 上任一点 (ξ_i, η_i) 处的力来近似代替, 即在 $\overline{M_{i-1}M_i}$ 上,

$$F(x, y) \approx F(\xi_i, \eta_i) = P(\xi_i, \eta_i)\mathbf{i} + Q(\xi_i, \eta_i)\mathbf{j}.$$

这样, 变力 $F(x, y)$ 沿有向小弧段 $\overline{M_{i-1}M_i}$ 所做的功 ΔW_i 就近似等于恒力 $F(\xi_i, \eta_i)$ 沿有向线段 $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$ 所做的功, 即

$$\Delta W_i \approx F(\xi_i, \eta_i) \cdot \overrightarrow{M_{i-1}M_i} = P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i,$$

于是

$$W = \sum_{i=1}^n \Delta W_i \approx \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i].$$

把小弧段长度的最大值记作 λ , 令 $\lambda \rightarrow 0$, 所得上述和式的极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i]$$

可以认为是变力 F 沿有向曲线 L 所做的功.

这种和式的极限在研究其他问题时也会遇到, 故引入下述定义.

定义 设 L 为 xOy 面上从点 A 到点 B 的一条光滑的有向曲线弧, 函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 L 上有界. 在 L 上沿 L 的方向依次任意取分点 $A = M_0, M_1, \dots, M_n = B$, 把 L 分成 n 个有向小弧段 $\overline{M_{i-1}M_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 设 $\overrightarrow{M_{i-1}M_i} = \Delta x_i \mathbf{i} + \Delta y_i \mathbf{j}$, 并记 λ 为小弧段长度的最大值. 在 $\overline{M_{i-1}M_i}$ 上任意取一点 (ξ_i, η_i) , 如果和 $\sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i$ 的极限总存在, 且与曲线 L 的分法及点 (ξ_i, η_i) 的取法无关, 那么这个极限称为函数 $P(x, y)$ 在有向弧段 L 上对坐标 x 的曲线积分, 记作

$$\int_L P(x, y) dx.$$

类似地, 如果和 $\sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i$ 的极限总存在, 且与曲线 L

的分法及点 (ξ_i, η_i) 的取法无关,那么这个极限称为函数 $Q(x, y)$ 在有向弧段 L 上对坐标 y 的曲线积分,记作

$$\int_L Q(x, y) dy.$$

即

$$\int_L P(x, y) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i, \quad (1)$$

$$\int_L Q(x, y) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i, \quad (2)$$

其中 $P(x, y)$ 及 $Q(x, y)$ 称为被积函数, $P(x, y) dx$ 及 $Q(x, y) dy$ 称为被积表达式, L 称为积分弧段. 对坐标的曲线积分也称为第二类曲线积分.

在应用上经常出现

$$\int_L P(x, y) dx + \int_L Q(x, y) dy$$

这种合并起来的形式,为简便起见,把上式写成

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \quad (3)$$

如果 L 是分段光滑的,则规定函数在 L 上对坐标的曲线积分等于在各光滑曲线段上对坐标的曲线积分之和.

与定积分的存在条件相类似,当函数 $P(x, y)$ 及 $Q(x, y)$ 在弧段 L 上连续时,曲线积分 $\int_L P(x, y) dx$ 及 $\int_L Q(x, y) dy$ 均存在(以下总假定 $P(x, y)$ 及 $Q(x, y)$ 在 L 上连续). 由此,当变力 $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ 的两个分量 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 均在 L 上连续时,本节开始时讨论的变力 $\mathbf{F}(x, y)$ 沿有向弧段 L 所做的功

$$W = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

根据定义,可以证明对坐标的曲线积分具有下述性质:

(1) 设点 $C \in \widehat{AB}$, 则

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy = \int_{\widehat{AC}} Pdx + Qdy + \int_{\widehat{CB}} Pdx + Qdy.$$

(2) 设 L^- 是与 L 方向相反的有向弧段, 则

$$\int_{L^-} Pdx + Qdy = - \int_L Pdx + Qdy.$$

这是因为和式中的 Δx_i 及 Δy_i 是表示有向小线段 $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$ 在 x 轴及 y 轴上的投影, 当弧段的方向改变时, 它们的投影正好改变符号, 从而和式极限——积分改变符号. 这与对弧长的曲线积分不同, 例如, 在弧段 $\widehat{AB}$ 上,

$$\int_{\widehat{AB}} f(x, y) ds = \int_{\widehat{BA}} f(x, y) ds,$$

而

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = - \int_{\widehat{BA}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

因此关于对坐标的曲线积分, 我们必须注意积分弧段的方向.

二、对坐标的曲线积分的计算法

与对弧长的曲线积分相类似, 对坐标的曲线积分也可化为定积分计算.

设 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 在有向曲线弧 L 上有定义且连续, L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

当参数 t 单调地由 α 变到 β 时, 点 $M(x, y)$ 从 L 的起点 A 沿 L 移动到终点 B , $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在以 α 及 β 为端点的闭区间上具有一阶连续导数, 且 $\varphi'(t)$ 和 $\psi'(t)$ 不同时为零, 则有如下的计算公式

$$\begin{aligned} & \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \{ P[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)] \psi'(t) \} dt. \quad (4) \end{aligned}$$

公式(4)的推导从略.

公式(4)表明,计算对坐标的曲线积分 $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 时,只要把 x, y, dx, dy 依次换为 $\varphi(t), \psi(t), \varphi'(t)dt, \psi'(t)dt$, 然后从 L 的起点所对应的参数值 α 到 L 的终点所对应的参数值 β 作定积分就可以了. 这里要注意,下限 α 对应于 L 的起点,上限 β 对应 L 的终点, α 不一定小于 β .

如果 L 由方程 $y = \psi(x)$ 或 $x = \varphi(y)$ 给出,可以看作参数方程的特殊情形. 具体地,当 L 由 $y = \psi(x)$ (x 自 a 到 b) 给出时,公式(4)成为

$$\begin{aligned} & \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy \\ &= \int_a^b \{P[x, \psi(x)] + Q[x, \psi(x)]\psi'(x)\} dx. \end{aligned} \quad (5)$$

当 L 由方程 $x = \varphi(y)$ (y 自 c 到 d) 给出时,公式(4)成为

$$\begin{aligned} & \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy \\ &= \int_c^d \{P[\varphi(y), y]\varphi'(y) + Q[\varphi(y), y]\} dy. \end{aligned} \quad (6)$$

例 1 计算 $\int_L xydx$, 其中 L 为抛物线 $y^2 = x$ 上从点 $A(1, -1)$ 到点 $B(1, 1)$ 的一段弧(图 9-31).

解一 将所给曲线积分化为对 x 的定积分来计算. 这时要把 L 分为 $\widehat{AO}$ 和 $\widehat{OB}$ 两部分, 其中

$$\widehat{AO}: y = -\sqrt{x}, x \text{ 自 } 1 \text{ 至 } 0,$$

$$\widehat{OB}: y = \sqrt{x}, x \text{ 自 } 0 \text{ 至 } 1.$$

因此,

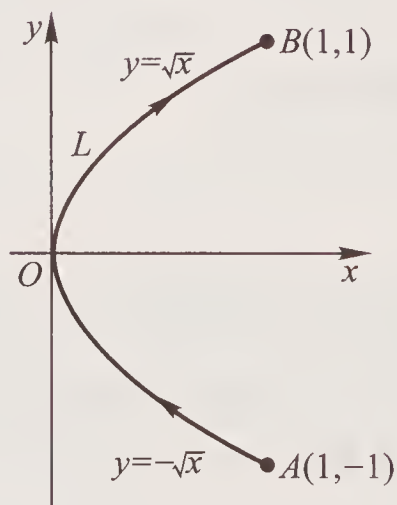


图 9-31

$$\begin{aligned}
 \int_L xy dx &= \int_{\widehat{AO}} xy dx + \int_{\widehat{OB}} xy dx \\
 &= \int_1^0 x(-\sqrt{x}) dx + \int_0^1 x\sqrt{x} dx \\
 &= 2 \int_0^1 x^{3/2} dx = \frac{4}{5}.
 \end{aligned}$$

解二 将所给曲线积分化为对 y 的定积分来计算. 由于

$$L: x = y^2, \quad y \text{ 自 } -1 \text{ 到 } 1,$$

因此,

$$\int_L xy dx = \int_{-1}^1 y^2 \cdot y(y^2)' dy = 2 \int_{-1}^1 y^4 dy = \frac{4}{5}.$$

例 2 计算 $\int_L x dy - y dx$, 其

中 L 为

(1) 半径为 a 、圆心为原点、按逆时针方向绕行的上半圆周;

(2) 从点 $A(a, 0)$ 至点 $B(-a, 0)$ 的直线段(图 9-32).

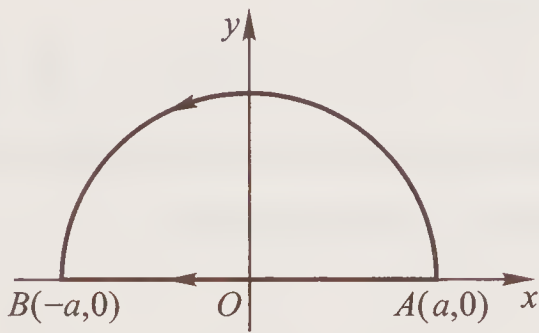


图 9-32

解 (1) 取 L 的参数方程

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi, \\ y = a \sin \varphi, \end{cases} \quad \varphi \text{ 从 } 0 \text{ 到 } \pi$$

进行计算, 有

$$\begin{aligned}
 \int_L x dy - y dx &= \int_0^\pi [a \cos \varphi \cdot a \cos \varphi - a \sin \varphi (-a \sin \varphi)] d\varphi \\
 &= \int_0^\pi a^2 d\varphi = \pi a^2.
 \end{aligned}$$

(2) 现在 L 是有向线段 $\overline{AB}$: $y = 0, x$ 自 a 至 $-a$. 所以

$$\int_{\overline{AB}} x dy - y dx = \int_a^{-a} (x \cdot 0 - 0) dx = 0.$$

例 3 计算 $\oint_L \frac{x dx - y dy}{x^2 + 2y^2}$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 沿逆时针

方向.

解 $L: \begin{cases} x = \cos \varphi, \\ y = \sin \varphi, \end{cases} \varphi \text{ 从 } -\pi \text{ 到 } \pi. \text{ 故}$

$$\oint_L \frac{x dx - y dy}{x^2 + 2y^2} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-2 \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi} d\varphi = 0.$$

上式等于零是因为奇函数在关于原点对称的区间上的积分为零.

例 4 设有一质量为 m 的质点受重力作用在铅直平面上沿某一曲线弧从点 A 移动到点 B , 求重力所做的功.

解 取水平直线为 x 轴, y 轴铅直向上(图 9-33). 则重力在两坐标轴上的投影分别为

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = -mg,$$

这里 g 是重力加速度, 于是质点从

点 $A(x_0, y_0)$ 移动到点 $B(X, Y)$ 时, 重力所做的功为

$$W = \int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy = \int_{\widehat{AB}} (-mg) dy.$$

设曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ 点 A 和 B 相应的参数为 α 和

β , 则

$$\begin{aligned} W &= \int_{\alpha}^{\beta} -mg\psi'(t) dt = -mg[\psi(t)]_{\alpha}^{\beta} \\ &= -mg[\psi(\beta) - \psi(\alpha)] = -mg(Y - y_0). \end{aligned}$$

这结果表明, 这里重力所做的功与质点运动的路径无关, 而仅取决于下降的高度.

最后我们指出两类曲线积分的联系.

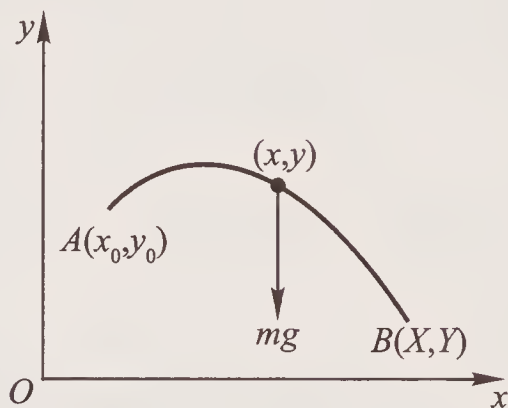


图 9-33

设有向曲线弧 L 的起点为 A , 终点为 B , 其上任一点 $M(x, y)$ 处的单位切线向量为 $\mathbf{e}_\tau$, $\mathbf{e}_\tau$ 的方向与 L 的方向相一致 (图 9-34), $\cos \alpha$ 和 $\cos \beta$ 为 $\mathbf{e}_\tau$ 的方向余弦, 则有如下的两类曲线积分之间的联系公式:

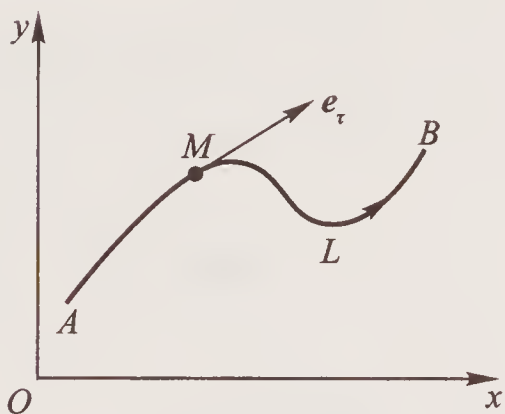


图 9-34

$$\begin{aligned} & \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\ &= \int_L [P(x, y) \cos \alpha + Q(x, y) \cos \beta] ds. \end{aligned} \quad (7)$$

* 习题 9-6

1. 设力 $\mathbf{F}$ 的大小为常量 f , 方向朝着 x 轴正向. 质量为 m 的质点在力 $\mathbf{F}$ 的作用下沿圆弧 $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ 自点 $A(R, 0)$ 移动到点 $B(0, R)$, 求力 $\mathbf{F}$ 所做的功.

2. 计算下列对坐标的曲线积分:

(1) $\int_L (x^2 - y^2) dx$, 其中 L 是抛物线 $y = x^2$ 上从点 $(0, 0)$ 到点 $(2, 4)$ 的一段弧;

(2) $\oint_L x dy - y dx$, 其中 L 是以 $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 2)$ 为顶点的闭折线 $ABCA$;

(3) $\oint_L xy dx$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = 2ax$ ($a > 0$) 及 x 轴所围成的在第一象限内的区域的整个边界 (按逆时针方向绕行);

(4) $\int_L y dx + x dy$, 其中 L 为圆周 $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$ 上由 $\varphi = 0$ 到 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 的一段弧.

3. 计算 $\int_L (x + y) dx + (y - x) dy$, 其中 L 是

(1) 沿抛物线 $y^2 = x$ 从点 $A(1, 1)$ 到点 $B(4, 2)$;

- (2) 直线段 $\overline{AB}$;
- (3) 折线 ACB , 其中 C 的坐标为 $(1, 2)$;
- (4) 沿曲线 $x = 2t^2 + t + 1, y = t^2 + 1$ 从点 A 到点 B .

* 第七节 格林公式及其应用

一、格林公式

我们规定平面上有界闭区域 D 的边界曲线 L 的正向如下: 当观察者沿 L 的正向行走时, D 内在他近处的部分总在他的左边 (例如如图 9-35). 格林公式建立了 D 上的二重积分与 L 上的曲线积分之间的联系.

定理 1 设分段光滑的有向闭曲线 L 为有界闭区域 D 的正向边界, 函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy. \quad (1)$$

公式 (1) 称为格林 (Green) 公式.

证 先假定 D 为 X 型区域, 即穿过闭区域 D 内部且平行于 y 轴的直线与 D 的边界曲线 L 的交点恰好是两点, 例如 D 由曲线 $y = \psi_1(x), y = \psi_2(x)$ ($\psi_1(x) \leq \psi_2(x), a \leq x \leq b$) 及直线 $x = a, x = b$ 围成 (图 9-36), 那么, 根据二重积分的计算法, 有

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy \\ &= \int_a^b \{ P[x, \psi_2(x)] - \end{aligned}$$

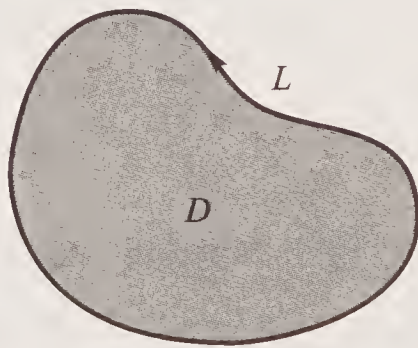


图 9-35

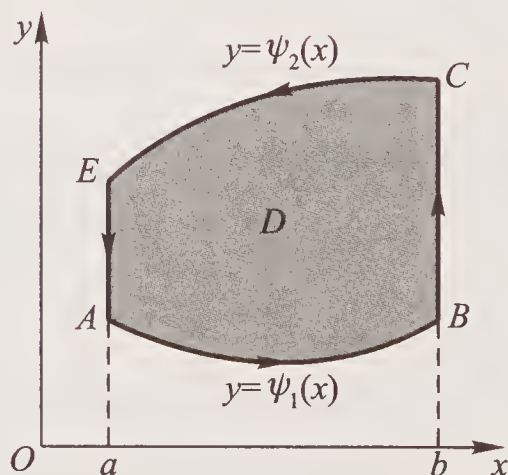


图 9-36

$$P[x, \psi_1(x)] \} dx.$$

另一方面,由曲线积分的性质及算法,有

$$\begin{aligned}\oint_L P dx &= \int_{\widehat{AB}} P dx + \int_{\widehat{BC}} P dx + \int_{\widehat{CE}} P dx + \int_{\widehat{EA}} P dx \\ &= \int_a^b P[x, \psi_1(x)] dx + 0 + \int_b^a P[x, \psi_2(x)] dx + 0 \\ &= - \int_a^b \{ P[x, \psi_2(x)] - P[x, \psi_1(x)] \} dx,\end{aligned}$$

因此

$$- \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_L P dx. \quad (2)$$

如果 D 不是 X 型区域,那么可以在 D 内引进一条或几条辅助曲线,把 D 分成有限个 X 型区域,例如就图 9-37 来说,引进一条辅助曲线把 D 分成 D_1 和 D_2 两个 X 型区域,应用公式(1)于 D_1 和 D_2 ,得到两个等式:

$$- \iint_{D_1} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_{L_1} P dx,$$

$$- \iint_{D_2} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_{L_2} P dx,$$

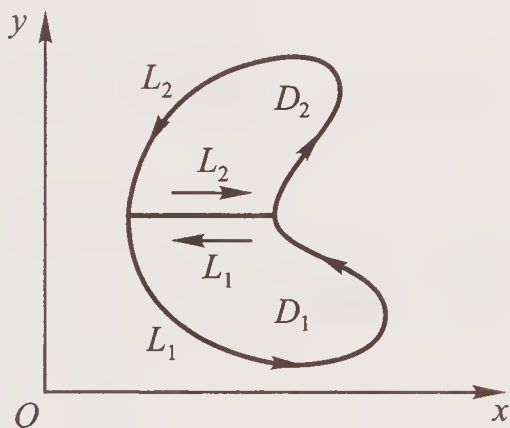


图 9-37

把这两个等式相加,注意到相加时沿辅助曲线的曲线积分相互抵消,使得

$$- \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_L P dx,$$

因此公式(2)对于任何有界闭区域 D 都成立.

类似可证

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_L Q dy, \quad (3)$$

将(2)和(3)两式相加,即得格林公式

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy.$$

下面说明格林公式的一个简单应用.

在公式(1)中取 $P = -y, Q = x$, 即得

$$2 \iint_D dx dy = \oint_L x dy - y dx,$$

上式左端是闭区域 D 的面积 A 的 2 倍, 因此有

$$A = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx. \quad (4)$$

例 1 求椭圆 $x = a \cos t, y = b \sin t$ 所围成图形的面积 A .

解 根据公式(4), 有

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \cos^2 t + ab \sin^2 t) dt \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt = \pi ab. \end{aligned}$$

例 2 设 L 是任意一条有向闭曲线, 证明:

$$\oint_L 2xy dx + x^2 dy = 0.$$

证 这里 $P = 2xy, Q = x^2$, 故

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2x = 0.$$

设 L 围成区域 D , 由公式(1)有

$$\oint_L 2xy dx + x^2 dy = \pm \iint_D 0 dx dy = 0,$$

其中的正负号为: 当 L 为 D 的正向边界时取正号, 反向时取负号.

例 3 求 $\int_L (x^2 y + xy^2) dx + (x^2 y - xy^2) dy$, 其中 L 为上半圆周 $x^2 + y^2 = a^2 (y \geq 0)$, 取逆时针方向(图9-38).

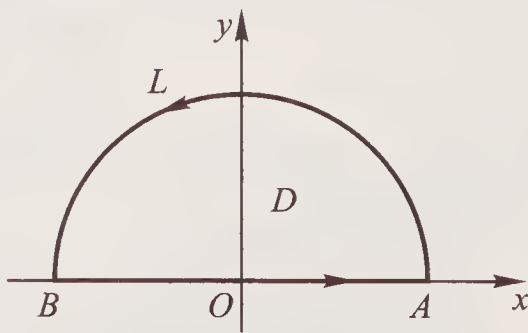


图 9-38

解 由于在直线 $\overline{BA}$ 上 $y = 0$, 故

$$\int_{\overline{BA}} (x^2 y + xy^2) dx + (x^2 y - xy^2) dy = 0,$$

因此

$$\begin{aligned}
 & \int_L (x^2 y + xy^2) dx + (x^2 y - xy^2) dy \\
 &= \oint_{L+\overline{BA}} (x^2 y + xy^2) dx + (x^2 y - xy^2) dy \\
 &= \iint_D [(2xy - y^2) - (x^2 + 2xy)] dx dy \\
 &= - \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = - \iint_D \rho^3 d\rho d\varphi \\
 &= - \int_0^\pi d\varphi \int_0^a \rho^3 d\rho = - \frac{\pi}{4} a^4.
 \end{aligned}$$

二、平面上曲线积分与路径无关的条件

上节例 4 表明,重力所做的功与质点运动的路径无关. 在物理、力学中,常要研究作用于物体的变力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功是否与物体运动的路径无关的问题,这个问题在数学上就是曲线积分是否与路径无关. 为此,先要明确什么叫做曲

线积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 与路径无关.

设函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 在区域 G 内连续,如果对于 G 内任意指定的两点 A, B 以及 G 内从 A 到 B 的任意两条曲线 L_1, L_2 (图 9-39), 下列等式恒成立:

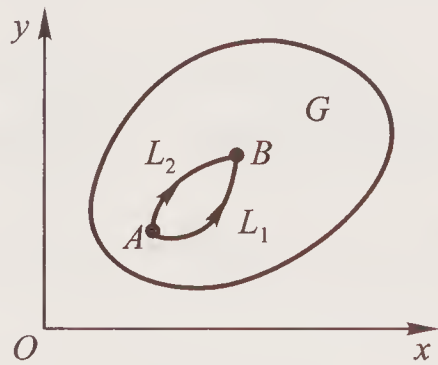


图 9-39

$$\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy,$$

那么就说曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 在区域 G 内与路径无关, 否则便说与路径有关.

从以上叙述可见,如果曲线积分与路径无关,那么

$$\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy = - \int_{L_2^-} Pdx + Qdy,$$

所以

$$\int_{L_1} Pdx + Qdy + \int_{L_2^-} Pdx + Qdy = 0,$$

即

$$\oint_{L_1+L_2^-} Pdx + Qdy = 0.$$

这里,由点 A, B 的任意性及 L_1, L_2 的任意性,可知 $L_1 + L_2^-$ 可表示 G 内任意一条有向闭曲线. 因此,在区域 G 内由曲线积分与路径无关,即可推知在 G 内沿任何闭曲线的曲线积分为零. 反过来,如果在 G 内沿任何闭曲线的曲线积分为零,也可推得在 G 内曲线积分与路径无关. 总之,曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 在 G 内与路径无关,相当于沿 G 内任何闭曲线 C 的曲线积分 $\oint_C Pdx + Qdy$ 等于零.

那么,函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 满足什么条件时,曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 与路径无关呢? 下面的定理回答了这个问题.

定理 2 设 G 为平面单连通区域^①, 函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 在 G 内具有连续的一阶偏导数, 那么曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 在 G 内与路径无关的充要条件是等式

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (5)$$

在 G 内恒成立.

证 这里我们仅证明充分性, 必要性的证明从略. 设在 G 内 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. 对于 G 内任何有向闭曲线 C , 按格林公式有

$$\oint_C Pdx + Qdy = \pm \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

① 如果区域 G 内的任意一条闭曲线所围成的区域完全属于 G , 就说 G 是单连通域. 形象化地说, 单连通域是没有“空洞”的区域.

其中 D 为由 C 所围成的闭区域. 由于 G 是单连通的, 故 $D \subset G$, 从而在 D 上 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$, 所以上列积分等于零. 也就是曲线积分

$\int_L Pdx + Qdy$ 在 G 内与路径无关. 充分性得证.

当曲线积分 $\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy$ 在区域 G 内与路径无关时, 由于曲线积分的值仅与积分弧段 $\widehat{AB}$ 的起点 $A(x_0, y_0)$ 和终点 $B(x_1, y_1)$ 的位置有关, 因此可把此积分记作

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} Pdx + Qdy.$$

实际计算时, 可取一条从 A 到 B 的便于计算的积分路径. 通常可取

图 9-40 中所示的有向折线路径 $\overline{AC} + \overline{CB}$, 其中 C 为点 (x_1, y_0) (当然还要假定此路径位于 G 内). 此时在水平线段 $\overline{AC}$ 上, $y = y_0$ (x 自 x_0 至 x_1), 因此 $dy = 0 \cdot dx$; 而在铅直线段 $\overline{CB}$ 上, $x = x_1$ (y 自 y_0 至 y_1), 因此 $dx = 0 \cdot dy$, 从而由上节公式(5)和(6)得

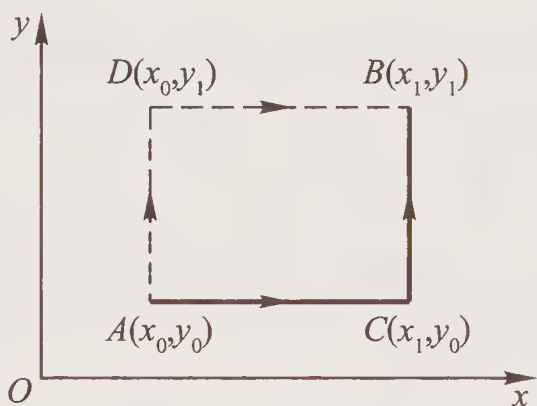


图 9-40

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} Pdx + Qdy = \int_{x_0}^{x_1} P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^{y_1} Q(x_1, y) dy. \quad (6)$$

类似地, 若取有向折线 $\overline{AD} + \overline{DB}$ (其中 D 为点 (x_0, y_1)) 为积分路径, 则得

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} Pdx + Qdy = \int_{y_0}^{y_1} Q(x_0, y) dy + \int_{x_0}^{x_1} P(x, y_1) dx. \quad (7)$$

例 4 证明: 在整个 xOy 平面内, 曲线积分

$$\int_L xy^2 dx + x^2 y dy$$

与路径无关, 并计算曲线积分 $\int_{(1,1)}^{(2,3)} xy^2 dx + x^2 y dy$.

证 这里, $P = xy^2$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy$; $Q = x^2y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy$, 所以在整个 xOy 平面(这是一个单连通区域)内, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. 根据定理 2, 在整个 xOy 平面内, 所给的曲线积分与路径无关.

利用公式(6), 可得

$$\begin{aligned}\int_{(1,1)}^{(2,3)} xy^2 dx + x^2y dy &= \int_1^2 x \cdot 1^2 dx + \int_1^3 2^2 \cdot y dy \\ &= \frac{3}{2} + 16 = \frac{35}{2}.\end{aligned}$$

例 5 计算曲线积分

$$\int_L (x^2 - y) dx - (x + \sin^2 y) dy,$$

其中 L 是圆周 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 自 $O(0, 0)$ 到 $A(2, 0)$ 的一段弧(图 9-41).

解 这里, $P = x^2 - y$, $Q = -(x + \sin^2 y)$, 在整个 xOy 平面这个单连通区域内, 有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -1 = \frac{\partial P}{\partial y},$$

因此所给的曲线积分与路径无关.

为方便计算, 改取有向线段 $\overline{OA}$ 为积分路径. 在 $\overline{OA}$ 上, $y = 0$, x 自 0 至 2. 于是

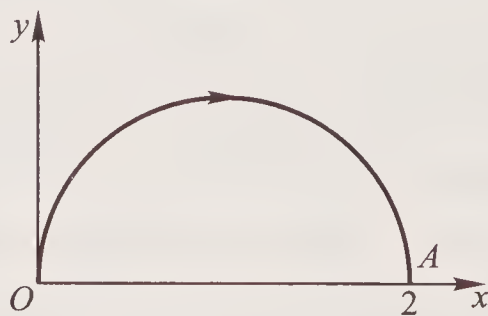


图 9-41

$$\begin{aligned}&\int_L (x^2 - y) dx - (x + \sin^2 y) dy \\ &= \int_{\overline{OA}} (x^2 - y) dx - (x + \sin^2 y) dy \\ &= \int_0^2 [(x^2 - 0) - (x + \sin^2 0) \cdot 0] dx \\ &= \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

本例通过改变积分路径,简化了运算.

上面例 4 和例 5 中的曲线积分都是与路径无关的. 可以注意到,这两个积分的被积表达式都是某个二元函数的全微分. 比如,例 4 中,取 $u(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2$, 则有 $du(x, y) = xy^2dx + x^2ydy$. 这个事实不是偶然的. 事实上,我们可以证明如下的一般性结论:

如果函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在平面单连通域 G 内有连续的偏导数,则以下三个条件相互等价:

(1) 曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 在 G 内与路径无关;

(2) $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 在 G 内每点处成立;

(3) 存在 $u(x, y)$, 使被积表达式在 G 内为 $u(x, y)$ 的全微分, 即有

$$du = Pdx + Qdy.$$

我们称 $u(x, y)$ 为全微分 $Pdx + Qdy$ 的原函数. 此时对 G 内的任一有向曲线弧 $\widehat{AB}$, 有如下的计算公式:

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy = \int_{\widehat{AB}} du(x, y) = u(B) - u(A) = [u(x, y)]_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)}, \quad (8)$$

其中 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 分别是点 A 和点 B 的坐标. 这公式类似于定积分中的牛顿-莱布尼茨公式.

例 6 求 $\int_L \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$, 其中 L 为抛物线 $y = x^2 - 1$ 自点 $(-1, 0)$

至点 $(2, 3)$ 的段弧.

解 由于 L 不通过原点, 而当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时,

$$d\left[\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)\right] = \frac{1}{2} \frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2},$$

所以

$$\int_L \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)\right]_{(-1, 0)}^{(2, 3)} = \frac{1}{2}\ln 13.$$

* 习题 9-7

1. 计算下列曲线积分,并验证格林公式的正确性:

(1) $\oint_L (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy$, 其中 L 是由抛物线 $y = x^2$ 和 $y^2 = x$ 所围成的闭区域的正向边界曲线;

(2) $\oint_L (x^2 - xy^3) dx + (y^2 - 2xy) dy$, 其中 L 是四个顶点分别为 $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$ 和 $(0,2)$ 的正方形闭区域的正向边界.

2. 利用曲线积分, 求星形线 $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ (图形参见上册附录 II) 所围成的图形的面积.

3. 利用格林公式, 计算下列曲线积分:

(1) $\oint_L (2x - y + 4) dx + (5y + 3x - 6) dy$, 其中 L 是顶点分别为 $(0,0)$, $(3,0)$ 和 $(3,2)$ 的三角形的正向边界;

(2) $\oint_L (x^2 y \cos x + 2xy \sin x - y^2 e^x) dx + (x^2 \sin x - 2ye^x) dy$, 其中 L 为星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($a > 0$, 图形参见上册附录 II), 取逆时针方向;

(3) $\int_L (2xy^3 - y^2 \cos x) dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2) dy$, 其中 L 为抛物线 $2x = \pi y^2$ 自 $(0,0)$ 到 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 的一段弧;

(4) $\int_L (x^2 - y) dx - (x + \sin^2 y) dy$, 其中 L 是圆周 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 自 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的一段弧.

4. 证明: 下列曲线积分在整个 xOy 面内与路径无关, 并计算它们的积分值:

$$(1) \int_{(1,1)}^{(2,3)} (x + y) dx + (x - y) dy;$$

$$(2) \int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3) dx + (6x^2 y - 3xy^2) dy;$$

$$(3) \int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy - y^4 + 3) dx + (x^2 - 4xy^3) dy.$$

5. 设有一变力在坐标轴上的投影为 $X = x + y^2$, $Y = 2xy - 8$, 证明: 质点在此变力作用下运动时, 变力所做的功与运动路径无关.

第九章复习题

一、概念复习

1. 填空题:

(1) 函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的二重积分存在的充分条件是 $f(x, y)$ 在 D 上_____.

(2) 设 D 是由圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ 所围的平面闭区域, $f(x, y)$ 在 D 上连续, 则 $\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi a^2} \iint_D f(x, y) d\sigma =$ _____.

(3) 二重积分从直角坐标到极坐标的变换公式是_____.

(4) 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$ ($t > 1$). 交换积分次序后化为对 x 的定积分, 则得 $F(t) =$ _____, 于是 $F'(t) =$ _____.

*(5) 闭曲线积分 $\oint_L (1 + 2x^2y) dx + (1 + x - 9xy^2) dy$ 取最大值时 (L 为它所围区域的正向边界), 曲线 L 的方程为_____.

2. 选择题:

(1) 设 D 为圆周 $x^2 + y^2 = R^2$ 所围的闭区域, 则 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy =$ ().

(A) $\iint_D R dx dy = \pi R^3$

(B) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho d\rho = \pi R^2$

(C) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^2 d\rho = \frac{2}{3} \pi R^3$

(D) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R R^2 d\rho = 2\pi R^3$

(2) 设平面闭区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$, $D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$, 则下列等式中正确的是().

(A) $\iint_D x d\sigma = 4 \iint_{D_1} x d\sigma$

(B) $\iint_D y d\sigma = 4 \iint_{D_1} y d\sigma$

(C) $\iint_D xy d\sigma = 4 \iint_{D_1} xy d\sigma$

(D) $\iint_D x^2 d\sigma = 4 \iint_{D_1} x^2 d\sigma$

*(3) 设空间闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$, $\Omega_1 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, 则下列等式不成立的是().

$$(A) \iiint_{\Omega} (x+y+z)^2 dV = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dV$$

$$(B) \iiint_{\Omega} (x+y+z)^2 dV = 8 \iiint_{\Omega_1} (x^2 + y^2 + z^2) dV$$

$$(C) \iiint_{\Omega} (x+y+z)^2 dV = 24 \iiint_{\Omega_1} x^2 dV$$

$$(D) \iiint_{\Omega} (x+y+z)^2 dV = 8 \iiint_{\Omega_1} (x+y+z)^2 dV$$

二、综合练习

1. 改换下列二次积分的积分次序:

$$(1) \int_0^4 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)} f(x, y) dx;$$

$$(2) \int_0^1 dy \int_0^{2y} f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_0^{3-y} f(x, y) dx.$$

2. 计算下列二重积分:

$$(1) \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 由圆周 } x^2 + y^2 = Rx \text{ 所围成};$$

$$(2) \iint_D |\cos(x+y)| d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 由直线 } y=x, y=0, x=\frac{\pi}{2} \text{ 所围成};$$

$$(3) \iint_D (x^2 + 3x - 6y + 9) d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 为圆周 } x^2 + y^2 \leq 1 \text{ 所围成的闭区域}.$$

3. 求由曲面 $z = x^2 + 2y^2$ 及 $z = 6 - 2x^2 - y^2$ 所围成的立体的体积.

4. 设平面薄片所占的闭区域 D 由直线 $x+y=2, y=x$ 及 x 轴所围成, 它的面密度 $\mu(x, y) = x^2 + y^2$, 求该薄片的质量.

5. 在均匀半圆形薄片的直径边上, 要接上一个一边与直径等长的均匀矩形薄片, 为使整个均匀薄片的形心恰好落在圆心上, 问接上去的矩形薄片另一边的长度应是多少?

6. 求由抛物线 $y = x^2$ 及直线 $y = 1$ 所围成的均匀薄片(面密度为常数 μ) 对于 x 轴的转动惯量.

*7. 计算下列三重积分:

$$(1) \iiint_{\Omega} xy dV, \text{ 其中 } \Omega \text{ 是由平面 } z=0, z=1 \text{ 及柱面 } x^2 + y^2 = 1 \text{ 所围成的在第一卦限内的闭区域};$$

(2) $\iiint_{\Omega} xyz dV$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 在第一卦限内的部分.

*8. 一均匀物体(密度为常数 μ)所占闭区域 Ω 由曲面 $z = x^2 + y^2$ 及平面 $z = 1$ 围成, 试求该物体的体积、形心以及关于 z 轴的转动惯量.

*9. 计算对弧长的曲线积分 $\int_L (x^2 + y^2) ds$, 其中 L 为曲线

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

*10. 计算对坐标的曲线积分 $\oint_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ (按逆时针方向绕行).

*11. 设力 $\mathbf{F} = (e^x - 2y)\mathbf{i} + (x + \sin^2 y)\mathbf{j}$, 一质点在 $\mathbf{F}$ 的作用下沿圆周 $C: x = \sqrt{2y - y^2}$ 从点 $O(0,0)$ 移动到点 $A(0,2)$, 求 $\mathbf{F}$ 所做的功.

第十章

无穷级数

无穷级数简称级数,它与数列极限有极紧密的联系,也是表示函数、研究函数性质以及进行数值计算的一种有用的数学工具.本章先讨论常数项级数,介绍级数的一些基本知识,然后讨论函数项级数,着重讨论幂级数及如何将函数展开成幂级数的问题.

第一节 常数项级数的概念与性质

一、常数项级数的定义

定义 设有数列 u_n , 把它的项依次用加号连起来, 所得的式子

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \quad (1)$$

称为(常数项)无穷级数, 简称(常数项)级数. 其中第 n 项 u_n 称为该级数的一般项. (1)式通常也记作 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

级数(1)的前 n 项之和

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=1}^n u_i$$

称为级数(1)的前 n 项部分和. 当 n 依次取 $1, 2, 3, \cdots$ 时, 它们构成一个新的数列

$$s_1 = u_1, \quad s_2 = u_1 + u_2, \quad \cdots, \quad s_n = \sum_{i=1}^n u_i, \quad \cdots,$$

将数列 s_n 称为级数(1)的部分和数列. 如果部分和数列 s_n 有极限 s , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, 则称级数(1)收敛, 极限 s 称为级数(1)的和, 并写作

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s;$$

如果部分和数列 s_n 没有极限, 则称级数(1)发散, 或称级数(1)没有和.

当级数(1)收敛时, 其部分和 s_n 是和 s 的近似值, 它们之间的差

$$r_n = s - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

称为级数(1)的余项. 显然, 用部分和 s_n 近似表示和 s 的误差为 $|r_n|$.

下面我们直接根据定义来判定以下级数的收敛性.

例 1 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots \quad (2)$$

叫做等比级数(又称为几何级数), 其中 $a \neq 0$, q 叫做级数的公比. 试讨论级数(2)的收敛性.

解 如果 $q \neq 1$, 则部分和

$$s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}.$$

当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1 - q}$, 因此这时级数(2)

收敛, 其和为 $\frac{a}{1 - q}$; 当 $|q| > 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$,

因此这时级数(2)发散; 当 $q = -1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ 不存在, 从而

$s_n = \frac{a}{2}[1 - (-1)^n]$ 的极限不存在, 因此级数(2)发散; 当 $q = 1$

时, $s_n = na \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$), 因此级数(2)也发散.

总之,当 $|q| < 1$ 时,等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ ($a \neq 0$) 收敛,且其和为 $\frac{a}{1-q}$; 当 $|q| \geq 1$ 时,此等比级数发散.

例 2 甲、乙两人轮流掷硬币,谁先掷得正面就算赢. 现甲先掷,问甲、乙获胜的概率各为多少?

解 现讨论甲获胜的各种情况的概率.

若甲第一次就掷得正面,于是获胜,其概率是 $\frac{1}{2}$. 若甲、乙都掷得反面,然后甲掷得正面,于是甲获胜,其概率为 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^3}$. 若甲、乙前两轮都掷得反面,然后甲掷得正面,于是甲获胜,其概率为 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^5}$, 如此类推,可知甲获胜的概率为

$$P_{\text{甲}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \cdots,$$

这是一个首项为 $\frac{1}{2}$, 公比为 $\frac{1}{2^2}$ 的等比级数,它是收敛的,其和为

$$\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2^2}} = \frac{2}{3}. \text{ 即先掷者甲获胜概率为 } \frac{2}{3}. \text{ 于是后掷者乙获胜的概率}$$

$$\text{为 } 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

例 3 判定级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

的收敛性.

解 由于

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

于是

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

从而级数收敛,且其和为 1.

思考题 1 写出级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ 的前 n ($n > 2$) 项部分和,并问此级数是否收敛? 若收敛,其和是多少?

思考题 2 当 x 在什么范围内取值时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$ 是收敛的? 其和是多少?

二、级数的性质

根据级数收敛的定义和极限运算法则,容易证明级数的下述性质.

性质 1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,其和为 s , k 为常数,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛,且和为 ks . 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n = k \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

性质 2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均收敛,和分别为 s, σ , 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s, \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma, \text{ 则级数 } \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) \text{ 收敛,其和为 } s \pm \sigma, \text{ 即有}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n. \quad (3)$$

(3)式所表述的运算规律叫做级数的逐项相加(减)法则,因此性质2也可叙述为:两个收敛级数可逐项相加(减).这里要注意,(3)式成立是以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛为前提条件.当

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散时,逐项相加(减)法则就不能用.如例3,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1,$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 都是发散的(见例4),因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1},$$

这里,不等号左端表示收敛于1的级数(即左端表示数1),而右端的两个级数都发散,不表示数值.

性质3 在级数中去掉、增加或改变有限项,级数的收敛性不变.

证 显然级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与去掉首项后所得级数 $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$ 同时收敛或同时发散,表明级数去掉1项或增加1项不改变收敛性,从而去掉或增加有限项也不改变收敛性.而改变有限项可看作先去掉有限项再增加有限项,因此也不改变收敛性.

性质4(级数收敛的必要条件) 设级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

收敛,则必有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

证 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的一般项与部分和有如下关系:

$$u_n = s_n - s_{n-1}.$$

假定这级数收敛于和 s , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

这条性质可以简单地表述为: 收敛级数的一般项必趋于零. 由此可知, 如果级数的一般项不趋于零, 则级数发散. 这是判定级数发散的一种有用的方法. 例如, 级数

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1} + \cdots,$$

由于它的一般项 $u_n = (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1}$ 不趋于零, 因此这级数是发散的.

注意, 级数的一般项趋于零并不是级数收敛的充分条件. 有些级数虽然一般项趋于零, 但仍然是发散的. 请看下例.

例 4 级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

称为调和级数. 试证: 调和级数是发散的.

证 取 k 为正整数, 当 $x \in [k, k+1]$ 时, 由定积分的几何意义 (如图 10-1 所示), 有

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx = \frac{1}{k}.$$

令 $k = 1, 2, \cdots, n$ 得

$$1 \geq \int_1^2 \frac{1}{x} dx, \frac{1}{2} \geq \int_2^3 \frac{1}{x} dx, \cdots, \frac{1}{n} \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx.$$

于是

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \int_1^2 \frac{1}{x} dx + \int_2^3 \frac{1}{x} dx + \cdots + \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \\ &= \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1). \end{aligned}$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = +\infty$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. 因此

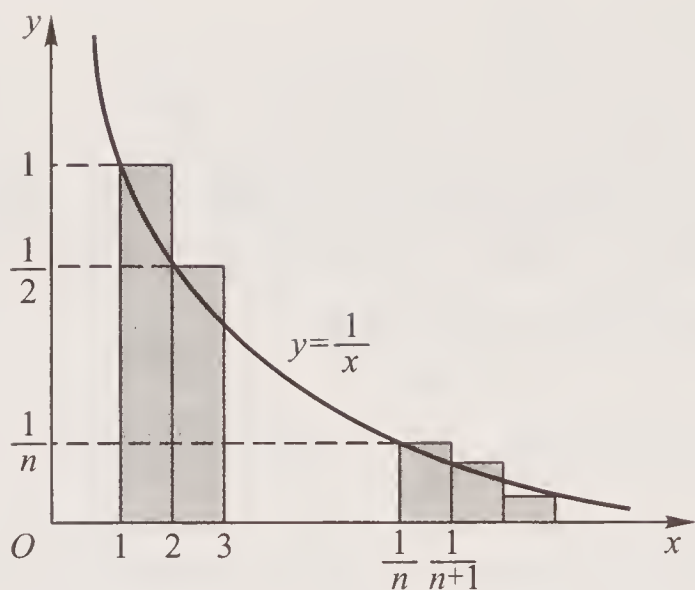


图 10-1

调和级数发散.

例 5 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{2^n} \right)$ 的收敛性.

解 因为调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$ 发散. 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

是公比 $q = \frac{1}{2}$ 的等比级数, 是收敛的. 由性质 2 容易推得一个收敛级数和一个发散级数逐项相加 (减) 所得的级数必发散, 因此原级数发散.

思考题 3 根据性质 2, 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n(n+1)} + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right]$ 的收敛性, 若此级数收敛, 它的和为多少?

习题 10-1

1. 写出下列级数的前五项:

$$(1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 2n};$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5^n};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

2. 写出下列级数的一般项:

$$(1) 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots;$$

$$(2) \frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \frac{6}{5} - \cdots;$$

$$(3) \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{x}{2 \cdot 4} + \frac{x\sqrt{x}}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{x^2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \cdots;$$

$$(4) \frac{a^2}{3} - \frac{a^3}{5} + \frac{a^4}{7} - \frac{a^5}{9} + \cdots.$$

3. 根据级数收敛与发散的定义判定下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}); \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

4. 判定下列级数的收敛性:

$$(1) -\frac{8}{9} + \frac{8^2}{9^2} + \cdots + (-1)^n \frac{8^n}{9^n} + \cdots;$$

$$(2) \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{3n} + \cdots;$$

$$(3) \frac{3}{2} + \frac{3^2}{2^2} + \cdots + \frac{3^n}{2^n} + \cdots;$$

$$(4) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) + \cdots.$$

5. 一皮球从距地面 6 m 处垂直下落, 假设每次从地面反弹后所达到的高度是前一次高度的 $\frac{1}{3}$, 求皮球所经过的路程的总长度.

6. 利用性质 2 和反证法证明: 一个收敛级数和一个发散级数逐项相加 (减) 所得的级数必发散.

第二节 常数项级数的审敛法

在研究级数时, 中心问题是判定级数的收敛性. 如果级数是收敛的, 就可对它进行某些运算, 并设法求出它的和或和的近似值. 但是, 除了少数几个特殊的级数, 在一般情况下, 直接考察级数的部分和数列是否有极限是很困难的, 因而直接根据定义来判定级数的收敛性往往不可行, 这时就需借助于一些间接的判别方法

(称为审敛法). 在本节中, 我们介绍一些常用的审敛法.

一、正项级数及其审敛法

设有级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \quad (1)$$

如果 $u_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \cdots$), 那么级数(1)称为正项级数. 这种级数特别重要, 以后将会看到许多级数的收敛性问题可以归结为正项级数的收敛性问题.

设正项级数(1)的部分和为 s_n , 由于 $s_n - s_{n-1} = u_n \geq 0$, 所以数列 s_n 是单调增加的, 即

$$s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots.$$

如果数列 s_n 有界, 即 s_n 总不大于某一常数 M , 则根据单调有界数列必有极限的准则, 知级数(1)必收敛. 并且, 若设其和为 s , 则有 $s_n \leq s \leq M$. 反之, 如果正项级数(1)收敛于和 s , 那么根据收敛数列必有界的性质, 可知数列 s_n 有界. 因此, 我们得到了如下的定理:

定理 1 正项级数收敛的充要条件是它的部分和数列有界.

根据定理 1, 在判定正项级数(1)的收敛性时, 可以另取一个收敛性已知的正项级数与它作比较, 从而确定它的部分和是否有界, 这样也就能确定级数(1)的收敛性. 按照这个想法, 就可以建立正项级数的一个基本的审敛法——比较审敛法.

比较审敛法 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 为两个正项级数.

(i) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛且 $u_n \leq v_n$ ($n = 1, 2, \cdots$), 则级数

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(ii) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散且 $u_n \geq v_n$ ($n = 1, 2, \cdots$), 则级数

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

证 (i) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛于和 σ , 并且 $u_n \leq v_n$ ($n = 1, 2, \dots$),

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \leq v_1 + v_2 + \dots + v_n \leq \sigma,$$

即 s_n 总不大于常数 σ , 由定理 1 可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(ii) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 且 $u_n \geq v_n$ ($n = 1, 2, \dots$), 这时, 如果

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则由 (i) 的结论, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 必收敛, 这与条件 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散

相矛盾, 因此, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

比较审敛法是对两个正项级数的一般项进行比较后得出级数是否收敛的结论, 由上一节级数的性质 3 可知, 比较条件可适当放宽为从某一项 (例如第 N 项) 开始, 有 $u_n \leq v_n$ ($n \geq N$) 或 $u_n \geq v_n$ ($n \geq N$), 结论依然成立.

例 1 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}$ 的收敛性.

解 因为 $2^n - n = 2^{n-1} + (2^{n-1} - n) \geq 2^{n-1}$, 所以

$$\frac{1}{2^n - n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ 是公比为 $\frac{1}{2}$ 的收敛的等比级数, 由比较审敛法知所给级数收敛.

例 2 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 发散.

证 因为 $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}$, 而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} + \dots$$

是去掉首项的调和级数,因而是发散的,根据比较审敛法可知所给级数也发散.

例3 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots \quad (2)$$

(其中 p 为常数)称为 p 级数. 试讨论 p 级数的收敛性.

解 当 $p \leq 1$ 时, $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$, 而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是发散的, 根据比较审敛法可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散.

当 $p > 1$ 时, 对于 $k-1 \leq x \leq k$, 有 $\frac{1}{x^p} \geq \frac{1}{k^p}$, 可得

$$\frac{1}{k^p} = \int_{k-1}^k \frac{1}{k^p} dx \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x^p} dx \quad (k=2, 3, \cdots),$$

从而 p 级数的部分和

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^p} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x^p} dx = 1 + \int_1^n \frac{1}{x^p} dx \\ &= 1 + \frac{1}{p-1} \left(1 - \frac{1}{n^{p-1}} \right) < 1 + \frac{1}{p-1}, \end{aligned}$$

表明 s_n 有界, 因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛.

总之, p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $p \leq 1$ 时发散, 当 $p > 1$ 时收敛.

下面给出极限形式的比较审敛法, 它在应用时更为方便些.

极限形式的比较审敛法 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 为两个正项级数, 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l \quad (0 < l < +\infty),$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 及级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散.

证 由极限的定义可知,对 $\varepsilon = \frac{l}{2}$, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有不等式

$$l - \frac{l}{2} < \frac{u_n}{v_n} < l + \frac{l}{2},$$

即有不等式

$$\frac{l}{2}v_n < u_n < \frac{3}{2}lv_n,$$

再根据比较审敛法及上一节级数的性质, 即得所要证的结论.

注意, 当 $l=0$ 或 $l=+\infty$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 就不一定同时收敛或同时发散, 但有这样的结论:

当 $l=0$ 时, 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

当 $l=+\infty$ 时, 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散. 这个结论的证明请读者自己完成.

极限形式的比较审敛法, 在两个正项级数均满足收敛的必要条件, 即它们的通项均趋向于零的情况下, 其实是比较两个正项级数的通项作为无穷小量的阶. 它表明: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 如果 u_n 是与 v_n

同阶的无穷小, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散; 如果

u_n 是比 v_n 高阶的无穷小, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

如果 u_n 是比 v_n 低阶的无穷小, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

用比较审敛法审敛时, 需要适当地选取一个已知其收敛性的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 作为比较的基准, 最常用的基准级数是等比级数

$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ 和 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

例 4 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$ 的收敛性.

解 可以看到, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 一般项 $1 - \cos \frac{1}{n}$ 为无穷小, 且与 $\frac{1}{2n^2}$ 是等价无穷小, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) / \frac{1}{2n^2} = 1,$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 是 $p=2$ 的收敛的 p 级数, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ 也收敛, 因此由极限形式的比较审敛法, 原级数也收敛.

以等比级数作为比较的基准级数, 可得如下使用起来比较方便的比值审敛法.

比值审敛法 设 $u_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, 则

(i) 当 $\rho < 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(ii) 当 $\rho > 1$ (或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$) 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

证 (i) 设 $\rho < 1$. 取一个适当小的正数 ε , 使得 $\rho + \varepsilon = r < 1$, 根据极限定义, 存在正整数 m , 当 $n \geq m$ 时有不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \rho + \varepsilon = r.$$

因此

$$u_{m+1} < ru_m, u_{m+2} < ru_{m+1} < r^2 u_m, u_{m+3} < ru_{m+2} < r^3 u_m, \dots$$

这样, 级数

$$u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \dots$$

的各项就小于收敛的等比级数 (公比 $r < 1$)

$$ru_m + r^2 u_m + r^3 u_m + \cdots$$

的对应项,由比较审敛法可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(ii) 设 $\rho > 1$. 取一个适当小的正数 ε , 使得 $\rho - \varepsilon > 1$. 根据极限定义, 存在正整数 k , 当 $n \geq k$ 时有不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \rho - \varepsilon > 1,$$

即

$$u_{n+1} > u_n.$$

这就是说, 当 $n \geq k$ 时, 级数的一般项 u_n 是逐渐增大的, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq$

0. 根据级数收敛的必要条件, 可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

类似地, 可以证明: 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$ 时, 级数是发散的.

例 5 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$ 的收敛性.

$$\text{解} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{n!} = \frac{n+1}{10} \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty),$$

根据比值审敛法知所给级数发散.

例 6 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$ 的收敛性.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} &= (n+1)^2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \bigg/ \left(n^2 \sin \frac{\pi}{2^n} \right) \\ &= \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} \cdot \frac{\frac{\pi}{2^n}}{\sin \frac{\pi}{2^n}} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

故所给级数收敛.

比值审敛法用起来很方便, 但当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ 或极限不存在

且不是 ∞ 时,比值审敛法就无效了,例如, p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$,无论 p 取什么数,都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{(n+1)^p} = 1$,但当 $p > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛; $p \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散.

例 7 利用级数收敛的必要条件证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

证 记 $u_n = \frac{n!}{n^n}$,作级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. 由于

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1,$$

根据比值审敛法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. 于是级数的一般项必趋于零,即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

思考题 1 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2+2n+3}$ 能否用比值审敛法判别其收敛性? 若不能,则可用何种方法判别其收敛性?

二、交错级数及其审敛法

所谓交错级数是这样的级数,它的各项是正负交错的,从而可以写成下面的形式:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots, \quad (3)$$

或

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \cdots, \quad (4)$$

其中 $u_1, u_2, \cdots$ 都是正数. 由于交错级数(4)的各项乘 -1 后就变成级数(3)的形式且不改变收敛性, 因此, 不失一般性, 我们只需讨论级数(3)的收敛性.

交错级数审敛法(莱布尼茨定理) 如果交错级数(3)满足条件:

$$(i) \quad u_n \geq u_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots);$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0,$$

则级数(3)收敛, 其和 s 非负且 $s \leq u_1$, 其余项 r_n 的绝对值 $|r_n| \leq u_{n+1}$.

证 先证明前 $2m$ 项的和的极限 $\lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m}$ 存在. 为此把 s_{2m} 写成两种形式:

$$s_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2m-1} - u_{2m})$$

及

$$s_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m},$$

根据条件(i)知道所有括弧中的差都是非负的. 由第一种形式可见 $s_{2m} \geq 0$ 且随 m 增大而增大, 由第二种形式可见 $s_{2m} < u_1$. 于是, 根据单调有界数列必有极限的准则知道, 数列 s_{2m} 存在极限 s , 并且 s 不大于 u_1 , 即

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m} = s \leq u_1.$$

又由于 $s_{2m} \geq 0$, 因此 $s \geq 0$.

再证明前 $2m+1$ 项的和的极限 $\lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m+1} = s$. 事实上, 我们有

$$s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1}.$$

由条件(ii)知 $\lim_{m \rightarrow \infty} u_{2m+1} = 0$, 因此

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} (s_{2m} + u_{2m+1}) = s.$$

由 $\lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m} = \lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m+1} = s$, 即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s,$$

亦即级数(3)收敛于和 s , 且 $0 \leq s \leq u_1$.

最后, 不难看出余项 r_n 可以写成

$$r_n = \pm (u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots),$$

上式右端括弧内是一个与(3)式同一类型的交错级数, 且满足收敛的两个条件, 因此其和 σ 非负且不超过级数的第一项, 于是

$$|r_n| = \sigma \leq u_{n+1}.$$

证明完毕.

例 8 判定交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 的收敛性.

解 $u_n = \frac{1}{n}$ 满足 $u_n > u_{n+1}$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, 根据

交错级数审敛法知所给级数收敛.

思考题 2 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \sin\left(n + \frac{1}{n}\right)\pi$ 是否为交错级数? 此级数是否收敛?

三、绝对收敛与条件收敛

前面讨论的正项级数、交错级数都是形式比较特殊的级数. 下面讨论一般形式的级数:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \quad (5)$$

其中 u_n ($n = 1, 2, \cdots$) 可以任意地取正数、负数或零. 取级数(5)各项的绝对值组成正项级数

$$|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots. \quad (6)$$

下面的定理 2 说明了级数(5)与级数(6)的收敛性之间的关系.

定理 2 如果级数(5)的各项的绝对值所组成的级数(6)收敛, 则级数(5)收敛.

证 设级数(6)收敛. 令

$$v_n = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|) \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

显然 $v_n \geq 0$, 并且 $v_n \leq |u_n|$, 就是说 v_n 都不大于级数(6)的对应项 $|u_n|$. 于是由比较审敛法知, 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} 2v_n$ 也收敛. 而由

$$u_n = 2v_n - |u_n|,$$

知级数(5)是由两个收敛级数逐项相减而成的:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (2v_n - |u_n|),$$

因此, 根据级数的基本性质 3 可知级数(5)收敛. 定理证毕.

我们可以用正项级数的比值审敛法或比较审敛法, 来判定正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 的收敛性. 定理 2 表明, 如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛. 当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛时, 称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛.

例 9 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^4}$ 绝对收敛.

证 因为 $\left| \frac{\sin n\alpha}{n^4} \right| \leq \frac{1}{n^4}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ 是收敛的, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n\alpha}{n^4} \right|$ 也是收敛的. 因此所给级数绝对收敛.

要注意的是, 虽然绝对收敛的级数都是收敛的, 但并不是每个收敛级数都是绝对收敛的, 这就是说, 绝对收敛是级数收敛的充分条件但非必要条件. 例如, 级数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots$$

是收敛的, 但是各项取绝对值所成的级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

却是发散的.

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 而它的各项取绝对值所成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 那么称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是条件收敛的. 因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 是条件收敛的.

把正项级数的比值审敛法应用于判定非正项级数的绝对收敛性, 可以得到下面这个有用的定理:

定理 3 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \rho,$$

则当 $\rho < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛; $\rho > 1$ (或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = +\infty$)

时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散; $\rho = 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 可能绝对收敛, 可能条件收敛, 也可能发散.

证 当 $\rho < 1$ 时, 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛.

当 $\rho > 1$ (或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = +\infty$) 时, 由本节第一目比值审敛法的证明(ii)知 $|u_n|$ 不趋于零, 从而 u_n 也不趋于零. 根据级数收敛的必要条件可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

当 $\rho = 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 可能绝对收敛, 可能条件收敛, 也可能发散. 例如下面三个级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad \text{和} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$$

都满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 1$, 但第一个级数绝对收敛, 第二个级数条件收敛, 第三个级数发散.

思考题 3 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 是条件收敛的.

习题 10-2

1. 用比较审敛法判定下列级数的收敛性:

- | | |
|--|---|
| (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1};$ | (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1};$ |
| (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)};$ | (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)^2;$ |
| (5) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right);$ | (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}.$ |

2. 用比值审敛法判定下列级数的收敛性:

- | | |
|---|---|
| (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n2^n};$ | (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n};$ |
| (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n};$ | (4) $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{\pi}{3^n};$ |
| (5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!};$ | (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$ |

3. 判定下列级数的收敛性:

- | | |
|--|--|
| (1) $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{3}{4}\right)^n;$ | (2) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n};$ |
| (3) $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}};$ | (4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{an+b} \quad (a>0, b>0);$ |
| (5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\alpha^n} (\alpha>0);$ | (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right).$ |

4. 下列级数是否收敛? 如果是收敛的, 判定是绝对收敛还是条件收敛:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}; & (2) \quad & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{3^n}; \\
 (3) \quad & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)(2n+1)}; & (4) \quad & \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}.
 \end{aligned}$$

第三节 幂级数

一、函数项级数的一般概念

在前面两节中我们讨论了常数项级数的一些初步理论,在下面几节中我们将讨论应用更为广泛的函数项级数.

设给定一个定义在区间 I 上的函数列

$$u_1(x), u_2(x), u_3(x), \cdots, u_n(x), \cdots,$$

则式子

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \quad (1)$$

叫做定义在区间 I 上的 (函数项) 无穷级数, 简称 (函数项) 级数.

(1) 式也记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

例如

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \quad (2)$$

及

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx + \cdots \quad (3)$$

都是定义在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数项级数.

级数(2)是以变量 x 为公比的几何级数. 由第一节例 1 知道, 当 $|x| < 1$ 时, 这个级数是收敛的, 其和是 $\frac{1}{1-x}$; 当 $|x| \geq 1$ 时, 这个级数发散.

对于区间 I 上的每一点 x_0 , 级数(1)成为一个常数项级数

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + u_3(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots, \quad (4)$$

级数(4)可能收敛也可能发散. 如果级数(4)收敛, 就称点 x_0 是函数项级数(1)的收敛点. 如果级数(4)发散, 就称点 x_0 是函数项级数(1)的发散点. 级数(1)的全体收敛点所组成的集合称为它的收敛域, 全体发散点所组成的集合称为它的发散域. 例如, 级数(2)的收敛域是开区间 $(-1, 1)$, 发散域是 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

设级数(1)的收敛域为 C , 则对应于任一 $x \in C$, 级数(1)成为一个收敛的常数项级数, 因而有确定的和 s . 这样, 在收敛域 C 上, 级数(1)的和是 x 的函数 $s(x)$. 通常称 $s(x)$ 为函数项级数(1)的和函数, 它的定义域就是级数的收敛域 C , 并记作

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x \in C.$$

例如, 级数(2)的和函数为

$$s(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1, 1).$$

把函数项级数(1)的前 n 项的部分和记作 $s_n(x)$, 则在收敛域 C 上有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = s(x).$$

在收敛域 C 上, 我们把 $r_n(x) = s(x) - s_n(x)$ 叫做函数项级数的余项, 显然

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0.$$

下面我们只讨论各项都是幂函数的函数项级数, 即所谓幂级数.

思考题 1 $x=2$ 是否为函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$ 的收敛点? 为什么?

二、幂级数及其收敛区间

函数项级数中简单而常见的一类级数就是幂级数, 它的形式是

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \quad (5)$$

其中常数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 叫做幂级数的系数. 上一目中的级数 (2) 就是一个幂级数.

下面讨论幂级数的收敛性问题. 首先注意到, 幂级数 (5) 在 $x=0$ 处必定是收敛的, 其和为首项 a_0 , 现在问: 如果幂级数 (5) 不仅在 $x=0$ 这一点处收敛, 那么, 它的收敛域与发散域是怎样的? 即 x 取数轴上哪些点时幂级数收敛, 取哪些点时幂级数发散?

前面已经讨论过了幂级数 (2) 的收敛性. 这个幂级数的收敛域是开区间 $(-1, 1)$, 发散域是 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, 在开区间 $(-1, 1)$ 内, 其和函数为 $\frac{1}{1-x}$, 即

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad -1 < x < 1.$$

我们注意到, 这个幂级数的收敛域是一个区间. 下面的定理表明, 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 不仅在 $x=0$ 这一点处收敛, 那么它的收敛域必定是一个区间.

定理 1 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛性必为下述三种情形之一:

- (i) 仅在 $x=0$ 处收敛;
- (ii) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内处处绝对收敛;
- (iii) 存在确定的正数 R , 当 $|x| < R$ 时绝对收敛, 当 $|x| > R$ 时发散.

这个定理我们不予证明.

① 幂级数更一般的形式是 $a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$. 只要作代换 $t = x - x_0$, 就可把它化成 (5) 的形式. 所以取 (5) 式来讨论, 并不影响幂级数的一般性. 这里我们约定 $x^0 = 1$ 对 $x=0$ 亦成立.

定理所列情形 (iii) 中的正数 R 称为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径, $(-R, R)$ 称为收敛区间. 在情形 (i), 规定收敛半径 $R = 0$, 这时没有收敛区间, 收敛域为一个点 $x = 0$; 在情形 (ii), 规定收敛半径为 $R = +\infty$, 收敛区间就是收敛域 $(-\infty, +\infty)$.

如果求得幂级数的收敛半径 $R > 0$, 即得收敛区间 $(-R, R)$, 剩下只需讨论它在 $x = -R$ 及 $x = R$ 两点处的收敛性. 判定了这两点处的收敛性, 即可知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为下列四种区间之一: $(-R, R)$, $[-R, R)$, $(-R, R]$ 或 $[-R, R]$. 所以幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域必为一个以 $x = 0$ 为中心的区间.

如何求幂级数的收敛半径? 我们有下面的定理.

定理 2 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \quad (\rho \text{ 为常数或为 } +\infty),$$

那么, 对于它的收敛半径 R :

(i) 若 $\rho \neq 0$, 则 $R = \frac{1}{\rho}$;

(ii) 若 $\rho = 0$, 则 $R = +\infty$;

(iii) 若 $\rho = +\infty$, 则 $R = 0$.

证 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的后项与前项之比的绝对值为

$$\left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x|.$$

(i) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \neq 0$, 则由上节定理 3 可知, 当 $\rho |x| < 1$, 即

$|x| < \frac{1}{\rho}$ 时, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛; 当 $\rho |x| > 1$, 即 $|x| > \frac{1}{\rho}$ 时, 级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散. 所以 $R = \frac{1}{\rho}$.

(ii) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$, 则对任何 x , 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = 0 < 1$,

即知对任何 x , 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 均绝对收敛, 所以 $R = +\infty$.

(iii) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = +\infty$, 则对任何 $x \neq 0$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

$|x| = +\infty$, 即知对任何 $x \neq 0$, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 均发散; 而当 $x = 0$

时, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 显然收敛. 即级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 仅在点 $x = 0$ 处收敛,

所以 $R = 0$. 定理证毕.

例 1 求幂级数

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots$$

的收敛半径和收敛区间.

解 因为

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

所以收敛半径

$$R = \frac{1}{\rho} = 1,$$

于是收敛区间为 $(-1, 1)$.

例 2 求幂级数

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

的收敛区间.

解 因为

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

所以收敛半径 $R = +\infty$, 从而收敛区间是 $(-\infty, +\infty)$.

例 3 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-1)^n$ 的收敛半径 (规定记号 $0! = 1$).

解 令 $t = x - 1$, 则所给幂级数成为 $\sum_{n=0}^{\infty} n! t^n$. 因为

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = +\infty,$$

所以收敛半径 $R = 0$, 从而级数仅在 $t = 0$ 即 $x = 1$ 处收敛.

例 4 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} (x + \frac{1}{2})^{2n}$ 的收敛半径和收敛区间.

解 级数中没有奇次幂的项即奇次幂项的系数为零, 因此, 定理 2 不能直接应用. 我们直接根据比值审敛法来求收敛半径.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2} (x + \frac{1}{2})^{2(n+1)} \bigg/ \left[\frac{(2n)!}{(n!)^2} (x + \frac{1}{2})^{2n} \right] \right| \\ &= 4 \left| x + \frac{1}{2} \right|^2, \end{aligned}$$

当 $4 \left| x + \frac{1}{2} \right|^2 < 1$ 即 $\left| x + \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}$ 时级数收敛; 当 $4 \left| x + \frac{1}{2} \right|^2 > 1$

即 $\left| x + \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{2}$ 时级数发散, 所以收敛半径 $R = \frac{1}{2}$, 收敛区间为 $(-1, 0)$.

思考题 2 对幂级数 $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots$, 它的收敛域和

收敛区间相同吗?

三、幂级数的运算

设幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

及

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots$$

的收敛区间分别为 $(-R_1, R_1)$ 及 $(-R_2, R_2)$, 两个幂级数的和函数分别为 $s_1(x)$ 及 $s_2(x)$.

根据无穷级数的基本性质 2, 在 $(-R_1, R_1) \cap (-R_2, R_2)$ 内, 这两个级数可以逐项相加或相减, 即有

$$\begin{aligned} & s_1(x) \pm s_2(x) \\ &= (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)x + (a_2 \pm b_2)x^2 + \cdots + (a_n \pm b_n)x^n + \cdots. \end{aligned}$$

还可证明, 在 $(-R_1, R_1) \cap (-R_2, R_2)$ 内, 可以仿照多项式的乘法规则, 做出两个幂级数的乘积, 即

$$\begin{aligned} s_1(x) \cdot s_2(x) &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \\ &\quad (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots + \\ &\quad (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)x^n + \cdots. \end{aligned}$$

关于幂级数的分析运算, 有下面这些重要结论(证明从略):

1. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内是连续的.

2. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内是可导的, 并且有逐项求导公式

$$s'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

逐项求导后所得的幂级数和原级数有相同的收敛半径 R .

反复应用这个结论可得:幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内具有任意阶导数.

3. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内是可积的, 并且有逐项积分公式

$$\begin{aligned} \int_0^x s(x) dx &= \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}. \end{aligned}$$

例如, 已知

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1),$$

利用结论 2, 逐项求导可得

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad (-1 < x < 1).$$

例 5 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 的收敛区间, 并在收敛区间内求其和函数.

解 因为

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

故此幂级数的收敛半径为 $R = \frac{1}{\rho} = 1$, 收敛区间为 $(-1, 1)$.

设 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 的和函数为 $s(x)$, 即 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, 在收敛区间 $(-1, 1)$ 内利用和函数的可导性并逐项求导得

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x},$$

故而由积分可得

$$s(x) = -\ln(1-x) + C \quad (C \text{ 为任意常数}),$$

显然当 $x=0$ 时, 由 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 直接可知 $s(0)=0$, 将它代入上式可解得 $C=0$. 从而有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), \quad -1 < x < 1.$$

思考题 3 利用例 5 的结论求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$ 的和函数, 并指出收敛区间.

习题 10-3

1. 求下列幂级数的收敛区间:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} nx^n;$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} x^n;$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n;$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} x^n;$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (x-5)^n;$$

$$(6) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (x-1)^{2n+1}.$$

2. 由 $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t} \quad (-1 < t < 1)$, 利用逐项求导或逐项积分, 求下列级数

在收敛区间内的和函数:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \quad (-1 < x < 1);$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n+1} x^{4n+1} \quad (-1 < x < 1).$$

第四节 函数展开成幂级数

上节讨论了幂级数的收敛区间及其和函数的性质. 在本节中我们讨论这样的问题: 给定函数 $f(x)$, 它是否能在某个区间内“展

开成幂级数”,就是说,是否能找到这样一个幂级数,它在某区间内收敛,且其和恰好就是给定的函数 $f(x)$. 如果能找到这样的幂级数,那么就说,函数 $f(x)$ 在该区间内能展开成幂级数(或说 $f(x)$ 能展开成 $x-x_0$ 的幂级数).

我们先假定函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内能展开成幂级数,并假设展开式为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \quad x \in U(x_0), \quad (1)$$

那么根据和函数的性质,可知 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有任意阶导数,并由逐项求导公式,有

$$f^{(k)}(x) = k! a_k + (k+1)! a_{k+1} (x-x_0) + \cdots,$$

于是

$$f^{(k)}(x_0) = k! a_k,$$

从而

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \quad (k=0,1,2,\cdots). \quad (2)$$

(这里 $f^{(0)}(x)$ 表示 $f(x)$)由此可知,如果 $f(x)$ 能展开成幂级数,则 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内必定具有任意阶导数,且展开式中的系数由(2)式唯一确定,从而知展开式中的幂级数必为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) (x-x_0)^n. \quad (3)$$

级数(3)称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的泰勒级数.

由以上讨论可知,函数 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内能不能展开成幂级数,就看级数(3)在 $U(x_0)$ 内是否收敛,并收敛于 $f(x)$. 这里我们指出,在 x_0 的任何邻域内, $f(x)$ 的泰勒级数(3)不收敛于 $f(x)$ 的例子是存在的,即存在这样的函数,它虽在某点的邻域内具有任意阶导数,却不能在該点处展开成幂级数. 但如果 $f(x)$ 是初等函数,那么级数(3)便是 $f(x)$ 展开所得的幂级数. 这一结论可叙述为下面的定理.

定理(初等函数展开定理) 设 $f(x)$ 为初等函数, 且在点 x_0 的邻域 $|x - x_0| < \rho$ 内有任意阶导数, 则有

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < R_1, \quad (4)$$

其中 $R_1 = \min\{\rho, R\}$, 而 R 为(4)式右端泰勒级数的收敛半径. 在端点 $x = x_0 \pm R_1$ 处, 如果 $f(x)$ 有定义且右端级数也收敛, 则(4)式在端点处也成立.

这个定理不予证明. 幂级数展开式(4)又称为函数 $f(x)$ 的泰勒展开式.

当 $x_0 = 0$ 时, (4)式成为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n, \quad x \in (-R_1, R_1). \quad (5)$$

(5)式称为 $f(x)$ 的麦克劳林展开式.

例 1 将函数 $f(x) = e^x$ 展开成 x 的幂级数.

解 $f(x) = e^x$ 为初等函数, 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有任意阶导数

$$f^{(n)}(x) = e^x \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

因此

$$f^{(n)}(0) = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

于是得级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$.

容易求得级数的收敛半径 $R = +\infty$, 因此根据上述定理, 有

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad (6)$$

例 2 将函数 $f(x) = \sin x$ 展开成 x 的幂级数.

解 初等函数 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有任意阶导数

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$

当 n 取 $0, 1, 2, 3, \cdots$ 时, $f^{(n)}(0)$ 顺次循环地取 $0, 1, 0, -1, \cdots$, 于是得级数

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}.$$

此级数的收敛半径 $R = +\infty$, 因此根据上述定理, 有

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}, \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad (7)$$

例 3 将函数 $f(x) = (1+x)^m$ 展开成 x 的幂级数.

解 当 m 为正整数时, $f(x) = (1+x)^m$ 是 m 次多项式, 其幂级数展开式只含 $m+1$ 项.

当 m 不是正整数时, $f(x) = (1+x)^m$ 在 $(-1, 1)$ 内有任意阶导数, 且

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1},$$

$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2},$$

.....

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

.....

所以

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = m, \quad f''(0) = m(m-1), \quad \cdots,$$

$$f^{(n)}(0) = m(m-1)\cdots(m-n+1), \quad \cdots,$$

于是得级数

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots.$$

这级数相邻两项系数之比的绝对值

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{m-n}{n+1} \right| \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty),$$

因此, 这级数在开区间 $(-1, 1)$ 内收敛, 根据上述定理, 可知在区间 $(-1, 1)$ 内有展开式

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1). \quad (8)$$

在区间的端点 ± 1 处, 展开式是否成立要看 m 的数值而定.

公式(8)叫做二项展开式. 特殊地, 当 m 为正整数时, 级数成为 x 的 m 次多项式, 这就是代数学中的二项式定理.

对应于 $m = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2}$ 的二项展开式分别为

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \cdots$$

($-1 \leq x \leq 1$),

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 - \cdots$$

($-1 < x \leq 1$).

在以上将函数展开成幂级数的例子中, 所用的都是直接展开的方法, 也就是直接按公式 $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$ 计算幂级数的系数, 并依据初等函数展开定理得到泰勒展开式. 这种直接展开的方法计算量较大. 下面介绍间接展开的方法, 就是利用一些已知的函数展开式, 通过四则运算、求导、积分以及变量代换等, 将所给函数展开成幂级数.

前面我们已经求得的展开式有

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad (6)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad (7)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1, 1). \quad (9)$$

利用这三个展开式, 可以求得许多函数的展开式. 例如,

对(9)式两边从 0 到 x 积分, 可得

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1]. \end{aligned} \quad (10)$$

对(7)式两边求导,可得

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad (11)$$

把(6)式中的 x 换成 $x \ln a$, 可得

$$a^x = e^{x \ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

把(9)式中的 x 换成 x^2 , 可得

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad x \in (-1, 1),$$

再对上式两边从 0 到 x 积分, 可得

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad x \in [-1, 1].$$

(6)、(7)、(9)、(10)、(11)等五个展开式是最常用的, 记住前三个, 后两个也就掌握了.

下面再举几个用间接法把函数展开成幂级数的例子.

例 4 把 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$ 展开成 x 的幂级数.

$$\begin{aligned} \text{解 } f(x) &= \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{3}}, \end{aligned}$$

而

$$\frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n, \quad |x| < 2,$$

$$\frac{1}{1 - \frac{x}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} x^n, \quad |x| < 3,$$

因此, 在 $|x| < 2$ 内, 有

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) x^n.$$

例 5 把 $f(x) = (1-x)\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数.

解 由 $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, x \in (-1, 1]$ 得

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{n} - \frac{(-1)^n}{n-1} \right] x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-1)(-1)^{n-1}}{n(n-1)} x^n, \quad x \in (-1, 1]. \end{aligned}$$

例 6 将函数 $\sin x$ 展开成 $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的幂级数.

解 因为

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin \left[\frac{\pi}{4} + \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ &= \sin \frac{\pi}{4} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \frac{\pi}{4} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right], \end{aligned}$$

而

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 1 - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4} \right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4} \right)^4}{4!} - \dots$$

$$(-\infty < x < +\infty),$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5}{5!} - \dots$$

$$(-\infty < x < +\infty),$$

故

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \dots \right]$$

$$(-\infty < x < +\infty).$$

思考题 1 如果 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ 的收敛区间是 $(-1-l, 1+l)$ ($l > 0$), 则级数的收敛半径 R 等于什么?

思考题 2 利用 e^x 的麦克劳林展开式, 求出 e^{-x^2} 的麦克劳林展开式.

思考题 3 利用 $\frac{1}{x} = \frac{1}{1+(x-1)}$ 和 (9) 式, 把 $\frac{1}{x}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数.

习题 10-4

1. 将下列函数展开成 x 的幂级数, 并求其收敛区间:

- (1) $\ln(a+x)$ ($a > 0$); (2) $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$;
 (3) $\sin^2 x$; (4) $\arctan x + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$.

2. 将下列函数展开成 $(x-1)$ 的幂级数, 并求其收敛区间:

- (1) $\lg x$; (2) $\frac{1}{x^2 + 3x + 2}$.

3. 将函数 $f(x) = \cos x$ 展开成 $\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的幂级数.

* 第五节 幂级数在近似计算中的应用

有了函数的幂级数展开式, 就可以用它来进行近似计算, 即在展开式成立的区间上, 可以按照精确度要求, 选取幂级数的前若干

项的部分和,把函数值近似地计算出来.

例 1 计算 $\sqrt[5]{240}$ 的近似值,精确到小数点后四位^①.

解 因为

$$\sqrt[5]{240} = \sqrt[5]{243 - 3} = 3 \left(1 - \frac{1}{3^4} \right)^{\frac{1}{5}},$$

所以在二项展开式(第四节(8)式)中取 $m = \frac{1}{5}, x = -\frac{1}{3^4}$, 即得

$$\sqrt[5]{240} = 3 \left(1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^4} - \frac{1 \cdot 4}{5^2 \cdot 2!} \cdot \frac{1}{3^8} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 9}{5^3 \cdot 3!} \cdot \frac{1}{3^{12}} - \cdots \right).$$

可以看到这个级数各项的绝对值减小得很快,或者说,这个级数“收敛很快”,因此,只需取级数前面少数几项的和作为 $\sqrt[5]{240}$ 的近似值,就可以达到较高的精确度. 取前两项的和作为 $\sqrt[5]{240}$ 的近似值,其误差(也叫做截断误差)为

$$\begin{aligned} |r_2| &= 3 \left(\frac{1 \cdot 4}{5^2 \cdot 2!} \cdot \frac{1}{3^8} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 9}{5^3 \cdot 3!} \cdot \frac{1}{3^{12}} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 14}{5^4 \cdot 4!} \cdot \frac{1}{3^{16}} + \cdots \right) \\ &< 3 \cdot \frac{1 \cdot 4}{5^2 \cdot 2!} \cdot \frac{1}{3^8} \left[1 + \frac{1}{81} + \left(\frac{1}{81} \right)^2 + \cdots \right] \\ &= \frac{6}{25} \cdot \frac{1}{3^8} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{81}} = \frac{1}{25 \cdot 27 \cdot 40} < \frac{1}{20\,000}, \end{aligned}$$

于是取近似式为

$$\sqrt[5]{240} \approx 3 \left(1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^4} \right).$$

为了使“四舍五入”引起的误差(叫做舍入误差)与截断误差之和不超过 10^{-4} , 计算时应取五位小数,再四舍五入,这样最后得

$$\sqrt[5]{240} \approx 3(1 - 0.002\,47) \approx 2.992\,59 \approx 2.992\,6.$$

例 2 计算 $\ln 2$ 的近似值,要求误差不超过 10^{-4} .

① 精确到小数点后 k 位也说成精确到 10^{-k} , 它是指误差不超过 10^{-k} .

解 在上节(10)式中令 $x=1$, 可得

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots.$$

如果取这级数前 n 项的和作为 $\ln 2$ 的近似值, 其误差为

$$|r_n| \leq \frac{1}{n+1}$$

(见第二节第二目), 为了保证误差不超过 10^{-4} , 就需要取级数的前 10 000 项进行计算. 这样做计算量太大了, 我们设法用收敛较快的级数来代替它.

把展开式

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad (-1 < x \leq 1)$$

中的 x 换成 $-x$, 得

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots \quad (-1 \leq x < 1).$$

两式相减, 得到不含有偶次幂的展开式

$$\begin{aligned} \ln \frac{1+x}{1-x} &= \ln(1+x) - \ln(1-x) \\ &= 2 \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots \right) \quad (-1 < x < 1). \end{aligned}$$

令 $\frac{1+x}{1-x} = 2$, 解出 $x = \frac{1}{3}$. 以 $x = \frac{1}{3}$ 代入上式, 得

$$\ln 2 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^7} + \cdots \right).$$

如果取前四项作为 $\ln 2$ 的近似值, 则误差为

$$\begin{aligned} |r_4| &= 2 \left(\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3^9} + \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{3^{11}} + \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{3^{13}} + \cdots \right) \\ &< \frac{2}{3^{11}} \left[1 + \frac{1}{9} + \left(\frac{1}{9} \right)^2 + \cdots \right] \\ &= \frac{2}{3^{11}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{4 \cdot 3^9} < \frac{1}{70\,000}, \end{aligned}$$

于是取

$$\ln 2 \approx 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^7} \right).$$

同样地, 考虑到舍入误差, 计算时应取五位小数:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &\approx 0.333\ 33, \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} \approx 0.012\ 35, \\ \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} &\approx 0.000\ 82, \quad \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^7} \approx 0.000\ 07, \end{aligned}$$

因此得

$$\ln 2 \approx 0.693\ 14 \approx 0.693\ 1.$$

例 3 利用 $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$ 计算 $\sin 9^\circ$ 的近似值, 并估计误差.

解 首先把角度化成弧度,

$$9^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \times 9^\circ \text{ rad} = \frac{\pi}{20} \text{ rad},$$

从而

$$\sin \frac{\pi}{20} \approx \frac{\pi}{20} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{20} \right)^3.$$

其次估计这个近似值的精确度. 在 $\sin x$ 的幂级数展开式(第四节(7)式)中令 $x = \frac{\pi}{20}$, 得

$$\sin \frac{\pi}{20} = \frac{\pi}{20} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{20} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{20} \right)^5 - \frac{1}{7!} \left(\frac{\pi}{20} \right)^7 + \cdots.$$

等式右端是一个收敛的交错级数, 且各项的绝对值单调减少. 所以

取它的前两项之和作为 $\sin \frac{\pi}{20}$ 的近似值时, 其误差

$$|r_2| \leq \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{20} \right)^5 < \frac{1}{120} \cdot 0.2^5 < \frac{1}{300\ 000}.$$

因此取

$$\frac{\pi}{20} \approx 0.157\ 080, \quad \left(\frac{\pi}{20} \right)^3 \approx 0.003\ 876.$$

于是得

$$\sin 9^\circ \approx 0.156\,434 \approx 0.156\,43.$$

这时误差不超过 10^{-5} .

利用幂级数不仅可计算一些函数的近似值,而且可计算一些定积分的近似值.具体地说,如果被积函数在积分区间上能展开成幂级数,则把这个幂级数逐项积分,利用积分后所得的级数就可算出定积分的近似值.

例 4 计算定积分 $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx$ 的近似值,精确到 0.000 1 (取 $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \approx 0.564\,19$).

解 将 e^x 的幂级数展开式(第四节(6)式)中的 x 换成 $-x^2$, 就得到被积函数的幂级数展开式

$$e^{-x^2} = 1 + \frac{(-x^2)}{1!} + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty),$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots \right) dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \cdots \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{2^4 \cdot 5 \cdot 2!} - \frac{1}{2^6 \cdot 7 \cdot 3!} + \cdots \right). \end{aligned}$$

取前四项的和作为近似值,其误差为

$$|r_4| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2^8 \cdot 9 \cdot 4!} < \frac{1}{90\,000},$$

所以

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx &\approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{2^4 \cdot 5 \cdot 2!} - \frac{1}{2^6 \cdot 7 \cdot 3!} \right) \\
 &\approx 0.564\,19(1 - 0.083\,33 + 0.006\,25 - 0.000\,37) \\
 &\approx 0.520\,49 \approx 0.520\,5.
 \end{aligned}$$

* 习题 10-5

1. 利用函数的幂级数展开式求下列各数的近似值:

- (1) $\ln 3$ (精确到 10^{-4}); (2) $\sqrt{e}$ (精确到 0.001);
 (3) $\sqrt[9]{522}$ (精确到 10^{-5}); (4) $\cos 2^\circ$ (精确到 10^{-4}).

2. 利用被积函数的幂级数展开式求下列定积分的近似值:

- (1) $\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^4} dx$ (精确到 10^{-4}); (2) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ (精确到 10^{-4}).

第十章复习题

一、概念复习

- $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = A$ 的定义是_____.
- 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 是它收敛的_____条件, 不是它收敛的_____条件.
- 部分和数列 s_n 有界是正项级数收敛的_____条件.
- 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必定_____; 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 必定_____.
- 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \rho$, 若 $\rho < 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ _____; 若 $\rho > 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ _____.
- 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| \bigg/ \frac{1}{n^2} = l$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ _____; 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \bigg/ \frac{1}{n} = l > 0$,

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ _____.

7. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p}$ 当 _____ 时绝对收敛, 当 _____ 时条件收敛, 当 _____ 时发散.

8. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R ($0 < R < +\infty$), 则当 _____ 时该幂级数绝对收敛, 当 _____ 时该幂级数发散.

二、综合练习

1. 判定下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2n^2};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^{10}(n+1)}.$$

2. 判定下列级数是绝对收敛、条件收敛, 还是发散:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \sin \frac{\pi}{n+1};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln \frac{n+1}{n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right);$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^{2n}}{(2n-1)!}.$$

3. 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$ 收敛, 并求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k^2} \right)$.

4. 求下列幂级数的收敛区间:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x+1)^n;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{n} x^n;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2} (x-e)^n;$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} x^{2n}.$$

5. 求下列幂级数的收敛区间, 并在收敛区间内求其和函数:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n} x^{2n};$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} x^n;$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n.$$

6. 将下列函数展开成 x 的幂级数, 并指出其收敛区间:

$$(1) (x+2)e^x; \quad (2) \frac{1}{(2-x)^2};$$

$$(3) \sin x - x \cos x; \quad (4) \ln(1+x^2).$$

附录

二阶和三阶行列式简介

给出二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \quad (1)$$

求这方程组的解.

用大家熟知的消元法, 分别消去方程组(1)中的 x_2 及 x_1 , 得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}. \end{cases} \quad (2)$$

下面引入二阶行列式, 然后利用二阶行列式来进一步讨论上述问题.

设已知四个数排成正方形表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

则数 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为对应于这个表的二阶行列式, 用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (3)$$

表示, 因此

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 叫做行列式(3)的元素, 横排叫做行, 竖排叫做列. 元素 a_{ij} 中的第一个指标 i 和第二个指标 j 依次表示其所在的行数和列数. 例如, 元素 a_{21} 在行列式(3)中位于第二行第一列.

我们可以借助下列图形表示它的计算法则(称为二阶行列式的对角线法则):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

其中行列式中从左上角到右下角的直线称为主对角线,从右上角到左下角的直线称为次对角线.主对角线上元素的乘积前面取正号,次对角线上元素的乘积取负号.

现在,方程组(2)可利用行列式来表示.设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21},$$

则方程组(2)可写成

$$\begin{cases} Dx_1 = D_1, \\ Dx_2 = D_2. \end{cases} \quad (2')$$

我们注意到, D 就是方程组(1)中 x_1 及 x_2 的系数构成的行列式,因此称为系数行列式,而 D_1 和 D_2 分别是用方程组(1)右端的常数项代替 D 的第一列和第二列而形成的.

若 $D \neq 0$,则方程组(2)的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}. \quad (4)$$

例 1 解方程组

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ x - 2y = -3. \end{cases}$$

$$\text{解 } D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) - 3 \times 1 = -7,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 8 \times (-2) - 3 \times (-3) = -7,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \times (-3) - 8 \times 1 = -14.$$

因 $D = -7 \neq 0$, 故所给方程组的解为

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-7}{-7} = 1, \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{-14}{-7} = 2.$$

下面介绍三阶行列式概念.

设已知九个数排成正方形表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

则数 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$ 称为对应于这个表的三阶行列式, 用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示, 因此

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ & \quad a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned} \quad (5)$$

关于三阶行列式的元素、行、列等概念, 与二阶行列式的相应概念类似, 不再重复.

(5) 式右端相当复杂, 我们可以借助下列图形得出它的计算

利用交换律及结合律,可把(5)式改写如下:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + \\ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

把上式右端三个括号中的式子表示为二阶行列式,则有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

上式称为三阶行列式按第一行的展开式.

例 2 将(6)式中的行列式按第一行展开并计算它的值.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} &= 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times 12 - (-22) + 2 \times (-18) \\ &= 24 + 22 - 36 = 10. \end{aligned}$$

最后我们不加证明地指出,利用三阶行列式,可得到三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

在系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时的解的公式:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D},$$

其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

思考题答案

第七章

第一节

1. 不一定相等,一定平行.
2. $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}$.
3. $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\boldsymbol{a} + \frac{2}{3}\boldsymbol{c}$.

第二节

1. 相等.
2. $\overrightarrow{AD} = (1, 1, 1)$.
3. $\boldsymbol{e} = \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}} \right)$.
4. 不能.
5. $\boldsymbol{r}$ 在各坐标轴上的投影均为 2, $\boldsymbol{r} = (2, 2, 2)$.

第三节

1. 垂直.

第四节

1. $x^2 + y^2 = a^2$.
2. $\boldsymbol{n} = \pm (0, 0, 1), z = 0$.
3. $2x + y - 2 = 0$.
4. $\frac{1}{3}$.

$$5. d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

第五节

$$1. \begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases} \quad \frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}.$$

第六节

1. 是.

$$2. x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

第八章

第一节

- $\{(x, y) \mid -x \leq y \leq x\}$, 闭区域;
 - $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$, 开区域;
 - $\{(x, y) \mid y \geq x^2, (x, y) \neq (0, 1)\}$, 既非开区域, 又非闭区域.
- 当 $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ 时, $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, 故 f 在 (x_0, y_0) 处连续; 当 $(x_0, y_0) = (0, 0)$ 时, $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 1 = f(0, 0)$, 故 f 在 $(0, 0)$ 处也连续, 从而 f 在整个 xOy 面上连续.

第二节

- $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y - y^3, \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 3xy^2$;
 - $\frac{\partial z}{\partial x} = y^2(1 + xy)^{y-1}, \frac{\partial z}{\partial y} = (1 + xy)^y \left[\ln(1 + xy) + \frac{xy}{1 + xy} \right]$.
- $\frac{2}{3}\pi rh$;
 - $\frac{1}{3}\pi r^2$.
- $f_{xx} = g''(x), f_{xy} = 0, f_{yy} = h''(y)$.

第三节

- 必要条件: f 在 (x_0, y_0) 处连续; $f_x(x_0, y_0)$ 和 $f_y(x_0, y_0)$ 存在.

充分条件: f_x, f_y 在 (x_0, y_0) 处连续.
- $dz = \alpha dx + \beta dy$.

第四节

1. 设 $z = u(x)^{v(x)}$. 则

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} \\ &= v \cdot u^{v-1} \cdot u'(x) + u^v \cdot \ln u \cdot v'(x),\end{aligned}$$

此式恰为“两个错误结果”之和,故适用于一般的幂指函数.

$$2. \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,2)} = 5, \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,2)} = 3.$$

第五节

$$1. \frac{dy}{dx} = \frac{2xy^3}{\sin y - 3x^2y^2}.$$

$$2. -1.$$

第六节

$$1. \text{切线方程: } \frac{x - \frac{1}{2}}{1} = \frac{y - 2}{-4} = \frac{z - 1}{8}, \text{法平面方程: } 2x - 8y + 16z - 1 = 0.$$

$$2. \text{切平面方程: } x + 2y - 4 = 0, \text{法线方程: } \begin{cases} \frac{x - 2}{1} = \frac{y - 1}{2}, \\ z = 0. \end{cases}$$

第七节

$$1. \text{极大值: } f(2, -2) = 8.$$

2. 没有极值

$$3. a = 2, b = 4.$$

第九章

第一节

$$1. \iint_D \mu(x, y) d\sigma.$$

$$2. (1) \iint_D (x + y)^2 d\sigma \geq \iint_D (x + y)^3 d\sigma;$$

$$(2) \iint_D \ln(x^2 + y^2) d\sigma \leq \iint_D [\ln(x^2 + y^2)]^2 d\sigma.$$

3. $D: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1.$

第二节

1. $2, \frac{y}{2}, 2, \frac{y^4}{4} - 16y.$

2. $0, -\frac{4}{3}x + 4, 4, -\frac{3}{4}y + 3.$

3. $2\pi, 4, \frac{1}{\rho}.$

第三节

1. $\mathbf{n} = (2x, 2y, -1), \frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi.$

2. $\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_D x d\sigma, \bar{y} = \frac{1}{A} \iint_D y d\sigma, A \text{ 为 } D \text{ 的面积}, \left(\frac{8}{3\pi}, \frac{4}{\pi}\right).$

第 十 章

第一节

1. $s_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right), \text{收敛, 和为 } \frac{3}{4}.$

2. $-1 < x < 1, \text{和为 } \frac{-x}{1+x}.$

3. 收敛, 和为 $\frac{2}{3}.$

第二节

1. 不能, 用比较审敛法.

2. 是, 收敛.

第三节

1. 发散点.

2. 不同.

3. $-\ln\left(1 - \frac{x}{2}\right), (-2, 2).$

第四节

1. $1+l$.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}, x \in (-\infty, +\infty)$.

3. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n, x \in (0, 2)$.

习题答案

第 七 章

习题 7-1

1. $5a + 11b - 7c$.

3. $\overrightarrow{D_1A} = -\left(c + \frac{1}{5}a\right), \quad \overrightarrow{D_2A} = -\left(c + \frac{2}{5}a\right),$

$\overrightarrow{D_3A} = -\left(c + \frac{3}{5}a\right), \quad \overrightarrow{D_4A} = -\left(c + \frac{4}{5}a\right).$

习题 7-2

1. $A: \text{IV}, \quad B: \text{V}, \quad C: \text{VIII}, \quad D: \text{III}.$

2. xOy 面: $(x_0, y_0, 0)$, yOz 面: $(0, y_0, z_0)$, xOz 面: $(x_0, 0, z_0)$;

x 轴: $(x_0, 0, 0)$, y 轴: $(0, y_0, 0)$, z 轴: $(0, 0, z_0)$.

4. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 0\right), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, 0\right), \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, a\right),$
 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, a\right), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, a\right), \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, a\right).$

5. $(1, -2, -2), (-2, 4, 4).$

6. $C(1, 0, 5), D(0, 5, -3).$

7. $m = 4, n = -1.$

8. 是.

9. $(0, 1, -2).$

11. $0, -8.$

12. x 轴: $\sqrt{34}$, y 轴: $\sqrt{41}$, z 轴: 5.

13. $\left(\frac{6}{11}, \frac{7}{11}, -\frac{6}{11}\right)$ 或 $\left(-\frac{6}{11}, -\frac{7}{11}, \frac{6}{11}\right)$.

14. 模:2; 方向余弦: $-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}$; 方向角: $\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$.

15. (1) 垂直于 x 轴, 平行于 yOz 平面;

(2) 指向与 y 轴正向一致, 垂直于 xOz 平面;

(3) 平行于 z 轴, 垂直于 xOy 平面.

16. 2.

17. $13, 7j$.

习题 7-3

1. (1) $3, 5i + j + 7k$; (2) $-18, 10i + 2j + 14k$; (3) $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{3}{2\sqrt{21}}$.

2. $-\frac{3}{2}$.

3. $\pm \frac{1}{\sqrt{17}} (3i - 2j - 2k)$.

4. 5 880 J.

5. $|F_1| x_1 \sin \theta_1 = |F_2| x_2 \sin \theta_2$.

6. 2.

7. $\lambda = 2\mu$.

9. (1) $-8j - 24k$; (2) $-j - k$; (3) 2.

10. $\frac{1}{2}\sqrt{19}$.

习题 7-4

1. $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2$.

2. 圆柱面.

3. $3x - 7y + 5z - 4 = 0$.

4. $2x + 9y - 6z - 121 = 0$.

5. $x - 3y - 2z = 0$.

6. $x + y - 3z - 4 = 0$.

7. $(1, -1, 3)$.

8. (1) $y + 5 = 0$; (2) $x + 3y = 0$; (3) $9y - z - 2 = 0$.

9. 1.

习题 7-5

1. $\frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{5}.$

2. $\frac{x-3}{-4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}.$

3. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3}, \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 1 + t, \\ z = 1 + 3t. \end{cases}$

4. $16x - 14y - 11z - 65 = 0.$

5. $\cos \varphi = 0.$

7. $\frac{x}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{1}.$

8. $8x - 9y - 22z - 59 = 0.$

9. $\varphi = 0.$

10. (1) 平行; (2) 垂直; (3) 直线在平面上.

11. $x - y + z = 0.$

12. $\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$

13. $\frac{3\sqrt{2}}{2}.$

* 15. $\begin{cases} 17x + 31y - 37z - 117 = 0, \\ 4x - y + z - 1 = 0. \end{cases}$

习题 7-6

1. (1) 直线, 平面; (2) 直线, 平面;
(3) 圆, 圆柱面; (4) 双曲线, 双曲柱面.

2. $y^2 + z^2 = 5x.$

3. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2 + z^2}{4} = 1.$

4. (1) xOy 平面上的椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 绕 x 轴旋转一周;

(2) xOy 平面上的双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 绕 y 轴旋转一周;

(3) xOy 平面上的双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 绕 x 轴旋转一周;

(4) yOz 平面上的直线 $z = y + a$ 绕 z 轴旋转一周.

习题 7-7

1. (1) 圆; (2) 椭圆; (3) 双曲线; (4) 抛物线.

$$2. (1) \begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t, \\ y = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t, \quad (0 \leq t \leq 2\pi); \\ z = 3 \sin t \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \cos t, \\ y = \sqrt{3} \sin t, \quad (0 \leq t \leq 2\pi). \\ z = 0 \end{cases}$$

3. 母线平行于 x 轴的柱面方程: $3y^2 - z^2 = 16$,
母线平行于 y 轴的柱面方程: $3x^2 + 2z^2 = 16$.

$$4. \begin{cases} 2x^2 - 2x + y^2 = 8, \\ z = 0. \end{cases}$$

第七章复习题

一、1. $(a, b, -c), (-a, b, c), (a, -b, c), (a, -b, -c), (-a, b, -c),$
 $(-a, -b, c), (-a, -b, -c).$

2. 共面.

3. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1, \text{Prj}_{\mathbf{e}_1} \mathbf{a}, |\mathbf{a}| \cos \alpha.$

4. 3.

5. 36.

$$6. \frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{-2}.$$

$$7. \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z}{0}.$$

8. $f(x, y) = g(x, y).$

二、1. $(0, 2, 0).$

2. $\sqrt{30}.$

$$3. \overrightarrow{AD} = \mathbf{c} + \frac{1}{2}\mathbf{a}, \overrightarrow{BE} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}, \overrightarrow{CF} = \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}.$$

4. 1.

5. $\arccos \frac{2}{\sqrt{7}}.$

6. $\frac{\pi}{3}.$

7. $z = -4, (\widehat{a, b})_{\min} = \frac{\pi}{4}.$

8. 30.

9. $(14, 10, 2).$

11. $4(z-1) = (x-1)^2 + (y+1)^2.$

12. (1) $\begin{cases} x=0, \\ z=2y^2, \end{cases}$ z 轴; (2) $\begin{cases} x=0, \\ \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1, \end{cases}$ y 轴;

(3) $\begin{cases} x=0, \\ z=\sqrt{3}y, \end{cases}$ z 轴; (4) $\begin{cases} z=0, \\ x^2 - \frac{y^2}{4} = 1, \end{cases}$ x 轴.

13. $x + \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0$ 或 $x - \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0.$

14. $x + 2y + 1 = 0.$

15. $\frac{x+1}{16} = \frac{y}{19} = \frac{z-4}{28} \left(\begin{cases} 3x - 4y + z - 1 = 0, \\ 10x - 4y - 3z + 22 = 0 \end{cases} \right).$

16. $\left(0, 0, \frac{1}{5}\right).$

17. $\begin{cases} z=0, \\ x^2 + y^2 = x + y. \end{cases}$

18. $\begin{cases} z=0, \\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1. \end{cases}$

第 八 章

习题 8-1

1. $t^2 f(x, y).$

3. $(x+y)^{xy} + (xy)^{2x}.$

4. (1) $\{(x, y) \mid y^2 - 2x + 1 > 0\}$;
 (2) $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 \geq 0, x^2 + y^2 \neq 0\}$.
 5. (1) 1; (2) $+\infty$; (3) $\ln 2$; (4) -4.

习题 8-2

1. (1) $\frac{\partial s}{\partial u} = \frac{1}{v} - \frac{v}{u^2}, \frac{\partial s}{\partial v} = \frac{1}{u} - \frac{u}{v^2}$;
 (2) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}$;
 (3) $\frac{\partial z}{\partial x} = y[\cos(xy) - \sin(2xy)], \frac{\partial z}{\partial y} = x[\cos(xy) - \sin(2xy)]$;
 (4) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{y} \csc \frac{2x}{y}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x}{y^2} \csc \frac{2x}{y}$;
 (5) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{z} x^{\frac{y}{z}-1}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{z} x^{\frac{y}{z}} \ln x, \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} x^{\frac{y}{z}} \ln x$;
 (6) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}},$
 $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{(x-y)^z \ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}.$
 4. $f_x(x, 1) = 1$. (提示:用公式 $f_x(x_0, y_0) = \left. \frac{d}{dx} f(x, y_0) \right|_{x=x_0}$ 计算较方便.)
 5. $\frac{\pi}{4}$.
 6. -2.
 7. (1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -16xy$;
 (2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$;
 (3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^x \ln^2 y, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x(x-1)y^{x-2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = y^{x-1}(1 + x \ln y).$
 8. $f_{xx}(0, 0, 1) = 2, f_{xz}(1, 0, 2) = 2, f_{yz}(0, -1, 0) = 0, f_{zzx}(2, 0, 1) = 0.$
 9. $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 0, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -\frac{1}{y^2}.$

习题 8-3

1. (1) $\left(y + \frac{1}{y}\right)dx + x\left(1 - \frac{1}{y^2}\right)dy$; (2) $-\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}\left(\frac{y}{x}dx - dy\right)$;

$$(3) -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}(ydx-xdy);$$

$$(4) yzx^{yz-1}dx + zx^{yz}\ln xdy + yx^{yz}\ln xdz.$$

$$2. \frac{1}{3}dx + \frac{2}{3}dy.$$

$$3. \Delta z = -0.119, dz = -0.125.$$

$$4. 0.25e.$$

$$5. 2.95.$$

$$6. 2.039.$$

习题 8-4

$$1. e^{\sin x - 2x^3}(\cos x - 6x^2).$$

$$2. \frac{3(1-4t^2)}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}.$$

$$3. \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 \sin y \cos y (\cos y - \sin y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2x^3 \sin y \cos y (\sin y + \cos y) + x^3 (\sin^3 y + \cos^3 y).$$

$$4. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y^2} \ln(3x-2y) + \frac{3x^2}{(3x-2y)y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x^2}{y^3} \ln(3x-2y) - \frac{2x^2}{(3x-2y)y^2}.$$

$$5. 192.$$

$$6. \frac{e^x(1+x)}{1+x^2e^{2x}}.$$

$$8. (1) \frac{\partial w}{\partial x} = 2xf'_1 + ye^{xy}f'_2, \frac{\partial w}{\partial y} = -2yf'_1 + xe^{xy}f'_2;$$

$$(2) \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{y}f'_1, \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}f'_1 + \frac{1}{z}f'_2, \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{y}{z^2}f'_2;$$

$$(3) \frac{\partial w}{\partial x} = f'_1 + yf'_2 + yzf'_3, \frac{\partial w}{\partial y} = xf'_2 + xzf'_3, \frac{\partial w}{\partial z} = xyf'_3.$$

$$11. (1) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{11} + \frac{2}{y}f''_{12} + \frac{1}{y^2}f''_{22},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{x}{y^2} \left(f''_{12} + \frac{1}{y}f''_{22} \right) - \frac{1}{y^2}f'_2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3} f'_2 + \frac{x^2}{y^4} f''_{22};$$

$$(2) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2yf'_2 + y^4 f''_{11} + 4xy^3 f''_{12} + 4x^2 y^2 f''_{22},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2yf'_1 + 2xf'_2 + 2xy^3 f''_{11} + 2x^3 y f''_{22} + 5x^2 y^2 f''_{12},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2xf'_1 + 4x^2 y^2 f''_{11} + 4x^3 y f''_{12} + x^4 f''_{22}.$$

$$13. (1) 400\pi \text{ cm}^3/\text{s}; \quad (2) 24\pi \text{ cm}^2/\text{s}.$$

习题 8-5

$$1. \frac{y^2 - e^x}{\cos y - 2xy}.$$

$$2. \frac{x+y}{x-y}.$$

$$3. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz - \sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz - 2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}.$$

$$4. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x+z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2}{y(x+z)}.$$

$$6. \frac{2y^2 z e^z - 2xy^3 z - y^2 z^2 e^z}{(e^z - xy)^3}.$$

$$7. \frac{z(z^4 - 2xyz^2 - x^2 y^2)}{(z^2 - xy)^3}.$$

习题 8-6

$$1. \text{切线方程: } \frac{x - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}{1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

$$\text{法平面方程: } x + y + \sqrt{2}z = \frac{\pi}{2} + 4.$$

$$2. P_1(-1, 1, -1) \text{ 及 } P_2\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}\right).$$

$$3. \text{切平面方程: } x + 4y + 9z = 36,$$

$$\text{法线方程: } \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{9}.$$

$$4. x - y + 2z = \pm \sqrt{\frac{11}{2}}.$$

$$5. (-3, -1, 3), \frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{1}.$$

习题 8-7

$$1. \text{极大值: } f(3, 2) = 36.$$

$$2. \text{极小值: } f\left(\frac{1}{2}, -1\right) = -\frac{e}{2}.$$

$$3. \text{当两直角边之长均为 } \frac{l}{\sqrt{2}} \text{ 时, 可得最大的周长.}$$

$$4. \text{当长、宽均为 } \sqrt[3]{2k}, \text{ 而高为 } \frac{1}{2}\sqrt[3]{2k} \text{ 时, 表面积最小.}$$

$$5. \text{当长、宽、高均为 } \frac{2a}{\sqrt{3}} \text{ 时, 可得最大的体积.}$$

第八章复习题

$$\text{一、1. (1) 不存在; (2) } D = \{(x, y) \mid x^2 \leq y, 0 < x^2 + y^2 < 1\}, \frac{\sqrt{2}}{2 \ln \frac{3}{4}}.$$

$$2. (1) B, D; (2) B; (3) C; (4) A, D.$$

$$\text{二、1. } f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, & \text{当 } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{当 } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

$$f_y(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, & \text{当 } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{当 } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

$$2. (1) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + y^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x + y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{2y}{(x + y^2)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(x - y^2)}{(x + y^2)^2};$$

$$(2) \frac{\partial z}{\partial x} = ye^{x^2 y^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{x^2 y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2xy^3 e^{x^2 y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (1 + 2x^2 y^2) e^{x^2 y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3 y e^{x^2 y^2}.$$

$$3. \Delta z = 0.02, dz = 0.03.$$

$$4. \frac{\partial z}{\partial x} = f + 2x^2 f', \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy f'.$$

$$5. (1) e^{x+y}(f_2' + \cos x f_{12}'' + e^{x+y} f_{22}'');$$

$$(2) e^y f_1' + x e^{2y} f_{11}'' + e^y f_{13}'' + x e^y f_{21}'' + f_{23}''.$$

$$6. \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y x^{y-1} + z^x \ln z}{y^z \ln y + x z^{x-1}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^y \ln x + z y^{z-1}}{y^z \ln y + x z^{x-1}}.$$

$$7. (1) \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, (0 \leq t \leq 2\pi); \\ z = 2. \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{y + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1}, \\ z = 2. \end{cases}$$

第九章

习题 9-1

$$1. I_1 = 4I_2.$$

$$2. (1) 0 \leq I \leq 2;$$

$$(2) 0 \leq I \leq \pi^2;$$

$$(3) 2 \leq I \leq 8;$$

$$(4) 36\pi \leq I \leq 100\pi.$$

习题 9-2

$$1. (1) \frac{8}{3}; \quad (2) 1; \quad (3) \frac{20}{3}; \quad (4) -\frac{3}{2}\pi;$$

$$(5) \frac{3}{2} + \cos 1 + \sin 1 - \cos 2 - 2\sin 2; \quad (6) \frac{13}{6};$$

$$(7) \pi^2 - \frac{40}{9}; \quad (8) \frac{6}{55}; \quad (9) \frac{64}{15}; \quad (10) e - e^{-1}.$$

$$2. (1) \int_0^4 dx \int_x^{2\sqrt{x}} f(x, y) dy \quad \text{或} \quad \int_0^4 dy \int_{\frac{1}{4}y^2}^y f(x, y) dx;$$

$$(2) \int_{-r}^r dx \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} f(x, y) dy \quad \text{或} \quad \int_0^r dy \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} f(x, y) dx;$$

$$(3) \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x f(x, y) dy \quad \text{或} \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{1}{y}}^2 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y) dx.$$

$$6. (1) \int_0^1 dx \int_x^1 f(x, y) dy; \quad (2) \int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy;$$

$$(3) \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy; \quad (4) \int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$7. \frac{7}{2}.$$

8. $\frac{17}{6}$.

9. (1) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$;

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos \varphi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$;

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{(\cos \varphi + \sin \varphi)^{-1}} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$;

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sec \varphi \tan \varphi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\csc \varphi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$.

10. (1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sec \varphi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\csc \varphi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$;

(2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^{2\sec \varphi} f(\rho) \rho d\rho$;

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{(\cos \varphi + \sin \varphi)^{-1}}^1 f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$;

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\sec \varphi \tan \varphi}^{\sec \varphi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$.

11. (1) $\frac{1}{8} \pi a^4$; (2) $\frac{3}{4} \pi a^4$;

(3) $\frac{1}{6} a^3 [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$; (4) $\frac{2}{45}(\sqrt{2} + 1)$.

12. (1) $\pi(e^4 - 1)$; (2) $\frac{\pi}{4}(2\ln 2 - 1)$; (3) $\frac{3}{64}\pi^2$.

13. (1) $\frac{9}{4}$; (2) $\frac{\pi}{8}(\pi - 2)$; (3) $14a^4$; (4) $\frac{2}{3}\pi(b^3 - a^3)$.

14. $\frac{1}{40} \pi^5$.

15. $\frac{1}{3} R^3 \arctan k$.

16. $\frac{3}{32} \pi a^4$.

习题 9-3

1. $2a^2(\pi - 2)$.

2. $\sqrt{2}\pi$.

$$3. \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}.$$

$$4. (1) \bar{x} = \frac{3}{5}x_0, \bar{y} = \frac{3}{8}y_0 \quad (\text{其中 } y_0 = \sqrt{2px_0}); \quad (2) \bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{4b}{3\pi}.$$

$$5. \bar{x} = \frac{35}{48}, \bar{y} = \frac{35}{54}.$$

6. 位于薄片内并与两直角边相距 $\frac{2a}{5}$ 处.

$$7. (1) I_x = \frac{72}{5}, I_y = \frac{96}{7}; \quad (2) I_x = \frac{1}{3}ab^3, I_y = \frac{1}{3}a^3b.$$

* 习题 9-4

$$1. (1) \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^1 f(x, y, z) dz; \quad (2) \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x, y, z) dz.$$

$$2. \frac{3}{2}.$$

$$3. (1) \frac{1}{364}; \quad (2) \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{5}{8} \right); \quad (3) 0; \quad (4) \frac{16}{3}\pi.$$

$$4. (1) \frac{32}{3}\pi; \quad (2) \frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5}-4).$$

$$5. (1) \left(0, 0, \frac{3}{4} \right); \quad (2) \left(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a, \frac{7}{30}a^2 \right).$$

* 习题 9-5

$$1. (1) 2\pi a^5; \quad (2) \sqrt{2}; \quad (3) \frac{1}{12}(5\sqrt{5}+6\sqrt{2}-1);$$

$$(4) e^a \left(2 + \frac{\pi}{4}a \right) - 2; \quad (5) \frac{256}{15}a^3; \quad (6) 2a^2.$$

2. 形心在扇形对称轴上且与圆心距离 $\frac{a}{\alpha} \sin \alpha$ 处.

$$3. I_x = 2\pi a^4, I_y = 8\pi a^4.$$

* 习题 9-6

$$1. -fR.$$

$$2. (1) -\frac{56}{15}; \quad (2) 2; \quad (3) -\frac{\pi}{2}a^3; \quad (4) 0.$$

$$3. (1) \frac{34}{3}; \quad (2) 11; \quad (3) 14; \quad (4) \frac{32}{3}.$$

* 习题 9-7

1. (1) $\frac{1}{30}$; (2) 8.

2. $\frac{3}{8}\pi a^2$.

3. (1) 12; (2) 0; (3) $\frac{1}{4}\pi^2$; (4) $\frac{1}{4}\sin 2 - \frac{7}{6}$.

4. (1) $\frac{5}{2}$; (2) 236; (3) 5.

第九章复习题

一、1. (1) 连续; (2) $f(0,0)$;

(3) $\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_D f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi$;

(4) $\int_1^t f(x)(x-1) dx, f(t)(t-1)$; * (5) $2x^2 + 9y^2 = 1$.

2. (1) C; (2) D; * (3) D.

二、1. (1) $\int_{-2}^0 dx \int_{2x+4}^{4-x^2} f(x,y) dy$; (2) $\int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x,y) dy$.

2. (1) $\frac{R^3}{3} \left(\pi - \frac{4}{3} \right)$; (2) $\frac{\pi}{2} - 1$; (3) $\frac{37}{4}\pi$.

3. 6π .

4. $\frac{4}{3}$.

5. 另一边长为 $\sqrt{\frac{2}{3}}R$ (R 为圆的半径).

6. $\frac{4}{7}\mu$.

* 7. (1) $\frac{1}{8}$; (2) $\frac{1}{48}$.

* 8. $V = \frac{\pi}{2}$; $\bar{x} = \bar{y} = 0, \bar{z} = \frac{2}{3}$; $I_z = \frac{1}{6}\pi \mu$.

* 9. $2\pi^2 a^3 (1 + 2\pi^2)$.

* 10. -2π .

* 11. $1 - \frac{1}{4}\sin 4 + \frac{3}{2}\pi$.

第 十 章

习题 10-1

1. (1) $\frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \frac{1+4}{1+4^2} + \frac{1+5}{1+5^2} + \frac{1+6}{1+6^2} + \cdots$;
 (2) $\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \cdots$;
 (3) $-1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{5^4} + \cdots$;
 (4) $\frac{1!}{1^1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{4^4} + \frac{5!}{5^5} + \cdots$.
 2. (1) $\frac{1}{2n-1}$; (2) $(-1)^{n-1} \frac{n+1}{n}$;
 (3) $\frac{x^{\frac{n}{2}}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}$; (4) $(-1)^{n-1} \frac{a^{n+1}}{2n+1}$.
 3. (1) 发散; (2) 收敛.
 4. (1) 收敛; (2) 发散; (3) 发散; (4) 收敛.
 5. 12 m.

习题 10-2

1. (1) 发散; (2) 发散; (3) 收敛;
 (4) 收敛; (5) 收敛; (6) 收敛.
 2. (1) 发散; (2) 收敛; (3) 收敛;
 (4) 收敛; (5) 收敛; (6) 收敛.
 3. (1) 收敛; (2) 收敛; (3) 发散;
 (4) 发散; (5) $\alpha > 1$ 时收敛, $\alpha \leq 1$ 时发散; (6) 收敛.
 4. (1) 条件收敛; (2) 绝对收敛; (3) 绝对收敛; (4) 条件收敛.

习题 10-3

1. (1) $(-1, 1)$; (2) $(-1, 1)$; (3) $(-\infty, +\infty)$;
 (4) $(-3, 3)$; (5) $(4, 6)$; (6) $(0, 2)$.
 2. (1) $\frac{1}{(1-x)^2}$; (2) $\frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x$.

习题 10-4

$$1. (1) \ln a + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{a} \right)^n, (-a, a);$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, (-\infty, +\infty);$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2(2n)!} (2x)^{2n}, (-\infty, +\infty);$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n+1} x^{4n+1}, (-1, 1).$$

$$2. (1) \frac{1}{\ln 10} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} (x-1)^n, (0, 2);$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) (x-1)^n, (-1, 3).$$

$$3. \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{(2n)!} \left(x + \frac{\pi}{3} \right)^{2n} + \frac{\sqrt{3}}{(2n+1)!} \left(x + \frac{\pi}{3} \right)^{2n+1} \right],$$

$$(-\infty, +\infty).$$

* 习题 10-5

$$1. (1) 1.098\ 6; \quad (2) 1.648; \quad (3) 2.004\ 30; \quad (4) 0.999\ 4.$$

$$2. (1) 0.494\ 0; \quad (2) 0.496\ 1.$$

第十章复习题

$$\text{一、} 1. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k = A.$$

2. 必要, 充分.

3. 充要.

4. 收敛; 发散.

5. 绝对收敛; 发散.

6. 绝对收敛; 发散.

7. $p > 1, 0 < p \leq 1, p \leq 0.$

8. $|x| < R, |x| > R.$

二、1. (1) 发散; (2) 发散; (3) 收敛; (4) 发散.

2. (1) 绝对收敛; (2) 条件收敛; (3) 绝对收敛; (4) 发散.

3. 0.

$$4. (1) (-2, 0); \quad (2) \left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right);$$

$$(3) (0, 2e); \quad (4) (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

$$5. (1) \frac{4+2x^2}{(2-x^2)^2} \quad (-\sqrt{2} < x < \sqrt{2});$$

$$(2) \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (-1 < x < 1);$$

$$(3) \frac{x}{1-x} - \ln(1-x) \quad (-1 < x < 1);$$

$$(4) (x+1)e^x \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$6. (1) (x+2)e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n!} x^n \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$(2) \frac{1}{(2-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}} x^n \quad (-2 < x < 2);$$

$$(3) \sin x - x \cos x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k+1)(2k-1)!} x^{2k+1} \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$(4) \ln(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{2n} \quad (-1 < x < 1).$$

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010) 58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010) 82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

短信防伪说明

本图书采用出版物短信防伪系统，用户购书后刮开封底防伪密码涂层，将16位防伪密码发送短信至106695881280，免费查询所购图书真伪。

反盗版短信举报

编辑短信“JB, 图书名称, 出版社, 购买地点”发送至10669588128

短信防伪客服电话

(010) 58582300

2007 年度普通高等教育精品教材



ISBN 978-7-04-043118-6



9 787040 431186 >

定价 16.00 元