

大学数学系列教材

# 数学物理方程 与特殊函数

第三版

华中科技大学数学与统计学院

非  
外  
借

高等教育出版社

# 数学物理方程与特殊函数

第三版



## 数字课程网站

网址：<http://abook.hep.com.cn/12245717>

<http://abook.hep.edu.cn/12245717>

数字课程账号 使用说明详见书内数字课程说明页

ISBN 978-7-04-051119-9



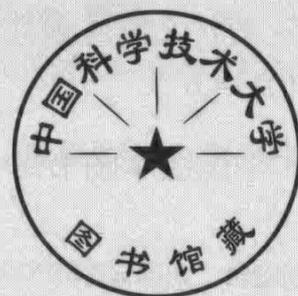
定价 24.40元

大学数学系列教材

# 数学物理方程 与特殊函数

第三版

华中科技大学数学与统计学院



高等教育出版社·北京

## 内容提要

本书第三版是在第二版的基础上经过多年教学实践,吸取使用本书的教师和读者的宝贵意见和建议修订而成的。第三版较第二版在结构上有较大的改进,在内容上进行了更新和充实。本书的特点是以讲解方法为主线,把类型不同但求解方法类似的定解问题归纳在同一章节讲述,着重阐述方法的精髓。

全书共七章:绪论(第一章),分离变量法(第二章),行波法与积分变换法(第三章),格林函数法(第四章),贝塞尔函数(第五章),勒让德多项式(第六章)和埃尔米特多项式(第七章);书后附有“几类线性常微分方程的求解”“常用积分变换表”和“ $\Gamma$ 函数”三个附录。此外,与本书配套的数字课程还提供了四套试卷及参考答案供读者练习、参考。

本书可作为高等院校理工科专业有关课程的教材使用,也可作为自学用书以及科技工作者的参考书。学习本书内容需要的预备知识包括微积分、线性代数和复变函数的基本知识。

## 图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程与特殊函数 / 华中科技大学数学与统计学院编. -- 3版. -- 北京:高等教育出版社, 2019. 3  
ISBN 978-7-04-051181-9

I. ①数… II. ①华… III. ①数学物理方程-高等学校-教材②特殊函数-高等学校-教材 IV. ①O411.1  
②O174.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第008926号

策划编辑	张彦云	责任编辑	李艳馥	特约编辑	刘 荣	封面设计	李小璐
版式设计	马敬茹	插图绘制	于 博	责任校对	高 歌	责任印制	田 甜

出版发行	高等教育出版社	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
社 址	北京市西城区德外大街4号		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
邮政编码	100120	网上订购	<a href="http://www.hepmall.com.cn">http://www.hepmall.com.cn</a>
印 刷	三河市宏图印务有限公司		<a href="http://www.hepmall.com">http://www.hepmall.com</a>
开 本	787mm×960mm 1/16		<a href="http://www.hepmall.cn">http://www.hepmall.cn</a>
印 张	12.75	版 次	1999年7月第1版
字 数	220千字		2019年3月第3版
购书热线	010-58581118	印 次	2019年3月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	24.40元

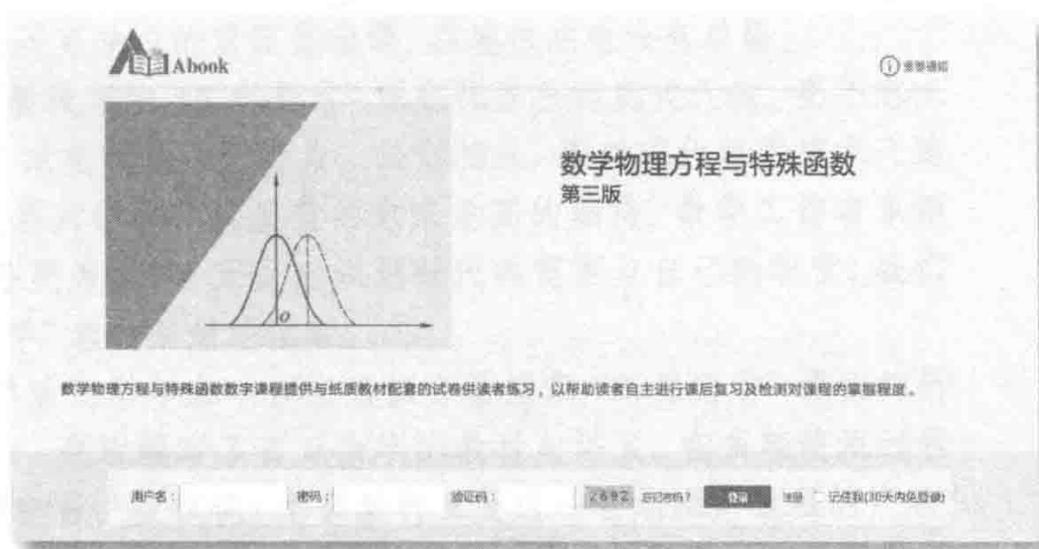
本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换  
版权所有 侵权必究  
物料号 51181-00

# 数学物理方程 与特殊函数

第三版

华中科技大学  
数学与统计学院

- 1 计算机访问<http://abook.hep.com.cn/12245717>, 或手机扫描二维码、下载并安装 Abook 应用。
- 2 注册并登录, 进入“我的课程”。
- 3 输入封底数字课程账号 (20 位密码, 刮开涂层可见), 或通过 Abook 应用扫描封底数字课程账号二维码, 完成课程绑定。
- 4 单击“进入课程”按钮, 开始本数字课程的学习。



课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制, 部分内容无法在手机端显示, 请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题, 请发邮件至 [abook@hep.com.cn](mailto:abook@hep.com.cn)。



扫描二维码  
下载 Abook 应用

<http://abook.hep.com.cn/12245717>

# 第一版序

在高等学校理工科专业的数学教育体系中，“工程数学”一直是属于具有重要地位的课程系列。当前，革新之风正吹遍高等教育界，课程重组、内容改造与学时调整的呼声日益高涨。在此形势下，工程数学课程经受住了严峻的考验，作为学习现代科学技术所不可缺少的重要基础课，其地位丝毫没有动摇。

然而，这决不意味着现存的“工程数学”课程体系已经完美无缺，更不意味着数学教育界除了墨守成规之外别无所为。恰好相反，面对现代科学技术飞速发展的形势，面对教育界对数学训练质量的愈来愈高的期待，数学工作者革新“工程数学”课程的任务更为紧迫！正是意识到时代的需要与自己的职责，我们全力推出这套“工程数学”教材呈献给读者。

华中理工大学数学系几十年来一直在组织力量探索“工程数学”课程的新的内容体系与教学方法，先后编写了百万余字的教材与讲义，在多年使用过程中不断提炼，逐步趋于完善。应该说，本套教材正是这一长期探索过程的产物，它凝结了华中理工大学数学系几代教师的心血。当然，具体执笔的教师对教材的最终成型做出了决定性的贡献。

本套教材分《线性代数》《概率论与数理统计》《计算方法》《复变函数与积分变换》和《数学物理方程与特殊函数》五册出版。编者在取材上充分考虑到新世纪对科技人员数学知识的要求；在内容处理上力求联系理工科专业的实际需要，注重培养学生的基本运算能力、分析问题与解决问题的能力；在表述上力求清晰易读，便于教学与自学。本套教材配备了较丰富的例题与习题，它们大多源于教师在自身教学中的积累，既具有明显的启发性，又具有典型的应用意义。书末所附的习题答案与提示供教师与学生在教学中参考。本套教材可供高等学校理工科各专业（非数学）使用。

本套教材的编写自始至终得到华中理工大学教务处及数学系的支持，也得到华中理工大学数学系全体教师的协助与鼓励。高等教育出版社 CHEP-Springer 编辑室的宝贵支持，使本套教材得以顺利出版。对此，我们一并表示衷心的感谢。

刘次华

2001年7月于武汉

## 第三版前言

数学物理方程是高等院校理工科专业本科生最重要的学科基础课之一，也是他们在大学期间所接触的最深入最具有应用价值的数学课程之一，与其专业知识学习和在相关领域从事科学研究息息相关。理工科专业的本科生通过本课程的学习和训练，能够提升逻辑思维水平、培养分析和解决问题的能力。

本教材第二版已经使用十年有余，课程组在长期的教学实践过程中体会到：为了更好地传授知识、满足拔尖创新人才培养的需求，对教材结构和内容进行合理更新势在必行。课程组在充分研讨和广泛征求师生意见和建议的基础上形成了修订方案。教材修订后结构上有较大变化：其一是每一章后面设置了“本章小结及补充知识”，一方面是对本章内容做简要回顾和总结，便于读者复习；另一方面是把与本章内容有关、需要或可以进一步学习的延伸知识做简要介绍，以便引导读者继续学习有关内容。其二是教材中阐述的重要结论均以“定理”“推论”或“性质”等形式编列，以示其重要性，把一些有启发性的问题或需要读者进一步思考的问题以“注”的形式编目。

修订版在内容上也做了充实和改进。在第一章，§1.1.2 增加了弦振动方程第二类边界条件的详细推导过程；为了与后续内容相衔接，§1.3 增写了用拉普拉斯方程描述静电场电位问题，§1.4.2 增补了波动方程和热传导方程定解问题提法的例子；把傅里叶级数有关知识的复习整体上放在了“本章小结及补充知识”中。在第二章，尽管“存在性定理”在理论上十分重要，但本教材以讲解方法为主，因此我们认为把这些理论结果放在补充知识里更加合理；根据教学实践，对 §2.4 中的部分内容的次序做了调整。为了让读者对行波法有更加深入的了解，本次修订在第三章增补了求解半无限长弦的振动问题的行波方法；增加了齐次化原理的力学推导过程，并在补充知识中介绍了其他类型非齐次方程定解问题的齐次化原理，以便读者更好地理解和使用该原理；对 §3.3 的部分内容做了重新组织并增加了有启发性的例题。在第四章，对基本解的表达式做了修正，以便与现行标准相统一；增加了拉普拉斯方程狄利克雷问题的稳定性结果，并把唯一性作为它的推论给出；在补充知识里回顾了微积分中的格林公式，并把它改写成便于研究二维拉普拉斯方程边值问题的形式。在第五章，增加了亥姆霍兹 (Helmholtz) 方程所定义的固有值问题的固有值是严格正的证明方法；通过增设例题来讲解如何把第二章的固有函数法推广到本章，用于求解非齐次方程

定解问题; 由于汉克尔 (Hankel) 函数在本章没有直接用到, 在这一版我们把对它的讨论放在了补充知识里; 考虑到内容的完备性以及在实际应用中的广泛性, 我们在补充知识里详细介绍了非圆对称瞬时热传导问题的分离变量法 (可以推广到圆形膜的振动问题和圆柱体电容器问题)。第六章和第七章与第二版基本保持一致。另外, 本次修订增加了“几类线性常微分方程的求解”和“常用积分变换表”两个附录, 以便读者查阅, 并在数字课程网站提供了四套试卷及参考答案供读者练习、参考。

张显文负责组织本次修订工作并参与各章节的具体修订, 张光辉参与第一章、第二章及附录的修订, 魏金波和徐浩渊参与第三章的修订, 段志文和黄山林参与第四章的修订, 尹慧和雷远杰参与第五章的修订, 严凯参与第六章的修订, 杨美华参与第七章的修订。最后由张显文统稿并对全书的行文进行润色。本次修订得到了华中科技大学数学与统计学院的大力支持。

由于我们的水平有限, 修订版中不当之处在所难免, 敬请使用本教材的教师和读者批评指正。

编者

2017年12月于华中科技大学

## 第二版前言

第二版是在孙金海老师所编写的本书第一版的基础上,广泛吸取课程老师的意见后改编而成。考虑到教学的连贯性和学生学习这一课程的实际情况,在保持全书的结构不变的同时,我们在第一章增添傅里叶级数等相关知识;第二章加了一个存在性定理说明用分离变量得解是形式解而不一定是古典解;第三章第二节,给出形式解的推导,第三节加了一小节积分变换;第四章第二节,细证了格林函数的性质;另外对几个例子和一些说法进行了必要的修订;对涉及常微分方程和球面积分等学生难于接受的内容,我们行文时尽量详述而不单独列出。令人遗憾的是,由于涉及过多的数学专门知识,我们没有详述特征值(固有值)问题,希望学习者能仔细体会第二章第六节所述特征值问题的结论,从而更好地了解分离变量法。在编写过程中得到了课题组老师们的关心与支持,在此表示衷心的感谢。

新版中如有不妥之处,敬请批评指正,以便进一步修订。

编者

2007年2月于华中科技大学

# 第一版前言

在数学物理中,需要研究各种物理过程——当研究像弹性体的振动、电磁波的传播、热的传导、粒子的扩散等物理过程和状态时,就归结出一些偏微分方程。由于这些方程是来自物理学、力学与工程技术问题中,所以就称为数学物理方程。数学物理方程是工科类高校有关专业的一门基础课,通过本课程的学习,使学生获得有关偏微分方程的一些基本概念,掌握三个典型方程的定解问题的解法,了解贝塞尔函数及勒让德多项式的一些基本知识与应用,为学习后继课程和进一步扩大数学知识面提供必要的数学基础。

编者

2001年7月于武汉

# 目 录

第一章 绪论	1
§1.1 弦振动方程与定解条件	1
§1.1.1 弦的微小横振动方程	1
§1.1.2 定解条件	4
§1.2 热传导方程与定解条件	5
§1.2.1 方程的导出	5
§1.2.2 定解条件	8
§1.3 拉普拉斯方程与定解条件	9
§1.4 基本概念与基础知识	10
§1.4.1 基本概念	10
§1.4.2 定解问题及其适定性	11
§1.4.3 叠加原理	13
§1.5 二阶线性偏微分方程的分类	14
§1.5.1 两个自变量的二阶偏微分方程的分类	14
§1.5.2 两个自变量的二阶方程的化简	15
§1.5.3 两个自变量二阶常系数方程	20
§1.6 本章小结及补充知识	21
§1.6.1 本章小结	21
§1.6.2 傅里叶级数	21
习题一	26
第二章 分离变量法	28
§2.1 有界弦的自由振动	28
§2.2 有限长杆的热传导问题	34
§2.3 二维拉普拉斯方程的边值问题	38
§2.3.1 矩形域上拉普拉斯方程的边值问题	38
§2.3.2 圆域上拉普拉斯方程的边值问题	40
§2.4 非齐次方程的求解问题	44
§2.4.1 有界弦的强迫振动问题	45
§2.4.2 有限长杆的热传导问题 (有热源)	48

§2.4.3 泊松方程 .....	50
§2.5 具有非齐次边界条件的问题 .....	52
§2.6 固有值与固有函数简介 .....	57
§2.7 本章小结及补充知识 .....	58
§2.7.1 本章小结 .....	58
§2.7.2 补充知识 .....	59
习题二 .....	60
<b>第三章 行波法与积分变换法 .....</b>	<b>64</b>
§3.1 达朗贝尔 (d'Alembert) 公式、波的传播 .....	64
§3.1.1 弦振动方程的达朗贝尔解法 .....	64
§3.1.2 达朗贝尔解的物理意义 .....	66
§3.1.3 依赖区间、决定区域和影响区域 .....	67
§3.1.4 半无限长弦的振动问题 .....	68
§3.1.5 齐次化原理 .....	70
§3.2 高维波动方程的初值问题 .....	75
§3.2.1 三维波动方程的基尔霍夫公式 .....	75
§3.2.2 降维法 .....	77
§3.2.3 解的物理意义 .....	79
§3.3 积分变换法 .....	80
§3.3.1 傅里叶变换的定义和性质 .....	80
§3.3.2 拉普拉斯变换的定义和性质 .....	82
§3.3.3 积分变换法 .....	84
§3.3.4 有限积分变换及其应用 .....	90
§3.4 本章小结及补充知识 .....	94
§3.4.1 本章小结 .....	94
§3.4.2 补充知识 .....	94
习题三 .....	97
<b>第四章 格林函数法 .....</b>	<b>100</b>
§4.1 格林公式及其应用 .....	100
§4.1.1 球对称解 .....	100
§4.1.2 格林公式 .....	101
§4.1.3 调和函数的积分表达式 .....	102
§4.1.4 调和函数的基本性质 .....	104

§4.2	格林函数 .....	107
§4.3	格林函数的应用 .....	111
§4.3.1	半空间的格林函数及狄利克雷问题 .....	111
§4.3.2	球域的格林函数及狄利克雷问题 .....	113
§4.4	试探法、泊松方程求解 .....	116
§4.4.1	试探法 .....	116
§4.4.2	泊松方程求解 .....	117
§4.5	本章小结及补充知识 .....	119
§4.5.1	本章小结 .....	119
§4.5.2	补充知识 .....	120
习题四	.....	121
<b>第五章</b>	<b>贝塞尔函数 .....</b>	<b>123</b>
§5.1	贝塞尔方程及贝塞尔函数 .....	123
§5.1.1	贝塞尔方程的导出 .....	123
§5.1.2	贝塞尔函数 .....	125
§5.2	贝塞尔函数的递推公式 .....	129
§5.3	按贝塞尔函数展开为级数 .....	131
§5.3.1	贝塞尔方程的零点 .....	132
§5.3.2	贝塞尔函数系的正交性 .....	133
§5.3.3	贝塞尔函数的模 .....	133
§5.3.4	傅里叶-贝塞尔级数 .....	134
§5.4	贝塞尔函数的应用 .....	135
§5.5	本章小结及补充知识 .....	145
§5.5.1	本章小结 .....	145
§5.5.2	补充知识 .....	146
习题五	.....	148
<b>第六章</b>	<b>勒让德多项式 .....</b>	<b>150</b>
§6.1	勒让德方程及其求解 .....	150
§6.1.1	勒让德方程的导出 .....	150
§6.1.2	勒让德方程的幂级数解 .....	152
§6.2	勒让德多项式 .....	154
§6.3	勒让德多项式的母函数及递推公式 .....	157
§6.3.1	勒让德多项式的母函数 .....	157
§6.3.2	勒让德多项式的递推公式 .....	159

§6.4 函数按勒让德多项式展为级数	160
§6.4.1 勒让德多项式的正交性	160
§6.4.2 勒让德多项式的模	160
§6.4.3 傅里叶-勒让德级数	162
§6.5 勒让德多项式的应用	164
§6.6 本章小结	166
习题六	166
<b>第七章 埃尔米特多项式</b>	<b>168</b>
§7.1 埃尔米特多项式的定义	168
§7.2 埃尔米特多项式的母函数与递推公式	171
§7.3 埃尔米特多项式的正交性与模	172
§7.4 函数按埃尔米特多项式展开为级数	173
§7.5 本章小结	174
习题七	175
<b>附录</b>	<b>176</b>
附录一 几类线性常微分方程的求解	176
附录二 常用积分变换表	179
附录三 $\Gamma$ 函数	180
<b>部分习题参考答案</b>	<b>182</b>
<b>参考文献</b>	<b>187</b>

## 绪 论

本章将从几个不同的物理模型出发, 建立数学物理中的三类典型方程; 并根据系统的边界所处的物理条件及系统的初始状态列出定解条件; 然后提出相应的定解问题.

为了建立方程, 首先根据需要选定某个作为过程表征的物理量  $u$ . 例如在研究某个系统的振动过程时, 我们就选取系统中各处的位移, 当研究某个系统的传热过程时, 自然就选取系统中各处的温度, 等等. 其次从所研究的系统中任取一小部分, 分析邻近部分与这个小部分的相互作用, 通过物理量  $u$  以算式表达这个作用, 并将算式适当整理与简化, 这就是数学物理方程了. 由于方程是邻近时间邻近点之间的联系, 所以在建立方程时完全不必管边界上的物理条件和系统的初始状态. 因此同一类物理过程, 不论其具体条件如何的不同, 都具有同样的数学物理方程.

### §1.1 弦振动方程与定解条件

#### §1.1.1 弦的微小横振动方程

设有一根拉紧时长度为  $l$  的柔软的均匀弦. 柔软的含义是: 发生于弦中的张力的方向, 总是沿着弦的瞬时侧影的切线方向. 该条件表示弦不抵抗弯曲. 由于弦被拉紧, 弦上出现张力, 因此弦就呈直线形状而静止. 一旦弦上有任何一部分不是直线形状或不静止, 由于张力的作用, 弦就开始振动. 我们研究弦作微小横振动的规律. 由于弦中的张力很大, 以至于重力对弦的作用可以忽略不计.

为了导出弦的横振动方程, 选择如图 1.1 所示的坐标系, 弦的平衡位置为  $x$  轴, 两端分别固定在  $x = 0$  及  $x = l$  处. 所谓横振动是指弦的运动发生在同一平面内, 且弦上各点沿着垂直于  $x$  轴的方向移动. 所谓微小指的是弦振动的幅度及弦上任意点切线的倾角都很小. 设  $u(x, t)$  是弦上横坐标为  $x$  的点在时刻  $t$  时的位移.

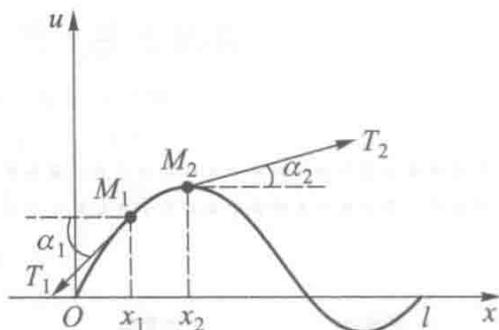


图 1.1

我们首先证明张力为常数,为此在弦上任取一小段弧  $\widehat{M_1M_2}$ , 它的长度假定为  $\Delta s$ , 则

$$\Delta s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + u_x^2} dx,$$

其中  $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ . 由假定, 弦只作微小振动,  $u_x^2$  与 1 相比可以忽略不计, 从而  $\Delta s \approx x_2 - x_1$ . 这样我们可以认为这段弦在振动过程中并未伸长, 因此由胡克 (Hooke) 定律知道, 弦上每一点所受张力在运动过程中保持不变, 即张力与时间无关. 我们分别把点  $M_1, M_2$  处的张力记作  $T_1$  和  $T_2$ , 由前所述知它们的方向分别是沿着弦在点  $M_1, M_2$  处的切线方向. 由假定弦只作横向振动, 因此张力在  $x$  轴方向分量的代数和为零, 即有

$$T_2 \cos \alpha_2 - T_1 \cos \alpha_1 = 0,$$

这里的  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  是曲线  $u(x, t)$  的切线与  $x$  轴所成之角. 对于微小振动,  $\alpha_1 \approx 0$ ,  $\alpha_2 \approx 0$ , 所以  $\cos \alpha_1 \approx 1$ ,  $\cos \alpha_2 \approx 1$ , 于是上式可写成  $T_2 = T_1$ . 这就是说, 张力也不随位置而异. 综上所述知, 张力是常数, 以  $T_0$  记之.

现在来导出弦的横振动方程. 张力在  $u$  轴方向分量的代数和为

$$T_0 \sin \alpha_2 - T_0 \sin \alpha_1 = T_0 (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1).$$

对于小振动, 有  $\sin \alpha_2 \approx \tan \alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_2}$ ,  $\sin \alpha_1 \approx \tan \alpha_1 = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_1}$ , 应用微分中值定理, 上式可化成

$$T_0 \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_2} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_1} \right] = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{\xi} (x_2 - x_1) \quad (x_1 < \xi < x_2).$$

设弦的线密度为  $\rho$ , 由于弦段  $(x_1, x_2)$  很小, 其上每点的加速度相差也不会太大, 因此可用其中任一点  $\eta$  处的加速度  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{\eta}$  代替, 于是该小段弦的质量与

加速度的乘积为

$$\rho(x_2 - x_1) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{\eta} \quad (x_1 < \eta < x_2).$$

当弦不受外力作用时, 应用牛顿 (Newton) 第二定律, 得

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{\eta} (x_2 - x_1) = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{\xi} (x_2 - x_1). \quad (1.1)$$

消去  $x_2 - x_1$ , 并令  $x_2 \rightarrow x_1$ , 上式化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.2)$$

其中  $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$ . 这个方程称为弦的自由横振动方程.

若还有外力作用到弦上, 其方向垂直于  $x$  轴, 设其力密度为  $F(x, t)$ . 由于弦段  $(x_1, x_2)$  很小, 其上各点处的外力近似相等, 因此作用在该段上的外力近似地等于

$$F(\zeta, t)(x_2 - x_1) \quad (x_1 < \zeta < x_2).$$

这样一来, 方程 (1.1) 的右端还应添上这一项, 于是得平衡方程

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{\eta} (x_2 - x_1) = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{\xi} (x_2 - x_1) + F(\zeta, t)(x_2 - x_1).$$

消去  $x_2 - x_1$ , 并令  $x_2 \rightarrow x_1$ , 则得弦的强迫横振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (1.3)$$

其中  $f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho}$ .

弦振动方程中只含有两个自变量  $x$  和  $t$ , 其中  $t$  表示时间,  $x$  表示位置. 由于它们描述的是弦的振动或波动现象, 因而又称它为一维波动方程. 类似地可导出二维波动方程 (例如薄膜振动) 和三维波动方程 (例如电磁波、声波的传播), 它们的形式分别为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t), \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t). \quad (1.5)$$

**注 1.1** 均匀杆的纵振动问题: 有一均匀杆, 只要杆中任一小段有纵向位移或速度, 必定导致邻段的压缩或伸长, 这种伸缩传开去, 就有纵波沿着杆传播了. 以  $u(x, t)$  表示杆上各点的纵向位移, 则杆的纵振动方程和弦的横振动方程一模一样. 不同的是  $a^2 = E/\rho$ ,  $E$  为杨氏模量,  $\rho$  为杆的线密度. 完全不同的物理过程中的规律, 用数学表达出来形式竟是一样的!

### §1.1.2 定解条件

对于一个确定的物理过程, 仅建立表征该过程的物理量  $u$  所满足的方程还是不够的, 还要附加一定的条件, 这些条件应该恰恰足以说明系统的初始状态以及边界上的物理状况, 所提出的具体条件多了不行, 少了也不行.

先谈初始条件. 表征某过程“初始”时刻状态的条件称为初始条件. 对于弦振动问题来说, 初始条件指的是弦在“初始”时刻的位移和速度. 若以  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  分别表示弦的初位移和初速度, 则初始条件可以表达为

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x). \end{cases} \quad (1.6)$$

再谈边界条件. 表征某过程的物理量在系统的边界上所满足的物理条件称为边界条件. 对于弦振动问题而言, 常见而又比较简单的边界条件有三种基本类型.

弦的一端 (例如  $x = 0$ ) 的运动规律已知, 若以  $\mu_1(t)$  表示其运动规律, 则边界条件可以表达为

$$u|_{x=0} = \mu_1(t). \quad (1.7)$$

若  $x = 0$  端被固定, 则相应的边界条件为

$$u|_{x=0} = 0.$$

像 (1.7) 这种类型的边界条件称为第一类边界条件.

若弦的一端 (例如  $x = 0$ ) 在垂直于  $x$  轴的直线上自由滑动, 且不受到垂直方向的外力, 这种边界称为自由边界. 取  $x$  轴上区间  $[0, h]$  所对应的一小段弦, 这段弦沿垂直方向所受的力仅有右端所受的张力沿垂直方向的分量,

即  $T_0 \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=h}$ , 根据牛顿第二定律

$$T_0 \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=h} = \rho h \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{x=\xi}, \quad \xi \in (0, h).$$

令  $h \rightarrow 0$  得出在自由边界时应成立

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0.$$

若边界张力沿垂直方向的分量是  $t$  的一个已知函数, 则相应的边界条件为

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \mu_2(t). \quad (1.8)$$

这种类型的边界条件称为**第二类边界条件**.

若将弦的一端 (例如  $x = l$ ) 固定在弹性支承上, 并且弹性支承的伸缩符合胡克定律. 如果支承的位置为  $u = 0$ , 则  $u$  在端点的值表示支承在该点的伸长. 取  $x$  轴上区间  $[l-h, l]$  所对应的一小段弦, 这段弦的左端所受的张力沿垂直方向分量为  $-T_0 \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l-h}$ , 由胡克定律, 弦的右端点在垂直方向上受到弹性支承的力为  $-k u|_{x=l}$ . 类似第二类边界条件推导过程可得

$$-T_0 \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} - k u|_{x=l} = 0.$$

因此在弹性支承的情形, 边界条件归结为

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u \right) \Big|_{x=l} = 0,$$

其中  $\alpha = k/T_0$  是已知正数. 若右端点还受到一个垂直方向的外力, 则相应的边界条件为

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u \right) \Big|_{x=l} = \mu_3(t), \quad (1.9)$$

其中  $\mu_3(t)$  是  $t$  的已知函数, 这种边界条件称为**第三类边界条件**.

边界条件与初始条件总称为**定解条件**.

边界条件 (1.7)—(1.9) 称为**非齐次边界条件**. 若等式右端的已知函数  $\mu_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 恒为零, 则称为**齐次边界条件**.

## §1.2 热传导方程与定解条件

### §1.2.1 方程的导出

众所周知, 如果空间某物体  $G$  内各点处的温度不同, 则热量就从温度较高的点处向温度较低的点处流动, 这种现象就是热传导. 现在我们就来考察物体  $G$  内的热传导问题. 我们用函数  $u(x, y, z, t)$  表示物体  $G$  在位置  $(x, y, z)$  处

及时刻  $t$  的温度.

热的传播按傅里叶 (Fourier) 实验定律进行: 物体在无穷小时段  $dt$  内流过一个无穷小面积  $dS$  的热量  $dQ$  与物体温度沿曲面  $dS$  法线方向的方向导数  $\frac{\partial u}{\partial n}$  成正比, 即

$$dQ = -k(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial n} dS dt, \quad (1.10)$$

其中  $k(x, y, z)$  称为物体在点  $(x, y, z)$  处的热传导系数, 它取正值. 当物体为均匀且各向同性时,  $k$  为常数.  $n$  为曲面  $dS$  沿热流方向的法线.

为了导出温度  $u$  所满足的方程. 在物体  $G$  内任取一闭曲面  $\Gamma$ , 它所包围的区域记作  $\Omega$ , 则从时刻  $t_1$  到时刻  $t_2$  经过曲面  $\Gamma$  流入区域  $\Omega$  的热量为

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \iint_{\Gamma} k \frac{\partial u}{\partial n} dS \right] dt, \quad (1.11)$$

其中  $\frac{\partial u}{\partial n}$  表示  $u$  对曲面  $\Gamma$  的外法向导数.

流入的热量使区域  $\Omega$  内部的温度发生变化, 在时间间隔  $(t_1, t_2)$  中物体温度从  $u(x, y, z, t_1)$  变化到  $u(x, y, z, t_2)$  所需要的热量为

$$Q_2 = \iiint_{\Omega} c(x, y, z) \rho(x, y, z) [u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)] dv, \quad (1.12)$$

其中  $c$  为物体的比热,  $\rho$  为物体的密度.

如果所考察的物体内部没有热源, 由于热量守恒,  $Q_2 = Q_1$  成立, 即

$$\iiint_{\Omega} c\rho[u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)] dv = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \iint_{\Gamma} k \frac{\partial u}{\partial n} dS \right] dt. \quad (1.13)$$

设函数  $u$  关于变量  $x, y, z$  具有二阶连续偏导数, 关于变量  $t$  具有一阶连续偏导数, 利用奥斯特罗格拉茨基 - 高斯 (Ostrogradskii-Gauss) 公式 (以下简称奥 - 高公式),  $Q_1$  可化为

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iiint_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dv \right\} dt;$$

而用牛顿 - 莱布尼茨 (Newton-Leibniz) 公式,  $Q_2$  可化为

$$Q_2 = \iiint_{\Omega} c\rho \left( \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} dt \right) dv = \int_{t_1}^{t_2} \left( \iiint_{\Omega} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dv \right) dt,$$

因此 (1.13) 化为

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iiint_{\Omega} \left[ c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dv \right\} dt = 0.$$

由于  $t_1, t_2$  与区域  $\Omega$  都是任取的, 并且被积函数是连续的, 于是得

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right). \quad (1.14)$$

(1.14) 式称为非均匀的各向同性体的热传导方程. 如果物体是均匀的, 此时  $k, c$  及  $\rho$  为常数, 记  $k/c\rho = a^2$ , 则得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (1.15)$$

如果所考察的物体内部有热源 (例如有电流或化学反应等情况), 设热源密度 (单位时间内单位体积中所产生的热量) 为  $F(x, y, z, t)$ , 则在时间间隔  $(t_1, t_2)$  中区域  $\Omega$  内所产生的热量为

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2} \left( \iiint_{\Omega} F(x, y, z, t) dv \right) dt. \quad (1.16)$$

在这种情况下, 由于热量要平衡, (1.13) 的右端应加上  $Q_3$  这一项, 于是相应于 (1.15) 的热传导方程应改为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t), \quad (1.17)$$

其中  $f(x, y, z, t) = F(x, y, z, t)/c\rho$ . 方程 (1.15) 称为齐次热传导方程, 而方程 (1.17) 称为非齐次热传导方程. 上述热传导方程中, 描述空间坐标的独立变量为  $x, y$  和  $z$ , 所以它们又称为三维热传导方程. 但是当考察的物体是均匀细杆时, 如果它的侧面绝热且在同一截面上的温度分布又是相同的, 则易得一维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1.18)$$

同样, 如考虑一个薄片的热传导, 并且薄片的侧面绝热, 则可得二维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (1.19)$$

**注 1.2** 当我们考察气体的扩散、液体的渗透、半导体材料中杂质扩散等物理过程时, 若用  $u$  表示扩散物质的浓度, 则浓度  $u$  所满足方程的形式与热传

导方程完全一样. 由于它描述的是物质的扩散现象, 所以这样的方程也叫扩散方程.

### §1.2.2 定解条件

对于一个特定的传热过程, 仅仅知道温度  $u$  所满足的方程是远远不够的, 还需要知道物体在“初始”时刻的温度分布和边界上的温度状况 (或热交换状况), 这样才可以完全确定物体在以后时刻的温度.

初始条件的提法显然为

$$u(x, y, z, t)|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad (1.20)$$

其中  $\varphi(x, y, z)$  为已知函数, 表示在  $t = 0$  时物体内部温度的分布.

至于边界条件常见的也有以下三种基本类型, 设所考察的物体  $G$  的边界曲面为  $S$ .

已知物体表面温度为  $f_1(x, y, z, t)$ , 即

$$u(x, y, z, t)|_S = f_1(x, y, z, t), \quad (1.21)$$

其中  $f_1(x, y, z, t)$  是定义在  $(x, y, z) \in S, t \geq 0$  上的已知函数. 这种边界条件称为**第一类边界条件**.

已知物体表面上各点的热流量  $q$ , 也就是说在物体表面上单位时间内流过单位面积的热量是已知的, 由傅里叶实验定律可知

$$q = -k \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S,$$

由此可得

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = f_2(x, y, z, t), \quad (1.22)$$

其中  $f_2(x, y, z, t) = -q/k$  是定义在边界曲面  $S$ , 且  $t \geq 0$  上的已知函数. 由此可见, 这种边界条件实际上表示温度函数  $u$  在边界曲面  $S$  上的外法向导数是已知的. 特别, 如果物体表面上各点的热流量为零, 则得绝热性边界条件:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = 0.$$

这种类型的边界条件称为**第二类边界条件**.

今考察将物体置于另一介质中的情形, 我们能够测量到的只是和物体接触处的介质温度  $u_1$ . 由于  $u_1$  与物体表面上的温度  $u$  往往并不相同, 这样在物体表面处与周围介质就产生热交换. 热传导中的牛顿实验定律告诉我们: 物体从一介质流到另一介质的热量与两介质间的温度差成正比, 即

$$dQ = h(u - u_1)dSdt, \quad (1.23)$$

其中的比例常数  $h$  称为两种介质间的**热交换系数**, 它取正值. 在物体内部取一无限贴近它的表面  $S$  的闭曲面  $S_1$ . 由于物体表面热量不能积累, 因此在曲面  $S_1$  上的热流量应等于表面  $S$  上的热流量. 流过曲面  $S_1$  上的热量为  $dQ = -k \frac{\partial u}{\partial n} dSdt$ , 流过物体表面  $S$  的热量为  $dQ = h(u - u_1)dSdt$ , 因此以下关系式成立:

$$-k \frac{\partial u}{\partial n} dSdt = h(u - u_1)dSdt,$$

即

$$k \frac{\partial u}{\partial n} + hu = hu_1.$$

由于  $h$  和  $k$  都是正数, 因此这种边界条件可以写成

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u \right) \Big|_S = f_3(x, y, z, t), \quad (1.24)$$

其中  $f_3(x, y, z, t)$  是定义在  $(x, y, z) \in S, t \geq 0$  上的已知函数,  $\alpha$  为已知正数. 这种类型的边界条件称为**第三类边界条件**.

当  $f_i(x, y, z, t) \neq 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 时, 相应的边界条件称为**非齐次边界条件**. 否则称为**齐次边界条件**.

### §1.3 拉普拉斯方程与定解条件

当我们研究物理上的各种现象 (例如振动、热传导、扩散等) 的稳定过程时, 由于表征该过程的物理量  $u$  不随时间而变化, 因此  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ . 如果考察的是一个稳定的热场, 则由 (1.15) 即可得到不随着时间而变化的温度  $u(x, y, z)$  满足以下方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (1.25)$$

方程 (1.25) 称为**三维拉普拉斯 (Laplace) 方程**或**调和方程**. (1.25) 通常表示成  $\Delta u = 0$  或  $\nabla^2 u = 0$ . 凡具有二阶连续偏导数并满足方程 (1.25) 的连续函数称为**调和函数**. 如果我们考察的是一个有源的稳定热场, 则由 (1.17) 得到下列方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f(x, y, z), \quad (1.26)$$

其中  $f(x, y, z) = F(x, y, z)/k$ , 非齐次拉普拉斯方程 (1.26) 通常叫做泊松 (Poisson) 方程, 记作  $\Delta u = -f(x, y, z)$  或  $\nabla^2 u = -f(x, y, z)$ .

拉普拉斯方程和泊松方程不仅能描述稳定状态下温度的分布规律, 而且也能描述诸如稳定的浓度分布及静电场的电位分布等物理现象. 例如, 考虑区域  $G \subset \mathbb{R}^3$  中的静电场, 假设电场强度为  $\mathbf{E}$ , 电荷密度为  $f(x, y, z)$ . 在  $G$  中任取一光滑子区域  $\Omega$ , 记其边界为  $\Gamma$ . 由高斯定律知  $\mathbf{E}$  和  $f$  满足

$$\iint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} f dv,$$

其中  $\mathbf{n}$  为  $\Gamma$  的单位外法向量,  $\epsilon_0$  为介电常数. 记电位为  $u(x, y, z)$ , 则  $\mathbf{E} = -\nabla u = -(u_x, u_y, u_z)$ . 利用奥-高公式得

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} f dv = - \iint_{\Gamma} \nabla u \cdot \mathbf{n} dS = - \iiint_{\Omega} \Delta u dv.$$

由  $\Omega$  的任意性知

$$\Delta u = -\frac{f}{4\pi\epsilon_0}.$$

特别, 若  $G$  中无电荷分布, 即  $f \equiv 0$ , 则电位  $u$  满足拉普拉斯方程

$$\Delta u = 0.$$

从复变函数论中, 我们已经知道, 一个解析函数的实部与虚部分别满足二维拉普拉斯方程.

对于拉普拉斯方程与泊松方程所描述的一个具体物理现象, 自然也应该附加一定的条件. 由于它们描述的是稳定或平衡现象, 表征该过程的物理量与时间无关, 故定解条件只有边界条件而无初始条件. 这时, 只要把热传导方程的边界条件中出现的函数看成是与时间无关的, 就可得到拉普拉斯方程或泊松方程相应的三类边界条件.

## §1.4 基本概念与基础知识

前面我们从一些具体的物理模型出发, 导出了三类典型的偏微分方程及相应的定解条件. 下面我们将介绍数学物理方程中与之有关的基本问题.

### §1.4.1 基本概念

凡含有自变量、未知函数及未知函数关于自变量的偏导数的等式称为偏微分方程. 例如, 下面的一些等式都是偏微分方程

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (1.27)$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (1.28)$$

$$u_{xxy} + 2xu_{yy} + yu = xy, \quad (1.29)$$

$$(u_x)^2 + u_y = 8x^2. \quad (1.30)$$

偏微分方程中所含有的未知函数最高阶导数的阶数,称为偏微分方程的阶.例如方程(1.27)和(1.28)为二阶偏微分方程,(1.29)为三阶偏微分方程,(1.30)为一阶偏微分方程.

如果一个偏微分方程中各项关于未知函数及其偏导数(包括高阶偏导数)都是一次(线性)的,则称这个方程为线性偏微分方程.例如方程(1.27)—(1.29)都是线性偏微分方程,而方程(1.30)则是非线性偏微分方程.

如果一个函数具有某偏微分方程中所需要的各阶连续偏导数,将它代入该方程时能使方程成为恒等式,则称这个函数为该方程的解,或古典解.例如,函数  $u = \sin(x + at)$ ,  $u = (x - at)^2$ ,  $u = f(x + at)$ ,  $u = f(x + at) + g(x - at)$  等都是方程(1.27)的解,这里  $f$  和  $g$  是两个具有二阶连续导数的函数.而函数  $u = e^x \sin y$ ,  $u = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  ( $x^2 + y^2 \neq 0$ ) 等都是方程(1.28)的解.

若一个偏微分方程中包含有不含未知函数  $u$  及偏导数(包括高阶偏导数)的项(称为自由项),这样的方程就称为非齐次偏微分方程.例如,方程(1.29)为非齐次方程,  $xy$  为自由项,方程(1.30)中也含有自由项  $8x^2$ .而(1.27)和(1.28)就称为齐次方程.

### §1.4.2 定解问题及其适定性

由泛定方程和定解条件构成的问题称为定解问题.由于定解条件的不同,定解问题又可分为:由泛定方程、初始条件和边界条件构成的问题,称为初边值问题或混合问题;由泛定方程和初始条件构成的问题,称为初值问题或柯西(Cauchy)问题;由泛定方程和边界条件构成的问题,称为边值问题.

波动方程的定解问题包括初边值问题和柯西问题.例如描述两端固定有限长弦的振动的初边值问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (0 < x < l, t > 0), \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), \end{cases}$$

若某端点在垂直方向上自由移动,则相应的边界条件变成第二类齐次边界条件.

如果我们考虑无限长的弦的自由振动, 则相应的定解问题为柯西问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (-\infty < x < +\infty, t > 0), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$

热传导方程的定解问题同样也包括初边值问题和柯西问题. 例如描述两端绝热且无热源的有限长杆的热传导的初边值问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (0 < x < l, t > 0), \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \end{cases}$$

及描述无热源的无限长杆的热传导的柯西问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (-\infty < x < +\infty, t > 0), \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases}$$

**注 1.3** 关于波动方程和热传导方程, 我们还可以考虑其他边界条件所对应的定解问题, 也可以研究非齐次方程的定解问题和高维方程的各种定解问题.

关于拉普拉斯方程的边值问题, 最基本的有以下两种 (以三维问题为例):

**第一边值问题** 在空间某一区域  $\Omega$  的边界  $\Gamma$  上给定了连续函数  $f$ , 要求这样一个函数  $u(x, y, z)$ , 它在闭域  $\Omega + \Gamma$  (或记作  $\bar{\Omega}$ ) 上连续, 在  $\Omega$  内调和, 在边界  $\Gamma$  上与给定的函数  $f$  重合, 即

$$u|_{\Gamma} = f.$$

第一边值问题也称为狄利克雷 (Dirichlet) 问题, 或简称狄氏问题.

**第二边值问题** 在某光滑闭曲面  $\Gamma$  上给定了连续函数  $f$ , 要求这样一个函数  $u(x, y, z)$ , 它在由  $\Gamma$  围成的区域  $\Omega$  内调和, 在  $\bar{\Omega}$  上连续可微, 并且满足

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = f,$$

其中  $n$  是  $\Gamma$  的外法线方向. 第二边值问题也称为诺伊曼 (Neumann) 问题.

一个定解问题提出之后, 我们要问这个定解问题的解是否存在? 这便是解的存在性问题. 如果解存在, 我们又要问这个定解问题的解是否只有一个? 这便是解的唯一性问题. 此外, 我们还要考虑解的稳定性问题 (或称为解对定解条件或自由项的连续依赖性问题). 解的存在性和唯一性的重要性是明显的, 至于稳定性的重要性有必要加以说明, 什么叫“稳定”呢? 粗略地说, 就是当定解

条件或自由项的值作细微改变时, 如果解也只作细微改变, 就说解是稳定的. 由于测量不可能是绝对准确的, 因而所列的定解条件也只是近似的, 就不难理解稳定性的重要性. 不稳定的解是没有意义的.

定解问题的存在性、唯一性、稳定性统称为定解问题的**适定性**. 一个定解问题如果存在唯一而又稳定的解, 就称这个定解问题是**适定的**, 否则就应该修改定解问题的提法, 使其**适定**.

### §1.4.3 叠加原理

对于线性方程所描述的物理现象来说, 叠加原理成立.

在物理学的研究中经常出现这样的现象: 几种不同原因的综合所产生的效果等于这些不同原因单独产生的效果 (即假设其他原因不存在时, 该原因所产生的效果) 的累加. 例如, 几个外力作用在一个物体上所产生的加速度, 可以用这些单个外力各自单独作用在该物体上所产生的加速度相加而得出. 这一原理就是所谓的**叠加原理**.

考察二阶线性偏微分方程

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = f_i \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (1.31)$$

其中  $A, B, C, D, E, F$  及  $f_i$  都是某区域上  $x, y$  的已知函数.

**定理 1.1 (叠加原理)** 设  $u_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) 是方程 (1.31) 中第  $i$  个方程的解, 即

$$A \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + D \frac{\partial u_i}{\partial x} + E \frac{\partial u_i}{\partial y} + Fu_i = f_i.$$

如果级数

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i \quad (1.32)$$

收敛, 其中  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) 为任意常数, 并且它还足够逐项微分两次, 则级数 (1.32) 是方程

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i$$

的解.

特别地, 当方程 (1.31) 中的自由项  $f_i = 0$  时, 得相应的齐次方程

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0. \quad (1.33)$$

若  $u_i (i = 1, 2, \dots)$  是方程 (1.33) 的解, 则级数 (1.32) 也是方程 (1.33) 的解.

在物理中应用叠加原理的一个典型例子就是声学中把弦振动所发出的复杂的声音分解成各种单音的叠加. 早在 18 世纪, 伯努利 (Bernoulli) 及傅里叶就曾利用这个原理来研究振动方程的问题.

## §1.5 二阶线性偏微分方程的分类

前面我们从不同的物理模型导出了弦振动方程、热传导方程与拉普拉斯方程. 这三类方程虽然形式特殊, 但是在二阶线性偏微分方程中, 它们却是三个典型代表. 一般二阶线性偏微分方程的共性与差异, 往往可以从对这三类方程的研究中得到. 为了从数学上表示出这些共性与差异, 本节我们就来介绍二阶线性偏微分方程的分类问题. 重点讨论两个自变量的二阶线性偏微分方程的分类.

### §1.5.1 两个自变量的二阶偏微分方程的分类

为了方便起见, 我们用  $x, y$  来表示自变量, 一般的二阶线性偏微分方程具有如下的形状

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f, \quad (1.34)$$

其中  $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f$  都是自变量  $x, y$  在区域  $\Omega$  上的实函数, 并假定它们是连续可微的,  $u$  为未知函数.

若在区域  $\Omega$  上某点  $(x_0, y_0)$

$$\Delta \equiv a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0,$$

则称方程 (1.34) 在点  $(x_0, y_0)$  为双曲型的; 若在点  $(x_0, y_0)$

$$\Delta \equiv a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0,$$

则称方程 (1.34) 在点  $(x_0, y_0)$  为抛物型的; 若在点  $(x_0, y_0)$

$$\Delta \equiv a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0,$$

则称方程 (1.34) 在点  $(x_0, y_0)$  为椭圆型的.

如果方程 (1.34) 在所讨论的区域  $\Omega$  内每一点都是双曲型的, 那么我们就称该方程在区域内是双曲型的. 同样, 如果方程在所讨论的区域  $\Omega$  内每一点都是抛物型 (椭圆型), 那么该方程在区域  $\Omega$  内就称作是抛物型 (椭圆型) 的.

由于方程的系数  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$  是连续函数, 若方程在点  $(x_0, y_0)$  是双曲型的, 则在点  $(x_0, y_0)$  的邻域内也是双曲型的; 若方程在点  $(x_0, y_0)$  是椭圆型的, 则

在点  $(x_0, y_0)$  的邻域内也是椭圆型的; 但方程在点  $(x_0, y_0)$  是抛物型的, 就不一定在点  $(x_0, y_0)$  的邻域内也是抛物型的.

基于上述定义, 显然, 弦振动方程是双曲型的, 一维热传导方程是抛物型的, 二维拉普拉斯方程和泊松方程都是椭圆型的. 由于弦振动方程描述的是波的传播现象, 它具有对时间是可逆的性质; 热传导方程反映了热的传导、物质的扩散等现象, 这些现象总是由高到低、由密到疏的, 因而是不可逆的; 而拉普拉斯方程所描述的是稳定和平衡状态. 这三种方程所描述的自然现象的本质完全不同, 所以它们的类型也不相同.

### §1.5.2 两个自变量的二阶方程的化简

我们希望通过自变量的变换对方程 (1.34) 在区域  $\Omega$  某点  $(x_0, y_0)$  的近旁进行化简, 为此作变量变换

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y). \quad (1.35)$$

假设变换 (1.35) 是二次连续可微的, 且函数行列式

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \quad (1.36)$$

在  $(x_0, y_0)$  不等于零. 根据隐函数存在定理, 在点  $(x_0, y_0)$  近旁变换 (1.35) 式是可逆的. 利用 (1.35), 可将方程 (1.34) 化成关于自变量  $\xi, \eta$  的二阶偏微分方程

$$\bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + \bar{b}_1u_{\xi} + \bar{b}_2u_{\eta} + \bar{c}u = \bar{f}. \quad (1.37)$$

由于

$$\begin{cases} u_x = u_{\xi}\xi_x + u_{\eta}\eta_x, \\ u_y = u_{\xi}\xi_y + u_{\eta}\eta_y, \\ u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_{\xi}\xi_{xx} + u_{\eta}\eta_{xx}, \\ u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_{\xi}\xi_{xy} + u_{\eta}\eta_{xy}, \\ u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_{\xi}\xi_{yy} + u_{\eta}\eta_{yy}, \end{cases} \quad (1.38)$$

故方程 (1.37) 中的系数  $\bar{a}_{11}, \bar{a}_{12}, \bar{a}_{22}$  为

$$\begin{cases} \bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2, \\ \bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y, \\ \bar{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2. \end{cases} \quad (1.39)$$

现设法选取变换 (1.35), 使方程 (1.37) 的二阶偏导数项化成最简形式. 由 (1.39) 看出, 第三式和第一式的形式是完全相同的, 只是  $\xi$  换成了  $\eta$ . 因此, 若能选择到方程

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0 \quad (1.40)$$

的两个线性无关解  $\varphi = \varphi_1(x, y)$  和  $\varphi = \varphi_2(x, y)$ , 则取

$$\xi = \varphi_1(x, y), \quad \eta = \varphi_2(x, y),$$

此时方程 (1.37) 中的系数  $\bar{a}_{11}$ ,  $\bar{a}_{22}$  就变为零了, 这样一来, 方程 (1.37) 就比方程 (1.34) 大为简化了.

为此, 我们先给出两个引理:

**引理 1.1** 如果  $w = \varphi(x, y)$  是方程

$$a_{11}w_x^2 + 2a_{12}w_xw_y + a_{22}w_y^2 = 0 \quad (1.41)$$

的特解, 那么  $\varphi(x, y) = c$  是常微分方程

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0 \quad (1.42)$$

的一般积分.

**引理 1.2** 如果  $\varphi(x, y) = c$  是常微分方程 (1.42) 的一般积分, 那么函数  $w = \varphi(x, y)$  满足方程 (1.41).

由上述引理我们知道, 关于  $\varphi(x, y)$  的一阶偏微分方程 (1.40) 的求解问题, 可以化为求常微分方程 (1.42) 在  $Oxy$  平面上的积分曲线问题. 若  $\varphi_1(x, y) = c$  是方程 (1.42) 的一族积分曲线, 则  $w = \varphi_1(x, y)$  就是方程 (1.40) 的解. 方程 (1.42) 的积分曲线称为方程 (1.34) 的特征线, 方程 (1.42) 也称为方程 (1.34) 的特征方程.

为了求得方程 (1.42) 的积分曲线, 将它分解为两个方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \quad (1.43)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \quad (1.44)$$

下面我们分三种情况加以讨论.

(1) 对于双曲型方程  $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ , 此时, 方程 (1.43) 和 (1.44) 右端是两个相异的实值函数, 故积分曲线为两族不相同的实曲线, 依次表示为  $\varphi_1(x, y) =$

$c_1$  及  $\varphi_2(x, y) = c_2$ . 令

$$\xi = \varphi_1(x, y), \quad \eta = \varphi_2(x, y), \quad (1.45)$$

则  $\bar{a}_{11} = 0, \bar{a}_{22} = 0$ . 假设  $\varphi_{1x}$  及  $\varphi_{1y}, \varphi_{2x}$  及  $\varphi_{2y}$  不同时为零, 则变换 (1.45) 是可逆的, 因为此时函数行列式不等于零. 同时由可逆变换不能将二阶方程变为一阶方程的性质知  $\bar{a}_{12} \neq 0$ , 因此 (1.37) 可化为双曲型方程的第一标准形式

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \quad (1.46)$$

其中

$$\Phi = \frac{1}{2\bar{a}_{12}}(\bar{f} - \bar{b}_1 u_\xi - \bar{b}_2 u_\eta - \bar{c}u).$$

在方程 (1.46) 中再作自变量变换

$$\xi = \frac{1}{2}(s+t), \quad \eta = \frac{1}{2}(s-t),$$

则方程可化为另一种标准形式

$$u_{ss} - u_{tt} = \Phi_1(s, t, u, u_s, u_t). \quad (1.47)$$

**例 1.1** 试将方程  $y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0$  化为标准形式.

**解**  $\Delta \equiv a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = x^2 y^2 > 0, x \neq 0, y \neq 0$ .

当  $x \neq 0, y \neq 0$  时, 方程为双曲型, 其特征方程为

$$y^2 \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - x^2 = 0,$$

从而有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

积分得两族积分曲线  $\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 = c_1, \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 = c_2$ . 作变换

$$\xi = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2, \quad \eta = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2,$$

代入方程化简得

$$u_{\xi\eta} = \frac{\eta}{2(\xi^2 - \eta^2)} u_\xi - \frac{\xi}{2(\xi^2 - \eta^2)} u_\eta.$$

(2) 对于抛物型方程  $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ , 此时, 方程 (1.43) 和 (1.44) 重合, 于是我们只能得到方程 (1.42) 的一个一般积分  $\varphi_1(x, y) = c$ . 在这种情况下, 假设

$$\xi = \varphi_1(x, y), \quad \eta = \varphi_2(x, y),$$

这里  $\eta = \varphi_2(x, y)$  是任意选取的一个函数, 只要  $\varphi_1$  与  $\varphi_2$  是线性无关即可. 这样取定后, 由于  $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$ , 所以

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)^2 = 0,$$

由此得

$$\begin{aligned} \bar{a}_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y \\ &= (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y) = 0. \end{aligned}$$

以  $u_{\eta\eta}$  的系数  $\bar{a}_{22}$  除方程 (1.37) 的两端, 得抛物型方程的标准形式为

$$u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \quad (1.48)$$

其中

$$\Phi = \frac{1}{\bar{a}_{22}}(\bar{f} - \bar{b}_1u_\xi - \bar{b}_2u_\eta - \bar{c}u).$$

**例 1.2** 试将方程  $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0$  化成标准形式.

**解**  $\Delta \equiv x^2y^2 - x^2y^2 = 0$ , 原方程为抛物型方程, 其特征方程为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},$$

它的一般积分为  $y/x = c$ . 作变换

$$\xi = \frac{y}{x}, \quad \eta = x,$$

代入原方程, 化简得标准方程

$$u_{\eta\eta} = 0 \quad (x \neq 0).$$

(3) 对于椭圆型方程  $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ , 方程 (1.43) 和 (1.44) 右端都是复数, 此时不存在实的特征线, 方程 (1.42) 的一般积分只能是复函数. 设

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + i\varphi_2(x, y) = c$$

是 (1.42) 的一般积分, 并且  $\varphi_x, \varphi_y$  不同时为零, 这里  $\varphi_1, \varphi_2$  是实函数. 为了避免引入复数, 我们作变换

$$\xi = \operatorname{Re}\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y), \quad \eta = \operatorname{Im}\varphi(x, y) = \varphi_2(x, y).$$

由于  $\xi + i\eta$  满足方程 (1.41), 代入后将实部及虚部分开, 则得

$$a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2,$$

$$a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y = 0.$$

因此, 方程 (1.34) 化为标准形式

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \quad (1.49)$$

其中

$$\Phi = \frac{1}{a_{22}}(\bar{f} - \bar{b}_1 u_\xi - \bar{b}_2 u_\eta - \bar{c}u).$$

**例 1.3** 考察特里科米 (Tricomi) 方程:

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0.$$

解  $\Delta \equiv -y$ .

当  $y > 0$  时, 方程是椭圆型的; 当  $y < 0$  时, 方程是双曲型的; 而在  $y = 0$  上方程则是抛物型. 这种方程在  $Oxy$  平面上是混合型的, 其特征方程为

$$ydy^2 + dx^2 = 0.$$

在椭圆型区域  $y > 0$  内, 它化为

$$dx \pm i\sqrt{y}dy = 0,$$

因而得  $x \pm i\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = c$ . 作变换

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}},$$

原方程化为

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = -\frac{1}{3\eta}u_\eta.$$

在双曲型区域  $y < 0$  内, 特征方程为

$$dx \pm \sqrt{-y}dy = 0,$$

故  $x \pm \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = c$ . 作变换

$$\xi = x - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}, \quad \eta = x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}},$$

则方程化为

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{6(\xi - \eta)}(u_\xi - u_\eta).$$

## §1.5.3 两个自变量二阶常系数方程

若方程 (1.34) 中的系数都是常数, 类似地, 可按照  $\Delta \equiv a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$  的符号, 通过适当的变换, 将方程 (1.34) 化为以下三种形式之一:

$$\text{双曲型: } u_{\xi\eta} = a_1u_{\xi} + b_1u_{\eta} + c_1u + f_1 \text{ 或} \quad (1.50)$$

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = a_2u_{\xi} + b_2u_{\eta} + c_2u + f_2; \quad (1.51)$$

$$\text{抛物型: } u_{\eta\eta} = a_3u_{\xi} + b_3u_{\eta} + c_3u + f_3; \quad (1.52)$$

$$\text{椭圆型: } u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = a_4u_{\xi} + b_4u_{\eta} + c_4u + f_4. \quad (1.53)$$

上述方程 (1.50)—(1.53) 中的系数均是常数.

**例 1.4** 弦振动方程  $u_{tt} - a^2u_{xx} = 0$ .

**解** 特征方程为  $dx^2 - a^2dt^2 = 0$ , 故特征直线为  $x + at = c_1, x - at = c_2$ .  
作变换

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at,$$

则弦振动方程化为

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

**例 1.5** 考察方程  $3u_{xx} + 10u_{xy} + 3u_{yy} = 0$ .

**解**  $\Delta \equiv 5^2 - 3 \times 3 = 4^2 > 0$ , 故方程为双曲型. 其特征方程为

$$3dy^2 - 10dxdy + 3dx^2 = 0,$$

它的一般积分为

$$y - 3x = c_1, \quad y - \frac{1}{3}x = c_2.$$

作变换, 令

$$\xi = y - 3x, \quad \eta = y - \frac{1}{3}x,$$

则原方程化为

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

为了进一步化简方程 (1.50)—(1.53), 引入新的函数  $v$  代替  $u$ :

$$u = ve^{\lambda\xi + \mu\eta},$$

其中  $\lambda, \mu$  是待定常数. 于是

$$u_{\xi} = e^{\lambda\xi + \mu\eta}(v_{\xi} + \lambda v),$$

$$\begin{aligned}
 u_{\eta} &= e^{\lambda\xi + \mu\eta}(v_{\eta} + \mu v), \\
 u_{\xi\xi} &= e^{\lambda\xi + \mu\eta}(v_{\xi\xi} + 2\lambda v_{\xi} + \lambda^2 v), \\
 u_{\xi\eta} &= e^{\lambda\xi + \mu\eta}(v_{\xi\eta} + \lambda v_{\eta} + \mu v_{\xi} + \lambda\mu v), \\
 u_{\eta\eta} &= e^{\lambda\xi + \mu\eta}(v_{\eta\eta} + 2\mu v_{\eta} + \mu^2 v).
 \end{aligned}$$

将这些导数的表示式分别代入方程 (1.50)—(1.53), 消去  $e^{\lambda\xi + \mu\eta}$ , 然后选择参量  $\lambda$  和  $\mu$ , 使方程中的两个系数, 比如说使一阶导数的系数等于零, 则方程就进一步简化了.

## §1.6 本章小结及补充知识

### §1.6.1 本章小结

通过本章的学习, 读者必须了解三个典型的方程: 弦振动方程、热传导方程和拉普拉斯方程的建立; 了解定解条件的物理意义及三种定解问题的提法; 了解偏微分方程的一些基本概念; 掌握线性问题的叠加原理.

### §1.6.2 傅里叶级数

函数系  $\{\varphi_n(x)\}$  称为在区间  $[a, b]$  上是带权函数  $q(x) > 0$  正交的, 如果

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)q(x)dx = 0 \quad (m \neq n).$$

如果  $m = n$ , 则我们记

$$\|\varphi_n\| = \left[ \int_a^b \varphi_n^2(x)q(x)dx \right]^{\frac{1}{2}},$$

这个值称为函数  $\varphi_n(x)$  的模.

对正交函数系  $\{\varphi_n(x)\}$ , 如果它满足关系式

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)q(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n, \end{cases}$$

就称其为在区间  $[a, b]$  上的标准正交系. 显然, 标准正交系可以由正交系的每个函数除以它的模得到.

容易验证函数列

$$1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

在  $[-\pi, \pi]$  上组成正交系, 因为

$$\begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n, \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n \end{cases} \end{cases}$$

对正整数  $m$  和  $n$  都成立, 而且

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0.$$

为了使这个正交系标准化, 我们把原来正交系中的每个元素除以它的模. 因此

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

组成一标准正交系.

进一步地, 在区间  $[-\pi, \pi]$  上作一个形式级数与  $f(x)$  对应, 写成

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (1.54)$$

其中符号  $\sim$  表示  $a_0, a_k$  和  $b_k$  以某种唯一的方式与  $f$  的联系. 这个级数可以收敛, 也可以不收敛. 用系数  $\frac{a_0}{2}$  代替  $a_0$  是为了方便建立公式.

设  $f(x)$  是定义在区间  $[-\pi, \pi]$  上的黎曼 (Riemann) 可积函数. 定义级数的前  $2n+1$  项的部分和  $s_n(x)$  为

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (1.55)$$

用来在  $[-\pi, \pi]$  上逼近  $f(x)$ . 要找出系数  $a_0, a_k$  和  $b_k$ , 使得  $s_n(x)$  是在最小平方意义下表示的最佳近似式, 即要找出  $a_0, a_k$  和  $b_k$ , 使得积分

$$I(a_0, a_k, b_k) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 dx \quad (1.56)$$

为最小值, 也是极小值. 这是一个极值问题. 而  $a_0, a_k, b_k$  使得  $I$  为极小的必要条件是  $I$  对这些系数的一阶偏导数都等于零. 于是把式 (1.55) 代入式 (1.56), 且对  $a_0, a_k$  和  $b_k$  求偏导数, 得到

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial a_0} = - \int_{-\pi}^{\pi} \left[ f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{j=1}^n (a_j \cos jx + b_j \sin jx) \right] dx, \\ \frac{\partial I}{\partial a_k} = -2 \int_{-\pi}^{\pi} \left[ f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{j=1}^n (a_j \cos jx + b_j \sin jx) \right] \cos kx dx, \\ \frac{\partial I}{\partial b_k} = -2 \int_{-\pi}^{\pi} \left[ f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{j=1}^n (a_j \cos jx + b_j \sin jx) \right] \sin kx dx. \end{cases} \quad (1.57)$$

利用三角函数系的正交关系及

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx dx = 0,$$

其中  $m$  和  $n$  都是正整数, 式 (1.57) 变为

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial a_0} = \pi a_0 - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ \frac{\partial I}{\partial a_k} = 2\pi a_k - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \\ \frac{\partial I}{\partial b_k} = 2\pi b_k - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx. \end{cases}$$

因为  $I$  取得极值, 所以上述各式都必须等于零. 于是有

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \\ b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx. \end{cases} \quad (1.58)$$

这些系数称为  $f(x)$  的傅里叶系数, 而 (1.54) 中的级数称为对应于  $f(x)$  的傅里叶级数.

值得一提的是: 能用傅里叶级数对应于已知函数  $f(x)$ , 并不能推出这个傅里叶级数一定收敛于函数  $f(x)$ . 事实上, 存在发散的傅里叶级数. 在这一小节的最后将给出收敛条件. 因此, 在下文里用“=”替代 (1.54) 中的“ $\sim$ ”而不加区分.

设  $f(x)$  是定义在区间  $[-\pi, \pi]$  上的偶函数. 因为  $\cos kx$  是偶函数,  $\sin kx$  是奇函数, 所以函数  $f(x) \cos kx$  是偶函数, 而函数  $f(x) \sin kx$  是奇函数. 于是函数  $f(x)$  的傅里叶系数是

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.59)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

因此偶函数的傅里叶级数可写成

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad (1.60)$$

其中系数  $a_k$  由公式 (1.59) 给出.

同样的, 如果  $f(x)$  是奇函数, 函数  $f(x) \cos kx$  是奇函数, 而函数  $f(x) \sin kx$  是偶函数. 所以在这种情况下,  $f(x)$  的傅里叶系数是

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.61)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

因此, 奇函数的傅里叶级数可写成

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx,$$

其中系数  $b_k$  由公式 (1.61) 给出.

利用公式

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

可以得到 (1.54) 的复数形式为

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad -\pi < x < \pi,$$

其中

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

如果函数  $f(x)$  的定义区间是任意的, 如  $[a, b]$ , 用变换

$$x = \frac{1}{2}(b+a) + \frac{(b-a)}{2\pi}t$$

引入新变量  $t$ , 则  $-\pi \leq t \leq \pi$ , 定义

$$F(t) \equiv f[(b+a)/2 + ((b-a)/2\pi)t].$$

把这个函数展开成傅里叶级数得到

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

其中

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos ktdt \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \sin ktdt \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

再把  $t$  变成  $x$ , 就得到在  $[a, b]$  上的  $f(x)$  的展开式

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos \frac{k\pi(2x - b - a)}{b - a} + b_k \sin \frac{k\pi(2x - b - a)}{b - a} \right],$$

其中

$$a_k = \frac{2}{b - a} \int_a^b f(x) \cos \frac{k\pi(2x - b - a)}{b - a} dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_k = \frac{2}{b - a} \int_a^b f(x) \sin \frac{k\pi(2x - b - a)}{b - a} dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

有时我们取函数  $f$  定义在  $[-l, l]$  这个区间上比较方便. 由刚才得到的结果立刻可得出, 只要令  $a = -l$  与  $b = l$ ,  $f$  在  $[-l, l]$  上的展开式就具有下列形式:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right), \quad (1.62)$$

其中

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

如果  $f$  是以  $2l$  为周期的偶函数, 那么由式 (1.62), 不难确定

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l},$$

其中

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

如果  $f$  是以  $2l$  为周期的奇函数, 那么由式 (1.62),  $f$  的展开式是

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{l},$$

其中

$$b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

最后, 我们不加证明地介绍傅里叶级数的收敛定理, 其详细证明可参阅 [8].

**定理 1.2 (逐点收敛定理)** 如果  $f(x)$  是以  $2\pi$  为周期的函数, 且  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上是分段光滑的, 那么对任何  $x$  有

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)],$$

其中

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

**定理 1.3 (一致收敛性和绝对收敛性)** 设  $f(x)$  是以  $2\pi$  为周期的连续函数, 又设  $f'(x)$  在区间  $[-\pi, \pi]$  上分段连续并且  $f(-\pi) = f(\pi)$ , 则  $f(x)$  的傅里叶级数展开式是一致收敛且绝对收敛的.

## 习题一

1. 验证函数  $u = f(xy)$  是方程  $xu_x - yu_y = 0$  的解, 其中  $f$  是任意连续可微函数.
2. 验证函数  $u(x, y, t) = 1/\sqrt{t^2 - x^2 - y^2}$  当  $t^2 - x^2 - y^2 > 0$  时满足二维波动方程  $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$ .
3. 证明函数  $u = x^3 - 3xy^2$ ,  $v = \frac{1}{r}$  ( $r \neq 0, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ) 都是调和函数.
4. 长为  $l$  的均匀杆, 侧面绝热, 一端温度恒为零度, 另一端有恒定的热流  $q$  流进杆内, 杆的初始温度分布是  $\frac{x(l-x)}{2}$ , 杆内没有热源, 试列出相应的定解问题.
5. 一均匀细杆原长为  $l$ , 一端固定, 另一端沿杆的轴线方向被拉长  $e$  而静止, 突然放手任其振动, 试写出相应的定解问题.
6. 长为  $l$  的细弦, 两端固定, 开始时在  $x = c$  处受到冲量  $k$  的作用, 试写出相应的定解问题.
7. 设有一根均匀柔软细弦, 当它作微小横振动时, 除受内部张力作用外, 还受到阻尼力的作用, 设阻尼力与速度成正比 (比例系数为  $b$ ), 试写出阻尼弦振动方程.

\*8. 长为  $l$  绝对柔软而均匀的细绳, 一端固定在房间的天花板上, 在自身重力作用下, 此绳处于铅直的平衡位置, 试列出此绳的微小横振动方程.

9. 证明二维拉普拉斯方程在极坐标  $(r, \theta)$  下为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

\*10. 一均匀细杆, 设它在同一截面上的温度是相同的, 杆的侧面和周围介质发生热交换, 并服从规律  $dQ_1 = k_1(u - u_1)dSdt$ . 又设杆的密度为  $\rho$ , 比热为  $c$ , 热传导系数为  $k$ , 试推导出温度  $u(x, t)$  所满足的方程.

11. 化下列方程为标准型:

(1)  $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + 2u_y = 0;$

(2)  $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = y^2;$

(3)  $4u_{xx} + 5u_{xy} + u_{yy} + 4u_x + u_y = 9;$

(4)  $u_{xx} + yu_{yy} = 0 \quad (y > 0);$

(5)  $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + xu_x + yu_y = 0.$

## 第二章

# 分离变量法

分离变量法是求解数学物理方程定解问题的重要方法. 本章我们将以具体问题为例来解释这种方法的基本要点与解题步骤. 所举例子以能够说明要点与步骤为度, 因而只列举少数几种类型定解问题的解法. 但是, 读者不能只局限于所举的例子, 应作适量的练习, 将这种方法广泛地应用于各种类型的定解问题, 以求牢固地掌握分离变量法.

### §2.1 有界弦的自由振动

考察两端固定的弦的自由振动问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (0 < x < l, t > 0), & (2.1) \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, & & (2.2) \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & & (2.3) \end{cases}$$

其中  $\varphi(x)$  与  $\psi(x)$  均为已知函数. 为了说明分离变量法, 我们将详细讨论上述问题的解法.

这个定解问题的特点是: 方程 (2.1) 是线性齐次的, 因此, 各个特解的和也是这个方程的解. 如果能够找到方程 (2.1) 足够个数的特解, 则可以用它们的线性组合去求所求定解问题的解.

为了求解定解问题 (2.1)—(2.3), 我们首先对物理模型进行考察. 从物理上知道, 乐器发出的声音可以分解成各种不同频率的单音, 每种单音振动时形成正弦曲线, 其振幅依赖于时间  $t$ , 也就是说每个单音总可以表示成

$$u(x, t) = c(t) \sin \lambda x$$

的形式. 这种形式的特点是:  $u(x, t)$  是只含变量  $x$  的函数与只含变量  $t$  的函数之乘积, 即它具有分离变量的形式.

现在, 我们就来试求方程 (2.1) 的非平凡 (即不恒等于零) 的解, 使它满足齐次边界条件 (2.2), 而且可以表示成下列乘积

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (2.4)$$

此处,  $X(x)$  只是变量  $x$  的函数,  $T(t)$  只是变量  $t$  的函数.

把假定的解 (2.4) 代入方程 (2.1) 得到

$$T''X = a^2X''T,$$

除以  $a^2XT$ , 即得

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X}. \quad (2.5)$$

为使函数 (2.4) 是方程 (2.1) 的解, 等式 (2.5) 应该对于所有自变量值  $0 < x < l, t > 0$  永远满足. 等式 (2.5) 的左边只是变量  $t$  的函数, 而右边只是  $x$  的函数, 固定某一个  $x$  值而变化  $t$  的值 (或反之), 我们就知道等式 (2.5) 的左右两边当它的自变量变化时保持常数值. 记此常数为  $-\lambda$ , 就得到两个常微分方程

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \quad (2.6)$$

及

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (2.7)$$

此处  $\lambda$  前取负号只是为了后面计算上的方便, 在这里我们并没有对  $\lambda$  本身的符号作任何假定. 我们可以通过求解这两个常微分方程来决定  $T(t)$  及  $X(x)$ , 从而得到方程 (2.1) 的特解 (2.4), 为了使此解是满足齐次边界条件 (2.2) 的非平凡解, 则函数  $X(x)$  应满足附加条件:

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (2.8)$$

否则, 我们将有  $T(t) \equiv 0$ , 从而  $u(x, t) \equiv 0$ , 这种解显然不是我们所要求的.

如此, 关于函数  $X(x)$ , 我们就需要解下列常微分方程的边值问题:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(l) = 0. \quad (2.9)$$

若对于  $\lambda$  的某些值, 问题 (2.9) 的非平凡解存在, 则称这种  $\lambda$  值为固有值 (或特征值), 试求这种值; 同时, 称相应的非平凡解  $X(x)$  为固有函数 (或特征函数), 并求出它. 这样叙述的问题, 通常叫做施图姆-刘维尔 (Sturm-Liouville) 问题.

二阶常系数线性常微分方程 (2.7) 的特征方程是  $\tau^2 + \lambda = 0$ , 其判别式为  $\Delta = -4\lambda$ , 因此, 下面我们对  $\Delta$  分三种情况加以讨论.

(1) 当  $\Delta > 0$  (即  $\lambda < 0$ ) 时, 问题 (2.9) 没有非平凡解. 事实上, 由常微分方程的知识知, 此时方程的通解为

$$X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

由边界条件得

$$\begin{aligned} A + B &= 0, \\ Ae^{\sqrt{-\lambda}l} + Be^{-\sqrt{-\lambda}l} &= 0. \end{aligned}$$

由此可得  $A = B = 0$ , 所以  $X(x) \equiv 0$ .

(2) 当  $\Delta = 0$  (即  $\lambda = 0$ ) 时, 问题 (2.9) 也没有非平凡解. 实际上, 在这种情形下方程的通解为

$$X(x) = Ax + B.$$

由边界条件易得  $A = B = 0$ , 因而只有恒等于零的解.

(3) 当  $\Delta < 0$  (即  $\lambda > 0$ ) 时, 方程的通解具有如下的形式

$$X(x) = A \cos \sqrt{\lambda}x + B \sin \sqrt{\lambda}x.$$

由边界条件得

$$\begin{aligned} X(0) &= A = 0, \\ X(l) &= B \sin \sqrt{\lambda}l = 0. \end{aligned}$$

假设  $X(x)$  不恒等于零, 则  $B \neq 0$ , 因此  $\sin \sqrt{\lambda}l = 0$ , 于是得

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.10)$$

这样我们就找到了一族非零解

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.11)$$

称 (2.11) 为问题 (2.9) 的固有函数, 而  $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$  称为固有值.

将固有值  $\lambda_n$  代入方程 (2.6) 中, 可得其通解为

$$T_n(t) = C_n \cos \frac{n\pi at}{l} + D_n \sin \frac{n\pi at}{l} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.12)$$

这样, 就得到方程 (2.1) 的满足齐次边界条件 (2.2) 的下列分离变量的特解

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= X_n(x)T_n(t) \\ &= \left( a_n \cos \frac{n\pi at}{l} + b_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (n = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (2.13)$$

其中  $a_n = B_n C_n$ ,  $b_n = B_n D_n$  是任意常数.

由于 (2.3) 式中的  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$  是任意给定的, 一般说来, 特解 (2.13) 中任

意一个不满足给定的初值条件. 由于方程 (2.1) 是线性齐次的, 边界条件 (2.2) 也是齐次的, 由叠加原理知, 级数

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi at}{l} + b_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (2.14)$$

仍是方程 (2.1) 的解, 并且同时满足边界条件 (2.2). 现在问当  $a_n, b_n$  满足什么条件时, 式 (2.14) 也能满足初值条件 (2.3)? 为此, 在式 (2.14) 及其关于  $t$  的导数式中, 令  $t = 0$ , 由初值条件得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} &= \varphi(x), \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} &= \psi(x). \end{aligned}$$

因为  $\varphi(x), \psi(x)$  是定义在  $[0, l]$  上的函数, 所以当  $a_n$  是  $\varphi(x)$  的傅里叶正弦级数展开式的系数,  $b_n \frac{n\pi a}{l}$  是  $\psi(x)$  的傅里叶正弦级数展开式的系数时, 也就是

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \\ b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \end{cases} \quad (2.15)$$

时, 初值条件 (2.3) 就能满足. 将 (2.15) 所确定的  $a_n, b_n$  代入式 (2.14), 即得混合问题 (2.1)—(2.3) 的解, 这个方法就称为分离变量法.

定解问题 (2.1)—(2.3) 的级数解 (2.14) 有明显的物理意义, 我们作如下说明. 为此, 取级数 (2.14) 的一般项, 并作如下变形:

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= \left( a_n \cos \frac{n\pi at}{l} + b_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \\ &= N_n \sin(\omega_n t + \theta_n) \sin \frac{n\pi x}{l}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

其中  $N_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ ,  $\theta_n = \arctan \frac{a_n}{b_n}$ ,  $\omega_n = \frac{n\pi a}{l}$ ;  $\theta_n$  称为初相,  $\omega_n$  称为频率.

研究 (2.16) 式物理意义的方法是, 先固定时间  $t$ , 看一看在这时刻振动波呈什么形状; 尔后在固定弦上一点, 看一看该点的振动规律.

当  $t = t_0$  时, 有

$$u_n(x, t_0) = N'_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

其中  $N'_n = N_n \sin(\omega_n t_0 + \theta_n)$  是一个定值, 这说明在任意时刻,  $u_n(x, t_0)$  的波形

都是一条正弦曲线, 其振幅与时刻  $t_0$  有关.

当  $x = x_0$  时, 有

$$u_n(x_0, t) = N_n'' \sin(\omega_n t + \theta_n),$$

其中  $N_n'' = N_n \sin \frac{n\pi x_0}{l}$  是一个定值, 该式说明弦上每一点  $x_0$  是在作简谐振动, 其振幅为  $\left| N_n \sin \frac{n\pi x_0}{l} \right|$ , 频率为  $\omega_n = \frac{n\pi a}{l}$ , 初相为  $\theta_n$ . 若取另外的一个点, 情况也一样, 只是振幅不同而已.

综上所述知,  $u_n(x, t)$  表示这样一个振动波, 在考察的弦上各点以同样的频率作简谐振动, 各点的初相也相同, 其振幅与点的位置有关, 此振动波在任一时刻的外形是一条正弦曲线.

当  $x_m = \frac{ml}{n}$  ( $m = 0, 1, 2, \dots, n$ ) 时,  $u_n(x, t) = 0$ , 这表明这些点在整个振动过程中始终保持不动, 这样的点在物理上称为  $u_n$  的节点. 这就是说,  $u_n(x, t)$  的振动是在  $[0, l]$  上的分段振动, 人们把这种包含节点的振动波称为驻波. 而在另外的一些点  $x_k = \frac{(2k-1)l}{2n}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) 处驻波的振幅达到最大值, 这样的点叫做腹点.

上面的讨论表明  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$  是一系列驻波, 它们的频率、初相和振幅都随  $n$  而异. 因此, 可以说解 (2.14) 是由一系列频率不同, 初相不同和振幅不同的驻波叠加而成的, 故人们又把分离变量法叫做驻波法.

**例 2.1** 求下列定解问题的解

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (0 < x < 1, t > 0), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin 2\pi x, \quad u_t(x, 0) = x(1-x). \end{cases}$$

**解** 由于  $l = 1$ , 故由 (2.14) 知, 该定解问题的解为

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi at + b_n \sin n\pi at) \sin n\pi x,$$

其中,

$$a_n = 2 \int_0^1 \sin 2\pi x \sin n\pi x dx = \begin{cases} 0, & n \neq 2, \\ 1, & n = 2, \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^1 x(1-x) \sin n\pi x dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{n\pi a} \left[ -\frac{1}{n\pi} x(1-x) \cos n\pi x \Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 (1-2x) \cos n\pi x dx \right] \\
&= \frac{2}{(n\pi)^2 a} \left[ \frac{1}{n\pi} (1-2x) \sin n\pi x \Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \sin n\pi x dx \right] \\
&= \frac{4}{(n\pi)^4 a} [1 - (-1)^n].
\end{aligned}$$

因此, 所求定解问题的解为

$$u(x, t) = \cos 2\pi at \sin 2\pi x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(n\pi)^4 a} [1 - (-1)^n] \sin n\pi at \sin n\pi x.$$

**例 2.2** 求解下列定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (0 < x < l, t > 0), \\ u(0, t) = 0, u_x(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = x^2 - 2lx, u_t(x, 0) = 3 \sin \frac{3\pi x}{2l}. \end{cases}$$

**解** 由于这个问题的边界条件与 (2.2) 不同, 因此不能应用公式 (2.14). 对于这个问题我们应用分离变量法, 令

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

代入方程分离变量得两个常微分方程

$$\begin{aligned} T''(t) + \lambda a^2 T(t) &= 0, \\ X''(x) + \lambda X(x) &= 0. \end{aligned}$$

由边界条件易得  $X(0) = 0$  和  $X'(l) = 0$ , 这样我们就要求边值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X'(l) = 0 \end{cases}$$

的非零解. 重复前面的讨论 (请读者自己完成), 得上述固有值问题的固有值为

$$\lambda_n = \left[ \frac{(2n+1)\pi}{2l} \right]^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

而相应的固有函数是

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

将固有值  $\lambda_n$  代入另一个常微分方程, 得它的通解为

$$T_n(t) = C_n \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l} + D_n \sin \frac{(2n+1)\pi at}{2l}.$$

由叠加原理知所求定解问题的解可表示为

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l} + b_n \sin \frac{(2n+1)\pi at}{2l} \right] \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l},$$

其中  $a_n = B_n C_n$ ,  $b_n = B_n D_n$ , 利用初值条件得

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l (x^2 - 2lx) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx = -\frac{32l^2}{(2n+1)^3 \pi^3},$$

$$b_n = \frac{4}{(2n+1)\pi a} \int_0^l 3 \sin \frac{3\pi x}{2l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx = \begin{cases} 0, & n \neq 1, \\ \frac{2l}{\pi a}, & n = 1, \end{cases}$$

于是, 得所求问题的解为

$$u(x, t) = \frac{2l}{\pi a} \sin \frac{3\pi at}{2l} \sin \frac{3\pi x}{2l} - \frac{32l^2}{(2n+1)^3 \pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$$

## §2.2 有限长杆的热传导问题

以波动方程为背景的驻波法在数学上的特点是: 用分离变量形式的特解通过叠加去构成所求定解问题的解. 这种方法与波动现象的物理本质无关, 对于相当广泛的某些类型的偏微分方程多能奏效, 本节将用这种方法研究一维热传导方程的初边值问题.

对于齐次热传导方程的混合问题, 如果边界条件均是第一类齐次的, 由于求解步骤及相应的固有值问题与 (2.9) 相同, 我们只给出主要过程, 而不作详细讨论.

求下列定解问题的解

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (0 < x < l, t > 0), \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \end{cases} \quad (2.17)$$

其中  $\varphi(x)$  为已知函数.

设  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , 代入方程分离变量, 得下面两个常微分方程

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0,$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0.$$

由边界条件得

$$X(0) = X(l) = 0.$$

为了决定函数  $X(x)$ , 考虑固有值问题:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases}$$

由 §2.1 知, 当  $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 时, 这个问题才有非零解, 并且非零解为

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

将  $\lambda_n$  代入另一个常微分方程, 求得它的通解

$$T_n(t) = C_n e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

于是问题 (2.17) 的解可表示为

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (2.18)$$

其中

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (2.19)$$

**注 2.1** 若边界条件之一或两个为第二类齐次的或第三类齐次的, 这种定解问题的解法也与之前类似, 不同的是固有值问题发生了变化, 因而固有值与固有函数就会有不同. 由于出现第三类齐次边界条件时, 固有值的求解十分繁琐, 下面仅就出现第二类齐次边界条件的情形讨论.

我们考察杆的两端  $x = 0, x = l$  处绝热、初始温度分布为  $\varphi(x)$ , 并且无热源的有限长杆上热传导问题, 它归结为求解

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (0 < x < l, t > 0), \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\begin{cases} u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \end{cases} \quad (2.21)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases} \quad (2.22)$$

其中  $\varphi(x)$  为已知函数.

按分离变量法, 令

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (2.23)$$

并将 (2.23) 代入方程 (2.20), 分离变量可得

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad (2.24)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \quad (2.25)$$

再将 (2.23) 代入边界条件 (2.21), 得

$$X'(0) = X'(l) = 0. \quad (2.26)$$

于是得常微分方程的边值问题:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X'(0) = X'(l) = 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

现在问当  $\lambda$  取什么值时问题 (2.27) 才有非零解? 二阶常系数线性常微分方程 (2.27) 的特征方程是  $\tau^2 + \lambda = 0$ , 其判别式为  $\Delta = -4\lambda$ , 因此, 下面我们对  $\Delta$  分三种情况加以讨论. 为此, 类似于上一节, 需要考虑  $\lambda < 0$ ,  $\lambda = 0$  和  $\lambda > 0$  三种可能情形.

当  $\lambda < 0$  时, 方程 (2.25) 的通解为

$$X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

由此可得

$$X'(x) = A\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}x} - B\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

由条件 (2.26) 得

$$X'(0) = \sqrt{-\lambda}(A - B) = 0,$$

$$X'(l) = \sqrt{-\lambda}(Ae^{\sqrt{-\lambda}l} - Be^{-\sqrt{-\lambda}l}) = 0.$$

由此, 得  $A = B = 0$ , 因而  $X(x) \equiv 0$ , 即当  $\lambda < 0$  时问题 (2.27) 没有非零解.

当  $\lambda = 0$  时, 方程 (2.25) 的通解为

$$X_0(x) = A_0x + B_0,$$

微分此式得

$$X'_0(x) = A_0.$$

由条件 (2.26) 得  $A_0 = 0$ , 于是得问题 (2.27) 的解为

$$X_0(x) = B_0,$$

将  $\lambda = 0$  代入方程 (2.24) 得

$$T_0(t) = C_0.$$

将  $X_0(x), T_0(t)$  代入式 (2.23) 得方程 (2.20) 满足条件 (2.21) 的一个非零解

$$u_0(x, t) = X_0(x)T_0(t) = \frac{1}{2}a_0,$$

这里  $a_0 = 2B_0C_0$ .

当  $\lambda > 0$  时, 方程 (2.25) 的通解为

$$X(x) = A \cos \sqrt{\lambda}x + B \sin \sqrt{\lambda}x,$$

由条件 (2.26) 中第一个式子得  $B = 0$ , 由第二个式子得  $\sin \sqrt{\lambda}l = 0$ , 由此得问题 (2.27) 的固有值为

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

相应的固有函数为

$$X_n(x) = A_n \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

将  $\lambda_n$  代入方程 (2.24), 得它的通解

$$T_n(t) = D_n e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

于是, 得方程 (2.20) 满足边界条件 (2.21) 的一组变量已分离的非零解

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = a_n e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t} \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

其中  $a_n = A_n D_n$  是任意常数.

由于方程 (2.20) 和边界条件 (2.21) 都是线性齐次的, 由叠加原理, 知函数

$$u(x, t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t} \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (2.28)$$

仍满足方程与边界条件; 应用初值条件 (2.22) 得

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.29)$$

这样, 定解问题 (2.20)—(2.22) 的解由级数 (2.28) 给出, 其中系数  $a_n$  由 (2.29) 确定.

例 2.3 求下列问题的解

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (0 < x < \pi, t > 0), \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = x^2(\pi - x)^2. \end{cases}$$

解 由 (2.29) 式

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2(\pi - x)^2 dx = \frac{1}{15} \pi^4,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2(\pi - x)^2 \cos nx dx = \frac{-24[(-1)^n + 1]}{n^4} \quad (n \neq 0),$$

将  $a_0, a_n$  代入式 (2.28), 得所求问题的解为

$$u(x, t) = \frac{1}{30} \pi^4 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{24[(-1)^n + 1]}{n^4} e^{-n^2 a^2 t} \cos nx.$$

## §2.3 二维拉普拉斯方程的边值问题

对于某些特殊区域上的拉普拉斯方程的边值问题, 也可以应用分离变量法来求解. 我们举例说明如下:

### §2.3.1 矩形域上拉普拉斯方程的边值问题

考察一矩形薄板稳恒状态时的温度分布问题. 设薄板上下两面绝热, 板的两边 ( $x = 0, x = a$ ) 始终保持零度, 另外两边 ( $y = 0, y = b$ ) 的温度分别为  $f(x)$  和  $g(x)$ . 求板内稳恒状态下的温度分布规律.

我们用  $u(x, y)$  来表示板上点  $(x, y)$  处的温度, 由第一章我们知道稳恒状态下的温度应满足拉普拉斯方程, 因而求  $u(x, y)$  即解下列定解问题:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & (0 < x < a, 0 < y < b), \end{cases} \quad (2.30)$$

$$\begin{cases} u(0, y) = 0, u(a, y) = 0, \end{cases} \quad (2.31)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x), u(x, b) = g(x). \end{cases} \quad (2.32)$$

应用分离变量法, 设

$$u(x, y) = X(x)Y(y), \quad (2.33)$$

将式 (2.33) 代入方程 (2.30), 分离变量得

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda,$$

其中  $\lambda$  是常数. 由此, 我们得两个常微分方程

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (2.34)$$

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0, \quad (2.35)$$

由边界条件 (2.31) 得  $X(0) = X(a) = 0$ , 这样  $X(x)$  就必须满足边值问题:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(a) = 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

边值问题 (2.36) 是固有值问题, 由 §2.1 的结果知该问题的固有值和固有函数为

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \\ X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

将  $\lambda_n$  代入另一个方程 (2.35), 求得它的通解为

$$Y_n(y) = a_n e^{\frac{n\pi}{a}y} + b_n e^{-\frac{n\pi}{a}y} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

这样我们就得到方程 (2.30) 满足边界条件 (2.31) 的一系列特解

$$u_n(x, y) = (a_n e^{\frac{n\pi}{a}y} + b_n e^{-\frac{n\pi}{a}y}) \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

由于方程 (2.30) 和边界条件 (2.31) 都是线性齐次的, 因此函数

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n e^{\frac{n\pi}{a}y} + b_n e^{-\frac{n\pi}{a}y}) \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.37)$$

仍然满足它们, 应用边界条件 (2.32) 和傅里叶系数公式得

$$\begin{cases} a_n + b_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx, \\ a_n e^{\frac{n\pi}{a}b} + b_n e^{-\frac{n\pi}{a}b} = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.38)$$

由上式解出  $a_n$  和  $b_n$ , 代入 (2.37) 式, 即得问题 (2.30)—(2.31) 的解.

**注 2.2** 边界条件 (2.31) 和 (2.32) 中的任何一个都可以换成第二类边界条件, 相应的定解问题仍可以用分离变量法求解. 请读者自己独立推导它们的求解公式.

## §2.3.2 圆域上拉普拉斯方程的边值问题

## §2.3.2.1 圆域上拉普拉斯方程边值问题的分离变量法

考察一半径为  $r_0$  的圆形薄板稳恒状态下的温度分布问题. 设板的上下两面绝热, 圆周边界上的温度已知为  $f(\theta)$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ), 且  $f(0) = f(2\pi)$ . 试求稳恒状态下的温度分布规律.

由于稳恒状态下的温度满足拉普拉斯方程, 并且区域是圆形的, 为了应用分离变量法, 拉普拉斯方程采用极坐标形式将是方便的. 我们用  $u(r, \theta)$  来表示圆形板内  $(r, \theta)$  点处的温度, 则所述问题可以表示成下列定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 & (0 < r < r_0), \\ u|_{r=r_0} = f(\theta). \end{cases} \quad (2.39)$$

设方程 (2.39) 的解为

$$u(r, \theta) = R(r)\Phi(\theta),$$

代入方程得

$$R''\Phi + \frac{1}{r}R'\Phi + \frac{1}{r^2}R\Phi'' = 0.$$

分离变量, 令其比值为常数  $-\lambda$ , 得

$$-\frac{r^2 R'' + rR'}{R} = \frac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda,$$

由此可得两个常微分方程

$$r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0,$$

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0.$$

由于温度函数  $u(r, \theta)$  是单值的, 所以当  $\theta$  从  $\theta$  变到  $\theta + 2\pi$  时,  $u(r, \theta + 2\pi) = u(r, \theta)$  成立, 由此得

$$\Phi(\theta + 2\pi) = \Phi(\theta).$$

同时, 根据问题的物理意义, 圆内各点处的温度应该是有界的, 因而  $|u(r, \theta)| < +\infty$  成立, 由此知  $R(r)$  应满足条件

$$|R(0)| < +\infty.$$

这样, 我们就得到两个常微分方程的定解问题

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0, \\ \Phi(\theta + 2\pi) = \Phi(\theta) \end{cases} \quad (2.41)$$

与

$$\begin{cases} r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0, \\ |R(0)| < +\infty. \end{cases} \quad (2.42)$$

我们先从问题 (2.41) 入手, 对  $\lambda$  讨论如下:

当  $\lambda < 0$  时, 方程的通解为

$$\Phi(\theta) = Ae^{-\sqrt{-\lambda}\theta} + Be^{\sqrt{-\lambda}\theta}.$$

其中  $A$  和  $B$  是任意常数. 由于这样的函数不满足周期性条件, 因此  $\lambda$  不能取负值.

当  $\lambda = 0$  时, 方程的通解为

$$\Phi_0(\theta) = A_0\theta + B_0,$$

这里  $A_0$  和  $B_0$  是任意常数. 只有当  $A_0 = 0$  时, 函数  $\Phi_0$  才能满足周期性条件, 因此, 当  $\lambda = 0$  时, 问题 (2.41) 的解为  $\Phi_0(\theta) = B_0$ .

将  $\lambda = 0$  代入问题 (2.42) 中的方程, 得它的通解为

$$R_0(r) = C_0 \ln r + D_0,$$

其中  $C_0$  和  $D_0$  是任意常数. 只有当  $C_0 = 0$  时, 函数  $R_0$  才能满足有界性条件, 因此, 当  $\lambda = 0$  时, 问题 (2.42) 的解为  $R_0(r) = D_0$ .

这样一来, 我们就得到方程 (2.39) 的一个特解为

$$u_0(r, \theta) = B_0 D_0 = \frac{1}{2} a_0.$$

当  $\lambda > 0$  时, 问题 (2.41) 中方程的通解为

$$\Phi(\theta) = A \cos \sqrt{\lambda}\theta + B \sin \sqrt{\lambda}\theta,$$

其中  $A$  和  $B$  是任意常数. 由于  $\Phi(\theta)$  应是以  $2\pi$  为周期的周期函数, 所以有  $\lambda = n^2$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 于是可将上面得到的解表示成

$$\Phi_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta.$$

将  $\lambda = n^2$  代入问题 (2.42) 中的方程, 得到欧拉 (Euler) 方程

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0,$$

它的通解为

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}.$$

为了保证  $|R(0)| < +\infty$ , 取  $D_n = 0 (n = 1, 2, \dots)$ , 所以,

$$R_n(r) = C_n r^n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

这样, 当  $\lambda = n^2 (n = 1, 2, \dots)$  时, 我们得到方程 (2.39) 的一系列特解

$$u_n(r, \theta) = (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

其中  $a_n = A_n C_n$ ,  $b_n = B_n C_n$ .

由于方程 (2.39) 是线性齐次方程, 利用叠加原理, 就可以得到它的满足单值性与有界性的级数解为

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n. \quad (2.43)$$

为了确定系数  $a_n$  和  $b_n$ , 由边界条件 (2.40) 得

$$u(r_0, \theta) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r_0^n = f(\theta),$$

由傅里叶级数理论, 知

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi r_0^n} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi & (n = 0, 1, 2, \dots), \\ b_n = \frac{1}{\pi r_0^n} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi & (n = 1, 2, \dots). \end{cases} \quad (2.44)$$

这样, 定解问题 (2.39)、(2.40) 的解由级数 (2.43) 给出, 其中系数  $a_n$  与  $b_n$  由式 (2.44) 确定.

**例 2.4** 求下列问题的解:

$$\begin{cases} \Delta u(r, \theta) = 0 & (0 < r < R), \\ u(R, \theta) = \theta \sin \theta & (0 \leq \theta < 2\pi). \end{cases}$$

**解** 由 (2.44) 式得

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{\pi} \left[ -\theta \cos \theta \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \right] = -2,$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi R} \int_0^{2\pi} \theta \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \theta \sin 2\theta d\theta = -\frac{1}{2R}.$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi R} \int_0^{2\pi} \theta \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \theta(1 - \cos 2\theta) d\theta = \frac{\pi}{R}.$$

当  $n \neq 1$  时,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \theta \sin \theta \cos n\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} \theta [\sin(1+n)\theta + \sin(1-n)\theta] d\theta \\ &= \frac{1}{R^n} \cdot \frac{2}{n^2 - 1}, \\ b_n &= \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \theta \sin \theta \sin n\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} \theta [\cos(1-n)\theta - \cos(1+n)\theta] d\theta = 0, \end{aligned}$$

将上面所求得的系数代入公式 (2.43), 则得所给问题的解为

$$u(r, \theta) = -1 - \frac{r}{2R} \cos \theta + \frac{\pi}{R} r \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 1} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n\theta.$$

**例 2.5** 求下列问题的解

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 & (0 < r < r_0), \\ u|_{r=r_0} = A \sin 2\theta & (0 \leq \theta < 2\pi). \end{cases}$$

**解** 利用公式 (2.44) 并注意三角函数系的正交性, 得

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad b_n = 0 \quad (n \neq 2), \quad b_2 = \frac{A}{r_0^2},$$

代入 (2.43) 即求得所求问题的解

$$u(r, \theta) = \frac{A}{r_0^2} r^2 \sin 2\theta.$$

**注 2.3** 在具体问题的求解中, 经常会用“试探法”. 试探法是指: 对于实际问题中提出的某些定解问题, 根据问题的物理意义和几何特征, 可假设其解具有某种形式并代入试探, 确定其中的待定参数, 从而达到求解目的.

上例可用试探法求解. 函数  $r^2 \sin 2\theta$  是调和函数, 因此函数  $C_1 r^2 \sin 2\theta + C_2$  也是调和函数, 其中  $C_1$  和  $C_2$  是两个任意常数. 这样, 我们不妨设所求的解为  $u(r, \theta) = C_1 r^2 \sin 2\theta + C_2$ , 这个函数如上所述是满足方程的. 为了使它同时

满足边界条件, 我们看一看  $C_1$  和  $C_2$  应取何值, 由边界条件

$$u(r_0, \theta) = C_1 r_0^2 \sin 2\theta + C_2 = A \sin 2\theta,$$

显然,  $C_1 r_0^2 = A$ , 即  $C_1 = \frac{A}{r_0^2}$ , 而  $C_2 = 0$ , 于是所列问题的解为

$$u(r, \theta) = \frac{A}{r_0^2} r^2 \sin 2\theta.$$

### §2.3.2.2 圆域上拉普拉斯方程边值问题的泊松公式

将 (2.44) 中的  $a_n$  与  $b_n$  代入 (2.43) 式, 经过化简后, 得

$$u(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{r_0} \right)^n \cos n(\theta - \varphi) \right] f(\varphi) d\varphi \quad (r < r_0).$$

利用欧拉公式  $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ , 并记  $k = \frac{r}{r_0}$ , 作下面的恒等变形:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \cos n(\theta - \varphi) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} k^n [e^{in(\theta - \varphi)} + e^{-in(\theta - \varphi)}] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [(ke^{i(\theta - \varphi)})^n + (ke^{-i(\theta - \varphi)})^n] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{ke^{i(\theta - \varphi)}}{1 - ke^{i(\theta - \varphi)}} + \frac{ke^{-i(\theta - \varphi)}}{1 - ke^{-i(\theta - \varphi)}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{1 - k^2}{1 - ke^{-i(\theta - \varphi)} - ke^{i(\theta - \varphi)} + k^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1 - k^2}{1 + k^2 - 2k \cos(\theta - \varphi)} \quad (|k| < 1), \end{aligned}$$

则问题 (2.39)–(2.40) 的解  $u(r, \theta)$  可用积分表示为

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos(\theta - \varphi)} d\varphi \quad (r < r_0), \quad (2.45)$$

这个公式称为圆域内的泊松公式.

## || §2.4 非齐次方程的求解问题

前面各节讨论了齐次方程定解问题及其解法, 本节将考察非齐次方程的定解问题, 并介绍一种常用的解法: 固有函数法. 我们将以几种类型定解问题的解法为例, 来说明该方法的要点与解题步骤.

## §2.4.1 有界弦的强迫振动问题

首先讨论齐次边界条件与零初值条件的强迫振动问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) & (0 < x < l, t > 0), \end{cases} \quad (2.46)$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, \end{cases} \quad (2.47)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (2.48)$$

上述问题可采用类似于线性非齐次常微分方程所用的常数变易法, 并保持如下的设想, 即这个定解问题的解可分解为无穷多个驻波的叠加, 而每个驻波的波形仍然是由该振动体的固有函数所决定. 由 §2.1 知道, 与方程 (2.46) 相应的齐次方程满足齐次边界条件 (2.47) 的固有函数系为  $\left\{ \sin \frac{n\pi x}{l} \right\}$ , 于是

第一步: 设所求的解为

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (2.49)$$

其中  $u_n(t)$  是  $t$  的待定函数.

第二步: 将方程中的自由项  $f(x, t)$  也按上述固有函数系展成傅里叶级数:

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (2.50)$$

其中

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.51)$$

把式 (2.49) 与 (2.50) 代入方程 (2.46) 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ u_n''(t) + \left( \frac{n\pi a}{l} \right)^2 u_n(t) - f_n(t) \right] \sin \frac{n\pi x}{l} = 0,$$

由此得

$$u_n''(t) + \left( \frac{n\pi a}{l} \right)^2 u_n(t) = f_n(t) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

由初值条件 (2.48), 得

$$u_n(0) = 0, u_n'(0) = 0,$$

于是得常微分方程的初值问题:

$$\begin{cases} u_n''(t) + \left( \frac{n\pi a}{l} \right)^2 u_n(t) = f_n(t), \\ u_n(0) = 0, u_n'(0) = 0, \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.52)$$

应用常微分方程中的拉普拉斯变换法或常数变易法, 得问题 (2.52) 的解为

$$u_n(t) = \frac{l}{n\pi a} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{n\pi a(t-\tau)}{l} d\tau \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.53)$$

将式 (2.53) 代入式 (2.49) 得定解问题 (2.46)—(2.48) 的解.

其次, 我们考察下列问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) & (0 < x < l, t > 0), \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases} \quad (2.54)$$

此时弦的振动是由两部分干扰引起的, 其一是外界的强大迫力, 其二是弦所处的初始状态. 由物理意义知, 这种振动可以看做是仅由强迫力引起的振动和仅由初始状态引起的振动之合成. 于是, 可以设问题 (2.54) 的解为

$$u(x, t) = v(x, t) + \omega(x, t),$$

其中  $v(x, t)$  表示仅由强迫力引起的弦振动的位移, 它满足

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} + f(x, t) & (0 < x < l, t > 0), \\ v(0, t) = 0, v(l, t) = 0, \\ v(x, 0) = 0, v_t(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (2.55)$$

而  $\omega(x, t)$  表示仅由初始状态引起的弦振动的位移, 它满足

$$\begin{cases} \omega_{tt} = a^2 \omega_{xx} & (0 < x < l, t > 0), \\ \omega(0, t) = 0, \omega(l, t) = 0, \\ \omega(x, 0) = \varphi(x), \omega_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases} \quad (2.56)$$

问题 (2.55) 正是本节讨论过的问题, 而 (2.56) 在之前也已经圆满解决, 一旦我们求出问题 (2.55) 和 (2.56) 的解, 将它们相加即得 (2.54) 的解.

**例 2.6** 求解下列问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + A \sin \omega t \cos \frac{\pi x}{l} & (0 < x < l, t > 0), \\ u_x(0, t) = 0, u_x(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

其中  $A, \omega$  均为常数.

解 类似于热传导方程的初边值问题 (2.20)—(2.22) 的求解过程, 容易求出与方程相应的齐次方程满足第二类齐次边界条件的固有函数系是  $\left\{ \cos \frac{n\pi x}{l} : n = 0, 1, \dots \right\}$ . 因此, 设方程的解为

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \cos \frac{n\pi x}{l},$$

将它代入所给泛定方程, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ u_n'' + \left( \frac{n\pi a}{l} \right)^2 u_n \right] \cos \frac{n\pi x}{l} = A \sin \omega t \cos \frac{\pi x}{l},$$

于是, 得

$$\begin{aligned} u_n''(t) + \left( \frac{n\pi a}{l} \right)^2 u_n(t) &= 0 \quad (n \neq 1), \\ u_1''(t) + \left( \frac{\pi a}{l} \right)^2 u_1(t) &= A \sin \omega t. \end{aligned}$$

由初值条件, 得

$$u_n(0) = 0, \quad u_n'(0) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

显然, 当  $n \neq 1$  时,  $u_n(t) = 0$ . 当  $n = 1$  时, 若  $\omega \neq \frac{\pi a}{l}$ , 由式 (2.53) 得

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{l}{\pi a} \int_0^t A \sin \omega \tau \sin \frac{\pi a(t-\tau)}{l} d\tau \\ &= \frac{Al}{\pi a} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \left( \frac{\pi a}{l} \right)^2} \left( \omega \sin \frac{\pi a}{l} t - \frac{\pi a}{l} \sin \omega t \right), \end{aligned}$$

若  $\omega = \frac{\pi a}{l}$ , 由式 (2.53) 类似可得

$$u_1(t) = \frac{Al}{2\pi a} \left( \frac{l}{\pi a} \sin \frac{\pi a t}{l} - t \cos \frac{\pi a t}{l} \right).$$

故所求的解为

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{Al}{\pi a} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \left( \frac{\pi a}{l} \right)^2} \left( \omega \sin \frac{\pi a}{l} t - \frac{\pi a}{l} \sin \omega t \right) \cos \frac{\pi x}{l}, & \omega \neq \frac{\pi a}{l}, \\ \frac{Al}{2\pi a} \left( \frac{l}{\pi a} \sin \frac{\pi a t}{l} - t \cos \frac{\pi a t}{l} \right) \cos \frac{\pi x}{l}, & \omega = \frac{\pi a}{l}. \end{cases}$$

## §2.4.2 有限长杆的热传导问题 (有热源)

我们首先考察齐次边界条件和零初始条件的情形, 以两端温度保持零度为例. 问题归结为

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) & (0 < x < l, t > 0), & (2.57) \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, & & (2.58) \\ u(x, 0) = 0. & & (2.59) \end{cases}$$

我们用固有函数法来求这个定解问题的解. 方程 (2.57) 相应的齐次方程满足齐次边界条件 (2.58) 的固有函数系为  $\left\{ \sin \frac{n\pi x}{l} : n = 1, 2, \dots \right\}$ , 因而

第一步: 将定解问题的解  $u(x, t)$  关于  $x$  按上述固有函数系展开为傅里叶级数

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (2.60)$$

第二步: 将自由项  $f(x, t)$  也按此函数系展开为傅里叶级数

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (2.61)$$

其中

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.62)$$

把级数 (2.60) 与 (2.61) 代入方程 (2.57) 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ u'_n(t) + \left( \frac{n\pi a}{l} \right)^2 u_n(t) - f_n(t) \right] \sin \frac{n\pi x}{l} = 0,$$

于是

$$u'_n(t) + \left( \frac{n\pi a}{l} \right)^2 u_n(t) = f_n(t).$$

由初值条件 (2.59) 得  $u_n(0) = 0$ . 这样我们得一系列常微分方程的初值问题:

$$\begin{cases} u'_n(t) + \left( \frac{n\pi a}{l} \right)^2 u_n(t) = f_n(t), & (n = 1, 2, \dots) \\ u_n(0) = 0. \end{cases} \quad (2.63)$$

这个问题可用拉普拉斯变换求解, 得

$$u_n(t) = \int_0^t f_n(\tau) e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)} d\tau, \quad (2.64)$$

将 (2.64) 代入级数 (2.60) 即得问题 (2.57)—(2.59) 的解.

其次, 我们考察下列问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) & (0 < x < l, t > 0), \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases} \quad (2.65)$$

这个问题可分解为下面两个问题. 为此, 令

$$u(x, t) = v(x, t) + \omega(x, t),$$

其中  $v(x, t)$  满足

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} + f(x, t) & (0 < x < l, t > 0), \\ v(0, t) = 0, v(l, t) = 0, \\ v(x, 0) = 0, \end{cases}$$

而  $\omega(x, t)$  满足

$$\begin{cases} \omega_t = a^2 \omega_{xx} & (0 < x < l, t > 0), \\ \omega(0, t) = 0, \omega(l, t) = 0, \\ \omega(x, 0) = \varphi(x). \end{cases}$$

这两个问题是我们已经熟悉的问题, 它们的解法及解的表示式在本节及 §2.2 中已分别给出.

### 例 2.7 求解

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + A & (0 < x < l, t > 0), \\ u(0, t) = 0, u_x(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \end{cases} \quad (2.66)$$

其中  $A$  为常数.

解 易得相应的固有函数系为  $\left\{ \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l} : n = 1, 2, \dots \right\}$ , 因此, 设所求的解为

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l}, \quad (2.67)$$

并将  $A$  展成如下形式的傅里叶级数:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l}, \quad (2.68)$$

其中

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l A \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l} dx = \frac{4A}{(2n-1)\pi}.$$

将级数 (2.67) 及 (2.68) 代入方程可得

$$u_n'(t) + \left[ \frac{(2n-1)\pi a}{2l} \right]^2 u_n(t) = \frac{4A}{(2n-1)\pi}, \quad (2.69)$$

由初值条件, 得

$$u_n(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.70)$$

应用拉普拉斯变换, 得初值问题 (2.69) 及 (2.70) 的解为

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \frac{4A}{(2n-1)\pi} \int_0^t e^{-\left[\frac{(2n-1)\pi a}{2l}\right]^2(t-\tau)} d\tau \\ &= \frac{16Al^2}{(2n-1)^3\pi^3 a^2} \left\{ 1 - e^{-\left[\frac{(2n-1)\pi a}{2l}\right]^2 t} \right\}, \end{aligned}$$

将所求的  $u_n(t)$  代入级数 (2.67), 得问题 (2.66) 的解为

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16Al^2}{(2n-1)^3\pi^3 a^2} \left\{ 1 - e^{-\left[\frac{(2n-1)\pi a}{2l}\right]^2 t} \right\} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l}.$$

### §2.4.3 泊松方程

非齐次拉普拉斯方程的边值问题也可以用固有函数法求解, 我们仅举一例以说明求解这类问题的要点与步骤.

**例 2.8** 在以原点为中心 1 为半径的圆内, 试求泊松方程

$$u_{xx} + u_{yy} = -2x$$

的解, 使它满足边界条件

$$u|_{x^2+y^2=1} = 0.$$

**解** 由于区域是圆域, 采用极坐标比较方便. 令  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , 并记  $\bar{u}(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$ , 则问题归结为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \theta^2} = -2r \cos \theta & (0 < r < 1), \\ \bar{u}|_{r=1} = 0. \end{cases} \quad (2.71)$$

$$(2.72)$$

由 §2.3.2 中的讨论可知, 方程 (2.71) 相应的齐次方程满足单值性条件的固有函数系为

$$1, \cos \theta, \sin \theta, \cos 2\theta, \sin 2\theta, \dots, \cos n\theta, \sin n\theta, \dots$$

由固有函数法, 可设方程 (2.71) 的解为

$$\bar{u}(r, \theta) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(r) \cos n\theta + b_n(r) \sin n\theta], \quad (2.73)$$

代入方程, 得

$$\left( a_0'' + \frac{1}{r} a_0' \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( a_n'' + \frac{1}{r} a_n' - \frac{n^2}{r^2} a_n \right) \cos n\theta + \left( b_n'' + \frac{1}{r} b_n' - \frac{n^2}{r^2} b_n \right) \sin n\theta \right] = -2r \cos \theta.$$

比较两端关于  $\cos n\theta, \sin n\theta$  的系数, 得

$$\begin{cases} a_1'' + \frac{1}{r} a_1' - \frac{1}{r^2} a_1 = -2r & (n=1), \end{cases} \quad (2.74)$$

$$\begin{cases} a_n'' + \frac{1}{r} a_n' - \frac{n^2}{r^2} a_n = 0 & (n=0, 2, 3, \dots), \end{cases} \quad (2.75)$$

$$\begin{cases} b_n'' + \frac{1}{r} b_n' - \frac{n^2}{r^2} b_n = 0 & (n=1, 2, \dots), \end{cases} \quad (2.76)$$

由边界条件, 得

$$a_n(1) = 0, \quad b_n(1) = 0. \quad (2.77)$$

再根据函数  $u(r, \theta)$  的有界性, 得

$$|a_n(0)| < +\infty, \quad |b_n(0)| < +\infty. \quad (2.78)$$

方程 (2.75) 及 (2.76) 为欧拉方程, 它们的通解为

$$\begin{aligned} a_0(r) &= A_0 + B_0 \ln r, \\ a_n(r) &= A_n r^n + B_n r^{-n} \quad (n=2, 3, \dots), \\ b_n(r) &= \bar{A}_n r^n + \bar{B}_n r^{-n} \quad (n=1, 2, \dots), \end{aligned}$$

由条件 (2.78) 得  $B_n = 0$  和  $\bar{B}_n = 0$ , 再由条件 (2.77) 推出  $A_n = 0$  和  $\bar{A}_n = 0$ , 因此,  $a_n(r) = 0$  ( $n=0, 2, 3, \dots$ ),  $b_n(r) = 0$  ( $n=1, 2, \dots$ ). 方程 (2.74) 的通解为

$$a_1(r) = c_1 r + c_2 r^{-1} - \frac{1}{4} r^3.$$

由 (2.78) 得  $c_2 = 0$ , 再由 (2.77) 得  $c_1 = \frac{1}{4}$ , 故

$$a_1(r) = \frac{1}{4}r - \frac{1}{4}r^3.$$

将所求出的  $a_n(r)$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) 和  $b_n(r)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 代入级数 (2.73) 中, 则得定解问题 (2.71)、(2.72) 的解为

$$\bar{u}(r, \theta) = \frac{1}{4}(1 - r^2)r \cos \theta,$$

化成直角坐标, 则得

$$u(x, y) = \frac{1}{4}[1 - (x^2 + y^2)]x.$$

**注 2.4** 在求解泊松方程的边值问题时, 如果我们知道泊松方程的一个特解  $w$ , 则通过函数代换  $\bar{u} = v + w$ , 就可将泊松方程边值问题化成未知函数  $v$  的拉普拉斯方程的边值问题, 进而可以用分离变量法或试探法求解. 例如对例 2.8: 显然, 方程 (2.71) 有一个特解  $w = -\frac{1}{4}r^3 \cos \theta$ , 令  $\bar{u}(r, \theta) = v(r, \theta) - \frac{1}{4}r^3 \cos \theta$ , 则问题 (2.71)、(2.72) 化为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0, \\ v|_{r=1} = \frac{1}{4} \cos \theta. \end{cases}$$

用试探法求解. 可设这个问题的解为  $v(r, \theta) = Ar \cos \theta + B = Ax + B$ , 这个函数满足方程是显然的. 为了使它也满足边界条件, 则要求  $v(1, \theta) = A \cos \theta + B = \frac{1}{4} \cos \theta$ , 可得  $A = \frac{1}{4}$ ,  $B = 0$ , 所以  $v(r, \theta) = \frac{1}{4}r \cos \theta$ . 于是函数

$$\bar{u}(r, \theta) = v(r, \theta) + w(r, \theta) = \frac{1}{4}(1 - r^2)r \cos \theta,$$

就是边值问题 (2.71)、(2.72) 的解.

## §2.5 具有非齐次边界条件的问题

本节我们讨论带有非齐次边界条件的定解问题的求解方法. 处理这类问题的基本原则是: 不论方程是齐次的还是非齐次的, 选取一个辅助函数  $w(x, t)$ , 通过函数之间的代换  $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$ , 使得对于新的未知函数  $v(x, t)$  而言, 边界条件为齐次的. 我们以下列问题为例, 说明选取代换的方法.

考察定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) & (0 < x < l, t > 0), & (2.79) \\ u(0, t) = u_1(t), \quad u(l, t) = u_2(t), & & (2.80) \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). & & (2.81) \end{cases}$$

设法作一代换将边界条件化成齐次的, 为此令

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t), \quad (2.82)$$

并选取辅助函数  $w(x, t)$  使新的未知函数  $v(x, t)$  满足齐次边界条件, 即

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0. \quad (2.83)$$

由 (2.80) 及 (2.82) 容易看出, 要使 (2.83) 成立, 只要

$$w(0, t) = u_1(t), \quad w(l, t) = u_2(t) \quad (2.84)$$

即可. 满足上述两个条件的函数  $w(x, t)$  是很多的, 为了以后计算方便起见, 通常取  $w(x, t)$  为  $x$  的一次式, 即设

$$w(x, t) = A(t)x + B(t).$$

由条件 (2.84) 确定  $A(t), B(t)$  得

$$A(t) = \frac{1}{l}[u_2(t) - u_1(t)], \quad B(t) = u_1(t),$$

于是求得

$$w(x, t) = \frac{x}{l}[u_2(t) - u_1(t)] + u_1(t).$$

因此, 令

$$u(x, t) = v(x, t) + \frac{x}{l}[u_2(t) - u_1(t)] + u_1(t), \quad (2.85)$$

则问题 (2.79)—(2.81) 即可化成  $v(x, t)$  的如下的定解问题:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} + f_1(x, t) & (0 < x < l, t > 0), \\ v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0, \\ v(x, 0) = \varphi_1(x), \quad v_t(x, 0) = \psi_1(x), \end{cases} \quad (2.86)$$

其中

$$\begin{cases} f_1(x, t) = f(x, t) - \frac{x}{l}[u_2''(t) - u_1''(t)] - u_1''(t), \\ \varphi_1(x) = \varphi(x) - \frac{x}{l}[u_2(0) - u_1(0)] - u_1(0), \\ \psi_1(x) = \psi(x) - \frac{x}{l}[u_2'(0) - u_1'(0)] - u_1'(0). \end{cases}$$

问题 (2.86) 的求解方法在之前已经讨论过. 这个问题的解一旦求出, 将它代入式 (2.85) 中即得原定解问题 (2.79)—(2.81) 的解.

若边界条件不全是第一类的, 要把边界条件化成齐次的, 可采用类似的方法. 我们就下列几种非齐次边界条件的情况, 分别给出相应的  $w(x, t)$  的一种表达式.

$$(1) u(0, t) = u_1(t), u_x(l, t) = u_2(t): w(x, t) = u_2(t)x + u_1(t).$$

$$(2) u_x(0, t) = u_1(t), u(l, t) = u_2(t): w(x, t) = u_1(t)x + u_2(t) - lu_1(t).$$

$$(3) u_x(0, t) = u_1(t), u_x(l, t) = u_2(t): w(x, t) = \frac{u_2(t) - u_1(t)}{2l}x^2 + u_1(t)x.$$

**注 2.5** 上面通过引进辅助函数  $w(x, t)$  把边界条件化成齐次的方法, 不仅适用于波动方程, 而且也可以应用于热传导方程以及矩形区域上的泊松方程边值问题.

**例 2.9** 求解下列问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (0 < x < l, t > 0), \\ u(0, t) = t, u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (2.87)$$

**解** 由前面的讨论可知应选辅助函数  $w(x, t) = -\frac{t}{l}x + t$ . 令

$$u(x, t) = v(x, t) - \frac{t}{l}x + t,$$

则问题 (2.87) 化成

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} + \frac{x}{l} - 1 & (0 < x < l, t > 0), \\ v(0, t) = v(l, t) = 0, \\ v(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (2.88)$$

应用固有函数法求问题 (2.88) 的解. 为此, 令

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (2.89)$$

其中  $v_n(t)$  由 (2.64) 给出, 即

$$v_n(t) = \int_0^t f_n(\tau) e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2(t-\tau)} d\tau,$$

而

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \left( \frac{x}{l} - 1 \right) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = -\frac{2}{n\pi}.$$

将  $f_n(t) = -\frac{2}{n\pi}$  代入上式, 得

$$v_n(t) = \frac{2l^2}{(n\pi)^3 a^2} \left[ e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t} - 1 \right], \quad (2.90)$$

把 (2.90) 式代入 (2.89) 式, 得

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l^2}{(n\pi)^3 a^2} \left[ e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t} - 1 \right] \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

因此原问题 (2.87) 的解为

$$u(x, t) = t \left( 1 - \frac{x}{l} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l^2}{(n\pi)^3 a^2} \left[ e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t} - 1 \right] \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

**注 2.6** 特别值得注意的是, 对于给定的定解问题, 如果方程中的自由项  $f$  和边界条件中的  $u_1$  及  $u_2$  都与自变量  $t$  无关, 我们可以选取辅助函数  $w(x)$ , 通过代换  $u(x, t) = v(x, t) + w(x)$ , 使方程与边界条件同时化成齐次的. 举例如下:

**例 2.10** 求解下列定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin \frac{2\pi x}{l} \cos \frac{2\pi x}{l} & (0 < x < l, t > 0), \\ u(0, t) = 3, \quad u(l, t) = 6, \\ u(x, 0) = 3 \left( 1 + \frac{x}{l} \right), \quad u_t(x, 0) = \sin \frac{4\pi x}{l}. \end{cases} \quad (2.91)$$

**解** 设问题的解为

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x), \quad (2.92)$$

将式 (2.92) 代入上面的方程, 得

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \left( a^2 w''(x) + \sin \frac{2\pi x}{l} \cos \frac{2\pi x}{l} \right).$$

为了将这个方程化成齐次的, 自然应选取  $w(x)$  满足方程

$$a^2 w'' + \sin \frac{2\pi x}{l} \cos \frac{2\pi x}{l} = 0.$$

再把式 (2.92) 代入问题 (2.91) 中的定解条件, 得

$$v(0, t) + w(0) = 3, \quad v(l, t) + w(l) = 6,$$

$$v(x, 0) + w(x) = 3 \left(1 + \frac{x}{l}\right), \quad v_t(x, 0) = \sin \frac{4\pi x}{l}.$$

为了将  $v(x, t)$  的边界条件化成齐次的, 则必须选取  $w(x)$  使之满足

$$w(0) = 3, \quad w(l) = 6.$$

这样通过代换 (2.92), 我们就把问题 (2.91) 化成下面两个问题:

$$\begin{cases} a^2 w'' + \sin \frac{2\pi x}{l} \cos \frac{2\pi x}{l} = 0, \\ w(0) = 3, \quad w(l) = 6. \end{cases} \quad (2.93)$$

和

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} & (0 < x < l, t > 0), \\ v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0, \\ v(x, 0) = 3 \left(1 + \frac{x}{l}\right) - w(x), \quad v_t(x, 0) = \sin \frac{4\pi x}{l}. \end{cases} \quad (2.94)$$

问题 (2.93) 是一个常微分方程的边值问题, 它的解为

$$w(x) = \frac{l^2}{32\pi^2 a^2} \sin \frac{4\pi x}{l} + 3 \left(1 + \frac{x}{l}\right).$$

将所求的  $w(x)$  代入问题 (2.94), 由分离变量法知它的解为

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi a t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

其中系数  $a_n, b_n$  由下式计算

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l -\frac{l^2}{32\pi^2 a^2} \sin \frac{4\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0, & n \neq 4, \\ -\frac{l^2}{32\pi^2 a^2}, & n = 4, \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \sin \frac{4\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0, & n \neq 4, \\ \frac{l}{4\pi a}, & n = 4. \end{cases}$$

于是, 得问题 (2.94) 的解为

$$v(x, t) = \left( -\frac{l^2}{32\pi^2 a^2} \cos \frac{4\pi a t}{l} + \frac{l}{4\pi a} \sin \frac{4\pi a t}{l} \right) \sin \frac{4\pi x}{l}.$$

因此, 原问题 (2.91) 的解为

$$u(x, t) = \left( -\frac{l^2}{32\pi^2 a^2} \cos \frac{4\pi a t}{l} + \frac{l}{4\pi a} \sin \frac{4\pi a t}{l} \right) \sin \frac{4\pi x}{l} + \frac{l^2}{32\pi^2 a^2} \sin \frac{4\pi x}{l} + 3 \left( 1 + \frac{x}{l} \right).$$

## §2.6 固有值与固有函数简介

在本章的前三节我们应用分离变量法求解弦振动方程、一维热传导方程和二维拉普拉斯方程的有关定解问题时, 都需要解决一个含参变量  $\lambda$  的常微分方程的边值问题, 称为固有值问题. 这个问题在第五、六章中还会遇到.

方程

$$\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dy}{dx} \right) - q(x)y + \lambda \rho(x)y = 0 \quad (2.95)$$

通常叫做施图姆-刘维尔方程. 假定  $p(x)$  及  $p'(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 当  $a < x < b$  时,  $p(x) > 0$ ;  $q(x)$  或者在区间  $[a, b]$  上连续, 或者在区间  $(a, b)$  内连续, 而在区间端点处至多有一阶极点, 且  $q(x) \geq 0$ ;  $\rho(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $\rho(x) > 0$ .

方程 (2.95) 加上边界条件就称为施图姆-刘维尔问题. 那些使施图姆-刘维尔问题存在非零解的  $\lambda$  值, 称为该问题的固有值, 而相应于给定的固有值的非零解, 就称为固有函数.

如果限定  $x$  在某个有限区间  $(a, b)$  中变化, 那么边界条件自然就给定在端点  $a$  和  $b$  上, 一般都是给定的齐次边界条件. 边界条件的提法与  $p(x)$  在  $x = a$  及  $x = b$  是否为零, 以及哪一个端点使  $p(x)$  为零有关. 如果  $p(a) = 0$ , 那么在  $x = a$  处, 未知函数应满足自然边界条件. 所谓自然边界条件, 即在  $x = a$  处, 未知函数应保持有界性. 如果端点变为  $\infty$ , 那么就应要求未知函数当  $x \rightarrow \infty$  时也有界, 或者满足  $y(x) = O(x^{-n})$  ( $x \rightarrow \infty$ ), 其中  $n$  为正整数.

关于固有值和固有函数, 我们有以下几点结论.

(1) 存在无穷多个实的固有值:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots,$$

当  $q(x) \geq 0$  时,  $\lambda_n \geq 0$  ( $n = 1, 2, 3, \cdots$ ); 对应于这些固有值, 有无穷多个固有函数:

$$y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x), \cdots.$$

(2) 如果把对应于固有值  $\lambda_n$  的固有函数记为  $y_n(x)$ , 那么所有  $y_n(x)$  组成一个带权函数  $\rho(x)$  的正交函数系, 即

$$\int_a^b \rho(x)y_m(x)y_n(x)dx = 0 \quad (\lambda_m \neq \lambda_n). \quad (2.96)$$

(3) 类似于傅里叶级数, 按固有函数系展开也有下面的收敛性:

若函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  内有一阶连续导数及分段连续的二阶导数, 并且满足所给的边界条件, 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  内可以按固有函数展开为绝对且一致收敛的级数:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x), \quad (2.97)$$

其中

$$c_n = \frac{\int_a^b \rho(x)f(x)y_n(x)dx}{\int_a^b \rho(x)y_n^2(x)dx} \quad (n = 1, 2, 3, \dots);$$

若  $f(x)$  及  $f'(x)$  在  $(a, b)$  内是分段连续函数, 则级数 (2.97) 在  $(a, b)$  内逐点收敛于

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)].$$

## §2.7 本章小结及补充知识

### §2.7.1 本章小结

通过以上各节的讨论, 读者对分离变量法的要点与解题步骤已经有了一定的认识. 为了使读者真正掌握这一解题方法, 有必要对此法做一简要小结.

对一维波动方程和一维热传导方程的定解问题而言: 当方程与边值条件均为齐次时, 不管初值条件如何, 可直接应用分离变量法求解; 当边界条件为齐次, 方程与初始条件为非齐次时, 原定解问题可以分解为两个, 其一是方程为齐次的并具有原定解条件的定解问题, 这个问题用分离变量法求解, 其二是方程为非齐次的并具有齐次定解条件的定解问题, 该问题用固有函数法求解; 当边界条件为非齐次时, 则必须引进辅助函数把边界条件化成齐次的, 然后再应用上述方法求解.

对于二维拉普拉斯方程的边值问题而言, 应根据求解区域的形状适当地选取坐标系, 使得在此坐标系中边界条件的表达式最为简单, 便于求解. 例如, 对圆域、圆环域、扇形域等采用极坐标系较方便, 而对于像  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$  或  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y < +\infty$  一类的区域采用直角坐标系较方便. 应当指出, 只有当求解区域很规则时, 才可以应用分离变量法求解拉普拉斯方程的边值问题.

通过本章的学习,读者必须掌握有界弦自由振动问题和有限长杆热传导问题(无热源)的分离变量法;掌握圆域和矩形域内拉普拉斯方程边值问题的分离变量解法;会用固有函数法解非齐次方程的定解问题;会用辅助函数和叠加原理处理具有非齐次边界条件的定理问题。

### §2.7.2 补充知识

前面已经提到过(2.1)–(2.2)的级数形式的通解(2.14)不一定收敛,因此级数形式的解(2.14)有时被称为形式解.下面我们给出一个条件来保证(2.14)是(2.1)–(2.3)的古典解:

**定理 2.1 (存在性定理)** 若  $\varphi(x) \in C^4[0, l]$ ,  $\psi(x) \in C^3[0, l]$ , 并且  $\varphi, \varphi'', \psi$  在  $x=0, l$  处取值为零, 则初边值问题(2.1)–(2.3)的古典解存在, 且可表示为级数(2.14), 其中的系数由(2.15)确定. 这里  $C^k[0, l]$  表示定义在  $[0, l]$  上具有  $k$  阶连续导数的函数之集合.

**证明** 从(2.15)中  $a_n$  的表达式出发, 连续4次用分部积分公式, 可得

$$a_n = \frac{2l^3}{n^4\pi^4} \int_0^l \varphi^{(4)}(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$

于是

$$|a_n| \leq \frac{M_1}{n^4}, \quad \text{其中 } M_1 = \frac{2l^3}{\pi^4} \int_0^l |\varphi^{(4)}(x)| dx.$$

同理  $|b_n| \leq \frac{M_2}{n^4}$ , 这里常数  $M_2$  有与  $M_1$  类似的表达式. 记  $M = M_1 + M_2$ , 则

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} |(u_n)_t| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} (|a_n| + |b_n|) \leq M \frac{a\pi}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} |(u_n)_{tt}| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 (|a_n| + |b_n|) \leq M \left(\frac{a\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} |(u_n)_{xx}| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 (|a_n| + |b_n|) \leq M \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

由此可知, (2.15)所确定的级数(2.14)及逐项微商一次、二次后所得的级数在闭区域  $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$  上绝对且一致收敛, 所以形式解(2.14)的确是(2.1)–(2.3)的古典解.

**注 2.7** 用分离变量法解热方程、拉普拉斯方程及非齐次方程时,也有类似的存在性定理.我们将不再详细论述,读者可参考文献 [4].

## 习题二

1. 求下列定解问题的解

$$(1) \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (0 < x < l, t > 0), \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{l}, \quad u_t(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{l}; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (0 < x < 1, t > 0), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ 1-x, & \frac{1}{2} < x < 1, \end{cases} \\ u_t(x, 0) = x(x-1); \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (0 < x < l, t > 0), \\ u(0, t) = u_x(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = 3 \sin \frac{3\pi x}{2l} + 6 \sin \frac{5\pi x}{2l}, \\ u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

2. 今有一弦,其两端被钉子钉紧,作自由振动,它的初始位移为

$$\varphi(x) = \begin{cases} hx, & 0 \leq x \leq 1, \\ h(2-x), & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

初速度为零,求弦作横振动时的位移函数  $u(x, t)$ , 其中  $h$  为已知常数.

3. 求下列定解问题的解:

$$(1) \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (0 < x < l, t > 0), \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = x(l-x); \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} u_t = 4u_{xx} & (0 < x < l, t > 0), \\ u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = x \left( l - \frac{x}{2} \right). \end{cases}$$

4. 求下列边值问题的解:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0 & (0 < r < 1), \\ u(1, \theta) = A \cos 2\theta + B \cos 4\theta & (-\pi < \theta \leq \pi), \end{cases}$$

其中  $A, B$  为已知常数.

5. 求解下列定解问题:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 & (0 < r < 1), \\ u(1, \theta) = \begin{cases} A, & 0 \leq |\theta| \leq \alpha, \\ 0, & \alpha < |\theta| \leq 2\pi, \end{cases} \end{cases}$$

其中  $A, \alpha$  为已知常数.

6. 一半径为  $a$  的半圆形薄板, 其圆周边界上的温度保持  $u(a, \theta) = T\theta(\pi - \theta)$ . 而直径边界上的温度保持为零度, 板的侧面绝热, 试求稳恒状态下的温度分布规律  $u(r, \theta)$ .

7. 一圆环形薄板, 内半径为  $r_1$ , 外半径为  $r_2$ , 侧面绝热. 如内圆周温度保持为  $0^\circ\text{C}$ , 外圆周温度保持为  $1^\circ\text{C}$ , 试求稳恒状态下圆环内的温度分布规律  $u(r, \theta)$ .

8. 在以原点为心,  $a$  为半径的圆内, 试求泊松方程

$$u_{xx} + u_{yy} = -1$$

的解, 使它满足边界条件

$$u|_{x^2+y^2=a^2} = 0.$$

9. 求解下列定解问题:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & (0 < x < l, 0 < y < +\infty), \\ u(0, y) = u(l, y) = 0 & (0 \leq y < +\infty), \\ u(x, 0) = x\left(1 - \frac{x}{l}\right), \quad \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = 0 & (0 < x < l). \end{cases}$$

10. 求下列问题的解:

$$(1) \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + b \operatorname{sh} x, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (t \geq 0), \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x \leq l), \end{cases}$$

其中  $b$  为已知常数;

$$(2) \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + t \sin \frac{\pi x}{l}, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (t \geq 0), \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x \leq l); \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + A \quad (0 < x < l, t > 0), \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \end{cases}$$

其中  $A$  为已知常数.

11. 求下列问题的解:

$$(1) \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (0 < x < l, t > 0), \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = A, \\ u(x, 0) = \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{Ax}{l}, \\ u_t(x, 0) = x(l-x), \end{cases}$$

其中  $A$  为已知常数;

$$(2) \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + 4 \sin \frac{2\pi x}{l} \cos \frac{2\pi x}{l}, \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = B \quad (t \geq 0), \\ u(x, 0) = \frac{B}{l}x, u_t(x, 0) = x(l-x) \quad (0 \leq x \leq l), \end{cases}$$

其中  $B$  为已知常数;

$$(3) \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (0 < x < l, t > 0), \\ u(0, t) = lt, u(l, t) = l, \\ u(x, 0) = kx, \end{cases}$$

其中  $k$  为已知常数;

$$(4) \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (0 < x < l, t > 0), \\ u_x(0, t) = 0, u(l, t) = u_0, \\ u(x, 0) = \frac{u_0}{l}x, \end{cases}$$

其中  $u_0$  为已知常数.

\*12. 在矩形域  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$  内求拉普拉斯方程的解, 使满足边界条件

$$\begin{cases} u(0, y) = 0, u(a, y) = Ay, \\ u_y(x, 0) = 0, u_y(x, b) = 0, \end{cases}$$

其中  $A$  为已知常数.

13. 用分离变量法写出下列定解问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (0 < x < l, t > 0), \\ (u_x - \alpha u)|_{x=0} = 0, \\ u|_{x=l} = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

的固有值问题, 并写出

- (1) 边界条件中的  $\alpha = 0$  时固有值及相应的固有函数;
- (2) 边界条件中的  $\alpha \rightarrow \infty$  时的固有值及相应的固有函数.

14. 求下列问题的固有值与固有函数:

$$(1) \begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X'(\pi) = 0; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(-\pi) = X(\pi), X'(-\pi) = X'(\pi); \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x^2 y''(x) + xy'(x) + \lambda y(x) = 0, \\ y(1) = y(e) = 0; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x^2 y''(x) + 3xy'(x) + \lambda y(x) = 0, \\ y(1) = y(e) = 0. \end{cases}$$

15. 试证问题

$$\begin{cases} x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0, \\ y(1) = y(e) = 0 \end{cases}$$

的固有函数系  $\{y_n(x)\}$  在  $[1, e]$  上带权函数  $\frac{1}{x}$  正交.

16. 证明 (2.96) 式.

## 第三章

# 行波法与积分变换法

本章将介绍另外两个求解定解问题的方法, 一是行波法, 二是积分变换法. 行波法只能用于求解无界区域内波动方程的定解问题, 虽有很大的局限性, 但对于波动问题有其特殊的优点, 所以该法是数学物理方程的基本解法之一. 我们只注重解决问题的思路, 导出形式解, 不追求分析的条件与验证. 积分变换法不受方程类型的限制, 主要用于无界区域, 但对于有界区域也能应用.

## §3.1 达朗贝尔 (d'Alembert) 公式、波的传播

### §3.1.1 弦振动方程的达朗贝尔解法

如果我们所考察的弦线长度很长, 而需要知道的又只是在较短时间且离开边界较远的一段范围内的振动情况, 那么边界条件的影响就可以忽略, 并不妨把所考察弦线的长度视为无限. 在这种情况下, 定解问题归结为如下的形式:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) & (-\infty < x < +\infty, t > 0), & (3.1) \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x). & & (3.2) \end{cases}$$

对于上述初值问题, 由于微分方程及定解条件都是线性的, 所以叠加原理同样成立, 即如果函数  $u_1(x, t)$  和  $u_2(x, t)$  分别是下述初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & (3.3) \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x) & (3.4) \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), & (3.5) \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0 & (3.6) \end{cases}$$

的解, 则  $u = u_1(x, t) + u_2(x, t)$  就一定是原初值问题 (3.1)、(3.2) 的解. 这表示: 由  $f(x, t)$  所代表的外力因素和由  $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$  所表示的初始振动状态对整个振动过程所产生的综合影响, 可以分解为单独只考虑外力因素 (初始位移及

初始速度为零) 或只考虑初始振动状态 (外力为零) 对振动过程所产生的影响的叠加.

首先, 我们考察问题 (3.3)、(3.4). 它可以通过自变量变换的方法求解, 为此, 令

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at, \quad (3.7)$$

它的逆变换是

$$x = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad t = \frac{\eta - \xi}{2a}. \quad (3.8)$$

用  $\bar{u} = \bar{u}(\xi, \eta)$  记新的未知函数, 则

$$u(x, t) = u\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\eta - \xi}{2a}\right) = \bar{u}(\xi, \eta).$$

利用复合函数微分法则, 得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

同理有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} \right). \quad (3.10)$$

将 (3.9) 及 (3.10) 代入方程 (3.3), 化简得

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (3.11)$$

这个方程比原来的方程 (3.3) 要简单得多, 它可以通过积分法直接求解. 把它关于  $\eta$  积分一次, 再关于  $\xi$  积分一次, 便得到它的通解为

$$\bar{u}(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta), \quad (3.12)$$

其中  $f, g$  都是具有二阶连续导数的函数. 再换回原来的自变量, 就可将方程 (3.3) 的通解表示为

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at). \quad (3.13)$$

下面, 我们利用初始条件 (3.4) 来确定通解 (3.13) 中的待定函数  $f$  和  $g$ ,

把 (3.13) 代入条件 (3.4), 得

$$f(x) + g(x) = \varphi(x), \quad (3.14)$$

$$-af'(x) + ag'(x) = \psi(x), \quad (3.15)$$

再将 (3.15) 两边积分, 得

$$a(-f(x) + g(x)) + c = \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha, \quad (3.16)$$

其中  $x_0$  是任意一点, 而  $c$  是积分常数.

由 (3.14) 和 (3.16), 就可解出  $f$  和  $g$ :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + \frac{c}{2a}, \\ g(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha - \frac{c}{2a}. \end{cases} \quad (3.17)$$

把它们代入 (3.13) 得初值问题 (3.3)、(3.4) 的解

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha. \quad (3.18)$$

这个公式称为无限长弦自由振动的达朗贝尔公式, 或称为达朗贝尔解. 这种求解方法称为达朗贝尔解法.

### §3.1.2 达朗贝尔解的物理意义

从 (3.13) 式可见, 自由弦振动方程的解, 可以表成形如  $f(x-at)$  和  $g(x+at)$  的两个函数之和, 通过它们可以清楚地看出波动传播的性质. 先考察

$$u_1 = f(x - at), \quad (3.19)$$

显然, 它是方程 (3.3) 的解. 给  $t$  以不同的值, 就可以看出弦在各个时刻相应的振动状态. 在  $t = 0$  时,  $u_1(x, 0) = f(x)$ , 它对应于初始时刻的振动状态 (相当于弦在初始时刻各点的位移状态), 如图 3.1 中实线所示. 经过时刻  $t_0$  后,  $u_1(x, t_0) = f(x - at_0)$ , 在  $(x, u)$  平面上, 它相当于原来的图形  $u_1 = f(x)$  向右平移了一段距离  $at_0$ , 如图 3.1 中虚线所示. 随着时间的推移, 这个图还将不断地向右移动, 这说明当方程 (3.3) 的解表示成  $f(x - at)$  的形式时, 振动的波形以常速度  $a$  向右传播. 因此, 由函数  $f(x - at)$  所描述的振动规律, 称为右传播波. 同样, 形如  $g(x + at)$  的解, 称为左传播波, 由它所描述的振动的波形以常速度  $a$  向左传播. 由此可见, 通解 (3.13) 表示弦上的任意扰动总是以行波形式分别向两个方向传播出去, 其传播速度正好是方程 (3.3) 中出现的常数  $a$ . 基于上述原因, 达

朗贝尔解法又称为行波法.

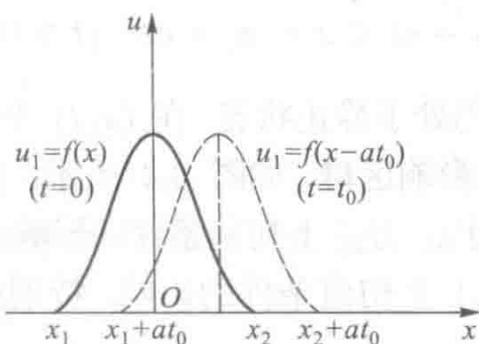


图 3.1

### §3.1.3 依赖区间、决定区域和影响区域

现在我们要问, 初值问题 (3.3)、(3.4) 的解在一点  $(x, t)$  的数值与初值条件在  $x$  轴上哪些点的值有关? 从达朗贝尔公式 (3.18) 可以看到, 解在  $(x, t)$  点的数值仅依赖于  $x$  轴的区间  $[x - at, x + at]$  上的初值条件, 而与其他点上的初值条件无关, 这个区间  $[x - at, x + at]$  称为点  $(x, t)$  的依赖区间. 它是过  $(x, t)$  点分别作斜率为  $\pm \frac{1}{a}$  的直线与  $x$  轴交所截得的区间, 如图 3.2 所示.

对于初始轴  $t = 0$  上的一个区间  $[x_1, x_2]$ , 过点  $x_1$  作斜率为  $\frac{1}{a}$  的直线  $x = x_1 + at$ , 过点  $x_2$  作斜率为  $-\frac{1}{a}$  的直线  $x = x_2 - at$ , 它们和区间  $[x_1, x_2]$  一起构成一个三角形区域, 如图 3.3 所示. 此三角形区域中任一点  $(x, t)$  的依赖区间都落在区间  $[x_1, x_2]$  之内部, 因此, 在此三角形区域内解完全由区间  $[x_1, x_2]$  上的初值条件决定, 而与此区间外的初值条件无关. 这个区域就称为区间  $[x_1, x_2]$  的决定区域. 给定区间  $[x_1, x_2]$  上的初值条件, 就可以在其决定区域中决定初值问题的解.



图 3.2

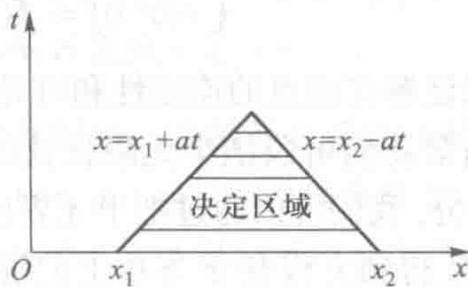


图 3.3

现在, 我们来考虑这样一个问题: 如果在初始时刻  $t = 0$ , 扰动仅在一有限区间  $[x_1, x_2]$  上发生, 则经过时间  $t$  后, 它所影响到的范围是什么呢? 我们知道, 波动是以常速度  $a$  向两个方向传播的, 因此经过时间  $t$  后, 它所传到的范围 (受

初始扰动影响到的范围) 就由不等式

$$x_1 - at \leq x \leq x_2 + at \quad (t > 0) \quad (3.20)$$

所限定, 而在此范围之外仍处于静止状态. 在  $(x, t)$  平面上, (3.20) 式所表示的区域称为区间  $[x_1, x_2]$  的**影响区域**, 如图 3.4 所示. 在此区域中, 初值问题的解  $u(x, t)$  的数值受到区间  $[x_1, x_2]$  上初值条件的影响; 而在此区域之外,  $u(x, t)$  的数值则不受区间  $[x_1, x_2]$  上初值条件的影响. 特别地, 将区间  $[x_1, x_2]$  收缩为一点  $x_0$ , 就可得一点  $x_0$  的影响区域为过此点的两条斜率各为  $\pm \frac{1}{a}$  的直线  $(x = x_0 \pm at)$  所夹成的角形区域, 如图 3.5 所示.

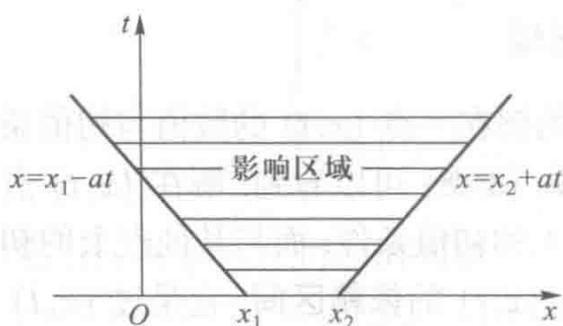


图 3.4

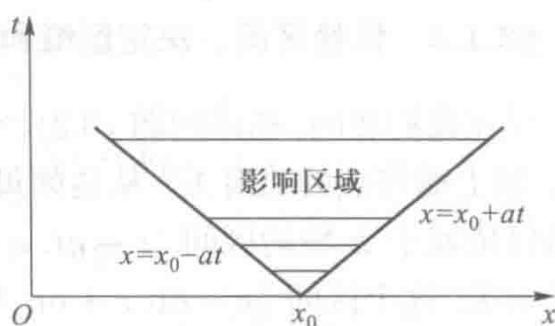


图 3.5

在上面讨论中, 我们看到了在  $(x, t)$  平面上直线  $x \pm at = c$  (常数) 对波动方程的研究起着重要作用, 它们称为波动方程 (3.3) 的**特征线**.

### §3.1.4 半无限长弦的振动问题

考虑在区间  $0 < x < +\infty$  上的弦振动的定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (0 < x < +\infty, t > 0), \\ u(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \end{cases} \quad (3.21)$$

为了保证解在原点的连续性和可导性, 我们要求  $f(0) = g(0) = 0$ .

通常我们可以把半无限长弦的振动问题看成是无限长弦振动问题在  $x \geq 0$  的部分. 我们可以通过把半无界区间延拓到整个无界区间, 再应用达朗贝尔公式求解, 得到方程在  $x \geq 0$  上的解. 用这种办法得到的解在  $x = 0$  处不一定满足振动方程, 我们可以把这种解看成是某种意义下的弱解.

为了求解上述问题, 我们可以将未知函数和定解条件关于自变量  $x$  作奇延拓, 即令

$$\bar{u}(x, t) = \begin{cases} -u(-x, t), & x < 0, \\ u(x, t), & x \geq 0, \end{cases}$$

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} -f(-x), & x < 0, \\ f(x), & x \geq 0, \end{cases} \quad \bar{g}(x) = \begin{cases} -g(-x), & x < 0, \\ g(x), & x \geq 0, \end{cases}$$

则除了在  $x=0$  处,  $\bar{u}$  满足

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt} = a^2 \bar{u}_{xx} & (t > 0), \\ \bar{u}(x, 0) = \bar{f}(x), \quad \bar{u}_t(x, 0) = \bar{g}(x). \end{cases} \quad (3.22)$$

利用达朗贝尔公式得

$$\bar{u}(x, t) = \frac{\bar{f}(x-at) + \bar{f}(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \bar{g}(\tau) d\tau.$$

当  $x \geq at \geq 0$  时,

$$u(x, t) = \bar{u}(x, t) = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(\tau) d\tau.$$

当  $0 \leq x \leq at$  时,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{-f(at-x) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \left( \int_{x-at}^0 -g(-\tau) d\tau + \int_0^{x+at} g(\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{f(x+at) - f(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{at+x} g(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

综上, 我们得到定解问题 (3.21) 的解为

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(\tau) d\tau, & x \geq at \geq 0, \\ \frac{f(x+at) - f(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{at+x} g(\tau) d\tau, & 0 \leq x \leq at. \end{cases} \quad (3.23)$$

**注 3.1** 由 (3.23) 所给出的半无限长区间上的弦振动方程的弱解是有物理意义的: 它表示左行波在  $x=0$  处作镜面反射后形成的反射波与原来的波叠加后得到的新的波. 显而易见, 反射波只能影响到区域  $0 \leq x \leq at$ .

**注 3.2** 二阶偏微分方程的弱解通常需要解的一阶偏导数是连续的. 读者可以自行验证, 由 (3.23) 给出的解在分割线  $0 \leq x = at$  上的偏导数是连续的. 如果我们对函数作偶延拓, 然后利用达朗贝尔公式, 我们也可以得到另一个形式解. 读者可以验证, 这个形式解在分割线  $0 \leq x = at$  上的偏导数是不连续的, 故这不是真正物理意义上的方程的解. 所以, 对由 (3.21) 给出的半无限长区间上的弦振动方程, 我们不能采用偶延拓的方法.

**注 3.3** 若对所有的函数关于自变量  $x$  做偶延拓, 形式上有 (这不是弱解)

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(\tau) d\tau, & x \geq at \geq 0 \\ \frac{f(x+at) + f(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \left( \int_0^{at+x} g(\tau) d\tau + \int_0^{at-x} g(\tau) d\tau \right), & 0 \leq x \leq at. \end{cases}$$

### §3.1.5 齐次化原理

为了求解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), & (3.5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, & (3.6) \end{cases}$$

其中  $f(x, t)$  是一个连续函数, 我们可以利用下面介绍的齐次化原理, 把非齐次方程的求解问题转化为相应的齐次方程的情况来处理, 从而可以直接利用前面学习的有关齐次方程的求解方法. 接下来, 我们首先利用物理学中的冲量原理和定积分的概念来推导无限长弦振动的齐次化原理, 其严格证明将在后面给出.

固定  $T > 0$ , 将区间  $[0, T]$  分成  $n$  个充分小的区间:

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T.$$

令  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \cdots, n$ , 设

$$f_i(x, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < t_{i-1}, \\ f(x, t), & t_{i-1} \leq t < t_i, \\ 0, & t_i \leq t \leq T. \end{cases}$$

将原非齐次方程 (3.5)、(3.6) 分解成如下  $n$  个非齐次方程:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f_i(x, t), \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, \end{cases} \quad (3.24)$$

其中  $i = 1, 2, \cdots, n$ . 设  $u^i(x, T)$  是初值问题 (3.24) 的解在  $(x, T)$  时刻的值, 则由叠加原理, 原初值问题 (3.5)、(3.6) 的解在  $(x, T)$  的值  $u(x, T)$  可表示为:

$$u(x, T) = \sum_{i=1}^n u^i(x, T).$$

因此, 只需求出问题 (3.24) 的解, 就可以得到原初值问题的解. 问题 (3.24) 同样也是一个非齐次问题, 但是我们可以将这个问题分解为三个问题:

问题一: 当  $0 \leq t < t_{i-1}$  时, (3.24) 是一个齐次问题,

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (0 < t < t_{i-1}), \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (3.25)$$

由达朗贝尔公式, 我们求得  $u^i, u_t^i$  在  $t_{i-1}$  时刻的值为

$$u^i(x, t_{i-1}) = 0, \quad u_t^i(x, t_{i-1}) = 0,$$

显然,  $u^i(x, t_{i-1}) = 0, u_t^i(x, t_{i-1}) = 0$  将是下述问题二在  $t_{i-1}$  时刻的初值.

问题二: 当  $t_{i-1} \leq t < t_i$  时, (3.24) 是一个非齐次零初值问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) & (t_{i-1} < t < t_i), \\ u(x, t_{i-1}) = 0, u_t(x, t_{i-1}) = 0. \end{cases} \quad (3.26)$$

取任意区间  $[x_1, x_2]$ , 对方程在  $[x_1, x_2] \times [t_{i-1}, t_i]$  上作二重积分

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} u_{tt} dt dx = \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (a^2 u_{xx} + f(x, t)) dt dx.$$

从物理上讲, 等式的左端相当于区间  $[x_1, x_2]$  上的弦在时间段  $[t_{i-1}, t_i]$  上的动量的变化; 等式的右端由两部分构成:  $\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} a^2 u_{xx} dt dx$  可理解为弦的张力

产生的冲量,  $\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x, t) dt dx$  则是外力  $f(x, t)$  产生的冲量. 由牛顿-莱布尼茨公式及积分中值定理, 我们有

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} u_{tt} dt dx &= \int_{x_1}^{x_2} u_t(x, t) \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} u_t(x, t_i) dx = u_t(\bar{x}, t_i)(x_2 - x_1), \end{aligned}$$

其中  $\bar{x} \in [x_1, x_2]$ . 在上述计算中, 我们还用到了  $u_t(x, t_{i-1}) = 0$ .

另一方面, 由  $f(x, t)$  的连续性及其积分中值定理, 存在  $(\delta, \eta) \in [x_1, x_2] \times [t_{i-1}, t_i]$ , 使得

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x, t) dt dx = f(\delta, \eta)(x_2 - x_1)(t_i - t_{i-1}).$$

当  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$  充分小时, 有

$$f(\delta, \eta)(x_2 - x_1)(t_i - t_{i-1}) \approx f(\delta, t_i)(x_2 - x_1)\Delta t_i.$$

最后, 由初值  $u(x, t_{i-1}) = 0$ , 得  $u_{xx}(x, t_{i-1}) = 0$ . 再由运动的连续性, 可得:

当  $\Delta t_i$  充分小时,

$$u_{xx}(x, t) \approx 0, \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i,$$

即相对于外力  $f$  产生的冲量, 弦的张力产生的冲量在充分小的时间段上是可以忽略不计的. 由此我们得到

$$u_t(\bar{x}, t_i)(x_2 - x_1) \approx f(\delta, t_i)(x_2 - x_1)\Delta t_i.$$

消去  $(x_2 - x_1)$  后, 令  $x_2 \rightarrow x_1$ , 得到

$$u_t(x_1, t_i) \approx f(x_1, t_i)\Delta t_i,$$

亦即

$$u_t^i(x, t_i) \approx f(x, t_i)\Delta t_i.$$

同样的, 由运动的连续性, 弦在  $t_i$  时刻的位移大约为

$$u^i(x, t_i) = u^i(x, t_i) - u^i(x, t_{i-1}) \approx O((\Delta t_i)^2),$$

故当  $\Delta t_i$  充分小时, 可近似地认为  $u^i(x, t_i) = 0$ .

**注 3.4** 在上述的近似计算过程中, 忽略的误差项都是  $\Delta t_i$  的高阶无穷小.

**问题三:** 当  $t_i \leq t \leq T$  时, 问题 (3.24) 是一个齐次非零初值问题,

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (t_i \leq t \leq T), \\ u(x, t_i) \approx 0, \quad u_t(x, t_i) \approx f(x, t_i)\Delta t_i. \end{cases} \quad (3.27)$$

若设  $w(x, t; \tau)$  是初值问题

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx} & (t > \tau), \\ w|_{t=\tau} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=\tau} = f(x, \tau) \end{cases}$$

的解 (其中  $\tau$  为参数), 则可知问题 (3.27) 的解近似为

$$u^i(x, t) \approx w(x, t; t_i)\Delta t_i, \quad t_i \leq t \leq T.$$

由线性微分方程的叠加原理,

$$u(x, T) = \sum_{i=1}^n u^i(x, T) \approx \sum_{i=1}^n w(x, T; t_i)\Delta t_i,$$

令  $\max\{\Delta t_i\} \rightarrow 0$ , 并利用定积分的定义, 得

$$u(x, T) = \lim_{\max\{\Delta t_i\} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n w(x, T; t_i) \Delta t_i = \int_0^T w(x, T; \tau) d\tau.$$

综上, 我们就得到了弦振动方程的齐次化原理:

**定理 3.1 (齐次化原理)** 若  $w(x, t; \tau)$  是初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & (t > \tau), \\ w|_{t=\tau} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=\tau} = f(x, \tau) \end{cases} \quad (3.28)$$

的解 (其中  $\tau$  为参数), 则

$$u(x, t) = \int_0^t w(x, t; \tau) d\tau \quad (3.29)$$

就是初值问题 (3.5)、(3.6) 的解.

在证明齐次化原理之前, 我们先利用达朗贝尔公式把计算公式 (3.29) 表示得更加具体, 以方便应用. 令  $t' = t - \tau$ , 并记

$$\bar{w}(x, t'; \tau) = w(x, t' + \tau; \tau),$$

则问题 (3.28) 可化为如下的形式:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t'^2} = a^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} & (t' > 0), \\ \bar{w}|_{t'=0} = 0, \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial t'} \Big|_{t'=0} = f(x, \tau). \end{cases} \quad (3.30)$$

由达朗贝尔公式知其解为

$$\bar{w}(x, t'; \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-at'}^{x+at'} f(\xi, \tau) d\xi.$$

换回原变量, 则得

$$w(x, t; \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi. \quad (3.31)$$

再代入 (3.29) 式就得初值问题 (3.5)、(3.6) 的解为

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (3.32)$$

**证明** 按照解的定义, 由 (3.32) 式确定的函数  $u(x, t)$  的确是问题 (3.5)、(3.6) 的解. 事实上, 当  $f$  具有一阶连续导数时, 由 (3.32) 式可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-t)}^{x+a(t-t)} f(\xi, \tau) d\xi + \frac{1}{2} \int_0^t [f(x+a(t-\tau), \tau) + f(x-a(t-\tau), \tau)] d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t [f(x+a(t-\tau), \tau) + f(x-a(t-\tau), \tau)] d\tau,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, t) + \frac{a}{2} \int_0^t [f'(x+a(t-\tau), \tau) - f'(x-a(t-\tau), \tau)] d\tau;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2a} \int_0^t [f(x+a(t-\tau), \tau) - f(x-a(t-\tau), \tau)] d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2a} \int_0^t [f'(x+a(t-\tau), \tau) - f'(x-a(t-\tau), \tau)] d\tau;$$

于是有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t),$$

即  $u(x, t)$  满足方程 (3.5). 再验证初始条件, 由 (3.32) 式及  $\frac{\partial u}{\partial t}$  的表示式, 可得

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

这表明, 由 (3.32) 式所表示的函数  $u(x, t)$  的确是初值问题 (3.5)、(3.6) 的解.

由叠加原理, 可得

**定理 3.2** 定解问题 (3.1)、(3.2) 的解为

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \\ &\quad \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau.\end{aligned}\quad (3.33)$$

**例 3.1** 求解下列初值问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2x & (-\infty < x < +\infty, t > 0), \\ u(x, 0) = \sin x, \quad u_t(x, 0) = x. \end{cases}$$

**解** 由 (3.33) 式, 得

$$\begin{aligned}w(x, t) &= \frac{1}{2} [\sin(x+t) + \sin(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \alpha d\alpha + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} 2\xi d\xi d\tau \\ &= \sin x \cos t + xt + xt^2.\end{aligned}$$

**注 3.5** (1) 虽然我们是通过无限长弦的振动方程来推导齐次化原理, 但是齐次化原理可广泛地应用于有界区间或无界区间上的非齐次波动方程和热传导方程的求解. 我们将在本章的补充知识中给出一些例子, 以便大家能够了解齐次化原理对热传导方程及有界区间上的非齐次微分方程的应用.

(2) 齐次化原理不仅可以用于求解一维的非齐次波动和热传导方程, 它同样可以用于高维的非齐次波动及热传导方程. 作为练习, 请读者自己写出下一节中高维波动方程的齐次化原理.

## §3.2 高维波动方程的初值问题

上节我们讨论了一维波动方程的初值问题, 得到了达朗贝尔公式. 对于三维波动方程, 可用球面平均法形式地推出解的表达式. 该表达式通常被称为基尔霍夫 (Kirchhoff) 公式.

### §3.2.1 三维波动方程的基尔霍夫公式

考察三维波动方程的初值问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) & (-\infty < x, y, z < +\infty, t > 0), \end{cases} \quad (3.34)$$

$$\begin{cases} u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), & u_t(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z), \end{cases} \quad (3.35)$$

其中  $\varphi(x, y, z)$  与  $\psi(x, y, z)$  为已知函数.

首先, 任意固定点  $M(x, y, z)$ ,  $S_r^M$  表示以  $M$  为球心,  $r$  为半径的球面. 利用球坐标, 球面上的点  $P(\xi, \eta, \zeta)$  可表示为  $(x + r \sin \theta \cos \phi, y + r \sin \theta \sin \phi, z + r \cos \theta)$ . 用  $\omega = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$  表示球面  $S_r^O$  的单位外法向, 则球面  $S_r^M$  上的点可简单写作  $M + r\omega$ . 同时  $\omega$  也被看成单位球面  $S_1^O$  上的点, 因此我们也记球面上的微元  $dS_r^M = dS_r^O = r^2 d\omega = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ . 当  $r = 1$  时,  $dS_1^O = d\omega = \sin \theta d\theta d\phi$ , 因此  $dS_r^O = r^2 dS_1^O$ . 现在引进  $u(P, t)$  的球面平均函数:

$$\bar{u}(r, t) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r^M} u(P, t) dS_r^M = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1^O} u(M + r\omega, t) d\omega.$$

此外, 记  $V_r^M$  为以  $M$  为球心,  $r$  为半径的球体. 则在  $V_r^M$  上体积分用球坐标可表示为:

$$\iiint_{V_r^M} f dV_r^M = \int_0^r dr_1 \iint_{S_{r_1}^M} f dS_{r_1}^M = \int_0^r dr_1 \iint_{S_1^O} f(M + r_1\omega) r_1^2 d\omega.$$

我们知道, 微积分里面的奥-高公式写成散度形式为:

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{v} d\Omega = \oiint_{\Gamma} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS,$$

其中  $\Omega$  为简单闭曲面  $\Gamma$  所围成的区域,  $\boldsymbol{n}$  是  $\Gamma$  的单位外法向量.

注意到  $\Delta u = \operatorname{div} \nabla u$ , (3.34) 的两边在  $V_r^M$  积分并利用奥-高公式得

$$\begin{aligned} \iiint_{V_r^M} u_{tt} dV_r^M &= a^2 \iiint_{V_r^M} \Delta u dV_r^M = a^2 \iint_{S_r^M} \frac{\partial u}{\partial n}(P, t) dS_r^M \\ &= a^2 r^2 \iint_{S_1^O} \frac{\partial u}{\partial r}(M + r\omega, t) d\omega \\ &= a^2 r^2 \frac{\partial}{\partial r} \iint_{S_1^O} u(M + r\omega, t) d\omega \\ &= 4\pi a^2 r^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}. \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \iiint_{V_r^M} u_{tt} dV_r^M &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iiint_{V_r^M} u dV_r^M = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^r dr_1 \iint_{S_1^O} u(M + r_1\omega, t) r_1^2 d\omega \\ &= 4\pi \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^r r_1^2 \bar{u}(r_1, t) dr_1. \end{aligned}$$

于是,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^r r_1^2 \bar{u}(r_1, t) dr_1 = a^2 r^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}.$$

两边对  $r$  求导并整理得:

$$(r\bar{u})_{tt} = a^2 (r\bar{u})_{rr},$$

因此可得  $r\bar{u}$  的“通解”为

$$r\bar{u} = f(r + at) + g(r - at),$$

其中  $f, g$  为二阶连续可微函数. 上式两端分别对  $r, t$  求导得

$$(r\bar{u})_t = af'(r + at) - ag'(r - at), \quad (3.36)$$

$$(r\bar{u})_r = \bar{u} + r\bar{u}_r = f'(r + at) + g'(r - at), \quad (3.37)$$

在上面的两式中, 令  $r \rightarrow 0$ , 可得

$$u(M, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \bar{u}(r, t) = f'(at) + g'(-at) = 2f'(at).$$

在 (3.36) 式、(3.37) 式中取  $t = 0$  得

$$\begin{aligned} 2f'(r) &= (r\bar{u})_r|_{t=0} + \frac{1}{a} (r\bar{u})_t|_{t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{4\pi r^2} \iint_{S_r^M} u|_{t=0} dS_r^M \right) + \frac{r}{a} \left( \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r^M} u_t|_{t=0} dS_r^M \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{4\pi r^2} \iint_{S_r^M} \varphi(P) dS_r^M \right) + \frac{r}{a} \left( \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r^M} \psi(P) dS_r^M \right). \end{aligned} \quad (3.38)$$

于是

$$\begin{aligned} u(M, t) &= 2f'(at) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{t}{4\pi a^2 t^2} \iint_{S_{at}^M} \varphi(\xi, \eta, \zeta) dS_{at}^M \right) + \frac{t}{4\pi a^2 t^2} \iint_{S_{at}^M} \psi(\xi, \eta, \zeta) dS_{at}^M \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{t}{4\pi} \iint_{S_1^O} \varphi(M + at\omega) d\omega \right) + \frac{t}{4\pi} \iint_{S_1^O} \psi(M + at\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (3.39)$$

**注 3.6** 当初始函数足够光滑时, 容易验证, 由公式 (3.39) 所表示的函数  $u(x, y, z, t)$  确实是问题 (3.34)、(3.35) 的解.

**例 3.2** 求下列初值问题的解:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} & (-\infty < x, y, z < +\infty, t > 0), \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 2xy. \end{cases}$$

**解** 由公式 (3.39), 得

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \frac{t}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (x + t \sin \theta \cos \varphi)(y + t \sin \theta \sin \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{t}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (xy \sin \theta + xt \sin^2 \theta \sin \varphi + yt \sin^2 \theta \cos \varphi + \\ &\quad t^2 \sin^3 \theta \cos \varphi \sin \varphi) d\theta d\varphi \\ &= \frac{xyt}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\varphi = 2xyt. \end{aligned}$$

### §3.2.2 降维法

二维波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) & (-\infty < x, y < +\infty, t > 0), & (3.40) \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y), & & (3.41) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x, y) & & (3.42) \end{cases}$$

可以用降维法求解. 由于可以把二维波动方程的初值问题看做是三维波动方程初值问题的特殊情况, 故可用三维波动方程的基尔霍夫公式来表示二维波动方程初值问题的解, 并由此导出二维问题解的表达式的另外一种形式. 这种由高维问题的解引出低维问题解的方法, 称为降维法.

由公式 (3.39) 得二维波动方程初值问题 (3.40)—(3.42) 的解为

$$u(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{t}{4\pi a^2 t^2} \iint_{S_{at}^M} \varphi dS \right) + \frac{t}{4\pi a^2 t^2} \iint_{S_{at}^M} \psi dS, \quad (3.43)$$

这里的积分是在三维空间中的球面  $S_{at}^M$  上进行的. 由于  $\varphi$  及  $\psi$  都是与  $z$  无关的函数, 因此在球面上的积分可以化为它在平面“ $z = \text{常数}$ ”上的投影  $\Sigma_{at}^M$ :  $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 \leq a^2 t^2$  上的积分. 由于球面上的面积元素  $dS$  和它的投影平面元素  $d\sigma$  之间成立着如下关系:

$$d\sigma = \cos \gamma \cdot dS,$$

其中  $\gamma$  为这两个面积元素法线方向间的夹角. 如图 3.6 所示, 它可以表示为

$$\cos \gamma = \frac{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}{at}.$$

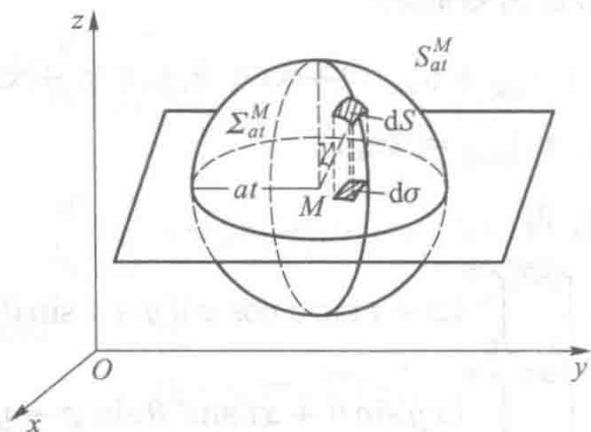


图 3.6

注意到上下半球面上积分都化成同一圆上的积分, 因此, 应取圆  $\Sigma_{at}^M$  上的积分的 2 倍. 于是由公式 (3.43), 可得 (3.40)—(3.42) 的解

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \iint_{\Sigma_{at}^M} \frac{\varphi(\xi, \eta) d\sigma}{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} \right] + \frac{1}{2\pi a} \iint_{\Sigma_{at}^M} \frac{\psi(\xi, \eta) d\sigma}{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}, \quad (3.44)$$

该式称为二维波动方程初值问题的泊松公式. 由于积分区域  $\Sigma_{at}^M$  是以  $M$  为中心,  $at$  为半径的圆域, 所以我们通常采用极坐标来计算上式中的积分.

例 3.3 求解下列问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} & (-\infty < x, y < +\infty, t > 0), \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 2xy. \end{cases}$$

解 由 (3.44) 式, 得

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_0^{2\pi} \frac{2(x + \rho \cos \theta)(y + \rho \sin \theta)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \rho d\theta d\rho \\ &= \frac{xy}{\pi} \int_0^t \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\theta d\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} = 2xyt. \end{aligned}$$

### §3.2.3 解的物理意义

现在我们来说明解 (3.39) 的物理意义. 假设初始扰动仅发生在空间某个有限域  $\Omega$  内. 在区域  $\Omega$  外任取一点  $M$ , 考察点  $M$  处在各个不同时刻所受到初始扰动影响的情况. 我们知道解  $u$  在点  $M$  和时刻  $t$  的值  $u(M, t)$  由初值函数  $\varphi$  和  $\psi$  在球面  $S_{at}^M$  上的值所决定, 所以只有当球面  $S_{at}^M$  和区域  $\Omega$  相交时, (3.39) 式中的积分才不为零, 从而  $u(M, t) \neq 0$ . 用  $d$  和  $D$  分别表示点  $M$  到区域  $\Omega$  的最近和最远距离, 如图 3.7 所示.

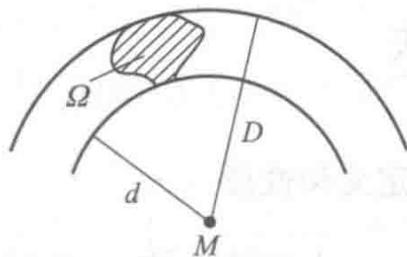


图 3.7

当  $at < d$  时, 球面  $S_{at}^M$  与初始扰动区域  $\Omega$  还有一段距离, 所以该球面上的  $\varphi$  与  $\psi$  值皆为零, 积分为零, 因而  $u(M, t) = 0$ , 这时扰动还未达到点  $M$  处.

当  $d \leq at \leq D$  时, 球面  $S_{at}^M$  一直与初始扰动区域  $\Omega$  相交, 积分的值一般不为零,  $u(M, t)$  的值一般也不为零, 此时点  $M$  处于扰动状态. 初始扰动在  $t = d/a$  那一瞬间达到点  $M$  处.

当  $at > D$  时, 球面  $S_{at}^M$  已越过了初始扰动区域  $\Omega$ , 不再与它相交,  $u(M, t)$  从时刻  $t = D/a$  开始又取零值, 这说明扰动已经越过了  $M$  点,  $M$  点处恢复到原来的静止状态.

在有界区域  $\Omega$  中任一点处的扰动引起的波以速度  $a$  向周围传播, 因此, 在  $t$  时刻受到初始时刻区域  $\Omega$  中扰动影响的区域, 就是所有以  $p \in \Omega$  为中心,  $at$  为半径的球面的全体. 当  $t$  足够大时, 这种球面簇有内外两个包络面, 外包络面称为传播波的前阵面 (简称波前), 内包络面称为传播波的后阵面 (简称波后). 这前后阵面的中间部分就是受到扰动影响的部分. 前阵面以外的部分表示波尚未传到的区域, 而后阵面以内的部分是波已传过并恢复到原来状态的区域. 因此, 当初始扰动限制在空间某局部范围内时, 波的传播有清晰的前阵面和后阵面, 这种现象在物理学中称为惠更斯 (Huygens) 原理或无后效现象. 由于在点  $M_0 \in \Omega$  处的扰动, 在  $t = t_0$  时它的影响是在以  $M_0$  为中心,  $at_0$  为半径的一个球面  $S_{at_0}^{M_0}$  上, 故解 (3.39) 描述的是球面波.

对于二维波动方程初值问题的解 (3.44) 也可作如上的讨论. 但有一点值得注意, 由于积分是在圆域上进行的, 所以对任一点  $M$ , 随着时间  $t$  的增加,  $u(M, t)$  由等于零变为不等于零之后, 就再不会像空间情形那样, 又由不等于零变为等于零, 但将从某一时刻起逐渐减小. 所以二维情形与三维情形有明显不同之处, 传播波只有前阵面, 而无后阵面, 惠更斯原理不再成立. 这种现象称为波的弥散, 或者说这种波具有后效现象. 对于二维问题, 可以把它看作所给初始扰动是在一个无限长的柱体内发生, 而且不依赖于  $z$  坐标的空间问题. 这样, 点  $M_0$  处的初始扰动, 应看作是过点  $M_0$  且平行于  $z$  轴的无限长直线上的初始扰动, 在  $t = t_0$  时它的影响是在以该直线为轴,  $at_0$  为半径的圆柱面内, 因此解 (3.44) 描述的是柱面波.

## §3.3 积分变换法

### §3.3.1 傅里叶变换的定义和性质

若函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续可导, 且绝对可积, 则有经典的傅里叶变换

$$\hat{f}(\lambda) = \mathcal{F}[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\lambda} dx$$

及傅里叶逆变换

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda)e^{ix\lambda} d\lambda.$$

对于一些非绝对可积的函数, 仍然可以定义其傅里叶变换. 例如对狄拉克 (Dirac) 函数  $\delta(x)$ , 利用抽样性质, 我们有

$$\hat{\delta}(\lambda) = \mathcal{F}[\delta] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)e^{-ix\lambda} dx = 1.$$

在下面给出的基本性质中, 假定所涉及的函数的傅里叶变换均存在, 并略去这些性质的证明.

1. 线性性质 若  $a, b$  为任意常数, 则

$$\mathcal{F}[af + bg] = a\mathcal{F}[f] + b\mathcal{F}[g].$$

2. 位移性质

$$\mathcal{F}[f(x - x_0)] = e^{-i\lambda x_0} \hat{f}(\lambda),$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\lambda - \lambda_0)] = e^{i\lambda_0 x} f(x).$$

3. 相似性质 若  $a$  为非零常数, 则

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\lambda}{a}\right).$$

4. 微分性质

$$\mathcal{F}[f'(x)] = i\lambda \mathcal{F}[f(x)], \quad \mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (i\lambda)^n \mathcal{F}[f(x)];$$

$$\frac{d}{d\lambda} \hat{f}(\lambda) = \mathcal{F}[-ixf(x)], \quad \frac{d^n}{d\lambda^n} \hat{f}(\lambda) = \mathcal{F}[(-ix)^n f(x)].$$

5. 积分性质

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^x f(t) dt\right] = \frac{1}{i\lambda} \mathcal{F}[f(x)].$$

6. 卷积定理 设  $f_1(x)$  与  $f_2(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有定义, 它们的卷积定义为

$$f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y)f_2(x-y) dy,$$

则

$$\mathcal{F}[f_1(x) * f_2(x)] = \mathcal{F}[f_1(x)] \cdot \mathcal{F}[f_2(x)].$$

例 3.4 求  $\hat{f}(\lambda) = e^{-\lambda^2 t}$  的傅里叶逆变换, 其中  $t > 0$ .

解

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 t + ix\lambda} d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda^2 t} \cos x\lambda d\lambda.$$

由欧拉公式

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

知

$$f(0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}.$$

对  $f(x)$  求导, 并进行一次分部积分可得

$$\frac{df(x)}{dx} + \frac{x}{2t}f(x) = 0,$$

于是有

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

### §3.3.2 拉普拉斯变换的定义和性质

若函数  $f(t)$  在  $[0, +\infty)$  上不超过指数增长, 即存在常数  $M > 0$  与常数  $c > 0$  使得

$$|f(t)| \leq Me^{ct}, \quad t \geq 0$$

成立, 则定义它的拉普拉斯变换为

$$F(s) = \mathcal{L}[f] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad \operatorname{Re} s > c,$$

其逆变换记为  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ . 利用留数定理求可以证明:

**定理 3.3 (反演定理)** 设函数  $F(s)$  在半平面  $\operatorname{Re} s < c$  内除有限个孤立奇点  $s_1, s_2, \dots, s_n$  外是解析的, 且当  $s \rightarrow \infty$  时,  $F(s) \rightarrow 0$ , 则有

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[F(s)e^{st}, s_k].$$

拉普拉斯变换与傅里叶变换有类似的一些性质. 为叙述方便, 假定下面性质中所涉及的函数的拉普拉斯变换均存在, 并略去这些性质的证明.

**1. 线性性质** 若  $a, b$  为任意常数, 则

$$\mathcal{L}[af + bg] = a\mathcal{L}[f] + b\mathcal{L}[g].$$

**2. 延迟和位移性质**

$$\mathcal{L}[u(t-t_0)f(t-t_0)] = e^{-st_0}F(s),$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s-s_0)] = e^{s_0t}f(t),$$

其中  $u(t)$  为  $t < 0$  时为 0,  $t > 0$  时为 1 的单位阶跃函数.

3. 相似性质 若  $a$  为正常数, 则

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right).$$

4. 微分性质 (1) 导数的象函数

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0),$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

(2) 象函数的导数

$$F'(s) = \mathcal{L}[-tf(t)],$$

$$F^{(n)}(s) = \mathcal{L}[(-t)^n f(t)].$$

5. 积分性质 (1) 积分的象函数

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{1}{s} F(s),$$

一般地, 有

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} f(u)du dt_{n-1} \dots dt_1\right] = \frac{1}{s^n} F(s).$$

(2) 象函数的积分

$$\int_s^{+\infty} F(v)dv = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right],$$

一般地, 有

$$\int_s^{+\infty} \int_{s_1}^{+\infty} \dots \int_{s_{n-1}}^{+\infty} F(v)dv ds_{n-1} \dots ds_1 = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t^n}\right].$$

6. 卷积定理 若  $f_1(t)$  与  $f_2(t)$  在  $(0, +\infty)$  上有定义, 它们的卷积定义为

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau,$$

则

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] \cdot \mathcal{L}[f_2(t)].$$

例 3.5 用拉普拉斯变换求解

$$\begin{cases} u''(t) + k^2u(t) = f(t), \\ u(0) = 0, u'(0) = 0. \end{cases}$$

解 记  $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$ ,  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ , 方程两边作拉普拉斯变换, 利用微分性质和初始条件得

$$s^2 U(s) + k^2 U(s) = F(s).$$

因此

$$U(s) = \frac{1}{k} \frac{k}{s^2 + k^2} \cdot F(s).$$

作拉普拉斯逆变换, 并用卷积定理得

$$u(t) = \frac{1}{k} \int_0^t f(\tau) \sin k(t - \tau) d\tau.$$

用类似方法可得以下定解问题

$$\begin{cases} u'(t) + k^2 u(t) = f(t), \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

的解为

$$u(t) = \int_0^t e^{-k^2(t-\tau)} f(\tau) d\tau.$$

常用函数的傅里叶变换和拉普拉斯变换见附录二.

### §3.3.3 积分变换法

本节将通过几个例题来说明怎样用傅里叶变换和拉普拉斯变换求解数学物理方程的一些定解问题. 这些问题的解决可以使我们从中学到用一种固定的步骤来求解相当广泛的数学物理方程定解问题的技巧. 积分变换法的优点在于把原方程化为较简单的形式, 便于求解, 因而是一种行之有效的方法. 在应用上, 对于初值问题通常采用傅里叶变换 (针对空间变量), 而对于带有边界条件的定解问题, 则采用拉普拉斯变换 (针对时间变量).

例 3.6 求下列问题的解:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) & (-\infty < x < +\infty, t > 0), \\ u|_{t=0} = \varphi(x). \end{cases} \quad (3.45)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x). \quad (3.46)$$

解 关于  $x$  作傅里叶变换, 记

$$\mathcal{F}[u(x, t)] = U(\lambda, t), \quad \mathcal{F}[f(x, t)] = G(\lambda, t), \quad \mathcal{F}[\varphi(x)] = \Phi(\lambda).$$

对方程 (3.45) 两端关于  $x$  作傅里叶变换, 得

$$\frac{dU(\lambda, t)}{dt} = -a^2 \lambda^2 U(\lambda, t) + G(\lambda, t), \quad (3.47)$$

它满足初值条件

$$U(\lambda, t)|_{t=0} = \Phi(\lambda). \quad (3.48)$$

为了求解常微分方程初值问题 (3.47)、(3.48), 记

$$\mathcal{L}[U(\lambda, t)] = \bar{U}(\lambda, s), \quad \mathcal{L}[G(\lambda, t)] = \bar{G}(\lambda, s).$$

对方程 (3.47) 两端关于  $t$  作拉普拉斯变换, 并由条件 (3.48) 得

$$s\bar{U}(\lambda, s) - \Phi(\lambda) = -a^2\lambda^2\bar{U}(\lambda, s) + \bar{G}(\lambda, s),$$

由此得

$$\bar{U}(\lambda, s) = \frac{1}{s + \lambda^2 a^2} \Phi(\lambda) + \frac{1}{s + \lambda^2 a^2} \bar{G}(\lambda, s). \quad (3.49)$$

对 (3.49) 两端作拉普拉斯逆变换, 得

$$\begin{aligned} U(\lambda, t) &= \Phi(\lambda) \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s + \lambda^2 a^2} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s + \lambda^2 a^2} \bar{G}(\lambda, s) \right] \\ &= \Phi(\lambda) e^{-a^2 \lambda^2 t} + \int_0^t G(\lambda, \tau) e^{-a^2 \lambda^2 (t-\tau)} d\tau. \end{aligned} \quad (3.50)$$

为了求出问题 (3.45)、(3.46) 的解, 还需要对  $U(\lambda, t)$  作傅里叶逆变换. 由例 3.4 得

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-a^2 \lambda^2 t}] = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}.$$

对 (3.50) 式两端作傅里叶逆变换, 由卷积定理得

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi + \\ &\quad \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \tau) \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 (t-\tau)}} d\xi \right) d\tau, \end{aligned}$$

这样就得原定解问题的解.

**例 3.7** 试用傅里叶变换求解下列问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (-\infty < x < +\infty, t > 0), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases} \quad (3.51)$$

**解** 将 (3.51) 各式的两端关于  $x$  分别作傅里叶变换. 记

$$\mathcal{F}[u(x, t)] = U(\lambda, t), \quad \mathcal{F}[\varphi(x)] = \Phi(\lambda), \quad \mathcal{F}[\psi(x)] = \Psi(\lambda),$$

则得

$$\begin{cases} \frac{d^2 U}{dt^2} = -a^2 \lambda^2 U, \\ U(\lambda, t)|_{t=0} = \Phi(\lambda), \quad \left. \frac{dU}{dt} \right|_{t=0} = \Psi(\lambda). \end{cases} \quad (3.52)$$

问题 (3.52) 是带参数  $\lambda$  的常微分方程的初值问题, 它的解为

$$U(\lambda, t) = \Phi(\lambda) \cos a\lambda t + \frac{\Psi(\lambda)}{a\lambda} \sin a\lambda t. \quad (3.53)$$

对式 (3.53) 作傅里叶逆变换, 得

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}[\Phi(\lambda) \cos a\lambda t] + \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\Psi(\lambda)}{a\lambda} \sin a\lambda t\right]. \quad (3.54)$$

由于

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[\cos a\lambda t] &= \frac{1}{2}[\delta(x+at) + \delta(x-at)], \\ \mathcal{F}^{-1}[\sin a\lambda t] &= \frac{1}{2i}[\delta(x+at) - \delta(x-at)], \end{aligned}$$

因此, 由卷积定理可得

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[\Phi(\lambda) \cos a\lambda t] &= \varphi(x) * \frac{1}{2}[\delta(x+at) + \delta(x-at)] \\ &= \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)], \end{aligned}$$

另外, 由傅里叶变换积分性质可得

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\Psi(\lambda)}{a\lambda} \sin a\lambda t\right] = \frac{i}{a} \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\Psi(\lambda)}{i\lambda} \sin a\lambda t\right] = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha.$$

将以上两式代入 (3.54) 式, 得问题 (3.51) 的解为

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha.$$

**例 3.8** 求解下列问题:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & (y > 0), \\ u|_{y=0} = g(x), \\ \lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} u(x, y) = 0. \end{cases} \quad (3.55)$$

**解** 将 (3.55) 各式两端关于  $x$  分别作傅里叶变换, 记

$$\mathcal{F}[u(x, y)] = U(\lambda, y), \quad \mathcal{F}[g(x)] = G(\lambda),$$

则 (3.55) 化为

$$\begin{cases} \frac{d^2 U}{dy^2} - \lambda^2 U = 0, \\ U(\lambda, 0) = G(\lambda), \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} U(\lambda, y) = 0. \end{cases} \quad (3.56)$$

解问题 (3.56) 得

$$U(\lambda, y) = G(\lambda)e^{-|\lambda|y},$$

对该式作傅里叶逆变换得

$$u(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[G(\lambda)e^{-|\lambda|y}] = g(x) * \mathcal{F}^{-1}[e^{-|\lambda|y}]. \quad (3.57)$$

由于

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-|\lambda|y}] = \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + x^2},$$

将它代入 (3.57), 即得问题 (3.55) 的解为

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\xi)}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi.$$

**例 3.9** 求解下列问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (x > 0, t > 0), \end{cases} \quad (3.58)$$

$$\begin{cases} u|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (3.59)$$

$$\begin{cases} u|_{x=0} = f(t), \end{cases} \quad (3.60)$$

$$\begin{cases} |u(x, t)| \leq M. \end{cases} \quad (3.61)$$

**解** 对所给问题关于  $t$  作拉普拉斯变换 (请读者思考: 为什么不能对空间变量  $x$  作拉普拉斯变换?), 记

$$\mathcal{L}[u(x, t)] = U(x, s), \quad \mathcal{L}[f(t)] = F(s),$$

则问题 (3.58)—(3.61) 化为

$$\begin{cases} a^2 \frac{d^2 U}{dx^2} - sU = 0, \end{cases} \quad (3.62)$$

$$\begin{cases} U(x, s)|_{x=0} = F(s), \end{cases} \quad (3.63)$$

$$\begin{cases} |U(x, s)| \leq \bar{M} \quad (\text{当 } s \text{ 充分大时}). \end{cases} \quad (3.64)$$

其中  $\bar{M}$  是一个充分大的正数. 方程 (3.62) 的通解为

$$U(x, s) = c_1 e^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x} + c_2 e^{\frac{\sqrt{s}}{a}x},$$

其中根号表示其主值. 由条件 (3.64) 知  $c_2 = 0$ , 由条件 (3.63) 得  $c_1 = F(s)$ , 于是

$$U(x, s) = F(s)e^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}. \quad (3.65)$$

对 (3.65) 作拉普拉斯逆变换, 得

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)e^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}]. \quad (3.66)$$

首先查表 (见附录二), 得

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}e^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-y^2} dy,$$

再由拉普拉斯变换的微分性质, 得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[e^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}] &= \mathcal{L}^{-1}\left[s \cdot \frac{1}{s} e^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}\right] = \frac{d}{dt} \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right] \\ &= \frac{x}{2a\sqrt{\pi t^{\frac{3}{2}}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}. \end{aligned}$$

于是由卷积定理, 得问题 (3.58)—(3.61) 的解

$$u(x, t) = f(t) * \frac{x}{2a\sqrt{\pi t^{\frac{3}{2}}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t f(\tau) \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau.$$

**例 3.10** 求解半无界弦的自由振动问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (x > 0, t > 0), \end{cases} \quad (3.67)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \end{cases} \quad (3.68)$$

$$\begin{cases} u(0, t) = f(t), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0, \end{cases} \quad (3.69)$$

其中  $f(t)$  为已知函数, 且  $f(0) = 0$ .

**解** 对所给问题关于  $t$  作拉普拉斯变换, 记

$$\mathcal{L}[u(x, t)] = U(x, s), \quad \mathcal{L}[f(t)] = F(s),$$

则原问题 (3.67)—(3.69) 化为

$$\begin{cases} a^2 \frac{d^2 U}{dx^2} - s^2 U = 0, \end{cases} \quad (3.70)$$

$$\begin{cases} U(0, s) = F(s), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} U(x, s) = 0. \end{cases} \quad (3.71)$$

方程 (3.70) 的通解为

$$U(x, s) = c_1 e^{\frac{s}{a}x} + c_2 e^{-\frac{s}{a}x},$$

由条件 (3.71) 得  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = F(s)$ , 从而

$$U(x, s) = F(s)e^{-\frac{s}{a}x}.$$

为了求得原定解问题的解  $u(x, t)$ , 对上式作拉普拉斯逆变换, 得

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)e^{-\frac{s}{a}x}]. \quad (3.72)$$

再利用延迟性质, (3.72) 式可化为

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & t < \frac{x}{a}, \\ f\left(t - \frac{x}{a}\right), & t > \frac{x}{a}. \end{cases}$$

**例 3.11** 求解定解问题

$$\begin{cases} u_{xx} - au_{tt} - bu_t - cu = 0 & (x > 0, t > 0), \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \\ u(0, t) = \phi(t), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0, \end{cases} \quad (3.73)$$

其中  $a, b, c$  为正常数且  $b^2 = 4ac$ .

**解** 对所给问题关于  $t$  作拉普拉斯变换, 记

$$\mathcal{L}[u(x, t)] = U(x, s), \quad \mathcal{L}[\phi(t)] = \Phi(s),$$

则问题可化为

$$\begin{cases} U_{xx} - as^2U - bsU - cU = 0, \\ U(0, s) = \Phi(s), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} U(x, s) = 0. \end{cases}$$

由条件  $b^2 = 4ac$  有  $as^2 + bs + c = \left(\sqrt{as} + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2$ , 因此常微分方程的通解为

$$U(x, s) = c_1 e^{(\sqrt{as} + \frac{b}{2\sqrt{a}})x} + c_2 e^{-(\sqrt{as} + \frac{b}{2\sqrt{a}})x}.$$

由定解条件得

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \Phi(s),$$

从而可得

$$U(x, s) = \Phi(s)e^{-(\sqrt{as} + \frac{b}{2\sqrt{a}})x}.$$

作拉普拉斯逆变换, 利用延迟性质得

$$u(x, t) = \begin{cases} e^{-\frac{bx}{2\sqrt{a}}} \phi(t - \sqrt{ax}), & t \geq \sqrt{ax}, \\ 0, & t < \sqrt{ax}. \end{cases}$$

**例 3.12** 求解

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (0 < x < 1, t > 0), \\ u(x, 0) = 4 \sin \pi x, \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = 0. \end{cases} \quad (3.74)$$

**解** 显然, 对  $t$  作拉普拉斯变换, 记  $\mathcal{L}[u(x, t)] = U(x, s)$ , 则问题 (3.74) 可化为

$$\begin{cases} a^2 \frac{d^2 U}{dx^2} - sU = -4 \sin \pi x, \\ U(0, s) = 0, U(1, s) = 0. \end{cases} \quad (3.75)$$

问题 (3.75) 的通解为

$$U(x, s) = c_1 e^{\frac{\sqrt{s}}{a} x} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{s}}{a} x} + \frac{4 \sin \pi x}{s + a^2 \pi^2},$$

由条件 (3.76) 得  $c_1 = c_2 = 0$ , 从而得

$$U(x, s) = \frac{4 \sin \pi x}{s + a^2 \pi^2}.$$

作拉普拉斯逆变换, 则得问题 (3.74) 的解为

$$u(x, t) = 4e^{-a^2 \pi^2 t} \sin \pi x.$$

**注 3.7** 这与分离变量法所求得的解是完全一样的, 但其运算过程比分离变量法简便.

### §3.3.4 有限积分变换及其应用

当积分限为无穷时, 我们通过例题说明了傅里叶变换和拉普拉斯变换的解题步骤. 下面我们引入有限积分变换的定义, 并应用这些变换来求解数学物理方程定解问题.

**有限傅里叶正弦变换:** 设  $f(x)$  在区间  $[0, \pi]$  上分段光滑, 则  $f(x)$  的有限傅里叶正弦变换由下式定义

$$F_s(n) = \mathcal{F}_s[f(x)] = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx, \quad (3.77)$$

其中  $n$  为正整数.

取  $\pi$  作为积分的上限, 并不限制变换 (3.77) 的一般性, 因为经过变量变换, 总可以把一般积分区间化成区间  $[0, \pi]$ .

我们知道, 当  $f(x)$  为分段光滑的连续函数时, 可以展开为正弦级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx),$$

其中  $a_n$  由下式确定

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = F_s(n).$$

因此, 变换 (3.77) 的逆变换公式为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_s(n) \sin(nx). \quad (3.78)$$

**定理 3.4** 设  $f'(x)$  在区间  $[0, \pi]$  上连续,  $f''(x)$  分段连续, 则

$$\mathcal{F}_s[f''(x)] = \frac{2n}{\pi} [f(0) - (-1)^n f(\pi)] - n^2 F_s(n). \quad (3.79)$$

**证** 由定义

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_s[f''(x)] &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f''(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ f'(x) \sin(nx) \Big|_0^{\pi} - n \int_0^{\pi} f'(x) \cos(nx) dx \right] \\ &= -\frac{2n}{\pi} \left[ f(x) \cos(nx) \Big|_0^{\pi} + n \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \right] \\ &= \frac{2n}{\pi} [f(0) - (-1)^n f(\pi)] - n^2 F_s(n). \end{aligned}$$

有限傅里叶余弦变换: 设  $f(x)$  在区间  $[0, \pi]$  上分段光滑, 则  $f(x)$  的有限傅里叶余弦变换由下式定义

$$F_c(n) = \mathcal{F}_c[f(x)] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad (3.80)$$

其中  $n$  是正整数或零. 其逆变换公式为

$$f(x) = \frac{1}{2} F_c(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F_c(n) \cos(nx). \quad (3.81)$$

**定理 3.5** 设  $f'(x)$  在区间  $[0, \pi]$  上连续,  $f''(x)$  分段连续, 则

$$\mathcal{F}_c[f''(x)] = \frac{2}{\pi}[(-1)^n f'(\pi) - f'(0)] - n^2 F_c(n). \quad (3.82)$$

**证** 由定义

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_c[f''(x)] &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f''(x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ f'(x) \cos(nx) \Big|_0^\pi + n \int_0^\pi f'(x) \sin(nx) dx \right] \\ &= \frac{2n}{\pi} \left[ f(x) \sin(nx) \Big|_0^\pi - n \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx \right] + \frac{2}{\pi}[(-1)^n f'(\pi) - f'(0)] \\ &= \frac{2}{\pi}[(-1)^n f'(\pi) - f'(0)] - n^2 F_c(n). \end{aligned}$$

此外还有

$$(1) \mathcal{F}_s[f'(x)] = -nF_c(n), \quad (3.83)$$

$$(2) \mathcal{F}_c[f'(x)] = \frac{2}{\pi}[(-1)^n f(\pi) - f(0)] + nF_s(n), \quad (3.84)$$

(3) 若  $f(0) = f(\pi) = f''(0) = f''(\pi) = 0$ , 则

$$\mathcal{F}_s[f^{(4)}(x)] = n^4 F_s(n), \quad (3.85)$$

(4) 若  $f'(0) = f'(\pi) = f'''(0) = f'''(\pi) = 0$ , 则

$$\mathcal{F}_c[f^{(4)}(x)] = n^4 F_c(n). \quad (3.86)$$

有限傅里叶正弦变换和余弦变换除了上述的微分性质外, 还具有线性性质.

**例 3.13** 求解

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & (0 < x < \pi, 0 < y < \pi), \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0, \\ u(x, 0) = 0, u(x, \pi) = u_0 \text{ (常数)}. \end{cases}$$

**解** 因  $u$  在  $x=0$  和  $x=\pi$  处的值已知, 把方程和后面两个边界条件对  $x$  作有限傅里叶正弦变换, 记

$$v(n, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u(x, y) \sin(nx) dx,$$

则得

$$\frac{d^2 v}{dy^2} - n^2 v(n, y) = 0, \quad (3.87)$$

及

$$v(n, y)|_{y=0} = 0, \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} v(n, y)|_{y=\pi} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0 \sin(nx) dx = \frac{2u_0}{\pi} \left[ -\frac{1}{n} \cos(nx) \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2u_0}{n\pi} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} 0, & n = 2m, \\ \frac{4u_0}{(2m+1)\pi}, & n = 2m+1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.89)$$

方程 (3.87) 的通解为

$$v(n, y) = Ae^{ny} + Be^{-ny},$$

由 (3.88) 与 (3.89) 得

$$\begin{aligned} A &= \frac{2u_0}{(2m+1)\pi \sinh(2m+1)\pi} = -B \quad (n = 2m+1), \\ A &= -B = 0 \quad (n = 2m), \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} v(2m+1, y) &= \frac{2u_0}{(2m+1)\pi \sinh(2m+1)\pi} (e^{(2m+1)y} - e^{-(2m+1)y}) \\ &= \frac{4u_0}{(2m+1)\pi \sinh(2m+1)\pi} \sinh(2m+1)y, \end{aligned}$$

$$v(2m, y) = 0.$$

由逆变换公式 (3.78), 求得问题的解为

$$u(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4u_0}{(2m+1)\pi \sinh(2m+1)\pi} \sinh(2m+1)y \sin(2m+1)x.$$

**例 3.14** 求解下列问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (0 < x < \pi, t > 0), \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases}$$

**解** 根据已知边界条件, 应用有限傅里叶余弦变换, 记

$$v(n, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x, t) \cos(nx) dx,$$

上述问题化为

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + n^2 a^2 v = 0, \\ v(n, 0) = \Phi(n) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(\xi) \cos(n\xi) d\xi. \end{cases}$$

解之得

$$v(n, t) = \Phi(n) e^{-n^2 a^2 t},$$

利用逆变换公式 (3.81), 得原问题的解为

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(\xi) d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(\xi) \cos(n\xi) d\xi \right) e^{-n^2 a^2 t} \cos(nx).$$

## §3.4 本章小结及补充知识

### §3.4.1 本章小结

通过本章的学习, 读者要掌握无界弦自由振动问题的达朗贝尔解法, 了解达朗贝尔解的物理意义; 能用齐次化原理求解非齐次初值问题; 了解二维、三维波动方程柯西问题的解法; 熟练掌握积分变换法. 积分变换法的主要特点是把偏微分方程化为常微分方程, 把常微分方程化为代数方程来求解, 其主要步骤如下:

1. 根据自变量的变化范围和定解条件选择适当的积分变换对方程和定解条件同时作积分变换, 导出象函数的方程及其定解条件. 在作拉普拉斯变换时, 被变换自变量等于零时的初值条件已被使用, 不用在新的定解问题中列出.
2. 求解所得到的常微分方程和代数方程, 得到象函数.
3. 求象函数的逆, 得到原来定解问题的解. 在作逆变换时, 要注意积分变换的性质, 特别是卷积定理的运用.

### §3.4.2 补充知识

对满足零初值、齐次边界条件 (有界区间) 的非齐次波动方程或热传导方程, 我们也可采用齐次化原理来求解. 其要点是将非齐次方程转化为  $t > \tau$  上的齐次方程, 并将非齐次项  $f(x, \tau)$  转化为  $\tau$  时刻的初始温度 (对热传导方程) 或初始速度 (对波动方程), 保持边界条件和其他条件不变. 下面, 我们将给出利用齐次化原理求解非齐次的热传导方程及非齐次波动方程的一些例子.

例 3.15 求解如下热传导方程柯西问题:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t) & (-\infty < x < +\infty, t > 0), \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

解 先求解如下齐次问题:

$$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = 0 & (-\infty < x < +\infty, t > \tau), \\ w(x, \tau; \tau) = f(x, \tau). \end{cases}$$

令  $t' = t - \tau$ , 并记  $\bar{w}(x, t'; \tau) = w(x, t; \tau)$ . 则有

$$\begin{cases} \bar{w}_{t'} - a^2 \bar{w}_{xx} = 0 & (-\infty < x < +\infty, t' > 0), \\ \bar{w}(x, 0; \tau) = f(x, \tau). \end{cases}$$

该齐次热传导方程柯西问题的解可由积分变换法求出, 即

$$\bar{w}(x, t'; \tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t'}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \tau) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t'}} d\xi.$$

由齐次化原理并代入  $t' = t - \tau$ , 得

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t w(x, t; \tau) d\tau \\ &= \int_0^t \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \tau) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi d\tau \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \tau) \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi \right) d\tau, \end{aligned}$$

这与积分变换法得到的解是一样的.

例 3.16 求解如下齐次边界条件与零初值条件的受迫振动问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) & (0 < x < l, t > 0), \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

解 考虑上述问题的齐次化问题:

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx} & (0 < x < l, t > \tau), \\ w(0, t; \tau) = 0, w(l, t; \tau) = 0, \\ w(x, \tau; \tau) = 0, w_t(x, \tau; \tau) = f(x, \tau). \end{cases}$$

令  $t' = t - \tau$ , 并记  $\bar{w}(x, t'; \tau) = w(x, t; \tau)$ , 则有

$$\begin{cases} \bar{w}_{t't'} = a^2 \bar{w}_{xx} & (0 < x < l, t' > 0), \\ \bar{w}(0, t'; \tau) = 0, \bar{w}(l, t'; \tau) = 0, \\ \bar{w}(x, 0; \tau) = 0, \bar{w}_{t'}(x, 0; \tau) = f(x, \tau). \end{cases}$$

该自由弦振动问题可用分离变量法求解, 其解为

$$\bar{w}(x, t'; \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\tau) \sin \frac{n\pi a t'}{l} \sin \frac{n\pi x}{l},$$

其中

$$\begin{aligned} b_n(\tau) &= \frac{2}{n\pi a} \int_0^l f(x, \tau) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{l}{n\pi a} \cdot \frac{2}{l} \int_0^l f(x, \tau) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{l}{n\pi a} f_n(\tau), \end{aligned}$$

这里  $f_n(\tau)$  是函数  $f(x, \tau)$  关于  $x$  的正弦级数的展开系数.

最后, 代入  $t' = t - \tau$ , 并由齐次化原理得:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t w(x, t; \tau) d\tau \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t b_n(\tau) \sin \frac{n\pi a(t - \tau)}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} d\tau \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \int_0^t b_n(\tau) \sin \frac{n\pi a(t - \tau)}{l} d\tau \\ &= \frac{l}{n\pi a} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{n\pi a(t - \tau)}{l} d\tau \quad (n = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

这和第二章中利用固有函数展开法得到的解是一样的.

**例 3.17** 求解如下齐次边界条件与零初值条件的热传导问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) & (0 < x < l, t > 0), \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

解 考虑上述问题的齐次化问题:

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx} & (0 < x < l, t > \tau), \\ w(0, t; \tau) = 0, w(l, t; \tau) = 0, \\ w(x, \tau; \tau) = f(x, \tau). \end{cases}$$

令  $t' = t - \tau$ , 并记  $\bar{w}(x, t'; \tau) = w(x, t; \tau)$ , 则有

$$\begin{cases} \bar{w}_{t'} = a^2 \bar{w}_{xx} & (0 < x < l, t' > 0), \\ \bar{w}(0, t'; \tau) = 0, \bar{w}(l, t'; \tau) = 0, \\ \bar{w}(x, 0; \tau) = f(x, \tau). \end{cases}$$

由齐次边界条件下的齐次热传导问题的解的形式 (分离变量法), 得

$$\bar{w}(x, t'; \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\tau) e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t'} \sin \frac{n\pi x}{l},$$

其中

$$c_n(\tau) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, \tau) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = f_n(\tau),$$

这里  $f_n(\tau)$  是函数  $f(x, \tau)$  关于  $x$  的正弦级数的展开系数.

最后, 代入  $t' = t - \tau$ , 并由齐次化原理

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t w(x, t; \tau) d\tau \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t f_n(\tau) e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 (t-\tau)} \sin \frac{n\pi x}{l} d\tau \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \end{aligned}$$

其中

$$u_n(t) = \int_0^t f_n(\tau) e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 (t-\tau)} d\tau \quad (n = 1, 2, \dots),$$

这同样和第二章中利用固有函数展开法得到的解是一样的.

## 习题三

### 1. 如果要求定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (-\infty < x < +\infty, t > 0), \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

的解只有沿  $x$  轴正向的传播波, 则  $\varphi$  与  $\psi$  应满足什么样的关系?

2. 求解古尔萨 (Goursat) 问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (-\infty < x < +\infty, t > 0), \\ u|_{x-at=0} = \varphi(x), \\ u|_{x+at=0} = \psi(x), \end{cases}$$

其中定解条件满足相容性条件:  $\varphi(0) = \psi(0)$ .

3. 求解下列问题:

$$(1) \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (-\infty < x < +\infty, t > 0), \\ u(x, 0) = \sin x, & u_t(x, 0) = x^2; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (-\infty < x < +\infty, t > 0), \\ u(x, 0) = \cos x, & u_t(x, 0) = 1/e; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + at + x & (-\infty < x < +\infty, t > 0), \\ u(x, 0) = x, & u_t(x, 0) = \sin x; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + t \sin x & (-\infty < x < +\infty, t > 0), \\ u(x, 0) = 0, & u_t(x, 0) = \sin x. \end{cases}$$

4. 求方程  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 y$  满足条件  $u|_{y=0} = x^2$ ,  $u|_{x=1} = \cos y$  的解.

5. 求下列问题的解.

$$(1) \begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) & (-\infty < x, y, z < +\infty, t > 0), \\ u(x, y, z, 0) = x^3 + y^2 z, & u_t(x, y, z, 0) = 0; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) & (-\infty < x, y < +\infty, t > 0), \\ u(x, y, 0) = x^2(x + y), & u_t(x, y, 0) = 0. \end{cases}$$

6. 用积分变换法解下列问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1 & (x > 0, y > 0), \\ u|_{x=0} = y + 1, \\ u|_{y=0} = 1. \end{cases}$$

7. 用积分变换法解下列问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (x > 0, t > 0), \\ u(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = u_0, & |u(x, t)| < +\infty, \end{cases}$$

其中  $u_0$  为常数.

8. 用积分变换法解下列问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (x > 0, t > 0), \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = A \sin \omega t, & |u(x, t)| < M \quad (x \rightarrow \infty), \end{cases}$$

其中  $A, \omega$  均为常数.

9. 用积分变换法解下列问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (-\infty < x < +\infty, t > 0), \\ u(x, 0) = \cos x. \end{cases}$$

10. 证明函数  $1 - \frac{x}{\pi}$  和  $\frac{x}{\pi}$  的有限傅里叶正弦变换分别等于  $\frac{2}{n\pi}$  和  $(-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi}$ .

11. 证明函数  $\frac{\pi}{3} - x + \frac{x^2}{2\pi}$  的有限傅里叶余弦变换等于  $\frac{2}{n^2\pi}$ .

12. 求下列定解问题的解:

$$(1) \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (0 < x < \pi, t > 0), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin x, \quad u_t(x, 0) = \sin x; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} & (0 < x < \pi, t > 0), \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = x^2 \left( \pi - \frac{2x}{3} \right). \end{cases}$$

## 第四章

# 格林函数法

到目前为止, 我们已系统地介绍了用分离变量法、行波法与积分变换法求解数学物理方程定解问题的基本要点与解题步骤. 本章将介绍用格林 (Green) 函数法求解拉普拉斯方程边值问题的要点与步骤, 把拉普拉斯方程第一边值问题的解通过格林函数以积分的形式表示出来.

### §4.1 格林公式及其应用

#### §4.1.1 球对称解

首先介绍拉普拉斯方程的球对称解. 利用直角坐标和球坐标的关系, 由复合函数微分法则, 我们可以把三维拉普拉斯方程  $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$  变为如下的形式

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (4.1)$$

求方程 (4.1) 的球对称解  $u = U(r)$  (即与  $\theta$  和  $\varphi$  无关的解). 此时方程 (4.1) 简化为

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dU}{dr} \right) = 0,$$

它的解为

$$U = \frac{c_1}{r} + c_2 \quad (r > 0),$$

其中  $c_1$  和  $c_2$  是任意常数. 若取  $c_1 = -\frac{1}{4\pi}$ ,  $c_2 = 0$ , 则得函数

$$U_0 = -\frac{1}{4\pi r} \quad (r > 0).$$

由于在研究三维拉普拉斯方程时, 它起着重要的作用, 所以被称为三维拉普拉斯方程的基本解.

二维拉普拉斯方程在极坐标系中的表达式为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0. \quad (4.2)$$

求方程 (4.2) 的圆对称的解  $u = U(r)$  (即  $u = U(r)$  不依赖于  $\theta$ ), 此时上述方程可简化为

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} = 0,$$

它的解为

$$U = c_1 \ln r + c_2 \quad (r > 0),$$

其中  $c_1$  和  $c_2$  是任意常数. 若令  $c_1 = \frac{1}{2\pi}$ ,  $c_2 = 0$ , 则可得函数

$$U_0 = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \quad (r > 0),$$

通常称它为二维拉普拉斯方程的**基本解**.

容易验证, 当  $r > 0$  时, 函数  $-\frac{1}{4\pi r}$  和  $-\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$  分别满足方程 (4.1) 和 (4.2).

### §4.1.2 格林公式

格林公式是奥-高公式的直接推论. 设  $\Omega$  是以足够光滑的曲面  $\Gamma$  为边界的有界开区域,  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  是在闭区域  $\Omega + \Gamma$  上连续, 在  $\Omega$  内有连续偏导数的任意函数, 则成立如下的奥-高公式

$$\iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) d\Omega = \iint_{\Gamma} [P \cos(n, x) + Q \cos(n, y) + R \cos(n, z)] dS, \quad (4.3)$$

其中  $d\Omega$  是体积元素,  $n$  是  $\Gamma$  的外法线方向,  $dS$  是  $\Gamma$  上的面积元素.

设函数  $u = u(x, y, z)$  和  $v = v(x, y, z)$  以及它们的所有一阶偏导数在  $\Omega + \Gamma$  上连续, 且在  $\Omega$  内具有二阶连续偏导数. 在公式 (4.3) 中, 令  $P = u \frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $Q = u \frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $R = u \frac{\partial v}{\partial z}$ , 则得格林第一公式:

$$\iiint_{\Omega} u \Delta v d\Omega = \iint_{\Gamma} u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega, \quad (4.4)$$

其中  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  是三维拉普拉斯算子,  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  是三维梯度算子,  $\frac{\partial}{\partial n}$  表示外法向导数.

在式 (4.4) 中, 交换函数  $u, v$  的位置, 得

$$\iiint_{\Omega} v \Delta u d\Omega = \iint_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} dS - \iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega. \quad (4.5)$$

自 (4.4) 减去 (4.5), 则得格林第二公式:

$$\iiint_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) d\Omega = \iint_{\Gamma} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS. \quad (4.6)$$

公式 (4.6) 对于在  $\Omega$  内有二阶连续偏导数, 在  $\Omega + \Gamma$  上有一阶连续偏导数的任意函数  $u(x, y, z), v(x, y, z)$  都是成立的.

### §4.1.3 调和函数的积分表达式

利用格林公式我们可以导出调和函数的积分表达式. 设  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  是区域  $\Omega$  内某一固定点, 则函数

$$\frac{1}{r_{MM_0}} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \quad (4.7)$$

除去  $M_0$  点处处满足拉普拉斯方程.

**定理 4.1** 如果函数  $u$  在  $\Omega + \Gamma$  上有一阶连续偏导数, 且在  $\Omega$  内调和, 则

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} \left[ u(M) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{MM_0}} \right) - \frac{1}{r_{MM_0}} \frac{\partial u(M)}{\partial n} \right] dS. \quad (4.8)$$

**证明** 在公式 (4.6) 中, 令  $u$  为调和函数, 且取  $v = \frac{1}{r}$ , 这里及本章后续内容中用  $r$  表示  $r_{MM_0}$ . 因为函数  $v$  在点  $M_0$  处发散到无穷大, 故对区域  $\Omega$  不能直接应用格林第二公式. 但是, 如果在区域  $\Omega$  内挖去一个以  $M_0$  为心, 充分小正数  $\epsilon$  为半径的球  $K_\epsilon^{M_0}$ , 则在剩下的区域  $\Omega - K_\epsilon^{M_0}$  中函数  $v$  就是连续可微的了 (如图 4.1 所示).

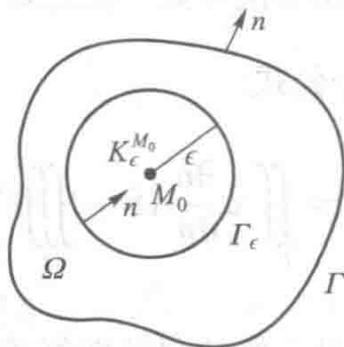


图 4.1

在区域  $\Omega - K_\epsilon^{M_0}$  上对上述的函数  $u$  和  $v$  应用公式 (4.6), 得

$$\iiint_{\Omega - K_\epsilon^{M_0}} \left( u \Delta \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \Delta u \right) d\Omega = \iint_{\Gamma + \Gamma_\epsilon} \left[ u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS, \quad (4.9)$$

其中  $\Gamma_\epsilon$  是球  $K_\epsilon^{M_0}$  的表面. 因为在区域  $\Omega - K_\epsilon^{M_0}$  内,  $\Delta u = 0$ ,  $\Delta \frac{1}{r} = 0$ , 于是式 (4.9) 化为

$$0 = \iint_{\Gamma} \left[ u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS + \iint_{\Gamma_\epsilon} \left[ u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS. \quad (4.10)$$

在球面  $\Gamma_\epsilon$  上

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{\epsilon^2}.$$

由此可得

$$\iint_{\Gamma_\epsilon} u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS = \frac{1}{\epsilon^2} \iint_{\Gamma_\epsilon} u dS = 4\pi \bar{u},$$

其中  $\bar{u}$  是函数  $u$  在球面  $\Gamma_\epsilon$  上的平均值. 另一方面, 由格林第二公式可得

$$\iint_{\Gamma_\epsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \frac{1}{\epsilon} \iint_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial u}{\partial n} dS = -\frac{1}{\epsilon} \iiint_{K_\epsilon^{M_0}} \Delta u d\Omega = 0.$$

于是, 由式 (4.10) 得

$$\iint_{\Gamma} \left[ u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS + 4\pi \bar{u} = 0.$$

现在令  $\epsilon \rightarrow 0$ , 由于  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{u} = u(M_0)$ , 由上式就得到调和函数的积分表达式 (4.8).

**注 4.1** (1) 对于在  $\Omega + \Gamma$  上有连续一阶偏导数的调和函数  $u$ , 它在区域  $\Omega$  内任一点  $M_0$  的值, 可通过积分表达式 (4.8) 用这个函数及其法向导数在区域边界  $\Gamma$  上的值来表示.

(2) 当点  $M_0$  在区域  $\Omega$  之外或者在它的边界  $\Gamma$  上时, 也可以用同样的方法推出类似的结果, 即我们有

$$-\iint_{\Gamma} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = \begin{cases} 0, & \text{若 } M_0 \text{ 在 } \Omega \text{ 外,} \\ 2\pi u(M_0), & \text{若 } M_0 \text{ 在 } \Gamma \text{ 上,} \\ 4\pi u(M_0), & \text{若 } M_0 \text{ 在 } \Omega \text{ 内.} \end{cases}$$

(3) 如果  $u$  不是调和函数, 只要它在  $\Omega + \Gamma$  上有一阶连续偏导数, 在区域  $\Omega$

内  $\Delta u = F$ , 同样可以得到与 (4.8) 相似的公式

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} \left[ u(M) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{MM_0}} \right) - \frac{1}{r_{MM_0}} \frac{\partial u(M)}{\partial n} \right] dS - \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{F(M)}{r_{MM_0}} d\Omega. \quad (4.11)$$

#### §4.1.4 调和函数的基本性质

**性质 1** 设函数  $u(x, y, z)$  是区域  $\Omega$  内的调和函数, 它在  $\Omega + \Gamma$  上有一阶连续偏导数, 则

$$\iint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0, \quad (4.12)$$

其中  $\Gamma$  是区域  $\Omega$  的边界,  $n$  是  $\Gamma$  的外法线方向.

**证明** 只要在第二格林公式 (4.6) 中取  $u$  为调和函数, 取  $v = 1$ , 就得到公式 (4.12).

**注 4.2** 公式 (4.12) 说明, 调和函数的法向导数沿区域边界的积分为零. 对稳定的温度场来说, 这表示经过物体表面流入和流出物体的热量相等, 否则就不能保持热的动态平衡, 而使温度不稳定.

由 (4.12) 式可推出诺伊曼问题

$$\begin{cases} \Delta u(x, y, z) = 0, & (x, y, z) \in \Omega, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = f(x, y, z) \end{cases}$$

有解的必要条件为

$$\iint_{\Gamma} f(x, y, z) dS = 0.$$

**性质 2 (平均值定理)** 设函数  $u(M)$  在区域  $\Omega$  内调和,  $M_0$  是  $\Omega$  内的任意一点. 若  $\Gamma_a$  是以  $M_0$  为中心、 $a$  为半径的球面, 此球完全落在区域  $\Omega$  的内部, 则有

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Gamma_a} u dS. \quad (4.13)$$

**证明** 把公式 (4.8) 应用到球面  $\Gamma_a$  上, 得

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma_a} \left[ u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS,$$

由性质 1 得

$$\iint_{\Gamma_a} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \frac{1}{a} \iint_{\Gamma_a} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0.$$

由于  $\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \Big|_{\Gamma_a} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) \Big|_{\Gamma_a} = -\frac{1}{a^2}$ , 于是

$$\iint_{\Gamma_a} u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS = -\frac{1}{a^2} \iint_{\Gamma_a} u dS,$$

所以下式成立

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Gamma_a} u dS.$$

下面我们假设  $\Omega$  是三维空间内的连通区域, 其边界记为  $\Gamma$ .

**性质 3 (极值原理)** 若函数  $u(x, y, z)$  在  $\Omega$  内调和, 在  $\Omega + \Gamma$  上连续, 且不为常数, 则它的最大值、最小值只能在边界  $\Gamma$  上达到.

**证明** 由平均值定理容易证明极值原理. 在证明中, 只要用  $-u$  代替  $u$ , 最小值的情况就可化为最大值情况. 这样, 我们只需证明最大值的情况就可以了.

用反证法. 假定函数  $u$  在  $\Omega$  内的某点  $M_1$  达到最大值, 那么就可推出  $u$  必恒等于常数. 这便与  $u$  不为常数的假定相矛盾了.

以  $M_1$  为心, 任意长  $R$  为半径作球  $K_R$ , 使它完全落在区域  $\Omega$  中, 记  $K_R$  的表面积为  $\Gamma_R$ , 则在  $\Gamma_R$  上  $u(M) = u(M_1)$ . 事实上, 若存在一点  $M \in K_R$ , 使得  $u(M) < u(M_1)$ , 则由函数的连续性, 必可找到此点在球面  $\Gamma_R$  上的一个邻域, 在此邻域中, 也有  $u(M) < u(M_1)$ . 因此, 即使在球面  $\Gamma_R$  的其余部分上  $u(M) = u(M_1)$ , 也有下面的严格不等式

$$\frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\Gamma_R} u(M) dS < \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\Gamma_R} u(M_1) dS = u(M_1).$$

但由平均值公式 (4.13), 有

$$\frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\Gamma_R} u(M) dS = u(M_1),$$

这就发生了矛盾. 因此, 在球面  $\Gamma_R$  上  $u$  恒等于  $u(M_1)$ . 同理, 在以  $M_1$  为心,

任意  $r$  ( $r \leq R$ ) 为半径的球面上,  $u$  也恒等于  $u(M_1)$ , 因此, 在整个球  $K_R$  中  $u$  恒等于常数  $u(M_1)$ .

现在证明对于  $\Omega$  中的所有点都成立  $u \equiv u(M_1)$ . 任取一点  $N \in \Omega$ , 在区域  $\Omega$  中作连接  $M_1, N$  两点的折线  $l$ , 记折线  $l$  到区域  $\Omega$  边界  $\Gamma$  的最小距离为  $d$  (如图 4.2 所示). 以  $M_1$  为心, 以小于  $d$  之数为半径在  $\Omega$  内作球  $K_1$ , 则在  $K_1$  上  $u(M) = u(M_1)$ . 设  $M_2$  是球  $K_1$  的表面  $\Gamma_1$  与折线  $l$  的交点, 则  $u(M_2) = u(M_1)$ . 以  $M_2$  为心, 以小于  $d$  之数为半径在  $\Omega$  内作球  $K_2$ , 在球  $K_2$  上  $u(M) = u(M_2) = u(M_1)$ , 设球  $K_2$  的表面  $\Gamma_2$  与折线  $l$  的交点为  $M_3$ , 则  $u(M_3) = u(M_2) = u(M_1)$ .

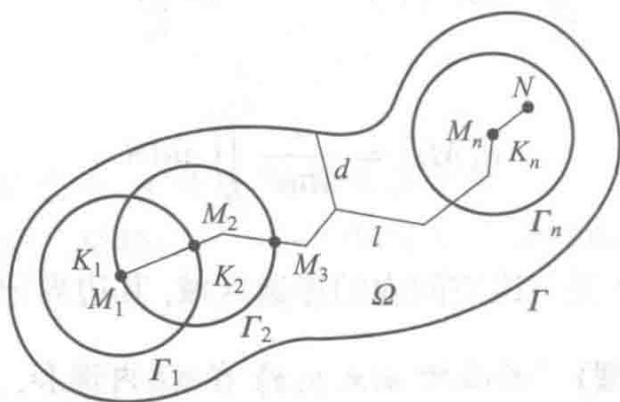


图 4.2

这样继续做下去, 经过有限次后 (设为  $n$  次), 点  $N$  一定包含在以某点  $M_n$  为中心, 以小于  $d$  之数为半径的球  $K_n$  内. 因而  $u(N) = u(M_n) = \cdots = u(M_1)$ . 这和  $u(M)$  不为常数的假定相矛盾. 因此,  $u$  不能在  $\Omega$  内取到最大值, 从而证得  $u$  的最大值只能在区域的边界  $\Gamma$  上达到.

**推论 (比较原理)** 设  $u$  和  $v$  都是区域  $\Omega$  内的调和函数, 且在  $\Omega + \Gamma$  上连续, 若在  $\Omega$  的边界  $\Gamma$  上成立着不等式  $u \leq v$ , 则在  $\Omega$  内该不等式同样成立, 且只有在  $\Gamma$  上满足  $u \equiv v$  时, 在  $\Omega$  内等号才成立.

**性质 4 (稳定性)** 设  $u_i(x, y, z)$  是狄利克雷问题

$$\begin{cases} \Delta u_i(x, y, z) = 0, & (x, y, z) \in \Omega, \\ u_i|_{\Gamma} = f_i(x, y, z) \end{cases} \quad (4.14)$$

的解 ( $i = 1, 2$ ), 则

$$\sup_{\Omega} |u_1 - u_2| = \max_{\Gamma} |f_1 - f_2|.$$

**证明** 由于  $u_1$  和  $u_2$  分别是问题 (4.14) 的解 ( $i = 1, 2$ ), 则  $u_1 - u_2$  是  $\Omega$  内的调和函数, 即  $\Delta(u_1 - u_2) = 0$ , 并且  $(u_1 - u_2)|_{\Gamma} = f_1 - f_2$ . 由极值原理知:

$$(u_1 - u_2)(x, y, z) \leq \max_{\Gamma} (f_1 - f_2) \leq \max_{\Gamma} |f_1 - f_2|, \quad (x, y, z) \in \Omega.$$

同理可证:

$$(u_2 - u_1)(x, y, z) \leq \max_{\Gamma} (f_2 - f_1) \leq \max_{\Gamma} |f_1 - f_2|, \quad (x, y, z) \in \Omega,$$

即

$$(u_1 - u_2)(x, y, z) \geq -\max_{\Gamma} |f_1 - f_2|, \quad (x, y, z) \in \Omega.$$

因此,

$$\sup_{\Omega} |u_1 - u_2| \leq \max_{\Gamma} |f_1 - f_2|.$$

推论 (唯一性) 狄利克雷问题

$$\begin{cases} \Delta u(x, y, z) = 0, & (x, y, z) \in \Omega, \\ u|_{\Gamma} = f(x, y, z) \end{cases} \quad (4.15)$$

最多只有一个解.

## §4.2 格林函数

对于在区域  $\Omega$  内调和、在  $\Omega + \Gamma$  上具有一阶连续偏导数的函数  $u$ , 我们有积分表达式 (4.8). 该式用函数  $u$  及其法向导数  $\frac{\partial u}{\partial n}$  在边界  $\Gamma$  上的值把函数  $u$  在区域  $\Omega$  内部的值表示了出来. 但狄利克雷问题或诺伊曼问题的解还不能直接由它求出来, 这是因为函数  $u$  及其法向导数  $\frac{\partial u}{\partial n}$  在边界  $\Gamma$  上的值, 二者中只可能给出一个. 比如, 对于狄利克雷问题,  $u$  在边界  $\Gamma$  上的值是已给定的, 而  $\frac{\partial u}{\partial n}$  在  $\Gamma$  上的值就不知道, 由于狄利克雷问题的解是唯一的, 因此  $\frac{\partial u}{\partial n}$  在  $\Gamma$  上的值就不能再任意给定了. 为了求解狄利克雷问题, 我们自然首先想到在公式 (4.8) 中设法消去  $\frac{\partial u}{\partial n}$ . 为此, 需引入格林函数的概念.

在格林第二公式 (4.6) 中, 取  $u, v$  均为区域  $\Omega$  内的调和函数, 并且在  $\Omega + \Gamma$  上具有一阶连续偏导数, 则得

$$0 = \iint_{\Gamma} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS.$$

将该式与 (4.8) 式, 即

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} \left[ u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{MM_0}} \right) - \frac{1}{r_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS$$

相加, 得

$$u(M_0) = \iint_{\Gamma} \left\{ u \left[ \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{MM_0}} \right) \right] + \left( \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} - v \right) \frac{\partial u}{\partial n} \right\} dS. \quad (4.16)$$

如果选取调和函数  $v$ , 使之满足

$$v|_{\Gamma} = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} \Big|_{\Gamma},$$

这样, (4.16) 式中含  $\frac{\partial u}{\partial n}$  的项就消失了, 于是有

$$u(M_0) = - \iint_{\Gamma} u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} - v \right) dS. \quad (4.17)$$

令

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} - v, \quad (4.18)$$

则 (4.17) 可化为

$$u(M_0) = - \iint_{\Gamma} u \frac{\partial G}{\partial n} dS. \quad (4.19)$$

$G(M, M_0)$  称为拉普拉斯方程的格林函数 (或称为狄利克雷问题的源函数). 由于函数  $G(M, M_0)$  在边界  $\Gamma$  上恒等于零, 因此如果格林函数  $G(M, M_0)$  已经知道, 而狄利克雷问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y, z) \in \Omega, \\ u|_{\Gamma} = f(x, y, z) \end{cases} \quad (4.20)$$

在  $\Omega + \Gamma$  上具有一阶连续偏导数的解存在的话, 那么问题 (4.20) 的解可表示为

$$u(M_0) = - \iint_{\Gamma} f(x, y, z) \frac{\partial G}{\partial n} dS. \quad (4.21)$$

对于泊松方程的狄利克雷问题

$$\begin{cases} \Delta u(x, y, z) = F, & (x, y, z) \in \Omega, \\ u|_{\Gamma} = f, \end{cases}$$

如果其解存在且在  $\Omega + \Gamma$  上有一阶连续偏导数, 则这个解必能表示为

$$u(M_0) = - \iint_{\Gamma} f \frac{\partial G}{\partial n} dS - \iiint_{\Omega} FG d\Omega.$$

应用公式 (4.21) 求解狄利克雷问题时, 关键在于要找到格林函数 (4.18), 其中  $v$  是一个特殊的狄利克雷问题

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & (x, y, z) \in \Omega, \\ v|_{\Gamma} = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} \Big|_{\Gamma} \end{cases} \quad (4.22)$$

的解. 由这个函数  $v$  确定的格林函数, 称为第一边值问题的格林函数.

对于一般的区域, 求解问题 (4.22) 也非易事, 但公式 (4.21) 还是有意义的, 理由如下. 第一, 格林函数仅依赖于区域, 而与边界条件无关. 如果求得了某个区域上的格林函数, 这个区域上的一切狄利克雷问题解的存在性也就得到了解决, 并且解由式 (4.21) 给出. 第二, 对于某些特殊区域, 如球域、半空间等, 可用初等方法求出格林函数, 而这些特殊区域上的狄利克雷问题在方程的研究中起着重要的作用.

现将格林函数的几个重要性质叙述如下:

**性质 1** 格林函数  $G(M, M_0)$  在除去  $M = M_0$  一点外处处满足拉普拉斯方程, 当  $M \rightarrow M_0$  时,  $G(M, M_0)$  趋于无穷大, 其阶数和  $\frac{1}{r_{MM_0}}$  相同.

**性质 2** 在边界  $\Gamma$  上格林函数  $G(M, M_0)$  恒等于零.

由式 (4.18) 和 (4.22), 格林函数的上述两个性质是不证自明的.

**性质 3** 在区域  $\Omega$  内, 下面不等式成立

$$0 < G(M, M_0) < \frac{1}{4\pi r_{MM_0}}.$$

**证明\*** 由于格林函数的表达式 (4.18) 中的  $v(M, M_0)$  满足 (4.22), 用极值原理便得  $v > 0$  ( $M \in \Omega$ ). 这就证明了右边的不等式.

现在证明  $G(M, M_0) > 0$ . 即证  $v(M, M_0) < \frac{1}{4\pi r_{MM_0}}$ . 因为  $\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}$  在  $M_0$  有奇性, 所以不能直接在  $\Omega$  上用极值原理. 注意  $v(M, M_0)$  是  $\Omega$  上的调和函数, 因此可选  $\epsilon$  充分小使在以  $M_0$  为球心,  $\epsilon$  为半径的闭球  $\bar{K}_\epsilon^{M_0}$  上

$$v(M, M_0) < \frac{1}{4\pi\epsilon}.$$

记  $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \bar{K}_\epsilon^{M_0}$ , 在  $\Omega_\epsilon$  上, 像证右边的不等式一样, 可得

$$v(M, M_0) < \frac{1}{4\pi r_{MM_0}}.$$

而在闭球  $\bar{K}_\epsilon^{M_0}$  上,

$$v(M, M_0) < \frac{1}{4\pi\epsilon} \leq \frac{1}{4\pi r_{MM_0}}$$

是显然的. 性质 3 得证.

**性质 4** 格林函数  $G(M, M_0)$  关于自变量  $M$  及参变量  $M_0$  之间具有对称关系, 即若  $M_1, M_2$  为区域  $\Omega$  中的两点, 则

$$G(M_1, M_2) = G(M_2, M_1).$$

**证明\*** 记从  $\Omega$  挖去分别以  $M_1$  和  $M_2$  为球心, 以充分小的正数为半径的两个小球后所得的区域为  $\Omega''$ . 对  $G(M, M_1), G(M, M_2)$  在  $\Omega''$  上应用格林第二公式, 有

$$\iint_{\Gamma''} \left[ G(M, M_1) \frac{\partial G(M, M_2)}{\partial n} - G(M, M_2) \frac{\partial G(M, M_1)}{\partial n} \right] dS = 0,$$

这里  $\Gamma''$  由  $\Gamma$  及两小球面组成. 因  $G|_\Gamma = 0$ , 故沿  $\Gamma$  的积分为零. 令两小球的半径趋于零, 则绕  $M_1$  的球面积分趋于  $G(M_1, M_2)$ , 而绕  $M_2$  的球面积分趋于  $-G(M_2, M_1)$ , 故有  $G(M_1, M_2) = G(M_2, M_1)$ . 性质 4 得证.

**注 4.3** 这个性质在电学上的意义可以这样来描述:  $M_1$  处的单位点电荷在  $M_2$  处产生的电位等于  $M_2$  处单位点电荷在  $M_1$  处所产生的电位. 类似于这样的原理, 在物理学中称为**互易原理**.

**性质 5** 格林函数满足:

$$\iint_{\Gamma} \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n} dS = -1.$$

**证明** 考察下列狄利克雷问题:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y, z) \in \Omega, \\ u|_\Gamma = 1. \end{cases}$$

由式 (4.21), 这个问题的解为

$$u(M_0) = - \iint_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n} dS.$$

另一方面, 由极值原理知这个问题的解  $u \equiv 1$ . 根据狄利克雷问题解的唯一性,

得

$$1 = - \iint_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n} dS.$$

**注 4.4** 格林函数在静电学中的物理意义是: 设在点  $M_0$  处置一单位正电荷, 则在自由空间中, 它所产生的电位为  $\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}$ . 如果在  $M_0$  点处的点电荷是包围在一个封闭的导电面内, 而这个导电面又是接地的, 则此时在导电面内的电位, 可用函数

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} - v$$

来表示, 它在导电面上恒等于零, 其中的函数  $-v$  正好表示导电面上感应电荷所产生的电位.

### §4.3 格林函数的应用

由公式

$$u(M_0) = - \iint_{\Gamma} f(M) \frac{\partial G}{\partial n} dS$$

可知, 对于一个由曲面  $\Gamma$  围成的区域  $\Omega$  来说, 只要求出了它的格林函数, 则在这个区域内, 狄利克雷问题的解就可用积分表示出来. 对于某些特殊的区域, 它的格林函数可用静电源像法 (镜像法) 求得. 所谓镜像法, 就是在区域  $\Omega$  外找出点  $M_0$  关于边界  $\Gamma$  的像点 (对称点)  $M_1$ , 然后在这个像点  $M_1$  处置适当的负电荷, 由它所产生的负电位与点  $M_0$  处的单位正电荷所产生的正电位在曲面  $\Gamma$  上相互抵消, 此时二者形成的电场在  $\Gamma$  内的电位, 就相当于所要求的格林函数. 下面, 我们以半空间、球域为例来说明镜像法的应用.

#### §4.3.1 半空间的格林函数及狄利克雷问题

求解上半空间  $z > 0$  内的狄利克雷问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 & (z > 0), \end{cases} \quad (4.23)$$

$$\begin{cases} u|_{z=0} = f(x, y), & -\infty < x, y < +\infty, \end{cases} \quad (4.24)$$

先求出格林函数  $G(M, M_0)$ . 为此, 在上半空间  $z > 0$  的点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  处置一单位正电荷, 在点  $M_0$  关于平面  $z = 0$  的对称点  $M_1(x_0, y_0, -z_0)$  处置一单位负电荷, 如图 4.3 所示. 由它们所形成的静电场的电位在平面  $z = 0$  上恰好为零. 因此, 上半空间的格林函数为

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{1}{r_{MM_1}} \right). \quad (4.25)$$

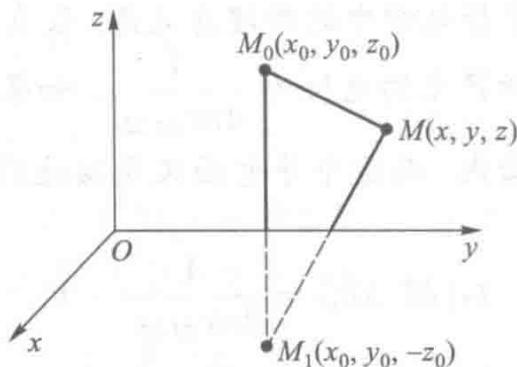


图 4.3

为了求得问题 (4.23)、(4.24) 的解, 需要计算  $\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{z=0}$ . 由于在平面  $z=0$  上的外法线方向是  $Oz$  轴的负向, 因此

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{z=0} &= - \left. \frac{\partial G}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{z - z_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} - \right. \\ &\quad \left. \frac{z + z_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2]^{3/2}} \right\} \Big|_{z=0} \quad (4.26) \\ &= - \frac{1}{2\pi} \frac{z_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2]^{3/2}}. \end{aligned}$$

将式 (4.26) 代入式 (4.21) 中, 得到定解问题 (4.23)、(4.24) 的解为<sup>①</sup>

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \frac{z_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2]^{3/2}} dx dy. \quad (4.27)$$

**例 4.1** 设在均匀的半空间的边界上保持定常温度, 且在圆  $K: x^2 + y^2 < 1$  之内等于 1, 而在其外等于零. 求在半空间内的温度的稳定分布.

**解** 由 (4.27) 式

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{z_0}{2\pi} \iint_K \frac{dx dy}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2]^{3/2}}.$$

<sup>①</sup> 这里所考虑的区域是无限区域, 只要函数  $u(x, y, z)$  在无穷远点是正则的, 即函数  $u(x, y, z)$  当  $r \geq r_0$  时, 满足

$$|u| < \frac{A}{r}, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| < \frac{A}{r^2}, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| < \frac{A}{r^2}, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| < \frac{A}{r^2},$$

则公式 (4.21) 对于包含无穷远点的区域依然成立.

特别地, 在  $Oz$  轴的正半轴 ( $x_0 = 0, y_0 = 0$ ) 上, 有

$$u(0, 0, z_0) = \frac{z_0}{2\pi} \iint_K \frac{dxdy}{(x^2 + y^2 + z_0^2)^{3/2}}.$$

由于积分区域  $K$  为圆域, 应用极坐标:  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ , 得

$$u(0, 0, z_0) = \frac{z_0}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{rdrd\theta}{(r^2 + z_0^2)^{3/2}} = z_0 \int_0^1 \frac{rdr}{(r^2 + z_0^2)^{3/2}} = 1 - \frac{z_0}{(1 + z_0^2)^{1/2}}.$$

于是, 当点  $(0, 0, z_0)$  沿  $Oz$  轴的正半轴趋于无穷远时,  $u(0, 0, z_0) \rightarrow 0$ .

#### §4.3.2 球域的格林函数及狄利克雷问题

求解球域上的狄利克雷问题:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, & (x, y, z) \in \Omega, \end{cases} \quad (4.28)$$

$$\begin{cases} u|_{\Gamma} = f(x, y, z). \end{cases} \quad (4.29)$$

其中  $\Omega$  是以  $O$  为心,  $R$  为半径的球域, 它的边界为  $\Gamma$ .

现在利用静电源像法求球的格林函数, 为此, 在球内任取一点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , 在半射线  $OM_0$  上截取线段  $OM_1$ , 使

$$r_0 \cdot r_1 = R^2, \quad (4.30)$$

其中  $r_0 = r_{OM_0}$ ,  $r_1 = r_{OM_1}$ . 点  $M_1$  称为点  $M_0$  关于球面  $\Gamma$  的反演点或对称点, 如图 4.4 所示. 在点  $M_0$  处置单位正电荷, 在点  $M_1$  处置  $q$  单位的负电荷, 我们要适当地选取  $q$  的值, 使得这两个点电荷所产生的电位在球面  $\Gamma$  上正好抵消. 设  $P$  是球面上任一点, 就应该成立

$$\frac{1}{4\pi r_{PM_0}} = \frac{q}{4\pi r_{PM_1}},$$

由此得

$$q = \frac{r_{PM_1}}{r_{PM_0}}.$$

由于  $\triangle OPM_0$  与  $\triangle OM_1P$  在点  $O$  有公共角, 而夹此角的相应两边按 (4.30) 式成比例, 因此这两个三角形相似. 从而有

$$\frac{r_{PM_1}}{r_{PM_0}} = \frac{R}{r_0},$$

所以

$$q = \frac{R}{r_0},$$

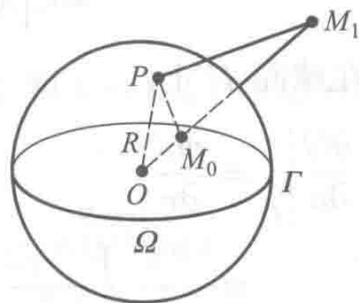


图 4.4

也就是说我们必须在点  $M_1$  处放置  $\frac{R}{r_0}$  单位的负电荷. 由此得

$$v = \frac{1}{4\pi} \frac{R}{r_0} \frac{1}{r_{MM_1}}.$$

这样一来, 以  $\Gamma$  为球面的球的格林函数就是

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{R}{r_0} \frac{1}{r_{MM_1}} \right). \quad (4.31)$$

为了求得问题 (4.28)、(4.29) 的解, 我们要算出  $\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_r$ . 注意到

$$\frac{1}{r_{MM_0}} = \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + r^2 - 2r_0r \cos \gamma}},$$

$$\frac{1}{r_{MM_1}} = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r^2 - 2r_1r \cos \gamma}},$$

其中  $r = r_{OM}$ ,  $\gamma$  是  $OM_0$  和  $OM$  的夹角 (也是  $OM_1$  和  $OM$  的夹角), 并利用 (4.30) 式, 得球域的格林函数为

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + r^2 - 2r_0r \cos \gamma}} - \frac{R}{\sqrt{r^2 r_0^2 - 2R^2 r r_0 \cos \gamma + R^4}} \right].$$

在球面  $\Gamma$  上,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{\Gamma} &= \left. \frac{\partial G}{\partial r} \right|_{r=R} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{r - r_0 \cos \gamma}{(r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \gamma)^{3/2}} - \frac{(r_0^2 r - R^2 r_0 \cos \gamma) R}{(r_0^2 r^2 - 2R^2 r r_0 \cos \gamma + R^4)^{3/2}} \right\} \Big|_{r=R} \\ &= -\frac{1}{4\pi R} \frac{R^2 - r_0^2}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \gamma)^{3/2}}. \end{aligned}$$

因此, 由式 (4.21) 得到问题 (4.28)、(4.29) 的解的表达式为

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R} \iint_{\Gamma} f(x, y, z) \frac{R^2 - r_0^2}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \gamma)^{3/2}} dS. \quad (4.32)$$

在球坐标系中, 上式变为

$$u(r_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(R, \theta, \varphi) \frac{R^2 - r_0^2}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \gamma)^{3/2}} \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (4.33)$$

其中  $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$  是点  $M_0$  的球坐标,  $(R, \theta, \varphi)$  是球面  $\Gamma$  上点的流动坐标,  $\cos \gamma$

是  $\overrightarrow{OM_0}$  与  $\overrightarrow{OP}$  夹角的余弦. 因为向量  $\overrightarrow{OM_0}$ ,  $\overrightarrow{OP}$  的方向余弦分别为

$$(\sin \theta_0 \cos \varphi_0, \sin \theta_0 \sin \varphi_0, \cos \theta_0), \quad (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta),$$

所以

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 (\cos \varphi \cos \varphi_0 + \sin \varphi \sin \varphi_0) \\ &= \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0). \end{aligned}$$

公式 (4.32) 或 (4.33) 称为球的泊松公式.

**例 4.2** 设有一半径为  $R$  的均匀球, 上半球面的温度保持为  $0^\circ\text{C}$ , 下半球面的温度保持为  $1^\circ\text{C}$ . 求球内温度的稳定分布.

**解** 这个问题归结为

$$\begin{cases} \Delta u(r, \theta, \varphi) = 0 & (r < R), \\ u|_{r=R} = \begin{cases} 0, & 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \frac{\pi}{2} < \theta < \pi. \end{cases} \end{cases}$$

由公式 (4.33) 得

$$u(r_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{R^2 - r_0^2}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \gamma)^{3/2}} \sin \theta d\theta d\varphi.$$

特别地, 求温度在球的铅垂直径:  $\theta = 0$  (直径的上半部分) 和  $\theta = \pi$  (下半部分) 上的分布. 当  $\theta_0 = 0$  时,  $\cos \gamma = \cos \theta$ , 故

$$\begin{aligned} u(r_0, 0, \varphi_0) &= \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{R^2 - r_0^2}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \gamma)^{3/2}} \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{R}{2} \left[ -\frac{R^2 - r_0^2}{Rr_0(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \theta)^{1/2}} \right]_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\theta=\pi} \\ &= \frac{1}{2} \frac{R^2 - r_0^2}{r_0} \left( \frac{1}{\sqrt{R^2 + r_0^2}} - \frac{1}{R + r_0} \right); \end{aligned}$$

而当  $\theta_0 = \pi$  时,  $\cos \gamma = -\cos \theta$ , 故

$$u(r_0, \pi, \varphi_0) = \frac{1}{2} \frac{R^2 - r_0^2}{r_0} \left( \frac{1}{R - r_0} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + r_0^2}} \right).$$

由这两个公式, 当  $r_0 \rightarrow 0$  时得球心的温度为  $\frac{1}{2}$ .

## §4.4 试探法、泊松方程求解

### §4.4.1 试探法

对于实际问题中提出的某些定解问题, 根据问题的物理意义和几何特征, 可假设解具有某种形式并代入试探, 这就叫做试探法 (见注 2.3). 仅以下面几个例题来说明这种方法.

**例 4.3** 设有中心轴为  $z$  轴, 半径为  $R$  的无限长均匀圆柱体, 已知其圆柱面上的温度分布为  $xy$ , 试求圆柱内温度的稳定分布.

**解** 由于圆柱面上给定的温度与  $z$  无关, 因而垂直于  $z$  轴的各个圆片有相同的温度分布, 故所给空间问题可化为平面问题. 因为边界形状是个圆周, 采用极坐标较方便, 所以我们就在极坐标系下求解所述问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 & (r < R), \\ u|_{r=R} = \frac{1}{2} R^2 \sin 2\theta. \end{cases}$$

设它的解为  $u(r, \theta) = Ar^2 \sin 2\theta + B$ , 这里  $A, B$  为待定常数. 容易验证函数  $u(r, \theta) = Ar^2 \sin 2\theta + B$  是满足方程的, 现由边界条件确定常数  $A$  和  $B$ . 由于

$$u|_{r=R} = AR^2 \sin 2\theta + B = \frac{1}{2} R^2 \sin 2\theta,$$

于是得  $A = \frac{1}{2}, B = 0$ . 故原问题的解为

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta, \quad \text{即 } u(x, y) = xy.$$

**例 4.4** 求圆柱域  $r < R$  内的电位  $u$ , 使在柱面上有给定的电场强度法向分量:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{r=R} = (x + y)|_{r=R}.$$

**解** 仿照例 4.3 的讨论, 知这个问题可化为

$$\begin{cases} \Delta u(r, \theta) = 0 & (r < R), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{r=R} = \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = R \cos \theta + R \sin \theta. \end{cases}$$

设这个问题的解为  $u(r, \theta) = Ar \cos \theta + Br \sin \theta + C$ , 其中  $A, B$  和  $C$  为待定常

数. 这个函数满足方程是显然的, 为了使它也满足边界条件, 由边界条件得

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{r=R} = \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = A \cos \theta + B \sin \theta = R \cos \theta + R \sin \theta.$$

由此, 得  $A = B = R$ . 于是得原问题的解为

$$u(r, \theta) = Rr(\cos \theta + \sin \theta) + C.$$

**例 4.5** 求由两同心球面导体  $r = r_1$  和  $r = r_2$  做成的电容器内的电位, 使内球面  $r = r_1$  保持定常电位  $v_0$ , 外球面接地.

**解** 由于区域为球壳, 所以采用球坐标比较方便. 在球坐标系下上述问题归结为

$$\begin{cases} \Delta u(r, \theta, \varphi) = 0 & (r_1 < r < r_2), \\ u|_{r=r_1} = v_0, u|_{r=r_2} = 0. \end{cases}$$

由边界条件知球内电位的分布仅与  $r$  有关, 即电位函数是球对称的, 而电位与  $r$  成反比, 故可设  $u(r) = \frac{A}{r} + B$ , 其中  $A$  和  $B$  为待定常数. 由 §4.1 知这个函数在球壳  $r_1 < r < r_2$  内确实满足方程. 为了确定  $A$  和  $B$ , 由边界条件, 得

$$\frac{A}{r_1} + B = v_0, \quad \frac{A}{r_2} + B = 0,$$

解之得

$$A = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} v_0, \quad B = -\frac{r_1}{r_2 - r_1} v_0.$$

故所求的电位为

$$u = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right) v_0.$$

#### §4.4.2 泊松方程求解

如果我们知道泊松方程的一个特解, 则通过函数代换, 就可把泊松方程的边值问题化成拉普拉斯方程的边值问题. 泊松方程的特解需要凭自己的判断找出, 在有些情况下是不难得到的. 如果自由项是自变量的一个  $n$  次多项式, 则可取方程的特解为自变量的一个  $n + 2$  次多项式, 将其代入方程并比较等式两边对应项的系数, 来确定其中的常数.

**例 4.6** 求方程  $u_{xx} + u_{yy} = xy$  的特解.

**解** 由于  $f(x, y) = xy$  是自变量  $x, y$  的一个二次多项式, 为了计算上的方便, 不妨取它的特解为

$$w(x, y) = Ax^3y + Bxy^3.$$

代入方程, 得

$$6(A+B)xy = xy,$$

由此推出  $6(A+B) = 1$ . 取  $B = 0$ , 则得  $A = \frac{1}{6}$ , 于是  $w_1(x, y) = \frac{1}{6}x^3y$ ; 取  $A = 0$ , 则得  $w_2(x, y) = \frac{1}{6}xy^3$ ; 若取  $A = B = \frac{1}{12}$ , 此时得  $w_3(x, y) = \frac{1}{12}xy(x^2 + y^2)$ . 当然还可以求出很多很多其他的特解.

**例 4.7** 求下列问题的解:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = -4 & (x^2 + y^2 < a^2), \\ u|_{x^2+y^2=a^2} = 0. \end{cases}$$

**解** 显然, 泊松方程有一个特解  $w(x, y) = -(x^2 + y^2)$ . 令  $u = v(x, y) - (x^2 + y^2)$ , 则上述问题化为

$$\begin{cases} \Delta v(x, y) = 0, \\ v|_{x^2+y^2=a^2} = a^2. \end{cases}$$

由极值原理, 上述问题的解  $v(x, y) = a^2$ , 所以原问题的解为

$$u(x, y) = a^2 - (x^2 + y^2).$$

**例 4.8** 求解:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y, z) = -6 & (x^2 + y^2 + z^2 < a^2), \\ u|_{x^2+y^2+z^2=a^2} = a^2. \end{cases}$$

**解** 显然, 可取  $w(x, y, z) = -(x^2 + y^2 + z^2)$ . 令

$$u = v(x, y, z) - (x^2 + y^2 + z^2),$$

则上述问题可化为

$$\begin{cases} \Delta v(x, y, z) = 0, \\ v|_{x^2+y^2+z^2=a^2} = 2a^2. \end{cases}$$

由极值原理, 该问题有解  $v(x, y, z) = 2a^2$ , 所以原问题的解为

$$u(x, y, z) = 2a^2 - (x^2 + y^2 + z^2).$$

在应用中, 我们还会经常遇到狄利克雷外问题和诺伊曼外问题. 由于外问题是在无界区域上提出的, 需要附加如下的条件:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(x, y, z) = 0 \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}). \quad (4.34)$$

从数学上讲, 有了条件 (4.34) 就能保证外问题的解是唯一的, 况且在电学上也总是把无穷远处的电位取为零.

**狄利克雷外问题** 在空间  $(x, y, z)$  的某一封闭曲面  $\Gamma$  上给定一个连续函数  $f(x, y, z)$ , 要找这样一个函数  $u(x, y, z)$ , 在  $\Gamma$  的外部区域  $\Omega'$  内满足拉普拉斯方程 (无穷远点除外), 在  $\Omega' + \Gamma$  上连续, 并且满足条件 (4.34) 及条件

$$u|_{\Gamma} = f(x, y, z).$$

**诺伊曼外问题** 在空间  $(x, y, z)$  的光滑闭曲面  $\Gamma$  上给定连续函数  $f(x, y, z)$ , 要找这样一个函数  $u(x, y, z)$ , 在  $\Gamma$  的外部区域  $\Omega'$  内满足拉普拉斯方程 (无穷远点除外), 在  $\Omega' + \Gamma$  上连续, 在  $\Gamma$  上任一点的法向导数  $\frac{\partial u}{\partial n'}$  存在, 并且满足条件 (4.34) 及条件

$$\frac{\partial u}{\partial n'} \Big|_{\Gamma} = f(x, y, z),$$

其中  $n'$  是  $\Gamma$  的内法线.

为了和外问题相区别, 我们把原来的狄利克雷问题和诺伊曼问题分别称为狄利克雷内问题和诺伊曼内问题. 讨论内问题时所使用的方法, 也可以用于外问题.

## §4.5 本章小结及补充知识

### §4.5.1 本章小结

这一章首先利用拉普拉斯方程的基本解以及格林公式给出了一个边界积分公式

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} \left[ u(M) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{MM_0}} \right) - \frac{1}{r_{MM_0}} \frac{\partial u(M)}{\partial n} \right] dS.$$

从该表达式出发, 可推出调和函数的平均值公式, 进一步, 可建立调和函数的最大值原理. 此外, 我们由此建立有关狄利克雷问题解的唯一性、稳定性等重要性质.

另一方面, 这个表达式中不理想的地方在于既要知道调和函数的边界值, 同时又要知道其导数的边界值. 一个自然的想法是设法将边界积分中的  $\frac{\partial u(M)}{\partial n}$  这一项消去. 为此我们寻找另一调和函数  $v$ , 使得其在边界满足

$$v|_{\Gamma} = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} \Big|_{\Gamma},$$

并称  $G = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} - v(M, M_0)$  为格林函数, 从而得到调和函数的表示公式

$$u(M_0) = - \iint_{\Gamma} u \frac{\partial G}{\partial n} dS.$$

作为应用, 在本章末, 我们给出两种特殊区域 (球域, 半空间) 的格林函数.

通过本章的学习, 读者应了解第一边值问题格林函数的定义; 能用镜像法求出某些特殊区域上第一边值问题的格林函数; 会用格林函数建立狄利克雷问题解的积分表达式; 了解格林第一、第二公式及调和函数的基本性质.

#### §4.5.2 补充知识

设  $D$  是以平面上足够光滑的封闭曲线  $C$  为边界的有界开区域,  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  是在闭区域  $D + C$  上连续, 在  $D$  内有连续偏导数的任意函数, 由微积分学我们知道如下的格林公式成立

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = \int_C [P \cos(\tau, x) + Q \cos(\tau, y)] ds, \quad (4.35)$$

其中  $d\sigma$  是面积元素,  $\tau$  是  $C$  的单位切向量, 其正向按右手定则确定,  $ds$  是  $C$  上的弧长微元.

我们用  $n$  表示边界  $C$  上的单位外法线方向, 则容易验证:  $\cos(\tau, x) = -\cos(n, y)$ ,  $\cos(\tau, y) = \cos(n, x)$  (最简单的证法是借助于单位复数的旋转变换). 代入式 (4.35) 得

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = \int_C [-P \cos(n, y) + Q \cos(n, x)] ds. \quad (4.36)$$

设  $f(x, y), g(x, y)$  是与  $P(x, y), Q(x, y)$  具有相同性质的函数, 在 (4.36) 中令  $P(x, y) = -g(x, y)$ ,  $Q(x, y) = f(x, y)$  得

$$\iint_D \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) d\sigma = \int_C [f \cos(n, x) + g \cos(n, y)] ds. \quad (4.37)$$

公式 (4.37) 是格林公式 (4.35) 的一种等价表示形式, 它在研究二维拉普拉斯方程时与高斯公式 (4.3) 在三维问题上所起的作用是一样的. 特别地, 借助于格林公式 (4.37), 利用类似于本章的方法读者可以自主完成习题四的 1—4 题, 并且三维调和函数的性质在二维情况下也成立, 请读者自己补证.

## 习题四

1. 设  $D$  是以光滑闭曲线  $C$  为边界的有界区域, 函数  $u(x, y)$  和  $v(x, y)$  在  $D + C$  上具有一阶连续偏导数, 在区域  $D$  内具有二阶连续偏导数, 证明平面上的第二格林公式:

$$\iint_D (u\Delta v - v\Delta u) d\sigma = \int_C \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds.$$

2. 在二维情况下, 证明调和函数的积分表达式

$$u(M_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_C \left[ u \frac{\partial}{\partial n} \left( \ln \frac{1}{r} \right) - \ln \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] ds.$$

3. 试定义平面上第一边值问题的格林函数, 并导出平面上狄利克雷问题

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & (x, y) \in D, \\ u|_C = f(x, y) \end{cases}$$

的解的积分表达式.

4. 在半平面  $y > 0$  内求解拉普拉斯方程  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ , 其边界条件为:  $u|_{y=0} = f(x)$ .

5. 设函数  $u(x, y)$  是单位圆上的调和函数, 在圆周上的数值已知为  $\sin \theta$ . 问函数  $u$  在原点的值等于多少?

6. 求无限圆柱域  $r = \sqrt{x^2 + y^2} < R$  内的无源稳定温度场, 已知柱面温度分布:

$$u|_{r=R} = A \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta,$$

其中  $A, B$  为常数.

7. 求解下列问题:

$$(1) \begin{cases} \Delta u(r, \theta) = 1 & (0 < r < a, 0 < \theta < 2\pi), \\ u|_{r=a} = 0; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & (x^2 + y^2 < a^2), \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x^2 + y^2 = a^2} = Ax; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \Delta u(x, y, z) = 0 & (x^2 + y^2 + z^2 < R^2), \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x^2 + y^2 + z^2 = R^2} = A. \end{cases}$$

8. 利用球内狄利克雷问题的泊松公式求积分

$$\iint_{\Gamma} \frac{dS}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \gamma)^{3/2}}.$$

其中  $\Gamma$  是以原点为心  $R$  为半径的球面.

\*9. 证明平面区域  $D$  上格林函数的对称性:  $G(M_1, M_2) = G(M_2, M_1)$ .

\*10. 试证明圆域  $x^2 + y^2 \leq R^2$  上的格林函数为

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \left[ \ln \frac{1}{r_{M_0 M}} - \ln \left( \frac{R}{r_0} \frac{1}{r_{M_1 M}} \right) \right],$$

其中  $r_0 = OM_0$ ,  $M_1$  是  $M_0$  关于圆周  $x^2 + y^2 = R^2$  的反演点.

11. 用试探法求出泊松方程  $u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = f(r, \theta)$  的一个解, 其中:

(1)  $f(r, \theta) = -\sin \theta$ ; (2)  $f(r, \theta) = r$ .

# 贝塞尔函数

在应用分离变量法解其他偏微分方程的定解问题时,也会导出其他形式的常微分方程边值问题,从而引出各种各样坐标函数系.这些坐标函数系就是人们常说的特殊函数.本章和随后的两章我们将分别介绍贝塞尔(Bessel)函数,勒让德(Legendre)多项式和埃尔米特(Hermite)多项式.

本章,我们将通过在柱坐标系中对定解问题进行分离变量,导出贝塞尔方程;然后讨论这个方程的解法及解的有关性质;最后介绍贝塞尔函数在解决数学物理中有关定解问题的一些应用.

## §5.1 贝塞尔方程及贝塞尔函数

### §5.1.1 贝塞尔方程的导出

当应用分离变量法解决圆形膜的振动问题或薄圆盘上瞬时温度分布规律时,我们就会遇到贝塞尔方程.下面,我们以圆盘的瞬时温度分布为例来导出贝塞尔方程.

设有半径为  $R$  的圆形薄盘,上下两面绝热,圆盘边界上的温度始终保持为零度,且初始温度分布为已知,求圆盘内的瞬时温度分布规律.

这个问题归结为求解下列定解问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) & (x^2 + y^2 < R^2), \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\begin{cases} u|_{x^2+y^2=R^2} = 0, \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x, y). \end{cases} \quad (5.3)$$

应用分离变量法求这个问题的解.为此,令  $u(x, y, t) = V(x, y)T(t)$ , 代入方程 (5.1) 得

$$VT' = a^2(V_{xx} + V_{yy})T,$$

用  $\frac{1}{a^2VT}$  乘之,得(其中  $\lambda$  为常数)

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{V_{xx} + V_{yy}}{V} = -\lambda,$$

于是有

$$T' + \lambda a^2 T = 0, \quad (5.4)$$

$$V_{xx} + V_{yy} + \lambda V = 0. \quad (5.5)$$

方程 (5.4) 的通解为

$$T(t) = Ae^{-\lambda a^2 t}.$$

方程 (5.5) 称为亥姆霍兹 (Helmholtz) 方程, 由 (5.2) 知  $V$  应满足条件

$$V|_{x^2+y^2=R^2} = 0. \quad (5.6)$$

当  $\lambda \leq 0$  时, 定解问题 (5.5)、(5.6) 只有零解 (提示: 将方程 (5.5) 两边同乘以  $V$ , 并在圆盘上积分, 利用分部积分和齐次边界条件 (5.6) 可得). 因此, 以下考虑  $\lambda > 0$  的情形.

为了求出方程 (5.5) 满足条件 (5.6) 的非零解, 我们采用平面上的极坐标系, 则得定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \theta^2} + \lambda \bar{V} = 0 & (0 < r < R), \\ \bar{V}|_{r=R} = 0. \end{cases} \quad (5.7)$$

$$(5.8)$$

再令  $\bar{V}(r, \theta) = F(r)G(\theta)$ , 代入方程 (5.7) 得

$$F''G + \frac{1}{r}F'G + \frac{1}{r^2}FG'' + \lambda FG = 0,$$

两端乘以  $\frac{r^2}{FG}$ , 移项得

$$\frac{G''}{G} = -\frac{r^2 F'' + rF' + \lambda r^2 F}{F} = -\mu,$$

其中  $\mu$  为常数. 于是有

$$G'' + \mu G = 0, \quad (5.9)$$

$$r^2 F'' + rF' + (\lambda r^2 - \mu)F = 0. \quad (5.10)$$

由于温度函数  $u(x, y, t)$  是单值的, 所以  $V(x, y)$  也必是单值函数, 因此  $G(\theta)$  应该是以  $2\pi$  为周期的周期函数. 这样一来  $\mu = n^2$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), 由此得方程 (5.9) 的解为

$$G_0(\theta) = \frac{1}{2}a_0 \quad (a_0 \text{ 为常数}),$$

$$G_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta \quad (n = 1, 2, \dots).$$

将  $\mu = n^2$  代入方程 (5.10), 得

$$r^2 F'' + rF' + (\lambda r^2 - n^2)F = 0, \quad (5.11)$$

该方程叫做  $n$  阶贝塞尔方程. 由 (5.8) 式得

$$F(R) = 0.$$

由于圆盘上的温度是有限的, 特别在圆心处也应如此, 由此可得  $|F(0)| < +\infty$ , 因此. 原定解问题的最后解决就归结为求问题

$$\begin{cases} r^2 F'' + rF' + (\lambda r^2 - n^2)F = 0, \\ F(R) = 0, \quad |F(0)| < +\infty \end{cases}$$

的固有值与固有函数.

若令  $x = \sqrt{\lambda}r$ , 并记  $F(r) = F\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) = y(x)$ , 则方程 (5.11) 可化为

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0. \quad (5.12)$$

方程 (5.12) 是具有变系数的二阶线性常微分方程, 它的解称为贝塞尔函数. 因为它们在各种发生在柱形域 (或在圆形域) 中的实际物理现象的数学描述中起着非常重要的作用, 故亦称之为柱函数.

### §5.1.2 贝塞尔函数

方程 (5.12) 是在解决圆盘上温度分布的这个具体情况下得到的, 因此, 我们只限于讨论  $n$  为实数的情形.

由微分方程解的理论知: 方程 (5.12) 有如下形式的广义幂级数解:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{s+k} \quad (a_0 \neq 0), \quad (5.13)$$

其中  $s$  为常数, 下面来确定  $s$  和  $a_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). 为此, 将 (5.13) 及

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (s+k) x^{s+k-1}, \\ y''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (s+k-1)(s+k) x^{s+k-2} \end{aligned}$$

代入方程 (5.12), 得到关于  $x$  的恒等式

$$(s^2 - n^2)a_0x^s + [(s+1)^2 - n^2]a_1x^{s+1} + \sum_{k=2}^{\infty} \{[(s+k)^2 - n^2]a_k + a_{k-2}\}x^{s+k} = 0,$$

故有

$$(s^2 - n^2)a_0 = 0, \quad (5.14)$$

$$[(s+1)^2 - n^2]a_1 = 0, \quad (5.15)$$

$$[(s+k)^2 - n^2]a_k + a_{k-2} = 0 \quad (k = 2, 3, \dots). \quad (5.16)$$

由于  $a_0 \neq 0$ , 从 (5.14) 可得  $s_1 = n, s_2 = -n$ . 下面分三种情形讨论.

**情形 1** 如果  $n$  不是整数 (包括零) 且不是半奇数, 则  $s_1 - s_2 = 2n$  也不是整数. 先取  $s_1 = n$ , 代入 (5.15) 得  $a_1 = 0$ , 代入 (5.16) 得

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(2n+k)}. \quad (5.17)$$

由 (5.17) 知  $a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0$ , 而

$$a_2 = -\frac{1}{2(2n+2)}a_0,$$

$$a_4 = \frac{1}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)}a_0,$$

.....

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{1}{2^{2m} m! (n+1)(n+2)\dots(n+m)} a_0.$$

由于  $a_0$  是一个任意常数, 我们可以这样来选取它的值: 使一般项系数中 2 与  $x$  有相同次数, 并且同时使分母简化. 为此取

$$a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)},$$

利用递推公式  $n\Gamma(n) = \Gamma(n+1)$ , 则一般项的系数变为

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{1}{2^{n+2m} m! \Gamma(n+m+1)}.$$

将所求得的系数代回 (5.13) 中, 得到方程 (5.12) 的一个特解, 记作

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{n+2m}}{2^{n+2m} m! \Gamma(n+m+1)}, \quad (5.18)$$

$J_n(x)$  称为  $n$  阶第一类贝塞尔函数. 用达朗贝尔判别法容易判定这个级数在整个实轴上是绝对收敛的.

再令  $s_2 = -n$ , 此时取

$$a_0 = \frac{1}{2^{-n}\Gamma(-n+1)},$$

可得方程的另外一个特解, 记作

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{-n+2m}}{2^{-n+2m} m! \Gamma(-n+m+1)}, \quad (5.19)$$

$J_{-n}(x)$  称为  $-n$  阶第一类贝塞尔函数. 由于  $n \neq -n$ , 所以  $J_n(x)$  与  $J_{-n}(x)$  线性无关, 由齐次线性常微分方程解的结构定理知, 方程 (5.12) 的通解为

$$y(x) = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x), \quad (5.20)$$

其中  $A, B$  为两个任意常数. 如果在 (5.20) 中取  $A = \cot n\pi$ ,  $B = -\csc n\pi$ , 则得方程 (5.12) 另一个与  $J_n(x)$  线性无关的特解, 记作

$$Y_n(x) = \frac{J_n(x) \cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}. \quad (5.21)$$

因此, 方程 (5.12) 的通解可以写成

$$y(x) = CJ_n(x) + DY_n(x), \quad (5.22)$$

其中  $C, D$  为两个任意常数.  $Y_n(x)$  称为第二类贝塞尔函数或诺伊曼函数.

**情形 2** 如果  $n$  为整数 (包括零), 则  $s_1 - s_2 = 2n$  也为整数. 依照前面的做法, 当  $n \geq 0$  时, 得方程的一个特解为

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{n+2m}}{2^{n+2m} m! (n+m)!}. \quad (5.23)$$

而此时函数

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{-n+2m}}{2^{-n+2m} m! \Gamma(-n+m+1)}$$

与  $J_n(x)$  线性相关. 事实上, 我们不妨设  $n$  为正整数  $N$ , 当  $m = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$  时,  $-n+m+1 = -N+m+1$  将是负整数与零, 对于这些值  $\Gamma(-N+m+1)$  为无穷大, 所以

$$J_{-N}(x) = \sum_{m=N}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{-N+2m}}{2^{-N+2m} m! \Gamma(-N+m+1)},$$

令  $m = N+k$ , 得

$$\begin{aligned}
 J_{-N}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{N+k} \frac{x^{N+2k}}{2^{2k+N} k! (N+k)!} \\
 &= (-1)^N \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{N+2k}}{2^{2k+N} k! (N+k)!} = (-1)^N J_N(x).
 \end{aligned}$$

这就证明了  $J_n(x)$  与  $J_{-n}(x)$  当  $n$  ( $n \geq 0$ ) 为整数时是线性相关的. 为了求出贝塞尔方程的通解, 我们还需要求出一个与  $J_n(x)$  线性无关的特解. 由式 (5.21) 知, 当  $n$  不为整数时,  $Y_n(x)$  与  $J_n(x)$  是线性无关的; 而当  $n$  为整数时, 由于  $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ ,  $\cos n\pi = (-1)^n$ , 于是 (5.21) 式的右端成为 “ $\frac{0}{0}$ ” 形式的不定型, 此时我们很自然地定义

$$Y_n(x) = \lim_{\alpha \rightarrow n} Y_\alpha(x) = \lim_{\alpha \rightarrow n} \frac{J_\alpha(x) \cos \alpha\pi - J_{-\alpha}(x)}{\sin \alpha\pi},$$

其中  $n$  为整数,  $\alpha$  不为整数. 应用洛必达 (L'Hospital) 法则经过冗长的推演 (可参阅 [5]), 得

$$\begin{aligned}
 Y_0(x) &= \frac{2}{\pi} J_0(x) \left( \ln \frac{x}{2} + \gamma \right) - \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(m!)^2} \left( \frac{x}{2} \right)^{2m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k+1}, \\
 Y_n(x) &= \frac{2}{\pi} J_n(x) \left( \ln \frac{x}{2} + \gamma \right) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left( \frac{x}{2} \right)^{-n+2m} - \\
 &\quad \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!(n+m)!} \left( \frac{x}{2} \right)^{n+2m} \cdot \\
 &\quad \left( \sum_{k=0}^{n+m-1} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k+1} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (5.24)
 \end{aligned}$$

其中,  $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = 0.5772\dots$ , 称为欧拉常数. 显然,  $Y_n(x)$  是  $n$  阶贝塞尔方程的与  $J_n(x)$  线性无关的特解.

综上所述, 不论  $n$  是否为整数, 贝塞尔方程 (5.12) 的通解都可表示为

$$y(x) = CJ_n(x) + DY_n(x),$$

其中  $C, D$  为任意常数,  $n$  为非半奇数的任意实数.

由  $Y_n(x)$  的定义式知:  $\lim_{x \rightarrow 0} Y_n(x) = \infty$ . 这一点在后面将会用到.

当  $n$  为整数时, 由 (5.23) 式立即看出

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x),$$

由此推出, 当  $n$  为偶数时,  $J_n(x)$  为偶函数; 当  $n$  为奇数时,  $J_n(x)$  为奇函数.

情形 3 当  $n$  为半奇数时, 留在下一节讨论.

## §5.2 贝塞尔函数的递推公式

不同阶的贝塞尔函数之间有一定的联系, 本节来建立反映这种联系的递推公式. 我们来证明:

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x), \quad (5.25)$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x). \quad (5.26)$$

事实上, 在 (5.18) 式的两边乘以  $x^n$ , 然后对  $x$  求导, 得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] &= \frac{d}{dx} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2n+2m}}{2^{n+2m} m! \Gamma(n+m+1)} \right] \\ &= x^n \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{n-1+2m}}{2^{n-1+2m} m! \Gamma(n-1+m+1)} \\ &= x^n J_{n-1}(x), \end{aligned}$$

这就证明了 (5.25) 式. 同样可以证明 (5.26) 式.

如果将以上两式左端的导数求出, 化简后分别得

$$xJ'_n(x) + nJ_n(x) = xJ_{n-1}(x),$$

$$xJ'_n(x) - nJ_n(x) = -xJ_{n+1}(x),$$

先后消去  $J'_n(x)$  与  $J_n(x)$ , 则得

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x), \quad (5.27)$$

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x). \quad (5.28)$$

显然 (5.25)、(5.26) 式与 (5.27)、(5.28) 式是等价的. 若已知  $J_{n-1}(x)$  与  $J_n(x)$  之值, 由 (5.27) 式可算出  $J_{n+1}(x)$  之值. 这样一来, 通过 (5.27) 式, 可以用零阶与一阶贝塞尔函数来表示任意正整数阶的贝塞尔函数.

在以上的几个递推公式中, 有两个特别重要的情形需要注意: 当  $n = 0$ , 由 (5.26) 式得

$$J'_0(x) = -J_1(x);$$

当  $n = 1$  时, 由 (5.25) 式得

$$\frac{d}{dx}[xJ_1(x)] = xJ_0(x). \quad (5.29)$$

例 5.1 求  $\int xJ_2(x)dx$ .

解 由 (5.28) 式,  $J_2(x) = J_0(x) - 2J_1'(x)$ , 于是

$$\begin{aligned} \int xJ_2(x)dx &= \int xJ_0(x)dx - 2 \int xJ_1'(x)dx \\ &= xJ_1(x) - 2 \left( xJ_1(x) - \int J_1(x)dx \right) \\ &= xJ_1(x) - 2 \left( xJ_1(x) + \int J_0'(x)dx \right) \\ &= -xJ_1(x) - 2J_0(x) + c. \end{aligned}$$

对于第二类贝塞尔函数, 下面的递推公式成立:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}[x^n Y_n(x)] = x^n Y_{n-1}(x), \\ \frac{d}{dx}[x^{-n} Y_n(x)] = -x^{-n} Y_{n+1}(x), \\ Y_{n-1}(x) + Y_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} Y_n(x), \\ Y_{n-1}(x) - Y_{n+1}(x) = 2Y_n'(x). \end{cases}$$

当  $n$  为半奇数时, 贝塞尔函数的一个重要特点是可用初等函数表示. 先计算  $J_{\frac{1}{2}}(x)$ , 由 (5.18) 式得

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{\frac{1}{2}+2m}}{2^{\frac{1}{2}+2m} m! \Gamma\left(\frac{1}{2} + m + 1\right)},$$

利用  $\Gamma$  函数的性质, 得

$$\Gamma\left(\frac{3}{2} + m\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m+1)}{2^{m+1}} \sqrt{\pi},$$

从而

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x. \quad (5.30)$$

同样可得

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \quad (5.31)$$

应用公式 (5.27) 得

$$\begin{aligned} J_{\frac{3}{2}}(x) &= \frac{1}{x} J_{\frac{1}{2}}(x) - J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left( -\cos x + \frac{1}{x} \sin x \right) \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{\frac{3}{2}} \cdot \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right) \left( \frac{\sin x}{x} \right). \end{aligned}$$

同理可得

$$J_{-\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{\frac{3}{2}} \cdot \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right) \left( \frac{\cos x}{x} \right).$$

一般地, 有

$$\begin{aligned} J_{\frac{2m+1}{2}}(x) &= (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{m+\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^m \left( \frac{\sin x}{x} \right), \\ J_{-\frac{2m+1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{m+\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^m \left( \frac{\cos x}{x} \right), \end{aligned}$$

这里为了方便起见, 我们采用微分算子  $\left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^m$ , 它是算子  $\frac{1}{x} \frac{d}{dx}$  连续作用  $m$  次的缩写, 例如

$$\left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^2 \left( \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( \frac{\sin x}{x} \right) \right].$$

### §5.3 按贝塞尔函数展开为级数

应用贝塞尔函数求解数学物理方程的定解问题时, 最终都要把已知函数按贝塞尔函数系展开为级数. 本节我们将讨论这个问题.

本章开始, 我们从薄圆盘温度分布的定解问题中, 导出了贝塞尔方程的固有值问题:

$$\begin{cases} r^2 F''(r) + rF'(r) + (\lambda r^2 - n^2)F(r) = 0, & (5.32) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(R) = 0, \quad |F(0)| < +\infty. & (5.33) \end{cases}$$

方程 (5.32) 的通解为

$$F(r) = CJ_n(\sqrt{\lambda}r) + DY_n(\sqrt{\lambda}r),$$

由于  $Y_n(0)$  为无穷大, 由边界条件 (5.33) 得  $D = 0$ , 从而

$$F(r) = CJ_n(\sqrt{\lambda}r),$$

再利用另一个边界条件, 得

$$J_n(\sqrt{\lambda}R) = 0. \quad (5.34)$$

### §5.3.1 贝塞尔方程的零点

方程 (5.34) 表明, 为了求出固有值问题 (5.32)、(5.33) 的固有值  $\lambda$ , 我们需要判明  $J_n(x)$  的零点是否存在, 分布情形如何. 所谓贝塞尔函数的零点, 指的是使  $J_n(x) = 0$  的那些  $x$  的值. 关于贝塞尔函数的零点, 有一系列的定理, 这些定理说明了此等零点的性质. 由于篇幅所限, 我们不去证明这些定理, 而只叙述这些零点的性质.

**定理 5.1** 贝塞尔函数的零点满足:

(1)  $J_n(x)$  有无穷多个单重实零点, 这些零点在  $x$  轴上关于原点对称分布, 因而  $J_n(x)$  存在无穷多个正的零点, 它们按照由小到大的顺序排列后记为  $\mu_m^{(n)}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ), 因此

$$0 < \mu_1^{(n)} < \mu_2^{(n)} < \dots < \mu_m^{(n)} < \dots;$$

(2)  $J_n(x)$  的零点与  $J_{n+1}(x)$  的零点是彼此相间分布的, 且  $J_n(x)$  的绝对值最小的零点比  $J_{n+1}(x)$  的绝对值最小的零点更接近于零;

(3) 当  $x$  值充分大时,  $J_n(x)$  的两个相邻零点之间的距离接近于  $\pi$ , 即

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\mu_{m+1}^{(n)} - \mu_m^{(n)}) = \pi.$$

整数阶贝塞尔函数比较重要, 特别是函数  $J_0(x)$  与  $J_1(x)$  在应用上经常遇到. 现绘出它们的图形如图 5.1 所示.

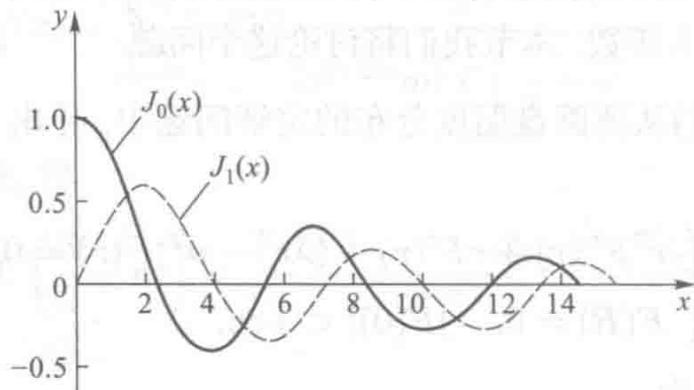


图 5.1

应用上述关于贝塞尔函数零点的结论以及方程 (5.34) 得

$$\sqrt{\lambda}R = \mu_m^{(n)} \quad (m = 1, 2, \dots),$$

即

$$\lambda_m^{(n)} = \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{R} \right)^2 \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (5.35)$$

与这些固有值相对应的固有函数为

$$F_m(r) = J_n \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{R} r \right) \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (5.36)$$

### §5.3.2 贝塞尔函数系的正交性

**定理 5.2**  $n$  阶贝塞尔函数序列 (5.36) 在区间  $(0, R)$  上带权  $r$  正交, 即

$$\int_0^R r J_n \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{R} r \right) J_n \left( \frac{\mu_k^{(n)}}{R} r \right) dr = 0, \quad m \neq k. \quad (5.37)$$

**证** 将贝塞尔函数 (5.32) 改写如下:

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dF}{dr} \right) + \left( \lambda r - \frac{n^2}{r} \right) F = 0.$$

为书写方便, 记

$$F_1(r) = J_n(\alpha_1 r), \quad F_2(r) = J_n(\alpha_2 r),$$

其中  $\alpha_1$  与  $\alpha_2$  为任意参变量. 下式显然成立

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dF_1}{dr} \right) + \left( \alpha_1^2 r - \frac{n^2}{r} \right) F_1 &= 0, \\ \frac{d}{dr} \left( r \frac{dF_2}{dr} \right) + \left( \alpha_2^2 r - \frac{n^2}{r} \right) F_2 &= 0. \end{aligned}$$

将上面两式分别乘以  $F_2$  和  $F_1$  后相减, 并对  $r$  从 0 到  $R$  积分, 得

$$(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \int_0^R r F_1(r) F_2(r) dr + \left[ r F_2 \frac{dF_1}{dr} - r F_1 \frac{dF_2}{dr} \right]_0^R = 0. \quad (5.38)$$

在 (5.38) 式中, 取  $\alpha_1 = \mu_m^{(n)}/R$ ,  $\alpha_2 = \mu_k^{(n)}/R$ , 并且由于  $F_1(R) = J_n(\mu_m^{(n)}) = 0$ ,  $F_2(R) = J_n(\mu_k^{(n)}) = 0$ ,  $\mu_m^{(n)} \neq \mu_k^{(n)}$ , 因此便得 (5.37) 式.

### §5.3.3 贝塞尔函数的模

定积分

$$\int_0^R r J_n^2 \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{R} r \right) dr \quad (5.39)$$

的平方根,称为贝塞尔函数  $J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right)$  的模. 现在我们来计算上述积分的值. 当  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  时,由 (5.38) 式,得

$$\int_0^R r F_1(r) F_2(r) dr = \frac{\left[ r F_2 \frac{dF_1}{dr} - r F_1 \frac{dF_2}{dr} \right]_0^R}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}.$$

在该式中,令  $\alpha_1 = \mu_m^{(n)}/R$ ,  $\alpha_2$  仍为任意参数,由于  $F_1(R) = J_n(\mu_m^{(n)}) = 0$ ,  $\left. \frac{dF_1}{dr} \right|_R = \frac{\mu_m^{(n)}}{R} J_n'(\mu_m^{(n)})$ , 故上式化为

$$\int_0^R r J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right) J_n(\alpha_2 r) dr = -\frac{\mu_m^{(n)} J_n(\alpha_2 R) J_n'(\mu_m^{(n)})}{(\mu_m^{(n)}/R)^2 - \alpha_2^2}.$$

当  $\alpha_2 \rightarrow \mu_m^{(n)}/R$  时,上式右端为“ $\frac{0}{0}$ ”形式的不定型,应用洛必达法则,得

$$\begin{aligned} \int_0^R r J_n^2\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right) dr &= \lim_{\alpha_2 \rightarrow \mu_m^{(n)}/R} \frac{-\mu_m^{(n)} J_n'(\alpha_2 R) J_n'(\mu_m^{(n)}) R}{-2\alpha_2} \\ &= \frac{R^2}{2} [J_n'(\mu_m^{(n)})]^2. \end{aligned} \quad (5.40)$$

由递推公式  $xJ_n'(x) + nJ_n(x) = xJ_{n-1}(x)$ ,  $xJ_n'(x) - nJ_n(x) = -xJ_{n+1}(x)$ , 以及  $J_n(\mu_m^{(n)}) = 0$ , 知

$$J_n'(\mu_m^{(n)}) = J_{n-1}(\mu_m^{(n)}) = -J_{n+1}(\mu_m^{(n)}),$$

从而

$$\int_0^R r J_n^2\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right) dr = \frac{R^2}{2} J_{n-1}^2(\mu_m^{(n)}) = \frac{R^2}{2} J_{n+1}^2(\mu_m^{(n)}). \quad (5.41)$$

由于贝塞尔函数  $J_n(x)$  与  $J_{n+1}(x)$  没有公共零点,因此贝塞尔函数的模不为零.

### §5.3.4 傅里叶-贝塞尔级数

在应用贝塞尔函数求解数学物理方程的定解问题时,往往需要把已知函数按贝塞尔函数系展成级数. 利用贝塞尔函数系的正交性,类似于 §1.6.2 关于傅里叶级数的讨论,可以证明:

**定理 5.3** 如果  $f(r)$  为定义于区间  $(0, R)$  内分段光滑的函数,且积分  $\int_0^R r^{\frac{1}{2}} |f(r)| dr$  的值有限,则它必能按贝塞尔函数系展开成级数,即

$$\frac{1}{2}[f(r+0) + f(r-0)] = \sum_{m=1}^{\infty} C_m J_n \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{R} r \right), \quad (5.42)$$

其中系数  $C_m$  由下式确定

$$C_m = \frac{\int_0^R r f(r) J_n \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{R} r \right) dr}{\frac{R^2}{2} J_{n+1}^2(\mu_m^{(n)})}. \quad (5.43)$$

由公式 (5.43) 确定的  $C_m$  称为傅里叶-贝塞尔系数, 级数 (5.42) 称为函数  $f(r)$  在区间  $(0, R)$  上的傅里叶-贝塞尔级数.

**例 5.2** 设  $\mu_m^{(0)}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) 是函数  $J_0(x)$  的正零点, 试将函数  $f(x) = 1$  在  $(0, 1)$  上展成  $J_0(\mu_m^{(0)}x)$  的傅里叶-贝塞尔级数.

**解** 由式 (5.43)

$$C_m = \frac{\int_0^1 x J_0(\mu_m^{(0)}x) dx}{\frac{1}{2} J_1^2(\mu_m^{(0)})}.$$

先计算分子, 令  $\mu_m^{(0)}x = r$ , 则

$$\begin{aligned} \int_0^1 x J_0(\mu_m^{(0)}x) dx &= \frac{1}{(\mu_m^{(0)})^2} \int_0^{\mu_m^{(0)}} r J_0(r) dr \\ &= \frac{1}{(\mu_m^{(0)})^2} [r J_1(r)]_0^{\mu_m^{(0)}} = \frac{1}{\mu_m^{(0)}} J_1(\mu_m^{(0)}), \end{aligned}$$

代入  $C_m$  得

$$C_m = \frac{2}{\mu_m^{(0)} J_1(\mu_m^{(0)})},$$

于是

$$1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_m^{(0)} J_1(\mu_m^{(0)})} J_0(\mu_m^{(0)}x).$$

## §5.4 贝塞尔函数的应用

贝塞尔函数有极为广泛的应用, 本节我们仅选择最简单的问题, 以说明用贝塞尔函数求解数学物理问题的要点和步骤.

**例 5.3 (热传导问题)** 设有半径为 1 的均匀薄圆盘, 圆周上的温度保持为

零度, 初始时刻圆盘内的温度分布为  $1 - r^2$ , 其中  $r$  是圆盘内任一点的极半径, 试求圆盘内的温度分布.

**解** 所求温度  $u$  满足二维齐次热传导方程. 由于求解区域是圆域, 我们自然采用极坐标. 由于定解条件与  $\theta$  无关, 所以  $u = u(r, t)$ , 于是归结为解下列定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) & (0 \leq r < 1), \end{cases} \quad (5.44)$$

$$\begin{cases} u|_{r=1} = 0, \end{cases} \quad (5.45)$$

$$\begin{cases} u|_{t=0} = 1 - r^2. \end{cases} \quad (5.46)$$

应用分离变量法, 令  $u(r, t) = R(r)T(t)$ , 代入方程 (5.44), 得

$$RT' = a^2 \left( R'' + \frac{1}{r} R' \right) T,$$

或

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{R'' + \frac{1}{r} R'}{R} = -\lambda,$$

由此得

$$T' + \lambda a^2 T = 0, \quad (5.47)$$

$$r^2 R'' + r R' + \lambda r^2 R = 0. \quad (5.48)$$

由问题的物理意义可知, 温度函数  $u$  应满足条件  $|u| < +\infty$ , 因而函数  $R$  应满足自然边界条件

$$|R(0)| < +\infty, \quad (5.49)$$

并且由条件 (5.45) 可得

$$R(1) = 0. \quad (5.50)$$

而 (5.48) 为零阶贝塞尔方程, 其通解为

$$R(r) = C J_0(\sqrt{\lambda} r) + D Y_0(\sqrt{\lambda} r).$$

由条件 (5.49) 知  $D = 0$ , 再由条件 (5.50) 得  $J_0(\sqrt{\lambda}) = 0$ , 即  $\sqrt{\lambda}$  是  $J_0(x)$  的零点. 以  $\mu_m^{(0)}$  表示  $J_0(x)$  的正零点, 即  $J_0(\mu_m^{(0)}) = 0$ , 则得方程 (5.48) 在条件 (5.49)、(5.50) 下的固有值及相应的固有函数为

$$\begin{cases} \lambda_m = (\mu_m^{(0)})^2, \\ R_m(r) = J_0(\mu_m^{(0)} r) \end{cases} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

将  $\lambda_m$  代入方程 (5.47), 得

$$T_m(t) = C_m e^{-(\mu_m^{(0)} a)^2 t},$$

从而

$$u_m(r, t) = T_m(t) R_m(r) = C_m e^{-(\mu_m^{(0)} a)^2 t} J_0(\mu_m^{(0)} r).$$

根据叠加原理, 方程 (5.44) 满足条件 (5.45) 的解为

$$u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{-(\mu_m^{(0)} a)^2 t} J_0(\mu_m^{(0)} r). \quad (5.51)$$

由初始条件 (5.46), 得

$$u(r, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m J_0(\mu_m^{(0)} r) = 1 - r^2,$$

其中

$$C_m = \frac{\int_0^1 r(1-r^2) J_0(\mu_m^{(0)} r) dr}{\frac{1}{2} J_1^2(\mu_m^{(0)})}.$$

现在, 我们先计算分子中的积分, 由例 5.2 的求解过程知

$$\int_0^1 r J_0(\mu_m^{(0)} r) dr = \frac{1}{\mu_m^{(0)}} J_1(\mu_m^{(0)}).$$

如果令  $\mu_m^{(0)} r = x$ , 则

$$\begin{aligned} \int_0^1 r^3 J_0(\mu_m^{(0)} r) dr &= \frac{1}{(\mu_m^{(0)})^4} \int_0^{\mu_m^{(0)}} x^3 J_0(x) dx \\ &= \frac{1}{(\mu_m^{(0)})^4} \left[ x^3 J_1(x) \Big|_0^{\mu_m^{(0)}} - 2 \int_0^{\mu_m^{(0)}} x^2 J_1(x) dx \right] \\ &= \frac{1}{(\mu_m^{(0)})^4} \left[ (\mu_m^{(0)})^3 J_1(\mu_m^{(0)}) - 2x^2 J_2(x) \Big|_0^{\mu_m^{(0)}} \right] \\ &= \frac{1}{\mu_m^{(0)}} J_1(\mu_m^{(0)}) - \frac{2}{(\mu_m^{(0)})^2} J_2(\mu_m^{(0)}), \end{aligned}$$

代入  $C_m$  得

$$C_m = \frac{4J_2(\mu_m^{(0)})}{(\mu_m^{(0)})^2 J_1^2(\mu_m^{(0)})}.$$

所以, 问题 (5.44)—(5.46) 的解为

$$u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4J_2(\mu_m^{(0)})}{(\mu_m^{(0)})^2 J_1^2(\mu_m^{(0)})} J_0(\mu_m^{(0)} r) e^{-(\mu_m^{(0)} a)^2 t}.$$

**例 5.4 (圆柱形域内的电势)** 由导体壁构成的空圆柱, 圆柱的高为  $h$ , 半径为  $b$ , 设上底的电势为  $U$ , 侧面和下底的电势为零, 试求圆柱体内部的电势.

**解** 由于区域是圆柱形, 所以采用柱坐标系. 由于边界条件与角度  $\varphi$  无关, 因此, 所求的电势  $u$  只是  $\rho, z$  两个变量的函数, 于是归结为解下列定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 & (0 < \rho < b, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 < z < h), \end{cases} \quad (5.52)$$

$$\begin{cases} u|_{z=0} = 0, \quad u|_{z=h} = U, \end{cases} \quad (5.53)$$

$$\begin{cases} u|_{\rho=b} = 0, \end{cases} \quad (5.54)$$

其中  $U$  为常数.

应用分离变量法, 令  $u(\rho, z) = R(\rho)Z(z)$ , 代入方程 (5.52), 分离变量得

$$\frac{R'' + \frac{1}{\rho} R'}{R} = -\frac{Z''}{Z} = -\lambda,$$

由此得

$$\begin{cases} Z'' - \lambda Z = 0, \end{cases} \quad (5.55)$$

$$\begin{cases} \rho^2 R'' + \rho R' + \lambda \rho^2 R = 0. \end{cases} \quad (5.56)$$

方程 (5.56) 为零阶贝塞尔方程, 其通解为

$$R(\rho) = C J_0(\sqrt{\lambda} \rho) + D Y_0(\sqrt{\lambda} \rho).$$

由问题的物理意义知,  $|u| < +\infty$ , 由此推出

$$|R(0)| < +\infty, \quad (5.57)$$

而由边界条件 (5.54) 又得

$$R(b) = 0. \quad (5.58)$$

与例 5.3 类似, 方程 (5.56) 在条件 (5.57) 与 (5.58) 下的固有值与固有函数为

$$\begin{cases} \lambda_m = \left( \frac{\mu_m^{(0)}}{b} \right)^2, \\ R_m(\rho) = J_0 \left( \frac{\mu_m^{(0)}}{b} \rho \right) \end{cases} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

其中  $\mu_m^{(0)}$  为  $J_0(x)$  的正零点. 将  $\lambda_m$  代入方程 (5.55), 可得

$$Z_m(z) = C_m e^{\frac{\mu_m^{(0)}}{b} z} + D_m e^{-\frac{\mu_m^{(0)}}{b} z},$$

从而

$$u_m(\rho, z) = \left( C_m e^{\frac{\mu_m^{(0)}}{b} z} + D_m e^{-\frac{\mu_m^{(0)}}{b} z} \right) J_0 \left( \frac{\mu_m^{(0)}}{b} \rho \right).$$

由叠加原理, 方程 (5.52) 满足条件 (5.54) 的解为

$$u(\rho, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \left( C_m e^{\frac{\mu_m^{(0)}}{b} z} + D_m e^{-\frac{\mu_m^{(0)}}{b} z} \right) J_0 \left( \frac{\mu_m^{(0)}}{b} \rho \right). \quad (5.59)$$

由条件 (5.53) 中的第一式, 得

$$u(\rho, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} (C_m + D_m) J_0 \left( \frac{\mu_m^{(0)}}{b} \rho \right) = 0,$$

于是得

$$C_m + D_m = 0 \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (5.60)$$

再由 (5.53) 中的第二式, 得

$$u(\rho, h) = \sum_{m=1}^{\infty} \left( C_m e^{\frac{\mu_m^{(0)}}{b} h} + D_m e^{-\frac{\mu_m^{(0)}}{b} h} \right) J_0 \left( \frac{\mu_m^{(0)}}{b} \rho \right) = U.$$

由式 (5.43) 得

$$C_m e^{\frac{\mu_m^{(0)}}{b} h} + D_m e^{-\frac{\mu_m^{(0)}}{b} h} = \frac{\int_0^b \rho U J_0 \left( \frac{\mu_m^{(0)}}{b} \rho \right) d\rho}{\frac{b^2}{2} J_1^2(\mu_m^{(0)})} = \frac{2U}{\mu_m^{(0)} J_1(\mu_m^{(0)})}. \quad (5.61)$$

由式 (5.60) 与式 (5.61) 得

$$C_m = \frac{U}{\mu_m^{(0)} \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_m^{(0)}}{b} h \right) J_1(\mu_m^{(0)})}, \quad D_m = -\frac{U}{\mu_m^{(0)} \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_m^{(0)}}{b} h \right) J_1(\mu_m^{(0)})}.$$

将  $C_m, D_m$  代入式 (5.59), 得到问题 (5.52)—(5.54) 的解为

$$u(\rho, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2U}{\mu_m^{(0)} \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_m^{(0)}}{b} h \right) J_1(\mu_m^{(0)})} \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_m^{(0)}}{b} z \right) J_0 \left( \frac{\mu_m^{(0)}}{b} \rho \right).$$

**例 5.5 (圆形膜轴对称振动问题)** 设有一半径为  $B$  的圆形膜, 圆周固定. 若在膜的中心掀起一个很小高度  $h > 0$  而静止, 突然放手任其振动, 试求该膜的震动规律.

**解** 由于方程是齐次的, 并且定解条件与角度  $\theta$  无关, 在极坐标系下位移函数只是  $r$  与  $t$  两个变量的函数, 于是归结为解下列定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) & (0 < r < B), \end{cases} \quad (5.62)$$

$$\begin{cases} u|_{r=B} = 0, \end{cases} \quad (5.63)$$

$$\begin{cases} u|_{t=0} = h \left( 1 - \frac{r}{B} \right), \quad u_t|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (5.64)$$

应用分离变量法, 令  $u(r, t) = R(r)T(t)$ , 代入方程 (5.62) 分离变量可得下列两个常微分方程

$$T'' + \lambda a^2 T = 0, \quad (5.65)$$

$$r^2 R'' + rR' + \lambda r^2 R = 0. \quad (5.66)$$

由问题的物理意义知  $|u(r, t)| < +\infty$ , 因而  $|R(0)| < +\infty$ , 再由边界条件 (5.63) 得

$$R(B) = 0. \quad (5.67)$$

由例 5.4 知, 方程 (5.66) 在条件  $|R(0)| < +\infty$  及 (5.67) 下的固有函数与固有值为

$$\begin{cases} R_m(r) = J_0 \left( \frac{\mu_m^{(0)}}{B} r \right), \\ \lambda_m = \left( \frac{\mu_m^{(0)}}{B} \right)^2 \end{cases} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

将  $\lambda_m$  代入方程 (5.65), 得它的通解为

$$T_m(t) = a_m \cos \frac{a\mu_m^{(0)} t}{B} + b_m \sin \frac{a\mu_m^{(0)} t}{B},$$

其中  $\mu_m^{(0)}$  为  $J_0(x)$  的正零点. 因而

$$u_m(r, t) = \left( a_m \cos \frac{a\mu_m^{(0)} t}{B} + b_m \sin \frac{a\mu_m^{(0)} t}{B} \right) J_0 \left( \frac{\mu_m^{(0)}}{B} r \right).$$

由叠加原理, 得方程 (5.62) 满足条件 (5.63) 的解为

$$u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left( a_m \cos \frac{a\mu_m^{(0)} t}{B} + b_m \sin \frac{a\mu_m^{(0)} t}{B} \right) J_0 \left( \frac{\mu_m^{(0)}}{B} r \right). \quad (5.68)$$

由初始条件 (5.64) 中的第二式知  $b_m = 0$ , 由第一式和傅里叶-贝塞尔系数公式 (5.43) 知

$$a_m = \frac{\int_0^B r h \left( 1 - \frac{r}{B} \right) J_0 \left( \frac{\mu_m^{(0)}}{B} r \right) dr}{\frac{B^2}{2} J_1^2(\mu_m^{(0)})}.$$

我们来计算分子中的积分:

$$\begin{aligned} & h \int_0^B r J_0 \left( \frac{\mu_m^{(0)}}{B} r \right) dr \\ &= h \left( \frac{B}{\mu_m^{(0)}} \right)^2 \int_0^{\mu_m^{(0)}} x J_0(x) dx \\ &= h \left( \frac{B}{\mu_m^{(0)}} \right)^2 [x J_1(x)]_0^{\mu_m^{(0)}} = \frac{h B^2}{\mu_m^{(0)}} J_1(\mu_m^{(0)}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{h}{B} \int_0^B r^2 J_0 \left( \frac{\mu_m^{(0)}}{B} r \right) dr \\ &= \frac{h}{B} \left( \frac{B}{\mu_m^{(0)}} \right)^3 \int_0^{\mu_m^{(0)}} x^2 J_0(x) dx \\ &= \frac{h}{B} \left( \frac{B}{\mu_m^{(0)}} \right)^3 \left[ x^2 J_1(x) \Big|_0^{\mu_m^{(0)}} - \int_0^{\mu_m^{(0)}} x J_1(x) dx \right] \\ &= \frac{h}{B} \left( \frac{B}{\mu_m^{(0)}} \right)^3 \left[ (\mu_m^{(0)})^2 J_1(\mu_m^{(0)}) + x J_0(x) \Big|_0^{\mu_m^{(0)}} - \int_0^{\mu_m^{(0)}} J_0(x) dx \right] \\ &= \frac{h B^2}{\mu_m^{(0)}} J_1(\mu_m^{(0)}) - \frac{h B^2}{(\mu_m^{(0)})^3} \int_0^{\mu_m^{(0)}} J_0(x) dx, \end{aligned}$$

从而

$$a_m = \frac{2h}{(\mu_m^{(0)})^3 J_1^2(\mu_m^{(0)})} \int_0^{\mu_m^{(0)}} J_0(x) dx.$$

将  $a_m, b_m$  代入 (5.68) 式, 便得到 (5.62)—(5.64) 式的解为

$$u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{2h}{(\mu_m^{(0)})^3 J_1^2(\mu_m^{(0)})} \int_0^{\mu_m^{(0)}} J_0(x) dx \right] \cos \frac{a\mu_m^{(0)} t}{B} J_0 \left( \frac{\mu_m^{(0)}}{B} r \right).$$

例 5.6 求解下列定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 \left( u_{rr} + \frac{1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} u \right) & (0 < r < 1), & (5.69) \\ u|_{r=1} = 0, |u(r, t)| < +\infty, & & (5.70) \\ u|_{t=0} = 1 - r. & & (5.71) \end{cases}$$

解 应用分离变量法, 令  $u(r, t) = R(r)T(t)$ , 代入 (5.69) 得

$$RT' = a^2 \left( R'' + \frac{1}{r} R' - \frac{1}{r^2} R \right) T,$$

或

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{R'' + \frac{1}{r} R' - \frac{1}{r^2} R}{R} = -\lambda,$$

由此得

$$T' + \lambda a^2 T = 0, \quad (5.72)$$

$$r^2 R'' + r R' + (\lambda r^2 - 1) R = 0. \quad (5.73)$$

注意该方程是一阶贝塞尔方程.

再利用定解条件 (5.70) 可得

$$R(1) = 0, \quad |R(0)| < +\infty. \quad (5.74)$$

(5.73)、(5.74) 构成了一阶贝塞尔方程的固有值问题. 与例 5.3 类似, 对应的固有值和固有函数分别为

$$\lambda_m^{(1)} = (\mu_m^{(1)})^2, \quad R_m(r) = J_1(\mu_m^{(1)} r) \quad (m = 1, 2, \dots).$$

将固有值代入 (5.72), 可得

$$T_m(t) = C_m e^{-(\mu_m^{(1)} a)^2 t},$$

从而利用  $u(r, t) = R(r)T(t)$ , 可得

$$u_m(r, t) = C_m e^{-(\mu_m^{(1)} a)^2 t} J_1(\mu_m^{(1)} r) \quad (m = 1, 2, \dots).$$

由叠加原理知, 满足方程 (5.69) 和条件 (5.70) 的通解为

$$u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{-(\mu_m^{(1)a})^2 t} J_1(\mu_m^{(1)} r). \quad (5.75)$$

最后再由初始条件 (5.71) 得

$$1 - r = \sum_{m=1}^{\infty} C_m J_1(\mu_m^{(1)} r),$$

利用傅里叶 - 贝塞尔系数公式 (5.43) 则有

$$C_m = \frac{\int_0^1 r(1-r) J_1(\mu_m^{(1)} r) dr}{\frac{1}{2} J_2^2(\mu_m^{(1)})}. \quad (5.76)$$

先计算分子, 令  $\mu_m^{(1)} r = x$ , 则

$$\begin{aligned} \int_0^1 r J_1(\mu_m^{(1)} r) dr &= \frac{1}{(\mu_m^{(1)})^2} \int_0^{\mu_m^{(1)}} x J_1(x) dx \\ &= -\frac{1}{(\mu_m^{(1)})^2} x J_0(x) \Big|_0^{\mu_m^{(1)}} + \frac{1}{(\mu_m^{(1)})^2} \int_0^{\mu_m^{(1)}} J_0(x) dx \\ &= -\frac{J_0(\mu_m^{(1)})}{\mu_m^{(1)}} + \frac{1}{(\mu_m^{(1)})^2} \int_0^{\mu_m^{(1)}} J_0(x) dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 r^2 J_1(\mu_m^{(1)} r) dr &= \frac{1}{(\mu_m^{(1)})^3} \int_0^{\mu_m^{(1)}} x^2 J_1(x) dx \\ &= \frac{1}{(\mu_m^{(1)})^3} x^2 J_2(x) \Big|_0^{\mu_m^{(1)}} = \frac{J_2(\mu_m^{(1)})}{\mu_m^{(1)}}. \end{aligned}$$

注意到, 由递推公式 (5.27) 可得

$$J_0(\mu_m^{(1)}) + J_2(\mu_m^{(1)}) = \frac{2}{\mu_m^{(1)}} J_1(\mu_m^{(1)}) = 0.$$

将以上结果代入 (5.76) 化简得

$$C_m = \frac{2}{(\mu_m^{(1)})^2 J_2^2(\mu_m^{(1)})} \int_0^{\mu_m^{(1)}} J_0(x) dx,$$

将  $C_m$  的值代入表达式 (5.75) 即得原问题 (5.69) — (5.71) 的解.

例 5.7 求解下列定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 \left( u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right) + A & (0 < r < 1), \end{cases} \quad (5.77)$$

$$\begin{cases} u|_{r=1} = 0, & |u(r, t)| < +\infty, \end{cases} \quad (5.78)$$

$$\begin{cases} u|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (5.79)$$

其中  $A$  为常数.

解 应用固有函数法. 首先, 由于非齐次方程 (5.77) 相应的齐次方程

$$u_t = a^2 \left( u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right)$$

同时满足齐次边界条件 (5.78) 的固有函数系为贝塞尔函数系  $\{J_0(\mu_m^{(0)} r)\}_{m=1}^{\infty}$ .

第一步: 设所求的解为

$$u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t) J_0(\mu_m^{(0)} r), \quad (5.80)$$

其中  $u_m(t)$  是关于  $t$  的待定函数.

第二步: 将方程中的自由项  $A$  也按相应的贝塞尔函数系展成傅里叶-贝塞尔级数:

$$A = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(t) J_0(\mu_m^{(0)} r), \quad (5.81)$$

其中系数

$$f_m(t) = \frac{\int_0^1 r \cdot A \cdot J_0(\mu_m^{(0)} r) dr}{\frac{1}{2} J_1^2(\mu_m^{(0)})} = \frac{2A}{\mu_m^{(0)} J_1(\mu_m^{(0)})} \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (5.82)$$

第三步: 把 (5.80)、(5.81) 代入 (5.77) 中整理得

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} u'_m(t) J_0(\mu_m^{(0)} r) - \sum_{m=1}^{\infty} a^2 u_m(t) \left\{ [J_0(\mu_m^{(0)} r)]'' + \frac{1}{r} [J_0(\mu_m^{(0)} r)]' \right\} \\ & = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(t) J_0(\mu_m^{(0)} r), \end{aligned} \quad (5.83)$$

由零阶贝塞尔方程可知:

$$r^2 [J_0(\mu_m^{(0)} r)]'' + r [J_0(\mu_m^{(0)} r)]' + (\mu_m^{(0)})^2 r^2 J_0(\mu_m^{(0)} r) = 0,$$

自然有

$$[J_0(\mu_m^{(0)}r)]'' + \frac{1}{r}[J_0(\mu_m^{(0)}r)]' = -(\mu_m^{(0)})^2 J_0(\mu_m^{(0)}r).$$

将上式代入 (5.83) 化简得

$$\sum_{m=1}^{\infty} [u_m'(t) + (\mu_m^{(0)}a)^2 u_m(t)] J_0(\mu_m^{(0)}r) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(t) J_0(\mu_m^{(0)}r), \quad (5.84)$$

比较两边同类项系数可得

$$u_m'(t) + (\mu_m^{(0)}a)^2 u_m(t) = f_m(t) = \frac{2A}{\mu_m^{(0)} J_1(\mu_m^{(0)})}. \quad (5.85)$$

再由初始条件 (5.79) 可得

$$u_m(0) = 0. \quad (5.86)$$

应用一阶线性微分方程的通解公式或拉普拉斯变换法, 得

$$u_m(t) = \frac{2A}{\mu_m^{(0)} J_1(\mu_m^{(0)})} \int_0^t e^{-(\mu_m^{(0)}a)^2(t-\tau)} d\tau = \frac{2A}{(\mu_m^{(0)})^3 a^2 J_1(\mu_m^{(0)})} (1 - e^{-(\mu_m^{(0)}a)^2 t}).$$

最后, 把以上  $u_m(t)$  的值代入公式 (5.80), 得定解问题 (5.77) — (5.79) 的解:

$$u(r, t) = \frac{2A}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-(\mu_m^{(0)}a)^2 t})}{(\mu_m^{(0)})^3 J_1(\mu_m^{(0)})} J_0(\mu_m^{(0)}r).$$

应当指出, 一般来说, 傅里叶 - 贝塞尔系数甚至对很简单的函数也具有十分复杂的表达式, 但是由于它在实际的重要问题上起着重要的作用, 所以我们经常利用为贝塞尔函数所造的大量的表, 对它进行近似计算.

## §5.5 本章小结及补充知识

### §5.5.1 本章小结

本章我们是把贝塞尔函数作为求解定解问题的一个工具而引出的, 重点介绍了第一类贝塞尔函数. 通过本章的学习, 读者必须了解贝塞尔方程的幂级数解法及整数阶贝塞尔函数的一些性质 (如递推公式、零点分布、正交性及模); 掌握傅里叶 - 贝塞尔级数中的傅里叶 - 贝塞尔系数计算公式; 会利用贝塞尔函数解决有关的定解问题. 现在将重要结论列举如下:

#### 1. $n$ 阶贝塞尔方程的固有值问题

$$\begin{cases} r^2 F'' + rF' + (\lambda r^2 - n^2)F = 0, & 0 < r < R, \\ F(R) = 0, & |F(0)| < +\infty. \end{cases}$$

其中  $n$  阶贝塞尔方程的通解可表示为

$$F(r) = CJ_n(\sqrt{\lambda}r) + DY_n(\sqrt{\lambda}r),$$

该问题对应的固有值和固有函数分别为

$$\lambda_m^{(n)} = \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{R} \right)^2, \quad F_m(r) = J_n \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{R} r \right) \quad (m = 1, 2, \dots).$$

## 2. $n$ 阶贝塞尔函数的递推公式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] &= x^n J_{n-1}(x), \\ \frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] &= -x^{-n} J_{n+1}(x), \\ J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) &= \frac{2n}{x} J_n(x), \\ J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) &= 2J'_n(x). \end{aligned}$$

特别地,

$$J'_0(x) = -J_1(x); \quad \frac{d}{dx} [xJ_1(x)] = xJ_0(x).$$

## 3. 傅里叶 - 贝塞尔级数

$$\frac{1}{2} [f(r+0) + f(r-0)] = \sum_{m=1}^{\infty} C_m J_n \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{R} r \right),$$

其中傅里叶 - 贝塞尔系数  $C_m$  由下式确定

$$C_m = \frac{\int_0^R r f(r) J_n \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{R} r \right) dr}{\frac{R^2}{2} J_{n+1}^2(\mu_m^{(n)})}.$$

### §5.5.2 补充知识

1. 第三类贝塞尔函数, 又名汉克尔 (Hankel) 函数, 它由下列公式定义:

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(x) &= J_n(x) + iY_n(x), \\ H_n^{(2)}(x) &= J_n(x) - iY_n(x), \end{aligned}$$

其中  $i = \sqrt{-1}$ .

第一类虚宗量的贝塞尔函数  $I_n(x)$  定义为

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{n+2m}}{2^{n+2m} m! \Gamma(n+m+1)}.$$

第二类虚宗量的贝塞尔函数  $K_n(x)$  定义为

$$K_n(x) = \frac{\frac{1}{2}\pi[I_{-n}(x) - I_n(x)]}{\sin n\pi} \quad (n \text{ 为非整数});$$

$$K_n(x) = \lim_{\alpha \rightarrow n} \frac{\frac{1}{2}\pi[I_{-\alpha}(x) - I_\alpha(x)]}{\sin \alpha\pi} \quad (n \text{ 为整数}).$$

$n$  阶第一类开尔文 (Kelvin) 函数有两种形式, 它们分别被定义为  $J_n(x\sqrt{-i})$  的实部和虚部, 记作  $\text{ber}_n x$  和  $\text{bei}_n x$ .

2. 下面我们将进一步完善本章第一节开始所提出的求解圆盘内的瞬时温度分布规律的问题.

回顾 §5.1 和 §5.3, 由 (5.35)—(5.36) 知固有值问题 (5.32)、(5.33) 的固有值和固有函数分别为

$$\lambda_m^{(n)} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}\right)^2, \quad F_m^{(n)}(r) = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right) \quad (m = 1, 2, \dots),$$

将  $\lambda_m^{(n)}$  代入方程 (5.4), 可得相应的  $T(t) = T_m^{(n)}(t) = c_m e^{-\left(\frac{\mu_m^{(n)} a}{R}\right)^2 t}$ . 再考虑到周期边值问题 (5.9) 的固有函数:

$$G_0(\theta) = \frac{1}{2}a_0, \quad G_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta \quad (n = 1, 2, \dots),$$

我们便得到了满足齐次热传导方程 (5.1) 和齐次边界条件 (5.2) 的所有分离变量的解:

$$\frac{1}{2}a_{0m} J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}r\right) e^{-\left(\frac{\mu_m^{(0)} a}{R}\right)^2 t},$$

$$(a_{nm} \cos n\theta + b_{nm} \sin n\theta) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right) e^{-\left(\frac{\mu_m^{(n)} a}{R}\right)^2 t} \quad (m, n = 1, 2, \dots).$$

由叠加原理得通解:

$$u(t, r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2}a_{0m} J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}r\right) e^{-\left(\frac{\mu_m^{(0)} a}{R}\right)^2 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (a_{nm} \cos n\theta + b_{nm} \sin n\theta) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right) e^{-\left(\frac{\mu_m^{(n)} a}{R}\right)^2 t}, \quad (5.87)$$

代入初始条件得

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2} a_{0m} J_0 \left( \frac{\mu_m^{(0)}}{R} r \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (a_{nm} \cos n\theta + b_{nm} \sin n\theta) J_n \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{R} r \right) \\ = \varphi(r \cos \theta, r \sin \theta) =: \Phi(r, \theta).$$

由于  $\left\{ \frac{1}{2}, \cos n\theta, \sin n\theta, n = 1, 2, \dots \right\}$  是  $[0, 2\pi]$  上的完备正交函数系, 对每个固定的  $n$ ,  $\left\{ J_n \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{R} r \right), m = 1, 2, \dots \right\}$  是  $[0, R]$  上带权  $r$  的完备正交函数系, 由此可知上式为  $\Phi(r, \theta)$  在矩形域  $[0, 2\pi] \times [0, R]$  上的广义傅里叶级数展开, 其中系数

$$a_{nm} = \frac{2}{\pi R^2 J_{n+1}^2(\mu_m^{(n)})} \int_0^R \int_0^{2\pi} \Phi(r, \theta) \cos n\theta J_n \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{R} r \right) r d\theta dr, \\ b_{nm} = \frac{2}{\pi R^2 J_{n+1}^2(\mu_m^{(n)})} \int_0^R \int_0^{2\pi} \Phi(r, \theta) \sin n\theta J_n \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{R} r \right) r d\theta dr, \\ n = 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots$$

代入 (5.87) 便可得定解问题 (5.1)—(5.3) 的解.

## 习题五

1.  $\frac{d}{dx} J_0(\alpha x) = ?$
2.  $\frac{d}{dx} [x J_1(\alpha x)] = ?$
3. 验证函数  $y = x^{\frac{1}{2}} J_{\frac{3}{2}}(x)$  是方程  $x^2 y'' + (x^2 - 2)y = 0$  的解.
4. 验证函数  $y = x J_n(x)$  是方程

$$x^2 y'' - x y' + (1 + x^2 - n^2)y = 0$$

的一个解.

5. 证明:

$$(1) \frac{d}{dx} [x J_0(x) J_1(x)] = x [J_0^2(x) - J_1^2(x)];$$

$$(2) \frac{d}{dx} [x J_0(x^2)] = J_0(x^2) - 2x^2 J_1(x^2);$$

$$(3) \int x^2 J_1(x) dx = 2x J_1(x) - x^2 J_0(x) + c;$$

$$(4) \int x^n J_0(x) dx = x^n J_1(x) + (n-1)x^{n-1} J_0(x) - (n-1)^2 \int x^{n-2} J_0(x) dx.$$

$$6. \text{ 求 } \int J_0(x^{\frac{1}{2}}) dx.$$

7. 试证:

$$(1) J_2(x) - J_0(x) = 2J_0''(x); \quad (2) J_3(x) + 3J_0'(x) + 4J_0'''(x) = 0.$$

8. 设  $\mu_m^{(1)}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) 是  $J_1(x)$  的正零点, 将函数  $f(x) = x$  ( $0 < x < 1$ ) 展成  $J_1(\mu_m^{(1)}x)$  的傅立叶-贝塞尔级数.

9. 设  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) 是方程  $J_0(2x) = 0$  的正根, 将函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 1, \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

展成  $J_0(\alpha_i x)$  的傅立叶-贝塞尔级数.

10. 解下列定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) & (0 < r < R, t > 0), \\ u|_{t=0} = 1 - \frac{r^2}{R^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \\ |u(0, t)| < +\infty, \quad u|_{r=R} = 0. \end{cases}$$

若将上述方程换成非齐次的, 即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -B \quad (B \text{ 为常数}),$$

而所有定解条件均为零, 试求其解.

11. 设有半径为  $R$  的无限长圆柱体, 其侧面上温度保持为常数  $T_0$ , 柱体内部的初始温度分布为零度. 求该柱体径向的温度分布, 即求解下列定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) & (0 < r < R, t > 0), \\ u|_{t=0} = 0, \\ |u(0, t)| < +\infty, \quad u|_{r=R} = T_0. \end{cases}$$

\*12. 设  $\mu_m^{(1)}$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) 是  $J_1(x)$  的非负零点, 证明

$$\int_0^R x J_0 \left( \frac{\mu_m^{(1)}}{R} x \right) J_0 \left( \frac{\mu_n^{(1)}}{R} x \right) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \frac{R^2}{2} J_0^2(\mu_m^{(1)}), & n = m. \end{cases}$$

\*13. 求解下列问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) & (0 < r < R), \\ \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0, \quad |u(0, t)| < +\infty, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 1 - \frac{r^2}{R^2}. \end{cases}$$

## 第六章

# 勒让德多项式

本章将考察勒让德多项式. 首先应用分离变量法, 在球坐标系中对拉普拉斯方程进行分离变量, 导出勒让德方程; 然后讨论这个方程的解法及解的有关性质; 最后介绍勒让德多项式在解决数学物理方程定解问题中的一些应用.

### §6.1 勒让德方程及其求解

#### §6.1.1 勒让德方程的导出

在第四章中, 我们应用格林函数法解决了球形区域内的狄利克雷问题:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 & (x^2 + y^2 + z^2 < 1), \\ u|_{x^2+y^2+z^2=1} = f(x, y, z). \end{cases}$$

在球坐标系下, 上述问题为

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \\ (0 \leq r < 1, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi), \\ u|_{r=1} = f(\theta, \varphi). \end{cases} \quad (6.1)$$

$$u|_{r=1} = f(\theta, \varphi). \quad (6.2)$$

应用分离变量法, 设方程 (6.1) 的解为  $u(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$ , 代入方程得

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) Y + \left[ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} \right] R = 0,$$

用  $r^2/(RY)$  乘上式, 移项得

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) = -\frac{1}{Y} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} \right].$$

上式左端只与  $r$  有关, 右端只与  $\theta, \varphi$  有关, 由于这是一个恒等式, 只有当它们都是常数时才会成立. 这个常数通常取作  $n(n+1)$  的形式, 于是我们有

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - n(n+1)R = 0, \quad (6.3)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + n(n+1)Y = 0. \quad (6.4)$$

(6.4) 的解  $Y(\theta, \varphi)$  与半径  $r$  无关, 故称为球面函数, 或简称为球函数.

式 (6.3) 为欧拉方程, 其通解为

$$R(r) = Ar^n + Br^{-(n+1)},$$

其中  $A, B$  为任意常数.

再令  $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ , 代入方程 (6.4) 得

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \Phi + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \Theta + n(n+1)\Theta\Phi = 0,$$

两端乘以  $\frac{\sin^2 \theta}{\Theta\Phi}$ , 移项得

$$\frac{1}{\Theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + n(n+1) \sin^2 \theta = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}.$$

此式的左端只与  $\theta$  有关, 而右端只与  $\varphi$  有关, 因而只有当它们均为常数时才相等. 由于方程 (6.1) 的一切 (单值) 解都应该是  $\varphi$  的以  $2\pi$  为周期的周期函数:  $u(r, \theta, \varphi + 2\pi) = u(r, \theta, \varphi)$ , 因而  $\Phi$  是以  $2\pi$  为周期的周期函数:  $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ . 由 §2.3.2 讨论知: 上面那个常数必须等于  $m^2$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ), 从而得

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (6.5)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0. \quad (6.6)$$

式 (6.5) 的通解为

$$\Phi(\varphi) = C \cos m\varphi + D \sin m\varphi,$$

其中  $C, D$  为任意常数.

把方程 (6.6) 中的导数计算出来, 得

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{d\Theta}{d\theta} + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0. \quad (6.7)$$

方程 (6.7) 称为连带勒让德方程.

现在引入新的自变量  $x = \cos \theta$ , 因而  $-1 \leq x \leq 1$  (因为  $0 \leq \theta \leq \pi$ ), 并

记  $\theta(\theta) = y$ . 于是  $y$  便是变量  $x$  的某个函数. 由于

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{d\theta} &= \frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta \frac{dy}{dx} = -\sqrt{1-x^2} \frac{dy}{dx}, \\ \frac{d^2\theta}{d\theta^2} &= \frac{d}{d\theta} \left( \frac{d\theta}{d\theta} \right) = -\cos\theta \frac{dy}{dx} - \sin\theta \frac{d^2y}{dx^2} \frac{dx}{d\theta} \\ &= -x \frac{dy}{dx} + \sin^2\theta \frac{d^2y}{dx^2} \\ &= -x \frac{dy}{dx} + (1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2},\end{aligned}$$

将这些导数代入方程 (6.7), 则得

$$(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0. \quad (6.8)$$

当  $m=0$  时这个方程取得更简单的形式:

$$(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0, \quad (6.9)$$

称之为勒让德方程.

### §6.1.2 勒让德方程的幂级数解

用幂级数解法, 设方程 (6.9) 的解可以表示为幂级数形式:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad (6.10)$$

其中  $a_k$  为待定常数. 逐项微分 (6.10), 得

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \quad (6.11)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}, \quad (6.12)$$

将 (6.10)—(6.12) 代入方程 (6.9), 得到

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{ (k+1)(k+2)a_{k+2} + [n(n+1) - k(k+1)]a_k \} x^k = 0.$$

由于上式为恒等式,  $x$  的各次幂的系数必须全为零, 即

$$(k+1)(k+2)a_{k+2} + [n(n+1) - k(k+1)]a_k = 0,$$

由此,得

$$a_{k+2} = -\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+1)(k+2)}a_k \quad (k=0,1,2,\dots). \quad (6.13)$$

这是级数 (6.10) 的系数间的关系式, 令  $k=0, 2, 4, \dots$ , 得

$$a_2 = -\frac{n(n+1)}{2!}a_0,$$

$$a_4 = \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}a_0,$$

$$a_6 = -\frac{n(n-2)(n-4)(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}a_0,$$

.....

再令  $k=1, 3, 5, \dots$ , 得

$$a_3 = -\frac{(n-1)(n+2)}{3!}a_1,$$

$$a_5 = \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}a_1,$$

$$a_7 = -\frac{(n-1)(n-3)(n-5)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!}a_1,$$

.....

将这些值代入 (6.10) 式, 就得到勒让德方程 (6.9) 的解

$$y = a_0 \left[ 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \dots \right] + a_1 \left[ x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \dots \right], \quad (6.14)$$

其中  $a_0, a_1$  是两个任意常数. 若用  $y_1, y_2$  分别表示 (6.14) 式中的两个级数, 即

$$y_1 = a_0 \left[ 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \dots \right], \quad (6.15)$$

$$y_2 = a_1 \left[ x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \dots \right], \quad (6.16)$$

则这两个级数都是勒让德方程 (6.9) 的解. 用达朗贝尔判别法容易判断级数 (6.15) 和 (6.16) 在  $|x| < 1$  上收敛, 并且当  $a_0 \neq 0, a_1 \neq 0$  时, 它们是线性无关的, 故在  $|x| < 1$  内 (6.14) 式为方程 (6.9) 的通解.

## §6.2 勒让德多项式

从 (6.13) 可以看出, 当  $n$  不是整数时, 由于  $a_k \neq 0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), 因此  $y_1$  与  $y_2$  都是无穷级数, 它们在  $|x| < 1$  内收敛, 在其他各处都发散, 并且当  $x \rightarrow \pm 1$  时,  $y_1$  与  $y_2$  趋于无穷 (由高斯判别法<sup>①</sup> 可得此结论).

当  $n$  是整数 (包括零) 时,  $y_1$  与  $y_2$  中有一个便成为多项式, 另一个仍是无穷级数. 由于在实际应用中, 常用到  $n$  是非负整数的情况, 因此本章讨论的勒让德方程也只限于  $n$  为非负整数. 当  $n$  为正偶数时,  $y_1$  是一个  $n$  次多项式,  $y_2$  仍为一个无穷级数; 当  $n$  为正奇数时,  $y_2$  是一个  $n$  次多项式,  $y_1$  仍为一个无穷级数. 现在我们就来给出这个多项式的表达式. 为此, 将 (6.13) 式改写为

$$a_k = -\frac{(k+1)(k+2)}{(n-k)(n+k+1)}a_{k+2} \quad (k \leq n-2),$$

多项式的系数  $a_{n-2}, a_{n-4}, \dots$  都可以通过  $a_n$  表出:

$$\begin{aligned} a_{n-2} &= -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}a_n, \\ a_{n-4} &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)}a_n, \\ a_{n-6} &= -\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2 \cdot 4 \cdot 6(2n-1)(2n-3)(2n-5)}a_n, \\ &\dots \end{aligned}$$

为了简便, 并使所得的多项式在  $x = 1$  处的值等于 1, 我们取  $a_n$  为

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1}{n!},$$

这样一来

$$\begin{aligned} a_{n-2} &= -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \cdot \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} = -\frac{(2n-2)!}{2^n(n-1)!(n-2)!}, \\ a_{n-4} &= \frac{(2n-4)!}{2^n 2! (n-2)!(n-4)!}, \end{aligned}$$

① 高斯判别法: 设有正项级数  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , 若

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \lambda + \frac{\mu}{k} + \frac{\theta_k}{k^{1+\epsilon}},$$

其中  $\epsilon > 0$ , 且  $\theta_k$  有界:  $|\theta_k| \leq L$ , 则当  $\lambda > 1$  时, 或者当  $\lambda = 1$  且  $\mu > 1$  时级数收敛; 当  $\lambda < 1$  时, 或者当  $\lambda = 1$  且  $\mu \leq 1$  时级数发散.

$$a_{n-6} = -\frac{(2n-6)!}{2^n 3! (n-3)! (n-6)!},$$

.....

一般地, 当  $n-2m \geq 0$  时, 有

$$a_{n-2m} = (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m! (n-m)! (n-2m)!}.$$

当  $n$  是正偶数时, 将这些系数代入 (6.15) 式, 把此时的  $y_1$  记作  $P_n(x)$ , 得

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m! (n-m)! (n-2m)!} x^{n-2m},$$

当  $n$  是正奇数时, 将上面的  $a_{n-2m}$  的值代入 (6.16) 式, 这样得到的  $y_2$  也记作  $P_n(x)$ , 得

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m! (n-m)! (n-2m)!} x^{n-2m},$$

把这两个多项式写成统一的形式, 得

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m! (n-m)! (n-2m)!} x^{n-2m}, \quad (6.17)$$

其中  $\left[\frac{n}{2}\right]$  表示不大于  $\frac{n}{2}$  的最大整数. 这个多项式称为  $n$  次勒让德多项式 (或称为第一类勒让德函数).

特别地, 当  $n=0, 1, 2, 3, 4, 5$  时, 得到

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, & P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), & P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), & P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x). \end{aligned}$$

并绘出  $P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x)$  的图形如图 6.1.

显然,  $P_0(1) = 1, P_1(1) = 1, P_2(1) = 1, \dots$ , 一般可证  $P_n(1) = 1$ .

勒让德多项式 (6.17) 还可以用另一种简明的形式来表达, 即

**定理 6.1**  $P_n(x)$  可表示为

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \quad (6.18)$$

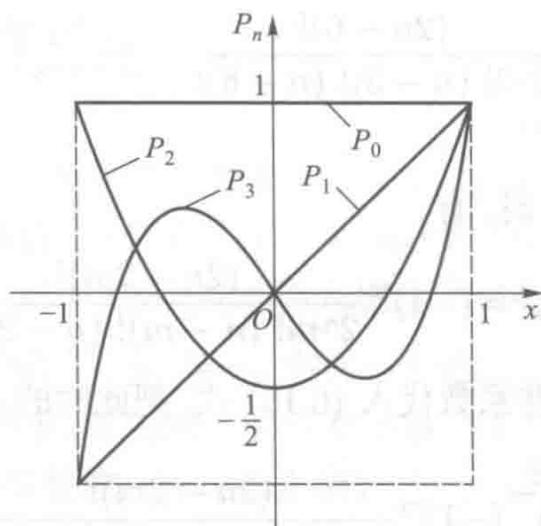


图 6.1

证 按二项式展开, 有

$$(x^2 - 1)^n = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m n!}{m! (n-m)!} x^{2n-2m},$$

因此,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \\ &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m n!}{m! (n-m)!} \frac{d^n}{dx^n} x^{2n-2m} \\ &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m n!}{m! (n-m)!} (2n-2m)(2n-2m-1) \cdots (n-2m+1) x^{n-2m} \\ &= \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m! (n-m)! (n-2m)!} x^{n-2m} \\ &= P_n(x), \end{aligned}$$

这里  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  如前所述. 这就证明了公式 (6.18).

称 (6.18) 式为罗德里格斯 (Rodrigues) 公式, 这公式对以后的应用是方便的. 综上所述可得如下结论:

**定理 6.2** (1) 当  $n$  不为正整数时,  $y_1, y_2$  都是无穷级数, 勒让德方程 (6.9) 的通解为

$$y = y_1 + y_2, \quad |x| < 1,$$

这里  $y_1$  和  $y_2$  分别为无穷级数 (6.15) 和 (6.16); 当  $x \rightarrow \pm 1$  时, 由于  $y_1$  和  $y_2$  趋

于无穷, 因而勒让德方程在区间  $(-1, 1)$  上没有有界解.

(2) 当  $n$  为正整数时, 在  $a_n$  适当选定之后,  $y_1$  与  $y_2$  之中有一个是勒让德多项式  $P_n(x)$ , 它是方程 (6.9) 在区间  $[-1, 1]$  上的有界解, 另一个仍为无穷级数解, 通常记作  $Q_n(x)$ , 此时方程 (6.9) 的通解为

$$y = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x),$$

其中  $Q_n(x)$  称为第二类勒让德函数, 它在区间  $(-1, 1)$  上是无界的.

## §6.3 勒让德多项式的母函数及递推公式

### §6.3.1 勒让德多项式的母函数

由于勒让德多项式的性质借助于勒让德多项式的母函数可以非常简单地推出来, 因而, 我们先来介绍勒让德多项式的母函数. 由前面的讨论知勒让德多项式从拉普拉斯方程而来, 因此不妨从拉普拉斯方程的基本解出发考虑问题. 设在单位球北极置一单位正电荷, 如图 6.2 所示, 则在球内一点  $M$  (其球坐标为  $(r, \theta, \varphi)$ ) 的电位为

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2}}.$$

现在讨论函数

$$w(x, z) = (1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}},$$

其中  $z$  为复变数, 而  $x$  ( $x = \cos \theta$ ) 为绝对值不大于 1 的参数. 因此,  $w(x, z)$  在单位圆  $|z| < 1$  内是解析函数. 于是由复变函数论可知, 当  $|z| < 1$  时, 有

$$w(x, z) = (1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x) z^n,$$

其中

$$C_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(1 - 2x\eta + \eta^2)^{-\frac{1}{2}}}{\eta^{n+1}} d\eta,$$

$C$  是单位圆内包围原点  $z = 0$  的任何封闭曲线. 由于  $1/d$  是拉普拉斯方程的解, 而  $C_n(x)$  又只与  $x$ , 或者说, 只与  $\theta$  有关, 故  $C_n(x)$  与  $n$  阶勒让德多项式有关. 事实上, 我们有:

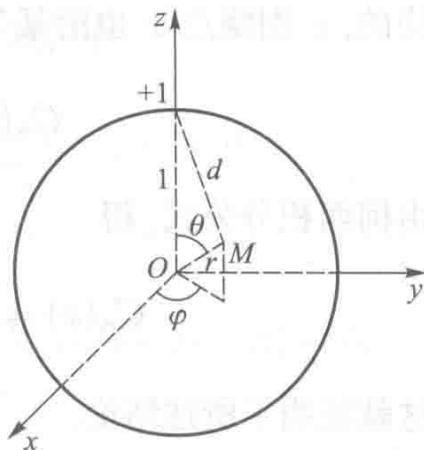


图 6.2

**定理 6.3** 对  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,

$$C_n(x) = P_n(x).$$

**证** 作自变量代换  $(1 - 2xz + z^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - zu$ , 它把复变数  $z$  变为复变数  $u$ ,

$$z = \frac{2(u-x)}{u^2-1},$$

$$dz = 2 \frac{2xu - 1 - u^2}{(u^2-1)^2} du,$$

$$1 - zu = \frac{2xu - 1 - u^2}{u^2-1}.$$

显然,  $z$  平面上的点  $O$  对应于  $u$  平面上的点  $x$ ,  $z$  沿封闭曲线  $C$  走一圈时, 相应的,  $u$  围绕点  $x$  也沿某条封闭曲线  $C'$  走一圈, 因此

$$C_n(x) = \frac{1}{2^n} \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{(\xi^2-1)^n}{(\xi-x)^{n+1}} d\xi.$$

由柯西积分公式, 得

$$C_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left\{ \frac{d^n}{du^n} (u^2-1)^n \right\}_{u=x} \equiv P_n(x),$$

这就证明了所述结论.

这样一来, 便有

$$w(x, z) = (1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n, \quad (6.19)$$

所以, 人们称函数

$$w(x, z) = (1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (6.20)$$

为勒让德多项式的母函数.

由式 (6.19), 很容易得到下面这些结果:

$$\begin{aligned} P_n(1) &= 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n, \quad P_{2n+1}(0) = 0, \\ P_{2n}(0) &= (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2}, \end{aligned}$$

这只要在 (6.19) 式中令  $x$  分别等于  $\pm 1$  或  $0$ , 再将左端按  $z$  的方幂展开即可.

由式 (6.19) 还可得

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad (6.21)$$

事实上, 只要将式 (6.19) 中的  $x$  以  $-x$  代入,  $z$  以  $-z$  代入, 即得上述结果. 式 (6.21) 也表明, 当  $n$  是偶数时,  $P_n(x)$  是偶函数; 当  $n$  是奇数时,  $P_n(x)$  是奇函数.

### §6.3.2 勒让德多项式的递推公式

应用展开式 (6.19) 的另一个例子, 便是推导勒让德多项式的递推公式. 显然, 下面两个恒等式成立:

$$(1 - 2xz + z^2) \frac{\partial w}{\partial z} + (z - x)w = 0, \quad (6.22)$$

$$(1 - 2xz + z^2) \frac{\partial w}{\partial x} - zw = 0. \quad (6.23)$$

因为幂级数可以逐项微分, 将级数 (6.19) 代入 (6.22) 式, 得

$$(1 - 2xz + z^2) \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)z^{n-1} + (z - x) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n = 0,$$

于是令  $z^n$  的系数等于零, 得

$$(n+1)P_{n+1}(x) - 2nxP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x) + P_{n-1}(x) - xP_n(x) = 0,$$

即

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (6.24)$$

该式把相邻的三个勒让德多项式联系在一起, 利用它即可按顺序计算各个勒让德多项式.

将级数 (6.19) 代入 (6.23) 式, 得

$$(1 - 2xz + z^2) \sum_{n=1}^{\infty} P'_n(x)z^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^{n+1} = 0,$$

从而有

$$P'_{n+1}(x) - 2xP'_n(x) + P'_{n-1}(x) - P_n(x) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (6.25)$$

将 (6.24) 微分, 再由所得的等式与 (6.25) 消去  $P'_{n-1}(x)$ , 又消去  $P'_{n+1}(x)$ , 便得下面两个公式:

$$P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (6.26)$$

$$xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (6.27)$$

将此两式相加, 即得比较对称的公式:

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x). \quad (6.28)$$

## §6.4 函数按勒让德多项式展为级数

在与勒让德多项式的各种应用有关的许多问题中, 都必须将给定的函数在区间  $(-1, 1)$  上展开为勒让德多项式的级数. 为此, 我们首先要证明勒让德多项式的正交性.

### §6.4.1 勒让德多项式的正交性

勒让德多项式的最重要性质之一, 便是它在区间  $(-1, 1)$  上的正交性, 即

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0, \quad m \neq n. \quad (6.29)$$

由于

$$[(1-x^2)P'_n(x)]' + n(n+1)P_n(x) = 0,$$

$$[(1-x^2)P'_m(x)]' + m(m+1)P_m(x) = 0,$$

用  $P_m(x)$  乘前式,  $P_n(x)$  乘后式, 然后相减, 并在区间  $(-1, 1)$  上求积分, 便得

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_m(x)[(1-x^2)P'_n(x)]' dx - \int_{-1}^1 P_n(x)[(1-x^2)P'_m(x)]' dx + \\ [n(n+1) - m(m+1)] \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0. \end{aligned}$$

利用分部积分法, 得

$$[n(n+1) - m(m+1)] \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0,$$

当  $m \neq n$  时, 即得 (6.29) 式.

公式 (6.29) 说明, 勒让德多项式在区间  $(-1, 1)$  上对权函数 1 为正交.

### §6.4.2 勒让德多项式的模

积分

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x)dx$$

的平方根称为  $n$  阶勒让德多项式的模. 现求该积分的值. 为此, 将式 (6.24) 中的  $n$  换成  $n-1$ , 得

$$nP_n(x) - (2n-1)xP_{n-1}(x) + (n-1)P_{n-2}(x) = 0,$$

再以  $(2n+1)P_n(x)$  乘之, 得

$$\begin{aligned} n(2n+1)P_n^2(x) - (2n-1)(2n+1)xP_{n-1}(x)P_n(x) + \\ (n-1)(2n+1)P_{n-2}(x)P_n(x) = 0. \end{aligned} \quad (6.30)$$

用  $(2n-1)P_{n-1}(x)$  乘式 (6.24), 得

$$\begin{aligned} (n+1)(2n-1)P_{n+1}(x)P_{n-1}(x) - (2n+1)(2n-1)xP_n(x)P_{n-1}(x) + \\ n(2n-1)P_{n-1}^2(x) = 0. \end{aligned} \quad (6.31)$$

(6.30) 式减去 (6.31) 式, 得

$$\begin{aligned} n(2n+1)P_n^2(x) - n(2n-1)P_{n-1}^2(x) + (n-1)(2n+1)P_{n-2}(x)P_n(x) - \\ (n+1)(2n-1)P_{n+1}(x)P_{n-1}(x) = 0. \end{aligned}$$

将此式在区间  $(-1, 1)$  上积分, 并注意到 (6.29) 式, 则得

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x)dx = \frac{2n-1}{2n+1} \int_{-1}^1 P_{n-1}^2(x)dx \quad (n=2, 3, \dots).$$

依次利用此式, 可得

$$\int_{-1}^1 P_{n-1}^2(x)dx = \frac{2n-3}{2n-1} \int_{-1}^1 P_{n-2}^2(x)dx,$$

$$\int_{-1}^1 P_{n-2}^2(x)dx = \frac{2n-5}{2n-3} \int_{-1}^1 P_{n-3}^2(x)dx,$$

.....

$$\int_{-1}^1 P_2^2(x)dx = \frac{3}{5} \int_{-1}^1 P_1^2(x)dx,$$

这样一来,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^2(x)dx &= \frac{2n-1}{2n+1} \int_{-1}^1 P_{n-1}^2(x)dx \\ &= \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{2n-3}{2n-1} \int_{-1}^1 P_{n-2}^2(x)dx \\ &= \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{2n-3}{2n-1} \cdot \frac{2n-5}{2n-3} \int_{-1}^1 P_{n-3}^2(x)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \dots\dots\dots \\
 &= \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{2n-3}{2n-1} \cdot \frac{2n-5}{2n-3} \cdot \dots \cdot \frac{3}{5} \int_{-1}^1 P_1^2(x) dx \\
 &= \frac{3}{2n+1} \int_{-1}^1 P_1^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}.
 \end{aligned}$$

直接计算知, 这个结果对于  $n=0$  与  $n=1$  也成立. 于是有

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}. \quad (6.32)$$

**例 6.1** 计算  $\int_{-1}^1 x^2 P_n(x) dx$ .

**解** 由于  $x^2 = \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{2}{3}P_2(x)$ , 于是

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 x^2 P_n(x) dx &= \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{2}{3}P_2(x) \right] P_n(x) dx \\
 &= \frac{1}{3} \int_{-1}^1 P_0(x) P_n(x) dx + \frac{2}{3} \int_{-1}^1 P_2(x) P_n(x) dx \\
 &= \begin{cases} \frac{2}{3}, & n=0, \\ 0, & n \neq 0, 2, \\ \frac{4}{15}, & n=2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

### §6.4.3 傅里叶-勒让德级数

利用勒让德多项式的正交性, 类似于 §1.6.2 关于傅里叶级数的讨论可以证明:

**定理 6.4** 若函数  $f(x)$  是定义在区间  $(-1, 1)$  内分段光滑的实值函数, 且积分  $\int_{-1}^1 f^2(x) dx$  的值有限, 则  $f(x)$  可以展开成勒让德多项式的级数, 即

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x) = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] \quad (-1 < x < 1), \quad (6.33)$$

其中

$$C_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (6.34)$$

称为函数  $f(x)$  在区间  $(-1, 1)$  上的傅里叶-勒让德系数, 而 (6.33) 式左端的函数项级数称为函数  $f(x)$  的傅里叶-勒让德级数.

如果在 (6.33) 与 (6.34) 式中令  $x = \cos \theta$ , 则这两个式子可写成

$$\frac{1}{2}[f(\cos \theta + 0) + f(\cos \theta - 0)] = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos \theta) \quad (0 < \theta < \pi), \quad (6.35)$$

其中

$$C_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} f(\cos \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (6.36)$$

**例 6.2** 试将函数

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0, \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

展开为傅里叶-勒让德级数.

**解** 由于函数  $f(x)$  为奇函数, 当  $n = 2k$  时,  $P_n(x)$  为偶函数, 因而  $C_n = 0$ ; 而当  $n = 2k + 1$  时,  $P_n(x)$  为奇函数, 所以

$$C_n = (2n+1) \int_0^1 P_n(x) dx \quad (n \text{ 为奇数}),$$

即

$$C_{2k+1} = (4k+3) \int_0^1 P_{2k+1}(x) dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

由此, 得

$$C_1 = 3 \int_0^1 P_1(x) dx = 3 \int_0^1 x dx = \frac{3}{2},$$

$$C_3 = 7 \int_0^1 P_3(x) dx = 7 \int_0^1 \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) dx = -\frac{7}{8},$$

$$C_5 = 11 \int_0^1 P_5(x) dx = 11 \int_0^1 \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) dx = \frac{11}{16},$$

.....

所以, 当  $x \neq 0$  时,

$$f(x) = \frac{3}{2}P_1(x) - \frac{7}{8}P_3(x) + \frac{11}{16}P_5(x) + \dots,$$

当  $x = 0$  时, 该级数收敛于 0.

**例 6.3** 试将函数  $f(x) = x^2 + x^3$  ( $-1 < x < 1$ ) 展开为傅里叶-勒让德级数.

**解** 因为  $f(x)$  为三次多项式, 故展开式 (6.33) 具有如下的形式:

$$f(x) = C_0 P_0(x) + C_1 P_1(x) + C_2 P_2(x) + C_3 P_3(x).$$

在这一特殊情况下, 欲求系数  $C_n$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) 不必一定要计算积分 (6.34), 只要将勒让德多项式  $P_n$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) 的明显形式代入上式, 再比较两边  $x$  的同次方幂的系数, 就可确定  $C_n$ , 即

$$\begin{aligned} x^2 + x^3 &= C_0 + C_1 x + C_2 \frac{3x^2 - 1}{2} + C_3 \frac{5x^3 - 3x}{2} \\ &= C_0 - \frac{1}{2}C_2 + \left(C_1 - \frac{3}{2}C_3\right)x + \frac{3}{2}C_2 x^2 + \frac{5}{2}C_3 x^3, \end{aligned}$$

由此得

$$C_0 = \frac{1}{3}, \quad C_1 = \frac{3}{5}, \quad C_2 = \frac{2}{3}, \quad C_3 = \frac{2}{5},$$

所以

$$x^2 + x^3 = \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{3}{5}P_1(x) + \frac{2}{3}P_2(x) + \frac{2}{5}P_3(x).$$

## §6.5 勒让德多项式的应用

**例 6.4 (球形域内的电位分布)** 在半径为 1 的球内求调和函数  $u$ , 使它在球面上满足

$$u|_{r=1} = 6 \cos 2\theta + 2.$$

**解** 根据边界条件的形式知所求的调和函数  $u$  只与变量  $r, \theta$  有关, 而与变量  $\varphi$  无关, 因此所提的问题归结为下列定解问题:

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0 & (0 < r < 1), \end{cases} \quad (6.37)$$

$$\begin{cases} u|_{r=1} = 6 \cos 2\theta + 2. \end{cases} \quad (6.38)$$

应用分离变量法. 设  $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ . 代入方程 (6.37) 分离变量得

$$\frac{r^2 R'' + 2rR'}{R} = -\frac{\Theta'' + \cot \theta \Theta'}{\Theta} = \lambda,$$

将常数  $\lambda$  写成  $\lambda = n(n+1)$ , 则得两个常微分方程

$$r^2 R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0, \quad (6.39)$$

$$\Theta'' + \cot \theta \Theta' + n(n+1)\Theta = 0. \quad (6.40)$$

方程 (6.40) 是方程 (6.7) 当  $m = 0$  时的特例, 所以它是勒让德方程. 由问题的物理意义知, 函数  $u(r, \theta)$  应是有界的, 从而  $\Theta(\theta)$  也应是有界. 由 §6.2 的结论可知,

只有当  $n$  为整数时, 方程 (6.40) 在区间  $[0, \pi]$  内才有有界解  $\Theta_n(\theta) = P_n(\cos \theta)$ .  
方程 (6.39) 为欧拉方程, 它的通解为

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-(n+1)}.$$

要使  $R_n$  也有界, 应取  $D_n = 0$ , 从而有

$$R_n(r) = C_n r^n,$$

因而

$$u_n(r, \theta) = C_n r^n P_n(\cos \theta) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

由叠加原理得方程 (6.37) 的解为

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n P_n(\cos \theta). \quad (6.41)$$

由边界条件 (6.38) 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos \theta) = 6 \cos 2\theta + 2.$$

令  $x = \cos \theta$ , 则上式化为

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x) = 12x^2 - 4.$$

由于

$$P_0(x) = 1, \quad x^2 = \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{2}{3}P_2(x),$$

代入上式, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x) = 8P_2(x).$$

比较系数可得

$$C_2 = 8, \quad C_n = 0 \quad (n \neq 2).$$

因此, 问题 (6.37)、(6.38) 的解为

$$u(r, \theta) = 8r^2 P_2(\cos \theta) = 4r^2(3 \cos^2 \theta - 1).$$

**注 6.1** 本例题还可以用试探法快速求解. 事实上, 注意到边界条件为

$$6 \cos 2\theta + 2 = 6(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2 = [6(z^2 - x^2 - y^2) + 2]|_{r=1}.$$

此外,

$$\Delta(6(z^2 - x^2 - y^2) + 2) = -12, \quad \Delta(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 6$$

以及

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 1)|_{r=1} = 0.$$

因此我们取

$$\begin{aligned} u &= [6(z^2 - x^2 - y^2) + 2] + 2(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \\ &= -4(x^2 + y^2 - 2z^2) \\ &= 4r^2(3 \cos^2 \theta - 1) \end{aligned}$$

即为原问题的解.

## §6.6 本章小结

通过本章的学习, 读者须了解勒让德方程 (6.9) 的幂级数解法及勒让德多项式的一些性质, 如递推公式 (6.24) 与 (6.28)、正交性 (6.29)、模 (6.32) 以及傅里叶-勒让德级数 (6.33) 与 (6.34); 会用勒让德多项式求解有关的定解问题.



## 习题六

1. 证明:  $x^3 = \frac{3}{5}P_1(x) + \frac{2}{5}P_3(x)$ .

2. 证明: 当  $m \neq n$  时, 有

$$\int_x^1 P_m(u)P_n(u)du = \frac{(1-x^2)[P'_m(x)P_n(x) - P'_n(x)P_m(x)]}{m(m+1) - n(n+1)}.$$

3. 证明:  $P'_n(x) = (2n-1)P_{n-1}(x) + (2n-5)P_{n-3}(x) + (2n-9)P_{n-5}(x) + \dots$ .

4. 试证

(1)  $(m+n+1) \int_0^1 x^m P_n(x) dx = m \int_0^1 x^{m-1} P_{n-1}(x) dx$ ;

(2)  $\int_{-1}^1 (1-x^2)[P'_n(x)]^2 dx = \frac{2n(n+1)}{2n+1}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

5. 计算下列积分

(1)  $\int_{-1}^1 P_n(x) dx$ ; (2)  $\int_{-1}^1 x P_n(x) dx$ ; (3)  $\int_{-1}^1 (2+3x) P_n(x) dx$ .

6. 设  $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x \leq 0, \\ x, & 0 < x < 1. \end{cases}$  证明:

$$f(x) = \frac{1}{4}P_0(x) + \frac{1}{2}P_1(x) + \frac{5}{16}P_2(x) - \frac{3}{32}P_4(x) + \dots$$

7. 设  $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq \alpha, \\ 1, & \alpha < x \leq 1. \end{cases}$  试将函数  $f(x)$  展成为傅里叶-勒让德级数.

8. 求单位球内的调和函数  $u$ , 使它满足边界条件  $u|_{r=1} = \cos^2 \theta$ .

9. 在半径为 1 的球内求调和函数  $u$ , 已知在球面上  $u|_{r=1} = \begin{cases} A, & 0 \leq \theta \leq \alpha, \\ 0, & \alpha < \theta \leq \pi. \end{cases}$

10. 求解下列问题:

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0 & (0 < r < 1), \\ u|_{r=1} = \cos^2 \theta + 2 \cos \theta. \end{cases}$$

11. 在半径为 1 的球的外部求调和函数  $u$ , 使它满足下列条件:

$$\begin{cases} u|_{r=1} = \cos^2 \theta, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} u = 0. \end{cases}$$

## 第七章

# 埃尔米特多项式

在应用中,还会遇到另一类正交多项式,这就是埃尔米特多项式.

### §7.1 埃尔米特多项式的定义

埃尔米特多项式是下列  $n$  阶埃尔米特方程

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \quad (7.1)$$

多项式形式的解,其中  $n$  为给定的实数.

设方程 (7.1) 有一幂级数解

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad (7.2)$$

代入方程 (7.1), 得系数之间的递推关系式

$$c_{k+2} = \frac{2(k-n)}{(k+2)(k+1)} c_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.3)$$

在上面的递推公式中,令  $k = 0, 2, 4, \dots, 2m-2, \dots$ , 分别得

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{2n}{2!} c_0, \\ c_4 &= \frac{2^2 n(n-2)}{4!} c_0, \\ c_6 &= -\frac{2^3 n(n-2)(n-4)}{6!} c_0, \\ &\dots \dots \dots \\ c_{2m} &= (-1)^m \frac{2^m n(n-2) \cdots (n-2m+2)}{(2m)!} c_0, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

令  $k = 1, 3, 5, \dots, 2m - 1, \dots$ , 分别得

$$\begin{aligned} c_3 &= -\frac{2(n-1)}{3!}c_1, \\ c_5 &= \frac{2^2(n-1)(n-3)}{5!}c_1, \\ &\dots\dots\dots \\ c_{2m+1} &= (-1)^m \frac{2^m(n-1)(n-3)\cdots(n-2m+1)}{(2m+1)!}c_1, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

将求得的这些系数的值代入级数 (7.2), 便得

$$\begin{aligned} y(x) &= c_0 \left[ 1 - \frac{2n}{2!}x^2 + \frac{2^2n(n-2)}{4!}x^4 - \frac{2^3n(n-2)(n-4)}{6!}x^6 + \right. \\ &\quad \left. \dots + (-1)^m \frac{2^m n(n-2)\cdots(n-2m+2)}{(2m)!}x^{2m} + \dots \right] + \\ &\quad c_1 \left[ x - \frac{2(n-1)}{3!}x^3 + \frac{2^2(n-1)(n-3)}{5!}x^5 - \right. \\ &\quad \left. \dots + (-1)^m \frac{2^m(n-1)(n-3)\cdots(n-2m+1)}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \dots \right]. \quad (7.4) \end{aligned}$$

由于  $c_0, c_1$  的任意性, 所以函数

$$\begin{aligned} y_1(x) &= c_0 \left[ 1 - \frac{2n}{2!}x^2 + \frac{2^2n(n-2)}{4!}x^4 - \frac{2^3n(n-2)(n-4)}{6!}x^6 + \right. \\ &\quad \left. \dots + (-1)^m \frac{2^m n(n-2)\cdots(n-2m+2)}{(2m)!}x^{2m} + \dots \right], \quad (7.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2(x) &= c_1 \left[ x - \frac{2(n-1)}{3!}x^3 + \frac{2^2(n-1)(n-3)}{5!}x^5 - \right. \\ &\quad \left. \dots + (-1)^m \frac{2^m(n-1)(n-3)\cdots(n-2m+1)}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \dots \right] \quad (7.6) \end{aligned}$$

分别都是方程 (7.1) 的解, 且是两个线性无关的解. 级数 (7.5) 与 (7.6) 的收敛半径均为  $+\infty$ , 所以方程 (7.1) 的通解为

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x).$$

由 (7.5) 与 (7.6) 式可知, 当且仅当  $n$  为非负偶数时,  $y_1$  为  $n$  次多项式,  $y_2$  仍为级数; 而当且仅当  $n$  为正奇数时,  $y_2$  为  $n$  次多项式,  $y_1$  仍为级数. 因此, 若要求方程 (7.1) 的多项式解的话, 则方程 (7.1) 中的参数  $n$  应取非负整数. 为此

将 (7.3) 式改写成如下的形式

$$c_k = -\frac{(k+2)(k+1)}{2(n-k)}c_{k+2} \quad (k \leq n-2),$$

于是

$$\begin{aligned} c_{n-2} &= -\frac{n(n-1)}{2 \cdot 2}c_n, \\ c_{n-4} &= (-1)^2 \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2 \cdot 2 \cdot 4}c_n, \\ c_{n-6} &= (-1)^3 \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2^3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6}c_n, \end{aligned}$$

一般地, 当  $n-2m \geq 0$  时, 有

$$\begin{aligned} c_{n-2m} &= (-1)^m \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-2m+1)}{2^m \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2m)}c_n \\ &= (-1)^m \frac{n!}{2^{2m} m! (n-2m)!}c_n. \end{aligned}$$

在应用上常取  $c_n = 2^n$ , 于是一般项的系数为

$$c_{n-2m} = (-1)^m \frac{n!}{m! (n-2m)!} 2^{n-2m}.$$

当  $n$  为非负偶数时, 将这些系数代入 (7.5), 得

$$\begin{aligned} y_1(x) &= (2x)^n - \frac{n!}{1!(n-2)!}(2x)^{n-2} + \frac{n!}{2!(n-4)!}(2x)^{n-4} - \cdots \\ &= \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^m \frac{n!}{m! (n-2m)!} (2x)^{n-2m}. \end{aligned}$$

当  $n$  为正奇数时, 将系数  $c_{n-2m}$  代入 (7.6), 得

$$y_2(x) = \sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^m \frac{n!}{m! (n-2m)!} (2x)^{n-2m}.$$

把所得到的两个多项式表达式写成统一的形式, 并记为  $H_n(x)$ :

$$H_n(x) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{n!}{m! (n-2m)!} (2x)^{n-2m}. \quad (7.7)$$

(7.7) 称为  $n$  阶埃尔米特多项式.  $H_n(x)$  的前 6 个的具体表达式为

$$H_0(x) = 1,$$

$$H_1(x) = 2x,$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2,$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x,$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12,$$

$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x.$$

## §7.2 埃尔米特多项式的母函数与递推公式

函数

$$w(x, t) = e^{2xt-t^2} \quad (7.8)$$

称为埃尔米特多项式的母函数, 这是因为将  $w(x, t)$  看作复变数  $t$  的函数时, 它的泰勒 (Taylor) 级数展开式的系数就是埃尔米特多项式, 事实上

$$w(x, t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{\partial^n w}{\partial t^n} \right)_{t=0} t^n \quad (|t| < \infty),$$

而

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^n w}{\partial t^n} \right)_{t=0} &= e^{x^2} \left( \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(x-t)^2} \right)_{t=0} \\ &= (-1)^n e^{x^2} \left( \frac{\partial^n}{\partial u^n} e^{-u^2} \right)_{u=x} = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}. \end{aligned}$$

应用数学归纳法和莱布尼茨公式, 易得  $\left. \frac{\partial^n w}{\partial t^n} \right|_{t=0} = H_n(x)$ . 从而

$$w(x, t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n \quad (|t| < \infty), \quad (7.9)$$

其中

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (7.10)$$

是埃尔米特多项式的微分表达式.

由恒等式

$$\frac{\partial w}{\partial t} - (2x - 2t)w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} - 2tw = 0$$

以及式 (7.9), 容易推出埃尔米特多项式的递推公式

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (7.11)$$

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x). \quad (7.12)$$

由 (7.9), 易得

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}, \quad H_{2n+1}(0) = 0.$$

### §7.3 埃尔米特多项式的正交性与模

不难验证函数  $u = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$  满足方程

$$u'' + (2n + 1 - x^2)u = 0. \quad (7.13)$$

埃尔米特多项式  $H_n(x)$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  上关于权函数  $e^{-x^2}$  是正交的, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n). \quad (7.14)$$

事实上, 令  $u_n = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$ , 由方程 (7.13), 有

$$\begin{aligned} u_n'' + (2n + 1 - x^2)u_n &= 0, \\ u_m'' + (2m + 1 - x^2)u_m &= 0. \end{aligned}$$

将此二式分别乘以  $u_m$  与  $u_n$ , 相减, 并在区间  $(-\infty, +\infty)$  上积分, 得

$$(n - m) \int_{-\infty}^{+\infty} u_m u_n dx = 0,$$

由此立即可推出 (7.14) 式.

积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx \quad (7.15)$$

的平方根, 称为  $n$  次埃尔米特多项式的模. 现求其值, 将 (7.11) 式中的  $n$  以  $n-1$  代替, 再乘以  $H_n(x)$ , 又将 (7.11) 式乘以  $H_{n-1}(x)$ , 将所得两式相减, 则得

$$\begin{aligned} H_n^2(x) + 2(n-1)H_{n-2}(x)H_n(x) - \\ H_{n+1}(x)H_{n-1}(x) - 2nH_{n-1}^2(x) = 0 \quad (n = 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

用  $e^{-x^2}$  乘此式, 并在区间  $(-\infty, +\infty)$  上求积分, 再利用埃尔米特多项式的正交性, 得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 2n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_{n-1}^2(x) dx \quad (n = 2, 3, \dots).$$

顺次利用这个式子, 便得

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx &= 2^{n-1} n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_1^2(x) dx \\ &= 2^n n! \sqrt{\pi} \quad (n = 2, 3, \dots), \end{aligned} \quad (7.16)$$

这是因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_1^2(x) dx = 4 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = 2\sqrt{\pi}.$$

事实上, 当  $n = 0$  与  $1$  时, (7.16) 同样成立. 于是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (7.17)$$

## §7.4 函数按埃尔米特多项式展开为级数

可以证明, 如果函数  $f(x)$  为定义于区间  $(-\infty, +\infty)$  上的任意实值函数, 且满足

(1)  $f(x)$  在任何有限区间  $(-a, a)$  内都是分段光滑的函数;

(2) 反常积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f^2(x) dx$  收敛,

那么

$$\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x) \quad (-\infty < x < +\infty), \quad (7.18)$$

其中系数  $c_n$  由下式确定

$$c_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-x^2} H_n(x) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (7.19)$$

因此, 在  $f(x)$  的连续点, 级数 (7.18) 收敛于  $f(x)$ .

**例 7.1** 试将函数  $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$  按埃尔米特多项式展成级数.

**解** 此时展开式 (7.18) 有如下的形式

$$f(x) = AH_0(x) + BH_1(x) + CH_2(x) + DH_3(x),$$

欲求这些系数不必一定要计算积分 (7.19), 只要将  $H_n(x)$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) 的表达式代入上式, 比较  $x$  同次幂的系数, 即可确定待定常数  $A, B, C, D$ . 即

$$x^3 + 2x^2 + 1 = A + 2Bx + C(4x^2 - 2) + D(8x^3 - 12x),$$

由此可得

$$A = 2, B = \frac{3}{4}, C = \frac{1}{2}, D = \frac{1}{8}.$$

因此

$$x^3 + 2x^2 + 1 = 2H_0(x) + \frac{3}{4}H_1(x) + \frac{1}{2}H_2(x) + \frac{1}{8}H_3(x).$$

## §7.5 本章小结

通过本章的学习, 读者须了解埃尔米特多项式的定义及性质, 如母函数表示形式、递推公式、正交性与模以及将定义在相应区间上满足一定条件的函数按埃尔米特多项式展开为级数. 现在将重要结论列举如下:

1.  $n$  阶埃尔米特方程:

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

2.  $n$  次埃尔米特多项式:

$$H_n(x) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{n!}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m}.$$

3. 埃尔米特多项式的母函数:

$$w(x, t) = e^{2xt-t^2}.$$

4. 埃尔米特多项式的递推公式:

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0,$$

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots.$$

5. 埃尔米特多项式的正交性:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n).$$

6. 埃尔米特多项式的模:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

7. 函数按埃尔米特多项式展开:

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x) \quad (-\infty < x < +\infty),$$

其中,

$$c_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2} H_n(x) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

## 习题七

1. 证明

$$(1) x^2 = \frac{1}{2} H_0(x) + \frac{1}{4} H_2(x);$$

$$(2) x^3 = \frac{3}{4} H_1(x) + \frac{1}{8} H_3(x).$$

2. 试将函数  $f(x) = x^4 + x$  按埃尔米特多项式展成级数.

3. 试用数学归纳法证明

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

4. 试将函数  $f(x) = e^x$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) 按埃尔米特多项式展成级数.

提示: (1)  $H_n(x) e^{-x^2} = -\frac{d}{dx} (e^{-x^2} H_{n-1}(x)) \quad (n = 1, 2, \dots);$

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+x} dx = \sqrt{\pi} e^{\frac{1}{4}}.$$

# 附 录

## 附录一 几类线性常微分方程的求解

### 1. 一阶线性常微分方程

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$

若  $A(x)$  是  $a(x)$  的原函数, 在方程两边同时乘以  $e^{A(x)}$  得

$$(e^{A(x)}y(x))' = e^{A(x)}y'(x) + e^{A(x)}a(x)y(x) = e^{A(x)}b(x).$$

因此  $e^{A(x)}y(x)$  是  $e^{A(x)}b(x)$  的原函数, 即

$$e^{A(x)}y(x) = \int_0^x e^{A(\xi)}b(\xi)d\xi + C,$$

其中  $C$  为任意常数. 故此方程的通解为

$$y(x) = e^{-A(x)} \left[ \int_0^x e^{A(\xi)}b(\xi)d\xi + C \right],$$

特别地, 若取  $A(x) = \int_0^x a(t)dt$ , 则通解可写成

$$y(x) = e^{\int_0^x a(t)dt} \left[ \int_0^x e^{\int_0^\xi a(t)dt} b(\xi)d\xi + C \right].$$

### 2. 二阶常系数齐次线性常微分方程

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0,$$

其中  $p, q$  为常数. 此常微分方程的特征方程为  $r^2 + pr + q = 0$ . 若  $\Delta = p^2 - 4q > 0$ , 特征方程有两个不同的实根  $r_1, r_2$ . 此时原方程的通解为

$$y(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x},$$

其中  $A, B$  为任意常数. 若  $\Delta = p^2 - 4q = 0$ , 特征方程有两个相同的实根, 记为  $r$ . 此时原方程的通解为

$$y(x) = (Ax + B)e^{rx}.$$

若  $\Delta = p^2 - 4q < 0$ , 特征方程有两个不同的复根  $r_1 = \alpha + \beta i, r_2 = \alpha - \beta i$ . 此时原方程的通解为

$$y(x) = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x),$$

其中  $A, B$  为任意常数.

### 3. 欧拉方程

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x),$$

其中  $p_i$  为常数 ( $1 \leq i \leq n$ ).

通过变量代换  $x = e^t$  可将欧拉方程化成常系数的常微分方程. 例如, 我们考虑二阶欧拉方程

$$r^2 R'' + r R' - n^2 R = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

令  $r = e^t, T(t) = R(r(t))$ , 则  $R' = T' r^{-1}, R'' = T'' r^{-2} - T' r^{-2}$ , 代入原方程得

$$T'' - n^2 T = 0.$$

若  $n = 0$ , 则  $T(t) = A_0 t + B_0$ , 故原方程的通解为  $R_0(r) = A_0 \ln r + B_0$ , 其中  $A_0, B_0$  为任意常数. 若  $n \neq 0$ , 则  $T(t) = A_n e^{nt} + B_n e^{-nt}$ , 故原方程的通解为  $R_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n}$ , 其中  $A_n, B_n$  为任意常数.

### 4. 用常数变易法求解非齐次二阶常微分方程

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x).$$

若相应的齐次方程  $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$  的通解为

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

其中  $c_1, c_2$  为常数, 则原方程的通解为

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x),$$

其中  $c_1(x), c_2(x)$  满足

$$\begin{aligned} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) &= 0, \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) &= f(x). \end{aligned}$$

#### 例 A-1 用常数变易法求解

$$\begin{cases} u_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 u_n(t) = f_n(t), \\ u_n(0) = 0, u_n'(0) = 0. \end{cases}$$

解 相应的齐次方程的通解为  $c_1 \sin \frac{n\pi at}{l} + c_2 \cos \frac{n\pi at}{l}$ , 因而

$$u_n(t) = c_1(t) \sin \frac{n\pi at}{l} + c_2(t) \cos \frac{n\pi at}{l},$$

其中  $c_1(x), c_2(x)$  满足

$$\begin{aligned} c_1'(t) \sin \frac{n\pi at}{l} + c_2'(t) \cos \frac{n\pi at}{l} &= 0, \\ \frac{n\pi a}{l} \left( c_1'(t) \cos \frac{n\pi at}{l} - c_2'(t) \sin \frac{n\pi at}{l} \right) &= f_n(t). \end{aligned}$$

求解得

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \frac{l}{n\pi a} \int_0^t f_n(\tau) \cos \frac{n\pi a\tau}{l} d\tau + C_1, \\ c_2(t) &= \frac{-l}{n\pi a} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{n\pi a\tau}{l} d\tau + C_2. \end{aligned}$$

因此方程的通解为

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \left[ \frac{l}{n\pi a} \int_0^t f_n(\tau) \cos \frac{n\pi a\tau}{l} d\tau + C_1 \right] \sin \frac{n\pi at}{l} + \\ &\quad \left[ \frac{-l}{n\pi a} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{n\pi a\tau}{l} d\tau + C_2 \right] \cos \frac{n\pi at}{l}. \end{aligned}$$

由  $u_n(0) = 0, u_n'(0) = 0$  知  $C_1 = C_2 = 0$ , 故

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \frac{l}{n\pi a} \int_0^t f_n(\tau) \left[ \cos \frac{n\pi a\tau}{l} \sin \frac{n\pi at}{l} - \sin \frac{n\pi a\tau}{l} \cos \frac{n\pi at}{l} \right] d\tau \\ &= \frac{l}{n\pi a} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{n\pi a(t-\tau)}{l} d\tau. \end{aligned}$$

例 A-2 用常数变易法求解

$$u''(r) + \frac{1}{r}u'(r) - \frac{1}{r^2}u(r) = -2r.$$

解 相应的齐次方程的通解为  $c_1 r + c_2 r^{-1}$ , 故原方程的通解为

$$u(r) = c_1(r)r + c_2(r)r^{-1},$$

其中  $c_1(r), c_2(r)$  满足

$$c_1'(r)r + c_2'(r)r^{-1} = 0,$$

$$c_1'(r) - c_2'(r)r^{-2} = -2r.$$

求解得  $c_1(r) = -\frac{r^2}{2} + A$ ,  $c_2(r) = \frac{r^4}{4} + B$ . 因此原方程的通解为

$$u(r) = -\frac{r^3}{4} + Ar + Br^{-1}.$$

## 附录二 常用积分变换表

### 1. 傅里叶变换

编号	$f(x)$	$\mathcal{F}(f)(\lambda)$
1	$\delta(x \pm a)$	$e^{\pm ia\lambda}$
2	$\frac{1}{2}[\delta(x+a) + \delta(x-a)]$	$\cos(a\lambda)$
3	$\frac{1}{2i}[\delta(x+a) - \delta(x-a)]$	$\sin(a\lambda)$
4	$x^k (k = 0, 1, 2, \dots)$	$2\pi i^k \delta^{(k)}(\lambda)$
5	$\cos ax$	$\pi[\delta(\lambda+a) + \delta(\lambda-a)]$
6	$\sin ax$	$i\pi[\delta(\lambda+a) - \delta(\lambda-a)]$
7	$\frac{\sin ax}{\pi x} (a > 0)$	$1,  \lambda  \leq a,$ $0,  \lambda  > a$
8	$e^{-ax^2} (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}$
9	$e^{-a x } (a > 0)$	$\frac{2a}{\lambda^2 + a^2}$
10	$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{a}{a^2 + x^2} (a > 0)$	$e^{-a \lambda }$

### 2. 拉普拉斯变换

编号	$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(s)$
1	$\delta^{(k)}(t) (k = 0, 1, 2, \dots)$	$s^k$
2	1 或 $H(t)$ 或 $\text{sgn}(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$t^a H(t) (a > -1)$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$

续表

编号	$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(s)$
4	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
5	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
6	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
7	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{a}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau \quad (a > 0)$	$\frac{1}{s} e^{-a\sqrt{s}}$
8	$\frac{a}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}} e^{-\frac{a^2}{4t}} \quad (a > 0)$	$e^{-a\sqrt{s}}$

### || 附录三 $\Gamma$ 函数

#### $\Gamma$ 函数的定义

在微积分中, 含实参变量  $x$  的积分

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (x > 0)$$

称为  $\Gamma$  函数. 上式右边的积分当  $x > 0$  时是收敛的, 因此上式定义了当  $x > 0$  时的  $\Gamma$  函数.

#### $\Gamma$ 函数的递推公式

对积分

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt$$

应用分部积分法, 易得

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

即

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1).$$

特别地, 当  $x$  为正整数  $n$  时, 有

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n!\Gamma(1) = n!.$$

在  $\Gamma$  函数的表示式中, 令  $x = \frac{1}{2}$ , 则得

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

### $\Gamma$ 函数定义域的扩充

由递推公式可以把  $\Gamma$  函数向  $x < 0$  的区域扩充. 例如, 对于区间  $-1 < x < 0$ , 我们定义

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x+1),$$

这里  $x+1 > 0$ , 所以上式右端具有确定的值. 再利用该式定义出  $\Gamma$  函数在区间  $-2 < x < -1$  内的值, 由此逐步进行下去, 就可以将  $\Gamma$  函数的定义域扩充到除 0 及负整数外的  $x < 0$  区域内.

由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Gamma(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \infty,$$

于是当  $x \rightarrow 0$  时,  $\Gamma(x) \rightarrow \infty$ . 利用这个结果, 可以推出当  $x \rightarrow -n$  ( $n$  为正整数) 时,  $\Gamma(x) \rightarrow \infty$ . 因此我们定义, 当  $n = 0, -1, -2, \dots$  时,

$$\frac{1}{\Gamma(n)} = 0.$$

## 部分习题参考答案

### 习 题 一

$$4. \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0, t) = 0, \quad k \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = q, \\ u(x, 0) = \frac{x(l-x)}{2}. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = \frac{e+l}{l}x, \quad u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \begin{cases} 0, & |x-c| > \delta, \\ \frac{k}{2\delta\rho}, & |x-c| < \delta \end{cases} \quad (\delta \rightarrow 0). \end{cases}$$

$$7. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ 其中 } \alpha > 0 \text{ 为常数 } \left(\alpha = \frac{b}{\rho}\right).$$

$$*8. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x} \left[ (l-x) \frac{\partial u}{\partial x} \right], \text{ 其中 } l \text{ 是绳长, } g \text{ 是重力加速度.}$$

$$*10. \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{c\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[ k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \frac{lk_1}{c\rho s} (u - u_1), \text{ 其中 } s \text{ 为细杆的横截面的面积, } l \text{ 为横截面 } s \text{ 的周长.}$$

$$11. (1) u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = -u_{\eta}; \quad (2) u_{\eta\eta} = \xi^2; \quad (3) u_{\xi\eta} = -\frac{4}{3}u_{\xi} - 4;$$

$$(4) u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \frac{1}{\eta}u_{\eta}; \quad (5) u_{\eta\eta} = -\frac{1}{\eta}u_{\eta}.$$

### 习 题 二

$$1. (1) u(x, t) = \left( \cos \frac{\pi at}{l} + \frac{l}{\pi a} \sin \frac{\pi at}{l} \right) \sin \frac{\pi x}{l};$$

$$(2) u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{4}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \cos n\pi at + \frac{4}{n^4\pi^4 a} [(-1)^n - 1] \sin n\pi at \right\} \sin n\pi x;$$

$$(3) u(x, t) = 3 \cos \frac{3\pi at}{2l} \sin \frac{3\pi x}{2l} + 6 \cos \frac{5\pi at}{2l} \sin \frac{5\pi x}{2l}.$$

$$2. u(x, t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi at}{2} \sin \frac{n\pi x}{2}.$$

$$3. (1) u(x, t) = \frac{4l^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^3} e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l};$$

$$(2) u(x, t) = \frac{l^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2l^2}{n^2 \pi^2} e^{-(\frac{2n\pi}{l})^2 t} \cos \frac{n\pi x}{l}.$$

$$4. u(r, \theta) = Ar^2 \cos 2\theta + Br^4 \cos 4\theta.$$

$$5. u(r, \theta) = \frac{A\alpha}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{n\pi} r^n \sin n\alpha \cos n\theta.$$

$$6. u(r, \theta) = \frac{4T}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^3 a^n} r^n \sin n\theta.$$

$$7. u(r, \theta) = \frac{1}{\ln r_2 - \ln r_1} \ln \frac{r}{r_1}.$$

$$8. u(x, y) = \frac{1}{4} [a^2 - (x^2 + y^2)].$$

$$9. u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4l[1 - (-1)^n]}{n^3 \pi^3} e^{-\frac{n\pi y}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

$$10. (1) u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2bl^2 \operatorname{sh} l}{n\pi a^2 (n^2 \pi^2 + l^2)} \left(1 - \cos \frac{n\pi at}{l}\right) \sin \frac{n\pi x}{l};$$

$$(2) u(x, t) = \left(\frac{l}{\pi a}\right)^2 \left(t - \frac{l}{\pi a} \sin \frac{\pi at}{l}\right) \sin \frac{\pi x}{l};$$

$$(3) u(x, t) = \frac{2Al^2}{a^2 \pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^3} \left[e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t} - 1\right] \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

$$11. (1) u(x, t) = \frac{A}{l} x + \cos \frac{3\pi at}{l} \sin \frac{3\pi x}{l} - \frac{4l^3}{a\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^4} \sin \frac{n\pi at}{l} \sin \frac{n\pi x}{l};$$

$$(2) u(x, t) = \frac{B}{l} x + \frac{l^2}{8a^2 \pi^2} \left(1 - \cos \frac{4\pi at}{l}\right) \sin \frac{4\pi x}{l} - \frac{4l^3}{a\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^4} \sin \frac{n\pi at}{l} \sin \frac{n\pi x}{l};$$

$$(3) u(x, t) = (1-t)x + lt + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2l(1-k)(-1)^n}{n\pi} + \left(\frac{l}{n\pi a}\right)^2 \cdot \frac{2l}{n\pi} \right] e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l};$$

$$(4) u(x, t) = u_0 - 8 \frac{u_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 a^2 t}{4l^2}} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l}.$$

$$*12. u(x, y) = \frac{Ab}{2a} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Ab[(-1)^n - 1]}{n^2 \pi^2 \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} \cos \frac{n\pi y}{b}.$$

13. 固有值问题:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ (X' - \alpha X)|_{x=0} = 0, \\ X'|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

(1) 当  $\alpha = 0$  时,  $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ ,  $X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{l}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ );

(2) 当  $\alpha \rightarrow \infty$  时,  $\lambda_n = \left[\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right]^2$ ,  $X_n(x) = \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

14. (1)  $\lambda_n = \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2$ ,  $\left\{\sin \frac{(2n-1)x}{2}\right\}$ ;

(2)  $\lambda_n = n^2$ ,  $\{\sin nx\}$ ,  $\{\cos nx\}$ ;

(3)  $\lambda_n = n^2\pi^2$ ,  $\{\sin(n\pi \ln x)\}$ ;

(4)  $\lambda_n = n^2\pi^2 + 1$ ,  $\left\{\frac{1}{x} \sin(n\pi \ln x)\right\}$ .

### 习 题 三

1.  $a\varphi'(x) + \psi(x) = 0$ .

2.  $u(x, t) = \varphi\left(\frac{x+at}{2}\right) + \psi\left(\frac{x-at}{2}\right) - \varphi(0)$ .

3. (1)  $u(x, t) = \sin x \cos at + x^2t + \frac{1}{3}a^2t^3$ ;

(2)  $u(x, t) = \cos x \cos at + \frac{1}{e}t$ ;

(3)  $u(x, t) = x + \frac{1}{a} \sin x \sin at + \frac{1}{2}xt^2 + \frac{1}{6}at^3$ ;

(4)  $u(x, t) = t \sin x$ .

4.  $u(x, y) = \frac{1}{6}x^3y^2 + \cos y - \frac{1}{6}y^2 + x^2 - 1$ .

5. (1)  $u(x, y, z, t) = x^3 + y^2z + (3x+z)a^2t^2$ ;

(2)  $u(x, y, t) = x^2(x+y) + (3x+y)a^2t^2$ .

6.  $u(x, y) = xy + y + 1$ .

7.  $u(x, t) = u_0 \int_0^t \frac{x}{2a\sqrt{\pi\tau^{3/2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}} d\tau = \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-y^2} dy$ .

8.  $u(x, t) = \begin{cases} A \sin \omega \left(t - \frac{x}{a}\right), & \text{当 } t > \frac{x}{a} \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } t \leq \frac{x}{a} \text{ 时.} \end{cases}$

9.  $u(x, t) = e^{-a^2t} \cos x$ .

12. (1)  $u = \cos at \sin x + \frac{1}{a} \sin at \sin x$ ;

(2)  $u = \frac{\pi^3}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8[(-1)^n - 1]}{n^4\pi} e^{-4n^2t} \cos nx$ .

## 习 题 四

$$3. G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} - v; u(M_0) = - \int_C f(M) \frac{\partial G}{\partial n} dS.$$

$$4. u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_0 f(x)}{(x-x_0)^2 + y_0^2} dx.$$

$$5. u(0, 0) = 0.$$

$$6. u(r, \theta) = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \cos 2\theta.$$

$$7. (1) u(r, \theta) = \frac{1}{4}(r^2 - a^2);$$

$$(2) u(x, y) = Aax + c, u(r, \theta) = Aar \cos \theta + c \text{ (其中 } c \text{ 为常数);}$$

$$(3) \text{ 当 } A \neq 0 \text{ 时, 无解; 当 } A = 0 \text{ 时, } u \equiv c \text{ (} c \text{ 为常数).}$$

$$8. \frac{4\pi R}{R^2 - r_0^2}.$$

$$11. (1) u(r, \theta) = -\frac{1}{3}r^2 \sin \theta; \quad (2) u(r, \theta) = \frac{1}{9}r^3.$$

## 习 题 五

$$1. -\alpha J_1(\alpha x).$$

$$2. \alpha x J_0(\alpha x).$$

$$6. 2\sqrt{x} J_1(\sqrt{x}) + C.$$

$$8. \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-2}{\mu_m^{(1)} J_0(\mu_m^{(1)})} J_1(\mu_m^{(1)} x).$$

$$9. \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\alpha_i)}{2\alpha_i J_1^2(2\alpha_i)} J_0(\alpha_i x).$$

$$10. u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4J_2(\alpha_n)}{\alpha_n^2 J_1^2(\alpha_n)} J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right) \cos \frac{\alpha_n at}{R}.$$

$$\text{非齐次方程的解为 } u(r, t) = 2BR^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^3 J_1(\alpha_n)} \left(1 - \cos \frac{\alpha_n at}{R}\right) J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right).$$

$$11. u(r, t) = T_0 - 2T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^{(0)} J_1(\mu_n^{(0)})} \exp\left[-\left(\frac{\mu_n^{(0)} a}{R}\right)^2 t\right] J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{R} r\right).$$

$$*13. u(r, t) = \frac{1}{2}t - \frac{4R}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_m^{(1)})^3 J_0(\mu_m^{(1)})} \sin \frac{\mu_m^{(1)} at}{R} J_0\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{R} r\right), \text{ 其中 } \mu_m^{(1)} \text{ 是 } J_1(x)$$

的非负零点.

## 习 题 六

$$5. (1) n=0 \text{ 时为 } 2, n \neq 0 \text{ 时为 } 0;$$

$$(2) n=1 \text{ 时为 } \frac{2}{3}, n \neq 1 \text{ 时为 } 0;$$

$$(3) n=0 \text{ 时为 } 4, n=1 \text{ 时为 } 2, n \neq 0, 1 \text{ 时为 } 0.$$

$$7. f(x) = \frac{1}{2}(1-\alpha) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n+1}(\alpha) - P_{n-1}(\alpha)] P_n(x), \quad -1 < x < 1.$$

$$8. u(r, \theta) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}P_2(\cos \theta)r^2 = \frac{1}{3} + \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{3}\right)r^2.$$

$$9. u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n P_n(\cos \theta), \text{ 其中}$$

$$c_0 = \frac{A}{2}(1 - \cos \alpha), \quad c_1 = \frac{3A}{4}(1 - \cos^2 \alpha),$$

$$c_2 = \frac{5A}{4}(1 - \cos^3 \alpha) - \frac{5A}{4}(1 - \cos \alpha), \dots$$

$$10. u(r, \theta) = \frac{1}{3}P_0(\cos \theta) + 2P_1(\cos \theta)r + \frac{2}{3}P_2(\cos \theta)r^2 \\ = \frac{1}{3} + 2r \cos \theta + \frac{1}{2} \left( \cos 2\theta + \frac{1}{3} \right) r^2.$$

$$11. u(r, \theta) = \frac{1}{3}r^{-1} + r^{-3} \cos^2 \theta - \frac{1}{3}r^{-3}.$$

### 习 题 七

$$2. x^4 + x = \frac{3}{4}H_0 + \frac{1}{2}H_1 + \frac{3}{4}H_2 + \frac{1}{16}H_4.$$

$$4. e^x = e^{\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} H_n(x) \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Images have been losslessly embedded. Information about the original file can be found in PDF attachments. Some stats (more in the PDF attachments):

```
{
  "filename": "5pWw5a2m54mp55CG5pa556iL5LiO54m55q6K5Ye95pWwICDnrKwz54mIXzE0NTg1MDAxLnppcA==",
  "filename_decoded": "\u6570\u5b66\u7269\u7406\u65b9\u7a0b\u4e0e\u7279\u6b8a\u51fd\u6570 \u7b2c3\u7248_14585001.zip",
  "filesize": 16951402,
  "md5": "f5b6fcd1135c745cf0e9501712e29b89",
  "header_md5": "d30b4b32ce1ffcb2c15c1a1dc2da7fc4",
  "sha1": "5e05e835a4a128f5c23f1ae266aaf1c68490397c",
  "sha256": "d014d9d49a2fb045ddc3e8b688b8e4190b0f4f286c2f402d57ee0d4753bf7a4a",
  "crc32": 625948098,
  "zip_password": "",
  "uncompressed_size": 22921950,
  "pdg_dir_name": "\u2569\u00b2\u2564\u00ba\u256c\u2229\u2514\u03c6\u2556\u255c\u2502\u2560\u2559\u03b4\u2560\u256a\u2569\u0393\u2551\u00bb\u2569\u00b2 \u2561\u250c3\u2591\u00b5_14585001",
  "pdg_main_pages_found": 186,
  "pdg_main_pages_max": 186,
  "total_pages": 200,
  "total_pixels": 926880768,
  "pdf_generation_missing_pages": false
}
```