第三版被评为 2007 年度普通高等教育精品教材

第二版荣获第一届国家教委高等学校优秀教材一等奖

扫一扫 取增值服务 防伪

数字课程网站

网址：http://abook.hep.com.cn/1245744

http://abook.hep.edu.cn/1245744

数字课程账号　使用说明详见书内数字课程说明页

ISBN 978-7-04-051465-0

9 787040 514650 >

定价 36.80 元

常微分方程

第四版

王高雄　周之铭　朱思铭　王寿松　编

朱思铭　周之铭　李艳会　修订

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

常微分方程

第四版

王高雄　周之铭　朱思铭　王寿松　编

朱思铭　周之铭　李艳会　修订

高等教育出版社

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

常微分方程

第四版

王高雄　周之铭　朱思铭　王寿松　编
朱思铭　周之铭　李艳会　修订

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是《常微分方程》的新修订本。考虑第三版出版逾十年，修订本需适应科学技术和教育的发展变化。由于目前高等院校中“常微分方程”课程教学时数的减少，要突出重点、精简教学内容，更多引导学生开阔视野。本次修订，将一些补充知识及适合优秀学生学习的较难内容放在附录中介绍；增加了“数字资源”，形成“纸质教材+数字资源”的新形态教材。

本书主要介绍常微分方程的基础理论和基本方法，包括：一阶常微分方程的初等解法，常微分方程的解的存在唯一性理论，高阶线性微分方程和线性微分方程组理论，高阶常系数线性微分方程和方程组求解方法，非线性常微分方程定性、稳定性和哈密顿系统，一阶线性偏微分方程基本理论及边值问题等。考虑到科学技术的迅猛发展，除传统内容外，适当补充奇解、数值解、孤立子与混沌和李群分析方法作为选学内容，使常微分方程理论更为完整。

本书可作为综合性大学和师范院校数学与应用数学专业、师范专科学校数学系常微分方程课程的教材，也可作为各高校数学模型课程的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程/王高雄等编；朱思铭，周之铭，李艳会修订.--4版.--北京：高等教育出版社，2020.7

ISBN 978-7-04-051465-0

Ⅰ.①常… Ⅱ.①王… ②朱… ③周… ④李… Ⅲ.①常微分方程-高等学校-教材 Ⅳ.①O175.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第038036号

常微分方程

Changweifen Fangcheng

项目策划 李艳馥 兰莹莹 李 蕊

策划编辑 兰莹莹 责任编辑 胡 颖 封面设计 王凌波 版式设计 杜微言

插图绘制 于 博 责任校对 高 歌 责任印制 田 甜

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印 刷	北京市白帆印务有限公司		http://www.hepmall.com
开 本	787mm×1092mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印 张	16.5	版 次	1978年12月第1版
字 数	370千字		2020年7月第4版
购书热线	010-58581118	印 次	2020年12月第2次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	36.80元

物 料 号 51465-00

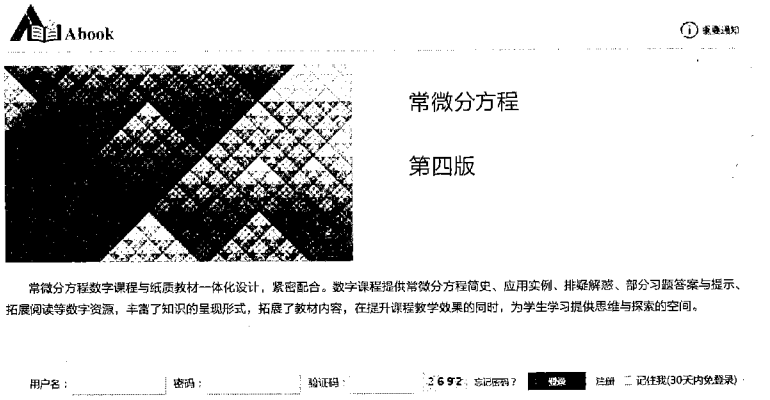
常微分方程

第四版

王高雄　周之铭　朱思铭　王寿松　编

朱思铭　周之铭　李艳会　修订

1. 计算机访问http://abook.hep.com.cn/1245744，或手机扫描二维码、下载并安装Abook应用。
2. 注册并登录，进入“我的课程”。
3. 输入封底数字课程账号（20位密码，刮开涂层可见），或通过Abook应用扫描封底数字课程账号二维码，完成课程绑定。
4. 单击“进入课程”按钮，开始本数字课程的学习。



课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制，部分内容无法在手机端显示，请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题，请发邮件至abook@hep.com.cn。

常微分方程简史

编者说明

http://abook.hep.com.cn/1245744

第四版前言

《常微分方程》从第一版到第四版经历了漫长的40年。1978年恢复高考后，急需一批高等院校专业教材，中山大学许淞庆教授接受了编写《常微分方程》教材的任务。在许淞庆教授的主持下，以中山大学数学力学系原《常微分方程讲义》为基础，参考国内外一些同类教材，由王高雄、周之铭、朱思铭、王寿松四位当时的年轻教师分工编写，王高雄统合，于1978年出版。

第二版由王高雄根据1980年审订的“常微分方程教学大纲”和高等学校理科1981至1985年教材编写规划的要求进行修订，充实了各章习题、增加了第7章，于1983年出版，1987年获“国家教委高等学校优秀教材一等奖”。

第三版前言

第三版由朱思铭、王寿松、李艳会修订，朱思铭主持。经全面修订，以开放态度把常微分方程放在整个数学结构中考虑，并强调了数学模型、增加数学软件介绍，于2006年出版，2007年被评为“普通高等教育精品教材”。

本书是第四版。考虑第三版出版逾十年，修订本需适应科学技术和教育的发展变化。由于目前高等院校中“常微分方程”课程教学时数的减少，本次修订的目标是突出重点、精简教学内容，更多引导学生开阔视野。因此，我们把一些补充知识及适合优秀学生学习的较难内容放在附录中介绍；增加了“数字资源”，形成“纸质教材+数字资源”的新形态教材。

第二版前言

第四版介绍常微分方程的基础理论和基本方法，包括：一阶常微分方程的初等解法，常微分方程的解的存在唯一性理论，高阶线性微分方程和线性微分方程组理论，高阶常系数线性微分方程和方程组求解方法，非线性常微分方程定性、稳定性和哈密顿系统，一阶线性偏微分方程基本理论及边值问题等。考虑到科学技术的迅猛发展，除传统内容外，适当补充奇解、数值解、孤立子与混沌和李群分析方法作为选学内容，使常微分方程理论更为完整。

配合全国大学生数学建模竞赛和全国研究生数学建模竞赛的需要，并补充教材中例子的不足，我们在附录A中除适当补充较复杂的模型外，还在“数字资源”中专门介绍了常微分方程的各类数学模型和数学建模竞赛中的常微分方程模型，使各学科、各专业的同学都能从中借鉴。

不论应用或研究，现在都离不开计算机。特别是近年出现了较成熟的开源数学软件Sagemath(简称Sage)。我们在附录C中介绍了新开源数学软件Sage。关于数学软件Mathematica，MATLAB，Maple和Sage在常微分方程中的应用及Sage的安装使用则

放在“数字资源”中。

《常微分方程》第四版由朱思铭、周之铭、李艳会修订，朱思铭主持。周之铭负责第三、四、五章和附录B，李艳会负责第一、二、七章和附录C，朱思铭负责第六、八章和附录A并统编全书；各章内容和附录都经三人讨论，数字资源也由三人按分工完成。

周之铭教授长期从事常微分方程的研究和数学教学工作，曾在美国多所大学任教；李艳会博士一直活跃在数学教学第一线，曾兼任广东省工业与应用数学学会秘书长；朱思铭教授曾负责本科生和研究生数学建模竞赛工作，2012年获全国研究生数学建模竞赛终身成就奖。这些阅历为本书修订带来特色。

本书配套的数字资源学习方法请参阅数字课程说明页。

本次修订未经全体原编者审核，有关错漏与问题由修订者负责。

朱思铭

2019年12月于中山大学康乐园

目录

第一章　绪论 …… 1

§1.1　常微分方程模型 …… 1

§1.2　常微分方程基本概念和学习常微分方程的重要性 …… 7

1.2.1　常微分方程基本概念 …… 7

1.2.2　学习常微分方程的重要性 …… 12

习题 1.2 …… 12

本章学习要点 …… 14

第二章　一阶微分方程的初等解法 …… 15

§2.1　变量分离方程与变量变换 …… 15

2.1.1　变量分离方程 …… 15

2.1.2　可化为变量分离方程的类型 …… 17

2.1.3　应用举例 …… 23

习题 2.1 …… 25

§2.2　线性微分方程与常数变易法 …… 26

习题 2.2 …… 30

§2.3　恰当微分方程与积分因子 …… 31

2.3.1　恰当微分方程 …… 31

2.3.2　积分因子 …… 36

习题 2.3 …… 41

§2.4　一阶隐式微分方程与参数表示 …… 42

2.4.1　可以解出 y(或 x)的方程 …… 42

2.4.2　不显含 y(或 x)的方程 …… 45

习题 2.4 …… 47

本章学习要点 …… 48

总练习 …… 49

第三章　一阶微分方程的解的存在定理 …… 51

§3.1　解的存在唯一性定理与逐步逼近法 …… 52

3.1.1　存在唯一性定理 …… 52

3.1.2　近似计算和误差估计 …… 59

习题 3.1 …… 60

§3.2　解的延拓和解对初值的连续性与可微性 …… 61

3.2.1　解的延拓 …… 61

3.2.2 解对初值的连续性与可微性 …… 63
习题 3.2 …… 63
*§ 3.3 奇解 …… 64
3.3.1 包络和奇解 …… 64
3.3.2 克莱罗微分方程 …… 67
习题 3.3 …… 68
*§ 3.4 数值解 …… 69
3.4.1 欧拉方法 …… 69
3.4.2 龙格-库塔方法 …… 70
习题 3.4 …… 73
本章学习要点 …… 73
第四章 高阶微分方程 …… 74
§ 4.1 线性微分方程的一般理论 …… 74
4.1.1 齐次线性微分方程的解的性质与结构 …… 75
4.1.2 非齐次线性微分方程与常数变易法 …… 78
习题 4.1 …… 81
§ 4.2 常系数线性微分方程的解法 …… 83
4.2.1 常系数齐次线性微分方程 …… 84
4.2.2 非齐次线性微分方程与比较系数法 …… 88
4.2.3 质点振动 …… 90
习题 4.2 …… 96
§ 4.3 高阶微分方程的降阶和幂级数解法 …… 97
4.3.1 可降阶的一些方程类型 …… 97
4.3.2 二阶线性微分方程的幂级数解法 …… 100
*4.3.3 第二宇宙速度的计算 …… 106
习题 4.3 …… 107
本章学习要点 …… 108
第五章 线性微分方程组 …… 110
§ 5.1 线性微分方程组的一般理论 …… 110
5.1.1 齐次线性微分方程组 …… 114
5.1.2 非齐次线性微分方程组 …… 119
习题 5.1 …… 123
§ 5.2 常系数线性微分方程组 …… 125
5.2.1 基解矩阵 $\exp At$ …… 125
5.2.2 基解矩阵的计算公式 …… 127
习题 5.2 …… 137
§ 5.3 拉普拉斯变换 …… 138
5.3.1 微分方程的拉普拉斯变换法 …… 138
5.3.2 微分方程组的拉普拉斯变换法 …… 142
习题 5.3 …… 145
本章学习要点 …… 145

第六章　非线性微分方程 …… 147
§6.1　稳定性:李雅普诺夫稳定性与 V 函数 …… 147
6.1.1　李雅普诺夫稳定性 …… 147
6.1.2　按线性近似决定稳定性 …… 150
6.1.3　V 函数方法(李雅普诺夫第二方法) …… 154
习题 6.1 …… 157
§6.2　定性:奇点、极限环及平面图貌 …… 158
6.2.1　奇点 …… 158
6.2.2　极限环 …… 165
6.2.3　平面图貌 …… 170
习题 6.2 …… 171
*§6.3　哈密顿方程、孤立子和混沌 …… 173
6.3.1　哈密顿方程与完全可积性 …… 173
6.3.2　孤立子 …… 174
6.3.3　洛伦茨方程 …… 177
6.3.4　虫口模型和李-约克混沌定理 …… 179
习题 6.3 …… 181
本章学习要点 …… 181
第七章　一阶线性偏微分方程 …… 183
§7.1　首次积分和求解常微分方程组 …… 183
7.1.1　基本概念 …… 183
7.1.2　一阶线性偏微分方程与常微分方程组的关系 …… 184
7.1.3　利用首次积分求解常微分方程组 …… 186
习题 7.1 …… 189
§7.2　一阶线性偏微分方程的解法 …… 190
7.2.1　一阶齐次线性偏微分方程 …… 190
7.2.2　一阶拟线性偏微分方程 …… 192
习题 7.2 …… 195
§7.3　柯西问题 …… 195
7.3.1　一阶线性(拟线性)偏微分方程几何解释 …… 195
7.3.2　线性偏微分方程柯西问题 …… 196
习题 7.3 …… 199
*§7.4　李群分析与对称 …… 200
7.4.1　李变换群 …… 200
7.4.2　对称 …… 203
习题 7.4 …… 207
本章学习要点 …… 207
第八章　边值问题 …… 209
§8.1　边值问题的可解性和待定系数法 …… 209
8.1.1　边值问题的概念和可解性 …… 209
8.1.2　待定系数法 …… 212

习题 8.1 …… 214
§8.2 格林函数 …… 215
习题 8.2 …… 218
§8.3 本征值和本征函数 …… 218
8.3.1 本征值和本征函数 …… 218
8.3.2 自伴的本征值问题 …… 222
习题 8.3 …… 224
本章学习要点 …… 224
附录 A 常微分方程模型 …… 226
A1 常微分方程模型 …… 226
A2 平面图貌 …… 231
附录 B 相关知识与补充说明 …… 234
B1 雅可比矩阵与函数相关性 …… 234
B2 解对初值的连续性和可微性 …… 235
B3 常微分方程组解的存在唯一性 …… 240
附录 C 数学软件在常微分方程中的应用 …… 242
C1 计算机数学软件 …… 242
C2 常微分方程计算机辅助分析计算 …… 242
C3 开源数学软件 Sagemath …… 243
索引 …… 247
常微分方程发展和分支 …… 251
部分习题答案与提示 …… 251
参考文献 …… 251

第一章 绪论

数学分析(微积分)中研究了变量的各种函数及函数的微分与积分. 如函数未知,但知道变量与函数的代数关系式,便组成代数方程. 通过求解代数方程解出未知函数. 同样,如果知道自变量、未知函数及函数的导数(或微分)组成的关系式,得到的便是**微分方程**,通过求解微分方程求出未知函数. 当自变量只有一个时的微分方程称为**常微分方程**. 常微分方程是数学分析或基础数学的一个组成部分,在整个数学大厦中占据着重要位置.

在反映客观现实世界运动过程的量与量之间的关系中,存在大量满足常微分方程关系式的数学模型,需要我们通过求解常微分方程来了解未知函数的性质. 常微分方程是解决实际问题的重要工具.

本章中先简单介绍自然界和社会中的几种常微分方程模型,了解构造数学模型的几种方法;同时讲述一些微分方程的基本概念、微分方程在数学中的地位和学习常微分方程的重要性,为后面的学习做准备.

§1.1 常微分方程模型

这一节先介绍物理、力学中的常微分方程模型,然后讨论在社会、生物、气象中的常微分方程模型,为后面理论学习提供实际应用,同时总结出建立常微分方程模型的几种方法. 进一步的模型可在附录 A 和数字资源中找到.

例 1 *RLC* 电路.

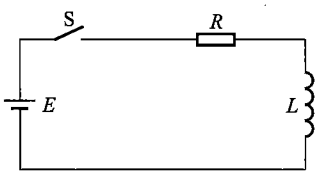
包含电阻 R、电感 L、电容 C 及电源的电路称为 *RLC* 电路,它们是电子电路的基础. 根据电学知识,电流 I 经过电阻 R、电感 L、电容 C 的电压降分别为 RI,$L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$和$\dfrac{Q}{C}$,其中 Q 为电量,它与电流的关系为 $I=\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$. 根据基尔霍夫(Kirchhoff)第二定律:在闭合回路中,所有支路上的电压的代数和等于零.

因此,由图(1.1)所示的 *RL* 电路,设 R,L 及电源电压 E 为常数,当开关 S 合上后,存在关系式

$$E-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}-RI=0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{R}{L}I=\frac{E}{L}. \tag{1.1}$$



图(1.1)

这便是 RL 电路的常微分方程. 其中电流 I 是自变量 t 的函数:$I=I(t)$,在方程(1.1)中是未知函数. 当开关 S 刚合上即 $t=0$ 时,有 $I=0$,即

$$I(0)=0, \tag{1.2}$$

称此条件为方程(1.1)的初值条件.

如果当 $t=t_0$时有 $I=I_0$,而电源突然短路,即 $E=0$ 且保持不变,此时方程(1.1)变为

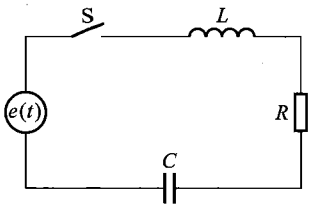
$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{R}{L}I=0, \tag{1.3}$$

初始条件为

$$I(t_0)=I_0. \tag{1.4}$$

再看看图(1.2)所示的 RLC 电路,假设 R,L,C 为常数,电源电压 $e(t)$是时间 t 的已知函数. 当开关 S 合上时有关系式

$$e(t)=L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+RI+\frac{Q}{C}.$$



图(1.2)

上式两边对 t 求导数,并代入 $I=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$,便得到以时间 t 为自变量、电流 I 为未知函数的常微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{I}{LC}=\frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{1.5}$$

当电源电压是常数 $e(t)=E$ 时,微分方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{I}{LC}=0. \tag{1.6}$$

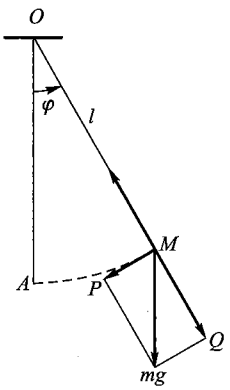
如还有 $R=0$,微分方程进一步化简为

$$\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2}+\frac{I}{LC}=0. \tag{1.7}$$

例 2　数学摆.

数学摆是系于一根长度为 l 的线上而质量为 m 的质点 M,在重力的作用下,它在垂直于地面的平面上沿圆周运动,如图(1.3)所示. 我们要确定摆的运动方程.

设取逆时针运动的方向作为计算摆与铅垂线所成的角 φ 的正方向，质点 M 沿圆周的切向速度 v 可以表示为 $v=l\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$. 作用于质点 M 的重力 mg 将摆拉回平衡位置 A. 把重力 mg 分解为两个分量 $\overrightarrow{MQ}$ 和 $\overrightarrow{MP}$，第一个分量 $\overrightarrow{MQ}$ 沿半径 OM 方向，与线的拉力相抵消，不会引起质点 M 的速度 v 的数值变化；第二个分量 $\overrightarrow{MP}$ 沿圆周的切线方向，会引起 M 的速度 v 的数值的改变. 因 $\overrightarrow{MP}$ 总是使质点 M 向着平衡位置 A 的方向运动，当角 φ 为正时，向减少 φ 的方向运动；当角 φ 为负时，向增加 φ 的方向运动. 故 $\overrightarrow{MP}$ 的数值等于 $-mg\sin\varphi$. 摆的运动方程为



图(1.3)

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-mg\sin\varphi,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{g}{l}\sin\varphi. \tag{1.8}$$

如果只研究摆的微小振动，即 φ 较小时，可用 φ 代替 $\sin\varphi$，摆的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\varphi=0. \tag{1.9}$$

如果摆在黏性介质中摆动，即存在与速度 v 成比例的阻力，设阻力系数为 μ. 则摆的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mu}{m}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\frac{g}{l}\varphi=0. \tag{1.10}$$

如果沿着摆的运动方向恒有一个外力 $F(t)$ 作用，即摆的运动为强迫微小振动. 这时摆的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mu}{m}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\frac{g}{l}\varphi=\frac{1}{ml}F(t). \tag{1.11}$$

当要确定摆的某一特定运动时，应给出摆的初始状态：

$$\text{当 } t=0 \text{ 时}, \varphi=\varphi_0,\ \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\omega_0, \tag{1.12}$$

这里 φ_0 代表摆的初始位置，ω_0 代表摆的初始角速度.

例 3 人口模型[12~14]①.

英国人口统计学家马尔萨斯(Malthus)在担任牧师期间，查看了当地教堂 100 多年

① 为书末参考文献的编号，表示其出处或有关的可参阅的书籍、文章，全书同.

人口出生统计资料,发现了这样一个现象:人口出生率是一个常数. 在 1798 年他发表了《人口原理》一书,其中提出了闻名于世的马尔萨斯人口模型.

他的基本假设是:在人口自然增长的过程中,净相对增长率(单位时间内人口的净增长率与人口总数之比)是常数,记此常数为 r(生命系数).

在 t 到 $t+\Delta t$ 这段时间内人口增长量为

$$N(t+\Delta t)-N(t)=rN(t)\Delta t,$$

于是 $N(t)$ 满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=rN. \tag{1.13}$$

将上式改写为

$$\frac{\mathrm{d}N}{N}=r\mathrm{d}t.$$

于是变量 N 和 t 被"分离",两边积分得

$$\ln N=rt+\bar{c},$$

这里 $\bar{c}$ 为任意常数. 由对数的定义,上式变为

$$N=c\mathrm{e}^{rt}, \tag{1.14}$$

其中 $c=\mathrm{e}^{\bar{c}}$. 因 $N=0$ 亦是方程(1.13)的解,因此 c 可以是任意常数.

如设初值条件为

$$t=t_0\text{时},N(t)=N_0, \tag{1.15}$$

代入上式可得 $c=N_0\mathrm{e}^{-t_0}$. 即方程(1.13)的满足初值条件(1.15)的解为

$$N(t)=N_0\mathrm{e}^{r(t-t_0)}. \tag{1.16}$$

如果 $r>0$,上式说明人口总数将按指数规律无限增长. 将 t 以 1 年或 10 年为单位离散化,那么可以说,人口数是以 e^r 为公比的等比数列增加的.

当人口总数不大时,生存空间、资源等极充裕,人口总数指数地增长是可能的. 但当人口总数非常大时,指数增长的线性模型则不能反映这样一个事实:环境所提供的条件只能供养一定数量的人口生活,所以马尔萨斯模型在 $N(t)$ 很大时是不合理的.

荷兰生物学家威尔霍斯特(Verhulst)引入常数 N_{m}(环境最大容纳量)用来表示自然资源和环境条件所能容纳的最大人口数,并假设净相对增长率为 $r\left(1-\frac{N(t)}{N_{\mathrm{m}}}\right)$,即净相对增长率随 $N(t)$ 的增加而减少,当 $N(t)\to N_{\mathrm{m}}$ 时,净增长率 $\to 0$.

按此假定,人口增长的方程应改为

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=r\left(1-\frac{N}{N_{\mathrm{m}}}\right)N, \tag{1.17}$$

这就是**逻辑斯谛(logistic)模型**. 当 N_m 与 N 相比很大时,$\frac{rN^2}{N_m}$ 与 rN 相比可以忽略,则模型变为马尔萨斯模型;但当 N_m 与 N 相比不是很大时,$\frac{rN^2}{N_m}$ 这一项就不能忽略,人口急剧增加的速率要缓慢下来.

我们用逻辑斯谛模型来预测地球未来人数. 某些生物学家估计的自然增长率为 0.029,当 $N=30.6\times10^8$ 时,人口每年实际净相对增长率为 2%,由逻辑斯谛模型有 $0.02=0.029\times\left(1-\frac{30.6\times10^8}{N_m}\right)$,可得 $N_m=98.6\times10^8$. 因此,按逻辑斯谛模型,地球人口总数极限为 98.6×10^8 人. 由这个预测可知,1986 年世界人口总数为 30 亿左右,未到 100 亿的一半,这与 1961 年以前一段时期世界人口增长是吻合的.

例 4 两种群生态模型.

意大利生物学家棣安考纳(D'Ancona)发现年间捕鱼量减少而捕获到的食肉鱼占的百分比却急剧增加. 为解释这种现象,意大利数学家沃尔泰拉(Volterra)建立了一个关于食肉鱼与被食鱼生长情形的数学模型.

沃尔泰拉把所有的鱼分成两类:被食鱼与捕食鱼(食肉鱼),设 t 时刻被食鱼的总数为 $x(t)$,而捕食鱼的总数为 $y(t)$. 因为被食鱼所需的食物很丰富,它们本身的竞争并不激烈,如果不存在捕食鱼的话,被食鱼的增加应遵循指数增长率 $\frac{dx}{dt}=ax$($a>0$ 是某个常数,表示自然净相对增长率),但因捕食鱼的存在,致使其增长率降低. 设单位时间内捕食鱼与被食鱼相遇的次数为 bxy($b>0$ 为某个常数),因此

$$\frac{dx}{dt}=ax-bxy.$$

类似地,沃尔泰拉认为捕食鱼的自然减少率同它们的存在数目 y 成正比,即为 $-cy$($c>0$ 为常数),而自然增长率则同它们本身的存在数目 y 及食物——被食鱼数目成正比,即 dxy($d>0$ 为某个常数,反映被食鱼对捕食鱼的供养能力),于是得到

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x(a-by),\\ \frac{dy}{dt}=y(-c+dx).\end{cases}\tag{1.18}$$

上式表示当不存在人类捕鱼活动时,捕食鱼与被食鱼应遵循的规律,称为**沃尔泰拉捕食-被捕食模型**.

对甲、乙两种群,假设种群甲和乙的数量分别为 x,y,则可用下列方程表示种群甲、乙相互竞争同一资源时的生长情况:

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x(a-by),\\ \frac{dy}{dt}=y(c-dx),\end{cases}\tag{1.19}$$

这里系数 a,b,c,d 均是正数. 这方程称为两种群**竞争模型**. 当系数 b,d 为负数时,两种群互相促进、互为依赖,这样的方程称为**共生模型**.

更一般地,可用下列一般方程表示种群甲、乙的生长情况:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(a+bx+cy),\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y(d+ex+fy),\end{cases}\tag{1.20}$$

其中系数 a,b,c,d,e,f 为常数,可正可负或为 0,视两种群的相互关系而定. 一般分竞争、共生、捕食-被捕食等类型. 就一个种群来说,如 $y=0$ 或 $x=0$,即为一维逻辑斯谛模型. 系数 a,d 分别是甲和乙的增长率,b 和 f 则为甲、乙的死亡率,c 和 e 分别为两种群对对方的影响率.

前面两种群一般模型(1.19)和(1.20)都是常微分方程. 与一维逻辑斯谛模型不同,模型(1.20)一般是不可积的,无法通过直接求解来了解方程的性态. 在第六章中将用定性方法进行讨论.

例 5　洛伦茨(Lorenz)方程.

气象学家洛伦茨在美国麻省理工学院(MIT)从事数值天气预报研究,他在 20 世纪 60 年代初试图用计算机来模拟影响气象的大气流,曾简化气象方程组,将大气对流现象化为 14 个变量,最后减到 12 个变量. 他对 12 个变量的微分方程组用计算机进行模拟计算,在计算时发现方程的解对初值敏感的现象,最后得到仅含三个变量的后来被称为混沌(chaos)现象第一例的有名的**洛伦茨方程**

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a(x-y),\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-xz+rx-y,\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=xy-bz,\end{cases}\tag{1.21}$$

其中 $a=10,b=\dfrac{8}{3},r=28$ 为参数.

洛伦茨方程是一个三变量的常微分方程组,对此方程的分析留在 §6.3 中讨论.

在附录 A 中还补充介绍了较重要的传染病、化学动力学、机器人等常微分方程模型. 在数字资源中补充了实例"力学系统中的常微分方程模型".

应用实例

力学系统中的常微分方程模型

从前面的例子大致可以看出微分方程模型的特点是反映客观现实世界中量与量的变化关系,往往与时间有关,是一个动态(动力)系统. 构造常微分方程的数学模型有如下几种方法:最常用的是从物理、力学等已确定的自然规律出发,考虑其主要因素,忽略次要因素,提炼出状态变量,包括自变量和因变量(未知函数),然后应用相应的规律和实际情况,构造出由自变量、未知函数及其导数的关系式,即相应的微分方程;如果没有直接的已知规律可参考,亦可利用不同现象可以具有相同的数学模型这一事

实,应用类比方法,建立相应模型,例如用电路来模拟某些力学系统或机械系统;此外,还可以根据已发现的数据,通过分析数据的相互关系加上合理的逻辑推理,寻找出相关规律建立相应的模型,例如人口增长的马尔萨斯模型和逻辑斯谛模型;最后,还可以根据一定的目的,通过反复试验,寻找出适合要求的模型,例如洛伦茨模型便是从建立10多个变量的大气动力方程进行数值模仿,后来发现存在初值敏感性,而将不敏感的变量剔除,最后得到简单明了又能说明问题的三个变量的洛伦茨方程,虽然它已不能直接代表原来的气象关系,但却深刻地刻画了混沌现象的本质.

从上述各种类型的例子中不难发现,完全无关的、本质上不同的模型有时可以由同类型的微分方程来描述. 例如反映 RL 电路中电流变化规律的方程(1.1)、(1.2)及人口增长模型(1.13)都可以写成如下方程类型:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ay=c; \tag{1.22}$$

而 RLC 电路方程(1.5)和数学摆的强迫振动方程(1.11)都属于同一类型:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+cy=f(t); \tag{1.23}$$

又 LC 电路方程(1.7)和数学摆的微小振动方程(1.9)也属于同一类型.

前面只是结合后面学习的需要介绍几个有代表性的常微分方程模型,实际上在数学模型中有各种各样的常微分方程模型. 例如 SARS 传播模型、糖尿病检测模型、作战模型、交通模型以及判别艺术伪造品模型等,有兴趣的读者可参考附录 A 和数字资源及有关数学模型的书籍、文章.

§1.2 常微分方程基本概念和学习常微分方程的重要性

1.2.1 常微分方程基本概念

自变量、未知函数均为实值的微分方程称为**实值微分方程**. 如未知函数取复值或自变量及未知函数均取复值时称为**复值微分方程**. 在本书中只讨论实值微分方程,若无特别声明,均指实变量的实值微分方程.

(1) 常微分方程和偏微分方程

我们已经知道微分方程就是联系着自变量、未知函数以及它的导数关系. 如果在微分方程中,自变量的个数只有一个,我们称这种微分方程为**常微分方程**;自变量的个数为两个或两个以上的微分方程为**偏微分方程**.

方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+cy=f(t), \tag{1.24}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=0 \tag{1.25}$$

就是常微分方程的例子,这里 y 为未知函数,t 为自变量.

方程

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0, \tag{1.26}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=4\frac{\partial T}{\partial t} \tag{1.27}$$

就是偏微分方程的例子,这里 T 为未知函数,x,y,z,t 为自变量. 方程(1.26)含有三个自变量,而方程(1.27)含有两个自变量.

微分方程中出现的未知函数最高阶导数的阶数称为微分方程的**阶数**. 例如,方程(1.24)是二阶常微分方程,而方程(1.26)与(1.27)都是二阶偏微分方程. 一般的 n 阶常微分方程具有形式

$$F\left(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right)=0, \tag{1.28}$$

这里 $F\left(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right)$ 是 $x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ 的已知函数,而且一定含有 $\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$,$y$ 是未知函数,x 是自变量.

我们学习的这门课程是常微分方程. 今后,我们常把常微分方程简称为"微分方程",有时更简称为"方程".

(2) 线性和非线性

如果方程(1.28)的左端为 $y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ 的一次有理整式,则称其为 n **阶线性微分方程**. n 阶线性微分方程的一般形式为

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}+a_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_n(x)y=f(x), \tag{1.29}$$

其中 $a_1(x),\cdots,a_n(x),f(x)$ 为 x 的已知函数.

不是线性微分方程的微分方程称为**非线性微分方程**.

(3) 解和隐式解

使微分方程(1.28)变为恒等式的函数 $y=\varphi(x)$ 称为方程的(显式)**解**. 如微分方程(1.28)的解 $y=\varphi(x)$ 由关系式 $\Phi(x,y)=0$ 决定,则称 $\Phi(x,y)=0$ 为微分方程(1.28)的**隐式解**. 隐式解也称为"积分". 例如,一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y} \tag{1.30}$$

有解 $y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{1-x^2}$,而关系式 $x^2+y^2=1$ 就是方程(1.30)的隐式解. 为了简单起见,以后我们不把(显式)解和隐式解加以区别,统称为方程的解.

(4) 通解和特解

n 阶微分方程(1.28)的含有 n 个独立的任意常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的解

$$y=\varphi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$$

称为 n 阶方程(1.28)的**通解**. 关于解对常数的独立性是指,对 φ 及其 $n-1$ 阶偏导数关于 n 个常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的雅可比(Jacobi)行列式不为 0(见附录 B1). 同样可以定义方程(1.28)的隐式通解,相应地隐式通解也称为"通积分". 为了简单起见,以后我们也不把通解和隐式通解加以区别,通称为方程的通解. 为了确定微分方程一个特定的解,我们通常给出这个解所必需的条件,这就是所谓的**定解条件**. 常见的定解条件是初值条件和边值条件. 所谓 n 阶微分方程(1.28)的**初值条件**是指如下的 n 个条件:

$$\text{当 } x=x_0\text{时},\quad y=y_0,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y_0^{(1)},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}=y_0^{(n-1)},\tag{1.31}$$

这里 $x_0,y_0,y_0^{(1)},\cdots,y_0^{(n-1)}$ 是给定的 $n-1$ 个常数. 初值条件(1.31)有时写为

$$y(x_0)=y_0,\quad \frac{\mathrm{d}y(x_0)}{\mathrm{d}x}=y_0^{(1)},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{n-1}y(x_0)}{\mathrm{d}x^{n-1}}=y_0^{(n-1)}.\tag{1.32}$$

求微分方程满足定解条件的解,就是所谓**定解问题**. 当定解条件为初值条件时,相应的定解问题就称为**初值问题**. 本书主要讨论初值问题,边值问题在第八章讨论.

我们把满足初值条件的解称为微分方程的**特解**. 初值条件不同,对应的特解也不同. 一般来说,特解可以通过初值条件的限制,在通解中确定任意常数的值而得到. 例如,在 §1.1 的例 3 中,含任意常数 c 的解 $N=c\mathrm{e}^{rt}$ 为方程(1.13)的通解;而满足初值条件 $t=t_0$ 时 $N(t)=N_0$ 的解 $N(t)=N_0\mathrm{e}^{r(t-t_0)}$ 为方程的特解. 特解可在通解中令 $c=N_0\mathrm{e}^{-t_0}$ 而得.

容易验证,二阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+4y=0\tag{1.33}$$

的通解为

$$y=c_1\mathrm{e}^{-x}+c_2\mathrm{e}^{-4x},\tag{1.34}$$

这里 c_1,c_2 是任意常数;满足初值条件

$$y(0)=2,\quad \frac{\mathrm{d}y(0)}{\mathrm{d}x}=1\tag{1.35}$$

的特解为 $y=3\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-4x}$,可以通过在通解(1.34)中利用初值条件求得 $c_1=3,c_2=-1$ 而得到.

(5) 积分曲线和向量场

一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)\tag{1.36}$$

的解 $y=\varphi(x)$ 表示 Oxy 平面上的一条曲线,称为微分方程的**积分曲线**,而通解 $y=\varphi(x,c)$

表示平面上的一族曲线，特解 $\varphi(x_0)=y_0$ 则为过点 (x_0,y_0) 的一条积分曲线. 积分曲线上过每一点的切线斜率 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 为方程右端 $f(x,y)$ 在该点处的值. 反之，如有一条曲线，其上每一点的切线斜率为 $f(x,y)$，则此曲线为积分曲线.

可以用 $f(x,y)$ 在 Oxy 平面某区域 D 上定义过各点的小线段的斜率方向，这样的区域 D 称为方程(1.36)所定义的**方向场**，又称**向量场**. 可以用方向场定义或代表相应的微分方程(1.36).

方向场中方向相同的曲线 $f(x,y)=k$ 称为**等倾斜线**或**等斜线**. 可以利用取不同 k 值的等倾斜线来判别积分曲线的走向.

(6) 微分方程组

用两个以上的关系式表示的微分方程称为**微分方程组**，如前面例子中的式(1.18)—(1.21)均是微分方程组.

习惯将一般 n 阶常微分方程写成为解出最高阶导数的形式：

$$z^{(n)}=g(t,z,z',\cdots,z^{(n-1)}), \tag{1.37}$$

其中 $z^{(n)}=\frac{\mathrm{d}^n z}{\mathrm{d}t^n}, z'=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t},\cdots,z^{(n-1)}=\frac{\mathrm{d}^{n-1}z}{\mathrm{d}t^{n-1}}$. 如果把 $z,z',\cdots,z^{(n-1)},z^{(n)}$ 都理解为未知函数，取变换

$$y_1=z, y_2=z',\cdots,y_n=z^{(n-1)},$$

则 n 阶方程(1.37)可以用一阶方程组

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=y_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\mathrm{d}y_{n-1}}{\mathrm{d}t}=y_n,\\ \frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}t}=g(t,y_1,\cdots,y_n)\end{cases}$$

代替，即可以将高阶方程或高阶方程组变换为一般的一阶方程组

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t}=f_i(t,y_1,\cdots,y_n),\ i=1,2,\cdots,n,$$

或更简单地写成向量形式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}),\ \boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n, \tag{1.38}$$

其中

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y})=\begin{bmatrix}f_1(t,y_1,\cdots,y_n)\\ f_2(t,y_1,\cdots,y_n)\\ \vdots\\ f_n(t,y_1,\cdots,y_n)\end{bmatrix}.$$

前面提到的线性和非线性,解和隐式解,通解和特解以及积分曲线和方向场等概念同样适合微分方程组. 例如,如果存在向量函数 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 或 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{c})$ 代入方程组(1.38)后变成恒等式,则称它们为方程组(1.38)的解,这里 $\boldsymbol{c}=(c_1,\cdots,c_n)$ 为向量常数. 一般把向量形式的方程组同样称为方程,不严格区分方程和方程组.

(7) 驻定与非驻定,动力系统

如果方程组右端不含自变量 t:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}),\ \boldsymbol{y}\in D\subseteq\mathbf{R}^n, \tag{1.39}$$

则称其为**驻定(自治)**的,右端含 t 的微分方程组(1.38)称为**非驻定(非自治)**的.

对非驻定微分方程组(1.38),可以引进新的时间 τ,方程组(1.38)可化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}\tau}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}),\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=1,\end{cases}$$

成为 $n+1$ 维空间 $(t,\boldsymbol{y})$ 驻定方程.

驻定微分方程组(1.39)的过 $\boldsymbol{y}$ 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{y})$ 可以视 t 为参数,有非常好的性质:可看成 D 到 D 的**单参数变换群**,也就是:如记 $\boldsymbol{\Phi}_t(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{y})$,令 $\boldsymbol{\Phi}_t(\boldsymbol{y})$ 是参数为 t 的 $\boldsymbol{y}\in D$ 的映射(变换),则映射在 D 上满足恒同性 $\boldsymbol{\Phi}_0(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}$ 和可加性 $\boldsymbol{\Phi}_{t_1+t_2}(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{\Phi}_{t_1}(\boldsymbol{\Phi}_{t_2}(\boldsymbol{y}))=\boldsymbol{\Phi}_{t_2}(\boldsymbol{\Phi}_{t_1}(\boldsymbol{y}))$.

可将满足上述性质的映射称为**动力系统**. 驻定微分方程组称为**连续**动力系统 $\{\boldsymbol{\Phi}_t\mid t\in\mathbf{R}\}$,或称连续动力系统 $\{\boldsymbol{\Phi}_t\mid t\in\mathbf{R}\}$ 为由常微分方程定义的动力系统. 也可以定义**离散**动力系统:$\{\boldsymbol{\Phi}_n\mid n\in\mathbf{Z}\}$,这里 $\mathbf{Z}$ 为整数集,例如驻定差分方程 $y_{n+1}=f(y_n)$ 或驻定微分方程组(1.39)的解 $\boldsymbol{\Phi}_n=\boldsymbol{\varphi}(n;\boldsymbol{y})$ 便构成离散动力系统.

(8) 相空间和轨线

不含自变量、仅由未知函数组成的空间称为**相空间**. 积分曲线在相空间中的投影称为**轨线**. 对驻定微分方程组(1.39),方程组 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{0}$ 的解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^*$ 表示相空间中的点,它满足微分方程组,故称为**平衡解(驻定解、常数解)**,又称为**奇点**.

对平面一阶驻定微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x,y),\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=g(x,y),\end{cases} \tag{1.40}$$

其相空间 (x,y) 又称为相平面. 驻定方程的积分曲线有特殊的性质:时间轴 t 的平移不影响方向场,即可以在空间 (x,y,t) 将方程的积分曲线投影到 (x,y) 平面上,方程组(1.40)变为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{g(x,y)}{f(x,y)}\quad\text{或}\quad\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{f(x,y)}{g(x,y)}. \tag{1.41}$$

其在相平面上的积分曲线即为轨线. 同样可用相平面上方程(1.41)的方向场进行研究,直接在相平面上进行讨论.

可以应用等倾斜线方法确定轨线的方向,其中相平面上满足 $f(x,y)=0$ 的曲线表示轨线的 x 方向变化为 0,称为**垂直等倾斜线**,过曲线的点的轨线的切线垂直于 x 坐标轴;而 $g(x,y)=0$ 的曲线称为**水平等倾斜线**,过曲线上的点的轨线的切线平行于 x 坐标轴. 垂直等倾斜线与水平等倾斜线的交点 (x_0,y_0) 为奇点,方程有解 $x(t)=x_0, y(t)=y_0$. 可以通过垂直等倾斜线与水平等倾斜线在相平面上划分的区域判断轨线的走向,这在第六章中将有较详细的讨论.

前面介绍的是常微分方程的基本概念,将在后面学习常微分方程理论中用到. 关于常微分方程的发展历史,我们在数字资源中介绍.

1.2.2　学习常微分方程的重要性

G.F.塞蒙斯曾评价微分方程在数学中的地位[33]:"300 年来分析是数学里首要的分支,而微分方程又是分析的心脏. 这是初等微积分的天然后继课,又是为了解物理科学的一门最重要的数学,而且在它所产生的较深的问题中,它又是高等分析里大部分思想和理论的根源."

在大学数学基础课程的学习中往往把微分方程分为常微分方程和数学物理方程或偏微分方程两门课程进行学习,常微分方程是更为基本的课程.

排疑解惑

常微分方程对其他学科的影响

有些人认为"常微分方程这一学科(只)是求解的技巧和提示的汇集,之所以重要是因为它能解决物理学、工程学等方面的问题."实际上,常微分方程这一学科是统一、完整而连贯的,当代数学大师、菲尔兹数学奖获得者 S.斯梅尔(S.Smale)和 V.I.阿诺尔德(V.I.Arnol'd)都出版过用现代观点阐述的常微分方程教材[5,6]. S.斯梅尔还认为"常微分方程对其他学科领域的重要性在于它能启发、统一并推动这些学科领域""此外,了解微分方程与其他学科之间是如何联系的,对于学生及数学工作者来说,是获得洞察和启示的一种主要源泉"(见参考文献[5]的序言). 这些,正是我们学习常微分方程应该遵循的方法. 除了学习常微分方程基本理论,掌握求解技巧,学习如何建立模型、解决实际问题外,还要体会常微分方程如何启发、统一并推动其他学科领域,了解微分方程与其他学科之间是如何联系的,从而得到启示,提高洞察力. 在本书介绍的混沌的发展历史(§6.3)中,可以了解科学概念、历史是如何发现、发展的.

习　题　1.2

1. 指出下面微分方程的阶数,并回答方程是否是线性的:

(1) $\dfrac{dy}{dx}=4x^2-y$;

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+12xy=0$;

(3) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+x\dfrac{dy}{dx}-3y^2=0$;

(4) $x\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+3xy=\sin x$;

(5) $\frac{dy}{dx}+\cos y+2x=0$;

(6) $\sin\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+e^y=x$.

2. 试验证下面函数均为方程$\frac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=0$的解,这里$\omega>0$是常数:

(1) $y=\cos\omega x$;

(2) $y=c_1\cos\omega x$ (c_1是任意常数);

(3) $y=\sin\omega x$;

(4) $y=c_2\sin\omega x$ (c_2是任意常数);

(5) $y=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x$ (c_1,c_2是任意常数);

(6) $y=A\sin(\omega x+B)$ (A,B是任意常数).

3. 验证下列各函数是相应微分方程的解:

(1) $y=\frac{\sin x}{x}$, $xy'+y=\cos x$;

(2) $y=2+c\sqrt{1-x^2}$, $(1-x^2)y'+xy=2x$ (c是任意常数);

(3) $y=ce^x$, $y''-2y'+y=0$ (c是任意常数);

(4) $y=e^x$, $y'e^{-x}+y^2-2ye^x=1-e^{2x}$;

(5) $y=\sin x$, $y'+y^2-2y\sin x+\sin^2x-\cos x=0$;

(6) $y=-\frac{1}{x}$, $x^2y'=x^2y^2+xy+1$;

(7) $y=x^2+1$, $y'=y^2-(x^2+1)y+2x$;

(8) $y=-\frac{g(x)}{f(x)}$, $y'=\frac{f'(x)}{g(x)}y^2-\frac{g'(x)}{f(x)}$.

4. 给定一阶微分方程$\frac{dy}{dx}=2x$,

(1) 求出它的通解;

(2) 求通过点(1,4)的特解;

(3) 求出与直线$y=2x+3$相切的解;

(4) 求出满足条件$\int_0^1 y\,dx=2$的解;

(5) 绘出(2),(3),(4)中的解的图形.

5. 求下列两个微分方程的公共解:

$$y'=y^2+2x-x^4,\quad y'=2x+x^2+x^4-y-y^2.$$

6. 求微分方程$y'+xy'^2-y=0$的直线积分曲线.

7. 证明:与微分方程$4x^2y'^2-y^2=xy^3$的积分曲线关于坐标原点(0,0)成中心对称的曲线,也是此微分方程的积分曲线.

8. 试建立分别具有下列性质的曲线所满足的微分方程:

(1) 曲线上任一点的切线与该点的径向夹角为α;

(2) 曲线上任一点的切线介于两坐标轴之间的部分等于定长l;

(3) 曲线上任一点的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积都等于常数 a^2;

(4) 曲线上任一点的切线介于两坐标轴间的部分被切点等分;

(5) 曲线上任一点的切线的纵截距等于切点横坐标的平方;

(6) 曲线上任一点的切线的纵截距是切点的横坐标和纵坐标的等差中项;

(7) 曲线上任一点的切线的斜率与切点的横坐标成正比.

(提示:过点 (x,y) 的切线的横截距和纵截距分别为 $x-\frac{y}{y'}$ 和 $y-xy'$.)

本章学习要点

本章介绍了自然及社会科学中的常微分模型和常微分方程的一些基本概念.

数学反映了客观现实世界中量与量之间的关系,特别是反映变量、函数及其导数关系的常微分方程,在各类学科中均有广泛的应用. 本章只介绍了与后面内容相关的一些模型,只需粗略了解即可,需要时再回头学习. 基本概念介绍了常微分方程、偏微分方程、动力系统、线性和非线性、解和隐式解、通解和特解、方程和方程组、驻定和非驻定,以及积分曲线和轨线、方向场等定义,使读者对常微分方程有一个基本了解,也为本书以后的学习内容打下基础. 因此要深刻理解.

和实际应用相联系的常微分方程模型众多而复杂,大学中亦有大学生、研究生数学建模竞赛,竞赛内容包含常微分方程模型. 在附录 A 和本书的数字资源中补充介绍了较重要的常微分方程模型和对应常微分方程的应用,以及数学建模竞赛中的常微分方程模型,供有兴趣、有需要者参考.

本章最后简略总结微分方程在数学中的地位和学习常微分方程的重要性,以引起读者对学习常微分方程的重视.

关于常微分方程的发展历史及其在数学中的地位以及 20 世纪常微分方程在中国的发展,仅在数字资源简单介绍,使读者了解其全貌和发展过程.

本书仅是常微分方程的基础课程. 对常微分方程的近代理论只作初步介绍,若需深入学习,可参阅参考文献中的专著.

第二章
一阶微分方程的初等解法

本章介绍一阶微分方程的初等解法，即把微分方程的求解问题化为积分问题，其解的表达式由初等函数或超越函数表示. 如同五次或高于五次的代数方程不能用四则运算求解一样，对于一般的一阶常微分方程也没有通用的初等解法. 本章仅介绍若干能用初等解法求解的方程类型及其求解的一般方法，这是常微分方程发展初期数学家的辛勤成果. 这类初等解法，既是常微分方程理论中很有自身特色的部分，也与实际问题密切相关，如运动速度与位置、物体冷却过程等，值得我们好好学习体会.

§ 2.1 变量分离方程与变量变换

2.1.1 变量分离方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)\varphi(y) \tag{2.1}$$

的方程，称为**变量分离方程**，这里 $f(x)$，$\varphi(y)$ 分别是 x，y 的连续函数.

如果 $\varphi(y)\neq 0$，我们可将(2.1)改写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y)}=f(x)\,\mathrm{d}x,$$

这样变量就“分离”开了，然后两边积分，得

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y)}=\int f(x)\,\mathrm{d}x+c. \tag{2.2}$$

这里我们把积分常数 c 明确写出来，把 $\int\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y)}$，$\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 分别理解为 $\frac{1}{\varphi(y)}$，$f(x)$ 的原函数. 常数 c 的取值必须保证(2.2)有意义，如无特别声明，以后也做这样理解.

注意：1. 把(2.2)理解为 y,x,c 的隐函数关系式 $\Phi(y,x,c)=0$ 或 y 的 x,c 函数关系式 $y=y(x,c)$. 对(2.2)两边进行微分，可知对任意常数 c，由(2.2)所确定的函数关系式 $y=y(x,c)$ 满足(2.1)，因而(2.2)是(2.1)的通解.

排疑解惑

微分方程解的丢失

2. 因(2.2)式不适合 $\varphi(y)=0$ 情形. 但如果存在 y_0 使得 $\varphi(y_0)=0$,则直接验证知 $y=y_0$ 也是(2.1)的解. 因此,还必须寻求 $\varphi(y)=0$ 的解 y_0,当 $y=y_0$ 不包括在方程的通解(2.2)中时,必须补上特解 $y=y_0$.

例 1　求解方程 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$.

解　方程可变量分离为

$$y\mathrm{d}y=-x\mathrm{d}x,$$

两边积分得

$$\frac{y^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+\frac{c}{2},$$

即得通解

$$y^2+x^2=c,$$

这里 c 是任意常数. 它是方程隐函数形式的解. 也可从上式中解出 y,即为显函数形式的解:

$$y=\pm\sqrt{c-x^2}.$$

例 2　求方程

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y \tag{2.3}$$

的通解.

解　$y\neq 0$ 时,变量分离为

$$\frac{dy}{y}=P(x)\mathrm{d}x,$$

两边积分得

$$\ln|y|=\int P(x)\mathrm{d}x+\bar{c},$$

即得通解

$$|y|=\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x+\bar{c}},$$

即

$$y=\pm\mathrm{e}^{\bar{c}}\cdot\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}=c\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}, \tag{2.4}$$

这里 $c=\pm\mathrm{e}^{\bar{c}}$.

显然,$y=0$ 也是(2.3)的解. 如果(2.4)中允许 $c=0$,则解 $y=0$ 也就包含在(2.4)式中了. 因此,方程的通解为(2.4),其中 c 为任意常数.

例 3　求解人口增长的逻辑斯谛模型

$$\frac{dN}{dt}=r\left(1-\frac{N}{N_m}\right)N,\quad N(t_0)=N_0,\quad N(t)\geqslant 0.$$

解 同样可以应用变量分离方法并对分式分解,化为

$$r\mathrm{d}t=\frac{N_{\mathrm{m}}\mathrm{d}N}{(N_{\mathrm{m}}-N)N}=\frac{\mathrm{d}N}{N}+\frac{\mathrm{d}N}{N_{\mathrm{m}}-N},$$

两边积分,得

$$rt+\bar{c}=\ln N-\ln(N_{\mathrm{m}}-N),$$

其中$\bar{c}$为任意常数. 化简之,

$$\mathrm{e}^{-(rt+\bar{c})}=\frac{N_{\mathrm{m}}-N}{N}=\frac{N_{\mathrm{m}}}{N}-1,$$

解得

$$N=\frac{N_{\mathrm{m}}}{1+c\mathrm{e}^{-rt}},$$

其中 $c=\mathrm{e}^{-\bar{c}}$. 将初值条件 $t=t_0$ 时 $N=N_0$ 代入,得

$$c\mathrm{e}^{-rt_0}=\frac{N_{\mathrm{m}}}{N_0}-1.$$

最后得解

$$N=\frac{N_{\mathrm{m}}}{1+\left(\frac{N_{\mathrm{m}}}{N_0}-1\right)\mathrm{e}^{-r(t-t_0)}}.$$

应用实例

运动速度与位置

2.1.2 可化为变量分离方程的类型

这里我们分三种情形进行介绍,在第三种情形中包含了前两种情形. 不过,前两种情形出现较多,因此单独列出.

(1) 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2.5}$$

的方程称为**齐次微分方程**,这里 $g(u)$ 是 u 的连续函数.

作变量变换

$$u=\frac{y}{x}, \tag{2.6}$$

即 $y=ux$,两边对 x 求导数,得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u. \tag{2.7}$$

将(2.6),(2.7)代入(2.5),并整理得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{g(u)-u}{x}. \tag{2.8}$$

方程(2.8)是一个变量分离的微分方程. 可按照 2.1.1 的方法求解,然后将 $u=\frac{y}{x}$ 代回,便得(2.5)的解.

例 4　解方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}.$$

解　这是齐次微分方程. 作变量变换 $u=\frac{y}{x}$,则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$. 代入并整理,得变量分离方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\tan u}{x}. \tag{2.9}$$

当 $\tan u\neq 0$ 时,分离变量得

$$\cot u\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两边积分,得

$$\ln|\sin u|=\ln|x|+\bar{c},$$

这里 $\bar{c}$ 是任意常数. 整理得

$$\sin u=\pm\mathrm{e}^{\bar{c}}\cdot x.$$

令 $\pm\mathrm{e}^{\bar{c}}=c$,得

$$\sin u=cx. \tag{2.10}$$

因为方程还有特解 $\tan u=0$,即 $\sin u=0$. 只要(2.10)中允许 $c=0$,即可包含. 因此方程(2.9)的通解为(2.10).

代回原来的变量,得原方程的通解为

$$\sin\frac{y}{x}=cx.$$

例 5　解方程

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2\sqrt{xy}=y\ (x<0).$$

解　方程可改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x},$$

这是齐次微分方程. 作变量变换 $u=\frac{y}{x}$,则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$,代入原方程,得变量分离方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{2\sqrt{u}}{x}. \tag{2.11}$$

分离变量,得

$$\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两边积分,得(2.11)的通解为

$$\sqrt{u}=\ln(-x)+c,$$

即当 $\ln(-x)+c>0$ 时,

$$u=[\ln(-x)+c]^2, \tag{2.12}$$

这里 c 为任意常数.

此外(2.11)还有特解 $u=0$,此时 $y=0$. 而此解并不包含在通解(2.12)中.

代回原变量,得原方程的解为

$$y=x[\ln(-x)+c]^2,\quad \ln(-x)+c>0$$

及 $y=0$.

原方程的解也可表示为

$$y=\begin{cases}x[\ln(-x)+c]^2, & \ln(-x)+c>0,\\ 0,\end{cases}$$

它定义在 x 的整个负半轴上.

(2) 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(ax+by+c)\quad (a\neq 0,b\neq 0), \tag{2.13}$$

这里 $f(u)$ 是 u 的连续函数.

作变量变换

$$u=ax+by+c, \tag{2.14}$$

两边对 x 求导数,得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}. \tag{2.15}$$

代入方程(2.13),得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a+bf(u). \tag{2.16}$$

方程(2.16)是一个变量分离的微分方程,可按照 2.1.1 的方法求解,然后将 $u=ax+by+c$ 代回,便得(2.13)的解.

例 6 解方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x+y)^2$.

解　令 $u=x+y$，两边微分得 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. 代入原方程并整理得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+u^2,$$

分离变量，求解得

$$\arctan u=x+c,$$

这里 c 是任意常数.

将 $u=x+y$ 代回，得原方程的通解为

$$\arctan(x+y)=x+c.$$

(3) 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \tag{2.17}$$

的方程也可以经变量变换化为变量分离方程，这里 a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 均为常数. 当这些常数取某些特殊值时，(2.17) 可为 (2.5) 或 (2.13) 的情形.

当 $c_1=c_2=0$ 时，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}}\right)=g\left(\frac{y}{x}\right)$，即为齐次微分方程 (2.5). 因此这里主要讨论 c_1,c_2 不全为零时的情形. 这时方程 (2.17) 右端分子分母都是 x,y 的一次多项式，因此

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0,\\ a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases} \tag{2.18}$$

表示 Oxy 平面上的两条相交直线. 针对方程组的系数行列式 $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$，分两种情况进行讨论.

① $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$ 的情形，此时 $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$

这时方程组 (2.18) 有唯一解 $\begin{cases}x=\alpha,\\ y=\beta,\end{cases}$ 即 Oxy 平面上两条直线的交点为 (α,β). 若令

$$\begin{cases}X=x-\alpha,\\ Y=y-\beta,\end{cases}$$

则式 (2.18) 化为

$$\begin{cases}a_1X+b_1Y=0,\\ a_2X+b_2Y=0.\end{cases}$$

从而 (2.17) 化为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=f\left(\frac{a_1+b_1\dfrac{Y}{X}}{a_2+b_2\dfrac{Y}{X}}\right)=g\left(\frac{Y}{X}\right), \tag{2.19}$$

这是一个齐次微分方程,求解代回原变量即可得原方程(2.17)的解.

② $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$ 的情形

要使此行列式等于0,不外乎三种情形.

(i) $a_1=b_1=0$ 时,(2.17)式变为$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\dfrac{c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$;而 $a_2=b_2=0$ 时,(2.17)式变为$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{c_2}\right)$. 这时(2.17)为(2.13)式的情形.

(ii) $b_1=b_2=0$ 时,(2.17)式变为$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\dfrac{a_1x+c_1}{a_2x+c_2}\right)$;而 $a_1=a_2=0$ 时,(2.17)式变为$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\dfrac{b_1y+c_1}{b_2y+c_2}\right)$. 这时(2.17)可化为变量分离方程(2.1).

(iii) $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=k$ 时,令 $u=a_2x+b_2y$,此时$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a_2+b_2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,$f\left(\dfrac{k(a_2x+b_2y)+c_1}{(a_2x+b_2y)+c_2}\right)=f\left(\dfrac{ku+c_1}{u+c_2}\right)=g(u)$. 方程(2.17)化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a_2+b_2g(u),$$

属于变量分离方程(2.1).

此外,诸如

$$yf(xy)\,\mathrm{d}x+xg(xy)\,\mathrm{d}y=0,$$

$$x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(xy),$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xf\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

以及

$$M(x,y)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)+N(x,y)(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)=0$$

(其中 M,N 为 x,y 的齐次函数,幂次可以不同)等一些方程类型,均可通过适当的变量变换化为变量分离方程. 读者不妨作为练习把相应的变换找出来.

例 7 解微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x-y+1}{x+y-3}. \tag{2.20}$$

解　解代数方程

$$\begin{cases} x-y+1=0, \\ x+y-3=0, \end{cases}$$

得唯一解 $x=1, y=2$.

作代换

$$\begin{cases} X=x-1, \\ Y=y-2, \end{cases}$$

(2.20)化为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{X-Y}{X+Y}, \tag{2.21}$$

这是齐次微分方程. 令 $u=\frac{Y}{X}, Y=uX$, 当 $1-2u-u^2\neq 0$ 时, 原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}X}{X}=\frac{1+u}{1-2u-u^2}\mathrm{d}u,$$

两边积分, 得

$$\ln X^2=-\ln|u^2+2u-1|+\bar{c},$$

$$X^2(u^2+2u-1)=\pm \mathrm{e}^{\bar{c}}=c_1.$$

代回原变量, 得

$$Y^2+2XY-X^2=c_1,$$

$$(y-2)^2+2(x-1)(y-2)-(x-1)^2=c_1.$$

此外, 容易验证 $1-2u-u^2=0$, 即

$$Y^2+2XY-X^2=0$$

也是方程(2.21)的解, 此时, 只要通解中 $c_1=0$ 即可. 因此, (2.20)的通解为

$$y^2+2xy-x^2-6y-2x=c,$$

其中 c 为任意常数.

例 8　解方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x-y+1}{2x-2y-3}$.

解　由于 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{1}{2}$, 设 $u=x-y$, 则原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1-\frac{u+1}{2u-3}=\frac{u-4}{2u-3}. \tag{2.22}$$

当 $u-4\neq 0$ 时, 分离变量解得(2.22)的通解为

$$2u+5\ln|u-4|=x+c_1,$$

即

$$(u-4)^5=\pm \mathrm{e}^{c_1}\mathrm{e}^{x-2u}=c\mathrm{e}^{x-2u}.$$

容易验证 $u=4$ 也是(2.22)的解, 只要通解中的 $c=0$ 即可.

代入原变量得原方程的通解为

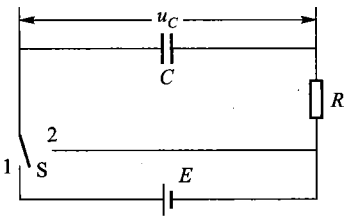
$$(x-y-4)^5=ce^{2y-x},$$

这里 c 是任意常数.

2.1.3　应用举例

例 9　电容器的充电和放电.

如图(2.1)所示的 RC 电路,开始时电容 C 上没有电荷,电容两端的电压为零. 我们把开关 S 合上"1"后,电池 E 就对电容 C 充电,电容 C 两端的电压 u_C 逐渐升高. 当电容充电完毕后,我们再把开关 S 合上"2",这时电容就开始了放电过程. 现在要求找出充电和放电过程中,电容 C 两端的电压 u_C 随时间 t 的变化规律.



图(2.1)

解　电流 I 经过电阻 R、电感 L、电容 C 的电压降分别为 RI, $L\dfrac{dI}{dt}$ 和 $\dfrac{Q}{C}$,其中 Q 为电量,它与电流的关系为 $I=\dfrac{dQ}{dt}$. 根据基尔霍夫第二定律:在闭合回路中,所有支路上的电压的代数和等于零.

充电过程:

$$u_C+RI=E.$$

根据 $Q=Cu_C$,得

$$I=\frac{dQ}{dt}=\frac{d}{dt}(Cu_C)=C\frac{du_C}{dt}.$$

代入得常微分方程

$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=E.$$

变量分离得

$$\frac{du_C}{u_C-E}=-\frac{dt}{RC},$$

两边积分得

$$\ln|u_C-E|=-\frac{1}{RC}t+c_1,$$

即

$$u_C-E=\pm e^{c_1}e^{-\frac{1}{RC}t}=c_2e^{-\frac{1}{RC}t},$$

其中 $c_2=\pm e^{c_1}$ 为任意常数. 此外,还有解 $u_C=E$

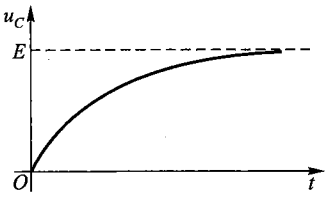
故方程的通解为

$$u_C = E + c_2 e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

考虑初值条件 $t=0$ 时 $u_C=0$，代入得 $c_2=-E$. 即

$$u_C = E\left(1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right).$$

当 $t\to+\infty$ 时 $u_C\to E$，如图(2.2). $\tau=RC$ 称为时间常数，当 $t=3\tau$ 时 $u_C=0.95E$.



图(2.2)

对于放电过程的讨论，可以类似地进行，留给读者自己完成.

例 10　探照灯反射镜面的形状.

在制造探照灯的反射镜面时，总是要求将点光源射出的光线平行地反射出去，以保证探照灯有良好的方向性，试求反射镜面的几何形状.

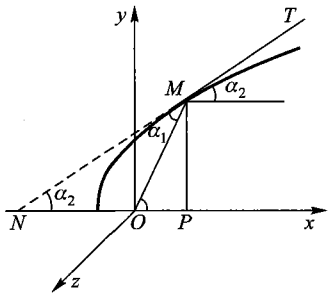
解　如图(2.3)，设所求曲面由曲线

$$\begin{cases} y=f(x), \\ z=0 \end{cases}$$

绕 x 轴旋转而成.

过曲线 $y=f(x)$ 上任一点 $M(x,y)$ 作切线 NT，则由光的反射定律：入射角=反射角，易知 $\alpha_1=\alpha_2$，得

$$\overline{OM}=\overline{ON}.$$



图(2.3)

注意到

$$\frac{dy}{dx}=\tan\alpha_2=\frac{\overline{MP}}{\overline{NP}},$$

而 $\overline{OP}=x$，$\overline{MP}=y$，$\overline{OM}=\sqrt{x^2+y^2}$，于是有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}},$$

此为齐次微分方程. 可令 $u=\frac{y}{x}$ 解之，亦可令 $v=\frac{x}{y}$ 解之，此时 $x=vy$，$\frac{dx}{dy}=v+y\frac{dv}{dy}$，代入得

$$v+y\frac{dv}{dy}=\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}=\frac{x}{y}+\operatorname{sgn} y\cdot\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}=v+\operatorname{sgn} y\cdot\sqrt{1+v^2},$$

即

$$\frac{dy}{y}=\operatorname{sgn} y\cdot\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}.$$

应用实例
物体冷却过程

两边积分，最后化简得

$$y^2=c(c+2x),$$

其中 c 为任意正常数，该曲线是一抛物线. 因此，反射镜面的形状为旋转抛物面

$$y^2+z^2=c(c+2x).$$

习　题　2.1

1. 求下列方程的解：

(1) $\frac{dy}{dx}=2xy$，并求满足初值条件 $x=0,y=1$ 的特解；

(2) $y^2dx+(x+1)dy=0$，并求满足初值条件 $x=0,y=1$ 的特解；

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{xy+x^3y}$；

(4) $(1+x)ydx+(1-y)xdy=0$；

(5) $(y+x)dy+(x-y)dx=0$；

(6) $x\frac{dy}{dx}-y+\sqrt{x^2-y^2}=0$；

(7) $\tan y\,dx-\cot x\,dy=0$；

(8) $\frac{dy}{dx}+\frac{e^{y^2+3x}}{y}=0$；

(9) $x(\ln x-\ln y)dy-ydx=0$；

(10) $\frac{dy}{dx}=e^{x-y}$.

2. 作适当的变量变换求解下列方程：

(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(x+y)^2}$；　　(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y+1}{x-2y+1}$；

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+5}{x-y-2}$；　　(4) $\frac{dy}{dx}=(x+1)^2+(4y+1)^2+8xy+1$；

(5) $\frac{dy}{dx}=\frac{y^6-2x^2}{2xy^5+x^2y^2}$；　　(6) $\frac{dy}{dx}=\frac{2x^3+3xy^2+x}{3x^2y+2y^3-y}$.

3. 证明方程 $\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}=f(xy)$ 经变换 $xy=u$ 可化为变量分离方程，并由此求解下列方程：

(1) $y(1+x^2y^2)dx=xdy$；　　(2) $\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{2+x^2y^2}{2-x^2y^2}$.

4. 已知 $f(x)\int_0^x f(t)dt=1(x\neq 0)$，试求函数 $f(x)$ 的一般表达式.

5. 求具有性质

$$x(t+s)=\frac{x(t)+x(s)}{1-x(t)x(s)}$$

的函数 $x(t)$，已知 $x'(0)$ 存在.

6. 求一曲线，使它的切线介于坐标轴间的部分被切点分成相等的两段.

7. 在图(2.1)所示的 RC 电路中，设 $E=10$ V，$R=100\ \Omega$，$C=0.01$ F，而开始时电容 C 上没有电荷.

(1) 当开关 S 合上"1"后，问经过多长时间电容 C 上的电压 $u_C=5$ V?

(2) 当开关 S 合上"1"后，经过相当长的时间(如 1 分钟后)开关 S 从"1"突然转至"2"，试求 u_C 的变化规律，并问经过多长时间 $u_C=5$ V?

8. 求出习题 1.2 第 8 题(1)所确定的曲线，其中 $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

9. 证明满足习题 1.2 第 8 题(7)所给条件的曲线是抛物线族.

§2.2　线性微分方程与常数变易法

一阶线性微分方程

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x), \tag{2.23}$$

其中 $P(x)$,$Q(x)$在考虑的区间上是 x 的连续函数. 若 $Q(x)=0$,(2.23)变为

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y, \tag{2.24}$$

(2.24)称为**一阶齐次线性微分方程**. 若 $Q(x)\neq 0$,(2.23)称为**一阶非齐次线性微分方程**.

(2.24)是变量分离方程,我们已经在 §2.1 例 2 中求得它的通解为

$$y=ce^{\int P(x)dx}, \tag{2.25}$$

这里 c 是任意常数.

现在讨论非齐次线性微分方程(2.23)通解的求法.

不难看出,(2.24)是(2.23)的特殊情形,我们如果对(2.24)也**形式求解**,可以得到通解为

$$y=c(x)e^{\int P(x)dx} \tag{2.26}$$

的形式. 这是在(2.25)式中,将常数 c 变成 x 的待定函数 $c(x)$所对应的形式.

对(2.26)求导数,得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dc(x)}{dx}e^{\int P(x)dx}+c(x)P(x)e^{\int P(x)dx}. \tag{2.27}$$

将(2.26),(2.27)代入(2.23),得到

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dc(x)}{dx}e^{\int P(x)dx}+c(x)P(x)e^{\int P(x)dx}=c(x)P(x)e^{\int P(x)dx}+Q(x),$$

即

$$\frac{dc(x)}{dx}=Q(x)e^{-\int P(x)dx},$$

积分后得

$$c(x)=\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx+\bar{c},$$

这里$\bar{c}$是任意常数. 将上式代入(2.26),得到方程(2.23)的通解为

$$y = e^{\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx + \bar{c}\right). \tag{2.28}$$

这种将齐次微分方程中常数 c 变易为待定函数 $c(x)$ 的方法，称为**常数变易法**. 常数变易法实际上也是一种变量变换的方法，通过变换(2.26)可将方程(2.23)化为变量分离方程.

若方程不能化为(2.23)形式，可以将 x 看作是 y 的函数，再看是否为(2.23)的形式.

例 1 解方程 $(x+1)\frac{dy}{dx}-ny=e^x(x+1)^{n+1}$ (n 为常数).

解 将方程改写为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{n}{x+1}y+e^x(x+1)^n, \tag{2.29}$$

属一阶非齐次线性微分方程.

先求解齐次线性微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{n}{x+1}y,$$

得通解

$$y=c(x+1)^n.$$

然后用常数变易法求非齐次微分方程(2.29)的通解. 设任意常数 c 是以 x 为变量的待定函数 $c(x)$，即

$$y=c(x)(x+1)^n. \tag{2.30}$$

对其微分，得到

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dc(x)}{dx}(x+1)^n+n(x+1)^{n-1}c(x). \tag{2.31}$$

将(2.30)，(2.31)代入方程(2.29)，整理得

$$\frac{dc(x)}{dx}=e^x,$$

解得

$$c(x)=e^x+\bar{c}.$$

将 $c(x)$ 代入(2.30)，即得原方程的通解

$$y=(e^x+\bar{c})(x+1)^n,$$

其中 $\bar{c}$ 为任意常数.

例 2 求方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x-y^2}$ 的通解，并求 $y(0)=2$ 时的特解.

解 如果以 y 作未知函数，原方程不是线性微分方程，但可以改写为

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2x-y^2}{y}=\frac{2x}{y}-y, \tag{2.32}$$

把 x 看作未知函数，y 看作自变量，这样(2.32)就是一阶非齐次线性微分方程.

先求解齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{2x}{y},$$

得通解

$$x=cy^2. \tag{2.33}$$

然后，利用常数变易法求(2.32)的通解. 将(2.33)中的 c 变易为函数 $c(y)$，并对 y 求微分，得到

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}c(y)}{\mathrm{d}y}y^2+2c(y)y.$$

代入(2.32)，整理得

$$\frac{\mathrm{d}c(y)}{\mathrm{d}y}=-\frac{1}{y},$$

解得

$$c(y)=-\ln|y|+\bar{c}.$$

即原方程的通解

$$x=y^2(\bar{c}-\ln|y|), \tag{2.34}$$

其中$\bar{c}$为任意常数.

下面我们求方程在 $y(0)=2$ 时的特解. 将 $x=0$ 时，$y=2$ 代入(2.34)，可得$\bar{c}=\ln 2$. 所以，原方程在给定初值条件下的特解为

$$x=y^2(\ln 2-\ln|y|).$$

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y+Q(x)y^n \quad (n\neq 0,1 \text{ 为实数}) \tag{2.35}$$

的方程，称为**伯努利(Bernoulli)微分方程**，其中 $P(x)$，$Q(x)$ 在考虑的区间上是 x 的连续函数.

利用变量变换可将伯努利微分方程化为线性微分方程. 事实上，当 $y\neq 0$ 时，用 y^{-n} 乘(2.35)两边，得到

$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y^{1-n}+Q(x), \tag{2.36}$$

引入变量变换

$$z=y^{1-n}, \tag{2.37}$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}. \tag{2.38}$$

将(2.37),(2.38)代入(2.36),得到

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)P(x)z+(1-n)Q(x),$$

这是线性微分方程,可按上面介绍的方法求其通解,然后代回原变量即可得到伯努利微分方程(2.35)的通解. 此外,当 $n>0$ 时,方程还有解 $y=0$.

例 3 求方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=6\frac{y}{x}-xy^2$ 的通解.

解 这是 $n=2$ 时的伯努利方程. 作变量变换 $z=y^{-1}$,化为线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-y^{-2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-y^{-2}\left(6\frac{y}{x}-xy^2\right)=-\frac{6}{x}z+x.$$

先求解齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{6}{x}z,$$

得通解

$$z=cx^{-6}.$$

用常数变易法. 设任意常数 c 是以 x 为变量的函数:$c=c(x)$,将通解代入方程$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{6}{x}z+x$,得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}c(x)}{\mathrm{d}x}x^{-6}-6c(x)x^{-7}=-\frac{6}{x}c(x)x^{-6}+x,$$

化简得

$$\frac{\mathrm{d}c(x)}{\mathrm{d}x}=x^7,$$

解得

$$c(x)=\frac{x^8}{8}+\bar{c}.$$

即方程的通解

$$z=\left(\frac{x^8}{8}+\bar{c}\right)x^{-6}=\frac{x^2}{8}+\frac{\bar{c}}{x^6},$$

其中$\bar{c}$为任意常数.

变回原来变量 y,即原方程的通解为

$$\frac{1}{y}=\frac{x^2}{8}+\frac{\bar{c}}{x^6}$$

或

$$\frac{x^6}{y}-\frac{x^8}{8}=\bar{c}.$$

此外，方程还有解 $y=0$.

注意：伯努利微分方程中的 n 可以是实数. 如方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}=x\sqrt{y}$ 即为 $n=\frac{1}{2}$ 时的伯努利方程，它的求解留给读者自己完成.

伯努利微分方程的解题思路是对未知函数 y 进行换元，从而使方程变为新未知函数的线性微分方程. 因此，解题时可以先把 dy 进行凑微分，然后换元. 如例 3，在 $y\neq 0$ 时 $\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}=6\frac{1}{xy}-x$，即 $-\frac{d\left(\frac{1}{y}\right)}{dx}=6\frac{1}{xy}-x$，然后进行换元 $z=\frac{1}{y}$. 这种凑微分换元的思路也可以用于其他一些类型的方程，比如方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sin y}+x\cot y$，可以先凑微分 $\sin y\frac{dy}{dx}=1+x\cos y$，即 $\frac{-d\cos y}{dx}=1+x\cos y$，然后进行换元 $z=\cos y$.

习　题　2.2

1. 求下列方程的解：

(1) $\frac{dy}{dx}=y+\sin x$；

(2) $\frac{dx}{dt}+3x=e^{2t}$；

(3) $\frac{ds}{dt}=-s\cos t+\frac{1}{2}\sin 2t$；

(4) $\frac{dy}{dx}-\frac{n}{x}y=e^x x^n$（$n$ 为常数）；

(5) $\frac{dy}{dx}+\frac{1-2x}{x^2}y-1=0$；

(6) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^4+y^3}{xy^2}$；

(7) $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$；

(8) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+y^3}$；

(9) $\frac{dy}{dx}=\frac{ay}{x}+\frac{x+1}{x}$（$a$ 为常数）；

(10) $x\frac{dy}{dx}+y=x^3$；

(11) $\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$；

(12) $(y\ln x-2)ydx=xdy$；

(13) $2xydy=(2y^2-x)dx$；

(14) $\frac{dy}{dx}=\frac{e^y+3x}{x^2}$；

(15) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{xy+x^3y^3}$；

(16) $y=e^x+\int_0^x y(t)dt$.

2. 设函数 $\varphi(t)$ 于 $-\infty<t<+\infty$ 上连续，$\varphi'(0)$ 存在且满足关系式

$$\varphi(t+s)=\varphi(t)\varphi(s),$$

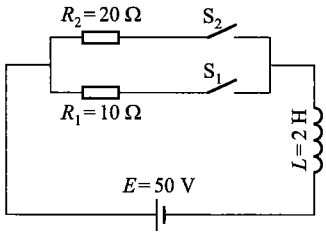
试求此函数.

3. 如图(2.4)所示的 RL 电路.

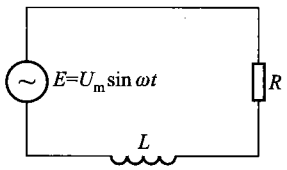
(1) 求当开关 S_1 合上 10 s 后,电感 L 上的电流;

(2) S_1 合上 10 s 后再将 S_2 合上,求 S_2 合上 20 s 后,电感 L 上的电流.

4. 试求图(2.5)所示的 RL 电路中电感 L 上电流 $I(t)$ 的变化规律,并解释其物理意义,设 $t=0$ 时,$I=0$.



图(2.4)



图(2.5)

5. 试证:

(1) 一阶非齐次线性微分方程(2.23)的任两解之差必为相应的齐次线性微分方程(2.24)之解;

(2) 若 $y=y(x)$ 是(2.24)的非零解,而 $y=\tilde{y}(x)$ 是(2.23)的解,则方程(2.23)的通解可表为 $y=cy(x)+\tilde{y}(x)$,其中 c 为任意常数;

(3) 方程(2.24)任一解的常数倍或任两解之和(或差)仍是方程(2.24)的解.

6. 求解习题 1.2 第 8 题(5)和(6).

7. 求解下列方程:

(1) $(x^2-1)y'-xy+1=0$;

(2) $x(x^2-1)y'-(2x^2-1)y+x^3=0$;

(3) $y'\sin x\cdot\cos x-y-\sin^3 x=0$.

§2.3 恰当微分方程与积分因子

2.3.1 恰当微分方程

我们可以将一阶方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

写成微分形式

$$f(x,y)\,dx-dy=0,$$

或者把 x,y 平等看待,写成具有对称形式的一阶微分方程

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0, \tag{2.39}$$

这里假设 $M(x,y)$,$N(x,y)$ 在某矩形域内是 x,y 的连续函数,且具有连续的一阶偏导数. 这样的形式有时便于探求方程的通解.

如果方程(2.39)的左端恰好是某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分,即

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x+N(x,y)\,\mathrm{d}y=\mathrm{d}u(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y, \tag{2.40}$$

则称(2.39)为**恰当微分方程**.

容易验证恰当微分方程的通解为

$$u(x,y)=c, \tag{2.41}$$

这里 c 是任意常数.

这样,我们自然会提出如下问题:

(1) 如何判别(2.39)是恰当微分方程?

(2) 如果(2.39)是恰当微分方程,如何求得函数 $u(x,y)$?

我们给出三种解答方法.

方法 1　利用恰当微分方程的判定求解.

定理 1　二元函数 $M(x,y)$,$N(x,y)$ 在某单连通域内是 x,y 的连续函数,且具有连续的一阶偏导数,则方程

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x+N(x,y)\,\mathrm{d}y=0$$

为恰当微分方程的充要条件是

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

证明　**必要性**　已知微分方程(2.39)是恰当微分方程,从(2.40)可得

$$M(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.42}$$

和

$$N(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2.43}$$

将(2.42),(2.43)分别对 y,x 求偏导数,得到

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

由$\frac{\partial M}{\partial y},\frac{\partial N}{\partial x}$的连续性,可知$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$连续. 因此可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x},$$

即

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}. \tag{2.44}$$

由此可见,(2.44)是方程(2.39)为恰当微分方程的必要条件.

充分性　现在证明(2.44)是(2.39)为恰当微分方程的充分条件.也就是说如果方程(2.39)满足(2.44)的条件,我们肯定能找到一个函数 $u(x,y)$,使它同时满足条件(2.42),(2.43). 所以我们要去找具体的 $u(x,y)$.

把(2.42)两边关于 x 积分,可以得到

$$\int M(x,y)\,\mathrm{d}x+\varphi(y)=u(x,y), \tag{2.45}$$

这里 $\varphi(y)$ 是关于 y 的任意可导函数. 我们选择合适的 $\varphi(y)$,使 $u(x,y)$ 同时满足(2.43),即在(2.45)两边对 y 求导数,得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}\varphi(y)}{\mathrm{d}y}=N(x,y).$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(y)}{\mathrm{d}y}=N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\mathrm{d}x. \tag{2.46}$$

注意 $\varphi(y)$ 是关于 y 的任意可导函数,因此(2.46)中等号右端与 x 无关,也就是说(2.46)等号右端对 x 的偏导数应该恒等于零. 事实上,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\mathrm{d}x\right]=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\mathrm{d}x\right]. \tag{2.47}$$

由于 $M(x,y)$,$N(x,y)$ 在某单连通域内是 x,y 的连续函数,且具有连续的一阶偏导数,因此(2.47)中对 x,y 求导数的顺序可以交换. 再利用(2.44),可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\mathrm{d}x\right]&=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=0.\end{aligned}$$

于是(2.46)式的右端是 y 的一元函数,两边积分便可得到

$$\varphi(y)=\int\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y. \tag{2.48}$$

将(2.48)代入(2.45),便可求出

$$u(x,y)=\int M(x,y)\,\mathrm{d}x+\int\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y. \tag{2.49}$$

这样我们便证明了方程(2.39)只要满足条件(2.44),则同时满足条件(2.42),(2.43)的 $u(x,y)$ 肯定是存在的,具体表达式为(2.49). 证毕.

上述证明过程也是求满足条件的二元函数 $u(x,y)$ 的一种方法,关于 $u(x,y)$ 还有两种更简单的方法.

方法 2 利用曲线积分求 $u(x,y)$.

命题 1 设二元函数 $M(x,y)$,$N(x,y)$ 在某单连通域 D 内是 x,y 的连续函数,且具有

连续的一阶偏导数,则对 D 内任一按段光滑曲线 L,曲线积分 $\int_L M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y$ 在区域 D 内积分与路径无关的充要条件是 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.

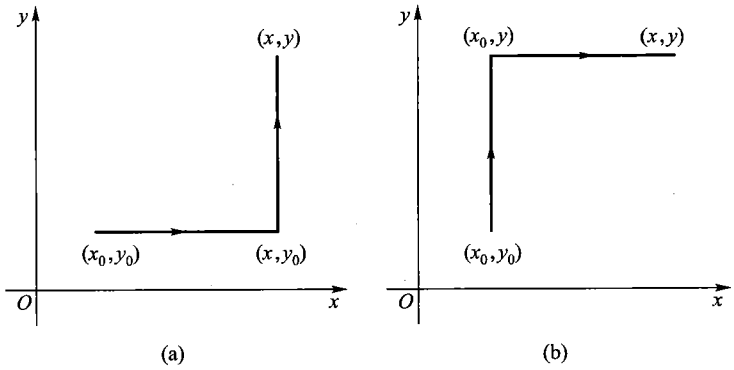
由定理 1 和命题 1 可以看出其共同性. 另外,微分方程求解所用的方法也是"积分". 可见 $u(x,y)$ 可以利用从定点 $A(x_0,y_0)$ 到动点 $B(x,y)$ 的曲线积分来求,即

$$u(x,y)=\int_A^B M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y. \tag{2.50}$$

可以利用积分与路径的无关性,选择简单的路径进行积分,如图(2.6)(a)和(b),分别得

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} N(x,y)\mathrm{d}y, \tag{2.51}$$

$$u(x,y)=\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\mathrm{d}y + \int_{x_0}^{x} M(x,y)\mathrm{d}x. \tag{2.52}$$



图(2.6)

利用曲线积分的方法求解 $u(x,y)$ 比(2.49)更直观.

方法 3　分项组合方法.

利用二元函数微分的特点,将恰当微分方程的各项"分项组合"凑成全微分形式. 这种方法要求熟记一些简单二元函数的全微分,如

$$y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\mathrm{d}(xy),\qquad \frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}=\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2}=\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right),\qquad \frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{xy}=\mathrm{d}\left(\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right),$$

$$\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\mathrm{d}\left(\operatorname{arccot}\frac{y}{x}\right),\quad \frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2-y^2}=\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\right).$$

在这三种求原函数 $u(x,y)$ 的方法中,一般来说"分组凑全微分"最简单.

例 1 解方程$(3x^2+6xy^2)\mathrm{d}x+(6x^2y+4y^3)\mathrm{d}y=0$.

解 这里$M=3x^2+6xy^2$,$N=6x^2y+4y^3$,有

$$\frac{\partial M}{\partial y}=12xy,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=12xy,$$

故方程是恰当微分方程.

方法 1 求 u 使其满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M=3x^2+6xy^2, \tag{2.53}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=N=6x^2y+4y^3. \tag{2.54}$$

将(2.53)对 x 进行积分,得

$$u=x^3+3x^2y^2+\varphi(y). \tag{2.55}$$

将(2.55)对 y 求导数,并由(2.54)可得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=6x^2y+\frac{\mathrm{d}\varphi(y)}{\mathrm{d}y}=6x^2y+4y^3,$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(y)}{\mathrm{d}y}=4y^3,$$

解得

$$\varphi(y)=y^4.$$

将 $\varphi(y)$ 代入(2.55),得到

$$u=x^3+3x^2y^2+y^4.$$

因此,方程的通解为

$$x^3+3x^2y^2+y^4=c,$$

其中 c 为任意常数.

亦可直接引用公式(2.49)求解:

$$\begin{aligned}&\int M(x,y)\,\mathrm{d}x+\int\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\\&=x^3+3x^2y^2+\int(6x^2y+4y^3-6x^2y)\,\mathrm{d}y\\&=x^3+3x^2y^2+y^4=c,\end{aligned}$$

其中 c 为任意常数.

方法 2 利用"曲线积分"的方法求解 $u(x,y)$.

由于 $M=3x^2+6xy^2$,$N=6x^2y+4y^3$,$\frac{\partial M}{\partial y}=12xy$,$\frac{\partial N}{\partial x}=12xy$ 在整个二维实平面上都连

续，因此我们可以利用从原点 $O(0,0)$ 到 $B(x,y)$ 的曲线积分来求解，即

$$u(x,y)=\int_O^B M(x,y)\,\mathrm{d}x+N(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^x 3x^2\mathrm{d}x+\int_0^y(6x^2y+4y^3)\,\mathrm{d}y$$
$$=x^3+y^4+3x^2y^2,$$

即得方程的通解

$$x^3+3x^2y^2+y^4=c,$$

其中 c 为任意常数.

方法 3　用“分项组合”方法求解 $u(x,y)$.

将原方程重组：

$$\begin{aligned}(3x^2+6xy^2)\,\mathrm{d}x+(6x^2y+4y^3)\,\mathrm{d}y&=3x^2\mathrm{d}x+4y^3\mathrm{d}y+6xy^2\mathrm{d}x+6x^2y\mathrm{d}y\\&=\mathrm{d}x^3+\mathrm{d}y^4+(3y^2\mathrm{d}x^2+3x^2\mathrm{d}y^2)\\&=\mathrm{d}x^3+\mathrm{d}y^4+3\mathrm{d}(x^2y^2)\\&=\mathrm{d}(x^3+y^4+3x^2y^2)=0,\end{aligned}$$

即得方程的通解

$$x^3+3x^2y^2+y^4=c,$$

其中 c 为任意常数.

例 2　求解 $\left(\cos x+\dfrac{1}{y}\right)\mathrm{d}x+\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y=0.$

解　因 $M=\cos x+\dfrac{1}{y}$，$N=\dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{y^2}$，$\dfrac{\partial M}{\partial y}=-\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$，故方程是恰当微分方程. 用“分项组合”方法重组：

$$\begin{aligned}\cos x\mathrm{d}x+\frac{1}{y}\mathrm{d}y+\left(\frac{1}{y}\mathrm{d}x-\frac{x}{y^2}\mathrm{d}y\right)&=\mathrm{d}\sin x+\mathrm{d}\ln|y|+\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}\\&=\mathrm{d}\sin x+\mathrm{d}\ln|y|+\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)\\&=\mathrm{d}\left(\sin x+\ln|y|+\frac{x}{y}\right)=0,\end{aligned}$$

即得方程的通解

$$\sin x+\ln|y|+\frac{x}{y}=c,$$

其中 c 为任意常数.

其他两种方法留给读者去完成.

2.3.2　积分因子

恰当微分方程可以通过积分求出隐函数形式的解. 因此，能不能把一个非恰当微

分方程化为恰当微分方程就有很重要的意义. 积分因子就是为解决这个问题而引进的概念.

如果存在连续可微函数 $\mu(x,y)\neq 0$,使得

$$\mu(x,y)M(x,y)\mathrm{d}x+\mu(x,y)N(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{2.56}$$

为一恰当微分方程,即存在函数 $u(x,y)$,使得

$$\mu(x,y)M(x,y)\mathrm{d}x+\mu(x,y)N(x,y)\mathrm{d}y=\mathrm{d}u(x,y)$$

则称 $\mu(x,y)$ 为方程(2.39)的**积分因子**.

这时 $u(x,y)=c$ 是(2.56)的通解,因而也是(2.39)的通解.

另外,同一个方程可以有不同的积分因子. 如 $y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$ 有积分因子 $\frac{1}{x^2},\frac{1}{y^2},\frac{1}{xy},\frac{1}{x^2+y^2},\frac{1}{x^2-y^2}$ 等. 可以证明,只要方程有解存在,则必有积分因子存在,并且不唯一. 因此,在具体解题过程中,由于找到的积分因子不同,从而通解可能有不同的形式.

下面我们就去探讨怎样找积分因子. 根据定理 1,函数 $\mu(x,y)\neq 0$ 为方程(2.39)的积分因子的充要条件是

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

即

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu, \tag{2.57}$$

这是一个以 μ 为未知函数的一阶线性偏微分方程. 想要通过解方程(2.57)来找积分因子,从而得到(2.39)的解,在一般情况下,将比直接对(2.39)求解更困难. 但是在若干特殊情况下,求(2.57)的一个特解还是容易的,所以(2.57)提供了寻找特殊积分因子的一个途径.

例如对于方程(2.39),如果存在只与 x 有关的积分因子 $\mu=\mu(x)$,则 $\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$,这时方程(2.57)就变为

$$N\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\mathrm{d}x. \tag{2.58}$$

由此可见,如果通过(2.58)解出 $\mu=\mu(x)$,等号右端必须与 y 无关,即

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\psi(x), \tag{2.59}$$

这里 $\psi(x)$ 仅为 x 的函数. 这时解得

$$\mu(x)=e^{\int\psi(x)dx}. \tag{2.60}$$

同样可以证明,方程(2.39)存在 $\mu=\mu(y)$ 形式的积分因子的充要条件:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\varphi(y),$$

这里 $\varphi(y)$ 仅为 y 的函数. 此时积分因子为

$$\mu(y)=e^{\int\varphi(y)dy}.$$

例 3　试用积分因子法解线性微分方程 $\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)$.

解　将原方程改写为

$$[P(x)y+Q(x)]dx-dy=0, \tag{2.61}$$

有 $M=P(x)y+Q(x)$, $N=-1$,得

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=-P(x).$$

因此,线性微分方程有只与 x 有关的积分因子 $\mu(x)=e^{-\int P(x)dx}$. 于是以 μ 乘式(2.61)两端得

$$P(x)e^{-\int P(x)dx}ydx-e^{-\int P(x)dx}dy+Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx=0,$$

即

$$-yde^{-\int P(x)dx}-e^{-\int P(x)dx}dy+Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx=0,$$

或者写作

$$-d(ye^{-\int P(x)dx})+Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx=0,$$

得通解

$$ye^{-\int P(x)dx}-\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx=c,$$

即

$$y=e^{\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx+c\right),$$

其中 c 为任意常数. 这与 § 2.2 中用常数变易法求出的通解(2.28)完全相同,但运算过程比常数变易法烦琐.

积分因子一般不容易求得,我们可以先从求特殊形式的积分因子(如只与 x 或 y 有关的积分因子)开始,或者通过"观察法"进行分项组合去找积分因子,这需要一定的

技巧.

例 4 解齐次微分方程$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}+\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}$ $(y>0)$.

解 方程可以改写为

$$x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x,$$

即

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2+y^2)=\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x.$$

显然,此方程有积分因子$\mu=\sqrt{x^2+y^2}$,于是以μ乘方程得

$$\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\mathrm{d}x,$$

通解为

$$\sqrt{x^2+y^2}=x+c$$

或

$$y^2=c(c+2x),$$

c为任意常数.

求解过程中的积分因子是关键,一般不容易看出. 当然,这个方程也可以利用齐次微分方程求解的方法,留给读者自己完成.

关于一阶微分方程的求解我们分类介绍了解法,在解题过程中,首先要分析方程的类型,找相应解法. 因此,判别是哪种类型的方程是关键. 但是一般来说,解法是不唯一的,得到的通解经常也有不同的形式. "一题多解"是掌握不同方法的有力武器.

例 5 解方程 $y\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=0$.

解 因 $M=y,N=y-x,\frac{\partial M}{\partial y}=1,\frac{\partial N}{\partial x}=-1$,方程不是恰当微分方程.

方法 1 因$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=-\frac{2}{y}$只与$y$有关,方程有积分因子$\mu(y)=\mathrm{e}^{\int\left(-\frac{2}{y}\right)\mathrm{d}y}=\frac{1}{y^2}$,于是以$\mu$乘方程两边得

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}x+\frac{1}{y}\mathrm{d}y-\frac{x\mathrm{d}y}{y^2}=\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}+\frac{\mathrm{d}y}{y}=\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}+\ln|y|\right)=0,$$

得通解

$$\frac{x}{y}+\ln|y|=c,$$

其中c为任意常数.

方法 2 方程改写为

$$y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=-y\mathrm{d}y.$$

显然，方程有积分因子 $\mu=\frac{1}{y^2}$ 或 $\mu=\frac{1}{x^2}$. 因右端只与 y 有关，于是选取 $\mu=\frac{1}{y^2}$，得

$$\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}+\frac{\mathrm{d}y}{y}=\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}+\ln|y|\right)=0,$$

得通解

$$\frac{x}{y}+\ln|y|=c,$$

其中 c 为任意常数.

方法 3　方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x-y},$$

这是齐次微分方程. 令 $\frac{y}{x}=u$，代入得

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=\frac{u}{1-u},$$

即

$$\frac{1-u}{u^2}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

积分得

$$-\frac{1}{u}-\ln|u|=\ln|x|-c.$$

其中 c 为任意常数. 代回原来变量，得

$$\frac{x}{y}+\ln|y|=c.$$

排疑解惑

初等函数、函数积分与初等解法

方法 4　方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{x}{y}-1,$$

是 x 的非齐次线性微分方程，代入其通解(2.28)得

$$x=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\left[\int(-1)\cdot\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+c\right]=y(-\ln|y|+c)$$

即

$$\frac{x}{y}+\ln|y|=c,$$

其中 c 为任意常数.

此外，原方程还有解 $y=0$.

习 题 2.3

1. 验证下列方程是恰当微分方程,并求出方程的解:

(1) $(x^2+y)\,dx+(x-2y)\,dy=0$;

(2) $(y-3x^2)\,dx-(4y-x)\,dy=0$;

(3) $\left[\frac{y^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{x}\right]dx+\left[\frac{1}{y}-\frac{x^2}{(x-y)^2}\right]dy=0$;

(4) $2(3xy^2+2x^3)\,dx+3(2x^2y+y^2)\,dy=0$;

(5) $\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+1\right)dx+\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}\right)dy=0.$

2. 求下列方程的解:

(1) $2x(ye^{x^2}-1)\,dx+e^{x^2}dy=0$;

(2) $(e^x+3y^2)\,dx+2xy\,dy=0$;

(3) $2xy\,dx+(x^2+1)\,dy=0$;

(4) $y\,dx-x\,dy=(x^2+y^2)\,dx$;

(5) $y\,dx-(x+y^3)\,dy=0$;

(6) $(y-1-xy)\,dx+x\,dy=0$;

(7) $(y-x^2)\,dx-x\,dy=0$;

(8) $(x+2y)\,dx+x\,dy=0$;

(9) $[x\cos(x+y)+\sin(x+y)]\,dx+x\cos(x+y)\,dy=0$;

(10) $(y\cos x-x\sin x)\,dx+(y\sin x+x\cos x)\,dy=0$;

(11) $x(4y\,dx+2x\,dy)+y^3(3y\,dx+5x\,dy)=0.$

3. 试导出方程 $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ 分别具有形为 $\mu(x+y)$ 和 $\mu(xy)$ 的积分因子的充要条件.

4. 设 $f(x,y)$ 及 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 连续,试证方程 $dy-f(x,y)\,dx=0$ 为线性微分方程的充要条件是它有仅依赖于 x 的积分因子.

5. 试证齐次微分方程 $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ 当 $xM+yN\neq 0$ 时有积分因子 $\mu=\frac{1}{xM+yN}$.

6. 设函数 $f(u)$,$g(u)$ 连续、可微且 $f(u)\neq g(u)$,试证方程

$$yf(xy)\,dx+xg(xy)\,dy=0$$

有积分因子 $\mu=[xy(f(xy)-g(xy))]^{-1}$.

7. 假设方程(2.39)中的函数 $M(x,y)$,$N(x,y)$ 满足关系

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=Nf(x)-Mg(y),$$

其中 $f(x)$,$g(y)$ 分别为 x 和 y 的连续函数,试证方程(2.39)有积分因子 $\mu=\exp\left(\int f(x)\,dx+\int g(y)\,dy\right)$.

8. 求出伯努利微分方程的积分因子.

9. 设 $\mu(x,y)$ 是方程(2.39)的积分因子,从而求得可微函数 $U(x,y)$,使得 $dU=\mu(M\,dx+N\,dy)$.试证 $\tilde{\mu}(x,y)$ 也是方程(2.39)的积分因子的充要条件是 $\tilde{\mu}(x,y)=\mu\varphi(U)$,其中 $\varphi(t)$ 是 t 的可微函数.

10. 设$\mu_1(x,y)$,$\mu_2(x,y)$是方程(2.39)的两个积分因子,且$\frac{\mu_1}{\mu_2}\neq$常数,求证$\frac{\mu_1}{\mu_2}=c$ (c为任意常数)是方程(2.39)的通解.

11. 假设第5题中微分方程还是恰当的,试证它的通解可表示为$xM(x,y)+yN(x,y)=c$ (c为任意常数).

§2.4　一阶隐式微分方程与参数表示

一阶隐式微分方程形式为

$$F(x,y,y')=0.$$

如果能从此方程中解出导数y',若其表达式为$y'=f(x,y)$,则可根据$f(x,y)$的具体形式选择§2.1—§2.3所介绍的某一方法进行求解. 但如果很难从方程中解出y'或者解出的$y'=f(x,y)$形式相当复杂,则可以通过引进参数使方程变为导数容易解出的方程类型,这就是本节讨论的主要内容. 我们主要介绍下面四种类型:

$$y=f(x,y'),\quad x=f(y,y'),\quad F(x,y')=0,\quad F(y,y')=0.$$

2.4.1　可以解出y(或x)的方程

(1) 首先讨论形如

$$y=f(x,y') \tag{2.62}$$

的方程,这里假设函数$f(x,y')$有连续的偏导数.

引进参数p,令$y'=p$. 则方程(2.62)变为

$$y=f(x,p). \tag{2.63}$$

将(2.63)两边对x求导数,并将$y'=p$代入,得

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \tag{2.64}$$

(2.64)是关于x,p的一阶微分方程,可按照§2.1—§2.3解之.

若(2.64)的通解为

$$p=\varphi(x,c),$$

将它代入(2.63),得

$$y=f(x,\varphi(x,c)),$$

即为方程(2.62)的通解.

若(2.64)的通解为

$$x=\psi(p,c),$$

则方程(2.62)的通解为参数方程形式:

$$\begin{cases}x=\psi(p,c),\\ y=f(\psi(p,c),p),\end{cases}$$

其中 p 为参数，c 是任意常数.

若(2.64)的通解为

$$\Phi(x,p,c)=0,$$

则方程(2.62)的通解为参数方程形式：

$$\begin{cases}\Phi(x,p,c)=0,\\ y=f(x,p),\end{cases}$$

其中 p 为参数，c 是任意常数.

例 1 解方程 $\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3+2x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=0.$

解 可解出 y，令 $p=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，得

$$y=p^3+2xp. \tag{2.65}$$

两边对 x 求导数，得

$$p=3p^2\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+2x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+2p,$$

即

$$3p^2\mathrm{d}p+2x\mathrm{d}p+p\mathrm{d}x=0.$$

当 $p\neq 0$ 时，上式乘 p，化为

$$3p^3\mathrm{d}p+2px\mathrm{d}p+p^2\mathrm{d}x=0,$$

分组凑积分得

$$\frac{3}{4}p^4+xp^2=c,$$

其中 c 为任意常数. 解出 x，得

$$x=\frac{c-\frac{3}{4}p^4}{p^2}.$$

代入式(2.65)得

$$y=p^3+\frac{2c}{p}-\frac{3}{2}p^3=\frac{2c}{p}-\frac{p^3}{2}.$$

因此，原方程有参数形式的通解

$$\begin{cases}x=\dfrac{c}{p^2}-\dfrac{3p^2}{4},\\ y=\dfrac{2c}{p}-\dfrac{p^3}{2},\end{cases}\quad p\neq 0.$$

此外，当 $p=0$ 时，可得原方程还有解 $y=0$.

(2) 形如

$$x=f(y,y') \tag{2.66}$$

的方程的求解同(2.62)相似. 这里假设 $f(y,y')$ 有连续偏导数.

令 $y'=p$,(2.66)两边对 y 求导数,并代入 p 得

$$\frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}, \tag{2.67}$$

这是关于 y,p 的一阶微分方程,可按照 §2.1—§2.3 的方法求解. 若解为

$$\Phi(y,p,c)=0,$$

则(2.66)的通解为参数方程形式:

$$\begin{cases} x=f(y,p), \\ \Phi(y,p,c)=0. \end{cases}$$

例 2　求例 1 中方程 $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3+2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=0$ 的解.

解　令 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,解出 x 得

$$x=\frac{y-p^3}{2p},\quad p\neq 0. \tag{2.68}$$

两边对 y 求导数,得

$$\frac{1}{p}=\frac{p\left(1-3p^2\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right)-(y-p^3)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}}{2p^2},$$

即

$$p\mathrm{d}y+y\mathrm{d}p+2p^3\mathrm{d}p=0.$$

积分得

$$2yp+p^4=c,$$

即

$$y=\frac{c-p^4}{2p}.$$

代入(2.68)式有

$$x=\frac{\frac{c-p^4}{2p}-p^3}{2p}=\frac{c-3p^4}{4p^2}.$$

故原方程有参数形式的通解

$$\begin{cases} x=\dfrac{c}{4p^2}-\dfrac{3p^2}{4}, \\ y=\dfrac{c}{2p}-\dfrac{p^3}{2}, \end{cases}\quad p\neq 0.$$

此外,原方程还有解 $y=0$. 同例 1 所得结果完全一样(把这里的任意常数 c 换

成 $4c$).

例 3　解方程 $y=\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{x^2}{2}$.

解　令 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,得

$$y=p^2-xp+\frac{x^2}{2},$$

两边对 x 求导数,得

$$p=2p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}-x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}-p+x,$$

化简为

$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}-1\right)(2p-x)=0.$$

从 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}-1=0$ 解得 $p=x+c$(c 为任意常数),代入 $y=p^2-xp+\frac{x^2}{2}$ 得方程的通解

$$y=\frac{x^2}{2}+cx+c^2.$$

又从 $2p-x=0$ 解得 $p=\frac{x}{2}$,代入 $y=p^2-xp+\frac{x^2}{2}$ 得方程的另一解

$$y=\frac{x^2}{4}.$$

此解与方程通解中的任一条积分曲线相切,为**奇解**. 在下一章将给出奇解的确切含义.

2.4.2　不显含 y(或 x)的方程

(3) 讨论形如

$$F(x,y')=0 \tag{2.69}$$

的方程的解法. 令 $y'=p$,方程化为 $F(x,p)=0$,代表 Oxp 平面上的一条曲线. 如果把曲线表示成参数方程形式:

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ p=\psi(t),\end{cases} \tag{2.70}$$

t 为参数. 代入 $y'=p$,得

$$\mathrm{d}y=\psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

两边积分,得

$$y=\int\psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t+c.$$

代入(2.70),则得原方程的参数形式的通解为

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \int \psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t + c, \end{cases}$$

c 为任意常数.

例 4　解方程 $x^3+y'^3-3xy'=0$,其中 $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　令 $y'=p=tx$,代入方程得

$$x=\frac{3t}{1+t^3},$$

即

$$p=\frac{3t^2}{1+t^3}.$$

所以

$$\mathrm{d}y=\frac{9(1-2t^3)t^2}{(1+t^3)^3}\mathrm{d}t.$$

积分之,得

$$y=\int\frac{9(1-2t^3)t^2}{(1+t^3)^3}\mathrm{d}t=\frac{3}{2}\frac{1+4t^3}{(1+t^3)^2}+c,$$

c 为任意常数. 故原方程参数形式的通解为

$$\begin{cases} x=\dfrac{3t}{1+t^3}, \\ y=\dfrac{3}{2}\dfrac{1+4t^3}{(1+t^3)^2}+c. \end{cases}$$

(4) 形如

$$F(y,y')=0 \tag{2.71}$$

的方程,其求解方法与(2.69)的解法相似.

令 $y'=p$,方程化为 $F(y,p)=0$,代表 Oyp 平面上的一条曲线. 如果把曲线表示成参数方程形式:

$$\begin{cases} y=\varphi(t), \\ p=\psi(t), \end{cases}$$

代入 $\mathrm{d}y=p\mathrm{d}x$,得

$$\mathrm{d}x=\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}t,$$

积分得原方程的通解为

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} \mathrm{d}t + c, \\ y = \varphi(t), \end{cases}$$

其中 c 为任意常数.

当 $y'=p=0$ 时,$F(y,0)=0$ 有实根 $y=k$,即 $y=k$ 也是方程的解.

例 5　求解方程 $y^2(1-y')=(2-y')^2$,其中 $y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　令 $2-y'=ty$,与原方程消去 y',有

$$y^2(ty-1)=t^2y^2,$$

即

$$y=\frac{1}{t}+t.$$

代入 $2-y'=ty$ 得

$$y'=1-t^2,$$

这是原微分方程的参数方程形式. 因此

$$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{y'}=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t,$$

两边积分,得原方程参数形式的通解为

$$\begin{cases} x=\frac{1}{t}+c, \\ y=\frac{1}{t}+t, \end{cases}$$

或消去参数 t,得

$$y=x+\frac{1}{x-c}-c,$$

c 为任意常数.

此外,当 $y'=0$ 时原方程变为 $y^2=4$,于是 $y=\pm 2$ 也是方程的解.

排疑解惑

特殊类型一阶方程

习　题　2.4

求解下列方程:

(1) $xy'^3=1+y'$;

(2) $y'^3-x^3(1-y')=0$;

(3) $y=y'^2\mathrm{e}^{y'}$;

(4) $y(1+y'^2)=2a$ (a 为常数);

(5) $x^2+y'^2=1$;

(6) $y^2(y'-1)=(2-y')^2$.

本章学习要点

在这一章里，我们讨论了一阶方程

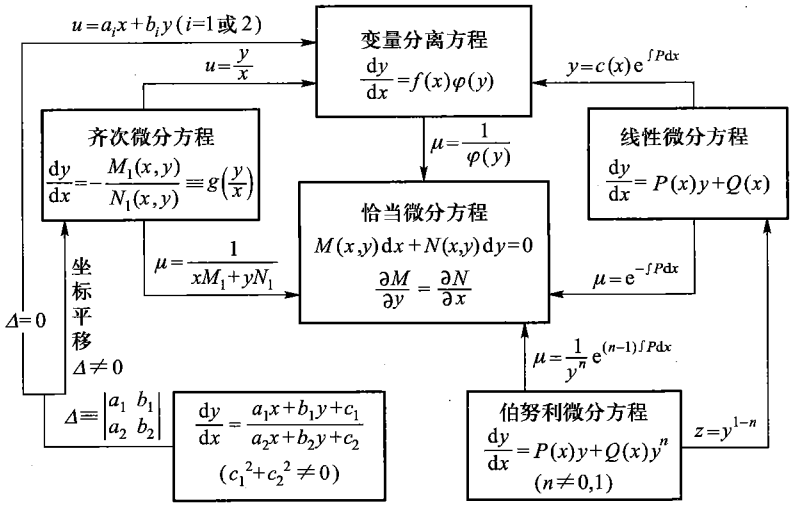
$$F(x,y,y')=0$$

的若干类型的初等解法，归纳起来就是

1. 若方程能就 y' 解出，即方程取形式

$$y'=f(x,y) \quad 或 \quad M(x,y)\,\mathrm{d}x+N(x,y)\,\mathrm{d}y=0$$

时方程的求解问题. 在 §2.1—§2.3 里，我们主要介绍了五种类型的方程（变量分离方程、齐次微分方程、线性微分方程、伯努利微分方程及恰当微分方程）的初等解法. 实际上作为基础的不外是变量分离方程和恰当微分方程，其他类型的方程均可借助变量变换或积分因子化为这两种类型，这可简略地表示为图(2.7).



图(2.7)

2. 若方程不能解出 y'，则把 x 看作是 y 的函数，再看是否能解出 x'，成为方程 $x'=f(x,y)$ 可类似 1 求解.

3. 对于不能用显式表示为

$$y'=f(x,y) \quad 或 \quad x'=f(x,y)$$
$$或 \quad M(x,y)\,\mathrm{d}x+N(x,y)\,\mathrm{d}y=0$$

的方程，可分为两类：

(1) 若方程能就 y（或 x）解出

$$y=f(x,y')\,(或\ x=f(y,y')),$$

则令 $y'=p$（或 $x'=p$），把问题化为求解关于 p 与 x（或 y）之间的一阶方程

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \tag{2.72}$$

$$\left(\text{或}\frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}(y,p)+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right), \tag{2.73}$$

若按 §2.1— §2.3 的办法求得方程(2.72)(或(2.73))的通解为

$$\Phi(x,p,c)=0 \quad (\text{或 } \Phi(y,p,c)=0),$$

则它与 $y=f(x,p)$(或 $x=f(y,p)$)一起构成原方程的通解的参数形式(见 2.4.1).

(2) 若方程不能就 y',x 或 y 解出,对于形如

$$F(x,y')=0 \quad \text{或} \quad F(y,y')=0$$

的方程,可按 2.4.2 介绍的方法处理:引入参数 t,将方程表示为参数形式,再注意到关系式 $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x$,就将问题转化为求解关于 y(或 x)与 t 的一阶方程,且其导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\left(\text{或}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)$已表示为 t 的已知函数,最后的工作就是求积分的问题.

熟悉各种类型方程的解法,正确而又敏捷地判断一个给定的方程属于何种类型,从而按照所介绍的方法进行求解,这自然是最基本的要求. 但仅仅能做到这一点还不够,因为我们所遇到的方程未必都恰好是本章所介绍过的方程类型,因此还要求注意学习解题的技巧,从中总结经验,培养自己的机智和灵活性;还有一点也很重要,就是要善于根据方程的特点,引进适当的变换,将方程化为能求解的新类型,从而求解.

最后,我们要强调指出:能有初等解法的微分方程是很有限的,例如形式上很简单的里卡蒂(Riccati)方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$$

一般就没有初等解法(当然,若我们有办法找到方程的一个特解 $\tilde{y}(x)$,则经变换 $y=z+\tilde{y}$ 后,方程就变为伯努利方程,因而可解). 这一事实被法国数学家刘维尔(Liouville)在 1841 年所证明,这就促使人们寻求别的方法来研究微分方程的问题.

一阶微分方程的求解有众多方法,技巧性很强,想进一步详细了解可参考[15].

总 练 习

1. 求下列方程的解:

(1) $y\sin x+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cos x=1$;

(2) $y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=x^2y\mathrm{d}y$;

(3) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=4\mathrm{e}^{-y}\sin x-1$;

(4) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x-\sqrt{xy}}$;

(5) $(xy\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}+y^2)\,\mathrm{d}x-x^2\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}y=0$;

(6) $(xy+1)y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$;

(7) $(2x+2y-1)\mathrm{d}x+(x+y-2)\mathrm{d}y=0$;

(8) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}$;

(9) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3y+x-2$;

(10) $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2$;

(11) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x-y+1}{x+y^2+3}$;

(12) $\mathrm{e}^{-y}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+1\right)=x\mathrm{e}^x$;

(13) $(x^2+y^2)\mathrm{d}x-2xy\mathrm{d}y=0$;

(14) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x+y+1$;

(15) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}$;

(16) $(x+1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+1=2\mathrm{e}^{-y}$;

(17) $(x-y^2)\mathrm{d}x+y(1+x)\mathrm{d}y=0$;

(18) $4x^2y^2\mathrm{d}x+2(x^3y-1)\mathrm{d}y=0$;

(19) $x\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-2y\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+4x=0$;

(20) $y^2\left[1-\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]=1$;

(21) $(1+\mathrm{e}^{\frac{x}{y}})\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)\mathrm{d}y=0$;

(22) $\dfrac{2x}{y^3}\mathrm{d}x+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}\mathrm{d}y=0$;

(23) $y\mathrm{d}x-(1+x+y^2)\mathrm{d}y=0$;

(24) $[y-x(x^2+y^2)]\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$;

(25) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}-x=0$;

(26) $\left(2xy+x^2y+\dfrac{y^3}{3}\right)\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}y=0$;

(27) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2x+3y+4}{4x+6y+5}$;

(28) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=2x^2y(y^2-x^2)$　(提示:令 $x^2y=u$);

(29) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{y}{x}=\mathrm{e}^{xy}$;

(30) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{4x^3-2xy^3+2x}{3x^2y^2-6y^5+3y^2}$;

(31) $y^2(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)+x(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)=0$　(提示:令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$);

(32) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{1+xy^3}{1+x^3y}=0$　(提示:令 $u=x+y, v=xy$).

2. 求一曲线,使其切线在纵轴上之截距等于切点的横坐标.

3. 摩托艇以 5 m/s 的速度在静水上运动,全速时停止了发动机,过了 20 s 后,艇的速度减至 $v_1=3$ m/s. 确定发动机停止 2 min 后艇的速度. 假定水的阻力与艇的运动速度成正比.

4. 一质量为 m 的质点做直线运动,从速度等于零的时刻起,有一个和时间成正比(比例系数为 k_1)的力作用在它上面. 此外质点又受到介质的阻力,这阻力和速度成正比(比例系数为 k_2). 试求此质点的速度与时间的关系.

5. 证明:如果已知里卡蒂微分方程的一个特解,则可用初等解法求得它的通解. 并求解下列方程:

(1) $y'\mathrm{e}^{-x}+y^2-2y\mathrm{e}^x=1-\mathrm{e}^{2x}$;

(2) $y'+y^2-2y\sin x=\cos x-\sin^2 x$;

(3) $x^2y'=x^2y^2+xy+1$;

(4) $4x^2(y'-y^2)=1$;

(5) $x^2(y'+y^2)=2$;

(6) $x^2y'+(xy-2)^2=0$;

(7) $y'=(x-1)y^2+(1-2x)y+x$.

第三章
一阶微分方程的解的存在定理

在第二章里，我们介绍了能用初等解法求解的一阶微分方程的若干类型，但同时指出，大量的一阶微分方程一般是不能用初等解法求出它的通解的，而实际问题中所需要的往往是要求满足某种初值条件的解（包括数值形式的数值解）. 因此，对初值问题（又称为柯西问题）的研究被提到了重要的地位. 自然要问：初值问题的解是否存在？如果存在是否唯一呢？

容易举出解存在而不唯一的例子. 例如方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\sqrt{y}$$

过点(0,0)的解就是不唯一的. 事实上，易知 $y=0$ 是方程的过点(0,0)的解. 此外，容易验证，$y=x^2$ 或更一般地，函数

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant c,\\ (x-c)^2, & c<x\leqslant 1\end{cases}$$

都是方程的过点(0,0)而定义于 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的解，这里 c 是满足 $0<c<1$ 的任一数.

本章介绍的存在唯一性定理圆满地回答了上面提出的问题，它明确地肯定了方程的解在一定条件下的存在性和唯一性，它是常微分方程理论中最基本的定理，有其重大的理论意义. 另一方面，由于能求得精确解的微分方程为数不多，微分方程的近似解法（包括数值解法）具有十分重要的实际意义，而解的存在和唯一又是进行近似计算的前提. 因为如果解根本不存在，却要去近似地求它，问题本身是没有意义的；如果有解存在而不唯一，由于不知道要确定是哪一个解，而要去近似地确定它，问题也是不明确的. 解的存在唯一性定理保证了所要求的解的存在和唯一，因此它也是近似求解法的前提和理论基础. 此外，我们将看到在定理的证明过程中还具体地提供了求近似解的途径，这就更增添了存在唯一性定理的实用意义.

由于种种条件的限制，实际测量的初始数据往往是不精确的，它只能近似地反映初始状态. 因此我们以它作为初值条件所得到的解是否能用作真正的解呢？这就产生了解对初值的连续依赖性问题，即当初值微小变动时，方程的解的变化是否也是很小呢？不然的话，所求得的解就失去实用的意义，因为它可能与实际情况产生很大的误差. 即使给出的初值问题能满足解的存在唯一性条件及相关性质，但往往很难或不能求得精确的解析解，又能否求出其数值形式的数值解？

本章重点介绍和证明一阶微分方程的解的存在唯一性定理,并叙述解的一些一般性质,如解的延拓、解对初值的连续性和可微性等. 此外,还引进奇解的概念及介绍求奇解的两种方法,并介绍两个最常用且最基础的数值解法.

§3.1　解的存在唯一性定理与逐步逼近法

3.1.1　存在唯一性定理

首先考虑导数已解出的一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y), \tag{3.1}$$

这里 $f(x,y)$ 是在矩形域

$$R: |x-x_0| \leqslant a, |y-y_0| \leqslant b \tag{3.2}$$

上的连续函数.

函数 $f(x,y)$ 称为在 R 上关于 y 满足**利普希茨**(Lipschitz)**条件**,如果存在常数 $L>0$,使得不等式

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \leqslant L|y_1-y_2|$$

对于所有 $(x,y_1),(x,y_2)\in R$ 都成立,L 称为**利普希茨常数**.

定理 1　如果 $f(x,y)$ 在矩形域 R 上连续且关于 y 满足利普希茨条件,则方程(3.1)存在唯一的解 $y=\varphi(x)$,定义于 $|x-x_0|\leqslant h$ 上,连续且满足初值条件

$$\varphi(x_0)=y_0, \tag{3.3}$$

这里 $h=\min\left(a,\dfrac{b}{M}\right)$,$M=\max\limits_{(x,y)\in R}|f(x,y)|$.

我们采用皮卡(Picard)的逐步逼近法来证明这个定理. 为了简单起见,只对 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 进行讨论,对 $x_0-h\leqslant x\leqslant x_0$ 的讨论完全一样.

现在先简单叙述一下运用逐步逼近法证明定理的主要思想. 首先证明求微分方程初值问题的解等价于求积分方程

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

的连续解,再证明积分方程的解的存在唯一性.

任取一个连续函数 $\varphi_0(x)$ 代入上面积分方程右端的 y,就得到函数

$$\varphi_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi_0(x))\,\mathrm{d}x,$$

显然 $\varphi_1(x)$ 也是连续函数. 如果 $\varphi_1(x)=\varphi_0(x)$,那么 $\varphi_0(x)$ 就是积分方程的解. 否则,我们又把 $\varphi_1(x)$ 代入积分方程右端的 y,得到

$$\varphi_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi_1(x))\,\mathrm{d}x.$$

如果 $\varphi_2(x)=\varphi_1(x)$,那么 $\varphi_1(x)$ 就是积分方程的解. 否则,我们继续这个步骤. 一般地,作函数

$$\varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi_{n-1}(x))\,\mathrm{d}x, \tag{3.4}$$

这样就得到连续函数序列

$$\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots.$$

如果 $\varphi_{n+1}(x)=\varphi_n(x)$,那么 $\varphi_n(x)$ 就是积分方程的解. 如果始终不发生这种情况,我们可以证明上面的函数序列有一个极限函数 $\varphi(x)$,即

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x)$$

存在,因而对(3.4)取极限时,就得到

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)&=y_0+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi_{n-1}(x))\,\mathrm{d}x\\&=y_0+\int_{x_0}^{x}\lim_{n\to\infty} f(x,\varphi_{n-1}(x))\,\mathrm{d}x\\&=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

即

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))\,\mathrm{d}x,$$

这就是说,$\varphi(x)$ 是积分方程的解. 这种一步一步地求出方程的解的方法就称为**逐步逼近法**. 由(3.4)确定的函数 $\varphi_n(x)$ 称为初值问题(3.1),(3.3)的**第 n 次近似解**. 在定理的假设条件下,以上的步骤是可以实现的. 下面我们分五个命题来证明定理.

命题 1 设 $y=\varphi(x)$ 是方程(3.1)的定义于 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上,满足初值条件

$$\varphi(x_0)=y_0$$

的解,则 $y=\varphi(x)$ 是积分方程

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}x,\ x_0\leqslant x\leqslant x_0+h \tag{3.5}$$

的定义于 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上的连续解. 反之亦然.

证明 因为 $y=\varphi(x)$ 是方程(3.1)的解,故有

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}=f(x,\varphi(x)),$$

两边从 x_0 到 x 取定积分,得到

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)=\int_{x_0}^{x}f(x,\varphi(x))\mathrm{d}x,\ x_0\leqslant x\leqslant x_0+h.$$

把 $\varphi(x_0)=y_0$ 代入上式,即有

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,\varphi(x))\mathrm{d}x,\ x_0\leqslant x\leqslant x_0+h,$$

因此,$y=\varphi(x)$ 是(3.5)的定义于 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上的连续解.

反之,如果 $y=\varphi(x)$ 是(3.5)的连续解,则有

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,\varphi(x))\mathrm{d}x,\ x_0\leqslant x\leqslant x_0+h. \tag{3.6}$$

对 x 求导数,得到

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}=f(x,\varphi(x)),$$

又把 $x=x_0$ 代入(3.6),得到

$$\varphi(x_0)=y_0.$$

因此,$y=\varphi(x)$ 是方程(3.1)的定义于 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上,且满足初值条件 $\varphi(x_0)=y_0$ 的解. 命题 1 证毕.

现在取 $\varphi_0(x)=y_0$,构造皮卡逐步逼近函数序列如下:

$$\begin{cases}\varphi_0(x)=y_0,\\ \varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))\mathrm{d}\xi,\ x_0\leqslant x\leqslant x_0+h(n=1,2,\cdots).\end{cases} \tag{3.7}$$

命题 2　对于所有的 n,(3.7)中函数 $\varphi_n(x)$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上有定义、连续且满足不等式

$$|\varphi_n(x)-y_0|\leqslant b. \tag{3.8}$$

证明　当 $n=1$ 时,$\varphi_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,y_0)\mathrm{d}\xi$. 显然 $\varphi_1(x)$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上有定义、连续且有

$$\begin{aligned}|\varphi_1(x)-y_0|&=\left|\int_{x_0}^{x}f(\xi,y_0)\mathrm{d}\xi\right|\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(\xi,y_0)|\mathrm{d}\xi\\&\leqslant M(x-x_0)\leqslant Mh\leqslant b,\end{aligned}$$

即命题 2 当 $n=1$ 时成立. 现在我们用数学归纳法证明对于任何正整数 n,命题 2 都成立. 为此,设命题 2 当 $n=k$ 时成立,也即 $\varphi_k(x)$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上有定义、连续且满足不

等式 $|\varphi_k(x)-y_0|\leqslant b$,这时

$$\varphi_{k+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi,\varphi_k(\xi))\,\mathrm{d}\xi.$$

由假设,命题 2 当 $n=k$ 时成立,知道 $\varphi_{k+1}(x)$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上有定义、连续且有

$$|\varphi_{k+1}(x)-y_0|\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(\xi,\varphi_k(\xi))|\,\mathrm{d}\xi\leqslant M(x-x_0)\leqslant Mh\leqslant b,$$

即命题 2 当 $n=k+1$ 时也成立. 由数学归纳法知命题 2 对于所有 n 均成立. 命题 2 证毕.

命题 3 函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上是一致收敛的.

证明 我们考虑级数

$$\varphi_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}[\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)],x_0\leqslant x\leqslant x_0+h,\tag{3.9}$$

它的部分和为

$$\varphi_0(x)+\sum_{k=1}^{n}[\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)]=\varphi_n(x).$$

因此,要证明函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上一致收敛,只需证明级数(3.9)在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上一致收敛. 为此,我们进行如下的估计,由(3.7)有

$$|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)|\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(\xi,\varphi_0(\xi))|\,\mathrm{d}\xi\leqslant M(x-x_0)\tag{3.10}$$

及

$$|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(\xi,\varphi_1(\xi))-f(\xi,\varphi_0(\xi))|\,\mathrm{d}\xi.$$

利用利普希茨条件及(3.10),得到

$$|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|\leqslant L\int_{x_0}^{x}|\varphi_1(\xi)-\varphi_0(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\leqslant L\int_{x_0}^{x}M(\xi-x_0)\,\mathrm{d}\xi=\frac{ML}{2!}(x-x_0)^2.$$

设对于正整数 n,不等式

$$|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)|\leqslant\frac{ML^{n-1}}{n!}(x-x_0)^n$$

成立,则由利普希茨条件,当 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 时,有

$$\begin{aligned}|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)|&\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(\xi,\varphi_n(\xi))-f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))|\,\mathrm{d}\xi\\&\leqslant L\int_{x_0}^{x}|\varphi_n(\xi)-\varphi_{n-1}(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\\&\leqslant\frac{ML^n}{n!}\int_{x_0}^{x}(\xi-x_0)^n\,\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

$$=\frac{ML^n}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

于是,由数学归纳法知,对于所有的正整数 k,有如下的估计:

$$|\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)|\leqslant\frac{ML^{k-1}}{k!}(x-x_0)^k, x_0\leqslant x\leqslant x_0+h. \tag{3.11}$$

从而可知,当 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 时,

$$|\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)|\leqslant\frac{ML^{k-1}}{k!}h^k. \tag{3.12}$$

(3.12)的右端是正项收敛级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}ML^{k-1}\frac{h^k}{k!}$$

的一般项. 由魏尔斯特拉斯(Weierstrass)判别法(简称魏氏判别法),级数(3.9)在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上一致收敛,因而序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 也在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上一致收敛. 命题 3 证毕.

现设

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x),$$

则 $\varphi(x)$ 也在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上连续,且由(3.8)又可知

$$|\varphi(x)-y_0|\leqslant b.$$

命题 4　$\varphi(x)$ 是积分方程(3.5)的定义于 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上的连续解.

证明　由利普希茨条件

$$|f(x,\varphi_n(x))-f(x,\varphi(x))|\leqslant L|\varphi_n(x)-\varphi(x)|$$

以及 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上一致收敛于 $\varphi(x)$,即知序列 $\{f(x,\varphi_n(x))\}$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上一致收敛于 $f(x,\varphi(x))$. 因而,对(3.7)两边取极限,得到

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=y_0+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))\mathrm{d}\xi=y_0+\int_{x_0}^{x}\lim_{n\to\infty}f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))\mathrm{d}\xi,$$

即

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi(\xi))\mathrm{d}\xi.$$

这就是说,$\varphi(x)$ 是积分方程(3.5)的定义于 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上的连续解. 命题 4 证毕.

命题 5　设 $\psi(x)$ 是积分方程(3.5)的定义于 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上的另一个连续解,则 $\varphi(x)=\psi(x)\ (x_0\leqslant x\leqslant x_0+h)$.

证明　我们证明 $\psi(x)$ 也是序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 的一致收敛极限函数. 为此,从

$$\varphi_0(x)=y_0,$$

$$\varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))\mathrm{d}\xi\ (n\geqslant1),$$

$$\psi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi,\psi(\xi))\,\mathrm{d}\xi$$

可以进行如下估计：

$$|\varphi_0(x)-\psi(x)|\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(\xi,\psi(\xi))|\,\mathrm{d}\xi\leqslant M(x-x_0),$$

$$\begin{aligned}|\varphi_1(x)-\psi(x)|&\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(\xi,\varphi_0(\xi))-f(\xi,\psi(\xi))|\,\mathrm{d}\xi\\&\leqslant L\int_{x_0}^{x}|\varphi_0(\xi)-\psi(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\\&\leqslant ML\int_{x_0}^{x}(\xi-x_0)\,\mathrm{d}\xi=\frac{ML}{2!}(x-x_0)^2.\end{aligned}$$

现设 $|\varphi_{n-1}(x)-\psi(x)|\leqslant\frac{ML^{n-1}}{n!}(x-x_0)^n$，则有

$$\begin{aligned}|\varphi_n(x)-\psi(x)|&\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))-f(\xi,\psi(\xi))|\,\mathrm{d}\xi\\&\leqslant L\int_{x_0}^{x}|\varphi_{n-1}(\xi)-\psi(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\\&\leqslant\frac{ML^n}{n!}\int_{x_0}^{x}(\xi-x_0)^n\,\mathrm{d}\xi=\frac{ML^n}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.\end{aligned}$$

故由数学归纳法知，对于所有的正整数 n，有估计式

$$|\varphi_n(x)-\psi(x)|\leqslant\frac{ML^n}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{3.13}$$

因此，在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上有

$$|\varphi_n(x)-\psi(x)|\leqslant\frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1}. \tag{3.14}$$

$\frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1}$ 是收敛级数的一般项，故当 $n\to\infty$ 时，$\frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1}\to 0$. 因而 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上一致收敛于 $\psi(x)$. 根据极限的唯一性，即得

$$\varphi(x)=\psi(x),\ x_0\leqslant x\leqslant x_0+h.$$

命题 5 证毕.

综合命题 1—5，即得到存在唯一性定理的证明.

附注 1 存在唯一性定理中数 h 的几何意义（参看图(3.1)）：这里 $h=\frac{b}{M}$，定理证明方程(3.1)的过点 (x_0,y_0) 的积分曲线 $y=\varphi(x)$ 在 $|x-x_0|\leqslant h$ 上确定. 因为积分曲线

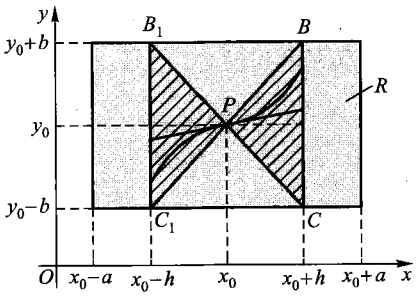
排疑解惑

比较定理和最大解、最小解

的切线斜率介于直线 BC_1 和 B_1C 的斜率 M 与 $-M$ 之间. 所以,当 $|x-x_0|\leqslant h$ 时,积分曲线上的点 $(x,\varphi(x))$ 的纵坐标满足不等式

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|=|\varphi(x)-y_0|\leqslant M|x-x_0|\leqslant b.$$

也就是说,积分曲线弧夹在域 B_1PC_1 及 BPC 的内部,当然也就不超出矩形域 R. 命题 2 中所有函数 $y=\varphi_n(x)$ 都可在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上确定,它的图形都夹在域 BPC 的内部,自然,它的极限图形即积分曲线 $y=\varphi(x)$ 也不超出域 BPC 的范围.



图(3.1)

附注 2　由于利普希茨条件比较难检验,常用 $f(x,y)$ 在 R 上有对 y 的连续偏导数来代替. 事实上,如果在 R 上 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 存在且连续,则 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 R 上有界. 设在 R 上 $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\leqslant L$,这时

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=\left|\frac{\partial f(x,y_2+\theta(y_1-y_2))}{\partial y}\right||y_1-y_2|\leqslant L|y_1-y_2|,$$

这里 $(x,y_1),(x,y_2)\in R,0<\theta<1$. 但反过来满足利普希茨条件的函数 $f(x,y)$ 不一定有偏导数存在. 例如,函数 $f(x,y)=|y|$ 在任何区域都满足利普希茨条件,但它在 $y=0$ 处没有导数.

附注 3　设方程(3.1)是线性的,即方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y+Q(x),\tag{2.23}$$

那么容易知道,当 $P(x),Q(x)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续时,定理 1 的条件就能满足.

不仅如此,这时由任一初值 (x_0,y_0),$x_0\in[\alpha,\beta]$ 所确定的解在整个区间 $[\alpha,\beta]$ 上都有定义.

事实上,对于一般方程(3.1),由初值所确定的解只能定义在 $|x-x_0|\leqslant h$ 上,这是因为在构造逐步逼近函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 时,要求它不越出原来的矩形域 R. 而现在,右端函数对 y 没有任何限制,为了证明我们的结论,譬如取 $M=\max\limits_{x\in[\alpha,\beta]}|P(x)y_0+Q(x)|$,而逐字重复定理的证明过程,即可证由(3.7)所作出的函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在整个区间 $[\alpha,\beta]$ 上都有定义和一致收敛.

现在考虑一阶隐式方程

$$F(x,y,y')=0,\tag{3.15}$$

根据隐函数存在定理,若于 (x_0,y_0,y_0') 的某一邻域内 F 连续且 $F(x_0,y_0,y_0')=0$,而 $\frac{\partial F}{\partial y'}\neq 0$,则必可把 y' 唯一地表示为 x,y 的函数

$$y'=f(x,y),$$

并且$f(x,y)$于(x_0,y_0)的某一邻域内连续,且满足

$$y_0'=f(x_0,y_0).$$

更进一步,如果F关于所有变元存在连续偏导数,则$f(x,y)$对x,y也存在连续偏导数,并且

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial y'},$$

显然它是有界的. 于是依定理1,方程$y'=f(x,y)$,满足初值条件$y(x_0)=y_0$的解存在且唯一,即方程(3.15)的过点(x_0,y_0)且切线斜率为y_0'的积分曲线存在且唯一①. 这样便得到下面的定理.

定理2 如果在点(x_0,y_0,y_0')的某一邻域中,

1° $F(x,y,y')$对所有变元(x,y,y')连续,且存在连续偏导数;

2° $F(x_0,y_0,y_0')=0$;

3° $\dfrac{\partial F(x_0,y_0,y_0')}{\partial y'}\neq 0$,

则方程(3.15)存在唯一解

$$y=y(x),\ |x-x_0|\leqslant h\ (h\text{ 为足够小的正数})$$

满足初值条件

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_0'.$$

3.1.2 近似计算和误差估计

存在唯一性定理不仅肯定了解的存在唯一性,并且在证明中所采用的逐步逼近法在实用上也是求方程近似解的一种方法. 在估计式(3.14)中令$\psi(x)=\varphi(x)$,我们就得到第n次近似解$\varphi_n(x)$和真正解$\varphi(x)$在$|x-x_0|\leqslant h$内的误差估计式

$$|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\leqslant\frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1}. \tag{3.16}$$

这样,我们在进行近似计算时,可以根据误差的要求,选取适当的逐步逼近函数$\varphi_n(x)$.

例1 方程$\dfrac{dy}{dx}=x^2+y^2$定义在矩形域R:$-1\leqslant x\leqslant 1,-1\leqslant y\leqslant 1$上,试利用存在唯一性定理确定经过点(0,0)的解的存在区间,并求在此区间上与真正解的误差不超过0.05的近似解的表达式.

解 这里$M=\max\limits_{(x,y)\in R}|f(x,y)|=2$,$h$是$a=1$及$\dfrac{b}{M}=\dfrac{1}{2}$两数中的最小者,故$h=\dfrac{1}{2}$. 在$R$上函数$f(x,y)=x^2+y^2$的利普希茨常数可取为$L=2$,因为

---

① 这里关于解的存在唯一性是这样理解的:对任意给定的一组值(x_0,y_0,y_0'),$F(x_0,y_0,y_0')=0$,方程(3.15)的沿已给方向y_0'通过点(x_0,y_0)的积分曲线有且只有一条.

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |2y| \leqslant 2 = L.$$

根据(3.16),有

$$|\varphi_n(x)-\varphi(x)| \leqslant \frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1} = \frac{M}{L}\frac{1}{(n+1)!}(Lh)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} < 0.05,$$

因而可取 $n=3$. 事实上,$\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}<\frac{1}{20}=0.05$. 我们可以作出如下近似表达式:

$$\varphi_0(x)=0,$$

$$\varphi_1(x)=\int_0^x[\xi^2+\varphi_0^2(\xi)]\mathrm{d}\xi=\frac{x^3}{3},$$

$$\varphi_2(x)=\int_0^x[\xi^2+\varphi_1^2(\xi)]\mathrm{d}\xi=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63},$$

$$\begin{aligned}\varphi_3(x)&=\int_0^x[\xi^2+\varphi_2^2(\xi)]\mathrm{d}\xi\\&=\int_0^x\left(\xi^2+\frac{\xi^6}{9}+\frac{2\xi^{10}}{189}+\frac{\xi^{14}}{3\ 969}\right)\mathrm{d}\xi\\&=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}+\frac{2x^{11}}{2\ 079}+\frac{x^{15}}{59\ 535},\end{aligned}$$

$\varphi_3(x)$就是所求的近似解. 在$-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$上,这个解与真正解的误差不会超过 0.05.

习　题　3.1

1. 求方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x+y^2$通过点(0,0)的第三次近似解.

2. 求方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x-y^2$通过点(1,0)的第二次近似解.

3. 求初值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2-y^2,\ R:\ |x+1|\leqslant 1,\ |y|\leqslant 1,\\ y(-1)=0\end{cases}$$

的解的存在区间,并求第二次近似解,给出在解的存在区间的误差估计.

*4. 讨论方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$在怎样的区域中满足解的存在唯一性定理的条件,并求通过点(0,0)的一切解.

*5. 如果函数$f(x,y)$于带域$\alpha\leqslant x\leqslant\beta$上连续且关于$y$满足利普希茨条件,则方程(3.1)满足条件$y(x_0)=y_0$的解于整个区间$[\alpha,\beta]$上存在且唯一. 试证明之.(提示:用逐步逼近法,取

$M=\max\limits_{x\in[\alpha,\beta]}|f(x,y_0)|$.)

6. 证明格朗沃尔(Gronwall)不等式:

设 K 为非负常数, $f(t)$ 和 $g(t)$ 为在区间 $[\alpha,\beta]$ 上的连续非负函数,且满足不等式

$$f(t)\leqslant K+\int_\alpha^t f(s)g(s)\,\mathrm{d}s,\alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

则有

$$f(t)\leqslant K\exp\left(\int_\alpha^t g(s)\,\mathrm{d}s\right),\alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

并由此证明 § 3.1 命题 5.

7. 假设函数 $f(x,y)$ 于 (x_0,y_0) 的邻域内是 y 的不增函数,试证方程(3.1)满足条件 $y(x_0)=y_0$ 的解于 $x\geqslant x_0$ 一侧最多只有一个.

8. 设 $f(x)$ 定义于 $(-\infty,+\infty)$ 上,满足条件

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant N|x_1-x_2|,$$

其中 $N<1$,证明方程 $x=f(x)$ 存在唯一的一个解.

(提示:任取 x_0,作逐步逼近点列 $x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=0,1,2,\cdots)$,然后证明 x_n 收敛于方程的唯一解.)

9. 给定积分方程

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi,\qquad(*)$$

其中 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的已知连续函数, $K(x,\xi)$ 是 $a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant\xi\leqslant b$ 上的已知连续函数. 证明当 $|\lambda|$ 足够小时(λ 是常数), $(*)$ 在 $[a,b]$ 上存在唯一的连续解.

(提示:作逐步逼近函数序列 $\varphi_0(x)=f(x)$, $\varphi_{n+1}(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ $(n=0,1,2,\cdots)$.)

§ 3.2　解的延拓和解对初值的连续性与可微性

3.2.1　解的延拓

§ 3.1 中解的存在唯一性定理是局部的,它只肯定了解至少在 $|x-x_0|\leqslant h$, $h=\min\left(a,\dfrac{b}{M}\right)$ 上存在. 可能出现这样的情况,即随着 $f(x,y)$ 定义区域的增大,我们能肯定的解的存在区间反而缩小. 例如, § 3.1 中的例 1,当定义区域为 $R:-1\leqslant x\leqslant 1,-1\leqslant y\leqslant 1$ 时, $h=\dfrac{1}{2}$;当定义区域为 $R:-2\leqslant x\leqslant 2,-2\leqslant y\leqslant 2$ 时, $M=8$, $h=\min\left(2,\dfrac{2}{8}\right)=\dfrac{1}{4}$. 这种局部性使我们感到非常不满意,而且实践中也要求解的存在区间能尽量扩大,解的延拓的概念就自然产生了. 下面讨论解的延拓的概念,通过它我们可以将 § 3.1 中存在唯一性定理中的局部结果变为适用于较大的范围.

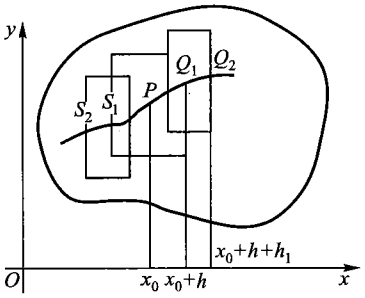
假设方程(3.1)右端函数 $f(x,y)$ 在某一区域 G 内连续,且关于 y 满足**局部的利普希茨条件**,即对于区域 G 内的每一点,有以其为中心的完全含于 G 内的闭矩形 R 存在,在 R 上 $f(x,y)$ 关于 y 满足利普希茨条件(对于不同的点,域 R 的大小和常数 L 可能

不同).

设方程(3.1)的解 $y=\varphi(x)$ 已定义在 $|x-x_0|\leqslant h$ 上,现在取 $x_1=x_0+h$,然后以 (x_1,y_1) 为中心,(这里 (x_1,y_1) 即图(3.2)中的 Q_1 点,$y_1=\varphi(x_0+h)$)作一小矩形,使它连同其边界都含在区域 G 的内部. 再运用 §3.1 中的存在唯一性定理,知道存在 $h_1>0$,使得在 $|x-x_1|\leqslant h_1$ 上,方程(3.1)有过 (x_1,y_1) 的解 $y=\psi(x)$,且在 $x=x_1$ 处有 $\psi(x_1)=\varphi(x_1)$. 由唯一性,显然在解 $y=\psi(x)$ 和解 $y=\varphi(x)$ 都有定义的区间 $[x_1-h_1,x_1]$ 上,$\psi(x)=\varphi(x)$. 但是在 $x_1\leqslant x\leqslant x_1+h_1$ 上解 $y=\psi(x)$ 仍有定义,我们把它看成是原来定义在 $|x-x_0|\leqslant h$ 上的解 $y=\varphi(x)$ 向右方的**延拓**,这样,我们就在区间 $[x_0-h,x_0+h+h_1]$ 上确定方程的一个解

$$y=\begin{cases}\varphi(x), & x_0-h\leqslant x\leqslant x_0+h,\\ \psi(x), & x_0+h<x\leqslant x_0+h+h_1,\end{cases}$$

即将解延拓到较大的区间 $[x_0-h,x_0+h+h_1]$ 上. 再令 $x_2=x_1+h_1$,$y_2=\psi(x_1+h_1)$,如果 $(x_2,y_2)\in G$,我们又可以取 (x_2,y_2) 为中心,作一小矩形,使它连同其边界都含在区域 G 内. 仿前,又可以将解延拓到更大的区间 $[x_0-h,x_2+h_2]=[x_0-h,x_0+h+h_1+h_2]$ 上,其中 h_2 是某一个正常数. 对于 x 值减小的一边可以同样讨论,使解向左方延拓. 用几何的语言来说,上述解的延拓,就是在原来的积分曲线 $y=\varphi(x)$ 左、右两端各接上一个积分曲线段(参看图(3.2)). 上述解的延拓的办法还可继续进行,最后我们将得到一个解 $y=\tilde{\varphi}(x)$,它已经再也不能向左、右方继续延拓了. 这样的解称为方程(3.1)的**饱和解**. 任一饱和解 $y=\tilde{\varphi}(x)$ 的最大存在区间必定是一个开区间 (α,β). 因为如果这个区间的右端是闭的,那么 β 便是有限数,且点 $(\beta,\tilde{\varphi}(\beta))\in G$. 这样一来,解 $y=\tilde{\varphi}(x)$ 就还能继续向右方延拓,从而它是非饱和的. 对左端点 α 可同样讨论. 我们要问,究竟解 $y=\varphi(x)$ 向两边延拓的最终情况如何呢? 这一问题可以由下面的解的延拓定理来回答.



图(3.2)

现在我们不加证明地引进下面的定理.

定理 3(解的延拓定理)　如果方程(3.1)右端的函数 $f(x,y)$ 在有界区域 G 中连续,且在 G 内关于 y 满足局部的利普希茨条件,那么方程(3.1)的通过 G 内任何一点 (x_0,y_0) 的解 $y=\varphi(x)$ 可以延拓,直到点 $(x,\varphi(x))$ 任意接近区域 G 的边界. 以向 x 增大的一方的延拓来说,如果 $y=\varphi(x)$ 只能延拓到区间 $[x_0,d)$ 上,则当 $x\to d$ 时,$(x,\varphi(x))$ 趋于区域 G 的边界.

推论　如果 G 是无界区域,在上面解的延拓定理的条件下,方程(3.1)的通过点 (x_0,y_0) 的解 $y=\varphi(x)$ 可以延拓,以向 x 增大的一方的延拓来说,有下面两种情况:

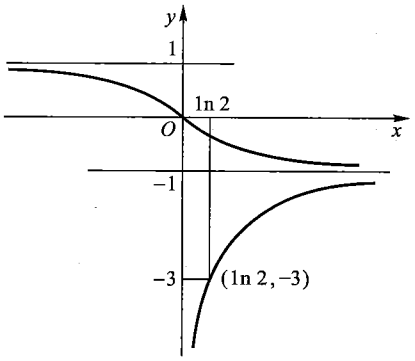
(1) 解 $y=\varphi(x)$ 可以延拓到区间 $[x_0,+\infty)$;

(2) 解 $y=\varphi(x)$ 只可以延拓到区间 $[x_0,d)$,其中 d 为有限数,则当 $x\to d$ 时,或者 $y=\varphi(x)$ 无界,或者点 $(x,\varphi(x))$ 趋于区域 G 的边界.

例 1　讨论方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2-1}{2}$ 的分别通过点 $(0,0)$,$(\ln 2,-3)$ 的解的存在区间.

解　此方程右端函数确定在整个 Oxy 平面上且满足解的存在唯一性定理及解的

延拓定理的条件. 容易确定此方程的通解为 $y=\frac{1+ce^x}{1-ce^x}$. 故通过点(0,0)的解为 $y=\frac{1-e^x}{1+e^x}$,这个解的存在区间为$(-\infty,+\infty)$. 通过点(ln 2,-3)的解为 $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$,这个解的存在区间为$(0,+\infty)$(参看图(3.3)). 注意,通过点(ln 2,-3)的解 $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$向右方可以延拓到$+\infty$,但对于 x 减少的一方来说,向左方只能延拓到 0,因为当$x\to 0^+$时,$y\to-\infty$. 这相当于解的延拓定理推论中(2)的第一种情况.



图(3.3)

3.2.2 解对初值的连续性与可微性

在§3.1 存在唯一性定理的证明中,我们把初值(x_0,y_0)看作固定的. 显然,假如(x_0,y_0)变动,则相应的初值问题的解也将随之变动,也就是说,初值问题的解不单依赖于自变量 x,同时也依赖于初值(x_0,y_0). 因此,在考虑初值变动时,解可以看作三个变元的函数而记为

$$y=\varphi(x,x_0,y_0),$$

它满足 $y_0=\varphi(x_0,x_0,y_0)$.

下面我们介绍解关于初值的连续性和可微性定理,证明见附录 B2.

定理 4(解对初值的连续性定理) 若函数$f(x,y)$在区域 G 内连续,且关于 y 满足局部利普希茨条件,则方程(3.1)的解 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$作为 x,x_0,y_0的函数在它的存在范围内是连续的.

定理 5(解对初值的可微性定理) 若函数$f(x,y)$以及$\frac{\partial f}{\partial y}$都在区域 G 内连续,则方程(3.1)的解 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$作为 x,x_0,y_0的函数在它的存在范围内是连续可微的.其解对初值 x_0,y_0的微分公式为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}=-f(x_0,y_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}\mathrm{d}x\right), \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}=\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}\mathrm{d}x\right). \tag{3.18}$$

习 题 3.2

1. 假设函数 $P(x)$和 $Q(x)$于区间$[\alpha,\beta]$上连续,$y=\varphi(x,x_0,y_0)$是方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y+Q(x)$的解,

$y_0=\varphi(x_0,x_0,y_0)$，试求$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}$，$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}$及$\frac{\partial\varphi}{\partial x}$.

2. 给定方程$\frac{dy}{dx}=\sin\frac{y}{x}$，试求$\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}$，$\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}$在$x_0=1,y_0=0$时的表达式.

3. 假设函数$f(x,y)$及$\frac{\partial f}{\partial y}$都在区域$G$内连续. 又$y=\varphi(x,x_0,y_0)$是方程(3.1)满足初值条件$\varphi(x_0,x_0,y_0)=y_0$的解，试证$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}$存在且连续，并写出其表达式.

4. 设$y=\varphi(x,x_0,y_0,\lambda)$是初值问题

$$\frac{dy}{dx}=\sin(\lambda xy),\ \varphi(x_0,x_0,y_0,\lambda)=y_0$$

的饱和解，这时λ是参数，求$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}$，$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}$在$(x,0,0,1)$处的表达式.

*§3.3　奇　　解

3.3.1　包络和奇解

对某些微分方程，存在一条特殊的积分曲线，它并不属于此方程的积分曲线族. 但是，在这条特殊的积分曲线上的每一点处，都有积分曲线族中的一条曲线和它在此点相切. 在几何学上，这条特殊的积分曲线称为上述积分曲线族的**包络**. 在微分方程里，这条特殊的积分曲线所对应的解称为方程的**奇解**.

我们现在给出曲线族的包络的定义，并介绍它的求法.

设给定单参数曲线族

$$\Phi(x,y,c)=0, \tag{3.19}$$

其中c是参数，$\Phi(x,y,c)$是x,y,c的连续可微函数. 曲线族(3.19)的**包络**是指这样的曲线，它本身并不包含在曲线族(3.19)中，但过此曲线的每一点，有曲线族(3.19)中的一条曲线和它在这点相切.

例如，单参数曲线族

$$(x-c)^2+y^2=R^2$$

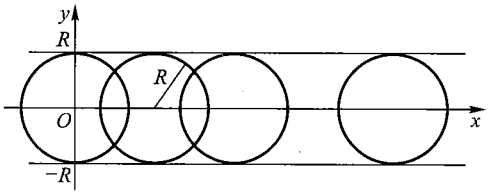
(这里R是常数，c是参数)表示圆心为$(c,0)$而半径等于R的一族圆. 此曲线族显然有包络

$$y=R \quad 和 \quad y=-R$$

(参看图(3.4)).

但是，一般的曲线族并不一定有包络，例如同心圆族、平行直线族都是没有包络的.

由微分几何学可知，曲线族(3.19)的包络包含在由方程组



图(3.4)

$$\begin{cases}\Phi(x,y,c)=0,\\ \Phi_c'(x,y,c)=0\end{cases} \tag{3.20}$$

消去 c 而得到的曲线之中. 此曲线称为(3.19)的 c-**判别曲线**. 必须注意,在 c-判别曲线中有时除去包络外,还有其他曲线. c-判别曲线中究竟哪一条是包络尚需实际检验.

例 1 求直线族

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0 \tag{3.21}$$

的包络,这里 α 是参数,p 是常数.

解 将(3.21)对 α 求导数,得到

$$-x\sin\alpha+y\cos\alpha=0. \tag{3.22}$$

应用实例
曲线轨迹

为了从(3.21),(3.22)中消去 α,将(3.21)移项,然后平方,有

$$x^2\cos^2\alpha+y^2\sin^2\alpha+2xy\cos\alpha\sin\alpha=p^2. \tag{3.23}$$

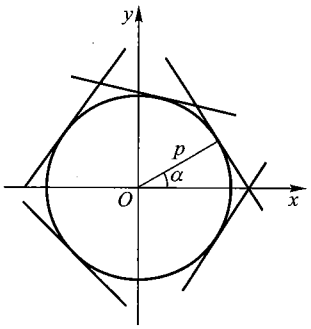
将(3.22)平方,又得

$$x^2\sin^2\alpha+y^2\cos^2\alpha-2xy\cos\alpha\sin\alpha=0. \tag{3.24}$$

将(3.23)和(3.24)相加,得到

$$x^2+y^2=p^2, \tag{3.25}$$

容易检验,(3.25)是直线族(3.21)的包络(参看图(3.5)).



图(3.5)

例 2 求曲线族

$$(y-c)^2-\frac{2}{3}(x-c)^3=0 \tag{3.26}$$

的包络.

解 将(3.26)对 c 求导数,得到

$$-2(y-c)+\frac{2}{3}\cdot 3(x-c)^2=0,$$

即

$$y-c-(x-c)^2=0. \tag{3.27}$$

为了从(3.26)及(3.27)消去 c,将(3.27)代入(3.26),得

$$(x-c)^4-\frac{2}{3}(x-c)^3=0,$$

即

$$(x-c)^3\left(x-c-\frac{2}{3}\right)=0.$$

从 $x-c=0$ 得到

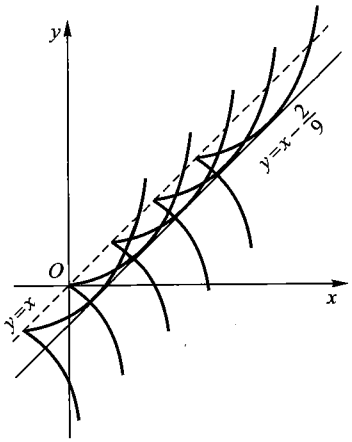
$$y=x; \tag{3.28}$$

从 $x-c-\frac{2}{3}=0$ 得到

$$y=x-\frac{2}{9}. \tag{3.29}$$

因此，c-判别曲线包括两条曲线(3.28)和(3.29)，容易检验直线 $y=x$ 不是包络，而直线 $y=x-\frac{2}{9}$ 是包络(参看图(3.6))．

我们现在引进奇解的概念．微分方程的某一个解称为奇解，如果在这个解的每一点上至少还有方程的另外一个解存在，也就是说奇解是这样的一个解，在它上面的每一点唯一性都不成立．或者说，奇解对应的曲线上每一点至少有方程的两条积分曲线通过．



图(3.6)

从奇解的定义容易知道一阶微分方程的通解的包络(如果它存在的话)一定是奇解；反之，微分方程的奇解(若存在的话)也是微分方程的通解的包络．因而，为了求微分方程的奇解，可以先求出它的通解，然后求通解的包络．

这里介绍另外一种求奇解的方法．

由存在唯一性定理 2 知道，如果 $F(x,y,y')$ 关于 x,y,y' 连续可微，则只要 $\frac{\partial F}{\partial y'}\neq 0$ 就能保证解的唯一性．因此，奇解(存在的话)必须同时满足方程

$$F(x,y,y')=0,\quad \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}=0.$$

于是，我们有下面结论：

方程

$$F\left(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=0 \tag{3.30}$$

的奇解包含在由方程组

$$\begin{cases}F(x,y,p)=0,\\ F'_p(x,y,p)=0\end{cases} \tag{3.31}$$

消去 p 而得到的曲线中，这里 $F(x,y,p)$ 是 x,y,p 的连续可微函数. 此曲线称为方程(3.30)的 p-**判别曲线**. p-判别曲线是否是方程的奇解，尚需进一步检验.

例 3 求方程 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2-1=0$ 的奇解.

解 从

$$\begin{cases} p^2+y^2-1=0, \\ 2p=0 \end{cases}$$

消去 p 得到 p-判别曲线

$$y=\pm 1.$$

容易验证，这两条直线都是方程的奇解. 因为容易求得原方程的通解为

$$y=\sin(x+c),$$

而 $y=\pm 1$ 是微分方程的解，且正好是通解的包络.

例 4 求方程 $y=2x\frac{dy}{dx}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ 的奇解.

解 从

$$\begin{cases} y=2xp-p^2, \\ 2x-2p=0 \end{cases}$$

消去 p 得到 p-判别曲线

$$y=x^2.$$

但 $y=x^2$ 不是方程的解，故此方程没有奇解.

应用实例
圆筒壁传热

应该强调指出，上面介绍的两种方法，只是提供求奇解的途径，所得 c-判别曲线或 p-判别曲线是不是奇解，必须进行检验.

3.3.2 克莱罗微分方程

形如

$$y=xp+f(p) \tag{3.32}$$

的方程，称为**克莱罗(Clairaut)微分方程**，这里 $p=\frac{dy}{dx}$，$f(p)$ 是 p 的连续可微函数.

这是 2.4.1 节已讨论过的方程类型，由于这类方程有一些特殊的性质，我们在此再作进一步的讨论.

将(3.32)两边对 x 求导数，并以 $\frac{dy}{dx}=p$ 代入，即得

$$p=x\frac{dp}{dx}+p+f'(p)\frac{dp}{dx},$$

即

$$\frac{dp}{dx}(x+f'(p))=0.$$

如果$\frac{dp}{dx}=0$,则得到

$$p=c.$$

将它代入(3.32),得到

$$y=cx+f(c), \tag{3.33}$$

这里 c 是任意常数,这就是(3.32)的通解.

如果 $x+f'(p)=0$,将它和(3.32)合起来,即

$$\begin{cases} x+f'(p)=0, \\ y=xp+f(p), \end{cases} \tag{3.34}$$

消去 p 也得到方程的一个解. 注意,求得此解的过程正好与从通解(3.33)中求包络的方法一样. 可以验证,此解的确是通解的包络. 由此,我们知道,克莱罗微分方程的通解是一直线族(在原方程中以 c 代 p 即得),此直线族的包络就是方程的奇解.

例 5　求解方程 $y=xp+\frac{1}{p}$.

解　这是克莱罗微分方程,因而它的通解就是

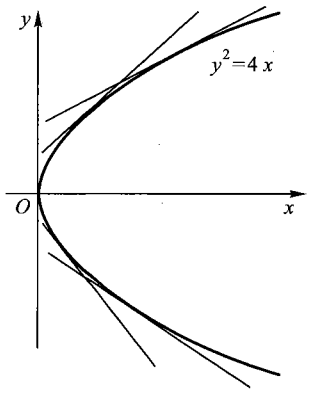
$$y=cx+\frac{1}{c}.$$

从

$$\begin{cases} x-\frac{1}{p^2}=0, \\ y=px+\frac{1}{p} \end{cases}$$

中消去 p,得到奇解

$$y^2=4x.$$



图(3.7)

此方程的通解是直线族,而奇解是通解的包络(参看图(3.7)).

习　题　3.3

1. 解下列方程,并求奇解(如果存在的话):

(1) $y=2x\frac{dy}{dx}+x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4$;

(2) $x=y-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$;

(3) $y=x\frac{dy}{dx}+\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$,并画出积分曲线图;

(4) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+x\frac{dy}{dx}-y=0$,并画出积分曲线图;

(5) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2x\frac{dy}{dx}-y=0$;

(6) $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-1=0$;

(7) $y=x\left(1+\frac{dy}{dx}\right)+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$;

(8) $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-(x-a)^2=0$ (a 为常数);

(9) $y=2x+\frac{dy}{dx}-\frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$;

(10) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(x+1)\frac{dy}{dx}-y=0$.

2. 求下列曲线族的包络,并绘出图形:

(1) $y=cx+c^2$;　　(2) $c^2y+cx^2-1=0$;

(3) $(x-c)^2+(y-c)^2=4$;　　(4) $(x-c)^2+y^2=4c$.

3. 求一曲线,让它上面的每一点的切线截割坐标轴且使两截距之和等于常数 a.

4. 试证:就克莱罗微分方程来说,p-判别曲线和方程通解的 c-判别曲线同样是方程通解的包络,从而为方程的奇解.

*§ 3.4 数 值 解

在实用上有重大意义的很多微分方程,即使它们能满足上述的甚至更广泛的解存在唯一性条件,但它们的解常常不能表达成初等函数的形式. 对于这类微分方程的解的讨论,除了我们将在第六章中介绍的稳定性、定性方法之外,最常用的方法就是数值积分,也就是对微分方程求数值解,这方面已形成了一门独立的学科.

这里仅简单介绍最常用且最基础的两种数值解法,要深入学习可以参考有关书籍.

3.4.1 欧拉方法

求微分方程的初值问题

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0 \tag{3.35}$$

的解 $y=y(x)$,可以从初值条件 $y(x_0)=y_0$ 出发,按照一定的步长 h,依某种方法逐步计算微分方程解 $y(x)$ 的近似值 $y_n\approx y(x_n)$,这里 $x_n=x_0+n\cdot h$. 这样求出的解称为**数值解**. 由于数字计算机的发展,我们可以通过数值解及其相应的图形软件方便简捷地了解微分方程的解随时间及参数变化时的形状,而不必直接求出解来,数值解方法成为分析微分方程的有力工具.

欧拉曾简单地用差分代替微分，方程(3.35)可化为

$$y_{n+1}=y_n+h\cdot f(x_n,y_n),\quad x_n=x_0+n\cdot h,\tag{3.36}$$

称为**欧拉(Euler)公式**. 即在 Oxy 平面方程的解曲线 $y=y(x)$ 上，取过点 (x_n,y_n) 的切线(斜率为 $f(x_n,y_n)$)，当 $x=x_{n+1}$ 时，在切线上截取的 $y=y_{n+1}$ 作为解的近似值.

欧拉公式相当于将解 $y(x_{n+1})=y(x_n+h)$ 用泰勒级数展开，只取一次项，其局部截断误差为 h^2 的常数倍：

$$\begin{aligned}y(x_{n+1})&=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2!}y''(x_n)+\cdots\\&=y_n+hf(x_n,y_n)+O(h^2)=y_{n+1}+O(h^2).\end{aligned}$$

因此，欧拉公式的局部截断误差可写为

$$y(x_{n+1})-y_{n+1}=O(h^2).$$

用一种方法，其局部截断误差为步长 h 的 $O(h^{p+1})$ 时，称此方法有 p **阶精度**. 因此，欧拉方法有 1 阶精度.

如果先用欧拉公式进行预测，再用定积分的梯形公式进行校正，则可得精度为 2 阶的**改正的欧拉公式**：

$$\bar{y}_{n+1}=y_n+h\cdot f(x_n,y_n),\ y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},\bar{y}_{n+1})),\tag{3.37}$$

此方法称为**改进的欧拉方法**.

3.4.2　龙格-库塔方法

可以用间接的泰勒级数展开式求数值解，由中值定理，

$$y_{n+1}=y_n+h\cdot f(x_n+\theta h,y(x_n+\theta h))=y_n+h\cdot k^*(x_n,y_n,h),\tag{3.38}$$

这里 $k^*(x_n,y_n,h)=f(x_n+\theta h,y(x_n+\theta h))$ 称为区间 $[x_n,x_{n+1}]$ 的平均斜率，当 $h=0$ 时，$k^*(x,y,0)=f(x,y)$. 可以通过在区间上取若干点的斜率的线性组合来确定 $k^*(x_n,y_n,h)$：

$$y_{n+1}=y_n+h\sum_{i=1}^{r}\lambda_i k_i,\tag{3.39}$$

其中 λ_i 为加权因子，k_i 为第 i 段斜率，共有 r 段. 第 1 段取 $k_1=f_n=f(x_n,y_n)$，然后逐步递推：

$$k_j=f\left(x_n+d_jh,y_n+h\sum_{s=1}^{j-1}\beta_{js}k_s\right),\ j=2,3,\cdots,r,$$

其中常数 d_j,β_{js} 待定. 上两式称为 r **阶(段)龙格-库塔(Runge-Kutta)公式**.

选定 λ_i,d_j,β_{js} 使 r 阶龙格-库塔公式有尽可能高的 $p(r)$ 阶精度. 考虑 $r=2$ 情形，可

分析得龙格-库塔公式最大阶数为 $p(2)=2$，且 2 阶龙格-库塔公式为

$$y_{n+1}=y_n+hk_2,\ k_1=f(x_n,y_n),\ k_2=f\left(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}k_1\right). \tag{3.40}$$

对 $r=3$ 而言，龙格-库塔公式有 8 个系数应满足 6 个等式，有两个自由参数，其最大阶数为 $p(3)=3$，即有 3 阶精度.

可以证明，当 $r\leqslant 4$ 时，$p(r)=r$；而 $r=5,6,7$ 时，$p(r)=r-1$；$r=8,9$时，$p(r)=r-2$. 由于 4 阶以上龙格-库塔公式的函数值 $f(x,y)$ 的计算工作量大大增加，而精度提高较慢，因此最为常用的是具有 4 阶精度的 4 阶龙格-库塔公式

$$\begin{cases} y_{i+1}=y_i+\dfrac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4), \\ k_1=f(x_i,y_i), \\ k_2=f\left(x_i+\dfrac{h}{2},y_i+\dfrac{h}{2}k_1\right), \\ k_3=f\left(x_i+\dfrac{h}{2},y_i+\dfrac{h}{2}k_2\right), \\ k_4=f(x_i+h,y_i+hk_3). \end{cases} \tag{3.41}$$

对龙格-库塔公式(3.39)，必须保证当 $h\to 0$ 时平均斜率趋近真正斜率，就是要求

$$k^*(x_n,y_n,0)=\lim_{h\to 0}\frac{y_{n+1}-y_n}{h}=y'(x_n)=f(x_n,y_n)$$

成立，这个必要条件称为**相容性条件**，可以用局部截断误差的阶数表示其相容的程度.

另一方面，数值解的计算必须保证当 $h\to 0$ 时收敛于精确解，称为**收敛性问题**，即

$$\lim_{h\to 0,x_n\to x} y_n=y(x)$$

收敛性可以用**整体误差** $e_n=|y(x_n)-y_n|$ 表示，它包括从初值条件 $y(x_0)=y_0$ 开始由 x_0 到 x_n 每步产生的局部截断误差与舍入误差积累的总和. 对某一计算方法，如存在正数 M，其整体误差 $e_n\leqslant Mh^p$，则称该方法为 p **阶收敛**的.

虽然相容性表示的是计算公式以方程为极限，收敛性表示的是解的计算公式以方程的解为极限，两者概念不同，但只要微分方程满足一定条件，则它们是等价的. 具体地说，当略而不计舍入误差时，如平均斜率函数 $k^*(x,y,h)$ 满足关于 y 的利普希茨条件，则 p 阶相容的方法一定是 p 阶收敛的，即有估计式 $e_n\leqslant Mh^p$.

舍入误差由计算机字长、函数计算精度及定点或浮点运算等多种因素产生，分析较困难，一般当作随机变量处理. 如同时考虑截断误差和舍入误差，则整体误差将变为 $e_n\leqslant Mh^p+\dfrac{\varepsilon}{h}$，这里 ε 为每一步舍入误差的上界. 这表示缩小步长 h 会减少截断误差，但因步数增加又会加大舍入误差. 计算时必须选择适合的步长，在截断误差的积累和舍入误差的积累之间取得平衡.

例 1 用欧拉方法、改进欧拉方法、2 阶龙格-库塔方法、4 阶龙格-库塔方法计算

下列初值问题,并与精确解对比,步长 $h=0.1$,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y(1-y^2),\quad y(0)=2. \tag{3.42}$$

解　易得方程(3.42)的精确解为

$$y(x)=\sqrt{\frac{4\mathrm{e}^{2x}}{4\mathrm{e}^{2x}-3}}. \tag{3.43}$$

根据公式(3.43),(3.36),(3.37),(3.40),(3.41),计算结果如下表:

	精确解	欧拉方法		改进的欧拉方法		2阶龙格-库塔方法		4阶龙格-库塔方法	
x_i	y_i	y_i	误差	y_i	误差	y_i	误差	y_i	误差
0	2	2	0	2	0	2	0	2	0
0.1	1.609 7	1.4	0.209 66	1.632 8	0.023 143	1.539 4	0.070 307	1.609 3	0.000 322
0.2	1.418 1	1.265 6	0.152 5	1.438 8	2.07E-2	1.358 2	0.059 893	1.417 9	0.000 156
0.3	1.303 7	1.189 4	0.114 22	1.32	1.64E-2	1.255 8	0.047 845	1.303 6	8.73E-5
0.4	1.228 1	1.140 1	0.088 016	1.240 9	1.28E-2	1.189 9	0.038 258	1.228 1	5.44E-5
0.5	1.175 2	1.105 9	0.069 255	1.185 2	1.00E-2	1.144 3	0.030 877	1.175 1	3.63E-5
0.6	1.136 6	1.081 3	0.055 327	1.144 5	7.96E-3	1.111 4	0.025 148	1.136 6	2.53E-5
0.7	1.107 7	1.063	0.044 694	1.114	6.39E-3	1.087	0.020 639	1.107 6	1.82E-5
0.8	1.085 6	1.049 2	0.036 401	1.090 7	5.16E-3	1.068 5	0.017 04	1.085 5	1.34E-5
0.9	1.068 4	1.038 6	0.029 828	1.072 6	4.21E-3	1.054 3	0.014 134	1.068 4	1.01E-5
1	1.055 0	1.030 4	0.024 552	1.058 4	3.44E-3	1.0432	0.011 764	1.055	7.63E-6

注:表中误差 E-2 表示 10^{-2},其余同.

公式(3.38)实际上是单步法的通用表示式,在计算 y_{n+1} 时只用到 y_n. 由于计算 y_{n+1} 之前已得到一系列近似值 $y_1,y_2,\cdots,y_n$,可用这些值来预测 y_{n+1},其一般形式为

$$y_{n+1}=a_ny_n+a_{n-1}y_{n-1}+\cdots+a_{n-p}y_{n-p}+h(b_{n+1}y'_{n+1}+b_ny'_n+\cdots+b_{n-p}y'_{n-p})+E_n,$$

$b_{n+1}=0$ 时称为向前积分,E_n 为误差,包括局部截断误差和舍入误差. 通过预测、修正、校正再迭代的方法使其误差有较高精度,这种思想称为**线性多步法**.

当应用计算机通过程序进行自动计算时,往往先确定所要求的具体精度(一般为 10^{-8} 或 10^{-6}),然后根据所在位置 (x,y) 及 $f(x,y)$ 的情况确定步长 h 再进行计算,这时称为**浮动步长法**. 实际计算时往往先按照上一次计算的步长进行计算,然后检查是否达到所要求的精度,如未达到,则减小步长重新计算;如超出精度较多,则放宽步长进行计算. 通过自动调整步长进行计算可以大大缩短计算时间,这种方法称为**自动变步长计算法**. 目前设计计算机数值计算方法多采用这种方法.

前面讨论的一阶常微分方程初值问题(3.35)的数值解方法同样适用于一阶常微

分方程组初值问题的数值解，只要将变量 $\boldsymbol{y}$ 和函数 $\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y})$ 理解为向量即可. 但对微分方程组的初值问题，由于变量 $\boldsymbol{y}$ 为向量，如果方程组的解 $\boldsymbol{y}$ 的各分量值存在数量级的差别，则其数值求解异常困难，不易准确. 这种问题称为**刚性(stiff)问题**，是微分方程组数值解研究的难题. 我们称微分方程组线性近似部分其特征值实部的绝对值中最大与最小之比为**刚性比**. 在化学反应、电子网络、自动控制等领域常见刚性比很大的刚性问题，在实际应用时需考虑其常微分方程组是不是刚性的. 一般而言，最常用的是 4,5 阶龙格-库塔方法，稍带刚性时则用 2,3 阶龙格-库塔方法较好. 有些数学软件如 MATLAB 还专门设计有解刚性方程的数值求解函数如 ode15s，ode23s 等.

排疑解惑

刚性常微分方程

数值解得到的数值不易分析，计算机技术的发展已提出**数据可视化**问题，将数据变为图形图像便于分析处理. 实际上，微分方程数值解在图形中显示为积分曲线或轨线(见 §6.2)，特别是大部分微分方程都是不可解、不可积的，通过数值解及其图形显示对微分方程的研究有很大帮助. 在第六章提及的洛伦茨方程的混沌和数学物理中的孤立子便是通过数值模拟计算发现的.

习 题 3.4

1. 从例 1 的欧拉方法、改进的欧拉方法、2 阶龙格-库塔方法、4 阶龙格-库塔方法中选择一种方法，每一步从精确解出发计算出下一步，并求出其相对误差，同时与表中的积累误差比较.

2. 计算线性微分方程组

$$\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-0.1 & -49.9 & 0\\ 0 & -50 & 0\\ 0 & 70 & -120\end{bmatrix}$$

的刚性比.

3. 试用附录 C 中的数学软件求解例 1.

本章学习要点

本章重点在于介绍和证明解的存在唯一性定理及解的一些基本性质. 解的存在唯一性定理是微分方程理论中的基本定理，也是微分方程近似计算(包括数值计算)的前提和根据. 解的延拓定理及解对初值的连续性和可微性定理揭示了微分方程解的重要性质. 逐步逼近法是一个重要的分析方法，今后还将继续应用，读者一定要熟悉和掌握这一证明方法. 因此，理解有关定理的内容，掌握逐步逼近法，是本章的基本要求.

关于解的存在性与唯一性问题的研究是很多的，除本章采用的皮卡(Picard)逐步逼近法(压缩映像原理)之外，还有欧拉(Euler)折线法(差分法)、绍德尔(Schauder)不动点方法等几种常见的基本方法，希望深入学习和研究的读者可参阅相关文献.

另外，本章还介绍了一阶微分方程奇解的概念和求奇解的两种方法以及两种数值解法，这些内容只要求一般了解就够了.

第四章 高阶微分方程

我们在本章讨论二阶及二阶以上的微分方程，即高阶微分方程. 对于高阶微分方程的基本理论（包括存在唯一性定理）和求解方法，我们分两部分来处理：对于线性微分方程部分放在第四、五章讨论；而非线性微分方程（组）放在第六章讨论. 在微分方程的理论中，线性微分方程是非常值得重视的一部分内容. 这不仅因为线性微分方程的一般理论已被研究得十分清楚，而且线性微分方程是研究非线性微分方程的基础，它在物理、力学和工程技术、自然科学中也有着广泛的应用. 本章重点讲述线性微分方程的基本理论和常系数方程的解法，也简单介绍某些高阶微分方程的降阶方法和二阶线性微分方程的幂级数解法.

§4.1 线性微分方程的一般理论

我们讨论 n 阶线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)x=f(t), \tag{4.1}$$

其中 $a_i(t)\,(i=1,2,\cdots,n)$ 及 $f(t)$ 都是 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续函数.

如果 $f(t)\equiv 0$，则方程(4.1)变为

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)x=0, \tag{4.2}$$

我们称它为 n **阶齐次线性微分方程**，简称**齐次线性微分方程**，而称一般的方程(4.1)为 n **阶非齐次线性微分方程**，简称**非齐次线性微分方程**，并且通常把方程(4.2)叫做**对应于方程(4.1)的齐次线性微分方程**.

类似§3.1，可知方程(4.1)的存在唯一性定理：如果 $a_i(t)\,(i=1,2,\cdots,n)$ 及 $f(t)$ 都是 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续函数，则对于任一 $t_0\in[a,b]$ 及任意的 $x_0,x_0^{(1)},\cdots,x_0^{(n-1)}$，方程(4.1)存在唯一解 $x=\varphi(t)$ 定义于 $a\leqslant t\leqslant b$ 上，且满足初值条件

$$\varphi(t_0)=x_0,\ \frac{\mathrm{d}\varphi(t_0)}{\mathrm{d}t}=x_0^{(1)},\ \cdots,\ \frac{\mathrm{d}^{n-1}\varphi(t_0)}{\mathrm{d}t^{n-1}}=x_0^{(n-1)}. \tag{4.3}$$

4.1.1 齐次线性微分方程的解的性质与结构

首先讨论齐次线性微分方程(4.2). 根据"常数可以从微分号下提出来"以及"和的导数等于导数之和"的法则,容易得到齐次线性微分方程的解的叠加原理.

定理 1(叠加原理) 如果 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)$ 是方程(4.2)的 k 个解,则它们的线性组合

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_kx_k(t)$$

也是(4.2)的解,这里 $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 是任意常数.

特别地,当 $k=n$ 时,即方程(4.2)有解

$$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t), \tag{4.4}$$

它含有 n 个任意常数.我们要问,在什么条件下,表达式(4.4)能够成为 n 阶齐次线性微分方程(4.2)的通解? 它将具有什么特性呢? 为了讨论的需要,我们引进函数线性相关与线性无关及朗斯基(Wronsky)行列式等概念.

考虑定义在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的函数 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)$,如果存在不全为零的常数 $c_1,c_2,\cdots,c_k$,使得恒等式

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_kx_k(t)\equiv 0$$

对于所有 $t\in[a,b]$ 都成立,我们称这些函数是**线性相关**的,否则就称这些函数在所给区间上**线性无关**.

例如函数 $\cos t$ 和 $\sin t$ 在任何区间上都是线性无关的,但函数 $\cos^2 t$ 和 $\sin^2 t-1$ 在任何区间上都是线性相关的.

又如函数 $1,t,t^2,\cdots,t^n$ 在任何区间上都是线性无关的,因为恒等式

$$c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots+c_nt^n\equiv 0 \tag{4.5}$$

仅当所有 $c_i=0(i=0,1,2,\cdots,n)$ 时才成立. 如果至少有一个 $c_i\neq 0$,则(4.5)的左端是一个不高于 n 次的多项式,它最多可有 n 个不同的根. 因此,它在所考虑的区间上不能有多于 n 个零点,更不可能恒为零了.

由定义在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的 k 个可微 $k-1$ 次函数 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)$ 所作成的行列式

$$W[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)]\equiv W(t)\equiv\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_k(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_k'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(k-1)}(t) & x_2^{(k-1)}(t) & \cdots & x_k^{(k-1)}(t) \end{vmatrix}$$

称为这些函数的**朗斯基行列式**.

定理 2 若函数 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上线性相关,则在 $[a,b]$ 上它们的朗斯基行列式 $W(t)\equiv 0$.

证明 由假设即知,存在一组不全为零的常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$,使得

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)\equiv 0,\ a\leqslant t\leqslant b. \tag{4.6}$$

将此恒等式依次对 t 求导数,得到

$$\begin{cases} c_1x_1'(t)+c_2x_2'(t)+\cdots+c_nx_n'(t)=0, \\ c_1x_1''(t)+c_2x_2''(t)+\cdots+c_nx_n''(t)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1x_1^{(n-1)}(t)+c_2x_2^{(n-1)}(t)+\cdots+c_nx_n^{(n-1)}(t)=0. \end{cases} \tag{4.7}$$

把(4.6)和(4.7)看成关于 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的齐次线性代数方程组,它的系数行列式就是 $W[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]$,于是由线性代数理论知道,要此方程组存在非零解,则它的系数行列式必须为零,即 $W(t)\equiv 0(a\leqslant t\leqslant b)$.定理证毕.

我们指出,逆定理一般不成立. 事实上,容易给出这样的函数组,由其构成的朗斯基行列式恒为零,然而它们却是线性无关的. 例如函数

$$x_1(t)=\begin{cases} t^2, & -1\leqslant t<0, \\ 0, & 0\leqslant t\leqslant 1 \end{cases}$$

和

$$x_2(t)=\begin{cases} 0, & -1\leqslant t<0, \\ t^2, & 0\leqslant t\leqslant 1, \end{cases}$$

在区间$[-1,1]$上,显然 $W[x_1(t),x_2(t)]\equiv 0$,但它们在此区间上却是线性无关的. 因为假设存在恒等式

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)\equiv 0,\ -1\leqslant t\leqslant 1, \tag{4.8}$$

则当$-1\leqslant t<0$ 时推得 $c_1=0$;而当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时又推得 $c_2=0$.即除 $c_1=c_2=0$ 外,找不到别的常数值 c_1和 c_2(不全为 0)使恒等式(4.8)对一切 $t\in[-1,1]$成立,故 $x_1(t),x_2(t)$是线性无关的.

但是,如果 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$是齐次线性微分方程(4.2)的解,那么就有下面的定理.

定理 3　如果方程(4.2)的解 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$在$a\leqslant t\leqslant b$ 上线性无关,则 $W[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]$在这个区间的任何点上都不等于零,即 $W(t)\neq 0(a\leqslant t\leqslant b)$.

证明　采用反证法.设有某个 $t_0(a\leqslant t_0\leqslant b)$使得 $W(t_0)=0$. 考虑关于 $c_1,c_2,\cdots,c_n$的齐次线性代数方程组

$$\begin{cases} c_1x_1(t_0)+c_2x_2(t_0)+\cdots+c_nx_n(t_0)=0, \\ c_1x_1'(t_0)+c_2x_2'(t_0)+\cdots+c_nx_n'(t_0)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1x_1^{(n-1)}(t_0)+c_2x_2^{(n-1)}(t_0)+\cdots+c_nx_n^{(n-1)}(t_0)=0, \end{cases} \tag{4.9}$$

其系数行列式 $W(t_0)=0$,故(4.9)有非零解 $c_1,c_2,\cdots,c_n$. 现以这组常数构造函数

$$x(t)\equiv c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t),\ a\leqslant t\leqslant b,$$

根据叠加原理,$x(t)$是方程(4.2)的解. 注意到(4.9),知道这个解 $x(t)$满足初值条件

$$x(t_0)=x'(t_0)=\cdots=x^{(n-1)}(t_0)=0, \tag{4.10}$$

但是 $x=0$ 显然也是方程(4.2)的满足初值条件(4.10)的解.由解的唯一性,即知 $x(t)\equiv 0(a\leqslant t\leqslant b)$,即

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)\equiv 0,\ a\leqslant t\leqslant b.$$

因为 $c_1,c_2,\cdots,c_n$不全为 0,这就与 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$线性无关的假设矛盾. 定理得证.

根据定理 2 和定理 3 可以知道,由 n 阶齐次线性微分方程(4.2)的 n 个解构成的朗斯基行列式或者恒等于零,或者在方程的系数为连续的区间内处处不等于零.

根据存在唯一性定理,方程(4.2)的满足初值条件

$$\begin{cases} x_1(t_0)=1,x_1'(t_0)=0,\cdots,x_1^{(n-1)}(t_0)=0,\\ x_2(t_0)=0,x_2'(t_0)=1,\cdots,x_2^{(n-1)}(t_0)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_n(t_0)=0,x_n'(t_0)=0,\cdots,x_n^{(n-1)}(t_0)=1 \end{cases}$$

的解 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$一定存在. 又因为

$$W[x_1(t_0),x_2(t_0),\cdots,x_n(t_0)]\neq 0,$$

于是根据上述定理 2,这 n 个解一定是线性无关的. 由此,即得下面的定理 4.

定理 4 n 阶齐次线性微分方程(4.2)一定存在 n 个线性无关的解.

定理 5(通解结构) 如果 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$是方程(4.2)的 n 个线性无关的解,则方程(4.2)的通解可表示为

$$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t), \tag{4.11}$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$是任意常数,且通解(4.11)包括了方程(4.2)的所有解.

证明 首先,由叠加原理知道(4.11)是(4.2)的解,它包含有 n 个任意常数. 我们指出,这些常数是彼此独立的. 事实上,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial c_1} & \dfrac{\partial x}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial x}{\partial c_n}\\ \dfrac{\partial x'}{\partial c_1} & \dfrac{\partial x'}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial x'}{\partial c_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial x^{(n-1)}}{\partial c_1} & \dfrac{\partial x^{(n-1)}}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial x^{(n-1)}}{\partial c_n} \end{vmatrix}=W[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]\neq 0\ (a\leqslant t\leqslant b),$$

因而,(4.11)为方程(4.2)的通解.现在,我们证明它包括了方程的所有解. 由于方程的解唯一地决定于初值条件,因此只需证明:任给一初值条件

$$x(t_0)=x_0, x'(t_0)=x_0', \cdots, x^{(n-1)}(t_0)=x_0^{(n-1)}, \tag{4.12}$$

能够确定(4.11)中的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的值,使(4.11)满足(4.12).

现令(4.11)满足条件(4.12),我们得到如下关于 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的线性代数方程组:

$$\begin{cases} c_1x_1(t_0)+c_2x_2(t_0)+\cdots+c_nx_n(t_0)=x_0, \\ c_1x_1'(t_0)+c_2x_2'(t_0)+\cdots+c_nx_n'(t_0)=x_0', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1x_1^{(n-1)}(t_0)+c_2x_2^{(n-1)}(t_0)+\cdots+c_nx_n^{(n-1)}(t_0)=x_0^{(n-1)}, \end{cases} \tag{4.13}$$

它的系数行列式就是 $W(t_0)$,由定理 3 知,$W(t_0)\neq 0$. 根据线性代数方程组的理论,方程组(4.13)有唯一解 $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \cdots, \tilde{c}_n$. 因此,只要表达式(4.11)中常数取为 $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \cdots, \tilde{c}_n$,则它就满足条件(4.12). 定理证毕.

定理圆满地回答了上面提出的问题.

推论　方程(4.2)的线性无关解的最多个数等于 n. 因此可得结论:n 阶齐次线性微分方程的所有解构成一个 n 维线性空间.

方程(4.2)的一组 n 个线性无关解称为方程的一个**基本解组**. 显然,基本解组不是唯一的. 特别地,当 $W(t_0)=1$ 时称其为**标准基本解组**.

4.1.2　非齐次线性微分方程与常数变易法

知道了齐次线性微分方程通解的结构,以此为基础就不难解决非齐次线性微分方程通解的结构问题了.

考虑 n 阶非齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)x=f(t), \tag{4.1}$$

易见方程(4.2)是它的特殊情形,我们指出两者之间解的性质和结构有着十分密切的联系. 首先容易直接验证如下两个简单性质:

性质 1　如果 $\bar{x}(t)$ 是方程(4.1)的解,而 $x(t)$ 是方程(4.2)的解,则 $\bar{x}(t)+x(t)$ 也是方程(4.1)的解.

性质 2　方程(4.1)的任意两个解之差必为方程(4.2)的解.

其次,我们有下面的定理:

定理 6　设 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 为方程(4.2)的基本解组,而 $\bar{x}(t)$ 是方程(4.1)的某一解,则方程(4.1)的通解可表示为

$$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)+\bar{x}(t), \tag{4.14}$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为任意常数,而且这个通解(4.14)包括了方程(4.1)的所有解.

证明　根据性质 1 易知(4.14)是方程(4.1)的解,它包含 n 个任意常数,像定理 5 的证明过程一样,不难证明这些常数是彼此独立的,因此它是方程(4.1)的通解. 现设 $\tilde{x}(t)$ 是方程(4.1)的任一解,则由性质 2,$\tilde{x}(t)-\bar{x}(t)$ 是方程(4.2)的解,根据定理 5,必有一组确定的常数 $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \cdots, \tilde{c}_n$,使得

$$\tilde{x}(t)-\bar{x}(t)=\tilde{c}_1x_1(t)+\tilde{c}_2x_2(t)+\cdots+\tilde{c}_nx_n(t),$$

即

$$\tilde{x}(t)=\tilde{c}_1x_1(t)+\tilde{c}_2x_2(t)+\cdots+\tilde{c}_nx_n(t)+\bar{x}(t),$$

这就是说,方程(4.1)的任一解 $\tilde{x}(t)$ 可以由(4.14)表出,其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为相应的确定常数. 由于 $\tilde{x}(t)$ 的任意性,这就证明了通解表达式(4.14)包括方程(4.1)的所有解. 定理证毕.

定理告诉我们,要解非齐次线性微分方程,只需知道它的一个解和对应的齐次线性微分方程的基本解组. 我们进一步指出,只要知道对应的齐次线性微分方程的基本解组,就可以利用常数变易法求得非齐次线性微分方程的解. 正如我们在第二章 §2.2 里所做过的那样,不过这里稍微复杂一些而已.

设 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 是方程(4.2)的基本解组,因而

$$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t) \tag{4.15}$$

为(4.2)的通解. 把其中的任意常数 c_i 看作 t 的待定函数 $c_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$,这时(4.15)变为

$$x=c_1(t)x_1(t)+c_2(t)x_2(t)+\cdots+c_n(t)x_n(t). \tag{4.16}$$

将它代入方程(4.1),就得到 $c_1(t),c_2(t),\cdots,c_n(t)$ 必须满足的一个方程,但待定函数有 n 个,即 $c_1(t),c_2(t),\cdots,c_n(t)$,为了确定它们,必须再找出 $n-1$ 个限制条件,在理论上,这些另加的条件可以任意给出,其法无穷,当然以运算上简便为宜. 为此,我们将按下面的方法来给出这 $n-1$ 个条件.

将(4.16)对 t 求导数得

$$x'=c_1(t)x_1'(t)+c_2(t)x_2'(t)+\cdots+c_n(t)x_n'(t)+x_1(t)c_1'(t)+x_2(t)c_2'(t)+\cdots+x_n(t)c_n'(t),$$

令

$$x_1(t)c_1'(t)+x_2(t)c_2'(t)+\cdots+x_n(t)c_n'(t)=0, \tag{4.17$_1$}$$

得到

$$x'=c_1(t)x_1'(t)+c_2(t)x_2'(t)+\cdots+c_n(t)x_n'(t). \tag{4.18$_1$}$$

将(4.18)$_1$对 t 求导数,并像上面一样做法,令含有函数 $c_i'(t)$ 的部分等于零,我们又得到一个条件

$$x_1'(t)c_1'(t)+x_2'(t)c_2'(t)+\cdots+x_n'(t)c_n'(t)=0 \tag{4.17$_2$}$$

和表达式

$$x''=c_1(t)x_1''(t)+c_2(t)x_2''(t)+\cdots+c_n(t)x_n''(t). \tag{4.18$_2$}$$

继续上面做法,在最后一次我们得到第 $n-1$ 个条件

$$x_1^{(n-2)}(t)c_1'(t)+x_2^{(n-2)}(t)c_2'(t)+\cdots+x_n^{(n-2)}(t)c_n'(t)=0 \tag{4.17$_{n-1}$}$$

和表达式

$$x^{(n-1)}=c_1(t)x_1^{(n-1)}(t)+c_2(t)x_2^{(n-1)}(t)+\cdots+c_n(t)x_n^{(n-1)}(t). \qquad (4.18)_{n-1}$$

最后，将$(4.18)_{n-1}$对 t 求导数，得到

$$x^{(n)}=c_1(t)x_1^{(n)}(t)+c_2(t)x_2^{(n)}(t)+\cdots+c_n(t)x_n^{(n)}(t)+$$
$$x_1^{(n-1)}(t)c_1'(t)+x_2^{(n-1)}(t)c_2'(t)+\cdots+x_n^{(n-1)}(t)c_n'(t). \qquad (4.18)_n$$

现将(4.16)，$(4.18)_1$，$(4.18)_2$，…，$(4.18)_n$ 代入(4.1)，并注意到 $x_1(t)$，$x_2(t)$，…，$x_n(t)$是(4.2)的解，得到

$$x_1^{(n-1)}(t)c_1'(t)+x_2^{(n-1)}(t)c_2'(t)+\cdots+x_n^{(n-1)}(t)c_n'(t)=f(t). \qquad (4.17)_n$$

这样，我们得到了含 n 个未知函数 $c_i'(t)(i=1,2,\cdots,n)$的 n 个方程$(4.17)_1$，$(4.17)_2$，…，$(4.17)_n$，它们组成一个线性代数方程组，其系数行列式就是 $W[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]$，它不等于零，因而方程组的解可唯一确定. 设求得

$$c_i'(t)=\varphi_i(t),\ i=1,2,\cdots,n,$$

积分得

$$c_i(t)=\int\varphi_i(t)\,\mathrm{d}t+\gamma_i,\ i=1,2,\cdots,n,$$

这里 γ_i 是任意常数.将所得 $c_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$的表达式代入(4.16)，即得方程(4.1)的解①

$$x=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i x_i(t)+\sum_{i=1}^{n}x_i(t)\int\varphi_i(t)\,\mathrm{d}t.$$

显然，它也是方程(4.1)的通解.为了得到方程的一个解，只需给常数 $\gamma_i(i=1,2,\cdots,n)$以确定的值. 例如，当取 $\gamma_i=0(i=1,2,\cdots,n)$时，即得解 $x=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i(t)\int\varphi_i(t)\,\mathrm{d}t$.

从这里可以看到，如果已知对应的齐次线性微分方程的基本解组，那么非齐次线性微分方程的任一解可由求积得到. 因此，对于线性微分方程来说，关键是求出齐次线性微分方程的基本解组.

例 1　求方程 $x''+x=\dfrac{1}{\cos t}$的通解，已知它对应的齐次线性微分方程的基本解组为 $\cos t,\sin t$.

解　应用常数变易法，令

$$x=c_1(t)\cos t+c_2(t)\sin t,$$

将它代入方程，则可得决定 $c_1'(t)$和 $c_2'(t)$的两个方程

$$\cos t\,c_1'(t)+\sin t\,c_2'(t)=0$$

及

① 也可把 $\varphi_i(t)$的表达式具体写出，而将解表示为第五章(5.23)式的形式.

$$-\sin t c_1'(t)+\cos t c_2'(t)=\frac{1}{\cos t},$$

解得

$$c_1'(t)=-\frac{\sin t}{\cos t},\quad c_2'(t)=1,$$

由此

$$c_1(t)=\ln|\cos t|+\gamma_1,\quad c_2(t)=t+\gamma_2.$$

于是原方程的通解为

$$x=\gamma_1\cos t+\gamma_2\sin t+\cos t\ln|\cos t|+t\sin t,$$

其中 γ_1,γ_2 为任意常数.

例 2 求方程 $tx''-x'=t^2$ 于域 $t\neq 0$ 上的所有解.

解 对应的齐次线性微分方程为

$$tx''-x'=0,$$

容易直接积分求得它的基本解组.事实上,将方程改写成

$$\frac{x''}{x'}=\frac{1}{t},$$

积分即得 $x'=At$. 所以

$$x=\frac{1}{2}At^2+B,$$

这里 A,B 为任意常数. 易见有基本解组 $1,t^2$. 为应用上面的结论,我们将方程改写为

$$x''-\frac{1}{t}x'=t,$$

并以 $x=c_1(t)+c_2(t)t^2$ 代入,可得决定 $c_1'(t)$ 和 $c_2'(t)$ 的两个方程

$$c_1'(t)+t^2c_2'(t)=0\quad 及\quad 2tc_2'(t)=t,$$

于是

$$c_2(t)=\frac{1}{2}t+\gamma_2,\quad c_1(t)=-\frac{1}{6}t^3+\gamma_1.$$

故得原方程的通解为

$$x=\gamma_1+\gamma_2t^2+\frac{1}{3}t^3,$$

这里 γ_1,γ_2 是任意常数. 根据定理 6,它包括了方程的所有解.

应用实例
追赶轨迹

习 题 4.1

1. 设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数,证明:如果在区间 $[a,b]$ 上有 $\frac{x(t)}{y(t)}\neq$ 常数或 $\frac{y(t)}{x(t)}\neq$

常数,则 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上线性无关.(提示:用反证法.)

2. 证明非齐次线性微分方程的叠加原理:设 $x_1(t)$,$x_2(t)$ 分别是非齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=f_1(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=f_2(t)$$

的解,则 $x_1(t)+x_2(t)$ 是方程

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=f_1(t)+f_2(t)$$

的解.

3. 已知齐次线性微分方程的基本解组 x_1,x_2,求下列方程对应的非齐次线性微分方程的通解:

(1) $x''-x=\cos t, x_1=\mathrm{e}^t, x_2=\mathrm{e}^{-t}$;

(2) $x''+\frac{t}{1-t}x'-\frac{1}{1-t}x=t-1, x_1=t, x_2=\mathrm{e}^t$;

(3) $x''+4x=t\sin 2t, x_1=\cos 2t, x_2=\sin 2t$;

(4) $t^2x''-4tx'+6x=36\frac{\ln t}{t}, x_1=t^2, x_2=t^3$;

(5) $t^2x''-tx'+x=6t+34t^2, x_1=t, x_2=t\ln t$;

(6) $t^2x''-3tx'+8x=18t^2\sin(\ln t), x_1=t^2\cos(2\ln t), x_2=t^2\sin(2\ln t)$.

4. 已知方程 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-x=0$ 有基本解组 $\mathrm{e}^t,\mathrm{e}^{-t}$,试求此方程适合初值条件

$$x(0)=1,\quad x'(0)=0$$

及

$$x(0)=0,\quad x'(0)=1$$

的基本解组(称为标准基本解组,即有 $W(0)=1$),并由此求出方程适合初值条件

$$x(0)=x_0,\quad x'(0)=x_0'$$

的解.

5. 设 $x_i(t)\ (i=1,2,\cdots,n)$ 是齐次线性微分方程(4.2)的任意 n 个解,它们所构成的朗斯基行列式记为 $W(t)$. 试证明 $W(t)$ 满足一阶线性微分方程

$$W'+a_1(t)W=0,$$

因而有

$$W(t)=W(t_0)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)\mathrm{d}s}t_0,\ t\in(a,b).$$

6. 假设 $x_1(t)\neq 0$ 是二阶齐次线性微分方程

$$x''+a_1(t)x'+a_2(t)x=0$$

的解,这里 $a_1(t)$ 和 $a_2(t)$ 于区间 $[a,b]$ 上连续,试证:

(1) $x_2(t)$ 为方程的解的充要条件是

$$W'[x_1,x_2]+a_1W[x_1,x_2]=0;$$

(2) 方程的通解可表示为

$$x=x_1\left[c_1\int\frac{1}{x_1^2}\exp\left(-\int_{t_0}^{t}a_1(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t+c_2\right],$$

其中 c_1,c_2 为任意常数,$t_0,t\in[a,b]$.

7. 试证 n 阶非齐次线性微分方程(4.1)存在且最多存在 $n+1$ 个线性无关解.

§4.2 常系数线性微分方程的解法

关于线性微分方程的通解的结构问题,从理论上说,可以认为在§4.1中已经解决了,但是求方程通解的方法还没有具体给出. 事实上,对于一般的线性微分方程是没有普遍的解法的. 本节介绍求解问题能够彻底解决的一类方程——常系数线性微分方程及可以化为这一类型的方程. 我们将看到,为了求得常系数齐次线性微分方程的通解,只需解一个代数方程而不必通过积分运算. 对于某些特殊的非齐次线性微分方程,也可以通过代数运算和微分运算求得它的通解. 我们一定要记住常系数线性微分方程固有的这种简单特性. 这一节的内容完全可以和线性振动理论(质点振动理论、电磁振荡理论等)结合起来学习. 我们特别以数学摆的微小振动为例,结合讲述质点振动理论,以便给读者一个直观的印象. 从这里我们可以清晰地看出,物理问题提供微分方程以很直观的实际背景,而微分方程为更深刻地理解物理现象提供有力的工具,这是我们学习这一节要注意的问题.

讨论常系数线性微分方程的解法时,涉及实变量的复值函数及复指数函数,在数字资源(拓展阅读)中介绍.

现在我们引进线性微分方程的复值解的定义. 定义于 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的实变量复值函数 $x=z(t)$ 称为方程(4.1)的**复值解**,如果

$$\frac{\mathrm{d}^n z(t)}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}z(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}+a_n(t)z(t)=f(t)$$

对于 $a\leqslant t\leqslant b$ 恒成立.

最后,我们给出在今后讨论中要用到的两个简单结论.

命题 1 如果方程(4.2)中所有系数 $a_i(t)\ (i=1,2,\cdots,n)$ 都是实值函数,而 $x=z(t)=\varphi(t)+\mathrm{i}\psi(t)$ 是方程的复值解,则 $z(t)$ 的实部 $\varphi(t)$、虚部 $\psi(t)$ 和共轭复值函数 $\bar{z}(t)$ 也都是方程(4.2)的解.

命题 2 若方程

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)x=u(t)+\mathrm{i}v(t)$$

有复值解 $x=U(t)+\mathrm{i}V(t)$,这里 $a_i(t)\ (i=1,2,\cdots,n)$ 及 $u(t)$,$v(t)$ 都是实函数,那么这个解的实部 $U(t)$ 和虚部 $V(t)$ 分别是方程

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)x=u(t)$$

和

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)x=v(t)$$

的解.

4.2.1　常系数齐次线性微分方程

设齐次线性微分方程中所有系数都是常数,即方程有如下形状:

$$L[x]\equiv\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n x=0, \tag{4.19}$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为常数. 我们称(4.19)为 n 阶常系数齐次线性微分方程. 正如前面所指出的,它的求解问题可以归结为代数方程求根问题,现在就来具体讨论方程(4.19)的解法. 按照 §4.1 的一般理论,为了求方程(4.19)的通解,只需求出它的基本解组. 下面介绍求(4.19)的基本解组的**欧拉待定指数函数法**(又称为**特征值法**).

回顾一阶常系数齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+ax=0,$$

我们知道它有形如 $x=\mathrm{e}^{-at}$ 的解,且它的通解就是 $x=c\mathrm{e}^{-at}$. 这启示我们对于方程(4.19)也去试求指数函数形式的解

$$x=\mathrm{e}^{\lambda t}, \tag{4.20}$$

其中 λ 是待定常数,可以是实的,也可以是复的.

注意到

$$\begin{aligned}L[\mathrm{e}^{\lambda t}]&\equiv\frac{\mathrm{d}^n\mathrm{e}^{\lambda t}}{\mathrm{d}t^n}+a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}\mathrm{e}^{\lambda t}}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\lambda t}}{\mathrm{d}t}+a_n\mathrm{e}^{\lambda t}\\&=(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n)\mathrm{e}^{\lambda t}\equiv F(\lambda)\mathrm{e}^{\lambda t},\end{aligned}$$

其中 $F(\lambda)\equiv\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$ 是 λ 的 n 次多项式. 易知,(4.20)为方程(4.19)的解的充要条件是 λ 是代数方程

$$F(\lambda)\equiv\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \tag{4.21}$$

的根. 因此,方程(4.21)将起着预示方程(4.19)的解的特性的作用,我们称它为方程(4.19)的**特征方程**,它的根就称为**特征值**. 下面根据特征值的不同情况分别进行讨论.

(1) 特征值是单根的情形

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是特征方程(4.21)的 n 个彼此不相等的根,则相应的方程(4.19)有如下 n 个解:

$$\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\mathrm{e}^{\lambda_2 t},\cdots,\mathrm{e}^{\lambda_n t}. \tag{4.22}$$

我们指出这 n 个解在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上线性无关,从而组成方程的基本解组. 事实上,这时

$$W(t)=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \cdots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 t} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix}$$

$$=e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)t}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

而最后一个行列式是著名的范德蒙德(Vandermonde)行列式,它等于 $\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j)$. 由于假设 $\lambda_i\neq\lambda_j(i\neq j)$,故此行列式不等于零,从而 $W(t)\neq 0$,于是解组(4.22)线性无关,这就是所要证明的.

排疑解惑

朗斯基行列式和范德蒙德行列式

如果 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均为实数,则(4.22)是方程(4.19)的 n 个线性无关的实值解,而方程(4.19)的通解可表示为

$$x=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}+\cdots+c_ne^{\lambda_n t},$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为任意常数.

如果特征方程有复根,则因方程的系数是实常数,复根将成对共轭地出现. 设 $\lambda_1=\alpha+i\beta$ 是一特征值,则 $\lambda_2=\alpha-i\beta$ 也是特征值,因而与这对共轭复根对应的方程(4.19)有两个复值解

$$e^{(\alpha+i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t),$$

$$e^{(\alpha-i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t-i\sin\beta t).$$

根据命题 1,它们的实部和虚部也是方程的解.这样一来,对应于特征方程的一对共轭复根 $\lambda=\alpha\pm i\beta$,我们可求得方程(4.19)的两个实值解

$$e^{\alpha t}\cos\beta t,\quad e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

(2) 特征值有重根的情形

设特征方程有 k 重根 $\lambda=\lambda_1$,则

$$F(\lambda_1)=F'(\lambda_1)=\cdots=F^{(k-1)}(\lambda_1)=0,\quad F^{(k)}(\lambda_1)\neq 0.$$

先设 $\lambda_1=0$,即特征方程有因子 λ^k,于是

$$a_n=a_{n-1}=\cdots=a_{n-k+1}=0,$$

也就是特征方程的形式为

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-k}\lambda^k=0.$$

而对应的方程(4.19)变为

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-k}\frac{d^kx}{dt^k}=0,$$

易见它有 k 个解 $1,t,t^2,\cdots,t^{k-1}$，而且它们是线性无关的. 这样一来，特征方程的 k 重零根就对应于方程(4.19)的 k 个线性无关解 $1,t,t^2,\cdots,t^{k-1}$.

如果这个 k 重根 $\lambda_1\neq 0$，我们作变量变换 $x=y\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$，注意到

$$x^{(m)}=(y\mathrm{e}^{\lambda_1 t})^{(m)}=\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\left[y^{(m)}+m\lambda_1 y^{(m-1)}+\frac{m(m-1)}{2!}\lambda_1^2 y^{(m-2)}+\cdots+\lambda_1^m y\right],$$

可得

$$L[y\mathrm{e}^{\lambda_1 t}]=\left(\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}+b_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+b_n y\right)\mathrm{e}^{\lambda_1 t}=L_1[y]\mathrm{e}^{\lambda_1 t}.$$

于是方程(4.19)化为

$$L_1[y]\equiv\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}+b_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+b_{n-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+b_n y=0, \tag{4.23}$$

其中 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 仍为常数，而相应的特征方程为

$$G(\mu)\equiv\mu^n+b_1\mu^{n-1}+\cdots+b_{n-1}\mu+b_n=0. \tag{4.24}$$

直接计算易得

$$F(\mu+\lambda_1)\mathrm{e}^{(\mu+\lambda_1)t}=L[\mathrm{e}^{(\mu+\lambda_1)t}]=L_1[\mathrm{e}^{\mu t}]\mathrm{e}^{\lambda_1 t}=G(\mu)\mathrm{e}^{(\mu+\lambda_1)t}.$$

因此

$$F(\mu+\lambda_1)=G(\mu),$$

从而

$$F^{(j)}(\mu+\lambda_1)=G^{(j)}(\mu),\ j=1,2,\cdots,k.$$

可见(4.21)的根 $\lambda=\lambda_1$ 对应于(4.24)的根 $\mu=\mu_1=0$，而且重数相同. 这样，问题就化为前面已经讨论过的情形了.

我们知道，方程(4.24)的 k_1 重根 $\mu_1=0$ 对应于方程(4.23)的 k_1 个解 $y=1,t,t^2,\cdots,t^{k_1-1}$，因而对应于特征方程(4.21)的 k_1 重根 λ_1，方程(4.19)有 k_1 个解

$$\mathrm{e}^{\lambda_1 t},t\mathrm{e}^{\lambda_1 t},t^2\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\cdots,t^{k_1-1}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}. \tag{4.25}$$

同样，假设特征方程(4.21)的其他根 $\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_m$ 的重数依次为 $k_2,k_3,\cdots,k_m$，$k_i\geqslant 1$（单根 λ_j 相当于 $k_j=1$），而且 $k_1+k_2+\cdots+k_m=n$，$\lambda_j\neq\lambda_i(i\neq j)$，则方程(4.19)对应地有解

$$\begin{cases}\mathrm{e}^{\lambda_2 t},t\mathrm{e}^{\lambda_2 t},t^2\mathrm{e}^{\lambda_2 t},\cdots,t^{k_2-1}\mathrm{e}^{\lambda_2 t},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mathrm{e}^{\lambda_m t},t\mathrm{e}^{\lambda_m t},t^2\mathrm{e}^{\lambda_m t},\cdots,t^{k_m-1}\mathrm{e}^{\lambda_m t}.\end{cases} \tag{4.26}$$

下面我们证明(4.25)和(4.26)全体 n 个解构成方程(4.19)的基本解组.

假若这些函数线性相关，则有

$$\sum_{r=1}^{m}(A_0^{(r)}+A_1^{(r)}t+\cdots+A_{k_r-1}^{(r)}t^{k_r-1})\mathrm{e}^{\lambda_r t}=\sum_{r=1}^{m}P_r(t)\mathrm{e}^{\lambda_r t}=0, \tag{4.27}$$

其中 $A_j^{(r)}(j=0,1,\cdots,k_r-1)$ 是常数，不全为零，$P_r(t)=A_0^{(r)}+A_1^{(r)}t+\cdots+A_{k_r-1}^{(r)}t^{k_r-1}$. 不失一般性，假定多项式 $P_m(t)$ 至少有一个系数不等于零，即 $P_m(t)\not\equiv 0$. 将恒等式(4.27)除以 $e^{\lambda_1 t}$，然后对 t 求导数 k_1 次，得到

$$\sum_{r=2}^{m} Q_r(t)e^{(\lambda_r-\lambda_1)t}=0, \tag{4.28}$$

其中 $Q_r(t)=(\lambda_r-\lambda_1)^{k_1}P_r(t)+S_r(t)$，$S_r(t)$ 为次数低于 $P_r(t)$ 的次数的多项式. 因此，$Q_r(t)$ 与 $P_r(t)$ 次数相同，且 $Q_m(t)\not\equiv 0$. 等式(4.28)与(4.27)类似，但项数减少了. 如果对(4.28)施行同上的做法(这时是除以 $e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}$ 后对 t 求导数 k_2 次)，我们将得到项数更少的类似于(4.27)的恒等式，如此继续下去，经过 $m-1$ 次后，我们就将得到等式

$$R_m(t)e^{(\lambda_m-\lambda_{m-1})t}=0,$$

这是不可能的，因为 $R_m(t)$ 与 $P_m(t)$ 有相同的次数，且 $R_m(t)\neq 0$. 事实上，不难直接算得

$$R_m(t)=(\lambda_m-\lambda_1)^{k_1}(\lambda_m-\lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda_m-\lambda_{m-1})^{k_{m-1}}P_m(t)+W_m(t),$$

其中 $W_m(t)$ 是次数低于 $P_m(t)$ 的次数的多项式.

这就证明了(4.25)和(4.26)全部 n 个解线性无关，从而构成方程(4.19)的基本解组.

对于特征方程有复重根的情况，譬如假设 $\lambda=\alpha+i\beta$ 是 k 重特征值，则 $\bar{\lambda}=\alpha-i\beta$ 也是 k 重特征值，仿(1)一样处理，我们将得到方程(4.19)的 $2k$ 个实值解：

$$e^{\alpha t}\cos\beta t, te^{\alpha t}\cos\beta t, t^2e^{\alpha t}\cos\beta t,\cdots,t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t,$$
$$e^{\alpha t}\sin\beta t, te^{\alpha t}\sin\beta t, t^2e^{\alpha t}\sin\beta t,\cdots,t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

例 1 求方程 $\dfrac{d^4x}{dt^4}-x=0$ 的通解.

解 特征方程 $\lambda^4-1=0$ 的根为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=i,\lambda_4=-i$，有两个实根和两个复根，均是单根，故方程的通解为

$$x=c_1e^t+c_2e^{-t}+c_3\cos t+c_4\sin t,$$

这里 c_1,c_2,c_3,c_4 是任意常数.

例 2 求解方程 $\dfrac{d^3x}{dt^3}+x=0$.

解 特征方程 $\lambda^3+1=0$ 有根 $\lambda_1=-1,\lambda_{2,3}=\dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，因此通解为

$$x=c_1e^{-t}+e^{\frac{1}{2}t}\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right),$$

其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数.

例 3 求方程 $\dfrac{d^3x}{dt^3}-3\dfrac{d^2x}{dt^2}+3\dfrac{dx}{dt}-x=0$ 的通解.

解　特征方程为 $\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0$，即 $(\lambda-1)^3=0$，$\lambda=1$ 是三重根，因此方程的通解具有形式

$$x=(c_1+c_2t+c_3t^2)\mathrm{e}^t,$$

其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数.

例 4　求解方程 $\dfrac{\mathrm{d}^4x}{\mathrm{d}t^4}+2\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+x=0$.

解　特征方程为 $\lambda^4+2\lambda^2+1=0$，即 $(\lambda^2+1)^2=0$，特征值 $\lambda=\pm\mathrm{i}$ 是重根. 因此方程有四个实值解

$$\cos t, t\cos t, \sin t, t\sin t,$$

故通解为

$$x=(c_1+c_2t)\cos t+(c_3+c_4t)\sin t,$$

其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数.

4.2.2　非齐次线性微分方程与比较系数法

现在讨论常系数非齐次线性微分方程

$$L[x]\equiv\frac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}+a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_nx=f(t) \tag{4.29}$$

的求解问题，这里 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是常数，而 $f(t)$ 为连续函数.

有了前面讨论的结果，这一问题已经可以解决，因为可以按照 4.2.1 的方法求出对应的齐次线性微分方程(4.19)的基本解组，再应用 4.1.2 所述的常数变易法，求得方程(4.29)的一个特解. 这样，根据定理 6 即可写出方程(4.29)的通解表达式，再利用初值条件确定通解中的任意常数，就可得到方程的满足初值条件的解. 但是，正如大家所看到的，通过上述步骤求解往往是比较烦琐的，而且必须经过积分运算. 下面介绍当 $f(t)$ 具有某些特殊形式时所适用的**比较系数法**. 它的特点是不需通过积分而用代数方法即可求得非齐次线性微分方程的特解，即将求解微分方程的问题转化为某一个代数问题来处理，因而比较简便.

类型 I

设 $f(t)=(b_0t^m+b_1t^{m-1}+\cdots+b_{m-1}t+b_m)\mathrm{e}^{\lambda t}$，其中 λ 及 $b_i(i=0,1,\cdots,m)$ 为实常数，那么方程(4.29)有形如

$$\tilde{x}=t^k(B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_{m-1}t+B_m)\mathrm{e}^{\lambda t} \tag{4.30}$$

的特解，其中 k 为特征方程 $F(\lambda)=0$ 的根 λ 的重数(单根相当于 $k=1$；当 λ 不是特征值时，取 $k=0$)，而 $B_0,B_1,\cdots,B_m$ 是待定常数，可以通过将(4.30)代入微分方程并比较 t 的同次幂系数的方法确定.

例 5　求方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-3x=3t+1$ 的通解.

解 先求对应的齐次线性微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-3x=0$$

的通解. 这里特征方程 $\lambda^2-2\lambda-3=0$ 有两个根 $\lambda_1=3,\lambda_2=-1$. 因此,通解为

$$x=c_1e^{3t}+c_2e^{-t},$$

其中 c_1,c_2 为任意常数. 再求非齐次线性微分方程的一个特解. 这里 $f(t)=3t+1,\lambda=0$, 又因为 $\lambda=0$ 不是特征值,故可取特解形如 $\tilde{x}=A+Bt$,其中 A,B 为待定常数. 为了确定 A, B,将 $\tilde{x}=A+Bt$ 代入原方程,得到

$$-2B-3A-3Bt=3t+1,$$

比较 t 的同幂次系数得

$$\begin{cases}-3B=3,\\-2B-3A=1,\end{cases}$$

由此得 $B=-1,A=\frac{1}{3}$,从而 $\tilde{x}=\frac{1}{3}-t$. 因此,原方程的通解为

$$x=c_1e^{3t}+c_2e^{-t}-t+\frac{1}{3}.$$

例 6 求 $\frac{d^3x}{dt^3}+3\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+x=e^{-t}(t-5)$ 的通解.

解 特征方程 $\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=(\lambda+1)^3=0$ 有三重根 $\lambda_{1,2,3}=-1$,对应齐次方程的通解为

$$x=(c_1+c_2t+c_3t^2)e^{-t},$$

其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数,且方程有形式为 $\tilde{x}=t^3(A+Bt)e^{-t}$ 的特解. 将它代入方程得

$$(6A+24Bt)e^{-t}=e^{-t}(t-5),$$

比较系数求得 $A=-\frac{5}{6},B=\frac{1}{24}$. 从而 $\tilde{x}=\frac{1}{24}t^3(t-20)e^{-t}$. 故方程的通解为

$$x=(c_1+c_2t+c_3t^2)e^{-t}+\frac{1}{24}t^3(t-20)e^{-t}.$$

类型 II

设 $f(t)=[A(t)\cos\beta t+B(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$,其中 α,β 为常数,而 $A(t),B(t)$ 是带实系数的 t 的多项式,其中一个的次数为 m,而另一个的次数不超过 m,那么我们有如下结论:方程(4.29)有形如

$$\tilde{x}=t^k[P(t)\cos\beta t+Q(t)\sin\beta t]e^{\alpha t} \tag{4.31}$$

的特解,这里 k 为特征方程 $F(\lambda)=0$ 的根 $\alpha+i\beta$ 的重数,而 $P(t),Q(t)$ 均为待定的带实系数的次数不高于 m 的 t 的多项式,可以通过比较系数的方法来确定.

注意,正确写出特解形式是待定系数法的关键,在此类型的求解过程中应把 $P(t)$, $Q(t)$ 均假设为 m 次完全多项式来实际演算.

例 7　求方程$\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+4x=\cos 2t$的通解.

解　特征方程$\lambda^2+4\lambda+4=0$有重根$\lambda_1=\lambda_2=-2$,因此对应的齐次线性微分方程的通解为

$$x=(c_1+c_2t)e^{-2t},$$

其中c_1,c_2为任意常数. 现求非齐次线性微分方程的一个特解. 因为$\pm 2i$不是特征值,我们求形如$\tilde{x}=A\cos 2t+B\sin 2t$的特解,将它代入原方程并化简得到

$$8B\cos 2t-8A\sin 2t=\cos 2t,$$

比较同类项系数得$A=0,B=\frac{1}{8}$,从而$\tilde{x}=\frac{1}{8}\sin 2t$. 因此,原方程的通解为

$$x=(c_1+c_2t)e^{-2t}+\frac{1}{8}\sin 2t.$$

常系数线性微分方程(组)还可以应用拉普拉斯变换法进行求解,这往往比较简便,见§5.3.

4.2.3　质点振动

振动是日常生活和工程技术中常见的一种运动形式. 例如钟摆的往复摆动、弹簧的振动、乐器中弦线的振动、机床主轴的振动、电路中的电磁振荡等. 振动问题的研究,在一定条件下,可以归结为二阶常系数线性微分方程的问题来讨论. 下面我们以第一章里所举的力学典型例子数学摆作为具体的物理模型,利用常系数线性微分方程的理论,讨论有关自由振动和强迫振动的问题,并阐明有关的一些物理现象. 至于*RLC*电路中的电磁振荡,完全可以同样地加以讨论.

(1) 无阻尼自由振动

考察数学摆的无阻尼微小自由振动方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\varphi=0, \tag{1.9}$$

记$\frac{g}{l}=\omega^2$,这里$\omega>0$是常数,(1.9)变为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\omega^2\varphi=0. \tag{4.32}$$

这是二阶常系数齐次线性微分方程,它的特征方程为

$$\lambda^2+\omega^2=0,$$

特征值为共轭复根

$$\lambda_{1,2}=\pm\omega i.$$

因此,方程(4.32)的通解为

$$\varphi=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t, \tag{4.33}$$

其中 c_1, c_2 为常数.为了获得明显的物理意义,令

$$\sin\theta=\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}},\quad \cos\theta=\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}},$$

因此,若取 $A=\sqrt{c_1^2+c_2^2}$, $\theta=\arctan\frac{c_1}{c_2}$,则(4.33)可以写成

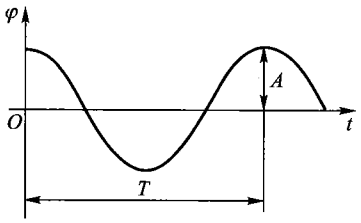
$$\begin{aligned}\varphi&=\sqrt{c_1^2+c_2^2}\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\cos\omega t+\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\sin\omega t\right)\\&=A(\sin\theta\cos\omega t+\cos\theta\sin\omega t),\end{aligned}$$

即

$$\varphi=A\sin(\omega t+\theta),\tag{4.34}$$

这里 A,θ 代替了 c_1, c_2 作为通解中所含的两个任意常数.

从通解(4.34)可以看出,不论反映摆的初始状态的 A 与 θ 为何值,摆的运动轨迹总是一个正弦函数,它是 t 的周期函数(如图(4.1)). 这种运动称为**简谐振动**. 振动往返一次所需的时间称为**周期**,记为 T,这里 $T=\frac{2\pi}{\omega}$;单位时间内振动的次数称为**频率**,记作 ν,这里 $\nu=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$;而 $\omega=2\pi\nu$ 称为**角频率**. 从而得出结论:数学摆的周期只依赖于摆长 l,而与初值无关.



图(4.1)

此外,摆离开平衡位置的最大偏离称为**振幅**. 数学摆的振幅为 A,而 θ 称为**初位相**. 这里,振幅和初位相都依赖于初值条件.

如果把数学摆移至位置 $\varphi=\varphi_0$ 处,然后突然松开,使其自由摆动,这就相当于给定如下的初值条件:

$$t=0\text{ 时},\varphi=\varphi_0,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=0.\tag{4.35}$$

把(4.35)代入通解(4.34),得到

$$\varphi\big|_{t=0}=A\sin\theta=\varphi_0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=A\omega\cos\theta=0.$$

于是得初位相 $\theta=\frac{\pi}{2}$,振幅 $A=\varphi_0$. 因此,所求的特解为

$$\varphi=\varphi_0\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)=\varphi_0\cos\omega t.$$

(2) 有阻尼自由振动

从通解(4.34)可以看到,无阻尼的自由振动是按正弦规律做周期运动,摆动似乎

可以无限期地进行下去. 但是,实际情况并不是如此,摆总是经过一段时间的摆动后就会停下来,这说明我们所得的方程并没有完全反映物体运动的规律. 因为空气阻力实际上总是难免的,因此必须把运动阻力这一因素考虑进去,从而得到第一章已推导过的摆的有阻尼的自由振动方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\varphi=0. \tag{1.10}$$

记$\frac{\mu}{m}=2n$,$\frac{g}{l}=\omega^2$,这里 n,ω 是正常数,(1.10)可以写成

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2n\frac{d\varphi}{dt}+\omega^2\varphi=0. \tag{4.36}$$

它的特征方程为

$$\lambda^2+2n\lambda+\omega^2=0, \tag{4.37}$$

特征值为

$$\lambda_{1,2}=-n\pm\sqrt{n^2-\omega^2}.$$

对于不同的阻尼值 n,微分方程有不同形式的解,它表示不同的运动形式,现分下面三种情况进行讨论:

① 小阻尼的情形:即 $n<\omega$ 的情形,这时 λ_1,λ_2为一对共轭复根,记 $\omega_1=\sqrt{\omega^2-n^2}$,则 $\lambda_{1,2}=-n\pm\omega_1 i$. 而方程(4.36)的通解为

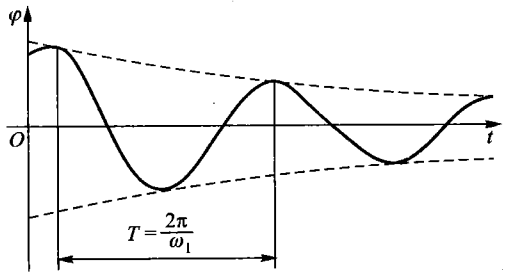
$$\varphi=e^{-nt}(c_1\cos\omega_1 t+c_2\sin\omega_1 t).$$

和前面无阻尼的情形一样,可以把上述通解改写成如下形式:

$$\varphi=Ae^{-nt}\sin(\omega_1 t+\theta), \tag{4.38}$$

这里 A,θ 为任意常数.

从(4.38)可见,摆的运动已不是周期的,振动的最大偏离随着时间增加而不断减小,而摆从一个最大偏离到达同侧下一个最大偏离所需的时间为 $T=\frac{2\pi}{\omega_1}$. 图(4.2)表示函数(4.38)的图形,图中虚线是 $\varphi=Ae^{-nt}$的图形;而实线表示摆运动的偏离随时间变化的规律,它夹在两条虚线中间振动. 因为阻尼的存在,摆的最大偏离随时间增大而不断减小,最后摆趋于平衡位置 $\varphi=0$.



图(4.2)

② 大阻尼的情形：即 $n>\omega$ 的情形，这时 $\lambda_2<\lambda_1<0$，特征方程(4.37)有两个不同的负实根. 方程(4.36)的通解为

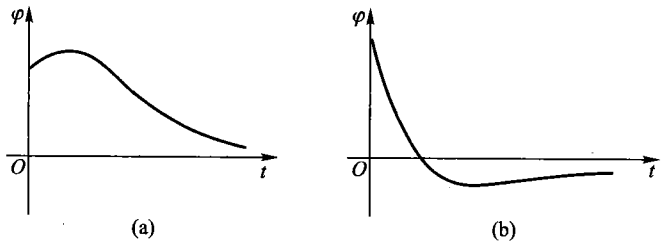
$$\varphi=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}, \tag{4.39}$$

这里 c_1,c_2是任意常数.

从(4.39)可以看出，摆的运动也不是周期的，因为方程$c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}=0$ 对于 t 最多只有一个解，因此摆最多只通过平衡位置一次. 又因为

$$\frac{d\varphi}{dt}=c_1\lambda_1e^{\lambda_1 t}+c_2\lambda_2e^{\lambda_2 t}=e^{\lambda_1 t}[c_1\lambda_1+c_2\lambda_2e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}],$$

知当 t 足够大时，$\frac{d\varphi}{dt}$的符号与 c_1的符号相反. 因此经过一段时间后，摆就单调地趋于平衡位置，因而在大阻尼的情形下，运动不是周期的，且不再具有振动的性质. 摆的运动规律(4.39)的图形如图(4.3)所示.



图(4.3)

③ 临界阻尼的情形：即 $n=\omega$ 的情形，这时特征方程(4.37)有重根 $\lambda_1=\lambda_2=-n$. 方程(4.36)的通解为

$$\varphi=e^{-nt}(c_1+c_2t), \tag{4.40}$$

这里 c_1,c_2是任意常数.

从(4.40)可以看出，摆的运动也不是周期的，它的运动规律(4.40)的图形和图(4.3)类似，且摆也不具有振动的性质. 数值 $n=\omega$ 称为**阻尼的临界值**，这一数值正好足够抑制振动. 这里临界值的意思是指：摆处于振动状态或不振动状态的阻尼分界值，即当$n\geqslant\omega$时，摆不具有振动性质，运动规律如图(4.3)所示；而当$n<\omega$时，摆具有振动性质，运动规律如图(4.2)所示.

(3) 无阻尼强迫振动

以上谈到的无阻尼自由振动和有阻尼自由振动都属于自由振动，它对应于一个二阶常系数齐次线性微分方程. 当一个振动系统还经常受到一个外力作用时，这种振动称为强迫振动. 最常见的外力往往是按周期变化的，这里考察周期外力特别是按正弦变化的外力作用下的强迫振动. 我们仍以数学摆为例.

数学摆的微小强迫振动方程可写为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\varphi=\frac{1}{ml}F(t). \tag{1.11}$$

考察无阻尼强迫振动，即 $\mu=0$ 的情形. 令 $\frac{g}{l}=\omega^2$，设 $\frac{F(t)}{ml}=H\sin pt$，H 为已知常数，p 为外力角频率. 这时(1.11)变为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\omega^2\varphi=H\sin pt. \tag{4.41}$$

方程(4.41)的对应齐次线性微分方程的通解为

$$\varphi=A\sin(\omega t+\theta), \tag{4.34}$$

这里 A,θ 是任意常数. 现求(4.41)的一个特解. 如果 $\omega\neq p$，则(4.41)有形如

$$\tilde{\varphi}=M\cos pt+N\sin pt \tag{4.42}$$

的解，这里 M,N 是待定常数. 将(4.42)代入(4.41)，比较同类项系数，得到

$$M=0,\quad N=\frac{H}{\omega^2-p^2}.$$

因此，方程(4.41)的通解为

$$\varphi=A\sin(\omega t+\theta)+\frac{H}{\omega^2-p^2}\sin pt. \tag{4.43}$$

通解(4.43)由两部分组成，第一部分是无阻尼自由振动的解 $A\sin(\omega t+\theta)$，它代表固有振动；第二部分是振动频率与外力频率相同，而振幅不同的项 $\frac{H}{\omega^2-p^2}\sin pt$，它代表由外力引起的强迫振动. 从(4.43)还可以看出，如果外力的角频率 p 越接近固有角频率 ω，则强迫振动项的振幅就越大.

如果 $p=\omega$，则(4.41)有形如

$$\tilde{\varphi}=t(M\cos\omega t+N\sin\omega t)$$

的解. 将它代入(4.41)，比较同类项系数得到

$$M=-\frac{H}{2\omega},\quad N=0.$$

因而，方程(4.41)的通解为

$$\varphi=A\sin(\omega t+\theta)-\frac{H}{2\omega}t\cos\omega t. \tag{4.44}$$

(4.44)表示随着时间的增大，摆的偏离将无限增加，这种现象称为**共振现象**. 但实际上，随着摆的偏离增加到一定程度，方程(4.41)就不能再描述摆的运动状态了.

(4) 有阻尼强迫振动

这时摆的运动方程(1.11)变为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2n\frac{d\varphi}{dt}+\omega^2\varphi=H\sin pt. \tag{4.45}$$

根据实际需要，我们只讨论小阻尼的情形，即 $n<\omega$ 的情形. 这时(4.45)对应的齐次线性

微分方程的通解为

$$\varphi = Ae^{-nt}\sin(\omega_1 t+\theta), \tag{4.38}$$

这里 A,θ 是任意常数，$\omega_1=\sqrt{\omega^2-n^2}$（见(2)有阻尼自由振动中的情形①）.

现求(4.45)的一个特解，这时可以寻求形如

$$\tilde{\varphi} = M\cos pt + N\sin pt \tag{4.46}$$

的特解，这里 M,N 是待定常数. 将(4.46)代入(4.45)，比较同类项系数，得到

$$M=\frac{-2npH}{(\omega^2-p^2)^2+4n^2p^2},\quad N=\frac{(\omega^2-p^2)H}{(\omega^2-p^2)^2+4n^2p^2}.$$

为了获得更明显的物理意义，令

$$M=H^*\sin\theta^*,\quad N=H^*\cos\theta^*,$$

即令

$$H^*=\sqrt{M^2+N^2}=\frac{H}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+4n^2p^2}} \tag{4.47}$$

及

$$\tan\theta^*=\frac{-2np}{\omega^2-p^2},$$

这时(4.46)可以写成

$$\tilde{\varphi}=H^*\sin\theta^*\cos pt+H^*\cos\theta^*\sin pt=H^*\sin(pt+\theta^*).$$

因此，(4.45)的通解为

$$\varphi=Ae^{-nt}\sin(\omega_1 t+\theta)+\frac{H}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+4n^2p^2}}\sin(pt+\theta^*). \tag{4.48}$$

从(4.48)可以看到，摆的运动由两部分叠加而成，第一部分是有阻尼的自由振动，它是系统本身的固有振动，它随时间的增长而衰减；第二部分是由外力而引起的强迫振动项，它的振幅不随时间的增长而衰减. 因此，考虑强迫振动时主要就考虑后一项 $\frac{H}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+4n^2p^2}}\sin(pt+\theta^*)$，它与外力的频率一样，但相位和振幅都不同了.

我们现在来研究外力的角频率 p 取什么值时所引起的强迫振动项的振幅 H^* 达到最大值. 从(4.47)看出，只需讨论当 p 取何值时 $(\omega^2-p^2)^2+4n^2p^2$ 达到最小值即可. 为此，记 $\Phi(p)=(\omega^2-p^2)^2+4n^2p^2$，将它对 p 求导数，并令导数等于零，得到

$$\Phi'(p)=-4p(\omega^2-p^2)+8n^2p=0.$$

因此，只要 $2n^2<\omega^2$，即只要阻尼很小时，就解得

$$p=\sqrt{\omega^2-2n^2}. \tag{4.49}$$

而当 p 取此值时，我们有 $\Phi''(p)=8p^2>0$，因而 $\Phi(p)$ 在

$$p=\sqrt{\omega^2-2n^2}$$

时达到最小值.

把(4.49)代入(4.47),得到相应的最大振幅值为

$$H_{\max}^{*}=\frac{H}{\sqrt{4n^4+4n^2(\omega^2-2n^2)}}=\frac{H}{2n\sqrt{\omega^2-n^2}}.$$

就是说,当外力的角频率 $p=\sqrt{\omega^2-2n^2}$ 时,强迫振动项的振幅达到最大值,这时角频率称为**共振频率**,所产生的现象也叫**共振现象**.

应用实例
悬链线

在发生共振现象时,一个振动系统在不太大的外力作用下会产生很大振幅的振动,以致引起破坏性的效果. 例如一个电动机固定在一个能做弹性振动的底座上,电动机转动时产生周期性的力,此力作用于底座,使底座处在强迫振动的状态中,当外力的频率接近于固有频率时,在无阻尼或小阻尼的情形,就会发生共振现象,电动机传给底座很大的能量,因而底座振动的振幅能够增大到使底座损坏的程度. 因此,在工程技术中往往要尽量避免共振现象的发生. 但是,只要我们掌握共振的规律,也可以利用共振为我们服务. 例如,收音机的调频就是利用共振的作用,乐器的构造也是利用共振的原理.

习 题 4.2

1. 证明命题 1 和命题 2.

2. 求解下列常系数线性微分方程:

(1) $x^{(4)}-5x''+4x=0$;

(2) $x'''-3ax''+3a^2x'-a^3x=0$;

(3) $x^{(5)}-4x'''=0$;

(4) $x''+x'+x=0$;

(5) $s''-a^2s=t+1$;

(6) $x'''-4x''+5x'-2x=2t+3$;

(7) $x^{(4)}-2x''+x=t^2-3$;

(8) $x'''-x=\cos t$;

(9) $x''+x'-2x=8\sin 2t$;

(10) $x'''-x=e^t$;

(11) $s''+2as'+a^2s=e^t$;

(12) $x''+6x'+5x=e^{2t}$;

(13) $x''-2x'+3x=e^{-t}\cos t$;

(14) $x''+x=\sin t-\cos 2t$;

(15) $x''-4x'+4x=e^t+e^{2t}+1$;

(16) $x''+9x=t\sin 3t$;

(17) $x''-2x'+2x=te^t\cos t$;

(18) $x''+2x'+5x=4e^{-t}+17\sin 2t$;

(19) $x''+x=\dfrac{1}{\sin^3 t}$;

(20) $x''+x=1-\dfrac{1}{\sin t}$.

3. 设 $\varphi(t)$ 是方程 $x''+k^2x=f(t)$ 的解,其中 k 为常数,函数 $f(t)$ 于 $0\leqslant t<+\infty$ 连续,试证:

(1) 当 $k\neq 0$ 时,能够选择常数 c_1,c_2,使得

$$\varphi(t)=c_1\cos kt+\frac{c_2}{k}\sin kt+\frac{1}{k}\int_0^t \sin k(t-s)\cdot f(s)\,ds\ (0\leqslant t<+\infty);$$

(2) 当 $k=0$ 时,方程的通解可表示为

$$x=c_1+c_2t+\int_0^t (t-s)f(s)\,ds\ (0\leqslant t<+\infty),$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

4. 给定方程 $x'''+5x''+6x'=f(t)$，其中 $f(t)$ 在 $-\infty<t<+\infty$ 上连续. 设 $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ 是上述方程的两个解，证明极限 $\lim\limits_{t\to\infty}[\varphi_1(t)-\varphi_2(t)]$ 存在.

5. 形式为

$$x^n\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}+a_1x^{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_ny=0$$

的方程称为**欧拉方程**，这里 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为常数. 引进自变量的变换①

$$x=\mathrm{e}^t,\quad t=\ln x,$$

可将之化为常系数线性方程，试证明之，并求解方程

(1) $t^2x''+tx'-x=0$;　　(2) $t^2x''-4tx'+6x=t$.

§ 4.3 高阶微分方程的降阶和幂级数解法

一般的高阶微分方程没有普遍的解法，处理问题的基本原则是降阶，利用变换把高阶微分方程的求解问题化为较低阶的方程来求解. 因为一般说来，低阶微分方程的求解会比高阶微分方程方便些. 特别地，对于二阶(变系数)齐次线性微分方程，如能知道它的一个非零特解，则可利用降阶法求得与它线性无关的另一个特解，从而得到方程的通解；对于非齐次线性微分方程，只需再运用常数变易法求出它的一个特解，问题也就解决了. 因此，问题的关键就在于寻找齐次线性微分方程的一个非零特解. 本节主要介绍一些可降阶的方程类型和求二阶线性微分方程的幂级数解法.

4.3.1 可降阶的一些方程类型

n 阶微分方程一般可写为

$$F(t, x, x', \cdots, x^{(n)})=0.$$

下面讨论三类特殊方程的降阶问题.

(1) 方程不显含未知函数 x，或更一般地，设方程不含 $x, x', \cdots, x^{(k-1)}$，即方程形如

$$F(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \cdots, x^{(n)})=0\quad(1\leqslant k\leqslant n). \tag{4.50}$$

若令 $x^{(k)}=y$，则方程即降为关于 y 的 $n-k$ 阶方程

$$F(t, y, y', \cdots, y^{(n-k)})=0. \tag{4.51}$$

如果能够求得方程(4.51)的通解

$$y=\varphi(t, c_1, c_2, \cdots, c_{n-k}),$$

即

$$x^{(k)}=\varphi(t, c_1, c_2, \cdots, c_{n-k}),$$

① 如果 $x<0$，则用 $x=-\mathrm{e}^t$，所得结果一样，今后为确定起见，认定 $x>0$，但最后结果应以 $t=\ln|x|$ 代回.

再经过 k 次积分得到

$$x=\psi(t,c_1,c_2,\cdots,c_n),$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为任意常数.可以验证,这就是方程(4.50)的通解.

特别地,若二阶方程不显含 x(相当于 $n=2,k=1$ 的情形),则用变换 $x'=y$ 便把方程化为一阶方程.

例 1　求方程 $\frac{d^5x}{dt^5}-\frac{1}{t}\frac{d^4x}{dt^4}=0$ 的解.

解　令 $\frac{d^4x}{dt^4}=y$,则方程化为

$$\frac{dy}{dt}-\frac{1}{t}y=0,$$

这是一阶方程,积分后得 $y=ct$,即 $\frac{d^4x}{dt^4}=ct$.于是

$$x=c_1t^5+c_2t^3+c_3t^2+c_4t+c_5,$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_5$ 为任意常数,这就是原方程的通解.

(2) 不显含自变量 t 的方程

$$F(x,x',\cdots,x^{(n)})=0. \tag{4.52}$$

我们指出,若令 $x'=y$,并以它为新未知函数,而视 x 为新自变量,则方程就可降低一阶.

事实上,在所作的假定下,$x'=y,x''=\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}x'=y\frac{dy}{dx},x'''=y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2\frac{d^2y}{dx^2},\cdots$. 采用数学归纳法不难证明,$x^{(k)}$ 可用 $y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}}$ 表示($k\leqslant n$). 将这些表达式代入(4.52)就得到

$$G\left(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=0,$$

这是关于 x,y 的 $n-1$ 阶方程,比原方程(4.52)低一阶.

例 2　求解方程 $xx''+(x')^2=0$.

解　令 $x'=y$,直接计算可得 $x''=y\frac{dy}{dx}$,于是原方程化为

$$xy\frac{dy}{dx}+y^2=0,$$

得到 $y=0$ 或 $x\frac{dy}{dx}+y=0$,积分后得 $y=\frac{c}{x}$,即 $x'=\frac{c}{x}$. 所以

$$x^2=c_1t+c_2(c_1=2c),$$

这就是原方程的通解.

(3) 齐次线性微分方程

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=0. \tag{4.2}$$

我们知道,方程(4.2)的求解问题归结为寻求方程的 n 个线性无关的特解,但如何求这些特解呢?没有普遍的方法可循.这是与常系数线性微分方程的极大差异之处.但是我们指出,如果知道方程的一个非零特解,则利用变换,可将方程降低一阶;或更一般地,若知道方程的 k 个线性无关的特解,则可通过一系列同类型的变换,使方程降低 k 阶,并且新得到的 $n-k$ 阶方程也是齐次线性的.

事实上,设 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 是方程(4.2)的 k 个线性无关解,显然 $x_i\neq 0(i=1,2,\cdots,k)$.令 $x=x_k y$,直接计算可得

$$x'=x_k y'+x_k' y,$$

$$x''=x_k y''+2x_k' y'+x_k'' y,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^{(n)}=x_k y^{(n)}+nx_k' y^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{2}x_k'' y^{(n-2)}+\cdots+x_k^{(n)} y.$$

将这些关系式代入(4.2),得到

$$x_k y^{(n)}+[nx_k'+a_1(t)x_k]y^{(n-1)}+\cdots+[x_k^{(n)}+a_1(t)x_k^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x_k]y=0,$$

这是关于 y 的 n 阶方程,且各项系数是 t 的已知函数,而 y 的系数恒等于零,因为 x_k 是(4.2)的解.因此,如果引入新未知函数 $z=y'$,并在 $x_k\neq 0$ 的区间上用 x_k 除方程的各项,我们便得到形如

$$z^{(n-1)}+b_1(t)z^{(n-2)}+\cdots+b_{n-1}(t)z=0 \tag{4.53}$$

的 $n-1$ 阶齐次线性微分方程.

方程(4.53)的解与(4.2)的解之间的关系,由以上变换知道为 $z=y'=\left(\frac{x}{x_k}\right)'$,或 $x=x_k\int z\mathrm{d}t$.因此,对于方程(4.53),我们就知道它的 $k-1$ 个线性无关解 $z_i=\left(\frac{x_i}{x_k}\right)'(i=1,2,\cdots,k-1)$.

事实上,$z_1,z_2,\cdots,z_{k-1}$ 是方程(4.53)的解,这一点是显然的.假设这 $k-1$ 个解之间存在关系式

$$\alpha_1 z_1+\alpha_2 z_2+\cdots+\alpha_{k-1}z_{k-1}\equiv 0$$

或

$$\alpha_1\left(\frac{x_1}{x_k}\right)'+\alpha_2\left(\frac{x_2}{x_k}\right)'+\cdots+\alpha_{k-1}\left(\frac{x_{k-1}}{x_k}\right)'\equiv 0,$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{k-1}$ 是常数.那么,就有

$$\alpha_1\frac{x_1}{x_k}+\alpha_2\frac{x_2}{x_k}+\cdots+\alpha_{k-1}\frac{x_{k-1}}{x_k}\equiv -\alpha_k$$

或

$$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_{k-1}x_{k-1}+\alpha_k x_k\equiv 0.$$

由于 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 线性无关，故必有 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k=0$. 这就是说 $z_1,z_2,\cdots,z_{k-1}$ 是线性无关的.

因此，若对方程(4.53)仿以上做法，令 $z=z_{k-1}\int u\mathrm{d}t$，则可将方程化为关于 u 的 $n-2$ 阶齐次线性微分方程

$$u^{(n-2)}+c_1(t)u^{(n-3)}+\cdots+c_{n-2}(t)u=0, \tag{4.54}$$

并且还知道方程(4.54)的 $k-2$ 个线性无关解

$$u_i=\left(\frac{z_i}{z_{k-1}}\right)', \ i=1,2,\cdots,k-2.$$

由上面的讨论我们看到，利用 k 个线性无关特解当中的一个解 x_k，可以把方程(4.2)降低一阶，成为 $n-1$ 阶齐次线性微分方程(4.53)，并且知道它的 $k-1$ 个线性无关解；而利用两个线性无关解 x_{k-1},x_k，则可以把方程(4.2)降低两阶，成为 $n-2$ 阶齐次线性微分方程(4.54)，同时知道它的 $k-2$ 个线性无关解. 依此类推，继续上面的做法，若利用了方程的 k 个线性无关解 $x_1,x_2,\cdots,x_k$，则最后我们就得到一个 $n-k$ 阶齐次线性微分方程. 这就是说把方程(4.2)降低了 k 阶.

特别地，对于二阶齐次线性微分方程，如果知道它的一个非零解，则方程的求解问题就解决了.

例 3　已知 $x=x_1=\dfrac{\sin t}{t}$ 是方程 $x''+\dfrac{2}{t}x'+x=0$ 的一个解，试求方程的通解.

解　由上面讨论知道，经变换 $x=x_1\int y\mathrm{d}t$ 后，方程就化成

$$x_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+(2x_1'+p(t)x_1)y=0,$$

$p(t)=\dfrac{2}{t}$，这是一阶线性微分方程. 解之得

$$y=c\frac{1}{x_1^2}\mathrm{e}^{-\int p(t)\mathrm{d}t}.$$

因而

$$x=\frac{\sin t}{t}\left(c_1+c\int\frac{t^2}{\sin^2 t}\cdot\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t\right)=\frac{\sin t}{t}(c_1-c\cot t)=\frac{1}{t}(c_1\sin t-c\cos t), \tag{4.55}$$

其中 c_1,c 是任意常数，这就是方程的通解.

4.3.2　二阶线性微分方程的幂级数解法

由上面讨论知道，二阶变系数齐次线性微分方程的求解问题归结为寻求它的一个

非零解. 由于方程的系数是自变量的函数,我们不能像 §4.2 那样利用代数方法去求解. 但是,从微积分学知道,在满足某些条件下,可以用幂级数来表示一个函数. 因此,自然想到,能否用幂级数来表示微分方程的解呢? 下面就来讨论这一问题. 首先看两个简单的例子. 按照微积分学的一般习惯,这里也以 y 表示未知函数,而以 x 表示自变量.

例 4 求方程 $y''-xy=0$ 的通解.

解 设

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{4.56}$$

为方程的解,这里 $a_i(i=0,1,2,\cdots,n,\cdots)$ 是待定常数,将它对 x 求导数两次,有

$$y''=2\cdot 1a_2+3\cdot 2a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+(n+1)na_{n+1}x^{n-1}+\cdots.$$

将 y,y'' 的表达式代入方程,并比较 x 的同次幂的系数,得到

$$2\cdot 1a_2=0,\ 3\cdot 2a_3-a_0=0,\ 4\cdot 3a_4-a_1=0,5\cdot 4a_5-a_2=0,\cdots,$$

或一般地可推得

$$a_{3k}=\frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot\cdots\cdot(3k-1)\cdot 3k},$$

$$a_{3k+1}=\frac{a_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot\cdots\cdot 3k\cdot(3k+1)},$$

$$a_{3k+2}=0,$$

其中 a_0,a_1 是任意的,因而

$$y=a_0\left[1+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}+\cdots+\frac{x^{3n}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot\cdots\cdot(3n-1)\cdot 3n}+\cdots\right]+$$

$$a_1\left[x+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\cdots+\frac{x^{3n+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot\cdots\cdot 3n\cdot(3n+1)}+\cdots\right].$$

这个幂级数的收敛半径是无限大的,因而级数的和(其中包括两个任意常数 a_0 及 a_1)便是所要求的通解.

例 5 求方程 $y''-2xy'-4y=0$ 的满足初值条件 $y(0)=0$ 及 $y'(0)=1$ 的解.

解 设(4.56)为方程的解. 首先,利用初值条件,可以得到

$$a_0=0,\quad a_1=1,$$

因而

$$y=x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

$$y'=1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots,$$

$$y''=2a_2+3\cdot 2a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots.$$

将 y,y',y'' 的表达式代入原方程,合并 x 的同次幂的项,并令各项系数等于零,得到

$$a_2=0,a_3=1,a_4=0,\cdots,a_n=\frac{2}{n-1}a_{n-2},\cdots,$$

因而

$$a_5=\frac{1}{2!},a_6=0,a_7=\frac{1}{6}=\frac{1}{3!},a_8=0,a_9=\frac{1}{4!},\cdots,$$

最后得

$$a_{2k+1}=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{(k-1)!}=\frac{1}{k!},\quad a_{2k}=0,$$

对一切正整数 k 成立.

将 a_i $(i=0,1,2,\cdots)$ 的值代回(4.56)就得到

$$y=x+x^3+\frac{x^5}{2!}+\cdots+\frac{x^{2k+1}}{k!}+\cdots=x\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\cdots+\frac{x^{2k}}{k!}+\cdots\right)=xe^{x^2},$$

这就是方程的满足所给初值条件的解.

是否所有方程都能按以上方式求出其幂级数解？或者说究竟方程应该满足什么条件才能保证它的解可用幂级数来表示呢？级数的形式怎样？其收敛区间又如何？这些问题,在微分方程解析理论中有完满的解答,但因讨论时需要涉及解析函数等较专门的知识,在此我们仅叙述有关结果而不加证明. 若要了解定理的证明过程,可参考有关书籍.

考虑二阶齐次线性微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0 \tag{4.57}$$

满足初值条件 $y(x_0)=y_0$ 及 $y'(x_0)=y_0'$ 的情况.

不失一般性,可设 $x_0=0$,否则,我们引进新变量 $t=x-x_0$,经此变换,方程的形式不变,但这时对应于 $x=x_0$ 的就是 $t_0=0$ 了.因此,今后我们总认为 $x_0=0$.

定理 7　若方程(4.57)中系数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 都能展开成 x 的幂级数,且收敛区间为 $|x|<R$,则方程(4.57)有形如

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{4.58}$$

的特解,也以 $|x|<R$ 为级数的收敛区间.

在上两例中方程显然满足定理的条件,系数 $-x$,$-2x$ 和 -4 可看作是在全数轴上收敛的幂级数,故方程的解也在全数轴上收敛. 但有些方程,例如 n 阶**贝塞尔(Bessel)方程**

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0, \tag{4.59}$$

这里 n 为非负常数,不一定是正整数. 在此 $p(x)=\frac{1}{x}$,$q(x)=1-\frac{n^2}{x^2}$. 显然它不满足定理

7 的条件,因而不能肯定有形如(4.58)的特解. 但它满足下述定理 8 的条件,从而具有别种形式的幂级数解.

定理 8 若方程(4.57)中系数 $p(x)$,$q(x)$具有这样的性质,即 $xp(x)$和 $x^2q(x)$均能展开成 x 的幂级数,且收敛区间为 $|x|<R$,若 $a_0\neq 0$,则方程(4.57)有形如

$$y=x^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

即

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{\alpha+n} \tag{4.60}$$

的特解,α 是一个待定的常数. 级数(4.60)也以 $|x|<R$ 为收敛区间. 若 $a_0=0$,或更一般地,$a_i=0$ $(i=0,1,2,\cdots,m-1)$,但 $a_m\neq 0$,则引入记号 $\beta=\alpha+m$,$b_k=a_{m+k}$,则

$$y=x^{\alpha}\sum_{n=m}^{\infty}a_nx^n=x^{\alpha+m}\sum_{k=0}^{\infty}a_{m+k}x^k=x^{\beta}\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k,$$

这里 $b_0=a_m\neq 0$,而 β 仍为待定常数.

***例 6** 求解 n 阶贝塞尔方程(4.59).

解 将方程改写成

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{x^2-n^2}{x^2}y=0.$$

易见,它满足定理 8 的条件,且 $xp(x)=1$,$x^2q(x)=x^2-n^2$,按 x 展开成的幂级数收敛区间为$(-\infty,+\infty)$,由定理 8,方程有形如

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{\alpha+k} \tag{4.61}$$

的解,这里 $a_0\neq 0$,而 a_k和 α 是待定常数. 将(4.61)代入(4.59)中,得

$$x^2\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha+k)(\alpha+k-1)a_kx^{\alpha+k-2}+x\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha+k)a_kx^{\alpha+k-1}+(x^2-n^2)\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{\alpha+k}=0,$$

把 x 同幂次项合并在一起,上式变为

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(\alpha+k)(\alpha+k-1)+(\alpha+k)-n^2]a_kx^{\alpha+k}+\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{\alpha+k+2}=0.$$

令各项的系数等于零,得一系列的代数方程

$$\begin{cases}a_0(\alpha^2-n^2)=0,\\ a_1[(\alpha+1)^2-n^2]=0,\\ a_k[(\alpha+k)^2-n^2]+a_{k-2}=0,\quad k=2,3,\cdots.\end{cases} \tag{4.62}$$

因为 $a_0\neq 0$,故从(4.62)的第一个方程解得 α 的两个值

$$\alpha=n \quad 和 \quad \alpha=-n.$$

先考虑 $\alpha=n$ 时方程(4.59)的一个特解. 这时我们总可以从(4.62)中逐个地确定

所有的系数 a_k. 把 $\alpha=n$ 代入(4.62),得到

$$a_1=0,\ a_k=-\frac{a_{k-2}}{k(2n+k)},\ k=2,3,\cdots,$$

或按下标为奇数或偶数,分别有

$$\begin{cases} a_{2k+1}=\dfrac{-a_{2k-1}}{(2k+1)(2n+2k+1)}, \\ a_{2k}=\dfrac{-a_{2k-2}}{2k(2n+2k)}, \end{cases} \quad k=1,2,\cdots,$$

从而求得

$$a_{2k-1}=0,\quad k=1,2,\cdots,$$

$$a_2=-\frac{a_0}{2^2\cdot(n+1)},$$

$$a_4=(-1)^2\frac{a_0}{2^4\cdot 2!\,(n+1)(n+2)},$$

$$a_6=(-1)^3\frac{a_0}{2^6\cdot 3!\,(n+1)(n+2)(n+3)},$$

一般地

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{a_0}{2^{2k}\cdot k!\,(n+1)(n+2)\cdots(n+k)},\ k=1,2,\cdots.$$

将各 a_k代入(4.61),得到方程(4.59)的一个解

$$y_1=a_0x^n+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}\cdot k!\,(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}x^{2k+n}. \tag{4.63}$$

既然是求(4.59)的特解,我们不妨令

$$a_0=\frac{1}{2^n\Gamma(n+1)},$$

其中函数 $\Gamma(s)$定义如下:

当 $s>0$ 时,$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$;当 $s<0$ 且为非整数时,由递推公式 $\Gamma(s)=\frac{1}{s}\Gamma(s+1)$定义.

$\Gamma(s)$具有性质

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s),\quad \Gamma(n+1)=n!,\ n\text{ 为正整数}.$$

而(4.63)变为

$$y_1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)\cdots(n+1)\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

注意到 Γ 函数的性质,即有

$$y_1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}\equiv \mathrm{J}_n(x),$$

$\mathrm{J}_n(x)$是由贝塞尔方程(4.59)定义的特殊函数,称为 n **阶贝塞尔函数**.

因此,对于 n 阶贝塞尔方程,它总有一个特解 $\mathrm{J}_n(x)$. 为了求得另一个与 $\mathrm{J}_n(x)$线性无关的特解,我们自然想到,求 $\alpha=-n$ 时方程(4.59)的形如

$$y_2=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{-n+k}$$

的解. 注意到只要 n 不为非负整数,像以上对 $\alpha=n$ 时的求解过程一样,总可以求得

$$a_{2k-1}=0,\ k=1,2,\cdots,$$

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{a_0}{2^{2k}\cdot k!\,(-n+1)(-n+2)\cdots(-n+k)},\ k=1,2,\cdots,$$

使之满足(4.62)中的一系列方程,因而

$$y_2=a_0x^{-n}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^ka_0}{2^{2k}\cdot k!\,(-n+1)(-n+2)\cdots(-n+k)}x^{2k-n}\tag{4.64}$$

是(4.59)的一个特解. 此时,若令 $a_0=\dfrac{1}{2^{-n}\Gamma(-n+1)}$,则(4.64)变为

$$y_2=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}\equiv \mathrm{J}_{-n}(x),$$

$\mathrm{J}_{-n}(x)$称为$-n$ **阶贝塞尔函数**.

利用达朗贝尔判别法不难验证(4.63)和(4.64)对于任何 x 值(在(4.64)中 $x\neq 0$)都是收敛的,因此当 n 不为非负整数时,$\mathrm{J}_n(x)$和 $\mathrm{J}_{-n}(x)$都是方程(4.59)的解,而且是线性无关的,因为它们可展开为由 x 的不同幂次开始的级数,从而它们的比不可能是常数. 于是方程(4.59)的通解可写为

$$y=c_1\mathrm{J}_n(x)+c_2\mathrm{J}_{-n}(x),$$

这里 c_1,c_2是任意常数. 此情形的 $\mathrm{J}_n(x)$和 $\mathrm{J}_{-n}(x)$称为**第一类贝塞尔函数**.

当 n 为自然数时,虽然仍可由(4.62)求出 $a_{2k}(k=n+1,n+2,\cdots)$,a_{2n}任意,但容易验证,由此得到的 $\mathrm{J}_{-n}(x)$与 $\mathrm{J}_n(x)$线性相关. 为了求出与 $\mathrm{J}_n(x)$线性无关的另一个特解,要用其他方法. 所求得的特解称为**第二类贝塞尔函数**,在此不作深入介绍.

排疑解惑

第二类贝塞尔函数及广义贝塞尔方程

例 7 求方程 $x^2y''+xy'+\left(4x^2-\dfrac{9}{25}\right)y=0$ 的通解.

解 引入新变量 $t=2x$,我们有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=4\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}.$$

将上述关系式代入原方程，得到

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+\left(t^2-\frac{9}{25}\right)y=0. \tag{4.65}$$

这是 $n=\frac{3}{5}$ 的贝塞尔方程. 由例 6 可知，方程(4.65)的通解可表示为

$$y=c_1J_{\frac{3}{5}}(t)+c_2J_{-\frac{3}{5}}(t).$$

代回原变量，就得到原方程的通解

$$y=c_1J_{\frac{3}{5}}(2x)+c_2J_{-\frac{3}{5}}(2x),$$

其中 c_1,c_2 是任意常数.

*4.3.3　第二宇宙速度的计算

作为这一节的应用，我们计算发射人造卫星的最小速度，即所谓第二宇宙速度. 在这个速度下，物体将摆脱地球的引力，像地球一样绕着太阳运行，成为人造行星.

让我们首先建立物体垂直上抛运动的微分方程. 以 M 和 m 分别表示地球和物体的质量. 按牛顿万有引力定律，作用于物体的引力 F(空气阻力忽略不计)为

$$F=k\frac{mM}{r^2}, \tag{4.66}$$

这里 r 表示地球的中心和物体质心之间的距离，k 为万有引力常数. 因此，物体运动规律应满足微分方程

$$m\frac{d^2r}{dt^2}=-k\frac{mM}{r^2}$$

或

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-k\frac{M}{r^2}, \tag{4.67}$$

这里的负号表示物体的加速度是负的.

设地球半径为 $R(R=6.371\times10^6\ \text{m})$，物体发射速度为 v_0，因此当物体刚刚离开地球表面时，有 $r=R,\frac{dr}{dt}=v_0$，即应取初值条件为

$$\text{当 } t=0 \text{ 时}, r=R,\ \frac{dr}{dt}=v_0.$$

方程(4.67)不显含自变量 t，应用 4.3.1 讨论过的方法，即令 $\frac{dr}{dt}=v$，把方程降阶成为一阶方程

$$v\frac{dv}{dr}=-k\frac{M}{r^2},$$

解得

$$\frac{v^2}{2}=kM\frac{1}{r}+c.$$

注意到这时初值条件为 $r=R$ 时，$v=v_0$. 利用这些数据即可决定常数

$$c=\frac{v_0^2}{2}-\frac{kM}{R},$$

因而

$$\frac{v^2}{2}=\frac{kM}{r}+\left(\frac{v_0^2}{2}-\frac{kM}{R}\right). \tag{4.68}$$

因为物体运动速度必须始终保持是正的，即$\frac{v^2}{2}>0$，而随着 r 的不断增大，量$\frac{kM}{r}$变得任意小. 因此，由式(4.68)看到，条件$\frac{v^2}{2}>0$ 要对所有的 r 都成立，只有不等式

$$\frac{v_0^2}{2}-\frac{kM}{R}\geqslant 0$$

或

$$v_0\geqslant\sqrt{\frac{2kM}{R}}$$

成立. 因而最小发射速度由下面式子决定：

$$v_0=\sqrt{\frac{2kM}{R}}. \tag{4.69}$$

在地球表面，即 $r=R$ 时，重力加速度为 $g(g=9.81\ \mathrm{m/s^2})$，由此根据(4.66)，就有 $g=k\frac{M}{R^2}$，于是 $kM=gR^2$. 以此代入(4.69)得到

$$v_0=\sqrt{2gR}=\sqrt{2\times9.81\times6.371\times10^6}\approx11.2\times10^3(\mathrm{m/s}),$$

我们通常所说的第二宇宙速度指的就是 $v_0=11.2\ \mathrm{km/s}$ 这个速度.

我们所说的宇宙速度是指物体从地球出发要脱离天体重力场的四个较有代表性的初始速度的统称. 上面已介绍第二宇宙速度，另外三个为第一、第三和第四宇宙速度：第一宇宙速度是指在地球上发射的物体绕地球表面做圆周运动所需的最小初始速度，为 7.9 km/s；第三宇宙速度是指在地球上发射的物体摆脱太阳系所需的最小初始速度，为 16.7 km/s；第四宇宙速度是指在地球上发射的物体摆脱银河系引力束缚，飞出银河系所需的最小初始速度，约为 110 km/s 至 120 km/s.

习 题 4.3

1. 求解下列方程：

(1) $x''=\frac{1}{2x'}$ $\left(\text{这里 } x'=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, x''=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\text{，以下同}\right)$；

(2) $xx''-(x')^2+(x')^3=0$;

(3) $x''+\frac{2}{1-x}(x')^2=0$;

(4) $x''+\sqrt{1-(x')^2}=0$;

(5) $ax''+[1+(x')^2]^{3/2}=0$ (常数 $a\neq 0$);

(6) $x''-\frac{1}{t}x'+(x')^2=0$ (提示:方程两端除以 x').

2. 用幂级数解法求解下列方程:

(1) $x''+tx'+x=0, x(0)=0, x'(0)=1$;

(2) $(1-t)x''+x=0$;

(3) $x''-tx'-x=0$.

3. 求解贝塞尔方程 $t^2x''+tx'+\left(t^2-\frac{1}{4}\right)x=0$. $\left(\text{提示}:\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.\right)$

4. 一个物体在大气中降落,初速度为零,空气阻力与速度的平方成正比,求该物体的运动规律.

5. 试证:对于二阶齐次线性微分方程

$$x''+p(t)x'+q(t)x=0,$$

其中 $p(t), q(t)$ 为连续函数,

(1) 若 $p(t)\equiv -tq(t)$,则 $x=t$ 是方程的解;

(2) 若存在常数 m 使得 $m^2+mp(t)+q(t)\equiv 0$,则方程有解 $x=e^{mt}$;

(3) 若 $x_1(t), x_2(t)$ 是方程的两个线性无关的解,则方程的系数 $p(t), q(t)$ 由 $x_1(t), x_2(t)$ 唯一确定,且 $x_1(t), x_2(t)$ 没有共同的零点.

6. 求解方程 $tx''-2(1+t)x'+(2+t)x=0$ $(t\neq 0)$.

7. 假设 $\varphi(t, c_1, c_2, \cdots, c_{n-k})$ 是方程(4.51)的通解,而函数 $\psi(t, c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是 $x^{(k)}=\varphi(t, c_1, c_2, \cdots, c_{n-k})$ 的通解,试证 $\psi(t, c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 就是方程(4.50)的通解,这里 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-k}, \cdots, c_n$ 为任意常数.

本章学习要点

本章着重介绍了线性微分方程的基本理论和求解方法,主要结论可概括如下:

1. 关于解的性质

线性微分方程的解的性质,主要是:(1) 齐次线性微分方程的解的叠加性;(2) 非齐次线性微分方程的解的叠加性;(3) n 阶齐次线性微分方程的所有解构成一个 n 维线性空间;(4) 基本解组的以任意常数为系数的线性组合构成齐次线性微分方程的通解;(5) 非齐次线性微分方程的通解可表示为它的一个特解与对应齐次线性微分方程的通解之和. 这些性质是线性微分方程所特有的.

2. 关于求解的方法

关于线性微分方程的解法,我们主要介绍了四种较常用的方法,它们是:(1) 求常系数齐次线性微分方程的基本解组的欧拉待定指数函数法(又称特征值法);(2) 求常系数非齐次线性微分方程的特解的待定系数法;(3) 求一般非齐次线性微分方程特解的常数变易法;(4) 求一般二阶齐次线性微分方程的幂级数解法.

特征值法的要点是把微分方程的求解问题化为代数方程的求根问题;待定系数法用于方程右端$f(t)$是某些基本函数的情况,常见的有:多项式、指数函数、正弦(或余弦)函数以及它们的某种乘积组合. 待定系数法和特征值法的特点就在于不需通过积分运算,而只要解代数方程或加上微分运算即可求得微分方程的解. 我们一定要记住常系数线性微分方程所固有的这种特性.

幂级数解法的思想和待定系数法有类似之处,所不同者,前者待定的是级数的系数,因而通常计算量较大. 其实幂级数解法适用于二阶以上高阶齐次线性微分方程与非齐次线性微分方程,也能求其特解或通解,特别是通过幂级数解法求解某些特殊方程而产生某些特殊函数形式的解,例如,求解贝塞尔方程产生贝塞尔函数;求解勒让德(Legendre)方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0 \quad (n\text{ 为常数})$$

产生勒让德多项式等,它们都在现代物理中有非常重要的地位,这更体现了幂级数解法的重要意义和应用价值. 希望深入学习和研究的读者可参阅有关书籍[132].

在线性微分方程的解法中还有一种方法,就是拉普拉斯变换法,将时间域上的变化化为频率域上的响应. 拉普拉斯变换法应用广泛,但因现在可以用计算机数学软件方便解出,且第五章亦涉及拉普拉斯变换法,我们不在这里专门列出.

不同的方法用于不同类型的方程,这是应用时必须特别注意之点.

第五章 线性微分方程组

我们在第一章中可以看到在相当广泛的实际应用问题中，比较复杂的数学模型都将会导出多于一个微分方程的方程组，而且通过某些简化的假设和适当的变换，这种方程组又可化为一阶线性微分方程组. 本章研究线性微分方程组的理论. 类似于第四章所指出过的，线性微分方程组是微分方程理论的重要组成部分.

为了研究这些线性微分方程组，我们引进向量和矩阵的记号，并广泛利用线性代数（向量空间和矩阵代数）的结果. 很多微分方程的理论只有借助于线性代数的知识才可以作出适当和充分的解释，希望读者能很好地领会这一章的内容. 作为本章所得的每一个结果的特殊情形，都可以得到第四章已讨论过的高阶线性微分方程的一个相应结果.

§ 5.1 线性微分方程组的一般理论

我们考察形如

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t), \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases} \tag{5.1}$$

的一阶线性微分方程组，其中已知函数 $a_{ij}(t)$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 和 $f_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 在区间 $[a,b]$ 上是连续的，方程组(5.1)关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 及 $x_1',x_2',\cdots,x_n'$ 是线性的.

我们引进下面的记号：

$$\boldsymbol{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \tag{5.2}$$

这里 $\boldsymbol{A}(t)$ 是 $n\times n$ 矩阵，它的元是 n^2 个函数 $a_{ij}(t)$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$，

$$\boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}, \tag{5.3}$$

这里$\boldsymbol{f}(t)$,$\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{x}'$是$n\times1$矩阵或n维列向量. 有时为简便起见,我们也将n维列向量写为n维行向量的转置,如$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$. 有关矩阵等的知识见数字资源(拓展阅读).

注意,矩阵相加、矩阵相乘、矩阵与纯量相乘等性质对于以函数作为元的矩阵同样成立. 这样一来,方程组(5.1)可以写成下面的形式:

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t). \tag{5.4}$$

现在我们给出(5.4)的解的定义.

定义 1 设$\boldsymbol{A}(t)$是区间$[a,b]$上连续的$n\times n$矩阵,$\boldsymbol{f}(t)$是同一区间$[a,b]$上连续的n维向量. 方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t) \tag{5.4}$$

在某区间$[\alpha,\beta]$(这里$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$)的**解**就是向量$\boldsymbol{u}(t)$,它的导数$\boldsymbol{u}'(t)$在区间$[\alpha,\beta]$上连续且满足

$$\boldsymbol{u}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{f}(t),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

现在考虑带有初值条件$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$的方程组(5.4),这里$t_0$是区间$[a,b]$上的已知数,$\boldsymbol{\eta}$是$n$维已知向量,在这样的条件下求解方程组称为**初值问题**.

定义 2 初值问题

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t),\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{\eta} \tag{5.5}$$

的解就是方程组(5.4)在包含t_0的区间$[\alpha,\beta]$上的解$\boldsymbol{u}(t)$,使得$\boldsymbol{u}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$.

在第四章中,我们讨论了带有初值条件的n阶线性微分方程的问题. 现在进一步指出,可以通过下面的方法,将n阶线性微分方程的初值问题化为形如(5.5)的线性微分方程组的初值问题.

考虑n阶线性微分方程的初值问题

$$\begin{cases} x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)x'+a_n(t)x=f(t), \\ x(t_0)=\eta_1, x'(t_0)=\eta_2,\cdots,x^{(n-1)}(t_0)=\eta_n, \end{cases} \tag{5.6}$$

其中$a_1(t),a_2(t),\cdots,a_n(t),f(t)$是$a\leqslant t\leqslant b$上的已知连续函数,$t_0\in[a,b]$,$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$是已知常数. 我们指出,它可以化为下列线性微分方程组的初值问题:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \cdots & -a_1(t) \end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{\eta}, \end{cases} \tag{5.7}$$

其中

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\vdots\\\eta_n\end{bmatrix}.$$

事实上，令

$$x_1=x,x_2=x',x_3=x'',\cdots,x_n=x^{(n-1)},$$

这时

$$x_1'=x'=x_2,x_2'=x''=x_3,\cdots,x_{n-1}'=x^{(n-1)}=x_n,$$
$$x_n'=x^{(n)}=-a_n(t)x_1-a_{n-1}(t)x_2-\cdots-a_1(t)x_n+f(t),$$

而且

$$x_1(t_0)=x(t_0)=\eta_1,\ x_2(t_0)=x'(t_0)=\eta_2,\cdots,\ x_n(t_0)=x^{(n-1)}(t_0)=\eta_n.$$

现在假设 $\psi(t)$ 是在包含 t_0 的区间 $[a,b]$ 上(5.6)的任一解. 由此，我们知 $\psi(t)$，$\psi'(t),\cdots,\psi^{(n)}(t)$ 在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上存在、连续、满足方程(5.6)且 $\psi(t_0)=\eta_1,\psi'(t_0)=\eta_2,\cdots,\psi^{(n-1)}(t_0)=\eta_n$. 令

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\begin{bmatrix}\varphi_1(t)\\\varphi_2(t)\\\vdots\\\varphi_n(t)\end{bmatrix},$$

其中 $\varphi_1(t)=\psi(t),\varphi_2(t)=\psi'(t),\cdots,\varphi_n(t)=\psi^{(n-1)}(t)\ (a\leqslant t\leqslant b)$. 那么，显然有 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$. 此外，我们还得到

$$\boldsymbol{\varphi}'(t)=\begin{bmatrix}\varphi_1'(t)\\\varphi_2'(t)\\\vdots\\\varphi_{n-1}'(t)\\\varphi_n'(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\psi'(t)\\\psi''(t)\\\vdots\\\psi^{(n-1)}(t)\\\psi^{(n)}(t)\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\varphi_2(t)\\\varphi_3(t)\\\vdots\\\varphi_n(t)\\-a_1(t)\psi^{(n-1)}(t)-\cdots-a_n(t)\psi(t)+f(t)\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\varphi_2(t)\\\varphi_3(t)\\\vdots\\\varphi_n(t)\\-a_n(t)\varphi_1(t)-\cdots-a_1(t)\varphi_n(t)+f(t)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \cdots & -a_1(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(t) \\ \varphi_n(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix},$$

这就表示这个特定的向量 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是(5.7)的解. 反之,假设向量 $\boldsymbol{u}(t)$ 是在包含 t_0 的区间 $[a,b]$ 上(5.7)的解,令

$$\boldsymbol{u}(t)=\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix},$$

并定义函数 $w(t)=u_1(t)$,由(5.7)的第一个方程,我们得到 $w'(t)=u_1'(t)=u_2(t)$,由第二个方程得到 $w''(t)=u_2'(t)=u_3(t)$,…,由第 $n-1$ 个方程得到 $w^{(n-1)}(t)=u_{n-1}'(t)=u_n(t)$,由第 n 个方程得到

$$\begin{aligned} w^{(n)}(t)=u_n'(t)&=-a_n(t)u_1(t)-a_{n-1}(t)u_2(t)-\cdots-a_2(t)u_{n-1}(t)-a_1(t)u_n(t)+f(t) \\ &=-a_1(t)w^{(n-1)}(t)-a_2(t)w^{(n-2)}(t)-\cdots-a_n(t)w(t)+f(t), \end{aligned}$$

由此即得

$$w^{(n)}(t)+a_1(t)w^{(n-1)}(t)+a_2(t)w^{(n-2)}(t)+\cdots+a_n(t)w(t)=f(t).$$

同时,我们也得到

$$w(t_0)=u_1(t_0)=\eta_1,\cdots,w^{(n-1)}(t_0)=u_n(t_0)=\eta_n,$$

这就是说,$w(t)$ 是(5.6)的一个解.

总之,由上面的讨论,我们已经证明了初值问题(5.6)与(5.7)在下面的意义下是**等价**的:给定其中一个初值问题的解,我们可以构造另一个初值问题的解.

值得指出的是:每一个 n 阶线性微分方程可化为 n 个一阶线性微分方程构成的方程组,反之却不成立. 例如方程组

$$\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

不能化为一个二阶微分方程.

讨论一般理论之前,先给出存在唯一性定理(证明在数字资源(拓展阅读)中介绍).

存在唯一性定理 如果 $\boldsymbol{A}(t)$ 是 $n\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{f}(t)$ 是 n 维列向量,它们都在区间 $[a,b]$ 上连续,则对于区间 $[a,b]$ 上的任何数 t_0 及任一 n 维常数列向量 $\boldsymbol{\eta}$,方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t) \tag{5.4}$$

存在唯一解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$,定义于整个区间 $[a,b]$ 上,且满足初值条件

$$\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}.$$

现在讨论线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t) \tag{5.4}$$

的一般理论，主要是研究它的解的结构问题.

如果 $\boldsymbol{f}(t)\neq\boldsymbol{0}$，则(5.4)称为**非齐次线性**的.

如果 $\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{0}$，则方程组的形式为

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}, \tag{5.8}$$

(5.8)称为**齐次线性**的. 通常(5.8)称为**对应于(5.4)的齐次线性微分方程组**.

5.1.1　齐次线性微分方程组

本小节主要研究齐次线性微分方程组(5.8)的所有解的集合的代数结构问题. 我们假设矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上是连续的.

设 $\boldsymbol{u}(t)$ 和 $\boldsymbol{v}(t)$ 是(5.8)的任意两个解，α 和 β 是任意两个常数. 根据向量函数的微分法则，即知 $\alpha\boldsymbol{u}(t)+\beta\boldsymbol{v}(t)$ 也是(5.8)的解，由此得到齐次线性微分方程组的解的叠加原理.

定理 1(叠加原理)　如果 $\boldsymbol{u}(t)$ 和 $\boldsymbol{v}(t)$ 是(5.8)的解，则它们的线性组合 $\alpha\boldsymbol{u}(t)+\beta\boldsymbol{v}(t)$ 也是(5.8)的解，这里 α,β 是任意常数.

定理 1 说明，(5.8)的所有解的集合构成一个线性空间. 自然要问：此空间的维数是多少呢？为此，我们引进向量函数 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_m(t)$ 线性相关与线性无关的概念.

我们称定义在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的向量函数 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_m(t)$ 是**线性相关**的，如果存在不全为零的常数 $c_1,c_2,\cdots,c_m$，使得等式

$$c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_m\boldsymbol{x}_m(t)=\boldsymbol{0},\ a\leqslant t\leqslant b$$

成立；否则，称 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_m(t)$ 为**线性无关**的.

例如，对于任一整数 $k>0$，下面的 $k+1$ 个向量函数(n 维向量)

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}t\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}t^2\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}t^k\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

在任何区间上都是线性无关的，而向量函数 $(\cos^2 t,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 和 $(\sin^2 t-1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 在任何区间上都是线性相关的.

设有 n 个定义在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的向量函数

$$\boldsymbol{x}_1(t)=\begin{bmatrix}x_{11}(t)\\x_{21}(t)\\\vdots\\x_{n1}(t)\end{bmatrix},\boldsymbol{x}_2(t)=\begin{bmatrix}x_{12}(t)\\x_{22}(t)\\\vdots\\x_{n2}(t)\end{bmatrix},\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)=\begin{bmatrix}x_{1n}(t)\\x_{2n}(t)\\\vdots\\x_{nn}(t)\end{bmatrix},$$

由这 n 个向量函数构成的行列式

$$W[\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)]=W(t)=\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

称为这些向量函数的**朗斯基行列式**.

定理 2 如果向量函数 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上线性相关,则它们的朗斯基行列式 $W(t)=0\ (a\leqslant t\leqslant b)$.

证明 由假设可知,存在不全为零的常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 使得

$$c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t)=\boldsymbol{0},\ a\leqslant t\leqslant b, \tag{5.9}$$

把(5.9)看成是以 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为未知量的齐次线性代数方程组,这个方程组的系数行列式就是 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 的朗斯基行列式 $W(t)$. 由齐次线性代数方程组的理论知道,要此方程组有非零解,则它的系数行列式应为零,即 $W(t)=0\ (a\leqslant t\leqslant b)$. 定理证毕.

定理 3 如果(5.8)的解 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 线性无关,那么它们的朗斯基行列式 $W(t)\neq 0\ (a\leqslant t\leqslant b)$.

证明 我们采用反证法. 设有某一个 $t_0(a\leqslant t_0\leqslant b)$,使得 $W(t_0)=0$. 考虑下面的齐次线性代数方程组:

$$c_1\boldsymbol{x}_1(t_0)+c_2\boldsymbol{x}_2(t_0)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t_0)=\boldsymbol{0}, \tag{5.10}$$

它的系数行列式就是 $W(t_0)$. 因为 $W(t_0)=0$,所以(5.10)有非零解 $\tilde{c}_1,\tilde{c}_2,\cdots,\tilde{c}_n$. 以这个非零解 $\tilde{c}_1,\tilde{c}_2,\cdots,\tilde{c}_n$ 构成向量函数

$$\boldsymbol{x}(t)=\tilde{c}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\tilde{c}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+\tilde{c}_n\boldsymbol{x}_n(t). \tag{5.11}$$

根据定理 1,易知 $\boldsymbol{x}(t)$ 是(5.8)的解. 注意到(5.10),知道这个解 $\boldsymbol{x}(t)$ 满足初值条件

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{0}, \tag{5.12}$$

但是,在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上恒等于零的向量函数 $\boldsymbol{0}$ 也是(5.8)的满足初值条件(5.12)的解. 由解的唯一性,知道 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{0}$,即

$$\tilde{c}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\tilde{c}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+\tilde{c}_n\boldsymbol{x}_n(t)=\boldsymbol{0},\ a\leqslant t\leqslant b.$$

因为 $\tilde{c}_1,\tilde{c}_2,\cdots,\tilde{c}_n$ 不全为零,这就与 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 线性无关的假设矛盾. 定理得证.

由定理 2 和定理 3 可以知道,由(5.8)的 n 个解 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 作成的朗斯基行列式 $W(t)$ 或者恒等于零,或者恒不等于零.

定理 4 齐次线性微分方程组(5.8)一定存在 n 个线性无关的解 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$.

证明 任取 $t_0\in[a,b]$,根据解的存在唯一性定理,(5.8)分别满足初值条件

$$\boldsymbol{x}_1(t_0)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{x}_2(t_0)=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,\boldsymbol{x}_n(t_0)=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

的解 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 一定存在. 又因为这 n 个解 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 的朗斯基行列式 $W(t_0)=1\neq 0$,故根据定理 2,$\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 是线性无关的. 定理证毕.

定理 5　如果 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 是(5.8)的 n 个线性无关的解,则(5.8)的任一解 $\boldsymbol{x}(t)$ 均可表示为

$$\boldsymbol{x}(t)=c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t),$$

这里 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是相应的确定常数.

证明　任取 $t_0\in[a,b]$,令

$$\boldsymbol{x}(t_0)=c_1\boldsymbol{x}_1(t_0)+c_2\boldsymbol{x}_2(t_0)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t_0),\tag{5.13}$$

把(5.13)看作是以 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为未知量的线性代数方程组. 这个方程组的系数行列式就是 $W(t_0)$. 因为 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 线性无关,根据定理 3 知道 $W(t_0)\neq 0$. 由线性代数方程组的理论,方程组(5.13)有唯一解 $c_1,c_2,\cdots,c_n$. 以这组确定了的 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 构成向量函数 $c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t)$,那么根据叠加原理,它是(5.8)的解. 注意到(5.13),可知(5.8)的两个解 $\boldsymbol{x}(t)$ 及 $c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t)$ 具有相同的初值条件. 由解的唯一性,得到

$$\boldsymbol{x}(t)=c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t).$$

定理证毕.

推论 1　(5.8)的线性无关解的最大个数等于 n.

推论 2　如果已知(5.8)的 k 个线性无关解,则(5.8)可以降低为含 $n-k$ 个未知函数的线性微分方程组. 特别地,如果已知(5.8)的 $n-1$ 个线性无关解,则(5.8)的通解即可得到.

排疑解惑

变系数线性微分方程组

我们称(5.8)的 n 个线性无关的解 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 为(5.8)的一个**基本解组**. 显然,(5.8)具有无穷多个不同的基本解组.

由定理 4 和定理 5,我们知道(5.8)的解空间的维数是 n,这样就回答了前面提出的问题. 本段的主要结果可以用线性代数的语言简单地表述为:(5.8)所有解的集合构成一个 n 维线性空间.

注意到关于 n 阶线性微分方程的初值问题(5.6)与线性微分方程组的初值问题(5.7)的等价性的论述,本节的所有定理都可以平行地推广到 n 阶线性微分方程上去.

从本节的定理 1 容易推得第四章的定理 1. 参看 §4.1 中关于纯量函数组的线性相关概念,我们可以证明:一组 $n-1$ 次可微的纯量函数 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_m(t)$ 线性相关的充要条件是向量函数

$$\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_1'(t)\\ \vdots\\ x_1^{(n-1)}(t)\end{bmatrix},\begin{bmatrix} x_2(t)\\ x_2'(t)\\ \vdots\\ x_2^{(n-1)}(t)\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix} x_m(t)\\ x_m'(t)\\ \vdots\\ x_m^{(n-1)}(t)\end{bmatrix}\tag{*}$$

线性相关. 事实上,如果 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_m(t)$ 线性相关,则存在不全为零的常数 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 使得

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_mx_m(t)=0.$$

将上式对 t 求导数一次,二次,…,$n-1$ 次,得到

$$c_1x_1'(t)+c_2x_2'(t)+\cdots+c_mx_m'(t)=0,$$
$$c_1x_1''(t)+c_2x_2''(t)+\cdots+c_mx_m''(t)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_1x_1^{(n-1)}(t)+c_2x_2^{(n-1)}(t)+\cdots+c_mx_m^{(n-1)}(t)=0,$$

即有

$$c_1\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \\ \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_2^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}+\cdots+c_m\begin{bmatrix} x_m(t) \\ x_m'(t) \\ \vdots \\ x_m^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}=\mathbf{0}. \tag{**}$$

这就是说,向量函数(*)是线性相关的. 反之,如果向量函数(*)线性相关,则存在不全为零的常数 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 使得(**)成立,当然有

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_mx_m(t)=0,$$

这就表明 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_m(t)$ 线性相关.

这样一来,再参看 §4.1 中关于纯量函数朗斯基行列式的概念,从本节的定理 2、定理 3 和定理 4 立即分别推得第四章的定理 2、定理 3 和定理 4.

从本节的定理 5 直接得到

推论 3 如果 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 是 n 阶微分方程

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=0 \tag{5.14}$$

的 n 个线性无关解,其中 $a_1(t),a_2(t),\cdots,a_n(t)$ 是 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续函数,则(5.14)的任一解 $x(t)$ 均可表示为

$$x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t),$$

这里 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是相应的确定常数.

如果 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 是(5.14)的 n 个线性无关解(依 §4.1 的有关定义,它们构成方程的基本解组),根据 n 阶微分方程通解的概念及 $W[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]\neq 0$,函数

$$x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)$$

就是(5.14)的通解,其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是任意常数. 从推论 3 知道,它包括了(5.14)的所有解. 推论 3 可以看成是第四章定理 5 的另一种表述形式.

现在,我们将本节的定理写成矩阵的形式. 这种不同的表述方法今后会有用的. 如果一个 $n\times n$ 矩阵的每一列都是(5.8)的解,我们称这个矩阵为(5.8)的**解矩阵**. 它的列在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上是线性无关的解矩阵,称为在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上(5.8)的**基解矩阵**. 我们用 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 表示由(5.8)的 n 个线性无关的解 $\boldsymbol{\varphi}_1(t),\boldsymbol{\varphi}_2(t),\cdots,\boldsymbol{\varphi}_n(t)$ 作为列构成的基解矩阵. 当 $\boldsymbol{\Phi}(t_0)=\boldsymbol{E}$($\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵)时称其为**标准基解矩阵**. 定理 4 和定理 5 即可以表述为如下的定理 6.

定理 6 (5.8)一定存在一个基解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$. 如果 $\boldsymbol{\psi}(t)$ 是(5.8)的任一解,那么

$$\boldsymbol{\psi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}, \tag{5.15}$$

这里 $\boldsymbol{c}$ 是确定的 n 维常数列向量.

从上面的讨论中,我们可以看到,为了寻求(5.8)的任一解,需要寻求一个基解矩阵. 这样,自然会提出下面的问题:如果在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上找到(5.8)的一个解矩阵,能否以某种简单的方式验证这个解矩阵是不是基解矩阵呢? 定理 2 和定理 3 完全回答了这个问题,它可以表述为下面的形式:

定理 7　(5.8)的一个解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是基解矩阵的充要条件是 $\det\boldsymbol{\Phi}(t)\neq 0(a\leqslant t\leqslant b)$;而且,如果对某一个 $t_0\in[a,b]$, $\det\boldsymbol{\Phi}(t_0)\neq 0$, 则 $\det\boldsymbol{\Phi}(t)\neq 0(a\leqslant t\leqslant b)$. ($\det\boldsymbol{\Phi}(t)$ 表示矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 的行列式.)

要注意,行列式恒等于零的矩阵的列向量未必是线性相关的. 例如,矩阵

$$\begin{bmatrix}1 & t & t^2\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

的行列式于任何区间上恒等于零,但它的列向量却是线性无关的. 由定理 7 即知,这个矩阵不可能是任一个齐次线性微分方程组的解矩阵.

例 1　验证

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}e^t & te^t\\ 0 & e^t\end{bmatrix}$$

是方程组

$$\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

的基解矩阵.

证明　首先,我们证明 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是解矩阵. 令 $\boldsymbol{\varphi}_1(t)$ 表示 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 的第一列,这时

$$\boldsymbol{\varphi}_1'(t)=\begin{bmatrix}e^t\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^t\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{\varphi}_1(t),$$

这表示 $\boldsymbol{\varphi}_1(t)$ 是一个解. 同样,如果以 $\boldsymbol{\varphi}_2(t)$ 表示 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 的第二列,有

$$\boldsymbol{\varphi}_2'(t)=\begin{bmatrix}(t+1)e^t\\ e^t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}te^t\\ e^t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{\varphi}_2(t),$$

这表示 $\boldsymbol{\varphi}_2(t)$ 也是一个解. 因此,$\boldsymbol{\Phi}(t)=[\boldsymbol{\varphi}_1(t),\boldsymbol{\varphi}_2(t)]$ 是解矩阵.

其次,根据定理 7,因为 $\det\boldsymbol{\Phi}(t)=e^{2t}\neq 0$,所以 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是基解矩阵.

从定理 6 和定理 7 可以得到下面的推论.

推论 1　如果 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是(5.8)在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的基解矩阵,$\boldsymbol{C}$ 是非奇异 $n\times n$ 常数矩阵,那么 $\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}$ 也是(5.8)在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的基解矩阵.

证明　首先,根据解矩阵的定义易知,方程(5.8)的任一解矩阵 $\boldsymbol{X}(t)$ 必满足关系

$$\boldsymbol{X}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(t),\ a\leqslant t\leqslant b,$$

反之亦然. 现令

$$\boldsymbol{\Psi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C},\ a\leqslant t\leqslant b,$$

上式对 t 求导数,并注意到 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 为方程的基解矩阵,$\boldsymbol{C}$ 为常数矩阵,得到

$$\boldsymbol{\Psi}'(t)=\boldsymbol{\Phi}'(t)\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Psi}(t),$$

即 $\boldsymbol{\Psi}(t)$ 是(5.8)的解矩阵. 又由 $\boldsymbol{C}$ 的非奇异性,有

$$\det \boldsymbol{\Psi}(t)=\det \boldsymbol{\Phi}(t)\cdot\det \boldsymbol{C}\neq 0,\ a\leqslant t\leqslant b.$$

因此由定理 7 知,$\boldsymbol{\Psi}(t)$ 即 $\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}$ 是(5.8)的基解矩阵.

推论 2 如果 $\boldsymbol{\Phi}(t)$,$\boldsymbol{\Psi}(t)$ 在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上是 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的两个基解矩阵,那么存在一个非奇异 $n\times n$ 常数矩阵 $\boldsymbol{C}$,使得在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上 $\boldsymbol{\Psi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}$.

证明 因为 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 为基解矩阵,故其逆矩阵 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$ 一定存在. 现令

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{\Psi}(t)=\boldsymbol{X}(t),\ a\leqslant t\leqslant b$$

或

$$\boldsymbol{\Psi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{X}(t),\quad a\leqslant t\leqslant b.$$

易知 $\boldsymbol{X}(t)$ 是 $n\times n$ 可微矩阵,且 $\det \boldsymbol{X}(t)\neq 0$ $(a\leqslant t\leqslant b)$. 于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Psi}(t)=\boldsymbol{\Psi}'(t)&=\boldsymbol{\Phi}'(t)\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{X}'(t)\\&=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{X}'(t)\\&=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Psi}(t)+\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{X}'(t),\ a\leqslant t\leqslant b.\end{aligned}$$

由此推知 $\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{X}'(t)=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{X}'(t)=\boldsymbol{0}(a\leqslant t\leqslant b)$,亦即 $\boldsymbol{X}(t)$ 为常数矩阵,记为 $\boldsymbol{C}$. 因此

$$\boldsymbol{\Psi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C},\ a\leqslant t\leqslant b,$$

其中 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{\Psi}(t)$ 为非奇异 $n\times n$ 常数矩阵. 推论 2 得证.

5.1.2 非齐次线性微分方程组

本小节讨论非齐次线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)\tag{5.4}$$

的解的结构问题,这里 $\boldsymbol{A}(t)$ 是 $a\leqslant t\leqslant b$ 上已知的连续 $n\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{f}(t)$ 是 $a\leqslant t\leqslant b$ 上已知的连续 n 维列向量. 向量 $\boldsymbol{f}(t)$ 通常称为强迫项,因为如果用(5.4)描述一个力学系统,$\boldsymbol{f}(t)$ 就代表外力.

我们容易验证(5.4)的两个简单性质.

性质 1 如果 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是(5.4)的解,$\boldsymbol{\psi}(t)$ 是(5.4)对应的齐次线性微分方程组(5.8)的解,则 $\boldsymbol{\varphi}(t)+\boldsymbol{\psi}(t)$ 是(5.4)的解.

性质 2 如果 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ 和 $\bar{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ 是(5.4)的两个解,则 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)-\bar{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ 是(5.8)的解.

下面的定理 8 给出(5.4)的解的结构.

定理 8 设 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是(5.8)的基解矩阵,$\bar{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ 是(5.4)的某一解,则(5.4)的任一解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 都可表示为

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}+\bar{\boldsymbol{\varphi}}(t),\tag{5.16}$$

这里 $\boldsymbol{c}$ 是确定的常数列向量.

证明 由性质 2 我们知道 $\boldsymbol{\varphi}(t)-\bar{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ 是(5.8)的解. 再由 5.1.1 的定理 6,得到

$$\boldsymbol{\varphi}(t)-\bar{\boldsymbol{\varphi}}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c},$$

这里 $\boldsymbol{c}$ 是确定的常数列向量,由此即得 $\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}+\bar{\boldsymbol{\varphi}}(t)$. 定理证毕.

定理 8 告诉我们,为了寻求(5.4)的任一解,只要知道(5.4)的一个解和它对应的齐次线性微分方程组(5.8)的基解矩阵. 现在我们还要进一步指出,在已经知道(5.8)

的基解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 的情况下，有一个寻求(5.4)的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 的简单方法，这个方法就是**常数变易法**.

从上一小节我们知道，如果 $\boldsymbol{c}$ 是常数列向量，则 $\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}$ 是(5.8)的解，它不可能是(5.4)的解. 因此，我们将 $\boldsymbol{c}$ 变易为 t 的向量函数，而试图寻求(5.4)的形如

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t) \tag{5.17}$$

的解，这里 $\boldsymbol{c}(t)$ 是待定的向量函数.

假设(5.4)存在形如(5.17)的解. 这时，将(5.17)代入(5.4)得到

$$\boldsymbol{\Phi}'(t)\boldsymbol{c}(t)+\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t)+\boldsymbol{f}(t).$$

因为 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是(5.8)的基解矩阵，所以 $\boldsymbol{\Phi}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)$，由此上式中含有 $\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t)$ 的项消去了. 因而 $\boldsymbol{c}(t)$ 必须满足关系式

$$\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}'(t)=\boldsymbol{f}(t). \tag{5.18}$$

因为在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是非奇异的，所以 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$ 存在. 用 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$ 左乘(5.18)两边，然后两边积分，得到

$$\boldsymbol{c}(t)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\,\mathrm{d}s,\ t_0,t\in[a,b],$$

其中 $\boldsymbol{c}(t_0)=\boldsymbol{0}$. 这样(5.17)变为

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\,\mathrm{d}s,\ t_0,t\in[a,b]. \tag{5.19}$$

因此，如果(5.4)有一个形如(5.17)的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$，则 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 由公式(5.19)决定.

反之，用公式(5.19)决定的向量函数 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 必定是(5.4)的解. 事实上，对(5.19)求导数得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}'(t)&=\boldsymbol{\Phi}'(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\,\mathrm{d}s+\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{f}(t)\\&=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\,\mathrm{d}s+\boldsymbol{f}(t).\end{aligned}$$

再利用公式(5.19)，即得

$$\boldsymbol{\varphi}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)+\boldsymbol{f}(t).$$

显然，还有 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{0}$，这样一来，我们就得到了下面的定理 9.

定理 9　如果 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是(5.8)的基解矩阵，则向量函数

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\,\mathrm{d}s$$

是(5.4)的解，且满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{0}$.

由定理 8 和定理 9 容易看出，(5.4)的满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 由下面公式给出：

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\,\mathrm{d}s, \tag{5.20}$$

这里 $\boldsymbol{\varphi}_h(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}$ 是(5.8)的满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}_h(t_0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解. 公式(5.19)或公

式(5.20)称为非齐次线性微分方程组(5.4)的**常数变易公式**.

例 2 试求初值问题

$$\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}e^{-t}\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

的解.

解 在例 1 中我们已经知道

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}e^{t} & te^{t}\\0 & e^{t}\end{bmatrix}$$

是对应的齐次线性微分方程组的基解矩阵. 求矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 的逆矩阵,我们得到

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)=\frac{\begin{bmatrix}e^{s} & -se^{s}\\0 & e^{s}\end{bmatrix}}{e^{2s}}=\begin{bmatrix}1 & -s\\0 & 1\end{bmatrix}e^{-s}.$$

这样,由定理 9,满足初值条件 $\boldsymbol{\psi}(0)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ 的解就是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}(t)&=\begin{bmatrix}e^{t} & te^{t}\\0 & e^{t}\end{bmatrix}\int_0^t e^{-s}\begin{bmatrix}1 & -s\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-s}\\0\end{bmatrix}ds=\begin{bmatrix}e^{t} & te^{t}\\0 & e^{t}\end{bmatrix}\int_0^t\begin{bmatrix}e^{-2s}\\0\end{bmatrix}ds\\&=\begin{bmatrix}e^{t} & te^{t}\\0 & e^{t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(1-e^{-2t})\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(e^{t}-e^{-t})\\0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{E}$,对应的齐次线性微分方程组满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}_h(0)=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ 的解就是

$$\boldsymbol{\varphi}_h(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(t-1)e^{t}\\e^{t}\end{bmatrix}.$$

由公式(5.20),所求解就是

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\varphi}_h(t)+\boldsymbol{\psi}(t)=\begin{bmatrix}(t-1)e^{t}\\e^{t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(e^{t}-e^{-t})\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}te^{t}-\frac{1}{2}(e^{t}+e^{-t})\\e^{t}\end{bmatrix}.$$

注意到关于 n 阶线性微分方程的初值问题(5.6)与线性微分方程组的初值问题(5.7)等价性的论述,我们可以得到关于 n 阶非齐次线性微分方程的常数变易公式.

推论 如果 $a_1(t),a_2(t),\cdots,a_n(t),f(t)$ 是 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续函数,$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 是 $a\leqslant t\leqslant b$ 上齐次线性微分方程

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=0 \tag{5.14}$$

的基本解组,那么非齐次线性微分方程

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=f(t) \tag{5.21}$$

的满足初值条件

$$\varphi(t_0)=0,\varphi'(t_0)=0,\cdots,\varphi^{(n-1)}(t_0)=0,\ t_0\in[a,b]$$

的解由下面公式给出:

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{n} x_k(t)\int_{t_0}^{t}\frac{W_k[x_1(s),x_2(s),\cdots,x_n(s)]}{W[x_1(s),x_2(s),\cdots,x_n(s)]}f(s)\,\mathrm{d}s, \tag{5.22}$$

这里 $W[x_1(s),x_2(s),\cdots,x_n(s)]$是 $x_1(s),x_2(s),\cdots,x_n(s)$的朗斯基行列式，$W_k[x_1(s),x_2(s),\cdots,x_n(s)]$是在$W[x_1(s),x_2(s),\cdots,x_n(s)]$中的第 k 列代以$(0,0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}$后得到的行列式，而且(5.21)的任一解 $u(t)$都具有形式

$$u(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)+\varphi(t), \tag{5.23}$$

这里 $c_1,c_2,\cdots,c_n$是适当选取的常数.

公式(5.22)称为(5.21)的**常数变易公式**.

我们指出，这时方程(5.21)的通解可以表示为

$$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)+\varphi(t),$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$是任意常数，并且由上面的推论知道，它包括了方程(5.21)的所有解. 这就是第四章定理 6 的结论.

当 $n=2$ 时，公式(5.22)就是

$$\varphi(t)=x_1(t)\int_{t_0}^{t}\frac{W_1[x_1(s),x_2(s)]}{W[x_1(s),x_2(s)]}f(s)\,\mathrm{d}s+x_2(t)\int_{t_0}^{t}\frac{W_2[x_1(s),x_2(s)]}{W[x_1(s),x_2(s)]}f(s)\,\mathrm{d}s.$$

但是

$$W_1[x_1(s),x_2(s)]=\begin{vmatrix}0 & x_2(s)\\ 1 & x_2'(s)\end{vmatrix}=-x_2(s),$$

$$W_2[x_1(s),x_2(s)]=\begin{vmatrix}x_1(s) & 0\\ x_1'(s) & 1\end{vmatrix}=x_1(s),$$

因此，当 $n=2$ 时，常数变易公式变为

$$\varphi(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{x_2(t)x_1(s)-x_1(t)x_2(s)}{W[x_1(s),x_2(s)]}f(s)\,\mathrm{d}s. \tag{5.24}$$

而通解就是

$$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\varphi(t), \tag{5.25}$$

这里 c_1,c_2是任意常数.

例 3　试求方程 $x''+x=\tan t$ 的一个解.

应用实例

炮弹的运动轨迹

解　易知对应的齐次线性微分方程 $x''+x=0$ 的基本解组为 $x_1(t)=\cos t,x_2(t)=\sin t$. 我们直接利用公式(5.24)来求方程的一个解. 这时

$$W[x_1(t),x_2(t)]=\begin{vmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{vmatrix}=1.$$

由公式(5.24)即得(取 $t_0=0$)

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=\int_0^t(\sin t\cos s-\cos t\sin s)\tan s\,\mathrm{d}s\\ &=\sin t\int_0^t\sin s\,\mathrm{d}s-\cos t\int_0^t\sin s\tan s\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$=\sin t(1-\cos t)+\cos t(\sin t-\ln|\sec t+\tan t|)$$
$$=\sin t-\cos t\ln|\sec t+\tan t|.$$

注意,因为 $\sin t$ 是对应的齐次线性微分方程的一个解,所以函数

$$\overline{\varphi}(t)=-\cos t\ln|\sec t+\tan t|$$

也是原方程的一个解.

习 题 5.1

1. 给定方程组

$$\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}. \tag{*}$$

(1) 试验证 $\boldsymbol{u}(t)=\begin{bmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}(t)=\begin{bmatrix}\sin t\\ \cos t\end{bmatrix}$ 分别是方程组(*)的满足初值条件 $\boldsymbol{u}(0)=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}(0)=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ 的解;

(2) 试验证 $\boldsymbol{w}(t)=c_1\boldsymbol{u}(t)+c_2\boldsymbol{v}(t)$ 是方程组(*)的满足初值条件 $\boldsymbol{w}(0)=\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}$ 的解,其中 c_1,c_2 是任意常数.

2. 将下面的初值问题化为与之等价的一阶微分方程组的初值问题:

(1) $x''+2x'+7tx=e^{-t}, x(1)=7, x'(1)=-2$;

(2) $x^{(4)}+x=te^t, x(0)=1, x'(0)=-1, x''(0)=2, x'''(0)=0$.

(3) $\begin{cases}x''+5y'-7x+6y=e^t,\\ y''-2y+13y'-15x=\cos t,\end{cases}$ $x(0)=1, x'(0)=0, y(0)=0, y'(0)=1$. (提示:令 $w_1=x, w_2=x'$, $w_3=y, w_4=y'$.)

3. 试用逐步逼近法求方程组 $\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ 满足初值条件 $\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ 的第三次近似解.

4. 试验证 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}t^2 & t\\ 2t & 1\end{bmatrix}$ 是方程组 $\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{2}{t^2} & \dfrac{2}{t}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ 在任何不包含原点的区间 $[a,b]$ 上的基解矩阵.

5. 考虑方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}, \tag{5.8}$$

其中 $\boldsymbol{A}(t)$ 是 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续 $n\times n$ 矩阵,它的元为 $a_{ij}(t)$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$.

(1) 如果 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 是(5.8)的任意 n 个解,那么它们的朗斯基行列式 $W[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]\equiv W(t)$ 满足下面的一阶线性微分方程:

$$W'=[a_{11}(t)+a_{22}(t)+\cdots+a_{nn}(t)]W$$

(提示:利用行列式的微分公式,求出 W' 的表达式);

(2) 解上面的一阶线性微分方程,证明下面的公式:

$$W(t)=W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}[a_{11}(s)+a_{22}(s)+\cdots+a_{nn}(s)]ds},\quad t_0,t\in[a,b].$$

6. 设 $\boldsymbol{A}(t)$ 为 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续 $n\times n$ 实矩阵,$\boldsymbol{\Phi}(t)$ 为方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵,而 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 为其

一解. 试证:

(1) 对于方程 $\boldsymbol{y}'=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{y}$ 的任一解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\psi}(t)$,必有 $\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)=$ 常数;

(2) $\boldsymbol{\Psi}(t)$ 为方程 $\boldsymbol{y}'=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{y}$ 的基解矩阵的充要条件是存在非奇异的常数矩阵 $\boldsymbol{C}$,使 $\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)=\boldsymbol{C}$.

7. 设方程组(5.8)有一个非零解 $\boldsymbol{x}(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t))^{\mathrm{T}}$,其中 $\varphi_n(t)\neq 0$,证明(5.8)经变换

$$y_i=x_i-\frac{\varphi_i(t)}{\varphi_n(t)}x_n(i=1,2,\cdots,n-1),\quad y_n=\frac{1}{\varphi_n(t)}x_n$$

可化为关于 $n-1$ 个未知函数 $y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}$ 的线性方程组,它只含 $n-1$ 个方程,且不含 y_n.

8. 设 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 为方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$($\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 常数矩阵)的标准基解矩阵(即 $\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{E}$),证明:

$$\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)=\boldsymbol{\Phi}(t-t_0),$$

其中 t_0 为某一值.

9. 设 $\boldsymbol{A}(t)$,$\boldsymbol{f}(t)$ 分别为在区间 $[a,b]$ 上连续的 $n\times n$ 矩阵和 n 维列向量,证明方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$$

存在且最多存在 $n+1$ 个线性无关解.

10. 试证非齐次线性微分方程组的叠加原理:

设 $\boldsymbol{x}_1(t)$,$\boldsymbol{x}_2(t)$ 分别是方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}_1(t),$$
$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}_2(t)$$

的解,则 $\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{x}_2(t)$ 是方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}_1(t)+\boldsymbol{f}_2(t)$$

的解.

11. 考虑方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$,其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix}\sin t\\ \cos t\end{bmatrix}$,

(1) 试验证 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{2t}&t\mathrm{e}^{2t}\\0&\mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}$ 是 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵;

(2) 试求 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$ 的满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$.

12. 试求 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$ 满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix},\boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix}0\\ \mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}.$$

13. 试求下列方程的通解:

(1) $x''+x=\sec t\left(-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$;

(2) $x'''-8x=\mathrm{e}^{2t}$;

(3) $x''-6x'+9x=\mathrm{e}^{t}$.

14. 已知方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_1\cos^2 t-x_2(1-\sin t\cos t),\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=x_1(1+\sin t\cos t)+x_2\sin^2 t\end{cases}$$

有解 $x_1=-\sin t, x_2=\cos t$，求其通解.

15. 已知方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=\dfrac{1}{t}x_1-x_2+t,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=\dfrac{1}{t^2}x_1+\dfrac{2}{t}x_2-t^2,\end{cases}\quad t>0$$

的对应齐次方程组有解 $x_1=t^2, x_2=-t$，求其通解.

16. 给定方程

$$x''+8x'+7x=f(t),$$

其中 $f(t)$ 在 $0\leqslant t<+\infty$ 上连续，试利用常数变易公式，证明：

(1) 如果 $f(t)$ 在 $0\leqslant t<\infty$ 上有界，则方程的每一个解在 $0\leqslant t<\infty$ 上有界；

(2) 如果当 $t\to\infty$ 时，$f(t)\to 0$，则方程的每一个解 $\varphi(t)$，满足 $\varphi(t)\to 0$（当 $t\to\infty$ 时）.

17. 给定方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}, \tag{5.8}$$

这里 $\boldsymbol{A}(t)$ 是 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续 $n\times n$ 矩阵. 设 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是(5.8)的一个基解矩阵，n 维向量函数 $\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x})$ 在 $a\leqslant t\leqslant b$，$\|\boldsymbol{x}\|<\infty$ 上连续，$t_0\in[a,b]$. 试证明初值问题

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}),\\ \boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}\end{cases} \tag{*}$$

的唯一解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是积分方程组

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{F}(s,\boldsymbol{x}(s))\,ds \tag{**}$$

的连续解；反之，(**)的连续解也是初值问题(*)的解.

§ 5.2 常系数线性微分方程组

本节研究常系数线性微分方程组的问题，主要讨论齐次线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{5.26}$$

的基解矩阵的结构，这里 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 常数矩阵. 我们将通过代数的方法，寻求(5.26)的一个基解矩阵.

5.2.1 基解矩阵 $\exp \boldsymbol{A}t$

为了寻求(5.26)的一个基解矩阵，需要定义矩阵指数 $\exp \boldsymbol{A}$ 及了解其性质（见数字资源（拓展阅读））.

如果 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n\times n$ 常数矩阵，我们定义矩阵指数 $\exp \boldsymbol{A}$ 为下面的矩阵级数的和：

$$\exp \boldsymbol{A}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^k}{k!}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\frac{\boldsymbol{A}^2}{2!}+\cdots+\frac{\boldsymbol{A}^m}{m!}+\cdots, \tag{5.27}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，$\boldsymbol{A}^m$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 次幂. 这里我们规定 $\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}, 0!=1$. 这个级数对于所有的 $\boldsymbol{A}$ 都是收敛的，因而 $\exp \boldsymbol{A}$ 是一个确定的矩阵. 特别地，对所有元均为 0

的零矩阵 $\boldsymbol{O}$，有 $\exp \boldsymbol{O}=\boldsymbol{E}$.

事实上，易知对于一切正整数 k，有

$$\left\| \frac{\boldsymbol{A}^k}{k!} \right\| \leqslant \frac{\|\boldsymbol{A}\|^k}{k!}.$$

又因对于任一矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\|\boldsymbol{A}\|$ 是一个确定的实数，所以数值级数

$$\|\boldsymbol{E}\|+\|\boldsymbol{A}\|+\frac{\|\boldsymbol{A}\|^2}{2!}+\cdots+\frac{\|\boldsymbol{A}\|^m}{m!}+\cdots$$

是收敛的（注意，它的和是 $n-1+\mathrm{e}^{\|\boldsymbol{A}\|}$）. 由 §5.1 知道，如果一个矩阵级数的每一项的范数都小于一个收敛的数值级数的对应项，则这个矩阵级数是收敛的，因而（5.27）对于一切矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都是绝对收敛的.

应当进一步指出，级数

$$\exp \boldsymbol{A}t=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k t^k}{k!} \tag{5.28}$$

在 t 的任何有限区间上是一致收敛的. 事实上，对于一切正整数 k，当 $|t| \leqslant c$（c 是某一正常数）时，有

$$\left\| \frac{\boldsymbol{A}^k t^k}{k!} \right\| \leqslant \frac{\|\boldsymbol{A}\|^k |t|^k}{k!} \leqslant \frac{\|\boldsymbol{A}\|^k c^k}{k!},$$

而数值级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(\|\boldsymbol{A}\| c)^k}{k!}$ 是收敛的，因而（5.28）是一致收敛的.

现在我们可以着手回答有关常系数齐次线性微分方程组（5.26）的基本问题了.

定理 10　矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\exp \boldsymbol{A}t \tag{5.29}$$

是（5.26）的基解矩阵，且 $\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{E}$.

证明　由定义易知 $\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{E}$. 将（5.29）对 t 求导数，我们得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}'(t)&=(\exp \boldsymbol{A}t)'=\boldsymbol{A}+\frac{\boldsymbol{A}^2 t}{1!}+\frac{\boldsymbol{A}^3 t^2}{2!}+\cdots+\frac{\boldsymbol{A}^k t^{k-1}}{(k-1)!}+\cdots \\ &=\boldsymbol{A}\exp \boldsymbol{A}t=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}(t).\end{aligned}$$

这就表明 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是（5.26）的解矩阵. 又因为 $\det \boldsymbol{\Phi}(0)=\det \boldsymbol{E}=1$，因此 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是（5.26）的基解矩阵. 证毕.

由定理 10，我们可以利用这个基解矩阵推知（5.26）的任一解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 都具有形式

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{c}, \tag{5.30}$$

这里 $\boldsymbol{c}$ 是一个常数向量.

在某些特殊情况下，我们容易得到（5.26）的基解矩阵 $\exp \boldsymbol{A}t$ 的具体形式.

例 1　如果 $\boldsymbol{A}$ 是一个对角矩阵，

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}\text{(其中未写出的元均为零)},$$

试找出 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵.

解 由(5.27)可得

$$\exp \boldsymbol{A}t=\boldsymbol{E}+\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}\frac{t}{1!}+\begin{bmatrix} a_1^2 & & & \\ & a_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^2 \end{bmatrix}\frac{t^2}{2!}+\cdots+\begin{bmatrix} a_1^k & & & \\ & a_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^k \end{bmatrix}\frac{t^k}{k!}+\cdots$$

$$=\begin{bmatrix} e^{a_1t} & & & \\ & e^{a_2t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{a_nt} \end{bmatrix}.$$

根据定理10,这就是一个基解矩阵. 当然,这个结果是很明显的,因为在现在的情况下,方程组可以写成 $x_k'=a_kx_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$,它可以分别进行积分.

例2 试求 $\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵.

解 因为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,而且后面的两个矩阵是可交换的,我们得到

$$\exp \boldsymbol{A}t=\exp\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}t\cdot\exp\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}t$$

$$=\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\left(\boldsymbol{E}+\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}t+\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2\frac{t^2}{2!}+\cdots\right).$$

但是,$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,所以级数只有两项. 因此,基解矩阵就是

$$\exp \boldsymbol{A}t=e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.2.2 基解矩阵的计算公式

定理10告诉我们,(5.26)的基解矩阵就是矩阵 $\exp \boldsymbol{A}t$,问题似乎已经解决了. 但是 $\exp \boldsymbol{A}t$ 是由 $\boldsymbol{A}t$ 的矩阵级数定义的,这个矩阵的每一个元是什么呢? 事实上还没有具体给出,上面只就一些很特殊的情况计算了 $\exp \boldsymbol{A}t$ 的元. 本小节利用线性代数的基本知识,仔细地讨论 $\exp \boldsymbol{A}t$ 的计算方法,从而解决常系数线性微分方程组的基解矩阵的结构问题.

为了计算(5.26)的基解矩阵 $\exp \boldsymbol{A}t$,我们需要引进矩阵的特征值和特征向量的

概念.

类似于第四章的§4.2,我们试图寻求

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{5.26}$$

的形如

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}\boldsymbol{c}\ (\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}) \tag{5.31}$$

的解,其中常数 λ 和向量 $\boldsymbol{c}$ 是待定的. 为此,将(5.31)代入(5.26),得到

$$\lambda\mathrm{e}^{\lambda t}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\lambda t}\boldsymbol{c}.$$

因为 $\mathrm{e}^{\lambda t}\neq 0$,上式变为

$$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}. \tag{5.32}$$

这就表示,$\mathrm{e}^{\lambda t}\boldsymbol{c}$ 是(5.26)的解的充要条件就是常数 λ 和向量 $\boldsymbol{c}$ 满足方程组(5.32). 方程组(5.32)可以看作是向量 $\boldsymbol{c}$ 的 n 个分量的一个齐次线性代数方程组,根据线性代数知识,这个方程组具有非零解的充要条件就是 λ 满足方程

$$\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=0.$$

这就引出下面的定义:

假设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n\times n$ 常数矩阵,使得关于 $\boldsymbol{u}$ 的线性代数方程组

$$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0} \tag{5.33}$$

具有非零解的常数 λ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个**特征值**. (5.33)的对应于任一特征值 λ 的非零解 $\boldsymbol{u}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**对应于特征值 λ 的特征向量**.

n 次多项式

$$p(\lambda)\equiv\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征多项式**,n 次代数方程

$$p(\lambda)=0 \tag{5.34}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征方程**. 也称为(5.26)的特征方程.

这样一来,根据上面的讨论,$\mathrm{e}^{\lambda t}\boldsymbol{c}$ 是(5.26)的解,当且仅当 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,且 $\boldsymbol{c}$ 是对应于 λ 的特征向量. $\boldsymbol{A}$ 的特征值就是特征方程(5.34)的根. 因为 n 次代数方程有 n 个根,所以 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个特征值,当然不一定 n 个都互不相同. 如果 $\lambda=\lambda_0$是特征方程的单根,则称 λ_0是**简单特征值**. 如果 $\lambda=\lambda_0$是特征方程的 k 重根(即$p(\lambda)$具有因子$(\lambda-\lambda_0)^k$,而没有因子$(\lambda-\lambda_0)^{k+1}$),则称 λ_0是 k **重特征值**.

例 3 试求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -5 & 3\end{bmatrix}$的特征值和对应的特征向量.

解 $\boldsymbol{A}$ 的特征值就是特征方程

$$\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -5\\ 5 & \lambda-3\end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+34=0$$

的根. 解之得到 $\lambda_{1,2}=3\pm 5\mathrm{i}$. 对应于特征值 $\lambda_1=3+5\mathrm{i}$ 的特征向量

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

必须满足线性代数方程组

$$(\lambda_1 \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} 5\mathrm{i} & -5 \\ 5 & 5\mathrm{i} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}=\boldsymbol{0}.$$

因此，u_1，u_2满足方程组

$$\begin{cases} \mathrm{i}u_1-u_2=0, \\ u_1+\mathrm{i}u_2=0. \end{cases}$$

所以，对于任意常数 $\alpha\neq 0$，

$$\boldsymbol{u}=\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}$$

是对应于 $\lambda_1=3+5\mathrm{i}$ 的特征向量. 类似地，可以求得对应于 $\lambda_2=3-5\mathrm{i}$ 的特征向量为

$$\boldsymbol{v}=\beta\begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix},$$

其中 $\beta\neq 0$ 是任意常数.

例 4 试求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ 的特征值和对应的特征向量.

解 特征方程为

$$\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ 1 & \lambda-4 \end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+9=0,$$

因此，$\lambda=3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值. 为了寻求对应于 $\lambda=3$ 的特征向量，考虑方程组

$$(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

即

$$\begin{cases} c_1-c_2=0, \\ c_1-c_2=0, \end{cases}$$

因此，向量

$$\boldsymbol{c}=\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

是对应于特征值 $\lambda=3$ 的特征向量，其中 $\alpha\neq 0$ 是任意常数.

在例 3 中，特征向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$是线性无关的，因为

$$\det[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]=\begin{vmatrix} \alpha & \beta\mathrm{i} \\ \alpha\mathrm{i} & \beta \end{vmatrix}=2\alpha\beta\neq 0.$$

因而，向量 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 构成二维欧几里得空间的基. 然而在例 4 中，$\boldsymbol{A}$ 的特征向量只构成一个一维子空间. 在这里重要的是要知道，一个给定的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于各个特征值的特征向量的集合是否构成一个基. 根据线性代数的定理：任何 k 个不同特征值所对应的 k 个特征向量是线性无关的，所以如果 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有 n 个不同的特征值，那么对应的 n 个特征向量就构成 n 维欧几里得空间的一个基.

我们提醒读者，一个 $n\times n$ 矩阵最多有 n 个线性无关的特征向量. 当然，在任何情况

下，最低限度有一个特征向量，因为最低限度有一个特征值.

首先，让我们讨论当 $\boldsymbol{A}$ 具有 n 个线性无关的特征向量时（特别当 $\boldsymbol{A}$ 具有 n 个不同的特征值时，就是这种情形），微分方程组(5.26)的基解矩阵的计算方法.

我们可以证明下面的定理.

定理 11　如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有 n 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n$，它们对应的特征值分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$（不必各不相同），那么矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=[\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}_1,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}_2,\cdots,\mathrm{e}^{\lambda_n t}\boldsymbol{v}_n],\quad -\infty<t<+\infty$$

是常系数线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{5.26}$$

的一个基解矩阵.

证明　由上面关于特征值和特征向量的讨论知道，每一个向量函数 $\mathrm{e}^{\lambda_j t}\boldsymbol{v}_j(j=1,2,\cdots,n)$ 都是(5.26)的一个解. 因此，矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=[\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}_1,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}_2,\cdots,\mathrm{e}^{\lambda_n t}\boldsymbol{v}_n]$$

是(5.26)的一个解矩阵. 因为向量 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ 是线性无关的，所以

$$\det\boldsymbol{\Phi}(0)=\det[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n]\neq 0.$$

根据 5.1.1 的定理 7 推得，$\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是(5.26)的一个基解矩阵. 定理证毕.

例 5　试求方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的一个基解矩阵，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -5 & 3\end{bmatrix}$.

解　由例 3 知道，$\lambda_1=3+5\mathrm{i}$ 和 $\lambda_2=3-5\mathrm{i}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，而

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}\mathrm{i}\\ 1\end{bmatrix}$$

是对应于 λ_1,λ_2 的两个线性无关的特征向量. 根据定理 11，矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{(3+5\mathrm{i})t} & \mathrm{i}\mathrm{e}^{(3-5\mathrm{i})t}\\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{(3+5\mathrm{i})t} & \mathrm{e}^{(3-5\mathrm{i})t}\end{bmatrix}$$

就是一个基解矩阵.

一般来说，定理 11 中的 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 不一定就是 $\exp\boldsymbol{A}t$. 然而，根据 5.1.1 的定理 6 和定理 7 的推论 2，我们可以确定它们之间的关系. 因为 $\exp\boldsymbol{A}t$ 和 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 都是(5.26)的基解矩阵，所以存在一个非奇异常数矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得

$$\exp\boldsymbol{A}t=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}.$$

在上式中，令 $t=0$，我们得到 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)$，因此

$$\exp\boldsymbol{A}t=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0). \tag{5.35}$$

根据公式(5.35)，$\exp\boldsymbol{A}t$ 的计算问题相当于方程组(5.26)的任一基解矩阵的计算问题. 注意，公式(5.35)还有一个用途，这就是下面的附注所指出的.

附注　我们知道，如果 $\boldsymbol{A}$ 是实矩阵，那么 $\exp\boldsymbol{A}t$ 也是实矩阵. 因此，当 $\boldsymbol{A}$ 是实矩阵时，公式(5.35)给出一个构造实基解矩阵的方法.

例 6　试求例 5 的实基解矩阵（或计算 $\exp\boldsymbol{A}t$）.

解　根据(5.35)及附注，从例 5 中得

$$
\begin{aligned}
\exp \boldsymbol{A}t &= \begin{bmatrix} e^{(3+5i)t} & ie^{(3-5i)t} \\ ie^{(3+5i)t} & e^{(3-5i)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{(3+5i)t} & ie^{(3-5i)t} \\ ie^{(3+5i)t} & e^{(3-5i)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{(3+5i)t}+e^{(3-5i)t} & -i[e^{(3+5i)t}-e^{(3-5i)t}] \\ i[e^{(3+5i)t}-e^{(3-5i)t}] & e^{(3+5i)t}+e^{(3-5i)t} \end{bmatrix} \\
&= e^{3t} \begin{bmatrix} \cos 5t & \sin 5t \\ -\sin 5t & \cos 5t \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

现在讨论当 $\boldsymbol{A}$ 是任意的 $n\times n$ 矩阵时，(5.26)的基解矩阵的计算方法. 先引进一些有关的线性代数知识.

假设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n\times n$ 矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的不同的特征值，它们的重数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_k$，这里 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$，那么对应于每一个 n_j 重特征值 λ_j，线性代数方程组

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^{n_j}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0} \tag{5.36}$$

的解的全体构成 n 维欧几里得空间的一个 n_j 维子空间 U_j $(j=1,2,\cdots,k)$，并且 n 维欧几里得空间可表示为 $U_1,U_2,\cdots,U_k$ 的直接和.

这就是说，对于 n 维欧几里得空间的每一个向量 $\boldsymbol{u}$，存在唯一的向量 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_k$，其中 $\boldsymbol{u}_j\in U_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$，使得

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2+\cdots+\boldsymbol{u}_k. \tag{5.37}$$

关于分解式(5.37)，我们举出它的两个特殊情形. 如果 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值各不相同，这就是说，如果每一个 $n_j=1(j=1,2,\cdots,k)$，而 $k=n$，那么对于任一向量 $\boldsymbol{u}$，分解式(5.37)中的 $\boldsymbol{u}_j$ 可以表示为 $\boldsymbol{u}_j=c_j\boldsymbol{v}_j$，其中 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一组线性无关的特征向量，c_j $(j=1,2,\cdots,n)$ 是某些常数. 如果 $\boldsymbol{A}$ 只有一个特征值，即 $k=1$，这时不必对 n 维欧几里得空间进行分解.

现在利用刚刚引述过的线性代数知识着手寻求(5.26)的基解矩阵. 我们先从寻求任一满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 开始. 从定理 10 我们知道，$\boldsymbol{\varphi}(t)$ 可以表示为 $\boldsymbol{\varphi}(t)=(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{\eta}$，而我们的目标就是要将 $(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{\eta}$ 明显地计算出来，即要确切知道 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 的每一个分量. 根据 $\exp \boldsymbol{A}t$ 的定义，一般来说，$(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{\eta}$ 的分量是一个无穷级数，因而难于计算. 这里的要点就是将初始向量 $\boldsymbol{\eta}$ 进行分解，从而使得 $(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{\eta}$ 的分量可以表示为 t 的指数函数与 t 的幂函数乘积的有限项的线性组合.

假设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 分别是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 重不同特征值. 这时由(5.37)，我们有

$$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+\cdots+\boldsymbol{v}_k, \tag{5.38}$$

其中 $\boldsymbol{v}_j\in U_j(j=1,2,\cdots,k)$，因为子空间 U_j 是由方程组(5.36)产生的，$\boldsymbol{v}_j$ 一定是(5.36)的解. 由此即得

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^l\boldsymbol{v}_j=\boldsymbol{0},\ \ l\geqslant n_j,\ \ j=1,2,\cdots,k. \tag{5.39}$$

注意到当矩阵是对角矩阵时，由例 1 知道，$\exp \boldsymbol{A}t$ 是很容易求得的，这时得到

$$e^{\lambda_j t}\exp(-\lambda_j \boldsymbol{E}t)=e^{\lambda_j t}\begin{bmatrix} e^{-\lambda_j t} & & & \\ & e^{-\lambda_j t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{-\lambda_j t}\end{bmatrix}=\boldsymbol{E},$$

由此,根据等式(5.39),即有

$$(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{v}_j=(\exp \boldsymbol{A}t)e^{\lambda_j t}[\exp(-\lambda_j \boldsymbol{E}t)]\boldsymbol{v}_j=e^{\lambda_j t}[\exp(\boldsymbol{A}-\lambda_j \boldsymbol{E})t]\boldsymbol{v}_j$$

$$=e^{\lambda_j t}\left[\boldsymbol{E}+t(\boldsymbol{A}-\lambda_j \boldsymbol{E})+\frac{t^2}{2!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j \boldsymbol{E})^2+\cdots+\frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j \boldsymbol{E})^{n_j-1}\right]\boldsymbol{v}_j.$$

再根据等式(5.38),知微分方程组(5.26)的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)=(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{\eta}$ 可表示为

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{\eta}=(\exp \boldsymbol{A}t)\sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{v}_j=\sum_{j=1}^{k}(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{v}_j$$

$$=\sum_{j=1}^{k}e^{\lambda_j t}\left[\boldsymbol{E}+t(\boldsymbol{A}-\lambda_j \boldsymbol{E})+\frac{t^2}{2!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j \boldsymbol{E})^2+\cdots+\frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j \boldsymbol{E})^{n_j-1}\right]\boldsymbol{v}_j.$$

所以,方程组(5.26)满足 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 最后可以写成

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\sum_{j=1}^{k}e^{\lambda_j t}\left[\sum_{i=0}^{n_j-1}\frac{t^i}{i!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j \boldsymbol{E})^i\right]\boldsymbol{v}_j. \tag{5.40}$$

在特别情形,当 $\boldsymbol{A}$ 只有一个特征值时,无须将初始向量分解为(5.38).这时对于任何 $\boldsymbol{u}$,都有

$$(\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{E})^n\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0},$$

这就是说,$(\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{E})^n$ 是一个零矩阵. 这样一来,由 $\exp \boldsymbol{A}t$ 的定义,我们得到

$$\exp \boldsymbol{A}t=e^{\lambda t}\exp(\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{E})t=e^{\lambda t}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}(\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{E})^i. \tag{5.41}$$

为了要从(5.40)中得到 $\exp \boldsymbol{A}t$,只要注意到

$$\exp \boldsymbol{A}t=(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{E}=[(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{e}_1,(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{e}_2,\cdots,(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{e}_n],$$

其中

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,\boldsymbol{e}_n=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

是单位向量. 这就是说,依次令 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{e}_n$,求得 n 个解,以这 n 个解作为列即可得到 $\exp \boldsymbol{A}t$.

例 7　如果 $\boldsymbol{A}$ 是例 4 的矩阵,试解初值问题 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\eta}$,并求 $\exp \boldsymbol{A}t$.

解　从例 4 知道,$\lambda_1=3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值,这时 $n_1=2$,只有一个子空间 U_1. 将

$n_1=2$ 及 $\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}$ 代入(5.40)即得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}(t)&=\mathrm{e}^{3t}[\boldsymbol{E}+t(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})]\boldsymbol{\eta}\\&=\mathrm{e}^{3t}\left(\boldsymbol{E}+t\begin{bmatrix}-1&1\\-1&1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}\\&=\mathrm{e}^{3t}\begin{bmatrix}\eta_1+t(-\eta_1+\eta_2)\\ \eta_2+t(-\eta_1+\eta_2)\end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{5.42}$$

利用公式(5.41),即得

$$\begin{aligned}\exp \boldsymbol{A}t&=\mathrm{e}^{3t}[\boldsymbol{E}+t(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})]\\&=\mathrm{e}^{3t}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1&1\\-1&1\end{bmatrix}\right)\\&=\mathrm{e}^{3t}\begin{bmatrix}1-t&t\\-t&1+t\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

或者分别令

$$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},$$

然后代入(5.42),亦同样得到上面的结果:

$$\exp \boldsymbol{A}t=\mathrm{e}^{3t}\begin{bmatrix}1-t&t\\-t&1+t\end{bmatrix}.$$

例 8 如果

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-4&1&0&0&0\\0&-4&1&0&0\\0&0&-4&0&0\\0&0&0&-4&0\\0&0&0&0&-4\end{bmatrix},$$

试求 $\exp \boldsymbol{A}t$.

解 这里 $n=5,\lambda=-4$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 5 重特征值,直接计算可得 $(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})^3=\boldsymbol{0}$.因此,由公式(5.41)可得

$$\exp \boldsymbol{A}t=\mathrm{e}^{-4t}\left[\boldsymbol{E}+t(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})+\frac{t^2}{2!}(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})^2\right].$$

这样一来

$$\exp \boldsymbol{A}t=\mathrm{e}^{-4t}\left(\begin{bmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&1&&\\&&&1&\\&&&&1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}+\frac{t^2}{2!}\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\right)$$

$$=e^{-4t}\begin{bmatrix}1 & t & \frac{t^2}{2!} & 0 & 0\\ 0 & 1 & t & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

例 9　考虑方程组

$$\begin{cases}x_1'=3x_1-x_2+x_3,\\ x_2'=2x_1+x_3,\\ x_3'=x_1-x_2+2x_3,\end{cases}$$

这里系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix},$$

试求满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$，并求 $\exp \boldsymbol{A}t$.

解　$\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=(\lambda-1)(\lambda-2)^2=0,$$

$\lambda_1=1,\lambda_2=2$ 分别为 $n_1=1,n_2=2$ 重特征值. 为了确定三维欧几里得空间的子空间 U_1 和 U_2，根据(5.36)，我们需要考虑方程组

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}\quad 和\quad (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}.$$

首先讨论

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0},$$

即

$$\begin{cases}2u_1-u_2+u_3=0,\\ 2u_1-u_2+u_3=0,\\ u_1-u_2+u_3=0.\end{cases}$$

这个方程组的解为 $\boldsymbol{u}_1=(0,\alpha,\alpha)^{\mathrm{T}}$，其中 α 为任意常数. 子空间 U_1 是由向量 $\boldsymbol{u}_1$ 所张成的.

其次讨论

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0},$$

即

$$\begin{cases}-u_1+u_2=0,\\-u_1+u_2=0.\end{cases}$$

这个方程组的解为 $\boldsymbol{u}_2=(\beta,\beta,\gamma)^{\mathrm{T}}$，其中 β,γ 是任意常数. 子空间 U_2 是由向量 $\boldsymbol{u}_2$ 所张成的.

现在我们需要找出向量 $\boldsymbol{v}_1\in U_1,\boldsymbol{v}_2\in U_2$，使得我们能够将初始向量 $\boldsymbol{\eta}$ 写成(5.38)的形式. 因为 $\boldsymbol{v}_1\in U_1,\boldsymbol{v}_2\in U_2$，所以

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}0\\\alpha\\\alpha\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}\beta\\\beta\\\gamma\end{bmatrix},$$

其中 α,β,γ 是某些常数，这样一来

$$\begin{bmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\eta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta\\\alpha+\beta\\\alpha+\gamma\end{bmatrix},$$

因而 $\beta=\eta_1,\alpha+\beta=\eta_2,\alpha+\gamma=\eta_3$，解之得到 $\alpha=\eta_2-\eta_1,\beta=\eta_1,\gamma=\eta_3-\eta_2+\eta_1$，且

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}0\\\eta_2-\eta_1\\\eta_2-\eta_1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}\eta_1\\\eta_1\\\eta_3-\eta_2+\eta_1\end{bmatrix}.$$

根据公式(5.40)，我们得到满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}(t)&=\mathrm{e}^t\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{v}_1+\mathrm{e}^{2t}[\boldsymbol{E}+t(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})]\boldsymbol{v}_2\\&=\mathrm{e}^t\begin{bmatrix}0\\\eta_2-\eta_1\\\eta_2-\eta_1\end{bmatrix}+\mathrm{e}^{2t}\left(\boldsymbol{E}+t\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-2&1\\1&-1&0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\eta_1\\\eta_1\\\eta_3-\eta_2+\eta_1\end{bmatrix}\\&=\mathrm{e}^t\begin{bmatrix}0\\\eta_2-\eta_1\\\eta_2-\eta_1\end{bmatrix}+\mathrm{e}^{2t}\begin{bmatrix}1+t&-t&t\\2t&1-2t&t\\t&-t&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_1\\\eta_1\\\eta_3-\eta_2+\eta_1\end{bmatrix}\\&=\mathrm{e}^t\begin{bmatrix}0\\\eta_2-\eta_1\\\eta_2-\eta_1\end{bmatrix}+\mathrm{e}^{2t}\begin{bmatrix}\eta_1+t(\eta_3-\eta_2+\eta_1)\\\eta_1+t(\eta_3-\eta_2+\eta_1)\\\eta_3-\eta_2+\eta_1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

为了得到 $\exp\boldsymbol{A}t$，依次令 $\boldsymbol{\eta}$ 等于 $(1,0,0)^{\mathrm{T}},(0,1,0)^{\mathrm{T}},(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，代入上式，我们得到三个线性无关的解. 利用这三个解作为列，即得

$$\exp\boldsymbol{A}t=\begin{bmatrix}(1+t)\mathrm{e}^{2t}&-t\mathrm{e}^{2t}&t\mathrm{e}^{2t}\\-\mathrm{e}^t+(1+t)\mathrm{e}^{2t}&\mathrm{e}^t-t\mathrm{e}^{2t}&t\mathrm{e}^{2t}\\-\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{2t}&\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{2t}&\mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}.$$

应该指出，公式(5.40)是本小节的主要结果. 公式(5.40)告诉我们，常系数线性微分方程组(5.26)的任一解都可以通过有限次代数运算求出来.

本小节所讨论的步骤及公式(5.40)提供了一个实际计算(5.26)的基解矩阵的方法. 在这里我们主要应用了有关空间分解的结论. 事实上,利用其他方面的代数知识也可以相应地得到计算基解矩阵 $\exp \boldsymbol{A}t$ 的别的方法. 例如通常微分方程教材所介绍的化若尔当(Jordan)标准形的方法就是其中的一种,它主要是利用矩阵理论中若尔当标准形方面的知识. 这一方法在理论上显得颇为简洁,但实际计算起来则可能比较麻烦. 又如 E. J. Putzer 利用哈密顿-凯莱(Hamilton-Cayley)定理,将基解矩阵 $\exp \boldsymbol{A}t$ 的计算问题归结为求解带下三角形矩阵的齐次线性微分方程组的初值问题,方法也很简单.

排疑解惑

欧拉待定指数函数法

最后,我们给出非齐次线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t) \tag{5.43}$$

的常数变易公式,这里 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 常数矩阵,$\boldsymbol{f}(t)$ 是已知的连续向量函数. 因为(5.43)对应的齐次线性微分方程组(5.26)的基解矩阵为 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\exp \boldsymbol{A}t$,所以常数变易公式在形式上变得特别简单. 这时,我们有 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)=\exp(-s\boldsymbol{A})$,$\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)=\exp[(t-s)\boldsymbol{A}]$. 若初值条件是 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$,则 $\boldsymbol{\varphi}_h(t)=\exp[(t-t_0)\boldsymbol{A}]\boldsymbol{\eta}$,(5.43)的解就是

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\exp[(t-t_0)\boldsymbol{A}]\boldsymbol{\eta}+\int_{t_0}^{t}\exp[(t-s)\boldsymbol{A}]\boldsymbol{f}(s)\,\mathrm{d}s. \tag{5.44}$$

我们可以利用本小节提供的方法具体构造基解矩阵 $\exp \boldsymbol{A}t$. 然而,除非是某些特殊的情形,要具体计算(5.44)中的积分式也是不容易的.

例 10　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -5 & 3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t}\\ 0\end{bmatrix},$$

试求方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$ 满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$.

应用实例

药物动力学的房室模型

解　由前面的例 6 知

$$\exp \boldsymbol{A}t=\mathrm{e}^{3t}\begin{bmatrix}\cos 5t & \sin 5t\\ -\sin 5t & \cos 5t\end{bmatrix}.$$

代入公式(5.44),我们得到(利用 $t_0=0$)

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\mathrm{e}^{3t}\begin{bmatrix}\cos 5t & \sin 5t\\ -\sin 5t & \cos 5t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}+\int_0^t \mathrm{e}^{3(t-s)}\begin{bmatrix}\cos 5(t-s) & \sin 5(t-s)\\ -\sin 5(t-s) & \cos 5(t-s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-s}\\ 0\end{bmatrix}\mathrm{d}s.$$

我们计算上面的积分如下:

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\mathrm{e}^{3t}\begin{bmatrix}\sin 5t\\ \cos 5t\end{bmatrix}+\mathrm{e}^{3t}\int_0^t \mathrm{e}^{-4s}\begin{bmatrix}\cos 5t\cos 5s+\sin 5t\sin 5s\\ -\sin 5t\cos 5s+\cos 5t\sin 5s\end{bmatrix}\mathrm{d}s,$$

利用公式或者分部积分法,得到

$$\int_0^t \mathrm{e}^{-4s}\cos 5s\mathrm{d}s=\frac{\mathrm{e}^{-4s}}{16+25}(-4\cos 5s+5\sin 5s)\Big|_{s=0}^{s=t},$$

$$\int_0^t \mathrm{e}^{-4s}\sin 5s\mathrm{d}s=\frac{\mathrm{e}^{-4s}}{16+25}(-4\sin 5s-5\cos 5s)\Big|_{s=0}^{s=t}.$$

最后我们得到

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\frac{1}{41}e^{3t}\begin{bmatrix}4\cos 5t+46\sin 5t-4e^{-4t}\\46\cos 5t-4\sin 5t-5e^{-4t}\end{bmatrix}.$$

习 题 5.2

1. 假设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 矩阵，试证：

(1) 对任意的常数 c_1,c_2 都有 $\exp(c_1\boldsymbol{A}+c_2\boldsymbol{A})=\exp c_1\boldsymbol{A}\cdot\exp c_2\boldsymbol{A}$；

(2) 对任意整数 k，都有 $(\exp\boldsymbol{A})^k=\exp k\boldsymbol{A}$.（当 k 是负整数时，规定 $(\exp\boldsymbol{A})^k=[(\exp\boldsymbol{A})^{-1}]^{-k}$.）

2. 试证：如果 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解，那么 $\boldsymbol{\varphi}(t)=[\exp\boldsymbol{A}(t-t_0)]\boldsymbol{\eta}$.

3. 试计算下面矩阵的特征值及对应的特征向量：

(1) $\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix}$；　　(2) $\begin{bmatrix}2&-3&3\\4&-5&3\\4&-4&2\end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix}1&2&1\\1&-1&1\\2&0&1\end{bmatrix}$；　　(4) $\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix}$.

4. 试求方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的一个基解矩阵，并计算 $\exp\boldsymbol{A}t$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为

(1) $\begin{bmatrix}-2&1\\-1&2\end{bmatrix}$；　　(2) $\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix}2&-3&3\\4&-5&3\\4&-4&2\end{bmatrix}$；　　(4) $\begin{bmatrix}1&0&3\\8&1&-1\\5&1&-1\end{bmatrix}$.

5. 试求方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵，并求满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$：

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$；

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&3\\8&1&-1\\5&1&-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}0\\-2\\-7\end{bmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&-1&1\\2&0&1\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$.

6. 试求方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$ 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$：

(1) $\boldsymbol{\varphi}(0)=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix},\boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix}e^t\\1\end{bmatrix}$；

(2) $\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix},\boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix}0\\0\\e^{-t}\end{bmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{\varphi}(0)=\begin{bmatrix}\eta_1\\\eta_2\end{bmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&-3\\2&-1\end{bmatrix},\boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix}\sin t\\-2\cos t\end{bmatrix}$.

7. 假设 m 不是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，试证非齐次线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}e^{mt}$$

有一解形如

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{p}e^{mt},$$

其中 $\boldsymbol{c},\boldsymbol{p}$ 是常数向量.

8. 给定方程组

$$\begin{cases}x_1''-3x_1'+2x_1+x_2'-x_2=0,\\ x_1'-2x_1+x_2'+x_2=0.\end{cases}$$

(1) 试证上面方程组等价于方程组 $\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$，其中

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_1'\\x_2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\-4&4&2\\2&-1&-1\end{bmatrix};$$

(2) 试求(1)中的方程组的基解矩阵；

(3) 试求原方程组满足初值条件 $x_1(0)=0,x_1'(0)=1,x_2(0)=0$ 的解.

9. 假设 $y=\varphi(x)$ 是二阶常系数线性微分方程初值问题

$$\begin{cases}y''+ay'+by=0,\\ y(0)=0,y'(0)=1\end{cases}$$

的解，试证

$$y=\int_0^x\varphi(x-t)f(t)\,dt$$

是方程

$$y''+ay'+by=f(x)$$

的解，这里 $f(x)$ 为已知连续函数.

§5.3　拉普拉斯变换

拉普拉斯变换法是求解一阶或高阶微分方程和微分方程组的有效方法. 它把求解微分方程(组)变成求解代数方程. 不过，因计算机数学软件的发展，拉普拉斯变换法已经程序化、自动化了. 我们把微分方程和微分方程组的拉普拉斯变换法一并在这里介绍，让大家可以在知道原理后直接应用数学软件求解.

5.3.1　微分方程的拉普拉斯变换法

由积分

$$F(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)\,dt$$

所定义的确定于复平面($\mathrm{Re}\ s>\sigma$)上的复变数 s 的函数 $F(s)$，称为函数 $f(t)$ 的**拉普拉斯变换**，其中 $f(t)$ 于 $t\geqslant 0$ 有定义，且满足不等式

$$|f(t)|<Me^{\sigma t}①,$$

这里 M,σ 为某两个正常数. 我们称 $f(t)$ 为**原函数**,而称 $F(s)$ 为**像函数**.

拉普拉斯变换法主要是借助于拉普拉斯变换把常系数线性微分方程(组)转换成复变数 s 的代数方程(组). 通过一些代数运算,一般地再利用拉普拉斯变换表,即可求出微分方程(组)的解. 方法十分简单方便,为工程技术工作者所普遍采用. 当然,方法本身也有一定的局限性,它要求所考察的微分方程的右端函数必须是原函数,否则方法就不适用了.

关于拉普拉斯变换的一般概念及基本性质,请参阅有关书籍,这里只列出部分常用函数的拉普拉斯变换简表(见表(5.1)),供学习时使用参考. 如果已有较好计算机软件基础知识的读者,即可参考本书附录 C,直接对某些方程求解.

表(5.1) 拉普拉斯变换表

序号	原函数 $f(t)$	像函数 $F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)\,dt$	$F(s)$ 的定义域
1	1	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}\ s>0$
2	t	$\frac{1}{s^2}$	$\mathrm{Re}\ s>0$
3	$t^n(n>-1)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\mathrm{Re}\ s>0$
4	e^{zt}	$\frac{1}{s-z}$	$\mathrm{Re}\ s>\mathrm{Re}\ z$
5	te^{zt}	$\frac{1}{(s-z)^2}$	$\mathrm{Re}\ s>\mathrm{Re}\ z$
6	$t^n e^{zt}(n>-1)$	$\frac{n!}{(s-z)^{n+1}}$	$\mathrm{Re}\ s>\mathrm{Re}\ z$
7	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}\ s>0$
8	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}\ s>0$
9	$\mathrm{sh}\ \omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$\mathrm{Re}\ s>\lvert\omega\rvert$
10	$\mathrm{ch}\ \omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$\mathrm{Re}\ s<\lvert\omega\rvert$
11	$t\sin\omega t$	$\frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\mathrm{Re}\ s>0$
12	$t\cos\omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\mathrm{Re}\ s>0$

① 对于复值的 $f(t)$, $|f(t)|$ 表示其模.

续表

序号	原函数 $f(t)$	像函数 $F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)\,dt$	$F(s)$的定义域
13	$e^{\lambda t}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(s-\lambda)^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}\,s>\lambda$
14	$e^{\lambda t}\cos\omega t$	$\dfrac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}\,s>\lambda$
15	$te^{\lambda t}\sin\omega t$	$\dfrac{2\omega(s-\lambda)}{[(s-\lambda)^2+\omega^2]^2}$	$\mathrm{Re}\,s>\lambda$
16	$te^{\lambda t}\cos\omega t$	$\dfrac{(s-\lambda)^2-\omega^2}{[(s-\lambda)^2+\omega^2]^2}$	$\mathrm{Re}\,s>\lambda$

设给定微分方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n x=f(t) \tag{5.45}$$

及初值条件

$$x(0)=x_0,x'(0)=x_0',\cdots,x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)},$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$是常数,而$f(t)$连续且满足原函数的条件.

注意,如果$x(t)$是方程(5.45)的任意解,则$x(t)$及其各阶导数$x^{(k)}(t)$($k=1,2,\cdots,n$)均是原函数. 记

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]\equiv\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)\,dt,$$

$$X(s)=\mathscr{L}[x(t)]\equiv\int_0^{+\infty} e^{-st}x(t)\,dt.$$

那么按原函数微分性质,有

$$\mathscr{L}[x'(t)]=sX(s)-x_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathscr{L}[x^{(n)}(t)]=s^nX(s)-s^{n-1}x_0-s^{n-2}x_0'-\cdots-x_0^{(n-1)}.$$

于是,对方程(5.45)两端施行拉普拉斯变换,并利用线性性质就得到

$$\begin{aligned}&s^nX(s)-s^{n-1}x_0-s^{n-2}x_0'-\cdots-sx_0^{(n-2)}-x_0^{(n-1)}+\\&a_1[s^{n-1}X(s)-s^{n-2}x_0-s^{n-3}x_0'-\cdots-x_0^{(n-2)}]+\cdots+\\&a_{n-1}[sX(s)-x_0]+a_nX(s)=F(s),\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&(s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n)X(s)\\&=F(s)+(s^{n-1}+a_1s^{n-2}+\cdots+a_{n-1})x_0+(s^{n-2}+a_1s^{n-3}+\cdots+a_{n-2})x_0'+\cdots+x_0^{(n-1)},\end{aligned}$$

或

$$A(s)X(s)=F(s)+B(s),$$

其中 $A(s)$，$B(s)$ 和 $F(s)$ 都是已知多项式. 由此

$$X(s)=\frac{F(s)+B(s)}{A(s)},$$

这就是方程(5.45)的满足所给初值条件的解 $x(t)$ 的像函数. 而 $x(t)$ 可直接查拉普拉斯变换表或由反变换公式计算求得. 下面举几个用这种方法解方程的例子.

例 1 求方程 $\frac{dx}{dt}-x=e^{2t}$ 满足初值条件 $x(0)=0$ 的解.

解 对方程两端施行拉普拉斯变换，得到方程的解的像函数所应满足的方程

$$sX(s)-x(0)-X(s)=\frac{1}{s-2},$$

由此，并注意到 $x(0)=0$，得

$$X(s)=\frac{1}{(s-1)(s-2)}=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-1}.$$

直接查拉普拉斯变换表，可得 $\frac{1}{s-2}$ 和 $\frac{1}{s-1}$ 的原函数分别为 e^{2t} 和 e^{t}. 因此，利用线性性质，就求得 $X(s)$ 的原函数为

$$x(t)=e^{2t}-e^{t},$$

这就是所要求的解.

例 2 求解方程 $x''+2x'+x=e^{-t}$，$x(1)=x'(1)=0$.

解 先令 $\tau=t-1$，将问题化为

$$x''+2x'+x=e^{-(\tau+1)},\quad x(0)=x'(0)=0.$$

再对新方程两边作拉普拉斯变换，得到

$$s^2X(s)+2sX(s)+X(s)=\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{e},$$

因此

$$X(s)=\frac{1}{(s+1)^3}\cdot\frac{1}{e}.$$

查拉普拉斯变换表可得

$$x(\tau)=\frac{1}{2}\tau^2e^{-\tau-1},$$

从而

$$x(t)=\frac{1}{2}(t-1)^2e^{-t},$$

这就是所要求的解.

例 3 求方程 $x'''+3x''+3x'+x=1$ 的满足初值条件 $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$ 的解.

解 对方程两边施行拉普拉斯变换得

$$(s^3+3s^2+3s+1)X(s)=\frac{1}{s},$$

由此得

$$X(s)=\frac{1}{s(s+1)^3}.$$

把上式右端分解成部分分式，

$$\frac{1}{s(s+1)^3}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{1}{(s+1)^3}.$$

对上式右端各项分别求出(查表)其原函数，则它们的和就是$X(s)$的原函数

$$x(t)=1-e^{-t}-te^{-t}-\frac{1}{2}t^2e^{-t}=1-\frac{1}{2}(t^2+2t+2)e^{-t},$$

这就是所要求的解.

例 4　求解方程 $x''+a^2x=b\sin at, x(0)=x_0, x'(0)=x_0'$，其中 a,b 为非零常数.

解　对方程施行拉普拉斯变换，得到

$$s^2X(s)-x_0s-x_0'+a^2X(s)=\frac{ab}{s^2+a^2},$$

即

$$X(s)=\frac{ab}{(s^2+a^2)^2}+x_0\frac{s}{s^2+a^2}+x_0'\frac{1}{s^2+a^2}.$$

把上式右端第一项分解为部分分式，

$$\frac{ab}{(s^2+a^2)^2}=\frac{b}{2a}\left[\frac{1}{s^2+a^2}-\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\right].$$

于是

$$\begin{aligned}X(s)&=\frac{b}{2a}\left[\frac{1}{s^2+a^2}-\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\right]+x_0\frac{s}{s^2+a^2}+x_0'\frac{1}{s^2+a^2}\\&=\frac{b}{2a^2}\left[\frac{a}{s^2+a^2}-a\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\right]+x_0\frac{s}{s^2+a^2}+\frac{x_0'}{a}\cdot\frac{a}{s^2+a^2}.\end{aligned}$$

由拉普拉斯变换表可求得

$$\begin{aligned}x(t)&=\frac{b}{2a^2}(\sin at-at\cos at)+x_0\cos at+\frac{x_0'}{a}\sin at\\&=\frac{1}{2a^2}[(b+2ax_0')\sin at+a(2ax_0-bt)\cos at],\end{aligned}$$

此即为所要求的解.

5.3.2　微分方程组的拉普拉斯变换法

拉普拉斯变换可以用于解常系数高阶线性微分方程，也可以用来解常系数线性微分方程组. 为此，首先将拉普拉斯变换推广到向量函数的情形. 我们定义

$$\mathscr{L}[\boldsymbol{f}(t)]=\int_0^{+\infty}e^{-st}\boldsymbol{f}(t)\,dt,$$

其中 $\boldsymbol{f}(t)$ 是 n 维向量函数，要求它的每一个分量都存在拉普拉斯变换. 这里，我们通过

几个例子介绍如何应用拉普拉斯变换求解常系数线性微分方程组. 如果掌握了较好的计算机软件知识,可以直接利用计算机软件进行求解(参阅附录 C).

例 5 利用拉普拉斯变换求解 § 5.2 的例 10.

解 将方程组写成分量形式,即

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 + 5x_2 + e^{-t}, \\ x_2' = -5x_1 + 3x_2, x_1(0) = 0, x_2(0) = 1. \end{cases}$$

令 $X_1(s) = \mathscr{L}[x_1(t)]$, $X_2(s) = \mathscr{L}[x_2(t)]$,对方程组施行拉普拉斯变换得到

$$\begin{cases} sX_1(s) = 3X_1(s) + 5X_2(s) + \dfrac{1}{s+1}, \\ sX_2(s) - 1 = -5X_1(s) + 3X_2(s), \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (s-3)X_1(s) - 5X_2(s) = \dfrac{1}{s+1}, \\ 5X_1(s) + (s-3)X_2(s) = 1. \end{cases}$$

由此解得

$$\begin{cases} X_1(s) = \dfrac{\dfrac{s-3}{s+1} + 5}{(s-3)^2 + 5^2} = \dfrac{1}{41}\left[4\dfrac{s-3}{(s-3)^2+5^2} + 46\dfrac{5}{(s-3)^2+5^2} - 4\dfrac{1}{s+1}\right], \\ X_2(s) = \dfrac{s - 3 - \dfrac{5}{s+1}}{(s-3)^2+5^2} = \dfrac{1}{41}\left[46\dfrac{s-3}{(s-3)^2+5^2} - 4\dfrac{5}{(s-3)^2+5^2} - 5\dfrac{1}{s+1}\right], \end{cases}$$

取反变换或查拉普拉斯变换表即得

$$x_1(t) = \frac{1}{41}e^{3t}(4\cos 5t + 46\sin 5t - 4e^{-4t}),$$

$$x_2(t) = \frac{1}{41}e^{3t}(46\cos 5t - 4\sin 5t - 5e^{-4t}).$$

所得结果跟 § 5.2 的例 10 一致.

例 6 试求方程组

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 \\ x_2' = -x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

满足初值条件 $\varphi_1(0) = 0, \varphi_2(0) = 1$ 的解 $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$,并求出它的基解矩阵.

解 令 $X_1(s) = \mathscr{L}[\varphi_1(t)]$, $X_2(s) = \mathscr{L}[\varphi_2(t)]$. 假设 $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$ 满足微分方程组,我们对方程组取拉普拉斯变换,得到

$$\begin{cases} sX_1(s) - \varphi_1(0) = 2X_1(s) + X_2(s), \\ sX_2(s) - \varphi_2(0) = -X_1(s) + 4X_2(s), \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (s-2)X_1(s) - X_2(s) = \varphi_1(0) = 0, \\ X_1(s) + (s-4)X_2(s) = \varphi_2(0) = 1. \end{cases}$$

解出 $X_1(s)$，$X_2(s)$，得到

$$X_1(s)=\frac{1}{(s-3)^2},\quad X_2(s)=\frac{s-2}{(s-3)^2}=\frac{1}{s-3}+\frac{1}{(s-3)^2},$$

取反变换，即得

$$\varphi_1(t)=te^{3t},\quad \varphi_2(t)=e^{3t}+te^{3t}=(1+t)e^{3t}.$$

为了要寻求基解矩阵，再求满足初值条件 $\psi_1(0)=1$，$\psi_2(0)=0$ 的解 $(\psi_1(t),\psi_2(t))$. 如前一样，我们得到方程组

$$\begin{cases}(s-2)X_1(s)-X_2(s)=\psi_1(0)=1,\\ X_1(s)+(s-4)X_2(s)=\psi_2(0)=0\end{cases}$$

的解为

$$X_1(s)=\frac{s-4}{(s-3)^2}=\frac{1}{s-3}-\frac{1}{(s-3)^2},\quad X_2(s)=\frac{-1}{(s-3)^2},$$

取反变换，得到

$$\psi_1(t)=(1-t)e^{3t},\quad \psi_2(t)=-te^{3t}.$$

这样一来，基解矩阵就是

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}\psi_1(t) & \varphi_1(t)\\ \psi_2(t) & \varphi_2(t)\end{bmatrix}=e^{3t}\begin{bmatrix}1-t & t\\ -t & 1+t\end{bmatrix}.$$

读者可以将结果与 § 5.2 的例 7 比较一下.

从上两例中我们可以看到，应用拉普拉斯变换可以将求解线性微分方程组的问题化为求解线性代数方程组的问题. 如果方程组的阶数不很高的话，那么它的解是容易求出来的.

应用拉普拉斯变换还可以直接去解高阶的常系数线性微分方程组，而不必先化为一阶的常系数线性微分方程组.

例 7　试求方程组

$$\begin{cases}x_1''-2x_1'-x_2'+2x_2=0,\\ x_1'-2x_1+x_2'=-2e^{-t}\end{cases}$$

满足初值条件 $\varphi_1(0)=3$，$\varphi_1'(0)=2$，$\varphi_2(0)=0$ 的解 $(\varphi_1(t),\varphi_2(t))$.

解　令 $X_1(s)=\mathscr{L}[\varphi_1(t)]$，$X_2(s)=\mathscr{L}[\varphi_2(t)]$，对方程组取拉普拉斯变换，我们得到

$$\begin{cases}[s^2X_1(s)-3s-2]-2[sX_1(s)-3]-sX_2(s)+2X_2(s)=0,\\ [sX_1(s)-3]-2X_1(s)+sX_2(s)=\dfrac{-2}{s+1},\end{cases}$$

整理后得到

$$\begin{cases}(s^2-2s)X_1(s)-(s-2)X_2(s)=3s-4,\\ (s-2)X_1(s)+sX_2(s)=\dfrac{3s+1}{s+1}.\end{cases}$$

解上面方程组，即有

$$\begin{cases} X_1(s)=\dfrac{3s^2-4s-1}{(s+1)(s-1)(s-2)}=\dfrac{1}{s-1}+\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{1}{s-2}, \\ X_2(s)=\dfrac{2}{(s+1)(s-1)}=\dfrac{1}{s-1}-\dfrac{1}{s+1}, \end{cases}$$

再取反变换就得到解

$$\varphi_1(t)=e^t+e^{-t}+e^{2t},\quad \varphi_2(t)=e^t-e^{-t}.$$

从上述各例可以看到,应用拉普拉斯变换求解常系数线性微分方程(组)的初值问题是比较快捷的. 但遗憾的是,它对方程中强迫项的性质要求比较高. 因此,并非任何常系数线性微分方程(组)都能用拉普拉斯变换法进行求解,这是必须注意的.

习 题 5.3

1. 求下列初值问题的解:

(1) $x''+9x=6e^{3t}, x(0)=x'(0)=0$;

(2) $x^{(4)}+x=2e^t, x(0)=x'(0)=x''(0)=x'''(0)=1$.

2. 火车沿水平的道路运动.火车的质量是 m,机车的牵引力是 F,运动时的阻力 $W=a+bv$,其中 a, b 是常数,而 v 是火车的速度;s 是走过的路程.试确定火车的运动规律,设 $t=0$ 时 $s=0, v=0$.

3. 试用拉普拉斯变换法解习题 5.2 的第 5 题和第 6 题,也可以利用计算机软件求解之.

4. 求下列初值问题的解:

(1) $\begin{cases} x_1'+x_2'=0, \\ x_1'-x_2'=1, \end{cases}\quad x_1(0)=1, x_2(0)=0$;

(2) $\begin{cases} x_1''+3x_1'+2x_1+x_2'+x_2=0, \\ x_1'+2x_1+x_2'-x_2=0, \\ x_1(0)=1, x_1'(0)=-1, x_2(0)=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1''-m^2x_2=0, \\ x_2''+m^2x_1=0, \\ x_1(0)=\eta_1, x_1'(0)=\eta_2, x_2(0)=\eta_3, x_2'(0)=\eta_4. \end{cases}$

本章学习要点

线性微分方程组理论是微分方程理论中重要的组成部分. 无论从应用的角度或者从理论的角度来说,本章所提供的方法和结果都是重要的,它是进一步学习常微分方程理论和其他有关课程的必不可少的基础知识. 学习本章时应注意如下几点:

1. 熟悉线性微分方程组的向量和矩阵的表述方法和相关运算.

2. 掌握线性微分方程组的一般理论主要是了解它的所有解的代数结构问题. 这里的中心问题是齐次线性微分方程组的基解矩阵的概念. 有了基解矩阵,齐次线性微分方程组的任一解可由基解矩

阵表示，而非齐次线性微分方程组的任一解亦可通过积分由基解矩阵表示，这就是所谓常数变易公式. 一般理论的基本内容可以概括在定理 6，定理 7 及常数变易公式(5.20)中. 读者可以此为线索了解有关内容.

3. 基解矩阵的存在与具体寻求是两回事. 一般齐次线性微分方程组的基解矩阵是无法通过积分得到的. 但当系数矩阵是常数矩阵时，可以通过代数方法求出基解矩阵，这时可利用矩阵指数 $\exp \boldsymbol{A}t$ 给出基解矩阵的一般形式，而基解矩阵的具体计算方法，主要是利用公式(5.40).

拉普拉斯变换是求解常系数线性微分方程组的初值问题的一个简便方法，要懂得运用. 也可以利用有关计算机软件直接求解.

4. 掌握高阶线性微分方程与线性微分方程组的关系，懂得将线性微分方程组的有关结果推广到高阶线性微分方程上去，从而在一个统一的观点下理解这两部分的内容.

第六章
非线性微分方程

在本书开头第一章绪论中我们给出了一些描述客观现实世界运动过程的常微分方程模型,这些常微分方程有线性或非线性、有可解或不可解等各种类型. 前面讨论了一阶微分方程的初等解法、解的存在性和线性微分方程(组),这一章我们将讨论非线性常微分方程. 非线性模型往往更能反映运动过程的本质,而非线性常微分方程大多数都不能直接求解. 这就提出一个如何研究非线性常微分方程的问题.

早在一百多年前,俄国李雅普诺夫(Lyapunov)和法国庞加莱(Poincaré)曾分别提出常微分方程的稳定性和定性的理论和方法,为我们指出研究非线性常微分方程的新方向. 经过一百多年的发展,常微分方程的稳定性和定性理论已成为常微分方程理论的重要分支.

20 世纪动力系统得到了迅猛发展,其基础是哈密顿方程. 六十多年前,自然科学界出现了和非线性常微分方程相关的两件大事,一是**孤立子**理论,一批非线性波方程发现可积的孤立解,兴起了沉寂多年的可积系统的研究,并在最新激光技术中得到应用;另一是混沌理论,气象学家洛伦茨在寻求天气预报新方法过程中发现了对初值敏感的非线性洛伦茨方程,数学家再将其发展为**混沌**理论,并在科学界中掀起了一股在确定系统中寻求随机现象的热潮,更触发了打破几百年来牛顿确定论的科学方法论的革命.

本章第 1 节介绍稳定性概念及稳定性理论的 V 函数方法(李雅普诺夫第二方法);第 2 节的内容是平面定性理论,包括奇点、极限环与平面图貌;第 3 节简单介绍哈密顿方程、孤立子和混沌,从一个侧面让读者了解近代科学是如何发展的.

借助计算机和数学(模型),自然科学研究已从线性发展到非线性,从简单到复杂,从单学科到多学科,常微分方程的发展也与时俱进. 有关常微分方程数学模型可参看附录 A 和本课程的数字资源,而有关常微分方程发展历史及其分支可参看数字资源.

§ 6.1 稳定性:李雅普诺夫稳定性与 V 函数

6.1.1 李雅普诺夫稳定性

本章讨论非线性常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{y}),\ \boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n \tag{6.1}$$

的解的性态.

关于方程组(6.1)的解的存在唯一性及解的延拓、解对初值的连续性、可微性可参看附录 B3.

为了对稳定性有一个直观的了解,我们从一个简单的方程谈起.

例 1　求一阶非线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Ay-By^2 \tag{6.2}$$

的解的图貌,其中 A,B 为常数且 $AB>0$,初值条件为 $y(0)=y_0$.

解　方程(6.2)有通解

$$y(t)=\frac{A}{B+c\mathrm{e}^{-At}}\ (c\text{ 为任意常数})$$

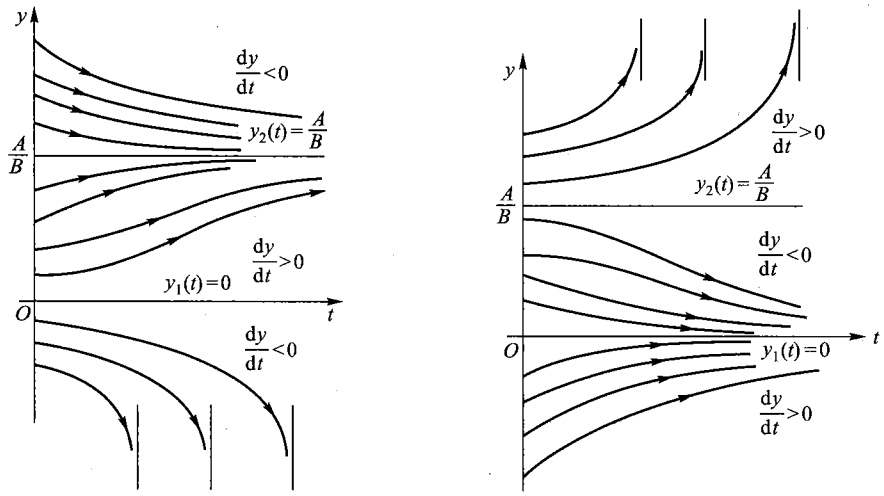
和特解 $y_1(t)=0,y_2(t)=\dfrac{A}{B}$,满足初值条件的解为

$$y(t)=\frac{A}{B+\left(\dfrac{A}{y_0}-B\right)\mathrm{e}^{-At}}, \tag{6.3}$$

其图貌如图(6.1)所示. 从图中可看到,当 $A>0,B>0$ 时,满足初值条件 $y(0)=y_0>0$ 的所有解 $y(t)$ 均渐近地趋于特解 $y_2(t)=\dfrac{A}{B}$;而当 $A<0,B<0$ 时,满足初值条件 $y(0)=y_0<\dfrac{A}{B}$的解 $y(t)$ 均趋于特解 $y_1(t)=0$. 但对 $A>0,B>0$ 时的初值条件 $y(0)=y_0<0$ 和 $A<0$, $B<0$ 时的初值条件 $y(0)=y_0>\dfrac{A}{B}$,它们的解 $y(t)$ 均趋于无穷,且以平行于 y 轴的直线为渐近线. 这些特性也可以由解的表达式(6.3)直接推出. 我们把邻近的解均趋于它的特解称为稳定的,如 $A>0,B>0$ 时的特解 $y_2(t)$ 和 $A<0,B<0$ 时的特解 $y_1(t)$ 是稳定的. 而有邻近的解离开它的特解称为不稳定的,如 $A>0,B>0$ 时的特解 $y_1(t)$ 和 $A<0,B<0$ 时的特解 $y_2(t)$ 是不稳定的.

稳定性的物理意义是明显的,因为用微分方程描述的物质运动(例如某一质点运动)的特解密切依赖于初值,而初值的计算或测定实际上不可避免地出现误差和干扰. 如果描述此运动的微分方程的特解是不稳定的,则初值的微小误差或干扰将招致"差之毫厘,谬以千里"的严重后果. 因此,这样不稳定的特解将不宜作为设计的依据;反之,稳定的特解才是我们最感兴趣的. 这说明解的稳定性的研究是一个十分重要的问题,可是大多数非线性微分方程是不可能或很难求出其解的具体表达式来的. 因此,必须要求在不具体解出方程的情况下能判断方程的解的稳定性态.

当我们研究方程组(6.1)的解的性态时往往与具有某些特殊性质的特解联系在一



(a) $A>0, B>0$　　(b) $A<0, B<0$

图(6.1)

起. 为研究方程组(6.1)的特解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 邻近的解的性态,通常先利用变换

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\varphi}(t) \tag{6.4}$$

把(6.1)化为方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}), \tag{6.5}$$

其中

$$\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{y})-\frac{d\boldsymbol{\varphi}(t)}{dt}=\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\varphi}(t))-\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{\varphi}(t)).$$

此时显然有 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$. 即方程组(6.1)的特解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 变为方程组(6.5)的零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

如对方程(6.2)的特解 $y_2(t)=\frac{A}{B}$,可通过变换 $x=y-\frac{A}{B}$ 把(6.2)化为方程

$$\frac{dx}{dt}=-Ax-Bx^2.$$

讨论方程(6.2)的特解 $y_2(t)=\frac{A}{B}$ 的稳定性态便可化为讨论上述方程的零解 $x=0$ 的稳定性态.

微分方程右端不含自变量时为驻定微分方程. 驻定微分方程右端为零得到的代数方程的解是微分方程的**常数解**,也是特解,称为**平衡解**或**驻定解**(见 1.2.1).

例 1 中微分方程(6.2)右端不含自变量,其右端为零得到的代数方程 $Ay-By^2=0$ 的解 $y_1=0, y_2=\frac{A}{B}$ 是微分方程(6.2)的平衡解.

下面给出方程组(6.5)的零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的稳定性(通常称为李雅普诺夫意义下的稳定

性)的定义.

假设方程组(6.5)的右端函数 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 在包含原点的域 G 内有连续的偏导数,从而满足方程组的解的存在唯一性、延拓、连续性和可微性条件.

定义 1(稳定性定义)　如果对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon,t_0)>0$,使当任一 $\boldsymbol{x}_0$ 满足 $\|\boldsymbol{x}_0\|\leqslant\delta$ 时,方程组(6.5)的由初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 确定的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 对一切 $t\geqslant t_0$,均有

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|<\varepsilon,$$

则称方程组(6.5)的零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是**稳定**的.

如果方程组(6.5)的零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 稳定,且存在 $\delta_0>0$,使当 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta_0$ 时,满足初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 均有

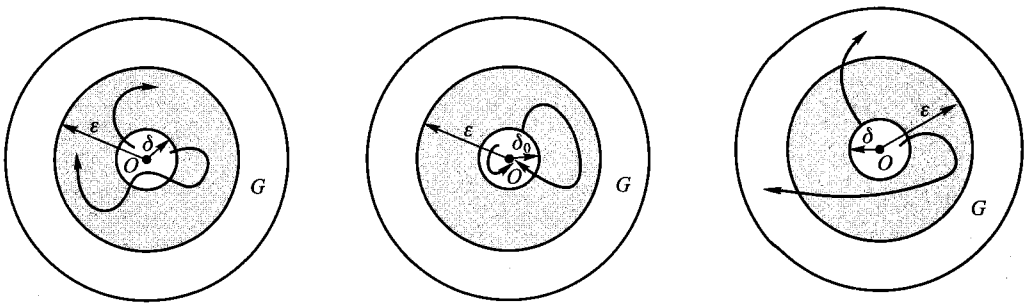
$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{0},$$

则称零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是**渐近稳定**的.

如果零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 渐近稳定,且存在域 D_0,当且仅当 $\boldsymbol{x}_0\in D_0$ 时,满足初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 均有 $\lim\limits_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{0}$,则称域 D_0 为(**渐近**)**稳定域**或**吸引域**. 若稳定域为全空间,即 $\delta_0=+\infty$,则称零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是**全局渐近稳定**的,简称为**全局稳定**的.

当零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 不是稳定的时,称它是**不稳定**的,即:如果对某给定的 $\varepsilon>0$,不管 $\delta>0$ 怎样小,总有 $\boldsymbol{x}_0$ 满足 $\|\boldsymbol{x}_0\|\leqslant\delta$,使方程组(6.5)的由初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 确定的解 $\boldsymbol{x}(t)$,至少存在某个 $t_1>t_0$,使得 $\|\boldsymbol{x}(t_1)\|=\varepsilon$.

二维情形零解的稳定性态在平面上的示意图如图(6.2).



(a) 稳定　　(b) 渐近稳定　　(c) 不稳定

图(6.2)　零解的稳定性态

例 2　对微分方程(6.2),当 $A<0,B<0$ 时,其零解 $y=0$ 为渐近稳定的,稳定域为 $y<\dfrac{A}{B}$;特解 $y_2(t)=\dfrac{A}{B}$ 为不稳定的.

当 $A>0,B>0$ 时,微分方程(6.2)的解 $y=\dfrac{A}{B}$ 为渐近稳定的,稳定域为 $y>0$;零解 $y=0$ 为不稳定的.

6.1.2　按线性近似决定稳定性

考虑常系数线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \tag{6.6}$$

其特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=0. \tag{6.7}$$

由第五章(5.40)式知,线性微分方程组(6.6)的任一解均可表示为形如

$$\sum_{m=0}^{l_i} c_{im}t^m\mathrm{e}^{\lambda_i t},\ 1\leqslant i\leqslant n$$

的线性组合,其中 λ_i 为特征方程(6.7)的根,$l_i\geqslant 0$ 为由根 λ_i 的重数确定的整数. 于是有

定理 1 对常系数线性微分方程组(6.6),若特征方程(6.7)的根均具有负实部(包括负根),则方程组(6.6)的零解是渐近稳定的;若特征方程(6.7)具有正实部的根(包括正根),则方程组(6.6)的零解是不稳定的;若特征方程(6.7)没有正实部的根(包括正根),但有零根或零实部的根,则方程组(6.6)的零解可能是稳定的也可能是不稳定的,这要看零根或具有零实部的根的重数是否等于 1 而定.

现考虑非线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}), \tag{6.8}$$

$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$,右端函数满足条件

$$\lim_{\|\boldsymbol{x}\|\to 0}\frac{\|\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|}=0. \tag{6.9}$$

显然,方程组(6.8)有零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

对于非线性微分方程组(6.8)的稳定性态,自然会提出这样的问题:在什么条件下,(6.8)的零解的稳定性态能由线性微分方程组(6.6)的零解的稳定性态来决定. 这便是所谓按线性近似决定稳定性的问题. 我们有下面的结论.

定理 2 对非线性微分方程组(6.8),若特征方程没有零根或零实部的根,则方程组(6.8)的零解的稳定性态与其线性近似方程组(6.6)的零解的稳定性态一致:当特征方程(6.7)的根均具有负实部(包括负根)时,方程组(6.8)的零解是渐近稳定的;当特征方程(6.7)具有正实部的根(包括正根)时,方程组(6.8)的零解是不稳定的.

其证明留在后面 6.1.3 小节用李雅普诺夫第二方法解决.

若特征方程有零根或零实部的根,方程组(6.8)属**临界情形**,其零解的稳定性态不能由其线性近似方程组(6.6)的零解的稳定性态决定. 因为可以找到这样的例子,适当变动 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$(当然条件(6.9)仍满足),便可使非线性微分方程组(6.8)的零解是稳定的或是不稳定的.

如何解决临界情形的稳定性问题,是常微分方程稳定性理论的重大课题之一.

排疑解惑

临界情形稳定性

例 3 讨论有阻力及无阻力时数学摆的稳定性态.

解 有阻力的数学摆的微分方程为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0, \tag{6.10}$$

这里摆长 l、质量 m、重力加速度 g 及阻尼系数 μ 均大于 0. 令 $x=\varphi, y=\frac{d\varphi}{dt}$,(6.10)化为一阶微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-\frac{g}{l}\sin x-\frac{\mu}{m}y, \tag{6.11}$$

原点为方程组的零解. 方程组(6.11)可改写为

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-\frac{g}{l}x-\frac{\mu}{m}y-\frac{g}{l}(\sin x-x),$$

即相应的线性近似方程组为

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-\frac{g}{l}x-\frac{\mu}{m}y, \tag{6.12}$$

非线性项为

$$R(x,y)=-\frac{g}{l}(\sin x-x)=-\frac{g}{l}\left(-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right),$$

满足条件(6.9).

线性微分方程组(6.12)的特征方程为

$$\lambda^2+\frac{\mu}{m}\lambda+\frac{g}{l}=0,$$

其根为

$$\lambda_{1,2}=-\frac{\mu}{2m}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\mu}{m}\right)^2-4\frac{g}{l}}.$$

因 $\mu>0$,特征值均具有负实部,根据定理 2,当摆有阻力时,微分方程组(6.11)的零解是渐近稳定的.

微分方程组(6.11)除零解外还有平衡解 $x=n\pi$ $(n=\pm1,\pm2,\cdots)$, $y=0$. 因 $\sin x$ 的周期性,平衡解 $x=\pm2k\pi, y=0$(k 为正整数)是渐近稳定的,只要再分析平衡解$(\pi,0)$即可.

考虑平衡解$(\pi,0)$的稳定性. 作变换 $x^*=x-\pi, y^*=y$,方程组(6.11)化为

$$\frac{dx^*}{dt}=y^*,\quad \frac{dy^*}{dt}=\frac{g}{l}\sin x^*-\frac{\mu}{m}y^*. \tag{6.11*}$$

相应的线性近似方程组为

$$\frac{dx^*}{dt}=y^*,\quad \frac{dy^*}{dt}=\frac{g}{l}x^*-\frac{\mu}{m}y^*,$$

对应的特征方程为

$$\lambda^2+\frac{\mu}{m}\lambda-\frac{g}{l}=0,$$

其根为

$$\lambda_{1,2}=-\frac{\mu}{2m}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\mu}{m}\right)^2+4\frac{g}{l}},$$

这是一对异号实根. 根据定理 2,非线性微分方程组(6.11)*的零解是不稳定的,即非线性微分方程组(6.11)的解 $x=\pi,y=0$ 是不稳定的. 于是平衡解 $x=\pm(2k+1)\pi,y=0$(k 为正整数)是不稳定的.

如果摆没有阻力,即 $\mu=0$,则其线性近似方程组(6.12)的特征方程的根为

$$\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{g}{l}},$$

是一对纯虚根. 依定理 1,线性微分方程组(6.12)的零解是稳定的,但相应的非线性微分方程组(6.11)的零解的稳定性态无法确定,属临界情形. 而对非线性微分方程组(6.11)*,其线性近似方程组的特征方程的根仍为一对异号实根,故 $\mu=0$ 时方程组(6.11)的解 $x=\pi,y=0$ 仍是不稳定的.

定理 2 说明非线性微分方程组(6.8)零解是否为渐近稳定的取决于其相应的特征方程(6.7)的全部的根是否具有负实部. 但当 n 相当大时,(6.7)的根是不容易甚至不能具体地用公式表达出来的. 不过,我们并不要求找出特征方程的全部根,而只要求知道所有各根的实部是否均为负. 下面介绍赫尔维茨(Hurwitz)判别代数方程的根的实部是否均为负的法则.

定理 3 n 次常系数代数方程

$$a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0,\ a_0>0 \tag{6.13}$$

的赫尔维茨行列式定义为

$$\Delta_1=a_1,\Delta_2=\begin{vmatrix}a_1 & a_0\\ a_3 & a_2\end{vmatrix},\Delta_3=\begin{vmatrix}a_1 & a_0 & 0\\ a_3 & a_2 & a_1\\ a_5 & a_4 & a_3\end{vmatrix},\cdots,\Delta_n=\begin{vmatrix}a_1 & a_0 & \cdots & 0\\ a_3 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \cdots & a_n\end{vmatrix}=a_n\Delta_{n-1},$$

其中 $a_i=0$(对一切 $i>n$).

方程(6.13)的一切根均具有负实部的充分必要条件为下列不等式同时成立:

$$a_1>0,\Delta_2>0,\Delta_3>0,\cdots,\Delta_{n-1}>0,a_n>0.$$

定理的证明见高等代数课本,此略.

例 4 考虑一阶非线性微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-2x+y-z+x^2e^x,\\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=x-y+x^3y+z^2,\\[2ex] \dfrac{dz}{dt}=x+y-z-e^x(y^2+z^2)\end{cases}$$

的零解的稳定性.

解　这里对应的线性近似方程组的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

即

$$\lambda^3+4\lambda^2+5\lambda+3=0.$$

赫尔维茨行列式为

$$a_0=1,\quad a_1=4,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=17,\quad a_3=3.$$

根据定理 3,特征方程的根均具有负实部. 由定理 2 知非线性微分方程组的零解 $x=y=z=0$是渐近稳定的.

例 5　对三次代数方程

$$\lambda^3+(a+b+1)\lambda^2+b(a+c)\lambda+2ab(c-1)=0,$$

其中 $a>0,b>0,c>0$,考虑其根均具有负实部时参数 c 的变化范围.

解　对应(6.13)式,有

$$a_0=1,\quad a_1=a+b+1,\quad \Delta_2=(a+b+1)b(a+c)-2ab(c-1),\quad a_3=2ab(c-1),$$

由定理 3,方程的根均具有负实部的充要条件是 $c>1$ 及 $\Delta_2>0$,即

$$a<b+1,c>1\quad 或\quad a>b+1,1<c<c_0,$$

其中 $c_0=\dfrac{a(a+b+3)}{a-b-1}$.

6.1.3　V 函数方法(李雅普诺夫第二方法)

为判断非线性微分方程解的稳定性,李雅普诺夫创造了两种方法:第一方法和第二方法. 第一方法是通过特征数和幂级数展开进行研究;第二方法则构造一个特殊的函数——V 函数直接进行判断,又称直接方法.

李雅普诺夫稳定性理论中的李雅普诺夫第二方法便是构造一个特殊的函数 $V(x,y)$,利用函数 $V(x,y)$及其通过方程组的全导数$\dfrac{\mathrm{d}V(x,y)}{\mathrm{d}t}$的性质来确定方程组解的稳定性,亦称 V 函数方法.

考虑 n 维一阶非线性驻定微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\tag{6.14}$$

其中$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$,且$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在某域 G: $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant A$($A$ 为正常数)内有连续的偏导数,从而方程组的在域 G 内满足初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$的解在原点的某邻域内存在且唯一. 显然,

$\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 是其特解.

定义 2(V 函数定义) 假设 $V(\boldsymbol{x})$ 为在域 $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant H$ 内定义的实连续可微函数,$V(\mathbf{0})=0$. 如果在此域内恒有 $V(\boldsymbol{x})\geqslant 0$,则称 V 为**常正**的;如果在此域内当 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ 时有 $V(\boldsymbol{x})>0$,则称 V 为**定正**的;如果 $-V$ 是定正(常正)的,则称 V 为**定负(常负)**的.

当 $V(\boldsymbol{x})$ 对所有变元的偏导数存在且连续时,可将方程组(6.14)的解代入,再对 t 求导数得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\cdot\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\cdot f_i\equiv\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{f},$$

此导数 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 称为 $V(\boldsymbol{x})$ 通过方程组(6.14)的**全导数**.

例 6 函数

$V(x,y)=(x+y)^2$,常正;

$V(x,y)=(x+y)^2+y^4$,定正;

$V(x,y)=\sin(x^2+y^2)$,在域 $x^2+y^2<\pi$ 上定正,在全平面变号;

$V(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$,$4ac-b^2>0$,当 $a>0$ 时定正,当 $a<0$ 时定负.

定理 4(李雅普诺夫定理) 如果对微分方程组(6.14)存在定正函数 $V(\boldsymbol{x})$,其通过方程组(6.14)的全导数 $\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t}$ 为常负函数或恒为零,则方程组(6.14)的零解是稳定的.

如果存在定正函数 $V(\boldsymbol{x})$,其通过方程组(6.14)的全导数 $\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t}$ 为定负的,则方程组(6.14)的零解是渐近稳定的.

如果存在函数 $V(\boldsymbol{x})$ 和某非负常数 μ,其通过方程组(6.14)的全导数 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 可表示为

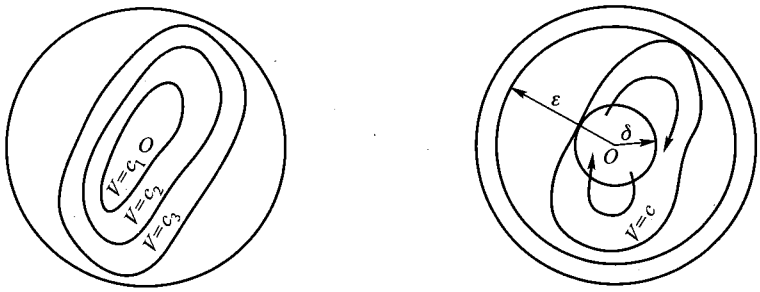
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\mu V+W(\boldsymbol{x}),$$

且当 $\mu=0$ 时 W 为定正函数,当 $\mu\neq 0$ 时 W 为常负函数或恒为零;又在 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的任意小邻域内至少存在某个 $\bar{\boldsymbol{x}}$,使得 $V(\bar{\boldsymbol{x}})>0$,则方程组(6.14)的零解是**不稳定**的.

定理的详细证明可参看数字资源(拓展阅读).

几何解释 在由未知函数 x 组成的 n 维**相空间**中,方程组(6.14)的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 在相空间中的轨迹为**轨线**. $V(\boldsymbol{x})=c$ 当 c 足够小时在相空间中是围绕原点的 $n-1$ 维闭曲面. 方程组(6.14)的零解 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 稳定时,其原点附近的由 $\|\boldsymbol{x}_0\|\leqslant\delta$ 为初值出发的轨线 $\boldsymbol{x}(t)$ 均停留在某闭曲面 $V(\boldsymbol{x})=c$ 内;零解 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 渐近稳定时,轨线 $\boldsymbol{x}(t)$ 将沿闭曲面 $V(\boldsymbol{x})=c_k(c_k\to 0)$ 一层层趋于原点.

平面一阶微分方程组的相空间为平面,相平面上 $V(\boldsymbol{x})=c$ 为闭曲线族,轨线的走向如图(6.3)所示.



(a) $V=c$ 闭曲线族($c_1<c_2<c_3$)　　(b) 稳定性态与 V 函数的关系

图(6.3)　稳定性几何解释

例 7　讨论平面一阶微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y+ax^3,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+ay^3$$

零解的稳定性态.

解　其线性近似方程组 $x'=-y, y'=x$ 的特征方程 $\lambda^2+1=0$ 的根为 $\lambda=\pm\sqrt{-1}$,属于临界情形.

如果取定正函数 $V=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$,则$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=a(x^4+y^4)$. 根据定理 4,有

(1) 如果 $a<0$,则$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$定负,方程组的零解渐近稳定;

(2) 如果 $a>0$,则$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$定正,方程组的零解不稳定;

(3) 如果 $a=0$,则$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0$,方程组的零解稳定.

定理 4 是李雅普诺夫稳定性的基本定理. 李雅普诺夫稳定性理论经过不断发展,可以在更广泛的条件下得到关于稳定性、渐近稳定性和不稳定性的结论. 下面我们仅举出一个应用较广的关于渐近稳定性的判断.

定理 5　如果对微分方程组(6.14)存在定正函数 $V(\boldsymbol{x})$,其通过方程组(6.14)的全导数$\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t}$常负,但使$\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t}=0$ 的点 $\boldsymbol{x}$ 的集中除零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 外不包含方程组(6.14)的整条正半轨线,则方程组(6.14)的零解是渐近稳定的.

证明与定理 4 类似. 因对轨线 $\boldsymbol{x}(t)$ 不会有$\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}(t))}{\mathrm{d}t}=0$,故仍可通过反证法证明 $\lim\limits_{t\to\infty}V(\boldsymbol{x}(t))=0$,即$\lim\limits_{t\to\infty}\|\boldsymbol{x}(t)\|=0$.

例 8　讨论例 3 的数学摆的稳定性态.

解　数学摆的微分方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\frac{g}{l}\sin x-\frac{\mu}{m}y. \tag{6.11}$$

可取 V 函数为

$$V(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\frac{g}{l}(1-\cos x),$$

则其全导数为

$$\frac{\mathrm{d}V(x,y)}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu}{m}y^2.$$

当无阻力时,$\mu=0$,因而$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0$,根据定理 4,方程组的零解稳定.

当有阻力时,$\mu>0$,因而$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$常负,由定理 4 仅能得到零解稳定的结果. 但由于$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0$的集为 $y=0$,而在原点邻域中直线 $y=0$ 不包含除零解 $x=0,y=0$ 外方程组(6.11)的整条正半轨线,应用定理 5 可得到方程组的零解渐近稳定的结论.

应用李雅普诺夫第二方法判断微分方程组零解的稳定性的关键是找到合适的 V 函数. 如何构造满足特定性质的 V 函数是一个有趣而复杂的问题. 进一步的是考虑常系数线性微分方程组构造二次型 V 函数的问题,并利用它来补充证明按线性近似方程组决定稳定性的定理 2. 有兴趣的读者可参看有关资料[1].

习 题 6.1

1. 试求出下列方程组的所有驻定解,并讨论相应的驻定解的稳定性态:

(1) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(1-x-y),\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{4}y(2-3x-y);\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=9x-6y+4xy-5x^2,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=6x-6y-5xy+4y^2.\end{cases}$

2. 研究下列方程(组)零解的稳定性:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}+5\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+6\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x=0$;

(2) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mu x-y,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\mu y-z,\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\mu z-x$ (μ 为常数).

3. 试判别下列函数的定号性:

(1) $V(x,y)=x^2$;

(2) $V(x,y)=x^2-2xy^2$;

(3) $V(x,y)=x^2-2xy^2+y^4+x^4$;

(4) $V(x,y)=x^2+2xy+y^2+x^2y^2$;

(5) $V(x,y)=x\cos x+y\sin y$.

4. 试用形如 $V(x,y)=ax^2+by^2$ 的 V 函数确定下列方程组零解的稳定性:

(1) $\frac{dx}{dt}=-xy^2,\frac{dy}{dt}=-yx^2$;

(2) $\frac{dx}{dt}=-x+2y^3,\frac{dy}{dt}=-2xy^2$;

(3) $\frac{dx}{dt}=x^3-2y^3,\frac{dy}{dt}=xy^2+x^2y+\frac{1}{2}y^3$.

5. 研究下列方程组零解的稳定性:

(1) $\frac{dx}{dt}=-y^2+x(x^2+y^2),\frac{dy}{dt}=-x^2-y^2(x^2-y^2)$;

(2) $\frac{dx}{dt}=ax-xy^2,\frac{dy}{dt}=2x^4y$ (a 为参数);

(3) $\frac{dx}{dt}=ax-y^2,\frac{dy}{dt}=2x^3y$ (a 为参数).

6. 给定微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)=0,$$

其中 $f(x)=0$,而当 $x\neq 0$ 时 $xf(x)>0(-k<x<k)$,试将其化为平面方程组,并用形如

$$V(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x f(s)\,ds$$

的 V 函数讨论方程组零解的稳定性.

§6.2　定性:奇点、极限环及平面图貌

6.2.1　奇点

下面我们转入介绍平面定性理论. 在 §1.2 中已介绍了相平面和奇点,在这里将详细讨论奇点的有关性质. 考虑二维(平面)一阶驻定微分方程组

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=X(x,y),\\ \frac{dy}{dt}=Y(x,y),\end{cases}\tag{6.15}$$

其中 X,Y 对 x,y 有连续偏导数. 方程组(6.15)的解 $x=x(t),y=y(t)$ 在欧几里得空间 $Otxy$ 上表示一曲线,称为**积分曲线**. 平面 Oxy 称为**相平面**,积分曲线在相平面上的投影称为**轨线**. 当 X^2+Y^2 不恒为零时,(6.15)可改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{Y(x,y)}{X(x,y)}\quad (X(x,y)\neq 0) \tag{6.16}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{X(x,y)}{Y(x,y)}\quad (Y(x,y)\neq 0). \tag{6.17}$$

由于$\frac{Y}{X}$或$\frac{X}{Y}$与 X,Y 同样对 x,y 有连续偏导数,因而满足解的存在唯一性条件. 方程(6.16)或(6.17)在 Oxy 平面的积分曲线可看成方程组(6.15) 在 Oxy 相平面上的轨线. 因此在相平面上,方程组(6.15)的轨线不能相交.

同时满足 $X(x,y)=0,Y(x,y)=0$ 的常数 $x=x^*,y=y^*$为方程组(6.15)的解,称为**驻定解(常数解)**,相平面 Oxy 上的点(x^*,y^*)称为方程组的**奇点**. 可以通过坐标平移将奇点移到原点(0,0),此时 $X(0,0)=0,Y(0,0)=0$.

现考虑驻定微分方程组在奇点邻域中的轨线图貌. 通过线性变换将方程组(6.15)的奇点移至 Oxy 的原点上,再取其线性项,则得方程组(6.15)的线性近似方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax+by,\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=cx+dy.\end{cases} \tag{6.18}$$

显然,坐标原点 $x=0,y=0$ 是奇点. 假设(6.18)的系数满足

$$\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}\neq 0, \tag{6.19}$$

则此奇点还是唯一的.

根据线性代数理论,可以通过非奇异实线性变换

$$\begin{cases}\xi=k_{11}x+k_{12}y,\\ \eta=k_{21}x+k_{22}y\end{cases} \tag{6.20}$$

将线性方程组(6.18)化为标准形式,其系数矩阵为下列四种形式之一:

$$\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{bmatrix},$$

其中 λ,μ,α,β 为实数. 这些标准形式由线性方程组(6.18)的特征方程

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b\\ c & d-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

即

$$\lambda^2+p\lambda+q=0, \tag{6.21}$$

其中 $p=-(a+d),q=ad-bc$ 的根(即特征值)的性质确定,具体判别见后.

可以通过方程组的系数即特征方程的根表示相平面 Oxy 上奇点(原点)附近的轨线图貌,即奇点的类型,现分五种情形讨论.

情形 I　同号相异实根　这时方程组的标准形式为

$$\frac{d\xi}{dt}=\lambda_1\xi,\quad \frac{d\eta}{dt}=\lambda_2\eta,$$

其解为

$$\xi(t)=Ae^{\lambda_1 t},\quad \eta(t)=Be^{\lambda_2 t},$$

其中 λ_1,λ_2 为实特征值，而 A,B 是任意实常数.

当特征值 λ_1,λ_2 同为负实数时，零解渐近稳定. 当 $B=0$ 时，ξ 轴的左、右半轴为轨线；当 $A=0$ 时，η 轴的上、下半轴亦为轨线. 若 $A\cdot B\neq 0$，当 $\lambda_1>\lambda_2$ 时，轨线在 t 时刻的切线斜率为

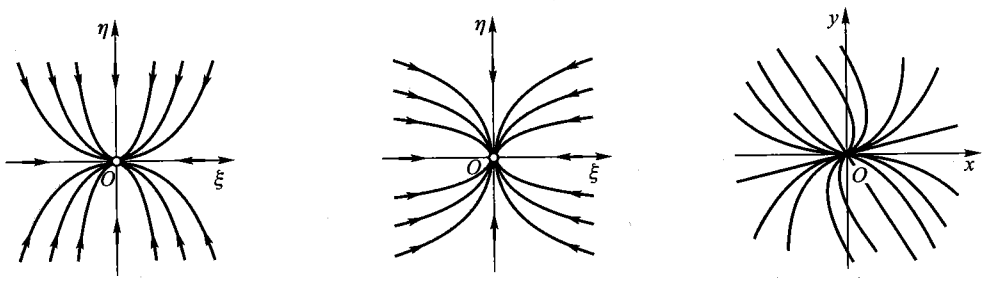
$$k=\frac{\eta(t)}{\xi(t)}=\frac{B}{A}e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}\to 0\ (t\to+\infty),$$

故轨线切 ξ 轴于原点，相平面上轨线的形状如图(6.4(a))；当 $\lambda_1<\lambda_2$ 时，有

$$\frac{1}{k}=\frac{\xi(t)}{\eta(t)}=\frac{A}{B}e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\to 0\ (t\to+\infty),$$

表明轨线切 η 轴于原点，相平面上轨线的形状如图(6.4(b)).

变换回 Oxy 平面的轨线图貌如图(6.4(c)). 除两条轨线外其余轨线均同一方向切于原点，称此类奇点为**结点**.



(a) $0>\lambda_1>\lambda_2$　　(b) $\lambda_1<\lambda_2<0$　　(c)

图(6.4)　结点

综上所述，当 λ_1,λ_2 同为负实数时，方程组的零解是渐近稳定的，对应的奇点称为**稳定结点**.

当 λ_1,λ_2 同为正实数时，方程组的零解是不稳定的，轨线当 $t\to-\infty$ 时趋于原点，对应的奇点称为**不稳定结点**.

情形 II　异号实根　这时方程组的标准形式为

$$\frac{d\xi}{dt}=\lambda_1\xi,\quad \frac{d\eta}{dt}=\lambda_2\eta,$$

其解为

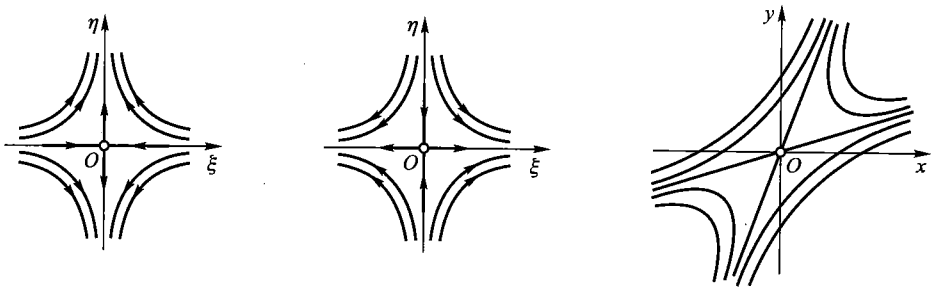
$$\xi(t)=Ae^{\lambda_1 t},\quad \eta(t)=Be^{\lambda_2 t},$$

其中 λ_1,λ_2 为实特征值,而 A,B 是任意实常数.

当 $B=0$ 时,ξ 轴的左、右半轴为轨线;当 $A=0$ 时,η 轴的上、下半轴亦为轨线. 因特征值 λ_1,λ_2 符号相异,其中一轴趋于原点,另一轴远离原点.

若 $A\cdot B\neq 0$,如果 $\lambda_1<0<\lambda_2$,则当 $t\to+\infty$ 时,$\xi(t)\to 0,\eta(t)\to+\infty$,相平面上轨线的形状如图(6.5(a));如果 $\lambda_1>0>\lambda_2$,则当 $t\to+\infty$ 时,$\xi(t)\to+\infty$,$\eta(t)\to 0$,相平面上轨线的形状如图(6.5(b)).

变换回 Oxy 平面的轨线图貌如图(6.5(c)),仅有四条轨线趋于或离开原点,称此类奇点为**鞍点**. 鞍点是不稳定的.



(a) $\lambda_1<0<\lambda_2$　　(b) $\lambda_1>0>\lambda_2$　　(c)

图(6.5)　鞍点

情形Ⅲ　重根　可分两种情形:

(1) $b\neq 0$ 或 $c\neq 0$,这时方程组的标准形式为

$$\frac{d\xi}{dt}=\lambda\xi+\eta,\quad \frac{d\eta}{dt}=\lambda\eta,$$

其解为

$$\xi(t)=(At+B)e^{\lambda t},\quad \eta(t)=Ae^{\lambda t},$$

其中 λ 为实特征值,而 A,B 为任意实常数.

若 $\lambda<0$,当 $t\to+\infty$ 时,$\xi(t)\to 0,\eta(t)\to 0$,方程组的零解渐近稳定. 当 $A=0$ 时,ξ 轴的左、右半轴为轨线;当 $A\neq 0$ 时,有

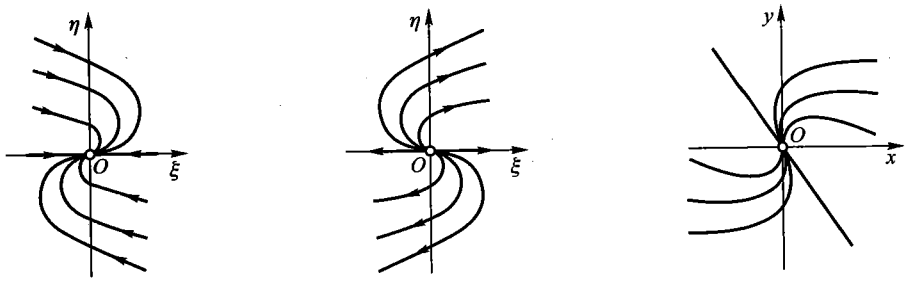
$$\frac{\eta(t)}{\xi(t)}=\frac{A}{At+B}\to 0\ (t\to+\infty),$$

且当 $t=-\dfrac{B}{A}$ 时有 $\xi(t)=0$,轨线越过 η 轴而切 ξ 轴于原点,如图(6.6(a))所示. 所有轨线沿同一个方向(ξ 轴)趋于奇点,其附近轨线具有这种性态的奇点称为**退化结点**. 因奇点稳定,因此又称为**稳定退化结点**.

若 $\lambda>0$,此时只要将 $t\to+\infty$ 改为 $t\to-\infty$,前面的讨论同样成立,轨线图貌如图(6.6(b))所示,奇点为**不稳定退化结点**.

(2) $b=c=0$,这时方程组的形式为

$$\frac{dx}{dt}=\lambda x,\quad \frac{dy}{dt}=\lambda y,\quad \lambda=a=d$$



(a) $\lambda<0$　　(b) $\lambda>0$　　(c)

图(6.6)　退化结点

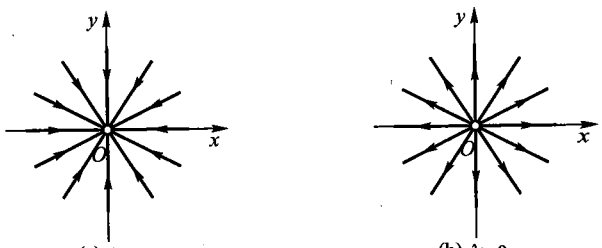
其解为

$$x(t)=Ae^{\lambda t},\quad y(t)=Be^{\lambda t},$$

于是

$$y=\frac{B}{A}x.$$

轨线是趋向或远离奇点(原点)的半射线,其形状如图(6.7)所示,此时奇点称为**奇结点**,且当 $\lambda<0$ 时是稳定的,当 $\lambda>0$ 时是不稳定的.



(a) $\lambda<0$　　(b) $\lambda>0$

图(6.7)　奇结点

情形Ⅳ　非零实部复根　这时方程组的标准形式为

$$\frac{d\xi}{dt}=\alpha\xi+\beta\eta,\quad \frac{d\eta}{dt}=-\beta\xi+\alpha\eta,$$

这里 α,β 分别为特征值的实部和虚部. 引入极坐标,令 $\xi=r\cos\theta,\eta=r\sin\theta$,则由

$$\xi\frac{d\xi}{dt}+\eta\frac{d\eta}{dt}=r\frac{dr}{dt},\quad \xi\frac{d\eta}{dt}-\eta\frac{d\xi}{dt}=r^2\frac{d\theta}{dt},$$

可将方程组化为

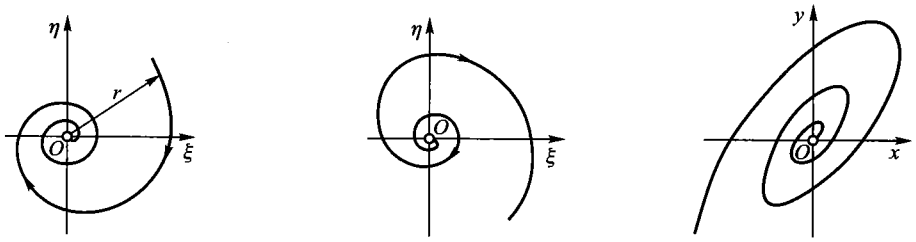
$$\frac{dr}{dt}=\alpha r,\quad \frac{d\theta}{dt}=-\beta,$$

解得

$$r=Ae^{\alpha t},\quad \theta=-\beta t+B,$$

其中 $A>0$ 和 B 为任意常数.

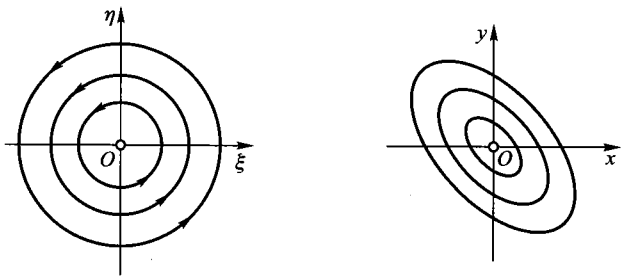
轨线是一族对数螺旋线,依顺(或逆)时针方向(视 $\beta>0$ 或 $\beta<0$)盘旋地趋向或远离奇点(原点),相平面上轨线的形状如图(6.8),此时奇点称为**焦点**,且当 $\alpha<0$ 时是稳定的,当 $\alpha>0$ 时是不稳定的.



(a) $\alpha<0,\beta>0$　　(b) $\alpha>0,\beta>0$　　(c)

图(6.8)　焦点

情形 V　纯虚根　这相当于情形Ⅳ中 $\alpha=0$ 的情形. 这时轨线是以原点为中心的一族圆,如图(6.9)所示,此时奇点称为**中心**. 显然,在这种情形下零解稳定但不是渐近稳定的.



(a) $\alpha=0,\beta<0$　　(b)

图(6.9)　中心

综合上述各种情形,可得

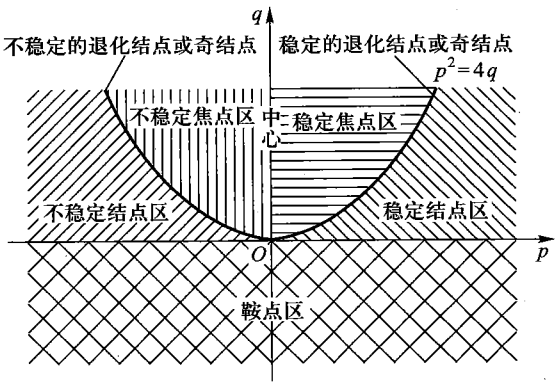
定理 6　如果平面驻定线性微分方程组(6.18)的系数满足条件(6.19),则方程组的零解(奇点)将依特征方程(6.21)的根的性质分别有如下特性:

(1) 如果特征方程的根 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 为(非零)实根,则 $\lambda_1\cdot\lambda_2>0$ 时奇点为结点,且当 $\lambda_1<0$ 时奇点稳定,方程组对应的零解渐近稳定;$\lambda_1>0$ 时奇点不稳定,方程组对应的零解不稳定;而 $\lambda_1\cdot\lambda_2<0$ 时奇点为鞍点,方程组对应的零解不稳定;

(2) 如果特征方程具有(非零)重根 λ,则奇点通常为退化结点,但当 $b=c=0$ 时奇点为奇结点. 当 $\lambda<0$ 时这两类奇点稳定,零解渐近稳定;$\lambda>0$ 时这两类奇点不稳定,零解不稳定;

(3) 如果特征方程的根为共轭复根 $\lambda=\alpha\pm\beta i$,则当 $\alpha\neq0$ 时奇点为焦点,且 $\alpha<0$ 时奇点稳定,零解渐近稳定;$\alpha>0$ 时奇点不稳定,零解不稳定;而当 $\alpha=0$ 时奇点为中心,零解稳定但非渐近稳定.

上述奇点的类型和特征方程的根之间的关系可用图(6.10)表示,图是以 $p=-(a+d)$,$q=ad-bc$ 为直角坐标的平面图,在平面 Opq 上划分出各类奇点的分布区域,图中的抛物线方程为$p^2-4q=0$.



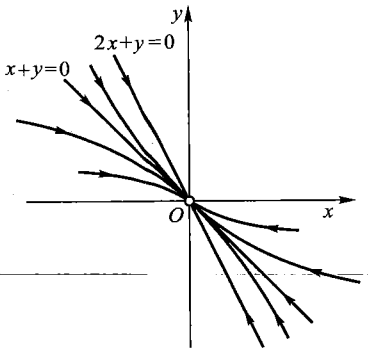
图(6.10)

例 1　讨论二阶线性微分方程$\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x=0$ 的奇点.

解　令$\frac{dx}{dt}=y$,将二阶线性微分方程化为一阶线性微分方程组

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y,\\ \frac{dy}{dt}=-2x-3y.\end{cases}$$

其特征方程的根为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$,是同号相异实根. 由定理 6 知奇点是稳定结点,在 $O\xi\eta$ 平面上奇点附近轨线图貌如图(6.4(a)). 因 ξ 轴和 η 轴对应的在 Oxy 平面上的直线方程为 $x+y=0$ 和 $2x+y=0$,故在 Oxy 平面上奇点附近轨线图貌如图(6.11).



图(6.11)

排疑解惑

非线性奇点

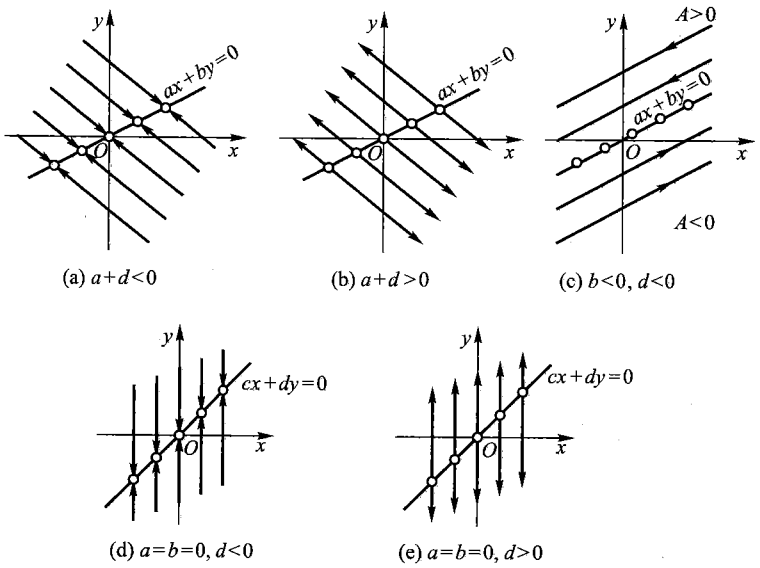
前面讨论的是(6.19)成立下的奇点图貌,此时原点是唯一奇点. 当(6.19)不成立时特征方程有零根,相平面上的轨线是一族平行线,且存在一条通过原点的**奇线**,奇线上的点都是奇点. 当零根是单根时轨线与奇线相交,轨线趋近或离开奇点取决于 $a+d<0$ 或 $a+d>0$;当零根是重根时轨线与奇线平行,奇线两侧轨线走向不同,如图(6.12). 如(6.18)系数全为零,则奇点充满全平面.

由方程组(6.18)系数确定的奇点类型总结如下(其中 $p=-(a+d)$,$q=ad-bc$):

(1) $q\neq 0$.

(a) $q<0$,有两不同符号实根,奇点为**鞍点**;

(b1) $q>0,p^2-4q>0,p>0$,有两负实根,奇点为**稳定结点**;



(a) $a+d<0$ (b) $a+d>0$ (c) $b<0, d<0$

(d) $a=b=0, d<0$ (e) $a=b=0, d>0$

图(6.12) 奇线

(b2) $q>0, p^2-4q>0, p<0$,有两正实根,奇点为**不稳定结点**;

(c1) $q>0, p^2-4q=0, p>0$,有一重负实根,奇点为**稳定退化结点**或**奇结点**;

(c2) $q>0, p^2-4q=0, p<0$,有一重正实根,奇点为**不稳定退化结点**或**奇结点**;

(d1) $q>0, p^2-4q<0, p>0$,有一对负实部共轭复根,奇点为**稳定焦点**;

(d2) $q>0, p^2-4q<0, p<0$,有一对正实部共轭复根,奇点为**不稳定焦点**;

(e) $q>0, p=0$,有一对(零实部)共轭虚根,奇点为**中心**.

(2) $q=0$.

(a1) $p>0$,有单零根和负实根,过奇点有**稳定奇线**;

(a2) $p<0$,有单零根和正实根,过奇点有**不稳定奇线**;

(b) $p=0$,有重零根,过奇点有**奇线**,奇线上、下有不同走向平行轨线;

(c) $a=b=c=d=0$,奇点充满全平面.

6.2.2 极限环

前面对于平面常系数线性微分方程组的奇点已作了详细的讨论,对于孤立奇点,除了在中心型奇点邻域内轨线是一族围绕原点的闭曲线(对应于方程的周期解)外,其余情形均是一端趋于奇点($t\to+\infty$ 或 $t\to-\infty$),另一端趋于无穷远($t\to-\infty$ 或 $t\to+\infty$)或两端都趋于无穷远的轨线,不存在其他的复杂情形. 对于非线性微分方程组,我们仅在 § 6.1 中利用线性近似方程组讨论了奇点邻域的轨线性态,至于全相平面的轨线图貌,情况就复杂多了.

例 2 对平面一阶非线性驻定方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+y-x(x^2+y^2),\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=-x+y-y(x^2+y^2),\end{cases}\tag{6.22}$$

如取极坐标 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,则(6.22)可化为

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=r(1-r^2),\quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-1. \tag{6.23}$$

当 $r=0$ 和 $r=1$ 时,$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=0, \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-1$,即有两特解

$$r=0,\quad \theta=t_0-t,\ t\geqslant t_0$$

和

$$r=1,\quad \theta=t_0-t,\ t\geqslant t_0.$$

第一个解为原点,是一奇点;第二个解在相平面上是以原点为圆心、半径为 1 的圆(轨线),是一个以 2π 为周期、轨线沿着顺时针方向旋转的周期解.

在相平面上作一个以原点为圆心、半径为 $R>0$ 的圆,考虑通过 $r=R$ 圆上任一点 (R,θ^*) 方程组轨线的走向. 当 $R=R_1<1$ 时,由极坐标方程组(6.23)有

$$\left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right|_{r=R_1}=R_1(1-R_1^2)>0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{\theta=\theta^*}=-1<0,$$

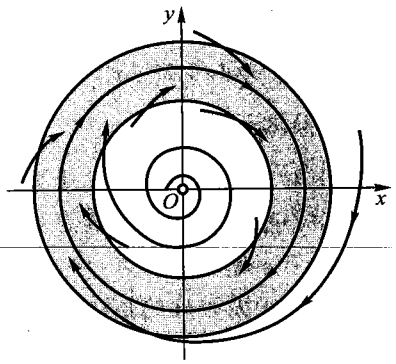
即轨线按顺时针方向从圆 $r=R_1$ 上走出圆外;当 $R=R_2>1$ 时,由极坐标方程组(6.23)有

$$\left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right|_{r=R_2}=R_2(1-R_2^2)<0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{\theta=\theta^*}=-1<0,$$

即轨线按顺时针方向从圆 $r=R_2$ 上走进圆内.

考虑环域 $D:R_1<r<R_2$,显然,环域 D 内没有奇点,轨线从环域 D 的内、外边界上走入环域 D. 因 R_1,R_2 可任意接近 1,因此圆 $r=1$ 是周期解(闭轨线),其余的解(轨线)均趋近于此周期解(闭轨线),如图(6.13)所示.

如果取 R_1,R_2 均足够接近 1,但仍有 $R_1<1<R_2$,则环域 D 的上述性质仍不变. 这就证明了圆 $r=1$ 所表示的特解是一个周期解(对应于闭轨线),其余的解(轨线)均趋近于此周期解(闭轨线).

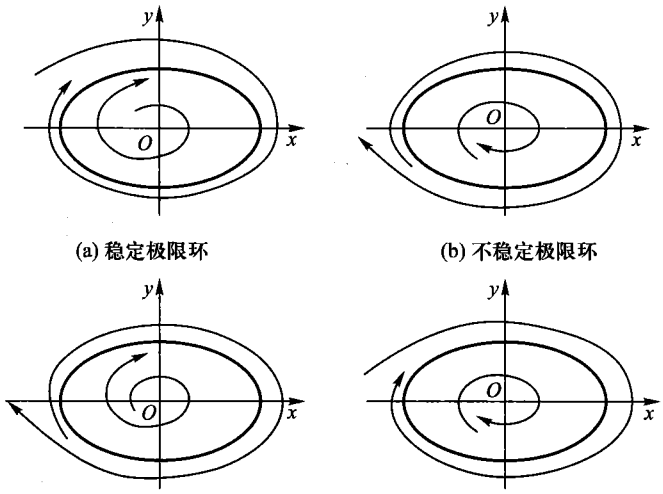


图(6.13)　极限环与环域 D

这种孤立的周期解(闭轨线),在相平面上我们称为**极限环**. 当极限环附近的轨线均正向(即 $t\to+\infty$ 时)趋近于它时,称此极限环为**稳定**的;如果轨线是负向(即 $t\to-\infty$)趋近此极限环,则称它为**不稳定**的;当此极限环的一侧轨线正向趋近于它,而另一侧轨线负向趋近于它时,此极限环称为**半稳定**的. 稳定、不稳定和半稳定极限环的相图见图(6.14).

上例方程组(6.22)的解 $r=1$ 便是一个稳定的极限环(参看图(6.13)).

实际上可以不必先求出特解(如上例的 $r=1$),而仅仅由构造出的环域 D 便可以证明在此环域内必存在极限环. 这种构造特殊环域来寻求极限环的方法称为**本迪克松**



图(6.14) 极限环的稳定性态

(Bendixson)方法,它是根据下面的定理得出的.

假设平面驻定微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=X(x,y),\\ \dfrac{dy}{dt}=Y(x,y),\end{cases}\tag{6.24}$$

其中 X,Y 在相平面的某区域 G 内有一阶连续偏导数.

定理 7(环域定理) 如果 G 内存在有界的环形闭域 D,在其内不含方程组(6.24)的奇点,而(6.24)的经过 D 上的点的解(轨线)$x=x(t)$,$y=y(t)$ 当 $t\geqslant t_0$(或 $t\leqslant t_0$)时不离开域 D,则或者解本身是周期解(闭轨线),或者解正向(或负向)趋于 D 内的某一周期解(闭轨线).

因此,只要能构造出一个有界的环形闭域 D,在其上没有奇点,且在其边界上轨线均进入(或离开)该域,自然进入(或离开)域 D 的解均不会再离开(或进入)域 D,则应用定理 7 可以肯定在域 D 内必存在周期解(闭轨线). 如果此周期解(闭轨线)是孤立的,那么它就是极限环. 这样,可以通过构造特殊的环域来寻求极限环,并大致确定其位置. 环域越狭小,极限环的位置越准确. 例如上述例子中的环域 D,若取 R_1,R_2 足够接近 1,便可以确定极限环为圆 $r=1$ 而不必先寻求此特解.

通过构造有特殊性质的域 D 可以确定周期解(极限环)的存在,自然也提出这样的问题:能否通过构造具有别的特殊性质的域 D^* 来否定周期解(极限环)的存在呢?下面给出一个判别准则.

定理 8 如果 G 内存在单连通区域 D^*,在其内函数 $\dfrac{\partial X}{\partial x}+\dfrac{\partial Y}{\partial y}$ 不变号且在 D^* 内的任何子域内不恒为零,则方程组(6.24)在域 D^* 内不存在任何周期解(闭轨线),更不存在任

何极限环.

证明　我们用反证法并利用格林(Green)公式来证明定理. 假设在 D^* 内存在周期为 T 的周期解

$$\Gamma: x=x(t), y=y(t),\ 0\leqslant t\leqslant T,$$

则对 Γ 围成的域 $D_\Gamma\subset D^*$,有

$$\iint_{D_\Gamma}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\Gamma(X\mathrm{d}y-Y\mathrm{d}x)=\int_0^T\left(X\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-Y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t=\int_0^T(XY-YX)\mathrm{d}t=0,$$

这与定理的假设矛盾. 故在域 D^* 内不存在任何周期解,更不存在任何极限环.

例 3　讨论 § 6.1 例 3 的数学摆的周期解.

解　数学摆方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mu}{m}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0 \tag{6.10}$$

可化为平面微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\frac{g}{l}\sin x-\frac{\mu}{m}y\ (\mu>0). \tag{6.11}$$

因

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=-\frac{\mu}{m}<0,$$

由定理 8 知方程组(6.11)在整个相平面上不存在周期解,这与 § 6.1 例 3 的原点是渐近稳定的结论相符.

由于稳定的极限环对应于物理上的周期振动情形,而不稳定的极限环则对应于物理上不能实现的周期振动,因此,对某类型方程讨论如何确定极限环及其稳定性态的问题是有其实际意义的.

应用实例

电子管振动电路

物理学家范德波尔(van der Pol)研究过在无线电技术中有重要意义的等幅振动电子管电路,通过电路分析推导出微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\mu(x^2-1)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x=0, \tag{6.25}$$

并从数学上严格论证了实验所得的结论. 一般称微分方程(6.25)为**范德波尔方程**.

我们考虑更广泛的李纳(Liénard)微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+f(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+g(x)=0, \tag{6.26}$$

如果记 $F(x)=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x, y=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+F(x)$, 则方程(6.26)可化为方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y-F(x),\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-g(x). \tag{6.27}$$

对于方程(6.26)或方程组(6.27),我们有下面的定理:

定理 9 假设

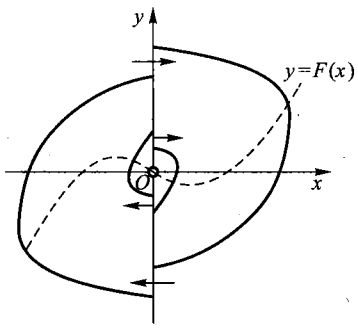
(1) $f(x)$,$g(x)$对一切 x 连续,$g(x)$满足局部利普希茨条件;

(2) $f(x)$为偶函数,$f(0)<0$,$g(x)$为奇函数,当 $x\neq 0$ 时 $xg(x)>0$;

(3) 当 $x\to\pm\infty$ 时 $F(x)\to\pm\infty$,$F(x)$有唯一正零点 $x=a$,且当 $x\geqslant a$ 时 $F(x)$单调增加.

则方程(6.26)有唯一周期解,即方程组(6.27)有一个稳定的极限环.

在定理 9 条件下,相平面上原点是唯一奇点,轨线对于原点是对称的. 于是,定理 9 的一个证明方法是想办法构造一个环域 D,如图(6.15),使经过其边界上的点的轨线只能进入此环域 D 内,并且不再越出域外. 这样利用定理 7 证明存在一条闭轨线(周期解),再进一步证明此闭轨线是唯一的,便得到存在唯一极限环的结论. 整个证明较为复杂,不在此详细介绍了[45].

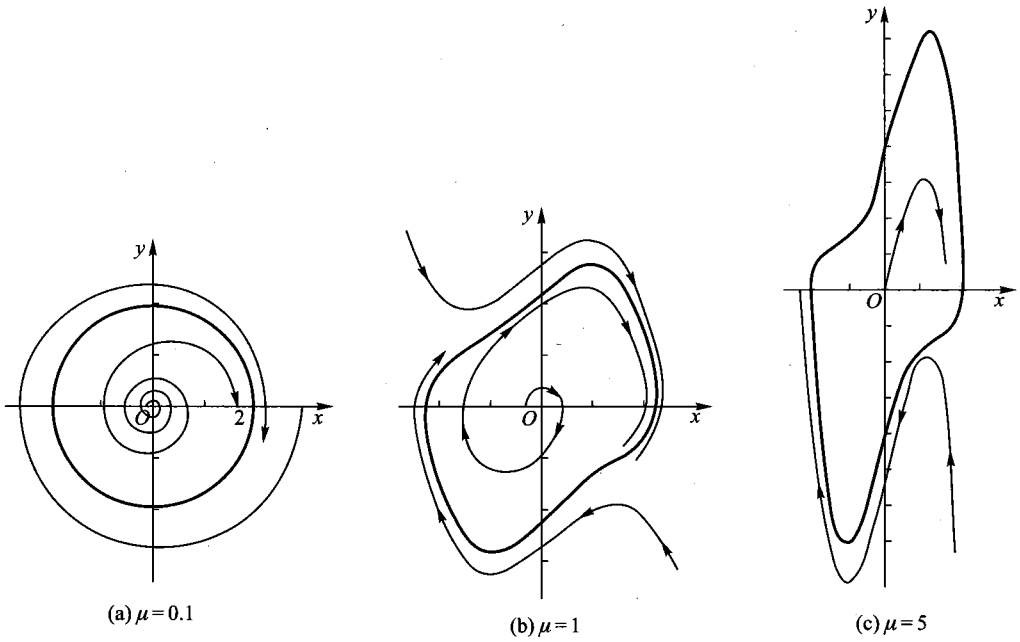


图(6.15)

由于范德波尔方程(6.25)满足定理 9 的条件,故方程(6.25)或其等价的方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y-\mu\left(\frac{x^3}{3}-x\right),\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x$$

存在稳定的极限环. 当 μ 很小时极限环接近于半径为 2 的圆;而当 μ 很大时,极限环被"压扁"成一长条形,参看图(6.16).



(a) $\mu=0.1$ (b) $\mu=1$ (c) $\mu=5$

图(6.16) 范德波尔方程的极限环

6.2.3　平面图貌

奇点和极限环是相平面上两种特殊的轨线，我们希望在相平面上画出一般的轨线的图貌，以了解微分方程的解的性态. 在相平面画方向场是一种方法，另一种是等倾斜线法. 在 1.2.1 小节中已介绍了方向场和轨线的等倾斜线.

对方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=X(x,y),\\ \dfrac{dy}{dt}=Y(x,y),\end{cases}\tag{6.28}$$

在相平面上，曲线 $X(x,y)=0$ 和 $Y(x,y)=0$ 分别对应垂直等倾斜线和水平等倾斜线. 前者表示在相平面其曲线上的点的 x 方向是垂直方向$\left(\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}=0,\text{向上或向下}\right)$，后者表示在相平面其曲线上的点的 y 方向是水平方向$\left(\dot{y}=\dfrac{dy}{dt}=0,\text{向右或向左}\right)$. 垂直等倾斜线和水平等倾斜线的交点为奇点，而两条曲线之间的区域内 $\dot{x},\dot{y}$ 不变号，即轨线方向在 90°范围内保持不变，故有(+,+)、(+,-)、(-,+)、(-,-)四种走向，其中括号内第一个“+”表示向上、“-”表示向下，第二个“+”表示向右、“-”表示向左. 利用等倾斜线可以基本确定微分方程的轨线在全相平面上的走向，从而画出方程在相平面上的轨线图貌.

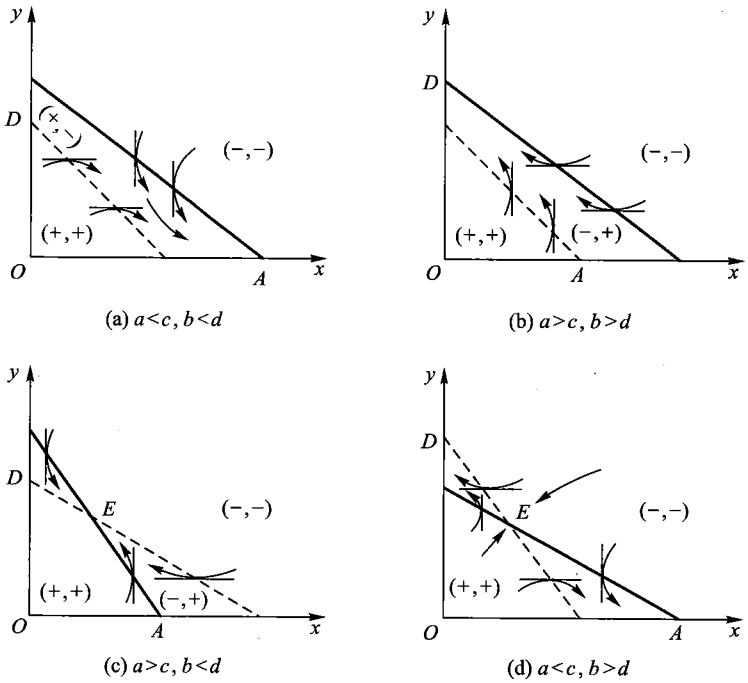
现在我们用等倾斜线法分析 § 1.1 例 4 中的两种群模型

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=rx(1-ax-by),\\ \dfrac{dy}{dt}=sy(1-cx-dy),\end{cases}\tag{6.29}$$

其中 r,a 和 s,d 分别反映种群 x 和 y 的增长情况，均为正常数. 而 $b>0,c>0$ 时为竞争模型，$b>0,c<0$ 或 $b<0,c>0$ 时为捕食-被捕食模型，$b<0,c<0$ 时则为共生模型.

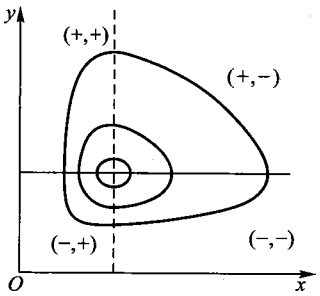
应用实例
价格均衡模型

因 x,y 分别表示两种群的数量(或密度)，故方程在相平面第一象限才有意义. 实际上，对方程组(6.29)，$x=0$ 和 $y=0$ 分别表示的 y 轴和 x 轴是由整条轨线和奇点组成. 由唯一性，第一象限上的轨线不能穿过它们跑到其他象限. 因此，仅讨论第一象限上的轨线即可. $x=0$ 即相平面 y 轴表示 x 种群绝灭，$y=0$ 即 x 轴表示 y 种群绝灭. 方程(6.29)的垂直和水平等倾斜线是 x 轴、y 轴和两条(在特殊情形下一条)直线. 对竞争模型，其相平面上的轨线图貌有四种情形，如图(6.17)所示，图中 O,A,D,E 点为奇点. 由图可知，在第一象限内(不含 x 轴、y 轴)有如下四种结果：(a)当 $a<c,b<d$ 时，轨线将趋于 x 轴上 A 点，y 种群将绝灭；(b)当 $a>c,b>d$ 时，轨线将趋于 y 轴上 D 点，x 种群将绝灭；(c)当 $a>c,b<d$ 时，轨线将趋于 E 点(结点)，两种群将按一定数量(比例)共存；(d)当 $a<c,b>d$ 时，轨线将视位于何区域趋于 A 或 D 或 E 点，E 点为鞍点.



图(6.17) 平面竞争模型

同样方法可分析捕食-被捕食模型和共生模型,但对捕食-被捕食模型在相平面上可能出现极限环、焦点或中心. 如对沃尔泰拉捕食-被捕食模型,由 2.1.1 小节可得通解 $x^c e^{-dx} y^a e^{-by} = k$ 是首次积分式(见后面 7.1.2 小节),实际上是一个哈密顿方程(见 6.3.1 小节),其轨线是一族围绕奇点 E 的闭轨线,如图(6.18)所示.



图(6.18) 平面捕食-被捕食模型

在相平面分析中除奇点和极限环两种特殊轨线外,还有一种从奇点到奇点的轨线,这类轨线称为**分界线**. 如果一条分界线与一个奇点构成一个环,则称为**同宿环(轨)**. 如果一条分界线两端是不同奇点,则分界线称为**异宿轨**. 当多条分界线与多个奇点构成一个环时,则称此环为**异宿环**. 上述定义中可以将奇点换为极限环. 如图(6.17)中的 OA, OD 都是分界线、异宿轨.

排疑解惑
全局图貌

习 题 6.2

1. 试求下列方程组的奇点,并判断奇点的类型和稳定性:

(1) $\dfrac{dx}{dt} = -x-y+1$, $\dfrac{dy}{dt} = x-y-5$;

(2) $\frac{dx}{dt}=2x-7y+19,\frac{dy}{dt}=x-2y+5.$

2. 试讨论方程组

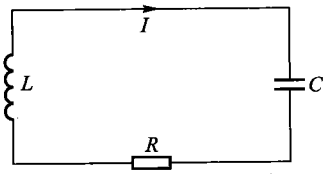
$$\frac{dx}{dt}=ax+by,\quad \frac{dy}{dt}=cy$$

的奇点类型,其中 a,b,c 为实常数且 $ac\neq 0$.

*3. RLC 振动回路(如图(6.19))中电流变化规律满足微分方程

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{I}{C}=0\ (L>0,R\geqslant 0,C>0),$$

试讨论这一系统的平衡状态(即方程的奇点)的可能类型.



图(6.19)

4. 试确定下列方程组的周期解、极限环,并讨论极限环的稳定性:

(1) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-y-x(x^2+y^2-1)^2,\\ \frac{dy}{dt}=x-y(x^2+y^2-1)^2;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9)-y(x^2+y^2-4),\\ \frac{dy}{dt}=y(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9)+x(x^2+y^2-4).\end{cases}$

5. 试判别下列方程组有无极限环存在:

(1) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x+y+\frac{1}{3}x^3-y^2x,\\ \frac{dy}{dt}=-x+y+yx^2+\frac{2}{3}y^3;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y-x+x^3,\\ \frac{dy}{dt}=-x-y+y^3.\end{cases}$

6. 证明下列方程(组)存在唯一的稳定极限环:

(1) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y,\\ \frac{dy}{dt}=-x+y-x^5-3x^2y;\end{cases}$

(2) $\frac{d^2x}{dt^2}+\alpha(x^{2n}-\beta)\frac{dx}{dt}+\gamma x^{2m-1}=0$ (α,β,γ 为正常数,n,m 为正整数).

7. 试用等倾斜线法在相平面上画出下列方程的轨线图貌:

(1) $\dot{x}=x(1-x-2y),\dot{y}=y(x-y-2)$;

(2) $\dot{x}=xy,\dot{y}=y^2+x^4$;

(3) $\dot{x}=xy-x^3,\dot{y}=y^2-2x^2y+x^4$.

*§ 6.3 哈密顿方程、孤立子和混沌

6.3.1 哈密顿方程与完全可积性

大量物理、力学与天文问题的数学模型可由哈密顿方程描述. 这一节我们讨论哈密顿方程的一些性质. 哈密顿方程的研究大大地促进了非线性系统理论的发展.

哈密顿力学系统可用**哈密顿方程**表示为

$$\dot{\boldsymbol{q}}=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}},\quad \dot{\boldsymbol{p}}=-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}, \tag{6.30}$$

其中$(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=(q_1,q_2,\cdots,q_n,p_1,p_2,\cdots,p_n)$为系统的 n 对共轭变量,$\boldsymbol{q}$ 称为系统的**广义坐标**,$\boldsymbol{p}$ 称为**广义动量**,H 称为**哈密顿函数**或**能量函数**. 因由 H 可唯一确定哈密顿方程,有时称哈密顿方程 H,意即由 H 确定的哈密顿方程(6.30).

如记 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$,$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}\\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$($\boldsymbol{I}$ 是单位矩阵),则(6.30)式可简写为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{J}\nabla_{\boldsymbol{x}}H,$$

这里 $\boldsymbol{J}$ 为反称矩阵, $\nabla_{\boldsymbol{x}}$为梯度向量.

设 $H=H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$不显含 t,此时系统构成相空间$(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$中的向量场$\left(-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}},\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}\right)$. 显然有$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=0$,即

$$H(\boldsymbol{q}(t),\boldsymbol{p}(t))=c, \tag{6.31}$$

其中$(\boldsymbol{q}(t),\boldsymbol{p}(t))$为哈密顿方程(6.30)的解,$c$ 为某常数. 因此由 §7.1 关于首次积分的定义知

性质 1 哈密顿函数 H 是哈密顿方程(6.30)的首次积分.

现考虑相空间$(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$中一区域容积 U,容积变化率 $\alpha\equiv\frac{1}{U}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$,沿哈密顿方程(6.30)有

$$\alpha\equiv\frac{1}{U}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=\operatorname{div}(\boldsymbol{J}\nabla_{\boldsymbol{x}}H)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\partial q_i}-\frac{\partial^2 H}{\partial q_i\partial p_i}\right)=0.$$

即

性质 2(刘维尔保积定理) 哈密顿方程是保守系统. 相空间中任何区域 U 沿着哈密顿方程轨线变化但其体积保持不变. 二维相平面上哈密顿方程轨线为闭曲线族.

由性质 2 知哈密顿系统内不可能存在渐近稳定平衡点和渐近稳定极限环,且由性质 2 可推出

性质 3(庞加莱回归定理)　空间中任一点 $\boldsymbol{x}_0$ 的任一邻域 U,必存在 $\boldsymbol{x}\in U$,使得由 $\boldsymbol{x}$ 出发的哈密顿方程的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 必回到 U,即存在 $t^*>0$,使得 $\boldsymbol{x}(t^*)\in U$.

证明　记 $U(t)$ 为 $t=0$ 时邻域 U 经时间 t 后哈密顿方程的解所在的区域. 由性质 2,$U(t)$ 保持体积不变. 因此,$U(t)$,$t=1,2,\cdots$ 必相交,即有某个 $k>0$,$l>k$,使得 $U(k)\cap U(l)\neq\varnothing$. 于是,$U(0)\cap U(l-k)\neq\varnothing$. 记 $\boldsymbol{y}\in U(0)\cap U(l-k)$,$t^*=l-k$,则有 $\boldsymbol{x}\in U(0)=U$,使得 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}(t^*)\in U$.

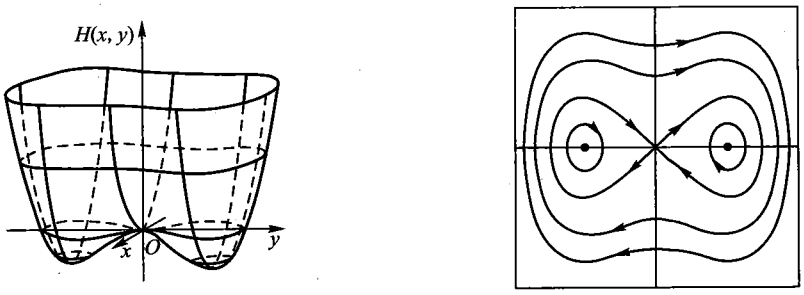
性质 4(极值稳定定理)　如 $\boldsymbol{x}$ 为 H 的局部极小或极大值点,则 $\boldsymbol{x}$ 是李雅普诺夫稳定的.

证明　不失一般性,设 $H(\mathbf{0})=0$,0 是 H 的极小值,于是存在 $\eta>0$,使得当 $0<\|\boldsymbol{x}\|<\eta$ 时有 $H(\boldsymbol{x})>0$. 对任意 $\varepsilon>0$,取 $\kappa=\min(\varepsilon,\eta)$,$M=\min\{H(\boldsymbol{x})\mid\|\boldsymbol{x}\|=\kappa\}$,因 $H(\mathbf{0})=0$ 且 H 连续,则存在 $\delta(0<\delta<\varepsilon)$,使得 $\|\boldsymbol{x}\|<\delta$ 时 $H(\boldsymbol{x})<M$. 于是对 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta$,当 $t>0$ 时,过 $\boldsymbol{x}_0$ 的哈密顿方程的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 有 $H(\boldsymbol{x}(t))<M$,从而 $\|\boldsymbol{x}(t)\|<\kappa<\varepsilon$.

例 1　微分方程 $\dot{x}=y$,$\dot{y}=x-x^3$ 是哈密顿方程,其哈密顿函数

$$H(x,y)=\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4,$$

如图(6.20).



(a)　　(b)

图(6.20)　哈密顿函数图

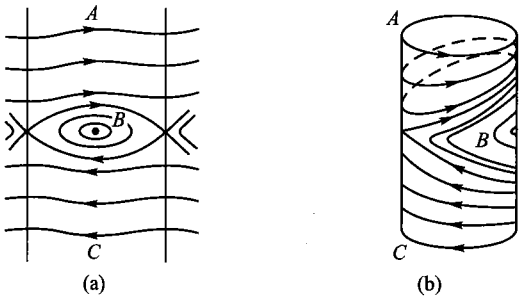
例 2　考虑 §6.1 例 8 讨论的数学摆方程(6.11),$\mu=0$ 情形,如取 $H(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\frac{g}{l}(1-\cos x)$,则(6.11)化为自由度为 $n=1$ 的二维哈密顿方程(6.30),H 是其首次积分. 因 $n=1$,数学摆方程完全可积,其可积函数为

$$H=\frac{1}{2}y^2+\frac{g}{l}(1-\cos x)=c,$$

如图(6.21).

6.3.2　孤立子

绝大部分的常微分方程是不可解、不可积的,因此必须通过稳定性、定性理论方法

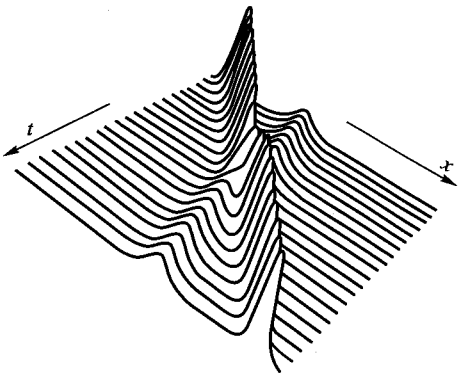


图(6.21) 数学摆哈密顿函数图

研究常微分方程的解的性质. 长期以来,可积性的研究处于低潮. 但 20 世纪 60 年代以来,在自然界中发现一类有重要应用的孤立波或孤立子现象,而孤立子恰好对应于完全可积的哈密顿方程.

早在 1834 年,科学家已观察到浅水波中孤立子现象,1872 年首次求得孤立子解,1895 年建立了 KdV 方程,但没有深入研究. 20 世纪五六十年代,物理学家和应用数学家在研究 64 个质点用非线性弹簧连成的非线性振动弦、晶体的非线性振动及基本粒子模型等的计算机模拟时,再次发现孤立波并进行深入研究,提出了孤立子理论,世界范围内掀起了对孤立子理论研究的热潮. 孤立子理论是数学的严密性和物理、力学的启发性和实用性的结合.

孤立子是由偏微分方程描述的一种有特殊性质的有孤立波形状的解,其能量不会耗散或分散. 当两个或多个能量不同的孤立波在前进时,能量高的波会逐渐赶上并越过能量低的波而保持各自的波形,如图(6.22)所示.



图(6.22) 两孤立子图

考虑著名的 KdV 孤立子方程

$$u_t-6uu_x+u_{xxx}=0, \qquad (6.32)$$

u_t, u_x表示 $u=u(x,t)$ 分别关于 t,x 的偏导数. 设 u 存在形如 $u=\varphi(\xi)$, $\xi=x-at$ 的行波解(见 § 7.1 例 1),且 $\xi\to\pm\infty$ 时 $\varphi(\xi)\to 0$. 将 $\varphi(\xi)$代入 KdV 方程,可得常微分方程

$$-a\varphi'+6\varphi\varphi'+\varphi'''=0,$$

其中 $\varphi'=\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}$. 积分得

$$-a\varphi+3\varphi^2+\varphi''=c_1,$$

c_1为积分常数. 上式乘 φ'再积分之,得

$$-\frac{1}{2}a\varphi^2+\varphi^3+\frac{1}{2}\varphi'^2-c_1\varphi=c_2,$$

c_2亦为积分常数. 利用条件 $\xi\to\pm\infty$ 时 $\varphi(\xi)\to 0$,推得 $c_1=c_2=0$. 上式变为

$$\varphi'^2=\varphi^2(a-2\varphi).$$

最后可得到用双曲函数表示的精确解

$$u=\varphi(x-at)=\frac{1}{2}\operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{a}(x-at-\xi_0)\right], \tag{6.33}$$

其中 ξ_0为积分常数,表示波峰的位置,波峰高为$\frac{a}{2}$.

四位物理学家 Gardner,Greene,Kruskal,Miura(简称 GGKM)首先提出了解 KdV 方程初值问题的**反散射方法**,亦叫 GGKM 方法. 其思想是将 KdV 方程的解 $u(x,t)$作为物理学上著名的薛定谔(Schrödinger)方程

$$\psi_{xx}-(u(x,t)-\lambda)\psi=0 \tag{6.34}$$

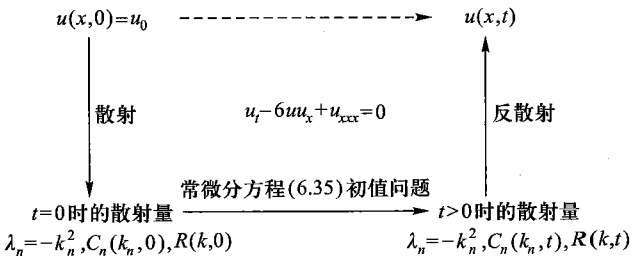
的位势,把 t 作为参数. 而薛定谔方程是一类常微分特征值方程(参看 §8.3). 与矩阵特征值和特征向量的性质类似,对给定的位势 u 有相对应的被称为散射数据的一组数据 $k_m,C_m(k_m),R(k),T(k)$及在$\pm\infty$ 处有界的波函数,其中 k_m,k 分别为对应的离散和连续特征值. GGKM 的主要贡献是发现了位势 $u(x,0)$和 $u(x,t)$之间对应的散射数据有简单的关系:

$$\dot{k}_n(t)=0,\quad \dot{k}(t)=0,\dot{C}_n(k_n,t)=4k_n^3C_n(k_n,t),\quad \dot{R}(k,t)=8\mathrm{i}k^3R(k,t),\quad \dot{T}(k,t)=0. \tag{6.35}$$

解相应的常微分方程,可得

$$k_n(t)=k_n(0),\quad C_n(k_n,t)=C_n(k_n,0)\mathrm{e}^{4k_n^3t},\quad R(k,t)=R(k,0)\mathrm{e}^{8\mathrm{i}k^3t},\quad T(k,t)=T(k,0). \tag{6.36}$$

解 KdV 方程(6.32)初值问题 $u(x,0)=u_0(x)$的反散射方法就是先求出对应位势为 $u_0(x)$的薛定谔方程的散射数据 $k_m,C_m(k_m),R(k),T(k)$及在$\pm\infty$ 处有界的波函数,然后利用式(6.36)得到位势为 $u(x,t)$的薛定谔方程(6.34)的散射数据及在$\pm\infty$ 处有界的波函数,再反过来用散射数据求得位势 $u(x,t)$,即 KdV 方程的解. 这种求解非线性微分方程初值问题的反散射方法和解线性微分方程初值问题的傅里叶(Fourier)变换方法非常相似,又称反散射方法为**非线性傅里叶变换方法**,如图(6.23)所示.



图(6.23)　反散射方法

研究表明薛定谔方程的每一个离散特征值对应 KdV 方程的一个孤立子解，反之亦然. KdV 方程的初值函数为 $u_0(x)=-2\mathrm{sech}^2x$ 时，可用反散射方法求得与式(6.33)相同的单孤立子解；而初值函数为 $u_0(x)=-6\mathrm{sech}^2x$ 时，可用反散射方法求得双孤立子解

$$u(x,t)=-12\frac{3+4\cosh(8t-2x)+\cosh(64t-4x)}{[\cosh(36t-3x)+3\cosh(28t-x)]^2}, \tag{6.37}$$

双孤立子解图如图(6.22).

6.3.3 洛伦茨方程

洛伦茨是气象学家，在麻省理工学院(MIT)用计算机研究天气预报，曾在用 12—14 个变量的常微分方程模型计算解时偶然发现初值对解的敏感性，后来在和同行的交流时得到启发，最后找到了 3 个变量的方程——洛伦茨方程. 1963—1964 年以“确定性的非周期流”为内容发表了 4 篇有关论文，但仅在气象学家中流传. 1972 年洛伦茨还为美国科学发展协会的一次会议准备了一份报告，其题目为“可预报性：在巴西一只蝴蝶翅膀的拍打能够在美国得克萨斯州引起一场龙卷风吗?”. 洛伦茨被称为“蝴蝶效应”提出者，混沌理论之父.

洛伦茨方程是

$$\begin{cases}\dot{x}=a(y-x),\\ \dot{y}=cx-xz-y,\\ \dot{z}=xy-bz,\end{cases} \tag{6.38}$$

其中参数 a,b,c 均为正数. 洛伦茨方程有如下性质：

(1) 对称性. 当用 $(-x,-y,z)$ 替换 (x,y,z) 时，方程形式不变，方程关于 z 轴对称.

(2) z 轴是不变集. 因 $x=0,y=0$ 满足方程，此时 $\dot{z}=-bz$，即 z 轴为不变集，且轨线沿着 z 轴趋于原点. 而在平面 $x=0$ 上，当 $y>0$ 时，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}>0$；当 $y<0$ 时，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}<0$，因此环绕 z 轴的轨线从平面 $x=0$ 的上方看是逆时针方向旋转的.

(3) 耗散性和吸引性. 常微分方程描述系统的运动，有一大类系统，在运动时，其相空间容积 U 是收缩的，这类系统称为**耗散系统**；当容积 U 不变时系统称为**保守系统**；当容积 U 扩大时系统称为**扩张系统**. 可以通过系统相空间容积变化率

$$\alpha=\frac{1}{U}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=\sum_i\frac{\partial f_i}{\partial x_i}=\mathrm{div}\,\boldsymbol{f}$$

小于、等于或大于零来判断系统是耗散、保守或扩张.

对洛伦茨方程(6.38)，系统相空间容积变化率为

$$\alpha\equiv\frac{1}{U}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=\sum_i\frac{\partial f_i}{\partial x_i}=\frac{\partial\dot{x}}{\partial x}+\frac{\partial\dot{y}}{\partial y}+\frac{\partial\dot{z}}{\partial z}=-(a+b+1)<0,$$

因此洛伦茨方程是耗散系统. 容积 U 随时间推移收缩为 $U\mathrm{e}^{-(a+b+1)t}$，说明洛伦茨方程的解是有界的，轨线最终被吸引到一个体积为零的较低维的集合内.

(4) 当 $0<c<1$ 时，洛伦茨方程仅有一个平衡点，即原点 O.

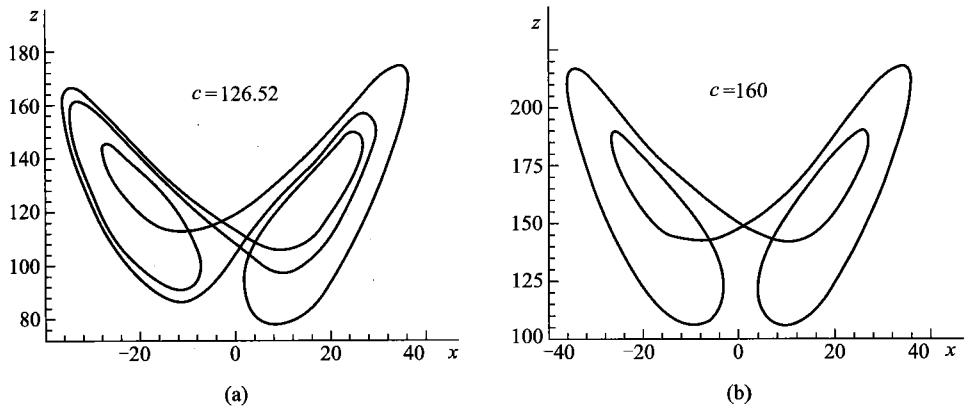
当 $c=1$ 时，原点 O 仍是洛伦茨方程的唯一平衡点.

当 $c>1$ 时，有 3 个平衡点：原点 O 和

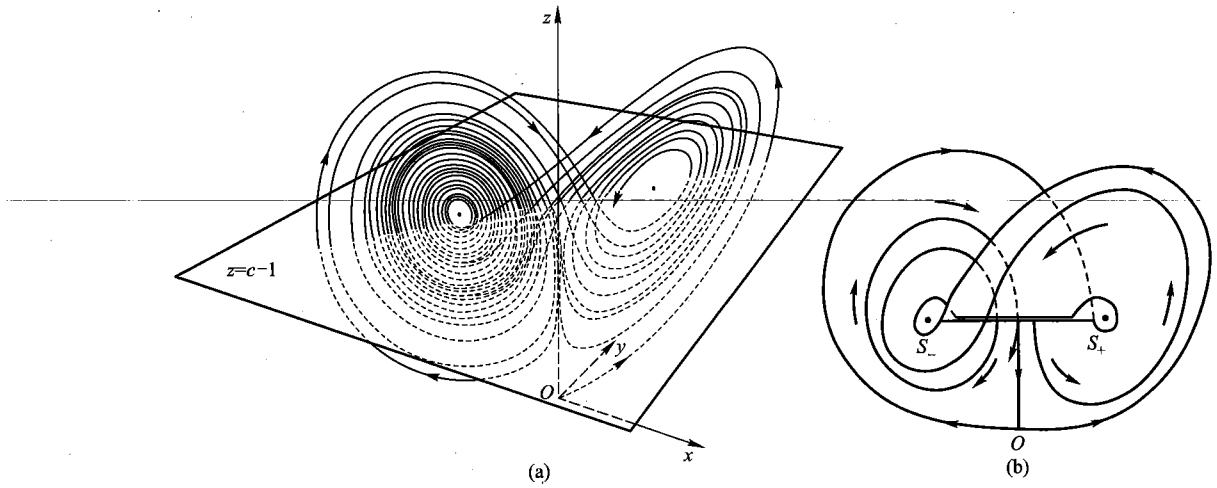
$$S_+=(\sqrt{b(c-1)},\sqrt{b(c-1)},c-1),\quad S_-=(-\sqrt{b(c-1)},-\sqrt{b(c-1)},c-1),$$

S_+,S_- 对称于 z 轴.

当参数 $a=10,b=\dfrac{8}{3},c>13.926$ 时洛伦茨方程在相空间中的轨线非常复杂，既可能是周期轨线，如图(6.24)所示，更可能是不断循环的非周期轨线，图(6.25)所表示的是相空间中轨线走向示意图，由图中可看出从原点 O 附近右边区域内出发的轨线从右边转入左边绕平衡点 S_- 向外旋转最后回到原点 O 附近左边区域内，然后继续由 O 左边区域从左边转入右边绕平衡点 S_+ 向外旋转最后回到 O 附近右边区域内. 这样反复的无限循环始终既不趋向平衡点 S_+ 也不趋向平衡点 S_-，永远在平衡点 S_+ 和 S_- 之间摆动，而且绕各平衡点旋转次数及平衡点之间摆动次数根据参数轨线初始位置不同而不同，根本无法预测，对初值非常敏感.



图(6.24)　洛伦茨方程的一些周期轨线



图(6.25)　轨线走向示意图

洛伦茨方程出现的这种轨线的极限集是在一有限区内的吸引集，但它与通常了解的吸引集不同，既不是平衡点也不是极限环或周期变化的点集. 我们称这种吸引集为**奇异吸引子**(或**奇怪吸引子**). 奇异吸引子还有对初值敏感的特性. 存在奇异吸引子这种复杂现象又称为**混沌**(或**浑沌**)[26]. 混沌也可简单解释为对初值的敏感性，初值的细微差异引起后续的巨大不同，也无法预测. 洛伦茨在用计算机研究天气预报的特性时发现了混沌现象.

关于洛伦茨方程在相空间的轨线图貌的绘制可参考附录和本书数字资源.

应用实例

控制系统的绝对稳定性

陈关荣等提出**洛伦茨系统族**方程：

$$\begin{cases}\dot{x}=(25a+10)(y-x),\\ \dot{y}=(28-35a)x-xz+(29z-1)y,\ a\in[0,1],\\ \dot{z}=xy-(a+8)z/3.\end{cases}$$

取不同参数，可得不同类型的**混沌系统**.

长期以来，人们认为混沌系统是不可预测和控制的，但 1990 年，奥特(Ott)等提出了控制混沌的方法，佩科拉(Pecora)等则提出混沌同步的思想，又掀起了研究混沌控制和混沌同步的热潮[63,71].

6.3.4 虫口模型和李-约克混沌定理

为进一步了解混沌的意义，我们考虑**离散动力系统**

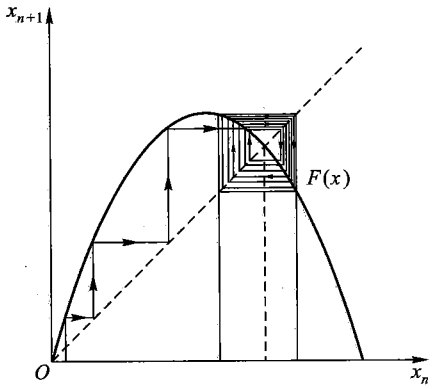
$$x_{n+1}=f(x_n),\quad n=0,1,2,\cdots,$$

这是一个差分方程. 微分方程通过差分化可化为差分方程. 种群(昆虫)模型中按代计算其种群数(虫口数)而两代之间不重叠时便可用差分方程表示，此时其模型又称为**虫口模型**. 最简单的虫口模型是逻辑斯谛差分方程

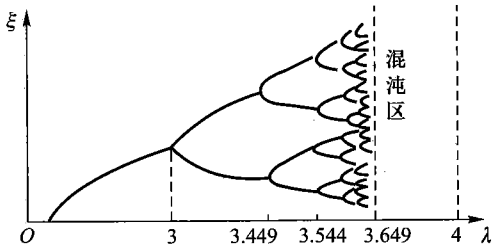
$$x_{n+1}=\lambda x_n(1-x_n),\tag{6.39}$$

这是一个单参数离散动力系统，如图(6.26). 如有 $x_1=x_0$，称 x_0 为不动点. 当 $x_n=x_0$ 而 $x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}$ 互不相等时，称 x_0 为**周期 n 点**. 易证明当 $0<\lambda<3$ 时，不管初值 $x_0\in(0,1)$ 如何，方程的解即 $n\to\infty$ 时的点 x_n 均收敛于不动点 $\bar{x}=1-\dfrac{1}{\lambda}$；而当 $3<\lambda<1+\sqrt{6}$ 时，初值 $x_0\in(0,1)$ 的方程(6.39)的解收敛于两个周期 2 点 $\bar{x}_1,\bar{x}_2(\bar{x}_2\neq\bar{x}_1)$，因此 $\lambda=3$ 为方程(6.39)的分支点(即左、右存在不同类型或个数的解的参数点). 随着 λ 的逐渐增大，方程(6.39)从两个周期 2 点变为四个周期 4 点，再八个周期 8 点，等等. 这种逐步加倍的分支称为**倍分支**. 用计算机可绘出方程(6.39)的参数与周期点关系的倍分支图，如图(6.27). 当 $\lambda>3.569\ 945\ 673\cdots$ 时，方程(6.39)出现混沌解. $x_n(n=0,1,\cdots)$ 可能不收敛于任何点，到处游荡，是一个奇异吸引子，且存在对初值的敏感性.

洛伦茨发现了混沌现象，但要上升到理论还需要数学家的配合. 1972 年，洛伦茨所写的关于气象预测模型的 4 篇论文引起了美国马里兰大学数学系教授约克(Yorke)的注意，1973 年约克把洛伦茨方程解的混沌现象提炼为线段上连续映射中“周期 3 蕴含混沌”的思想，给他的博士生李天岩去证明完善，李天岩整理成文章后曾投给《美国数学月刊》，被认为偏向研究性而没有发表.



图(6.26)　虫口模型



图(6.27)　倍分支图

好的思想还需要伯乐传播. 1974 年是马里兰大学数学系的生物数学“特殊年”,请了著名的普林斯顿大学教授 R.May 来校讲学,在其最后一天的演讲中介绍了逻辑斯谛离散模型(虫口模型),提及当参数较大时迭代值在整个区间中四处跑,他无法解释这个现象,认为也许是计算误差所致. 约克听完演讲后,把那篇在桌上躺了近一年的文章介绍给他,May 看后大吃一惊,认为文章很大程度上解释了他的疑问. 约克立即找到李天岩,两人马上修改文章. 这篇文章最后发表在 1975 年 12 月份出版的《美国数学月刊》上[123]. May 是举世闻名的教授,暑假到欧洲讲学时将李-约克混沌和洛伦茨吸引子四处传播,从而掀起了混沌研究的热潮.

定理 10(李-约克混沌定理)　设 I 是一个区间,$f:I\to I$ 连续. 如 I 中有一点 a,使 $b=f(a)$,$c=f(b)$,$d=f(c)$ 满足

$$d\leqslant a<b<c \quad 或 \quad d\geqslant a>b>c,$$

则对每一个 $k=1,2,\cdots$,在 I 中有 f 的一个周期为 k 的周期点,且 I 中有一个不含周期点的不可列集 S,满足

(1) 对 S 中的每两个 p,q,有 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|f^n(p)-f^n(q)|>0$,$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}|f^n(p)-f^n(q)|=0$;

(2) 对 S 中的每一个 p 及 I 中的周期点 q,有 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|f^n(p)-f^n(q)|>0$.

李-约克定理给出了混沌的严格数学定义(证明见数字资源(拓展阅读)),后来人们就把满足李-约克定理结论的集合称为李-约克混沌集.

李天岩和约克首先给出了混沌的数学定义,但仅对线段映射而言. 后来又出现各种混沌的定义,而且发现了多种满足混沌性态的系统,如埃农(Hénon)映射、强迫达芬(Duffing)方程等. 同时进一步探讨通向混沌的道路,研究判断混沌的各种方法,以及发现在物理、力学、化学、气象、股票市场等自然科学、社会科学中的混沌.

由洛伦茨方程引发的混沌的概念出现后,人们发现已在早期研究过的 KAM 定理、斯梅尔(Smale)马蹄、梅利尼科夫(Mel'nikov)定理中亦存在混沌,这是与李-约克混沌不同的另一类型的混沌.

洛伦茨方程和虫口模型是确定的系统,确定系统中出现的预测的不确定性、随机

性这种现象的发现给牛顿力学出现以来的科学观念造成巨大的冲击. 人们开始用新的观点解释自然现象,如台风的难以预测是本质的. 研究自然和社会科学中的混沌已形成一门新的学科.

习 题 6.3

1. 将下列方程化为哈密顿方程(令 $\dot{x}=-y$),并画出其相图:

(1) $\ddot{x}+x-x^2=0$;

(2) $\ddot{x}+x-x^3=0$;

(3) $\ddot{x}-x-x^3=0$.

2. 推导用双曲函数表示 $\varphi'^2=\varphi^2(a-2\varphi)$ 的精确解(6.33).

3. 在空间(x,t,u) 中画出 KdV 方程的单、双孤立子解(6.33)、(6.37)图.

4. 试证明 n 维空间中容积变化率公式 $\alpha \equiv \frac{1}{U}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} \boldsymbol{f}$.

*5. 试用计算机绘出洛伦茨方程(6.38)在参数 $a=10, b=\frac{8}{3}$ 和初值(1,1,0)下不同参数 $c=\frac{1}{3}$,13,20,120 的轨线图貌.

本章学习要点

本章主要讨论非线性微分方程,包括稳定性、定性基本理论、哈密顿方程、孤立子和混沌问题.

与线性微分方程有本质的不同,非线性微分方程绝大多数是不可解、不可积的,这就提出能否仅从方程的结构判断其解的性态的问题. 解的性态中最基本的是稳定性态. 在 §6.1 中首先给出稳定性的概念并讨论按线性近似决定微分方程零解的稳定性态及其判别方法,然后介绍直接判断稳定性的李雅普诺夫 V 函数方法,包括 V 函数的定号性概念和用 V 函数判断稳定性的基本定理. 在 §6.2 中从最简单的常系数平面线性微分方程组着手,研究轨线在相平面上的性态,得到各种奇点类型;进一步讨论平面非线性微分方程组解的全局图貌,给出相平面上极限环的存在性判断方法和相平面轨线图貌画法. §6.3 首先介绍了哈密顿方程的可积性;然后是属于可积哈密顿方程的 KdV 方程的孤立子解,引出了近年兴起的可积系统研究;最后讨论混沌问题,分析了洛伦茨方程在相空间中的轨线性态,从而引出混沌现象,并通过李-约克定理给出混沌定义. §6.3 中虽然概念较多,但多用图形、例子说明,不涉及复杂的推导.

这一章的内容较多,提出了不少新的概念和方法. 学习时,要抓住一条线索,就是为了判断微分方程解的性态,如何从线性、近似线性逐步深入到非线性. 对稳定性,由线性系统稳定性的判别开始,最后对非线性微分方程提出一般的 V 函数方法. 对定性,从分析平面线性奇点类型出发,并由零解邻域的局部性态过渡到全局的图貌,包括相平面上的极限环及生态模型的全局性态. 最后才通过哈密顿可积方程和洛伦茨方程介绍孤立子和混沌.

本章介绍的属于常微分方程理论中的主要的仍在发展中的几个方面:稳定性理论、定性理论、哈密顿方程、孤立子与混沌问题. 线性常微分方程或方程组由于满足叠加原理,存在基本解组,其理论

已较完善. 但对非线性微分方程,还处于研究发展阶段. 特别是近 60 年来发现了由分支而致混沌的复杂的新的类型的解,导致出现寻找自然及社会科学中的混沌现象的热潮,并产生新的科学方法论,冲击了几百年来牛顿的确定论.

非线性微分方程的这种新发展,是与计算机信息时代的出现密切相关的. 正是由于计算机的发展,导致了由对初值敏感的混沌现象的发现,并可通过计算机进行数学实验和数学研究. 本章中很多内容可以用计算机语言进行讨论,我们在附录 C 和数字资源中列出了有关程序,有条件的读者最好能结合这些程序进行学习.

第七章
一阶线性偏微分方程

由于一阶线性偏微分方程可以用常微分方程方法求解，因此在介绍完常微分方程理论后讨论一阶线性偏微分方程. 先介绍线性及拟线性偏微分方程的基本概念，建立常微分方程首次积分和一阶线性偏微分方程的关系，并通过首次积分求解常微分方程组；然后再讨论一阶线性和拟线性偏微分方程的求解及其初始值问题（柯西问题）；最后介绍较另类的李群分析方法.

§7.1 首次积分和求解常微分方程组

7.1.1 基本概念

一阶偏微分方程是由自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ $(n \geqslant 2)$、未知函数 u 及其一阶偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$ 组成的关系式

$$F\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0. \tag{7.1}$$

当不致混淆时，有时将偏微分符号如 $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x_i}$ 记为 u_t, u_x, u_{x_i}.

相应地，

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} = X(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \tag{7.2}$$

分别被称为**一阶线性偏微分方程**及**一阶齐次线性偏微分方程**；而

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_i} = Z(x_1, x_2, \cdots, x_n, z) \tag{7.3}$$

则被称为**一阶拟线性偏微分方程**，其中函数 X_i, X, Y_i, Z 是相应变元的已知函数. 函数 $u = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为偏微分方程(7.1)的**解**，如果它在 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 空间的某个域 D 内连续、存在一阶偏导数，且当把它们代入 F 的相应变元时，能使得方程(7.1)对

于这些自变量成为恒等式. 如果解是方程的一切解的一般表示式,则称此解为**通解**. 解 $u=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 可以想象为在空间 $(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)$ 中的一张 n 维曲面,通常称为偏微分方程(7.1)的**积分曲面**.

例 1　考虑最简单的一阶齐次线性偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+c\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

即

$$u_x+cu_y=0, \tag{7.4}$$

其中 c 为大于零的常数.

解　如令 $u=f(\xi)$,其中 $\xi=y-cx$,f 为任意可微函数,则 $u_x=-cf'$,$u_y=f'$. 代入方程(7.4)变为恒等式,因此 $u=f(y-cx)$ 为方程的解. 其解称为**行波解**,描述了以速度 c 向右传播而不改变形状的波.

例 2　考虑拟线性方程

$$u_xg_y(x,y,u)-u_yg_x(x,y,u)=0,$$

其中 g 为已知函数.

解　设 $u=u(x,y)$ 为方程的任一解,记 $v(x,y)=g(x,y,u(x,y))$,则因

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}=u_xv_y-u_yv_x=u_x(g_y+g_u\cdot u_y)-u_y(g_x+g_u\cdot u_x)$$
$$=u_xg_y-u_y\cdot g_x=0,$$

知 u,v 之间存在函数关系,即

$$\Phi(u,g(x,y,u))=0\quad 或\quad u=\varphi(g(x,y,u)).$$

注意到 u 的任意性,可知上述关系式所确定的隐函数就是方程的通解,这里 Φ 和 φ 分别为其变元的任意可微函数.

特别地,当取 $g=uy-x$ 时,拟线性方程变为 $u_y+uu_x=0$,其解由关系式 $u=\varphi(uy-x)$ 所确定.

上述求解过程是针对具体方程给出的,我们将看到,一般的齐次线性方程(7.2)的求解过程与写成对称形式的常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{X_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{X_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{X_n} \tag{7.5}$$

发生密切的关系. 我们称(7.5)为齐次线性偏微分方程(7.2)的**特征方程**. 拟线性偏微分方程(7.3)的求解问题则可化为(7.2)的方程类型来处理. 下面逐一介绍这些问题.

7.1.2　一阶线性偏微分方程与常微分方程组的关系

一阶线性偏微分方程和常微分方程组的首次积分密切相关. 考虑初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}=f_i(x,y_1,\cdots,y_n),\ y_i(x_0)=y_i^0,\ i=1,2,\cdots,n, \tag{7.6}$$

其中f_i在域G内满足解的存在唯一性定理的条件. 根据这一定理,上述初值问题在包含点$(x_0,y_1^0,\cdots,y_n^0)$的某个域内有唯一的一组解

$$y_i=\varphi_i(x,x_0,y_1^0,\cdots,y_n^0),\ i=1,2,\cdots,n.$$

利用解的唯一性,不难由此推出关系式

$$y_i^0=\varphi_i(x_0,x,y_1,\cdots,y_n),\ i=1,2,\cdots,n. \tag{7.7}$$

容易看出,(7.7)的每一个关系式的右端函数φ_j都有这样的特性:设$y_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$为方程组(7.6)的经过点$(x_0,y_1^0,\cdots,y_n^0)$附近的任一解,当把它们代入φ_j时,所得的将是一个常数,且此常数值随不同解而异,这种函数φ_j就称为方程组(7.6)的**首次积分**,或更确切地定义如下:

在域G内连续可微且不恒等于常数的函数$\psi(x,y_1,\cdots,y_n)$,如果其中的变元$y_i(i=1,2,\cdots,n)$用方程组(7.5)的任一解$y_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$代替时,它就取常数值(对不同的解,常数值也不同),则关系式$\psi(x,y_1,\cdots,y_n)=c$(这里c为允许范围内的任意常数)称为方程组(7.5)的**首次积分**,有时亦称$\psi(x,y_1,\cdots,y_n)$为首次积分.

方程组(7.6)的n个首次积分$\psi_i(x,y_1,\cdots,y_n)=c_i,i=1,\cdots,n$称为**彼此独立**的,如果雅可比行列式

$$\frac{\partial(\psi_1,\cdots,\psi_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial\psi_n}{\partial y_1}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial\psi_1}{\partial y_n} & \cdots & \dfrac{\partial\psi_n}{\partial y_n}\end{vmatrix}$$

在G内恒不为零. 对于对称形方程组(7.5)的$n-1$个首次积分$\varphi_j(x_1,\cdots,x_n)$ $(j=1,\cdots,n-1)$,则用矩阵

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_1}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

的秩$n-1$来定义它们的**彼此独立性**.

下面讨论常微分方程组与一阶线性偏微分方程之间的关系.

先看$n=1$的情形,即考虑方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y). \tag{7.8}$$

设它的通解为$y=\varphi(x,c)$,从中解出c,得$c=\psi(x,y)$,此为方程的首次积分. 以任一解$y(x)$代入并微分之,有

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}f(x,y)=0,$$

即 $u=\psi(x,y)$ 为一阶齐次线性偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+f(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{7.9}$$

的解.

反之,设 $u=u(x,y)$ 为方程(7.9)的解,以方程(7.8)的任一解 $y(x)$ 代入并微分之,得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial u}{\partial x}+f(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

即

$$u(x,y(x))=c\ (c\text{ 为常数}).$$

这表明 $u(x,y)=c$ 是方程(7.8)的首次积分.

综合上述可得:$u=u(x,y)$ 为(7.9)的解的充要条件是 $u(x,y(x))=c$ 为方程(7.8)的首次积分.

这一结论对于 $n>1$ 的一般情况也成立. 事实上,容易证明

排疑解惑
首次积分

定理 1　$\psi(x,y_1,\cdots,y_n)=c$ 是方程组(7.6)的首次积分的充要条件是在域 G 内以下等式成立:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+f_1\frac{\partial\psi}{\partial y_1}+f_2\frac{\partial\psi}{\partial y_2}+\cdots+f_n\frac{\partial\psi}{\partial y_n}=0. \tag{7.10}$$

7.1.3　利用首次积分求解常微分方程组

考虑方程组

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}=f_i(x,y_1,\cdots,y_n),\ i=1,2,\cdots,n, \tag{7.11}$$

其中 f_i 在域 G 内满足解的存在唯一性定理的条件.

定理 2　如果

$$\psi_i(x,y_1,\cdots,y_n)=c_i,\ i=1,2,\cdots,n \tag{7.12}$$

是方程组(7.11)的 n 个彼此独立的首次积分,则方程组(7.11)的任一解均可通过适当选取一组常数 c_i 而得到.

证明　依定义有 $\dfrac{\partial(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}\neq 0$,由(7.12)可解出函数

$$y_i=\varphi_i(x,c_1,\cdots,c_n),\ i=1,2,\cdots,n, \tag{7.13}$$

且 $\dfrac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}x}$ 存在、连续.

首先,我们证明(7.13)是方程组(7.11)的解. 事实上,显然

$$\psi_j(x,\varphi_1(x,c_1,\cdots,c_n),\cdots,\varphi_n(x,c_1,\cdots,c_n))=c_j,\ j=1,2,\cdots,n,$$

从而

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi_j(x,\varphi_1,\cdots,\varphi_n)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}\psi_j(x,\varphi_1,\cdots,\varphi_n)\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}x}=0,\ j=1,2,\cdots,n. \quad (7.14)$$

另一方面,因 $\psi_j=c_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是 (7.11) 的首次积分,根据定理 1,在 G 上有

$$\frac{\partial\psi_j}{\partial x}+f_1\frac{\partial\psi_j}{\partial y_1}+\cdots+f_n\frac{\partial\psi_j}{\partial y_n}=0,\ j=1,2,\cdots,n,$$

特别是对 $y_i=\varphi_i(x,c_1,\cdots,c_n)(i=1,2,\cdots,n)$ 成立,即

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi_j(x,\varphi_1,\cdots,\varphi_n)+\sum_{i=1}^{n}f_i(x,\varphi_1,\cdots,\varphi_n)\cdot\frac{\partial}{\partial y_i}\psi_j(x,\varphi_1,\cdots,\varphi_n)=0,j=1,2,\cdots,n. \quad (7.15)$$

由(7.14)减(7.15)可得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\psi_j}{\partial y_i}\left[\frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}x}-f_i(x,\varphi_1,\cdots,\varphi_n)\right]=0,\ j=1,2,\cdots,n.$$

注意到$\dfrac{\partial(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}\neq 0$,由上式可推得

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}x}=f_i(x,\varphi_1,\cdots,\varphi_n),\ i=1,2,\cdots,n.$$

这表明

$$y_i=\varphi_i(x,c_1,\cdots,c_n),\ i=1,2,\cdots,n$$

为方程组(7.11)的解,其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为任意常数.

现设方程组(7.11)的任一解

$$y_i=\widetilde{\varphi}_i(x,x_0,\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_n),\ i=1,2,\cdots,n,$$

记 $\bar{c}_i=\psi_i(x_0,\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_n)(i=1,2,\cdots,n)$,可知 $\bar{y}_i=\varphi_i(x,\bar{c}_1,\cdots,\bar{c}_n)(i=1,2,\cdots,n)$ 为方程组(7.11)的解. 注意到 $\widetilde{\varphi}_i(x_0,x_0,\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_n)=\bar{y}_i=\varphi_i(x_0,\bar{c}_1,\cdots,\bar{c}_n)(i=1,2,\cdots,n)$,由解的唯一性,推知

$$\varphi_i(x,\bar{c}_1,\cdots,\bar{c}_n)=\widetilde{\varphi}_i(x,x_0,\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_n),\ i=1,2,\cdots,n,$$

从而 $y_i=\widetilde{\varphi}_i(x,x_0,\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_n)(i=1,2,\cdots,n)$ 由(7.12) 所确定,只需取 $c_i=\bar{c}_i=\psi_i(x_0,\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_n)(i=1,2,\cdots,n)$. 证毕.

方程组(7.11)的 n 个彼此独立的首次积分的全体(7.12)称为方程组(7.11)的**通积分**. 显然,求解方程组(7.11)的问题就归结为寻求它的 n 个彼此独立的首次积分.

如何求首次积分呢? 没有一定的方法,但如果能得到常微分方程的含任意常数的通解 $y=\varphi(x,c)$ 或 $\psi(y,x,c)=0$,则当$\dfrac{\partial\varphi(x,c)}{\partial c}\neq 0$ 或$\dfrac{\partial\psi(y,x,c)}{\partial c}\neq 0$ 时,可解出 $c=$

$\Phi(x,y)$，$\Phi(x,y)$ 即为首次积分. 还可以通过构造全微分 $d\Phi(x,y)=0$ 得到首次积分 $\Phi(x,y)$.

对方程组(7.11)，因需要求得 n 个彼此独立的首次积分，更好的办法是将其写成对称形式的方程组

$$\frac{dx}{g_0}=\frac{dy_1}{g_1}=\frac{dy_2}{g_2}=\cdots=\frac{dy_n}{g_n},$$

其中 $g_i=g_0 f_i(i=1,2,\cdots,n)$. 选取 $n+1$ 个不同时为零的函数 $\mu_0,\mu_1,\cdots,\mu_n$，使得

$$\mu_0 g_0+\mu_1 g_1+\cdots+\mu_n g_n=0,$$

且

$$\mu_0 dx+\mu_1 dy_1+\cdots+\mu_n dy_n=d\varphi,$$

其中 φ 为某函数，则 $\varphi=c$ 是方程组(7.11)的首次积分.

应用实例
人口发展方程

例 3　求解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xy}{x^2-y^2-z^2},\\[2ex] \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2xz}{x^2-y^2-z^2}.\end{cases}$$

解　将方程写成对称形式

$$\frac{dx}{x^2-y^2-z^2}=\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{2xz}. \tag{7.16}$$

由后一等式直接化为 $\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dz}{z}$，积分得方程组的一个首次积分 $\dfrac{y}{z}=c_1$.

为了得到另一个首次积分，用 x 乘对称形式(7.16)第一个分式的分子和分母，用 y 乘第二个分式的分子和分母，用 z 乘第三个分式的分子和分母，然后分子分母分别相加得

$$\frac{xdx+ydy+zdz}{x(x^2+y^2+z^2)}=\frac{dy}{2xy},$$

积分得方程组的又一个首次积分 $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{y}=c_2$.

易证两个首次积分是彼此独立的，因此方程组的通积分为

$$\begin{cases}\dfrac{y}{z}=c_1,\\[2ex] \dfrac{x^2+y^2+z^2}{y}=c_2.\end{cases}$$

例 4　求方程组

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}=\frac{dz}{xy}$$

的通积分.

解 这里 $g_0=xz, g_1=yz, g_2=xy$,取 $\mu_0=y, \mu_1=x, \mu_2=-2z$,则有 $\mu_0 g_0+\mu_1 g_1+\mu_2 g_2=0$. 而 $\mu_0 dx+\mu_1 dy_1+\mu_2 dy_2=ydx+xdy-2zdz=d(xy-z^2)$,于是 $xy-z^2=c_1$ 是方程组的一个首次积分.

又由方程组的第一个等式,可得方程组的另一个首次积分 $\frac{x}{y}=c_2$.

易证两个首次积分是彼此独立的,因此方程组的通积分为

$$\begin{cases} xy-z^2=c_1, \\ \dfrac{x}{y}=c_2. \end{cases}$$

习 题 7.1

1. 试生成偏微分方程:

(1) 设 $f(u)$ 是 u 的任意可微函数,试由 $z=f(x^2-y^2)$ 中消去 f,用偏微分方程表示该关系式;

(2) 试由关系式 $(x-a)^2-(y-b)^2+z=1$ 中消去参数 a,b 化为偏微分方程.

2. 试判断下列偏微分方程的类型,并写出其对应的特征方程:

(1) $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+xy\frac{\partial u}{\partial z}=0$;　　(2) $y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=x-y$;

(3) $y\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x}$;　　(4) $x\frac{\partial z}{\partial x}=x+y+2z$.

3. 试求解下列偏微分方程:

(1) $\frac{\partial z}{\partial x}=1+x^2y$;　　(2) $z_{xt}=\sin t+x$;　　(3) $z_{xx}=6xy+12x$.

4. 试求下列一阶微分方程组的首次积分:

(1) $\frac{dx}{z}=\frac{dy}{xz}=\frac{dz}{y}$;　　(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{z}{x}, \frac{dz}{dx}=\frac{z(y+2z-1)}{x(y-1)}$.

5. 试用可积组合法求解下列齐次微分方程组:

(1) $\begin{cases} x'=2x+4y, \\ y'=-x-2y; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1'=x_2-x_3, \\ x_2'=x_1+x_2, \\ x_3'=x_1+x_3; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1'=3x_1+x_2-x_3, \\ x_2'=x_1+3x_2-x_3, \\ x_3'=3x_1+3x_2-x_3. \end{cases}$

§7.2　一阶线性偏微分方程的解法

这一节将讨论一阶齐次线性和拟线性偏微分方程的通解的结构.

7.2.1　一阶齐次线性偏微分方程

首先考虑一阶齐次线性偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i}=0, \tag{7.2}$$

其中 $X_i(x_1,\cdots,x_n)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 于某区域内是所有变元的连续可微函数,且在所讨论的区域内处处不同时为零

由 7.1.2 节定理 1 知道,方程(7.2)的解必为对称形式的常微分方程组(它也是一阶齐次线性偏微分方程的特征方程)

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{X_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{X_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{X_n} \tag{7.5}$$

的首次积分,反之亦然. 下面讨论方程(7.2)的通解结构.

定理 3(通解结构)　设 $\psi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=c_i$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$ 是方程组(7.5)的 $n-1$ 个彼此独立的首次积分,则一阶齐次线性偏微分方程(7.2)的通解可表示为

$$u=\Phi(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{n-1}), \tag{7.17}$$

其中 Φ 是其变元的任意连续可微函数.

证明　先证 $\Phi(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{n-1})=c$ (c 为任意常数)是(7.5)的首次积分,从而(7.17)为(7.2)的解.

事实上,依假设,X_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 在 D 内处处不同时为零,不妨设 $X_n\neq 0$. 于是,方程(7.5)的解可表示为 $x_j=\varphi_j(x_n)$ $(j=1,2,\cdots,n-1)$(即视 x_n 为自变量). 又 $\psi_i=c_i$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$ 是方程(7.5)的首次积分,因此

$$\psi_i(\varphi_1(x_n),\varphi_2(x_n),\cdots,\varphi_{n-1}(x_n),x_n)=c_i,\ i=1,2,\cdots,n-1,$$

c_i 为相应确定的常数,从而

$$\Phi(\psi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,\psi_{n-1}(x_1,x_2,\cdots,x_n))\Big|_{x_j=\varphi_j(x_n)\,(j=1,2,\cdots,n-1)}=c\ (c\text{ 为常数}).$$

这表明 $\Phi(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{n-1})=c$ 是方程(7.5)的首次积分.

其次证明(7.17) 是方程(7.2)的通解,即对方程(7.2)的任一解 $u=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,必存在关系 $\widetilde{\Phi}$,使得 $\varphi=\widetilde{\Phi}(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{n-1})$ 成立. 事实上,有

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} X_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\dfrac{\partial\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_i}=0, \\ \sum_{i=1}^{n} X_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\dfrac{\partial\psi_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_i}=0,\ j=1,2,\cdots,n-1. \end{cases} \tag{7.18}$$

依假设,$X_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $(i=1,2,\cdots,n)$在 D 内处处不同时为零,由线性代数方程组的基本理论推知,对于(7.18),必有

$$\frac{\partial(\varphi,\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{n-1})}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix}=0.$$

这意味着函数 $\varphi,\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{n-1}$是相关的,它们之间存在函数关系. 但已知 $\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{n-1}$彼此独立,因此 φ 可由 $\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{n-1}$表示,即 $\varphi=\widetilde{\Phi}(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{n-1})$. 证毕.

前面我们称偏微分方程的解为积分曲面,积分曲面由特征曲线组成,而首次积分代表特征曲线,故要通过对应的常微分方程求首次积分. 因此将对称形式的常微分方程(7.5)称为齐次线性方程(7.2)的特征方程.

例 1 求方程 $\alpha u_x+\beta u_y=0$ 的通解,其中 α,β 为常数.

解 特征方程为$\dfrac{\mathrm{d}x}{\alpha}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\beta}$,即有首次积分 $\beta x-\alpha y=c$,得通解为 $u=\Phi(\beta x-\alpha y)$,其中 $\Phi(\xi)$为 ξ 的任意连续可微函数. 这与 § 7.1 例 1 的结果相同.

例 2 求方程 $yz_x-xz_y=0$ 的通解.

解 特征方程为$\dfrac{\mathrm{d}x}{y}=-\dfrac{\mathrm{d}y}{x}$,$x^2+y^2=c$ 为其首次积分,因此有通解 $z=\omega(x^2+y^2)$,其中 ω 为任意连续可微函数.

应用实例
交通流

例 3 求方程 $x_1\dfrac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\dfrac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots+x_n\dfrac{\partial z}{\partial x_n}=0$ 的通解.

解 特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{x_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{x_n},$$

易求得其 $n-1$ 个彼此独立的首次积分

$$\frac{x_1}{x_n}=c_1,\frac{x_2}{x_n}=c_2,\cdots,\frac{x_{n-1}}{x_n}=c_{n-1},$$

于是原方程有通解

$$z=\Phi\left(\frac{x_1}{x_n},\frac{x_2}{x_n},\cdots,\frac{x_{n-1}}{x_n}\right),$$

其中 Φ 为其变元的任意连续可微函数.

7.2.2　一阶拟线性偏微分方程

现在转入讨论一阶拟线性偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i(x_1,\cdots,x_n,z)\frac{\partial z}{\partial x_i}=Z(x_1,\cdots,x_n,z) \tag{7.3}$$

的求解问题,假定 $Y_i(x_1,\cdots,x_n,z)$ $(i=1,2,\cdots,n)$,$Z(x_1,\cdots,x_n,z)$ 于某区域内是所有变元的连续可微函数,且在所讨论的区域内处处有 $\sum_{i=1}^{n} Y_i^2\neq 0$.

为方便计,我们以 $n=2$ 的情形,即

$$\sum_{i=1}^{2} Y_i(x_1,x_2,z)\frac{\partial z}{\partial x_i}=Z(x_1,x_2,z) \tag{7.19}$$

为例进行讨论. 设(7.19)的解为隐函数形式

$$u(x_1,x_2,z)=0, \tag{7.20}$$

我们来分析一下,函数 u 必须满足什么关系.

设 $\frac{\partial u}{\partial z}\neq 0$,于是从(7.20)可解出 $z=f(x_1,x_2)$,从而

$$u(x_1,x_2,f(x_1,x_2))=0.$$

分别对 x_1,x_2 微分,得

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x_2}=0.$$

因此

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=-\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\frac{\partial u}{\partial z}},\ i=1,2.$$

将 $z=f(x_1,x_2)$ 及上述关系式代入(7.19),并注意到 $z=f(x_1,x_2)$ 为(7.19)的解,可得

$$-\sum_{i=1}^{2} Y_i(x_1,x_2,z)\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\frac{\partial u}{\partial z}}=Z(x_1,x_2,z)$$

或

$$Y_1(x_1,x_2,z)\frac{\partial u}{\partial x_1}+Y_2(x_1,x_2,z)\frac{\partial u}{\partial x_2}+Z(x_1,x_2,z)\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

即函数 u 满足一阶齐次线性偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{2}Y_i(x_1,x_2,z)\frac{\partial u}{\partial x_i}+Z(x_1,x_2,z)\frac{\partial u}{\partial z}=0, \tag{7.21}$$

且当以(7.20)所确定的 $z=f(x_1,x_2)$ 代入时,(7.21)式成立.

反之,若 $u(x_1,x_2,z)$ 是(7.21)的解,且 $\frac{\partial u}{\partial z}\neq 0$,则易见(7.20)就是(7.19)的隐式解.

设 $\psi_i(x_1,x_2,z)=c_i(i=1,2)$ 是(7.21)的特征方程

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{Y_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{Y_2}=\frac{\mathrm{d}z}{Z}$$

的两个彼此独立的首次积分,则由定理 3,方程(7.21)的通解可表示为 $u=\Phi(\psi_1,\psi_2)$,其中 Φ 为其变元的任意连续可微函数.

现证当 $\frac{\partial\Phi}{\partial z}\neq 0$ 时,$\Phi(\psi_1,\psi_2)=0$ 就是方程(7.19)的通解,即若 $z=g(x_1,x_2)$ 是(7.19)的某一解,则它必包含在 $\Phi(\psi_1,\psi_2)=0$ 之中. 亦即可选取 Φ 为某一函数,以 $z=g(x_1,x_2)$ 代入 $\Phi(\psi_1,\psi_2)=0$,就得到关于 x_1,x_2 的恒等式.

事实上,由定理 1 有

$$\sum_{i=1}^{2}Y_i(x_1,x_2,g(x_1,x_2))\frac{\partial\psi_j(x_1,x_2,g(x_1,x_2))}{\partial x_i}+$$

$$Z(x_1,x_2,g(x_1,x_2))\frac{\partial\psi_j(x_1,x_2,g(x_1,x_2))}{\partial z}=0,\ j=1,2,$$

同时又有

$$\sum_{i=1}^{2}Y_i(x_1,x_2,g(x_1,x_2))\frac{\partial g(x_1,x_2)}{\partial x_i}=Z(x_1,x_2,g(x_1,x_2)).$$

由上述等式可得

$$\sum_{i=1}^{2}Y_i(x_1,x_2,g(x_1,x_2))\left(\frac{\partial\psi_j}{\partial x_i}+\frac{\partial\psi_j}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)=0,\ j=1,2,$$

或令 $\varphi_j(x_1,x_2)=\psi_j(x_1,x_2,g(x_1,x_2))$ $(j=1,2)$,上式可写为

$$\sum_{i=1}^{2}Y_i(x_1,x_2,g(x_1,x_2))\frac{\partial\varphi_j(x_1,x_2)}{\partial x_i}=0,\ j=1,2.$$

这表明 $u=\varphi_j(x_1,x_2)$ $(j=1,2)$ 均为方程

$$\sum_{i=1}^{2} Y_i(x_1,x_2,g(x_1,x_2))\frac{\partial u}{\partial x_i}=0 \tag{7.22}$$

的解. 但上式是两个自变量的一阶齐次线性偏微分方程,由定理 3 知,它的任两个解之间必存在函数关系,即有 Φ 满足 $\Phi(\varphi_1(x_1,x_2),\varphi_2(x_1,x_2))=0$,因此 $\Phi(\psi_1,\psi_2)=0$ 是方程(7.19)的通解.

上述讨论过程对于 $n>2$ 的情形也完全适用. 因此,我们得到关于一阶拟线性偏微分方程(7.3)的通解结构的如下定理.

定理 4(通解结构)　设 $\psi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n,z)=c_i$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$是对称形式的常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{Y_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{Y_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{Y_n}=\frac{\mathrm{d}z}{Z} \tag{7.23}$$

的 n 个彼此独立的首次积分,则一阶拟线性偏微分方程(7.3)的通解可表示为

$$\Phi(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n)=0, \tag{7.24}$$

其中 Φ 是其变元的任意连续可微函数. 可从通解(7.24)中解出解 $z=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

方程(7.23)亦称为一阶拟线性偏微分方程(7.3)的**特征方程**.

注　非齐次线性偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i}=Z(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

可作为特殊形式的拟线性偏微分方程处理.

例 4　求解线性方程 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2-y^2$.

解　特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{-x}=\frac{\mathrm{d}z}{x^2-y^2},$$

容易求得两个彼此独立的首次积分

$$x^2+y^2=c_1 \quad 和 \quad xy+z=c_2.$$

因此,所求偏微分方程的通解为

$$\Phi(x^2+y^2,xy+z)=0,$$

其中 $\Phi(u_1,u_2)$为 u_1,u_2的任意连续可微函数.

例 5　试求方程

$$(y-bz)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-az)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay$$

的通解,这里 a,b 为常数.

解　不难求得特征方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{y-bz}=\frac{\mathrm{d}y}{-(x-az)}=\frac{\mathrm{d}z}{bx-ay}$$

的两个首次积分

$$\psi_1\equiv ax+by+z=c_1,\quad \psi_2\equiv x^2+y^2+z^2=c_2,$$

且矩阵

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial y} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial z}\\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial y} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b & 1\\ 2x & 2y & 2z\end{bmatrix}$$

的秩等于 2,即 $\psi_1=c_1,\psi_2=c_2$彼此独立. 于是所求微分方程的通解为

$$\Phi(ax+by+z,x^2+y^2+z^2)=0,$$

其中 Φ 为其变元的任意连续可微函数.

习 题 7.2

1. 具体求出习题 7.1 第 2 题的线性偏微分方程的解.
2. 求解下列线性偏微分方程:

(1) $(y-z)u_x+(z-x)u_y+(x-y)u_z=0$;

(2) $yzuu_x+zxuu_y+xyuu_z=xyz$;

(3) $xzz_x+yzz_y=x^2+y^2+z^2$.

§ 7.3 柯 西 问 题

7.3.1 一阶线性(拟线性)偏微分方程几何解释

上述一阶线性(拟线性)偏微分方程的求解过程,可以用几何的语言给予直观的解释. 考虑三维空间的一个连续向量场

$$\boldsymbol{F}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k},$$

其中 P,Q,R 为 x,y,z 的连续函数,$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是沿坐标轴的单位向量.

向量场的**特征曲线**是空间的一条曲线,在其上每一点的切向量 $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{i}\mathrm{d}x+\boldsymbol{j}\mathrm{d}y+\boldsymbol{k}\mathrm{d}z$ 与该点的场向量 $\boldsymbol{F}$ 共线. 特征曲线可由微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}x}{P}=\frac{\mathrm{d}y}{Q}=\frac{\mathrm{d}z}{R}\tag{7.25}$$

确定.

由特征曲线组成的曲面,即若特征曲线与曲面相交,则整条特征曲线落在该曲面

上，这样的曲面称为特征曲面. 因此，特征曲面上任一点处其法向量 $\boldsymbol{N}$ 与向量场向量 $\boldsymbol{F}$ 正交，即

$$\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{F}=0. \tag{7.26}$$

当特征曲面为显函数 $z=z(x,y)$ 时，$\boldsymbol{N}=\frac{\partial z}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$. 由正交关系得

$$P\frac{\partial z}{\partial x}+Q\frac{\partial z}{\partial y}=R. \tag{7.27}$$

当特征曲面为隐函数 $u(x,y,z)=0$ 时，$\boldsymbol{N}=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$. 正交关系为

$$P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+R\frac{\partial u}{\partial z}=0. \tag{7.28}$$

于是，一阶线性（拟线性）偏微分方程的解（积分曲面）是特征曲面，特征曲面由特征曲线组成，而寻求特征曲线的问题归结为求解常微分方程. 即一阶线性（拟线性）偏微分方程的求解问题归结为求解常微分方程问题，这正与前面的分析结论相一致.

排疑解惑

积分曲面与柯西问题

所谓**柯西问题**，用几何的语言说，就是求一阶偏微分方程(7.27)或(7.28)的通过某一给定曲线的积分曲面. 显然，由于给定曲线的选取不同，可能有无穷多个积分曲面通过，也可能没有积分曲面通过，柯西问题不一定有解，也不一定有唯一解. 只有在某些条件下柯西问题才存在唯一解.

7.3.2　线性偏微分方程柯西问题

定理 5（存在唯一性）　假设方程(7.2)中的 $X_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 在域 D 内连续可微，且 $X_n\neq 0$，则柯西问题

$$\sum_{i=1}^{n}X_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i}=0,\quad u\Big|_{x_n=x_n^0}=f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}) \tag{7.29}$$

存在唯一解，其中 x_n^0 是任意给定的数，$f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$ 是已知的连续可微函数.

证明　设 $\psi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=c_i$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$ 是特征方程

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{X_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{X_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{X_n} \tag{7.5}$$

的 $n-1$ 个相互独立的首次积分，令

$$\psi_i(x_1,x_2,\cdots x_{n-1},x_n^0)=\varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}),\ i=1,2,\cdots,n-1. \tag{7.30}$$

注意到 $\frac{\partial(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{n-1})}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})}\neq 0$，由(7.30)可解出

$$x_i=\omega_i(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1}),\ i=1,2,\cdots,n-1, \tag{7.31}$$

其中 ω_i 关于其变元有连续一阶偏导数.

可以断言

$$u=f(\omega_1(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{n-1}),\cdots,\omega_{n-1}(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{n-1}))=\Phi(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{n-1}) \tag{7.32}$$

就是柯西问题(7.29)的解.

事实上,若记 $X[u]=X_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots+X_n\frac{\partial u}{\partial x_n}$,则

$$X[\Phi]=\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_1}X[\psi_1]+\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_2}X[\psi_2]+\cdots+\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_{n-1}}X[\psi_{n-1}].$$

而 $X[\psi_j]=0\ (j=1,2,\cdots,n-1)$,故 $X[\Phi]=0$,即 $u=\Phi$ 满足方程(7.2). 又当 $x_n=x_n^0$时,由(7.30)和(7.31)有 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$,即(7.32)为柯西问题(7.29)的解.

现在进一步证明解的唯一性. 设 $u=u_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)$也是(7.29)的解,记(7.32)为 $u_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,则因 $u_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=c_i(i=1,2)$均为(7.5)的首次积分,即对(7.5)的任一解 $x_i=x_i(x_n,x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\ (i=1,2,\cdots,n-1)$,有

$$\begin{aligned}u_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=u_1(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_{n-1}^0,x_n^0)=f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_{n-1}^0)\\&=u_2(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_{n-1}^0,x_n^0)=u_2(x_1,x_2,\cdots,x_n).\end{aligned}$$

由解 $x_i(i=1,2,\cdots,n-1)$的任意性知,对变量 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n$,只要 $f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$有定义,就有 $u_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=u_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 证毕.

关于一阶拟线性偏微分方程的柯西问题,类似地有

定理 6(拟线性方程解的存在唯一性) 假设方程(7.3)中的 $Y_i(x_1,x_2,\cdots,x_n,z)(i=1,\cdots,n)$和 $Z(x_1,x_2,\cdots,x_n,z)$在某域内连续可微,且 $Y_n\neq0$,则柯西问题

$$\sum_{i=1}^{n}Y_i(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)\frac{\partial z}{\partial x_i}=Z(x_1,x_2,\cdots,x_n,z),\quad z\Big|_{x_n=x_n^0}=g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

存在唯一解,其中 x_n^0是任意给定的数,$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是已知的连续可微函数.

对柯西问题的求解,可先利用对称形式常微分方程求相互独立首次积分,再应用通解结构和通积分式,寻求满足初值条件的柯西问题的解.

例 1 求柯西问题

$$\begin{cases}x\dfrac{\partial z}{\partial y}-y\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\\ z\big|_{x=0}=y^2\end{cases}$$

的解.

解 由积分特征方程$\frac{\mathrm{d}x}{-y}=\frac{\mathrm{d}y}{x}$得 $x^2+y^2=c$,于是方程的通解为

$$z=\varphi(x^2+y^2),$$

其中 φ 为变元的任意可微函数.

由初值条件得 $\varphi(y^2)=y^2$,因而 $\varphi(x^2+y^2)=x^2+y^2$,故所求的解为 $z=x^2+y^2$.

亦可视方程为拟线性方程,其特征方程为$\frac{\mathrm{d}x}{-y}=\frac{\mathrm{d}y}{x}=\frac{\mathrm{d}z}{0}$,两个彼此独立的首次积分为

$z=c_1, x^2+y^2=c_2$. 结合初值条件 $x=0$ 时 $z=y^2$,消去变量 x,y,z 得 $c_1=c_2$. 故解为 $z=x^2+y^2$.

例 2　给定方程

$$(y-bz)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-az)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay\ (b\neq -1),$$

求满足条件 $x=0$ 时 $z=y$ 的解.

解　由 §7.2 例 5 知

$$ax+by+z=c_1,\quad x^2+y^2+z^2=c_2$$

是其特征方程的两个彼此独立的首次积分. 由初值条件 $x=0$ 时 $z=y$ 可得 $2\left(\frac{c_1}{b+1}\right)^2=c_2$.

因此,所求的解为

$$x^2+y^2+z^2=2\left(\frac{ax+by+z}{b+1}\right)^2.$$

例 3　求柯西问题

$$\begin{cases} x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial u}{\partial y}=1, \\ u\big|_{x+y=1}=0 \end{cases}$$

的解.

解　特征方程为$\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{\mathrm{d}y}{u}=\frac{\mathrm{d}u}{1}$,容易求得两个彼此独立的首次积分

$$u+\frac{1}{x}=c_1,\quad 2y-u^2=c_2.$$

结合初值条件 $x+y=1$ 时 $u=0$,消去 x,y,u 得

$$c_1(2-c_2)=2.$$

于是,所求的解为

$$\left(u+\frac{1}{x}\right)(2-2y+u^2)=2$$

或

$$\frac{x}{1+ux}=\frac{u^2}{2}-y+1.$$

例 4　求柯西问题

$$\begin{cases} y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2-y^2, \\ z\big|_{x+y=0}=0 \end{cases}$$

的解.

解　特征方程$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{-x}=\frac{\mathrm{d}z}{x^2-y^2}$有两个彼此独立的首次积分

$$x^2+y^2=c_1,\quad 2z+(x+y)^2=c_2.$$

由初值条件 $x+y=0$ 时 $z=0$ 得 $c_2=0$. 于是,所求的解为 $2z=-(x+y)^2$.

例 5 求方程

$$x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

通过圆周 $z=1, x^2+y^2=4$ 的积分曲面.

解 求解方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{-y}=\frac{\mathrm{d}y}{x}=\frac{\mathrm{d}z}{0},$$

得到特征曲线族 $z=c_1, x^2+y^2=c_2$,易见所给圆周恰为特征曲线,因此问题不确定,即无穷多个积分曲面满足条件. 例如,$4z=x^2+y^2, z=x^2+y^2-3, x^2+y^2+z^2=5$ 等均是问题的解.

例 6 求方程

$$\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=1$$

通过曲线 $x_0=s, y_0=s^2, z_0=s^3$ 的积分曲面,s 为参数.

解 特征方程为 $\frac{\mathrm{d}x}{1}=\frac{\mathrm{d}y}{-1}=\frac{\mathrm{d}z}{1}$. 若引入新参数 t,并令 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}y=\mathrm{d}z=\mathrm{d}t$,则此方程组满足条件 $x(t_0)=s, y(t_0)=s^2, z(t_0)=s^3$ 的解,就是经过所给曲线的特征曲线,在此即为

$$x=t+s,\ y=-t+s^2,\ z=t+s^3\quad (t_0=0).$$

因积分曲面由特征曲线组成,故上述特征曲线族的全体即为所求的积分曲面.

习 题 7.3

1. 求解下列满足给定条件的偏微分方程(柯西问题):

(1) $(2xy+xz)\frac{\partial z}{\partial x}+(yz+3x^3y)\frac{\partial z}{\partial y}=3x^2z-2y^2z, y^2=z, x=3$;

(2) $y^2\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}+z^2=0, x-y=0, x-yz=1$.

2. 试求下列满足给定条件的偏微分方程(柯西问题)的解:

(1) $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{z}{2}\frac{\partial u}{\partial z}=0, x=1, u=y+z^2$;

(2) $2yz\frac{\partial z}{\partial x}-xz\frac{\partial z}{\partial y}+xy=0, x^2+y^2=ay, z=0$;

(3) $z\frac{\partial z}{\partial x}+(z^2-x^2)\frac{\partial z}{\partial y}+x=0, y=x^2, z=2x$.

3. 求解下列线性偏微分方程的柯西问题:

(1) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+(xz+y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=z, x+y=2z, xz=1$;

(2) $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2, x=5y=2z$;

(3) $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}+z^2=0, xy=x+y, z=1$.

*§7.4　李群分析与对称

7.4.1　李变换群[79-82]

考虑平面单参数变换

$$T_a:\bar{x}=\varphi(x,y,a),\bar{y}=\psi(x,y,a), \tag{7.33}$$

满足

$$T_0:\varphi(x,y,0)=x,\psi(x,y,0)=y, \tag{7.34}$$

$$\begin{vmatrix}\varphi_x & \varphi_y\\ \psi_x & \psi_y\end{vmatrix}\neq 0,$$

即将平面(x,y)上的点$P(x,y)$变为$\overline{P}(\bar{x},\bar{y})$,记为$\overline{P}=T_a(P)$,并且存在逆变换

$$T_a^{-1}:x=\varphi^{-1}(\bar{x},\bar{y},a),y=\psi^{-1}(\bar{x},\bar{y},a), \tag{7.35}$$

$T_a^{-1}(\overline{P})=P$. T_0是恒等变换:$T_0(P)=P$.

对两变换T_a,T_b,定义其乘积(复合)为$T_bT_a=T_{a+b}$:

$$\begin{aligned}\bar{\bar{x}}&=\varphi(\bar{x},\bar{y},b)=\varphi(\varphi(x,y,a),\psi(x,y,a),b),\\ \bar{\bar{y}}&=\psi(\bar{x},\bar{y},b)=\psi(\varphi(x,y,a),\psi(x,y,a),b),\end{aligned} \tag{7.36}$$

即$\overline{\overline{P}}\equiv T_b(\overline{P})=T_bT_a(P)$.

存在逆变换的平面单参数变换(7.33)符合群的定义,称为平面单参数变换群G.

将函数$\varphi(x,y,a),\psi(x,y,a)$在$a=0$附近展开为泰勒级数,得无穷小变换:

$$\bar{x}\approx x+\xi(x,y)a,\quad \bar{y}\approx y+\eta(x,y)a, \tag{7.37}$$

其中

$$\xi(x,y)=\left.\frac{\partial\varphi(x,y,a)}{\partial a}\right|_{a=0};\quad \eta(x,y)=\left.\frac{\partial\psi(x,y,a)}{\partial a}\right|_{a=0}. \tag{7.38}$$

定义一阶微分算子

$$X=\xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{7.39}$$

称为群G的**生成元**.

变换(7.33)亦可由以下常微分方程组的积分定义：

$$\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}a}=\xi(\bar{x},\bar{y}),\quad \bar{x}\big|_{a=0}=x,$$
$$\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}a}=\eta(\bar{x},\bar{y}),\quad \bar{y}\big|_{a=0}=y, \tag{7.40}$$

称为**李方程组**.

可应用生成元将李方程组解为**指数映射**：

$$\bar{x}=\mathrm{e}^{aX}(x),\quad \bar{y}=\mathrm{e}^{aX}(y), \tag{7.41}$$

其中

$$\mathrm{e}^{aX}=1+\frac{a}{1!}X+\frac{a^2}{2!}X^2+\cdots+\frac{a^n}{n!}X^n+\cdots. \tag{7.42}$$

例 1 (1) **平移变换群** $\bar{x}=x+a,\bar{y}=y$ 有无穷小变换 $\bar{x}\approx x+1,\bar{y}\approx y$ 和生成元

$$X=\frac{\partial}{\partial x}, \tag{7.43}$$

李方程组为

$$\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}a}=1,\quad \bar{x}\big|_{a=0}=x,$$
$$\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}a}=0,\quad \bar{y}\big|_{a=0}=y.$$

(2) **相似变换群** $\bar{x}=ax,\bar{y}=ay(0<a<+\infty)$ 有无穷小变换 $\bar{x}\approx x,\bar{y}\approx y$ 和生成元

$$X=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}, \tag{7.44}$$

李方程组为

$$\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}a}=\bar{x},\quad \bar{x}\big|_{a=0}=x,$$
$$\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}a}=\bar{y},\quad \bar{y}\big|_{a=0}=y.$$

(3) **旋转变换群** $\bar{x}=x\cos a+y\sin a,\bar{y}=y\cos a-x\sin a$ 有无穷小变换

$$\bar{x}\approx x+ya,\quad \bar{y}\approx y-xa$$

和生成元

$$X=y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}, \tag{7.45}$$

李方程组为

$$\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}a}=\bar{y},\quad \bar{x}\big|_{a=0}=x,$$
$$\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}a}=\bar{x},\quad \bar{y}\big|_{a=0}=y.$$

函数 $F(x,y)$ 称为变换群 G 的**不变量**,如果下式恒成立:

$$F(\varphi(x,y,a),\psi(x,y,a))=F(x,y). \tag{7.46}$$

定理 7　当且仅当函数 $F(x,y)$ 是一阶线性偏微分方程

$$XF\equiv\xi(x,y)\frac{\partial F}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial F}{\partial y}=0 \tag{7.47}$$

的解时,函数 $F(x,y)$ 是变换群 G 的不变量.

证明　设函数 $F(x,y)$ 是不变量,将 $F(\varphi(x,y,a),\psi(x,y,a))$ 对 a 进行泰勒展开:

$$F(\varphi(x,y,a),\psi(x,y,a))\approx F(x+a\xi,y+a\eta)\approx F(x,y)+a\left(\xi\frac{\partial F}{\partial x}+\eta\frac{\partial F}{\partial y}\right),$$

即 $F(\bar{x},\bar{y})=F(x,y)+aXF+o(a)$. 代入方程(7.46),有

$$F(x,y)+aXF+o(a)=F(x,y),$$

即 $aXF+o(a)=0$,故 $XF=0$.

反之,设 $F(x,y)$ 是方程(7.47)的一个解析解,使用泰勒展开式,将 $F(x,y)$ 的指数映射(7.41)展开为

$$F(\bar{x},\bar{y})=\mathrm{e}^{aX}F(x,y)=\left(1+\frac{a}{1!}X+\frac{a^2}{2!}X^2+\cdots+\frac{a^n}{n!}X^n+\cdots\right)F(x,y).$$

当 $XF(x,y)=0$ 时,有 $X^2F=X(XF)=0,\cdots,X^nF=0$,得 $F(\bar{x},\bar{y})=F(x,y)$. 定理得证.

例 2　对无穷小变换 $\bar{x}\approx x+ax^2,\bar{y}\approx y+axy$,有生成元

$$X=x^2\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y}, \tag{7.48}$$

李方程组为

$$\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}a}=\bar{x}^2,\quad \bar{x}\big|_{a=0}=x,$$

$$\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}a}=\bar{x}\,\bar{y},\quad \bar{y}\big|_{a=0}=y.$$

易解得

$$\bar{x}=\frac{x}{1-ax},\quad \bar{y}=\frac{y}{1-ax}.$$

这是投影变换群的单参数群.

其特征方程为 $\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y}$,有首次积分 $h=\frac{x}{y}$. 得投影变换群的不变量 $F(x,y)=\Phi\left(\frac{x}{y}\right)$,其中 Φ 是含一个变量的任意函数.

对有如(7.39)所示的生成元 X 的平面单参数变换群 G,再采用变量代换

$$t=t(x,y),\quad u=u(x,y), \tag{7.49}$$

其中 t,u 由以下一阶偏微分方程组定义：

$$X(t)\equiv\xi(x,y)\frac{\partial t}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial t}{\partial y}=1,$$
$$X(u)\equiv\xi(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{7.50}$$

进一步简化成生成元

$$X=\frac{\partial}{\partial t} \tag{7.51}$$

的平移变换群 $\bar{t}=t+a,\bar{u}=u$，我们称变量 t 和 u 为**典型变量**.

定理 8 任一平面单参数变换群都可适当选取 x,y 的函数 $\xi(x,y),\eta(x,y)$ 作为新的变元，并且可选取新参数 t，使它化为平移群 $\bar{t}=t+a,\bar{u}=u$.

例 3 求相似变换群 $\bar{x}=ax,\bar{y}=ay(0<a<+\infty)$ 的典型变量.

解 相似变换群的生成元

$$X=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y},$$

解 t,u 变元的一阶偏微分方程组

$$x\frac{\partial t}{\partial x}+y\frac{\partial t}{\partial y}=1,\quad x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

对第一个方程，可令 t 与 y 无关，$x\mathrm{d}t=\mathrm{d}x,t=\ln|x|$；第二个方程有解 $u=\frac{y}{x}$. 于是

$$\bar{t}=\ln|\bar{x}|=\ln(|x|\mathrm{e}^a)=\ln|x|+a=t+a,\quad \bar{u}=\frac{\bar{y}}{\bar{x}}=\frac{y\mathrm{e}^a}{x\mathrm{e}^a}=\frac{y}{x}=u.$$

变量 t 和 u 为相似变换群的典型变量.

7.4.2 对称

一阶导数的变换为

$$\bar{y}'\equiv\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}\bar{x}}=\frac{\mathrm{D}_x\psi}{\mathrm{D}_x\varphi}. \tag{7.52}$$

这是关于变量 (x,y,y') 的变换(7.33)和(7.52)组成的群 $G_{(1)}$，称为群 G 的第一次延拓. 由 $\varphi=x+a\xi(x,y),\psi=y+a\eta(x,y)$，并忽略 a 的高次项，可得无穷小变换

$$\bar{y}'=\frac{y'+a\mathrm{D}_x\eta}{1+a\mathrm{D}_x\xi}\approx(y'+a\mathrm{D}_x\eta)(1+a\mathrm{D}_x\xi)\approx y'+(\mathrm{D}\eta-y'\mathrm{D}\xi)a$$

或

$$\bar{y}'\approx y'+a\zeta_1,\quad \zeta_1=\mathrm{D}_x\eta-y'\mathrm{D}_x\xi=\eta_x+(\eta_y-\xi_x)y'-y'^2\xi_y. \tag{7.53}$$

群 G 的生成元 X 经延拓后为

$$X=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial x}+\zeta_1\frac{\partial}{\partial x},\tag{7.54}$$

式(7.52)和(7.53)称为**首次延拓公式**和**无穷小生成元的首次延拓公式**.

方程(7.33)的变换群 G 称为一阶常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)\tag{7.55}$$

的**对称群**或**容许变换群**,如果在经过(7.33)的变换后微分方程(7.55)的形式保持不变,即

$$\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}\bar{x}}=f(\bar{x},\bar{y}),$$

其中函数 f 与原方程(7.55)一致. 即如果群 G 的首次延拓 $G_{(1)}$ 的空间曲线在定义(7.35)的意义下是保持不变的,则称 G 是方程(7.55)的对称群.

例 4　方程 $y'=f(y)$ 在变换 $\bar{x}=x+a$ 下保持不变,其生成元为 $X=\frac{\partial}{\partial x}$. 而方程 $y'=f(x)$ 在变换 $\bar{y}=y+a$ 下保持不变,其生成元为 $X=\frac{\partial}{\partial y}$. 方程 $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$ 容许齐次伸缩群变换(比例变换)$\bar{x}=x\mathrm{e}^a$,$\bar{y}=y\mathrm{e}^a$,其生成元为 $X=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}$.

前述二维定义可推广到高维 $\boldsymbol{x}=(x^1,x^2,\cdots,x^n)$ 情形. 对方程组

$$F_1(\boldsymbol{x})=0,\cdots,F_s(x)=0\ (s<n),\tag{7.56}$$

若对于所有 $\boldsymbol{x}$,矩阵 $\left[\frac{\partial F_k}{\partial x^i}\right]$ 的秩等于 s,则方程组(7.56)定义了一个 $(n-s)$ 维的曲面 M. 方程组(7.56)相对于群 G 的变换

$$\bar{x}^i=f^i(\boldsymbol{x},a),\ i=1,2,\cdots,n\tag{7.57}$$

称为**不变**的,如果曲面 M 上的点经群 G 的变换后仍在曲面 M 上.

变换(7.57)的生成元为

$$X=\xi^i(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x^i},\quad \xi^i(\boldsymbol{x})=\left.\frac{\partial f^i(\boldsymbol{x},a)}{\partial a}\right|_{a=0},$$

李方程组为

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{x}}^i}{\mathrm{d}a}=\xi^i(\bar{\boldsymbol{x}}),\quad \bar{\boldsymbol{x}}^i\big|_{a=0}=\boldsymbol{x}^i.\tag{7.58}$$

定理 9　当且仅当

$$X(F_k)\big|_M=0,\ k=1,2,\cdots,s\tag{7.59}$$

时方程组(7.56)给出的曲面 M 对群 G 是不变的.

对一阶常微分方程(7.55),利用(7.54)和定理 9,其不变曲面条件写为 $\zeta_1\big|_{y'=f(x,y)}=$

$\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}$. 将(7.53)代入得

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}=\eta_x+(\eta_y-\xi_x)f-\xi_y f^2. \tag{7.60}$$

此为$f(x,y)$的一阶拟线性偏微分方程. 解之可得容许算子产生的所有方程.

例 5 求容许算子为

$$X=x\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y} \tag{7.61}$$

的方程.

解 方程(7.60)变为

$$x\frac{\partial f}{\partial x}-y\frac{\partial f}{\partial y}=-2f, \tag{7.62}$$

特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=-\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{\mathrm{d}f}{2f},$$

首次积分为$\psi_1=xy,\psi_2=x^2f$,得方程(7.62)的通解$f=x^{-2}F(xy)$. 容许算子(7.61)的方程为

$$x^2y'=F(xy). \tag{7.63}$$

可以利用对称求解一阶微分方程的积分,含李积分因子、典型变量和不变解系.

关于对称形式的一阶微分方程

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0, \tag{7.64}$$

李指出:

定理 10 如果

$$X=\xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

是方程(7.64)的对称群,且$\xi M+\eta N\neq 0$,则函数$\mu=\frac{1}{\xi M+\eta N}$是方程(7.64)的一个积分因子,称为李积分因子.

证明 对(7.64)的积分曲线族$\Omega(x,y)=c$,由$\xi M+\eta N\neq 0$,可选

$$\Omega\equiv\xi\frac{\partial\Omega}{\partial x}+\eta\frac{\partial\Omega}{\partial y}=1.$$

另一方面,因$\mathrm{d}\Omega=0$,又有$\frac{\partial\Omega/\partial x}{\partial\Omega/\partial y}=\frac{M}{N}$. 解出$\frac{\partial\Omega}{\partial x},\frac{\partial\Omega}{\partial y}$,得

$$\mathrm{d}\Omega\equiv\frac{\partial\Omega}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\Omega}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y}{\xi M+\eta N}=0.$$

表明 $\mu=\dfrac{1}{\xi M+\eta N}$ 是方程(7.64)的一个积分因子.

例 6　求齐次方程 $2xy\mathrm{d}x+(y^2-3x^2)\mathrm{d}y=0$ 的积分因子.

解　齐次方程有生成元 $X=x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y}$(例 4). 李积分因子为

$$\mu=\frac{1}{2x^2y+y^3-3x^2y}=\frac{1}{y^3-x^2y}.$$

例 7　计算里卡蒂方程

$$y'+y^2-\frac{2}{x^2}=0 \tag{7.65}$$

的无穷小对称,并求其李积分因子和解.

解　如果令 $\bar{x}=kx,\bar{y}=ly$,得

$$\bar{y}'+\bar{y}^2-\frac{2}{\bar{x}^2}=\frac{l}{k}y'+l^2y^2-\frac{1}{k^2}\frac{2}{x^2}.$$

对称(不变)条件要求

$$\bar{y}'+\bar{y}^2-\frac{2}{\bar{x}^2}=\lambda\left(y'+y^2-\frac{2}{x^2}\right),$$

即 $\lambda=\dfrac{l}{k}=l^2=\dfrac{1}{k^2}$,解得 $l=\dfrac{1}{k}$,其中 $k>0$ 任意. 令 $k=\mathrm{e}^a$,得非齐次伸缩群变换 $\bar{x}=x\mathrm{e}^a,\bar{y}=y\mathrm{e}^{-a}$. 里卡蒂方程有无穷小对称:

$$X=x\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y}. \tag{7.66}$$

里卡蒂方程(7.65)可改写成

$$\mathrm{d}y+\left(y^2-\frac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x=0. \tag{7.67}$$

相应于(7.64),有 $\xi=x,\eta=-y,M=y^2-\dfrac{2}{x^2},N=1$,得积分因子

$$\mu=\frac{x}{x^2y^2-xy-2}.$$

方程(7.67)两边乘积分因子,即变为

$$\frac{x\mathrm{d}y}{x^2y^2-xy-2}+\frac{1}{x^2y^2-xy-2}\frac{x^2y^2-2}{x}\mathrm{d}x=0. \tag{7.68}$$

因 $\dfrac{x^2y^2-2}{x}=y+\dfrac{x^2y^2-xy-2}{x}$,上式可写为

$$\frac{x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x}{x^2y^2-xy-2}+\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}(xy)}{x^2y^2-xy-2}+\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

记 $z=xy$,并利用分解式

$$\frac{1}{z^2-z-2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z+1}\right),$$

有 $\int\frac{\mathrm{d}z}{z^2-z-2}=\frac{1}{3}\ln\frac{z-2}{z+1}$. 方程(7.68) 化为

$$\frac{x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x}{x^2y^2-xy-2}+\frac{\mathrm{d}x}{x}=\mathrm{d}\left(\ln x+\frac{1}{3}\ln\frac{xy-2}{xy+1}\right)=0.$$

积分得

$$\frac{xy-2}{xy+1}=\frac{C}{x^3},\ C\neq 0.$$

上式解出 y,便得里卡蒂方程(7.65)的解

$$y=\frac{2x^3+C}{x(x^3-C)},\ C\neq 0.$$

李群分析方法可以推广到二阶和高阶微分方程,群生成元可以进行二次、三次延拓,其相应的无穷小对称亦可以通过求解给定方程得到.

习 题 7.4

1. 求下列变换群的无穷小变换、生成元和李方程组:

(1) 仿射变换群 $\bar{x}=ax,\bar{y}=y,a\in(0,+\infty)$;　(2) $\bar{x}=ax,\bar{y}=a^2y,a\in(0,+\infty)$;

(3) $\bar{x}=x+yt,\bar{y}=y,t\in(-\infty,+\infty)$;　(4) $\bar{x}=\frac{x}{1-tx},\bar{y}=\frac{y}{1-tx}(-\infty<t<+\infty)$.

2. 求下列生成元的不变函数:

(1) $X=\frac{\partial}{\partial y}$;　(2) $X=y\frac{\partial}{\partial x}$;　(3) $X=x^2\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y}$.

3. 计算生成元为 $X=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}$ 的典型变量.

4. 求下列方程的对称:

(1) $y'=F(y)$;　(2) $y'=F\left(\frac{y}{x}\right)$;　(3) $xy'=y+F(x)$.

5. 计算下列容许算子产生的一阶方程:

(1) $X=l\frac{\partial}{\partial x}-k\frac{\partial}{\partial y}$;　(2) $X=y\frac{\partial}{\partial x}$;

(3) $X=x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}$;　(4) $X=xy\frac{\partial}{\partial x}+y^2\frac{\partial}{\partial y}$.

本章学习要点

一阶线性偏微分方程的通解可由对应的常微分方程组的首次积分构成. 学习时首先要对概念与

基本关系理解清楚，包括首次积分及其独立性、线性、拟线性、通解、对称形等概念，以及一阶线性偏微分方程的解等价于对应常微分方程组的首次积分. 本章中还反复用到函数相关性及函数变量之间的转换.

其次要熟练掌握求常微分方程组的首次积分的方法，一是化为一阶微分方程求通解，然后求任意常数的显式表示得首次积分，更常用的是直接对对称形常微分方程组通过分子、分母的组合构成全微分而得. 这里涉及的常微分方程组的初等积分法与第二章一阶微分方程的初等解法相互对应，其常微分方程组不限于线性.

此外，理解一阶齐次线性及非齐次拟线性偏微分方程的通解是由对应的对称形常微分方程组的 $n-1$ 及 n 个首次积分的任意函数构成，给出其初值条件的柯西问题即由初值条件确定其解函数.

还有，对一阶线性偏微分方程的解应通过几何直观给予充分理解，由于定理叙述的需要把几何解释放在最后. 偏微分方程的解可看成积分曲面，而首次积分表示为特征曲线，由特征曲线构成积分曲面. 因此，可以用常微分方程方法解一阶线性偏微分方程.

最后，鉴于李关于微分方程的可积性理论是微分方程发展的一个重要里程碑，其对称思想也对近代物理有深刻影响，应对李群分析方法给予足够重视，在本书只作简单介绍，但从其众多概念中应体会李无穷小分析的作用和意义.

本章中的方法仅是解一阶线性偏微分方程的特征曲线方法，其实尚有幂级数展开、降维等方法，可参看其他偏微分方程教程.

由于物理、力学中提出大量偏微分方程问题，归结为数学物理方程，有必要专门学习数学物理方程的理论和求解方法. 因此，尚有数学物理方程和数学物理方法的教程，其中的数学物理方法往往包含属常微分方程范围的二阶线性微分方程所定义的特殊函数.

第八章 边值问题

本书前面主要研究微分方程的求解及解的性质. 讨论的定解问题是初值问题(柯西问题),以初始值条件作为求微分方程解的补充条件;还有一类定解问题是边值问题,其补充条件由以自变量取某些值时未知函数及其导数的值而定,称其为边值条件,许多数学和物理问题都归结为微分方程边值问题.

前面研究线性微分方程初值问题时,对齐次方程已得到了基本解组或通解. 自然,对齐次方程边值问题可利用其通解求满足边值条件的特解,这就是**待定系数法**. 而对非齐次方程,初值问题亦由常数变易公式求得通解,对应于边值问题就是**格林函数**方法. 而对应常系数线性方程的特征值,对二阶变系数线性方程而言,则发展出复杂的本征值和本征函数方法.

本章研究二阶线性微分方程边值问题,包括边值问题的可解(存在唯一)性及待定系数法、格林函数法、本征值和本征函数法.

§8.1 边值问题的可解性和待定系数法

8.1.1 边值问题的概念和可解性

实际问题中,非均匀弦的自由振动、杆的轴向振动与扭转振动、有限长均匀细管的热传导以及微波传输等问题,都可以引导出常微分方程边值问题.

以梁的挠度曲线为例,在材料力学中,已经知道,梁的挠度曲线 $y=y(x)$ 满足方程

$$EJy''=M(x), \tag{8.1}$$

这里 x 是沿梁的长度方向取的坐标,E 是材料的弹性模量,J 为梁横截面的惯性矩,而 M 为作用在相应横截面上的弯矩.

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}=Q(x) \tag{8.2}$$

则是作用在相应横截面上的剪力.

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}=q(x) \tag{8.3}$$

为在 x 点的载荷密度——单位长度上的载荷. 结合(8.2)、(8.3),可将(8.1)化为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(EJ\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)=q(x). \tag{8.4}$$

这就是当梁的分布载荷密度 $q(x)$ 已知时，梁的挠度曲线 $y=y(x)$ 所满足的微分方程.

显然，对于用不同方式支承的梁，如图(8.1)(a)与(b)，在同样载荷下，其弯曲情形完全不同. 因此，为了确定梁的挠度曲线，所需要的定解条件应根据不同的支承方式给出.

(a) 铰支梁　　(b) 悬臂梁

图(8.1)　梁的支承

例如，对铰支梁(见图(8.1)(a))，因它在两端点的位移及弯矩应为零，边值条件可写为

$$\begin{cases} x=0:\ y=y''=0, \\ x=l:\ y=y''=0, \end{cases} \tag{8.5}$$

其中 l 为梁的长度，利用(8.1)由 $M=0$ 变为 $y''=0$.

同样，对悬臂梁(见图(8.1)(b))，则有边值条件

$$\begin{cases} x=0:\ y=y'=0, \\ x=l:\ y''=y'''=0, \end{cases} \tag{8.6}$$

应用实例

弹性理论与梁的弯曲

也是利用(8.1)，(8.2)由 $M=0, Q=0$ 变为 $y''=0, y'''=0$.

在这里的问题归结为微分方程的边值问题. 即在边值条件(8.5)或(8.6)下求解常微分方程(8.4).

现讨论二阶常微分方程的边值问题，对于高阶常微分方程或方程组的边值问题，通常也可以类似地处理.

二阶非齐次线性微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \tag{8.7}$$

及对应的齐次线性微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0, \tag{8.8}$$

其中 $y=y(x)$ 为未知函数，$p(x)$，$q(x)$，$f(x)$ 均为已知连续函数. 二阶线性微分方程(8.7)或(8.8)的边值条件有

第一类边值条件：$y(a)=\alpha, y(b)=\beta$;　(8.9)

第二类边值条件：$y'(a)=\alpha, y'(b)=\beta$;

第三类边值条件：$k_1y(a)+k_2y'(a)=\gamma_1, k_3y(b)+k_4y'(b)=\gamma_2$;　(8.10)

周期边值条件：$y(a)=y(b), y'(a)=y'(b)$.　(8.11)

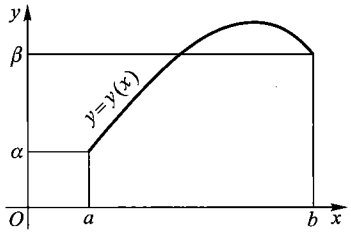
可统一为广义边值条件：

$$U_i[y]\equiv\alpha_{i0}y(a)+\beta_{i0}y(b)+\alpha_{i1}y'(a)+\beta_{i1}y'(b)=\gamma_i\ (i=1,2), \tag{8.12}$$

其中，$\alpha_{ij},\beta_{ij},\gamma_i$ $(i=1,2,j=0,1)$是常数.

对非齐次微分方程(8.7)和(8.12)，γ_i $(i=1,2)$不全为零的边值问题称为**非齐次边值问题**；而对齐次微分方程(8.8)和(8.12)，$\gamma_i=0$ $(i=1,2)$的边值问题称为**齐次边值问题**；其他情形的边值问题称为**半齐次边值问题**.

解边值问题(8.7)，(8.9)或者说求边值问题(8.7)，(8.9)的解 $y=y(x)$，就是寻找微分方程(8.7)的解 $y=y(x)$，使得它满足边值条件(8.9). 从几何上看就相当于在 Oxy 平面上寻找一条曲线 $y=y(x)$，使它通过(a,α)和(b,β)两点，并在区间(a,b)内满足微分方程(8.7)(见图(8.2)).



图(8.2)

和初值问题类似，边值问题的解有如下性质：

(1) $y(x)\equiv 0$ 是任意齐次边值问题的解，即**平凡解**或**零解**. 齐次边值问题的任意不恒等于零的解称为**非平凡解**或**非零解**. 只要齐次边值问题有非平凡解存在，则存在线性无关解 $y_1(x),y_2(x)$，齐次边值问题的任何解都是 $y_1(x),y_2(x)$的线性组合.

(2) 如果 $y_1(x),y_2(x)$是齐次边值问题的解，则

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

也是齐次边值问题的解，其中 c_1,c_2 为任意常数.

(3) 如果 $\tilde{y}_1(x),\tilde{y}_2(x)$是非齐次边值问题的两个不同的解，则

$$y(x)=\tilde{y}_1(x)-\tilde{y}_2(x)$$

是对应的齐次边值问题的解.

(4) 如果 $y_0(x)$是非齐次边值问题的某个解，则非齐次边值问题的任何解可表示为

$$\tilde{y}(x)=y_0(x)+y(x),$$

其中 $y(x)$是对应的齐次边值问题的解.

和初值问题一样，边值问题同样有关于解的存在与唯一性的问题. 先看如下简单的例子.

例 1 试讨论齐次线性微分方程

$$y''+y=0 \tag{8.13}$$

不同边值条件的可解性.

解 方程(8.13)的通解为

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x, \tag{8.14}$$

其中 c_1,c_2 为任意常数.

显然，对边值条件

$$y(0)=0,\quad y(\pi)=1, \tag{8.15}$$

得到 $c_1=0$ 和 $c_1=-1$，边值问题无解.

而对边值条件

$$y(0)=0,\quad y(\pi)=0, \tag{8.16}$$

得到 $c_1=0$ 和 c_2 任意,边值问题有无穷多个解 $y=c_2\sin x$,其中 c_2 是任意常数.

因此边值问题的存在(可解)、唯一性问题比初值问题的复杂. 我们有二阶齐次边值问题(8.8),(8.12)和非齐次边值问题(8.7),(8.12)的解的**可解性定理**.

定理 1　对齐次边值问题(8.8),(8.12),如果已知方程(8.8)的基本解组 $y_1(x)$, $y_2(x)$,则边值问题可解的充分必要条件是矩阵

$$\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] & \gamma_1 \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] & \gamma_2 \end{bmatrix} \tag{8.17}$$

和矩阵

$$\boldsymbol{Q}(x)\equiv\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] \end{bmatrix} \tag{8.18}$$

有相同的秩.

对非齐次边值问题(8.7),(8.12),如果已知非齐次微分方程(8.7)的一个解 $y_0(x)$,则边值问题(8.7),(8.12)可解的充分必要条件是:矩阵

$$\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] & U_1[y_0]-\gamma_1 \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] & U_2[y_0]-\gamma_2 \end{bmatrix} \tag{8.19}$$

和矩阵(8.18)有相同的秩.

证明　齐次微分方程(8.8)的通解为 $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$,其中 c_1,c_2 为任意常数. 方程的边值条件 $U_i[y]=\gamma_i(i=1,2)$可改写成 $c_1U_i[y_1]+c_2U_i[y_2]-\gamma_i=0(i=1,2)$. 由代数方程理论,齐次边值问题可解的充分必要条件是矩阵(8.17)和矩阵(8.18)有相同的秩(矩阵同列元素齐变号不影响其秩). 对非齐次微分方程(8.7)同样证明.

推论　当 $\Delta\equiv\det\boldsymbol{Q}(x)\neq0$ 时,齐次边值问题只有**零解**,而非齐次边值问题或半齐次边值问题都有唯一解.

8.1.2　待定系数法

求解二阶齐次线性微分方程边值问题常用的方法是待定系数法. 如果所考虑的微分方程的通解可以求出,则可利用边值条件确定其中的任意常数,得到满足边值问题的(特)解,这种方法称为**待定系数法**.

例 2　求解边值问题

$$\begin{cases} y''=0, & (8.20) \\ y(0)=\alpha,y(1)=\beta, & (8.21) \end{cases}$$

其中 α,β 为给定的常数.

解　方程(8.20)有通解 $y=c_1+c_2x$,将边值条件代入得到

$$c_1=\alpha,\quad c_1+c_2=\beta,$$

即 $c_1=\alpha,c_2=\beta-\alpha$. 边值问题(8.20),(8.21)有解

$$y=\alpha+(\beta-\alpha)x.$$

从上述例子看到,运用待定系数法关键在于求出所考虑的微分方程的通解. 我们知道,对于二阶齐次线性微分方程,如果能找出它的两个线性无关的特解,那么它们的

线性组合就是方程的通解. 而这两个线性无关的特解又可以通过求解两个特殊的初值问题而得到. 因此为了求解边值问题,可以先通过求解初值问题求出通解,然后再通过待定系数法求满足边值条件的特解.

考虑二阶齐次线性微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0\ (a\leqslant x\leqslant b), \tag{8.8}$$

满足边值条件

$$y(a)=\alpha,\quad y(b)=\beta. \tag{8.9}$$

首先求出方程(8.8)的两个特解 $y_1(x)$,$y_2(x)$,使得它们分别满足初值条件

$$y_1(a)=1,\quad y_1'(a)=0 \tag{8.22}$$

和

$$y_2(a)=0,\quad y_2'(a)=1. \tag{8.23}$$

显然,这两个特解 $y_1(x)$,$y_2(x)$线性无关. 根据定理 1,当 $\alpha\neq0$ 或 $\beta\neq0$ 时,边值问题(8.8),(8.9)有唯一非平凡解的充分必要条件是 $y_2(b)\neq0$.

事实上,可构造(8.8)的通解

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x),$$

利用边值条件(8.9),得

$$c_1y_1(a)+c_2y_2(a)=\alpha,$$
$$c_1y_1(b)+c_2y_2(b)=\beta.$$

再结合初值条件,当 $y_2(b)\neq0$ 时可解出

$$c_1=\alpha,\quad c_2=\frac{\beta-\alpha y_1(b)}{y_2(b)}.$$

于是,边值问题(8.8),(8.9)的解为

$$y(x)=\alpha y_1(x)+\frac{\beta-\alpha y_1(b)}{y_2(b)}y_2(x). \tag{8.24}$$

上述讨论可总结成

定理 2 二阶齐次线性微分方程边值问题(8.8),(8.9),当 $\alpha\neq0$ 或 $\beta\neq0$ 时有唯一非平凡解的充分必要条件是 $y_2(b)\neq0$.

现在考虑二阶非齐次线性微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)\quad (a\leqslant x\leqslant b) \tag{8.7}$$

满足边值条件(8.9)的边值问题.

可先求出非齐次线性微分方程(8.7)的一个特解 $y_0(x)$,使它满足初值条件

$$y_0(a)=\alpha,\quad y_0'(a)=0,$$

并求出相应的齐次微分方程(8.8)的一个特解 $y_1(x)$,使其满足初值条件

$$y_1(a)=0,\quad y_1'(a)=1,$$

则当 $y_1(b)\neq0$ 时可求得边值问题(8.7),(8.9)的解为

$$y(x)=y_0(x)+\frac{\beta-y_0(b)}{y_1(b)}y_1(x). \tag{8.25}$$

例 3　求解边值问题

$$\begin{cases} y''+\dfrac{4x}{1+x^2}y'+\dfrac{2}{1+x^2}y=0, \\ y(0)=1, y(2)=1. \end{cases}$$

解　容易验证方程有两个线性无关解

$$y_1(x)=\frac{1}{1+x^2},\quad y_2(x)=\frac{x}{1+x^2},$$

分别满足初值条件

$$y_1(0)=1,\quad y_1'(0)=0,$$
$$y_2(0)=0,\quad y_2'(0)=1.$$

因 $y_2(2)=\dfrac{2}{5}\neq 0$,利用公式(8.24)即得边值问题的解

$$y(x)=\frac{1+2x}{1+x^2}.$$

例 4　求解边值问题

$$\begin{cases} y''+3y=\cos x, \\ y(0)=\dfrac{1}{2}, y(\pi)=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

解　显然 $y_0(x)=\dfrac{1}{2}\cos x$ 是方程满足初值条件

$$y_0(0)=\frac{1}{2},\quad y_0'(0)=0$$

的一个特解. 而相应齐次方程 $y''+3y=0$ 有特解 $y_1(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}x$,满足初值条件

$$y_1(0)=0,\quad y_1'(0)=1,$$

应用实例
导弹跟踪

而且 $y_1(\pi)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}\pi\neq 0$. 根据公式(8.25),即得此边值问题的解为

$$y=\frac{1}{2}\cos x.$$

习　题　8.1

1. 试讨论下列微分方程边值问题的可解性并求解:

(1) $y''=0, y(0)+y'(0)=y(1), y'(0)=y'(1)$;

(2) $y''=x, y(0)-y(1)=1, y'(0)+y'(1)=0$.

2. 试判断下边值问题的可解性并求解:

$$y''-y'=0,\ y(0)=-1, y'(1)-y(1)=2.$$

3. 试用待定系数法求解边值问题: $y''-y'-2y=0,\ y(0)=2, y(+\infty)=0$.

4. 求解边值问题: $y''+y=2x-\pi, y(0)=0, y(\pi)=0$.

*5. 对怎样的 a，边值问题 $y''+ay=1, y(0)=0, y(1)=0$ 没有解？

§ 8.2 格林函数

对二阶非齐次线性微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \tag{8.7}$$

和对应的齐次线性微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0. \tag{8.8}$$

设 $y_1(x), y_2(x)$ 是方程(8.8)分别满足初值条件

$$y_1(a)=1, \quad y_1'(a)=0, \tag{8.22}$$

$$y_2(a)=0, \quad y_2'(a)=1 \tag{8.23}$$

的基本解组. 利用常数变易法可求得二阶非齐次线性微分方程(8.7)的通解(参阅5.1.2节)：

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\int_a^x \frac{y_2(x)y_1(t)-y_1(x)y_2(t)}{W(t)}f(t)\,\mathrm{d}t, \tag{8.26}$$

其中 $W(x)$ 是 $y_1(x), y_2(x)$ 的朗斯基行列式，

$$W(x)=W[y_1(x), y_2(x)]=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

考虑齐次边值条件

$$y(a)=0, \quad y(b)=0, \tag{8.27}$$

要求(8.26)满足边值条件(8.27). 由条件 $y(a)=0$ 得 $c_1=0$，再由条件 $y(b)=0$ 给出

$$c_2y_2(b)+\int_a^b \frac{y_2(b)y_1(t)-y_1(b)y_2(t)}{W(t)}f(t)\,\mathrm{d}t=0. \tag{8.28}$$

根据定理1，为使边值问题(8.7)，(8.27)存在唯一的非平凡解，必须且仅须 $y_2(b)\neq 0$. 此时由(8.28)可解出

$$c_2=-\frac{1}{y_2(b)}\int_a^b \frac{y_2(b)y_1(t)-y_1(b)y_2(t)}{W(t)}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

将求出的 c_1, c_2 代入(8.26)中有

$$\begin{aligned}
y(x)&=-\frac{y_2(x)}{y_2(b)}\int_a^b \frac{y_2(b)y_1(t)-y_1(b)y_2(t)}{W(t)}f(t)\,\mathrm{d}t+\int_a^x \frac{y_2(x)y_1(t)-y_1(x)y_2(t)}{W(t)}f(t)\,\mathrm{d}t \\
&=-\frac{y_2(x)}{y_2(b)}\int_x^b \frac{y_2(b)y_1(t)-y_1(b)y_2(t)}{W(t)}f(t)\,\mathrm{d}t- \\
&\quad \frac{y_2(x)}{y_2(b)}\int_a^x \frac{y_2(b)y_1(t)-y_1(b)y_2(t)}{W(t)}f(t)\,\mathrm{d}t+ \\
&\quad \int_a^x \frac{y_2(x)y_1(t)-y_1(x)y_2(t)}{W(t)}f(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$= \int_x^b \frac{y_2(x)f(t)}{y_2(b)W(t)}[y_2(t)y_1(b) - y_1(t)y_2(b)]\mathrm{d}t + \int_a^x \frac{y_2(t)f(t)}{y_2(b)W(t)}[y_2(x)y_1(b) - y_1(x)y_2(b)]\mathrm{d}t.$$

上式可写为

$$y(x) = \int_a^b G(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t \ (a \leqslant x \leqslant b), \tag{8.29}$$

其中 $G(x,t)$ 定义为

$$G(x,t)=\begin{cases}\dfrac{y_2(t)}{y_2(b)W(t)}[y_2(x)y_1(b)-y_1(x)y_2(b)], & a\leqslant t\leqslant x,\\ \dfrac{y_2(x)}{y_2(b)W(t)}[y_2(t)y_1(b)-y_1(t)y_2(b)], & x\leqslant t\leqslant b.\end{cases} \tag{8.30}$$

定理 3　如果齐次微分方程(8.8)存在基本解组 $y_1(x)$，$y_2(x)$，且 $y_2(b)\neq 0$，则对每一个在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续的函数 $f(x)$，非齐次边值问题(8.7)，(8.27)存在唯一解，且这个解可由(8.29)唯一确定.

定义　对边值问题(8.8)，(8.27)，定义在正方形 $a\leqslant x,t\leqslant b$ 上的函数 $G(x,t)$ 为此边值问题的**格林函数**，如果满足：

(1) $G(x,t)$ 在正方形 $a\leqslant x,t\leqslant b$ 上连续；

(2) $\dfrac{\partial G(x,t)}{\partial x}$ 在 $a\leqslant x,t\leqslant b$ $(x\neq t)$ 上连续，且在 $x=t$ 处有跃度：

$$\frac{\partial G(t+0,t)}{\partial x}-\frac{\partial G(t-0,t)}{\partial x}=1\left(\text{或}\frac{1}{p_0(t)}\right)$$

(后者对方程 $p_0(t)y''+p(t)y'+q(t)y=0$ 而言)；

(3) $G(x,t)$ 对固定的 t，作为 $x(x\neq t)$ 的函数满足齐次微分方程(8.8)；而对固定的 x，作为 t 的函数满足边值条件(8.27).

对不同类型的微分方程和边值条件可推导出各种形式的格林函数 $G(x,t)$.

例 1　对于边值问题

$$\begin{cases}y''=f(x) \quad (a\leqslant x\leqslant b),\\ y(a)=0, \quad y(b)=0.\end{cases}$$

其中 $f(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续，求其格林函数 $G(x,t)$，并且当取 $a=0,b=1,f(x)=x$ 时求其解.

解　显然，$y_1(x)=1,y_2(x)=x-a$ 是齐次微分方程 $y''=0$ 满足初值条件

$$y_1(a)=1, \quad y_1'(a)=0,$$
$$y_2(a)=0, \quad y_2'(a)=1$$

的基本解组，$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 0\\ x-a & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$，于是边值问题的格林函数为

$$G(x,t)=\begin{cases}\dfrac{(b-x)(a-t)}{b-a}, & a\leqslant t\leqslant x,\\ \dfrac{(b-t)(a-x)}{b-a}, & x\leqslant t\leqslant b,\end{cases}$$

边值问题的解为

$$y(x)=\int_a^b G(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t\ (a\leqslant x\leqslant b).$$

而当取 $a=0,b=1,f(x)=x$ 时有解

$$y(x)=\int_0^1 G(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x[-t^2(1-x)]\,\mathrm{d}t+\int_x^1[-x(1-t)t]\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{6}x(x^2-1).$$

例 2 求边值问题 $y''-y=f(x),y'(0)=0,y(2)+y'(2)=0$ 的解.

解 齐次微分方程 $y''-y=0$ 的通解为 $y=c_1\mathrm{e}^{-x}+c_2\mathrm{e}^{x}$, $\Delta=\begin{vmatrix}\mathrm{e}^{-x} & -\mathrm{e}^{-x}\\ \mathrm{e}^{x} & \mathrm{e}^{x}\end{vmatrix}=2\neq 0$. 非齐次微分方程的通解为

$$y=c_1\mathrm{e}^{-x}+c_2\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{2}\int_0^x(\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{t})f(t)\,\mathrm{d}t.$$

由边值条件,可得 $c_2=c_1$ 及 $c_1=-\frac{1}{2}\int_0^2\mathrm{e}^{-t}f(t)\,\mathrm{d}t$. 于是,边值问题的解为

$$y(x)=-\operatorname{ch}x\cdot\int_0^2\mathrm{e}^{-t}f(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^x(\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{t})f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$=-\int_x^2\operatorname{ch}x\mathrm{e}^{-t}f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x\mathrm{e}^{-x}\operatorname{ch}tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

可定义格林函数

$$G(x,t)=\begin{cases}-\mathrm{e}^{-x}\operatorname{ch}t, & 0\leqslant t\leqslant x,\\ -\mathrm{e}^{-t}\operatorname{ch}x, & x\leqslant t\leqslant 2,\end{cases}$$

非齐次边值问题的解为

$$y(x)=\int_0^2 G(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t\ (0\leqslant x\leqslant 2).$$

例 3 求解边值问题 $y''+y=f(x),y'(0)=0,y(\pi)=0$.

解 齐次微分方程 $y''+y=0$ 的通解为

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x,\quad \Delta=\begin{vmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

于是,非齐次微分方程的通解为

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x+\int_0^x(\sin x\cos t-\cos x\sin t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

利用边值条件,可得 $c_2=0,c_1=\int_0^\pi\sin t\cdot f(t)\,\mathrm{d}t$. 即非齐次微分方程的解为

$$y(x)=\cos x\int_x^\pi\sin t\cdot f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^x(\sin x\cos t-\cos x\sin t)f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$=\int_x^\pi\cos x\sin t\cdot f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^x(\sin x\cos t-\cos x\sin t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

可定义格林函数

$$G(x,t)=\begin{cases}\sin x\cos t-\cos x\sin t, & 0\leqslant t\leqslant x,\\ \cos x\sin t, & x\leqslant t\leqslant \pi,\end{cases}$$

非齐次边值问题的解为

$$y(x)=\int_0^{\pi}G(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t\quad(0\leqslant x\leqslant \pi).$$

最后，应该指出，格林函数是解非齐次边值问题的有效工具，而且对各种不同类型的方程和边值条件可以推导出各种形式的格林函数.

习　题　8.2

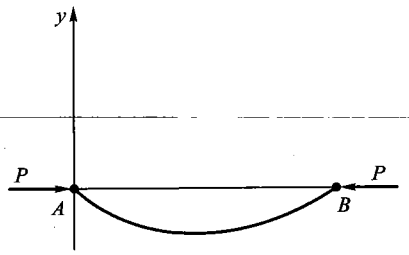
1. 求边值问题 $y''=f(x)$，$y(0)=0$，当 $x\to+\infty$ 时有界的格林函数.
2. 求边值问题 $y''+y=f(x)$，$y(0)=0$，$y'(1)=0$ 的格林函数.
3. 求边值问题 $x^2y''+2xy'=f(x)$，$y(1)=0$，$y'(3)=0$ 的格林函数.
4. 求边值问题 $y''+k^2y=f(x)$，$y(0)=0$，$y'(1)=0$ 的格林函数.
5. 对怎样的 a，存在边值问题 $y''+ay=f(x)$，$y(0)=0$，$y(1)=0$ 的格林函数？

§8.3　本征值和本征函数

8.3.1　本征值和本征函数

在边值问题中有一类属于求本征值和本征函数（也称特征值和特征函数）的问题，简称为本征值问题，这类问题在生产实践中具有重要的意义. 事实上，与振动有关的一类物理、力学问题，往往可归结为本征值问题. 有些偏微分方程的本征值问题，通过分离变量法，也可以化为常微分方程的本征值问题. 在这里我们通过几个例子简单介绍一下边值问题的本征值和本征函数的概念以及一些结果.

在§8.1中已谈及材料力学中梁的挠度曲线方程(8.1)，现假设弹性细杆左右两端沿杆的方向受大小为 P 的力的作用（见图(8.3)）. 欧拉(Euler)曾提出：力 P 达到多大时弹性细杆会发生弯曲？即求临界力的大小.



图(8.3)

和§8.1的梁一样，长度为 l 的弹性杆的挠度曲线 $y=y(x)$ 满足的方程由(8.1)变为

$$EJy''=-Py. \tag{8.31}$$

令 $\lambda=\dfrac{P}{EJ}$，问题变为求解边值问题

$$\begin{cases}y''+\lambda y=0, & (8.32)\\ y(0)=y(l)=0. & (8.33)\end{cases}$$

先讨论如下例子,欧拉问题可作为其注解决.

例 1 考虑边值问题

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, & (8.34) \\ y(0)=0, y(\pi)=0 & (8.35) \end{cases}$$

的解,其中 λ 为参数.

解 显然方程(8.34)有零解 $y(x)=0$. 此外,由 8.3.2 小节定理 4 知 λ 是实的. 下面分三种情形来讨论:

(1) $\lambda=0$,通解为 $y(x)=c_1x+c_2$,代入边值条件得 $c_1=c_2=0$,边值问题没有非零解.

(2) $\lambda<0$,令 $\lambda=-\mu^2$,微分方程(8.34)变为

$$y''-\mu^2y=0,$$

通解为

$$y(x)=c_1\operatorname{sh}\mu x+c_2\operatorname{ch}\mu x.$$

由边值条件 $y(0)=0$ 知 $c_2=0$,即得 $y(x)=c_1\operatorname{sh}\mu x$. 又由边值条件 $y(\pi)=0$ 得 $c_1\operatorname{sh}\mu\pi=0$,但当 $\mu\neq0$ 时 $\operatorname{sh}\mu\pi\neq0$,即得 $c_1=0$. 同样,当 $\lambda<0$ 时边值问题也没有非零解.

(3) $\lambda>0$,微分方程有通解

$$y(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x.$$

由边值条件 $y(0)=0$ 知 $c_1=0$,即得 $y(x)=c_2\sin\sqrt{\lambda}x$. 又由边值条件 $y(\pi)=0$,有 $c_2\sin\sqrt{\lambda}\pi=0$,若 $c_2=0$,则 $y(x)=0$. 如要存在非零解,必须 $\sin\sqrt{\lambda}\pi=0$,即

$$\lambda=n^2\quad(n=\pm1,\pm2,\cdots). \tag{8.36}$$

与这些 λ 值对应的边值问题的解为

$$y(x)=c_2\sin nx. \tag{8.37}$$

综合上述讨论:带实参数 λ 的二阶齐次线性微分方程边值问题(8.34),(8.35)当且仅当 $\lambda=n^2(n=\pm1,\pm2,\cdots)$时才有非零解 $y=c\sin nx$.

使边值问题(8.34),(8.35)有非零解的 λ 值称为边值问题(8.34),(8.35)的**本征值**,与本征值 λ 对应的解(8.37)称为**本征函数**.

排疑解惑

本征值与本征函数

注 对欧拉问题(8.32),(8.33),同样,$\lambda=0$,$\lambda<0$ 均没有非零解;而对 $\lambda>0$,存在非零解的充要条件是 $\sin\sqrt{\lambda}l=0$,即边值问题(8.32),(8.33)的本征值

$$\lambda=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\ n=\pm1,\pm2,\cdots,$$

相应的本征函数为 $y(x)=\sin\dfrac{n\pi}{l}x\ \ (n=\pm1,\pm2,\cdots)$. 由 $\lambda=\dfrac{P}{EJ}$,得到使弹性细杆会发生弯曲的临界力为 $P_n=EJ\lambda_n\ \ (n=\pm1,\pm2,\cdots)$,最小临界力是 $P_1=EJ\dfrac{\pi^2}{l^2}$.

例 2 考虑非齐次边值问题

$$\begin{cases} y''+\lambda y=f(x), & (8.38) \\ y(0)=0, y(\pi)=0, & (8.39) \end{cases}$$

其中参数 $\lambda>0$,$f(x)$在 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 上连续.

解　可用常数变易法通过齐次微分方程求得非齐次微分方程的通解

$$y(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^x f(t)\sin\sqrt{\lambda}(x-t)\,\mathrm{d}t. \tag{8.40}$$

由边值条件 $y(0)=0$ 知 $c_1=0$，即得 $y(x)=c_2\sin\sqrt{\lambda}x+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^x f(t)\sin\sqrt{\lambda}(x-t)\,\mathrm{d}t$. 又由边值条件 $y(\pi)=0$，有

$$c_2\sin\sqrt{\lambda}\pi+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^\pi f(t)\sin\sqrt{\lambda}(\pi-t)\,\mathrm{d}t=0,$$

当 $\sin\sqrt{\lambda}\pi\neq0$ 时可求出 c_2. 最后得非齐次微分方程边值问题的解

$$y(x)=-\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi}\int_0^\pi f(t)\sin\sqrt{\lambda}(\pi-t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^x f(t)\sin\sqrt{\lambda}(x-t)\,\mathrm{d}t. \tag{8.41}$$

值得注意的是：条件 $\sin\sqrt{\lambda}\pi\neq0$ 意味着 λ 不是齐次边值问题(8.34)，(8.35)的本征值.

下面分两种情形来讨论：

(1) 如果 $\lambda=\lambda^*$ 是齐次边值问题(8.34)，(8.35)的本征值，即 $\sin\sqrt{\lambda^*}\pi=0$，因而 $\lambda^*=n^2(n=\pm1,\pm2,\cdots)$，则对任意 c_2，由 $y(\pi)=0$ 应有

$$\int_0^\pi f(t)\sin\sqrt{\lambda^*}(\pi-t)\,\mathrm{d}t=0,$$

即

$$\int_0^\pi f(t)\sin\sqrt{\lambda^*}t\,\mathrm{d}t=0. \tag{8.42}$$

此时通解(8.40)变为

$$y(x)=c_2\sin\sqrt{\lambda^*}x+\frac{1}{\sqrt{\lambda^*}}\int_0^x f(t)\sin\sqrt{\lambda^*}(x-t)\,\mathrm{d}t,$$

其中 c_2 为任意常数，不能由边值条件确定. 因此，如果 $\lambda=\lambda^*$ 是齐次边值问题(8.34)，(8.35)的本征值，则非齐次边值问题(8.38)，(8.39)不能有唯一解. 当条件(8.42)满足时，有无穷多个解；若条件(8.42)不满足，则没有非零解.

(2) 如果 λ 不是齐次边值问题(8.34)，(8.35)的本征值，则由(8.41)给出的非齐次边值问题(8.38)，(8.39)的解 $y(x)$ 是唯一的. 假设非齐次边值问题(8.38)，(8.39)有另一个解 $z(x)$，则 $y(x)-z(x)$ 是齐次边值问题(8.34)，(8.35)的解，因而如果 $y(x)-z(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 上不恒为零，则 λ 是齐次边值问题的本征值，与假设矛盾.

因非齐次边值问题(8.38)和(8.39)的解中要求 $\sin\sqrt{\lambda}\pi\neq0$，即 $\lambda\neq n^2$ $(n=\pm1,\pm2,\cdots)$，(8.41)可改写为

$$y(x)=\int_0^x\frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}}f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x\frac{\sin\sqrt{\lambda}x\cdot\sin\sqrt{\lambda}(\pi-t)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi}f(t)\,\mathrm{d}t-$$

$$\int_x^{\pi} \frac{\sin\sqrt{\lambda}x \cdot \sin\sqrt{\lambda}(\pi - t)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

因

$$\frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\sin\sqrt{\lambda}x \cdot \sin\sqrt{\lambda}(\pi-t)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi} = -\frac{\sin\sqrt{\lambda}t \cdot \sin\sqrt{\lambda}(\pi-x)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi},$$

上式可统一写为

$$y(x) = \int_0^{\pi} G(x,t,\lambda) f(t)\,\mathrm{d}t, 0 \leqslant x \leqslant \pi, \tag{8.43}$$

其中

$$G(x,t,\lambda) = \begin{cases} -\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}t \cdot \sin\sqrt{\lambda}(\pi-x)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi}, & 0 \leqslant t \leqslant x, \\ -\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}x \cdot \sin\sqrt{\lambda}(\pi-t)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi}, & x \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases} \tag{8.44}$$

这就是非齐次边值问题(8.38),(8.39)的格林函数,它在 $0 \leqslant x, t \leqslant \pi$ 和 $\lambda \neq n^2$ $(n = \pm 1, \pm 2, \cdots)$上连续;且$\dfrac{\partial G(x,t,\lambda)}{\partial x}$对 $x \neq t$ 连续;同时 $G(x,t,\lambda)$对固定的 t,作为 x 的函数$(x \neq t)$满足齐次微分方程(8.34);而对固定的 x,作为 t 的函数满足边值条件(8.39).

例 3 求解边值问题

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & (8.45) \\ y(0) = \alpha, y(\pi) = \beta, & (8.46) \end{cases}$$

其中 α, β 为给定的常数.

解 这里边值条件(8.46)是非齐次的,可以把问题化为例 2 讨论的类型,那里微分方程为非齐次的,而边值条件是齐次的.

假设 $h(x)$是在 $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 上有二阶连续导数的函数,使得

$$h(0) = \alpha, \quad h(\pi) = \beta.$$

例如 $h(x) = \alpha + \dfrac{(\beta-\alpha)x}{\pi}$,令

$$y(x) = z(x) + h(x),$$

则 $y'(x) = z'(x) + h'(x)$, $y''(x) = z''(x) + h''(x)$,且

$$y''(x) + \lambda y(x) = z''(x) + h''(x) + \lambda[z(x) + h(x)].$$

因此边值问题(8.45),(8.46)化为如下边值问题:

$$\begin{cases} z'' + \lambda z = -[h''(x) + \lambda h(x)], & (8.47) \\ z(0) = 0, z(\pi) = 0. & (8.48) \end{cases}$$

根据例 2 的讨论,利用公式(8.43)即得边值问题(8.47),(8.48)的解为

$$z(x) = \int_0^{\pi} G(x,t,\lambda) f(t)\,\mathrm{d}t, \ 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$

而原边值问题(8.45),(8.46)的解为

$$y(x)=\int_0^{\pi}G(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t+h(x),\ 0\leqslant x\leqslant\pi,$$

其中 $G(x,t,\lambda)$ 由(8.44)给出. 又 $f(x)=-[h''(x)+\lambda h(x)]$,如果选择 $h(x)=\alpha+\frac{(\beta-\alpha)x}{\pi}$,则有

$$f(x)=-\lambda\left[\alpha+(\beta-\alpha)\frac{x}{\pi}\right].$$

例 4　求解边值问题

$$\begin{cases}y''+\lambda y=f(x), & (8.49)\\ y(0)=\alpha,y(\pi)=\beta, & (8.50)\end{cases}$$

其中 α,β 为给定的常数.

解　可以把问题化为例 2 和例 3 所讨论过的两个较简单的问题. 假设 $y_1(x)$ 是具有齐次微分方程的边值问题(8.45),(8.46)的解(例 3),$y_2(x)$ 是具有齐次边值条件的非齐次微分方程的边值问题(8.38),(8.39)的解(例 2). 当 λ 不是齐次边值问题(8.45),(8.46)的本征值时,所给边值问题(8.49),(8.50)的解为

$$y(x)=y_1(x)+y_2(x),$$

且这个解还是唯一的. 其证明作为习题.

8.3.2　自伴的本征值问题

一般形式的带参数 λ 的二阶齐次线性微分方程

$$L[y]\equiv p_0(x)y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=\lambda y, \tag{8.51}$$

其中 $p_0(x),p_1(x),p_2(x)$ 是在区间 $[a,b]$ 上给定的实连续函数,$p_0(x)\neq 0$. 如果对任意两个在区间 $[a,b]$ 上有连续二阶导数且满足一定边值条件的 $u(x)$ 和 $v(x)$,有以下关系式($\bar{u}$ 表示 u 的共轭复数)成立:

$$\int_a^b\bar{u}L[v]\mathrm{d}x=\int_a^b v\,\overline{L[u]}\mathrm{d}x, \tag{8.52}$$

则相应的本征值问题称为**自伴**的.

定理 4　自伴问题的本征值必是实数,且对应于不同本征值的本征函数在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上是两两正交的.

证明　设 λ^* 为自伴问题的本征值,$\varphi(x)$ 为相应的本征函数,即 φ 满足方程 $L[\varphi]=\lambda^*\varphi$,于是 $\overline{L[\varphi]}=\overline{\lambda^*}\,\bar{\varphi}$($\overline{\lambda^*}$ 和 $\bar{\varphi}$ 分别表示 λ^* 和 φ 的共轭复数). 由自伴关系式(8.52)及 $\varphi\bar{\varphi}=|\varphi|^2$ 得

$$\int_a^b\bar{\varphi}L[\varphi]\mathrm{d}x=\int_a^b\varphi\,\overline{L[\varphi]}\mathrm{d}x=(\lambda^*-\overline{\lambda^*})\int_a^b|\varphi|^2\mathrm{d}x=0.$$

由本征函数的定义,$|\varphi(x)|^2>0$,因而 $\int_a^b|\varphi|^2\mathrm{d}x>0$. 由上式知 $\lambda^*=\overline{\lambda^*}$,即 λ^* 为实数.

设 $\varphi_m(x)$ 和 $\varphi_n(x)$ 是分别对应于两个不同本征值 λ_m 和 λ_n 的本征函数,由自伴关系式(8.52)及本征值是实数得

$$\int_a^b \overline{\varphi}_m L[\varphi_n]\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi_n \overline{L[\varphi_m]}\mathrm{d}x = (\lambda_n - \lambda_m)\int_a^b \overline{\varphi}_m \varphi_n \mathrm{d}x = 0.$$

因 $\lambda_n \neq \lambda_m$，由上式知

$$\int_a^b \overline{\varphi}_m \varphi_n \mathrm{d}x = 0,$$

即 $\varphi_m(x)$ 和 $\varphi_n(x)$ 是正交的. 证毕.

例 5 微分方程

$$L[y] \equiv -y'' = \lambda y \tag{8.53}$$

和边值条件

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \tag{8.54}$$

或周期边值条件

$$y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b) \tag{8.55}$$

组成自伴本征值问题，其中 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 为实常数，且 α_1 和 α_2 不同时为零，β_1 和 β_2 不同时为零.

事实上，假设 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是任意两个在区间 $[a,b]$ 上有连续二阶导数并满足边值条件(8.54)的函数，则对方程(8.53)中的算符 L 利用分部积分法可得

$$\begin{aligned}\int_a^b \overline{u}L[v]\mathrm{d}x &= -\int_a^b \overline{u}v''\mathrm{d}x = -(\overline{u}v')\Big|_a^b + \int_a^b \overline{u}'v'\mathrm{d}x \\ &= (\overline{u}'v - \overline{u}v')\Big|_a^b - \int_a^b v\overline{u}''\mathrm{d}x \\ &= (\overline{u}'v - \overline{u}v')\Big|_a^b + \int_a^b v\,\overline{L[u]}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因 $u(x)$ 和 $v(x)$ 都满足边值条件(8.54)，故由(8.54)的第一个条件得

$$\alpha_1 \overline{u}(a) + \alpha_2 \overline{u}'(a) = 0, \quad \alpha_1 v(a) + \alpha_2 v'(a) = 0.$$

因 α_1 和 α_2 不同时为零，如 $\alpha_1 \neq 0$，则有

$$\overline{u}(a) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\overline{u}'(a), \quad v(a) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}v'(a),$$

即

$$\overline{u}'(a)v(a) - \overline{u}(a)v'(a) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}[\overline{u}'(a)v'(a) - \overline{u}'(a)v'(a)] = 0.$$

于是有

$$(\overline{u}'v - \overline{u}v')\big|_{x=a} = 0. \tag{8.56}$$

同样，由边值条件(8.54)的第二个条件可得到

$$(\overline{u}'v - \overline{u}v')\big|_{x=b} = 0. \tag{8.57}$$

因此

$$\int_a^b \overline{u}L[v]\mathrm{d}x = \int_a^b v\,\overline{L[u]}\mathrm{d}x$$

这证明了本征值问题(8.53)，(8.54)是自伴的. 显然，问题(8.34)，(8.35)是其特殊情形.

对周期边值条件(8.55),容易验证亦有

$$(\bar{u}'v-\bar{u}v')\Big|_a^b=0. \tag{8.58}$$

同样,本征值问题(8.53),(8.55)亦是自伴的. 于是,考虑的本征值问题有定理 4 所述结果.

例 6　施图姆-刘维尔(Sturm-Liouville)型方程

$$L[y]\equiv-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)y=\lambda y \tag{8.59}$$

和边值条件(8.54)或周期边值条件(8.55)的本征值问题也是自伴的,其中 $p(x)$,$q(x)$ 是在区间$[a,b]$上不等于零的实连续函数,对周期边值条件(8.55)还要求 $p(a)=p(b)$.

类似例 5,假设 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是任意两个在区间$[a,b]$上有连续二阶导数并满足边值条件(8.54)的函数,则对方程(8.59)中的算符 L 有

$$\begin{aligned}\int_a^b \bar{u}L[v]\mathrm{d}x-\int_a^b v\,\overline{L[u]}\mathrm{d}x&=\int_a^b\bar{u}\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(pv')+qv\right]\mathrm{d}x-\int_a^b v\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p\bar{u}')+q\bar{u}\right]\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\left[v\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p\bar{u}')-\bar{u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(pv')\right]\mathrm{d}x\\&=[p(x)(\bar{u}'v-\bar{u}v')]\Big|_a^b.\end{aligned}$$

利用(8.56),(8.57)或(8.58)立即推知所考虑的本征值问题也是自伴的.

由例 6 可知,勒让德方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0$$

和边值条件(8.54)或(8.55)所组成的本征值问题是自伴的.

最后,我们指出:对更一般形式的边值条件(8.12)亦可以进行类似讨论,甚至还可以探讨不同类型的本征值问题,例如 6.3.2 小节讨论的薛定谔方程(6.34)等,可参考有关文献.

习　题　8.3

1. 试证明例 4 中边值问题(8.49),(8.50)的解为 $y(x)=y_1(x)+y_2(x)$.
2. 求边值问题 $y''-\lambda y=0,y'(0)=0,y'(l)=0$ 的本征值和本征函数.
3. 求边值问题 $y''-\lambda y=0,y(0)=0,y'(l)=0$ 的本征值和本征函数.
4. 求边值问题 $x^2y''-\lambda y=0,y(1)=0,y(a)=0\ \ (a>1)$ 的本征值和本征函数.

本章学习要点

本章研究常微分方程边值问题,它在实际问题中有广泛应用,是常微分方程定解问题的重要一类. 和初值问题不同,边值条件对边值问题影响更大. 要仔细分清齐次、非齐次和半齐次边值问题. 同时,掌握齐次边值问题和非齐次边值问题的可解(存在、唯一)性定理 1.

求解常微分方程边值问题的最基本的方法是**待定系数法**,即先求微分方程的通解,然后再用边

值条件确定相关系数.

求非齐次边值问题的**格林函数**法是先抽离非线性函数,对齐次线性微分方程求满足边值条件的积分函数——格林函数,从而其非齐次边值问题的解变成格林函数和非线性函数的积分. 因不同方程、不同边值条件都有自己的格林函数,需多多练习如何构造格林函数.

二阶齐次线性微分方程往往可以化为施图姆-刘维尔型方程(8.59),由此引出了本征值和本征函数的研究,这是边值问题的一个重要方向. 为简单起见,我们介绍本征值和本征函数是从弹性杆的挠曲的欧拉问题开始,用最简单的齐次方程(8.34)和$(0,\pi)$两端的不同边值条件作例子,一步一步地逐渐深入,最后才讨论施图姆-刘维尔问题.

本章计算较多、较复杂,学习时先掌握基本概念,从简单到复杂,通过例子体验其相关方法.

附录 A 常微分方程模型

本附录仅对第 1 章的 § 1.1 常微分方程模型补充了传染病模型、化学动力学模型和机器人模型,并对第 6 章的 § 6.2 平面图貌部分补充分析在 § 1.1 提到的一般的两种群竞争系统和化学动力学模型. 一般的常微分方程模型和数学建模竞赛中的常微分方程的介绍将放在本课程的“数字资源”中.

A1 常微分方程模型

(1) **传染病模型**[14,89] 传染病(瘟疫)经常在世界各地流行,如霍乱、天花、艾滋病、SARS 、H5N1 病毒等. 建立传染病的数学模型,分析其变化规律,防止其蔓延是一项艰巨的任务. 这里仅就一般的传染规律讨论传染病的数学模型.

假设传染病传播期间其地区总人数不变,为常数 n. 开始时染病人数为 x_0,在时刻 t 的健康人数为 $y(t)$,染病人数为 $x(t)$. 由于总人数为常数,有

$$x(t)+y(t)=n. \tag{A.1}$$

设单位时间内一位患者能传染的人数与当时的健康人数成正比,比例常数为 k(称 k 为传染系数),于是

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=ky(t)x(t), \quad x(0)=x_0. \tag{A.2}$$

注意到(A.1),得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=kx(n-x), \quad x(0)=x_0. \tag{A.3}$$

这个模型称为 SI **模型**,即易感染者(susceptible)和已感染者(infective)模型.

对无免疫性的传染病如痢疾、伤风等,患者治愈后会再次被感染.设单位时间治愈率为 μ,则方程(A.2)应修正为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ky(t)x(t)-\mu x(t), \quad x(0)=x_0.$$

由(A.1),得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=kx(n-x)-\mu x=kx\left(n-\frac{1}{\sigma}-x\right), \quad x(0)=x_0, \tag{A.4}$$

这个模型称为 SIS **模型**. 显然$\frac{1}{\mu}$为这个传染病的平均传染期,$\sigma=\frac{k}{\mu}$为整个传染期内每位患者有效接触的平均人数(接触数).

对有很强免疫性的传染病如天花、流感等,患者治愈后不会再被感染.设在时刻 t 的愈后免疫人数为 $r(t)$,称为移出者(removed),而治愈率 l 为常数,即

$$\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}=lx(t).$$

此时,关系式(A.1)和(A.2)应改为

$$x(t)+y(t)+r(t)=n$$

和

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=ky(t)x(t)-\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}.$$

由上三式可消去 $r(t)$,得

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=kxy-lx, & x(0)=x_0,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-kxy, & y(0)=y_0=n-x_0.\end{cases}\tag{A.5}$$

这个模型称为 SIR **模型**.

SIR 模型曾被克马克(Kermack)等用于检验 20 世纪初在印度孟买发生的一次瘟疫,其理论曲线与实际数据相当吻合.

(2) **化学动力学模型**[14,26] 1972 年,化学家 Schlogt 提出了分子反应的化学动力学模型.设想一个化学反应体系内部包含三种化学成分 A,B 和 x,A,B 是反应物,x 为中间产物,进行这样一组化学反应:

$$B\underset{k_1}{\overset{k_0}{\rightleftharpoons}}x,\quad A+2x\underset{k_3}{\overset{k_2}{\rightleftharpoons}}3x,$$

即 B 类的一个分子反应后变为 x 类的一个分子;A 类的一个分子与 x 类的两个分子反应后变成 3 个 x 类分子,相应的反应率为 k_0 和 k_2;同时假定反应是可逆的,相应的反应率为 k_1 和 k_3. 此处 k_0,k_1,k_2,k_3 均为正常数;A,B,x 分别代表 A 类、B 类和 x 类的分子数.

假定反应过程不涉及任何热效应,所有成分组成一个理想溶液,反应动力学满足质量作用定律,于是由反应引起的各组成成分浓度的变化速率为

$$v_A=-k_2Ax^2+k_3x^3,\quad v_B=-k_0B+k_1x,\quad v_x=-v_A-v_B.$$

当反应的条件固定时,所有速率系数是恒定的,设除了由于化学反应以外各成分的浓度还可以通过和外界环境的交换而变化,其中成分 i 与外界交换速率为 w_i. 于是各成分浓度的变化方程为

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=v_A+w_A,\quad \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=v_B+w_B,\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_x+w_x.$$

如果只有成分 A 和成分 B 可以和外界交换,并通过交换而维持它们在体系中的浓

度恒定，而成分 x 并不能和外界交换，它的浓度完全决定于体系内部的动力学，则有

$$w_x=0,\quad \frac{dA}{dt}=0,\quad \frac{dB}{dt}=0.$$

在这种情况下，体系的状态仅由单个变量 x 来表征，并有

$$\frac{dx}{dt}=-k_3x^3+k_2Ax^2-k_1x+k_0B, \tag{A.6}$$

这便是 **Schlogt 单分子化学动力学模型**.

考虑有两个中间变量的化学反应体系

$$A+x\xrightarrow{k_1}2x,\quad x+y\xrightarrow{k_2}2y,\quad y\xrightarrow{k_3}E,$$

但这些反应步骤的总效果是

$$A\xrightarrow{k}E,$$

其中 A 和 E 是反应物和产物. 假定它们的浓度可由外界控制为恒定，x 和 y 是两种反应中间产物，它们的浓度可以自由发展，逆反应过程可以完全忽略（自催化），则有反应方程

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=k_1Ax-k_2xy,\\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=k_2xy-k_3y,\end{cases} \tag{A.7}$$

这是一类**双分子化学动力学模型**.

现设一开放的体系中进行着下面一系列化学反应：

$$A\xrightarrow{k_1}x,\quad B+x\xrightarrow{k_2}y+D,\quad 2x+y\xrightarrow{k_3}3x,\quad x\xrightarrow{k_4}E.$$

假定反应过程是恒定和均匀的，产物 D，E 一经产生即可除去，反应物浓度很高，无扩散，此时对 x 和 y 的反应动力学方程为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=k_1A-(k_2B+k_4)x+k_3x^2y,\\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=k_2Bx-k_3x^2y.\end{cases}$$

经过变换，上式可简化为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=A-(B+1)x+x^2y,\\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=Bx-x^2y.\end{cases} \tag{A.8}$$

上式是 **3 分子化学动力学模型**.

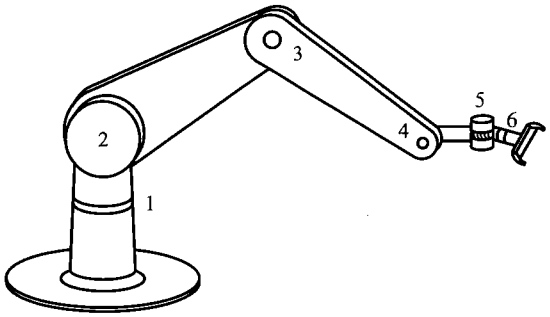
上面单分子、双分子、3 分子的化学反应模型均为常微分方程，其中单分子、双分子模型可直接求解，但一般 3 分子模型无法直接求解，可用第六章全局图貌的方法对它们进行分析.

（3）**机器人模型**[90]　机器人被定义为一种可编程和多功能的操作机，或是为了

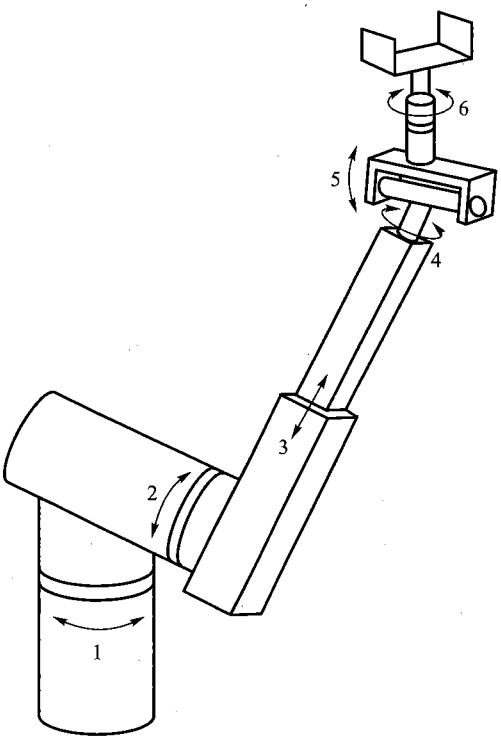
执行不同的任务而具有可用电脑改变和可编程动作的专门系统. 1954 年美国人 G.Devol开发出世界上第一台可编程机器人;1961 年世界上第一个工业机器人(机械手)在通用汽车公司的生产线上投入工作;1968 年第一台智能机器人在斯坦福机器人研究所诞生;1972 年 IBM 公司开发出商用机器人. 机器人技术历经数十年的发展形成了机器人学,是一门新的综合性交叉学科.

机器人系统由机械手或移动车、末端执行器、驱动器、传感器、控制器、处理器、软件等部件组成,其性能指标有负荷能力、运动范围、精度(正确性)、重复精度(变化性).

最基本的机器人是机械手型机器人,它由一系列连杆和相应的运动附件组成. 具有多个自由度和三维开环链式机构,如图(A.1)和图(A.2)所示.



图(A.1)



图(A.2)

1955 年，Denavith 和 Hartenberg 两人提出方便处理机器人运动的 4 维齐次变换矩阵表示法，即 D-H 表示法：对机械手，用 x,y,z 表示固定的全局参考坐标系，$\boldsymbol{n},\boldsymbol{o},\boldsymbol{a}$ 是机械手坐标 normal（垂直），orientation（方向），approach（接近）的首字母. 机械手沿 z 轴方向接近物体以免碰撞，o 为方向轴，n 垂直于上两轴，加上位置 $P(P_x,P_y,P_z)$，这样可用 4×4 矩阵表示空间物体如抓手的方向（余弦）和位置. 如 F_1 位于（3，5，7），n 轴与 x 轴平行，o 轴相对 y 轴的角度为 45°，o 轴相对 z 轴的角度为 45°，则有

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{F}_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0.707 & -0.707 & 5 \\ 0 & 0.707 & 0.707 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 受约束：$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{o}=\boldsymbol{a}$，$|\boldsymbol{n}|=1$，$|\boldsymbol{o}|=1$，$|\boldsymbol{a}|=1$，“×”“$|\cdot|$”表示向量向量积和长度. 上面的矩阵 $\boldsymbol{F}$ 称为齐次变换矩阵，可以表示空间物体的平移、旋转或平移与旋转的结合. 机械手的空间坐标及其姿势可以通过其齐次变换矩阵 $\boldsymbol{F}$ 连续相乘得到. 通过 D-H 表示法可以对复杂机械手或机器人进行位置、轨迹及姿势的运动学分析.虽较繁杂，且位置的逆运动学方程的求解（从最终位置反求各部件状态参数）具有多解性，需特殊处理.但都可以用计算机自动处理.

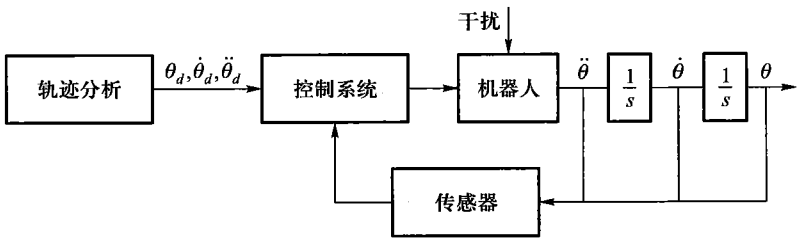
若要对机器人进行深入分析，就必须推导运动时的动力学方程，计算出机器人以期望加速度移动时各关节所需的动力，从而选择合适的驱动器并控制机器人的运动. 机器人由刚体组成，拉格朗日力学适合表示刚体运动.直线、旋转运动对应系统势能 P 和动能 K，拉格朗日函数为 $L=K-P$，令 F_i 表示产生直线运动的所有外力之和，T_i 为产生旋转运动的所有外力矩之和，x_i,θ_i 是系统变量，则有

$$F_i=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i},\quad T_i=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_i}.$$

为了得到动力学方程，首先需要推导系统的能量方程，再根据上式对拉格朗日函数求导数.

机器人是多自由度三维机构，其动力学方程非常复杂，有时用起来也很困难，往往需要进行简化. 当所设计的机器人运动不是很快时，可按每个关节的最大受力来计算关节力矩；而对宇宙空间机器人可忽略其质量力，只考虑惯性力.

机器人是一个运动控制系统，亦可按控制系统的分析设计方法进行设计. 图（A.3）便是一个机器人控制系统的简化描述.



图（A.3）

其关节值(位置、速度、加速度及作用力和力矩)可根据运动学、动力学及轨迹分析计算得到.这些值发送给控制器,控制器再施加合适的驱动信号给驱动器,传感器测量输出并反馈给控制器.

各种类型的机器人结合人工智能纷纷出现,除工业机器人(机械手)外,还有双足步行机器人、排险机器人、聊天机器人、餐厅送餐机器人、导购机器人、清洁机器人、汽车机器人(自动驾驶汽车)等.

首届机器人世界杯于 1997 年在日本举行,到 2017 年已举办了五届,分机器人足球、工业机器人、救援机器人、家庭机器人和青少年机器人五大竞技项目.日本另有 ROBO-ONE 双足机器人大赛.

A2 平面图貌

(1) **一般的两种群竞争系统** 在 §1.1 提到的两种群竞争系统,可推广成一般系统:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=M(x,y)x,\\ \dfrac{dy}{dt}=N(x,y)y,\end{cases}\tag{A.9}$$

其中相对于 x 与 y 的增长率 $M(x,y)$ 与 $N(x,y)$ 都是非负变量 x,y 的连续函数,有连续一阶偏导数,且一种群增长时另一种群的增长率下降,即

$$\frac{\partial M}{\partial y}<0,\quad \frac{\partial N}{\partial x}<0,$$

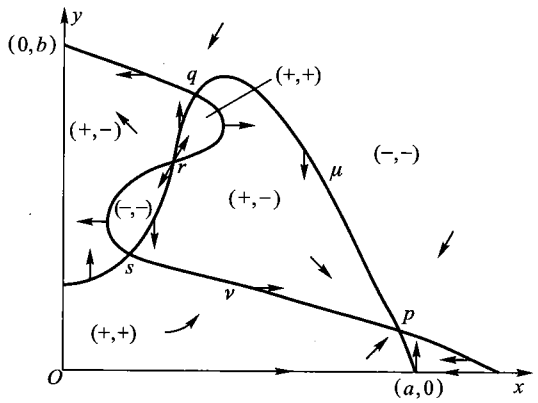
而任一种群过多时两种群都不能增长,故存在常数 $K>0$,当 $x\geqslant K$ 或 $y\geqslant K$ 时 $M(x,y)\leqslant 0$ 且 $N(x,y)\leqslant 0$. 还设只有一种群时,它将按极限增长,即存在常数 $a>0,b<0$ 使得

当 $x<a$ 时,$M(x,0)>0$;当 $x>a$ 时,$M(x,0)<0$;

当 $y<b$ 时,$N(0,y)>0$;当 $y>b$ 时,$N(0,y)<0$.

在上述条件下,通过分析相平面上等倾斜线:曲线 $M(x,y)=0$ 和 $N(x,y)=0$ 的形状及它们之间的关系,如图(A.4)所示,可以证明

定理 两种群竞争一般模型(A.9)的每一条轨线,当 $t\to+\infty$ 时都趋于有限个平衡点之一.



图(A.4)

(2) **化学动力学模型** 现在讨论前面 A1 中的化学动力学模型,对单分子化

学动力学模型

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-k_3x^3+k_2Ax^2-k_1x+k_0B. \tag{A.6}$$

方程右端是 3 次多项式,可根据多项式有 1,2 或 3 个实根情形将方程分解成如下两种形式:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a(x-x_1)(x^2+bx+c),$$

其中实根可以相同. 实根为奇点,轨线只能在两奇点或奇点与正负无穷之间走向一奇点或正无穷或负无穷. 根据初值在 x 轴上的位置即可判断其轨线走向而不必费力求解微分方程.

双分子化学动力学模型(A.7)与沃尔泰拉捕食-被捕食模型没有区别,前面已分析过,如图(6.18)所示.

考虑 3 分子化学动力学模型:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A-(B+1)x+x^2y,\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Bx-x^2y.\end{cases} \tag{A.8}$$

当 $A\neq 0$ 时,方程有唯一奇点 $N\left(A,\dfrac{B}{A}\right)$. 通过坐标平移 $\xi=x-A,\eta=y-\dfrac{B}{A}$化为(仍用 x,y 代替 ξ,η)

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(B-1)x+A^2y+\dfrac{B}{A}x^2+2Axy+x^2y=-x-G,\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-Bx-A^2y-\dfrac{B}{A}x^2-2Axy-x^2y=G,\end{cases} \tag{A.10}$$

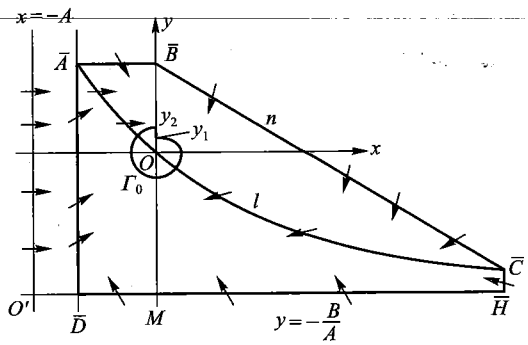
其中 $G=-(A+x)\left[\dfrac{B}{A}x+(A+x)y\right]$. 方程(A.10)的线性近似方程的特征方程为

$$\lambda^2-(B-A^2-1)\lambda+A^2=0,$$

易知当 $B\leqslant 1+A^2$ 时,奇点 N 是渐近稳定的;而当 $B>1+A^2$ 时,奇点是不稳定的.我们在方程(A.10)的相平面上构筑包围原点即奇点的环域 Γ,如图(A.5).

首先,因在直线 $y=-\dfrac{B}{A}$上当 $x=-A$ 时,$x'>0$,而当 $x=0$ 时,$x'<0$,故为在 $y=-\dfrac{B}{A}$上找到一点 $\overline{D}$ 使得 $x'=0$,可联立求解三方程

$$x=kA,-x-G=0,\ y=-\frac{B}{A},$$



图(A.5)

得 $k=-\frac{B}{1+B}$,即点 $\overline{D}$ 坐标为$\left(-\frac{AB}{1+B},-\frac{B}{A}\right)$. 于是在 $y=-\frac{B}{A}$上点 $\overline{D}$ 右端有 $x'\geqslant 0,y'>0$,轨线向上向左. 再求得直线 $x=-\frac{AB}{1+B}$与曲线 $l:\frac{B}{A}x+(A+x)y=0$ 的交点 $\overline{A}\left(-\frac{AB}{1+B},\frac{B^2}{A}\right)$,在 $\overline{DA}$上轨线向右. 过点 $\overline{A}$ 作水平线交 y 轴于点 $\overline{B}\left(0,\frac{B^2}{A}\right)$,$\overline{A}\,\overline{B}$ 上轨线向下;再过点 $\overline{B}$ 作直线 $n:y=-ax+\frac{B^2}{A}$ $(0<a<1)$交曲线 l 于点 $\overline{C}$,线段 $\overline{BC}$ 上方向差为 $\delta=\frac{-ax+(1-a)G}{x+G}$,其分子小于零、分母最多有 3 个零点,故 $\delta\neq 0$,而在点 $\overline{B}$ 上 $y'=-1$, 线段上轨线向左向下. 再过点 $\overline{C}$ 作 $\overline{C}\,\overline{H}$ 平行于 y 轴,交直线 $y=-\frac{B}{A}$于点 $\overline{H}$;在线段 $\overline{C}\,\overline{H}$ 上轨线向左,这样由点 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{H}\,\overline{D}\,\overline{A}$围成了一个在边界上指向内部的闭域 Γ.

因原点是不稳定焦点,可在 y 轴上取 $y_1>0$ 且充分小时过点$(0,y_1)$的轨线围绕原点一周后再交 y 轴于 $y_2>0$,因原点不稳定,显然 $y_2>y_1$. 从点$(0,y_1)$ 到点$(0,y_2)$的轨线段与$\overline{y_2y_1}$直线段构成了包含原点的闭域 Γ_0,在 Γ_0 边界上的轨线均走出闭域 Γ_0. 这样在 Γ 边界和 Γ_0 边界之间便构成一个环域,内外环边界上的轨线均进入域内. 利用6.2.2小节环域定理 7 便可得出如下结论:当 $A>0,B>1+A^2$时,Γ 内有一稳定的极限环,还可进一步证明极限环是唯一的;而当 $A>0,B\leqslant 1+A^2$ 时,Γ 内没有极限环.

附录 B
相关知识与补充说明

B1 雅可比矩阵与函数相关性

本书多次涉及函数方程或方程组求解和参数或函数独立与相关问题，有些在数学分析初等教材中较少提及，这里补充列出有关定义与结论，供读者需要时查阅.

(1) 雅可比矩阵

对 n 个变元的 m 个函数

$$y_i=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ (i=1,2,\cdots,m),$$

定义**雅可比矩阵**为

$$\frac{D(y_1,y_2,\cdots,y_m)}{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=\begin{bmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}.$$

当 $m=n$ 时，称雅可比矩阵对应的行列式为**雅可比行列式**，记为$\frac{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$.

对一个方程 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)=0$，如果在满足方程的点邻域，其$\frac{\partial F}{\partial y}$存在、连续且不等于 0，则存在过该点的有一阶连续偏导数的满足方程的解 $y=y(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，且

$$\frac{\partial y}{\partial x_k}=\frac{F'_{x_k}(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)}{F'_y(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)}\ (k=1,2,\cdots,n).$$

对 $n+m$ 个变元的 m 个方程 $F_i(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)=0\ (i=1,2,\cdots,m)$，如果在满足方程的点邻域，其雅可比行列式$\frac{\partial(F_1,F_2,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_m)}$存在、连续且不为 0，则存在过该点的有一阶连续偏导数的满足方程的解 $y_i=y_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ (i=1,2,\cdots,m)$，且

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k}=\frac{\partial(F_1,F_2,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,\cdots,y_{k-1},x_k,y_{k+1},\cdots,y_m)}\Big/\frac{\partial(F_1,F_2,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_m)}\ (i=1,2,\cdots,m;k=1,2,\cdots,n).$$

(2) 函数相关性

设函数 $y_i=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)(i=1,2,\cdots,m)$ 及其一阶偏导数在某开集 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上连续,如果在 D 内 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 中的一个函数能表示成其余函数的函数,则称它们在 D 内**函数相关**.如果它们在 D 内的任何点的邻域皆非函数相关,则称它们在 D 内**函数无关**,或称它们**彼此独立**.

如果雅可比矩阵 $\dfrac{D(f_1,f_2,\cdots,f_m)}{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$ 在 D 内的任何点的秩皆小于 m,则 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 函数相关;如秩皆为 m,则 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 函数无关,即彼此独立;当 $n=m$ 时,可用雅可比行列式是否不为 0 代替求雅可比矩阵的秩,雅可比行列式不为 0 时函数彼此独立.

对 n 阶常微分方程(1.28)的通解 $y=\varphi(x,c_1,\cdots,c_n)$,因积分常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 由初值条件 $\varphi(x_0)=y_{01},\varphi'(x_0)=y_{02},\cdots,\varphi^{(n-1)}(x_0)=y_{0n}$ 确定. 因此,如果在其邻域内雅可比行列式 $\dfrac{\partial(\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n-1)})}{\partial(c_1,c_2,\cdots,c_n)}\neq 0$,则 n 个积分常数是独立的.

B2 解对初值的连续性和可微性

首先我们证明下面的引理.

引理 如果函数 $f(x,y)$ 于某域 D 内连续,且关于 y 满足利普希茨条件(利普希茨常数为 L),则对方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y) \tag{B.1}$$

的任意两个解 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$,在它们公共存在的区间内不等式

$$|\varphi(x)-\psi(x)|\leqslant|\varphi(x_0)-\psi(x_0)|\mathrm{e}^{L|x-x_0|} \tag{B.2}$$

成立,其中 x_0 为所考虑区间内的某一值.

证明 设 $\varphi(x),\psi(x)$ 于 $a\leqslant x\leqslant b$ 上均有定义,令

$$V(x)=[\varphi(x)-\psi(x)]^2,\quad a\leqslant x\leqslant b,$$

则

$$V'(x)=2[\varphi(x)-\psi(x)][f(x,\varphi)-f(x,\psi)]\leqslant 2LV(x).$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(V(x)\mathrm{e}^{-2Lx})\leqslant 0.$$

因此,对 $x_0\in[a,b]$,有

$$V(x)\leqslant V(x_0)\mathrm{e}^{2L(x-x_0)},\quad x_0\leqslant x\leqslant b.$$

对于 $a\leqslant x\leqslant x_0$,令 $-x=t$,并记 $-x_0=t_0$,则方程(B.1)变为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-f(-t,y),$$

并且已知它有解 $y=\varphi(-t)$ 和 $y=\psi(-t)$.

类似上述推演过程,令 $\sigma(t)=[\varphi(-t)+\psi(-t)]^2$,可得

$$\sigma(t)\leqslant\sigma(t_0)\mathrm{e}^{2L(t-t_0)},\quad t_0\leqslant t\leqslant -a.$$

注意到 $\sigma(t)\Big|_{t=-x}=V(x)$ 及 $\sigma(t_0)=V(x_0)$,就有

$$V(x)\leqslant V(x_0)\mathrm{e}^{2L(x_0-x)},\quad a\leqslant x\leqslant x_0.$$

因此

$$V(x)\leqslant V(x_0)\mathrm{e}^{2L|x-x_0|},\quad a\leqslant x,x_0\leqslant b,$$

两边取平方根即得(B.2).

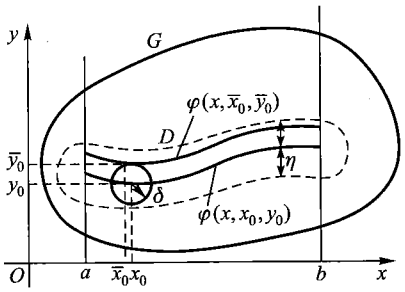
解对初值的连续依赖定理　假设 $f(x,y)$ 于域 G 内连续且关于 y 满足局部利普希茨条件,$(x_0,y_0)\in G$,$y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 是方程(B.1)的满足初值条件 $y(x_0)=y_0$ 的解,它于区间 $[a,b]$ 上有定义($a\leqslant x_0\leqslant b$),那么对任意给定的 $\varepsilon>0$,必能找到正数 $\delta=\delta(\varepsilon,a,b)$,使得当

$$(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2\leqslant\delta^2$$

时,方程(B.1)的满足条件 $y(\bar{x}_0)=\bar{y}_0$ 的解 $y=\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)$ 在区间 $[a,b]$ 上也有定义,并且

$$\left|\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)-\varphi(x,x_0,y_0)\right|<\varepsilon,\quad a\leqslant x\leqslant b$$

(见图(B.1)).



图(B.1)

证明　首先,注意到积分曲线段 $S:y=\varphi(x,x_0,y_0)\equiv\varphi(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 是 Oxy 平面上一个有界闭集,又按假定对 S 上每一点 (x,y) 必存在一个以它为中心的开圆 $C(C\subset G)$,使在其内的函数 $f(x,y)$ 关于 y 满足利普希茨条件,因此根据有限覆盖定理,可以找到有限个具有这种性质的圆 C_i $(i=1,2,\cdots,N)$,并且它们的全体覆盖了整个积分曲线段 S.设 r_i 为圆 C_i 的半径,L_i 为 $f(x,y)$ 于 C_i 内的相应的利普希茨常数.令 $\widetilde{G}=\bigcup\limits_{i=1}^{N}C_i$,则 $S\subset\widetilde{G}\subset G$,且 $\widetilde{G}$ 的边界与 S 的距离 $\rho>0$. 对预先给定的 $\varepsilon>0$,若取

$$\eta=\min(\varepsilon,\rho/2)\quad 及\quad L=\max(L_1,L_2,\cdots,L_N),$$

则以 S 上每一点为中心,以 η 为半径的圆的全体,连同它们的圆周一起构成包含 S 的有界闭域 $D\subset G$,且 $f(x,y)$ 在 D 上关于 y 满足利普希茨条件,利普希茨常数为 L.

其次,我们断言,必存在这样的正数 $\delta=\delta(\varepsilon,a,b)$ $(\delta<\eta)$,使得只要 $\bar{x}_0,\bar{y}_0$ 满足不等式

$$(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2\leqslant\delta^2,$$

则解 $y=\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)\equiv\psi(x)$ 必然在区间 $[a,b]$ 上也有定义.

事实上,由于 D 是一个有界闭域,且 $f(x,y)$ 于其内关于 y 满足利普希茨条件,由3.2.1小节的延拓定理知道,解 $y=\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)$ 必能延拓到区域 D 的边界上. 设它在 D 的边界上的点为 $(c,\psi(c))$ 和 $(d,\psi(d))$,$c<d$,这时必然有 $c\leqslant a,d\geqslant b$. 否则设 $c>a,d<$

b,则由引理就有

$$|\psi(x)-\varphi(x)| \leqslant |\psi(\bar{x}_0)-\varphi(\bar{x}_0)|\,\mathrm{e}^{L|x-\bar{x}_0|},\quad c\leqslant x\leqslant d.$$

注意到 $\varphi(x)$ 的连续性,对 $\delta_1=\frac{1}{2}\eta\mathrm{e}^{-L(b-a)}$,必有 $\delta_2>0$ 存在,使当 $|x-x_0|\leqslant\delta_2$ 时,有 $|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\delta_1$. 取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$,则当 $(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2\leqslant\delta^2$ 时,就有

$$\begin{aligned}|\psi(x)-\varphi(x)|^2 &\leqslant |\psi(\bar{x}_0)-\varphi(\bar{x}_0)|^2\mathrm{e}^{2L|x-\bar{x}_0|}\\ &\leqslant(|\psi(\bar{x}_0)-\varphi(x_0)|+|\varphi(x_0)-\varphi(\bar{x}_0)|)^2\mathrm{e}^{2L|x-\bar{x}_0|}\\ &\leqslant 2(|\psi(\bar{x}_0)-\varphi(x_0)|^2+|\varphi(x_0)-\varphi(\bar{x}_0)|^2)\mathrm{e}^{2L|x-\bar{x}_0|}\\ &<2(|\bar{y}_0-y_0|^2+\delta_1^2)\mathrm{e}^{2L(b-a)}\\ &\leqslant 4\delta_1^2\mathrm{e}^{2L(b-a)}=\eta^2,\quad c\leqslant x\leqslant d,\end{aligned}\tag{B.3}$$

于是 $|\psi(x)-\varphi(x)|<\eta$ 对一切 $x\in[c,d]$ 成立. 特别地,有

$$|\psi(c)-\varphi(c)|<\eta,\quad |\psi(d)-\varphi(d)|<\eta,$$

即点 $(c,\psi(c))$ 及 $(d,\psi(d))$ 均落在域 D 的内部,而不可能位于 D 的边界上.这与假设矛盾,因此解 $\psi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义.

在不等式(B.3)中将区间 $[c,d]$ 换成 $[a,b]$,可知当 $(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2\leqslant\delta^2$ 时就有

$$|\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)-\varphi(x,x_0,y_0)|<\eta\leqslant\varepsilon,\quad a\leqslant x\leqslant b,$$

这正是所要证的结论.

附注 当把解 $\varphi(x,x_0,y_0)$ 视为自变量 x 和初值 (x_0,y_0) 的三元函数时,从上述定理可以推知它是三元连续函数.事实上,$\varphi(x,x_0,y_0)$ 对 x 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,因而对任给 $\varepsilon>0$,必能找到 $\delta_1>0$,使得当 $|\bar{x}-x|<\delta_1$ 时,有

$$|\varphi(\bar{x},x_0,y_0)-\varphi(x,x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad \bar{x},x\in[a,b].$$

另一方面,由解对初值的连续依赖定理,总存在这样的 $\delta_2>0$,使当 $(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2\leqslant\delta_2^2$ 时,有

$$|\varphi(x,x_0,y_0)-\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad x\in[a,b].$$

取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$,则只要 $(\bar{x}-x)^2+(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2\leqslant\delta^2$,就有

$$\begin{aligned}&|\varphi(\bar{x},\bar{x}_0,\bar{y}_0)-\varphi(x,x_0,y_0)|\\ \leqslant\ &|\varphi(\bar{x},\bar{x}_0,\bar{y}_0)-\varphi(\bar{x},x_0,y_0)|+|\varphi(\bar{x},x_0,y_0)-\varphi(x,x_0,y_0)|\\ <\ &\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

这说明 $\varphi(x,x_0,y_0)$ 在 (x,x_0,y_0) 连续.

对于任一 $(x_0,y_0)\in G$,由解的存在唯一性定理及解的延拓定理知,存在 $\alpha(x_0,y_0)$,$\beta(x_0,y_0)$ 使得(B.1)有饱和解 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 定义于 $\alpha(x_0,y_0)<x<\beta(x_0,y_0)$ 上. 令

$$V=\{(x,x_0,y_0)\mid \alpha(x_0,y_0)<x<\beta(x_0,y_0),(x_0,y_0)\in G\},$$

这时解 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 作为三元函数存在于 V 上,我们可以推得 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 在 V 上是连续的.

事实上，任给$(\tilde{x},\tilde{x}_0,\tilde{y}_0)\in V$，解$y=\varphi(x,\tilde{x}_0,\tilde{y}_0)$作为$x$的函数，它的最大存在区间必会包含$\tilde{x},\tilde{x}_0$.所以存在闭区间$[a,b]$，使得$\varphi(x,\tilde{x}_0,\tilde{y}_0)$在其上有定义，其中$a<\tilde{x},\tilde{x}_0<b$.由附注即知$\varphi(x,x_0,y_0)$在$(\tilde{x},\tilde{x}_0,\tilde{y}_0)$连续.再注意到$(\tilde{x},\tilde{x}_0,\tilde{y}_0)\in V$的任意性，我们可将解对初值的依赖关系用下面定理来表述.

解对初值的连续性定理　若函数$f(x,y)$在区域G内连续，且关于y满足局部利普希茨条件，则方程(B.1)的解$y=\varphi(x,x_0,y_0)$作为x,x_0,y_0的函数在它的存在范围内是连续的.

我们还可以讨论含有参数λ的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y,\lambda),\tag{B.1}_\lambda$$

用G_λ表示域，

$$G_\lambda:(x,y)\in G,\ \alpha<\lambda<\beta.$$

设$f(x,y,\lambda)$在G_λ内连续，且在G_λ内一致地关于y满足局部的利普希茨条件，也就是说，对G_λ内的每一点(x,y,λ)都存在以(x,y,λ)为中心的球$C\subset G_\lambda$，使得对任何$(x,y_1,\lambda),(x,y_2,\lambda)\in C$，不等式

$$|f(x,y_1,\lambda)-f(x,y_2,\lambda)|\leqslant L|y_1-y_2|$$

成立，其中L是与λ无关的正数.由解的存在唯一性定理，对每一个$\lambda_0\in(\alpha,\beta)$，方程$(\mathrm{B.1})_\lambda$的通过点$(x_0,y_0)\in G$的解唯一确定.我们把这个解记为$y=\varphi(x,x_0,y_0,\lambda_0)$，于是有$y_0=\varphi(x_0,x_0,y_0,\lambda_0)$.

类似地，我们可以得到下面的结果：

解对初值和参数的连续依赖定理　设$f(x,y,\lambda)$在G_λ内连续，且在G_λ内关于y一致地满足局部的利普希茨条件，$(x_0,y_0,\lambda_0)\in G_\lambda$，$y=\varphi(x,x_0,y_0,\lambda_0)$是方程$(\mathrm{B.1})_\lambda$通过点$(x_0,y_0)$的解，在区间$[a,b]$上有定义，其中$a\leqslant x_0\leqslant b$，那么对任意给定的$\varepsilon>0$，可以找到正数$\delta=\delta(\varepsilon,a,b)$，使得当

$$(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2+(\lambda-\lambda_0)^2\leqslant\delta^2$$

时，方程$(\mathrm{B.1})_\lambda$通过点$(\bar{x}_0,\bar{y}_0)$的解$y=\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0,\lambda)$在区间$[a,b]$上也有定义，并且

$$|\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0,\lambda)-\varphi(x,x_0,y_0,\lambda_0)|<\varepsilon,\ a\leqslant x\leqslant b.$$

解对初值和参数的连续性定理　设$f(x,y,\lambda)$在G_λ内连续，且在G_λ内关于y一致地满足局部的利普希茨条件，则方程$(\mathrm{B.1})_\lambda$的解$y=\varphi(x,x_0,y_0,\lambda)$作为$x,x_0,y_0,\lambda$的函数在它的存在范围内是连续的.

进一步，我们讨论解对初值的可微性，即解$y=\varphi(x,x_0,y_0)$关于初值(x_0,y_0)的偏导数的存在性和连续性.我们有如下定理.

解对初值的可微性定理　若函数$f(x,y)$以及$\dfrac{\partial f}{\partial y}$都在区域$G$内连续，则方程(B.1)的解$y=\varphi(x,x_0,y_0)$作为$x,x_0,y_0$的函数在它的存在范围内是连续可微的.

证明　由$\dfrac{\partial f}{\partial y}$在区域$G$内连续，推知$f(x,y)$在$G$内关于$y$满足局部利普希茨条件.因此，在定理的条件下，解对初值的连续性定理成立，即$y=\varphi(x,x_0,y_0)$在它的存在范

围内关于 x,x_0,y_0 是连续的.下面进一步证明对于函数 $\varphi(x,x_0,y_0)$ 的存在范围内任一点的偏导数 $\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial x_0},\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}$ 存在且连续.

先证 $\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}$ 存在且连续. 设由初值 (x_0,y_0) 和 $(x_0+\Delta x_0,y_0)$ ($|\Delta x_0|\leqslant\alpha$, α 为足够小正数)①所确定的方程的解分别为

$$y=\varphi(x,x_0,y_0)=\varphi \quad 和 \quad y=\varphi(x,x_0+\Delta x_0,y_0)=\psi,$$

即

$$\varphi=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,\varphi)\,\mathrm{d}x \quad 和 \quad \psi=y_0+\int_{x_0+\Delta x_0}^{x}f(x,\psi)\,\mathrm{d}x.$$

于是

$$\begin{aligned}\psi-\varphi&=\int_{x_0+\Delta x_0}^{x}f(x,\psi)\,\mathrm{d}x-\int_{x_0}^{x}f(x,\varphi)\,\mathrm{d}x\\&=-\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0}f(x,\psi)\,\mathrm{d}x+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,\varphi+\theta(\psi-\varphi))}{\partial y}(\psi-\varphi)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中 $0<\theta<1$.注意到 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 及 φ,ψ 的连续性,我们有

$$\frac{\partial f(x,\varphi+\theta(\psi-\varphi))}{\partial y}=\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_1,$$

这里 r_1 具有性质:当 $\Delta x_0\to0$ 时 $r_1\to0$,且当 $\Delta x_0=0$ 时 $r_1=0$.类似地,有

$$-\frac{1}{\Delta x_0}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0}f(x,\psi)\,\mathrm{d}x=-f(x_0,y_0)+r_2,$$

其中 r_2 与 r_1 具有相同性质. 因此对 $\Delta x_0\neq0$,有

$$\frac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}=-f(x_0,y_0)+r_2+\int_{x_0}^{x}\left(\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_1\right)\frac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}\mathrm{d}x,$$

即

$$z=\frac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}$$

是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\left(\dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_1\right)z,\\ z(x_0)=-f(x_0,y_0)+r_2=z_0\end{cases}\tag{B.4}$$

的解,在这里 $\Delta x_0\neq0$ 被看成参数.显然,当 $\Delta x_0=0$ 时上述初值问题仍然有解.根据解对初值和参数的连续性定理,知 $\frac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}$ 是 $x,x_0,z_0,\Delta x_0$ 的连续函数,从而存在

$$\lim_{\Delta x_0\to0}\frac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}\equiv\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}.$$

① 这保证了 φ 和 ψ 同在某一区间上有定义,且当 $\Delta x_0\to0$ 时 $\psi-\varphi\to0$.显然当 $\Delta x_0=0$ 时有 $\psi=\varphi$.

而$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}$是初值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}z,\\ z(x_0)=-f(x_0,y_0)\end{cases}$$

的解,不难求得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}=-f(x_0,y_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}\mathrm{d}x\right),$$

显然它是 x,x_0,y_0的连续函数.

同样可证$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}$存在且连续.事实上,设 $y=\varphi(x,x_0,y_0+\Delta y_0)=\tilde{\psi}$ 为初值$(x_0,y_0+\Delta y_0)$ $(|\Delta y_0|\leqslant\alpha)$所确定的解.类似上述的推演可证$\frac{\tilde{\psi}-\varphi}{\Delta y_0}$是初值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\left(\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_3\right)z,\\ z(x_0)=1\end{cases}$$

的解.因而

$$\frac{\tilde{\psi}-\varphi}{\Delta y_0}=\exp\left[\int_{x_0}^{x}\left(\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_3\right)\mathrm{d}x\right],$$

其中 r_3 具有性质:当 $\Delta y_0\to 0$ 时 $r_3\to 0$,且 $\Delta y_0=0$ 时 $r_3=0$. 故有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}=\lim_{\Delta y_0\to 0}\frac{\tilde{\psi}-\varphi}{\Delta y_0}=\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}\mathrm{d}x\right),$$

它是 x,x_0,y_0 的连续函数.

至于$\frac{\partial\varphi}{\partial x}$的存在及连续性,只需注意到 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$是方程的解,因而

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=f(x,\varphi(x,x_0,y_0)),$$

由 f 及 φ 的连续性即直接推得结论.

B3　常微分方程组解的存在唯一性

现在讨论非线性常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{y}),\ \boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n \tag{B.5}$$

解的存在唯一性以及解的延拓和解对初值的连续性、可微性等,这可概括为下面的定理. 由于定理的证明方法同一阶方程的情形类似,这里就不重复了.

设给定方程组(B.5)的初值条件为

$$\boldsymbol{y}(t_0)=\boldsymbol{y}_0, \tag{B.6}$$

考虑包含点$(t_0,\boldsymbol{y}_0)=(t_0,y_{10},y_{20},\cdots,y_{n0})$的某区域

$$R:\ |t-t_0|\leqslant a,\ \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\|\leqslant b.$$

在本节中$\boldsymbol{y}$的范数$\|\boldsymbol{y}\|$定义为$\|\boldsymbol{y}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}$. 所谓$\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{y})$在域$G$上关于$\boldsymbol{y}$满足局部利普希茨条件是指:对于$G$内任一点$(t_0,\boldsymbol{y}_0)$,存在闭邻域$R\subset G$,而$\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{y})$于$R$上关于$\boldsymbol{y}$满足利普希茨条件,即存在常数$L>0$,使得不等式

$$\|\boldsymbol{g}(t,\tilde{\boldsymbol{y}})-\boldsymbol{g}(t,\bar{\boldsymbol{y}})\|\leqslant L\|\tilde{\boldsymbol{y}}-\bar{\boldsymbol{y}}\| \tag{B.7}$$

对所有$(t,\tilde{\boldsymbol{y}}),(t,\bar{\boldsymbol{y}})\in R$成立,$L$称为利普希茨常数.

存在唯一性定理 如果向量函数$\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{y})$在域$R$上连续且关于$\boldsymbol{y}$满足利普希茨条件,则方程组(B.5)存在唯一解$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(t,t_0,\boldsymbol{y}_0)$,它在$|t-t_0|\leqslant h$上连续,而且

$$\boldsymbol{\varphi}(t_0,t_0,\boldsymbol{y}_0)=\boldsymbol{y}_0,$$

这里$h=\min\left(a,\dfrac{b}{M}\right)$,$M=\max\limits_{(t,\boldsymbol{y})\in R}\|\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{y})\|$.

解的延拓与连续性定理 如果向量函数$\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{y})$在某域$G$内连续,且关于$\boldsymbol{y}$满足局部利普希茨条件,则方程组(B.5)的满足初值条件(B.6)的解$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(t,t_0,\boldsymbol{y}_0)$($(t_0,\boldsymbol{y}_0)\in G$)可以延拓,或者延拓到$+\infty$(或$-\infty$);或者使点$(t,\boldsymbol{\varphi}(t,t_0,\boldsymbol{y}_0))$任意接近区域$G$的边界. 而解$\boldsymbol{\varphi}(t,t_0,\boldsymbol{y}_0)$作为$t,t_0,\boldsymbol{y}_0$的函数在它的存在范围内是连续的.

可微性定理 如果向量函数$\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{y})$及$\dfrac{\partial g_i}{\partial y_j}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$在域G内连续,那么方程组(B.5)由初值条件(B.6)确定的解$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(t,t_0,\boldsymbol{y}_0)$作为$t,t_0,\boldsymbol{y}_0$的函数,在它的存在范围内是连续可微的.

附录 C
数学软件在常微分方程中的应用

C1 计算机数学软件

数学软件是专为进行数学公式、函数与数据的计算和处理而设计的计算机软件. 应用数学软件进行数学、物理、生物、社会及工程技术的有关数据、公式的数学处理,代替原来繁难、复杂的人工计算,可大大提高工作效率和准确性.

目前国内应用最广泛的数学软件有 Mathematica, MATLAB, Maple 等几种. Mathematica 语言多用于物理学界,MATLAB 语言主要用于工程及科学计算领域,Maple 语言在数学界较通用. 三种语言各有其特色:Mathematica 语言其符号运算、数值计算及图形绘制均有特色,特别是输入显示界面可以直接输入及显示人们习惯的数学符号,非常直观,在其"帮助"菜单中列出的例题还可以直接运行或修改运行;MATLAB 语言的矩阵形式变量使数值输入计算均非常精练,图形显示也很灵活,并有众多程序包供使用;Maple 语言擅长符号运算,微分方程的积分曲线或轨线图形直接用函数定义,省去了先求数值解再显示的麻烦,且可同时绘制多条轨线,非常方便.三种语言也各有不便之处:Mathematica 语言的有些规定(如函数参数均需用方括号)与众不同,还自定义了各种各样的规则和符号,初学者不易掌握;MATLAB 语言的函数定义必须用 M 文件,其符号运算是借助 Maple 语言,不甚方便;Maple 语言使用 ASCII 符号(英文键盘)进行输入,对数学符号及上、下标等使用不便.

上述数学软件是商业软件,其价格不菲. 近年出现了欲代替上述数学软件的新开源软件"Sagemath",将在下面专门介绍.

C2 常微分方程计算机辅助分析计算

虽然数学软件可以对一般数学(也包括常微分方程)进行计算机辅助分析,但数学或数学分析内容广泛,而常微分方程只是其中的一部分,只要掌握部分内容和方法、技巧即可. 而且常微分方程还有其特定的内容、方法,数学软件应用时需进行特殊处理. 因此,必须考虑在目前计算机普及应用的环境下如何应用数学软件对常微分方程进行计算机辅助分析.

对常微分方程的教学和研究内容而言,有如下四个方面可应用计算机软件进行辅助分析计算:

(1) 求解线性微分方程需要用到的矩阵特征值、特征向量、行列式及指数函数的计算;计算、检验微分方程组的平衡点需要用到的代数方程组的(符号)求解.

(2) 常微分方程(组)的解(积分曲线或轨线)或辅助曲线的图形显示;平面或空间中常微分方程所定义的向量场及其辅助分析函数,如等倾斜线、V 函数曲线及积分曲线或轨线图的绘制.

(3) 常微分方程(组)的特殊求解,包括拉普拉斯变换方法、幂级数解和特殊函数的求解.

(4) 常微分方程(组)的直接求解.

必须指出的是,正如常微分方程(组)不一定有初等解即能用初等函数或超越函数积出一样,使用数学软件不一定保证能解出给定的常微分方程(组).甚至能积出的常微分方程(组)也不一定能用数学软件解出,因常微分方程(组)的求解没有统一方法,要用人工智能处理计算机的求解过程.

C3 开源数学软件 Sagemath

免费、开源数学软件 Sagemath(简称 Sage)由数学家 William Stein(威廉·斯坦因)于 2005 年发布,可用于代数、几何、数论、密码学、数值计算以及其他相关领域的教学和科研. 它实际是一个数学工具箱,使用 Python 语言编写,其结果可用 LaTeX 表示.

下面我们给出进行常微分方程计算机辅助分析计算的几个 Sage 源程序例子(参考《Sagemath 与物理学》). 在本课程的数字资源中将介绍 Sagemath 软件的安装和使用.

例 1 求矩阵

$$H=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 8 & 1 & -1\\ 5 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

的特征值、特征向量和矩阵函数(基解矩阵).

解 求矩阵的特征值、特征向量和矩阵函数(基解矩阵)的 Sage 源程序为

```
H=Matrix(SR,3,3,[1,0,3,8,1,-1,5,1,-1])#定义 3*3 矩阵 H
show(H)                                #显示 H
print(H.eigenvalues())                 #显示 H 的特征值[sqrt(7),sqrt(7),-3]
ev=H.eigenvectors_right()              #求 H 的特征向量 ev
D,P=H.eigenmatrix_right()              #求 H 的特征值和对应的特征向量矩阵 D,P
show(D,P)                              #显示 D,P
var('t')                               #定义变量 t
```

```
eA=exp(H*t)                                  #计算基解矩阵 exp(H*t)
show(eA)                                     #显示基解矩阵 eA
```

例 2　计算矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 1 & -2\\ 3 & 1 & -2 & 2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & -1 & -2 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 4\\ 2 & -4 & 1 & -2\\ 3 & 7 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

的乘积 $\boldsymbol{C}$ 和矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的转置矩阵、逆矩阵、共轭矩阵.

解　计算 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的乘积 $\boldsymbol{C}$ 和矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的转置矩阵、逆矩阵、共轭矩阵的 Sage 源程序为

```
M4=MatrixSpace(QQ,4)
A=M4.matrix([[0,-1,-1,1],[1,1,1,1],[2,4,1,-2],[3,1,-2,2]])
show(A)                                      #矩阵 A
B=M4.matrix([[2,-1,-2,1],[1,3,1,4],[2,-4,1,-2],[3,7,-2,1]])
show(B)                                      #矩阵 B
C=M4.matrix(A*B)
print("Matrix C")
show(C)                                      #矩阵 C=A*B
print("Transpose of C")
show(C.transpose())                          #矩阵 C 的转置矩阵
print("Inverse of C")
show(C.inverse())                            #矩阵 C 的逆矩阵
print("Adjoint of C")
show(C.adjoint())                            #矩阵 C 的共轭矩阵
```

例 3　求解线性方程组

$$\begin{bmatrix}0 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 1 & -2\\ 3 & 1 & -2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 6\\ -1\\ 3\end{bmatrix}.$$

解　求线性方程组解的 Sage 源程序：

```
M4=MatrixSpace(QQ,4)
A=M4.matrix([[0,-1,-1,1],[1,1,1,1],[2,4,1,-2],[3,1,-2,2]])
print("Matrix A")
show(A)
B=vector([0,6,-1,3])
print("vector B")
show(B)
print("Answer")
```

```
show(A.solve_right(B))
```

例 4 求函数 $f(x)=\cos x\cdot e^x$ 的导数、不定积分和 0 到 π 的定积分.

解 Sage 源程序为

```
var('x')                          #定义变量
f(x)=e^x*cos(x)                   #定义函数 f(x)
show(f)                           #显示函数 f(x)=e^x*cos(x)
g(x)=derivative(f,x)
show(g)                           #显示函数 f(x)的导数 g
h(x)=integrate(f,x)
show(h)                           #显示函数 f(x)的不定积分
S(x)=integrate(f,(x,0,pi))
show(S)                           #显示函数 f(x)的[0,pi]的定积分
```

例 5 求解微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+3y=e^{-x}$.

解 Sage 源程序为

```
var('x,y')
y=function('y',x)
f(x)=diff(y,x,2)-2*diff(y,x)+3*y-e^(-x)
show(f)
r(x)=desolve(f(x)==0,y,x)
show(r)
```

例 6 在同一图中画函数 $\sin x, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 的图形及其泰勒展开式第 3、5、7、9 次项图.

解 Sage 源程序为

```
var('x  k')
x1=pi/2
xmin=x1-pi;xmax=x1+pi
f(x)=sin(x)
p1=plot(f,(xmin,xmax),color='red',legend_label="sin(x)")
t3=f.taylor(x,x1,3)
t5=f.taylor(x,x1,5)
t7=f.taylor(x,x1,7)
t9=f.taylor(x,x1,9)
p1+=plot(t3,(xmin,xmax),color='blue',legend_label="3")
p1+=plot(t5,(xmin,xmax),color='black',legend_label="5")
p1+=plot(t7,(xmin,xmax),color='purple',legend_label="7")
p1+=plot(t9,(xmin,xmax),color='green',legend_label="9")
show(p1)
```

例 7　在$[2,4]\times[0,1]$上绘制虫口模型 $x_{n+1}=\mu x_n(1-x_n)$，$x_0=0.5$ 的解图.

解　Sage 源程序为

```
N=200;M1=200;M2=200;x0=0.5
p=[]
for t in range(N):
  mu=2.0+2.0*t/N
  x=x0
  for i in range(M1):
    x=mu*x*(1-x)
  for i in range(M2):
    x=mu*x*(1-x)
    p.append((mu,x))
point(p,pointsize=2)
```

例 8　画出洛伦茨方程(1.21)的轨线图.

解　Sage 源程序为

```
from scipy.integrate import odeint
import numpy as np
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import matplotlib.pyplot as plt
def lorenz(w,t,a,r,b):
x,y,z=w
return np.array([a*(y-x),x*(r-z)-y,x*y-b*z])
t=np.arange(0,50,0.01)
track1=odeint(lorenz,(0.0,1.0,0.0),t,args=(10.0,28.0,3.0))
track2=odeint(lorenz,(0.0,1.01,0.0),t,args=(10.0,28.0,3.0))
track3=odeint(lorenz,(0.0,1.001,0.0),t,args=(10.0,28.0,3.0))
fig=plt.figure()
ax=Axes3D(fig)
ax.plot(track1[:,0],track1[:,1],track1[:,2])
ax.plot(track2[:,0],track2[:,1],track2[:,2])
ax.plot(track3[:,0],track3[:,1],track3[:,2])
plt.savefig('lorenz.png'  )
plt.show()
```

索引

A

鞍点 6.2.1

按线性近似决定稳定性 6.1.2

B

包络 3.3.1

饱和解 3.2.1

本征函数 8.3.1

本征值 8.3.1

比较系数法 4.2.2

闭轨线 6.2.2

边值条件 8.1.1

边值问题 8.1.1

变量分离方程 2.1.1

标准基本解组 4.1.1

标准基解矩阵 5.1.1

伯努利微分方程 2.2

捕食-被捕食模型 1.1,6.2.3

不变量 7.4.1

不稳定 6.1.1

C

参数表示 2.4

常负 6.1.3

常数变易法 2.2,4.1.2,5.1.2

常数变易公式 5.1.2

常微分方程 1.2.1

常微分方程模型 1.1

常系数线性微分方程 4.2

常系数线性微分方程组 5.2

常正 6.1.3

虫口模型 6.3.4

初值问题 1.2.1

初值条件 1.2.1

存在唯一性定理 3.1.1,4.1,5.1

D

待定系数法 8.1.2

待定指数函数法 4.2.1

单参数变换群 1.2.1,7.4.1

等倾斜线 1.2.1,6.2.3

第 n 次近似解 3.1.1

第二类边值条件 8.1.1

第二宇宙速度 4.3.3

第三类边值条件 8.1.1

第一类边值条件 8.1.1

典型变量 7.4.1

叠加原理 4.1.1,5.1.1

定负 6.1.3

定解条件 1.2.1

定解问题 1.2.1

定正 6.1.3

动力系统 1.2.1

对称 7.4.2

对称群 7.4.2

E

二阶线性微分方程 4.3.2

F

反散射方法(GGKM 方法)6.3.2

范德波尔方程 6.2.2

非齐次边值问题 8.1.1

非奇异实线性变换 6.2.1

非线性微分方程 1.2.1

非线性傅里叶变换方法 6.3.2
非驻定 1.2.1
分项组合 2.3.1
复值函数 4.2
复值解 4.2
复值微分方程 1.2.1

G

改进的欧拉方法 3.4.1
刚性比 3.4.2
刚性问题 3.4.2
格林函数 8.2
共生模型 1.1
共振频率 4.2.3
共振现象 4.2.3
孤立子 6.3.2
广义边值条件 8.1.1
广义动量 6.3.1
广义坐标 6.3.1

H

哈密顿方程 6.3.1
耗散系统 6.3.3
赫尔维茨行列式 6.1.2
蝴蝶效应 6.3.3
环域 6.2.2
环域定理 6.2.2
混沌 6.3.3

J

积分方程 3.1.1
积分曲面 7.1.1
积分曲线 1.2.1,6.2.1
积分因子 2.3.2
基本解组 4.1.1,5.1.1
基尔霍夫第二定律 1.1
基解矩阵 5.1.1,5.2.1,5.2.2
极限环 6.2.2
极值稳定定理 6.3.1
结点 6.2.1
解的延拓 3.2.1
解对初值的可微性 3.2.2
解对初值的连续性 3.2.2
解矩阵 5.1.1
近似计算 3.1.2
矩阵指数 5.2.1

K

柯西问题 7.3
克莱罗微分方程 3.3.2

L

拉普拉斯变换 5.3
朗斯基行列式 4.1.1,5.1.1
离散动力系统 1.2.1,6.3.4
李变换群 7.4.1
李方程组 7.4.1
李积分因子 7.4.2
李纳微分方程 6.2.2
李雅普诺夫第二方法 6.1.3
利普希茨常数 3.1.1
利普希茨条件 3.1.1
两种群竞争模型 1.1
临界情形 6.1.2
刘维尔保积定理 6.3.1
龙格-库塔方法 3.4.2
龙格-库塔公式 3.4.2
逻辑斯谛模型 1.1
洛伦茨方程 1.1,6.3.3

M

幂级数解法 4.3.2

N

能量函数 6.3.1
拟线性偏微分方程 7.1.1

O

欧拉方程 4.2
欧拉公式 3.4.1

P

偏微分方程 1.2.1
平衡解(驻定解)6.1.1
平面图貌 6.2.3

平移变换群 7.4.1

Q

齐次边值问题 8.1.1
齐次微分方程 2.1.2
奇点 1.2.1,6.2.1
奇结点 6.2.1
奇解 3.3.1
奇线 6.2.1
恰当微分方程 2.3.1
全导数 6.1.3
全局渐近稳定(全局稳定)6.1.1

R

人口模型 1.1
容许变换群 7.4.2
容许算子 7.4.2

S

生成元 7.4.1
实值微分方程 1.2.1
收敛性 3.4.2
首次积分 7.1.2
首次延拓公式 7.4.2
数学摆 1.1,4.2.3,6.1.2
数值解 3.4.1
双孤立子解 6.3.2
双曲函数 6.3.2
施图姆-刘维尔型方程 8.3.2

T

特解 1.2.1
特征方程 4.2.1,5.2.2,7.1.1
特征曲面 7.3.1
特征向量 5.2.2
特征值 4.2.1,5.2.2
特征值法 4.2.1
梯度向量 6.3.1
通积分 7.1.3
通解 1.2
通解结构 4.1.1,5.1.1,7.2.1,7.2.2
退化结点 6.2.1

V

沃尔泰拉捕食-被捕食模型 1.1

W

微分方程组 1.2.1
稳定性 6.1.1
无穷小生成元 7.4.2
无阻尼强迫振动 4.2.3
无阻尼自由振动 4.2.3
误差估计 3.1.2

X

吸引域 6.1.1
线性近似方程组 6.1.2
线性偏微分方程 7.1.1
线性微分方程 1.2.1
线性无关 4.1.1,5.1.1
线性相关 4.1.1,5.1.1
相空间 1.2.1
相容性 3.4.2
相似变换群 7.4.1
向量场 1.2.1
行波解 7.1.1
旋转变换群 7.4.1
旋转抛物面 2.1.3

Y

延拓定理 3.2.1
一阶隐式微分方程 2.4
隐式解 1.2.1
有阻尼自由振动 4.2.3
跃度 8.2

Z

质点振动 4.2.3
周期边值条件 8.1.1
逐步逼近法 3.1.1
驻定 1.2.1,6.1.1
子空间 5.2
自伴 8.3.2

英文作者或名词

Bernoulli(伯努利)微分方程 2.2
Bessel(贝塞尔)方程 4.3.2
Cauchy(柯西)问题 7.3
Clairaut(克莱罗)微分方程 3.3.2
c-判别曲线 3.3.1
D'Ancona 棣安考纳 1.1
Euler(欧拉)方程 4.2
Green(格林)函数 8.2
Hamilton(哈密顿)方程 6.3.1
Hurwitz(赫尔维茨)行列式 6.1.2
Jacobi(雅可比)行列式 7.1.2
Kirchhoff(基尔霍夫)第二定律 1.1
KdV 孤立子方程 6.3.2
logistic(逻辑斯谛)模型 1.1
Lorenz(洛伦茨)方程 1.1,6.3.3
Lie(李)变换群 7.4.1
Liénard(李纳)微分方程 6.2.2
Lipschitz(利普希茨)条件 3.1.1
Li-Yorke(李-约克)混沌定理 6.3.4
Lyapunov(李雅普诺夫)6.1
Malthus(马尔萨斯)1.1
p 阶收敛 3.4.2
p-判别曲线 3.3.1
Poincaré(庞加莱)回归定理 6.3.1
Runge-Kutta(龙格-库塔)方法 3.4.2
Sturm-Liouville(施图姆-刘维尔)型方程 8.3.2
van der Pol(范德波尔)方程 6.2.2
Verhulst(威尔霍斯特)1.1
Volterra(沃尔泰拉)1.1
V 函数方法 6.1.3
Weierstrass(魏尔斯特拉斯)判别法 3.1
Wronsky(朗斯基)行列式 4.1.1,5.1.1

常微分方程发展和分支

部分习题答案与提示

参考文献