

前 言

离散数学不仅是计算机专业的必修课程,也为其它某些专业和工程技术人员所必需。由中国人民解放军通信工程学院方世昌编写、西安电子科技大学出版社出版的《离散数学》一书,通过教学实践普遍受到师生好评。在多年的教学中,我们发现学生在做书后的习题时,有时会感到困难,而教师又不可能在课堂上面面俱到地讲解,因而广大师生希望能有配合该教材的习题集出版;另一方面,学生在自学或参加有关考试时,也迫切需要有一本配合教材的习题集作为参考书,因此我们编写了这本习题题解。

该书按照方世昌编写的《离散数学》一书的顺序解答了书中的绝大部分习题,还在有些章节的后面补充了一些典型的有一定难度的习题。本书包括数理逻辑、集合论、二元关系、函数、无限集合、代数、格与布尔代数、图论共8章的习题题解。因此本书是一本较好地配合教材进行教学的参考书。

本书由孙学红编写第1、7、8章,秦伟良编写第2、3、4、5、6章,由方世昌教授主审。在编写过程中,方教授认真、仔细地审阅了全文,提出了许多宝贵的修改意见,西安电子科技大学的吴波老师也提出了许多修改意见;西安电子科技大学出版社的有关同志在本书的组织、编辑、出版过程中也付出了辛勤的劳动。在此我们向他们及所有为本书的出版作出努力的同志们一并表示诚挚的谢意。

由于时间仓促、水平有限,书中难免有不足和错误之处,恳切希望广大读者批评指正。

作者

1998.3

目 录

第 1 章 数理逻辑	1	5.1 可数和不可数集合	133
1.1 命题	1	5.2 基数的比较	138
1.2 重言式	5	5.3 基数算术	142
1.3 范式	11	第 6 章 代数	145
1.4 联结词的扩充与归纳	13	6.1 代数结构	145
1.5 推理规则和证明方法	16	6.2 子代数	147
1.6 谓词和量词	26	6.3 同态	148
1.7 谓词演算的永真公式	32	6.4 同余关系	151
1.8 谓词演算的推理规则	37	6.5 商代数和积代数	154
1.9 选题例解	42	6.6 半群和独异点	158
第 2 章 集合	48	6.7 群	161
2.1 集合论的基本概念	48	6.8 环和域	169
2.2 集合上的运算	51	6.9 选题例解	173
2.3 归纳法和自然数	60	第 7 章 格与布尔代数	180
2.4 语言上的运算	66	7.1 格	180
2.5 集合的笛卡尔乘积	71	7.2 格是代数系统	184
2.6 选题例解	74	7.3 特殊的格	187
第 3 章 二元关系	77	7.4 布尔代数	191
3.1 基本概念	77	7.5 选题例解	200
3.2 关系的合成	84	第 8 章 图论	206
3.3 关系上的闭包运算	88	8.1 图的基本概念	206
3.4 次序关系	94	8.2 路径和回路	211
3.5 等价关系和划分	101	8.3 图的矩阵表示	220
3.6 选题例解	106	8.4 二部图	223
第 4 章 函数	113	8.5 平面图	225
4.1 函数的基本概念	113	8.6 树	229
4.2 特殊函数类	119	8.7 有向树	231
4.3 逆函数	125	8.8 运输网络	235
4.4 选题例解	129	8.9 选题例解	237
第 5 章 无限集合	133	参考文献	244

第 1 章 数理逻辑

1.1 命题

1.1.1 设 P 是命题“天下雪”； Q 是命题“我去镇上”； R 是命题“我有时间”。

(a) 用逻辑符号写出以下命题：

(i) 如天不下雪和我有时间，那么我去镇上。

(ii) 我去镇上，仅当我有时间。

(iii) 天不下雪。

(iv) 天正在下雪，我也没去镇上。

(b) 对下述命题用中文写出语句。

(i) $Q \leftrightarrow (R \wedge \neg P)$

(ii) $R \wedge Q$

(iii) $(Q \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow Q)$

(iv) $\neg(R \vee Q)$

解 (a) (i) $\neg P \wedge R \rightarrow Q$

(ii) $Q \rightarrow R$

(iii) $\neg P$

(iv) $P \wedge \neg Q$

(b) (i) 我去镇上当且仅当我有时间且天不下雪。

(ii) 我有时间并且去镇上。

(iii) 如果我去镇上，那么我有时间；如果我有时间，那么我去镇上(或：我去镇上当且仅当我有时间)。

(iv) 说我有时间或去镇上是错的。

1.1.2 否定下列命题：

(a) 上海处处清洁。

(b) 每一个自然数都是偶数。

解 (a) 上海并非处处清洁。

(b) 并非每一个自然数都是偶数。

1.1.3 说出下述每一命题的逆命题和逆反命题：

(a) 如果天下雨，我将不去。

- (b) 仅当你去我将逗留。
 (c) 如果 n 是大于 2 的正整数, 则方程 $x^n + y^n = z^n$ 无正整数解(费尔马最后定理)。
 (d) 如果我不获得更多帮助, 我不能完成这个任务。

解 (a) 逆命题: 如果我不去, 那么天下雨。

逆反命题: 如果我去, 那么天不下雨。

(b) 逆命题: 如果你去, 我将逗留。

逆反命题: 如果你不去, 我将不逗留。

(c) 逆命题: 如果方程 $x^n + y^n = z^n$ 无正整数解, 那么 n 是大于 2 的正整数。

逆反命题: 如果方程 $x^n + y^n = z^n$ 有正整数解, 那么 n 不是大于 2 的正整数。

(d) 逆命题: 如果我不能完成这个任务, 那么我没有获得更多帮助。

逆反命题: 如果我能完成这个任务, 那么我获得了更多帮助。

1.1.4 给 P 和 Q 指派真值 T , 给 R 和 S 指派真值 F , 求出下列命题的真值:

- (a) $P \vee Q \wedge R$
 (b) $P \wedge Q \wedge R \vee \neg((P \vee Q) \wedge (R \vee S))$
 (c) $(\neg(P \wedge Q) \vee \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \vee \neg R) \wedge S$
 (d) $\neg(P \wedge Q) \vee \neg R \vee ((Q \leftrightarrow \neg P) \rightarrow R \vee \neg S)$
 (e) $(P \leftrightarrow R) \wedge (\neg Q \rightarrow S)$
 (f) $P \vee (Q \rightarrow R \wedge \neg P) \leftrightarrow Q \vee \neg S$

解 (a) 方法一 作真值表:

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee Q \wedge R$
1	1	0	0	1

因此, $P \vee Q \wedge R$ 的真值是 T 。

方法二 $P \vee Q \wedge R \Leftrightarrow T \vee F \Leftrightarrow T$

($\Leftrightarrow$ 相当于 $=$, 具体意义在下节介绍。)

其余各题答案是:

- (b) T (c) T (d) T (e) F (f) T

1.1.5 构成下列公式的真值表:

- (a) $Q \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow P$
 (b) $\neg(P \vee Q \wedge R) \leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
 (c) $(P \vee Q \rightarrow Q \wedge R) \rightarrow P \wedge \neg R$
 (d) $((\neg P \rightarrow P \wedge \neg Q) \rightarrow R) \wedge Q \vee \neg R$

解 (a)

P	Q	$P \rightarrow Q$	$Q \wedge (P \rightarrow Q)$	$Q \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow P$
0	0	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

(b)

P	Q	R	$Q \wedge R$	$\neg(P \vee Q \wedge R)$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	$\neg(P \vee Q \wedge R) \leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	0

(c) (略), (d) (略)。

1.1.6 证明下列公式的真值与它们的变元值无关:

(a) $P \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow Q$

(b) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg \neg P \vee Q)$

(c) $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$

(d) $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge Q \vee \neg P \wedge \neg Q)$

证明 (a)

P	Q	$P \rightarrow Q$	$P \wedge (P \rightarrow Q)$	$P \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow Q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

真值表说明公式 $P \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow Q$ 的真值恒为真, 与命题变元的指派无关。

(b) (略), (c) (略), (d) (略)。

1.1.7 用真值表证明如果 $P \leftrightarrow Q$ 是真, 那么 $P \rightarrow Q$ 和 $Q \rightarrow P$ 都真。反之, 如果 $P \rightarrow Q$ 和 $Q \rightarrow P$ 都真, 那么 $P \leftrightarrow Q$ 是真。

证明 作真值表:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

由表可知, $P \leftrightarrow Q$ 在第一、四行上取真值, 这时, $P \rightarrow Q, Q \rightarrow P$ 也为真; 另一方面, 在第一、四行上 $P \rightarrow Q$ 和 $Q \rightarrow P$ 同时为真, 这时 $P \leftrightarrow Q$ 也为真。于是本题得证。

1.1.8 对 P 和 Q 的所有值, 证明 $P \rightarrow Q$ 与 $\neg P \vee Q$ 有同样真值。证明 $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ 总是真的。

证明 采用真值表方法证明(略)。

1.1.9 一个有两个运算对象的逻辑运算符, 如果交换运算对象的次序, 产生一逻辑等价命题, 则称为可交换的。

(a) 确定下述逻辑运算符哪些是可交换的: $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ 。

(b) 用真值表证明你的断言。

解 (a) $\wedge$ 、 $\vee$ 、 $\leftrightarrow$ 是可交换的。

(b) 作出 $P \wedge Q$ 、 $Q \wedge P$ ； $P \vee Q$ 、 $Q \vee P$ ； $P \leftrightarrow Q$ 、 $Q \leftrightarrow P$ 和 $P \rightarrow Q$ 、 $Q \rightarrow P$ 的真值表，由表得出前三对公式等价，后一对公式不等价(表略)。

1.1.10 设 $*$ 是具有两个运算对象的逻辑运算符，如果 $(x * y) * z$ 和 $x * (y * z)$ 逻辑等价，那么运算符 $*$ 是可结合的。

(a) 确定逻辑运算符 $\wedge$ 、 $\vee$ 、 $\rightarrow$ 、 $\leftrightarrow$ 哪些是可结合的。

(b) 用真值表证明你的断言。

解 (a) $\wedge$ 、 $\vee$ 、 $\leftrightarrow$ 是可结合的。

(b) 作出 $P \wedge (Q \wedge R)$ 、 $(P \wedge Q) \wedge R$ ； $P \vee (Q \vee R)$ 、 $(P \vee Q) \vee R$ ； $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R$ 、 $P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$ 和 $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ 、 $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ 的真值表。由表得出前三对公式等价，后一对公式不等价(表略)。

1.1.11 指出以下各式哪些不是命题公式，如果是命题公式，请说明理由：

(a) $((\neg P) \rightarrow (P \wedge Q)) \vee R$

(b) $(PQ \vee R)$

(c) $P \wedge \vee R$

(d) $((Q \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow P)$

解 (b)、(c)不是命题公式，因为它们不能根据命题公式的形成规则得到。(a)和(d)是命题公式，它们的构造过程如下：

- | | |
|--|------------|
| (a) ① P 是命题公式 | 根据条款 1 |
| ② Q 是命题公式 | 根据条款 1 |
| ③ $(P \wedge Q)$ 是命题公式 | 根据①、②和条款 2 |
| ④ $(\neg P)$ 是命题公式 | 根据①和条款 2 |
| ⑤ $((\neg P) \rightarrow (P \wedge Q))$ 是命题公式 | 根据③、④和条款 2 |
| ⑥ R 是命题公式 | 根据条款 1 |
| ⑦ $((\neg P \rightarrow (P \wedge Q)) \vee R)$ 是命题公式 | 根据⑤、⑥和条款 2 |
| (d) ① P 是命题公式 | 根据条款 1 |
| ② Q 是命题公式 | 根据条款 1 |
| ③ $(P \rightarrow Q)$ 是命题公式 | 根据①、②和条款 2 |
| ④ $(Q \wedge (P \rightarrow Q))$ 是命题公式 | 根据②、③和条款 2 |
| ⑤ $((Q \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow P)$ 是命题公式 | 根据①、④和条款 2 |

1.1.12 一个形容词如果不具有它所表示的性质，则称为“它谓的”(Heterological)，例如“单音节”(Monosyllabic)就是它谓的形容词，而“多音节”(Polysyllabic)就不是它谓的形容词，问“Heterological”是它谓的形容词吗？为什么这是悖论？

解 如果“Heterological”是“它谓的”，由“它谓的”定义，“Heterological”不具有它所表示的性质，而“Heterological”所表示的性质是“它谓的”，所以“Heterological”不是“它谓的”，得出矛盾；另一方面，如果“Heterological”不是“它谓的”，即“Heterological”不具有它所定义的性质，这样由“它谓的”定义，“Heterological”又是“它谓的”，又得出矛盾。

因此，断言“Heterological 是它谓的形容词”没有真假值，因而是悖论。

1.2 重言式

1.2.1 指出下列命题哪些是重言式、偶然式和矛盾式：

- (a) $P \vee \neg P$
- (b) $P \wedge \neg P$
- (c) $P \rightarrow \neg(\neg P)$
- (d) $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
- (e) $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$
- (f) $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$
- (g) $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
- (h) $P \wedge (Q \vee R) \rightarrow (P \wedge Q \vee P \wedge R)$
- (i) $P \wedge \neg P \rightarrow Q$
- (j) $P \vee \neg Q \rightarrow Q$
- (k) $P \rightarrow P \vee Q$
- (l) $P \wedge Q \rightarrow P$
- (m) $(P \wedge Q \leftrightarrow P) \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q)$
- (n) $((P \rightarrow Q) \vee (R \rightarrow S)) \rightarrow ((P \vee R) \rightarrow (Q \vee S))$

解 重言式有(a)、(c)、(d)、(e)、(f)、(h)、(i)、(k)、(l)；偶然式有(g)、(j)、(m)、(n)；矛盾式有(b)。

1.2.2 对下述每一表达式，找出仅用 $\wedge$ 和 $\neg$ 的等价表达式，并尽可能简单：

- (a) $P \vee Q \vee \neg R$
- (b) $P \vee (\neg Q \wedge R \rightarrow P)$
- (c) $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$

对下述每一表达式，找出仅用 $\vee$ 和 $\neg$ 的等价表达式，并尽可能简单：

- (d) $(P \wedge Q) \wedge \neg P$
- (e) $(P \rightarrow (Q \vee \neg R)) \wedge \neg P \wedge Q$
- (f) $\neg P \wedge \neg Q \wedge (\neg R \rightarrow P)$

解 (a) $P \vee Q \vee \neg R \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad P \vee (\neg Q \wedge R \rightarrow P) & \\
 & \Leftrightarrow P \vee \neg(\neg Q \wedge R) \vee P \\
 & \Leftrightarrow P \vee Q \vee \neg R \\
 & \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q \wedge R)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (c) \quad P \rightarrow (Q \rightarrow P) & \\
 & \Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee P) \\
 & \Leftrightarrow T
 \end{aligned}$$

$$(d) \quad (P \wedge Q) \wedge \neg P \Leftrightarrow F$$

$$(e) \quad (P \rightarrow (Q \vee \neg R)) \wedge \neg P \wedge Q$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee (Q \vee \neg R)) \wedge \neg P \wedge Q$$

$$\Leftrightarrow \neg P \wedge Q$$

$$\Leftrightarrow \neg(P \vee \neg Q)$$

$$(f) \neg P \wedge \neg Q \wedge (\neg R \rightarrow P)$$

$$\Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \wedge (R \vee P)$$

$$\Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge P$$

$$\Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \wedge R \vee F$$

$$\Leftrightarrow \neg(P \vee Q \vee \neg R)$$

1.2.3 用化简联结词 $\leftrightarrow$ 的左边成右边的方法,证明以下是重言式:

$$(a) ((P \wedge Q) \rightarrow P) \leftrightarrow T$$

$$(b) \neg(\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg P) \leftrightarrow F$$

$$(c) (Q \rightarrow P) \wedge (\neg P \rightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow Q) \leftrightarrow P$$

$$(d) (P \rightarrow \neg P) \wedge (\neg P \rightarrow P) \leftrightarrow F$$

证明 (a) $((P \wedge Q) \rightarrow P)$

$$\Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \vee P$$

$$\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee P$$

$$\Leftrightarrow T$$

$$(b) \neg(\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg P)$$

$$\Leftrightarrow \neg(P \vee Q \vee \neg P)$$

$$\Leftrightarrow \neg T$$

$$\Leftrightarrow F$$

$$(c) (Q \rightarrow P) \wedge (\neg P \rightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow Q)$$

$$\Leftrightarrow (\neg Q \vee P) \wedge (P \vee Q) \wedge T$$

$$\Leftrightarrow P \vee (Q \wedge \neg Q)$$

$$\Leftrightarrow P$$

$$(d) (P \rightarrow \neg P) \wedge (\neg P \rightarrow P)$$

$$\Leftrightarrow \neg P \wedge P$$

$$\Leftrightarrow F$$

1.2.4 证明下列等价关系:

$$(a) P \rightarrow (Q \rightarrow P) \Leftrightarrow \neg P \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)$$

$$(b) (P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \vee R \rightarrow Q)$$

$$(c) \neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

$$(d) \neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$$

证明 (a) $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$

$$\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee P$$

$$\Leftrightarrow P \vee (\neg P \vee \neg Q)$$

$$\Leftrightarrow \neg P \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)$$

$$(b) (P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow Q)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee Q)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg R) \vee Q$$

$$\Leftrightarrow \neg(P \vee R) \vee Q$$

$$\Leftrightarrow P \vee R \rightarrow Q$$

$$(c) \neg(P \leftrightarrow Q)$$

$$\Leftrightarrow \neg((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$$

$$\Leftrightarrow \neg((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P))$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P)$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

$$\Leftrightarrow (P \vee \neg P) \wedge (P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee Q)$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$$

$$(d) \neg(P \rightarrow Q)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q)$$

$$\Leftrightarrow P \wedge \neg Q$$

1.2.5 使用恒等式证明下列各式，并写出与它们对偶的公式：

$$(a) (\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee \neg(\neg P \vee Q)) \Leftrightarrow P$$

$$(b) (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q)$$

$$(c) Q \vee \neg((\neg P \vee Q) \wedge P) \Leftrightarrow T$$

证明 (a) $(\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee \neg(\neg P \vee Q))$

$$\Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q))$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge (Q \vee \neg Q))$$

$$\Leftrightarrow P$$

对偶的公式为：

$$(\neg(\neg P \wedge \neg Q) \wedge \neg(\neg P \wedge Q))$$

$$(b) (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$$

$$\Leftrightarrow (P \vee (\neg Q \wedge Q)) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$$

$$\Leftrightarrow P \wedge (\neg P \vee \neg Q)$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg Q)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q)$$

对偶的公式为：

$$(P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

$$(c) Q \vee \neg((\neg P \vee Q) \wedge P)$$

$$\Leftrightarrow Q \vee \neg(Q \wedge P)$$

$$\Leftrightarrow Q \vee \neg Q \vee \neg P$$

$$\Leftrightarrow T \vee \neg P$$

$$\Leftrightarrow T$$

对偶的公式为：

$$Q \wedge \neg((\neg P \wedge Q) \vee P)$$

1.2.6 求出下列公式的最简等价式：

$$(a) ((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)) \wedge R$$

$$(b) P \vee \neg P \vee (Q \wedge \neg Q)$$

$$(c) (P \wedge (Q \wedge S)) \vee (\neg P \wedge (Q \wedge S))$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (a) & ((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)) \wedge R \\ & \Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee \neg P)) \wedge R \\ & \Leftrightarrow T \wedge R \\ & \Leftrightarrow R \end{aligned}$$

$$(b) P \vee \neg P \vee (Q \wedge \neg Q)$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow T \vee F \\ & \Leftrightarrow T \end{aligned}$$

$$(c) (P \wedge (Q \wedge S)) \vee (\neg P \wedge (Q \wedge S))$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow (P \vee \neg P) \wedge (Q \wedge S) \\ & \Leftrightarrow Q \wedge S \end{aligned}$$

1.2.7 证明下列蕴含式:

$$(a) P \wedge Q \Rightarrow (P \rightarrow Q)$$

$$(b) P \Rightarrow (Q \rightarrow P)$$

$$(c) (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \Rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$$

证明: (a) 方法 1: 只要证明 $P \wedge Q \rightarrow (P \rightarrow Q)$ 是永真式。

$$\begin{aligned} & P \wedge Q \rightarrow (P \rightarrow Q) \\ & \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \vee (\neg P \vee Q) \\ & \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg P \vee Q) \\ & \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee Q \\ & \Leftrightarrow T \end{aligned}$$

即为永真式, 故 $P \wedge Q \Rightarrow (P \rightarrow Q)$ 。

方法 2: 设 $P \wedge Q$ 为 T , 则 P 和 Q 为 T , 则 $P \rightarrow Q$ 为 T , 故 $P \wedge Q \Rightarrow (P \rightarrow Q)$ 。

方法 3: 设 $P \rightarrow Q$ 为 F , 则 P 为 T 且 Q 为 F , 则 $P \wedge Q$ 为 F , 故 $P \wedge Q \Rightarrow (P \rightarrow Q)$ 。

$$(b) \text{ 因为 } P \rightarrow (Q \rightarrow P)$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee P) \\ & \Leftrightarrow T \end{aligned}$$

$$\text{故 } P \Rightarrow (Q \rightarrow P)$$

$$(c) \text{ 因为 } (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee (\neg Q \vee R)) \vee (\neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee R)) \\ & \Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q) \vee \neg P \vee R \\ & \Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee ((P \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee \neg P)) \vee R \\ & \Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee \neg(Q \wedge P \wedge \neg R) \\ & \Leftrightarrow T \end{aligned}$$

$$\text{故 } (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \Rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$$

1.2.8 不构成真值表而证明下列蕴含式:

$$(a) P \rightarrow Q \Rightarrow P \rightarrow P \wedge Q$$

$$(b) (P \rightarrow Q) \rightarrow Q \Rightarrow P \vee Q$$

$$(c) ((P \vee \neg P) \rightarrow Q) \rightarrow ((P \vee \neg P) \rightarrow R) \Rightarrow (Q \rightarrow R)$$

$$(d) (Q \rightarrow (P \wedge \neg P)) \rightarrow (R \rightarrow (P \wedge \neg P)) \Rightarrow (R \rightarrow Q)$$

证法 1 (a) 设 $P \rightarrow Q$ 为 T , 则 P 为 F 或 Q 为 T 。若 P 为 F , 则 $P \rightarrow P \wedge Q$ 为 T ; 若 Q 为 T , 则 P 为 T 时 $Q \wedge P$ 为 T , 则 $P \rightarrow (P \wedge Q)$ 为 T , P 为 F 时 $P \rightarrow (P \wedge Q)$ 为 T 。故 $P \rightarrow Q \Rightarrow P \rightarrow P \wedge Q$ 。

$$(b) \text{ 因为 } ((P \rightarrow Q) \rightarrow Q) \rightarrow (P \vee Q)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee Q) \vee (P \vee Q)$$

$$\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \vee P \vee Q$$

$$\Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \vee P \vee Q$$

$$\Leftrightarrow T$$

故 $(P \rightarrow Q) \rightarrow Q \Rightarrow P \vee Q$

证法 2 (a) 设 $P \rightarrow P \wedge Q$ 为 F , 则 P 为 T , Q 为 F , 则 $P \rightarrow Q$ 为 F ,

故 $P \rightarrow Q \Rightarrow P \rightarrow P \wedge Q$

(b) 设 $P \vee Q$ 为 F , 则 P 为 F , Q 为 F , 则 $(P \rightarrow Q) \rightarrow Q$ 为 F ,

故 $(P \rightarrow Q) \Rightarrow P \vee Q$

(c) (略)。

(d) (略)。

1.2.9 (a) 与非运算符(又叫悉非(Sheffer)记号)用下述真值表定义, 可看出

$P \uparrow Q \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$, 试证明

(i) $P \uparrow P \Leftrightarrow \neg P$

(ii) $(P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q) \Leftrightarrow P \vee Q$

(iii) $(P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q) \Leftrightarrow P \wedge Q$

P	Q	$P \uparrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(b) 或非运算符(又叫皮尔斯(Peirce)箭头)用下述真值表定义, 它与 $\neg(P \vee Q)$ 逻辑等价。对下述每一式, 找出仅用 $\downarrow$ 表示的等价式。

(i) $\neg P$; (ii) $P \vee Q$; (iii) $P \wedge Q$ 。

P	Q	$P \vee Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

解 (a) (i) $P \uparrow P \Leftrightarrow \neg(P \wedge P) \Leftrightarrow \neg P$

(ii) $(P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q) \Leftrightarrow \neg P \uparrow \neg Q$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$$

$$\Leftrightarrow P \vee Q$$

$$\begin{aligned}
 \text{(iii)} \quad (P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q) &\Leftrightarrow \neg(P \uparrow Q) \\
 &\Leftrightarrow \neg(\neg(P \wedge Q)) \\
 &\Leftrightarrow P \wedge Q
 \end{aligned}$$

$$(b) \text{ (i)} \quad \neg P \Leftrightarrow \neg(P \vee P) \Leftrightarrow P \downarrow P$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad P \vee Q &\Leftrightarrow \neg(\neg(P \vee Q)) \\
 &\Leftrightarrow \neg(P \downarrow Q) \\
 &\Leftrightarrow (P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(iii)} \quad P \wedge Q &\Leftrightarrow \neg(\neg(P \wedge Q)) \\
 &\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q) \\
 &\Leftrightarrow \neg P \downarrow \neg Q \\
 &\Leftrightarrow (P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)
 \end{aligned}$$

1.2.10 $\sqsupset$ 和 $*$ 是具有两个运算对象的逻辑运算符, 如果 $P \sqsupset (Q * R)$ 和 $(P \sqsupset Q) * (P \sqsupset R)$ 逻辑等价, 那么说 $\sqsupset$ 在 $*$ 上可分配。

(a) 用真值表证明 $\wedge$ 和 $\vee$ 互相可分配。

(b) $\wedge$ 、 $\vee$ 和 $\rightarrow$ 对自己可分配吗?

(c) 数的加法和乘法对自己可分配吗?

解 (a) 作出 $P \wedge (Q \vee R)$ 和 $P \wedge Q \vee P \wedge R$; $P \vee Q \wedge R$ 和 $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ 的真值表即得证(表略)。

(b) $\wedge$ 和 $\vee$ 对自己可分配, $\rightarrow$ 对自己左可分配而右不可分配。

(c) 数的加法和乘法对自己不可分配。

1.2.11 对一个重言式使用代入规则后仍得重言式, 对一个偶然式和矛盾式, 使用代入规则后, 结果如何?

对一个重言式, 使用替换规则后是否仍得重言式? 对一个偶然式和矛盾式, 使用替换规则后, 结果如何?

解 偶然式使用代入规则后, 不一定是偶然式。例如 $P \vee Q$ 是偶然式, 当用 $\neg P$ 代 Q 时, 得公式 $P \vee \neg P$ 是重言式。

矛盾式使用代入规则后, 仍然是矛盾式。这是因为矛盾式之值不依赖于变元的值。

使用替换规则后重言式仍是重言式, 偶然式仍是偶然式, 矛盾式仍是矛盾式。

1.2.12 求出下列各式的代入实例:

(a) $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$; 用 $P \rightarrow Q$ 代 P , 用 $((P \rightarrow Q) \rightarrow R)$ 代 Q 。

(b) $((P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P))$; 用 Q 代 P , 用 $P \wedge \neg P$ 代 Q 。

解 (a) 代入实例为:

$$(((P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow (P \rightarrow Q)$$

(b) 代入实例为:

$$(Q \rightarrow P \wedge \neg P) \rightarrow (P \wedge \neg P \rightarrow Q)$$

1.3 范 式

1.3.1 对任一指派,为什么 m_i 和 m_j 不能同时为真?为什么 M_i 和 M_j 不能同时为假?这里 $i \neq j$ 。

解 因为 m_i 和 m_j 中至少有一变元互为否定,这样 $m_i \wedge m_j \Leftrightarrow F(i \neq j)$,所以对任一指派 m_i 和 m_j 不能同时为真。

因为 M_i 和 M_j 中至少有一变元互为否定,这样 $M_i \vee M_j \Leftrightarrow T(i \neq j)$,所以对任一指派 M_i 和 M_j 不能同时为假。

1.3.2 求下列各式的主合取范式:

(a) $P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$

(b) $P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \vee P \wedge \neg Q$

(c) $P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R$

解 (a) 设 A 为 $P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$ 。

方法1 作出 A 的真值表:

P	Q	R	$P \wedge Q \wedge R$	$\neg P \wedge Q \wedge R$	$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	A
0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	1

故 $A \Leftrightarrow M_1 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

方法2 先化简 A 为最简合取范式:

$$\begin{aligned} A &\Leftrightarrow Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R \\ &\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (Q \vee \neg R) \end{aligned}$$

再化为主合取范式:

$$\begin{aligned} A &\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee (R \wedge \neg R)) \wedge (\neg P \vee (Q \wedge \neg Q) \vee R) \\ &\quad \wedge ((P \wedge \neg P) \vee \neg Q \vee R) \wedge ((\neg P \wedge P) \vee Q \vee \neg R) \\ &\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \\ &\quad \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \\ &\Leftrightarrow (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \end{aligned}$$

$$\wedge(\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

方法3 可利用主合取范式与主析取范式的关系,直接求解。

$$(b) P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \vee P \wedge \neg Q$$

$$\Leftrightarrow (P \vee \neg P) \wedge Q \vee P \wedge \neg Q$$

$$\Leftrightarrow Q \vee P \wedge \neg Q$$

$$\Leftrightarrow P \vee Q$$

$$(c) P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$

$$\Leftrightarrow (P \vee \neg P) \wedge (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \wedge (Q \vee \neg P) \wedge (Q \vee Q) \wedge (Q \vee R)$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \wedge (Q \vee \neg P) \wedge (Q \wedge (Q \vee R))$$

$$\Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (P \vee Q) \wedge ((Q \vee \neg P) \wedge Q)$$

$$\Leftrightarrow (P \vee R) \wedge ((P \vee Q) \wedge Q)$$

$$\Leftrightarrow (P \vee R) \wedge Q$$

$$\Leftrightarrow (P \vee (Q \wedge \neg Q) \vee R) \wedge ((P \wedge \neg P) \vee Q \vee (R \wedge \neg R))$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$$

$$\wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$$

1.3.3 求下列各式的主析取范式和主合取范式:

$$(a) (\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (P \leftrightarrow \neg Q)$$

$$(b) P \vee (\neg P \rightarrow (Q \vee (\neg Q \rightarrow R)))$$

$$(c) (P \rightarrow Q \wedge R) \wedge (\neg P \rightarrow (\neg Q \wedge \neg R))$$

$$(d) P \wedge \neg Q \wedge S \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$

解 (a) 作出真值表:

P	Q	$\neg P \vee \neg Q$	$P \leftrightarrow \neg Q$	$(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (P \leftrightarrow \neg Q)$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1

由表可得主析取范式为:

$$P \wedge Q \vee P \wedge \neg Q \vee \neg P \wedge Q$$

主合取范式为:

$$P \vee Q$$

$$(b) P \vee (\neg P \rightarrow (Q \vee (\neg Q \rightarrow R)))$$

$$\Leftrightarrow P \vee (P \vee (Q \vee (Q \vee R)))$$

$$\Leftrightarrow P \vee Q \vee R$$

所以主析取范式为:

$$(P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$$

$$\vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

主合取范式为:

$$P \vee Q \vee R$$

$$(c) (P \rightarrow Q \wedge R) \wedge (\neg P \rightarrow (\neg Q \wedge \neg R))$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \wedge R) \wedge (P \vee \neg Q \wedge \neg R) \\
&\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg R) \\
&\Leftrightarrow (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \\
&\quad \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)
\end{aligned}$$

所以主析取范式为:

$$P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$$

主合取范式为:

$$\begin{aligned}
&(P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \\
&\wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \\
(d) &P \wedge \neg Q \wedge S \vee \neg P \wedge Q \wedge R \\
&\Leftrightarrow P \wedge \neg Q \wedge S \wedge (R \vee \neg R) \vee \neg P \wedge Q \wedge R \wedge (S \vee \neg S) \\
&\Leftrightarrow P \wedge \neg Q \wedge R \wedge S \vee P \wedge \neg Q \wedge \neg R \wedge S \vee \neg P \wedge Q \wedge R \wedge S \vee \neg P \wedge Q \wedge R \wedge \neg S \\
&\Leftrightarrow \Sigma(6, 7, 9, 11)
\end{aligned}$$

所以主析取范式为:

$$\Sigma(6, 7, 9, 11)$$

主合取范式为:

$$\pi(0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 12, 13, 14, 15)$$

1.4 联结词的扩充与归约

1.4.1 仅用 $\uparrow$ 表达 $P \rightarrow Q$; 再用 $\downarrow$ 表达它。

解 $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

$$\Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$$

$$\Leftrightarrow P \uparrow \neg Q$$

$$\Leftrightarrow P \uparrow (Q \uparrow Q)$$

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$$

$$\Leftrightarrow (P \downarrow P) \vee Q$$

$$\Leftrightarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q)$$

1.4.2 仅用 $\downarrow$ 表达 $P \uparrow Q$; 仅用 $\uparrow$ 表达 $P \downarrow Q$ 。

解 $P \uparrow Q \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$

$$\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$$

$$\Leftrightarrow (P \downarrow P) \vee (Q \downarrow Q)$$

$$\Leftrightarrow ((P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q))$$

$$P \downarrow Q \Leftrightarrow \neg(P \vee Q)$$

$$\Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$$

$$\Leftrightarrow (P \uparrow P) \wedge (Q \uparrow Q)$$

$$\Leftrightarrow ((P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow ((P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q))$$

1.4.3 记 $P \uparrow (Q \wedge \neg(R \downarrow P))$ 为 $A(P, Q, R)$, 求出它的对偶式 $A^*(P, Q, R)$, 再求

出 A 和 A^* 的仅含联结词 $\wedge, \vee, \neg$ 的等价式。

解 因 $\uparrow$ 与 $\downarrow$ 互为对偶, 所以 $A^*(P, Q, R)$ 为 $P \downarrow (Q \vee \neg(R \uparrow P))$ 。

$$\begin{aligned} A(P, Q, R) &\Leftrightarrow \neg(P \wedge (Q \wedge \neg(\neg(R \vee P)))) \\ &\Leftrightarrow \neg(P \wedge Q \wedge (R \vee P)) \\ &\Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \end{aligned}$$

$$A^*(P, Q, R) \Leftrightarrow \neg(P \vee Q)$$

1.4.4 试证明下列等价式:

$$\begin{aligned} \neg(P \uparrow Q) &\Leftrightarrow \neg P \downarrow \neg Q \\ \neg(P \downarrow Q) &\Leftrightarrow \neg P \uparrow \neg Q \end{aligned}$$

证明 $\neg(P \uparrow Q) \Leftrightarrow P \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q) \Leftrightarrow \neg P \downarrow \neg Q$

$$\neg(P \downarrow Q) \Leftrightarrow P \vee Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow \neg P \uparrow \neg Q$$

1.4.5 写出一个仅含 $\uparrow$ 且等价于 $P \wedge (Q \leftrightarrow R)$ 的公式来。

解 为减少书写, 记 $x \Leftrightarrow Q \uparrow (R \uparrow R)$, $y \Leftrightarrow R \uparrow (Q \uparrow Q)$ 。

$$\begin{aligned} P \wedge (Q \leftrightarrow R) &\Leftrightarrow P \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (\neg R \vee Q) \\ &\Leftrightarrow P \wedge \neg(Q \wedge \neg R) \wedge \neg(R \wedge \neg Q) \\ &\Leftrightarrow P \wedge (Q \uparrow (R \uparrow R)) \wedge (R \uparrow (Q \uparrow Q)) \\ &\Leftrightarrow P \wedge x \wedge y \\ &\Leftrightarrow P \wedge \neg \neg(x \wedge y) \\ &\Leftrightarrow P \wedge \neg(x \uparrow y) \\ &\Leftrightarrow P \wedge ((x \uparrow y) \uparrow (x \uparrow y)) \\ &\Leftrightarrow \neg \neg(P \wedge ((x \uparrow y) \uparrow (x \uparrow y))) \\ &\Leftrightarrow \neg(P \uparrow ((x \uparrow y) \uparrow (x \uparrow y))) \\ &\Leftrightarrow (P \uparrow ((x \uparrow y) \uparrow (x \uparrow y))) \uparrow (P \uparrow ((x \uparrow y) \uparrow (x \uparrow y))) \end{aligned}$$

本题说明仅用一种门电路(例如与非门)去实现某个数字电路, 虽是可能的, 但非常复杂, 且不经济。

1.4.6 试证明 $\{\vee\}$ 、 $\{\rightarrow\}$ 不是全功能联结词集合。

证明 因 $\{\wedge, \neg\}$ 是全功能集合, 要证明 $\{\vee\}$ 、 $\{\rightarrow\}$ 不是全功能联结词集合, 只需证明仅用 $\{\vee\}$ (或 $\{\rightarrow\}$) 不能表达出由 $\wedge$ 或 $\neg$ 联结的某些式子即可。

① 命题 P 经联结词 $\vee$ 反复运算只能得出 P , 不能得出 $\neg P$, 所以 $\{\vee\}$ 不是全功能集合。

② 命题 P 经联结词 $\rightarrow$ 反复运算只能得出 P 和 T , 不能得出 $P \wedge \neg P$ (即 F), 所以 $\{\rightarrow\}$ 不是全功能集合。

1.4.7 证明 $\{\neg, \rightarrow\}$ 、 $\{\rightarrow, T\}$ 是全功能联结词集合。

证明 因 $\{\vee, \neg\}$ 是全功能集合, 要证明 $\{\neg, \rightarrow\}$ (或 $\{\rightarrow, T\}$) 是全功能的, 只需证明联结词 $\vee$ 和 $\neg$ 能用 $\{\neg, \rightarrow\}$ (或 $\{\rightarrow, T\}$) 中的联结词表达。

① 因 $P \vee Q \Leftrightarrow \neg P \rightarrow Q$, 所以 $\{\neg, \rightarrow\}$ 是全功能的;

② $\neg P \Leftrightarrow T \rightarrow P$

$$P \vee Q \Leftrightarrow \neg \neg(P \vee Q)$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \neg \neg (\neg P \rightarrow Q) \\
&\Leftrightarrow \neg (\neg P \rightarrow Q) \\
&\Leftrightarrow \neg ((T \rightarrow P) \rightarrow Q) \\
&\Leftrightarrow T \rightarrow ((T \rightarrow P) \rightarrow Q)
\end{aligned}$$

所以, $\{\rightarrow, T\}$ 是全功能的。

1.4.8 证明 $\{\oplus, \neg\}$ 不是全功能联结词集合。

证明 设 $f(P, Q)$ 表示仅用命题变元 P 和 Q 及联结词 $\oplus, \neg$ 构成的任意命题公式, 现证明对 P, Q 的 4 种指派, $f(P, Q)$ 的真值只能是下表中的 8 种结果之一:

P	Q	$f(P, Q)$							
		1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	1	0	1

① 在未运算前, P 和 Q 的值属于表中结果 1 和 2, 即属 8 种结果之一。

② 以上 8 种结果的任意两种(包括自己对自己)经 $\oplus$ 运算, 仍得以上 8 种结果之一。

③ 以上 8 种结果的任一种经 $\neg$ 运算仍得以上 8 种结果之一。

所以, 对 P, Q 的 4 种指派, 经反复用 $\oplus$ 和 $\neg$ 运算只能得出以上 8 种结果之一, 即 $f(P, Q)$ 的真值只能是表中 8 种结果之一。但以上 8 种结果都是偶数个 1, 而 $P \vee Q$ (或 $P \wedge Q$) 的真值都是奇数个 1, 所以不能用 $f(P, Q)$ 表达 $P \vee Q$ (或 $P \wedge Q$), 故 $\{\oplus, \neg\}$ 不是全功能联结词集合。

1.4.9 证明联结词 $\uparrow$ 和 $\downarrow$ 是可交换的, 但不可结合。

证明 因为 $P \uparrow Q \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg(Q \wedge P) \Leftrightarrow Q \uparrow P$, $P \downarrow Q \Leftrightarrow \neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg(Q \vee P) \Leftrightarrow Q \downarrow P$, 故联结词 $\uparrow$ 和 $\downarrow$ 是可交换的。

另一方面, $T \uparrow (T \uparrow F)$ 的真值为 F , 而 $(T \uparrow T) \uparrow F$ 的真值为 T , 故 $\uparrow$ 不可结合。

又因为 $T \downarrow (T \downarrow F)$ 的真值为 F , 而 $(T \downarrow T) \downarrow F$ 的真值为 T , 故 $\downarrow$ 不可结合。

1.4.10 证明联结词 $\oplus$ 可交换, 可结合, 且 $\wedge$ 在 $\oplus$ 上可分配。

证明 因为 $P \oplus Q \Leftrightarrow \neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \neg(Q \leftrightarrow P) \Leftrightarrow Q \oplus P$ 故 $\oplus$ 可交换。

因为 $P \oplus (Q \oplus R)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow P \wedge \neg(Q \oplus R) \vee \neg P \wedge (Q \oplus R) \\
&\Leftrightarrow P \wedge (\neg Q \wedge \neg R \vee Q \wedge R) \vee \neg P \wedge (Q \wedge \neg R \vee \neg Q \wedge R) \\
&\Leftrightarrow P \wedge \neg Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge \neg R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \\
&\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \vee \neg P \wedge Q) \wedge \neg R \vee (P \wedge Q \vee \neg P \wedge \neg Q) \wedge R \\
&\Leftrightarrow (P \oplus Q) \wedge \neg R \vee \neg(P \oplus Q) \wedge R \\
&\Leftrightarrow (P \oplus Q) \oplus R
\end{aligned}$$

故 $\oplus$ 可结合。

因为 $(P \wedge Q) \oplus (P \wedge R)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \neg(P \wedge R) \vee \neg(P \wedge Q) \wedge P \wedge R \\
&\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge \neg Q \wedge R
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge (Q \oplus R)$$

故 $\wedge$ 在 $\oplus$ 上可分配。

1.4.11 证明联结词 $\leftrightarrow$ 可交换, 可结合, 且 $\vee$ 在 $\leftrightarrow$ 上可分配。

证明 因为 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow Q \leftrightarrow P$, 故可交换。

因为 $P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$

$$\Leftrightarrow P \leftrightarrow (Q \wedge R \vee \neg Q \wedge \neg R)$$

$$\Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R \vee \neg Q \wedge \neg R) \vee \neg P \wedge \neg (Q \wedge R \vee \neg Q \wedge \neg R)$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge \neg Q \wedge \neg R \vee \neg P \wedge Q \wedge \neg R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R$$

$$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge Q \vee \neg P \wedge \neg Q) \leftrightarrow R$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge Q \vee \neg P \wedge \neg Q) \wedge R \vee \neg (P \wedge Q \vee \neg P \wedge \neg Q) \wedge \neg R$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge \neg Q \wedge \neg R \vee \neg P \wedge Q \wedge \neg R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R$$

所以 $P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R) \Leftrightarrow (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R$, 故可结合。

因为 $(P \vee Q) \leftrightarrow (P \vee R)$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \vee \neg (P \vee Q) \wedge \neg (P \vee R)$$

$$\Leftrightarrow P \vee Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$$

$$\Leftrightarrow P \vee Q \wedge R \vee \neg Q \wedge \neg R$$

$$\Leftrightarrow P \vee (Q \leftrightarrow R)$$

即 $P \vee (Q \leftrightarrow R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \leftrightarrow (P \vee R)$, 故 $\vee$ 在 $\leftrightarrow$ 上可分配。

1.5 推理规则和证明方法

1.5.1 用真值表证明表 1.5-1 给出的下列推理规则的重言式形式都是重言式:

(a) 拒取式。

(b) 析取三段论。

(c) 建设性二难推理。

(d) 破坏性二难推理。

证明 (a) 拒取式的重言式形式为 $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$ 。设 $A \Leftrightarrow \neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow \neg P$, 只需用真值表证明 A 为重言式。真值表构造如下:

P	Q	$\neg Q$	$P \rightarrow Q$	$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)$	$\neg P$	A
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1

从表中看出: 对 P, Q 的任意指派, A 真值总为 1, 因而为重言式。

(b) (略), (c) (略), (d) (略)。

1.5.2 用真值表技术证明下述论证的有效性, 其中 $H_1, H_2, \dots$ 是前提, C 是结论:

(a) $H_1: P \rightarrow Q, C: P \rightarrow P \wedge Q$

(b) $H_1: \neg P \vee Q, H_2: \neg(Q \wedge \neg R), H_3: \neg R, C: \neg P$

证明 (a) 论证为 $H_1 \Rightarrow C$, 即 $(P \rightarrow Q) \Rightarrow (P \rightarrow P \wedge Q)$ 。设 $A \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow P \wedge Q)$ 。只需用真值表证明 A 为重言式。真值表构造如下:

P	Q	$P \rightarrow Q$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow P \wedge Q$	A
0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1

从表中可得 A 为重言式。

(b) 论证为 $H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \Rightarrow C$, 即 $(\neg P \vee Q) \wedge \neg(Q \wedge \neg R) \wedge \neg R \Rightarrow \neg P$ 。设 $A: H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \rightarrow C$ 。构造 A 的真值表:

P	Q	R	H_1	H_2	H_3	C	$H_1 \wedge H_2 \wedge H_3$	A
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0	0	1

由表可得 A 为重言式, 因而论证是有效的。

1.5.3 $H_1, H_2, \dots$ 是前提, C 是结论, 用真值表判断下列结论是否有效:

(a) $H_1: P \rightarrow Q, H_2: \neg Q, C: P$

(b) $H_1: P \vee Q, H_2: P \rightarrow R, H_3: Q \rightarrow R, C: R$

(c) $H_1: P \rightarrow (Q \rightarrow R), H_2: P \wedge Q, C: R$

(d) $H_1: \neg P, H_2: P \vee Q, C: P \wedge Q$

证明 (a) 设 $A: H_1 \wedge H_2 \rightarrow C$, 作出 A 的真值表如下:

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg Q$	$H_1 \wedge H_2$	A
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	1

由表可得 A 不是重言式, 故结论无效。

(b) 设 $A: H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \rightarrow C$, 作 A 的真值表:

P	Q	R	H_1	H_2	H_3	$H_1 \wedge H_2 \wedge H_3$	A
0	0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

由表可得 A 是重言式，故结论有效。

(c) 作出真值表可得结论有效(表略)。

(d) 结论无效(表略)。

1.5.4 给出一个指派，证明以下结论是非有效的：

(a) 前提 $A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow (C \wedge D), C \leftrightarrow (A \vee E), A \vee E$ ，结论 $A \wedge E$ 。

(b) 前提 $A \leftrightarrow (B \rightarrow C), B \leftrightarrow (\neg A \vee \neg C), C \leftrightarrow (A \vee \neg B), B$ ，结论 $A \vee C$ 。

证明 (a) A, B, C, D 的指派均为 T ， E 的指派为 F ，则前提的真值为 T ，但结论的真值为 F ，所以结论无效。

(b) A, C 均指派为 F ， B 指派为 T ，则各前提真值为 T ，但结论真值为 F ，所以结论无效。

1.5.5 对下列每一个前提集合，列出能得到的恰当结论和应用于这一情况的推理规则。

(a) 我是肥的或者瘦的，我无疑不是瘦的。

(b) 如果我跑，我喘气。我没有喘气。

(c) 如果他做这个事，那么他的手是脏的。他的手是脏的。

(d) 天气是晴朗或阴暗，天气晴朗使我愉快而天气阴暗使我烦恼。

(e) 如果考试及格了，那么我很高兴。如果我很高兴，那么我的饭量增加。我的饭量减少。

解 (a) 设 P ：我是肥的， Q ：我是瘦的，由析取三段论可推出结论 P ：我是肥的。

我是肥的或者瘦的	$P \vee Q$
我无疑不是瘦的	$\neg Q$
我是肥的	$\therefore P$

(b) 设 P ：我跑， Q ：我喘气，由拒取式可推出结论 $\neg P$ ：我没有跑。

如果我跑，我喘气	$P \rightarrow Q$
我没有喘气	$\neg Q$
我没有跑	$\therefore \neg P$

(c) 除前提本身外，本题不能得出恰当的结论。

(d) 设 P ：天气是晴朗的， Q ：天气是阴暗的， R ：我愉快， S ：我烦恼。由构造性二难推理可推出结论 $R \vee S$ ：我愉快或烦恼。

天气是晴朗或阴暗	$P \vee Q$
天气晴朗使我愉快而	$(P \rightarrow R) \wedge$
天气阴暗使我烦恼	$(Q \rightarrow S)$
我愉快或烦恼	$\therefore R \vee S$

(e) 设 P ：我考试及格， Q ：我很高兴， R ：我的饭量增加。由前提三段论和拒取式可推出结论 $\neg P$ ：我考试没有及格。

如果考试及格了，那么我很高兴	$P \rightarrow Q$
如果我很高兴，那么我的饭量增加	$Q \rightarrow R$
如果考试及格了，那么我的饭量增加	$\therefore P \rightarrow R$
我的饭量减少	$\neg R$
考试没有及格	$\therefore \neg P$

1.5.6 对下述每一论证构造一个证明，给出所有必须增加的断言，指出用于每一步

的推理规则。

(a) 煤或大米将涨价，不是这种情况。如果铁路中断运输，那么煤将涨价。因此，铁路不会中断运输。

(b) 从语句“今天下雨或明天后天都下雨”和“明天不下雨或后天不下雨而今天下雨”可推出“今天下雨”。

(c) 如果李敏来通信工程学院，若王军不生病，则王军一定去看望李敏。如果李敏出差到南京，那么李敏一定来通信工程学院。王军没有生病。所以，如果李敏出差到南京，王军一定去看望李敏。

证明 (a) 设 P : 煤将涨价, Q : 大米将涨价, R : 铁路中断运输。论证为: $\neg(P \vee Q), R \rightarrow P \Rightarrow \neg R$ 。其证明为:

步骤	断言	根据
1	$\neg(P \vee Q)$	P
2	$\neg P \wedge \neg Q$	T, 1, E_{10}
3	$\neg P$	T, 2, I_2
4	$R \rightarrow P$	P
5	$\neg R$	T, 3, 4, I_3

(b) 设 P : 今天下雨, Q : 明天下雨, R : 后天下雨。论证为: $P \vee Q \wedge R, \neg Q \vee \neg R \wedge P \Rightarrow P$ 。其证明为:

步骤	断言	根据
1	$\neg P$	P, 假设前提
2	$P \vee (Q \wedge R)$	P
3	$Q \wedge R$	T, 1, 2, I_3
4	Q	T, 3, I_2
5	$\neg Q \vee \neg R \wedge P$	P
6	$\neg R \wedge P$	T, 4, 5, I_3
7	P	T, 6, I_2
8	$P \wedge \neg P$	T, 1, 7, 合取式, 矛盾

(c) 设 P : 李敏来通信工程学院, Q : 王军不生病, R : 王军去看望李敏, S : 李敏出差到南京。论证为: $P \rightarrow (Q \rightarrow R), S \rightarrow P, Q \Rightarrow S \rightarrow R$ 。其证明为:

步骤	断言	根据
1	S	P, 附加前提
2	$S \rightarrow P$	P
3	P	T, 1, 2, I_3
4	Q	P
5	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	P
6	$Q \rightarrow R$	T, 3, 5, I_3
7	R	T, 4, 6, I_3
8	$S \rightarrow R$	CP 规则

1.5.7 补充所缺的断言去证实下述论证:

$$\begin{array}{c}
 P \wedge Q \rightarrow R \wedge S \\
 (T \rightarrow Q) \wedge (S \rightarrow U) \\
 (W \rightarrow P) \wedge (T \rightarrow U) \\
 \neg R \\
 \hline
 \therefore W \rightarrow \neg T
 \end{array}$$

证明

步骤	断言	根据
1	$\neg R$	P
2	$\neg R \vee \neg S$	T, 1, I ₁
3	$\neg(R \wedge S)$	T, 2, E ₁₁
4	$P \wedge Q \rightarrow R \wedge S$	P
5	$\neg(P \wedge Q)$	T, 3, 4, I ₄
6	$\neg P \vee \neg Q$	T, 5, E ₁₁
7	$(W \rightarrow P) \wedge (T \rightarrow U)$	P
8	$W \rightarrow P$	T, 7, I ₂
9	W	P, 附加前提
10	P	T, 8, 9, I ₃
11	$\neg \neg P$	T, 10, E ₁
12	$\neg Q$	T, 6, 11, I ₅
13	$(T \rightarrow Q) \wedge (S \rightarrow U)$	P
14	$T \rightarrow Q$	T, 13, I ₂
15	$\neg T$	T, 12, 14, I ₁
16	$W \rightarrow \neg T$	CP 规则

1.5.8 确定下列论证哪些是有效的, 为有效论证构造证明。对非有效论证, 表明为什么结论不能从前提得出。

(a)	$ \begin{array}{c} A \wedge B \\ A \rightarrow C \\ \hline \therefore C \wedge B \end{array} $	(b)	$ \begin{array}{c} A \vee B \\ A \rightarrow C \\ \hline \therefore C \vee B \end{array} $
(c)	$ \begin{array}{c} A \rightarrow B \\ A \rightarrow C \\ \hline \therefore C \rightarrow B \end{array} $	(d)	$ \begin{array}{c} A \rightarrow B \vee C \\ D \rightarrow \neg C \\ B \rightarrow \neg A \\ A \\ D \\ \hline \therefore B \wedge \neg B \end{array} $

证明 (a) 论证有效。证明如下:

步骤	断言	根据
1	$A \wedge B$	P
2	A	T, 1, I ₂
3	$A \rightarrow C$	P

4	C	$T, 2, 3, I_3$
5	B	$T, 1, I_2$
6	$C \wedge B$	$T, 4, 5, \text{合取式, 矛盾}$

(b) 论证有效。证明如下：

步骤	断言	根据
1	$\neg(C \vee B)$	P, 假设前提
2	$\neg C \wedge \neg B$	$T, 1, E_{10}$
3	$\neg C$	$T, 2, I_2$
4	$A \rightarrow C$	P
5	$\neg A$	$T, 3, 4, I_4$
6	$A \vee B$	P
7	B	$T, 5, 6, I_6$
8	$\neg B$	$T, 2, I_2$
9	$B \wedge \neg B$	$T, 7, 8, \text{合取式, 矛盾}$

(c) 论证非有效。当 A, B 真值均为 F, C 真值为 T 时, 前提 $A \rightarrow B$ 和 $A \rightarrow C$ 为真, 但结论 $C \rightarrow B$ 为假。

(d) 论证有效。证明如下：

步骤	断言	根据
1	D	P
2	$D \rightarrow \neg C$	P
3	$\neg C$	$T, 1, 2, I_3$
4	A	P
5	$A \rightarrow B \vee C$	P
6	$B \vee C$	$T, 4, 5, I_5$
7	B	$T, 3, 6, I_5$
8	$B \rightarrow \neg A$	P
9	$A \rightarrow \neg B$	$T, 8, E_{24}$
10	$\neg B$	$T, 4, 9, I_3$
11	$B \wedge \neg B$	$T, 7, 10, \text{合取式, 矛盾}$

1.5.9 确定下列哪些是有效论证, 对有效论证构造证明。对非有效论证描述其谬误。

(a) 如果今天是星期二, 那么我有一次计算方法测验或物理测验。如果物理老师生病, 那么没有物理测验。今天是星期二并且物理老师生病, 所以, 我有一次计算方法测验。

(b) 如果 $f(x)$ 是三角函数, 那么 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上连续。 $|f(x)| \leq 1$ 的必要条件是 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上连续。所以, 如果 $f(x)$ 是三角函数, 那么若 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上连续, 则 $|f(x)| \leq 1$ 。

(c) 如果张小三的手沾满了鲜血, 那么他杀了人, 张小三手很清洁。所以, 张小三没有杀人。

证明 (a) 该论证有效。证明如下：

设 P : 今天是星期二, Q : 我有一次计算方法测验, R : 我有物理测验, S : 物理老师生

病。论证为： $P \rightarrow Q \vee R, S \rightarrow \neg R, P \wedge S \Rightarrow Q$ 。

步骤	断言	根据
1	$P \wedge S$	P
2	P	T, 1, I ₂
3	$P \rightarrow Q \vee R$	P
4	$Q \vee R$	T, 2, 3, I ₃
5	S	T, 1, I ₂
6	$S \rightarrow \neg R$	P
7	$\neg R$	T, 5, 6, I ₃
8	Q	T, 4, 7, I ₅

(b) 该论证非有效。解释如下：

设 $P: f(x)$ 是三角函数, $Q: f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上连续, $R: |f(x)| \leq 1$ 。论证为： $P \rightarrow Q, R \rightarrow Q \Rightarrow P \wedge Q \rightarrow R$ 。当 P, Q 真值均取 T, R 真值取 F , 则 $P \rightarrow Q, R \rightarrow Q$ 为真, 而 $P \wedge Q \rightarrow R$ 为假。故论证非有效。

(c) 该论证非有效。解释如下：

设 P : 张小三的手沾满了鲜血, Q : 张小三杀了人。论证为： $P \rightarrow Q, \neg P \Rightarrow \neg Q$ 。当 P 的真值为 F, Q 真值为 T , 则 $P \rightarrow Q, \neg P$ 的真值均为 T , 但 $\neg Q$ 的真值为 F 。故论证非有效, 犯了否定前件的错误。

1.5.10 仅使用 $E_1, E_5, E_8, E_{18}, E_{21}, I_2$ 证明 $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$ 。

证明 $\neg P \wedge (P \vee Q)$

$\Leftrightarrow \neg P \wedge P \vee \neg P \wedge Q$	E_8
$\Leftrightarrow F \vee \neg P \wedge Q$	E_{21}
$\Leftrightarrow \neg P \wedge Q \vee F$	E_4
$\Leftrightarrow \neg P \wedge Q$	E_{18}
$\Leftrightarrow Q \wedge \neg P$	E_5
$\Rightarrow Q$	I_2

$\therefore \neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$

1.5.11 证明下列论证的有效性：

- (a) $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C), \neg(B \wedge C), D \vee A$ 推得 D
- (b) $P \rightarrow Q, (\neg Q \vee R) \wedge \neg R, \neg(\neg P \wedge S)$ 推得 $\neg S$
- (c) $P \wedge Q \rightarrow R, \neg R \vee S, \neg S$ 推得 $\neg P \vee \neg Q$
- (d) $B \wedge C, (B \leftrightarrow C) \rightarrow (H \vee G)$ 推得 $G \vee H$
- (e) $(P \rightarrow Q) \rightarrow R, R \wedge S, Q \wedge T$ 推得 R

证明 (a) 用反证法。

1	$\neg D$	P 假设前提
2	$D \vee A$	P
3	A	T, 1, 2, I ₅
4	$(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$	P
5	$A \rightarrow B$	T, 4, I ₂

6	B	$T, 3, 5, I_3$
7	$A \rightarrow C$	$T, 4, I_2$
8	C	$T, 3, 7, I_3$
9	$B \wedge C$	$T, 6, 8, \text{合取式}$
10	$\neg(B \wedge C)$	P
11	$(B \wedge C) \wedge \neg(B \wedge C)$	$T, 9, 10, \text{合取式, 矛盾}$
(b) 1	$(\neg Q \vee R) \wedge \neg R$	P
2	$\neg Q \wedge \neg R \vee R \wedge \neg R$	$T, 1, E_8$
3	$\neg Q \wedge \neg R \vee F$	$T, 2, E_{21}$
4	$\neg Q \wedge \neg R$	$T, 3, E_{18}$
5	$\neg Q$	$T, 4, I_2$
6	$P \rightarrow Q$	P
7	$\neg P$	$T, 5, 6, I_4$
8	$\neg(\neg P \wedge S)$	P
9	$\neg\neg P \vee \neg S$	$T, 8, E_{11}$
10	$P \vee \neg S$	$T, 9, E_i$
11	$\neg S$	$T, 7, 10, I_5$
(c) 1	$\neg S$	P
2	$\neg R \vee S$	P
3	$\neg R$	$T, 1, 2, I_5$
4	$P \wedge Q \rightarrow R$	P
5	$\neg(P \wedge Q)$	$T, 3, 4, I_4$
6	$\neg P \vee \neg Q$	$T, 5, E_{11}$
(d) 1	$B \wedge C$	P
2	B	$T, 1, I_2$
3	C	$T, 1, I_2$
4	$B \vee \neg C$	$T, 2, I_1$
5	$C \vee \neg B$	$T, 3, I_1$
6	$(B \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg B)$	$T, 4, 5, \text{合取式}$
7	$B \leftrightarrow C$	$T, 2, 3, E_{14}, E_{15}$
8	$(B \leftrightarrow C) \rightarrow (H \vee G)$	P
9	$H \vee G$	$T, 4, 5, I_2$
10	$G \vee H$	$T, 6, E_4$
(e) 1	$R \wedge S$	P
2	R	$T, 1, I_2$

1.5.12 证明下列结论:

(a) $\neg P \vee Q, \neg Q \vee R, R \rightarrow S \Rightarrow P \rightarrow S$

(b) $P \rightarrow Q \Rightarrow P \rightarrow P \wedge Q$

(c) $P \vee Q \rightarrow R \Rightarrow P \wedge Q \rightarrow R$

(d) $P \rightarrow (Q \rightarrow R), Q \rightarrow (R \rightarrow S) \Rightarrow P \rightarrow (Q \rightarrow S)$

证明 (a)

1	P	P 假设前提
2	$\neg P \vee Q$	P
3	Q	T, 1, 2, I_5
4	$\neg Q \vee R$	P
5	R	T, 3, 4, I_5
6	$R \rightarrow S$	P
7	S	T, 5, 6, I_3
8	$P \rightarrow S$	CP 规则
(b) 1	P	P 附加前提
2	$P \rightarrow Q$	P
3	Q	T, 1, 2, I_3
4	$P \wedge Q$	T, 1, 3, 合取式
5	$P \rightarrow P \wedge Q$	CP
(c) 1	$P \wedge Q$	P 附加前提
2	P	T, 1, I_2
3	$P \vee Q$	T, 2, I_1
4	$P \vee Q \rightarrow R$	P
5	R	T, 3, 4, I_3
6	$P \wedge Q \rightarrow R$	CP
(d) 1	P	P 假设前提
2	Q	P 假设前提
3	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	P
4	$Q \rightarrow R$	T, 1, 3, I_3
5	R	T, 2, 4, I_3
6	$Q \rightarrow (R \rightarrow S)$	P
7	$R \rightarrow S$	T, 2, 6, I_3
8	S	T, 5, 7, I_3
9	$Q \rightarrow S$	CP
10	$P \rightarrow (Q \rightarrow S)$	CP

1.5.13 试说明“从假的前提出发，能证明任意命题”。

解 设 A 是任意命题， F 是假的前提，因此 $F \Rightarrow A$ 恒成立，按定义 1.4-1， A 是 F 的有效结论，即从 F 推出 A 是正确的。因此从假的前提能证明任意命题。

1.5.3 小节例 10(b) 是本题的另一种解法。

1.5.14 证明下列前提集合是非一致的。

(a) $P \rightarrow Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow \neg R, P$ ，由此证明

$$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow \neg R) \wedge P \Rightarrow M$$

(b) $A \rightarrow (B \rightarrow C), D \rightarrow (B \wedge \neg C), A \wedge D$ ，由此证明

$$[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \wedge [D \rightarrow (B \wedge \neg C)] \wedge (A \wedge D) \Rightarrow I$$

证明 (a)

1	P	P
2	$P \rightarrow Q$	P
3	Q	T, 1, 2, I_3
4	$Q \rightarrow \neg R$	P
5	$\neg R$	T, 3, 4, I_3
6	$P \rightarrow R$	P
7	$\neg P$	T, 5, 6, I_4
8	$P \wedge \neg P$	T, 1, 7, 合取式

至此证明了前提集合是非一致的。

9	F	T, 8, E_{21}
10	$F \vee M$	T, 9, I_1
11	M	T, 10, E_{18}

故 $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow \neg R) \wedge R \Rightarrow M$ 有效。

(b) 1	$A \wedge D$	P
2	A	T, 1, I_2
3	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	P
4	$B \rightarrow C$	T, 2, 3, I_3
5	D	T, 1, I_2
6	$D \rightarrow (B \wedge \neg C)$	P
7	$B \wedge \neg C$	T, 5, 6, I_3
8	B	T, 7, I_2
9	C	T, 4, 8, I_3
10	$\neg C$	T, 7, I_2
11	$C \wedge \neg C$	T, 9, 10, 合取式

至此证明了前提集合是非一致的。

12	F	T, 11, E_{21}
13	$F \vee I$	T, 12, I_1
14	I	T, 13, E_{18}

故 $[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \wedge [D \rightarrow (B \wedge \neg C)] \wedge (A \wedge D) \Rightarrow I$ 有效。

1.5.15 证明下列各式的有效性:

(a) $R \rightarrow \neg Q, R \vee S, S \rightarrow \neg Q, P \rightarrow Q$ 推得 $\neg P$ 。

(b) $S \rightarrow \neg Q, S \vee R, \neg R, \neg R \leftrightarrow Q$ 推得 $\neg P$ 。

(c) $\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg(R \vee S), ((Q \rightarrow P) \vee \neg R), R$ 推得 $P \leftrightarrow Q$ 。

证明 (a)

1	P	P 假设前提
2	$P \rightarrow Q$	P
3	Q	T, 1, 2, I_3

4	$R \rightarrow \neg Q$	P
5	$\neg R$	T, 3, 4, I ₁
6	$S \rightarrow \neg Q$	P
7	$\neg S$	T, 3, 6, I ₁
8	$\neg R \wedge \neg S$	T, 5, 7, 合取式
9	$\neg(R \vee S)$	T, 8, E ₁₀
10	$R \vee S$	P
11	$(R \vee S) \wedge \neg(R \vee S)$	矛盾。
(b) 1	$\neg R$	P
2	$\neg R \leftrightarrow Q$	P
3	$(\neg R \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow \neg R)$	T, 2, E ₁₅
4	$\neg R \rightarrow Q$	T, 3, I ₂
5	Q	T, 1, 2, I ₃
6	$S \rightarrow \neg Q$	P
7	$\neg S$	T, 3, 4, I ₁
8	$S \vee R$	P
9	R	T, 5, 6, I ₁
10	$R \wedge \neg R$	T, 1, 7, 合取式

这说明前提集合是非一致的, 故可推出任意结论, 也可推得 $\neg P$ 。

(c) 1	R	P
2	$R \vee S$	T, 1, I ₁
3	$\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg(R \vee S)$	P
4	$P \rightarrow Q$	T, 2, 3, I ₄
5	$(Q \rightarrow P) \vee \neg R$	P
6	$Q \rightarrow P$	T, 1, 5, I ₁
7	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	T, 4, 6, 合取式
8	$P \leftrightarrow Q$	T, 7, E ₁₆

1.6 谓词和量词

1.6.1 下列表达式哪些是命题?

(a) $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \wedge R$

(b) $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \wedge \exists xS(x)$

(c) $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \wedge S(x)$

解 (a)、(b)是命题, (c)不是命题。

1.6.2 求下列各式的真值

(a) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$, 其中 $P(x): x=1, Q(x): x=2$, 个体域是 $\{1, 2\}$ 。

(b) $\forall x(P \rightarrow Q(x)) \vee R(a)$, 其中 $P: 3 > -2, Q(x): x \leq 3, R(x): x > 5, a: 3$, 个体域

是 $\{-2, 3, 5, 6\}$ 。

(c) $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge T$, 其中 $P(x): x > 1, Q(x): x = 1, T$ 是任意永真式, 个体域是 $\{1\}$ 。

解 (a) $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (P(1) \vee Q(1)) \wedge (P(2) \vee Q(2))$ 。因为 $P(1)$ 为 $T, Q(1)$ 为 $F, P(2)$ 为 $F, Q(2)$ 为 T , 故 $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (T \vee F) \wedge (F \vee T) \Leftrightarrow T$ 。

(b) $\forall x(P \rightarrow Q(x)) \vee R(a) \Leftrightarrow (P \rightarrow Q(-2)) \wedge (P \rightarrow Q(3)) \wedge (P \rightarrow Q(5)) \wedge (P \rightarrow Q(6)) \vee R(3)$ 。因为 P 为 $T, Q(5)$ 为 F , 所以 $\forall x(P \rightarrow Q(x))$ 为 F , 又 $R(3)$ 为 F , 故 $\forall x(P \rightarrow Q(x)) \vee R(a) \Leftrightarrow F \vee F \Leftrightarrow F$ 。

(c) 因为 $P(1)$ 为 $F, Q(1)$ 为 T , 所以 $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$ 是 T , 故 $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge T \Leftrightarrow T \wedge T \Leftrightarrow T$ 。

1.6.3 设谓词 $S(x, y, z)$ 表示“ $x - y = z$ ”, 谓词 $M(x, y, z)$ 表示“ $xy = z$ ”, 论述域是整数, 用以上谓词表示下述断言:

- (a) 对每一 x 和 y , 有一 z , 使 $x - y = z$ 。
- (b) 对每一 x 和 y , 有一 z , 使 $x - z = y$ 。
- (c) 从任何整数减去 0, 其结果是原整数。
- (d) 对所有 x , 对所有 $y, xy = y$ 。
- (e) 存在一 x , 对一切 $y, xy = y$ 。

解 (a) $\forall x \forall y \exists z S(x, y, z)$

(b) $\forall x \forall y \exists z S(x, z, y)$

(c) $\forall x S(x, 0, x)$

(d) $\forall x \forall y M(x, y, y)$

(e) $\exists x \forall y M(x, y, y)$

1.6.4 如果论述域是整数 I , 确定下列命题哪些是真。题中 $\exists! xP(x)$ 表示“存在唯一的 x 使 $P(x)$ 是真”, 是常用的第三个量词, 但它可用已有的两个量词表达出来。

- (a) $\forall x \exists y (x \cdot y = 1)$
- (b) $\forall x \exists! y (x + y = 0)$
- (c) $\exists y \forall x (x + y = 1)$
- (d) $\exists y \forall x (x \cdot y = x)$

解 (a)、(c) 为假, (b)、(d) 为真。

1.6.5 论述域是整数, 对下列每一个断言找出谓词 P 使蕴含式是假。

- (a) $\forall x \exists! y P(x, y) \rightarrow \exists! y \forall x P(x, y)$
- (b) $\exists! y \forall x P(x, y) \rightarrow \forall x \exists! y P(x, y)$

解 (a) 谓词 $P(x, y): x + y = 0$

(b) 谓词 $P(x, y): |x| \geq |y|$

1.6.6 指定一个论述域使下列命题是真。要使指定的论述域是尽可能大的整数的一个子集。

- (a) $\forall x (x > 0)$
- (b) $\forall x (x = 5)$
- (c) $\forall y \exists x (x + y = 3)$

(d) $\exists y \forall x (x+y < 0)$

解 (a) I_+

(b) 集合 $\{5\}$

(c) 整数集

(d) 设 a 为任一确定的正整数, 取 $S = \{x | x \in I \wedge x < a\}$, 则 S 为所求, 但没有最大的论述域。

1.6.7 考虑论述域是整数 I 。

(a) 不管变元 x 是受约束于 $\forall$ 或 $\exists$, 找出一谓词 $P(x)$, 使它为假。

(b) 不管变元 x 是受约束于 $\forall$ 或 $\exists$, 找出一谓词 $P(x)$, 使它为真。

(c) 不管变元 x 是受约束于 $\forall$ 、 $\exists$ 或 $\exists!$, 使谓词 $P(x)$ 为真, 这可能吗? 证明你的答案是正确的。

解 (a) 谓词 $P(x): x^2 < 0$ 。

(b) 谓词 $P(x): x \cdot 0 = 0$ 。

(c) 不可能。因为若存在谓词, 使 $\forall x P(x)$, $\exists! P(x)$ 为真, 则因论述域是整数 I , 所以由 $\forall x P(x)$ 为真可得 $P(1)$, $P(2)$ 为真, 这说明 $\exists! P(x)$ 不为真。可见这样的谓词不存在。

1.6.8 设 P 是任意谓词, 论述域是 $\{1, 2, 3\}$, 命题 $\exists! x P(x)$ 的真值等于命题 $P(1) \oplus P(2) \oplus P(3)$ 的真值吗?

解 不相等。例如: $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ 全为真时, $\exists! x P(x)$ 是假, 而 $P(1) \oplus P(2) \oplus P(3)$ 是真。

1.6.9 设论述域是自然数, $P(x, y, z)$ 表示“ $x+y=z$ ”, $L(x, y)$ 表示“ $x < y$ ”, 用逻辑符表示下述断言:

(a) 对每一 x 和 y , 有一个 z , 使 $x+y=z$ 。

(b) 对所有 x , $x+0=x$ 。

(c) 没有 x 小于 0。

(d) 0 并非小于一切 x 。

(e) 4 加 3 得 7。

解 (a) $\forall x \forall y \exists z P(x, y, z)$

(b) $\forall x P(x, 0, x)$

(c) $\neg \exists x L(x, 0)$

(d) $\neg \forall x L(0, x)$

(e) $P(4, 3, 7)$

1.6.10 将苏格拉底论证符号化。

解 设 $M(x)$: x 是人, $D(x)$: x 是要死的, a : 苏格拉底。则苏格拉底论证符号化为:

所有的人总是要死的 $\forall x (M(x) \rightarrow D(x))$

苏格拉底是人 $M(a)$

所以苏格拉底是要死的 $\therefore D(a)$

1.6.11 设 $P(x, y, z)$ 表示 $x \cdot y = z$, $E(x, y)$ 表示 $x = y$, $G(x, y)$ 表示 $x > y$, 论述域是整数, 将下列断言译成逻辑符。(提示: 要注意数学上习惯写法和逻辑符表示的差异, 例如加法交换律在数学中写成: $x+y=y+x$, 翻译成逻辑符时, 要按实际意义翻译成: $\forall x$

$\forall y(x+y=y+x)$, 即要自动地加上全称量词, 使整个式子成为命题。)

- (a) 如果 $xy=0$, 那么 $x=0$ 或 $y=0$ 。
- (b) 如果 $xy \neq 0$, 那么 $x \neq 0$ 并且 $y \neq 0$ 。
- (c) 如果 $y=1$, 则对一切 x , $xy=x$ 。
- (d) $2x=6$ 当且仅当 $x=3$ 。
- (e) 除非 $y \geq 0$, $x^2=y$ 不存在解。
- (f) $x < z$ 是 $x < y$ 并且 $y < z$ 的必要条件。
- (g) $x \leq y$ 并且 $y \leq x$ 对 $y=x$ 是一个充分条件。
- (h) 如果 $x < y$ 并且 $z < 0$, 那么 $xz > yz$ 。
- (i) $x=y$ 和 $x < y$ 不能同时出现。
- (j) 如果 $x < y$, 那么存在某些 z , 使 $z < 0$, $xz > yz$ 。
- (k) 存在一 x , 对每一 y 和 z , 使 $xy=xz$ 。

解 (a) $\forall x \forall y (P(x, y, 0) \rightarrow E(x, 0) \vee E(y, 0))$

(b) $\forall x \forall y (\neg P(x, y, 0) \rightarrow \neg E(x, 0) \wedge \neg E(y, 0))$

(c) $\forall y (E(y, 1) \rightarrow \forall x P(x, y, x))$

(d) $\forall x (P(2, x, 6) \leftrightarrow E(x, 3))$

(e) $\forall y (\exists x P(x, x, y) \rightarrow E(y, 0) \vee G(y, 0))$

或 $\forall y (\neg G(y, 0) \wedge \neg E(y, 0) \rightarrow \forall x \neg P(x, x, y))$

(f) $\forall x \forall y \forall z (G(y, x) \wedge G(z, y) \rightarrow G(z, x))$

(g) $\forall x \forall y ((G(y, x) \vee E(x, y)) \wedge (G(x, y) \vee E(y, x)) \rightarrow E(y, x))$

或 $\forall x \forall y (\neg G(x, y) \wedge \neg G(y, x) \rightarrow E(y, x))$

(h) $\forall x \forall y \forall z (G(y, x) \wedge G(0, z) \rightarrow G(xz, yz))$

(i) $\forall x \forall y (\neg (E(x, y) \wedge G(y, x)))$

(j) $\forall x \forall y (G(y, x) \rightarrow \exists z (G(0, z) \wedge G(xz, yz)))$

(k) $\exists x \forall y \forall z E(xy, xz)$

由个体和运算符组成的式子, 如 x^2 , $x+1$, $x+y$ 等称为个体项。个体项可用作个体填入谓词空位中, 如以上 (h)(j)(k) 所示。但亦可引入新变元, 不让个体项出现在谓词空位中。例如 (h)(j)(k) 三题可分别译成:

(h) $\forall x \forall y \forall z (G(y, x) \wedge G(0, z) \rightarrow \forall u \forall v (P(x, z, u) \wedge P(y, z, v) \rightarrow G(u, v)))$

(j) $\forall x \forall y (G(y, x) \rightarrow \exists z (G(0, z) \wedge \forall u \forall v (P(x, z, u) \wedge P(y, z, v) \rightarrow G(u, v))))$

(k) $\exists x \forall y \forall z \forall u \forall v (P(x, y, u) \wedge P(x, z, v) \rightarrow E(u, v))$

1.6.12 设论述域是具有如下定义的谓词的数学断言的集合:

$P(x)$ 表示“ x 是可证明的”;

$T(x)$ 表示“ x 是真的”;

$S(x)$ 表示“ x 是可满足的”;

$D(x, y, z)$ 表示“ z 是析取式 $x \vee y$ ”,

翻译下列断言为中文, 使我们翻译尽可能自然。例如 $\forall w \forall x \forall y \forall z \{ [D(w, x, y) \wedge D(x, w, z) \wedge P(y)] \rightarrow P(z) \}$ 译成“如果 y 是断言 $w \vee x$, z 是断言 $x \vee w$, 并且 y 是可证明的, 那么 z 是可证明的”。

- (a) $\forall x[P(x) \rightarrow T(x)]$
 (b) $\forall x[T(x) \vee \neg S(x)]$
 (c) $\exists x[T(x) \wedge \neg P(x)]$
 (d) $\forall x \forall y \forall z \{ [D(x, y, z) \wedge P(z)] \rightarrow [P(x) \vee P(y)] \}$
 (e) $\forall x \{ T(x) \rightarrow \forall y \forall z [D(x, y, z) \rightarrow T(z)] \}$

解 (a) 对一切 x , 如果 x 是可证明的, 那么 x 是真的。

(b) 对一切 x , x 是真的, 或者 x 不是可满足的。

(c) 存在 x , x 是真的, 但 x 是不可证明的。

(d) 如果 z 是断言 $x \vee y$, 并且 z 是可证明的, 那么 x 是可证明的或者 y 是可证明的。

(e) 对一切 x , 如果 x 是真的, 那么对一切 y 和 z , 当 z 为断言 $x \vee y$ 时, z 为真。

1.6.13 将下列断言译为逻辑符号, 选用的谓词应使逻辑符号中至少含有一个量词:

- (a) 有一个且仅有一个偶数质数。
 (b) 没有一个奇数是偶数。
 (c) 每一火车都比某些卡车快。
 (d) 某些卡车慢于所有火车, 但至少有一火车, 快于每一卡车。
 (e) 如果明天下雨, 那么某些人将淋湿。
 (f) 所有步行的、骑马的或乘车的人, 凡是口渴的, 都喝泉水。

解 (a) 设 $E(x)$: x 是偶数, $P(x)$: x 是质数, $\exists! x(E(x) \wedge P(x))$ (或 $\exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge \forall y(E(y) \wedge P(y) \rightarrow y=x))$)。

(b) 设 $O(x)$: x 是奇数, $E(x)$: x 是偶数, $\neg \exists x(O(x) \wedge E(x))$ 。

(c) 设 $S(x)$: x 是火车, $L(x)$: x 是卡车, $F(x, y)$: x 比 y 快, $\forall x(S(x) \rightarrow \exists y(L(y) \wedge F(x, y)))$ 。

(d) 设 $S(x)$: x 是火车, $L(x)$: x 是卡车, $F(x, y)$: x 比 y 快, $\exists x(L(x) \wedge \forall y(S(y) \rightarrow F(y, x))) \wedge \exists x(S(x) \wedge \forall y(L(y) \rightarrow F(x, y)))$ 。

(e) 设 P : 明天下雨, $M(x)$: x 是人, $S(x)$: x 将淋湿, $P \rightarrow \exists x(M(x) \wedge S(x))$ 。

(f) 设 $M(x)$: x 是人, $W(x)$: x 步行, $R(x)$: x 骑马, $H(x)$: x 乘车, $T(x)$: x 口渴, $S(x)$: x 喝泉水, $\forall x(M(x) \wedge (W(x) \vee R(x) \vee H(x)) \wedge T(x) \rightarrow S(x))$ 。

1.6.14 试译出“ a 是 b 的外祖父”, 只允许用以下谓词: $P(x)$ 表示“ x 是人”, $F(x, y)$ 表示“ x 是 y 的父亲”, $M(x, y)$ 表示“ x 是 y 的母亲”。

解 $\exists x(P(a) \wedge P(b) \wedge P(x) \wedge F(a, x) \wedge M(x, b))$

1.6.15 设 $E(x)$ 表示“ x 是偶数”, $O(x)$ 表示“ x 是奇数”, $P(x)$ 表示“ x 是质数”, $N(x)$ 表示“ x 是负数”, $I(x)$ 表示“ x 是整数”和一些中缀表示的谓词诸如 $y=x^2+1$ 等, 将下列各句译成逻辑符:

- (a) 一个整数是奇数, 如果它的平方是奇数。
 (b) 两个偶数之和是偶数。
 (c) 一个偶数和一个奇数之和是一个奇数。
 (d) 有两个奇数它们的和是奇数。
 (e) 任何整数的平方都是负数。
 (f) 有某个质数其平方是偶数。

- (g) 不存在一个整数 x 使 x^2+1 是负数。
 (h) 对任何两个整数 x 和 y , $x-y$ 或 $y-x$ 是非负的。
 (i) 如果 $1=3$, 那么任何整数的平方是负的。
 (j) 如果 $1=3$, 那么任何整数的平方是正的。
 (k) 任何两个质数之和是一个质数。
 (l) 存在两个质数其和是质数。
 (m) 对任何整数, 如果它的平方是负的, 那么 $1=1$ 。

解 (a) $\forall x(I(x) \wedge O(x^2) \rightarrow O(x))$

(b) $\forall x \forall y(E(x) \wedge E(y) \rightarrow E(x+y))$

(c) $\forall x \forall y(E(x) \wedge O(y) \rightarrow O(x+y))$

(d) $\exists x \exists y(O(x) \wedge O(y) \wedge O(x+y))$

(e) $\forall x(I(x) \rightarrow N(x^2))$

(f) $\exists x(P(x) \wedge E(x^2))$

(g) $\neg \exists x(I(x) \wedge N(x^2+1))$

(h) $\forall x \forall y(I(x) \wedge I(y) \rightarrow \neg N(x-y) \vee \neg N(y-x))$

(i) $(1=3) \rightarrow \forall x(I(x) \rightarrow N(x^2))$

(j) $(1=3) \rightarrow \forall x(I(x) \rightarrow \neg N(x^2) \wedge x^2 \neq 0)$

(k) $\forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \rightarrow P(x+y))$

(l) $\exists x \exists y(P(x) \wedge P(y) \wedge P(x+y))$

(m) $\forall x(I(x) \wedge N(x^2) \rightarrow (1=1))$

1.6.16 将符号 $\exists! xP(x)$ 表达成仅用量词 $\forall$ 、 $\exists$ 和谓词 $=$ 构成的式子。

解 $\exists! xP(x) \Leftrightarrow \exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow y=x))$

1.6.17 设论述域由 0 和 1 组成, 试写出与下列各式等价的不用量词的命题的析取和合取:

(a) $\forall xP(0, x)$

(b) $\forall x \forall yP(x, y)$

(c) $\forall x \exists yP(x, y)$

(d) $\exists x \forall yP(x, y)$

(e) $\exists y \exists xP(x, y)$

解 (a) $P(0, 0) \wedge P(0, 1)$

(b) $P(0, 0) \wedge P(1, 0) \wedge P(0, 1) \wedge P(1, 1)$

(c) $(P(0, 0) \vee P(0, 1)) \wedge (P(1, 0) \vee P(1, 1))$

(d) $P(0, 0) \wedge P(0, 1) \vee P(1, 0) \wedge P(1, 1)$

(e) $P(0, 0) \vee P(0, 1) \vee P(1, 0) \vee P(1, 1)$

1.6.18 如果论述域是 $\{a, b, c\}$, 试消去下列公式中的量词:

(a) $\forall xR(x) \wedge \exists xS(x)$

(b) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

解 (a) $R(a) \wedge R(b) \wedge R(c) \wedge (S(a) \vee S(b) \vee S(c))$

(b) $(P(a) \rightarrow Q(a)) \wedge (P(b) \rightarrow Q(b)) \wedge (P(c) \rightarrow Q(c))$

1.6.19 假定论述域有两个元素, 证明 $\exists x(Q(x) \wedge R(x))$ 不为 $\exists y(P(y) \wedge Q(y))$ 和 $\exists z(P(z) \wedge R(z))$ 所永真蕴含。

证明 设论述域为 $\{a, b\}$, 设 $A \Leftrightarrow \exists y(P(y) \wedge Q(y)) \Leftrightarrow P(a) \wedge Q(a) \vee P(b) \wedge Q(b)$, $B \Leftrightarrow \exists z(P(z) \wedge R(z)) \Leftrightarrow P(a) \wedge R(a) \vee P(b) \wedge R(b)$, $C \Leftrightarrow \exists x(Q(x) \wedge R(x)) \Leftrightarrow Q(a) \wedge R(a) \vee Q(b) \wedge R(b)$ 。令 $P(a)$ 、 $P(b)$ 、 $Q(a)$ 、 $R(b)$ 的真值为 T , $R(a)$ 、 $Q(b)$ 的真值为 F 。则在这指派下, A 、 B 的真值为 T , 而 C 的真值为 F 。故 C 不为 A 和 B 所永真蕴含。题意得证。

1.6.20 试说明下列公式是合式公式:

(a) $(\forall x(F(x) \rightarrow Q(x)))$

(b) $(F(x, y) \rightarrow (\exists xG(x, y)))$

解 (a)

① $F(x)$, $Q(x)$ 是合式公式 条款 1

② $(F(x) \rightarrow Q(x))$ 是合式公式 ①, 条款 2

③ $(\forall x(F(x) \rightarrow Q(x)))$ 是合式公式 ②, 条款 2

(b)

① $G(x, y)$ 是合式公式 条款 1

② $(\exists xG(x, y))$ 是合式公式 ①, 条款 2

③ $F(x, y)$ 是合式公式 条款 1

④ $(F(x, y) \rightarrow (\exists xG(x, y)))$ 是合式公式 ①、②、条款 2

1.6.21 指出下列表达式中的自由变元和约束变元, 并指明量词的辖域:

(a) $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \forall xP(x) \wedge Q(x)$

(b) $\forall x(P(x) \wedge \exists xQ(x)) \vee (\forall xP(x) \rightarrow Q(x))$

(c) $\forall x \exists y(P(x, y) \leftrightarrow Q(x, y)) \wedge \exists xS(y) \wedge S(x)$

解 (a) 后一个 $Q(x)$ 中的 x 是自由变元, 而 $P(x) \wedge Q(x)$ 和 $P(x)$ 中的 x 是约束变元; 前一个 $\forall x$ 的辖域是 $P(x) \wedge Q(x)$, 后一个 $\forall x$ 的辖域是 $P(x)$ 。

(b) 后一个 $Q(x)$ 中的 x 是自由变元, 其余的为约束变元; 前一个 $\forall x$ 的辖域是 $(P(x) \wedge \exists xQ(x))$, 后一个 $\forall x$ 的辖域为 $P(x)$, $\exists x$ 的辖域为 $Q(x)$ 。

(c) $S(y)$ 中的 y , $S(x)$ 中的 x 为自由变元, 其余的为约束变元; $\forall x$ 和 $\exists y$ 的辖域均为 $P(x, y) \leftrightarrow Q(x, y)$, $\exists x$ 的辖域为 $S(y)$ 。

1.6.22 将下列各式改名, 使自由变元和约束变元不用相同的符号:

(a) $\forall y(R(y, x) \rightarrow S(x, y)) \wedge P(x, y) \wedge \exists xQ(x)$

(b) $R(x, y) \rightarrow \forall x(P(x, y) \vee \forall zQ(x, z))$

解 (a) $\forall w(R(w, x) \rightarrow S(x, w)) \wedge P(x, y) \wedge \exists zQ(z)$

(b) $R(x, y) \rightarrow \forall w(P(w, y) \vee \forall zQ(w, z))$

1.7 谓词演算的永真公式

1.7.1 证明永真公式 Q_4 、 Q_{17} 、 Q_{18} 、 Q_{17} 和 Q_{19} 。

证明 $Q_{14} \quad \forall xA(x) \rightarrow B \Leftrightarrow \exists x(A(x) \rightarrow B)$

$\forall x A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow \neg(\forall x A(x)) \vee B$	E_{14}
$\Leftrightarrow \exists x \neg A(x) \vee B$	Q_4
$\Leftrightarrow \exists x (\neg A(x) \vee B)$	Q_8
$\Leftrightarrow \exists x (A(x) \rightarrow B)$	E_{14}
$Q_{15} \quad \exists x A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow \forall x (A(x) \rightarrow B)$	
$\exists x A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow \neg(\exists x A(x)) \vee B$	E_{14}
$\Leftrightarrow \forall x \neg A(x) \vee B$	Q_3
$\Leftrightarrow \forall x (\neg A(x) \vee B)$	Q_6
$\Leftrightarrow \forall x (A(x) \rightarrow B)$	E_{14}
$Q_{16} \quad A \rightarrow \forall x B(x) \Leftrightarrow \forall x (A \rightarrow B(x))$	
$A \rightarrow \forall x B(x) \Leftrightarrow \neg A \vee \forall x B(x)$	E_{14}
$\Leftrightarrow \forall x B(x) \vee \neg A$	E_4
$\Leftrightarrow \forall x (B(x) \vee \neg A)$	Q_6
$\Leftrightarrow \forall x (\neg A \vee B(x))$	E_4
$\Leftrightarrow \forall x (A \rightarrow B(x))$	E_{14}
$Q_{17} \quad A \rightarrow \exists x B(x) \Leftrightarrow \exists x (A \rightarrow B(x))$	
$A \rightarrow \exists x B(x) \Leftrightarrow \neg A \vee \exists x B(x)$	E_{14}
$\Leftrightarrow \exists x B(x) \vee \neg A$	E_4
$\Leftrightarrow \exists x (B(x) \vee \neg A)$	Q_8
$\Leftrightarrow \exists x (\neg A \vee B(x))$	E_4
$\Leftrightarrow \exists x (A \rightarrow B(x))$	E_{14}
$Q_{18} \quad \exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x) \Leftrightarrow \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$	
$\exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x) \Leftrightarrow \neg \exists x A(x) \vee \forall x B(x)$	E_{14}
$\Leftrightarrow \forall x \neg A(x) \vee \forall x B(x)$	Q_3
$\Rightarrow \forall x (\neg A(x) \vee B(x))$	Q_{13}
$\Leftrightarrow \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$	E_{14}

1.7.2 下列断言如果是真的证明它们, 如果是假的, 找出 P 和 Q 的解释以证明公式是假。

- (a) $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x))$
- (b) $(\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)) \Rightarrow \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$
- (c) $(\exists x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)) \Rightarrow \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$
- (d) $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists x P(x) \rightarrow \forall x Q(x))$

证明 (a) 断言是真的。利用 CP 规则证明

$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x P(x)$	
$\Leftrightarrow \forall x ((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge P(x))$	Q_{10}
$\Leftrightarrow \forall x ((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge P(x))$	E_{14}
$\Leftrightarrow \forall x (\neg P(x) \wedge P(x) \vee Q(x) \wedge P(x))$	E_8
$\Leftrightarrow \forall x (F \vee Q(x) \wedge P(x))$	E_{21}
$\Leftrightarrow \forall x (Q(x) \wedge P(x))$	E_{16}

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \forall x Q(x) \wedge \forall x P(x) & \quad Q_{10} \\ \Rightarrow \forall x Q(x) & \quad I_2\end{aligned}$$

(b) 断言是假的。作出如下解释：

设论述域为 $\{1, 2\}$, $P(x): x=1$, $Q(x): x=2$, 则 $\forall x P(x)$ 为假, 因此 $\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$ 为真, 而 $P(1)$ 为真, $Q(1)$ 为假, 所以 $P(1) \rightarrow Q(1)$ 为假, 所以 $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ 为假。

(c) 断言为真。证明如下：

$$\begin{aligned}\exists x P(x) \rightarrow \forall x Q(x) & \Leftrightarrow \neg \exists x P(x) \vee \forall x Q(x) & E_{14} \\ & \Leftrightarrow \forall x \neg \exists x P(x) \vee \forall x Q(x) & Q_3 \\ & \Rightarrow \forall x (\neg \exists x P(x) \vee Q(x)) & Q_{13} \\ & \Leftrightarrow \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) & E_{14}\end{aligned}$$

(d) 断言为假。作如下解释：

设论述域为 $\{1, 2\}$, $P(x): x=1$, $Q(x): x \leq 1$, 则 $P(1), Q(1)$ 为真, $P(2), Q(2)$ 为假。因此 $P(1) \rightarrow Q(1), P(2) \rightarrow Q(2)$ 为真, 则 $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ 为真。而 $\exists x P(x)$ 为真, $\forall x Q(x)$ 为假。因此 $\exists x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$ 为假。

1.7.3 证明 $P(x) \wedge \forall x Q(x) \Rightarrow \exists x (P(x) \wedge Q(x))$ 。

证明 设 $P(x) \wedge \forall x Q(x)$ 是真, 则 $P(x)$ 是真, $\forall x Q(x)$ 是真, 因而 $Q(x)$ 是真, $P(x) \wedge Q(x)$ 是真, 所以 $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$ 是真。这样

$$P(x) \wedge \forall x Q(x) \Rightarrow \exists x (P(x) \wedge Q(x))$$

1.7.4 设论述域是 $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 试证明下列关系式：

- (a) $\neg \forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$
- (b) $\forall x A(x) \wedge P \Leftrightarrow \forall x (A(x) \wedge P)$
- (c) $\forall x (A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$
- (d) $\exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$

$$\begin{aligned}\text{证明 (a) } \neg \forall x P(x) & \Leftrightarrow \neg (P(a_0) \wedge P(a_1) \wedge \dots \wedge P(a_n)) \\ & \Leftrightarrow \neg P(a_0) \vee \neg P(a_1) \vee \dots \vee \neg P(a_n) \\ & \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(b) \forall x A(x) \wedge P & \Leftrightarrow A(a_0) \wedge A(a_1) \wedge \dots \wedge A(a_n) \wedge P \\ & \Leftrightarrow (A(a_0) \wedge P) \wedge (A(a_1) \wedge P) \wedge \dots \wedge (A(a_n) \wedge P) \\ & \Leftrightarrow \forall x (A(x) \wedge P)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(c) \forall x (A(x) \wedge B(x)) & \Leftrightarrow (A(a_0) \wedge B(a_0)) \wedge (A(a_1) \wedge B(a_1)) \wedge \dots \wedge (A(a_n) \wedge B(a_n)) \\ & \Leftrightarrow (A(a_0) \wedge A(a_1) \wedge \dots \wedge A(a_n)) \wedge (B(a_0) \wedge B(a_1) \wedge \dots \wedge B(a_n)) \\ & \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(d) \exists x (A(x) \wedge B(x)) & \Leftrightarrow (A(a_0) \wedge B(a_0)) \vee (A(a_1) \wedge B(a_1)) \vee \dots \vee (A(a_n) \wedge B(a_n)) \\ & \Rightarrow (A(a_0) \vee A(a_1) \vee \dots \vee A(a_n)) \wedge (B(a_0) \vee B(a_1) \vee \dots \vee B(a_n)) \\ & \Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)\end{aligned}$$

1.7.5 证明下列关系式：

$$(a) \forall x \forall y (P(x) \vee P(y)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall y P(y)$$

$$(b) \exists x \exists y (P(x) \wedge Q(y)) \Rightarrow \exists x P(x)$$

$$(c) \forall x \forall y (P(x) \wedge Q(y)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \wedge \forall y Q(y)$$

$$(d) \exists x \exists y (P(x) \rightarrow P(y)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \rightarrow \exists y P(y)$$

$$(e) \forall x \forall y (P(x) \rightarrow Q(y)) \Leftrightarrow (\exists x P(x) \rightarrow \forall y Q(y))$$

$$\text{证明 } (a) \forall x \forall y (P(x) \vee P(y)) \Leftrightarrow \forall x (P(x) \vee \forall y P(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall y P(y)$$

$$(b) \exists x \exists y (P(x) \wedge Q(y)) \Leftrightarrow \exists x (P(x) \wedge \exists y Q(y))$$

$$\Leftrightarrow \exists x P(x) \wedge \exists y Q(y)$$

$$\Rightarrow \exists x P(x)$$

$$(c) \forall x \forall y (P(x) \wedge Q(y)) \Leftrightarrow \forall x (P(x) \wedge \forall y Q(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \wedge \forall y Q(y)$$

$$(d) \exists x \exists y (P(x) \rightarrow P(y)) \Leftrightarrow \exists x (P(x) \rightarrow \exists y P(y))$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \vee \exists y P(y))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists y P(y)$$

$$\Leftrightarrow \neg \forall x P(x) \vee \exists y P(y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \rightarrow \exists y P(y)$$

$$(e) \forall x \forall y (P(x) \rightarrow Q(y)) \Leftrightarrow \forall x (P(x) \rightarrow \forall y Q(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (\neg P(x) \vee \forall y Q(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \neg P(x) \vee \forall y Q(y)$$

$$\Leftrightarrow \neg \exists x P(x) \vee \forall y Q(y)$$

$$\Leftrightarrow \exists x P(x) \rightarrow \forall y Q(y)$$

1.7.6 试证明 $\exists y \forall x P(x, y)$ 的否定等价于 $\forall y \exists x \neg P(x, y)$ 。

$$\text{证明 } \neg(\exists y \forall x P(x, y)) \Leftrightarrow \forall y \neg(\forall x P(x, y))$$

$$\Leftrightarrow \forall y \exists x \neg P(x, y)$$

1.7.7 对一个仅含元素 0 和 1 的论述域, 试证明: $\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x))$, 并证明蕴含式之逆不是有效的。

$$\text{证明 } \forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \Leftrightarrow (P(0) \leftrightarrow Q(0)) \wedge (P(1) \leftrightarrow Q(1)) \quad \text{①}$$

$$\text{而 } \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x) \Leftrightarrow P(0) \wedge P(1) \leftrightarrow Q(0) \wedge Q(1) \quad \text{②}$$

现设①为真, 则 $P(0)$ 与 $Q(0)$ 同真假, $P(1)$ 与 $Q(1)$ 同真假, 所以②式为真, 故

$$\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$$

下面说明 $\forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x))$ 为假。

设 $P(x): x=0; Q(x): x=1$, 则 $P(0)、Q(1)$ 为 $T, P(1)、Q(0)$ 为 $F, \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x) \Leftrightarrow F \leftrightarrow F \Leftrightarrow T$ 。而 $\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \Leftrightarrow (P(0) \leftrightarrow Q(0)) \wedge (P(1) \leftrightarrow Q(1)) \Leftrightarrow F \wedge F \Leftrightarrow F$ 。

1.7.8 写出 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = k$ 的定义的符号形式, 并用形成定义两边的否定的方法, 找出 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq k$ 的条件。

解 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = k$ 的定义是“对任 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对一切 x , 当 $|x - c| < \delta$ 时有 $|f(x) - k| < \varepsilon$ ”, 所以:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = k \Leftrightarrow \forall \epsilon (\epsilon > 0 \rightarrow \exists \delta (\delta > 0 \wedge \forall x (|x - c| < \delta \rightarrow |f(x) - k| < \epsilon))$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq k \Leftrightarrow \epsilon (\epsilon > 0 \wedge \forall \delta (\delta > 0 \rightarrow \exists x (|x - c| < \delta \wedge |f(x) - k| \geq \epsilon))$$

即 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq k$ 当且仅当存在 $\epsilon > 0$, 对每一 $\delta > 0$ 存在某些 x , 使 $|x - c| < \delta$ 而仍然有 $|f(x) - k| \geq \epsilon$.

1.7.9 一个公式, 如果量词都非否定地放在全式的开头, 没有括号将它们彼此隔开, 而它们的辖域都延伸到整个公式, 则称这样的公式为前束范式。应用改名规则、量词否定公式和量词辖域的扩张公式等, 可把任一谓词演算公式化成前束范式。例如:

$$\begin{aligned} & \neg \forall x (P(x) \rightarrow \exists x Q(x)) \\ & \Leftrightarrow \neg \forall x (\neg P(x) \vee \exists x Q(x)) & E_{14} \\ & \Leftrightarrow \exists x (P(x) \wedge \neg \exists x Q(x)) & Q_4, E_{10}, E_1 \\ & \Leftrightarrow \exists x (P(x) \wedge \forall x \neg Q(x)) & Q_3 \\ & \Leftrightarrow \exists x (P(x) \wedge \forall y \neg Q(y)) & \text{改名规则} \\ & \Leftrightarrow \exists x \forall y (P(x) \wedge \neg Q(y)) & Q_7 \end{aligned}$$

试将下列各式化成前束范式:

- (a) $\forall x (P(x) \rightarrow \exists y Q(x, y))$
- (b) $\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$
- (c) $\forall x \forall y [\exists z (P(x, z) \wedge P(y, z)) \rightarrow \exists u Q(x, y, u)]$
- (d) $\exists x (\neg \exists y P(x, y) \rightarrow (\exists z Q(z) \rightarrow R(x)))$
- (e) $\neg \forall x (\exists y A(x, y) \rightarrow \exists x \forall y [B(x, y) \wedge \forall y (A(y, x) \rightarrow B(x, y))])$

解 (a) $\forall x (P(x) \rightarrow \exists y Q(x, y))$

$$\Leftrightarrow \forall x (\neg P(x) \vee \exists y Q(x, y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \exists y (\neg P(x) \vee Q(x, y))$$

(b) $\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$

$$\Leftrightarrow \neg \forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists x Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists y Q(y)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y (\neg P(x) \vee Q(y))$$

(c) $\forall x \forall y [\exists z (P(x, z) \wedge P(y, z)) \rightarrow \exists u Q(x, y, u)]$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y [\neg \exists z (P(x, z) \wedge P(y, z)) \vee \exists u Q(x, y, u)]$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y [\forall z (\neg P(x, z) \vee \neg P(y, z)) \vee \exists u Q(x, y, u)]$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z [\neg P(x, z) \vee \neg P(y, z) \vee Q(x, y, u)]$$

(d) $\exists x (\neg \exists y P(x, y) \rightarrow (\exists z Q(z) \rightarrow R(x)))$

$$\Leftrightarrow \exists x (\exists y P(x, y) \vee \neg \exists z Q(z) \vee R(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y (P(x, y) \vee \forall z \neg Q(z) \vee R(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y \forall z (P(x, y) \vee \neg Q(z) \vee R(x))$$

(e) $\neg \forall x (\exists y A(x, y) \rightarrow \exists x \forall y [B(x, y) \wedge \forall y (A(y, x) \rightarrow B(x, y))])$

$$\Leftrightarrow \exists x \{ \exists y A(x, y) \wedge \neg \exists x \forall y [B(x, y) \wedge \forall y (\neg A(y, x) \vee B(x, y))] \}$$

$$\Leftrightarrow \exists x \{ \exists y A(x, y) \wedge \forall x \exists y [\neg B(x, y) \vee \exists y (A(y, x) \wedge \neg B(x, y))] \}$$

$$\Leftrightarrow \exists x \{ \exists y A(x, y) \wedge \forall z \exists w [\neg B(z, w) \vee \exists u (A(u, z) \wedge \neg B(z, u))] \}$$

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y \forall z \exists w u [A(x, y) \wedge (\neg B(z, w) \vee A(u, z) \wedge \neg B(z, u))]$$

1.8 谓词演算的推理规则

1.8.1 对下列每一前提集合，列出能得到的恰当结论和应用于这一情况的推理规则。

(a) 所有三角函数都是周期函数，而所有周期函数是连续函数。

(b) 所有牛都是哺乳动物。有些哺乳动物是反刍动物。

(c) 所有偶数都被 2 除尽。整数 4 是偶数，但 3 不是。

(d) 对汽车工业的好事就是对国家的好事，对国家的好事就是对你的好事。你去买一辆高价卡车是对汽车工业的好事。

解 (a) 设 $T(x)$ 表示“ x 是三角函数”， $R(x)$ 表示“ x 是周期函数”， $S(x)$ 表示“ x 是连续函数”。

前提是： $\forall x(T(x) \rightarrow R(x)), \forall x(R(x) \rightarrow S(x))$

结论是： $\forall x(T(x) \rightarrow S(x))$

证明及应用到的推理规则如下：

步骤	断言	根据
1	$\forall x(T(x) \rightarrow R(x))$	P
2	$T(x) \rightarrow R(x)$	T, 1, US
3	$\forall x(R(x) \rightarrow S(x))$	P
4	$R(x) \rightarrow S(x)$	T, 3, US
5	$T(x) \rightarrow S(x)$	T, 2, 4, I ₆
6	$\forall x(T(x) \rightarrow S(x))$	T, 5, US

(b) 设 $C(x)$ 表示“ x 是牛”， $M(x)$ 表示“ x 是哺乳动物”， $N(x)$ 表示“ x 是反刍动物”。

前提是： $\forall x(C(x) \rightarrow M(x)), \exists x(M(x) \wedge N(x))$

除前提外得不出其它结论。

(c) 设 $E(x)$ 表示“ x 是偶数”， $D(x)$ 表示“ x 被 2 除尽”。

前提是： $\forall x(E(x) \rightarrow D(x)), E(4) \wedge \neg E(3)$

结论是： $D(4)$

证明及应用到的推理规则如下：

步骤	断言	根据
1	$E(4) \wedge \neg E(3)$	P
2	$E(4)$	T, 1, I ₂
3	$\forall x(E(x) \rightarrow D(x))$	P
4	$E(4) \rightarrow D(4)$	T, 3, US
5	$D(4)$	T, 2, 4, I ₃

(d) 设 $M(x)$ 表示“ x 是对汽车工业的好事”， $C(x)$ 表示“ x 是对国家的好事”， $Y(x)$ 表示“ x 是对你的好事”， a 表示“你去买一辆高价卡车这件事。”

前提是： $\forall x(M(x) \rightarrow C(x)), \forall x(C(x) \rightarrow Y(x)), M(a)$ 。

结论是： $C(a) \wedge Y(a)$ (你买一辆高价卡车是对国家的好事，也是对你的好事)。

证明及应用到的推理规则如下：

步骤	断言	根据
1	$\forall x(M(x) \rightarrow C(x))$	P
2	$M(a) \rightarrow C(a)$	T, 1, US
3	$M(a)$	P
4	$C(a)$	T, 2, 3, I ₃
5	$\forall x(C(x) \rightarrow Y(x))$	P
6	$C(a) \rightarrow Y(a)$	T, 5, US
7	$Y(a)$	T, 4, 6, I ₃
8	$C(a) \wedge Y(a)$	T, 4, 7, 合取式

1.8.2 确定下列哪些是有效论证。对有效论证给出证明。对非有效论证给出反例证明其错误。

(a) 不是这样情况：某些三角函数不是周期函数。有些周期函数是连续的。所以，所有三角函数都不连续，这是不真的。

(b) 某些三角函数是周期函数。某些周期函数是连续的。所以，某些三角函数是连续的。

证明 (a) 设 $T(x)$ 表示“ x 是三角函数”， $R(x)$ 表示“ x 是周期函数”， $S(x)$ 表示“ x 是连续函数”。

前提是： $\neg \exists x(T(x) \wedge \neg R(x)), \exists x(R(x) \wedge S(x))$

结论是： $\neg \forall x(T(x) \rightarrow \neg S(x))$

这个论证非有效。例如，把 $T(x)$ 解释为“ $x \neq x$ ”， $R(x)$ 解释为“ x 是质数”， $S(x)$ 解释为“ x 是偶数”，论述域是 I_+ ，那么 $\neg \exists x(T(x) \wedge \neg R(x)), \exists x(R(x) \wedge S(x))$ 都真，而 $\neg \forall x(T(x) \rightarrow \neg S(x))$ 是假。所以

$\neg \exists x(T(x) \wedge \neg R(x)) \wedge \exists x(R(x) \wedge S(x)) \rightarrow \neg \forall x(T(x) \rightarrow \neg S(x))$ 是假，论证非有效。

(b) 沿用(a)中的谓词

前提是： $\exists x(T(x) \wedge R(x)), \exists x(R(x) \wedge S(x))$

结论是： $\exists x(T(x) \wedge S(x))$

这个论证非有效。例如，论述域为 $\{1, 2\}$ 时

$$\exists x(T(x) \wedge R(x)) \Leftrightarrow T(1) \wedge R(1) \vee T(2) \wedge R(2)$$

$$\exists x(R(x) \wedge S(x)) \Leftrightarrow R(1) \wedge S(1) \vee R(2) \wedge S(2)$$

$$\exists x(T(x) \wedge S(x)) \Leftrightarrow T(1) \wedge S(1) \vee T(2) \wedge S(2)$$

给出以下指派： $T(1)$ 真， $T(2)$ 假， $R(1)$ 、 $R(2)$ 俱真， $S(1)$ 假， $S(2)$ 真，则前提均真而结论是假。所以

$$\exists x(T(x) \wedge R(x)) \wedge \exists x(R(x) \wedge S(x)) \rightarrow \exists x(T(x) \wedge S(x))$$

是假，论证无效。

1.8.3 下列推导步骤为什么是错误的？

(a) (i)	$\forall x P(x) \rightarrow Q(x)$	P
(ii)	$P(x) \rightarrow Q(x)$	T, 1, US
(b) (i)	$\forall x (P(x) \vee Q(x))$	P
(ii)	$P(a) \vee P(b)$	T, 1, US
(c) (i)	$\forall x P(x) \vee \exists x (Q(x) \wedge R(x))$	P
(ii)	$P(a) \vee \exists x (Q(x) \wedge R(x))$	T, 1, US
(d) (i)	$P(x) \rightarrow Q(x)$	P
(ii)	$\exists x P(x) \rightarrow Q(x)$	T, 1, EG
(e) (i)	$P(a) \rightarrow Q(b)$	P
(ii)	$\exists x (P(x) \rightarrow Q(x))$	T, 1, EG

解 (a) 公式 $\forall x P(x) \Rightarrow P(x)$ 中的 $P(x)$ 必须是整个公式, 而不是子公式。题中的错误是把子公式当整个公式。

(b) 公式 $\forall x P(x) \Rightarrow P(y)$ 是说 $P(x)$ 中的所有 x , 都要代以 y 才能成立, 不能一个代以 a , 一个代以 b , 这样违反代入规则。

(c) 错误理由同 (a)。

(d) 公式 $P(x) \Rightarrow \exists x P(x)$ 中的 $P(x)$ 必须是整个公式, 而不是子公式。题中的错误是把它用于子公式。

(e) 公式 $P(y) \Rightarrow \exists x P(x)$ 中的变元 y 认为是确定的, 不能既作 a , 又作 b , 否则不能用 $\exists x$ 量化, 题中不符合这一要求。

1.8.4 证明下列各断言:

(a) $\neg(\exists x P(x) \wedge Q(a))$ 推得 $\exists x P(x) \rightarrow \neg Q(a)$ 。

(b) $\forall x (P(x) \vee Q(x)), \forall x \neg P(x)$ 推得 $\forall x Q(x)$ 。

(c) $\neg \forall x (P(x) \vee Q(x)), \forall x P(x)$ 推得 $\neg \forall x Q(x)$ 。

证明	(a) 1	$\neg(\exists x P(x) \wedge Q(a))$	P
	2	$\neg \exists x P(x) \vee \neg Q(a)$	T, 1, E ₁₁
	3	$\exists x P(x) \rightarrow \neg Q(a)$	T, 2, E ₁₄
(b)	1	$\forall x (P(x) \vee Q(x))$	P
	2	$P(y) \vee Q(y)$	T, 1, US
	3	$\forall x \neg P(x)$	P
	4	$\neg P(y)$	T, 3, US
	5	$Q(y)$	T, 2, 4, I ₅
	6	$\forall x Q(x)$	T, 5, UG
(c)	1	$\neg \forall x (P(x) \vee Q(x))$	P
	2	$\exists x \neg (P(x) \vee Q(x))$	T, 1, Q ₄
	3	$\neg (P(y) \vee Q(y))$	T, 2, ES
	4	$\neg P(y) \wedge \neg Q(y)$	T, 3, E ₁₆
	5	$\neg P(y)$	T, 4, I ₂
	6	$\forall x P(x)$	P
	7	$P(y)$	T, 6, US
	8	$P(y) \wedge \neg P(y)$	T, 5, 7

9 $\neg \forall xQ(x)$ T, 8

1.8.5 下列推导过程有何错误?

(1) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	P
(2) $P(y) \rightarrow Q(y)$	T, (1), US
(3) $\exists xP(x)$	P
(4) $P(y)$	T, (3), ES
(5) $Q(y)$	T, (2), (4), I _y
(6) $\exists xQ(x)$	T, (5), EG

解 从(3)到(4)有错误。因为(4)行的 $P(y)$ 中的变元 y 在(2)中已出现过, 必须选用新的变元。推导过程应改正为:

1	$\exists xP(x)$	P
2	$P(y)$	T, 1, ES
3	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	P
4	$P(y) \rightarrow Q(y)$	T, 3, US
5	$Q(y)$	T, 2, 4, I _y
6	$\exists xQ(x)$	T, 5, EG

1.8.6 考虑蕴含式

$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow \forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$

(a) 证明它不是有效的。

(b) 下面是一个论证, 企图证明上式有效, 试找出其不正确之处。

$$\begin{aligned}
 \forall x(P(x) \vee Q(x)) &\Leftrightarrow \neg \exists x \neg (P(x) \vee Q(x)) \\
 &\Leftrightarrow \neg \exists x (\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \\
 &\Rightarrow \neg (\exists x \neg P(x) \wedge \exists x \neg Q(x)) \\
 &\Leftrightarrow \neg \exists x \neg P(x) \vee \neg \exists x \neg Q(x) \\
 &\Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)
 \end{aligned}$$

证明 (a) 设 $P(x)$, $Q(x)$ 的论述域为 $\{0, 1\}$, 且 $P(0)$ 、 $Q(1)$ 为 T , $P(1)$ 、 $Q(0)$ 为 F , 则代入蕴含式 $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow \forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$, 其值为 F 。

(b) 虽然 $\exists x(\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \Rightarrow \exists x \neg P(x) \wedge \exists x \neg Q(x)$, 但两边加 $\neg$ 后, 要交换 $\Rightarrow$ 两侧的式子才是正确的, 所以 $\neg \exists x(\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \Rightarrow \neg(\exists x \neg P(x) \wedge \exists x \neg Q(x))$ 是不正确的。

1.8.7 证明苏格拉底论证是有效的。

证明 设 $M(x)$: x 是人, $D(x)$: x 是要死的, a : 苏格拉底。苏格拉底论证符号化为: $\forall x(M(x) \rightarrow D(x))$ 且 $M(a)$, 则 $D(a)$ 。证明如下:

1	$\forall x(M(x) \rightarrow D(x))$	P
2	$M(a) \rightarrow D(a)$	T, 1, US
3	$M(a)$	P
4	$D(a)$	T, 2, 3, I _a

1.8.8 判断下列结论 C 是否能有效地从给定的前提得出。

(a) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \exists yP(y)$	$C: \exists zQ(z)$
(b) $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	$C: \forall xP(x)$

(c) $\exists xP(x), \exists xQ(x)$ $C: \exists x(P(x) \wedge Q(x))$

(d) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \neg Q(a)$ $C: \forall x \neg P(x)$

解 (a) 能。(b)、(c)、(d) 均不能。

1.8.9 证明下列各题:

(a) $\exists xP(x) \rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x) \rightarrow R(x)), \exists xP(x), \exists xQ(x) \Rightarrow \exists x \exists y(R(x) \wedge R(y))$

(b) $\forall x(P(x) \rightarrow (Q(y) \wedge R(x))), \exists xP(x) \Rightarrow Q(y) \wedge \exists x(P(x) \wedge R(x))$

(c) $\forall x(H(x) \rightarrow A(x)) \Rightarrow \forall x(\forall y(H(y) \wedge N(x, y)) \rightarrow \exists y(A(y) \wedge N(x, y)))$

证明 (a) 1 $\exists xP(x) \rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x) \rightarrow R(x))$ P
 2 $\exists xP(x)$ P
 3 $\forall x(P(x) \vee Q(x) \rightarrow R(x))$ T, 1, 2, I₃
 4 $\exists xQ(x)$ P
 5 $Q(a)$ T, 4, ES
 6 $P(a) \vee Q(a)$ T, 5, I₁
 7 $P(a) \vee Q(a) \rightarrow R(a)$ T, 3, US
 8 $R(a)$ T, 6, 7, I₃
 9 $P(b)$ T, 2, ES
 10 $P(b) \vee Q(b)$ T, 9, I₁
 11 $P(b) \vee Q(b) \rightarrow R(b)$ T, 3, US
 12 $R(b)$ T, 10, 11, I₃
 13 $R(a) \wedge R(b)$ T, 8, 13, 合取式
 14 $\exists x \exists y(R(x) \wedge R(y))$ T, 13, EG

(b) 1 $\exists xP(x)$ P
 2 $P(a)$ T, 1, ES
 3 $\forall x(P(x) \rightarrow (Q(y) \wedge R(x)))$ P
 4 $P(a) \rightarrow (Q(y) \wedge R(a))$ T, 3, US
 5 $Q(y) \wedge R(a)$ T, 2, 4, I₃
 6 $Q(y)$ T, 5, I₂
 7 $R(a)$ T, 5, I₂
 8 $P(a) \wedge R(a)$ T, 2, 7, 合取式
 9 $\exists x(P(x) \wedge R(x))$ T, 8, EG
 10 $Q(y) \wedge \exists x(P(x) \wedge R(x))$ T, 6, 10, 合取式

(c) 用反证法证:

1 $\neg \forall x(\forall y(H(y) \wedge N(x, y)) \rightarrow \exists y(A(y) \wedge N(x, y)))$ P 假设前提
 2 $\exists x(\forall y(H(y) \wedge N(x, y)) \wedge \forall y \neg (A(y) \wedge N(x, y)))$ T, 1, Q₃, E₁₀
 3 $\exists x \forall y(H(y) \wedge N(x, y) \wedge (\neg A(y) \vee \neg N(x, y)))$ T, 2, Q₁₀
 4 $H(b) \wedge N(a, b) \wedge (\neg A(b) \vee \neg N(a, b))$ T, 3, ES, US
 5 $H(b) \wedge N(a, b) \wedge \neg A(b)$ T, 4, E₆, E₁₈
 6 $H(b) \wedge \neg A(b)$ T, 5, I₂
 7 $\forall x(H(x) \rightarrow A(x))$ P

8	$H(b) \rightarrow A(b)$	T, 7, US
9	$H(b)$	T, 6, I ₂
10	$A(b)$	T, 8, 9, I ₃
11	$\neg A(b)$	T, 6, I ₂
12	$A(b) \wedge \neg A(b)$	T, 10, 11, 矛盾

1.9 选题例解

例 1-1 用逻辑符号写出以下命题：

- (1) 王平与王凡是弟兄。
- (2) 王平与王凡一起做作业。
- (3) 王平学过德语或法语。
- (4) 王平是 17 岁，或是 18 岁。
- (5) 派王平或王凡中的一个人到上海学习。
- (6) 除非天气好，否则我们不踢足球。
- (7) 生命不息战斗不止。
- (8) 如果你来了，那么他唱不唱歌将看你是否伴奏而定。
- (9) $2+3=5$ 当且仅当 $\sqrt{2}$ 是无理数。

分析 命题符号化的过程中，要注意自然语言的多义性。

(1) 中的“与”是主语成分联结词；而(2)中的“与”是命题联结词，是逻辑中的合取联结的意思。

(3) 中的“或”具有相容性，表达逻辑中的析取概念。而(4)、(5)中的“或”具有排斥性，不是逻辑中的析取，分析如下：

(4) 中命题设为 A ，则 A 中蕴含着“王平是 17 岁且王平是 18 岁是不对的”这样的含义。设 P ：王平是 17 岁， Q ：王平是 18 岁，则 A 的真值表如下：

P	Q	A
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

因此 $A = (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ 或 $P \oplus Q$ 。

解 (1) 这是一个原子公式。

P ：王平与王凡是弟兄。

(2) 设 P ：王平做作业， Q ：王凡做作业，则

$$P \wedge Q$$

(3) 设 P ：王平学过德语， Q ：王平学过法语，则

$$P \vee Q$$

(4) 设 P ：王平是 17 岁， Q ：王平是 18 岁，则

$$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \text{ 或 } P \oplus Q$$

(5) 设 P : 派王平到上海学习, Q : 派王凡到上海学习, 则

$$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \text{ 或 } P \oplus Q$$

(6) 设 P : 天气好, Q : 我们踢足球, 则

$$Q \rightarrow P \text{ 或 } \neg P \rightarrow \neg Q$$

(7) 设 P : 生命息, Q : 战斗止, 则

$$\neg P \leftrightarrow \neg Q$$

(8) 设 P : 你来了, Q : 他唱歌, R : 你伴奏, 则

$$P \rightarrow (Q \leftrightarrow R)$$

(9) 设 P : $2+3=5$, Q : $\sqrt{2}$ 是无理数, 则

$$P \leftrightarrow Q$$

例 1-2 甲、乙、丙、丁 4 个人有且仅有两个人参加围棋比赛。关于谁参加比赛, 下列 4 种判断都是正确的:

- (1) 甲和乙只有一人参加;
- (2) 丙参加, 丁必参加;
- (3) 乙或丁至多有一人参加;
- (4) 丁不参加, 甲也不会参加。

请推出哪两个人参加了围棋比赛。

分析 这是一个逻辑推理题目。用逻辑符号进行推理可使解题过程简明, 程式化, 不易出错。

方法是把 4 种判断表达成一个合取式, 再化为主析取范式, 这样每个极小项就是一种可能的方案, 符合题意的方案即为所求。

解 设 P : 甲参加比赛, Q : 乙参加比赛, R : 丙参加比赛, S : 丁参加比赛。

由题意得: $(P \oplus Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (\neg Q \vee \neg S) \wedge (\neg S \rightarrow \neg P)$ 为真。下面把该公式化为主析取范式:

$$\begin{aligned} & (P \oplus Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (\neg Q \vee \neg S) \wedge (\neg S \rightarrow \neg P) \\ \Leftrightarrow & ((P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)) \wedge (\neg R \vee S) \wedge (\neg Q \vee \neg S) \wedge (S \vee \neg P) \\ \Leftrightarrow & ((P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge S) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge S)) \\ & \wedge ((\neg Q \wedge S) \vee (\neg Q \wedge \neg P) \vee (\neg S \wedge \neg P)) \\ \Leftrightarrow & (P \wedge \neg Q \wedge \neg R \wedge S) \vee (P \wedge \neg Q \wedge S) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R \wedge \neg S) \\ \Leftrightarrow & (P \wedge \neg Q \wedge \neg R \wedge S) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R \wedge S) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R \wedge \neg S) \end{aligned}$$

因为有且仅有两个人参加比赛, 所以只有 $P \wedge \neg Q \wedge \neg R \wedge S$ 为真。即甲、丁参加了比赛。

例 1-3 如果 $A \vee C \Leftrightarrow B \vee C$, 是否有 $A \Leftrightarrow B$? 如果 $A \wedge C \Leftrightarrow B \wedge C$, 是否有 $A \Leftrightarrow B$? 如果 $\neg A \Leftrightarrow \neg B$, 是否有 $A \Leftrightarrow B$?

分析 即问“如果 $A \vee C \leftrightarrow B \vee C$ 为永真式, 是否有 $A \leftrightarrow B$ 为永真式”。

对此类题, 一般先初步判定结论是否成立。若成立, 则要证明; 若不成立, 则要找出某一指派, 在该指派下, 公式为假。

解 (1) 设有某种指派, 使公式 C 的真值为 T , A 的真值为 T , B 的真值为 F , 这时 A

$\vee C \leftrightarrow B \vee C$ 的真值为 T , $A \leftrightarrow B$ 的真值为 F 。这说明如果 $A \vee C \leftrightarrow B \vee C$, 不一定有 $A \leftrightarrow B$ 。

(2) 设有某种指派, 使公式 C 的真值为 F , A 的真值为 T , B 的真值为 F , 这时 $A \wedge C \leftrightarrow B \wedge C$ 的真值为 T , $A \leftrightarrow B$ 的真值为 F 。这说明如果 $A \wedge C \leftrightarrow B \wedge C$, 不一定有 $A \leftrightarrow B$ 。

(3) 若 $\neg A \leftrightarrow \neg B$, 则 $\neg A \leftrightarrow \neg B$ 为永真式。因为 $\neg A \leftrightarrow \neg B \Leftrightarrow A \leftrightarrow B$, 故 $A \leftrightarrow B$ 为永真式, 即 $A \leftrightarrow B$ 成立。

例 1-4 证明 $(A_1 \rightarrow B) \wedge (A_2 \rightarrow B) \wedge \cdots \wedge (A_n \rightarrow B) \wedge (A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n) \Rightarrow B$ 是一个正确的推理形式。

分析 对于含有 n 个命题的题型, 一般用数学归纳法证明。

证明 只要证明

$$(A_1 \rightarrow B) \wedge (A_2 \rightarrow B) \wedge \cdots \wedge (A_n \rightarrow B) \wedge (A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n) \rightarrow B$$

是一个永真式。用数学归纳法证明:

当 $n=1$ 时

$$\begin{aligned} ((A_1 \rightarrow B) \wedge A_1) \rightarrow B &\Leftrightarrow (\neg A_1 \vee B) \wedge A_1 \rightarrow B \\ &\Leftrightarrow \neg((\neg A_1 \vee B) \wedge A_1) \vee B \\ &\Leftrightarrow \neg((\neg A_1 \wedge A_1) \vee (B \wedge A_1)) \vee B \\ &\Leftrightarrow \neg(B \wedge A_1) \vee B \\ &\Leftrightarrow \neg B \vee \neg A_1 \vee B \\ &\Leftrightarrow T \end{aligned}$$

设当 $n=k-1$ 时, 公式为永真式, 即

$$(A_1 \rightarrow B) \wedge (A_2 \rightarrow B) \wedge \cdots \wedge (A_{k-1} \rightarrow B) \wedge (A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_{k-1}) \rightarrow B$$

为永真式。令 $C \Leftrightarrow (A_1 \rightarrow B) \wedge (A_2 \rightarrow B) \wedge \cdots \wedge (A_{k-1} \rightarrow B)$, $D \Leftrightarrow (A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_{k-1})$, 则 $C \wedge D \rightarrow B$ 为永真式。

当 $n=k$ 时

$$\begin{aligned} (A_1 \rightarrow B) \wedge (A_2 \rightarrow B) \wedge \cdots \wedge (A_k \rightarrow B) \wedge (A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_k) \rightarrow B \\ &\Leftrightarrow C \wedge (A_k \rightarrow B) \wedge (D \vee A_k) \rightarrow B \\ &\Leftrightarrow C \wedge (\neg A_k \vee B) \wedge (D \vee A_k) \rightarrow B \\ &\Leftrightarrow \neg(C \wedge (\neg A_k \vee B) \wedge (D \vee A_k)) \vee B \\ &\Leftrightarrow \neg C \vee (A_k \wedge \neg B) \vee (\neg D \wedge \neg A_k) \vee B \\ &\Leftrightarrow \neg C \vee A_k \vee B \vee (\neg D \wedge \neg A_k) \\ &\Leftrightarrow \neg C \vee A_k \vee B \vee \neg D \\ &\Leftrightarrow \neg C \vee \neg D \vee B \vee A_k \\ &\Leftrightarrow \neg(C \wedge D) \vee B \vee A_k \\ &\Leftrightarrow (C \wedge D \rightarrow B) \vee A_k \\ &\Leftrightarrow T \vee A_k \\ &\Leftrightarrow T \end{aligned}$$

所以原题是一个正确推理形式。

例 1-5 张三说李四在说谎, 李四说王五在说谎, 王五说张三、李四都在说谎, 问张三、李四、王五 3 个人到底谁说真话, 谁说假话。

分析 此例解题思路同例 1-2。这儿我们采用真值表的方法化为主析取范式。

解 设 A : 张三说真话; B : 李四说真话; C : 王五说真话。依题意有 $A \leftrightarrow \neg B$, $B \leftrightarrow \neg C$, $C \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ 为真。即

$$(A \leftrightarrow \neg B) \wedge (B \leftrightarrow \neg C) \wedge (C \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B))$$

为真。作出真值表

A	B	C	$\neg A \wedge \neg B$	$A \leftrightarrow \neg B$	$B \leftrightarrow \neg C$	$C \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$	S
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0

故有 $(A \leftrightarrow \neg B) \wedge (B \leftrightarrow \neg C) \wedge (C \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)) \Leftrightarrow \neg A \wedge B \wedge \neg C$ 。故 $\neg A \wedge B \wedge \neg C$ 为真, 即: 张三说假话, 李四说真话, 王五说假话。

例 1-6 用推理规则论证下述问题:

我或者去北京, 或者去广州。如果去北京, 就去长城。去了长城, 就不能参加运动会。所以, 如果我参加了运动会, 那么我去了广州。

证明 设 P : 我去北京; Q : 我去广州; R : 我去长城; S : 我参加运动会。

本题符号化为:

$$P \oplus Q, P \rightarrow R, R \rightarrow \neg S \Rightarrow S \rightarrow Q$$

用 CP 规则论证:

步骤	断言	根据
1	S	P 附加前提
2	$R \rightarrow \neg S$	P
3	$\neg R$	T, 1, 2, I_4
4	$P \rightarrow R$	P
5	$\neg P$	T, 3, 4, I_4
6	$P \oplus Q$	P
7	$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$	T, 6, E
8	$\neg P \vee Q$	T, 5, I_1
9	$\neg(P \wedge \neg Q)$	T, 8, E_{11}
10	$\neg P \wedge Q$	T, 7, 9, I_5
11	Q	T, 10, I_2
12	$S \rightarrow Q$	CP

例 1-7 求 $P \vee Q \wedge R \vee S$ 的主析取范式和主合取范式。

分析 一个命题公式的主析取范式和主合取范式是紧密相关的。由主析取范式可求得主合取范式, 反之亦然。其方法可从下面解法中体会。

解 $P \vee Q \wedge R \vee S$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee S) \wedge (P \vee R \vee S)$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee (R \wedge \neg R) \vee S) \wedge (P \vee (Q \wedge \neg Q) \vee R \vee S)$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R \vee S) \wedge (P \vee Q \vee \neg R \vee S) \wedge (P \vee \neg Q \vee R \vee S)$$

$$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4$$

$$\Leftrightarrow \pi(0, 2, 4)$$

即主合取范式为 $M_0 \wedge M_2 \wedge M_4$ 。又因为

$$\pi(0, 2, 4)$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_8 \vee m_9 \vee m_{10} \vee m_{11} \vee m_{12} \vee m_{13} \vee m_{14} \vee m_{15}$$

即上式为主析取范式。

例 1-8 设计一种保密锁的控制电路，锁上共有 3 个按钮 A 、 B 、 C 。当 3 键同时按下，或只有 A 、 B 两键按下，或只有 A 、 B 其中之一按下时，锁被打开，请写出此控制电路的公式并画出线路图。

分析 本题是逻辑在电路设计中的应用。解题时先用真值表求出开锁条件，再写出逻辑表达式，化成最简单的形式，最后根据最简表达式作出电路图。

解 根据题目要求，列出开锁条件的真值表：

A	B	C	G
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

由真值表写出逻辑表达式为：

$$G \Leftrightarrow A \wedge B \wedge C \vee A \wedge B \wedge \neg C \vee A \wedge \neg B \wedge \neg C \vee \neg A \wedge B \wedge \neg C$$

$$\Leftrightarrow A \wedge B \vee (A \wedge \neg B \vee \neg A \wedge B) \wedge \neg C$$

$$\Leftrightarrow A \wedge B \vee ((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)) \wedge \neg C$$

$$\Leftrightarrow (A \wedge B \vee A \vee B) \wedge (A \wedge B \vee (\neg A \vee \neg B)) \wedge (A \wedge B \vee \neg C)$$

$$\Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \wedge B \vee \neg C)$$

$$\Leftrightarrow A \wedge B \vee (A \vee B) \wedge \neg C$$

$$\Leftrightarrow A \wedge B \vee A \wedge \neg C \vee B \wedge \neg C$$

故保密锁的控制电路如图 1.1 所示。

例 1-9 将下面语句翻译成谓词公式：

(1) 己所不欲勿施于人。

(2) 鱼我所欲也，熊掌亦我所欲也。

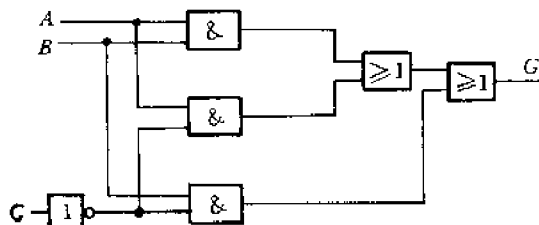


图 1.1

(3) 通过两个不同点有且仅有一条直线。

解 (1) 设 $P(x)$: x 是己所欲的; $Q(x)$: 施 x 于人, 则有 $\forall x(\neg P(x) \rightarrow \neg Q(x))$ 。

(2) 设 $P(x)$: x 是我所欲。 a 为鱼, b 为熊掌, 则有 $P(a) \wedge P(b)$ 。

(3) 设 $P(x)$: x 是点; $L(x)$: x 是直线; $E(x, y)$: x 与 y 相同; $R(x, y, z)$: z 通过 x 和 y , 则有

$$\forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \wedge \neg E(x, y) \rightarrow \exists ! z (L(z) \wedge R(x, y, z)))$$

例 1-10 写出 $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x))$ 的前束范式。

解 $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x))$

$$\Leftrightarrow \forall x(\neg P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\neg \exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \neg \forall x(\neg P(x) \vee Q(x)) \vee (\neg \exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \forall x \neg P(x) \vee \exists x Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \forall y \neg P(y) \vee \exists z Q(z)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \forall y \exists z ((P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \neg P(y) \vee Q(z))$$

例 1-11 证明公式 $\forall x P(x) \wedge \exists y \neg P(y)$ 是永假式。

证明 假定公式 $\forall x P(x) \wedge \exists y \neg P(y)$ 不是永假式, 那么至少存在一个论述域 D 及域上谓词的一种解释, 使 $\forall x P(x)$ 与 $\exists y \neg P(y)$ 同时为真。因为 $\forall x P(x)$ 为真, 故在 D 中对任意元 x , $P(x)$ 都为真。 $\exists y \neg P(y)$ 为真, 则在 D 中, 至少有某个元素 c , 使得 $\neg P(c)$ 为真, 因而在此解释下, $P(c)$ 为假。但由 $\forall x P(x)$ 为真, 可得 $P(c)$ 为真, 矛盾。

因此, $\forall x P(x) \wedge \exists y \neg P(y)$ 必是永假式。

例 1-12 符号化下列命题, 并推证其结论:

任何人如果他喜欢步行, 他就不喜欢乘汽车, 每一个人或者喜欢汽车, 或者喜欢骑自行车。有的人不爱骑自行车, 因而有的人不爱步行。

分析 谓词逻辑中的逻辑推证也用 P , T , CP 等推理规则, 其意义与命题公式中的对应规则相同。所不同的是公式中带量词的, 一般要先应用 US 或 ES 规则, 将量词消去后进行逻辑推证, 然后再应用 UG 或 EG 规则, 对命题进行量化。

证明 设 $P(x)$: x 喜欢步行, $Q(x)$: x 喜欢乘汽车, $R(x)$: x 喜欢骑自行车。

本题符号化为:

$$\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x)), \forall x(Q(x) \vee R(x)), \exists x \neg R(x) \Rightarrow \exists x \neg P(x)$$

1	$\exists x \neg R(x)$	P
2	$\neg R(c)$	T, 1, ES
3	$\forall x(Q(x) \vee R(x))$	P
4	$Q(c) \vee R(c)$	T, 3, US
5	$Q(c)$	T, 2, 4, I_5
6	$\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$	P
7	$P(c) \rightarrow \neg Q(c)$	T, 6, US
8	$\neg P(c)$	T, 5, 7, I_4
9	$\exists x \neg P(x)$	T, 8, EG

第 2 章 集 合

2.1 集合论的基本概念

2.1.1 用列举法表示下列集合：

- (a) 小于 20 的质数集合
- (b) 构成词 evening 的字母集合
- (c) $\{x|x^2+x-6=0\}$
- (d) 真值构成的集合

解 (a) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

(b) $\{e, v, n, i, g\}$

(c) $\{-3, 2\}$

(d) $\{\text{真}, \text{假}\}$

2.1.2 用描述法表示下列集合：

- (a) $\{1, 2, 3, \dots, 79\}$
- (b) 奇整数集合
- (c) 能被 5 整除的整数集合
- (d) 重言式集合

解 (a) $\{x|x \in I \wedge 0 < x \wedge x < 80\}$, 其中 I 表示整数集合。

(b) $\{x|\exists y(y \in I \wedge x=2y+1)\}$, I 同上。

(c) $\{x|\exists y(y \in I \wedge x=5y)\}$, I 同上。

(d) $\{A|A \text{ 为命题公式且永真}\}$

2.1.3 列出下列集合的成员：

- (a) $\{x|x \text{ 是 } 36 \text{ 的因子}\}$
- (b) $\{x|x=a \vee x=b\}$
- (c) $\{1, \{3\}, \{\{a\}\}\}$

解 (a) 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

(b) a, b

(c) $1, \{3\}, \{\{a\}\}$

2.1.4 论述域是 I , 确定下列哪些集合是相等的：

$$A = \{x|x^2-1=15 \wedge x^3=1\}$$

$$B = \{0\}$$

$$C = \{x | \exists y (y \in I \wedge x = 2y)\}$$

$$D = \{x | x^2 - 6x + 8 = 0\}$$

$$E = \{2x | x \in I\}$$

$$F = \{4, 2, 4, 2\}$$

$$G = \{x | x^2 + 1 = 0\}$$

$$H = \{0, 2, -2, 4, -4, 6, -6, \dots\}$$

解 (i) $A = G = \emptyset$

(ii) $D = F = \{2, 4\}$

(iii) $C = E = H = \{x | x \text{ 是偶数}\}$

2.1.5 证明: 若 a, b, c 和 d 是任意客体, 则 $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ 当且仅当 $a = c$ 和 $b = d$ 。

证明 充分性: 当 $a = c, b = d$ 时, 有 $\{a\} = \{c\}, \{a, b\} = \{c, d\}$, 所以 $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ 。

必要性: 由 $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ 知 $\{a\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\}$, 且 $\{a, b\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\}$, 所以 $\{a\}$ 或者是 $\{c\}$, 或者是 $\{c, d\}$, 但 $\{c, d\}$ 包含两个元素, 所以 $\{a\} = \{c\}$, 所以 $a = c$; 同理可得 $\{a, b\} = \{c, d\}$, 又 $a = c$, 且 $b \in \{c, d\}$, 所以 $b = d$ 。

***2.1.6** 小镇上唯一的理发师公开宣布: 他仅给自己不刮脸的人刮脸, 问谁给这位理发师刮脸? 为什么这是一个悖论?

解 如果理发师给自己刮脸, 那么按照规定, 理发师不能给自己刮脸 (因为他仅给自己不刮脸的人刮脸); 如果理发师不给自己刮脸, 那么按照规定, 理发师应该给自己刮脸 (因为他仅给自己不刮脸的人刮脸)。这样, 理发师给自己刮脸或不给自己刮脸都得出矛盾。所以这是一个悖论。

2.1.7 列出下列集合的全部子集合:

(a) $\{\emptyset\}$

(b) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

(c) $\{\{\emptyset, a\}, \{a\}\}$

(d) $\{\{a, b\}, \{a, a, b\}, \{b, a, b\}\}$

解 (a) $\emptyset, \{\emptyset\}$

(b) $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

(c) $\emptyset, \{\{\emptyset, a\}\}, \{\{a\}\}, \{\{\emptyset, a\}, \{a\}\}$

(d) $\emptyset, \{\{a, b\}\}$

2.1.8 证明推论 2.1-2。

证法一 对任何集合 A , 恒有 $A = A$, 由定理 2.1-2 得 $A \subseteq A$ 。

证法二 设 x 是论域中的元素, 则 $\neg(x \in A) \vee (x \in A)$ 永真, 所以 $x \in A \rightarrow x \in A$ 为真。由全称推广规则得

$$\forall x (x \in A \rightarrow x \in A)$$

即 $A \subseteq A$ 。

2.1.9 设 A, B 和 C 是集合, 如果 $A \in B$ 和 $B \in C, A \in C$ 可能吗? $A \in C$ 常真吗? 试举例说明之。

解 设 A, B, C 是集合, 若 $A \in B$ 和 $B \in C$, $A \in C$ 是可能的, 例如

$A = \{a\}$, $B = \{\{a\}\}$, $C = \{\{a\}, \{\{a\}\}\}$, 但 $A \in C$ 不常真, 例如

$A = \{a\}$, $B = \{\{a\}\}$, $C = \{\{\{a\}\}\}$

2.1.10 设 A, B 和 C 是集合, 证明或否定以下断言:

(a) $[A \in B \wedge B \in C] \Rightarrow A \in C$

(b) $[A \in B \wedge B \in C] \Rightarrow A \in C$

(c) $[A \subset B \wedge B \in C] \Rightarrow A \in C$

解 (a) 错误, 例如 $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{\{1\}\}$.

(b) 错误, 例如 $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}\}$, $C = \{\{1\}\}$.

(c) 错误, 例如 $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{\{1\}\}$.

2.1.11 指出下列各组集合中的集合有何不同, 列出每一集合的元素和全部子集。

(a) $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$.

(b) $\{a, b, c\}$, $\{a, \{b, c\}\}$, $\{\{a, \{b, c\}\}\}$.

解 (a) $\{\emptyset\}$ 的元素为 $\emptyset$, 其子集为 $\emptyset, \{\emptyset\}$; $\{\{\emptyset\}\}$ 的元素为 $\{\emptyset\}$, 其子集为 $\emptyset, \{\{\emptyset\}\}$.

(b) $\{a, b, c\}$ 的元素为 a, b, c , 其全部子集为: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$.

$\{a, \{b, c\}\}$ 的元素为 $a, \{b, c\}$, 其全部子集为: $\emptyset, \{a\}, \{\{b, c\}\}, \{a, \{b, c\}\}$.

$\{\{a, \{b, c\}\}\}$ 的元素为 $\{a, \{b, c\}\}$, 其子集为: $\emptyset, \{\{a, \{b, c\}\}\}$.

2.1.12 $A \subset B$ 且 $A \in B$ 这可能吗? 证明你的断言。

解 $A \subset B$ 且 $A \in B$ 是可能的, 例如,

$$A = \{1\}, B = \{1, \{1\}\}$$

2.1.13 确定下列各命题的真和假:

(a) $\emptyset \subseteq \emptyset$

(b) $\emptyset \in \emptyset$

(c) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

(d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

(e) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$

(f) $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$

(g) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$

(h) $\{a, b\} \in \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$

解 (a) 真, (b) 假, (c) 真, (d) 真, (e) 真, (f) 假, (g) 真, (h) 假。

2.1.14 对任意集合 A, B, C 确定下列各命题是真是假:

(a) 如果 $A \in B$ 及 $B \subseteq C$, 则 $A \in C$.

(b) 如果 $A \in B$ 及 $B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$.

(c) 如果 $A \subseteq B$ 及 $B \in C$, 则 $A \in C$.

(d) 如果 $A \subseteq B$ 及 $B \in C$, 则 $A \subseteq C$.

解 (a) 真。因为 $\forall x(x \in B \rightarrow x \in C)$, $A \in B \rightarrow A \in C$ 。已知 $A \in B$, 由假言推理得 $A \in C$ 。

- (b) 假。例如, $A = \{a\}$, $B = \{\{a\}\}$, $C = \{\{a\}\}$ 时 $A \in B$ 且 $B \subseteq C$, 但 $A \subseteq C$ 不成立。
 (c) 假。例如, $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{\{a, b\}\}$ 时, $A \subseteq B$ 且 $B \in C$ 但 $A \in C$ 不成立。
 (d) 假。例子同 C, 但 $A \subseteq C$ 不成立。

2.2 集合上的运算

2.2.1 给定自然数集合 N 的下列子集:

$$A = \{1, 2, 7, 8\}$$

$$B = \{i | i^2 < 50\}$$

$$C = \{i | i \text{ 可被 } 30 \text{ 整除}\}$$

$$D = \{i | i = 2^k \wedge k \in I \wedge 0 \leq k \leq 6\}$$

求出下列集合

$$(a) A \cup (B \cup (C \cup D))$$

$$(b) A \cap (B \cap (C \cap D))$$

$$(c) B - (A \cup C)$$

$$(d) (\bar{A} \cap B) \cup D$$

解 $A = \{1, 2, 7, 8\}$

$$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$C = \{0, 30, 60, 90, \dots\}$$

$$D = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$$

$$(a) A \cup (B \cup (C \cup D)) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 16, 32, 64, 30, 60, 90, \dots\}$$

$$(b) A \cap (B \cap (C \cap D)) = \emptyset$$

$$(c) B - (A \cup C) = \{3, 4, 5, 6\}$$

$$(d) (\bar{A} \cap B) \cup D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 16, 32, 64\}$$

2.2.2 考察正整数集合 I_+ 的下列子集:

$$A = \{x | x < 12\}$$

$$B = \{x | x \leq 8\}$$

$$C = \{x | x = 2k, k \in I_+\}$$

$$D = \{x | x = 3k, k \in I_+\}$$

$$E = \{x | x = 2k - 1, k \in I_+\}$$

试用 A 、 B 、 C 、 D 和 E 表达下列集合:

$$(a) \{2, 4, 6, 8\}$$

$$(b) \{3, 6, 9\}$$

$$(c) \{10\}$$

$$(d) \{x | x \text{ 是偶数} \wedge x > 10\}$$

$$(e) \{x | x \text{ 是偶数且 } x \leq 10, \text{ 或 } x \text{ 是奇数且 } x \geq 9\}$$

解 (a) $\{2, 4, 6, 8\} = B \cap C$

$$(b) \{3, 6, 9\} = A \cap D$$

$$(c) \{10\} = (A-B) \cap C$$

$$(d) \{x|x \text{ 是偶数} \wedge x > 10\} = \bar{A} \cap C$$

$$(e) \{x|x \text{ 是偶数且 } x \leq 10, \text{ 或 } x \text{ 是奇数且 } x \geq 9\} = (A \cap C) \cup (\bar{B} \cap E)$$

2.2.3 设 x 和 y 是实数, 定义运算 $x \triangle y$ 是 x^y (x 的 y 次幂)。

(a) 证明运算 $\triangle$ 既非可交换的也非可结合的。

(b) 设 $*$ 代表乘法运算, 确定下列分配律哪些是成立的:

$$(i) x * (y \triangle z) = (x * y) \triangle (x * z)$$

$$(ii) (y \triangle z) * x = (y * x) \triangle (z * x)$$

$$(iii) x \triangle (y * z) = (x \triangle y) * (x \triangle z)$$

$$(iv) (y * z) \triangle x = (y \triangle x) * (z \triangle x)$$

解 (a) 取 $x=1, y=2$, 则

$$x \triangle y = 1^2 = 1$$

$$y \triangle x = 2^1 = 2$$

所以 $\triangle$ 是非可交换的。

取 $x=2, y=1, z=2$, 则

$$(x \triangle y) \triangle z = 4$$

$$x \triangle (y \triangle z) = 2$$

由此可见 $\triangle$ 也非可结合的。

(b) (i) 不成立。

取 $x=2, y=1, z=2$, 则

$$x * (y \triangle z) = 2$$

$$(x * y) \triangle (x * z) = 16$$

(ii) 不成立。反例同上。

(iii) 不成立。反例同上。

(iv) 成立。

$$\begin{aligned} (y * z) \triangle x &= (yz)^x = y^x * z^x \\ &= (y \triangle x) * (z \triangle x) \end{aligned}$$

2.2.4 (a) 对下列各式构造文氏图:

$$(i) \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$(ii) A - (\bar{B} \cup \bar{C})$$

$$(iii) (A \oplus B) \otimes C$$

(b) 给出一公式, 它表示图 2.1 中各文氏图中的阴影部分。

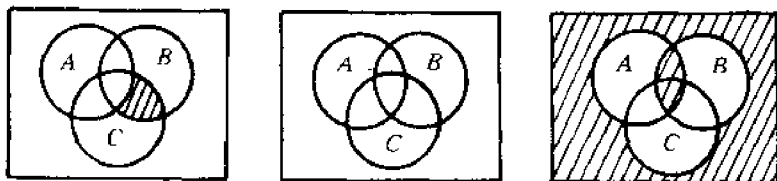


图 2.1

解 (a) 文氏图如图 2.2 所示。

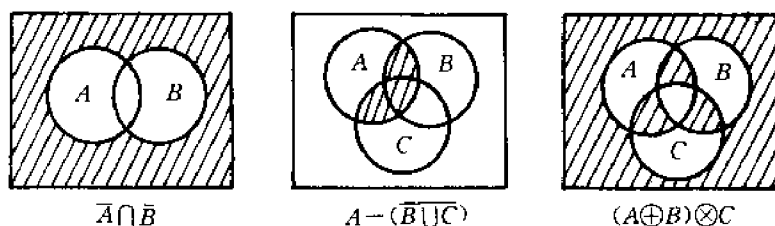


图 2.2

(b) (i) $B \cap C - A$

(ii) $\emptyset$ 或 $(A \cup B \cup C) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup C) \cap (A \cup \bar{B} \cup \bar{C}) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup C) \cap (A \cup B \cup \bar{C}) \cap (\bar{A} \cup B \cup \bar{C}) \cap (A \cup \bar{B} \cup \bar{C}) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C})$

(iii) $(\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}) \cup (A \cap B)$

2.2.5 设 A, B, C 是任意集合, 把 $A \cup B \cup C$ 表示为不相交集合并。

解 $A \cup B \cup C = A \cup (B \cap \bar{A}) \cup (C \cap \bar{A} \cap \bar{B})$

或 $A \cup B \cup C = (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (B \cap \bar{A} \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{A} \cap \bar{B}) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (B \cap C \cap \bar{A}) \cup (A \cap C \cap \bar{B}) \cup (A \cap B \cap C)$

2.2.6 设 A, B 和 C 是集合。

(a) 证明如果 $C \supseteq A$ 且 $C \supseteq B$, 那么 $C \supseteq A \cup B$ (也就是 $A \cup B$ 是包含 A 和 B 的最小集合)。

(b) 证明如果 $C \subseteq A$ 且 $C \subseteq B$, 那么 $C \subseteq A \cap B$ (也就是 $A \cap B$ 是包含在 A 和 B 中的最大集合)。

证明 (a) 设 x 是任意元素,

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in C$$

所以 $\forall x (x \in (A \cup B) \rightarrow x \in C)$

$$A \cup B \subseteq C$$

(b) $\forall x \in C \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in (A \cap B)$

所以 $C \subseteq A \cap B$

2.2.7 证明定理 2.2-2 的 (b) 部分。

证明 设 x 是任意元素,

$$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \vee (x \in A \cap C)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

所以 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 。

2.2.8 假定 $A \neq \emptyset$ 和 $A \cup B = A \cup C$, 证明这不能得出 $B = C$, 假设中增加 $A \cap B = A \cap C$, 你能得出 $B = C$ 吗?

证明 若 $A \neq \emptyset$, $A \cup B = A \cup C$, 并不能得出 $B = C$ 。例如: $A = \{1, 2\}$, $B = \{2\}$, $C = \{1\}$, 则 $A \cup B = A \cup C$, 但 $B \neq C$ 。

若增加 $A \cap B = A \cap C$, 则可得 $B = C$ 。

因为

$$\begin{aligned} B &= (A \cup B) - (A - (A \cap B)) \\ &= (A \cup C) - (A - (A \cap C)) \\ &= C \end{aligned}$$

2.2.9 (a) 证明“相对补”不是一个可交换运算, 即证明存在一个论述域包含集合 A 和 B , 使 $A - B \neq B - A$ 。

(b) $A - B = B - A$ 可能吗? 刻画此式出现的全部条件。

(c) “相对补”是一个可结合的运算吗? 证明你的断言。

解 (a) 令 $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, 则 $A - B = \{1\}$, $B - A = \{2\}$, 两者不相等, 所以“相对补”不是一个可交换运算。

(b) $A - B = B - A$ 是可能的, 它成立的充要条件是 $A = B$ 。

(c) “相对补”不是可结合的运算, 例如: 令 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1\}$, 则 $(A - B) - C = \{3\}$, $A - (B - C) = \{1, 3\}$ 。

2.2.10 证明定理 2.2-3 的其余部分。

证明 (b) $x \in A \cap A \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in A \Leftrightarrow x \in A$, 所以 $A \cap A = A$ 。

(d) $x \in A \cap \emptyset \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \emptyset \Leftrightarrow F \Leftrightarrow x \in \emptyset$, 所以 $A \cap \emptyset = \emptyset$ 。

(h) $\forall x, x \in A \cap C \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in C \Rightarrow x \in B \wedge x \in D \Leftrightarrow x \in (B \cap D)$, 所以 $(A \cap C) \subseteq (B \cap D)$ 。

(i) $x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in A \cup B$, 所以 $A \subseteq A \cup B$ 。

(j) $x \in (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A$, 所以 $A \cap B \subseteq A$ 。

(l) 因为 $A \subseteq B$, 又 $A \subseteq A$, 由 (h) 得 $A = (A \cap A) \subseteq A \cap B$; 又由 (j) 得 $A \cap B \subseteq A$, 所以 $A \cap B = A$ 。

2.2.11 设 A 、 B 和 C 是论述域 U 的任意子集, 证明下列各式:

(a) $A \cap (B - A) = \emptyset$

(b) $A \cup (B - A) = A \cup B$

(c) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

(d) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

证明 (a) $A \cap (B - A) = A \cap (B \cap \bar{A})$
 $= (A \cap \bar{A}) \cap B = \emptyset$

(b) $A \cup (B - A) = A \cup (B \cap \bar{A})$
 $= (A \cup B) \cap (A \cup \bar{A})$
 $= (A \cup B) \cap U = A \cup B$

(c) $A - (B \cup C) = A \cap (\overline{B \cup C})$
 $= A \cap (\bar{B} \cap \bar{C}) = (A \cap \bar{B}) \cap (A \cap \bar{C})$
 $= (A - B) \cap (A - C)$

(d) $A - (B \cap C) = A \cap (\overline{B \cap C})$
 $= A \cap (\bar{B} \cup \bar{C}) = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C})$

$$= (A-B) \cup (A-C)$$

2.2.12 证明下列恒等式:

$$(a) A \cup (A \cap B) = A$$

$$(b) A \cap (A \cup B) = A$$

$$(c) A-B = A \cap \bar{B}$$

$$(d) A \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup B$$

$$(e) A \cap (\bar{A} \cup B) = A \cap B$$

证明 (a) 由定理 2.2-3(j) 得 $(A \cap B) \subseteq A$, 由 (k) 得

$$A \cup (A \cap B) = A$$

(b) 由定理 2.2-3(3) 得 $A \cup B \supseteq A$, 由 (l) 得

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$(c) x \in A-B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \bar{B} \Leftrightarrow x \in (A \cap \bar{B})$$

所以 $A-B = A \cap \bar{B}$.

$$(d) A \cup (\bar{A} \cap B) = (A \cup \bar{A}) \cap (A \cup B) = U \cap (A \cup B) = A \cup B$$

$$(e) A \cap (\bar{A} \cup B) = (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$$

2.2.13 证明 $A \subseteq B$ 、 $\bar{A} \cup B = U$ 和 $A \cap \bar{B} = \emptyset$ 三者是等价的。

证法 1 $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$

$$\Leftrightarrow \forall x(\neg(x \in A) \vee x \in B)$$

$$\Leftrightarrow \forall x(x \in \bar{A} \vee x \in B)$$

$$\Leftrightarrow \forall x(x \in (\bar{A} \cup B))$$

$$\Leftrightarrow \bar{A} \cup B = U$$

所以 $A \subseteq B$ 与 $\bar{A} \cup B = U$ 等价。

$$\bar{A} \cup B = U$$

$$\Leftrightarrow \forall x(\neg \neg(x \in \bar{A} \cup B))$$

$$\Leftrightarrow \forall x(\neg(x \in (\bar{A} \cup B)))$$

$$\Leftrightarrow \forall x(\neg(x \in (A \cap \bar{B})))$$

$$\Leftrightarrow A \cap \bar{B} = \emptyset$$

所以 $\bar{A} \cup B = U$ 与 $A \cap \bar{B} = \emptyset$ 亦等价。

证法 2 (1) 由 $A \subseteq B$ 及定理 2.2-3(l) 得 $A \cap B = A$, 两边并上 $\bar{A}$ 得 $\bar{A} \cup (A \cap B) = \bar{A} \cup A = U$, 即 $\bar{A} \cup B = U$ 。

(2) 把 $\bar{A} \cup B = U$ 两边进行补运算即得

$$A \cap \bar{B} = \emptyset$$

(3) 把 $A \cap \bar{B} = \emptyset$ 两边并上 B 得

$$B \cup (A \cap \bar{B}) = B$$

即 $A \cup B = B$, 又因 $A \subseteq A \cup B = B$, 所以 $A \subseteq B$ 。

因此三者等价。

2.2.14 在下列每题中找出 $\bigcup_{s \in C} S$ 和 $\bigcap_{s \in C} S$:

$$(a) C = \{\emptyset\}$$

$$(b) C = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$(c) C = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

$$(d) C = \{\{i\} \mid i \in I\}$$

解 (a) $\bigcup_{S \in C} S = \emptyset; \bigcap_{S \in C} S = \emptyset$

$$(b) \bigcup_{S \in C} S = \{\emptyset\}; \bigcap_{S \in C} S = \emptyset$$

$$(c) \bigcup_{S \in C} S = \{a, b\}; \bigcap_{S \in C} S = \emptyset$$

$$(d) \bigcup_{S \in C} S = I; \bigcap_{S \in C} S = \emptyset$$

2.2.15 设 A, B 和 C 是某论述域 U 的子集合, D 是下述搜集:

$$D = \{\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}, \bar{A} \cap \bar{B} \cap C, \bar{A} \cap B \cap \bar{C}, \bar{A} \cap B \cap C, A \cap \bar{B} \cap \bar{C}, A \cap \bar{B} \cap C, A \cap B \cap \bar{C}, A \cap B \cap C\}$$

(a) 对搜集 D 的元素构造文氏图。

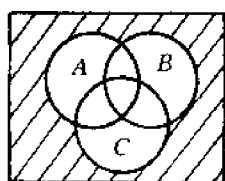
(b) 证明 $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ 和 $\bar{A} \cap \bar{B} \cap C$ 是不相交的。 D 是不相交搜集吗?

(c) 证明 $\bigcup_{S \in D} S = U$ 。

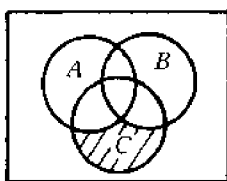
解 (a) D 的元素的文氏图如图 2.3 所示。

$$(b) (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cap (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \\ = (\bar{A} \cap \bar{B}) \cap (\bar{C} \cap C) = \emptyset$$

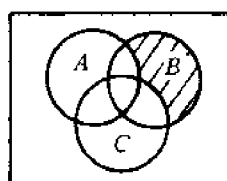
D 是不相交搜集。



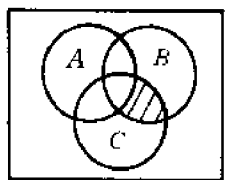
(i) $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$



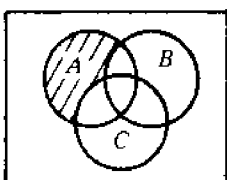
(ii) $\bar{A} \cap \bar{B} \cap C$



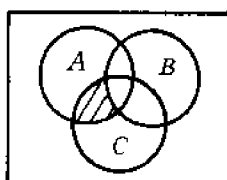
(iii) $\bar{A} \cap B \cap C$



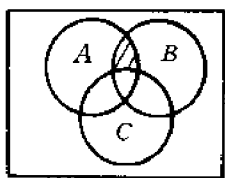
(iv) $\bar{A} \cap B \cap \bar{C}$



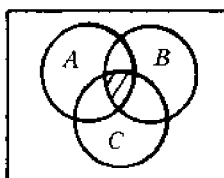
(v) $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$



(vi) $A \cap \bar{B} \cap C$



(vii) $A \cap B \cap \bar{C}$



(viii) $A \cap B \cap C$

图 2.3

$$(c) (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap B \cap C) \\ = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) = A$$

所以 $A \subseteq \bigcup_{S \in D} S$

同理可得 $B \subseteq \bigcup_{S \in D} S, C \subseteq \bigcup_{S \in D} S$

$$\bigcup_{S \in D} S \supseteq (A \cup B \cup C \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})) \\ = (A \cup B \cup C \cup (\overline{A \cap B \cap C})) = U$$

所以 $\bigcup_{S \in D} S = U$

2.2.16 设 C 是一非空的某论述域 U 的子集的搜集, 证明下列德·摩根定理的推广:

$$(a) \overline{\bigcup_{S \in C} S} = \bigcap_{S \in C} \bar{S}$$

$$(b) \overline{\bigcap_{S \in C} S} = \bigcup_{S \in C} \bar{S}$$

证明 (a) 对于任意元素 x

$$x \in \overline{\bigcup_{S \in C} S} \Leftrightarrow \neg(\exists S(S \in C \wedge x \in S)) \\ \Leftrightarrow \forall S(\neg(S \in C \wedge x \in S)) \\ \Leftrightarrow \forall S(S \notin C \vee x \notin S) \\ \Leftrightarrow \forall S(\neg(S \in C) \vee x \in \bar{S}) \\ \Leftrightarrow \forall S(S \in C \rightarrow x \in \bar{S}) \\ \Leftrightarrow x \in \bigcap_{S \in C} \bar{S}$$

所以 $\bigcup_{S \in C} S = \bigcap_{S \in C} \bar{S}$

(b) 对于任意元素 x

$$x \in \overline{\bigcap_{S \in C} S} \Leftrightarrow \neg(\forall S(S \in C \rightarrow x \in S)) \\ \Leftrightarrow \exists S(\neg(S \in C \rightarrow x \in S)) \\ \Leftrightarrow \exists S(\neg(S \notin C \vee x \notin S)) \\ \Leftrightarrow \exists S(S \in C \wedge x \notin S) \\ \Leftrightarrow \exists S(S \in C \wedge x \in \bar{S}) \\ \Leftrightarrow x \in \bigcup_{S \in C} \bar{S}$$

所以 $\bigcap_{S \in C} S = \bigcup_{S \in C} \bar{S}$

2.2.17 设 C 是一非空的某论述域 U 的子集的搜集, B 是 U 的子集, 证明下列分配律的推广:

$$(a) B \cap (\bigcup_{S \in C} S) = \bigcup_{S \in C} (B \cap S)$$

$$(b) B \cup (\bigcap_{S \in C} S) = \bigcap_{S \in C} (B \cup S)$$

证明 (a) 设 x 是任意元素

$$x \in B \cap (\bigcup_{S \in C} S) \\ \Leftrightarrow x \in B \wedge x \in \bigcup_{S \in C} S \\ \Leftrightarrow x \in B \wedge \exists S(S \in C \wedge x \in S) \\ \Leftrightarrow \exists S(x \in B \wedge S \in C \wedge x \in S) \\ \Leftrightarrow \exists S(S \in C \wedge x \in (B \cap S))$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{S \in C} (B \cap S)$$

$$\therefore B \cap \left(\bigcup_{S \in C} S \right) = \bigcup_{S \in C} (B \cap S).$$

(b) 设 x 是任意元素

$$x \in B \cup \left(\bigcap_{S \in C} S \right)$$

$$\Leftrightarrow x \in B \vee \forall S (S \in C \rightarrow x \in S)$$

$$\Leftrightarrow x \in B \vee (\forall S (S \notin C \vee x \in S))$$

$$\Leftrightarrow \forall S (x \in B \vee S \notin C \vee x \in S)$$

$$\Leftrightarrow \forall S (S \notin C \vee x \in (B \cup S))$$

$$\Leftrightarrow \forall S (S \in C \rightarrow x \in (B \cup S))$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{S \in C} (B \cup S)$$

2.2.18 指出下列集合的幂集合:

(a) $\{a, b, c\}$

(b) $\{\{a, b\}, \{c\}\}$

(c) 设 $A = \{a\}$, 求 A 和 $\rho(A)$ 的幂集合。

解 (a) $\rho(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

(b) $\rho(A) = \{\emptyset, \{\{a, b\}\}, \{\{c\}\}, \{\{a, b\}, \{c\}\}\}$

(c) $\rho(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$

$\rho(\rho(A)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset, \{a\}\}\}$

2.2.19 设 $S_n = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ 和 $S_{n+1} = \{a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}\}$, 试用 $\rho(S_n)$ 和 a_{n+1} 表达 $\rho(S_{n+1})$ 。

解 $\rho(S_{n+1}) = \rho(S_n) \cup \{A \cup \{a_{n+1}\} \mid A \in \rho(S_n)\}$

2.2.20 证明下列各式:

(a) $A \oplus A \oplus B = B$

(b) $(A - B) \oplus B = A \cup B$

(c) $C \cap (A \oplus B) = (C \cap A) \oplus (C \cap B)$

(d) $C \cup (A \otimes B) = (C \cup A) \otimes (C \cup B)$

证明 (a) $A \oplus A \oplus B$

$$= (A \oplus A) \oplus B = \emptyset \oplus B$$

$$= (\emptyset - B) \cup (B - \emptyset) = B$$

(b) $(A - B) \oplus B$

$$= (A \cap \bar{B}) \oplus B$$

$$= (A \cap \bar{B} \cap \bar{B}) \cup (B \cap (\bar{A} \cap \bar{B}))$$

$$= (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap (\bar{A} \cup B))$$

$$= (A \cap \bar{B}) \cup B = A \cup B$$

(c) $C \cap (A \oplus B)$

$$= C \cap ((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B))$$

$$= (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$$

又 $(C \cap A) \oplus (C \cap B)$

$$\begin{aligned}
&= ((C \cap A) \cap (\bar{C} \cup \bar{B})) \cup ((\bar{C} \cup \bar{A}) \cap (C \cap B)) \\
&= ((C \cap A \cap \bar{C}) \cup (C \cap A \cap \bar{B})) \cup ((\bar{C} \cap C \cap B) \cup (\bar{A} \cap C \cap B)) \\
&= (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)
\end{aligned}$$

所以等式成立。

$$\begin{aligned}
(d) \quad &(C \cup A) \otimes (C \cup B) \\
&= ((C \cup A) \cup (\bar{C} \cap \bar{B})) \cap ((\bar{C} \cap \bar{A}) \cup (C \cup B)) \\
&= ((C \cup A \cup \bar{C}) \cap (C \cup A \cup \bar{B})) \cap ((\bar{C} \cup C \cup B) \cap (\bar{A} \cup C \cup B)) \\
&= (A \cup \bar{B} \cup C) \cap (\bar{A} \cup B \cup C)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{又 } C \cup (A \otimes B) &= C \cup ((A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B)) \\
&= (C \cup A \cup \bar{B}) \cap (C \cup \bar{A} \cup B)
\end{aligned}$$

所以等式成立。

2.2.21 试决定在 1 到 250 之间能被 2、3、5、7 任何一数整除的整数个数。

解 设 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 分别表示能被 2、3、5、7 整除的整数的集合，则有

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - \\
&|A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \\
&\cap A_3 \cap A_4| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|
\end{aligned}$$

上式中各项分别计算如下：

$$|A_1| = 125, |A_2| = 83, |A_3| = 50, |A_4| = 35;$$

$$|A_1 \cap A_2| = 41, |A_1 \cap A_3| = 25, |A_1 \cap A_4| = 17, |A_2 \cap A_3| = 16, |A_2 \cap A_4| = 11, |A_3 \cap A_4| = 7;$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 8, |A_1 \cap A_2 \cap A_4| = 5, |A_1 \cap A_3 \cap A_4| = 3, |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 2;$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1$$

把以上数值代入得：

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 193$$

所以在 1 到 250 之间能被 2、3、5、7 任何一数整除的整数的个数为 193。

2.2.22 某班学生 50 人，会 FORTRAN—IV 语言的 40 人，会 ALGOL—60 语言的 35 人，会 PL/1 语言的 10 人，以上三门都会的 5 人，都不会的没有，问仅会两门的有几人？

解 设 A_1 表示会 FORTRAN—IV 的人的集合， A_2 表示会 ALGOL—60 的人的集合， A_3 表示会 PL/1 的人的集合。

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 50$$

$$\text{且 } |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$|A_1| = 40, |A_2| = 35, |A_3| = 10, |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 5$$

$$\text{所以 } |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| = 50 + 40 + 35 + 10 + 5 = 40.$$

会两门以上的人数为：

$$\begin{aligned}
&|(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)| \\
&= |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - 2|A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\
&= 40 - 2 \times 5 = 30
\end{aligned}$$

只会两门的人数为会两门以上的人数减去会三门的人数，由此可得会两门的人数为25人。

2.3 归纳法和自然数

2.3.1 对下列集合给出归纳定义：

- (a) 十进制无符号整数集合，定义的集合将包含 6, 235, 0045 等等。
- (b) 十进制的以小数部分为结束的实数集合，定义的集合将包含 5.3, 453., 01.2700, 0.480 等等。
- (c) 二进制形式的不以 0 开头的正偶数和 0 所组成的集合，定义的集合包含 0, 110, 1010 等等。
- (d) 把算术表达式中的运算符和运算对象全删去，所得的括号叫成形括号串。例如 $[]$, $[[]]$, $[][]$, $[[[]]]$ 等都是成形括号串(例中用 $[]$ 代 $()$ 是为了明晰)，试定义成形括号串集合。

解 (a) 设 R 表示十进制无符号整数集合，则其归纳定义如下：

- (i) 如果 $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ，那么 $a \in R$ 。
- (ii) 如果 $a, b \in R$ ，那么 $ab \in R$ 。
- (iii) R 仅包含能由有限次应用(i)和(ii)构成的元素。

(b) 设 R 表示十进制的以小数部分为结束的集合， $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ，则其归纳定义如下：

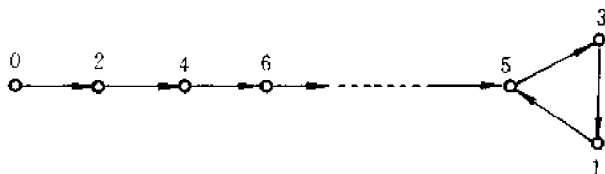
- (i) 若 $a \in D$ ，则 $a. \in R$ 。
 - (ii) 若 $x \in R, a \in D$ ，则 $ax \in R, xa \in R$ 。
 - (iii) R 仅含这些元素：能由有限次应用(i)和(ii)构成。
- (c) 设 R 表示二进制形式的不以 0 开头的正偶数和 0 组成的集合，则其归纳定义为：
- (i) $0 \in R, 10 \in R$ 。
 - (ii) 若 $x, y \in R$ ，则 $1x \in R, x \neq 0$ 时 $xy \in R$ 。
 - (iii) R 仅包含以下元素：能由有限次应用(i)和(ii)所构成的。

(d) 设 R 表示成形括号串集合，则其归纳定义为：

- (i) $[] \in R$ 。
- (ii) 若 $x, y \in R$ ，则 $[x] \in R, xy \in R$ 。
- (iii) R 仅包含以下元素：能由有限次应用(i)和(ii)构成。

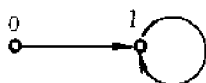
2.3.2 将皮亚诺公设交替地删去其中第(5)条、第(4)条或第(2)条的唯一性，为这样所得的公理系统分别构造模型，说明它们都不是自然数。

解 (i) 将皮亚诺公设中删去第(5)条，例如以下模型：



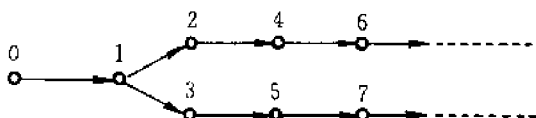
满足皮亚诺公设的 1、2、3、4，但令 $S = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$ ，则 $0 \in S$ ，若 $n \in S$ 则 $n' \in S$ ，但 $S \neq \{0, 2, 4, 6, \dots, 5, 3, 1\}$ 。因此该序列不是自然数。

(ii) 若删去第(4)条，例如以下模型：



满足 1, 2, 3, 5 条，易见它不是自然数。

(iii) 若删去第(2)条的唯一性，例如以下模型：



满足其它几条，但它不是自然数。

2.3.3 我们已经给出的自然数定义仅仅含有“后继者”的概念。自然数论述域上“小于”关系，加和乘等运算可用“后继者”概念的术语加以定义。例如，加法运算能归纳地定义如下：

- ① 对每个自然数 m ， $m+0=m$ ；
 - ② 对每一对自然数 m 和 n ， $m+n'=(m+n)'$ 。
- (a) 证明用以上定义的加法是可结合的。
 (b) 用类似方法归纳地定义乘法(可以引用上边定义的加法运算)。
 (c) 用乘法运算归纳地定义幂运算。
 (d) 给出关于“小于”的一个归纳定义。

解 (a) 对 l 作归纳，设 m, n 是任意自然数。

(1) (基础) $(m+n)+0$

$$= m+n \quad (\text{加法定义的基础条款})$$

$$= m+(n+0) \quad (\text{加法定义的基础条款})$$

(2) (归纳) 设 l 时成立，现证明 l' 也成立

$$(m+n)+l'$$

$$= ((m+n)+l)' \quad (\text{加法定义的归纳条款})$$

$$= (m+(n+l))' \quad (\text{归纳假设})$$

$$= m+(n+l)' \quad (\text{加法定义的归纳条款})$$

$$= m+(n+l') \quad (\text{加法定义的归纳条款})$$

所以对一切 m, n, l 有：

$$(m+n)+l = m+(n+l)$$

(b) 乘法的归纳定义：

(1) 对任意自然数 m ， $m \times 0 = 0$

(2) 对每一对自然数 m, n

$$m \times n' = m \times n + m$$

(c) 用乘法运算归纳地定义幂运算

(1) 对于任意自然数 m , $m^0 = 1$

(2) 对于任一对自然数 m, n

$$m^{n'} = m^n \times m$$

(d) “小于”的一个归纳定义:

(1) $0 < 0'$

(2) 对于任一对自然数 m, n , 若 $m < n$, 则 $m < n'$, $m' < n'$ 。

2.3.4 用 $\{a\}$ 代替 N 的定义中的 $\emptyset$, 但仍用这一定义, 可否生成自然数集合? 有何不同?

解 用 $\{a\}$ 代替 N 的定义中的 $\emptyset$, 仍用这一定义也可生成自然数的集合, 只是记号不同。

2.3.5 证明成形括号串的左右括号个数相等。

证明 用一般归纳法证明, 设 $L(x)$, $R(x)$ 分别表示左, 右括号个数。

(1) (基础) $L([])=1$, $R([])=1$, 命题成立。

(2) (归纳) 设 $L(x)=R(x)$, $L(y)=R(y)$, 则

$$\begin{aligned} L([x]) &= L(x) + 1 = R(x) + 1 \\ &= R([x]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(xy) &= L(x) + L(y) = R(x) + R(y) \\ &= R(xy) \end{aligned}$$

所以对一切成形括号串 x , 有 $L(x)=R(x)$ 。

2.3.6 我们有 3 分和 5 分两种不同票值的邮票, 试证明用这两种邮票就足以组成 8 分或更多的任意邮资。

证明 即要证明 $n=3p+5q$ ($n \geq 8$, 其中 p, q 为自然数)。

(1) $8=3+5$, $9=3 \times 3$, $10=5 \times 2$, $11=3 \times 2+5$ 。

(2) 假设 $n < k$, 且 $(n-3) \geq 8$ 时, 有

$n=3p+5q$ (p, q 是自然数)。

现证 $n=k$ 时, 上式亦成立。

由假设 $(k-3) < k$, 且 $(k-3) \geq 8$

所以 $(k-3)=3p+5q$

所以 $k=3(p+1)+5q$

因此 $n=k$ 时, 也成立。证毕。

2.3.7 用归纳法证明, 对一切 $n \in I_+$

$$(1+2+\cdots+n)^2 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$$

证明 (1) $n=1$ 时, $1^2=1^3$ 。

(2) 假设 $n=k$ 时, 有

$$(1+2+\cdots+k)^2 = 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3$$

(3) 当 $n=k+1$ 时

$$(1+2+\cdots+k+(k+1))^2$$

$$\begin{aligned}
&= (1+2+\cdots+k)^2 + (k+1)^2 + 2(1+2+\cdots+k)(k+1) \\
&= 1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^2+k(k+1)^2 \\
&= 1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3
\end{aligned}$$

即 $n=k+1$ 时也成立。所以

$$(1+2+\cdots+n)^2=1^3+2^3+\cdots+n^3$$

2.3.8 设 a 是一正数, 证明

$$\forall m \forall n [(a^n)^m = a^{mn}], \text{ 这里 } m, n \in N$$

证明 (1) $n=0$ 时, $\forall m$ 有 $(a^n)^0=1=a^{m \cdot 0}$

(2) 设 $n=k$ 时, 有 $(a^n)^k=a^{mk}$, 当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}
(a^n)^{k+1} &= (a^n)^k \cdot a^n = a^{mk} \cdot a^n \\
&= a^{mk+n} = a^{m(k+1)}
\end{aligned}$$

即 $n=k+1$ 时也成立, 所以 $(a^n)^m=a^{mn}$ 。

2.3.9 对所有 $n \in N$, 证明下列每一关系式:

$$(a) \sum_{i=0}^n i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$$

$$(b) \sum_{i=0}^n (2i+1) = (n+1)^2$$

$$(c) \sum_{i=0}^n i(i!) = (n+1)! - 1$$

$$(d) \sum_{i=0}^n ir^i = \begin{cases} \frac{n(n+1)}{2} & r=1 \text{ 时} \\ \frac{nr^{n+2} - (n+1)r^{n+1} + r}{(r-1)^2} & r \neq 1 \text{ 时} \end{cases}$$

$$(e) 1+2n \leq 3^n$$

证明 (a) (1) $n=0$ 时, 有

$$\sum_{i=0}^n i^2 = 0 = n(n+1)(2n+1)/6$$

(2) 设 $n=k$ 时, 等式成立。当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} i^2 &= \sum_{i=0}^k i^2 + (k+1)^2 \\
&= k(k+1)(2k+1)/6 + (k+1)^2 \\
&= (k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]/6 \\
&= (k+1)(2k^2 + 7k + 6)/6 \\
&= (k+1)(k+2)(2k+3)/6 \\
&= (k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]/6
\end{aligned}$$

即 $n=k+1$ 时, 等式也成立。

(b) (1) $n=0$ 时, $1=1$, 等式成立。

(2) 设 n 时等式成立。当 $n+1$ 时,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} (2i+1) &= \sum_{i=0}^n (2i+1) + [2(n+1)+1] \\
&= (n+1)^2 + [2(n+1)+1]
\end{aligned}$$

$$= [(n+1)+1]^2$$

(c) (1) $n=0$ 时, $0=0$, 等式成立。

(2) 设 n 时, 等式也成立。当 $n+1$ 时,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} i(i!) &= \sum_{i=0}^n i(i!) + (n+1)[(n+1)!] \\ &= (n+1)! - 1 + (n+1) \times [(n+1)!] \\ &= (n+1)! \times (n+2) - 1 \\ &= [(n+1)+1]! - 1\end{aligned}$$

所以 $n+1$ 时也成立。证毕。

(d) $r=1$ 时: $n=0$ 时, 显然成立。

假设等式在 n 时也成立, 当 $n+1$ 时有:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} i &= \sum_{i=0}^n i + (n+1) \\ &= n(n+1)/2 + (n+1) \\ &= (n+1)(n+2)/2\end{aligned}$$

所以当 $r=1$ 时, 等式成立。

当 $r \neq 1$ 时:

(1) 当 $n=0$ 时, 易见等式成立。

(2) 当 n 时成立, 在 $n+1$ 时有:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} ir^i &= \sum_{i=0}^n ir^i + (n+1)r^{(n+1)} \\ &= \frac{nr^{n+2} - (n+1)r^{n+1} + r + (n+1)r^{(n+1)}(r^2 - 2r + 1)}{(r-1)^2} \\ &= \frac{(n+1)r^{(n+1)+2} - (n+2)r^{n+2} + r}{(r-1)^2}\end{aligned}$$

所以等式也成立, 证毕。

(e) (1) $n=0$ 时有: $1 \leq 1$, 所以不等式成立。

(2) 假设不等式在 n 时成立, 看 $n+1$ 时的情形:

$$1 + 2(n+1) = 1 + 2n + 2 \leq 3^n + 2 \leq 3^n + 2 \times 3^n = 3^{n+1}$$

所以在 $n+1$ 时, 不等式也成立。证毕。

2.3.10 如果每根直线连接多边形的两个点, 且位于多边形上, 那么这个多边形叫凸的, 证明对一切 $n \geq 3$, n 边的凸多边形内角之和等于 $(n-2) \cdot 180^\circ$ 。(提示: 多边形能用连结两个非邻接的顶角划分为两部分。)

证明 (1) $n=3$ 时, 其内角之和

$$S = 180^\circ = (3-2) \times 180^\circ$$

(2) 假设在 $n < k$ 时 ($n \geq 3$), 内角之和等于 $(n-2) \times 180^\circ$ 。当 $n=k$ 时, 有: 在凸多边形上任取一顶点, 然后将此点与和它隔一顶点的另一顶点相连, 则此线将多边形划分为一个三角形与一个 $(k-1)$ 边的凸多边形。所以其内角和等于

$$180^\circ + (k-3) \times 180^\circ = (k-2) \times 180^\circ$$

所以 k 凸边形时结论也成立。证毕。

2.3.11 找出自然数域上的两个谓词 P 和 Q 以证明归纳证明的基础步骤和归纳步骤是独立的,也就是没有一个逻辑地蕴含另一个。特别,要找出一谓词 P 使 $P(0)$ 是真而 $\forall n (P(n) \rightarrow P(n+1))$ 是假,和一谓词 Q ,使 $Q(0)$ 是假而 $\forall n (Q(n) \rightarrow Q(n+1))$ 是真。

解 (1) 设谓词 $P(n)$ 为: $n=0$, 则 $P(0)$ 是真, 又 $P(1)$ 是假, 所以 $\forall n (P(n) \rightarrow P(n+1))$ 是假。

(2) 设谓词 $Q(n)$ 为: $2+n \geq 3+n$, 则 $\forall n (Q(n) \rightarrow Q(n+1))$ 是真, 但是 $Q(0)$ 假。

由此可见, 归纳证明的基础步骤与归纳步骤是独立的。

2.3.12 我们意欲证明, 对一切 n 和一切 S , 如果 S 是 n 个人的集合, 那么在 S 中的所有人都有同样的身材。下面“所有人都有同样的身材”的证明错在那里?

(a) (基础) 设 S 是一空集合, 那么对所有的 x 和 y , 如果 $x \in S$ 和 $y \in S$, 那么 x 和 y 有同样的身材。

(b) (归纳) 假定对所有包含 n 个人的集合断言是真。我们证明对包含 $n+1$ 个人的集合也真。任何由 $n+1$ 个人组成的集合包含两个 n 个人组成的不同的但交搭的子集合。用 S' 和 S'' 表示这两个子集合。那么根据归纳前提, 在 S' 中的所有人有相同的身材, 在 S'' 中的所有人有相同的身材, 因为 S' 和 S'' 是交搭的, 所以, 所有在 $S=S' \cup S''$ 中的人都有相同的身材。

解 该证明的归纳步骤中, “任何 $n+1$ 个人组成的集合包含两个 n 个人组成的不同的但交搭的子集合”这一结论是不正确的。例如在 n 取 0 或 1 时, 此结论就不成立。

2.3.13 设 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 是集合的非空搜集, 对 n 作归纳证明下述推广的德·摩根定律:

$$(a) \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}$$

$$(b) \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$$

证明 (1) $n=1, 2$ 时, 易见结论成立。

(2) 设当 n 时结论成立, $n+1$ 时,

$$\begin{aligned} (a) \overline{\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i} &= \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i \cup A_{n+1}} = \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} \cap \overline{A_{n+1}} \\ &= \overline{\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}} \cap \overline{A_{n+1}} = \overline{\bigcap_{i=1}^{n+1} \overline{A_i}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \overline{\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i} &= \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i \cap A_{n+1}} = \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} \cup \overline{A_{n+1}} \\ &= \overline{\bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}} \cup \overline{A_{n+1}} = \overline{\bigcup_{i=1}^{n+1} \overline{A_i}} \end{aligned}$$

所以 $n+1$ 时结论也成立。证毕。

2.3.14 证明所有大于 1 的整数 n 都能写成若干个质数之积。

证明 (1) $n=2$ 时, $2=2$ 命题成立。

(2) 假设 $\forall n < k (n > 1)$ 时, n 都可表示为若干个质数之积。当 $n=k$ 时, 若 k 是质数, 则 $k=k$ 。若 k 不是质数, 则存在一质数 p , $p \neq 1$, $p \neq k$, 使 $k=p \times q$, 其中 q 是整数, 又 $q < k$ 。由归纳假设知, q 可写成若干个质数的乘积, 不妨设 $q=p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_l$ 。所以 $k=p \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_l$, 因此命题成立。

2.3.15 如果 $a * (b * c) = (a * b) * c$, 那么二元运算 $*$ 称为可结合的。从它可推得更强的结果, 即在任何仅含运算 $*$ 的表达式中, 括号的位置不影响结果, 就是, 仅仅出现干

表达式中的运算对象和次序是重要的。为了证明这个“推广的结合律”，我们定义“* 表达式集合”如下：

- (a) (基础) 单个运算对象 a_1 是 * 表达式。
- (b) (归纳) 设 e_1 和 e_2 是 * 表达式，那么 $(e_1 * e_2)$ 是一个 * 表达式。
- (c) (极小性) 只有有限次应用 (a) 和 (b) 构成的式子才是 * 表达式。

推广的结合律陈述如下：

设 e 是一个表达式，它有 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 个运算对象，且以此次序出现于表达式中，那么

$$e = (a_1 * (a_2 * (a_3 * (\dots (a_{n-1} * a_n) \dots))))$$

证明这个推广的结合律。(提示：用数学归纳法第二原理。)

证明 (1) $n=1, 2, 3$ 时，由 * 运算的性质知，表达式

$$e = (a_1 * (a_2 * (\dots (a_{n-1} * a_n) \dots)))$$

(2) 假设当 $n < k$ 时，结论也成立。当 $n=k$ 时，由 * 表达式集合的定义得：

表达式 $e = e_1 * e_2$ ， e_1, e_2 都是 * 表达式。 e 的运算对象有 k 个，所以 e_1, e_2 的运算对象的个数都小于 k ，设 e_1 的运算对象有 r 个，则 $r < k$ ，由假设得：

$$\begin{aligned} e &= (a_1 * (a_2 * (\dots (a_{r-1} * a_r) \dots))) * \\ &\quad (a_{r+1} * (\dots (a_{k-1} * a_k) \dots)) \\ &= a_1 * ((a_2 * (\dots (a_{r-1} * a_r) \dots))) * \\ &\quad (a_{r+1} * (\dots (a_{k-1} * a_k) \dots))) \end{aligned}$$

由假设及后面括号中有 $k-1$ 个运算对象，得

$$e = a_1 * (a_2 * (\dots (a_{k-1} * a_k) \dots))$$

所以 $n=k$ 时，结论也成立。证毕。

2.4 语言上的运算

2.4.1 设 $A = \{A, a\}$ ， $B = \{a, b\}$ ， $C = \{ab\}$ ，列出下列集合：

- (a) A^2
- (b) C^3
- (c) CAB
- (d) A^+
- (e) C^*

解 (a) $A^2 = \{A, a, aa\}$

(b) $C^3 = \{ababab\}$

(c) $CAB = \{aba, abb, abaa, abab\}$

(d) $A^+ = \{A, a, aa, aaa, \dots\} = \{a^n | n \geq 0\}$

(e) $C^* = \{(ab)^n | n \geq 0\}$

2.4.2 证明定理 2.4-1 的 (b) 和 (c) 部分。

证明 (b) $A\{A\} = \{xA | x \in A\}$

$$= \{x | x \in A\}$$

$$= A$$

(c) $\forall x \in (AB)C$ ， $x = yc$ ，其中 $y \in (AB)$ ， $c \in C$ ，所以 $y = ab$ ， $a \in A$ ， $b \in B$ ，所以 $x =$

$abc=a(bc)$, 又 $(bc) \in BC$, $a \in A$ 。所以

$$x=a(bc) \in A(BC)$$

$$(AB)C \subseteq A(BC)$$

反之 $\forall x \in A(BC)$, $x=az$, $a \in A$, $z \in (BC)$, 所以 $z=bc$, $x=a(bc)=(ab)c \in (AB)C$ 。

所以 $A(BC) \subseteq (AB)C$ 。

所以等式成立。

2.4.3 证明定理 2.4-2 的 (b)、(c)、(d) 部分。

证明 (b) 先证 $(B \cup C)A \subseteq BA \cup CA$ 。

如果 z 是 $(B \cup C)A$ 的任一元素, 那么 $z=xy$, $x \in (B \cup C)$, $y \in A$, 因此 $x \in B \wedge y \in A$ 或 $x \in C$ 且 $y \in A$, 所以 $z \in BA$ 或 $z \in CA$, 所以 $z \in BA \cup CA$, 因此

$$(B \cup C)A \subseteq BA \cup CA$$

再证 $BA \cup CA \subseteq (B \cup C)A$ 。

因为 $A \subseteq A$, $B \subseteq (B \cup C)$ 由定理 2.4-1(d), $BA \subseteq (B \cup C)A$, 同理可得 $CA \subseteq (B \cup C)A$, 所以

$$BA \cup CA \subseteq (B \cup C)A$$

因此

$$(B \cup C)A = BA \cup CA$$

(c) 因为 $A \subseteq A$, $B \cap C \subseteq C$, $B \cap C \subseteq B$, 由定理 2.4-1(d) 得:

$$A(B \cap C) \subseteq AB$$

$$A(B \cap C) \subseteq AC$$

所以

$$A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$$

(d) 因为 $A \subseteq A$, $B \cap C \subseteq C$, $B \cap C \subseteq B$

所以

$$(B \cap C)A \subseteq BA, (B \cap C)A \subseteq CA$$

$$(B \cap C)A \subseteq BA \cap CA$$

2.4.4 证明定理 2.4-3 的 (a)、(b) 部分。

证明 (a) $\forall m, n=0$ 时, 有 $A^m \cdot A^0 = A^{m+0}$ 。

假设, 在 n 时有

$$A^m \cdot A^n = A^{m+n}$$

在 $n+1$ 时, 有

$$A^m \cdot A^{n+1} = A^m \cdot (A^n \cdot A) = A^{m+n} \cdot A = A^{m+n+1}$$

所以此等式成立。

(b) $\forall m, n=0$ 时, $(A^m)^0 = \{A\} = A^{m \times 0}$

假设 n 时, $\forall m$ 有 $(A^m)^n = A^{mn}$, 现证 $n+1$ 时亦成立。

$$(A^m)^{n+1} = (A^m)^n \cdot A^m = A^{mn} \cdot A^m$$

$$= A^{mn+m} = A^{m(n+1)} \quad \text{证毕。}$$

2.4.5 如果 $A = \{A, a, a^2, \dots, a^n, \dots\}$, $B = A - \{a^2\}$, 能推出 $A^2 = B^2$ 吗? 一般地, 若 $A^n = B^n$, $n > 2$, 能推出 $A = B$ 吗?

解 $A^2 = \{A, a, a^2 \cdots a^n, \dots\}$

$$B^2 = \{A, a, a^2 \cdots a^n, \dots\}$$

所以 $A^2 = B^2$

一般地, 若 $A^n = B^n$, $n > 2$, 并不能推出 $A = B$ 。例如, 取上述的 A, B , $A \neq B$, 但 $\forall n > 2$, 都有 $A^n = B^n$ 。

2.4.6 虽然 $A^+ = A^+ \cup \{A\}$, 但 $A^+ = A^+ - \{A\}$ 一般不成立。设 $\Sigma = \{a\}$, 试找出 Σ^+ 的最小子集 A , 使 $A^+ \neq A^+ - \{A\}$ 。

解 令 $A = \{A\}$, 则 A 是 Σ^+ 的最小子集, 使 $A^+ \neq A^+ - \{A\}$ 。因为由 $A^+ = A^+ \cup \{A\}$ 得 A^+ 最多比 $A^+ - \{A\}$ 多一个元素 A 。若 $A \in A^+$, 则必有 $A^+ = A^+ - \{A\}$, 所以要使 $A^+ \neq A^+ - \{A\}$, 必有 $A \notin A^+$, 又 $A \subseteq \Sigma^+$, 若 $A \notin A$, 则 A^+ 中也不含 A , 所以 $A \in A$ 。

由以上讨论知, 要使 $A^+ \neq A^+ - \{A\}$ 则必有 $A \in A$, 又 $\{A\}^+ \neq \{A\}^+ - \{A\}$, 所以 $\{A\}$ 即为所求。

2.4.7 设 $A, B, B_i (i=1, 2, \dots)$ 都是语言, 证明

$$(a) A(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (AB_i)$$

$$(b) A^+B = \bigcup_{i=0}^{\infty} (A^iB)$$

证明 (a) $\forall z \in A(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)$, $z = xy$, $x \in A$, 且 $y \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, 所以存在 n 使 $y \in B_n$, 所以 $z = xy \in AB_n$, $z \in \bigcup_{i=1}^{\infty} (AB_i)$, 因此

$$A(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (AB_i)$$

反之, $\forall z \in \bigcup_{i=1}^{\infty} (AB_i)$, 则 $\exists n$, 使 $z \in AB_n$, 所以 $z = xy$, $x \in A$, $y \in B_n$, 所以 $y \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, $z \in A(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)$, 因此

$$A(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (AB_i)$$

(b) 类似(a)可得:

$$(\bigcup_{i=0}^{\infty} A^i)B = \bigcup_{i=0}^{\infty} (A^iB)$$

因为 $A^+ = \bigcup_{i=0}^{\infty} A^i$

所以 $A^+B = (\bigcup_{i=0}^{\infty} A^i)B = \bigcup_{i=0}^{\infty} (A^iB)$

2.4.8 证明定理 2.4-6 的(b)、(c)、(d)、(e)及(f)中未证明的部分。

证明 (b) 若 $A \in A$, 则 $A^+ = A \cup A^2 \cup \dots \cup A^n \cup \dots = \{A\} \cup A \cup A^2 \cup \dots = A^+$

反之, 若 $A^+ = A^+$, 则 $A \in A^+$, 若 $A \notin A$, 则 $A \notin A^i$, $i \geq 1$, 则与 $A \in A^+$ 矛盾, 所以 $A \in A$ 。因此

$$A \in A \Leftrightarrow A^+ = A^+$$

(c) 因为 $A^+ = \{A\} \cup A^1 \cup A^2 \cup \dots$, 易见, $A^+ \subseteq A^+A^+ \subseteq (A^+)^+$ 。所以只要证明 $(A^+)^+ \subseteq A^+$ 即可。

$$A \in (A^+)^+ \Rightarrow A \in A^+$$

$\forall x \in (A^+)^+$ 。若 $x \neq A$, 则 $x \in (A^+)^n$

所以 $x = z_1 z_2 \dots z_n$, $z_i \in A^+$, $i = 1 \dots n$

所以 $z_i = y_1^{(i)} y_2^{(i)} \dots y_{n_i}^{(i)}$

$\forall i, y_1^{(i)}, \dots, y_{n_i}^{(i)} \in A$, 或是 Δ , 所以

$$x = y_1^{(1)} \dots y_{n_1}^{(1)} y_1^{(2)} \dots y_{n_2}^{(2)} \dots y_1^{(n)} \dots y_{n_n}^{(n)}$$

$$x \in A^*$$

$$(A^*)^* \subseteq A^*$$

因此

$$(A^*)^* = A^* A^* = A^*$$

$$(d) (A^*)^+ = A^* \cup (A^*)^2 \cup \dots$$

$$(A^+)^* = \{\Delta\} \cup A^+ \cup (A^+)^2 \cup \dots$$

所以 $(A^*)^+ \supseteq A^*$, $(A^+)^* \supseteq A^*$ 。由(c)得

$$(A^*)^+ \subseteq (A^+)^* = A^*$$

$$(A^+)^+ \subseteq (A^*)^* = A^*$$

因此

$$(A^+)^+ = (A^*)^* = A^*$$

(e) $A^+ = \{\Delta\} \cup A \cup A^2 \cup \dots$, 所以 $A^+ \subseteq A^* A^+$, $A^+ \subseteq A^+ A^*$ 。

$\forall x \in A^* A^+$, $x = yz$, $y \in A^*$, $z \in A^+$, 所以 $y = \Delta$, 或 $y = y_1 y_2 \dots y_n$, $y_i \in A$ 。

当 $y = \Delta$ 时, $x = z \in A^+$,

当 $y = y_1 y_2 \dots y_n$ 时, 设 $z = z_1 z_2 \dots z_m$, 则 $x = y_1 y_2 \dots y_n z_1 z_2 \dots z_m \in A^+$, 所以 $A^* A^+ \subseteq A^+$ 。
同理可得 $A^+ A^* \subseteq A^+$ 。

所以

$$A^* A^+ = A^+ A^* = A^+$$

(f) 因为 $A^* \subseteq A^* B^*$, $B^* \subseteq A^* B^*$, 所以 $(A^* \cup B^*) \subseteq A^* B^*$, 因而 $(A^* \cup B^*) \subseteq (A^* B^*)^*$, 又 $A \subseteq A^*$, $B \subseteq B^*$, 因而 $(A \cup B)^* \subseteq (A^* \cup B^*)^*$, 又已证得 $(A^* B^*)^* = (A \cup B)^*$, 所以 $(A^* B^*)^* \subseteq (A^* \cup B^*)^*$ 。

所以 $(A^* B^*)^* = (A \cup B)^* = (A^* \cup B^*)^*$ 。

2.4.9 设 A, B, C 和 D 是语言, 证明以下等式成立:

$$(a) (A^* B^*)^* = (B^* A^*)^*$$

$$(b) A \cup B \cup C \subseteq A^* B^* C^*$$

$$(c) (A^+)^+ = A^+$$

$$(d) (AB)^+ A = A(BA)^+$$

$$(e) (A^* B^* C^* D^*)^* = (A \cup B \cup C \cup D)^*$$

证明 (a) 由定理 2.4-6 的(f)得

$$\begin{aligned} (A^* B^*)^+ &= (A \cup B)^+ = (B \cup A)^+ \\ &= (B^* A^*)^+ \end{aligned}$$

(b) $A \subseteq A^* \subseteq A^* B^* C^*$, $B \subseteq B^* \subseteq A^* B^* C^*$, $C \subseteq C^* \subseteq A^* B^* C^*$ 。

所以 $A \cup B \cup C \subseteq A^* B^* C^*$ 。

(c) 易见 $A^+ \subseteq (A^+)^+$, 另一方面,

$$\forall x \in (A^+)^+, x \in (A^+)^n$$

所以 $x = y_1 y_2 \dots y_n$, $y_i \in A^+$, $i = 1, \dots, n$

$$x \in A^+, (A^+)^+ \subseteq A^+$$

故 $(A^+)^+ = A^+$

$$\begin{aligned}
 (d) \quad (AB)^*A &= \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (AB)^n\right)A \\
 &= \bigcup_{n=0}^{\infty} [(AB)^nA] = \bigcup_{n=0}^{\infty} [A(BA)^n] \\
 &= A\left[\bigcup_{n=0}^{\infty} (BA)^n\right] = A(BA)^*
 \end{aligned}$$

(e) 先证 $(A^*B^*C^*D^*)^* \subseteq (A \cup B \cup C \cup D)^*$

因为 $A \subseteq (A \cup B \cup C \cup D)$, 所以 $A^* \subseteq (A \cup B \cup C \cup D)^*$ 。

同理得 B^*, C^*, D^* 都是 $(A \cup B \cup C \cup D)^*$ 的子集, 因而 $A^*B^*C^*D^* \subseteq [(A \cup B \cup C \cup D)^*]^4 \subseteq ((A \cup B \cup C \cup D)^*)^*$ 。

所以 $(A^*B^*C^*D^*)^* \subseteq ((A \cup B \cup C \cup D)^*)^* = (A \cup B \cup C \cup D)^*$

另一方面, $A \subseteq A^* \subseteq A^*B^*C^*D^*$, B, C, D 也包含在 $A^*B^*C^*D^*$ 中。

所以 $(A \cup B \cup C \cup D) \subseteq A^*B^*C^*D^*$

$$(A \cup B \cup C \cup D)^* \subseteq (A^*B^*C^*D^*)^*$$

因此等式成立。

2.4.10 设 A, B, C, D 是 Σ 上的语言, 举例说明以下等式不成立:

(a) $(A^*)^n = (A^n)^*$, $n \in \mathbb{N}$

(b) $(AB)^* = (BA)^*$

(c) $(A \cdot B)C = AC - BC$

(d) $A^* \subseteq B^* \Leftrightarrow A \subseteq B$

(e) $(\bar{A})^* = \overline{(A^*)}$, 这里 $\bar{A} = \Sigma^* - A$

(f) $(A^*B^*)A^* = (A^* \cup B^*)^*$

(g) $A^+ = A^+A^+$

解 (a) 令 $A = \{a\}$, $n=2$ 则

$$(A^*)^2 = \{\Lambda, a, a^2, a^3, \dots\}$$

而

$$(A^2)^* = \{\Lambda, a^2, a^4, a^6, \dots\}$$

所以 $(A^*)^2 \neq (A^2)^*$ 。

(b) 令 $A = \{0\}$, $B = \{1\}$, 则

$$(AB)^* = \{\Lambda, 01, 0101, \dots\}$$

$$(BA)^* = \{\Lambda, 10, 1010, \dots\}$$

$$(AB)^* \neq (BA)^*$$

(c) 令 $A = \{a, a^2\}$, $B = \{\Lambda\}$, $C = \{\Lambda, a\}$, 则

$$(A - B)C = \{a, a^2, a^3\}$$

$$AC - BC = \{a, a^2, a^3\} - \{\Lambda, a\} = \{a^2, a^3\} \neq (A - B)C$$

(d) 令 $A = \{\Lambda, a\}$, $B = \{a\}$, 则 $A^* \subseteq B^*$, 但 $A \not\subseteq B$ 。

(e) 令 $\Sigma = \{a\}$, $A = \{a, a^2, a^3, \dots\}$, 则 $(\bar{A})^* = (\{\Lambda\})^* = \{\Lambda\}$, $\overline{(A^*)} = \emptyset$ 。

(f) 令 $A = \{0\}$, $B = \{1\}$, 则 $101 \in (A^* \cup B^*)^*$, 但 $101 \notin (A^*B^*)A^*$ 。

(g) 令 $A = \{a\}$, 则

$$A^+ = \{a, a^2, a^3, \dots\}$$

$$A^+A^+ = \{a^2, a^3, a^4, \dots\}$$

$$A^+ \neq A^+ A^+$$

2.4.11 证明如果 $A \neq \emptyset$ 且 $A^2 = A$, 那么 $A^+ = A$ 。

证明 因为 $A \neq \emptyset$, 若 $A \in A$, 即 A 中不包空串, 假设 A 中元素长度最小值为 r , ($r \geq 1$) 则 A^2 中元素的长度的最小值为 $2r$, $2r > r$, 这与 $A^2 = A$ 矛盾, 所以 $A \in A$ 。又因为 $A^2 = A$ 假设对 n 有 $A^n = A$, 则对 $n+1$ 时有

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = A \cdot A = A$$

因此有:

$$A^n = A \quad (n \geq 1)$$

所以,

$$A^+ = \{A\} \cup A^1 \cup A^2 \cup \dots = A$$

2.4.12 用有限集合和集合运算描述 $\Sigma = \{a, b\}$ 上的下述语言(例如偶数长度的串的集合是 $\{aa, ab, ba, bb\}^*$):

- (a) 奇数长度的串的集合。
- (b) 恰好包含一个 a 的串的集合。
- (c) 或者以一个 a 开始, 或者以两个 b 结束, 或者两者都具备的串的集合。
- (d) 至少含有 3 个连接 a 的串的集合。
- (e) 包含子串“bbab”的串的集合。

解 (a) 奇数长度的串的集合为

$$\{aa, ab, ba, bb\}^* \{a, b\}$$

(b) 恰好包含一个 a 的串的集合为

$$\{b\}^* \{a\} \{b\}^*$$

(c) 或者以一个 a 开始, 或者以两个 b 结束或者两者都具备的串的集合为:

$$(\{a\} \Sigma^*) \cup (\Sigma^* \{bb\})$$

(d) 至少含有 3 个连接的 a 的串的集合为:

$$\Sigma^* \{aaa\} \Sigma^*$$

(e) 包含子串“bbab”的串的集合为:

$$\Sigma^* \{bbab\} \Sigma^*$$

2.5 集合的笛卡儿乘积

2.5.1 证明定理 2.5-1 中的 (b)、(c)、(d)。

证明 (b) 设 $\langle x, y \rangle$ 是 $A \times (B \cap C)$ 的任一元素, 那么

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &\in A \times (B \cap C) \\ \Leftrightarrow x &\in A \wedge y \in (B \cap C) \\ \Leftrightarrow x &\in A \wedge y \in B \wedge y \in C \\ \Leftrightarrow (x &\in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C) \\ \Leftrightarrow \langle x, y \rangle &\in A \times B \wedge \langle x, y \rangle \in A \times C \\ \Leftrightarrow \langle x, y \rangle &\in (A \times B) \cap (A \times C) \end{aligned}$$

所以 $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(c) 设 $\langle x, y \rangle$ 是 $(A \cup B) \times C$ 的任一元素, 那么

$$\begin{aligned}
& \langle x, y \rangle \in (A \cup B) \times C \\
& \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge y \in C \\
& \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C \\
& \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C) \\
& \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in A \times C \vee \langle x, y \rangle \in B \times C \\
& \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times C) \cup (B \times C)
\end{aligned}$$

所以 $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

(d) 设 $\langle x, y \rangle$ 是 $(A \cap B) \times C$ 的任一元素, 那么

$$\begin{aligned}
& \langle x, y \rangle \in (A \cap B) \times C \\
& \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge y \in C \\
& \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge y \in C \\
& \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in C) \\
& \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in A \times C \wedge \langle x, y \rangle \in B \times C \\
& \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times C) \cap (B \times C)
\end{aligned}$$

所以 $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ 。

2.5.2 如果 $A = \{a, b\}$ 和 $B = \{c\}$, 试确定下列集合:

(a) $A \times \{0, 1\} \times B$

(b) $B^2 \times A$

(c) $(A \times B)^2$

解 (a) $A \times \{0, 1\} \times B$

$$= \{\langle a, 0, c \rangle, \langle a, 1, c \rangle, \langle b, 0, c \rangle, \langle b, 1, c \rangle\}$$

(b) $B^2 \times A = \{\langle c, c, a \rangle, \langle c, c, b \rangle\}$

(c) $(A \times B)^2 = \{\langle \langle a, c \rangle, \langle a, c \rangle \rangle, \langle \langle a, c \rangle, \langle b, c \rangle \rangle, \langle \langle b, c \rangle, \langle a, c \rangle \rangle, \langle \langle b, c \rangle, \langle b, c \rangle \rangle\}$

2.5.3 设 $A = \{0, 1\}$, 构成集合 $\rho(A) \times A$ 。

解 $\rho(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$

$\rho(A) \times A = \{\langle \emptyset, 0 \rangle, \langle \emptyset, 1 \rangle, \langle \{0\}, 0 \rangle, \langle \{0\}, 1 \rangle, \langle \{1\}, 0 \rangle, \langle \{1\}, 1 \rangle, \langle \{0, 1\}, 0 \rangle, \langle \{0, 1\}, 1 \rangle\}$

2.5.4 设 A, B, C 和 D 是任意集合, 试证明:

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$$

证明 设 $\langle x, y \rangle$ 是任意元素

$$\begin{aligned}
& \langle x, y \rangle \in (A \cap B) \times (C \cap D) \\
& \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge y \in (C \cap D) \\
& \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge y \in C \wedge y \in D \\
& \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in D) \\
& \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times C) \wedge \langle x, y \rangle \in (B \times D) \\
& \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times C) \cap (B \times D)
\end{aligned}$$

所以 $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$ 。

2.5.5 试证明: $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B$ 。

证明 当 $A=\emptyset \vee B=\emptyset \vee A=B$ 时, 易见 $A \times B = B \times A$ 。

反之, 若 $A \times B = B \times A$, 要证 $A=\emptyset \vee B=\emptyset \vee A=B$ 。

用反证法。若 $A \neq B \wedge A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$, 不妨设 $\exists a \in A$, 但 $a \notin B$, $\exists b \in B$, 则 $\langle a, b \rangle \in A \times B$, 而 $\langle a, b \rangle \notin B \times A$, 这与 $A \times B = B \times A$ 矛盾。

因此结论成立。

2.5.6 指出下列各式是否成立:

$$(a) (A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$$

$$(b) (A - B) \times (C - D) = (A \times C) - (B \times D)$$

$$(c) (A \oplus B) \times (C \oplus D) = (A \times C) \oplus (B \times D)$$

$$(d) (A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$$

$$(e) (A \oplus B) \times C = (A \times C) \oplus (B \times C)$$

解 (a) 不成立。例如, 令 $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $C = \{c\}$, $D = \{d\}$, 则

$$\begin{aligned} & (A \cup B) \times (C \cup D) \\ &= \{\langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle\} \\ & (A \times C) \cup (B \times D) \\ &= \{\langle a, c \rangle, \langle b, d \rangle\} \end{aligned}$$

(b) 不成立。例如, 令 $A = \{a, b\}$, $B = \{a\}$, $C = \{a\}$, $D = \emptyset$, 则

$$\begin{aligned} & (A - B) \times (C - D) \\ &= \{\langle b, a \rangle\} (A \times C) - (B \times D) \\ &= \{\langle a, a \rangle, \langle b, a \rangle\} \end{aligned}$$

(c) 不成立。例如, 令 $A = \{0\}$, $B = \{1\}$, $C = \{0\}$, $D = \{1\}$, 则

$$\begin{aligned} & (A \oplus B) \times (C \oplus D) \\ &= \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\} \\ & (A \times C) \oplus (B \times D) \\ &= \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\} \end{aligned}$$

(d) 成立。因为对于任意 $\langle x, y \rangle$

$$\begin{aligned} & \langle x, y \rangle \in (A - B) \times C \\ & \Leftrightarrow x \in (A - B) \wedge y \in C \\ & \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge y \in C \\ & \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \notin B \wedge y \in C) \\ & \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in A \times C \wedge \langle x, y \rangle \notin B \times C \\ & \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times C) - (B \times C) \end{aligned}$$

所以 $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

(e) 成立。因为对于任意 $\langle x, y \rangle$

$$\begin{aligned} & \langle x, y \rangle \in (A \oplus B) \times C \\ & \Leftrightarrow x \in A \oplus B \wedge y \in C \\ & \Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)) \wedge y \in C \\ & \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \wedge y \in C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge y \in C) \\ & \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in A \times C \wedge \langle x, y \rangle \notin B \times C \vee \langle x, y \rangle \notin A \times C \wedge \langle x, y \rangle \in B \times C \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times C) \oplus (B \times C)$$

所以 $(A \oplus B) \times C = (A \times C) \oplus (B \times C)$

2.6 选 题 例 解

例 2-1 写出下列集合的表达式:

(a) 所有一元一次实系数方程的解组成的集合;

(b) x^6-1 在实数域中的因式集;

(c) 在直角坐标系中单位圆内的点集;

(d) 极坐标系中单位圆外的点集;

(e) 能被 5 整除的整数集。

解 (a) $S = \{x | ax+b=0, a \neq 0, \text{且 } a, b \in R\}$

(b) $S = \{x+1, x-1, x^2+x+1, x^2-x+1, x^2-1, x^3+2x^2+2x+1, x^3+1, x^3-1, x^4-2x^2+2x+1, x^4+x^2+1, x^5-x^4-x^3-x^2+x-1, x^5+x^4+x^3+x^2+x+1, x^4-x^3+x-1, x^4+x^3-x-1, x^6-1\}$

(c) $S = \{(x, y) | x^2+y^2 < 1\}$

(d) $S = \{(r, \theta) | r > 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}$

(e) $S = \{5x | x \in I\}$

例 2-2 证明: 对任意集合 A 和 B , $\rho(A) \cap \rho(B) = \rho(A \cap B)$ 。

证明 $\forall x \in [\rho(A) \cap \rho(B)]$, 则 $x \in \rho(A)$, 且 $x \in \rho(B)$, 故 $x \subseteq A$ 且 $x \subseteq B$, 因而有 $x \subseteq (A \cap B)$, 故 $x \in \rho(A \cap B)$, 所以有 $\rho(A) \cap \rho(B) \subseteq \rho(A \cap B)$ 。

反之, $\forall x \in \rho(A \cap B)$, $x \subseteq A \cap B$, 故 $x \subseteq A$ 且 $x \subseteq B$, 因而有 $x \in \rho(A)$ 且 $x \in \rho(B)$, 所以有 $\rho(A \cap B) \subseteq \rho(A) \cap \rho(B)$ 。

因此 $\rho(A) \cap \rho(B) = \rho(A \cap B)$ 。

例 2-3 证明 $\rho(A) \cup \rho(B) \subseteq \rho(A \cup B)$, 在什么条件下等式成立?

证明 $\forall x \in \rho(A) \cup \rho(B)$, 则 $x \in \rho(A)$ 或 $x \in \rho(B)$ 。

(a) 若 $x \in \rho(A)$, 则 $x \subseteq A$, 故 $x \subseteq A \cup B$, 故 $x \in \rho(A \cup B)$ 。

(b) 若 $x \in \rho(B)$, 则同理可得 $x \in \rho(A \cup B)$ 。

因而有 $\rho(A) \cup \rho(B) \subseteq \rho(A \cup B)$ 。

当 $A \subseteq B$ 或 $B \subseteq A$ 时, 等式成立。

例 2-4 $\rho(A-B)$ 是否等于 $\rho(A) - \rho(B)$ 。

解 不一定相等。例如, 设 $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, 则 $\{1, 2\} \in \rho(A)$, 而 $\{1, 2\} \notin \rho(B)$, 故 $\{1, 2\} \in \rho(A) - \rho(B)$ 。

另一方面, $A-B = \{2\}$, 故 $\{1, 2\} \notin \rho(A-B)$ 。

例 2-5 证明: 对任意集合 A, B, C , $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ 当且仅当 $C \subseteq A$ 。

证明 必要性. $\forall x \in C$, 必有 $x \in (A \cap B) \cup C$, 又 $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$, 故, $x \in A \cap (B \cup C)$, 因此 $x \in A$, 因而 $C \subseteq A$ 。

充分性. 若 $C \subseteq A$, 则 $A \cup C = A$, 故 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) = A \cap (B \cup C)$ 。

例 2-6 (a) 已知 $A \cup B = A \cup C$, 是否必须 $B = C$?

(b) 已知 $A \cap B = A \cap C$, 是否必须 $B = C$?

(c) 已知 $A \oplus B = A \oplus C$, 是否必须 $B = C$?

解 (a) 不一定。例如 $A = \{a\}$, $B = \{a, c\}$, $C = \{c\}$, 则有 $A \cup B = A \cup C$, 但 $B \neq C$ 。

(b) 不一定。例如, $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{a, c\}$, 则有 $A \cap B = A \cap C$, 但 $B \neq C$ 。

(c) 必须有 $B = C$ 。

因为若 $A \oplus B = A \oplus C$, 则 $\forall x \in B$,

(i) 若 $x \in A \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \notin A \oplus B \Leftrightarrow x \notin A \oplus C \Rightarrow x \in A \wedge x \notin A \oplus C \Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow x \in C$, 所以 $B \subseteq C$ 。

(ii) 若 $x \notin A \Rightarrow x \notin A \cap B$

$$x \in B \wedge x \notin A \cap B \Rightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B) \Rightarrow x \in A \oplus B \Rightarrow x \in A \oplus C$$

又 $x \notin A$, 故 $x \in C$, 故 $B \subseteq C$ 。

同理可证得 $C \subseteq B$ 。

因此, 若 $A \oplus B = A \oplus C$, 必须有 $B = C$ 。

例 2-7 设 A, B, C 是集合, 在什么条件下, 下列命题是真?

(a) $(A-B) \cup (A-C) = A$

(b) $(A-B) \cup (A-C) = \emptyset$

(c) $(A-B) \cap (A-C) = \emptyset$

(d) $(A-B) \oplus (A-C) = \emptyset$

解 (a) 因为 $(A-B) \cup (A-C) = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C}) = A \cap (\bar{B} \cup \bar{C}) = A \cap \overline{(B \cap C)} = A - (B \cap C)$, 故当 $(B \cap C) \cap A = \emptyset$ 时, $A - (B \cap C) = A$ 成立。所以 $(A-B) \cup (A-C) = A$ 的条件是 $A \cap (B \cap C) = \emptyset$ 。

(b) 由(a)只有使 $A - (B \cap C) = \emptyset$, 即当 $A \subseteq B \cap C$ 时, 就有 $(A-B) \cup (A-C) = \emptyset$ 。

(c) $(A-B) \cap (A-C) = (A \cap \bar{B}) \cap (A \cap \bar{C}) = A \cap (\bar{B} \cap \bar{C}) = A - (B \cup C)$, 故当 $A \subseteq B \cup C$ 时, 有 $(A-B) \cap (A-C) = \emptyset$ 。

(d) 当 $A-B = A-C$ 时, 有 $(A-B) \oplus (A-C) = \emptyset$ 。

例 2-8 设 A_i 是实数集合, 它被定义为: $A_0 = \{a | a < 1\}$, $A_i = \left\{a | a \leq 1 - \frac{1}{i}\right\}$, ($i=1, 2, \dots$), 则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_0$ 。

证明 (i) 先证 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq A_0$ 。

设 $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, 则必存在某个自然数 k , 使 $x \in A_k$, 即 $x \leq 1 - \frac{1}{k}$, 则有 $x < 1$, 故 $x \in A_0$ 。

(ii) 再证 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supseteq A_0$ 。

设 $x \in A_0$, 即 $x < 1$, 故必有 $\varepsilon > 0$, 使 $x = 1 - \varepsilon$, 令 $k = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, 则 $x \leq 1 - \frac{1}{k}$, 即 $x \in A_k$, 所以 $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, 故 $A_0 \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 。

由此可得 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_0$ 。

例 2-9 设 B_i 是实数集合, 它被定义为: $B_0 = \{b | b \leq 1\}$, $B_i = \left\{b | b < 1 + \frac{1}{i}\right\}$, ($i=1, 2, \dots$), 证明 $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = B_0$.

证明 (i) 先证 $B_0 \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$.

设 $x \in B_0$, 则 $x \leq 1$, 故 $\forall i$, 有 $x < 1 + \frac{1}{i}$, 即 $\forall i$, 有 $x \in B_i$, 所以 $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$.

(ii) 再证 $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \subseteq B_0$.

设 $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$, 则 $x \in B_i$, $i=1, 2, \dots$, 即 $\forall i$ 有 $x < 1 + \frac{1}{i}$. 若 $x > 1$, 则必有 $\varepsilon > 0$, 使 $x > 1 + \varepsilon$, 令 $k = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, 则 $x \geq 1 + \frac{1}{k}$, 故 $x \notin B_k$, 与 $\forall i, x \in B_i$ 相矛盾, 所以 $x \leq 1$, 即 $x \in B_0$.

因此 $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = B_0$.

例 2-10 设有集合 $\{1, 2, \dots, n\}$, 其无重复的一个排列 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, 满足 $a_i \neq i$, ($i=1, 2, \dots, n$), 则称该排列为一个错列, 求证集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的错列的个数 $D_n = \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) (n!)$.

证明 令 S 是 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的所有无重复的排列集合, 则 $|S| = n!$. 设 A_i 表示 i 恰好在第 i 个位置上的排列的集合, 则 $A_i \subseteq S$. 所以, 全部错排列的集合为

$$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}$$

易得 $|A_i| = (n-1)!$, $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$, 对于 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, 有

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$$

$$\text{又 } |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}|$$

$$= |S| - \sum_{i=1}^n |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

所以, $D_n = n! - C_n^1(n-1)! + C_n^2(n-2)! - \dots$

$$+ (-1)^k C_n^k(n-k)! + \dots + (-1)^n C_n^n 0!$$

$$= n! - \frac{n!}{1} + \frac{n!}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{n!}{n!}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) (n!)$$

第3章 二元关系

3.1 基本概念

3.1.1 用列举法表达下列 $A \times B$ 上的二元关系 S :

(a) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, 2, 4\}$, $S = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in A \cap B\}$

(b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $S = \{\langle x, y \rangle \mid x = y^2 \wedge x \in A \wedge y \in B\}$

解 (a) $S = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 0 \rangle\}$

(b) $S = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 4, 2 \rangle\}$

3.1.2 设 $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 试用列举法表达由下列谓词确定的 A 上的 n 元关系。如果是二元关系, 并画出其关系图。

(a) $P(x) \Leftrightarrow x \leq 1$

(b) $P(x) \Leftrightarrow 3 > 2$

(c) $P(x) \Leftrightarrow 2 > 3$

(d) $P(x, y) \Leftrightarrow x + y = 4$

(e) $P(x, y) \Leftrightarrow \exists k (x = ky \wedge k < 2)$

(f) $P(x, y) \Leftrightarrow (x = 0 \vee 2x < 3)$

(g) $P(x, y, z) \Leftrightarrow x^2 + y = z$

解 (a) $R = \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle\}$

(b) $R = \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle, \langle 4 \rangle\}$

(c) $R = \emptyset$

(d) $R = \{\langle 0, 4 \rangle, \langle 4, 0 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$

(e) $R = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 0, 3 \rangle, \langle 0, 4 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$

(f) $R = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 0, 3 \rangle, \langle 0, 4 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle\}$

(g) $R = \{\langle 0, 0, 0 \rangle, \langle 1, 0, 1 \rangle, \langle 2, 0, 4 \rangle, \langle 0, 1, 1 \rangle, \langle 1, 1, 2 \rangle, \langle 0, 2, 2 \rangle, \langle 1, 2, 3 \rangle, \langle 0, 3, 3 \rangle, \langle 1, 3, 4 \rangle, \langle 0, 4, 4 \rangle\}$

在此题中(d)、(e)、(f)是二元关系, 其关系图如图 3.1 所示。

3.1.3 对下列关系 R , 求出关系矩阵 M_R :

(a) $A = \{1, 2, 3\}$ $R = \{\langle 2, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 1 \rangle\}$

(b) $A = \{0, 1, 2, 3\}$ $R = \{\langle x, y \rangle \mid x \leq 2 \wedge y \geq 1\}$

(c) $A = \{5, 6, 7, 8\}$ $B = \{1, 2, 3\}$

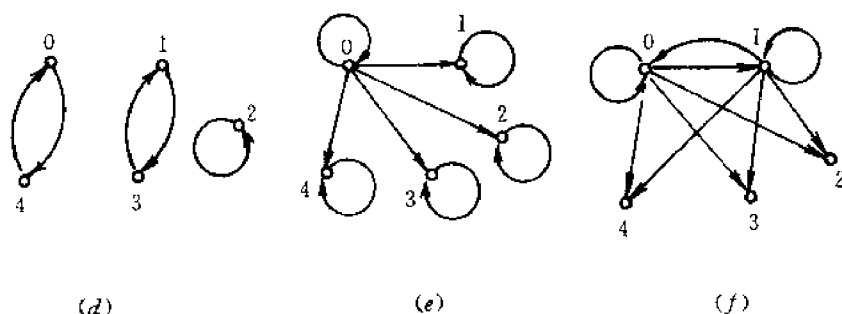


图 3.1

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B \wedge 3 \leq x - y \leq 7 \}$$

$$(d) A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x < y \vee x \text{ 是质数} \}$$

解

(a)

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c)

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(d)

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.1.4 对下列每一个 N 上关系 R 给出一归纳定义, 用你的定义证明 $x \in R$ 。

$$(a) R = \{ \langle a, b \rangle \mid a \geq b \}, x = \langle 3, 1 \rangle$$

(b) $R = \{\langle a, b \rangle \mid a = 2b\}$, $x = \langle 6, 3 \rangle$

(c) $R = \{\langle a, b, c \rangle \mid a + b = c\}$, $x = \langle 1, 1, 2 \rangle$

解 (a) R 的归纳定义如下:

(1) $\langle 0, 0 \rangle \in R$.

(2) 若 $\langle a, b \rangle \in R$, 则 $\langle (a+1), b \rangle \in R$, $\langle (a+1), (b+1) \rangle \in R$.

(3) R 包含如下元素: 它仅能由有限次应用条款(1)和(2)构成。

对于 $x = \langle 3, 1 \rangle$, 由(1), (2),

$$\langle 0, 0 \rangle \in R, \langle 1, 0 \rangle \in R$$

$$\Rightarrow \langle 2, 0 \rangle \in R$$

$$\Rightarrow x = \langle 3, 1 \rangle \in R$$

(b) R 的归纳定义如下:

(1) $\langle 0, 0 \rangle \in R$.

(2) 若 $\langle a, b \rangle \in R$, 则

$$\langle (a+2), (b+1) \rangle \in R$$

(3) R 包含如下元素: 它仅能由有限次应用条款(1)和(2)构成。

对于 $x = \langle 6, 3 \rangle$, 由定义得

$$\langle 0, 0 \rangle \in R \Rightarrow \langle 2, 1 \rangle \in R$$

$$\Rightarrow \langle 4, 2 \rangle \in R$$

$$\Rightarrow x = \langle 6, 3 \rangle \in R$$

(c) R 的归纳定义如下:

(1) $\langle 0, 0, 0 \rangle \in R$.

(2) 若 $\langle a, b, c \rangle \in R$, 则

$$\langle (a+1), b, (c+1) \rangle \in R$$

$$\langle a, (b+1), (c+1) \rangle \in R$$

(3) R 仅包含如下元素: 它仅能由有限次应用条款(1)和(2)构成。

对于 $x = \langle 1, 1, 2 \rangle$, 由此定义

$$\langle 0, 0, 0 \rangle \in R \Rightarrow \langle 1, 0, 1 \rangle \in R$$

$$\Rightarrow x = \langle 1, 1, 2 \rangle \in R$$

3.1.5 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$, $S = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle\}$.

(a) 求出 $R \cup S$, $R \cap S$, $R - S$, $\bar{R}$.

(b) 求出 $D(R)$, $R(S)$, $D(R \cup S)$, $R(R \cap S)$.

解 (a) $R \cup S = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 2 \rangle\}$

$$R \cap S = \{\langle 2, 4 \rangle\}$$

$$R - S = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$$

$$\bar{R} = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$$

$$(b) D(R) = \{1, 2, 3\}$$

$$R(S) = \{2, 3, 4\}$$

$$D(R \cup S) = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$R(R \cap S) = \{4\}$$

3.1.6 证明对任意集合 A , 和 A 上的任意二元关系 R 和 S , 有

$$D(R \cup S) = D(R) \cup D(S)$$

$$R(R \cap S) \subseteq R(R) \cap R(S)$$

证明 (1) 对于任意元素 $x \in A$

$$x \in D(R \cup S)$$

$$\Leftrightarrow \exists y (\langle x, y \rangle \in R \cup S)$$

$$\Leftrightarrow \exists y (\langle x, y \rangle \in R \vee \langle x, y \rangle \in S)$$

$$\Leftrightarrow x \in D(R) \vee x \in D(S)$$

$$\Leftrightarrow x \in [D(R) \cup D(S)]$$

$$\therefore D(R \cup S) = D(R) \cup D(S)$$

(2) $\forall y \in A$

$$y \in R(R \cap S)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\langle x, y \rangle \in R \cap S)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle x, y \rangle \in S)$$

$$\Rightarrow y \in R(R) \wedge y \in R(S)$$

$$\Leftrightarrow y \in R(R) \cap R(S)$$

$$\therefore R(R \cap S) \subseteq R(R) \cap R(S)$$

3.1.7 设 A 是 n 个元素的集合。

(a) 证明 A 上有 2^n 个一元关系。

(b) 证明 A 上有 2^{n^2} 个二元关系。

(c) A 上有多少个三元关系呢?

证明 (a) 因为 $|A| = n$, 所以 $|\rho(A)| = 2^n$, 因此 A 上有 2^n 个一元关系。

(b) 因为 $|A| = n$, 所以 $|A \times A| = n^2$, 所以有 $|\rho(A \times A)| = 2^{n^2}$, 因此 A 上有 2^{n^2} 个二元关系。

(c) A 上有 2^{n^3} 个三元关系。

3.1.8 写出图 3.2 所表示的关系具有定义 3.1 - 5 所指出的哪些特性。

解 各关系图具有的特性如下表所示:

	自反的	反自反的	对称的	反对称的	传递的
(a)	N	N	N	Y	Y
(b)	Y	N	Y	N	Y
(c)	N	Y	Y	N	N
(d)	N	N	N	Y	N
(e)	N	Y	N	Y	Y
(f)	N	Y	N	Y	N

3.1.9 设 $P_1(x, y) \Leftrightarrow xy > 0$, $P_2(x, y) \Leftrightarrow |x - y| = 4$, $P_3(x, y) \Leftrightarrow x + y = 10$,

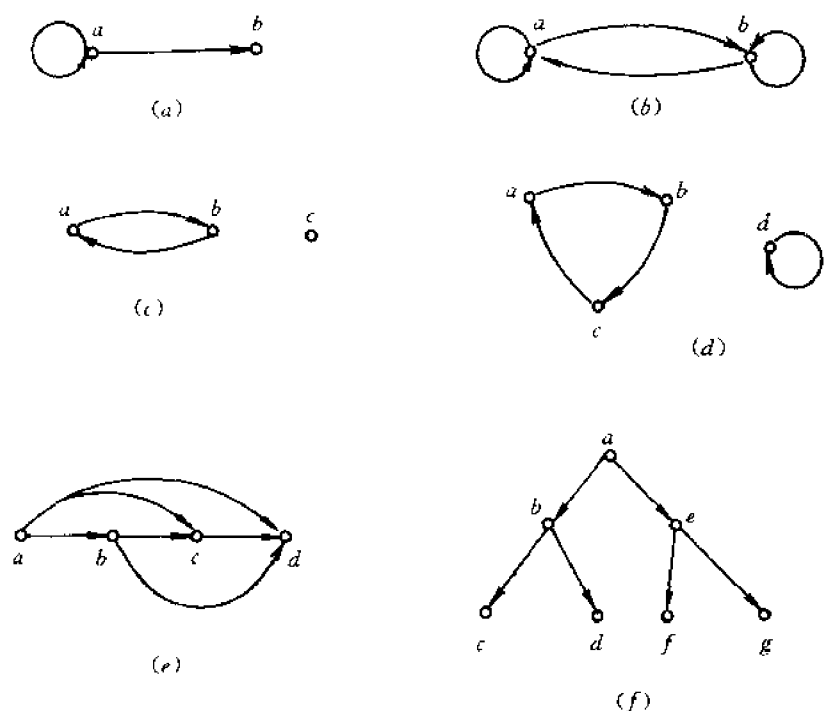


图 3.2

$P_4(x, y) \Leftrightarrow x$ 整除 y 。试确定由这些谓词所指定的整数集合 I 上的二元关系是否具有定义 3.1 - 5 中所指出的特性。将结果用 Y(yes) 和 N(no) 填入下表。

	自反的	反自反的	对称的	反对称的	传递的
P_1	N	N	Y	N	Y
P_2	N	Y	Y	N	N
P_3	N	N	Y	N	N
P_4	N	N	N	Y	Y

3.1.10 确定整数集合 I 上的相等关系、 $\leq$ 关系、 $<$ 关系、全域关系、空关系是否具有定义 3.1 - 5 中指出的特性。试将结果用类似于上题的表列出。

	自反的	反自反的	对称的	反对称的	传递的
$=$	Y	N	Y	Y	Y
$\leq$	Y	N	N	Y	Y
$<$	N	Y	N	Y	Y
$I \times I$	Y	N	Y	N	Y
$\emptyset$	N	Y	Y	Y	Y

3.1.11 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, A 上的下列关系是否可传递? 如果是不可传递的, 举出反例证明它, 然后找出一个具有最少序偶的关系 R , 使 R 包含原关系并且是可传递的。

$$(a) R_1 = \{\langle 1, 1 \rangle\}$$

$$(b) R_2 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$$

$$(c) R_3 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$$

$$(d) R_4 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 1 \rangle\}$$

解 (a) R_1 是可传递的

(b) R_2 是可传递的

(c) R_3 是不可传递的。

因为 $\langle 2, 1 \rangle \in R_3$, $\langle 1, 2 \rangle \in R_3$, 但 $\langle 2, 2 \rangle \notin R_3$

令 $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$, 则 R 是一个具有最少序偶且包含 R_3 的可传递的关系。

(d) R_4 是不可传递的。

因为 $\langle 1, 2 \rangle \in R_4$, $\langle 2, 1 \rangle \in R_4$, 但 $\langle 1, 1 \rangle \notin R_4$ 。

令 $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 2 \rangle\}$, 则 R 即为所求。

3.1.12 (a) 找出一个非空最小集合, 并在其上定义一个既不是自反的也不是反自反的关系。

(b) 找出一个非空的最小集合, 并在其上定义一个既不是对称的也不是反对称的关系。

(c) 若(a)、(b)二题中允许用空集合, 结果将怎样?

解 (a) 设 A 是一个非空集合, 若 A 只含一个元素, 设它为 x , 则 A 上的关系只有两个, 一个是空关系 $\emptyset$, 另一个为全域关系 $\{\langle x, x \rangle\}$, 而这两个关系都不满足条件: 即不是自反的也不是反自反的。因此 A 至少要含两个元素。

令 $A = \{0, 1\}$, A 上的关系 R 为

$$R = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 0 \rangle\}$$

则 R 不是自反的也不是反自反的。

因此, $A = \{0, 1\}$ 即是所求。

(b) 易验证在 A 仅含一个或两个元素时, 其上不可能存在满足条件的关系。

令 $A = \{0, 1, 2\}$, A 上的关系 R 为

$$R = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$$

则 R 既不是对称的也不是反对称的。

(c) 空集合上的空关系既是自反的, 又是反自反的; 既是对称的, 又是反对称的。因此, 结果同(a), (b)

3.1.13 考虑任意集合 A 上的二元关系的集合, 如果某一集合运算施于关系后, 所得关系仍具有相同的性质, 那么说一个关系的性质在该集合运算下是保持的。例如自反性质在二元运算并之下是保持的, 因为两个自反关系的并是自反的。然而, 自反性质在集合的求补运算下是不保持的, 因为一个非空集合上的一个自反关系的绝对补不是一个自反关系。按照在指出的集合运算下给出的性质是否保持, 填充下表。对每一非(N)的回答, 给出反例。

	并 $R_1 \cup R_2$	交 $R_1 \cap R_2$	相对补 $R_1 - R_2$	绝对补 $A \times A - R_1$
自反的	Y	Y	N	N
反自反的	Y	Y	Y	N
对称的	Y	Y	Y	Y
反对称的	N	Y	Y	N
传递的	N	Y	N	N

对于非的回答，其相应的反例如下：

(1) 令 $A = \{0\}$, $R_1 = R_2 = \{\langle 0, 0 \rangle\}$, 则

$R_1 - R_2 = \emptyset$, 它不是自反的；

$A \times A - R_1 = \emptyset$, 它也不是自反的。

(2) 令 $A = \{0\}$, $R_1 = \emptyset$, 则

$A \times A - R_1 = \{\langle 0, 0 \rangle\}$, 它不是反自反的。

(3) 令 $A = \{0, 1\}$, $R_1 = \{\langle 0, 1 \rangle\}$, $R_2 = \{\langle 1, 0 \rangle\}$, 则 $R_1 \cup R_2$ 不是反对称的。

(4) 令 $A = \{0, 1, 2\}$, $R_1 = \{\langle 0, 0 \rangle\}$, 则 $A \times A - R_1$ 不是反对称的。

(5) 令 $A = \{0, 1\}$, $R_1 = \{\langle 0, 1 \rangle\}$, $R_2 = \{\langle 1, 0 \rangle\}$, 则 R_1, R_2 可传递的，但 $R_1 \cup R_2$ 是不可传递的。

(6) 令 $A = \{0, 1\}$, $R_1 = A \times A$, $R_2 = \{\langle 0, 0 \rangle\}$, 则 R_1, R_2 可传递，但 $R_1 - R_2$ 不可传递。又若令 $R_1 = \{\langle 0, 0 \rangle\}$, 则有 $A \times A - R_1$ 是不可传递的。

3.1.14 在 R^2 平面上画出下述关系的图，对每一关系确定定义 3.1 - 5 中的哪些性质成立。

(a) $\{\langle x, y \rangle \mid x = y\}$

(b) $\{\langle x, y \rangle \mid x^2 - 1 = 0 \wedge y > 0\}$

(c) $\{\langle x, y \rangle \mid |x| \leq 1 \wedge |y| \geq 1\}$

解 (a) 是自反的，不是反自反的，是对称的，是反对称的和传递的。

(b) 不是自反的，不是反自反的，不是对称的，是反对称的和传递的。

(c) 不是自反的，不是反自反的。不是对称的，也不是反对称的，是可传递的。

它们的关系图如图 3.3 所示。

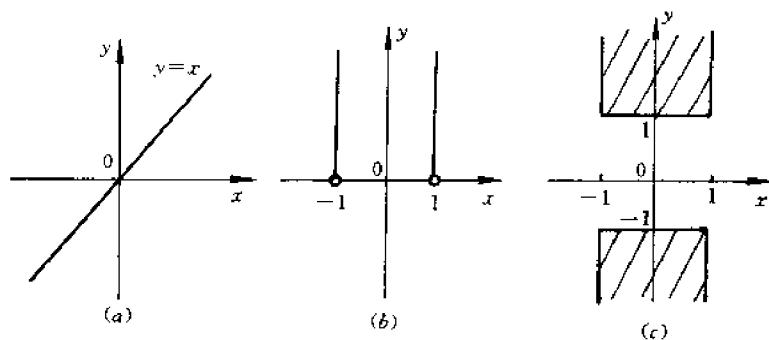


图 3.3

3.2 关系的合成

3.2.1 设 R_1 和 R_2 是集合 $A=\{a, b, c, d\}$ 上的关系, 这里

$$R_1=\{\langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle\}$$

$$R_2=\{\langle b, a\rangle, \langle c, d\rangle, \langle c, a\rangle, \langle d, c\rangle\}$$

找出 $R_1R_2, R_2R_1, R_1^2, R_2^2$ 。

解 $R_1R_2=\{\langle b, a\rangle, \langle b, d\rangle\}$

$$R_2R_1=\{\langle d, a\rangle\}$$

$$R_1^2=\{\langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle b, a\rangle\}$$

$$R_2^2=\{\langle c, a\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, c\rangle\}$$

3.2.2 设 R_1 和 R_2 是集合 $A=\{0, 1, 2, 3\}$ 上的关系, 这里

$$R_1=\{\langle i, j\rangle \mid j=i+1 \text{ 或 } j=i/2\}$$

$$R_2=\{\langle i, j\rangle \mid i=j+2\}$$

求出 $R_1R_2, R_2R_1, R_1R_2R_1, R_1^2, R_2^2$ 。

解 $R_1=\{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$

$$R_2=\{\langle 2, 0\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$$

$$R_1R_2=\{\langle 1, 0\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$$

$$R_2R_1=\{\langle 2, 0\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle\}$$

$$R_1R_2R_1=\{\langle 1, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$$

$$R_1^2=\{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$$

$$R_2^2=\emptyset$$

3.2.3 证明如果 R 是集合 A 上的空关系或全域关系, 那么 $R^2=R$ 。

证明 若 $R=\emptyset$, 则 $R^2=\emptyset=R$ 。

若 $A=\emptyset$, 则 $A\times A=\emptyset$, 所以令 R 是 A 上的全域关系, 则 $R=\emptyset$, 因而有 $R^2=R$;

若 $A\neq\emptyset$, 则其上的全域关系 $R=A\times A$, $\forall a, b\in A$, 有 $\langle a, b\rangle\in R$, $\langle a, a\rangle\in R$, 所以 $\langle a, b\rangle\in R^2$, 因而 $R=A\times A\subseteq R^2$, 又 $R^2\subseteq A\times A=R$, 所以 $R^2=R$ 。

3.2.4 证明定理 3.2-1(a)部分。

证明 $\forall \langle a, c\rangle$

$$\langle a, c\rangle\in R_1(R_2\cup R_3)$$

$$\Leftrightarrow \exists b(\langle a, b\rangle\in R_1\wedge \langle b, c\rangle\in (R_2\cup R_3))$$

$$\Leftrightarrow \exists b(\langle a, b\rangle\in R_1\wedge (\langle b, c\rangle\in R_2\vee \langle b, c\rangle\in R_3))$$

$$\Leftrightarrow \exists b((\langle a, b\rangle\in R_1\wedge \langle b, c\rangle\in R_2)\vee (\langle a, b\rangle\in R_1\wedge \langle b, c\rangle\in R_3))$$

$$\Leftrightarrow (\exists b(\langle a, b\rangle\in R_1\wedge \langle b, c\rangle\in R_2))\vee (\exists b(\langle a, b\rangle\in R_1\wedge \langle b, c\rangle\in R_3))$$

$$\Leftrightarrow (\langle a, c\rangle\in R_1R_2)\vee (\langle a, c\rangle\in R_1R_3)$$

$$\Leftrightarrow \langle a, c\rangle\in R_1R_2\cup R_1R_3$$

所以 $R_1(R_2\cup R_3)=R_1R_2\cup R_1R_3$ 。

3.2.5 证明定理 3.2-5 的(a)、(b)部分。

证明 (a) 对 k 作归纳。

当 $k=0$ 时, 显然 $R^{i+k}=R^i=R^j=R^{j+k}$ 。

设在 k 时有 $R^{i+k}=R^{j+k}$, 则 $k+1$ 时,

$$R^{i+k+1}=R^{i+k} \cdot R=R^{j+k} \cdot R=R^{j+k+1}$$

因此对一切 $k \in N$ 有 $R^{i+k}=R^{j+k}$ 。

(b) 对 m 作归纳。

当 $m=0$ 时, $R^{i+md+k}=R^{j+k}$ 公式成立。

假设在 m 时有 $R^{i+md+k}=R^{j+k}$, 则 $m+1$ 时

$$\begin{aligned} R^{i+(m+1)d+k} &= R^{i+md+k} \cdot R^{md} = R^{j+k} \cdot R^{md} = R^{j+k} \cdot R^{md} \\ &= R^{j+md+k} = R^{j+k} \end{aligned}$$

所以对一切 m 和 k ,

$$R^{i+md+k} = R^{j+k}$$

3.2.6 设 R 由图 3.4 所示的有向图代表, 试画出 R^n 的有向图, $n \in N$ 。

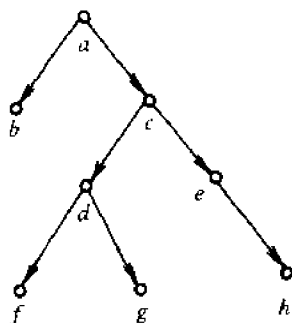


图 3.4

解 $R^0 = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, d \rangle, \langle e, e \rangle, \langle f, f \rangle, \langle g, g \rangle, \langle h, h \rangle\}$

$$R^1 = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle c, e \rangle, \langle d, f \rangle, \langle d, g \rangle, \langle e, h \rangle\}$$

$$R^2 = \{\langle a, d \rangle, \langle a, e \rangle, \langle c, f \rangle, \langle c, g \rangle, \langle c, h \rangle\}$$

$$R^3 = \{\langle a, f \rangle, \langle a, g \rangle, \langle a, h \rangle\}$$

$R^4 = \emptyset$, $R^5 = \emptyset$, 因此, 当 $n \geq 4$ 时有

$R^n = \emptyset$ 。 R^0, R^1, R^2, R^3, R^4 的有向图如图 3.5 所示。

3.2.7 设 $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, R 是如图 3.6 所示的 A 上的二元关系, 试找出最小的整数 m 和 n , 使 $m < n$ 和 $R^m = R^n$ 。

解 $R^2 = \{\langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle d, f \rangle, \langle e, g \rangle, \langle f, d \rangle, \langle g, e \rangle\}$

$$R^3 = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, g \rangle, \langle e, d \rangle, \langle f, e \rangle, \langle g, f \rangle\}$$

$$R^4 = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle, \langle d, d \rangle, \langle e, e \rangle, \langle f, f \rangle, \langle g, g \rangle\}$$

$$R^5 = \{\langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle d, e \rangle, \langle e, f \rangle, \langle f, g \rangle, \langle g, d \rangle\}$$

$$R^6 = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, f \rangle, \langle e, g \rangle, \langle f, d \rangle, \langle g, e \rangle\}$$

$$R^7 = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle, \langle d, g \rangle, \langle e, d \rangle, \langle f, e \rangle, \langle g, f \rangle\}$$

$$R^6 = \{\langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle d, d \rangle, \langle e, e \rangle, \langle f, f \rangle, \langle g, g \rangle\}$$

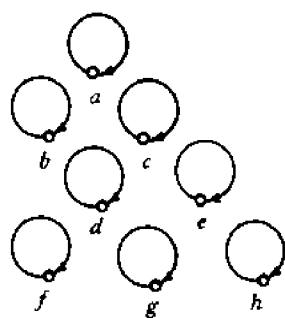
$$R^9 = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, e \rangle, \langle e, f \rangle, \langle f, g \rangle, \langle g, d \rangle\}$$

$$R^{10} = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle, \langle d, f \rangle, \langle e, g \rangle, \langle f, d \rangle, \langle g, e \rangle\}$$

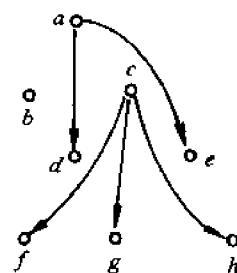
$$R^{11} = \{\langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle d, g \rangle, \langle e, d \rangle, \langle f, e \rangle, \langle g, f \rangle\}$$

$$R^{12} = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, d \rangle, \langle e, e \rangle, \langle f, f \rangle, \langle g, g \rangle\}$$

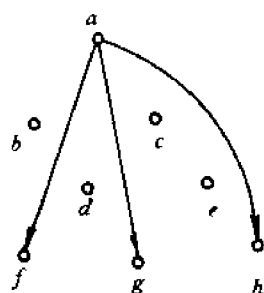
$R^{12} = R^0$, 所以取 $m=0, n=12$ 。



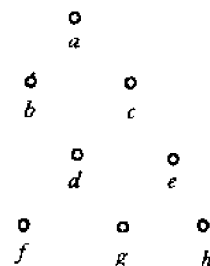
(R^0)



(R^2)



(R^3)



(R^4)

图 3.5

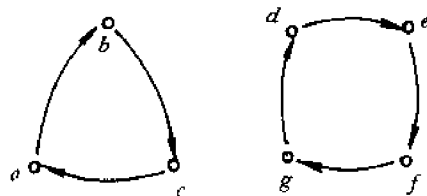


图 3.6

3.2.8 设 R_1 和 R_2 是集合 A 上的任意关系, 证明或否定下列断言:

- (a) 如果 R_1 和 R_2 都是自反的, 那么 R_1R_2 是自反的。
- (b) 如果 R_1 和 R_2 都是反自反的, 那么 R_1R_2 是反自反的。
- (c) 如果 R_1 和 R_2 都是对称的, 那么 R_1R_2 是对称的。
- (d) 如果 R_1 和 R_2 都是反对称的, 那么 R_1R_2 是反对称的。
- (e) 如果 R_1 和 R_2 都是传递的, 那么 R_1R_2 是传递的。

解 (a) 结论成立。因为, 对于任意 $x \in A$ 有

$$\langle x, x \rangle \in R_1, \langle x, x \rangle \in R_2 \Rightarrow \langle x, x \rangle \in R_1R_2$$

所以 R_1R_2 是自反的。

(b) 结论不成立。

例如令 $A = \{0, 1\}$, $R_1 = \{\langle 0, 1 \rangle\}$, $R_2 = \{\langle 1, 0 \rangle\}$, 则 $R_1R_2 = \{\langle 0, 0 \rangle\}$, R_1, R_2 是反自反的, 但 R_1R_2 不是反自反的。

(c) 结论不成立。

例如令 $A = \{0, 1, 2\}$

$$R_1 = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle\}$$

$$R_2 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$$

$$R_1R_2 = \{\langle 0, 2 \rangle\}$$

易见 R_1, R_2 是对称的, 但 R_1R_2 不是对称的。

(d) 结论不成立。

例如令 $A = \{0, 1\}$

$$R_1 = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\}$$

$$R_2 = \{\langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\}$$

则 R_1, R_2 是反对称的。但是

$$R_1R_2 = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\}$$

$$\langle 0, 1 \rangle \in R_1R_2, \langle 1, 0 \rangle \in R_1R_2$$

因此 R_1R_2 不是反对称的。

(e) 结论不成立。

例如令 $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$$R_1 = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$$

$$R_2 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 4 \rangle\}$$

则 R_1, R_2 是传递的, 但 $R_1R_2 = \{\langle 0, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle\}$ 是不可传递的。

3.2.9 R_1, R_2 和 R_3 是集合 A 中的二元关系, 试证明如果 $R_1 \subseteq R_2$, 则

$$(a) R_1 \cdot R_3 \subseteq R_2 \cdot R_3$$

$$(b) R_3 \cdot R_1 \subseteq R_3 \cdot R_2$$

证明 (a) $\langle a, c \rangle \in R_1R_3$

$$\Leftrightarrow \exists b (\langle a, b \rangle \in R_1 \wedge \langle b, c \rangle \in R_3)$$

$$\Rightarrow \exists b (\langle a, b \rangle \in R_2 \wedge \langle b, c \rangle \in R_3)$$

$$\Leftrightarrow \langle a, c \rangle \in R_2R_3$$

$$\therefore R_1 R_3 \subseteq R_2 R_3$$

$$(b) \langle a, c \rangle \in R_3 R_1$$

$$\Leftrightarrow \exists b (\langle a, b \rangle \in R_3 \wedge \langle b, c \rangle \in R_1)$$

$$\Rightarrow \exists b (\langle a, b \rangle \in R_3 \wedge \langle b, c \rangle \in R_2)$$

$$\Leftrightarrow \langle a, c \rangle \in R_3 R_2$$

$$\therefore R_3 R_1 \subseteq R_3 R_2$$

3.2.10 设 $A = \{1, 2, \dots, 5\}$, $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$, $S = \{\langle 4, 2 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$, 试求出 $M_{R \cdot S}$ 。

$$\text{解 } R \cdot S = \{\langle 1, 5 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 2, 5 \rangle\}$$

$$\therefore M_{R \cdot S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.2.11 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$,

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

求 M_{R^n} , $n \in N$ 。

解

$$\begin{aligned} M_{R^0} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & M_{R^2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ M_{R^3} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & M_{R^4} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\therefore M_{R^4} = M_R$, 由定理 3.2-5 得

$$M_{R^{3n+k+1}} = M_{R^{k+1}}, n \geq 0, k = 0, 1, 2.$$

3.3 关系上的闭包运算

3.3.1 试证明定理 3.3-1。

证明 $\langle x, y \rangle \in \widetilde{R \cdot S}$

$$\Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R \cdot S$$

$$\Leftrightarrow \exists z (\langle y, z \rangle \in R \wedge \langle z, x \rangle \in S)$$

$$\Leftrightarrow \exists z (\langle x, z \rangle \in \tilde{S} \wedge \langle z, y \rangle \in \tilde{R})$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in \tilde{S} \cdot \tilde{R}$$

因此, $\widetilde{R \cdot S} = \tilde{S} \cdot \tilde{R}$ 。

3.3.2 试证明定理 3.3-2(c)、(f)部分。

$$\begin{aligned} \text{证明 (c)} \quad & \langle x, y \rangle \in R_1 \widetilde{\cap} R_2 \\ & \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R_1 \cap R_2 \\ & \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R_1 \wedge \langle y, x \rangle \in R_2 \\ & \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in \tilde{R}_1 \wedge \langle x, y \rangle \in \tilde{R}_2 \\ & \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in \tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2 \end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad R_1 \widetilde{\cap} R_2 = \tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2$$

$$\begin{aligned} \text{(f)} \quad & \langle x, y \rangle \in \tilde{R}_1 \\ & \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R_1 \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R_2 \\ & \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in \tilde{R}_2 \end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow \tilde{R}_1 \subseteq \tilde{R}_2。$$

3.3.3 试证明定理 3.3-3。

证明 当 $R = \tilde{R}$ 时, 对于任意元素对 $\langle x, y \rangle$, $\langle x, y \rangle \in R \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in \tilde{R} = R$ 。所以 R 是对称的。

反之, 假设 R 是对称的, 则对于任意 $\langle x, y \rangle$, $\langle x, y \rangle \in R \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in \tilde{R}$ 。所以

$$R = \tilde{R}$$

3.3.4 试证明如果关系 R 是自反的, 则 $\tilde{R}$ 也是自反的; 如果 R 是可传递的、反自反的、对称的或反对称的, 则 $\tilde{R}$ 亦然。

证明 (1) 若关系 R 是自反的, 则 $\forall x \in A, \langle x, x \rangle \in R$, $\therefore \langle x, x \rangle \in \tilde{R}$, 因此, $\tilde{R}$ 也是自反的。

(2) 若 R 是可传递的, 则有

$$\begin{aligned} & \langle a, b \rangle \in \tilde{R} \wedge \langle b, c \rangle \in \tilde{R} \\ & \Rightarrow \langle b, a \rangle \in R \wedge \langle c, b \rangle \in R \\ & \Rightarrow \langle c, a \rangle \in R \Rightarrow \langle a, c \rangle \in \tilde{R} \end{aligned}$$

所以 $\tilde{R}$ 也是可传递的。

假设 R 是反对称的, 则有

$$\begin{aligned} & \langle x, y \rangle \in \tilde{R} \wedge \langle y, x \rangle \in \tilde{R} \\ & \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R \wedge \langle x, y \rangle \in R \\ & \Rightarrow x = y \end{aligned}$$

所以 $\tilde{R}$ 也是反对称的。

假设 R 是对称的, 则有

$$\langle x, y \rangle \in \tilde{R} \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in \tilde{R}$$

所以 $\tilde{R}$ 也是对称的。

假设 R 是反自反的, 则有

$$\forall x \in A, \langle x, x \rangle \notin R, \therefore \langle x, x \rangle \notin \tilde{R}$$

所以 $\tilde{R}$ 也是反自反的。

3.3.5 如果关系 R 是反对称的, 则在 $R \cap \tilde{R}$ 的关系矩阵中有多少个非零记入值。

解 如果 A 上关系 R 是反对称的, 那么, $R \cap \tilde{R}$ 的关系矩阵中最多只有主对角线上的元素有非零值, 即最多只有 $|A|$ 个非零记入值。

3.3.6 设 $A = \{a, b, c\}$, R, S 是 A 上的二元关系, 其关系矩阵是

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

试求出 $M_{\tilde{R}}, M_{\tilde{S}}, M_{R \circ S}, M_{R \circ R}$ 。

解

$$\begin{aligned} M_{\tilde{R}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & M_{\tilde{S}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ M_{R \circ S} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & M_{R \circ R} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.3.7 找出图 3.7 中每个关系的自反、对称和传递闭包。

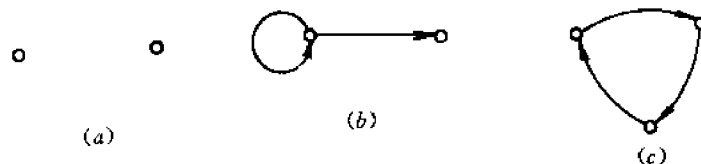


图 3.7

解 图 3.7 中每个关系的自反、对称和传递闭包如图 3.8 所示。

3.3.8 设 R 是 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 上的二元关系, 其关系矩阵是

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

试求出 (a) $M_{r(R)}$; (b) $M_{s(R)}$; (c) $M_{R^2}, M_{R^3}, M_{R^4}$ 和 $M_{t(R)}$ 。

解 (a)

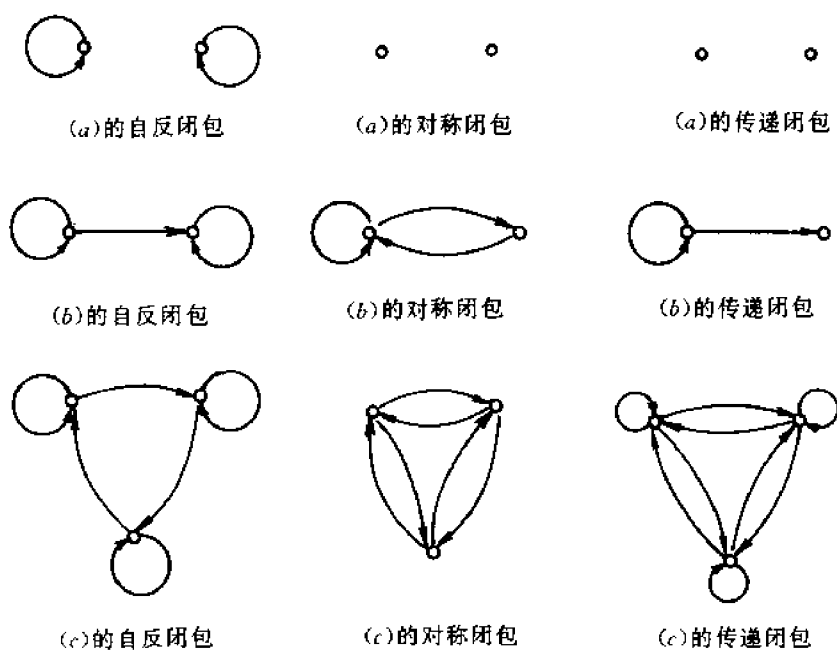


图 3.8

$$M_{r(R)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$M_{s(R)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$M_{R^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{R^3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{R^4} = M_{R^3}$$

$$M_{t(R)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.3.9 设 R_1 和 R_2 是集合 A 上的关系且 $R_1 \supseteq R_2$, 证明下列各式:

(a) $r(R_1) \supseteq r(R_2)$

$$(b) s(R_1) \supseteq s(R_2)$$

$$(c) t(R_1) \supseteq t(R_2)$$

$$\text{证明 } (a) r(R_1) = R_1 \cup E \supseteq R_2 \cup E = r(R_2)$$

$$\therefore r(R_1) \supseteq r(R_2)$$

$$(b) \because R_1 \supseteq R_2, \therefore \widetilde{R}_1 \supseteq \widetilde{R}_2$$

$$\therefore s(R_1) = R_1 \cup \widetilde{R}_1 \supseteq R_2 \cup \widetilde{R}_2 = s(R_2)$$

$$\therefore s(R_1) \supseteq s(R_2)$$

(c) 先证 $R_1 \supseteq R_2$ 时, 对一切 $n \in N$, $R_1^n \supseteq R_2^n$, 对 n 作归纳。 $n=1$ 时是题设, 显然真。设 n 时真, 现证 $n+1$ 时亦真。

设 $\langle x, y \rangle \in R_2^{n+1} = R_2^n \cdot R_2$, 于是存在一 z , $z \in A$, 并且 $\langle x, z \rangle \in R_2^n$, $\langle z, y \rangle \in R_2$, 根据归纳假设有 $\langle x, z \rangle \in R_1^n$ 和 $\langle z, y \rangle \in R_1$, 所以 $\langle x, y \rangle \in R_1^n \cdot R_1 = R_1^{n+1}$, $\langle x, y \rangle$ 是任意的, 所以 $R_2^{n+1} \subseteq R_1^{n+1}$, 即对一切 n , $R_1^n \supseteq R_2^n$ 。

再证 $t(R_1) \supseteq t(R_2)$ 。设 $\langle x, y \rangle \in t(R_2)$, 于是存在一 n , $\langle x, y \rangle \in R_2^n$, 但 $R_2^n \subseteq R_1^n$, 所以 $\langle x, y \rangle \in R_1^n$, $\langle x, y \rangle \in t(R_1)$, 故 $t(R_1) \supseteq t(R_2)$ 。

3.3.10 设 R_1 和 R_2 是 A 上的关系, 证明下列各式:

$$(a) r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2)$$

$$(b) s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2)$$

$$(c) t(R_1 \cup R_2) \supseteq t(R_1) \cup t(R_2)$$

$$(d) \text{ 用反例证明 } t(R_1 \cup R_2) \neq t(R_1) \cup t(R_2)$$

证明

$$(a) r(R_1 \cup R_2) = R_1 \cup R_2 \cup E$$

$$= (R_1 \cup E) \cup (R_2 \cup E)$$

$$= r(R_1) \cup r(R_2)$$

$$(b) s(R_1 \cup R_2) = (R_1 \cup R_2) \cup (R_1 \cup R_2)$$

$$= (R_1 \cup R_2) \cup (\widetilde{R}_1 \cup \widetilde{R}_2)$$

$$= (R_1 \cup \widetilde{R}_1) \cup (R_2 \cup \widetilde{R}_2)$$

$$= s(R_1) \cup s(R_2)$$

$$(c) \because R_1 \subseteq (R_1 \cup R_2), \therefore t(R_1 \cup R_2) \supseteq t(R_1)$$

$$\because R_2 \subseteq (R_1 \cup R_2), \therefore t(R_1 \cup R_2) \supseteq t(R_2)$$

$$\therefore t(R_1 \cup R_2) \supseteq t(R_1) \cup t(R_2)$$

(d) 令 $A = \{0, 1, 2\}$, $R_1 = \{\langle 0, 1 \rangle\}$, $R_2 = \{\langle 1, 2 \rangle\}$, 则 $t(R_1) \cup t(R_2) = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$, 而 $t(R_1 \cup R_2) = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 0, 2 \rangle\}$ 。因此,

$$t(R_1 \cup R_2) \neq t(R_1) \cup t(R_2)$$

3.3.11 找出 n 个元素的集合 A 和 A 上的关系 R , 使 $R^1, R^2, R^3, \dots, R^n$ 都是不相交的, 以表明定理 3.3-8 给出的界限是不可改善的。

解 例如取 $n=4$, $A = \{a, b, c, d\}$

$$R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, a \rangle\}$$

$$R^2 = \{\langle a, c \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, a \rangle, \langle d, b \rangle\}$$

$$R^3 = \{\langle a, d \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle d, c \rangle\}$$

$$R^4 = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, d \rangle\}$$

R, R^2, R^3, R^4 互不相交。以上例子可推广到任意 $n \in N$ 。因此定理 3.3-8 给出的界限是不可改善的。

3.3.12 找出 n 个元素的集合 A 和 A 上的二元关系 R , 使 $R^1, R^2, \dots, R^n, R^{n+1}$ 都是有区别的, 这可能吗? 如有可能试举出例子, 并说明这现象为什么与定理 3.3-8 不矛盾。

解 这是可能的。令 $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle, \langle d, e \rangle, \langle e, f \rangle, \langle f, g \rangle, \langle g, d \rangle\}$, 则易验证 $R, R^2, R^3, R^4, R^5, R^6, R^7, R^8$ 都是有区别的。

(参见 3.2.7)

这种现象与定理 3.3-8 并不矛盾。尽管 R^{n+1} 与 $R^1, R^2, \dots, R^n$ 不同, 但 R^{n+1} 中的所有序偶已全部在 $R, R^2, \dots, R^n$ 中出现。 $t(R) = R^1 \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$, 已包含了 R^{n+1} 中的序偶, 所以不必再并上 R^{n+1} 。

3.3.13 证明定理 3.3-9。

证明 (a) 若 R 是自反的, 则 $E \subseteq R$ 。

因为 $S(R) = R \cup \tilde{R} \supseteq E$, 所以 $S(R)$ 是自反的, 又 $E \subseteq R \subseteq t(R)$, 所以 $t(R)$ 也是自反的。

(b) 先证对一切 n , R^n 是对称的。

对 n 作归纳。

$n=1$ 时, 是题设, 显然成立。设 n 时为真, 现证 $n+1$ 时亦真。

$\langle a, b \rangle \in R^{n+1} \Leftrightarrow \langle a, b \rangle \in R^n \cdot R$, 于是存在一 c , 使 $\langle a, c \rangle \in R^n$, 且 $\langle c, b \rangle \in R$ 。根据归纳假设 R^n 和 R 是对称的, 所以, $\langle c, a \rangle \in R^n$, $\langle b, c \rangle \in R$ 。因而, $\langle b, a \rangle \in R \cdot R^n = R^{n+1}$, $\langle a, b \rangle$ 是任意的, 所以 R^{n+1} 是对称的。因此, 对一切 n , R^n 是对称的。

再证 $t(R)$ 是对称的。

设 $\langle a, b \rangle \in t(R)$

$\Leftrightarrow \langle a, b \rangle \in R^n$ (存在 $-n \in I_+$)

$\Leftrightarrow \langle b, a \rangle \in R^n$ (因 R^n 是对称的)

$\Leftrightarrow \langle b, a \rangle \in t(R)$

因 $\langle a, b \rangle$ 是任意的, 所以 $t(R)$ 是对称的。

下面证 $r(R)$ 是对称的。

$r(R) = R \cup E$, 因为 R 和 E 均为对称的, 所以 $r(R)$ 也是对称的。

(c) 若 $\langle a, b \rangle \in r(R)$, $\langle b, c \rangle \in r(R)$, 则因为 $r(R) = R \cup E$, 若 $\langle a, b \rangle$ 或 $\langle b, c \rangle$ 属于 E , 则易见 $\langle a, c \rangle \in E$ 或 $\langle a, c \rangle \in R$, 所以 $\langle a, c \rangle \in r(R)$ 。

若 $\langle a, b \rangle \in R$, $\langle b, c \rangle \in R$, 则由 R 是传递的, 所以 $\langle a, c \rangle \in R \subseteq r(R)$ 。

因此 $r(R)$ 是传递的。

3.3.14 设 $A = \{a, b, c, d, e\}$, R 是 A 上如图 3.9 所示的二元关系。

(a) 画出 $t(R)$; (b) 画出 $tsr(R)$ 。

解 $t(R) = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, d \rangle, \langle e, e \rangle, \langle c, d \rangle, \langle c, e \rangle, \langle d, e \rangle, \langle d, c \rangle, \langle e, c \rangle, \langle e, d \rangle\}$ 。

$$t_{sr}(R) = t(R)$$

它们的关系图如图 3.10 所示。

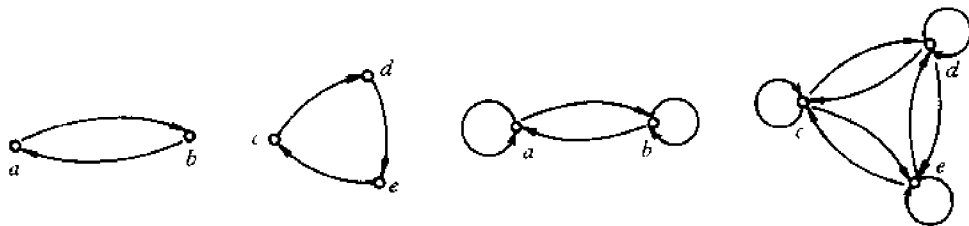


图 3.9

图 3.10

3.3.15 (a) 用反例证明语句“如果 R 是传递的, 那么 $s(R)$ 是传递的”是假。

(b) 举一实例证明即使 R 是一有限集, $st(R)$ 和 $ts(R)$ 也可以不相等。

解 (a) 令 $A = \{0, 1\}$, $R = \{\langle 0, 1 \rangle\}$, 则 R 是传递的。但 $s(R) = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle\}$ 不是可传递的。

(b) 设 A 与 R 同上, 则

$$st(R) = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle\}$$

$$ts(R) = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\}$$

$\therefore st(R) \neq ts(R)$ 。

3.3.16 设 R 是集合 A 上的一个任意关系, 证明下列各式:

(a) $(R^+)^+ = R^+$

(b) $RR^+ = R^+ = R^+ \cdot R$

(c) $(R^+)^+ = R^+$

证明 (a) 因为 $R^+ = t(R)$ 是传递的, 所以,

$$(R^+)^+ = t(R^+) = t(t(R)) = t(R) = R^+$$

(b) $R^+ = R^+ \cup E = (R \cup R^2 \cup \dots) \cup E = E \cup R \cup R^2 \cup \dots$

$$RR^+ = R(E \cup R \cup R^2 \cup \dots) = R \cup R^2 \cup \dots = R^+$$

同理可证 $R^+ \cdot R = R^+$ 。

(c) $(R^+)^+ = t(R^+) \cup E$

$$= R^+ \cup E \text{ (因 } R^+ \text{ 是传递的)}$$

$$= R^+$$

3.3.17 设 $A = \{a\}^* = \{a^n \mid n \geq 0\}$, B 是单元素集合 $B = \{z\}$, 这里 z 是 a 的无限串, 即 $B = \{aaa\cdots\}$, 设 R 是 $A \cup B$ 上的关系, 定义如下:

$$\langle x, y \rangle \in R \Leftrightarrow y = xa$$

证明或否定 $\langle \Lambda, z \rangle \in R^+$ 。

证明 因为 $\langle \Lambda, z \rangle \in R^+$, 当且仅当存在 $i \in I_+$, 使 $\langle \Lambda, z \rangle \in R^i$; $\langle \Lambda, z \rangle \in R^i$, 当且仅当

$z = \underbrace{\Lambda aa\cdots a}_{i \text{ 个}}$, 但 z 是无限串 $aa\cdots$, 显然 $z \neq \Lambda aa\cdots a$, 故 $\langle \Lambda, z \rangle \notin R^+$ 。

3.4 次序关系

3.4.1 图 3.11 中给出了偏序集合 $\langle A, R \rangle$ 的哈斯图, 这里 $A = \{a, b, c, d, e\}$ 。

(a) 下列关系式哪个是真?

$aRb, \quad dRa, \quad cRe,$
 $bRe, \quad aRa, \quad bRc, \quad dRe$

(b) 把哈斯图改为有向图。

(c) 求出 A 的最小元素和最大元素, 如果不存在, 则指出不存在。

(d) 求出 A 的极大元素和极小元素。

(e) 求出子集 $\{b, c, d\}$ 、 $\{c, d, e\}$ 和 $\{a, b, c\}$ 的上界和下界, 并指出这些子集的 lub 和 glb, 如果它们存在的话。

解 (a) dRa, aRa 是真, 其余是假。

(b) 关系 R 对应的有向图如 3.12 所示。

(c) A 的最小元素不存在, A 的最大元素是 a 。

(d) A 的极大元素是 a , 极小元素是 d 和 e 。

(e) $\{b, c, d\}$ 的上界为 a , 下界为 d , 且其 $\text{lub}=a, \text{glb}=d$ 。

$\{c, d, e\}$ 的上界为 c 和 a , 下界不存在, 且其 $\text{lub}=c$ 。

$\{a, b, c\}$ 的上界为 a , 下界为 d , 且其 $\text{lub}=a, \text{glb}=d$ 。

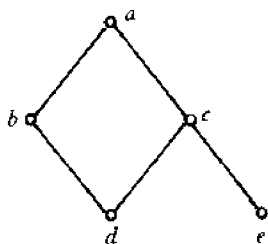


图 3.11

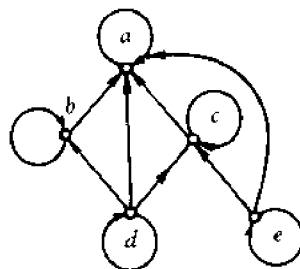


图 3.12

3.4.2 对下述每一条件, 构造有限集和无限集的例子各一个:

(a) 非空偏序集合, 其中某些子集没有最大元素。

(b) 非空偏序集合, 其中有一子集存在最大下界, 但没有最小元素。

(c) 非空偏序集合, 其中有一子集存在上界, 但没有最小上界。

解 (a) 令 $A=\{a, b\}$, $R=\{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$, 则 (A, R) 是一非空有限偏序集合, 但 A 无最大元素。

$(N, \leq)$ 是一个非空无限偏序集, 但 N 无最大元素。

(b) 令 $A=\{a, b, c\}$, $R=\{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle\}$, 则 (A, R) 是一个有限非空的偏序集。对于 A 的子集 $B=\{b, c\}$, 它有最大下界 a , 但没有最小元素。

令 $A=\{a \mid a \text{ 是大于等于 } 0 \text{ 的实数}\}$, 则 $(A, \leq)$ 是一个非空无限的偏序集。令 B 是大于零的实数的集合, 则 B 有最大下界 0 , 但没有最小元素。

(c) 令 $A=\{a, b, c, d\}$, $R=\{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, d \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, d \rangle\}$, 则 (A, R) 是一非空有限偏序集。令 $B=\{a, b\}$, 则它有上界 d, c , 但没有最小上界。

取偏序集合 $([-1, 1] - \{0\}, \leq)$ 令 $B = [-1, 0)$, 则 $(0, 1]$ 中的元素都是其上界, 但无最小上界。

3.4.3 证明定理 3.4-2。

证明 因为 $(A, \leq)$ 是一有限非空偏序集, 假设 $|A| = n$, 从中任取一元素记为 a_0 。

对 A 的元素 a_0 采取以下步骤建立一个序列:

(i) 令 $x = a_0, i = 0$ 。

(ii) 若 x 是极大元则停止, 否则转(iii)。

(iii) x 不是极大元, 所以可找到一元素 $y \in A$, 使 $x \neq y$, 且 $x \leq y$ 。

(iv) 令 $a_{i+1} = y, x \leftarrow y, i = i + 1$, 转(ii)由此可得一个序列如下:

$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$

且此序列满足 $a_i \neq a_{i+1}$, 且 $a_i \leq a_{i+1}$ 。

又因 $|A| = n$, 因此这一序列中最多只有 n 个元素, 也即上述步骤最多经过 n 步后必停止。设最后一个元素为 a , 则 a 就是一个极大元, 同理可证极小元也必存在。

3.4.4 证明定理 3.4-3。

证明 假设 a, b 都是 B 的最小上界, 则有 $a \leq b$, 且 $b \leq a$, 又因 $(A, \leq)$ 是偏序集, 由反对称性得 $a = b$, 因此若 B 的最小上界存在则必唯一。对最大下界同理可证得。

3.4.5 说明图 3.13 的有向图哪些代表偏序集合、拟序集合、线序集合、良序集合? 哪些不属于以上 4 种集合?

解 (a) 是偏序集合, 但不是拟序、线序和良序;

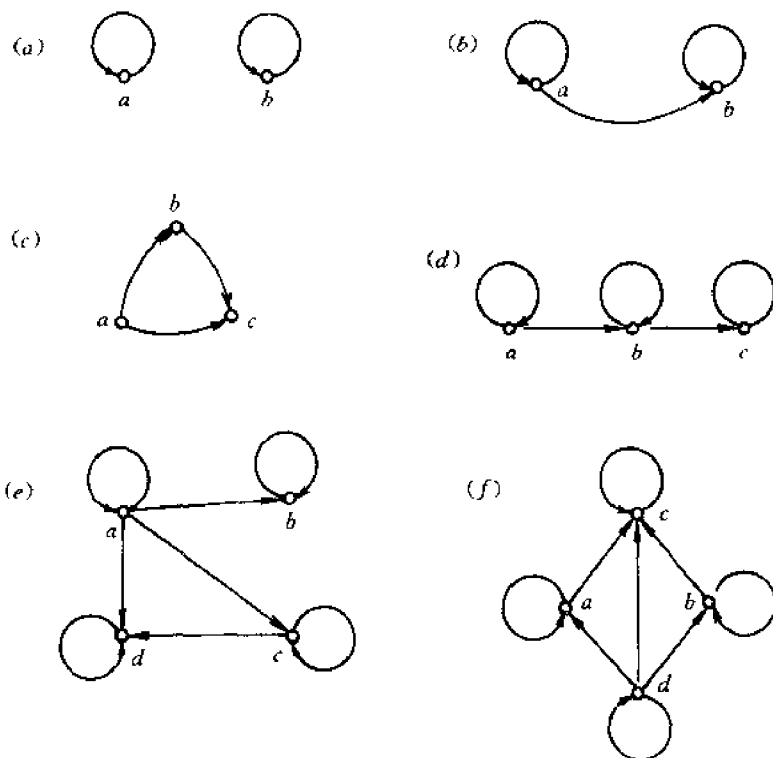


图 3.13

(b) 是偏序、线序、良序, 但不是拟序;

(c) 是拟序, 不是偏序、线序、良序;

(d) 不属于以上任何集合;

(e) 是偏序, 不是拟序、线序、良序;

(f) 是偏序, 不是线序、良序、拟序。

3.4.6 将上题(e)、(f)两个有向图改成哈斯图。

解 (e)、(f)的哈斯图分别如图 3.14 的(e')、(f')

所示。

3.4.7 下述 4 个集合哪些是拟序集合、偏序、线序、良序集合?

(a) $\langle \rho(N), \subset \rangle$

(b) $\langle \rho(N), \subseteq \rangle$

(c) $\langle \rho(\{a\}), \subseteq \rangle$

(d) $\langle \rho(\emptyset), \subseteq \rangle$

解 (a) 是拟序, 不是其它集合;

(b) 是偏序, 不是其它集合;

(c) 是偏序、线序、良序, 不是拟序;

(d) 同(c)。

3.4.8 (a) 对集合 $I \times I$ 构造一良序。

(b) 对集合 $I \times I$ 构造一拟序。

解 (a) $\forall \langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \in I \times I$,

$\langle a, b \rangle \leq \langle c, d \rangle$

$\Leftrightarrow (|a| + |b| < |c| + |d|) \vee$

$((|a| + |b| = |c| + |d|) \wedge (a < c)) \vee$

$((|a| + |b| = |c| + |d|) \wedge (a = c) \wedge (b \leq d))$

则 $(I \times I, \leq)$ 是良序。

(b) $\forall \langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \in I \times I$

$\langle a, b \rangle < \langle c, d \rangle \Leftrightarrow a < c$, 则 $(I \times I, <)$ 是一个拟序集合。

3.4.9 证明下列断言:

(a) 如果 R 是拟序, 那么 $\tilde{R}$ 也是拟序。

(b) 如果 R 是偏序, 那么 $\tilde{R}$ 也是偏序。

(c) 如果 R 是线序, 那么 $\tilde{R}$ 也是线序。

(d) 存在一集合 S 和 S 上的关系 R , 使 $\langle S, R \rangle$ 是良序集合, 但 $\langle S, \tilde{R} \rangle$ 不是。

证明 (a) 若 R 是拟序, 则 $\forall x \in A, \langle x, x \rangle \notin R, \therefore \langle x, x \rangle \notin \tilde{R}, \therefore \tilde{R}$ 是反自反的。又 R 是传递的, $\therefore \forall \langle a, b \rangle \in \tilde{R}, \forall \langle b, c \rangle \in \tilde{R}$ 。由 $\langle c, b \rangle \in R, \langle b, a \rangle \in R, \therefore \langle c, a \rangle \in R, \langle a, c \rangle \in \tilde{R}$, 因而 $\tilde{R}$ 是可传递的。所以 $\tilde{R}$ 是拟序。

(b) 若 R 是偏序, 则 R 是自反的、反对称的、传递的。所以, $\forall x \in A$, 有 $\langle x, x \rangle \in R$, $\langle x, x \rangle \in R \Rightarrow \langle x, x \rangle \in \tilde{R}$ 。

所以 $\tilde{R}$ 是自反的。

$$\langle x, y \rangle \in \tilde{R} \wedge \langle y, x \rangle \in \tilde{R}$$

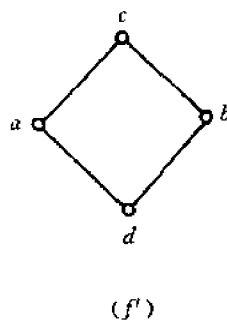
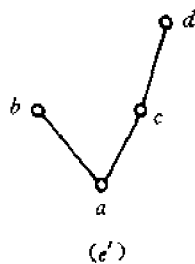


图 3.14

$$\Rightarrow \langle y, x \rangle \in R \wedge \langle x, y \rangle \in R \\ \Rightarrow x=y$$

所以, $\tilde{R}$ 是反对称的。

$$\langle a, b \rangle \in \tilde{R} \wedge \langle b, c \rangle \in \tilde{R} \\ \Rightarrow \langle b, a \rangle \in R \wedge \langle c, b \rangle \in R \\ \Rightarrow \langle c, a \rangle \in R \Rightarrow \langle a, c \rangle \in \tilde{R}$$

所以, $\tilde{R}$ 是可传递的。

因此 $\tilde{R}$ 也是偏序。

(c) 若 R 是线序, 则 R 是偏序, 由(b)得 $\tilde{R}$ 也是偏序。又 $\forall a, b \in A$, 得或者 $\langle a, b \rangle \in R$ 或 $\langle b, a \rangle \in R$, 因而有或者 $\langle b, a \rangle \in \tilde{R}$ 或 $\langle a, b \rangle \in \tilde{R}$ 。

所以 $\tilde{R}$ 也是线序。

(d) 令 $S=N$, R 为 $\leq$, 因而 $\langle S, R \rangle$ 是良序, 但 $\langle S, \tilde{R} \rangle = \langle N, \geq \rangle$ 不是良序。

3.4.10 设 R 是集合 S 上的关系, S' 是 S 的子集, 定义 S' 上的关系 R' 如下:

$$R' = R \cap (S' \times S')$$

确定下述每一断言的真假:

(a) 若 R 在 S 上是传递的, 那么 R' 在 S' 上也是传递的。

(b) 若 R 是 S 上的偏序, 则 R' 也是 S' 上的偏序。

(c) 若 R 是 S 上的拟序, 则 R' 也是 S' 上的拟序。

(d) 若 R 是 S 上的线序, 则 R' 也是 S' 上的线序。

(e) 若 R 是 S 上的良序, 则 R' 也是 S' 上的良序。

解 (a) 是真。若 R 在 S 上是传递的, 则有

$$\langle a, b \rangle \in R' \wedge \langle b, c \rangle \in R' \\ \Rightarrow \langle a, b \rangle \in R \wedge \langle a, b \rangle \in S' \times S' \wedge \langle b, c \rangle \in R \wedge \langle b, c \rangle \in S' \times S' \\ \Rightarrow \langle a, c \rangle \in R \wedge \langle a, c \rangle \in S' \times S' \\ \Rightarrow \langle a, c \rangle \in R'$$

所以 R' 也是传递的。

(b) 是真。因 R 是 S 上的偏序, 所以 R 是自反的、反对称的、传递的。因而 $\forall x \in S$, $\langle x, x \rangle \in R$, 又 $\forall x \in S'$, 有 $\langle x, x \rangle \in S' \times S'$ 。所以 $\forall x \in S'$, 有 $\langle x, x \rangle \in R'$, 所以 R' 是自反的。

$$\langle x, y \rangle \in R' \wedge \langle y, x \rangle \in R' \\ \Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \\ \Rightarrow x=y$$

因而若 R 是反对称的, 则 R' 也是反对称的, 再由(a)得 R' 也是传递的, 所以, R' 是偏序。

(c) 是真。因为 R 是 S 上的拟序, 所以 R 是反自反的, 传递的。所以 $\forall x \in S'$, $\langle x, x \rangle \notin R$, 所以 $\langle x, x \rangle \notin R'$, 因而 R' 也是反自反的, 由(a) R' 也是传递的, 所以 R' 是拟序。

(d) 是真。若 R 是线序, 则 R 是偏序, 且 $\forall a, b \in S$, 或者 $\langle a, b \rangle \in R$ 或者 $\langle b, a \rangle \in R$ 。因而 $\forall x, y \in S'$, 也有 $\langle x, y \rangle \in R$ 或 $\langle y, x \rangle \in R$ 。但 $\langle x, y \rangle \in S' \times S'$, $\langle y, x \rangle \in S' \times S'$, 所以, 或者 $\langle x, y \rangle \in R'$ 或 $\langle y, x \rangle \in R'$ 。因而 S' 上任一对元素是可比较的, 又由(b), R' 也是偏序, 所以 R' 是 S' 上的线序。

(e) 是真。因为 R 为 S 上的良序, 所以 R 是线序, 且 S 的任一非空子集都有最小元素。由 (d) 得 R' 也是 S' 上的线序。又设 A 是 S' 的任一非空子集, 则 A 也是 S 的一非空子集。所以对 R 来说 A 一定有最小元素。设它为 a , 则 $\forall x \in A, \langle a, x \rangle \in R$, 又 $A \subseteq S'$, 所以 $\langle a, x \rangle \in S' \times S'$ 。所以 $\langle a, x \rangle \in R'$ 。因而 A 对 R' 也一定有最小元。因此, R' 是 S' 上的良序。

3.4.11 (a) 证明 R 是一拟序当且仅当 $R \cap \tilde{R} = \emptyset$ 且 $R = R^+$ 。

(b) 证明 R 是一偏序当且仅当 $\tilde{R} \cap R = E$ 且 $R = R^+$ 。

证明 (a) 若 R 是拟序, 则 R 反自反且传递, 所以 $R = t(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R^+$ 。又若 $R \cap \tilde{R} \neq \emptyset$, 则 $\exists \langle x, y \rangle \in R \cap \tilde{R}$, $\exists \langle x, y \rangle \in R$ 且 $\langle x, y \rangle \in \tilde{R}$, 因而有 $\langle x, y \rangle \in R$ 且 $\langle y, x \rangle \in R$ 。由传递性 $\langle x, x \rangle \in R$, 这与 R 是反自反相矛盾, 所以 $R \cap \tilde{R} = \emptyset$ 。

又若 $R = R^+$, 且 $R \cap \tilde{R} = \emptyset$, 则 R 是可传递的。又若 R 不是反自反的, 则 $\exists x \in A$, 使 $\langle x, x \rangle \in R$, 所以 $\langle x, x \rangle \in \tilde{R}$ 。这与 $R \cap \tilde{R} = \emptyset$ 矛盾, 所以 R 是反自反的。因而 R 是拟序。

(b) 若 R 是一偏序, 则 R 是自反的、反对称的和传递的, 所以 $R = t(R) = R^+$, 且 $E \subseteq R$ 。所以 $R = R^+$ 。又若 R 是偏序, 则 $\tilde{R}$ 也是偏序, 所以 $E \subseteq \tilde{R}$ 。所以 $E \subseteq \tilde{R} \cap R$ 。又

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &\in \tilde{R} \cap R \\ \Rightarrow \langle x, y \rangle &\in \tilde{R} \wedge \langle x, y \rangle \in R \\ \Rightarrow \langle y, x \rangle &\in R \wedge \langle x, y \rangle \in R \end{aligned}$$

由 R 的反对称性 $x = y$, 所以 $\langle x, y \rangle \in E$ 。因而 $\tilde{R} \cap R = E$ 。

反之, 若 $R = R^+$, $\tilde{R} \cap R = E$, 则 R 是自反的、传递的。又若 $\langle x, y \rangle \in R$, $\langle y, x \rangle \in R$, 则 $\langle x, y \rangle \in R$ 且 $\langle x, y \rangle \in \tilde{R}$, 所以 $\langle x, y \rangle \in E$, $x = y$ 。因而 R 是反对称的。因此 R 是偏序。

3.4.12 证明定理 3.4-5。

证明 (a) (1) $r(R)$ 是自反的 ($r(R)$ 的定义)。

(2) $r(R)$ 是传递的 (由定理 3.3-9(c) 得证)。

(3) 设 $\langle x, y \rangle \in r(R)$, 且 $x \neq y$, 则 $\langle x, y \rangle \in R$ 。由于 R 是反对称的, 所以, $\langle y, x \rangle \notin R$ 且 $\langle y, x \rangle \notin E$, 因此 $\langle y, x \rangle \notin r(R)$ 。所以 $r(R)$ 是反对称的。故 $r(R)$ 是偏序集合。

(b) $\forall x \in A, \langle x, x \rangle \notin R - E$, 所以 $R - E$ 是反自反的。又若有 $\langle x, y \rangle \in R - E$ 且 $\langle y, z \rangle \in R - E$, 则 $\langle x, y \rangle \in R, \langle y, z \rangle \in R$ 且 $\langle x, y \rangle \notin E, \langle y, z \rangle \notin E$ 。因为 R 是偏序, 所以 $\langle x, z \rangle \in R$; 又假设 $\langle x, z \rangle \in E$, 则 $z = x$ 。因而 $\langle x, y \rangle \in R$ 且 $\langle y, x \rangle \in R$, 由 R 的传递性得 $\langle x, y \rangle \in E$, 与条件矛盾。所以 $\langle x, z \rangle \notin E$, 因而 $\langle x, z \rangle \in R - E$ 。所以 $R - E$ 是可传递的。所以 $R - E$ 是拟序。

3.4.13 证明下述断言:

(a) 对任意线序集合, 每一子集的极小元素是一最小元素, 每一极大元素是最大元素。

(b) 一线序集合的每一非空有限子集有一最小和最大元素。

证明 (a) 设 $(A, \leq)$ 是任意线序集合, 设 B 是 A 的一个子集, 且 b 是 B 的一个极小元素, $\forall x \in B, x \neq b$, 因 $(A, \leq)$ 是线序集合, 所以或者 $b \leq x$, 或者 $x \leq b$, 若 $x \leq b$, 则与 b 是 B 的极小元素相矛盾, 所以 $b \leq x$, 因而 b 是 B 的最小元素。

同理可证每一极大元素是最大元素。

(b) 证法一 设 $(A, \leq)$ 是一线序集合, B 是一个非空有限子集。设 $|B| = n$

下面用数学归纳法证明 B 有最小元和最大元。

$n=1$ 时, B 中仅包含一个元素, 它是 B 的最大元素, 也是最小元素。

假设当 $|B| = k$ 时, B 有最小元素和最大元素。当 $|B| = k+1$ 时, 因为 $B \neq \emptyset$, 所以 $\exists b$

$\in B$, 令 $C=B-\{b\}$, 则 $|C|=k$, 所以 C 具有最小元素和最大元素, 设分别为 a_1 和 a_2 , 即

$\forall x \in C, a_1 \leq x, x \leq a_2$ 。

因 $\langle A, \leq \rangle$ 是线序, 所以对于 a_1 与 b 及 a_2 与 b 都是可比较的。

若 $a_1 \leq b$, 则 $\forall x \in B, a_1 \leq x$, 因而 a_1 是 B 的最小元素。

若 $b \leq a_1$, 则 $\forall x \in B, b \leq x$, 因而 b 为 B 的最小元。

因此 B 存在最小元素。

类似可证得 B 存在最大元素, 即在 $|B|=k+1$ 时, 结论成立。

证法二 线序集合是偏序集合, 而有限偏序集合由定理 3.4-2 保证有极小元和极大元, 再由本题 (a) 的结果, 证得本题。

3.4.14 设 $\langle A, \leq \rangle$ 是非空有限线序集合, $|A| \geq 2$, R 是 $A \times A$ 上的关系, 根据 R 的不同定义, 指出 $\langle A \times A, R \rangle$ 是拟序集合、偏序集合、线序集合、良序集合, 还是其它集合?

对任意 $\langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle \in A \times A$, 则

(a) $\langle a_1, b_1 \rangle R \langle a_2, b_2 \rangle \Leftrightarrow a_1 \leq a_2 \wedge b_1 \leq b_2$

(b) $\langle a_1, b_1 \rangle R \langle a_2, b_2 \rangle \Leftrightarrow a_1 < a_2 \vee a_1 = a_2 \wedge b_1 \leq b_2$

(c) $\langle a_1, b_1 \rangle R \langle a_2, b_2 \rangle \Leftrightarrow a_1 \leq a_2$

(d) $\langle a_1, b_1 \rangle R \langle a_2, b_2 \rangle \Leftrightarrow a_1 < a_2$

解 (a) $\langle A \times A, R \rangle$ 是偏序, 但不是拟序、线序和良序集合。

(b) $\langle A \times A, R \rangle$ 是偏序、线序、良序集合, 但不是拟序集合。

(c) 是其它集合。

(d) 是拟序集合。

3.4.15 设 $\Sigma = \{a, b, c\}$, 规定 $a \leq b \leq c$ 。

(a) 求出 $\langle \Sigma^*, \text{词典序} \rangle$ 中下列各串的直接后继者和直接前趋者, 如果它们存在的话。

① $x=abc$ ② $y=abaa$ ③ $z=bb$

(b) 对 $\langle \Sigma^*, \text{标准序} \rangle$ 重复上一题。

解 (a) 对 $\langle \Sigma^*, \text{词典序} \rangle$

① $x=abc$ 无直接前趋, 其直接后继者为 $abca$ 。

② $y=abaa$ 的直接前趋是 aba , 其直接后继者为 $abaaa$ 。

③ $z=bb$ 无直接前趋, 其直接后继者为 bba 。

(b) 对 $\langle \Sigma^*, \text{标准序} \rangle$

① $x=abc$ 的直接前趋为 abb , 其直接后继者为 aca 。

② $y=abaa$ 的直接前趋为 $aacc$, 其直接后继者为 $abab$ 。

③ $z=bb$ 的直接前趋为 ba , 其直接后继者为 bc 。

3.4.16 设 $\Sigma = \{a, b\}$, 规定 $a \leq b$, $\langle \Sigma^*, \text{词典序} \rangle$ 是一线序集合, 但不是良序集合。在论述域 Σ^* 上找出谓词 P , 以证明在该域上, 应用词典序则数学归纳法第二原理不是一个有效的推理规则。

解 设 Σ^* 上的谓词 $P(x)$ 为: x 是空串或仅由 a 组成的串。

(i) $\forall x$, 若 x 是空串或仅由 a 组成的串, 则 $\forall y, y < x, P(y)$ 是真, 且 $P(x)$ 是真, 所以 $[\forall y (y < x \rightarrow P(y)) \rightarrow P(x)]$ 是真。

(ii) $\forall x$, 若 x 中包含 b , 则 $y=ax < x$, 但 $P(y)$ 假, 所以 $\forall y (y < x \rightarrow P(y))$ 是假, 因而有 $\forall x [\forall y (y < x \rightarrow P(y)) \rightarrow P(x)]$ 是真。但 $\forall x, P(x)$ 是假。

3.5 等价关系和划分

3.5.1 设 R 是 A 上的等价关系, 将 A 的元素按照 R 的等价类顺序排列, 则等价关系的关系矩阵 M_R 有何特征?

解 等价关系的关系矩阵 M_R 是分块对角阵, 即:

$$M_R = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{bmatrix}$$

其中 A_i 的每个元素都为 1, 阶数恰为该矩阵相对应的等价类元素的个数, M_R 中除 A_i 以外之元素均为 0。

3.5.2 证明集合 A 上的全域关系 $R = A \times A$ 是等价关系。

证明 $\forall x \in A, \langle x, x \rangle \in R; \forall \langle x, y \rangle \in R, \langle y, x \rangle \in R; \forall \langle x, y \rangle \in R, \forall \langle y, z \rangle \in R,$ 则 $\langle x, z \rangle \in R$, 所以 R 是自反、对称、传递的, 因而是等价关系。

3.5.3 假设 A 是 n 个元素的有限集合 ($n \in N$), 问

(a) 有多少个元素在 A 上的最大等价关系中?

(b) A 上的最大等价关系的秩是什么?

(c) 有多少个元素在 A 上的最小等价关系中?

(d) A 上的最小等价关系的秩是什么?

解 (a) A 上最大等价关系中含有 n 个元素。

(b) A 上最大等价关系的秩是 1。

(c) A 上最小等价关系中含有 n 个元素。

(d) A 上最小等价关系的秩是 n 。

3.5.4 设 R 和 R' 是集合 A 上的等价关系。

(a) 证明 $R \cap R'$ 是 A 上的等价关系。

(b) 用例子证明 $R \cup R'$ 不一定是等价关系, 要尽可能小地选取集合 A 。

本题说明等价关系的交运算保持自反、对称和传递特性, 并运算保持自反和对称特性但不保持传递特性。

证明 (a) 因为 R 和 R' 是等价关系, 所以 $R \supseteq E, R' \supseteq E$, 从而 $(R \cap R') \supseteq E$ 。因此 $R \cap R'$ 是自反的。

又 $\widehat{R \cap R'} = \widehat{R} \cap \widehat{R'} = R \cap R'$, 所以 $R \cap R'$ 是对称的。

$\forall \langle x, y \rangle \in R \cap R', \langle y, z \rangle \in R \cap R'$, 则 $\langle x, y \rangle \in R, \langle y, z \rangle \in R$ 。因此 $\langle x, z \rangle \in R$ 。同理 $\langle x, z \rangle \in R'$, 因此 $\langle x, z \rangle \in R \cap R'$ 。

因此 $R \cap R'$ 也是传递的, 因而是等价关系。

(b) 令 $A = \{0, 1, 2\}$,

$R = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle\}$,

$R' = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$,

则 R 和 R' 都是 A 上的等价关系。

但 $\langle 0, 1 \rangle \in R \cup R'$, $\langle 1, 2 \rangle \in R \cup R'$, 而 $\langle 0, 2 \rangle \notin R \cup R'$, 所以 $R \cup R'$ 不具有传递性, $R \cup R'$ 不是等价关系。

3.5.5 设 R_1 和 R_2 是非空集合 A 上的等价关系, 确定下述各式, 哪些是 A 上的等价关系, 对不是的举例说明。

(a) $A \times A - R_1$

(b) $R_1 - R_2$

(c) R_1^2

(d) $r(R_1 - R_2)$ ($R_1 - R_2$ 的自反闭包)

(e) $R_1 \cdot R_2$

解 (a) 不是等价关系。例如令 $R_1 = A \times A$, 则 $A \times A - R_1$ 不具有自反性, 因而不是等价关系。

(b) 也不是等价关系。例如若 $R_1 = R_2$, 则 $R_1 - R_2 = \emptyset$, 不具有自反性。

(c) 是等价关系。

(d) 不是等价关系。例如令 $A = \{0, 1, 2\}$, $R_1 = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$, $R_2 = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle\}$, 则 R_1 和 R_2 都是等价关系。

$(R_1 - R_2) \cup E = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$

因 $\langle 0, 2 \rangle \in r(R_1 - R_2)$, $\langle 2, 1 \rangle \in r(R_1 - R_2)$, 但 $\langle 0, 1 \rangle \notin r(R_1 - R_2)$, 因而对此 R_1, R_2 , $r(R_1 - R_2)$ 不具有传递性, 所以不是等价关系。

(e) 不是等价关系。

令 $A = \{0, 1, 2\}$, $R_1 = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle\}$, $R_2 = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$, 则 $R_1 R_2 = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$ 。

$\langle 0, 2 \rangle \in R_1 R_2$, 但 $\langle 2, 0 \rangle \notin R_1 R_2$, 因此 $R_1 R_2$ 不是等价关系。

3.5.6 R 是整数集合 I 上的等价关系, 将 R 中的每一序偶 $\langle x, y \rangle$ 标在 $I \times I$ 笛卡儿平面上, 所得图形有何特点? (提示: 联系第一题思考。)

解 所得图形(如图 3.15 所示)的特点是: 直线 $y=x$ 上的点在图形上, 若点在图形上, 则关于 $y=x$ 对称的相应点也在图形上; 若 $\langle x, y \rangle$ 及 $\langle y, z \rangle$ 在图形上, 则 $\langle x, z \rangle$ 也在图形上。

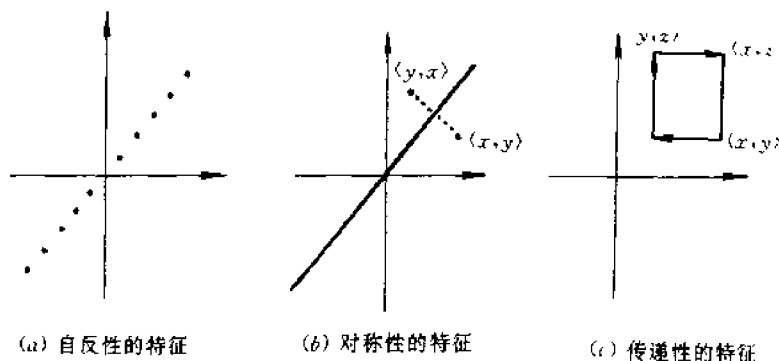


图 3.15

3.5.7 应用上题的结论说明下述 I 集合上的二元关系是否为等价关系, 对不是的说明为什么, 并找出 R 诱导的等价关系。

(a) $R = <$

(b) $R = \{ \langle a, b \rangle \mid (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0) \}$

(c) $R = \{ \langle a, b \rangle \mid (a \geq 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b \leq 0) \}$

(d) $R = \{ \langle a, b \rangle \mid \exists x [x \in I \wedge 10x < a < 10(x+1) \wedge 10x \leq b < 10(x+1)] \}$

(e) $R = \{ \langle a, b \rangle \mid a \text{ 整除 } b \}$

解 (a) $R = <$ 不是等价关系, 因为 $<$ 不具有自反性和对称性。 R 诱导的等价关系是全域关系。

(b) 它不是等价关系。因为 $\langle 0, 0 \rangle \notin R$, 所以不具有自反性, R 诱导的等价关系是 $R \cup \{ \langle 0, 0 \rangle \}$ 。

(c) 它不是等价关系。因为 $\langle 0, 0 \rangle \in R$, 故它不具有自反性, 又 $\langle 0, 1 \rangle \in R$, 但 $\langle 1, 0 \rangle \notin R$, 故它不具有对称性。 R 诱导的等价关系为:

$$R' = \{ \langle a, b \rangle \mid (a \geq 0 \wedge b \geq 0) \vee (a \leq 0 \wedge b \leq 0) \}$$

(d) 它不是等价关系。因为 $\langle 0, 0 \rangle \notin R$, 所以, R 不具有自反性。 R 诱导的等价关系为:

$$R' = \{ \langle a, b \rangle \mid \exists x (x \in I \wedge 10x \leq a < 10(x+1) \wedge 10x \leq b < 10(x+1)) \}$$

(e) 不是等价关系。因为 R 不具有对称性 R 诱导的等价关系为 I 上的全域关系。

3.5.8 R 是集合 A 上的二元关系。对于所有的 $a, b, c \in A$, 如果 aRb, bRc 则 cRa , 那么称 R 是循环关系。试证明 R 是自反和循环的当且仅当 R 是一等价关系。

证明 必要性。设 R 是自反的和循环的, 则 $\forall a, b, c \in A$, 若 aRb , 因为 aRa , 所以由 R 的循环性知 bRa , 因而 R 是对称的。又若 aRb, bRc , 则 cRa , 又由已证得的对称性知 aRc , 因而 R 是传递的, 所以 R 是一等价关系。

充分性。设 R 是等价关系。因而 R 是自反的。若 aRb, bRc , 由 R 的传递性知: aRc , 又由 R 是对称的, 因此 cRa , 因此 R 是循环关系且是自反的。

3.5.9 下述论证意味着每一个对称的传递的关系是一等价关系。设 R 是一对称的和传递的关系。

(i) 因为 R 是对称的, 如果 $\langle x, y \rangle \in R$, 那么 $\langle y, x \rangle \in R$ 。

(ii) 因为 R 是传递的, 如果 $\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R$, 那么 $\langle x, x \rangle \in R$, 所以 R 是自反的。这得出 R 是一等价关系。

这个论证有什么错误?

解 在这一论证中(i)是正确的。但在(ii)中, 由若 $\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R$ 得 $\langle x, x \rangle \in R$ 并不能推出 $\forall x \in A, \langle x, x \rangle \in R$ 。例如 $A = \{0, 1, 2\}$, $R = \{ \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle \}$, 则 R 是对称的和传递的, 但并不能推出 $\langle 2, 2 \rangle \in R$ 。

3.5.10 设 $A = \{a, b, c\}$, 作出 A 的所有划分; 设 A 的所有划分构成的集合是 P , 画出 $\langle P, \text{细分} \rangle$ 的哈斯图。

解 A 的所有的划分如下:

$$\pi_1 = \{ \{a, b, c\} \}$$

$$\pi_2 = \{ \{a\}, \{b, c\} \}$$

$$\pi_3 = \{ \{b\}, \{a, c\} \}$$

$$\pi_4 = \{ \{c\}, \{a, b\} \}$$

$$\pi_5 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$$

$\langle P, \text{细分} \rangle$ 的哈斯图如图 3.16 所示。

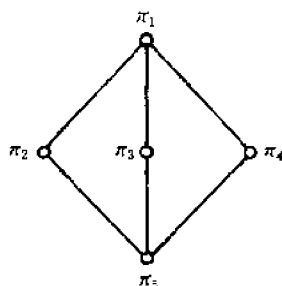


图 3.16

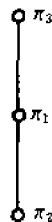


图 3.17

3.5.11 假设 $A = \{a, b, c, d\}$, π_1 是 A 上的划分, $\pi_1 = \{\{a, b, c\}, \{d\}\}$ 。

(a) 列出 π_1 诱导出的等价关系的序偶。

(b) 对划分

$$\pi_2 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$$

$$\pi_3 = \{\{a, b, c, d\}\}$$

做同样工作。

(c) 画出 $\langle \{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}, \text{细分} \rangle$ 的哈斯图。

解 (a) π_1 诱导出的等价关系的序偶为:

$$R_1 = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, d \rangle\}$$

(b) π_2 和 π_3 诱导出的等价关系分别为:

$$R_2 = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, d \rangle\}$$

$$R_3 = A \times A$$

(c) $\langle \{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}, \text{细分} \rangle$ 的哈斯图如图 3.17 所示。

3.5.12 设 π_1 和 π_2 是非空集合 A 的划分, 说明下列各式哪些是 A 的划分, 哪些可能是 A 的划分, 哪些不是 A 的划分。

(a) $\pi_1 \cup \pi_2$

(b) $\pi_1 \cap \pi_2$

(c) $\pi_1 - \pi_2$

(d) $[\pi_1 \cap (\pi_2 - \pi_1)] \cup \pi_1$

解 (a) 如果 $\pi_1 = \pi_2$, 则 $\pi_1 \cup \pi_2$ 是 A 的划分, 其它情况 $\pi_1 \cup \pi_2$ 不是 A 的划分。

(b) 如果 $\pi_1 = \pi_2$, 则 $\pi_1 \cap \pi_2$ 是 A 的划分, 其它情况不是 A 的划分。

(c) 如果 $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$, 则 $\pi_1 - \pi_2$ 是 A 的划分, 其它情况不是 A 的划分。

(d) 因 $[\pi_1 \cap (\pi_2 - \pi_1)] \cup \pi_1 = \pi_1$, 所以是 A 的划分。

3.5.13 设 $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ 是集合 A 的划分, 若 $A_i \cap B \neq \emptyset, i=1, 2, \dots, m$, 试证明 $\{A_1 \cap B, A_2 \cap B, \dots, A_m \cap B\}$ 是 $A \cap B$ 的划分。

证明 因为 $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ 是 A 的划分, 所以

$$\bigcup_{i=1}^m A_i = A$$

$$\bigcup_{i=1}^m (A_i \cap B) = (\bigcup_{i=1}^m A_i) \cap B = A \cap B$$

又 $\forall i, j$, 若 $(A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) \neq \emptyset$, 则 $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ 。所以 $A_i = A_j$, $A_i \cap B = A_j \cap B$ 。
因此 $\{A_1 \cap B, A_2 \cap B, \dots, A_m \cap B\}$ 是 $A \cap B$ 的划分。

3.5.14 设 A 是 n 个元素的有限集, 假设 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_k$ 是 A 上划分序列, 使 π_{i+1} 真细分 π_i , 找出最大可能的序列长度。

解 最大可能的序列长度为 n 。

3.5.15 证明定理 3.5-12。

证明 F 是非空集合 A 上划分的族, $\forall \pi \in F$, π 细分 π , 因而 $(F, \text{细分})$ 是自反的。又若 $\pi_1, \pi_2 \in F$, 且 π_1 细分 π_2 , π_2 细分 π_1 , 则 $\pi_1 = \pi_2$, 所以 $(F, \text{细分})$ 是反对称的; 又若 $\pi_1, \pi_2, \pi_3 \in F$, π_1 细分 π_2 , π_2 细分 π_3 , 则 π_1 细分 π_3 , 所以它是可传递的。因此 $(F, \text{细分})$ 是偏序集合。

3.5.16 设 $A=I$, 定义 A 上的 R_1, R_2, R_3 如下:

$$aR_1b \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{3}$$

$$aR_2b \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{5}$$

$$aR_3b \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{6}$$

(a) 对偏序集合 $(\{A/R_1, A/R_2, A/R_3\}, \text{细分})$ 画出哈斯图。

(b) 描述以下各式所诱导的等价关系。它们的秩是什么?

$$(A/R_1) \cdot (A/R_2), \quad (A/R_1) + (A/R_3),$$

$$(A/R_1) \cdot (A/R_3), \quad (A/R_1) + (A/R_2).$$

解 (a) 其哈斯图如图 3.18 所示。

(b) $(A/R_1) \cdot (A/R_2)$ 诱导的等价关系为 $R_4: aR_4b \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{15}$ 其秩为 15。

$(A/R_1) \cdot (A/R_3)$ 诱导的等价关系为 R_5 , 其秩为 6。

$(A/R_1) + (A/R_2)$ 诱导的等价关系为 $I \times I$, 即全域关系, 其秩为 1。

$(A/R_1) + (A/R_3)$ 诱导的等价关系为 R_1 , 其秩为 3。

3.5.17 设 R_j 表示 I 上模 j 等价, R_k 表示 I 上模 k 等价。

(a) 证明 I/R_k 细分 I/R_j 当且仅当 k 是 j 的整倍数。

(b) 描述划分 $I/R_j + I/R_k$ 。

(c) 描述划分 $I/R_j \cdot I/R_k$ 。

解 (a) 证明, 当 k 是 j 的整数倍时, 可令

$$k = mj, \quad \forall a, b, aR_kb$$

$$\Leftrightarrow a \equiv b \pmod{k} \Leftrightarrow a - b = nk$$

$$\Rightarrow a - b = mnj \Rightarrow a \equiv b \pmod{j}$$

$$\Leftrightarrow aR_jb$$

所以 $R_k \subseteq R_j$ 。因此 I/R_k 细分 I/R_j 。

反之, 当 I/R_k 细分 I/R_j 时, 得 $R_k \subseteq R_j$, 所以 $\forall a, b \in I$, 若 aR_kb , 则必有 aR_jb ; 令取 $a = k, b = 0$, 则 kR_k0 , 所以有 kR_j0 。因此 $k - 0 = mj$, 因而 k 是 j 的倍数。

(b) 令 p 是 k 和 j 的最大公约数, 则 $I/R_j + I/R_k = I/R_p$ 。



图 3.18

R_p 表示 I 上模 p 等价。

(c) 令 q 是 k 和 j 的最小公倍数, R_q 表示 I 上模 q 等价, 则

$$I/R_k \cdot I/R_j = I/R_q$$

3.5.18 证明如果 π_1 细分 π_2 , 那么 $\pi_1 \cdot \pi_2 = \pi_1$ 和 $\pi_1 + \pi_2 = \pi_2$ 。

证明 假设 π_1 细分 π_2 , 则又 π_2 细分 π_2 , 所以 $\pi_1 + \pi_2$ 细分 π_2 , 又 π_2 细分 $\pi_1 + \pi_2$ 。因此 $\pi_1 + \pi_2 = \pi_2$ 。

又 π_1 细分 π_1 , 因此 π_1 细分 π_1 和 π_2 两者。所以 π_1 细分 $\pi_1 \cdot \pi_2$, 又 $\pi_1 \cdot \pi_2$ 细分 π_1 。因而 $\pi_1 \cdot \pi_2 = \pi_1$ 。

3.5.19 证明定理 3.5-16。

证明 设 π 和 π' 都是 π_1 和 π_2 之和, 则 π 和 π' 彼此细分, 因此 $\pi = \pi'$ 。故 π_1 和 π_2 之和是唯一的。

3.5.20 设 P 表示非空集合 A 的所有划分的集合, 考虑偏序集合 $\langle P, \text{细分} \rangle$, 设 π_1 和 π_2 是 P 的成员。

(a) 证明 $\pi_1 \cdot \pi_2$ 是集合 $\{\pi_1, \pi_2\}$ 的最大下界。

(b) 证明 $\pi_1 + \pi_2$ 是集合 $\{\pi_1, \pi_2\}$ 的最小上界。

证明 (a) $\pi_1 \cdot \pi_2$ 细分 π_1 和 π_2 , 所以它是 $\{\pi_1, \pi_2\}$ 的一个下界, 又若 π 也是它的一个下界, 则 π 细分 π_1 和 π_2 , 所以由积之定义: π 细分 $\pi_1 \cdot \pi_2$, 因此 $\pi_1 \cdot \pi_2$ 是 $\{\pi_1, \pi_2\}$ 的最大下界。

(b) π_1 和 π_2 都细分 $\pi_1 + \pi_2$, 所以 $\pi_1 + \pi_2$ 是 $\{\pi_1, \pi_2\}$ 的上界, 又若 π 是 $\{\pi_1, \pi_2\}$ 的一个上界, 则 π_1 和 π_2 都细分 π , 因此 $\pi_1 + \pi_2$ 细分 π , 因此 $\pi_1 + \pi_2$ 是 $\{\pi_1, \pi_2\}$ 的最小上界。

3.6 选 题 例 解

例 3-1 设 $P = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$, $Q = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle\}$, 求 $P \cup Q$, $P \cap Q$, $\text{dom } P$, $\text{ran } P$, $\text{dom}(P \cap Q)$, $\text{ran}(P \cap Q)$ 。

解 $P \cup Q = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 2 \rangle\}$

$P \cap Q = \{\langle 2, 4 \rangle\}$

$\text{dom } P = \{1, 2, 3\}$, $\text{ran } P = \{2, 3, 4\}$

$\text{dom}(P \cap Q) = \{2\}$, $\text{ran}(P \cap Q) = \{4\}$

例 3-2 举出 $A = \{1, 2, 3\}$ 上关系 R 的例子, 使其具有下述性质:

(a) 既是对称的, 又是反对称的;

(b) 既不是对称的, 又不是反对称的;

(c) 是可传递的。

解 (a) $R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$

(b) $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$

(c) $R = \{\langle 1, 1 \rangle\}$

例 3-3 举出一个集合, 在上面定义一个关系, 分别适合于自反性、对称性、传递性中的两个且仅适合两个。

解 设 $A = \{a, b, c\}$

(1) $R_1 = \{\langle a, a \rangle\}$, 则 R_1 是对称的和传递的, 但不是自反的。

(2) $R_2 = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle a, b \rangle\}$, 则 R_2 是自反的和传递的, 但不是对称的。

(3) $R_3 = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle a, c \rangle, \langle c, a \rangle\}$, 则 R_3 是自反的和对称的, 但不是传递的, 因 $\langle b, a \rangle, \langle a, c \rangle \in R_3$, 但 $\langle b, c \rangle \notin R_3$ 。

例 3-4 给定 $S = \{1, 2, 3, 4\}$ 和 S 上的关系, $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 1 \rangle\}$ 。说明 R 是不可传递的, 找出关系 $R_1 \supseteq R$, 使得 R_1 是可传递的, 还能找出另一个 $R_2 \supseteq R$, 也是可传递的吗?

解 (1) 因为 $\langle 4, 3 \rangle \in R, \langle 3, 1 \rangle \in R$, 但 $\langle 4, 1 \rangle \notin R$, 故 R 不是可传递的。

(2) 作 $R_1 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 2 \rangle\}$, 则 R_1 是可传递的, 且 $R_1 \supseteq R_2$ 。

(3) 令 $R_2 = A \times A$, 则 $R_2 \supseteq R$, 且是可传递的。

例 3-5 设 R 是集合 X 上的一个自反关系。求证: R 是对称和传递的, 当且仅当对任意 $a, b, c \in X$, 若 $\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle \in R$, 有 $\langle b, c \rangle \in R$ 。

证明 必要性。若 $\langle a, b \rangle \in R, \langle a, c \rangle \in R$, 由对称性得 $\langle b, a \rangle \in R$, 又由传递性得 $\langle b, c \rangle \in R$ 。

充分性。若 $\langle a, b \rangle \in R, \langle a, c \rangle \in R$, 有 $\langle b, c \rangle \in R$, 则 $\forall \langle a, b \rangle \in R$ 。因 $\langle a, a \rangle \in R$, 故 $\langle b, a \rangle \in R$ 。所以 R 是对称的。若 $\langle a, b \rangle \in R$, 且 $\langle b, c \rangle \in R$, 则 $\langle b, a \rangle \in R$, 且 $\langle b, c \rangle \in R$ 。所以 $\langle a, c \rangle \in R$, 故 R 是传递的。

例 3-6 证明: 若 S 为集合 X 上的二元关系:

(a) S 是传递的, 当且仅当 $(S \cdot S) \subseteq S$ 。

(b) S 是自反的, 当且仅当 $I_x \subseteq S$ 。

(c) S 是反对称的, 当且仅当 $S \cap \tilde{S} \subseteq I_x$ 。

(d) S 是反自反的, 当且仅当 $I_x \cap S = \emptyset$ 。

证明 (a) 设 S 是传递的, $\forall \langle x, z \rangle \in S \cdot S$, 则存在 $y \in X$, 使 $\langle x, y \rangle \in S, \langle y, z \rangle \in S$, 由 S 的传递性得 $\langle x, z \rangle \in S$, 故 $S \cdot S \subseteq S$ 。

反之, 设 $S \cdot S \subseteq S$, 若 $\langle x, y \rangle \in S, \langle y, z \rangle \in S$, 则 $\langle x, z \rangle \in S \cdot S \subseteq S$, 故 $\langle x, z \rangle \in S$ 。因而 S 是传递的。

(b) 设 S 是自反的, 则对任意 $x \in X, \langle x, x \rangle \in S$, 故 $I_x \subseteq S$ 。反之, 若 $I_x \subseteq S$, 则对任意 $x \in X, \langle x, x \rangle \in I_x \subseteq S$, 故 S 是自反的。

(c) 设 S 是反对称的, 若有 $\langle x, y \rangle \in S \cap \tilde{S}$, 则 $\langle x, y \rangle \in S$, 且 $\langle x, y \rangle \in \tilde{S}$, 故 $\langle x, y \rangle \in S$, 且 $\langle y, x \rangle \in S$, 故由 S 是反对称的, 知 $x = y$, 所以 $\langle x, y \rangle \in I_x$ 。因而 $S \cap \tilde{S} \subseteq I_x$ 。

反之, 设 $S \cap \tilde{S} \subseteq I_x$ 。若有 $\langle x, y \rangle \in S$, 且 $\langle y, x \rangle \in S$, 则 $\langle x, y \rangle \in S$ 且 $\langle x, y \rangle \in \tilde{S}$ 。故 $\langle x, y \rangle \in S \cap \tilde{S} \subseteq I_x, x = y$ 。因此 S 是反对称的。

(d) 设 S 是反自反的, 假设 $S \cap I_x \neq \emptyset$, 则存在 $x \in X$, 使 $\langle x, x \rangle \in S \cap I_x, \langle x, x \rangle \in S$, 与 S 是反自反的矛盾, 所以 $S \cap I_x = \emptyset$ 。

反之, 设 $S \cap I_x = \emptyset$, 因 $\forall x \in X, \langle x, x \rangle \in I_x$, 若存在 $x_0 \in X$, 使 $\langle x_0, x_0 \rangle \in S$, 则 $\langle x_0, x_0 \rangle \in S \cap I_x$, 这与 $S \cap I_x = \emptyset$ 矛盾, 故 $\forall x \in X, \langle x, x \rangle \notin S$, 故 S 是反自反的。

例 3-7 设 S 为 X 上的关系, 证明若 S 是自反的和传递的, 则 $S \cdot S = S$ 。其逆为真吗?

证明 若 S 是 X 上的传递关系, 则由例 3-6 题得 $(S \cdot S) \subseteq S$, 又 S 是自反的, 故对任

意 $x \in X$, 有 $\langle x, x \rangle \in S$ 。对任意 $\langle x, y \rangle \in S$, 则有 $\langle x, x \rangle \in S$ 且 $\langle x, y \rangle \in S$, 因而 $\langle x, y \rangle \in S \cdot S$ 。故 $S \subseteq S \cdot S$, 所以 $S \cdot S = S$ 。

反之, 则不一定成立。例如

$$X = \{1, 2, 3\}, S = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\}$$

则 $S \cdot S = S$, 但 S 不是自反的。

例 3-8 设 S 为 X 到 Y 的关系, T 为 Y 到 Z 的关系, 对于 $A \subseteq X$, 定义

$$S(A) = \{y \mid \langle x, y \rangle \in S \wedge x \in A\}$$

证明 (a) $S(A) \subseteq Y$

$$(b) (S \cdot T)(A) = T(S(A))$$

$$(c) S(A \cup B) = S(A) \cup S(B)$$

$$(d) S(A \cap B) = S(A) \cap S(B)$$

证明 (a) 易见。

(b) 对任意 z ,

$$z \in (S \cdot T)(A) \Leftrightarrow \exists x \in X, \exists y \in Y, (x \in A \wedge y \in Y \wedge z \in Z \wedge \langle x, y \rangle \in S \wedge \langle y, z \rangle \in T)$$

$$\Leftrightarrow \exists y (y \in S(A) \wedge \langle y, z \rangle \in T)$$

$$\Leftrightarrow z \in T(S(A))$$

所以 $(S \cdot T)(A) = T(S(A))$ 。

(c) 对于任意的 y ,

$$y \in S(A \cup B) \Leftrightarrow \exists x (x \in A \cup B \wedge \langle x, y \rangle \in S)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (x \in A \wedge \langle x, y \rangle \in S) \vee (x \in B \wedge \langle x, y \rangle \in S)$$

$$\Leftrightarrow y \in S(A) \vee y \in S(B)$$

$$\Leftrightarrow y \in S(A) \cup S(B)$$

所以 $S(A \cup B) = S(A) \cup S(B)$ 。

(d) 对任意的 y ,

$$y \in S(A \cap B) \Leftrightarrow \exists x (x \in A \cap B \wedge \langle x, y \rangle \in S)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (x \in A \wedge x \in B \wedge \langle x, y \rangle \in S)$$

$$\Leftrightarrow \exists x ((x \in A \wedge \langle x, y \rangle \in S) \wedge (x \in B \wedge \langle x, y \rangle \in S))$$

$$\Leftrightarrow y \in S(A) \wedge y \in S(B)$$

$$\Leftrightarrow y \in S(A) \cap S(B)$$

所以 $S(A \cap B) = S(A) \cap S(B)$ 。

例 3-9 设 R 为集合 X 上的二元关系, R 在 X 上是反传递的定义为: 若 $\langle x, y \rangle \in R$, $\langle y, z \rangle \in R$, 则 $\langle x, z \rangle \notin R$ 。证明: R 是反传递的, 当且仅当 $(R \cdot R) \cap R = \emptyset$ 。

证明 设 R 是反传递的。对任意 $\langle x, z \rangle \in R \cdot R$, 存在 $y \in X$, 使 $\langle x, y \rangle \in R$, 且 $\langle y, z \rangle \in R$, 因而 $\langle x, z \rangle \notin R$, 故 $(R \cdot R) \cap R = \emptyset$ 。

反之, 设 $(R \cdot R) \cap R = \emptyset$, 若有 $\langle x, y \rangle \in R$, $\langle y, z \rangle \in R$, 则 $\langle x, z \rangle \in R \cdot R$, 因而 $\langle x, z \rangle \notin R$, 故 R 是反传递的。

例 3-10 传递闭包 R^+ 的 Warshall 算法:

(1) 置新矩阵 $A = M$; (M 为 R 对应的矩阵)

(2) 置 $i = 1$;

(3) 对所有 j , 如果 $A[j, i] = 1$, 则对 $k = 1, 2, \dots, n$, 令

$$A[j, k] = A[j, k] + A[i, k];$$

(4) $i = i + 1$;

(5) 若 $i \leq n$, 则转(3), 否则停止。

设集合 $A = \{a, b, c, d\}$ 上的关系:

$$R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle\}$$

(i) 用矩阵运算的方法求出 R 的自反、对称、传递闭包。

(ii) 用 Warshall 算法, 求出 R 的传递闭包。

解 (i)

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R + M_{I_A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore r(R) = R \cup I_A = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, d \rangle\}$$

$$M_R + M_{\bar{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{所以 } S(R) = R \cup \bar{R} = \{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, c \rangle\}$$

$$M_{R^2} = M_R \cdot M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R^3} = M_{R^2} \cdot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R^4} = M_{R^3} \cdot M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以

$$M_R + M_{R^2} + M_{R^3} + M_{R^4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{故 } R^+ = t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4$$

$$= \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, d \rangle\}$$

(ii) 用 Warshall 算法计算 $t(R)$ 。

$$A = M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$i=1, A[2, 1]=1$, 将第一行加到第二行:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$i=2, A[1, 2]=A[2, 2]=1$, 将第二行加到第一行及第二行得

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$i=3, A[1, 3]=A[2, 3]=1$, 将第三行加到第一行及第二行得

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$i=4, A[1, 4]=A[2, 4]=A[3, 4]=1$, 将第四行加到第一、二、三行得

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由此得 R 的传递闭包与 (i) 相同。

例 3-11 设 R 为集合 A 上的反对称关系, 则 $t(R)$ 一定是反对称的吗?

解 $t(R)$ 不一定是反对称的。例如, 设

$$A = \{a, b, c, d\}$$

$$R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, a \rangle\}$$

则 R 的传递闭包为

$$t(R) = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, a \rangle, \langle a, c \rangle, \langle c, a \rangle, \langle a, d \rangle, \langle d, c \rangle, \langle b, d \rangle, \langle d, b \rangle, \langle c, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, d \rangle\}$$

R 是反对称的, 但 $t(R)$ 是对称的。

例 3-12 4 个元素的集合共有多少种不同划分。

解 整数 4 可划分为: 4, 1+3, 1+1+2, 2+2, 1+1+1+1, 故共有分法:

$$1 + C_4^1 + C_4^2 + \frac{1}{2}C_4^2 + 1 = 15$$

所以共有 15 种不同的划分法。

例 3-13 给定集合 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 找出 S 上的等价关系 R , 使此等价关系 R 能产生划分 $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$ 。

$$\begin{aligned}\text{解 } R &= (\{1, 2\} \times \{1, 2\}) \cup (\{3\} \times \{3\}) \cup (\{4, 5\} \times \{4, 5\}) \\ &= \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 5, 5 \rangle, \langle 4, 5 \rangle, \langle 5, 4 \rangle\}\end{aligned}$$

例 3-14 设 R_1 和 R_2 是集合 A 上的等价关系, 并分别有秩 r_1 和 r_2 , 试证 $R_1 \cap R_2$ 的秩至多是 $r_1 \cdot r_2$ 。

证明 R_1 和 R_2 都是 A 上之等价关系, 故 $R_1 \cap R_2$ 也是 A 上的等价关系。设它们诱导的划分分别为 $C_1 = \{C_{11}, C_{12}, \dots, C_{1m}\}$, $C_2 = \{C_{21}, C_{22}, \dots, C_{2n}\}$, $C_3 = \{C_{31}, C_{32}, \dots, C_{3p}\}$ 。

$\forall C_{3k} \in C_3$, ($1 \leq k \leq p$), 则 $\exists x \in A$ 使 $x \in C_{3k}$, 因 C_1 和 C_2 均为 A 的划分, 故必存在 $C_{1i} \in C_1$, 使 $x \in C_{1i}$, 且存在 $C_{2j} \in C_2$, 使 $x \in C_{2j}$, 即 $x \in C_{1i} \cap C_{2j}$ 。

任取 $y \in C_{3k}$, 则有 $x \in C_{3k} \wedge y \in C_{3k} \Rightarrow \langle x, y \rangle \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow \langle x, y \rangle \in R_1 \wedge \langle x, y \rangle \in R_2$, 故 $y \in C_{1i} \wedge y \in C_{2j}$, 即 $y \in C_{1i} \cap C_{2j}$ 。因而有 $C_{3k} \subseteq C_{1i} \cap C_{2j}$ 。

若有 $C_{3k} \subseteq C_{1i} \cap C_{2j}$, 且 $C_{3l} \subseteq C_{1i} \cap C_{2l}$, 则 $\forall x \in C_{3k}$, 有 $x \in C_{1i} \wedge x \in C_{2j} \wedge x \in C_{1i} \wedge x \in C_{2l} \Rightarrow x \in (C_{1i} \cap C_{1i}) \wedge x \in (C_{2j} \cap C_{2l})$ 。

因为 C_{1i} 和 C_{1i} 是 C_1 中的等价类, C_{2j} 和 C_{2l} 是 C_2 中的等价类, 在每个划分中两个等价类有公共元素则此两等价类相等。故 $C_{1i} = C_{1i}$, $C_{2j} = C_{2l}$, 即 C_{3k} 只能属于同一个 $C_{1i} \cap C_{2j}$ 中, 即 $C_{3k} \subseteq C_{1i} \cap C_{2j}$ 是唯一的。

设 $C_{3k} \in C_3$, $C_{3l} \in C_3$, 若 $C_{3k} \subseteq C_{1i} \cap C_{2j}$, 且 $C_{3l} \subseteq C_{1i} \cap C_{2j}$ 。且 C_{3k}, C_{3l} 是 C_3 中的两个不同元素, 则 $C_{3k} \cap C_{3l} = \emptyset$, 故必有 $x \in C_{3k}, y \in C_{3l}$, 使 $x \notin C_{3l}$ 且 $y \notin C_{3k}$ 。

$$x \in C_{3k} \Rightarrow x \in C_{1i} \wedge x \in C_{2j}$$

$$y \in C_{3l} \Rightarrow y \in C_{1i} \wedge y \in C_{2j}$$

$$\text{故 } x \in C_{3k} \wedge y \in C_{3l} \Rightarrow x \in C_{1i} \wedge y \in C_{1i} \wedge x \in C_{2j} \wedge y \in C_{2j} \Rightarrow \langle x, y \rangle \in R_1 \wedge \langle x, y \rangle \in R_2$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R_1 \cap R_2$$

$$\Rightarrow C_{3k} = C_{3l}$$

得到矛盾的结果。

因此, 对任意一个 $C_{3k} \in C_3$, 必有唯一的 $C_{1i} \cap C_{2j}$, 使得 $C_{3k} \subseteq C_{1i} \cap C_{2j}$, 且对于任意一个 $C_{1i} \cap C_{2j}$ 至多只有一个 C_{3k} , 满足 $C_{3k} \subseteq C_{1i} \cap C_{2j}$ 。又 $|C_1| = r_1$, $|C_2| = r_2$, 故形如 $C_{1i} \cap C_{2j}$ 的至多有 $r_1 \times r_2$ 个。因此, $|C_3| \leq r_1 \cdot r_2$ 。

例 3-15 设 C^* 是实数部分非零的全体复数组成的集合, C^* 上的关系 R 定义为: $(a+bi)R(c+di) \Leftrightarrow ac > 0$, 证明 R 是等价关系, 并给出关系 R 的等价类的几何说明。

证明 (1) $\forall a \neq 0, a$ 是实数, 有 $a^2 > 0$, 所以 $(a+bi)R(a+bi)$, 故 R 在 C^* 上是自反的。

(2) $\forall (a+bi), (c+di) \in C^*$, 若 $(a+bi)R(c+di)$ 则 $ac > 0$, 所以 $ca > 0$, 因此 $(c+di)R(a+bi)$, 即 R 是对称的。

(3) 设 $(a+bi)R(c+di)$, 且 $(c+di)R(u+vi)$ 则有 $ac > 0$, 且 $cu > 0$ 。若 $c > 0$, 则 $a > 0$, 且 $u > 0$, 故 $au > 0$; 若 $c < 0$, 则 $a < 0$, 且 $u < 0$, 故 $au > 0$ 。因此 $(a+bi)R(u+vi)$, 即 R 是传递的。

关系 R 的等价类是: ① 复平面第一、四象限(不含 y 轴)上的点的集合, ② 第二、三象限(不含 y 轴)上的点的集合。

例 3-16 设 $C = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 为集合 A 的覆盖, 试由此覆盖确定 A 上的一个相容关系, 并说明在什么条件下, 此相容关系为等价关系。

$$\text{解 } R = \bigcup_{i=1}^n (A_i \times A_i)$$

因为 $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, 所以对任意 $x \in A$, 存在 k , 使 $x \in A_k$, 故 $\langle x, x \rangle \in A_k \times A_k \subseteq R$, 故 R 是自反的。

对任意 $\langle x, y \rangle \in R$, 存在 k 使 $\langle x, y \rangle \in A_k \times A_k$, 因而 $x, y \in A_k$, 故 $\langle y, x \rangle \in A_k \times A_k \subseteq R$, 所以 R 是对称的。

因此 R 是一个相容关系。

一般地, R 不一定是传递的, 只有当 C 是 A 的划分时, 此相容关系才是 x 上的等价关系。

第 4 章 函 数

4.1 函数的基本概念

4.1.1 由有向图(图 4.1)指定的关系, 哪些是从 $X = \{a, b, c\}$ 到 $Y = \{0, 1, 2\}$ 的函数。对这些函数找出子集 $\{a, b\}$ 的象; 对不是函数的, 说明函数的什么性质不满足。

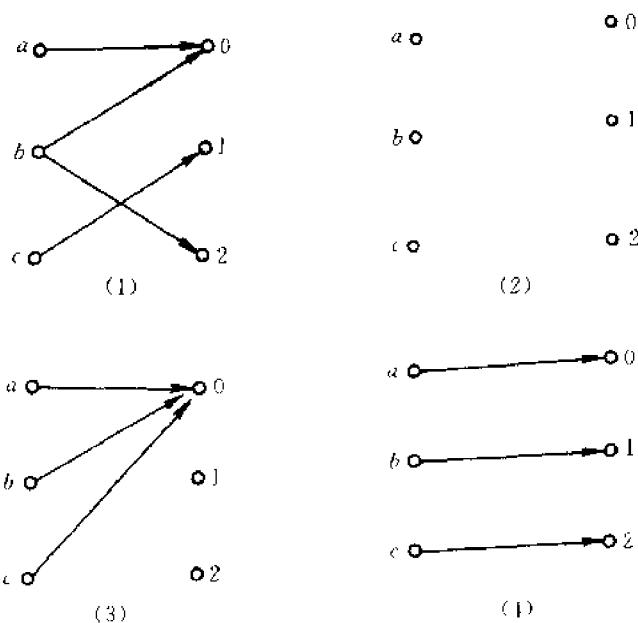


图 4.1

解 (1) 不是函数, 因为 b 有 0 和 2 两个元素与其对应。

(2) 不是函数, 因为 a, b, c 都没有映象。

(3) 是函数: $f(\{a, b\}) = \{0\}$ 。

(4) 是函数: $f(\{a, b\}) = \{0, 1\}$ 。

4.1.2 给出前域 A 和陪域 B , 试指出以下关系是否构成函数。如果是函数, 并指出其值域。

(a) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$, $\{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B \wedge x + y < 10\}$

(b) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $\{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B \wedge x^2 = y\}$

(c) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = A \times A$, $\{(1, (2, 3)), (2, (3, 4)), (3, (1, 4)), (4, (1,$

4)>>\}

(d) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = A \times A$, $\{\langle 1, \langle 2, 3 \rangle \rangle, \langle 2, \langle 3, 4 \rangle \rangle, \langle 3, \langle 2, 1 \rangle \rangle\}$

解 (a) 不是函数。

(b) 是函数, 其值域为 $R_+ \cup \{0\}$ 。

(c) 是函数, 其值域为 $\{\langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 1, 4 \rangle\}$ 。

(d) 不是函数。

4.1.3 设 $f: U \rightarrow C$ 是函数, A, B 是 U 的子集, 试证明:

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

(c) $f(A) - f(B) \subseteq f(A - B)$

证明 (a) $\forall x \in (A \cup B)$, 则 $x \in A$ 或 $x \in B$ 。若 $x \in A$, 则 $f(x) \in f(A)$; 若 $x \in B$, 则 $f(x) \in f(B)$ 。因此,

$$f(x) \in f(A) \cup f(B)$$

$$f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$$

$\forall y \in f(A) \cup f(B)$, 则 $y \in f(A)$ 或 $y \in f(B)$ 。若 $y \in f(A)$, 则 $\exists x \in A$, 使 $f(x) = y$, 则 $y \in f(A \cup B)$; 若 $y \in f(B)$, 则 $\exists x \in B$, 使 $f(x) = y$, 因此 $y \in f(A \cup B)$

$$f(A \cup B) \supseteq f(A) \cup f(B)$$

因此

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

(b) $\forall x \in A \cap B$, $x \in A$ 且 $x \in B$, 因此 $f(x) \in f(A)$, 且 $f(x) \in f(B)$ 。从而有

$$f(x) \in f(A) \cap f(B)$$

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

(c) $\forall y \in f(A) - f(B)$, 则 $\exists x \in A$, 使 $f(x) = y$, $y \in f(A)$, 但 $y \notin f(B)$ 。所以 $x \notin B$ 。从而 $\exists x \in (A - B)$, 使 $f(x) = y$ 。

因此

$$y \in f(A - B)$$

$$f(A) - f(B) \subseteq f(A - B)$$

4.1.4 考虑下述从 R 到 R 的函数:

$$f(x) = 2x + 5$$

$$g(x) = x + 7$$

$$h(x) = x/3$$

$$k(x) = x - 4$$

试构造 $g \circ f$, $f \circ g$, $g \circ g$, $f \circ k$, $g \circ h$ 。

解 $g \circ f(x) = 2x + 12$

$$f \circ g(x) = 2x + 19$$

$$f \circ f(x) = 4x + 15$$

$$g \circ g(x) = x + 14$$

$$f \circ k(x) = 2x - 3$$

$$g \circ h(x) = x/3 + 7$$

4.1.5 设 $X = \{0, 1, 2\}$, 找出 X^X 中满足下式的所有函数。

(a) $f^2(x) = f(x)$

(b) $f^2(x)=x$

(c) $f^3(x)=x$

解 (a) 符合 $f^2(x)=f(x)$ 的共有 10 个函数:

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}
$f_i(0)$	0	0	1	2	0	1	0	2	0	0
$f_i(1)$	1	0	1	2	0	1	1	1	1	2
$f_i(2)$	2	0	1	2	2	2	0	2	1	2
备注	么 函 常函数 组合常函数 数									

(b) 符合 $f^2(x)=x$ 的共有 4 个函数:

	f_1	f_2	f_3	f_4
$f_i(0)$	0	0	1	2
$f_i(1)$	1	2	0	1
$f_i(2)$	2	1	2	0
	么 函 对换函数 数			

(c) 符合 $f^3(x)=x$ 的具有 3 个函数:

	f_1	f_2	f_3
$f_i(0)$	0	1	2
$f_i(1)$	1	2	0
$f_i(2)$	2	0	1
	么 函 轮换函数 数		

4.1.6 设 f 是从 X 到 X 的函数, 证明对于所有 $m, n \in N$, $f^m \cdot f^n = f^{m+n}$.

证明 对 m 用归纳法.

当 $m=0$ 时, $f^0 \cdot f^n = f^n = f^{0+n}$ 对任意给定 $n \in N$ 成立.

假设当 $m=k$ 时, 对任意 $n \in N$ 有

$$f^m \cdot f^n = f^{m+n}$$

当 $m=k+1$ 时,

$$\begin{aligned} f^{k+1} \cdot f^n &= (f \cdot f^k) \cdot f^n = f \cdot (f^k \cdot f^n) \\ &= f \cdot f^{k+n} = f^{k+1+n} \end{aligned}$$

所以, 对任意 $m, n \in N$, 有 $f^m \circ f^n = f^{m+n}$ 。

4.1.7 设 Σ 是有限字母表。

(a) 串 x 的长度 $\|x\|$ 归纳地定义如下:

(1) $\|\Lambda\| = 0$ 。

(2) 如果 $x \in \Sigma^*$ 和 $a \in \Sigma$, 那么 $\|ax\| = \|x\| + 1$ 。

试证明 $\forall x \forall y [(x \in \Sigma^* \wedge y \in \Sigma^*) \rightarrow \|xy\| = \|x\| + \|y\|]$ 。

(b) 串 $x \in \Sigma^*$ 的反向记为 $\tilde{x}$, 归纳地定义如下:

(1) $\tilde{\Lambda} = \Lambda$ 。

(2) $\tilde{ax} = \tilde{x}a$, 这里 $a \in \Sigma$ 和 $x \in \Sigma^*$ 。

试证明 $\forall x \forall y [(x \in \Sigma^* \wedge y \in \Sigma^*) \rightarrow \widetilde{xy} = \tilde{y}\tilde{x}]$ 。

证明

(a) 设 y 是 Σ^* 中任意串, 用一般归纳法, 对串 x 作归纳, 证明 $\forall x [\|xy\| = \|x\| + \|y\|]$ 。

(基础) 如果 $x = \Lambda$, 那么

$$\|xy\| = \|\Lambda y\| = \|y\| = 0 + \|y\| = \|x\| + \|y\|$$

(归纳) 假设对任意 $x \in \Sigma^*$, 断言成立, 那么对任一 $a \in \Sigma$, 考虑串 ax

$$\|axy\| = \|xy\| + 1 = \|x\| + \|y\| + 1 = \|ax\| + \|y\|$$

因此, $\forall x [\|xy\| = \|x\| + \|y\|]$, 又 y 是任意的, 所以

$$\forall x \forall y [x \in \Sigma^* \wedge y \in \Sigma^* \rightarrow \|xy\| = \|x\| + \|y\|]$$

(b) 设 y 是 Σ^* 中任意串, 用一般归纳法, 证明 $\forall x [\widetilde{xy} = \tilde{y}\tilde{x}]$ 。

(基础) 如果 $x = \Lambda$, 那么

$$\widetilde{xy} = \widetilde{\Lambda y} = \tilde{y} = \tilde{y}\tilde{\Lambda}$$

(归纳) 假设对任意 $x \in \Sigma^*$, 断言成立。那么对任一 $a \in \Sigma$, 考虑串 ax

$$\widetilde{axy} = \widetilde{xya} = \tilde{y}\tilde{xa} = \tilde{y}\tilde{a}\tilde{x}$$

因此

$$\forall x [\widetilde{xy} = \tilde{y}\tilde{x}]$$

又 y 是任意的, 所以

$$\forall x \forall y [x \in \Sigma^* \wedge y \in \Sigma^* \rightarrow \widetilde{xy} = \tilde{y}\tilde{x}]$$

4.1.8 定义 $f: N^2 \rightarrow N$ 如下:

(1) $f(0, n) = 1$ 对所有 $n \in N$

(2) $f(m+1, n) = f(m, n) \cdot n$

找出 f 的代数表达式, 用归纳法证明它代表 f 。

解 f 的表达式为 $f(m, n) = n^m$ 。

证明 当 $m=0$ 时, $\forall n \in N$ 有

$$f(m, n) = 1 = n^0$$

假设当 $m=k$ 时, $\forall n \in N$,

$$f(k, n) = n^k$$

成立, 当 $m=k+1$ 时

$$f(k+1, n) = f(m, n) \cdot n = n^k \cdot n = n^{k+1}$$

因此, 由数学归纳法, $\forall m, n \in N$ 有

$$f(m, n) = n^m$$

4.1.9 用加法归纳定义一个函数 $f: N^2 \rightarrow N$ 使 $f(x, y) = x \cdot y$ 。

解 $\forall y \in N$, 定义 $f: N^2 \rightarrow N$ 如下:

$$1^\circ f(0, y) = 0$$

$$2^\circ f(x+1, y) = f(x, y) + y$$

4.1.10 对本节例 4 的 91 函数,

(a) 证明 $f(99) = 91$ 。

(b) 对从 0 到 100 的一切 x , 证明 $f(x) = 91$ 。

(c) 请递归地定义一个类似于 91 函数的函数。

证明 (a) $f(99) = f(f(110)) = f(100)$

$$= f(f(111)) = f(101) = 91$$

(b) 由 (a) 得 $f(99) = f(100) = 91$

$$\begin{aligned} f(90) &= f(f(101)) = f(91) \\ &= f(f(102)) = f(92) = f(f(103)) \\ &= f(93) \\ &= f(f(104)) = f(94) = f(f(105)) \\ &= f(95) = f(f(106)) = f(96) \\ &= f(f(107)) = f(97) \\ &= f(f(108)) = f(98) = f(f(109)) \\ &= f(99) = 91 \end{aligned}$$

因此, 当 $90 \leq x \leq 100$ 时有 $f(x) = 91$ 。

当 $0 \leq x < 90$ 时, 存在 k 使得 $90 \leq x + k \cdot 11 \leq 100$, 其中 k 为整数。因此

$$\begin{aligned} f(x) &= f(f(x+1)) \\ &= f^{k+1}(x+11k) \\ &= f^k(f(x+11k)) \end{aligned}$$

因为 $90 \leq x+11 \leq 100$, 所以

$$f(x+11k) = 91$$

因此, $f(x) = f^k(91) = 91$ 。由此可得 $0 \leq x \leq 100$ 时有 $f(x) = 91$ 。

(c) 定义 $f: N \rightarrow N$

$f(x) = x - 11, x > 100$ 时。

$f(x) = f(f(x+12)), x \leq 100$ 时。

4.1.11 考虑从 R 到 R 的下述偏函数:

$$g(x) = 1/x$$

$$h(x) = x^2$$

$$k(x) = \sqrt{x}$$

对下述每一个合成偏函数, 刻画出偏函数有定义的 R 的子集, 给出偏函数的代数表达式, 刻画出偏函数的象。

(a) $g \circ g$

(b) $h \circ k$

(c) $k \circ h$

解 (a) 偏函数有定义子集为 $R - \{0\}$ 。

$g \circ g(x) = x$, 偏函数 g^2 的象是 $R - \{0\}$ 。

(b) 偏函数有定义子集为

$$A = \{x \mid x \in R \wedge x \geq 0\}$$

$h \circ k(x) = x$, 偏函数 $h \circ k$ 的象是 A 。

(c) 偏函数有定义的集合为 R 。

$k \circ h(x) = |x|$, 偏函数 $k \circ h$ 的象是 $[0, \infty]$ 。

4.1.12 考虑函数 $f: A \rightarrow B$, 这里 $A = \{-1, 0, 1\}^2$

且

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & x_1 x_2 > 0 \\ x_1 + x_2, & x_1 x_2 \leq 0 \end{cases}$$

(a) f 的值域是什么?

(b) 用序偶集合表达出 f 到 $\{0, 1\}^2$ 的限制。

(c) 有多少同 f 具有同样的前域和值域的函数?

解 (a) f 的值域为 $\{0, -1, 1\}$ 。

(b) f 到 $\{0, 1\}^2$ 的限制为

$$\{(\langle 0, 0 \rangle, 0), (\langle 0, 1 \rangle, 1), (\langle 1, 0 \rangle, 1), (\langle 1, 1 \rangle, 0)\}$$

(c) 与 f 具有同样的前域和值域的函数种数为

$$\begin{aligned} & 3^3 - 3 - C_3^2(C_9^1 + C_9^2 + \cdots + C_9^8) \\ &= 3^3 - 3 - 3 \times (2^9 - 2) \\ &= 18150 \end{aligned}$$

即共有 18150 种。

4.1.13 递归方法能用来定义增长很快的函数, 下面定义的阿克曼函数就是这样。

$$A: N^2 \rightarrow N$$

$$A(n, 0) = n + 1$$

$$A(0, m+1) = A(1, m)$$

$$A(n+1, m+1) = A(A(n, m+1), m)$$

试计算 $A(n, 1)$, $A(n, 2)$, $A(n, 3)$, $A(4, 4)$ 。

解 $A(n, 1) = A(A(n-1, 1), 0)$

$$= A(n-1, 1) + 1$$

$$= A(0, 1) + n$$

$$= A(1, 0) + n = n + 2$$

$$A(n, 2) = A(A(n-1, 2), 1)$$

$$= A(n-1, 2) + 2$$

$$= A(0, 2) + 2n$$

$$= A(1, 1) + 2n$$

$$= A(A(0, 1), 0) + 2n$$

$$= A(0, 1) + 1 + 2n$$

$$= A(1, 0) + 1 + 2n = 3 + 2n$$

$$A(n, 3) = A(A(n-1, 3), 2) = 2A(n-1, 3) + 3$$

$$\text{所以 } A(n, 3) = 3 + 2 \times 3 + \cdots + 2^{n-1} \times 3 + 2^n A(0, 3)$$

$$= 3(2^n - 1) + 2^n A(1, 2)$$

$$= 3(2^n - 1) + 2^n \times 5$$

$$= 2^{n+1} - 3$$

$$A(4, 4) = A(A(3, 4), 3) = 2^{A(3, 4)+3} - 3$$

$$A(3, 4) = A(A(2, 4), 3) = 2^{A(2, 4)+3} - 3$$

$$A(2, 4) = 2^{A(1, 4)+3} - 3$$

$$A(1, 4) = A(A(0, 4), 3) = 2^{A(0, 4)+3} - 3$$

$$A(0, 4) = A(1, 3) = 2^4 - 3$$

$$A(4, 4) = 2^{2^{2^{2^{16}}}} - 3$$

4.2 特殊函数类

4.2.1 下述函数哪些是满射的, 单射的和双射的? 求出 $f(S)$, S 是前域的子集合。

(a) $f: N \rightarrow N$

$$f(x) = 2x$$

$$S = \{1, 3, 5\}$$

(b) $f: N \rightarrow \{0, 1\}$

$$f(i) = \begin{cases} 1 & i \text{ 是奇数} \\ 0 & i \text{ 是偶数} \end{cases}$$

$$S = \{2, 4, 6\}$$

(c) $f: R \rightarrow R$

$$f(x) = x^2 + 2x - 15$$

$$S = [-1, 1]$$

(d) $f: N \times N \rightarrow N$

$$f(m, n) = m^n$$

$$S = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 2, 0 \rangle\}$$

(e) $f: R \rightarrow R_+$

$$f(x) = 3^x$$

$$S = [0, 1]$$

解 (a) 是单射, 不是满射。

$$f(S) = \{2, 6, 10\}$$

(b) 是满射, 不是单射。

$$f(S) = \{0\}$$

(c) 既不是满射, 也不是单射。

$$f(S) = [-16, -12]$$

(d) f 不是函数, 因 $f(0,0)=0^0$ 无定义。

(e) 是双射。

$$f(S) = [1, 3]$$

4.2.2 (a) 设 $f: X \rightarrow Y$ 是函数而 $X = \emptyset$, 问 f 可能是单射函数吗? 可能是双射函数吗?

(b) 在什么条件下, Σ^* 到 N 的长度函数是双射的?

解 (a) $X = \emptyset, Y \neq \emptyset, f: X \rightarrow Y$ 是单射函数, $X = \emptyset, Y = \emptyset, f: X \rightarrow Y$ 是双射函数。

(b) 当 Σ 仅含一个元素时, Σ^* 到 N 的长度函数是双射。

4.2.3 证明存在一个从 X 到 $\rho(X)$ 的单射函数, 这里 X 是任意集合。

证明 令 $f: X \rightarrow \rho(X)$

$$f(x) = \{x\}$$

则 $\forall x, x' \in X, x \neq x',$ 因此 $f(x) \neq f(x'),$ 所以此 f 是单射函数。

4.2.4 设 A 是一任意集合, $n \in I_+$ 。定义 S 是从 $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ 到 A 的所有映射的集合, 定义 T 是 A 的元素的所有 n 重组集合。

$$T = \{\langle a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \rangle \mid a_i \in A\}$$

证明存在一从 S 到 T 的双射函数。(由于这个双射函数, 有的书上符号 A^n 既用于表示 T , 又用于表示 S , 即用 n 表示集合 $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ 。)

证明 令 S 到 T 的一个函数为

$$G: S \rightarrow T$$

$$G(f) = \langle f(0), f(1), \dots, f(n-1) \rangle$$

$$\forall f \in S$$

则 G 是 S 到 T 的一个函数。

$\forall f, h \in S, f \neq h,$ 则 $\exists i$ 使

$$f(i) \neq h(i)$$

所以, $G(f) \neq G(h),$ 因而 G 是单射。

又 $\forall \langle a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \rangle \in T$

令 $f: \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ 到 A 的映射为

$$f: \{0, 1, \dots, n-1\} \rightarrow A$$

$$f(i) = a_i \quad \forall i$$

则 $G(f) = \langle a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \rangle。$

因此, G 是满射。因此存在一从 S 到 T 的双射函数。

4.2.5 设 A 和 B 都是有限集合, 假定 A 有 m 个元素, B 有 n 个元素, 说明使下述断言为真, m 和 n 之间必须成立的关系。

(a) 存在从 A 到 B 的单射函数。

(b) 存在从 A 到 B 的满射函数。

(c) 存在从 A 到 B 的双射函数。

解 (a) 若存在从 A 到 B 的单射, 则 $m \leq n$ 。

(b) 若存在从 A 到 B 的满射, 则 $m \geq n$ 。

(c) 若存在从 A 到 B 的双射, 则 $m = n$ 。

4.2.6 (a) 证明: 对一切 $n \in N$, 如果 $f \in A^A$ 和 f 是单射的(满射的, 双射的), 那么 f^n 也是单射的(满射的, 双射的)。

(b) 找出一集合 A 和函数 $f, g \in A^A$, 使 f 是单射的, g 是满射的, 但都不是双射的, 选用 A 尽可能地小。

证明 (a) 用数学归纳法。 $n=0$ 时 f^n 是单射(满射的, 双射的)。假设当 n 时若 $f \in A^A$ 且 f 是单射的(满射的, 双射的)则 f^n 也是单射的(满射的, 双射的), 现证 $n+1$ 时也成立。

$f^{n+1} = f \circ f^n$ 由定理 4.2-1 及假设知 f^{n+1} 也是单射的(满射的, 双射的)。

因此, $\forall n \in N$, 结论成立。

(b) 令 $A = N$

$f: N \rightarrow N$

$f(x) = 2x \quad \forall x \in N$

则 f 是单射, 但不是满射。令

$g: N \rightarrow N$

$g(0) = 0$

$g(x) = x-1 \quad \forall x \geq 1$

则 g 是满射, 但不是单射。

4.2.7 对下述每一组集合 X 和 Y , 构造一从 X 到 Y 的双射函数。

(a) $X = (0, 1) \quad Y = (0, 2)$

(b) $X = I \quad Y = N$

(c) $X = N \quad Y = N \times N$

(d) $X = I \times I \quad Y = N$

(e) $X = R \quad Y = (0, \infty)$

(f) $X = (-1, 1) \quad Y = R$

(g) $X = \rho(\{a, b, c\}) \quad Y = \{0, 1\}^{\{a, b, c\}}$

(h) $X = N \quad Y = \Sigma^*$, 这里 $\Sigma = \{a, b\}$

(i) $X = [0, 1) \quad Y = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$

解 (a) $f: X \rightarrow Y$

$f(x) = 2x$

(b) $f: X \rightarrow Y$

$f(0) = 0, f(-2) = 3, f(3) = 6$

$f(-1) = 1, f(2) = 4 \quad \vdots$

$f(1) = 2, f(-3) = 5 \quad \vdots$

即有: $f(x) = 2x, x \geq 0$

$f(x) = 2|x| - 1, x < 0$

(c) $f: N \rightarrow N \times N \quad f(n) = \langle x, y \rangle$

其中

$$x = \begin{cases} [\sqrt{n}], & n - (\sqrt{n})^2 \leq [\sqrt{n}] \\ 2[\sqrt{n}] - n + ([\sqrt{n}])^2, & \text{其它情况时} \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} n - ([\sqrt{n}])^2, & n - ([\sqrt{n}])^2 \leq [\sqrt{n}] \\ [\sqrt{n}], & \text{其它情况时} \end{cases}$$

以上函数可看作是按下图编码顺序得出的:

$x \backslash y$	0	1	2	3	...
0	0	3	8	15	...
1	1	2	7	14	...
2	4	5	6	13	...
3	9	10	11	12	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

记 $k = \max\{x, y\}$, f 的逆函数 f^{-1} 是

$$f^{-1}(x, y) = \begin{cases} k^2 + y, & x \geq y \\ k^2 + 2k - x, & x < y \end{cases}$$

(d) $f: I \times I \rightarrow N$

$$f(\langle x, y \rangle) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x, y \text{ 全为 } 0 \text{ 时} \\ n, & \text{当 } x, y \text{ 不全为 } 0 \text{ 时} \end{cases}$$

记 $k = |x| + |y|$, 则其中

$$n = \begin{cases} 2k(k-1) + 1 + k - x, & x \geq 0, y \geq 0 \text{ 时} \\ 2k(k-1) + 1 + 2k - y, & x < 0, y \geq 0 \text{ 时} \\ 2k(k-1) + 1 + 3k - |x|, & x \leq 0, y < 0 \text{ 时} \\ 2k(k-1) + 1 + 4k - |y|, & x > 0, y < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

以上函数可看作是按图 4.2 编码顺序得出的。

f 的逆函数是 $f^{-1}: N \rightarrow I \times I$

$$f^{-1}(n) = \begin{cases} \langle 0, 0 \rangle, & \text{当 } n=0 \text{ 时} \\ \langle x, y \rangle, & \text{当 } n \neq 0 \text{ 时} \end{cases}$$

$$\text{记 } k = \left\lceil \frac{\sqrt{2n+1}-1}{2} \right\rceil, p = n - 2k(k-1)$$

则 (1) $k \geq p$ 时, $x = k - p, y = p$;

(2) $2k \geq p > k$ 时, $x = -(p - k), y = 2k - p$;

(3) $3k \geq p > 2k$ 时, $x = -(3k - p), y = -(p - 2k)$;

(4) $p > 3k$ 时, $x = p - 3k, y = -(4k - p)$ 。

(e) $f: R \rightarrow (0, +\infty)$

$$f(x) = 2^x$$

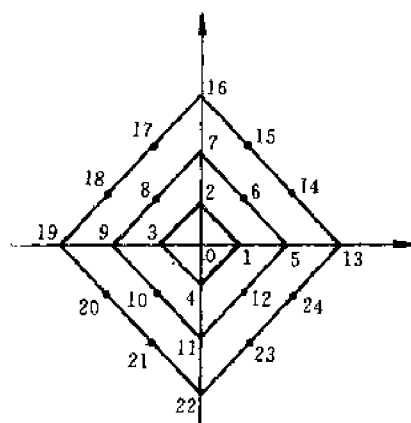


图 4.2

$$(f) f: (-1, 1) \rightarrow R$$

$$f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

或令

$$f_1: (-1, 1) \rightarrow (0, 1)$$

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(x+1)$$

$$f_2: (0, 1) \rightarrow R$$

$$f_2(x) = \frac{\frac{1}{2}-x}{x(1-x)}$$

则 $f = f_2 \circ f_1$ 即是所求。

$$(g) f: X \rightarrow Y$$

$$f(A) = \phi_A, \forall A \in \rho(\{a, b, c\})$$

ϕ_A 为 A 的特征函数。

(h) 设 M 是有限长的 0, 1 串集合 (不含空串)。记 $m = \lceil \log_2(n+1) \rceil$, 作函数 $h: I_n \rightarrow M$ 。

$h(m) = (n - 2^{\lceil \log_2(n+1) \rceil} + 1)$ 的 m 位二进制表示是双射函数, 其逆函数是 $h^{-1}: M \rightarrow I_n$ 。

$$h^{-1}(x) = 2^m + x - 1 \quad (m = \|x\|)$$

作函数 $g: M \rightarrow \Sigma^*$

$$g(p_0, p_1 \cdots p_{m-1}) = q_0 q_1 \cdots q_{m-1}$$

$$q_i = \begin{cases} a, & \text{当 } p_i = 0 \text{ 时} \\ b, & \text{当 } p_i = 1 \text{ 时} \end{cases}$$

这里显然是双射函数。

作函数 $f: N \rightarrow \Sigma^*$

$$f(n) = \begin{cases} \Lambda, & \text{当 } n=0 \text{ 时} \\ gh(n), & \text{当 } n \neq 0 \text{ 时} \end{cases}$$

由于 g, h 是双射函数, 所以 f 是双射函数, 即为所求。

$$(i) f: X \rightarrow Y$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

4.2.8 证明定理 4.2-2。

证明 设 $g: X \rightarrow Y, f: Y \rightarrow Z$

(a) 若 fg 是满射, 则 $\forall z \in Z, \exists x$, 使 $fg(x) = z$ 。因此, $f(g(x)) = z$ 。令 $y = g(x)$, 则 $y \in Y$, 且 $f(y) = z$, 因此, f 是满射。

(b) $\forall x, x' \in X, x \neq x'$, 因 fg 是单射,

$$fg(x) \neq fg(x'), f(g(x)) \neq f(g(x')), g(x) \neq g(x')$$

因此 g 是单射。

(c) 综合 (b) 和 (a) 即得结论。

4.2.9 证明定理 4.2-3。

证明 $\forall x \in X, f \circ I_X(x) = f(I_X(x)) = f(x)$, 所以 $f = f \circ I_X$ 。

$\forall x \in X, I_Y \cdot f(x) = I_Y(f(x)) = f(x)$, 所以 $f = I_Y \cdot f$ 。

4.2.10 若

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

求出 $P_1 \diamond P_2, P_2 \diamond P_1, P_1 \diamond P_1$ 。(注意置换的合成一般不可交换。)

解 $P_1 \diamond P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$$P_2 \diamond P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P_1 \diamond P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4.2.11 设 X 是线序集合, 如果 $x_1 \leq x_2$ 蕴含着 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 称函数 $f: X \rightarrow X$ 是单调增加的。如果 $x_1 < x_2$ 蕴含着 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 f 是严格单调增加的。现设 f 和 g 是 R 上的单调增加函数。

(a) 证明 $f+g$ 是单调增加的。

(b) 证明合成函数 fg 是单调增加的。

(c) 证明 f 和 g 的积可以不是单调增加的。

证明 (a) $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \leq x_2$, 则 $f(x_1) \leq f(x_2), g(x_1) \leq g(x_2)$, 因此 $(f+g)(x_1) \leq (f+g)(x_2)$ 。

故 $(f+g)$ 是单调增加的。

(b) $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \leq x_2$, 则因 g 是单调增加的, $g(x_1) \leq g(x_2)$, 又由 f 是单调增加的, 推得

$$f(g(x_1)) \leq f(g(x_2))$$

因此 fg 是单调增加的。

(c) 令 $X=R, f=g=I_x$, 则 f, g 都是单调增加的, 但 $f \times g$ 并不是单调增加的。

4.2.12 (a) 证明如果 $f: X \rightarrow Y$ 是单射的, X' 是 X 的任意子集, 那么 $f|_{X'}: X' \rightarrow Y$ 是一单射函数。

(b) 假定 $f: X' \rightarrow Y$ 是一满射函数。证明如果 g 是 f 到 $X \supseteq X'$ 的开拓, 那么 $g: X \rightarrow Y$ 是一满射函数。

(c) 证明如果 $f: X \rightarrow Y$ 是一满射函数, 那么存在 $X' \subseteq X$, 使 $f|_{X'}: X' \rightarrow Y$ 是一双射函数。

证明 (a) 因为 $f: X \rightarrow Y$ 是单射, 所以 $\forall x_1, x_2 \in X', x_1 \neq x_2$, 也有 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 。

因此 $f|_{X'}: X' \rightarrow Y$ 也是单射。

(b) 因为 $f: X' \rightarrow Y$ 是满射, 所以 $f(X') = Y$; 又 g 是 f 到 $X \supseteq X'$ 的开拓,

因此 $g(X) \supseteq f(X') = Y$; 又 $g(X) \subseteq Y$, 所以 $g(X) = Y$ 。

因此, g 是 X 到 Y 的满射。

(c) 若 $f: X \rightarrow Y$ 是满射, $\forall y \in Y, \exists x \in X$, 使 $f(x) = y$ 。令 $f^{-1}(\{y\}) = \{x | x \in X \wedge f(x) = y\}$, 则 $f^{-1}(\{y\})$ 非空, 且 $\{f^{-1}(\{y\}) | y \in Y\}$ 是 X 的一个划分。 $\forall y \in Y$, 取定元素 $x \in f^{-1}(\{y\})$, 记为 x_y , 令 $X' = \{x_y | y \in Y\}$, 则

$X' \in X, f|_{X'}: X' \rightarrow Y$ 是双射。

4.2.13 证明定理 4.2-5(a)、(c)、(e)、(g)、(h)。

证明 (a) $\forall x(\phi_A(x)=0) \Leftrightarrow \forall x(x \notin A) \Leftrightarrow A=\emptyset$ 。

(c) 若 $\forall x(\phi_A(x) \leq \phi_B(x))$, 则 $\forall x \in U$ 。

当 $\phi_A(x)=1$ 时, 必有 $\phi_B(x)=1$ 。因此, $\forall x \in A$, 必有 $x \in B$ 。故 $A \subseteq B$ 。

反之若 $A \subseteq B$, 则当 $\phi_A(x)=1$ 时, $x \in A$, 因此 $x \in B$, $\phi_B(x)=1$, 因而 $\forall x(\phi_A(x) \leq \phi_B(x))$ 。

(e) 当 $\phi_A(x)=1$ 时, $x \in \bar{A}$, 因此, $x \in A, \phi_A(x)=0, \phi_A(x)=1-\phi_A(x)$ 。

当 $\phi_A(x)=0$ 时, $x \in A$, 所以 $x \notin \bar{A}, \phi_{\bar{A}}(x)=1, \phi_A(x)=1-\phi_A(x)$ 。

(g) $\phi_{A \cup B}(x)=1 \Leftrightarrow x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in (A\bar{B} \cup \bar{A}B \cup AB)$ 。

若 $x \in AB$, 则 $\phi_A(x)+\phi_B(x)-\phi_{AB}(x)=1$ 。

若 $x \in \bar{A}B$, 则 $\phi_A(x)+\phi_B(x)-\phi_{AB}(x)=1$ 。

若 $x \in A\bar{B}$, 则 $\phi_A(x)+\phi_B(x)-\phi_{AB}(x)=1$ 。

因此 $\phi_{A \cup B}(x)=1 \Leftrightarrow \phi_A(x)+\phi_B(x)-\phi_{AB}(x)=1$

$$\phi_{A \cup B}(x) = \phi_A(x) + \phi_B(x) - \phi_{AB}(x)$$

(h) $\phi_{A-B}(x)=1 \Leftrightarrow x \in (A-B) \Leftrightarrow x \in A \cap \bar{B} \Leftrightarrow \phi_{A \cap \bar{B}}(x)=1 \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin A \cap B \Leftrightarrow \phi_A(x)-\phi_{A \cap B}(x)=1$ 。

证毕。

4.2.14 设 $S=(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap C) \cup (B \cap C)$, 试用 $\Psi_A(x)$ 、 $\Psi_B(x)$ 、 $\Psi_C(x)$ 表达 $\Psi_S(x)$ 。

解 $S=(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)=(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap C)$

$$\begin{aligned} \Psi_S(x) &= \Psi_{A \cap B}(x) + \Psi_{\bar{A} \cap C}(x) \\ &= \Psi_A(x) * \Psi_B(x) + \Psi_C(x) - \Psi_{AC}(x) \\ &= \Psi_A(x) * \Psi_B(x) + \Psi_C(x) - \Psi_A(x) * \Psi_C(x) \end{aligned}$$

4.3 逆函数

4.3.1 对下述每一函数确定:

(a) 函数是单射的、满射的还是双射的。

(b) 给定的集合 S 的逆象。

(c) 函数诱导出的等价关系。

(i) $f: R \rightarrow R_+, f(x)=2^x, S=\{1, 2\}$ 。

(ii) $f: I \rightarrow N, f(x)=|x|, S=\{0, 1\}$ 。

(iii) $f: R \rightarrow R, f(x)=3, S=N$ 。

(iv) $f: [0, \infty) \rightarrow R, f(x)=\frac{1}{1+x}, S=\{0, \frac{1}{2}\}$ 。

(v) $f: \{a, b\}^* \rightarrow \{a, b\}^*, f(x)=xu, S=\{A, b, ba\}$ 。

(vi) $f: (0, 1) \rightarrow (0, \infty), f(x)=\frac{1}{x}, S=(0, 1)$ 。

解 (i) 函数是双射。其逆象是 $f^{-1}(S) = \{0, 1\}$ 。函数诱导出的等价关系是 $E = \{\langle x, x \rangle \mid x \in R\}$ 。

(ii) 函数是满射, 不是单射。其逆象是 $f^{-1}(S) = \{-1, 0, 1\}$ 。函数诱导出的等价关系为 $xRy \Leftrightarrow |x| = |y|$ 。

(iii) 函数不是单射, 也不是满射。其逆象是 $f^{-1}(S) = R$ 。函数诱导出的等价关系为 $R \times R$ 。

(iv) 函数是单射, 不是满射。其逆象是 $f^{-1}(S) = \{1\}$ 。函数诱导出的等价关系为 $\{\langle x, x \rangle \mid x \in [0, \infty)\}$ 。

(v) 函数是单射, 不是满射。 $f^{-1}(S) = \{b\}$ 。函数诱导出的等价关系为 $xRy \Leftrightarrow x = y$ 。

(vi) 是单射, 不是满射。其逆象是 $f^{-1}(S) = \emptyset$ 。函数诱导出的等价关系的 $xRy \Leftrightarrow x = y$ 。

4.3.2 求出下列各函数的逆函数:

(a) $f: R \rightarrow R, f(x) = x$

(b) $f: [0, 1] \rightarrow \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right], f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$

(c) $f: R \rightarrow R, f(x) = x^3 - 2$

(d) $f: R \rightarrow R_+, f(x) = 2^x$

解 (a) $f^{-1}: R \rightarrow R, f^{-1}(y) = y$

(b) $f^{-1}: \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \rightarrow [0, 1], f^{-1}(y) = 2y - \frac{1}{2}$

(c) $f: R \rightarrow R, f^{-1}(y) = \begin{cases} -\sqrt[3]{|y+2|}, & y < -2 \\ \sqrt[3]{y+2}, & y \geq -2 \end{cases}$

(d) $f: R_+ \rightarrow R, f^{-1}(y) = \log_2 y$

4.3.3 置换是双射函数, 双射函数的逆函数存在且仍为双射函数, 置换的逆函数叫逆置换。

(a) 已知 $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求逆置换 P^{-1} 。

(b) 若 $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ P(x_1) & P(x_2) & \cdots & P(x_n) \end{pmatrix}$, 求 P^{-1} 和 $P \diamond P^{-1}$ 。

解 (a) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $P^{-1} = \begin{pmatrix} P(x_1) & P(x_2) & \cdots & P(x_n) \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$

$P \diamond P^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$

4.3.4 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 。

(a) 试作一函数 $f: A \rightarrow A$, 使 $f = f^{-1}$ 且 $f \neq 1_A$ 。

(b) 试作一函数 $f: A \rightarrow A$, 使 $f^2 = f$ 且 $f \neq 1_A$ 。

解 (a) $f: A \rightarrow A, f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 3, f(4) = 4$, 则 $f = f^{-1}$, 且 $f \neq 1_A$ 。

(b) $f: A \rightarrow A, f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 1, f(4) = 1$, 则 $f^2 = f$, 且 $f \neq 1_A$ 。

4.3.5 $f: A \rightarrow B, C \subseteq A$ 和 $D \subseteq B$, 证明或否定以下各等式, 否定时要举出反例。

(a) $f^{-1}(B-D) = A - f^{-1}(D)$ 。

(b) $f(C \cap f^{-1}(D)) = f(C) \cap D$ 。

(c) $f(f^{-1}(D)) = D$ 。

(d) $f^{-1}(f(C)) = C$ 。

证明 (a) $\forall x \in f^{-1}(B-D), \exists y \in B-D$, 使 $f(x)=y, \therefore y \in B, y \notin D, \therefore x \in A, x \notin f^{-1}(D), \therefore f^{-1}(B-D) \subseteq A - f^{-1}(D)$ 。

反之 $\forall x \in A - f^{-1}(D)$, 则 $x \in A, x \notin f^{-1}(D), \therefore f(x) \in B$, 但 $f(x) \notin D, \therefore \exists y \in B - D$ 使 $f(x)=y, \therefore x \in f^{-1}(B-D)$ 。

$\therefore f^{-1}(B-D) \supseteq A - f^{-1}(D)$ 。

因此 $f^{-1}(B-D) = A - f^{-1}(D)$

(b) $\forall y \in f(C \cap f^{-1}(D)), \exists x \in C \cap f^{-1}(D)$, 使 $f(x)=y, \therefore y=f(x) \in f(C)$, 且 $y \in D, \therefore f(C \cap f^{-1}(D)) \subseteq f(C) \cap D, \forall y \in f(C) \cap D, \therefore y \in f(C)$ 且 $y \in D, \exists x \in C$, 使 $f(x)=y$, 且 $x \in f^{-1}(D)$ 。因此

$$y \in f(C \cap f^{-1}(D))$$

$$f(C \cap f^{-1}(D)) \supseteq f(C) \cap D$$

故 $f(C \cap f^{-1}(D)) = f(C) \cap D$

(c) 不成立。令 $A = \{1, 2\}$,

$f: A \rightarrow A, f(1)=1, f(2)=1$

则 $f(f^{-1}(A)) = \{1\} \neq \{1, 2\}$

(d) 不成立。令 $A = \{1, 2\}$

$f: A \rightarrow A, f(1)=1, f(2)=1$

令 $C = \{1\}$, 则 $f^{-1}(f(C)) = \{1, 2\} \neq C$ 。

4.3.6 证明定理 4.3-3。

证明 $\because f$ 是可逆的, $\therefore f$ 是双射, f^{-1} 也是双射的, 因而 $(f^{-1})^{-1}$ 存在。又 $f^{-1} = \{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in f\}$, $\therefore (f^{-1})^{-1} = \{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in f\} = f$ 。

4.3.7 设 f_1, f_2, f_3, f_4 是从 N 到 N 的下述函数:

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } x \text{ 是质数} \\ 0 & \text{如果 } x \text{ 不是质数} \end{cases}$$

$$f_2(x) = x$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } x \text{ 是奇数} \\ 0 & \text{如果 } x \text{ 是偶数} \end{cases}$$

$$f_4(x) = 0$$

设 E_i 是函数 f_i 诱导出的等价关系。

(a) 画出一有向图代表下述偏序集合:

$\langle \{N/E_1, N/E_2, N/E_3, N/E_4\}, \text{细分} \rangle$

(b) 对每一 i , 找出在从 N 到 N/E_i 的规范映射下 3 的象。

解 (a) $\langle \{N/E_1, N/E_2, N/E_3, N/E_4\}, \text{细分} \rangle$ 的有向图如图 4.3 所示。

(b) 对 $f_1, N/E_1 = \{[0]_{E_1}, [1]_{E_1}\}$

$$g(3) = [1]_{E_1} (\text{质数集合})$$

$$\text{对 } f_2, N/E_2 = \{[x]_{E_2} \mid x \in N\}$$

$$g(3) = [3]_{E_2} (\{3\})$$

$$\text{对于 } f_3, N/E_3 = \{[0]_{E_3}, [1]_{E_3}\}$$

$$g(3) = [1]_{E_3} (\text{奇数集合})$$

$$\text{对于 } f_4, N/E_4 = \{[0]_{E_4}\}$$

$$g(3) = [0]_{E_4} (N)$$

4.3.8 设 f 是从 X 到 Y 的函数, 这里 X 有 $n \geq 2$ 个元素, 说明 Y 和 f 上的必要条件, 如果要使 f 诱导出的 X 上的等价关系的秩是

(a) 1, (b) 2, (c) n 。

解 (a) $f(x)$ 是常函数。即 $\exists y \in Y$, 使 $\forall x \in X, f(x) = y$ 。

(b) Y 至少含有两个元素, 且 $\exists y_1, y_2 \in Y, y_1 \neq y_2$, 使 $f(x)$ 能取到且只取这两个值。

(c) Y 至少含有 n 个元素, 且 f 是单射。

4.3.9 设 R 是集合 X 上的等价关系, 在什么条件下, 规范映射 $g: X \rightarrow X/R$ 是双射函数。

解 当且仅当 $R = \{\langle x, x \rangle \mid x \in X\}$ 时, 规范映射 $g: X \rightarrow X/R$ 是双射。

4.3.10 设 $f: X \rightarrow Y$, 定义 X 上的关系 R 如下:

$$x_1 R x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

证明 R 是等价关系。

证明 $\forall x \in X, f(x) = f(x)$, 因为 $x R x$, 即 R 是自反的。 $\forall x_1, x_2 \in X$, 若 $x_1 R x_2$, 则 $f(x_1) = f(x_2)$, 因为 $f(x_2) = f(x_1)$, 因为 $x_2 R x_1$, 因为 R 是对称的。 $\forall x_1, x_2, x_3 \in X$, $x_1 R x_2, x_2 R x_3$, 则 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$, 因为 $x_1 R x_3$, 因为 R 是传递的, 因而 R 是等价关系。

4.3.11 对图 4.4 所表示的函数确定其左或右逆元, 如果它们存在。指明函数诱导的前域上的等价关系, 并构造规范映射。

解 (a) 其左、右逆元都存在, 且为

$$f^{-1}(0) = a, f^{-1}(1) = b, f^{-1}(2) = c$$

它的诱导的等价关系为 $R = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle\}$, 规范映射为 $g: \{a, b, c\} \rightarrow \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$, $g(a) = \{a\}, g(b) = \{b\}, g(c) = \{c\}$ 。

(b) 其左、右逆元都不存在。其诱导的等价关系为 $R = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \{a, b, c\}\}$, 规范映射 $g: \{a, b, c\} \rightarrow \{\{a, b, c\}\}$

$$g(a) = \{a, b, c\}, g(b) = \{a, b, c\}$$

$$g(c) = \{a, b, c\}$$

(c) 其左逆元存在, 可取其中一个为

$$g: Y \rightarrow X, g(0) = a, g(1) = a, g(2) = b, g(3) = c$$

它的诱导的等价关系为 $R = \{\langle x, x \rangle \mid x \in X\}$, 它的上面的规范映射为 $g: \{a, b, c\} \rightarrow$

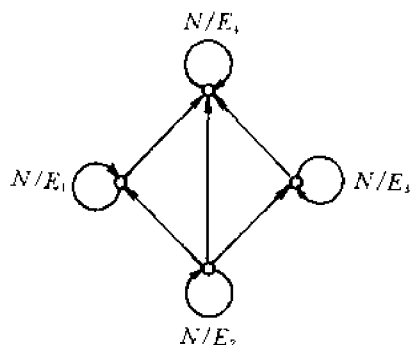


图 4.3

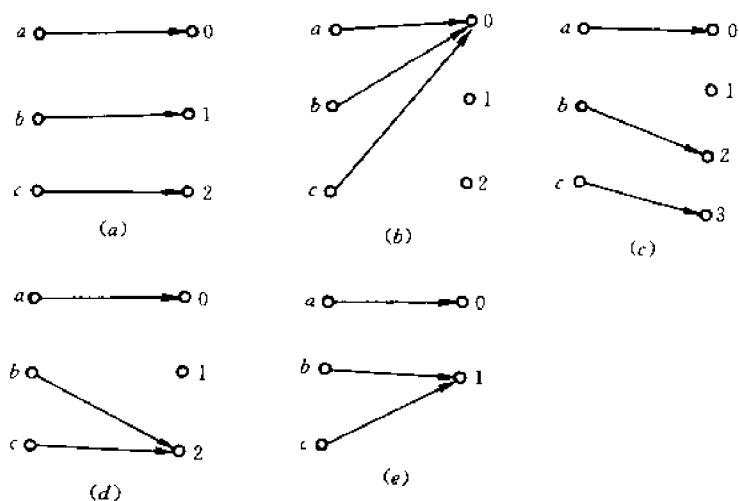


图 4.4

$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$, $g(a)=\{a\}$, $g(b)=\{b\}$, $g(c)=\{c\}$.

(d) 不存在左或右逆元。它上面的等价关系为 $R=\{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, b \rangle\}$

它上面的规范映射为

$$g: \{a, b, c\} \rightarrow \{\{a\}, \{b, c\}\}$$

(e) 其右逆元存在, 其中之一可取为

$h: Y \rightarrow X$, $h(0)=a$, $h(1)=b$, 它诱导的等价关系为 $R=\{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, b \rangle\}$, 它上面的规范映射为

$$g: \{a, b, c\} \rightarrow \{\{a\}, \{bc\}\}$$

$$g(a) = \{a\}, g(b)=g(c)=\{b, c\}$$

4.3.12 证明定理 4.3-6。

证明

$$\begin{aligned} & (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) \\ &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ 1_X \circ g^{-1} = I_Z \\ & (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) \\ &= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \\ &= f^{-1} \circ 1_Y \circ f = 1_X \end{aligned}$$

所以由定理 4.3-5 得 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ 。

4.4 选题例解

例 4-1 设 $S=\{a, b, c\}$, $T=\{p, q\}$, 作 $f: S \rightarrow T$, 问有多少个函数 f , 其中有多少满射?

解 因为 $|S|=3$, $|T|=2$, $f: S \rightarrow T$, 故共有 $2^3=8$ 个。其中满射有 $2 \times C_3^2=6$ (个)。

例 4-2 设 A 和 B 都是有限集合, 有多少不同的单射函数和多少不同的双射函数?

解 设 $|A|=m$, $|B|=n$, 要使 $f: A \rightarrow B$ 是单射, 必须有 $m \leq n$ 。因此, 当 $m > n$ 时, 无 A 到 B 的单射, 当 $m \leq n$ 时, 共有 $P_n^m = n(n-1) \cdots (n-m+1)$ 个单射。

要使 $f: A \rightarrow B$ 是双射, 必须有 $m=n$, 此时共有 $m!$ 个双射。

例 4-3 假定 $f: A \rightarrow B$, 并定义一个函数 G :

$$B \rightarrow \rho(A), \forall b \in B, G(b) = \{x \in A \mid f(x) = b\}$$

求证: 如果 f 是 A 到 B 的满映射, 则 G 是单射, 其逆成立吗?

证明 如果 f 是 A 到 B 的满射, 则对于任意的 $b \in B$, 至少存在一个 $x \in A$, 使 $f(x) = b$, 若有 $b_1, b_2 \in B$, 且 $b_1 \neq b_2$,

$$G(b_1) = \{x \mid f(x) = b_1, x \in A\}$$

$$G(b_2) = \{y \mid f(y) = b_2, y \in A\}$$

若 $G(b_1) = G(b_2)$, 则存在 $x \in G(b_1) = G(b_2)$ 。所以 $b_1 = f(x)$, $b_2 = f(x)$, 因而 $b_1 = b_2$, 与 $b_1 \neq b_2$ 矛盾。因而 $G(b_1) \neq G(b_2)$, 因此 G 是单射。但其逆不真。

例如: $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y, z\}$

$$f: A \rightarrow B, f(a) = x, f(b) = x, f(c) = y$$

$$G: B \rightarrow \rho(A), G(x) = \{a, b\}, G(y) = \{c\}$$

$$G(z) = \emptyset, \text{故 } g \text{ 是单射, 但 } f \text{ 不是满射。}$$

例 4-4 设 $X \neq \emptyset$, S 为 X^X 上的关系, 定义为

$$fSg \Leftrightarrow \text{ran } f = \text{ran } g$$

证明: S 是 X^X 上的等价关系, 且存在双射

$$\Phi: X^X/S \rightarrow \rho(X) - \{\emptyset\}$$

证明 (i) 对任意 $f \in X^X$, $\text{ran } f = \text{ran } f$, 故 fSf 。所以 S 是自反的。对于任意 $f, g \in X^X$,

$$\langle f, g \rangle \in S \Leftrightarrow \text{ran } f = \text{ran } g \Leftrightarrow \text{ran } g = \text{ran } f \Leftrightarrow \langle g, f \rangle \in S$$

故 S 是对称的。对于任意 $f, g, h \in X^X$, 则

$$\langle f, g \rangle \in S \wedge \langle g, h \rangle \in S$$

$$\Leftrightarrow \text{ran } f = \text{ran } g \wedge (\text{ran } g = \text{ran } h)$$

$$\Rightarrow \text{ran } f = \text{ran } h$$

$$\Leftrightarrow \langle f, h \rangle \in S$$

故 S 是传递的。

因此 S 是 X^X 上的等价关系。

(ii) 定义 $\Phi: X^X/S \rightarrow \rho(X) - \{\emptyset\}$

$$\Phi([f]_S) = \text{ran } f$$

$$\Phi([f]_S) = \Phi([g]_S) \Leftrightarrow \text{ran } f = \text{ran } g$$

$$\Leftrightarrow \langle f, g \rangle \in S \Rightarrow [f]_S = [g]_S$$

因而 Φ 是单射。

又对任意 $A \in \rho(X) - \{\emptyset\}$, $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$, 取定一元素 $a \in A$, 定义 $f: X \rightarrow A$ 为

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in A \text{ 时} \\ a, & x \notin A \text{ 时} \end{cases}$$

则 $\Phi([f]_S) = \text{ran } f = A$, 因此 Φ 是满射。

综上所述, 存在双射 $\Phi: X^X/S \rightarrow \rho(X) - \{\emptyset\}$

例 4-5 设 R 是实数集, 令 $X = R^{[0,1]}$, 若 $f, g \in X$, 定义 $\langle f, g \rangle \in S \Leftrightarrow \forall x \in [0, 1], f(x) - g(x) \geq 0$. 试证: S 是一个偏序. S 是全序吗?

证明 对于任意 $x \in [0, 1]$, 对于任意 $f \in X$, 有 $f(x) - f(x) = 0$, 故 $\langle f, f \rangle \in S$, 因此 S 是自反的。

若 $\langle f, g \rangle \in S$, 且 $\langle g, f \rangle \in S$, 则 $\forall x \in [0, 1], f(x) - g(x) \geq 0$, 且 $g(x) - f(x) \geq 0$, 故 $f(x) = g(x)$. 因而 S 是反对称的。

若 $\langle f, g \rangle \in S, \langle g, h \rangle \in S$, 则 $\forall x \in [0, 1]$ 有 $f(x) - g(x) \geq 0, g(x) - h(x) \geq 0$, 因而 $f(x) - h(x) \geq 0$, 故 $\langle f, h \rangle \in S$, 故 S 是传递的。

因此 S 是偏序. 但不是全序. 例如: 设 $f(x) = x, g(x) = -x + 1$, 则 $f(0) - g(0) = -1, g(1) - f(1) = -1$, 故 f 和 g 是不可比较的, 即 S 不是全序。

例 4-6 设 $f: X \rightarrow Y$ 且 $g: Y \rightarrow Z$ 是映射, 使得 $g \circ f$ 是一个单射, 且 f 是满射. 证明 g 是一个单射. 举例说明若 f 不是满射, 则 g 不一定是单射。

证明 假定 g 不是单射, 则存在 y_1 和 y_2 , 使 $y_1 \neq y_2$, 但 $g(y_1) = g(y_2)$. 因 f 是满射, 对于 y_1 和 y_2 , 必有 x_1 和 x_2 , 使 $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$, 因 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 故 $x_1 \neq x_2$. 但 $g \circ f(x_1) = g[f(x_1)] = g(y_1) = g(y_2) = g[f(x_2)] = g \circ f(x_2)$. 这与 $g \circ f$ 是单射相矛盾. 因此 g 是单射。

例如, $f: R_+ \rightarrow R, g: R \rightarrow R, f(x) = x, g(x) = x^2$, 则 $g \circ f$ 是单射, f 不是满射, g 不是单射。

例 4-7 设 $f: X \rightarrow X$ 是函数, 试证:

(a) 若 $f \subseteq I_X$, 则 $f = I_X$

(b) 若 $I_X \subseteq f$, 则 $f = I_X$

证明 (a) $\forall x \in X$, 因 f 是函数, 故必存在唯一的 $y \in X$, 使 $\langle x, y \rangle \in f$, 又 $f \subseteq I_X$, 则 $\langle x, y \rangle \in I_X$, 即 $x = y$, 因而有 $\langle x, x \rangle \in f$, 即 $I_X \subseteq f$, 所以 $f = I_X$.

(b) $\forall \langle x, y \rangle \in f$, 因 $x \in X$, 故 $\langle x, x \rangle \in I_X$, 又因 $I_X \subseteq f$, 得 $\langle x, x \rangle \in f$ 且 $\langle x, y \rangle \in f$, 但 f 是函数, 故 $x = y$. 所以 $\langle x, y \rangle \in I_X$, 即 $f \subseteq I_X$, 因此 $f = I_X$.

例 4-8 设 $f: X \rightarrow X$ 是函数, n 为正整数, 使得 $f^n = I_X$, 证明 f 是双射的。

证明 设 $n=1$ 时, $f = I_X$, 故 f 是双射的. 当 $n > 0$ 时, 若 f 不是单射, 则必有 $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 但 $f(x_1) = f(x_2)$, 因而 $f^{n-1}(x_1) = f^{n-1}(x_2), f^n(x_1) = f^n(x_2)$, 这与 $f^n = I_X$ 矛盾. 故 f 必为单射。

若 f 不是满射, 则必有 $y \in X$, 使得对于任意 $x \in X$, 有 $f(x) \neq y$, 由此可得, $\forall z \in X$, 必有 $f^n(z) \neq y$, 与 $I_X = f^n$ 矛盾。

因此 f 必是双射的。

例 4-9 设 $f: X \rightarrow Y$ 是一映射, 定义 $\bar{f}: \rho(X) \rightarrow \rho(Y)$, 使得

$$\bar{f}(A) = \{y \mid \exists x \in A, f(x) = y\}$$

$$\bar{f}: \rho(Y) \rightarrow \rho(X)$$

$$\bar{f}(B) = \{x \mid \exists y \in B, \text{使 } f(x) = y\}$$

试证明: (a) $\bar{f}$ 是满射当且仅当 f 是单射;

(b) $\bar{f}$ 是单射当且仅当 f 是满射。

证明 (a) 设 f 是单射, 对于任意 $\forall A \in \rho(X)$, 令 $B = \bar{f}(A)$, 则 $\bar{f}(B) = A$, 所以 $\bar{f}$ 是满射。

反之, 若 f 不是单射, 则存在 $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 但 $f(x_1) = f(x_2)$ 。对于任意 $B \in \rho(Y)$, 若 $x_1 \in \bar{f}(B)$, 则因 $f(x_1) = f(x_2)$, 故 $\{x_1, x_2\} \subseteq \bar{f}(B)$, 因而 $\bar{f}(B) \neq \{x_1\}$ 。若 $x_1 \notin \bar{f}(B)$, 则 $\bar{f}(B) \neq \{x_1\}$, 因此得到, 对任意 $B \in \rho(Y)$, $\{x_1\} \neq \bar{f}(B)$, 但 $\{x_1\} \in \rho(X)$ 。所以 $\bar{f}$ 不是满射。

(b) 设 f 是满射。若 $\bar{f}(B_1) = \bar{f}(B_2)$, 对于任意 $y_1 \in B_1$, 因 f 是满射, 故存在 $x \in X$, 使 $y_1 = f(x)$, 即 $x \in \bar{f}(B_1) = \bar{f}(B_2)$, 因而存在 $y_2 \in B_2$, 使 $f(x) = y_2$ 。又因 f 是函数, 所以 $y_1 = y_2$, 因此 $y_1 \in B_2$, 即 $B_1 \subseteq B_2$; 同理可得 $B_2 \subseteq B_1$, 所以 $B_1 = B_2$, 因此 $\bar{f}$ 是单射。

反之, 若 f 不是满射, 则存在 $y_1 \in Y$, 使 $y_1 \notin f(X)$, 由 $\bar{f}$ 的定义可得 $\bar{f}(\emptyset) = \bar{f}(\{y_1\})$, 但 $\emptyset \neq \{y_1\}$, 所以 $\bar{f}$ 不是单射。

例 4-10 设 $f: X \rightarrow Y$ 是函数, $\forall i \in I$, 令 $A_i \in \rho(X)$, 证明:

$$(a) f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$$

$$(b) \text{对 } \bigcap_{i \in I} f(A_i) \subseteq f(\bigcap_{i \in I} A_i), \text{ 给出一个反例说明不成立。}$$

证明 (a) $\forall y \in f(\bigcap_{i \in I} A_i)$, 则存在 $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$, 使 $f(x) = y$, 因而, $\forall i \in I, x \in A_i$, 且 $y = f(x) \in f(A_i)$ 。所以, $f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$ 。

(b) 设 $I=2, A_0 = \{0, 1\}, A_1 = \{0, 2\}, f = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$, 则

$$f(A_0) = \{0, 1\}, f(A_1) = \{0, 1\}$$

$$\bigcap_{i \in I} f(A_i) = \{0, 1\}, f(\bigcap_{i \in I} A_i) = \{0\}$$

所以 $\bigcap_{i \in I} f(A_i) \subseteq f(\bigcap_{i \in I} A_i)$ 不一定成立。

例 4-11 设 $P_1: A \times B \rightarrow A$, 使 $P_1(\langle x, y \rangle) = x$

$P_2: A \times B \rightarrow B$, 使 $P_2(\langle x, y \rangle) = y$

令 $f: X \rightarrow A, g: X \rightarrow B$, 证明有在唯一的函数 $\Phi: X \rightarrow A \times B$, 使 $P_1 \cdot \Phi = f, P_2 \cdot \Phi = g$ 。

证明 定义 $\Phi: X \rightarrow A \times B$, 使 $\forall x \in X$,

$$\Phi(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$$

则

$$(P_1 \cdot \Phi)(x) = P_1(\langle f(x), g(x) \rangle) = f(x)$$

$$(P_2 \cdot \Phi)(x) = P_2(\langle f(x), g(x) \rangle) = g(x)$$

因而有 $P_1 \cdot \Phi = f, P_2 \cdot \Phi = g$ 。

令 ψ 为满足 $P_1 \cdot \psi = f, P_2 \cdot \psi = g$ 的从 X 到 $A \times B$ 的映射。 $\forall x \in X$, 设 $\psi(x) = \langle y_1, y_2 \rangle$, 则由 $P_1 \cdot \psi = f$ 得 $P_1(\langle y_1, y_2 \rangle) = y_1 = f(x)$; 由 $P_2 \cdot \psi = g$ 得 $P_2(\langle y_1, y_2 \rangle) = y_2 = g(x)$ 。因此 $\psi(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$, 即 $\Phi = \psi$ 。

第 5 章 无限集合

5.1 可数和不可数集合

5.1.1 用定义 5.1-2 证明集合 $[0, 1]$ 是无限集合。

证明 若 $[0, 1]$ 不是无限集合, 则 $\exists n \in N$ 使得存在 $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ 到 $[0, 1]$ 的双射 f 。 $[0, 1]$ 中任一数都可表成无限十进制小数。所以

$$\begin{aligned} f(0): & . x_{00} \quad x_{01} \quad x_{02} \cdots \\ f(1): & . x_{10} \quad x_{11} \quad x_{12} \cdots \\ f(2): & . x_{20} \quad x_{21} \quad x_{22} \cdots \\ & \dots \dots \dots \\ f(n-1): & . x_{n-1,0} \quad x_{n-1,1} \quad x_{n-1,2} \cdots \end{aligned}$$

取 $y = 0.y_0 y_1 y_2 \cdots$ 如下:

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{若 } x_n \neq 1 \\ 2, & \text{若 } x_n = 1 \end{cases}, i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$
$$y_i = 1, i \geq n$$

则 $y \in [0, 1]$, 但 $\forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}, f(i) \neq y$, 这与 f 是双射矛盾, 因而 $[0, 1]$ 是无限集。

5.1.2 若 A 和 B 都是无限集合, C 是有限集合, 回答下述问题。对肯定的答复要讲出理由, 对否定的答复要举出反例。

(a) $A \cap B$ 是无限集合吗?

(b) $A - B$ 是无限集合吗?

(c) $A \cup C$ 是无限集合吗?

解: (a) 不一定。例如令 $A = N$ $B = \{-x | x \in N\}$, 则 $A \cap B = \{0\}$ 不是无限集。

(b) 不一定。例如令 $A = B = N$, 则 $A - B = \emptyset$ 。

(c) 是无限集合。因为 $A \subseteq A \cup C$, 而 A 是无限集, 由推论 5.1-2 得 $A \cup C$ 是无限集。

5.1.3 确定下述集合哪些是有限的, 哪些是无限的。如果集合是有限的, 对它的基数找出表达式。

(a) 在 $\{a, b\}^*$ 中, 质数长度的所有串的集合。

(b) 在 $\{a, b, c\}^*$ 中, 长度不大于 k 的所有串的集合。

(c) n 个结点的所有关系图集合。

(d) 矩阵的项取自 $\{0, 1, 2, \dots, k\}$ 的所有 $m \times n$ 矩阵集合, 这里 m, n, k 是给定的正整数。

(e) 命题变元 P, Q, R 和 S 上所有命题公式集合。

(f) 从 $\{0, 1\}$ 到 I 的所有函数集合。

(i) $N^{\mathbb{Z}}$ 。

解 (a) 是无限集。

(b) 是有限集, 其基数为 $(3^{k+1}-1)/2$

(c) 是有限集。如果认为 n 个结点是有区别的, 则关系图集合的基数为 2^{n^2} 。

(d) 是有限集, 其基数为 $(k+1)^m$

(e) 是无限集。

(f) 是无限集。

(i) 是有限集, 其基数为 1。

5.1.4 证明定理 5.1-5。

证明 设 A 和 B 是可数的, 因而 B 是可枚举的。所以设 $B = \{b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$, 则 $A \times B = \bigcup_{n=0}^{\infty} A \times \{b_n\}$ 。

又 $A \times \{b_n\}$ 是可数的, 由定理 5.1-4 得 $A \times B$ 是可数的。

5.1.5 证明下述集合的每一个是可数无限的。

(a) Σ^* , 这里 $\Sigma = \{a\}$ 。

(b) $\{\langle x_1, x_2, x_3 \rangle \mid x_i \in I\}$ 。

(c) $\{a, b\}^*$ 的所有有限子集的集合。

(d) 所有整系数的一次多项式集合。

(e) 具有自然数结点的所有关系图集合。

证明 (a) $\Sigma^* = \{a^n \mid n \geq 0\}$

令 $f: N \rightarrow \Sigma^*$, $f(n) = a^n$, 则 f 是双射函数, 因此 Σ^* 是可数无限的。

(b) $\{\langle x_1, x_2, x_3 \rangle \mid x_i \in I\} = I \times I \times I$

因为 I 是可数的, 两次应用定理 5.1-5 知它是可数的。又 $I \times I \times I \supseteq N \times \{0\} \times \{0\}$, 而 $N \times \{0\} \times \{0\}$ 是无限集, 所以 $I \times I \times I$ 是可数无限集。

(c) 令 A_n 表示 $\{a, b\}^*$ 的仅含有 n 个元素的子集, 则因 $\{a, b\}^*$ 是可数的, 所以 A_n 也是可数的, 因而 $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ 也是可数的, 且易见它是无限的。

(d) 所有整系数一次多项式可表示为 $\{a+bx \mid a \in I \wedge b \in I - \{0\}\}$, 记为 A 。

令 $f: A \rightarrow I \times (I - \{0\})$

$$f(a+bx) = \langle a, b \rangle$$

则 f 是 A 到 $I \times (I - \{0\})$ 上的双射函数, 又 $I \times (I - \{0\})$ 是可数无限的, 所以 A 是可数无限的。

(e) 记具有 n 个结点的关系图的集合为 A_n , 则 $|A_n| = 2^{n^2}$, 因而它是可数的。所有自然数结点的所有关系图的集合可表示为 $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, 因而它是可数无限的。

5.1.6 $I_+ \times I_+$ 集合用例 4(b) 的第二个表那样无重复地枚举, 试写出其枚举函数和逆函数。

解 枚举函数为

$n=0$ 时, $f(0)=\langle 1, 1 \rangle$ 。

$n \geq 1$ 时, 取 $k = [\sqrt{n}]$

$$f(n) = \begin{cases} \langle k+1, n-k^2+1 \rangle, & \text{当 } k^2 \leq n \leq k^2+k \text{ 时} \\ \langle (k+1)^2-n, k+1 \rangle, & \text{当 } k^2+k < n < (k+1)^2 \text{ 时} \end{cases}$$

其逆函数为

$$g(\langle m, n \rangle) = \begin{cases} (m-1)^2+n-1, & \text{当 } m \geq n \text{ 时} \\ n^2-m, & \text{当 } m < n \text{ 时} \end{cases}$$

5.1.7 构造从 $[0, 1]$ 到下述各集合的一个双射函数以证明它们有基数 c 。

(a) $\langle a, b \rangle$, 这里 $a < b$, $a, b \in R$ 。

(b) $\{x | x \in R \wedge x \geq 0\}$

(c) $(0, 1]$

(d) $\{\langle x, y \rangle | x, y \in R \wedge x^2 + y^2 = 1\}$

证明 (a) 令 $A = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$

$$f: [0, 1] \rightarrow (0, 1)$$

$$f(0) = \frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{n}\right) = 1/(n+2), \forall n \geq 1$$

$$f(x) = x, x \in [0, 1] - A$$

则 f 是 $[0, 1]$ 到 $(0, 1)$ 的双射。

令 $g: (0, 1) \rightarrow \langle a, b \rangle$

$$g(x) = a + x(b-a), \forall x \in (0, 1)$$

则 g 是 $(0, 1)$ 到 $\langle a, b \rangle$ 的双射。

所以 gf 是 $[0, 1]$ 到 $\langle a, b \rangle$ 的双射。

所以 $|(a, b)| = c$ 。

(b) 令 $A = \{0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$

$$f: [0, 1] \rightarrow (0, 1]$$

$$f(0) = 1, f\left(\frac{1}{n}\right) = 1/(n+1), n \geq 1$$

$$f(x) = x, x \in [0, 1] - A$$

则 f 是 $[0, 1]$ 到 $(0, 1]$ 上的双射。

令 $g: (0, 1] \rightarrow \{x | x \in R \wedge x \geq 0\}$

$$g(x) = -\log x$$

则 g 是双射, 因而 gf 是从 $[0, 1]$ 到 $\{x | x \in R \wedge x \geq 0\}$ 的双射, 故它具有基数 c 。

(c) 由 (b) 得, 同上一样的 f 即为所求。

(d) $f: [0, 1] \rightarrow (0, 1]$ 同 (b),

再令 $g: (0, 1] \rightarrow \{\langle x, y \rangle | x^2 + y^2 = 1\}$

$$g(\theta) = \langle \cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta \rangle$$

则 g 是双射, 因而 gf 是 $[0, 1]$ 到 $\{\langle x, y \rangle | x, y \in R \text{ 且 } x^2 + y^2 = 1\}$ 的双射, 因而它具有基数 c 。

5.1.8 设 $|A| = c$, $|B| = c$, $|D| = \aleph_0$, $|E| = n > 0$, 这里 A, B, D 和 E 是彼此不相交的, 证明下列各式:

$$(a) |A \cup B| = c$$

$$(b) |A \cup D| = c$$

$$(c) |D \times E| = \aleph_0^5.$$

证明 (a) 因为 $|A| = c$, $|B| = c$, 所以

$\exists f_1: A \rightarrow [0, 1]$, f_1 是双射

$\exists f_2: B \rightarrow [0, 1]$, f_2 是双射

又存在双射 $f_3: [0, 1] \rightarrow (0, 1]$

令 $g: (0, 1] \rightarrow (1, 2]$

$g(x) = x + 1$, 则 g 是双射函数, 因而 gf_3f_2 是 B 到 $(1, 2]$ 的双射函数。因为

$A \cap B = \emptyset$, 令 $f: A \cup B \rightarrow [0, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x)/2 & , \text{当 } x \in A \\ gf_3f_2(x)/2 & , \text{当 } x \in B \end{cases}$$

则 f 是 $A \cup B \rightarrow [0, 1]$ 的双射, 因而

$$|A \cup B| = c$$

(b) 设 h 是 $[0, 1]$ 到 A 的双射函数, k 是 N 到 D 的双射函数, $A_1 = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots\}$, $A_2 = \{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots\}$, 作函数

$$f(x) = \begin{cases} k\left(\frac{1-x}{2x}\right) & , x \in A_2 \text{ 时} \\ h(2x) & , x \in A_1 \text{ 时} \\ h(x) & x \notin A_1 \text{ 且 } x \notin A_2 \text{ 时} \end{cases}$$

$f(x)$ 是从 $[0, 1]$ 到 $A \cup D$ 的双射函数, 所以 $|A \cup D| = c$ 。

(c) 因为 $|E| = n$, $|D| = \aleph_0^5$, 设 $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $E_i = \{\langle d, e_i \rangle \mid d \in D\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ 都是可数的, $D \times E = \bigcup_{i=1}^n E_i$, 根据定理 5.1-4, 因而有 $|D \times E| = \aleph_0^5$ 。

5.1.9 证明由 0 及 1 构成的序列的集合, 其基数是 c 。

证明 设 A 表示 0 及 1 构成的序列的集合, A 中的序列分成两类, 一类是有限长的记为 D , 一类是无限长的记为 B , 即 $A = B \cup D$, 可按标准序把 D 的元素枚举出来, 因此 D 是可数的, 有基数 $\aleph_0$ 。作双射函数。

$$f: [0, 1] \rightarrow B \quad f(x) = x$$

x 是无限二进制小数, x 是 x 对应的无限的 0, 1 串, 因此 B 的基数是 c , 再根据 5.1.8 题 (b) 的结果, 得 A 的基数是 c 。

5.1.10 试找出一集合 S , 使 $|\rho(S)| = \aleph_0^5$, 如果你不成功, 描述所遇到的困难。

解 这样的集合找不到, 因为若 S 是有限集, 则 $\rho(S)$ 也是有限集。若 S 是无限集, 则 $|\rho(S)| > \aleph_0^5$ 。

5.1.11 (a) 在定理 5.1-7 的证明中, 假设对 $f(i)$ 用二进制展开式并定义 y 的数字为

$$y_i = \begin{cases} 0, & \text{如果 } x_n = 1 \\ 1, & \text{如果 } x_n = 0 \end{cases}$$

证明可能存在某 $j \in N$, 使 y 等于 $f(j)$ 。

(b) 由于 $[0, 1]$ 中某些数的十进制表示的非唯一性, 能否产生类似上边(a)中的问题? 在定理 5.1-7 的证明中, 应如何定义 y 才能避免?

证明 (a) 在通常的二进制表示中, 某些数有两个不同表达式, 例如 $0.100\cdots = 0.0111\cdots$ 。如果在证明中所用矩阵有以下形式(或类似形式):

$$\left. \begin{array}{l} .10000\cdots \\ .10101\cdots \\ .00010\cdots \\ .11000\cdots \\ \vdots \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{除第一位是 1 外, 其余为 0} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

定义 $y_i = \begin{cases} 1, & x_n = 0 \text{ 时} \\ 0, & x_n = 1 \text{ 时} \end{cases}$

将产生数 $y = .0111\cdots$, 它不同于表中每一表示式, 但所表示的数却等于表中第一项。

(b) 由于 $[0, 1]$ 中某些数的十进制表示的非唯一性, 也能产生类似于(a)中的问题。例如 $0.999\cdots = 1.000\cdots$, 如果在证明中所用矩阵有以下形式(或类似形式),

$$\left. \begin{array}{l} 1.000\cdots \\ 0.100\cdots \\ 0.110\cdots \\ 0.120 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \text{对角线上的元素都是 0} \\ \\ \end{array}$$

定义

$$y_i = \begin{cases} 9, & x_n = 0 \text{ 时} \\ 0, & x_n = 0 \text{ 时} \end{cases}$$

则这样将产生 $0.999\cdots = 1$ 。因而会产生上述类似的问题。在证明中, 定义 y 时, 当 $x_n = 0$ 时, y_i 不取 9 或 0, 即可避免这类问题。

5.1.12 以下是从 N 到 N 不存在双射函数的证明。试指出其错误。

假设 f 是从 N 到 N 的一个双射函数, $f(k) = i_k$ 。对每一 i_k , 颠倒 i_k 的数字并放小数点于左边以构成一个在 $[0, 1]$ 中的数。例如若 $i_k = 123$, 则被构成.32100。这样, 定义了一个从 N 到 $[0, 1]$ 的单射函数 g 。例如

$$g(123) = .321000\cdots$$

应用康脱对角线技术于数组

$$\begin{array}{l} g \cdot f(0) = .x_{00} \quad x_{01} \quad x_{02} \cdots \\ g \cdot f(1) = .x_{10} \quad x_{11} \quad x_{12} \cdots \\ \vdots \end{array}$$

来构造数 $y \in [0, 1]$ 。现在把 y 的数字颠倒, 并把小数点放在右边。其结果是一个不出现在表 $f(0)$ 、 $f(1)$ 、 $f(2)\cdots$ 中的数, 这与断言 f 是满射函数矛盾。因此, 从 N 到 N 没有双射函数存在。

解 在此证明中 f 是 N 到 N 的双射函数, 而 g 是 N 到 $[0, 1]$ 的单射函数, 并不是满射, 而应用康脱对角线技术得到 $y \in [0, 1]$, 并不一定要存在原象, 即存在某个 $j \in N$ 使 $g \cdot f(j) = y$ 这与 f 是满射并不矛盾。

又 y 是无限数字串, 它有左端而无右端, 颠倒其数字得出一个有右端而无左端的数字

串,它不是数,更不属于 N ,这就是错误所在,因此证明失效。

5.2 基数的比较

5.2.1 证明如果 $A' \subseteq A$,那么 $|A'| \leq |A|$ 。

证明 令 $f: A' \rightarrow A \quad f(x)=x$

$\forall x \in A'$,则 f 是单射,所以 $|A'| \leq |A|$ 。

5.2.2 证明如果 $|A| \leq |B|$ 和 $|C|=|A|$,那么 $|C| \leq |B|$ 。

证明 若 $|A| \leq |B|$, $|C|=|A|$,则存在单射

$f: A \rightarrow B$;存在双射 $g: C \rightarrow A$ 。

所以 $f \circ g$ 是 C 到 B 的单射,因此 $|C| \leq |B|$ 。

5.2.3 设 $f: A \rightarrow B$ 是一单射函数,假设 A 是无限的,试证明 B 是无限的。

证明 因为 $f: A \rightarrow B$ 是一单射,所以 $f: A \rightarrow f(A)$ 是一双射,又 A 是无限的,所以 $f(A)$ 也是无限的,又 $f(A) \subseteq B$,因而 B 也是无限的。

5.2.4 设 A 和 B 是集合, A 是无限的,试应用上一题的结果,试证

(a) $\rho(A)$ 是无限的;

(b) 若 $B \neq \emptyset$,则 $A \times B$ 是无限的;

(c) 若 $B \neq \emptyset$,则 A^B 是无限的。

证明 令 $f: A \rightarrow \rho(A)$

$f(x) = \{x\}$

则 f 是一单射,因而 $\rho(A)$ 是无限的。

(b) 若 $B \neq \emptyset$,所以 $\exists b \in B$,作映射 f 如下, $f: A \rightarrow A \times B, f(a) = \langle a, b \rangle$,则 f 是单射,因而 $A \times B$ 是无限的。

(c) 因为 $B \neq \emptyset$,令 $f: A \rightarrow A^B, \forall a \in A$

$f(a) = f_a$,其中 f_a 为

$f_a: B \rightarrow A, \forall b \in B, f(b) = a$

则 f 是单射,因而 A^B 是无限的。

5.2.5 证明如果存在一个从 A 到 B 的满射函数,那么 $|B| \leq |A|$ 。

证明 若存在一个从 A 到 B 的满射,则 $\forall y \in B, \exists x \in A$,使 $f(x) = y$,作映射 g 如下:

$g: B \rightarrow A$

$g(y) = x$,其中 x 是取定的某个使 $f(x) = y$ 的 x ,则 g 是单射。因此 $|B| \leq |A|$ 。

5.2.6 设 π_1 和 π_2 是 A 的划分,使 π_1 细分 π_2 ,证明 $|\pi_2| \leq |\pi_1|$ 。

证明 令 $f: \pi_1 \rightarrow \pi_2 \quad f(A_1) = A_2$ 使 $A_1 \subseteq A_2$,因 π_1 和 π_2 都是 A 的划分,且 π_1 细分 π_2 ,因而 $\forall A_1 \in \pi_1$,都有 $A_2 \in \pi_2$,使 $A_1 \subseteq A_2$,且 A_2 是唯一的。所以 f 是一个映射。 π_2 的每一块均至少含有 π_1 的一块(若不然 π_1 将不是 A 的划分)所以 f 是满射的,由5.2.5题知 $|\pi_2| \leq |\pi_1|$ 。

5.2.7 证明定理5.2-1。

证明 $\forall A, I_A: A \rightarrow A$ 是 A 上的双射 则 $\forall A, A$ 与 A 等势。 $\forall A, B$, 若 A 与 B 等势, 则存在双射 $f: A \rightarrow B$, 所以 f^{-1} 是 B 到 A 的双射, 因而 B 与 A 等势。又若 A 与 B 等势, B 与 C 等势, 则存在双射 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$, 因而 $gf: A \rightarrow C$ 是双射, 所以 A 与 C 等势。所以等势是任何集合上的等价关系。

5.2.8 证明定理 5.2-4。

证明 设 a, b 是两个基数, 且 $|A|=a, |B|=b$, 则 $|A| \leq |A|$, 因而次序关系 $\leq$ 是自反的, 若 $|A| \leq |B|$, 且 $|B| \leq |A|$, 则 $|A|=|B|$, 因而次序关系 $\leq$ 是反对称的, 又若 $|A| \leq |B|$ 且 $|B| \leq |C|$, 则存在映射 f , 它是 A 到 B 上的单射, 存在映射 g , 它是 B 到 C 上的映射, 因而 $g \circ f$ 是 A 到 C 的单射。所以 $|A| \leq |C|$, 因而 $\leq$ 具有传递性。所以 S 上的次序关系为偏序关系, 又由定理 5.2-2 知 S 上的任意两个基数都是可比较的。因此次序关系 $\leq$ 是一线序。

对于任意 $A, |A| < |A|$, 所以 $<$ 不具有自反性, 由前面的证明可得 $<$ 具有传递性, 因而 $<$ 是一拟序。

5.2.9 证明 $|[0, 1] \times [0, 1]| = c$ 。(提示: 作函数 $f(x, y) = z$, 这里若

$$x = .x_0 x_1 x_2 \cdots \quad (\text{二进制数}) \quad y = .y_0 y_1 y_2 \cdots \quad (\text{二进制数})$$

则 $z = .x_0 2y_0 2x_1 2y_1 2 \cdots \quad (\text{三进制数})$

证明 (I) 作函数 $f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

$$f(\langle x, y \rangle) = z$$

这里若 $x = .x_0 x_1 x_2 \cdots$ (二进制数)

$$y = .y_0 y_1 y_2 \cdots$$

则 $z = .x_0 2y_0 2x_1 2y_1 \cdots$ (三进制数)

这里 2 作为间隔符以保证 f 是单射的。所以

$$|[0, 1] \times [0, 1]| \leq c$$

(II) 作函数 $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$

$$g(x) = \langle x, 0 \rangle$$

g 是单射函数, 所以 $c \leq |[0, 1] \times [0, 1]|$ 。

由 (I) 和 (II) 得 $|[0, 1] \times [0, 1]| = c$ 。

5.2.10 找出下述集合的基数, 并证明之。

(a) Q (有理数集合)。

(b) $R \times R$ 。

(c) x 坐标轴上所有闭区间集合。

解 (a) $|Q| = \aleph_0$ 。

证明 令 Q_- 是负有理数集合, 则 $Q = Q_+ \cup Q_- \cup \{0\}$, 且 Q_- 与 Q_+ 等势, Q_+ 是可数无限的, 因此 Q 是可数无限集合。所以 $|Q| = \aleph_0$ 。

(b) $|R \times R| = c$

因为 $|R| = |[0, 1]|$, 所以存在映射 f

$f: R \rightarrow [0, 1]$ 是双射。令

$g: R \times R \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ 为

$$g(\langle x, y \rangle) = \langle f(x), f(y) \rangle$$

则 g 是双射, 所以 $|R \times R| = |[0, 1] \times [0, 1]| = c$ 。

(c) 设 A 表示 x 轴上所有闭区间的集合, $A = \{[a, b] | a \leq b \wedge a, b \in R\}$, 则令 $f: A \rightarrow R \times R$, $f([a, b]) = (a, b)$ 则 f 是双射的, 所以 $|A| = |R \times R| = c$ 。

5.2.11 找出下述集合的基数, 并证明之。

(a) $\rho(Q)$ 。

(b) $R - Q$ 。

解 (a) $|\rho(Q)| = c$ 。

因为 Q 是可数无限的, 所以存在双射 $f, f: Q \rightarrow N$ 。由 f 可诱导出 $\rho(Q)$ 到 $\rho(N)$ 上的双射。因此 $|\rho(Q)| = |\rho(N)| = c$ 。

(b) $|R - Q| = c$ 。

(I) 作函数 $f: R - Q \rightarrow R$, $f(x) = x$ 。这是单射函数, 所以 $|R - Q| \leq |R| = c$ 。

(II) 作函数 $f: [0, 1] \rightarrow R - Q$,

$$f(x) = x, \quad x \in (0, 1) - Q \text{ 时}$$

$$f(x) = \sqrt{2} + x, \quad x \in (0, 1) \cap Q \text{ 时}$$

这是单射函数, 所以 $c \leq |R - Q|$ 。

由 (I) 和 (II) 得 $|R - Q| = c$ 。

5.2.12 (a) 证明存在一个不可计算的数在任何两个有理数之间, 此两有理数在 $[0, 1]$ 中。

(b) 证明所有在 $[0, 1]$ 中的有理数都是可计算的。

证明 (a) 设 p, q 是 $[0, 1]$ 中的任意两个有理数, 则 $[p, q]$ 与 $[0, 1]$ 等势, 即 $|[p, q]| = c$ 。又设 S 是 $[p, q]$ 间可计算的数的集合, 则由 5.2.2 节例 6 知, $|S| \leq \aleph_0 < c = |[p, q]|$, 因而 p 和 q 之间必有不可计算的数。

(b) 令 A 表示 $[0, 1]$ 内的所有有理数的集合, 则 $\forall x \in A$, x 必可表成无限循环小数。而循环小数是可计算的, 因而结论得证。

5.2.13 证明如果 A 是有限集, B 是无限集, 那么 $|A| < |B|$ 。

证明 A 是有限集。根据定理 5.2-5, $|A| < \aleph_0$ 。 B 是无限集, 根据定理 5.2-7, $\aleph_0 \leq |B|$ 。由 $<$ 和 $\leq$ 的传递性得 $|A| < |B|$ 。

5.2.14 证明可数集合的每一无限子集是可数的。

证明 设 A 是一个可数无限集, B 是 A 的任一无限子集, 则存在双射 $f: N \rightarrow A$ 。在 B 中取一元素 $b_0 \in B$, 令映射 $g: N \rightarrow B$ 如下

$$g(i) = \begin{cases} f(i) & , \text{当 } f(i) \in B \text{ 时} \\ b_0 & , \text{当 } f(i) \notin B \text{ 时} \end{cases}$$

则 g 是 N 到 B 的满射, 因而存在 B 的一个枚举。因此 B 是可数的。

5.2.15 证明集合 A 是无限集的充分必要条件是对于从 A 到 A 的每个映射 f , 有 A 的非空真子集 B , 使 $f(B) \subseteq B$ 。

证明 充分性。若 A 是有限集, 则不妨设 $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, 在 A 上作映射 f 如下:

$$f: A \rightarrow A$$

$$f(a_1) = a_2, f(a_2) = a_3, \dots, f(a_{n-1}) = a_n, f(a_n) = a_1$$

则对此 $f, \forall B \subset A$, 且 $B \neq \emptyset, f(B) \subseteq B$. 得出矛盾, 所以 A 是无限集.

必要性. 设 f 是 A 到 A 的任一映射, 在 A 中任取一元素 $a_0 \in A$, 考虑集合 B_0 如下:

$$B_0 = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{f^n(a_0)\} = \{f^n(a_0) | n \geq 0\}$$

若 $\forall m, n \in N, m \neq n$, 有 $f^m(a_0) \neq f^n(a_0)$, 则令 $B = \{f^n(a_0) | n \geq 1\}$, 则 $a_0 \notin B$, 因而 B 是 A 的真子集且 $f(B) \subseteq B$.

若 $\exists m, n \in N, m < n$, 使 $f^m(a_0) = f^n(a_0)$, 则有 $B_0 = \bigcup_{i=0}^n \{f^i(a_0)\}$. 令 $B = B_0$, 则 B 是一有限集, 因而是 A 的真子集且 $f(B) \subseteq B$, 证毕.

5.2.16 记 $|\rho([0,1])|$ 为 2^c , 找出其它集合有基数 2^c 的例子.

解 $|\rho(N)| = c$, 因而 $|\rho(\rho(N))| = 2^c$.

5.2.17 证明或否定下列各式:

$$(a) |A| = |B| \Rightarrow |\rho(A)| = |\rho(B)|$$

$$(b) (|A| \leq |B| \wedge |C| \leq |D|) \Rightarrow |A^C| \leq |B^D|$$

$$(c) (|A| \leq |B| \wedge |C| = |D|) \Rightarrow |A \times C| \leq |B \times D|$$

$$(d) (|A| \leq |B| \wedge |C| \leq |D|) \Rightarrow |A \cup C| \leq |B \cup D|$$

解 (a) 结论成立.

因为 $|A| = |B|$, 所以存在双射 $f: A \rightarrow B$, 因而由 f 诱导的 $\rho(A)$ 到 $\rho(B)$ 上的映射也是双射, 所以 $|\rho(A)| = |\rho(B)|$.

(b) 结论成立.

设 $|A| \leq |B|$, 且 $|C| \leq |D|$, 所以存在 A 到 B 的单射函数 f 和 C 到 D 的单射函数 g , 作 A^C 到 B^D 的映射 h 如下:

取定 B 中一元素 b_0 ,

$$h: A^C \rightarrow B^D \quad \forall k \in A^C, h(k) \text{ 为}$$

$$h(k): D \rightarrow B$$

$$h(k)(d) = \begin{cases} f(k(c)) & , \text{ 若 } \exists c \text{ 使 } d = g(c) \\ b_0 & , \text{ 否则} \end{cases}$$

由以上构造的 h 是 A^C 到 B^D 的单射, 因而结论成立.

(c) 结论成立.

因为 $|A| \leq |B|, |C| = |D|$, 所以存在 A 到 B 的单射 f , 存在 C 到 D 的双射 g , 作映射 h 为:

$$h: A \times C \rightarrow B \times D$$

$$h(\langle a, c \rangle) = \langle f(a), g(c) \rangle$$

则 h 是单射; 所以结论成立.

(d) 不一定成立. 例如令 $A = \{0, 1\}, B = \{0, 1, 2\}, C = \{2, 3\}, D = \{0, 1, 2\}$, 则 $|A| \leq |B| \wedge |C| \leq |D|$, 但 $|A \cup C| > |B \cup D|$.

5.2.18 设 A 是非空集合, $|B| > 1$, 证明 $|A| < |B^A|$.

证明 因为 A 非空, $|B| > 1$, 所以 B 中至少包含两个元素, 取 $b_1, b_2 \in B, b_1 \neq b_2$, 令 f 为

$$f: A \rightarrow B^A$$

$$f(a) = f_a, \forall a \in A, f_a \text{ 为}$$

$$f_a: A \rightarrow B^A$$

$$f_a(x) = \begin{cases} b_1, & \text{当 } x=a \text{ 时} \\ b_2, & \text{当 } x \neq a \text{ 时} \end{cases}$$

则 f 是 A 到 B^A 的单射, 因而 $|A| \leq |B^A|$ 。

设 f 是 A 到 B^A 的任一映射, 即

$f: A \rightarrow B^A, f(a) = f_a, \forall a \in A, f_a$ 是 A 到 B 的映射。令 A 到 B 的一个映射 g 为

$$g: A \rightarrow B$$

$g(a) = b, \forall a \in A$, 其 b 是取自 B 但不等于 $f_a(a)$, 即 $b \neq f_a(a)$, 则 $\forall a \in A$, 有 $f(a) = f_a \neq g$, 因而 f 不是满射, 因而不是双射, 所以 $|A| < |B^A|$ 。

5.3 基数算术

5.3.1 设 $|A| = |B|, |D| = |E|$ 且 $A \cap D = B \cap E = \emptyset$ 。试证明 $|A \cup D| = |B \cup E|$ 。

证明 因为 $|A| = |B|, |D| = |E|$, 所以有双射 f 和 $g: A \rightarrow B, g: D \rightarrow E$, 又 $A \cap D = B \cap E = \emptyset$ 。令 $h: A \cup D \rightarrow B \cup E$ 。

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当 } x \in A \\ g(x), & \text{当 } x \in D \end{cases}$$

则 h 是双射, 所以 $|A \cup D| = |B \cup E|$ 。

5.3.2 设 $|A| = |B|$ 和 $|D| = |E|$, 试证明 $|A \times D| = |B \times E|$ 。

证明 因为 $|A| = |B|, |D| = |E|$, 所以存在 A 到 B 的双射 f 和 B 到 D 的双射 g , 令 h 如下:

$$h: A \times D \rightarrow B \times E$$

$$h(\langle a, d \rangle) = \langle f(a), g(d) \rangle$$

则 h 是双射。因此 $|A \times D| = |B \times E|$ 。

5.3.3 确定下列表达式的值, 字母 n 表示 N 的任一元素。

$$(a) n + \aleph_0$$

$$(b) \aleph_0 + \aleph_0$$

$$(c) n \cdot c$$

$$(d) c \cdot c$$

$$(e) 0^{\aleph_0}$$

$$(f) 1'$$

$$(g) \aleph_0^{\aleph_1}$$

$$(h) \aleph_0^{\aleph_3}$$

$$(i) \aleph_0^{\aleph_0^{\aleph_0}}$$

$$(j) c^0$$

$$(k) c^3$$

$$(l) c + (\aleph_0^5 \cdot c + 3^{\aleph_0})$$

$$\text{解 } (a) n + \aleph_0 = \aleph_0$$

$$(b) \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

$$(c) n \cdot c = c$$

$$(d) c \cdot c = c$$

$$(e) 0^{\aleph_0} = 0$$

$$(f) 1' = 1$$

$$(g) \aleph_0^{\aleph_1} = \aleph_0^{\aleph_0}$$

$$(h) \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0}$$

$$(i) \aleph_0^{\aleph_0} = C$$

$$(j) c^0 = 1$$

$$(k) c^3 = c$$

$$(l) c + (\aleph_0^{\aleph_0} \cdot c + 3^{\aleph_0}) = c$$

5.3.4 找出下述每一集合的基数:

$$(a) R \cup R^2.$$

$$(b) S \times \Sigma^*, \text{ 这里 } |S| = n, n \in N.$$

(c) 元素在 R 中的所有 $m \times n$ 矩阵的集合。

(d) 整数分量的所有 n 个分量的向量集合。

(e) 所有从 Σ^* 到 N 的函数集合。

(f) 所有从 $I \times I$ 到 I 的函数集合。

(g) 有理数元素的所有 $n \times n$ 矩阵集合。

解 (a) $|R \cup R^2| = c$

$$(b) |S \times \Sigma^*| = \aleph_0^{\aleph_0}$$

(c) 基数为 c

(d) 基数为 $\aleph_0^{\aleph_0}$

(e) 基数为 $c^{\aleph_0}$

(f) 基数为 c

(g) 基数为 $\aleph_0^{\aleph_0}$

5.3.5 对基数我们没有定义减法。试证明下述定义不是良定的。

定义: 设 A 和 B 是集合, 使 $|A| = a$, $|B| = b$ 和 $B \subseteq A$, 那么 $a - b = |A - B|$ 。

证明 令 $A = I$, $B = N$, 则 $|A - B| = \aleph_0^{\aleph_0}$, 因而 $\aleph_0^{\aleph_0} - \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0}$ 。又若令 $A = N$, $B = I_+$, 则 $|A - B| = 1$, 则又得 $\aleph_0^{\aleph_0} - \aleph_0^{\aleph_0} = 1$ 。因而此定义不是良定的。

5.3.6 证明下列各题:

(a) 如果 A 是无限集合, B 是可数集合, 则 $|A \cup B| = |A|$ 。

(b) 如果 A 是不可数集合, B 是可数集合, 则 $|A - B| = |A|$ 。

(c) $[0, 1]$ 中的无理数的集合, 其基数是 c 。

证明 (a) A 是无限集, B 是可数集, 因而有 $|B| \leq |A|$, 所以 $|A \cup B| \leq |A| + |B| = |A|$ 。又 $|A| \leq |A \cup B|$, 所以 $|A \cup B| = |A|$ 。

(b) B 是可数的, 易知 $B - A$ 也是可数的, 引用 (a) 的结果得:

$$|A| = |A \cup (B - A)| = |(A - B) \cup B| = |(A - B)|$$

得出最后一步, 是因为 $A - B$ 是无限的。若不然, $(A - B) \cup B$ 可数, 与事实 $|A| = |(A - B) \cup B|$ 矛盾。

(c) 令 $A = [0, 1]$, B 是 $[0, 1]$ 中的有理数的集合, 则 A 不可数, B 可数, 由 (b) 得 $[0, 1]$ 中无理数的集合的基数为 c 。

5.3.7 设 a , b 和 d 是基数,

(a) 证明如果 $a \leq b$, 那么 $a + d \leq b + d$ 。

(b) 用反例表明 $a < b$ 不蕴含着 $a + d < b + d$ 。

(c) 证明如果 $a \leq b$, 那么 $ad \leq bd$ 。

(d) 表明 $a < b$ 不蕴含着 $ad < bd$ 。

证明 (a) $a \leq b, d \leq d$, 由定理 5.3-2 得 $a+d \leq b+d$ 。

(b) 令 $A = \{0\}, B = \{0, 1\}$, 则 $|A| = 1 = a, |B| = 2 = b$, 但

$$a + \aleph_0 = b + \aleph_0.$$

(c) $a \leq b, d \leq d$, 由定理 5.3-5 得

$$ad \leq bd$$

(d) $A = \{0\}, B = \{0, 1\}, D = N$, 则 $|A| = 1 = a, |B| = 2 = b, d = |D| = \aleph_0$ 。因此

$$ad = bd$$

5.3.8 证明定理 5.3-4。

证明 设 A, B, C, D 是任意集合, $|A| = a, |B| = b, |C| = c, |D| = d$ 且 $B \cap D = \emptyset$, 则

(1) $a \cdot b = |A \times B| = |B \times A| = b \cdot a$, 所以基数乘法是可交换的。

(2) $(a \cdot b) \cdot d = |(A \times B) \times D| = |A \times (B \times D)| = a \cdot (b \cdot d)$

因而是可结合的。

(3) $a(b+d) = |A \times (B \cup D)| = |(A \times B) \cup (A \times D)| = ab + ad$

因而是可分配的。

5.3.9 证明定理 5.3-5 的(a)部分。

证明 (a) 设 $|A| = a, |B| = b, |D| = d, |E| = e$, 且 $a \leq b, d \leq e$ 。因而存在单射 $f: A \rightarrow B$, 存在单射 $g: D \rightarrow E$ 。令 $h: A \times D \rightarrow B \times E$

$$h(\langle a, d \rangle) = \langle f(a), g(d) \rangle$$

则 h 是单射, 所以 $ad \leq be$ 。

5.3.10 证明对任一整数 $n \geq 2, n^{\aleph_0} = c$ 。

证明 $\{0, 1\}^N \subseteq \{0, 1, \dots, n-1\}^N \subseteq N^N$ 。已得结论 $c = 2^{\aleph_0}$, $|N^N| = c$ 。所以 $n^{\aleph_0} = c$

5.3.11 证明定理 5.3-8 的(a)部分。

证明 (a) 设 $|A| = a, |B| = b, |D| = d$, 且 $a \leq b, d \leq e$, 则存在单射函数 $f: A \rightarrow B$ 。存在单射函数 $g: D \rightarrow E$, 作映射 $h: A^D \rightarrow B^E$, 为

$\forall k \in A^D$ 有

$h(k): E \rightarrow B$ 为

$$h(k)(e) = \begin{cases} f_R(d) & , \text{若存在 } d \in D \text{ 使 } e = g(d) \\ b_0 & , \text{其它} \end{cases}$$

b_0 为 B 中取定的一元。则 h 是单射, 因而 $a^d \leq b^e$ 。

第 6 章 代 数

6.1 代数结构

6.1.1 定义二元运算符 $*$ 的意义如下:

(a) $x * y = x^y$, 它是正整数集合中的运算吗?

(b) $x * y = x - y$, 它是正整数集合中的运算吗? 它是整数集合中的运算吗?

解 (a) $x * y = x^y$ 是正整数集合中的运算。

(b) $x * y = x - y$ 不是正整数集合中的运算, 它是整数集合中的运算。

6.1.2 证明如果 $*$ 是定义在集合 S 上的可交换运算, 那么左么元和右么元就是么元。

证明 设 I_l 是 S 的左么元, 则 $\forall x \in S, I_l * x = x$, 又 $*$ 是可交换的, 所以 $x * I_l = x$, 因而 I_l 就是 S 的么元, 同理 I_r 也是 S 的么元。

6.1.3 证明定理 6.1-2。

证明 因 0_l 和 0_r 分别是左零元和右零元, 故

$$0_l = 0_l * 0_r = 0_r$$

6.1.4 给定一张二元运算的运算表, 你如何去判定这个运算是可交换的? 可结合的? 存在么元? 存在零元? 如果存在么元, 如何找出每个元素的逆元? 试对下表作以上各项的判定。

解 如果运算表关于主对角线是对称的, 则这个运算是可交换的。无简便方法去鉴别出可结合性, 除非通项核对。某一行的元素与最上面的一行元素相同, 则存在左么元。

$\circ$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	c	c	b

若某一列的元素分别与最左面一列的元素相同, 则存在右么元。若表中某一行的元素都与该行左面的元素相同, 则存在左零元。若某一列的每一元素都与该列最上面的元素相同, 则存在右零元。若存在么元, 那么么元所在行的元素与所在列的元素互为左、右逆元。

对相应的表给出的运算, 它是可交换的, 可结合的, 存在么元 a , 不存在零元。 a 的逆元为 a , 其余元素无逆元。

对相应的表给出的运算, 它是可交换的, 可结合的, 存在么元 a , 不存在零元。 a 的逆元为 a , 其余元素无逆元。

6.1.5 设函数 $g: I \times I \rightarrow I$ 定义为

$$g(x, y) = x * y = x + y - xy$$

试证明二元运算 $*$ 是可交换的和可结合的。求出么元, 并指出每个元素的逆元。

证明 $\forall x, y \in I,$

$$g(y, x) = y + x - yx = x + y - xy = g(x, y)$$

所以 $*$ 是可交换的。

$$\forall x, y, z \in I,$$

$$(x * y) * z = (x + y - xy) * z = x + y + z + xyz - xz - yz - xy$$

$$x * (y * z) = x * (y + z - yz) = x + y + z + xyz - xy - xz - yz$$

所以运算 $*$ 是可结合的。

0 是其么元, 0 的逆元为 0, 2 的逆元为 2, 其余元素无逆元。

6.1.6 考虑代数系统 $\langle R, * \rangle$, 这里 R 是实数, $*$ 定义如下:

$$(a) \ a_1 * a_2 = |a_1 - a_2|$$

$$(b) \ a_1 * a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$$

试分别讨论运算 $*$ 的可交换性和可结合性, R 有否么元, 对于运算 $*$, 每个元素的逆元是什么?

解 (a) $a_1 * a_2 = |a_1 - a_2| = |a_2 - a_1|$ 因而是可交换的, 但不是可结合的, 例如令 $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_3 = 0$, 则 $(a_1 * a_2) * a_3 = 2$, $a_1 * (a_2 * a_3) = 0$, 且 R 无么元。

(b) $a_1 * a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) = \frac{1}{2}(a_2 + a_1) = a_2 * a_1$, 因而是可交换的。但不是可结合的, 无么元。

6.1.7 设 $*$ 是自然数集合 N 中的二元运算, 并定义 $x * y = x$ 。试证明 $*$ 不可交换但可结合。有么元和逆元吗?

证明 令 $x = 1$, $y = 2$, 则 $x * y = 1$, 但 $y * x = 2$, 所以不可交换。

$\forall x, y, z \in N$, $(x * y) * z = x * z = x$, $x * (y * z) = x * y = x$, 所以是可结合的。任何元素都是右么元, 但无左么元。无逆元。

6.1.8 设 $*$ 是正整数集合 I_+ 的二元运算, 且 $x * y = x$ 和 y 的最小公倍数。试证明 $*$ 是可交换和可结合的。求出么元, 并指出哪些元素是等幂的(即符合公式 $x * x = x$)。

证明 $\forall x, y \in I_+$, x 和 y 的最小公倍数等于 y 和 x 的最小公倍数, 所以 $x * y = y * x$, $\forall x, y \in I_+$, $(x * y) * z = x, y, z$ 的最小公倍数 $= x * (y * z)$ 。所以 $*$ 运算是可交换的、可结合的。

其么元为 1, $\forall x \in I_+$, x 都是幂等的。

6.1.9 设 $\langle S, * \rangle$ 是一代数, $*$ 是可结合的, 并且对所有 $x, y \in S$, 若 $x * y = y * x$, 则 $x = y$ 。试证明对一切 $x \in S$ 有 $x * x = x$ 。

证明 $\forall x \in S$, 因为可结合, 所以有 $(x * x) * x = x * (x * x)$, 因而 $\forall x \in S$ 有 $x * x = x$ 。

6.1.10 设 $A = \{a, b\}$, S 是 A 上的所有函数集合, $S = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, 其中

$$f_1(a) = a \quad f_1(b) = b$$

$$f_2(a) = a \quad f_2(b) = a$$

$$f_3(a) = b \quad f_3(b) = b$$

$$f_4(a) = b \quad f_4(b) = a$$

于是 $\langle S, \circ \rangle$ 是一代数, $\circ$ 是函数的合成运算, 试造出运算 $\circ$ 的运算表, 考察运算 $\circ$ 是否有么元, 哪些元素有逆元。

解 对于 $\langle S, \circ \rangle$ 的运算表为

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_2	f_2	f_2
f_3	f_1	f_1	f_3	f_3
f_4	f_4	f_1	f_2	f_1

运算 $\circ$ 有么元 f_1 , f_2 和 f_1 有逆元, 都是自逆元。

6.1.11 $S = \{a, b\}$, $+$ 和 $\times$ 两个二元运算定义如下表。在代数 $\langle S, +, \times \rangle$ 中, $+$ 对 $\times$ 可分配吗? $\times$ 对 $+$ 呢?

$+$	a	b
a	a	b
b	b	a

$\times$	a	b
a	a	a
b	a	b

解 在代数 $\langle S, +, \times \rangle$ 中, $\times$ 对 $+$ 是可分配的, 但 $+$ 对 $\times$ 是不可分配的, 如

$$(a \times b) + b = b$$

$$(a + b) \times (b + b) = a$$

6.1.12 在代数 $\langle \Sigma^*, \text{连结}, \Delta \rangle$ 中, 这里 $\Sigma = \{a, b\}$, 消去律成立吗? 哪些元素有逆元?

解 $\langle \Sigma^*, \text{连结}, \Delta \rangle$ 消去律成立。只有 Λ 有自逆元。

6.2 子代数

6.2.1 设论述域是整数 I , 按照列于下面的集合在列于顶行的运算下是否封闭, 在相应处填上是(Y)或非(N)。

	$+$	$\cdot$	$-$	$ x \cdot y $	$\max$	$\min$	$ x $	一元减法
(a) I								
(b) N								
(c) $\{x 0 \leq x \leq 10\}$								
(d) $\{x, -5 \leq x \leq 5\}$								
(e) $\{x -10 \leq x \leq 0\}$								
(f) $\{2x x \in I\}$								

解 所填表如下:

	$+$	$\cdot$	$-$	$ x-y $	$\max$	$\min$	$ x $	一元减法
(a) I	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
(b) N	Y	Y	N	Y	Y	Y	Y	N
(c) $\{x 0 \leq x \leq 10\}$	N	N	N	Y	Y	Y	Y	N
(d) $\{x -5 \leq x \leq 5\}$	N	N	N	N	Y	Y	Y	Y
(e) $\{x -10 \leq x \leq 0\}$	N	N	N	N	Y	Y	N	N
(f) $\{2x x \in I\}$	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y

6.2.2 设 $B = \{0, a, b, 1\}$, $S_1 = \{a, 1\}$, $S_2 = \{0, 1\}$, $S_3 = \{a, b\}$, 二元运算 $\oplus$ 和 $*$ 定义如下表。

$\oplus$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

$*$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

试问 $\langle S_1, *, \oplus \rangle$ 是代数吗? 是 $\langle B, *, \oplus, 1, 0 \rangle$ 的子代数吗? $\langle S_2, *, \oplus, 1, 0 \rangle$ 是 $\langle B, *, \oplus, 1, 0 \rangle$ 的子代数吗? $\langle S_3, *, \oplus \rangle$ 是代数吗? 说明理由。

解 $\langle S_1, *, \oplus \rangle$ 是代数, 但不是 $\langle B, *, \oplus, 1, 0 \rangle$ 的子代数, 因为常数 $0 \notin S_1$ 。 $\langle S_2, *, \oplus, 1, 0 \rangle$ 是 $\langle B, *, \oplus, 1, 0 \rangle$ 的子代数, 因为 S_2 对运算 $*$ 和 $\oplus$ 封闭, 且常数 $0, 1 \in S_2$ 。 $\langle S_3, *, \oplus \rangle$ 不是代数, 因为 S_3 对 $\oplus, *$ 运算不封闭。

6.3 同态

6.3.1 (a) 证明两个代数不是同构的, 如果它们的载体有不同的基数。

(b) 举例证明具有相同构成成分的两个代数, 甚至它们的载体有相同的基数, 也可以不同构。

证明 (a) 设 $A = \langle S, *, \Delta, k \rangle$, 和 $A' = \langle S', *, \Delta', k' \rangle$ 是两个代数, $|S| \neq |S'|$, 因而不存在双射 $h: S \rightarrow S'$, 所以两个代数不同构。

(b)	$+$	0	1
	0	0	1
	1	1	0

	$*$	0	1
	0	0	0
	1	0	1

上述两代数有相同的构成成分和基数, 但不同构。因为 $f(1+1) = f(0)$ 而 $f(1) * f(1) = f(1)$, f 是双射函数时, $f(0) \neq f(1)$, 因而 $f(1+1) \neq f(1) * f(1)$, 运算不保持。

6.3.2 对具有 $\langle S, *, k \rangle$ 形式的构成成分的代数证明定理 6.3-1。这里 $*$ 是二元运算, k 是常数。

证明 C 为具有 $\langle S, *, k \rangle$ 形式的代数的集合。则 $\forall \langle S, *, k \rangle \in C$, 令 h 为 S 到 S 的恒等恒射, 则可得它是 $\langle S, *, k \rangle$ 到 $\langle S, *, k \rangle$ 的同构, 因而 $(C, \text{同构})$ 是自反的。

若 $A = \langle S, *, k \rangle$ 与 $A' = \langle S', *', k' \rangle$ 同构, 则存在一个 S 到 S' 的双射 h , 它是 A 到 A' 的同构, 则 h^{-1} 是 A' 到 A 的同构, 因而 $(C, \text{同构})$ 是对称的。

若 $A_1, A_2, A_3 \in C$, 且 A_1 与 A_2, A_2 与 A_3 都是同构的, 则存在 A_1 到 A_2 的同构 f 和 A_2 到 A_3 的同构 g , 因而 gf 是 A_1 到 A_3 的同构, 所以 A_1 与 A_3 同构。因而 $(C, \text{同构})$ 具有传递性, 因此它是等价关系。

6.6.3 考察代数系统 $A = \langle N, \times \rangle$ 和 $B = \langle \{0, 1\}, \times \rangle$, 其中 N 是自然数集合, $\times$ 是一般乘法。给定函数 $f: N \rightarrow \{0, 1\}$

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } n = 2^k \quad (k \geq 0) \\ 0 & \text{其它情况} \end{cases}$$

试证明 f 是从 A 到 B 的同态。

证明 (1) f 是 N 到 $\{0, 1\}$ 的函数。

(2) $\forall m, n \in N$, 若 $m = 2^{k_1}, n = 2^{k_2}$, 则 $f(mn) = f(2^{k_1+k_2}) = 1 = f(m) \times f(n)$, 若 $m = 2^{k_1}, \forall k_2, n \neq 2^{k_2}$, 则 $\forall k, mn \neq 2^k$ 。所以 $f(mn) = 0 = f(2^{k_1}) \times f(n) = f(m) \times f(n)$ 。

若 $m \neq 2^{k_1}, n \neq 2^{k_2}, \forall k_1, k_2 \geq 0$, 则 $mn \neq 2^k, \forall k \geq 0$, 因此

$$f(mn) = 0 = f(m) \times f(n)$$

所以 $\forall m, n \in N$ 有 $f(mn) = f(m) \times f(n)$ 。又因为它们有相同的构成成分。因此 f 是 A 到 B 的同态。

6.3.4 代数系统 $A = \langle S, * \rangle$ 和 $B = \langle P, \oplus \rangle$, 由右边运算表给定, 试证明 A 和 B 同构。

证明 令 $h: S \rightarrow P$, 为 $h(a)=3, h(b)=2, h(c)=1$, 则 h 是 S 到 P 的双射。又易验证运算在 h 作用下保持, 且 A 和 B 的么元分别为 a 和 3 , 且 $h(a)=3$, 因此 A 和 B 同构。

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	c	b	c

$\oplus$	1	2	3
1	1	2	1
2	1	2	2
3	1	2	3

6.3.5 设 $A = \{\emptyset, A\}$, 代数系统 $(\{\emptyset, A\}, \cup, \cap)$ 和 $(\{\{a, b\}, \{a, b, c\}\}, \cup, \cap)$ 是否同构。

解 $(\{\emptyset, A\}, \cup, \cap)$ 和 $(\{\{a, b\}, A\}, \cup, \cap)$ 是同构的。

因为令 $h: \{\emptyset, A\} \rightarrow \{\{a, b\}, A\}$, $h(\emptyset) = \{a, b\}, h(A) = A$, 则 $h(x \cup y) = h(x) \cup h(y), h(x \cap y) = h(x) \cap h(y)$ 。所以 h 是两个代数的同构映射。

6.3.6 假定 h 是从 $\langle S, * \rangle$ 到 $\langle S', *' \rangle$ 的同态, 这里 $*$ 和 $*$ ' 是二元运算。

(a) 证明 $\langle h(S), *' \rangle$ 的么元, 可以不是 $\langle S', *' \rangle$ 的么元。

(b) 证明 $\langle h(S), *' \rangle$ 的零元, 可以不是 $\langle S', *' \rangle$ 的零元。

(c) 证明 $\langle h(S), *' \rangle$ 中, $h(x)$ 的逆元 $h(x^{-1})$, 这里 $x \in S$, 可以不是 $\langle S', *' \rangle$ 中的 $h(x)$ 的逆元。

证明 (a) 取第四题的 A 和 B 分别为 $\langle S, * \rangle$ 及 $\langle S', *' \rangle$, 令 $h: S \rightarrow S'$ 为 $h(a)=1, h(b)=1, h(c)=1$, 则 h 是 $\langle S, * \rangle$ 到 $\langle S', *' \rangle$ 的同态, 且 $\langle h(S), *' \rangle$ 的么元为 1 , 但它不是 $\langle S', *' \rangle$ 的么元。

(b) 取同(a)中一样的 $\langle S, * \rangle, \langle S', *' \rangle$, 1 是 $\langle h(S), *' \rangle$ 的零元, 但它不是 $\langle S', *' \rangle$

中的零元。

(c) 取同(a)中一样的 $\langle S, * \rangle$, $\langle S', *' \rangle$ 及 h , 则 $\langle h(s), *' \rangle$ 中 $h(x)$ 的逆元为 1 , $h(x)$ 也为 1 , 但 $h(x)=1$ 在 $\langle S', *' \rangle$ 中无逆元。

6.3.7 (a) 证明恰好存在 i 个从 $\langle N_i, +_i, 0 \rangle$ 到它的自己的同态。(提示: 证明它到自身的同态都有 $f(x)=px(\text{mod } i)$ 形式。)

(b) 描述从 $\langle N_i, +_i, 0 \rangle$ 到 $\langle N_i, +_i, 0 \rangle$ 的所有同态集合。

(c) 描述从 $\langle N_2, +_2, 0 \rangle$ 到 $\langle N_3, +_3, 0 \rangle$ 的所有同态集合。

证明 (a) 设 f 是 $\langle N_i, +_i, 0 \rangle$ 到自身的同态。

设 $f(1)=p$, $p \in N_i$, 则 $\forall x \in N_i$, 由 f 是同态得 $f(x)=(x \times f(1))(\text{mod } i)=px(\text{mod } i)$, 由此可见一旦 $f(1)$ 确定后, 其它元素的象也就确定了。又 $\forall p \in N_i$, 令 $f(x)=px(\text{mod } i)$ 则 f 是 $\langle N_i, +_i, 0 \rangle$ 的自同态。因此可得 $\langle N_i, +_i, 0 \rangle$ 到它自己的同态恰好存在 i 个。

(b) 令 $0 \leq p < i$, 对任一同态 $h: N_i \rightarrow N_i$, $h(x)=h(1)x(\text{mod } i)=px(\text{mod } i)$, 因此同(a)的结论一样, 从 $\langle N_i, +_i, 0 \rangle$ 到 $\langle N_i, +_i, 0 \rangle$ 的同态的集合为

$$\{f \mid f(x)=px(\text{mod } i) \quad p \in N_i\}$$

(c) 从 $\langle N_2, +_2, 0 \rangle$ 到 $\langle N_3, +_3, 0 \rangle$ 的同态只有一个 $f: N_2 \rightarrow N_3$, $f(0)=0$, $f(1)=0$ 。若另有一个 $h: N_2 \rightarrow N_3$, 则 $h(0)=h(1+_2 1)=h(1)+_3 h(1) \cdots \textcircled{1}$, $h(1)=1$ 或 $h(1)=2$, $\textcircled{1}$ 式均不成立, 因此只有 $h(1)=0$, 即 $f(x)=h(x)$ 。

6.3.8 设 h 是从 $A=\langle S, *, k \rangle$ 到 $A'=\langle S', *', k' \rangle$ 的同态, 证明如果 $\langle T, *', k' \rangle$ 是 A' 的子代数, 那么 $\langle h^{-1}(T), *, k \rangle$ 是 A 的子代数。

证明 因为 h 是 A 到 A' 的同态, $\langle T, *', k' \rangle$ 是 A' 的子代数, 则有

(I) $h^{-1}(T) \subseteq S$

(II) $\forall x, y \in h^{-1}(T)$, $\exists x', y' \in T$ 使 $h(x)=x'$, $h(y)=y'$, 所以 $h(x * y)=h(x) * h(y)=x' *' y' \in T$, 因此 $x * y \in h^{-1}(T)$, $h^{-1}(T)$ 对运算封闭。

(III) 因为 $h(k)=k' \in T$, 所以 $k \in h^{-1}(T)$ 。因此 $\langle h^{-1}(T), *, k \rangle$ 是 A 的子代数。

6.3.9 设 f_1 和 f_2 都是从代数 $\langle S, * \rangle$ 到 $\langle S', *' \rangle$ 的同态, $*$ 和 $*'$ 都是二元运算, 且 $*'$ 是可交换和可结合的, 证明函数

$$h: S \rightarrow S' \\ h(x) = f_1(x) *' f_2(x)$$

是从 $\langle S, * \rangle$ 到 $\langle S', *' \rangle$ 的同态。

证明 (I) 因为 f_1, f_2 都是从 $\langle S, * \rangle$ 到 $\langle S', *' \rangle$ 的同态, 所以 $h: S \rightarrow S'$, $h(x)=f_1(x) *' f_2(x)$ 是 S 到 S' 的映射。

(II) $\forall a, b \in S$,

$$\begin{aligned} h(a * b) &= f_1(a * b) *' f_2(a * b) \\ &= f_1(a) *' f_1(b) *' f_2(a) *' f_2(b) \\ &= f_1(a) *' f_2(a) *' f_1(b) *' f_2(b) \\ &= h(a) *' h(b) \end{aligned}$$

因此 h 是 $\langle S, * \rangle$ 到 $\langle S', *' \rangle$ 的同态。

6.3.10 如果 h_1 是从代数 $\langle S, *, \triangle, k \rangle$ 到 $\langle S', *', \triangle', k' \rangle$ 的同态; h_2 是从代数 $\langle S', *', \triangle', k' \rangle$ 到 $\langle S'', *'', \triangle'', k'' \rangle$ 的同态。试证明 $h_2 \circ h_1$ 是从代数 $\langle S, *, \triangle, k \rangle$ 到

$\langle S'', *, \triangle'', k'' \rangle$ 的同态。

证明 (i) 因为 h_1, h_2 分别是 S 到 S' , S' 到 S'' 的映射, 因此 $h_2 \circ h_1$ 是 S 到 S'' 的映射。

(ii) $\forall a, b \in S$,

$$\begin{aligned} h_2 \circ h_1(a * b) &= h_2(h_1(a) *' h_1(b)) = h_2(h_1(a) *'' h_2(h_1(b))) \\ &= h_2 \circ h_1(a) *'' h_2 \circ h_1(b) \end{aligned}$$

(iii) $h_2 \circ h_1(\triangle(a)) = h_2(\triangle' h_1(a)) = \triangle'' h_2 \circ h_1(a)$

(iv) $h_2 \circ h_1(k) = h_2(k') = k''$

因此 $h_2 \circ h_1$ 是从代数 $\langle S, *, \triangle, k \rangle$ 到 $\langle S'', *, \triangle'', k'' \rangle$ 的同态。

6.4 同余关系

6.4.1 设 F 是本节定义的分式集合, 证明关系 $P/Q \sim R/S \Leftrightarrow PS = RQ$ 是 $\langle F, +, -, - \rangle$ 上的同余关系, 这里第一个“-”号是二元减法运算, 第二个“-”号代表一元减。(注意: 首先必须证明 $\sim$ 是一等价关系。)

证明 首先证明 $\sim$ 是一等价关系。

因为 $\forall P/Q \in F, PQ = QP$

所以 $P/Q \sim P/Q$

所以 $\sim$ 是自反的。

若 $P/Q \sim R/S$, 则 $RQ = PS$ 。

所以 $R/S \sim P/Q$

所以 $\sim$ 是对称的。

若 $P/Q \sim R/S, R/S \sim T/U$, 则 $PS = RQ, RU = TS$ 。两式相乘后得

$$PU = TQ$$

所以 $P/Q \sim T/U$, 所以 $\sim$ 是传递的, 因此 $\sim$ 是等价关系。

设 $P/Q \sim R/S, \forall C = T/U \in F$,

$$P/Q + T/U = (PU + TQ)/QU$$

$$R/S + T/U = (RU + TS)/US$$

$$(PU + TQ)US = PU^2S + TQUS$$

$$(RU + TS)QU = RU^2Q + TSQU$$

因为 $PS = QR$

所以 $RU^2Q + TSQU = PU^2S + TQUS$

因此 $P/Q + T/U \sim R/S + T/U$

因为 $+$ 是可交换的, 所以

$$T/U + P/Q \sim T/U + R/S$$

又对于一元减法“-”, 若 $P/Q \sim R/S$, 则 $PS = RQ$, 所以 $-PS = -RQ$ 。

因此, $-P/Q \sim -R/S$, 因而 $\sim$ 对一元减法是同余关系。

对于二元减法, 若 $P/Q \sim R/S$, 则对 T/U 有

$$P/Q - T/U = (PU - QT)/QU$$

$$R/S - T/U = (RU - ST)/SU$$

$$(PU - QT)SU = PU^2S - STQU$$

$$(RU - ST)QU = RU^2Q - STQU$$

又因为

$$PS = QS$$

所以

$$PU^2S - STQU = RU^2Q - STQU$$

因此

$$P/Q - T/U \sim R/S - T/U$$

$$T/U - P/Q = -(P/Q - T/U) \sim -(R/S - T/U) = T/U - R/S$$

因此 $\sim$ 对二元减法也是同余关系,所以 $\sim$ 对 $\langle F, +, -, \cdot \rangle$ 的每一运算都是同余关系。因而 $\sim$ 是 $\langle F, +, -, \cdot \rangle$ 上的同余关系。

6.4.2 对任一代数 $A = \langle S, *, 1 \rangle$, 证明相等关系和全域关系 $S \times S$ 两者都是 A 上的同余关系。

证明 R_1 表示 S 上的相等关系, 即 $R_1 = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in S \}$, 则 R_1 是 S 上的等价关系。

$\forall a, b \in S$, 若 aR_1b , 则 $a=b$, 所以 $\forall c \in S$ 有 $ac=bc, ca=cb$, 因此, acR_1bc, caR_1cb , 所以 R_1 是 A 上的同余关系。

令 $R_2 = S \times S$, 则 R_2 是 S 上的等价关系, $\forall a, b \in S, aR_2b$, 又 $\forall c, ac, bc, ca, cb$ 都是 S 中的元素, 所以 acR_2bc, caR_2cb 。因此 R_2 也是 A 上的同余关系。

6.4.3 考虑代数 $A = \langle I, + \rangle$, 对 I 上如下定义的每一二元关系, 证明或否定它是 A 上的同余关系。

$$(a) x \sim y \Leftrightarrow (x < 0 \wedge y < 0) \vee (x \geq 0 \wedge y \geq 0)$$

$$(b) x \sim y \Leftrightarrow |x - y| < 0$$

$$(c) x \sim y \Leftrightarrow (x = y = 0) \vee (x \neq 0 \wedge y \neq 0)$$

$$(d) x \sim y \Leftrightarrow x \geq y$$

证明 (a) $\sim$ 不是 $\langle I, + \rangle$ 上的同余关系。令 $a = -1, b = -4, c = 3$, 则 $a \sim b$, 但 $a + c \not\sim b + c$ 。

(b) $\sim$ 是 I 上的空关系, 因此

$(a \sim b) \rightarrow (ac \sim bc) \wedge (ca \sim cb)$ 永真。但 $\sim$ 不是 I 的等价关系, 所以, $\sim$ 不是 A 上的同余关系。

(c) $\sim$ 是 I 上的等价关系, 但不是 A 上的同余关系。例如: 令 $a = -1, b = 1, c = 1$, 则 $a \sim b$, 但 $a + c = 0, b + c = 2$, 所以 $a + c \not\sim b + c$ 。

(d) $\sim$ 不是 I 上的等价关系, 因为它不具有对称性, 所以它不是 A 上的同余关系。

6.4.4 设代数 $A = \langle I, * \rangle$, 其中 I 是整数集合, $*$ 是如下定义的一元运算:

$$*(i) = i^k \pmod{m} \quad (m > 0, k > 0)$$

关系 $\sim$ 定义为

$$i_1 \sim i_2 \Leftrightarrow i_1 \equiv i_2 \pmod{m}$$

$\sim$ 是 A 中的同余关系吗?

解 $\sim$ 是 A 中的同余关系。首先 $\sim$ 是 I 上的等价关系。又若 $i_1 \sim i_2$, 则 $i_1 - i_2 = nm, n \in I$, 因而 $i_1^k - i_2^k = (i_1 - i_2)(i_1^{k-1} + i_1^{k-2}i_2 + \cdots + i_2^{k-1}) = nm(i_1^{k-1} + i_1^{k-2}i_2 + \cdots + i_2^{k-1})$ 。所以,

$$\begin{aligned}
 * (i_1) - * (i_2) &= i_1^k (\bmod m) - i_2^k (\bmod m) = (i_1^k - i_2^k) (\bmod m) = 0 = 0 \cdot m \\
 * (i_1) &\equiv * (i_2) (\bmod m) \\
 * (i_1) &\sim * (i_2)
 \end{aligned}$$

因此 $\sim$ 是 A 中的同余关系。

6.4.5 在分数集合 F 上定义一元运算 Δ 为

$$\Delta\left(\frac{P}{Q}\right) = \frac{P}{Q^2}$$

定义 F 上的等价关系 $\sim$ 为

$$P/Q \sim R/S \Leftrightarrow PS = RQ$$

试证明关于运算 Δ , $\sim$ 不是同余关系。

证明 $\sim$ 是 F 上的等价关系, 但不是 $\langle F, \Delta \rangle$ 的同余关系。例如:

令 $a = 1/2$, $b = 2/4$, 则 $a, b \in F$, 且 $a \sim b$, 但 $\Delta(a) = 1/4$, $\Delta(b) = 2/16$, $\Delta(a) \not\sim \Delta(b)$ 。

因此 $\sim$ 不是 Δ 的同余关系。

6.4.6 设代数 $A = \langle I, +, \times \rangle$, I 是整数集合, $+$ 、 $\times$ 是一般加法和乘法, 定义 I 上的关系 $\sim$ 为

$$x \sim y \Leftrightarrow |x| = |y|$$

对运算 $+$, $\sim$ 是同余关系吗? 对运算 $\times$, $\sim$ 是同余关系吗?

解 $\sim$ 是 I 上的等价关系。但对运算 $+$, $\sim$ 不是同余关系。例如: 令 $a = -1$, $b = 1$, 则 $a \sim b$, 令 $c = 1$, 则 $|a+c| \neq |b+c|$ 。所以 $a+c \not\sim b+c$ 。

对运算 $\times$, $\sim$ 是同余关系。若 $a \sim b$, 则 $|a| = |b|$, $\forall c \in I$, 则 $|ac| = |a| \times |c| = |b| \times |c| = |bc|$, 所以 $a \times c \sim b \times c$; 又乘法满足交换律, 所以 $c \times a \sim c \times b$, 因此 $\sim$ 对于 $\times$ 是同余关系。

6.4.7 仿照图 6.1, 作出定理 6.4-1 的示意图。

解 定理 6.4-1 的示意图如图 6.2 所示。

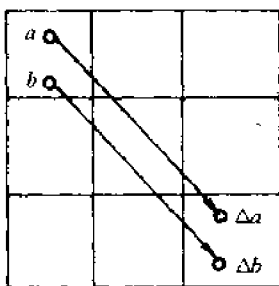
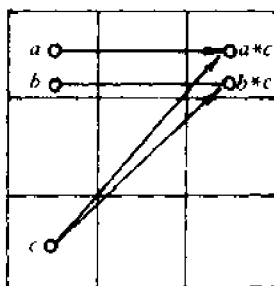


图 6.1

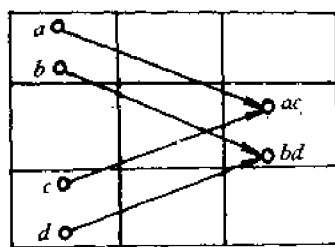


图 6.2

6.4.8 考察代数 $A = \langle N_3, +_3, \times_3 \rangle$, 这里 $N_3 = \{0, 1, 2\}$, $+_3$ 是模 3 加法, $\times_3$ 是模 3 乘法, $\sim$ 是 N_3 中任一等价关系。

(a) 试证明如果 $\sim$ 对 $+_3$ 满足置换性质, 则对 $\times_3$ 也满足置换性质。

(b) 如果 $\sim$ 对 $\times_3$ 满足置换性质, 则对 $+_3$ 却未必满足置换性质。

证明 (a) 若 $\sim$ 对 $+$ 满足置换性质, 则 $a \sim b$ 时有 $a +_3 a \sim b +_3 b$, 即 $2a \sim 2b$, 另外 $1a \sim 1b$, $0a \sim 0b$ 是显然的, 所以, 对任意 c 有 $ca \sim cb$. 又乘法可交换, 所以 $ac \sim bc$, 因此等价关系 $\sim$ 对 $\times_3$ 也满足置换性质。

(b) 对于 $R = \{0\} \times \{0\} \cup \{1, 2\} \times \{1, 2\}$, 它是 N_3 上的等价关系, 且对于 $\times_3$ 满足置换性质, 但对 $+$ 不满足置换性质。例如 $1 \sim 2$, 但 $1 +_3 1 \not\sim 2 +_3 1$. 因而(b)得证。

6.4.9 设 k 是一自然数, 描述 $\langle \{0, 1, 2, \dots, k\}, \max \rangle$ 形式的代数上所有同余关系类。

解 设 R 是 $\langle \{0, 1, 2, \dots, k\}, \max \rangle$ 上的同余关系, $\forall m, n \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$, 若有 mRn , 其中 $m < n$, 则对任意 p , $m \leq p \leq n$, 欲 $\max\{m, p\} \sim \max\{n, p\}$, 必须有 $p \sim n$. 因此, 若 $\sim$ 是同余关系, 且 $m \sim n$, 则 m, n 之间的一切整数必须在同一等价类中。因而 $\langle \{0, 1, 2, \dots, k\}, \max \rangle$ 上的同余类为 $\{\{0, 1, \dots, i_1\}, \{i_1+1, i_1+2, \dots, i_2\}, \dots, \{i_{s-1}+1, i_{s-1}+2, \dots, i_s\}\}$, 其中 $0 \leq i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_s \leq k$.

6.4.10 试证明在代数 $\langle S, *, \triangle \rangle$ 中任意两个同余关系的交也是一个同余关系。

证明 设 R_1, R_2 是集合 A 上的同余关系, 则 R_1, R_2 都是 A 上的等价关系, 因而 $R_1 \cap R_2$ 也是 A 上的等价关系。对于 A 上的任一二元运算 $*$, 若有 $aR_1 \cap R_2 b$, 则 $aR_1 b$ 且 $aR_2 b$, 因而对任意 c 有 $acR_1 bc, caR_1 cb, acR_2 bc, caR_2 cb$, 所以有 $acR_1 \cap R_2 bc, caR_1 \cap R_2 cb$. 因此 $R_1 \cap R_2$ 对 $*$ 是同余关系。对于一元运算 $\triangle$, 若 $aR_1 \cap R_2 b$, 则 $aR_1 b$ 且 $aR_2 b$, 因而有 $\triangle aR_1 \triangle b, \triangle aR_2 \triangle b$, 因而有 $\triangle aR_1 \cap R_2 \triangle b$. 所以, $R_1 \cap R_2$ 对 $\triangle$ 也是同余关系, 对于其它运算同样可证。因此 $R_1 \cap R_2$ 也是一个同余关系。

6.4.11 试证明在一个代数中两个同余关系的合成未必是同余关系。

证明 考虑代数 $\langle \{0, 1, 2\}, \max \rangle$, 其上的两个关系:

$$R_1 = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle\}$$

$$R_2 = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$$

是 $\langle \{0, 1, 2\}, \max \rangle$ 上的同余关系。但 $R_1 \circ R_2 = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle\}$ 不具有对称性, 它不是一个等价关系, 因此也不是同余关系。因此两个同余关系的合成未必是同余关系。

6.4.12 说明 $\sim$ 是代数 $\langle S, \square \rangle$ 上的同余关系的条件, 这里 $\square$ 是 S 上三元运算。在运算对象 a, b, c 上运算 $\square$ 的结果为 $\square(a, b, c)$ 。

解 $\sim$ 是 $\langle S, \square \rangle$ 上同余关系的条件为:

(i) $\sim$ 是 S 上的等价关系。

(ii) $\forall a, a', b, b', c, c' \in S$, 若 $a \sim a' \wedge b \sim b' \wedge c \sim c'$, 则 $\square(a, b, c) \sim \square(a', b', c')$ 。

6.5 商代数和积代数

6.5.1 给定代数系统 $A = \langle S, *, \triangle \rangle$, 其中 $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $*$ 和 $\triangle$ 都是一元运算, 运算表如下:

R 是 S 中的一种关系, 能产生 S 的划分 $\{\{a_1, a_3\}, \{a_2, a_5\}, \{a_4\}\}$. 试证明 R 是 A 的同余关系。用构造运算表的方法写出商代数 A/R , 并求出从 A 到 A/R 的满同态。

x	$* (x)$	$\Delta(x)$
a_1	a_4	a_1
a_2	a_1	a_2
a_3	a_4	a_1
a_4	a_2	a_3
a_5	a_1	a_5

证明 R 是 S 中的一种关系,能产生 S 的划分,因此 R 是 S 上的一个等价关系。

(i) $a_1 R a_3$, $* (a_1) = * (a_3) = a_4$, 所以

$$* (a_1) R * (a_3), \Delta(a_1) = a_3, \Delta(a_3) = a_1$$

所以 $\Delta(a_1) R \Delta(a_3)$

(ii) $a_2 R a_5$, $* (a_2) = a_3$, $* (a_5) = a_1$, 所以

$$* (a_2) R * (a_5), \Delta(a_2) = a_2, \Delta(a_5) = a_5$$

$$\Delta(a_2) R \Delta(a_5)$$

所以

(iii) $\forall a_i \in S, a_i R a_i$, 且有 $* (a_i) R * (a_i)$, $\Delta(a_i) R \Delta(a_i)$, 因此 R 是 A 的同余关系。

$$S/R = \{[a_1], [a_2], [a_4]\}$$

商代数的运算表为:

$(S/R, *, \Delta')$	$\Delta'([x])$	$[x]$	$*'([x])$
	$[a_1]$	$[a_1]$	$[a_4]$
	$[a_2]$	$[a_2]$	$[a_1]$
	$[a_4]$	$[a_4]$	$[a_2]$

A 到 A/R 的满同态为

$$h: S \rightarrow S/R$$

$$h(a_1) = [a_1], h(a_2) = [a_2], h(a_3) = [a_1], h(a_4) = [a_4], h(a_5) = [a_2]$$

6.5.2 设 h 是从 $A = \langle S_k, + \rangle$ 到 $A' = \langle S_m, + \rangle$ 的同态。

$$h: S_k \rightarrow S_m, h(x) = nx$$

这里 $S_j = \{x | x \in I \wedge x \geq j\}$, $j, k, m, n \in N$ 并满足 $nk \geq m$ 。令 $\sim$ 表示由 h 诱导的 A 上的同余关系, 描述商代数 $A/\sim$ 。

解 当 $n=0$ 时, $m=0$, 且 $\forall x \in S_k, h(x)=0$, 因此由 h 诱导的等价关系为 $S_k \times S_k$, 故 $S_k/\sim = \{[k]\}$, 商代数 $A/\sim$ 为

$$\langle \{[k]\}, +', [k] + '[k] = [k] \rangle$$

当 $n>0$ 时, $x \sim y \Leftrightarrow nx = ny \Leftrightarrow x = y$ 。因此 $\sim$ 是 S_k 上的相等关系,

$$S_k/\sim = \{[x] | x \geq k \wedge x \in I\}$$

商代数 $A/\sim$ 为

$$\langle S_k/\sim, +' \rangle$$

$$[x] + '[y] = [x+y]$$

6.5.3 设 h 是从 $A = \langle S, *, \Delta, k \rangle$ 到 $A' = \langle S', *, \Delta', k' \rangle$ 的一个满同态, $\sim$ 是由 h 诱导的 S 上的等价关系

$$x \sim y \Leftrightarrow h(x) = h(y)$$

证明 $A/\sim$ 同构于 A' 。

证明 由定理 6.5-2 得 从 $A/\sim = \langle S/\sim, *, \Delta', [k] \rangle$ 到 $\langle h(S), *, \Delta', k' \rangle$ 存在同构。又 h 是 A 到 A' 的满同态, 所以 $h(S) = S'$, 因此

$$\langle h(S), *, \Delta', k' \rangle = \langle S', *, \Delta', k' \rangle$$

因而 $A/\sim$ 同构于 A' 。

6.5.4 设 $A = (\{1, 2, 3\}, \max, 1)$, $A' = (\{5, 6\}, \min, 6)$, 试构造一运算表以表示其积代数。

解 A 和 A' 的积代数 $A \times A'$ 的运算表如下:

$*$	$\langle 1, 5 \rangle$	$\langle 1, 6 \rangle$	$\langle 2, 5 \rangle$	$\langle 2, 6 \rangle$	$\langle 3, 5 \rangle$	$\langle 3, 6 \rangle$
$\langle 1, 5 \rangle$	$\langle 1, 5 \rangle$	$\langle 1, 5 \rangle$	$\langle 2, 5 \rangle$	$\langle 2, 5 \rangle$	$\langle 3, 5 \rangle$	$\langle 3, 5 \rangle$
$\langle 1, 6 \rangle$	$\langle 1, 5 \rangle$	$\langle 1, 6 \rangle$	$\langle 2, 5 \rangle$	$\langle 2, 6 \rangle$	$\langle 3, 5 \rangle$	$\langle 3, 6 \rangle$
$\langle 2, 5 \rangle$	$\langle 2, 5 \rangle$	$\langle 2, 5 \rangle$	$\langle 2, 5 \rangle$	$\langle 2, 5 \rangle$	$\langle 3, 5 \rangle$	$\langle 3, 5 \rangle$
$\langle 2, 6 \rangle$	$\langle 2, 5 \rangle$	$\langle 2, 6 \rangle$	$\langle 2, 5 \rangle$	$\langle 2, 6 \rangle$	$\langle 3, 5 \rangle$	$\langle 3, 6 \rangle$
$\langle 3, 5 \rangle$	$\langle 3, 5 \rangle$	$\langle 3, 5 \rangle$	$\langle 3, 5 \rangle$	$\langle 3, 5 \rangle$	$\langle 3, 5 \rangle$	$\langle 3, 5 \rangle$
$\langle 3, 6 \rangle$	$\langle 3, 5 \rangle$	$\langle 3, 6 \rangle$	$\langle 3, 5 \rangle$	$\langle 3, 6 \rangle$	$\langle 3, 5 \rangle$	$\langle 3, 6 \rangle$

6.5.5 设 $A' = \langle S', *, \triangle', k' \rangle$ 和 $A'' = \langle S'', *, \triangle'', k'' \rangle$, 这里 $*$ 和 $*$ 都是二元运算, $\triangle'$ 和 $\triangle''$ 都是一元运算, 考虑积代数 $A' \times A'' = \langle S' \times S'', *, \triangle, \langle k', k'' \rangle \rangle$ 。

(a) 证明如果 A' 和 A'' 的二元运算都是可交换的, 那么积代数的二元运算也是可交换的。

(b) 证明如果 A' 和 A'' 的二元运算都是可结合的, 那么积代数的二元运算也是可结合的。

(c) 证明如果 A' 和 A'' 的常数关于二元运算是么元, 那么积代数的常数关于二元运算是么元。

(d) 证明如果 A' 和 A'' 的常数关于二元运算是零元, 那么积代数的常数关于二元运算是零元。

证明 (a) $\forall \langle a, c \rangle \in S' \times S'', \forall \langle b, d \rangle \in S' \times S'',$ 若 $*$, $*$ 都是可交换的, 则

$$\begin{aligned} & \langle a, c \rangle * \langle b, d \rangle \\ &= \langle a *' b, c *'' d \rangle = \langle b *' a, d *'' c \rangle \\ &= \langle b, d \rangle * \langle a, c \rangle \end{aligned}$$

所以 $*$ 是可交换的。

(b) 若 $*$, $*$ 是可结合的。 $\forall \langle a_1, a_1' \rangle, \langle a_2, a_2' \rangle, \langle a_3, a_3' \rangle \in S' \times S'',$ 则有

$$\begin{aligned} & (\langle a_1, a_1' \rangle * \langle a_2, a_2' \rangle) * \langle a_3, a_3' \rangle \\ &= \langle a_1 *' a_2, a_1' *'' a_2' \rangle * \langle a_3, a_3' \rangle \\ &= \langle (a_1 *' a_2) *' a_3, (a_1' *'' a_2') *'' a_3' \rangle \\ &= \langle a_1 *' (a_2 *' a_3), a_1' *'' (a_2' *'' a_3') \rangle \\ &= \langle a_1, a_1' \rangle * \langle a_2 *' a_3, a_2' *'' a_3' \rangle \\ &= \langle a_1, a_1' \rangle * (\langle a_2, a_2' \rangle * \langle a_3, a_3' \rangle) \end{aligned}$$

因此 $*$ 运算是可结合的。

(c) 若 k' 和 k'' 都是么元, 则 $\forall \langle a, b \rangle \in S' \times S'',$

$$\begin{aligned} \langle k', k'' \rangle * \langle a, b \rangle &= \langle k' *' a, k'' *'' b \rangle = \langle a, b \rangle \\ \langle a, b \rangle * \langle k', k'' \rangle &= \langle a *' k', b *'' k'' \rangle = \langle a, b \rangle \end{aligned}$$

所以 $\langle k', k'' \rangle$ 是么元。

(d) 若 k' 和 k'' 都是零元, 则 $\forall \langle a, b \rangle$ 有

$$\langle k', k'' \rangle * \langle a, b \rangle = \langle k' * 'a, k'' * ''b \rangle = \langle k', k'' \rangle$$

$$\langle a, b \rangle * \langle k', k'' \rangle = \langle a * 'k', b * ''k'' \rangle = \langle k', k'' \rangle$$

所以 $\langle k', k'' \rangle$ 是零元。

6.5.6 设 A 和 A' 是具有非空载体的代数, 定义积代数 $A \times A'$ 上的关系如下:

$$\langle w, x \rangle \sim \langle y, z \rangle \Leftrightarrow w = y$$

(a) 确定何时 $\sim$ 是 $A \times A'$ 上的同余关系。

(b) 证明如果上述关系 $\sim$ 是一同余关系, 那么 $(A \times A')/\sim$ 同构于 A 。

证明 (a) 当 A 与 A' 具有相同的构成成分时 $\sim$ 是 $A \times A'$ 上的同余关系。

(b) 令 $h: A \times A' \rightarrow A$ 为 $h(\langle w, x \rangle) = w$ 。则 h 是 $A \times A'$ 到 A 的满同态, 且

$$\langle w, x \rangle \sim \langle y, z \rangle \Leftrightarrow w = y \Leftrightarrow h(\langle w, x \rangle) = h(\langle y, z \rangle)$$

因此 $\sim$ 是由 h 诱导的同余关系。由定理 6.5-2 得 $(A \times A')/\sim$ 同构于 A 。

6.5.7 设 $A_j = \langle N_j, +_j, 0 \rangle$, 这里 $N_j = \{0, 1, \dots, j-1\}$ 和 $+$ 表示模 j 加法。

(a) 证明 $A_2 \times A_3$ 同构于 A_6 。

(b) 描述 $A_2 \times A_3$ 上同余关系的集合。

(c) 描述 A_m 上同余关系集合, 这里 $m \in I_+$ 。

证明 (a) $N_2 \times N_3 = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$

令 $h: N_2 \times N_3 \rightarrow N_6$ 为

$$h(\langle 0, 0 \rangle) = 0, h(\langle 1, 1 \rangle) = 1$$

$$h(\langle 0, 2 \rangle) = 2, h(\langle 1, 0 \rangle) = 3$$

$$h(\langle 0, 1 \rangle) = 4, h(\langle 1, 2 \rangle) = 5$$

则 h 是双射, 且 h 对 $+$ 运算保持, 因此 h 是 $A_2 \times A_3$ 到 A_6 的同构。

(b) 由 (a) 知, $A_2 \times A_3$ 同构于 A_6 , 因此, 我们研究 A_6 上的同余关系即可。由定理 6.5-1 可知, $A_i = \langle N_i, +_i, 0 \rangle$ 上的每一同余关系 $\sim$ 都对应于一个自然同态。

$$h: N_i \rightarrow N_i/\sim \quad h(x) = [x]$$

而这个自然同态又与一个自同态

$$f: N_i \rightarrow N_i, f(x) = [x] \text{ (这里 } [x] \text{ 是 } [x] \text{ 的一个固定的表示元素)}$$

对应。由定理 6.2-2 知, 由这个自同态即可诱导出同余关系 $\sim$ 。故 A_i 上的同余关系的个数不会超过 A_i 自同态的个数。由 6.3 习题第 7 题 (a) 知, A_i 上恰有 i 个自同态, 它们是:

$$f(x) = px \pmod i \quad (p = 0, 1, \dots, i-1)$$

(1) 当 p 是 i 的因数时, $f(x) = px \pmod i$ (因数是 i 时, 取 $p=0$), 可诱导出不同的同余关系。

(2) 当 p 和 i 互质时, 只能诱导出相等关系, 此种情况已包含在 $p=1$ 时的情况中, (因 1 是 i 的因数) 可不必列出。

(3) 当 p 和 i 不互质时, 有最大公因子 r 时, 其诱导出的同余关系与 $p=r$ 的情况一致。故此种情况也不需列出。

综上所述, A_6 只有 4 种同余关系 (因为只有 6, 3, 2, 1 四个因子), 它们是

① 全域关系。

② 相等关系。

③ $R = \{ \langle 0, 0 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 0, 4 \rangle, \langle 4, 0 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 5, 5 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 5, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 5, 3 \rangle \}$.

④ $R = \{ \langle 0, 0 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 0, 3 \rangle, \langle 3, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 5, 5 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 5, 2 \rangle \}$.

(c) 结论和(b)一样。 A_m 上的同余关系是由以下自同态诱导出来的等价关系

$$h: N_m \rightarrow N_m \quad h(x) = px \pmod{m}$$

这里 p 是 m 的因数。

6.6 半群和独异点

6.6.1 试给出一个半群, 它拥有左么元和右零元, 但它不是独异点。

解 令 $S = \{a, b\}$, 定义运算 $*$ 为

$$a * a = b * a = a$$

$$a * b = b * b = b$$

a 和 b 都是 $\langle S, * \rangle$ 的左么元和右零元。运算封闭, 容易验证结合律成立, 所以 $\langle S, * \rangle$ 是半群, 无么元, 所以不是独异点。

6.6.2 用运算 $\max$ 构造一独异点, 它无零元而有一个无限载体。

解 令 $S = N$, 则 $\langle N, \max, 0 \rangle$ 是独异点, 但无零元。

6.6.3 设 $\Sigma = \{a, b\}$ 是字母表, A 是 Σ^* 中含有 Λ 的所有以 a 开头的字符串集合, 试证 $\langle A, \text{连结}, \Lambda \rangle$ 是独异点。

证明 (i) 以 a 开头的字符串互相连结, 仍得以 a 开头的字符串, 所以运算封闭。

(ii) $\forall x, y, z \in A, (x, y)z = x(y, z)$

(iii) $\forall x \in A, \text{有 } \Lambda x = x \Lambda = x, \Lambda \text{ 是其么元。}$

因此 $\langle A, \text{连结}, \Lambda \rangle$ 是独异点。

6.6.4 设 $S = \{a, b\}$, 试证明半群 $\langle S', \circ \rangle$ 不是可交换的。这里 $\circ$ 是函数的合成。

证明 令 $f_1: S \rightarrow S$ 为 $f(a) = a, f(b) = a, f_2: S \rightarrow S$ 为 $f(a) = b, f(b) = b$, 则 $f_1, f_2 \in S^S$, 但 $f_1 \circ f_2 \neq f_2 \circ f_1$ 。因此, 半群 $\langle S', \circ \rangle$ 不是可交换的。

6.6.5 设 $\langle S, * \rangle$ 是一个半群, $z \in S$ 是个左零元。试证明, 对于任何 $x \in S$ 来说, $x * z$ 也是一个左零元。

证明 因为 $z \in S$ 是个左零元, 所以 $\forall y \in S$ 有 $z * y = z$ 。所以

$$(x * z) * y = x * (z * y) = x * z$$

因此 $x * z$ 也是一个左零元。

6.6.6 设 $\langle S, * \rangle$ 是一个半群, 对于所有的 $x, y \in S$, 如果有 $a * x = a * y \Rightarrow x = y$, 则称元素 $a \in S$ 是左可约的。试证明, 如果 a 和 b 是左可约的, 则 $a * b$ 也是左可约的。

证明 若 a 和 b 都是左可约的。假设有 $(a * b) * x = (a * b) * y$, 则

$$(a * b) * x = a * (b * x)$$

$$(a * b) * y = a * (b * y)$$

由 a 是左可约的, 所以 $b * x = b * y$ 。又 b 是左可约的, 所以 $x = y$ 。因此 $a * b$ 也是左可

约的。

6.6.7 试证明独异点的左可逆元素(或右可逆元素)的集合,能够形成一个子独异点。

证明 设 $\langle S, *, e \rangle$ 是独异点,则令 S_1 是 S 中左可逆元素的集合,则有 $e \in S_1$,因为 $e * e = e$ 。 $\forall x, y \in S_1$,则 $\exists x', y' \in S$ 使

$$x' * x = e$$

$$y' * y = e$$

因此

$$(y' * x') * (x * y) = y' (x' * x) * y = e$$

所以 $x * y \in S_1$,又结合律是继承的,因而 $\langle S_1, *, e \rangle$ 是一个子独异点。

6.6.8 求出 $\langle N_6, +_6 \rangle$ 的所有子半群,然后证明独异点的子半群可以是一个独异点,而不是一个子独异点。

解 $\langle N_6, +_6 \rangle$ 的子半群有:

(1) $\langle \{0\}, +_6 \rangle$

(2) $\langle N_6, +_6 \rangle$

(3) $\langle \{0, 3\}, +_6 \rangle$

(3) $\langle \{0, 2, 4\}, +_6 \rangle$

令 $A = \langle N_5, \max, 0 \rangle$,则 A 是一个独异点,又 $\langle \{4, 5\}, \max \rangle$ 是其子半群,是一个独异点,但不是子独异点。因为4是 $\langle \{4, 5\}, \max \rangle$ 的么元,但 $\langle N_5, \max, 0 \rangle$ 的么元0不在其中。

6.6.9 代数 $\langle S, * \rangle$ 由右表给定。

(a) 试证明此代数是一个循环独异点,并求出生成元。

(b) 试把这个独异点的每一个元素都表示成生成元的幂。

(c) 列出这个独异点中所有等幂元素。

证明 (a) $b=b, c=b^2, d=b^3, a=b^4$,且 a 是 $\langle S, * \rangle$ 的么元,*运算满足结合律,因此 $\langle S, * \rangle$ 是一个循环独异点。

(b) 见(a)。

(c) 这个独异点的等幂元素只有一个,即 a 。

6.6.10 代数 $\langle S, * \rangle$ 由右表给定:

(a) 它是半群吗?

(b) 它是独异点吗?

(c) 它是循环独异点吗?

解 (a) (1)运算封闭;(2)结合律成立 所以 $\langle S, * \rangle$ 是半群。

(b) 它是半群,又含有么元 c ,所以 $\langle S, * \rangle$ 是独异点。

(c) 它不是循环独异点,因为没有生成元。

6.6.11 设 $\langle S, * \rangle$ 是一个半群,证明对于 S 中的 a, b, c ,如果 $a * c = c * a$ 和 $b * c = c * b$,那么, $(a * b) * c = c * (a * b)$ 。

证明 若对 $a, b, c \in S$ 有 $a * c = c * a, b * c = c * b$,则 $(a * b) * c = a * (b * c) = a * (c * b)$

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	b	a
d	d	a	b	c

*	a	b	c	d
a	c	b	a	d
b	b	b	b	b
c	a	b	c	d
d	d	b	d	b

$$b) = (a * c) * b = (c * a) * b = c * (a * b)。$$

6.6.12 设 $\langle \{a, b\}, * \rangle$ 是半群, 这里 $a * a = b$, 证明

$$(1) a * b = b * a$$

$$(2) b * b = b。$$

证明 (1) $a * b = a * (a * a) = (a * a) * a = b * a。$

(2) 因为 $\langle \{a, b\}, * \rangle$ 是半群, 且 $a * a = b$, 所以 $a * b \in \{a, b\}。$

(i) 若 $a * b = a$, 则 $a * a * a = a。$ 因此 $b * b = a * a * a * a = a * a = b。$

(ii) 若 $a * b = b$, 则 $a * a * a = b$, 所以 $b * b = a * a * a * a = a * b = b。$ 因此 $b * b = b。$

6.6.13 设 $\langle S, * \rangle$ 是一个半群, 而且在 S 中有一个元素 a 使得对于 S 中的每一个元素 x 存在着 S 中的 u 和 v 满足关系式

$$a * u = v * a = x$$

证明在 S 中有一个么元。

证明 对于 a , 由条件知存在 u_a 和 v_a 使

$$a * u_a = v_a * a = a$$

$\forall x \in S$, 由条件知存在 u_x 和 v_x 使

$$a * u_x = v_x * a = x$$

所以 $\forall x \in S$, 有

$$v_a * x = v_a * (a * u_x) = (v_a * a) * u_x = a * u_x = x$$

因而 v_a 是其左么元。

同理可得 u_a 是其右么元。

因而 $v_a = u_a$, 且就是其么元。

6.6.14 把定理 6.3-2 和定理 6.3-3 应用到半群或独异点, 可否得出以下结论:

(1) 独异点 A 在 h 下的同态象是独异点 A' 的子代数。

(2) 半群在 h 下的同态象是半群。

(3) 可交换独异点在 h 下的同态象是可交换独异点。

解 三个结论都可得到。

6.6.15 设 h 是从半群 $\langle S, * \rangle$ 到 $\langle T, \otimes \rangle$ 的同态, 若 a 是 S 中的等幂元素, 试证明 T 中也存在等幂元素。

证明 因为 a 是 S 中的等幂元素, 所以

$$h(a) \otimes h(a) = h(a * a) = h(a)$$

因此, $h(a)$ 是 T 中的等幂元素。

6.6.16 设 Σ 是一有限字母表, $\langle \Sigma^*, \text{连结}, \wedge \rangle$ 是一独异点, $\langle S, *, 1 \rangle$ 是任意独异点。对任一映射 $h: \Sigma \rightarrow S$, 证明存在同态 $h^*: \Sigma^* \rightarrow S$, 它是 h 唯一的开拓。

证明 $h: \Sigma \rightarrow S$ 是任一映射, 定义 Σ^* 到 S 的映射 h^* 为

$$h^*: \Sigma^* \rightarrow S$$

$$(i) h^*(\wedge) = 1, \forall x \in \Sigma$$

$$h^*(x) = h(x)$$

(ii) 若对 $x \in \Sigma^*$, $h^*(x)$ 已有定义, 则 $\forall a \in \Sigma$

$$h^*(ax) = h^*(a) * h^*(x)$$

则 h^* 是 Σ^* 到 S 的映射, 且是 h 的开拓。

又 $\forall x \in \Sigma^*$

$$h^*(\wedge x) = h^*(x) = 1 * h^*(x) = h^*(\wedge) * h^*(x)$$

成立。 $\forall x \in \Sigma^*, \forall a \in \Sigma$, 则由 h^* 的定义知

$$h^*(ax) = h^*(a) * h^*(x)$$

若对 $x, \forall y \in \Sigma^*$, 有 $h^*(xy) = h^*(x) * h^*(y)$, 则 $\forall a \in \Sigma$, 有

$$h^*(a \times y) = h^*(a) * h^*(xy) = h^*(a) * h^*(x) * h^*(y) = h^*(ax) * h^*(y)$$

由 Σ^* 及归纳法得,

$\forall x, y \in \Sigma^*$, 有 $h^*(xy) = h^*(x) * h^*(y)$ 因此 h^* 是同态。

若 g 也是 Σ^* 到 S 的同态, 且是 h 的开拓, 则 $g(\wedge) = 1 = h^*(\wedge)$ 。 $\forall a \in \Sigma, g(a) = h^*(a)$ 若 $x \in \Sigma^*$, 有 $g(x) = h^*(x)$, 则 $\forall a \in \Sigma$,

$$\begin{aligned} g(ax) &= g(a) * g(x) \\ &= h^*(a) * h^*(x) = h^*(ax) \end{aligned}$$

由 Σ^* 的归纳定义得, $\forall x \in \Sigma^*, g(x) = h^*(x)$, 所以 $g = h^*$, 即 h^* 是唯一的。

6.6.17 试把定理 6.4-2 和定理 6.5-2 改写成针对独异点而言的定理。

解 设 h 是从独异点 $A = \langle S, *, e \rangle$ 到独异点 $A' = \langle S', *', e' \rangle$ 的一个同态, 那么 h 诱导出的 S 上的等价关系是独异点 A 上的同余关系。

设 f 是从独异点 $A = \langle S, *, e \rangle$ 到独异点 $A' = \langle S', *', e' \rangle$ 上的同态, $\sim$ 是 A 上由 f 诱导的同余关系, 则从独异点 $A/\sim = \langle S/\sim, *'', [e] \rangle$ 到独异点 $\langle f(S), *', e' \rangle$ 存在同构。

6.6.18 设 $A = \langle S, * \rangle$ 由左下表定义, $\sim$ 是 A 的同余关系, 由右下表给出。试用表给出 $A/\sim$ 。

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

$\sim$	a	b	c	d
a	$\vee$		$\vee$	
b		$\vee$		$\vee$
c	$\vee$		$\vee$	
d		$\vee$		$\vee$

解 $[a] = \{a, c\}, [b] = \{b, d\}$

$S/\sim = \{[a], [b]\}$

$A/\sim$ 的运算表如下:

$*''$	$[a]$	$[b]$
$[a]$	$[a]$	$[b]$
$[b]$	$[b]$	$[a]$

6.7 群

6.7.1 下列代数 $\langle S, * \rangle$ 中哪些能够形成群? 如果是群, 指出其么元, 并给出每个元

素的逆元。

(a) $S = \{1, 3, 4, 5, 9\}$, $*$ 是模 11 的乘法。

(b) $S = \mathbb{Q}$, $*$ 是一般的加法。

(c) $S = \mathbb{Q}$, $*$ 是一般的乘法。

(d) $S = \mathbb{I}$, $*$ 是一般的减法。

(e) $S = \{a, b, c, d\}$, $*$ 如左下表所定义。

$*$	a	b	c	d
a	b	d	a	c
b	d	c	b	a
c	a	b	c	d
d	c	a	d	b

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	a
d	d	c	b	b

(f) $S = \{a, b, c, d\}$, $*$ 如右上表所定义。

解 (a) $\langle S, * \rangle$ 是群, 其么元为 1, 且 $1^{-1} = 1$, $3^{-1} = 4$, $4^{-1} = 3$, $5^{-1} = 9$, $9^{-1} = 5$

(b) $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ 是群, 么元为 0, 且 $\forall a \in \mathbb{Q}$, 其逆元为 $-a$ 。

(c) 不是群。因为 0 无逆元。

(d) 不是群。因为减法不满足结合律。

(e) $\langle S, * \rangle$ 是群, c 是其么元, $a^{-1} = d$, $d^{-1} = a$, $c^{-1} = c$, $b^{-1} = b$ 。

(f) 不是群, 因为 d 无逆元。

6.7.2 设 $\langle S, * \rangle$ 是有限可交换独异点, 若对于所有的 $a, b, c \in S$, 有 $a * b = a * c \Rightarrow b = c$ 。试证明 $\langle S, * \rangle$ 是一个阿贝尔群。

证明 因为 $\langle S, * \rangle$ 是有限可交换独异点, 所以存在么元 e , 且 S 只有有限个元。设 $S = \{e, a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 因为 $a * b = a * c \Rightarrow b = c$, 所以 $\forall a \in S$, $a * e, a * a_1, \dots, a * a_n$ 是 $n+1$ 个互不相同的元素, 因此 $\exists i$ 使 $a * a_i = e$ 。

又 $*$ 是可交换的, 因为 $a^{-1} = a_i$, 因而 S 中任意元素都有逆元。所以 $\langle S, * \rangle$ 是一个阿贝尔群。

6.7.3 在群 $\langle G, *, -1, e \rangle$ 中,

(a) 如果对任意元素 $a \in G$ 有 $a^2 = e$, 则 $\langle G, *, -1, e \rangle$ 是阿贝尔群。

(b) 如果对任意元素 $a, b \in G$, 有 $(a * b)^2 = a^2 * b^2$, 则 $\langle G, *, -1, e \rangle$ 是阿贝尔群。

解 (a) 因为 $\forall a \in G$, $a^2 = e$, 所以 $a^{-1} = a$, $\forall a, b \in G$, $(ab)^{-1} = ab$, 又 $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$, $\therefore ab = ba$, 因此 $\langle G, *, -1, e \rangle$ 是阿贝尔群。

(b) 因为 $\forall a, b \in G$, 有 $(a * b)^2 = a^2 * b^2 = a * (a * b) * b$, 又 $(a * b)^2 = (a * b) * (a * b) = a * (b * a) * b$ 。群中可约律成立, 所以 $a * b = b * a$ 。

因此 $\langle G, *, -1, e \rangle$ 是阿贝尔群。

6.7.4 设 a 是群 $\langle G, * \rangle$ 的一个元素, 试用归纳法证明, 对于 $i, j \in \mathbb{I}$ 有

(a) $a' * a' = a^{(i+j)}$

(b) $(a')^j = a''$

证明 (a) $\forall i \in \mathbb{I}$, $a' * a' = a' = a^{(-i)}$ 。

设对 $k \in \mathbb{N}$ 有 $a' * a^k = a^{(i+k)}$ 。

当 $k+1$ 时, 有 $a' * a^{k+1} = a' * a^k * a = a'^{k+1} * a = a'^{k+1}$ 。

所以 $\forall i \in I, \forall k \in N$ 有 $a' * a^k = a'^{k+1}$ 。

设当 $k \in N$ 时, 有 $a' * a^{-k} = a'^{(-k)}$ 。

当 $k+1$ 时,

$$\begin{aligned} a' * a^{-(k+1)} &= a' * (a^{-1})^{k+1} = a' * (a^{-1})^k * a^{-1} = a' * a^{-k} * a^{-1} \\ &= a'^{(-k)} * a^{-1} = a'^{(-k-1)} \end{aligned}$$

所以 $\forall i, j \in I, a' * a' = a'^{j+1}$ 。

(b) 当 $j=0$ 时, $\forall i \in I$

$$(a')^0 = e = a'^j$$

设当 $j \in N$ 时, 有 $(a')^j = a'^j$ 。

在 $j+1$ 时, 有 $(a')^{j+1} = (a')^j * a' = a'^j * a' = a'^{j+1} = a'^{(j+1)}$ 。

设当 $j \in N$ 时, 有 $(a')^{-j} = a'^{(-j)}$ 。

在 $j+1$ 时, 有

$$\begin{aligned} (a')^{-(j+1)} &= ((a')^{-1})^{j+1} = ((a')^{-1})^j * (a')^{-1} = (a')^{-j} * a^{-1} \\ &= a'^{(-j)} * a'^{(-1)} = a'^{(-j)+(-1)} = a'^{(-j-1)} \end{aligned}$$

所以 $\forall i, j \in I, (a')^j = a'^j$ 。

6.7.5 设 $\langle S, * \rangle$ 是群, 试证明对群中任一元素 a 有 $(a^{-1})^{-1} = a$, 若 $\langle S, * \rangle$ 是独异点, 对 S 中任一元素成立 $(a^{-1})^{-1} = a$ 吗?

证明 对于任意 $a \in S$, a 是 a^{-1} 的逆元, $(a^{-1})^{-1}$ 也是 a^{-1} 的逆元, 群中结合律成立, 逆元是唯一的, 所以 $(a^{-1})^{-1} = a$ 。若 $\langle S, * \rangle$ 是独异点, 则 S 中任一元素 a 并不一定存在逆元 a^{-1} , 所以 $(a^{-1})^{-1}$ 可能无意义。但如 a 有逆元存在, 用同样方法可证 $(a^{-1})^{-1} = a$ 成立。

6.7.6 设 $\langle S_3, \diamond \rangle$ 是群, 求出元素 $a, b \in S_3$, 能使

$$(a) (a \diamond b)^2 \neq (a^2 \diamond b^2)$$

$$(b) a^2 = e$$

$$(c) a^3 = e$$

解 (a) $(a \diamond b)^2 \neq a^2 \diamond b^2$, 得 $(a \diamond b) \diamond (a \diamond b) \neq a \diamond a \diamond b \diamond b, b \diamond a \neq a \diamond b$

即要求找出对运算 $\diamond$ 不可交换的元素偶对, 查运算表可知它们是: $\{p_2, p_3\}, \{p_2, p_4\}, \{p_2, p_5\}, \{p_2, p_6\}, \{p_3, p_4\}, \{p_3, p_5\}, \{p_3, p_6\}, \{p_4, p_5\}, \{p_4, p_6\}$ 。

(b) 有 p_1, p_2, p_3, p_4 。

(c) 有 p_1, p_5, p_6 。

6.7.7 求出 $\langle N_5, +_5 \rangle$ 和 $\langle N_{12}, +_{12} \rangle$ 的所有子群。

解 $\langle N_5, +_5 \rangle$ 的子群有: $\langle \{0\}, +_5 \rangle, \langle N_5, +_5 \rangle$; $\langle N_{12}, +_{12} \rangle$ 的子群有: $\langle \{0\}, +_{12} \rangle, \langle \{0, 6\}, +_{12} \rangle, \langle \{0, 4, 8\}, +_{12} \rangle, \langle \{0, 3, 6, 9\}, +_{12} \rangle, \langle \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}, +_{12} \rangle, \langle N_{12}, +_{12} \rangle$ 。

6.7.8 设 $\langle G, * \rangle$ 是一个群, 且 $a \in G$, 如果对于每一个 $x \in G$, 有 $a * x = x * a$, 则由这样的元素 a 可以构成一个集合 S 。试证明 $\langle S, * \rangle$ 是群 $\langle G, * \rangle$ 的子群。

证明 $\forall a \in S$, 则 $\forall x \in G$ 有 $a * x = x * a$, 对等式两边同时左乘和右乘 a^{-1} 得, $x * a^{-1} = a^{-1} * x$, 所 $a^{-1} \in S$ 。

$\forall a, b \in S$, 则 $\forall x \in G$ 有

$$\begin{aligned}
 (a * b) * x &= a * (b * x) \\
 &= a * (x * b) = (a * x) * b \\
 &= x * (a * b)
 \end{aligned}$$

所以 $(a * b) \in S$, 因此 $\langle S, * \rangle$ 是 $\langle G, * \rangle$ 的子群。

6.7.9 试证明, 如果 $\langle G, * \rangle$ 是一个循环群, 则 $\langle G, * \rangle$ 的每一个子群, 都必定是个循环子群。

证明 $\langle G, * \rangle$ 是一个循环群, 所以存在 $g \in G$, 使 $\forall a \in G, \exists i \in I$, 有 $a = g^i$ 。

设 $\langle S, * \rangle$ 是 $\langle G, * \rangle$ 的子群, 则 S 中任一元必可表成 g^i 的形式。

令 $A = \{i | \exists a \in S \wedge a = g^i \wedge i > 0\}$ 。当 S 仅含一个元 e 时, 易见它是循环群, 当 $S \neq \{e\}$, 即含两个或以上的元素时, A 非空, 因此 A 必存在最小元, 设为 k 。

对任意 $a \in S, a = g^i$, 设 $i = mk + r$, 其中 $0 \leq r < k$, 若 $r \neq 0$, 则有 $g^r = g^{i-mk} = a * g^{-mk} = a * (g^{-k})^m$ 。

因为 $a \in S, g^{-k} = (g^k)^{-1} \in S$, 所以 $(g^{-k})^m \in S$ 。所以 $g^r \in S$, 但 $r < k$, 与 k 是最小元相矛盾。故 $r = 0$, 所以 $i = mk$ 。所以 $a = g^i = g^{mk} = (g^k)^m$ 。

因此 g^k 是 S 的生成元, 所以 $\langle S, * \rangle$ 是一个循环子群。

6.7.10 设 $\langle G, * \rangle$ 是一个群, H 是 G 的非空子集, 如果对任意元素 $a, b \in H$, 有 $a * b^{-1} \in H$, 则 $\langle H, * \rangle$ 是一个子群。

证明 (i) 因为 H 非空, 所以存在 $a \in H$, 所以 $e = a * a^{-1} \in H$, 所以 H 含有单位元。

(ii) 对于任意 $a \in H$, 因 $e \in H$, 所以 $a^{-1} = e * a^{-1} \in H$, 因而 H 中任一元的逆元也在 H 中。

(iii) 对于任意 $a, b \in H$, 由 (ii) $b^{-1} \in H$, 所以 $a * (b^{-1})^{-1} = a * b \in H$, 因而 H 对 $*$ 运算是封闭的,

综上所述, $\langle H, * \rangle$ 是子群。

6.7.11 设 $\langle G, * \rangle$ 是一个群, 这里 G 有偶数个元素, 证明 G 中存在一个元素 $a \neq e$, 使 $a^2 = e$ 。

证明 群中除自逆元外, 其它元素是两元成对互为逆元。已知 e 是自逆元, 所以至少还有一个元素 $a \neq e$ 是自逆元, 即 $a^2 = e$, 否则群的阶数不会是偶数。

6.7.12 考察群 $\langle \{1, i, -1, -i\}, * \rangle$ 和 $\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \right\}, *$ 。这里 $*$ 是复数乘法作出它们的运算表并判别是否同构。

解 两个群运算为

对于 $\langle \{1, i, -1, -i\}, * \rangle$ 的运算表为:

$*$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

$\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}, 0 \rangle$ 的运算表为:

0	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

它们是不同的。因为对后者每一个元素的逆元素都是自身, 而对于前者 i 和 $-i$ 都非自逆元。

6.7.13 设 $\langle G, * \rangle$ 是一个群, 且 $a \in G$ 。定义一个映射 $f: G \rightarrow G$, 使得对于每一个 $x \in G$, 有 $f(x) = a * x * a^{-1}$, 试证明 f 是 $\langle G, * \rangle$ 的群自同构。

证明 $\forall x, y \in G$, 若 $f(x) = f(y)$, 则 $a * x * a^{-1} = a * y * a^{-1}$, 所以 $x = y$, 因此 f 是单射, 又 $\forall x \in G$, $f(a^{-1} * x * a) = a * a^{-1} * x * a * a^{-1} = x$, 所以 f 是满射。因此 f 是 G 到 G 的双射。又 $\forall x, y \in G$,

$$\begin{aligned} f(x * y) &= a * (x * y) * a^{-1} \\ &= (a * x * a^{-1}) * (a * y * a^{-1}) \\ &= f(x) * f(y) \end{aligned}$$

因此, f 是 G 到 G 的同构。

6.7.14 设 h 是从代数 G 到 G' 的满同态, G 是一个循环群, 证明 G' 也是一个循环群。

证明 根据定理 6.3-3, G' 中的运算可结合, 每一元素有逆元, 所以 G' 是群, 又因为 G 是一个循环群, 所以 $\exists g \in G, \forall a \in G, a = g^i, i \in I$, 又 h 是 G 到 G' 的满同态, 所以 $\forall y \in G', \exists x \in G$ 使 $f(x) = y$, 又 $x = g^h, h \in I$, 所以 $y = f(x) = f(g^h) = (f(g))^h$ 。因此 G' 也是一个循环群。

6.7.15 证明群 $\langle G, * \rangle$ 的任意元素 a , 都有 $a^n = e$, 这里 $n = |G|$ 。

证明 $n = |G|$, 令 $S = \{e, a, a^2, \dots, a^{r-1}\}$, r 是 a 的阶数, 则 $\langle S, * \rangle$ 是 $\langle G, * \rangle$ 的子群。又 $|S| = r$, 且 $a^r = e, n = |G|, r$ 整除 n , 所以 $n = mr$ 。因此, $a^n = a^{mr} = (a^r)^m = e$ 。

6.7.16 设 $\langle H, * \rangle$ 和 $\langle K, * \rangle$ 都是群 $\langle G, * \rangle$ 的子群,

$$HK = \{h * k | h \in H \wedge k \in K\}$$

证明当且仅当 $HK = KH$ 时 $\langle HK, * \rangle$ 是 $\langle G, * \rangle$ 的子群。

证明 必要性. 当 $HK=KH$ 时, $\forall h_1, h_2 \in H, \forall k_1, k_2 \in K$

$$(h_1 * k_1) * (h_2 * k_2) = h_1 * (k_1 * h_2) * k_2$$

又 $k_1 * h_2 \in KH=HK$, 所以 $\exists h_3 \in H, k_3 \in K$, 使 $k_1 * h_2 = h_3 * k_3$, 所以

$$(h_1 * k_1) * (h_2 * k_2) = h_1 * (h_3 * k_3) * k_2 = (h_1 * h_3) * (k_3 * k_2) \in HK$$

$\forall h \in H, \forall k \in K$,

$$(h * k)^{-1} = k^{-1} * h^{-1} \in KH=HK$$

所以 HK 是 $\langle G, * \rangle$ 的子群.

充分性. 设 $\langle HK, * \rangle$ 是 $\langle G, * \rangle$ 的子群. $\forall x \in HK$, 则 $x^{-1} \in HK$, 则 $\exists h \in H, \exists k \in K$, 使 $x^{-1} = h * k$, 所以 $x = (x^{-1})^{-1} = (h * k)^{-1} = k^{-1} * h^{-1} \in KH$. 因此

$$HK \subseteq KH$$

$\forall x \in KH, \exists h \in H, \exists k \in K$, 使 $x = k * h, x^{-1} = h^{-1} * k^{-1} \in HK$, 所以 $x = (x^{-1})^{-1} \in HK$, 因而 $HK \supseteq KH$, 因此有 $HK=KH$.

6.7.17 设 $\langle G, * \rangle$ 是一个偶数阶的群, 设 $\langle H, * \rangle$ 是 $\langle G, * \rangle$ 的一个子群, 这里 $|H| = |G|/2$, 证明 $\langle H, * \rangle$ 是正规子群.

证明 $\langle H, * \rangle$ 是 $\langle G, * \rangle$ 的一个子群, 又 $|H| = |G|/2, \forall a \in H, aH = H = Ha, \forall a \notin H, aH \cap H = \emptyset$, 且 $|aH| = |H|$, 所以 $aH = G - H$, 且同理可得 $Ha = G - H$, 因而 $aH = Ha$, 因此, $\forall a \in G$, 有 $aH = Ha$, 所以 H 是其正规子群.

6.7.18 设 $\langle G, * \rangle$ 是一个群, $H = \{a | a \in G \wedge \text{对所有 } b \in G, a * b = b * a\}$, 证明 $\langle H, * \rangle$ 是正规子群.

证明 $\forall a \in H$, 则 $\forall b \in G$ 有 $a * b = b * a$, 左、右两边都同时乘 a^{-1} 得

$$a^{-1} * a * b * a^{-1} = a^{-1} * b * a * a^{-1}$$

所以 $b * a^{-1} = a^{-1} * b$, 所以 $a^{-1} \in H$.

$\forall a, b \in H, \forall c \in G$, 有

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= a * (b * c) \\ &= a * (c * b) = (a * c) * b \\ &= c * (a * b)\end{aligned}$$

所以 $a * b \in H$, 因此 H 是 G 的子群

又 $\forall a \in G, \forall x = aH, \exists b \in H$ 使 $x = a * b = b * a \in Ha$; 因此 $aH \subseteq Ha, \forall x \in Ha, \exists b \in H$ 使 $x = b * a = a * b \in aH$, 所以 $Ha \subseteq aH$, 所以 $aH = Ha$.

因此 H 是 $\langle G, * \rangle$ 的正规子群.

6.7.19 证明, 如果 $\langle H, * \rangle$ 和 $\langle K, * \rangle$ 都是群 $\langle G, * \rangle$ 的正规子群, 那么 $\langle H \cap K, * \rangle$ 也是一个正规子群.

证明 $\forall a \in G, \forall x \in a(H \cap K), \exists h \in H \cap K$, 使 $x = a * h$, 所以 $x \in aH$, 且 $x \in aK$. 又 $\langle H, * \rangle$ 和 $\langle K, * \rangle$ 是正规子群, 所以 $aH = Ha, aK = Ka$, 因而 $x \in Ha$, 且 $x \in Ka$, 因此 $\exists h_1 \in H, \exists k_1 \in K$, 使 $x = h_1 a = k_1 a$, 又 $\langle G, * \rangle$ 是群, 所以 $h_1 = k_1$, 因此 $x = h_1 a \in (H \cap K)a$. 因此

$$\begin{aligned}a(H \cap K) &\subseteq (H \cap K)a \\ a(H \cap K) &\supseteq (H \cap K)a \\ \text{因此 } a(H \cap K) &= (H \cap K)a\end{aligned}$$

同理

因此

又 $\forall x \in H \cap K$, 则 $x \in H$ 且 $x \in K$, 所以 $x^{-1} \in H$ 且 $x^{-1} \in K$, 因此 $x^{-1} \in H \cap K$.

$\forall x, y \in H \cap K, x * y \in H \cap K$, 因此 $\langle H \cap K, * \rangle$ 是一个正规子群.

6.7.20 具有关系 $i^2 = j^2 = k^2 = -1, (-1)^2 = 1, ij = k = -ji, jk = i = -kj, ki = j = -ik$ 的八元素集合 $G = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ 可构成群 $\langle G, * \rangle$.

(a) 试列出运算表.

(b) 证明 $\langle H, * \rangle$ 是正规子群, 这里 $H = \{1, -1, j, -j\}$.

(c) 写出关于 H 的陪集划分.

(d) 写出商群 $\langle G/H, \otimes \rangle$

解 (a) $\langle G, * \rangle$ 的运算表为

*	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
1	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
-1	-1	1	-i	i	-j	j	-k	k
i	i	-i	-1	1	k	-k	-j	j
-i	-i	i	1	-1	-k	k	j	-j
j	j	-j	-k	k	-1	1	i	-i
-j	-j	j	k	-k	1	-1	-i	i
k	k	-k	j	-j	-i	i	-1	1
-k	-k	k	-j	j	i	-i	1	-1

(b) **证明** 易见 $\langle H, * \rangle$ 是 $\langle G, * \rangle$ 的子群, 当 $a = 1, -1, j, -j$ 时, $aH = Ha = H$; 当 $a = i, -i$ 时, $aH = Ha = \{i, -i, k, -k\}$; 当 $a = k, -k$ 时, $aH = Ha = \{i, -i, k, -k\}$. 因此 $\forall a \in G, aH = Ha$, 所以 $\langle H, * \rangle$ 是正规子群.

(c) 关于 H 的陪集划分为

$$\{\langle 1, -1, j, -j \rangle, \langle i, -i, k, -k \rangle\}$$

(d) 商群 $\langle G/H, \otimes \rangle$ 为

$$\langle \{\langle 1, -1, j, -j \rangle, \langle i, -i, k, -k \rangle\}, \otimes \rangle$$

$\otimes$ 的运算表为

$\otimes$	$\langle 1, -1, j, -j \rangle$	$\langle i, -i, k, -k \rangle$
$\langle 1, -1, j, -j \rangle$	$\langle 1, -1, j, -j \rangle$	$\langle i, -i, k, -k \rangle$
$\langle i, -i, k, -k \rangle$	$\langle i, -i, k, -k \rangle$	$\langle 1, -1, j, -j \rangle$

6.7.21 作出六阶群 $\langle S_3, \diamond \rangle$ 的图.

解 S_3 的元素是:

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, p_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, p_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\langle S_3, \diamond \rangle$ 的非平凡子群有: $\langle \{p_1, p_2\}, \diamond \rangle, \langle \{p_1, p_3\}, \diamond \rangle, \langle \{p_1, p_4\}, \diamond \rangle, \langle \{p_1, p_5, p_6\},$

$\diamond$), 我们选 $\langle \{p_1, p_2\}, \diamond \rangle$ 和 $\langle \{p_1, p_3, p_6\}, \diamond \rangle$ 作为基础, 它们的图是图 6.3。

所以 $\langle S_3, \diamond \rangle$ 的图为图 6.4。

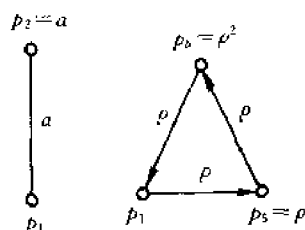


图 6.3

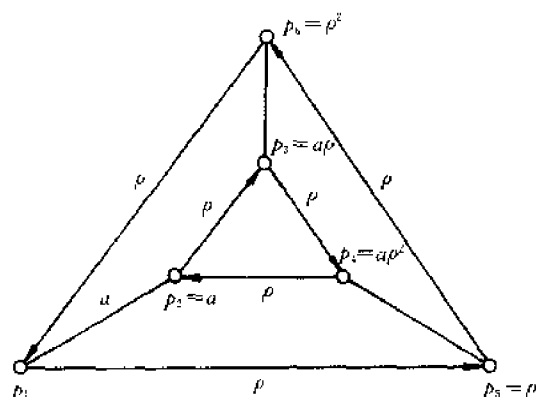


图 6.4

6.7.22 作出 6.7.2 小节例 2(b) 八阶群的图。

解 记此八阶群为: $\langle A, \diamond \rangle$, A 的元素是:

$$\begin{aligned} p_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \\ p_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, p_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, p_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \\ p_7 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, p_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\langle A, \diamond \rangle$ 的非平凡子群有: $\langle \{p_1, p_5\}, \diamond \rangle$, $\langle \{p_4, p_6\}, \diamond \rangle$, $\langle \{p_4, p_7\}, \diamond \rangle$, $\langle \{p_4, p_8\}, \diamond \rangle$, $\langle \{p_1, p_2, p_3, p_4\}, \diamond \rangle$ 。我们选 $\langle \{p_4, p_5\}, \diamond \rangle$ 和 $\langle \{p_1, p_2, p_3, p_4\}, \diamond \rangle$ 作基础, 它们的图如图 6.5 所示。

因此八阶群 $\langle A, \diamond \rangle$ 的图如图 6.6 所示。

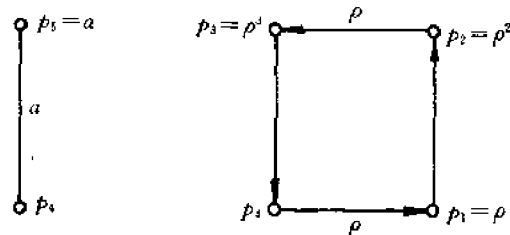


图 6.5

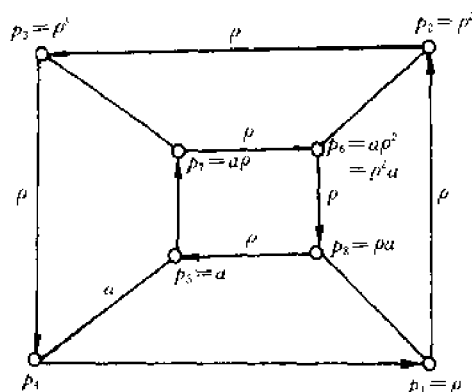


图 6.6

6.8 环 和 域

6.8.1 设 $\langle \{a, b, c, d\}, +, \cdot \rangle$ 是一个环, $+$ 和 $\cdot$ 由以下两表定义。它是否是可交换环, 它是否是含么环? 是否是含零因子环? 哪些元素是零因子?

$+$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	c	a	c
c	a	a	a	a
d	a	c	a	a

解 是可交换环, 不是含么环, 是含零因子环, 零因子有 b, c, d 。

6.8.2 假设 P 是所有有理数对 $\langle a, b \rangle$ 的集合, 它们的结合法(即运算)是,

$$\langle a, b \rangle + \langle a', b' \rangle = \langle a + a', b + b' \rangle$$

$$\langle a, b \rangle \cdot \langle a', b' \rangle = \langle aa', bb' \rangle$$

那么 $\langle P, +, \cdot \rangle$ 是否成环? 它有无零因子? 是否有乘法么元? 哪些元素有逆元?

解 $\langle P, +, \cdot \rangle$ 是环。有零因子, 有乘法么元, 当 a 和 b 都不为 0 时, $\langle a, b \rangle$ 有乘法逆元。

6.8.3 给定一个代数系统 $\langle I, \oplus, \odot \rangle$ 。对于任何 $a, b \in I$, 有 $a \oplus b = a + b - 1$ 和 $a \odot b = a + b - a \cdot b$, 证明 $\langle I, \oplus, \odot \rangle$ 是一个含有么元的可交换环。

证明 $\forall a, b, c \in I$,

$$(a \oplus b) \oplus c = (a + b - 1) \oplus c = a + b + c - 2$$

$$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (b + c - 1) = a + b + c - 2$$

所以 $\oplus$ 满足结合律。

$$a \oplus b = a + b - 1 = b \oplus a$$

所以 $\oplus$ 满足交换律。

$$a \oplus 1 = a$$

所以 1 是 $\oplus$ 么元。 $\forall a \in I$,

$$a \oplus (2 - a) = (2 - a) \oplus a = 1$$

所以 $\oplus$ 有么元 1, 且任一元素都有逆元, 因此 $\langle P, \oplus \rangle$ 是阿贝尔群。

$$a \odot b = a + b - ab = b \odot a$$

$$(a \odot b) \odot c = a + b + c - ab - bc - ac + abc = a \odot (b \odot c)$$

$$a \odot 0 = 0 \odot a = a$$

因此 $\langle P, \odot \rangle$ 是可交换的半群, 且 0 是其么元。又 $\odot$ 对 $\oplus$ 可分配, 因此 $\langle P, \oplus, \odot \rangle$ 是含么元可交换环。

6.8.4 证明定理 6.8-1(c)、(d)和(e)。

证明 (c)由(b)得

$$(-a) \cdot (-b) = -a \cdot (-b) = -[-ab] = a \cdot b$$

$$(d) a \cdot (b-c) = a \cdot b + a \cdot (-c) = a \cdot b - a \cdot c$$

$$(e) (b-c) \cdot a = b \cdot a + (-c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a$$

6.8.5 设 $\langle R, +, \cdot \rangle$ 是一个环, 试证明, 如果 $a, b \in R$, 则 $(a+b)^2 = a^2 + a \cdot b + b \cdot a + b^2$. 这里, $a^2 = a \cdot a$, $b^2 = b \cdot b$.

证明 $(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b)$

$$= a \cdot (a+b) + b \cdot (a+b)$$

$$= a^2 + a \cdot b + b \cdot a + b^2$$

6.8.6 试证明, 在环 R 中, 如对某两元素 a, b 有 $ab=ba$, 那么 (1) $ab^{-1}=b^{-1}a$ (假定 b^{-1} 存在); (2) $a(-b)=(-b)a$.

证明 若有 $ab=ba$, 且 b^{-1} 存在, 则 $b^{-1}abb^{-1}=b^{-1}bab^{-1}$, 因此 $b^{-1}a=ab^{-1}$.

$$-ab = -ba$$

$$-ab = a(-b), -ba = (-b)a$$

因此

$$a(-b) = (-b)a$$

6.8.7 设 $\langle \{5x | x \in I\}, +, \cdot \rangle$ 是一个环, 其中 $+$ 和 $\cdot$ 是一般加法和乘法, 它是否是一个整环?

解 它不是一个整环. 因为 $\langle \{5x | x \in I\}, \cdot \rangle$ 无么元.

6.8.8 设 $\langle R, +, \cdot \rangle$ 是一个环, 且对所有 $a \in R$ 有 $a^2=a$, 这样的环称为布尔环.

(a) 证明 $\langle R, +, \cdot \rangle$ 是个可交换环.

(b) 证明对于所有的 $a \in R$, 有 $a+a=0$.

(c) 试证明, 如果 $|R| > 2$, 则 $\langle R, +, \cdot \rangle$ 不可能是一个整环.

证明 (a) 因为 $\forall a \in R$ 有 $a^2=a$, 因此 $\forall a, b \in R$ 有

$$(a+b) = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a + ab + ba + b$$

因此

$$ab + ba = 0$$

$$ab = -ba = (-ba)(-ba) = (ba)(ba) = ba$$

因而 $\langle R, +, \cdot \rangle$ 是可交换环.

(b) $\forall a \in R$

$$(-a) = (-a)(-a) = (a)(a) = a^2 = a$$

又

$$a + (-a) = 0$$

因此

$$a + a = 0$$

(c) 若 $\langle R, +, \cdot \rangle$ 不含乘法么元, 则它不是整环. 若 $\langle R, +, \cdot \rangle$ 含乘法么元, 则设乘法么元为 e .

因为 $|R| > 2$, 则 $\exists a \in R, a \neq 0, a \neq e$, 由前面的 (b) 得

$$a^2 = a, a = -a$$

因此

$$a^2 + a = 0$$

$$a(a+e) = 0$$

若 $a+e=0$, 则 $a=-e=e$ 与 $a \neq e$ 矛盾. 因此

$$a+e \neq 0$$

因此它有零因子 a 与 $a+e$. 因此 $\langle R, +, \cdot \rangle$ 不可能是一个整环.

6.8.9 构造一个3个元素的域。

解 $\langle N_3, +_3, \cdot_3 \rangle$ 是一个三个元的域。

6.8.10 给定一个代数系统 $\langle F, +, \cdot \rangle$, 由下面的表给出它的定义:

+	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

·	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	d	b
d	a	d	b	c

(a) 证明 $\langle F, +, \cdot \rangle$ 是一个域。

(b) 求解 $\langle F, +, \cdot \rangle$ 中的方程

$$\begin{cases} x + c \cdot y = a \\ c \cdot x + y = b \end{cases}$$

证明 (a) 由运算表得 $\langle F, + \rangle$ 对运算 $+$ 是可结合和可交换的, 且 a 是 $+$ 运算的么元, 任一元素都有逆元, 所以 $\langle F, + \rangle$ 是阿贝尔群。

$\langle F - \{a\}, \cdot \rangle$ 也是一个阿贝尔群, 且 $\cdot$ 对 $+$ 运算可分配。所以 $\langle F, +, \cdot \rangle$ 是域。

(b) 对于方程

$$\begin{cases} x + c \cdot y = a & \text{①} \\ c \cdot x + y = b & \text{②} \end{cases}$$

② $\cdot (-c) +$ ① 得:

$$x - c^2 \cdot x = a - b \cdot c$$

因此

$$(b - d) \cdot x = a - c$$

$$c \cdot x = c$$

$$x = b$$

将 $x = b$ 代②得

$$y = b - c \cdot b = b - c = d$$

因此方程的解为 $\begin{cases} x = b \\ y = d \end{cases}$ 。

6.8.11 设 $\langle F, +, \cdot \rangle$ 是一个域, $\langle R, +, \cdot \rangle$ 是 $\langle F, +, \cdot \rangle$ 的子环, 证明或否定 $\langle R, +, \cdot \rangle$ 是个整环。

解 $\langle R, +, \cdot \rangle$ 不一定是整环。例如令 $\langle F, +, \cdot \rangle$ 为 $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle$, 则是一个域, 令 $\langle R, +, \cdot \rangle$ 为 $\langle \{2x | x \in I\}, +, \cdot \rangle$, 则 $\langle R, +, \cdot \rangle$ 为 $\langle F, +, \cdot \rangle$ 的子环, 但它不含么元, 不是整环。

6.8.12 证明两个域的直接乘积不可能是一个域。

证明 设 $\langle F_1, +', \cdot' \rangle$ 和 $\langle F_2, +'', \cdot'' \rangle$ 是两个域, $\therefore |F_1| > 1, |F_2| > 1$, 令 $a \in F_1$, 但 a 不是 $\langle F_1, +', \cdot' \rangle$ 的零元 $0'$, 令 $b \in F_2$, 但不是 $\langle F_2, +'', \cdot'' \rangle$ 的零元 $0''$, 则 $\langle a, 0'' \rangle$ 和 $\langle 0', b \rangle$ 都不是 $\langle F_1 \times F_2, +, \cdot \rangle$ 的零元, 但 $\langle a, 0'' \rangle \cdot \langle 0', b \rangle = \langle 0', 0'' \rangle$, 因而 $\langle a, 0'' \rangle$ 和 $\langle 0', b \rangle$ 是零因子, 因此这两个域的直接乘积不可能是一个域。

6.8.13 设 $F = \{a + b\sqrt{2} | a \in \mathbb{Q} \wedge b \in \mathbb{Q}\}$, 证明 $\langle F, +, \cdot \rangle$ 是域, 这里 $+$ 和 $\cdot$ 是一般加法和乘法。

证明 $\forall (a+b\sqrt{2}) \in F, (a'+b'\sqrt{2}) \in F$, 有

$$(a+b\sqrt{2})+(a'+b'\sqrt{2})=(a+a')+(b+b')\sqrt{2} \in F$$

+ 运算满足结合律和交换律, $0 \in F$ 是 + 运算的么元, 且 $-(a+b\sqrt{2})=(-a)+(-b)\sqrt{2} \in F$. 因此 $\langle F, + \rangle$ 是阿贝尔群.

对于 $\langle F-\{0\}, \cdot \rangle$, $\forall (a+b\sqrt{2}) \in F-\{0\}, (a'+b'\sqrt{2}) \in F-\{0\}$, 有

$$(a+b\sqrt{2}) \cdot (a'+b'\sqrt{2})=(aa'+2bb')+(ab'+a'b)\sqrt{2} \in F-\{0\}$$

$\cdot$ 运算满足结合律和交换律, 1 是 $\cdot$ 运算的么元, 且 $\forall (a+b\sqrt{2}) \in F-\{0\}, (a+b\sqrt{2})^{-1}=\frac{a}{a^2-2b^2}+\frac{-b}{a^2-2b^2}\sqrt{2} \in F-\{0\}$, 所以 $\langle F, \cdot \rangle$ 是阿贝尔群.

又 $\cdot$ 对 + 是可分配的, 所以 $\langle F, +, \cdot \rangle$ 是域.

6.8.14 证明一个具有有限个元素的整环是一个域.

证明 设 $\langle F, +, \cdot \rangle$ 是整环, 且只有有限个元素. 因此 $\langle F, +, \cdot \rangle$ 是可交换的, 含么元而无零因子, 因此 $\langle F, +, \cdot \rangle$ 满足可约律. 设该环的元素分别为 $0, e, a_1, a_2, \dots, a_n$, 则 $\forall a \in F-\{0\}, ae, aa_1, aa_2, \dots, aa_n$ 分别是 $F-\{0\}$ 中的 $n+1$ 个互不相同的元素, 因此必存在 a_i 使 $aa_i=e$, 又它无零因子, 所以 $\forall a, b \in F-\{0\}, a \cdot b \in F-\{0\}$, 因此 $\langle F-\{0\}, \cdot \rangle$ 是阿贝尔群, 即 a 有逆元, 因此 $\langle F, +, \cdot \rangle$ 是一个域.

6.8.15 试证明, 对任何整数 $m, \{mx|x \in I\}$ 能够形成 $\langle I, +, \cdot \rangle$ 的子环.

证明 $\forall a, b \in \{mx|x \in I\}$, 有

$$a=mx_1, b=mx_2, x_1, x_2 \in I$$

因此 $a+b=m(x_1+x_2) \in \{mx|x \in I\}$

$$-a=m(-x_1) \in \{mx|x \in I\}$$

$$a \cdot b=mx_1 \cdot mx_2=m(mx_1x_2) \in \{mx|x \in I\}$$

因此 $\{mx|x \in I\}$ 是能够形成 $\langle I, +, \cdot \rangle$ 的子环.

6.8.16 求环 $\langle N_m, +_m, \times_m \rangle$ 的所有子环和理想. 这里 (a) $m=6$, (b) $m=8$, (c) $m=11$.

解 (a) $m=6$ 时, $\langle N_6, +_6, \times_6 \rangle$ 的子环有:

$$A_1=\langle \{0\}, +_6, \times_6 \rangle$$

$$A_2=\langle \{0, 3\}, +_6, \times_6 \rangle$$

$$A_3=\langle \{0, 2, 4\}, +_6, \times_6 \rangle$$

$$A_4=\langle N_6, +_6, \times_6 \rangle$$

且以上四个子环都是其理想.

(b) $m=8$ 时, $\langle N_8, +_8, \times_8 \rangle$ 的子环有:

$$A_1=\langle \{0\}, +_8, \times_8 \rangle$$

$$A_2=\langle \{0, 4\}, +_8, \times_8 \rangle$$

$$A_3=\langle \{0, 2, 4, 6\}, +_8, \times_8 \rangle$$

$$A_4=\langle N_8, +_8, \times_8 \rangle$$

以上四个子环都是其理想.

(c) $m=11$, 其子环和理想有:

$$A_1=\langle \{0\}, +_{11}, \times_{11} \rangle$$

$$A_2 = \langle N_{11}, +_{11}, \times_{11} \rangle$$

6.8.17 给定 $G = \langle I, +, \cdot \rangle$ 。 $G \times G$ 的理想是什么?

解 因为阿贝尔群的直积是阿贝尔群, 半群的直积是半群, 分配律对直积是保持的, 所以 $G \times G$ 是环。记 $S_1 = \{mx | x \in I\}$, $S_2 = \{nx | x \in I\}$ 。 m, n 为任意整数。 $G \times G$ 的理想为 $\langle S_1 \times S_2, +, \cdot \rangle$ 。因为对任一 $\langle a, b \rangle \in G \times G$, $\langle mx, ny \rangle \in S_1 \times S_2$, $\langle a, b \rangle \cdot \langle mx, ny \rangle = \langle max, nby \rangle \in S_1 \times S_2$ 。

6.8.18 设 $\langle D_1, +, \cdot \rangle$ 和 $\langle D_2, +, \cdot \rangle$ 是环 $\langle R, +, \cdot \rangle$ 的理想, 试证明 $\langle D_1 + D_2, +, \cdot \rangle$ 和 $\langle D_1 \cap D_2, +, \cdot \rangle$ 也都是理想。 ($D_1 + D_2 = \{d_1 + d_2 | d_1 \in D_1 \wedge d_2 \in D_2\}$)

证明 $\forall a, b \in D_1 + D_2$, 由定义, 存在 $d_1, d'_1 \in D_1$, $d_2, d'_2 \in D_2$, 使得 $a = d_1 + d_2$, $b = d'_1 + d'_2$, 则有

$$a + b = (d_1 + d'_1) + (d_2 + d'_2) \in D_1 + D_2$$

$$a = (-d'_1) + (d_1 + d_2) \in D_1 + D_2$$

且对任意 $x \in R$, 有

$$ax = d_1x + d_2x \in D_1 + D_2$$

$$xa = xd_1 + xd_2 \in D_1 + D_2$$

因此 $\langle D_1 + D_2, +, \cdot \rangle$ 是 $\langle R, +, \cdot \rangle$ 的理想。

$$\forall a, b \in D_1 \cap D_2, ab \in D_1 \cap D_2, a + b \in D_1 \cap D_2, -a \in D_1 \cap D_2。$$

因此 $\langle D_1 \cap D_2, +, \cdot \rangle$ 是子环。

$$\forall a \in D_1 \cap D_2, \forall x \in R, ax \in D_1 \cap D_2, xa \in D_1 \cap D_2。$$

因此 $\langle D_1 \cap D_2, +, \cdot \rangle$ 是理想。

6.8.19 试证明一个环的同态象是一个环。

证明 设 h 是 $\langle R, +, \cdot \rangle$ 到环 $\langle S, \oplus, \odot \rangle$ 的环同态。对于 $\langle h(R), \oplus, \odot \rangle$, $\forall x, y \in h(R)$, $\exists a, b \in R$, 使 $h(a) = x$, $h(b) = y$, 因此

$$x \oplus y = h(a) \oplus h(b) = h(a + b) \in h(R)$$

$$-x = -h(a) = h(-a) \in h(R)$$

$$x \odot y = h(a) \odot h(b) = h(a \cdot b) \in h(R)$$

因此 $\langle h(R), \oplus, \odot \rangle$ 是 $\langle S, \oplus, \odot \rangle$ 的子环。

6.9 选题例解

例 6-1 在下表列出的集合和运算中, 请根据运算的是否封闭, 在相应位置上写“是”或“否”。

	$+$	$-$	$\cdot$	$ x - y $	$\max$	$\min$	$ x $
I	是	是	是	是	是	是	是
N	是	否	是	是	是	是	是
$\{x 0 \leq x \leq 10\}$	否	否	否	是	是	是	是
$\{x -10 \leq x \leq 10\}$	否	否	否	否	是	是	是
$\{2x x \in I\}$	是	是	是	是	是	是	是

例 6-2 对于实数集合 R , 下表所列的二元运算是否具有左边一列中的那些性质, 请在相应位置上填写“是”或“否”。

	+	-	·	max	min	$ x-y $
可结合性	是	否	是	是	是	否
可交换性	是	否	是	是	是	是
存在么元	是	否	是	否	否	否
存在零元	否	否	是	否	否	否

例 6-3 定义 I_+ 上的两个二元运算为:

$$a * b = a^b, a \triangle b = a \cdot b, a, b \in I_+$$

试证 $*$ 对 $\triangle$ 是不可分配的。

证明 因为 $a * (b \triangle c) = a * (b \cdot c) = a^{b \cdot c}$

$$(a * b) \triangle (a * c) = a^b \triangle a^c = a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

例如: 取 $a=2, b=c=1$, 则有

$$a * (b \triangle c) = 2, (a * b) \triangle (a * c) = 4$$

所以, $*$ 对于 $\triangle$ 是不可分配的。

例 6-4 设 $\langle R, * \rangle$ 是一个代数系统, $*$ 是 R 上的一个二元运算, 使得对于 R 中的任意元素 a, b 有 $a * b = a + b + a \cdot b$ 。

试证 0 是么元, 且 $\langle R, * \rangle$ 是独异点。

证明 $\forall a \in R, 0 * a = 0 + a + 0 \cdot a = a; a * 0 = a + 0 + a \cdot 0 = a$, 所以 0 是么元。

$\forall a, b \in R$, $+$ 和 $\cdot$ 在 R 上封闭, 所以 $*$ 运算在 R 上封闭。

$\forall a, b, c \in R$, 有

$$\begin{aligned} (a * b) * c &= (a + b + a \cdot b) * c \\ &= a + b + ab + c + (a + b + ab)c \\ &= a + b + c + ab + ac + bc + abc \\ a * (b * c) &= a * (b + c + bc) \\ &= a + b + c + ab + ac + bc + abc \\ \therefore (a * b) * c &= a * (b * c) \end{aligned}$$

所以 $*$ 是可结合的, 因而 $\langle R, * \rangle$ 是独异点。

例 6-5 设 $\langle G, * \rangle$ 是一个独异点, 且 $|G| \geq 2$, 则在 G 中不存在有左逆元的左零元。

证明 设有一个左零元 0_l , 它有左逆元为 0_l^{-1} , 则 $0_l^{-1} * 0_l = e$, 又 $0_l * 0_l = 0_l$, 因此, $0_l^{-1} * 0_l * 0_l = 0_l^{-1} * 0_l$, 所以 $e * 0_l = e$, 所以 $0_l = e$ 。

但独异点中的么元 e 不可能等于任一左零元, 因 $|G| \geq 2$ 。因而导致矛盾, 所以 G 中不可能存在有左逆元的左零元。

例 6-6 设 $X = R - \{0, 1\}$, 在 X 上定义 6 个函数如下: $\forall x \in X, f_1(x) = x; f_2(x) = x^{-1}; f_3(x) = 1 - x; f_4(x) = (1 - x)^{-1}; f_5(x) = (x - 1)x^{-1}, f_6(x) = x(x - 1)^{-1}$ 。试证明 $\langle F, \circ \rangle$ 是一个群。 $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$, $\circ$ 是函数的复合运算。

证明 由函数的复合运算的定义, F 的运算表如下:

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3	f_6	f_5
f_3	f_3	f_5	f_1	f_6	f_2	f_4
f_4	f_4	f_6	f_2	f_5	f_1	f_3
f_5	f_5	f_4	f_6	f_1	f_4	f_2
f_6	f_6	f_4	f_5	f_2	f_3	f_1

·运算在 F 上是封闭的和可结合的, f_1 是么元, f_2, f_3, f_6 均以自身为逆元; f_4 和 f_5 互为逆元。因此, $\langle F, \cdot \rangle$ 是群。

例 6-7 设 $\langle A, * \rangle$ 是半群, e 是左么元, 对每一元素 $a \in A$, 存在左逆元 a^{-1} , 即 $a^{-1} * a = e$, 证明 $\langle A, * \rangle$ 是群。

证明 设 a, b, c 是 A 的任意元素。

(1) 证明若 $a * b = a * c$, 则 $b = c$ 。

由 $a * b = a * c$ 得 $a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c)$, $a^{-1} * (a * b) = (a^{-1} * a) * b = e * b = b$, $a^{-1} * (a * c) = (a^{-1} * a) * c = e * c = c$, 所以 $b = c$ 。

(2) 证明 e 是么元。

$$a^{-1} * (a * e) = (a^{-1} * a) * e = e * e = e = a^{-1} * a$$

所以 $a * e = a$, 即 e 也是右么元, 故 e 为么元。

(3) 证明 a^{-1} 是 a 的逆元。

$$a^{-1} * (a * a^{-1}) = (a^{-1} * a) * a^{-1} = e * a^{-1} = a^{-1} = a^{-1} * e$$

所以 $a * a^{-1} = e$, 即 a^{-1} 也是 a 的右逆元, 故 a^{-1} 是 a 的逆元。

由(2)和(3)得 $\langle A, * \rangle$ 是群。

本题说明群也可定义为: 一个具有二元运算 $*$ 的代数系统 $\langle G, * \rangle$, 如果(1)结合律成立, (2)存在左么元, (3)每一元素存在左逆元, 则 $\langle G, * \rangle$ 是群。

例 6-8 设 $\langle G, * \rangle$ 是一个 n 阶循环群, 生成元为 a , 则对于 n 的任一因子 d , 存在唯一的 d 阶子群。

证明 若 $d=1$ 或 n , 则有唯一的子群 $\langle \{e\}, * \rangle$ 或 $\langle G, * \rangle$ 。

当 $1 < d < n$ 时, 设 H 为 G 的任一 d 阶子群, 则 H 中必有 a^s , 其中 s 为 H 中元素的最小幂次且 $s \neq 1$ 。 $\forall a^t \in H$, 设 $t = ps + q$, $0 \leq q < s$, 则 $a^t = a^s * a^{-ps} = a^s * (a^s)^{-p} \in H$ 。因而 $q = 0$, 即 $s | t$, 因而 a^s 是 H 的生成元, 且由 $a^n = e \in H$, 因而 $s | n$ 。因为 H 为 d 阶子群, 故 a^s 的阶为 $d = \frac{n}{s}$, 所以 $s = \frac{n}{d}$, 因而 H 也就是以 a^n 为生成元的 d 阶子群。

例 6-9 设 $\langle G, \cdot \rangle$ 是有限交换群, a 是 G 的 m 阶元, b 是 G 的 n 阶元, 且 $\text{GCD}(m, n) = 1$, 则 $a \cdot b$ 的阶为 $m \cdot n$ 。

证明 设 $a \cdot b$ 的阶为 l , 因为

$$(ab)^{mn} = a^{mn} \cdot b^{mn} = (a^m)^n \cdot (b^n)^m = e$$

所以 $l | mn$ 。又 $e = (ab)^{lm} = a^{lm} \cdot b^{lm} = b^{lm}$, 所以 $n | lm$, 但 $\text{GCD}(m, n) = 1$, 所以 $n | l$ 。

同理 $m|l$, 由此得 $mn|l$, 因此 $l=mn$, 所以 ab 的阶为 mn 。

例 6-10 设 $p < q$, q 是质数, 则在 pq 阶的群 $\langle G, \cdot \rangle$ 中 q 阶子群 $\langle H, \cdot \rangle$ 一定是正规子群。

证明 (i) $\forall g \in G$, 有 $gHg^{-1} \subseteq G$, 且 $\forall h_1, h_2 \in H$,

$$(gh_1g^{-1}) \cdot (gh_2g^{-1}) = g(h_1h_2)g^{-1} \in gHg^{-1}$$

$$(gh_1g^{-1})^{-1} = gh_1^{-1}g^{-1} \in gHg^{-1}$$

因而 $\langle gHg^{-1}, \cdot \rangle$ 是 $\langle G, \cdot \rangle$ 的子群。又因 $\forall h \in H$, 唯一地对应着 $ghg^{-1} \in gHg^{-1}$, 所以 $\langle gHg^{-1}, \cdot \rangle$ 和 $\langle H, \cdot \rangle$ 都是 $\langle G, \cdot \rangle$ 的 q 阶子群。

(ii) 下面证 $\langle G, \cdot \rangle$ 的 q 阶子群仅有一个。用反证法。不妨设 $\langle G, \cdot \rangle$ 的两个不同的 q 阶子群分别为 $\langle H_1, \cdot \rangle$ 和 $\langle H_2, \cdot \rangle$ 。因此 $\langle H_1, \cdot \rangle$ 和 $\langle H_2, \cdot \rangle$ 都是循环群, 设 $\langle H_1, \cdot \rangle$ 的生成元为 x , $\langle H_2, \cdot \rangle$ 的生成元为 y , 则 $H_1 = \{e, x, x^2, \dots, x^{q-1}\}$, $H_2 = \{e, y, y^2, \dots, y^{q-1}\}$ 。令 $H_3 = H_1 \cdot H_2 = \{h_3 = x^i \cdot y^j \mid i, j = 0, 1, 2, \dots, q-1\}$ 。显然 $H_3 \subseteq G$, H_3 中有 q^2 个元素, 而 $q^2 > pq$, 所以 H_3 中必有两个元素相同, 不妨设 $x^i \cdot y^j = x^s \cdot y^t$ 且 $i \neq s, j \neq t$, 即有 $x^{i-s} = y^{t-j} \neq e$ 。这就表明 $H_1 \cap H_2 \neq \{e\}$ 。又由 $H_1 \supseteq H_1 \cap H_2, H_2 \supseteq H_1 \cap H_2$, 知 $H_1 \cap H_2$ 是 H_1 的非平凡子群, 由拉格朗日定理知

$$|H_1 \cap H_2| \mid |H_1|$$

而 q 为质数, 因而 $|H_1 \cap H_2| = q$, 所以 $H_1 \cap H_2 = H_1$, 即有 $H_1 = H_2$, 这与假设矛盾。因而 pq 阶群中 q 阶子群仅有一个。由 (i) 和 (ii) 得, $\forall g \in G$, 有 $gHg^{-1} = H$, 故 q 阶子群 $\langle H, \cdot \rangle$ 必是正规子群。

例 6-11 设 $G = \{\varphi \mid \varphi: x \mapsto ax + b, \text{ 其中 } a, b \in R \text{ 且 } a \neq 0, x \in R\}$, 二元运算 $\circ$ 是映射的复合。

(a) 证明 $\langle G, \circ \rangle$ 是一个群。

(b) 若 S 和 T 分别是由 G 中 $a=1$ 和 $b=0$ 的所有映射构成的集合, 证明 $\langle S, \circ \rangle$ 和 $\langle T, \circ \rangle$ 都是子群。

(c) 写出 S 和 T 在 G 中所有的左陪集。

证明 (a) (1) $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in G$, 设 $\varphi_1(x) = a_1x + b_1, \varphi_2(x) = a_2x + b_2, a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$, 则

$$\varphi_1 \circ \varphi_2(x) = \varphi_1(\varphi_2(x)) = \varphi_1(a_2x + b_2)$$

$$= a_1(a_2x + b_2) + b_1 = (a_1a_2)x + (a_1b_2 + b_1)$$

因为 $a_1a_2 \in R$ 且 $a_1a_2 \neq 0, a_1b_2 + b_1 \in R$, 所以

$$\varphi_1 \circ \varphi_2 \in G$$

(2) $\circ$ 是映射的复合, 它满足结合律。

(3) 么元为 $\varphi_e, \varphi_e(x) = x$, 即恒等映射。

(4) $\forall \varphi \in G, \varphi(x) = ax + b, a \neq 0, \varphi^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a} \in G$, 且

$$\varphi^{-1} \circ \varphi = \varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi_e$$

因此 $\langle G, \circ \rangle$ 是一个群。

(b) $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in S, \varphi_1(x) = x + b_1, \varphi_2(x) = x + b_2$, 则 $\varphi_1 \circ \varphi_2(x) = x + (b_1 + b_2)$ 。

所以 $\varphi_1 \circ \varphi_2 \in S, \varphi_1^{-1}(x) = x - b_1$, 因此 $\varphi_1^{-1} \in S$, 因而 $\langle S, \circ \rangle$ 是 $\langle G, \circ \rangle$ 的子群。

$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in T$, 设 $\varphi_1(x) = a_1x, \varphi_2(x) = a_2x, a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$, 则 $\varphi_1 \circ \varphi_2(x) = (a_1a_2)x$, $\varphi_1^{-1}(x) = \frac{1}{a_1}x$, 所以 $\varphi_1 \circ \varphi_2 \in T, \varphi_1^{-1} \in T$, 因而 $\langle T, \circ \rangle$ 是 $\langle G, \circ \rangle$ 的子群。

(c) S 的左陪集为 $\varphi \circ S, \varphi \in G$.

$\forall \varphi \in G, \varphi(x) = ax + b, a \neq 0$, 则

$$\varphi \circ S = \{\varphi \circ \phi \mid \phi \in S\} = \{\varphi \circ \phi \mid \phi: x \rightarrow x + b', b' \in R, x \in R\} = \{\tilde{\varphi} \mid \tilde{\varphi}: x \rightarrow a(x + b') + b = ax + (ab' + b), b' \in R, x \in R\} = \{\tilde{\varphi} \mid \tilde{\varphi}: x \rightarrow ax + c, c \in R, x \in R\}$$

所以, S 在 G 中的所有左陪集为

$$\{\tilde{\varphi} \mid \tilde{\varphi}: x \rightarrow ax + c, c \in R, x \in R\}, a \in R$$

T 在 G 中的左陪集为 $\varphi \circ T, \varphi \in G$

$\forall \varphi \in G, \varphi(x) = ax + b, a \neq 0$, 则

$$\begin{aligned}\varphi \circ T &= \{\varphi \circ \phi \mid \phi \in T\} = \{\varphi \circ \phi \mid \phi: x \rightarrow a'x, a' \in k\} \\ &= \{\tilde{\varphi} \mid \tilde{\varphi}: x \rightarrow a(a'x) + b, a' \in R, a' \neq 0, x \in R\} \\ &= \{\tilde{\varphi} \mid \tilde{\varphi}: x \rightarrow cx + b, c \in R, c \neq 0, x \in R\}\end{aligned}$$

所以, T 在 G 中的所有左陪集为

$$\{\tilde{\varphi} \mid \tilde{\varphi}: x \rightarrow cx + b, c \in R, x \in R\}; b \in R$$

例 6-12 设 $\langle G, * \rangle$ 是任一群, 定义 $R \subseteq G \times G$ 为 $R = \{(\sigma, \varphi) \mid \text{存在 } \theta \in G, \text{使得 } \varphi = \theta * \sigma * \theta^{-1}\}$ 试证 R 是 G 上的等价关系。

证明 设 e 是 $\langle G, * \rangle$ 中的么元, 则对于任意的 $a \in G$, 有 $a = e * a * e^{-1}$, 所以 $\langle a, a \rangle \in R$; 若 $\langle a, b \rangle \in R$, 由定义, 存在 $\theta \in G$, 使得 $b = \theta * a * \theta^{-1}$, 所以 $a = \theta^{-1} * b * \theta = \theta^{-1} * b * (\theta^{-1})^{-1}$, 因此 $\langle b, a \rangle \in R$, 若 $\langle a, b \rangle \in R, \langle b, c \rangle \in R$, 则存在 θ 和 ρ , 使得

$$b = \theta * a * \theta^{-1}, c = \rho * b * \rho^{-1}$$

故有

$$c = \rho * (\theta * a * \theta^{-1}) * \rho^{-1} = (\rho * \theta) * a * (\rho * \theta)^{-1}$$

所以 $\langle a, c \rangle \in R$, 因此 R 是 G 上的等价关系。

例 6-13 证明, 在由群 $\langle G, * \rangle$ 的一个子群 $\langle S, * \rangle$ 所确定的陪集中, 只有一个陪集是子群。

证明 设 G 中的么元为 e , 因 $eS = S$, 所以 S 是一个陪集。

若另有一个陪集 aS 也是 G 的子群, 那么 $e \in aS$, 故必有 $s_1 \in S$, 使 $a * s_1 = e$, 使 $a = s_1^{-1}$. $\forall a * s \in aS$, 有 $a * s = s_1^{-1} * s \in S$, 所以 $aS \subseteq S$; 反之, $\forall s \in S$, 有 $s = a * a^{-1} * s = a * (a^{-1} * s) = a * (s_1 * s) \in aS$, 所以 $S \subseteq aS$, 因而 $aS = S$, 因此 S 的左陪集只有一个是子群, 即 S 本身。

例 6-14 设 $\langle G, * \rangle$ 是一个有限群, $|G| = mk$, $\langle \tilde{G}, * \rangle$ 是 $\langle G, * \rangle$ 的子群, 且 $|\tilde{G}| = m$, 求证: $\forall a \in G$, 必存在整数 $n, 1 \leq n \leq k$, 使得 $a^n \in \tilde{G}$ 。

证明 考察集合 $\{\tilde{G}, a * \tilde{G}, a^2 * \tilde{G}, \dots, a^k * \tilde{G}\}$ 由拉格朗日定理知, 在 G 中仅有 k 个 $\tilde{G}$ 的相异陪集, 而上述集合中却有 $k+1$ 个 $\tilde{G}$ 的陪集, 故必有两个是相同的, 即必存在正整数 n_1 和 $n_2, 0 \leq n_1 < n_2 \leq k$, 使得 $a^{n_1} * \tilde{G} = a^{n_2} * \tilde{G}$. 因为 $a^{n_2} = a^{n_2} * e \in a^{n_2} * \tilde{G}$, 所以必存在 $b \in \tilde{G}$, 使 $a^{n_1} * b = a^{n_2}$, 故 $b = a^{n_2 - n_1}$, 令 $n = n_2 - n_1$, 就有 $1 \leq n \leq k$, 且有 $a^n \in \tilde{G}$ 。

例 6-15 设 $\langle G, \cdot \rangle$ 是一个群, 对于 $a, b \in G$, 若 $a \cdot b = b \cdot a$, a 和 b 的阶分别是 r 和 s , 且循环子群 $\langle a \rangle$ 和 $\langle b \rangle$ 的交只包含 G 的么元 e , 则 $a \cdot b$ 的阶等于 r 和 s 的最小公倍数。

证明 设 d 是 r 和 s 的最小公倍数, 不妨设 $r = \alpha c, s = \beta c, \alpha$ 与 β 互质, 则有 $d = \alpha\beta c$, 于是 $(a \cdot b)^d = a^d \cdot b^d = e$. 设 $(a \cdot b)$ 的阶为 k , 则有 $k \mid d$.

$$\text{设 } k = mr + r_1, 0 \leq r_1 < r$$

$$k=ns+s_1, 0 \leq s_1 < s$$

则 $(a \cdot b)^k = e = a^k \cdot b^k = a^{r_1} \cdot b^{s_1}$ 这表示, b^{s_1} 是 a^{r_1} 的逆元, 故 $b^{s_1} \in \langle a \rangle$, 若 $r_1 \neq 0$, 则 $a^{r_1} \neq e$, 于是必有 $b^{s_1} \neq e$, 则 $b^{s_1} \neq e$, 且 $b^{s_1} \in \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$, 得出矛盾的结论。所以只能有 $r_1 = 0$ 。同理可得 $s_1 = 0$ 。因而 $k = mr$, $k = ns$, 即有 $\alpha c | k$ 和 $\beta c | k$, 因 α 和 β 互质, 所以必有 $\alpha\beta c | k$, 即 $d | k$, 因此 $k = d$ 。即 $\langle ab \rangle$ 的阶为 r 和 s 的最大公倍数。

例 6-16 $\langle R - \{0\}, \times \rangle$ 与 $\langle R, + \rangle$ 同构吗?

解 设 f 是 $\langle R, + \rangle$ 与 $\langle R - \{0\}, \times \rangle$ 的同构映射, 于是 $\forall b \in R - \{0\}$, 必存在 $a \in R$, 使 $f(a) = b$,

$$b = f(a) = f(0 + a) = f(0) \times f(a) = f(0) \times b$$

$$b = f(a) = f(a + 0) = f(a) \times f(0) = b \times f(0)$$

所以 $f(0)$ 是 $\langle R - \{0\}, \times \rangle$ 的么元, 即应有 $f(0) = 1$ 。

对于 $-1 \in R - \{0\}$, 必存在 $c \in R$, 使 $f(c) = -1$, 有

$$f(c + c) = f(c) \times f(c) = (-1) \times (-1) = 1$$

所以有 $c + c = 0$, 即 $c = 0$ 。因而 $f(0) = -1$, 得到矛盾的结果。

因此, $\langle R - \{0\}, \times \rangle$ 与 $\langle R, + \rangle$ 不可能同构。

例 6-17 设 $\langle A, +, \cdot \rangle$ 是一个无零因子环, 若 $x^2 = x$ 在 A 中有非零解, 则 $\langle A, +, \cdot \rangle$ 必有么元。

证明 因为 $x^2 = x$ 在 A 中有非零解, 设为 e , $e \neq \theta$, θ 为零元加法么元。由 $\forall a \in A$ 有

$$a \cdot e^2 = a \cdot e \quad (a \cdot e - a) \cdot e = 0$$

因 $e \neq \theta$, 又 $\langle A, +, \cdot \rangle$ 无零因子, 得 $a \cdot e - a = 0$, 即得 $a \cdot e = a$, 同理得 $e \cdot a = a$ 。因而 e 为 $\langle A, +, \cdot \rangle$ 的乘法么元。

例 6-18 试证整数加法群与偶数加法群同构, 但是整数环不可能与偶数环同构。

证明 对于整数加法群 $\langle I, + \rangle$, 与偶数加法群 $\langle I_E, + \rangle$ 。令 $\varphi: \varphi(x) = 2x$, 则 φ 是 $\langle I, + \rangle$ 到 $\langle I_E, + \rangle$ 的同构映射。

对于整环 $\langle I, +, \cdot \rangle$ 与偶数环 $\langle I_E, +, \cdot \rangle$, 设 φ 是这两个环之间的同构映射, 所以 $\forall x, y \in I$, 有

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

故有

$$\varphi(n \cdot x) = n \cdot \varphi(x)$$

$$\varphi(x \cdot x) = x \cdot \varphi(x) = \varphi(x) \cdot \varphi(x)$$

所以 $\forall x \in I$, 有 $\varphi(x) = x$, 因而对于 $x = 2n + 1 \in I$, 有 $\varphi(2n + 1) = 2n + 1 \notin I_E$, 导出矛盾。因此, 两者不可能同构。

例 6-19 设 $\langle A, +, \cdot \rangle$ 是一个代数系统, 其中 $+$, $\cdot$ 为普通的加法和乘法运算, A 为下列集合:

$$(a) A = \{x | x = 2n, n \in I\}$$

$$(b) A = \{x | x = 2n + 1, n \in I\}$$

$$(c) A = \{x | x \geq 0, \text{ 且 } x \in I\}$$

$$(d) A = \{x | x = a + b + b\sqrt{5}, a, b \in R\}$$

$$(e) A = \{x | x = a + b + b\sqrt{3}, a, b \in R\}$$
 问 $\langle A, +, \cdot \rangle$ 是整环吗? 为什么

解 (a) 没有乘法么元, 所以不是整环。

(b) 对于加法不封闭, 所以不是整环。

(c) $\forall x \neq 0$, 不存在加法逆元, 所以不是整环。

(d) 是整环。

(e) 是整环。

例 6-20 设 $\langle A, +, \cdot \rangle$ 是一个代数系统, 其中 $+$, $\cdot$ 为普通的加法和乘法运算, A 为下列集合:

(a) $A = \{x | x \geq 0, x \in I\}$

(b) $A = \{x | x = a + b\sqrt{3}, a, b \text{ 均为有理数}\}$

(c) $A = \{x | x = a + b\sqrt[3]{5}, a, b \text{ 均为有理数}\}$

(d) $A = \{x | x = a + b\sqrt{5}, a, b \text{ 均为有理数}\}$

(e) $A = \{x | x = \frac{a}{b}, a, b \in I_+ \text{ 且 } a = k \cdot b\}$

问 $\langle A, +, \cdot \rangle$ 是否为域? 为什么?

解 (a) 没有加法逆元, 所以不是域。

(b) 易证 $\langle A, +, \cdot \rangle$ 是一个环, 又因乘法么元是 1, $a + b\sqrt{3}$ 的乘法逆元是 $\frac{a - \sqrt{3}b}{a^2 - 3b^2}$, 所以 $\langle A, +, \cdot \rangle$ 是域。

(c) 因为当 $b \neq 0$ 时, $a + b\sqrt[3]{5}$ 的乘法逆元不存在, 因而 $\langle A, +, \cdot \rangle$ 不是域。

(d) 易证 $\langle A, +, \cdot \rangle$ 是环, 且 $a + b\sqrt{5}$ 之逆元为 $\frac{a - \sqrt{5}b}{a^2 - 5b^2}$, 所以 $\langle A, +, \cdot \rangle$ 是域, 乘法么元为 1。

(e) 没有乘法么元 1。

第 7 章 格与布尔代数

7.1 格

7.1.1 为什么图 7.1 中的 3 个偏序集合不是格。

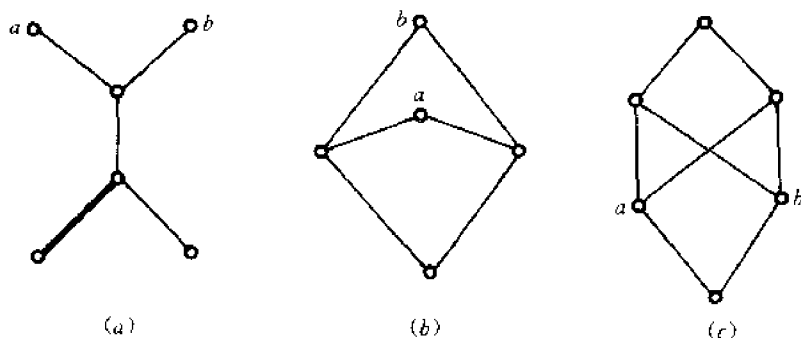


图 7.1

解 图 7.1 中的 3 个偏序集合不是格。因为其中的 $\{a, b\}$ 没有最小上界。

7.1.2 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\leq$ 是通常“小于或等于”, $\langle S, \leq \rangle$ 是格吗? 它的两个运算是什么? 验证公式(6)~(9)是否成立。

解 $\langle S, \leq \rangle$ 是格。保交运算是求最小值, 保联运算是求最大值。对 $a, b \in S$, 记

$$a * b = \min\{a, b\}$$

$$a \oplus b = \max\{a, b\}$$

验证公式(6)~(9):

$$\text{公式(6)} \quad \because a * b = \begin{cases} a, & a \leq b \\ b, & b \leq a \end{cases}$$

$$b * a = \begin{cases} a, & a \leq b \\ b, & b \leq a \end{cases}$$

$$\therefore a * b = b * a$$

$$\because a \oplus b = \begin{cases} b, & a \leq b \\ a, & b \leq a \end{cases}$$

$$b \oplus a = \begin{cases} b, & a \leq b \\ a, & b \leq a \end{cases}$$

$$\therefore a \oplus b = b \oplus a$$

$$\text{公式(7)} \quad \because (a * b) * c = \min\{a * b, c\} = \min\{\min\{a, b\}, c\} = \min\{a, b, c\}$$

$$a * (b * c) = \min\{a, \min\{b, c\}\} = \min\{a, b, c\}$$

$$\therefore (a * b) * c = a * (b * c)$$

$$\because (a \oplus b) \oplus c = \max\{a \oplus b, c\} = \max\{\max\{a, b\}, c\} = \max\{a, b, c\}$$

$$a \oplus (b \oplus c) = \max\{a, \max\{b, c\}\} = \max\{a, b, c\}$$

$$\therefore (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$$

$$\text{公式(8)} \quad a * a = \min\{a, a\} = a$$

$$a \oplus a = \max\{a, a\} = a$$

$$\text{公式(9)} \quad \because a \leq \max\{a, b\}$$

$$\text{即 } a \leq a \oplus b$$

$$\therefore a * (a \oplus b) = \min\{a, a \oplus b\} = a$$

$$\because a * b = \min\{a, b\} \leq a$$

$$\therefore a \oplus (a * b) = \max\{a, a * b\} = a$$

7.1.3 S_{72} 是 72 的所有因子集合, D 是整除关系, 试画出 $\langle S_{72}, D \rangle$ 的哈斯图, 并验证公式(6)~(9)是否成立。

解 $S_{72} = \{72, 36, 24, 18, 12, 9, 8, 6, 4, 3, 2, 1\}$ 。
 $\langle S_{72}, D \rangle$ 的哈斯图如图 7.2 所示。

对 $\forall a, b \in S_{72}$, $a * b = \text{GCD}\{a, b\}$, $a \oplus b = \text{LCM}\{a, b\}$, 验证公式(6)~(9)成立。

$$\text{公式(6)} \quad a * b = \text{GCD}\{a, b\} = \text{GCD}\{b, a\} = b * a$$

$$a \oplus b = \text{LCM}\{a, b\} = \text{LCM}\{b, a\} = b \oplus a$$

$$\text{公式(7)} \quad \because (a * b) * c = \text{GCD}\{a * b, c\} = \text{GCD}\{\text{GCD}\{a, b\}, c\} = \text{GCD}\{a, b, c\}$$

$$a * (b * c) = \text{GCD}\{a, b * c\} = \text{GCD}\{a, \text{GCD}\{b, c\}\} = \text{GCD}\{a, b, c\}$$

$$\therefore (a * b) * c = a * (b * c)$$

$$\because (a \oplus b) \oplus c = \text{LCM}\{a \oplus b, c\} = \text{LCM}\{\text{LCM}\{a, b\}, c\} = \text{LCM}\{a, b, c\}$$

$$a \oplus (b \oplus c) = \text{LCM}\{a, b \oplus c\} = \text{LCM}\{a, \text{LCM}\{b, c\}\} = \text{LCM}\{a, b, c\}$$

$$\therefore (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$$

$$\text{公式(8)} \quad a * a = \text{GCD}\{a, a\} = a$$

$$a \oplus a = \text{LCM}\{a, a\} = a$$

$$\text{公式(9)} \quad a * (a \oplus b) = \text{GCD}\{a, a \oplus b\} = a$$

$$a \oplus (a * b) = \text{LCM}\{a, a * b\} = a$$

7.1.4 试说明四个元素的集合有 15 种划分, 画出相应的格的图。

解 设四个元素的集合 $S = \{a, b, c, d\}$, $\pi(S)$ 为 S 的所有划分, 则 $\pi(S) = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{15}\}$ 。

其中, $\pi_1 = \{\{a, b, c, d\}\}$, $\pi_2 = \{\{a\}, \{b, c, d\}\}$,

$\pi_3 = \{\{b\}, \{a, c, d\}\}$, $\pi_4 = \{\{c\}, \{a, b, d\}\}$,

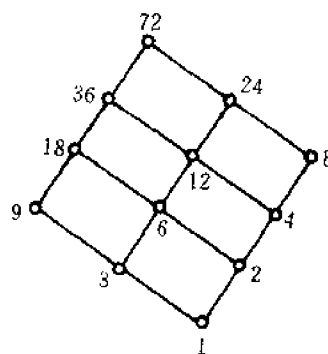


图 7.2

$$\begin{aligned}
\pi_5 &= \{\{d\}, \{a, b, c\}\}, & \pi_6 &= \{\{a, b\}, \{c, d\}\}, \\
\pi_7 &= \{\{a, c\}, \{b, d\}\}, & \pi_8 &= \{\{a, d\}, \{b, c\}\}, \\
\pi_9 &= \{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}, & \pi_{10} &= \{\{a, c\}, \{b\}, \{d\}\}, \\
\pi_{11} &= \{\{a, d\}, \{b\}, \{c\}\}, & \pi_{12} &= \{\{b, c\}, \{a\}, \{d\}\}, \\
\pi_{13} &= \{\{b, d\}, \{a\}, \{c\}\}, & \pi_{14} &= \{\{c, d\}, \{a\}, \{b\}\}, \\
\pi_{15} &= \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}
\end{aligned}$$

偏序关系 $\leq$ 定义为细分, 则格 $\langle \pi(S), \leq \rangle$ 的哈斯图如图 7.3 所示。

7.1.5 设集合 $S_0, S_1, \dots, S_7$ 定义如下:

$$\begin{aligned}
S_0 &= \{a, b, c, d, e, f\} \\
S_1 &= \{a, b, c, d, e\} \\
S_2 &= \{a, b, c, e, f\} \\
S_3 &= \{a, b, c, e\} \\
S_4 &= \{a, b, c\} \\
S_5 &= \{a, b\} \\
S_6 &= \{a, c\} \\
S_7 &= \{a\}
\end{aligned}$$

画出 $\langle L, \subseteq \rangle$ 的图, 这里 $L = \{S_0, S_1, \dots, S_7\}$, 它是格吗? 什么是保交和保联运算?

解 $\langle L, \subseteq \rangle$ 的图如图 7.4 所示。它是格。保交运算是集合的交 $\cap$ 运算, 保联运算是集合的并 $\cup$ 运算。

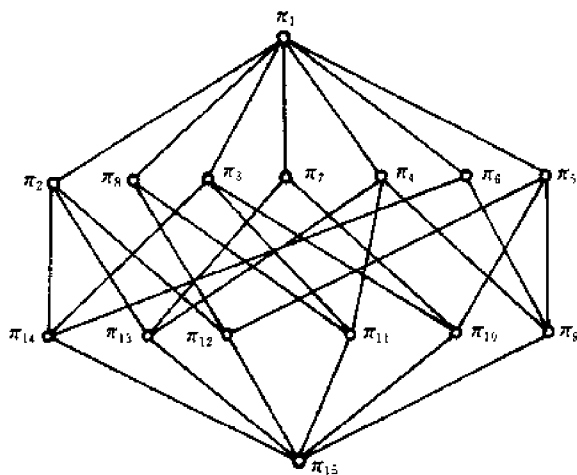


图 7.3

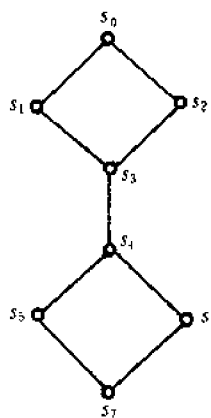


图 7.4

7.1.6 试证明, 在格中如果有 $a \leq b \leq c$, 则 $a \oplus b = b * c$, $(a * b) \oplus (b * c) = b = (a \oplus b) * (a \oplus c)$ 。

证明 由公式(10)得

$$\begin{aligned}
a &\leq b, \text{ 则 } a \oplus b = b \\
b &\leq c, \text{ 则 } b * c = b
\end{aligned}$$

所以 $a \oplus b = b * c$

又 $\because a \leq b \leq c$

$$\therefore (a * b) \oplus (b * c) = a \oplus b = b$$

$$(a \oplus b) * (a \oplus c) = b * c = b$$

$$\therefore (a * b) \oplus (b * c) = b = (a \oplus b) * (a \oplus c)$$

7.1.7 试证明在格中成立

$$(a * b) \oplus (c * d) \leq (a \oplus c) * (b \oplus d)$$

$$(a * b) \oplus (b * c) \oplus (c * a) \leq (a \oplus b) * (b \oplus c) * (c \oplus a)$$

证明 由公式(13)得

$$(a * b) \oplus (c * d) \leq ((a * b) \oplus c) * ((a * b) \oplus d)$$

再由公式(12)和公式(4)得

$$(a * b) \oplus (c * d) \leq (a \oplus c) * (b \oplus d)$$

另外, 因为 $a * b \leq a$, $b * c \leq b$, $c * a \leq a$, 所以

$$(a * b) \oplus (b * c) \leq a \oplus b$$

$$((a * b) \oplus (b * c)) \oplus (c * a) \leq (a \oplus b) \oplus a$$

即

$$(a * b) \oplus (b * c) \oplus (c * a) \leq a \oplus b$$

同理可得

$$(a * b) \oplus (b * c) \oplus (c * a) \leq b \oplus c$$

$$(a * b) \oplus (b * c) \oplus (c * a) \leq c \oplus a$$

所以

$$(a * b) \oplus (b * c) \oplus (c * a) \leq (a \oplus b) * (b \oplus c) * (c \oplus a)$$

7.1.8 试说明具有3个或更少元素的格是一个链。

解 设 $\langle S, \leq \rangle$ 是格, 其中 $|S| \leq 3$, 则 $\langle S, \leq \rangle$ 是偏序集合。

当 $|S| = 3$ 时, 设 $S = \{a, b, c\}$ 。若 a, b, c 中两两无偏序 $\leq$ 关系, 则任何两个元素的 glb 和 lub 不存在, 显然不是格。

若 S 中有两个元素没有 $\leq$ 关系, 不妨设 a 和 b 没有 $\leq$ 关系, 则 $\text{glb}\{a, b\} \neq a$ 且 $\neq b$, 则 $\text{glb}\{a, b\} = c$; $\text{lub}\{a, b\} \neq a$ 且 $\neq b$, 则 $\text{lub}\{a, b\} = c$ 。由 $\text{glb}\{a, b\} = c$ 得 $c \leq a$, 由 $\text{lub}\{a, b\} = c$ 得 $a \leq c$, 所以 $a = c$, 矛盾。

这说明 S 中任两个元素都有 $\leq$ 关系, 因此 $\langle S, \leq \rangle$ 是一个链。

当 $|S| = 2$ 时, 设 $S = \{a, b\}$ 。

因为 $\text{glb}\{a, b\} \in S$, 不妨设 $\text{glb}\{a, b\} = a$, 则有 $a \leq b$, 所以 $\langle S, \leq \rangle$ 为链。

当 $|S| = 1$ 时, $\langle S, \leq \rangle$ 显然为链。

7.1.9 一个公式的对偶公式是自身, 称为自对偶的, 证明公式(14)是自对偶的。

证明 公式(14)为

$$a \leq c \Leftrightarrow a \oplus (b * c) \leq (a \oplus b) * c$$

其对偶公式为

$$a \geq c \Leftrightarrow a * (b \oplus c) \geq (a * b) \oplus c$$

把对偶公式中 a 换为 c , c 换为 a 得

$$c \geq a \Leftrightarrow c * (b \oplus a) \geq (c * b) \oplus a$$

而

$$c * (b \oplus a) = (a \oplus b) * c$$

$$(c * b) \oplus a = a \oplus (b * c)$$

所以对偶公式为

$$a \leq c \Leftrightarrow a \oplus (b * c) \leq (a \oplus b) * c$$

与公式(14)相同,即公式(14)为自对偶的。

7.1.10 下面两个公式也称模不等式,试证明其中任一个都与公式(14)等价。

$$(a * b) \oplus (a * c) \leq a * (b \oplus (a * c))$$

$$(a \oplus b) * (a \oplus c) \geq a \oplus (b * (a \oplus c))$$

证明 证明 $(a * b) \oplus (a * c) \leq a * (b \oplus (a * c)) \cdots$

①

与

$$c \leq a \Leftrightarrow c \oplus (b * a) \leq (c \oplus b) * a \cdots$$

②

等价。

(a) 由②推得①: 因为 $a * \tilde{c} \leq a$ (这里 $\tilde{c}$ 是任意的), 以 $a * \tilde{c}$ 代入②中的 c 得

$$(a * \tilde{c}) \oplus (a * b) \leq ((a * \tilde{c}) \oplus b) * a$$

即公式①

$$(a * b) \oplus (a * \tilde{c}) \leq a * (b \oplus (a * \tilde{c}))$$

(b) 由①推出②: 取 $\tilde{c} = a * c$ 得

(i) $\tilde{c} \leq a$

(ii) $\tilde{c} \oplus (b * a) \leq (\tilde{c} \oplus b) * a$ (以 $\tilde{c}$ 代入①中的 $(a * c)$ 得出)

(i)和(ii)已知是等价的,所以②式成立。

由(a)和(b)即知①和②等价。

由对偶原理可得

$$(a \oplus b) * (a \oplus c) \geq a \oplus (b * (a \oplus c))$$

与公式(14)等价。

7.1.11 设 a 和 b 是格 $\langle A, \leq \rangle$ 中的两个元素,证明 $a * b < a$ 和 $a * b < b$ 当且仅当 a 与 b 是不可比较的 ($a < b$ 的意义是 $a \leq b$ 但 $a \neq b$)。

证明 必要性。若 a 与 b 是可比较的,则 $a * b = a$ 或 $= b$, 与 $a * b < a$ 和 $a * b < b$ 矛盾。

充分性。显然有 $a * b \leq a$ 和 $a * b \leq b$ 。另一方面,若 $a * b = a$, 则 $a \leq b$ 。这与 a 与 b 不可比较矛盾,所以 $a * b \neq a$, 所以 $a * b < a$ 。

同理 $a * b \neq b$, 所以 $a * b < b$ 。

7.2 格是代数系统

7.2.1 设 $\langle L, *, \oplus \rangle$ 是一个格,如果对于所有的 $a, b, c \in L$ 有

$$a \leq c \Leftrightarrow a \oplus (b * c) = (a \oplus b) * c$$

则称 $\langle L, *, \oplus \rangle$ 是模格。图 7.5 中的图形是否模格? 试给出证明。

解 $v_1 \leq v_3$, 但 $v_1 \oplus (v_2 * v_3) \neq (v_1 \oplus v_2) * v_3$, 不符合模格条件,所以不是模格。

7.2.2 试说明图 7.6(a)的图形表达了一个格,但它不是图 7.6(b)的子格。

解 图 7.6(a)是一个格,因为任两个元素均有最小上界和最大下界,但不是图 7.6(b)的子格。因为在图 7.6(b)中, $v_1 * v_2 = v_3$, 而在图 7.6(a)中, $v_1 * v_2 = v_4$, 即图 7.6(a)对 *

不封闭, 因此不是子格。

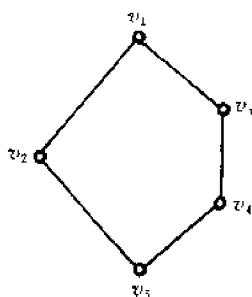
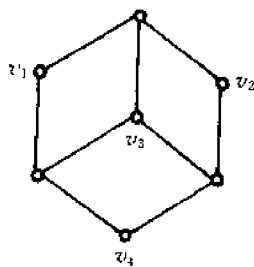
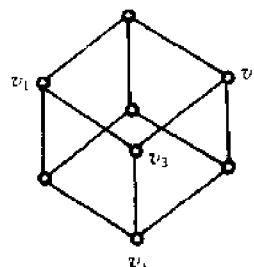


图 7.5



(a)



(b)

图 7.6

7.2.3 试证明格的每一个封闭区间 $[a, b] = \{x \mid x \in L \wedge a \leq x \leq b\}$ 都是一个子格, 这里 L 是格的载体。

证明 对所有 $x, y \in [a, b]$, 有 $a \leq x \leq b$, $a \leq y \leq b$, 所以有 $a \leq x * y \leq b$, $a \leq x \oplus y \leq b$, 即 $x * y \in [a, b]$, $x \oplus y \in [a, b]$, 即对 $*$ 和 $\oplus$ 运算封闭, 所以是一个子格。

7.2.4 试求 $n=12$ 的格 $\langle S_n, D \rangle$ 的所有子格。

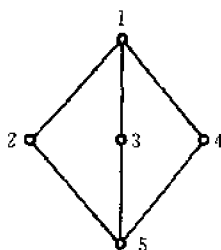
解 $S_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $\langle S_{12}, D \rangle$ 的子格有

- $\langle \{1\}, D \rangle$, $\langle \{2\}, D \rangle$, $\langle \{3\}, D \rangle$,
- $\langle \{4\}, D \rangle$, $\langle \{6\}, D \rangle$, $\langle \{12\}, D \rangle$,
- $\langle \{1, 2\}, D \rangle$, $\langle \{1, 3\}, D \rangle$, $\langle \{1, 4\}, D \rangle$,
- $\langle \{1, 6\}, D \rangle$, $\langle \{1, 12\}, D \rangle$, $\langle \{2, 4\}, D \rangle$,
- $\langle \{2, 6\}, D \rangle$, $\langle \{2, 12\}, D \rangle$, $\langle \{3, 6\}, D \rangle$,
- $\langle \{3, 12\}, D \rangle$, $\langle \{4, 12\}, D \rangle$, $\langle \{6, 12\}, D \rangle$,
- $\langle \{1, 2, 4\}, D \rangle$, $\langle \{3, 6, 12\}, D \rangle$, $\langle \{1, 2, 6\}, D \rangle$,
- $\langle \{1, 2, 12\}, D \rangle$, $\langle \{1, 3, 6\}, D \rangle$, $\langle \{1, 3, 12\}, D \rangle$,
- $\langle \{1, 4, 12\}, D \rangle$, $\langle \{1, 6, 12\}, D \rangle$, $\langle \{2, 4, 12\}, D \rangle$,
- $\langle \{2, 6, 12\}, D \rangle$, $\langle \{1, 2, 3, 6\}, D \rangle$, $\langle \{1, 2, 4, 12\}, D \rangle$,
- $\langle \{1, 2, 6, 12\}, D \rangle$, $\langle \{1, 3, 6, 12\}, D \rangle$, $\langle \{1, 3, 4, 12\}, D \rangle$,
- $\langle \{2, 4, 6, 12\}, D \rangle$, $\langle \{1, 2, 3, 6, 12\}, D \rangle$, $\langle \{1, 2, 4, 6, 12\}, D \rangle$,
- $\langle S_{12}, D \rangle$

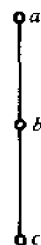
7.2.5 试证明图 7.7(a) 和 (b) 两个格的积代数是一个格, 试画出此格的图。

解 设图 7.7(a) 为 $\langle L, *, \oplus \rangle$, 图 7.7(b) 为 $\langle S, \wedge, \vee \rangle$, 积代数为 $\langle L \times S, \circ, + \rangle$ 。显然 $\circ$ 和 $+$ 是封闭的。对所有 $\langle i, x \rangle, \langle j, y \rangle \in L \times S$, 有 $\langle i, x \rangle \circ \langle j, y \rangle = \langle i * j, x \wedge y \rangle = \langle j * i, y \wedge x \rangle = \langle j, y \rangle \circ \langle i, x \rangle$, 即 $\circ$ 满足交换律。同理 $+$ 满足交换律。

对所有 $\langle i, x \rangle, \langle j, y \rangle, \langle k, z \rangle \in L \times S$, 有



(a)



(b)

图 7.7

$$\begin{aligned}
\langle \langle i, x \rangle \circ \langle j, y \rangle \rangle \circ \langle k, z \rangle &= \langle i * j, x \wedge y \rangle \circ \langle k, z \rangle \\
&= \langle (i * j) * k, (x \wedge y) \wedge z \rangle \\
&= \langle i * (j * k), x \wedge (y \wedge z) \rangle \\
&= \langle i, x \rangle \circ (\langle j, y \rangle \circ \langle k, z \rangle)
\end{aligned}$$

即 $\circ$ 满足结合律。同理 $+$ 满足结合律。

对所有 $\langle i, x \rangle, \langle j, y \rangle \in L \times S$ 有

$$\begin{aligned}
\langle i, x \rangle \circ (\langle i, x \rangle + \langle j, y \rangle) &= \langle i, x \rangle \circ \langle i \oplus j, x \vee y \rangle \\
&= \langle i * (i \oplus j), x \wedge (x \vee y) \rangle \\
&= \langle i, x \rangle
\end{aligned}$$

同理有

$$\langle i, x \rangle + (\langle i, x \rangle \circ \langle j, y \rangle) = \langle i, x \rangle$$

即满足吸收律, 所以 $\langle L \times S, \circ, + \rangle$ 是格。哈斯图如图 7.8 所示。

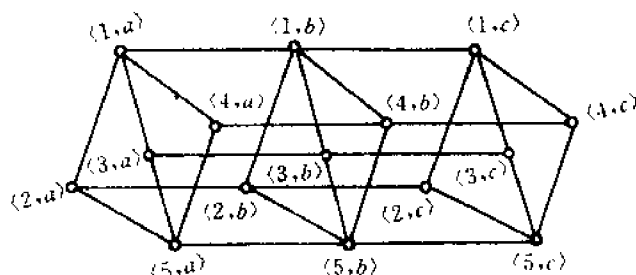


图 7.8

7.2.6 $\langle L, *, \oplus \rangle$ 和 $\langle S, \vee, \wedge \rangle$ 是两个格, $f: L \rightarrow S$ 是格同态, 试证明 f 的象点集合是 S 的子格。

证明 设 $f(L)$ 是 f 的象点集合。下面证明 $\wedge, \vee$ 在 $f(L)$ 上封闭。

对所有 $a', b' \in f(L)$, 存在 $a, b \in L$, 使得 $f(a) = a', f(b) = b'$ 。因为 $f: L \rightarrow S$ 是格同态, 所以, $a' \wedge b' = f(a) \wedge f(b) = f(a * b) \in f(L)$ 。即 $\wedge$ 在 $f(L)$ 中封闭。同理 $\vee$ 在 $f(L)$ 中封闭。所以 $\langle f(L), \wedge, \vee \rangle$ 是子格。

7.2.7 设 A, B 是两个集合, f 是 A 到 B 的映射, 证明 $\langle S, \subseteq \rangle$ 是 $\langle \rho(B), \subseteq \rangle$ 的一个子格, 其中 $S = \{y | y = f(x) \wedge x \in \rho(A)\}$ 。

证明 即证 S 对 $\wedge$ 和 $\vee$ 运算封闭。设 a, b 是 S 的任意两个元素, 于是可定义两个集合

$$D = \{x | x \in A \wedge f(x) \in a\}$$

$$E = \{x | x \in A \wedge f(x) \in b\}$$

显然, $D, E \in \rho(A)$, 而 $a = f(D), b = f(E)$, 因此

$$a \wedge b = f(D) \wedge f(E) = f(D \cap E) \in S$$

$$a \vee b = f(D) \vee f(E) = f(D \cup E) \in S$$

这样就证明了 $\langle S, \subseteq \rangle$ 是 $\langle \rho(B), \subseteq \rangle$ 的子格。

注意, 对任意集合 $D, E, (*)$ 处的相等性未必成立。但我们定义的 D 具有以下最大性——如果有 $x \in \rho(A)$ 且 $f(x) \in a$, 那么 $x \in D$ 。同样, E 也具有最大性。因此 $a \cap b$ 中的元素, 必同时在 D 和 E 中相同元素的象中, 即在 $D \cap E$ 的象中, 因此等号成立。

7.2.8 试证明 $n=216$ 的格 $\langle S_n, D \rangle$, 同构于 $n=8$ 和 $n=27$ 的两个格的积代数。

解 $216=2^3 \cdot 3^3$, 所以它的因子 x 必有以下形式:

$$x = 2^m \cdot 3^n$$

这里 $0 \leq m, n \leq 3$ 。作函数 $f: S_{216} \rightarrow S_8 \times S_{27}$

$$f(x) = f(2^m \cdot 3^n) = \langle 2^m, 3^n \rangle$$

显然, 这是双射函数。设 x, y 是 S_{216} 中任二元素, 且

$$x = 2^{m_1} \cdot 3^{n_1} \quad y = 2^{m_2} \cdot 3^{n_2}$$

则

$$\begin{aligned} f(x * y) &= f(\gcd\{x, y\}) \\ &= \langle 2^{\min\{m_1, m_2\}}, 3^{\min\{n_1, n_2\}} \rangle \\ &= \langle \min\{2^{m_1}, 2^{m_2}\}, \min\{3^{n_1}, 3^{n_2}\} \rangle \\ &= \gcd^* \{f(x), f(y)\} \\ f(x \oplus y) &= f(\text{lcm}\{x, y\}) \\ &= \langle 2^{\max\{m_1, m_2\}}, 3^{\max\{n_1, n_2\}} \rangle \\ &= \langle \max\{2^{m_1}, 2^{m_2}\}, \max\{3^{n_1}, 3^{n_2}\} \rangle \\ &= \text{lcm}^* \{f(x), f(y)\} \end{aligned}$$

因此, f 是 $\langle S_{216}, D \rangle$ 到 $\langle S_8, D \rangle \times \langle S_{27}, D \rangle$ 的格同构。

(注: $\gcd^*$ 、 lcm^* 是积代数中的保交、保联运算。)

7.2.9 试证明从图 7.7(a) 的五元素格到 (b) 的三元素链存在一个映射, 且此映射是保序的。它是否是一个同态?

解 在图 7.7 中, 设图 7.7(a) 为 $\langle L, *, \oplus \rangle$, 图 7.7(b) 为 $\langle S, \wedge, \vee \rangle$ 。作映射 $f: L \rightarrow S$, 使得 $f(1)=a, f(2)=f(3)=f(4)=b, f(5)=c$, 则 f 是保序的, 但不是同态。这是因为 $f(2) \wedge f(3) = b \wedge b = b, f(2 * 3) = f(5) = c$, 即 $f(2 * 3) \neq f(2) \wedge f(3)$ 。所以 f 不是同态映射。

7.3 特殊的格

7.3.1 设 $\langle L, *, \oplus \rangle$ 是格, $a, b, c \in L$ 是任意元素, 证明

$$a * (b \oplus c) = (a * b) \oplus (a * c)$$

和

$$a \oplus (b * c) = (a \oplus b) * (a \oplus c)$$

等价, 即若一个公式成立, 则另一个公式也成立。

证明 先证若 $a * (b \oplus c) = (a * b) \oplus (a * c)$

则

$$a \oplus (b * c) = (a \oplus b) * (a \oplus c)$$

因为

$$\begin{aligned} &(a \oplus b) * (a \oplus c) \\ &= ((a \oplus b) * a) \oplus ((a \oplus b) * c) \\ &= a \oplus (c * (a \oplus b)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a \oplus ((c * a) \oplus (c * b)) \\
&= (a \oplus (c * a)) \oplus (c * b) \\
&= a \oplus (b * c)
\end{aligned}$$

故 $a \oplus (b * c) = (a \oplus b) * (a \oplus c)$

再证若 $a \oplus (b * c) = (a \oplus b) * (a \oplus c)$

则 $a * (b \oplus c) = (a * b) \oplus (a * c)$

$$\begin{aligned}
&\text{因为 } (a * b) \oplus (a * c) \\
&= ((a * b) \oplus a) * ((a * b) \oplus c) \\
&= a * (c \oplus (a * b)) \\
&= a * ((c \oplus a) * (c \oplus b)) \\
&= a * (c \oplus b)
\end{aligned}$$

故 $a * (b \oplus c) = (a * b) \oplus (a * c)$

7.3.2 证明对例1中的两个五元素格,定理7.3-4的结论不成立。(因为非分配格至少含有这两个五元素格之一为子格,所以,由本题的结果,可推知任何非分配格, $(a * b = a * c) \wedge (a \oplus b = a \oplus c) \Rightarrow b = c$ 不成立。)

证明 在图7.9(a)中,有 $a * b = 0, a * c = 0$, 即 $a * b = a * c$; 又有 $a \oplus b = 1, a \oplus c = 1$, 即 $a \oplus b = a \oplus c$, 但是 $b \neq c$, 故定理7.3-4的结论对本例不成立。

在图7.9(b)中,有 $c * a = c * b = 0, c \oplus a = c \oplus b = 1$, 但 $a \neq b$, 故定理7.3-4的结论对本例不成立。

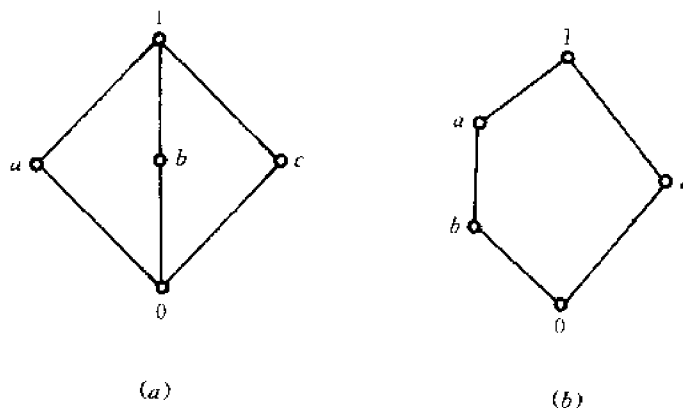


图 7.9

7.3.3 试证明一个格是分配格,当且仅当

$$(a * b) \oplus (b * c) \oplus (c * a) = (a \oplus b) * (b \oplus c) * (c \oplus a)$$

(提示:令 $a = (A \oplus B) * (A \oplus C), b = B \oplus C, c = A$, 并将其代入上式,可证明充分性。)

证明 必要性。因为格是分配格,所以有

$$\begin{aligned}
&(a * b) \oplus (b * c) \oplus (c * a) \\
&= (b * (a \oplus c)) \oplus (c * a) \\
&= (b \oplus c) * (b \oplus a) * (a \oplus c \oplus c) * (a \oplus c \oplus a) \\
&= (a \oplus b) * (b \oplus c) * (a \oplus c)
\end{aligned}$$

充分性。对任意的元素 A, B, C , 令 $a = (A \oplus B) * (A \oplus C)$, $b = B \oplus C$, $C = A$, 将其代入得

$$\begin{aligned}
 & (a * b) \oplus (b * c) \oplus (c * a) \\
 &= (((A \oplus B) * (A \oplus C)) * (B \oplus C)) \oplus ((B \oplus C) * A) \oplus (A * (A \oplus B) * (A \oplus C)) \\
 &= ((A \oplus B) * (A \oplus C) * (B \oplus C)) \oplus ((B \oplus C) * A) \oplus A \\
 &= ((A * B) \oplus (A * C) \oplus (B * C)) \oplus A \\
 &= A \oplus (B * C) \\
 & (a \oplus b) * (b \oplus c) * (c \oplus a) \\
 &= (((A \oplus B) * (A \oplus C)) \oplus (B \oplus C)) * ((B \oplus C) \oplus A) * (A \oplus ((A \oplus B) * (A \oplus C))) \\
 &= (((A \oplus B) * (A \oplus C) \oplus (B \oplus C)) * ((B \oplus C) \oplus A) * ((A \oplus B) * (A \oplus C))) \\
 &= (((A * B) * (A \oplus C) \oplus (B \oplus C)) * ((A \oplus B) * (A \oplus C)) * (A \oplus B \oplus C)) \\
 &= (A \oplus B) * (A \oplus C) * (A \oplus B \oplus C) \\
 &= (A \oplus B) * (A \oplus C)
 \end{aligned}$$

故 $A \oplus (B * C) = (A \oplus B) * (A \oplus C)$ 。

同理可证 $A * (B \oplus C) = (A * B) \oplus (A * C)$ 。

即它是分配格。

7.3.4 试证明在分配格中, 分配律可写成更一般的形式:

$$\begin{aligned}
 a * (\bigoplus_{i=1}^n b_i) &= \bigoplus_{i=1}^n (a * b_i) \\
 a \oplus (\bigotimes_{i=1}^n b_i) &= \bigotimes_{i=1}^n (a \oplus b_i)
 \end{aligned}$$

证明 用数学归纳法证明。

当 $n=2$ 时, 有

$$a * (b_1 \oplus b_2) = (a * b_1) \oplus (a * b_2) \text{ 成立。}$$

设 $n=m$ 时, 式子成立。

当 $n=m+1$ 时,

$$\begin{aligned}
 a * (\bigoplus_{i=1}^{m+1} b_i) &= a * ((\bigoplus_{i=1}^m b_i) \oplus b_{m+1}) = (a * (\bigoplus_{i=1}^m b_i)) \oplus (a * b_{m+1}) \\
 &= \bigoplus_{i=1}^m (a * b_i) \oplus (a * b_{m+1}) = \bigoplus_{i=1}^{m+1} (a * b_i)
 \end{aligned}$$

故 $n=m+1$ 时, 式子成立。

$$\text{由数学归纳法得 } a * (\bigoplus_{i=1}^n b_i) = \bigoplus_{i=1}^n (a * b_i)$$

$$\text{同理可证 } a \oplus (\bigotimes_{i=1}^n b_i) = \bigotimes_{i=1}^n (a \oplus b_i)$$

7.3.5 试证明 $\langle I, \min, \max \rangle$ 是一个分配格, 这里 I 是整数集合。

证明 方法一 只要证明对任意的 $a, b, c \in I$, 有 $\max(a, \min(b, c)) = \min(\max(a, b), \max(a, c))$ 。

(i) 当 a 最大时

$$\max(a, \min(b, c)) = a$$

$$\min(\max(a, b), \max(a, c)) = \min(a, a) = a$$

故

$$\max(a, \min(b, c)) = \min(\max(a, b), \max(a, c))$$

(ii) 当 a 最小时

$$\max(a, \min(b, c)) = \min(b, c)$$

$$\min(\max(a, b), \max(a, c)) = \min(b, c)$$

故

$$\max(a, \min(b, c)) = \min(\max(a, b), \max(a, c))$$

(iii) 当 b, c 中有一个, 不妨设 b , 有 $a \geq b$, 另有 $a \leq c$ 时

$$\max(a, \min(b, c)) = \max(a, b) = a$$

$$\min(\max(a, b), \max(a, c)) = \min(a, c) = a$$

故

$$\max(a, \min(b, c)) = \min(\max(a, b), \max(a, c)).$$

同理可证

$$\min(a, \max(b, c)) = \max(\min(a, b), \min(a, c))$$

故 $\langle I, \min, \max \rangle$ 是一分配格。

方法二 I 在次序关系 $\leq$ 作用下构成一个链, 而每一链都是分配格, 所以 $\langle I, \min, \max \rangle$ 是分配格。

7.3.6 由 $n=30$ 和 $n=45$ 给定的两个格 $\langle S_n, D \rangle$, 它们是分配格吗? 有补格吗?

解 $\langle S_{30}, D \rangle, \langle S_{45}, D \rangle$ 是分配格。因为不含图 7.9 中的两个五元素子格。 $\langle S_{30}, D \rangle$ 是有补格。因为 3, 10; 2, 15; 5, 6; 1, 30 互为补元。 $\langle S_{45}, D \rangle$ 不是有补格, 例如 3 无补元。

7.3.7 给定格 $\langle S_n, D \rangle$, 这里 $n=75$, 试指出格中各元素的补元。若不存在, 则指明不存在。

解 补元有 $75'=1, 25'=3, 3'=25, 1'=75$ 。15 和 5 没有补元。

7.3.8 试证明在具有两个或更多元素的格中, 不含有补元是自身的元素。

证明 设 $\langle L, *, \oplus, 0, 1 \rangle$ 是一有界格, $|L| \geq 2$, 则 $0 \neq 1$ 。若有一元素的补元是自身, 不妨设该元素是 a 。则有 $a * a = 0, a \oplus a = 1$, 即 $a = 0$ 且 $a = 1$, 则 $0 = 1$, 导致矛盾。

7.3.9 试证明具有三个或更多元素的链, 不是有补格。

证明 无界格不是有补格。设 $\langle L, *, \oplus, 0, 1 \rangle$ 是一有界格, 且是链, $|L| \geq 3$ 。

若 $\langle L, *, \oplus, 0, 1 \rangle$ 是有补格, 则存在一元素 $a \neq 0$ 且 $a \neq 1$, 有一补元素, 设为 a' 。由补元定义得 $a * a' = 0, a \oplus a' = 1$ 。因为 L 是链, 所以必有 $a \leq a'$ 或 $a' \leq a$ 。若 $a \leq a'$, 则 $a * a' = a = 0$; 若 $a' \leq a$, 则 $a \oplus a' = a = 1$ 。这都与 $a \neq 0$ 且 $a \neq 1$ 矛盾。所以 $\langle L, *, \oplus, 0, 1 \rangle$ 不是有补格。

7.3.10 设 $\langle L, *, \oplus \rangle$ 是一个格, 这里 $|L| > 1$, 试证明如果 $\langle L, *, \oplus \rangle$ 拥有元素 1 和 0, 则这两元素必定是不同的。

证明 若 $0 = 1$, 则由 0 和 1 的定义, 对 $\forall a \in L$, 有 $0 \leq a$ 且 $a \leq 1$ 。因为 $0 = 1$, 所以有 $0 \leq a$ 且 $a \leq 0$, 则 $a = 0$ 。这可得 $L = \{0\}$ 。这与 $|L| > 1$ 矛盾。所以 0 和 1 必不相同。

7.3.11 试证明在一个有界分配格中, 拥有补元的各元素可以构成一个子格。

证明 设 $\langle L, *, \oplus, 0, 1 \rangle$ 是一有界分配格。设 $L' = \{a | a \in L \text{ 且 } a \text{ 有补元}\}$ 。

对任意 $a, b \in L'$, 有 $a', b' \in L'$ 。由于

$$(a * b) * (b' \oplus a') = (a * b * b') \oplus (a * b * a') = 0 \oplus 0 = 0$$

$$(a * b) \oplus (b' \oplus a') = (a \oplus b' \oplus a') * (b \oplus b' \oplus a') = 1 * 1 = 1$$

故 $a * b$ 和 $b' \oplus a'$ 互为补元。

又

$$(a \oplus b) * (b' * a') = (a * b' * a') \oplus (b * b' * a') = 0 \oplus 0 = 0$$

$$(a \oplus b) \oplus (b' * a') = (a \oplus b \oplus b') * (a \oplus b \oplus a') = 1 * 1 = 1$$

故 $a \oplus b$ 和 $b' * a'$ 互为补元。

所以 L' 对运算 $*$, $\oplus$ 封闭, 故 $\langle L', *, \oplus \rangle$ 构成一个子格。

7.3.12 试证明, 有补分配格中, 有

$$b' \leq a' \Leftrightarrow a * b' = 0 \Leftrightarrow a' \oplus b = 1$$

证明 $b' \leq a' \Rightarrow b' = a' * b' \Rightarrow a * b' = a * (a' * b') = 0$

$$a * b' = 0 \Rightarrow a' \oplus (a * b') = a' \Rightarrow a' \oplus b' = a' \Rightarrow b' \leq a'$$

故 $b' \leq a' \Leftrightarrow a * b' = 0$

有补分配格中有

$$a * b' = 0 \Leftrightarrow (a * b')' = 0' \Leftrightarrow (b')' \oplus a' = 1 \Leftrightarrow a' \oplus b = 1$$

7.3.13 试举出各种格的实例 1~2 个, 填入下表中。

解 实例如表 7.1 所示。

表 7.1

		非 有 界 格	有 界 格	
			非有补格	有补格
非模格				
模格	非分配格			
	分配格			

7.4 布尔代数

7.4.1 证明下列布尔恒等式:

$$(a) a \oplus (a' * b) = a \oplus b$$

$$(b) a * (a' \oplus b) = a * b$$

$$(c) (a * c) \oplus (a' * b) \oplus (b * c) = (a * c) \oplus (a' * b)$$

$$(d) (a \oplus b') * (b \oplus c') * (c \oplus a') = (a' \oplus b) * (b' \oplus c) * (c' \oplus a)$$

$$(e) a * b \oplus a' * c \oplus b' * c = a * b \oplus c$$

证明 (a) $a \oplus (a' * b)$

$$= (a \oplus a') * (a \oplus b)$$

$$= 1 * (a \oplus b)$$

$$= a \oplus b$$

(b) $a * (a' \oplus b)$

$$= (a * a') \oplus (a * b)$$

$$= 0 \oplus (a * b)$$

$$= a * b$$

(c) $(a * c) \oplus (a' * b) \oplus (b * c)$

$$= (a * c) \oplus (a' * b) \oplus ((a \oplus a') * (b * c))$$

$$= (a * c) \oplus (a' * b) \oplus (a * b * c) \oplus (a' * b * c)$$

$$= (a * c) \oplus (a' * b)$$

(d) $(a \oplus b') * (b \oplus c') * (c \oplus a')$

$$= ((a * b) \oplus (a * c') \oplus (b' * c')) * (c \oplus a')$$

$$= (a * b * c) \oplus (b' * c' * a')$$

$$(a' \oplus b) * (b' \oplus c) * (c' \oplus a)$$

$$= ((a' * b') \oplus (a' * c) \oplus (b * c)) * (c' \oplus a)$$

$$= (a' * b' * c') \oplus (b * c * a)$$

所以 $(a \oplus b') * (b \oplus c') * (c \oplus a') = (a' \oplus b) * (b' \oplus c) * (c' \oplus a)$

(e) $a * b \oplus a' * c \oplus b' * c$

$$= a * b \oplus (a' \oplus b') * c$$

$$= a * b \oplus (a * b)' * c$$

$$= (a * b \oplus (a * b)') * (a * b \oplus c)$$

$$= a * b \oplus c$$

7.4.2 化简下列各布尔表达式:

(a) $a * b \oplus a' * b * c' \oplus b * c$

(b) $(a * b' \oplus c) * (a \oplus b') * c$

(c) $a * b \oplus a * b' * c \oplus b * c$

(d) $(a * b)' \oplus (a \oplus b)'$

(e) $(1 * a) \oplus (0 * a')$

解 (a) $a * b \oplus a' * b * c' \oplus b * c$

$$= b * (a \oplus a' * c' \oplus c)$$

$$= b * (a \oplus c \oplus (a \oplus c)')$$

$$= b * 1$$

$$= b$$

(b) $(a * b' \oplus c) * (a \oplus b') * c$

$$\begin{aligned}
&= ((a * b' \oplus c) * c) * (a \oplus b') \\
&= c * (a \oplus b') \\
(c) \quad &a * b \oplus a * b' * c \oplus b * c \\
&= a * (b \oplus b' * c) \oplus b * c \\
&= a * (b \oplus c) \oplus b * c \\
&= a * b \oplus a * c \oplus b * c \\
(d) \quad &(a * b)' \oplus (a \oplus b)' \\
&= a' \oplus b' \oplus a' * b' \\
&= (a' \oplus b') * (a' \oplus b') \\
&= (a * b)' \\
(e) \quad &(1 * a) \oplus (0 * a') \\
&= a \oplus 0 \\
&= a
\end{aligned}$$

7.4.3 试证明: $a=b \Leftrightarrow (a * b') \oplus (a' * b) = 0$ 。

证明 $a=b$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (a * b') \oplus (a' * b) = (a * a') \oplus (a' * a) = 0 \\
&\quad (a * b') \oplus (a' * b) = 0 \\
&\Rightarrow a * b' = 0 \text{ 且 } a' * b = 0 \\
&\Rightarrow a * b' = 0 \text{ 且 } a \oplus b' = 1 \\
&\Rightarrow (b') = a \\
&\Rightarrow a = b
\end{aligned}$$

故 $a=b \Leftrightarrow (a * b') \oplus (a' * b) = 0$

7.4.4 设 $S = \{a, b, c\}$ 是一个集合, 且 $\langle \rho(S), \cap, \cup, \bar{}, \emptyset, S \rangle$ 是 S 的幂集代数, $\langle B, *, \oplus, ', 0, 1 \rangle$ 是二阶布尔代数, 映射

$$\begin{aligned}
g: \rho(S) &\rightarrow B \\
g(x) &= 1, \text{ 当 } x \text{ 含有 } b \text{ 时} \\
g(x) &= 0, \text{ 当 } x \text{ 不含 } b \text{ 时}
\end{aligned}$$

试证明 g 是一个布尔同态。

证明 按如下步骤验证 g 是一个布尔同态:

(i) 对任何 $x, y \in \rho(S)$, 当 x, y 都含有 b 时, $x \cap y$ 也含有 b , 故 $g(x \cap y) = 1$, 且 $g(x) * g(y) = 1 * 1 = 1$ 。故 $g(x \cap y) = g(x) * g(y)$ 。

当 x, y 中至少有一个不含 b 时, 不妨设 x 不含 b 。则 $x \cap y$ 不含 b , 故 $g(x \cap y) = 0$, 且 $g(x) * g(y) = 0 * g(y) = 0$ 。故 $g(x \cap y) = g(x) * g(y)$ 。

综上所述, 对任何 $x, y \in \rho(S)$, 有

$$g(x \cap y) = g(x) * g(y)$$

(ii) 对任何 $x, y \in \rho(S)$, 当 x, y 都不含有 b 时, $x \cup y$ 也不含有 b , 故 $g(x \cup y) = 0$, 且 $g(x) \oplus g(y) = 0 \oplus 0 = 0$, 故 $g(x \cup y) = g(x) \oplus g(y)$ 。

当 x, y 中至少有一个含有 b 时, 不妨设 x 含有 b , 则 $x \cup y$ 也含有 b , 则 $g(x \cup y) = 1$, 且 $g(x) \oplus g(y) = 1 \oplus g(y) = 1$, 故 $g(x \cup y) = g(x) \oplus g(y)$ 。

综上所述, $g(x \cup y) = g(x) \oplus g(y)$ 。

(iii) 对任何 $x \in \rho(S)$, 若 x 不含有 b , 则 $\bar{x}$ 含有 b , 故有 $g(\bar{x}) = 1 = 0' = g(x)'$ 。

若 x 含有 b , 则 $\bar{x}$ 不含有 b , 则 $g(\bar{x}) = 0 = 1' = g(x)'$ 。

综上所述, 对任何 $x \in \rho(S)$, 有 $g(\bar{x}) = g(x)'$ 。

(iv) $g(\emptyset) = 0$

(v) $g(S) = 1$

由以上证明可得 g 是一个布尔同态。

7.4.5 给定从一个布尔代数到另一个布尔代数的映射。试证明如果此映射能保持运算 $\oplus$ 和 $'$, 则也能保持运算 $*$ 。

证明 设 f 是布尔代数 $\langle A, *, \oplus, ', 0, 1 \rangle$ 到布尔代数 $\langle B, \cap, \cup, \overline{}, \alpha, \beta \rangle$ 的映射, 并且 f 保持运算 $\oplus$ 和 $'$, 即对任何 $a, b \in A$, 有

$$f(a \oplus b) = f(a) \cup f(b) \text{ 和 } f(a') = \overline{f(a)}$$

则

$$\begin{aligned} f(a * b) &= f(((a * b)')') \\ &= f(\overline{(a * b)'}) = \overline{f((a * b)')} \\ &= \overline{f(a') \cup f(b')} = \overline{f(a')} \cap \overline{f(b')} \\ &= \overline{f(a')} \cap \overline{f(b')} \\ &= f(a) \cap f(b) \end{aligned}$$

这说明 f 保持运算 $*$ 。

7.4.6 试证明, 如果一个布尔代数中的格同态能保持 0 和 1, 则此同态是一个布尔同态。

证明 设 f 是布尔代数 $\langle A, *, \oplus, ', 0, 1 \rangle$ 到布尔代数 $\langle B, \cup, \cap, \overline{}, \alpha, \beta \rangle$ 的格同态, 并能保持 0 到 1, 即对任何 $a, b \in A$, 有

$$f(a * b) = f(a) \cap f(b)$$

$$f(a \oplus b) = f(a) \cup f(b)$$

$$f(0) = \alpha, f(1) = \beta$$

因此, 对任何 $a \in A$, 有

$$f(a) \cap f(a') = f(a * a') = f(0) = \alpha$$

$$f(a) \cup f(a') = f(a \oplus a') = f(1) = \beta$$

故 $f(a') = \overline{f(a)}$

因此 f 是一个布尔同态。

7.4.7 设 $\langle B, \wedge, \vee, \overline{}, 0, 1 \rangle$ 是布尔代数, 在 B 上定义一个运算 $\oplus$ 如下:

$$a \oplus b = (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b)$$

试证明 $\langle B, \oplus \rangle$ 是一个阿贝尔群。

证明 $\oplus$ 是 B 上二元运算。对于任何 $a, b, c \in B$,

(i) $a \oplus (b \oplus c)$

$$= a \oplus ((b \wedge \bar{c}) \vee (\bar{b} \wedge c))$$

$$= (a \wedge \overline{((b \wedge \bar{c}) \vee (\bar{b} \wedge c))}) \vee (\bar{a} \wedge ((b \wedge \bar{c}) \vee (\bar{b} \wedge c)))$$

$$= (a \wedge (\bar{b} \vee c) \wedge (b \vee \bar{c})) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge c)$$

$$\begin{aligned}
&= (a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge c) \\
&\quad (a \oplus b) \oplus c \\
&= (((a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b)) \wedge \bar{c}) \vee (((a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b)) \wedge c) \\
&= (a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) \vee ((\bar{a} \vee b) \wedge (a \vee \bar{b}) \wedge c) \\
&= (a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c) \\
&= a \oplus (b \oplus c)
\end{aligned}$$

因此 $\oplus$ 满足结合律。

$$\begin{aligned}
\text{(ii)} \quad a \oplus b &= (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b) \\
&= (b \wedge \bar{a}) \vee (\bar{b} \wedge a) \\
&= b \oplus a
\end{aligned}$$

因此 $\oplus$ 满足交换律。

$$\begin{aligned}
\text{(iii)} \quad a \oplus 0 &= 0 \oplus a \\
&= (0 \wedge \bar{a}) \vee (\bar{0} \wedge a) \\
&= 0 \vee a \\
&= a
\end{aligned}$$

因此 0 为么元。

$$\begin{aligned}
\text{(iv)} \quad a \oplus a &= (a \wedge \bar{a}) \vee (\bar{a} \wedge a) \\
&= 0 \vee 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

因此 a 的逆元为 a 。

综上所述, $\langle B, \oplus \rangle$ 是一个阿贝尔群。

7.4.8 设 $\langle B, \wedge, \vee, \bar{}, 0, 1 \rangle$ 是一个布尔代数, 如果在 B 上两个二元运算 $+$ 和 $\cdot$ 如下:

$$\begin{aligned}
a + b &= (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b) \\
a \cdot b &= a \wedge b
\end{aligned}$$

证明 $\langle B, +, \cdot \rangle$ 是以 1 为么元的环。

证明 作如下验证

(i) 由上题可知 $\langle B, + \rangle$ 为阿贝尔群。

(ii) 对任何 $a, b, c \in B$, 有

$$\begin{aligned}
a \cdot (b \cdot c) &= a \cdot (b \wedge c) = a \wedge (b \wedge c) \\
&= (a \wedge b) \wedge c = (a \cdot b) \wedge c \\
&= (a \cdot b) \cdot c
\end{aligned}$$

又因为 $a \cdot 1 = a \wedge 1 = a = 1 \wedge a = 1 \cdot a$

故 $\langle B, \cdot \rangle$ 为含么元的半群。

(iii) 对任何 $a, b, c \in B$, 有

$$a \cdot (b + c) = a \wedge ((b \wedge \bar{c}) \vee (\bar{b} \wedge c))$$

$$\begin{aligned}
&= (a \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge c) \\
(a \cdot b) + (a \cdot c) &= (a \wedge b) + (a \wedge c) \\
&= (a \wedge b \wedge \overline{a \wedge c}) \vee (\overline{a \wedge b} \wedge a \wedge c) \\
&= (a \wedge b \wedge (\bar{a} \vee \bar{c})) \vee ((\bar{a} \vee \bar{b}) \wedge a \wedge c) \\
&= (a \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge c) \\
&= a \cdot (b + c)
\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
(b + c) \cdot a &= (b + c) \wedge a = a \wedge (b + c) = a \cdot (b + c) \\
&= (a \cdot b) + (a \cdot c) \\
&= (b \cdot a) + (c \cdot a)
\end{aligned}$$

故 $\cdot$ 在 $+$ 上可分配。

综上所述, $\langle B, +, \cdot \rangle$ 是以 1 为么元的环。

7.4.9 设 $\langle B, *, \oplus, ', 0, 1 \rangle$ 是一个布尔代数, $a \in B$ 。如果 $a \neq 0$, 且对于每一个 $x \in B$, $x \leq a$ 蕴含着 $x = a$ 或 $x = 0$, 则称元素 a 是极小的, 试证明当且仅当 a 是极小的, a 才是一个原子。

证明 必要性。 a 是极小的, 即 $a \neq 0$, 且对每一个 $x \in B$, $x \leq a$, 蕴含着 $x = a$ 或 $x = 0$ 。则 $a > 0$, 且不存在 c , 使得 $0 < c$ 和 $c < a$ 。否则, 若存在 c , 使得 $0 < c$ 和 $c < a$, 即有 $c \leq a$ 。由极小性得 $c = a$ 或 $c = 0$ 矛盾。故 a 是原子。

充分性。 a 是原子, 则 $a \neq 0$, 且不存在 c , 使 $0 < c$ 和 $c < a$ 。故对每一个 $x \in B$, $x \leq a$ 蕴含着 $x = a$ 或 $x = 0$ 。否则若有 $x \neq a$ 且 $x \neq 0$ 使 $x \leq a$, 即有 $0 < x$ 和 $x < a$, 矛盾。故 a 是极小的。

7.4.10 不直接应用推论 7.4-7, 试证明不可能存在载体的基数是 3 的布尔代数。

证明 载体的基数是 3 的格是一个链, 具有 3 个元素的链不是有补格, 故不是布尔代数。

7.4.11 设 $E = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $S_1 = \{a_1, a_2\}$, $S_2 = \{a_3, a_4\}$ 和 $\langle \{\emptyset, S_1, S_2, E\}, \cap, \cup, \overline{}, \emptyset, E \rangle$ 是一个布尔代数 B 。 B 的原子集合 S 是什么? 画出布尔代数 B 的文氏图, 并画出同构于 B 的布尔代数 $\langle \rho(S), \cap, \cup, \overline{}, \emptyset, S \rangle$ 的哈斯图。

解 B 的原子集合 $S = \{S_1, S_2\}$ 。布尔代数 B 的文氏图如图 7.10(a), $\langle \rho(S), \cap, \cup, \overline{}, \emptyset, S \rangle$ 的哈斯图如图 7.10(b)。

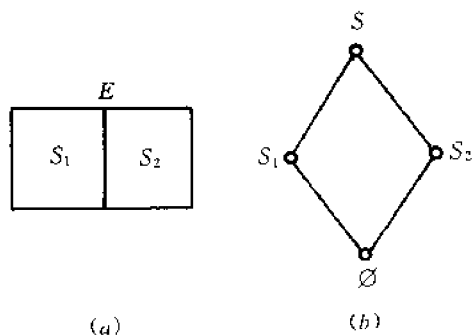


图 7.10

7.4.12 设 $\langle A, *, \oplus, ' \rangle$ 是一代数系统, 这里 $A = \{a, b, c, d\}$, 下边的表给出了3种运算的定义, 证明或否定 $\langle A, *, \oplus, ' \rangle$ 是布尔代数。

$*$	a	b	c	d
a	a	b	a	b
b	b	b	b	b
c	a	b	c	d
d	b	b	d	d

$\oplus$	a	b	c	d
a	a	a	c	c
b	a	b	c	d
c	c	c	c	c
d	c	d	c	d

x	x'
a	d
b	c
c	b
d	a

解 $*$ 和 $\oplus$ 是 A 上的二元运算。

(i) 表中元素关于对角线对称, 故对任意 $x, y \in A$, 有 $x * y = y * x$, $x \oplus y = y \oplus x$ 。

(ii) 对任意 $x, y, z \in A$, 验证

$$x * (y \oplus z) = (x * y) \oplus (x * z)$$

当 $x=a$ 时, 若 y 和 z 中有一个为 a , 则有 $a * (y \oplus z) = a$, $(a * y) \oplus (a * z) = a$ 。

若 y 和 z 中有一个为 b 时, 不妨设 y 为 b , 则有 $a * (y \oplus z) = a * z$, $(a * y) \oplus (a * z) = b \oplus (a * z) = a * z$ 。

若 y 和 z 中有一个为 c 时, $a * (y \oplus z) = a * c = a$, $(a * y) \oplus (a * z) = a$ 。

若 y 和 z 都为 d 时, $a * (d \oplus d) = a * d = b$, $(a * d) \oplus (a * d) = a * d = b$ 。

故当 $x=a$ 时, 对任意 $y, z \in A$, 有

$$a * (y \oplus z) = (a * y) \oplus (a * z)$$

当 $x=b$ 时, 有

$$b * (y \oplus z) = b$$

$$(b * y) \oplus (b * z) = b \oplus b = b$$

当 $x=c$ 时, 有

$$c * (y \oplus z) = y \oplus z$$

$$(c * y) \oplus (c * z) = y \oplus z$$

当 $x=d$ 时, 若 y 和 z 有一个为 d , 则

$$d * (y \oplus z) = d$$

$$(d * y) \oplus (d * z) = d$$

若 y 和 z 有一个为 b , 则不妨设 y 为 b , 则

$$d * (b \oplus z) = d * z$$

$$(d * b) \oplus (d * z) = b \oplus (d * z) = d * z$$

若 y 和 z 有一个为 c , 则

$$d * (y \oplus z) = d * c = d$$

$$(d * y) \oplus (d * z) = d$$

又

$$d * (a \oplus a) = d * a = b$$

$$(d * a) \oplus (d * a) = d * a = b$$

故当 $x=d$ 时, 对任何 $y, z \in A$, 有

$$d * (y \oplus z) = (d * y) \oplus (d * z)$$

综上所述, 对任意 $x, y, z \in A$, 有

$$x * (y \oplus z) = (x * y) \oplus (x * z)$$

同样验证, $x \oplus (y * z) = (x \oplus y) * (x \oplus z)$ 。

(iii) 有 b 和 c 使对任意 $x \in A$, 有 $x * c = x$ 和 $x \oplus b = x$ 。

(iv) 对每一元素 x 有 x' 使 $x * x' = b$ 和 $x \oplus x' = c$ 。

综上所述, $\langle A, *, \oplus, ' \rangle$ 是布尔代数。

7.4.13 试构造一个 $\langle \rho(S), \cap, \cup, \overline{}, \emptyset, S \rangle$ 到 A_2^3 的同构, 这里 $S = \{a_1, a_2, a_3\}$ 。

解 设 f 是 $\langle \rho(S), \cap, \cup, \overline{}, \emptyset, S \rangle$ 到 A_2^3 的映射, 有 $f(S) = \langle \delta_1, \delta_2, \delta_3 \rangle$ 。

其中

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{当 } a_i \in S \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } a_i \notin S \text{ 时 } (i = 1, 2, 3) \end{cases}$$

容易验证 f 是同构映射。

7.4.14 已知 $\langle \{0, a, b, 1\}, *, \oplus, ', 0, 1 \rangle$ 上的布尔函数 $f(x_1, x_2, x_3) = a * x_1 * x_2' \oplus x_1 * (x_3 \oplus b)$, 试求 $f(b, 1, a)$ 的值。

解 $f(b, 1, a) = a * b * 1' \oplus b * (a \oplus b) = 0 \oplus b * 1 = b$

7.4.15 下列是二元素布尔代数上的布尔表达式, 试求出它们的主析取范式 and 主合取范式。

(a) $x_1 \oplus x_2$

(b) $(x_1 \oplus x_2)' \oplus (x_1' * x_3)$

(c) $(x_1 * x_2') \oplus x_4$ (假定它是四个变元的表达式)

解 (a) $x_1 \oplus x_2$

$$\begin{aligned} &= x_1 * (x_2 \oplus x_2') \oplus (x_1 \oplus x_1') * x_2 \\ &= x_1 * x_2 \oplus x_1 * x_2' \oplus x_1' * x_2 \\ &= m_3 \oplus m_2 \oplus m_1 \end{aligned}$$

为主析取范式。

$x_1 \oplus x_2 = M_0$ 为主合取范式。

(b) $(x_1 \oplus x_2)' \oplus (x_1' * x_3)$

$$\begin{aligned} &= x_1' * x_2' \oplus x_1' * x_3 \\ &= x_1' * x_2' * (x_3 \oplus x_3') \oplus x_1' * (x_2 \oplus x_2') * x_3 \\ &= x_1' * x_2' * x_3 \oplus x_1' * x_2' * x_3' \oplus x_1' * x_2 * x_3 \\ &= m_1 \oplus m_0 \oplus m_3 \end{aligned}$$

为主析取范式。

$(x_1 \oplus x_2)' \oplus (x_1' * x_3)$

$$\begin{aligned} &= x_1' * x_2' \oplus x_1' * x_3 \\ &= x_1' * (x_2 \oplus x_2') \\ &= (x_1' \oplus x_2 * x_2' \oplus x_3 * x_3') * (x_1 * x_1' \oplus x_2 \oplus x_3) \\ &= (x_1' \oplus x_2 \oplus x_3) * (x_1' \oplus x_2 \oplus x_3') * (x_1 \oplus x_2' \oplus x_3) * (x_1' \oplus x_2' \oplus x_3') * (x_1 \oplus x_2' \oplus x_3) \\ &= M_4 * M_5 * M_6 * M_7 * M_2 \end{aligned}$$

为主合取范式。

$$\begin{aligned}
(c) \quad & (x_1 * x_2) \oplus x_4 \\
&= x_1 * x_2 * (x_3 \oplus x_3') * (x_4 \oplus x_4') \oplus ((x_1 \oplus x_1') * (x_2 \oplus x_2') * (x_3 \oplus x_3') * x_4 \\
&= x_1 * x_2 * x_3 * x_4 \oplus x_1 * x_2 * x_3 * x_4' \oplus x_1 * x_2 * x_3' * x_4 \oplus x_1 * x_2 * x_3' * x_4' \\
&\quad \oplus x_1 * x_2 * x_3 * x_4 \oplus x_1 * x_2 * x_3' * x_4 \oplus x_1' * x_2 * x_3 * x_4 \oplus x_1' * x_2 * x_3' * x_4 \\
&\quad \oplus x_1' * x_2 * x_3 * x_4 \oplus x_1' * x_2 * x_3' * x_4 \\
&= m_{11} \oplus m_{10} \oplus m_5 \oplus m_8 \oplus m_{15} \oplus m_{13} \oplus m_7 \oplus m_5 \oplus m_3 \oplus m_1
\end{aligned}$$

为主析取范式。

$$\begin{aligned}
& (x_1 * x_2) \oplus x_4 \\
&= (x_1 \oplus x_4) * (x_2' \oplus x_4) \\
&= (x_1 \oplus (x_2 * x_2') \oplus (x_3 * x_3') \oplus x_4) * ((x_1 * x_1' \oplus x_2' \oplus (x_3 * x_3') \oplus x_4) \\
&= (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4) * (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3' \oplus x_4) * (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4) \\
&\quad * (x_1 \oplus x_2' \oplus x_3' \oplus x_4) * (x_1' \oplus x_2' \oplus x_3 \oplus x_4) * (x_1' \oplus x_2' \oplus x_3' \oplus x_4) \\
&= M_6 * M_2 * M_4 * M_6 * M_{12} * M_{14}
\end{aligned}$$

为主合取范式。

7.4.16 下列是布尔代数 $\langle\{0, a, b, 1\}, *, \oplus, ', 0, 1\rangle$ 上的布尔表达式, 试求出它的主析取范式 and 主合取范式。

$$\begin{aligned}
(a) \quad & f(x_1, x_2, x_3) = a * x_1 * x_2 \oplus b * x_3 \\
(b) \quad & f(x_1, x_2, x_3) = b * x_1 * (x_3 \oplus x_2') \oplus a * x_2 * (x_1 \oplus x_3) \oplus x_1 * x_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad (a) \quad & f(x_1, x_2, x_3) = a * x_1 * x_2 \oplus b * x_3 \\
&= a * x_1 * x_2 * (x_3 \oplus x_3') \oplus b * (x_1 \oplus x_1') * (x_2 \oplus x_2') * x_3 \\
&= a * x_1 * x_2 * x_3 \oplus a * x_1 * x_2 * x_3' \oplus b * x_1 * x_2 * x_3 \\
&\quad \oplus b * x_1 * x_2' * x_3 \oplus b * x_1' * x_2 * x_3 \oplus b * x_1' * x_2' * x_3 \\
&= m_7 \oplus a * m_6 \oplus b * m_6 \oplus b * m_3 \oplus b * m_1
\end{aligned}$$

为主析取范式。

$$\begin{aligned}
& f(x_1, x_2, x_3) = a * x_1 * x_2 \oplus b * x_3 \\
&= (a \oplus b) * (a \oplus x_3) * (x_1 \oplus b) * (x_1 \oplus x_3) * (x_2 \oplus b) * (x_2 \oplus x_3) \\
&= (a \oplus (x_1 * x_1') \oplus (x_2 * x_2') \oplus x_3) * (b \oplus x_1 \oplus (x_2 * x_2') \oplus (x_3 * x_3')) \\
&\quad * (x_1 \oplus (x_2 * x_2') \oplus x_3) * (b \oplus (x_1 * x_1') \oplus x_2 \oplus (x_3 * x_3')) * ((x_1 * x_1') \oplus x_2 \oplus x_3) \\
&= (a \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) * (a \oplus x_1 \oplus x_2' \oplus x_3) * (a \oplus x_1' \oplus x_2 \oplus x_3) * (a \oplus x_1' \oplus x_2' \oplus x_3) \\
&\quad * (b \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) * (b \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3') * (b \oplus x_1 \oplus x_2' \oplus x_3) * (b \oplus x_1 \oplus x_2' \oplus x_3') \\
&\quad * (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) * (x_1 \oplus x_2' \oplus x_3) * (b \oplus x_1' \oplus x_2 \oplus x_3) * (b \oplus x_1' \oplus x_2 \oplus x_3') * (x_1' \oplus x_2 \oplus x_3) \\
&= (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) * (x_1 \oplus x_2' \oplus x_3) * (x_1' \oplus x_2 \oplus x_3) * (a \oplus x_1' \oplus x_2' \oplus x_3) \\
&\quad * (b \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3') * (b \oplus x_1 \oplus x_2' \oplus x_3') * (b \oplus x_1' \oplus x_2 \oplus x_3') \\
&= M_{11} * M_2 * M_4 * (a \oplus M_6) * (b \oplus M_1) * (b \oplus M_3) * (b \oplus M_5)
\end{aligned}$$

为主合取范式。

$$\begin{aligned}
(b) \quad & f(x_1, x_2, x_3) = b * x_1 * (x_3 \oplus x_2') \oplus a * x_2 * (x_1 \oplus x_3) \oplus x_1 * x_2 \\
&= b * x_1 * x_3 \oplus b * x_1 * x_2' \oplus a * x_2 * x_1 \oplus a * x_2 * x_3 \oplus x_1 * x_2 \\
&= b * x_1 * (x_2 \oplus x_2') * x_3 \oplus b * x_1 * x_2' * (x_3 \oplus x_3') \oplus x_1 * x_2 * (x_3 \oplus x_3')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \ominus a * (x_1 \oplus x_1') * x_2 * x_3 \\
& = b * x_1 * x_2 * x_3 \oplus b * x_1 * x_2' * x_3 \oplus b * x_1 * x_2 * x_3' \oplus x_1 * x_2 * x_3 \oplus x_1 * x_2 * x_3' \\
& \quad \oplus a * x_1 * x_2 * x_3 \oplus a * x_1' * x_2 * x_3 \\
& = x_1 * x_2 * x_3 \oplus b * x_1 * x_2' * x_3 \oplus b * x_1 * x_2 * x_3' \oplus x_1 * x_2 * x_3 \oplus a * x_1' * x_2 * x_3 \\
& = m_7 \oplus b * m_5 \oplus b * m_4 \oplus m_8 \oplus a * m_3
\end{aligned}$$

为主析取范式。

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= b * x_1 * (x_3 \oplus x_2') \oplus a * x_2 * (x_1 \oplus x_3) \oplus x_1 * x_2 \\
&= (b \oplus x_2 \oplus x_1) * (b \oplus x_2) * (b \oplus x_1 \oplus x_3) * (b \oplus x_1 \oplus x_3 \oplus x_2) * (x_1 \oplus a) * (x_1 \oplus a \oplus x_2) \\
& \quad * (x_1 \oplus x_2) * (x_1 \oplus x_3) * (x_1 \oplus x_3 \oplus x_2) * (x_3 \oplus x_2 \oplus a \oplus x_1) * (x_3 \oplus x_2 \oplus x_1) \\
&= (x_1 \oplus x_2) * (b \oplus x_2) * (x_1 \oplus x_3) * (a \oplus x_1) \\
&= (x_1 \oplus x_2 \oplus (x_3 * x_3')) * (b \oplus (x_1 * x_1) \oplus x_2 \oplus (x_1 * x_3')) * (x_1 \oplus (x_2 * x_2') \oplus x_3) \\
& \quad * (a \oplus x_1 \oplus (x_2 * x_2') \oplus (x_3 * x_3')) \\
&= (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) * (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3') * (b \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) * (b \oplus x_1' \oplus x_2 \oplus x_3') * (x_1 \oplus x_2' \oplus x_3) \\
& \quad * (a \oplus x_1 \oplus x_2' \oplus x_3') \\
&= M_0 * M_1 * (b \oplus M_4) * (b \oplus M_5) * M_2 * (a \oplus M_3)
\end{aligned}$$

为主合取范式。

7.5 选 题 例 解

例 7-1 证明在任何格 $\langle L, \leq \rangle$ 中, 对任意的 $a, b, c \in L$, 有

$$((a * b) \oplus (a * c)) * ((a * b) \oplus (b * c)) = a * b$$

成立。

分析 对一般的格, 分配律不一定成立。如用分配律得:

$$\begin{aligned}
& ((a * b) \oplus (a * c)) * ((a * b) \oplus (b * c)) \\
& = (a * b) \oplus ((a * c) * (b * c)) \\
& = (a * b) \oplus (a * b * c) \\
& = a * b \quad (\text{吸收律})
\end{aligned}$$

这样做就错了。只能用格的基本性质证明。

证明 由格的基本性质 4 得:

$$(a * b) \oplus (a * c) \geq a * b \quad \text{且} \quad (a * b) \oplus (b * c) \geq a * b$$

由基本性质 5 得:

$$((a * b) \oplus (a * c)) * ((a * b) \oplus (b * c)) \geq a * b \quad (1)$$

再由基本性质 4 得:

$$a * b \leq a \quad \text{且} \quad a * c \leq a \quad \text{和} \quad a * b \leq b \quad \text{且} \quad b * c \leq b$$

由基本性质 5 得:

$$(a * b) \oplus (a * c) \leq a \quad \text{和} \quad (a * b) \oplus (b * c) \leq b$$

由基本性质 11 得:

$$((a * b) \oplus (a * c)) * ((a * b) \oplus (b * c)) \leq a * b \quad (2)$$

由式(1)、(2)即证得原式成立。

例 7-2 设 $\langle L, \leq \rangle$ 是一个格, a 是 L 中的一个固定元素。试证以下的两个从 L 到 L 的映射 φ_1 和 φ_2 都是保序映射, 其中 φ_1 和 φ_2 分别定义如下:

对于任意的 $x \in L$, $\varphi_1(x) = x * a$, $\varphi_2(x) = x \oplus a$ 。

证明 对于任意的 x 和 $y \in L$, 若 $x \leq y$, 则有 $x * a \leq y * a$ 和 $x \oplus a \leq y \oplus a$, 即 $\varphi_1(x) \leq \varphi_1(y)$ 和 $\varphi_2(x) \leq \varphi_2(y)$ 。即 φ_1 、 φ_2 是保序映射。

例 7-3 设 $\langle L, \leq \rangle$ 是一个分配格, $a, b \in L$ 且 $a < b$, 证明 $f(x) = (x \oplus a) * b$ 是一个从 L 到 S 的同态映射。其中 $S = \{x | x \in L \text{ 且 } a \leq x \leq b\}$ 。

证明 首先证明 $f(x)$ 是一个从 L 到 S 的映射, 即证明对任意 $x \in L$, 有 $f(x) \in S$ 。

因为 $a \leq x \oplus a$ 且 $a < b$, 所以

$$a = a * b \leq (x \oplus a) * b \leq b$$

即 $a \leq f(x) \leq b$, 即 $f(x) \in S$ 。故 f 是从 L 到 S 的一个映射。

其次证明 f 是同态映射。

对于任意的 $x, y \in L$, 因 L 为分配格得:

$$\begin{aligned} f(x * y) &= ((x * y) \oplus a) * b = ((x \oplus a) * (y \oplus a)) * b \\ &= (x \oplus a) * b * (y \oplus a) * b = f(x) * f(y) \\ f(x \oplus y) &= ((x \oplus y) \oplus a) * b = ((x \oplus a) \oplus (y \oplus a)) * b \\ &= ((x \oplus a) * b) \oplus ((y \oplus a) * b) = f(x) \oplus f(y) \end{aligned}$$

故 f 是一个从 L 到 S 的同态映射。

例 7-4 设两个格为 $\langle L, *, \oplus \rangle$ 和 $\langle S, \wedge, \vee \rangle$, 在集合 L 和 S 中, 对应于保交和保联运算的偏序关系分别是 $\leq$ 和 $\leq'$ 。 f 是 L 到 S 的双射, 则 f 是 $\langle L, *, \oplus \rangle$ 到 $\langle S, \wedge, \vee \rangle$ 的格同构, 当且仅当对任意的 $a, b \in L$, 有 $a \leq b \Leftrightarrow f(a) \leq' f(b)$ 。

分析 课本中定理 7.2-2 说明格同态是保序的, 所以证必要性时, 容易证得 $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq' f(b)$ 。

另一方面, 由 f 是格同构得 $f(a * b) = f(a) \wedge f(b)$, 因而当 $f(a) \leq' f(b)$ 时, 有 $f(a * b) = f(a)$, 又 f 为双射, 所以 $a = a * b \leq b$ 。

证明充分性, 即要证 f 是同构映射, 只要证对 $\forall a, b \in L$, 有

$$f(a * b) = f(a) \wedge f(b) \quad \text{和} \quad f(a \oplus b) = f(a) \vee f(b)$$

要证 $f(a * b) = f(a) \wedge f(b)$ 。我们采用通常证法, 即证“左端 $\leq$ 右端”且“右端 $\leq$ 左端”。

证明 必要性。由保序性得: 对 $\forall a, b \in L$, 有 $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq' f(b)$ 。

另一方面, 若 $f(a) \leq' f(b)$ 则 $f(a) = f(a) \wedge f(b) = f(a * b)$ 。因 f 为双射, 故 $a = a * b$, 即 $a \leq b$ 。

充分性。对 $\forall a, b \in L$, 有 $a * b \leq a$ 且 $a * b \leq b$ 。故有 $f(a * b) \leq' f(a)$ 且 $f(a * b) \leq' f(b)$ 。故 $f(a * b) \leq' f(a) \wedge f(b)$ 。

设 $c = f^{-1}(f(a) \wedge f(b))$ 。因为 $f(a) \wedge f(b) \leq' f(a)$ 且 $f(a) \wedge f(b) \leq' f(b)$ 。由题设得 $c \leq a$ 且 $c \leq b$, 故 $c \leq a * b$, 故 $f(c) \leq f(a * b)$, 即 $f(a) \wedge f(b) \leq f(a * b)$ 。

综上所述, 有 $f(a * b) = f(a) \wedge f(b)$ 。

同理可证, $f(a \oplus b) = f(a) \vee f(b)$ 。故 f 为格同构。

例 7-5 设 $\langle S, \leq \rangle$ 是模格, $a, b \in S$, 作 $X = \{x | x \in S, \text{ 且 } a * b \leq x \leq a\}$, $Y = \{y | y \in S,$

且 $b \leq y \leq a \oplus b$ 。证明下面的 f, g

$$f: x \rightarrow x \oplus b \quad (x \in X) \quad g: y \rightarrow y * a \quad (y \in Y)$$

是 X 和 Y 之间的两个同构。

分析 先证明 f, g 是映射, 是双射, 再证 f, g 是保序映射, 由例 7-4 可得 f, g 是同构映射。

证明 先证 f 和 g 是映射。对 $\forall x \in X$, 因为 $a * b \leq x \leq a$, 所以 $(a * b) \oplus b \leq x \oplus b \leq a \oplus b$, 即 $b \leq x \oplus b \leq a \oplus b$, 即 $x \oplus b \in Y$, 故 f 是 X 到 Y 的映射; 类似证明 g 是 Y 到 X 的映射。

再证 f 和 g 是双射且互为逆映射。

对 $\forall x \in X$, 有

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(x \oplus b) = (x \oplus b) * a \\ &= x \oplus (a * b) \quad (\text{因为是模格}) \\ &= x \quad (a * b \leq x) \end{aligned}$$

故 g 是 f 的左逆元。类似地, 对 $\forall y \in Y$ 有

$$f(g(y)) = f(y * a) = (y * a) \oplus b = y * (a \oplus b) = y$$

故 g 也是 f 的右逆元。因此, f 和 g 都是双射且互为逆映射。

最后证明 f 和 g 都是保序映射。

对 $\forall x_1, x_2 \in X$, 若 $x_1 \leq x_2$, 则有

$$(x_1 \oplus b) \oplus (x_2 \oplus b) = (x_1 \oplus x_2) \oplus b = x_2 \oplus b$$

由此可知 $x_1 \oplus b \leq x_2 \oplus b$, 即 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 所以 f 是保序映射。对 $\forall y_1, y_2 \in Y$, 若 $y_1 \leq y_2$, 则

$$\begin{aligned} (y_1 * a) * (y_2 * a) &= (y_1 * y_2) * a = y_1 * a \\ y_1 * a &\leq y_2 * a \end{aligned}$$

因此

$$g(y_1) \leq g(y_2)$$

$\forall x_1, x_2 \in X$, 若 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则

$$x_1 = g(f(x_1)) \leq g(f(x_2)) = x_2$$

即有

$$x_1 \leq x_2$$

$\forall y_1, y_2 \in Y$, 若 $g(y_1) \leq g(y_2)$, 则

$$y_1 = f(g(y_1)) \leq f(g(y_2)) = y_2$$

即有

$$y_1 \leq y_2$$

综上所述, f 和 g 分别是 X 到 Y 和 Y 到 X 的双射保序映射。由例 7-4 可知, f 与 g 都是 X 和 Y 之间的同构映射。

例 7-6 设 $\langle L, \leq \rangle$ 是模格, $x, y, a \in L$, 且 x, y 分别覆盖 a , 证明 $x \oplus y$ 覆盖 x 和 y 。

分析 用反证法证明不存在 $z \in L$, 使得 $x < z < x \oplus y$ 。即证明若有 $x \leq z \leq x \oplus y$, 则有 $z = x$ 或 $z = x \oplus y$ 。

证明 已知 $x \leq x \oplus y$ 。若有 $z \in L$, 使得

$$x \leq z \leq x \oplus y$$

则分两种情况讨论 y 和 z 。

(i) y 和 z 有偏序关系。

若 $y \geq z$, 则因 $z \geq x$, 有 $y \geq x \geq a$ 。这与 y 覆盖 a 矛盾。故只能有 $y \leq z$ 。此时因 $x \leq z$, 故有 $x \oplus y \leq z$, 而 $z \leq x \oplus y$, 故 $z = x \oplus y$ 。

(ii) y 和 z 没有偏序关系。

因为 $z \geq x \geq a$, $y \geq a$, 故 $y * z \geq a$ 。若 $y * z \neq a$, 则因 $y \geq y * z > a$ 与 y 覆盖 a 矛盾, 故 $y * z = a$ 。则由模格性质, 因 $x \leq z$, 故有 $x \oplus (y * z) = (x \oplus y) * z$, 即 $x \oplus a = z$, 即 $x = z$ 。

由 (i) 和 (ii) 可得不存在 $z \in L$, 使得

$$x < z < x \oplus y$$

故 $x \oplus y$ 覆盖 x 。同理可证 $x \oplus y$ 覆盖 y 。

例 7-7 试证明, 在任何一个有限布尔代数 $\langle B, *, \oplus, ', 0, 1 \rangle$ 中, 原子的个数必定与反原子的个数相等。

证明 首先证明 B 中的任一原子 a , 其补元 a' 必是一个反原子。用反证法。假设 a' 不是反原子, 那么必定存在 $b \in B$, 使得 $a' < b < 1$ 。

若 $a * b = 0$, 则 $a' = a' \oplus (a * b) = (a' \oplus a) * (a' \oplus b) = a' \oplus b$, 即 $a' \geq b$, 这与假设矛盾, 故 $a * b \neq 0$ 。

由于 a 是原子, 故 $a * b = a$, 即有 $a \leq b$ 。又因有 $a' < b$, 故得 $a \oplus a' \leq b$, 即 $1 \leq b$, 矛盾。这说明 a' 为反原子。

因为在布尔代数中, 任一元素有且仅有一个补元素, 所以在有限布尔代数中, 原子和反原子总是成对出现, 因此, 在任何一个有限布尔代数中, 原子的个数必定等于反原子的个数。

例 7-8 设 $a, b_1, b_2, \dots, b_r$ 都是布尔代数 $\langle B, *, \oplus, ', 0, 1 \rangle$ 的原子, 那么 $a \leq b_1 \oplus b_2 \oplus \dots \oplus b_r$ 当且仅当存在着 i ($1 \leq i \leq r$) 使得 $a = b_i$ 。

证明 充分性。若 $a = b_i$ ($1 \leq i \leq r$),

则有
$$a = b_i \leq b_i \oplus (b_1 \oplus b_2 \oplus \dots \oplus b_{i-1} \oplus b_{i+1} \oplus \dots \oplus b_r)$$

必要性。用反证法。设 $a \leq b_1 \oplus b_2 \oplus \dots \oplus b_r$, 而不存在 i ($1 \leq i \leq r$), 使得 $a = b_i$ 。因为 $a, b_1, b_2, \dots, b_r$ 都是原子, 故有 $a * b_i = 0$ ($1 \leq i \leq r$)。故 $a * (b_1 \oplus b_2 \oplus \dots \oplus b_r) = (a * b_1) \oplus (a * b_2) \oplus \dots \oplus (a * b_r) = 0$ 。故 $a \leq (b_1 \oplus b_2 \oplus \dots \oplus b_r)'$ 。因为 a 是原子, 由课本推论 7.4-2 知与题设 $a \leq b_1 \oplus b_2 \oplus \dots \oplus b_r$ 矛盾。

因此, 必存在 i ($1 \leq i \leq r$) 使得 $a = b_i$ 。

例 7-9 在图 7.11 中给出两个五元素格。试证明: 格 $\langle L, \leq \rangle$ 为分配格的充要条件是在该格中没有任何子格可以与这两个五元素格中的任一个同构。

分析 该题的结论很有用, 常用来判断一个格是否为分配格。因为证明较繁, 所以一般教材不讲其证明。所以此题作为教材的补充。

必要性显然。

用反证法证明充分性, 即假设 L 不是分配格。由定理 7.3-1 知分配格是模格, 所以对 L 分两种情况证明, 当 L 是非模格时, 能构造与图 7.11(b) 同构的子格。当 L 是模格时, 能构造与图 7.11(a) 同构的子格。

证明 必要性。显然。

充分性。用反证法。设 $\langle L, *, \oplus \rangle$ 是格但不是分配格, 于是存在两种情况:

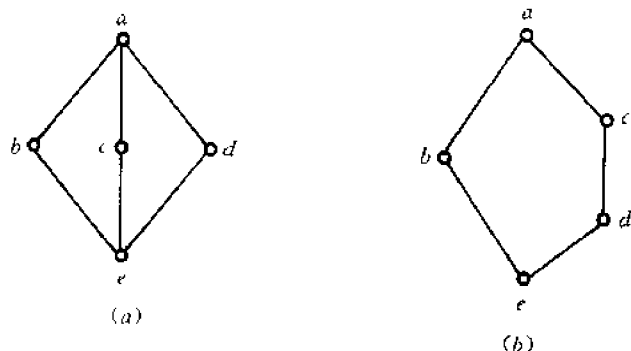


图 7.11

1. 非模格情况, 即存在 $a, b, c \in L$, $a \geq c$ 时有 $u = a * (b \oplus c) > (a * b) \oplus c = v$ (模不等式) 成立。由于

$$\begin{aligned}
 u * b &\geq v * b \geq (a * b) * b && (v \geq a * b) \\
 &= a * b && (\text{等幂律}) \\
 &= a * ((b \oplus c) * b) && (\text{吸收律}) \\
 &= (a * (b \oplus c)) * b && (\text{结合律}) \\
 &= u * b
 \end{aligned}$$

所以

$$u * b = v * b \quad (1)$$

类似地

$$\begin{aligned}
 v \oplus b &\leq u \oplus b \leq (b \oplus c) \oplus b && (u \leq b \oplus c) \\
 &= b \oplus c && (\text{等幂律}) \\
 &= (b \oplus (a * b)) \oplus c && (\text{吸收律}) \\
 &= b \oplus ((a * b) \oplus c) && (\text{结合律}) \\
 &= b \oplus v
 \end{aligned}$$

所以

$$u \oplus b = v \oplus b \quad (2)$$

b 与 u, v 显然不可比较 (否则与 (1) 和 (2) 矛盾)。因此, 子集 $\{u, v, b, b * v, b \oplus u\}$ 构成子格, 如图 7.12 所示。其与图 7.11(b) 同构。

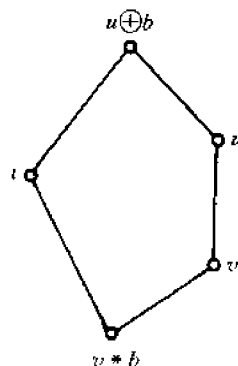


图 7.12

2. 模格情况, 即对任意 $a, b, c \in L$, 当 $a \geq c$ 时, 总有 $a * (b \oplus c) = (a * b) \oplus c$ 成立。但存在元素 a_1, a_2, a_3 , 不满足等式

$$(a_1 \oplus a_2) * (a_2 \oplus a_3) * (a_3 \oplus a_1) = (a_1 * a_2) \oplus (a_2 * a_3) \oplus (a_3 * a_1)$$

令

$$u = (a_1 \oplus a_2) * (a_2 \oplus a_3) * (a_3 \oplus a_1)$$

$$v = (a_1 * a_2) \oplus (a_2 * a_3) \oplus (a_3 * a_1)$$

$$e_1 = (a_2 * a_1) \oplus (a_1 * (a_2 \oplus a_3))$$

$$e_2 = (a_1 * a_3) \oplus (a_2 * (a_1 \oplus a_3))$$

$$e_3 = (a_1 * a_2) \oplus (a_3 * (a_1 \oplus a_2))$$

易证 $v \leq u$ 。又因 a_1, a_2, a_3 不满足分配律, 故必有 $v \neq u$, 故有 $v < u$ 。

$$\begin{aligned}
 e_1 \oplus e_2 &= ((a_2 * a_3) \oplus (a_1 * (a_2 \oplus a_3))) \oplus ((a_1 * a_3) \oplus (a_2 * (a_1 \oplus a_3))) \\
 &= (a_2 * (a_2 \oplus a_3)) \oplus (a_1 * a_3) \oplus (a_2 * (a_1 \oplus a_3)) \oplus (a_2 * a_3) \\
 &= (a_1 * (a_2 \oplus a_3)) \oplus (a_2 * (a_1 \oplus a_3)) \\
 &= (a_2 \oplus a_1) * (a_1 \oplus (a_2 * (a_1 \oplus a_3))) \\
 &\quad (\text{因 } a_2 * (a_1 \oplus a_3) \leq a_2 \leq a_2 \oplus a_3, \text{ 用模格条件}) \\
 &= (a_2 \oplus a_3) * (a_1 \oplus a_3) * (a_1 \oplus a_2) \\
 &\quad (\text{因 } a_1 \leq a_1 \oplus a_3, \text{ 用模格条件}) \\
 &= u
 \end{aligned}$$

同理可证 $e_2 \oplus e_3 = e_3 \oplus e_1 = u$ 。

$$\begin{aligned}
 e_1 * e_2 &= ((a_2 * a_3) \oplus (a_1 * (a_2 \oplus a_3))) * ((a_3 * a_1) \oplus (a_2 * (a_3 \oplus a_1))) \\
 &= ((a_2 \oplus a_3) * (a_1 \oplus (a_2 * a_3))) * ((a_3 \oplus a_1) * (a_2 \oplus (a_3 * a_1))) \\
 &\quad (\text{因 } a_2 * a_3 \leq a_2 \oplus a_3, a_3 * a_1 \leq a_3 \oplus a_1, \text{ 模格条件}) \\
 &= (a_2 \oplus a_3) * (a_2 \oplus (a_3 * a_1)) * (a_1 \oplus (a_2 * a_3)) * (a_1 \oplus a_3) \\
 &= (a_2 \oplus (a_3 * a_1)) * (a_1 \oplus (a_2 * a_3)) \\
 &= (a_3 * a_1) \oplus (a_2 * (a_1 \oplus (a_2 * a_3))) \\
 &\quad (\text{因 } a_3 * a_1 \leq a_1 \leq a_1 \oplus (a_2 * a_3), \text{ 用模格条件}) \\
 &= (a_3 * a_1) \oplus (a_2 * a_1) \oplus (a_2 * a_3) \\
 &\quad (\text{因 } a_2 * a_3 \leq a_2, \text{ 用模格条件}) \\
 &= v
 \end{aligned}$$

同理可证 $e_2 * e_3 = e_3 * e_1 = v$ 。

再证 u, v, e_1, e_2, e_3 互不相等。

若 e_1, e_2, e_3 中有两个元素相等, 利用对称性, 不妨假设 $e_1 = e_2$, 则将导致 $u = e_1 \oplus e_2 = e_1 * e_2 = v$ 的矛盾。

若 $u = e_1$, 则 $v = e_1 * e_2 = u * e_2 = e_2$, $u = e_2 \oplus e_3 = v \oplus e_3 = e_3$, 从而导致 $e_1 = u = e_3$ 的矛盾。

若 $v = e_1$, 则 $u = e_1 \oplus e_2 = v \oplus e_2 = e_2$, $v = e_2 * e_3 = u * e_3 = e_3$, 从而导致 $e_1 = v = e_3$ 的矛盾。

最后证明 e_1, e_2, e_3 两两不可比较。

利用对称性, 只需考察其中的两个元素即可, 不妨取 e_1 和 e_2 。若 $e_1 \leq e_2$, 则将导致 $u = e_1 \oplus e_2 = e_2$ 的矛盾。

至此, 已经证明在非分配模格中可以找到这样的五个元素 u, v, e_1, e_2, e_3 , 使得由这五个元素所组成的子格与图 7.11(a) 中的五元素格同构。

综上所述, 本题得证。

第 8 章 图 论

8.1 图的基本概念

8.1.1 证明在任何有向图中,所有顶点的引入次数之和等于所有顶点引出次数之和。

证明 因为在有向图中每条边提供一个引入次数和一个引出次数,所以,在任何有向图中,所有顶点的引入次数之和等于所有顶点引出次数之和。

8.1.2 证明在任何有向完全图中,所有顶点引入次数平方之和等于所有顶点引出次数平方之和。

证明 因为在 n 个结点的任意有向完全图中,每个顶点的引入次数等于该顶点的引出次数且为 n ,故所有顶点引入次数平方之和 $n \cdot n^2$ 等于所有顶点引出次数平方之和 $n \cdot n^2$ 。

8.1.3 画出一个结点数最少的简单图, (a) 使它是 3-正则图, (b) 使它是 5-正则图。

解 所求如图 8.1(a)和(b)所示。

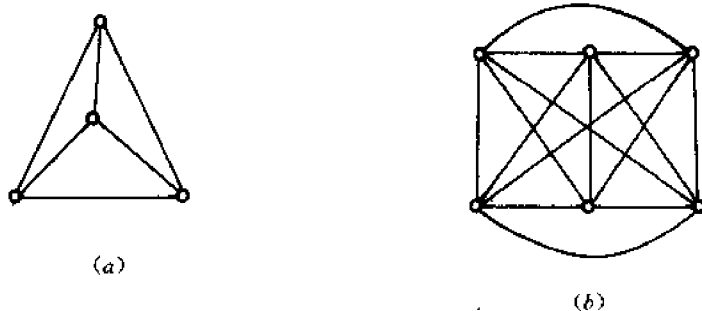


图 8.1

8.1.4 (a) 证明在 n 个顶点的无向完全图中共有 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 条边。

(b) 证明在 n 个顶点的有向简单图中最多只有 $n(n-1)$ 条边。

(c) 证明 n 个顶点的简单无向图中,至少有两个顶点次数相同,这里 $n \geq 2$ 。

证明 (a) 因为 n 个顶点的无向完全图中任两个不同顶点之间有且只有一条边,因此共有 $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ 条边。

(b) 因为 n 个顶点的有向简单图中,每两不同顶点之间最多有两条边,因此其边数最

多为 $2 \binom{n}{2} = n(n-1)$ 。

(c) n 个顶点的简单无向图中, 任一顶点的次数取值范围为 $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ 。

当有一顶点次数为 $n-1$ 时, 说明该顶点与图中其余所有顶点相邻接, 因此图中没有次数为 0 的顶点。这时, 顶点的次数取值范围为 $\{1, 2, \dots, n-1\}$, 即 n 个顶点赋以 $n-1$ 个不同数值, 因此必有两个顶点赋以相同次数。

另一方面, 若没有顶点次数为 $n-1$, 则图的顶点的次数取值范围为 $\{0, 1, 2, \dots, n-2\}$, 同理可得图中至少有两个顶点次数相同。

8.1.5 n 个城市用 k 条公路的网络连结(一条公路定义为两个城市间的一条不穿过任何中间城市的道路), 证明如果 $k > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, 则人们总能通过连结的公路, 在任何两个城市间旅行。

证明 把城市作为顶点, 城市间的公路作为顶点间的边, 由此构成图 G 。 G 有 n 个顶点, k 条边。

用反证法证明。假设 G 中有两顶点 u, v , 从 v 不能经过边到达 u , 不妨设 V_1 为 G 中能到达 u 的顶点集, V_2 为 G 中不能到达 u 的顶点集, 则有 $u \in V_1, v \in V_2$ 。设 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ 为 V_1 导出的子图, $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ 为 V_2 导出的子图。显然有 $|V_1| + |V_2| = n, |E_1| + |E_2| = k$ 。设 $|V_1| = m$, 则 $|E_1| \leq m(m-1)/2, |E_2| \leq (n-m)(n-m-1)/2$, 所以 $k = |E_1| + |E_2| \leq m(m-1)/2 + (n-m)(n-m-1)/2 = \frac{1}{2}(n^2 - n - 2mn + 2m^2)$ 。

又因为 $m \geq 1, n \geq m+1$, 所以 $(m-1)(n-m-1) \geq 0$ 。故 $mn - m^2 - n + 1 \geq 0$, 即 $-nm + m^2 \leq -n + 1$ 。

代人 $k \leq \frac{1}{2}(n^2 - n - 2mn + 2m^2)$, 得 $k \leq \frac{1}{2}(n^2 - n - 2n + 2) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, 这与题设 $k > (n-1)(n-2)/2$, 矛盾。

矛盾说明图中任两顶点可以相互达到, 即人们总能通过连结的公路在任何两个城市间旅行。

8.1.6 证明图 8.2 中的两个有向图是同构的。

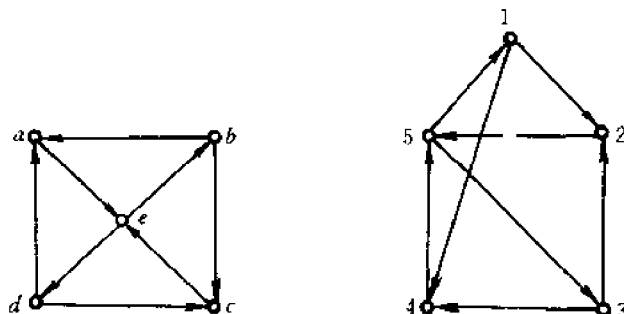


图 8.2

证明 作映射 $g(a)=4, g(b)=1, g(c)=2, g(d)=3, g(e)=5$ 。在该映射下, 边 $\langle a, e \rangle, \langle b, a \rangle, \langle d, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle e, b \rangle, \langle d, c \rangle, \langle c, e \rangle, \langle e, d \rangle$ 分别对应为 $\langle 4, 5 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 3, 4 \rangle,$

$\langle 1,2 \rangle, \langle 5,1 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 2,5 \rangle, \langle 5,3 \rangle$, 因此两个有向图同构。

8.1.7 证明图 8.3 中的两图是不同构的。

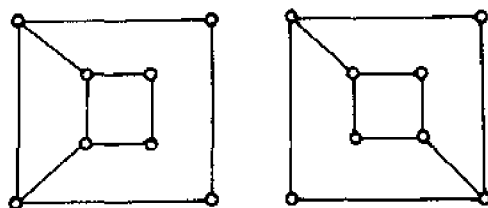


图 8.3

证明 左图中有且只有 4 个次数为 2 的点, 且有两对点相邻接。右图中也有且只有 4 个次数为 2 的点, 但这 4 个点互不邻接。因此, 两图之间不存在同构映射, 因而不同构。

8.1.8 画出图 8.4 中图的补图。

图 8.4 中图的补图为图 8.5。

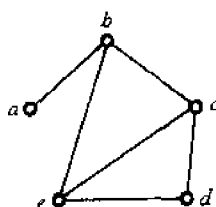


图 8.4

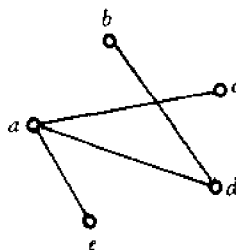


图 8.5

8.1.9 一个无向图如果同构于它的补, 则该图称为自补图。

(a) 给出一个 4 个结点的自补图。

(b) 给出一个 5 个结点的自补图。

(c) 是否有 3 个结点的自补图? 6 个结点的自补图?

(d) 证明一个自补图一定有或者 $4k$ 或者 $4k+1$ 个结点。

解 (a) 4 个结点的自补图见图 8.6(a)。

(b) 5 个结点的自补图见图 8.6(b)。

(c) 没有 3 个结点和 6 个结点的自补图。

因为它们的完全图分别是 3 条边和 15 条边, 两个子图不可能有相同的边数, 故不可能同构。

(d) 设 G 为 n 阶自补图, 则由自补图的定义, 需要 $n(n-1)/2$ 能被 2 整除。只有 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时, $n(n-1)/2$ 能被 2 整除, 所以一个自补图一定或者有 $4k$ 或者有 $4k+1$ 个结点。

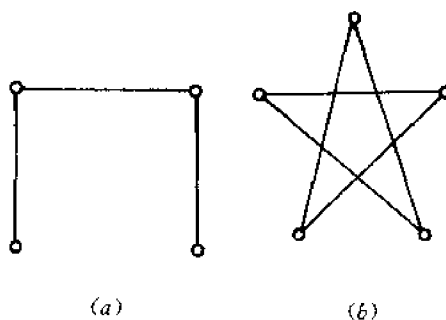


图 8.6

8.1.10 如果存在一个具有 n 个顶点无自回路的线图, 顶点的次数是 $d_1, d_2, \dots, d_n$, 则称这非负整数的有序 n 重组 $\langle d_1, d_2, \dots, d_n \rangle$ 为可构成图的。

(a) 证明 $\langle 4, 3, 2, 2, 1 \rangle$ 是可构成图的。

(b) 证明 $\langle 3, 3, 3, 1 \rangle$ 是不可构成图的。

(c) 不失一般性, 假定 $d_1 \geq d_2 \geq d_3, \dots, \geq d_n$, 证明 $\langle d_1, d_2, \dots, d_n \rangle$ 是可构成图的, 当且仅当 $\langle d_2-1, d_3-1, \dots, d_{d_1}-1, d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2}, \dots, d_n \rangle$ 是可构成图的。

(d) 用 (c) 的结果决定 $\langle 5, 5, 3, 3, 2, 2, 2 \rangle$ 是否可构成图。

解 (a) 其线图如图 8.7 所示。

(b) $\langle 3, 3, 3, 1 \rangle$ 说明 4 阶无自回路的线图中有 3 个结点次数为 3, 一个结点次数为 1, 而当有 3 个结点次数为 3 时, 说明这 3 个结点与其余各个结点相邻接, 这时, 另一个结点次数也应为 3, 这样与题设矛盾, 所以 $\langle 3, 3, 3, 1 \rangle$ 是不可构成图的。

(c) 先证必要性。若 $\langle d_1, d_2, \dots, d_n \rangle$ 是可构成图的, 则 $\langle d_2-1, d_3-1, \dots, d_{d_1}-1, d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2}, \dots, d_n \rangle$ 是可构成图的。

设 $\langle d_1, d_2, \dots, d_n \rangle$ 构成图的结点为 $v_1, v_2, \dots, v_n$, 且 $d(v_i) = d_i$, 可有以下两种情况:

(i) 若 v_1 关联的边正好是 $v_1v_2, v_1v_3, \dots, v_1v_{d_1+1}$, 则去掉这些边所得图即为所求。

(ii) 若 v_1 所关联的边中, 有 $v_1v_j \notin \{v_1v_2, v_1v_3, \dots, v_1v_{d_1+1}\}$, 即 $j > d_1+1$, 令

$$j_0 = \max\{j | v_1v_j \in E(G)\} > d_1 + 1$$

$$i_0 = \min\{i | v_1v_i \in E(G)\} \leq d_1 + 1$$

则有 $v_1v_{j_0} \in E(G)$, 当 $j > j_0$ 时, $v_1v_j \notin E(G)$ 。

$v_1v_{i_0} \notin E(G)$, 当 $i < i_0$ 时, $v_1v_i \in E(G)$ 。

其线图如图 8.8 所示。

现考察与顶点 v_{i_0} 相邻接的 d_{i_0} 个结点, 其中必有一个顶点 v_k 与 v_{j_0} 不相邻接, 否则就会产生 $d_{i_0} \geq d_{j_0} + 1 > d_{i_0}$ 的矛盾。

作新图 $G' = G - \{v_1v_{j_0}, v_{i_0}v_k\} + \{v_1v_{i_0}, v_kv_{j_0}\}$, 即得图 8.9。于是 G' 仍是无向无自回路的线图, 且有与 G 相同的度序列, 只是 G' 的 j_0 减少了, i_0 增大了。这个过程重复地做下去, 总可得到与 (i) 相同的情况。因此, 必要性得证。

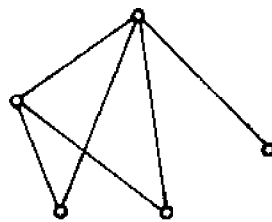


图 8.7

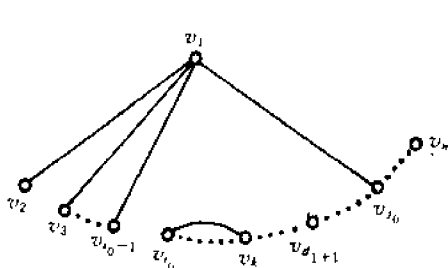


图 8.8

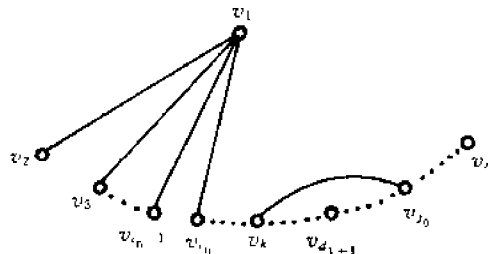


图 8.9

再证充分性。若 $\langle d_2-1, d_3-1, \dots, d_{d_1-1}, d_{d_1-1}, d_{d_1+2}, \dots, d_n \rangle$ 是可构成图的, 则 $\langle d_1, d_2, \dots, d_n \rangle$ 也是可构成图的。

设前者所构成的图为 G , 且结点的次数为 $d(v_i) = d_i - 1, i \leq d_1 + 1$ 时; $d(v_i) = d_i, i > d_1 + 1$ 时, G 中增一个新结点 v_1 , 使 v_1 与 $v_2, \dots, v_{d_1+1}$ 相邻接, 所得新图的结点度序列为 $\langle d_1, d_2, \dots, d_n \rangle$ 。因此, 充分性得证。

(d) 由(c)的结论知: $\langle 5, 5, 3, 3, 2, 2, 2 \rangle$ 是可构成图的, 当且仅当 $\langle 4, 2, 2, 1, 1, 2 \rangle$ 即 $\langle 4, 2, 2, 2, 1, 1 \rangle$ 是可构成图的; 又当且仅当 $\langle 1, 1, 1, 0, 1 \rangle$ 即 $\langle 1, 1, 1, 1, 0 \rangle$ 是可构成图的。显然 $\langle 1, 1, 1, 1, 0 \rangle$ 是可构成图的。因此 $\langle 5, 5, 3, 3, 2, 2, 2 \rangle$ 是可构成图的。

8.1.11 在无向图中有一个顶点集合, 如果不在该集合中的每个顶点至少与该集合中的一个顶点邻接, 则称该集合是支配集。如果一个支配集的任何真子集都不是支配集, 则称该支配集为最小支配集。

(a) 在图 8.10 中找出两个不同大小的最小支配集。

(b) 设棋盘的 64 个方块用 64 个顶点表示, 如果两顶点对应的两个方块是在同一行, 同一列或同一对角线上, 则这两顶点之间有一条边。已知 5 个皇后能被放在棋盘上, 使它们支配所有 64 个方块, 而且 5 是必须的最小皇后数。再用图论名词叙述这一结论。

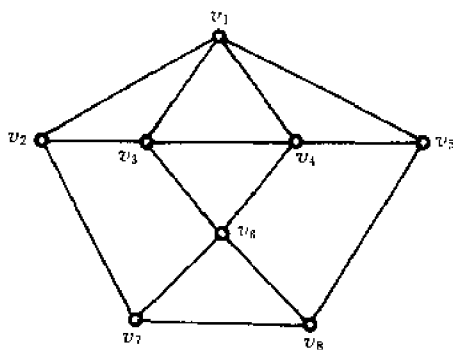


图 8.10

解 (a) 图 8.10 的两个不同大小的最小支配集为 $\{v_1, v_6\}$ 和 $\{v_2, v_3, v_6\}$ 。

(b) 设 G 为题中所对应的图, 则 G 至少有一个最小支配集, 其基数为 5, 且 G 的所有最小支配集的基数大于等于 5。

8.1.12 在无向图中, 没有两个顶点是邻接的顶点集称为独立集。当任何顶点加到这个集合中, 它不再是一个独立集, 则称该独立集为最大独立集。

(a) 在图 8.10 中, 找出两个不同大小的最大独立集。

(b) 类似于上题(b), 在棋盘上放 8 个皇后, 使得没有一个能捕捉另一个, 试用图论术语叙述这个问题。

解 (a) 图 8.10 的两个不同大小的最大独立集为 $\{v_1, v_6\}$ 和 $\{v_2, v_3, v_6\}$ 。

(b) 在图 G 中求一个独立集, 使其基数为 8。

8.1.13 下面的 K_6 代表无向完全图。

(a) 给一个 K_6 的边涂上红色或蓝色, 证明对于任意一种涂法, 要么有一个红色 K_3 (一个 K_3 的所有边涂上红色), 要么有一个蓝色的 K_3 。

(b) 用(a)的结论证明 6 人的人群中间, 或者有 3 个相互认识的, 或者有 3 个彼此陌生的。

证明 (a) 设 v 为 K_6 的任一顶点, 则 K_6 中有 5 条边与 v 相关联。当 K_6 的边涂色后, 与 v 关联的 5 条边中至少有 3 条边的颜色相同, 不妨设 3 条边为 e_1, e_2, e_3 , 涂色为红色。设与 e_1, e_2, e_3 关联的另一个点分别为 v_1, v_2, v_3 。若边 v_1v_2, v_2v_3, v_1v_3 涂色均为蓝色, 则证毕。若其中有一条边为红色, 不妨设 v_1v_2 , 则 v_1v_2, e_1, e_2 均为红色, 证毕。

(b) 作 K_6 , 每个顶点对应一个人。两个人若相互认识, 则对应顶点间的边涂红色; 若彼此陌生, 则涂蓝色。由(a)可知必有一个红色 K_3 或一个蓝色的 K_3 , 即或者有 3 个相互认识, 或者有 3 个彼此陌生。

8.2 路径和回路

8.2.1 在图 8.11 中, 图示了一个有向图, 试给出从 v_1 到 v_3 的 3 种不同的基本路径。 v_1 到 v_3 之间的距离是多少? 找出图中所有基本回路。

解 图 8.11 的从 v_1 到 v_3 的 3 种不同的基本路径分别为 (v_1, v_2, v_3) , (v_1, v_2, v_4, v_3) , (v_1, v_4, v_3) 。 v_1 到 v_3 之间的距离为 2。所有基本回路为: (v_3, v_4, v_1) , (v_2, v_4, v_3, v_2) 。

8.2.2 因为有向线图代表关系, 用于关系的术语可移用于有向线图。例如, 有向线图所代表的关系是传递的, 则称此有向图为传递的, 余类推。在图 8.11 中, 此有向线图是否可传递? 如果不可传递, 试求此有向线图的传递闭包(即求此有向线图所代表的关系的传递闭包的关系图)。

解 图 8.11 不可传递, 其传递闭包关系图如图 8.12 所示。

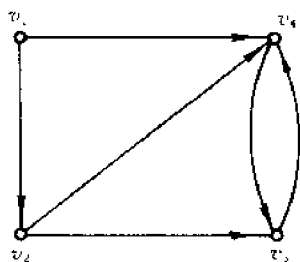


图 8.11

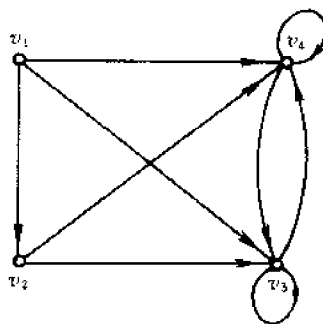


图 8.12

8.2.3 在图 $G = \langle V, E \rangle$ 中, 从给定的结点 v 出发, 若 $S \subseteq V$ 中每一结点都是从 v 可达, 而 $V - S$ 中的每个结点都从 v 不可达, 则称 S 为 v 的可达集合, 记为 $d(v) = S$ 。集合 $T = \bigcup_{v \in V'} d(v)$ 称为 V' 的可达集合, 记为 $d(V') = T$, 这里 $V' \subseteq V$ 。试在图 8.13 中, 求出 $d(v_1)$, $d(v_8)$, $d(\{v_7, v_8\})$, $d(\{v_5, v_8, v_7, v_{10}\})$ 。

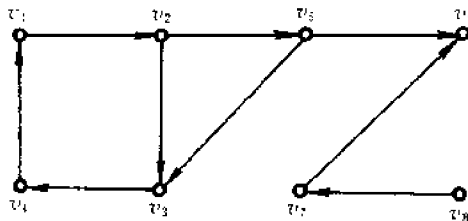


图 8.13

解 $d(v_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

$d(v_8) = \{v_6, v_7, v_8\}$

$d(\{v_7, v_9\}) = \{v_6, v_7, v_9\}$

$d(\{v_5, v_8, v_9, v_{10}\}) = V$

8.2.4 证明如果无向图 G 恰有两个不同的奇度数的顶点 v, v' , 那么 v 到 v' 是可达的。

证明 若 v 到 v' 不可达, 则 G 是不连通的。不妨设 G 有两个连通分支 G_1, G_2 , 分别包含 v 和 v' , 则 G_1 和 G_2 中恰有一个奇度数的顶点。这是不可能的, 故 v 到 v' 可达。

8.2.5 试求出图 8.13 中的所有强分图、弱分图和单向分图。

解 图 8.13 中的强分图集为 $\{\langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \{v_1v_2, v_2v_3, v_2v_5, v_3v_4, v_4v_1, v_5v_3\} \rangle, \langle \{v_6\}, \emptyset \rangle, \langle \{v_7\}, \emptyset \rangle, \langle \{v_8\}, \emptyset \rangle, \langle \{v_9\}, \{v_9v_9\} \rangle, \langle \{v_{10}\}, \emptyset \rangle\}$ 。

弱分图集为 $\{\langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}, \{v_1v_2, v_2v_3, v_2v_5, v_3v_4, v_4v_1, v_5v_3, v_6v_6, v_7v_6, v_8v_7\} \rangle, \langle \{v_9\}, \{v_9v_9\} \rangle, \langle \{v_{10}\}, \emptyset \rangle\}$ 。

单向分图集为 $\{\langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}, \{v_1v_2, v_2v_3, v_2v_5, v_3v_4, v_4v_1, v_5v_3, v_5v_6\} \rangle, \langle \{v_6, v_7, v_8\}, \{v_8v_7, v_7v_6\} \rangle, \langle \{v_9\}, \{v_9v_9\} \rangle, \langle \{v_{10}\}, \emptyset \rangle\}$ 。

8.2.6 设已知下列事实:

- a 会讲英语;
- b 会讲华语和英语;
- c 会讲英语、意大利语和俄语;
- d 会讲日语和华语;
- e 会讲德语和意大利语;
- f 会讲法语、日语和俄语;
- g 会讲法语和德语。

试问这 7 个人中, 是否任意两人都能交谈(必要时可借助于其余 5 人组成的译员链)。

解 以 a, b, c, d, e, f, g 为顶点, 如能讲同一语言则作一边得图 8.14。图 8.14 是连通的, 所以这 7 个人中, 任意两个都能交谈。

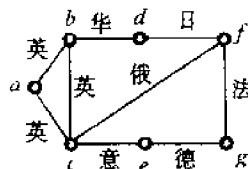


图 8.14

8.2.7 试证明一个不是孤立结点的简单有向图是强连通的, 当且仅当 G 中有一个回路, 它至少包含每个结点一次。

证明 设 G 是强连通简单有向图, 其顶点集为 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ($n > 1$)。因为 G 是强连通的, 所以 v_1 与任一顶点 v_i ($i \geq 2$) 之间有一条 $v_1 \rightarrow v_i$ 和 $v_i \rightarrow v_1$ 的路径, 这两条路径连在一起是一条回路, 记为 C_i , 把所有的 C_i 再连在一起, 构成一个大的回路 C , 则 C 至少包含每个结点一次。

另一方面, 若任一简单有向图中存在一个回路, 它至少包含每个结点一次, 则任取两个结点 v_i, v_j , 从 v_i 到 v_j 和从 v_j 到 v_i 有路径相连, 因此, G 是强连通的。

8.2.8 无向图的直径定义为所有顶点间的距离的极大值, 试求图 8.15 中两图的直径。

解 图 8.15(a) 的直径为 2, (b) 的直径为 2。

8.2.9 试用有向图描述出以下问题的解法路径：

一个人 m 带一条狗 d ，一只猫 c ，一只兔子 r 过河，没有船，他每次游过河时只能带一只动物，而没有人管理时，狗和兔子不能相处，猫和兔子也不能相处。在这些条件约束下，他怎样才能将 3 只动物从左岸带往右岸？（提示：用结点代表状态，例如初始状态可记为 $\langle\{m, d, r, c\}, \emptyset\rangle$ ，人和兔子过河后的状态可记为 $\langle\{d, c\}, \{m, r\}\rangle$ ，若从状态 S_1 可变为状态 S_2 ，则从结点 S_1 画一条弧到结点 S_2 ）。

解 根据题意，有 10 个可能的状态，分别为 $S_1: \langle\{m, d, r, c\}, \emptyset\rangle$; $S_2: \langle\{d, c\}, \{m, r\}\rangle$; $S_3: \langle\{m, d, c\}, \{r\}\rangle$; $S_4: \langle\{d\}, \{m, r, c\}\rangle$; $S_5: \langle\{c\}, \{m, d, r\}\rangle$; $S_6: \langle\{m, d, r\}, \{c\}\rangle$; $S_7: \langle\{m, r, c\}, \{d\}\rangle$; $S_8: \langle\{r\}, \{m, d, c\}\rangle$; $S_9: \langle\{m, r\}, \{d, c\}\rangle$; $S_{10}: \langle\emptyset, \{m, d, c, r\}\rangle$ 。图解如图 8.16。

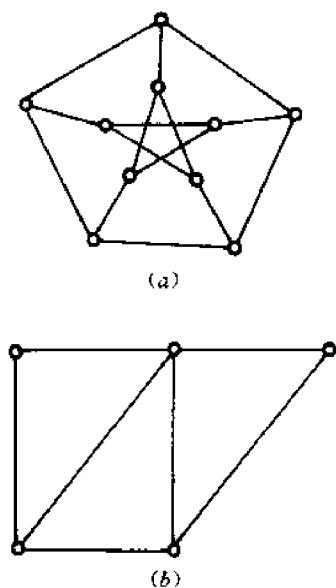


图 8.15

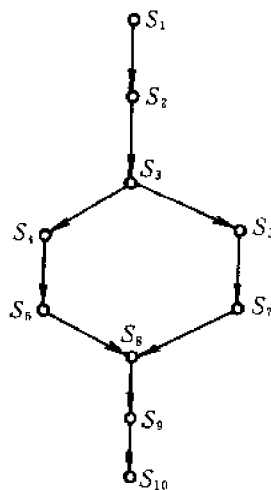


图 8.16

由图可知至少有两个解： $(S_1, S_2, S_3, S_4, S_6, S_8, S_9, S_{10})$ 或 $(S_1, S_2, S_3, S_5, S_6, S_8, S_9, S_{10})$ 。

8.2.10 有向图可以刻画一个系统的状态转换。例如用图 8.17 的有向图可以描述接收 010^*10 序列 (0^* 表示任意个 0，例如 0110, 01010, 01000010 等等) 的线路的状态转换，其中 S_0 是初始状态， S_4 是收到 010^*10 序列后的结束状态， S_5 是收到非 010^*10 序列后的结束状态。

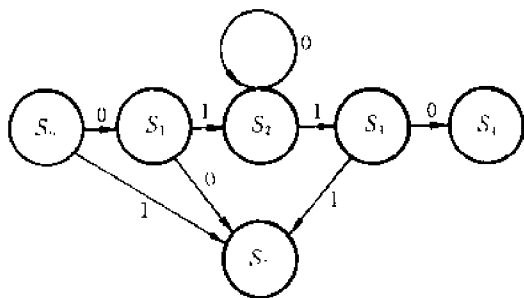


图 8.17

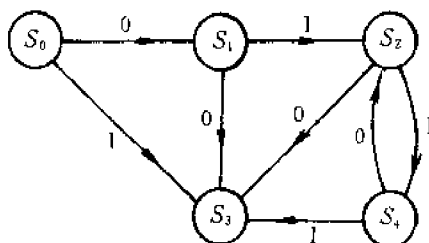


图 8.18

试用类似方法作出接收 $01(10)^*1$ 序列的状态转换图, 这里 $(10)^*$ 表示任意个 10 (可以一个也没有)。

解 图 8.18 为所求状态转换图。其中 S_0 是初始状态, S_4 是收到 $01(10)^*1$ 序列后的结束状态, S_3 是收到非 $01(10)^*1$ 序列后的结束状态。

8.2.11 用迪克斯特拉算法求图 8.19 中 (a)、(b) 两图从 a 到 z 的最短路径及其长度。

解 (a) 图中 a 到 z 的最短路径长为 8, 路径是 (a, d, i, h, k, z) 。

(b) 图中 a 到 z 的最短路径长为 14, 路径是 (a, e, d, c, f, g, z) 。

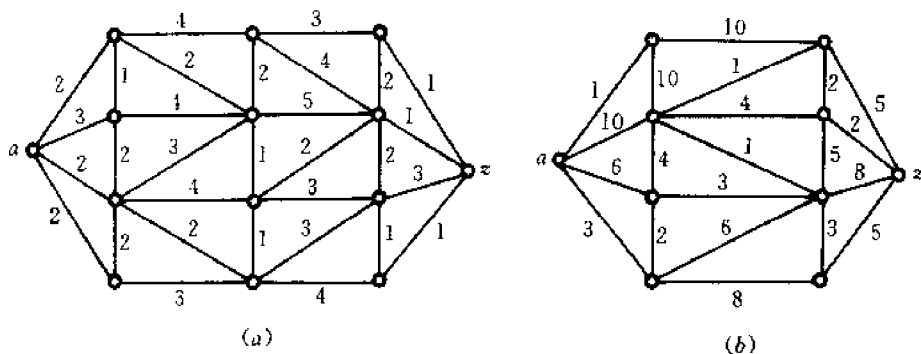


图 8.19

8.2.12 设 G 是无向简单图, 有 n 个顶点, m 条边。

(1) 若 $n=6, m=7$, 证明 G 的连通分图个数不超过 2。

(2) 画一个非连通的无向简单图, 使 $m = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, 这里 $n > 1$ 。

解 (1) 设 w 为分图个数。由公式 $m \leq \frac{1}{2}(n-w)(n-w+1)$ 知, $w=3$ 时, $m \leq \frac{1}{2}(6-3)(6-3+1)=6$ 。所以分图个数 $w > 2$ 时, 边数不能超过 6 条。今有 7 条边, 所以分图个数不超过 2。

(2) 由一个孤立顶点和一个 K_{n-1} 组成的图。

8.2.13 求图 8.20 中 (a)、(b) 两图的欧拉回路或欧拉路径。

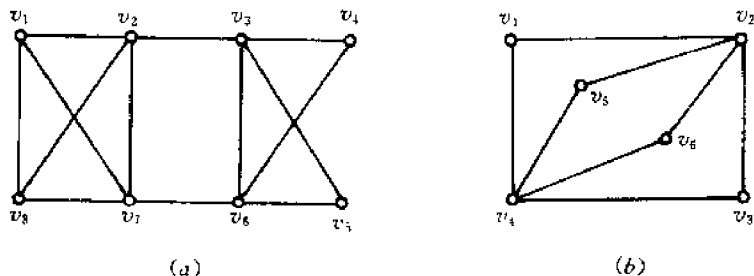


图 8.20

解 图 8.20(a)的欧拉路径为 $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_3, v_6, v_7, v_2, v_8, v_7, v_1, v_8)$ 。

图 8.20(b)的欧拉回路为 $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_2, v_6, v_4, v_1)$ 。

8.2.14 在 8×8 的棋盘上跳动一个马,使完成每一个可能的跳动恰好一次,问这是否可能?

解 图 8.21 为 8×8 的棋盘。构造图 G ,使 G 的顶点对应每一个格子,当马可以从一个格子跳到另一个格子时,对应顶点间有一条边。则问题转化为 G 中是否存在欧拉路径。

如图 8.21 所示,当马在格子 v_1, v_2, v_3, v_4 处时,马只有 3 种跳法,即在 G 中, $\deg(v_1) = \deg(v_2) = \deg(v_3) = \deg(v_4) = 3$ 。 G 中有 8 个顶点的次数为奇数,因此不存在欧拉路径。所以不可能。

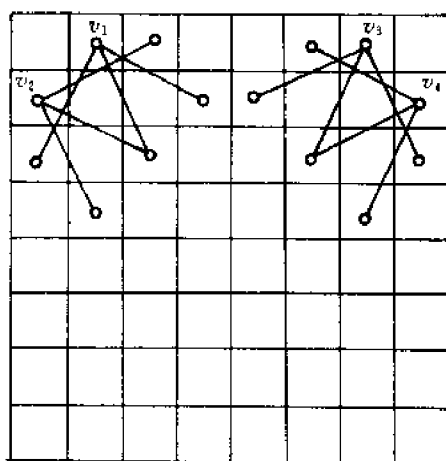


图 8.21

8.2.15 (a) 画一个图,使它有一条欧拉回路和一条哈密顿回路。

(b) 画一个图,使它有一条欧拉回路,但没有一条哈密顿回路。

(c) 画一个图,使它没有一条欧拉回路,但有一条哈密顿回路。

(d) 画一个图,使它既没有一条欧拉回路,也没有一条哈密顿回路。

解 (a) 如图 8.22(a); (b) 如图 8.22(b); (c) 如图 8.22(c); (d) 如图 8.22(d)。

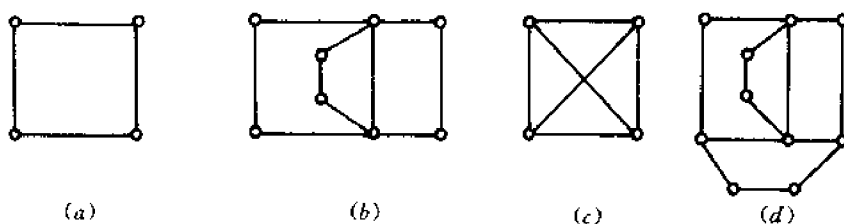


图 8.22

8.2.16 造出一个长度为 16 的布鲁英序列。

解 以所有 3 位二进制数作为顶点,若顶点 u 的后两位与顶点 v 的前两位相同,则 u 到 v 有一弧。这样所作的图如图 8.23 所示。其中 $(e_0, e_1, e_3, e_6, e_{13}, e_0, e_4, e_9, e_2, e_5, e_{11}, e_7, e_{15}, e_{14}, e_{12}, e_8)$ 为一条欧拉回路,对应的布鲁英序列为 0000110100101111。

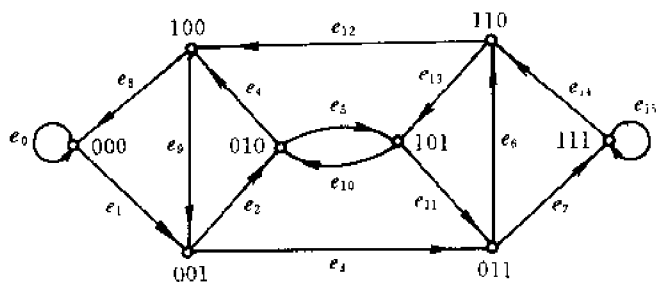


图 8.23

8.2.17 找出一种由 9 个 a , 9 个 b , 9 个 c 构成的圆形排列, 使由字母 $\{a, b, c\}$ 组成的长度为 3 的每个字(共 27 个)仅出现一次。

解 即要求一个长为 27 的布鲁英序列。以所有二位三进制数作为顶点。在这顶点集 $\{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$ 中, 若顶点 u 的后一个字母与顶点 v 的前一个字母相同, 则 u 到 v 有一个弧。这样所得图如图 8.24 所示。其中

$e_0 = aaa, e_1 = aab, e_2 = aac,$
 $e_3 = aba, e_4 = abb, e_5 = abc,$
 $e_6 = aca, e_7 = acb, e_8 = acc,$
 $e_9 = baa, e_{10} = bab, e_{11} = bac,$
 $e_{12} = bba, e_{13} = bbb, e_{14} = bbc,$
 $e_{15} = bca, e_{16} = bcb, e_{17} = bcc,$
 $e_{18} = caa, e_{19} = cab, e_{20} = cac,$
 $e_{21} = cba, e_{22} = cbb, e_{23} = cbc,$
 $e_{24} = cca, e_{25} = ccb, e_{26} = ccc。$

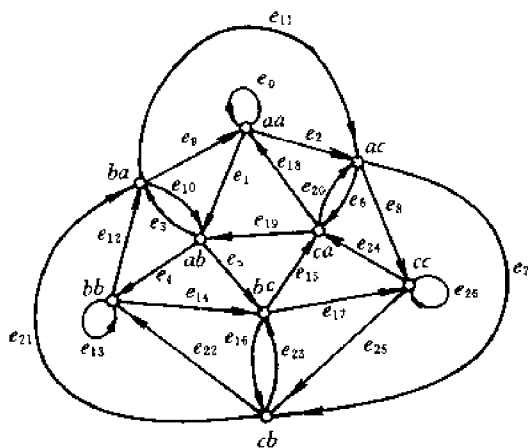


图 8.24

此图有一条欧拉回路($e_0, e_1, e_3, e_{11}, e_7, e_{21}, e_{10}, e_4, e_{14}, e_{16}, e_{22}, e_{13}, e_{12}, e_9, e_2, e_8, e_{26}, e_{25}, e_{23}, e_{15}, e_{20}, e_6, e_{19}, e_5, e_{17}, e_{24}, e_{18}$), 对应的一个解为 $aaabacbabbbcbbaacccbcacabcc。$

8.2.18 证明 $n(n \geq 2)$ 维立方体(图 8.25 是 3 维立方体)是哈密尔顿图。

证明 对 n 作归纳。

(基础) $n=2$ 时, n 维立方体是四边形, 显然存在一条哈密尔顿回路。

(归纳) 设 n 时, 有一条哈密尔顿回路, 现证 $n+1$ 时也成立。

设 $n+1$ 维立方体的顶点集 $V = \{\langle a_1, \dots, a_n, a_{n+1} \rangle \mid a_i \in \{0, 1\}, i=1, \dots, n+1\}$ 。 V 可分成两个集合

$$V_1 = \{\langle a_1, \dots, a_n, 0 \rangle \mid a_i \in \{0, 1\}, i=1, \dots, n\}$$

$$V_2 = \{\langle a_1, \dots, a_n, 1 \rangle \mid a_i \in \{0, 1\}, i=1, \dots, n\}$$

显然, V_1 和 V_2 的导出子图各构成 n 维立方体(因为它们与 n 维立方体同构)。由归纳假设,

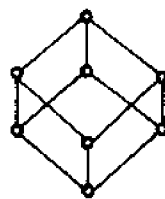


图 8.25

它们各有一条哈密尔顿回路 C_1 和 C_2 。不妨设 C_1 和 C_2 是相同的, 即都是从 $(0, 0, \dots, 0, a_{n+1})$ 出发, 按序经过的结点标记, 除第 $n+1$ 个分量外是相同的, 最后一条边分别是 (b, a) 和 (d, c) 。其中,

$$b = \langle 0, 0, \dots, 1, \dots, 0, a_{n+1} \rangle \text{ (第 } i \text{ 位是 } 1, \text{ 其余是 } 0)$$

$$a = \langle 0, 0, \dots, 0, a_{n+1} \rangle \text{ (全是 } 0)$$

$$d = \langle 0, 0, \dots, 1, \dots, 0, a_{n+1} \rangle \text{ (第 } i \text{ 位是 } 1, a_{n+1} = 1, \text{ 其余是 } 0)$$

$$c = \langle 0, 0, \dots, 0, a_{n+1} \rangle \text{ (} a_{n+1} = 1, \text{ 其余是 } 0)$$

因为 $n+1$ 维立方体存在边 (b, a) 和 (c, d) , 所以

$$C_1 - (b, a) + (b, d) + C_2 - (d, c) + (c, a)$$

构成一条 $n+1$ 维立方体的哈密尔顿回路, 如图 8.26 所示。

故对一切 $n \geq 2$, n 维立方体有一条哈密尔顿回路, 即 n 维立方体是哈密尔顿图。

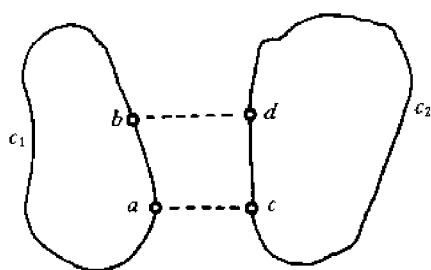


图 8.26

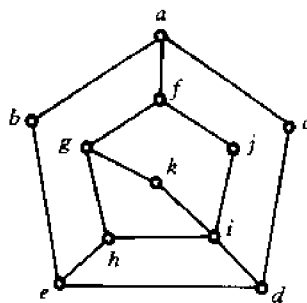


图 8.27

8.2.19 证明图 8.27 所示的图没有哈密尔顿回路。

解 在图 8.27 的 (a, c) 和 (j, i) 边上新增一点, 并使用 A 和 B 标记所得图的顶点, 如图 8.28 所示。图 8.27 有哈密尔顿回路当且仅当图 8.28 有哈密尔顿回路。而图 8.28 中有 6 个 A 和 7 个 B , 相差 1 个, 因此没有哈密尔顿回路, 所以图 8.27 中也没有哈密尔顿回路。

8.2.20 11 个学生要共进晚餐, 他们将坐成一个圆桌, 计划要求每次晚餐上, 每个学生有完全不同的邻座。这样能共进晚餐几天?

解 每个学生看作图的顶点, 学生的邻座关系作为图的边。学生每次进餐的就坐方式对应一个哈密尔顿回路。两次进餐中, 每个学生有完全不同的邻座对应着两个没有公共边的哈密尔顿回路。因为每个学生都可以与其余学生邻座, 所以本问题转化为在图 K_{11} 中找出所有没有公共边的哈密尔顿回路的个数。

K_{11} 中共有 $11(11-1)/2 = 55$ 条边, 而 K_{11} 中每条哈密尔顿回路的长度为 11, 因此 K_{11} 中最多有 $55/11 = 5$ 条没有公共边的哈密尔顿回路。另一方面, 我们可以构造 5 条没有公共

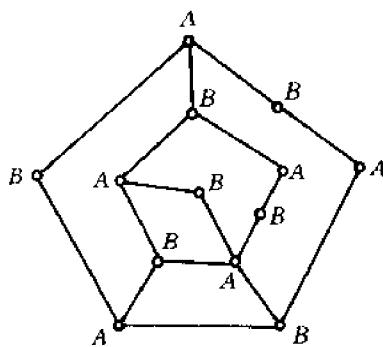


图 8.28

边的哈密尔顿回路，如图 8.29。作图方法如下：

设第一条哈密尔顿回路为 $(1, 2, 3, \dots, 11, 1)$ ，把 1 固定在圆心，其余点固定在圆周上，如图 8.29 的第一个图。然后将此图的顶点旋转 $360^\circ/10$ ， $2 \times 360^\circ/10$ ， $3 \times 360^\circ/10$ ， $4 \times 360^\circ/10$ 就得到另四个图。

所以学生可以进 5 次晚餐，进餐座位如下：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	4	2	6	3	8	5	10	7	11	9
1	6	4	8	2	10	3	11	5	9	7
1	8	6	10	4	11	2	9	3	7	5
1	10	8	11	6	9	4	7	2	5	3

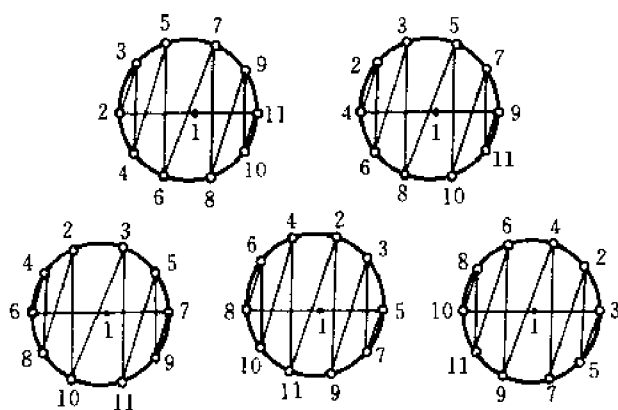


图 8.29

本题还可以这样解：

对任何一个学生来说，除自己外还有 10 人，每晚相邻座需要 2 人，故最多能连续进餐 5 个晚上。

现将学生编号为 $1, 2, \dots, 11$ ，用结点表示。用边表示相邻关系。因为每个学生可与任何其他人邻座，故整个图是完全图。问题是要把这个完全图划分成遍历 11 个点的 5 条回路。因为 11 是质数，容易做到这一点。我们可分别用 1, 2, 3, 4, 5 作步长（步长按圆周长结点间隔计），穿程于图中各点得到以下 5 个回路：

$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 1)$

$(1, 3, 5, 7, 9, 11, 2, 4, 6, 8, 10, 1)$

$(1, 4, 7, 10, 2, 5, 8, 11, 3, 6, 9, 1)$

$(1, 5, 9, 2, 6, 10, 3, 7, 11, 4, 8, 1)$

$(1, 6, 11, 5, 10, 4, 9, 3, 8, 2, 7, 1)$

依据每个回路次序就座就是所求。这是因为

① 2, 3, 4, 5 都与 11 互质, 所以用它们作步长所得回路必遍历所有结点(用 1 作步长必遍历所有结点是显然的)。

② 每次步长不同, 所以相邻座的人各异。

以 2 为步长的情况如图 8.30 所示。

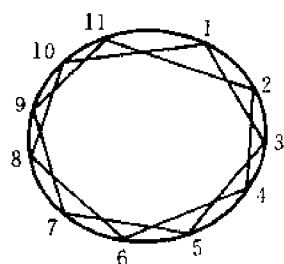


图 8.30

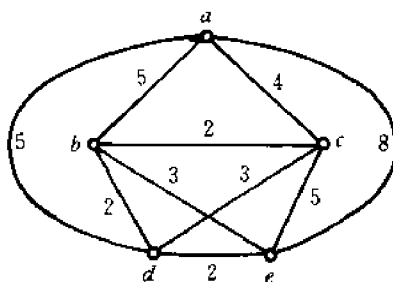


图 8.31

8.2.21 (a) 在图 8.31 中, 用最邻近算法, 确定一条起始于 a 点的哈密尔顿回路。

(b) 若起始于 d , 重复(a)。

(c) 在图 8.31 中, 确定一条最小哈密尔顿回路。

解 (a) 图 8.31 中, 用最邻近算法, 起始于 a 点的哈密尔顿回路见图 8.32。

(b) 所求如图 8.33 所示。

(c) 所求如图 8.34 所示。

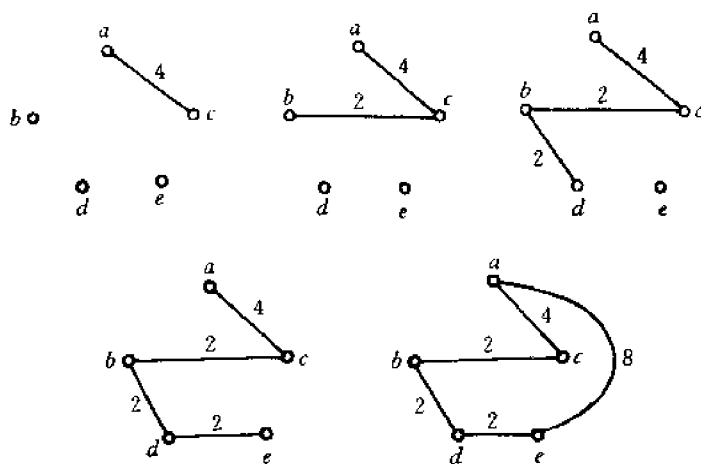


图 8.32

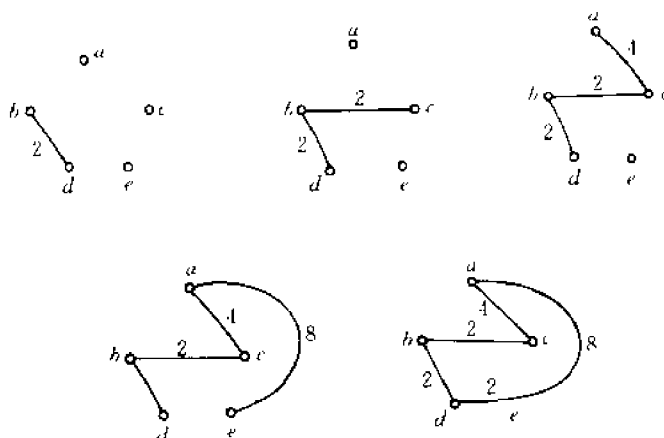


图 8.33

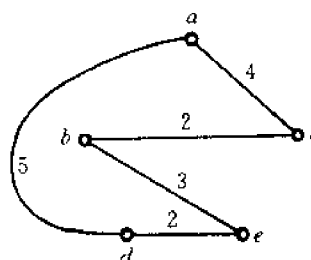


图 8.34

8.3 图的矩阵表示

8.3.1 图 8.35 给出了一个有向图。

(a) 求出它的邻接矩阵 A 。

(b) 求出 $A^{(2)}$ 、 $A^{(3)}$ 、 $A^{(4)}$ ，说明从 v_1 到 v_4 长度为 1、2、3 和 4 的路径各有几条？

(c) 求出 A^T 、 $A^T A$ 、 AA^T ，说明 AA^T 和 $A^T A$ 中第 (2,3) 个元素和第 (2,2) 个元素的意义。

(d) 求出 A^2 、 A^3 、 A^4 及可达性矩阵 P 。

(e) 求出强分图。

解 (a) 图 8.35 的邻接矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

由 A 、 $A^{(2)}$ 、 $A^{(3)}$ 、 $A^{(4)}$ 可知从 v_1 到 v_4 长度为 1、2、3 和 4 的路径分别为 1、1、2、3 条。

$$(c) \quad A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad AA^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

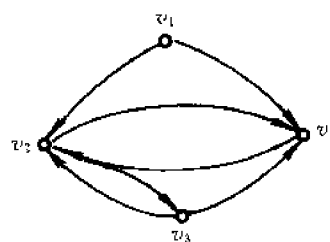


图 8.35

AA^T 中第(2,3)个元素为 1, 说明从 v_2 和 v_3 引出的边能共同终止于同一结点的只有一个, 即 v_4 。 AA^T 中第(2,2)个元素为 2, 说明 v_2 的引出次数为 2。

$A^T A$ 中第(2,3)个元素为 0, 说明没有结点引出的边同时终止于 v_2 和 v_3 。 $A^T A$ 中第(2,2)个元素为 3, 说明 v_2 的引入次数为 3。

$$(d) \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = A \vee A^2 \vee A^3 \vee A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(e) \quad P^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P \wedge P^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

所以强分图的顶点集为: $\{v_1\}, \{v_2, v_3, v_4\}$ 。

8.3.2 证明对任何 $n \times n$ 的布尔矩阵 A , 成立

$$(I \vee A)^2 = (I \vee A) \wedge (I \vee A) = I \vee A \vee A^2$$

这里 I 是单位矩阵。进而证明, 对任何正整数 r , $(I \vee A)^r = I \vee A \vee A^2 \vee \cdots \vee A^r$ 。

再证明包括自身可达的可达性矩阵 P'

$$P' = (I \vee A)^n$$

解 $(I \vee A)^2 = (I \vee A) \wedge (I \vee A) = I \vee A \vee A \vee A \wedge A = I \vee A \vee A^2$

用数学归纳法证 $(I \vee A)^r = I \vee A \vee A^2 \vee \cdots \vee A^r$ 。

当 $r=2$ 时成立, 设 $r=k$ 时成立, 即

$$(I \vee A)^k = I \vee A \vee A^2 \vee \cdots \vee A^k$$

则 $(I \vee A)^{k+1} = (I \vee A) \wedge (I \vee A \vee A^2 \vee \cdots \vee A^k)$

$$= (I \vee A \vee A^2 \vee \cdots \vee A^k) \vee (A \vee A^2 \vee A^3 \vee \cdots \vee A^{k+1})$$

$$= I \vee A \vee A^2 \vee \cdots \vee A^{k+1}$$

即 $r=k+1$ 时成立。

由数学归纳法, 对任何正整数 r ,

$$(I \vee A)^r = I \vee A \vee A^2 \vee \cdots \vee A^r$$

$n \times n$ 自身可达的可达性矩阵 P' :

$$P' = I \vee A \vee \cdots \vee A^n = (I \vee A)^n$$

8.3.3 图 8.36 给出了一个有向图, 试求该图的邻接矩阵和可达性矩阵。

解 图 8.36 的邻接矩阵为

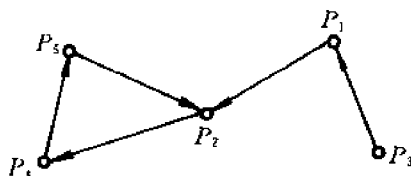


图 8.36

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可达性矩阵为

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P = A \vee A^2 \vee A^3 \vee A^4 \vee A^5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

8.3.4 给定一个有向线图 $G = \langle V, E \rangle$, 用 A 表示 G 的邻接矩阵, 可把图的距离矩阵定义成:

$$d_{ij} = \begin{cases} \infty, & \text{当 } i \neq j \text{ 且从 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 不可达时} \\ 0, & \text{当 } i = j \text{ 时} \\ k, & \text{当 } i \neq j \text{ 而 } k \text{ 是使 } a_{ij}^{(k)} \neq 0 \text{ 的最小正整数时} \end{cases}$$

- (a) 求出图 8.36 给出的有向图的距离矩阵。
 (b) 如何从一个距离矩阵求可达性矩阵。
 (c) 说明如果图 G 的距离矩阵的元素除对角线元素外都不是零用不是 ∞ , 那么图 G 是强连通的。

解 (a) 8.36 的距离矩阵为

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & 2 & 3 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ \infty & 2 & \infty & 0 & 1 \\ \infty & 1 & \infty & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) 从一个距离矩阵求自身可达性矩阵的方法是: 把对角线元素换为 1, 其它位置上, 是 ∞ 的元素换为 0, 非 ∞ 元素换为 1。

(c) 如果图 G 的距离矩阵的元素除对角线元素外都不是零且不是 ∞ , 则说明图 G 中任

意结点 to 其余各点可达, 且其余各结点到该结点可达, 所以 G 是强连通的。

8.3.5 如何从邻接矩阵看出它所代表的图是欧拉图?

解 从邻接矩阵可以判定一个无向图是否是欧拉图。无向图每行(或每列)元素之和对应结点的度数, 所以每行(或每列)元素之和均为偶数时, 并且其可达性矩阵是全 1 矩阵(包含自身可达, 这说明图是连通的)时, 该图为欧拉图。

8.4 二部图

8.4.1 证明如果 G 是二部图, 它有 n 个顶点, m 条边, 则 $m \leq \frac{n^2}{4}$ 。

解 设 $G = \langle X, E, Y \rangle$ 为二部图, $|X| = n_1$, 则 $|Y| = n - n_1$, 这时有 $m \leq n_1(n - n_1) = nn_1 - n_1^2$ 。

因为 $\left(\frac{n}{2} - n_1\right)^2 \geq 0$, 即 $\frac{n^2}{4} \geq nn_1 - n_1^2$, 所以 $m \leq \frac{n^2}{4}$ 。

8.4.2 找出图 8.37 所示的 6×6 残缺棋盘(阴影部分表示已割去的方块)的一个完全覆盖(完全覆盖是指用多米诺骨牌覆盖棋盘, 一块牌覆盖黑白相连的两个方块, 而没有一个方块不被覆盖, 也没有一块多米诺骨牌交搭)。图中 b_i 表示黑方块, w_i 表示白方块。

解 我们用结点表示方块, 两个黑白方块若相邻, 则对应的结点间有一条边, 于是根据图 8.37 可作出以如 8.38 所示的二部图。

容易看出一个完全匹配是:

$\{(b_1, w_1), (b_2, w_2), (b_3, w_3), (b_4, w_4), (b_5, w_5), (b_6, w_6), (b_7, w_7), (b_8, w_8), (b_9, w_9), (b_{10}, w_{10}), (b_{11}, w_{11})\}$

它也是完全覆盖。

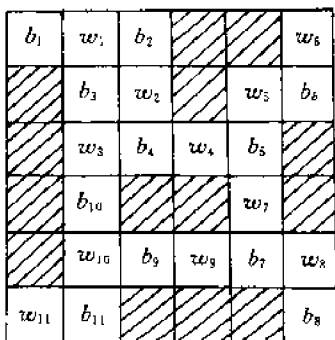


图 8.37

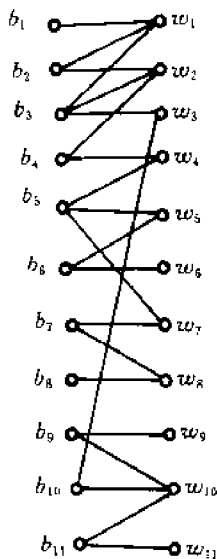


图 8.38

8.4.3 某单位按编制有 7 个空缺 $P_1, P_2, \dots, P_7$ 。有 10 个申请者 $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ ，他们的合格工作岗位集合依次是： $\{P_1, P_5, P_6\}$ ， $\{P_2, P_6, P_7\}$ ， $\{P_3, P_4\}$ ， $\{P_1, P_5\}$ ， $\{P_6, P_7\}$ ， $\{P_3\}$ ， $\{P_2, P_3\}$ ， $\{P_1, P_3\}$ ， $\{P_1\}$ ， $\{P_5\}$ 。如何安排他们工作使得无工作的人最少。

解 按题意构造一个二部图 $G = \langle X, E, Y \rangle$ ，其中 $X = \{P_1, P_2, \dots, P_7\}$ ， $Y = \{a_1, a_2, \dots, a_{10}\}$ ， E 表示合格工作岗位关系，如图 8.39 所示。

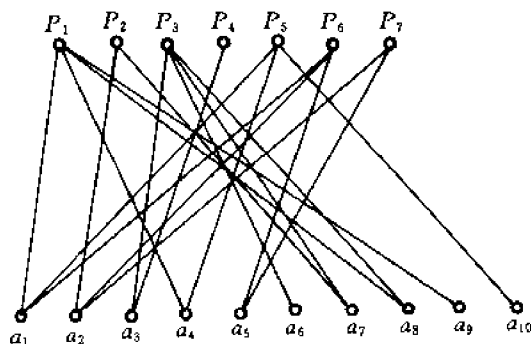


图 8.39

在图 8.39 中可求得一个最大匹配：

$M = \{(P_1, a_9), (P_2, a_2), (P_3, a_6), (P_4, a_3), (P_5, a_4), (P_6, a_1), (P_7, a_5)\}$ 。根据该匹配分配工作能使无工作的人最少。

8.4.4 在某单位，有 6 个未婚妇女 $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6$ ，有 6 个未婚青年 $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6$ ，他们都想结婚，但也不是随便哪一个都可以，他们心中都有一张表，只愿意和表上的人结婚，现在知道 $L_1, L_2, \dots, L_6$ 的表分别是：

$$L_1: \{G_1, G_2, G_4\}; \quad L_2: \{G_3, G_5\}; \quad L_3: \{G_1, G_2, G_4\};$$

$$L_4: \{G_2, G_5, G_6\}; \quad L_5: \{G_3, G_6\}; \quad L_6: \{G_2, G_5, G_6\}$$

$G_1, G_2, \dots, G_6$ 的表分别是：

$$G_1: \{L_1, L_3, L_6\}; \quad G_2: \{L_2, L_4, L_6\}; \quad G_3: \{L_2, L_5\};$$

$$G_4: \{L_1, L_3\}; \quad G_5: \{L_2, L_6\}; \quad G_6: \{L_3, L_4, L_5\}$$

请问如何匹配，使得男女双方都满意且结婚的对数最多。

解 令 $X = \{L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6\}$ ， $Y = \{G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6\}$ ，根据题设中的表作无向二部图 $G = \langle X, E, Y \rangle$ ，如图 8.40 所示，其中， $\langle L_i, G_j \rangle \in E$ 当且仅当 L_i 与 G_j 愿意结婚， $1 \leq i \leq 6$ ， $1 \leq j \leq 6$ 。

从图 8.40(b) 中求得一个最大匹配为：

$$M = \{(L_1, G_1), (L_2, G_3), (L_3, G_1), (L_4, G_2), (L_5, G_6), (L_6, G_5)\}$$

根据 M 对男女匹配，能使男女双方都满意且结婚对数最多。

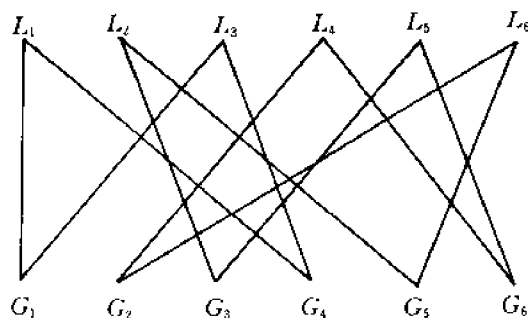


图 8.40

8.5 平面图

8.5.1 若 G 是无向平面 (n, m) 图, 有 ω 个分图, 证明 $n - m + k = \omega + 1$, k 是面的个数。

证明 设 G 的 ω 个分图为 $G_1, G_2, \dots, G_\omega$ 。再设分图的顶点数分别为 $n_1, n_2, \dots, n_\omega$; 边数分别为 $m_1, m_2, \dots, m_\omega$; 面数分别为 $k_1, k_2, \dots, k_\omega$, 则有 $n = n_1 + n_2 + \dots + n_\omega$, $m = m_1 + m_2 + \dots + m_\omega$, $k = k_1 + k_2 + \dots + k_\omega - \omega + 1$ 。因为分图为连通平面图, 故有

$$n_i - m_i + k_i = 2 \quad (1 \leq i \leq \omega)$$

故

$$\sum_{i=1}^{\omega} (n_i - m_i + k_i) = 2\omega$$

故

$$n - m + (k + \omega - 1) = 2\omega$$

故

$$n - m + k = \omega + 1$$

8.5.2 证明在 $n \geq 3$ 的平面简单图中, 有 $k \leq 2n - 4$ 。这里 n 是图的顶点数, k 是面数。

证明 设平面简单图有 $r (r \geq 1)$ 个弱分图, 用 $r - 1$ 条边把 r 个弱分图连接起来, 得到一个连通的平面简单图 G 。 G 中的顶点数和面数不变, 仍为 n 和 k 。设 G 的边数为 m , 则有 $m \leq 3n - 6$ 。由欧拉公式 $n - m + k = 2$ 得 $k \leq 2n - 4$ 。

8.5.3 证明若 G 是每个区域至少由 $k (k \geq 3)$ 条边围成的连通平面图, 则 $m \leq k(n - 2) / (k - 2)$ 。这里 n, m 分别是图 G 的顶点数和边数。

证明 因为 G 的每个区域至少由 $k (k \geq 3)$ 条边围成, 所以有 $2m \geq k \cdot f$, 其中 f 为面数。再由欧拉公式 $n - m + f = 2$ 得 $m \leq k(n - 2) / (k - 2)$ 。

8.5.4 证明小于 30 条边的平面简单图有一个顶点的次数 ≤ 4 。

证明 用反证法。设平面简单图有 n 个顶点, m 条边。假设所有顶点次数 ≥ 5 , 则有 $5n \leq 2m$ 。而 $m < 30$, 故 $n < 12$ 。又因为 $m \leq 3n - 6$, 故 $5n \leq 6n - 12$, 即 $n \geq 12$ 。这导致矛盾。这说明有一个顶点的次数 ≤ 4 。

8.5.5 证明在有 6 个顶点, 12 条边的连通平面简单图中, 每个区域用 3 条边围成。

证明 $n = 6, m = 12$, 由欧拉公式得面数 $k = 8$ 。若有区域是用 > 3 条边围成的, 则有 $2m > 3k$, 即 $24 > 24$, 从而导致矛盾。这说明每个区域用 3 条边围成。

8.5.6 设 G 是有 11 个顶点或更多顶点组成的无向简单图, 证明 G 或其补 $\bar{G}$ 是非平面图。

证明 用反证法。若 G 有 m 条边, 其补 $\bar{G}$ 有 m' 条边, G 的顶点数为 n , 则有 $m+m'=n(n-1)/2$ 。因 G 和 $\bar{G}$ 均为平面图, 有 $m \leq 3n-6$ 和 $m' \leq 3n-6$, 因此 $n(n-1)/2 = m+m' \leq 6n-12$, 即 $n^2-13n+24 \leq 0$, $(n-11)(n-2)+2 \leq 0$ 。当 $n \geq 11$ 时, $(n-11)(n-2)+2 > 0$, 从而产生矛盾。这说明图 G 或其补 $\bar{G}$ 是非平面图。

8.5.7 证明图 8.41 所示的图是非平面图。

证明 图 8.41(a) 有一子图如图 8.41(b) 所示, 与 $K_{3,3}$ 同构, 故由库拉托夫斯基定理知图 8.41(a) 是非平面图。

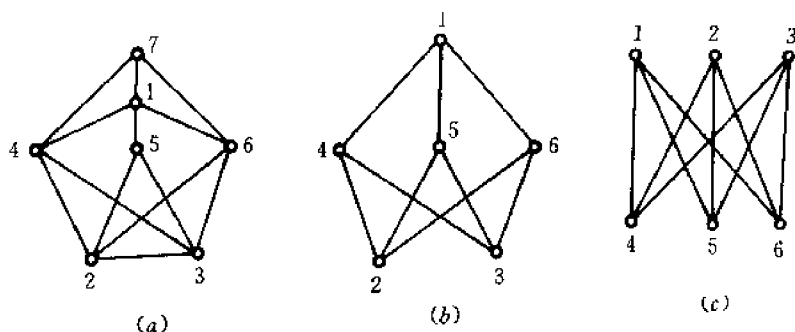


图 8.41

8.5.8 试作出图 8.42 中两个图的对偶图。

解 图 8.43 的实线图与虚线图互为对偶图。

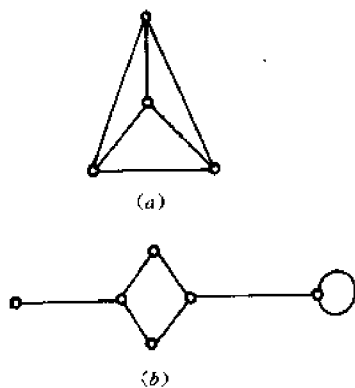


图 8.42

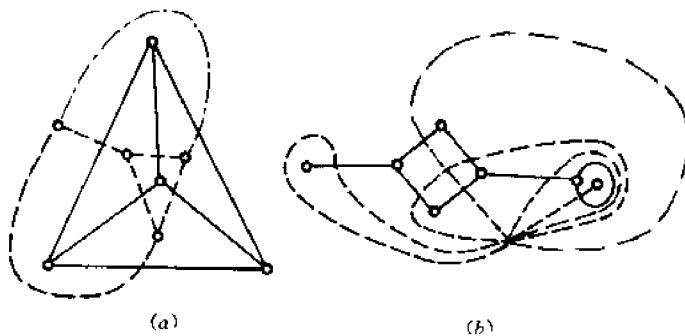


图 8.43

8.5.9 若将平面分为 k 个面, 使每两个面都相邻, 问 k 最大是多少?

解 将平面分为 k 个面, 得图 G 。作 G 的对偶图 G^* , 则 G^* 是平面图。又因为 G 的每两个面都相邻, 所以 G^* 必有 k 完全图作为子图。因为 K_5 是非平面图, 故 $k < 5$ 。另一方面, 显然 k 可以取 4。因此, k 最大为 4。

8.5.10 如果平面图 G 的对偶图 G^* 同构于 G , 则称 G 为自对偶图。试给出一个自对

偶图。

解 K_4 是一个自对偶图。

8.5.11 试证明, 如果一个 (n, m) 图是自对偶图, 则 $m=2(n-1)$ 。

证明 设 G 是一个 (n, m) 图且为自对偶图, 它的面数为 k , 故有 $n=k$ 。故由欧拉公式 $n-m+k=2$ 得 $m=2(n-1)$ 。

8.5.12 应用 8.5.4 小节例 1 的类似方法证明 K_5 是非平面图。

证明 若 K_5 是平面图, 则有对偶图 K_5^* , 有如下与 K_5 对应的性质:

- | K_5 | K_5^* |
|---------------------|--------------------------|
| (1) 有 10 条边 | 有 10 条边 |
| (2) 只含有 4 或 6 条边的割集 | 只含有 4 或 6 条边的基本回路, 没有平行边 |
| (3) 没有平行边 | 不存在度数小于 3 的顶点 |

由 (2) 知 K_5^* 必有如  形式的基本回路, 结点数不能增加, 否则按 (3) 将多于 $\frac{1}{2}(7 \times 3)$ 条边, 与 (1) 矛盾。而在此图中, 按条件 (2) 和 (3), 最多只能加 3 条边, 共 9 条边, 但按 (1), 应用 10 条边又得出矛盾, 所以 K_5 是非平面图。

8.5.13 试用 3 种颜色, 给图 8.44 所示的图着色, 使两个邻接的面不会有同样的颜色。

解 用 r, b, w 表示不同的颜色, 着色如图 8.45。

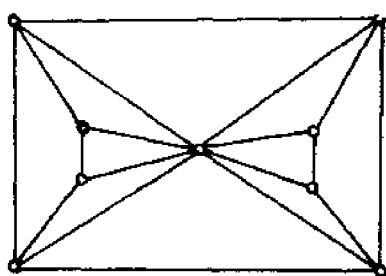


图 8.44

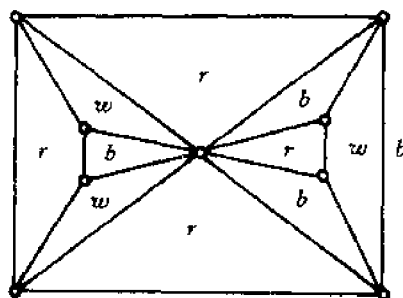
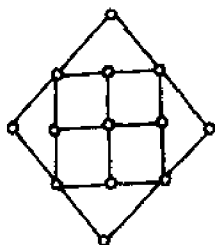
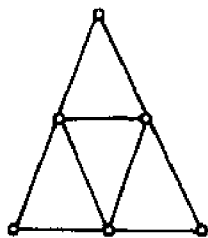


图 8.45

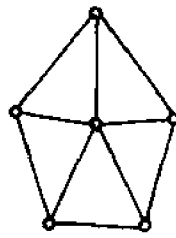
8.5.14 给图 8.46 所示的 3 个图的顶点正常着色, 问每个图至少需要几种颜色。



(a)



(b)



(c)

图 8.46

解 用 r, b, w, g 表示不同的颜色, 对图的顶点正常着色如图 8.47 所示。可见 (a) 需要 2 种颜色, (b) 需要 3 种颜色, (c) 需要 4 种颜色。

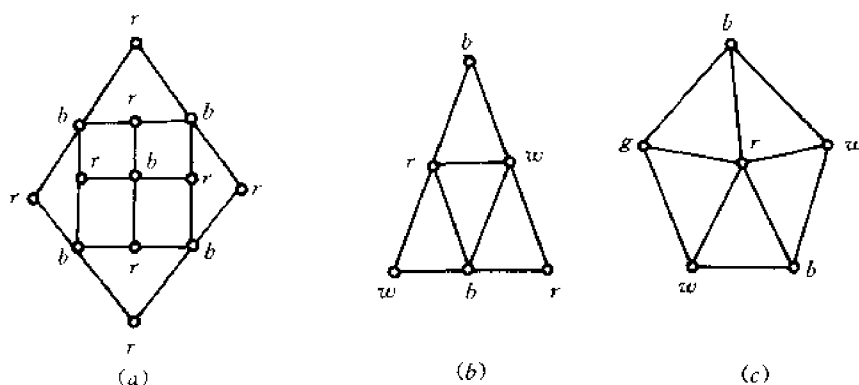


图 8.47

8.5.15 证明一个无向图能被两种颜色正常着色, 当且仅当它不含长度为奇数的回路。

证明 根据定理 8.4-1, 知 G 是二部图, 于是问题成为“ G 能用两种颜色正常着色当且仅当 G 是二部图”。

充分性。设 G 是二部图, 其互补结点子集为 V_1, V_2 , 给 V_1 和 V_2 中的结点分别着上 c_1 和 c_2 颜色, $c_1 \neq c_2$, 显然这是正常着色。充分性得证。

必要性。设 G 可用两种颜色 c_1, c_2 正常着色, 记着 c_1 和 c_2 色的结点集分别为 V_1 和 V_2 。显然 V_1 中的结点互相不邻接, V_2 中的结点互相不邻接, 即 G 中每一边 e 的一个端点在 V_1 中, 另一个端点在 V_2 中, 所以 G 是二部图。必要性得证。

8.5.16 一位研究生叫阿莱尔(Frank Allaire), 他对例 2(a) 给出一种解法。他在原图的边 e_1 和 e_2 上分别加上一段 M 和 N (如图 8.48 所示)。如果原图存在一条含有 e_1 和 e_2 的哈密尔顿回路, 则图 8.48 亦有一条哈密尔顿回路。请你代他证明后者不存在一条哈密尔顿回路, 从而证明了例 2(a)。

解 图 8.48 中有 1 个四边形, 6 个五边形。若有哈密尔顿回路, 必有

$$2(F_4 - F'_4) + 3(F_5 - F'_5) = 0$$

但 $|2(F_4 - F'_4)| = 2$, 而 $3|F_5 - F'_5|$ 要么为 0, 要么 ≥ 3 , 所以 $2(F_4 - F'_4) + 3(F_5 - F'_5) \neq 0$ 。这说明图 8.48 中没有哈密尔顿回路。

8.5.17 证明图 8.49 所示的图中, 任何含有棱 x 的哈密尔顿回路必定含有棱 y 。

证明 图 8.49 中有两个三边形, 两个四边形, 两个五边形。因为 x 棱是两个四边形的边界, 所以当一条哈密尔顿回路含有 x 棱时, 有 $F_4 - F'_4 = 0$, 所以对该哈密尔顿回路有

$$(F_3 - F'_3) + 3(F_5 - F'_5) = 0$$

3 要整除 $F_3 - F'_3$, 必有 $F_3 - F'_3 = 0$, 故 $F_5 - F'_5 = 0$ 。所以两个五边形中的一个必须在该哈密尔顿回路的内部, 另一个在外部, 而 y 为两个五边形边界, 所以 y 必须在该哈密尔顿回路上。

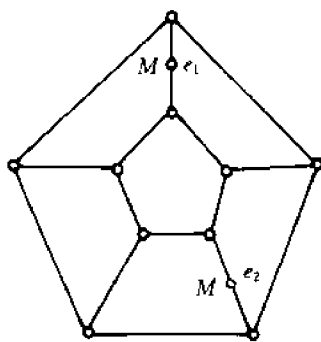


图 8.48

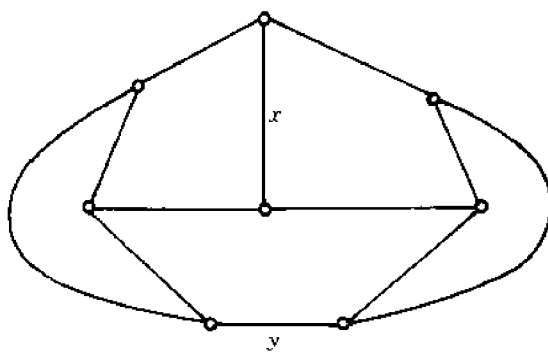


图 8.49

8.6 树

8.6.1 描述所有恰好有两片树叶的树的特征。

解 恰好有两片树叶的树是一条基本路径(链)。

8.6.2 一棵树有两个顶点的度数为2, 一个顶点的度数为3, 三个顶点的度数为4, 问它有几个度数为1的顶点?

解 设有 x 个度数为1的顶点, 则树的顶点数 $n=2+1+3+x=6+x$, 边数 $m=n-1=5+x$. 因为 $2m=\sum \deg(v_i)$, 故 $2(5+x)=2 \cdot 2+1 \cdot 3+3 \cdot 4+x \cdot 1$. 解得 $x=9$, 所以有9个度数为1的顶点。

8.6.3 一棵树有 n_2 个顶点的度数为2, n_3 个顶点度数为3, $\dots$, n_k 个顶点度数为 k , 问它有几个度数为1的顶点?

解 设有 n_1 个度数为1的顶点, 则树的顶点数 $n=n_1+n_2+n_3+\dots+n_k$, 边数 $m=n-1$, 由 $2m=\sum \deg(v_i)$ 得 $2(n_1+n_2+n_3+\dots+n_k)-2=n_1+2n_2+3n_3+\dots+kn_k$. 解得 $n_1=n_3+2n_4+\dots+(k-2)n_k+2$.

8.6.4 (a) 证明有 n 个顶点的树, 其顶点度数之和为 $2n-2$.

(b) 设 $d_1, d_2, \dots, d_n$ 是 n 个正整数, $n \geq 2$, 且 $\sum_{i=1}^n d_i = 2n-2$. 证明存在一棵顶点度数为 $d_1, d_2, \dots, d_n$ 的树。

证明 (a) n 个顶点的树, 边数 $m=n-1$, 故顶点度数之和为 $2m=2n-2$.

(b) 对顶点数作归纳证明。当 $n=2$ 时, $d_1+d_2=2 \cdot 2-2=2$, 则 $d_1=d_2=1$, 故以 d_1, d_2 为度数的树存在, 即为一条边。

设任意 $n-1$ 个正整数 $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$, 只要 $\sum_{i=1}^{n-1} d_i = 2(n-1)-2$, 则存在一棵顶点度数为 $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$ 的树。

对 n 个正整数 $d_1, d_2, \dots, d_n$, 有 $\sum_{i=1}^n d_i = 2n-2$, 则 $d_1, d_2, \dots, d_n$ 中必有一个数为1, 必

有一个数 ≥ 2 ,不妨设 $d_1=1, d_n\geq 2$,因此,对 $n-1$ 个正整数 $d_2, d_3, \dots, d_{n-1}, d_n-1$,有 $\sum_{i=2}^{n-1} d_i + (d_n-1) = 2(n-1) - 2$,故存在一棵顶点度数为 $d_2, d_3, \dots, d_{n-1}, d_n-1$ 的树 T' 。设 T' 中 v 的度数为 d_n-1 ,则在 T' 中增加一个顶点 u ,且增加边 (u, v) ,得到 T ,则 T 为树,且 T 的顶点度数为 $d_1, d_2, \dots, d_n$,由归纳法证得题设。

8.6.5 试证明,连通无向图 G 的任何非自回路的边,都是 G 的某一个生成树的边。

证明 设 e 为连通无向图 G 的任意边。

(1) 若 G 中没有回路包含 e ,则 G 的任何生成树包含 e 。因为不含 e 的任何 G 的子图不连通,因而不可能是生成树。又因为 G 是连通的,所以任一生成树包含 e 。

(2) 若有回路包含 e ,则在回路中去掉一条非 e 的边。若有多个回路包含 e ,则重复上述过程,直到没有回路包含 e 为止。这样得到 G 的一个连通的生成子图 G' 。在 G' 中没有回路包含 e ,由(1)知 G' 至少有一棵生成树,并且包含 e 。而 G' 的任何生成树均为 G 的生成树,所以 G 有生成树包含 e 。

8.6.6 证明或否定断言:连通无向图 G 的任何边,是 G 的某一棵生成树的弦。

证明 断言是错误的。如图8.50中的 e 边不可能是生成树的弦,因为任何生成树必须包含 e 。

8.6.7 证明生成树的补不包含割集,而且割集的补不包含生成树。

证明 若生成树的补包含割集,则去掉生成树的补也就去掉了一个割集,因而所得生成树是不连通的。这与生成树是连通的矛盾。

割集的补是不连通的,而生成树是连通的,因此割集的补不包含生成树。

8.6.8 证明定理8.6-8。

证明 设 D 是对应于树枝 e_2 的基本割集,因此 D 中只含 e_2 ,而不含其它树枝 $e_3, e_4, \dots, e_k$ 。因为 D 和 C 有偶数个共同边, e_2 是一个共同边,于是 e_1 也必然在 D 中。用同样方法证明 e_1 包含在对应于 $e_i (i=3, 4, \dots, k)$ 的基本割集中。

设 D' 是一个基本割集,但不是 C 中的树枝所对应的基本割集,则 D' 不含有树枝 $e_2, e_3, \dots, e_k$ 。故 e_1 也不在 D' 中,否则 D' 与 C 将有唯一的一条共同边 e_1 ,这与 D' 和 C 必有偶数个共同边相矛盾。

8.6.9 设 L 是图 G 中的基本回路, a 和 b 是 L 中任意两条边,证明存在一个割集 C ,使 $L \cap C = \{a, b\}$ 。

证明 因 L 是图 G 的基本回路,所以可作一生成树 T ,使 a 是 T 的弦,其余的 L 中的边为 T 的树枝。对应于树枝 b 有一个基本割集 C 。由定理8.6-8知:

$$L \cap C = \{a, b\}$$

8.6.10 设 T_1 和 T_2 是连通图 G 的两棵生成树, a 是在 T_1 但不在 T_2 的一条边。证明存在一条在 T_2 但不在 T_1 的边 b ,使 $(T_1 - \{a\}) \cup \{b\}$ 和 $(T_2 - \{b\}) \cup \{a\}$ 都是 G 的生成树。

证明 因为 a 是 T_1 的树枝,所以对应于 a 有一个基本割集 D 。又因为 a 不在 T_2 中,即为 T_2 的弦,所以对应于 a 又有一个基本回路 C 。 C 和 D 有偶数个共同边, a 是 C 和 D 的共

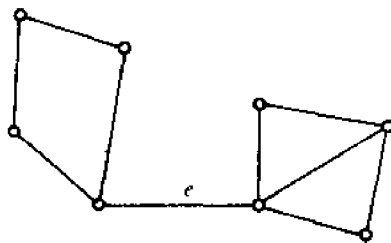


图 8.50

同边, 所以存在另一共同边 b 。 b 不在 T_1 中, 否则基本割集 D 中有 a 和 b 两个 T_1 的树枝; b 在 T_2 中, 否则基本回路 C 中有 a 和 b 两个 T_2 的弦。在树 T_2 中, 删去边 b , 加上边 a , 可得到图 G 的一棵生成树, 故 $(T_2 - \{b\}) \cup \{a\}$ 是图 G 的生成树。

对树 T_1 来说, 在割集 D 中 b 是弦, a 是树枝。由定理 8.6-7 知 b 包含在 a 对应的一个基本回路中。因此从 T_1 中删去边 a 而添加边 b , 可得图 G 的一棵生成树, 即 $(T_1 - \{a\}) \cup \{b\}$ 是图 G 的生成树。

8.6.11 对图 8.51(a) 所示的图, 确定其最小生成树。

解 图 8.51(a) 的最小生成树如图 8.51(b) 所示。

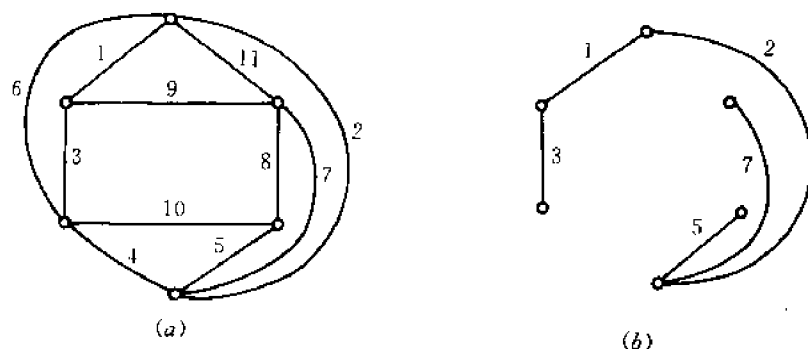


图 8.51

8.6.12 证明树是二部图。

证明 因为树可以用两种颜色着色, 可用两种颜色着色的图是二部图, 所以树是二部图。

8.7 有向树

8.7.1 试举例说明存在着有向图, 它仅符合有向树定义的第(1)和第(2)条, 但不符合第(3)条。

解 图 8.52 符合树定义的(1)和(2)条, 但不符合第(3)条。

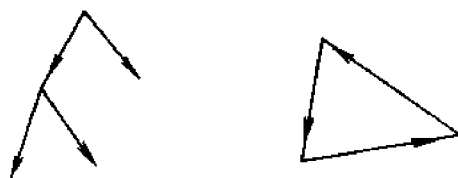


图 8.52

8.7.2 用有序树表示下述命题公式:

(a) $[(A \vee B) \rightarrow C] \leftrightarrow (D \vee A)$

(b) $(A \rightarrow B) \wedge [\neg(C \vee B) \leftrightarrow A]$ (注意这公式含有一个一元运算。)

解 (a) 如图 8.53(a); (b) 如图 8.53(b)。

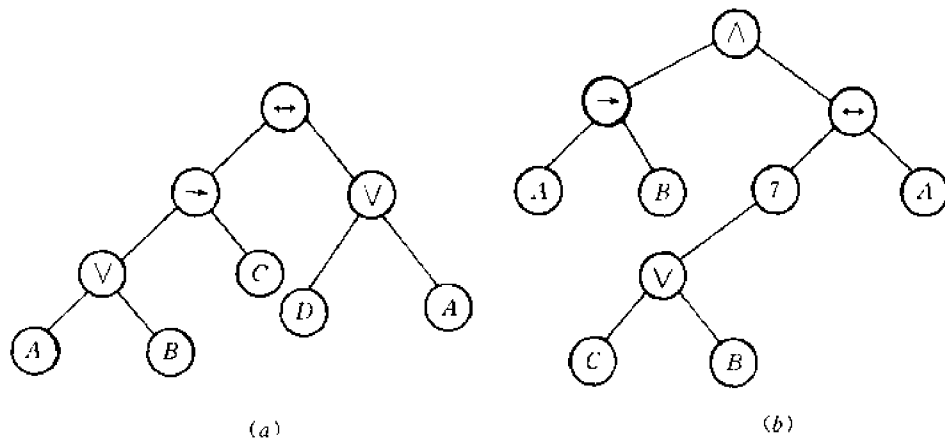


图 8.53

8.7.3 (a) 证明完全二元树的叶数常比内部结点数大 1。

(b) 找出完全 n 元树的叶数的表达式, 该表达式用树的内部结点数的项表示。

证明 (a) 设完全二元树的叶数为 n_1 , 内部结点数为 n_2 , 则树的结点数为 $n_1 + n_2$, 边数为 $n_1 + n_2 - 1$, 所有结点次数之和为 $n_1 + 2 + 3(n_2 - 1)$ 。所以有 $2(n_1 + n_2 - 1) = n_1 + 2 + 3(n_2 - 1)$ 。解得 $n_1 = n_2 + 1$ 。即完全二元树的叶数比内部结点数大 1。

(b) 设完全 n 元树的叶数为 n_1 , 内部结点数为 n_2 , 则树的边数为 $n_1 + n_2 - 1$ 。树的所有结点次数之和为 $n_1 + n + (n + 1)(n_2 - 1)$ 。所以有

$$2(n_1 + n_2 - 1) = n_1 + n + (n + 1)(n_2 - 1)$$

解得

$$n_1 = (n - 1)n_2 + 1$$

8.7.4 证明在完全二元树中, 边的总数等于 $2(n - 1)$, 这里 n 是叶数。

证明 完全二元树中, 若叶数为 n , 则内部结点数为 $n - 1$, 故树的结点数为 $n + (n - 1) = 2n - 1$ 。所以边的总数为 $(2n - 1) - 1 = 2(n - 1)$ 。

8.7.5 将图 8.54 中所示的树或森林用二元位置树表示。

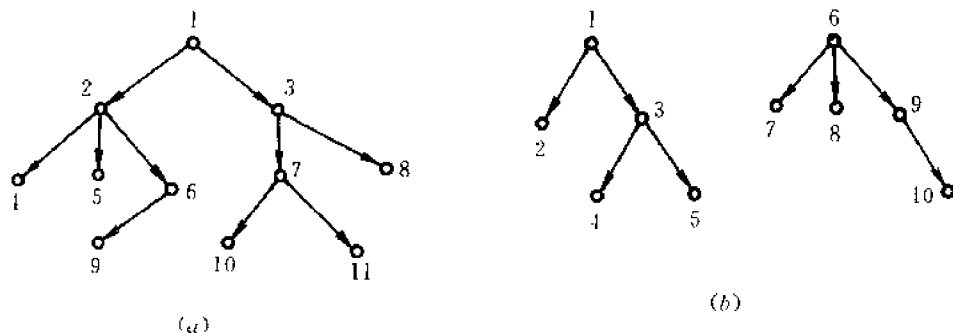


图 8.54

解 (a) 的表示过程如图 8.55; (b) 的表示过程如图 8.56。

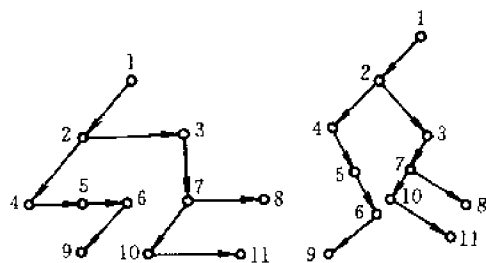


图 8.55

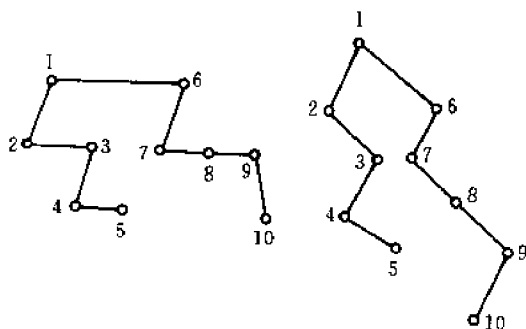


图 8.56

8.7.6 根据简单有向图的邻接矩阵, 如何确定它是否是有向树? 如果它是有向树, 如何确定它的根和叶?

解 如果邻接矩阵对角线元素均为 0, 有一列元素全为 0, 其余列的元素之和为 1, 这时再由邻接矩阵求出可达性矩阵。如有一行除对角线元素外各元素为 1, 则简单有向图是有向树。

有向树的邻接矩阵中, 元素全为 0 的列所对应的结点是根。元素全为 0 的行所对应的结点均为叶。

8.7.7 试画出带有权 1, 2, 3, 5, 7, 12 的最优树, 并根据这棵最优树编出其对应的前缀码。

解 最优树如图 8.57 所示。对应的前缀码为 {00000, 00001, 0001, 001, 01, 1}。

8.7.8 一棵二元树有 n 个结点, 试问这棵二元树的高度 h 最大是多少? 最小是多少?

解 一棵二元树有 n 个结点, 则其高度 h 最大为 $n-1$ 。最小为 $\lceil \log_2 n \rceil$, 即取小于或等于 $\log_2 n$ 的最大整数。

8.7.9 在图 8.58 那样标记的二元树中, 当用下列次序周游时, 试给出所得的标号序列:

(a) 前序; (b) 中序; (c) 后序。

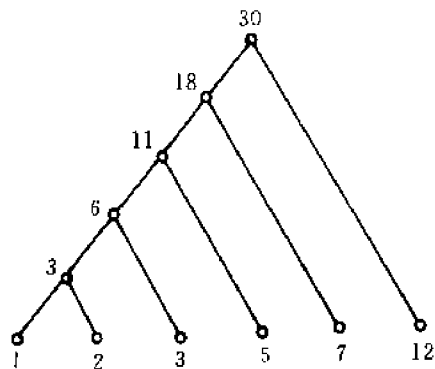


图 8.57

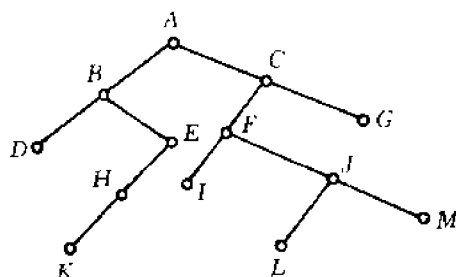


图 8.58

解 根据图 8.58 所得的周游序列为:

(a) 前序为: $ABDEHKCFIJLMG$

(b) 中序为: $DBKHEAIFLJMCG$

(c) 后序为: $DKHEBILMJFGCA$

8.7.10 构造一标记二元树对应于下列无括号表达式(波兰表示), 这些表达式是用给出的次序周游树得到的。

(a) $---abcd$ (前序);

(b) $-a--b--cd$ (前序);

(c) $abc * dc * / +$ (后序)。

解 (a) 如图 8.59(a); (b) 如图 8.59(b); (c) 如图 8.59(c)。

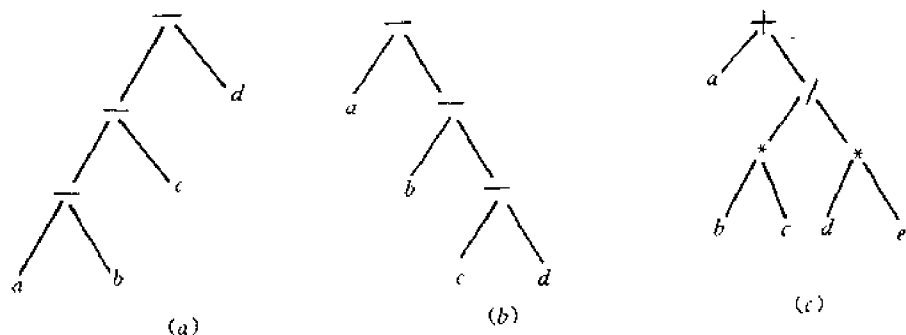


图 8.59

8.7.11 证明中序周游两棵不同的标记树所得的字可以是相同的。

证明 如图 8.60(a)和(b)是两棵不同的标记树, 用中序周游两棵树所得字均为 $a-b+c*d$ 。

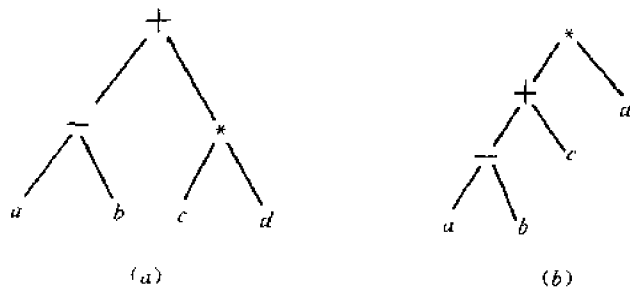


图 8.60

8.7.12 有 8 个硬币, 其中最多有一个是伪币, 伪币, 或轻或重, 试用一架天平, 找出伪币并指明它是轻还是重? 如果没有伪币也要指明。试用决策树表明称的次数不超过 3 次的解决过程。

解 决策树如图 8.61, 其中树的左支表示左盘低下状态, 右支表示右盘低下, 中间表示两盘水平。结点上的数目表示左右盘上所称硬币的号码。

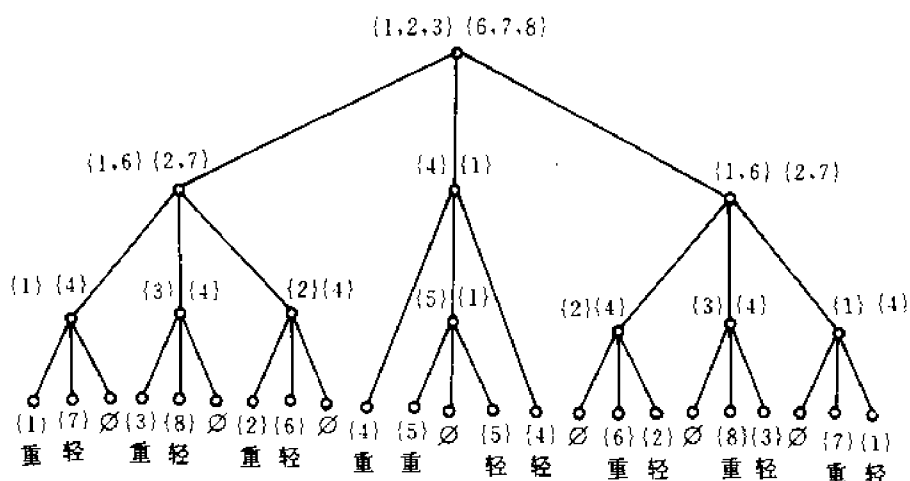


图 8.61

8.8 运输网络

8.8.1 试证明一个运输网络,若边上的权全为非负整数,则最大流的值也为非负整数。

证明 根据定理 8.8-2,最大流的值等于最小割 $(P, \bar{P})$ 的容量 $W(P, \bar{P})$,而 $W(P, \bar{P})$ 定义为从 P 中的结点到 $\bar{P}$ 中的结点的那些边的容量之和,每一边的容量是非负整数,故其和亦为非负整数,于是最大流值为非负整数。证毕。

本题就是网络理论中的“整数流定理”。

8.8.2 用标记法找出图 8.62 中运输网络的最大流及其值,并写出它们的最小割。

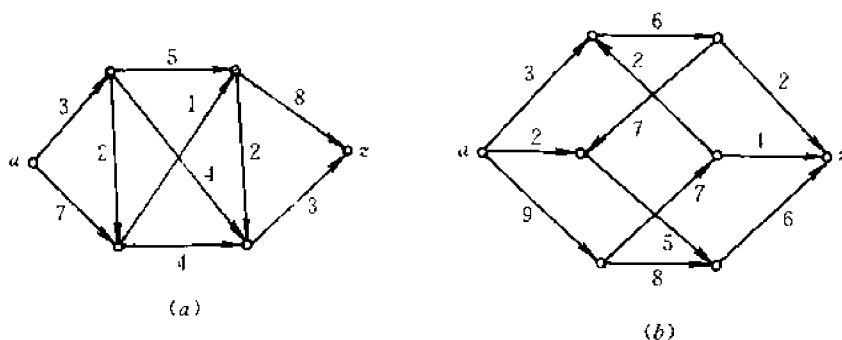


图 8.62

解 (a)题的最大流求解全过程如图 8.63。运输网络的有向边上第一个数字表示该边上的容量,第二个数字表示该边的流,结果得到最大流的值是 7,最小割 $(P, \bar{P})$,其中 $P = \{a, c, e\}$, $\bar{P} = \{b, d, z\}$ 。

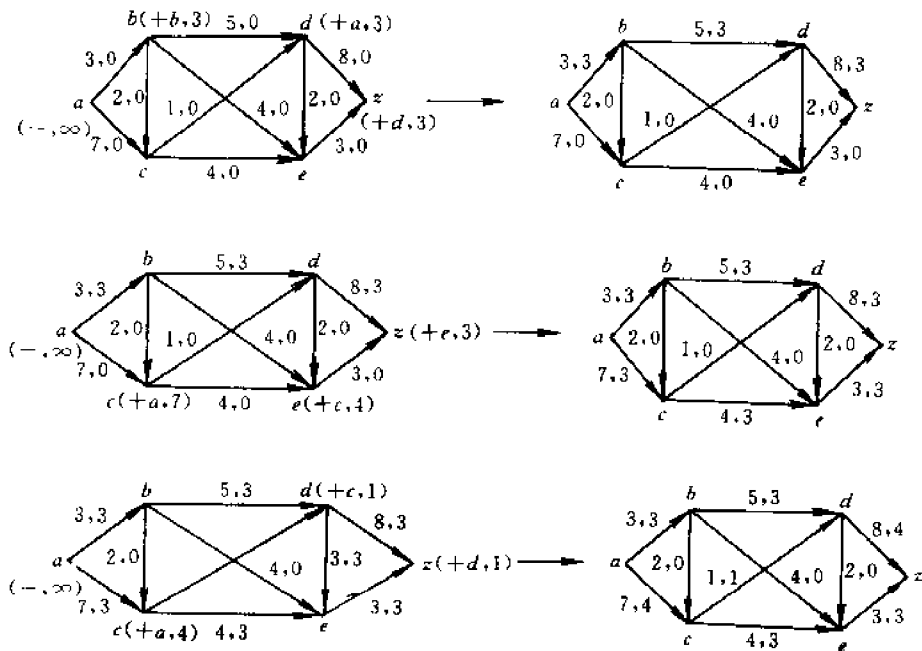


图 8.63

(b)题的最大流求解全过程如图 8.64, 最大流值是 12。最小割 $(P, \bar{P})$, 其中 $P = \{a\}$, $\bar{P} = \{b, c, d, e, f, g, z\}$ 。

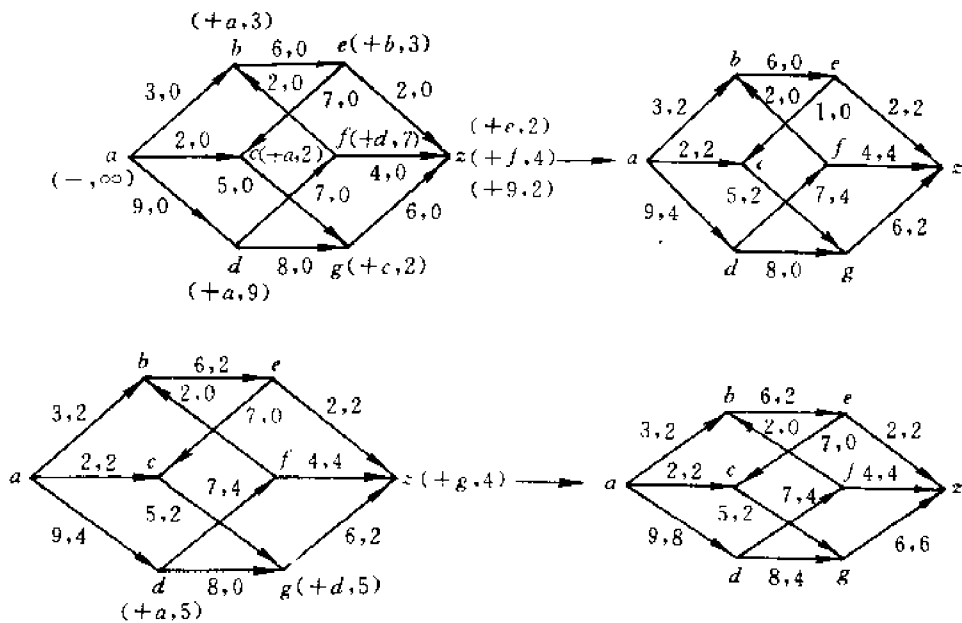


图 8.64

8.8.3 用求最大流方法, 求出图 8.65 中的二部图的最大匹配。

解 添上虚设源点 a , 阱点 z , 和各边容量。由匹配定义容易找出初始流 (参看图 8.66 (a))。所求最大流如图 8.66 (b) 所示, 即最大匹配为 $\{(x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_3, y_4), (x_4, y_3)\}$ 。

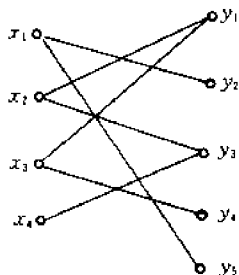


图 8.65

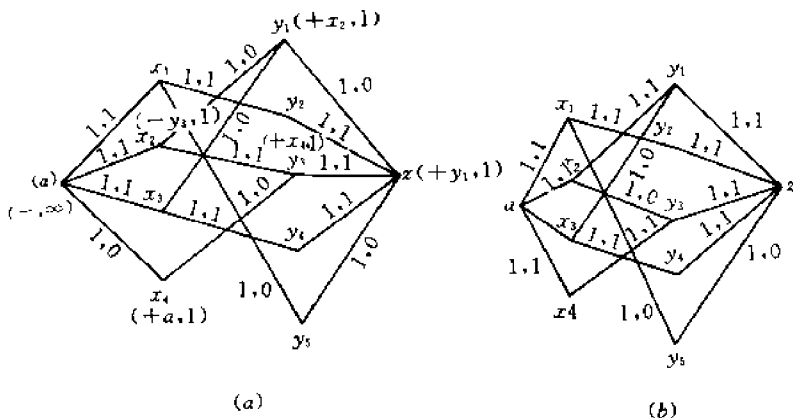


图 8.66

8.9 选题例解

例 8-1 证明若图 G 的直径大于 3, 则 G 的补图 $\bar{G}$ 的直径小于 3。

分析 图的直径是图中所有顶点对距离的极大值。因为 $\bar{G}$ 是 G 的补图, 所以有相同的顶点集, 且对边 $e \in E(G)$, 有 $e \notin E(\bar{G})$; 反之若 $e \in E(\bar{G})$, 则 $e \notin E(G)$ 。只要证明对任一顶点对 $u, v \in V(\bar{G})$, 有距离 $d_{\bar{G}}(u, v) \leq 2$ 。

证明 设 u, v 是 $\bar{G}$ 中任意两个顶点。

1. 若 $(u, v) \in E(G)$, 则 $(u, v) \notin E(\bar{G})$, 故 $d_{\bar{G}}(u, v) = 1$ 。

2. 若 $(u, v) \notin E(G)$, 因 G 的直径大于 3, 所以 G 中存在两顶点 x, y , 使 $d_G(x, y) \geq 4$ 。

(a) 显然 (x, y) 不会就是 (u, v) , 因为 $d_{\bar{G}}(u, v) = 1$ 。

(b) $\{x, y\}$ 和 $\{u, v\}$ 中有一顶点相同。为论述方便不妨设 x 不同于 u 和 v , 而 $y = u$ 。

因为 $d_G(x, y) \geq 4$, 所以 $(x, u) \notin E(G)$ 且 $(x, v) \notin E(G)$, 所以 $(x, u) \in E(\bar{G})$ 且 $(x, v) \in E(\bar{G})$, 因此 $d_{\bar{G}}(u, v) \leq 2$ 。

(c) x, y 全不同于 u, v 。

在 G 中, 若 x 至少与 u, v 中一点相邻且 y 至少与 u, v 中一点相邻, 则有 $d_G(x, y) < 4$, 与假设不符。故 x 和 y 中至少有一点与 u 和 v 都不相邻, 因此有 $d_{\bar{G}}(u, v) \leq 2$ 。

综上所述, 对任意 $u, v \in V(\bar{G})$, 有 $d_{\bar{G}}(u, v) \leq 2$, 故本题得证。

例 8-2 用 Dijkstra 算法求图 8.67 中 v_1 到 v_{11} 的最短路径及其长度。

解 按 Dijkstra 的标号算法作出表 8-1。

表 8-1

[illegible]

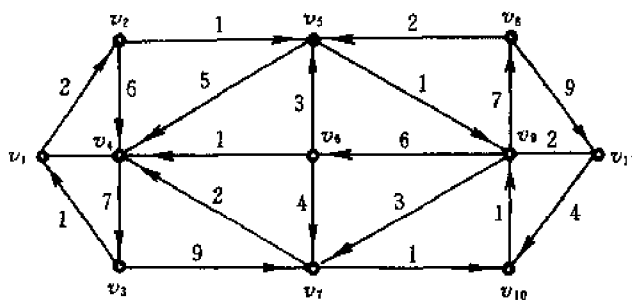


图 8.67

表中 $\lambda(x)$ 表示 x 的前驱之集, $[i]$ 表示所对应列的点到 v_1 的最短路长, i' 表示所对应列的点的前驱增加为 j 个。

根据表可得 v_1 到 v_{11} 有唯一的一条最短路径为 $v_1-v_2-v_5-v_9-v_8-v_{11}$, 长度为 20。

从表中可以求出 v_1 到其它任一点的最短路径及其长度。如 v_1 到 v_3 的最短路径有 $v_1-v_4-v_3$, $v_1-v_2-v_4-v_3$ 和 $v_1-v_2-v_5-v_4-v_3$, 长度为 15。

例 8-3 设 $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $n \geq 3$ 是平面上的一个点集, 它的任意两点间的距离至少为 1。证明最多有 $3n-6$ 个点对, 它们之间的距离为 1。

分析 这里的距离是指欧几里得距离。以 S 为顶点, 两点间距离为 1 的点对用边相连, 得图 G 。用几何方法证明 G 是平面图。再由定理 8.5-2 知平面图的边数 $\leq 3n-6$, 从而得 S 中最多存在 $3n-6$ 个点对, 它们之间的距离为 1。

证明 作图 $G = \langle V, E \rangle$, 其中 $V = S$, $E(G) = \{(x_i, x_j) \mid d(x_i, x_j) = 1\}$ 。

下面用反证法证明 G 是平面图。

设 G 中存在两个不相同的边 AB 和 CD , 其相交于 O 点。如图 8.68 所示。因为 $|AB| = 1$, $|CD| = 1$, 不失一般性可假定 $|OA| \leq \frac{1}{2}$, $|OC| \leq \frac{1}{2}$, AB 与 CD 间夹角为 θ 。因 AB 与 CD 不相同, 故 $\theta \neq 0$ 和 $\theta \neq \pi$, 故

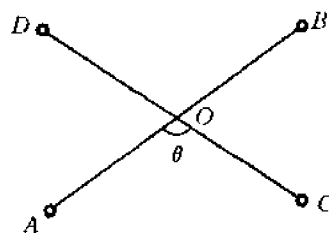


图 8.68

$$\begin{aligned} |AC| &= (|OA|^2 + |OC|^2 - 2|OA||OC|\cos\theta)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (|OA|^2 + |OC|^2 + 2|OA||OC||\cos\theta|)^{\frac{1}{2}} \\ &< |OA| + |OC| \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

即 $|AC| < 1$, 与题设矛盾。矛盾说明 G 为平面图。则 $e(G) \leq 3n-6$, 即最多有 $3n-6$ 个点对, 它们之间的距离为 1。

例 8-4 画出所有具有 5 个结点 3 条边以及 5 个结点 7 条边的简单图。

解 5 个结点 3 条边的简单图中任一结点的度数至多为 3。可以分析得仅有一个具有度数为 3 的结点的图, 且各个结点的度数是 3, 1, 1, 1, 0; 结点度数不大于 2 的图中, 各结点

的度数只可能是 $2, 2, 2, 0, 0$; $2, 2, 1, 1, 0$ 和 $2, 1, 1, 1, 1$ 。因此, 结点数为 5, 边数为 3 的简单图如图 8.69 所示。

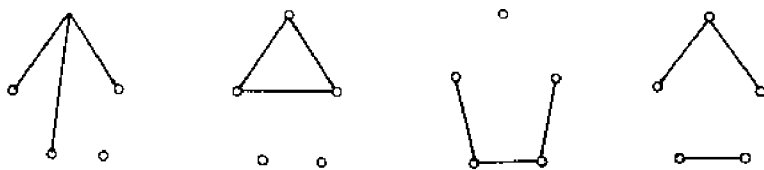


图 8.69

5 个结点的完全图有 $C_5^2=10$ 条边, 因此, 5 个结点 7 条边的补图具有 5 个结点 3 条边。又因为两个具有 n 个结点的图是同构的, 当且仅当它们的补图是同构的。因此, 5 个结点 7 条边的简单图, 就是上述 4 个 5 个结点 3 条边简单图的补图, 即如图 8.70 所示的 4 个图。

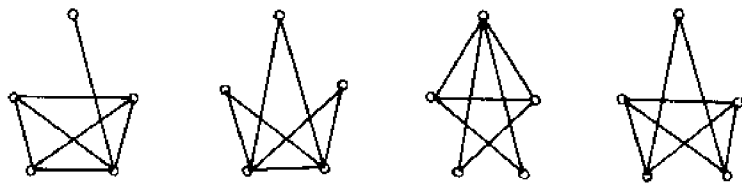


图 8.70

例 8-5 已知 9 个人 $v_1, v_2, \dots, v_9$, 其中 v_1 和两个人握过手, v_2, v_3, v_4, v_5 各和 3 个人握过手, v_6 和 4 个人握过手, v_7, v_8 各和 5 个人握过手, v_9 和 6 个人握过手。证明这 9 个人中一定可以找出 3 个人互相握过手。

分析 现实生活中存在大量的问题可以借助图论知识解决, 本题即是如此。

以 $v_1, v_2, \dots, v_9$ 为结点, v_i 与 v_j 握过手就连一条边 (v_i, v_j) , 得简单图 G 。只要证明 G 中有 K_3 子图, 即证得一定有 3 个人互相握过手。

证明 以 $v_1, v_2, \dots, v_9$ 为结点, v_i 与 v_j 握过手就连一条边 (v_i, v_j) , 得简单图 G 。根据题意有 $d(v_1)=2$, $d(v_2)=d(v_3)=d(v_4)=d(v_5)=3$, $d(v_6)=4$, $d(v_7)=d(v_8)=5$, $d(v_9)=6$ 。

与 v_9 相邻的点有 6 个, 其中必有一点 v_k 为 v_6, v_7, v_8 之一, 因此有 $d(v_k) \geq 4$ 。与 v_9 相邻的其余 5 个点中必存在一点 v_k 与 v_k 相邻 (如图 8.71), 否则有 $d(v_k) \leq 8-5=3$, 矛盾。由此 v_9, v_k, v_k 三个人互相握过手。

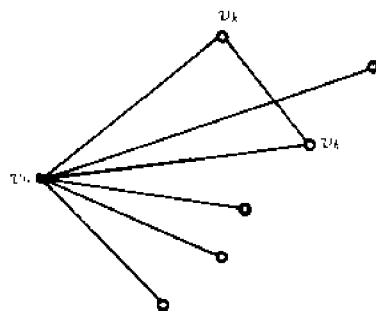


图 8.71

例 8-6 在一个旅行团中共有 14 人, 在山上休息时, 他们想打桥牌, 而其中每个人都曾仅与其中的 5 个人合作过。现规定只有 4 个人中任两人都未合作过, 才能在一起打一局牌。这样, 打了 3 局就没法再打下去了。这时, 来了另一位旅游者, 他当然没有与该旅行团中的任何人合作过。如果他也参加打牌, 证明一定可以再打一局桥牌。

分析 由题意, 只要证明旅行团中有 3 个人两两未合作过即可。

证明 画一个具有 14 个结点的简单图, 每个结点代表旅行团中的一个人, 如果相应于 v_i, v_j 的两个人未合作过, 则连接一条边 (v_i, v_j) , 这样, 对于每个结点 v_i , 就有 $d(v_i) = 8$ 。

每打过一局牌, 就要去掉两条边, 3 局牌共要去掉 6 条边, 即使这 6 条边关联不同的 12 个结点, 那么至少还有两个结点的度数仍为 8。设这两个结点之一为 v_p , 那么与 v_p 邻接的 8 个结点中至少有一个结点的度数不小于 7, 否则如果这 8 个结点的度数均 ≤ 6 , 则由于每个结点至少去掉两条边, 故至少共去掉 $8 \times (8 - 6) \div 2 = 8$ 条边, 这与仅去掉 6 条边相矛盾。故可设 v_q 是与 v_p 邻接且度数 ≥ 7 的结点, 那么 v_q 必至少与上述 8 个结点中的其余 7 个结点之一邻接, 否则, $d(v_q) \leq 13 - 7 = 6$ 矛盾。设 v_r 是与 v_q 邻接的结点, 则 v_p, v_q, v_r 组成一个三角形, 这表示相应的 3 个人是两两未合作过的。这 3 个人与新来的旅游者一定可以再打一局牌。

例 8-7 证明二部图 $G = \langle X, E, Y \rangle$ 中, 若有 $|X| \neq |Y|$, 则 G 一定不是哈密尔顿图。

证明 因为 $|X| \neq |Y|$, 所以不妨设 $|X| < |Y|$, 则有 $w(G - X) = |Y| > |X|$ 。

由定理 8.2-6 知, G 不是哈密尔顿图。

例 8-8 设 T 是一棵有向树, 它的结点集合为 $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 且 $d_{ij} = d(x_i, x_j)$ 表示 x_i 与 x_j 之间的距离 (即在 T 的底图中 x_i 与 x_j 之间基本路径长度)。作矩阵 $D = (d_{ij})$, 试证明 $\det D = -(n-1)(-2)^{n-2}$ 。

证明 设 x_1 是树 T 的根, 由于从 x_1 到任何一点 x_i 的基本路径是唯一的, 所以
 $d(x_i, x_j) = d(x_i, x_1) + d(x_j, x_1) - 2d(x_i \wedge x_j, x_1)$
 其中, $x_i \wedge x_j$ 表示 x_i 和 x_j 的共同祖先。如图 8.72 所示。

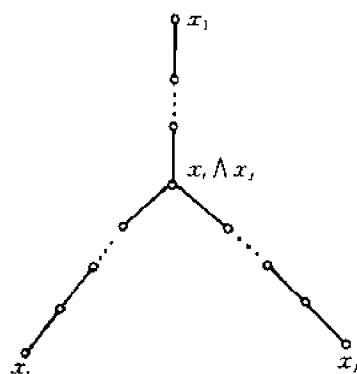


图 8.72

在集合 $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 上定义偏序关系 $\leq$, $x_i \leq x_j$ 当且仅当从 x_i 到 x_j 有唯一的基本路径且 x_i 是 x_j 的祖先。对结点按长辈在前的原则排一个序, 现定义 $Z = (z_{ij})$, 其中

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i \leq x_j \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

再定义

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -2 & & & 0 \\ 1 & & -2 & & \\ \vdots & 0 & & \ddots & \\ 1 & & & & -2 \end{pmatrix}$$

记 $C = Z^T A Z$, 则

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n z_k \left(\sum_{l=1}^n a_{kl} z_{lj} \right) = \sum_{x_k \leq x_i, x_l \leq x_j} a_{kl}$$

因为除去 a_{11} 外只有当 $k=l$ 或 $k=1$ 或 $l=1$ 时, $a_{kl} \neq 0$, 所以

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \sum_{x_i \leq x_j} 1 + \sum_{x_i \leq x_j} 1 + \sum_{\substack{x_i \leq x_j \\ \text{且 } x_j \leq x_i}} (-2) \\ &= [d(x_i, x_j) + 1] + [d(x_j, x_i) + 1] - 2[d(x_i \wedge x_j, x_j) + 1] \\ &= d(x_i, x_j) + d(x_j, x_i) - 2d(x_i \wedge x_j, x_j) \\ &= d_{ij} \end{aligned}$$

因此, $Z^T A Z = D$.

$$\det D = \det Z^T A Z = \det A = -(n-1)(-2)^{n-2}$$

例 8-9 对图 8.73 各图正常着色, 并求图的着色数。

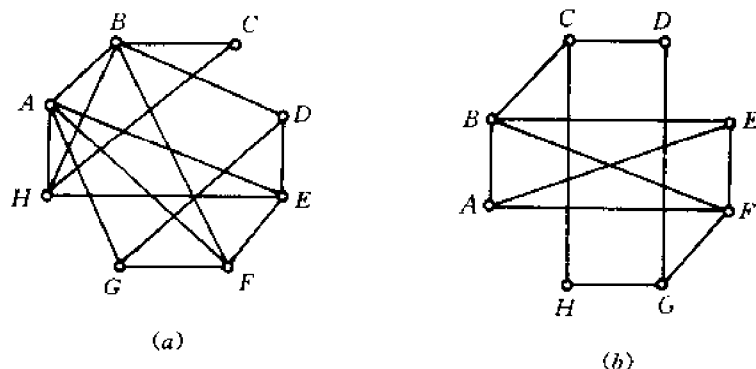


图 8.73

解 用韦尔奇·鲍威尔法着色, 具体步骤如下:

(a) (i) 将图 8.73(a) 中各结点按度数的递减次序排列得 $ABEFH DGC$ 。

(ii) 用 C_1 对 A 着色, 并且对不与 A 相邻的结点 D 和 C 也着上 C_1 色。

(iii) 对 B 及不与之相邻的结点 E 和 G 着上 C_2 色。

(iv) 对 F 及不与之相邻的结点 H 着上 C_3 色。

由此可知该图的着色数 ≤ 3 。又因为结点 A, E 和 F 构成 K_3 子图, 原图的着色数 ≥ 3 , 因此该图的着色数为 3。

(b) (i) 将图 8.73(b) 中各结点按度数的递减次序排列得 $BFACEGDH$ 。

(ii) 对 B 及不相邻的 G 着上 C_1 色。

(iii) 对 F 及不相邻的 C 着上 C_2 色。

(iv) 对 A 及不相邻的 D, H 着上 C_3 色。

(v) 对 E 着上 C_4 色。

由此可知该图的着色数 ≤ 4 。又因为结点 A, B, E 和 F 构成 K_4 子图, 故原图的着色数 ≥ 4 , 因此原图的着色数为 4。

例 8-10 有 8 种化学药品 A, B, C, D, P, R, S, T 要放进贮藏室保管。出于安全原因, 下列各组药品不能贮在同一室内: $A-R, A-C, A-T, R-P, P-S, S-T, T-B, B-D, D-C, R-S, R-B, P-D, S-C, S-D$, 问贮藏这 8 种药品至少需多少房间?

解 以 8 种化学药品作为结点, 若两种药品不能贮在同一室, 则它们之间有一条边,

这样构成一个如图 8.74 所示的图。本题转化为对图 8.74 进行正常着色, 并求着色数。

(i) 对各结点按度数的递减次序排列的 $SRD-PCTAB$ 。

(ii) 对 S 及不与之相邻点 A, B 着 C_1 色。

(iii) 对 R 及不相邻点 D, T 着 C_2 色。

(iv) 对 P 和 C 着 C_3 色。

故着色数 ≤ 3 ; 又因 S, D, P 为 K_3 子图, 故着色数 ≥ 3 ; 因此着色数为 3。因此, 贮藏这 8 种药品至少需 3 间房间。贮藏方法之一为 S, A, B 一间, R, D, T 一间, P, C 一间。

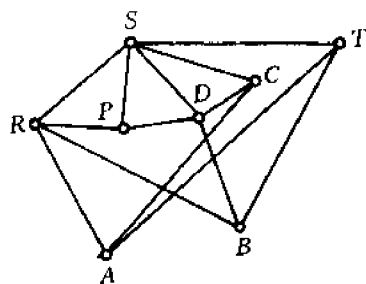


图 8.74

例 8-11 设图 G 的结点是由所有 0 和 1 的有序 k 元组所组成, 两个结点相邻当且仅当对应的两个有序 k 元组有一个坐标不相同, 这样的图称为 k -维立方体图。试证明 k -维立方体图有 2^k 个结点, 有 $k \cdot 2^{k-1}$ 条边且是一个二部图。

分析 本题中图 G 是一种二元 k -维立方体结构, 可以作为超级计算机静态连接网络的拓扑结构。这种结构的连接比较密集, 但缺乏可扩展性难于组成高维超立方体。

证明 因为 k -维立方体图的结点为所有的有序 k 元组, 可设 $V = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \mid x_i (1 \leq i \leq k) \text{ 取 } 0 \text{ 或 } 1\}$, 则 $|V| = 2^k$, 故 k -维立方体图有 2^k 个结点。

因为每个 k 元组都有 k 个 k 元组与它只有一个坐标不相同, 故 k -维立方体图每个结点的度数为 k , 故边数为 $(k \cdot 2^k)/2 = k \cdot 2^{k-1}$ 。

把 k -维立方体图的结点分类, 若 k 元组中 1 的个数为偶数个, 则对应结点属于 X , 其余属于 Y 。由 k -维立方体图的定义可知 X 中点互不相邻, Y 中结点也互不相邻, 故 k -维立方体图是二部图。

参 考 文 献

- [1] 方世昌. 离散数学. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1997
- [2] [美]S. 利普舒茨著. 离散数学的理论和习题. 王元元等译. 南宁: 广西人民出版社, 1984
- [3] 李为镓等编著. 离散数学基础题解. 北京: 人民邮电出版社, 1982
- [4] 左孝凌等编著. 离散数学: 理论, 分析, 题解. 上海: 上海科学技术出版社, 1988

