"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材配套参考书

高等数学
习题全解指导

下册　同济·第八版

同济大学数学科学学院 编

中国教育出版传媒集团
高等教育出版社

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材配套参考书

高等数学
习题全解指导

[redacted]

同济大学数学科学学院 编

中国教育出版传媒集团
高等教育出版社·北京

内容提要

本书是与同济大学数学科学学院编写的《高等数学》(第八版)相配套的学习辅导书,由同济大学数学科学学院的教师编写。本书内容由两部分组成,第一部分按《高等数学》(第八版)下册的章节顺序编排,给出习题全解,部分题目在解答之后对该类题的解法作了归纳小结,有的提供了多种解法;第二部分是全国硕士研究生招生考试数学试题选解,所选择的试题以工科门类为主,少量涉及经济学和管理学门类试题,并以数字资源形式,提供近年全国硕士研究生招生考试涉及《高等数学》下册的部分试题及参考解答。

本书对教材具有相对的独立性,可为学习高等数学的工科和其他非数学类专业学生以及复习高等数学准备报考硕士研究生的人员提供解题指导,也可供讲授高等数学的教师在备课和批改作业时参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题全解指导. 下册 : 同济 : 第八版 / 同济大学数学科学学院编. -- 北京 : 高等教育出版社, 2023.6

ISBN 978-7-04-060422-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①同… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-习题集 Ⅳ. ①O13-44

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第 077829 号

Gaodeng Shuxue Xiti Quanjie Zhidao

策划编辑	兰莹莹	责任编辑	田 玲	封面设计	王 洋	版式设计	于 婕
责任绘图	黄云燕	责任校对	高 歌	责任印制	刘思涵		

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印 刷	高教社(天津)印务有限公司		http://www.hepmall.com
开 本	787 mm×1092 mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印 张	20.5		
字 数	450 千字	版 次	2023 年 6 月第 1 版
购书热线	010-58581118	印 次	2023 年 6 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	39.20 元

物 料 号 60422-00

目　录

一、《高等数学》(第八版)下册习题全解

二、全国硕士研究生招生考试数学试题选解

一、《高等数学》(第八版)下册

习题全解

第八章

向量代数与空间解析几何

习题 8-1 向量及其线性运算

1. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

解

$$\begin{aligned}2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}&=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\\&=5\boldsymbol{a}-11\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

2. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试用向量证明它是平行四边形.

证 如图 8-1，设四边形 $ABCD$ 中 AC 与 BD 交于点 M，已知 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{MB}$.故

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DC}.$$

即 $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{DC}$ 且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$，因此四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

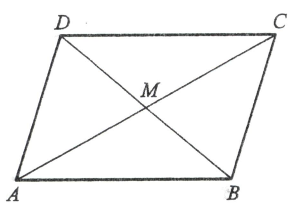


图 8-1

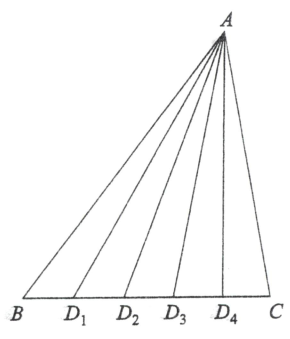


图 8-2

3. 把 $\triangle ABC$ 的 BC 边五等分，设分点依次为 D_1，D_2，D_3，D_4，再把各分点与点 A 连接.试以 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}$，$\overrightarrow{D_2A}$，$\overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$.

解 如图 8-2，根据题意知

$$\overrightarrow{BD_1}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{D_1D_2}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{D_2D_3}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{D_3D_4}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a},$$

故

$$\overrightarrow{D_1A}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_1})=-\frac{1}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}.$$

$$\overrightarrow{D_2A}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_2})=-\frac{2}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}.$$

$$\overrightarrow{D_3A}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_3})=-\frac{3}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}.$$

$$\overrightarrow{D_4A}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_4})=-\frac{4}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}.$$

4. 已知两点 $M_1(0,1,2)$ 和 $M_2(1,-1,0)$. 试用坐标表示式表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 及 $-2\overrightarrow{M_1M_2}$.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(1-0,-1-1,0-2)=(1,-2,-2)$.

$-2\overrightarrow{M_1M_2}=-2(1,-2,-2)=(-2,4,4)$.

5. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=(6,7,-6)$ 的单位向量.

解 向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量为 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$,故平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量为

$$\pm\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\pm\frac{1}{11}(6,7,-6)=\pm\left(\frac{6}{11},\frac{7}{11},\frac{-6}{11}\right),$$

其中 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=11$.

6. 在空间直角坐标系中,指出下列各点在哪个卦限?

$$A(1,-2,3),\quad B(2,3,-4),\quad C(2,-3,-4),\quad D(-2,-3,1).$$

解 点 A 在第Ⅳ卦限,点 B 在第Ⅴ卦限,点 C 在第Ⅷ卦限,点 D 在第Ⅲ卦限.

7. 在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征? 指出下列各点的位置:

$$A(3,4,0),\quad B(0,4,3),\quad C(3,0,0),\quad D(0,-1,0).$$

解 在坐标面上的点的坐标,其特征是表示坐标的三个有序数中至少有一个为零. 比如 xOy 面上的点的坐标为 $(x_0,y_0,0)$,zOx 面上的点的坐标为 $(x_0,0,z_0)$,yOz 面上的点的坐标为 $(0,y_0,z_0)$.

在坐标轴上的点的坐标,其特征是表示坐标的三个有序数中至少有两个为零,比如 x 轴上的点的坐标为 $(x_0,0,0)$,y 轴上的点的坐标为 $(0,y_0,0)$,z 轴上点的坐标为 $(0,0,z_0)$.

点 A 在 xOy 面上,点 B 在 yOz 面上,点 C 在 x 轴上,点 D 在 y 轴上.

8. 求点 (a,b,c) 关于 (1) 各坐标面;(2) 各坐标轴;(3) 坐标原点的对称点的坐标.

解 (1) 点 (a,b,c) 关于 xOy 面的对称点为 $(a,b,-c)$,关于 yOz 面的对称点是 $(-a,b,c)$,关于 zOx 面的对称点为 $(a,-b,c)$.

(2) 点 (a,b,c) 关于 x 轴的对称点是 $(a,-b,-c)$,关于 y 轴的对称点是

$(-a,b,-c)$，关于 z 轴的对称点是 $(-a,-b,c)$.

(3) 点 (a,b,c) 关于坐标原点的对称点是 $(-a,-b,-c)$.

9. 自点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线，写出各垂足的坐标.

解　设空间直角坐标系如图 8-3，根据题意，P_0F 为点 P_0 关于 zOx 面的垂线，垂足 F 的坐标为 $(x_0,0,z_0)$；P_0D 为点 P_0 关于 xOy 面的垂线，垂足 D 的坐标为 $(x_0,y_0,0)$；P_0E 为点 P_0 关于 yOz 面的垂线，垂足 E 的坐标为 $(0,y_0,z_0)$.

P_0A 为点 P_0 关于 x 轴的垂线，垂足 A 的坐标为 $(x_0,0,0)$；P_0B 为点 P_0 关于 y 轴的垂线，垂足 B 的坐标为 $(0,y_0,0)$；P_0C 为点 P_0 关于 z 轴的垂线，垂足 C 的坐标为 $(0,0,z_0)$.

10. 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面，问在它们上面的点的坐标各有什么特点？

解　如图 8-4，过 P_0 且平行于 z 轴的直线 l 上的点的坐标，其特点是，它们的横坐标均相同，纵坐标也均相同.

而过点 P_0 且平行于 xOy 面的平面 π 上的点的坐标，其特点是，它们的竖坐标均相同.

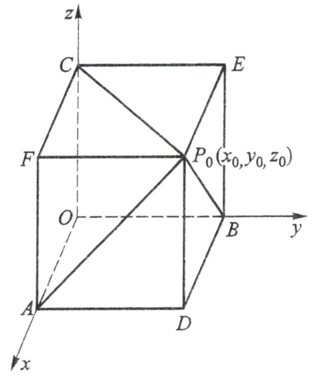


图 8-3

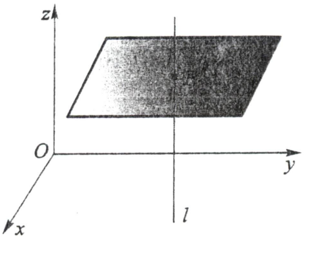


图 8-4

11. 一棱长为 a 的立方体放置在 xOy 面上，其底面的中心在坐标原点，底面的顶点在 x 轴和 y 轴上，求它各顶点的坐标.

解　如图 8-5，已知 $AB=a$，故 $OA=OB=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，于是各顶点的坐标分别为

$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$，$B\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$，$C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$，$D\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$，$E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right)$，$F\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,a\right)$，

$G\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right)$，$H\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a,a\right)$.

12. 求点 $M(4,-3,5)$ 到各坐标轴的距离.

解 点 M 到 x 轴的距离 $d_1=\sqrt{(-3)^2+5^2}=\sqrt{34}$,点 M 到 y 轴的距离 $d_2=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$,点 M 到 z 轴的距离 $d_3=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$.

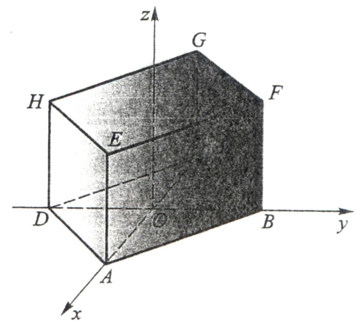


图 8-5

13. 在 yOz 面上,求与三点 $A(3,1,2)$,$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点.

解 所求点在 yOz 面上,不妨设为 $P(0,y,z)$,点 P 与三点 A,B,C 等距离,

$$|\overrightarrow{PA}|=\sqrt{3^2+(y-1)^2+(z-2)^2},\quad |\overrightarrow{PB}|=\sqrt{4^2+(y+2)^2+(z+2)^2},$$

$$|\overrightarrow{PC}|=\sqrt{(y-5)^2+(z-1)^2}.$$

由 $|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}|$ 知

$$\sqrt{3^2+(y-1)^2+(z-2)^2}=\sqrt{4^2+(y+2)^2+(z+2)^2}=\sqrt{(y-5)^2+(z-1)^2},$$

即

$$\begin{cases}9+(y-1)^2+(z-2)^2=16+(y+2)^2+(z+2)^2,\\9+(y-1)^2+(z-2)^2=(y-5)^2+(z-1)^2.\end{cases}$$

解上述方程组,得 $y=1,z=-2$.故所求点的坐标为 $(0,1,-2)$.

14. 试证明以 $A(4,1,9)$,$B(10,-1,6)$,$C(2,4,3)$ 三点为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证 由
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AB}|&=\sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2}=7,\\|\overrightarrow{AC}|&=\sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2}=7,\\|\overrightarrow{BC}|&=\sqrt{(2-10)^2+(4+1)^2+(3-6)^2}=\sqrt{98}=7\sqrt{2}\end{aligned}$$

知 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$ 及 $|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2$.故 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

15. 设已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$,计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 向量

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(3-4,0-\sqrt{2},2-1)=(-1,-\sqrt{2},1),$$

其模 $|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$.其方向余弦分别为

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\gamma=\frac{1}{2}.$$

方向角分别为 $\alpha=\frac{2\pi}{3},\beta=\frac{3\pi}{4},\gamma=\frac{\pi}{3}$.

16. 设向量的方向余弦分别满足(1) $\cos\alpha=0$;(2) $\cos\beta=1$;(3) $\cos\alpha=\cos\beta=0$,问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何?

解　(1) 由 $\cos\alpha=0$ 知 $\alpha=\frac{\pi}{2}$,故向量与 x 轴垂直,平行于 yOz 面.

(2) 由 $\cos\beta=1$ 知 $\beta=0$,故向量与 y 轴同向,垂直于 zOx 面.

(3) 由 $\cos\alpha=\cos\beta=0$ 知 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$,故向量垂直于 x 轴和 y 轴,即与 z 轴平行,垂直于 xOy 面.

17. 设向量 $\boldsymbol{r}$ 的模是 4,它与 u 轴的夹角是$\frac{\pi}{3}$,求 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影.

解　已知 $|\boldsymbol{r}|=4$,则 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}=|\boldsymbol{r}|\cos\theta=4\cdot\cos\frac{\pi}{3}=4\times\frac{1}{2}=2$.

18. 一向量的终点在点 $B(2,-1,7)$,它在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影依次为 4,−4 和 7.求这向量的起点 A 的坐标.

解　设点 A 的坐标为(x,y,z),则

$$\overrightarrow{AB}=(2-x,-1-y,7-z),$$

由题意知

$$2-x=4,\quad -1-y=-4,\quad 7-z=7,$$

故 $x=-2,y=3,z=0$,因此点 A 的坐标为$(-2,3,0)$.

19. 设 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k},\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$.求向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

解　$\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}=4(3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})+3(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})-(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})$
$=13\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k}$,

$\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的投影为 13,在 y 轴上的分向量为 $7\boldsymbol{j}$.

20. 设 O 是 A,B 的连线以外的一点,证明 A,B,C 三点共线的充分必要条件是$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$,其中 $\lambda+\mu=1$.

证　若点 A,B,C 共线,则有$\overrightarrow{BC}=\alpha\overrightarrow{BA}$,故$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\alpha(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$,即$\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+(1-\alpha)\overrightarrow{OB}$,取 $\lambda=\alpha,\mu=1-\alpha$,则

$$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB},\quad 其中\ \lambda+\mu=\alpha+1-\alpha=1.$$

反之,若$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$,其中 $\lambda+\mu=1$,即

$$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}=\lambda(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{OB},\quad 即\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\lambda(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}),$$

或$\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{BA}$,因此点 A,B,C 共线.

习题 8-2 数量积 向量积 *混合积

1. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,求

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$;(2) $(-2\boldsymbol{a})\cdot 3\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times 2\boldsymbol{b}$;(3) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦.

解 (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(3,-1,-2)\cdot(1,2,-1)$

$$=3\times1+(-1)\times2+(-2)\times(-1)=3,$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-1&-2\\1&2&-1\end{vmatrix}=(5,1,7).$$

(2) $(-2\boldsymbol{a})\cdot3\boldsymbol{b}=-6(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=-6\times3=-18$,

$\boldsymbol{a}\times2\boldsymbol{b}=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=2(5,1,7)=(10,2,14)$.

(3) $$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{3}{\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{14}\sqrt{6}}=\frac{3}{2\sqrt{21}}.$$

2. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为单位向量,且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

解 已知 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,故$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=0$.
即 $|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$.因此

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2)=-\frac{3}{2}.$$

3. 已知 $M_1(1,-1,2)$,$M_2(3,3,1)$ 和 $M_3(3,1,3)$.求与$\overrightarrow{M_1M_2}$,$\overrightarrow{M_2M_3}$同时垂直的单位向量.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(3-1,3-(-1),1-2)=(2,4,-1)$,

$\overrightarrow{M_2M_3}=(3-3,1-3,3-1)=(0,-2,2)$,

由于$\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}$与$\overrightarrow{M_1M_2}$,$\overrightarrow{M_2M_3}$同时垂直,故所求向量可取为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\pm(\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3})}{|\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}|},$$

由 $$\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&4&-1\\0&-2&2\end{vmatrix}=(6,-4,-4),$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}|=\sqrt{6^2+(-4)^2+(-4)^2}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$$

知
$$a=\frac{\pm1}{2\sqrt{17}}(6,-4,-4)=\pm\left(\frac{3}{\sqrt{17}},-\frac{2}{\sqrt{17}},-\frac{2}{\sqrt{17}}\right).$$

4. 设质量为 100 kg 的物体从点 $M_1(3,1,8)$ 沿直线移动到点 $M_2(1,4,2)$，计算重力所做的功（坐标系长度单位为 m，重力方向为 z 轴负方向）.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(1-3,4-1,2-8)=(-2,3,-6)$，

$\boldsymbol{F}=(0,0,-100\times9.8)=(0,0,-980)$，

$W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=(0,0,-980)\cdot(-2,3,-6)=5\,880(\text{J})$.

5. 在杠杆上支点 O 的一侧与点 O 的距离为 x_1 的点 P_1 处，有一与 $\overrightarrow{OP_1}$ 成角 θ_1 的力 $\boldsymbol{F}_1$ 作用着；在 O 的另一侧与点 O 的距离为 x_2 的点 P_2 处，有一与 $\overrightarrow{OP_2}$ 成角 θ_2 的力 $\boldsymbol{F}_2$ 作用着（图 8-6）．问 θ_1，θ_2，x_1，x_2，$|\boldsymbol{F}_1|$，$|\boldsymbol{F}_2|$ 符合怎样的条件才能使杠杆保持平衡？

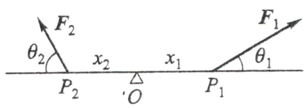


图 8-6

解 如图 8-6，已知有固定转轴的物体的平衡条件是力矩的代数和为零，又由对力矩正、负符号的规定可得杠杆保持平衡的条件为

$$|\boldsymbol{F}_1|x_1\sin\theta_1-|\boldsymbol{F}_2|x_2\sin\theta_2=0,$$

即
$$|\boldsymbol{F}_1|x_1\sin\theta_1=|\boldsymbol{F}_2|x_2\sin\theta_2.$$

6. 求向量 $\boldsymbol{a}=(4,-3,4)$ 在向量 $\boldsymbol{b}=(2,2,1)$ 上的投影.

解 $\text{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{(4,-3,4)\cdot(2,2,1)}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\dfrac{6}{3}=2.$

7. 设 $\boldsymbol{a}=(3,5,-2)$，$\boldsymbol{b}=(2,1,4)$，问 λ 与 μ 有怎样的关系，能使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直？

解 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\lambda(3,5,-2)+\mu(2,1,4)=(3\lambda+2\mu,5\lambda+\mu,-2\lambda+4\mu)$.

要 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直，即要 $(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\perp(0,0,1)$，即

$$(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\cdot(0,0,1)=0,$$

亦即
$$(3\lambda+2\mu,5\lambda+\mu,-2\lambda+4\mu)\cdot(0,0,1)=0,$$

故 $-2\lambda+4\mu=0$，因此当 $\lambda=2\mu$ 时能使 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直.

8. 试用向量证明直径所对的圆周角是直角.

证 如图 8-7，设 AB 是圆 O 的直径，点 C 在圆周上，要证 $\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$．只要证 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ 即可．由

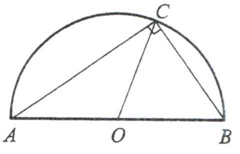


图 8-7

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC})$$
$$=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BO}+|\overrightarrow{OC}|^2$$
$$=-|\overrightarrow{AO}|^2+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OC}+|\overrightarrow{OC}|^2=0,$$

故$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$,$\angle ACB$ 为直角.

9. 已知向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$,计算:

(1) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$; (2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$; (3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

解 (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(2,-3,1)\cdot(1,-1,3)=8$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=(2,-3,1)\cdot(1,-2,0)=8$,

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}=8(1,-2,0)-8(1,-1,3)=(0,-8,-24)$$
$$=-8\boldsymbol{j}-24\boldsymbol{k}.$$

(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,-3,1)+(1,-1,3)=(3,-4,4)$,

$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(1,-1,3)+(1,-2,0)=(2,-3,3)$,

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-4&4\\2&-3&3\end{vmatrix}=(0,-1,-1)=-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}.$$

(3) $$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&-1&3\\1&-2&0\end{vmatrix}=2.$$

10. 设一平行四边形对角线为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{d}=3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$,其中 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 为单位向量且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,求该平行四边形的面积.

解 设平行四边形的相邻两边为 $\boldsymbol{m}$,$\boldsymbol{n}$,则由 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}$,$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}$,即

$$\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}=3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b},$$

可得

$$\boldsymbol{m}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{n}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b},$$

故该平行四边形的面积为

$$S=|\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}|=|(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})|=5|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=5|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\frac{\pi}{2}=5.$$

11. 设有四面体 $OPQR$(图 8-8),其中 $\triangle OPQ$,$\triangle OQR$,$\triangle OPR$ 和 $\triangle PQR$ 的面积分别为 A,B,C 和 D,试用向量方法证明如下三维空间中的勾股定理:

$$A^2+B^2+C^2=D^2.$$

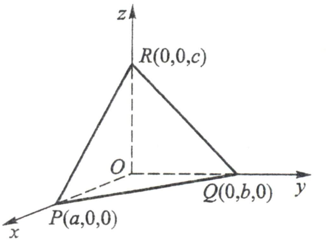


图 8-8

证 如图 8-8,

$$A=S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}|,\quad B=S_{\triangle OQR}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OQ}\times\overrightarrow{OR}|,$$

$$C=S_{\triangle OPR}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OR}|,\quad D=S_{\triangle PQR}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PQ}|,$$

由 $\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP},\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$,

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PQ}|^2&=|(\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP})\times(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})|^2=(\overrightarrow{OR}\times\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OR}\times\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ})^2\\&=|\overrightarrow{OR}\times\overrightarrow{OQ}|^2+|\overrightarrow{OR}\times\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}|^2-\\&\quad(\overrightarrow{OR}\times\overrightarrow{OQ})\cdot(\overrightarrow{OR}\times\overrightarrow{OP})-(\overrightarrow{OR}\times\overrightarrow{OQ})\cdot(\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ})+(\overrightarrow{OR}\times\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}).\end{aligned}$$

由$(\overrightarrow{OR}\times\overrightarrow{OQ})\perp(\overrightarrow{OR}\times\overrightarrow{OP}),(\overrightarrow{OR}\times\overrightarrow{OQ})\perp(\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}),(\overrightarrow{OR}\times\overrightarrow{OP})\perp(\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ})$,得

$$(\overrightarrow{OR}\times\overrightarrow{OQ})\cdot(\overrightarrow{OR}\times\overrightarrow{OP})=0,\quad(\overrightarrow{OR}\times\overrightarrow{OQ})\cdot(\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ})=0,\quad(\overrightarrow{OR}\times\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ})=0,$$

故$|\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PQ}|^2=|\overrightarrow{OR}\times\overrightarrow{OQ}|^2+|\overrightarrow{OR}\times\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}|^2$,即 $A^2+B^2+C^2=D^2$.

***12.** 已知 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z),\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$,试利用行列式的性质证明:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}.$$

证　因为$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix},(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\\a_x&a_y&a_z\end{vmatrix}$,

$$(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}c_x&c_y&c_z\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix},$$

而由行列式的性质知$\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\\a_x&a_y&a_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c_x&c_y&c_z\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$,故

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}.$$

13. 试用向量证明不等式:

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\geqslant|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|,$$

其中 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 为任意实数.并指出等号成立的条件.

证　设向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$.由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$知,$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=$

$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$,从而

$$|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2},$$

当 a_1,a_2,a_3 与 b_1,b_2,b_3 成比例,即$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$时,上述等式成立.

习题 8-3　平面及其方程

1. 求过点$(3,0,-1)$且与平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行的平面方程.

解　所求平面与已知平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行.因此所求平面的法向量可取为 $\boldsymbol{n}=(3,-7,5)$,设所求平面为

$$3x-7y+5z+D=0.$$

将点$(3,0,-1)$代入上式得 $D=-4$.故所求平面方程为

$$3x-7y+5z-4=0.$$

2. 求过点 $M_0(2,9,-6)$且与连接坐标原点及点 M_0 的线段 OM_0 垂直的平面方程.

解　$\overrightarrow{OM_0}=(2,9,-6)$.所求平面与$\overrightarrow{OM_0}$垂直,可取 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{OM_0}$,设所求平面方程为

$$2x+9y-6z+D=0.$$

将点 $M_0(2,9,-6)$代入上式,得 $D=-121$.故所求平面方程为

$$2x+9y-6z-121=0.$$

3. 求过 $M_1(1,1,-1)$,$M_2(-2,-2,2)$和 $M_3(1,-1,2)$三点的平面方程.

解　由 $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ -2-1 & -2-1 & 2+1 \\ 1-1 & -1-1 & 2+1 \end{vmatrix}=0$,得 $x-3y-2z=0$,即为所求平面方程.

注　设 $M(x,y,z)$为平面上任一点,$M_i(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,2,3)$为平面上已知点.由 $\overrightarrow{M_1M}\cdot(\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3})=0$,即

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0,$$

它就表示过已知三点 $M_i(i=1,2,3)$的平面方程.

4. 指出下列各平面的特殊位置,并画出各平面:

(1) $x=0$;　　(2) $3y-1=0$;

(3) $2x-3y-6=0$;　　(4) $x-\sqrt{3}y=0$;

(5) $y+z=1$;　　(6) $x-2z=0$;

(7) $6x+5y-z=0$.

解　(1)—(7)的平面分别如图 8-9(a)—(g).

(1) $x=0$ 表示 yOz 面.

(2) $3y-1=0$ 表示过点$\left(0,\dfrac{1}{3},0\right)$且与 y 轴垂直的平面.

(3) $2x-3y-6=0$ 表示与 z 轴平行的平面.

（4）$x-\sqrt{3}y=0$ 表示过 z 轴的平面.

（5）$y+z=1$ 表示平行于 x 轴的平面.

（6）$x-2z=0$ 表示过 y 轴的平面.

（7）$6x+5y-z=0$ 表示过原点的平面.

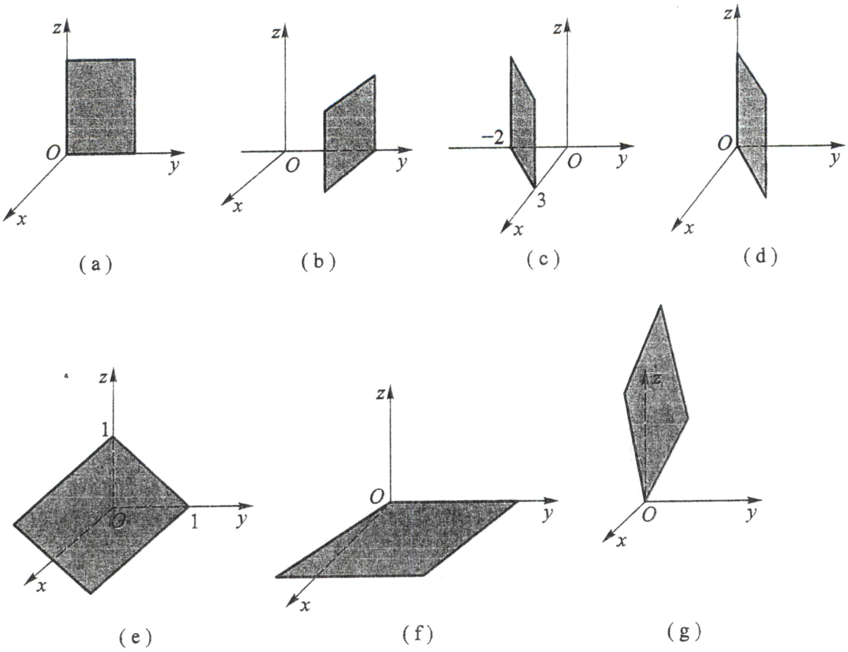


图 8-9

5. 求平面 $2x-2y+z+5=0$ 与各坐标面的夹角的余弦.

解　平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,-2,1)$.设平面与三个坐标面 xOy,yOz,zOx 的夹角分别为 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$.则根据平面的方向余弦知

$$\cos\theta_1=\cos\gamma=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{k}|}=\frac{(2,-2,1)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}\cdot 1}=\frac{1}{3},$$

$$\cos\theta_2=\cos\alpha=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{i}|}=\frac{(2,-2,1)\cdot(1,0,0)}{3\cdot 1}=\frac{2}{3},$$

$$\cos\theta_3=\cos\beta=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{j}|}=\frac{(2,-2,1)\cdot(0,1,0)}{3\cdot 1}=-\frac{2}{3}.$$

6. 设一平面过点 $M_0(1,2,-1)$ 且垂直于平面 $3x-4y+z+16=0$ 和 $4x-z+6=0$,试求这平面方程.

解　设所求平面的法向量为 $\boldsymbol{n}$,$M(x,y,z)$ 为平面上任一点,则向量 $\overrightarrow{M_0M}=(x-1,y-2,z+1)$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直.记两已知平面的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$,则 $\boldsymbol{n}_1=(3,-4,1)$,$\boldsymbol{n}_2=(4,0,-1)$.按题意,$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}_1$,$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}_2$,故可取 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$,从而有 $\overrightarrow{M_0M}\cdot(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2)=0$,即向量 $\overrightarrow{M_0M}$,

$\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$ 共面,故

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0.$$

得所求平面方程为 $4x+7y+16z-2=0$.

7. 求三平面 $x+3y+z=1,2x-y-z=0,-x+2y+2z=3$ 的交点.

解 联立三平面方程

$$\begin{cases} x+3y+z=1, \\ 2x-y-z=0, \\ -x+2y+2z=3. \end{cases}$$

解此方程组得 $x=1,y=-1,z=3$.故所求交点为$(1,-1,3)$.

8. 分别按下列条件求平面方程:

(1) 平行于 zOx 面且经过点$(2,-5,3)$;

(2) 通过 z 轴和点$(-3,1,-2)$;

(3) 平行于 x 轴且经过两点$(4,0,-2)$和$(5,1,7)$.

解 (1) 所求平面平行于 zOx 面,故设所求平面方程为 $By+D=0$.将点$(2,-5,3)$代入,得

$$-5B+D=0, \quad 即 \quad D=5B.$$

因此,所求平面方程为

$$By+5B=0, \quad 即 \quad y+5=0.$$

(2) 所求平面过 z 轴,故设所求平面方程为 $Ax+By=0$.将点$(-3,1,-2)$代入,得

$$-3A+B=0, \quad 即 \quad B=3A.$$

因此,所求平面方程为

$$Ax+3Ay=0, \quad 即 \quad x+3y=0.$$

(3) 所求平面平行于 x 轴,故设所求平面方程为 $By+Cz+D=0$.将点$(4,0,-2)$及$(5,1,7)$分别代入方程得

$$-2C+D=0 \quad 及 \quad B+7C+D=0.$$

从而解得
$$C=\frac{D}{2}, \quad B=-\frac{9}{2}D.$$

因此,所求平面方程为

$$-\frac{9}{2}Dy+\frac{D}{2}z+D=0,$$

即
$$9y-z-2=0.$$

9. 求点$(1,2,1)$到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离.

解　利用点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离公式

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|1+2\times2+2\times1-10|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{|-3|}{3}=1.$$

习题 8-4　空间直线及其方程

1\. 求过点 $(4,-1,3)$ 且平行于直线 $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{5}$ 的直线方程.

解　所求直线与已知直线平行，故所求直线的方向向量 $\boldsymbol{s}=(2,1,5)$，直线方程即为

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{5}.$$

2\. 求过两点 $M_1(3,-2,1)$ 和 $M_2(-1,0,2)$ 的直线方程.

解　取所求直线的方向向量

$$\boldsymbol{s}=\overrightarrow{M_1M_2}=(-1-3,0-(-2),2-1)=(-4,2,1),$$

因此所求直线方程为

$$\frac{x-3}{-4}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}.$$

3\. 用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases}x-y+z=1,\\2x+y+z=4.\end{cases}$$

解　根据题意可知已知直线的方向向量

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-1&1\\2&1&1\end{vmatrix}=(-2,1,3).$$

取 $x=0$，代入直线方程得 $\begin{cases}-y+z=1,\\y+z=4.\end{cases}$ 解得 $y=\frac{3}{2}$，$z=\frac{5}{2}$. 这样就得到直线经过的一点 $\left(0,\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$. 因此直线的对称式方程为

$$\frac{x-0}{-2}=\frac{y-\frac{3}{2}}{1}=\frac{z-\frac{5}{2}}{3}.$$

参数方程为

$$\begin{cases} x=-2t, \\ y=\dfrac{3}{2}+t, \\ z=\dfrac{5}{2}+3t. \end{cases}$$

注 由于所取的直线上的点可以不同,因此所得到的直线对称式方程或参数方程的表达式也可以是不同的.

4. 求过点$(2,0,-3)$且与直线

$$\begin{cases} x-2y+4z-7=0, \\ 3x+5y-2z+1=0 \end{cases}$$

垂直的平面方程.

解 根据题意,所求平面的法向量可取已知直线的方向向量,即

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}=(-16,14,11),$$

故所求平面方程为$-16(x-2)+14(y-0)+11(z+3)=0$.即

$$16x-14y-11z-65=0.$$

5. 求直线$\begin{cases} 5x-3y+3z-9=0, \\ 3x-2y+z-1=0 \end{cases}$与直线$\begin{cases} 2x+2y-z+23=0, \\ 3x+8y+z-18=0 \end{cases}$的夹角的余弦.

解 两已知直线的方向向量分别为

$$\boldsymbol{s}_1=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 5 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=(3,4,-1), \quad \boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix}=(10,-5,10),$$

因此,两直线的夹角的余弦

$$\cos\theta=\cos(\widehat{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2})=\frac{\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|}$$

$$=\frac{3\times10-4\times5-1\times10}{\sqrt{3^2+4^2+(-1)^2}\sqrt{10^2+(-5)^2+10^2}}=0.$$

6. 证明直线$\begin{cases} x+2y-z=7, \\ -2x+y+z=7 \end{cases}$与直线$\begin{cases} 3x+6y-3z=8, \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$平行.

证 已知直线的方向向量分别是

$$\boldsymbol{s}_1=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(3,1,5), \quad \boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=(-9,-3,-15),$$

由 $s_2=-3s_1$ 知两直线互相平行.

7. 求过点$(1,0,-2)$且与平面 $3x+4y-z+6=0$ 平行,又与直线$\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{4}=\frac{z}{1}$垂直的直线方程.

解　已知平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(3,4,-1)$,已知直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=(1,4,1)$,故所求直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&4&1\\3&4&-1\end{vmatrix}=(-8,4,-8)=-4(2,-1,2).$$

因此所求直线方程为$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{2}$.

8. 求过点$(3,1,-2)$且通过直线$\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$的平面方程.

解　利用平面束方程,过直线$\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$的平面束方程为

$$\frac{x-4}{5}-\frac{y+3}{2}+\lambda\left(\frac{y+3}{2}-z\right)=0,$$

将点$(3,1,-2)$代入上式得 $\lambda=\frac{11}{20}$.因此所求平面方程为

$$\frac{x-4}{5}-\frac{y+3}{2}+\frac{11}{20}\left(\frac{y+3}{2}-z\right)=0,$$

即

$$8x-9y-22z-59=0.$$

9. 求直线$\begin{cases}x+y+3z=0,\\x-y-z=0\end{cases}$与平面 $x-y-z+1=0$ 的夹角.

解　已知直线的方向向量 $\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&3\\1&-1&-1\end{vmatrix}=(2,4,-2)$,平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,-1,-1)$.

设直线与平面的夹角为 φ,则

$$\sin\varphi=\left|\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}})\right|=\frac{|\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{s}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|2\times1+4\times(-1)+(-2)\times(-1)|}{\sqrt{2^2+4^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=0,$$

即 $\varphi=0$.

10. 试确定下列各组中的直线和平面间的关系:

(1) $\frac{x+3}{-2}=\frac{y+4}{-7}=\frac{z}{3}$和 $4x-2y-2z=3$;

(2) $\frac{x}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{7}$和 $3x-2y+7z=8$;

(3) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-4}$和 $x+y+z=3$.

解 设直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}$,平面的法向量为 $\boldsymbol{n}$,直线与平面的夹角为 φ,且

$$\sin\varphi=|\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}})|=\frac{|\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{s}||\boldsymbol{n}|}.$$

(1) $\boldsymbol{s}=(-2,-7,3)$,$\boldsymbol{n}=(4,-2,-2)$,

$$\sin\varphi=\frac{|(-2)\times4+(-7)\times(-2)+3\times(-2)|}{\sqrt{(-2)^2+(-7)^2+3^2}\sqrt{4^2+(-2)^2+(-2)^2}}=0,$$

即 $\varphi=0$.故直线平行于平面或在平面上,现将直线上的点 $A(-3,-4,0)$代入平面方程,方程不成立.故点 A 不在平面上,因此直线不在平面上,直线与平面平行.

(2) $\boldsymbol{s}=(3,-2,7)$,$\boldsymbol{n}=(3,-2,7)$,由于 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}$ 或

$$\sin\varphi=\frac{|3\times3+(-2)\times(-2)+7\times7|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+7^2}\sqrt{3^2+(-2)^2+7^2}}=1,$$

知 $\varphi=\frac{\pi}{2}$,故直线与平面垂直.

(3) $\boldsymbol{s}=(3,1,-4)$,$\boldsymbol{n}=(1,1,1)$,由于 $\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=0$ 或

$$\sin\varphi=\frac{|3\times1+1\times1+(-4)\times1|}{\sqrt{3^2+1^2+(-4)^2}\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=0,$$

知 $\varphi=0$,将直线上的点 $A(2,-2,3)$代入平面方程,方程成立,即点 A 在平面上.故直线在平面上.

11. 求过点(1,2,1)且与两直线

$$\begin{cases}x+2y-z+1=0,\\x-y+z-1=0\end{cases}\quad 和\quad \begin{cases}2x-y+z=0,\\x-y+z=0\end{cases}$$

都平行的平面的方程.

解 两直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&2&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}=(1,-2,-3),\quad \boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=(0,-1,-1),$$

取

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-2&-3\\0&-1&-1\end{vmatrix}=(-1,1,-1),$$

则过点(1,2,1),以 $\boldsymbol{n}$ 为法向量的平面方程为

$$-1\cdot(x-1)+1\cdot(y-2)-1\cdot(z-1)=0,$$

即
$$x-y+z=0.$$

12. 求点 $(-1,2,0)$ 在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影.

解　作过已知点且与已知平面垂直的直线.该直线与平面的交点即为所求.根据题意,过点 $(-1,2,0)$ 与平面 $x+2y-z+1=0$ 垂直的直线为

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-0}{-1},$$

将它化为参数方程 $x=-1+t, y=2+2t, z=-t$,代入平面方程得

$$-1+t+2(2+2t)-(-t)+1=0,$$

整理得 $t=-\frac{2}{3}$.从而所求点 $(-1,2,0)$ 在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影为 $\left(-\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

13. 求点 $P(3,-1,2)$ 到直线 $\begin{cases}x+y-z+1=0,\\2x-y+z-4=0\end{cases}$ 的距离.

解　直线的方向向量 $\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&-1\\2&-1&1\end{vmatrix}=(0,-3,-3)$.

在直线上取点 $(1,-2,0)$,这样,直线的方程可表示成参数方程形式

$$x=1,\quad y=-2-3t,\quad z=-3t. \qquad ①$$

又,过点 $P(3,-1,2)$,以 $\boldsymbol{s}=(0,-3,-3)$ 为法向量的平面方程为

$$-3(y+1)-3(z-2)=0,$$

即
$$y+z-1=0. \qquad ②$$

将①式代入②式得 $t=-\frac{1}{2}$,于是直线与平面的交点为 $\left(1,-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$,故所求距离为

$$d=\sqrt{(3-1)^2+\left(-1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

14. 设 M_0 是直线 L 外一点,M 是直线 L 上任意一点,且直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}$,试证:点 M_0 到直线 L 的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}.$$

证　如图 8-10,点 M_0 到直线 L 的距离为 d.由向量积的几何意义知 $|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}|$ 表示以 $\overrightarrow{M_0M}$, $\boldsymbol{s}$ 为邻边的平行四边形的面积.而 $\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}$ 表示以 $|\boldsymbol{s}|$ 为边长的该平行四边

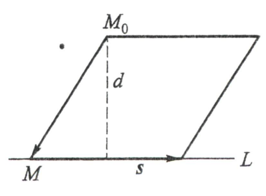


图 8-10

形的高,即为点 M_0 到直线 L 的距离.于是

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times s|}{|s|}.$$

15. 求直线 $\begin{cases}2x-4y+z=0,\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$ 在平面 $4x-y+z=1$ 上的投影直线的方程.

解 作过已知直线的平面束,在该平面束中找出与已知平面垂直的平面,该平面与已知平面的交线即为所求.

设过直线 $\begin{cases}2x-4y+z=0,\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$ 的平面束方程为

$$2x-4y+z+\lambda(3x-y-2z-9)=0,$$

经整理得 $$(2+3\lambda)x+(-4-\lambda)y+(1-2\lambda)z-9\lambda=0.$$

由 $$(2+3\lambda)\cdot 4+(-4-\lambda)\cdot(-1)+(1-2\lambda)\cdot 1=0,$$

得 $\lambda=-\dfrac{13}{11}$.代入平面束方程,得

$$17x+31y-37z-117=0.$$

因此所求投影直线的方程为

$$\begin{cases}17x+31y-37z-117=0,\\4x-y+z=1.\end{cases}$$

16. 画出下列各平面所围成的立体的图形:

(1) $x=0,y=0,z=0,x=2,y=1,3x+4y+2z-12=0$;

(2) $x=0,z=0,x=1,y=2,z=\dfrac{y}{4}$.

解 (1) 如图 8-11(a); (2) 如图 8-11(b).

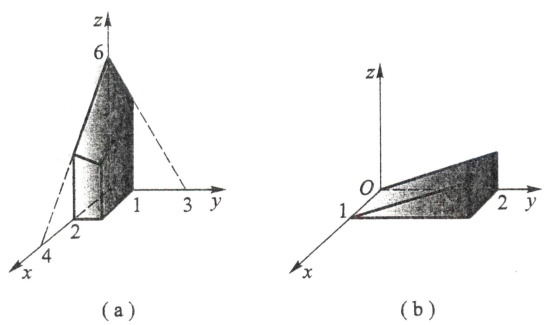


图 8-11

习题 8-5　曲面及其方程

1. 一球面过原点及 $A(4,0,0)$，$B(1,3,0)$ 和 $C(0,0,-4)$ 三点，求球面的方程及球心的坐标和半径.

解　设所求球面的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$，将已知点的坐标代入上式，得

$$a^2+b^2+c^2=R^2, \tag{①}$$

$$(a-4)^2+b^2+c^2=R^2, \tag{②}$$

$$(a-1)^2+(b-3)^2+c^2=R^2, \tag{③}$$

$$a^2+b^2+(4+c)^2=R^2. \tag{④}$$

联立①②式得 $a=2$，联立①④式得 $c=-2$，将 $a=2$ 代入②③式并联立得 $b=1$，故 $R=3$.因此所求球面方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$，其中球心坐标为 $(2,1,-2)$，半径为 3.

2. 已知一球面的球心在点 $P_0(3,-5,2)$ 且与平面 Π：$2x-y+3z+9=0$ 相切，求该球面方程.

解　根据题意，可知点 P_0 到平面 Π 的距离即为球面半径 R，由

$$R=d=\frac{|2\times3-1\times(-5)+3\times2+9|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{26}{\sqrt{14}}$$

得所求球面方程为

$$(x-3)^2+(y+5)^2+(z-2)^2=\frac{338}{7}.$$

3. 方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z=0$ 表示什么曲面？

解　将已知方程整理成

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=(\sqrt{6})^2,$$

所以此方程表示以 $(1,-2,-1)$ 为球心，以 $\sqrt{6}$ 为半径的球面.

4. 求与坐标原点 O 及点 $(2,3,4)$ 的距离之比为 $1:2$ 的点的全体所组成的曲面的方程，它表示怎样的曲面？

解　设动点坐标为 (x,y,z)，根据题意有

$$\frac{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}}{\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2}}=\frac{1}{2},$$

化简整理得

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+(y+1)^2+\left(z+\frac{4}{3}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\sqrt{29}\right)^2.$$

它表示以$\left(-\frac{2}{3},-1,-\frac{4}{3}\right)$为球心,以$\frac{2}{3}\sqrt{29}$为半径的球面.

5. 将 zOx 面上的抛物线 $z^2=5x$ 绕 x 轴旋转一周,求所生成的旋转曲面的方程.

解 以$\pm\sqrt{y^2+z^2}$代替抛物线方程 $z^2=5x$ 中的 z,得

$$(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2=5x,$$

即

$$y^2+z^2=5x.$$

注 zOx 面上的曲线 $F(x,z)=0$ 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程为 $F(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$.

6. 将 zOx 面上的圆 $x^2+z^2=9$ 绕 z 轴旋转一周,求所生成的旋转曲面的方程.

解 以$\pm\sqrt{x^2+y^2}$代替圆方程 $x^2+z^2=9$ 中的 x,得

$$(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2+z^2=9,$$

即

$$x^2+y^2+z^2=9.$$

7. 将 xOy 面上的双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周,求所生成的旋转曲面的方程.

解 以$\pm\sqrt{y^2+z^2}$代替双曲线方程 $4x^2-9y^2=36$ 中的 y,得该双曲线绕 x 轴旋转一周而生成的旋转曲面方程

$$4x^2-9(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2=36,$$

即

$$4x^2-9(y^2+z^2)=36.$$

以$\pm\sqrt{x^2+z^2}$代替双曲线方程 $4x^2-9y^2=36$ 中的 x,得该双曲线绕 y 轴旋转一周而生成的旋转曲面方程

$$4(\pm\sqrt{x^2+z^2})^2-9y^2=36,$$

即

$$4(x^2+z^2)-9y^2=36.$$

8. 画出下列各方程所表示的曲面:

(1) $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$;　　(2) $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$;

(3) $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$;　(4) $y^2-z=0$;　(5) $z=2-x^2$.

解 (1) 如图 8-12(a);　(2) 如图 8-12(b);　(3) 如图 8-12(c);
(4) 如图 8-12(d);　(5) 如图 8-12(e).

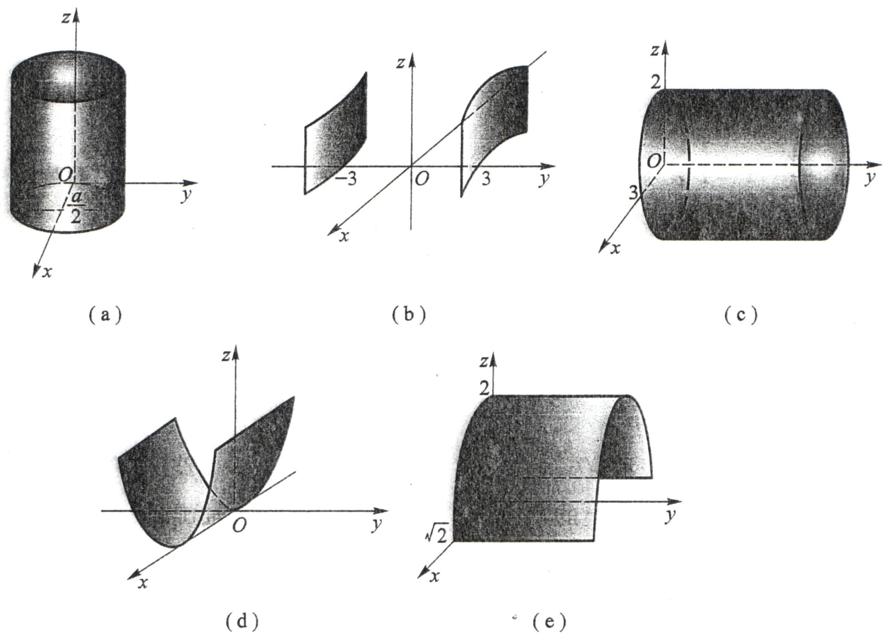


图 8-12

9. 指出下列方程在平面解析几何中和在空间解析几何中分别表示什么图形：

（1）$x=2$；　　（2）$y=x+1$；

（3）$x^2+y^2=4$；　　（4）$x^2-y^2=1$.

解　（1）$x=2$ 在平面解析几何中表示平行于 y 轴的一条直线，在空间解析几何中表示与 yOz 面平行的平面.

（2）$y=x+1$ 在平面解析几何中表示斜率为 1，y 轴截距也为 1 的一条直线，在空间解析几何中表示平行于 z 轴的平面.

（3）$x^2+y^2=4$ 在平面解析几何中表示圆心在原点，半径为 2 的圆，在空间解析几何中表示母线平行于 z 轴，准线为 $\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ z=0\end{cases}$ 的圆柱面.

（4）$x^2-y^2=1$ 在平面解析几何中表示以 x 轴为实轴，y 轴为虚轴的双曲线，在空间解析几何中表示母线平行于 z 轴，准线为 $\begin{cases}x^2-y^2=1,\\ z=0\end{cases}$ 的双曲柱面.

10. 说明下列旋转曲面是怎样形成的：

（1）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{9}=1$；　　（2）$x^2-\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$；

（3）$x^2-y^2-z^2=1$；　　（4）$(z-a)^2=x^2+y^2$.

解 (1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1$ 表示 xOy 面上的椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 绕 x 轴旋转一周而生成的旋转曲面,或表示 zOx 面上的椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$ 绕 x 轴旋转一周而生成的旋转曲面.

(2) $x^2-\frac{y^2}{4}+z^2=1$ 表示 xOy 面上的双曲线 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 绕 y 轴旋转一周而生成的旋转曲面,或表示 yOz 面上的双曲线 $-\frac{y^2}{4}+z^2=1$ 绕 y 轴旋转一周而生成的旋转曲面.

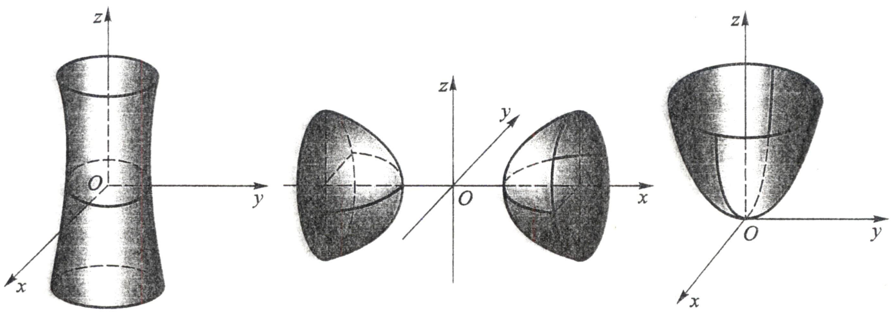
(3) $x^2-y^2-z^2=1$ 表示 xOy 面上的双曲线 $x^2-y^2=1$ 绕 x 轴旋转一周而生成的旋转曲面,或表示 zOx 面上的双曲线 $x^2-z^2=1$ 绕 x 轴旋转一周而生成的旋转曲面.

(4) $(z-a)^2=x^2+y^2$ 表示 zOx 面上的直线 $z=x+a$ 或 $z=-x+a$ 绕 z 轴旋转一周而生成的旋转曲面,或表示 yOz 面上的直线 $z=y+a$ 或 $z=-y+a$ 绕 z 轴旋转一周而生成的旋转曲面.

11. 画出下列方程所表示的曲面:

(1) $4x^2+y^2-z^2=4$; (2) $x^2-y^2-4z^2=4$; (3) $\frac{z}{3}=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$.

解 (1) 如图 8-13(a); (2) 如图 8-13(b); (3) 如图 8-13(c).



(a) (b) (c)

图 8-13

12. 画出下列各曲面所围立体的图形:

(1) $z=0,z=3,x-y=0,x-\sqrt{3}y=0,x^2+y^2=1$(在第 I 卦限内);

(2) $x=0,y=0,z=0,x^2+y^2=R^2,y^2+z^2=R^2$(在第 I 卦限内).

解 (1) 如图 8-14; (2) 如图 8-15.

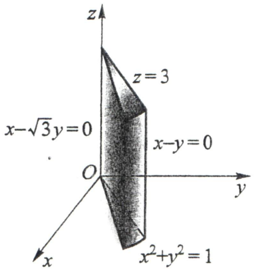


图 8-14

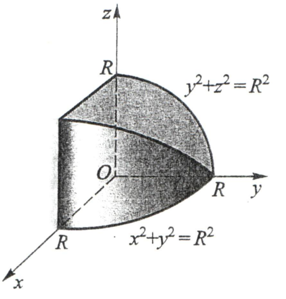


图 8-15

习题 8-6　空间曲线及其方程

1. 画出下列曲线在第 I 卦限内的图形：

(1) $\begin{cases} x=1, \\ y=2; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \\ x-y=0; \end{cases}$　　(3) $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ x^2+z^2=a^2. \end{cases}$

解　(1) 如图 8-16(a)；　(2) 如图 8-16(b)；　(3) 如图 8-16(c).

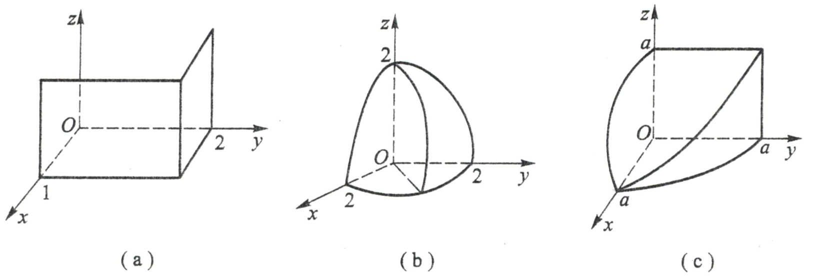


图 8-16

2. 指出下列方程组在平面解析几何中与在空间解析几何中分别表示什么图形：

(1) $\begin{cases} y=5x+1, \\ y=2x-3; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1, \\ y=3. \end{cases}$

解　(1) $\begin{cases} y=5x+1, \\ y=2x-3 \end{cases}$ 在平面解析几何中表示两直线的交点；在空间解析几何中表示两平面的交线，即空间直线.

(2) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1, \\ y=3 \end{cases}$ 在平面解析几何中表示椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 与其切线 $y=3$ 的交点，即

切点;在空间解析几何中表示椭圆柱面$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$与其切平面 $y=3$ 的交线,即空间直线.

3. 分别求母线平行于 x 轴及 y 轴而且通过曲线$\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16,\\x^2+z^2-y^2=0\end{cases}$的柱面方程.

解 在$\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16,\\x^2+z^2-y^2=0\end{cases}$中消去 x,得

$$3y^2-z^2=16,$$

即为母线平行于 x 轴且通过已知曲线的柱面方程.

在$\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16,\\x^2+z^2-y^2=0\end{cases}$中消去 y,得

$$3x^2+2z^2=16,$$

即为母线平行于 y 轴且通过已知曲线的柱面方程.

4. 求下列两曲面的交线在 xOy 面上的投影的方程:

(1) 球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$;

(2) 椭球面 $x^2+y^2+4z^2=1$ 与圆锥面 $z^2=x^2+y^2$.

解 (1) 在$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9,\\x+z=1\end{cases}$中消去 z,得 $2x^2-2x+y^2=8$,它表示母线平行于 z 轴的椭圆柱面,故两曲面的交线在 xOy 面上的投影的方程为$\begin{cases}2x^2-2x+y^2=8,\\z=0.\end{cases}$

(2) 在$\begin{cases}x^2+y^2+4z^2=1\\z^2=x^2+y^2\end{cases}$中消去 z,得 $x^2+y^2=\frac{1}{5}$,它表示母线平行于 z 轴的圆柱面,故两曲面的交线在 xOy 面上的投影的方程为

$$\begin{cases}x^2+y^2=\frac{1}{5},\\z=0.\end{cases}$$

5. 将下列曲线的一般方程化为参数方程:

(1) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9,\\y=x;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4,\\z=0.\end{cases}$

解 (1) 将 $y=x$ 代入 $x^2+y^2+z^2=9$,得

$$2x^2+z^2=9,$$

取 $x=\frac{3}{\sqrt{2}}\cos t$,则 $z=3\sin t$,从而可得该曲线的参数方程

$$\begin{cases}x=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos t,\\ y=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos t,\\ z=3\sin t\end{cases}\quad (0\leqslant t<2\pi).$$

（2）将 $z=0$ 代入 $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4$，得

$$(x-1)^2+y^2=3,$$

取 $x-1=\sqrt{3}\cos t$，则 $y=\sqrt{3}\sin t$，从而可得该曲线的参数方程

$$\begin{cases}x=1+\sqrt{3}\cos t,\\ y=\sqrt{3}\sin t,\\ z=0\end{cases}\quad (0\leqslant t<2\pi).$$

6. 求螺旋线 $\begin{cases}x=a\cos\theta,\\ y=a\sin\theta,\\ z=b\theta\end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程.

解　由 $x=a\cos\theta,y=a\sin\theta$ 得 $x^2+y^2=a^2$，故该螺旋线在 xOy 面上的投影曲线的直角坐标方程为 $\begin{cases}x^2+y^2=a^2,\\ z=0.\end{cases}$

由 $y=a\sin\theta,z=b\theta$ 得 $y=a\sin\dfrac{z}{b}$，故该螺旋线在 yOz 面上的投影曲线的直角坐标方程为 $\begin{cases}y=a\sin\dfrac{z}{b},\\ x=0.\end{cases}$

由 $x=a\cos\theta,z=b\theta$ 得 $x=a\cos\dfrac{z}{b}$，故该螺旋线在 zOx 面上的投影曲线的直角坐标方程为 $\begin{cases}x=a\cos\dfrac{z}{b},\\ y=0.\end{cases}$

7. 求上半球 $0\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 与圆柱体 $x^2+y^2\leqslant ax(a>0)$ 的公共部分在 xOy 面和 zOx 面上的投影.

解　如图 8-17.所求立体在 xOy 面上的投影即为 $x^2+y^2\leqslant ax$，而由

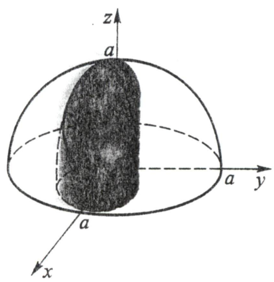


图 8-17

$$\begin{cases}z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\\ x^2+y^2=ax\end{cases}$$

得 $z=\sqrt{a^2-ax}$.故所求立体在 zOx 面上的投影为由 x 轴、z 轴及曲线 $z=\sqrt{a^2-ax}$ 所围成的区域.

8. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 4)$ 在三坐标面上的投影.

解 联立 $\begin{cases}z=x^2+y^2,\\z=4\end{cases}$ 得 $x^2+y^2=4$.故旋转抛物面在 xOy 面上的投影为

$$\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 4,\\z=0.\end{cases}$$

如图 8-18.

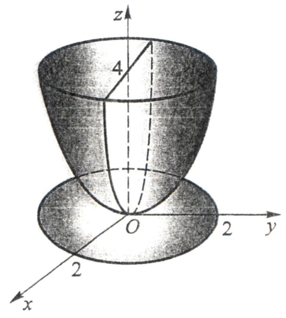


图 8-18

联立 $\begin{cases}z=x^2+y^2,\\x=0\end{cases}$ 得 $z=y^2$,故旋转抛物面在 yOz 面上的投影为由 $z=y^2$ 及 $z=4$ 所围成的区域.

同理,联立 $\begin{cases}z=x^2+y^2,\\y=0\end{cases}$ 得 $z=x^2$.故旋转抛物面在 zOx 面上的投影为由 $z=x^2$ 及 $z=4$ 所围成的区域.

总习题八

1. 填空:

(1) 设在坐标系 $[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$ 中点 A 和点 M 的坐标依次为 (x_0,y_0,z_0) 和 (x,y,z),则在 $[A;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$ 坐标系中,点 M 的坐标为__________,向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标为________;

(2) 设数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 不全为 0,使 $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 三个向量是______的;

(3) 设 $\boldsymbol{a}=(2,1,2)$,$\boldsymbol{b}=(4,-1,10)$,$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}$,且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$,则 $\lambda=$________;

(4) 设 $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=4$, $|\boldsymbol{c}|=5$,且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,则 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|=$________.

解 (1) 点 M 的坐标为 $\underline{(x-x_0,y-y_0,z-z_0)}$,向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标为 $(x-x_0+x_0,y-y_0+y_0,z-z_0+z_0)=\underline{(x,y,z)}$.

(2) 由 $[(\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}]\cdot\boldsymbol{c}=0$ 得 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$,即 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.

(3) $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}=(4,-1,10)-\lambda(2,1,2)=(4-2\lambda,-1-\lambda,10-2\lambda)$.

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$,故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=(2,1,2)\cdot(4-2\lambda,-1-\lambda,10-2\lambda)=27-9\lambda=0$,从而 $\lambda=\underline{3}$.

(4) 由 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 知 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$;

由 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 知 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

又,由 $|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{c}|^2$ 知以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为边的三角形为直角三角形,且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.故

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|&=3|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=3|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\\&=3\times3\times4\times1=\underline{36}.\end{aligned}$$

2. 下列两题中给出了四个结论，从中选出一个正确的结论：

（1）设直线 L 的方程为 $\begin{cases}x-y+z=1,\\2x+y+z=4,\end{cases}$ 则 L 的参数方程为（　　）；

（A）$\begin{cases}x=1-2t,\\y=1+t,\\z=1+3t\end{cases}$　（B）$\begin{cases}x=1-2t,\\y=-1+t,\\z=1+3t\end{cases}$　（C）$\begin{cases}x=1-2t,\\y=1-t,\\z=1+3t\end{cases}$　（D）$\begin{cases}x=1-2t,\\y=-1-t,\\z=1+3t\end{cases}$

（2）下列结论中，错误的是（　　）．

（A）$z+2x^2+y^2=0$ 表示椭圆抛物面

（B）$x^2+2y^2=1+3z^2$ 表示双叶双曲面

（C）$x^2+y^2-(z-1)^2=0$ 表示圆锥面

（D）$y^2=5x$ 表示抛物柱面

解　（1）应选（A）．直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(-2,1,3)$，过点 $(1,1,1)$．

（2）应选（B）．$x^2+2y^2=1+3z^2$ 表示单叶双曲面．

3. 在 y 轴上求与点 $A(1,-3,7)$ 和点 $B(5,7,-5)$ 等距离的点．

解　根据题意，设所求点为 $M(0,y,0)$，由

$$1^2+(y+3)^2+7^2=5^2+(y-7)^2+(-5)^2,$$

得 $y=2$．故所求点为 $M(0,2,0)$．

4. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(3,2,-1)$，$B(5,-4,7)$ 和 $C(-1,1,2)$，求从顶点 C 所引中线的长度．

解　设 AB 中点的坐标为 (x_0,y_0,z_0)，由

$$x_0=\frac{3+5}{2}=4,\quad y_0=\frac{2-4}{2}=-1,\quad z_0=\frac{7-1}{2}=3,$$

从而从顶点 C 所引中线的长度

$$d=\sqrt{(4+1)^2+(-1-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{30}.$$

5. 设 $\triangle ABC$ 的三边 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，三边中点依次为 D,E,F，试用向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示 $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CF}$，并证明

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\boldsymbol{0}.$$

证　如图 8-19，D,E,F 分别为 BC,CA,AB 的中点，因此

$$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{\boldsymbol{a}}{2},\quad \overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\frac{\boldsymbol{b}}{2},\quad \overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{\boldsymbol{c}}{2},$$

从而

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{c}+\frac{\boldsymbol{a}}{2},$$

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\boldsymbol{a}+\frac{\boldsymbol{b}}{2},$$

$$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{c}}{2},$$

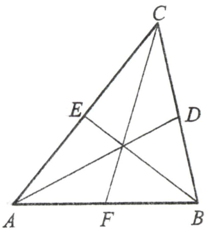


图 8-19

故 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\boldsymbol{c}+\frac{\boldsymbol{a}}{2}+\boldsymbol{a}+\frac{\boldsymbol{b}}{2}+\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{c}}{2}=\frac{3}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$．

6. 试用向量证明：梯形两腰中点的连线平行于底边，其长度等于上、下两底边长度之和的一半．

证　如图 8-20.

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF},\quad \overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF},$$

又$\overrightarrow{EA}=-\overrightarrow{EB}$,$\overrightarrow{DF}=-\overrightarrow{CF}$,故

$$2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC},\quad 即\quad \overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC});$$

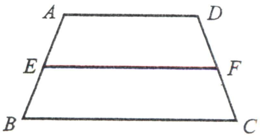


图 8-20

因为$\overrightarrow{AD}/\!/\overrightarrow{BC}$,且$\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{BC}$同向,所以$\overrightarrow{EF}/\!/\overrightarrow{BC}$,且$|\overrightarrow{EF}|=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{AD}|+|\overrightarrow{BC}|)$.

7. 设 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,$\boldsymbol{a}=(3,-5,8)$,$\boldsymbol{b}=(-1,1,z)$,求 z.

解　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3-1,-5+1,8+z)=(2,-4,8+z)$,

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3-(-1),-5-1,8-z)=(4,-6,8-z)$,

由 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 知

$$\sqrt{2^2+(-4)^2+(8+z)^2}=\sqrt{4^2+(-6)^2+(8-z)^2},$$

经整理得 $z=1$.

8. 设 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$,$|\boldsymbol{b}|=1$,$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{6}$,求向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角.

解

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2&=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\\&=(\sqrt{3})^2+1^2+2\times\sqrt{3}\times1\times\cos\frac{\pi}{6}\\&=4+2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=7,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2&=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\\&=(\sqrt{3})^2+1^2-2\times\sqrt{3}\times1\times\cos\frac{\pi}{6}\\&=4-2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1,\end{aligned}$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=3-1=2,$$

故

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}})=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\frac{2}{\sqrt{7}\times1}=\frac{2}{\sqrt{7}},$$

所以$(\widehat{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}})=\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$.

9. 设$(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})$,$(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$,求$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

解　由 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}\perp7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ 知$(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=0$,由 $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}\perp7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 知$(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$,故

$$7|\boldsymbol{a}|^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15|\boldsymbol{b}|^2=0,\qquad ①$$

$$7|\boldsymbol{a}|^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+8|\boldsymbol{b}|^2=0.\qquad ②$$

两式相减得 $46\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=23|\boldsymbol{b}|^2$,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{b}|^2$,代入①式得

$$|a|=|b|,$$

从而
$$\cos(\widehat{a,b})=\frac{a\cdot b}{|a||b|}=\frac{a\cdot b}{|b|^2}=\frac{1}{2},$$

所以
$$(\widehat{a,b})=\frac{\pi}{3}.$$

10. 设向量 $a=(1,-2,2)$，$b=(-2,1,2)$，若存在向量 c，使 $a\times c=b$，试求向量 c；若向量 c 不止一个，试找出模最小的那个 c.

解　a,b 为非零向量，由 $a\times c=b$ 知必有 $a\perp b$，即 $a\cdot b=0$，现 $a\cdot b=-2-2+4=0$，故知存在向量 c.

设向量 $c=(x,y,z)$，由 $a\times c=b$，即 $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix}=(-2,1,2)$，得 $\begin{cases} y+z=1, \\ 2x-z=1, \\ 2x+y=2, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x=x, \\ y=2-2x, \\ z=2x-1, \end{cases}$

$c=(x,2-2x,2x-1)$，其中 x 可看作参数，即满足条件的向量 c 不止一个.

由 $|c|=\sqrt{(3x-2)^2+1}$ 知当 $x=\frac{2}{3}$ 时，$|c|=1$ 达到最小，此时

$$c=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right).$$

11. 设 $|a|=4$，$|b|=3$，$(\widehat{a,b})=\frac{\pi}{6}$，求以 $a+2b$ 和 $a-3b$ 为边的平行四边形的面积.

解　根据向量积的几何意义知以 $a+2b$ 和 $a-3b$ 为边的平行四边形的面积

$$\begin{aligned} S &= |(a+2b)\times(a-3b)| \\ &= 5|a\times b|=5|a||b|\sin(\widehat{a,b}) \\ &= 5\times4\times3\times\sin\frac{\pi}{6}=5\times4\times3\times\frac{1}{2}=30. \end{aligned}$$

12. 设 $a=(2,-3,1)$，$b=(1,-2,3)$，$c=(2,1,2)$，向量 r 满足 $r\perp a$，$r\perp b$，$\mathrm{Prj}_c r=14$，求 r.

解　设向量 $r=(x,y,z)$.

由 $r\perp a$ 知 $r\cdot a=0$，即

$$2x-3y+z=0.$$

由 $r\perp b$ 知 $r\cdot b=0$，即

$$x-2y+3z=0.$$

由 $\mathrm{Prj}_c r=\frac{r\cdot c}{|c|}=14$ 知

$$2x+y+2z=14|c|=14\times3=42.$$

联立上述三个方程得 $x=14$，$y=10$，$z=2$. 故 $r=(14,10,2)$.

13. 设 $a=(-1,3,2)$，$b=(2,-3,-4)$，$c=(-3,12,6)$，证明三向量 a,b,c 共面，并用 a 和 b 表示 c.

证 由$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 2\\ 2 & -3 & -4\\ -3 & 12 & 6\end{vmatrix}=0$知$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=0$,故三个向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$共面.

设$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$,则

$$\begin{aligned}(-3,12,6)&=\lambda(-1,3,2)+\mu(2,-3,-4)\\&=(-\lambda+2\mu,3\lambda-3\mu,2\lambda-4\mu),\end{aligned}$$

即

$$\begin{cases}-\lambda+2\mu=-3,\\3\lambda-3\mu=12,\\2\lambda-4\mu=6,\end{cases}$$

解得$\lambda=5$, $\mu=1$.故

$$\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

14. 已知动点$M(x,y,z)$到xOy面的距离与点M到点$(1,-1,2)$的距离相等,求点M的轨迹的方程.

解 根据题意知

$$|z|=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2},$$

即$(x-1)^2+(y+1)^2-4(z-1)=0$为点M的轨迹的方程.

15. 指出下列旋转曲面的一条母线和旋转轴:

(1) $z=2(x^2+y^2)$; (2) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{36}=1$;

(3) $z^2=3(x^2+y^2)$; (4) $x^2-\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{4}=1$.

解 (1) 母线为$\begin{cases}x=0,\\z=2y^2,\end{cases}$旋转轴为$z$轴.

(2) 母线为$\begin{cases}x=0,\\\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{36}=1,\end{cases}$旋转轴为$y$轴.

(3) 母线为$\begin{cases}x=0,\\z=\sqrt{3}y,\end{cases}$旋转轴为$z$轴.

(4) 母线为$\begin{cases}z=0,\\x^2-\dfrac{y^2}{4}=1,\end{cases}$旋转轴为$x$轴.

16. 求通过点$A(3,0,0)$和$B(0,0,1)$且与xOy面成$\dfrac{\pi}{3}$角的平面的方程.

解 设所求平面方程为$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

平面过点$A(3,0,0)$,$B(0,0,1)$,故$a=3$,$c=1$.这样平面方程为

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{b}+z=1.$$

它与 xOy 面成$\frac{\pi}{3}$角，故

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\left(\frac{1}{3},\frac{1}{b},1\right)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+1^2}\times 1},$$

即
$$\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+1=4,\quad \frac{1}{b}=\pm\frac{\sqrt{26}}{3},$$

故所求平面方程为

$$x+\sqrt{26}y+3z=3 \quad \text{或} \quad x-\sqrt{26}y+3z=3.$$

17. 设一平面垂直于平面 $z=0$，并通过从点 $(1,-1,1)$ 到直线 $\begin{cases}y-z+1=0,\\x=0\end{cases}$ 的垂线，求此平面的方程.

解　直线 $\begin{cases}y-z+1=0,\\x=0\end{cases}$ 的方向向量

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\0 & 1 & -1\\1 & 0 & 0\end{vmatrix}=(0,-1,-1).$$

作过点 $(1,-1,1)$ 且以 $\boldsymbol{s}=(0,-1,-1)$ 为法向量的平面：

$$-1\cdot(y+1)-(z-1)=0,\quad \text{即}\quad y+z=0,$$

联立 $\begin{cases}y-z+1=0,\\x=0,\\y+z=0\end{cases}$ 得垂足 $\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

所求平面垂直于平面 $z=0$，设平面方程为 $Ax+By+D=0$. 平面过点 $(1,-1,1)$ 及垂足 $\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，故有

$$\begin{cases}A-B+D=0,\\-\frac{1}{2}B+D=0,\end{cases}$$

由此解得 $B=2D$，$A=D$. 因此所求平面方程为 $Dx+2Dy+D=0$，即

$$x+2y+1=0.$$

18. 求过点 $(-1,0,4)$，且平行于平面 $3x-4y+z-10=0$，又与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 相交的直线的方程.

解　设所求直线方程为

$$\frac{x+1}{m}=\frac{y-0}{n}=\frac{z-4}{p}.$$

所求直线平行于平面 $3x-4y+z-10=0$，故有

$$3m-4n+p=0, \qquad ①$$

又所求直线与直线$\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$相交,故有

$$\begin{vmatrix} -1-(-1) & 3-0 & 0-4 \\ 1 & 1 & 2 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0,$$

即
$$10m-4n-3p=0. \quad ②$$

联立①②式可得

$$\frac{16}{m}=\frac{19}{n}=\frac{28}{p}.$$

因此所求直线方程为

$$\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}.$$

注 若两直线 $l_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$,$l_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$相交,则 l_1 与 l_2 必共面,故

$$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(s_1\times s_2)=0,$$

即有
$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0.$$

19. 一直线 l 过点 $A(-3,5,-9)$且与两直线 $l_1:\begin{cases} y=3x+5, \\ z=2x-3, \end{cases}$ $l_2:\begin{cases} y=4x-7, \\ z=5x+10 \end{cases}$相交,求此直线方程.

解 所求直线 l 与两直线 l_1,l_2 相交,故直线 l 分别与两直线 l_1,l_2 共面,不妨记这两平面的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$.

直线 l_1 的对称式方程为$\frac{x}{1}=\frac{y-5}{3}=\frac{z+3}{2}$,可看出直线 l_1 过点 $M_1(0,5,-3)$,方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=(1,3,2)$,

故 $\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{s}_1\times\overrightarrow{AM_1}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}=9(2,0,-1)$.

直线 l_2 的对称式方程为$\frac{x}{1}=\frac{y+7}{4}=\frac{z-10}{5}$,可看出直线 l_2 过点 $M_2(0,-7,10)$,方向向量为 $\boldsymbol{s}_2=(1,4,5)$,故 $\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{s}_2\times\overrightarrow{AM_2}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & -12 & 19 \end{vmatrix}=4(34,-1,-6)$.

因此所求直线的方向向量 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 34 & -1 & -6 \end{vmatrix}=-(1,22,2)$,所求直线方程为

$$\frac{x+3}{1}=\frac{y-5}{22}=\frac{z+9}{2}.$$

20. 已知点 $A(1,0,0)$及点 $B(0,2,1)$,试在 z 轴上求一点 C,使$\triangle ABC$ 的面积最小.

解　所求点位于 z 轴，设其坐标为 $C(0,0,z)$，由向量的几何意义知

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|,$$

而

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0-1 & 2-0 & 1-0 \\ 0-1 & 0-0 & z-0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & z \end{vmatrix}$$

$$=2z\boldsymbol{i}+(z-1)\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

故

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{(2z)^2+(z-1)^2+2^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5z^2-2z+5}.$$

设 $f(z)=5z^2-2z+5$，则由 $f'(z)=10z-2=0$ 得 $z=\frac{1}{5}$. 因 $f''\left(\frac{1}{5}\right)=10>0$，故当 $z=\frac{1}{5}$ 时，$\triangle ABC$ 的面积取得极小值，由于驻点唯一，故当 $z=\frac{1}{5}$，即 C 的坐标为 $\left(0,0,\frac{1}{5}\right)$ 时，$S_{\triangle ABC}$ 最小.

21. 求曲线 $\begin{cases} z=2-x^2-y^2, \\ z=(x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的方程.

解　在 $\begin{cases} z=2-x^2-y^2, \\ z=(x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$ 中消去 z，得 $2-x^2-y^2=(x-1)^2+(y-1)^2$，即 $x^2+y^2-x-y=0$. 故 $\begin{cases} x^2+y^2-x-y=0, \\ z=0 \end{cases}$ 为曲线在 xOy 面上的投影曲线方程.

在 $\begin{cases} z=2-x^2-y^2, \\ z=(x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$ 中消去 y，得 $z=(x-1)^2+(\pm\sqrt{2-x^2-z}-1)^2$，即 $2x^2+2xz+z^2-4x-3z+2=0$，

故 $\begin{cases} 2x^2+2xz+z^2-4x-3z+2=0, \\ y=0 \end{cases}$ 为曲线在 zOx 面上的投影曲线方程.

同理，可得 $\begin{cases} 2y^2+2yz+z^2-4y-3z+2=0, \\ x=0 \end{cases}$ 为曲线在 yOz 面上的投影曲线方程.

22. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与柱面 $z^2=2x$ 所围立体在三个坐标面上的投影.

解　在 $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2}, \\ z^2=2x \end{cases}$ 中消去 z，得 $2x=x^2+y^2$，即 $(x-1)^2+y^2=1$，故立体在 xOy 面上的投影为 $\begin{cases} (x-1)^2+y^2\leqslant 1, \\ z=0 \end{cases}$（如图 8-21）.

该立体在 zOx 面上的投影为 $\begin{cases} x\leqslant z\leqslant\sqrt{2x}, \\ y=0 \end{cases}$（如图 8-21），

在 yOz 面上的投影为 $\begin{cases} \left(\frac{z^2}{2}-1\right)^2+y^2\leqslant 1, z\geqslant 0, \\ x=0. \end{cases}$

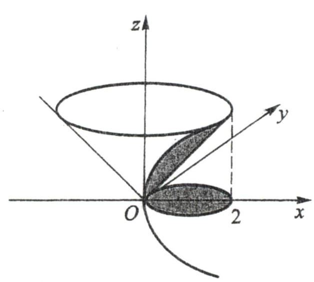


图 8-21

23. 画出下列各曲面所围立体的图形：

(1) 抛物柱面 $2y^2=x$,平面 $z=0$ 及 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$;

(2) 抛物柱面 $x^2=1-z$,平面 $y=0,z=0$ 及 $x+y=1$;

(3) 圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及旋转抛物面 $z=2-x^2-y^2$;

(4) 旋转抛物面 $x^2+y^2=z$,柱面 $y^2=x$,平面 $z=0$ 及 $x=1$.

解 (1) 如图 8-22(a); (2) 如图 8-22(b);

(3) 如图 8-22(c); (4) 如图 8-22(d).

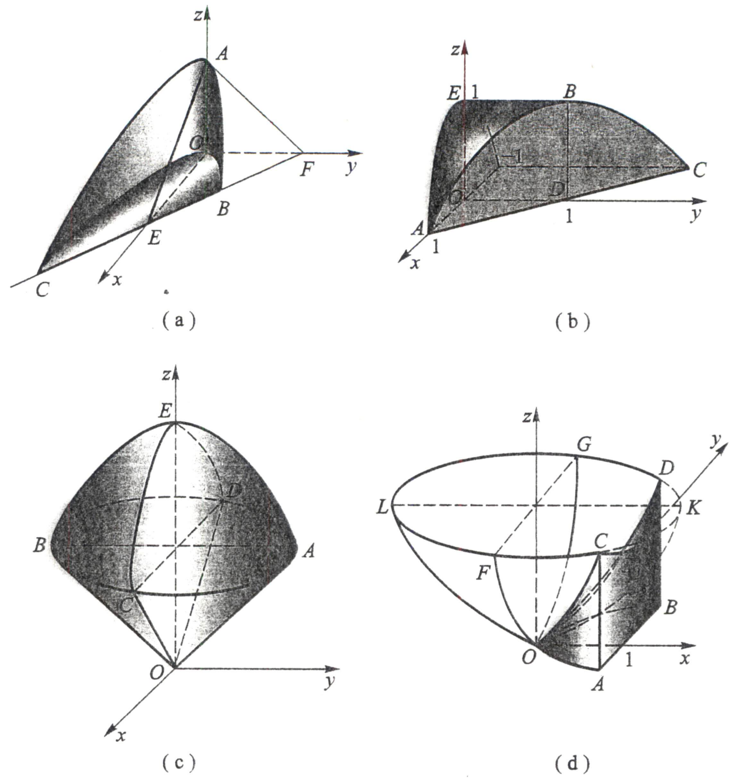


图 8-22

注 在建立了空间直角坐标系后,可按下列方法作图:

1° 先作出立体的各表面(曲面),及它们与各坐标面的交线;

2° 再作各曲面的交线.

第九章

多元函数微分法及其应用

习题 9-1 多元函数的基本概念

1. 判定下列平面点集中哪些是开集、闭集、区域、有界集、无界集,并分别指出它们的聚点所成的点集(称为导集)和边界.

(1) $\{(x,y) \mid x \neq 0, y \neq 0\}$; (2) $\{(x,y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leqslant 4\}$;

(3) $\{(x,y) \mid y > x^2\}$;

(4) $\{(x,y) \mid x^2 + (y-1)^2 \geqslant 1\} \cap \{(x,y) \mid x^2 + (y-2)^2 \leqslant 4\}$.

解 (1) 集合是开集,无界集;导集为 $\mathbf{R}^2$,边界为 $\{(x,y) \mid x = 0$ 或 $y = 0\}$.

(2) 集合既非开集,又非闭集,是有界集;导集为 $\{(x,y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$,边界为 $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$.

(3) 集合是开集,区域,无界集;导集为 $\{(x,y) \mid y \geqslant x^2\}$,边界为 $\{(x,y) \mid y = x^2\}$.

(4) 集合是闭集,有界集;导集为集合本身,边界为

$$\{(x,y) \mid x^2 + (y-1)^2 = 1\} \cup \{(x,y) \mid x^2 + (y-2)^2 = 4\}.$$

2. 已知函数 $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy\tan\dfrac{x}{y}$,试求 $f(tx,ty)$.

解
$$\begin{aligned} f(tx,ty) &= (tx)^2 + (ty)^2 - (tx)(ty)\tan\frac{tx}{ty} \\ &= t^2\left(x^2 + y^2 - xy\tan\frac{x}{y}\right) \\ &= t^2 f(x,y). \end{aligned}$$

3. 试证函数 $F(x,y) = \ln x \cdot \ln y$ 满足关系式

$$F(xy,uv) = F(x,u) + F(x,v) + F(y,u) + F(y,v).$$

证
$$\begin{aligned} F(xy,uv) &= \ln(xy) \cdot \ln(uv) = (\ln x + \ln y)(\ln u + \ln v) \\ &= \ln x \cdot \ln u + \ln x \cdot \ln v + \ln y \cdot \ln u + \ln y \cdot \ln v \end{aligned}$$

$$= F(x,u) + F(x,v) + F(y,u) + F(y,v).$$

4. 已知函数 $f(u,v,w) = u^w + w^{u+v}$，试求 $f(x+y,x-y,xy)$.

解 $f(x+y,x-y,xy) = (x+y)^{xy} + (xy)^{(x+y)+(x-y)} = (x+y)^{xy} + (xy)^{2x}$.

5. 求下列各函数的定义域：

(1) $z = \ln(y^2 - 2x + 1)$；　　(2) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x+y}} + \dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$；

(3) $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$；　　(4) $z = \ln(y-x) + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$；

(5) $u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}\quad (R > r > 0)$；

(6) $u = \arccos \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 (1) $\{(x,y) \mid y^2 - 2x + 1 > 0\}$.

(2) $\{(x,y) \mid x+y > 0, x-y > 0\}$.

(3) $\{(x,y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2 \geqslant y\}$.

(4) $\{(x,y) \mid y - x > 0, x \geqslant 0, x^2 + y^2 < 1\}$.

(5) $\{(x,y,z) \mid r^2 < x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2\}$.

(6) $\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 - z^2 \geqslant 0, x^2 + y^2 \neq 0\}$.

注 本题是求多元函数的定义域，与求一元函数的定义域类似，先写出构成该函数的各个简单函数的定义域，再求出表示这些定义域的集合的交集，即得所求函数的定义域.

6. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$；　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$；　　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}}-1}$；

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{\tan(xy)}{y}$；　　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$.

解 (1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{1-xy}{x^2+y^2} = \dfrac{1-0}{0+1} = 1$.

注 本题利用多元初等函数的连续性求极限，即极限值等于函数值. 对于多元初等函数在点 P_0 处的极限，若 P_0 在该函数的定义区域内，则均可利用此方法求极限.

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1+0}} = \ln 2$.

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{4-(xy+4)}{xy(2+\sqrt{xy+4})}$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}}=-\frac{1}{4}.$$

注　本题分母的极限为零,不能运用商的极限运算法则,而采用通过分母或分子有理化等方法,消去分母中趋于零的因子,再运用极限运算法则,这是求极限的基本方法之一.

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}}-1}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{1-e^{xy}}\cdot(\sqrt{2-e^{xy}}+1)=-1\times 2=-2.$

注　本题利用 $e^{xy}-1\sim xy((x,y)\to(0,0))$,相当于令 $u=xy$,当 $(x,y)\to(0,0)$ 且 $xy\neq 0$ 时,有 $u\to 0$ 且 $u\neq 0$, 于是

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{1-e^{xy}}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{-u}=-1.$$

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\tan(xy)}{y}=\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\tan(xy)}{xy}\cdot x=1\times 2=2.$

注　本题利用 $\tan(xy)\sim xy((x,y)\to(2,0))$.

(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\cdot\dfrac{x^2+y^2}{e^{x^2y^2}}$

$$=\frac{1}{2}\times 0=0.$$

注　本题利用 $1-\cos(x^2+y^2)\sim\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)^2((x,y)\to(0,0))$.

***7.** 证明下列极限不存在:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$;　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x+y}$;　　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x+y)}{(x+y)xy}$.

证　(1) 当 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 时,有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{x+y}{x-y}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+k)x}{(1-k)x}=\frac{1+k}{1-k}\ (k\neq 1).$$

显然它是随着 k 的值不同而改变的,故所求极限不存在.

(2) 依次取 $(x,y)\to(0,0)$ 的两种方式:$y=x$,$y=-x$,分别求极限:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4}=1,$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=-x}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^4+4x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2+4}=0.$$

两种方式求得的极限值不同,故所求极限不存在.

(3) 取 $y=x$,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=x}}\frac{xy}{x+y}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2x}=0,$$

取 $y=-x+x^2$,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=-x+x^2}}\frac{xy}{x+y}=\lim_{x\to0}\frac{x(-x+x^2)}{x^2}=-1,$$

两种方式求得的极限值不同,故所求极限不存在.

(4) 取 $y=x$,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=x}}\frac{1-\cos(x+y)}{(x+y)xy}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{2x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{2x^3}=\infty,$$

故所求极限不存在.

注 本题证明极限不存在所采用的方法是:找出两条不同的路径,使得点 P 沿这两条路径趋于 P_0 时,$f(P)$ 的极限存在但不相等;或者找出一条特殊的路径,使得点 P 沿这条路径趋于 P_0 时,$f(P)$ 的极限不存在.这是证明多元函数极限不存在常用的方法.

8. 函数 $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 在何处是间断的?

解 这个函数的定义域为 $D=\{(x,y)\mid y^2-2x\neq0\}$,曲线 $y^2-2x=0$ 上各点均为 D 的聚点,且函数在这些点处没有定义,因此曲线 $y^2-2x=0$ 上各点均为函数的间断点.

***9.** 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$

证 因为

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|\leqslant\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2},$$

要使 $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<\varepsilon$,只要 $\sqrt{x^2+y^2}<2\varepsilon$,所以 $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=2\varepsilon$,则当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时,就有 $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<\varepsilon$ 成立,即 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$

*10. 设 $F(x,y)=f(x)$，$f(x)$ 在 x_0 处连续，证明：对任意 $y_0\in\mathbf{R}$，$F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

证 设 $P_0(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$，因为 $f(x)$ 在 x_0 处连续，所以 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 从而，当 $P(x,y)\in U(P_0,\delta)$ 时，$|x-x_0|\leqslant\rho(P,P_0)<\delta$，因而有

$$|F(x,y)-F(x_0,y_0)|=|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

即 $F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

习题 9-2　偏导数

1. 设 $f(x,y)=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^4}}$，求 $f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$.

解 $$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{(\Delta x)^2}}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\mathrm{e}^{|\Delta x|}-1}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x},$$

上述极限不存在，所以 $f_x(0,0)$ 不存在；

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to0}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{(\Delta y)^4}}-1}{\Delta y}$$
$$=\lim_{\Delta y\to0}\frac{\mathrm{e}^{(\Delta y)^2}-1}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to0}\frac{(\Delta y)^2}{\Delta y}=0.$$

2. 求下列函数的偏导数：

(1) $z=x^3y-y^3x$；　(2) $s=\dfrac{u^2+v^2}{uv}$；

(3) $z=\sqrt{\ln(xy)}$；　(4) $z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$；

(5) $z=\ln\tan\dfrac{x}{y}$；　(6) $z=(1+xy)^y$；

(7) $u=x^{\frac{y}{z}}$；　(8) $u=\arctan(x-y)^z$.

解 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-y^3$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^3-3y^2x$.

(2) $$\frac{\partial s}{\partial u}=\frac{\frac{\partial}{\partial u}(u^2+v^2)\cdot uv-(u^2+v^2)\cdot\frac{\partial}{\partial u}(uv)}{(uv)^2}$$
$$=\frac{2u^2v-(u^2+v^2)v}{u^2v^2}$$
$$=\frac{1}{v}-\frac{v}{u^2},$$

$$\frac{\partial s}{\partial v}=\frac{\frac{\partial}{\partial v}(u^2+v^2)\cdot uv-(u^2+v^2)\cdot\frac{\partial}{\partial v}(uv)}{(uv)^2}$$

$$=\frac{2uv^2-(u^2+v^2)u}{u^2v^2}$$

$$=\frac{1}{u}-\frac{u}{v^2}.$$

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\ln(xy)}}\cdot\frac{1}{xy}\cdot y=\frac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\ln(xy)}}\cdot\frac{1}{xy}\cdot x=\frac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}$.

(4) $\frac{\partial z}{\partial x}=y\cos(xy)+2\cos(xy)\cdot[-\sin(xy)]\cdot y$

$=y[\cos(xy)-\sin(2xy)]$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=x\cos(xy)+2\cos(xy)\cdot[-\sin(xy)]\cdot x$

$=x[\cos(xy)-\sin(2xy)]$.

(5) $\frac{\partial z}{\partial x}=\cot\frac{x}{y}\cdot\sec^2\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}=\frac{2}{y}\csc\frac{2x}{y}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=\cot\frac{x}{y}\cdot\sec^2\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{2x}{y^2}\csc\frac{2x}{y}$.

(6) $\frac{\partial z}{\partial x}=y^2(1+xy)^{y-1}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}[e^{y\ln(1+xy)}]=(1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right]$.

(7) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$, $\quad\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x$, $\quad\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$.

(8) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$,

$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$,

$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}$.

3. 设 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$,求证 $l\frac{\partial T}{\partial l}+g\frac{\partial T}{\partial g}=0$.

证　因为
$$\frac{\partial T}{\partial l}=2\pi\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{l}{g}}}\cdot\frac{1}{g}=\frac{\pi}{\sqrt{gl}},$$
$$\frac{\partial T}{\partial g}=2\pi\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{l}{g}}}\cdot\left(-\frac{l}{g^2}\right)=-\frac{\pi}{g}\sqrt{\frac{l}{g}},$$

所以
$$l\frac{\partial T}{\partial l}+g\frac{\partial T}{\partial g}=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}-\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=0.$$

4. 设 $z=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$，求证 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2z$.

证　因为
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x^2}e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y^2}e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)},$$

所以
$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}=2z.$$

5. 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$，求 $f_x(x,1)$.

解
$$f_x(x,y)=1+\frac{y-1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{y},$$
$$f_x(x,1)=1.$$

6. 求曲线 $\begin{cases}z=\dfrac{x^2+y^2}{4},\\ y=4\end{cases}$ 在点(2,4,5)处的切线对于 x 轴的倾角.

解　设 $z=f(x,y)$.按偏导数的几何意义，$f_x(2,4)$ 就是曲线在点(2,4,5)处的切线对于 x 轴的斜率，而 $f_x(2,4)=\frac{1}{2}x\Big|_{x=2}=1$，即 $k=\tan\alpha=1$，于是倾角 $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

7. 求下列函数的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$：

(1) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$；　　(2) $z=\arctan\frac{y}{x}$；

(3) $z=y^x$.

解　(1) $\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3-8xy^2$，　$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-8y^2$，

$\frac{\partial z}{\partial y}=4y^3-8x^2y$，　$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-8x^2$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(4x^3-8xy^2)=-16xy.$$

(2) $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=-\frac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

(3) $$\frac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^x\ln^2 y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(x-1)y^{x-2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(y^x\ln y)=y^{x-1}(1+x\ln y).$$

8. 设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$,求 $f_{xx}(0,0,1)$,$f_{xz}(1,0,2)$,$f_{yz}(0,-1,0)$ 及 $f_{zzx}(2,0,1)$.

解 因为

$$f_x=y^2+2xz,\quad f_{xx}=2z,\quad f_{xz}=2x,$$
$$f_y=2xy+z^2,\quad f_{yz}=2z,$$
$$f_z=2yz+x^2,\quad f_{zz}=2y,\quad f_{zzx}=0,$$

所以 $f_{xx}(0,0,1)=2$,$f_{xz}(1,0,2)=2$,$f_{yz}(0,-1,0)=0$,$f_{zzx}(2,0,1)=0$.

9. 设 $z=x\ln(xy)$,求 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ 及 $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\ln(xy)+x\cdot\frac{y}{xy}=\ln(xy)+1,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y}{xy}=\frac{1}{x},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}=0,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{x}{xy}=\frac{1}{y},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}=-\frac{1}{y^2}.$$

10. 验证:

(1) $y=\mathrm{e}^{-kn^2t}\sin nx$ 满足 $\frac{\partial y}{\partial t}=k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$;

(2) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 满足 $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2}{r}$.

证 (1) 因为 $\frac{\partial y}{\partial t}=-kn^2\mathrm{e}^{-kn^2t}\sin nx$, $\frac{\partial y}{\partial x}=n\mathrm{e}^{-kn^2t}\cos nx$,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(ne^{-kn^2t}\cos nx)=-n^2e^{-kn^2t}\sin nx,$$

所以

$$\frac{\partial y}{\partial t}=k(-n^2e^{-kn^2t}\sin nx)=k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

（2）因为
$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{1}{r}-\frac{x}{r^2}\cdot\frac{x}{r}=\frac{r^2-x^2}{r^3},$$

由函数关于自变量的对称性，得

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{r^2-y^2}{r^3},\quad \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{r^2-z^2}{r^3},$$

所以

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3}+\frac{r^2-y^2}{r^3}+\frac{r^2-z^2}{r^3}=\frac{2}{r}.$$

习题9-3　全微分

1. 求下列函数的全微分：

（1）$z=xy+\frac{x}{y}$;　　（2）$z=e^{\frac{y}{x}}$;

（3）$z=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$;　　（4）$u=x^{yz}$.

解　（1）因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y+\frac{1}{y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x-\frac{x}{y^2},$$

所以

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left(y+\frac{1}{y}\right)dx+\left(x-\frac{x}{y^2}\right)dy.$$

（2）因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}},$$

所以

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{y}{x}}(ydx-xdy).$$

（3）因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

所以

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y).$$

(4) 因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yzx^{yz-1},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=zx^{yz}\ln x,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=yx^{yz}\ln x,$$

所以

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z=yzx^{yz-1}\mathrm{d}x+zx^{yz}\ln x\mathrm{d}y+yx^{yz}\ln x\mathrm{d}z.$$

2. 求函数 $z=\ln(1+x^2+y^2)$ 当 $x=1,y=2$ 时的全微分.

解 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{1+x^2+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{1+x^2+y^2},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{1}{3},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{2}{3},$$

所以

$$\left.\mathrm{d}z\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{1}{3}\mathrm{d}x+\frac{2}{3}\mathrm{d}y.$$

3. 求函数 $z=\dfrac{y}{x}$ 当 $x=2,y=1,\Delta x=0.1,\Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分.

解

$$\Delta z=\frac{y+\Delta y}{x+\Delta x}-\frac{y}{x},\quad \mathrm{d}z=-\frac{y}{x^2}\Delta x+\frac{1}{x}\Delta y.$$

当 $x=2,y=1,\Delta x=0.1,\Delta y=-0.2$ 时,全增量

$$\Delta z=\frac{1+(-0.2)}{2+0.1}-\frac{1}{2}=-0.119,$$

全微分

$$\mathrm{d}z=-\frac{1}{4}\times 0.1+\frac{1}{2}\times(-0.2)=-0.125.$$

4. 求函数 $z=\mathrm{e}^{xy}$ 当 $x=1,y=1,\Delta x=0.15,\Delta y=0.1$ 时的全微分.

解

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=y\mathrm{e}^{xy}\Delta x+x\mathrm{e}^{xy}\Delta y.$$

当 $x=1,y=1,\Delta x=0.15,\Delta y=0.1$ 时,全微分

$$dz = e \cdot 0.15 + e \cdot 0.1 = 0.25e.$$

5. 考虑二元函数$f(x,y)$的下面四条性质：

(1) $f(x,y)$在点(x_0,y_0)连续；

(2) $f_x(x,y),f_y(x,y)$在点(x_0,y_0)连续；

(3) $f(x,y)$在点(x_0,y_0)可微分；

(4) $f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)$存在.

若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质P推出性质Q,则下列四个选项中正确的是(　　).

(A) $(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(1)$　　(B) $(3)\Rightarrow(2)\Rightarrow(1)$

(C) $(3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(1)$　　(D) $(3)\Rightarrow(1)\Rightarrow(4)$

解　由于二元函数偏导数存在且连续是二元函数可微分的充分条件,二元函数可微分必定可(偏)导,二元函数可微分必定连续,因此选项(A)正确.

选项(B)中$(3)\not\Rightarrow(2)$,选项(C)中$(4)\not\Rightarrow(1)$,选项(D)中$(1)\not\Rightarrow(4)$.

*6. 计算$\sqrt{1.02^3+1.97^3}$的近似值.

解　设$z=\sqrt{x^3+y^3}$,则

$$\sqrt{(x+\Delta x)^3+(y+\Delta y)^3} = \sqrt{x^3+y^3}+\Delta z \approx \sqrt{x^3+y^3}+dz$$
$$= \sqrt{x^3+y^3}+\frac{3x^2\Delta x+3y^2\Delta y}{2\sqrt{x^3+y^3}}.$$

取$x=1,y=2,\Delta x=0.02,\Delta y=-0.03$,可得

$$\sqrt{1.02^3+1.97^3} \approx \sqrt{1+2^3}+\frac{3\times1\times0.02+3\times2^2\times(-0.03)}{2\sqrt{1+2^3}}=2.95.$$

*7. 计算$1.97^{1.05}$的近似值($\ln 2=0.693$).

解　设$z=x^y$,则

$$(x+\Delta x)^{y+\Delta y}=x^y+\Delta z\approx x^y+dz=x^y+yx^{y-1}\Delta x+x^y\ln x\cdot\Delta y.$$

取$x=2,y=1,\Delta x=-0.03,\Delta y=0.05$,可得

$$1.97^{1.05}\approx 2-0.03+2\ln 2\times0.05=1.97+0.0693\approx2.039.$$

*8. 已知边长为$x=6$ m与$y=8$ m的矩形,如果x边增加5 cm而y边减少10 cm,问这个矩形的对角线的近似变化怎样?

解　矩形的对角线的长为$z=\sqrt{x^2+y^2}$,

$$\Delta z\approx dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\Delta x+y\Delta y).$$

当$x=6,y=8,\Delta x=0.05,\Delta y=-0.1$时,

$$\Delta z\approx\frac{1}{\sqrt{6^2+8^2}}(6\times0.05-8\times0.1)=-0.05,$$

即,这个矩形的对角线的长减少大约 5 cm.

*9. 设有一无盖圆柱形容器,容器的壁与底的厚度均为 0.1 cm,内高为20 cm,内半径为 4 cm.求这个容器外壳体积的近似值.

解 圆柱体的体积公式为 $V=\pi R^2H$,圆柱形容器的外壳体积就是圆柱体体积 V 的增量 ΔV,而

$$\Delta V\approx \mathrm{d}V=\frac{\partial V}{\partial R}\Delta R+\frac{\partial V}{\partial H}\Delta H=2\pi RH\Delta R+\pi R^2\Delta H.$$

当 $R=4,H=20,\Delta R=\Delta H=0.1$ 时,

$$\Delta V\approx 2\times 3.14\times 4\times 20\times 0.1+3.14\times 4^2\times 0.1\approx 55.3,$$

即容器外壳的体积大约是 55.3 cm^3.

*10. 设有直角三角形,测得其两直角边的长分别为(7 ± 0.1) cm 和(24 ± 0.1) cm.试求利用上述两值来计算斜边长度时的绝对误差.

解 设两直角边长度分别为 x 和 y,则斜边长度为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

$$|\Delta z|\approx|\mathrm{d}z|=\left|\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right|\leqslant\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right||\Delta x|+\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right||\Delta y|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x|\Delta x|+y|\Delta y|)\leqslant\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\delta_x+y\delta_y),$$

便得

$$\delta_z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\delta_x+y\delta_y).$$

当 $x=7,y=24,\delta_x=0.1,\delta_y=0.1$ 时,

$$\delta_z=\frac{1}{\sqrt{7^2+24^2}}(7\times0.1+24\times0.1)=0.124.$$

即计算斜边长度 z 的绝对误差约为 0.124 cm.

*11. 测得一块三角形土地的两边边长分别为(63 ± 0.1) m 和(78 ± 0.1) m,这两边的夹角为 $60°\pm1°$.试求这块三角形土地面积的近似值,并求其绝对误差和相对误差.

解 设三角形的两边长分别为 a 和 b,它们的夹角为 θ,则三角形的面积为

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta,$$

$$|\Delta S|\approx|\mathrm{d}S|=\left|\frac{\partial S}{\partial a}\Delta a+\frac{\partial S}{\partial b}\Delta b+\frac{\partial S}{\partial\theta}\Delta\theta\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{\partial S}{\partial a}\right||\Delta a|+\left|\frac{\partial S}{\partial b}\right||\Delta b|+\left|\frac{\partial S}{\partial\theta}\right||\Delta\theta|$$

$$=\frac{1}{2}b\sin\theta|\Delta a|+\frac{1}{2}a\sin\theta|\Delta b|+\frac{1}{2}ab\cos\theta|\Delta\theta|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}b\sin\theta\delta_a+\frac{1}{2}a\sin\theta\delta_b+\frac{1}{2}ab\cos\theta\delta_\theta,$$

便得

$$\delta_S=\frac{1}{2}b\sin\theta\delta_a+\frac{1}{2}a\sin\theta\delta_b+\frac{1}{2}ab\cos\theta\delta_\theta.$$

当 $a=63,b=78,\theta=\frac{\pi}{3},\delta_a=0.1,\delta_b=0.1,\delta_\theta=\frac{\pi}{180}$ 时,三角形面积的近似值为

$$S=\frac{1}{2}\times 63\times 78\times\sin\frac{\pi}{3}=2\,127.8(\mathrm{m}^2),$$

绝对误差为

$$\begin{aligned}\delta_S&=\frac{1}{2}\times 78\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 0.1+\frac{1}{2}\times 63\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 0.1+\frac{1}{2}\times 63\times 78\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{180}\\&=27.6(\mathrm{m}^2),\end{aligned}$$

相对误差为

$$\frac{\delta_S}{S}=\frac{27.6}{2\,127.8}=1.30\%.$$

*12. 利用全微分证明:两数之和的绝对误差等于它们各自的绝对误差之和.

证 设 $u=x+y$,则

$$\begin{aligned}|\Delta u|\approx|\mathrm{d}u|&=\left|\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right|\\&=|\Delta x+\Delta y|\leqslant|\Delta x|+|\Delta y|\leqslant\delta_x+\delta_y,\end{aligned}$$

便得

$$\delta_u=\delta_x+\delta_y,$$

即两数之和的绝对误差等于它们各自的绝对误差之和.

*13. 利用全微分证明:乘积的相对误差等于各因子的相对误差之和,商的相对误差等于被除数及除数的相对误差之和.

证 设 $u=xy,v=\frac{x}{y}$, 则

$$|\Delta u|\approx|\mathrm{d}u|=|y\Delta x+x\Delta y|\leqslant|y||\Delta x|+|x||\Delta y|\leqslant|y|\delta_x+|x|\delta_y,$$

$$|\Delta v|\approx|\mathrm{d}v|=\left|\frac{y\Delta x-x\Delta y}{y^2}\right|\leqslant\frac{|y||\Delta x|+|x||\Delta y|}{|y|^2}\leqslant\frac{|y|\delta_x+|x|\delta_y}{|y|^2},$$

便得

$$\delta_u=|y|\delta_x+|x|\delta_y,\quad \delta_v=\frac{|y|\delta_x+|x|\delta_y}{|y|^2},$$

$$\frac{\delta_u}{|u|}=\frac{|y|\delta_x+|x|\delta_y}{|xy|}=\frac{\delta_x}{|x|}+\frac{\delta_y}{|y|},$$

$$\frac{\delta_v}{|v|}=\frac{1}{\left|\frac{x}{y}\right|}\cdot\frac{|y|\delta_x+|x|\delta_y}{|y|^2}=\frac{\delta_x}{|x|}+\frac{\delta_y}{|y|}.$$

即乘积的相对误差等于各因子的相对误差之和，商的相对误差等于被除数及除数的相对误差之和.

习题 9-4　多元复合函数的求导法则

1. 设 $z=u^2+v^2$，而 $u=x+y,v=x-y$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2u\cdot1+2v\cdot1=2(u+v)=4x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=2u\cdot1+2v\cdot(-1)=2(u-v)=4y.$$

2. 设 $z=u^2\ln v$，而 $u=\frac{x}{y},v=3x-2y$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2u\ln v\cdot\frac{1}{y}+\frac{u^2}{v}\cdot3$$

$$=\frac{2x}{y^2}\ln(3x-2y)+\frac{3x^2}{(3x-2y)y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=2u\ln v\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\frac{u^2}{v}\cdot(-2)$$

$$=-\frac{2x^2}{y^3}\ln(3x-2y)-\frac{2x^2}{(3x-2y)y^2}.$$

3. 设 $z=e^{x-2y}$，而 $x=\sin t,y=t^3$，求 $\frac{dz}{dt}$.

解 $$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=e^{x-2y}\cdot\cos t+e^{x-2y}\cdot(-2)\cdot3t^2$$

$$=e^{x-2y}(\cos t-6t^2)=e^{\sin t-2t^3}(\cos t-6t^2).$$

4. 设 $z=\arcsin(x-y)$，而 $x=3t,y=4t^3$，求 $\frac{dz}{dt}$.

解 $$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}\cdot3+\frac{(-1)}{\sqrt{1-(x-y)^2}}\cdot12t^2$$

$$= \frac{3(1-4t^2)}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}.$$

5. 设 $z = \arctan(xy)$，而 $y = e^x$，求$\dfrac{dz}{dx}$.

解 $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{1+x^2y^2} + \dfrac{x}{1+x^2y^2} \cdot e^x$

$$= \frac{(1+x)e^x}{1+x^2e^{2x}}.$$

6. 设 $u = \dfrac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$，而 $y = a\sin x, z = \cos x$，求$\dfrac{du}{dx}$.

解 $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \cdot \dfrac{dz}{dx}$

$$= \frac{ae^{ax}(y-z)}{a^2+1} + \frac{e^{ax}}{a^2+1} \cdot a\cos x + \frac{e^{ax}}{a^2+1} \cdot (-1) \cdot (-\sin x)$$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2+1}(a^2\sin x - a\cos x + a\cos x + \sin x)$$

$$= e^{ax}\sin x.$$

7. 设 $z = \arctan\dfrac{x}{y}$，而 $x = u+v, y = u-v$，验证

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u-v}{u^2+v^2}.$$

证 $\dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial v} = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial u}\right) + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial v}\right)$

$$= \frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot 1 + \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot 1 + \frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot 1 +$$

$$\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot (-1)$$

$$= \frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{u-v}{u^2+v^2},$$

故等式成立.

8. 求下列函数的一阶偏导数(其中 f 具有一阶连续偏导数)：

(1) $u = f(x^2 - y^2, e^{xy})$；　　(2) $u = f\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{z}\right)$；

(3) $u=f(x,xy,xyz)$.

解 (1) 将中间变量 x^2-y^2,e^{xy} 依次编为 1,2 号,则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^2-y^2)+f_2'\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^{xy})=2xf_1'+y\mathrm{e}^{xy}f_2',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f_1'\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2)+f_2'\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{e}^{xy})=-2yf_1'+x\mathrm{e}^{xy}f_2'.$$

(2) 令 $s=\frac{x}{y},t=\frac{y}{z}$,则 $u=f(s,t)$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{1}{y}f_s,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f_s+\frac{1}{z}f_t,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}f_t.$$

(3) 将中间变量 x,xy,xyz 依次编为 1,2,3 号, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot 1+f_2'\cdot y+f_3'\cdot yz=f_1'+yf_2'+yzf_3',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f_2'\cdot x+f_3'\cdot xz=xf_2'+xzf_3',$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=f_3'\cdot xy=xyf_3'.$$

9. 设 $z=xy+xF(u)$,而 $u=\frac{y}{x}$,$F(u)$ 为可导函数,证明

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+xy.$$

证
$$\begin{aligned}x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}&=x\left[y+F(u)+xF'(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+y\left[x+xF'(u)\frac{\partial u}{\partial y}\right]\\&=x\left[y+F(u)-\frac{y}{x}F'(u)\right]+y[x+F'(u)]\\&=xy+xF(u)+xy=z+xy,\end{aligned}$$

故等式成立.

10. 设 $z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$,其中 $f(u)$ 为可导函数,验证

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}.$$

证 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y\cdot f_u\cdot 2x}{f^2(u)}=-\frac{2xyf_u}{f^2(u)}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f(u)-yf_u\cdot(-2y)}{f^2(u)}=\frac{1}{f(u)}+\frac{2y^2f_u}{f^2(u)},$$

故

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2yf_u}{f^2(u)}+\frac{1}{yf(u)}+\frac{2yf_u}{f^2(u)}=\frac{1}{yf(u)}=\frac{z}{y^2}.$$

11. 设函数 $f(x,y,z)$ 满足 $f(tx,ty,tz)=t^nf(x,y,z)$（t 为任意实数），则称函数 f 为 n 次齐次函数.证明：n 次齐次函数 f 满足关系式：

$$xf_x+yf_y+zf_z=nf(x,y,z),$$

其中，函数 f 具有一阶连续偏导数.

证　将中间变量 tx,ty,tz 依次编为 1,2,3 号.在关系式

$$f(tx,ty,tz)=t^nf(x,y,z)$$

两端分别对 t 求导，得

$$xf_1'+yf_2'+zf_3'=nt^{n-1}f(x,y,z),$$

上式两端同乘 t，得

$$txf_1'+tyf_2'+tzf_3'=nt^nf(x,y,z).$$

于是有

$$xf_x+yf_y+zf_z=nf(x,y,z).$$

证毕.

12. 设 $z=f(x^2+y^2)$，其中 f 具有二阶导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解　令 $u=x^2+y^2$，则 $z=f(u)$.记 $f'=f'(u)$，$f''=f''(u)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=2xf',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=2yf',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f'+2xf''\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=2f'+4x^2f'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xf''\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=4xyf'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2f'+2yf''\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=2f'+4y^2f''.$$

***13.** 求下列函数的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$（其中 f 具有二阶连续偏导数）：

(1) $z=f(xy,y)$；　　　(2) $z=f\left(x,\frac{x}{y}\right)$；

(3) $z=f(xy^2,x^2y)$;　　　(4) $z=f(\sin x,\cos y,e^{x+y})$.

解 (1) 令 $s=xy,t=y$,则 $z=f(s,t)$,s 和 t 是中间变量.将 s,t 依次编为 1,2 号,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\frac{\partial s}{\partial x}=yf_1',\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\frac{\partial s}{\partial y}+f_2'\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}=xf_1'+f_2'.$$

因为 $f(s,t)$ 是 s 和 t 的函数,所以 f_1' 和 f_2' 也是 s 和 t 的函数,从而 f_1' 和 f_2' 是以 s 和 t 为中间变量的 x 和 y 的函数.故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(yf_1')=yf_{11}''\frac{\partial s}{\partial x}=y^2f_{11}'',$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(yf_1')=f_1'+y\left(f_{11}''\frac{\partial s}{\partial y}+f_{12}''\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}\right)\\&=f_1'+xyf_{11}''+yf_{12}'',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(xf_1'+f_2')\\&=x\left(f_{11}''\frac{\partial s}{\partial y}+f_{12}''\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}\right)+f_{21}''\frac{\partial s}{\partial y}+f_{22}''\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}\\&=x^2f_{11}''+2xf_{12}''+f_{22}''.\end{aligned}$$

(2) 令 $s=x,t=\dfrac{x}{y}$,并将 s,t 依次编为 1,2 号,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}+f_2'\frac{\partial t}{\partial x}=f_1'+\frac{1}{y}f_2',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_2'\frac{\partial t}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f_2'.$$

因为 $f(s,t)$ 是 s 和 t 的函数,所以 f_1' 和 f_2' 也是 s 和 t 的函数,从而 f_1' 和 f_2' 是以 s 和 t 为中间变量的 x 和 y 的函数. 故

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(f_1'+\frac{1}{y}f_2'\right)=f_{11}''+f_{12}''\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{1}{y}\left(f_{21}''+f_{22}''\frac{\partial t}{\partial x}\right)\\&=f_{11}''+\frac{2}{y}f_{12}''+\frac{1}{y^2}f_{22}'',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(f_1'+\frac{1}{y}f_2'\right)=f_{12}''\frac{\partial t}{\partial y}-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}f_{22}''\frac{\partial t}{\partial y}\\&=-\frac{x}{y^2}f_{12}''-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^3}f_{22}'',\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{y^2}f_2'\right)=\frac{2x}{y^3}f_2'-\frac{x}{y^2}f_{22}''\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{2x}{y^3}f_2'+\frac{x^2}{y^4}f_{22}''.$$

(3) 令 $s=xy^2,t=x^2y$,并将 s,t 依次编为 1,2 号,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\frac{\partial s}{\partial x}+f_2'\frac{\partial t}{\partial x}=y^2f_1'+2xyf_2',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\frac{\partial s}{\partial y}+f_2'\frac{\partial t}{\partial y}=2xyf_1'+x^2f_2'.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(y^2f_1'+2xyf_2')$$

$$=y^2\left(f_{11}''\frac{\partial s}{\partial x}+f_{12}''\frac{\partial t}{\partial x}\right)+2yf_2'+2xy\left(f_{21}''\frac{\partial s}{\partial x}+f_{22}''\frac{\partial t}{\partial x}\right)$$

$$=y^2(y^2f_{11}''+2xyf_{12}'')+2yf_2'+2xy(y^2f_{21}''+2xyf_{22}'')$$

$$=2yf_2'+y^4f_{11}''+4xy^3f_{12}''+4x^2y^2f_{22}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(y^2f_1'+2xyf_2')$$

$$=2yf_1'+y^2\left(f_{11}''\frac{\partial s}{\partial y}+f_{12}''\frac{\partial t}{\partial y}\right)+2xf_2'+2xy\left(f_{21}''\frac{\partial s}{\partial y}+f_{22}''\frac{\partial t}{\partial y}\right)$$

$$=2yf_1'+y^2(2xyf_{11}''+x^2f_{12}'')+2xf_2'+2xy(2xyf_{21}''+x^2f_{22}'')$$

$$=2yf_1'+2xf_2'+2xy^3f_{11}''+5x^2y^2f_{12}''+2x^3yf_{22}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(2xyf_1'+x^2f_2')$$

$$=2xf_1'+2xy\left(f_{11}''\frac{\partial s}{\partial y}+f_{12}''\frac{\partial t}{\partial y}\right)+x^2\left(f_{21}''\frac{\partial s}{\partial y}+f_{22}''\frac{\partial t}{\partial y}\right)$$

$$=2xf_1'+2xy(2xyf_{11}''+x^2f_{12}'')+x^2(2xyf_{21}''+x^2f_{22}'')$$

$$=2xf_1'+4x^2y^2f_{11}''+4x^3yf_{12}''+x^4f_{22}''.$$

（4）令 $u=\sin x, v=\cos y, w=e^{x+y}$，并将 u,v,w 依次编为 1,2,3 号，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\frac{du}{dx}+f_3'\frac{\partial w}{\partial x}=\cos xf_1'+e^{x+y}f_3',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_2'\frac{dv}{dy}+f_3'\frac{\partial w}{\partial y}=-\sin yf_2'+e^{x+y}f_3',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(\cos xf_1'+e^{x+y}f_3')$$

$$=-\sin xf_1'+\cos x\left(f_{11}''\frac{du}{dx}+f_{13}''\frac{\partial w}{\partial x}\right)+e^{x+y}f_3'+e^{x+y}\left(f_{31}''\frac{du}{dx}+f_{33}''\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$=-\sin xf_1'+\cos x(\cos xf_{11}''+e^{x+y}f_{13}'')+e^{x+y}f_3'+e^{x+y}(\cos xf_{31}''+e^{x+y}f_{33}'')$$

$$=e^{x+y}f_3'-\sin xf_1'+\cos^2xf_{11}''+2e^{x+y}\cos xf_{13}''+e^{2(x+y)}f_{33}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(\cos xf_1'+\mathrm{e}^{x+y}f_3')$$

$$=\cos x\left(f_{12}''\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}+f_{13}''\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\mathrm{e}^{x+y}f_3'+\mathrm{e}^{x+y}\left(f_{32}''\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}+f_{33}''\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$=\cos x(-\sin yf_{12}''+\mathrm{e}^{x+y}f_{13}'')+\mathrm{e}^{x+y}f_3'+\mathrm{e}^{x+y}(-\sin yf_{32}''+\mathrm{e}^{x+y}f_{33}'')$$

$$=\mathrm{e}^{x+y}f_3'-\cos x\sin yf_{12}''+\mathrm{e}^{x+y}\cos xf_{13}''-\mathrm{e}^{x+y}\sin yf_{32}''+\mathrm{e}^{2(x+y)}f_{33}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(-\sin yf_2'+\mathrm{e}^{x+y}f_3')$$

$$=-\cos yf_2'-\sin y\left(f_{22}''\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}+f_{23}''\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\mathrm{e}^{x+y}f_3'+\mathrm{e}^{x+y}\left(f_{32}''\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}+f_{33}''\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$=-\cos yf_2'-\sin y(-\sin yf_{22}''+\mathrm{e}^{x+y}f_{23}'')+\mathrm{e}^{x+y}f_3'+\mathrm{e}^{x+y}(-\sin yf_{32}''+\mathrm{e}^{x+y}f_{33}'')$$

$$=\mathrm{e}^{x+y}f_3'-\cos yf_2'+\sin^2 yf_{22}''-2\mathrm{e}^{x+y}\sin yf_{23}''+\mathrm{e}^{2(x+y)}f_{33}''.$$

*14. 设 $u=f(x,y)$ 的所有二阶偏导数连续,而

$$x=\frac{s-\sqrt{3}t}{2},\quad y=\frac{\sqrt{3}s+t}{2},$$

证明

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \text{ 及 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

证 因为

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y},$$

所以

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

又因为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial t}\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$=\frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

所以$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

习题 9-5　隐函数的求导公式

1. 设 $\sin y+\mathrm{e}^x-xy^2=0$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　设 $F(x,y)=\sin y+\mathrm{e}^x-xy^2$，则

$$F_x=\mathrm{e}^x-y^2,\quad F_y=\cos y-2xy.$$

当 $F_y\neq 0$ 时，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{\mathrm{e}^x-y^2}{\cos y-2xy}=\frac{y^2-\mathrm{e}^x}{\cos y-2xy}.$$

2. 设 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　设 $F(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\frac{y}{x}$，则一阶偏导数分别为

$$F_x=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{x+y}{x^2+y^2},$$

$$F_y=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{y-x}{x^2+y^2}.$$

当 $F_y\neq 0$ 时，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{x+y}{x^2+y^2}\Big/\frac{y-x}{x^2+y^2}=\frac{x+y}{x-y}.$$

3. 设 $x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$,求$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解法一 设 $F(x,y,z)=x+2y+z-2\sqrt{xyz}$,则

$$F_x=1-\frac{yz}{\sqrt{xyz}},\quad F_y=2-\frac{xz}{\sqrt{xyz}},\quad F_z=1-\frac{xy}{\sqrt{xyz}}.$$

于是当 $F_z\neq 0$ 时,有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}.$$

解法二 在所给方程两端分别对 x 求偏导数,并注意 $z=z(x,y)$,得

$$1+\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{\sqrt{xyz}}\left(yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,$$

当 $1-\frac{xy}{\sqrt{xyz}}\neq 0$ 时,解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{yz}{\sqrt{xyz}}-1}{1-\frac{xy}{\sqrt{xyz}}}=\frac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}.$

同理,方程两端分别对 y 求偏导数,得

$$2+\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{1}{\sqrt{xyz}}\left(xz+xy\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0,$$

当 $1-\frac{xy}{\sqrt{xyz}}\neq 0$ 时,解得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{xz}{\sqrt{xyz}}-2}{1-\frac{xy}{\sqrt{xyz}}}=\frac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}.$

解法三 对所给方程两端分别求全微分,得

$$\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y+\mathrm{d}z-\frac{1}{\sqrt{xyz}}(yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z)=0,$$

即

$$\left(1-\frac{xy}{\sqrt{xyz}}\right)\mathrm{d}z=\left(\frac{yz}{\sqrt{xyz}}-1\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{xz}{\sqrt{xyz}}-2\right)\mathrm{d}y.$$

当 $\sqrt{xyz}-xy\neq 0$ 时,解得 $\mathrm{d}z=\frac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}\mathrm{d}x+\frac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}\mathrm{d}y$. 所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}.$$

4. 设 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解　令 $F(x,y,z)=\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}$，则

$$F_x=\frac{1}{z},\quad F_y=-\frac{1}{\frac{z}{y}}\cdot\left(-\frac{z}{y^2}\right)=\frac{1}{y},$$

$$F_z=-\frac{x}{z^2}-\frac{1}{\frac{z}{y}}\cdot\frac{1}{y}=-\frac{x+z}{z^2}.$$

于是当 $F_z\neq0$ 时，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{1}{z}\Big/\left(-\frac{x+z}{z^2}\right)=\frac{z}{x+z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{1}{y}\Big/\left(-\frac{x+z}{z^2}\right)=\frac{z^2}{y(x+z)}.$$

5. 设 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，证明 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

证　设 $F(x,y,z)=2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z$，则

$$F_x=2\cos(x+2y-3z)-1,$$

$$F_y=2\cos(x+2y-3z)\cdot2-2=2F_x,$$

$$F_z=2\cos(x+2y-3z)\cdot(-3)+3=-3F_x,$$

故当 $F_z\neq0$ 时，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_x}{F_z}-\frac{F_y}{F_z}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1.$$

6. 设 $x=x(y,z)$，$y=y(x,z)$，$z=z(x,y)$ 都是由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的具有连续偏导数的函数，证明 $\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1$.

证　因为

$$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_x},\quad \frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{F_z}{F_y},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},$$

所以

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\left(-\frac{F_y}{F_x}\right)\cdot\left(-\frac{F_z}{F_y}\right)\cdot\left(-\frac{F_x}{F_z}\right)=-1.$$

7. 设 $\Phi(u,v)$ 具有连续偏导数,证明由方程 $\Phi(cx-az,cy-bz)=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 满足 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$.

证 令 $u=cx-az,v=cy-bz$,则

$$\Phi_x=\Phi_u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=c\Phi_u,$$

$$\Phi_y=\Phi_v\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=c\Phi_v,$$

$$\Phi_z=\Phi_u\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\Phi_v\cdot\frac{\partial v}{\partial z}=-a\Phi_u-b\Phi_v.$$

故当 $\Phi_z\neq0$ 时,有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\Phi_x}{\Phi_z}=\frac{c\Phi_u}{a\Phi_u+b\Phi_v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\Phi_y}{\Phi_z}=\frac{c\Phi_v}{a\Phi_u+b\Phi_v}.$$

于是

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=a\cdot\frac{c\Phi_u}{a\Phi_u+b\Phi_v}+b\cdot\frac{c\Phi_v}{a\Phi_u+b\Phi_v}=c.$$

8. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $2xz-2xyz+\ln(xyz)=0$ 所确定的隐函数,求 $\mathrm{d}z$.

解 设 $F(x,y,z)=2xz-2xyz+\ln(xyz)$,则

$$F_x=2z-2yz+\frac{1}{x},\quad F_y=-2xz+\frac{1}{y},\quad F_z=2x-2xy+\frac{1}{z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{z}{x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{z(2xyz-1)}{y(2xz-2xyz+1)}.$$

故

$$\mathrm{d}z=-\frac{z}{x}\mathrm{d}x+\frac{z(2xyz-1)}{y(2xz-2xyz+1)}\mathrm{d}y.$$

*9. 设 $\mathrm{e}^z-xyz=0$,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 设 $F(x,y,z)=\mathrm{e}^z-xyz$,则 $F_x=-yz,F_z=\mathrm{e}^z-xy$.于是当 $F_z\neq0$ 时,有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz}{\mathrm{e}^z-xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{y\frac{\partial z}{\partial x}(\mathrm{e}^z-xy)-yz\left(\mathrm{e}^z\frac{\partial z}{\partial x}-y\right)}{(\mathrm{e}^z-xy)^2}$$

$$=\frac{y^2z-yz\left(\mathrm{e}^z\cdot\frac{yz}{\mathrm{e}^z-xy}-y\right)}{(\mathrm{e}^z-xy)^2}$$

$$= \frac{2y^2ze^z - 2xy^3z - y^2z^2e^z}{(e^z - xy)^3}.$$

*10. 设 $z^3 - 3xyz = a^3$,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解　设 $F(x,y,z) = z^3 - 3xyz - a^3$,则

$$F_x = -3yz,\quad F_y = -3xz,\quad F_z = 3z^2 - 3xy.$$

于是当 $F_z \neq 0$ 时,有 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz}{z^2 - xy}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{xz}{z^2 - xy}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{yz}{z^2 - xy}\right)$$

$$= \frac{\left(z + y\frac{\partial z}{\partial y}\right)(z^2 - xy) - yz\left(2z\frac{\partial z}{\partial y} - x\right)}{(z^2 - xy)^2}$$

$$= \frac{\left(z + \frac{xyz}{z^2 - xy}\right)\cdot(z^2 - xy) - yz\left(\frac{2xz^2}{z^2 - xy} - x\right)}{(z^2 - xy)^2}$$

$$= \frac{z(z^4 - 2xyz^2 - x^2y^2)}{(z^2 - xy)^3}.$$

11. 求由下列方程组所确定的函数的导数或偏导数:

(1) 设$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20, \end{cases}$ 求$\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$;

(2) 设$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \end{cases}$ 求$\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}$;

(3) 设$\begin{cases} u = f(ux, v + y), \\ v = g(u - x, v^2 y), \end{cases}$ 其中 f,g 具有一阶连续偏导数,求$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$;

(4) 设$\begin{cases} x = e^u + u\sin v, \\ y = e^u - u\cos v, \end{cases}$ 求$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

解　(1) 分别在两个方程两端对 x 求导,得

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = 2x + 2y\frac{dy}{dx}, \\ 2x + 4y\frac{dy}{dx} + 6z\frac{dz}{dx} = 0. \end{cases}$$

移项,得

$$\begin{cases} 2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-2x, \\ 2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+3z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-x. \end{cases}$$

当 $D=\begin{vmatrix} 2y & -1 \\ 2y & 3z \end{vmatrix}=6yz+2y\neq 0$ 时,解方程组得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\begin{vmatrix} -2x & -1 \\ -x & 3z \end{vmatrix}}{D}=\frac{-6xz-x}{6yz+2y}=\frac{-x(6z+1)}{2y(3z+1)},$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\begin{vmatrix} 2y & -2x \\ 2y & -x \end{vmatrix}}{D}=\frac{2xy}{6yz+2y}=\frac{x}{3z+1}.$$

(2) 所给方程组确定两个一元隐函数:$x=x(z)$ 和 $y=y(z)$,将所给方程的两端分别对 z 求导并移项,得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=-1, \\ 2x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=-2z. \end{cases}$$

当 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix}=2(y-x)\neq 0$ 时,解方程组得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2z & 2y \end{vmatrix}}{D}=\frac{-2y+2z}{2(y-x)}=\frac{y-z}{x-y},$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2x & -2z \end{vmatrix}}{D}=\frac{-2z+2x}{2(y-x)}=\frac{z-x}{x-y}.$$

(3) 此方程组可以确定两个二元隐函数:$u=u(x,y)$,$v=v(x,y)$.

分别在方程两端对 x 求偏导数,得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot\left(u+x\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+f_2'\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=g_1'\cdot\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}-1\right)+2g_2'yv\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

移项整理后得

$$\begin{cases} (xf_1'-1)\dfrac{\partial u}{\partial x}+f_2'\dfrac{\partial v}{\partial x}=-uf_1', \\ g_1'\dfrac{\partial u}{\partial x}+(2yvg_2'-1)\dfrac{\partial v}{\partial x}=g_1'. \end{cases}$$

当 $D=\begin{vmatrix} xf_1'-1 & f_2' \\ g_1' & 2yvg_2'-1 \end{vmatrix}=(xf_1'-1)(2yvg_2'-1)-f_2'g_1'\neq 0$ 时，解方程组得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} -uf_1' & f_2' \\ g_1' & 2yvg_2'-1 \end{vmatrix}=\frac{-uf_1'(2yvg_2'-1)-f_2'g_1'}{(xf_1'-1)(2yvg_2'-1)-f_2'g_1'},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} xf_1'-1 & -uf_1' \\ g_1' & g_1' \end{vmatrix}=\frac{g_1'(xf_1'+uf_1'-1)}{(xf_1'-1)(2yvg_2'-1)-f_2'g_1'}.$$

（4）此方程组确定的两个二元隐函数 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 是已知函数的反函数，令

$$F(x,y,u,v)=x-e^u-u\sin v,$$
$$G(x,y,u,v)=y-e^u+u\cos v.$$

则

$$F_x=1,\quad F_y=0,\quad F_u=-e^u-\sin v,\quad F_v=-u\cos v,$$
$$G_x=0,\quad G_y=1,\quad G_u=-e^u+\cos v,\quad G_v=-u\sin v.$$

当 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} -e^u-\sin v & -u\cos v \\ -e^u+\cos v & -u\sin v \end{vmatrix}=ue^u(\sin v-\cos v)+u\neq 0$ 时，由隐函数求导公式得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix} 1 & -u\cos v \\ 0 & -u\sin v \end{vmatrix}$$
$$=\frac{\sin v}{e^u(\sin v-\cos v)+1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix} 0 & -u\cos v \\ 1 & -u\sin v \end{vmatrix}$$
$$=\frac{-\cos v}{e^u(\sin v-\cos v)+1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix} -e^u-\sin v & 1 \\ -e^u+\cos v & 0 \end{vmatrix}$$
$$=\frac{\cos v-e^u}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix} -e^u-\sin v & 0 \\ -e^u+\cos v & 1 \end{vmatrix}$$
$$=\frac{\sin v+e^u}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}.$$

12. 设 $y=f(x,t)$，而 $t=t(x,y)$ 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的函数，其中 f,F 都具有一阶连续偏导数.试证明

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}}.$$

证法一 由方程组$\begin{cases}y=f(x,t),\\F(x,y,t)=0\end{cases}$可确定两个一元隐函数 $y=y(x)$, $t=t(x)$.分别在两个方程两端对 x 求导可得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x},\\[2ex]\dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\partial F}{\partial t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=0.\end{cases}$$

移项得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial f}{\partial x},\\[2ex]\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\partial F}{\partial t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\partial F}{\partial x}.\end{cases}$$

当 $D=\begin{vmatrix}1&-\dfrac{\partial f}{\partial t}\\[2ex]\dfrac{\partial F}{\partial y}&\dfrac{\partial F}{\partial t}\end{vmatrix}=\dfrac{\partial F}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial y}\neq 0$ 时,解方程组得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}&-\dfrac{\partial f}{\partial t}\\[2ex]-\dfrac{\partial F}{\partial x}&\dfrac{\partial F}{\partial t}\end{vmatrix}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

证法二 分别在 $y=f(x,t)$ 及 $F(x,y,t)=0$ 两端求全微分,得

$$\begin{cases}\mathrm{d}y=f_x\mathrm{d}x+f_t\mathrm{d}t, & ①\\F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_t\mathrm{d}t=0. & ②\end{cases}$$

由②式,得

$$F_t\mathrm{d}t=-(F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y). \qquad ③$$

将 F_t 乘①式两端,并以③式代入,得

$$F_t\mathrm{d}y=f_xF_t\mathrm{d}x-f_t(F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y),$$

即

$$(F_t+f_tF_y)\mathrm{d}y=(f_xF_t-f_tF_x)\mathrm{d}x.$$

故当 $F_t+f_tF_y\neq0$ 时,有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{f_xF_t-f_tF_x}{F_t+f_tF_y}.$$

习题 9-6　多元函数微分学的几何应用

1. 设 $\boldsymbol{f}(t)=f_1(t)\boldsymbol{i}+f_2(t)\boldsymbol{j}+f_3(t)\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{g}(t)=g_1(t)\boldsymbol{i}+g_2(t)\boldsymbol{j}+g_3(t)\boldsymbol{k}$，$\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{u}$，$\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{g}(t)=\boldsymbol{v}$，证明 $\lim\limits_{t\to t_0}[\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}(t)]=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$.

证 $$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}(t)]=\lim_{t\to t_0}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\f_1(t)&f_2(t)&f_3(t)\\g_1(t)&g_2(t)&g_3(t)\end{vmatrix}$$

$$=\lim_{t\to t_0}(f_2(t)g_3(t)-f_3(t)g_2(t),f_3(t)g_1(t)-f_1(t)g_3(t),f_1(t)g_2(t)-f_2(t)g_1(t))$$

$$=(\lim_{t\to t_0}[f_2(t)g_3(t)-f_3(t)g_2(t)],\lim_{t\to t_0}[f_3(t)g_1(t)-f_1(t)g_3(t)],\lim_{t\to t_0}[f_1(t)g_2(t)-f_2(t)g_1(t)])$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\lim\limits_{t\to t_0}f_1(t)&\lim\limits_{t\to t_0}f_2(t)&\lim\limits_{t\to t_0}f_3(t)\\\lim\limits_{t\to t_0}g_1(t)&\lim\limits_{t\to t_0}g_2(t)&\lim\limits_{t\to t_0}g_3(t)\end{vmatrix}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}.$$

这个结果表示：两个向量值函数的向量积的极限等于它们各自的极限（向量）的向量积，即

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}(t)]=\left[\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{f}(t)\right]\times\left[\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{g}(t)\right].$$

2. 下列各题中，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)$ 是空间中的质点 M 在时刻 t 的位置，求质点 M 在时刻 t_0 的速度向量和加速度向量，以及在任意时刻 t 的速率.

(1) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)=(t+1)\boldsymbol{i}+(t^2-1)\boldsymbol{j}+2t\boldsymbol{k}$，$t_0=1$；

(2) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)=(2\cos t)\boldsymbol{i}+(3\sin t)\boldsymbol{j}+4t\boldsymbol{k}$，$t_0=\dfrac{\pi}{2}$；

(3) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)=[2\ln(t+1)]\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}+\dfrac{1}{2}t^2\boldsymbol{k}$，$t_0=1$.

解 (1) 速度向量 $\boldsymbol{v}_0=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=1}=(\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})\Big|_{t=1}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$；

加速度向量 $\boldsymbol{a}_0=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\Big|_{t=1}=2\boldsymbol{j}$；

速率 $|\boldsymbol{v}(t)|=|\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}|=\sqrt{5+4t^2}$.

(2) 速度向量 $\boldsymbol{v}_0=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=[(-2\sin t)\boldsymbol{i}+(3\cos t)\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}]_{t=\frac{\pi}{2}}=-2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{k}$；

加速度向量 $\boldsymbol{a}_0=\left.\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=[(-2\cos t)\boldsymbol{i}-(3\sin t)\boldsymbol{j}]_{t=\frac{\pi}{2}}=-3\boldsymbol{j}$;

速率 $|\boldsymbol{v}(t)|=|(-2\sin t)\boldsymbol{i}+(3\cos t)\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}|=\sqrt{9\cos^2 t+4\sin^2 t+16}$

$=\sqrt{20+5\cos^2 t}$.

(3) 速度向量 $\boldsymbol{v}_0=\left.\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}=\left.\left(\dfrac{2}{t+1}\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}\right)\right|_{t=1}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$;

加速度向量 $\boldsymbol{a}_0=\left.\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=1}=\left[-\dfrac{2}{(t+1)^2}\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\right]_{t=1}=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$;

速率 $|\boldsymbol{v}(t)|=\left|\dfrac{2}{t+1}\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}\right|=\sqrt{5t^2+\dfrac{4}{(t+1)^2}}$.

3. 求曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)=(t-\sin t)\boldsymbol{i}+(1-\cos t)\boldsymbol{j}+\left(4\sin\dfrac{t}{2}\right)\boldsymbol{k}$ 在与 $t_0=\dfrac{\pi}{2}$ 相应的点处的切线及法平面方程.

解 与 $t_0=\dfrac{\pi}{2}$ 相应的点为 $\left(\dfrac{\pi}{2}-1,1,2\sqrt{2}\right)$，曲线在该点处的切向量为 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{f}'(t_0)=(1,1,\sqrt{2})$，于是所求切线方程为

$$\frac{x-\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

法平面方程为

$$1\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}+1\right)+1\cdot(y-1)+\sqrt{2}\cdot(z-2\sqrt{2})=0,$$

即

$$x+y+\sqrt{2}z=\frac{\pi}{2}+4.$$

4. 求曲线 $x=\dfrac{t}{1+t},y=\dfrac{1+t}{t},z=t^2$ 在对应于 $t=1$ 的点处的切线及法平面方程.

解 曲线在对应于 $t=1$ 的点为 $\left(\dfrac{1}{2},2,1\right)$，该点处的切向量

$$\boldsymbol{T}=(x'(1),y'(1),z'(1))=\left.\left(\frac{1}{(1+t)^2},-\frac{1}{t^2},2t\right)\right|_{t=1}=\left(\frac{1}{4},-1,2\right),$$

于是曲线在该点处的切线方程为

$$\frac{x-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{4}}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{2},$$

即
$$\frac{x-\frac{1}{2}}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-1}{8}.$$

所求法平面方程为
$$\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)-(y-2)+2(z-1)=0,$$

即
$$2x-8y+16z-1=0.$$

5. 求曲线 $y^2=2mx,z^2=m-x$ 在点(x_0,y_0,z_0)处的切线及法平面方程.

解　设曲线的参数方程中的参数为 x,将方程 $y^2=2mx$ 和 $z^2=m-x$ 两端分别对 x 求导,得
$$2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2m,\quad 2z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-1,\quad 即\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{m}{y},\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{2z}.$$

所以曲线在点(x_0,y_0,z_0)的切向量为
$$\boldsymbol{T}=\left(1,\frac{m}{y_0},\ -\frac{1}{2z_0}\right).$$

于是在点(x_0,y_0,z_0)处的切线方程为
$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\frac{m}{y_0}}=\frac{z-z_0}{-\frac{1}{2z_0}}.$$

法平面方程为 $(x-x_0)+\frac{m}{y_0}(y-y_0)-\frac{1}{2z_0}(z-z_0)=0.$

6. 求曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x=0,\\2x-3y+5z-4=0\end{cases}$在点$(1,1,1)$处的切线及法平面方程.

解法一　为了求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$,在所给方程两端分别对 x 求导,得
$$\begin{cases}2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-3=0,\\[2ex]2-3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+5\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0.\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-2x+3,\\[2ex]3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-5\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=2.\end{cases}$$

当 $D=\begin{vmatrix}2y&2z\\3&-5\end{vmatrix}=-10y-6z\neq0$ 时,解方程组得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}-2x+3 & 2z\\ 2 & -5\end{vmatrix}=\frac{10x-4z-15}{-10y-6z},$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}2y & -2x+3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=\frac{6x+4y-9}{-10y-6z}.$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,1,1)}=\frac{9}{16},\quad \left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,1,1)}=-\frac{1}{16}.$$

于是在点(1,1,1)处的切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{\frac{9}{16}}=\frac{z-1}{-\frac{1}{16}},$$

即
$$\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1}.$$

法平面方程为

$$(x-1)+\frac{9}{16}(y-1)-\frac{1}{16}(z-1)=0,$$

即
$$16x+9y-z-24=0.$$

解法二 所求曲线的切线,也就是曲面 $x^2+y^2+z^2-3x=0$ 在点(1,1,1)处的切平面与平面 $2x-3y+5z=4$ 的交线,利用曲面的切平面方程得所求切线为

$$\begin{cases}-(x-1)+2(y-1)+2(z-1)=0,\\ 2x-3y+5z=4.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}-x+2y+2z=3,\\ 2x-3y+5z=4.\end{cases}$$

该切线的方向向量为(16,9,-1),于是所求法平面方程为

$$16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0,$$

即
$$16x+9y-z-24=0.$$

7. 求出曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 上的点,使在该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

解 因为 $x_t=1,y_t=2t,z_t=3t^2$,设所求点对应的参数为 t_0,于是曲线在该点处的切向量可取为 $\boldsymbol{T}=(1,2t_0,3t_0^2)$.已知平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,2,1)$,由切线与平面平行,得 $\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}=0$,即 $1+4t_0+3t_0^2=0$,解得 $t_0=-1$ 和 $-\frac{1}{3}$.于是所求点为(-1,1,-1)或$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27}\right)$.

8. 求曲面 $\mathrm{e}^z-z+xy=3$ 在点(2,1,0)处的切平面及法线方程.

解 令 $F(x,y,z)=\mathrm{e}^z-z+xy-3$,则

$$\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=(y,x,\mathrm{e}^z-1),\quad \boldsymbol{n}\big|_{(2,1,0)}=(1,2,0).$$

曲面在点(2,1,0)处的切平面方程为

$$1\cdot(x-2)+2\cdot(y-1)+0\cdot(z-0)=0,$$

即
$$x+2y-4=0.$$

曲面在点(2,1,0)处的法线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2},\\ z=0.\end{cases}$$

9. 求曲面 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 在点(x_0,y_0,z_0)处的切平面及法线方程.

解　令 $F(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2-1$，则曲面在点$(x,y,z)$处的一个法向量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}&=(F_x,F_y,F_z)=(2ax,2by,2cz)\\&=2(ax,by,cz),\end{aligned}$$

在点(x_0,y_0,z_0)处的一个法向量为(ax_0,by_0,cz_0)，故曲面在该点处的切平面方程为

$$ax_0(x-x_0)+by_0(y-y_0)+cz_0(z-z_0)=0,$$

即
$$ax_0x+by_0y+cz_0z=ax_0^2+by_0^2+cz_0^2=1.$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{ax_0}=\frac{y-y_0}{by_0}=\frac{z-z_0}{cz_0}.$$

10. 求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程.

解　设 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-1$，则曲面在点(x,y,z)处的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=(2x,4y,2z)$.已知平面的法向量为$(1,-1,2)$，由已知平面与所求切平面平行，得

$$\frac{2x}{1}=\frac{4y}{-1}=\frac{2z}{2},\quad 即\quad x=\frac{1}{2}z,\quad y=-\frac{1}{4}z.$$

代入椭球面方程得

$$\left(\frac{z}{2}\right)^2+2\left(-\frac{z}{4}\right)^2+z^2=1.$$

解得 $z=\pm2\sqrt{\dfrac{2}{11}}$，则 $x=\pm\sqrt{\dfrac{2}{11}}$，$y=\mp\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{11}}$.所以切点为

$$\left(\pm\sqrt{\frac{2}{11}},\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}},\ \pm2\sqrt{\frac{2}{11}}\right).$$

所求切平面方程为

$$\left(x\pm\sqrt{\frac{2}{11}}\right)-\left(y\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}\right)+2\left(z\pm2\sqrt{\frac{2}{11}}\right)=0,$$

即
$$x-y+2z=\pm\sqrt{\frac{11}{2}}.$$

11. 设曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 的切平面通过直线 $L:\begin{cases}10x+2y-2z=27,\\x+y-z=0.\end{cases}$ 求此切平面的方程.

解 解题的关键是找出切点的坐标。记 $F(x,y,z)=3x^2+y^2-z^2-27$,所求切平面在切点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(F_x,F_y,F_z)_M=(6x_0,2y_0,-2z_0)$.

过已知直线 L 的平面束方程为

$$10x+2y-2z-27+\lambda(x+y-z)=0,$$

即

$$(10+\lambda)x+(2+\lambda)y-(2+\lambda)z-27=0.$$

该平面的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(10+\lambda,2+\lambda,-2-\lambda)$.

按题设,所求切平面过直线 L,故 L 包含在上面的平面束中,因此 $\boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2$,又点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 在曲面及平面束上,故有

$$\begin{cases}\dfrac{10+\lambda}{6x_0}=\dfrac{2+\lambda}{2y_0}=\dfrac{2+\lambda}{2z_0},\\3x_0^2+y_0^2-z_0^2-27=0,\\(10+\lambda)x_0+(2+\lambda)y_0-(2+\lambda)z_0-27=0.\end{cases}$$

解得 $x_0=3,y_0=1,z_0=1,\lambda=-1$ 和 $x_0=-3,y_0=-17,z_0=-17,\lambda=-19$.经验证,平面 $x+y-z=0$ 不是所求的切平面.于是,所求的切平面方程为

$$9x+y-z-27=0 \quad \text{或} \quad 9x+17y-17z+27=0$$

12. 设 L 是曲面 $\Sigma:z=y^2+x^3y$ 上一条曲线的切线,切点为 $P(2,1,9)$,L 在 xOy 面上的投影平行于 x 轴,求切线 L 的参数方程.

解 由切线 L 过点 $P(2,1,9)$,在 xOy 面上的投影平行于 x 轴,知切线 L 在平面 $y=1$ 上,所以切线 L 可看作是曲线 Σ 在点 P 处的切平面与平面 $y=1$ 的交线.

记 $f(x,y)=y^2+x^3y$,则曲面 Σ 在点 P 处的切平面方程为

$$f_x(2,1)(x-2)+f_y(2,1)(y-1)-(z-9)=0,$$

即

$$12x+10y-z-25=0.$$

它与平面 $y=1$ 的交线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\12&10&-1\\0&1&0\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{k},$$

于是切线 L 的参数方程为 $x=2+t,y=1,z=9+12t$.

13. 求旋转椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 上点 $(-1,-2,3)$ 处的切平面与 xOy 面的夹角的余弦.

解 令 $F(x,y,z)=3x^2+y^2+z^2-16$,曲面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=(6x,2y,2z),$$

曲面在点 $(-1,-2,3)$ 处的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{n}\big|_{(-1,-2,3)}=(-6,-4,6)$,$xOy$ 面的法向量为

$\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$，记 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 的夹角为 γ，则所求的余弦值为

$$\cos\gamma=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\,|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{6}{\sqrt{6^2+4^2+6^2}\times 1}=\frac{3}{\sqrt{22}}.$$

14. 试证曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\ (a>0)$ 上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a.

证　设 $F(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a}$，则曲面在点 (x,y,z) 处的一个法向量

$$\boldsymbol{n}=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}},\frac{1}{2\sqrt{y}},\frac{1}{2\sqrt{z}}\right).$$

在曲面上任取一点 $M(x_0,y_0,z_0)$，则曲面在点 M 处的切平面方程为

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0,$$

即

$$\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}=\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=\sqrt{a},$$

化为截距式，得

$$\frac{x}{\sqrt{ax_0}}+\frac{y}{\sqrt{ay_0}}+\frac{z}{\sqrt{az_0}}=1,$$

所以截距之和为

$$\sqrt{ax_0}+\sqrt{ay_0}+\sqrt{az_0}=\sqrt{a}\left(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}\right)=a.$$

15. 设 $\boldsymbol{u}(t)$，$\boldsymbol{v}(t)$ 是可导的向量值函数，证明：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{u}(t)\pm\boldsymbol{v}(t)]=\boldsymbol{u}'(t)\pm\boldsymbol{v}'(t)$；

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)]=\boldsymbol{u}'(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}'(t)$；

(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t)]=\boldsymbol{u}'(t)\times\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}'(t)$.

证　(1)

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{u}(t)\pm\boldsymbol{v}(t)]\\
&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{[\boldsymbol{u}(t+\Delta t)\pm\boldsymbol{v}(t+\Delta t)]-[\boldsymbol{u}(t)\pm\boldsymbol{v}(t)]}{\Delta t}\\
&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)}{\Delta t}\pm\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}\\
&=\boldsymbol{u}'(t)\pm\boldsymbol{v}'(t),\end{aligned}$$

其中用到了向量值函数的极限的四则运算法则.

(2)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t) \cdot \boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{u}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t) \cdot \boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{u}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t+\Delta t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{u}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{u}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$$

$$= \left[\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t) - \boldsymbol{u}(t)}{\Delta t}\right] \cdot \left[\lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{v}(t+\Delta t)\right] + \left[\lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{u}(t)\right] \cdot \left[\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}\right]$$

$$= \boldsymbol{u}'(t) \cdot \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{u}(t) \cdot \boldsymbol{v}'(t),$$

其中用到了向量值函数极限的四则运算法则以及数量积与极限运算次序的交换.

$$(3)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{u}(t) \times \boldsymbol{v}(t)] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t) \times \boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{u}(t) \times \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t) \times \boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{u}(t) \times \boldsymbol{v}(t+\Delta t) + \boldsymbol{u}(t) \times \boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{u}(t) \times \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t) - \boldsymbol{u}(t)}{\Delta t} \times \boldsymbol{v}(t+\Delta t)\right] + \lim_{\Delta t \to 0}\left[\boldsymbol{u}(t) \times \frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}\right]$$

$$= \left[\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t) - \boldsymbol{u}(t)}{\Delta t}\right] \times \left[\lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{v}(t+\Delta t)\right] + \left[\lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{u}(t)\right] \times \left[\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}\right]$$

$$= \boldsymbol{u}'(t) \times \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{u}(t) \times \boldsymbol{v}'(t),$$

其中用到了向量值函数极限的四则运算法则以及向量积与极限运算次序的交换.

习题 9-7　方向导数与梯度

1. 求函数 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,2)$ 处沿从点 $(1,2)$ 到点 $(2,2+\sqrt{3})$ 的方向的方向导数.

解　按题意,方向 $\boldsymbol{l}=(1,\sqrt{3})$, $\boldsymbol{e}_l=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

又
$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2y,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=2,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=4,$$

故
$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,2)}=2\times\frac{1}{2}+4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1+2\sqrt{3}.$$

2. 求函数 $z=\ln(x+y)$ 在抛物线 $y^2=4x$ 上点 $(1,2)$ 处,沿着这抛物线在该点处偏向 x 轴正向的切线方向的方向导数.

解　先求切线斜率:在 $y^2=4x$ 两端分别对 x 求导,得

$$2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=4.$$

于是
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{y},\quad k=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,2)}=1,$$
切线方向 $\boldsymbol{l}=(1,1)$，$\boldsymbol{e}_l=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

又
$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=\left.\frac{1}{x+y}\right|_{(1,2)}=\frac{1}{3},$$
$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=\left.\frac{1}{x+y}\right|_{(1,2)}=\frac{1}{3}.$$
故
$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,2)}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

3. 求函数 $z=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$ 在点 $\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 处沿曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在这点的内法线方向的方向导数.

解　先求切线斜率：在 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 两端分别对 x 求导，得
$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0.$$
于是
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{b^2x}{a^2y},\quad k=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)}=-\frac{b}{a},$$
法线斜率为
$$k'=-\frac{1}{k}=\frac{a}{b},$$
内法线方向 $\boldsymbol{l}=(-b,-a)$，$\boldsymbol{e}_l=\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$.

又
$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)}=-\frac{\sqrt{2}}{a},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)}=-\frac{\sqrt{2}}{b}.$$
故
$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)}=-\frac{\sqrt{2}}{a}\cdot\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)-\frac{\sqrt{2}}{b}\cdot\left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$
$$=\frac{1}{ab}\sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

4. 求函数 $u=xy^2+z^3-xyz$ 在点 $(1,1,2)$ 处沿方向角为 $\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{4},\gamma=\frac{\pi}{3}$ 的方向的方向导数.

解　因为 $\frac{\partial u}{\partial x}=y^2-yz,\frac{\partial u}{\partial y}=2xy-xz,\frac{\partial u}{\partial z}=3z^2-xy,$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,2)}=-1,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,2)}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,2)}=11.$$

$$\boldsymbol{e}_l=\left(\cos\frac{\pi}{3},\cos\frac{\pi}{4},\cos\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right),$$

所以
$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,1,2)}=-1\times\frac{1}{2}+0+11\times\frac{1}{2}=5.$$

5. 求函数 $u=xyz$ 在点 $(5,1,2)$ 处沿从点 $(5,1,2)$ 到点 $(9,4,14)$ 的方向的方向导数.

解 按题意,方向 $\boldsymbol{l}=(4,3,12)$, $\boldsymbol{e}_l=\left(\frac{4}{13},\frac{3}{13},\frac{12}{13}\right)$.

又
$$\frac{\partial u}{\partial x}=yz,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=xz,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=xy,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(5,1,2)}=2,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(5,1,2)}=10,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(5,1,2)}=5,$$

故
$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(5,1,2)}=2\times\frac{4}{13}+10\times\frac{3}{13}+5\times\frac{12}{13}=\frac{98}{13}.$$

6. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上点 $(1,1,1)$ 处,沿曲线在该点的切线正方向(对应于 t 增大的方向)的方向导数.

解 先求曲线在给定点的切线方向.

因为 $x_t=1, y_t=2t, z_t=3t^2$,所以曲线在点 $(1,1,1)$ 处的切线的方向向量可取为 $\boldsymbol{T}=(1,2,3)$, $\boldsymbol{e}_T=\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$.又

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=2,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=2,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}=2,$$

故
$$\left.\frac{\partial u}{\partial T}\right|_{(1,1,1)}=2\times\frac{1}{\sqrt{14}}+2\times\frac{2}{\sqrt{14}}+2\times\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{6}{7}\sqrt{14}.$$

7. 求函数 $u=x+y+z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上点 (x_0,y_0,z_0) 处,沿球面在该点的外法线方向的方向导数.

解 设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$,则 $F_x=2x, F_y=2y, F_z=2z$,于是球面在 (x_0,y_0,z_0) 处的外法线方向向量可取为

$$\boldsymbol{l}=(F_x,F_y,F_z)\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}=(2x_0,2y_0,2z_0),$$

$\boldsymbol{l}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}},\quad \cos\beta=\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}},\quad \cos\gamma=\frac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}},$$

又
$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=1,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=1.$$

故
$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\right|_{(x_0,y_0,z_0)}$$
$$=1\cdot\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}+1\cdot\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}+1\cdot\frac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}$$
$$=\frac{x_0+y_0+z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}=x_0+y_0+z_0.$$

8. 设 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$，求
$$\mathbf{grad}\,f(0,0,0)\text{ 及 }\mathbf{grad}\,f(1,1,1).$$

解　因
$$\mathbf{grad}\,f(x,y,z)=f_x\boldsymbol{i}+f_y\boldsymbol{j}+f_z\boldsymbol{k}$$
$$=(2x+y+3)\boldsymbol{i}+(4y+x-2)\boldsymbol{j}+(6z-6)\boldsymbol{k},$$
故
$$\mathbf{grad}\,f(0,0,0)=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k},$$
$$\mathbf{grad}\,f(1,1,1)=6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}.$$

9. 设函数 $u(x,y,z)$，$v(x,y,z)$ 的各个偏导数都存在且连续，证明：

(1) $\nabla(cu)=c\nabla u$（其中 c 为常数）；　(2) $\nabla(u\pm v)=\nabla u\pm\nabla v$；

(3) $\nabla(uv)=v\nabla u+u\nabla v$；　(4) $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\nabla u-u\nabla v}{v^2}$.

证　(1)
$$\nabla(cu)=\left(c\frac{\partial u}{\partial x},c\frac{\partial u}{\partial y},c\frac{\partial u}{\partial z}\right)=c\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$
$$=c\nabla u.$$

(2)
$$\nabla(u\pm v)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\pm\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\pm\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\pm\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\pm\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$=\nabla u\pm\nabla v.$$

(3)
$$\nabla(uv)=\left(\frac{\partial}{\partial x}(uv),\frac{\partial}{\partial y}(uv),\frac{\partial}{\partial z}(uv)\right)$$
$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}v+u\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}v+u\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}v+u\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$=v\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)+u\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$=v\nabla u+u\nabla v.$$

(4)
$$\nabla\left(\frac{u}{v}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{v}\right),\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{v}\right),\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u}{v}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}}{v^2}, \frac{v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}}{v^2}, \frac{v\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial v}{\partial z}}{v^2} \right)$$

$$= \frac{1}{v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{u}{v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{v\nabla u - u\nabla v}{v^2}.$$

10. 求函数 $u=xy^2z$ 在点 $P_0(1,-1,2)$ 处变化最快的方向,并求沿这个方向的方向导数.

解 $$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k} = y^2z\boldsymbol{i} + 2xyz\boldsymbol{j} + xy^2\boldsymbol{k},$$

$$\nabla u\big|_{P_0} = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}.$$

由方向导数与梯度的关系可知,$u=xy^2z$ 在 P_0 处沿 $\boldsymbol{n} = \nabla u\big|_{P_0} = 2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 的方向增加最快,其方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{P_0} = \left|\nabla u\big|_{P_0}\right| = |2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}| = \sqrt{21};$$

沿 $\boldsymbol{n}_1 = -\nabla u\big|_{P_0} = -2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 方向减少最快,其方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n_1}\right|_{P_0} = -\sqrt{21}.$$

习题 9-8 多元函数的极值及其求法

1. 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续,且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - xy}{(x^2+y^2)^2} = 1,$$

则下述四个选项中正确的是( ).

(A) 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点

(B) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点

(C) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点

(D) 根据所给条件无法判断 $(0,0)$ 是不是 $f(x,y)$ 的极值点

解 令 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$,则由题设可知

$$f(x,y) = xy + \rho^4 + o(\rho^4),$$

当 $(x,y)\to(0,0)$ 时,$\rho\to 0$.

由于 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 附近的值主要由 xy 决定,而 xy 在 $(0,0)$ 附近符号不定,故点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点,即应选(A).

本题也可以取两条路径 $y=x$ 和 $y=-x$ 来考虑.当 $|x|$ 充分小时,

$$f(x,x)=x^2+4x^4+o(x^4)>0,\quad f(x,-x)=-x^2+4x^4+o(x^4)<0,$$

故点(0,0)不是 $f(x,y)$ 的极值点,即应选(A).

2. 求函数 $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$ 的极值.

解　解方程组

$$\begin{cases} f_x=4-2x=0, \\ f_y=-4-2y=0, \end{cases}$$

求得驻点(2,-2).

又　$A=f_{xx}(2,-2)=-2<0,\quad B=f_{xy}(2,-2)=0,$

$$C=f_{yy}(2,-2)=-2,\quad AC-B^2>0,$$

由判定极值的充分条件知:在点(2,-2)处,函数取得极大值 $f(2,-2)=8$.

3. 求函数 $f(x,y)=(6x-x^2)(4y-y^2)$ 的极值.

解　解方程组

$$\begin{cases} f_x=(6-2x)(4y-y^2)=0, \\ f_y=(6x-x^2)(4-2y)=0. \end{cases}$$

求得以下五组解:

$$\begin{cases} x_1=0, \\ y_1=0, \end{cases}\quad \begin{cases} x_2=0, \\ y_2=4, \end{cases}\quad \begin{cases} x_3=3, \\ y_3=2, \end{cases}\quad \begin{cases} x_4=6, \\ y_4=0, \end{cases}\quad \begin{cases} x_5=6, \\ y_5=4. \end{cases}$$

于是,得驻点(0,0),(0,4),(3,2),(6,0),(6,4).

又
$$f_{xx}(x,y)=-2(4y-y^2),$$
$$f_{xy}(x,y)=4(3-x)(2-y),$$
$$f_{yy}(x,y)=-2(6x-x^2).$$

由判定极值的充分条件知:

在点(0,0)处,$A=f_{xx}(0,0)=0$,$B=f_{xy}(0,0)=24$,$C=f_{yy}(0,0)=0$,$AC-B^2=-24^2<0$,故 $f(0,0)$ 不是极值;

在点(0,4)处,$A=f_{xx}(0,4)=0$,$B=f_{xy}(0,4)=-24$,$C=f_{yy}(0,4)=0$,$AC-B^2=-(-24)^2<0$,故 $f(0,4)$ 不是极值;

在点(3,2)处,$A=f_{xx}(3,2)=-8<0$,$B=f_{xy}(3,2)=0$,$C=f_{yy}(3,2)=-18$,$AC-B^2=144>0$,故函数在点(3,2)处取得极大值,极大值为 $f(3,2)=36$;

在点(6,0)处,$A=f_{xx}(6,0)=0$,$B=f_{xy}(6,0)=-24$,$C=f_{yy}(6,0)=0$,$AC-B^2=-(-24)^2<0$,故 $f(6,0)$ 不是极值;

在点(6,4)处,$A=f_{xx}(6,4)=0$,$B=f_{xy}(6,4)=24$,$C=f_{yy}(6,4)=0$,$AC-B^2=-24^2<0$,故 $f(6,4)$ 不是极值.

4. 求两直线$\begin{cases} y=2x, \\ z=x+1 \end{cases}$与$\begin{cases} y=x+3, \\ z=x \end{cases}$之间的最短距离.

解 设(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)分别为两直线上的点,则两点之间的距离为

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

记 $u=d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2=(x_2-x_1)^2+(x_2-2x_1+3)^2+(x_2-x_1-1)^2$.

令
$$\begin{cases} u_{x_1}=12x_1-8x_2-10=0, \\ u_{x_2}=-8x_1+6x_2+4=0. \end{cases}$$

即有
$$\begin{cases} 6x_1-4x_2-5=0, \\ -4x_1+3x_2+2=0. \end{cases}$$

解得 $x_1=\dfrac{7}{2}$,$x_2=4$.因为两直线之间的最短距离必定存在,求得的驻点唯一,所以当 $x_1=\dfrac{7}{2}$,$x_2=4$ 时,u 有极小值,也是最小值,即

$$d_{\min}=\sqrt{\left(4-\frac{7}{2}\right)^2+(4-7+3)^2+\left(4-\frac{7}{2}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

5. 求函数 $z=xy$ 在适合附加条件 $x+y=1$ 下的极大值.

解 本题属条件极值问题,易将它化为无条件极值问题.

条件 $x+y=1$ 可表示成 $y=1-x$,代入 $z=xy$,则问题化为求 $z=x(1-x)$ 的极大值.

由$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=1-2x=0$,得 $x=\dfrac{1}{2}$.又

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=\frac{1}{2}}=-2<0.$$

由一元函数取得极值的充分条件知,$x=\dfrac{1}{2}$为极大值点,极大值为

$$z=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

6. 从斜边长为 l 的一切直角三角形中,求有最大周长的直角三角形.

解 设直角三角形的两直角边之长分别为 x,y,则周长

$$S=x+y+l \quad (0<x<l,0<y<l).$$

本题是求周长 S 在 $x^2+y^2=l^2$ 条件下的条件极值问题.

作拉格朗日函数

$$L(x,y)=x+y+l+\lambda(x^2+y^2-l^2).$$

令

$$\begin{cases} L_x = 1 + 2\lambda x = 0, \\ L_y = 1 + 2\lambda y = 0. \end{cases}$$

解得 $x=y=-\dfrac{1}{2\lambda}$.代入 $x^2+y^2=l^2$,得 $\lambda=-\dfrac{\sqrt{2}}{2l}$,于是 $x=y=\dfrac{l}{\sqrt{2}}$,$\left(\dfrac{l}{\sqrt{2}},\dfrac{l}{\sqrt{2}}\right)$是唯一可能的极值点,根据问题性质可知这种最大周长的直角三角形一定存在,所以在斜边长为 l 的一切直角三角形中,周长最大的是等腰直角三角形.

注　条件极值的解法,一般是采用拉格朗日乘数法求解.但要注意利用乘数法所得到的点只是可能极值点,究竟这些点是不是极值点以及是极大值点还是极小值点尚需进一步判断.在实际问题中往往可根据问题本身的性质来判定.在特殊情形下,条件极值问题可化为无条件极值问题求解.

7. 要造一个容积等于定数 k 的长方体无盖水池,应如何选择水池的尺寸,方可使它的表面积最小.

解　设水池的长为 a,宽为 b,高为 c,则水池的表面积为

$$A=ab+2ac+2bc \quad (a>0,b>0,c>0).$$

约束条件 $abc=k$.

作拉格朗日函数 $L(a,b,c)=ab+2ac+2bc+\lambda(abc-k)$.由

$$\begin{cases} L_a=b+2c+\lambda bc=0, \\ L_b=a+2c+\lambda ac=0, \\ L_c=2a+2b+\lambda ab=0, \\ abc=k, \end{cases}$$

解得 $a=b=\sqrt[3]{2k}$,$c=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2k}$,$\lambda=-\sqrt[3]{\dfrac{32}{k}}$.

$\left(\sqrt[3]{2k},\sqrt[3]{2k},\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2k}\right)$是唯一可能的极值点,由问题本身可知 A 一定有最小值,所以表面积最小的水池的长和宽都应为 $\sqrt[3]{2k}$,高为$\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2k}$.

8. 在平面 xOy 上求一点,使它到 $x=0$,$y=0$ 及 $x+2y-16=0$ 三直线的距离平方之和为最小.

解　设所求点为(x,y),则此点到三直线的距离依次为 $|x|$,$|y|$,$\dfrac{|x+2y-16|}{\sqrt{5}}$,三距离平方之和为

$$z=x^2+y^2+\frac{1}{5}(x+2y-16)^2.$$

由

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=2x+\dfrac{2}{5}(x+2y-16)=0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=2y+\dfrac{4}{5}(x+2y-16)=0 \end{cases}$$

求得唯一可能的极值点$\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{16}{5}\right)$.根据问题本身可知,距离平方和最小的点必定存在,故所求点即为$\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{16}{5}\right)$.

9. 将周长为 $2p$ 的矩形绕它的一边旋转而构成一个圆柱体.问矩形的边长各为多少时,才可使圆柱体的体积为最大?

解 设矩形的一边长为 x,则另一边长为 $p-x$,假设矩形绕长为 $p-x$ 的一边旋转,则旋转所成圆柱体的体积为 $V=\pi x^2(p-x)$.由

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=2\pi x(p-x)-\pi x^2=\pi x(2p-3x)=0,$$

求得驻点为 $x=\dfrac{2}{3}p$.

由于驻点唯一,由题意又可知这种圆柱体一定有最大值,所以当矩形的边长为$\dfrac{2p}{3}$和$\dfrac{p}{3}$时,绕短边旋转所得圆柱体体积最大.

10. 求内接于半径为 a 的球且有最大体积的长方体.

解 设球面方程为 $x^2+y^2+z^2=a^2$,(x,y,z)是它的内接长方体在第Ⅰ卦限内的一个顶点,则此长方体的长、宽、高分别为 $2x,2y,2z$,体积为

$$V=2x\cdot 2y\cdot 2z=8xyz.$$

令

$$L(x,y,z)=8xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-a^2),$$

由

$$\begin{cases} L_x=8yz+2\lambda x=0, \\ L_y=8xz+2\lambda y=0, \\ L_z=8xy+2\lambda z=0, \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} 4yz+\lambda x=0, \\ 4xz+\lambda y=0, \\ 4xy+\lambda z=0, \end{cases}$$

解得 $x=y=z=-\dfrac{\lambda}{4}$,代入 $x^2+y^2+z^2=a^2$,得 $\lambda=-\dfrac{4}{\sqrt{3}}a$,故$\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$为唯一可能的极值点.由于内接于球且有最大体积的长方体必定存在,所以当长方体的长、宽、高都为$\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$时其体积最大.

11. 抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆,求这椭圆上的点到原点的距离的最大值与最小值.

解　设椭圆上的点为(x,y,z),则椭圆上的点到原点的距离平方为

$$d^2=x^2+y^2+z^2.$$

x,y,z满足条件:$z=x^2+y^2,x+y+z=1$.

作拉格朗日函数

$$L=x^2+y^2+z^2+\lambda(z-x^2-y^2)+\mu(x+y+z-1).$$

令

$$\begin{cases}L_x=2x-2\lambda x+\mu=0, & ①\\ L_y=2y-2\lambda y+\mu=0, & ②\\ L_z=2z+\lambda+\mu=0. & ③\end{cases}$$

①-②,得

$$(1-\lambda)(x-y)=0.$$

故有$\lambda=1$或$x=y$.

由$\lambda=1\Rightarrow\mu=0,z=-\dfrac{1}{2}$,不合题意,故舍去.

将$x=y$代入$z=x^2+y^2$和$x+y+z=1$,得

$$z=2x^2,2x+z=1\Rightarrow2x^2+2x-1=0.$$

解得

$$x=y=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2},\quad z=2\mp\sqrt{3}.$$

于是得到两个可能的极值点:

$$M_1\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\frac{-1+\sqrt{3}}{2},2-\sqrt{3}\right),\quad M_2\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\frac{-1-\sqrt{3}}{2},2+\sqrt{3}\right).$$

由题意可知这种距离的最大值和最小值一定存在,所以距离的最大值和最小值分别在这两点处取得.而

$$2\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}\right)^2+(2\mp\sqrt{3})^2=9\mp5\sqrt{3},$$

故最大值与最小值分别为

$$d_{\max}=d_{M_2}=\sqrt{9+5\sqrt{3}},\quad d_{\min}=d_{M_1}=\sqrt{9-5\sqrt{3}}.$$

12. 设有一圆板占有平面闭区域$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant1\}$.该圆板被加热,以致在点$(x,y)$的温度是$T=x^2+2y^2-x$,求该圆板的最热点和最冷点.

解　解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial T}{\partial x}=2x-1=0,\\[2ex] \dfrac{\partial T}{\partial y}=4y=0,\end{cases}$$

求得驻点$\left(\frac{1}{2},0\right)$.$T_1=T\Big|_{\left(\frac{1}{2},0\right)}=-\frac{1}{4}$.

在边界 $x^2+y^2=1$ 上,

$$T=2-(x^2+x)=\frac{9}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2,$$

当 $x=-\frac{1}{2}$时,有边界上的最大值 $T_2=\frac{9}{4}$,$x=1$ 时,有边界上的最小值 $T_3=0$.

比较 T_1,T_2 及 T_3 的值知,最热点在$\left(-\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$T_{\max}=\frac{9}{4}$,最冷点在$\left(\frac{1}{2},0\right)$,$T_{\min}=-\frac{1}{4}$.

13. 形状为椭球 $4x^2+y^2+4z^2\leqslant 16$ 的空间探测器进入地球大气层,其表面开始受热,1 h 后在探测器的点(x,y,z)处的温度 $T=8x^2+4yz-16z+600$,求探测器表面最热的点.

解 作拉格朗日函数

$$L=8x^2+4yz-16z+600+\lambda(4x^2+y^2+4z^2-16).$$

令

$$\begin{cases}L_x=16x+8\lambda x=0, & ①\\ L_y=4z+2\lambda y=0, & ②\\ L_z=4y-16+8\lambda z=0. & ③\end{cases}$$

由①式得 $x=0$ 或 $\lambda=-2$.

若 $\lambda=-2$,代入②③式,得 $y=z=-\frac{4}{3}$.再将 $y=z=-\frac{4}{3}$代入约束条件

$$4x^2+y^2+4z^2=16, \qquad ④$$

得 $x=\pm\frac{4}{3}$.于是得到两个可能的极值点:

$$M_1\left(\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right),\quad M_2\left(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right).$$

若 $x=0$,由②③④式解得 $\lambda=0,y=4,z=0$;$\lambda=\sqrt{3},y=-2,z=\sqrt{3}$;$\lambda=-\sqrt{3},y=-2,z=-\sqrt{3}$.于是得到另外三个可能极值点:

$$M_3(0,4,0),\quad M_4(0,-2,\sqrt{3}),\quad M_5(0,-2,-\sqrt{3}).$$

比较 T 在上述五个可能极值点处的数值知:$T\big|_{M_1}=T\big|_{M_2}=\frac{1\,928}{3}$为最大,故探测器表面最热的点为 $M\left(\pm\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)$.

*习题 9-9　二元函数的泰勒公式

1. 求函数 $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ 在点 $(1,-2)$ 的泰勒公式.

解 $f(1,-2)=5$，$f_x(1,-2)=(4x-y-6)\big|_{(1,-2)}=0$，

$f_y(1,-2)=(-x-2y-3)\big|_{(1,-2)}=0$，

$f_{xx}(1,-2)=4$，$f_{xy}(1,-2)=-1$，$f_{yy}(1,-2)=-2$.

函数为二次多项式，三阶及三阶以上的各偏导数均为零.又

$$h=x-1,\quad k=y+2.$$

将以上各项代入泰勒公式，便得

$$\begin{aligned}f(x,y)=&\ f(1,-2)+(x-1)f_x(1,-2)+(y+2)f_y(1,-2)+\frac{1}{2!}[(x-1)^2\cdot\\&f_{xx}(1,-2)+2(x-1)(y+2)f_{xy}(1,-2)+(y+2)^2f_{yy}(1,-2)]\\=&\ 5+\frac{1}{2}[4(x-1)^2-2(x-1)(y+2)-2(y+2)^2]\\=&\ 5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2.\end{aligned}$$

2. 求函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^x\ln(1+y)$ 在点 $(0,0)$ 的三阶泰勒公式.

解 $f_x(x,y)=\mathrm{e}^x\ln(1+y)$，$f_y(x,y)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+y}$，

$f_{xx}(x,y)=\mathrm{e}^x\ln(1+y)$，$f_{xy}(x,y)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+y}$，$f_{yy}(x,y)=-\dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+y)^2}$，

$f_{xxx}(x,y)=\mathrm{e}^x\ln(1+y)$，$f_{yyy}(x,y)=\dfrac{2\mathrm{e}^x}{(1+y)^3}$.

于是

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(0,0)=hf_x(0,0)+kf_y(0,0)=k,$$

$$\begin{aligned}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(0,0)&=h^2f_{xx}(0,0)+2hkf_{xy}(0,0)+k^2f_{yy}(0,0)\\&=2hk-k^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3f(0,0)&=h^3f_{xxx}(0,0)+3h^2kf_{xxy}(0,0)+3hk^2f_{xyy}(0,0)+k^3f_{yyy}(0,0)\\&=3h^2k-3hk^2+2k^3.\end{aligned}$$

又

$$f(0,0)=0,\quad h=x,\quad k=y.$$

将以上各项代入三阶泰勒公式，便得

$$\mathrm{e}^x\ln(1+y)=y+\frac{1}{2!}(2xy-y^2)+\frac{1}{3!}(3x^2y-3xy^2+2y^3)+R_3,$$

其中

$$R_3=\frac{1}{4!}\left[\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 f(\theta h,\theta k)\right]_{h=x,k=y}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{24}\left[x^4\ln(1+\theta y)+\frac{4x^3y}{1+\theta y}-\frac{6x^2y^2}{(1+\theta y)^2}+\frac{8xy^3}{(1+\theta y)^3}-\frac{6y^4}{(1+\theta y)^4}\right]\quad(0<\theta<1).$$

3. 求函数$f(x,y)=\sin x\sin y$在点$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$的二阶泰勒公式.

解
$$f_x(x,y)=\cos x\sin y,\quad f_y(x,y)=\sin x\cos y,$$
$$f_{xx}(x,y)=-\sin x\sin y,\quad f_{xy}(x,y)=\cos x\cos y,$$
$$f_{yy}(x,y)=-\sin x\sin y,\quad f_{xxx}(x,y)=-\cos x\sin y,$$
$$f_{xxy}(x,y)=-\sin x\cos y,\quad f_{xyy}(x,y)=-\cos x\sin y,$$
$$f_{yyy}(x,y)=-\sin x\cos y.$$

于是

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=hf_x\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)+kf_y\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}h+\frac{1}{2}k,$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=h^2f_{xx}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)+2hkf_{xy}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)+k^2f_{yy}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}h^2+hk-\frac{1}{2}k^2.$$

又

$$f\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2},\quad h=x-\frac{\pi}{4},\quad k=y-\frac{\pi}{4}.$$

将以上各项代入二阶泰勒公式,便得

$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+$$
$$\frac{1}{2!}\left[-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2\right]+R_2$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-$$
$$\frac{1}{4}\left[\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2\right]+R_2,$$

其中

$$R_2=\frac{1}{3!}\left[\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(\xi,\eta)\right]_{h=x-\frac{\pi}{4},k=y-\frac{\pi}{4}}$$

$$=-\frac{1}{6}\left[\cos\xi\sin\eta\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+3\sin\xi\cos\eta\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+\right.$$

$$\left.3\cos\xi\sin\eta\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2+\sin\xi\cos\eta\cdot\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^3\right],$$

$$\xi=\frac{\pi}{4}+\theta\left(x-\frac{\pi}{4}\right),\quad \eta=\frac{\pi}{4}+\theta\left(y-\frac{\pi}{4}\right),\quad 0<\theta<1.$$

4. 利用函数 $f(x,y)=x^y$ 的三阶泰勒公式,计算 $1.1^{1.02}$ 的近似值.

解　先求函数 $f(x,y)=x^y$ 在点(1,1)的三阶泰勒公式.

$$f_x(1,1)=yx^{y-1}\big|_{(1,1)}=1,\quad f_y(1,1)=x^y\ln x\big|_{(1,1)}=0,$$

$$f_{xx}(1,1)=y(y-1)x^{y-2}\big|_{(1,1)}=0,$$

$$f_{xy}(1,1)=(x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x)\big|_{(1,1)}=1,$$

$$f_{yy}(1,1)=x^y\ln^2x\big|_{(1,1)}=0,$$

$$f_{xxx}(1,1)=y(y-1)(y-2)x^{y-3}\big|_{(1,1)}=0,$$

$$f_{xxy}(1,1)=[(2y-1)x^{y-2}+y(y-1)x^{y-2}\ln x]\big|_{(1,1)}=1,$$

$$f_{xyy}(1,1)=(2x^{y-1}\ln x+yx^{y-1}\ln^2x)\big|_{(1,1)}=0,$$

$$f_{yyy}(1,1)=x^y\ln^3x\big|_{(1,1)}=0.$$

又

$$f(1,1)=1,\quad h=x-1,\quad k=y-1.$$

将以上各项代入三阶泰勒公式,便得

$$x^y=1+(x-1)+\frac{1}{2!}[2(x-1)(y-1)]+\frac{1}{3!}[3(x-1)^2(y-1)]+R_3$$

$$=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2(y-1)+R_3.$$

因此

$$1.1^{1.02}\approx1+0.1+0.1\times0.02+\frac{1}{2}\times0.1^2\times0.02$$

$$=1+0.1+0.002+0.000\,1=1.102\,1.$$

5. 求函数 $f(x,y)=e^{x+y}$ 在点(0,0)的 n 阶泰勒公式.

解　$f(0,0)=1,\quad f_x(0,0)=e^{x+y}\big|_{(0,0)}=1,\quad f_y(0,0)=e^{x+y}\big|_{(0,0)}=1,\quad\cdots,$

$$f^{(n)}_{x^my^{n-m}}(0,0)=e^{x+y}\big|_{(0,0)}=1\ (m=0,1,\cdots,n).$$

又

$$h=x,\quad k=y.$$

将以上各项代入 n 阶泰勒公式,便得

$$e^{x+y}=1+(x+y)+\frac{1}{2!}(x^2+2xy+y^2)+\frac{1}{3!}(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)+\cdots+\frac{1}{n!}(x+y)^n+R_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x+y)^k}{k!}+R_n,$$

其中

$$R_n=\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta(x+y)}\quad(0<\theta<1).$$

*习题 9-10 最小二乘法

1. 某种合金的含铅量百分比(%)为 p,其熔解温度(℃)为 θ,由实验测得 p 与 θ 的数据如下表:

p/%	36.9	46.7	63.7	77.8	84.0	87.5
θ/℃	181	197	235	270	283	292

试用最小二乘法建立 θ 与 p 之间的经验公式 $\theta=ap+b$.

解 设 M 是各个数据的偏差平方和,即

$$M=\sum_{i=1}^{6}[\theta_i-(ap_i+b)]^2.$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial M}{\partial a}=-\displaystyle\sum_{i=1}^{6}2p_i[\theta_i-(ap_i+b)]=0,\\ \dfrac{\partial M}{\partial b}=-\displaystyle\sum_{i=1}^{6}2[\theta_i-(ap_i+b)]=0.\end{cases}$$

整理,得

$$\begin{cases}a\displaystyle\sum_{i=1}^{6}p_i^2+b\sum_{i=1}^{6}p_i=\sum_{i=1}^{6}\theta_ip_i,\\ a\displaystyle\sum_{i=1}^{6}p_i+6b=\sum_{i=1}^{6}\theta_i.\end{cases}$$

计算,得

$$\sum_{i=1}^{6}p_i^2=28\,365.28,\qquad \sum_{i=1}^{6}p_i=396.6,$$

$$\sum_{i=1}^{6}\theta_ip_i=101\,176.3,\qquad \sum_{i=1}^{6}\theta_i=1\,458.$$

代入方程组,得

$$\begin{cases}28\,365.28a+396.6b=101\,176.3,\\396.6a+6b=1\,458.\end{cases}$$

解得

$$a=\frac{4\,802.5}{2\,150.02}=2.234,$$

$$b=\frac{572.0}{6}=95.33.$$

所以经验公式为 $\theta=2.234p+95.33$.

2. 已知一组实验数据为$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$.现若假定经验公式是

$$y=ax^2+bx+c.$$

试按最小二乘法建立 a,b,c 应满足的三元一次方程组.

解　设 M 是各个数据的偏差平方和,即

$$M=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i^2+bx_i+c)]^2.$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial M}{\partial a}=-2\sum\limits_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i^2+bx_i+c)]\cdot x_i^2=0,\\\dfrac{\partial M}{\partial b}=-2\sum\limits_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i^2+bx_i+c)]\cdot x_i=0,\\\dfrac{\partial M}{\partial c}=-2\sum\limits_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i^2+bx_i+c)]=0.\end{cases}$$

整理,得 a,b,c 应满足的三元一次方程组如下:

$$\begin{cases}a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^4+b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^3+c\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2y_i,\\a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^3+b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+c\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i,\\a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+nc=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i.\end{cases}$$

总习题九

1. 在“充分”“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内:

(1) $f(x,y)$在点(x,y)可微分是$f(x,y)$在该点连续的________条件,$f(x,y)$在点(x,y)连续是$f(x,y)$在该点可微分的________条件;

(2) $z=f(x,y)$在点(x,y)的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$存在是$f(x,y)$在该点可微分的________条件,$z=f(x,y)$在点$(x,y)$可微分是函数在该点的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$存在的________条件;

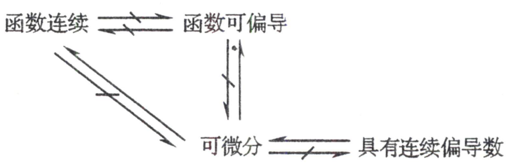
(3) $z=f(x,y)$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$在点$(x,y)$存在且连续是$f(x,y)$在该点可微分的________条件;

(4) 函数$z=f(x,y)$的两个二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$及$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$在区域$D$内连续是这两个二阶混合偏导数在$D$内相等的________条件.

解 (1) 充分,必要. (2) 必要,充分.

(3) 充分. (4) 充分.

注 本题结果给出了二元函数连续、可偏导(两个偏导数均存在)、可微分及具有连续偏导数之间的联系,用图表可表示为



2. 下题中给出了四个结论,从中选出一个正确的结论:

设函数$f(x,y)$在点$(0,0)$的某邻域内有定义,且$f_x(0,0)=3$,$f_y(0,0)=-1$,则有( ).

(A) $dz\big|_{(0,0)}=3dx-dy$

(B) 曲面$z=f(x,y)$在点$(0,0,f(0,0))$的一个法向量为$(3,-1,1)$

(C) 曲线$\begin{cases}z=f(x,y),\\ y=0\end{cases}$在点$(0,0,f(0,0))$的一个切向量为$(1,0,3)$

(D) 曲线$\begin{cases}z=f(x,y),\\ y=0\end{cases}$在点$(0,0,f(0,0))$的一个切向量为$(3,0,1)$

解 函数$f(x,y)$在点$(0,0)$处的两个偏导数存在,不一定可微分,故(A)不对.

由于函数存在偏导数不能保证可微分,从而不能保证曲面$z=f(x,y)$在点$(0,0,f(0,0))$处存在切平面,因而(B)不对;若$z=f(x,y)$在点$(0,0,f(0,0))$处存在连续偏导数,曲面在该点处有切平面,其法向量是$(3,-1,-1)$,而不是$(3,-1,1)$,故(B)也不对.

取x为参数,则曲线$x=x,y=0,z=f(x,0)$在点$(0,0,f(0,0))$处的一个切向量为$(1,0,3)$,故(C)正确.

3. 求函数$f(x,y)=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$的定义域,并求$\lim\limits_{(x,y)\to\left(\frac{1}{2},0\right)}f(x,y)$.

解 函数的定义域为$D=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1,y^2\leqslant 4x\}$.

因为点$\left(\frac{1}{2},0\right)\in D$,$f(x,y)$为初等函数,所以

$$\lim_{(x,y)\to\left(\frac{1}{2},0\right)} f(x,y)=f\left(\frac{1}{2},0\right)=\frac{\sqrt{2}}{\ln\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{\ln 3-\ln 4}.$$

*4. 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$不存在.

证　取两条趋于(0,0)的路径，$c_1:x=0,c_2:y^2=x$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in c_1}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=0,$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in c_2}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y^2=x}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}.$$

由于(x,y)分别沿 c_1,c_2 趋于(0,0)时$f(x,y)$的极限不相等，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$不存在.

5. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

求$f_x(x,y)$及$f_y(x,y)$.

解　当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，

$$f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy(x^2+y^2)-x^2y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2(x^2+y^2)-x^2y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

当 $x^2+y^2=0$ 时，

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0,$$

故

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

6. 求下列函数的一阶和二阶偏导数：

(1) $z=\ln(x+y^2)$;　　(2) $z=x^y$.

解　(1)　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{x+y^2},\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{1}{(x+y^2)^2},$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x+y^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2(x+y^2)-4y^2}{(x+y^2)^2}=\frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x+y^2}\right)=-\frac{2y}{(x+y^2)^2}.$$

(2)
$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^y\ln^2 x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(yx^{y-1})=x^{y-1}+y\cdot x^{y-1}\ln x.$$

7. 求函数 $z=\dfrac{xy}{x^2-y^2}$ 当 $x=2,y=1,\Delta x=0.01,\Delta y=0.03$ 时的全增量和全微分.

解
$$\Delta z=\frac{2.01\times 1.03}{2.01^2-1.03^2}-\frac{2}{3}=0.03.$$

又
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-(y^3+x^2y)}{(x^2-y^2)^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^3+xy^2}{(x^2-y^2)^2},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)}=-\frac{5}{9},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)}=\frac{10}{9}.$$

故
$$\mathrm{d}z\Big|_{\substack{x=2,\Delta x=0.01\\ y=1,\Delta y=0.03}}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)}\cdot\Delta x+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)}\cdot\Delta y=0.03.$$

*8. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

证明：$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续且偏导数存在，但不可微分.

证 因为

$$0\leqslant\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\leqslant\frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}=0,$$

所以
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$$

又 $f(0,0)=0$，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)$，即 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0.$$

$$\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]=\frac{(\Delta x)^2\cdot(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}},$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=\Delta x}}\frac{\dfrac{(\Delta x)^2\cdot(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}}}{\rho}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^4}{[2(\Delta x)^2]^2}=\frac{1}{4}\neq 0,$$

其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处偏导数存在，但不可微分.

9. 设 $u=x^y$，而 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 都是可微函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

解 $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=yx^{y-1}\cdot\varphi'(t)+x^y\ln x\cdot\psi'(t).$$

10. 设 $z=f(u,v,w)$ 具有连续偏导数，而

$$u=\eta-\zeta,\quad v=\zeta-\xi,\quad w=\xi-\eta,$$

求 $\dfrac{\partial z}{\partial \xi},\dfrac{\partial z}{\partial \eta},\dfrac{\partial z}{\partial \zeta}$.

解

$$\frac{\partial z}{\partial \xi}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial \xi}=-\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial w},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial \eta}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial \eta}=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial w},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial \zeta}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial \zeta}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial \zeta}=-\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}.$$

11. 设 $z=f(u,x,y)$，$u=x\mathrm{e}^y$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+f_x=f_u\cdot\mathrm{e}^y+f_x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(f_u\cdot\mathrm{e}^y+f_x)=\left(\frac{\partial}{\partial y}f_u\right)\cdot\mathrm{e}^y+f_u\cdot\mathrm{e}^y+\frac{\partial}{\partial y}f_x$$

$$=\left(f_{uu}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f_{uy}\right)\mathrm{e}^y+f_u\cdot\mathrm{e}^y+\left(f_{xu}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f_{xy}\right)$$

$$=(f_{uu}\cdot x\mathrm{e}^y+f_{uy})\mathrm{e}^y+f_u\cdot\mathrm{e}^y+f_{xu}\cdot x\mathrm{e}^y+f_{xy}$$

$$=x\mathrm{e}^{2y}f_{uu}+\mathrm{e}^yf_{uy}+x\mathrm{e}^yf_{xu}+f_{xy}+\mathrm{e}^yf_u.$$

12. 设 $x=\mathrm{e}^u\cos v$，$y=\mathrm{e}^u\sin v$，$z=uv$，试求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial x}.$$

分别在 $x=\mathrm{e}^u\cos v$，$y=\mathrm{e}^u\sin v$ 的两端对 x 求偏导数，得

$$\begin{cases}\mathrm{e}^u\cos v\dfrac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{e}^u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial x}=1,\\[2ex]\mathrm{e}^u\sin v\dfrac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{e}^u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0.\end{cases}$$

由以上方程组解得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^{-u}\cos v,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\mathrm{e}^{-u}\sin v.$$

从而

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{-u}(v\cos v-u\sin v).$$

同理

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial y}.$$

分别在 $x=e^{u}\cos v,y=e^{u}\sin v$ 的两端对 y 求偏导数,得

$$\begin{cases}e^{u}\cos v\dfrac{\partial u}{\partial y}-e^{u}\sin v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\\ e^{u}\sin v\dfrac{\partial u}{\partial y}+e^{u}\cos v\dfrac{\partial v}{\partial y}=1.\end{cases}$$

由以上方程组解得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{-u}\sin v,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=e^{-u}\cos v.$$

从而

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{-u}(u\cos v+v\sin v).$$

13. 求螺旋线 $x=a\cos\theta,y=a\sin\theta,z=b\theta$ 在点$(a,0,0)$处的切线及法平面方程.

解 $$\frac{dx}{d\theta}=-a\sin\theta,\quad \frac{dy}{d\theta}=a\cos\theta,\quad \frac{dz}{d\theta}=b.$$

点$(a,0,0)$所对应的参数 $\theta=0$,故曲线在给定点的切向量

$$\boldsymbol{T}=(0,a,b).$$

于是切线方程为

$$\frac{x-a}{0}=\frac{y}{a}=\frac{z}{b},$$

即

$$\begin{cases}x=a,\\ by-az=0.\end{cases}$$

法平面方程为

$$a(y-0)+b(z-0)=0,$$

即 $$ay+bz=0.$$

14. 在曲面 $z=xy$ 上求一点,使这点处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$,并写出这法线的方程.

解 设所求点为 $M(x_0,y_0,z_0)$,曲面在该点处的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(y_0,x_0,-1)$,平面的法向量为$(1,3,1)$.

按题意,$\boldsymbol{n}$ 垂直于平面,故有

$$\frac{y_0}{1}=\frac{x_0}{3}=\frac{-1}{1}.$$

求得 $x_0=-3,y_0=-1,z_0=x_0y_0=3$.于是所求点为 $M(-3,-1,3)$,法线方程为

$$\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}.$$

15. 设 $\boldsymbol{e}_l=(\cos\theta,\sin\theta)$,求函数

$$f(x,y)=x^2-xy+y^2$$

在点(1,1)沿方向 l 的方向导数,并分别确定角 θ,使这个方向导数(1)有最大值;(2)有最小值;(3)等于0.

解

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-y,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-x+2y,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=1,\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=1.$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,1)}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}\cos\theta+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}\sin\theta=\cos\theta+\sin\theta.$$

因为 $\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$,所以

(1) 当 $\theta=\frac{\pi}{4}$时,方向导数最大,其最大值为$\sqrt{2}$.

(2) 当 $\theta=\frac{5}{4}\pi$ 时,方向导数最小,其最小值为$-\sqrt{2}$.

(3) 当 $\theta=\frac{3}{4}\pi$ 或$\frac{7}{4}\pi$ 时,方向导数为0.

16. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$处沿外法线方向的方向导数.

解 椭球面在点 M_0 处的沿外法线方向的一个向量为 $\boldsymbol{n}=\left(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2},\frac{z_0}{c^2}\right)$,

$$\boldsymbol{e}_n=\frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}\left(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2},\frac{z_0}{c^2}\right).$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=\frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}\left(2x_0\cdot\frac{x_0}{a^2}+2y_0\cdot\frac{y_0}{b^2}+2z_0\cdot\frac{z_0}{c^2}\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}.$$

17. 求平面$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$ 和柱面 $x^2+y^2=1$ 的交线上与 xOy 面距离最短的点.

解 设交线上的点为 $M(x,y,z)$,它到 xOy 面上距离的平方为 z^2.问题就成为求函数 z^2 在约束条件$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$ 和 $x^2+y^2=1$ 下的最小值问题.作拉格朗日函数

$$L=z^2+\lambda\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}-1\right)+\mu(x^2+y^2-1).$$

令

$$\begin{cases} L_x = \dfrac{\lambda}{3} + 2\mu x = 0, \\ L_y = \dfrac{\lambda}{4} + 2\mu y = 0, \\ L_z = 2z + \dfrac{\lambda}{5} = 0. \end{cases}$$

又由约束条件,有

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1,$$
$$x^2 + y^2 = 1.$$

解此方程组,得 $x = \dfrac{4}{5}, y = \dfrac{3}{5}, z = \dfrac{35}{12}$.于是,得可能的极值点 $M_0\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{35}{12}\right)$.由问题本身可知,距离最短的点必定存在,因此 M_0 就是所求的点.

18. 在第 I 卦限内作椭球面$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 的切平面,使该切平面与三坐标面所围成的四面体的体积最小. 求这切平面的切点,并求此最小体积.

解 设切点为 $M(x_0, y_0, z_0)$, $F(x, y, z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1$,

$$\boldsymbol{n} = (F_x, F_y, F_z) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right).$$

曲面在点 M 处的切平面方程为

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{z_0}{c^2}(z - z_0) = 0,$$

即
$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1.$$

于是,切平面在三个坐标轴上的截距依次为$\dfrac{a^2}{x_0}, \dfrac{b^2}{y_0}, \dfrac{c^2}{z_0}$,切平面与三个坐标面所围成的四面体的体积为

$$V = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2 b^2 c^2}{x_0 y_0 z_0}.$$

在 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 的条件下,求 V 的最小值,即求分母 xyz 的最大值.作拉格朗日函数

$$L(x, y, z) = xyz + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right).$$

令

$$\begin{cases} L_x = yz + \dfrac{2\lambda x}{a^2} = 0, & ① \\ L_y = xz + \dfrac{2\lambda y}{b^2} = 0, & ② \\ L_z = xy + \dfrac{2\lambda z}{c^2} = 0. & ③ \end{cases}$$

①$\cdot x$+②$\cdot y$+③$\cdot z$,并由约束条件$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$,得

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{3},$$

从而

$$x=\frac{a}{\sqrt{3}},\quad y=\frac{b}{\sqrt{3}},\quad z=\frac{c}{\sqrt{3}}.$$

于是,得可能极值点 $M\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$.由此问题的性质知,所求的切点为$M\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$,四面体的最小体积为

$$V_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{2}abc.$$

19. 某厂家生产的一种产品同时在两个市场销售,售价分别为 p_1 和 p_2,销售量分别为 q_1 和 q_2,需求函数分别为

$$q_1=24-0.2p_1,\quad q_2=10-0.05p_2,$$

总成本函数为

$$C=35+40(q_1+q_2).$$

试问:厂家如何确定两个市场的售价,能使其获得的总利润最大?最大总利润为多少?

解法一　总收入函数为

$$R=p_1q_1+p_2q_2=24p_1-0.2p_1^2+10p_2-0.05p_2^2,$$

总利润函数为

$$L=R-C=32p_1-0.2p_1^2-0.05p_2^2+12p_2-1\,395.$$

由极值的必要条件,得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial p_1}=32-0.4p_1=0,\\[2ex]\dfrac{\partial L}{\partial p_2}=12-0.1p_2=0.\end{cases}$$

解此方程组,得 $p_1=80,p_2=120$.

由问题的实际意义可知,厂家获得总利润最大的市场售价必定存在,故当 $p_1=80,p_2=120$ 时,厂家所获得的总利润最大,其最大总利润为

$$L\Big|_{p_1=80,p_2=120}=605.$$

解法二　两个市场的价格函数分别为

$$p_1=120-5q_1,\quad p_2=200-20q_2,$$

总收入函数为

$$R=p_1q_1+p_2q_2=(120-5q_1)q_1+(200-20q_2)q_2,$$

总利润函数为

$$\begin{aligned}L&=R-C=(120-5q_1)q_1+(200-20q_2)q_2-[35+40(q_1+q_2)]\\&=80q_1-5q_1^2+160q_2-20q_2^2-35.\end{aligned}$$

由极值的必要条件,得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial q_1} = 80 - 10q_1 = 0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial q_2} = 160 - 40q_2 = 0.\end{cases}$$

解此方程组得 $q_1=8,q_2=4$.

由问题的实际意义可知,当 $q_1=8,q_2=4$,即 $p_1=80,p_2=120$ 时,厂家所获得的总利润最大,其最大总利润为

$$L\Big|_{q_1=8,q_2=4} = 605.$$

20. 设有一小山,取它的底面所在的平面为 xOy 面,其底部所占的闭区域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-xy\leqslant 75\}$,小山的高度函数为 $h=f(x,y)=75-x^2-y^2+xy$.

(1) 设 $M(x_0,y_0)\in D$,问 $f(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大?若记此方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$,试写出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式.

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动,为此需要在山脚找一上山坡度最大的点作为攀岩的起点,也就是说,要在 D 的边界线 $x^2+y^2-xy=75$ 上找出(1)中的 $g(x,y)$ 达到最大值的点.试确定攀岩起点的位置.

解 (1) 由梯度与方向导数的关系知,$h=f(x,y)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处沿梯度

$$\mathbf{grad}\, f(x_0,y_0) = (y_0-2x_0)\boldsymbol{i} + (x_0-2y_0)\boldsymbol{j}$$

方向的方向导数最大,方向导数的最大值为该梯度的模,所以

$$g(x_0,y_0) = \sqrt{(y_0-2x_0)^2+(x_0-2y_0)^2} = \sqrt{5x_0^2+5y_0^2-8x_0y_0}.$$

(2) 欲在 D 的边界上求 $g(x,y)$ 达到最大值的点,只需求 $F(x,y)=g^2(x,y)=5x^2+5y^2-8xy$ 达到最大值的点.因此,作拉格朗日函数

$$L=5x^2+5y^2-8xy+\lambda(75-x^2-y^2+xy).$$

令

$$\begin{cases}L_x=10x-8y+\lambda(y-2x)=0, & ①\\ L_y=10y-8x+\lambda(x-2y)=0. & ②\end{cases}$$

又由约束条件,有

$$75-x^2-y^2+xy=0. \qquad ③$$

①+②,得

$$(x+y)(2-\lambda)=0,$$

解得 $y=-x$ 或 $\lambda=2$.

若 $\lambda=2$,则由①式得 $y=x$,再由③式得 $x=y=\pm5\sqrt{3}$.

若 $y=-x$,则由③式得 $x=\pm5,y=\mp5$.

于是得到四个可能的极值点:

$$M_1(5,-5),\quad M_2(-5,5),\quad M_3(5\sqrt{3},5\sqrt{3}),\quad M_4(-5\sqrt{3},-5\sqrt{3}).$$

由于 $F(M_1)=F(M_2)=450,F(M_3)=F(M_4)=150$,故 $M_1(5,-5)$ 或 $M_2(-5,5)$ 可作为攀岩的起点.

第十章 重积分

习题 10-1　二重积分的概念与性质

1. 设有一平面薄板(不计其厚度),占有 xOy 面上的闭区域 D,薄板上分布有面密度为 $\mu=\mu(x,y)$ 的电荷,且 $\mu(x,y)$ 在 D 上连续,试用二重积分表达该薄板上的全部电荷 Q.

解　用一组曲线网将 D 分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_i$,其面积也记为 $\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$.任取一点 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$,则 $\Delta\sigma_i$ 上分布的电荷 $\Delta Q_i\approx\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.通过求和、取极限,便得到该板上的全部电荷为

$$Q=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\iint\limits_{D}\mu(x,y)\,\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta\sigma_i$ 的直径$\}$.

注　以上解题过程也可用元素法简化叙述如下:

设想用曲线网将 D 分成 n 个小闭区域,取出其中任意一个记作 $\mathrm{d}\sigma$(其面积也记作 $\mathrm{d}\sigma$),(x,y) 为 $\mathrm{d}\sigma$ 上一点,则 $\mathrm{d}\sigma$ 上分布的电荷近似等于 $\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma$,记作

$$\mathrm{d}Q=\mu(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\quad(\text{称为电荷元素}),$$

以 $\mathrm{d}Q$ 作为被积表达式,在 D 上作重积分,即得所求的电荷为

$$Q=\iint\limits_{D}\mu(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

2. 设 $I_1=\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma$,其中 $D_1=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,\ -2\leqslant y\leqslant 2\}$;又 $I_2=\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma$,其中 $D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2\}$.试利用二重积分的几何意义说明 I_1 与 I_2 之间的关系.

解　由二重积分的几何意义知,I_1 表示底为 D_1、顶为曲面 $z=(x^2+y^2)^3$ 的曲顶柱体 Ω_1 的体积;I_2 表示底为 D_2、顶为曲面 $z=(x^2+y^2)^3$ 的曲顶柱体 Ω_2 的体积(图

10-1). 由于位于 D_1 上方的曲面 $z=(x^2+y^2)^3$ 关于 yOz 面和 zOx 面均对称,故 yOz 面和 zOx 面将 Ω_1 分成四个等体积的部分,其中位于第Ⅰ卦限的部分即为 Ω_2. 由此可知

$$I_1 = 4I_2.$$

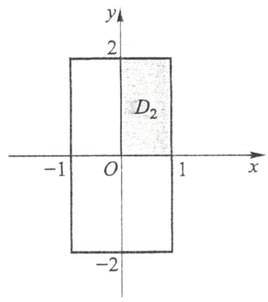


图 10-1

注 (1) 本题也可利用被积函数和积分区域的对称性来解答. 设 $D_3=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,-2\leqslant y\leqslant 2\}$. 由于 D_1 关于 y 轴对称,被积函数 $(x^2+y^2)^3$ 关于 x 是偶函数,故

$$I_1 = \iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma = 2\iint\limits_{D_3}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma.$$

又由于 D_3 关于 x 轴对称,被积函数 $(x^2+y^2)^3$ 关于 y 是偶函数,故

$$\iint\limits_{D_3}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma = 2\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma = 2I_2.$$

从而得

$$I_1 = 4I_2.$$

(2) 利用对称性来计算二重积分还有以下两个结论值得注意:

如果积分区域 D 关于 x 轴对称,而被积函数 $f(x,y)$ 关于 y 是奇函数,即 $f(x,-y)=-f(x,y)$,则

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 0;$$

如果积分区域 D 关于 y 轴对称,而被积函数 $f(x,y)$ 关于 x 是奇函数,即 $f(-x,y)=-f(x,y)$,则

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 0.$$

3. 利用二重积分定义证明:

(1) $\iint\limits_{D}\mathrm{d}\sigma=\sigma$ (其中 σ 为 D 的面积);

(2) $\iint\limits_{D}kf(x,y)\mathrm{d}\sigma = k\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ (其中 k 为常数);

(3) $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=D_1\cup D_2$, D_1, D_2 为两个无公共内点的闭区域.

证 (1) 由于被积函数 $f(x,y)\equiv 1$,故由二重积分定义得

$$\iint\limits_{D}\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sigma = \sigma.$$

(2) $\iint\limits_D kf(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}kf(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

$$=k\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=k\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

(3) 因为函数$f(x,y)$在闭区域D上可积,故不论把D怎样分割,积分和的极限总是不变的.因此在分割D时,可以使D_1和D_2的公共边界永远是一条分割线.这样$f(x,y)$在$D_1\cup D_2$上的积分和就等于D_1上的积分和加D_2上的积分和,记为

$$\sum_{D_1\cup D_2}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\sum_{D_1}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i+\sum_{D_2}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

令所有$\Delta\sigma_i$的直径的最大值$\lambda\to 0$,上式两端同时取极限,即得

$$\iint\limits_{D_1\cup D_2}f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

4. 试确定积分区域D,使二重积分$\iint\limits_D(1-2x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$达到最大值.

解　由二重积分的性质可知,当积分区域D包含了所有使被积函数$1-2x^2-y^2$大于等于零的点,而不包含使被积函数$1-2x^2-y^2$小于零的点,即当D是椭圆$2x^2+y^2=1$所围的平面闭区域时,此二重积分的值达到最大.

5. 根据二重积分的性质,比较下列积分的大小:

(1) $\iint\limits_D(x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma$与$\iint\limits_D(x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$,其中积分区域$D$是由$x$轴、$y$轴与直线$x+y=1$所围成;

(2) $\iint\limits_D(x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma$与$\iint\limits_D(x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$,其中积分区域$D$是由圆周$(x-2)^2+(y-1)^2=2$所围成;

(3) $\iint\limits_D\ln(x+y)\,\mathrm{d}\sigma$与$\iint\limits_D[\ln(x+y)]^2\,\mathrm{d}\sigma$,其中$D$是三角形闭区域,三顶点分别为$(1,0),(1,1),(2,0)$;

(4) $\iint\limits_D\ln(x+y)\,\mathrm{d}\sigma$与$\iint\limits_D[\ln(x+y)]^2\,\mathrm{d}\sigma$,其中$D=\{(x,y)\mid 3\leqslant x\leqslant 5,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

解　(1) 在积分区域D上,$0\leqslant x+y\leqslant 1$,故有

$$(x+y)^3\leqslant(x+y)^2.$$

根据二重积分的性质4,可得

$$\iint\limits_D(x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint\limits_D(x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma.$$

(2) 由于积分区域D位于半平面$\{(x,y)\mid x+y\geqslant 1\}$内,故在$D$上有$(x+y)^2\leqslant(x+y)^3$.从而$\iint\limits_D(x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint\limits_D(x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$.

(3) 由于积分区域 D 位于条形区域 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x+y\leqslant 2\}$ 内,故知区域 D 上的点满足 $0\leqslant \ln(x+y)\leqslant 1$,从而有 $[\ln(x+y)]^2\leqslant \ln(x+y)$.因此

$$\iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma \leqslant \iint_D \ln(x+y)\,d\sigma.$$

(4) 由于积分区域 D 位于半平面 $\{(x,y)\mid x+y\geqslant \mathrm{e}\}$ 内,故在 D 上有 $\ln(x+y)\geqslant 1$,从而 $[\ln(x+y)]^2\geqslant \ln(x+y)$.因此

$$\iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma \geqslant \iint_D \ln(x+y)\,d\sigma.$$

6. 计算 $\iint_D (2+y\cos x+xy\sin y)\,d\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$.

解 由于 $y\cos x$ 是 y 的奇函数,$xy\sin y$ 是 x 的奇函数,积分区域 D 关于 x 轴、y 轴都对称,故

$$\iint_D y\cos x\,d\sigma = 0,\quad \iint_D xy\sin y\,d\sigma = 0,$$

因此

$$\iint_D (2+y\cos x+xy\sin y)\,d\sigma = \iint_D 2\,d\sigma = 2\times(\pi\times 1^2) = 2\pi.$$

7. 利用二重积分的性质估计下列积分的值:

(1) $I=\iint_D xy(x+y)\,d\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$;

(2) $I=\iint_D \sin^2 x\sin^2 y\,d\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant \pi,0\leqslant y\leqslant \pi\}$;

(3) $I=\iint_D (x+y+1)\,d\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2\}$;

(4) $I=\iint_D (x^2+4y^2+9)\,d\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$.

解 (1) 在积分区域 D 上,$0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$,从而 $0\leqslant xy(x+y)\leqslant 2$.又 D 的面积等于 1,因此

$$0\leqslant \iint_D xy(x+y)\,d\sigma \leqslant 2.$$

(2) 在积分区域 D 上,$0\leqslant \sin x\leqslant 1,0\leqslant \sin y\leqslant 1$,从而 $0\leqslant \sin^2 x\sin^2 y\leqslant 1$,又 D 的面积等于 π^2,因此

$$0\leqslant \iint_D \sin^2 x\sin^2 y\,d\sigma \leqslant \pi^2.$$

(3) 在积分区域 D 上有 $1\leqslant x+y+1\leqslant 4$,$D$ 的面积等于 2,因此

$$2\leqslant \iint_D (x+y+1)\,d\sigma \leqslant 8.$$

（4）因为在积分区域 D 上有 $0\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$，所以有

$$9\leqslant x^2+4y^2+9\leqslant 4(x^2+y^2)+9\leqslant 25.$$

又 D 的面积等于 4π，因此

$$36\pi\leqslant \iint\limits_D (x^2+4y^2+9)\,\mathrm{d}\sigma\leqslant 100\pi.$$

习题 10-2　二重积分的计算法

1. 计算下列二重积分：

（1）$\iint\limits_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid |x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\}$；

（2）$\iint\limits_D (3x+2y)\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由两坐标轴及直线 $x+y=2$ 所围成的闭区域；

（3）$\iint\limits_D (x^3+3x^2y+y^3)\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$；

（4）$\iint\limits_D x\cos(x+y)\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是顶点分别为 $(0,0)$，$(\pi,0)$ 和 (π,π) 的三角形闭区域；

（5）$\iint\limits_D \sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

解　（1）

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left(2x^2+\frac{2}{3}\right)\mathrm{d}x=\frac{8}{3}.$$

（2）D 可用不等式表示为

$$0\leqslant y\leqslant 2-x,\quad 0\leqslant x\leqslant 2.$$

于是

$$\iint\limits_D (3x+2y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x}(3x+2y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2[3xy+y^2]_0^{2-x}\mathrm{d}x=\int_0^2(4+2x-2x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{20}{3}.$$

（3）

$$\iint\limits_D (x^3+3x^2y+y^3)\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1(x^3+3x^2y+y^3)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left[\frac{x^4}{4}+x^3y+y^3x\right]_0^1\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{4}+y+y^3\right)\mathrm{d}y=1.$$

（4）D 可用不等式表示为

$$0 \leqslant y \leqslant x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$

于是

$$\begin{aligned}
\iint_D x\cos(x+y)\,d\sigma &= \int_0^{\pi} x\,dx\int_0^{x}\cos(x+y)\,dy \\
&= \int_0^{\pi} x[\sin(x+y)]_0^x\,dx = \int_0^{\pi} x(\sin 2x - \sin x)\,dx \\
&= \int_0^{\pi} x\,d\left(\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) \\
&= \left[x\left(\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x\right)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x\right)dx \\
&= \pi\left(-1-\frac{1}{2}\right) - 0 = -\frac{3}{2}\pi.
\end{aligned}$$

(5) 记

$$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant x^2,0\leqslant x\leqslant 1\}, \quad D_2=\{(x,y)\mid x^2\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant x\leqslant 1\},$$

则

$$\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{|y-x^2|}\,dx\,dy &= \iint_{D_1}\sqrt{x^2-y}\,dx\,dy + \iint_{D_2}\sqrt{y-x^2}\,dx\,dy \\
&= \int_0^1 dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,dy + \int_0^1 dx\int_{x^2}^1\sqrt{y-x^2}\,dy \\
&= \int_0^1\left[-\frac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{x^2}dx + \int_0^1\left[\frac{2}{3}(y-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{x^2}^{1}dx \\
&= \int_0^1\frac{2}{3}x^3\,dx + \int_0^1\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx,
\end{aligned}$$

令 $x=\sin t$ 得

$$\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\cdot\cos t\,dt = \frac{3}{16}\pi,$$

于是

$$\iint_D\sqrt{|y-x^2|}\,dx\,dy = \left[\frac{1}{6}x^4\right]_0^1 + \frac{1}{8}\pi = \frac{\pi}{8}+\frac{1}{6}.$$

2. 画出积分区域,并计算下列二重积分:

(1) $\iint_D x\sqrt{y}\,d\sigma$,其中 D 是由两条抛物线 $y=\sqrt{x}$,$y=x^2$ 所围成的闭区域;

(2) $\iint_D xy^2\,d\sigma$,其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 及 y 轴所围成的右半闭区域;

(3) $\iint_D e^{x+y}\,d\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$;

(4) $\iint\limits_D (x^2+y^2-x)\,d\sigma$，其中 D 是由直线 $y=2$，$y=x$ 及 $y=2x$ 所围成的闭区域.

解　(1) D 可用不等式表示为

$$x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x},\quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{(图 10-2)}.$$

于是

$$\iint\limits_D x\sqrt{y}\,d\sigma = \int_0^1 x\,dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\sqrt{y}\,dy = \frac{2}{3}\int_0^1 x\left[y^{\frac{3}{2}}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}}dx$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1 (x^{\frac{7}{4}} - x^4)\,dx = \frac{6}{55}.$$

(2) D 可用不等式表示为

$$0 \leqslant x \leqslant \sqrt{4-y^2},\quad -2 \leqslant y \leqslant 2 \text{(图 10-3)},$$

故

$$\iint\limits_D xy^2\,d\sigma = \int_{-2}^2 y^2\,dy\int_0^{\sqrt{4-y^2}} x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^2 y^2(4-y^2)\,dy = \frac{64}{15}.$$

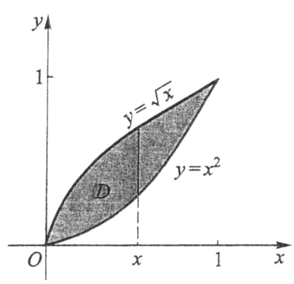


图 10-2

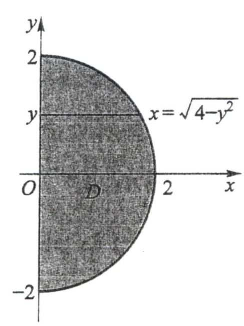


图 10-3

(3) 如图 10-4，$D=D_1\cup D_2$，其中

$$D_1=\{(x,y)\mid -x-1 \leqslant y \leqslant x+1,\ -1 \leqslant x \leqslant 0\},$$

$$D_2=\{(x,y)\mid x-1 \leqslant y \leqslant -x+1,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}.$$

因此

$$\iint\limits_D e^{x+y}\,d\sigma = \iint\limits_{D_1} e^{x+y}\,d\sigma + \iint\limits_{D_2} e^{x+y}\,d\sigma$$

$$=\int_{-1}^0 e^x\,dx\int_{-x-1}^{x+1} e^y\,dy + \int_0^1 e^x\,dx\int_{x-1}^{-x+1} e^y\,dy$$

$$=\int_{-1}^0 (e^{2x+1}-e^{-1})\,dx + \int_0^1 (e-e^{2x-1})\,dx = e-e^{-1}.$$

(4) $D=\left\{(x,y)\left|\frac{y}{2}\leqslant x\leqslant y,0\leqslant y\leqslant 2\right.\right\}$(图 10-5),故

$$\begin{aligned}\iint_D(x^2+y^2-x)\mathrm{d}\sigma&=\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{y}(x^2+y^2-x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^2\left[\frac{x^3}{3}+y^2x-\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{y}{2}}^{y}\mathrm{d}y\\&=\int_0^2\left(\frac{19}{24}y^3-\frac{3}{8}y^2\right)\mathrm{d}y=\frac{13}{6}.\end{aligned}$$

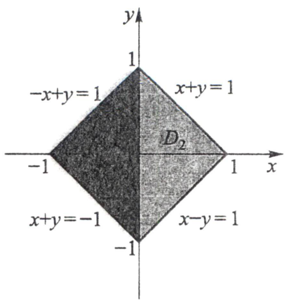


图 10-4

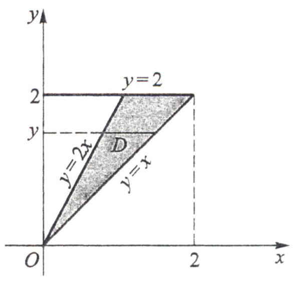


图 10-5

3. 如果二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的被积函数 $f(x,y)$ 是两个函数 $f_1(x)$ 及 $f_2(y)$ 的乘积,即 $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$,积分区域 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$,证明这个二重积分等于两个定积分的乘积,即

$$\iint_D f_1(x)\cdot f_2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left[\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\right]\cdot\left[\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y\right].$$

证 $$\iint_D f_1(x)\cdot f_2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\left[\int_c^d f_1(x)\cdot f_2(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

在上式右端的第一次定积分 $\int_c^d f_1(x)\cdot f_2(y)\mathrm{d}y$ 中,$f_1(x)$ 与积分变量 y 无关,可视为常数提到积分号外,因此上式右端等于

$$\int_a^b f_1(x)\cdot\left[\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

而在这个积分中,由于 $\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y$ 为常数,故又可提到积分号外,从而得到

$$\begin{aligned}\iint_D f_1(x)\cdot f_2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\left[\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y\right]\cdot\left[\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\right]\\&=\left[\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\right]\cdot\left[\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y\right].\end{aligned}$$

证毕.

4. 化二重积分

$$I=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

为二次积分（分别列出对两个变量先后次序不同的两个二次积分），其中积分区域 D 是

（1）由直线 $y=x$ 及抛物线 $y^2=4x$ 所围成的闭区域；

（2）由 x 轴及半圆周 $x^2+y^2=r^2(y\geqslant 0)$ 所围成的闭区域；

（3）由直线 $y=x,x=2$ 及双曲线 $y=\dfrac{1}{x}(x>0)$ 所围成的闭区域；

（4）环形闭区域 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$.

解 （1）直线 $y=x$ 及抛物线 $y^2=4x$ 的交点为 $(0,0)$ 和 $(4,4)$（图 10-6）. 于是

$$I=\int_0^4\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{4x}}f(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

或

$$I=\int_0^4\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{4}}^{y}f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

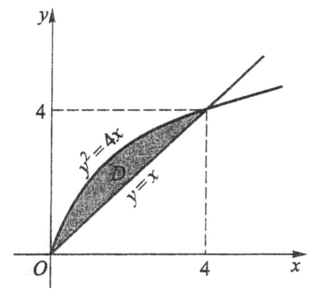


图 10-6

（2）将 D 用不等式表示为 $0\leqslant y\leqslant\sqrt{r^2-x^2}$，$-r\leqslant x\leqslant r$，于是可将 I 化为如下的先对 y、后对 x 的二次积分：

$$I=\int_{-r}^{r}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y;$$

如将 D 用不等式表示为 $-\sqrt{r^2-y^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{r^2-y^2}$，$0\leqslant y\leqslant r$，则可将 I 化为如下的先对 x、后对 y 的二次积分：

$$I=\int_0^r\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

（3）如图 10-7. 三条边界曲线两两相交，先求得 3 个交点为 $(1,1)$，$\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$ 和 $(2,2)$. 于是

$$I=\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{x}f(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

或

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{y}}^{2}f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^2 f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

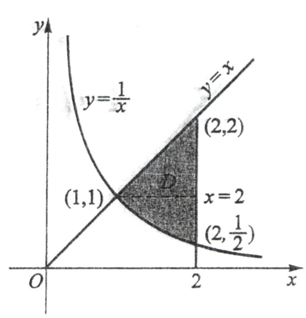


图 10-7

注 本题说明，将二重积分化为二次积分时，需注意根据积分区域的边界曲线的情况，选取恰当的积分次序. 本题中的积分区域 D 的上、下边界曲线均分别由一个方程给出，而左边界曲线却分为两段，由两个不同

的方程给出,在这种情况下采取先对 y、后对 x 的积分次序比较有利,这样只需做一个二次积分,而如果采用相反的积分次序则需计算两个二次积分.

需要指出,选择积分次序时,还需考虑被积函数 $f(x,y)$ 的特点.具体例子可见教材第十章第二节例 2.

(4) 将 D 按图 10-8(a)和图 10-8(b)的两种不同方式划分为 4 块,分别得

$$I=\int_{-2}^{-1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y+$$

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

和

$$I=\int_{-2}^{-1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x+$$

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

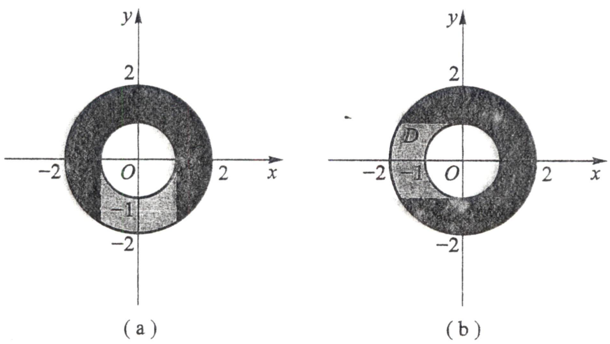


图 10-8

5. 设 $f(x,y)$ 在 D 上连续,其中 D 是由直线 $y=x$,$y=a$ 及 $x=b(b>a)$ 所围成的闭区域,证明

$$\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^x f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_y^b f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

证 等式两端的二次积分均等于二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$,因而它们相等.

6. 交换下列二次积分的积分次序:

(1) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y f(x,y)\,\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$;　　(4) $\int_1^2\mathrm{d}x\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$;

(5) $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$;　　　(6) $\int_0^{\pi} dx\int_{-\sin\frac{x}{2}}^{\sin x} f(x,y)dy$.

解 (1) 所给二次积分等于二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant y,0\leqslant y\leqslant 1\}$.$D$ 可改写为 $\{(x,y)\mid x\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant x\leqslant 1\}$(图 10 - 9),于是

$$原式=\int_0^1 dx\int_x^1 f(x,y)dy.$$

(2) 所给二次积分等于二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid y^2\leqslant x\leqslant 2y,0\leqslant y\leqslant 2\}$.又 D 可表示为 $\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x}{2}\leqslant y\leqslant\sqrt{x},0\leqslant x\leqslant 4\right\}$(图 10 - 10),因此

$$原式=\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy.$$

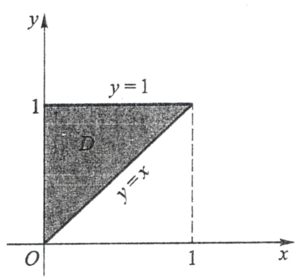


图 10-9

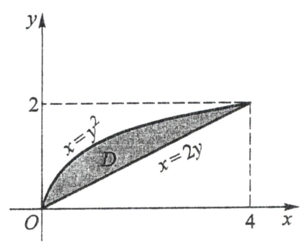


图 10-10

(3) 所给二次积分等于二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid -\sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{1-y^2},0\leqslant y\leqslant 1\}$.又 D 可表示为 $\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2},-1\leqslant x\leqslant 1\}$(图 10 - 11),因此

$$原式=\int_{-1}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$$

(4) 所给二次积分等于二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid 2-x\leqslant y\leqslant\sqrt{2x-x^2},1\leqslant x\leqslant 2\}$.又 D 可表示为 $\{(x,y)\mid 2-y\leqslant x\leqslant 1+\sqrt{1-y^2},0\leqslant y\leqslant 1\}$(图 10 - 12),故

$$原式=\int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx.$$

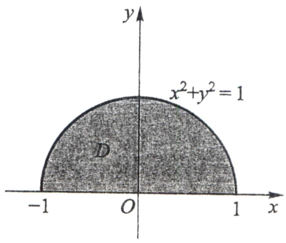


图 10-11

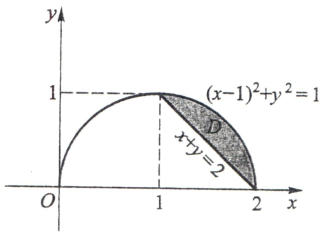


图 10-12

(5) 所给二次积分等于二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant \ln x,1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}\}$.又 D 可表示为 $\{(x,y)\mid \mathrm{e}^y\leqslant x\leqslant \mathrm{e},0\leqslant y\leqslant 1\}$(图 10 - 13),故

$$原式=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\mathrm{e}^y}^{\mathrm{e}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(6) 如图 10-14,将积分区域 D 表示为 $D_1\cup D_2$,其中 $D_1=\{(x,y)\mid \arcsin y\leqslant x\leqslant \pi-\arcsin y,0\leqslant y\leqslant 1\}$①,$D_2=\{(x,y)\mid -2\arcsin y\leqslant x\leqslant \pi,-1\leqslant y\leqslant 0\}$.于是

$$原式=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{-1}^0\mathrm{d}y\int_{-2\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

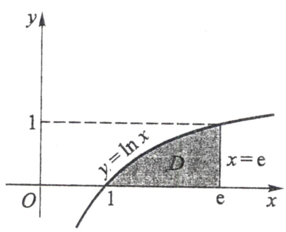


图 10-13

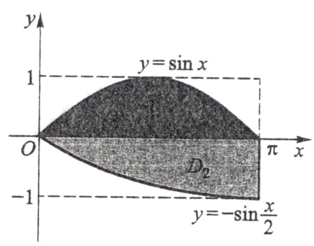


图 10-14

7. 设平面薄片所占的闭区域 D 由直线 $x+y=2$, $y=x$ 和 x 轴所围成,它的面密度 $\mu(x,y)=x^2+y^2$,求该薄片的质量.

解 D 如图 10-15 所示.所求薄片的质量

$$M=\iint\limits_D\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{2-y}(x^2+y^2)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left[\frac{1}{3}x^3+xy^2\right]_y^{2-y}\mathrm{d}y$$

① 当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时,$y=\sin x$ 的反函数是 $x=\arcsin y$.而当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 时,$\pi-x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.于是由 $y=\sin x=\sin(\pi-x)$ 可得 $\pi-x=\arcsin y$,从而得反函数 $x=\pi-\arcsin y$.

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}(2-y)^3 + 2y^2 - \frac{7}{3}y^3 \right] \mathrm{d}y$$

$$= \left[-\frac{1}{12}(2-y)^4 + \frac{2}{3}y^3 - \frac{7}{12}y^4 \right]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

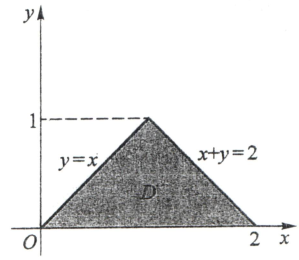


图 10-15

8. 计算由四个平面 $x=0, y=0, x=1, y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及 $2x+3y+z=6$ 截得的立体的体积.

解　此立体为一曲顶柱体,它的底是 xOy 面上的闭区域 $D=\{(x,y) \mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$,顶是曲面 $z=6-2x-3y$(图 10-16).因此所求立体的体积

$$V = \iint_D (6-2x-3y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 (6-2x-3y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{9}{2} - 2x \right) \mathrm{d}x = \frac{7}{2}.$$

9. 求由平面 $x=0, y=0, x+y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及抛物面 $x^2+y^2=6-z$ 截得的立体的体积.

解　此立体为一曲顶柱体,它的底是 xOy 面上的闭区域 $D=\{(x,y) \mid 0\leqslant y\leqslant 1-x, 0\leqslant x\leqslant 1\}$,顶是曲面 $z=6-(x^2+y^2)$(图 10-17),故体积

$$V = \iint_D [6-(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} (6-x^2-y^2)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \left[6(1-x) - x^2 + x^3 - \frac{1}{3}(1-x)^3 \right] \mathrm{d}x = \frac{17}{6}.$$

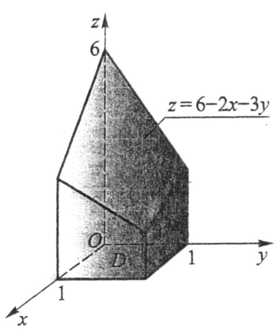


图 10-16

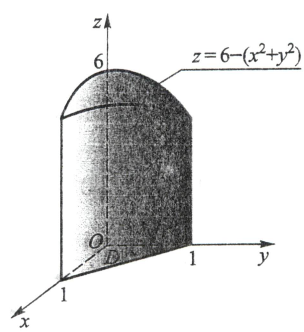


图 10-17

10. 求由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=6-2x^2-y^2$ 所围成的立体的体积.

解　由 $\begin{cases} z = x^2 + 2y^2, \\ z = 6 - 2x^2 - y^2 \end{cases}$ 消去 z,得 $x^2+y^2=2$,故所求立体在 xOy 面上的投影区域为

$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$(图 10-18).

所求立体的体积等于两个曲顶柱体体积的差:

$$V=\iint_D(6-2x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma-\iint_D(x^2+2y^2)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\iint_D(6-3x^2-3y^2)\mathrm{d}\sigma=\iint_D(6-3\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(6-3\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho=6\pi.$$

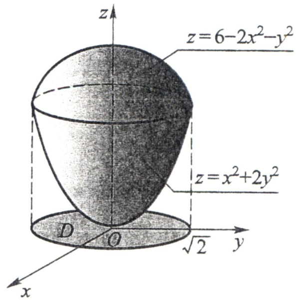


图 10-18

注 求类似于第 8,9,10 题中这样的立体体积时,并不一定要画出立体的准确图形,但一定要会求出立体在坐标面上的投影区域,并知道立体的底和顶的方程,这就需要复习和掌握第八章中学过的空间解析几何的有关知识.

11. 画出积分区域,把积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示为极坐标形式的二次积分,其中积分区域 D 是

(1) $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2\}(a>0)$;

(2) $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x\}$;

(3) $\{(x,y)\mid a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2\}$,其中 $0<a<b$;

(4) $\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1-x,0\leqslant x\leqslant 1\}$.

解 (1) 如图 10-19,在极坐标系中,$D=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant a,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$,故

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

(2) 如图 10-20,在极坐标系中,

$$D=\left\{(\rho,\theta)\,\middle|\,0\leqslant\rho\leqslant 2\cos\theta,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

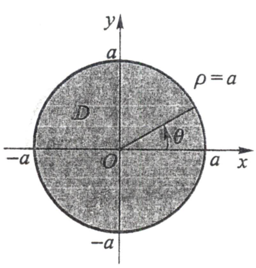


图 10-19

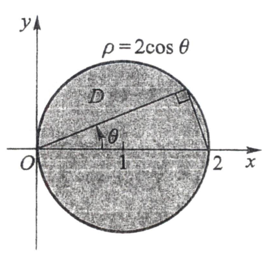


图 10-20

故

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

（3）如图 10-21，在极坐标系中，$D=\{(\rho,\theta)\mid a\leqslant\rho\leqslant b, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$，故

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

（4）D 如图 10-22 所示. 在极坐标系中，直线 $x+y=1$ 的方程为 $\rho=\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$，故 $D=\left\{(\rho,\theta)\,\middle|\, 0\leqslant\rho\leqslant\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}, 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right\}$. 于是

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

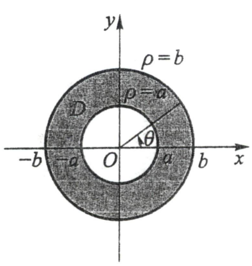


图 10-21

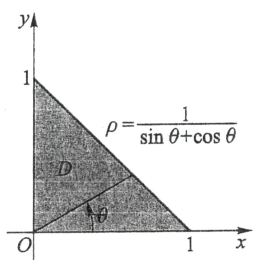


图 10-22

12. 化下列二次积分为极坐标形式的二次积分：

（1）$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)\,dy$；　　（2）$\int_0^2 dx\int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dy$；

（3）$\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$；　　（4）$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)\,dy$.

解　（1）如图 10-23，用直线 $y=x$ 将积分区域 D 分成 D_1，D_2 两部分：

$$D_1=\left\{(\rho,\theta)\,\middle|\, 0\leqslant\rho\leqslant\sec\theta, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\},$$

$$D_2=\left\{(\rho,\theta)\,\middle|\, 0\leqslant\rho\leqslant\csc\theta, \frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}.$$

于是

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sec\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\csc\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

(2) D 如图 10-24 所示.在极坐标系中,直线 $x=2$,射线 $y=x$ 和 $y=\sqrt{3}x(x\geqslant 0)$ 的方程分别是 $\rho=2\sec\theta,\theta=\frac{\pi}{4}$和 $\theta=\frac{\pi}{3}$.因此

$$D=\left\{(\rho,\theta)\ \middle|\ 0\leqslant\rho\leqslant 2\sec\theta,\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}\right\}.$$

又 $f(\sqrt{x^2+y^2})=f(\rho)$, 于是

$$\text{原式}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sec\theta}f(\rho)\rho\mathrm{d}\rho.$$

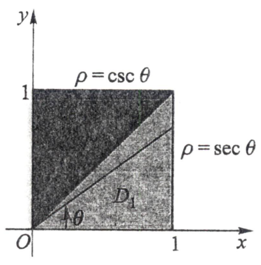


图 10-23

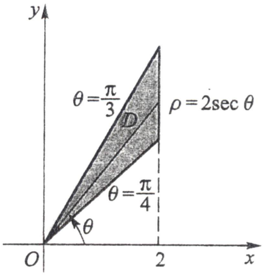


图 10-24

(3) D 如图 10-25 所示.在极坐标系中,直线 $y=1-x$ 的方程为 $\rho=\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$,圆 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的方程为 $\rho=1$,因此

$$D=\left\{(\rho,\theta)\ \middle|\ \frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\leqslant\rho\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

于是

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

(4) D 如图 10-26 所示.在极坐标系中,直线 $x=1$ 的方程是 $\rho=\sec\theta$;抛物线$y=x^2$ 的方程是 $\rho\sin\theta=\rho^2\cos^2\theta$,即 $\rho=\tan\theta\sec\theta$;从原点到两者的交点的射线是 $\theta=\frac{\pi}{4}$.故

$$D=\left\{(\rho,\theta)\ \middle|\ \tan\theta\sec\theta\leqslant\rho\leqslant\sec\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\},$$

于是

$$原式 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\tan\theta\sec\theta}^{\sec\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\, d\rho.$$

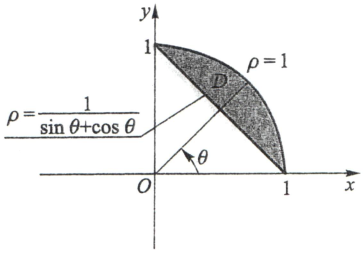


图 10-25

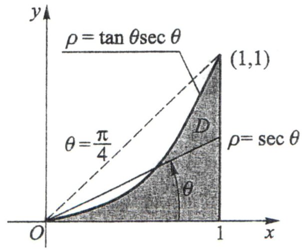


图 10-26

13. 把下列积分化为极坐标形式,并计算积分值:

(1) $\int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2+y^2)dy$;　　(2) $\int_0^a dx \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,dy$;

(3) $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} dy$;　　(4) $\int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2)dx$.

解　(1) 积分区域 D 如图 10-27 所示.在极坐标系中,

$$D=\left\{(\rho,\theta)\,\middle|\,0\leqslant\rho\leqslant 2a\cos\theta, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

于是

$$原式 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} \rho^2\cdot\rho\, d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{2a\cos\theta} d\theta$$

$$= 4a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta = 4a^4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi a^4.$$

注　在多元函数积分学的计算题中,常会遇到定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta d\theta$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta d\theta$. 因此记住如下的结果是有益的:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta d\theta\left(= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta d\theta\right) = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为正偶数}, \\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}, & n\text{ 为大于 1 的正奇数}. \end{cases}$$

(2) 如图 10-28,在极坐标系中,

$$D=\left\{(\rho,\theta)\,\middle|\,0\leqslant\rho\leqslant a\sec\theta, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}.$$

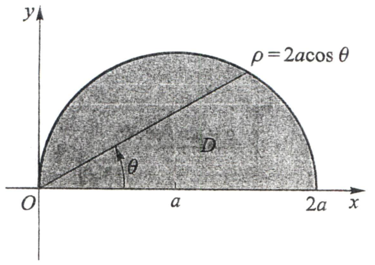


图 10-27

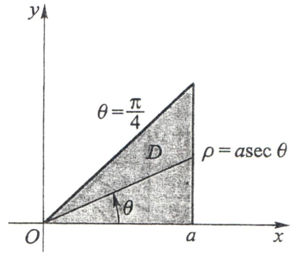


图 10-28

于是

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sec\theta}\rho\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho=\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{a^3}{6}\left[\sec\theta\tan\theta+\ln(\sec\theta+\tan\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{a^3}{6}\left[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)\right].$$

(3) 积分区域 D 如图 10-29 所示.在极坐标系中,抛物线 $y=x^2$ 的方程是 $\rho\sin\theta=\rho^2\cos^2\theta$,即 $\rho=\tan\theta\sec\theta$;射线 $y=x(x\geqslant 0)$ 的方程是 $\theta=\frac{\pi}{4}$,故

$$D=\left\{(\rho,\theta)\ \middle|\ 0\leqslant\rho\leqslant\tan\theta\sec\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}.$$

于是

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\tan\theta\sec\theta}\frac{1}{\rho}\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan\theta\sec\theta\,\mathrm{d}\theta=\left[\sec\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}-1.$$

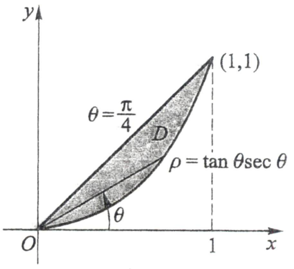


图 10-29

(4) 积分区域

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\sqrt{a^2-y^2},0\leqslant y\leqslant a\}$$

$$=\left\{(\rho,\theta)\ \middle|\ 0\leqslant\rho\leqslant a,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

故

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a}\rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a^4}{4}=\frac{\pi}{8}a^4.$$

14. 利用极坐标计算下列各题:

(1) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 所围成的闭区域;

(2) $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域；

(3) $\iint\limits_D \arctan\dfrac{y}{x}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$，$x^2+y^2=1$ 及直线 $y=0$，$y=x$ 所围成的在第一象限内的闭区域.

解　(1) 在极坐标系中，积分区域 $D=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant 2,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$，于是

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D \mathrm{e}^{\rho^2}\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\mathrm{e}^{\rho^2}\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho=2\pi\cdot\left[\frac{\mathrm{e}^{\rho^2}}{2}\right]_0^2=\pi(\mathrm{e}^4-1).$$

(2) 在极坐标系中，积分区域 $D=\left\{(\rho,\theta)\,\middle|\,0\leqslant\rho\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right\}$，于是

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma&=\iint\limits_D \ln(1+\rho^2)\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\ln(1+\rho^2)\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\\&=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+\rho^2)\mathrm{d}(1+\rho^2)\\&=\frac{\pi}{4}\left[(1+\rho^2)\ln(1+\rho^2)\Big|_0^1-\int_0^1 2\rho\,\mathrm{d}\rho\right]\\&=\frac{\pi}{4}(2\ln 2-1).\end{aligned}$$

(3) 在极坐标系中，积分区域 $D=\left\{(\rho,\theta)\,\middle|\,1\leqslant\rho\leqslant 2,0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right\}$，$\arctan\dfrac{y}{x}=\theta$，于是

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}\sigma&=\iint\limits_D \theta\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta\,\mathrm{d}\theta\int_1^2\rho\,\mathrm{d}\rho\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{2}(2^2-1)=\frac{3}{64}\pi^2.\end{aligned}$$

15. 选用适当的坐标计算下列各题：

(1) $\iint\limits_D \dfrac{x^2}{y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由直线 $x=2$，$y=x$ 及曲线 $xy=1$ 所围成的闭区域；

(2) $\iint\limits_D \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域；

(3) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由直线 $y=x$，$y=x+a$，$y=a$，$y=3a(a>0)$ 所围成的闭区域；

(4) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$，其中 D 是圆环形闭区域 $\{(x,y)\mid a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2\}$；

(5) $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,d\sigma$，其中 D 是圆形闭区域 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant ax\}$ $(a>0)$.

解 (1) D 如图 10-30 所示.根据 D 的形状，选用直角坐标较宜.

$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{1}{x}\leqslant y\leqslant x,1\leqslant x\leqslant 2\right\}$，故

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}d\sigma=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy=\int_1^2(-x+x^3)\,dx=\frac{9}{4}.$$

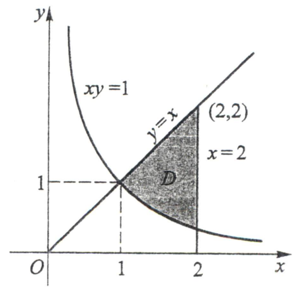


图 10-30

(2) 根据积分区域 D 的形状和被积函数的特点，选用极坐标为宜.$D=\left\{(\rho,\theta)\,\middle|\,0\leqslant\rho\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$，故

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\iint\limits_D\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\rho\,d\rho\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\rho\,d\rho\\
&=\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^1\frac{1-\rho^2}{\sqrt{1-\rho^4}}\rho\,d\rho=\frac{\pi}{2}\left(\int_0^1\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^4}}d\rho-\int_0^1\frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^4}}d\rho\right)\\
&=\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-\rho^4}}d\rho^2+\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-\rho^4}}d(1-\rho^4)\right]\\
&=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\arcsin\rho^2\Big|_0^1+\frac{1}{2}\sqrt{1-\rho^4}\Big|_0^1\right)\\
&=\frac{\pi}{8}(\pi-2).
\end{aligned}$$

(3) D 如图 10-31 所示.选用直角坐标为宜.又根据 D 的边界曲线的情况，宜采用先对 x、后对 y 的积分次序.于是

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D(x^2+y^2)\,d\sigma&=\int_a^{3a}dy\int_{y-a}^{y}(x^2+y^2)\,dx\\
&=\int_a^{3a}\left(2ay^2-a^2y+\frac{a^3}{3}\right)dy=14a^4.
\end{aligned}$$

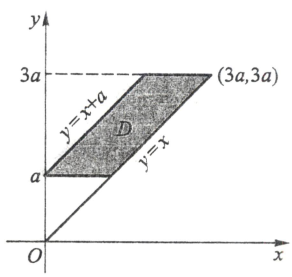


图 10-31

(4) 本题显然适于用极坐标计算.$D=\{(\rho,\theta)\mid a\leqslant\rho\leqslant b,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$.

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma&=\iint\limits_D\rho\cdot\rho\,d\rho\,d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_a^b\rho^2\,d\rho\\
&=2\pi\cdot\frac{1}{3}(b^3-a^3)=\frac{2}{3}\pi(b^3-a^3).
\end{aligned}$$

（5）利用极坐标，区域 $D=\left\{(\rho,\theta)\middle|0\leqslant\rho\leqslant a\cos\theta,-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right\}$，得

$$\begin{aligned}\iint_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{a^2-\rho^2}\cdot\rho\mathrm{d}\rho\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{3}(a^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{a\cos\theta}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-|\sin\theta|^3)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{2a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{2a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)=\frac{3\pi-4}{9}a^3.\end{aligned}$$

16. 设平面薄片所占的闭区域 D 由螺线 $\rho=2\theta$ 上一段弧 $\left(0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 与直线 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 所围成，它的面密度为 $\mu(x,y)=x^2+y^2$. 求这薄片的质量.

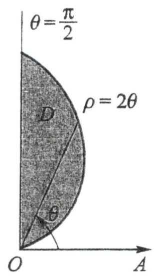


图 10-32

解　薄片的质量为它的面密度在薄片所占区域 D 上的二重积分（图 10-32），即

$$\begin{aligned}M&=\iint_D\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma\\&=\iint_D\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\theta}\rho^3\mathrm{d}\rho\\&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^4\mathrm{d}\theta=\frac{\pi^5}{40}.\end{aligned}$$

17. 求由平面 $y=0,y=kx(k>0),z=0$ 以及球心在原点、半径为 R 的上半球面所围成的在第 I 卦限内的立体的体积.

解　如图 10-33，记 $\alpha=\arctan k$，

$$\begin{aligned}V&=\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D\sqrt{R^2-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\alpha}\mathrm{d}\theta\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho=\alpha\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\mathrm{d}(R^2-\rho^2)\\&=\frac{\alpha R^3}{3}=\frac{R^3}{3}\arctan k.\end{aligned}$$

18. 计算以 xOy 面上的圆周 $x^2+y^2=ax$ 围成的闭区域为底，而以曲面 $z=x^2+y^2$ 为顶的曲顶柱体的体积.

解 如图 10-34,设

$$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant \sqrt{ax-x^2},0\leqslant x\leqslant a\}$$
$$=\left\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant \rho\leqslant a\cos\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

由于曲顶柱体关于 zOx 面对称,故

$$V=2\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=2\iint\limits_{D_1}\rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\rho^3\mathrm{d}\rho$$
$$=\frac{a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{a^4}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{32}\pi a^4.$$

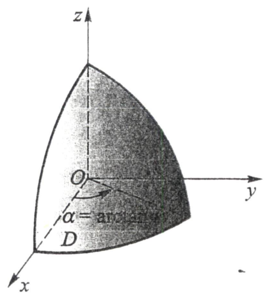


图 10-33

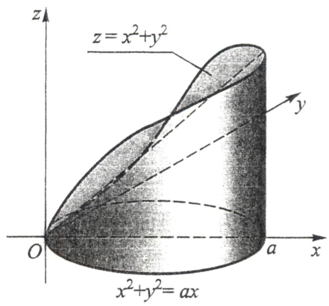


图 10-34

注 在计算立体体积时,要注意充分利用图形的对称性,这样既能简化运算,也能减少错误.

*19. 作适当的变换,计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D(x-y)^2\sin^2(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是平行四边形闭区域,它的四个顶点是 $(\pi,0)$, $(2\pi,\pi)$, $(\pi,2\pi)$ 和 $(0,\pi)$;

(2) $\iint\limits_D x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由两条双曲线 $xy=1$ 和 $xy=2$, 直线 $y=x$ 和 $y=4x$ 所围成的在第一象限内的闭区域;

(3) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由 x 轴、y 轴和直线 $x+y=1$ 所围成的闭区域;

(4) $\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$.

解 (1) 令 $u=x-y, v=x+y$, 则 $x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{v-u}{2}$. 在这变换下, D 的边界 $x-y=-\pi$,

$x+y=\pi, x-y=\pi, x+y=3\pi$ 依次与 $u=-\pi, v=\pi, u=\pi, v=3\pi$ 对应.后者构成 uOv 面上与 D 对应的闭区域 D'的边界.于是

$$D'=\{(u,v)\mid -\pi\leqslant u\leqslant \pi, \pi\leqslant v\leqslant 3\pi\}(图\ 10-35).$$

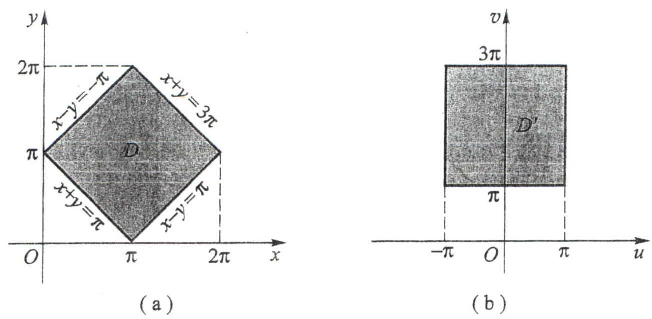


图 10-35

又

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2},$$

因此

$$\begin{aligned}\iint_D (x-y)^2\sin^2(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_{D'}u^2\sin^2 v\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}u^2\mathrm{d}u\int_{\pi}^{3\pi}\sin^2 v\,\mathrm{d}v\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi}\cdot\left[\frac{v}{2}-\frac{\sin 2v}{4}\right]_{\pi}^{3\pi}=\frac{\pi^4}{3}.\end{aligned}$$

（2）令 $u=xy, v=\dfrac{y}{x}$,则 $x=\sqrt{\dfrac{u}{v}}, y=\sqrt{uv}$.在这变换下,$D$ 的边界 $xy=1, y=x, xy=2, y=4x$ 依次与 $u=1, v=1, u=2, v=4$ 对应,后者构成 uOv 面上与 D 对应的闭区域 D'的边界.于是 $D'=\{(u,v)\mid 1\leqslant u\leqslant 2, 1\leqslant v\leqslant 4\}$(图 10-36).又

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2\sqrt{uv}} & -\dfrac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v^3}}\\ \dfrac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \dfrac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}}\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{v}\right)=\frac{1}{2v}.$$

因此

$$\iint\limits_{D} x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'} u^2\cdot\frac{1}{2v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_1^2 u^2\mathrm{d}u\int_1^4\frac{1}{v}\mathrm{d}v$$

$$=\frac{7}{3}\ln 2.$$

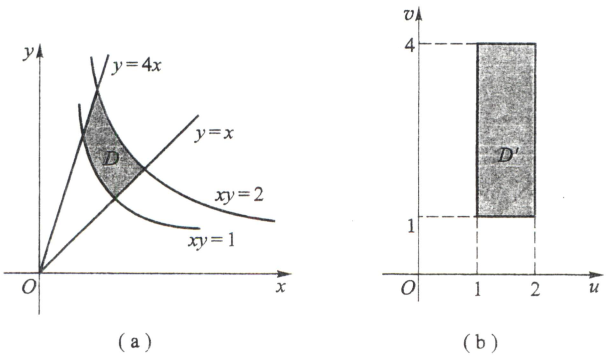


图 10-36

(3) 令 $u=x+y,v=y$,即 $x=u-v,y=v$,则在这变换下,D 的边界 $y=0,x=0,x+y=1$ 依次与 $v=0,u=v,u=1$ 对应.后者构成 uOv 面上与 D 对应的闭区域 D'的边界,于是

$$D'=\{(u,v)\mid 0\leqslant v\leqslant u,0\leqslant u\leqslant 1\}.$$

又
$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{vmatrix}=1.$$

因此
$$\iint\limits_{D}\mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'}\mathrm{e}^{\frac{v}{u}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^u\mathrm{e}^{\frac{v}{u}}\mathrm{d}v=\int_0^1 u(\mathrm{e}-1)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1).$$

(4) 作广义极坐标变换$\begin{cases}x=a\rho\cos\theta,\\y=b\rho\sin\theta\end{cases}$ $(a>0,b>0,\rho\geqslant 0,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$.在此变换下,与 D 对应的闭区域为 $D'=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$.又

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}=\begin{vmatrix}a\cos\theta & -a\rho\sin\theta\\b\sin\theta & b\rho\cos\theta\end{vmatrix}=ab\rho.$$

故
$$\iint\limits_{D}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'}\rho^2\cdot ab\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{1}{2}ab\pi.$$

***20.** 求由下列曲线所围成的闭区域 D 的面积:

(1) D 是由曲线 $xy=4,xy=8,xy^3=5,xy^3=15$ 所围成的第一象限部分的闭区域;

(2) D 是由曲线 $y=x^3,y=4x^3,x=y^3,x=4y^3$ 所围成的第一象限部分的闭区域.

解 (1) 令 $u=xy,v=xy^3(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$,则 $x=\sqrt{\frac{u^3}{v}},y=\sqrt{\frac{v}{u}}$.在这变换下,与 D 对

应的 uOv 面上的闭区域为 $D'=\{(u,v)\mid 4\leqslant u\leqslant 8,5\leqslant v\leqslant 15\}$.

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{3}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u^3}{v^3}}\\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u^3}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{uv}}\end{vmatrix}=\frac{1}{2v},$$

于是所求面积为

$$A=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'}\frac{1}{2v}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_4^8\mathrm{d}u\int_5^{15}\frac{1}{v}\mathrm{d}v=2\ln 3.$$

（2）令 $u=\frac{y}{x^3},v=\frac{x}{y^3}(x>0,y>0)$，则 $x=u^{-\frac{3}{8}}v^{-\frac{1}{8}},y=u^{-\frac{1}{8}}v^{-\frac{3}{8}}$.在这变换下，与 D 对应的 uOv 面上的闭区域为 $D'=\{(u,v)\mid 1\leqslant u\leqslant 4,1\leqslant v\leqslant 4\}$.又

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}-\frac{3}{8}u^{-\frac{11}{8}}v^{-\frac{1}{8}} & -\frac{1}{8}u^{-\frac{3}{8}}v^{-\frac{9}{8}}\\ -\frac{1}{8}u^{-\frac{9}{8}}v^{-\frac{3}{8}} & -\frac{3}{8}u^{-\frac{1}{8}}v^{-\frac{11}{8}}\end{vmatrix}=\frac{1}{8}u^{-\frac{3}{2}}v^{-\frac{3}{2}}.$$

于是所求面积为

$$A=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'}\frac{1}{8}u^{-\frac{3}{2}}v^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{8}\int_1^4 u^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}u\int_1^4 v^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}v$$
$$=\frac{1}{8}([-2u^{-\frac{1}{2}}]_1^4)^2=\frac{1}{8}.$$

***21.** 设闭区域 D 是由直线 $x+y=1,x=0,y=0$ 所围成，求证

$$\iint\limits_D\cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\sin 1.$$

证　令 $u=x-y,v=x+y$，则 $x=\frac{u+v}{2},y=\frac{v-u}{2}$，在此变换下，$D$ 的边界 $x+y=1,x=0,y=0$ 依次与 $v=1,u+v=0$ 和 $v-u=0$ 对应.后者构成 uOv 面上与 D 对应的闭区域 D' 的边界（图 10-37）.于是

$$D'=\{(u,v)\mid -v\leqslant u\leqslant v,0\leqslant v\leqslant 1\}.$$

又

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2},$$

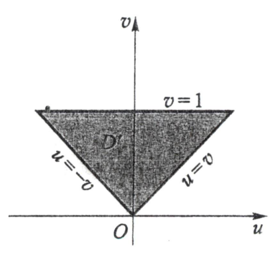


图 10-37

因此有

$$\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'}\cos\frac{u}{v}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}v\int_{-v}^{v}\cos\frac{u}{v}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^1 v\left[\sin\frac{u}{v}\right]_{-v}^{v}\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^1 v\sin 1\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\sin 1.$$

证毕.

*22. 选取适当的变换,证明下列等式:

(1) $\iint\limits_D f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u$,其中闭区域 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$;

(2) $\iint\limits_D f(ax+by+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)\mathrm{d}u$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$,且 $a^2+b^2\neq 0$.

证 (1) 闭区域 D 的边界为 $x+y=-1,x+y=1,x-y=-1,x-y=1$,故令 $u=x+y,v=x-y$,即 $x=\frac{u+v}{2},y=\frac{u-v}{2}$.在此变换下,$D$ 变为 uOv 面上的闭区域

$$D'=\{(u,v)\mid -1\leqslant u\leqslant 1,\ -1\leqslant v\leqslant 1\}.$$

又

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2},$$

于是

$$\iint_D f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'}f(u)\left|-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u\int_{-1}^{1}\mathrm{d}v=\int_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u.$$

证毕.

(2) 比较等式的两端可知需作变换

$$u\sqrt{a^2+b^2}=ax+by,\quad 即\quad u=\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

再考虑到 D 的边界曲线为 $x^2+y^2=1$,故令 $v=\frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}}$.这样就有 $u^2+v^2=1$,即 D 的边界曲线 $x^2+y^2=1$ 变为 uOv 面上的圆 $u^2+v^2=1$.于是与 D 对应的闭区域为

$$D'=\{(u,v)\mid u^2+v^2\leqslant 1\}.$$

又由 u,v 的表达式可解得

$$x=\frac{au+bv}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad y=\frac{bu-av}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

因此雅可比式

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{vmatrix}=-1,$$

于是

$$\begin{aligned}\iint_D f(ax+by+c)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_{D'}f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)\,|-1|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\&=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}u\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)\,\mathrm{d}v\\&=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

证毕.

习题 10-3　三重积分

1. 化三重积分 $I=\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 为三次积分,其中积分区域 Ω 分别是

(1) 由双曲抛物面 $xy=z$ 及平面 $x+y-1=0,z=0$ 所围成的闭区域;

(2) 由曲面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=1$ 所围成的闭区域;

(3) 由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=2-x^2$ 所围成的闭区域;

(4) 由曲面 $cz=xy(c>0)$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$ 所围成的在第Ⅰ卦限内的闭区域.

解　(1) Ω 的顶 $z=xy$ 和底面 $z=0$ 的交线为 x 轴和 y 轴,故 Ω 在 xOy 面上的投影区域由 x 轴、y 轴和直线 $x+y-1=0$ 所围成.于是 Ω 可用不等式表示为

$$0\leqslant z\leqslant xy,\quad 0\leqslant y\leqslant 1-x,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

因此

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{xy}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

(2) 由 $z=x^2+y^2$ 和 $z=1$ 得 $x^2+y^2=1$,所以 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $x^2+y^2\leqslant 1$ (图 10-38). Ω 可用不等式表示为

$$x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1,\quad -\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2},\quad -1\leqslant x\leqslant 1,$$

因此

$$I=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{1}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

(3) 由$\begin{cases}z=x^2+2y^2,\\ z=2-x^2\end{cases}$消去 z,得 $x^2+y^2=1$.故 Ω 在 xOy 面上的投影区域为$x^2+y^2\leqslant 1$(图 10-39).于是 Ω 可用不等式表示为

$$x^2+2y^2\leqslant z\leqslant 2-x^2,\quad -\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2},\quad -1\leqslant x\leqslant 1,$$

因此

$$I=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{x^2+2y^2}^{2-x^2}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

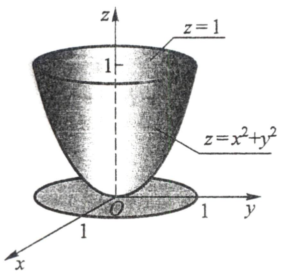


图 10-38

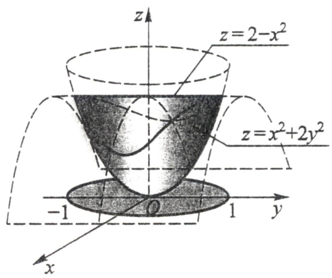


图 10-39

(4) 显然 Ω 在 xOy 面上的投影区域由椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$和 x 轴、y 轴所围成,Ω 的顶为 $cz=xy$,底为 $z=0$(图 10-40).故 Ω 可用不等式表示为

$$0\leqslant z\leqslant\frac{xy}{c},\quad 0\leqslant y\leqslant b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},\quad 0\leqslant x\leqslant a,$$

因此

$$I=\int_{0}^{a}\mathrm{d}x\int_{0}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\mathrm{d}y\int_{0}^{\frac{xy}{c}}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

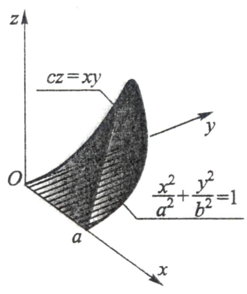


图 10-40

注 本题中的 4 个小题,除第 2 小题外,Ω 的图形都不易画出.但是,为确定三次积分的积分限,并非必须画出 Ω 的准确图形.重要的是要会求出 Ω 在坐标面上的投影区域,以及会定出 Ω 的顶和底面,而做到这点,只需掌握常见曲面的方程和图形特点,并具备一定的空间想象能力即可.本章题解中配了较多插

图，请读者注意观察，这对培养空间想象能力是有好处的.

2. 设有一物体占有空间闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 1\}$，在点 (x,y,z) 处的密度为 $\rho(x,y,z)=x+y+z$，计算该物体的质量.

解 $$M=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1(x+y+z)\,\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\left(x+y+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}y=\int_0^1\left(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}.$$

3. 如果三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 的被积函数 $f(x,y,z)$ 是三个函数 $f_1(x)$，$f_2(y)$，$f_3(z)$ 的乘积，即 $f(x,y,z)=f_1(x)f_2(y)f_3(z)$，积分区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d,l\leqslant z\leqslant m\}$，证明这个三重积分等于三个定积分的乘积，即
$$\iiint\limits_{\Omega}f_1(x)f_2(y)f_3(z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x\int_c^d f_2(y)\,\mathrm{d}y\int_l^m f_3(z)\,\mathrm{d}z.$$

证
$$\iiint\limits_{\Omega}f_1(x)f_2(y)f_3(z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\int_a^b\left\{\int_c^d\left[\int_l^m f_1(x)f_2(y)f_3(z)\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b\left\{\int_c^d\left[f_1(x)f_2(y)\cdot\int_l^m f_3(z)\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b\left\{\left[\int_l^m f_3(z)\,\mathrm{d}z\right]\cdot\left[\int_c^d f_1(x)f_2(y)\,\mathrm{d}y\right]\right\}\mathrm{d}x$$
$$=\left[\int_l^m f_3(z)\,\mathrm{d}z\right]\cdot\int_a^b\left[f_1(x)\cdot\int_c^d f_2(y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$
$$=\int_l^m f_3(z)\,\mathrm{d}z\cdot\int_c^d f_2(y)\,\mathrm{d}y\cdot\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x=\text{右端}.$$

4. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}xy^2z^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲面 $z=xy$，平面 $y=x,x=1$ 和 $z=0$ 所围成的闭区域.

解 如图 10-41，Ω 可用不等式表示为
$$0\leqslant z\leqslant xy,\quad 0\leqslant y\leqslant x,\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$
因此
$$\iiint\limits_{\Omega}xy^2z^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^x y^2\,\mathrm{d}y\int_0^{xy}z^3\,\mathrm{d}z$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^x x^4y^6\,\mathrm{d}y=\frac{1}{28}\int_0^1 x^{12}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{364}.$$

5. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$，其中 Ω 为平面 $x=0,y=0,z=0,x+y+z=1$ 所围成的四面体.

解 $\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant z\leqslant 1-x-y,0\leqslant y\leqslant 1-x,0\leqslant x\leqslant 1\}$(图 10-42),于是

$$\iiint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\frac{\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\left[\frac{-1}{2(1+x+y+z)^2}\right]_0^{1-x-y}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\left[-\frac{1}{8}+\frac{1}{2(1+x+y)^2}\right]\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left[-\frac{y}{8}-\frac{1}{2(1+x+y)}\right]_0^{1-x}\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1\left[\frac{1-x}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2(1+x)}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right).$$

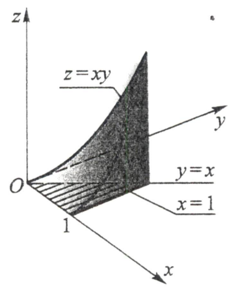


图 10-41

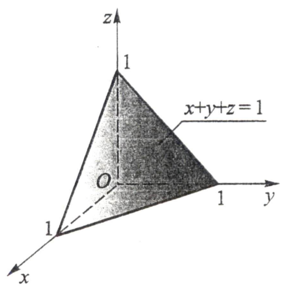


图 10-42

6. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及三个坐标面所围成的在第 I 卦限内的闭区域.

解法一 利用直角坐标计算.由于

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant z\leqslant\sqrt{1-x^2-y^2},0\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2},0\leqslant x\leqslant 1\},$$

故

$$\iiint_{\Omega}xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}y\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}z\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}y\cdot\frac{1-x^2-y^2}{2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}(1-x^2)-\frac{y^4}{4}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^1 x(1-x^2)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{48}.$$

*解法二　利用球面坐标计算，由于

$$\Omega=\left\{(r,\varphi,\theta)\,\middle|\,0\leqslant r\leqslant 1,0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

故

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega}xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\iiint_{\Omega}(r^3\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta)\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^5\mathrm{d}r\\&=\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left[\frac{\sin^4\varphi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left[\frac{r^6}{6}\right]_0^1\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{48}.\end{aligned}$$

注　比较本题的两种解法，显然用球面坐标计算要简便得多，这是由本题的积分区域 Ω 的形状所决定的.一般说来，凡是 Ω 由球面、圆锥面等曲面围成时，用球面坐标计算三重积分较为方便.

7. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由平面 $z=0,z=y,y=1$ 以及抛物柱面 $y=x^2$ 所围成的闭区域.

解法一　容易看出，Ω 的顶为平面 $z=y$，底为平面 $z=0$，Ω 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 由 $y=1$ 和 $y=x^2$ 所围成.故 Ω 可用不等式表示为

$$0\leqslant z\leqslant y,\quad x^2\leqslant y\leqslant 1,\quad -1\leqslant x\leqslant 1.$$

因此

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega}xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_{-1}^{1}x\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}\mathrm{d}y\int_0^y z\mathrm{d}z\\&=\int_{-1}^{1}x\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}\frac{y^2}{2}\mathrm{d}y=\frac{1}{6}\int_{-1}^{1}x(1-x^6)\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$

解法二　由于积分区域 Ω 关于 yOz 面对称（即若点 $(x,y,z)\in\Omega$，则 $(-x,y,z)$ 也属于 Ω），且被积函数 xz 关于 x 是奇函数，因此

$$\iiint_{\Omega}xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

8. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由锥面 $z=\dfrac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=h(R>0,h>0)$ 所围成的闭区域.

解法一　由 $z=\dfrac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=h$ 消去 z，得

$$x^2+y^2=R^2,$$

故 Ω 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$(图 10-43),

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\left|\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant h,(x,y)\in D_{xy}\right.\right\}.$$

于是

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{h}z\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\left[h^2-\frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\left[h^2\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{h^2}{R^2}\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\\&=\frac{h^2}{2}\cdot\pi R^2-\frac{h^2}{2R^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{1}{4}\pi R^2h^2.\end{aligned}$$

解法二 用过点 $(0,0,z)$、平行于 xOy 面的平面截 Ω 得平面圆域 D_z,其半径为 $\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{Rz}{h}$,面积为 $\dfrac{\pi R^2}{h^2}z^2$(图 10-43).

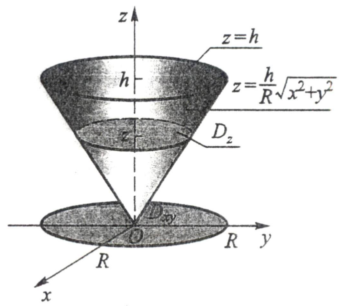


图 10-43

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D_z,0\leqslant z\leqslant h\}.$$

于是

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_0^h z\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^h z\cdot\frac{\pi R^2}{h^2}z^2\mathrm{d}z\\&=\frac{\pi R^2}{4h^2}\cdot h^4=\frac{1}{4}\pi R^2h^2.\end{aligned}$$

注 解法二通俗地称为“先重后单”法,即先在 D_z 上作关于 x、y 的二重积分,然后再对 z 作定积分.如果在 D_z 上关于 x 和 y 的二重积分易于计算,特别地,如果被积函数与 x,y 无关,且 D_z 的面积容易表达为 z 的函数,则采用这种方法比较简便.

***解法三** 用球面坐标进行计算.在球面坐标系中,圆锥面 $z=\dfrac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 的方程为 $\varphi=\alpha\left(=\arctan\dfrac{R}{h}\right)$,平面 $z=h$ 的方程为 $r=h\sec\varphi$,因此 Ω 可表示为

$$0\leqslant r\leqslant h\sec\varphi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\alpha,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

于是

$$\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega} r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\alpha}\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{h\sec\varphi} r^3\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi\int_0^{\alpha}\frac{h^4\sin\varphi}{4\cos^3\varphi}\mathrm{d}\varphi = -\frac{\pi h^4}{2}\int_0^{\alpha}\frac{\mathrm{d}(\cos\varphi)}{\cos^3\varphi}$$

$$= \frac{\pi h^4}{4}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\right)\left(\text{代入 } \alpha = \arctan\frac{R}{h}\right)$$

$$= \frac{\pi h^4}{4}\left(\frac{R^2+h^2}{h^2}-1\right) = \frac{1}{4}\pi R^2h^2.$$

9. 利用柱面坐标计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域；

(2) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由曲面 $x^2+y^2=2z$ 及平面 $z=2$ 所围成的闭区域.

解　(1) 由 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 和 $z=x^2+y^2$ 消去 z，得

$$(x^2+y^2)^2 = 2-(x^2+y^2)\text{，即 } x^2+y^2=1.$$

从而知 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$（图 10-44）.利用柱面坐标，$\Omega$ 可表示为

$$\rho^2\leqslant z\leqslant\sqrt{2-\rho^2},\quad 0\leqslant\rho\leqslant 1,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

于是

$$\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} z\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\,\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} z\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho(2-\rho^2-\rho^4)\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\pi\left[\rho^2-\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^6}{6}\right]_0^1 = \frac{7}{12}\pi.$$

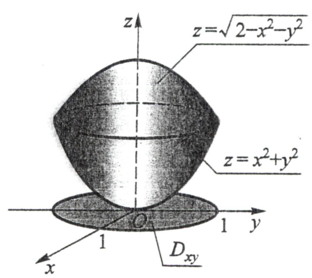


图 10-44

(2) 由 $x^2+y^2=2z$ 及 $z=2$ 消去 z 得 $x^2+y^2=4$，从而知 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$.利用柱面坐标，$\Omega$ 可表示为

$$\frac{\rho^2}{2}\leqslant z\leqslant 2,\quad 0\leqslant\rho\leqslant 2,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

于是

$$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^3\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^2\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 \left(2 - \frac{\rho^2}{2}\right) d\rho = 2\pi\left[\frac{\rho^4}{2} - \frac{\rho^6}{12}\right]_0^2 = \frac{16}{3}\pi.$$

*10. 利用球面坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$, 其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域;

(2) $\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}V$, 其中闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+(z-a)^2\leqslant a^2, x^2+y^2\leqslant z^2\}$.

解 (1) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega}r^2\cdot r^2\sin\varphi \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi[-\cos\varphi]_0^{\pi}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4}{5}\pi.$$

(2) 在球面坐标系中,不等式 $x^2+y^2+(z-a)^2\leqslant a^2$,即 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2az$,变为 $r^2\leqslant 2ar\cos\varphi$,即 $r\leqslant 2a\cos\varphi$; $x^2+y^2\leqslant z^2$ 变为 $r^2\sin^2\varphi\leqslant r^2\cos^2\varphi$,即 $\tan\varphi\leqslant 1$, 亦即 $\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$.因此 Ω 可表示为

$$0\leqslant r\leqslant 2a\cos\varphi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},$$

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \text{ (图 10 - 45)}.$$

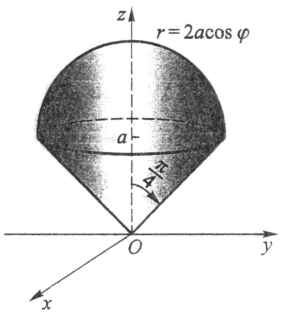


图 10-45

于是

$$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega}r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^3\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin\varphi\cdot\frac{1}{4}(2a\cos\varphi)^4\mathrm{d}\varphi$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}4a^4\cos^5\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$= 8\pi a^4\left[-\frac{\cos^6\varphi}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{7}{6}\pi a^4.$$

11. 选用适当的坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_{\Omega}xy\mathrm{d}V$, 其中 Ω 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=1, z=0, x=0, y=0$ 所围成的在第 I 卦限内的闭区域;

*(2) $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}V$, 其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=z$ 所围成的闭区域;

(3) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由曲面 $4z^2=25(x^2+y^2)$ 及平面 $z=5$ 所围成的闭区域；

*(4) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}V$，其中闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid 0<a\leqslant\sqrt{x^2+y^2+z^2}\leqslant A, z\geqslant 0\}$；

(5) $\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由抛物面 $x=y^2+z^2$ 与圆锥面 $x=2-\sqrt{y^2+z^2}$ 所围成的闭区域.

解　(1) 利用柱面坐标计算. Ω 可表示为

$$0\leqslant z\leqslant 1,\quad 0\leqslant \rho\leqslant 1,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}xy\mathrm{d}V&=\iiint\limits_{\Omega}\rho^2\sin\theta\cos\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho\int_0^1\mathrm{d}z\\&=\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1\left[z\right]_0^1=\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

*(2) 在球面坐标系中，球面 $x^2+y^2+z^2=z$ 的方程为 $r^2=r\cos\varphi$，即 $r=\cos\varphi$. Ω 可表示为

$$0\leqslant r\leqslant\cos\varphi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\ (\text{图 } 10-46).$$

于是

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}V&=\iiint\limits_{\Omega}r\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos\varphi}r^3\mathrm{d}r\\&=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cdot\frac{\cos^4\varphi}{4}\mathrm{d}\varphi\\&=-\frac{\pi}{2}\left[\frac{\cos^5\varphi}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{10}.\end{aligned}$$

(3) 利用柱面坐标计算. Ω 可表示为

$$\frac{5}{2}\rho\leqslant z\leqslant 5,\quad 0\leqslant\rho\leqslant 2,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\ (\text{图 } 10-47),$$

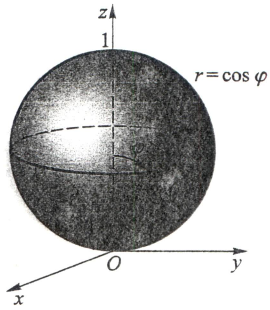


图 10-46

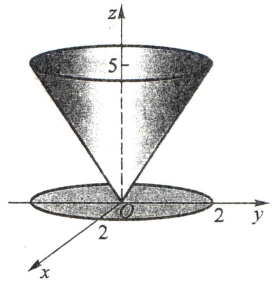


图 10-47

于是

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^3\mathrm{d}\rho\int_{\frac{5}{2}\rho}^5\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^3\left(5-\frac{5}{2}\rho\right)\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\left[\frac{5}{4}\rho^4-\frac{1}{2}\rho^5\right]_0^2=8\pi.$$

*(4) 在球面坐标系中,Ω 可表示为

$$a\leqslant r\leqslant A,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

于是

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}r^2\sin^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi\int_a^A r^4\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{A^5-a^5}{5}\right)=\frac{4\pi}{15}(A^5-a^5).$$

(5) 把闭区域 Ω 投影到 yOz 面上,得半径为 1 的圆形闭区域

$$D_{yz}=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\},$$

故闭区域 Ω 在柱面坐标系下可用不等式

$$\rho^2\leqslant x\leqslant 2-\rho,\quad 0\leqslant\rho\leqslant 1,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

来表示.于是

$$\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\,\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^{2-\rho}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\int_0^1\rho^3(2-\rho-\rho^2)\,\mathrm{d}\rho=\frac{4}{15}\pi.$$

12. 利用三重积分计算下列由曲面所围成的立体的体积：

(1) $z=6-x^2-y^2$ 及 $z=\sqrt{x^2+y^2}$；

*(2) $x^2+y^2+z^2=2az(a>0)$ 及 $x^2+y^2=z^2$(含有 z 轴的部分)；

(3) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$；

(4) $z=\sqrt{5-x^2-y^2}$ 及 $x^2+y^2=4z$.

解　(1) 利用直角坐标计算.由 $z=6-x^2-y^2$ 和 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 消去 z，解得 $\sqrt{x^2+y^2}=2$，即 Ω 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为 $x^2+y^2\leqslant 4$. 于是

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 6-(x^2+y^2),x^2+y^2\leqslant 4\}.$$

因此

$$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{6-(x^2+y^2)}\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}[6-(x^2+y^2)-\sqrt{x^2+y^2}]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad(\text{用极坐标})$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(6-\rho^2-\rho)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\left[3\rho^2-\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2=\frac{32}{3}\pi.$$

注　本题也可用“先重后单”的积分次序求解：

对固定的 z，当 $0\leqslant z\leqslant 2$ 时，$D_z=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant z^2\}$；当 $2\leqslant z\leqslant 6$ 时，$D_z=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 6-z\}$(图 10-48).于是

$$V=V_1+V_2=\int_0^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_2^6\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2\pi z^2\mathrm{d}z+\int_2^6\pi(6-z)\,\mathrm{d}z$$

$$=\frac{8}{3}\pi+8\pi=\frac{32}{3}\pi.$$

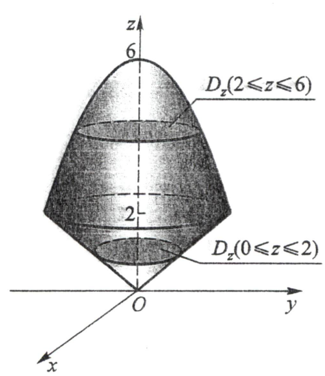


图 10-48

*(2) 利用球面坐标计算.球面 $x^2+y^2+z^2=2az$ 及圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的球面坐标方程分别为 $r=2a\cos\varphi$ 和 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$，故

$$\Omega=\left\{(r,\varphi,\theta)\,\middle|\,0\leqslant r\leqslant 2a\cos\varphi,0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\right\}(\text{图 }10-45).$$

于是

$$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega}r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{8a^3}{3}\sin\varphi\cos^3\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{16\pi a^3}{3}\left[-\frac{1}{4}\cos^4\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\pi a^3.$$

注 本题若用“先重后单”的方法计算也很简便.

由 $x^2+y^2+z^2=2az$ 和 $x^2+y^2=z^2$ 解得 $z=a$.对固定的 z,当 $0\leqslant z\leqslant a$ 时,$D_z=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant z^2\}$;当 $a\leqslant z\leqslant 2a$ 时,$D_z=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2az-z^2\}$. 于是

$$V=V_1+V_2=\int_0^{a}\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_a^{2a}\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^a\pi z^2\mathrm{d}z+\int_a^{2a}\pi(2az-z^2)\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{3}\pi a^3+\frac{2}{3}\pi a^3=\pi a^3.$$

(3) 利用柱面坐标计算.曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z=x^2+y^2$ 的柱面坐标方程分别为 $z=\rho$ 和 $z=\rho^2$. 消去 z,得 $\rho=1$,故它们所围的立体在 xOy 面上的投影区域为 $\rho\leqslant 1$(图 10-49).因此

$$\Omega=\{(\rho,\theta,z)\mid\rho^2\leqslant z\leqslant\rho,0\leqslant\rho\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}.$$

于是

$$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^{\rho}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^1\rho(\rho-\rho^2)\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{6}.$$

(本题也可用“先重后单”的方法方便地求得结果,读者可自己练习.)

(4) 在直角坐标系中用“先重后单”的方法计算.由 $z=\sqrt{5-x^2-y^2}$ 和 $x^2+y^2=4z$ 可解得 $z=1$.

对固定的 z,当 $0\leqslant z\leqslant 1$ 时,$D_z=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4z\}$;当 $1\leqslant z\leqslant\sqrt{5}$ 时,$D_z=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 5-z^2\}$(图 10-50).于是

$$V=V_1+V_2=\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_1^{\sqrt{5}}\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\pi\cdot 4z\mathrm{d}z+\int_1^{\sqrt{5}}\pi(5-z^2)\mathrm{d}z$$

$$=2\pi+\pi\left[5z-\frac{z^3}{3}\right]_1^{\sqrt{5}}=\frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5}-4).$$

（本题用柱面坐标计算也很方便，请读者自己练习.）

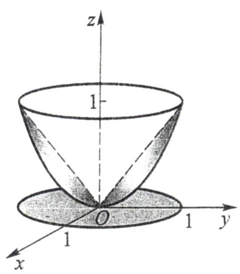


图 10-49

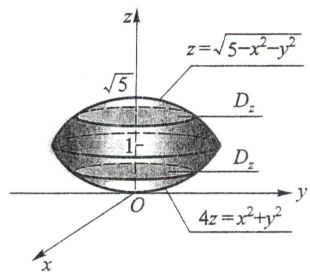


图 10-50

*13. 求球体 $r\leqslant a$ 位于锥面 $\varphi=\frac{\pi}{3}$ 和 $\varphi=\frac{2}{3}\pi$ 之间的部分的体积.

解 用球面坐标计算.记 Ω 为立体所占的空间区域，有

$$V=\iiint_\Omega \mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^2\mathrm{d}r=\frac{2\pi a^3}{3}.$$

14. 求上、下分别为球面 $x^2+y^2+z^2=2$ 和抛物面 $z=x^2+y^2$ 所围立体的体积.

解 由 $x^2+y^2+z^2=2$ 和 $z=x^2+y^2$ 消去 z，解得 $x^2+y^2=1$.从而得立体 Ω 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为 $x^2+y^2\leqslant 1$.于是

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant z\leqslant\sqrt{2-x^2-y^2},x^2+y^2\leqslant 1\}.$$

因此

$$V=\iiint_\Omega \mathrm{d}V=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{D_{xy}}[\sqrt{2-x^2-y^2}-(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(\sqrt{2-\rho^2}-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{8\sqrt{2}-7}{6}\pi.$$

注 本题也可用“先重后单”的方法按下式方便地求得结果：

$$V=\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pi\int_1^{\sqrt{2}}(2-z^2)\mathrm{d}z+\pi\int_0^1 z\mathrm{d}z$$

$$=\frac{4\sqrt{2}-5}{3}\pi+\frac{1}{2}\pi=\frac{8\sqrt{2}-7}{6}\pi.$$

*15. 球心在原点、半径为 R 的球,在其上任意一点的密度的大小与这点到球心的距离成正比,求这球的质量.

解 用球面坐标计算. Ω 为 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$,即 $r\leqslant R$.按题设,密度函数 $\mu(x,y,z)=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}=kr(k>0)$.于是

$$M=\iiint\limits_{\Omega}\mu(x,y,z)\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}kr\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$=k\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^3\mathrm{d}r$$

$$=k\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\frac{R^4}{4}=k\pi R^4.$$

习题 10-4 重积分的应用

1. 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 含在圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 内部的那部分面积.

解 如图 10-51,上半球面的方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\quad\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

由曲面的对称性得所求面积为

$$A=4\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4\iint\limits_D\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{\text{极坐标}}4a\iint\limits_D\frac{1}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho$$

$$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)\mathrm{d}\theta=2a^2(\pi-2).$$

2. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下部分的曲面面积.

解　由 $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2}, \\ z^2=2x \end{cases}$ 解得 $x^2+y^2=2x$，故曲面在 xOy 面上的投影区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x\}$（图 10-52）.

被割曲面的方程为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2},$$

于是所求曲面的面积为

$$A=\iint_D \sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\cdot(D\text{ 的面积})=\sqrt{2}\pi.$$

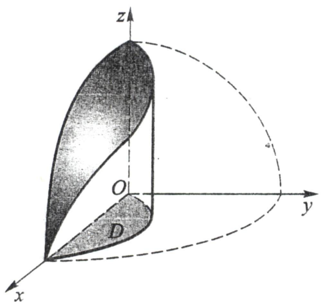


图 10-51

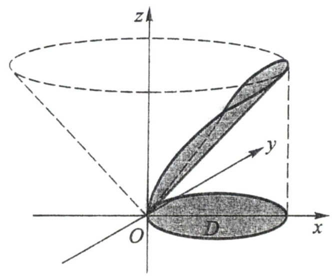


图 10-52

3. 求底圆半径相等的两个直交圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 及 $x^2+z^2=R^2$ 所围立体的表面积.

解　如图 10-53，设第 Ⅰ 卦限内的立体表面位于圆柱面 $x^2+z^2=R^2$ 上的那一部分的面积为 A，则由对称性知全部表面的面积为 $16A$.

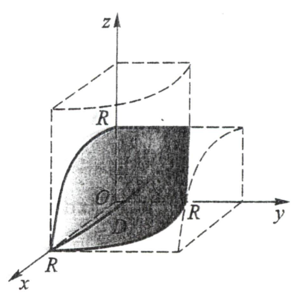


图 10-53

$$A=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}+0}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=R\int_0^R \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y$$

$$=R\int_0^R \mathrm{d}x=R^2,$$

故全部表面积为 $16R^2$.

4. 设 Σ 为一确定球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$（R 为正的常数），另有一球心在 Σ 上、半径为 r 的球面 Σ_1，问 r 取何值时，球面 Σ_1 在球面 Σ 内部的那部分面积最大？

解　不妨设 Σ_1 的球心位于 $(0,0,R)$，则 Σ_1 在球面 Σ 内部的方程为

$$z = R - \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\ ,$$

其中 $0<r<2R$. Σ_1 与 Σ 的交线在 xOy 面上的投影曲线围成圆形闭区域

$$D_{xy} = \left\{(x,y)\middle|x^2 + y^2 \leqslant r^2 - \frac{r^4}{4R^2}\right\} = \{(\rho,\theta)\,|0 \leqslant \rho \leqslant r_1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\},$$

其中 $r_1 = \dfrac{r}{2R}\sqrt{4R^2 - r^2}$. 于是,$\Sigma_1$ 在球面 Σ 内部的那部分面积为

$$S = \iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_{xy}}\frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{r_1}\frac{\rho r}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}\mathrm{d}\rho = 2\pi\left[-r\sqrt{r^2 - \rho^2}\right]_0^{r_1}$$

$$= 2(r^2 - r\sqrt{r^2 - r_1^2})\pi = 2\left(r^2 - \frac{r^3}{2R}\right)\pi.$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 0$ 解得 $r = \dfrac{4}{3}R$,由于 Σ_1 在球面 Σ 内部的那部分曲面面积最大值一定存在,因此当 $r = \dfrac{4}{3}R$ 时 Σ_1 在球面 Σ 内部的那部分曲面面积取到最大值.

5. 设薄片所占的闭区域 D 如下,求均匀薄片的质心:

(1) D 由 $y = \sqrt{2px}, x = x_0, y = 0$ 所围成;

(2) D 是半椭圆形闭区域$\left\{(x,y)\middle|\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1, y\geqslant 0\right\}$;

(3) D 是界于两个圆 $\rho = a\cos\theta, \rho = b\cos\theta\ (0 < a < b)$ 之间的闭区域.

解 (1) 设质心为 $(\bar{x},\bar{y})$.

$$A = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{x_0}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}}\mathrm{d}y = \int_0^{x_0}\sqrt{2px}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\sqrt{2px_0^3},$$

$$\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{x_0}x\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}}\mathrm{d}y = \int_0^{x_0}\sqrt{2p}\,x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\sqrt{2px_0^5},$$

$$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{x_0}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}}y\mathrm{d}y = \int_0^{x_0}px\mathrm{d}x = \frac{px_0^2}{2},$$

于是

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3}{5}x_0,\quad \bar{y} = \frac{1}{A}\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3}{8}\sqrt{2px_0} = \frac{3}{8}y_0,$$

故所求质心为 $\left(\dfrac{3}{5}x_0, \dfrac{3}{8}y_0\right)$.

（2）因 D 关于 y 轴对称，故质心 $(\bar{x},\bar{y})$ 必位于 y 轴上，于是 $\bar{x}=0$.

$$\bar{y}=\frac{1}{A}\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{A}\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}y\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{A}\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{2a^2}(a^2-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}\pi ab}\cdot\frac{2}{3}ab^2=\frac{4b}{3\pi}.$$

因此所求质心为 $\left(0,\dfrac{4b}{3\pi}\right)$.

（3）因 D 关于 x 轴对称，故质心 $(\bar{x},\bar{y})$ 位于 x 轴上，于是 $\bar{y}=0$（图 10-54）.

$$A=\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}(b^2-a^2),$$

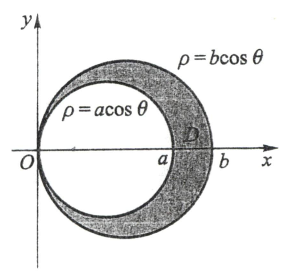


图 10-54

$$\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\rho\cos\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_{a\cos\theta}^{b\cos\theta}\rho^2\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{2}{3}(b^3-a^3)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{2}{3}(b^3-a^3)\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}(b^3-a^3),$$

故
$$\bar{x}=\frac{1}{A}\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a^2+ab+b^2}{2(a+b)}.$$

所求质心为 $\left(\dfrac{a^2+ab+b^2}{2(a+b)},0\right)$.

6. 设平面薄片所占的闭区域 D 由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=x$ 所围成，它在点 (x,y) 处的面密度 $\mu(x,y)=x^2y$，求该薄片的质心.

解
$$M=\iint_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1x^2\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}y\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\frac{1}{2}(x^4-x^6)\mathrm{d}x=\frac{1}{35},$$

$$M_x=\iint_D y\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1x^2\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}y^2\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{3}(x^5 - x^8)\,dx = \frac{1}{54},$$

$$M_y = \iint_D x\mu(x,y)\,dxdy = \iint_D x^3 y\,dxdy$$

$$= \int_0^1 x^3 dx \int_{x^2}^{x} y\,dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}(x^5 - x^7)\,dx = \frac{1}{48},$$

于是 $$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{35}{48}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{35}{54}.$$

所求质心为$\left(\frac{35}{48},\frac{35}{54}\right)$.

7. 设有一等腰直角三角形薄片,腰长为 a,各点处的面密度等于该点到直角顶点的距离的平方,求这薄片的质心.

解 如图 10-55,按题设,面密度 $\mu(x,y) = x^2 + y^2$. 由对称性知 $\bar{x} = \bar{y}$.

$$M = \iint_D (x^2 + y^2)\,dxdy = \int_0^a dx \int_0^{a-x} (x^2 + y^2)\,dy$$

$$= \int_0^a \left[x^2(a - x) + \frac{(a - x)^3}{3}\right] dx = \frac{1}{6}a^4,$$

$$M_y = \iint_D x(x^2 + y^2)\,dxdy = \int_0^a x\,dx \int_0^{a-x} (x^2 + y^2)\,dy$$

$$= \int_0^a \left[x^3(a - x) + \frac{x(a - x)^3}{3}\right] dx$$

$$= \int_0^a \left(-\frac{4}{3}x^4 + 2ax^3 - a^2x^2 + \frac{a^3}{3}x\right) dx = \frac{1}{15}a^5,$$

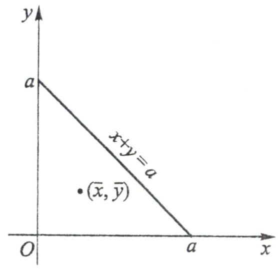


图 10-55

因此 $$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2}{5}a, \quad \bar{y} = \bar{x} = \frac{2}{5}a.$$

所求质心为$\left(\frac{2}{5}a,\frac{2}{5}a\right)$.

8. 利用三重积分计算下列由曲面所围立体的质心(设密度 $\rho = 1$):

(1) $z^2 = x^2 + y^2, z = 1$;

*(2) $z = \sqrt{A^2 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\ (A > a > 0), z = 0$;

(3) $z = x^2 + y^2, x + y = a, x = 0, y = 0, z = 0$.

解 (1) 曲面所围立体为圆锥体,其顶点在原点,并关于 z 轴对称,又由于它是匀质的,因此它的质心位于 z 轴上,即有 $\bar{x}=\bar{y}=0$.立体的体积为 $V=\frac{1}{3}\pi$.

$$\bar{z}=\frac{1}{V}\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}V=\frac{1}{V}\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}z\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{V}\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{1}{2}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1}{2}(1-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{3}{\pi}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1=\frac{3}{4},$$

故所求质心为$\left(0,0,\frac{3}{4}\right)$.

*(2) 立体由两个同心的上半球面和 xOy 面所围成,关于 z 轴对称,又由于它是匀质的,故其质心位于 z 轴上,即有 $\bar{x}=\bar{y}=0$.立体的体积为

$$V=\frac{2}{3}\pi\left(A^3-a^3\right).$$

$$\bar{z}=\frac{1}{V}\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}V=\frac{1}{V}\iiint_{\Omega}r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_a^A r^3\mathrm{d}r$$

$$=\frac{3}{2\pi(A^3-a^3)}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{A^4-a^4}{4}$$

$$=\frac{3(A^4-a^4)}{8(A^3-a^3)},$$

故立体质心为$\left(0,0,\frac{3(A^4-a^4)}{8(A^3-a^3)}\right)$.

(3) 如图 10-56, $\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant z\leqslant x^2+y^2,0\leqslant y\leqslant a-x,0\leqslant x\leqslant a\}$.

$$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}V=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}(x^2+y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^a\left[x^2(a-x)+\frac{1}{3}(a-x)^3\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^a\left[ax^2-x^3+\frac{1}{3}(a-x)^3\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{6}a^4,$$

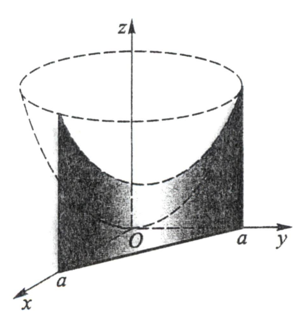


图 10-56

$$\bar{z}=\frac{1}{V}\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}V=\frac{1}{V}\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}z\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{V}\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\frac{1}{2}(x^4+2x^2y^2+y^4)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2V}\int_0^a\left[x^4(a-x)+\frac{2}{3}x^2(a-x)^3+\frac{1}{5}(a-x)^5\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{a^4}\cdot\frac{7a^6}{90}=\frac{7}{30}a^2,$$

$$\bar{x}=\frac{1}{V}\iiint_{\Omega}x\mathrm{d}V=\frac{1}{V}\int_0^a x\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{V}\int_0^a x\left[x^2(a-x)+\frac{1}{3}(a-x)^3\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{6}{a^4}\cdot\frac{a^5}{15}=\frac{2}{5}a,$$

由于立体匀质且关于平面 $y=x$ 对称,故

$$\bar{y}=\bar{x}=\frac{2}{5}a.$$

所求质心为$\left(\frac{2}{5}a,\frac{2}{5}a,\frac{7}{30}a^2\right)$.

*9. 设球占有闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz\}$,它在内部各点处的密度的大小等于该点到坐标原点的距离的平方.试求这球的质心.

解 在球面坐标系中,Ω 可表示为

$$0\leqslant r\leqslant 2R\cos\varphi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

球内任意一点 (x,y,z) 处的密度大小为

$$\rho=x^2+y^2+z^2=r^2.$$

由于球的几何形状及质量分布均关于 z 轴对称,故可知其质心位于 z 轴上,因此 $\bar{x}=\bar{y}=0$.

$$M=\iiint_{\Omega}\rho\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{32}{5}R^5\cos^5\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{32}{15}\pi R^5,$$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint_{\Omega}\rho z\mathrm{d}V=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^2\cdot r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2\pi}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{64}{6}R^6\cos^7\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{5}{4}R,$$

故球的质心为$\left(0,0,\frac{5}{4}R\right)$.

注　从以上两题的题解可看出，在计算立体的质心时，要注意利用对称性来减少运算量.对匀质立体来说，只要考虑立体几何形状的对称性(如第 8 题)；但对非匀质立体来说，除了立体的几何形状的对称性外，还需注意立体的质量分布是否也具有相应的对称性(如第 9 题).

10. 设均匀薄片(面密度为常数 1)所占闭区域 D 如下，求指定的转动惯量：

(1) $D=\left\{(x,y)\middle|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$，求 I_y；

(2) D 由抛物线 $y^2=\frac{9}{2}x$ 与直线 $x=2$ 所围成，求 I_x 和 I_y；

(3) D 为矩形闭区域 $\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant b\}$，求 I_x 和 I_y.

解　(1) $I_y=\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-a}^{a}x^2\mathrm{d}x\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}y=\frac{2b}{a}\int_{-a}^{a}x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{4b}{a}\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x.$$

令 $x=a\sin t$ 换元，则

$$上式=\frac{4b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^3\sin^2t\cos t\cdot a\cos t\mathrm{d}t$$

$$=4a^3b\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4t\mathrm{d}t\right)$$

$$=4a^3b\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{4}\pi a^3b.$$

(2) 如图 10-57，$D=\left\{(x,y)\middle|-3\sqrt{\frac{x}{2}}\leqslant y\leqslant 3\sqrt{\frac{x}{2}},0\leqslant x\leqslant 2\right\}$.

$$I_x=\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{\text{对称性}}2\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{3\sqrt{\frac{x}{2}}}y^2\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\int_0^2\frac{27}{2\sqrt{2}}x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\frac{72}{5},$$

$$I_y=\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{\text{对称性}}2\int_0^2x^2\mathrm{d}x\int_0^{3\sqrt{\frac{x}{2}}}\mathrm{d}y=2\int_0^2\frac{3}{\sqrt{2}}x^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x=\frac{96}{7}.$$

(3) $I_x=\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^b y^2\mathrm{d}y=\frac{ab^3}{3}$,

$$I_y=\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^a x^2\mathrm{d}x\int_0^b\mathrm{d}y=\frac{a^3b}{3}.$$

11. 已知均匀矩形板(面密度为常量 μ)的长和宽分别为 b 和 h,计算此矩形板对于通过其形心且分别与一边平行的两轴的转动惯量.

解 建立如图 10-58 的坐标系,使原点 O 为矩形板的形心,x 轴和 y 轴分别平行于矩形的两边,则所求的转动惯量为

$$I_x=\iint\limits_D y^2\mu\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mu\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\mathrm{d}x\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}y^2\mathrm{d}y=\frac{1}{12}\mu bh^3,$$

$$I_y=\iint\limits_D x^2\mu\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mu\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}x^2\mathrm{d}x\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\mathrm{d}y=\frac{1}{12}\mu hb^3.$$

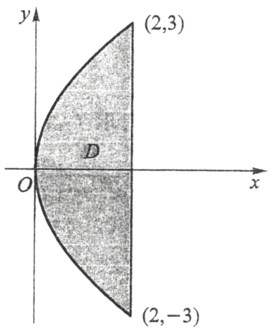


图 10-57

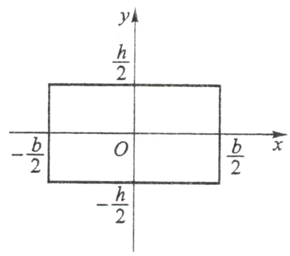


图 10-58

12. 一均匀物体(密度 ρ 为常量)占有的闭区域 Ω 由曲面 $z=x^2+y^2$ 和平面 $z=0,|x|=a,|y|=a$ 所围成.

(1) 求物体的体积;

(2) 求物体的质心;

(3) 求物体关于 z 轴的转动惯量.

解 (1) 如图 10-59,由 Ω 的对称性可知

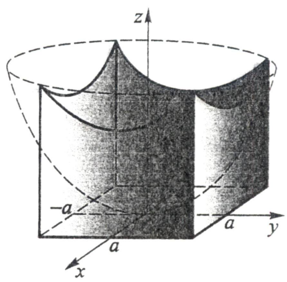


图 10-59

$$V=4\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}\mathrm{d}z=4\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a(x^2+y^2)\mathrm{d}y$$

$$=4\int_0^a\left(ax^2+\frac{a^3}{3}\right)\mathrm{d}x=\frac{8}{3}a^4.$$

(2) 由对称性可知,质心位于 z 轴上,故 $\bar{x}=\bar{y}=0$.

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega}\rho z\mathrm{d}V\xlongequal{\text{对称性}}\frac{4}{V}\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}z\mathrm{d}z$$

$$=\frac{4}{V}\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a\frac{1}{2}(x^4+2x^2y^2+y^4)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2}{V}\int_0^a\left(ax^4+\frac{2}{3}a^3x^2+\frac{1}{5}a^5\right)dx=\frac{7}{15}a^2.$$

(3) $$I_z=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x^2+y^2)dV\xlongequal{\text{对称性}}4\rho\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^{x^2+y^2}(x^2+y^2)dz$$

$$=4\rho\int_0^a dx\int_0^a(x^4+2x^2y^2+y^4)dy=\frac{112}{45}\rho a^6.$$

13. 求半径为 a、高为 h 的均匀圆柱体对于过中心而平行于母线的轴的转动惯量(设密度 $\mu=1$).

解 建立空间直角坐标系,使原点位于圆柱体的中心,z 轴平行于母线,则圆柱体所占的空间闭区域

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2\leqslant a^2,-\frac{h}{2}\leqslant z\leqslant\frac{h}{2}\right\}$$

$$\xlongequal{\text{柱面坐标}}\left\{(\rho,\theta,z)\middle|-\frac{h}{2}\leqslant z\leqslant\frac{h}{2},0\leqslant\rho\leqslant a,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\right\}.$$

于是所求的转动惯量为

$$I_z=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dV=\iiint\limits_{\Omega}\rho^2\cdot\rho d\rho d\theta dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\rho^3d\rho\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}dz$$

$$=2\pi\cdot\frac{a^4}{4}\cdot h=\frac{1}{2}\pi ha^4.$$

14. 设面密度为常量 μ 的质量均匀的半圆环形薄片占有闭区域 $D=\{(x,y,0)\mid R_1\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\leqslant R_2,x\geqslant 0\}$,求它对位于 z 轴上点 $M_0(0,0,a)(a>0)$ 处单位质量的质点的引力 $\boldsymbol{F}$.

解 如图 10-60,引力元素 $d\boldsymbol{F}$ 沿 x 轴和 z 轴的分量分别为

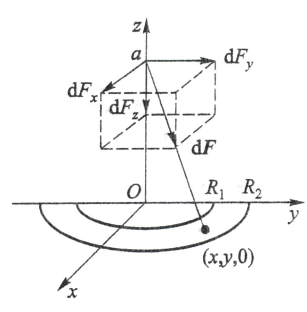


图 10-60

$$dF_x=G\frac{\mu x}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}d\sigma$$

和 $$dF_z=G\frac{\mu(-a)}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}d\sigma.$$

于是
$$F_x = G\mu\iint\limits_D \frac{x}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}} G\mu\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho\cos\theta}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$= G\mu\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\rho$$

$$= 2G\mu\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\rho \quad (\text{令 } \rho = a\tan t \text{ 换元})$$

$$= 2G\mu\int_{\arctan\frac{R_1}{a}}^{\arctan\frac{R_2}{a}}\frac{a^2\tan^2 t}{a^3\sec^3 t}\cdot a\sec^2 t\mathrm{d}t$$

$$= 2G\mu\int_{\arctan\frac{R_1}{a}}^{\arctan\frac{R_2}{a}}(\sec t-\cos t)\mathrm{d}t$$

$$= 2G\mu\Big[\ln(\sec t+\tan t)-\sin t\Big]_{\arctan\frac{R_1}{a}}^{\arctan\frac{R_2}{a}}$$

$$= 2G\mu\left(\ln\frac{\sqrt{R_2^2+a^2}+R_2}{\sqrt{R_1^2+a^2}+R_1}-\frac{R_2}{\sqrt{R_2^2+a^2}}+\frac{R_1}{\sqrt{R_1^2+a^2}}\right),$$

$$F_z = -Ga\mu\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}} -Ga\mu\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\rho$$

$$= \pi Ga\mu\left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2+a^2}}\right]_{R_1}^{R_2}$$

$$= \pi Ga\mu\left(\frac{1}{\sqrt{R_2^2+a^2}}-\frac{1}{\sqrt{R_1^2+a^2}}\right).$$

由于 D 关于 x 轴对称,且质量均匀分布,故 $F_y=0$.因此引力

$$\boldsymbol{F} = \left(2G\mu\left(\ln\frac{\sqrt{R_2^2+a^2}+R_2}{\sqrt{R_1^2+a^2}+R_1}-\frac{R_2}{\sqrt{R_2^2+a^2}}+\frac{R_1}{\sqrt{R_1^2+a^2}}\right),0,\right.$$
$$\left.\pi Ga\mu\left(\frac{1}{\sqrt{R_2^2+a^2}}-\frac{1}{\sqrt{R_1^2+a^2}}\right)\right).$$

15. 设均匀柱体密度为 ρ_0,占有闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant R^2,0\leqslant z\leqslant h\}$,求它

对于位于点 $M_0(0,0,a)(a>h)$ 处的单位质量的质点的引力.

解　由柱体的对称性和质量分布的均匀性知 $F_x=F_y=0$.引力沿 z 轴的分量

$$F_z=\iiint_\Omega G\rho_0\frac{z-a}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}V$$

$$=G\rho_0\int_0^h(z-a)\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\xlongequal{\text{柱面坐标}}G\rho_0\int_0^h(z-a)\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{[\rho^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=2\pi G\rho_0\int_0^h(z-a)\left[\frac{1}{a-z}-\frac{1}{\sqrt{R^2+(z-a)^2}}\right]\mathrm{d}z$$

$$=2\pi G\rho_0\int_0^h\left[-1-\frac{z-a}{\sqrt{R^2+(z-a)^2}}\right]\mathrm{d}z$$

$$=-2\pi G\rho_0[h+\sqrt{R^2+(h-a)^2}-\sqrt{R^2+a^2}].$$

*习题 10-5　含参变量的积分

1. 求下列含参变量的积分所确定的函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\int_x^{1+x}\frac{\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\int_{-1}^1\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\int_0^2 y^2\cos(xy)\mathrm{d}y$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to0}\int_x^{1+x}\frac{\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2}=\int_0^{1+0}\frac{\mathrm{d}y}{1+0+y^2}=[\arctan y]_0^1=\frac{\pi}{4}$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\int_{-1}^1\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y=\int_{-1}^1|y|\mathrm{d}y=2\int_0^1 y\mathrm{d}y=1$.

(3) $\lim\limits_{x\to0}\int_0^2 y^2\cos(xy)\mathrm{d}y=\int_0^2 y^2(\cos 0)\mathrm{d}y=\frac{8}{3}$.

2. 求下列函数的导数：

(1) $\varphi(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}(y^2\sin x-y^3)\mathrm{d}y$；　　(2) $\varphi(x)=\int_0^x\frac{\ln(1+xy)}{y}\mathrm{d}y$；

(3) $\varphi(x)=\int_{x^2}^{x^3}\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}y$；　　(4) $\varphi(x)=\int_x^{x^2}\mathrm{e}^{-xy^2}\mathrm{d}y$.

解　(1) $\varphi'(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}y^2\cos x\mathrm{d}y+(\cos^2x\sin x-\cos^3x)(\cos x)'-$

$(\sin^2x\sin x-\sin^3x)(\sin x)'$

$$=\frac{1}{3}\cos x(\cos^3x-\sin^3x)+(\cos x-\sin x)\sin x\cos^2x$$

$$=\frac{1}{3}\cos x(\cos x-\sin x)(1+2\sin 2x).$$

(2) $\varphi'(x)=\int_0^x \frac{1}{1+xy}\mathrm{d}y+\frac{\ln(1+x^2)}{x}$

$$=\frac{1}{x}[\ln(1+xy)]_0^x+\frac{\ln(1+x^2)}{x}$$

$$=\frac{2}{x}\ln(1+x^2).$$

(3) $\varphi'(x)=\int_{x^2}^{x^3}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y+\arctan x^2\cdot 3x^2-\arctan x\cdot 2x$

$$=-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\Big|_{x^2}^{x^3}+3x^2\arctan x^2-2x\arctan x$$

$$=\ln\sqrt{\frac{1+x^2}{1+x^4}}+3x^2\arctan x^2-2x\arctan x.$$

(4) $\varphi'(x)=\int_x^{x^2}\mathrm{e}^{-xy^2}(-y^2)\mathrm{d}y+\mathrm{e}^{-x^5}\cdot 2x-\mathrm{e}^{-x^3}\cdot 1$

$$=2x\mathrm{e}^{-x^5}-\mathrm{e}^{-x^3}-\int_x^{x^2}y^2\mathrm{e}^{-xy^2}\mathrm{d}y.$$

3. 设 $F(x)=\int_0^x(x+y)f(y)\mathrm{d}y$,其中 $f(y)$ 为可微函数,求 $F''(x)$.

解 $F'(x)=\int_0^x f(y)\mathrm{d}y+2xf(x)$,

$F''(x)=f(x)+2f(x)+2xf'(x)=3f(x)+2xf'(x)$.

4. 应用对参数的微分法,计算下列积分:

(1) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}\quad(|a|<1)$;

(2) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos^2 x+a^2\sin^2 x)\mathrm{d}x\quad(a>0)$.

解 (1) 设

$$\varphi(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}\quad(|\alpha|\leqslant|a|<1),$$

则 $\varphi(0)=0,\varphi(a)=I$.由于

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\ln\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\frac{2}{1-\alpha^2\cos^2 x},$$

故
$$\varphi'(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{1-\alpha^2\cos^2x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\mathrm{d}(\tan x)}{\sec^2x-\alpha^2}$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\tan x)}{(1-\alpha^2)+\tan^2x}=\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left[\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}},$$
于是
$$I=\varphi(a)-\varphi(0)=\int_0^a\varphi'(\alpha)\mathrm{d}\alpha=\int_0^a\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}\mathrm{d}\alpha=\pi\arcsin a.$$

(2) 设 $\varphi(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos^2x+\alpha^2\sin^2x)\mathrm{d}x$, 则 $\varphi(1)=0,\varphi(a)=I$.由于
$$\frac{\partial}{\partial\alpha}[\ln(\cos^2x+\alpha^2\sin^2x)]=\frac{2\alpha\sin^2x}{\cos^2x+\alpha^2\sin^2x},$$
故
$$\varphi'(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\alpha\sin^2x}{\cos^2x+\alpha^2\sin^2x}\mathrm{d}x$$
$$\xlongequal{u=\tan x}2\alpha\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{1+\alpha^2u^2}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$$
$$=\frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}-\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+\alpha^2u^2}\right)\quad(\alpha\neq1)$$
$$=\frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\alpha}\right)=\frac{\pi}{\alpha+1};$$
又当 $\alpha=1$ 时,
$$\varphi'(1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin^2x}{\cos^2x+\sin^2x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},$$
因此 $\varphi'(\alpha)$ 在 $x=1$ 处连续.从而对任一 $a>0,\varphi'(\alpha)$ 在区间 $[1,a]$(或 $[a,1]$)上连续.于是
$$I=\varphi(a)-\varphi(1)=\int_1^a\varphi'(\alpha)\mathrm{d}\alpha=\int_1^a\frac{\pi}{\alpha+1}\mathrm{d}\alpha=\pi\ln\frac{a+1}{2}.$$

5. 计算下列积分:

(1) $\int_0^1\frac{\arctan x}{x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$;

(2) $\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x\quad(0<a<b)$.

解 (1) 因为 $\frac{\arctan x}{x}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{1+x^2y^2}$, 故

$$原式=\int_0^1\left(\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{1+x^2y^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\quad（交换积分次序）$$

$$=\int_0^1\left[\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\right]\mathrm{d}y,$$

由于

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\xlongequal{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+y^2\sin^2 t}$$

$$\xlongequal{u=\tan t}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+(1+y^2)u^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\left[\arctan(\sqrt{1+y^2}u)\right]_0^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}},$$

因此

$$原式=\int_0^1\frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}\left[\ln(y+\sqrt{1+y^2})\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

（2）因为 $\dfrac{x^b-x^a}{\ln x}=\displaystyle\int_a^b x^y\mathrm{d}y$，故

$$\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x=\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\int_a^b x^y\mathrm{d}y\quad（交换积分次序）$$

$$=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y\mathrm{d}x.$$

由于

$$\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y\mathrm{d}x\xlongequal{x=\mathrm{e}^{-t}}\int_{+\infty}^0\sin t\cdot\mathrm{e}^{-yt}(-\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{+\infty}\sin t\cdot\mathrm{e}^{-(y+1)t}\mathrm{d}t\quad（分部积分）$$

$$=\frac{1}{1+(y+1)^2}\mathrm{e}^{-(y+1)t}\left[\cos t-(y+1)\sin t\right]\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{1+(y+1)^2},$$

因此

$$\text{原式}=\int_a^b \frac{1}{1+(y+1)^2}\mathrm{d}y=[\arctan(y+1)]_a^b$$
$$=\arctan(b+1)-\arctan(a+1).$$

总习题十

1. 填空：

（1）积分 $\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$ 的值是__________；

（2）设闭区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$，则 $\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$__________.

解　（1）交换积分次序并计算所得的二次积分，得

$$\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\int_0^2 \mathrm{d}y\int_0^y \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x=\int_0^2 y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot\int_0^2 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}(-y^2)=-\frac{1}{2}[\mathrm{e}^{-y^2}]_0^2$$
$$=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-4}).$$

（2）用极坐标计算. $D=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant R,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$，

$$\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(\frac{\rho^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\rho^2\sin^2\theta}{b^2}\right)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho^3\mathrm{d}\rho$$
$$=\frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2a^2}+\frac{1-\cos 2\theta}{2b^2}\right)\mathrm{d}\theta$$
$$=\frac{R^4}{4}\left(\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2b^2}\right)\cdot 2\pi=\frac{\pi R^4}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$$

2. 以下各题中给出了四个结论，从中选出一个正确的结论：

（1）设有空间闭区域 $\Omega_1=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,z\geqslant 0\}$，$\Omega_2=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0\}$，则有（　　）；

（A）$\iiint\limits_{\Omega_1}x\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2}x\mathrm{d}V$　　（B）$\iiint\limits_{\Omega_1}y\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2}y\mathrm{d}V$

（C）$\iiint\limits_{\Omega_1}z\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2}z\mathrm{d}V$　　（D）$\iiint\limits_{\Omega_1}xyz\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2}xyz\mathrm{d}V$

（2）设有平面闭区域 $D=\{(x,y)\mid -a\leqslant x\leqslant a,x\leqslant y\leqslant a\}$，$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant a,x\leqslant y\leqslant a\}$，则

$\iint\limits_{D}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(\qquad)$;

(A) $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　(B) $2\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　(D) 0

(3) 设 $f(x)$ 为连续函数,$F(t)=\int_1^t\mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$, 则 $F'(2)=(\qquad)$.

(A) $2f(2)$　　(B) $f(2)$

(C) $-f(2)$　　(D) 0

解 (1) 先说明(A)不正确.由于 Ω_1 关于 yOz 面对称,而被积函数 x 关于 x 是奇函数,故 $\iiint\limits_{\Omega_1}x\mathrm{d}V=0$,而 $\iiint\limits_{\Omega_2}x\mathrm{d}V\neq0$,故(A)不正确.类似可说明(B)和(D)不正确.再说明(C)是正确的.设 $\Omega_3=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,z\geqslant0,x\geqslant0\}$.由于被积函数 z 关于 x 是偶函数,而 Ω_3 与 $\Omega_1\backslash\Omega_3$ 关于 yOz 面对称,故 $\iiint\limits_{\Omega_1}z\mathrm{d}V=2\iiint\limits_{\Omega_3}z\mathrm{d}V$.又由于被积函数 z 关于 y 也是偶函数,且 Ω_2 与 $\Omega_3\backslash\Omega_2$ 关于 zOx 面对称,故 $\iiint\limits_{\Omega_3}z\mathrm{d}V=2\iiint\limits_{\Omega_2}z\mathrm{d}V$①. 因此应选(C).

(2) 记 D 的三个顶点为 $A(a,a)$,$B(-a,a)$,$C(-a,-a)$(图 10-61).连接 O,B,则 D 为 $\triangle COB$ 和 $\triangle AOB$ 之并.由于 $\triangle COB$ 关于 x 轴对称,$\triangle AOB$ 关于 y 轴对称,而函数 xy 关于 y 和 x 均是奇函数,从而有

$$\iint\limits_{D}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\triangle AOB}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\triangle COB}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0+0=0;$$

又由于函数 $\cos x\sin y$ 关于 y 是奇函数,关于 x 是偶函数,从而有

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_{\triangle COB}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\triangle AOB}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=0+2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

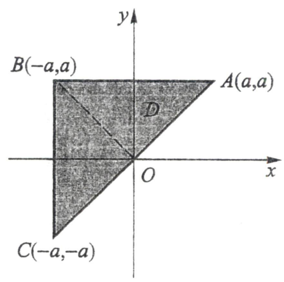


图 10-61

因此应选(A).

(3) **解法一** 由于考虑 $F'(2)$,故可设 $t>1$.对所给二重积分交换积分次序,得

$$F(t)=\int_1^t f(x)\mathrm{d}x\int_1^x\mathrm{d}y=\int_1^t(x-1)f(x)\mathrm{d}x,$$

于是,

$$F'(t)=(t-1)f(t),$$

从而有 $F'(2)=f(2)$.故选(B).

解法二 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $G(x)$,则有

$$F(t)=\int_1^t\mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x=\int_1^t[G(t)-G(y)]\mathrm{d}y$$

---

① 关于三重积分中如何利用对称性的问题,请读者参照本书习题 10-1 第 2 题解的注(1)(2)得出有关结论.

$$= G(t)\int_1^t dy - \int_1^t G(y)dy = (t-1)G(t) - \int_1^t G(y)dy.$$

求导得

$$F'(t) = G(t) + (t-1)f(t) - G(t) = (t-1)f(t),$$

因此

$$F'(2) = f(2).$$

3. 计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D (1+x)\sin y d\sigma$，其中 D 是顶点分别为 $(0,0)$，$(1,0)$，$(1,2)$ 和 $(0,1)$ 的梯形闭区域；

(2) $\iint\limits_D (x^2-y^2)d\sigma$，其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant y \leqslant \sin x, 0 \leqslant x \leqslant \pi\}$；

(3) $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}d\sigma$，其中 D 是圆周 $x^2+y^2=Rx$ 所围成的闭区域；

(4) $\iint\limits_D (y^2+3x-6y+9)d\sigma$，其中 $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant R^2\}$.

解　(1) D 可表示为 $0\leqslant y\leqslant 1+x, 0\leqslant x\leqslant 1$，于是

$$\begin{aligned}\iint\limits_D (1+x)\sin y d\sigma &= \int_0^1 dx\int_0^{1+x}(1+x)\sin y dy \\ &= \int_0^1[(1+x)-(1+x)\cos(1+x)]dx \\ &\xlongequal{t=1+x} \int_1^2 (t - t\cos t)dt = \left[\frac{t^2}{2} - t\sin t - \cos t\right]_1^2 \\ &= \frac{3}{2} + \sin 1 + \cos 1 - 2\sin 2 - \cos 2.\end{aligned}$$

(2) 由于

$$\begin{aligned}\iint\limits_D x^2 d\sigma &= \int_0^\pi x^2 dx\int_0^{\sin x}dy \\ &= \int_0^\pi x^2\sin x dx = -[x^2\cos x]_0^\pi + 2\int_0^\pi x\cos x dx \\ &= \pi^2 + 2\left(x\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx\right) = \pi^2 - 4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint\limits_D y^2 d\sigma &= \int_0^\pi dx\int_0^{\sin x} y^2 dy \\ &= \frac{1}{3}\int_0^\pi \sin^3 x dx = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x dx \\ &= \frac{2}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{4}{9},\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\iint\limits_D (x^2-y^2)d\sigma &= \iint\limits_D x^2 d\sigma - \iint\limits_D y^2 d\sigma = (\pi^2-4) - \frac{4}{9} \\ &= \pi^2 - \frac{40}{9}.\end{aligned}$$

(3) 利用极坐标计算.在极坐标系中,

$$D=\left\{(\rho,\theta)\ \middle|\ 0\leqslant\rho\leqslant R\cos\theta,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

于是

$$\begin{aligned}\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma&=\iint\limits_D\sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{3}\left[(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{R\cos\theta}\mathrm{d}\theta\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{R^3}{3}(1-|\sin^3\theta|)\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{2}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{2}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)=\frac{R^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right).\end{aligned}$$

注 如果忽略 $\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ 上非正,而按 $(R^2-R^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}=R^3\sin^3\theta$ 计算,将导致错误.这是一类常见错误,要注意避免.

(4) 利用对称性可知 $\iint\limits_D 3x\mathrm{d}\sigma=0,\iint\limits_D 6y\mathrm{d}\sigma=0$.又

$$\iint\limits_D 9\mathrm{d}\sigma=9\times(D\text{ 的面积})=9\pi R^2,$$

$$\begin{aligned}\iint\limits_D y^2\mathrm{d}\sigma&\xlongequal{\text{极坐标}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho^2\sin^2\theta\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\\&=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^R\rho^3\,\mathrm{d}\rho\\&=\pi\cdot\frac{R^4}{4}=\frac{\pi}{4}R^4,\end{aligned}$$

因此 $$\text{原式}=\frac{\pi}{4}R^4+9\pi R^2.$$

4. 交换下列二次积分的次序:

(1) $\int_0^4\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)}f(x,y)\,\mathrm{d}x$; (2) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{2y}f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_1^3\mathrm{d}y\int_0^{3-y}f(x,y)\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

解 (1) 所给的二次积分等于闭区域 D 上的二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ -\sqrt{4-y}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}(y-4),0\leqslant y\leqslant 4\right\}$(图 10-62),将 D 表达为 $2x+4\leqslant y\leqslant 4-x^2$,

$-2 \leqslant x \leqslant 0$,则得

$$\int_0^4 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^0 \mathrm{d}x \int_{2x+4}^{4-x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

(2) 所给二次积分等于二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D = D_1 \cup D_2$,$D_1 = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2y, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$,$D_2 = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3-y, 1 \leqslant y \leqslant 3\}$(图 10 - 63).$D$ 可表达为 $\left\{(x,y) \,\middle|\, \dfrac{x}{2} \leqslant y \leqslant 3-x, 0 \leqslant x \leqslant 2\right\}$,于是

$$原式 = \int_0^2 \mathrm{d}x \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

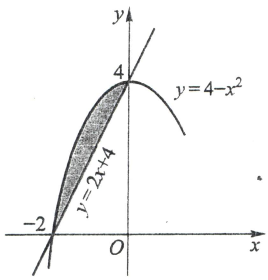


图 10-62

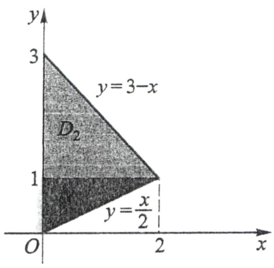


图 10-63

(3) 所给二次积分等于二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D = \{(x,y) \mid \sqrt{x} \leqslant y \leqslant 1 + \sqrt{1-x^2}, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$(图 10 - 64).将 D 表达为 $D_1 \cup D_2$,其中 $D_1 = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant y^2, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$,$D_2 = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2y-y^2}, 1 \leqslant y \leqslant 2\}$,于是

$$原式 = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{y^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

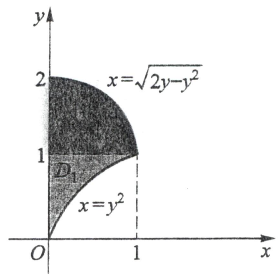


图 10-64

5. 证明:

$$\int_0^a \mathrm{d}y \int_0^y \mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a (a-x)\mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证　上式左端的二次积分等于二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant y, 0 \leqslant y \leqslant a\} = \{(x,y) \mid x \leqslant y \leqslant a, 0 \leqslant x \leqslant a\}$.于是交换积分次序即得

$$\int_0^a \mathrm{d}y \int_0^y \mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a \mathrm{d}x \int_x^a \mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^a (a-x)\mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

6. 把积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示为极坐标形式的二次积分,其中积分区域 $D = \{(x,y) \mid x^2 \leqslant y \leqslant 1, -1 \leqslant x \leqslant 1\}$.

解 积分区域 D 如图 10-65 所示.抛物线 $y=x^2$ 的极坐标方程为 $\rho=\sec\theta\tan\theta$,直线 $y=1$ 的极坐标方程为 $\rho=\csc\theta$,用射线 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 和 $\theta=\frac{3\pi}{4}$ 将 D 分成 D_1,D_2,D_3 三部分:

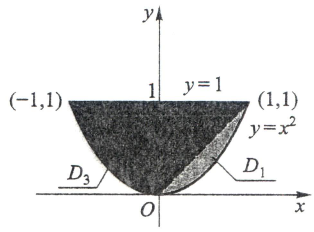


图 10-65

$$D_1=\left\{(\rho,\theta)\middle|0\leqslant\rho\leqslant\sec\theta\tan\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\};$$

$$D_2=\left\{(\rho,\theta)\middle|0\leqslant\rho\leqslant\csc\theta,\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4}\right\};$$

$$D_3=\left\{(\rho,\theta)\middle|0\leqslant\rho\leqslant\sec\theta\tan\theta,\frac{3\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\pi\right\}.$$

因此

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=&\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sec\theta\tan\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,d\rho+\\&\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{\csc\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,d\rho+\\&\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}d\theta\int_0^{\sec\theta\tan\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,d\rho.\end{aligned}$$

7. 设 $f(x,y)$ 在闭区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant y,x\geqslant0\}$ 上连续,且

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,$$

求 $f(x,y)$.

解 设 $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=A$, 则

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}A,$$

从而

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy-\frac{8}{\pi}A\iint\limits_D dxdy,$$

又

$$\iint\limits_D dxdy=D\text{ 的面积}=\frac{\pi}{8},$$

故得

$$A=\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy-A,$$

因此

$$A=\frac{1}{2}\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy.$$

在极坐标系中,

$$D=\left\{(\rho,\theta)\ \middle|\ 0\leqslant\rho\leqslant\sin\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

因此

$$\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta}\sqrt{1-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9},$$

于是得

$$A=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{9}.$$

从而

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}+\frac{8}{9\pi}-\frac{2}{3}.$$

8. 把积分 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 化为三次积分，其中积分区域 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$，$y=x^2$ 及平面 $y=1$，$z=0$ 所围成的闭区域.

解　Ω 为一曲顶柱体，其顶为 $z=x^2+y^2$，底位于 xOy 面上，其侧面由抛物柱面 $y=x^2$ 及平面 $y=1$ 所组成.由此可知 Ω 在 xOy 面上的投影区域

$$D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2\leqslant y\leqslant 1,\ -1\leqslant x\leqslant 1\}.$$

因此

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$
$$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

9. 计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_{\Omega}xy^2\,\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由 $z=0,x+y-z=0,x-y-z=0$ 和 $x=1$ 所围成的闭区域；

(2) $\iiint\limits_{\Omega}z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是两个球：$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 和 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz\,(R>0)$ 的公共部分；

(3) $\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域；

(4) $\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\,\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由 xOy 面上曲线 $y^2=2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面与平面 $x=5$ 所围成的闭区域.

解　(1) 闭区域 Ω 可表示为

$$\{(x,y,z)\mid z-x\leqslant y\leqslant x-z,0\leqslant z\leqslant x,0\leqslant x\leqslant 1\},$$

故

$$\iiint\limits_{\Omega}xy^2\,\mathrm{d}V=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}z\int_{z-x}^{x-z}xy^2\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{2}{3}x(x-z)^3\,\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^1\frac{1}{6}x^5\,\mathrm{d}x=\frac{1}{36}.$$

(2) **解法一**　利用直角坐标，采用“先重后单”的积分次序.

由$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x^2+y^2+z^2=2Rz \end{cases}$解得 $z=\dfrac{R}{2}$,于是用平面 $z=\dfrac{R}{2}$把 Ω 分成 Ω_1 和 Ω_2 两部分,其中

$$\Omega_1 = \left\{(x,y,z) \,\middle|\, x^2+y^2 \leqslant 2Rz-z^2, 0 \leqslant z \leqslant \frac{R}{2}\right\};$$

$$\Omega_2 = \left\{(x,y,z) \,\middle|\, x^2+y^2 \leqslant R^2-z^2, \frac{R}{2} \leqslant z \leqslant R\right\}(\text{图 } 10-66).$$

于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint\limits_{\Omega_1} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint\limits_{\Omega_2} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{\frac{R}{2}} z^2 \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 2Rz-z^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\frac{R}{2}}^{R} z^2 \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant R^2-z^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\frac{R}{2}} \pi(2Rz-z^2) \cdot z^2 \mathrm{d}z + \int_{\frac{R}{2}}^{R} \pi(R^2-z^2) \cdot z^2 \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{40}\pi R^5 + \frac{47}{480}\pi R^5 = \frac{59}{480}\pi R^5. \end{aligned}$$

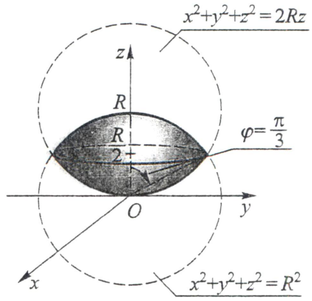


图 10-66

*解法二　利用球面坐标计算.作圆锥面 $\varphi=\arccos\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{3}$,将 Ω 分成 Ω_1'和 Ω_2'两部分:

$$\Omega_1' = \left\{(r,\varphi,\theta) \,\middle|\, 0 \leqslant r \leqslant R, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\right\};$$

$$\Omega_2' = \left\{(r,\varphi,\theta) \,\middle|\, 0 \leqslant r \leqslant 2R\cos\varphi, \frac{\pi}{3} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\right\}.$$

于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint\limits_{\Omega_1'} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint\limits_{\Omega_2'} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\varphi \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^R r^4 \mathrm{d}r + \\ &\quad \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} r^4 \mathrm{d}r \\ &= \frac{7}{60}\pi R^5 + \frac{1}{160}\pi R^5 = \frac{59}{480}\pi R^5. \end{aligned}$$

(3) 由于积分区域 Ω 关于 xOy 面对称,而被积函数关于 z 是奇函数,故所求积分等于零.

(4) 积分区域 Ω 由旋转抛物面 $y^2+z^2=2x$ 和平面 $x=5$ 所围成,Ω 在 yOz 面上的投影区域

$$D_{yz} = \{(y,z) \mid y^2+z^2 \leqslant 10\}.$$

因此 Ω 可表示为

$$\frac{1}{2}(y^2+z^2) \leqslant x \leqslant 5, \quad y^2+z^2 \leqslant 10.$$

于是

$$\iiint_{\Omega}(y^2+z^2)\,\mathrm{d}V=\iint_{D_{yz}}(y^2+z^2)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\int_{\frac{y^2+z^2}{2}}^{5}\mathrm{d}x$$

$$=\iint_{D_{yz}}(y^2+z^2)\left(5-\frac{y^2+z^2}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}\iint_{D_{yz}}\rho^2\left(5-\frac{\rho^2}{2}\right)\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{10}}\rho^3\left(5-\frac{\rho^2}{2}\right)\mathrm{d}\rho=\frac{250}{3}\pi.$$

注　根据本题的积分区域 Ω 的特点，应将 Ω 向 yOz 面投影，即采用先对 x、后对 y 和 z 的积分次序较宜.

*10. 设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零，

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{\Omega(t)}f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V}{\iint\limits_{D(t)}f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma},$$

$$G(t)=\frac{\iint\limits_{D(t)}f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma}{\int_{-t}^{t}f(x^2)\,\mathrm{d}x},$$

其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant t^2\}$，$D(t)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant t^2\}$.

(1) 讨论 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性；

(2) 证明当 $t>0$ 时，$F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$.

解　(1) 利用球面坐标，

$$\iiint_{\Omega(t)}f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{t}f(r^2)r^2\,\mathrm{d}r=4\pi\int_0^{t}f(r^2)r^2\,\mathrm{d}r,$$

利用极坐标，

$$\iint_{D(t)}f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{t}f(\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho=2\pi\int_0^{t}f(\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\int_0^{t}f(r^2)r\,\mathrm{d}r.$$

于是

$$F(t)=\frac{2\int_0^{t}f(r^2)r^2\,\mathrm{d}r}{\int_0^{t}f(r^2)r\,\mathrm{d}r},$$

求导得

$$F'(t)=\frac{2tf(t^2)\int_0^{t}f(r^2)r(t-r)\,\mathrm{d}r}{\left[\int_0^{t}f(r^2)r\,\mathrm{d}r\right]^2},$$

所以在区间$(0,+\infty)$内,$F'(t)>0$,故$F(t)$在$(0,+\infty)$内单调增加.

(2) 因为$f(x^2)$为偶函数,故

$$\int_{-t}^{t} f(x^2)\,dx = 2\int_0^t f(x^2)\,dx = 2\int_0^t f(r^2)\,dr.$$

所以

$$G(t)=\frac{2\pi\int_0^t f(r^2)r\,dr}{2\int_0^t f(r^2)\,dr}=\frac{\pi\int_0^t f(r^2)r\,dr}{\int_0^t f(r^2)\,dr}.$$

要证明$t>0$时,$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$,即证

$$\frac{2\int_0^t f(r^2)r^2\,dr}{\int_0^t f(r^2)r\,dr}>\frac{2\int_0^t f(r^2)r\,dr}{\int_0^t f(r^2)\,dr},$$

只需证当$t>0$时,$H(t)=\int_0^t f(r^2)r^2\,dr\cdot\int_0^t f(r^2)\,dr-\left[\int_0^t f(r^2)r\,dr\right]^2>0$. 由于$H(0)=0$,且

$$H'(t)=f(t^2)\int_0^t f(r^2)(t-r)^2\,dr>0,$$

所以$H(t)$在$(0,+\infty)$内单调增加,又$H(t)$在$[0,+\infty)$上连续,故当$t>0$时,

$$H(t)>H(0)=0.$$

因此当$t>0$时,有

$$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t).$$

11. 求平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$被三坐标面所割出的有限部分的面积.

解 平面方程为$z=c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y$,它被三坐标面割出的有限部分在$xOy$面上的投影区域$D_{xy}$为由$x$轴、$y$轴和直线$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$所围成的三角形区域.于是所求面积为

$$\begin{aligned}A&=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy\\&=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}}\,dx\,dy\\&=\frac{1}{|ab|}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\iint_{D_{xy}}dx\,dy\\&=\frac{1}{|ab|}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\cdot\frac{1}{2}|ab|\\&=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.\end{aligned}$$

12. 在均匀的半径为R的半圆形薄片的直径上,要接上一个一边与直径等长的同样材料的均匀矩形

薄片，为了使整个均匀薄片的质心恰好落在圆心上，问接上去的均匀矩形薄片另一边的长度应是多少？

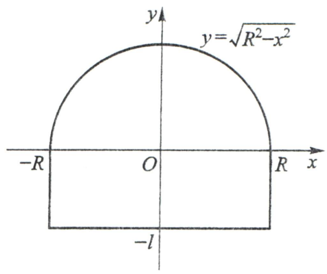


图 10-67

解　设矩形另一边的长度为 l 并建立如图 10-67 所示的坐标系，则质心的纵坐标

$$\bar{y}=\frac{\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma}{A}=\frac{\int_{-R}^{R}\mathrm{d}x\int_{-l}^{\sqrt{R^2-x^2}}y\mathrm{d}y}{A}$$

$$=\frac{\int_{-R}^{R}(R^2-x^2-l^2)\mathrm{d}x}{2A}=\frac{\frac{2}{3}R^3-l^2R}{A},$$

由题设 $\bar{y}=0$ 即可算得

$$l=\sqrt{\frac{2}{3}}R.$$

13. 求由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=1$ 所围成的均匀薄片（面密度为常数 μ）对于直线 $y=-1$ 的转动惯量.

解　闭区域 $D=\{(x,y)\mid -\sqrt{y}\leqslant x\leqslant\sqrt{y},0\leqslant y\leqslant 1\}$，所求的转动惯量为

$$I=\iint\limits_D\mu(y+1)^2\mathrm{d}\sigma=\mu\int_0^1(y+1)^2\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}x$$

$$=2\mu\int_0^1\sqrt{y}(y+1)^2\mathrm{d}y$$

$$=2\mu\int_0^1(y^{\frac{5}{2}}+2y^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{1}{2}})\mathrm{d}y=\frac{368}{105}\mu.$$

14. 设在 xOy 面上有一质量为 M 的质量均匀的半圆形薄片，占有平面闭区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2,y\geqslant 0\}$，过圆心 O 垂直于薄片的直线上有一质量为 m 的质点 P，$OP=a$.求半圆形薄片对质点 P 的引力.

解　求解本题时，所有的分析和计算过程均与习题 10-4 的第 14 题雷同，故这里略去详细的计算步骤.

积分区域 $D=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant R,0\leqslant\theta\leqslant\pi\}$.

由于 D 关于 y 轴对称，且质量均匀分布，故 $F_x=0$.又薄片的面密度 $\mu=\dfrac{M}{\frac{1}{2}\pi R^2}=\dfrac{2M}{\pi R^2}$，于是

$$F_y=Gm\mu\iint\limits_D\frac{y}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}Gm\mu\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{\rho\sin\theta}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$=2Gm\mu\int_0^R\frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{4GmM}{\pi R^2}\left(\ln\frac{\sqrt{R^2+a^2}+R}{a}-\frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}}\right),$$

$$F_z = -Gam\mu\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -Gam\mu\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R \frac{\rho}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\rho$$

$$= -\frac{2GamM}{R^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}}\right)$$

$$= -\frac{2GmM}{R^2}\left(1-\frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}\right),$$

所求引力为 $\boldsymbol{F}=(0,F_y,F_z)$.

15. 求质量分布均匀的半个旋转椭球体 $\Omega=\left\{(x,y,z)\ \middle|\ \frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\leqslant 1,z\geqslant 0\right\}$的质心.

解 设质心为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$,由对称性知质心位于 z 轴上,即 $\bar{x}=\bar{y}=0$.由于

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V = \int_0^b z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \left(\text{其中 } D_z = \left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leqslant a^2\left(1-\frac{z^2}{b^2}\right)\right\}\right)$$

$$= \int_0^b \pi a^2\left(1-\frac{z^2}{b^2}\right)z\mathrm{d}z$$

$$= \pi a^2\int_0^b\left(z-\frac{z^3}{b^2}\right)\mathrm{d}z = \frac{\pi a^2 b^2}{4},$$

$$V = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi a^2 b = \frac{2\pi a^2 b}{3},$$

因此

$$\bar{z}=\frac{\frac{\pi a^2b^2}{4}}{\frac{2\pi a^2 b}{3}}=\frac{3b}{8},$$

即质心为$\left(0,0,\frac{3b}{8}\right)$.

***16.** 一球形行星的半径为 R,其质量为 M,其密度呈球对称分布,并向着球心线性增加.若行星表面的密度为零,则行星中心的密度是多少?

解 设行星中心的密度为 μ_0,则由题设,在距球心 $r(0\leqslant r\leqslant R)$处的密度为 $\mu(r)=\mu_0-kr$.由于 $\mu(R)=\mu_0-kR=0$,故 $k=\frac{\mu_0}{R}$,即

$$\mu(r)=\mu_0\left(1-\frac{r}{R}\right).$$

于是,

$$
\begin{aligned}
M &= \iiint\limits_{r\leqslant R}\mu_0\left(1-\frac{r}{R}\right)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\
&= \mu_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^R\left(1-\frac{r}{R}\right)r^2\mathrm{d}r \\
&= 4\pi\mu_0\int_0^R\left(1-\frac{r}{R}\right)r^2\mathrm{d}r=\frac{\mu_0\pi R^3}{3},
\end{aligned}
$$

因此得
$$\mu_0=\frac{3M}{\pi R^3}.$$

第十一章 曲线积分与曲面积分

习题 11-1 对弧长的曲线积分

1. 设在 xOy 面内有一分布着质量的曲线弧 L,在点 (x,y) 处它的线密度为 $\mu(x,y)$.用对弧长的曲线积分分别表达:

(1) 这曲线弧对 x 轴、对 y 轴的转动惯量 I_x,I_y;

(2) 这曲线弧的质心坐标 $\bar{x},\bar{y}$.

解 (1) 设想将 L 分成 n 个小弧段,取出其中任意一段记作 $\mathrm{d}s$(其长度也记作 $\mathrm{d}s$),(x,y) 为 $\mathrm{d}s$ 上一点,则 $\mathrm{d}s$ 对 x 轴和对 y 轴的转动惯量近似等于

$$\mathrm{d}I_x=y^2\mu(x,y)\,\mathrm{d}s,\quad \mathrm{d}I_y=x^2\mu(x,y)\,\mathrm{d}s.$$

以此作为转动惯量元素并积分,即得 L 对 x 轴、对 y 轴的转动惯量:

$$I_x=\int_L y^2\mu(x,y)\,\mathrm{d}s,\quad I_y=\int_L x^2\mu(x,y)\,\mathrm{d}s.$$

(2) $\mathrm{d}s$ 对 x 轴和对 y 轴的静矩近似等于

$$\mathrm{d}M_x=y\mu(x,y)\,\mathrm{d}s,\quad \mathrm{d}M_y=x\mu(x,y)\,\mathrm{d}s.$$

以此作为静矩元素并积分,即得 L 对 x 轴、对 y 轴的静矩:

$$M_x=\int_L y\mu(x,y)\,\mathrm{d}s,\quad M_y=\int_L x\mu(x,y)\,\mathrm{d}s.$$

从而 L 的质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\int_L x\mu(x,y)\,\mathrm{d}s}{\int_L \mu(x,y)\,\mathrm{d}s},\quad \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\int_L y\mu(x,y)\,\mathrm{d}s}{\int_L \mu(x,y)\,\mathrm{d}s}.$$

2. 利用对弧长的曲线积分的定义证明性质 3.

证 设将积分弧段 L 任意分割成 n 个小弧段,第 i 个小弧段的长度为 Δs_i,(ξ_i,η_i) 为第 i 个小弧段上任意取定的一点.按假设,有

$$f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i \leqslant g(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i.$$

令 $\lambda=\max\{\Delta s_i\}\to 0$,上式两端同时取极限,即得

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s \leqslant \int_L g(x,y)\,\mathrm{d}s.$$

又 $f(x,y) \leqslant |f(x,y)|$, $-f(x,y) \leqslant |f(x,y)|$,利用以上结果,得

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s \leqslant \int_L |f(x,y)|\,\mathrm{d}s,$$

$$-\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s \leqslant \int_L |f(x,y)|\,\mathrm{d}s,$$

即

$$\left|\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s\right| \leqslant \int_L |f(x,y)|\,\mathrm{d}s.$$

3. 计算下列对弧长的曲线积分:

(1) $\oint_L (x^2+y^2)^n\,\mathrm{d}s$,其中 L 为圆周 $x=a\cos t, y=a\sin t(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

(2) $\int_L (x+y)\,\mathrm{d}s$,其中 L 为连接$(1,0)$及$(0,1)$两点的直线段;

(3) $\oint_L x\,\mathrm{d}s$,其中 L 为由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域的整个边界;

(4) $\oint_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s$,其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$,直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界;

(5) $\int_\Gamma \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}s$,其中 Γ 为曲线 $x=\mathrm{e}^t\cos t, y=\mathrm{e}^t\sin t, z=\mathrm{e}^t$ 上相应于 t 从 0 变到 2 的这段弧;

(6) $\int_\Gamma x^2yz\,\mathrm{d}s$,其中 Γ 为折线 $ABCD$,这里 A,B,C,D 依次为点$(0,0,0)$,$(0,0,2)$,$(1,0,2)$,$(1,3,2)$;

(7) $\int_L y^2\,\mathrm{d}s$,其中 L 为摆线的一拱 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

(8) $\int_L (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s$,其中 L 为曲线 $x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

解 (1) $\oint_L (x^2+y^2)^n\,\mathrm{d}s$

$$=\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t)^n\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}a^{2n+1}\mathrm{d}t=2\pi a^{2n+1}.$$

(2) 直线 L 的方程为 $y=1-x(0\leqslant x\leqslant 1)$.

$$\int_L(x+y)\,\mathrm{d}s=\int_0^1[x+(1-x)]\sqrt{1+(-1)^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}.$$

(3) L 由 L_1 和 L_2 两段组成,其中 $L_1:y=x(0\leqslant x\leqslant 1)$,$L_2:y=x^2(0\leqslant x\leqslant 1)$.于是

$$\oint_L x\,\mathrm{d}s=\int_{L_1}x\,\mathrm{d}s+\int_{L_2}x\,\mathrm{d}s=\int_0^1 x\sqrt{1+1^2}\,\mathrm{d}x+\int_0^1 x\sqrt{1+(2x)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\sqrt{2}x\,\mathrm{d}x+\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}+6\sqrt{2}-1).$$

(4) L 由线段 $OA:y=0(0\leqslant x\leqslant a)$,圆弧$\widehat{AB}:x=a\cos t,y=a\sin t\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$和线段 $OB:y=x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$组成(图 11-1).

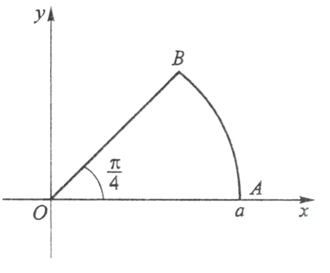


图 11-1

$$\int_{OA}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_0^a\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^a-1,$$

$$\int_{\widehat{AB}}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^a\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}a\mathrm{e}^a\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}a\mathrm{e}^a,$$

$$\int_{OB}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{\sqrt{2}x}\sqrt{1+1^2}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^a-1,$$

于是 $$\oint_L\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\mathrm{e}^a-1+\frac{\pi}{4}a\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^a-1=\mathrm{e}^a\left(2+\frac{\pi a}{4}\right)-2.$$

(5) $$\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{(\mathrm{e}^t\cos t-\mathrm{e}^t\sin t)^2+(\mathrm{e}^t\sin t+\mathrm{e}^t\cos t)^2+(\mathrm{e}^t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{3}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t,$$

$$\int_\Gamma \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s = \int_0^2 \frac{1}{\mathrm{e}^{2t}\cos^2 t + \mathrm{e}^{2t}\sin^2 t + \mathrm{e}^{2t}} \cdot \sqrt{3}\,\mathrm{e}^t \mathrm{d}t$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^2 \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{2}(1-\mathrm{e}^{-2}).$$

(6) Γ 由直线段 AB,BC 和 CD 组成,其中

$$AB: x=0, y=0, z=t(0\leqslant t\leqslant 2);\quad BC: x=t, y=0, z=2(0\leqslant t\leqslant 1);$$

$$CD: x=1, y=t, z=2(0\leqslant t\leqslant 3).$$

于是
$$\int_\Gamma x^2yz\mathrm{d}s = \int_{AB} x^2yz\mathrm{d}s + \int_{BC} x^2yz\mathrm{d}s + \int_{CD} x^2yz\mathrm{d}s$$

$$= \int_0^2 0\mathrm{d}t + \int_0^1 0\mathrm{d}t + \int_0^3 2t\,\mathrm{d}t = 9.$$

(7)
$$\mathrm{d}s = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_L y^2\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 \cdot \sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{2}a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}t = \sqrt{2}a^3\int_0^{2\pi}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{u=\frac{t}{2}} 16a^3\int_0^{\pi}\sin^5 u\mathrm{d}u$$

$$= 32a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 u\mathrm{d}u^{①} = 32a^3\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{256}{15}a^3.$$

(8)
$$\mathrm{d}s = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{(at\cos t)^2 + (at\sin t)^2}\,\mathrm{d}t = at\mathrm{d}t,$$

$$\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi}[a^2(\cos t + t\sin t)^2 + a^2(\sin t - t\cos t)^2]\cdot at\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi} a^3(1+t^2)t\mathrm{d}t = 2\pi^2a^3(1+2\pi^2).$$

4. 求半径为 a、圆心角为 2φ 的均匀圆弧(线密度 $\mu=1$)的质心.

解　取坐标系如图 11-2 所示,则由对称性知

$$\overline{y}=0.$$

---

① 参阅教材上册第五章第三节例 12.

又 $M=\int_L \mu \mathrm{d}s=\int_L \mathrm{d}s=2\varphi a$(也可由圆弧的弧长公式直接得出),

故 $$\bar{x}=\frac{\int_L x\mu \mathrm{d}s}{M}=\frac{\int_{-\varphi}^{\varphi} a\cos t\cdot a\mathrm{d}t}{2\varphi a}=\frac{2a^2\sin\varphi}{2\varphi a}=\frac{a\sin\varphi}{\varphi},$$

所求圆弧的质心的位置为$\left(\frac{a\sin\varphi}{\varphi},0\right)$.

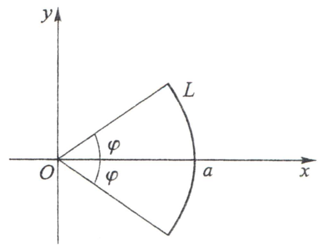


图 11-2

5. 设螺旋形弹簧一圈的方程为 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=kt$,其中 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$,它的线密度 $\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$,求:

(1)它关于 z 轴的转动惯量 I_z;

(2)它的质心.

解 (1) $$I_z=\int_L (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_L (x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$$
$$=\int_0^{2\pi} a^2(a^2+k^2t^2)\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+k^2}\,\mathrm{d}t$$
$$=a^2\sqrt{a^2+k^2}\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{2}{3}\pi a^2\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2).$$

(2)设质心位置为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$.

$$M=\int_L \rho(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$$
$$=\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{2}{3}\pi\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2),$$

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\int_L x\rho(x,y,z)\mathrm{d}s=\frac{1}{M}\int_L x(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$$
$$=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi} a\cos t(a^2+k^2t^2)\cdot\sqrt{a^2+k^2}\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{a\sqrt{a^2+k^2}}{M}\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\cos t\mathrm{d}t,$$

由于 $$\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\cos t\mathrm{d}t=\left[(a^2+k^2t^2)\sin t\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sin t\cdot 2k^2t\mathrm{d}t$$
$$=\left[2k^2t\cos t\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}2k^2\cos t\mathrm{d}t=4\pi k^2,$$

因此
$$\bar{x}=\frac{a\sqrt{a^2+k^2}\cdot 4\pi k^2}{\frac{2}{3}\pi\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2)}=\frac{6ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2}.$$

类似地,
$$\bar{y}=\frac{1}{M}\int_L y(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{a\sqrt{a^2+k^2}}{M}\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\sin t\mathrm{d}t$$
$$=\frac{a\sqrt{a^2+k^2}\cdot(-4\pi^2k^2)}{M}=\frac{-6\pi ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2}.$$
$$\bar{z}=\frac{1}{M}\int_L z(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{k\sqrt{a^2+k^2}}{M}\int_0^{2\pi}t(a^2+k^2t^2)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{k\sqrt{a^2+k^2}(2a^2\pi^2+4k^2\pi^4)}{M}=\frac{3\pi k(a^2+2\pi^2k^2)}{3a^2+4\pi^2k^2}.$$

习题 11-2　对坐标的曲线积分

1. 设 L 为 xOy 面内直线 $x=a$ 上的一段,证明:
$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=0.$$

证　将 L 的方程表达为如下的参数形式:
$$\begin{cases}x=a,\\ y=t,\end{cases}\quad t\text{ 从 }\alpha\text{ 变到 }\beta.$$
于是由第二类曲线积分的计算公式,得
$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta P(a,t)\cdot 0\mathrm{d}t=0.$$

注　本题给出了第二类曲线积分的一个重要性质:

如果 L 为垂直于 x 轴的有向线段,则 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=0$;如果 L 为垂直于 y 轴的有向线段,则 $\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y=0$. 这一性质常被用来简化第二类曲线积分的计算.

2. 设 L 为 xOy 面内 x 轴上从点 $(a,0)$ 到点 $(b,0)$ 的一段直线,证明:
$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b P(x,0)\mathrm{d}x.$$

证　将 L 的方程表达为如下的参数形式:
$$\begin{cases}x=x,\\ y=0,\end{cases}\quad x\text{ 从 }a\text{ 变到 }b,$$

于是
$$\int_L P(x,y)\,dx=\int_a^b P(x,0)\,dx.$$

3. 计算下列对坐标的曲线积分:

(1) $\int_L (x^2-y^2)\,dx$, 其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点(0,0)到点(2,4)的一段弧;

(2) $\oint_L xy\,dx$,其中 L 为圆周 $(x-a)^2+y^2=a^2(a>0)$ 及 x 轴所围成的在第一象限内的区域的整个边界(按逆时针方向绕行);

(3) $\int_L y\,dx+x\,dy$,其中 L 为圆周 $x=R\cos t$,$y=R\sin t$ 上对应 t 从 0 到$\frac{\pi}{2}$的一段弧;

(4) $\oint_L \frac{(x+y)\,dx-(x-y)\,dy}{x^2+y^2}$,其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$(按逆时针方向绕行);

(5) $\int_\Gamma x^2dx+z\,dy-y\,dz$,其中 Γ 为曲线 $x=k\theta,y=a\cos\theta,z=a\sin\theta$ 上对应 θ 从 0 到 π 的一段弧;

(6) $\int_\Gamma x\,dx+y\,dy+(x+y-1)\,dz$,其中 Γ 是从点(1,1,1)到点(2,3,4)的一段直线;

(7) $\oint_\Gamma dx-dy+y\,dz$,其中 Γ 为有向闭折线 $ABCA$,这里的 A,B,C 依次为点(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1);

(8) $\int_L (x^2-2xy)\,dx+(y^2-2xy)\,dy$,其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点(-1,1)到点(1,1)的一段弧.

解 (1)
$$\int_L (x^2-y^2)\,dx=\int_0^2(x^2-x^4)\,dx=-\frac{56}{15}.$$

(2) 如图 11-3,L 由 L_1 和 L_2 所组成,其中 L_1 为有向半圆弧:

$$\begin{cases}x=a+a\cos t,\\ y=a\sin t,\end{cases}\quad t\text{ 从 0 变到 }\pi;$$

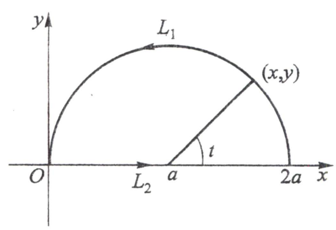


图 11-3

L_2 为有向线段 $y=0$,x 从 0 变到 $2a$.于是

$$\begin{aligned}\oint_L xy\,dx&=\int_{L_1}xy\,dx+\int_{L_2}xy\,dx\\&=\int_0^\pi a(1+\cos t)\cdot a\sin t\cdot(-a\sin t)\,dt+0\\&=-a^3\left(\int_0^\pi \sin^2t\,dt+\int_0^\pi\sin^2t\cos t\,dt\right)\end{aligned}$$

$$=-a^3\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=-\frac{\pi}{2}a^3.$$

(3) $$\int_L y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[R\sin t\cdot(-R\sin t)+R\cos t\cdot R\cos t]\mathrm{d}t$$

$$=R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\mathrm{d}t=0.$$

(4) L 的参数方程为 $x=a\cos t,y=a\sin t,t$ 从 0 变到 2π.于是

$$原式=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}[a(\cos t+\sin t)\cdot(-a\sin t)-a(\cos t-\sin t)\cdot a\cos t]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}(-a^2)\mathrm{d}t=-2\pi.$$

(5) $$\int_\Gamma x^2\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{\pi}[k^2\theta^2\cdot k+a\sin\theta\cdot(-a\sin\theta)-a\cos\theta\cdot(a\cos\theta)]\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{\pi}(k^3\theta^2-a^2)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}k^3\pi^3-a^2\pi.$$

(6) 直线 Γ 的参数方程为 $x=1+t,y=1+2t,z=1+3t,t$ 从 0 变到 1.于是

$$原式=\int_0^1[(1+t)\cdot 1+(1+2t)\cdot 2+(1+t+1+2t-1)\cdot 3]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1(6+14t)\mathrm{d}t=13.$$

(7) Γ 由有向线段 AB,BC,CA 依次连接而成,其中

$AB:x=1-t,y=t,z=0,t$ 从 0 变到 1;

$BC:x=0,y=1-t,z=t,t$ 从 0 变到 1;

$CA:x=t,y=0,z=1-t,t$ 从 0 变到 1.

$$\int_{AB}\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z=\int_0^1[(-1)-1+0]\mathrm{d}t=-2,$$

$$\int_{BC}\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z=\int_0^1[0-(-1)+(1-t)\cdot 1]\mathrm{d}t=\int_0^1(2-t)\mathrm{d}t=\frac{3}{2},$$

$$\int_{CA}\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z=\int_0^1(1-0+0)\mathrm{d}t=1,$$

因此 $$\oint_\Gamma\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z=-2+\frac{3}{2}+1=\frac{1}{2}.$$

(8) $$\int_L(x^2-2xy)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^{1}[(x^2-2x\cdot x^2)+(x^4-2x\cdot x^2)\cdot 2x]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{1}(2x^5-4x^4-2x^3+x^2)\mathrm{d}x$$

$$=2\int_{0}^{1}(-4x^4+x^2)\mathrm{d}x=-\frac{14}{15}.$$

4. 计算 $\int_L (x+y)\,\mathrm{d}x+(y-x)\,\mathrm{d}y$,其中 L 是

(1) 抛物线 $y^2=x$ 上从点(1,1)到点(4,2)的一段弧;

(2) 从点(1,1)到点(4,2)的直线段;

(3) 先沿直线从点(1,1)到点(1,2),然后再沿直线到点(4,2)的折线;

(4) 曲线 $x=2t^2+t+1,y=t^2+1$ 上从点(1,1)到点(4,2)的一段弧.

解 (1) 化为对 y 的定积分.$L:x=y^2$,y 从 1 变到 2,

$$原式=\int_{1}^{2}[(y^2+y)\cdot 2y+(y-y^2)\cdot 1]\mathrm{d}y$$

$$=\int_{1}^{2}(2y^3+y^2+y)\mathrm{d}y=\frac{34}{3}.$$

(2) L 的方程为 $y-1=\frac{2-1}{4-1}(x-1)$,即 $x=3y-2$,y 从 1 变到 2.化为对 y 的定积分计算,有

$$原式=\int_{1}^{2}[(3y-2+y)\cdot 3+(y-3y+2)\cdot 1]\mathrm{d}y$$

$$=\int_{1}^{2}(10y-4)\mathrm{d}y=11.$$

(3) 记 L_1 为从点(1,1)到点(1,2)的有向线段,L_2 为从点(1,2)到点(4,2)的有向线段.则 $L_1:x=1$,y 从 1 变到 2;$L_2:y=2$,x 从 1 变到 4.在 L_1 上,$\mathrm{d}x=0$;在 L_2 上,$\mathrm{d}y=0$.于是

$$\int_{L_1}(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=\int_{1}^{2}(y-1)\mathrm{d}y=\frac{1}{2},$$

$$\int_{L_2}(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=\int_{1}^{4}(x+2)\mathrm{d}x=\frac{27}{2},$$

因此

$$原式=\frac{1}{2}+\frac{27}{2}=14.$$

(4) 由 $\begin{cases}2t^2+t+1=1,\\t^2+1=1\end{cases}$ 可得 $t=0$;由 $\begin{cases}2t^2+t+1=4,\\t^2+1=2\end{cases}$ 可得 $t=1$.因此

$$原式=\int_{0}^{1}[(2t^2+t+1+t^2+1)\cdot(4t+1)+(t^2+1-2t^2-t-1)\cdot 2t]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1(10t^3+5t^2+9t+2)\mathrm{d}t=\frac{32}{3}.$$

5. 一力场由沿横轴正方向的恒力 $\boldsymbol{F}$ 所构成.试求当一质量为 m 的质点沿圆周 $x^2+y^2=R^2$ 按逆时针方向移过位于第一象限的那一段弧时场力所做的功.

解　依题意,$\boldsymbol{F}=(|\boldsymbol{F}|,0)$,$L:x=R\cos t,y=R\sin t$,$t$ 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$,因此

$$W=\int_L\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_L|\boldsymbol{F}|\mathrm{d}x+0\mathrm{d}y$$

$$=|\boldsymbol{F}|\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-R\sin t)\mathrm{d}t=-|\boldsymbol{F}|R.$$

6. 设 z 轴与重力的方向一致,求质量为 m 的质点从位置 (x_1,y_1,z_1) 沿直线移到 (x_2,y_2,z_2) 时重力所做的功.

解　重力 $\boldsymbol{F}=(0,0,mg)$,质点移动的直线路径 L 的方程为

$$\begin{cases}x=x_1+(x_2-x_1)t,\\ y=y_1+(y_2-y_1)t,\quad t\text{ 从 0 变到 1.}\\ z=z_1+(z_2-z_1)t,\end{cases}$$

于是

$$W=\int_L\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_L 0\mathrm{d}x+0\mathrm{d}y+mg\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 mg(z_2-z_1)\mathrm{d}t=mg(z_2-z_1).$$

7. 把对坐标的曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 化成对弧长的曲线积分,其中 L 为

(1) 在 xOy 面内沿直线从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$;

(2) 沿抛物线 $y=x^2$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$;

(3) 沿上半圆周 $x^2+y^2=2x$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$.

解　(1) L 为从点 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的有向线段,其上任一点处的切向量的方向余弦满足 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$,于是

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_L[P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]\mathrm{d}s$$

$$=\int_L\frac{P(x,y)+Q(x,y)}{\sqrt{2}}\mathrm{d}s.$$

(2) L 由如下的参数方程给出:$x=x,y=x^2$,x 由小到大地从 0 变到 1,故 L 的切向量为 $\boldsymbol{\tau}=(1,y'(x))=(1,2x)$,其方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2(x)}}=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}},\quad\cos\beta=\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}}=\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}},$$

于是
$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_L \frac{P(x,y)+2xQ(x,y)}{\sqrt{1+4x^2}}\mathrm{d}s .$$

(3) L 由如下的参数方程给出:$x=x,y=\sqrt{2x-x^2}$,x 由小到大地从 0 变到 1,故 L 的切向量的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2(x)}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right)^2}}=\sqrt{2x-x^2},$$

$$\cos\beta=\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}}=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\cdot\sqrt{2x-x^2}=1-x,$$

于是

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_L\left[\sqrt{2x-x^2}\,P(x,y)+(1-x)Q(x,y)\right]\mathrm{d}s.$$

8. 设 Γ 为曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 上相应于 t 从 0 变到 1 的曲线弧.把对坐标的曲线积分 $\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 化成对弧长的曲线积分.

解 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2t=2x,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=3t^2=3y$,注意到参数 t 由小变到大,因此 Γ 的切向量的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}}=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}}=\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z'(t)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}}=\frac{3y}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}.$$

从而
$$\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_\Gamma\frac{P+2xQ+3yR}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}\mathrm{d}s.$$

9. 设曲线 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线,从 z 轴的正向看取逆时针方向,

$$I=\oint_\Gamma z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z,$$

试利用两类曲线积分之间的关系证明:$|I|\leqslant 2\pi a^2$.

证 由两类曲线积分之间的关系得

$$I=\oint_\Gamma z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z=\oint_\Gamma(z\cos\alpha+x\cos\beta+y\cos\gamma)\mathrm{d}s,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta$ 和 $\cos\gamma$ 为 Γ 的方向余弦.

利用向量的数量积,得

$$|z\cos\alpha+x\cos\beta+y\cos\gamma|\leqslant\sqrt{z^2+x^2+y^2}\cdot\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}$$
$$=\sqrt{z^2+x^2+y^2},$$

因此

$$|I|\leqslant\oint_\Gamma|z\cos\alpha+x\cos\beta+y\cos\gamma|\mathrm{d}s\leqslant\oint_\Gamma\sqrt{z^2+x^2+y^2}\mathrm{d}s,$$

注意到,在曲线 Γ 上 $x^2+y^2+z^2=a^2$,曲线 Γ 的长度为 $2\pi a$,于是

$$|I|\leqslant\oint_\Gamma\sqrt{z^2+x^2+y^2}\mathrm{d}s=\oint_\Gamma a\mathrm{d}s=2\pi a^2.$$

习题 11-3　格林公式及其应用

1. 计算下列曲线积分,并验证格林公式的正确性:

(1) $\oint_L(2xy-x^2)\mathrm{d}x+(x+y^2)\mathrm{d}y$,其中 L 是由抛物线 $y=x^2$ 和 $y^2=x$ 所围成的区域的正向边界曲线;

(2) $\oint_L(x^2-xy^3)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y$,其中 L 是四个顶点分别为 $(0,0)$,$(2,0)$,$(2,2)$ 和 $(0,2)$ 的正方形区域的正向边界.

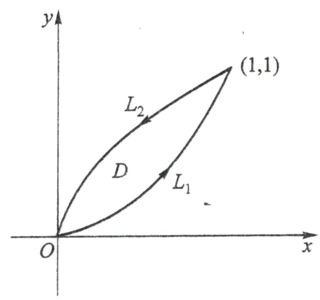


图 11-4

解　(1) 先按曲线积分的计算公式直接计算.记 $L_1:y=x^2$,x 从 0 变到 1;$L_2:x=y^2$,y 从 1 变到 0(图 11-4).于是

$$原式=\int_{L_1}(2xy-x^2)\mathrm{d}x+(x+y^2)\mathrm{d}y+\int_{L_2}(2xy-x^2)\mathrm{d}x+(x+y^2)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1[(2x^3-x^2)+(x+x^4)\cdot 2x]\mathrm{d}x+\int_1^0[(2y^3-y^4)\cdot 2y+(y^2+y^2)]\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1(2x^5+2x^3+x^2)\mathrm{d}x+\int_1^0(-2y^5+4y^4+2y^2)\mathrm{d}y$$
$$=\frac{7}{6}-\frac{17}{15}=\frac{1}{30}.$$

又,$P=2xy-x^2$,$Q=x+y^2$,$\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x$,$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=1$,

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(1-2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1(1-2x)\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}y=\int_0^1(1-2x)(\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 (x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{3}{2}}-x^2+2x^3)\mathrm{d}x=\frac{1}{30}.$$

可见
$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2) 如图 11-5.L 由有向线段 OA,AB,BC 和 CO 组成.

$$\int_{\overline{OA}}(x^2-xy^3)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y=\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{8}{3},$$

$$\int_{\overline{AB}}(x^2-xy^3)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y=\int_0^2 (y^2-4y)\mathrm{d}y=\frac{8}{3}-8,$$

$$\int_{\overline{BC}}(x^2-xy^3)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y=\int_2^0 (x^2-8x)\mathrm{d}x=16-\frac{8}{3},$$

$$\int_{\overline{CO}}(x^2-xy^3)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y=\int_2^0 y^2\mathrm{d}y=-\frac{8}{3},$$

于是

$$原式=\frac{8}{3}+\left(\frac{8}{3}-8\right)+\left(16-\frac{8}{3}\right)+\left(-\frac{8}{3}\right)=8.$$

又
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-2y,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=-3xy^2,$$

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(-2y+3xy^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^2(-2y+3xy^2)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^2(8x-4)\mathrm{d}x=8,$$

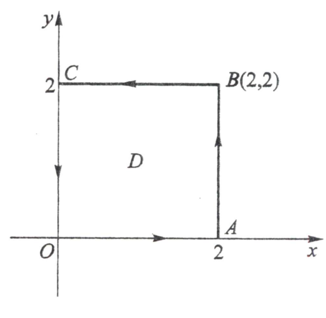


图 11-5

可见
$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2. 利用曲线积分,求下列曲线所围成的图形的面积:

(1) 星形线 $x=a\cos^3 t,y=a\sin^3 t$;

(2) 椭圆 $9x^2+16y^2=144$;

(3) 圆 $x^2+y^2=2ax$.

解 (1) 正向星形线的参数方程中的参数 t 从 0 变到 2π,因此

$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos^3 t(3a\sin^2 t\cos t)-a\sin^3 t(3a\cos^2 t)(-\sin t)]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{8}(1 - \cos 4t)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

（2）正向椭圆 $9x^2+16y^2=144$ 的参数方程为

$$x = 4\cos t, y = 3\sin t, t \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } 2\pi.$$

$$A = \frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[4\cos t\cdot 3\cos t - 3\sin t(-4\sin t)]\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t = 12\pi.$$

（3）正向圆周 $x^2+y^2=2ax$，即 $(x-a)^2+y^2=a^2$ 的参数方程为

$$x = a + a\cos t, y = a\sin t, t \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } 2\pi.$$

$$A = \frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[(a + a\cos t)a\cos t - a\sin t(-a\sin t)]\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1 + \cos t)\,\mathrm{d}t = \pi a^2.$$

3. 计算曲线积分 $\oint_L \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2 + y^2)}$，其中 L 为圆周 $(x-1)^2+y^2=2$，L 的方向为逆时针方向.

解　在 L 所围的区域内的点 $(0,0)$ 处，函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 均无意义.现取 r 为适当小的正数，使圆周 l（取逆时针方向）：$x=r\cos t, y=r\sin t$（t 从 0 变到 2π）位于 L 所围的区域内，则在由 L 和 l^- 所围成的复连通区域 D 上（图 11-6），可应用格林公式，在 D 上，

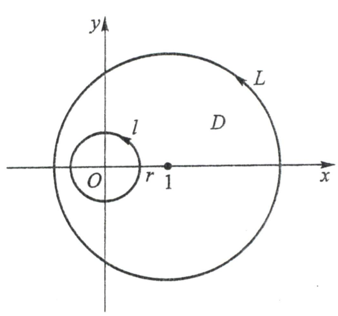


图 11-6

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2}{2(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

于是由格林公式得

$$\oint_L \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2 + y^2)} + \oint_{l^-} \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2 + y^2)} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

从而

$$\oint_L \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)} = \oint_l \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-r^2\sin^2 t - r^2\cos^2 t}{2r^2}\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t = -\pi.$$

4. 确定正向闭曲线 C,使曲线积分

$$\oint_C \left(x+\frac{y^3}{3}\right)\mathrm{d}x + \left(y + x - \frac{2}{3}x^3\right)\mathrm{d}y$$

达到最大值.

解 记 D 为 C 所围成的平面有界闭区域,C 为 D 的正向边界曲线,则由格林公式

$$\oint_C \left(x+\frac{y^3}{3}\right)\mathrm{d}x + \left(y + x - \frac{2}{3}x^3\right)\mathrm{d}y = \iint_D [(1-2x^2)-y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

要使上式右端的二重积分达到最大值,D 应包含所有使被积函数 $1-2x^2-y^2$ 大于零的点,而不包含使被积函数小于零的点.因此 D 应为由椭圆 $2x^2+y^2=1$ 所围成的闭区域.这就是说,当 C 为取逆时针方向的椭圆 $2x^2+y^2=1$ 时,所给的曲线积分达到最大值.

5. 设 n 边形的 n 个顶点按逆时针方向依次为 $M_1(x_1,y_1),M_2(x_2,y_2),\cdots,M_n(x_n,y_n)$.试利用曲线积分证明此 n 边形的面积为

$$A=\frac{1}{2}[(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+\cdots+(x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1})+(x_ny_1-x_1y_n)].$$

证 n 边形的正向边界 L 由有向线段 $M_1M_2,M_2M_3,\cdots,M_{n-1}M_n,M_nM_1$ 组成.

有向线段 M_1M_2 的参数方程为 $x=x_1+(x_2-x_1)t,y=y_1+(y_2-y_1)t,t$ 从 0 变到 1,于是

$$\int_{M_1M_2} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \int_0^1 \{[x_1+(x_2-x_1)t](y_2-y_1)-[y_1+(y_2-y_1)t](x_2-x_1)\}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 [x_1(y_2-y_1)-y_1(x_2-x_1)]\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 (x_1y_2-x_2y_1)\mathrm{d}t = x_1y_2-x_2y_1.$$

同理可求得

$$\int_{M_2M_3} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = x_2y_3-x_3y_2,\cdots,$$

$$\int_{M_{n-1}M_n} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1},$$

$$\int_{M_nM_1} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = x_ny_1-x_1y_n.$$

因此 n 边形的面积

$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_{M_1M_2}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x+\int_{M_2M_3}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x+\cdots+\int_{M_{n-1}M_n}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x+\int_{M_nM_1}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{1}{2}[(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+\cdots+(x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1})+(x_ny_1-x_1y_n)].$$

6. 证明下列曲线积分在整个 xOy 面内与路径无关,并计算积分值:

(1) $\int_{(1,1)}^{(2,3)}(x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y$;

(2) $\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)\mathrm{d}x+(6x^2y-3xy^2)\mathrm{d}y$;

(3) $\int_{(1,0)}^{(2,1)}(2xy-y^4+3)\mathrm{d}x+(x^2-4xy^3)\mathrm{d}y$.

解　(1) 函数 $P=x+y,Q=x-y$ 在整个 xOy 面这个单连通区域内,具有一阶连续偏导数,且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=1=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故曲线积分在 xOy 面内与路径无关.取折线积分路径 MRN,其中 M 为(1,1),R 为(2,1),N 为(2,3),则有

$$原式=\int_1^2(x+1)\mathrm{d}x+\int_1^3(2-y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{5}{2}+0=\frac{5}{2}.$$

(2) 函数 $P=6xy^2-y^3,Q=6x^2y-3xy^2$ 在 xOy 面这个单连通区域内具有一阶连续偏导数,且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=12xy-3y^2=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故曲线积分在 xOy 面内与路径无关.取折线积分路径 MRN,其中 M 为(1,2),R 为(3,2),N 为(3,4),则有

$$原式=\int_1^3(24x-8)\mathrm{d}x+\int_2^4(54y-9y^2)\mathrm{d}y$$

$$=80+156=236.$$

(3) 函数 $P=2xy-y^4+3,Q=x^2-4xy^3$ 在 xOy 面这个单连通区域内具有一阶连续偏导数,且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x-4y^3=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故曲线积分在 xOy 面内与路径无关.取折线积分路径 MRN,其中 M 为(1,0),R 为(2,0),N 为(2,1),则

$$\text{原式} = \int_1^2 3\mathrm{d}x + \int_0^1 (4 - 8y^3)\mathrm{d}y = 3 + 2 = 5.$$

7. 利用格林公式,计算下列曲线积分:

(1) $\oint_L (2x - y + 4)\mathrm{d}x + (5y + 3x - 6)\mathrm{d}y$,其中 L 为三顶点分别为(0,0),(3,0)和(3,2)的三角形正向边界;

(2) $\oint_L (x^2 y\cos x + 2xy\sin x - y^2 \mathrm{e}^x)\mathrm{d}x + (x^2 \sin x - 2y\mathrm{e}^x)\mathrm{d}y$,其中 L 为正向星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}(a > 0)$;

(3) $\int_L (2xy^3 - y^2 \cos x)\mathrm{d}x + (1 - 2y\sin x + 3x^2 y^2)\mathrm{d}y$,其中 L 为在抛物线 $2x = \pi y^2$ 上由点(0,0)到 $\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$ 的一段弧;

(4) $\int_L (x^2 - y)\mathrm{d}x - (x + \sin^2 y)\mathrm{d}y$,其中 L 是在圆周 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 上由点(0,0)到点(1,1)的一段弧.

解 (1) 设 D 为 L 所围的三角形闭区域,则由格林公式,

$$\begin{aligned}\oint_L (2x - y + 4)\mathrm{d}x + (5y + 3x - 6)\mathrm{d}y &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_D [3 - (-1)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 4 \times (D\text{ 的面积}) = 4 \times 3 = 12.\end{aligned}$$

(2) 由于
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x\sin x + x^2 \cos x - 2y\mathrm{e}^x,$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = x^2 \cos x + 2x\sin x - 2y\mathrm{e}^x,$$

故由格林公式得

$$\text{原式} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D 0 \cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

(3) 由于 $P = 2xy^3 - y^2 \cos x$, $Q = 1 - 2y\sin x + 3x^2 y^2$ 在 xOy 面内具有一阶连续偏导数,且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2y\cos x + 6xy^2 = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故所给曲线积分与路径无关.于是将原积分路径 L 改变为折线路径 ORN,其中 O 为

$(0,0)$，R 为$\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$，$N$ 为$\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$（图 11-7），得

$$原式 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 \cdot dx + \int_0^1 \left(1 - 2y\sin\frac{\pi}{2} + 3 \cdot \frac{\pi^2}{4}y^2\right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(1 - 2y + \frac{3}{4}\pi^2 y^2\right) dy = \frac{\pi^2}{4}.$$

（4）由于 $P = x^2 - y$，$Q = -(x + \sin^2 y)$ 在 xOy 面内具有一阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -1 = \dfrac{\partial P}{\partial y}$，故所给曲线积分与路径无关. 于是将原积分路径 L 改为折线路径 ORN，其中 O 为$(0,0)$，R 为$(1,0)$，N 为$(1,1)$（图 11-8），得

$$原式 = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 (1 + \sin^2 y) dy$$

$$= \frac{1}{3} - 1 - \int_0^1 \frac{1 - \cos 2y}{2} dy$$

$$= -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin 2 = -\frac{7}{6} + \frac{1}{4}\sin 2.$$

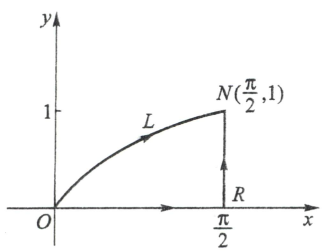


图 11-7

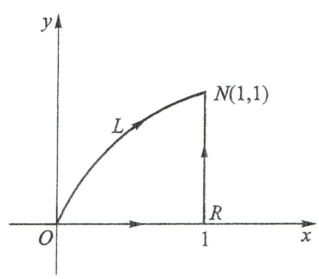


图 11-8

8. 设有界闭区域 D 由 xOy 面上的分段光滑曲线 L 所围成，函数 $u = u(x,y)$ 在 D 上具有连续的二阶偏导数，$\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 表示 $u(x,y)$ 沿 L 的外法向量的方向导数. 证明

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) d\sigma,$$

其中 L 取正向.

证　设沿 L 的切向量的方向余弦为 $\cos\alpha, \cos\beta$，则外法向量的方向余弦为

$$\cos\beta,\quad -\cos\alpha,$$

故

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \cos\beta \frac{\partial u}{\partial x} - \cos\alpha \frac{\partial u}{\partial y}.$$

因此，利用两类曲线积分之间的关系得

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\oint_L\left(-\cos\alpha\frac{\partial u}{\partial y}+\cos\beta\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}s=\oint_L\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\right),$$

于是,利用格林公式,得

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}\sigma=\iint_D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}\sigma.$$

9. 验证下列 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 在整个 xOy 面内是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分,并求这样的一个 $u(x,y)$:

(1) $(x+2y)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$;

(2) $2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$;

(3) $4\sin x\sin 3y\cos x\mathrm{d}x-3\cos 3y\cos 2x\mathrm{d}y$;

(4) $(3x^2y+8xy^2)\mathrm{d}x+(x^3+8x^2y+12ye^y)\mathrm{d}y$;

(5) $(2x\cos y+y^2\cos x)\mathrm{d}x+(2y\sin x-x^2\sin y)\mathrm{d}y$.

解 (1) 在整个 xOy 面内,函数 $P=x+2y$, $Q=2x+y$ 具有一阶连续偏导数,且 $\frac{\partial Q}{\partial x}=2=\frac{\partial P}{\partial y}$,因此所给表达式是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分.取 $(x_0,y_0)=(0,0)$,则有

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(x+2y)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y=\int_0^x x\mathrm{d}x+\int_0^y(2x+y)\mathrm{d}y\\&=\frac{x^2}{2}+2xy+\frac{y^2}{2}.\end{aligned}$$

(2) 在整个 xOy 面内,函数 $P=2xy$ 和 $Q=x^2$ 具有一阶连续偏导数,且 $\frac{\partial Q}{\partial x}=2x=\frac{\partial P}{\partial y}$,故所给表达式是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分.取 $(x_0,y_0)=(0,0)$,则有

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=\int_0^x 2x\cdot 0\mathrm{d}x+\int_0^y x^2\mathrm{d}y=x^2y.$$

(3) 在整个 xOy 面内, $P=4\sin x\sin 3y\cos x$ 和 $Q=-3\cos 3y\cos 2x$ 具有一阶连续偏导数,且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=6\cos 3y\sin 2x=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故所给表达式是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分.取 $(x_0,y_0)=(0,0)$,则有

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{(0,0)}^{(x,y)}4\sin x\sin 3y\cos x\mathrm{d}x-3\cos 3y\cos 2x\mathrm{d}y\\&=\int_0^x 0\mathrm{d}x+\int_0^y(-3\cos 3y\cos 2x)\mathrm{d}y\\&=[-\sin 3y\cos 2x]_0^y=-\cos 2x\sin 3y.\end{aligned}$$

(4) 在整个 xOy 面内,函数 $P=3x^2y+8xy^2$ 和 $Q=x^3+8x^2y+12ye^y$ 具有一阶连续偏

导数,且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=3x^2+16xy=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故所给表达式为某一函数 $u(x,y)$ 的全微分.取 $(x_0,y_0)=(0,0)$,则有

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(3x^2y+8xy^2)\mathrm{d}x+(x^3+8x^2y+12ye^y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^x 0\mathrm{d}x+\int_0^y(x^3+8x^2y+12ye^y)\mathrm{d}y\\&=x^3y+4x^2y^2+12(ye^y-e^y).\end{aligned}$$

(5) **解法一**　在整个 xOy 面内,$P=2x\cos y+y^2\cos x$ 和 $Q=2y\sin x-x^2\sin y$ 具有一阶连续偏导数,且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2y\cos x-2x\sin y=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故所给表达式是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分.取 $(x_0,y_0)=(0,0)$,则有

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2x\cos y+y^2\cos x)\mathrm{d}x+(2y\sin x-x^2\sin y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^x 2x\mathrm{d}x+\int_0^y(2y\sin x-x^2\sin y)\mathrm{d}y\\&=y^2\sin x+x^2\cos y.\end{aligned}$$

注　在已经证明了所给表达式 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分后,为了求 $u(x,y)$,除了采用上面题解中的曲线积分方法外,还可用以下两种方法:

解法二(偏积分法)　因函数 $u(x,y)$ 满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)=2x\cos y+y^2\cos x,$$

故

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int(2x\cos y+y^2\cos x)\mathrm{d}x\\&=x^2\cos y+y^2\sin x+\varphi(y),\end{aligned}$$

其中 $\varphi(y)$ 是 y 的某个可导函数,由此得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-x^2\sin y+2y\sin x+\varphi'(y).$$

又 $u(x,y)$ 必须满足

$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)=2y\sin x-x^2\sin y,$$

从而得 $\varphi'(y)=0,\varphi(y)=C$($C$ 为任意常数).因此

$$u(x,y)=x^2\cos y+y^2\sin x+C,$$

取 $C=0$,就得到满足要求的一个 $u(x,y)$.

解法三(凑微分法)　利用微分运算法则直接凑出 $u(x,y)$.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(2x\cos y\mathrm{d}x-x^2\sin y\mathrm{d}y)+(y^2\cos x\mathrm{d}x+2y\sin x\mathrm{d}y)\\&=[\cos y\mathrm{d}x^2+x^2\mathrm{d}(\cos y)]+[y^2\mathrm{d}(\sin x)+\sin x\mathrm{d}y^2]\\&=\mathrm{d}(x^2\cdot\cos y)+\mathrm{d}(y^2\cdot\sin x)\\&=\mathrm{d}(x^2\cos y+y^2\sin x).\end{aligned}$$

因此可取 $u(x,y)=x^2\cos y+y^2\sin x$.

10. 设有一变力在坐标轴上的投影为 $X=x^2+y^2$, $Y=2xy-8$, 这变力确定了一个力场.证明质点在此场内移动时,场力所做的功与路径无关.

证　场力所做的功

$$W=\int_L X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y=\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(2xy-8)\mathrm{d}y,$$

由于 $P=x^2+y^2$ 和 $Q=2xy-8$ 在整个 xOy 面内具有一阶连续偏导数,且 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2y=\dfrac{\partial P}{\partial y}$,故曲线积分在 xOy 面内与路径无关,即场力所做的功与路径无关.

***11.** 判别下列方程中哪些是全微分方程.对于全微分方程,求出它的通解.

(1) $(3x^2+6xy^2)\mathrm{d}x+(6x^2y+4y^2)\mathrm{d}y=0$;

(2) $(a^2-2xy-y^2)\mathrm{d}x-(x+y)^2\mathrm{d}y=0$　(a 为常数);

(3) $\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+(x\mathrm{e}^y-2y)\mathrm{d}y=0$;

(4) $(x\cos y+\cos x)y'-y\sin x+\sin y=0$;

(5) $(x^2-y)\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$;

(6) $y(x-2y)\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y=0$;

(7) $(1+\mathrm{e}^{2\theta})\mathrm{d}\rho+2\rho\mathrm{e}^{2\theta}\mathrm{d}\theta=0$;

(8) $(x^2+y^2)\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y=0$.

说明　① 在单连通区域内,若 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 有连续的偏导数,则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 是方程 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$ 为全微分方程的充要条件.本题利用这一条件来判别方程是不是全微分方程.

② 在条件 $\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 下,存在函数 $u=u(x,y)$,满足 $\mathrm{d}u=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$,而 $u(x,y)=C$ 即是方程 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$ 的通解.函数 $u(x,y)$ 可用三种方法求得,其一为曲线积分法,其二为凑微分法,其三为偏积分法.

解　(1)
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(3x^2+6xy^2)=12xy,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(6x^2y+4y^2)=12xy,$$

因$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$,故原方程是全微分方程.

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^x P(x,0)\,\mathrm{d}x+\int_0^y Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^x 3x^2\mathrm{d}x+\int_0^y(6x^2y+4y^2)\,\mathrm{d}y=x^3+3x^2y^2+\frac{4}{3}y^3,$$

故所求通解为

$$x^3+3x^2y^2+\frac{4}{3}y^3=C.$$

（2）
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(a^2-2xy-y^2)=-2x-2y,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}[-(x+y)^2]=-2(x+y),$$

因$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$,故原方程是全微分方程.

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^x P(x,0)\,\mathrm{d}x+\int_0^y Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^x a^2\mathrm{d}x-\int_0^y(x+y)^2\mathrm{d}y=a^2x-\frac{1}{3}(x+y)^3+\frac{1}{3}x^3$$
$$=a^2x-x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3,$$

故所求通解为

$$a^2x-x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3=C.$$

（3）$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial \mathrm{e}^y}{\partial y}=\mathrm{e}^y$,$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x\mathrm{e}^y-2y)=\mathrm{e}^y$,因$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$,故原方程是全微分方程.下面用凑微分法求通解：

$$\text{方程的左端}=(\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+x\mathrm{e}^y\mathrm{d}y)-2y\mathrm{d}y$$
$$=\mathrm{d}(x\mathrm{e}^y)-\mathrm{d}(y^2)=\mathrm{d}(x\mathrm{e}^y-y^2),$$

即原方程为

$$\mathrm{d}(x\mathrm{e}^y-y^2)=0,$$

故所求通解为

$$x\mathrm{e}^y-y^2=C.$$

（4）将原方程改写成

$$(\sin y-y\sin x)\,\mathrm{d}x+(x\cos y+\cos x)\,\mathrm{d}y=0.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\sin y-y\sin x)=\cos y-\sin x,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x\cos y+\cos x)=\cos y-\sin x,$$

因$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$,故原方程是全微分方程.

$$\begin{aligned}\text{方程的左端}&=(\sin y-y\sin x)\mathrm{d}x+(x\cos y+\cos x)\mathrm{d}y\\&=(\sin y\mathrm{d}x+x\cos y\mathrm{d}y)+(-y\sin x\mathrm{d}x+\cos x\mathrm{d}y)\\&=\mathrm{d}(x\sin y)+\mathrm{d}(y\cos x),\end{aligned}$$

即原方程为

$$\mathrm{d}(x\sin y+y\cos x)=0,$$

故所求通解为

$$x\sin y+y\cos x=C.$$

(5) $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2-y)=-1$,$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(-x)=-1$,因$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$,故原方程是全微分方程.

$$\text{方程的左端}=x^2\mathrm{d}x-(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=\mathrm{d}\left(\frac{x^3}{3}\right)-\mathrm{d}(xy),$$

即原方程为

$$\mathrm{d}\left(\frac{x^3}{3}-xy\right)=0,$$

故所求通解为

$$\frac{x^3}{3}-xy=C.$$

(6) $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}[y(x-2y)]=x-4y$,$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(-x^2)=-2x$.因$\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$,故原方程不是全微分方程.

(7) $\frac{\partial P}{\partial \theta}=\frac{\partial}{\partial \theta}(1+\mathrm{e}^{2\theta})=2\mathrm{e}^{2\theta}$,$\frac{\partial Q}{\partial \rho}=\frac{\partial}{\partial \rho}(2\rho\mathrm{e}^{2\theta})=2\mathrm{e}^{2\theta}$,因$\frac{\partial P}{\partial \theta}\equiv\frac{\partial Q}{\partial \rho}$,故原方程是全微分方程.

$$\text{方程的左端}=\mathrm{d}\rho+(\mathrm{e}^{2\theta}\mathrm{d}\rho+2\rho\mathrm{e}^{2\theta}\mathrm{d}\theta)=\mathrm{d}\rho+\mathrm{d}(\rho\mathrm{e}^{2\theta}),$$

即原方程为

$$\mathrm{d}(\rho+\rho\mathrm{e}^{2\theta})=0,$$

故所求通解为

$$\rho+\rho\mathrm{e}^{2\theta}=C.$$

(8) $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)=2y$,$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(xy)=y$. 因$\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$,故原方程不是全微分方程.

12. 确定常数 λ，使在右半平面 $x>0$ 内的向量 $\boldsymbol{A}(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{i}-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{j}$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度，并求 $u(x,y)$.

解　在单连通区域 G 内，若 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，则向量 $\boldsymbol{A}(x,y)=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度（此条件相当于 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 是 $u(x,y)$ 的全微分）的充分必要条件是 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在 G 内恒成立.

本题中，$P(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}$，$Q(x,y)=-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}$.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x(x^4+y^2)^{\lambda}+2\lambda xy(x^4+y^2)^{\lambda-1}\cdot 2y,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-2x(x^4+y^2)^{\lambda}-x^2\lambda(x^4+y^2)^{\lambda-1}\cdot 4x^3.$$

由等式 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 得到

$$4x(x^4+y^2)^{\lambda}(1+\lambda)=0,$$

由于 $4x(x^4+y^2)^{\lambda}>0$，故 $\lambda=-1$，即 $\boldsymbol{A}(x,y)=\dfrac{2xy\boldsymbol{i}-x^2\boldsymbol{j}}{x^4+y^2}$.

在半平面 $x>0$ 内，取 $(x_0,y_0)=(1,0)$，则得

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$$

$$=\int_1^x\frac{2x\cdot 0}{x^4+0^2}\mathrm{d}x-\int_0^y\frac{x^2}{x^4+y^2}\mathrm{d}y=-\arctan\frac{y}{x^2}.$$

习题 11-4　对面积的曲面积分

1. 设有一分布着质量的曲面 Σ，在点 (x,y,z) 处它的面密度为 $\mu(x,y,z)$，用对面积的曲面积分表示这曲面对于 x 轴的转动惯量.

解　设想将 Σ 分成 n 小块，取出其中任意一块记作 $\mathrm{d}S$（其面积也记作 $\mathrm{d}S$），(x,y,z) 为 $\mathrm{d}S$ 上一点，则 $\mathrm{d}S$ 对 x 轴的转动惯量近似等于

$$\mathrm{d}I_x=(y^2+z^2)\mu(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

以此作为转动惯量元素并积分，即得 Σ 对 x 轴的转动惯量为

$$I_x=\iint_{\Sigma}(y^2+z^2)\mu(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

2. 按对面积的曲面积分的定义证明公式

$$\iint_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma_1}f(x,y,z)\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma_2}f(x,y,z)\mathrm{d}S,$$

其中 Σ 是由 Σ_1 和 Σ_2 组成的.

证 由于 $f(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上可积,故不论把 Σ 如何分割,积分和的极限总是不变的.因此在分割 Σ 时,可以使 Σ_1 和 Σ_2 的公共边界曲线永远作为一条分割线.这样,$f(x,y,z)$ 在 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$ 上的积分和等于 Σ_1 上的积分和加上 Σ_2 上的积分和,记为

$$\sum_{\Sigma_1+\Sigma_2} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i = \sum_{\Sigma_1} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i + \sum_{\Sigma_2} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i.$$

令 $\lambda=\max\{\Delta S_i\text{的直径}\}\to 0$,上式两端同时取极限,即得

$$\iint_{\Sigma_1+\Sigma_2} f(x,y,z)\,dS = \iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,dS + \iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)\,dS.$$

3. 当 Σ 是 xOy 面内的一个闭区域时,曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS$ 与二重积分有什么关系?

解 当 Σ 为 xOy 面内的一个闭区域时,Σ 的方程为 $z=0$,因此在 Σ 上取值的 $f(x,y,z)$ 恒为 $f(x,y,0)$,且 $dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy=dxdy$.又 Σ 在 xOy 面上的投影区域即为 Σ 自身,因此有

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS = \iint_{\Sigma} f(x,y,0)\,dxdy.$$

4. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS$,其中 Σ 为抛物面 $z=2-(x^2+y^2)$ 在 xOy 面上方的部分,$f(x,y,z)$ 分别如下:

(1) $f(x,y,z)=1$;　　(2) $f(x,y,z)=x^2+y^2$;

(3) $f(x,y,z)=3z$.

解 抛物面 Σ 与 xOy 面的交线为 $x^2+y^2=2$,故 Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$.又

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy.$$

于是,

(1) $$\iint_{\Sigma} 1\cdot dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}} \iint_{D_{xy}} \sqrt{1+4\rho^2}\;\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4\rho^2}\;\rho\,d\rho$$

$$=2\pi\left[\frac{1}{12}(1+4\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{13}{3}\pi.$$

(2) $$\iint_{\Sigma} (x^2+y^2)\,dS = \iint_{D_{xy}} (x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}\iint\limits_{D_{xy}}\rho^2\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\sqrt{1+4\rho^2}\,\mathrm{d}\rho$$

$$\xlongequal{\rho=\frac{1}{2}\tan t}2\pi\cdot\frac{1}{16}\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}}\sec^3 t\cdot\tan^3 t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{8}\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}}\sec^2 t(\sec^2 t-1)\mathrm{d}(\sec t)=\frac{\pi}{8}\cdot\frac{596}{15}=\frac{149}{30}\pi.$$

(3) $\iint\limits_{\Sigma}3z\mathrm{d}S=3\iint\limits_{D_{xy}}[2-(x^2+y^2)]\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}3\iint\limits_{D_{xy}}(2-\rho^2)\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(2-\rho^2)\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho$$

$$\xlongequal{\rho=\frac{1}{2}\tan t}6\pi\left(\frac{1}{2}\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}}\sec^3 t\cdot\tan t\mathrm{d}t-\frac{1}{16}\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}}\sec^3 t\cdot\tan^3 t\mathrm{d}t\right)$$

$$=6\pi\left[\frac{1}{2}\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}}\sec^2 t\mathrm{d}(\sec t)-\frac{1}{16}\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}}\sec^2 t(\sec^2 t-1)\mathrm{d}(\sec t)\right]$$

$$=6\pi\left(\frac{13}{3}-\frac{149}{60}\right)=\frac{111}{10}\pi.$$

5. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$,其中 Σ 是

(1) 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 所围成的区域的整个边界曲面;

(2) 锥面 $z^2=3(x^2+y^2)$ 被平面 $z=0$ 和 $z=3$ 所截得的部分.

解　(1) Σ 由 Σ_1 和 Σ_2 组成,其中 Σ_1 为平面 $z=1$ 上被圆周 $x^2+y^2=1$ 所围的部分;Σ_2 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$.

在 Σ_1 上, $\mathrm{d}S=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

在 Σ_2 上, $\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Σ_1 和 Σ_2 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 均为 $x^2+y^2\leqslant 1$.

因此

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Sigma_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}(1+\sqrt{2})\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{1+\sqrt{2}}{2}\pi.$$

(2) 由题设,Σ 的方程为 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$,

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \sqrt{1+\frac{9x^2}{3(x^2+y^2)}+\frac{9y^2}{3(x^2+y^2)}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

又由 $z^2=3(x^2+y^2)$ 和 $z=3$ 消去 z 得 $x^2+y^2=3$,故 Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为 $x^2+y^2\leqslant 3$.于是

$$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\cdot 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xlongequal{\text{极坐标}} 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho = 9\pi.$$

6. 计算下列对面积的曲面积分:

(1) $\iint\limits_{\Sigma}\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)\mathrm{d}S$,其中 Σ 为平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第Ⅰ卦限中的部分;

(2) $\iint\limits_{\Sigma}(2xy-2x^2-x+z)\mathrm{d}S$,其中 Σ 为平面 $2x+2y+z=6$ 在第Ⅰ卦限中的部分;

(3) $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$,其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上 $z\geqslant h(0<h<a)$ 的部分;

(4) $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$,其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截得的有限部分.

解 (1) 在 Σ 上,$z=4-2x-\frac{4}{3}y$.Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为由 x 轴、y 轴和直线 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ 所围成的三角形闭区域.因此

$$\iint_{\Sigma}\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}}\left[\left(4-2x-\frac{4}{3}y\right)+2x+\frac{4}{3}y\right]\sqrt{1+(-2)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_{xy}}4\times\frac{\sqrt{61}}{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{4\sqrt{61}}{3}\times(D_{xy}\text{ 的面积})$$

$$= \frac{4\sqrt{61}}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 2\times 3\right) = 4\sqrt{61}.$$

(2) 在 Σ 上,$z=6-2x-2y$.Σ 在 xOy 面上的投影区域为由 x 轴、y 轴和直线 $x+y=3$ 所围成的三角形闭区域.因此

$$\iint\limits_{\Sigma}(2xy-2x^2-x+z)\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}[2xy-2x^2-x+(6-2x-2y)]\sqrt{1+(-2)^2+(-2)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\int_0^3\mathrm{d}x\int_0^{3-x}(6-3x-2x^2+2xy-2y)\,\mathrm{d}y$$

$$=3\int_0^3[(6-3x-2x^2)(3-x)+x(3-x)^2-(3-x)^2]\,\mathrm{d}x$$

$$=3\int_0^3(3x^3-10x^2+9)\,\mathrm{d}x=-\frac{27}{4}.$$

(3) 在 Σ 上，$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.Σ 在 xOy 面上的投影区域

$$D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2-h^2\}.$$

由于积分曲面 Σ 关于 yOz 面和 zOx 面均对称，故有

$$\iint\limits_{\Sigma}x\,\mathrm{d}S=0,\quad \iint\limits_{\Sigma}y\,\mathrm{d}S=0.$$

于是

$$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}z\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=a\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a\pi(a^2-h^2).$$

(4) Σ 如图 11-9 所示，Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为圆域 $x^2+y^2\leqslant 2ax$. 由于 Σ 关于 zOx 面对称，而函数 xy 和 yz 关于 y 均为奇函数，故

$$\iint\limits_{\Sigma}xy\,\mathrm{d}S=0,\quad \iint\limits_{\Sigma}yz\,\mathrm{d}S=0.$$

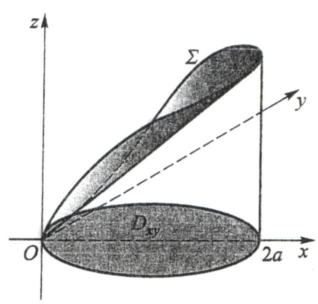


图 11-9

于是

$$\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}zx\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}x\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}x\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho\cos\theta\cdot\rho\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$= 8\sqrt{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= 8\sqrt{2}a^4\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{64}{15}\sqrt{2}a^4.$$

7. 求抛物面壳 $z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的质量,此壳的面密度为 $\mu = z$.

解 $\Sigma: z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)(0\leqslant z\leqslant 1)$ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$.

$z_x=x, z_y=y$. 故 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 因此

$$M = \iint_{\Sigma} z\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\rho^2\sqrt{1+\rho^2}\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\sqrt{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho$$

$$\xlongequal{t=\rho^2}\frac{\pi}{2}\int_0^2 t\sqrt{1+t}\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{\text{分部积分法}}\frac{\pi}{2}\left[\frac{2}{3}t(1+t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2-\frac{2}{3}\int_0^2(1+t)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{4}{3}\times 3^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{15}(3^{\frac{5}{2}}-1)\right]=\frac{2\pi}{15}(6\sqrt{3}+1).$$

8. 求面密度为 μ_0 的均匀半球壳 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$ 对于 z 轴的转动惯量.

解

$$I_z=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mu_0\mathrm{d}S$$

$$=\mu_0\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\mu_0\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}\mu_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{a\rho^2}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$\xlongequal{\rho=a\sin t}2\pi a\mu_0\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^3\sin^3 t}{a\cos t}\cdot a\cos t\mathrm{d}t$$

$$=2\pi a^4\mu_0\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\mathrm{d}t=2\pi a^4\mu_0\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\pi a^4\mu_0.$$

习题 11-5　对坐标的曲面积分

1. 按对坐标的曲面积分的定义证明公式

$$\iint_{\Sigma}[P_1(x,y,z)\pm P_2(x,y,z)]\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}P_1(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\pm\iint_{\Sigma}P_2(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

证　把 Σ 任意分成 n 块小曲面 ΔS_i(其面积也记为 ΔS_i),ΔS_i 在 yOz 面上的投影为 $(\Delta S_i)_{yz}$,在 ΔS_i 上任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i). 设 λ 是各小块曲面的直径的最大值,则

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma}[P_1(x,y,z)\pm P_2(x,y,z)]\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P_1(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\pm P_2(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)](\Delta S_i)_{yz}\\&=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P_1(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}\pm\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P_2(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}\\&=\iint_{\Sigma}P_1(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\pm\iint_{\Sigma}P_2(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

2. 当 Σ 为 xOy 面内的一个闭区域时,曲面积分 $\iint_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与二重积分有什么关系?

解　此时 Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 就是 Σ 自身(但不定侧),且在 Σ 上,$z=0$,因此

$$\iint_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_{D_{xy}}R(x,y,0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

当 Σ 取上侧时为正号,取下侧时为负号.

3. 计算下列对坐标的曲面积分:

(1) $\iint_{\Sigma}x^2y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的下半部分的下侧;

(2) $\iint_{\Sigma}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$,其中 Σ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 及 $z=3$ 所截得的在第 I 卦限内的部分的前侧;

(3) $\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数,Σ 是平面 $x-y+z=1$ 在第Ⅳ卦限部分的上侧;

(4) $\oiint_{\Sigma}xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$,其中 Σ 是平面 $x=0,y=0,z=0,x+y+z=1$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧.

解　(1) Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$,在 Σ 上,

$z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. 因 Σ 取下侧,故

$$\iint_{\Sigma} x^2y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D_{xy}} x^2y^2(-\sqrt{R^2-x^2-y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}\iint_{D_{xy}}\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta\sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2 2\theta\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^R\rho^5\sqrt{R^2-\rho^2}\mathrm{d}\rho$$

$$\xlongequal{\rho=R\sin t}\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^5\sin^5 t\cdot R\cos t\cdot R\cos t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{4}R^7\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5 t-\sin^7 t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{4}R^7\left(\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}-\frac{6}{7}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{105}\pi R^7.$$

(2) 由于柱面 $x^2+y^2=1$ 在 xOy 面上的投影为零,因此 $\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$. 又,$D_{yz}=\{(y,z)\mid 0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 3\}$,$D_{zx}=\{(x,z)\mid 0\leqslant z\leqslant 3,0\leqslant x\leqslant 1\}$(图 11-10),因 Σ 取前侧,所以

$$\text{原式}=\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{\Sigma} y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=\iint_{D_{yz}}\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{D_{zx}}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^3\mathrm{d}z\int_0^1\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y+\int_0^3\mathrm{d}z\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=2\times 3\left[\frac{y}{2}\sqrt{1-y^2}+\frac{1}{2}\arcsin y\right]_0^1=\frac{3}{2}\pi.$$

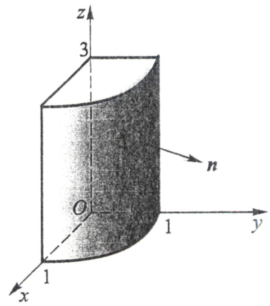


图 11-10

(3) 在 Σ 上,$z=1-x+y$. 由于 Σ 取上侧,故 Σ 在任一点处的单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(-z_x,-z_y,1)=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1).$$

由两类曲面积分之间的联系,可得

$$\text{原式}=\iint_{\Sigma}[(f+x)\cos\alpha+(2f+y)\cos\beta+(f+z)\cos\gamma]\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}[(f+x)-(2f+y)+(f+z)]\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x-y+z)\,\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\times(\Sigma\text{ 的面积})=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}.$$

(4) 在坐标面 $x=0,y=0$ 和 $z=0$ 上,积分值均为零,因此只需计算在 $\Sigma':x+y+z=1$(取上侧)上的积分值(图 11-11).下面用两种方法计算.

解法一 $\displaystyle\iint_{\Sigma'}xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}x(1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)\mathrm{d}y=\frac{1}{24},$$

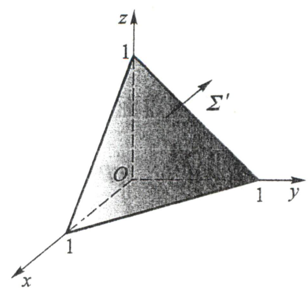


图 11-11

由被积函数和积分曲面关于积分变量的对称性,可得

$$\iint_{\Sigma'}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma'}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{\Sigma'}xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{24},$$

因此 $\displaystyle\oiint_{\Sigma}xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x=3\times\frac{1}{24}=\frac{1}{8}.$

解法二 利用两类曲面积分的联系,将 $\displaystyle\iint_{\Sigma'}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 和 $\displaystyle\iint_{\Sigma'}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ 均化为关于坐标 x 和 y 的曲面积分计算.

由于 $\Sigma':x+y+z=1$ 取上侧,故 Σ' 在任一点处的单位法向量

$$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

于是
$$\iint_{\Sigma'}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma'}xy\cos\alpha\,\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma'}xy\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma'}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\iint_{\Sigma'}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{\Sigma'}yz\cos\beta\,\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma'}yz\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma'}yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因此
$$\iint_{\Sigma'}xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=\iint_{\Sigma'}(xz+xy+yz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}[x(1-x-y)+xy+y(1-x-y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(-x^2-y^2-xy+x+y)\mathrm{d}y=\frac{1}{8}.$$

于是原式 $=\dfrac{1}{8}$.

注 计算本题最方便的方法是利用下节的高斯公式:

$$\oiint_{\Sigma} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$= \iiint_{\Omega} (y+z+x)\mathrm{d}V \xlongequal{\text{对称性}} 3\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}V = 3\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y} z\mathrm{d}z$$

$$= 3\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} \frac{(1-x-y)^2}{2}\mathrm{d}y$$

$$= 3\int_0^1 \frac{(1-x)^3}{6}\mathrm{d}x = 3\times\frac{1}{24} = \frac{1}{8}.$$

4. 把对坐标的曲面积分

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

化成对面积的曲面积分,其中

(1) Σ 是平面 $3x+2y+2\sqrt{3}z=6$ 在第Ⅰ卦限的部分的上侧;

(2) Σ 是抛物面 $z=8-(x^2+y^2)$ 在 xOy 面上方的部分的上侧.

解 (1) 由于 Σ: $3x+2y+2\sqrt{3}z=6$ 取上侧,故 Σ 在任一点处的单位法向量为

$$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma) = \frac{1}{\sqrt{3^2+2^2+(2\sqrt{3})^2}}(3,2,2\sqrt{3})$$

$$= \left(\frac{3}{5},\frac{2}{5},\frac{2\sqrt{3}}{5}\right),$$

于是

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{\Sigma}\left(\frac{3}{5}P + \frac{2}{5}Q + \frac{2\sqrt{3}}{5}R\right)\mathrm{d}S.$$

(2) 由于 Σ: $z=8-(x^2+y^2)$ 取上侧,故 Σ 在其上任一点 (x,y,z) 处的单位法向量为

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(-z_x,-z_y,1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+(-2x)^2+(-2y)^2}}(2x,2y,1),$$

于是

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{\Sigma} \frac{2xP + 2yQ + R}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\mathrm{d}S.$$

5. 计算

$$\iint_{\Sigma}(3z+1)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是由曲线 $\begin{cases}z=\sqrt{y-1},\\ x=0\end{cases}$ $(1\leqslant y\leqslant 3)$ 绕 y 轴旋转一周所成的旋转曲面的左侧.

解　曲面 Σ 的方程为

$$y=z^2+x^2+1,$$

它在 zOx 面上的投影区域为

$$D=\{(x,z)\mid x^2+z^2\leqslant 2\},$$

根据条件可知,曲面 Σ 的法向量为 $\left(\frac{\partial y}{\partial x},-1,\frac{\partial y}{\partial z}\right)=(2x,-1,2z)$,故法向量的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{2x}{\sqrt{4x^2+1+4z^2}},\quad \cos\beta=\frac{-1}{\sqrt{4x^2+1+4z^2}},\quad \cos\gamma=\frac{2z}{\sqrt{4x^2+1+4z^2}},$$

于是,利用两类曲面积分之间的联系,得

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma}(3z+1)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_{\Sigma}\frac{(3z+1)x\cdot 2x-(-1)+z\cdot 2z}{\sqrt{4x^2+4z^2+1}}\mathrm{d}S\\&=\iint_{D}\frac{6x^2z+2x^2+2z^2+1}{\sqrt{4x^2+4z^2+1}}\cdot\sqrt{4x^2+4z^2+1}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x\\&=\iint_{D}(6x^2z+2x^2+2z^2+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

由积分区域 D 关于 x 轴的对称性以及函数 $6x^2z$ 关于 z 为奇函数可知

$$\iint_{D}6x^2z\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0,$$

利用极坐标,得

$$\iint_{D}(2x^2+2z^2+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(2\rho^2+1)\cdot\rho\mathrm{d}\rho=6\pi,$$

于是

$$\iint_{\Sigma}(3z+1)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=6\pi.$$

习题 11-6　高斯公式　*通量与散度

1. 利用高斯公式计算曲面积分:

(1) $\oiint_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 为平面 $x=0,y=0,z=0,x=a,y=a,z=a$ 所围成的立体的表面的外侧;

*(2) $\oiint\limits_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧;

*(3) $\oiint\limits_{\Sigma} xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (x^2y - z^3)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (2xy + y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 为上半球体 $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{a^2-x^2-y^2}$,$x^2+y^2 \leqslant a^2$ 的表面的外侧;

(4) $\oiint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 是界于 $z=0$ 和 $z=3$ 之间的圆柱体 $x^2+y^2 \leqslant 9$ 的整个表面的外侧;

(5) $\oiint\limits_{\Sigma} 4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z - y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 是平面 $x=0,y=0,z=0,x=1,y=1,z=1$ 所围成的立方体的全表面的外侧.

解 (1) 原式 $= \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V = 2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}V$

$$\xlongequal{\text{对称性}} 6\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V = 6\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a \mathrm{d}y\int_0^a z\mathrm{d}z$$

$$= 6\cdot a\cdot a\cdot\frac{a^2}{2} = 3a^4.$$

(2) 原式 $= \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V = 3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$

$$\xlongequal{\text{球面坐标}} 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^2\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$= 3\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\frac{a^5}{5} = \frac{12}{5}\pi a^5.$$

(3) 原式 $= \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega}(z^2+x^2+y^2)\mathrm{d}V$

$$\xlongequal{\text{球面坐标}} \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^2\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi\cdot 1\cdot\frac{a^5}{5} = \frac{2}{5}\pi a^5.$$

(4) 原式 $= \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega}(1+1+1)\mathrm{d}V$

$$= 3\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V = 3\cdot\pi\cdot 3^2\cdot 3 = 81\pi.$$

(5) 原式 $= \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega}(4z-2y+y)\mathrm{d}V$

$$= \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1(4z-y)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^1 (2-y)\,dy=\frac{3}{2}.$$

注　在计算上面的积分 $\iiint\limits_{\Omega}(4z-2y+y)\,dV$ 时，如果利用被积函数和积分区域关于积分变量的对称性，可知 $\iiint\limits_{\Omega} z\,dV=\iiint\limits_{\Omega} y\,dV$，于是

$$\iiint\limits_{\Omega}(4z-2y+y)\,dV=\iiint\limits_{\Omega}3z\,dV=3\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 z\,dz=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

从而可简化运算.

*2. 求下列向量 $\boldsymbol{A}$ 穿过曲面 Σ 流向指定侧的通量：

(1) $\boldsymbol{A}=yz\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$，$\Sigma$ 为圆柱 $x^2+y^2\leqslant a^2(0\leqslant z\leqslant h)$ 的全表面，流向外侧；

(2) $\boldsymbol{A}=(2x-z)\boldsymbol{i}+x^2y\boldsymbol{j}-xz^2\boldsymbol{k}$，$\Sigma$ 为立方体 $0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant a,0\leqslant z\leqslant a$ 的全表面，流向外侧；

(3) $\boldsymbol{A}=(2x+3z)\boldsymbol{i}-(xz+y)\boldsymbol{j}+(y^2+2z)\boldsymbol{k}$，$\Sigma$ 是以点 $(3,-1,2)$ 为球心，半径 $R=3$ 的球面，流向外侧.

解　(1) 通量 $\Phi=\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}\boldsymbol{A}\,dV=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial(yz)}{\partial x}+\frac{\partial(xz)}{\partial y}+\frac{\partial(xy)}{\partial z}\right]dV=\iiint\limits_{\Omega}0\,dV=0.$$

(2) 通量 $\Phi=\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}\boldsymbol{A}\,dV$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial(2x-z)}{\partial x}+\frac{\partial(x^2y)}{\partial y}+\frac{\partial(-xz^2)}{\partial z}\right]dV$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(2+x^2-2xz)\,dV$$

$$=2a^3+\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a (x^2-2xz)\,dz$$

$$=2a^3-\frac{a^5}{6}=a^3\left(2-\frac{a^2}{6}\right).$$

(3) 通量 $\Phi=\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}\boldsymbol{A}\,dV$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial(2x+3z)}{\partial x}+\frac{\partial(-xz-y)}{\partial y}+\frac{\partial(y^2+2z)}{\partial z}\right]dV$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(2-1+2)\,dV=3\iiint\limits_{\Omega}dV$$

$$= 3 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 108\pi.$$

*3. 求下列向量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度：

(1) $\boldsymbol{A} = (x^2 + yz)\boldsymbol{i} + (y^2 + xz)\boldsymbol{j} + (z^2 + xy)\boldsymbol{k}$;

(2) $\boldsymbol{A} = e^{xy}\boldsymbol{i} + \cos(xy)\boldsymbol{j} + \cos(xz^2)\boldsymbol{k}$;

(3) $\boldsymbol{A} = y^2\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$.

解 (1) $P = x^2 + yz, Q = y^2 + xz, R = z^2 + xy$,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2x + 2y + 2z.$$

(2) $P = e^{xy}, Q = \cos(xy), R = \cos(xz^2)$,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = ye^{xy} - x\sin(xy) - 2xz\sin(xz^2).$$

(3) $P = y^2, Q = xy, R = xz$,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 + x + x = 2x.$$

4. 设 $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ 是两个定义在闭区域 Ω 上的具有二阶连续偏导数的函数，$\frac{\partial u}{\partial n}$，$\frac{\partial v}{\partial n}$ 依次表示 $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ 沿 Σ 的外法线方向的方向导数.证明：

$$\iiint_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)\,dx\,dy\,dz = \oiint_{\Sigma} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) dS,$$

其中 Σ 是空间闭区域 Ω 的整个边界曲面.这个公式叫做格林第二公式.

证 由教材本节例 3 证明的格林第一公式知

$$\iiint_{\Omega} u\Delta v\,dx\,dy\,dz = \oiint_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial n}dS - \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz.$$

在此公式中将函数 u 和 v 交换位置，得

$$\iiint_{\Omega} v\Delta u\,dx\,dy\,dz = \oiint_{\Sigma} v\frac{\partial u}{\partial n}dS - \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz.$$

将上面两个式子相减即得

$$\iiint_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)\,dx\,dy\,dz = \oiint_{\Sigma} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) dS.$$

*5. 利用高斯公式推证阿基米德原理：浸没在液体中的物体所受液体的压力的合力（即浮力）的方向铅直向上，其大小等于该物体所排开的液体所受的重力.

证 取液面为 xOy 面，z 轴铅直向上.设液体的密度为 ρ.在物体表面 Σ 上取面积元素 dS, $M(x,y,z)$ 为 dS 上的一点 $(z\leqslant 0)$，Σ 在点 M 处的外法向量的方向余弦为 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$，则 dS 所受液体的压力 $d\boldsymbol{F}$ 的大小为 $-\rho z dS$，方向为 $(-\cos\alpha, -\cos\beta, -\cos\gamma)$，

压力在 x 轴、y 轴、z 轴上的分量分别为

$$\rho z\cos\alpha\mathrm{d}S,\quad \rho z\cos\beta\mathrm{d}S,\quad \rho z\cos\gamma\mathrm{d}S.$$

Σ 所受的液体的总压力在各坐标轴上的分量等于上列各分量元素在 Σ 上的积分.由高斯公式可算得

$$F_x=\oint\!\!\!\!\!\!\iint_{\Sigma}\rho z\cos\alpha\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\frac{\partial(\rho z)}{\partial x}\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega}0\mathrm{d}V=0,$$

$$F_y=\oint\!\!\!\!\!\!\iint_{\Sigma}\rho z\cos\beta\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\frac{\partial(\rho z)}{\partial y}\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega}0\mathrm{d}V=0,$$

$$F_z=\oint\!\!\!\!\!\!\iint_{\Sigma}\rho z\cos\gamma\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\frac{\partial(\rho z)}{\partial z}\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega}\rho\mathrm{d}V=\rho V$$

(V 为 Ω 的体积),故合力

$$\boldsymbol{F}=\rho V\boldsymbol{k},$$

此力的方向铅直向上,大小等于被物体排开的液体所受的重力.

习题 11-7 斯托克斯公式 *环流量与旋度

1. 试对曲面 $\Sigma:z=x^2+y^2,x^2+y^2\leqslant 1,P=y^2,Q=x,R=z^2$ 验证斯托克斯公式.

证 按右手法则,Σ 取上侧,Σ 的边界 Γ 为圆周 $x^2+y^2=1,z=1$,从 z 轴正向看去,取逆时针方向.

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2 & x & z^2\end{vmatrix}=\iint_{\Sigma}(1-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}(1-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-2\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^2}{2}-\frac{2}{3}\rho^3\sin\theta\right]_0^1\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta=\pi.$$

Γ 的参数方程可取为 $x=\cos t,y=\sin t,z=1,t$ 从 0 变到 2π,故

$$\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}(-\sin^3t+\cos^2t)\mathrm{d}t=\pi,$$

两者相等,斯托克斯公式得到验证.

***2.** 利用斯托克斯公式,计算下列曲线积分:

(1) $\oint_{\Gamma}y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$,其中 Γ 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2,x+y+z=0$,若从 x 轴的正向看去,这圆周是取逆时针方向;

(2) $\oint_{\Gamma}(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，其中 Γ 为椭圆 $x^2+y^2=a^2$，$\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1(a>0,b>0)$，若从 x 轴正向看去，这椭圆是取逆时针方向；

(3) $\oint_{\Gamma}3y\mathrm{d}x-xz\mathrm{d}y+yz^2\mathrm{d}z$，其中 Γ 是圆周 $x^2+y^2=2z,z=2$，若从 z 轴正向看去，这圆周是取逆时针方向；

(4) $\oint_{\Gamma}2y\mathrm{d}x+3x\mathrm{d}y-z^2\mathrm{d}z$，其中 Γ 是圆周 $x^2+y^2+z^2=9,z=0$，若从 z 轴正向看去，这圆周是取逆时针方向.

解 (1) 取 Σ 为平面 $x+y+z=0$ 的上侧被 Γ 所围成的部分，则 Σ 的面积为 πa^2，Σ 的单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\quad(\text{图 }11-12).$$

由斯托克斯公式，

$$\oint_{\Gamma}y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\mathrm{d}S=-\frac{3}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=-\sqrt{3}\pi a^2.$$

(2) 如图 11-13，取 Σ 为平面 $\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1$ 的上侧被 Γ 所围成的部分，Σ 的单位法向量 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},0,\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$. 由斯托克斯公式

$$\oint_{\Gamma}(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y-z & z-x & x-y\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S.\qquad ①$$

现用两种方法来求 $\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S$.

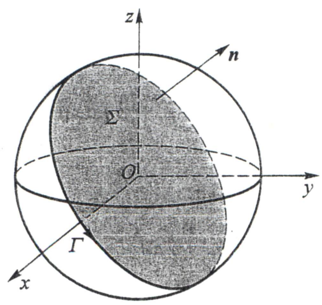


图 11-12

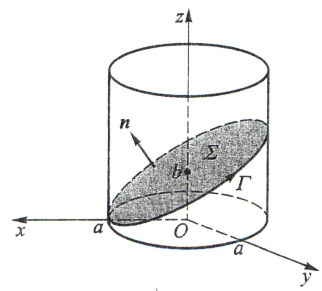


图 11-13

解法一　由于 $\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=\Sigma$ 的面积 A,而 $A\cdot\cos\gamma=A\cdot\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\Sigma$ 在 xOy 面上的投影区域的面积 $=\pi a^2$,故

$$\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=\pi a^2\Big/\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pi a\sqrt{a^2+b^2}.$$

解法二　用曲面积分计算法.

由于在 Σ 上,$z=b-\dfrac{b}{a}x$,

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{1+\left(-\frac{b}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

又 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2\}$,故

$$\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\cdot\pi a^2=\pi a\sqrt{a^2+b^2}.$$

将所求得的 $\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S$ 代入 ① 式,得

$$原式=\frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\pi a\sqrt{a^2+b^2}=-2\pi a(a+b).$$

(3) 取 Σ 为平面 $z=2$ 的上侧被 Γ 所围成的部分,则 Σ 的单位法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$,Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为 $x^2+y^2\leqslant4$.于是由斯托克斯公式,

$$\oint_\Gamma 3y\mathrm{d}x - xz\mathrm{d}y + yz^2\mathrm{d}z = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3y & -xz & yz^2 \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

$$= -\iint_\Sigma (z+3)\mathrm{d}S = -\iint_{D_{xy}} (2+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -5 \cdot \pi \cdot 2^2 = -20\pi.$$

(4) Γ 即为 xOy 面上的圆周 $x^2+y^2=9$,取 Σ 为圆域 $x^2+y^2 \leqslant 9$ 的上侧,则由斯托克斯公式

$$\oint_\Gamma 2y\mathrm{d}x + 3x\mathrm{d}y - z^2\mathrm{d}z = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2y & 3x & -z^2 \end{vmatrix}$$

$$= \iint_\Sigma \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 9\pi.$$

*3. 求下列向量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度:

(1) $\boldsymbol{A} = (2z-3y)\boldsymbol{i} + (3x-z)\boldsymbol{j} + (y-2x)\boldsymbol{k}$;

(2) $\boldsymbol{A} = (z+\sin y)\boldsymbol{i} - (z - x\cos y)\boldsymbol{j}$;

(3) $\boldsymbol{A} = x^2\sin y\boldsymbol{i} + y^2\sin(xz)\boldsymbol{j} + xy\sin(\cos z)\boldsymbol{k}$.

解 (1) $$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2z-3y & 3x-z & y-2x \end{vmatrix} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}.$$

(2) $$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z+\sin y & -(z-x\cos y) & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + (\cos y - \cos y)\boldsymbol{k}$$

$$= \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}.$$

(3) $$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2\sin y & y^2\sin(xz) & xy\sin(\cos z) \end{vmatrix}$$

$$= [x\sin(\cos z) - xy^2\cos(xz)]\boldsymbol{i} - y\sin(\cos z)\boldsymbol{j} + [y^2z\cos(xz) - x^2\cos y]\boldsymbol{k}.$$

*4. 利用斯托克斯公式把曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$ 化为曲线积分,并计算积分值,其中 $\boldsymbol{A}$, Σ 及 $\boldsymbol{n}$ 分别如下:

(1) $\boldsymbol{A}=y^2\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k}$,$\Sigma$ 为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧,$\boldsymbol{n}$ 是 Σ 的单位法向量;

(2) $\boldsymbol{A}=(y-z)\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}-xz\boldsymbol{k}$,$\Sigma$为立方体$\{(x,y,z)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2,0\leqslant z\leqslant 2\}$的表面外侧去掉 xOy 面上的那个底面,$\boldsymbol{n}$ 是 Σ 的单位法向量.

解　(1) Σ的正向边界曲线Γ为xOy面上的圆周$x^2+y^2=1$,从z轴正向看去Γ取逆时针方向,Γ 的参数方程为 $x=\cos t, y=\sin t, z=0, t$ 从 0 变到 2π.

由斯托克斯公式,

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S&=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\\&=\oint_{\Gamma}y^2\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}z\\&=\int_0^{2\pi}[\sin^2t\cdot(-\sin t)+\cos t\cdot\sin t\cdot\cos t]\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}(1-2\cos^2t)\mathrm{d}(\cos t)=0.\end{aligned}$$

(2) Σ的边界曲线Γ为xOy面上由直线$x=0,y=0,x=2,y=2$所围成的正方形的边界,从z轴正向看去取逆时针方向.由斯托克斯公式,

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S&=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\\&=\oint_{\Gamma}(y-z)\mathrm{d}x+yz\mathrm{d}y-xz\mathrm{d}z\quad(\text{代入 } z=0)\\&=\oint_{\Gamma}y\mathrm{d}x=\int_2^0 2\mathrm{d}x=-4.\end{aligned}$$

*5. 求下列向量场 $\boldsymbol{A}$ 沿闭曲线 Γ(从 z 轴正向看 Γ 依逆时针方向)的环流量:

(1) $\boldsymbol{A}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$($c$ 为常量),Γ 为圆周 $x^2+y^2=1,\ z=0$;

(2) $\boldsymbol{A}=(x-z)\boldsymbol{i}+(x^3+yz)\boldsymbol{j}-3xy^2\boldsymbol{k}$,其中 Γ 为圆周 $z=2-\sqrt{x^2+y^2},\ z=0$.

解　(1) Γ 的参数方程为 $x=\cos t, y=\sin t, z=0, t$从0变到$2\pi$,于是所求环流量为

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s&=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\\&=\oint_{\Gamma}(-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+c\mathrm{d}z\end{aligned}$$

$$=\int_0^{2\pi}[(-\sin t)(-\sin t)+\cos t\cos t]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=2\pi.$$

(2) Γ 是 xOy 面上的圆周 $x^2+y^2=4$(从 z 轴正向看 Γ 依逆时针方向),它的参数方程为 $x=2\cos t, y=2\sin t, z=0, t$ 从 0 变到 2π. 于是所求的环流量为

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s=\oint_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

$$=\oint_\Gamma(x-z)\mathrm{d}x+(x^3+yz)\mathrm{d}y-3xy^2\mathrm{d}z\quad(\text{代入 } z=0)$$

$$=\oint_\Gamma x\mathrm{d}x+x^3\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}[2\cos t\cdot(-2\sin t)+8\cos^3 t\cdot 2\cos t]\mathrm{d}t$$

$$=-4\int_0^{2\pi}\sin t\cos t\mathrm{d}t+16\int_0^{2\pi}\cos^4 t\mathrm{d}t$$

$$=0+64\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\mathrm{d}t^{①}$$

$$=64\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=12\pi.$$

注① $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^4 t\mathrm{d}t\xlongequal{\text{周期性}}2\int_0^{\pi}\cos^4 t\mathrm{d}t=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^4 t\mathrm{d}t\right)$,

由于 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^4 t\mathrm{d}t\xlongequal{u=\pi-t}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^4 u\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 u\mathrm{d}u$, 故得

$$\int_0^{2\pi}\cos^4 t\mathrm{d}t=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\mathrm{d}t.$$

*6. 证明 $\mathbf{rot}\,(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathbf{rot}\,\boldsymbol{a}+\mathbf{rot}\,\boldsymbol{b}$.

证 设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$, 其中 a_x,a_y,a_z,b_x,b_y,b_z 均为 x,y,z 的函数,则

$$\mathbf{rot}\,(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathbf{rot}\,((a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k})$$

$$=\left[\frac{\partial(a_z+b_z)}{\partial y}-\frac{\partial(a_y+b_y)}{\partial z}\right]\boldsymbol{i}+\left[\frac{\partial(a_x+b_x)}{\partial z}-\frac{\partial(a_z+b_z)}{\partial x}\right]\boldsymbol{j}+$$

$$\left[\frac{\partial(a_y+b_y)}{\partial x}-\frac{\partial(a_x+b_x)}{\partial y}\right]\boldsymbol{k}$$

$$=\left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right]+$$

$$\left[\left(\frac{\partial b_z}{\partial y}-\frac{\partial b_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial b_x}{\partial z}-\frac{\partial b_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial b_y}{\partial x}-\frac{\partial b_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right]$$

$$=\mathbf{rot}\,\boldsymbol{a}+\mathbf{rot}\,\boldsymbol{b}.$$

*7. 设 $u=u(x,y,z)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\mathbf{rot}\,(\mathbf{grad}\,u)$.

解
$$\mathbf{grad}\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

$$\mathbf{rot}\,(\mathbf{grad}\,u)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z}\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\boldsymbol{j}+$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\boldsymbol{k}\quad\text{（由于各二阶偏导数连续）}$$

$$=0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}.$$

总习题十一

1. 填空：

(1) 第二类曲线积分 $\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 化成第一类曲线积分是________，其中 α,β,γ 为有向曲线弧 Γ 在点 (x,y,z) 处的________的方向角；

(2) 第二类曲面积分 $\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化成第一类曲面积分是________，其中 α,β 与 γ 为有向曲面 Σ 在点 (x,y,z) 处的________的方向角.

解 (1) 由教材本章第二节的公式(2-3)，可知第一个空格应填：$\int_\Gamma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s$；第二个空格应填：切向量.

(2) 由教材本章第五节的公式(5-9)，可知第一个空格应填：$\iint_\Sigma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$；第二个空格应填：法向量.

2. 下题中给出了四个结论，从中选出一个正确的结论：

设曲面 Σ 是上半球面：$x^2+y^2+z^2=R^2(z\geqslant 0)$，曲面 Σ_1 是曲面 Σ 在第 Ⅰ 卦限中的部分，则有(　　).

(A) $\iint_\Sigma x\mathrm{d}S=4\iint_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S$　　　　(B) $\iint_\Sigma y\mathrm{d}S=4\iint_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S$

(C) $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$　　　(D) $\iint\limits_{\Sigma} xyz\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{\Sigma_1} xyz\mathrm{d}S$

解　应选(C).先说明(A)不对.由于 Σ 关于 yOz 面对称,被积函数 x 关于 x 是奇函数,所以 $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}S = 0$.但在 Σ_1 上,被积函数 x 连续、大于或等于零且不恒为零,所以 $\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S > 0$.因此 $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}S \neq 4\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$.类似可说明(B)和(D)不对.再说明(C)正确.由于 Σ 关于 yOz 面和 zOx 面均对称,被积函数 z 关于 x 和 y 均为偶函数,故 $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{\Sigma_1} z\mathrm{d}S$;而在 Σ_1 上,由对称性可知 $\iint\limits_{\Sigma_1} z\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$,因此有 $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$.

3. 计算下列曲线积分:

(1) $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$,其中 L 为圆周 $x^2+y^2=ax$;

(2) $\int_\Gamma z\mathrm{d}s$,其中 Γ 为曲线 $x = t\cos t, y = t\sin t, z = t(0 \leqslant t \leqslant t_0)$;

(3) $\int_L (2a-y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$,其中 L 为摆线 $x = a(t-\sin t), y = a(1-\cos t)$ 上对应 t 从 0 到 2π 的一段弧;

(4) $\int_\Gamma (y^2-z^2)\mathrm{d}x + 2yz\mathrm{d}y - x^2\mathrm{d}z$,其中 Γ 是曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上由 $t_1=0$ 到 $t_2=1$ 的一段弧;

(5) $\int_L (\mathrm{e}^x\sin y - 2y)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x\cos y - 2)\mathrm{d}y$,其中 L 为上半圆周 $(x-a)^2+y^2=a^2, y \geqslant 0$,沿逆时针方向;

(6) $\oint_\Gamma xyz\mathrm{d}z$,其中 Γ 是用平面 $y=z$ 截球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所得的截痕,从 z 轴的正向看去,沿逆时针方向.

解　(1) **解法一**　L 的方程即为 $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$,故可取 L 的参数方程为 $x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t$, $y=\frac{a}{2}\sin t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.于是

$$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}a}{2}\sqrt{1+\cos t}\cdot\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\sin t\right)^2+\left(\frac{a}{2}\cos t\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\sqrt{2}a^2}{4}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos t}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}a^2}{4}\cdot\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{t}{2}\right|\mathrm{d}t$$

$$= 2a^2\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}\mathrm{d}\left(\frac{t}{2}\right) = 2a^2.$$

解法二　L 的极坐标方程为 $\rho = a\cos\theta\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$,

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\theta = a\,d\theta,$$

因此 $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos\theta \cdot a\,d\theta = 2a^2.$

(2) $$\int_\Gamma z\,ds = \int_0^{t_0} t\sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\,dt$$

$$= \int_0^{t_0} t\sqrt{2+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{t_0}\sqrt{2+t^2}\,d(2+t^2)$$

$$= \frac{1}{3}(2+t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{t_0} = \frac{1}{3}\left[(2+t_0^2)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2}\right].$$

(3) $$\int_L (2a-y)\,dx + x\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi}[(2a - a + a\cos t)\cdot a(1-\cos t) + a(t-\sin t)\cdot a\sin t]\,dt$$

$$= a^2\int_0^{2\pi} t\sin t\,dt = a^2[-t\cos t]_0^{2\pi} + a^2\int_0^{2\pi}\cos t\,dt$$

$$= -2\pi a^2 + 0 = -2\pi a^2.$$

(4) $$\int_\Gamma (y^2 - z^2)\,dx + 2yz\,dy - x^2\,dz$$

$$= \int_0^1[(t^4 - t^6)\cdot 1 + 2t^2\cdot t^3\cdot 2t - t^2\cdot 3t^2]\,dt$$

$$= \int_0^1 (3t^6 - 2t^4)\,dt = \frac{1}{35}.$$

(5) 如图 11-14，添加有向线段 $OA: y=0, x$ 从 0 变到 $2a$，则在由 L 与 OA 所围成的闭区域 D 上应用格林公式可得

$$\int_{L+OA} (e^x\sin y - 2y)\,dx + (e^x\cos y - 2)\,dy$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$= \iint_D (e^x\cos y - e^x\cos y + 2)\,dx\,dy$$

$$= 2\iint_D dx\,dy = \pi a^2,$$

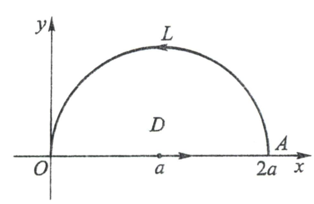


图 11-14

于是 $$\int_L (e^x\sin y - 2y)\,dx + (e^x\cos y - 2)\,dy$$

$$= \pi a^2 - \int_{OA} (e^x\sin y - 2y)\,dx + (e^x\cos y - 2)\,dy$$

$$= \pi a^2 - \int_0^{2a} (e^x\sin 0 - 2\times 0)\,dx = \pi a^2.$$

注　本题通过添加辅助路径并利用格林公式，将难以直接计算的曲线积分化为一个易于计算的二重积分和另一个易于计算的曲线积分之差，从而方便地求得结果.这是格林公式的用处之一，值得注意.

(6) 由 Γ 的一般方程 $\begin{cases} y=z, \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$ 可得 $x^2+2y^2=1$. 从而可令 $x=\cos t, y=\dfrac{\sin t}{\sqrt{2}}, z=\dfrac{\sin t}{\sqrt{2}}$, t 从 0 变到 2π. 于是

$$\oint_{\Gamma} xyz\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \cos t\left(\frac{\sin t}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} \sin^2(2t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4t}{2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{16}.$$

4. 已知函数 $f(x)$ 具有连续导数, $f(0)=1$, 且曲线积分

$$\int_L [\mathrm{e}^x+f(x)]y\mathrm{d}x - f(x)\mathrm{d}y$$

与路径无关, 试确定 $f(x)$, 并计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} [\mathrm{e}^x+f(x)]y\mathrm{d}x - f(x)\mathrm{d}y$ 的值.

解 由于曲线积分与路径无关, 则

$$-f'(x)=\mathrm{e}^x+f(x),$$

故 $y=f(x)$ 满足微分方程

$$\begin{cases} y'+y=-\mathrm{e}^x, \\ y|_{x=0}=1. \end{cases}$$

这是一阶线性微分方程, 由求解公式得方程的通解为

$$y = \mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x}\left[\int(-\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x})\,\mathrm{d}x + C\right] = \mathrm{e}^{-x}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C\right),$$

由初值条件得 $C=\dfrac{3}{2}$, 因此 $f(x)=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x+\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-x}$.

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} [\mathrm{e}^x+f(x)]y\mathrm{d}x - f(x)\mathrm{d}y = \int_{(0,0)}^{(1,1)} \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^x+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x}\right)y\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^x-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^x+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x}\right)\cdot 0\mathrm{d}x + \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-1}\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\mathrm{e}-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-1}.$$

5. 计算下列曲面积分:

(1) $\iint\limits_{\Sigma} \dfrac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$, 其中 Σ 是界于平面 $z=0$ 及 $z=H$ 之间的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$;

(2) $\iint\limits_{\Sigma} (y^2-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z^2-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\ (0\leqslant z\leqslant h)$ 的外侧;

(3) $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的上侧;

(4) $\iint\limits_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$ 的外侧；

(5) $\oiint\limits_{\Sigma} f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-[2f(y)+y^2]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(z)+z^3]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中函数 $f(x)$ 具有连续导数，Σ 是立方体 $\Omega:0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant a,0\leqslant z\leqslant a$ 的表面，并取外侧.

解　(1) 将 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2 两片，Σ_1 为 $y=\sqrt{R^2-x^2}$，Σ_2 为 $y=-\sqrt{R^2-x^2}$，Σ_1 和 Σ_2 在 zOx 面上的投影区域均为

$$D_{zx}=\{(x,z)\mid 0\leqslant z\leqslant H,-R\leqslant x\leqslant R\}.$$

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}&=\iint\limits_{D_{zx}}\frac{1}{R^2+z^2}\sqrt{1+\frac{(-x)^2}{R^2-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z\\&=\int_0^H\frac{1}{R^2+z^2}\mathrm{d}z\cdot\int_{-R}^{R}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x\\&=\left[\frac{1}{R}\arctan\frac{z}{R}\right]_0^H\cdot\left[R\arcsin\frac{x}{R}\right]_{-R}^{R}\\&=\pi\arctan\frac{H}{R}.\end{aligned}$$

又由于被积函数关于 y 是偶函数，积分曲面 Σ_1 和 Σ_2 关于 zOx 面对称，故

$$\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}=\pi\arctan\frac{H}{R}.$$

由此得

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}=2\pi\arctan\frac{H}{R}.$$

(2) 添加辅助曲面 $\Sigma_1=\{(x,y,z)\mid z=h,x^2+y^2\leqslant h^2\}$，取上侧，则在由 Σ 和 Σ_1 所包围的空间闭区域 Ω 上应用高斯公式得

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(y^2-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial(y^2-z)}{\partial x}+\frac{\partial(z^2-x)}{\partial y}+\frac{\partial(x^2-y)}{\partial z}\right]\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}0\cdot\mathrm{d}V=0,\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\text{原式}&=-\iint\limits_{\Sigma_1}(y^2-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_{xy}}(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant h^2\}$.

在计算 $\iint\limits_{D_{xy}}(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 时，由对称性易知 $\iint\limits_{D_{xy}}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，又 $\iint\limits_{D_{xy}}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，故

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_{xy}}(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\xlongequal{\text{极坐标}}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^h\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{4}h^4.\end{aligned}$$

从而得
$$原式 = -\frac{\pi}{4}h^4.$$

注 本题若用第二类曲面积分的计算公式直接计算,则运算将十分繁复.现在通过添加辅助曲面并利用高斯公式,就将原积分化为辅助曲面上的一个容易计算的曲面积分,从而达到了化繁为简、化难为易的目的.这种做法与前面第3(5)题利用格林公式化简曲线积分计算的做法是类似的,请读者注意比较,并思考这样的问题:要使这种做法可行,所给的曲线积分(曲面积分)应具备什么条件?

(3) 添加辅助曲面 $\Sigma_1 = \{(x,y,z) \mid z = 0, x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$,取下侧,则在由 Σ 和 Σ_1 所围成的空间闭区域 Ω 上应用高斯公式得

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$$
$$= 3\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V = 3\cdot\frac{2\pi R^3}{3} = 2\pi R^3,$$

于是

$$原式 = 2\pi R^3 - \iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= 2\pi R^3 - 0 = 2\pi R^3.$$

(4) **解法一** 将 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2 两片,其中 $\Sigma_1: z = \sqrt{1-x^2-y^2}\,(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$,取上侧;$\Sigma_2: z = -\sqrt{1-x^2-y^2}\,(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$,取下侧.$\Sigma_1$ 和 Σ_2 在 xOy 面上的投影区域均为 $D_{xy} = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$(图11-15).于是

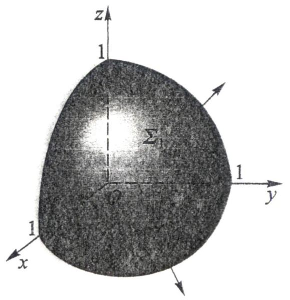


图 11 - 15

$$\iint\limits_{\Sigma_1} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\xlongequal{\text{极坐标}} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^1\rho^2\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho$$
$$\xlongequal{\rho = \sin t} \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cdot\cos^2 t\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 t - \sin^5 t)\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{15},$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{15},$$

因而
$$\iint\limits_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{15}+\frac{1}{15} = \frac{2}{15}.$$

解法二 应用高斯公式计算.

添加辅助曲面 $\Sigma_3: x = 0$(取后侧);$\Sigma_4: y = 0$(取左侧),则有

$$\iint_{\Sigma_3} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma_4} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

在由 Σ,Σ_3 和 Σ_4 所围成的空间闭区域 Ω 上应用高斯公式,得

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{\Sigma+\Sigma_3+\Sigma_4} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega}\frac{\partial(xyz)}{\partial z}\mathrm{d}V\\ &= \iiint_{\Omega} xy\mathrm{d}V = \iint_{D_{xy}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}z\\ &= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{2}{15}.\end{aligned}$$

(5) 利用高斯公式,得

$$\begin{aligned}&\oiint_{\Sigma} f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - [2f(y)+y^2]\mathrm{d}z\mathrm{d}x + [f(z)+z^3]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&\iiint_{\Omega}[f'(x) - 2f'(y) - 2y + f'(z) + 3z^2]\mathrm{d}V,\end{aligned}$$

由 Ω 的对称性可知

$$\iiint_{\Omega} f'(x)\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} f'(y)\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} f'(z)\mathrm{d}V,$$

$$\iiint_{\Omega} y\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} z\mathrm{d}V,$$

于是

$$\begin{aligned}&\oiint_{\Sigma} f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - [2f(y)+y^2]\mathrm{d}z\mathrm{d}x + [f(z)+z^3]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&\iiint_{\Omega}(-2z+3z^2)\mathrm{d}V = \int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^a(-2z+3z^2)\mathrm{d}z\\ =&\ a^4(a-1).\end{aligned}$$

6. 证明:$\dfrac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$在整个 xOy 面除去 y 的负半轴及原点的区域 G 内是某个二元函数的全微分,并求出一个这样的二元函数.

证　G 为平面单连通区域,在 G 内 $P=\dfrac{x}{x^2+y^2}, Q=\dfrac{y}{x^2+y^2}$具有一阶连续偏导数,且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故 $\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ 在 G 内是某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分. 取折线积分路径 $(0,1)\to(x,1)\to(x,y)$(图 11-16),则

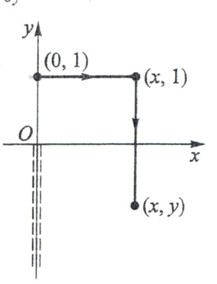


图 11-16

$$\begin{aligned}u(x,y) &= \int_{(0,1)}^{(x,y)}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \int_0^x\frac{x\mathrm{d}x}{x^2+1} + \int_1^y\frac{y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\\ &= \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}[\ln(x^2+y^2)]_1^y = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2).\end{aligned}$$

7. 设在半平面 $x>0$ 内有力 $\boldsymbol{F}=-\dfrac{k}{\rho^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})$ 构成力场,其中 k 为常数,$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.证明在此力场中场力所做的功与所取的路径无关.

证 半平面 $x>0$ 是单连通区域.在此区域内,$P=-\dfrac{kx}{\rho^3}$,$Q=-\dfrac{ky}{\rho^3}$具有一阶连续偏导数,且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{3kxy}{\rho^5}=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故在此区域内,场力 $\boldsymbol{F}$ 沿曲线 L 所做的功,即

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=-k\int_L \frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\rho^3}$$

与路径无关.

8. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数,L 是上半平面($y>0$)内的有向分段光滑曲线,其起点为 (a,b),终点为 (c,d).记

$$I=\int_L \frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y,$$

(1) 证明曲线积分 I 与路径无关;

(2) 当 $ab=cd$ 时,求 I 的值.

解 (1) 因为

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\right\}=f(xy)-\frac{1}{y^2}+xyf'(xy)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\right\}$$

在上半平面这个单连通区域内处处成立,所以在上半平面内曲线积分与路径 L 无关.

(2) 由于 I 与路径无关,故可取积分路径 L 为由点 (a,b) 到点 (c,b) 再到点 (c,d) 的有向折线,从而得

$$\begin{aligned}I&=\int_a^c \frac{1}{b}[1+b^2f(bx)]\mathrm{d}x+\int_b^d \frac{c}{y^2}[y^2f(cy)-1]\mathrm{d}y\\&=\frac{c-a}{b}+\int_a^c bf(bx)\mathrm{d}x+\int_b^d cf(cy)\mathrm{d}y+\frac{c}{d}-\frac{c}{b}\\&=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{bc}f(t)\mathrm{d}t+\int_{bc}^{cd}f(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{cd}f(t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

当 $ab=cd$ 时,$\displaystyle\int_{ab}^{cd}f(t)\mathrm{d}t=0$,由此得

$$I=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}.$$

9. 求均匀曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的质心的坐标.

解 设质心位置为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$.由对称性可知质心位于 z 轴上,故 $\bar{x}=\bar{y}=0$.

Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2\}$. 由于

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}S &= \iint_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \iint_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= a\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = a\cdot\pi a^2=\pi a^3,\end{aligned}$$

又
$$\Sigma\text{ 的面积 } A=2\pi a^2,$$

故
$$\bar{z}=\frac{\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S}{A}=\frac{\pi a^3}{2\pi a^2}=\frac{a}{2},$$

所求的质心为 $\left(0,0,\dfrac{a}{2}\right)$.

10. 设 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在闭区域 D 上都具有二阶连续偏导数,分段光滑的曲线 L 为 D 的正向边界曲线.证明:

(1) $\displaystyle\iint_D v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D(\mathbf{grad}\,u\cdot\mathbf{grad}\,v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\oint_L v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s$;

(2) $\displaystyle\iint_D(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s$,

其中 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 与 $\dfrac{\partial v}{\partial n}$ 分别是 u 与 v 沿 L 的外法向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数,符号 $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ 称为二维拉普拉斯算子.

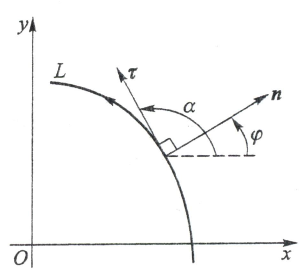


图 11-17

证 (1) 如图 11-17, $\boldsymbol{n}$ 为有向曲线 L 的外法向量, $\boldsymbol{\tau}$ 为 L 的切向量.设 x 轴到 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 的转角分别为 φ 和 α,则 $\alpha=\varphi+\dfrac{\pi}{2}$,且 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦为 $\cos\varphi,\sin\varphi$; $\boldsymbol{\tau}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha,\sin\alpha$.于是

$$\begin{aligned}\oint_L v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s &= \oint_L v(u_x\cos\varphi+u_y\sin\varphi)\mathrm{d}s\\ &= \oint_L v(u_x\sin\alpha-u_y\cos\alpha)\mathrm{d}s\ (\cos\alpha\mathrm{d}s=\mathrm{d}x,\sin\alpha\mathrm{d}s=\mathrm{d}y)\\ &= \oint_L vu_x\mathrm{d}y-vu_y\mathrm{d}x\\ &\xlongequal{\text{格林公式}}\iint_D\left[\frac{\partial(vu_x)}{\partial x}-\frac{\partial(-vu_y)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \iint_D[(u_xv_x+vu_{xx})+(u_yv_y+vu_{yy})]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$= \iint\limits_D v(u_{xx} + u_{yy})\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_D (u_x v_x + u_y v_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_D v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_D (\mathbf{grad}\ u \cdot \mathbf{grad}\ v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

把上式右端第二个积分移到左端即得所要证明的等式.

(2) 在(1)证得的等式中交换 u,v 的位置,可得

$$\iint\limits_D u\Delta v\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_D (\mathbf{grad}\ v \cdot \mathbf{grad}\ u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \oint_L u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s,$$

在此式的两端分别减去(1)中等式的两端,即得所需证明的等式.

***11.** 求向量 $\boldsymbol{A} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 通过闭区域 $\Omega = \{(x,y,z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$ 的边界曲面流向外侧的通量.

解 通量 $\Phi = \iint\limits_\Sigma \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \iint\limits_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint\limits_\Omega \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$$

$$= \iiint\limits_\Omega (1+1+1)\mathrm{d}V = 3\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}V = 3\times 1 = 3.$$

12. 求力 $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ 沿有向闭曲线 Γ 所做的功,其中 Γ 为平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标面所截成的三角形的整个边界,从 z 轴正向看去,沿顺时针方向.

解 $W = \oint_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint_\Gamma y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z.$

下面用两种方法来计算上面这个积分.

解法一 化为定积分直接计算.如图 11-18,Γ 由 AB, BC, CA 三条有向线段组成,

$AB: z=0, x=t, y=1-t$, t 从 0 变到 1;

$BC: y=0, x=t, z=1-t$, t 从 1 变到 0;

$CA: x=0, y=t, z=1-t$, t 从 0 变到 1.

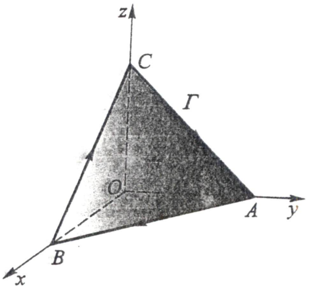


图 11-18

于是

$$\int_{AB} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z = \int_{AB} y\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2},$$

$$\int_{BC} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z = \int_{BC} x\mathrm{d}z = \int_1^0 t\cdot(-1)\mathrm{d}t = \frac{1}{2},$$

$$\int_{CA} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z = \int_{CA} z\mathrm{d}y = \int_0^1 (1-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

因此 $W = \oint_\Gamma y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$

$$= \int_{AB} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z + \int_{BC} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z + \int_{CA} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z = \frac{3}{2}.$$

*解法二　利用斯托克斯公式计算.取 Σ 为平面 $x+y+z=1$ 的下侧被 Γ 所围的部分,则 Σ 在任一点处的单位法向量为 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$,由斯托克斯公式得

$$\oint_\Gamma y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=\iint_\Sigma\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\mathrm{d}S=\sqrt{3}\iint_\Sigma\mathrm{d}S$$

$$=\sqrt{3}\cdot(\Sigma\text{ 的面积})=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}.$$

第十二章
无穷级数

习题 12-1　常数项级数的概念和性质

1. 写出下列级数的前五项：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+n}{1+n^2}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times\cdots\times(2n)}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{5^n}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$.

解　(1) $\dfrac{1+1}{1+1^2}+\dfrac{1+2}{1+2^2}+\dfrac{1+3}{1+3^2}+\dfrac{1+4}{1+4^2}+\dfrac{1+5}{1+5^2}+\cdots$.

(2) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1\times3}{2\times4}+\dfrac{1\times3\times5}{2\times4\times6}+\dfrac{1\times3\times5\times7}{2\times4\times6\times8}+\dfrac{1\times3\times5\times7\times9}{2\times4\times6\times8\times10}+\cdots$.

(3) $\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{5^3}-\dfrac{1}{5^4}+\dfrac{1}{5^5}-\cdots$.

(4) $\dfrac{1!}{1}+\dfrac{2!}{2^2}+\dfrac{3!}{3^3}+\dfrac{4!}{4^4}+\dfrac{5!}{5^5}+\cdots$.

2. 根据级数收敛与发散的定义判定下列级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；

(2) $\dfrac{1}{1\times3}+\dfrac{1}{3\times5}+\dfrac{1}{5\times7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$；

(3) $\sin\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{2\pi}{6}+\cdots+\sin\dfrac{n\pi}{6}+\cdots$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

解　设级数的部分和为 s_n.

（1）因为

$$s_n=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$
$$=\sqrt{n+1}-1,$$

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\infty,$$

所以根据定义可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 发散.

（2）由于 $u_n=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$，从而

$$s_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{2},$$

所以根据定义可知级数收敛.

（3）由于 $u_n=\sin\dfrac{n\pi}{6}=\dfrac{2\sin\dfrac{\pi}{12}\sin\dfrac{n\pi}{6}}{2\sin\dfrac{\pi}{12}}=\dfrac{\cos\dfrac{2n-1}{12}\pi-\cos\dfrac{2n+1}{12}\pi}{2\sin\dfrac{\pi}{12}}$，从而

$$s_n=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left[\left(\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{3\pi}{12}\right)+\left(\cos\frac{3\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}\right)+\cdots+\right.$$
$$\left.\left(\cos\frac{2n-1}{12}\pi-\cos\frac{2n+1}{12}\pi\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left(\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{2n+1}{12}\pi\right),$$

因为当 $n\to\infty$ 时，$\cos\dfrac{2n+1}{12}\pi$ 的极限不存在，所以 s_n 的极限不存在，即级数发散.

（4）
$$s_n=\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1),$$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\infty$，故级数发散.

3. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足条件：（1）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$；（2）$\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_{2k-1}+u_{2k})$ 收敛.证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和为 s_n，$\sum_{k=1}^{\infty}(u_{2k-1}+u_{2k})$ 的部分和为 σ_n，且 $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma$. 由于

$$s_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}u_k=\sum_{k=1}^{n}(u_{2k-1}+u_{2k})=\sigma_n，故\lim_{n\to\infty}s_{2n}=\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma;$$

又

$$s_{2n+1}=s_{2n}+u_{2n+1}，故\lim_{n\to\infty}s_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}s_{2n}+\lim_{n\to\infty}u_{2n+1}=\sigma+0=\sigma.$$

于是 $\lim_{n\to\infty}s_n=\sigma$，即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

4. 判定下列级数的收敛性：

(1) $-\dfrac{8}{9}+\dfrac{8^2}{9^2}-\dfrac{8^3}{9^3}+\cdots+(-1)^n\dfrac{8^n}{9^n}+\cdots$;

(2) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3n}+\cdots$;

(3) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}+\cdots$;

(4) $\dfrac{3}{2}+\dfrac{3^2}{2^2}+\dfrac{3^3}{2^3}+\cdots+\dfrac{3^n}{2^n}+\cdots$;

(5) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}\right)+\left(\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)+\cdots$.

解 (1) 此级数为公比 $q=-\dfrac{8}{9}$ 的等比级数，因 $|q|<1$，故该级数收敛.

(2) 此级数的部分和

$$s_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3n}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right),$$

而 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)=\infty$，故

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\infty,$$

即该级数发散.

(3) 此级数的一般项 $u_n=\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}$，有 $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n}}=1$，不满足级数收敛的必要条件，故该级数发散.

(4) 此级数为公比 $q=\dfrac{3}{2}$ 的等比级数，因 $|q|>1$，故该级数发散.

(5) 此级数的一般项 $u_n=\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}$，注意到 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$ 分别是公比 $q=\dfrac{1}{2}$

与 $q=\dfrac{1}{3}$ 的等比级数，而 $|q|<1$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$ 均收敛．根据收敛级数的性质可知，原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)$ 收敛．

*5. 利用柯西审敛原理判定下列级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$；

(2) $1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\cdots+\dfrac{1}{3n-2}+\dfrac{1}{3n-1}-\dfrac{1}{3n}+\cdots$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{2^n}$；

(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{3n+1}+\dfrac{1}{3n+2}-\dfrac{1}{3n+3}\right)$.

解　(1)
$$\begin{aligned}|s_{n+p}-s_n|&=|u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\cdots+u_{n+p}|\\&=\left|\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}+\frac{(-1)^{n+3}}{n+2}+\frac{(-1)^{n+4}}{n+3}+\cdots+\frac{(-1)^{n+p+1}}{n+p}\right|\\&=\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{n+p}\right|.\end{aligned}$$

由于

$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{n+p}$$

$$=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)+\cdots+\begin{cases}\dfrac{1}{n+p}, & p\text{ 为奇数}\\[2ex] \dfrac{1}{n+p-1}-\dfrac{1}{n+p}, & p\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

故
$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{n+p}>0,\ \forall p\in\mathbf{Z}_+.$$

于是，当 p 为奇数时，

$$|s_{n+p}-s_n|=\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)<\frac{1}{n+1};$$

当 p 为偶数时，

$$|s_{n+p}-s_n|=\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{n+p-2}-\frac{1}{n+p-1}\right)-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n+1}.$$

因此，对任意给定的正数 ε，取正整数 $N\geqslant\dfrac{1}{\varepsilon}$，则当 $n>N$ 时，对任何正整数 p，

都有

$$|s_{n+p}-s_n| < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

根据柯西审敛原理知,级数收敛.

(2) 当 n 是 3 的倍数时,如果取 $p=3n$,则必有

$$|s_{n+p}-s_n| = \left|\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\frac{1}{n+4}+\left(\frac{1}{n+5}-\frac{1}{n+6}\right)+\cdots+\frac{1}{4n-2}+\left(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}\right)\right|$$

$$> \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{4n-2} > \underbrace{\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n}+\cdots+\frac{1}{4n}}_{n\text{个}} = \frac{1}{4}.$$

于是对 $\varepsilon_0=\frac{1}{4}$,不论 N 为何正整数,当 $n>N$ 并 n 是 3 的倍数,且当 $p=3n$ 时,就有

$$|s_{n+p}-s_n| > \varepsilon_0,$$

根据柯西审敛原理知,级数发散.

注 柯西审敛原理是这样叙述的:级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件为"对任意给定的正数 ε,总存在正整数 N,使得当 $n>N$ 时,对任意的正整数 p,都有 $|s_{n+p}-s_n|<\varepsilon$".

因此按柯西审敛原理,判别级数发散的充分必要条件就是对上述条件的否定,即"对某个正数 ε_0,不论 N 取什么正整数,至少有一个 $n(>N)$ 且至少有一个 $p\in\mathbf{Z}_+$,使得 $|s_{n+p}-s_n|\geqslant\varepsilon_0$".

(3) $$|s_{n+p}-s_n| = |u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|$$

$$= \left|\frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)x}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}}\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^p}}{1-\frac{1}{2}} < \frac{1}{2^n}.$$

由此可知,对任意给定的正数 ε,取正整数 $N\geqslant\log_2\frac{1}{\varepsilon}$,当 $n>N$ 时,对一切正整数 p,都有 $|s_{n+p}-s_n| < \varepsilon$. 按柯西审敛原理,该级数收敛.

(4) 本题与(2)类同,因 $u_n=\frac{1}{3n+1}+\left(\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}\right)>\frac{1}{3n+1}\geqslant\frac{1}{4n}$,故对 $\varepsilon_0=\frac{1}{8}$,不论 n 取什么正整数,取 $p=n$ 时,就有 $|s_{n+p}-s_n|=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{2n}\geqslant\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)>\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$. 因此该级数发散.

习题 12-2　常数项级数的审敛法

1. 以下各题中给出了四个结论，从中选出一个正确的结论：

（1）设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收敛的正项级数，$b_n = \dfrac{1-\cos a_n}{a_n}, c_n = \dfrac{1-\cos\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_n}}$，则有（　　）；

（A）$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 均收敛　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 敛散性不确定

（C）$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 均发散　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 敛散性不确定

（2）设有两个数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$，若 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，则有（　　）.

（A）当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛

（B）当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散

（C）当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 收敛

（D）当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 发散

解　（1）因为正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，所以 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. 当 $n\to\infty$ 时，由 $b_n = \dfrac{1-\cos a_n}{a_n} \sim \dfrac{1}{2}a_n$，知 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2}a_n$ 有相同的敛散性，即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

又 $c_n = \dfrac{1-\cos\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_n}} \sim \dfrac{1}{2}\sqrt{a_n}$，故 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2}\sqrt{a_n}$ 有相同的敛散性，如果 $a_n = \dfrac{1}{n^2}$，那么 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2}\sqrt{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n}$ 发散；又如果 $a_n = \dfrac{1}{n^4}$，那么 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2}\sqrt{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n^2}$ 收敛. 可见 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 的敛散性不确定，故选（B）.

（2）用排除法.

取 $a_n = b_n = (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}}$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散，排除（A）；

取 $a_n \equiv 0, b_n = \dfrac{1}{n}$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} 0$ 收敛，排除（B）与（D）.

故选（C）.

可以证明（C）是对的：

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，$n$ 适当大以后有 $|a_n|\leqslant 1$，即 $|a_nb_n|\leqslant |b_n|$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛，所以由比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ 收敛，故结论(C)是正确的.

2. 用比较审敛法或极限形式的比较审敛法判定下列级数的收敛性：

(1) $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}+\cdots$；

(2) $1+\dfrac{1+2}{1+2^2}+\dfrac{1+3}{1+3^2}+\cdots+\dfrac{1+n}{1+n^2}+\cdots$；

(3) $\dfrac{1}{2\times 5}+\dfrac{1}{3\times 6}+\cdots+\dfrac{1}{(n+1)(n+4)}+\cdots$；

(4) $\sin\dfrac{\pi}{2}+\sin\dfrac{\pi}{2^2}+\sin\dfrac{\pi}{2^3}+\cdots+\sin\dfrac{\pi}{2^n}+\cdots$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}\quad(a>0)$.

解 (1) **解法一** $u_n=\dfrac{1}{2n-1}>\dfrac{1}{2n}(n=1,2,\cdots)$，由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，故各项乘$\dfrac{1}{2}$后的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$ 也发散，由比较审敛法知原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}$ 发散.

解法二 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2n-1}}{\dfrac{1}{n}}=\dfrac{1}{2}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，故由极限形式的比较审敛法知原级数发散.

(2) $u_n=\dfrac{1+n}{1+n^2}>\dfrac{1+n}{n+n^2}=\dfrac{1}{n}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，由比较审敛法知原级数发散.

(3) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{(n+1)(n+4)}}{\dfrac{1}{n^2}}=1$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，由极限形式的比较审敛法知原级数收敛.

(4) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2^n}}{\dfrac{1}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\pi\cdot\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2^n}}{\dfrac{\pi}{2^n}}=\pi$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ 收敛，故由极限形式的比较审敛法知原级数收敛.

(5) 当 $0<a\leqslant 1$ 时，$\dfrac{1}{1+a^n}\geqslant\dfrac{1}{2}$，一般项不趋于零，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}$ 发散；当

$a>1$时，$\dfrac{1}{1+a^n}<\dfrac{1}{a^n}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a^n}$收敛，故由比较审敛法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}$收敛．

3. 用比值审敛法判定下列级数的收敛性：

(1) $\dfrac{3}{1\times 2}+\dfrac{3^2}{2\times 2^2}+\dfrac{3^3}{3\times 2^3}+\cdots+\dfrac{3^n}{n\times 2^n}+\cdots$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{3^n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\times n!}{n^n}$；　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$．

解　(1) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}\Big/\dfrac{3^n}{n2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{3}{2}>1$，故级数发散．

(2) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{3^{n+1}}\Big/\dfrac{n^2}{3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{(n+1)^2}{n^2}=\dfrac{1}{3}<1$，故级数收敛．

(3) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\Big/\dfrac{2^n n!}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}2\left(\dfrac{n}{1+n}\right)^n=\dfrac{2}{\mathrm{e}}<1$，故级数收敛．

(4) 因
$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}(n+1)\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}\Big/n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\dfrac{\pi}{2^{n+2}}}{\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<1,$$
故级数收敛．

***4.** 用根值审敛法判定下列级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{[\ln(n+1)]^n}$；　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{b}{a_n}\right)^n$，其中 $a_n\to a(n\to\infty)$，a_n,b,a 均为正数．

解　(1) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{1}{2}<1$，故级数收敛．

(2) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)}=0<1$，故级数收敛．

(3) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{\frac{2n-1}{n}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2<1$，故级数收敛．

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b}{a_n}=\dfrac{b}{a}$．

当 $b<a$ 时,因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}<1$,故级数收敛;

当 $b>a$ 时,因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}>1$,故级数发散;

当 $b=a$ 时,级数的收敛性不能确定$\left(\text{例如},b=1,a_n=1,\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{b}{a_n}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}1\text{ 发散;又如},b=1,a_n=n^{\frac{2}{n}}\to 1(n\to\infty),\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{b}{a_n}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\text{ 收敛}\right)$.

5. 判定下列级数的收敛性:

(1) $\dfrac{3}{4}+2\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+3\left(\dfrac{3}{4}\right)^3+\cdots+n\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+\cdots$;

(2) $\dfrac{1^4}{1!}+\dfrac{2^4}{2!}+\dfrac{3^4}{3!}+\cdots+\dfrac{n^4}{n!}+\cdots$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n(n+2)}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\dfrac{\pi}{3^n}$;

(5) $\sqrt{2}+\sqrt{\dfrac{3}{2}}+\cdots+\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}+\cdots$;

(6) $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{2a+b}+\cdots+\dfrac{1}{na+b}+\cdots\quad(a>0,b>0)$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{4}<1$,由比值审敛法知级数收敛.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^4\cdot\dfrac{1}{n+1}=0<1$,由比值审敛法知级数收敛.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n(n+2)}\Big/\dfrac{1}{n}=1$,而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,由极限形式的比较审敛法知原级数发散.

(4) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{\pi}{3^n}\Big/\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\pi\cdot\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{3^n}}{\dfrac{\pi}{3^n}}=\pi$,而几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ 收敛,故由极限形式的比较审敛法知原级数收敛.

(5) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=1\neq 0$,故级数发散.

(6) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{na+b}\Big/\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a+\dfrac{b}{n}}=\dfrac{1}{a}$,而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,故由极限形式的

比较审敛法知原级数发散.

6. 判定下列级数是否收敛.如果是收敛的,是绝对收敛还是条件收敛?

(1) $1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\cdots$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{3^{n-1}}$;

(3) $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2^3}-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2^4}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2^n}+\cdots$;

(4) $\dfrac{1}{\ln 2}-\dfrac{1}{\ln 3}+\dfrac{1}{\ln 4}-\dfrac{1}{\ln 5}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\ln(n+1)}+\cdots$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^{n^2}}{n!}$.

解 (1) $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{1}{2}}}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$是发散的;又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是交错级数,满足$|u_n|>|u_{n+1}|$且$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,故由莱布尼茨定理知原级数收敛且条件收敛.

(2) 因$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}\dfrac{n+1}{n}=\dfrac{1}{3}<1$,由比值审敛法知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛,故原级数绝对收敛.

(3) $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{3\times 2^n}$,因$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3\times 2^n}$是公比$q=\dfrac{1}{2}(|q|<1)$的等比级数,故收敛,从而原级数绝对收敛.

(4) $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$, $|u_n|=\dfrac{1}{\ln(n+1)}>\dfrac{1}{n+1}$,而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$是发散的,故由比较审敛法知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散,又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是交错级数,满足$|u_n|>|u_{n+1}|$且$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,故由莱布尼茨定理知原级数收敛且条件收敛.

(5) $u_n=\dfrac{(-1)^{n+1}2^{n^2}}{n!}$, $|u_n|=\dfrac{2^n\times 2^n\times\cdots\times 2^n}{1\times 2\times\cdots\times n}$,由于$2^n>k(k=1,2,\cdots,n)$,故$|u_n|>1$,即原级数的一般项$u_n$当$n\to\infty$时不趋于零,故该级数发散.

习题12-3　幂级数

1. 以下题中给出了四个结论,从中选出一个正确的结论:

已知$\alpha>0$,若幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+\alpha)^n$在$x=0$处发散,在$x=-2\alpha$处收敛,则幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-\alpha)^n$的收敛域为(　　).

(A) $[-2\alpha,0)$　　(B) $[0,2\alpha)$　　(C) $(-2\alpha,0]$　　(D) $(0,2\alpha]$

解　由题设条件知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=\alpha$ 处发散,在 $x=-\alpha$ 处收敛,故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为$[-\alpha,\alpha)$,从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-\alpha)^n$ 的收敛域为$[0,2\alpha)$,故选(B).

2. 求下列幂级数的收敛区间:

(1) $x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots$;

(2) $1-x+\frac{x^2}{2^2}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n^2}+\cdots$;

(3) $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2\times 4}+\frac{x^3}{2\times 4\times 6}+\cdots+\frac{x^n}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}+\cdots$;

(4) $\frac{x}{1\times 3}+\frac{x^2}{2\times 3^2}+\frac{x^3}{3\times 3^3}+\cdots+\frac{x^n}{n\times 3^n}+\cdots$;

(5) $\frac{2}{2}x+\frac{2^2}{5}x^2+\frac{2^3}{10}x^3+\cdots+\frac{2^n}{n^2+1}x^n+\cdots$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$;

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$.

解　(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$,故收敛半径为 1,收敛区间是$(-1,1)$.

(2) $n\geqslant 1$ 起,$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{1}{(n+1)^2}\Big/\frac{1}{n^2}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=1$,故收敛半径为 1,收敛区间为$(-1,1)$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2(n+1)}=0$,故收敛半径为$+\infty$,收敛区间是$(-\infty,+\infty)$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{1}{3}$,故收敛半径为 3,收敛区间为$(-3,3)$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}2\cdot\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}=2$,故收敛半径为$\frac{1}{2}$,收敛区间为$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

(6) 这是缺(偶次幂)项的级数,把 $(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 视为数项级数的一般项 u_n,

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}|x|^2=|x|^2,$$

当 $|x|<1$ 时,级数绝对收敛;当 $|x|>1$ 时,因一般项 $u_n \not\to 0(n\to\infty)$,级数发散,故原级数收敛半径为 1,收敛区间为 $(-1,1)$.

(7) 这是缺(奇次幂)项的级数.

解法一　与(6)类似,将它按数项级数处理,用比值法确定收敛半径和收敛区间.

解法二　令 $t=x^2$,先讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}t^{n-1}$ 的收敛区间.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{2n+1}{2n-1}=\frac{1}{2},$$

故该级数的收敛半径为 2,因此,原级数的收敛半径为 $\sqrt{2}$,收敛区间为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=1$,故收敛半径为 1. 当 $|x-5|<1$ 时,级数收敛;当 $|x-5|>1$ 时,级数发散. 故级数的收敛区间为 $(4,6)$.

3. 利用逐项求导或逐项积分,求下列级数的和函数:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$;

(3) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+2)x^{n+3}$.

解　(1) 容易求出此级数的收敛半径为 1. 当 $-1<x<1$ 时,

$$\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^x nx^{n-1}dx\right)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}.$$

在上式两端对 x 求导得

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

又原级数在 $x=\pm1$ 处发散,故它的和函数 $s(x)=\frac{1}{(1-x)^2}(-1<x<1)$.

(2) 不难求出此级数的收敛半径为 1. 当 $-1<x<1$ 时,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}=\frac{x^4}{1-x^4},$$

在上式两端分别从 0 至 x 积分,并由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 在 $x=0$ 处收敛于 0,故得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}&=\int_0^x\frac{x^4}{1-x^4}\mathrm{d}x\\&=\int_0^x\left(-1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x^2}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x.\end{aligned}$$

又原级数在 $x=\pm1$ 处均发散,故它的和函数

$$s(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x\quad(-1<x<1).$$

(3) 记级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$,其收敛半径为 1. 当 $-1<x<1$ 时,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2},$$

在上式两端分别从 0 至 x 积分,并注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 在 $x=0$ 处收敛于 0,故得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\int_0^x\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

又原级数在 $x=\pm1$ 处均发散,故它的和函数

$$s(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\quad(-1<x<1).$$

(4) 容易求得此级数的收敛半径为 1,收敛域为$(-1,1)$.当 $x\in(-1,1)$时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)x^{n+3}=x^2\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)x^{n+1}=x^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+2}\right)',$$

其中 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n+2}=x^3\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\dfrac{x^3}{1-x}$.又 $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n+2}\right)'=\left(\dfrac{x^3}{1-x}\right)'=\dfrac{3x^2-2x^3}{(1-x)^2}$,故原级数的和函数

$$s(x)=x^2\cdot\frac{3x^2-2x^3}{(1-x)^2}=\frac{3x^4-2x^5}{(1-x)^2}\quad(-1<x<1).$$

习题 12-4 函数展开成幂级数

1. 求函数 $f(x)=\cos x$ 的泰勒级数,并验证它在整个数轴上收敛于这个函数.

解 在定点 x_0 处,因

$$f^{(n)}(x_0)=\cos\left(x_0+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

故 $f(x)$ 的泰勒级数为

$$\cos x_0+\cos\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)(x-x_0)+\frac{\cos(x_0+\pi)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+$$

$$\frac{\cos\left(x_0+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots.$$

因为对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\cos\left(\xi+\frac{n+1}{2}\pi\right)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\leqslant\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

(其中 ξ 介于 x_0 与 x 之间),而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}=0$,于是得

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$$

所以在整个数轴上,有

$$\begin{aligned}f(x)&=\cos x\\&=\cos x_0+\cos\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)(x-x_0)+\frac{\cos(x_0+\pi)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\\&\quad\frac{\cos\left(x_0+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots.\end{aligned}$$

2. 将下列函数展开成 x 的幂级数,并求展开式成立的区间:

(1) $\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$; (2) $\ln(a+x)\quad(a>0)$;

(3) $a^x\quad(a>0$ 且 $a\neq1)$; (4) $\sin^2x$;

(5) $(1+x)\ln(1+x)$; (6) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

解 (1) 由于 $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $x\in(-\infty,+\infty)$, 故

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

于是

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

(2) $\ln(a+x)=\ln a+\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)$，利用

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n},\quad x\in(-1,1],$$

得

$$\ln(a+x)=\ln a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{a}\right)^{n},\quad x\in(-a,a].$$

(3) 利用 $e^{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!},x\in(-\infty,+\infty)$，得

$$a^{x}=e^{x\ln a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln a)^{n}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^{n}}{n!}x^{n},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

(4) **解法一** 利用

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n)!}x^{2n},\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

得

$$\sin^{2}x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(2x)^{2n}}{(2n)!}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n}}{2(2n)!},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

解法二 $(\sin^{2}x)'=2\sin x\cos x=\sin 2x$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!},\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

将上式两端从 0 至 x 积分并逐项积分，得

$$\sin^{2}x=\int_{0}^{x}(\sin^{2}x)'\mathrm{d}x=\int_{0}^{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!}\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

(5) **解法一** 因为

$$[(1+x)\ln(1+x)]'=\ln(1+x)+1=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n}}{n},\quad x\in(-1,1).$$

将上式两端从 0 至 x 积分并逐项积分得

$$(1+x)\ln(1+x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n+1}}{n(n+1)}$$

$$=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{n}}{(n-1)n},\quad x\in(-1,1),$$

又在 $x=1$ 处，上式右端的幂级数收敛，且函数 $(1+x)\ln(1+x)$ 连续，故

$$(1+x)\ln(1+x)=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)},\quad x\in(-1,1].$$

解法二　利用 $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},x\in(-1,1]$，得

$$\begin{aligned}(1+x)\ln(1+x)&=\ln(1+x)+x\ln(1+x)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n+1}}{n}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n-1}\\&=x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\frac{(-1)^n}{n-1}\right]x^n\\&=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)},\quad x\in(-1,1].\end{aligned}$$

(6) **解法一**　利用 $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\times4}x^2+\frac{1\times3}{2\times4\times6}x^3-\cdots,x\in[-1,1]$，

并因为 $\int_0^x\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\sqrt{1+x^2}-1$，以 x^2 替换上面幂级数中的 x，得

$$\begin{aligned}\int_0^x\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x&=\sqrt{1+x^2}-1\\&=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2\times4}x^4+\frac{1\times3}{2\times4\times6}x^6-\cdots+\\&\quad(-1)^{n-1}\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-3)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}x^{2n}+\cdots.\end{aligned}$$

在$(-1,1)$内将上式两端对 x 求导，得

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}&=x-\frac{1}{2}x^3+\frac{1\times3}{2\times4}x^5-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-3)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n-2)}x^{2n-1}+\cdots\\&=x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-3)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n-2)}x^{2n-1}\\&=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1},\quad x\in(-1,1).\end{aligned}$$

在 $x=\pm1$ 处上式右端的级数均收敛且函数 $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 连续，故

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1},\quad x\in[-1,1].$$

解法二 将 x^2 替换展开式

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}x^n\quad(x\in(-1,1])$$

中的 x,得

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}x^{2n},\quad x\in[-1,1],$$

从而得

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}&=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}x^{2n+1}\\&=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1},\quad x\in[-1,1].\end{aligned}$$

3. 将下列函数展开成 $(x-1)$ 的幂级数,并求展开式成立的区间:

(1) $\sqrt{x^3}$; (2) $\lg x$; (3) xe^x.

解 (1) 当 $m>0$ 时,因

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots,$$

$$x\in[-1,1],$$

而
$$\sqrt{x^3}=[1+(x-1)]^{\frac{3}{2}},$$

在以上二项展开式中取 $m=\dfrac{3}{2}$,并用$(x-1)$替换其中的 x,得

$$\begin{aligned}\sqrt{x^3}&=1+\frac{3}{2}(x-1)+\frac{1}{2!}\times\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)(x-1)^2+\cdots+\\&\quad\frac{1}{n!}\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\times\cdots\times\left(\frac{3}{2}-n+1\right)(x-1)^n+\cdots\\&=1+\frac{3}{2}(x-1)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3\times(-1)^n1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2^{n+2}(n+2)!}(x-1)^{n+2}\\&=1+\frac{3}{2}(x-1)+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{3}{(n+1)(n+2)2^n}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n+2},\quad x\in[0,2].\end{aligned}$$

(2) $\lg x=\dfrac{\ln x}{\ln 10}=\dfrac{1}{\ln 10}\ln[1+(x-1)]$,利用

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\quad x\in(-1,1],$$

将上式中的 x 换成 $x-1$,得

$$\lg x=\frac{1}{\ln 10}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n},\quad x\in(0,2].$$

(3) $xe^x=(x-1+1)e^{x-1+1}=e[(x-1)e^{x-1}+e^{x-1}]\xlongequal{x-1=t}e(te^t+e^t)$，由于 $e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n\quad(-\infty<t<+\infty)$，故

$$xe^x=e(te^t+e^t)=e\left(t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n\right)=e\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^{n+1}+1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n\right)$$

$$=e\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}t^n+1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n\right]=e\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}\right]t^n\right\}$$

$$\xlongequal{t=x-1}e+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{e}{(n-1)!}+\frac{e}{n!}\right](x-1)^n,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

4. 将函数 $f(x)=\cos x$ 展开成 $\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的幂级数．

解　$\cos x=\cos\left[\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right).$

将 $x+\frac{\pi}{3}$ 替换以下两式

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

中的 x，得

$$\cos x=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{(2n)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n}+\frac{\sqrt{3}}{(2n+1)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}\right],$$

$$x\in(-\infty,+\infty).$$

5. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数．

解　利用 $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,x\in(-1,1)$ 得

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{3+x-3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-3}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{x-3}{3}\right)}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-3}{3}\right)^n,\quad\frac{3-x}{3}\in(-1,1),$$

即

$$\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-3)^n,\quad x\in(0,6).$$

6. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成$(x+4)$的幂级数.

解 $$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2},$$

其中

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{-3+(x+4)}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x+4}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{3}\right)^n,$$

$\dfrac{x+4}{3}\in(-1,1)$，即 $x\in(-7,-1)$；

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{-2+(x+4)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x+4}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{2}\right)^n,$$

$\dfrac{x+4}{2}\in(-1,1)$，即 $x\in(-6,-2)$. 于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+3x+2}&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{2}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{3}\right)^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n,\end{aligned}$$

$x\in(-7,-1)\cap(-6,-2)=(-6,-2)$.

习题 12-5 函数的幂级数展开式的应用

1. 利用函数的幂级数展开式求下列各数的近似值：

(1) $\ln 3$（误差不超过 0.000 1）；

(2) $\sqrt{e}$（误差不超过 0.001）；

(3) $\sqrt[9]{522}$（误差不超过 0.000 01）；

(4) $\cos 2°$（误差不超过 0.000 1）.

解 (1) $$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots\right),\quad x\in(-1,1).$$

令 $\dfrac{1+x}{1-x}=3$，可得 $x=\dfrac{1}{2}$.从而

$$\ln 3=\ln\frac{1+\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{2}}=2\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3\times 2^3}+\frac{1}{5\times 2^5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}+\cdots\right].$$

$$|r_n| = 2\left[\frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}} + \frac{1}{(2n+3)2^{2n+3}} + \cdots\right]$$

$$= \frac{2}{(2n+1)2^{2n+1}}\left[1 + \frac{(2n+1)2^{2n+1}}{(2n+3)2^{2n+3}} + \frac{(2n+1)2^{2n+1}}{(2n+5)2^{2n+5}} + \cdots\right]$$

$$< \frac{2}{(2n+1)2^{2n+1}}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots\right)$$

$$= \frac{2}{(2n+1)2^{2n+1}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3(2n+1)2^{2n-2}},$$

$$|r_5| < \frac{1}{3\times 11\times 2^8} \approx 0.000\,12,$$

$$|r_6| < \frac{1}{3\times 13\times 2^{10}} \approx 0.000\,03 < 10^{-4},$$

故取 $n=6$,则

$\ln 3 \approx 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3\times 2^3} + \frac{1}{5\times 2^5} + \cdots + \frac{1}{11\times 2^{11}}\right)$,考虑到舍入误差,计算时应取五位小数,从而得 $\ln 3 \approx 1.098\,6$.

(2) $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

令 $x=\frac{1}{2}$,得

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!2^2} + \cdots + \frac{1}{n!2^n} + \cdots.$$

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}} + \frac{1}{(n+2)!2^{n+2}} + \cdots$$

$$= \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}}\left[1 + \frac{1}{(n+2)\times 2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)\times 2^2} + \cdots\right]$$

$$< \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(n+1)!2^n},$$

$$r_4 < \frac{1}{5!2^4} \approx 0.000\,5 < 10^{-3},$$

故取 $n=4$,计算时取四位小数可得

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!2^2} + \frac{1}{3!2^3} + \frac{1}{4!2^4} \approx 1.648.$$

(3) $\sqrt[9]{522}=\sqrt[9]{2^9+10}=2\left(1+\dfrac{10}{2^9}\right)^{\frac{1}{9}}$,因

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdot\cdots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots\quad(-1<x<1).$$

故
$$\sqrt[9]{522}=2\left(1+\frac{10}{2^9}\right)^{\frac{1}{9}}=2\left[1+\frac{1}{9}\times\frac{10}{2^9}+\frac{\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}-1\right)}{2!}\times\frac{10^2}{2^{18}}+\cdots+\frac{\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}-1\right)\times\cdots\times\left(\frac{1}{9}-n+1\right)}{n!}\times\frac{10^n}{2^{9n}}+\cdots\right]$$

$$=2\times\left(1+\frac{1}{9}\times\frac{10}{2^9}-\frac{\frac{1}{9}\times\frac{8}{9}}{2!}\times\frac{10^2}{2^{18}}+\cdots\right)$$

$$=2+\frac{2}{9}\times\frac{10}{2^9}-\frac{1}{9}\times\frac{8}{9}\times\frac{10^2}{2^{18}}+\cdots.$$

上式右端从第 2 项起为一交错级数,故有

$$|r_3|\leqslant u_4=\frac{8\times17}{3\times9^3}\times\frac{10^3}{2^{27}}<10^{-6},$$

取 3 项,并在计算时取六位小数,可得

$$\sqrt[9]{522}\approx2+\frac{2}{9}\times\frac{10}{2^9}-\frac{8}{9^2}\times\frac{10^2}{2^{18}}\approx2.004\,30.$$

(4) $$\cos2^\circ=\cos\frac{\pi}{90}=1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^4-\cdots,$$

上式是交错级数,

$$|r_2|\leqslant u_3=\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^4<10^{-7},$$

故取 2 项并在计算时取五位小数,可得

$$\cos2^\circ\approx1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2\approx0.999\,4.$$

2. 利用被积函数的幂级数展开式求下列定积分的近似值:

(1) $\displaystyle\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x$ (误差不超过 0.000 1);

(2) $\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}dx$ （误差不超过 0.001）.

解 (1) $\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}dx=\int_0^{0.5}[1-x^4+x^8-x^{12}+\cdots+(-1)^nx^{4n}+\cdots]dx$

$$=\left(x-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{9}x^9-\frac{1}{13}x^{13}+\cdots\right)\Bigg|_0^{0.5}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\times\frac{1}{2^5}+\frac{1}{9}\times\frac{1}{2^9}-\frac{1}{13}\times\frac{1}{2^{13}}+\cdots,$$

上式右端为一交错级数,有

$$|r_3|\leqslant u_4=\frac{1}{13}\times\frac{1}{2^{13}}\approx 0.000\,009<10^{-4},$$

故取 3 项,并在计算时取五位小数,可得

$$\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}dx\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\times\frac{1}{2^5}+\frac{1}{9}\times\frac{1}{2^9}\approx 0.494\,0.$$

(2) 因 $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots(-1<x<1)$,

故 $$\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}dx=\int_0^{0.5}\left[1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}+\cdots\right]dx$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^5}{25}-\frac{x^7}{49}+\cdots\right)\Bigg|_0^{0.5}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{9}\times\frac{1}{2^3}+\frac{1}{25}\times\frac{1}{2^5}-\frac{1}{49}\times\frac{1}{2^7}+\cdots,$$

由于

$$|r_3|\leqslant u_4=\frac{1}{49}\times\frac{1}{2^7}\approx 0.000\,2<10^{-3},$$

所以取 3 项,并在计算时取四位小数,可得

$$\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}dx\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{9}\times\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}\times\frac{1}{25}\approx 0.487.$$

3. 试用幂级数求下列各微分方程的解:

(1) $y'-xy-x=1$;　　(2) $y''+xy'+y=0$;

(3) $(1-x)y'=x^2-y$.

解 (1) 设方程的解为 $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$($a_0$ 为任意常数),代入方程,则有如下竖式(注意对齐同次幂项)

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+(n+1)a_{n+1}x^n+\cdots$$

$$-xy = \quad -a_0x \quad -a_1x^2 - \cdots \qquad\qquad -a_{n-1}x^n - \cdots$$
$$-x = \quad -x$$

$1 = a_1 + (2a_2 - a_0 - 1)x + (3a_3 - a_1)x^2 + \cdots + [(n+1)a_{n+1} - a_{n-1}]x^n + \cdots$ 比较系数可得

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = \frac{a_0+1}{2},$$

$$a_3 = \frac{1}{3}, \qquad a_4 = \frac{a_2}{4} = \frac{a_0+1}{2\times 4},$$

$$a_5 = \frac{a_3}{5} = \frac{1}{3\times 5}, \qquad a_6 = \frac{a_4}{6} = \frac{a_0+1}{2\times 4\times 6}, \cdots,$$

$$a_{2n-1} = \frac{1}{3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}, \quad a_{2n} = \frac{a_0+1}{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n} = \frac{a_0+1}{n!2^n}.$$

不难求出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}x^{2n-1}$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^{2n}$ 的收敛域都是$(-\infty,+\infty)$,故

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}x^{2n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{3\times 5\times\cdots\times(2n-1)} + (a_0+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!2^n} - 1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{3\times 5\times\cdots\times(2n-1)} + (a_0+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n - 1. \end{aligned}$$

由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n = e^{\frac{x^2}{2}}$,记 $a_0 + 1 = C$, $1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1) = (2n-1)!!$,则

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!!}x^{2n-1} - 1, \quad x\in(-\infty,+\infty).$$

(2) 设 $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 是方程的解,其中 a_0, a_1 是任意常数,则

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1},$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n,$$

代入方程 $y'' + xy' + y = 0$,得

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n + a_n]x^n = 0.$$

故必有

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n = 0,$$

即
$$a_{n+2}=-\frac{a_n}{n+2}\quad(n=0,1,2,\cdots).$$
可见,当 $n=2(k-1)$ 时,
$$a_{2k}=\left(-\frac{1}{2k}\right)a_{2k-2}=\left(-\frac{1}{2k}\right)\left(-\frac{1}{2k-2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}\right)a_0$$
$$=\frac{a_0(-1)^k}{k!2^k}.$$
当 $n=2k-1$ 时,
$$a_{2k+1}=\left(-\frac{1}{2k+1}\right)a_{2k-1}=\left(-\frac{1}{2k+1}\right)\left(-\frac{1}{2k-1}\right)\cdots\left(-\frac{1}{3}\right)a_1$$
$$=\frac{a_1(-1)^k}{(2k+1)!!}.$$

由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n}$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}$ 的收敛域均为$(-\infty,+\infty)$,故
$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_0(-1)^n}{n!2^n}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_1(-1)^n}{(2n+1)!!}x^{2n+1},$$
即
$$y=a_0e^{-\frac{x^2}{2}}+a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!!}x^{2n+1},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

(3) 设 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 是方程的解,代入方程,得
$$(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=x^2-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$
有
$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=x^2,$$
将上式左边第一个级数写成 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$,则有
$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)a_{n+1}+(1-n)a_n]x^n=x^2.$$
比较系数,得
$$a_1+a_0=0,\quad 2a_2=0,\quad 3a_3-a_2=1,$$
$$(n+1)a_{n+1}+(1-n)a_n=0\quad(n\geqslant3).$$
即
$$a_1=-a_0,\quad a_2=0,\quad a_3=\frac{1}{3},\quad a_{n+1}=\frac{n-1}{n+1}a_n\quad(n\geqslant3),$$
或写成

$$a_n=\frac{n-2}{n}a_{n-1}=\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{n-4}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{n(n-1)}\quad(n\geqslant 4).$$

于是 $y=a_0-a_0x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{10}x^5+\cdots+\frac{2}{n(n-1)}x^n+\cdots$，或写成

$$y=a_0(1-x)+x^3\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{6}x+\frac{1}{10}x^2+\cdots+\frac{2}{(n+2)(n+3)}x^n+\cdots\right].$$

4. 试用幂级数求下列方程满足所给初值条件的特解：

(1) $y'=y^2+x^3,y\big|_{x=0}=\frac{1}{2}$；

(2) $(1-x)y'+y=1+x,y\big|_{x=0}=0$.

解 (1) 因 $y\big|_{x=0}=\frac{1}{2}$，故设方程的特解为 $y=\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，则

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n.$$

代入方程，有

$$\begin{aligned}a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n&=x^3+\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\right)^2\\&=x^3+\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n+\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\right)^2\\&=x^3+\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n+\Big[a_1^2x^2+2a_1a_2x^3+\\&\qquad(a_2^2+2a_1a_3)x^4+\cdots+\Big(\sum_{i+j=n}a_ia_j\Big)x^n+\cdots\Big].\end{aligned}$$

即
$$a_1+(2a_2-a_1)x+(3a_3-a_2-a_1^2)x^2+(4a_4-a_3-2a_1a_2)x^3$$
$$+\cdots+\Big[(n+1)a_{n+1}-a_n-\sum_{i+j=n}a_ia_j\Big]x^n+\cdots=\frac{1}{4}+x^3.$$

比较系数，得

$$a_1=\frac{1}{4},\quad 2a_2-a_1=0,\quad 3a_3-a_2-a_1^2=0,\quad 4a_4-a_3-2a_1a_2=1,\cdots,$$
$$(n+1)a_{n+1}-a_n-\sum_{i+j=n}a_ia_j=0\quad(n\geqslant 4).$$

依次解得
$$a_1=\frac{1}{4},\quad a_2=\frac{1}{8},\quad a_3=\frac{1}{16},\quad a_4=\frac{9}{32},\cdots.$$

故
$$y=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\frac{9}{32}x^4+\cdots.$$

(2) 因 $y\big|_{x=0}=0$，故设 $y=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 是方程的特解，则 $y'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$，代入方

程,有

$$(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=1+x,$$

即
$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=1+x,$$

或写成

$$a_1+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)a_{n+1}+(1-n)a_n]x^n=1+x.$$

比较系数,得 $a_1=1,a_2=\dfrac{1}{2},a_{n+1}=\dfrac{n-1}{n+1}a_n(n\geqslant 2)$,或写成

$$a_n=\frac{n-2}{n}a_{n-1}=\frac{(n-2)(n-3)\cdots 1}{n(n-1)\cdots 3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{n(n-1)}\quad(n\geqslant 3).$$

故
$$y=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}x^n+\cdots.$$

5. 验证函数 $y(x)=1+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^6}{6!}+\cdots+\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$ 满足微分方程 $y''+y'+y=e^x$,并利用此结果求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

解 (1) 因为

$$y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots,$$

$$y'(x)=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\cdots,$$

$$y''(x)=x+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\cdots,$$

以上三式相加得

$$y''(x)+y'(x)+y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x,$$

所以函数 $y(x)$ 满足微分方程 $y''+y'+y=e^x$.

(2) $y''+y'+y=e^x$ 对应的齐次方程 $y''+y'+y=0$ 的特征方程为

$$r^2+r+1=0,$$

根为 $r_{1,2}=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$,因此齐次方程的通解为

$$Y=e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

设非齐次微分方程的特解为 $y^*=Ae^x$,代入方程 $y''+y'+y=e^x$,得 $A=\dfrac{1}{3}$,于是

$y^*=\dfrac{1}{3}e^x$,且非齐次微分方程的通解为

$$y=Y+y^*=e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{1}{3}e^x.$$

由(1)知,幂级数的和函数 $y(x)$ 满足:$y(0)=1,y'(0)=0$,由此定出上式中的 C_1 与 C_2.令

$$y(0)=1=C_1+\frac{1}{3},$$

$$y'(0)=0=-\frac{1}{2}C_1+\frac{\sqrt{3}}{2}C_2+\frac{1}{3},$$

解得 $C_1=\dfrac{2}{3},C_2=0$.于是由微分方程初值问题解的唯一性,可得所求幂级数的和函数为

$$y(x)=\frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}e^x\quad(-\infty<x<+\infty).$$

6. 利用欧拉公式将函数 $e^x\cos x$ 展开成 x 的幂级数.

解 由欧拉公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ 知

$$\cos x=\mathrm{Re}(e^{ix}),$$

故

$$e^x\cos x=e^x\cdot\mathrm{Re}(e^{ix})=\mathrm{Re}(e^x\cdot e^{ix})=\mathrm{Re}[e^{(1+i)x}].$$

因为

$$e^{(1+i)x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(1+i)^nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n\frac{x^n}{n!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)2^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

所以

$$e^x\cos x=\mathrm{Re}[e^{(1+i)x}]$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\cos\frac{n\pi}{4}\cdot2^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

*习题 12-6 函数项级数的一致收敛性及一致收敛级数的基本性质

1. 已知函数序列 $s_n(x)=\sin\dfrac{x}{n}(n=1,2,3,\cdots)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛于 0.

(1) 问 $N(\varepsilon,x)$ 取多大,能使当 $n>N$ 时,$s_n(x)$ 与其极限之差的绝对值小于正数 ε?

(2) 证明 $s_n(x)$ 在任一有限区间 $[a,b]$ 上一致收敛.

解 (1) 由于 $|s_n(x)-0| = \left|\sin\dfrac{x}{n}\right| \leqslant \dfrac{|x|}{n}$，因此对于正数 ε，取 $N(\varepsilon,x) \geqslant \dfrac{|x|}{\varepsilon}$，则当 $n>N$ 时，就有

$$|s_n(x)-0| \leqslant \frac{|x|}{n} < \varepsilon.$$

(2) 记 $M=\max\{|a|,|b|\}$，则 $\forall x\in[a,b]$，$|x|\leqslant M$，于是

$$|s_n(x)-0| \leqslant \frac{|x|}{n} \leqslant \frac{M}{n}.$$

故 $\forall \varepsilon>0$，取 $N=\left[\dfrac{M}{\varepsilon}\right]+1$，当 $n>N$ 时，对一切 $x\in[a,b]$ 都有

$$|s_n(x)-0| \leqslant \frac{|x|}{n} < \frac{M}{N} < \varepsilon,$$

即 $s_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 0.

2. 已知级数 $x^2+\dfrac{x^2}{1+x^2}+\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}+\cdots$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛.

(1) 求出该级数的和.

(2) 问 $N(\varepsilon,x)$ 取多大，能使当 $n>N$ 时，级数的余项 r_n 的绝对值小于正数 ε？

(3) 分别讨论级数在区间 $[0,1]$，$\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上的一致收敛性.

解 (1) 设该级数的和函数为 $s(x)$，当 $x=0$ 时，$s(0)=0$；当 $x\neq0$ 时，该级数是公比为 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 的等比级数，且 $\dfrac{1}{1+x^2}<1$，故

$$s(x)=\frac{x^2}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}=1+x^2.$$

于是

$$s(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

(2)
$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{x^2}{(1+x^2)^n}+\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}+\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+2}}+\cdots \\ &= \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\left[1+\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{(1+x^2)^2}+\cdots\right].\end{aligned}$$

当 $x=0$ 时，$r_n(x)=0$，$\forall\varepsilon>0$，取 $N=1$，则当 $n>N$ 时，就有

$$|r_n(x)|<\varepsilon;$$

当 $x\neq0$ 时，$r_n(x)=\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}=\dfrac{1}{(1+x^2)^{n-1}}$，$\forall\varepsilon>0$（不妨设

$\varepsilon<1$),取

$$N=\left[\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln(1+x^2)}\right]+1,$$

则当 $n>N$ 时,

$$|r_n(x)|=\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}<\varepsilon.$$

(3) 该级数的各项 $u_n(x)=\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}(n=0,1,2,\cdots)$ 在区间 $[0,1]$ 上是连续的,如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛,则由教材本节定理 1 知,其和函数 $s(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续. 今 $s(x)$ 在 $[0,1]$ 有间断点 $x=0$,由此推知该级数在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

在区间 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上,因为

$$|r_n(x)|=\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\leqslant\frac{1}{\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{n-1}}=\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1},$$

所以,$\forall\varepsilon>0$,取 $N=[\log_{\frac{4}{5}}\varepsilon]+1$,当 $n>N$ 时,对一切 $x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$,有

$$|r_n(x)|\leqslant\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}<\varepsilon.$$

即级数在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上一致收敛.

3. 按定义讨论下列级数在所给区间上的一致收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $(-\infty,+\infty)$;

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$, $(0,1)$.

解 (1) 此级数为交错级数,且满足莱布尼茨定理的条件.

$\forall x\in(-\infty,+\infty)$,

$$|r_n(x)|\leqslant\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\leqslant\frac{x^2}{(1+x^2)^n}=\frac{x^2}{1+nx^2+\cdots+x^{2n}}<\frac{1}{n},$$

故 $\forall\varepsilon>0$,取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 时,对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$,有

$$|r_n(x)|<\varepsilon,$$

即该级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x^n-x^{n+1})$，其部分和函数

$$s_n(x)=(1-x)+(x-x^2)+\cdots+(x^n-x^{n+1})=1-x^{n+1},$$

有和函数

$$s(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\lim_{n\to\infty}(1-x^{n+1})=1,\quad x\in(0,1).$$

且

$$|r_n(x)|=|s_n(x)-s(x)|=x^{n+1},\quad x\in(0,1).$$

取一列 $x_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n+1}}(n=1,2,\cdots)$，$x_n\in(0,1)$. 于是对 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{4}$，不论 n 多么大，总有 $x_n\in(0,1)$，使得

$$|r_n(x_n)|=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right]^{n+1}=\frac{1}{3}>\frac{1}{4}=\varepsilon_0.$$

因此，该级数在开区间(0,1)内不一致收敛.

4. 利用魏尔斯特拉斯判别法证明下列级数在所给区间上的一致收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{2^n}$，$(-\infty,+\infty)$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$，$(-\infty,+\infty)$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2\mathrm{e}^{-nx}$，$[0,+\infty)$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n!}$，$(-10,10)$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(1-\mathrm{e}^{-nx})}{n^2+x^2}$，$[0,+\infty)$.

证　(1) $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，因为 $|\cos nx|\leqslant 1$，所以

$$\left|\frac{\cos nx}{2^n}\right|\leqslant\frac{1}{2^n},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ 收敛，从而原级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

(2) $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，因为 $|\sin nx|\leqslant 1$，所以

$$\left|\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}\right|\leqslant\frac{1}{(n^4+x^4)^{\frac{1}{3}}}\leqslant\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ 收敛，从而原级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{e^{nx}}$，由于当 $x\in[0,+\infty)$ 时，

$$e^{nx} = 1 + nx + \frac{1}{2!}(nx)^2 + \frac{1}{3!}(nx)^3 + \cdots > \frac{1}{2!}(nx)^2 = \frac{n^2x^2}{2},$$

故
$$\left|\frac{x^2}{e^{nx}}\right| < \frac{2}{n^2},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n^2}$ 收敛，故原级数在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

(4) $\forall x\in(-10,10)$，$\left|\dfrac{e^{-nx}}{n!}\right| < \dfrac{(e^{10})^n}{n!}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(e^{10})^n}{n!}$ 收敛(收敛于 $e^{e^{10}}-1$)，故原级数在 $(-10,10)$ 上一致收敛.

(5) $\forall x\in[0,+\infty)$，由于 $0 < e^{-nx} \leqslant 1$，故

$$\left|\frac{(-1)^n(1-e^{-nx})}{n^2+x^2}\right| = \frac{1-e^{-nx}}{n^2+x^2} < \frac{1}{n^2},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛，从而原级数在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

习题 12-7 傅里叶级数

1. 下列周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π，试将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，如果 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

(1) $f(x) = 3x^2 + 1 \quad (-\pi \leqslant x < \pi)$；

(2) $f(x) = e^{2x} \quad (-\pi \leqslant x < \pi)$；

(3) $f(x) = \begin{cases} bx, & -\pi \leqslant x < 0, \\ ax, & 0 \leqslant x < \pi \end{cases}$ $(a,b$ 为常数，且 $a > b > 0)$.

解 (1) $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\,dx = 2(\pi^2+1)$，

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\cos nx\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}(3x^2+1)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}6x\sin nx\,dx\right] \\ &= \frac{6}{n^2\pi}\left(x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx\right) \\ &= \frac{12}{n^2}(-1)^n - \frac{6}{n^3\pi}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{(-1)^n 12}{n^2} \quad (n = 1,2,\cdots). \end{aligned}$$

由于 $(3x^2+1)\sin nx$ 是奇函数，故

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\sin nx\mathrm{d}x=0.$$

因为 $f(x)$ 满足收敛定理的条件且在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，故

$$f(x)=\pi^2+1+12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

(2) $a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi}}{2\pi}$,

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{2x}\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\left(\mathrm{e}^{2x}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{2x}n\sin nx\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{(-1)^n(\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi})}{2\pi}+\frac{n}{4\pi}\left(\mathrm{e}^{2x}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{2x}n\cos nx\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{(-1)^n(\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi})}{2\pi}-\frac{n^2}{4}a_n,\end{aligned}$$

故

$$a_n=\frac{2(-1)^n(\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi})}{(n^2+4)\pi}\quad(n=1,2,\cdots);$$

用分部积分法得

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{2x}\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{n}{2}a_n=-\frac{n(-1)^n(\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi})}{(n^2+4)\pi}\quad(n=1,2,\cdots).$$

$f(x)$ 满足收敛定理的条件，而在 $x=(2k+1)\pi\ (k\in\mathbf{Z})$ 处不连续，故

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi}}{\pi}\left[\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+4}(2\cos nx-n\sin nx)\right],$$

$$x\neq(2k+1)\pi,\quad k\in\mathbf{Z}.$$

(3)
$$a_0=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}bx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}ax\mathrm{d}x\right)=\frac{\pi}{2}(a-b).$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}bx\cos nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}ax\cos nx\mathrm{d}x\right),$$

在上式右端第一个积分中令 $x=-t$，

$$\int_{-\pi}^{0}bx\cos nx\mathrm{d}x=\int_{0}^{\pi}(-bt\cos nt)\mathrm{d}t=\int_{0}^{\pi}(-bx\cos nx)\mathrm{d}x,$$

故

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(a-b)x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{a-b}{n\pi}\left(x\sin nx\Big|_{0}^{\pi}-\int_{0}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{a-b}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\frac{b-a}{n^2\pi}[1-(-1)^n]\quad(n=1,2,\cdots);\end{aligned}$$

同理,

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}bx\sin nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}ax\sin nx\mathrm{d}x\right)$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(a+b)x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{a+b}{n\pi}\left(-x\cos nx\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x\right)$$
$$=\frac{a+b}{n\pi}\left[(-1)^{n+1}\pi+\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right]=\frac{a+b}{n}(-1)^{n+1}\quad(n=1,2,\cdots).$$

$f(x)$ 满足收敛定理的条件,而在 $x=(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$ 处不连续,故

$$f(x)=\frac{\pi}{4}(a-b)+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{[1-(-1)^n](b-a)}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^{n-1}(a+b)}{n}\sin nx\right\},$$
$$x\neq(2k+1)\pi,\quad k\in\mathbf{Z}.$$

2. 将下列函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数:

(1) $f(x)=2\sin\frac{x}{3}\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$;

(2) $f(x)=\begin{cases}e^x, & -\pi\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant\pi;\end{cases}$

(3) $f(x)=x\sin x(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$.

解 (1) 设 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 经周期延拓而得的函数,$\varphi(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内连续,$x=\pm\pi$ 是 $\varphi(x)$ 的间断点. 又 $\varphi(x)$ 满足收敛定理的条件,故在 $(-\pi,\pi)$ 内,它的傅里叶级数收敛于 $f(x)$.

由于 $2\sin\frac{x}{3}$ 是奇函数,故 $a_n=0(n=0,1,2,\cdots)$;

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2\sin\frac{x}{3}\sin nx\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos\left(\frac{1}{3}-n\right)x-\cos\left(\frac{1}{3}+n\right)x\right]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin\left(n-\frac{1}{3}\right)\pi}{n-\frac{1}{3}}-\frac{\sin\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi}{n+\frac{1}{3}}\right]$$
$$=\frac{6}{\pi}\left(\frac{-\cos n\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{3n-1}-\frac{\cos n\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{3n+1}\right)$$
$$=(-1)^{n+1}\cdot\frac{18\sqrt{3}}{\pi}\cdot\frac{n}{9n^2-1}\quad(n=1,2,\cdots).$$

故

$$f(x)=\frac{18\sqrt{3}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{9n^2-1}\sin nx,\quad x\in(-\pi,\pi).$$

(2) 设 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 经周期延拓而得的函数,它在 $(-\pi,\pi)$ 内连续,$x=\pm\pi$ 是 $\varphi(x)$ 的间断点. 又 $\varphi(x)$ 满足收敛定理的条件,故在 $(-\pi,\pi)$ 内它的傅里叶级数收敛于 $f(x)$.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}e^x dx+\int_0^{\pi}dx\right)=\frac{1+\pi-e^{-\pi}}{\pi},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}e^x\cos nx dx+\int_0^{\pi}\cos nx dx\right)=\frac{1-(-1)^ne^{-\pi}}{\pi(1+n^2)}\quad(n=1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}e^x\sin nx dx+\int_0^{\pi}\sin nx dx\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{-n[1-(-1)^ne^{-\pi}]}{1+n^2}+\frac{1-(-1)^n}{n}\right\}\quad(n=1,2,\cdots).$$

故

$$f(x)=\frac{1+\pi-e^{-\pi}}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-(-1)^ne^{-\pi}}{1+n^2}\cos nx+\right.$$

$$\left.\left[\frac{-n+(-1)^nne^{-\pi}}{1+n^2}+\frac{1-(-1)^n}{n}\right]\sin nx\right\},\quad x\in(-\pi,\pi).$$

(3) 先把 $f(x)$ 延拓成周期为 2π 的周期函数,由于 $f(x)=x\sin x$ 是偶函数,故其傅里叶系数 $b_n=0(n=1,2,\cdots)$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-x\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x dx\right)=\frac{2}{\pi}(\pi+0)=2;$$

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos x dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\cos x dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin 2x dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(-x\cos 2x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos 2x dx\right)=-\frac{1}{2};$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\cos nx dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x[\sin(n+1)x-\sin(n-1)x]dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin(n+1)x dx-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin(n-1)x dx=I_1-I_2,$$

其中

$$I_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin(n+1)x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n+1}\left[-x\cos(n+1)x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos(n+1)x\mathrm{d}x\right]$$
$$=\frac{(-1)^n}{n+1},$$

$$I_2=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin(n-1)x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n-1}\left[-x\cos(n-1)x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos(n-1)x\mathrm{d}x\right]$$
$$=\frac{(-1)^n}{n-1}.$$

即

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n+1}-\frac{(-1)^n}{n-1}=(-1)^{n-1}\frac{2}{n^2-1},\quad n=2,3,\cdots.$$

因 $f(x)$ 满足收敛定理条件,它在 $(-\pi,\pi)$ 内连续,故

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=1-\frac{1}{2}\cos x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-1}\cos nx,\quad x\in(-\pi,\pi).$$

3. 将函数 $f(x)=\cos\frac{x}{2}(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成傅里叶级数.

解 $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ 是偶函数,故 $b_n=0(n=1,2,\cdots)$.

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos nx\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x+\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{n-\frac{1}{2}}+\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{n+\frac{1}{2}}\right]$$
$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{-\cos n\pi}{2n-1}+\frac{\cos n\pi}{2n+1}\right)=(-1)^{n+1}\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=(-1)^{n+1}\frac{4}{\pi(4n^2-1)}\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

因 $f(x)$ 满足收敛定理的条件,且在 $[-\pi,\pi]$ 上连续,故

$$f(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{4n^2-1}\cos nx,\quad x\in[-\pi,\pi].$$

4. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}, & -\pi \leqslant x<-\dfrac{\pi}{2}, \\ x, & -\dfrac{\pi}{2} \leqslant x<\dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{\pi}{2} \leqslant x<\pi,\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解　$f(x)$ 是奇函数,故 $a_n=0(n=0,1,2,\cdots)$,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin nx\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin nx\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\left.\frac{-x\cos nx}{n}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\mathrm{d}x\right)+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{-\cos\dfrac{n\pi}{2}}{n}+\frac{2\sin\dfrac{n\pi}{2}}{\pi n^2}+\frac{\cos\dfrac{n\pi}{2}-\cos n\pi}{n}$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\quad(n=1,2,\cdots).$$

因 $f(x)$ 满足收敛定理的条件,而在 $x=(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$ 处间断,故

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right]\sin nx,\quad x\neq(2k+1)\pi\quad(k\in\mathbf{Z}).$$

5. 将函数 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成正弦级数.

解　作

$$\varphi(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(0,\pi], \\ 0, & x=0, \\ -f(-x), & x\in(-\pi,0),\end{cases}$$

$\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 的奇延拓. 令 $\Phi(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的周期延拓,则 $\Phi(x)$ 满足收敛定理的条件,而在 $x=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 处间断,又在 $(0,\pi]$ 上,$\Phi(x)\equiv f(x)$,因此 $\Phi(x)$ 的傅里叶级数在 $(0,\pi]$ 上收敛于 $f(x)$.

$$a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x-\pi}{2n}\cos nx-\frac{1}{2n^2}\sin nx\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{n}\quad(n=1,2,\cdots),$$

故

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx,\quad x\in(0,\pi].$$

6. 将函数 $f(x)=2x^2(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

解 (1) 展开成正弦级数:

令

$$\varphi(x)=\begin{cases}2x^2, & x\in[0,\pi],\\ -2x^2, & x\in(-\pi,0)\end{cases}$$

是 $f(x)$ 的奇延拓,又 $\Phi(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的周期延拓函数,则 $\Phi(x)$ 满足收敛定理的条件,而在 $x=(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$ 处间断,又在$[0,\pi]$上 $\Phi(x)\equiv f(x)$,故它的傅里叶级数在$[0,\pi)$ 上收敛于 $f(x)$.

$$a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x^2\sin nx\mathrm{d}x\\&=\frac{4}{\pi}\left[\frac{-x^2}{n}\cos nx+\frac{2x}{n^2}\sin nx+\frac{2}{n^3}\cos nx\right]_0^{\pi}\\&=\frac{4}{\pi}\left[\frac{-\pi^2(-1)^n}{n}+\frac{(-1)^n2}{n^3}-\frac{2}{n^3}\right]\quad(n=1,2,\cdots),\end{aligned}$$

故

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{n^3}-\frac{\pi^2}{n}\right)(-1)^n-\frac{2}{n^3}\right]\sin nx,\quad x\in[0,\pi).$$

(2) 展开成余弦级数:

令 $\varphi(x)=2x^2,x\in(-\pi,\pi]$ 是$f(x)$ 的偶延拓,又 $\Phi(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的周期延拓函数,则 $\Phi(x)$ 满足收敛定理的条件且处处连续,又在$[0,\pi]$ 上,$\Phi(x)\equiv f(x)$,故它的傅里叶级数在$[0,\pi]$ 上收敛于 $f(x)$.

$$b_n=0\quad(n=1,2,\cdots),$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x^2\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi^2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x^2\cos nx\mathrm{d}x=(-1)^n\frac{8}{n^2}\quad(n=1,2,\cdots).$$

故

$$f(x)=\frac{2}{3}\pi^2+8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\quad x\in[0,\pi].$$

7. 设周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π.证明:

（1）若$f(x-\pi)=-f(x)$，则$f(x)$的傅里叶系数$a_0=0$，$a_{2k}=0$，$b_{2k}=0$（$k=1,2,\cdots$）；

（2）若$f(x-\pi)=f(x)$，则$f(x)$的傅里叶系数$a_{2k+1}=0$，$b_{2k+1}=0$（$k=0,1,2,\cdots$）.

证　（1）

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}[-f(x-\pi)]\mathrm{d}x\right\},$$

在上式第二个积分中令$x-\pi=u$，则

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\mathrm{d}x-\int_{-\pi}^{0}f(u)\mathrm{d}u\right]=0.$$

同理可得

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}[-f(x-\pi)]\cos nx\mathrm{d}x\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nx\mathrm{d}x-\int_{-\pi}^{0}f(u)\cos(n\pi+nu)\mathrm{d}u\right]$$

及

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin nx\mathrm{d}x-\int_{-\pi}^{0}f(u)\sin(n\pi+nu)\mathrm{d}u\right].$$

当$n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$时，$\cos(n\pi+nu)=\cos nu$，$\sin(n\pi+nu)=\sin nu$，于是有

$$a_{2k}=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos 2kx\mathrm{d}x-\int_{-\pi}^{0}f(u)\cos 2ku\mathrm{d}u\right]=0,$$

及

$$b_{2k}=0\quad(k\in\mathbf{N}^*).$$

（2）与（1）的做法类似，有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nx\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{0}f(u)\cos(n\pi+nu)\mathrm{d}u\right],$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin nx\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{0}f(u)\sin(n\pi+nu)\mathrm{d}u\right].$$

当$n=2k+1(k\in\mathbf{N})$时，$\cos(n\pi+nu)=-\cos nu$，$\sin(n\pi+nu)=-\sin nu$，故有

$$a_{2k+1}=0,\quad b_{2k+1}=0\quad(k\in\mathbf{N}).$$

习题 12-8 一般周期函数的傅里叶级数

1. 将下列各周期函数展开成傅里叶级数(下面给出函数在一个周期内的表达式):

(1) $f(x)=1-x^2\quad\left(-\dfrac{1}{2}\leqslant x<\dfrac{1}{2}\right)$;

(2) $f(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<\dfrac{1}{2},\\ -1, & \dfrac{1}{2}\leqslant x<1;\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}2x+1, & -3\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<3.\end{cases}$

解 (1) 函数 $f(x)$ 是半周期 $l=\dfrac{1}{2}$ 的偶函数,故

$$b_n=0\quad(n=1,2,\cdots),$$

$$a_0=\frac{2}{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{11}{6},$$

$$a_n=\frac{2}{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\cos\frac{n\pi x}{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\cos(2n\pi x)\,\mathrm{d}x$$

$$=4\left[\frac{1-x^2}{2n\pi}\sin(2n\pi x)-\frac{2x}{4n^2\pi^2}\cos(2n\pi x)+\frac{2}{8n^3\pi^3}\sin(2n\pi x)\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\quad(n=1,2,\cdots).$$

因 $f(x)$ 满足收敛定理的条件且处处连续,故有

$$f(x)=\frac{11}{12}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos(2n\pi x),\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

(2) 函数 $f(x)$ 的半周期 $l=1$.

$$a_0=\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2},$$

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{0}x\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{1}{2}}\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{x}{n\pi}\sin(n\pi x)+\frac{1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\right]_{0}^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\right]_{1}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]+\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\quad(n=1,2,\cdots),$$

$$b_n=\int_{-1}^{1}f(x)\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{0}x\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\frac{1}{2}}\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n\pi}\quad(n=1,2,\cdots).$$

因 $f(x)$ 满足收敛定理的条件，其间断点为 $x=2k,2k+\frac{1}{2},k\in\mathbf{Z}$，故有

$$f(x)=-\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}+\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right]\cos(n\pi x)+\frac{1}{n\pi}\left(1-2\cos\frac{n\pi}{2}\right)\sin(n\pi x)\right\},$$

$$x\in\mathbf{R}\Big\backslash\left\{2k,2k+\frac{1}{2}\,\Big|\,k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

（3）函数 $f(x)$ 的半周期 $l=3$.

$$a_0=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x+1)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}\mathrm{d}x\right]=-1,$$

$$a_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x+1)\cos\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}\cos\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{6}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]\quad(n=1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x+1)\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{6}{n\pi}(-1)^{n+1}\quad(n=1,2,\cdots).$$

因 $f(x)$ 满足收敛定理的条件，其间断点为 $x=3(2k+1),k\in\mathbf{Z}$，故有

$$f(x)=-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{6}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]\cos\frac{n\pi x}{3}+(-1)^{n+1}\frac{6}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right\},$$

$$x\in\mathbf{R}\backslash\{3(2k+1)\mid k\in\mathbf{Z}\}.$$

2. 将下列函数分别展开成正弦级数和余弦级数：

$$(1)\ f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<\dfrac{l}{2},\\[2mm] l-x, & \dfrac{l}{2}\leqslant x\leqslant l;\end{cases}$$

(2) $f(x)=x^2 \quad (0 \leqslant x \leqslant 2)$.

解 (1) 展开为正弦级数:

将 $f(x)$ 作奇延拓得 $\varphi(x)$,又将 $\varphi(x)$ 作周期延拓得 $\Phi(x)$,则 $\Phi(x)$ 是以 $2l$ 为周期的奇函数,$\Phi(x)$ 处处连续,又满足收敛定理的条件,且在 $[0,l]$ 上,$\Phi(x)\equiv f(x)$.

$$a_n=0 \quad (n=0,1,2,\cdots);$$

$$b_n=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\right],$$

在上式第二个积分中令 $l-x=t$,则有

$$\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{l}{2}} t\cos n\pi\sin\frac{n\pi t}{l}\mathrm{d}t=(-1)^{n-1}\int_0^{\frac{l}{2}} t\sin\frac{n\pi t}{l}\mathrm{d}t,$$

于是

$$b_n=\frac{2}{l}[1+(-1)^{n-1}]\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x.$$

当 $n=2k$ 时, $b_{2k}=0$;当 $n=2k-1$ 时,

$$b_{2k-1}=\frac{4}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{(2k-1)\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{4l}{(2k-1)^2\pi^2}(-1)^{k-1} \quad (k=1,2,\cdots).$$

故

$$f(x)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{l}, \quad x\in[0,l].$$

展开为余弦级数:

将 $f(x)$ 作偶延拓得 $\psi(x)$,再将 $\psi(x)$ 作周期延拓得 $\Psi(x)$,则 $\Psi(x)$ 是以 $2l$ 为周期的周期函数 . $\Psi(x)$ 处处连续又满足收敛定理的条件,且在 $[0,l]$ 上 $\Psi(x)\equiv f(x)$.

$$a_0=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} x\mathrm{d}x+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\mathrm{d}x\right]=\frac{l}{2};$$

$$a_n=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} x\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\right],$$

在上式第二个积分中令 $l-x=t$, 则有

$$\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=(-1)^n\int_0^{\frac{l}{2}} t\cos\frac{n\pi t}{l}\mathrm{d}t,$$

于是

$$a_n=\frac{2}{l}[1+(-1)^n]\int_0^{\frac{l}{2}} x\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{l}[1+(-1)^n]\left(\frac{l}{\pi}\right)^2\left(\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n^2}\right).$$

当 $n=2m-1$ 时，$a_{2m-1}=0$；当 $n=2m$ 时，

$$a_{2m}=\frac{4l}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(2m)^2}[(-1)^m-1]$$

$$=\begin{cases}0, & m=2k,\\ \dfrac{l}{\pi^2}\cdot\dfrac{(-2)}{(2k-1)^2}, & m=2k-1\end{cases}\quad(k=1,2,\cdots).$$

$$f(x)=\frac{l}{4}-\frac{2l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{2(2k-1)\pi x}{l},\quad x\in[0,l].$$

(2) 展开为正弦级数：

将 $f(x)$ 作奇延拓得 $\varphi(x)$，再将 $\varphi(x)$ 作周期延拓，得以 4 为周期的周期函数 $\Phi(x)$，则 $\Phi(x)$ 满足收敛定理的条件，除了间断点 $x=2(2k+1)(k\in\mathbf{Z})$ 外处处连续，且在 $[0,2)$ 上，$\Phi(x)\equiv f(x)$.

$$a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x^2\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\left[-\frac{2}{n\pi}x^2\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2+\frac{4}{n\pi}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{8}{n\pi}+\frac{8}{(n\pi)^2}\left[x\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2+\frac{16}{(n\pi)^3}\left[\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{8}{n\pi}+\frac{16}{(n\pi)^3}[(-1)^n-1]\quad(n=1,2,\cdots).$$

故

$$f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{n^3\pi^2}[(-1)^n-1]\right\}\sin\frac{n\pi x}{2},\quad x\in[0,2).$$

展开为余弦级数：

将 $f(x)$ 作偶延拓得 $\psi(x)$，再将 $\psi(x)$ 作周期延拓，得以 4 为周期的周期函数 $\Psi(x)$，则 $\Psi(x)$ 处处连续又满足收敛定理的条件．且在 $[0,2]$ 上 $\Psi(x)\equiv f(x)$.

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{8}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x^2\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\left[x^2\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2-\frac{4}{n\pi}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{8}{(n\pi)^2}\left[x\cos\frac{n\pi x}{2}-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$=(-1)^n\frac{16}{(n\pi)^2}\quad(n=1,2,\cdots),$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1,2,\cdots).$$

故

$$f(x) = \frac{4}{3} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}, \quad x \in [0,2].$$

*3. 设$f(x)$是周期为 2 的周期函数,它在$[-1,1)$上的表达式为$f(x)=e^{-x}$. 试将$f(x)$展开成复数形式的傅里叶级数.

解 $f(x)$满足收敛定理的条件,且除了点$x=2k+1(k\in\mathbf{Z})$外处处连续.

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^{-x}e^{-in\pi x}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^{-(1+n\pi i)x}dx \\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+n\pi i}\left[e^{-(1+n\pi i)x}\right]_{-1}^{1} \\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1-n\pi i}{1+(n\pi)^2}(e^{-1}\cdot e^{-n\pi i} - e\cdot e^{n\pi i}) \\
&= \frac{1-n\pi i}{1+(n\pi)^2}\frac{e\cos n\pi - e^{-1}\cos n\pi}{2} \\
&= (-1)^n\frac{e-e^{-1}}{2}\frac{1-n\pi i}{1+n^2\pi^2} \quad (n = 0, \pm1, \pm2,\cdots),
\end{aligned}$$

故

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{e-e^{-1}}{2}\frac{1-n\pi i}{1+n^2\pi^2}\cdot e^{in\pi x}, \quad x \in \mathbf{R}\setminus\{2k+1 \mid k\in\mathbf{Z}\}.$$

*4. 设$u(t)$是周期为T的周期函数. 已知它的傅里叶级数的复数形式为(参阅本节例题)

$$u(t) = \frac{h\tau}{T} + \frac{h}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq0}}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi\tau}{T}e^{i\frac{2n\pi t}{T}} \quad (-\infty < t < +\infty),$$

试写出$u(t)$的傅里叶级数的实数形式(即三角形式).

解 由题设知 $\quad c_n = \dfrac{h}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi\tau}{T} \quad (n = \pm1, \pm2,\cdots).$

因

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \overline{c_n} \quad (n = 1,2,\cdots),$$

可见 $\qquad a_n = \mathrm{Re}(2c_n), \quad b_n = \mathrm{Im}(2\overline{c_n}).$

而c_n为实数,故

$$a_n = \frac{2h}{n\pi}\sin\frac{n\pi\tau}{T}, \quad b_n = 0 \quad (n = 1,2,\cdots),$$

故

$$u(t)=\frac{h\tau}{T}+\frac{2h}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi\tau}{T}\cdot\cos\frac{2n\pi t}{T}\quad(-\infty<t<+\infty).$$

总习题十二

1. 填空：

(1) 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$\lim_{n\to\infty}u_n=0$ 是它收敛的 ________ 条件，不是它收敛的 ________ 条件；

(2) 部分和数列 $\{s_n\}$ 有界是正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的 ________ 条件；

(3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 必定 ________；若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 必定 ________.

解　(1) 必要，充分；(2) 充要；(3) 收敛，发散.

2. 下题中给出了四个结论，从中选出一个正确的结论：

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $|x|$，则 $f(x)$ 的傅里叶级数为 (　　).

(A) $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x+\cdots\right]$

(B) $\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2^2}\sin 2x+\frac{1}{4^2}\sin 4x+\frac{1}{6^2}\sin 6x+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\sin 2nx+\cdots\right]$

(C) $\frac{4}{\pi}\left[\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x+\cdots\right]$

(D) $\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2^2}\cos 2x+\frac{1}{4^2}\cos 4x+\frac{1}{6^2}\cos 6x+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\cos 2nx+\cdots\right]$

解　偶函数 $f(x)$ 的傅里叶级数是余弦级数，故排除(B).

又因为

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\pi\neq 0,$$

所以排除(C)与(D)，从而选(A).

3. 判定下列级数的收敛性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2n^2}$；　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$；

(4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^{10}n}$；　(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^s}$　$(a>0,s>0)$.

解 (1) $u_n=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$,因$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{\dfrac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$. 而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散,故由极限形式的比较审敛法知原级数发散.

(2) $u_n=\dfrac{(n!)^2}{2n^2}=\dfrac{[(n-1)!]^2}{2}\to+\infty\ (n\to\infty)$,由于一般项不趋于零,故级数发散.

(3) $u_n=\dfrac{n\cos^2\dfrac{n\pi}{3}}{2^n}\leqslant\dfrac{n}{2^n}=v_n$,而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$是收敛的$\left(事实上,\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}<1,据比值审敛法知\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}收敛\right)$,故由比较审敛法知原级数收敛.

(4) $u_n=\dfrac{1}{\ln^{10}n}$,因$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{\dfrac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln^{10}n}=+\infty$,而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散,故由极限形式的比较审敛法知原级数发散.

注 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln^{10}n}$时,可考虑极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln^{10}n}{n}$.

因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^{10}x}{x}\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=\!=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{10\ln^9x}{x}=\cdots=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{10!}{x}=0$, 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^{10}n}{n}=0,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln^{10}n}=+\infty.$$

(5) $u_n=\dfrac{a^n}{n^s}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}a\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^s=a$.

由比值审敛法知,当$a<1$时级数收敛,当$a>1$时级数发散.

当$a=1$时,原级数成为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^s}$,由$p$级数的结论知,当$s>1$时级数收敛,当$s\leqslant1$时级数发散.

4. 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都收敛,证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$也收敛.

证 根据题设条件知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$收敛,故有$\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n)=0$. 由极限定义知,存在正整数$N$,当$n\geqslant N$时,有$u_n+v_n<1$,从而

$$(u_n+v_n)^2<u_n+v_n\quad(n\geqslant N),$$

故由比较审敛法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$收敛.

5. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v_n}{u_n}=1$. 问级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$是否也收敛?试说明理由.

解 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$不一定收敛.

当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数时，在题设条件下 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 必定收敛. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v_n}{u_n}=1$. 根据收敛数列的保号性知，存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时有 $\dfrac{v_n}{u_n}>0$，即有 $v_n>0$. 于是，按正项级数的比较审敛法知 $\sum\limits_{n=N}^{\infty} v_n$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛.

当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 不是正项级数时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 可能不收敛. 例如：若 $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$，$v_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v_n}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right]=1$，然而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

6. 讨论下列级数的绝对收敛性与条件收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^p}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\dfrac{n+1}{n}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(n+1)!}{n^{n+1}}$.

解　(1) $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n^p}$，$|u_n|=\dfrac{1}{n^p}$，当 $p>1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛；当 $0<p\leqslant 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p}$ 是交错级数，且满足莱布尼茨定理的条件，因而收敛且为条件收敛；当 $p\leqslant 0$ 时，由于 $u_n\not\to 0(n\to\infty)$，此时级数发散. 综上可知，当 $p>1$ 时，级数绝对收敛；当 $0<p\leqslant 1$ 时，级数条件收敛；当 $p\leqslant 0$ 时，级数发散.

(2) $u_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{\pi^{n+1}}\sin\dfrac{\pi}{n+1}$，$|u_n|\leqslant\left(\dfrac{1}{\pi}\right)^{n+1}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\pi}\right)^{n+1}$ 收敛，由比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，即原级数绝对收敛.

(3) $u_n=(-1)^n\ln\dfrac{n+1}{n}$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_n|}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1,$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，由极限形式的比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散.

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是交错级数且满足莱布尼茨定理的条件，因而收敛，故该级数条件收敛.

(4) $u_n=(-1)^n\dfrac{(n+1)!}{n^{n+1}}$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}=\frac{1}{e}<1.$$

由比值审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛,即原级数绝对收敛.

7. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}[2^{\frac{1}{3}}\times4^{\frac{1}{9}}\times8^{\frac{1}{27}}\times\cdots\times(2^n)^{\frac{1}{3^n}}]$.

解 (1) 由于 $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 的部分和,而由正项级数的根值审敛法,当 $n\to\infty$ 时,

$$\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to\frac{\mathrm{e}}{3}<1,$$

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 收敛,于是部分和 s_n 有界,从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{n}=0.$$

(2) $2^{\frac{1}{3}}\times4^{\frac{1}{9}}\times8^{\frac{1}{27}}\times\cdots\times(2^n)^{\frac{1}{3^n}}=2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{2}{9}}\times2^{\frac{3}{27}}\times\cdots\times2^{\frac{n}{3^n}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\cdots+\frac{n}{3^n}}$,

为此,先求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\cdots+\frac{n}{3^n}\right)$.记

$$s_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{n}{3^n},$$

则

$$\frac{1}{3}s_n=\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{3^4}+\cdots+\frac{n-1}{3^n}+\frac{n}{3^{n+1}},$$

将以上两式相减,得

$$\frac{2}{3}s_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\frac{n}{3^{n+1}},$$

即

$$s_n=\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{3^{n+1}},$$

故 $$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{3}{4}-0=\frac{3}{4}.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}[2^{\frac{1}{3}}\times4^{\frac{1}{9}}\times8^{\frac{1}{27}}\times\cdots\times(2^n)^{\frac{1}{3^n}}]=2^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{8}.$$

注　通过求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}x^{n-1}$ 的和函数 $s(x)$，然后求出 $s(1)$ 也可求得 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\dfrac{3}{4}$.

8. 求下列幂级数的收敛区间：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+5^n}{n}x^n$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x+1)^n$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}x^{2n}$.

解　(1) $u_n=a_nx^n,a_n=\dfrac{3^n+5^n}{n}$. 因

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{3^{n+1}+5^{n+1}}{3^n+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{3\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+5}{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+1}=5,$$

故收敛半径为 $R=\dfrac{1}{5}$，收敛区间为 $\left(-\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{5}\right)$.

(2) $u_n=a_nx^n,a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$. 因

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{(n+1)^2}}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{2n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n^2+2n}\right)^{n^2}}=\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}}=\mathrm{e}$$

$$\left(\text{或}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}\right),$$

故收敛半径为 $R=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，收敛区间为 $\left(-\dfrac{1}{\mathrm{e}},\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

(3) 令 $x+1=t$，即 $x=t-1$，先讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nt^n$ 的收敛区间.

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$，故收敛半径 $R=1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nt^n$ 的收敛区间为 $(-1,1)$，从而原级数的收敛区间为 $(-2,0)$.

(4) 令 $\dfrac{x^2}{2}=t$，原级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nt^n$，由第(3)题知该级数的收敛区间为 $(-1,1)$. 因 $x=\pm\sqrt{2t}$，故原级数的收敛区间为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

9. 求下列幂级数的和函数：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}$；　　*(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n$；　　*(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$.

解 (1) $u_n(x)=\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1}\cdot\frac{|x|^2}{2}=\frac{|x|^2}{2}.$$

当$\dfrac{|x|^2}{2}<1$时,原级数收敛;当$\dfrac{|x|^2}{2}\geqslant 1$时,因级数的一般项$u_n(x)\nrightarrow 0(u\to\infty)$,故级数发散. 因此原级数的收敛域为$\dfrac{|x|^2}{2}<1$,即$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

设和函数为$s(x)$,即$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}$,从0到$x$积分并逐项积分:

$$\int_0^x s(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^{2n+1}=\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n$$

$$=\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}}=\frac{x}{2-x^2},\quad x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}).$$

上式两端对x求导,得

$$s(x)=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2},\quad x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}).$$

*(2) $u_n(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}|x|^2=|x|^2.$$

当$|x|<1$时,级数收敛;当$|x|>1$时,因级数一般项$u_n(x)\nrightarrow 0(n\to\infty)$,故级数发散;当$x=\pm1$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}$是收敛的交错级数,因此原级数的收敛域为$[-1,1]$.

设和函数为$s(x)$,则

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1},\quad 且\quad s(0)=0.$$

在$(-1,1)$内,上式两端对x求导,得

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\frac{1}{1+x^2}.$$

于是

$$s(x)=s(x)-s(0)=\int_0^x s'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x.$$

又由于幂级数在$x=\pm1$处收敛,且$\arctan x$在$x=\pm1$处连续,故

$$s(x)=\arctan x,\quad x\in[-1,1].$$

(3) 令$x-1=t$,幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nt^n$的收敛域为$(-1,1)$. 记其和函数为$\varphi(t)$,即有

$$\varphi(t)=\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n}=t\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}=t\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^{n}\right)'$$
$$=t\left(\frac{t}{1-t}\right)'=\frac{t}{(1-t)^{2}},\quad t\in(-1,1).$$

于是原级数的和函数

$$s(x)=\varphi(x-1)=\frac{x-1}{(2-x)^{2}},\quad x\in(0,2).$$

*(4) $u_n(x)=a_nx^n,a_n=\frac{1}{n(n+1)}$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1$,得幂级数的收敛半径 $R=1$. 当 $x=\pm1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ 均收敛,故幂级数的收敛域为[$-1,1$].

设和函数为 $s(x)$,即 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

当 $x=0$ 时,$s(0)=0$;

当 $0<|x|<1$ 时,

$$xs(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)},$$

上式两端对 x 求导,得

$$[xs(x)]'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n},$$

再求导,得

$$[xs(x)]''=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}.$$

注意到 $[xs(x)]'_{x=0}=0$,上式两端从 0 到 x 积分,得

$$[xs(x)]'=\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{1-x}=-\ln(1-x),$$

再积分,得

$$xs(x)=-\int_0^x\ln(1-x)\,\mathrm{d}x=(1-x)\ln(1-x)+x,$$

于是

$$s(x)=\frac{1-x}{x}\ln(1-x)+1,\quad x\in(-1,0)\cup(0,1).$$

由于幂级数在 $x=\pm1$ 处收敛,故和函数分别在 $x=\pm1$ 处左连续与右连续,于是 $s(1)=\lim\limits_{x\to1^-}s(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1-x}{x}\ln(1-x)+1=1$.

因此

$$s(x)=\begin{cases}1+\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\ln(1-x), & x\in[-1,0)\cup(0,1),\\ 0, & x=0,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

10. 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的系数 $a_1=1, a_2=0$，且满足 $a_n=\dfrac{-1}{(n-1)(n-2)}a_{n-2}(n\geqslant 3, n\in\mathbf{N})$.试求该幂级数的收敛域与和函数 $f(x)$.

解 由于 $a_n=\dfrac{-1}{(n-1)(n-2)}a_{n-2}$ 且 $a_2=0$,故 $a_{2k}=0\ (k=2,3,\cdots)$.从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n=\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}x^{2k+1}.$$

由于 $a_{2k+1}=\dfrac{-1}{2k(2k-1)}a_{2k-1}$,且 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{2k+1}x^{2k+1}|}{|a_{2k-1}x^{2k-1}|}=\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{2k+1}|}{|a_{2k-1}|}|x|^2=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k(2k-1)}|x|^2=0(<1),$$

故该幂级数的收敛域是 $(-\infty,+\infty)$.

而

$$\begin{aligned}a_{2k+1}&=\frac{-1}{2k(2k-1)}a_{2k-1}=\frac{-1}{2k(2k-1)}\cdot\frac{-1}{(2k-2)(2k-3)}a_{2k-3}=\cdots\\&=\frac{-1}{2k(2k-1)}\cdot\frac{-1}{(2k-2)(2k-3)}\cdot\cdots\cdot\frac{-1}{2\times 1}a_1=\frac{(-1)^k}{(2k)!}.\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}x^{2k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k+1}=x\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}=x\cos x,$$

即和函数为

$$f(x)=x\cos x,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

11. 求下列数项级数的和：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}$； (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+1}{(2n+1)!}$.

解 (1) 利用 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=\mathrm{e}^x, x\in(-\infty,+\infty)$,取 $x=1$,有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}=\mathrm{e}$.

又

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!},$$

其中

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!},$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=2\mathrm{e}.$$

注 本题也可通过先求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}x^{n-1}$ 的和函数 $s(x)$,再求出 $s(1)$,得到所求的数项级数的和.

(2) 因 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\sin x$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=\cos x, x\in(-\infty,+\infty)$,故取 $x=1$,有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}=\sin 1,\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}=\cos 1.$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+2}{(2n+1)!}\\&=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right]\\&=\frac{1}{2}(\cos 1+\sin 1).\end{aligned}$$

注 本题也可通过先求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ 的和函数 $s(x)$，再求出 $s(1)$，得到所求的数项级数的和.

12. 将下列函数展开成 x 的幂级数：

(1) $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$； (2) $\dfrac{1}{(2-x)^2}$.

解 (1) 因

$$[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

而

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},\quad x\in[-1,1],$$

故

$$\begin{aligned}\ln(x+\sqrt{x^2+1})&=\int_0^x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\\&=\int_0^x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}\right]\mathrm{d}x\\&=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)}x^{2n+1},\quad x\in[-1,1].\end{aligned}$$

(2) 因

$$\frac{1}{(2-x)^2}=\left(\frac{1}{2-x}\right)',\quad x\neq 2.$$

而

$$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^n,\quad x\in(-2,2).$$

故

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2-x)^2}&=\left(\frac{1}{2-x}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^n\right)'=\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^n\right)'\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}x^{n-1},\quad x\in(-2,2).\end{aligned}$$

13. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数,它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[-\pi,0),\\ e^{x}, & x\in[0,\pi).\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解 $f(x)$ 满足收敛定理的条件,且除了 $x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 外处处连续.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{x}\mathrm{d}x=\frac{e^{\pi}-1}{\pi};$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{x}\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}e^{x}\\&=\frac{1}{\pi}\left(e^{x}\cos nx\Big|_0^{\pi}+n\int_0^{\pi}e^{x}\sin nx\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{(-1)^{n}e^{\pi}-1}{\pi}+\frac{n}{\pi}\left(e^{x}\sin nx\Big|_0^{\pi}-n\int_0^{\pi}e^{x}\cos nx\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{(-1)^{n}e^{\pi}-1}{\pi}-n^{2}a_n,\end{aligned}$$

故

$$a_n=\frac{(-1)^{n}e^{\pi}-1}{(n^{2}+1)\pi}\quad(n=1,2,\cdots);$$

而

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{x}\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\mathrm{d}e^{x}\\&=\frac{1}{\pi}\left(e^{x}\sin nx\Big|_0^{\pi}-n\int_0^{\pi}e^{x}\cos nx\mathrm{d}x\right)=-na_n\quad(n=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

于是

$$f(x)=\frac{e^{\pi}-1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n}e^{\pi}-1}{n^{2}+1}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}e^{\pi}+1}{n^{2}+1}n\sin nx\right],$$

$$x\in\mathbf{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbf{Z}\}.$$

14. 将函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant h,\\ 0, & h<x\leqslant\pi\end{cases}$$

分别展开成正弦级数和余弦级数.

解 (1) 展开成正弦级数:

将 $f(x)$ 作奇延拓,得 $\varphi(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(0,\pi],\\ 0, & x=0,\\ -f(-x), & x\in(-\pi,0),\end{cases}$ 再将 $\varphi(x)$ 作周期延拓,得 $\Phi(x)$,

则 $\Phi(x)$ 满足收敛定理的条件,且在 $(0,\pi]$ 上 $\Phi(x)\equiv f(x)$,并有间断点 $x=0,x=h$.

$a_n=0(n=0,1,2,\cdots)$,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{h}\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2(1-\cos nh)}{n\pi}\quad (n = 1,2,\cdots).$$

故

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos nh}{n}\sin nx,\quad x\in(0,h)\cup(h,\pi].$$

(2) 展开成余弦级数：

将 $f(x)$ 作偶延拓，得 $\psi(x) = \begin{cases} f(x), & x\in[0,\pi], \\ f(-x), & x\in(-\pi,0], \end{cases}$ 再将 $\psi(x)$ 作周期延拓得 $\Psi(x)$，则 $\Psi(x)$ 满足收敛定理的条件，在 $[0,\pi]$ 上 $\Psi(x)\equiv f(x)$，且有间断点 $x = h$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{h}\mathrm{d}x = \frac{2h}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{h}\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2\sin nh}{n\pi}\quad (n = 1,2,\cdots),$$

$$b_n = 0\quad (n = 1,2,\cdots).$$

故

$$f(x) = \frac{h}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nh}{n}\cos nx,\quad x\in[0,h)\cup(h,\pi].$$

二、全国硕士研究生招生考试数学试题选解

（六）

多元函数微分学

1. (2017)设 $f(x,y)$ 具有一阶偏导数，且对任意的 (x,y) 都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} > 0$，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} < 0$，则（　　）.

(A) $f(0,0) > f(1,1)$　　　　(B) $f(0,0) < f(1,1)$

(C) $f(0,1) > f(1,0)$　　　　(D) $f(0,1) < f(1,0)$

解　因为 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} > 0$，所以对于固定的 y，$f(x,y)$ 是关于 x 的单调增加函数，可知 $f(0,1) < f(1,1)$. 又由 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} < 0$，可知对固定的 x，$f(x,y)$ 是关于 y 的单调减少函数，因而 $f(1,1) < f(1,0)$. 于是有 $f(0,1) < f(1,0)$，应选(D).

2. (2020)设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，$f(0,0)=0$，$\boldsymbol{n} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, -1\right)\Bigg|_{(0,0)}$，且非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直，则（　　）.

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|\boldsymbol{n} \cdot (x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在

(B) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|\boldsymbol{n} \times (x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|\boldsymbol{\alpha} \cdot (x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在

(D) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|\boldsymbol{\alpha} \times (x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在

解　因为 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，且 $f(0,0)=0$，所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

即
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

由于 $\boldsymbol{n}\cdot(x,y,f(x,y))=f_x(0,0)x+f_y(0,0)y-f(x,y)$，则

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot(x,y,f(x,y))}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，应选(A).

3. (2012)如果函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，那么下列命题正确的是(　　).

(A) 若极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

(B) 若极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

(C) 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在

(D) 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在

解　设 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=k$，由 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，则 $f(0,0)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$，故

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{x}=0,$$

同理
$$\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0.$$

故
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-0-0\cdot x-0\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}k\sqrt{x^2+y^2}=0,$$

$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，应选(B).

4. (2021)设函数 $f(x,y)$ 可微，且
$$f(x+1,e^x)=x(x+1)^2,\quad f(x,x^2)=2x^2\ln x,$$
则 $df(1,1)=$(　　).

(A) $dx+dy$　　(B) $dx-dy$　　(C) dy　　(D) $-dy$

解　因为 $df(1,1)=f_1'(1,1)dx+f_2'(1,1)dy$，所以，要求 $f_1'(1,1)$，$f_2'(1,1)$. 为此，在方程 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$ 两端同时对 x 求导可得
$$f_1'(x+1,e^x)+e^xf_2'(x+1,e^x)=(x+1)^2+2x(x+1),$$
方程两端令 $x=0$ 可得 $f_1'(1,1)+f_2'(1,1)=1$.

方程 $f(x,x^2)=2x^2\ln x$ 两端同时对 x 求导可得
$$f_1'(x,x^2)+2xf_2'(x,x^2)=4x\ln x+2x,$$

方程两端令 $x=1$ 可得 $f_1'(1,1)+2f_2'(1,1)=2$.

从而解得 $f_1'(1,1)=0, f_2'(1,1)=1$.所以 $\mathrm{d}f(1,1)=f_1'(1,1)\mathrm{d}x+f_2'(1,1)\mathrm{d}y=\mathrm{d}y$，应选(C).

5. (2020)关于函数

$$f(x,y)=\begin{cases} xy, & xy\neq 0, \\ x, & y=0, \\ y, & x=0 \end{cases}$$

给出以下结论：

① $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=1$；② $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=1$；③ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$；④ $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=0$.

其中正确的个数为(　　).

(A) 4　　(B) 3　　(C) 2　　(D) 1

解 ① $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-0}{x}=1$.

② 当 $xy\neq 0$ 时，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=y$；当 $y=0$ 时，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=1$；当 $x=0$ 且 $y\neq 0$ 时，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$.

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=\lim_{y\to 0}\frac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0-1}{y}\text{不存在}.$$

③ 当 $xy\neq 0$ 时，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}xy=0$；

当 $y=0$ 时，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x=0$；

当 $x=0$ 时，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}y=0$.

于是 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

④ 当 $xy\neq 0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}xy=0$；

当 $y=0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}x=0$.

从而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=0$，故 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=0$. 应选(B).

6. (2018)过点 $(1,0,0)$，$(0,1,0)$，且与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切的平面为(　　).

(A) $z=0$ 与 $x+y-z=1$　　(B) $z=0$ 与 $2x+2y-z=2$

(C) $x=y$ 与 $x+y-z=1$　　(D) $x=y$ 与 $2x+2y-z=2$

解 设切点为 (x_0,y_0,z_0)，其中 $z_0=x_0^2+y_0^2$，则切平面的法向量为

$$\left(-\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},-\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)},1\right)=(-2x_0,-2y_0,1).$$

由题设可知

$$\begin{cases} z_0 = x_0^2 + y_0^2, \\ -2x_0 \cdot (0-1) - 2y_0 \cdot (1-0) + 1 \cdot (0-0) = 0, \\ -2x_0 \cdot (x_0 - 1) - 2y_0 \cdot (y_0 - 0) + 1 \cdot (z_0 - 0) = 0. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_0 = 0, \\ y_0 = 0, \\ z_0 = 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x_0 = 1, \\ y_0 = 1, \\ z_0 = 2. \end{cases}$$

所以要求的切平面方程是

$$z = 0 \quad \text{或} \quad -2(x-1) - 2(y-1) + z - 2 = 0,$$

即

$$z = 0 \quad \text{或} \quad 2x + 2y - z = 2 .$$

应选(B).

7. (2017)函数 $f(x,y,z) = x^2y + z^2$ 在点 $(1,2,0)$ 处沿向量 $\boldsymbol{n} = (1,2,2)$ 的方向导数为(　　).

(A) 12　　(B) 6　　(C) 4　　(D) 2

解　由 $f(x,y,z) = x^2y + z^2$ 得

$$f_x(1,2,0) = 2 \times 1 \times 2 = 4, \quad f_y(1,2,0) = 1^2 = 1, \quad f_z(1,2,0) = 2 \times 0 = 0 .$$

又 $\boldsymbol{n} = (1,2,2) \mathbin{/\!/} \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$,所以

$$\left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{(1,2,0)} = 4 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{2}{3} + 0 \times \frac{2}{3} = 2 ,$$

应选(D).

8. (2006)设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数,且 $\varphi_y(x,y) \neq 0$.已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y) = 0$ 下的一个极值点,下列选项正确的是(　　).

(A) 若 $f_x(x_0,y_0) = 0$,则 $f_y(x_0,y_0) = 0$

(B) 若 $f_x(x_0,y_0) = 0$,则 $f_y(x_0,y_0) \neq 0$

(C) 若 $f_x(x_0,y_0) \neq 0$,则 $f_y(x_0,y_0) = 0$

(D) 若 $f_x(x_0,y_0) \neq 0$,则 $f_y(x_0,y_0) \neq 0$

解　由拉格朗日乘数法,得

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0) + \lambda \varphi_x(x_0,y_0) = 0, \\ f_y(x_0,y_0) + \lambda \varphi_y(x_0,y_0) = 0. \end{cases}$$

消去 λ ,得

$$f_x(x_0,y_0)=\frac{f_y(x_0,y_0)\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)},$$

故当 $f_x(x_0,y_0)\neq 0$ 时，必有 $f_y(x_0,y_0)\neq 0$，应选(D).

9. (2019)设函数 $f(u)$ 可导，$z=f(\sin y-\sin x)+xy$，则

$$\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\cos y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

解 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(\sin y-\sin x)(-\cos x)+y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(\sin y-\sin x)\cos y+x,$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\cos y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}&=f'(\sin y-\sin x)(-\cos x)\cdot\frac{1}{\cos x}+\frac{y}{\cos x}+\\&\quad f'(\sin y-\sin x)\cos y\cdot\frac{1}{\cos y}+\frac{x}{\cos y}\\&=\frac{y}{\cos x}+\frac{x}{\cos y}.\end{aligned}$$

10. (2021)设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z+y\ln z-\arctan(2xy)=1$ 确定，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,2)}=\_\_\_\_\_\_\_\_.$

解 原方程两端对 x 求偏导，有

$$z+(x+1)\frac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{1+(2xy)^2}\cdot 2y=0. \qquad ①$$

将 $x=0,\ y=2$ 代入原方程，有

$$z+2\ln z=1\Rightarrow z=1.$$

将 $x=0,\ y=2,\ z=1$ 代入①式，得 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,2)}=1.$

11. (2020)设函数 $f(x,y)=\int_0^{xy}e^{xt^2}dt$，则 $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=\_\_\_\_\_\_\_\_.$

解 $\frac{\partial f}{\partial y}=e^{x(xy)^2}\cdot x=xe^{x^3y^2}$，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=e^{x^3y^2}+3x^3y^2e^{x^3y^2},$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=e+3e=4e.$$

12. (2009)设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f(x,xy)$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\_\_\_\_\_\_\_\_.$

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'\cdot y$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xf_{12}''+f_2'+yx\cdot f_{22}''=xf_{12}''+f_2'+xyf_{22}''.$$

13. (2017)设函数$f(x,y)$具有一阶连续偏导数,且$\mathrm{d}f(x,y)=ye^y\mathrm{d}x+x(1+y)e^y\mathrm{d}y$，$f(0,0)=0$,则$f(x,y)=$________.

解 由全微分的概念可知

$$f_x=ye^y,\quad f_y=x(1+y)e^y,$$

从而有

$$f(x,y)=xye^y+c(y),$$
$$f_y(x,y)=x(1+y)e^y+c'(y)=x(1+y)e^y,$$

得

$$c'(y)=0,$$

从而

$$c(y)=k\text{（常数）},$$

有

$$f(x,y)=xye^y+k.$$

代入条件$f(0,0)=0$,得$k=0$,所以$f(x,y)=xye^y$.

14. (2020)设$z=\arctan[xy+\sin(x+y)]$,则$\mathrm{d}z\big|_{(0,\pi)}=$________.

解 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y+\cos(x+y)}{1+[xy+\sin(x+y)]^2},\ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,\pi)}=\pi-1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x+\cos(x+y)}{1+[xy+\sin(x+y)]^2},\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,\pi)}=-1.$$

故 $$\mathrm{d}z\big|_{(0,\pi)}=(\pi-1)\mathrm{d}x-\mathrm{d}y.$$

15. (2011)设$z=f(xy,yg(x))$,其中函数f具有二阶连续偏导数,函数$g(x)$可导,且在$x=1$处取得极值$g(1)=1$,求$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=1,y=1}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'(xy,yg(x))y+f_2'(xy,yg(x))yg'(x)$，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=&f_{11}''(xy,yg(x))xy+f_{12}''(xy,yg(x))yg(x)+f_1'(xy,yg(x))+\\&f_{21}''(xy,yg(x))xyg'(x)+f_{22}''(xy,yg(x))yg(x)g'(x)+\\&f_2'(xy,yg(x))g'(x).\end{aligned}$$

由于 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$，可知 $g'(1)=0$，故

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=1,y=1} &= f''_{11}(1,g(1)) + f''_{12}(1,g(1))g(1) + f'_1(1,g(1)) + \\ &\quad f''_{21}(1,g(1))g'(1) + f''_{22}(1,g(1))g(1)g'(1) + f'_2(1,g(1))g'(1) \\ &= f''_{11}(1,1) + f''_{12}(1,1) + f'_1(1,1).\end{aligned}$$

16.（2019）已知函数 $u(x,y)$ 满足 $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}=0$，求 a，b 的值，使得在变换 $u(x,y)=v(x,y)\mathrm{e}^{ax+by}$ 之下，上述等式可化为函数 $v(x,y)$ 的不含一阶偏导数的等式.

解 由题意可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{e}^{ax+by}+av\mathrm{e}^{ax+by},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{e}^{ax+by}+bv\mathrm{e}^{ax+by},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\mathrm{e}^{ax+by}+2a\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{e}^{ax+by}+a^2v\mathrm{e}^{ax+by},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\mathrm{e}^{ax+by}+2b\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{e}^{ax+by}+b^2v\mathrm{e}^{ax+by},$$

将上述各式代入原等式，整理得

$$2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+(4a+3)\frac{\partial v}{\partial x}+(3-4b)\frac{\partial v}{\partial y}+(2a^2-2b^2+3a+3b)v=0,$$

由题意，令

$$\begin{cases}4a+3=0,\\3-4b=0,\end{cases}$$

解得 $$a=-\frac{3}{4},\quad b=\frac{3}{4}.$$

17.（2019）设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x,y)=xy-f(x+y,x-y)$.求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

解 由复合函数求导法则可得

$$\frac{\partial g}{\partial x}=y-f'_1-f'_2,\quad \frac{\partial g}{\partial y}=x-f'_1+f'_2;$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=-f''_{11}-2f''_{12}-f''_{22},\quad \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=1-f''_{11}+f''_{22},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=-f''_{11}+2f''_{12}-f''_{22}.$$

则

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=-f''_{11}-f''_{11}-f''_{22}+1-f''_{11}=1-3f''_{11}-f''_{22}.$$

18.（2020）求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

解 令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2-y=0,\\[2ex]\dfrac{\partial f}{\partial y}=24y^2-x=0,\end{cases}$$

可得驻点为 $(0,0)$ 或 $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$.

计算二阶偏导数可得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-1,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=48y.$$

当 $x=0$, $y=0$ 时, $A=0$, $B=-1$, $C=0$.此时 $AC-B^2<0$,故点 $(0,0)$ 不是极值点.

当 $x=\frac{1}{6}$, $y=\frac{1}{12}$ 时, $A=1$, $B=-1$, $C=4$, $AC-B^2>0$,$A=1>0$,故点 $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$ 为极小值点,且极小值为 $f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)=-\frac{1}{216}$.

19.（2021）已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+2y^2-z=6,\\4x+2y+z=30,\end{cases}$ 求 C 上的点到 xOy 坐标面距离的最大值.

解 取 C 上的点 (x,y,z),到 xOy 坐标面距离为 $|z|$,目标函数为 $f(x,y,z)=z^2$.构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+2y^2-z-6)+\mu(4x+2y+z-30).$$

求解方程组

$$\begin{cases}L_x=2x\lambda+4\mu=0,\\L_y=4y\lambda+2\mu=0,\\L_z=2z-\lambda+\mu=0,\\L_\lambda=x^2+2y^2-z-6=0,\\L_\mu=4x+2y+z-30=0,\end{cases}$$

由前两个等式可得 $\lambda(x-4y)=0$.

若 $\lambda=0$,则可得 $\mu=0$,从而解得 $z=0$,显然这时必不为最大值.

若 $x=4y$，联立后两个等式可解得

$$(x,y,z)=(-8,-2,66) \quad \text{或} \quad (x,y,z)=(4,1,12),$$

从而可知 C 上的点到 xOy 坐标面距离的最大值为 66.

20. (2018) 将长为 2m 的铁丝分成三段，依次围成圆、正方形与正三角形，三个图形的面积之和是否存在最小值？若存在，求出最小值.

解法一 设圆的半径为 x，正方形与正三角形的边长分别为 y 和 z，则问题转化为：函数 $f(x,y,z)=\pi x^2+y^2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}z^2$ 在条件 $2\pi x+4y+3z=2(x>0,y>0,z>0)$ 下是否存在最小值？

令 $$L(x,y,z,\lambda)=\pi x^2+y^2+\frac{\sqrt{3}}{4}z^2+\lambda(2\pi x+4y+3z-2).$$

求解方程组

$$\begin{cases} L_x=2\pi x+2\pi\lambda=0, \\ L_y=2y+4\lambda=0, \\ L_z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}z+3\lambda=0, \\ L_\lambda=2\pi x+4y+3z-2=0, \end{cases}$$

解得 $$x_0=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}, \quad y_0=\frac{2}{\pi+4+3\sqrt{3}}, \quad z_0=\frac{2\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}},$$

且 $$f(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}.$$

又当 $2\pi x+4y+3z=2$ 且 $xyz=0$ 时，$f(x,y,z)$ 的最小值为

$$f\left(0,\frac{2}{4+3\sqrt{3}},\frac{2\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{4+3\sqrt{3}},$$

所以三个图形的面积之和存在最小值，最小值为

$$f(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}(\mathrm{m}^2).$$

解法二 设圆的半径为 x，正方形与正三角形的边长分别为 y 和 z，则问题转化为：函数 $f(x,y,z)=\pi x^2+y^2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}z^2$ 在条件 $2\pi x+4y+3z=2(x>0,y>0,z>0)$ 下是否存在最小值？

将条件中的 z 变量解出得 $z=\dfrac{2-2\pi x-4y}{3}$，代入目标函数 $f(x,y,z)$ 中，得到

$$g(x,y)=\pi x^2+y^2+\frac{\sqrt{3}}{9}(1-\pi x-2y)^2.$$

所以问题转化为求 $g(x,y)=\pi x^2+y^2+\frac{\sqrt{3}}{9}(1-\pi x-2y)^2$ 在有界闭区域

$$\{(x,y)\mid \pi x+2y\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$$

上的最小值.

$g(x,y)=\pi x^2+y^2+\frac{\sqrt{3}}{9}(1-\pi x-2y)^2$ 是连续函数,故其在有界闭区域上的最小值一定存在.

解方程组

$$\begin{cases} g_x=2\pi x+\dfrac{2\sqrt{3}}{9}(1-\pi x-2y)\cdot(-\pi)=0,\\ g_y=2y+\dfrac{2\sqrt{3}}{9}(1-\pi x-2y)\cdot(-2)=0.\end{cases}$$

得驻点坐标

$$x_0=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}},\quad y_0=\frac{2}{\pi+4+3\sqrt{3}}.$$

计算得

$$g(x_0,y_0)=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}.$$

当 $x=0$ 时, $g(0,y)=y^2+\frac{\sqrt{3}}{9}(1-2y)^2$,令

$$g'=2y+\frac{2\sqrt{3}}{9}(1-2y)\cdot(-2)=0,$$

得边界上的驻点 $\left(0,\frac{2}{3\sqrt{3}+4}\right)$,该边界上的端点为 $(0,0)$ 和 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

计算得

$$g\left(0,\frac{2}{3\sqrt{3}+4}\right)=\frac{1}{3\sqrt{3}+4},\quad g(0,0)=\frac{\sqrt{3}}{9}=\frac{1}{3\sqrt{3}},\quad g\left(0,\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

当 $y=0$ 时, $g(x,0)=\pi x^2+\frac{\sqrt{3}}{9}(1-\pi x)^2$,令

$$g'=2\pi x+\frac{2\sqrt{3}}{9}(1-\pi x)\cdot(-\pi)=0,$$

得边界上的驻点 $\left(\frac{1}{3\sqrt{3}+\pi},0\right)$,该边界上的端点为 $\left(\frac{1}{\pi},0\right)$.

计算得

$$g\left(\frac{1}{3\sqrt{3}+\pi},0\right)=\frac{1}{3\sqrt{3}+\pi},\quad g\left(\frac{1}{\pi},0\right)=\frac{1}{\pi}.$$

当 $\pi x+2y=1$ 时，得 $g=\pi x^2+\left(\frac{1-\pi x}{2}\right)^2$，令

$$g'=2\pi x+\frac{2}{4}(1-\pi x)\cdot(-\pi)=0,$$

得边界上的驻点 $\left(\frac{1}{4+\pi},\frac{2}{4+\pi}\right)$.

计算得

$$g\left(\frac{1}{4+\pi},\frac{2}{4+\pi}\right)=\frac{1}{4+\pi}.$$

比较上述 7 个函数值的大小可知，要求的最小值为

$$g(x_0,y_0)=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}.$$

21. (2005) 已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y$，并且 $f(1,1)=2$. 求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\left|x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1\right.\right\}$ 上的最大值和最小值.

解法一 由 $\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y$ 可知

$$z=f(x,y)=x^2-y^2+C.$$

再由 $f(1,1)=2$，得 $C=2$，故

$$z=f(x,y)=x^2-y^2+2.$$

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=2x=0$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-2y=0$，求得驻点 $(0,0)$.

在椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 上，$z=x^2-(4-4x^2)+2$，即

$$z=5x^2-2\quad(-1\leqslant x\leqslant 1).$$

其最大值为 $z\big|_{x=\pm 1}=3$，最小值为 $z\big|_{x=0}=-2$. 再与 $f(0,0)=2$ 比较，可知 $f(x,y)$ 在椭圆域 D 上的最大值为 3，最小值为 -2.

解法二 同解法一，求得驻点 $(0,0)$.

用拉格朗日乘数法求此函数在椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 上的极值.

设 $L=x^2-y^2+2+\lambda\left(x^2+\frac{y^2}{4}-1\right)$，令

$$\begin{cases} L_x = 2x + 2\lambda x = 0, & ① \\ L_y = -2y + \dfrac{\lambda}{2}y = 0. & ② \end{cases}$$

又

$$x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0. \quad ③$$

由①②③式解得

$$\lambda = -1,\quad x = \pm 1,\quad y = 0;\qquad \lambda = 4,\quad x = 0,\quad y = \pm 2.$$

又 $f(1,0)=f(-1,0)=3$, $f(0,2)=f(0,-2)=-2$.再与 $f(0,0)=2$ 比较,得 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值为 3,最小值为 -2.

22. (2006)设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数,且 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

(1) 验证 $f''(u) + \dfrac{f'(u)}{u} = 0$;

(2) 若 $f(1)=0$, $f'(1)=1$,求函数 $f(u)$ 的表达式.

解 (1) 由 $z=f(u)$, $u=\sqrt{x^2+y^2}$,得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2} + f'\cdot\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2} + f'\cdot\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

由已知条件,得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f'' + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}f' = 0,$$

即

$$f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0. \quad ①$$

(2) 方程①是可降阶的二阶微分方程,令 $f'(u)=p$,则得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u} + \frac{1}{u}p = 0.$$

解得

$$p = C\mathrm{e}^{-\int\frac{\mathrm{d}u}{u}} = \frac{C}{u},$$

由已知条件 $p|_{u=1}=1$，得 $C=1$，故 $f'(u)=\dfrac{1}{u}$，从而

$$f(u)=\ln u+C.$$

由 $f(1)=0$，得 $C=0$，因此 $f(u)=\ln u$.

（七）
多元函数积分学

1.（2001）交换二次积分的积分次序：$\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{2}^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x=$ ________.

解 $$\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{2}^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{1-y}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x=-\iint_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=-\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{1-x}^{0}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{0}^{1-x}f(x,y)\mathrm{d}y,$$

其中 $$D=\{(x,y)\mid 1-y\leqslant x\leqslant 2,\ -1\leqslant y\leqslant 0\}$$
$$=\{(x,y)\mid 1-x\leqslant y\leqslant 0,1\leqslant x\leqslant 2\}.$$

注 交换二次积分的积分次序时，需先将二次积分化为二重积分（尽管解题时往往省略这一步），而将二次积分化为二重积分时，必须保证二次积分中的每个定积分的下限≤上限.本题中，由于当 $-1\leqslant y\leqslant 0$ 时，$1-y\leqslant 2$，故需将 $\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{2}^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x$ 先写为 $-\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{1-y}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x$.如果不注意这一点，就会得到错误结果：$\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{1-x}^{0}f(x,y)\mathrm{d}y$.

2.（2010）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$（ ）.

(A) $\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{x}\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$

(B) $\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{x}\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$

(C) $\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{1}\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$

(D) $\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{1}\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$

解 $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\dfrac{i}{n}\right)\left[1+\left(\dfrac{j}{n}\right)^2\right]}\cdot\frac{1}{n^2},$$

这是函数$f(x,y)=\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}$在正方形区域$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$上的积分和，故

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\iint_D\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

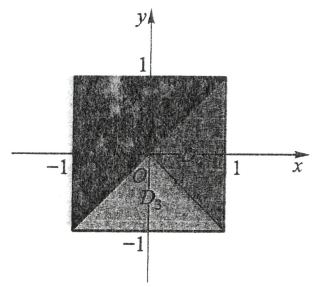
$$\xlongequal{\text{化为二次积分}}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y.$$

应选(D).

3. (2009)如图研 7-1，正方形$\{(x,y)\mid |x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\}$被其对角线划分为四个区域$D_k(k=1,2,3,4)$，$I_k=\iint\limits_{D_k}y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 4}\{I_k\}=(\quad)$.

(A) I_1　　(B) I_2

(C) I_3　　(D) I_4



图研 7-1

解　D_2,D_4两个区域关于x轴对称，而被积函数$f(x,y)=y\cos x$是关于y的奇函数，所以$I_2=I_4=0$.

D_1,D_3两个区域关于y轴对称，而被积函数$f(x,y)$是关于x的偶函数，所以

$$I_1=2\iint\limits_{\{(x,y)\mid x\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant x\leqslant 1\}}y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0,$$

$$I_3=2\iint\limits_{\{(x,y)\mid -1\leqslant y\leqslant -x,0\leqslant x\leqslant 1\}}y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y<0,$$

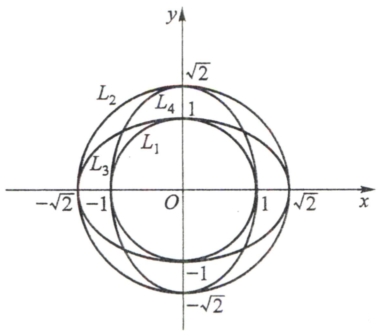
因此$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 4}\{I_k\}=I_1$.应选(A).

4. (2013)设$L_1:x^2+y^2=1$，$L_2:x^2+y^2=2$，$L_3:x^2+2y^2=2$，$L_4:2x^2+y^2=2$为四条逆时针方向的平面曲线，记$I_i=\oint\limits_{L_i}\left(y+\dfrac{y^3}{6}\right)\mathrm{d}x+\left(2x-\dfrac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}y(i=1,2,3,4)$，则$\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}=(\quad)$.

(A) I_1　　(B) I_2　　(C) I_3　　(D) I_4

解　记$P(x,y)=y+\dfrac{y^3}{6}$，$Q(x,y)=2x-\dfrac{x^3}{3}$，D_i为L_i所围的平面区域.由格林公式，

$I_i=\iint\limits_{D_i}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}\iint\limits_{D_i}(2-2x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y(i=1,2,3,4)$.当$D_i$包含了使被积函数$f(x,y)=2-2x^2-y^2$大于零的所有点，而不包含使$f(x,y)$小于零的任何点，则$I_i$达到最大值(见图研 7-2)，因此$I_4$最大.应选(D).



图研 7-2

5. (2018)设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线,则 $\oint_L xy\mathrm{d}s=$ _____.

解 由对称性得 $\oint_L xy\mathrm{d}s=\oint_L yz\mathrm{d}s=\oint_L zx\mathrm{d}s$.又,在曲线 L 上有

$$xy+yz+zx=\frac{1}{2}[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)]=\frac{1}{2}(0-1)=-\frac{1}{2},$$

因此

$$\oint_L xy\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_L(xy+yz+zx)\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_L\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times 2\pi=-\frac{\pi}{3}.$$

6. (2019)已知积分区域 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ |x|+|y|\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$,

$$I_1=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad I_2=\iint_D\sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad I_3=\iint_D(1-\cos\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

则 I_1,I_2,I_3 的大小为(　　).

(A) $I_3<I_2<I_1$　　(B) $I_1<I_2<I_3$　　(C) $I_2<I_1<I_3$　　(D) $I_2<I_3<I_1$

解 令 $\sqrt{x^2+y^2}=u$,则 $0\leqslant u\leqslant\frac{\pi}{2}$.

由于当 $u>0$ 时 $\sin u<u$,故 $I_2<I_1$;又当 $0<u<\frac{\pi}{2}$ 时,

$$1-\cos u=2\sin^2\frac{u}{2}<2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}=\sin u,$$

故 $I_3<I_2$.

应选(A).

7. (2006)设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0\}$,计算二重积分

$$I=\iint_D\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解法一 $I_1 = \iint\limits_D \dfrac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xlongequal{\text{极坐标}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \dfrac{1}{1+\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$

$$= \frac{\pi}{2}\ln(1+\rho^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}\ln 2,$$

$$I_2 = \iint\limits_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xlongequal{\text{极坐标}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{1+\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{\rho^3}{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho = 0,$$

所以 $I = I_1 + I_2 = \dfrac{\pi}{2}\ln 2.$

解法二 I_1 同上.

因为积分区域 D 关于 x 轴对称，函数 $\dfrac{xy}{1+x^2+y^2}$ 是关于 y 的奇函数，所以

$$I_2 = \iint\limits_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

因此 $I = I_1 + I_2 = \dfrac{\pi}{2}\ln 2.$

8. (2000)计算二重积分 $\iint\limits_D \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由曲线 $y=-a+\sqrt{a^2-x^2}\ (a>0)$ 和直线 $y=-x$ 围成的区域.

解 积分区域 D 在极坐标系中可表示为

$$D = \left\{(\rho,\theta)\ \middle|\ 0 \leqslant \rho \leqslant -2a\sin\theta,\ -\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant 0\right\}(\text{图研 } 7-3),$$

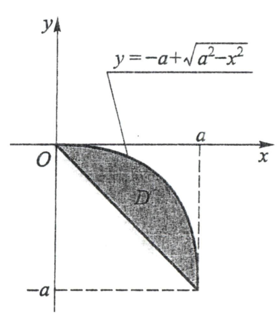
故

$$\text{原式} = \iint\limits_D \frac{\rho}{\sqrt{4a^2-\rho^2}}\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\mathrm{d}\theta\int_0^{-2a\sin\theta}\frac{\rho^2}{\sqrt{4a^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho,$$

令 $\rho = 2a\sin t$，则

$$\int_0^{-2a\sin\theta}\frac{\rho^2}{\sqrt{4a^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho = \int_0^{-\theta}4a^2\sin^2 t\mathrm{d}t = 2a^2\int_0^{-\theta}(1-\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$= 2a^2\left(-\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right).$$



图研 7-3

于是

$$\text{原式} = 2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\left(-\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\mathrm{d}\theta = a^2\left(\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\right).$$

9. (2011) 设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上具有连续导数,$f(0)=1$,且满足$\iint\limits_{D_t} f'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_t} f(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D_t=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant t-x,0\leqslant x\leqslant t\}(0\leqslant t\leqslant 1)$.求$f(x)$的表达式.

解 $$\iint\limits_{D_t} f'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^t \mathrm{d}x\int_0^{t-x} f'(x+y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^t [f(t)-f(x)]\mathrm{d}x = tf(t) - \int_0^t f(x)\mathrm{d}x .$$

又

$$\iint\limits_{D_t} f(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(t)\iint\limits_{D_t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(t)\cdot\frac{t^2}{2}.$$

由题设有

$$tf(t) - \int_0^t f(x)\mathrm{d}x = \frac{t^2}{2}f(t).$$

两端对t求导得

$$f(t)+tf'(t)-f(t) = tf(t)+\frac{t^2}{2}f'(t),$$

即 $$(2-t)f'(t)=2f(t).$$

这是可分离变量的一阶微分方程,解得

$$f(t)=\frac{C}{(2-t)^2},$$

代入$f(0)=1$,得$C=4$,因此$f(x)=\dfrac{4}{(2-x)^2}$.

10. (2011)已知函数$f(x,y)$具有二阶连续偏导数,且$f(1,y)=0$,$f(x,1)=0$,$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = a$,其中$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.计算二重积分$\iint\limits_D xyf_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 $$\iint\limits_D xyf_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 y\mathrm{d}y\int_0^1 xf_{xy}(x,y)\mathrm{d}x.$$

对积分$\int_0^1 xf_{xy}(x,y)\mathrm{d}x$施行分部积分法,得

$$\int_0^1 xf_{xy}(x,y)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{d}f_y(x,y) = [xf_y(x,y)]_0^1 - \int_0^1 f_y(x,y)\mathrm{d}x$$

$$= f_y(1,y) - \int_0^1 f_y(x,y)\mathrm{d}x,$$

由于对任意的y,$f(1,y)=0$,故$f_y(1,y)=0$,因此

$$\int_0^1 xf_{xy}(x,y)\mathrm{d}x = -\int_0^1 f_y(x,y)\mathrm{d}x.$$

于是

$$\iint_D xyf_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 y\mathrm{d}y\int_0^1 xf_{xy}(x,y)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1 y\mathrm{d}y\int_0^1 f_y(x,y)\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{\text{交换积分次序}}-\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 yf_y(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=-\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 y\mathrm{d}f(x,y)$$

$$=-\int_0^1\left[yf(x,y)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\text{（注意到}f(x,1)=0\text{）}$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=a.$$

11.（2017）已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2y\}$，计算二重积分 $\iint_D(x+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$．

解 由对称性可知 $\iint_D 2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，在极坐标系下

$$D=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant 2\sin\theta,0\leqslant\theta\leqslant\pi\},$$

故

$$\iint_D(x+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\rho^2\cos^2\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta+\pi$$

$$=\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho^3\cos^2\theta\mathrm{d}\rho+\pi=\int_0^\pi 4\sin^4\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta+\pi$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta(1-\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta+\pi$$

$$=8\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)+\pi=\frac{5}{4}\pi.$$

12.（2018）设平面区域 D 由曲线 $\begin{cases}x=t-\sin t,\\y=1-\cos t\end{cases}$（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$）与 x 轴围成，计算二重积分 $\iint_D(x+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$．

解 设曲线 $\begin{cases}x=t-\sin t,\\y=1-\cos t\end{cases}$（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$）的直角坐标方程为 $y=y(x)$（$0\leqslant x\leqslant 2\pi$），则

$$\iint_D (x+2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{y(x)}(x+2y)\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^{2\pi}[xy(x)+y^2(x)]\,\mathrm{d}x,$$

令 $x=t-\sin t$，则 $y(x)=1-\cos t,\mathrm{d}x=(1-\cos t)\mathrm{d}t$，因此

$$\iint_D (x+2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}[(t-\sin t)(1-\cos t)+(1-\cos t)^2]\cdot(1-\cos t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{2\pi}[t(1-2\cos t+\cos^2 t)-\sin t(1-\cos t)^2+(1-\cos t)^3]\,\mathrm{d}t,$$

其中

$$\int_0^{2\pi}(t-2t\cos t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t^2-2t\sin t-2\cos t\right]_0^{2\pi} = 2\pi^2,$$

$$\int_0^{2\pi}t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}t\,\frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{4}t^2+\frac{2t\sin 2t+\cos 2t}{8}\right]_0^{2\pi} = \pi^2,$$

$$\int_0^{2\pi}\sin t(1-\cos t)^2\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}(1-\cos t)^3\right]_0^{2\pi} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^3\mathrm{d}t \xlongequal{t=2u} 16\int_0^{\pi}\sin^6 u\,\mathrm{d}u = 32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 u\,\mathrm{d}u = 5\pi,$$

因此

$$\iint_D (x+2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\pi^2+5\pi.$$

13. (2019)已知平面区域 D 满足 $|x|\leqslant y,(x^2+y^2)^3\leqslant y^4$，求 $\iint_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 由于积分区域 D 关于 y 轴对称，故 $\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

在极坐标系下，积分区域 D 满足 $|\rho\cos\theta|\leqslant\rho\sin\theta,\rho^6\leqslant\rho^4\sin^4\theta$，即

$$0\leqslant\rho\leqslant\sin^2\theta,\quad \frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4},$$

于是

$$\iint_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \frac{\rho\sin\theta}{\rho}\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin^2\theta}\rho\sin\theta\,\mathrm{d}\rho = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin^5\theta\,\mathrm{d}\theta$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(1-2\cos^2\theta+\cos^4\theta)\,\mathrm{d}(\cos\theta) = \frac{43\sqrt{2}}{120}.$$

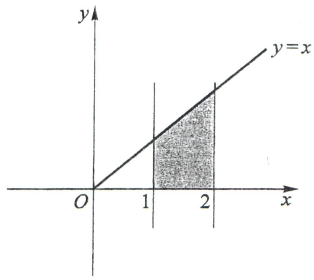
14. (2020) 设平面区域 D 由直线 $x=1,x=2,y=x$ 与 x 轴围成，计算 $\iint\limits_{D}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 积分区域如图研 7-4，直线 $x=1,x=2$ 的极坐标方程为 $\rho=\sec\theta,\rho=2\sec\theta$，故

$$\iint\limits_{D}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}\frac{\rho}{\rho\cos\theta}\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\sec\theta}^{2\sec\theta}\rho\sec\theta\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\mathrm{d}\theta,$$



图研 7-4

而

$$\int\sec^3\theta\mathrm{d}\theta=\int\sec\theta\mathrm{d}(\tan\theta)=\sec\theta\tan\theta-\int\tan\theta\cdot\sec\theta\tan\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\sec\theta\tan\theta-\int(\sec^2\theta-1)\sec\theta\mathrm{d}\theta,$$

故

$$\int\sec^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\sec\theta\tan\theta}{2}+\frac{1}{2}\int\sec\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\sec\theta\tan\theta+\ln|\sec\theta+\tan\theta|}{2}+C,$$

因此

$$\iint\limits_{D}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{2}\left[\frac{\sec\theta\tan\theta+\ln|\sec\theta+\tan\theta|}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{3}{4}[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)].$$

15. (2021) 设平面区域 D 由曲线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$ 与 x 轴围成，计算二重积分 $\iint\limits_{D}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 曲线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 的极坐标方程为 $\rho^4=\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta=\rho^2\cos 2\theta$，即 $\rho=\sqrt{\cos 2\theta}$，故在极坐标系下区域 D 可表示为

$$0\leqslant\rho\leqslant\sqrt{\cos 2\theta},\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4},$$

因此

$$\iint\limits_{D}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}\rho^2\cos\theta\sin\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}}\frac{1}{2}\rho^3\sin 2\theta\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{8}\cos^2 2\theta\sin 2\theta\mathrm{d}\theta=\left[-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{3}\cos^3 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{48}.$$

16. (2000) 设有一半径为 R 的球体，P_0 是此球的表面上的一个定点，球体上任一点的密度与该点到 P_0 距离的平方成正比（比例常数 $k>0$），求球体的质心位置.

解 记球体为 Ω,以 Ω 的球心为原点 O,射线 OP_0 为正 z 轴建立直角坐标系,则 P_0 的坐标是 $(0,0,R)$,球面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$.设质心位置为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$,则由对称性得 $\bar{x}=0,\bar{y}=0$,

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} z\cdot k[x^2+y^2+(z-R)^2]\mathrm{d}V}{\iiint\limits_{\Omega} k[x^2+y^2+(z-R)^2]\mathrm{d}V}.$$

由对称性可知 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V=0,\iiint\limits_{\Omega} z^3\mathrm{d}V=0,\iiint\limits_{\Omega} z(x^2+y^2)\mathrm{d}V=0$,

$$\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}V=\frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V,$$

于是

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}[x^2+y^2+(z-R)^2]\mathrm{d}V&=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V+\iiint\limits_{\Omega}R^2\mathrm{d}V\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r+\frac{4}{3}\pi R^5\\&=\frac{4}{5}\pi R^5+\frac{4}{3}\pi R^5=\frac{32}{15}\pi R^5,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} z[x^2+y^2+(z-R)^2]\mathrm{d}V&=-2R\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}V\\&=-\frac{2R}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V=-\frac{8}{15}\pi R^6,\end{aligned}$$

故
$$\bar{z}=\left(-\frac{8}{15}\pi R^6\right)\Big/\left(\frac{32}{15}\pi R^5\right)=-\frac{R}{4},$$

因此球体 Ω 的质心位置为 $\left(0,0,-\dfrac{R}{4}\right)$.

17.(2013)设直线 L 过 $A(1,0,0)$,$B(0,1,1)$ 两点,将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ,Σ 与平面 $z=0,z=2$ 所围成的立体为 Ω.

(1)求曲面 Σ 的方程;

(2)求 Ω 的形心坐标.

解 (1)直线 L 的方向向量为 $\overrightarrow{AB}=(-1,1,1)$,$L$ 的参数方程为 $x=-t,y=1+t,z=1+t$.设 (x,y,z) 为 Σ 上任意一点,它由 L 上的点 $(x_0,y_0,z_0)=(-t_0,1+t_0,1+t_0)$ 绕 z 轴旋转而得,则有

$$\begin{cases}x^2+y^2=x_0^2+y_0^2=t_0^2+(1+t_0)^2,\\z=z_0=1+t_0.\end{cases}$$

消去 t_0 即得 Σ 的方程为

$$x^2+y^2=(z-1)^2+z^2,\quad 或\quad 2x^2+2y^2-4\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=1,$$

这是以 z 轴为对称轴的单叶双曲面.

（2）设 Ω 的形心为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$. 由于 Ω 关于 yOz 面、zOx 面对称，故形心位于 z 轴上，因此 $\bar{x}=\bar{y}=0$.

对任一 $z\in[0,2]$，记 $D_z=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant(z-1)^2+z^2\}$，则

$$\iiint_\Omega \mathrm{d}V=\int_0^2\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^2[(z-1)^2+z^2]\mathrm{d}z=\frac{10}{3}\pi,$$

$$\iiint_\Omega z\mathrm{d}V=\int_0^2 z\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^2 z[(z-1)^2+z^2]\mathrm{d}z=\frac{14}{3}\pi.$$

于是

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_\Omega z\mathrm{d}V}{\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}V}=\frac{\frac{14}{3}\pi}{\frac{10}{3}\pi}=\frac{7}{5}.$$

因此形心为 $\left(0,0,\dfrac{7}{5}\right)$.

18.（2019）设 a,b 为实数，函数 $z=2+ax^2+by^2$ 在点 $(3,4)$ 处的方向导数中，沿方向 $\boldsymbol{l}=-3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$ 的方向导数最大，最大值为 10.

（1）求 a,b；

（2）求曲面 $z=2+ax^2+by^2(z\geqslant 0)$ 的面积.

解（1）在点 $(3,4)$ 处的梯度为 $\mathbf{grad}\,z\big|_{(3,4)}=(z_x,z_y)\big|_{(3,4)}=(6a,8b)$，由题意知：$\mathbf{grad}\,z\big|_{(3,4)}$ 与 $\boldsymbol{l}=-3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$ 方向相同，且 $\mathbf{grad}\,z\big|_{(3,4)}$ 的模为 10. 因此，$\mathbf{grad}\,z\big|_{(3,4)}=k(-3,-4)(k>0)$ 且 $\left|\mathbf{grad}\,z\big|_{(3,4)}\right|=5k=10$，解得 $k=2$，于是 $a=b=-1$.

（2）由（1）知曲面方程为 $z=2-x^2-y^2$，它在 xOy 面上的投影区域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$，故所求曲面面积为

$$S=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho\mathrm{d}\rho=2\pi\cdot\frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4\rho^2}\,\mathrm{d}(1+4\rho^2)=\frac{13}{3}\pi.$$

19.（2019）设 Ω 是由锥面 $x^2+(y-z)^2=(1-z)^2(0\leqslant z\leqslant 1)$ 与平面 $z=0$ 围成的锥体，求 Ω 的形心坐标.

解 设形心坐标为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性可知 $\bar{x}=0$，且有

$$\iiint_\Omega\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{x^2+(y-z)^2\leqslant(1-z)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^1(1-z)^2\mathrm{d}z=\frac{\pi}{3},$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+(y-z)^2\leqslant(1-z)^2} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi\int_0^1 z(1-z)^2\mathrm{d}z = \frac{\pi}{12},$$

故 $\bar{z} = \dfrac{\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z} = \dfrac{1}{4}.$

$$\iiint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+(y-z)^2\leqslant(1-z)^2} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

令 $\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = z + \rho\sin\theta, \end{cases}$ 则

$$\iint\limits_{x^2+(y-z)^2\leqslant(1-z)^2} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{1-z}(z+\rho\sin\theta)\cdot\rho\mathrm{d}\rho = \pi z(1-z)^2,$$

因此

$$\iiint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \pi z(1-z)^2\mathrm{d}z = \frac{\pi}{12}.$$

故 $\bar{y} = \dfrac{\iiint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z} = \dfrac{1}{4}$. 于是形心坐标为 $\left(0,\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)$.

20.（2012）已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $(2,0)$，再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线段，计算曲线积分 $I=\int\limits_L 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y$.

解 添加有向线段 $L_1: x=0, y$ 从 2 变到 0. D 为由 L 和 L_1 所围成的区域. 由格林公式可得

$$\begin{aligned} I &= \oint\limits_{L+L_1} 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y - \int\limits_{L_1} 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_D (3x^2+1-3x^2)\mathrm{d}\sigma - \int\limits_{L_1}(-2y)\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_D \mathrm{d}\sigma + \int_2^0 2y\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot2^2 - \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot1^2 + [y^2]_2^0 \\ &= \frac{\pi}{2} - 4. \end{aligned}$$

21.（2006）设在上半平面 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$ 内，函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数，且对任意的 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$. 证明：对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L，都有 $\oint\limits_L yf(x,y)\mathrm{d}x - xf(x,y)\mathrm{d}y = 0$.

证 在单连通区域 D 内，对任意有向简单闭曲线 L，

$$\oint_L yf(x,y)\,\mathrm{d}x - xf(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

的充分必要条件是，对任意的$(x,y)\in D$，有

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial y}[yf(x,y)] - \frac{\partial}{\partial x}[-xf(x,y)] \\ &= 2f(x,y) + yf_2'(x,y) + xf_1'(x,y). \end{aligned} \quad ①$$

由于对任意的$(x,y)\in D$及$t>0$，都有

$$f(tx,ty) = t^{-2}f(x,y),$$

两端对t求导，得

$$xf_1'(tx,ty) + yf_2'(tx,ty) = -2t^{-3}f(x,y).$$

在上式中令$t=1$，得

$$2f(x,y) + xf_1'(x,y) + yf_2'(x,y) = 0,$$

①式成立.所以结论成立.

22. (2005) 设函数$\varphi(y)$具有连续导数，在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线L上，曲线积分

$$\oint_L \frac{\varphi(y)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y}{2x^2 + y^4}$$

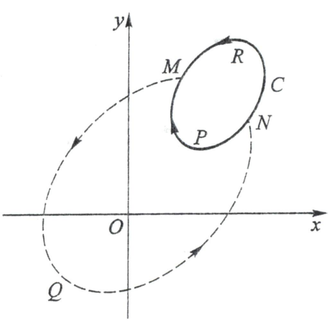
的值恒为同一常数.

(1) 证明：对右半平面$x>0$内的任意分段光滑简单闭曲线C，有

$$\oint_C \frac{\varphi(y)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y}{2x^2 + y^4} = 0;$$

(2) 求函数$\varphi(y)$的表达式.

解 (1) 如图研 7-5，设C是半平面$x>0$内的任一分段光滑简单闭曲线，在C上任意取定两点M,N，作围绕原点的闭曲线$\overset{\frown}{MQNRM}$，同时得到另一围绕原点的闭曲线$\overset{\frown}{MQNPM}$.根据题设，有



图研 7-5

$$\oint_{\overset{\frown}{MQNRM}} \frac{\varphi(y)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y}{2x^2 + y^4} - \oint_{\overset{\frown}{MQNPM}} \frac{\varphi(y)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y}{2x^2 + y^4}$$

$$\left(\text{记作}\left(\oint_{\overset{\frown}{MQNRM}} - \oint_{\overset{\frown}{MQNPM}}\right)\frac{\varphi(y)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y}{2x^2 + y^4},\text{下同}\right) = 0.$$

根据第二类曲线积分的性质，再利用上式可得

$$\oint_C \frac{\varphi(y)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y}{2x^2 + y^4} = \left(\int_{\overset{\frown}{NRM}} + \int_{\overset{\frown}{MPN}}\right)\frac{\varphi(y)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y}{2x^2 + y^4}$$

$$= \left(\int_{\widehat{NRM}} - \int_{\widehat{NPM}} \right) \frac{\varphi(y)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y}{2x^2 + y^4}$$

$$= \left[\left(\int_{\widehat{MQN}} + \int_{\widehat{NRM}} \right) - \left(\int_{\widehat{MQN}} + \int_{\widehat{NPM}} \right) \right] \frac{\varphi(y)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y}{2x^2 + y^4}$$

$$= \left(\oint_{\widehat{MQNRM}} - \oint_{\widehat{MQNPM}} \right) \frac{\varphi(y)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y}{2x^2 + y^4} = 0.$$

(2) 设 $P = \dfrac{\varphi(y)}{2x^2 + y^4}, Q = \dfrac{2xy}{2x^2 + y^4}$, P, Q 在单连通区域 $x > 0$ 内具有一阶连续偏导数.由(1)知,曲线积分 $\oint_L \dfrac{\varphi(y)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y}{2x^2 + y^4}$ 在该区域内与路径无关,故当 $x > 0$ 时,恒有 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2y(2x^2 + y^4) - 4x \cdot 2xy}{(2x^2 + y^4)^2} = \frac{-4x^2 y + 2y^5}{(2x^2 + y^4)^2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\varphi'(y)(2x^2 + y^4) - 4\varphi(y)y^3}{(2x^2 + y^4)^2} = \frac{2x^2\varphi'(y) + \varphi'(y)y^4 - 4\varphi(y)y^3}{(2x^2 + y^4)^2},$$

比较上列两式的右端,要使它们恒等,需有

$$\varphi'(y) = -2y \quad 和 \quad \varphi'(y)y^4 - 4\varphi(y)y^3 = 2y^5.$$

由 $\varphi'(y) = -2y$ 得 $\varphi(y) = -y^2 + C$,代入第二式得

$$\varphi'(y)y^4 - 4\varphi(y)y^3 = -2y^5 + 4y^5 - 4Cy^3 = 2y^5,$$

因此 $C=0$,从而得 $\varphi(y) = -y^2$.

23. (2000)计算曲线积分 $I = \oint_L \dfrac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{4x^2 + y^2}$,其中 L 是以点(1,0)为中心,R 为半径的圆周($R>1$),取逆时针方向.

解
$$P = \frac{-y}{4x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{4x^2 + y^2}.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - 4x^2}{(4x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (x, y) \neq (0,0).$$

在 L 所围的圆域内作足够小的椭圆 $C: x = \dfrac{r}{2}\cos t, y = r\sin t\,(r > 0)$, t 从 0 变到 2π.于是在由 L 和 C^- 所围成的区域 D 上应用格林公式,得

$$\oint_{L+C^-} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{4x^2 + y^2} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}\sigma = 0,$$

从而有

$$I=\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\oint_C \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{r^2}{r^2}\mathrm{d}t=\pi.$$

24.（2020）计算曲线积分 $I=\int_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y$，其中 L 是 $x^2+y^2=2$，方向为逆时针方向.

解 设

$$P(x,y)=\frac{4x-y}{4x^2+y^2},\quad Q(x,y)=\frac{x+y}{4x^2+y^2},$$

则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-4x^2+y^2-8xy}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

取路径 $L_\varepsilon:4x^2+y^2=\varepsilon^2$（$\varepsilon>0$ 且充分小），逆时针方向.记 L 与 L_ε 所围区域为 D，L_ε 所围区域为 D_ε.由格林公式得

$$\int_{L+L_\varepsilon^-}\frac{4x-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

$$\begin{aligned}\int_{L_\varepsilon}\frac{4x-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y&=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{L_\varepsilon}(4x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_\varepsilon}[1-(-1)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{2}{\varepsilon^2}\cdot(\text{区域 } D_\varepsilon \text{ 的面积})=\pi,\end{aligned}$$

于是

$$I=\int_{L+L_\varepsilon^-}\frac{4x-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y+\int_{L_\varepsilon}\frac{4x-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y=\pi.$$

25.（2021）设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 是有界单连通闭区域，

$$I(D)=\iint_D(4-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

取得最大值的积分区域记为 D_1.

（1）求 $I(D_1)$ 的值；

（2）计算

$$\int_{\partial D_1^+}\frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)\mathrm{d}x+(4ye^{x^2+4y^2}-x)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2},$$

其中 ∂D_1^+ 表示 D_1 的正向边界.

解 （1）显然 $f(x,y)=4-x^2-y^2$ 在有界单连通区域 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$ 上非负，在 D_1 之外的区域上小于零，此时 $I(D)$ 取得最大值.利用极坐标，

$$I(D_1)=\iint\limits_{D_1}(4-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(4-\rho^2)\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\cdot\left[-\frac{1}{4}(4-\rho^2)^2\right]_0^2=8\pi.$$

（2）设

$$P(x,y)=\frac{xe^{x^2+4y^2}+y}{x^2+4y^2},\quad Q(x,y)=\frac{4ye^{x^2+4y^2}-x}{x^2+4y^2},$$

计算可得

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{8xye^{x^2+4y^2}(x^2+4y^2-1)+x^2-4y^2}{(x^2+4y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

作辅助线 $L:x^2+4y^2=\varepsilon^2$（ε 为足够小的正数，使得闭曲线 L 所围成的区域 $G\subset D_1$），取顺时针方向.由格林公式可知

$$\int\limits_{\partial D_1^+ +L}\frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)\mathrm{d}x+(4ye^{x^2+4y^2}-x)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=\iint\limits_{D_1\setminus G}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

于是

$$\int\limits_{\partial D_1^+}\frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)\mathrm{d}x+(4ye^{x^2+4y^2}-x)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=0-\int\limits_{L}\frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)\mathrm{d}x+(4ye^{x^2+4y^2}-x)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{L^-}(xe^{\varepsilon^2}+y)\mathrm{d}x+(4ye^{\varepsilon^2}-x)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{G}(-1-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{2}{\varepsilon^2}\cdot(\text{区域 }G\text{ 的面积})=-\pi.$$

26.（2007）设曲面 $\Sigma:|x|+|y|+|z|=1$，则 $\oiint\limits_{\Sigma}(x+|y|)\mathrm{d}S=$________.

解 由于曲面 Σ 关于平面 $x=0$（即 yOz 面）对称，因此 $\oiint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}S=0$.

又曲面 $\Sigma:|x|+|y|+|z|=1$ 具有轮换对称性，故

$$\oiint\limits_{\Sigma}|y|\mathrm{d}S=\oiint\limits_{\Sigma}|z|\mathrm{d}S=\oiint\limits_{\Sigma}|x|\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma}(|x|+|y|+|z|)\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\cdot(\Sigma\text{ 的面积})=\frac{1}{3}\times 8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

27.（2006）设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\ (0\leqslant z\leqslant 1)$ 的下侧，则 $\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

解 添加辅助曲面 $\Sigma':\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant 1,z=1\}$，取上侧，记 Ω 为 Σ 和 Σ' 所

围的立体区域，则由高斯公式得

$$\iint_{\Sigma+\Sigma'} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega}(1+2+3)\mathrm{d}V = 6\iiint_{\Omega}\mathrm{d}V$$

$$= 6\times\frac{\pi}{3}\times 1^2\times 1 = 2\pi,$$

而在 Σ' 上，

$$\iint_{\Sigma'} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma'}3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} 3(1-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

于是 原式 $= 2\pi - 0 = 2\pi$.

28.（2010）设 P 为椭球面 $S: x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点.若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直.求点 P 的轨迹 C，并计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})\,|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S$，其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

解 设 P 的坐标为 (x,y,z).曲面 $S: x^2+y^2+z^2-yz=1$ 在点 P 处的切平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(2x,2y-z,2z-y)$.

因为 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直，故 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}=2z-y=0$.

注意到 $P\in S$，因此可得 P 点的轨迹 C 的方程为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-yz=1,\\ y=2z,\end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases}x^2+\dfrac{3}{4}y^2=1,\\ y=2z.\end{cases}$$

Σ 的边界曲线 C 在 xOy 面上的投影曲线为 $x^2+\frac{3}{4}y^2=1$，因此 Σ 在 xOy 面上的投影区域为 $D_{xy}: x^2+\frac{3y^2}{4}\leqslant 1$.

在 Σ 的方程 $x^2+y^2+z^2-yz=1$ 中利用隐函数求导法可求得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{y-2z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y-z}{y-2z},$$

由此得

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{4x^2+5y^2+5z^2-8yz}}{|y-2z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{|y-2z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

于是

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})\,|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}(x+\sqrt{3})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{对称性}}\sqrt{3}\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\times\pi\times 1\times\frac{2}{\sqrt{3}}=2\pi.$$

29. (2001) 计算 $I=\oint_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$，其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线，从 z 轴正向看去，L 为逆时针方向.

解 记 Σ 为平面 $x+y+z=2$ 的上侧被 L 所围成的部分，则 Σ 上各点处的法向量的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$.

由斯托克斯公式，

$$I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & 2z^2-x^2 & 3x^2-y^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(4x+2y+3z)\mathrm{d}S$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_{D_{xy}}(x-y+6)\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad\left(\text{由对称性易知}\iint_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\right)$$

$$=-12\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-24.$$

30. (2000) 对于半空间 $x>0$ 内任意的光滑有向封闭曲面 S，都有

$$\oiint_S xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

其中函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有连续的一阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$. 求 $f(x)$.

解 由题设和高斯公式得

$$0=\oiint_S xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pm\iiint_{\Omega}[xf'(x)+f(x)-xf(x)-\mathrm{e}^{2x}]\mathrm{d}V,$$

其中 Ω 为由 S 围成的有界闭区域，当 S 取外侧时，取“+”号，当 S 取内侧时，取“-”号.由 S 的任意性及 $f(x)$，$f'(x)$ 的连续性，可知必有

$$xf'(x)+f(x)-xf(x)-e^{2x}=0 \quad (x>0),$$

即
$$f'(x)+\left(\frac{1}{x}-1\right)f(x)=\frac{1}{x}e^{2x} \quad (x>0).$$

按一阶线性非齐次微分方程通解公式（教材上册第七章第四节），有

$$f(x)=e^{-\int\left(\frac{1}{x}-1\right)dx}\left[\int\frac{1}{x}e^{2x}\cdot e^{\int\left(\frac{1}{x}-1\right)dx}dx+C\right]$$

$$=\frac{e^{x}}{x}\left(\int\frac{1}{x}e^{2x}\cdot xe^{-x}dx+C\right)=\frac{e^{x}}{x}(e^{x}+C).$$

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{2x}+Ce^{x}}{x}=1$，故必有

$$\lim_{x\to0^+}(e^{2x}+Ce^{x})=0,$$

从而 $C=-1$.于是

$$f(x)=\frac{e^{x}}{x}(e^{x}-1).$$

31.（2017）设薄片型物体 S 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 割下的有限部分，其上任一点的密度为 $\mu(x,y,z)=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.记圆锥面与柱面的交线为 C.

（1）求 C 在 xOy 面上的投影曲线的方程；

（2）求 S 的质量 M.

解 （1）圆锥面与柱面的交线方程

$$\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2},\\ z^2=2x\end{cases}$$

中消去 z 得 C 关于 xOy 面的投影柱面为 $x^2+y^2=2x$，因此所求投影曲线的方程为

$$\begin{cases}x^2+y^2=2x,\\ z=0.\end{cases}$$

（2）曲面 S 的方程为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，它在 xOy 面上的投影区域为

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x\}=\left\{(\rho,\theta)\,\middle|\,0\leqslant\rho\leqslant 2\cos\theta,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

曲面 S 的面积元素为

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dxdy=\sqrt{2}\,dxdy,$$

因此

$$M=\iint\limits_{S}9\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}9\sqrt{2(x^2+y^2)}\cdot\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=18\iint\limits_{D}\rho\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=18\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{2\cos\theta}\rho^2\mathrm{d}\rho=18\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=96\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=64.$$

32. (2018)设 Σ 是曲面 $x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$ 的前侧,计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解 设 Σ_1 为平面 $x=0$ 被 $\begin{cases}3y^2+3z^2=1,\\x=0\end{cases}$ 所围部分的后侧,Ω 为 Σ 与 Σ_1 所围的立体,则

$$\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

由高斯公式得

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(1+3y^2+3z^2)\mathrm{d}V$$

在柱面坐标系下,$\Omega=\left\{(\rho,\theta,x)\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant\sqrt{1-3\rho^2},0\leqslant\rho\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3},0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\right\}$,故

$$\iiint\limits_{\Omega}(1+3y^2+3z^2)\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}(1+3\rho^2)\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\mathrm{d}\rho\int_0^{\sqrt{1-3\rho^2}}\rho(1+3\rho^2)\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\rho(1+3\rho^2)\sqrt{1-3\rho^2}\,\mathrm{d}\rho$$

$$=-\frac{\pi}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}(1+3\rho^2)\sqrt{1-3\rho^2}\,\mathrm{d}(1-3\rho^2)$$

$$=-\frac{\pi}{3}\int_1^0(2-t^2)t\cdot 2t\mathrm{d}t\quad(\text{令 } t=\sqrt{1-3\rho^2}\text{ 进行换元})$$

$$=\frac{\pi}{3}\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{5}\right)=\frac{14}{45}\pi.$$

因此

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(1+3y^2+3z^2)\mathrm{d}V-\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{14}{45}\pi.$$

33. (2020)设 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4)$ 的下侧,$f(x)$是连续函数,计算

$$I=\iint_{\Sigma}[xf(xy)+2x-y]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[yf(xy)+2y+x]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[zf(xy)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解 曲面 Σ 的单位法向量为

$$\boldsymbol{e}=\frac{(z_x,z_y,-1)}{\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}}=\left(\frac{x}{\sqrt{2(x^2+y^2)}},\frac{y}{\sqrt{2(x^2+y^2)}},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

利用两类曲面积分的联系得

$$I=\iint_{\Sigma}\left\{\frac{[xf(xy)+2x-y]\cdot x+[yf(xy)+2y+x]\cdot y}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}-\frac{\sqrt{2}}{2}[zf(xy)+z]\right\}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\iint_{\Sigma}[(\sqrt{x^2+y^2}-z)f(xy)+2\sqrt{x^2+y^2}-z]\mathrm{d}S,$$

在曲面 Σ 上被积函数

$$(\sqrt{x^2+y^2}-z)f(xy)+2\sqrt{x^2+y^2}-z=\sqrt{x^2+y^2},$$

面积元素

$$\mathrm{d}S=\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

于是

$$I=\frac{\sqrt{2}}{2}\iint_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2\rho\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\frac{14}{3}\pi.$$

(八)

无穷级数

1. (2017)幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$ 在区间$(-1,1)$内的和函数 $s(x)=$ ________.

解 因为函数 $\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{1}{1-(-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{n},x\in(-1,1)$,故等式两端求导得

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)'=-\frac{1}{(1+x)^{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}nx^{n-1},$$

即

$$\frac{1}{(1+x)^{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1},$$

所以幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$ 在区间$(-1,1)$内的和函数 $s(x)=\dfrac{1}{(1+x)^{2}}$.

2. (2017)若级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left[\sin\dfrac{1}{n}-k\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right]$ 收敛,则 $k=($　　$)$.

(A) 1　　(B) 2　　(C) -1　　(D) -2

解 因为

$$\sin\frac{1}{n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^{3}}+o\left(\frac{1}{n^{3}}\right),\quad k\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)=-\frac{k}{n}-\frac{k}{2n^{2}}-\frac{k}{3n^{3}}+o\left(\frac{1}{n^{3}}\right),$$

所以

$$\sin\frac{1}{n}-k\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{k+1}{n}+\frac{k}{2n^{2}}+\frac{2k-1}{6n^{3}}+o\left(\frac{1}{n^{3}}\right).$$

当 $k+1=0$,即 $k=-1$ 时,$\left|\sin\dfrac{1}{n}-k\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right|\sim\dfrac{1}{2n^{2}}(n\to\infty)$,而 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n^{2}}$ 收敛,由正项级数的比较审敛法知,此级数绝对收敛,从而收敛.

当 $k+1\neq 0$ 时,级数的一般项经有限项后不变号(和 $k+1$ 同号),并因为 $\sin\frac{1}{n}-k\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\sim\frac{k+1}{n}(n\to\infty)$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{k+1}{n}$ 发散,由比较审敛法知,此级数发散.

综上所述,应选(C).

3. (2018) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(2n+1)!}=($ $)$.

(A) $\sin 1+\cos 1$　　(B) $2\sin 1+\cos 1$

(C) $2\sin 1+2\cos 1$　　(D) $2\sin 1+3\cos 1$

解 因为

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(2n+1)!}&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)+2}{(2n+1)!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!},\end{aligned}$$

且

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(2n+1)!}=\cos 1+2\sin 1$. 应选(B).

4. (2019)设 $\{u_n\}$ 是单调增加的有界数列,则下列级数中收敛的是( ).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{u_n}$

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}^2-u_n^2)$

解 因为数列 $\{u_n\}$ 单调增加且有界,故数列 $\{u_n\}$ 收敛,设 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}^2-u_n^2)$ 的前 n 项部分和

$$s_n=(u_2^2-u_1^2)+(u_3^2-u_2^2)+\cdots+(u_{n+1}^2-u_n^2)=u_{n+1}^2-u_1^2,$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}u_{n+1}^2-u_1^2=a^2-u_1^2,$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}^2-u_n^2)$ 收敛,应选(D).

注 取 $u_n=\frac{n}{n+1}$,可以排除(A)和(B).取 $u_n=-\frac{1}{n}$,排除(C).

5. (2019)幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$ 在 $(0,+\infty)$ 内的和函数 $s(x)=$________.

解 在$(0,+\infty)$内，$s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(\sqrt{x})^{2n}=\cos\sqrt{x}$.

6. (2019)若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nu_n$绝对收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{v_n}{n}$条件收敛，则(　　).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$条件收敛　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$绝对收敛

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$收敛　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$发散

解 因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{v_n}{n}$条件收敛，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_n}{n}=0$.

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_nv_n|}{|nu_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{v_n}{n}\right|=0$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|nu_n|$收敛，故由正项级数的比较审敛法可得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_nv_n|$收敛，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$绝对收敛，应选(B).

7. (2020)设幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-2)^n$的收敛区间为$(-2,6)$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^{2n}$的收敛区间为(　　).

(A) $(-2,6)$　　(B) $(-3,1)$　　(C) $(-5,3)$　　(D) $(-17,15)$

解 因为幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-2)^n$的收敛区间为$(-2,6)$，所以收敛半径为4.于是幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为4，令$(x+1)^2<4$，解得$-3<x<1$，于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^{2n}$的收敛区间为$(-3,1)$，应选(B).

8. (2002)设$u_n\neq 0(n=1,2,3,\cdots)$且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$(　　).

(A) 发散　　(B) 绝对收敛

(C) 条件收敛　　(D) 收敛性根据所给条件不能判定

解 应选(C).

首先可以用特例来排除(A)与(B)，依条件取$u_n=n$，则由莱布尼茨判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{u_n}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{u_{n+1}}$均收敛，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$收敛，这就排除了(A)；又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}$发散，这就排除了(B).

要证明(C)是正确的，考察级数的前n项部分和

$$s_n=\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}\right)-\left(\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}\right)+\left(\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4}\right)-\cdots+(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{u_1}+(-1)^{n+1}\frac{1}{u_{n+1}},$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$,说明$\frac{1}{u_n}\sim\frac{1}{n}(n\to\infty)$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{u_{n+1}}=0$, 即

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{u_1},$$

因此,级数收敛且条件收敛.

9. (2004)设有以下命题:

① 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

② 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n+100}$ 收敛.

③ 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

④ 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛.

则以上命题中正确的是(   ).

(A) ①② (B) ②③ (C) ③④ (D) ①④

解 应选(B).因为①与④中两个收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 取 $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$ 时,不难看出①④的结论都是不成立的.

由于级数添加或去除有限项后,不改变级数的收敛性,故②是正确的.

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$,说明自某项起有$\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$,此时级数互相同号,不妨设互相为正,于是即有 $u_{n+1}>u_n$,从而 $u_n\not\to 0(n\to\infty)$,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散,③是正确的.

10. (2004)设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是正项级数,下列结论中正确的是(   ).

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

(B) 若存在非零常数 λ,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散

(C) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n=0$

(D) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,则存在非零常数 λ,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda$

解 应选(B),这是极限形式的比较审敛法的一个常用结论.

取 $a_n=\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 可排除(C);取 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$,可排除(D);至于排除(A)的例子,可取 $a_n=\dfrac{1}{n\ln n}(n=2,3,\cdots)$,由于

$$a_n=\frac{1}{n\ln n}>\int_n^{n+1}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x,$$

故部分和

$$s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n>a_1+\int_2^3\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x+\int_3^4\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x+\cdots+\int_n^{n+1}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$$

$$=a_1+\int_2^{n+1}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x,$$

而
$$\lim_{n\to\infty}\int_2^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\lim_{n\to\infty}\ln\ln x\Big|_2^{n+1}=+\infty,$$

说明部分和 s_n 无界,因此级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ 发散,从而(A)是错误的.

11. (2020)设 R 为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径,r 是实数,则(　　).

(A) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 发散时,$|r|\geqslant R$　　(B) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 收敛时,$|r|\leqslant R$

(C) 当 $|r|\geqslant R$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 发散　　(D) 当 $|r|\leqslant R$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 收敛

解 用反证法:当 $|r|<R$ 时,幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 绝对收敛,设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n||r|^n$ 收敛于 $s(r)$.

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_{2n}r^{2n}|$ 的部分和 $\sum\limits_{k=1}^{n}|a_{2k}r^{2k}|\leqslant s(r)$,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 绝对收敛从而收敛.所以当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 发散时,$|r|\geqslant R$.应选(A).

12. (2001)设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数,并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

解 因为

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n x^{2n}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}, \quad x \in [-1,1],$$

所以 $$\frac{\arctan x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}, \quad x \in [-1,0) \cup (0,1],$$

于是

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right]x^{2n}$$

$$= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}x^{2n}, \quad x \in [-1,0) \cup (0,1].$$

由于当 $x=0$ 时上式右端取值为 1，而由题设，$f(0)=1$，故

$$f(x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}x^{2n}, \quad x \in [-1,1].$$

令 $x=1$，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2} = \frac{1}{2}[f(1)-1] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

13. (2005)求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[1+\frac{1}{n(2n-1)}\right]x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$.

解 令 $t=x^2$，幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[1+\frac{1}{n(2n-1)}\right]t^n$ 的收敛半径

$$R' = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n(2n-1)}}{1+\frac{1}{(n+1)(2n+1)}} = 1,$$

故原级数的收敛半径 $R=\sqrt{R'}=1$，从而收敛区间为 $(-1,1)$.

容易得出 $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n} = -\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^n = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad x \in (-1,1).$$

记 $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(2n-1)}x^{2n}$，则 $\varphi(0)=0$，且

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{2n-1}x^{2n-1}，且\ \varphi'(0)=0,$$

$$\varphi''(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2x^{2n-2} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{2}{1+x^2},\quad x \in (-1,1).$$

于是对 $x\in(-1,1)$,从 0 到 x 作积分得

$$\varphi'(x) = \int_0^x \varphi''(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^x \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = 2\arctan x,$$

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \int_0^x \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^x \arctan x\,\mathrm{d}x \\ &= 2\left(x\arctan x - \int_0^x \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x\right) \\ &= 2x\arctan x - \ln(1+x^2).\end{aligned}$$

因此

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2} + 2x\arctan x - \ln(1+x^2),\quad x \in (-1,1).$$

14. (2008)将函数 $f(x)=1-x^2(0\leqslant x\leqslant \pi)$ 展开成余弦级数,并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

解 将 $f(x)$ 作偶延拓并作周期延拓(周期为 2π),则有 $b_n=0,n=1,2,\cdots$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\,\mathrm{d}x = 2\left(1-\frac{\pi^2}{3}\right),$$

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\cos nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi}x^2\cos nx\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(0 - \int_0^{\pi}x^2\cos nx\,\mathrm{d}x\right) = -\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{2x\sin nx}{n}\mathrm{d}x\right) \\ &= -\frac{4}{\pi}\left(\frac{x\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n^2}\mathrm{d}x\right) \\ &= -\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\pi\cos n\pi}{n^2} = \frac{4(-1)^{n-1}}{n^2},\end{aligned}$$

因为延拓后的函数处处连续,所以

$$f(x) = 1-x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx = 1-\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx,\quad 0\leqslant x\leqslant \pi.$$

取 $x=0$,有 $1 = 1-\dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$,故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

15.（2010）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域与和函数.

解 令 $x^2=t$，并记 $u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=1$，知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}t^n$ 的收敛半径为 1，于是得幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛半径为 $R=1$，收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x=\pm1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$，由交错级数审敛法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域为 $[-1,1]$.

令 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=s(x)$，则

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=xs_1(x),$$

其中 $s_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$.

而 $s_1'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2}$，$s_1(0)=0$，所以 $s_1(x)=\int_0^x s_1'(x)\mathrm{d}x=\arctan x$，

故

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=xs_1(x)=x\arctan x.$$

16.（2012）求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

解 （1）令 $u_n(x)=\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{4(n+1)^2+4(n+1)+3}{2(n+1)+1}\cdot x^{2(n+1)}}{\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}\cdot x^{2n}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4(n+1)^2+4(n+1)+3}{4n^2+4n+3}\cdot\frac{2n+1}{2n+3}\cdot x^2\right|=x^2,$$

令 $x^2<1$，得 $-1<x<1$，当 $x=\pm1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}$ 发散. 所以，原级数的收敛域为 $(-1,1)$.

（2）设

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^2+2}{2n+1}x^{2n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(2n+1)x^{2n}+\frac{2}{2n+1}x^{2n}\right]\quad(|x|<1).$$

令 $s_1(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}, s_2(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2}{2n+1}x^{2n}$. 因为

$$\int_0^x s_1(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(2n+1)t^{2n}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}=\frac{x}{1-x^2}\quad(|x|<1),$$

所以

$$s_1(x)=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\quad(|x|<1).$$

又因为 $xs_2(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2}{2n+1}x^{2n+1}$,所以

$$[xs_2(x)]'=\sum_{n=0}^{\infty}2x^{2n}=2\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}\right)=\frac{2}{1-x^2}\quad(|x|<1).$$

故

$$xs_2(x)=\int_0^x[xs_2(x)]'\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{2}{1-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^x\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\ln\frac{1+x}{1-x}\quad(|x|<1).$$

当 $x\neq0$ 时, $s_2(x)=\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

当 $x=0$ 时, $s_1(0)=1, s_2(0)=2$.

因此

$$s(x)=s_1(x)+s_2(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, & x\in(-1,0)\cup(0,1),\\ 3, & x=0.\end{cases}$$

17. (2020)设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $(n+1)a_{n+1}=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)a_n$,证明当 $|x|<1$ 时幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛,并求其和函数.

解 据条件 $a_1=1,(n+1)a_{n+1}=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)a_n$ 知, $a_n>0(n=1,2,\cdots)$,且

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}=1,$$

故幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R=1$，则当 $|x|<1$ 时，幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛，故收敛.

设和函数 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n,\ |x|<1$，则

$$s'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}=a_1+\sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1}=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

$$=1+x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}+\frac{1}{2}s(x)=1+xs'(x)+\frac{1}{2}s(x),$$

于是有 $(1-x)s'(x)-\frac{1}{2}s(x)=1$，即 $s'(x)-\frac{1}{2(1-x)}s(x)=\frac{1}{1-x}$，解微分方程得

$s(x)=\frac{C}{\sqrt{1-x}}-2$，而 $s(0)=0$，故 $C=2$，所以 $s(x)=\frac{2}{\sqrt{1-x}}-2$.

18. (2021) 设

$$u_n(x)=\mathrm{e}^{-nx}+\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\quad (n=1,2,\cdots),$$

求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域及和函数.

解
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)},$$

其中 $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}=\sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{e}^{-x})^n$，该几何级数的收敛域为 $\mathrm{e}^{-x}<1$，即 $x>0$，其和为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{e}^{-x})^n=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}=\frac{1}{\mathrm{e}^x-1},\quad x>0.$$

而幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$，其收敛域为 $-1\leqslant x\leqslant 1$.设 $y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$，则

$$y'(x)=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad y''(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}.$$

由于 $y''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$，等式两端积分并注意到 $y'(0)=0$，可得

$$y'(x)=y'(x)-y'(0)=\int_0^x y''(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\ln(1-x),\quad -1\leqslant x<1.$$

等式两端积分并注意到 $y(0)=0$，可得

$$y(x)=y(x)-y(0)=\int_0^x y'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x[-\ln(1-t)]\,\mathrm{d}t$$

$$= (1-x)\ln(1-x)+x,\quad -1\leqslant x<1.$$

而 $y(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$,故

$$y(x)=\begin{cases}(1-x)\ln(1-x)+x, & -1\leqslant x<1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

综上所述,$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ 的收敛域为 $(0,+\infty)\cap[-1,1]=(0,1]$,和函数为 $s(x)=\begin{cases}\frac{1}{e^x-1}+x+(1-x)\ln(1-x), & 0<x<1,\\ \frac{e}{e-1}, & x=1.\end{cases}$

19. (2021)设 n 为正整数,$y=y_n(x)$ 是微分方程 $xy'-(n+1)y=0$ 满足条件 $y_n(1)=\frac{1}{n(n+1)}$ 的解.

(1) 求 $y_n(x)$;

(2) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n(x)$ 的收敛域及和函数.

解 (1) 把原方程化为 $\frac{1}{y}dy=\frac{n+1}{x}dx$,积分得 $y_n=Cx^{n+1}$.代入 $x=1$, $y_n=\frac{1}{n(n+1)}$,得 $C=\frac{1}{n(n+1)}$,故 $y_n(x)=\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$.

(2) $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{y_{n+1}(x)}{y_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{n(n+1)}{x^{n+1}}\right|=|x|,$$

令 $|x|<1$,得幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n(x)$ 的收敛区间 $(-1,1)$.又当 $x=\pm1$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm1)^{n+1}}{n(n+1)}$ 收敛,故该级数的收敛域为 $[-1,1]$.

记 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}y_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$, $x\in[-1,1]$,则

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad s''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},\quad x\in(-1,1).$$

故

$$s'(x)=\int_0^x s''(t)dt+s'(0)=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt+0=-\ln(1-x),\quad x\in[-1,1).$$

于是

$$s(x)=\int_0^x s'(t)\,\mathrm{d}t+s(0)=-\int_0^x \ln(1-t)\,\mathrm{d}t+0$$

$$=x+(1-x)\ln(1-x)\ ,\ x\in[-1,1)\ .$$

而

$$s(1)=\lim_{x\to 1^-}s(x)=\lim_{x\to 1^-}[x+(1-x)\ln(1-x)]=1\ ,$$

所以

$$s(x)=\begin{cases}x+(1-x)\ln(1-x), & x\in[-1,1),\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

（九）

近年全国硕士研究生招生考试涉及《高等数学》下册的部分试题及参考解答

郑重声明

读者意见反馈

为收集对教材的意见建议，进一步完善教材编写并做好服务工作，读者可将对本教材的意见建议通过如下渠道反馈至我社。

咨询电话　400-810-0598

反馈邮箱　hepsci@pub.hep.cn

通信地址　北京市朝阳区惠新东街4号富盛大厦1座

高等教育出版社理科事业部

邮政编码　100029

防伪查询说明

用户购书后刮开封底防伪涂层，使用手机微信等软件扫描二维码，会跳转至防伪查询网页，获得所购图书详细信息。

防伪客服电话　(010) 58582300

▷ 高等数学 第八版 上册
▷ 高等数学 第八版 下册

▷ 高等数学附册 学习辅导与习题选解 同济·第八版
▷ 高等数学习题全解指导 上册 同济·第八版
▶ 高等数学习题全解指导 下册 同济·第八版

▷ 工程数学——线性代数 第七版
▷ 线性代数附册 学习辅导与习题全解 同济·第七版

▷ 工程数学——概率统计简明教程 第三版
▷ 概率统计简明教程附册 学习辅导与习题全解 同济·第三版

▷ 概率论与数理统计

▷ 工程数学——新编统计学教程

扫一扫 辨真伪
获取增值服务

ISBN 978-7-04-060422-1
9 787040 604221 >
定价 39.20 元