实变函数习题解答

July 10, 2025

Jabao

1 第一章

1.1. 设 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, B_k = E \backslash A_k, k = 1, 2, \ldots$. 证明

$$E = \varlimsup_{k\to\infty} A_k \cup \varliminf_{k\to\infty} B_k.$$

Solution: 直接计算得到

$$\begin{aligned} E &= (\varlimsup_{k\to\infty} A_k) \cup (E \backslash \varlimsup_{k\to\infty} A_k) \\ &= (\varlimsup_{k\to\infty} A_k) \cup (E \backslash (\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k)) \\ &= (\varlimsup_{k\to\infty} A_k) \cup (\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} E \backslash A_k) \\ &= (\varlimsup_{k\to\infty} A_k) \cup (\varliminf_{k\to\infty} B_k). \end{aligned}$$

1.2. 设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \ldots,$ 是定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的实值函数，记 D 为 $\{f_k(x)\}$ 不收敛于 $f(x)$ 的点所构成的集合，证明

$$D = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \left\{ x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \frac{1}{i} \right\}.$$

Solution: 题目的本质是对 $\epsilon - \delta$ 极限语言的重译。于是我们直接依据定义得到

$$\begin{aligned} D &= \left\{ x \in E : \exists \epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geq n, |f_k(x) - f(x)| \geq \epsilon \right\} \\ &= \left\{ x \in E : \exists i > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geq n, |f_k(x) - f(x)| \geq \frac{1}{i} \right\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \left\{ x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \frac{1}{i} \right\}. \end{aligned}$$

1.3. 设 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$，$B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots$，证明

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup B_n).$$

Solution: 我们通过典型的集合论方法来证明这个等式。

首先 $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup B_n)$ 是显然的，而对于 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup B_n)$，由于 $\forall n \in \mathbb{N}, x \in A_n \cup B_n$，于是 $x \in \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ 或 $x \in \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right)$，证毕。

1.4. 设 $\{f_n(x)\}$ 和 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的实值函数，并且

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

证明

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \{x \in \mathbb{R} : f(x) \le t\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R} : f_n(x) < t + \frac{1}{k}\right\}.$$

Solution: 证明思路类似于习题 1.2。直接依定义得到

$$\begin{aligned}
\{x \in \mathbb{R} : f(x) \le t\} &= \left\{x \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \ge m, f_n(x) < t + \epsilon\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} : \forall k \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \ge m, f_n(x) < t + \frac{1}{k}\right\} \\
&= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R} : f_n(x) < t + \frac{1}{k}\right\}.
\end{aligned}$$

1.5. 设有映射 $f : X \to Y$. 证明

$$\forall A \subset Y, \quad f(f^{-1}(A)) \subset A,$$
$$\forall B \subset X, \quad B \subset f^{-1}(f(B)).$$

Solution: 依定义可得

$$f(f^{-1}(A)) = \{y \in Y : x \in f^{-1}(A), y = f(x)\},$$

而 $f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}$，于是对于 $y \in f(f^{-1}(A))$ 必有 $y = f(x) \in A$，因此 $f(f^{-1}(A)) \subset A$.

类似地，因为

$$f^{-1}(f(B)) = \{x \in X : f(x) \in f(B)\},$$

并且对 $x \in B$ 必有 $f(x) \in f(B)$，因此 $B \subset f^{-1}(f(B))$.

1.6. 设有映射 $f: X \to Y$. 证明 f 是满射，当且仅当对任意的 $B \subset Y$ 有 $f^{-1}(f(B)) = B$.

Solution: 简单的定义重译：

$$\begin{aligned} f(X) = Y &\Leftrightarrow \forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \forall B \subset Y, f^{-1}(f(B)) = B. \end{aligned}$$

1.7. 设有映射 $f: X \to Y$，证明下面的命题等价

1. f 是单射；
2. 对任意 $A, B \subset X$，有 $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$；
3. 对任意 $A \subset X$，有 $A = f^{-1}(f(A))$.

Solution: 我们循环地证明这些命题的等价性：

- 对于 1. ⇒ 2.，因为 f 是单射，所以对于 $x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2)$ 有 $x_1 = x_2$. 于是我们设 $y \in f(A) \cap f(B)$，于是存在 $a \in A, b \in B$ 使得 $y = f(a) = f(b)$，于是有 f 的单射性得到 $a = b \in A \cap B$，即 $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$。反方向的包含关系是显然的。
- 对于 2. ⇒ 3.，由习题 1.5已知 $A \subset f^{-1}(f(A))$。于是我们设 $x \in f^{-1}(f(A))$，记 $B = \{x\}$，于是得到
$$f(B) = f(A) \cap f(B) = f(A \cap B) \neq \emptyset,$$
因为 $\emptyset$ 是集合范畴 Set 里的始对象，所以 $A \cap B \neq \emptyset$，于是 $x \in A, f^{-1}(f(A)) \subset A$.
- 对于 3. ⇒ 1.，由 $f^{-1}(f(A))$ 的定义我们可知，对于 $x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2)$ 有
$$\{x_1\} = f^{-1}(f(\{x_1\})) = f^{-1}(f(\{x_2\})) = \{x_2\},$$
于是 $x_1 = x_2$，这给出了 f 的单射性。

1.8. 若 $(A \backslash B) \sim (B \backslash A)$, 则 $A \sim B$.

Solution: 双射的构造关键在于对集合的分解和已知双射的组合。由于 $(A \backslash B) \sim (B \backslash A)$，我们可知 $\exists g: A \backslash B \to B \backslash A$，并且 g 是双射。同时考虑分解

$$A = (A \backslash B) \cup (A \cap B), \quad B = (B \backslash A) \cup (B \cap A).$$

于是可以构造双射

$$f : A \to B,$$

满足

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in A \backslash B, \\ x, & x \in A \cap B. \end{cases}$$

这给出了 $A \sim B$.

1.9. 若 $A \subset B, A \sim (A \cup C)$，则 $B \sim (B \cup C)$.

Solution: 思路和习题 1.8类似。由于 $A \sim (A \cup C)$，我们可知 $\exists g : A \to (A \cup C)$，并且 g 是双射。同时由于 $A \subset B$，我们考虑分解

$$B = (B \backslash A) \cup A, \quad B \cup C = (B \backslash A) \cup (A \cup C).$$

于是可以构造双射

$$f : B \to B \cup C,$$

满足

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in A, \\ x, & x \in B \backslash A. \end{cases}$$

这给出了 $B \sim B \cup C$.

1.10. 构造出一个双射 $f : [0, 1] \to (0, 1)$.

Solution: 对于 $\mathbb{R}$ 上的只相差一个可数集的集合间映射的双射的构造，我们总是对其中的简单的有理数考虑一个“位移”映射，对其他数考虑恒等映射。于是我们构造

$$f : [0, 1] \to (0, 1),$$

满足

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 0, \\ \frac{1}{3}, & x = 1, \\ \frac{1}{n+2}, & x = \frac{1}{n}, \\ x, & \text{其他}. \end{cases}$$

显然这是个双射。

1.11. 设 Γ 表示自然数集 $\mathbb{N}$ 的无限子集全体所成集合，证明 $|\Gamma| = \mathfrak{c}$.

Solution: 我们只需证明 $\Gamma \sim \mathbb{R}$. 考虑使用 Cantor-Bernstein 定理。
我们已知自然数集的幂集满足 $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$，因此必有 $|\Gamma| \le \mathfrak{c}$.
同时，因为已知 $\mathbb{R} \sim (0,1]$，而将 $(0,1]$ 中的数用 2-进小数去表示，可知这给出一个单射

$$(0,1] \to \Gamma,$$

于是 $\mathfrak{c} \le |\Gamma|$. 由 Cantor-Bernstein 定理可知 $|\Gamma| = \mathfrak{c}$.

Remark. 通常在不承认连续统假设的情况下，我们只知道 $\aleph_0 < \aleph_1 \le \mathfrak{c}$,

1.12. 证明 $[0,1]$ 内全体无理数所组成的集合的基数等于 $\mathfrak{c}$.

Solution: 简单的集合论道理：设考虑的全集为 $\mathbb{R}$，则无理数集我们表示为 $\mathbb{Q}^c$，同时有无交并分解

$$[0,1] = ([0,1] \cap \mathbb{Q}) \cup ([0,1] \cap \mathbb{Q}^c),$$

于是

$$\begin{aligned} \mathfrak{c} = |[0,1]| &= |([0,1] \cap \mathbb{Q})| + |([0,1] \cap \mathbb{Q}^c)| \\ &= \max\{\aleph_0, |([0,1] \cap \mathbb{Q}^c)|\} \end{aligned}$$

于是 $|([0,1] \cap \mathbb{Q}^c)| = \mathfrak{c}$.

1.13. 设 $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$，则 $(E_1 \cap E_2)^\circ = E_1^\circ \cap E_2^\circ$.

Solution: 唉，无语，和你说不下去，典型的集合论思想。
对于 $x \in (E_1 \cap E_2)^\circ$，可知有开邻域 U 使得

$$x \in U \subset E_1 \cap E_2,$$

于是 $x \in E_1^\circ, x \in E_2^\circ$，得到 $(E_1 \cap E_2)^\circ \subset E_1^\circ \cap E_2^\circ$.
当 $x \in E_1^\circ \cap E_2^\circ$ 时，可知有开邻域 U, V 使得

$$x \in U \subset E_1, \quad x \in V \subset E_2.$$

于是开集 $U \cap V$ 满足

$$x \in U \cap V \subset E_1 \cap E_2,$$

因此 $E_1^\circ \cap E_2^\circ \subset (E_1 \cap E_2)^\circ$. 证毕。

1.14. 证明 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是闭集，当且仅当对任何 $\{x_k\} \subset E$, 若 $\lim_{k\to\infty} x_k = x$，必有 $x \in E$.

Solution: 条件的必要性是显然的。

反之，当对任何 $\{x_k\} \subset E$, 若 $\lim_{k\to\infty} x_k = x$，必有 $x \in E$ 时，我们可以取出一个互不相等的子列 $\{x_{k_j} \subset E\}$ 使得

$$\exists x' \in E', \quad \lim_{j\to\infty} x_{k_j} = x'.$$

但是子列和原数列的极限应该是相同的，于是 $x' = x \in E$，得到 $E' \subset E$，这说明 E 是闭集。

1.15. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$，证明以下命题等价

1. $x \in \overline{E}$.
2. $\forall \delta > 0, B(x,\delta) \cap E \neq \emptyset$.
3. $\exists \{x_k\} \subset E, \text{s.t.} \lim_{k\to\infty} x_k = x$.

Solution: 依定义循环验证即可。

- 对于 1. ⇒ 2.，因为 $x \in \overline{E}$，所以 $x \in E'$，所以存在互不相等的点列 $\{x_k\} \subset E$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} |x_k - x| = 0,$$

于是 $\forall \delta > 0$ 存在 $k_0 \in \mathbb{N}$ 使得当 $k \geq k_0$ 时，有 $|x_k - x| < \delta$. 而 $x_k \in E$，于是

$$\forall \delta > 0, B(x,\delta) \cap E \neq \emptyset.$$

- 对于 2. ⇒ 3.，基于选择公理，因为

$$\forall \delta > 0, B(x,\delta) \cap E \neq \emptyset.$$

对于每个 $k \in \mathbb{N}, \delta = \frac{1}{k}$，我们在 $B(x,\delta) \cap E$ 里取出一个 x_k 构成 $\{x_k\}$，于是直接由极限定义可知

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x.$$

- 对于 3. ⇒ 1.，我们只需要对于 $\{x_k\}$ 取出一个互不相等的子列即可，这显然是可以做到的。

Remark. 都学实变函数了，还是承认选择公理罢。

1.16. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$，证明 $E^\circ\cup\overline{E^c}=\mathbb{R}^n, E^\circ\cap\overline{E^c}=\emptyset$.

Solution: 对于 $x\in\mathbb{R}^n$，我们不妨设 $x\notin E^\circ$，则对任意的开邻域 U 都有

$$U\not\subset E,\quad U\cap E^c\neq\emptyset,$$

于是 $x\in\overline{E^c}$. 类似的，当 $x\notin\overline{E^c}$ 时，必有 $x\in E^\circ$，因此 $\mathbb{R}^n\subset E^\circ\cup\overline{E^c}$，而反方向的包含关系是显然的，所以 $E^\circ\cup\overline{E^c}=\mathbb{R}^n$.

而当我们设 $x\in E^\circ$ 时，此时由逆否命题的等价性可知对任意的开邻域 U 都有

$$U\cap E^c=\emptyset,$$

于是 $x\notin\overline{E^c}$. 类似地，当 $x\in\overline{E^c}$ 时，必有 $x\notin E^\circ$. 于是 $E^\circ\cap\overline{E^c}=\emptyset$.

1.17. 设 $A,B\subset\mathbb{R}$，证明 $\overline{A\times B}=\overline{A}\times\overline{B},(A\times B)^\circ=A^\circ\times B^\circ$.

Solution: 由于笛卡尔积的良好性质，等式的成立只需依定义直接验证即可得到。

1.18. 对任意的 $E\subset\mathbb{R}^n$，$E',\overline{E}$ 均为闭集。

Solution: 因为由定义可知，

$$(E')'=E',\quad (\overline{E})'=\overline{E},$$

因此它们都是闭集。

1.19. 设 $E\subset\mathbb{R}^n,x_0\in E$，$f:E\to\mathbb{R}$ 是 E 上的实值函数。证明 f 在 x_0 处连续，当且仅当对于任意收敛于 x_0 的点列 $\{x_k\}$ 都有

$$\lim_{k\to\infty}f(x_k)=f(x_0).$$

Solution: 必要性是显然的，这是点态连续定义的直接结论。

对于充分性，我们采取反证法：设 f 在 x_0 处不连续，则

$$\exists\epsilon>0,\forall\delta>0,\exists x\in E,||x_0-x||<\delta,|f(x_0)-f(x)|>\epsilon.$$

于是我们取 $\delta=\frac{1}{k}$，可以得到一个点列 $\{x_k\}$ 满足

$$\lim_{k\to\infty}x_k=x_0,$$

但是

$$\lim_{k\to\infty}f(x_k)\neq f(x_0).$$

这和条件矛盾。

1.20. 设 $E \subset \mathbb{R}^n, f: E \to \mathbb{R}$，证明以下命题等价

1. f 在 E 上连续。
2. 对任意开集 $G \subset \mathbb{R}$，存在开集 $O \subset \mathbb{R}^n$ 使得 $f^{-1}(G) = E \cap O$,
3. 对任意闭集 $T \subset \mathbb{R}$，存在闭集 $F \subset \mathbb{R}^n$ 使得 $f^{-1}(T) = E \cap F$.

Solution: 我们循环的证明这些命题的等价性:

- 对于 1. $\Rightarrow$ 2.，取 $x \in f^{-1}(G)$，因为 G 是开集，所以存在开邻域

$$(f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon) \subset G.$$

而 f 是连续函数，于是对于此时的 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得对所有的满足 $|y - x| < \delta$ 的 y 都有

$$|f(y) - f(x)| < \epsilon,$$

于是 $f(y) \subset G$，此时

$$B(x, \delta) \cap E \subset f^{-1}(G),$$

于是我们取遍 $x \in f^{-1}(G)$，得到一个开集

$$O = \bigcup_{x \in f^{-1}(G)} B(x, \delta_x)$$

满足 $f^{-1}(G) = E \cap O$.

- 对于 2. $\Rightarrow$ 3.，以 $\mathbb{R}$ 为底空间，取开集 $G \coloneqq T^c$，此时由条件知有开集 $O \subset \mathbb{R}^n$ 使得 $f^{-1}(G) = E \cap O$. 于是

$$f^{-1}(T) = E \backslash f^{-1}(G) = E \backslash (E \cap O) = E \cap O^c,$$

取闭集 $F \coloneqq O^c$，得到 $f^{-1}(T) = E \cap F$.

- 对于 3. $\Rightarrow$ 1.，对任意 $x \in E, \epsilon > 0$，我们不妨考虑闭集

$$T = (f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon)^c$$

由条件知存在闭集 $F \subset \mathbb{R}^n$ 使得 $f^{-1}(T) = E \cap F$，于是

$$f^{-1}(f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon) = E \backslash f^{-1}(T) = E \cap F^c$$

而 F^c 是开集，因此存在 $\delta > 0$ 使得有开邻域 $B(x, \delta)$ 满足

$$\forall y \in B(x, \delta) \cap E, f(y) \in (f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon)$$

亦即 f 在点 x 处连续，而 x 是任取的，因此 f 在 E 上连续。

Remark. 事实上，这是基础的点集拓扑中的内容，对于不同的拓扑结构，我们通常都会使用命题 2. 作为函数连续的定义，亦即考虑子空间拓扑。

1.21. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为紧集，$f \in C(E)$，则

1. f 为 E 上的有界函数。
2. f 在 E 上可以取到最大值和最小值。
3. f 在 E 上一致连续。

Solution:

1. 采用反证法：假设 f 在 E 上无界，则我们可以构造一个数列
$$\{x_n\} = \{x \in E : f(x) > n\},$$
而 E 是紧集，在 $\mathbb{R}^n$ 的标准拓扑中，这和 E 是有界闭集是等价的。于是存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得
$$\lim f(x_{n_k}) = f(\lim x_{n_k})$$
而由 f 的连续性我们知道，f 在极限点处应该是有限的，但这和点列的构造矛盾。

2. 设 $M \coloneqq \sup f(x)$，由上确界的定义，必然存在点列 $\{x_n\}$ 使得 $f(x_n) \to M$，于是因为 E 是有界闭集，存在 E 中的收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，使得 f 在这个子列的极限点处收敛。但是 f 是连续的，并且子列和原点列的极限是相同的，所以 $M \in E$。最小值同理。

3. 采用反证法：假设 f 在 E 上不一致收敛，则
$$\exists \epsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists (x_\delta, y_\delta), \text{s.t.} ||x_\delta - y_\delta|| < \delta, |f(x_\delta) - f(y_\delta)| > \epsilon_0.$$
而 E 是紧集，当我们取 $\delta = \frac{1}{n}$ 时，得到两个点列 $\{x_n\}, \{y_n\}$，此时我们可以分别取出两个收敛子列 $\{x_{n_k}\}, \{y_{n_k}\}$，我们将它们的极限分别记为 x_0, y_0，于是由 f 的连续性得到
$$\lim f(x_{n_k}) = f(x_0), \quad \lim f(y_{n_k}) = f(y_0).$$
但是由点列本身的构造可知 $x_0 = y_0$，我们此时可知
$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to 0$$
这与
$$|f(x_\delta) - f(y_\delta)| > \epsilon_0$$
矛盾。

1.22. 设非空集合 $E \subset \mathbb{R}^n$，证明

1. $\forall t > 0$，$\{x \in \mathbb{R}^n : d(x, E) < t\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集。
2. $\forall t > 0$，$\{x \in \mathbb{R}^n : d(x, E) \leq t\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集。

Solution:

1. 记 $A_t \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, E) < t\}$ 任意点 $x \in A_t$，取 $\delta \coloneqq t - d(x, E) > 0$，则对于点 $y \in B(x, \delta)$ 都有
$$d(y, E) \leq d(x, E) + d(x, y) < d(x, E) + \delta = t,$$
于是 $B(x, \delta) \subset A_t$，可知 A_t 是开集。
2. 记 $B_t \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, E) > t\}$，取 $\delta \coloneqq d(x, E) - t > 0$ 即可得到 B_t 是开集，而 $\{x \in \mathbb{R}^n : d(x, E) \leq t\} = (B_t)^c$，所以是闭集。

1.23. 设有闭集 $F \subset \mathbb{R}^n$，证明
$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k,$$
其中
$$G_k = \left\{x \in \mathbb{R}^n : d(x, F) < \frac{1}{k}\right\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Solution: $F \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ 是显然的，这由点与集合的距离定义可知。我们设点 $x \notin F$，因为 F 的补集是开集，则存在 $\epsilon > 0$ 使得
$$\forall y \in F, \quad d(x, y) > \epsilon,$$
于是一定存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得
$$d(x, y) > \epsilon > \frac{1}{k}.$$
因此
$$x \notin \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k, \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \subset F.$$

1.24. 设 $\{F_\alpha\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集族，若任取其中有限个元素构成的子族 $\{F_{\alpha_i}\}$ 都有

$$\bigcap_i F_{\alpha_i} \neq \emptyset,$$

证明

$$\bigcap_\alpha F_\alpha \neq \emptyset.$$

Solution: 使用反证法：设 $\bigcap_\alpha F_\alpha = \emptyset$，取集族中的一个元素，记为 F_{α_1}，记 $G_\alpha \coloneqq (F_\alpha)^c$，显然 $\{G_\alpha\}$ 是 F_{α_1} 的一个开覆盖，而 F_{α_1} 是紧集，于是存在一个有限开覆盖 $\{G_{\alpha_2}, \ldots, G_{\alpha_m}\}$，并且这些 G_{α_i} 对应的 F_{α_i} 满足

$$\bigcap_{i=1}^m F_{\alpha_i} = \emptyset,$$

但这与题设矛盾。

Remark. 有限开覆盖定理的运用。

1.25. 设 $\{F_\alpha\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集族，有开集 G 满足

$$\bigcap_\alpha F_\alpha \subset G.$$

证明存在有限子族 $\{F_{\alpha_1}, \ldots F_{\alpha_m}\}$ 使得

$$\bigcap_{i=1}^m F_{\alpha_i} \subset G.$$

Solution: 由题设我们有

$$\Big(\bigcap_\alpha F_\alpha\Big)\backslash G = \Big(\bigcap_\alpha F_\alpha\Big) \cap G^c = \bigcap_\alpha (F_\alpha \cap G^c) = \emptyset,$$

而 $F_\alpha \cap G^c$ 是紧集，于是类似于习题 1.24的证明，我们可知存在有限个 $F_{\alpha_1} \cap G^c, \ldots, F_{\alpha_m} \cap G^c$ 使得

$$\Big(\bigcap_{i=1}^m F_{\alpha_i}\Big) \cap G^c = \bigcap_{i=1}^m (F_{\alpha_i} \cap G^c) = \emptyset,$$

于是

$$\bigcap_{i=1}^m F_{\alpha_i} \subset G.$$

1.26. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$，证明

1. $x \in \overline{E}$，当且仅当 $d(x, E) = 0$。
2. $x \in E^\circ$，当且仅当 $d(x, E^c) > 0$。

Solution:

1. 充分性：因为 $d(x, E) = 0$，所以对任意 $\epsilon > 0$ 都有 $x_n \in E$ 使得 $d(x, x_n) < \epsilon$，这些 x_n 构成了一个以 x 为极限的点列，于是 $x \in \overline{E}$。

   必要性：因为 $x \in \overline{E}$，因此对任意的 $\epsilon > 0$ 都有
   $$B(x, \epsilon) \cap E \neq \emptyset.$$
   于是我们对每个 $\epsilon = \frac{1}{n}$ 都可以选取一个 $x_n \in E$ 使得 $d(x, x_n) < \epsilon$, 因此 $d(x, E) = 0$.

2. 充分性：因为 $d(x, E^c) > 0$，所以存在 $\delta > 0$ 使得 $B(x, \delta, \delta) \cap E^c = \emptyset$，于是 $x \in E^c$。

   必要性：因为 $x \in E^\circ$，所以存在 $\delta > 0$ 使得 $B(x, \delta) \subset E$，于是对任取的 $y \in E^c$ 都有 $d(x, y) \geq \delta$，所以
   $$d(x, E^c) = \inf_{y \in E^c} d(x, y) \geq \delta > 0.$$

1.27. 设 F 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集，G 为 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，并且 $F \subset G$。证明存在 $\delta > 0$ 使得当 $|x| < \delta$ 时，有
$$F + \{x\} = \{y + x : y \in F\} \subset G.$$

Solution: 对每个点 $y \in F \subset G$，都存在 $\delta_y > 0$ 使得 $B(y, \delta_y) \subset G$，并且我们可以取遍所有的 $y \in F$ 来给出一个开覆盖，即
$$F \subset \bigcup_{y \in F} B(y, \frac{\delta_y}{2}).$$
因为 F 是 $\mathbb{R}^n$ 在标准拓扑下的有界闭集，所以是紧集，所以我们可以取一个有限子覆盖
$$F \subset \bigcup_{n=1}^{N} B(y_n, \frac{\delta_{y_n}}{2}).$$
我们取 $\delta = \min\{\frac{\delta_{y_n}}{2}\}$，此时任给 $z = y + x \in F + \{x\}$，由于我们构造出的开覆盖，存在 y_n 使得 $d(y, y_n) < \frac{\delta_{y_n}}{2}$，于是
$$d(z, y_n) = d(y + x, y_n) < d(y, y_n) + |x| < \delta_{y_n}.$$
于是 $F + \{x\} \subset G$.

1.28. 设 $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^n$ 为两个不相交的非空闭集，证明存在开集 G_1, G_2 使得

$$F_1 \subset G_1, \quad F_2 \subset G_2, \quad \overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \emptyset.$$

Solution: 记 $r = d(F_1, F_2)$，不妨令

$$G_1 := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, F_1) < \frac{r}{3}\}$$
$$G_2 := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, F_2) < \frac{r}{3}\},$$

前两个条件显然是满足的。而我们易知

$$\overline{G_1} = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, F_1) \leq \frac{r}{3}\}$$
$$\overline{G_2} = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, F_2) \leq \frac{r}{3}\},$$

于是如果 $\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \neq \emptyset$，对于 $x \in \overline{G_1} \cap \overline{G_2}$，有

$$d(F_1, F_2) \leq d(x, F_1) + d(x, F_2) \leq \frac{2}{3}r,$$

这是矛盾的。

2 第二章

2.1. 设 $A, B \subset \mathbb{R}^n, m^*(A) = 0$，证明

$$m^*(A \cup B) = m^*(B) = m^*(B \backslash A).$$

Solution: 考虑分解

$$B = (B \backslash A) \cup (A \cap B),$$

于是由测度的次可加性我们可知

$$m^*(B) \leq m^*(B \backslash A) + m^*(A \cap B) \leq m^*(B \backslash A) + m^*(A) = m^*(B \backslash A).$$

同时由于 $B \backslash A \subset B$，由测度的单调性我们知

$$m^*(B \backslash A) \leq m^*(B),$$

因此 $m^*(B \backslash A) = m^*(B)$。

同时由分解 $A \cup B = A \cup (B \backslash A)$ 可以得到

$$m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B \backslash A) = m^*(B \backslash A) = m^*(B) \leq m^*(A \cup B),$$

于是

$$m^*(A \cup B) = m^*(B) = m^*(B \backslash A).$$

2.2. 设 $A, B \subset \mathbb{R}^n$，$m^*(A), m^*(B) < +\infty$，证明

$$|m^*(A) - m^*(B)| \leq m^*(A \Delta B).$$

Solution: 由 $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ 可知 $A \subset B \cup (A \Delta B)$，于是由外测度的单调性知

$$m^*(A) \leq m^*(B) + m^*(A \Delta B),$$

于是 $m^*(A) - m^*(B) \leq m^*(A \Delta B)$。同理可以得到 $m^*(B) - m^*(A) \leq m^*(A \Delta B)$，于是

$$|m^*(A) - m^*(B)| \leq m^*(A \Delta B).$$

2.3. 设 $\{A_n\}$ 为互不相交的可测集列，$\forall n \in \mathbb{N}, B_n \subset A_n$，证明

$$m^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(B_n).$$

Solution: 令

$$B \coloneqq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

由可测集的定义可知，对于任意的 $n \in \mathbb{N}$ 有

$$\begin{aligned} m^*(B) &= m^*(B \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\Big)) + m^*(B \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\Big)^c) \\ &\geq m^*(B \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\Big)) \\ &= m^*(B \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\Big) \cap A_N) + m^*(B \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\Big) \cap (A_N)^c) \\ &= m^*(B \cap A_N) + m^*(B \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{N-1} A_n\Big)) \\ &= \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{N} m^*(B \cap A_n) = \sum_{n=1}^{N} m^*(B_n). \end{aligned}$$

于是令 $N \to \infty$ 有

$$m^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(B_n).$$

2.4. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$，证明 E 为可测集，当且仅当对任意的矩体 $I \subset \mathbb{R}^n$ 都有

$$m^*(I) = m^*(I \cap E) + m^*(I \cap E^c).$$

Solution: 关键是利用外测度的定义给出矩体的逼近。首先必要性是显然的。

对于充分性，取集合 $T \subset \mathbb{R}^n$，不妨设 $m^*(T) < +\infty$，因为外侧度为 $+\infty$ 时，需要的等式是显然成立的。于是对任意的 $\epsilon > 0$ 都有开覆盖 $\{I_k\}$ 使得

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} I_k < m^*(T) + \epsilon.$$

同时由条件可知对任意 $k \in \mathbb{N}$ 有

$$m^*(I_k \cap E) + m^*(I_k \cap E^c) = m^*(I_k),$$

于是

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} m^*(I_k \cap E) + \sum_{k\in\mathbb{N}} m^*(I_k \cap E^c) = \sum_{k\in\mathbb{N}} m^*(I_k) < m^*(T) + \epsilon.$$

再由外侧度的单调性，次可数可加性可以得到

$$m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \le \sum_{k\in\mathbb{N}} m^*(I_k \cap E) + \sum_{k\in\mathbb{N}} m^*(I_k \cap E^c) < m^*(T) + \epsilon,$$

由 ϵ 的任意性有

$$m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \le m^*(T).$$

同时由 $T \subset (T \cap E) \cup (T \cap E^c)$ 可以得到

$$m^*(T) \le m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c).$$

所以 $m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$。

2.5. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$，证明

$$m^*(E) = \inf\{m(G) : 开集G \supset E\}.$$

Solution: 令

$$A = \inf\{m(G) : 开集G \supset E\},$$

显然有 $m^*(E) \le A$。不妨设 $m^*(E) < +\infty$，于是对任意 $\epsilon > 0$ 有开覆盖 $\{I_k\}$ 使得

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} m^*(I_k) < m^*(E) + \epsilon,$$

于是对任意的 ϵ，都可以取开集

$$G = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$$

使得 $m^*(G) < m^*(E) + \epsilon$，所以必有

$$A \le m^*(E),$$

所以 $m^*(E) = \inf\{m(G) : 开集G \supset E\}$。

2.6. 对任意可测集 $A, B \subset \mathbb{R}^n$，证明

$$m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B).$$

Solution: 不妨设 $m(A), m(B) < +\infty$，由可测集的定义有

$$m(A) = m(A \cap B) + m(A \cap B^c),$$

和

$$\begin{aligned} m(A \cup B) &= m((A \cup B) \cap B) + m((A \cup B) \cap B^c) \\ &= m(B) + m(A \cap B^c). \end{aligned}$$

于是

$$m(A) + m(B) + m(A \cap B^c) = m(A \cup B) + m(A \cap B) + m(A \cap B^c),$$

即 $m(A) = m(A \cap B) + m(A \cap B^c)$,

2.7. 设有递降可测集列 $E_1 \supset E_2 \supset \cdots$，若

$$m\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) < +\infty,$$

证明

$$m(\overline{\lim_{k\to\infty}} E_k) \geq \overline{\lim_{k\to\infty}} m(E_k).$$

Solution: 由定义直接计算得到

$$\begin{aligned} m(\overline{\lim_{k\to\infty}} E_k) &= m\Big(\lim_{j\to\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} E_k\Big) \\ &= \lim_{j\to\infty} m\Big(\bigcup_{k=j}^{\infty} E_k\Big) \\ &\geq \overline{\lim_{k\to\infty}} m(E_k). \end{aligned}$$

2.8. 若 H 为 E 的等测包，且 $m^*(E) < +\infty$，证明 $H\backslash E$ 的任何可测子集均为零测集。

Solution: 任给可测集 $A \subset H\backslash E$，都有 $E \subset H\backslash A$，于是直接计算得到

$$\begin{aligned} m^*(E) &= m(H) \\ &= m(H\backslash A) + m(A) \\ &\geq m^*(E) + m(A), \end{aligned}$$

于是 $m(A) = 0$.

2.9. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$，和可测集 $H \supset E$，若 $H\backslash E$ 的任何可测子集均为零测集，证明 $m(H) = m^*(E)$.

Solution: 设 G 为 E 的等测包，则由 $E \subset G$ 可以得到

$$H\backslash G \subset H\backslash E,$$

于是 $m(H\backslash G) = 0$，所以

$$m(H) = m(G) = m^*(E).$$

2.10. 设可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$，证明对任意 $\epsilon > 0$，存在开集 G_1, G_2 满足 $G_1 \supset E, G_2 \supset E^c$，使得

$$m(G_1 \cap G_2) < \epsilon.$$

Solution: 对任意的 $\epsilon > 0$，总是存在开集 G 和闭集 F 使得

$$m(G\backslash E) < \frac{\epsilon}{2}, m(E\backslash F) < \frac{\epsilon}{2}.$$

我们取 $G_1 = G, G_2 = F^c$，于是

$$m(G_1 \cap G_2) = m(G\backslash F) \leq m(G\backslash E) + m(E\backslash F) < \epsilon.$$

Remark. 逆命题也是成立的。逆命题的证明我们需要一个引理：

Lemma 2.1. 设集合 $E \subset \mathbb{R}^n$。若对任意 $\epsilon > 0$，都存在开集 $G \supset E$ 使得

$$m^*(G\backslash E) < \epsilon,$$

则 E 是勒贝格可测集。

Proof. 取 $\epsilon = \frac{1}{n}$，由条件可以构造开集集合列 $\{G_n\}$ 使得 $m^*(G_n \backslash E) < \frac{1}{n}$，我们取

$$H = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n,$$

可知 $E \subset H$ 并且

$$m^*(H \backslash E) \leq m^*(G_n \backslash E) < \frac{1}{n}.$$

于是 $m^*(H \backslash E) = 0$，所以 $H \backslash E$ 可测，而 $E = H \backslash (H \backslash E)$，所以 E 可测。 □

逆命题的证明：

Proof. 由条件可知

$$m^*(G_1 \backslash E) \leq m^*(G_1 \backslash (G_2)^c) = m(G_1 \cap G_2) < \epsilon,$$

于是由引理 2.1可知 E 可测。 □

2.11. 设集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 和实值函数 $f : E \to \mathbb{R}$，同时 Γ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个 σ-代数，且 $E \in \Gamma$，令

$$\Omega = \{A \subset \mathbb{R}; f^{-1}(A) \in \Gamma\},$$

证明 Ω 是 $\mathbb{R}$ 上的 σ-代数。

Solution: 显然，$\emptyset \in \Omega$。而对于 $A \in \Omega$，有

$$f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c \in \Gamma,$$

所以 $A^c \in \Omega$。同时对于集族 $\{A_n\}$ 有

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) \in \Gamma,$$

所以

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Omega,$$

所以 Ω 是 $\mathbb{R}$ 上的 σ-代数。

3 第三章

3.1. 设 $f(x)$ 在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上有定义。若 $f^2(x)$ 在 E 上可测，且 $\{x \in E : f(x) > 0\}$ 为可测集，证明 $f(x)$ 在 E 上可测。

Solution: 由于

$$t > 0, \quad \{x \in E : |f(x)| > t\} = \{x \in E : f^2(x) > t^2\},$$

于是 $|f|$ 是 E 上的可测函数。同时令

$$A := \{x \in E : f(x) > 0\}$$
$$B := \{x \in E : f(x) \leq 0\}$$

由

$$f(x) = |f(x)| \cdot (\chi_A(x) - \chi_B(x))$$

即知 f 在 E 上的可测。

3.2. 若 $\{f_k(x)\}$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数列，证明 $f_k(x)$ 在 E 上收敛的点集是可测集。

Solution: 已知对于可测函数列，它的上极限和下极限都是可测函数，我们将 $f_k(x)$ 在 E 上收敛的点集记为 C，有

$$C = \{x \in E : \varliminf_{k\to\infty} f_k(x) = \varlimsup_{k\to\infty} f_k(x)\}.$$

而令一个可测函数的函数值等于某个常数的值的点集都是可测的，所以 C 是可测的。

3.3. 设 $f(x)$ 在 $E \subset \mathbb{R}$ 上可测，G 和 F 分别是 $\mathbb{R}$ 中的开集和闭集，证明点集

$$E_1 = \{x \in E : f(x) \in G\}, \quad E_2 = \{x \in E : f(x) \in F\}$$

是可测集。

Solution: 已知 $\mathbb{R}$ 上的开集总是可以表作无交开区间的可数并，所以不妨设

$$G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n).$$

于是

$$E_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\{x \in E : f(x) > a_n\} \cap \{x \in E : f(x) < b_n\}),$$

而 $f(x)$ 是可测的，所以 E_1 是可测集。对于 E_2，因为

$$E_2 = E\backslash\{x \in E : f(x) \in F^c\},$$

而 F^c 是开集，所以 E_2 也是可测集。

3.4. 设 $f(x), g(x)$ 均为 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的广义实值函数，且 $f(x)$ 在 E 上可测。如果

$$f(x) = g(x), \text{ a.e.} x \in E,$$

证明 $g(x)$ 也在 E 上可测。

Solution: 证明的关键是对零测集的划分。

记

$$A = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\},$$

由题设知 $m(A) = 0$，于是 $E\backslash A$ 是可测集。于是对任给的 $t \in \mathbb{R}$ 有

$$\begin{aligned}\{x \in E : g(x) > t\} &= \{x \in E\backslash A : g(x) > t\} \cup \{x \in A : g(x) > t\} \\ &= \{x \in E\backslash A : f(x) > t\} \cup \{x \in A : g(x) > t\},\end{aligned}$$

由于 f 在 E 上可测，并且零测集的子集还是零测集，于是 $\{x \in E : g(x) > t\}$ 是可测集，于是 $g(x)$ 在 E 上可测。

3.5. 证明 Егóров 定理的逆定理：设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x), \ldots$ 为 E 上几乎处处有限的可测函数，如果 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上近一致收敛于 $f(x)$，则 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$.

Solution: 我们先回顾一下近一致收敛的定义：

Definition 3.1. 对任意 $\delta > 0$，存在可测子集 $E_\delta \subset E$ 满足 $m(E_\delta) \leq \delta$ 并且 $\{f_k(x)\}$ 在 $E\backslash E_\delta$ 上一致收敛于 $f(x)$，我们称 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上**近一致收敛**于 $f(x)$.

证明的关键是从近一致收敛中找到几乎处处收敛的那些地方。

取 $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$，由近一致收敛性我们知道 $\{f_k(x)\}$ 在 $E\backslash E_{\frac{1}{n}}$ 上一致收敛。我们令

$$E_0 \coloneqq \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{\frac{1}{n}},$$

显然有 $m(E_0) = 0$. 同时我们有

$$E\backslash E_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E\backslash E_{\frac{1}{n}}),$$

因此 $\{f_k(x)\}$ 在 $E\backslash E_0$ 上收敛于 $f(x)$，于是在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$.

3.6. 证明 Лузин 定理的逆定理：设 $f(x)$ 为可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的广义实值函数，若对任意的 $\delta > 0$ 存在 E 中闭集 F 使得 $m(E \backslash F) < \delta$, 并且 $f(x)$ 是 F 上的连续函数，则 $f(x)$ 为 E 上可测函数。

Solution: 关键是利用条件，让 f 在零测集外是可测函数，而 f 在零测集会自动可测，于是 f 可测。

对任意的 $k \in \mathbb{N}$，取 $\delta = \frac{1}{k}$，得到一列闭集 F_k 使得 $m(E \backslash F_k) < \frac{1}{k}$，并且 f 在每个 F_k 上都连续。

因为可测集上的闭子集都是可测的，于是连续函数 f 在每个 F_k 上都可测。同时我们记

$$F \coloneqq \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k,$$

可知 f 在 F 上可测，并且 $m(E \backslash F) = 0$，于是由集合分解

$$E = (E \backslash F) \cup F$$

知道，f 同时在 F 和 $E \backslash F$ 上可测，于是 f 在 E 上可测。

3.7. 设 $\{f_k(x)\}, \{g_k(x)\}$ 在 E 上分别依测度收敛于 $f(x), g(x)$，证明 $\{f_k(x) + g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x) + g(x)$.

Solution: 注意到对任意的 $\epsilon > 0$ 都有

$$\begin{aligned} &\{x \in E : |(f_k(x) + g_k(x)) - (f(x) + g(x))| > \epsilon\} \\ &\qquad \subset \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \frac{\epsilon}{2}\} \cup \{x \in E : |g_k(x) - g(x)| > \frac{\epsilon}{2}\}, \end{aligned}$$

而 $\{f_k(x)\}, \{g_k(x)\}$ 在 E 上分别依测度收敛于 $f(x), g(x)$，即有

$$\begin{aligned} m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \frac{\epsilon}{2}\}) \to 0, \\ m(\{x \in E : |g_k(x) - g(x)| > \frac{\epsilon}{2}\}) \to 0. \end{aligned}$$

所以可知

$$m(\{x \in E : |(f_k(x) + g_k(x)) - (f(x) + g(x))| > \epsilon\}) \to 0,$$

即 $\{f_k(x) + g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x) + g(x)$.

3.8. 设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x), \ldots$ 为 E 上几乎处处有限的可测函数，$m(E) < +\infty$。若 $\{f_k(x)\}$ 的任一子列 $\{f_{k_i}(x)\}$ 均存在几乎处处收敛于 $f(x)$ 的子列，证明 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$.

Solution: 采用反证法: 若 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上不是依测度收敛于 $f(x)$, 则存在 $\epsilon_0 > 0, \delta_0 > 0$ 和一个子列 $\{k_i\}$ 使得

$$m(\{x \in E : |f_{k_i}(x) - f(x)| > \epsilon_0\}) \geq \delta_0.$$

但是由题意我们知道存在子列 $\{k_{i_j}\}$ 使得

$$\lim_{j \to \infty} f_{k_{i_j}}(x) = f(x), \ \text{a.e.} x \in E,$$

而 $f, \{f_k\}$ 都是几乎处处有限的可测函数，并且 $m(E) < +\infty$，于是 $f_{k_{i_j}}$ 依测度收敛于 f，但是这与我们的假设矛盾。

Remark. 矛盾之处在于：不依测度收敛指出对任意的 $k \in \mathbb{N}$ 都有子列 $\{k_i\}$ 使得测度大于指定的数 δ_0。而条件给出的子列的子列依测度收敛于 $f(x)$ 使得可以存在某个 $k \in \mathbb{N}$，使得我们的测度无法大于指定的数 δ_0.

3.9. 设可测集 E 上的可测函数列 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于可测函数 $f(x)$，且 $f_k(x) \leq f_{k+1}(x), \forall k \in \mathbb{N}$。证明 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$.

Solution: 由 Risez 定理知存在子列 $\{k_i\}$ 使得

$$\lim_{i \to \infty} f_{k_i}(x) = f(x), \ \text{a.e.} x \in E,$$

而 $\{f_k(x)\}$ 是渐升列，它的极限函数应该与子列依测度收敛的函数对等，于是

$$\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x), \ \text{a.e.} x \in E.$$

3.10. 设 $\{E_k\}$ 为可测集列，同时

$$E \coloneqq \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, \quad m(E) < +\infty.$$

若对每个 $k \in \mathbb{N}$ 都有函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E_k 上依测度收敛于 $f(x)$。证明 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$.

Solution: 对于任给的 $\delta > 0, \epsilon > 0$ 我们选取足够大的 K 使得

$$m(\bigcup_{k=K+1}^{\infty} E_k) < \frac{\delta}{2},$$

同时由于函数列 $\{f_n(x)\}$ 在每个 E_k 都依测度收敛于 $f(x)$，于是我们可以选取 N_k，让每个 k 在 $n > N_k$ 的时候都有

$$m(\{x \in E_k : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) < \frac{\delta}{2K},$$

于是可以令 $N = \max\{N_1, \ldots, N_k\}$，使得 $k > N$ 时有

$$\begin{aligned} m(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) &= m(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in E_k : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) \\ &\leq \sum_{k=1}^{K} m(\{x \in E_k : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) + m(\bigcup_{k=K+1}^{\infty} E_k) \\ &< \sum_{k=1}^{K} \frac{\delta}{2K} + \frac{\delta}{2} = \delta. \end{aligned}$$

于是 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$.

4 第四章

4.1. 设 $f(x)$ 为 E 上非负可测函数，则

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}\,x = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0, \text{a.e.} x \in E.$$

Solution:

- 充分性是平凡的，我们记

$$E_1 \coloneqq \{x \in E : f(x) \neq 0\}, \quad E_2 \coloneqq E \backslash E_1,$$

由条件知 $m(E_1) = 0$，于是立刻得到

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\,\mathrm{d}\,x &= \int_E f(x)\cdot(\chi_{E_1}(x) + \chi_{E_2}(x))\,\mathrm{d}\,x \\ &= \int_{E_1} f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_{E_2} f(x)\,\mathrm{d}\,x \\ &= 0.\end{aligned}$$

- 对于必要性，我们的关键是证明 $f(x)$ 那些不等于 0 的点构成的集合的测度为 0，而 $f(x)$ 是非负函数，于是我们记

$$E_k \coloneqq \{x \in E : f(x) \geq \frac{1}{k}\}, k \in \mathbb{N}.$$

于是我们可以得到

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_E f(x)\cdot\chi_{E_k}(x)\,\mathrm{d}\,x \leq \int_E f(x)\,\mathrm{d}\,x = 0,$$

同时

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}\,x \geq \int_{E_k} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{k} m(E_k) \geq 0,$$

于是有

$$\forall k \in \mathbb{N},\ m(E_k) = 0.$$

而

$$\{x \in E : f(x) > 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k,$$

于是有

$$m(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} m(E_k) = 0.$$

因此 $f(x)$ 在 E 上几乎处处为 0.

4.2. 设 $f(x)$ 为 E 上的非负可积函数，记

$$E_k \coloneqq \{x \in E : f(x) > k\}, \ \ k \in \mathbb{N}.$$

证明：

1. $\lim_{k\to\infty} m(E_k) = 0$;
2. $\lim_{k\to\infty} k \cdot m(E_k) = 0$.

Solution:

1. 因为 $f(x)$ 在 E 上是非负可积的，所以有

$$\int_{E_k} f(x) \,\mathrm{d}\, x = \int_E f(x) \cdot \chi_{E_k}(x) \,\mathrm{d}\, x \leq \int_E f(x) \,\mathrm{d}\, x < +\infty$$

和

$$\int_{E_k} f(x) \,\mathrm{d}\, x > \int_{E_k} k \,\mathrm{d}\, x = k \cdot m(E_k).$$

于是可知

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \ k \cdot m(E_k) < +\infty,$$

可以得到

$$\lim_{k\to\infty} m(E_k) = 0.$$

2. 由于 $f(x)$ 在 E 上可积，所以是几乎处处有限的，因此不妨设

$$f(x) \leq M.$$

于是直接计算有

$$\begin{aligned} k \cdot m(E_k) &= \int_{E_k} k \,\mathrm{d}\, x \\ &< \int_{E_k} f(x) \,\mathrm{d}\, x \\ &\leq \int_{E_k} M \,\mathrm{d}\, x \\ &= M \cdot m(E_k). \end{aligned}$$

而已知

$$k \cdot m(E_k) \geq 0, \quad \lim_{k\to\infty} m(E_k) = 0.$$

因此得到

$$\lim_{k\to\infty} k \cdot m(E_k) = 0.$$

4.3. 设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x), \ldots$ 均为 E 上的可测函数。若

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |f_k(x)-f(x)|\,\mathrm{d}\,x = 0,$$

则 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$.

Solution: 对任意的 $\epsilon > 0$，记

$$A_k^\epsilon := \{x \in E : |f_k(x)-f(x)| > \epsilon\}.$$

于是有积分的单调性马上得到

$$\int_E |f_k(x)-f(x)|\,\mathrm{d}\,x \geq \int_{A_k^\epsilon} |f_k(x)-f(x)|\,\mathrm{d}\,x > \epsilon \cdot m(A_k^\epsilon).$$

所以得到

$$\forall k \in \mathbb{N},\;\; m(A_k^\epsilon) < \frac{1}{\epsilon} \cdot \int_E |f_k(x)-f(x)|\,\mathrm{d}\,x,$$

于是由极限的保号性得到

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} m(A_k^\epsilon) \leq \lim_{k\to\infty}\int_E |f_k(x)-f(x)|\,\mathrm{d}\,x = 0.$$

于是 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$.

Remark. 该题指出，L^1 收敛蕴含了依测度收敛。

4.4. 设 $f \in L(E)$，$\forall k \in \mathbb{N}, E_k \subset E$ 和

$$\lim_{k\to\infty} m(E_k) = m(E) < +\infty.$$

证明

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Solution: 由题意有

$$\lim_{k\to\infty} m(E\backslash E_k) = 0,$$

于是由积分的绝对连续性可以得到

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E\backslash E_k} f(x)\,\mathrm{d}\,x = 0.$$

而对于任意的 $k \in \mathbb{N}$ 都有

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_{E\backslash E_k} f(x)\,\mathrm{d}\,x,$$

取极限即得

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}\,x = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

4.5. 设 $\{f_k(x)\}$ 为 E 上的非负可测函数列，并且 $m(E) < +\infty$。证明 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 0，当且仅当

$$\lim_{k\to\infty}\int_E \frac{f_k(x)}{1+f_k(x)}\,\mathrm{d}\,x = 0.$$

Solution: 由于

$$\frac{f_k(x)}{1+f_k(x)} \le 1,$$

由控制收敛定理可以得到

$$\lim_{k\to\infty}\int_E \frac{f_k(x)}{1+f_k(x)}\,\mathrm{d}\,x = \int_E \lim_{k\to\infty}\frac{f_k(x)}{1+f_k(x)}\,\mathrm{d}\,x.$$

于是命题的证明等价于证明 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 0，当且仅当

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f_k(x)}{1+f_k(x)} = 0, \text{a.e.} x \in E.$$

- 充分性：由题设可知，对任意的 $\delta > 0, \epsilon > 0$ 都存在 $E_\delta \subset E$ 和 $N > 0$ 使得 $k > N$ 时有

  $$m(E\backslash E_\delta) < \delta, \quad \frac{f_k(x)}{1+f_k(x)} < \epsilon, \quad x \in E_\delta.$$

  我们取 $\epsilon_0 < 1$，使得

  $$\epsilon = \frac{\epsilon_0}{1-\epsilon_0},$$

  于是可以得到

  $$\frac{f_k(x)}{1+f_k(x)} < \epsilon_0 < \epsilon \Rightarrow f_k(x) < \epsilon,$$

  因此

  $$m(E_\delta) \le m(\{x \in E : f_k(x) < \epsilon\}),$$

  所以

  $$m(\{x \in E : f_k(x) \ge \epsilon\}) \le m(E\backslash E_\delta) < \delta,$$

  即 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛于 0.

- 必要性：由于 $f_k(x)$ 依测度收敛于 0，所以对任意的 $\epsilon > 0, \delta > 0$ 都存在 N 使得 $k > N$ 时，有
$$m(\{x \in E : f_k(x) \geq \epsilon\}) < \delta.$$
而
$$|f_k(x)| < \epsilon \Rightarrow \frac{f_k(x)}{1 + f_k(x)} < \epsilon,$$
于是此时取
$$E_\delta = \{x \in E : f_k(x) \geq \epsilon\},$$
此时对于任意的 $x \in E \backslash E_\delta$ 都有
$$\frac{f_k(x)}{1 + f_k(x)} < \epsilon,$$
所以 $\frac{f_k(x)}{1+f_k(x)}$ 在 $E \backslash E_\delta$ 一致收敛于 0。此时已知 $m(E) < +\infty$，所以
$$\lim_{k \to \infty} \frac{f_k(x)}{1 + f_k(x)} = 0, \text{a.e.} x \in E.$$

4.6. 设 $f(x)$ 为 E 上非负可测函数，令
$$f_k(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq k \\ k, & f(x) > k. \end{cases}$$
证明
$$\lim_{k \to \infty} \int_E f_k(x) \,\mathrm{d}\, x = \int_E f(x) \,\mathrm{d}\, x.$$

Solution: 简单计算可以得到, , 对于任意的 $k \geq 1$ 都有
$$f_{k+1}(x) - f_k(x) = \begin{cases} 0, & f(x) < k \\ f(x) - k \geq 0, & k \leq f(x) < k+1 \\ 1, & f(x) \geq k+1, \end{cases}$$
因此 $\{f_k(x)\}$ 是一个非负可测渐升函数列，并且有
$$\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x),$$
于是
$$\lim_{k \to \infty} \int_E f_k(x) \,\mathrm{d}\, x = \int_E f(x) \,\mathrm{d}\, x.$$

4.7. 计算

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,n]}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,\mathrm{d}\,x=\int_{[0,+\infty)}e^{-x}\,\mathrm{d}\,x.$$

Solution: 记

$$f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\chi_{[0,n]}(x),$$

由经典极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$$

的证明可知

$$f_n(x)\leq f_{n+1}(x),$$

于是有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{[0,n]}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,\mathrm{d}\,x&=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f_n(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}\,x\\&=\int_{\mathbb{R}}e^{-x}\chi_{[0,+\infty)}(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_{[0,+\infty)}e^{-x}\,\mathrm{d}\,x=1.\end{aligned}$$

4.8. 设 $f\in L(E),f_n\in L(E),n\in\mathbb{N}$. 若

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\quad x\in E,$$

同时

$$f_n(x)\leq f_{n+1}(x),\quad n\in\mathbb{N}.\tag{4.1}$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_E f(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Solution: 可以用控制收敛定理，取控制函数为 $|f(x)|$，那这题就结束了。但是我们还可以使用别的方法：

令

$$F_n(x):=f(x)-f_n(x),$$

我们得到了一个非负可积的渐降列 $\{F_n(x)\}$，于是有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E F_n(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_E\lim_{n\to\infty}F_n(x)\,\mathrm{d}\,x=0,$$

同时

$$\lim_{n\to\infty}\int_E F_n(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_E f(x)\,\mathrm{d}\,x-\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,\mathrm{d}\,x,$$

于是得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_E f(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

4.9. 证明

1. 设 $\{f_k(x)\}$ 为 E 上的渐升可测函数列，若满足 $\int_E f_1(x)\,\mathrm{d}\,x>-\infty$, 则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_E\lim_{k\to\infty}f_k(x)\,\mathrm{d}\,x>-\infty.$$

2. 设 $\{f_k(x)\}$ 为 E 上的渐降可测函数列，若满足 $\int_E f_1(x)\,\mathrm{d}\,x<+\infty$, 则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_E\lim_{k\to\infty}f_k(x)\,\mathrm{d}\,x<+\infty.$$

Solution:

1. 显然，$f_k(x)$ 的正部 $f_k^+(x)$ 是满足非负渐升可测的，于是可以直接得到积分号和极限号可交换。只需关注负部 $f_k^-(x)$。由条件可以得到

$$f_1^-(x)\ge f_2^-(x)\ge\cdots\ge f_k^-(x)\ge\cdots,$$

而 $\int_E f_1^-(x)\,\mathrm{d}\,x<+\infty$ 所以负部是可积渐降函数列，所以积分号和极限号可交换，于是

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_E\lim_{k\to\infty}f_k(x)\,\mathrm{d}\,x>-\infty.$$

2. 类似于 1.，负部是非负可测渐升列，所以积分号和极限号可交换。正部由题意可以得到是非负可积渐降列，所以积分号和极限号可交换，于是

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_E\lim_{k\to\infty}f_k(x)\,\mathrm{d}\,x<+\infty.$$